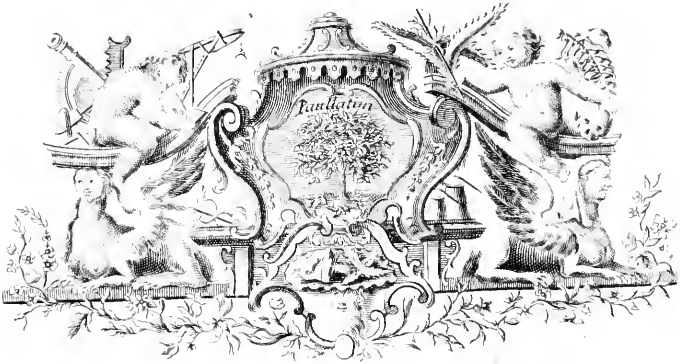
COMMENTARII
ACADEMIAE
SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE.

TOMVS VII.

AD ANNOS cIↄIↄccxxxiv. & cIↄIↄccxxxv.



PETROPOLI,

TYPIS ACADEMIAE. cIↄIↄccxl.

INDEX
COMMENTARIORVM.

IN CLASSE MATHEMATICA.

Leonh.

IN CLASSE PHYSICA.

IN CLASSE HISTORICA.

CLASSIS PRIMA.

CONTINENS

MATHEMATICA.

DE
CAVSTICA CYCLOIDIS.
AVTORE
G. W. Krafft.

§. 1.

DVo caſus diſtingui poſſunt circa quaeſtionem de Cauſtica Cycloidis, vnus, qui eſt, cum radii incidentes paralleli ſunt ad Axem, alter vero, cum iidem paralleli ſunt ad Baſin, datae Cycloidis. In illo caſu Cauſtica haec nihil aliud eſt, quam alia noua Cyclois; in hoc autem, cum ſcil. radii incidentes ſunt ad Baſin paralleli, Cauſtica exinde orta talis eſt figurae, vt matrem ſuam minime referre videatur, neque ſtatim appareat, ad quodnam genus Curuarum reduci poſſit. Figura ſcil. eius ex Ill. *Hoſpitalii* Analyſi infinite paruorum § 123. huc translata, talis eſt, quae apparet AFKD, vbi radius incidens PM ad Baſin BD eſt parallelus, radius vero reflexus eſt MF, cuius longitudo aequalis eſſe debet, ex loco cit. applicatae PN circuli generatoris ANB. Proprietates huius Cauſticae *Hoſpitalius* recenſet has: 1. vt punctum F ab axe ſit remotiſſimum, radium incidentem debere procedere ex centro circuli generatoris Tabula I. Fig. 1.

 ris

ris H. 2. Caufticam hanc habere punctum flexus contrarii in K. 3. Spatium intra Cycloidem AM, Caufticam AF, et radium reflexum MF contentum, aequale effe dimidio fpatii circularis APN. Praeter haec enumerata nihil vlterius neque Auctor, neque eius Commentatores *Varignonius*, *Croufazius*, neque *Carrèus*, qui in Commentar. Acad. Parif. 1703. de his agit, indicant. Cum igitur mihi mirum id vifum fuiffet, fequi in alterutro cafuum enarratorum Cycloidem morem fuum, vt ipfa fe reddat; in altero vero tam longe ab hac confuetudine abire: inueni, Caufticam pofterioris cafus tamen non ita diuerfam effe à vulgaribus Cycloidibus, vt ad eas referri nequeat. Generatur enim Cauftica haec ab eodem femicirculo generatore, quo Cyclois ordinanaria; fed per tangentem in vertice Circuli annexam, cuius longitudo variabilis eft, aequalis nempe femper applicatae circuli PN.

§. 2. Quod vt demonftrem, fit Cyclois ordinaria AMD, generata ex Circulo ANB fupra bafin BD voluto. Cauftica radiis incidentibus PM bafi BD parallelis debita, fit AFKD: dico, hanc defcribi motu eiusdem Circuli ANB, qui in vertice A annexam habeat Tangentem MF, cuius longitudo variet, vt in quolibet nempe fitu CEM aequalis fit applicatae Circuli correfpondenti PN. Veniat enim Circulus generator in fitum CEM, ducantur chorda BN, et praeterea rectae EM, EF; et quia EM, EF, funt, prior quidem ad Cycloidem, pofterior vero ad Caufticam, normales; ductae nimirum ex puncto defcribente in punctum contactus

tactus, (per Analyſ. inf. paruorum §. 43.) praetereaque ob Cycloidem ſit M E = B N, et angulus F M E = $\frac{1}{2}$ arc. M E = $\frac{1}{2}$ arc. B N = B A N = P N B; atque adhuc P N = M F, ex hypoth. erunt triangula E M F et P N B ſimilia et aequalia; quare M F erit orthogonia ad Normalem E F, conſequenter Curuae A F K D Tangens. Quoniam vero E M F = P N B, per dem. erit etiam E M F = P M E, adeoque circa Normalem Cycloidis E M angulus P M E erit Incidentiae, E M F vero Reflexionis; conſequenter patet, punctum F generaliter eſſe in Cauſtica aliqua; eſt vero idem punctum F in Cauſtica Cycloidis, per demonſtrata *Hoſpitalii*, cum ex hyp. ſit M F = P N; ergo manifeſtum eſt, Cauſticam dictam praeſcripto modo generari. Q. E. D.

§. 3. Anſam haec mihi praebuerunt examinandi generaliter tales curuas, quae per dictam Tangentem variabilem generantur. Itaque vniuerſaliter rem conſiderando, ſit Cyclois ordinaria A M D, atque huic annexa Fig. 2. Curua quaeſcunque A G H. Veniat Circulus generator in ſitum M E I, habeatque diametro I M adiunctam Tangentem M F, cuius longitudo aequalis ſit Applicatae P G, quaeritur aequatio Curuae hoc modo genitae A F L K. Poſitis igitur Coordinatis orthogoniis A P = x, P M = y, A Q = t, Q F = u, P G = z, A B = a, ducantur chorda B N, et normalis ad Cycloidem M E, demittatur perpendicularis N S, ductoque praeterea radio N C, cum Tangente Circuli generatoris N R, erunt ob P N S et C N R rectos, triangula N S R et P N C ſimilia; ſed, ex natura Cycloidis, radius C N parallelus eſt diametro

 I M,

IM, consequenter parallelae etiam erunt rectae NR, MF, cum vtraque earum rectum efficiat cum parallelis CN, IM; sed ob applicatam Curuae quaesitae QF parallelam cum PM, erunt NR et MF quoque aequales. Habebitur ergo Analogia, $PN(\sqrt{(ax-xx)})$: $CN(\frac{1}{2}a) = NS(t-x) : NR(z)$, vnde fiet aequatio (A) $z = \frac{at-ax}{2\sqrt{(ax-x^2)}}$. Ductâ porro applicata pn priori infinite propinqua, erunt quoque triangula similia NOn, et NSR, vnde habebitur $NO(dx) : On(\frac{adx-2xdx}{2\sqrt{(ax-x^2)}}) = NS(t-x) : SR(=TF=u-y)$ et consequenter aequatio $u-y = \frac{(t-x)(a-2x)}{2\sqrt{(ax-x^2)}}$. Est autem per naturam Cycloidis, $y = \int\frac{adx-xdx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$, quo valore substituto, mutatur praecedens aequatio in hanc: (B) $u - \int\frac{adx-xdx}{\sqrt{(ax-x^2)}} = \frac{(t-x)(a-2x)}{2\sqrt{(ax-x^2)}}$. Quodsi igitur Curuae AGH aequatio data sit in x et z, obtinebitur valor ipsius z in meris x, qui loco ipsius z in aequatione (A) substitutus, dabit valorem ipsius x in meris t; qui nouus valor subrogatus in aequatione (B), reddet aequationem constantem ex meris t et u, expressuram proprietates Curuae quaesitae AFKL.

§. 4. Vt, ductâ EF, inueniatur, quaelem illa angulum efficiat cum rectâ MF, euidens est, in triangulo EMF esse $EM = BN = \sqrt{(a^2-ax)}$; angulus EMF $= BNR = PNB$; ergo anguli EMF sinus erit $= \frac{PB}{BN} = \frac{a-x}{\sqrt{(a^2-ax)}}$, eiusdem vero Cosinus $= \frac{PN}{BN} = \frac{\sqrt{(ax-x^2)}}{\sqrt{(a^2-ax)}}$ vocato itaque anguli MFB sinu m, cosinu n, erit EM $(\sqrt{aa-ax}) : MF(z) =$ sinus $F(m)$: sin. $E(\frac{mz}{\sqrt{aa-ax}})$. Est autem hic angulus E differentia angulorum M, et externi

externi ipſius F, quare orietur aequatio ſequens, $m\sqrt{(ax-x^2)}-mz=n(a-x)$; ex qua deducitur $\frac{m}{n}=\frac{a-x}{\sqrt{(ax-x^2)}-z}$ = Tangenti anguli EFM. Quare ſi accipiatur NZ = PG, et ducatur BZ, erit angulus EFM = BZN. Si itaque ſit PN = PG, vti in caſu *Hoſpitaliano* accidit: tunc erit angulus EFM rectus.

DE
NVMERIS PERFECTIS.
AVTORE
G. W. Krafft.

DEprehenduntur non pauci errores authorum, de caetero doctiſſimorum, in modo inueniendi numeros perfectos; qui certe ex eo ſolo orti ſunt, quod careamus hucusque infallibili charactere numerorum primorum. Euitauit ſcopulum hunc Euclides 36. IX. cum dicit: *Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compoſitus fiat primus, et totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: factus erit perfectus,* quorum ſenſus eſt, ſi quotcunque numeri, ab vnitate dupli, in vnam ſummam colligantur, donec haec ſumma ſit numerus primus: erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorum, perfectus. Sed vt errorum quoque exempla quaedam allegem, docet.

I. *Mi-*

I. *Michael Stifelius*, inſignis alias Arithmeticus, ſequentem numerorum perfectorum geneſin, in Arithm. Integra pag. 10. Progreſſio Geometrica dupla diuidatur in binos terminos hunc in modum

1. 2 | 4. 8 | 16. 32 | 64. 128 | 256. 512 | 1024. 2048 |

quorumlibet binorum maior, vnitate minutus, ducatur in ſuum ſocium, factum erit numerus perfectus; quae ſane regula fallit in ipſo fere limine; nam ſumatur quintum par horum numerorum, vbi $511 \times 256 = 130816$ non eſt numerus perfectus, quia, ſequendo Euclidis effatum, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 = 511$ non eſt numerus primus, qualis tamen eſſe deberet, ſi multiplicatus in 256 perfectum efficere poſſet, eſt enim $511 = 73 \times 7$.

II. *Ozanamus* dupliciter errat in hoc Problemate: primo enim in ſuis Elementis Algebrae pag. 290. nimis audacter aſſerit; Potentias binarii, quarum exponentes ſint numeri pariter pares, hanc habere proprietatem, vt partibus ſuis aliquotis additae faciant numerum primum. Sumamus enim $2^8 = 256$, cuius partes aliquotae additae ad numerum ipſum faciunt 511, qui primus non eſt, fatente ipſo *Ozanamo*, dum hunc numerum in catalogo primorum omittit, Recr. Mathem. pag. 22. Deinde cum *Stifelio* perfectis adnumerat quoque 130816, cui hoc attributum non deberi, iam oſtendi.

III. Auctor anonymus *des Recreations Mathematiques avec l' examen etc.* 1699. in ſua annotatione pag. 147.

147. recte explicat mentem Euclidis, adiungitque ad finem: *Or ce qui nous a le plus induit à enſeigner icy cette façon de cognoiſtre & trouver les nombres parfaits, a éſtè, que pluſieurs, ignorans quels ſont les dits nombres parfaits, en prennent beaucoup, qu' ils eſtiment tels, qui ne le ſont pas pourtant, & entre ceux là un certain hiſtorien de ce ſiecle, bien que docte ès lettres, ſe monſtre toutes fois ignorant en Arithmetique, veû qu' il eſtime* 120 *être un nombre parfait.* In ipſis vero Recreationibus Probl. LXX. §. 4. aſſeritur, ab 1 vsque ad 40000000, non contineri niſi ſeptem perfectos, nempe 6, 28, 496, 8128, 130816, 2096128, 33550336, quae ſeries duos falſos, nempe 130816, et 2096128, interpoſitos tenet, vti mox oſtendetur. Falſum quoque etiam eſſe, quod omnes perfecti alternatim digitos 6 et 8 in fine annexos habeant, infra apparebit ex verorum perfectorum Tabula.

Cum igitur ante complures annos acceperim priuatim à beatè apud nos defuncto *Maiero* methodum ſatis elegantem inueniendi numeros perfectos, nusquam neque ab alio neque ab ipſo publicatam: mei in defunctum officii eſſe putaui, hanc methodum hic exponere, vt ſi quid laudis etiam ex hoc ſpecimine ipſius meritis accedere poſſit, illud ipſi tribuam. Conſtat hic modus ſequenti calculo. Quoniam in hoc negotio partibus aliquotis adnumeratur etiam vnitas, ponantur numeri perfecti partes aliquotae 1, m, n, r, q, p, A, etc. ita tamen, vt duae mediae p et A in ſe multiplicatae efficiant numerum perfectum quaeſitum pA; erunt ergo partes aliquotae reliquae, prioribus respondentes, sequentes, $\frac{pA}{q}$, $\frac{pA}{r}$, $\frac{pA}{n}$, $\frac{pA}{m}$; ex natura vero numeri perfecti fit aequatio $1+m+n+r+q+p+A+\frac{pA}{q}+\frac{pA}{r}+\frac{pA}{n}+\frac{pA}{m}=pA$, vnde elicitur $A=\frac{1+m+n+r+q+p}{p-1-\frac{p}{q}-\frac{p}{r}-\frac{p}{n}-\frac{p}{m}}$. Quoniam vero A debet esse numerus integer, necesse est, vt fractionis modo exhibitae nominator aequalis fiat vnitati, quare $p-1-\frac{p}{q}-\frac{p}{r}-\frac{p}{n}-\frac{p}{m}=1$, vnde fit $p=\frac{2q}{q-1-\frac{q}{r}-\frac{q}{n}-\frac{q}{m}}$, vbi quidem indeterminatarum vna, e.gr. q adhuc ad numeratorem admitti debet, ne valor ipsius p nimis cito fiat determinatus, nempe aequalis binario. Ex eadem vero ratione etiam hic denominator, et omnes sequentes, aequales esse debent vnitati; vnde adhibita priori cautela, rursus fit $q-1-\frac{q}{r}-\frac{q}{n}-\frac{q}{m}=1$, hinc $q=\frac{2r}{r-1-\frac{r}{n}-\frac{r}{m}}$; porro ex $r-1-\frac{r}{n}-\frac{r}{m}$, fit $r=\frac{2n}{n-1-\frac{n}{m}}$, rursus ob $n-1-\frac{n}{m}=1$, oritur $n=\frac{2m}{m-1}$, denique ob $m-1=1$, fit $m=2$, quod substitutum in omnibus prioribus valoribus efficit $m=2$, $n=4$, $r=8$, $q=16$, $p=32$, etc. et $A=1+2+4+8+16+32$; patet ergo, partes aliquotas priores, vsque ad primam mediarum inclusiue, debere constituere progressionem Geometricam duplam, et A debere esse numerum primum, ne nouas inducat partes aliquotas, diuersas ab his quas in computum assumsimus; quod quidem in numeris modo inuentis non accidit. Cum igitur sit $A=1+m+n+r+q+p$ etc. ex prioribus, euidens est, A de-

A debere eſſe ſummam progreſſionis Geometricae duplae, et ſummam hanc debere efficere numerum primum, quia talis debet eſſe A; et hoc illud ipſum eſt, quod Euclides expreſſis verbis requirit. Vocato autem numero terminorum n, erit ſumma huius progreſſionis ex n terminis conſtantis $= 2^n - 1$, igitur $A = 2^n - 1$, p vero, cum ſit vltimus terminus huius progreſſionis, erit 2^{n-1}, itaque numerus perfectus generaliter erit $= 2^{n-1}(2^n - 1)$ adiectâ tamen hâc cautelâ, vt $A = 2^n - 1$ ſit numerus incompoſitus. Quoniam vero ex valore ipſius A deducitur $2^n = A + 1$, et hinc $2^{n-1} = \frac{A+1}{2}$, erit ſubſtituto hoc valore $pA = \frac{AA+A}{2}$, vnde etiam patet, quod omnes numeri perfecti ſimul ſint numeri triangulares, quorum latus eſt A.

Cum igitur in nupero Schediaſmate Clar. *Eulerus* noſter aſſeruiſſet, eandem hanc Formulam $2^{n-1}(2^n - 1)$ ſemper efficere numerum perfectum, ſi pro n ſubſtituantur numeri primi ſequentes, 1. 2. 3. 5. 7. 13. 17. 19. 31. 41. et 47, abſoluto calculo horum numerorum ope inueni perfectos ſequentes: nempe ſi ſit.

$n = 2$,	6 erit perfectus - - - -	1
$n = 3$,	28 - - - -	2
$n = 5$,	496 - - - -	3
$n = 7$,	8128 - - - -	4
$n = 13$,	33550336 - - -	5
$n = 17$,	8589869056 - - -	6
$n = 19$,	137438691328 - - -	7
$n = 31$,	2305843008139952128 -	8
$n = 41$,	2417851639228158837784576 -	9
$n = 47$,	9903520314282971830448816128 -	10

In Arithmetica *Nicolai Tartaglia* Parisiis 1613. edita, occurrunt sequentes numeri perfecti:

6	1
28	2
496	3
8128	4
130816	5 *
2096128	6 *
33550336	7
536854528	8 *
8589869056	9
137438691328	10
2199022206976	11*
35184367894528	12*
562949936644096	13*
9007199187632128	14*
144115187807420416	15*
2305843008139952128	16
36893488143124135936	17*
590295810341525782528	18*
9444732965670570950656	19*
151115727451553768931328	20*

ex quibus illi, qui asterismo notati non sunt, cum meis perfecte conueniunt; reliquos autem iam examinabo, num loca sua tueri possint, nec ne. De *quinto* quidem res iam supra confecta est, quod sit expungendus. *Sextus* 2096128 est $(2^{11}-1)\,2^{10} = 2047 \times 1024$, sed 2047 non est primus numerus, compositus enim est ex

23

23 et 89. *Octauus* oritur ex $2^{14}(2^{15}-1) = 16384 \times 32767$ at vero 32767 non eſt primus, admittit enim diuiſores 7 et 4681. *Vndecimus* oritur ex $(2^{21}-1)\,2^{20} = 2097151 \times 1048576$, ſed 2097151 diuiſibilis eſt per 7 et 299593. *Duodecimus* exſurgit ex $(2^{23}-1)\,2^{22} = 8388607 \times 4194304$, ſed $8388607 = 47 \cdot 178481$. *Decimus tertius* naſcitur ex $(2^{25}-1)\,2^{24} = 33554431 \times 16777216$, ſed ille diuiſibilis eſt per 31 et 1082401. *Decimus quartus* generatur ex $(2^{27}-1)\,2^{26} = 134217727 \times 67108864$, ſed horum prior per 511 et 262657 diuiſibilis. *Decimus quintus* reſultat ex $(2^{29}-1)\,2^{28} = 536870911 \times 268435456$, ſed prior conſtat ex 1103×486737. *Decimus ſeptimus* ortum ſuum debet $(2^{33}-1)\,2^{32} = 8589934591 \times 4294967296$, quorum factorum prior compoſitus eſt ex 2047 et 4196353. *Decimus octauus* fit ex $(2^{35}-1)\,2^{34} = 34359738367 \times 17179869184$ quorum ille diuidi poteſt per 127 et 270549121. *Decimus nonus* oritur ex $(2^{37}-1)\,2^{36} = 137438953471 \times 68719476736$, quorum prioris menſurae ſunt 223 et 616318177. Denique *vigeſimus* ortum ſuum ducit ex $(2^{39}-1)\,2^{38} = 549755813887 \times 274877906944$, qui non habet priorem factorem primum, ſed compoſitum ex 7 et 78536544841. Adeoque inter numeros perfectos à *Tartaglia* datos omnes aſteriſmo notati ſunt expungendi, ſeruatis reliquis; hic enim author ſubſtituit in formula pro numeris perfectis $(2^n-1)\,2^{n-1}$ loco ipſius n numeros ſequentes 2. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. 29. 31. 33. 35. 37. 39, nempe omnes impares, in quibus ſunt compoſiti 9. 15. 21. 25. 27. 33. 35. 39.

qui excluduntur omnino, nam $2^{mn}-1$ diuiſores admittit 2^m-1 et 2^n-1, ſi m et n ſint numeri integri, neque adeo primus eſſe poteſt. Deinde ex primis 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. excluduntur ex obſeruatis Clar. *Euleri* ſequentes: 11. nam $2^{11}-1 = 23.89$. deinde 23, nam $2^{23}-1$ diuidi poteſt per 47. porro $2^{37}-1$, nam hic diuidi poteſt per 223. denique $2^{29}-1$ admittit diuiſorem 1103. adeoque ex viginti perfectis numeris *Tartaglianis* non niſi octo in hunc ordinem ſunt admittendi. Inter reliquos numeros primos vero excludendus etiam occurrit 43, quia $2^{43}-1$ diuidi poteſt per 431.

Manifeſtum eſt ex his, inter 1 et 10000. Quadrilliones non plures interpoſitos eſſe numeros perfectos quam decem. Annotari quoque meretur, quod eorundem perfectorum, excepto primo, notae ſingulae ad ſe inuicem additae ſemper efficiant vnitatem, ex. gr. in 33550336 $6+3+3+0+5+5+3+3=28$, et $2+8=10$, et $1+0=1$. et ſic de caeteris quoque; quamuis haec proprietas non ſit reciproca, vt ex ea ad numerum perfectum concludere liceat, conuenit enim eadem etiam falſis *Tartaglianis* ex gr. 536854528, vbi $8+2+5+4+5+8+6+3+5=46$ et $4+6=10$, et $1+0=1$. Certum denique etiam eſt, omnes perfectos in fine annexos habere numeros aut 6 aut 28, non vero alternatim conſtanter; nam in mea Tabula quintus et ſextus terminantur vterque numero 6, ſeptimus vero et octauus vterque 28.

DE

DE MOTV CORPORVM SE INVICEM PERCVTIENTIVM.

AVTORE
Ioh. Bernoulli. I. Fil.

PARS PRIMA.
De corporibus oscillando se percutientibus.

Corpora super plano aspero rotando in se inuicem impingentia longe alias seruare leges, ac si collisio fiat sine rotatione, experientia testatur: Mihi autem, in leges istas inquirenti, obseruatum fuit, illas pendere a regulis corporum oscillando se percutientium. Hac itaque vice, quae circa regulas istas meditatus sum, proponam, proxima occasione rotationi ea applicaturus. Tabula II.

Definitio I.

I. *Motus progressiuus* mihi est, motus corporis, cuius singula puncta communi velocitate mota, describunt lineam rectam; et per *vim viuam progressiuam* intelligo vim viuam corporis, quatenus solo motu progressiuo mouetur.

De-

Definitio 2.

II. *Motus gyratorius* eſt motus globi circa axem immotum gyrati; *Vim viuam gyratoriam* appello vim viuam corporis, quatenus ſolo motu gyratorio mouetur: motum iſtum deinceps definiam ex velocitate puncti, in circulo maximo ad axem gyrationis perpendiculari, ceu aequatore, ſumti.

Definitio 3.

III. *Motus oſcillatorius* eſt motus corporis oſcillantis; huius vim viuam in ſitu fili verticali, qui ſitus ſolus a nobis conſiderabitur, voco *vim viuam oſcillatoriam.*

Lemma I.

IV. Omnis motus compoſitus ex progreſſiuo et gyratorio, quaecunque ſit ratio inter velocitates reſpectiuas, quibus hi duo motus fiunt, reduci poteſt ſingulis momentis ad motum ſimplicem oſcillatorium, ſi nimirum quaeratur debitum ſuſpenſionis punctum, circa quod globus oſcillari intelligatur. Hoc punctum erit vel in peripheria globi, vel extra, vel intra illam, prout vel motus progreſſiuus aequalis eſt gyratorio, vel vnus, alterue, praeualet. Etenim per interuallum temporis valde exiguum motus iſte compoſitus nihil aliud eſt, niſi vera oſcillatio circa debitum illud punctum ſuſpenſionis.

Lem-

Lemma 2.

V. *Data diſtantia puncti ſuspenſionis a ſuperficie globi oſcillantis, vna cum velocitate centri, inuenire velocitatem motus gyratorii, vt manente eadem velocitate centri, inde oriens motus compoſitus ſit idem cum priori oſcillatorio.*

Sit diſtantia puncti ſuspenſionis a ſuperficie globi $= a$, radius $= b$, velocitas in centro $= v$, velocitas motus gyratorii $= x$, erit velocitas in ſummo peripheriae puncto $= v - x$; ſed eſt $a + b . v :: a . v - x$, igitur $x = \frac{b}{a+b} v$.

Si data velocitate motus gyratorii, quam nunc voco c, quaeratur velocitas centri, inuenietur illa $= \frac{a+b}{b} c$, vnde patet in caſu $a = -b$ velocitatem in centro eſſe nullam.

Problema I.

VI. *Inuenire vim viuam globi oſcillantis.*

Solutio.

Intelligatur globus ſuspenſus ex filo verticali FB, quod continuatum transeat per centrum D; Sit LBME circulus globi, in cuius directione mouetur, radius $= b$, FB diſtantia puncti ſuspenſionis a ſuperficie globi, $= a$; per puncta infinite propinqua I et *i* ducantur horizontales AC et ac; vocceturque $BI = x$, $Ii = dx$, erit IC $= \sqrt{(2bx - xx)}$, ponaturque praeterea velocitas in centro $= v$. Figura 1.

Quaeremus primum vim viuam ſtrati elementaris et horizontalis, quod reſpondet ſpatiolo $ACca$: ſit itaque circulus horizontalis ARCS oſcillans in directione AC circa axem ſuſpenſionis, cuius diſtantia a diametro circuli $RS = \alpha$, radius circuli $= \beta$, $Im = \xi$, $mn = d\xi$, erit $mp = \sqrt{(\beta\beta - \xi\xi)}$ et diſtantia ab axe ſuſpenſionis ad applicatam $mp = \sqrt{(\alpha\alpha + \xi\xi)}$.

Figura 2.

Iam cum velocitas in centro globi ſit $= v$, erit hic velocitas in $m = \frac{\sqrt{(\alpha\alpha + \xi\xi)}}{a+b} v$, et quia ſingula puncta in mp communi velocitate mouentur, erit vis viua ſpatioli $mnpq = \frac{\alpha\alpha + \xi\xi}{(a+b)^2} vv d\xi \sqrt{(\beta\beta - \xi\xi)} = \frac{vv}{(a+b)^2}(\xi\xi d\xi \sqrt{(\beta\beta - \xi\xi)} + \alpha\alpha d\xi \sqrt{(\beta\beta - \xi\xi)})$.

Huius expreſſionis ſi ſumatur integrale et dein ponatur $\xi = \beta$, habebitur vis viua quadrantis circuli: Integretur ergo per partes; Eſt autem pars prior $\frac{vv}{(a+b)^2}\xi\xi d\xi \sqrt{(\beta\beta - \xi\xi)} = \frac{-vv}{(a+b)^2}(-\xi^{\frac{5}{3}} d\xi \sqrt{(\beta\beta\xi^{\frac{2}{3}} - \xi^{\frac{8}{3}})})$, diuidendo nimirum et rurſus multiplicando per $\xi^{\frac{1}{3}}$; ſi nunc ab hac quantitate auferatur $\frac{vv}{(a+b)^2} \times \frac{1}{4}\beta\beta\xi^{-\frac{1}{3}} d\xi \sqrt{(\beta\beta\xi^{\frac{2}{3}} - \xi^{\frac{8}{3}})}$ et dein illi rurſus addatur, erit illa $= \frac{-vv}{(a+b)^2}(-\xi^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4}\beta\beta\xi^{-\frac{1}{3}}) d\xi \sqrt{(\beta\beta\xi^{\frac{2}{3}} - \xi^{\frac{8}{3}})} + \frac{1}{4}\frac{\beta\beta}{(a+b)^2} vv d\xi \sqrt{(\beta\beta\xi^{\frac{2}{3}} - \xi^{\frac{8}{3}})}$ Huius expreſſionis integrale eſt $= \frac{-vv}{4(a+b)^2}\xi(\beta\beta - \xi\xi)^{\frac{3}{2}} + \frac{\beta\beta}{4(a+b)^2} vv \int d\xi \sqrt{(\beta\beta - \xi\xi)}$; eſt itaque $\int(\frac{\alpha\alpha + \xi\xi}{(a+b)^2} vv d\xi \sqrt{(\beta\beta - \xi\xi)}) = \frac{-vv}{4(a+b)^2}\xi(\beta\beta - \xi\xi)^{\frac{3}{2}} + \frac{\beta\beta}{4(a+b)^2} vv \int d\xi \sqrt{(\beta\beta - \xi\xi)} + \frac{\alpha\alpha}{(a+b)^2} vv \int d\xi \sqrt{(\beta\beta - \xi\xi)}$.

Po-

Ponamus nunc $\xi = \beta$ et inueniemus vim viuam quadrantis circuli $\frac{4\alpha\alpha + \beta\beta}{4(a+b)^2} vv \int d\xi \sqrt{(\beta\beta - \xi\xi)} =$ (quia $\int d\xi \sqrt{(\beta\beta - \xi\xi)} =$ quadranti, quem voco Q) $\frac{4\alpha\alpha + \beta\beta}{4(a+b)^2} vvQ$; ergo vis viua totius circuli $= \frac{4\alpha\alpha + \beta\beta}{(a+b)^2} vvQ$. Applicentur iam haec ad sphaeram. In hac est $\alpha = a + x$, $\beta = \sqrt{(2bx - xx)}$, $Q = \frac{1}{8} n.(2bx - xx)$ (per n intelligo exponentem rationis inter peripheriam circuli et radium) adeoque $\frac{4\alpha\alpha + \beta\beta}{(a+b)^2} vvQ = \frac{n}{8(a+b)^2} vv \times (8aabx + 16abxx + 4bbxx - 4aaxx + 4bx^3 - 8ax^3 - 3x^4)$, quod ductum in dx altitudinem scilicet strati dabit eius vim viuam $= \frac{n}{8(a+b)^2} vvdx(8aabx + 16abxx + 4bbxx - 4aaxx + 4bx^3 - 8ax^3 - 3x^4)$, huius integrale est $= \frac{n}{48(a+b)^2} vv(4aabxx + \frac{16}{3}abx^3 + \frac{4}{3}bbx^3 - \frac{4}{3}aax^3 + bx - 2ax^4 - \frac{3}{5}x^5)$. In hac expressione si ponatur $x = 2b$, obtinebitur vis viua totius sphaerae oscillantis $= \frac{2}{3}nb^3 vv \left(\frac{aa + 2ab + \frac{7}{5}bb}{(a+b)^2}\right) =$ (si $\frac{2}{3}nb^3$ vtpote massa globi vocetur M) $\frac{aa + 2ab + \frac{7}{5}bb}{(a+b)^2} vvM$. Q. E. I.

Corollarium 1.

VII. Si ponatur $a = \infty$, habebitur vis viua globi solo motu progressiuo moti $= vvM$, plane vt fieri debet.

Corollarium 2.

VIII. Vis viua motus compositi ex progressiuo et gyratorio, quorum velocitates sunt inter se aequales, inuenitur, si pouatur $a = 0$, hoc casu expressio generalis abit in hanc $\frac{7}{5} vvM$; ergo vis viua progressiua se habet ad vim viuam oscillatoriam, vbi punctum suspensionis est in peripheria globi, vt 5 ad 7.

Scholion I.

IX. Nihil determinati dat expressio nostra pro casu, quo punctum suspensionis concipitur esse in centro, id est, quo globus omni motu progressiuo destitutus tantum circa axem suam gyratur; hoc enim in casu, quia $a = b$ et proinde velocitas centri nulla (Prop. V.), erit expressio nostra $= \frac{0}{0}$: Vt itaque determinemus vim viuam gyratoriam, vocemus c velocitatem, quae est in peripheria globi oscillantis et erit velocitas centri $= \frac{a+b}{a} c$; hoc valore substituto pro v in expressione nostra generali, mutatur illa in hanc $\frac{aa + 2ab + \frac{7}{5}bb}{aa} ccM$; iam si in hac ponatur $a = -b$, habebitur vis viua gyratorii globi $= \frac{2}{5} ccM$. Est adeo vis viua progressiua ad vim viuam gyratoriam globi, vt 5 ad 2.

Theorema.

X. *Si in globo oscillante motus gyratorius separatim consideretur a motu progressiuo et in vtroque motu simplici vis viua sumatur, aggregatum virium viuarum rursus exhibebit vim viuam oscillatoriam.*

Demonstratio.

Sint rursus distantia puncti suspensionis a superficie globi $= a$, radius $= b$, velocitas centri $= v$, erit (Pr. V.) velo-

velocitas, qua punctum in peripheria circa centrum gyratur, $=\frac{b}{a+b}v$, vis viua gyratoria $=\frac{2bb}{5(a+b)^2}vvM$, (Prop. IX.), vis viua progressiua $=vvM$ (Prop. VII); summa harum virium viuarum $=\frac{aa+aab+\frac{7}{5}bb}{(a+b)^2}vvM$, qui valor idem est, quem antea pro vi viua oscillatoria inuenimus. (Prop. VI.)

Corollarium.

XI. Licet adeo in globo oscillante duas vires viuas, nimirum progressiuam et gyratoriam separatim considerare.

Problema 2.

XII. *Data velocitate duorum corporum* A *et* B, *oscillando circa puncta* F *et* G *se inuicem percutientium, determinare velocitatem quam habebunt post collisionem.* Figura 3.

Solutio.

Sit radius globi $A = A$, ipsius massa $= M$, radius alterius globi $= B$, huius massa $= N$, distantia puncti suspensionis a globo $A = \alpha$, distantia puncti suspensionis a globo $B = \beta$, velocitas in centro globi $A = m$, velocitas in centro alterius globi $= n$, erit vis viua progressiua globi $A = mmM$ atque (Prop. IX.) eiusdem vis viua gyratoria $=\frac{2AA}{5(\alpha+A)^2}mmM$, similiterque vis viua progressiua globi $B = nnN$, eiusque vis viua gyratoria $=\frac{2bb}{5(\beta+B)^2}nnN$. Notandum est: Quod ponam centra globorum tempore collisionis esse in linea horizontali.

 Post

Poſt colliſionem motus gyratorii, quia neuter illorum agit in alterum, non mutabuntur, (id quod deinceps aliter demonſtrabo), fiet ergo ſolum immutatio in motibus progreſſiuis et quidem, iuxta regulas receptas, ita, vt poſt impulſum velocitas progreſſiua corporis A, ſit $\frac{mM - mN + 2nN}{M + N}$, velocitas progreſſiua corporis $B = \frac{nN - nM + 2mM}{M + N}$, vis itaque viua progreſſiua globi $A = \frac{(mM - mN + 2nN)^2}{M + N} M$; huic ſi addatur eiusdem vis viua gyratoria, quam vidimus eſſe $= \frac{2AA}{5(\alpha + A)^2} mmM$, prodibit ipſius vis viua totalis ſeu oſcillatoria $= (\frac{2AA}{5(\alpha + A)^2} mm + (\frac{mM - mN + 2nN}{M + N})^2)M$; globi vero B vis viua progreſſiua poſt impulſum erit $= (\frac{nN - nM + 2mM}{M + N})^2 N$, quae addita eiusdem vi viuae gyratoriae dat ipſius vim viuam totalem ſeu oſcillatoriam poſt impulſum $= (\frac{2BB}{5(\beta + B)^2} nn + (\frac{nN - nM + 2mM}{M + N})^2) N$.

Dicatur nunc velocitas quaeſita in centro globi $A = v$, velocitas quaeſita in centro globi $B = p$, erit vis viua oſcillatoria globi A poſt impulſum $= \frac{\alpha\alpha + 2\alpha A + \frac{7}{5}AA}{(\alpha + A)^2} vvM$, (Prop. VI.) $=$ eidem vi viuae oſcillatoriae poſt impulſum quam modo inuenimus eſſe $= (\frac{2AA}{5(\alpha + A)^2} mm + (\frac{mM - mN + 2nN}{M + N})^2) M$. Similiter erit vis viua oſcillatoria corporis B poſt impulſum $= \frac{\beta\beta + 2\beta B + \frac{7}{5}BB}{(\beta + B)^2} ppN = (\frac{2BB}{5(\beta + B)^2} nn + (\frac{nN - nM + 2mM}{M + N})^2) N$; vnde elicitur $v = \sqrt{(\frac{2AA}{5(\alpha + A)^2 + 2AA} mm + \frac{5(\alpha + A)^2}{5(\alpha + A)^2 + 2AA} (\frac{mM - mN + 2nN}{M + N})^2}$ et p $= \sqrt{}$

$= \sqrt{\left(\frac{2BB}{5(\beta+B)^2+2BB} nn + \frac{5(\beta+B)^2}{5(\beta+B)^2+2BB} \left(\frac{nN-nM+2mM}{M+N}\right)^2 \right)}$.
Q. E. I.

Corollarium 1.

XIII. Si $\alpha\alpha\beta = \infty$, prodibunt regulae communes pro corporibus ſolo motu progreſſiuo motis; hoc enim caſu erit $v = \frac{mM-mN+2nN}{M+N}$ et $p = \frac{nN-nM+2mM}{M+N}$.

Corollarium 2.

XIV. Si $\alpha\alpha\beta = 0$, qui caſus eſt pro corporibus oſcillantibus, in quibus motus gyratorius aequalis eſt motui progreſſiuo, erit $v = \sqrt{(\frac{2}{7}mm + \frac{5}{7}(\frac{mM-mN+2nN}{M+N})^2)}$; et $p = \sqrt{(\frac{2}{7}nn + \frac{5}{7}(\frac{nN-nM+2mM}{M+N})^2)}$.

Scholion.

XV. In Prop. XII. aſſumſimus motus gyratorios duorum corporum oſcillantium ab impulſu non mutari; Iſtud, quia nonnullis ſcrupulum mouere poſſet, ſeorſim nunc demonſtrabimus. Quaeremus impetum corporis oſcillantis & inueniemus eum non eſſe maiorem, quam ſi ſolo motu primo progreſſiuo corpus eſſet motum.

Sit itaque primo planum horizontale CF, ſuspenſum ex filo verticali AB atque oſcillans in directione CF; Si velocitas puncti A exprimatur per lineam AB, exprimatur velocitas puncti F per lineam BF, ſed haec velocitas, cum habeat directionem obliquam ſecundum FD perpendicularem ad BF, non tota impenditur in impetum; de componenda itaque eſt in FE et DE, quarum Figura 4.

quarum prior ſola impenditur in impetum; Eſt autem (ob triangula ſimilia FED, BAF) FE. FD::BA. BF, ergo velocitas, qua fit impetus puncti F exprimetur per lineam AB, adeoque erit aequalis velocitati puncti A; idem dicendum de omnibus reliquis punctis f, f, plani oſcillantis; eſt ergo totius plani impetus aequalis toti maſſae ductae in velocitatem, quae eſt in puncto A, hinc conſiderari poteſt planum tanquam concentratum in A.

Si iam loco plani habeamus corpus oſcillans, idem erit ac ſi infinita pondera p, p, p, p, concentrata in infinitis punctis virgae rigidae AB oſcillarentur. Vt nunc rem clarius ob oculos ponamus, concipiamus duo corpora et quidem P et π duabus diuerſis laminis rigidis AB et $\alpha\gamma$ affixa, ſit autem diſtantia corporis P a puncto A dupla v. gr. diſtantiae corporis π a puncto fixo α; impingant haec duo corpora in elaſtra DE, $\delta\varepsilon$ aequalia, diſtantia elaſtri DE a puncto A ſit aequalis diſtantiae elaſtri $\delta\varepsilon$ a puncto α; erit ex natura vectis impetus ponderis P in elaſtrum DE duplus impetus ponderis π in elaſtrum $\delta\varepsilon$ ſi puncta γ et c eadem velocitate moueantur; transferatur nunc pondus π ex γ in c, ita vt eidem virgae AB in medio affixum vna cum pondere P oſcilletur et impingat in commune elaſtrum DE; cum omnia ſint eadem, erit etiam impetus ipſius adhuc dimidio minor impetu ponderis P in elaſtrum DE: ſi nunc pondus P augeatur, vt fiat v. gr. triplum ponderis π, erit impetus ipſius ſextuplo maior impetu huius; vnde apparet eſſe ſingulorum ponderum

Figura 5.

Figura 6.

derum impetus proportionales ſingulis maſſis ductis in ſuas reſpectiue diſtantias a puncto ſuspenſionis; ergo ſi infinita ſint pondera, erit ſumma omnium impetuum proportionalis ſummae ſingularum maſſarum ductarum in ſuas reſpectiue diſtantias a puncto ſuspenſionis, aequalis, vt notum, impetui, quem haberet tota maſſa omnium ponderum, ſi concentrata foret in centro grauitatis. Cum itaque moles globi oſcillantis tanquam punctum conſiderari poſſit, erit eius diſtantia a puncto ſuspenſionis infinita aſpectu radii, adeoque ratione impetus ſolus motus gyratorius conſiderandus eſt. Q. E. D.

PARS ALTERA.

De Corporibus rotando ſe percutientibus.

Lemma.

XVI. Si globus plano aſpero incedat, eius motus progreſſiuus, ſiue radens, ab aſperitate plani turbabitur, et accedet ei motus gyratorius, hincque orietur motus mixtus; hunc vocabimus *motum rotatorium* atque per *vim viuam rotatoriam* intelligemus vim viuam globi hac ratione moti.

Corollarium.

XVII. Motus itaque rotatorius nihil eſt aliud, niſi iſte motus compoſitus ex progreſſiuo et gyratorio, de quo diximus in Prop. IV. adeoque ſemper reduci poſſet ad motum ſimplicem oſcillatorium, ſi modo quaeratur debitum ſuspenſionis punctum, circa quod globus oſcillari intelligatur (Prop. IV.)

Definitio.

XVIII. *Rotationem perfectam* voco eam, quae fit cum punctum in circulo maximo ad axem rotationis perpendiculari describit cycloidem vulgarem; sin hoc punctum describat cycloidem contractam vel prolongatam, erit *rotatio imperfecta*.

Scholion 1.

XIX. Si motus perfecte rotatorius tanquam oscillatorius consideratur, erit punctum suspensionis isti motui respondens in superficie globi, hic enim singulis momentis reuera circa punctum in superficie oscillatur, in motu vero non perfecte rotatorio ad oscillatorium reducto, erit punctum suspensionis vel extra peripheriam vel intra eam, prout vel motus progressiuus praeualet vel gyratorius.

Scholion 2.

XX. Si planum super quo globus rotatur sit valde asperum et motus globi lentus, poterit rotatio pro perfecta haberi; sin impetus quo globus propellitur sit maximus, ita vt asperitas plani facile vincatur, motus globi gyratorius pro nullo haberi poterit respectu progressiui.

Scholion 3.

XXI. Ostensa identitate motus rotatorii cum oscillatorio, perfacile erit omnia ea, quae de globis oscillantibus demonstrauimus, iisdem applicare rotantibus.

Pro-

Problema. 3.

XXII. *Data velocitate, quae est in centro globi rotantis, vna cum velocitate motus gyratorii, determinare distantiam puncti suspensionis, circa quod si globus oscilletur, motus eius oscillatorius sit idem cum priori rotatorio.*

Solutio.

Sit globus ACBD; concipiatur ille rotare per interuallum temporis infinite paruum, ita vt diameter AB veniat in situm $\alpha\beta$; haec $\alpha\beta$, continuata si opus sit, priorem AB, etiam continuatam, secabit in aliquo puncto F; hoc punctum, quamdiu globus rotauit, nullam habuit velocitatem, sed mansit immotum, vnde necessario punctum suspensionis debet esse in F; vt itaque huius distantiam a peripheria globi determinemus, sit diameter $= 2b$, velocitas in centro $= v$, velocitas gyratoria (quam, vt iam dictum, definio ex velocitate puncti in circulo maximo ad axem rotationis perpendiculari sumti) $= c$, distantia quaesita BF $= x$: exprimentur velocitates punctorum A, L, B per arculos infinite paruos $A\alpha$, $L\lambda$, $B\beta$, radiis AF, LF, BF descriptos; est autem $B\beta = v - c$; vnde $LF(b + x). L\lambda(v) :: BF(x). B\beta(v - c)$; adeoque $x = \frac{v-c}{c} b$. Q. E I. Figura 7.

Corollarium.

XXIII. Si $c = o$, erit $x = \infty$; si, $v = c$, erit $x = o$, id est punctum F existet in peripheria globi, sin $v < C$, erit x negatiuum, cadet nimirum punctum F intra peripheriam, et coincidet quidem cum centro globi si $v = o$.

 Scholion.

Scholion.

XXIV. Vis viua globi rotantis inuenitur, ſi in valore, quem in Prop. VI. pro vi viua globi oſcillantis elicuimus, ſubſtituatur $\frac{v-c}{c}b$ pro a, manentibus $b\,v$, et M iisdem quae antea; eſt ergo vis viua globi rotantis $=(vv+\frac{2}{5}cc)M$.

Corollarium 1.

XXV. Si diſtantia puncti ſuspenſionis ſit infinita, id eſt, ſi ponatur $c=0$, obtinebitur vis viua globi Mv motu progreſſiuo moti $=vvM$.

Corollarium 2.

XXVI. Vis viua globi perfecte rotantis inuenitur $=\frac{7}{5}vvM$, ponendo nimirum $v=c$.

Corollarium 3.

XXVII. Si $v=0$, erit vis viua globi ſolo motu gyratorio moti $=\frac{2}{5}ccM$.

Scholion 1.

XXVIII. In Prop. X. demonſtratum fuit, ſi in globo oſcillante motus gyratorius ſeparatim conſideretur a motu progreſſiuo, et in vtroque motu ſimplici vis viua ſumatur, fore vt aggregatum virium viuarum rurſus exhibeat vim viuam oſcillatoriam. Idem Theorema verum etiam erit in globo rotante, ſcilicet in hoc quoque aggregatum duarum virium viuarum, progreſſiuae et gyratoriae ſeparatim ſumtarum, rurſus exhibebit vim

vim viuam rotatoriam, quia motus rotatorius idem eſt cum oſcillatorio. Hanc autem velocitatem ipſa expreſſio noſtra ſtatim ob oculos ponit, cum conſtet ex duobus terminis vvM et $\frac{2}{5}ccM$, quorum primus exprimit ipſam vim viuam progreſſiuam, alter vero gyratoriam ſeorſim ſumtam.

Scholion 2.

XXIX. In Prop. XII. ſolutionem dedimus huius Problematis: "Data velocitate duorum corporum oſcillando ſe inuicem percutientium, determinare velocitatem quam habebunt poſt colliſionem;" ſolutio illa globis rotantibus applicari nequit, nam in globis oſcillantibus punctum ſuſpenſionis, cum ſit fixum, idem manet poſt impulſum, quod ante; in globis vero rotantibus punctum ſuſpenſionis, motui iſti rotatorio reſpondens, cum non ſit fixum ſed imaginarium tantum, non neceſſario idem manet, ſed mutari poteſt et quidem infinitis modis. Vt igitur dictum problema ſolui poſſit, cognitae ſupponi debent diſtantiae punctorum ſuſpenſionis, quae motibus rotatoriis globorum poſt impulſum ſunt reſponſura, ſiue, quod eodem redit, data ſupponi debet ratio, quae poſt impulſum futura ſit inter velocitatem progreſſiuam et gyratoriam vtriusque globi. Hoc praemonito ipſam Problematis ſolutionem in ſequenti dabimus Propoſitione.

Problema 4.

XXX. *Datis in duobus globis* A *et* B *rotando in ſe inuicem impingentibus, velocitate centri vna cum velo-*

 citate

citate gyratoria, nec non ratione, quae futura ſit inter has duas velocitates poſt impulſum determinare velocitates, quas habebunt poſt colliſionem.

Solutio.

Fig. 8. Sit maſſa globi $A = M$, radius $= A$, maſſa globi $B = N$, radius $= B$, velocitas in centro globi $A = m$, eius velocitas gyratoria $= c$, ratio inter velocitatem progreſſiuam et gyratoriam poſt impulſum in eodem globo $= \frac{f}{g}$; velocitas in centro globi $B = n$, eius velocitas gyratoria $= e$, ratio inter velocitatem progreſſiuam et gyratoriam, quas habebit poſt impulſum $= \frac{h}{i}$, erit reducto motu rotatorio ad oſcillatorium, debita diſtantia puncti ſuspenſionis a ſuperficie globi $A = \frac{m-c}{c} A$ (Prop. XII.) atque debita diſtantia puncti ſuspenſionis a ſuperficie globi $B = \frac{n-e}{e} B$.

Si nunc ea, quae habentur in Propoſitione XII, debite applicentur, inuenietur vis viua rotatoria globi A poſt impulſum $= (\frac{2}{5} cc + (\frac{mM - nN + 2nN}{M+N})^2) M$; globi vero B vis viua $= (\frac{2}{5} ee + (\frac{nN - nM + 2mM}{M+N})^2) N$; iſtae vires viuae in vnoquoque globo conſeruabuntur, quomodocunque ab aſperitate plani rurſus mutentur velocitates progreſſiuae et gyratoriae globorum.

Vocetur iam velocitas progreſſiua globi A poſt impulſum $= v$, erit per hyp. eius velocitas gyratoria $= \frac{g}{f} v$ atque (Prop. XXIV.) eiusdem vis viua rotatoria $= \frac{5ff + 2gg}{5ff} vvM$, eſt autem (vti iam vidimus) eadem vis viua

viua etiam $= (\frac{2}{5} cc + (\frac{mM - mN + 2nN}{M+N})^2) M$, ideoque elicitas $v = \sqrt{\frac{2ccff + 5ff(\frac{mM - mN + 2nN}{M+N})^2}{5ff + 2gg}}$; eodem modo, si vocetur p velocitas progressiua corporis B post impulsum inuenietur $p = \sqrt{\frac{(2eebb + 5bb(\frac{nN - nM + 2mM}{M+N})^2)}{5bb + 2ii}}$. Q.E.I.

Scholion.

XXXI. In Propositione praecedenti generaliter expressimus rationes inter velocitates globorum progressiuas et gyratorias post impulsum per has fractiones $\frac{f}{g}$, $\frac{h}{i}$, in applicatione vero ad casus speciales pro $\frac{f}{g}$ et $\frac{h}{i}$ substituendae erunt rationes quae maxime videbuntur probabiles; v. gr. si globi admodum lente moueantur super plano aspero, erit rotatio sensibiliter perfecta (Prop. XX.) et singulae harum fractionum $\frac{m}{c}$, $\frac{f}{g}$, $\frac{n}{e}$ et $\frac{h}{i}$ aequales erunt vnitati. Hunc casum quia est frequentissimus, in sequenti propositione seorsim tractabimus.

Problema 5.

XXXII. *Data velocitate duorum globorum* A *et* B, *rotando se inuicem percutientium, determinare velocitates, quas habebunt post impulsum positis globis tam ante quam post collisionem perfecte rotantibus.* Fig. 8.

Solutio.

Positis iisdem, quibus in Prop. XXX, nisi quod sit $m = c$, $n = e$, $f = g$ et $h = i$; erit vis viua globi A post impul-

impulſum $=\frac{7}{5}vvM$ (Prop. XXVI.), eſt autem eadem vis viua etiam $= (\frac{2}{5}mm + (\frac{mM - mN + 2nN}{M+N})^2) M$ (Prop. XXX.) habetur itaque $v = \sqrt{(\frac{2}{7}mm + \frac{5}{7}(\frac{nN - mN + 2nN}{m+N})^2)}$; ſimiliter inuenitur $p = \sqrt{(\frac{2}{7}nn + \frac{5}{7}(\frac{nN - nM + 2mM}{M+N})^2)}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

XXXIII. Si maſſae globorum A et B fuerint inter ſe aequales erit $v = \sqrt{(\frac{2}{7}mm + \frac{5}{7}nn)}$ et $p = \sqrt{(\frac{2}{7}nn + \frac{5}{7}mm)}$.

Corollarium 2.

XXXIV. Si vlterius globus B ponatur quieuiſſe ante colliſionem, erit $v = m\sqrt{\frac{2}{7}}$ et $p = m\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Scholion 1.

XXXV. Hinc apparet, ſi in ludo *Billard* alter globorum in alterum quieſcentem perfecte rotando impingat, priorem non eſſe quieturum, ſed fore vt ambo moueantur, et quidem ea lege vt impingens retineat velocitatem, quae ſit ad velocitatem alteri acquiſitam, vt $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{5}$; quod ſi globi impingentis rotatio ſit imperfecta, retinere quidem debet aliquam velocitatem, ſed minorem ac ſi perfecte rotaſſet; haecque ab experientia confirmantur; hinc eſt quod huius ludi periti globum ſuum magno propellant impetu, ſi colluſoris globus prope lacunam in linea recta ſit poſitus; hoc enim pacto leges ordinariae obtinent, (Prop. XX.) atque globi impingentis motus ipſo impulſu ſiſtitur, globusque alter ſolus in lacunam intruditur, id quod non fieret niſi impingens celerrime fuiſſet motus.

Scho-

Scholion 2.

XXXVI. Aliorum praeterea phaenomenorum, in eodem ludo *Billard* occurrentium, ratio reddi poterit, considerato ea qua fecimus ratione, motu duplici, progressino et gyratorio.

Obseruatur v. gr. globum, digito pressum hocque modo propulsum, primum quidem aliquantum antrorsum, dein vero retrorsum moueri; huius ratio est, quod digitus propellens globum simul eum retrahat sicque ei imprimat duplicem motum, alterum progressiuum antrorsum, alterum gyratorium in sensum contrarium, prior ab initio posteriori praeualet, sed propter asperitatem plani breui extinguitur, et sic illo extincto hoc autem remanente, globus retro mouetur: idem vero non accidit, si digitus propellens globum madefiat. Porro obseruatur directiones globorum post impulsum ad se inuicem non esse perpendiculares: hic iterum considerandum est, globum impingentem ante collisionem habere motum duplicem, progressiuum et gyratorium; posterior, quia, vt saepius dictum, non mutatur, retinet post impulsum eandem directionem, quam habuit ante: prior vero, nimirum progressiuus, post collisionem tendit secundum perpendicularem ad directionem alterius globi, sed propter asperitatem panni accedet insuper globo motus gyratorius secundum eandem directionem; habebit ergo globus motum triplicem et ex hoc motu triplici necessario oriri debet motus simplex rotatorius secundum directionem aliquam intermediam, hinc manifeste directiones globorum post impulsum constituent angulum aliquantum acutum, eoque magis acutum, quo motus fuerit lentior.

Vnum adhuc referam phaenomenon, primo haud absimile quodque eodem modo explicandum est, quo illud: si globus quiescens vni ex lateribus sit adhaerens (quod Galli vocant *être collé*) et alter in eum ita impingat, vt centra sint in linea perpendiculari ad latus, cui prior adhaeret, fiet vt post impulsum globus impingens per eandem perpendicularem aliquantum resiliat et dein vel subito quiescat vel retro moueatur; ratio huius, vt dixi, manifesta est iis quae habentur ab initio huius scholii; quodsi vero impulsus fuerit obliquus, poterit fieri, vt globus impingens post collisionem primum aliquantum resiliat, dein per lineam curuam rursus retro moueatur, seque in lacunam voluat, quia tunc directio motus gyratorii non e diametro est opposita directioni motus progressiui; hocque etiam saepissime accidere solet.

OBSER-

PROBLEMATIS ASTRONOMICI
A
Clar. *De L'Isle*
PROPOSITI
ENVCLEATIO.
AVTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

Lemma I.

I.

Posito finu toto $= 1$, anguli acuti maioris finu $= S$, cofinu $= C$, Tangente $= T$; anguli vero acuti minoris finu $= s$, cofinu $= c$, tangente $= t$; femifummae horum duorum angulorum finu $= A$ cofinu $= B$; femidifferentiae finu $= a$, cofinu $= b$. Erit Tabula III.

1. Cofinus anguli compofiti ex vtroque dato $= Cc - Ss$
2. Sinus anguli refidui $= Sc - sC$.
3. Tangens anguli refidui $= \frac{T-t}{Tt+1}$.
4. $c - C = 2aA$.
5. $S - s = 2aB$.
6. $S + s = 2Ab$.
7. Sinus anguli dupli $= 2SC$.
8. Cofin. anguli refidui $= Cc + sS$.

Demonftrationes horum omnium vide in Comment. huius Academiae Tomo II. p. 13. feq.

Lemma 2.

Fig. 1. II. In Schemate Fig. 1. repraesentet TZF planum Meridiani, TRF planum Horizontis, BDH planum Paralleli, in quo stella quaedam D mouetur. Exponet itaque angulus CGD distantiam stellae D a Meridiano, in Aequatore, quam vocabo tempus; angulus PKM vero distantiam stellae D a Meridiano, in Horizonte, seu Azimuthum. *Inuenienda est ratio, quam habet Tempus ad Azimuthum.* Sit in hunc finem angulus Temporis CGD acutus, atque erit in triangulo CGD ad C rectangulo, sin. tot. (1) tang. CGD $=$ CG:CD, hinc tang. CGD $= \frac{CD}{CG}$; in triangulo PKM ad P rectangulo, erit rursus, sin. tot. (1): tang. PKM $=$ PK : PM, hinc tang. PKM $= \frac{PM}{PK}$; itaque erit tangens Azimuthi ad tang. Temporis $=$ CG:PK, ob CD $=$ PM, restat itaque inuestiganda haec ratio. Ponantur

Eleu. aequat. sin. $= a$.	Temp. sin. $= \alpha$.	Declin. sin. $=$ A.
cosinus $= b$.	cosin. $= \beta$.	cosin. $=$ B.
tangens $= c$.	tang. $= \gamma$.	tang. $=$ C.

et praeterea altitudinis Meridianae in B cosinus AK $= q$. Erit, ob altitudinem meridianam $=$ alt. aequatoris $+$ vel $-$ declinatione, per Lemmatis 1. num. 1 et 8. $q = Bb - Aa$, si declinatio sit Borealis, sed $Bb + Aa$, si eadem sit Australis. Deinde in triangulo CGD est sin. tot. (1):DG(B) $=$ cos. CGD(β):CG $= B\beta$; nec non in triangulo EBC, sin. tot. (1):BC($B - B\beta$) $=$ sin. EBC(b):EC $=$ AP $= Bb - Bb\beta$; hinc CG:PK $=$ CG: AK $-$ AP $= B\beta : q - Bb + Bb\beta = B\beta : Bb\beta \mp Aa$,

(vbi

(vbi semper superius signum valet pro Declinatione Boreali, inferius vero pro Australi) $= \beta : b\beta \mp \frac{Aa}{B} = \beta : b\beta \mp Ca$, ob $C : 1 = A : B$. Igitur ratio quaesita est ipsius β ad $b\beta \mp Ca$, atque hinc Tangens Azimuthi, pro angulo Temporis acuto $\frac{\beta\gamma}{b\beta \mp Ca} = \frac{\alpha}{b\beta \mp Ca}$, ob $\gamma : 1 = \alpha : \beta$. Quodsi vero angulus Temporis sit obtusus, vt in Fig. 2. sumatur eius deinceps positus CGD, atque huius sit sinus α, cosinus β, tangens γ, erit pro hoc casu anguli, qui Azimutho AKM deinceps positus est, Tangens $= \frac{\alpha}{b\beta \pm Ca}$. In sequentibus vero semper assumam Declinationem esse Borealem, quare adhibendae sunt Formulae pro angulo temporis acuto $\frac{\alpha}{b\beta - Ca} =$ tang. Azimuthi; pro angulo Temporis autem obtuso erit $\frac{\alpha}{b\beta + Ca} =$ tang. anguli, qui deinceps positus est Azimutho. Q. E. I.

Problema.

III. *Ex obseruatis tribus Temporibus* ZPA, ZPB, ZPC *in Fig.* 3. *stellae alicuius, ita vt in obseruatione inter vtramque media stella sit in ipso verticali primario* ZB, *in vtraque altera vero ab hoc aequaliter remota, inuenire Altitudinem Poli.* Ad naturam huius Problematis excutiendam ponantur Figura 3.

Temporis ZPA sinus $= e$ cosin. $= f$ Eleu. Aequ. sin. $= y$
ZPB sinus $= g$ cosin. $= h$ cosin. $= \sqrt{(1 - yy)}$
CPQ sinus $= i$ cosin. $= k$. Declin. tang. $= u$.

Habebitur per Lemma 2. Tangens DZA $= \frac{e}{f\sqrt{(1-yy)} - uy}$, supposito angulo ZPA acuto, qui nunquam alius esse potest, porro erit Tang. DZB $= \frac{g}{h\sqrt{(1-yy)} - uy}$, supposito rurſus angulo ZPB acuto, qui etiam nunquam alius eſſe poteſt; denique erit Tangens CZQ, qui Azimutho DZC eſt deinceps poſitus, $= \frac{i}{k\sqrt{(1-yy)}+uy}$, vbi aſſumitur angulus CPQ ob angulum ZPC fere ſemper obtuſum. Factis his denominationibus, ob DZB rectum, erit tangens $\frac{g}{h\sqrt{(1-yy)}-uy}$ infinite magna, quare fractionis huius nominator $h\sqrt{(1-yy)}-uy=$ nihilo, vnde fit $uy = h\sqrt{(1-yy)}$; ob aequales autem AZB, BZC, et DZB rectum, aequales erunt etiam DZA, CZQ, quorum tangentes antea inuentae, ſi aequentur, facta ſubſtitutione ipſius $h\sqrt{(1-yy)}$ pro uy, emerget aequatio $if\sqrt{(1-yy)} - ih\sqrt{(1-yy)} = ek\sqrt{(1-yy)} + eh\sqrt{(1-yy)}$, quae, cum per incognitam $\sqrt{(1-yy)}$ diuiſibilis ſit, manentibus ſolis quantitatibus cognitis $if-ih=ek+eh$ indicat, quaeſitum ex his datis non poſſe inueniri, conſequenter Problema impoſſibile eſſe ſolutu.

Corollarium I.

IV. Si differentia Azimuthorum intelligatur data, Problema ſolui poterit, ſed ſuperfluus erit hoc caſu angulus aliquis Temporis, ex. gr. ZPC. Poſita enim cotangente ipſius $AZB=m$, erit ex prioribus $m=\frac{e}{f\sqrt{(1-yy)}-uy}$ $\frac{e}{(f-h)\sqrt{(1-yy)}}$, vnde oritur $\sqrt{(1-yy)}$, ſinus Eleuationis Poli $=\frac{e}{(f-h)m}$, quae formula facile ad logarithmos deducitur, conſiderando, quod $f-h$ ſit differentia coſinuum ZPA et ZPB, ponendo igitur ſin. $\frac{ZPB+ZPA}{2}=\eta$, et ſin. $\frac{ZPB-ZPA}{2}=\Phi$, erit per Lemma 1. num. 4. $f-h= 2\Phi\eta$, quod in priori formula ſubſtitutum efficit ſin. Eleu. Poli $=\frac{eR^3}{2\Phi\eta m}$, multiplicato numeratore per cubum radii

radii R, ad complendas dimenſiones. Ergo log. ſin. Eleu. Poli $= 3\,lR + le - (l2 + l\Phi + l\eta + lm)$. Sit e.g. $ZPA = 31^\circ 24'$. $ZPB = 75^\circ 26'$. $AZB = 45^\circ 0'$. erit $\frac{ZPA+ZPB}{2} = 53^\circ 25'$. $\frac{ZPB-ZPA}{2} = 22^\circ 1'$. vnde talis emergit operatio:

$$\begin{array}{rr} l2 = & 0.\ 3010300 \\ l\Phi = & 9.\ 5738880 \\ l\eta = & 9.\ 9047106 \\ lm = & 10.\ 0000000 \\ \hline & 29\ \ 7796286 \\ 3\,lR + le = & 39.\ 7168458 \\ \hline & 9.\ 9372172 \end{array}$$ log. ſinus Eleuat. Poli.

cui reſpondent $59^\circ.\ 56'$. pro Eleuatione Poli, ad quam exemplum fuit adaptatum.

Corollarium 2.

V. Quoniam ſupra poſt factam diuiſionem per $\sqrt{(1-yy)}$ remanet aequatio haec $if - ib = ek + eb$, poteſt aſſumi quaelibet harum cognitarum pro incognita, atque exinde nouum Problema ſolui; quaeratur ex. gr. b, erit ea $= \frac{fi-ke}{e+i}$, eritque Problema hoc: *Datis temporibus, quibus ſtella aliqua fuit in duobus verticalibus a primario aequaliter remotis, inuenire tempus, quo fuit in Verticali primario.* Sit autem ſin. $(CPQ - ZPA) = \alpha$, erit per Lemma 1. num. 2. $fi - ke = \alpha$; ſit porro ſin. $\frac{CPQ+ZPA}{2} = \beta$, coſin. $\frac{CPQ-ZPA}{2} = \gamma$, et huius ſemidifferentiae ſinus $= \delta$, erit per Lemma 1. num. 6. $e + i = 2\beta\gamma$; deinde quia $CPQ - ZPA$ duplus eſt ſemidifferentiae $\frac{CPQ-ZPA}{2}$, erit

quo-

quoque $\alpha = 2\gamma\delta$, factis his substitutionibus erit $b = \frac{\delta}{\varepsilon}$, aut $b = \frac{\delta R}{\varepsilon}$ ad complendas dimensiones, vnde $lb = lR + l\delta - l\varepsilon$. Sit in allegato exemplo $ZPC = 129^\circ. 40'$, erit $CPQ = 50^\circ. 20'$, vnde operatio haec est:

$$
\begin{array}{r}
lR + l\delta = 19.\ 2160967 \\
l\varepsilon = \ \ 9.\ 8157776 \\
\hline
9.\ 4003191.\ \text{log. cosin. } ZPB,
\end{array}
$$

cui respondent in Tabulis pro angulo ZPB $75^\circ. 26'$. qualis antea fuit in Corollario praeced.

Corollarium 3.

VI. Cum insperatum id accidisset, vt Problema per data sua non determinaretur, inquisiui in causam huius rei, atque eum in finem Problema generalius concepi, vt nempe angulus DZB non sit rectus, sed alius quicunque datus acutus, cuius tangens $= m$. Erit ergo ex prioribus, suppositis angulis omnibus ZPA, ZPB, ZPC, acutis, vocatisque $\sqrt{(1-yy)} = x$, $f-b = p$, $b-k = q$, $uy = \frac{mbx-g}{m}$, tang. $DZA = \frac{me}{g+pmx}$, tang. $DZC = \frac{mi}{g-qmx}$, hinc per Lem. 1. n. 3. tang. $AZB = (mg - me + pm^2x) : (m^2e + g + pmx)$, nec non tang. $BZC = (mi - mg + qm^2x) : (m^2i + g - qmx)$, qui duo valores aequati, praebent aequationem Quadraticam hanc: $-m^2ig - pm^3ix - 2g^2 + ge - 2gpmx + 2gqmx - eqmx + 2pqm^2x^2 + 2m^2ei - m^2eg + qem^3x + gi + pimx = 0$. Quodsi ergo DZB ponatur rectus, euadet m infinite magna, quare omnes termini, in quibus aut non reperitur m, aut non adest m^3, abiicientur, quo facto oritur $pm^3ix = qem^3ix$, vnde patet cur aequatio superius inuenta per incognitam sit diuisibilis.

OB-

OBSERVATIONES ARITHMETICAE DE SEPTENARIO,

AVTORE
G. W. Krafft.

§. 1.

Notissimae sunt Arithmeticorum regulae de inueniendo numeri cuiuscunque diuisore simplici, quas tradunt, vbi de Fractionibus ad minores terminos reducendis agunt. Extenduntur illae ad omnes numeros simplices, excepto vnico septenario; id quod ansam praebuit *Adriano Metio Arithm. Practicae Cap.* 19. dicendi: *Septenarius, cuius numeri mensura sit, nulla alia via certius explorari potest, quam diuisione ipsa.* Inueni tamen regulas etiam pro septenarii multiplo dignoscendo in duobus auctoribus, quarum vtramque examinabo; adiuncturus deinde nouam, in quam ipse ante complures annos casu incidi.

§. 2. Prima est *Mich. Stifelii*, in *Arithm. Integra, Lib. I. Cap.* 2. vbi haec leguntur: *Septenarius quemlibet numerum componit, et numerat, qui colligitur ex tribus, sex, nouem, aut duodecim, terminis proportionalitatis duplae, quadruplae, aut sedecuplae.* Quamuis autem videatur hanc obseruationem ad enumeratos solos hos modulos restringere: facile tamen demonstrari potest, generaliter hoc verum esse, de quibuscunque terminis harum progressio-

 num

num ſibi inuicem immediate ſuccedentibus, quorum numerus eſt $3e$; et de Proportionalitatibus, quarum denominator generalis eſt 2^{2p}. Nam ſit Progreſſionis cuiuscunque Geometricae terminus primus $= a$, denominator $= m$, numerus terminorum $= n$; erit ſumma horum terminorum $= \frac{(m^n - 1)a}{m-1}$; iam vero in allegato caſu fit $a = 2^r$, poſito r pro numero quocunque integro; proportionalitas enim, de qua loquitur *Stifelius*, à quacunque potentia binarii incipere poteſt; n vero abit in $3e$, poſito iterum e pro numero quocunque integro; et m in 2^{2p}; ergo generaliter multiplus ſeptenarii debet eſſe numerus quicunque expreſſus per $\frac{(2^{2p \cdot 3e} - 1)2^r}{2^{2p} - 1}$; cum vero 2^r nunquam ſit multiplus ſeptenarii, neceſſe eſt, vt hoc multiplum contineatur in formula $2^{2p \cdot 3e} - 1$, $= 8^{2p \cdot e} - 1$. Iam vero notum eſt, quod generaliter $a^n - 1$ ſemper admittat diuiſorem $a - 1$; poſitis nempe a et n numeris integris; patet ergo, formulam modo allegatam $8^{2p \cdot e} - 1$ diuiſibilem ſemper fore per $8 - 1$, hoc eſt, per ſeptenarium. Et facile hinc concluditur, idem applicari poſſe ad alios quoque diuiſores ſimplices numerorum quorumuis inueſtigandos Verum enim vero quia nihil commoditatis exinde fluit, quam tamen vnicam Arithmetici hoc in negotio quaerunt, hanc extenſionem non proſequar.

§. 3. Alteram regulam tradit in Arithmetica Germanice edita Anno 1591. Vlmenſis quondam Arithmeticus, *Iohannes Krafft*, quae ſequentibus continetur praeceptis.

ceptis. Examinandus ſit numerus 8641975230 an ſit multiplus ſeptenarii. Aſſumantur in hunc finem numeri conſtantes 1. 3. 2. 6. 4. 5. 1. 3. 2. 6. 4. 5. 1. etc. quos Inſtrumentales vocat, et ſubſcribantur numero propoſito hunc in modum:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & & & & 2 & 0 & & & & \\ \cancel{8} & 6 & 4 & 1 & \cancel{9} & \cancel{7} & 5 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 & 1 \end{array}$$

à propoſiti numeri notis abiiciatur ſeptenarius, vbicunquae id fieri poteſt, et reſidui numeri ſuperimponantur; multiplicetur deinde quilibet Inſtrumentalis cum ſuo ſuperiori, et abiectis ſeptenariis à factis hisce particularibus, quotiescunque fieri id poteſt, horum ſumma indagetur; vt in hoc exemplo, $0 + 2 + 4 + 2 + 0 + 3 + 1 + 5 + 5 + 6 = 28$, haec ſumma cum ſit per 7 diuiſibilis: concludendum eſt etiam, propoſitum numerum ſeptenarii multiplum fore. Vel breuius ſic enunciatur regula, omiſſa abiectione ſeptenariorum, quae compendio tantum inſeruit: multiplicetur quilibet Inſtrumentalis cum digito ſuo ſuperimpoſito, et facta haec particularia addantur; quorum ſumma ſi per ſeptem diuidi poſſit, etiam propoſitus numerus erit multiplus ſeptenarii. Demonſtratio autem habetur ſequens. Sit numerus propoſitus huius formae, vtpote in quam formam generalem, extenſam ſi neceſſe ſit, omnes numeri cogi poſſunt:

$$1000000\,a + 100000\,b + 10000\,c + 1000\,d + 100\,e + 10\,f + g$$
$$999999\,a + 99995\,b + 9996\,c + 994\,d + 98\,e + 7\,f + 0;$$

numerus inferior eſt multiplus ſeptenarii, et in ſuperiore literae a, b, c, d, e, f, g, denotant digitos nu-

meri

meri propoſiti, adiectis tot cyphris, quot requirit valor eorum localis. Subtracto hoc ab illo, reſiduum fit ſequens: $1a + 5b + 4c + 6d + 2e + 3f + 1g$; ſi itaque hoc reſiduum ſit diuiſibile per 7, etiam integer numerus propoſitus talis erit. Sed ex hoc reſiduo clare apparet, digitos numeri propoſiti multiplicandos eſſe per ſuos reſpectiuos Inſtrumentales modò indicatos, et videndum, an ſumma ſingulorum horum factorum ſit diuiſibilis per 7. Conſtat ergo veritas huius regulae, ſed paruum exinde ſperandum compendium; citius enim numerus propoſitus ipſe per Septenarii diuiſionem tentatur, quam haec praxis abſoluitur.

§. 4. Neque diffiteor, quod idem diſpendium meam quoque premat regulam, quam nihilominus prioribus adiungam. Quomodo autem ea ſe habeat melius primùm exemplo oſtenſurus ſum. Sit propoſitus numerus 161 examinandus an per 7 diuidi queat. Accipio notam dextimam 1, quae ſi per 3, quem ſemper adhibeo, diuidi poſſit, eam diuido; ſi nequeat, tum à notâ proximâ ſiniſteriore ſumo tot decades, quot neceſſariae ſunt ad ternarii multiplum conſtituendum, id quod ſemper fieri poteſt, cuilibet enim digito poteſt adiungi numerus aliquis decadum, vt multiplum ternarii exſurgat; et in praeſenti exemplo 2; igitur 21 diuiſa per 3, praebent Quotum 7, huic adiungo $16 - 2 = 14$, oritur $7 + 14 = 21$; quod cum ſit multiplum ſeptenarii: concludo, etiam propoſitum 161 talem eſſe. Schemata quorundam exemplorum, cum ſuis compendiis, hic ſubiicio

1736

$$1736^{(3}\,2 + 173 = 175^{(3}\,5 + 16 = 21.$$
$$1617^{(3}\,9 + 159 = 168^{(3}\,6 + 15 = 21.$$
$$14^{(3}\,8 + 1 - 2 = 7.$$
$$21^{(3}\,7 + 2 - 2 = 7.$$
$$543^{(3}\,1 + 54 = 55^{(3}\,5 + 4 = 9.$$

Cuius operationis vt reddam rationes, assumo numerum quemcunque $a+b$, ita tamen vt b designet assumti numeri digitum primum, siue in loco vnitatum positum. Ponatur deinde digitus c talis, vt $10\,c+b=3\,m$, dico, si fuerit $\frac{1}{10}\,a-c+m=7\,n$, numeri propositi $a+b$ mensuram fore septenarium. Nam ex posteriori aequatione deducitur $a=70\,n+10\,c-10\,m$, ex priori oritur $b=3\,m-10\,c$, ergo numerus propositus $a+b$ abit in hunc, factis substitutionibus, $70\,n+10\,c-10\,m+3\,m-10\,c=70\,n-7\,m$, qui omnino est multiplus septenarii. Idem vt exemplo numerico illustretur, ponam examinandum esse numerum 1617, erit itaque $1617=1610+7$, ergo $a=1610$, $b=7$. Assumo deinde digitum talem $2=c$ (erit enim c semper vnus ex his tribus digitis $0, 1, 2,$) vt $10\,c+b=3\,m$, hoc est in hoc exemplo $10.2+7=3.9$ vnde $m=9$; si itaque fuerit $\frac{1}{10}\,a-c+m=7\,n$, numerus propositus erit multiplus septenarii. Est autem omnino $161-2+9=168=7.24$, vnde $n=24$; et quia Quotus numeri dati per 7 diuisi generaliter est $10\,n-m$, erit is in hoc casu $=240-9=231$. Quodsi vero cuidam non appareat numerum 168 esse multiplum septenarii, operatio antecedens cum hoc numero 168 repetenda erit.

SOLVTIO
PROBLEMATIS ARITHMETICI
DE
INVENIENDO NVMERO
QVI PER DATOS NVMEROS DIVISVS, RELINQVAT DATA RESIDVA.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Reperiuntur in vulgaribus arithmeticorum libris passim huiusmodi problemata, ad quae perfecte resoluenda plus studii et sollertiae requiritur quam quidem videatur. Quamuis enim plerumque regula sit adiecta, cuius ope solutio obtineri queat, tamen ea vel est insufficiens solique casui proposito conuenit, ita vt circumstantiis quaestionis parum immutatis, ea nullius amplius sit vsus; vel subinde etiam solet esse falsa, Ita quadratorum magicorum constructio iam pridem ab arithmeticis est tradita; quae autem cum esset insufficiens maiora ingenia *Labirii* et *Sauverii* ad perficiendum requisiuit. Simili quoque modo vbique fere ocurrit istud problema, vt inueniatur numerus, qui per 2, 3, 4, 5, et 6 diuisus relinquat vnitatem, per 7 vero diuidi queat sine residuo: methodus vero idonea ad huiusmodi problemata soluenda nusquam exhibetur, solutio

tio enim ibi adiecta in hunc tantum casum competit, atque tentando potius absoluitur.

§. 2. Si quidem numeri, per quos quaesitus numerus diuidi debet, sunt parui, prout in hoc exemplo, tentando non difficulter quaesitus numerus inuenitur; difficillima autem foret istiusmodi solutio, si diuisores propositi essent valde magni. Cum itaque ad huius generis problemata soluenda methodus etiamnum habeatur nulla genuina, quae ad magnos diuisores aeque pateat, ac ad paruos; non inutiliter operam meam collocatam esse confido, dum in huiusmodi methodum inquisiui, qua sine tentatione pro maximis etiam diuisoribus talia problemata resolui queant.

§ 3. Quo igitur, quae hac de re sum meditatus, distincte exponam, a casu incipio simplicissimo, quo vnicus tantum datur diuisor, numerusque quaeritur, qui per illum diuisus datum relinquat residuum. Requiratur scilicet numerus z, qui per numerum a diuisus relinquat p pro residuo. Huius quidem quaestionis solutio est facillima, erit enim $z = ma + p$, denotante m numerum quemcunque integrum; interim tamen obseruari conuenit hanc solutionem esse vniuersalem, omnesque numeros satisfacientes complecti. Praeterea ex ea quoque intelligitur, si vnus habeatur numerus satisfaciens, ex eo innumerabiles alios satisfacientes quoque posse inueniri, dum ille numerus quocunque multiplo ipsius a vel augeatur, vel si fieri potest, minuatur.

Erit

Erit autem p seu $0a+p$ minimus numerus satisfaciens, hunc excipit $a+p$, quem porro sequuntur $2a+p$, $3a+p$, $4a+p$, etc. qui numeri omnes constituunt, progressionem arithmeticam differentiam constantem habentem a.

§. 4. Hoc exposito sequitur casus, quo duo diuisores cum suis residuis proponuntur, qui est praecipuus, et sequentes omnes in se complectitur. Nam quotcunque propositi fuerint diuisores, quaestio semper ad hunc casum, quo duo tantum proponuntur, reduci poterit, quemadmodum in sequentibus monstrabo. Quaeri igitur oporteat numerum z, qui per a diuisus relinquat p, per b vero diuisus relinquat q; sitque numerus a maior numero b. Cum ergo numerus quaesitus z ita debeat esse comparatus vt per a diuisus relinquat p, necessario in hac forma $ma+p$ continebitur, eritque idcirco $z=ma+p$. Deinde ex altera conditione, qua z per b diuisus relinquere debeat q, erit $z=nb+q$. Quamobrem, cum sit $ma+p=nb+q$, determinari debebunt numeri integri loco m et n substituendi, vt sit $ma+p=nb+q$, quibus inuentis erit $ma+p$ seu $nb+q$ numerus quaesitus z.

§. 5. Quia ergo est $ma+p=nb+q$, erit $n=\frac{ma+p-q}{b}$ seu posito $p-q=v$, erit $n=\frac{ma+v}{b}$. Hanc ob rem definiri oportet numerum m, vt $ma+v$ diuidi possit sine residuo per b. Quia est $a>b$ ponatur $a=\alpha b+c$; erit $n=m\alpha+\frac{mc+v}{b}$; oportet ergo vt mc

$+v$

$+v$ diuifionem per b admittat; funt autem α et c numeri cogniti, qui reperiuntur ex diuifione ipfius a per b; erit enim α quotus et c refiduum. Ponatur porro $\frac{mc+v}{b} = A$, erit $m = \frac{Ab-v}{c}$; quare numerum A inueniri oportet, vt $Ab-v$ diuidi queat per c. Si eueniat, vt v per c diuidi poffit, operatio iam poterit finiri; fumto enim $A = o$, erit $m = -\frac{v}{c}$ et $z = -\frac{\alpha v}{c} + p$ quae expreffio, etiamfi euadat negatiua, tamen ad infinitos numeros affirmatiuos pro z inueniendos eft idonea.

§. 6. Sin autem v per c non poteft diuidi, quo $\frac{Ab-v}{c}$ fiat numerus integer, pono $b = \beta c + d$, feu diuido b per c, dicoque quotum $= \beta$ et refiduum $= d$. Quo facto erit $\frac{Ab-v}{c} = A\beta + \frac{Ad-v}{c} = m$, debebitque $\frac{Ad-v}{c}$ effe numerus integer fit is $= B$, fiet $A = \frac{Bc+v}{d}$. Si nunc v per d diuidi poterit, facio $B = o$, eritque $A = \frac{v}{d}$, et $m = \frac{\beta v}{d}$. Sin autem v per d non eft diuifibile, pono porro $c = \gamma d + e$; eritque $A = B\gamma + \frac{Be+v}{d}$. Atque pono $\frac{Be+v}{d} = C$ ut fit $B = \frac{Cd-v}{e}$. Si nunc v per e diuidi poterit, pono $C = o$ eritque $B = -\frac{v}{e}$, et $A = -\frac{\gamma v}{e}$ atque $m = -\frac{\beta\gamma v}{e} - \frac{v}{e}$; fin $\frac{v}{e}$ nondum fuerit integer numerus, pono $d = \delta e + f$, eritque $B = C\delta + \frac{Cf-v}{e}$; atque facio $\frac{Cf-v}{e} = D$, ut fit $C = \frac{De+v}{f}$, vbi videndum eft vtrum v per f diuidi poffit an fecus, atque in vtroque cafu vt fupra operatio debet inftitui.

 §. 7. Quia

§. 7. Quia autem $a > b$, atque $b > c$ et $c > d$ etc. hac ſerie a, b, c, d, e, f, etc. continuanda perpetuo ad minores numeros deuenitur, ita vt tandem ad tam paruum perueniri oporteat, qui ſit pars aliquota ſeu diuiſor ipſius v. Sunt autem c, d, e, f etc. continua reſidua ordinariae operationis, qua maximus communis diuiſor ipſorum a et b inueſtigari ſolet, quam operationem hic appono.

$n = \frac{ma+v}{b}$	$b \mid a \mid \alpha$	$a = \alpha b + c$
$n = \frac{Ab-v}{c}$	$c \mid b \mid \beta$	$b = \beta c + d$
$A = \frac{Bc+v}{d}$	$d \mid c \mid \gamma$	$c = \gamma d + e$
$B = \frac{Cd-v}{e}$	$e \mid d \mid \delta$	$d = \delta e + f$
$C = \frac{De+v}{f}$	$f \mid e \mid \varepsilon$	$e = \varepsilon f + g$
$D = \frac{Ef-v}{g}$	$g \mid f \mid \zeta$	$f = \zeta g + h$
$E = \frac{Fg+v}{h}$	$h \mid g \mid \eta$	$g = \eta h + i$
$F = \frac{Gh-v}{i}$	$i \mid h \mid \theta$	$h = \theta i + k$
$G = \frac{Hi+v}{k}$	k	

§. 8. Haec ergo operatio, qua ad maximum communem diuiſorem numerorum a et b vti ſolemus, eousque eſt continuanda, donec ad reſiduum perueniatur, quod diuidat v. Quo inuento ſequenti modo inueſtigabimus numerum m. Si v iam per b diuidi poterit, fiet $m = 0$. Si v per c diuiſionem admittat, fiet $A = 0$ et $m = \frac{-v}{c}$. Si v per d diuidatur, fiet $B = 0$ et $A = \frac{v}{d}$ atque $m = \frac{bv}{cd} - \frac{v}{c} = \frac{\beta v}{d}$ ob $b = \beta c + d$. Quo autem valores ipſius m facilius reperiantur primo valor ipſius

A per

A per B, tum valor ipsius B per C et ita porro exprimi debet, vnde nata est ista tabula.

1. $m = \frac{Ab - v}{c}$,

2. $m = \frac{Bb + \beta v}{d}$

3. $m = \frac{Cb - v(1 + \beta\gamma)}{e}$

4. $m = \frac{Db + v(\delta + \beta\gamma\delta + \beta)}{f}$

5. $m = \frac{Eb - v(\delta\varepsilon + \beta\gamma\delta\varepsilon + \beta\varepsilon + \beta\gamma + 1)}{g}$

6. $m = \frac{Fb + v(\delta\varepsilon\zeta + \beta\gamma\delta\varepsilon\zeta + \beta\varepsilon\zeta + \beta\gamma\zeta + \zeta + \delta + \beta\gamma\delta + \beta)}{h}$ etc.

De his valoribus est notandum, signa ipsius v alternari hoc modo $- + - + - +$ etc. Deinde coefficientes ipsius v hanc tenent legem:

$$\begin{array}{llllll} & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta \\ 1, & \beta, & \beta\gamma + 1, & \beta\gamma\delta + \delta + \beta, & \beta\gamma\delta\varepsilon + \delta\varepsilon + \beta\varepsilon + \beta\gamma + 1, & \text{etc.} \end{array}$$

cuius progressionis quisque terminus est aggregatum ex termino praecedente in indicem supra se scriptum multiplicato et termino hunc praecedente.

§. 9. Si igitur v per b diuidi poterit, erit $m = 0$; si v per c diuidi potest erit $m = \frac{-v}{c}$ propter $A = 0$; si v per d diuidi poterit, fiat $B = 0$; eritque $m = \frac{v}{d}\beta$. Vnde sequens oritur lex:

Si

Si eſt numerus integer	erit
$\frac{v}{b}$	$m=0$
$\frac{v}{c}$	$m=-\frac{v}{c}$
$\frac{v}{d}$	$m=+\frac{v}{d}\beta$
$\frac{v}{e}$	$m=-\frac{v}{e}(\beta\gamma+1)$
$\frac{v}{f}$	$m=+\frac{v}{f}(\beta\gamma\delta+\delta+\beta)$
$\frac{v}{g}$	$m=-\frac{v}{g}(\beta\gamma\delta\varepsilon+\delta\varepsilon+\beta\varepsilon+\beta\gamma+1)$
$\frac{v}{h}$	$m=+\frac{v}{h}(\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta+\delta\varepsilon\zeta+\beta\varepsilon\zeta+\beta\gamma\zeta+\beta\gamma\delta+\zeta+\delta+\beta)$ etc.

Si nunc hi ipſius m valores in aequatione $z=ma+p$ ſubſtituantur, reperietur vt ſequitur:

Si eſt integer	erit
$\frac{v}{b}$	$z=q+\frac{bv}{b}1=q+v$
$\frac{v}{c}$	$z=q-\frac{bv}{c}\alpha$
$\frac{v}{d}$	$z=q+\frac{bv}{d}(\alpha\beta+1)$
$\frac{v}{e}$	$z=q-\frac{bv}{e}(\alpha\beta\gamma+\alpha+\gamma)$
$\frac{v}{f}$	$z=q+\frac{bv}{f}(\alpha\beta\gamma\delta+\alpha\beta+\alpha\delta+\gamma\delta+1)$
$\frac{v}{g}$	$z=q-\frac{bv}{g}(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon+\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\varepsilon+\alpha\delta\varepsilon+\gamma\delta\varepsilon+\alpha+\gamma+\varepsilon)$ etc

§. 10. Ad inueniendum ergo numerum z, qui per a diuiſus relinquat p, et per b diuiſus relinquat q, poſito $p-q=v$ ſequentem habebimus regulam; Inſtituatur operatio ad maximum communem diuiſorem inter a et b inueniendum, eaque eovsque producatur, donec ad reſiduam perueniatur, quod ſit diuiſor ipſius v, teneaturque quotus

quotus ex diuisione ipsius v per illud residuum resultans, qui sit Q, vbi operatio abrumpatur Deinde in serie scribantur quoti α, β, γ, etc. in hac diuisione orti, ex iisque construatur, noua series 1, α, $\alpha\beta + 1$, $\alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma$, etc. quae ex illa quotorum serie formatur, atque eovsque continuari debet, quovsque per illam seriem fieri potest. Sub hac noua serie scribantur signa alternantia $+ - - + -$ etc. vltimusque terminus cum suo signo multiplicetur per Q, atque etiam per minorem diuisorem propositum b, ad factum addatur residuum q diuisori b respondens. Quo facto erit aggregatum numerus quaesitus.

§. 11. Inuento hoc modo vno numero satisfaciente z, ex eo statim innumerabiles aliis numeri satisfacientes reperiuntur. Nam si z per a diuisum p relinquit et per b diuisum q; eandem proprietatem habebunt quoque numeri $ab + z$, $2ab + z$, et $mab + z$. Multiplum quidem facti ab continuo adiici vel auferri potest, si a et b fuerint inter se numeri primi; at si a et b fuerint numeri compositi, tum etiam sufficit eorum minimum communem diuiduum sumsisse; cuius multiplum quodque adiectum vel ablatum a z dabit numeros satisfacientes; vt si minimus communis diuiduus fuerit M comprehendet mM $+ z$ omnes omnino numeros quaestioni satisfacientes. Quare etiamsi hoc modo saepe numeri negatiui pro z inueniantur, tamen adiiciendo ad eos M vel eius multiplum obtinebuntur numeri affirmatiui. Hac ergo operatione semper minimus numerus satisfaciens

 inue-

inuenietur, ſiquidem minimus communis diuiduus M toties ſubtrahatur, quoties fieri poteſt.

§. 12. Quia exemplis haec operatio maxime illuſtrabitur, quaeramus numerum, qui per 103 diuiſus relinquat 87, et per 57 diuiſus relinquat 25. Erit ergo $a = 103$; $b = 57$; $p = 87$ et $q = 25$, atque $v = 62$; quare operationem ita inſtituo

$$\begin{array}{rrrrrrr}
57 & 103 & 1 & & & & \\
 & 57 & & & & & \\
 & 46 & 57 & 1 & & & \\
 & & 46 & & & & \\
 & & 11 & 46 & 4 & & \\
 & & & 44 & & & \\
 & & & 2 & & &
\end{array} \qquad \tfrac{62}{2} = 31 = Q.$$

$$\begin{array}{cccc}
1, & 1, & 4 & \\
1, & 1, & 2, & 9 \\
+ & - & + & -
\end{array}$$

Nunc eſt $-9 \cdot 31 = -279$; atque numerus quaeſitus $= 25 - 57 \cdot 279$; qui cum fiat negatiuus addo ad eum $3 \cdot 57 \cdot 103$ ſeu $57 \cdot 309$, vnde inuenitur $25 + 57 \cdot 30 = 1735$, qui eſt minimus numerus quaeſitus; omnes vero ſatisfacientes continentur in hac forma $m \cdot 103 \cdot 57 + 1735$.

§. 13. Quaeramus porro numerum, qui per 41 diuiſus relinquat 10, et per 29 diuiſus relinquat 28. In

In hoc exemplo compendium adhibebo, quod in aliis ſimilibus computationibus magnam habebit vtilitatem, nam cum in diuiſione per 29 reſiduum ſit 28, reſtare quoque poterit in eadem diuiſione -1 ſi quotus vnitate maior accipiatur. Sumo ergo -1 pro reſiduo diuiſoris 29; eritque $a = 41$, $b = 29$, $p = 10$ et $q = -1$; vnde erit $v = 11$. Operationem ergo vt ante inſtituo ita

$$\begin{array}{r|c|l}
29 & \begin{array}{c}41\\29\end{array} & 1 \\
\hline
12 & \begin{array}{c}29\\24\end{array} & 2 \\
\hline
5 & \begin{array}{c}12\\10\end{array} & 2 \\
\hline
2 & \begin{array}{c}5\\4\end{array} & 2 \\
\hline
 & 1 &
\end{array}
\qquad \tfrac{11}{1} = 11 = Q.$$

$$\begin{array}{ccccc}
1, & 2, & 2, & 2. & \\
1, & 1, & 3, & 7, & 17 \\
+ & - & + & - & +
\end{array}$$

Erit ergo $+17 \cdot 11 = 187$; atque numerus quaeſitus $= -1 + 29 \cdot 187$. Subtrahatur $29 \cdot 4 \cdot 41$ erit is $= -1 + 29 \cdot 23 = 666$. Satisfacient ergo quaeſtioni omnes numeri in hac forma $m \cdot 41 \cdot 29 + 666$ contenti.

§. 14. Com-

§. 14. Compendium hinc ſe prodit ad ſupra datam regulam adiiciendum, quod in hoc conſtat, vt, poſtquam numerus Q per ultimum ſeriei formatae terminum eſt multiplicatus, factum per maiorem diuiſorem *a* diuidatur, atque reſiduum loco ipſius facti adhibeatur. Scilicet hoc reſiduum per minorem diuiſorem *b* multiplicatum atque reſiduo *q* auctum dabit numerum quaeſitum. Atque iſte numerus hoc pacto inuentus erit minimus, qui ſatisfacit. Praeterea hac diuiſione effici poteſt vt reſiduum prodeat affirmatiuum, etiamſi diuidendus fuerit negatiuus. Ita in primo exemplo §. 12 habebatur -279, qui numerus per 103 diuiſus, ſumto quoto $=3$, relinquit $+30$. Ex quo numerus quaeſitus minimus eſt $= 25 + 57 \cdot 30 = 1735$.

§. 15. Fieri deinde etiam poteſt, vt huiusmodi exempla proponantur, quae ſolutionem omnino non admittant, vti ſi quaeratur numerus qui per 24 diuiſus relinquat 13, per 15 vero diuiſus relinquat 9; talis enim numerus per alteram conditionem deberet eſſe per 3 diuiſibilis, per alteram ſecus. Idem vero etiam ipſa regula oſtendit, nunquam enim ad tale reſiduum, excepto 0, deuenietur, quod diuidat *v* ſeu 4, vti ex ipſa operatione videre eſt

$$\begin{array}{r|r|l}
15 & 24 & 1 \\
 & 15 & \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|r|l}
9 & 15 & 1 \\
 & 9 & \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|r|l}
6 & 9 & 1 \\
 & 6 & \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|r|l}
3 & 6 & 2 \\
 & 6 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

Huiusmodi vero exempla exhiberi non poſſunt, niſi diuiſores a et b ſint numeri compoſiti inter ſe; nam ſi fuerint inter ſe primi, ſemper numeri quaeſiti exhiberi poſſunt. Sin autem diuiſores a et b fuerint numeri compoſiti, atque v non diuidi potuerit per maximum ipſorum a et b diuiſorem, tum ſemper problema ad abſurdum deducit. Hocque eſt criterium, ex quo, num problema ſolutionem admittat, diiudicari poteſt, antequam operatio inſtituatur.

§. 16. Expoſito hac methodo vniuerſali, qua omnis generis huius problemata facile reſolui poſſunt, ex ea alia regula poteſt formari, quae quidem ad vſum non eſt tam facilis, at ſimplicitatis plus in ſe habet. Oritur ea autem, ſi in valoribus ſupra inuentis ipſius (z) (§. 9), loco α, β, γ, etc. eorum valores ex aequationibus $a = \alpha b + c$, $b = \beta c + d$, etc. ſubſtituantur. Nam ſi inſtituatur operatio ad maximum communem diuiſorem inter a et b inueniendum, ex eaque innoteſcant

 con-

continua reſidua c, d, e, etc. dico fore numerum $z = q + abv\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} - \frac{1}{de} + \frac{1}{ef} - \text{etc.}\right)$, eousque hac ſerie continuanda, donec v per factorem aliquem denominatoris diuidi queat. Vti ſi quaeratur numerus, qui per 16 diuiſus relinquat 1 et per 9 diuiſus relinquat 7, erit $a = 16$, $b = 9$, $p = 1$, $q = 7$, et $v = -6$. Quare

$$\begin{array}{c|c|c}
9 & 16 & 1 \\
 & 9 & \\
\hline
7 & 9 & 1 \\
 & 7 & \\
\hline
2 & 7 & 3 \\
 & 6 & \\
\hline
 & 1 &
\end{array}$$

Hinc ergo erit $z = -6.\,9.\,16\left(\frac{1}{16.\,9} - \frac{1}{9.\,7} + \frac{1}{7.\,2}\right) = 7 - 6 + \frac{6.\,16}{7} - \frac{3.\,9.\,16}{7} = 1 - 3.\,16 = -47$. Satisfaciunt ergo omnes numeri $m.\,144 - 47$ ſeu $m.\,144 + 97$; eorumque minimus eſt 97. Superior formula generalis ipſius z etiam in hunc modum poteſt exprimi $z = p - abv\left(\frac{1}{bc} - \frac{1}{cd} + \frac{1}{de} - \frac{1}{ef} + \text{etc.}\right)$ quae ſeries fractionum eousque continuari debet, donec valor ipſius z fiat numerus integer.

§. 17. Conſiderabo nunc quosdam caſus particulares, in quibus a ad b datam habeat relationem; et primo quidem ſit $b = a - 1$ ſeu $a = b + 1$, reſidua vero ex diuiſione numeri quaeſiti per a et b orta ſint vt ante p et q. Erit ergo $c = 1$; ideoque per regulam

lam postremam $z = p - av = p - ap + aq$. Quae expressio si $aq + p > ap$ dat minimum numerum quaesito satisfacientem: at si $aq + p < ap$ tum minimus numerus satisfaciens erit $a^2 - a + p - ap + aq$. Omnes vero numeri satisfacientes in hac formula generali $ma^2 - ma + p - ap + aq$ comprehenduntur, seu etiam in ista $mb^2 + mb - bp + bq + q$. Quicquid nunc sit m si haec quantitas diuidatur per $b^2 + b$ residuum erit minimus numerus quaesito satisfaciens.

§. 18. Quemadmodum hac ratione ope residuorum datorum, quae post diuisionem numeri incogniti per diuisores b et $b + 1$ remanent, ipse numerus incognitus sit inueniendus, docuit *Sifelius* in Commentario ad *Rudolfi* artem Cossicam. Regula eius ita se habet: si fuerit residuum numeri incogniti per $b + 1$ diuisi p, et residuum eiusdem per b diuisi q, iubet q multiplicare per $b + 1$, et p per b^2, horumque factorum aggregatum per $b^2 + b$ diuidere, quod restat post diuisionem, id pronunciat esse numerum quaesitum. Fluit autem haec regula ex nostra generali formula, si ponatur $m = p$, tum enim habetur $b^2 p + (b + 1)q$, quod per $b^2 + b$ diuisum relinquit minimum numerum quaesitum.

§. 19. Interim tamen minori opera minimus numerus satisfaciens reperietur sequenti modo: Residuum q, quod ex diuisione quaesiti numeri per b oritur, multiplicetur per $b + 1$, factumque addatur ad numerum pronicum ipsius b puta ad $b^2 + b$, hinc subtrahatur factum

 ex

ex residuo p, quod ex diuisione numeri quaesiti per $b+1$ remanet, ducto in b; si id quod restat fuerit $< b^2+b$, erit id ipse numerus quaesitus, sin vero fuerit $> b^2+b$ subtrahatur b^2+b, eritque residuum numerus quaesitus. Vt si quaeratur numerus, qui per 100 diuisus relinquat 75 et per 101 diuisus 37; tum addatur 10100 ad factum ex 75 in 101 seu 7575, vt habeatur 17675, hinc subtrahatur factum ex 37 in 100 seu 3700 remanebit 13975, a quo si 10100 auferantur prodibit 3875, qui est minimus numerus quaesitus.

§. 20. Si quaeratur numerus qui per b diuisus relinquat q et per $nb+1$ diuisus p; erit iterum $v=1$ atque numerus quaesitus $z=p-av=p-ap+aq=(nb+1)q-nbp$ ob $a=nb+1$. Atque omnes numeri satisfacientes continebuntur in hac expressione $mnb^2+mb+(nb+1)q-nbp$, ex qua sumto pro m numero quocunque, inuenietur minimus numerus satisfaciens, si ea expressio diuidatur per nb^2+b; residuum enim erit minimus numerus satisfaciens.

§. 21. Casus porro notari meretur, quo residua p et q, quae oriuntur ex diuisione quaesiti numeri per datos diuisores a et b, sint inter se aequalia seu $p=q$. Hoc enim casu fit $v=0$, ideoque inuenitur numerus quaesitus $z=p$. Si igitur sit M minimus communis diuiduus numerorum a et b, omnes numeri satisfacientes continebuntur in hac formula $mM+p$. Eadem pla-

plane formula quoque satisfacit, si quotcunque fuerint diuisores a, b, c, d, etc. per quos singulos numerus quaesitus diuisus relinquat p, si quidem M denotet omnium diuisorum minimum communem diuiduum. Omnes ergo numeri huiusmodi quaestionibus satisfacientes ita sunt comparati, vt per M diuisi relinquant p.

§. 22. Hinc satis tritum problema, quo quaeritur numerus, qui per 2, 3, 4, 5, 6 diuisus relinquat 1 per 7 vero nihil relinquat, solui potest. Omnes enim numeri qui per 2, 3, 4, 5, 6 diuisi relinquunt 1 hanc habent proprietatem vt per 60, qui numerus est minimus communis diuiduus numerorum 2, 3, 4, 5, et 6, diuisi relinquant 1. Problema ergo huc redit vt inueniatur numerus qui per 60 diuisus relinquat 1, per 7 vero sit diuisibilis; erit ergo $a = 60$, $b = 7$, $p = 1$, $q = 0$, et $v = 1$. Facta ergo operatione.

$$\begin{array}{r|r|l}
7 & 60 & 8 \\
 & 56 & \\
\hline
4 & 7 & 1 \\
 & 4 & \\
\hline
3 & 4 & 1 \\
 & 3 & \\
\hline
 & 1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\frac{1}{1} = 1 = Q. \\
8,\ 1,\ 1. \\
1,\ 8,\ 9,\ 17 \\
+\ -\ +\ -
\end{array}$$

Erg. $z = 0 - 119 + 420m$.
et si $m = 1$ erit $z = 301$.

§. 23. Maiorem difficultatem habere videtur hoc problema, quo quaeritur numerus qui per numeros 2, 3, 4, 5, 6 diuisus respectiue relinquat numeros 1, 2, 3, 4, 5, at per 7 diuidi queat, propter residua proposita inaequalia. Sed haec quaestio congruit cum hac: inuenire numerum qui per 2, 3, 4, 5, 6 diuisus relinquat -1 et per 7 nihil. Illi iam conditioni satisfacit forma $60m-1$; quare numerus quaeritur qui per 60 diuisus -1, at per 7 nihil relinquat, fit itaque $a=60$, $b=7$, $p=-1$, $q=0$, et $v=-1$ atque operatione vt ante instituta est $Q=-1$ quod in -17 ductum dat $+17$, hocque per b multiplicatum dat 119 numerum quaesitum.

§. 24. Ex his duobus exemplis apparet, quomodo huiusmodi quaestiones, in quibus quotcunque diuisores proponuntur, quibus autem duo tantum residua respondent, per supra datas regulas solui queant; statim enim quaestio ad quaestionem duorum diuisorum reducitur: vti si omnia residua sunt aequalia, quaestio perinde soluitur, ac si vnicus diuisor fuisset propositus. At si residua sunt inaequalia, tum nihilominus repetendis his operationibus, quibus pro duobus diuisoribus vsi sumus, solutio poterit obtineri. Primo enim duobus diuisoribus satisfieri debet, tum tertius assumitur, deinde quartus, donec omnibus erit satisfactum. Hoc vero commodissime exemplis explicabitur.

§. 25. Quaeramus igitur numerum, qui per 7 diuisus relinquat 6, per 9 relinquat 7, per 11 relinquat 8 et per 17 relinquat 1. Ex his iam quatuor condi-

conditionibus ſumamus duas quasque, vt duas priores, et inueſtigemus omnes numeros iis ſatisfacientes. Erit ergo $a = 9$, $b = 7$, $p = 7$, $q = 6$ et $v = 1$, quare operatio inſtituetur vti ſequitur:

$$\begin{array}{c|c|c}
7 & 9 & 1 \\
  & 7 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c}
2 & 7 & 3 \\
  & 6 & \\
  & 1 &
\end{array} \qquad Q = 1.$$

$$\begin{array}{ccc}
1, & 3, & \\
1, & 1, & 4 \\
+ & - & +
\end{array}$$

fietque $z = 6 + 1.4.7 = 34$.

Omnes ergo numeri his duabus conditionibus ſatisfacientes continentur in hac forma $63m + 34$, ſeu ita erunt comparati, vt per 63 diuiſi relinquant 34.

§. 26. Problema ergo huc eſt reductum, vt inueniatur numerus, qui diuiſus per 63 relinquat 34, per 11 relinquat 8, et per 17 relinquat 1. Harum trium conditionum ſumantur duae priores eritque $a = 63$, $b = 11$, $p = 34$, $q = 8$, et $v = 26$, vnde fluit ſequens operatio:

$$\begin{array}{r|c|l} 11 & 63 & \\ & 55 & 5 \\ \hline 8 & 11 & \\ & 8 & 1 \\ \hline 3 & 8 & \\ & 6 & 2 \\ \hline & 2 & \end{array} \qquad Q = \tfrac{26}{2} = 13.$$

$$\begin{array}{llll} 5, & 1, & 2 & \\ 1, & 5, & 6, & 17 \\ + & - & + & - \end{array} \quad \text{ergo } z = m.63.11 + 8 - 13.17.11.$$

Quo minimus numerus satisfaciens reperiatur, ponatur $m = 4$; erit $z = 8 + 31.11 = 349$. Omnes ergo numeri satisfacientes in hac continentur forma $693m + 349$, seu hanc habebunt proprietatem, vt per 693 diuisi relinquant 349.

§. 27. Problema ergo tandem huc est reductum, vt definiatur numerus, qui per 693 diuisus relinquat 349 et per 17 diuisus relinquat 1. Facio ergo $a = 693$, $b = 17$, $p = 349$, $q = 1$, et $v = 348$, sequentemque iuxta data praecepta instituo operationem:

$$\begin{array}{r|c|l} 17 & 693 & \\ & 697 & 41 \\ \hline & -4 & \end{array} \qquad Q = \tfrac{348}{-4} = -87.$$

$$\begin{array}{ll} 41 & \\ 1, & 41 \\ + & - \end{array} \qquad z = 693.17.m + 1 + 41.87.17.$$

Quo

Quo minimus numerus ſatisfaciens prodeat pono $m = -5$, eritque $z = 1 + 102 . 17 = 1735$, qui eſt minimus numerus quatuor praeſcriptis conditionibus ſatisfaciens Omnes autem qui ſatisfaciunt hac continentur formula $11781 m + 1735$. Ex hoc exemplo ergo abunde intelligitur, quomodo omnes huiusmodi quaeſtiones ſint reſoluendae.

§. 28. Pertinet huc ſolutio problematis chronologici ſatis cogniti, quam, prout ex his regulis inueni, apponam, in quo annus a Chriſto nato quaeritur, ex datis cyclis ſolis et lunae vna cum indictione Romana illius anni. Cum enim cyclus ſolis ſit reſiduum, quod oritur diuiſione numeri anni nouenario aucti per 28; cyclus vero lunae ſit reſiduum, quod oritur diuiſione numeri anni vnitate aucti per 19; Indictio vero Romana ſit reſiduum, quod oritur, ſi numerus anni ternario auctus per 15 diuidatur, ſequens prodiit ſolutio. Sit p cyclus ſolis, q cyclus lunae et r indictio Romana; multiplicetur p per 4845; q per 4200; et r per 6916, haec tria producta cum numero 3267 in vnam ſummam coniiciantur, eaque diuidatur per 7980; quod remanebit reſiduum erit numerus anni quaeſiti. Si annus periodi Iulianae requiratur, tum operatio eodem modo inſtituatur, niſi quod numerus 3267 negligi debet; quae eſt regula iam paſſim tradita.

§. 29. Multam quidem operam requirit ſolutio pro pluribus diuiſoribus, ſi quidem problema continuo

 ad

ad casum, quo diuisorum numerus vnitate minuitur, vt in praecedente exemplo fecimus, reducitur; At ex ea ipsa operatione facilior multoque breuior via sese prodit, qua statim proposita quaestio, quotcunque etiam fuerint diuisores, ad casum duorum diuisorum reduci potest; quae regula ita se habet: Inueniendus sit numerus, qui per diuisores a, b, c, d, e, quos numeros inter se primos esse pono, diuisus relinquat respectiue haec residua p, q, r, s, t. Huic quaestioni satisfacit iste numerus $Ap + Bq + Cr + Ds + Et + mabcde$, in qua expressione A est numerus, qui per factum $bcde$ diuisus nihil relinquat, per a vero diuisus relinquat vnitatem; B est numerus, qui per $acde$ diuisus relinquat nihil, per b vero vnitatem; C est numerus qui per $abde$ diuisus nihil relinquat, per c vero vnitatem; D est numerus qui per $abce$ nihil relinquat, per d vero vnitatem; atque E est numerus per $abcd$ diuisus nihil relinquat, per e vero vnitatem, qui ergo numeri per regulam pro duobus diuisoribus datam inueniri possunt.

DE

DE MOTV PLANETARVM ET ORBITARVM DETERMINATIONE

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

CVm hoc tempore ſatis conſtet, planetas in ellipſibus moueri, in quarum altero foco ſol ſit poſitus, motumque ita eſſe comparatum, vt tempora areis circa ſolem deſcriptis ſint proportionalia; quaeſtio de motu planetarum duplex oritur, quarum altera qualitatem ellipſis, poſitionem abſidum ſcilicet et excentricitatem requirit, altera vero ipſius planetae motum in ſua orbita. Vtramque hanc quaeſtionem hic euoluere, et quantum calculi difficultas permittet, reſoluere conabor. Tabula IV.

§. 2. Primum quidem orbitam planetae pro cognita habebo, atque motum planetae in ea definire ſtudebo. Sit igitur ADB ſemiſſis orbitae planetae cuiusdam P, cuius abſis ſumma ſeu aphelion ſit in A, perihelion vero in B, atque ſol ſit in foco ellipſis S poſitus. Sit porro C centrum orbitae, et ponatur ſemiaxis AC vel BC $=a$, diſtantia foci S a centro C ſeu excentricitas CS $=b$, erit ſemiaxis coniugatus $CD = \sqrt{(a^2-b^2)}$. Ponamus nunc planetam ex aphelio A perueniſſe in P, Fig. 1.

hincque momento temporis progredi in p, ex quibus punctis tam ad S rectae, quam ad axem AB perpendicula ducantur; ponaturque $CQ=r$, erit $PQ=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-r^2)}}{a}$, et $PS=a+\frac{br}{a}$.

§. 3. His positis exprimit angulus ASP planetae anomaliam veram seu coaequatam, quam ponam $=z$. Anomalia vero media proportionalis est tempori, quo planeta spatium AP absoluit, seu areae ASP. Erit ergo area ADB ad aream ASP vt angulus duobus rectis aequalis ad anomaliam mediam. Consideremus nunc circulum radii 1, cuius arcus sit anomalia vera $=z$, in eodem ergo si anomaliam mediam inuenire velimus, quae aequalis sit arcui x; erit area ADB ad angulum duobus rectis aequalem seu ad duplam aream semicirculi illius vt AC. CD ad 2, i. e. vt $a\sqrt{(a^2-b^2)}$ ad 2. Fiet igitur $a\sqrt{(a^2-b^2)}:2=\text{Area. ASP}:x$, vnde est $x=\frac{2\,\text{Area ASP}}{a\sqrt{(a^2-b^2)}}$.

§. 4. Cum sit anomalia vera z aequalis angulo ASP, erit eius incrementum dz aequale PSp. Angulus vero PSp aequatur areolae PSp bis sumtae per quadratum PS diuisae; erit scilicet $dz=\frac{2\,\text{Areol. }PSp}{(a+\frac{br}{a})^2}=\frac{2a^2\,PSp}{(a^2+br)^2}$. At ex superiore aequatione erit $dx=\frac{2\,PSp}{a\sqrt{(a^2-b^2)}}$. Restat ergo, vt elementum areae PSp idoneo modo exprimatur, id quod ex consideratione totius areae fiet. Est enim area $ASP=\frac{PQ.QS}{2}+\int PQ.Qq=\frac{(b+r)\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-r^2)}}{2a}$

$-\int$

$-\int\frac{dr\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-r^2)}}{a}$, cuius differentiale eſt $\frac{-dr(a^2+br)\sqrt{(a^2-b^2)}}{2a\sqrt{(a^2-r^2)}}$ quod ergo eſt $= PSp$. Hinc igitur fit elementum anomaliae mediae $dx = \frac{-dr(a^2+br)}{a^2\sqrt{(a^2-r^2)}}$, et elementum anomaliae verae $dz = \frac{-adr\sqrt{(a^2-b^2)}}{(a^2+br)\sqrt{(a^2-r^2)}}$.

§. 5. His duabus aequationibus continetur relatio, quae inter anomaliam mediam et veram intercedit; ad eam ergo definiendam oportet, vt vtraque aequatio integretur, quo tandem aequatio inter z et x elici queat. Quod ad priorem attinet, ea ſtatim abit in hanc $dx = \frac{-dr}{\sqrt{(a^2-r^2)}} - \frac{brdr}{a^2\sqrt{(a^2-r^2)}}$, cuius integralis eſt $x = A.\frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{a} + \frac{b}{a^2}\sqrt{(a^2-r^2)}$, vbi A ſignificat arcum circuli, cuius ſinus eſt quantitas poſtfixa exiſtente ſinu toto $= 1$. Poſito ergo hoc ſinu $\frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{a} = s$, erit $x = A.s + \frac{bs}{a}$.

§. 6. Altera aequatio differentialis eſt $dz = \frac{-adr\sqrt{(a^2-b^2)}}{(a^2+br)\sqrt{(a^2-r^2)}}$ quae cum abſolute, tum plurimis modis per ſeries poteſt integrari. Prae reliquis vero is modus eligendus eſſe videtur, qui huiusmodi det ſeriem, in qua dimenſiones ipſius b in numeratoribus creſcant, quo pro exiguis excentricitatibus ſufficiat duos vel tres terminos initiales aſſumſiſſe.

§. 7. In ſeriem ergo primum conuerto $\sqrt{(a^2-b^2)}$, quae erit iſta $a - \frac{1.b^2}{2a} - \frac{1.1.b^4}{2.4.a^3} - \frac{1.1.3b^6}{2.4.6.a^5}$ etc. $= a - \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} - \frac{b^6}{16a^5}$ etc. Deinde eſt etiam $\frac{a}{a^2+br} = \frac{1}{a} - \frac{br}{a^3} + \frac{b^2r^2}{a^5} - \frac{b^3r^3}{a^7} +$ etc. Hae ergo duae ſeries in ſe inuicem multiplicata dabunt $\frac{a\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2+br} = 1 - \frac{br}{a^2} - \frac{b^2(a^2-2r^2)}{2a^4} + \frac{b^3r(a^2-2r^2)}{2a^6} - \frac{b^4(a^4+4a^2r^2-8r^4)}{8a^8}$

$+\frac{b^5 r(a^4+4a^2r^2-8r^4)}{8a^{10}}-$ etc. Si nunc huius feriei finguli termini ducantur in $\frac{-dr}{\sqrt{(a^2-r^2)}}$ habebitur elementum anomaliae verae dz. Erunt vero omnes termini praeter primum abfolute integrabiles, inuenietur enim $z=A$. $\frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{\alpha}-\frac{b\sqrt{(a^2-r^2)}}{a^2}+\frac{b^2 r\sqrt{(a^2-r^2)}}{2a^4}-\frac{b^3(a^2+2r^2)\sqrt{(a^2-r^2)}}{6a^6}+\frac{b^4 r(a^2+2r^2)\sqrt{(a^2-r^2)}}{8a^8}-$ etc.

§. 8. Dicatur nunc arcus feu angulus V, cuius finus eft $\frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{a}$ et fignum $\int$ denotet pofthac finum anguli poftfcripti; erit $x=V+\frac{b}{a}\int V$, atque per eundem angulum V eiusque finum vna cum multiplorum ipfius finibus z fequenti modo determinabitur, vt fit $z=V-\frac{b}{a}\int V+\frac{b^2}{4a^2}\int 2V-\frac{b^3}{12a^3}(\int 3V+3\int V)+\frac{b^4}{32a^4}(\int 4V+4\int 2V)-\frac{b^5}{80a^5}(\int 5V+5\int 3V+10\int V)+\frac{b^6}{192a^6}(\int 6V+6\int 4V+15\int 2V)-\frac{b^7}{448a^7}(\int 7V+7\int 5V+21\int 3V+35\int V)+$etc. cuius feriei lex facile patet, conftituunt enim denominatores numerales hanc feriem, 1. 1, 2. 2, 3. 4, 4. 8, 5. 16, 6. 32, etc.

§. 9. Commodiffime ergo ex data anomalia media x determinabitur anomalia vera z, fi primum ex aequatione $x=V+\frac{b}{a}\int V$ angulus V per angulum x definiatur, atque is tum in altera aequatione anomaliam veram z exhibente fubftituatur. Difficile autem videtur ex illa aequatione V per x definire, cum fit aequatio transcendens, atque ideo V per x algebraice omnino exprimi nequeat. In id ergo eft incumbendum, vt V quam fieri poteft proxime et minimo labore per x definiafiniatur, id quod mihi ſequenti modo commodiſſime praeſtari videtur, erit ſcilicet $V = x - \frac{b}{a}\int(x - \frac{b}{a}\int(x - \frac{b}{a}\int(x -$ etc. hinc enim admodum erit facile angulum V inuenire. Nam ſumatur log. $\int x$ ab hoc ſubtrahatur log. $\frac{a}{b}$, denuoque ſubtrahatur iſte log. 6, 4637261; reſiduum quaeratur inter logarithmos numerorum naturalium, numerusque reſpondens dabit angulum in minutis primis. Iſte deinde angulus ſubtrahatur ab anomalia media x, reſiduique anguli ſinus capiatur logarithmus, a quo tam log. $\frac{a}{b}$ quam 6, 4637261 ſubtrahatur, numerusque logarithmo reſiduo reſpondens dabit numerum minutorum primorum ab x ſubtrahendum, angulus reſiduus, ſi opus eſſe cenſeatur, denuo eodem modo tractetur, donec tandem neque amplius augeatur neque minuatur; atque tum iſte angulus erit verus valor ipſius V.

§. 10. Inuento hac ratione angulo V, a logarithmo eius ſinus denuo tam log. $\frac{a}{b}$ quam 6, 4637261 ſubtrahatur, et numerus reſiduo reſpondens dabit angulum in minutis primis expreſſum, qui ab V ſubtrahi debet, reſiduumque erit anomalia vera iam ſatis exacta; magis vero correcta euadet ſi ſinus dupli anguli V ſumatur logarithmus ab eoque duplus log. $\frac{a}{b}$, et log. 4. atque praeterea 6, 4637261 ſubtrahantur reſidui enim numerus reſpondens dabit minuta prima inſuper vel addenda vel ſubtrahenda prout V vel minor vel maior fuerit quam 90°. Praeterea etiam ſequentes termini ſeriei, cui z aequalis eſt inuenta, eodem modo computari

tari poſſunt, quamdiu anguli inueniuntur, quos negligere non volemus. Semper autem dum res logarithmis peragitur, praeter conſuetas operationes logarithmorum, iſte logarithmus 6, 4637261 ſubtrahi debet, numerusque reſpondens dabit minuta prima; ſin loco minutorum primorum ſecunda deſiderentur, tum loco illius logar. iſte debet vſurpari 4, 6855749.

§. 11. Inuento angulo V facile innoteſcet planetae a ſole diſtantia $PS = a + \frac{br}{a}$; fiat vt ſinus totus ad coſinum anguli V ita b ad quartam proportionalem, quae ad diſtantiam mediam a addita vel ſubtracta, prout coſinus ipſius V fuerit vel affirmatiuus vel negatiuus, dabit veram planetae a ſole diſtantiam. Ex angulo quoque z inuento ſeu ipſa anomalia vera, diſtantia PS poterit inueniri, erit namque $PS = \frac{(a+b)(a-b)}{a - b.\operatorname{coſ} z}$.

§. 12. Inuento angulo V porro ſimplicius ipſa anomalia vera z poterit inueniri; erit enim $\operatorname{coſ.} z = \frac{a.\operatorname{coſ.} V + b}{a + b \operatorname{coſ.} V}$, vel $\operatorname{ſin.} z = \frac{\operatorname{ſ} V\ \surd(a^2 - b^2)}{a + b.\operatorname{coſ.} V}$, quae expreſſio etſi ſimplicior eſt et breuior, quam ſupra inuenta ſeries, tamen neſcio, an illa non ſit huic, ſi commoditas calculi ſpectetur, praeferenda; in ſequenti vero iſta formula maiorem fortaſſe praeſtabit vtilitatem.

§. 13. Sit nobis exemplum orbita Martis, in qua eſt $a:b = 152369:14100$. ideoque $\log. \frac{a}{b} = 1,0336775$. Dataque ſit anomalia media 2 S, 20°, ſeu 80° quaeraturque anomalia vera. Erit ergo operatio inſtituenda vt ſequitur.

$l\frac{a}{b} =$

$l\frac{a}{b} = 1,0336775$
$\phantom{l\frac{a}{b} =} 4,6855749$
$\phantom{l\frac{a}{b} =} 5,7192524$

lſ 80 = 9, 9933515
ſubtr. 5, 7192524
4, 2740991
num. 18797″
hoc eſt 5°, 13′, 17″
ab 80°
reſtat 74°, 46′, 43″
log. ſinus huius anguli = 9, 9844906
ſubtr. 5, 7192524
4, 2652382
num. 18418″
hoc eſt 5°, 6′, 58″
ab 80°
reſtat 74°, 53′, 2″
log ſinus huius anguli = 9, 9847070
ſubtr. 5, 7192524
4, 2654546
num. 18427″
hoc eſt 5°, 7′, 7″
ab 80°
reſtat 74°, 52′, 53″
log. ſinus huius anguli = 9, 9847035
ſubtr. 5, 7192524
4, 2054511
num. 18427
hoc eſt 5°, 7′, 7″

Erit ergo V = 74°, 52′, 53″
ſubtrah. $\frac{b}{a}$ſV = 5°, 7′, 7′

z prope verus valor $=$	$69°, 45', 46''$
$2\,V =$	$149°, 45', 46''$
Deinceps pos. $=$	$30°, 14', 14''$
log. sinus huius anguli	$9,7020703$
subtrah. $2\,l\frac{a}{b}$	$2,0673550$
	$7,6347153$
subtrah.	$4,6855749$
	$2,9491404$
subtrah. log. 4	$0,6020600$
	$2,3470804$
num.	$222''$
hoc est	$3', 42''$ addat.

Valor ipsius z magis correctus $69°, 49', 28''$

$3\,V = -44°, 38', 39''$, sinus $=$	-7025671
$+ 3\int V =$	28961904
$\int 3\,V + 3\int V =$	21936233
eius log. $=$	$10,3412220$
subtrah. $3\,l\frac{a}{b} =$	$3,1010325$
	$7,2401895$
subtrah. $l\,12 =$	$1,0791812$
	$6,1610083$
subtrah.	$4,6855749$
	$1,4754334$
num.	$37''$ subtr.

Valor ipsius z correctus seu
anomalia vera $= 69°, 48', 51''$.

§. 14.

§. 14. Cum vero altero modo, quo z ex V inueniri poteſt, ſit coſ. $z =$ coſ. V $+ \frac{b\int V . \int V}{a + b . \text{coſ. V}} =$ coſ. V $+ \frac{\int V . \int V}{\frac{a}{b} + \text{coſ. V}}$, videamus an eandem anomaliam veram eodem modo inueniamus. Operatio erit vt ſequitur:

Coſ. V	=	2608181
ſin. tot. $\frac{a}{b}$	=	108063121
$\frac{a}{b}$ + coſ. V	=	110671302
huius log.	=	11, 0440348
$2 l\int V$	=	19, 9694070
diff.	=	8, 9253722
reſpondet ſinus		842116
ad coſ. V		2608181
coſ. z	=	3450297
Ergo Anomalia vera	=	69°, 48′, 59″

ad quam ante inuenta proxime accedit, notandum autem eſt praecedentem eſſe nimis parnam, cum adhuc terminum $\frac{b^4}{32a^4}(\int 4 V + 4\int V)$ adiicere opportuiſſet; hic vero terminus ne integrum quidem minutum ſecundum efficit. Ceterum in prioris calculi ultima operatione partes medias proportionales non ſumſi; atque in iſto calculo tabulae log. non ſufficiebant.

§. 14. Diſtantia Martis a ſole reſpondens huic anomaliae eſt $= a + b$ coſ. V; eſt vero vt ante inuenimus $\frac{a}{b}$ + coſ. V = 110671302. Fiat ergo vt ſinus totus ad hunc numerum, ita b ad diſtantiam Martis a ſole. Ergo erit per logarithmos

$l(\frac{a}{b}+\operatorname{cof.} V)=$	11, 0440348
$+lb.$	4, 1492191
$-l$ ſin. tot.	$-$ 10, 0000000
log. diſt. a ☉	5, 1932539

§. 16. Denique notandum eſt, ſi inuenta fuerit anomalia vera datae anomaliae mediae reſpondens, facili negotio incrementum minimum anomaliae verae inueniri poſſe, ſi anomalia media minima particula augeatur. Augeatur ſcilicet anomalia media angulo dx, erit incrementum anomaliae verae $dz=\frac{dx}{(1+\frac{b}{a}\operatorname{cof.} V)^2}$ Noſtro ergo caſu erit $l(1+\frac{b}{a}\operatorname{cof.} V)=0,0103573$ et $(1+\frac{b}{a}\operatorname{cof.} V)^2=1,04885$ Quare erit $dz=\frac{dx}{1,04885}=dx-\frac{2dx}{43}$ ſi ergo anomalia media fuerit $81°$, erit anomalia vera $70°, 46', 4''$

§. 17. Sin autem quis velit hac methodo tabubulam anomalium verarum computare, is ſcopum ſuum commodius aſſequetur, ſi non anomalias medias pro cognitis aſſumat, ſed angulos, quos littera V diſignari, ex hisque angulis tam anomalias medias quam veras calculo inueſtiget; Hoc enim modo facile tabulam conficiet. Sumto enim pro lubitu angulo V, erit $x=V+\frac{b}{a}\int V$ et $z=V-\frac{b}{a}\int V+\frac{b^2}{4a^2}\int 2V-\frac{b^3}{12a^3}(\int 3V+\int 3V)$ Exempli gratia pro orbita martis ponatur V=

$V = 20°$. Erit $l\!\int\! V =$	9, 5340517
subtr. vt supra	5, 7192524
	3, 8147993
num. resp.	6528''
hoc est.	1°, 48', 48''
Erit ergo anomalia media	21°, 48', 48''
et anomalia vera prope vera	18°, 11', 12''
Nunc sumatur $l\!\int\! 2V$	9, 8080675
subtr. $2l\frac{a}{b}$	2, 0673550
	7, 7407125
subtr. $l4$,	0, 6020600
	7, 1386525
subtrahatur insuper	4, 6855749
	3, 4530776
num.	284'' = 4', 44''
Anomalia magis correcta =	18°, 15', 56''
Denique sumatur $\int 3V =$	8660254
et $3\int V =$	10260606
	18920860
huius log.	10, 2769406
subtr. $3l\frac{a}{b}$	3, 1010325
	7, 1759081
subtr. $l12$	1, 0791812
	6, 0967269
subtr.	4, 6855749
	1, 4111520
num.	26''

Anomalia vera ergo eſt 18°, 15′, 30″ reſpondens anomaliae mediae 21°, 48′, 48″. Huic vero anomaliae mediae in tabulis reſpondet haec anomalia vera 18°, 16′, 14″.

§. 18. Progredior ergo ad alteram quaeſtionem, cuius initio mentionem feci, quae circa ſpeciem ellipſis, in qua planeta circumfertur, eiusque poſitionem Fig. 2. determinandam verſatur. Ad haec inuenienda cognitum eſſe pono tempus periodicum planetae, quod ſit $= T$. Deinde etiam data eſſe oportet tria loca heliocentrica planetae, cuiusmodi ſint FS, GS, HS vna cum temporibus inter obſeruationes elapſis. Ex locis ergo heliocentricis dantur anguli FSG et FSH, ſitque $FSG = f$ et $FSH = g$. Praeterea fiat vt tempus periodicum T ad tempus inter duas obſeruationes, ita 360 gradus, ad angulum qui eſt differentia anomaliarum mediarum inter easdem obſeruationes. Cum igitur dentur differentiae anomaliarum mediarum inter obſervata planetae loca, ſit ea quae eſt inter loca F et $G = m$, et quae eſt inter loca F et $H = n$. Ponatur nunc ratio AC ad CS vt 1 ad v; erit $\frac{b}{a} = v$; porro ſit anomalia media loci $F = x$, et anomalia vera ſeu angulus ASF $= z$.

§. 19. His poſitis erit loci G anomalia media $= x + m$, et loci $H = x + n$; loci vero G anomalia vera erit $= z + f$ et loci $H = z + g$. Deinde ſit $x = P + v\int P$; $x + m = Q + v\int Q$ et $x + n = R + v\int R$; erit cof. $z = \frac{\text{cof. } P + v}{1 + v\,\text{cof. } P}$ et cof. $P = \frac{\text{cof. } z - v}{1 - v.\,\text{cof. } z}$, atque $\int P = \frac{\int z.\sqrt{(1 - v^2)}}{1 - v.\,\text{cof. } z}$.

Simili

Simili modo erit cof. $Q = \frac{\text{cof.}(z+f)-v}{1-v\,\text{cof.}(z+f)}$, et $\int Q = \frac{\int(z+f).\sqrt{(1-v^2)}}{1-v\,\text{cof}\,z+f)}$; atque cof. $R = \frac{\text{cof.}(z+g)-v}{1-v.\text{cof.}(z+g)}$ ac $\int R = \frac{\int(z+g).\sqrt{(1-v^2)}}{1-v.\,\text{cof.}(z+g)}$. Si nunc hi valores loco P, Q, R in tribus prioribus aequationibus, fubftituantur, habebuntur tres aequationes, ex quibus tres incognitae x, z et v determinari debent. At hoc modo ftatim deuenitur ad aequationes omnino irrefolubiles, ita vt hac via minime ad finem peruenire queamus. Quamobrem expediet potius hanc quaeftionem vero proxime refoluere.

§. 20. Ad hoc commodiffime efficiendum iuuabit anomalias veras priori modo per feries exprimere. Erit ergo vt fequitur.

$$z = P - v\int P + \tfrac{v^2}{4}\int 2P - \tfrac{v^3}{12}(\int 3P + 3\int P) + \text{etc.}$$
$$z+f = Q - v\int Q + \tfrac{v^2}{4}\int 2Q - \tfrac{v^3}{12}(\int 3Q + 3\int Q) + \text{etc.}$$
$$z+g = R - v\int R + \tfrac{v^2}{4}\int 2R - \tfrac{v^3}{12}(\int 3R + 3\int R) + \text{etc.}$$

Ex his aequationibus eliminando z erit

$$f = Q - P - v(\int Q - \int P) + \tfrac{v^2}{4}(\int 2Q - \int 2P) - \tfrac{v^3}{12}(\int 3Q - \int 3P + 3\int Q - 3\int P)\ \text{etc.}$$
$$g = R - P - v(\int R - \int P) + \tfrac{v^2}{4}(\int 2R - \int 2P) - \tfrac{v^3}{12}(\int 3R - \int 3P + 3\int R - 3\int P)\ \text{etc.}$$

Priores vero aequationes eliminando x dabunt.

$$m = Q - P + v(\int Q - \int P) \quad \text{atque}$$
$$n = R - P + v(\int R - \int P)$$

Ponamus terminos in quibus ineft v^2 et altiores poteftates euanefcere; erit coniungendis aequationibus $\frac{f+m}{2} = Q - P$ et $Q = P + \frac{f+m}{2}$, atque $R = P + \frac{g+n}{2}$. Per pofteposteriores autem aequationes erit $v = \frac{m-f}{2\int(P+\frac{f+m}{2})-2\int P}$ $= \frac{n-g}{2\int(P+\frac{g+n}{2})-2\int P}$. Ex his vero aequationibus oritur tang. $P = \frac{(m-f)\int\frac{n+g}{2}-(n-g)\int\frac{m+f}{2}}{(m-f)\int v.\frac{n+g}{2}-(n-g)\int v.\frac{m+f}{2}}$ vbi $\int v.$ sinum versum denotat. Ex hac igitur aequatione iam proxime inueniri potest angulus P; hocque inuento simul quoque valor ipsius v proxime verus innotescit.

§. 21. Inuento hac ratione angulo P, ex eo determinetur valor ipsorum Q et R per aequationes $Q = P + \frac{f+m}{2}$ et $R = P + \frac{g+n}{2}$ deinde etiam valor ipsius v per aequationem $v = \frac{m-f}{2\int Q-2\int P}$. Hi vero valores hoc modo inuenti nondum sunt veri, sed tantum veris propinqui; propiores autem inuenientur sequentibus terminis non negligendis, erit nempe $\frac{f+m}{2} = Q - P + \frac{v^2}{8}(\int 2Q - \int 2P) - \frac{v^3}{24}(\int 3Q - \int 3P + 3\int Q - 3\int P)$ etc. ideoque $Q = P + \frac{f+m}{2} - \frac{v^2}{8}(\int 2Q - \int 2P) + \frac{v^3}{24}(\int 3Q - \int 3P + 3\int Q - 3\int P)$ atque simili modo $R = P + \frac{g+n}{2} - \frac{v^2}{8}(\int 2R - \int 2P) + \frac{v^3}{24}(\int 3R - \int 3P + 3\int R - 3\int P)$; in quibus expressionibus loco, P, Q, R et v ante inuenti valores substituantur post signum $=$; hocque pacto propiores pro Q et R valores habebuntur. Ponatur breuitatis gr. $Q = P + M$ et $R = P + N$ erit $v = \frac{m-M}{\int(P+M)-\int P} = \frac{n-N}{\int(P+N)-\int P}$. Ex quibus aequationibus inuenitur tang. $P = \frac{(m-M)\int N-(n-N)\int M}{(m-M)\int v.N-(n-N)\int v.M}$; unde quoque multo propior valor ipsius

ipſius P obtinetur. Quo iterum ſubſtituto tam pro Q et R quam pro v multo magis propiores valores oriuntur.

§. 22. Cum ſit $M = \frac{f+m}{2} - \frac{v^2}{8}(\int 2\,Q - \int 2\,P) + \frac{v^3}{24}(\int 3\,Q - \int 3\,P + 3\int Q - 3\int P) -$ etc. et $N = \frac{g+n}{2} - \frac{v^2}{8}(\int 2\,R - \int 2\,P) + \frac{v^3}{24}(\int 3\,R - \int 3\,P + 3\int R - 3\int P) -$ etc. ſi in his aequationibus loco P, Q, R, et v vltimo inuenti valoſurrogentur; tum proxime veri valores pro *M* et N habebuntur; et conſequenter proximi quoque pro Q et R, iterumque pro P et v. Harum ergo operationum reuolutiones, ſi toties repetantur, quoad valores ipſorum P et v non amplius mutentur; tum demum inuentos valores ipſos eſſe veros certum erit. His vero inuentis ex P et v per ſupra traditas regulas reperietur z, qui eſt angulus ſeu diſtantia loci primum obſeruati F ab aphelio; v vero exprimit rationem excentricitatis orbitae ad ſemiaxem transuerſum ſeu diſtantiam mediam.

§. 23. Ad talem autem calculum ſuſcipiendum conducit plures tribus obſeruationes aſſumſiſſe, cum quo operationes inſtituendae magis confirmentur, tum quo obſeruationes maxime idoneae eligi queant. Habent autem eae obſeruationes, in quibus differentiae anomaliarum mediarum et verarum aequales ſunt, hoc incommodum, vt ſtatim in prima operatione dent $v = \frac{0}{0}$. Quod ergo quo euitetur tales obſeruationes ſunt eligendae, in quibus differentiae anomaliarum ſint maximae.

 Atta-

Attamen ne hac quidem circumſpectione eſt opus, ſi quidem excentricitas praeter propter tantum fuerit cognita, quin imo prolubitu excentricitas poteſt fingi eaque initio pro v ſubſtitui, unde ſtatim propiores valores pro Q et R detegentur ex quibus tum operationes, vt ante, inſtitui poterunt.

§. 24. Exempli loco per iſthanc methodum determinemus poſitionem abſidum orbitae terrae, eiusque excentricitatem ex datis tribus ſequentibus obſeruationibus, quae ex Comment. Ac. R. Scient. Pariſ. A. 1720. ſunt decerptae.

Anno 1716	erat	Locus ☉
Mart. 20. d.	$11^h. 57', 44''$	0 S, 0°, 0′, 0″
Mai. 12. d.	$11^h. 55', 53''$	1 S, 21°, 44′, 35″
Iul. 28. d.	$12^h. 5', 48''$	4 S, 5°, 22′, 10″

Ex his obſeruationibus eſt differentia anomaliarum verarum inter primam et ſecundam obſeruationem, quam poſuimus $f = 51°, 44', 35''$
et differentia inter primam et tertiam ſeu $g = 125°, 22', 10''$

§. 25. Ad differentias anomaliarum mediarum inveniendas aſſumo pro tempore periodico T ſeu anno tropico 365 d. 5 h. 49′ 8″ ſeu 31556948″. Atque differentia temporum primae et ſecundae obſeruationis eſt 52 d. 23 h. 58′, 9″ ſeu 4579089″ hinc oritur differentia inter anomalias medias harum obſeruationum, quam poſuimus $m = 52°, 14', 17''$. Differentia vero temporum

porum primae et tertiae obſeruationis eſt 130 d, 0^h, $8'$, $14''$ ſeu $11232494''$. Ex quo fit differentia inter anomalias medias harum obſeruationum, quae erat $n = 128°, 8', 23''$.

§. 26. Nunc ad calculum inſtituendum eſt

$$m-f = \quad 29', 42'' = 1782''$$
et $n-g = 2°, 46', 13'' = 9973''$
atque $\frac{m+f}{2} = 51°, 59', 26''$
et $\frac{n+g}{2} = 126°, 45', 16''$

Deinde ad commoditatem calculi eſt

$$l\frac{n-g}{m-f} = 0,\ 7479181.$$

Deinde eſt $\int\frac{n+g}{2} = \quad 8012073$
atque $\int v.\frac{n+g}{2} = \quad 15983867.$
Deinde eſt $l\int\frac{m+f}{2} = 9,8964761$
ad quem additus $l\frac{n-g}{m-f} = 0,7479181$

$$10,\ 6443942$$

$= l\frac{n-g}{m-f}\int\frac{m+f}{2}$, cui logarithmo reſpondet numerus hic:

44095498 ab hoc ſubtractus
8012073 $\int\frac{n+g}{2}$
36083425 $= \frac{n-g}{m-f}\int\frac{m+f}{2} - \int\frac{n+g}{2}$

qui numerus eſt numerator fractionis cui tP aequatur. Eſt vero lſv.$\frac{m+f}{2}$ 9, 5845671 ad hunc $l\frac{n-g}{m-f}$

0, 7479181 addatur
10, 3324852 $= l\frac{n-g}{m-f}$ſ.v.$\frac{m+f}{2}$.

Huic reſpondet in tabulis ſinuum numerus

21502313 ab hoc ſubtrahatur
15983867 ſv. $\frac{n+g}{2}$
5518446 denominator fractionis.

 Erit

Erit ergo tang. $P = \frac{36083425}{5518446} = 6,5387 ---$
vnde prodit angulus $P = 81°, 18', 17''$.

Deinde est $l\frac{m-f}{2} = 2,9498777$,

atque $P + \frac{m+f}{2} = Q = 133°, 17', 43''$
cuius sinus aequatur sin. $46°, 42', 17'' = 7278292$,

et $fP = 98885062$,

est igitur $f(P+Q) - fP = -2606770$,
ex quo valor ipsius v erit negatiuus, id quod indicat locum, quem calculus pro aphelio dare deberet non esse aphelion sed periphelion. Vt vero v determinetur sumatur ex tabula sinuum logarithmus sinus 2906770,

qui erit $9,4160988$

ab hoc subtrahatur numerus supr. $4,6855749$

log. denom. fract. pro v $4,7305239$

subtr. $2,9498777$

Hinc erit $l - v = -\ 1,7806462$

ergo $\frac{100}{6035}$, seu distantia terrae mediae a ☉ est ad excentricitatem vt 6035 ad 100, quae ratio autem nondum est correcta. Si hinc antequam sequentes correctiones adhibeamus, positionem absidum inuenire velimus, prodibit pro z circiter $82°, 14'$ seu $2S, 22°, 14'$, qui locus a loco primae obseruationis subtractus dat $9S, 7°, 46'$ pro loco periphelii; et $3S, 7°, 46'$ pro loco aphelii; qui locus iam prope congruit. Accuratissime autem haec quaesita obtinebuntur, si tantum prima correctio adhibeatur.

§. 27.

§. 27. Ad correctionem autem instituendam notandum est loco anni tropici sidereum, quippe quo sol ab aphelio ad aphelium reuertitur, adhiberi debere, quo facto fiet $m = 52°, 14', 10''$ et $n = 128°, 8, 5''$, ideoque $m - f = 1775''$ et $n - g = 9955''$. Atque $\frac{m+f}{2} = 51°, 59', 22''$, et $\frac{n+g}{2} = 126°, 45', 8''$. Deinde est $P = 81°, 18'$, $Q = 133°, 18'$ et $R = 208°, 3'$, vbi minuta secunda de industria negligo, quia ad M et N inuenienda nihil conferunt. Est vero $M = \frac{f+m}{2} - \frac{v^2}{8}(\int 2Q - \int 2P)$: et $N = \frac{n+g}{2} - \frac{v^2}{8}(\int 2R - \int 2P)$. Ex his prodit $M = 51°, 59', 17''$ et $N = 126°, 45', 4''$; et $m - M = 0°, 14', 53'' = 893''$, et $n - N = 1°, 23', 1'' = 4981''$, vnde erit $l\frac{n-N}{m-M} = 0,7464650$ atque per superiorem regulam $tP = \frac{(\frac{n-N}{m-M})\int M - \int N}{(\frac{n-N}{m-M})\text{f.v.}M - \text{f.v.}N}$. Ex hoc inuenitur ang. $P = 81°, 23', 0''$, et $P + M = 133°, 22', 17'' = Q$. Atque v iterum prodit valoris negatiui, estque $l - v = -1, 7815349$ seu est distantia media terrae a sole ad excentricitatem vt 6047 ad 100. Hi valores cum sint exactissimi, erit $z = 82°, 19', 16''$, qui angulus subtractus ab aequinoctio verno dat locum perigaei solis 9 S, 7°, 40′, 44″. Vnde erit Apogaeum solis in ♋, 7°, 40′, 44″. Tabulae vero Streetianae pro hoc tempore dant ♋. 7°, 52′, 32″ Si adhuc vnam correctionem quis vellet instituere, dubito an ea minuta secunda sit affectura.

ORBITAE SOLARIS DETERMINATIO.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Ope methodi, quam in praecedente dissertatione exposui, facile erit orbitam, quam terra motu annuo circa solem describit, seu quod eodem redit orbitam solarem determinare, ex datis tribus locis solis ex terra visis, vna cum temporum interuallis. Quamobrem ad orbitam solis quam exactissime definiendam, oportet vt ex obseruationibus astronomicis tria solis loca eligamus, de quibus minime dubitare licet. Huiusmodi autem solis loca in ecliptica seu orbita sua cum ex altitudinibus meridianis deriuare necesse sit, conducet eiusmodi obseruationes ad hunc vsum adhibere, quae circa aequinoctia sint factae, eo quod his temporibus minimus error in longitudine oriatur. Reiiciendas igitur ad hunc finem esse iudico obseruationes circa solstitia factas, cum his temporibus etiam ex accuratissimis obseruationibus de loco solis vix ad aliquot minuta prima certi esse possimus.

§ 2. Perlustraui ergo in hunc finem F*lamsteedii* historiam coelestem, atque ex altitudinibus solis meridianis eius loca in ecliptica calculo deducere sum annisus.

ſus. Cum autem iſtae obſeruationes neque a refractionibus ſint purgate, neque omnes vt opinor ſint aeque bonae cenſendae, ex iis vix auſus ſum quippiam circa ſolis orbitam concludere. Cum vero prolegomena in tertio volumine huius operis perlegiſſem, deprehendi *Flamſteedium* huic ipſi inquiſitioni operam dediſſe, at methodum, qua is locum apogaei et excentricitatem orbitae ſolis aſſignare anniſus eſt, minime probare poſſum. Veriſſimas enim primo cenſet tabulas ſuas motus medii ſolis, de quibus omnino ad hoc inſtitutum exequendum dubitare debuiſſet; deinde vero locum apogaei tantum paulisper immutauit excentricitatis nulla habita ratione, quo vni vel alteri obſeruationi ſatisfaceret. Facile autem perſpicitur, hac methodo vix quicquam profici poſſe.

§. 3. Interím tamen obſeruationes, quibus *Flamſteedius* in hoc negotio eſt vſus, ipſe certiſſimas et exactiſſimas praedicat, neque ego de bonitate earum dubitandum eſſe exiſtimo, cum ſine dubio ad hoc inſtitutum eas ſelegerit, de quibus maxime erat certus. Hanc ob rem ego non dubito easdem obſeruationes vſurpare ad orbitam ſolis ope meae methodi determinandam, ex iis vero praeterea tales obſeruationes eligam, quae circa aequinoctia ſunt factae, quippe quae eo magis certae ſunt habendae. Obſeruationes ergo, quas ad hoc inſtitutum adhibere conſtitui, ſunt tres ſequentes, anno 1690 factae. Menſe ſcilicet Martio die 7 meridie locum ſolis exhibet in ♓, $27^\circ\ 21'$, $47''$. Dein-

Deinde eiusdem menſis die 14 erat ſol in ♈ 4°, 17′, 18″. Atque tertio menſe ſeptembri die 15 erat ſol in ♎ 2°, 45′, 37″. Quae ſolis loca ex altitudinibus meridianis exactiſſime obſeruatis deduxit ipſe *Flamſtedius*.

§. 4. In his autem locis ſol verſabatur ipſo puncto veri meridiei, dum per meridianum tranſiebat. Quare quo anomalias medias ex his temporibus recte concludamus oportet haec tempora ope aequationis temporis corrigere. Quo facto erunt vt ſequitur.

Tempore medio	*Solis loca*
Mart. d. 7. 12^h. 8′, 24″	11 S, 27°, 21′, 27″
Mart. 14 d. 12^h. 6′, 15″	0 S, 4°, 17′, 18″
Sept. 15 d. 11^h. 51′, 27″	6 S, 2°, 45′, 37″

Harum obſeruationum primam ſumo igitur tanquam terminum, et pono eius anomaliam veram $= z$, atque anomaliam mediam $= x$. Praeterea $1 : v$ mihi denotat rationem diſtantiae mediae ad excentricitatem, adeo vt hae tres quantitates z, x et v ex his tribus obſeruationibus debeant determinari. Ponatur ſecundae obſeruationis anomalia vera $= z + f$, et media $= x + m$; tertiae vero obſeruationis anomalia vera $= z + g$ et media $= x + n$. Quae quantitates f, g, m et n ex ipſis obſeruationibus immediate determinantur.

§. 5. Differentia temporum inter primam et ſecundam obſeruationem eſt ergo 6 d, 23^h, 57′, 51″, cui tempori motus medius respondet $6°, 53', 52''$. Cum autem inter ea aequinoctia circiter $1''$ sint retrogressa, erit differentia inter anomalias medias primae et secundae obseruationis $m = 6°, 53', 51''$. Differentia vero inter loca solis est $6°, 55', 31''$, quae similiter minuto secundo minuta ob praecessionem aequinoctiorum dat differentiam inter anomalias veras primae et secundae obseruationis $f = 6°, 55, 30''$. Deinde differentia temporum primae et tertiae obseruationis est 191 d. $23^h, 43', 3''$ cui motus medius respondet $189°, 12', 0''$: hinc motu aequinoctiorum $26''$ subtracto remanet differentia inter anomalias medias primae et tertiae obseruationis, $n = 189°, 11', 34''$. Denique differentia inter solis loca primae et tertiae obseruationis $26''$ diminuta dat differentiam inter anomalias veras primae et tertiae obseruationis $g = 185°, 23', 24''$.

§. 6. His prapaeratis sequitur vt quantitatem anguli cuiusdam P, qui est anomalia excentri, definiamus, quo cognito facile omnia, quae requiruntur, determinare licet. Ostendi autem in praecedente mea dissertatione fore proxime tang. $P = \frac{\int \frac{m+f}{2} - \left(\frac{m-f}{n-g}\right) \int \frac{n+g}{2}}{\int v. \frac{m+f}{2} - \left(\frac{m-f}{n-g}\right) \int v. \frac{n+g}{2}}$ posito sinu toto $= 1$. Quo igitur ista expressio per calculum definiatur, sequenti modo operationes instituo.

$m = 6°, 53', 51''$	$f = 6°, 55', 30''$
$n = 189°, 11', 34''$	$g = 185°, 23', 24''$

Ex his erit

$$m-f=-1', 39''=-99''$$
$$n-g=8°, 48', 10''=13690''$$

atque

$$-\left(\frac{m-f}{n-g}\right)=0,0072315.$$

Praeterea eſt

$$\frac{m+f}{2}=6°, 54', 40''$$

et

$$\frac{n+g}{2}=187°, 17', 29''$$

Iam vero eſt

$$\int\frac{m+f}{2}=1203393$$

atque

$$\int\frac{n+g}{2}=-1269155$$

qui multiplicatus per $-\left(\frac{m-f}{n-g}\right)=0,0072315$ dat -9178. Erit ergo numerator fractionis, cui tang. P aequatur $=1194115$. Praeterea eſt ſ v. $\frac{m+f}{2}=72661$ atque ſ v. $\frac{n+g}{2}=19919130$ qui ductus in $-\left(\frac{m-f}{n-g}\right)=0,0072315$ dat $-\left(\frac{m-f}{n-g}\right)$ſ v. $\frac{n+g}{2}=144045$. Vnde ſit denominator $=216706$. Diuidatur nunc factum ex numeratore in ſinum totum per denominatorem et prodibit tang. P$=55103000$. Quocirca inuentus eſt angulus P$=79°,42'$, $51''$, qui autem valor tantum eſt vero proximus, et ſequenti modo corrigi debet.

§. 7. Ex valore ipſius P ſequentes litterae Q et R habebuntur, nempe cum ſit P$=79°, 42', 51''$, erit

Q=P

$Q = P + \frac{m+f}{2} = 86°, 37', 31''$, atque $R = P + \frac{g+n}{2} = 267°, 0', 20''$. Ex his valoribus erit $v = \frac{\frac{m-f}{2}}{\int Q - \int P} = \frac{\frac{n-g}{2}}{\int R - \int P}$, vnde patet valorem ipſius v fore negatiuum, id quod indicat diſtantiam primae obſeruationis non ab apogaeo ſed ab perigaeo inuentum iri. Erit ergo $l-v = l\frac{f-m}{2} - l(\int Q - \int P)$, in qua expreſſione notandum eſt, quia ſinus cum angulis comparantur, a logarithmis ſinuum ſubtrahi debere 4, 6855704, quo logarithmi minutorum ſecundorum obtineantur. Ob eandem rationem erit $\frac{f-m}{2}$ in minutis ſecundis $= 49, 5$ atque $l\frac{f-m}{2} = 1, 6946052$.

Iam vero eſt

$\int Q =$	9982658
et $\int P =$	9839292
ideoque $\int Q - \int P =$	143366
atque $l(\int Q - \int P) =$	8, 1564482
a quo ſubtrah. $=$	4, 6855704
reſtat	3, 4708778
ſubtr. a $l\frac{f-m}{2} =$	1, 6946052
erit $l-v = -$	1, 7762726
ſeu $v = \frac{-99}{5915}$	

hic vero valor ſicut et reliqui correctione ſequente habet opus.

§. 8. Ad hanc correctionem inſtituendam quaerantur valores litterarum M et N ex ſequentibus formulis:

 M =

$$M = \frac{f+m}{2} + \frac{v^2}{8} \int 2P - \frac{v^2}{8} \int 2Q.$$
$$N = \frac{g+n}{2} + \frac{v^2}{8} \int 2P - \frac{v^2}{8} \int 2R.$$

vbi a logarithmis ſinuum ſubtrahi debet 4, 6855704. Quia vero ſinguli ſinus multiplicati ſunt per $\frac{v^2}{8}$ cuius logarithmus eſt $-4, 4556252$, a logarithmis ſinuum ſubtrahi debet iſte logarithmus 9, 1412056 et numerus logarithmo reſiduo reſpondens dabit numerum minutorum ſecundorum. Compendii autem gratia non eſt opus vt anguli 2 P, 2 Q, 2 R ad minuta ſecunda vsque ſumantur: tanta enim accuratio eſſet ſuperflua. His praemiſſis erit vt ſequitur:

$$\int 2P = \int 159^\circ, 26' = \int 20^\circ, 34'.$$
$$\int 2Q = \int 173^\circ, 15' = \int 6^\circ, 45'.$$
$$\int 2R = \int 534^\circ, 1' = \int 5^\circ, 59'.$$

Hinc erit

$l\int 2P =$	9, 5456745
ſubtrahatur	9, 1412056
	0, 4044689

ergo $\frac{v^2}{8} \int 2P = 2\frac{1}{2}''$

Simili modo

$l\int 2Q =$	9, 0701761
ſubtrahatur	9, 1412056
	(-1), 9289705

ergo $\frac{v^2}{8} \int 2Q = 0, 85''$
atque $\frac{v^2}{8} \int 2R = 0, 75''$

Ex his prodit

$M = 6^\circ, 54', 42''$ et
$N = 187^\circ, 17', 31''$. §. 9.

§. 9. Quia valores litterarum M et N tam parum diſcrepant ab $\frac{m+f}{2}$ et $\frac{n+g}{2}$ correctio litterarum P et Φ fere erit inſenſibilis; interim tamen ad vſum regulae a me traditae oſtendendum calculum inſtituam. Oſtendi igitur fore tang. $P = \frac{\int M - (\frac{m-M}{n-N})\int N}{\int v.M - (\frac{m-M}{n-N})\int v.N}$ poſito ſinu toto $= 1$. Ad hunc ergo angulum P detegendum ſequenti modo operor

$$m - M = -50, 69'$$
$$n - N = 1^\circ, 54', 3, 21'' = 6843, 21''$$

ergo $-(\frac{M-M}{n-N}) = 0, 0074073$

Praeterea eſt

$$\int M = 1203003$$
$$\int N = -1296242$$

ergo $-(\frac{m-M}{n-N})\int N = -9400$

ergo numerator $= 1193603$

Deinde eſt

$$\int v.M = 72670$$
$$\int v.N = 19919123$$

Erit ergo

$-(\frac{m-M}{n-N})\int v.N = 149306$ ideoque

denominator $= 221976$

Inuenitur ergo

tang. $P = 53771000$

ideoque $P = 79^\circ, 27', 54''$.

§. 10.

§. 10. Sumto ergo hoc valore pro vero angulo P erit $Q = P + M = 86°, 22', 36''$ et $R = P + N = 266°, 45', 25''$, atque ex his erit verus valor ipsius $v = \frac{n - M}{\int Q - \int P} = \frac{n - N}{\int R - \int P}$, quae expressio vt ante debet tractari. Ex aequatione autem $v = \frac{n - N}{\int R - \int P}$ prodit $l - v = -1, 7761733$ qui est verus valor ipsius v, atque distantia media ad excentricitatem vt 100000 ad 1674.

§. 11. Ex his nunc per praecepta tradita vtraque anomalia loci solis in prima obseruatione poterit definiri, in quo autem notandum est ob valorem ipsius v negatiuum a perigaeo anomalia computatas prodire. Erit autem primi solis loci obseruati 11 S, 27°, 21', 27'' anomalia media $x = P + v \int P$ et anomalia vera $z = P - v \int P + \frac{v^2}{4} \int 2P$ etc. ad quos valores inueniendos est

$$P = 79°, 27', 54''$$
$$l \int P = 9, 9926192$$
$$\text{subtr. } \underline{4, 6855704}$$
$$5, 3070488$$
$$l - v = -\underline{1, 7761733}$$
$$l - v \int P = 3, 5308755$$
$$\text{ergo } -v \int P = 3395'' = 56', 35''$$
$$l \int 2P = 9, 5556433$$
$$\text{subtr. } \underline{4, 6855704}$$
$$4, 8700729$$
$$l \tfrac{v^2}{4} = -\underline{4, 1655562}$$
$$l \tfrac{v^2}{4} \int 2P = 0, 7045167$$

ergo $\frac{v^2}{4} \int 2P = 5''$. Ex his ergo fit

$x =$

$x = 78, 31', 19'' = 2S, 18°, 31', 19''$
$z = 80°, 24', 34'' = 2S, 20°, 24', 34''$

§. 12. Cum igitur Sol fuerit A. 1690. Menf. Martio $7^d, 12^h, 8', 24''$ in ecliptica 11 S, 27°, 21', 27', erat illo tempore aequatio 1°, 53', 15'' addenda ad motum medium. Quamobrem illo tempore erat motus medius folis 11 S, 25°, 28', 12'' atque 1690 die 7 Martii ipfo meridie iuxta tempus medium erat motus medius folis 11 S, 25°, 27', 52''. Ergo A. 1689. completo feu initio anni 1690. erat motus medius folis 9 S, 20°, 24', 42'', qui locus fi cum tabulis motus medii folis in Lexico Harris comparetur, deprehendetur 40'' maior, et hanc ob rem illae tabulae pro obferuatorio Greenwicenfi augeri debent 40''. Quocirca erit

A. a C. N.	Motus medius ⊙
1701	9 S, 20°, 44', 30''
1721	9 S, 20°, 53', 34''
1741	9 S, 21°, 2', 38''
1761	9 S, 21°, 11', 42''
1781	9 S, 21°, 20', 46''
1801	9 S, 21°, 29', 51''

In tabula pro annis intermediis nihil eft mutandum.

§. 13. Subtrahatur a vero loco folis

anomalia vera inuenta,	11 S, 27°, 21', 27''
prodibit	2 S, 20°, 24', 34''
locus perigaei orbitae folaris.	9 S, 6°, 56', 53''

Quam-

Quamobrem apogaeum orbitae solaris erat

A. 1690. d. 7. Mart. in 3 S, 6°, 56′, 53″
atque initio anni 1690. in 3 S, 6°, 56′, 44″
atque initio anni 1701. in 3 S, 7°, 5′, 54″

Quare a loco apogaei solis ex tabulis astronomicis citatis inuento perpetuo subtrahi debet 34′, 16″, adeo vt in illis tabulis plusquam dimidio gradu apogaeum sit nimis promotum.

§. 14. Logarithmum rationis excentricitatis ad distantiam mediam inuenimus −1, 7761733, ita vt sit distantia media ad excentricitatem, vt 100000 ad 1674 seu vt 5973 ad 100. Si nunc ille logarithmus iuxta regulam in sequ. diss. expositam addatur ad 5, 6154596 prodibit 3,8392863, cui respondet numerus 6907″ pro aequatione maxima, est ergo aequatio maxima $= 1°,55′,7″$.

§. 15. Restat vt definiatur anomalia media, cui maxima aequatio respondet; id quod per regulam meam sequenti modo fiet.

$$\begin{array}{rl} \text{Ad log. sinus totius} & 10,0000000 \\ \text{addatur } l\frac{v^3}{4} = - & 5,9305799 \\ \hline & 4,0694200 \\ \text{qui est log. sinus anguli} & 14''' \\ \text{est ergo} & q = 14'''. \\ \text{Deinde ad} & 5,3144295 \\ \text{addatur } lv = - & 1,7761733 \\ \hline & 3,5382562 \end{array}$$

cui respondet numerus 3454″ seu 57′, 34″. Quamobrem erit anomalia media cui aequatio maxima respondet 90°, 57′, 34″; atque anomalia vera, cui aequatio maxima respondet, erit 89°, 2′, 27″.

SO-

SOLVTIO PROBLEMATVM QVORVNDAM ASTRONOMICORVM.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

Problema 1.

D*ata planetae aequatione maxima, inuenire orbitae eius excentricitatem.*

Solutio.

Conuertatur aequatio maxima in minuta fecunda, fitque eorum numerus $= m$; dico fore diftantiam planetae a Sole mediam ad excentricitatem vt 412533 ad numerum m; fi quidem aequatio non fuerit nimis magna. At fi aequatio admodum fuerit ingens, pofita ratione diftantiae mediae ad excentricitatem vt 1 ad v, erit $v = \frac{m}{412533} - \frac{m^7}{32(412533)^7}$. Q.E.I.

Problema 2.

Data excentricitate orbitae planetaris, inuenire aequationem maximam.

Solutio.

Sit 1 ad v vt diftantia planetae a Sole media ad excentricitatem, et fit m numerus minutorum fecundorum aequationis maximae, qui quaeritur, dico fore $m = 412533(v + \frac{v^7}{32})$; vel per logarithmos erit log. $m =$

$5,6154596 + l(v + \frac{v^7}{32})$. Vbi notandum eſt, niſi excentricitas fuerit vehementer magna loco quantitatis $v + \frac{v^7}{32}$ ſumi poſſe tantum v. Q. E. I.

Problema 5.

Data excentricitate orbitae planetaris, inuenire anomaliam mediam, cui aequatio maxima reſpondet.

Solutio.

Sit 1 ad v vt diſtantia media ad excentricitatem, quae ergo ratio datur et proinde v. Multiplicetur ſinus totus per $\frac{v^3}{4}$, et factum erit ſinus cuiusdam anguli ex tabulis inueniendi: ſit hic angulus q graduum. *Haec vero operatio commodius per logarithmos inſtituetur.*

Deinde quaeratur logarithmus quantitatis $v - \frac{v^7}{32}$, vel tantum ipſius v, ex tabulis logarith. num. naturalium, ſi fuerit v admodum paruum, iſte logarithmus addatur ad hunc 5, 3144295, et logarithmi, qui prodit, quaeratur numerus reſpondens, qui ſit n; vbi notetur n'' eſſe dimidiam partem aequationis maximae; ita vt, ſi aequatio maxima iam fuerit inuenta hac poſteriori operatione nequidem ſit opus. Dico fore anomaliam mediam quaeſitam $90^\circ + q^\circ + n''$. Q. E. I.

DE MINIMIS OSCILLATIONIBVS CORPORVM TAM RIGIDORVM QVAM FLEXIBILIVM. METHODVS NOVA ET FACILIS.

AVCTORE
Leonh. Euler.

§. 1.

QVae ad oſcillationes corporum rigidorum pertinent problemata, ea Geometrae ad inuentionem centri oſcillationis referre ſunt ſoliti. Cum enim corpora rigida figuram ſuam, quantumuis etiam a potentiis ſollicitentur, immutatam retineant; ad eorum oſcillationes determinandas ſufficit eorum oſcillationis centrum noſſe. Hac enim ratione tota quaeſtio reducitur ad oſcillationes penduli ſimplicis, cuius motus iam ſatis cognitus et extra omne dubium eſt poſitus. Omnes idcirco circa motum oſcillatorium corporum rigidorum quaeſtiones eo redeunt, vt inueniatur longitudo penduli ſimplicis, quod iisdem temporibus oſcillationes ſuas abſoluat; hac enim cognita ſimul quoque motus oſcillatorius corporum propoſitorum innotescit. Tabb. V. VI.

§. 2. Quod vero ad oſcillationes corporum flexibilium attinet, de iis duplex facienda eſt quaeſtio. Nam antequam penduli ſimplicis iſochroni longitudo determi-

 nari

nari poteſt, figura, quam huiusmodi corpora flexibilia inter oſcillandum induunt, debet definiri; niſi enim haec ſit cognita, quid potentiae in ea agentes efficiant, aſſignari nequit. Ad motum igitur oſcillatorium corporum flexibilium inueniendum requiritur, vt figura eorum, quam quouis momento inter oſcillandum induunt, determinetur; quo facto facile erit longitudinem penduli ſimplicis iſochroni aſſignare.

§. 3. Huius generis problemata iam quaedam a Geometris ſunt pertractata, quorum primum, cuius *Cl. Taylorus* elegantem dedit ſolutionem, circa oſcillationes chordarum muſicarum tenſarum verſatur, quibus oſcillationibus ſoni eduntur. In hacque tractatione *Cl. Taylorus* primo curuam, quam chorda vibrata format, determinauit; ex eaque poſtmodum numerum oſcillationum, quem data chorda dato tempore abſoluit, definiuit.

§. 4. Huc quoque pertinet problema de oſcillationibus funis ſeu catenae perfecte flexilis, cuius praeterito anno *Cl. Bernoullius* ſolutionem huc tranſmiſit; quodque idem problema poſtmodum alia metodo ſatis breui et facili reſolui, pariter hic coram ſocietate praelecti. In vltimis vero, quas ad me dedit Cl. *Bernoullius*, litteris mentionem fecit oſcillationum laminae elaſticae altero termino parieti firmo infixae, atque aequationem mihi perſcripſit a ſe pro curua, quam lamina oſcillans facit, inuentam eſſe; de qua autem adhuc anceps haerebat, vtrum conueniat, an ſecus: propterea quod haec quaeſtio tam ſit intricata, atque in ea reſoluenda errorem committere admodum ſit procliue.

§. 5.

§. 5. Ego quidem, quamuis valde facilem et latepatentem eſſem adeptus methodum curuam funis perfecte flexilis oſcillantis determinandi; tamen ex ea parum vtilitatis ad curuam laminae elaſticae oſcillantis inueniendam haurire potui. In mentem igitur mihi venit alia methodus latiſſime patens atque ſtaticis tantum principiis nitens, cuius ope non ſolum has de oſcillationibus laminae elaſticae et funis ſuſpenſi quaeſtiones mira facilitate reſolui, ſed omnia quae ad oſcillationes pertinent promptiſſime expedire poſſum.

§. 6. Aliis enim, iisque maxime diuerſis methodis ſunt vſi auctores, qui de centro oſcillationis ſeu oſcillationibus corporum rigidorum egerunt, alias etiam *Cl.* *Bernoullius* et ego methodos ad oſcillationes funis ſuſpenſi flexilis inueniendas adhibuimus. Ex diuerſis quoque principiis Clariſſimi Viri *Taylorus*, *Ioh Bernoulli*, et *Hermannus* oſcillationes chordae vibratae deriuauerunt. Ea vero methodus, qua problema oſcillationum laminae elaſticae parieti fixo infixae reſolui, ita eſt comparata, vt eius ope quoque ſupra memorata problemata omnia ſumma cum facilitate reſolui queant.

§. 7. Quo igitur hanc methodum, qua omnia huiusmodi problemata circa oſcillationes corporum tam rigidorum quam flexibilium reſolui poſſunt, commodiſſime exponam, conſidero ante omnia pendulum ſimplex, et oſcillationes, quas peragit: quippe ad quod quorumque corporum oſcillationes ſunt reducendae. Contemplor autem ad hoc inſtitutum oſcillationes minimas tantum

 tum

tum, eo quod hae ſunt inter ſe iſochronae tam in pendulo ſimplici, quam in corpore quocunque: cum maiores oſcillationes cum pendulo ſimplici rariſſime comparari queant.

Figura 1. §. 8. Sit ergo OM pendulum ſimplex in O ſuspenſum et in M habens pondus alligatum, cuius maſſa ſit M. Declinet hoc pendulum a ſtatu quietis ſeu recta verticali OA angulo infinite paruo AOM, ita vt arculus MA pro recta horizontali haberi queat; voceturque longitudo huius penduli $OM = f$; et ſpatiolum AM corpori M percurrendum, donec in ſtatum quietis perueniat $= k$. Vis grauitatis porro, quae corpus M deorſum vrget, aequatur ipſius ponderi ſeu ipſi M. Ex hac vero per reſolutionem oritur vis corpus verſus MA vrgens $= \frac{a m . M}{M m} = \frac{AM . M}{OM}, = \frac{M k}{f}$, facto triangulo $M a m$ ſimili triangulo OAM.

§. 9. Ponatur haec vis ſollicitans corpus M ſecundum $MA = g$; erit $g = \frac{M . k}{f}$, vnde oritur $f = \frac{M k}{g}$. Si igitur corpus M ſecundum directionem MA vrgeatur vi g, eique percurrendum ſit ſpatium $MA = k$, donec in ſtatum quietis perueniat; erit tempus, quo ex M in A peruenit, aequale tempori deſcenſus penduli longitudinis $\frac{M k}{g}$; ſi quidem dum corpus per MA incedit, vis ad A vrgens proportionalis fuerit diſtantiae corporis ab A.

§. 10. Ex his ergo perſpicitur, quomodo, ſi detur maſſa corporis et via percurrenda atque vis corporis ſecundum hanc viam ſollicitans, inueniri debeat longitudo

gitudo penduli ſimplicis eodem tempore deſcenſum ſeu ſemioſcillationem abſoluentis, quo illud corpus viam ſuam abſoluit. Illa autem via eſt ſpatium, quod corpus percurrere debet, donec in ſtatum quietis perueniat. Dum vero corpus in hoc ſpatio mouetur, vis illud ſollicitans ſemper eſt proportionalis diſtantiae a ſtatu quietis, ſi quidem minimae oſcillationes fuerint iſochronae. Id quod ex caſibus deinceps euoluendis patebit, in quibus vis ſingulas particulas vrgens proportionalis quoque reperietur diſtantiis ipſarum a ſtatu quietis.

§. 11. Si igitur plura corpora ſimul in ſtatum quietis peruenire debeant, oportet vt in iis quantitas $\frac{Mk}{g}$ ſit eadem. Quocirca potentiae ea corpora ſecundum directionem, in qua mouentur, ſollicitantes debent eſſe in ratione compoſita ex rationibus maſſarum et ſpatiorum percurrendorum, quibus confectis in ſtatum quietis perueniant, ſeu in quo ſitu in quiete permanere poterunt.

§. 12. In omni ergo corpore oſcillationes peragente ſpectandus eſt ante omnia ipſius ſtatus aequilibrii, in quo ſi ſemel fuerit in quiete, in eo perpetuo ſit permanſurum. Hic enim ſtatus reſpondebit ſitui penduli ſimplicis verticali in quo ſolo quieſcere poteſt. Deinde illud corpus parumper ex hoc ſtatu eſt deturbandum, et inquirendum, quanto interuallo quaeque particula ab eo loco, quem in ſtatu aequilibrii occupabat, diſtet; quod erit ſpatium percurrendum. Denique

nique, quo omnes particulae iterum ſimul in ſitum aequilibrii perueniant, debet eſſe potentia, quae vnamquamque particulam ſecundum ipſius viae percurrendae directionem ſollicitat, vt factum ex maſſa particulae in viam percurrendam.

§. 13. At ſi ſingulae corporis oſcillantis partes actu ab aliis viribus atque in aliis directionibus ſollicitentur, tum loco illarum virium aliae ſubſtitui debent, quae ſingulas partes ſecundum ſpatiorum percurrendorum directiones ſollicitent, et proportionales ſint factis ex maſſis ipſarum particularum et viis percurrendis. Haeque potentiae tantae ſunt accipiendae, vt omnes aequiualeant ipſis potentiis corpus actu ſollicitantibus.

§. 14. Cum igitur hae potentiae ſubſtituendae ipſis potentiis corpus ſollicitantibus aequiualere debeant, ex ſtatica conſtat, ſi earum loco potentiae ipſis aequales at ſecundum directiones contrarias agentes collocentur, tum corpus eſſe debere in aequilibrio. Quamobrem iſte ſtatus aequilibrii erit determinandus, quo definito tempus innoteſcet, quo corpus ſibi relictum oſcillationes ſingulas abſoluat. Hac ergo ratione tota circa oſcillationes corporum verſans disquiſitio ad ſtatica principia reducitur. Quae omnia ex ſequentibus caſibus melius percipientur.

Fig. 2. §. 15. Sit virga rigida grauitate ſeu potius omni materia deſtituta et quatuor ponduſculis A, B, C, D onuſta; eaque circa O oſcillationes peragat, dum in ſitum aequilibrii O*d* accedit, ex eoque in alteram partem recedit.

Huius-

Huiusque penduli compositi requiritur tempus vnius cuiusque oscillationis. Ponamus longitudinem penduli simplicis isochroni esse f, quod scilicet pendulum eodem tempore descensum absoluat, quo tempore virga O D in situm O d pertingit.

§. 16. Quo autem virga OD in situm O d transferatur corpusculis A, B, C, et D percurrenda sunt spatia A a, B b, C c, et D d, quae ob angulum D O d infinite paruum, pro lineis horizontalibus haberi poterunt. Omnia vero haec corpuscula in A d simul eodemque tempore, quo pendulum f descensum absoluit, peruenient, si ea secundum directiones A a, B b, C c et D d vrgeantur viribus $\frac{A.Aa}{f}$, $\frac{B.Bb}{f}$, $\frac{C.Cc}{f}$ et $\frac{D.Dd}{f}$ respectiue. Quare si his potentiis aequales in directionibus contrariis A α, B β, C γ et D δ applicentur, hae virgam AD in hoc situ AD in aequilibrio seruabunt.

§. 17. Singula vero corpuscula A, B, C et D reipsa vi grauitatis deorsum tendunt viribus ipsis eorum massis proportionalibus. Quare hae potentiae deorsum trahentes cum illis horizontalibus Aα, Bβ, Cγ et Dδ in aequilibrio debent esse constitutae. At momentum ponderum A, B, C, D ad virgam circa O conuertendam est $=$ A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd. Momentum vero potentiarum horizontalium est $\frac{A.Aa.AO + B.Bb.BO + C.Cc.CO + D.Dd.DO}{f}$. Quae momenta cum debeant esse aequalia prodibit $f = \frac{A.Aa.AO + B.Bb.BO + C.Cc.CO + D.Dd.DO}{A.Aa + B.Bb + C.Cc + D.Dd}$, quae est longitudo penduli simplicis isochroni cum pendulo composito OD.

§. 18. Sunt autem ſpatia ſingulis corporibus percurrenda Aa, Bb, Cc, Dd diſtantiis ipſorum a polo O proportionalia. Quocirca erit $f = \frac{A.AO^2 + B.BO^2 + C.CO^2 + D.DO^2}{A.AO + B.BO + C.CO + D.DO}$ Quae expreſſio eſt ea ipſa, quae ex regulis iam ſatis cognitis pro diſtantia centri oſcillationis a polo O inuenitur. Eſt enim diſtantia centri oſcillationis a polo O nil aliud, niſi longitudo penduli ſimplicis ipſi compoſito OD iſochroni. Cognita ergo longitudine f innoteſcit numerus oſcillationum, quem hoc pendulum compoſitum OD dato tempore abſoluit.

Figura 3. §. 19 Sin autem ponduſcula, quae virgis rigidis inter ſe connexa circa polum O oſcillari ponuntur, non fuerint in linea recta ſita, primo caſus aequilibrii eſt ſpectandus, qui ſit is, qui in figura repraeſentatur, in qua tria ponduſcula A, B, C ex polo O ſunt ſuſpenſa. Horum ergo ponduſculorum centrum grauitatis erit poſitum in recta verticali OF. Quare ſi demittantur ad hanc verticalem perpendicula AE, BF et CG erit $A.AE + B.BF = C.CG$.

§. 20. Conſideretur iam triangulum ABC circa polum O infinite parum conuerti, ita vt A in a, B in b, atque C in c perueniat, erunt haec elementa Aa, Bb, Cc inter ſe vt AO, BO et CO. Sit iam f longitudo penduli ſimplicis deſcenſum eodem tempore abſoluentis, quo tria ponduſcula ex ſitu abc in ſitum ABC pertingunt. Hoc poſito erit vis quae corpus A in a ſecundum aA vrget $= \frac{A.Aa}{f}$; ſimiliterque vis corpus B iuxta bB vrgens $= \frac{B.Bb}{f}$, et vis corpus C per cC vrgens $= \frac{C.Cc}{f}$. Harum ergo virium momentum in polum O erit

erit $= \frac{A.Aa.AO + B.Bb.BO + C.Cc.CO}{f}$. Momentum vero, quod oritur ex ponderibus corporum A, B, C in a, b, c fitorum in O, eft $= A.AE + B.BF - C.CG + \frac{A.OE.Aa}{AO} + \frac{B.OF.Bb}{BO} + \frac{C.OG.Cc}{CO}$, in qua formula $A.AE + B.BF - C.CG$ eft $= 0$, propterea quod ABC eft ftatus aequilibrii.

§. 21. Cum igitur haec duo momenta inter fe debeant effe aequalia erit $\frac{A.Aa.AO + B.Bb.BO + C.Cc.CO}{f} = \frac{A.Aa.OE}{AO} + \frac{B.Bb.OF}{BO} + \frac{C.Cc.OG}{CO}$. Quia autem Aa, Bb, Cc, funt ipfis AO, BO et CO proportionalia, erit $\frac{A.AO^2 + B.BO^2 + C.CO^2}{f} = A.OE + B.OF + C.OG$. Ex qua aequatione oritur $f = \frac{A.AO^2 + B.BO^2 + C.CO^2}{A.OE + B.OF + C.OG}$. Exprimit autem $\frac{A.OE + B.OF + C.OG}{A + B + C}$ diftantiam centri grauitatis corporum A, B, C a polo O, quod fi ponatur in M, erit longitudo penduli fimplicis ifochroni $f = \frac{A.AO^2 + B.BO^2 + C.CO^2}{(A + B + C).OM}$, quae quantitas dat quoque diftantiam centri ofcillationis a polo O. Ex hac ergo nafcitur fequens regula pro centro ofcillationis corporis cuiuscunque rigidi circa punctum fixum ofcillantis inueniendo. *Quaelibet particula multiplicetur in quadratum diftantiae fuae a polo, et horum factorum fumma diuidatur per maffam totius corporis in diftantiam centri grauitatis a polo ductam; quotusque dabit diftantiam centri ofcillationis a polo feu longitudinem penduli fimplicis ifochroni.* Haecque regula fufficit ad ofcillationes quorumcunque corporum rigidorum circa polum fixum determinandas.

§. 22. Hic quidem pofuimus omnes corporis ofcillantis partes cum polo O in eodem fitas effe plano,

 easque

quae in eodem plano oſcillationes abſoluere; nihilo vero minus haec eadem regula valet, ſi vel omnes partes non in eodem plano fuerint poſitae, vel oſcillationes non in eo plano peragantur. His enim in caſibus non tantum polus ſeu punctum debet conſiderari, ſed axis ſeu linea horizontalis, circa quam oſcillationes abſoluuntur. Hic enim iterum quaeuis particula in quadratum diſtantiae ſuae ab axe eſt multiplicanda, et ſumma omnium factorum per factum ex tota oſcillantis corporis maſſa in diſtantiam centri grauitatis ipſius ab axe diuidenda, ex qua diuiſione ortus quotus dabit centrum oſcillationis ſeu potius longitudinem penduli iſochroni. Hinc inuenitur Theorema Hugenianum pro globo ex materia homogenea conſtante A B circa polum O oſcillante, Figura. 4. quod ſcilicet centrum oſcillationis Z ſeu longitudo penduli ſimplicis iſochroni ſit $OZ = OC + \frac{2}{5}\frac{AC^2}{OC}$, exiſtente C centro globi.

§. 23. Dantur autem praeter motum oſcillatorium corporum rigidorum circa polum fixum, ex quo ſunt ſuſpenſa, infinita alia oſcillationum genera. Quorum vnicum ſatis notum, neque tamen a quoquam, quantum mihi conſtat expoſitum, hac methodo pertractabo, antequam ad corpora flexibilia progrediar. Conſtat autem hoc oſcillationum genus in motu reciproco curuarum vel corporum quorumque baſi conuexa ſuper plana ſuperficie vacillantium. Quem motum, ne cum motu oſcillatorio modo expoſito confundatur, vacillatorium appellari conuenit. In hoc motu vero notandum eſt pla-

planum, ſuper quo ſit, aliquantulum aſperum eſſe ponendum, ne curuae de loco ſuo inter vacillandum dimoueri queant, quod eueniret ſi planum maxime foret politum.

§. 24 Sit igitur BAD baſis ſeu ſectio verticalis corporis ſuper plano EF vacillantis, cuius in imo puncto A curuaturae radius ſit AC; in hocque ſitu ſit corpus in aequilibrio, atque M ſit particula quaecunque huius corporis. Quoniam vero in hoc ſitu BAD corpus ponitur eſſe in aequilibrio, erit eius centrum grauitatis in recta verticali AC ſitum. Quamobrem erit ſumma omnium factorum ex particulis M in diſtantias ipſarum MQ a verticali $AC = 0$, ſumtis nempe diſtantiis particularum ad alteram partem rectae AC poſitarum negatiuis, ſeu erit $\int M.MQ = 0$. Iam vacillet hoc corpus parumper, vt veniat in ſitum $b\alpha d$, in quo α eſt punctum contactus corporis cum plano EF et radius αc; quo motu punctum A in a perueniet, et M in m, ita vt ſit ang. $M\alpha m$ ſeu $MNm = C\alpha c$ ſeu $AC\alpha$ atque elementum Mm normale erit ad rectam $M\alpha$ vel MA. Figura 5.

§ 25. Poſito nunc corpore BAD in ſitu bad, determinari debet vis id rurſus in ſtatum quietis BAD reſtituens, quae reperietur ſumendis omnibus momentis, quae ſingulae particulae M habent ad corpus circa α conuertendum. Momentum vero particulae M in m poſitae erit $M.p\alpha$ demiſſo ex m in EF perpendiculo mp. Cum autem ſit $CA : A\alpha = AM : Mm$; erit $Mm = \frac{AM.A\alpha}{CA}$;

O 3 vnde

vnde erit $AM : PM = Mm : Pp$ seu $Pp = \frac{PM.A\alpha}{CA}$. Ex his fit $p\alpha = PA + A\alpha - Pp = PA + \frac{(CA - PM)A\alpha}{CA} = PA + \frac{CQ.A\alpha}{CA}$. Particulae ergo M momentum est $M.PA + \frac{M.CQ.A\alpha}{CA}$. Atque summa omnium momentorum erit $= \int M.PA + \int \frac{M.CQ.A\alpha}{CA} = \int \frac{M.CQ.A\alpha}{CA}$, quia $\int M.PA$ aequale est nihilo.

§. 26. Ponamus iam longitudinem penduli isochroni $= f$, erit vis punctum m in M sollicitans $= \frac{M.Mm}{f} = \frac{M.AM.A\alpha}{CA.f}$ huiusque vis momentum in $\alpha = \frac{M.AM^2.A\alpha}{CA.f}$. Omnium ergo horum momentorum summa erit $\int \frac{M.AM^2.A\alpha}{CA.f}$ seu $\frac{A\alpha}{CA.f} \int M.AM^2$, ob $A\alpha$, CA et f constantes quantitates. Haec vero momentorum summa aequalis esse debet summae momentorum inuentae $\int \frac{M.CQ.A\alpha}{CA}$ seu $\frac{A\alpha}{CA} \int M.CQ$, vnde habebitur ista aequatio $f \int M.CQ = \int M.AM^2$, ex qua fit $f = \frac{\int M.AM^2}{\int M.CQ}$, quae expressio dat longitudinem penduli simplicis isochroni, quod iisdem temporibus oscillationes absoluit, quibus corpus BAD super plano EF vacillationes peragit. Quocirca hinc tempus cuiusque vacillationis definire licet.

§. 27. In formula autem inuenta designat $\int M.CQ$ distantiam centri grauitatis corporis a C in massam totius corporis ductam. Si igitur G fuerit centrum grauitatis atque massa totius corporis ponatur C, erit longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{\int M.AM^2}{C.CG}$. Ponamus autem ad comparationem instituendam corpus in situ deorsum conuerso circa A oscillationes absoluere, erit longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{\int M.AM^2}{C.AG}$. Data ergo hac

hac penduli longitudine per priorem regulam inuenta, quae sit F; erit $F.AG = f.CG$ atque $f = \frac{F.AG}{CG}$. Si igitur inuentae fuerint oscillationes corporis ex A suspensi, innotescent simul vacillationes super plano EF.

§. 28. Sit machina vacillans basin BAD habens omni materia destituta praeter vnicum ponduseulum M in axe CA situm. Vacillante ergo hac machina super plano EF, erit londitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{AM^2}{CM}$. Vnius igitur vacillationis tempus erit vt $\frac{AM}{\sqrt{CM}}$. Atque quo dato tempore, eo scilicet quo pendulum simplex f oscillatur, vacillationes absoluantur, debet esse $AM^2 = f.AC - f.AM$. Quare inuenitur $AM = -\frac{1}{2}f + \sqrt{(\frac{1}{4}f^2 + f.AC)}$. Figura 6.

§. 29. Consideremus iam segmentum circulare BAD ex vniformi constans materia vacillare super recta EF. Ponatur $AC = a$; $AH = b$; $AP = x$, erit applicata $PM = \sqrt{(2ax - xx)}$. Iam in elemento $MPpm$, capiatur particula μ existente $P\mu = z$; erit ista particula $= dxdz$, quae ducta in $A\mu$ quadratum dat $dxdz(x^2 + z^2)$, cuius integrale posito x constante est $x^2zdx + \frac{z^3dx}{3}$. Fiat $z = \sqrt{(2ax - xx)}$, erit summa factorum ex singulis elementi mP particulis in quadrata distantiarum ab $A = dx(\frac{2ax}{3} + \frac{2xx}{3})\sqrt{(2ax - xx)}$, cuius duplum $\frac{4xdx}{3}(a + x)\sqrt{(2ax - xx)}$ respondebit toti elemento $MMmm$. Huius differentialis integrale denuo sumtum dat $3a^2\int dx \sqrt{(2ax - xx)} - (\frac{x+[illegible]a}{3})(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}$. Ponatur $x = b$ p[illegible] l. AH pro toto segmento $BAD = \frac{3a^2}{2}$.BA I[illegible] P $- \frac{1}{3}$AH.bH. Figura 7.

§. 30.

§. 30. Ad fummam vero ipfarum $M.CQ$ inueniendam, multiplicetur elementum $MMmm = 2dx\sqrt{(2ax - xx)}$ per $CP = a - x$, prodibit $2(a-x)dx\sqrt{(2ax - xx)}$, cuius integrale eft $\frac{2}{3}(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}$ in quo fi ponatur $AP = AH$, habebitur $\int M.CQ$ pro toto fegmento $BAD = \frac{2}{3} BH^3$. Longitudo ergo penduli fimplicis ifochroni erit $\frac{9a^2.BADB}{4BH^3} - \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}AH$. Si fiat fegmentum hoc aequale femicirculo, fient $BH = a$, $AH = a$, pofitaque ratione inter diametrum et peripheriam $1 : \pi$ erit area femicirculi $= \frac{\pi a^2}{2}$. Pro femicirculo ergo vacillante erit longitudo penduli fimplicis ifochroni $= \frac{9}{8}\pi a - 2a$, feu quam proxime $\frac{43}{28}a$. Semicirculus ergo radii 2061 fcrup. ped. Rhenani fingulis minutis fecundis vacillationes abfoluet.

§. 31. Si tantum arcus circuli BAD materia vniformi conftet, reperietur $\int M.AM^2 = 2a^2(BAD - BD)$; atque $\int M.CQ = a.BD$. Ergo longitudo penduli fimplicis ifochroni erit $= \frac{2a.BAD}{BD} - 2a$. Aequetur arcus toti femiperipheriae erit longitudo penduli ifochroni $= a(\pi - 2) = \frac{8}{7}a$ quam proxime. Minore ergo tempore femiperipheria quam femicirculus vacillationes abfoluit. Ceterum in genere notari debet de his motibus reciprocis, centrum grauitatis femper infra centrum bafis C fitum effe debere: nam fi in ipfo centro C centrum grauitatis exiftat, corpus ex ftatu quietis deturbatum non reftituetur, fed quiefcet. At fi fupra C centrum grauitatis exiftat corpus non folum non motu reciproco feretur, fed penitus fubuertetur.

§. 32.

§. 32. His de corporibus rigidis expofitis pergo ad ofcillationes corporum flexibilium, quae vel funt perfecte flexibilia, vel ita comparata, vt ad ea flectenda vi fit opus, cuiusmodi corpora elaftica vocantur. Ex quo intelligitur corpora perfecte flexibilia ex elafticis oriri, fi vis elaftica euanefcat. De huiusmodi corporibus igitur, antequam eorum ofcillationes poffunt determinari, neceffe eft, vt figurae, quas inter ofcillandum induunt, definiantur. Quod quo fecundum in principio tradita principia fieri queat, ante neceffe eft, vt figura definiatur, quam huiusmodi corpus a quibuscunque potentiis follicitatum induere debet, id quod prolixe fatis in *Tom. III. Comment.* fum perfecutus. Quamobrem breuitatis caufa propofitionem primariam ibi traditam hic repetam.

§. 33. Sit Ba virga recta elaftica in B fixa, quae tum a potentiis quibuscunque in fingulis punctis applicatis, tum etiam a duobus ponderibus E et F in altero extremo termino A appenfis induat figuram BMA, cuius naturam aequatione exponere oportet. Sumatur recta AC pro axe, in eaque abfciffa AP $= x$, fitque applicata PM $= y$. Ponamus fingulis punctis M duas potentias effe applicatas, quarum altera in directione verticali MP agat, altera in directione horizontali MQ. Sit fumma omnium potentiarum verticalium fingulis arcus AM punctis applicatarum P; et fumma omnium horizontalium eidem arcui applicatarum Q. Praeterea fit vis elaftica in M $=$ V. Cumque eadem vis elaftica fit eo maior, quo magis virga curuatur, erit vis elaftica in M vt V diuifum per radium ofculi in M, quem po- Figura 8.

namus $= r$. His positis natura curuae BMA hac continebitur aequatione $\frac{V}{r} = Ex + Fy + \int P\,dx + \int Q\,dy$. Si ergo virga fuerit perfecte flexilis; euanescet V, idcoque haec aequatio $Ex + Fy + \int P\,dx + \int Q\,dy = 0$, dabit naturam curuae quaesitae.

Figura 9. §. 34. Sit funis perfecte flexilis Ba ex B suspensus, qui ad oscillationes minimas peragendas sit impulsus, ita vt in medio cuiusque oscillationis in situm Ba perueniat, ad quam legem quascunque oscillationes vt libet initio irregulares reduci experientia demonstrat. Sit nunc BMA figura, quam funis inter oscillandum induit, quae, quia infinite parum a verticali Ba declinat, erit Aa linea horizontalis, et arcus BMA $=$ Ba. Exponant applicatae Nm curuae DN crassities funis in respondentibus locis M. Ex A ducatur verticalis AP, voceturque $AP = x = am$, et $PM = y$ atque $Nm = q$. Erit ergo quam proxime arcus $AM = AP = x$, atque hinc pondus elementi arcus AM erit $= q\,dx$. Ponatur $Aa = b$, et $Mm = u$, erit $y = b - u$.

§. 35. Sit porro longitudo penduli simplicis isochroni $= f$; necesse est vt quaeuis particula M, quae est $q\,dx$ sollicitetur versus Mm vi, quae est $= \frac{qu\,dx}{f}$, est enim $Mm = u$ spatium particulae M percurrendum, quo in statum aequilibrii perueniat. Eundem igitur hae potentiae in singulis punctis applicatae effectum producent, quem vis grauitatis, qua singulae particulae funis deorsum vrgentur. Quamobrem si in singulis punctis M potentiae $\frac{qu\,dx}{f}$ versus contrariam plagam MP applicatae concipiancipiantur, funis BMA ab his potentiis et propria grauitate sollicitatus erit in aequilibrio. Cum autem P denotet summam omnium potentiarum MP, erit $P = \int \frac{qudx}{f}$ Pondus porro particulae M est $= q\,dx$ et secundum MQ tendit, quae directio illi, quam in generali propositione assumsimus est contraria; hanc ob rem erit $Q = -\int q\,dx$. E vero et F euanescent. Ex his inuenitur ista pro curua BMA aequatio $\int dx \int \frac{qudx}{f} = \int dy \int q\,dx$, seu $dx \int qudx = f dy \int q\,dx$, et posito dx constante, erit $qudx^2 = f ddy \int qdx + fqdxdy$, in qua si loco y ponatur $b - u$ prodit $qudx^2 + fddu \int qdx + fqdxdu = 0$. Quae est aequatio pro curua AMB, ex qua longitudo f determinatur ex data funis longitudine Ba; quae si ponatur a, et ex aequatione quaeratur locus vbi $u = 0$; dabit valor ipsius x per f inuentus longitudinem a, vnde f per a inuenietur. Siue sumto M in A erit $\int qudx = Da.Aa.dx$ et $\int qdx = Da.dx$. Quibus positis erit in puncto A, $f = \frac{Aa.dx}{dy}$ = tangenti seu subtangenti curuae in A.

§. 36. Progredior nunc ad problema, quod mihi *Cl. Dan. Bernoulli* nuperrime proposuit, in quo oscillationes laminae elasticae muro verticali infixae et in plano horizontali oscillantis requirit. Sit igitur Ba virga seu lamina elastica in situ horizontali muro in B infixa, atque eiusdem vbique crassitiei. Induat ea inter oscillandum figuram BMA, sitque longitudo penduli simplicis isochroni $= f$. Debebit ergo esse vis, quae quoduis eius elementum M, quod est $= dx$, posito AP $= x$, secundum Mm vrget $= \frac{Mm.dx}{f}$. Quare si in quouis eius pun- Figura. 10.

P 2 cto

cto M potentia $\frac{Mm.dx}{f}$ secundum directionem ipsi Mm contrariam MP concipiatur applicata, lamina elastica BMA in hoc situ erit in aequilibrio. Ponatur PM$=y$, A$a=b$, et M$m=b-y=u$; sitque radius osculi in M$=r$, et vis elastica absoluta $=$A seu constans; erit ergo V$=$A. Deinde quia grauitas laminae non in considerationem venit, erit Q$=0$, et P$=\frac{\int u\,dx}{f}$. Ex quibus pro curua BMA haec obtinetur aequatio $\frac{A}{r}=\int dx\int\frac{u\,dx}{f}$. Posito autem dx constante est $r=\frac{-dx}{ddy}=\frac{dx^2}{ddu}$; quare erit A$ddu$ $=dx^2\int dx\int\frac{udx}{f}$ seu A$fd^4u=u\,dx^4$, quae est aequatio pro curua AMB.

§. 37. Ex hac autem aequatione differentiali quarti ordinis valde est difficile quicquam ad oscillationes laminarum elasticarum cognoscendas deriuare. Quia enim haec aequatio quadruplicem integrationem requirit, si in vnaquaque constans adiiciatur, tam innumerabiles prodibunt eae curuae, ad quas ea pertinet, vt quae illarum nostro exemplo conueniat, non sine summa circumspectione definiri queat. Obseruauit quidem *Cl. Dan. Bernoulli* in hac aequatione contineri istas B$d^2u=u\,dx^2$ et B$du=u\,dx$, quarum vero neutra hic locum habere potest. Quod quidem ad quatuor illas constantes in totidem integrationibus addendas attinet, earum tres ex his conditionibus determinantur, quod posito $x=0$, fieri debeat $u=b$; simulque et $\int u\,dx=0$ et $\int dx\int u\,dx=0$; quarta vero constans tamen manet indeterminata. Eam autem ex hac conditione definiri debere tandem intellexi, quod in puncto B, vbi fit $u=0$, tangens in ipsam rectam

rectam Ba debeat incidere, id quod natura elateris, qui non nisi a potentia infinita ad angulum finitum inflecti potest, postulat.

§. 38. Quo igitur melius curuae BMA natura cognoscatur, sumo aequationem $A\int ddu = dx^2 \int dx \int u dx$ eamque in seriem transmuto tribus primo memoratis conditionibus satisfaciendo. Methodo autem ad hoc faciendum satis consueta adeptus sum hanc aequationem $u = b - Cx + \frac{bx^4}{1.2.3.4\,Af} - \frac{Cx^5}{1.2.3.4.5\,Af} + \frac{bx^8}{1.2---8\,A^2f^2} - \frac{Cx^9}{1.2.3----9\,A^2f^2}$ + etc. quae series ex duabus satis regularibus est conflata. In ea vero inest noua indeterminata constans C, quae ex quarta conditione debet definiri. Pono ergo B$a = a$, positoque $x = a$, euanescere debet u. Quocirca prodibit ista aequatio $0 = b - Ca + \frac{ba^4}{1.2.3.4.Af} - \frac{Ca^5}{1.2.3.4.5.Af}$ + etc. ex qua prodit $C = \dfrac{b + \frac{ba^4}{1.2.3.4\,Af} + \frac{ba^8}{1.2.3--8\,A^2f^2}}{a + \frac{a^5}{1.2.3.4.5\,Af} + \frac{a^9}{1.2.3--9\,A^2f^2}}$

Cum vero etiam $\frac{du}{dx}$ debeat esse $= 0$ si $x = a$; erit $0 = -C + \frac{ba^3}{1.2.3\,Af} - \frac{Ca^4}{1.2.3.4\,A^2f^2}$ + etc. seu $C =$

$$\frac{\frac{ba^3}{1.2.3\,Af} + \frac{ba^7}{1.2.--7\,A^2f^2} - \frac{ba^{11}}{1.2---11.A^3f^3}}{1 + \frac{a^4}{1.2.3.4.Af} + \frac{a^8}{1.2.--8\,A^2f^2} + \text{etc.}}$$

§. 39. His duabus inuentis aequationibus coniungendis et loco numeralium coefficientium litteris α, β, γ, etc. ponendis prodibit ista aequatio: $0 = 1 + \frac{\alpha a^4}{Af} + \frac{\beta a^8}{A^2f^2} + \frac{\gamma a^{12}}{A^3f^3}$ + etc. in qua C non amplius inest. Ex hac aequatione pro f valor huiusmodi erit formae $\frac{Na^4}{A}$ denotante N numerum quempiam constantem, qui est cir-

 citer

citer $= \frac{2}{25}$, ita vt longitudo penduli ſimplicis iſochroni ſit vt $\frac{\alpha a^4}{\Lambda}$. *Pro variis ergo laminis elaſticis eiusdem vbique craſſitiei oſcillantibus erunt longitudines pendulorum ſimplicium iſochronorum in ratione compoſita ex directa quadruplicata longitudinum laminarum, et reciproca ſimplici elaſticitatum abſolutarum. Tempora vero ſingularum oſcillationum erunt directe vt quadrata longitudinum laminarum et inuerſe vt radices quadratae ex elaſticitatibus abſolutis.* Tempora igitur oſcillationum laminarum aequali elaſticitate praeditarum ſunt in duplicata ratione longitudinum laminarum.

§. 40. Sin autem duae laminae ex materiis diuerſae elaſticitatis aequales fabricentur, eaeque parieti firmo infigantur, tum tempora oſcillationum illarum erunt in ratione reciproca ſubduplicata elaſticitatum, quia longitudines ponuntur aequales. Quamobrem numeri oſcillationum, quas iſtae laminae dato tempore puta vno minuto edunt, erunt directe vt radices quadratae ex elaſticitatibus. Hoc igitur modo diuerſarum materiarum elaſticitates explorari poterunt, quod tum in Phyſica, tum in vita communi non parum vtilitatis habebit. Hinc enim inueſtigari poterit, quanto alia chalybis ſpecies ſit alia magis elaſtica; atque etiam elaſticitates diuerſorum metallorum inter ſe comparari poterunt. Ad hoc accedit, quod haec methodus admodum ſit facilis, et ſola oſcillationum numeratione perficiatur. Ne autem oſcillationes nimis fiant celeres, oportet vt laminae ſatis ſint magnae ſeu longae; de quo quidem obſeruaui ſufficere poſſe, ſi earum longitudo ſit duorum circiter pedum.

§. 41.

§. 41. In hoc negotio vel lamina grauitatis expers ponitur, vel ita eſt parieti firmo infigenda, vt grauitas oſcillatorium motum nihil afficiat, id quod obtinetur, ſi horizontaliter muro infigatur, atque ſatis ſit lata, ne a grauitate deorſum incuruari queat. Nunc vero quoque laminam elaſticam grauem contemplabimur, eamque pauimento firmo verticaliter in B infixam ponemus, ita vt ea ex B dependens oſcillationes perficiat. Sit ergo BMA curua, quam haec lamina inter oſcillandum format, in qua vt ante pono $Aa = b$, $AP = am = AM = x$, $PM = y$, $Mm = u$, radium oſculi in $M = r$ atque vim elaſticam in $M = \frac{A}{r}$. Sit f longitudo penduli ſimplicis iſochroni, erit vis, qua quoduis elementum dx per Mm vrgeri debet $= \frac{udx}{f}$, quae ergo vis ſi in directione contraria MP applicata concipiatur, tota lamina in ſitu BMA erit in aequilibrio. His ergo cum generali propoſitione comparatis eſt $P = \int \frac{udx}{f}$, $Q = -\alpha \int dx = -\alpha x$, et E et $F = 0$. Prodibit ergo pro curua BMA iſta aequatio $\frac{A}{r} = \int dx \int \frac{udx}{f} - \alpha \int x\,dy$ ſeu $\frac{A\,ddu}{dx^2} = \int dx \int \frac{udx}{f} + \alpha \int x\,du$, quae abit in $fA\,d^4u = udx^4 + \alpha f dx^3 du + \alpha f x dx^2 ddu$, quam autem vlterius non perſequor.

§. 42. His de oſcillationibus funium perfecte flexibilium et laminarum elaſticarum vnico puncto fixarum expoſitis ad oſcillationes eorundem corporum inueſtigandas progredior, ſi in duobus punctis fuerint fixae, quorſum pertinent motus vibratorii chordarum tenſarum tam perfecte flexibilium quam elaſticarum. Ac primo quidem ſit BPA chorda perfecte flexibilis in B fixa, in A vero Figura 11.

vero tenſa pondere F ope fili AC. In A vero chorda vel per foraminulum tranſit vel ponticulo ſuperiacet, ne vibrationes vltra A verſus B propagentur. Huius ergo loco pondus E concipio, quo chordae punctum A ſemper in hoc loco retineatur. Sit itaque BMA figura, quam chorda inter oſcillandum induit, voceturque $AP = x$, cui et AM ob interuallum PM valde paruum aequatur, et $PM = y$, ſitque ponduſculum ſeu maſſa elementi chordae in $M = g\,dx$, pono enim chordam aequabilis craſſitiei.

§. 43. Sit porro longitudo penduli ſimplicis iſochroni f, erit vis, qua quoduis elementum $g\,dx$ ex M verſus P per MP vrgetur $= \frac{gy\,dx}{f}$. Huic ergo vi, ſi aequalis in directione contraria applicata concipiatur, chorda BMA erit in aequilibrio. Chordam praeterea ipſam grauitatis expertem pono. Hoc ergo caſu ad propoſitionem generalem accommodato erit $P = -\int \frac{gy\,dx}{f} = \frac{-g}{f} \int y\,dx$, $E = E$, atque $F = -F$ ac $Q = 0$. Ex quibus pro curua AMB haec prouenit aequatio $Ex = Fy - \frac{g}{f} \int dx \int y\,dx = 0$, quae bis differentiata dat $Ff\,ddy + gy\,dx^2 = 0$ poſito dx conſtante. Huius aequationis in dy ductae integralis eſt $Ff\,dy^2 + gy^2\,dx^2 = gb^2\,dx^2$ poſita b maxima chordae a recta AB declinatione ef, vbi eſt $dy = 0$. Hanc ob rem erit $dx = \frac{dy\sqrt{Ff}}{\sqrt{g(b^2 - y^2)}}$, atque $x = \frac{\sqrt{Ff}}{b\sqrt{g}} \times$ in arcum circuli cuius ſinus eſt y exiſtente ſinu toto $= b$.

§. 44. Sit tota chordae longitudo $AB = a$, quae ex aequatione inuenta prodire debet, ſi y altera vice euaneſcere ponatur. Hoc vero euenit, ſi arcus ille circuli aequa-

aequalis fit femiperipheriae, quo facto erit $x = a$. Sit ergo $1 : \pi$ ratio diametri ad peripheriam erit πb femiperipheria circuli radii b. Quamobrem erit $a = \frac{\pi \sqrt{Ff}}{\sqrt{g}}$ feu $\sqrt{f} = \frac{a\sqrt{g}}{\pi\sqrt{F}}$ atque $f = \frac{g a^2}{\pi^2 F}$, quae eft longitudo penduli fimplicis ifochroni, in qua F pondus chordam tendens, a longitudinem chordae, et ga feu $\int g dx$ pondus feu maffam chordae fignificat. Sit autem pondus chordae $= p$ erit $f = \frac{ap}{\pi^2 F}$. Singularum igitur vibrationum tempora erunt in ratione compofita fubduplicata ex directis longitudinum et ponderum chordarum et ex inuerfa ponderum chordas tendentium.

§. 45. Quo autem appareat, quot ofcillationes chorda dato tempore fcilicet minuto fecundo edat; confiderari debet longitudo penduli fimplicis fingulis minutis fecundis ofcillantis quae eft 3,166 ped. Rh. Erit ergo vnum minutum fecundum ad tempus vnius chordae vibrationis vt $\sqrt{3{,}166} : \frac{\sqrt{ap}}{\pi\sqrt{F}}$, ex quo numerus vibrationum minuto fecundo editarum eft $\frac{\pi\sqrt{3{,}166 F}}{\sqrt{ap}}$, feu $\frac{\pi\sqrt{3166 F}}{\sqrt{ap}}$, fi a in partibus millefimis pedis Rhenani exprimatur. Pofito vero loco π eius valore, erit ifte vibrationum numerus $= \frac{\sqrt{31250 F}}{\sqrt{ap}} = \frac{125\sqrt{2F}}{\sqrt{ap}}$, vbi 15625 fcrup. denotant altitudinem, quam graue defcendendo minuto fecundo abfoluit.

§. 46. Haec eft ea ipfa regula pro inueniendo vibrationum numero tempore vnius minuti fecundi edito a data chorda tenfa, quam primum *Cl. Taylor* in Methodo Incrementorum, et *Cl. Ioh. Bernoulli* in Comment. noftris dederunt, ex longe diuerfis principiis petitam. Habet autem haec regula magnam vtilitatem in Mufica et acuftica, ad fonos, quos quaeuis chorda edit, determinandos, ſunt enim ſoni inter ſe vti vibrationum dato tempore editarum numeri. Ex hac porro regula, ſi habeatur menſura fixa ſcilicet pedis Rhenani, qui vbi vis locorum ope pendulorum inueniri poteſt, ſoni fixi determinari poterunt, dum chorda ita adaptatur, vt datum minuto ſecundo vibrationum numerum edat. Ope huius regulae inueni in inſtrumentis muſicis, quae ad tonum choralem attemperata ſunt, chordam infimam littera C notatum minuto ſecundo 118 edere vibrationes; ſummam vero, quae $\bar{\bar{c}}$ ſignari ſolet, eodem tempore vibrationes 1888 abſoluere.

§. 47. Ponuntur quidem hic chordae perfecte flexibiles, quod autem in chordas aeneas et chalybeas minus competere videtur. At cum huiusmodi chordae ſint admodum flexibiles, quin etiam laxae ſponte ſeſe inflectant, merito dubitari licet, num elaſticitas in computum ſit ducenda, ſi quidem chordae fuerint admodum tenues, vti in inſtrumentis adhiberi ſolent. Sin autem chordae admodum craſſae fuerint, vt etiam non tenſae ſint in directum ſitae, atque ad eas tantum inflectendas vis requiratur, tum vtique vis elaſtica in calculum duci debebit. Huc ſcilicet pertinent vibrationes bacillorum metallicorum vel etiam ligneorum ſuis extremitatibus ponticulis impoſitorum, qui impulſi, etiamſi non ſint tenſi, ſola vi elaſticitatis ſonos edunt. Si igitur in his elaſticitas

Figura 12. fuerit $= \frac{A}{r}$, vt ſupra poſuimus, atque bacillus AB inter oſcillandum induat curuam AMB, pro qua ponatur $AP = x$, $PM = y$, erit $\frac{A}{r} = -\frac{g}{f} \int dx \int y\,dx$ ſeu $A f\,ddy + g\,dx^2 \int dx \int y\,dx = 0$, quae aequatio fere conuenit cum ea, quam pro lamina elaſtica oſcillante inuenimus, ſed modo alio huic caſui eſt accommodanda.

DE

DE SVMMIS SERIERVM RECIPROCARVM.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

TAntopere iam pertractatae et inueſtigatae ſunt ſeries reciprocae poteſtatum numerorum naturalium, vt vix probabile videatur de iis noui quicquam inueniri poſſe. Quicunque enim de ſummis ſerierum meditati ſunt, ii fere omnes quoque in ſummas huiusmodi ſerierum inquiſiuerunt, neque tamen vlla methodo eas idoneo modo exprimere potuerunt. Ego etiam iam ſaepius, cum varias ſummandi methodos tradidiſſem, has ſeries diligenter ſum perſecutus, neque tamen quicquam aliud ſum aſſecutus, niſi vt earum ſummam vel proxime veram definiuerim vel ad quadraturas curuarum maxime tranſcendentium reduxerim; quorum illud in diſſertatione proxime praelecta, hoc vero in praecedentibus praeſtiti. Loquor hic autem de ſeriebus fractionum, quarum numeratores ſunt 1, denominatores vero vel quadrata, vel cubi, vel aliae dignitates numerorum naturalium; cuius modi ſunt $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ etc., item $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+$ etc. atque ſimiles ſuperiorum poteſtatum, quarum termini generales continentur in hac forma $\frac{1}{x^n}$. Tabula VII.

§. 2. Deductus sum autem nuper omnino inopinato ad elegantem summae huius seriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ + etc. expressionem, quae a circuli quadratura pendet, ita, vt si huius seriei vera summa haberetur, inde simul circuli quadratura sequeretur. Inueni enim summae huius seriei sextuplum aequale esse quadrato peripheriae circuli, cuius diameter est 1; seu posita istius seriei summa $= s$, tenebit $\sqrt{6s}$ ad 1 rationem peripheriae ad diametrum. Huius autem seriei summam nuper ostendi proxime esse 1, 644934066848226436 4, ex cuius numeri sextuplo, si extrahatur radix quadrata, reipsa prodit numerus 3, 141592653589793238 exprimens circuli peripheriam, cuius diameter est 1. Iisdem porro vestigiis, quibus hanc summam sum consecutus, incedens huius seriei $1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \frac{1}{625}$ + etc. summam quoque a quadratura circuli pendere deprehendi. Summa nempe eius per 90 multiplicata dat biquadratum peripheriae circuli, cuius diameter est 1. Atque simili ratione etiam sequentium serierum, in quibus exponentes dignitatum sunt numeri pares, summas determinare potui.

§. 3. Quo igitur, quemadmodum haec sum adeptus, commodissime ostendam, totam rem, quo ipse vsus sum, ordine exponam. In circulo AMBNA centro C

Figura 1. radio AC vel BC = 1 descripto contemplatus sum arcum quemcunque AM, cuius sinus est MP, cosinus vero CP. Posito nunc arcu $AM = s$, sinu $PM = y$, et cosinu $CP = x$, per methodum iam satis cognitam tam sinus y quam cosinus x ex dato arcu s per series possunt

sunt definiri, est enim, vti passim videre licet $y = s - \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \frac{s^7}{1.2.3.4.5.6.7} +$ etc. atque $x = 1 - \frac{s^2}{1.2} + \frac{s^4}{1.2.3.4} - \frac{s^6}{1.2.3.4.5.6} +$ etc. Ex harum scilicet aequationum consideratione ad summas supra memoratarum serierum reciprocarum perueni; quarum aequationum quidem vtraque ad eundem fere scopum dirigitur, et hanc ob rem sufficiet alteram tantum eo, quem sum expositurus, modo tractasse.

§. 4. Aequatio ergo prior $y = s - \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \frac{s^7}{1.2.3.4.5.6.7} +$ etc. exprimit relationem inter arcum et sinum. Quare ex ea tam ex dato arcu eius sinus, quam ex dato sinu eius arcus determinari poterit. Considero autem sinum y tanquam datum, et inuestigo, quemadmodum arcum s ex y erui oporteat. Hic vero ante omnia animaduertendum est, eidem sinui y innumerabiles arcus respondere, quos ergo innumerabiles arcus aequatio proposita praebere debebit. Si quidem in ista aequatione s tanquam incognita spectetur, ea infinitas habet dimensiones, ideoque mirum non est, si ista aequatio innumeros contineat factores simplices, quorum quisque nihilo aequalis positus, idoneum pro s valorem dare debet.

§. 5. Quemadmodum autem, si omnes factores huius aequationis cogniti essent, omnes quoque radices illius seu valores ipsius s innotescerent, ita vicissim si omnes valores ipsius s assignari poterunt, tum quoque ipsi factores omnes habebuntur. Quo autem eo melius tam de radicibus quam de factoribus iudicare queam, transmuto aequationem propositam in hanc formam: $0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1.2.3.y} - \frac{s^5}{1.2.3.4.5.y} +$ etc. Si nunc omnes radices huius aequationis seu omnes arcus, quorum idem est sinus y, fuerint A, B, C, D, E etc. tum factores quoque erunt omnes istae quantitates, $1 - \frac{s}{A}$, $1 - \frac{s}{B}$, $1 - \frac{s}{C}$, $1 - \frac{s}{D}$ etc. Quamobrem erit $1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1.2.3.y} - \frac{s^5}{1.2.3.4.5.y} +$ etc. $= (1 - \frac{s}{A})(1 - \frac{s}{B})(1 - \frac{s}{C})(1 - \frac{s}{D})$ etc.

§. 6. Ex natura autem et resolutione aequationum constat, esse coëfficientem termini, in quo inest s, seu $\frac{1}{y}$ aequalem summae omnium coëfficientium ipsius s in factoribus seu $\frac{1}{y} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} +$ etc. Deinde est coëfficiens ipsius s^2, qui est $= 0$, ob hunc terminum in aequatione deficientem, aequalis aggregato factorum ex binis terminis seriei, $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}$ etc. Porro erit $-\frac{1}{1.2.3.y}$ aequale aggregato factorum ex quaternis terminis eiusdem seriei $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}$ etc. Similique modo erit $0 =$ aggregato factorum ex quaternis terminis eiusdem seriei, et $+\frac{1}{1.2.3.4.5.y} =$ aggregato factorum ex quinis terminis istius seriei, et ita porro.

§. 7. Posito autem minimo arcu $AM = A$, cuius sinus est $PM = y$, et semiperipheria circuli $= p$, erunt $A, p - A, 2p + A, 3p - A, 4p + A, 5p - A, 6p + A$ etc. item $-p - A, -2p + A, -3p - A, -4p + A, -5p - A$, etc. omnes arcus, quorum sinus est idem y. Quam igitur ante assumsimus seriem $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}$, etc. ea transmutatur in hanc $\frac{1}{A}, \frac{1}{p-A}, \frac{1}{-p-A}, \frac{1}{2p+A}, \frac{1}{-2p+A}, \frac{1}{3p-A}, \frac{1}{-3p-A}, \frac{1}{4p+A}, \frac{1}{-4p+A}$ etc. Horum ergo omnium termi-

terminorum summa est $= \frac{1}{y}$; summa autem factorum ex binis terminis huius seriei est aequalis 0; summa factorum ex ternis $= \frac{-1}{1.2.3.y}$, summa factorum ex quaternis $= 0$; summa factorum ex quinis $= \frac{+1}{1.2.3.4.5.y}$; summa factorum ex senis $= 0$. Atque ita porro.

§. 8. Si autem habeatur series quaecunque $a + b + c + d + e + f +$ etc. cuius summa sit α, summa factorum ex binis terminis $= \beta$; summa factorum ex ternis $= \gamma$; summa factorum ex quaternis $= \delta$, etc. erit summa quadratorum singulorum terminorum, hoc est $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 +$ etc. $= \alpha^2 - 2\beta$; summa vero cuborum $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ etc. $= \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma$; summa biquadratorum $= \alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 4\alpha\gamma + 2\beta^2 - 4\delta$. Quo autem clarius appareat, quomodo hae formulae progrediantur, ponamus ipsorum terminorum $a, b, c, d,$ etc. summam esse $= P$, summam quadratorum $= Q$, summam cuborum $= R$, summam biquadratorum $= S$, summam potestatum quintarum $= T$, summam sextarum $= V$ etc. His positis erit $P = \alpha$; $Q = P\alpha - 2\beta$; $R = Q\alpha - P\beta + 3\gamma$; $S = R\alpha - Q\beta + P\gamma + 4\delta$; $T = S\alpha - R\beta + Q\gamma - P\delta + 5\varepsilon$; etc.

§. 9. Cum igitur in nostro casu seriei $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{p-A}$, $\frac{1}{-p-A}$, $\frac{1}{2p+A}$, $\frac{1}{-2p+A}$, $\frac{1}{3p-A}$, $\frac{1}{-3p-A}$ etc. summa omnium terminorum seu α sit $= \frac{1}{y}$; summa factorum ex binis seu $\beta = 0$, atque vlterius $\gamma = \frac{-1}{1.2.3.y}$; $\delta = 0$; $\varepsilon = \frac{+1}{1.2.3.4.5.y}$, $\zeta = 0$; etc. erit summa ipsorum illorum terminorum $P = \frac{1}{y}$; summa quadratorum illorum terminorum $Q = \frac{P}{y} = \frac{1}{y^2}$;

summa

ſumma cuborum illorum terminorum $R = \frac{Q}{y} - \frac{1}{1.2.y}$; ſumma biquadratorum $S = \frac{R}{y} - \frac{P}{1.2.3.y}$. Atque porro $T = \frac{S}{y} - \frac{Q}{1.2.3.y} + \frac{1}{1.2.3.4.y}$; $V = \frac{T}{y} - \frac{R}{1.2.3.y} + \frac{P}{1.2.3.4.5.y}$; $W = \frac{V}{y} - \frac{S}{1.2.3.y} + \frac{Q}{1.2.3.4.5y} - \frac{1}{1.2.3.4.5.6\,y}$. Ex qua lege facile reliquarum altiorum poteſtatum ſummae determinantur.

§. 10. Ponamus nunc ſinum $PM = y$ aequalem radio, vt ſit $y = 1$, erit minimus arcus A cuius ſinus eſt 1 quarta peripheriae pars, $= \frac{1}{2}p$, ſeu denotante q quartam peripheriae partem erit $A = q$ et $p = 2q$. Superior ergo ſeries abibit in iſtam $\frac{1}{q}, \frac{1}{q}, \frac{-1}{3q}, -\frac{1}{3q}, \frac{+1}{5q}, +\frac{1}{5q}, -\frac{1}{7q}, -\frac{1}{7q}, +\frac{1}{9q}, +\frac{1}{9q}$, etc. binis terminis exiſtentibus aequalibus. Horum ergo terminorum ſumma, quae eſt $\frac{2}{q}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ etc.$)$ aequalis eſt ipſi $P = 1$. Hinc igitur oritur $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ etc. $= \frac{q}{2} = \frac{p}{4}$. Huius ergo ſeriei quadruplum aequatur ſemiperipheriae circuli, cuius radius eſt 1, ſeu toti peripheriae circuli, cuius diameter eſt 1. Atque haec eſt ipſa ſeries a *Leibnitio* iam pridem prolata, qua circuli quadraturam definiuit. Ex quo magnum huius methodi, ſi cui forte ea non ſatis certa videatur, firmamentum elucet; ita vt de reliquis, quae ex hac methodo deriuabantur, omnino non liceat dubitari.

§. 11. Sumamus nunc inuentorum terminorum pro caſu quo $y = 1$, quadrata, prodibitque haec ſeries $+\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{9q^2} + \frac{1}{9q^2} + \frac{1}{25q^2} + \frac{1}{25q^2} +$ etc. cuius ſumma eſt $\frac{2}{q^2}(\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} +$ etc.$)$, quae ergo aequalis eſſe debet ipſi $Q = P = 1$. Ex quo ſequitur huius ſeriei $1 + \frac{1}{9}$

+

$+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+$ etc. summam esse $=\frac{q^2}{2}=\frac{p^2}{8}$; denotante p totam circuli peripheriam, cuius diameter est $=1$. Summa autem huius seriei $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+$ etc. pendet a summa seriei $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$etc. quia haec quarta sui parte minuta illam dat. Est ergo summa huius seriei aequalis summae illius cum sui triente. Quamobrem erit $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+$etc. $=\frac{p^2}{6}$, ideoque huius seriei summa per 6 multiplicata aequalis est quadrato peripheriae circuli cuius diameter est 1; quae est ipsa propositio cuius initio mentionem feci.

§. 12. Cum igitur casu quo $y=1$, sit $P=1$ et $Q=1$, erunt reliquarum litterarum R, S, T, V etc. vt sequitur: $R=\frac{1}{2}$; $S=\frac{1}{3}$; $T=\frac{5}{24}$; $V=\frac{2}{15}$; $W=\frac{61}{720}$; $X=\frac{17}{15}$ etc. Cum autem summa cuborum ipsi $R=\frac{1}{2}$ sit aequalis, erit $\frac{2}{q^3}(1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\text{etc.})=\frac{1}{2}$. Quare erit $1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-$etc. $=\frac{q^3}{4}=\frac{p^3}{32}$. Huius ideo seriei summa per 32 multiplicata dat cubum peripheriae circuli cuius diameter est 1. Simili modo summa biquadratorum, quae est $\frac{2}{p^4}(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+$ etc.) aequalis esse debet $\frac{1}{3}$, ideoque erit $1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+$etc. $=\frac{q^4}{6}=\frac{p^4}{96}$. Est vero haec series per $\frac{16}{15}$ multiplicata aequalis huic $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+$etc. quare ista series aequalis est $\frac{p^4}{95}$; seu seriei $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+$etc. summa per 90 multiplicata dat biquadratum peripheriae circuli cuius diameter est 1.

§. 13. Simili modo inuenientur summae superiorum potestatum; prodibit autem vt sequitur $1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}-$etc. $=\frac{5q^5}{48}=\frac{5p^5}{1536}$; atque $1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}$

 + etc

$+$ etc. $= \frac{q^6}{15} = \frac{p^6}{960}$. Inuenta vero huius feriei fumma, cognofcetur fimul fumma huius feriei $1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} +$ etc. quae erit $= \frac{p^6}{945}$. Porro pro poteftatibus feptimis erit $1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} -$ etc. $= \frac{61 q^7}{1440} = \frac{61 p^7}{184320}$ ac pro octauis $1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} +$ etc. $= \frac{17 q^8}{630} = \frac{17 p^8}{161280}$; vnde deducitur $1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} +$ etc. $= \frac{p^8}{9450}$. Obferuandum autem eft de his feriebus in potentiis exponentium imparium figna terminorum alternari, pro poteftatibus paribus vero effe aequalia; hocque in caufa eft, quod huius generalis feriei $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} +$ etc. iis tantum cafibus fumma poffit exhiberi, quibus n eft numerus par. Praeterea quoque notandum eft, fi feriei $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{24}, \frac{2}{15}, \frac{61}{720}, \frac{17}{315}$ etc. quos valores pro litteris P, Q, R, S etc. inuenimus, terminus generalis poffet affignari, tum eo ipfo quadraturam circuli exhibitum iri.

§. 14. In his pofuimus finum PM aequalem radio, videamus ergo quales feries prodeant, fi ipfi y alii valores tribuantur. Sit igitur $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, cui finui minimus arcus refpondens eft $\frac{1}{4}p$. Pofito ergo $A = \frac{1}{4}p$ erit feries terminorum fimplicium feu primae poteftatis ifta $\frac{4}{p} + \frac{4}{3p} - \frac{4}{5p} - \frac{4}{7p} + \frac{4}{9p} + \frac{4}{11p} -$ etc. cuius feriei fumma P aequalis eft $\frac{1}{y} = \sqrt{2}$. Habebitur ergo $\frac{p}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$ etc. quae feries tantum ratione fignorum a *Leibnitiana* differt, et a *Newtono* iam dudum eft prolata. Summa vero quadratorum illorum terminorum nempe $\frac{16}{p^2}(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} +$ etc.$)$ aequalis eft ipfi $Q = 2$. Erit ergo

ergo $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} +$ etc. $= \frac{p^2}{8}$, vti ante eſt inuentum.

§. 15. Si fiat $y = \frac{\surd 3}{2}$ erit minimus arcus huic ſinui reſpondens $60°$, ideoque $A = \frac{1}{3}p$. Hoc ergo caſu ſequens prodibit ſeries terminorum $\frac{3}{p} + \frac{3}{2p} - \frac{3}{4p} - \frac{3}{5p} + \frac{3}{7p} + \frac{3}{8p}$ etc. quorum terminorum ſumma aequalis eſt ipſi $\frac{1}{y} = \frac{2}{\surd 3}$. Habebitur ergo $\frac{2p}{3\surd 3} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} +$ etc. Summa vero quadratorum illorum terminorum eſt $= \frac{1}{y^2} = \frac{4}{3}$; vnde ſequitur fore $\frac{4p^2}{27} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} +$ etc. in qua ſerie deſunt termini ternario conſtantes. Pendet autem haec ſeries quoque ab iſta $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ etc. cuius ſumma erat inuenta $= \frac{p^2}{6}$; nam ſi haec ſeries ſui parte nona minuatur prodit ipſa ſuperior ſeries, cuius ideo ſumma debet eſſe $= \frac{p^2}{6}(1 - \frac{1}{9}) = \frac{4pp}{27}$. Simili modo ſi alii aſſumantur ſinus, aliae prodibunt ſeries, tam ſimplicium, quam terminorum quadratorum altiorumque poteſtatum, quarum ſummae quadraturam circuli inuoluent.

§. 16. At ſi ponatur $y = 0$, huiusmodi ſeries non amplius aſſignari poterunt, propter y in denominatorem poſitum, ſeu aequationem initialem per y diuiſam. Alio autem modo ſeries inde deduci poterunt, quae cum ſint ipſae ſeries $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} +$ etc. ſi n eſt numerus par: quemadmodum harum ſerierum ſummae ſint inueniendae, ſeorſum ex hoc caſu quo $y = 0$ deducam. Poſito vero $y = 0$ ipſa aequatio fundamentalis abit in hanc $0 = s - \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \frac{s^7}{1.2.3.4.5.6.7} +$ etc. cuius aequationis radices dant omnes arcus, quorum ſinus eſt $= 0$.

Eſt autem vna minimaque radix $s = 0$, quare aequatio per s diuiſa exhibebit reliquos arcus omnes, quorum ſinus eſt $= 0$, qui arcus proinde erunt radices huius aequationis $0 = 1 - \frac{s^2}{1.2.3} + \frac{s^4}{1.2.3.4.5} - \frac{s^6}{1.2.3.4.5.6.7} +$ etc. Ipſi vero arcus quorum ſinus eſt $= 0$ ſunt $p, -p, +2p, -2p, 3p, -3p$ etc. quorum binorum alter alterius eſt negatiuus, id quod quoque ipſa aequatio propter dimenſiones ipſius s tantum pares indicat. Quare diuiſores illius aequationis erunt $1 - \frac{s}{p}$, $1 + \frac{s}{p}$, $1 - \frac{s}{2p}$, $1 + \frac{s}{2p}$, etc. atque coniungendis binis horum diuiſorum erit $1 - \frac{s^2}{1.2.3} + \frac{s^4}{1.2.3.4.5} - \frac{s^6}{1.2.3.4.5.6.7} +$ etc. $= (1 - \frac{s^2}{p^2})(1 - \frac{s^2}{4p^2})(1 - \frac{s^2}{9p^2})(1 - \frac{s^2}{16p^2})$ etc.

§. 17. Manifeſtum iam eſt ex natura aequationum, fore coefficientem ipſius ss ſeu $\frac{1}{1.2.3}$ aequalem $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{4p^2} + \frac{1}{9p^2} + \frac{1}{16p^2} +$ etc. Summa vero factorum ex binis terminis huius ſeriei erit $= \frac{1}{1.2.3.4.5}$; ſummaque factorum ex ternis $= \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$ etc. Hanc ob rem erit iuxta §. 8. $\alpha = \frac{1}{1.2.3}$; $\beta = \frac{1}{1.2.3.4.5}$; $\gamma = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$; etc. atque poſita quoque ſumma terminorum $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{4p^2} + \frac{1}{9p^2} + \frac{1}{16p^2} +$ etc. $= P$, et ſumma quadratorum eorundem terminorum $= Q$; ſumma cuborum $= R$; ſumma biquadratorum $= S$; etc. erit per §. 8. $P = \alpha = \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{6}$; $Q = P\alpha - 2\beta = \frac{1}{90}$; $R = Q\alpha - P\beta + 3\gamma = \frac{1}{945}$; $S = R\alpha - Q\beta + P\gamma - 4\delta = \frac{1}{9450}$; $T = S\alpha - R\beta + Q\gamma - P\delta + 5\varepsilon = \frac{1}{93555}$; $V = T\alpha - S\beta + R\gamma - Q\delta + P\varepsilon - 6\zeta = \frac{691}{6825.93555}$ etc.

§. 18.

§. 18. Ex his ergo deriuantur fummae fequentes:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \text{ etc. } = \frac{p^2}{6} = P$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} \text{ etc. } = \frac{p^4}{90} = Q$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} \text{ etc. } = \frac{p^6}{945} = R$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} \text{ etc. } = \frac{p^8}{9450} = S$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} \text{ etc. } = \frac{p^{10}}{93555} = T$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} \text{ etc. } = \frac{691 p^{12}}{6825 \cdot 93555} = V.$$

quae feries ex data lege attamen multo labore ad altiores poteftates produci poffunt. Diuidendis autem fingulis feriebus per praecedentes orientur fequentes aequationes: $p^2 = 6P = \frac{15Q}{P} = \frac{21R}{2Q} = \frac{10S}{R} = \frac{99T}{10S} = \frac{6825V}{691T}$ etc. quibus expreffionibus fingulis quadratum peripheriae cuius diameter eft 1, aequatur.

§. 19. Cum autem harum ferierum fummae etiamfi vero proxime facile exhiberi poffent, tamen non multum adiumenti afferre queant ad peripheriam circuli vero proxime exprimendam propter radicem quadratam, quae extrahi deberet; ex prioribus feriebus eliciemus expreffiones, quae ipfi peripheriae p fint aequales. Prodibit autem vt fequitur:

$$p = 4\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \text{etc.}\right)$$

$$p = 2\left(\frac{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = 4\left(\frac{1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = 3\left(\frac{1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \text{etc}}\right)$$

$$p = \tfrac{16}{5}\left(\frac{1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = \tfrac{25}{8}\left(\frac{1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{6^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = \tfrac{192}{61}\left(\frac{1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \frac{1}{11^7} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \text{etc.}}\right)$$

DE

DE LINEA CELERRIMI DESCENSVS IN MEDIO QVOCVNQVE RESISTENTE.

AVCTORE

Leonh. Euler.

§. 1.

QVae curuae ad certum quendam motum producendum in vacuo non multo labore inueniuntur, eaedem in medio refiftente non folum laborem multo maiorem; fed etiam plus follertiae et cautionis requirunt. Saepenumero quoque euenit, vt multa problemata in hypothefi medii refiftentis folutionem vel omnino refpuant vel in particularibus tantum cafibus admittant. Cuiusmodi eft problema tautochronarum, de quo an in alia refiftentiae hypothefi, praeter fimplicem et duplicatam celeritatum rationem refolui queat, vehementer dubito. Tabula VIII.

§. 2. Pertinet huc quoque problema lineae brachyftochronae feu celerrimi defcenfus, quod a *Cel. Ioh. Bernoulli* in hypothefi vacui Geometris propofitum mox plures easque differentes nactum eft folutiones, quas in Actis Lipfienfibus, Transact. Angl. Comment. Parifinis, pluribusque aliis libris videre licet. Idem autem problema in medii refiftentis hypothefi ego primum in Actis Lipf. A. 1726. foluendum propofui, cum ob eius non contemnendam elegantiam, tum ob fingularem circum-

fpectioſpectionem, qua in eius ſolutione vti oportet, ne quis in errorem incidat.

§. 3. Poſtquam autem hoc problema propoſuiſſem *Celeb. Hermannus* id dignum iudicauit, cuius ſolutionem diſſertationi de motibus variatis Tom. II. Comment. inſereret. Sed copia rerum, quas in hac diſſertatione pertractauit viro ceterum perſpicaciſſimo non permiſiſſe videtur vt hoc problema, quod paucis tantum attigerat, ſatis perpenderet, et ſolutionem inuentam accurate examinaret. Ex quo factum eſt, vt curuae ab illo aſſignatae problemati non conueniant, nec brachyſtochronismi proprietatem poſſideant. Monui etiam hac de re beatae memoriae Virum per litteras, ipſique meam ſolutionem a ſua diſcrepantem transmiſi, vt in cauſam diſcriminis inquireret, ad quae mihi reſpondit, ſe vtique de ſua ſolutione dubitare coepiſſe, et quam primum negotia conceſſura eſſent, emendationem ſe perficere velle, quam etiam, niſi mors interuenisſet, pro eius eximia integritate iam certe haberemus.

§. 4. Quod igitur ipſe feciſſet, ſi vixiſſet, non arbitror quenquam aegre laturum, ſi idem ego fecero atque eius ſolutionem correxero. Hoc non ſolum non iniquum puto, ſed etiam ad id me obſtrictum credo, ne forte poſthac alii ſint acceſſuri, qui Viri eximii famam et exiſtimationem iſto lapſu imminuere ſuſtineant. Atque cum oſtendero, quantam circumſpectionem ad huiusmodi errores euitandos adhiberi oporteat, tum vnusquisque eo facilius Viro defuncto hoc erratum condonabit, tum etiam meum inſtitutum non reprehendet, quo genuina methodo problema a me propoſitum reſoluere ſtatui.

§. 5.

§. 5. Praecipuum, ad quod in ſolutione huius problematis attendere debemus, eſt lemma ex natura maximi et minimi petitum, per quod diſpoſitio duorum elementorum contiguorum curuae quaeſitae determinatur, quo corpus ea breuiori tempore abſoluat deſcendendo, quam quaeuis alia elementa intra eosdem terminos poſita. Huiusmodi propoſitio habetur a *Hugenio* demonſtrata, eaque vſus eſt *Hermannus* in ſua ſolutione: ſed vti mox apparebit, plus ei tribuit, quam oportebat, atque ad reſtrictionem, quam iſta propoſitio requirit, non ſatis attendebat. Quamobrem et hoc Lemma *Hugenianum* et aliud latius patens atque ad quosuis caſus accommodatum in medium proferam.

§. 6. Oporteat igitur in recta FG definire punctum M ex quo ad datos terminos L et N ductae lineae LM, MN a deſcendente corpore tempore breuiſſimo percurrantur: ſit autem celeritas corporis ſupra FG $= m$ et infra eam $= n$, quocunque aſſumto puncto M in FG. His igitur poſitis debebit $\frac{LM}{m} + \frac{MN}{n}$ eſſe minimum, quia hac quantitate tempus per LMN aſſignatur. Quod vt efficiatur, puncto M proximum m eſt accipiendum, et ductis Lm, mN tempora per LMN et LmN aequalia facienda. Hinc ergo habebitur $\frac{LM}{m} + \frac{MN}{n} = \frac{Lm}{m} + \frac{mN}{n}$, ex quo deſcriptis centris L et N arculis Mf et mg prodibit haec aequatio $\frac{mf}{m} = \frac{Mg}{n}$ ſeu iſta analogia $mf : Mg = m : n$. Eſt vero mf ad Mg vt coſinus anguli LMF ad coſinum anguli GMN. Quocirca coſinus angulorum, quos haec duo elementa cum recta FG conſtituere debent, ſunt celeritatibus, quibus illa elementa deſcribuntur, proportiona- Figura 1.

tionales. Atque hoc eſt lemma *Hugenianum*, quo vſus *Hermannus* ad ſuam problematis ſolutionem peruenit.

§. 7. Quo autem perſpiciatur, quam late pateat hoc lemma et quibus in caſibus poſſit adhiberi, ad hoc eſt aduertendum, quod in eo ponitur, elementa omnia infra rectam FG ſumta eadem celeritate n abſolui. Quamobrem, niſi corpus in hisce omnibus elementis, puncto M vbicunque aſſumto, eandem habuerint celeritatem, hoc lemma perperam adhibetur, atque in erroneam ſolutionem inciditur. Euenit autem hoc in medio reſiſtente, atque ita eſt factum, vt *Cel. Hermannus*, poſtquam hoc lemmate in inueniendis brachyſtochronis in vacuo feliciter eſſet vſus, pro mediis reſiſtentibus eodem lemmate a recta via fuerit ſeductus.

§. 8. In vacuo tamen etiam res ita eſt inſtituenda, vt recta FG ad directionem potentiae ſollicitantis vbique ſit normalis. Tum enim id, quod requiritur, obtinetur, et corpus ex L ad quodque rectae FG punctum deſcendens idem ſemper acquirit celeritatis incrementum, ita vt ſingula elementa intra FG ſita aequali celeritate percurrantur. Curua igitur his in caſibus, ſcilicet in vacuo, erit brachyſtochrona, ſi celeritas corporis in quouis elemento proportionalis fuerit ſinui anguli, quem hoc elementum cum directione potentiae ſollicitantis conſtituit. Quamobrem ope huius regulae inueniri poterit curua celerrimi deſcenſus in vacuo, quaecunque fuerit potentiae ſollicitantis lex.

§. 9. Ex his iam ſatis perſpicitur datam regulam inueniendae brachyſtochronae ad medium reſiſtens accommodari

modari non posse. Namque celeritatis incrementa, quae corpus descendendo ex L ad quaeque rectae F G puncta acquirit, non sunt inter se aequalia, etiamsi recta F G ad potentiae sollicitantis directionem sit normalis; sed praeterea ab inclinatione elementorum percursorum pendent, quemadmodum ex natura resistentiae facile apparebit. Pro his igitur casibus peculiare lemma stabiliri oportet, in quo celeritates per inferiora elementa vtcunque variabiles ponuntur, pro diuersis locis in quibus punctum M in F G accipitur.

§. 10. Sumtis igitur vt ante punctis M et m proximis, et ductis elementis L M, M N ac L m, m N, sit celeritas per elementa L M et L $m = q$, celeritas per M N $= q + dt$, at ea per elementum m N $= q + dt + dd\theta$. Incrementum scilicet celeritatis per L M acquisitum ponitur dt, et id, quod per L m acquiritur, ponitur $dt + dd\theta$. Quo igitur tempus per L M N fiat minimum, oportet id aequale fieri tempori per L m N. Ex quo habebitur $\frac{LM}{q} + \frac{MN}{q+dt} = \frac{Lm}{q} + \frac{mN}{q+dt+dd\theta}$, atque ex hoc prodibit $\frac{mf}{q} = \frac{Mg}{q+dt} + \frac{mN.dd\theta}{(q+dt)(q+dt+dd\theta)}$ seu $(q + 2q\,dt + dt^2 + q\,dd\theta + dt\,dd\theta)\,mf = (q^2 + q\,dt + q\,dd\theta)\,Mg + q.mN.dd\theta$. Est vero $mf = \frac{FM.Mm}{LM}$ et $Mg = \frac{MG.Mm}{LM}$ Quibus substitutis et neglectis negligendis orietur $q(\frac{MG}{LM} - \frac{FM}{LM}) = \frac{FM}{LM}dt - \frac{LM.dd\theta}{Mm}$. Quae, cum $dd\theta$ semper ita per M m determinetur vt sit huius formae $Z.Mm$, alias quantitates non inuoluet, nisi quae a puncto M pendebunt.

 §. 11

§. 11. Si aequalia ponantur elementa LF, NG, dicanturque dx, atque fiat $FM = dy$, $LM = ds$, erit $MG = dy + ddy$ et $MN = ds + dds$. Quibus substitutis superior formula transibit in hanc $\frac{qdsddy - qdydds}{ds^2} = \frac{dydt}{ds} - \frac{dsdd\theta}{Mm}$, seu ob $dsdds = dyddy$ posito dx constante, in hanc $\frac{qdx^2ddy}{ds^3} = \frac{dydt}{ds} - \frac{dsdd\theta}{Mm}$. Atque hoc est lemma, quo loco *Hugeniani* ad inueniendas brachystochronas in medio resistente vti debemus.

§. 12. Sit nunc potentia sollicitans quaecunque, eius vero directio, vt ante, normalis ad rectam FG. Ponatur ea dum corpus elementum LM vel Lm describens vrget $= p$, posita vi grauitatis $= 1$. Resistat porro medium in ratione quacunque multiplicata celeritatum, cuius exponens sit $2n$, atque haec resistentia ita se habeat, vt aequalis sit vi grauitatis 1, si corporis celeritas debita fuerit altitudini c. Iam sit corporis in L celeritas tanta, quanta acquiritur lapsu grauis per altitudinem v. Quibus positis erit vis resistentiae, quae motum corporis ab L ad FG ingredientis retardat, $= \frac{v^n}{c^n}$.

§. 13. A potentia p corpus, siue per LM siue per Lm descendat idem accipit celeritatis incrementum, quia FG ad directionem potentiae normalis ponitur. Altitudo autem v capiet augmentum $= pdx$. Resistentia autem ita retardabit corpus per LM descendens, vt decrementum altitudinis v fit $= \frac{v^n}{c^n}$ LM. At si corpus per Lm incedere ponitur, erit decrementum altitudinis $v =$ v^n

$\frac{v^n}{c^n}\text{L}m$. Quare celeritas, qua elementa LM et Lm percurruntur, debetur altitudini v; celeritas vero per MN altitudini $v+pdx-\frac{v^n}{c^n}\text{LM}$, et celeritas per mN altitudini $v+pdx-\frac{v^n}{c^n}\text{L}m$.

§. 14. His cum nostro lemmate comparatis habebimus $q=v$, $q+dt=\sqrt{(v+pdx-\frac{v^n}{c^n}\text{LM})}=\sqrt{v}+\frac{pdx-\frac{v^n}{c^n}.\text{LM}}{2\sqrt{v}}$; adeoque $dt=\frac{pdx-\frac{v^n}{c^n}ds}{2\sqrt{v}}$. Atque $q+dt+dd\vartheta=\sqrt{(v+pdx-\frac{v^n}{c^n}\text{L}m)}=\sqrt{v}+\frac{pdx-\frac{v^n}{c^n}\text{L}m}{2\sqrt{v}}$

Ex his fiet ergo $dd\vartheta=\frac{v^n(\text{LM}-\text{L}m)}{2c^n\sqrt{v}}=-\frac{v^n.\text{FM}.\text{M}m}{2c^n.\text{LM}.\sqrt{v}}$ consequenter $\frac{dd\vartheta}{\text{M}m}=-\frac{v^n dy}{2c^n ds\sqrt{v}}$. Sequens igitur ex istis orietur aequatio singulis per $2\sqrt{v}$ multiplicatis, $\frac{2vdx^2ddy}{ds^3}=\frac{pdxdy}{ds}-\frac{v^n dy}{c^n}+\frac{v^n dy}{c^n}$ seu $2vdxddy=pdyds^2$. Hanc igitur proprietatem, vt sit $v=\frac{pdyds^2}{2dxddy}$, curua brachystochrona habere debet, ex eaque facile erit eam inuenire.

§. 15. Quia ii termini, in quos resistentia $\frac{v^n}{c^n}$ ingreditur sese mutuo destruunt, hoc lemma latissime patet et ad quamcunque resistentiam potest accommodari, sine vlla mutatione. Haec est igitur proprietas vniuersalis omnium brachystochronarum tam in vacuo, quam in quocunque medio resistente. Sed quo facilius illud lemma memoria teneri queat, aliam formam ei inducemus.

§. 16. Aequatio inuenta $2\,v\,dx\,ddy = p\,dy\,ds^2$ si diuidatur per ds^3 abit in hanc $\frac{2v\,dx\,ddy}{ds^3} = \frac{p\,dy}{ds}$, in qua $\frac{p\,dy}{ds}$ exprimit vim normalem resolutione vis sollicitantis p ortam. In altero membro $\frac{2v\,dx\,ddy}{ds^3}$ significat $\frac{-ds^3}{dx\,ddy}$ radium osculi curuae L M N secundum plagam F porrectum. At quia curua versus F est conuexa radius osculi in plagam oppositam G erit directus, et habet idcirco valorem negatiuum. Eius ergo longitudo erit $\frac{ds^3}{dx\,ddy}$. Quare posito radio osculi $= r$, et vi normali $=$ N habebitur ista aequatio $\frac{2v}{r} =$ N. Denotat autem $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam, qua corpus, quatenus in recta linea progredi nequit, curuam, in qua mouetur, premit. Hanc ob rem omnis brachystochrona hanc habebit proprietatem, vt vis normalis aequalis sit vi centrifugae.

Figura 2. §. 17. Notandum autem est omne corpus, quod a quapiam vi sollicitatum siue in vacuo siue in medio resistente super concaua parte curuae cuiusdam A M B incedit, curuam duplici vi premere, vi scilicet normali a potentia sollicitante orta, et vi sua centrifuga. Sit M I potentia solli-

ſollicitans corpus in M; haec reſolui ſolet in duas alias MK, KI, quarum illius directio MK normalis eſt in curuam et propterea vis haec normalis appellatur, alterius KI directio eſt ſecundum curuae tangentem et tangentialis vocatur. Perſpicuum igitur eſt harum virium normalem ſolam corpus ad curuam apprimere. Secundum eandem directionem MK praeterea curua AMB in M premitur a vi centrifuga, quae ſe habet ad vim grauitatis, vt altitudo celeritatem generans v ad dimidium radii oſculi MO.

§. 18. Si ergo curua AMB ſiue in vacuo ſiue in medio reſiſtente quocunque ita fuerit comparata, vt corporis ſuper ea deſcendentis ambae vires, quibus curua premitur ſcilicet normalis et centrifuga, inter ſe fuerint aequales, curua ſemper erit brachiſtochrona, ſeu corpus ſuper ea minori tempore ex A ad M deſcendit, quam ſuper alia quacunque linea per A et M transeunte. Haec igitur aequalitas inter vim normalem et vim centrifugam vera et vniuerſalis eſt lex omnium curuarum brachyſtochronarum, eiusque beneficio in quacunque et potentiae ſollicitantis et reſiſtentiae hypotheſi in promtu erit curuas brachyſtochronas determinare.

§. 19. Quia in vacuo ſecundum *Theorema Hugenianum* celeritas proportionalis eſſe debet ſinui anguli, quem curua cum directione potentiae conſtituit, i. e. ipſi $\frac{MK}{MI}$, erit $\frac{MK^2}{MI^2.MO}$ proportionale ipſi MK ſeu $\frac{MK}{MI}$ ipſi MI. MO. Omnes igitur brachyſtochronae in vacuo hanc habent proprietatem, vt ſinus anguli, quem directio potentiae cum curua facit, vbique ſit proportionalis radio oſculi

osculi et potentiae sollicitanti coniunctim. Quare huius regulae ope sine celeritatis determinatione omnes brachystochronae in vacuo facile inuenientur.

§. 20. Initium autem curuae A, in quo omnes descensus ex quiete fieri debent, semper in eo est loco, in quo curuae tangens in directionem potentiae incidit. In hoc enim loco in vacuo ipsa corporis celeritas propter angulum curuae cum directione potentiae euanescentem fit aequalis o. In medio autem resistente ipsum motus initium a vacuo non differt, et hanc ob rem etiam hoc casu tangens initii curuae cum potentiae directione congruere debet. Huius vero ratio est habenda in adiectione constantium quantitatum, quando aequationem differentio-differentialem brachystochronae integramus, et efficere debemus, vt curua datum habeat initium et per datum punctum transeat.

Figura 3. §. 21. Illustremus regulam §. 19. pro brachystochronis inueniendis in vacuo datam exemplis, sitque potentia sollicitans constans $= g$, eius directio verticalis secundum PM. Brachystochrona vero quaesita sit AM et abscissae in recta horizontali AP per initium curuae transeunte accipiantur. His factis sit $AP = y$, $PM = x$, $AM = s$, eritque sinus anguli, quem PM cum curua conficit $= \frac{dy}{ds}$, et radius osculi $= \frac{ds^3}{dx ddy}$, posito dx constante, qui ob potentiam constantem proportionalis esse debet ipsi $\frac{dy}{ds}$. Fiat igitur $\frac{ds^3}{dx ddy} = \frac{a dy}{ds}$ seu ob $ddy = \frac{ds dds}{dy}$ hoc modo $ds^3 = a dx dds$. Diuidendo per ds^3 et integrando prodit $s = C - \frac{adx}{ds}$. Quia facto $s = o$ fieri debet.

debet $dx = ds$, erit $C = a$ et ideo $sds = ads - adx$, quae porro integrata dat $s^2 = 2as - 2ax$ aequationem pro cycloide vt constat.

§. 22. Sit porro C centrum virium attrahens in ratione quacunque multiplicata distantiarum, cuius exponens sit m. Curua AM sit brachystochrona pro corpore in vacuo moto. Dicatur $CA = a$, $CM = y$, et perpendiculum CT in tangentem MT ex C demissum $= z$. Vis ergo in M secundum MC corpus trahens erit vt y^m, sinus anguli curuae cum hac directione erit $= \frac{z}{y}$, et radius osculi erit $-\frac{ydy}{dz}$. Quare vi regulae erit $\frac{z}{y}$ vt Fig. 4.

$\frac{y^{m+1}dy}{dz}$ seu $Azdz = y^{m+2}dy$, cuius integralis est $C + Az^2 = y^{m+3}$. Quia si $y = a$ fit $z = 0$, erit $C = a^{m+3}$, et consequenter $Az^2 = a^{m+3} - y^{m+3}$, arbitraria A negatiue sumta. Haecque aequatio omnes brachystochronas, quae circa centra virium existunt, complectitur.

§. 23. Reuertamur autem ad medium resistens in ratione quacunque multiplicata celeritatum, cuius exponens sit $2n$. Potentia sollicitans vero ponatur constans $= g$ et habens directionem verticalem vbique ipsi AP parallelam. Sit AMB curua celerrimi descensus inueniendа, in qua ponamus $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$. Figura 5. Celeritas porro in M debita sit altitudini v, quare resistentia in M erit $= \frac{v^n}{c^n}$. Vnde ex sollicitatione potentiae et effectu resistentiae simul habebitur $dv = gdx - \frac{v^n ds}{c^n}$. Brachystochronismus vero dat $2vdxddy = gdyds$, posito dx constante (§. 14.). Ex quibus aequationibus coniunctis exterminata littera v prodibit aequatio pro curua brachystochrona quaesita.

§. 24. Propter dx constans erit $ddy = \frac{ds\,dds}{dy}$ ideoque $v = \frac{g\,ds\,dy^2}{2\,dx\,dds}$. Ergo $dv = \frac{g\,dy^2\,dds^2 + 2g\,ds^2\,dds^2 - g\,ds\,dy^2\,d^3s}{2\,dx\,dds^2}$. His valoribus substitutis in aequatione $dv = g\,dx - \frac{v^n\,ds}{c^n}$ habebitur $\frac{g\,ds\,dy^2\,d^3s - 3g\,dy^2\,dds^2}{2\,dx\,dds^2} = \frac{g^n\,ds^{n+1}\,dy^{2n}}{2^n c^n\,dx^n\,dds^n}$ seu $ds\,d^3s - 3\,dds^2 = \frac{g^{n-1}\,ds^{n+1}\,dy^{2n-2}}{2^{n-1}c^n\,dx^{n-1}\,dds^{n-2}}$. Haec aequatio, si medium resistens sit infinite rarum seu in vacuum transmutatur, quo casu fit $c = \infty$, abit in $ds\,d^3s = 3\,dds^2$, cuius integralis est $a\,dx\,dds = ds^3$. Quae quod sit ad cycloidem §. 21. ostendimus.

§. 25. Ad aequationem autem generalem construendam pono $ds = p\,dx$, vt sit $dds = dp\,dx$ et $d^3s = dx\,ddp$. Hinc erit $dy = dx\sqrt{(p^2-1)}$ et $v = \frac{g\,p\,dx\,(p^2-1)}{2\,dp}$. Ipsa autem aequatio abibit in hanc $p\,ddp - 3\,dp^2 = \frac{g^{n-1}\,p^{n+1}\,dx^n\,(p^2-1)^{n-1}}{2^{n-1}c^n\,dp^{n-2}}$. Ponatur porro $dx = q\,dp$, eritque $ddp = -\frac{dp\,dq}{q}$. Quo substituto prodibit $-\frac{p\,dq - 3q\,dp}{q^{n+1}} = \frac{g^{n-1}\,p^{n+1}\,(p^2-1)^{n-1}\,dp}{2^{n-1}c^n}$. Multiplicetur haec aequatio per $n\,p^{-3n-1}$; quo facto habebitur ——

$$-\frac{np^{-3n}dq-3np^{-3n-1}qdp}{q^{n-1}}=\frac{ng^{n-1}p^{-2n}(p^2-1)^{n-1}dp}{2^{n-1}c^n}$$

Cuius integralis est $\frac{2^{n-1}c^n}{ng^{n-1}p^{3n}q^n}=\int\frac{(p^2-1)^{n-1}dp}{p^{2n}}$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{ng^{n-1}}{2^{n-1}c^n}\int\frac{(p^2-1)^{n-1}dp}{p^{2n}}=P^{-n}$, quae quantitas concessis quadraturis, si integratio non succedit, semper potest exhiberi. Quo ergo posito erit $p^3q=P$, atque ob $q=\frac{dx}{dp}$, fiet $dx=\frac{Pdp}{p^3}$. Consequenter $x=\int\frac{Pdp}{p^2}$, $s=\int\frac{Pdp}{p^2}$ et $y=\int\frac{Pdp\sqrt{(p^2-1)}}{p^3}$. Quare in quacunque medii resistentis hypothesi brachystochrona hoc modo poterit construi.

§. 26. Si resistentia medii sit vt quadratum celeritatis erit $n=1$, ideoque $P^{-1}=\frac{1}{c}\int\frac{dp}{p^2}=\frac{1}{ac}-\frac{1}{cp}=\frac{p-a}{acp}$ Quare fiet $P=\frac{acp}{p-a}$; atque $p^2q=\frac{ac}{p-a}=\frac{p^2dx}{dp}$, seu $dx=\frac{acdp}{p^2(p-a)}$, cuius integralis est $x=b+\frac{c}{p}+\frac{c}{a}l\frac{p-a}{p}=b+\frac{cdx}{ds}+\frac{c}{a}l\frac{ds-adx}{ds}$. In qua aequatione, quia facto $x=0$, debet esse $ds=dx$, fiet $b=-c-\frac{c}{a}l(1-a)$. Habebitur ergo pro curua quaesita haec aequatio $x=\frac{c(dx-ds)}{ds}+\frac{c}{a}l\frac{ds-adx}{ds-ads}$. Vel si aequatio a logarithmis libera desideretur, haec differentio-differentialis, $acdxdds=ds^3-adxds^2$ posito dx constante. Haec alio modo disposita abit in hanc $\frac{acdxdds}{ds^2}=ds-adx$, cuius integralis est $s-ax=ac-\frac{acdx}{ds}$ seu $sds-axds=acds-acdx$. Quae integrata dat $s=cl\frac{s-ax-ac+c}{c-ac}$ seu $e^{\frac{s}{c}}(c-ac)=s-ax+c-ac$. Huius curuae punctum infimum B ibi erit

T 2 vbi

vbi eſt $s = a(x + c)$. Hoc igitur caſu erit $AB = c\, l \frac{1}{1-a}$ et $AC = \frac{c}{a}\, l \frac{1}{1-a} - c$.

§. 27. Si autem *Theoremate Hugeniano* tanquam ad hunc caſum idoneo vſi eſſemus, ſtatim hanc habuiſſemus inde aequationem $v = \frac{ady^2}{ds^2}$. Hincque $dv = \frac{2adx^2ddy}{ds^3}$ $= gdx - \frac{a^n dy^{2n}}{c^n ds^{2n-1}}$ ſeu $2adx^2ddy = gdxds^3 - \frac{a^n dy^{2n}}{c^n ds^{2n-4}}$. Quae facto $ds = pdx$ abit in $\frac{2apdp}{\sqrt{(p^2-1)}} = gpx^2dx - \frac{a^n dx(p^2-1)^n}{c^n p^{2n-4}}$ quae iam per ſe eſt ſeparata, ideoque conſtrui poteſt. Si ponatur $n = 1$, vt brachyſtochrona pro medio reſiſtente in duplicata celeritatum ratione prodeat, erit $2acdx^2ddy = cgdxds^3 - ady^2ds^2$ ſeu $2acdx^2dds = cgdxdyds^2 - ady^3ds$. Quae aequatio, etiamſi lemmate ſimpliciore nitatur, tamen multo magis eſt compoſita et perplexa, quam noſtra brachyſtochrona inuenta; id quod per ſe ſaepe veritatis criterium eſſe ſolet, praecipue ſi operoſior calculus eo deduxerit.

§. 28. Quo autem appareat, qualem figuram brachyſtochrona noſtra in medio ſecundum celeritatis quadrata reſiſtente habitura ſit, aequationem ſumamus hanc $e^{\frac{s}{c}}(c - ac) = s - ax + c - ac$. Haec, in ſeriem conuerſo $e^{\frac{s}{c}}$, abit in hanc $(c - ac)(1 + \frac{s}{c} + \frac{s^2}{1.2.c^2} + \frac{s^3}{1.2.3.c^3} + \frac{s^4}{1.2.3.4.c^4} + \text{etc.}) = s - ax + c - ac$, ex qua reperitur poſito $\frac{1-a}{a} = k$ haec aequatio $x = s - \frac{ks^2}{1.2.c} - \frac{ks^3}{1.2.3.c^2} - \frac{ks^4}{1.2.3.4.c^3}$ — etc. Perſpicitur ergo k neceſſario eſſe debere numerum affirmatiuum, alias enim fieret $x > s$ quod fieri nequit; erit

erit ergo $a = \frac{1}{1+k}$. Ex hac ferie, quia vehementer conuergit facile pro quouis valore ipfius s refpondens ipfius x inuenietur. Praeterea intelligitur curuam hanc vltra A continuari in Am, quae fimilis eft ipfi AM.

§. 29. Quomodo vero curua vltra B porrigatur hac ratione inueftigo. Ducto ex B axe verticali BD, in eumque applicata MQ, fit BQ $=$ PC $= u$, arcus BM $= t$. Hoc pofito erit $s = c\,l\frac{1}{1-a} - t$, et $x = \frac{c}{a}\,l\frac{1}{1-a} - c - u$, quibus fubftitutis haec emergit aequatio $ce^{\frac{-t}{c}} = au - t + c$ vel haec differentialis, $t\,dt - au\,dt = ac\,du$. Per feriem vero habebitur $au = \frac{t^2}{1.2.c} - \frac{t^3}{1.2.3.c^2} + \frac{t^4}{1.2.3.4.c^3} -$ etc. Quae aequatio prorfus congruit cum ea, quam A. 1729. pro tautochrona afcenfui in eadem refiftentiae hypothefi inueni. Altera igitur portio curuae vltra axem BD fita erit tautochrona ad defcenfum pertinens. Habebit ergo curua brachyftochrona huiusmodi formam EABCD infinitis cufpidibus A, C etc. praeditam, quarum alterni funt altiores vt A, alterni humiliores vt C. Rami vero ex vtraque cufpidis cuiusque parte funt inter fe aequales et fimiles. Eleuatio altiorum cufpidum eft $\frac{c}{a}\,l\frac{1}{1-a} - c$ humiliorum vero eft $c - \frac{c}{a}\,l(1+a)$. Ipfi vero rami altiores AB vel AE funt $= c\,l\frac{1}{1-a}$ depreffiorumque CB, CD longitudo eft $= c\,l(1+a)$. Conuenientia ceterum ifta inter tautochronam et brachyftochronam praeter vacuum etiam in hac refiftentiae hypothefi praecipue confiderari meretur, et disquirendum reftat, num forte in reliquis refiftentiae hypothefibus fimilis analogia locum obtineat? Id quod tautochronarum inuentionem per fe difficillimam redderet facillimam. Figura 6.

DE PROGRESSIONIBVS HARMONICIS OBSERVATIONES.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Progreſſionum harmonicarum nomine intelliguntur omnes ſeries fractionum, quarum numeratores ſunt aequales inter ſe, denominatores vero progreſſionem arithmeticam conſtituunt. Huiusmodi ergo forma generalis eſt $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a+2b}$, $\frac{c}{a+3b}$, etc. Quique enim tres termini contigui vt $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a+2b}$, $\frac{c}{a+3b}$ hanc habent proprietatem, vt differentiae extremorum a medio ſint ipſis extremis proportionales. Scilicet eſt $\frac{c}{a+b} - \frac{c}{a+2b} : \frac{c}{a+2b} - \frac{c}{a+3b} = \frac{c}{a+b} : \frac{c}{a+3b}$. Cum autem haec ſit proprietas proportionis harmonicae; vocatae ſunt iſtiusmodi fractionum ſeries progreſſiones harmonicae. Vocari etiam poſſent reciprocae primi ordinis, quia in termino generali $\frac{c}{a+(n-1)b}$ index n vnicam eamque negatiuam habet dimenſionem.

§. 2. Quanquam in his ſeriebus termini perpetuo decreſcunt; tamen ſumma huiusmodi ſeriei in infinitum continuatae ſemper eſt infinita. Ad hoc demonſtrandum non opus eſt methodo hasce ſeries ſummandi; ſed veritas facile ex ſequente principio elucebit. Series quae in infinitum continuata ſummam habet finitam, etiamſi ea ſi ea duplo longius continuetur nullum accipiet augmentum, ſed id quod poſt infinitum adiicitur cogitatione, re vera erit infinite paruum. Niſi enim hoc ita ſe haberet, ſumma ſeriei etſi in infinitum continuatae non eſſet determinata et propterea non finita. Ex quo conſequitur, ſi id, quod ex continuatione vltra terminum infiniteſimum oritur, ſit finitae magnitudinis, ſummam ſeriei neceſſario infinitam eſſe debere. Ex hoc ergo principio iudicare poterimus, vtrum ſeriei cuiusque propoſitae ſumma ſit infinita an finita.

§. 3. Sit itaque ſeries $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a+2b}$ etc. in infinitum continuata, terminusque infiniteſimus $\frac{c}{a+(i-1)b}$, denotante i numerum infinitum, qui ſit index huius termini. Iam haec ſeries vlterius continuetur a termino $\frac{c}{a+ib}$ vsque ad terminum $\frac{c}{a+(ni-1)b}$ cuius exponens eſt ni. Horum terminorum igitur inſuper adiectorum numerus eſt $(n-1)i$; Summa eorum vero minor erit quam $\frac{(n-1)ic}{a+ib}$ maior vero quam $\frac{(n-1)ic}{a+(ni-1)b}$. Sed quia i eſt infinite magnum, evaneſcet a in vtroque denominatore. Quare ſumma maior erit quam $\frac{(n-1)c}{nb}$ at minor quam $\frac{(n-1)c}{b}$, Ex quo perſpicitur hanc ſummam eſſe finitam, atque conſequenter ſeriei propoſitae $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$, etc. in infinitum continuatae ſummam infinite magnam.

§. 4. Huius autem ſummae terminorum ab i ad ni limites propiores ex ſequentibus proportionis harmonicae proprietatibus eliciuntur. Scilicet omnis proportio harmonica ita eſt comparata, vt terminus medius minor

ſit

ſit quam pars tertia ſummae terminorum omnium. Hanc ob rem terminus medius inter $\frac{c}{a+ib}$ et $\frac{c}{a+(ni-i)b}$, qui eſt $\frac{c}{a+\frac{(ni+i-1)}{2}b}$, ductus in terminorum numerum $(n-1)i$, ſeu $\frac{(n-1)ic}{a+\frac{(ni+i-1)}{2}b}$ minor erit quam ſumma terminorum Siue terminorum ſumma hinc maior erit quam $\frac{2(n-1)c}{(n+1)b}$ ob i infinitum. Praeterea medium arithmeticum inter terminos extremos maius eſt parte tertia ſummae terminorum. Ex hoc ſequitur fore etiam in ſerie harmonica terminorum ſummam minorem quam $(n-1)i$ in medium arithmeticum terminorum extremorum, quod eſt $\frac{(2a+(ni+i-1)b)c}{2(a+ib)(a+(ni-i)b)}$ ſeu $\frac{(n+1)c}{2nib}$, ductum. Quare ſumma erit minor quam $\frac{(n^2-1)c}{2nb}$, ita vt hi duo limites ſint $\frac{2(n-1)c}{(n+1)b}$ et $\frac{(n^2-1)c}{2nb}$, adeoque ſumma proxime $=\frac{(n-1)c}{b\sqrt{n}}$ quod eſt medium proportionale inter limites.

§. 5. Ex his colligere licet, quibus caſibus haec ſeries magis vniuerſalis $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a+2^{\alpha}b}$ etc. in infinitum vsque ad $\frac{c}{a+i^{\alpha}b}$ habeat ſummam finitam vel infinitam. Sequantur enim terminum vltimum termini $(n-1)i$, eritque horum ſumma minor quam $\frac{(n-1)c}{i^{\alpha-1}b}$, at maior quam $\frac{(n-1)c}{n^{\alpha}i^{\alpha-1}b}$. Quare ſi fuerit α numerus vnitate maior

maior, ſumma horum terminorum ſequentium erit $= 0$, et propterea ſumma progreſſionis finita. At ſi ſit $\alpha < 1$, ſumma terminorum ſequentium erit infinita; quocirca ipſius progreſſiones ſumma in infinities maiore gradu erit infinita. Inter has igitur progreſſiones ſola harmonica, in qua $\alpha = 1$, hanc habet proprietatem, vt ſumma eius in infinitum continuatae ſit infinite magna, terminorum vero ſequentium poſt terminum infiniteſimum ſumma finita.

§. 6. Quanta vero ſit ſumma terminorum a termino indicis i ad terminum indicis ni ſequenti modo inueſtigo. Ponatur ſumma ſeriei $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$ - - - - - - - - $\frac{c}{a+(i-1)b}$ ad terminum indicis i vsque $= s$, quae eſt quantitas ex a, b, c et i determinanda. Creſcat i vnitate, habebitque s pro augmento terminum ſequentem $\frac{c}{a+ib}$. Quare erit $di : ds = 1 : \frac{c}{a+ib}$ ſeu $ds = \frac{c\,di}{a+ib}$. Vnde inuenitur $s = C + \frac{c}{b} l(a+ib)$, denotante C quantitatem quandam conſtantem. Apparet quoque ex hac forma ſummam eiusdem ſeriei ab initio ad terminum indicis ni continuatae fore $= C + \frac{c}{b} l(a+nib)$. Harum igitur ſummarum differentia $\frac{c}{b} l \frac{a+nb}{a+b} = \frac{c}{b} ln$ (euaneſcente a) dabit ſummam terminorum ab $\frac{c}{a+ib}$ vsque ad $\frac{c}{a+nib}$. Quia autem huius ſummae limites ſupra aſſignauimus erit $\frac{c}{b} ln$ maior quam $\frac{2(n-1)c}{(n+1)b}$ atque minor quam $\frac{(n^2-1)c}{2nb}$, ſeu $ln > \frac{2(n-1)}{n+1}$ atque $ln < \frac{n^2-1}{2n}$.

§. 7. Infra oſtendemus quantitatem illam conſtantem C eſſe finitam, eamque definire conabimur. Euaneſcet ergo C in ſumma, fietque progreſſionis $\frac{c}{a}, \frac{b}{a+b}$ $-----$ $\frac{c}{a+(i-1)b}$ exiſtente terminorum numero infinito $= i$, ſumma $= \frac{c}{b} l(a+ib) = \frac{c}{b} li$. Quamobrem ſumma erit vt logarithmus numeri terminorum, hincque infinities minor quam radix quantumuis magnae poteſtatis ex numero terminorum; nihilo tamen minus eſt infinite magna.

§. 8. Ex hac conſideratione innumerabiles oriuntur ſeries ad logarithmos quorumuis numerorum deſignandos. Sumamus primo hanc progreſſionem harmonicam $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc. pro qua fit $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$. Differentia igitur inter hanc ſeriem $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ $-----$ $\frac{1}{i}$ ad terminum indicis i continuatam, et eandem $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ $------$ $\frac{1}{ni}$ ad terminum indicis ni continuatam, erit $= ln$. Quare illa ſeries ab hac ſubtracta relinquit ln. Quia autem huius ſeriei numerus terminorum eſt n vicibus maior quam illius, ab n terminis ſeriei $1 + \frac{1}{2}$ $-------$ $\frac{1}{ni}$ ſubtrahi oportet vnicum alterius ſeriei $1 + \frac{1}{2}$ $-----$ $\frac{1}{i}$, quo ſubtractio in infinitum eodem modo poſſit perfici. Quare erit

$$\begin{array}{l} ln = 1 + \frac{1}{2} \;------\; \frac{1}{n} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} + \frac{1}{n+1} & ---- & \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} & ----- & \frac{1}{3n} + \text{etc.} \\ - & - \; - & -\frac{1}{2} \quad - \; - & - \; - & -\frac{1}{3} \end{array}$$

Si igitur inferioris ſeriei ſinguli termini a ſupra ſcriptis terminis ſuperioris ſeriei actu ſubtrahantur, et pro n numeri integri ſcribantur $2, 3, 4$ --- etc. ſucceſſiue ſequentes logarithmorum ſeries obtinebimus.

$$l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{12} \text{ etc.}$$
$$l3 = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{2}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{2}{12} \text{ etc.}$$
$$l4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{3}{12} \text{ etc.}$$
$$l5 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{4}{10} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{12} \text{ etc.}$$
$$l6 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{5}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{5}{12} \text{ etc.}$$

etc. etc.

Vnde pro cuiusuis numeri logarithmo facile ſeries conuergens inuenitur.

§. 9. Ex his ſeriebus aliae eiusdem formae, quae ſummam habeant rationalem, poſſunt deriuari, Nam, quia ſeriei $= l2$ duplum aequale eſt $l4$, ſi ſeries $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4}$ etc. ſubtrahatur ab hac $2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4}$ etc. reſiduum, nempe haec ſeries $1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{3}{6}$ etc. erit $= 0$, ſeu $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{3}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{3}{10}$ etc. Similiter ſi ſeries $l6$ exhibens ſubtrahatur a ſumma ſerierum $l2$ et $l3$ exhibentium, reſiduum, nempe $1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{2}{9} - \frac{1}{10}$ etc. erit $= 0$ ſeu $1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{2}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{2}{9} + \frac{1}{10}$ etc. Pari modo huiusmodi ſeries innumerabiles poterunt inueniri.

§. 10. Series illae logarithmos exprimentes conuergunt quidem, ſed admodum tarde, quare, quo earum ope logarithmi commode erui queant, requiritur aliquod ſubſidium. Ad quod inueniendum notari oportet eas ſeries non aequabiliter progredi, ſed certas habere reuolutiones, quae tot terminis abſoluuntur, quot n habet vnitates, tot igitur terminos ſimul ſumtos vnum ſeriei membrum vocabo. Ita in ſeriei pro $l2$ duo termini conſtituent vnum membrum, in ſerie pro $l3$, tres, in ſerie pro $l4$ quatuor et ita porro. Membra igitur iſta aequabilem constituent seriem, et ad logarithmos inueniendos oportet aliquot membra addi. Ponamus iam m membra esse addita ad logarithmum binarii inueniendum; poteritque loco omnium sequentium addi $\frac{1}{4m}$, id quod eo propius accedet, quo maior fuerit numerus m. Ad $l3$ inueniendum ad m membra iam addita loco omnium sequentium addatur $\frac{1}{9m}$. Similiter pro $l4$ addi debet $\frac{1}{16m}$ et ita porro. Fluunt haec ex modo summandi (§. 6) adhibito, in quo cum m debeat esse quantitas valde magna, neglexi in differentiali numeros ipsi m adiectos, ne integratio a logarithmis pendeat.

§. 11. Quo autem seriei $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} - - - - \frac{1}{i}$ summa, etiamsi infinita accurate determinetur, singulos terminos sequenti modo exprimo.

Est $1 = l2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$ etc.

atque $\frac{1}{2} = l\frac{3}{2} + \frac{1}{2.4} - \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} - \frac{1}{5.32}$ etc.

$\frac{1}{3} = l\frac{4}{3} + \frac{1}{2.9} - \frac{1}{3.27} + \frac{1}{4.81} - \frac{1}{5.243}$ etc.

$\frac{1}{4} = l\frac{5}{4} + \frac{1}{2.16} - \frac{1}{3.64} + \frac{1}{4.256} - \frac{1}{5.1024}$ etc.

.

.

.

$\frac{1}{i} = l\frac{i+1}{i} + \frac{1}{2.i^2} - \frac{1}{3.i^3} + \frac{1}{4.i^4} - \frac{1}{5.i^5}$ etc.

His seriebus additis prodibit

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} - - - - \frac{1}{i} = l(i+1) + \frac{1}{2}(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ etc.) in infin.

$-\frac{1}{3}(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+$ etc.)

$+\frac{1}{4}(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}-+\frac{1}{256}+$ etc.

etc.

Quae

Quae feries, cum fint conuergentes, fi proxime fummentur prodibit $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - - - \frac{1}{i} = l(i+1) + 0,577218$ Si fumma dicatur s, foret, vt fupra fecimus, $ds = \frac{di}{i+1}$, ideoque $s = l(i+1) + C$. Huius igitur quantitatis conftantis c valorem deteximus, quippe eft $C = 0,577218$.

§. 12. Si feries $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - - - - - - \frac{1}{i}$ vlterius in infinitum continuetur, et in membra diuidatur, quorum quodvis vt ipfa feries i terminos contineat; erit membrum inter $\frac{1}{i}$ et $\frac{1}{2i}$ contentum $= l\,2$, fequens $= l\frac{3}{2}$, tertium $= l\frac{4}{3}$, etc. Atque cum ipfius feriei fumma fit log. infiniti, poterit ad analogiam poni $l\frac{1}{0}$. Hocque modo fequens fchema obtinebimus non parum curiofum

Series.	$1 + \frac{1}{2} - - - \frac{1}{i}$	$- - - - \frac{1}{2i}$	$- - - - \frac{1}{3i}$	$- - - \frac{1}{4i}$	$- - - \frac{1}{5i}$	etc.
Summae	$l\frac{1}{0}$	$l\frac{2}{1}$	$l\frac{3}{2}$	$l\frac{4}{3}$	$l\frac{5}{4}$	

§. 13. Difficile quidem videatur has easdem proprietates progreffionum harmonicarum et logarithmorum expreffiones analytice, eoque modo, quem alibi ad feries fummandas tradidi, inuenire. At rem attentius perpendenti hoc non folum fieri, fed multo generalius etiam fieri poffe deprehenfum eft. Confidero enim non fimplicem progreffionem harmonicam, fed cum geometrica coniunctam, cuiusmodi eft $\frac{cx}{a} + \frac{cx^2}{a+b} + \frac{cx^3}{a+2b} + \frac{cx^4}{a+3b}$ etc. Huius fummam pono s, et vtroque per $bx^{\frac{a-b}{b}}$ multiplicato erit $bx^{\frac{a-b}{b}}s = \frac{bcx^{\frac{a}{b}}}{a} + \frac{bcx^{\frac{a+b}{b}}}{a+b} + \frac{bcx^{\frac{a+2b}{b}}}{a+2b}$ Sumtisque differentialibus habebitur $bD.x^{\frac{a-b}{b}}s = dx(cx^{\frac{a-b}{b}}$ +

$+cx^{\frac{a}{b}}+cx^{\frac{a+b}{b}}+\text{etc.})=\frac{cx^{\frac{a-b}{b}}dx}{1-x}$ Sumtisq; iterum integralibus erit $bx^{\frac{a-b}{b}}s=c\int\frac{x^{\frac{a-b}{b}}dx}{1-x}$ atque $s=\frac{cx^{a-b}}{b}\int\frac{x^{\frac{a-b}{b}}dx}{1-x}$ Ab hac ſerie iam ſubtraho hanc $\frac{fx^m}{g}+\frac{fx^{2m}}{g+b}+\frac{fx^{3m}}{g+2b}$ etc. cuius ſumma ſit t. Multiplicetur per $\frac{b}{m}x^{\frac{m(g-b)}{b}}$ erit $\frac{b}{m}$ $x^{\frac{m(g-b)}{b}}t=\frac{fbx^{\frac{mg}{b}}}{mg}+\frac{fbx^{\frac{m(g+b)}{b}}}{m(g+b)}+\frac{fbx^{\frac{m(g+2b)}{b}}}{m(g+2b)}$ etc.

Sumtisque differentialibus fiet $\frac{b}{m}D\,x^{\frac{m(g-b)}{b}}t=dx(fx^{\frac{mg-b}{b}}$ $+fx^{\frac{m(g+b)-b}{b}}+fx^{\frac{m(g+2b)-b}{b}}$ etc.$)=\frac{fx^{\frac{mg-b}{b}}dx}{1-x^m}$.

Quare habebitur $t=\frac{fm}{bx^{\frac{m(g-b)}{b}}}\int\frac{x^{\frac{m(g-b)}{b}}dx}{1-x^m}$. Ideoque $s-t=\frac{c}{bx^{\frac{a-b}{b}}}\int\frac{x^{\frac{a-b}{b}}}{1-x}-\frac{fm}{bx^{\frac{m(g-b)}{b}}}\int\frac{x^{\frac{mg-b}{b}}dx}{1-x^m}$. Subtractio vero ita debet fieri, vt a termino indicis m feriei s ſubtrahatur terminus primus ſeriei t, et a termino indicis $2m$ illius, terminus ſecundus huius ſeriei et ita porro.

§. 14. Quo noſtras ſeries logarithmicas eruamus, ſit $a=b$ et $g=b$. Quo facto erit $s=\frac{c}{b}\int\frac{dx}{1-x}=\frac{c}{b}\,l\,\frac{1}{1-x}$ et $t=\frac{f}{b}\int\frac{mx^{m-1}dx}{1-x^m}=\frac{f}{b}\,l\,\frac{1}{1-x^m}$. Ergo $s-t=$

$l(1-$

$l\frac{(1-x^m)^{\frac{f}{b}}}{(1-x)^{\frac{c}{b}}}$. Quo autem haec expreſſio fiat finita facto $x=1$, debebit eſſe $\frac{f}{b}=\frac{c}{b}$, hanc ob rem fiant omnes hae litterae $=1$, eritque $s-t=l\frac{1-x^m}{1-x}=l(1+x+x^2 \text{-----} x^{m-1})$ Quae expreſſio dat differentiam inter has ſeries $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}$ etc. et $\frac{x^m}{1}+\frac{x^{2m}}{2}+\frac{x^{3m}}{3}$ etc. Quare ſi $m=2$ erit $l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+$ etc. ſi $m=3$, erit $l(1+x+x^2)=x+\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{2x^6}{6}+$ etc. ſimilique modo $l(1+x+x^2+x^3)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+$ etc. In his ſi fiat $x=1$, prodibunt eaedem ſeries pro logarithmis numerorum naturalium, quas ante dedimus.

§. 15. Si $b=2g$, erit $t=\frac{fx^{\frac{m}{2}}}{b}\int\frac{mx^{\frac{m-2}{2}}dx}{1-x^m}$. Ponatur $x^m=y$, erit $t=\frac{f\sqrt{y}}{b}\int\frac{dy}{(1-y)\sqrt{y}}=\frac{f\sqrt{y}}{b}l\frac{1+\sqrt{y}}{1-\sqrt{y}}=\frac{fx^{\frac{m}{2}}}{b}l\frac{1+x^{\frac{m}{2}}}{1-x^{\frac{m}{2}}}$. Si praeterea ſit $a=b$ erit $s=\frac{c}{b}l\frac{1}{1-x}$. At s eſt ſumma huius ſeriei $\frac{cx}{a}+\frac{cx^2}{2a}+\frac{cx^3}{3a}$ etc. atque $tx^{\frac{-m}{2}}=\frac{f}{b}l\frac{1+x^{\frac{m}{2}}}{1-x^{\frac{m}{2}}}$ dat hanc ſeriem $\frac{fx^{\frac{m}{2}}}{g}+\frac{fx^{\frac{3m}{2}}}{3g}+\frac{fx^{\frac{5m}{2}}}{5g}$ + etc. Sit $a=1$ et $g=1$ erit $s-tx^{\frac{-m}{2}}=cl\frac{1}{1-x}-$

$\frac{f}{2} l \frac{1+x^{\frac{m}{2}}}{1-x^{\frac{m}{2}}} = l \frac{(1-x^{\frac{m}{2}})^{\frac{f}{2}}}{(1-x)^c(1+x^{\frac{m}{2}})^{\frac{f}{2}}}$. Quae expreſſio quo fiat finita ſi $x=1$ oportet ſit $\frac{f}{2}=c$ ſeu $f=2c$. Sit igitur $c=1$, et $m=2n$ erit ſerierum $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$ etc. et $\frac{2x^n}{1}+\frac{2x^{3n}}{3}+\frac{2x^{5n}}{5}$ etc. differentia $= l\frac{1-x^n}{(1-x)(1+x^n)}$. Ponatur $n=2$ erit differentia haec $=l\frac{1+x}{1+x^2}$ factoque $x=1$, erit ea $=0$, quare haec ſeries $1-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{3}{6}+\frac{1}{7}$ etc. erit $=0$, vt iam ſupra inuenimus.

§. 16. Huiusmodi ſeries ſummam rationalem habentes nunc ex hac ipſa forma $l\frac{1+x}{1+xx}$, infinitae aliae poſſunt inueniri, aſſumendis aliis formis ſimilibus quae facto $x=1$ euaneſcant. Ex hac enim forma $l\frac{1+x}{1+x^2}$ ſi per ſeries exprimatur ſtatim reſultat ſeries inuenta. Eſt nimirum $l(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-$etc. Atque $l(1+x^2)=\frac{x^2}{1}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\frac{x^{10}}{5}-$etc. Haec igitur ſeries a ſuperiore ſubtracta relinquit hanc $\frac{x}{1}-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{3x^6}{6}$ etc. cuius ſumma erit $l\frac{1+x}{1+x^2}$. Similiter $l\frac{1+x}{1+x^3}$ dabit hanc ſeriem $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{2x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}-\frac{2x^9}{9}$ etc. Ergo poſito $x=1$ erit $0=1-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{2}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{2}{9}$ quam eandem iam §. 9. inuenimus.

§. 17. Hac ratione omnium huiusmodi irregularium ſerierum, quae tamen ſecundum membra regulariter procedunt, ſummae poterunt inueniri, ſemper enim vt differentiae duarum ſerierum ſunt aeſtimandae. Vt ſit propoſita haec ſeries $1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{2}{8}$ etc. Haec eſt differentia harum ſerierum $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

$+\frac{x^4}{4}$

$+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}$ etc. et $\frac{3x^2}{2}+\frac{3x^5}{5}+\frac{3x^8}{8}$ etc. facto $x=1$. Illius autem summa est $l\frac{1}{1-x}$, huius vero summa est $\int\frac{3x\,dx}{1-x^3}$ seu $l\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}l(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{-3}}{2}l\frac{2x+1-\sqrt{-3}}{2x+1+\sqrt{-3}}-\frac{\sqrt{-3}}{2}l\frac{1-\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$. Hac igitur ab illa subtracta factoque $x=1$ prodibit $-\frac{1}{2}l3+\frac{\sqrt{-3}}{2}l\frac{3+\sqrt{-3}}{3-\sqrt{-3}}-\frac{\sqrt{-3}}{2}l\frac{1+\sqrt{-3}}{1-\sqrt{-3}}$, pro summa progressionis propositae. Est vero $\frac{\sqrt{-3}}{2}l\frac{3+\sqrt{-3}}{3-\sqrt{-3}}$ peripheria circuli diuisa per $\sqrt{3}$ posito diametro $=1$ et $\frac{\sqrt{-3}}{2}l\frac{1-\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$ huius dimidium. Quare seriei summa quam proxime erit 0,3576.

§. 18. At si etiam ipsa membra non vniformiter incedunt difficilius summa assignatur. Sumamus hanc seriem $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{3}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}-\frac{4}{14}$ etc. Haec est differentia inter has series $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}++\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\frac{1}{i\left(\frac{i+3}{2}\right)}$ et $\frac{2}{2}+\frac{3}{5}+\frac{4}{9}+\frac{5}{14}-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\frac{i+1}{i\left(\frac{i+3}{2}\right)}$ ita in infinitum continuatas, vt extremi termini eundem habeant denominatorem $i\left(\frac{i+3}{2}\right)$. Harum serierum prioris summa est $C+li+l(i+3)-l2$, denotante C constantem §. 11. inuentam, nempe 0,577218. Altera series subtrahenda in has duas resoluitur $\frac{2}{3}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\,-\,-\,-\frac{1}{i})$ et $\frac{4}{3}(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\frac{1}{i+3})$. Illius summa est $\frac{2}{3}C+\frac{2}{3}li$; huius vero $\frac{4}{3}C-\frac{22}{9}+\frac{4}{3}l(i+3)$. Quae ambae ab illa summa $C+li+l(i+3)-l2$ subtractae relinquunt $-C+\frac{22}{9}-l2$ seu 1, 173078 quam proxime pro summa seriei propositae.

Danielis Bernoulli
DEMONSTRATIONES THEOREMATVM SVORVM DE OSCILLATIONIBVS CORPORVM
FILO FLEXILI CONNEXORVM ET CATENAE VERTICALITER SVSPENSAE.

I.

Tabula IX DEdi nuper theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum: demonstrationes autem, quas tum non vacabat in ordinem redigere, nunc paullo plus otii nactus eo libentius cum publico communicabo, quod multorum aliorum similium problematum solutio inde peti possit, eorum praesertim in quibus motus partium non sunt inter se paralleli. Inter huiusmodi problemata facillimum est atque a multis iam diu solutum, quod circa centra oscillationis inuenienda versatur. Ad ea quoque pertinet problema de motu mixto determinando, quo corpus ex pluribus diuersae grauitatis specificae partibus compositum in fluido descendit: pertinent porro theoremata, quae in Commentar. Tom. II. p. 200. a Patre cum publico communicata fuerunt: Praesertim autem methodus, quam mox exhibebo, cum successu adhibetur, quando in systemate corporum plurium lege aliqua inter se connexorum, situs vnius ex situ alterius cognito non potest immediate determinari,

nari, veluti cum corpus ſuper hypothenuſa trianguli in horizonte mobilis deſcendit; hic enim ſi vel noueris ſitum corporis in hypothenuſa, ipſius tamen trianguli ſitus in horizonte incognitus manebit niſi hunc aliunde determinare ſcias. Problema hoc poſtremum aliquando Patri meo propoſueram et plane inter ſe conuenerunt ſolutiones noſtrae; Eam, quae a Patre profecta eſt, Academia Commentariis ſuis inſeri curauit, vid. Tom. V. p. 11. Quae ad hanc claſſem pertinent, nouam mechanicae partem efficiunt: Principium autem, quo vti ſoleo ad huiusmodi problemata ſoluenda, tale eſt:

Puta in ſyſtemate ad momentum temporis corpora ſingula a ſe inuicem ſolui, nulla facta attentione ad motum iam acquiſitum, quia hic de acceleratione ſeu mutatione motus elementari tantum ſermo eſt: ita quolibet corpore ſitum ſuum mutante, ſyſtema aliam accepit figuram, quam non-ſolutum habere debebat: Igitur finge cauſam mechanicam quamcunque ſyſtema in debitam figuram reſtituentem atque, rurſus inquiro in mutationem ſitus ab hac reſtitutione ortam in quolibet corpore; et ex vtraque mutatione intelliges mutationem ſitus in ſyſtemate non ſoluto, indeque accelerationem retardationemue veram cuiusuis corporis ad ſyſtema pertinentis obtinebis.

Quomodo haec regula ad praeſens noſtrum de oſcillationibus corporum filo flexili ligatorum aut catenae verticaliter ſuſpenſae determinandis, negotium applicanda ſit, hic docebo, alia occaſione idem fortaſſe etiam monſtraturus in problematis aliis partim iam a Patre meo tractatis partimque nouis.

Figura 1. II. Sit filum AHF grauitatis expers, duobus oneratum ponderibus in H et F, e puncto fixo A ſuſpenſa: faciant corpora oſcillationes veluti infinite paruas, ſintque eorundem diſtantiae a linea verticali AC, vt $2Ml$ ad $mL - ml + ML + Ml \pm V(4mMLL + (ml + ML + Ml - mL)^2)$. Demonſtrandum eſt, oſcillationes in vtroque corpore fore iſochronas. Valores litterarum m, M, l et L infra dabuntur.

Erunt oſcillationes iſochronae, ſi fuerint vires acceleratrices in corporibus vt diſtantiae eorundem a linea verticali; nec enim differunt diſtantiae hae ab arcubus deſcribendis: Has igitur vires acceleratrices definiemus: ponatur pars fili HF extendi facillime, ita vt corpus F nihil amplius retineat: accelerabitur corpus iſtud verticaliter deorſum a grauitatis vi naturali: finge ita accelerari vt perueniat dato tempuſculo ex F in E, dum eodem temporis puncto alterum corpus filo AH alligatum arculum HL deſcribit: ductae iam intelligantur horizontales LB et EC, quae quamuis ceu infinite paruae conſiderentur, ſint tamen arculo LH infinities maiores. Apparet ex mechanicis et theoria infinite paruorum, fore $HL = \frac{BL}{LA} \times FE$. Poſitis igitur corporibus in L et E ductisque rectis AL et LE, erit quidem filum AL inuariatae longitudinis, alterum autem LE iam maioris erit longitudinis quam fuerat in ſitu HF: concipiatur igitur cauſa, quae filum LE contrahat ad ſuam lon-

longitudinem naturalem: dico ab iſta contractione corpus ex E eleuatum iri vsque in u, alterumque retractum ex L in n: ſpatiola Eu, Ln determinabimus, poſtquam monuero, quod, ducta minima recta Fu, verae accelerationes, quae durante aſſumto tempusculo acceſſerunt, ſeu ipſae etiam vires acceleratrices rationem habiturae ſint in corporibus H et F vt Hn et Fu. Sed vt ratio intelligatur inter Hn et Fu, faciemus AH ſeu AL $=l$: HF ſeu $nu=$ L: maſſa in corpore ſuperiori $=m$; in inferiori $=$ M. Producatur AL et ex E in illam perpendicularis ED demittatur. Denique ducantur horizontalis HG et verticalis FG: erit Fu ad nu perpendicularis cenſenda atque triangulum minimum FEu triangulo HFG ſimile, ipſaque Eu lineolae FE aequalis; vnde ſi ponatur BL $=1$; DE $=x$; erit MC $=1+\frac{L}{l}$; EC $=x+1+\frac{L}{l}$; HG $=$ CE $-$ BL $=x+\frac{L}{l}$; hinc

$$Fu=(\tfrac{1}{l}+\tfrac{x}{L})\times FE:$$

Supereſt vt definiatur Hn. Notetur quod filum LE, dum contrahitur, corpus E directe ſurſum trahit; dum corpus alterum L oblique ad directionem ſuam Ln retrahit: hoc igitur titulo erit Ln ad Eu vt DE ad LE ſeu vt x ad L: ſed eſt praeterea Ln ad Eu reciproce vt maſſa corporis L ad maſſam corporis E, id eſt, directe vt M ad m: compoſita ratione erit Ln:E$u=$ Mx : mL; vnde poſita FE pro Eu, erit L$n=\frac{Mx}{mL}\times$FE; et quia H$n=$ HL $-$ Ln, ſequitur fore

$$Hn=(\tfrac{1}{l}-\tfrac{Mx}{mL})\times FE:$$

ſunt igitur vires acceleratrices in corporibus H et F,

X 3 vt

vt $\frac{1}{l}+\frac{x}{L}$ ad $\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL}$: ponantur hae vires ad iſochronismum obtinendum proportionales ſpatiis deſcribendis LB et EC, ſeu fiat $(\frac{1}{l}+\frac{x}{L}):(\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL}) = 1:(x+1+\frac{L}{l})$, atque reperietur facta reductione

$$x = \frac{mL - ml - ML - Ml \pm \sqrt{[4mMLL + (ml + ML + Ml - mL)^2]}}{2ML}$$

Huic autem ſi addatur MC ſeu $1+\frac{L}{l}$, habebitur

$$CE = \frac{mL - ml + ML + Ml \pm \sqrt{[4mMLL + (ml + ML + Ml - mL)^2]}}{2Ml} \times BL,$$

plane vt habet in parte huius argumenti prima theorema tertium Prop. 7.

III. Poſitis iisdem, erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni aequalis

$$\frac{2mLl}{mL + ml + Ml + ML \mp \sqrt{[4mMLL + (ml + ML + Ml - mL)^2]}},$$

cuius rei rationem intelliges ex eo, quod ſi pendulum ſimplex longitudinis AH ſeu l conſideretur, ſit vis acceleratrix in hoc pendulo ſimplici ad vim acceleratricem corporis H in pendulo noſtro compoſito vt Hl ad Hn, id eſt, vt $\frac{1}{l}$ ad $\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL}$: ſunt autem longitudines pendulorum iſochronorum in reciproca ratione virium acceleratricium; Erit igitur longitudo penduli quaeſiti ad longitudinem AH vt $\frac{1}{l}$ ad $\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL}$: vnde inuenitur longitudo penduli iſochroni $=\frac{mLl}{mL-Mlx}$, et poſito valore pro x ſupra inuento, erit eadem longitudo, vt dictum eſt, aequalis

$$\frac{2mLl}{mL + ml + Ml + ML \mp \sqrt{[4mMLL + (ml + ML + Ml - mL)^2]}}$$

Figura 2. IV. Si filum AG ſit tribus oneratum corporibus in H, F et G, oſcillationes facientibus valde paruas et iſochrochronas, ponaturque maſſa corporis ſupremi $= m$; medii $= M$ et infimi $= \mu$: diſtantia $AH = l$; $HF = L$; $FG = \lambda$: diſtantia corporis H a linea verticali $AP = 1$; diſtantia vero corporis F ab eadem linea verticali $= s$; erit

$$((MMl\lambda + M\mu l\lambda)ss + mMl\lambda + m\mu lL - mML\lambda - MMl\lambda - MML\lambda + m\mu l\lambda - M\mu l\lambda - M\mu L\lambda)s - m\mu l\lambda - mMl\lambda) \times ((Ml\lambda + \mu l\lambda)s - mL\lambda - Ml\lambda - ML\lambda - \mu l\lambda - \mu L\lambda + mlL) = mm\mu llLLs.$$

Diſtantia autem corporis infimi a linea verticali erit pro quauis radice ipſius s aequalis

$$(\tfrac{MM\lambda}{m\mu L} + \tfrac{M\lambda}{mL})ss + (1 + \tfrac{\lambda}{L} + \tfrac{M\lambda}{\mu L} - \tfrac{M\lambda}{\mu l} - \tfrac{MM\lambda}{m\mu L} - \tfrac{MM\lambda}{m\mu l} - \tfrac{M\lambda}{mL} - \tfrac{M\lambda}{ml})s - \tfrac{M\lambda}{\mu L} - \tfrac{\lambda}{L}.$$

Haec vt demonſtrentur, ponatur rurſus filum infimum FG facillime extendi atque ſic corpus G vi granitatis naturali acceleratum, aſſumto aliquo tempuſculo infinite paruo verticaliter deſcendere ex G in s, dum interea ambo corpora ſuperiora accelerentur, vti in figura prima, faciendo arculos ſuos Hn et Fu. Patet autem, ſi Gs in figura ſecunda aequalis ponatur deſcenſui FE in figura prima, fore pariter arculos Hn et Fu idem in vtraque figura; erit igitur per praecedentem paragraphum $Hn = (\frac{1}{l} - \frac{Mx}{mL}) \times Gs$ et $Fu = (\frac{1}{l} + \frac{x}{L} \times Gs$, intelligendo per x lineolam uM perpendiculariter ad prolongatam An ductam, prouti deinceps per y intelligenimus lineolam yv, quae perpendicularis eſt ad prolongatam nu: iam ducantur horizontalis FQ ac verticalis QG, ſumtaque

ſumtaque $uy = FG$, ducatur Gy. His ita ad calculum praeparatis, nunc rurſus fingendum eſt, rectam us, in priſtinam longitudinem FG contrahi: ita eleuabitur corpus ex s in y vel in r (eſt autem yr nulla prae Gy); corpora autem ſuperiora iterum retrahentur ex n in o et ex u in m: atque ſic tandem patet fore vires acceleratrices in ſingulis corporibus ſecundum directiones ſuas naturales ad vim grauitatis naturalem, vt ſe habent Ho, Fm et Gy ad Gs: ſupereſt igitur vt ſingula haec elementa exprimantur, probe obſeruato arculos Hn, Fu etc. nullos eſſe prae diſtantiis corporum a linea verticali. Inuenietur autem recte inſtituto calculo $FL = \frac{\lambda}{l} + \frac{\lambda}{L}x + y$: et quia $FG : FQ = Gs : Gy$, erit

$$Gy = \left(\tfrac{1}{l} + \tfrac{x}{L} + \tfrac{y}{\lambda}\right) \times Gs.$$

Iam porro quaerendum eſt, quantae futurae ſint retrogradationes corporum in u et n poſitorum, quae fiunt, dum corpus infimum ex s in y aut in r eleuatur. Notetur potentiam filum us contrahentem vbique aequaliter diffundi. Erit igitur rurſus vt in ſuperiori paragrapho um ad sy ſeu ad Gs in ratione compoſita ex sy ad uy et maſſae μ ad maſſam M: vnde inuenitur $um = \frac{\mu y}{M\lambda} \times Gs$, qua ſubtracta ab Fu ſeu ab $\left(\frac{1}{l} + \frac{x}{L}\right) \times Gs$, oritur

$$Fm = \left(\tfrac{1}{l} + \tfrac{x}{L} - \tfrac{\mu y}{M\lambda}\right) \times Gs.$$

Denique quia ab eo, quod corpus medium ex u in m cedit, nihil patitur corpus ſupremum, erit, vt antea, no ad ys ſeu Gs in ratione compoſita ex Mu ad un et maſſae μ ad maſſam m; vnde $no = \frac{\mu x}{ML} \times Gs$: hacque ſub-

ſublata ab nH ſeu ab $(\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL})\times Gs$, fiet.

$$Ho=(\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL}-\frac{\mu x}{mL})\times Gs.$$

Poſtquam ſic accelerationes corporum ſingulorum in veris ſuis directionibus inuenimus, erunt hae diſtantiis ſuis ab linea verticali yP, uC et nB ſeu quantitatibus $(1+\frac{L}{l}+\frac{\lambda}{l}+x+\frac{\lambda}{L}x+y)$, $(1+\frac{L}{l}+x)$ et (1) proportionales faciendae iſochronismi ergo: Ita duae aequationes obtinebuntur valores x et y determinantes: atque ſi deinde ponatur $1+\frac{L}{l}+x=s$, inuenietur aequatio pro s eadem, quam ſupra recenſuimus, quamque demonſtrandam ſuſcepimus.

V. Acceleratio corporis H expreſſa per Ho ſeu per $(\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL}-\frac{\mu x}{mL})\times Gs$ eſt ad accelerationem eiusdem corporis, abſentibus duobus inferioribus expreſſam per $\frac{1}{l}\times Gs$, vt $\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL}-\frac{\mu x}{mL}$ ad $\frac{1}{l}$, ſeu vt $mL-Mlx-\mu lx$ ad mL. Sequitur inde longitudinem penduli iſochroni eſſe.

$$\frac{mLl}{mL-Mlx-\mu lx}$$

Hanc autem non differre ab illa, quae in parte prima, propoſitione decima tertia data fuit, videbis ſi ibi, prouti factae a nobis denominationes poſtulant, intelligas per x, quod hic per s ſeu per $1+\frac{L}{l}+x$.

VI. Sint iam plura et quotcunque volueris corpora, veluti B, C, D, E, F producantur ſingula fila deſignenturque ſinus angulorum BAN (AN eſt verticalis) CBG, DCH, EDL, FEM per p, q, r, s, t; maſſae autem corporum per ipſas litteras iisdem appoſitas denotentur, Figura 3.

 dico

dico poſita vi grauitatis naturali $= 1$, vires acceleratrices corporum ſecundum ſuas directiones fore vt ſequitur.

$$\text{in B} = p - \frac{C+D+E+F}{B} q,$$
$$\text{in C} = p + q - \frac{D+E+F}{C} r,$$
$$\text{in D} = p + q + r - \frac{E+F}{D} s,$$
$$\text{in E} = p + q + r + s - \frac{F}{E} t,$$
$$\text{in F} = p + q + r + s + t;$$

Veram hanc eſſe virium acceleratricium legem, percipies ſi ſextum corpus ſuo filo inferius adhuc appendi ponas, calculumque deinde inſtituas, vt fecimus ratione trium corporum paragrapho quarto, fingendo ſcilicet, corpus infimum naturali grauitatis vi verticaliter deorſum accelerari, reliquis interim ſecundum ſuam indolem vibratis, idemque corpus mox a contractione fili iterum eleuari: ita enim legem hanc accelerationum nunc expoſitam a quinque corporibus ad ſex, et inde ad ſeptem atque ſic quousque libuerit recte continuari videbis.

Ex aſſumtis autem ſingulorum angulorum ſinibus, deducuntur corporum a linea verticali diſtantiae, ac ſi quamuis diſtantiam vi acceleratrici reſpondenti proportionalem facias, habebis tot aequationes quot incognitas, ſic vt omnia denique deſiderata inde recte definiri poſſint.

VII. Puta nunc corpora eſſe numero infinita et Figura 4 aequalia, diſtantiis minimis et aequalibus a ſe invicem poſita: ideam habebis catenae vniformis ab vna extremitate ſuſpenſae, qualis eſt AC vel AF: In hac elemenmentum confideretur infinite paruum Mm vel Nn, ductis MN et mn ad AC perpendicularibus et mo eidem AC parallela: ponatur Am vel $An = s$ (nec enim differunt quia infinite parum diftant); mM vel $nN = ds$, quod elementum conftans affumatur: longitudo catenae integrae $AF = l$; $mn = y$; $Mo = dy$: erit (pofita vi grauitatis naturali $= 1$) per praecedens theorema vis acceleratrix in m aequalis fummae omnium finuum angulorum contactus, qui funt inter A et m, diminutae tertia proportionali corpusculi in m, fummae omnium corpusculorum in MF et finus anguli contactus in M: fic igitur habetur vis acceleratrix in $M = \int \frac{ddy}{ds} - \frac{(l-s)ddy}{ds^2}$. Quia vero ifochronismus poftulat, vt vis acceleratrix fit proportionalis applicatae MN, erit affumta n pro conftante $\int \frac{ddy}{ds} - \frac{(l-s)ddy}{ds^2} = \frac{y}{n}$: fumatur integrale termini primi fine additione conftantis, quia hic nulla fumenda eft: fic fiet $\frac{dy}{ds} - \frac{(l-s)ddy}{ds^2} = -\frac{y}{n}$. Denique ponatur $l-s$ feu FM aut $CN = x$, et erit $\frac{-dy}{dx} - \frac{xddy}{dx^2} = \frac{y}{n}$, fiue

$$n\,dy\,dx + n\,x\,ddy = -y\,dx^2,$$

quae aequatio denotat naturam curuae AF: quoniam vero integralis eius non apparet, pofui

$$y = \alpha - \beta x - \gamma xx - \delta x^3 - \varepsilon x^4 - \text{etc.},$$

$$dy = -\beta dx - 2\gamma x dx - 3\delta xx dx - 4\varepsilon x^3 dx - \text{etc.}$$

$$ddy = -2\gamma dx^2 - 2.3.\delta x dx^2 - 3.4.\varepsilon xx dx^2 - \text{etc.}$$

Hisque valoribus fubftitutis diuifaque deinde aequatione per dx^2, oritur

$$-\beta - 2\gamma x - 3\delta xx - 4\varepsilon x^3 - \text{etc.}$$
$$-2\gamma x - 2.3\delta xx - 3.4\varepsilon x^3 - \text{etc.} = 0,$$
$$+\tfrac{\alpha}{n} - \tfrac{\beta}{n}x - \tfrac{\gamma}{n}xx - \tfrac{\delta}{n}x^3 - \text{etc.}$$

cui aequationi ſatisfit ponendo $\alpha = 1$; $\beta = \frac{1}{n}$; $\gamma = \frac{-1}{4nn}$; $\delta = \frac{1}{4.9n^3}$; $\varepsilon = \frac{-1}{4.9.16n^4}$ etc. vnde

$$y = 1 - \frac{x}{n} + \frac{xx}{4nn} - \frac{x^3}{4.9n^3} + \frac{x^4}{4.9.16n^4} - \text{etc.}$$

vbi per 1 intelligenda eſt diſtantia puncti infimi F a verticali: et quia poſita $x = l$, eſt $y = o$ erit ſimul

$$1 - \frac{l}{n} + \frac{ll}{4nn} - \frac{l^3}{4.9n^3} + \frac{l^4}{4.9.16n^4} - \text{etc.} = o;$$

Hinc deriuandus eſt valor litterae n, qui exprimet longitudinem ſubtangentis in F. Haec demonſtrant veritatem theorematis, quod in praecedente diſſertatione octauum eſt.

VIII. Vt habeatur longitudo penduli iſochroni, quaerenda eſt vis acceleratrix in puncto F, quae per §. VI. erit aequalis ſummae ſinuum omnium angulorum contactus ab A vsque in F, id eſt $= \int \frac{-ddy}{dx}$ ſeu $= \frac{-dy}{dx}$; ponendo ſimul $x = o$; et hinc fit $\frac{-dy}{dx} = \frac{-1}{n}$. Eſt itaque vis acceleratrix in F ad vim acceleratricem naturalem vt 1 ad n: ſi vero pendulum ſimplex longitudinis l habeatur, erit vis acceleratrix in illo $= \frac{1}{l}$ ſub eadem diſtantia à linea verticali; ergo vis acceleratrix in extremitate catenae eſt ad vim acceleratricem in pendulo ſimplici eiusdem longitudinis, vt l ad n: Hincque erit longitudo penduli ſimplicis cum catena ſimul vibrantis $= n$, vt habet theorema nonum in praemiſſa diſſertatione.

IX.

IX. Theoremata autem decimum et vndecimum vnice pendent à debitae constantis additione, eaque proinde ceu nimis nunc facilia hic non attingam: sed duodecimum ex §. VI rursus, hunc in modum deducetur.

Corpuscula nunc considerentur infinita et aequalibus distantiolis à se inuicem posita, sed inaequalis ponderis: ita habebitur idea catenae pro lubitu inaequaliter crassae; sit haec ita formata, vt longitudini FM (x) pondus respondeat ξ, denotante ξ functionem qualemcunque ipsius x: Erit (per §. VI.) vis acceleratrix in $M = \int \frac{-ddy}{dx} - \frac{\xi ddy}{d\xi dx} = \frac{y}{n}$, vel quia dx constans, erit $\frac{-dy}{dx} - \frac{\xi ddy}{d\xi dx} = \frac{y}{n}$, aut $n d\xi dy + n\xi ddy = -y d\xi dx$, vel denique

$$\frac{-n\xi dy}{dx} = \int y dx,$$

vt fert theorema duodecimum, de quo sermo erat: demonstratio magis fiet intelligibilis, si simul conferatur paragraphus septimus.

DE INFINITIS CVRVIS EIVSDEM GENERIS. SEV METHODVS INVENIENDI AEQVATIONES PRO INFINITIS CVRVIS EIVSDEM GENERIS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Curuas eiusdem generis hic voco tales curuas, quae a se inuicem non differunt nisi ratione lineae cuiusdam constantis, quae alios atque alios valores assumens eas curuas determinat. Linea haec constans a *Cel. Hermanno* modulus est vocatus, ab aliis parameter: quia autem parametri nomen ambiguitatem creare potest, moduli vocabulum retinebo. Est itaque modulus linea constans et inuariabilis, dum vna infinitarum curuarum quaecunque determinatur; varios autem habet valores et ideo variabilis est, si ad diuersas curuas refertur. Sic si in aequatione $y^2 = ax$ sumatur a pro modulo, ex variabilitate ipsius a innumerabiles oriuntur parabolae super eodem axe positae et communem verticem habentes.

§. 2. Infinitae igitur curuae eiusdem generis omnes vnica aequatione exprimuntur, quam modulus qui nobis

nobis ſemper litera a indicabitur, ingreditur. Huic enim modulo, ſi ſucceſſiue alii atque alii valores tribuantur, aequatio continuo alias dabit curuas, quae omnes in vna aequatione continentur. Aequationem hanc modulum continentem cum *Hermanno* modularem vocabimus; in qua igitur praeter alias conſtantes et eiusdem valoris in omnibus curuis quantitates inſunt modulus a et duae variabiles ad curuam quamlibet pertinentes, cuiusmodi ſunt vel abſciſſa et applicata, vel abſciſſa et arcus curuae, vel area curuae et abſciſſa etc. prout problema ſoluendum poſtulat.

§. 3. Sint igitur quantitates variabiles x et z, quae cum modulo a aequationem modularem ingrediuntur. Perſpicuum eſt, ſi detur aequatio algebraica inter x et z et a, pro vnica curua, in qua a vt conſtans conſideratur, eandem fore ſimul modularem, ſeu ad omnes curuas pertinere, ſi modo a fiat variabilis. At ſi inter x et z non poterit aequatio algebraica dari, difficile erit aequationem modularem inuenire. Nam ſit $z = \int P\,dx$, vbi P in a, z et x, quomodocunque detur, ſeu $dz = P\,dx$, in qua aequatione a vt conſtans conſideratur; intelligitur aequationem modularem haberi, ſi integralis aequationis $dz = P\,dx$ denuo differentietur, poſito etiam a variabili. Sed cum integrationem perficere non liceat, eiusmodi methodus deſideratur, qua differentialis aequatio, quae prodiret, ſi integralis denuo differentietur poſita etiam a variabili, inueniri poſſit.

§. 4.

§. 4. Ad conſtruendas quidem et cognoſcendas curuas aequatio $dz = Pdx$ ſufficit. Nam, dato ipſi modulo a certo valore conſtruetur aequatio $dz = Pdx$, quo facto habebitur vna curuarum infinitarum, eodemque modo aliae reperientur aliis ponendis valoribus loco a. Sed ſi in his curuis certa puncta debeant aſſignari prout problema aliquod poſtulat, talis aequatio $z = \int Pdx$ non ſufficit ſed requiritur aequatio a ſignis ſummatoriis libera in qua ſi non eſt algebraica, etiam differentialia ipſius a inſint. Ex data igitur aequatione differentiali pro vnica curua $dz = Pdx$ in qua a vt conſtans conſideratur, quaeri oportet aequationem differentialem, in qua et a ſit variabilis, haecque erit modularis. Haec vero modularis interdum erit differentialis primi gradus, interdum ſecundi et altioris, interdum etiam penitus non poterit inueniri.

§. 5. Quo igitur methodum tradam, qua ex aequatione differentiali $dz = Pdx$, in qua a eſt conſtans, modularis poſſit inueniri, quae a vt variabilem contineat; pono primo P eſſe functionem ipſarum a et x tantum, vt $\int Pdx$ ſaltem per quadraturas exhiberi posſit. Erit igitur $z = \int Pdx$, in integratione ipſius Pdx, a pro conſtanti habita. Quaeritur nunc differentiale ipſius $\int Pdx$ ſi etiam a vt variabilis tractetur; quo inuento ipſique dz aequali poſito habebitur aequatio modularis. Differentiale autem ipſius $\int Pdx$ habebit hanc formam $Pdx + Qda$, eritque $dz = Pdx + Qda$ aequatio modularis, ſi modo valor ipſius Q eſſet cognitus.

§. 6.

§. 6. Ad inueniendum autem valorem ipsius Q sequens inseruit theorema. *Quantitas A ex duabus variabilibus t et u vtcunque composita, si differentietur posito t constante, hocque differentiale denuo differentietur posito u constante et t variabili, idem resultat ac si inuerso ordine A primo differentietur posito u constante hocque differentiale denuo differentietur posito t constante et u variabili.* Vt sit $A = V(t^2 + nu^2)$, differentietur posito t constante, habebitur $\frac{nudu}{V(t^2+nu^2)}$. Hoc denuo differentietur posito u constante et prodibit $\frac{-ntudtdu}{(t^2+nu^2)^{\frac{3}{2}}}$. Iam ordine inuerso differentietur $V(t^2+nu^2)$ posito u constante, eritque differentiale $\frac{tdt}{V(t^2+nu^2)}$, quod denuo differentiatum posito t constante dabit $\frac{-ntudtdu}{(t^2+nu^2)^{\frac{3}{2}}}$, id quod congruit cum prius inuento. Atque similis conuenientia in quibusque aliis exemplis cernetur.

§. 7. Quamuis autem huius theorematis veritatem exercitati facile perspiciant, demonstrationem tamen sequentem adiiciam ex ipsius differentiationis natura petitam. Cum A sit functio ipsarum t et u, abeat A in B si loco t ponatur $t + dt$; at posito $u + du$ loco u abeat A in C. Posito autem simul $t + dt$ loco t et $u + du$ loco u mutetur A in D. Ex his perspicuum est, si in B scribatur $u + du$ loco u prouenire D; similique modo si in C ponatur $t + dt$ loco t proditurum quoque D. His praemissis, si differentietur A posito t constante prodibit $C - A$, nam posito $u + du$ loco u abit A in C, differentiale autem eſt $C-A$. Si porro in $C-A$ ponatur $t+dt$ loco t prodibit $D-B$, quare differentiale erit $D-B-C+A$. Inuerſo nunc ordine poſito $t+dt$ loco t in A habebitur B, eritque differentiale ipſius A poſito tantum t variabili $B-A$. Hoc differentiale poſito $u+du$ loco u abit in $D-C$, quare eius differentiale erit $D-B-C+A$, id quod congruit cum differentiali priori operatione inuento. Q. E. D.

§. 8. Iſtud autem theorema hoc modo inſeruit ad valorem ipſius Q inueniendum. Cum P et Q ſint functiones ipſarum a et x, ſit $dP = A\,dx + B\,da$ et $dQ = C\,dx + D\,da$, atque z cum ſit $= \int P\,dx$, erit quoque functio ipſarum a et x, poſitum autem eſt $dz = P\,dx + Q\,da$. Iam ſecundum Theorema differentietur z poſito x conſtante, eritque differentiale $Q\,da$ hoc porro differentiatum poſito a conſtante dabit $C\,da\,dx$. Altera operatione differentiale ipſius z poſito primo a conſtante eſt $P\,dx$, huius vero differentiale poſito x conſtante eſt $B\,da\,dx$. Quare vi theorematis aequalia eſſe debent $C\,da\,dx$ et $B\,da\,dx$, ex quo fit $C = B$. Datur autem B ex P; differentiale enim ipſius P poſito x conſtante diuiſum per da dat B. Cum igitur ſit $dQ = B\,dx + D\,da$, erit $Q = \int B\,dx$, ſi in hac integratione a vt conſtans conſideretur.

§. 9. Ex his ergo habebitur $dz = P\,dx + da\int B\,dx$, exiſtente $dP = A\,dx + B\,da$. Si igitur $B\,dx$ integrari poterit, deſiderata habebitur aequatio modularis. At ſi integrari non poteſt aeque inutilis eſt haec aequatio ac

prima

prima $z = \int P\,dx$, vtraque enim inuoluit integrationem differentialis, in qua a vt constans debet considerari, id quod est contra naturam aequationis modularis, quippe in qua a aeque variabile esse debet ac x et z.

§. 10. Quando autem $B\,dx$ integrationem non admittit: non tamen aequatio inuenta vt inutilis omnino est negligenda. Nam si integratio ipsius $B\,dx$ pendeat a $\int P\,dx$ aequatio modularis poterit exhiberi. Si enim fuerit $\int B\,dx = \alpha \int P\,dx + K$ existente K functione ipsarum a et x algebraica, erit ob $\int P\,dx = z$, $\int B\,dx = \alpha z + K$ et $dz = P\,dx + \alpha z\,da + K\,da$, quae aequatio re-uera erit modularis. Quoties igitur $B\,dx$ vel reipsa poterit integrari, vel ad integrationem ipsius $P\,dx$ deduci, aequatio habebitur modularis, quae erit differentialis primi gradus. At si $P\,dx$ est integrabile, ne hoc quidem opus est: sed $z = \int P\,dx$ erit simul aequatio modularis.

§. 11. Si autem $\int B\,dx$ neque algebraice exhiberi neque ad $\int P\,dx$ reduci potest, dispiciendum est, num $\int B\,dx$ ad integrationem alius differentialis, in qua a non inest, possit reduci. Tale enim integrale in qua a non inest non turbat aequationem modularem, cum si libuerit per differentiationem tolli possit. Atque eodem iure, si $\int P\,dx$ reduci poterit ad aliud integrale, quod a non continet, nequidem hac ipsius Q determinatione opus est, sed $z = \int P\,dx$ statim dat aequationem modularem, vt si sit $\int P\,dx = b \int K\,dx$ data b per a et K per x tantum, erit aequatio modularis $z = b \int K\,dx$ seu $dz = \frac{z\,db}{b} + K\,b\,dx$.

§. 12. Si autem haec omnia nullum inueniant locum indicio est, aequationem modularem primi gradus differentialem non dari. Quamobrem in altioris gradus differentialibus quaeri debebit. Ad hoc differentio denuo aequationem $dz = Pdx + da\int Bdx$. Pono autem $dB = Edx + Fda$, quo facto erit ipsius $\int Bdx$ differentiale $Bdx + da\int Fdx$. Differentiatione igitur peracta et loco $\int Bdx$ eius valore ex eadem aequatione nempe $\frac{dz}{da} - \frac{Pdx}{da}$ posito, habebitur $ddz = Pddx + dPdx + \frac{dzdda}{da} - \frac{Pdxdda}{da} + Bdadx + da^2\int Fdx$. Erit igitur $\int Fdx = \frac{ddz}{da^2} - \frac{dzdda}{da^3} - \frac{Pddx}{da^2} - \frac{dPdx}{da^2} + \frac{Pdxdda}{da^3} - \frac{Bdx}{da}$ Cum autem sit $\int Bdx = \frac{dz}{da} - \frac{Pdx}{da}$ et $\int Pdx = z$, si $\int Fdx$ reduci poterit ad integralia $\int Bdx$ et $\int Pdx$ vel si reipsa poterit integrari, habebitur aequatio modularis, quae erit differentialis secundi gradus. Vt si fuerit $\int Fdx = \alpha\int Bdx + \beta\int Pdx + K$, datis α et β vtcunque per a et constantes, et K per a et x constantes, erit aequatio modularis haec $\frac{ddz - dzdda - Pddx + Pdxdda - dPdx}{da^2} - \frac{Bdx}{da} = \frac{\alpha dz - \alpha Pdx}{da} + \beta z + K$. At B et F ex dato P facile reperiuntur.

§. 13. Si $\int Fdx$ quod autem rarissime euenit vel non amplius in se contineat a, vel ad aliud possit reduci, in quo a non insit, aequatio inuenta differentialis secundi gradus pro legitima modulari poterit haberi. Sed si haec omnia nondum succedant, adhuc differentiatio est instituenda, in qua differentiale ipsius $\int Fdx$ erit $Fdx + da\int Hdx$ posito $dF = Gdx + Hda$. Quo facto videndum est vel an $\int Hdx$ re ipsa possit exhiberi, vel an pendeat a praecedentibus $\int F\,dx$, $\int B\,dx$ et $\int P\,dx$, vel an possit ex signo summatorio a eliminari. Quorum si quod obtigerit, habebitur aequatio modularis differentialis tertii gradus; sin vero nullum locum habuerit, continuanda est differentiatio simili modo donec signa summatoria potuerint eliminari.

§. 14. His generalibus praemissis ad specialia accedo, casus euoluturus, quibus functio P quodammodo determinatur. Sit igitur P functio ipsius x tantum, a prorsus non inuoluens, quam littera X designabo, erit ergo $dz = X\,dx$, quae quidem aequatio quia non continet a, ad vnicam videtur curuam pertinere, neque ad modularem praebendam apta esse. Sed cum in integratione constantem addere liceat, poterit esse $z = \int X\,dx + na$ seu differentiando $dz = X\,dx + n\,da$, quae est vera aequatio modularis. Eadem aequatio prodiisset, si iuxta regulam X differentiassem posito x constante, vnde prodit $B = o$ et $\int B\,dx = n$ constanti, orta igitur esset aequatio modularis $dz = X\,dx + n\,da$ cuius loco potius integralis $z = \int X\,dx + na$ vsurpatur.

§. 15. Sit nunc $P = AX$, existente A functione ipsius a, et X ipsius x tantum. Cum igitur sit $z = \int P\,dx$ erit $z = \int AX\,dx$ seu quia in integratione a vt constans debet considerari, $z = A\int X\,dx$. Quae aequatio seu eius differentialis $A\,dz - z\,dA = A^2 X\,dx$ erit aequatio modularis quaesita. Loco A quidem cum sit functio ipsius a tantum, poni potest ipse modulus a: nam loco moduli eius functio quaecunque eodem iure pro modulo haberi potest.

§. 16. Sit $P = A + X$ litteris A et X eosdem vt ante retinentibus valores. Erit ergo $dz = A\,dx + X\,dx$ atque $z = Ax + \int X\,dx$, quae aequatio iam est modularis; quia modulus A non est in signo summatorio inuolutus. Si quem autem $\int X\,dx$ offendat, differentialem aequationem $dz = A\,dx + x\,dA + X\,dx$ pro modulari habere potest.

§ 17. Simili ratione modularem aequationem inuenire licet, si fuerit $P = AX + BY + CZ$ etc. vbi A, B, C sunt functiones quaecunque ipsius moduli a, et X, Y, Z functiones quaecunque ipsius x et constantium excepta a. Namque ob $dz = AX\,dx + BY\,dx + CZ\,dx$ erit $z = A\int X\,dx + B\int Y\,dx + C\int Z\,dx$, quae simul est modularis, cum modulus a nusquam post signum summatorium reperiatur.

§. 18. Sit $P = (A + X)^n$ seu $z = \int dz (A + X)^n$. Differentiale ipsius P posito x constante est $n(A+X)^{n-1}dA$ id quod per da diuisum dat superiorem valorem B vid. §. 8. Erit igitur $dz = (A+X)^n dx + n\,dA\int(A+X)^{n-1}dx$ seu $\int dx(A+X)^{n-1} = \dfrac{dz - (A+X)^n dx}{n\,dA}$. Cum igitur sit $\int dx(A+X)^n = z$, si haec duo integralia a se inuicem pendeant, vel $\int dx(A+X)^{n-1}$ algebraice etiam exprimi poterit, habebitur quod quaeritur. Si neutrum contingat denuo differentiatio est instituenda. Est autem differentiale ipsius $\int dx(A+X)^{n-1} = dx(A+X)^{n-1} + (n-1)\,dA\int(A+X)^{n-2}dx = \text{Diff.}\ \dfrac{dz - (A+X)^n dx.}{n\,dA}$

Erit

Erit itaque $\int dx(A+X)^{n-2} = -\frac{1}{(n-1)dA}$ Diff. $\frac{dz-(A+X)^n dx}{ndA}$ $-\frac{dx(A+X)^{n-1}}{(n-1)dA}$. Quare videndum eſt an $\int dx(A+X)^{n-2}$ poſſit vel integrari vel ad priora integralia reduci.

§ 19. Si n fuerit numerus integer affirmatiuus aequatio modularis erit algebraica. Nam $(A+X)^n$ poteſt in terminos numero finitos reſolui, quorum quisque in dx ductus integrari poteſt, ita vt modulus a in ſignum ſummatorium non ingrediatur. Erit autem aequatio modularis haec $z = A^n x + \frac{n}{1}A^{n-1}\int X dx + \frac{n.n-1}{1.2}A^{n-2}\int X^2 dx$ etc. Examinandum igitur reſtat quibus caſibus ſi n non fuerit numerus integer affirmatiuus, ſupra memoratae conditiones locum habeant.

§. 20. Sit primo $X = bx^m$, vbi b etiam ab a pendere poteſt; erit ergo $z = \int(A+bx^m)^n dx$. Haec formula primo ipſa eſt integrabilis, ſi $m = \frac{1}{i}$ deſignante i numerum quemcunque affirmatiuum integrum: deinde etiam ſi $m = \frac{-1}{n+i}$. His igitur caſibus aequatio modularis fit algebraica. At ſi $m = -\frac{1}{n}$, vbi b ab a non pendere poteſt illa quidem aequatio integrationem non admittit ſed ſequens $dz = (A+bx^{\frac{-1}{n}})^n dx + ndA\int dx(A+bx^{\frac{-1}{n}})^{n-1}$ euadit integrabilis, fitque aequatio modularis differentialis primi caſus.

§. 21. Non ſolum autem, quicunque valor ipſi m tribuatur aequatio modularis differentialis primi gradus haberi poteſt, ſed etiam ſi fuerit $z = \int x^m dx(A+bx^k)^n$. Fiet enim $dz = x^m dx(A+bx^k)^n + ndA\int x^m dx(A+bx^k)^{n-1}$

Sed

Sed eſt $\int x^m dx(A+bx^k)^n = \frac{x^{m+1}(A+bx^k)^n}{m+nk+1} + \frac{nkA}{m+nk+1}$ $\int x^m dx(A+bx^k)^{n-1}$, ſeu $\int x^m dx(A+bx^k)^{n-1} = \frac{(m+nk+1)z}{nkA} - \frac{x^{m+1}(A+bx^k)^n}{nkA}$. Conſequenter habebitur aequatio modularis haec $Akdz = (A+bx^k)^n (Akx^m dx - x^{m+1}dA) + (m+nk+1)z\,dA$. Simili modo modularis eſſet inuenta, ſi fuiſſet $z = B\int x^m dx (A+bx^k)^n$ alia enim non prodiiſſet differentia niſi quod loco z ſcribi debuiſſet $\frac{z}{B}$, et loco dz, $\frac{Bdz - zdB}{B^2}$ ſi quidem B ab a etiam pendeat.

§. 22. Miſſis autem huiusmodi litterae P determinationibus, quippe quae minus late patent, ad alias accedo, quae multo ſaepius vſui eſſe poſſunt. Continentur hae determinationes ea functionis cuiusdam propoſitae proprietate, qua functio eundem vbique tenet dimenſionum quantitatum variabilium numerum. Tales enim functiones peculiari modo differentiationem admittunt. Vt ſit u functio nullius dimenſionis ipſarum a et x, cuiusmodi ſunt $\frac{a}{x}$, $\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}$ aliaeque ſimiles, in quibus ipſarum a et x dimenſionum numerus in denominatore aequalis eſt numero dimenſionum numeratoris. Det autem talis functio u differentiata $R\,dx + S\,da$; dico fore $Rx + Sa = o$. Nam ſi in functione u ponatur $x = ay$, omnia a ſeſe deſtruent et in ea praeter y et conſtantes nulla alia littera remanebit. Hancobrem in differentiali poſt hanc ſubſtitutionem aliud differentiale praeter dy non reperietur. Cum autem ſit $x = ay$

erit

erit $dx = ady + yda$, ideoque $du = Rady + Ryda + Sda$ Debebit ergo esse $Ry + S = o$, *seu* $Rx + Sa = o$.

§. 23. Sin vero fuerit u functio m dimensionum ipsarum a et x, atque $du = Rdx + Sda$; *erit* $\frac{u}{x^m}$ functio ipsarum a et x nullius dimensionis. Differentietur igitur $\frac{u}{x^m}$ et prodibit $\frac{xdu - mudx}{x^{m+1}}$ seu $\frac{Rxdx - mudx + Sxda.}{x^{m+1}}$ Quod cum sit differentiale functionis nullius dimensionis erit $Rx^2 - mux + Sax = o$, seu $Rx + Sa = mu$. Quare si fuerit u functio m dimensionum ipsarum a et x; atque ponatur $du = Rdx + Sda$ erit $Rx + Sa = mu$ ideoque $du = Rdx + \frac{da}{a}(mu - Rx)$ seu $adu = Radx - Rxda + muda$.

§. 24. His praemissis in $dz = Pdx$ seu $z = \int Pdx$ sit P functio n dimensionum ipsarum a et x, erit igitur z talis functio dimensionum $n + 1$. Quare si ponatur $dz = Pdx + Qda$, erit $Px + Qa = (n + 1)z$. Ex quo valor ipsius Q substitutus dabit aequationem modularem $dz = Pdx + \frac{da}{a}((n + 1)z - Px)$ seu $adz - (n + 1)zda = Padx - Pxda$. Quae tantum est differentialis primi gradus Cum autem generaliter erat $Q = \int Bdx$, erit hoc casu $(n + 1)\int Pdx = a\int Bdx + Px$. Ex quo perspicitur hoc casu integrale $\int Bdx$ semper reduci ad $\int Pdx$.

§. 25. Eadem aequatio modularis proueniet ex consideratione solius P. Posito enim $dP = Adx + Bda$, erit $nP = Ax + Ba$. Cum autem sit $dz = Pdx + da$

 $\int Bdx$

$\int B\,dx$, erit $dz = P\,dx + \frac{da}{a}\int(nP\,dx - A\,x\,dx)$ in qua integratione a constans habetur. Erit igitur $\int nP\,dx = nz$, et $\int A\,x\,dx = Px - \int P\,dx$ ob $\int A\,dx = P$. Habebitur itaque $dz = P\,dx + \frac{da}{a}((n+1)z - Px)$, id quod prorsus congruit cum praecedentibus.

§. 26. Retinente P suum valorem n dimensionum. Sit $z = \int APX\,dx$, vbi A sit functio ipsius a et X ipsius x tantum. Erit igitur $\frac{z}{A} = \int PX\,dx$. Posito $dP = A\,dx + B\,da$, (in quo littera A cum altera quae est functio ipsius a tantum non est confundenda) erit $nP = Ax + Ba$. Ipsius PX differentiale igitur posito x constante erit $BX\,da$. Consequenter habebitur d. $\frac{z}{A} = PX\,dx + da\int BX\,dx = PX\,dx + \frac{da}{a}\int(nPX\,dx - AX\,x\,dx)$. Est vero $\int nPX\,dx = \frac{nz}{A}$ et $\int AX\,x\,dx = PX\,x - \int PX\,dx - \int Px\,dX$. Quare fiet d. $\frac{z}{A} = PX\,dx - \frac{PXx\,da}{a} + \frac{(n+1)z\,da}{Aa} + \frac{da}{a}\int Px\,dX$. Nisi igitur $\int Px\,dX$ reduci poterit ad $\int PX\,dx$ vel prorsus integrari, aequatio modularis differentialis primi gradus dari nequit.

§. 27. At si fuerit $z = R\int P\,dx$, existente R functione quacunque algebraica ex a, x et etiam ex z constante, at P functione ipsarum a et x dimensionum n. Quia est $\frac{z}{R} = \int P\,dx$ erit d. $\frac{z}{R} = P\,dx + \frac{da}{a}(\frac{(n+1)z}{R} - Px) = \frac{R\,dz - z\,dR}{R^2}$ seu $R\,a\,dz - z\,a\,dR - (n+1)R\,z\,da = PR^2\,a\,dx - PR^2\,x\,da$. In vniuersum autem teneatur, quoties $z = \int P\,dx$ ad aequationem modularem reduci possit, toties etiam $z = R\int P\,dx$ ad aequationem modularem reduci posse. Nullum aliud enim discrimen aderit,

rit, nisi quod in illo casu erat z, hoc casu debeat esse $\frac{z}{R}$. Quare si R fuerit vel quantitas algebraica, vel talis transcendens, ut eius differentiale posito etiam a variabili possit sine summatione exhiberi, aequatio modularis per praecepta data reperietur. Quamobrem in posterum tales casus, etiamsi latius pateant praetermittere licebit.

§. 28. Ponamus esse $z = \int (P + Q) dx$, seu $z = \int P dx + \int Q dx$ et P esse functionem ipsarum a et x dimensionum $n-1$, Q vero functionem earundem a et x dimensionum $m-1$. Cum igitur differentiale ipsius $\int P dx$ sit $\frac{P(adx - xda)}{a} + \frac{da}{a} \int n P dx$ et differentiale ipsius $\int Q dx$ sit $\frac{Q(adx - xda)}{a} + \frac{da}{a} \int m Q dx$; erit $dz = \frac{(P+Q)(adx - xda)}{a} + \frac{da}{a} (n \int P dx + m \int Q dx)$. Ponatur $\frac{adz - (P+Q)(adx - xda)}{da} = u$, eritque $u = n \int P dx + m \int Q dx$. Si igitur porro differentietur erit $du = \frac{(nP + mQ)(adx - xda)}{da} + \frac{da}{a} (n^2 \int P dx + m^2 \int Q dx)$. Posito igitur $\frac{adv - (nP + mQ)(adx - xda)}{da} = t$ erit $t = n^2 \int P dx + m^2 \int Q dx$. Eliminatis nunc ex his tribus aequationibus ipsarum z, u et t integralibus $\int P dx$ et $\int Q dx$, prodibit haec aequatio $mnz - (m+n) u + t = 0$. Quae aequatio, si loco u et t valores assumti substituantur, erit modularis quaesita.

§. 29. Simili modo si fuerit $z = \int (P + Q + R) dx$ et P functio $n-1$, Q functio $m-1$ et R functio $k-1$ dimensionum ipsarum a et x. Ponatur $u = \frac{adz - (P+Q+R)(adx - xda)}{da}$ et $t = \frac{adu - (nP + mQ + kR)(adx - xda)}{da}$, et $s = \frac{adt - (n^2 P + m^2 Q + k^2 R)(adx - xda)}{da}$

 Quo

Quo facto erit aequatio modularis haec: $kmnz - (km + kn + mn)u + (k + m + n)t - s = o$.

§. 30. Sit porro $z = \int (P + Q)^k dx$, vbi P sit functio n dimensionum, Q vero functio m dimensionum ipsarum a et x. Quando igitur est $dP = A\,dx + B\,da$ et $dQ = C\,dx + D\,da$, erit $nP = Ax + Ba$ et $mQ = Cx + Da$. Differentiale autem ipsius $(P + Q)^k$ posito x constante diuisum per da est $k(B + D)(P + Q)^{k-1}$. Hanc ob rem erit $dz = (P + Q)^k dx + \frac{k\,da}{a}\int (P + Q)^{k-1} (Ba + Da)dx$. Cum autem sit $Ba = nP - Ax$ et $Da = mQ - Cx$, et $A\,dx = dP$ et $C\,dx = dQ$ ob a in hac integratione constans, erit $dz = (P + Q)^k dx + \frac{da}{a} \int (P + Q)^{k-1} (nP\,dx + mQ\,dx - x\,dP - x\,dQ)$, seu $dz = \frac{(P + Q)^k (a\,dx - x\,da)}{a} + \frac{da}{a} \int (P + Q)^{k-1} ((nk + 1) P\,dx + (mk + 1) Q\,dx)$. Ponatur $\frac{adz - (P + Q)^k (adx - xda) - zda}{k\,da} = u$ erit $u = \int (nP\,dx + mQ\,dx)(P + Q)^{k-1}$. Quare si integrale $\int (nP\,dx + mQ\,dx)(P + Q)^{k-1}$ pendet ab integrali $\int (P + Q)^k dx$ habebitur aequatio modularis differentialis gradus primi; sin minus differentiatio est continuanda. Fit autem $du = (nP\,dx + mQ\,dx)(P + Q)^{k-1} + \frac{uda}{a} - \frac{da}{a}(nP + mQ)(P + Q)^{k-1} x + \frac{da}{a}\int (kn^2 P^2 dx + (2k mn + n^2 - 2mn + m^2) PQ\,dx + km^2 Q^2 dx) \int (P + Q)^{k-2}$. Et posito $t = \frac{adu - uda - (nP + mQ)(P + Q)^{k-1}(adx - xda)}{da}$ erit $t = \int (kn^2 P^2 dx + (2kmn + n^2 - 2mn + m^2) PQ\,dx + km^2 Q^2 dx)(P + Q)^{k-2}$.

§. 31.

§. 31. Cum igitur habeantur tria integralia videndum est, num ea a se inuicem pendeant, hoc enim si fuerit, habebitur aequatio algebraica inter t, u et z, quae dabit loco t et u substitutis assumtis valoribus aequationem modularem differentialem secundi gradus. Quo autem facilius in casibus particularibus perspici possit, an pendeant a se inuicem, ad alias formas eas reduci conuenit. Cum igitur sit $z = \int (P + Q)^k dx$ erit $u = mz + (n - m)\int (P + Q)^{k-1} P dx$ et $t = (2km + n - m)u - (km^2 - m^2 + mn)z + (n - m)^2 (k - 1)\int (P + Q)^{k-2} P^2 dx$ Quaerendum itaque est an $\int (P + Q)^{k-2} P^2 dx$ reduci possit ad haec $\int (P + Q)^{k-1} P dx$ et $\int (P + Q)^k dx$ Vel an sit $\int (P + Q)^{k-2} P^2 dx = \alpha \int (P + Q)^{k-1} P dx + \beta \int (P + Q)^k dx + V$ designante V quantitatem algebraicam quamcunque per a et x datam, et α ac β sunt coefficientes ex constantissimis et a compositae.

§. 32. Fiat igitur $V = T(P + Q)^{k-1}$ huius differentiale posito a constante fit $dT(P + Q)^{k-1} + (k - 1)(T dP + T dQ)(P + Q)^{k-2}$. Prodibit ergo sequens aequatio $P^2 dx = \alpha P^2 dx + \alpha PQ dx + \beta P^2 dx + 2\beta PQ dx + \beta Q^2 dx + P dT + Q dT + (k - 1) T dP + (k - 1) T dQ$, quae per dx diuidi poterit. At T ita debet accipi, ut termini repondentes sese destruant, sumtis ad hoc idoneis pro α et β valoribus.

§. 33. At si per $\int P dx$ non absolute determinetur z sed quantitas $\int Q dz$, data Q utcunque per a et z, atque P per a et x; habebitur ista aequatio $Q dz = P dx$ in qua indeterminatae x et z sunt a se inuicem

 sepafeparatae. Modularis vero aequatio hoc modo inuenietur: Quia eft $\int Q\,dz = \int P\,dx$ differentietur vtrumque membrum ponendo etiam a variabili ope $dP = A\,dx + B\,da$ et $dQ = C\,dz + D\,da$. Erit ergo $Q\,dz + da\int D\,dz = P\,dx + da\int B\,dx$ feu $Q\,dz = P\,dx + da(\int B\,dx - \int D\,dz)$. Quae aequatio, fi $\int B\,dx$ et $\int D\,dz$ poterunt eliminari, dabit modularem quaefitam.

§. 34. Sit P functio $m-1$ dimenfionum ipfarum a et x, et Q functio $n-1$ dimenfionum ipfarum a et z. His pofitis erit Diff. $\int P\,dx = \frac{m\,da\int P\,dx + P(a\,dx - x\,da)}{a}$, et Diff. $\int Q\,dz = \frac{n\,da\int Q\,dz + Q(a\,dz - z\,da)}{a}$. Ex quo eruitur ifta aequatio $(m-n)\int P\,dx = \frac{Q(a\,dz - z\,da)}{da} - \frac{P(a\,dx - x\,da)}{da}$ ob $\int P\,dx = \int Q\,dz$. Quare fi fuerit $m = n$, erit $Q\,a\,dz - Q\,z\,da = P\,a\,dx - P\,x\,da$. quae eft aequatio modularis, feu $\frac{da}{a} = \frac{Q\,dz - P\,dx}{Qz - Px}$.

§. 35. Sin vero m et n non fint aequales, aequatio modularis erit differentialis fecundi gradus. Nam cum fit $(m-n)\int P\,dx = \frac{Q(a\,dz - z\,da) - P(a\,dx - x\,da)}{da}$ erit Diff. $\frac{Q(a\,dz - z\,da) - P(a\,dx - x\,da)}{da} = \frac{m(m-n)\,da\int P\,dx}{a} + \frac{(m-n)P(a\,dx - x\,da)}{a} = \frac{mQ(a\,dz - z\,da) - nP(a\,dx - x\,da)}{a}$. Quae aequatio eft modularis quaefita.

§. 36. Si in aequatione propofita $dz + P\,dx = 0$ indeterminatae non fuerint a fe inuicem feparatae, ita vt P fit functio inuoluens x et z et a; debebit per quantitatem quandam R multiplicari, quo formula $R\,dz + PR\,dx$ vt differentiale integralis cuiusdam S poffit confiderari. Erit itaque $dS = R\,dz + PR\,dx = 0$, ideoque

ideoque $S = Const.$ Sed ad quantitatem R inueniendam, fit $dP = A\,dx + B\,dz$ et $dR = D\,dx + E\,dz$, vbi a tantisper pro conſtante habemus. His poſitis erit $d.PR = (DP + AR)\,dx + (EP + BR)\,dz$, quocirca debet eſſe $D = EP + BR$. At ob $D = \frac{dR - Edz}{dx}$ fiet $E\,dz + EP\,dx + BR\,dx = dR$. Cum vero ſit $dz + P\,dx = o$, habebitur $dR = BR\,dx$, et $lR = \int B\,dx$. Cognita vero eſt B ex dato P, et quia B et z et x inuoluit, $B\,dx$ integrari debet ope aequationis $dz + P\,dx = o$, ſi quidem fieri poteſt. Sit itaque $\int B\,dx = K$, eritque $R = e^K$ poſito $le = 1$.

§. 37. Cum igitur ſit $dS = e^K\,dz + e^K P\,dx = o$, ad aequationem modularem inueniendam ſit $dK = F\,dx + G\,dz + H\,da$, eritque $de^K = e^K(F\,dx + G\,dz + H\,da)$. Sumatur deinde integrale ipſius $e^K H\,dz$ poſito tantum z variabili, x vero et a conſtantibus, quo facto erit aequatio modularis $e^K\,dz + e^K P\,dx + da\int e^K H\,dz = o$, ſeu diuiſo per e^K haec $dz + P\,dx + e^{-K}\,da\int e^K H\,dz = o$. Alia aequatio modularis inuenitur, poſito $dP = A\,dx + B\,dz + C\,da$, erit enim ipſius $e^K P$ differentiale poſito x et z conſtante hoc $e^K(C\,da + PH\,da)$. Integretur $e^K\,dx(C + PH)$ poſito tantum x variabili, quo facto erit aequatio modularis $dz + P\,dx + e^{-K}\,da\int e^K\,dx(C + PH) = o$. Sed huiusmodi aequationes modulares niſi R poſſit ſine aequatione propoſita $dz + P\,dx = o$ determinari, nullius fere ſunt vſus.

§. 38. Conſideremus igitur caſus particulares, ſitque in aequatione $dz + P\,dx = o$, P functio nullius dimenſionis

ſionis ipſarum x et z, non computatis conſtantibus et modulo a. Formula vero $dz + Pdx$ integrabilis ſemper redditur ſi diuidatur per $z + Px$, quamobrem erit $S = \int \frac{dz + Pdx}{z + Px} = \text{Conſt.}$ Fit autem $\int \frac{dz + Pdx}{z + Px} = l(z + Px) - \int \frac{xdP}{z + Px}$. Deinde poſito $z = tx$, fiet P functio ipſius t tantum quae ſit T. Quare erit $S = l(z + Px) - \int \frac{dT}{1 + T}$ quod per quadraturas poteſt exhiberi.

§. 39. Ad aequationem modularem igitur inueniendam nil aliud eſt agendum, niſi vt $\int \frac{dz + Pdx}{z + Px}$ differentietur poſito quoque modulo a variabili. Ponatur igitur $dP = A dx + B dz + C da$, vbi erit $Ax + Bz = o$. Differentietur nunc coefficiens ipſius dx, nempe $\frac{P}{z + Px}$ poſito tantum a variabili, erit eius differentiale $\frac{Czda}{(z + Px)^2}$. Deinde integretur $\frac{Czdx}{(z + Px)^2}$ tantum x pro variabili habita, quo facto erit aequatio modularis quaeſita $dz + Pdx + (z + Px) da \int \frac{Czdx}{(z + Px)^2} = o$. Simili modo ex coefficiente ipſius dz qui eſt $\frac{1}{z + Px}$ prodit haec aequatio modularis $dz + Pdx - (z + Px) da \int \frac{Cxdz}{(z + Px)^2} = o$, in qua integratione z tantum pro variabili habetur. Siue etiam haec $dz + Pdx = (z + Px) da \int \frac{Ddt}{(1 + T)^2}$ in qua C et T per ſolum t et a dantur.

§. 40. Praetermittere hic non poſſum, quin generalem aequationum homogenearum, vti a *Cel. Ioh Bernoulli* vocantur, quae omnes hac aequatione $dz + Pdx = o$ continentur, reſolutionem adiiciam. Namque reperitur ex (§. 38) $l(z + Px) = \int \frac{dT}{1 + T} = l(t + T) - \int \frac{dt}{1 + T}$ vbi $t = \frac{z}{x}$ et $T = P$. Prodibit igitur. $lx + \int \frac{dt}{1 + T} = o$ ſeu adiecta

iecta conſtante $l\frac{c}{x} = \int \frac{dt}{t+T}$. Vt ſi propoſita ſit aequatio $nxdz + dx\sqrt{(x^2+z^2)} = o$ fiet $P = \frac{\sqrt{(x^2+z^2)}}{nx}$, poſitoque $z = tx$, erit $T = \frac{(1+tt)}{n}$ ideoque $l\frac{c}{x} = \int \frac{ndt}{nt+\sqrt{(1+tt)}}$ fiat $\sqrt{(1+tt)} = t+s$ erit $t = \frac{1-ss}{2s}$ et $dt = \frac{-(1+ss)}{2ss}$. Quare erit $l\frac{c}{x} = \int \frac{-nds(1+ss)}{(n+1)s-(n-1)s^3} = \frac{-n}{n+1}ls + \frac{n^2}{n^2-1}l((n-1)s^2-n-1)$.

§. 41. Quo tamen vſus calculi §. 36 in caſu ſpeciali appareat, ſit aequatio propoſita $dz + pzdx - qdx = o$, in qua p et q vtcunque in a et x dantur. Quae aequatio cum illa generali $dz + Pdx = o$ collata dat $P = pz - q$, ex quo fiet $B = p$, et $lR = \int pdx$ ſeu $R = e^{\int pdx}$. Cum igitur $\int pdx$ per quadraturas poſſit aſſignari, cognitus eſt valor ipſius R, ideoque aequatio propoſita per $e^{\int pdx}$ multiplicata fit integrabilis: erit igitur $e^{\int pdx}dz + e^{\int pdx}pzdx - e^{\int pdx}qdx = o$ huiusque integralis $e^{\int pdx}z = \int e^{\int pdx}qdx$ ſeu $z = e^{-\int pdx}\int e^{\int pdx}qdx$. Differentiari itaque debet $e^{-\int pdx}\int e^{\int pdx}qdx$ poſitis et a et x variabilibus, et differentiale ipſi dz aequale poni, quo facto habebitur aequatio modularis. Poſitis igitur $dp = fdx + gda$ et $dq = hdx + ida$ prodibit iſta aequatio modularis $dz = -e^{-\int pdx}(pdx + da\int gdx)\int e^{\int pdx} qdx + qdx + e^{-\int pdx}da\int e^{\int pdx}(idx + qdx\int gdx)$, ſeu poſito breuitatis gratia $\int e^{\int pdx}qdx = T$ erit $dz = -e^{-\int pdx} Tpdx + qdx + e^{-\int pdx}da\int e^{\int pdx}idx - e^{-\int pdx}da\int Tgdx$. Ex qua operatione intelligi poteſt, ad aequationem modularem inueniendam id maxime eſſe efficiendum, vt in aequatione propoſita indeterminatae a ſe inuicem ſeparentur.

ADDITAMENTVM
AD DISSERTATIONEM
DE
INFINITIS CVRVIS
EIVSDEM GENERIS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

IN ſuperiore diſſertatione, in qua methodum tradidi aequationem pro infinitis curuis eiusdem generis inueniendi, ipſius Q valorem in aequatione $dz = Pdx + Qda$ determinare docui, ex data aequatione $z = \int Pdx$. Namque ſi P ex x, et a cum conſtantibus vtcunque fuerit compoſitum; manifeſtum eſt ſi $\int Pdx$ differentietur poſito non ſolum x ſed etiam a variabili, prodituram eſſe huius formae aequationem $dz = Pdx + Qda$, in qua valor ipſius Q neceſſario a quantitate P, quae eſt cognita, pendebit. Demonſtraui ſcilicet, ſi differentiale ipſius P poſito x conſtante fuerit Bda, fore ipſius Q differentiale poſito a conſtante, Bdx, ex quo pendentia ipſius Q a P ſatis perſpicitur.

§. 2. Cum autem inuentus fuerit valor ipſius Q, aequatio $dz = Pdx + Qda$ exprimet naturam infinitarum curuarum ordinatim datarum, quarum ſingulae ſeorſim continentur aequatione $dz = Pdx$, a ſe inuicem vero diffe-

differunt diuerſitate parametri ſeu moduli a. Et hanc ob rem aequationem $dz = Pdx + Qda$ in qua modulus a tanquam quantitas variabilis ineſt, cum *Cel. Hermanno* aequationem modularem vocaui.

§. 3 Si Pdx integrationem admittit, ſeu ſi curuae ordinatim datae omnes ſunt algebraicae aequatio $z = \int Pdx$ ſimul erit modularis; nam quia nulla adſunt differentialia, modulus a aeque variabilis ac x et z poterit conſiderari Sin autem Pdx integrari nequit, aequatio etiam modularis non erit algebraica, exceptis caſibus quibus eſt $P = AX + BY + CZ$ etc. exiſtentibus A, B, C etc. functionibus ipſius a et conſtantium, atque X, Y, Z etc. functionibus ipſius x et conſtantium tantum, modulo a ipſas non ingrediente. Etiamſi enim ipſa aequatio $dz = Pdx$ ſit differentialis, tamen aequatio modularis $z = A\int Xdx + B\int Ydx + C\int Zdx$ etc. inſtar algebraicae eſt conſideranda.

§. 4. Niſi autem P talem habuerit valorem aequatio modularis vel erit differentialis gradus primi vel altioris gradus. Differentialis quidem primi gradus erit, ſi Q vel erit quantitas algebraica, vel integrale ipſius Pdx inuoluet, hoc enim caſu z loco $\int Pdx$ ſubſtitutum tollet quoque ſignum ſummatorium, ita vt aequatio modularis differentialis pura ſit proditura.

§. 5. Deprehendi vero in ſuperiore diſſertatione, Q toties algebraicum habere valorem quoties P talis fuerit ipſarum a et x functio, vt numerus dimenſionum, quas a et x conſtituunt ſit vbique idem atque -1, ſeu

 quo-

quoties Px vel Pa fuerit functio ipsarum a et x nullius dimensionis. Deinde etiam obseruaui, quoties in P litterae a et x eundem tantum vbique constituant dimensionum numerum, toties Q ab integratione ipsius Pdx pendere. Ex quo, cum tam eximia consequantur subsidia ad aequationes modulares inueniendas, maxime iuuabit inuestigare, num forte aliae dentur huiusmodi functiones ipsius P, quae iisdem praerogatiuis gaudeant. Has igitur a priore inuestigare constitui, quo simul methodus tales functiones inueniendi aperiatur.

§. 6. Si P est functio ipsarum a et x dimensionum -1, seu z functio ipsarum a et x nullius dimensionis, ostendi fore $Px + Qa = o$, seu $Q = -\frac{Px}{a}$. Sumamus igitur esse $Q = -\frac{Px}{a}$ et quaeramus, qualis sit P functio ipsarum a et x. At si $Q = -\frac{Px}{a}$ erit $dz = Pdx - \frac{Pxda}{a}$. Quamobrem P talis esse debebit functio ipsarum a et x, vt $dx - \frac{xda}{a}$ per eam multiplicatum euadat integrabile. Hic autem per integrabile non solum intelligo, quod integratione ad quantitatem algebraicam, sed etiam quod ad quadraturam quamcunque reducitur. Si igitur generaliter inuenerimus quantitatem, in quam $dx - \frac{xda}{a}$ ductum fit integrabile, ea erit quaesitus valor ipsius P, eius proprietatis, vt sit $Q = -\frac{Px}{a}$.

§. 7. Fit autem $dx - \frac{xda}{a}$ integrabile si multiplicatur per $\frac{1}{a}$, integrale enim erit $\frac{x}{a} + c$, designante c quantitatem constantem quamcunque ab a non pendentem. Quocirca, si $f(\frac{x}{a} + c)$ denotet functionem quamcunque

cunque ipſius $\frac{x}{a}+c$, fiet quoque $dx-\frac{xda}{a}$ integrabile, ſi multiplicetur per $\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$. Qui valor cum ſit maxime generalis, erit $P=\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$, et $Q=-\frac{Px}{a}$. Eſt vero $f(\frac{x}{a}+c)$ functio quaecunque ipſarum a et x nullius demenſionis. Quamobrem quoties Pa fuerit functio nullius dimenſionis ipſarum a et x, toties erit $Q=-\frac{Px}{a}$, ideoque aequatio modularis $dz=Pdx-\frac{Pxda}{a}$.

§. 8. Sit $Q=A-\frac{Px}{a}$, et A functio quaecunque ipſius a et conſtantium; erit $dz=Pdx+Ada-\frac{Pxda}{a}$ ſeu $dz-Ada=Pdx-\frac{Pxda}{a}$. In qua aequatione cum $dz-Ada$ ſit integrabile, debebit $Pdx-\frac{Pxda}{a}$ quoque eſſe integrabile. Hoc autem per praecedentem operationem euenit ſi $P=\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$. Tum igitur erit $Q=A-\frac{x}{a^2}f(\frac{x}{a}+c)$. Simili ratione intelligitur ſi fuerit $P=X+\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$, denotante X functionem ipſius x tantum, fore $Q=A-\frac{x}{a^2}f(\frac{x}{a}+c)$, vbi vt ante $f(\frac{x}{a}+c)$ exprimit functionem quamcunque ipſarum a et x nullius dimenſionis.

§. 9. Sit $Q=-\frac{nPx}{a}$, vbi n indicet numerum quemcunque; erit $dz=Pdx-\frac{nPxda}{a}$. Debebit ergo P talis eſſe quantitas, quae $dx-\frac{nxda}{a}$ ſi in id multiplicetur, reddat integrabile. Fit autem $dx-\frac{nxda}{a}$ integrabile, ſi ducatur in $\frac{1}{a^n}$, integrale enim erit $\frac{x}{a^n}$. Quare generaliter erit $P=\frac{1}{a^n}f(\frac{x}{a^n}+c)$. Atque quoties P talem habuerit valorem erit $Q = -\frac{nx}{a^{n+1}} f(\frac{x}{a^n} + c)$. Intelligitur etiam si fuerit $P = X + \frac{1}{a^n} f(\frac{x}{a^n} + c)$, fore quoque generalius $Q = A - \frac{nx}{a^{n+1}} f(\frac{x}{a^n} + c)$. Vbi vt ante et in posterum semper f denotat functionem quamcunque quantitatis sequentis. At A est functio quaecunque ipsius a, et X functio quaecunque ipsius x tantum.

§. 10. Quo igitur dignosci queat, an datus quispiam valor ipsius P in formula inuenta contineatur, poni debebit $a = b^{\frac{1}{n}}$, quo facto videndum est, an Pb fiat functio ipsarum b et x nullius dimensionis, vel an prodeat aggregatum ex functione quadam ipsius x tantum, et tali functione. Quod si deprehendetur, habebit P proprietatem requisitam, eritque Q aequale huic ipsi functioni in $-\frac{nx}{a}$ ductae vna cum functione quacunque ipsius A. In vniuersum autem notandum est quantitatem P functione ipsius x vt X, et Q functione ipsius a vt A posse augeri. Nam si fuerit $dz = P dx + Q da$ aequatio modularis, talis quoque erit aequatio $dz = P dx + X dx + Q da + A da$. Posito enim du loco $dz - X dx - A da$ habebitur $du = P dx + Q da$, quae cum priore prorsus congruit. Hancobrem superfluum foret in posterum ad valorem ipsius Q assumtum, functionem A ipsius a adiicere. Quare hanc apparentem generalitatem negligemus.

§. 11.

§. 11. Sit nunc $Q = PE$ denotante E functionem quamcunque ipsius a. Erit itaque $dz = Pdx + PEda$ et P talis quantitas, quae reddit $dx + Eda$ integrabile. At si $P = 1$ fit integrabile hoc differentiale, integrale enim erit $x + \int Eda$. Quamobrem erit $P = f(x + \int Eda)$ et $Q = Ef(x + \int Eda)$. Siue si ponatur $\int Eda = A$, fueritque $P = f(x + A)$ erit $Q = \frac{dA}{da} f(x + A)$. Num autem datus ipsius P valor in hac formula contineatur, hoc modo est inuestigandum, ponatur $x = y - A$. et quaeratur, an pro A talis accipi queat functio ipsius a et constantium, vt P fiat functio solius y et constantium, quam modulus a non amplius ingrediatur.

§. 12. Ponamus esse $Q = PY$, vbi Y sit functio quaecunque ipsius x modulum a non inuoluens. Quo posito erit $dz = Pdx + PYda$, et P talis functio quae efficiat $dx + Yda$ integrabile. Posito autem $P = \frac{1}{Y}$, fit $z = \int \frac{dx}{Y} + a = X + a$, si ponatur $\int \frac{dx}{Y} = X$. Quamobrem erit $P = \frac{1}{Y} f(X + a)$. Quoties ergo P huiusmodi habuerit valorem erit semper $Q = f(X + a)$.

§. 13 Sit nunc generalius positum $Q = PEY$ erit $dz = Pdx + PEYda$, vbi vt ante E denotat functionem ipsius a, Y vero ipsius x Perspicuum est, si fuerit $P = \frac{1}{Y}$ formulam istam differentialem effici integrabilem, prodiret enim $z = \int \frac{dx}{Y} + \int Eda$, seu $z = X + A$ posito $\int \frac{dx}{Y} = X$. Quamobrem erit $P = \frac{1}{Y} f(X + A) = \frac{dX}{dx} f(X + A)$ hisque in casibus fiet $Q = \frac{dA}{da} f(X + A)$. Comprehenduntur in his formulis etiam logarithmici ipsarum A et X valores, vt si fit $X = lT$ et $A = -lF$, erit $P = \frac{dT}{Tdx} f \frac{T}{F}$ et $Q = \frac{-dF}{Fda} f \frac{T}{F}$.

§. 14.

§. 14. Perſpicitur igitur omnes has formulas locum habere, ſi aequatio propoſita fuerit vel $dz = dX f(X + A)$ vel $dz = \frac{dX}{X} f \frac{X}{A}$. Quoties ergo aequatio propoſita ad has formas poterit reduci, ſubſtituendis X pro functione quacunque ipſius x et A pro functione quacunque ipſius a, toties aequatio modularis poterit exhiberi: erit enim priore caſu $dz = dX f(X + A) + dA f(X + A)$ in poſteriore vero caſu $dz = \frac{dX}{X}, f \frac{X}{A} - \frac{dA}{A} f \frac{X}{A}$. Id quod quidem in his vniuerſalibus exemplis facile perſpicitur, in ſpecialioribus vero multo difficilius. Quocirca maximum poſitum erit ſubſidium in reducendis caſibus particularibus ad has generales formas, id quod, ſi quidem talis reductio fieri poteſt, non difficulter praeſtatur.

§. 15. Si ponatur $Q = PR$, deſignante R functionem quamcunque ipſarum a et x, erit $dz = P dx + PR da$. Ad inueniendum nunc valorem ipſius P, ſumatur formula $dx + R da$, ſeu aequatio $dx - R da = o$ conſideretur, et quaeratur quomodo indeterminatae a et x a ſe inuicem poſſint ſeparari, ſeu quod idem eſt, per quamnam quantitatem $dx + R da$ debeat multiplicari, vt fiat integrabilis. Sit haec quantitas S et ipſius $S dx + RS da$ integrale T erit $P = S f T$. Hisque in caſibus erit $Q = RS f T$. Haec operatio latiſſime patet et omnes caſus complectitur, quibus Q cognitum et a z non pendentem habet valorem.

§. 16. Progrediamur autem vlterius et in eos ipſius P valores inquiramus, in quibus Q non ſolum a P ſed etiam

etiam a $\int P dx$ seu a z pendet. Ponatur igitur primo $Q = \frac{nz}{a} - \frac{Px}{a}$, denotante n numerum quemcunq;. Erit ergo $dz = P dx + \frac{nz da}{a} - \frac{Px da}{a}$, seu $dz - \frac{nz da}{a} = P dx - \frac{Px da}{a}$. Multiplicetur vtrinque per $\frac{1}{a^n}$, quo prodeat haec aequatio $\frac{dz}{a^n} - \frac{nz da}{a^{n+1}} = \frac{P dx}{a^n} - \frac{P x da}{a^{n+1}}$, in qua prius membrum est integrabile. Debebit ergo etiam integrabile esse alterum membrum $\frac{P dx}{a^n} - \frac{P x da}{a^{n+1}}$, ex quo idoneus ipsius P valor est quaerendus. Euenit hoc si $P = a^{n-1}$, erit enim integrale $\frac{x}{a} + c$. Quare erit vniuersaliter $P = a^{n-1} f(\frac{x}{a} + c)$, id quod contingit si $\frac{P}{a^{n-1}}$ est functio ipsarum a et x nullius dimensionis seu P functio ipsarum a et x dimensionum $n-1$. Hoc igitur casu est $nz = Px + Qa$ vt in superiore dissertatione ostendimus.

§. 17. Sit $Q = \frac{nz}{a} + PEY$, vbi E ex a, et Y ex x vtcunque est compositum. Erit itaque $dz - \frac{nz da}{a} = P dx + PEY da$, et $\frac{dz}{a^n} - \frac{nz da}{a^{n+1}} = \frac{P dx}{a^n} + \frac{PEY da}{a^n}$. Quam obrem P ita debet accommodari, vt $\frac{dx + EY da}{a^n}$ per id multiplicatum euadat integrabile. Fit hoc autem si $P = \frac{a^n}{Y}$, quo casu integrale est $\int \frac{dx}{Y} + \int E da$ seu $X + A$ posito $\int \frac{dx}{Y} = X$ et $\int E da = A$. Quare debebit esse $P =$

 $a^n dX$

$\frac{a^n dX}{dx} f(X+A)$, et in his casibus erit $Q = \frac{a^n dA}{da} f(X+A) + \frac{nz}{a}$. Si X et A a logarithmis pendeant prodibit P huius valoris $\frac{a^n dX}{X dx} f \frac{X}{A}$ cui respondebit $Q = \frac{nz}{a} - \frac{a^n dA}{A da} f \frac{X}{A}$.

§. 18. Si ponatur $Q = Fz + PEY$, et F et E functiones sint ipsius a, Y vero ipsius x. Tum erit $dz - Fz da = P dx + PEY da$. Ponatur $\int F da = lB$, ita vt B sit functio ipsius a, et diuidatur per B habebitur $\frac{dz}{B} - \frac{z dB}{B^2} = \frac{P dx}{B} + \frac{PEY da}{B}$. Cum igitur prius membrum sit integrabile, et alterum tale effici debet. Fit hoc si $P = \frac{B}{Y}$ tumque erit integrale $\int \frac{dx}{Y} + \int E da$ seu $X + A$. Quocirca erit ipsius P valor quaesitus $\frac{B dX}{dx} f(X+A)$, Q vero erit $\frac{z dB}{B da} + \frac{B dA}{da} f(X+A)$. Perspicitur quoque si fuerit $P = \frac{B dX}{X dx} f \frac{X}{A}$ fore $Q = \frac{z dB}{B da} - \frac{B dA}{A da} f \frac{X}{A}$.

§. 19. Latissime patebit solutio si ponatur $Q = Fz + PR$ et R fuerit functio ipsarum a et x. Erit enim $dz - Fz da = P dx + PR da$. Posito $\int F da = lB$ diuidatur per B habebitur $\frac{dz}{B} - \frac{z dB}{B^2} = \frac{P}{B}(dx + R da)$. Sit iam S functio efficiens $dx + R da$ integrabile sitque $\int (S dx + SR da) = T$. Quo inuento erit $P = BS fT$ huic respondet $Q = \frac{z dB}{B da} + BRS fT$.

§. 20. Possunt praeterea plures huiusmodi valores ipsius P coniungi, hocque modo multo latius extendi vt vt si ponatur $P = \frac{BdX}{dx} f(X+A) + \frac{BdY}{dx} f(Y+E)$ erit $Q = \frac{zdB}{Bda} + \frac{BdA}{da} f(X+A) + \frac{BdE}{da} f(Y+E)$. Atque simili modo numerus terminorum quantum libuerit, poterit augeri. In his igitur casibus omnibus aequatio modularis differentialis primi casus inuenitur. Quamobrem his expeditis pergo ad eos casus inuestigandos, inquibus aequatio modularis primi gradus differentialis non datur, sed qui tamen ad aequationem modularem differentio-differentialem perducuntur.

§. 21. Si igitur Q neque algebraice per a et x neque per z potest exprimi, ii inuestigandi sunt casus quibus differentiale ipsius Q poterit exhiberi. Est autem $Q = \frac{dz - Pdx}{da}$, ergo $dQ = d\frac{dz - Pdx}{da}$. Quare si differentiale ipsius Q vel per sola a et x vel per haec et Q vel etiam simul per z poterit exprimi, habebitur aequatio modularis, quae erit differentialis secundi gradus. Ostensum autem est superiore dissertatione si ponatur $dP = L\,dx + M\,da$ fore $dQ = M\,dx + N\,da$, ita vt haec differentialia communem literam M inuoluant. Quia autem ex dato P etiam M datur, nil aliud requiritur, nisi vt N determinetur. Quamobrem in eos inquiremus casus, quibus N vel algebraice, vel per Q vel per Q et z exprimi potest. Tum enim habebitur aequatio modularis $M\,dx + N\,da = d.\frac{dz - Pdx}{da}$, posito in N loco Q eius valore $\frac{dz - Pdx}{da}$.

§. 22. Ex praecedentibus satis intelligitur, si N per sola a et x determinetur, fore $M = \frac{dX}{dx} f(X+A)$ et $N = \frac{dA}{da} f(X+A)$, seu $M = V + \frac{dX}{dx} f(X+A)$ et N

 $=$ I

$= I + \frac{dA}{da} f(X + A)$ denotante V functionem quamcunque ipsius x et I ipsius a. Ex dato itaque P quaeratur M, differentiando P posito x constante, et differentiali inuento per da diuidendo. Quo facto quaeratur an valor ipsius M in formula $V + \frac{dX}{dx} f(X + A)$ contineatur. Quod si fuerit compertum et X et A et V definitae, erit $V dx + dX f(X + A) + I da + dA f(X + A) = d. \frac{dz - P dx}{da}$ aequatio modularis desiderata. Notandum est in posterum semper loco $\frac{dX}{dx} f(X + A)$ poni posse aggregatum ex quotuis huiusmodi formulis $\frac{dX}{dx} f(X + A) + \frac{dY}{dx} f(Y + B) +$ etc. At loco $\frac{dA}{da} f(X + A)$ tunc poni debebit $\frac{dA}{da} f(X + A) + \frac{dB}{da} f(Y + B)$ etc. Hoc igitur monito in posterum tantum vnica formula $\frac{dX}{dx} f(X + A)$ eique respondente $\frac{dA}{da} f(X + A)$ vtemur.

§. 23. Pendeat N simul etiam a Q sitque $N = R + DQ$, vbi D sit functio ipsius a, et R functio ipsarum a et x ex conditionibus sequentibus determinanda. Erit igitur $dQ - DQ da = M dx + R da$, sit $D da = \frac{dH}{H}$ et diuidatur vtrinque per H prodibit $\frac{dQ}{H} - \frac{Q dH}{H^2} = \frac{M dx + R da}{H}$. In qua aequatione, cum illud membrum sit integrabile, tale quoque hoc $\frac{M dx + R da}{H}$ est efficiendum. Fiet igitur per praecedentem methodum $M = \frac{H dx}{dx} f(X + A)$ et $R = \frac{H da}{da} f(X + A)$. Quare si in exemplo quopiam proposito ex P reperiatur M talis valoris, erit $N = \frac{H dA}{da} f(X + A) + \frac{dH}{H da^2}(dz - P dx)$ posito $\frac{dH}{H da}$ loco D et $\frac{dz - P dx}{da}$ loco Q. Atque hinc in promptu erit aequatio modularis.

§. 24. Si N non a Q sed a z pendeat, ita vt sit $N = R + Cz$, denotante C functionem ipsius a quamcunque; erit $dQ - Czda = M\,dx + R\,da$. At quia est $dz - Q\,da = P\,dx$, addatur huius multiplum $F\,dz - QF\,da = PF\,dx$, existente F functione ipsius a, quo facto orietur aequatio $dQ - QF\,da + F\,dz - Cz\,da = (M + PF)\,dx + R\,da$. Ponatur $F\,da = \frac{dB}{B}$ et $\frac{C\,da}{F} = \frac{dG}{G}$, ita vt sit $F = \frac{dB}{B\,da}$ et $C = \frac{dB\,dG}{B\cdot G\,da^2}$. Perspicuum itaque est $dQ - QF\,da$ integrabile reddi si diuidatur per B seu multiplicetur per $\frac{1}{B}$, $F\,dz - Cz\,da$ autem fit integrabile, si multiplicetur per $\frac{1}{FG}$. Quare quo idem factor summam horum differentialium reddat integrabilem debebit esse $FG = B$ seu $\frac{G\,dB}{B\,da} = B$, vnde fiet $G = \frac{B^2\,da}{dB}$. Hancobrem alterum quoque membrum per B diuisum est integrabile efficiendum scilicet $\frac{(M+PF)\,dx + R\,da}{B}$. Quocirca facio $R = \frac{B\,dA}{da} f(X + A)$ et $M + PF = \frac{B\,dX}{dx} f(X + A) = M + \frac{P\,dB}{B\,da}$. Inuestigari igitur debet proposito exemplo, an loco A, B et X tales functiones inueniri queant, quae exhibeant formulam $\frac{P\,dX}{dx} f(X + A)$ aequalem ipsi $M + \frac{P\,dB}{B\,da}$. Hisque inuentis erit $N = \frac{B\,dA}{da} f(X + A) + \frac{z\,dB\,dG}{B\,G\,da^2}$ existente $G = \frac{B^2\,da}{dB}$, qui valor in aequatione $M\,dx + N\,da = d.\frac{dz - P\,dx}{da}$ substitutus dabit aequationem modularem.

§. 25. Sit nunc generalissime $N = R + DQ + Cz$, tenentibus R, D et C iisdem quibus ante valoribus. Erit ergo $dQ - DQ\,da - Cz\,da = M\,dx + R\,da$, addatur ad hanc aequatio $F\,dz - FQ\,da = PF\,dx$, quo habeatur $dQ - DQ\,da - FQ\,da + F\,dz - Cz\,da = (M + PF)\,dx +$

 R da

$\mathrm{R}\,da$. Positis autem vt ante $\mathrm{D}\,da = \frac{d\mathrm{H}}{\mathrm{H}}$, $\mathrm{F}\,da = \frac{d\mathrm{B}}{\mathrm{B}}$, et $\frac{\mathrm{C}\,da}{\mathrm{F}} = \frac{d\mathrm{G}}{\mathrm{G}}$, fit $d\mathrm{Q} - \mathrm{DQ}\,da - \mathrm{FQ}\,da$ integrabile si ducatur in $\frac{1}{\mathrm{HB}}$, et $\mathrm{F}\,dz - \mathrm{C}z\,da$ integrabile fit ductum in $\frac{1}{\mathrm{FG}}$. Quare debebit esse $\mathrm{HB} = \mathrm{FG} = \frac{\mathrm{G}\,d\mathrm{B}}{\mathrm{B}\,da}$ et $\mathrm{G} = \frac{\mathrm{B^2H}\,da}{d\mathrm{B}}$. Atque $\frac{(\mathrm{M} + \mathrm{PF})\,dx + \mathrm{R}\,da}{\mathrm{HB}}$ reddendum est integrabile: fiet ergo facto $\mathrm{HB} = \mathrm{E}$, $\mathrm{R} = \frac{\mathrm{E}\,d\mathrm{A}}{da} f(\mathrm{X} + \mathrm{A})$ et $\mathrm{M} + \mathrm{PF} = \frac{\mathrm{E}\,d\mathrm{X}}{dx} f(\mathrm{X} + \mathrm{A})$. Quocirca in casu proposito A, X, E et F si fieri potest ita debent definiri, vt $\frac{\mathrm{E}\,d\mathrm{X}}{dx} f(\mathrm{X} + \mathrm{A})$ aequale fiat ipsi $\mathrm{M} + \mathrm{PF}$. Hocque inuento erit $\mathrm{N} = \frac{\mathrm{E}\,d\mathrm{A}}{da} f(\mathrm{X} + \mathrm{A}) + \frac{d\mathrm{H}}{\mathrm{H}\,da^2}(dz - \mathrm{P}\,dx) + \frac{\mathrm{F}z\,d\mathrm{G}}{\mathrm{G}\,da}$, vnde aequatio modularis reperitur.

§. 26. At si nequidem differentialis secundi gradus aequatio modularis obtineri poterit; ad differentialia tertii gradus erit procedendum. Fiet ergo $\mathrm{N} = \frac{d\left(\frac{dz - \mathrm{P}dx}{da}\right) - \mathrm{M}\,dx}{da}$ atque hinc posito $d\mathrm{N} = s\,dx + t\,da$, erit $s\,dx + t\,da = d\left(\frac{d\left(\frac{dz - \mathrm{P}dx}{da}\right) - \mathrm{M}\,dx}{da}\right)$. Datur autem s ex M, cum sit $s\,da$ differentiale ipsius M, quod prodit, si x ponatur constans. Quamobrem t tantum debebit inuestigari. Sit ergo $t = \mathrm{R} + \mathrm{EN} + \mathrm{DQ} + \mathrm{C}z$, ideoque $d\mathrm{N} - \mathrm{EN}\,da - \mathrm{DQ}\,da - \mathrm{C}z\,da = s\,dx + \mathrm{R}\,da$. Cum sit autem $d\mathrm{Q} - \mathrm{N}\,da = \mathrm{M}\,dx$ et $dz - \mathrm{Q}\,da = \mathrm{P}\,dx$, addantur horum multipla ad illam aequationem, vt prodeat haec aequatio $d\mathrm{N} - \mathrm{EN}\,da - \mathrm{FN}\,da + \mathrm{F}\,d\mathrm{Q} - \mathrm{DQ}\,da - \mathrm{GQ}\,da + \mathrm{G}\,dz - \mathrm{C}z\,da = (s + \mathrm{MF} + \mathrm{PG})\,dx + \mathrm{R}\,da$. Sit $\mathrm{E}\,da + \mathrm{F}\,da = \frac{df}{f}$, $\frac{\mathrm{D}\,da + \mathrm{G}\,da}{\mathrm{F}} = \frac{dg}{g}$ et $\frac{\mathrm{C}\,da}{\mathrm{G}} = \frac{dh}{h}$, fiatque $f = \mathrm{F}g = \mathrm{G}h$.

$= Gh$. Quo facto aequationis inuentae prius membrum fit integrabile diuisum per f; hanc ob rem et $\frac{(s+MF+PG)dx+Rda}{f}$ efficiendum est integrabile. Ponendum igitur est $R = \frac{fdA}{da}$ $f(X+A)$ et $s+MF+PG = \frac{fdX}{da} f(X+A)$. In aequatione ergo proposita, quia s et M ex P dantur, debent F, G et f et X ex hac aequatione determinari. Quo facto sumatur $g = \frac{f}{F}$ et $h = \frac{f}{G}$, et $C = \frac{Gdh}{hda}$, et $D = \frac{Fdg}{gda} - G$ et $E = \frac{df}{fda} - F$. Atque ex his cognita erit aequatio $t = R + EN + DQ + Cz$, ex qua aequatio modularis facile conflatur. Simili modo ex his intelligitur quomodo pro altioribus differentialium gradibus operatio debeat institui, vt ad aequationes modulares perueniatur.

§. 27. In compendium nunc, quae hactenus tradidimus, redigamus tum quo facilius quaeuis aequatio proposita reduci queat, tum quo processus ad cuiusque gradus differentialia clarius perspiciatur. Proposita igitur aequatione $dz = Pdx$, ponatur x constans et a tantum variabile sitque $dP = Mda$, $dM = pda$, $dp = rda$ etc. Sit porro $Q = \frac{dz - Pdx}{da}$, $N = \frac{dQ - Mdx}{da}$, $q = \frac{dN - pdx}{da}$ et $s = \frac{dq - rdx}{da}$ etc. vbi dQ, dN, et dq, etc. sunt differentialia ipsorum Q, N et q, quae ex valoribus $\frac{dz - Pdx}{da}$, $\frac{dQ - Mdx}{da}$ et $\frac{dq - rdx}{da}$, inueniuntur positis a, x et z variabilibus. Hanc igitur ob rem cognitae erunt M, p, r etc. ex solo P, ex his vero habebuntur Q, N, q etc. Sint praeterea A, B, C, D, E, F etc. functiones ipsius a et constantium, et X, Y etc. functiones ipsius x non inuoluentes a.

§. 28. His praemissis si fuerit P talis functio ipsius x et a, vt BP comprehendatur in hac forma $\frac{dX}{dx}$f(X + A) seu plurium huiusmodi formularum aggregato, semper dari poterit aequatio modularis differentialis primi gradus. Namque erit $P\,dA\,dx = z\frac{dB\,dX}{B} + Q\,da\,dX$ seu $BP\,dA\,dx = z\,dB\,dX + BQ\,da\,dX$. Quae aequatio ob datum Q est modularis respondens aequationi propositae.

§. 29. Deinde si P talis sit functio ipsarum a et x vt BP + CM aequalis fieri possit $\frac{dX}{dx}$f(X + A) seu quotcunque huiusmodi formularum aggregato, aequatio modularis ad differentialia secundi gradus ascendet. Erit enim $BP\,dA\,dx + CM\,dA\,dx = z\,dB\,dX + BQ\,da\,dX + Q\,dC\,dX + CN\,da\,dX$. Quae est aequatio modularis quaesita, et inuoluit differentialia secundi gradus, quia eam littera N ingreditur, quae per dQ ideoque per ddz, ddx et dda determinatur.

§. 30. At si fuerit $BP + CM + Dp$ aequalis huic formulae $\frac{dX}{dx}$f(X + A) vel aggregato quotcunquae huiusmodi formularum; aequatio modularis erit differentialis tertii gradus, prodibit enim ista aequatio $BP\,dA\,dx + CM\,dA\,dx + Dp\,dA\,dx = z\,dB\,dX + BQ\,da\,dX + Q\,dC\,dX + CN\,da\,dX + N\,dD\,dX + Dq\,da\,dX$. Quemadmodum ex ante traditis colligere licet, si modo quantitates ab a tantum pendentes ad has formulas accommodantur.

§. 31. Simili modo ad altiora differentialia progressus facile absoluitur. Nam si $BP + CM + Dp + Er$

$+Er$ aequetur formulae $\frac{dX}{dx}f(X+A)$ vel talium plurium formularum aggregato, orietur aequatio modularis ista $BPdAdx + CMdAdx + DpdAdx + ErdA dx = zdBdX + BQdadX + QdCdX + CNdadX + NdDdX + DqdadX + qdEdX + EsdadX$ quae erit differentialis quarti gradus. Atque hoc modo quousque libuerit hae operationes facile continuantur ex sola allatarum inspectione.

§. 32. His autem omnibus perspectis maxima tamen difficultas saepenumero posita erit in dignoscenda functione P, an in his expositis generibus contineatur et in quonam genere. Etiam si enim generales ipsius P valores, qui ex assumtis formulis obtinentur nihil difficultatis in se habere videantur, tamen exemplis particularibus propositis accommodatio saepissime erit difficillima. Cuius rei ratio nequaquam methodo traditae est tribuenda, sed imperfectae functionum cognitioni, quae adhuc habetur. Quamobrem non solum in hoc negotio, sed in plurimis etiam aliis casibus maxime vtile foret, si functionum doctrina magis perficeretur, et excoleretur.

§. 33. Quantum quidem mihi hac de re meditari licuit, eximium subsidium inueni, si P statim ad huiusmodi formam $\frac{dX}{ac}f(X+A)$ vel huiusmodi formularum aggregatum reducatur, id quod sequenti modo facillime praestatur, Prima aequatio proposita non constituatur inter z et x sed inter z et y, ita vt aequatio ad modularem perducenda sit $dz = Tdy$, existente T

 functione

functione ipsius y et moduli a. Tum accipiatur pro x talis functio ipsarum a et y, quae transmutet T in functionem ipsarum a et x contentam in formula f(X + A), vel pluribus huic similibus, earumque multiplis, in quibus X est functio ipsius x tantum, et A ipsius a. Hoc igitur facto prodeat aequatio $dz = S\,dx\,f(X + A)$ vbi S sit quantitas tam simplex quam fieri potest. Quare P erit $S f(X + A)$ ideoque cum M, p etc. coniuncta facilius cum generalibus formulis comparatur. Inuenta autem hoc modo aequatione modulari, valor ipsius x in a et y assumtus, vbique loco x, loco dx autem differentiale huius valoris positis a et y variabilibus substituatur. Quo facto habebitur aequatio modularis inter a, y et z, quae quaerebatur.

§. 34. Ad pleniorem quidem methodi hactenus traditae cognitionem maximam lucem afferrent exempla et problemata, quorum solutio istam methodum requirit. Sed quia ipsorum problematum dignitas peculiarem tractationem postulat, in aliud tempus, ne hoc tempore nimis sim longus, eam differo.

CLAS-

CLASSIS SECVNDA

CONTINENS

PHYSICA.

CIRCA
STRVCTVRAM THYMI,
NOVAE OBSERVATIONES.

AVCTORE
Ioh. Georg. Du Vernoi.

§. 1.

VT in Veri inuentione adiuuemur ac quae doctrinae Anatomicae fundamenta sunt iacta minus ignoremus, eo primum annitendum est, vt quicquid seu nostra seu prisca aetate in Maiorum et iuniorum exemplaribus quae de Re Anatomica sunt conscripta, ab aliis est pertractatum et illustratum, animo probe impressum teneamus et eius memoriam diligentissime seruemus. Nam sine istiusmodi fundamentis, in cuiuslibet partis disquisitione, facile est, vt mihi aut aliis qui inuenta ignorant, quicquid oculis obuersabitur, nouum spectaculum esse credatur. Anatome vero, inquis, hac aetate ad eiusmodi lapsus minus est propensa. Ita fateor existimandum videretur, si aliter non esset compertum, eo argumento et specimine, quod iam tradere animus est.

§ 2. Thymus vulgo *Lactes*, vt apud nostrae aetatis Anatomicos est delineatus, tametsi neque fabrica neque vsus ea delineatione sit satis illustratus, cuius videlicet historia, vt hodie traditur, haud plura continet quam nomen, situm, extensionem, figuram, connexionem, vasa communia, dissensiones et coniecturas parum vtiles de ductu excretorio, humore, etc. non obstat, quin ea quantum ad cognitionem inuentorum et obseruationum ab initio Anatomes vsque in hoc tempus institutarum spectat, omni ex parte absoluta et perfecta meo iudicio censeretur. Ea profecto ratione, ante me, vt credebam, structura interior Thymi penitus delitescebat: Quod tamen iudicium, re melius perspecta et pro studio veritatis improbaui, postquam apud *Thomam Bartholinum* primum, hinc apud *Petrum Dionysium* praefatam structuram iam indicatam, a Iunioribus vero omissam fuisse haud sine admiratione cognouerim *Thomas Bartholinus* Anatom. quintum renov. Lib. II. Cap. VI. *Cauitatem in medio Thymi* Hafniae 1652. manifesto a se obseruatam esse primus testatur: Quae, inquit, etiam postea visa *Graesio* humore limpido repleta. *Petro Dionysio* obseruante, *Anatomie de l'homme troisieme edition, sixieme demonstration des parties de la Poitrine. La Fagoue est une Glande conglomerée . . . . . on remarque quelle a dans sa partie moyenne une cavité qui est pleine de Lymphe.*

§. 3. Si primum *Thymi* exteriorem conformationem contemplemur, Is triplici glandula in foetu vt *Thomas Bartholinus* l. c. indicat, vel melius tripartito in omni aetate distinguitur. Iudicii enim ratio, cur is vt *tri-*

triplex glandula creditur, eſt adhuc, opinor, nimis incerta, vt aliquid tuto definire liceat. *Lobos* appellare eas diuiſiones magis rationi conſonum eſt. 2. Quam *Verbeyenius*, vt rem apparentem tradit, videlicet praefatorum Loborum ſubdiuiſionem in minores lobulos, eſt profecto realis et ſenſui manifeſta compoſitio e plurimis lobulis eiusdem figurae, videlicet oblongae, quam poſt detractum commune ſeu exterius inuolucrum attingere procliue eſt, ſi quae praefatis lobulis intercepta ſunt interſtitia ſeu membranas tenuiſſimas pellucidas eos disiungentes animaduertendo, hinc facta leui inciſione diſtrahendo, in aqua limpida perluſtraueris; Qua ratione totam ſuperficiem externam Thymi, parallelis et a ſe inuicem disiunctis lobulis coagmentatam eſſe conſpexi.

§. 4. Porro praefata interſtitia ſingula ramis vaſculoſis per ea excurrentibus ſunt occupata, vnde ad lobulos incredibilis copia minimorum ramulorum propagatur. Quam vaſorum hic luxuriantium multitudinem et ordinem haud ſine magna admiratione ſum contemplatus. His, vt eſt viſum, accedit ſubſtantia quaedam alba lobulorum parietibus interpoſita: Facile enim eſt vnum colorem ab altero internoſcere, quia color lobulorum eſt opacus ad rubedinem vergens. An ſint nuda, an potius pinguedine permixta vaſa? in dubio relinquitur. Caeterum memini, Thymum e Cadauere optimo exſectum, hinc vaſi ſuper ignem impoſito iniectum, vt pinguedinem, calore ſolutum et liquefactum fuiſſe.

§. 5.

§. 5. Haud vna extenſionis ratio in praefatis lobulis eſt obſeruata. Sunt qui 9. lin. longitudinem aequant, ſed latitudine parum a ſe inuicem diſcrepant, vid. 3. lin. quos poſtremo propria membrana tenuiſſima pellucida obuolutos eſſe haud praetermittendum eſt.

§. 6. Dixi praefatis lobulis et interſtitiis totam ſuperficiem externam loborum coagmentatam eſſe, docente primum *Verheyenio*. Num vero tota moles Thymi ex omni parte iſtiusmodi lobulorum ſit compages? numque corpus denſum et vacui expers ſit nec ne? id quidem hactenus fuit incompertum: Nam praefata moles a Veteribus vt *corpus Glandoſum*, a Iunioribus vt Glandula conglomerata, et quod hinc conſequitur, vt corpus haud ſinuoſum ſed ſolidum, eſt propoſita: Quam ſtructuram interiorem Thymi, ſi obſeruationibus noſtris minus ſum deceptus, haud in ea particularum ratione, ſed in re longe diuerſa nuper a me inuenta, poſitam eſſe didici: Cuius tamen inuentionis laudem, ante me *Bartholino*, et poſt illum, *Dionyſio* debitam eſſe, ſupra lubens teſtatus ſum.

§. 7. Itaque Thymus interius ampla cauitate ſeu ſinu pollicem fere admittente eſt inſtructus, vt obſeruationes noſtrae primum inſtitutae fidem faciunt. Hunc ſupra memorata involucra videlicet membrana extima, hinc lobulorum ſubſtantia carnis ſpeciem aemulans exterius ambiunt eumque terminant. Poſtquam praefata ſubſtantia ad ambitum cauitatis peruenit, tametſi vlterius ad extremum Thymi prolongetur, haud iſtiusmodi ſinu eſt inſtructa, ſed compreſſa, et cauitatis expers eſt. Caeterum,

rum, quando ſemel ac iterum inſignem cauitatem in Thymo conſpexi, propterea haud exiſtimandum eſt, in omnibus et ſingulis cadaueribus eam inueniri: quam ſi contemplari ſemper procliue eſſet, Eius inuentio vt videtur haud ad hoc tempus dilata fuiſſet.

§. 8. Quam difficultatem profecto haud nouam eſſe, iam ſatis ex Anatome eſt compertum, imprimis in partium cauitatibus, quae mutationibus frequenter ſunt obnoxiae; ſed, inquis, ſi Thymo cauitas naturaliter eſt conceſſa, eius ad minimum ſubobſcura veſtigia adhuc internoſcere procliue erit: Quod iudicium, inter alia Glandulae Renales *Euſtachii* confirmant; Sinum enim peramplum, quo eas Natura indubie inſtruxit, interdum prima inſpectione inuenies: Nonnunquam deliteſcit et fere obliteratur, referens videlicet, corpus denſum et ſolidum cauitatisque expers, quod tamen exercitatum Anatomicum minus vetat, quin impreſſiones ſubobſcuras obliterati ſinus nonſolum perſpiciat, verum etiam diſtractione parietum eundem reſtituat.

§. 9. Itaque parietes Thymi leniter diſtrahendo, manifeſto obſeruaui, illam quoque ſubſtantiam, quam cauitatis expertem et compreſſam ſupra credebam, paulatim dehiſcere, nihilque aliud eſſe quam ſinum iam obliteratum, Cauitatisque ſupra memoratae continuationem. Porro in aliis Cadaueribus, quorum Thymus iſtiusmodi manifeſta cauitate haud erat inſtructus, primum difficile erat veſtigium ſinus internoſcere; Spatio tamen aliquot dierum, laxata eius compage, exiguum interſtitium obſeruabam, cuius diſtractione, coepi manifeſto animaduertere, iſtiusmodi verum et regulare interſtitium, totum tractum Thymi longe lateque penetrare, idque nihil aliud eſſe quam ſinum contractum et iam obliteratum, vt e quarumdam partium Anatome alias compertum eſt.

§. 10. A Lobulis praefatam cauitatem circumambientibus, efformata ſunt innumera ſpatiola in toto ambitu cauitatis conſpicua, colore opaco ſubrubro notata ac interſtitiis candido corpore repletis interſtincta, vt vel prima inſpectione intellexi. E praefati corporis, quo interior ſuperficies magna parte eſt contexta, lucente albedine, et arearum diuerſae magnitudinis ſubrubente colore et multitudine, ſpecies corporis maculati ſeu cancellati efficitur. An e nudis vaſculis, vel permixto adipe, album corpus ſit contextum nec ne? in re tam difficili et obnubilata definire minus procliue eſt. Vaſcula, quantum aſſequi potui, ſub velo praetenui poſita, canaliculorum fere vniformium, breuium, ½ lin. latorum, ac ſeſe mutuo inoſculantium congeriem, hinc arearum ſeu cancellorum irregularis figurae et magnitudinis incredibilem numerum efformant. Quod praefato operi eſt ſuperextenſum tenuiſſimum velum, in eo ſolertiae et opificii admirabilis ſpecimen ſum contemplatus: videlicet, haud membranam ſeu telam, ſed genus vermicularium et exiliſſimorum canaliculorum, totam interiorem ſuperficiem vt filamenta ſubtiliſſima perreptantium: Nam ſuperaffuſa aqua, depreſſi prius et complicati canaliculi, vi aquae eos explicante et eleuante, innatare viſi ſunt: Quam ſtructuram ante ſingulas areas admirabile reticulum efformantem, tametſi vltra areas ſuper interſtitia ſit propagata, propter eiusdem

eiusdem insignem albedinem, quae interstitiis quoque est concessa, in his minus facile, quam in illis internoscere potui.

§. 11. Istiusmodi areis reticulatis, nonnulla corpuscula esse appensa, de quibus iam dicendum est, anim aduertisse mihi visus sum. Ad quinarium, earum arearum numerus erat limitatus: Caeterae enim omnes areae quas diu multumque contemplabar, sensu indice, praefatis corporibus carebant. Quum stylo leuiter admoto, oculisque intentis, istiusmodi corpusculorum indolem inuestigarem, e medio ac super vnam quamque praefatarum quinque arearum quae a se inuicem longe distabant, vnum corpusculum egredi eique implantari, et styli agitationi tam facile obsequi, vt hinc inde eius motum obseruarem, plane ac indubie perspexi; Et quum eandem agitationem saepe instituissem, cognoui, haud sub areae reticulo, sed supra et extra reticulum, corpusculum positum esse, hinc in cauitate quam supra descripsi libere fluctuare Ei, vt porro animaduerti, incredibilis tenuitatis filamentum erat annexum, quod altero extremo in areae fundo penetrare indeque ortum trahere videbatur, sicuti in singulis constanter sum contemplatus.

Caeterum, tam exili mole ea corpuscula constant, vt tametsi in cauitate fluctuent, in ea incidere minus procliue sit, quorum proptera inuentionem, cuidam colori eis proprio debitam esse fatendum est. Nam, quia carnis colorem aemulantur, ex aduerso interstitia vt supra indicaui, albo colore sunt praedita, ea ratione multum diuque peruestigando, rem felicissime sum assecutus. Porro oua-

 lem

lem figuram, et laeuigatam ſuperficiem iisdem corporibus conceſſam eſſe iam ſupra obſeruaui.

§. 12. Ductu filamenti, quod e profundo areae emergere, et cum corpuſculo nexum habere dixi, interiorem conditionem et compoſitionem lobulorum, fundum areae occupantium, attingere conatus ſum. Vtcunque ea de re ſit, coloris ſimilitudine, tam Lobuli, quam Corpuſcula praefata, plane conuenire viſa ſunt, videlicet ſubrubente carneo colore, vt vel prima inſpectione intellexi. Quos lobulos, et praefata corpuſcula, ſi haud plane deceptus ſum, vnum idemque corpus eſſe, iam absque haeſitatione compertum habeo. Quae enim corpuſcula intra cauitatem Thymi fluctuare prius obſeruaui, ea ſunt diſtractae et quaſi auulſae, et filamento ſupra memorato lobulis annexae, hinc ſupra areas eminentes particulae; Lobuli autem eaedem ſunt particulae, ſed profundius ſitae, in vnamque aream collectae, vt in plexibus glandulofis tenuium inteſtinorum. Num, cum inteſtinorum craſſorum ſolitariis glandulis, altera corpuſcula quae a lobulis ſunt auulſa, recte conferantur nec ne? Alii viderint. Poſtremo haud pluribus, quam vno plano praefatorum corpuſculorum, vt clare perſpexi, ſinguli lobuli erant compoſiti, quod planum vero in nonnullis latius et longius, in aliis contractius et minus oblongum apparebat: In illius plani tam interna quam externa facie, exiliſſima corpuſcula veſiculis ſeu globulis ſimilia, proptereaque veſicularem ſuperficiem conſpexi, vt duo videlicet haemiſphaeriola vtrinque protuberantia.

DE

DE ASPECTV ET CONFORMATIONE VARIA VASORVM SANGVINEORVM IN DIVERSIS PARTICVLIS VENTRICVLI, Obſeruationes.

AVCTORE
Ioh. Georg. Du Vernoi.

§. 1.

NOn ſolum in functionis Nobiliſſimae Machinae, in qua Alimenta intra breve temporis ſpatium, in ſomno aeque ac extra ſomnum, in ſuccum alibilem conuertuntur; verum quoque in eiusdem deprauationum iudicio, ſumma diligentia in hoc inquirendum eſt, num quando in defunctis rubicunda facies ventriculi vt plurimum eſt extincta, eiusdemque fibrae et membranae ſunt albae et pallidae, id propterea Vaſa ſanguinea hic minus abundare, vere indicet nec ne? Porro eo ſtudio et diligentia ea de re eſt tractandum, vt nonſolum generaliter caudices vaſorum, quam quidem cognitionem generalem haud improbo, ſed eam praecipue indolem aſſequamur, quam vaſa progrediendo acquirunt, ſuper vnum quodque planum tunicarum, iuxta ordinem et ſeriem, qua in fabrica ventriculi ſeſe inuicem excipiunt.

§. 2. Duplicem vasculosum contextum in ventriculo dari *Thomas Willis* primus est Auctor. *Vasa sanguifera* inquit *quamplurima ad ventriculum pertingunt, quod plane cernitur, si* Hominis, *canis, aut porci stomachus, vasis cochacis primo ligatis et resectis eximatur, et orificiis constrictis infletur, tunc enim iucundissimo spectaculo videbis, minores venarum et arteriarum truncos partim ventriculi summitati et partim fundo eius insertos, qui mox in ramos minores et deinde in ramusculos et propagines minimas diuisi sibi inuicem occurrunt et quaquauersus expansi totum stomachi ambitum perreptant et veluti coma fruticosa obducunt. Haec vasa sanguinea introrsum tendentia, in tunica intima neruosa terminantur, cuius interiorem superficiem prae densitate punctorum, in quo vasa desinunt, rubore inficiunt et quasi cruentant. Hoc manifesto liquet, si quando post stomachi immersionem in aqua feruenti, tunica villosa separetur, tunc enim tunica neruea ob densissimas vasorum terminationes quodam quasi reticulo sanguineo obtecta videbitur.*

§. 3. Possem hic Cl. Virorum de istiusmodi vasis ventriculi obseruationes in medium afferre, videlicet de ratione vasorum in exteriore et interiore superficie, vti dictum est. Verum, maiori Rei Anatomicae emolumento, praestat rationem ostendere, qua inter duos praefatos terminos, et quod hinc consequitur, in singulis tunicis circulariter ventriculum ambientibus, tam multiplicationem incredibilem vasorum, quam diuersitatem admirabilem contextuum vascularium Natura sit molita. Nam, si obseruationibus nostris haud plane sumus decepti, alia aliaque textura,

textura, alius reptatus, aliae ramificationes vaſorum inter ſeſe diſcrepantes, in conſpectum veniunt. Poſtremo, circa ordinis ſeriei que rationem, inter praefatos contextus vaſculares obſeruaſſe mihi viſus ſum, vt contextus minus ſubtilis vel craſſior, a ſubtiliore, ſubtilior a craſſiore vice mutua exciperetur.

§. 4. Ac primo, in extima tunica, Caudices vaſorum in ſumma et ima regione curtum inſtitutae, ac ſuo tumore extus prominere totumque ventriculum inſtar coronae cingere obſeruantur. A praefatis caudicibus, magno numero tum ſuper anteriorem quam ſuper poſteriorem faciem memoratae tunicae, vaſa craſſiora vsque ad medium, fluminum more decurrentia propagantur, quae poſtquam eo peruenerunt, arbuſculi breuioris formam aſſumunt; Hinc ſeries duplex iſtiusmodi arbuſculorum, ſuper vtramque faciem ventriculi efformatur, altera vertice deorſum, altera ſurſum ſpectante, quorum extrema, ultra praefatum terminum haud progredientia, mutuis inoſculationibus copulantur.

§. 5. Sub memorato contextu, Nouum et plane diuerſum opificium vaſorum, in tunica celluloſa apparet, vt in tunicis adipoſis C. H. Haud enim ductus ſeu canales ampli, longe lateque excurrentes hic ſunt poſiti, verum quanta eſt cellularum congeries et ſubtilitas, tanta eſt multiplicatio et tenuitas vaſculorum minimorum illas perreptantium, quae in modum ſubtiliſſimi et admirabili artificio elaborati reticuli inuicem ſunt nexa et concatenata.

§. 6.

§. 6. Iam ſuper proxime ſequentem tunicam carnoſam, duplici ſerie fibrarum compoſitam, iterum vaſa alia lege incedere, conſpectumque plane mutare ſunt viſa: Etenim, in longum et latum, vaſa breuia, rectilinea, ramoſa, regulari ſerie, et certa diſtantia, vt ſurculi arboris breuiores truncati ac decuſſati, et quod hinc conſequitur, formam crucis mentientes, ſunt poſita, iuxta duplicem ſeriem fibrarum, quarum directionem ſequuntur: Vnde prima inſpectione, haud vt ſurculi ſingulares et cruciati, verum vt vas geminum decuſſatum viſa ſunt. Poſtremo, apices ſeu extrema praefatorum ſurculorum ſubito attenuata, minimis propaginibus terminantur, quae cum ſurculis vtrinque adſitis vltimo copulantur.

§. 7. Quarta ſubſequens Tunica ſub Muſculari ſita, vt multiplicatione, ſic ſubtilitate et fabrica vaſculorum minimorum eius cellulas perreptantium, eſt verum exemplar ſecundae ſupra deſcriptae: Nam ambae ſunt adipoſae, vt in optimis Cadaueribus eſt perſpicuum: Vnde hic, eius ſolum modo cum priore ſimilitudinem absque inutili repetitione annotaſſe ſufficit.

§. 8. Detracto eo velo adipoſo ſubtiliſſimo, aliud admirabile opificium vaſorum aduertendum eſt, a quo totum ventrtculum ex omni parte obtectum eſſe manifeſto conſpeximus. Id quatuor antecedentibus, cum fabrica tum amplitudine vaſorum, nequaquam reſpondet. Sunt videlicet 1) ductus breuiores valde conſpicui, ampla eaque conſtanti diametro inſtructi, hinc arcuati, et vtroque extremo cum eiusdem generis ductibus inoſculati. vid. *Comment. Acad. Scient. Tom. IV.* 2) Per iſtiusmodi compagem,

pagem, et fabricam, opus regulare efficitur, ex quo innumera spatiola seu foueae, vt alueoli, efformantur. Idcirco, vtrumque est admiratione dignum, videlicet, incrementum subitaneum seu amplitudo vasorum eo in tractu ventriculi, porro eorundem fabrica cancellatum opus referens, proxime attingens intimam seu postremam tunicam cauum ventriculi efformantem, de qua iam postremo agendum est.

§. 9. Vt hactenus memoratae tunicae ventriculi, nihil aliud fere sunt quam congeries vasculorum cum intermixtis partim cellulis adiposis, partim fibris carneo tendineis; sic interiorem vulgo nerueam tunicam, *Willisio* et *Rhuyschio* primum obseruante, tam in C. H., quam in nonnullis quadrupedibus, aeque insigni copia vasorum Natura instruxit: Quicquid enim neruorum his intertextum est, haud profecto nomine Nerueae tunicae est dignum, de quibus vid. *Comment. Acad. Imper. Tom. IV.* Conditio vel aspectus vasorum super hancce tunicam sic oblatus est. Vt in praecedente contextu, vasa rariora grandioraque, et ramusculorum capillarium ad sensum expertia, ex aduerso super hanc, mirum in modum sunt extenuata, multiplicata et diuisa, ac tanta solertia mutuo implicata, vt vel toto Corpore Humano, ullum opificium hactenus exstare dubites, quod Diuini Artificis sapientiam magis demonstret.

CONTINVATIO OBSERVATIONVM ANATOMICARVM.

AVCTORE
Ioh. Georg. Du Vernoi.

Obſ. 1.

AD Oſſis Hyoidis, quod in cantu, loquela, et deglutitione, haud momenti expers eſt, perfectiorem notitiam, operae pretium eſt, inquirere, num, vt hic eſt obſeruatum, ambo eius Cornua ſint inaequalia? num eo in caſu, id e conſtanti Naturae inſtituto, an potius ex Naturae diuerſa operandi ratione de qua vid. *Aduerſ. Anat.* 1. *Animadu.* 28. *et Aduerſ.* 2. *Anim.* 29. Species profecto diſparitatis Cornuum Oſſis Hyoidis, in variis cadaueribus, haud ſolum ſuper diu aſſeruata et exſiccata, ſed etiam recentia et cruda, leniore tamen in his diſcrimine, manifeſto eſt obſeruata: conſtanter enim, eodem latere, videlicet dextro, cornu breuius et contractius, ſiniſtrum longius eſt viſum.

Obſ. 2. De Ductu inſigni Appendicis Glanduloſae ſuper Thyroidem cartilaginem poſitae, hic rarum exemplum eſt oblatum. Is erat ita plenus et diſtentus, vt craſſitiem digiti exaequaret. Liquor albumen oui referebat. Caeterum, vtcunque ea de re ſit, tametſi ductus ac praefatus ſatus liquor comprimeretur, aerque vi impelleretur, tam ſupra quam infra, cauitas nulla ad ſenſum apparebat.

Obſ. 3. Si, iuxta alias obſeruationes, in praefatam appendicem, inflicto leui vulnere, aer per tubulum fortius adigitur, canalis haud raro apparet, vltra fiſſuram Thyroidis cartilaginis ad concauam baſin oſſis Hyoidis, et, vt frequenter eſt obſeruatum, ſiniſtrorſum tendens. Qua obſeruatione, forte in ſuſpicionem cuiusdam ductus, multi ſunt adducti. Nunc aliter, vt videtur, de praefatae appendicis natura eſt iudicandum: nam in duobus Cadaueribus, fibrarum carnearum planum, vt continuata iſthmi ſubſtantia dextrorſum produci videbatur. Hae fibrae ab vno extremo ad alterum parallelae, faſciculum inaequalem, qui ad baſin Oſſis Hyoidis oblique ſcandens, ibi in tendinem terminari viſus eſt, producebant. Is faſciculus, muſculo thyrohyoideo ſic erat connexus, vt eius pars videretur. In quadam muliere, vnica, tenuis, et carnea fibra, nullumque aliud veſtigium appendicis apparebat.

Obſ. 4. Cui vſui praefata Appendix ſit comparata? Cur ſiniſtrorſum, ad latus muſculi thyrohyoidei, ſuper fisſuram Thyroidis aſcendens, in caudam tendineam deſinit, quae in baſin concauam Oſſis Hyoidis implantari viſa eſt? ea de re forſan aliquid coniiciendi facultas erit, ſi cornuum Oſſis Hyoidis in prima Obſeruatione memorata conditio, ſpecialioribus Obſeruationibus confirmata eſſet: Quibus, ſi, vt alias eſt traditum, inter Os hyoidis, et glandulam thyroideam nexus, isque in ſiniſtra colli parte, et quod hinc conſequitur, ad ſiniſtrum cornu oſſis hyoidis, rarius dextrorſum ſit poſitus, minus eſſet alienum ſuſpicari, num ad vſum praefatae glandulae thyroideae, exceſſus longitudinis cornu ſiniſtri Oſſis Hyoidis, ſpectet nec ne? num forte in vocis, vel loquelae, vel deglutitionis actibus, molem corporis glandulosi ſuſtentet, aut Laryngis aſcenſum promoueat etc. Nunc de Larynge nonnulla.

Obſ 5. Petiolum Epiglottidis, quod interius e Thyroidis media fere parte ortum trahit, vt proceſſus immediatus, ſed mobilis, absque ligamento enaſci viſum eſt. Figura tereti, qua eſt ab initio, per 4. fere linearum longitudinem, vt et ſoliditate et craſſitie, per medium Epiglottidis, eſt extenſum, qua ſoliditate et duritie ſouearumque defectu, a reliqua ſubſtantia Epiglottidis manifeſto diſtinguitur, ac propterea *acuta ac prominens interior pars Epiglottidis*, *quae veluti in oblongam aciem componitur*, recte a Celeb. *Santorino* eſt appellatum: cuius deſcriptioni adhuc adiiciendum eſt, quod nonſolum interiore, verum etiam exteriore parte, linguam reſpiciente, praefata acies promineat, et figura ſinuata ſeu flexuoſa inſtructa ſit. Vtroque eius latere, ſciſſurae profundae ſemicirculares ſunt conſpicuae, quibus ſubſtantia Epiglottidis, pari numero ſciſſurarum ſemicircularium accreta eſt, vnde in vtraque Epiglottidis facie, foveae ſeu foramina a Celeb. *Morgagni* primum annotata efformantur. Ea enim Epiglottidis ſubſtantia, exiguarum cartilaginum, vt totidem fragmenta, intermedia quadam materia disiunctarum congeries eſt, quarum nonnullae oblongae, aliae orbicu-

orbiculares ſunt viſae, omnes vero ſinuatae, quibus efficitur, vt media ſubſtantia foueis, vt iam dictum eſt, excauata, eius vero ambitus exterior, inciſus et laciniatus appareat.

Obſ. 6. Quam foueis interiectam, minimasque cellulas inuicem copulantem materiam indicauimus, ea, vt obſeruationes noſtrae fidem faciunt, primum exterius, in cauo Thyroidis ſuper petioli radicem, paulo largius et craſſius eſt aggeſta, vnde pars globoſa *Verheyenii* efficitur, hinc ſuper vtramque Epiglottidis faciem diffuſa et propagata intra cellulas ſeſe recipit, pars denique tenuiſſima cum minimorum vaſculorum ſanguineorum inſigni copia, ſpeciem Reticuli efformare viſa eſt: Quam materiam profecto, quoniam ab altera ſubſtantia Glanduloſa, de qua Celeb. *Morgagnius*, longe discrepat, ac vt videtur, pinguedini potius reſpondet, quam porro circa iſtiusmodi cartilagineas partes haud omiſſam fuiſſe conſtat, cur animaduerſione indignam hic cenſeremus? Vtrum, communi humore e glandulis ſtillante, duris aeque ac mollibus, interioribus et exterioribus partibus Laryngis, an potius, materia propria iſtiusmodi partium conditioni accommodata, cartilaginibus Laryngis, Natura ſapienter proſpexit, vt Illuſtr. *Morgagnius*, poſt diligentem indaginem memoratae Laryngis, primum ſuſpicatus eſt? quod iudicium tamen Doctiſſimo Viro minus poſtea placuit, propter quaepiam quae explicare haud neceſſe Ei viſum eſt: Propterea, iudicio noſtro haud fidentes, ad illuſtrationem fabricae interioris Cartilaginum praefatae Laryngis, a Celeb. Viris iam detectae, nonnulla adhuc, duce Anatome ſunt exponenda, vnde Naturae conſilium facile intelligitur.

Obſ. 7. Vel prima inſpectione, detracto involucro membranaceo externo, Laryngis cartilagines, vt prius ſuper Epiglottidem eſt obſeruatum, reticulari fabrica minimorum vaſculorum rubentium, cum admixta tenui adipoſa materia obduci, intelligitur. Si porro Arytaenoidum extrema quorum vtrumque bicorne nobis eſt viſum, per medium iuxta longitudinem diuidas, tametſi cellulae ob exilitatem ſint inconſpicuae, quoddam coloris et ſubſtantiae diſcrimen in medio, vt diploe, manifeſto apparet. Corpus ſeu baſis, annotante primum Celeb. *Morgagnio*, celluloſa, liquore medullari turget: nam iuxta noſtras obſeruationes, duo hic ſunt animaduertenda interſtitia ſeu cauernae, ſubſtantiae ſpongioſae oſſium ſimiles, et ſucci medullaris flaueſcentis quasdam particulas continentes, vna in baſi, eaque amplior, altera parua orbicularis, paulo altius verſus ſuperficiem lunatam poſita. Caeterum, inter vtramque concauitatem nulla communicatio, ſenſu iudice, eſt inſtituta, ſi quosdam porulos excipias, cuiusmodi alias in cartilaginum ſubſtantia ſunt conſpicui.

Obſ. 8. In Cricoide cartilagine, nonſolum ea parte, qua ſinui Arytaenoidis inarticulatur, parte videlicet poſtica, verum etiam verſus anteriora, inſignis et circularis Zona cauernoſa, quae poſterius ad transuerſi digiti latitudinem eſt ampla, in cauo et medio thyroidis contractior, manifeſto apparet. In ea porro, vt in cellulis maiorum oſſium, copiam medullaris olei collectam eſſe perſpicuum eſt, vt ex preſſione intelligitur.

Obſ. 9.

Obſ. 9. Poſtremo in Thyroide, fabricam mixtam e ſubſtantia celluloſa et cartilaginea obſeruare procliue eſt: nam, tametſi alarum ſubſtantia e pura cartalagine ſit conflata, quaedam tamen diploe ſtrictior et compactior e cellulis minutiſſimis contexta, conſideranti patet. Iſtiusmodi autem fabrica cauernoſa imprimis perſpicua eſt circa margines poſticos, et circa proceſſus inferiores, qui cricoidis anticae parti inarticulantur.

OBSER-

OBSERVATIONES ANATOMICO-PRACTICAE,

A

Io. Fredr. Schreiber

communicatae.

Obferu. 1.

Tab. X. et XI. EST curiofa magis, quam vtilis. Dabo tamen illam, quia tali offe caruit rariorum offium thefaurus *Rauianus*. Etenim, aperiundo cadauer hominis, modo fani, a fumo enecti, cuius quam maxume turgidus ventriculus, finiftram Thoracis cameram coarctans, figuram 1. Tab. I. ad impetus *Cantianos* optume exprimebat; Dum et caput referarem, Os verticis finiftrum dextro, pofteriora verfus, productius, latius, atque interiore fui parte curuum magis, hinc et altius, miratus fum. Cranium, a poftica confpectum, obliquum ideo adparuit totum. Hemifphaerium finiftrum cerebri pariter fe habebat ad dextrum.

Obf. 2. Vir fanus, aliquot, fupra triginta, annos natus, atque ebrius, cadendo ex alto in plateam, ftratam lapidibus, vulnus ingens fuo impreflerat capiti. Namque, vbi os verticis dextrum cum offe occipitis fere coniungitur, integumenta capitis fuere contufa; quibus ablatis, cranium nudum vifum, atque fiffura duplex: altera, vnciam longa, atque vertici propinquior: altera, dexterioribus

ribus propior, vsque in suturam dexteram, quae cum sinistra Λ Graecorum aemulatur, continuabatur. Vnde suturae huius in se mutuo immissi denticuli ab arctiore amplexu recesserant. Vtraque fissura vero a sutura, cui a sagitta nomen, fere aequidistabat vbique. Aeger hic, per omnem morbi decursum, mente constitit; nullis symptomatis adstantes terruit; quietus semper; rogatusque; omnia sibi dolere; regessit. Ast debilitas, quae corpus hominis, modo sani, adeo subito incesserat, erat oppido ingens. Quam, tam repentinam, dum meditarer; vt et statum aegri, inter cadendum ebrii; locum vulneris; fissuram geminam; atque impetum, quo cranium durum in renitentes lapides, adcelerato motu, impegerat: fusum, extra vasa, sub cranio, cruorem mente concepi facile. Salutis spem tantum non amputabat cerebelli vicinia ad loca fissa; nec non illa debilitas. Quocirca, trepanationis famae intempestiue parcens, ab aliis adeo commendatam medendi viam incedere constitui.

Illico igitur, ex secta vena, tantum sanguinis fusum est, quantum per debilitatem aegri licuit: capitique conuenientia adplicata sunt, et fomenta, et emplastra. Die morbi altero exhibitum fuit ex ialappae radice purgans forte; quod tamen ter tantum aluum soluit. Eodem, omnem adparatum, adplicatum capiti, abripere incepit decumbens. Die tertio, repetita fuit venae sectio: sed non adeo multus potuit extrahi sanguis. Versus vesperam, cibum potumque rogauit aeger. Die quarto, deglutiuit purgans, priori fortius. Sed immota stitit aluus; atque vulneratus, hora post meridiem quarta, quadam cum conuulsione ventriculi, exstinguebatur.

 Ape-

Aperui cadauer. Ac primo quidem ab integumentis vndique liberato cranio, fissuram illam duplicem spectaui. Illa, quam longiorem dixi, suturam deferens, pergebat ingens per totum dexterum latus ossis occipitis. Ceterum nullibi alia fissura exterius. Resecto cranio, supra duram matrem, sub fissurarum locis, plurimum erat extra vasa cruoris, *adeo congelati, et inspissati, vt durae matri, instar picis seu resinae, adglutinatus fuerit, vixque ferramentis et multo conatu hinc deradi ac remoueri potuerit.* Lustraui quoque integre perruptum magnum durae matris vas. Per omnem fusi cruoris plagam cerebrum complanatum erat, quasi manu illud complanasses. Cerebelli hemisphaerium dexterum quoque tegebatur concreto cruore: qui illud et compresserat aliquantum, et plane flaccidum reddiderat. Reliqua Εγκεφαλου bona. Visa hic iterum in caluariae intimis illa magna descripta fissura, per dextrum ossis occipitis latus, in vicinia ossis petrosi, procedens, illudque, vsque per dextrum magni occipitalis foraminis latus findens. In cranio autem interno alia fissura nulla. Thorax apertus nihil insoliti monstrauit. Ast, recluso abdomine, cuius integumenta vndique sana conspiciebantur atque candida; mox in oculos incurrerunt dextrum corporis latus, sub illaeso iecinore, occupantia contusa intestina; atque ipse musculus Ψοας magnus dexter contusus. Ren dexter vero sanus erat. Arteriae totae erant cruore vacuae: sed in venis sanguis.

Ex qua historia, pace medicinam facientium, sequentes, non inutiles, deducam propositiones.

1.) A compreſſione aliqua cerebelli debilitatem toti induci corpori. Quia cor inde fit debile.

2.) Debilitatem in homine, prius ſano, iam caput vulnerato, malum conſtituere ſignum; fereque notare fuſum, ſupra cerebelli partem, cruorem; ſi fuſi ſanguinis ſigna de cetero adfuerint.

3.) In vulneribus capitis pleraque adlegari ſolita extrauaſati cruoris ſigna abeſſe poſſe: eo tamen extra vaſa haerente.

4.) Circa effuſorum humorum in viuo corpore reſorptionem monenda quaedam eſſe; ſiue inſpiratura vaſa cogites; ſiue humorem inſpirandum. Venae inſpirant ſolae. Ad reſorptionem igitur innumerarum requiritur praeſentia: hauriunt enim oribus, ob paruitatem inuiſibilibus. Hae venae porro ſint bibaces. Tales fiunt euacuatae: nam repleta vena non bibit. Sed et in venarum villos ſufficiens neruei liquidi copia influere debet, per quod fiat impetus in venas; indeque in hauſta. Etenim vena mortua, vacua licet, humorem vel adtenuatiſſimum non haurit, niſi ad certum terminum, aeque, ac tubus capillaris. In has venas plerumque inſpirari debet effuſus cruor. Qui ergo ita adtenuandus, vt, roris, non ſanguinis, ſpecie, oſcula venarum, globulum rubrum capere neſcia, introire queat. Hic ſcopus eſt fomentorum atque emplaſtrorum adtenuantium, extra vaſa fuſis humoribus adplicatorum, ſemperque adplicandorum. Eamdem ob cauſſam, facillima fit in abdomine reſorptio: omnia enim ibi haerent in balneo naturae. Vid. *Obſ.* LXVI. *Ruyſchiana in Centuria.*

Quibus pensitatis, et cum praesente historia collatis, ex alius errore proficiant Medici, inque faciunda medicina propositionibus determinatis pretium statuere tandem incipiant. Quod si multas venas ad resorptionem requiri intellexeris; impossibilem illam dices, cruore supra duram matrem fuso. Venae enim ibi sunt paucissimae, respectu aliorum locorum corporis. Sunt tamen plures in suturae vicinis. In cerebri intimis ideo fit facilior extrauasati receptio. Quare studendum certis signis, per quae noscas effusum supra duram matrem sanguinem. Sed et venae huius aegri non potuerunt satis bibulae reddi. Etenim primo prohibuit ingens debilitas, quo minus satis euacuarentur; siue per sectionem venae; siue per purgans. Vena secta hominis robusti facilius magisque euacuatur, quam infirmi. Sed purgans, magna quamquam virtute praeditum, non soluet sanguinem, nisi vi vitae fuerit actum. In debili ergo non agit, quod speraras: eoque agit minus, quo fuerit potentia validius. Quae omnia a priori certa sunt. Certe; die altero purgans minus aluum ter laxauit: maius autem, ipso emortuali die (quo vis vitae sensim decrescebat, donec nihilo aequaretur) exhibitum, eamdem ne quidem tetigit. Secundo; quamquam omnia ad resorptionem accommodata hoc in aegro fingantur: debilior tamen spirituum in venas influxus eamdem impediuisset. Vltimo; in cranio est calor minimus; frigusque, debilitatis comes, non potuit satis adtenuare fusum vel in abdominalibus cruorem. Amo febrem, quam alii adeo pauent, succedentem contusioni; si modo non furerit. Est enim singulare naturae institutum, quo effusos humores adtenuet, venasque ad bibendum incitet. Nec umquam resoluta sunt contusa, sine quadam febre.

5.) Ita-

5.) Itaque, humoribus in corpore, quacumque de caussa debili, effusis; venae sectione atque purgando nil proficimus.

6.) Trepanum igitur fuisse adplicandum aegro descripto. Licet et ab hoc dubia fuisset spes; cum, quod cruor supra cerebelli partem haeserit; tum, quod arctissima concreti cruoris ad duram matrem adhaesio *trepanationis* censeatur *difficultas*.

7.) Doctrinam de *contrafissura* hoc exemplo non confirmari.

8.) Intima corporis contusa esse posse, nullo signo externo conspicuo. Hanc non vna didici obseruatione. Circumspectum igitur se gerat Medicus.

9.) Quodsi suspicio adfuerit cruoris, a percussu extra vasa in caput fusi; e. g. ob magnitudinem ictus; locum vulneris etc., nec tamen sequantur valde compressi cerebri effecta: signum haberi certum stagnantis supra duram matrem sanguinis: sustinetur tunc sanguis a membrana, in arcum extensa. Vnde et alius durae matris vsus noscitur; cur illa potius caluariae data sit membrana, quam cerebro? Immo; obseruationes eiusmodi elaterem membranae illius annon probant?

Obs. 3. Dissecui cadauer hominis, repente, vt aiebant, defuncti. In thorace pulmones vndequaque adnatos contuitus sum ac contrectaui, e quorum superficie plurima, eaque sat magna, surrexerant tubercula, materiem continentia calcariam. Ad asperam arteriam erat anterius, praecise sub initio ossis pectoris, cartilagini exterius

 adcretus

adcretus tumor, nucis moſchatae figura et magnitudine, ſimilique foetus calciformi materie. Fini tumoris continuabitur bronchialis glandula. Diaphragma vero ipſum, inter pulmonem dextrum, illi continuum, atque iecur, totum tangebatur cartilagineum, vel oſſeum. Profecto; flexum frangebatur, cum ſonitu.

Obſ. 4. Homo, haud ita diu hydropicus, repente cadebat exanimis. Spectaui et huius interiora. In abdomine ſtatim occurrit praeuiſa aqua. Et pectus occupabat hydrops; pulmonesque vbique adfixi erant membranae, ſuccingenti coſtas; et quidem, ope fibrarum, albarum, elegantiſſimarum; raro viſarum *Lanciſio*. Filamenta talia, pulmones illi membranae coniungentia, ſaepenumero obſeruaui in cadaueribus, quorum thorax aqua ſcatebat. Peruentum ad cor; certe ingens! Huius diſciſſa capſa, craſſitie dimidiam minimi digiti craſſitiem aequans, atque intus plurimis, iisque non exiguis, ſteatomatibus obſita, tantum capiebat cruenti laticis, quantum poterat. Cor ipſum paruum erat et maceratum; atque, ad locum medium ventriculi dextri, adnatum pericardio, carnis auxilio fungoſae, trianguli formam habentis, atque ex corde ſurgentis: forte non abſimilis illi, qua cordis mucronem defenſum viderat *Haruaeus*. *De generat. animal. exercit.* LI. In cauitatibus cordis erant polypi, per vaſa ſanguinea protenſi, vt vlnas metiri potuiſſes.

Repentinae huius mortis cauſſa ſat manifeſta.

Obſ. 5. Quod numquam inſpexit *Veſalius*, *iecur humanum in fibras aliquo pacto diuiſum*; ſemel inſpexi, dum,

dum, aperiens cadauer hominis adulti, modo ſani, et a temone, velocius decidente, lethaliter tacti, in manifeſtos lobos diſtinctum epar et contrectaui. Id patet ſequente adiectarum tabularum explicatione diſtincta.

TABULA I.

anteriorem epatis faciem repraeſentat.

A notat *portionem diaphragmatis*, *cum adnexo peritonaeo* reflexam, ſupra aliam, quae S ſignatur.

T notat *ligamentum*, quo diaphragmati adhaeret epar.

B eſt *lobus primus*, triangulum mixtilineum ſuperficie ſua exhibens, cuius curua βασις ſub ſepti transuerſi parte, quam littera S indicaui, deliteſcit. A vicinis lobis diſtinctus eſt per ſciſſuras admodum profundas.

C *lobus ſecundus*, eiusdem fere cum primo figurae, ſeiunctus a lobis ceteris per inciſiones, ſuum verſus apicem profundas.

D *lobus tertius*; ſeu; *caput extorum*; variae, vt adparet figurae. Ad dextrum latus profundos obtinuerat limites.

E *lobus quartus*, ſiniſtram epatis partem fingens, qui, cum *quinto*, G, confluens, excurrit in *lobum ſextum*, F, μαχαιραν, pugionis vel cunei inſtar, immiſſum lobis, quos litteris, D et R, ſignaui.

H notat *veſicam bilis* inflatam, anterius aliquantum prominulam.

I eſt *locus inſertionis ligamenti vmbilicalis*, in figura obſcurius aliquantum propoſitus.

L eſt

L eſt *lobus ſeptimus*; isque *aliformis*.

M eſt pars diaphragmatis atque peritonaei abſciſſi, vsque ad ligamentum vmbilicale excurrens.

N *lobus octauus*, e cuius medio enatum diaphragma, littera M indicatum. Pars media altera hic latet ſub eleuato lobo L.

O *lobus nonus*; exiguus; ονυξ.

P *lobus decimus*; τραπεζα: cuius vera figura data, niſi, quod latera eius, verſus lobos B et O, rectilinea magis fuerint, quam depicta habentur.

Q *lobus vndecimus*.

R *lobus duodecimus*; qui altera τραπεζα.

TABULA II.

Sic dictam concauam epatis faciem ſiſtit.

L eſt *lobus alaris* Tab. I., cum eminentiis ſuis plurimis, ab inferiore parte ſpectatus. Immittit ſe ſub veſicula ſellis. Sique ipſum ab hac parte integre prenſes: ad eamdem pertinere arbitraberis lobos, in Tab. I. depictos, atque deſignatos litteris, G, N, O, R.

H eſt *veſicula bilis*, turgida flatu.

A eſt *lobus inferior primus*; isque *mammiformis*.

E eſt *lobus quartus* Tab. I., ab hac parte viſus.

B *lobus ſecundus*; maxumus. *Caput extorum*.

C *lobus tertius*. Τραπεζα.

D *Pars diaphragmatis et peritonaei*. In Tab. I. hanc notauit litera S.

G *Si-*

G *Sipho, per venam cauam traiectus*, viam huius per epar defignans.

F *Venae portarum*, quae membranae pinguetudinofae adcreta vndique, ingreffus in epar.

I *lobulus exilis*; quafi vna porta.

M *lobulus alius.* An porta altera? A vena portarum certe feiunctus fpectatur, atque venae cauae valdopere adnatus, vt huius potius porta haberi poffit, quam venae portarum.

Homo viuus de epate conqueftus fuerat numquam; quantum refcire potui. Idemque, cultro diuifum, omnimode fanum fum arbitratus. An, in hoc epate, fingularis fuit vafculorum directio, aliusque decurfus, quam obtinere folet? Felix id reuelare potuiffet iniectu. Talis modi epar, in fcholis, inter malae conformationis opera refertur. Peruerfus biliariae veficae fitus id pofcit, inter alia. *Lufus naturae* vocatur talis productio ab iis, qui ludunt cum vocabulis. De cetero liquet, et antiquorum inquifitioni fe offerre potuiffe talia epata: aduerfus quos acriter disputauit *Vefalius de hum. corp. fab.* Lib. V. Cap. VII.

Obf. 6. Situm *inteftini duodeni* optume defcripfit, fuis in *obferuationibus Anatomicis*, *Santorini.* Sed, qui eumdem omnimode conftantem exiftimant, fiue repletus fuerit ventriculus, fiue vacuus; fiue denique fana fuerint ventriculus vel duodenum, fiue morbis quibusdam obfeffa: ii falluntur etiam atque etiam. Scribam, quae meis vfurpaui oculis. Principium duodeni adfcendit, atque fuperius est pyloro ventriculi, vel vacui, vel parum repleti. Contra; ventriculo repletissimo, fundus huius e diametro oppositus est spinae dorsi, atque duodeni initium est in plano, ad spinam dorsi orthogonio. Adcurate hoc videas in Fig. 1. Tab. I. ad *impetus Anatom. Cantianos.* Sic natum intestinum, flexuoso ductu, se immittit quasi in cauum quoddam, factum, sinisterius, a parte omenti, a ventriculo ad epar euntis; superius, a parte concaua iecinoris, praecise infra ligamenti vmbilicalis insertionem in epar; et, quoad circumferentiam dexteriorem, a vesicula fellis, colo, atque rene dextro. Tumque, renem deferens, incedit incuruum supra musculum ψοας magnum, truncum venae cauae, atque venam emulgentem dexteram. Dein progreditur transuersim. Vbi fere ad spinam dorsi peruenit, caudicem venosum meseraicum, ad epar euntem, incumbentem sibi sentit. Hunc semel vidi confectum a duabus venis, ad acutum sibi iunctis, quarum sinisterior erat arctior dextra. Anguli huius vertici inserebatur vena exigua, a ventriculo descendens, ex quo exiuerat bifida. Haec omnia vere visa sunt atque elegantius, quam exhibentur quodammodo a *Vesalio* (*a*). Hunc eumdem caudicem alias vidi genitum a tribus ramis, bifurcatis omnibus, atque post in infinitum diuisis, quorum medius erat capacissimus, sinister autem dextro capacior. Magnus hic venae portarum ramus, ita confectus adscendit, donec eum oculis subducat το παγκρεας. Hoc enim descriptum caudicem, supra duodenum, constanter amplectitur, figura semicirculari Quam *circumferentiam pancreatis* emensus ramus, venam lienarem adcipit,

(*a*) Fig. XII. Lib. V. infra K.

cipit, poſteaque, venae portarum titulo, ſub initio duodeni, atque fine ventriculi, ad iecur tranſit. Duodeno inteſtino incumbunt porro, iuxta ſiniſtrum latus deſcripti caudicis, rami ſuperioris arteriae meſeraicae; quales aliquando quatuor numeraui (*b*). Inteſtinum a ſpina dorſi poſtea demittitur in cauum ſiniſtrum abdominis, per eamdem ſpinam diuiſi. In quo adſcendens, meſocolon mox transit, nomenque mutat. Initium duodeni fere ſemper deprehendi a veſicae bile flauum.

Diuerſum inteſtini duodeni ſitum offendi alias. Vomitus, fere continuus, nulla arte ſedandus, enecabat hominem, phthiſici ſpeciem exacte qui referebat. Huius in cadauere, ventriculus ſpectabatur oblongus, ſed coarctatus, ſolum ſiniſtrum hypochondrium, ſitu normali, occupans: prout quandoque obſeruatus eſt in voracibus. Ex hoc enatum duodenum adſcendebat pyloro ſuperius; tunc aliquantum procedebat, recta via, epatis dextram verſus: dein magis adſcendens, inflectebatur; deſcendebat; poſteaque via, rurſum recta, pertingebat ad veſiculam bilis; tandemque, conſueta curuatura abſoluta, ſolitum iter proſequebatur. Quae plura obſeruabantur, addam; licet ad argumentum de duodeno non pertineant. In ventriculo offendi ſciſſuram, quam cultro factam eſſe, ſacramento pernegabat proſector, expertus, atque fide dignus. In abdomen ſaltim nihil effluxerat ex ventriculo. Id eſt certiſſimum, ventriculum hunc manifeſte fuiſſe eroſum, ac praecipue in parte, oppoſita fundo. Eroſiones autem hae non erant, niſi retroceſſiones membranarum, intimae atque nerueae. Rem expertus ſum liquidam, ope ſcul-

 pelli.

(*b*) *Veſal.* l. c. litt. ζ, in *delineatione aortae.*

pelli. Inde, ad erosa loca, rugae nullae: intacta vero tegebantur copiosissimis.

Obs. 7. In cadauere hominis, asthmate, per biennium, qui laborarat; praeter serum, in caput, (vnde cerebri erosio) vtramque pectoris cauitatem, atque pericardium, largiter fusum; abdomen distentum erat, quasi a capto veneno. Ventriculus, cibum complexus, atque duodenum siderata conspiciebantur. Sed ventriculum, epar non contingentem, numquam lustraueram ante. Nempe, inter vtrumque viscus, sese insinuauerat magna inflati coli pars.

DE

DE MVTATIONIBVS CALORIS ET FRIGORIS AQVAE FLVENTIS OBSERVATIONES.

AVTORE
Iosia Weitbrecht.

I. INSTITVTI RATIO.

Animus eſt, experiri, quaenam incrementa et decrementa patiatur aqua naturalis, intra alueos ex. gr. fluuii Neuae fluens. Notum eſt: aquam vi ignis ad conſtantem gradum caloris deduci poſſe; ſed diminui illum iterum, et frigere aquam, cum aeri exponatur, vel artificiale refrigerium excitetur ſimiliter ad gradum aliquem, cuius limites ſi frigus excedat, aqua non amplius aqua manet, ſed in glaciem conuertitur. Non dubitandum igitur, quin aqua pro diuerſa conſtitutione aeris incumbentis, illamque nonnumquam voluentis et miſcentis, aliquibus mutationibus obnoxia ſit. Quantae autem iſtae mutationes ſint, nondum determinauerunt, quantum noui, Phyſici. Prima quidem fronte apparet, tale experimentum praeter ſimplicem cognitionem huius variae affectionis, nil vtilitatis afferre: Cum vero aqua talis, qualis in hoc noſtro flumine continetur, etiam ita frigide hauſta plurimorum vſui inſeruiat, et corporis humani viſcera, queis ingeritur, miris caloris et frigoris viciſſituſitudinibus ſubiecta ſint: crediderim, laborem non inutilem fore Phyſico, et ſi nil aliud, cautelas certe quasdam, in vſu frigidae obſeruandas ſuppeditaturum, et cauſſas reuelaturum exactius, quare hauſtus frigidae vel balnea nonnumquam tam miros effectus in corpore noſtro producant.

Thermometrum, quo vtor, ſuppeditauit mihi Cl. *Dn. Pr. De L'Isle* ſua methodo confectum (*). Conſtat autem ex cylindro vitreo ampliore, in tubum anguſtiorem longum deſinente, et repleto Mercurio qui ad minimum attactum vel halitum ſatis ſenſibiliter aſcendit et deſcendit. Haec diuerſa altitudo ad ducentos gradus eſt redacta numerando ab altitudine ſumma ad imam. Gradus vltimus denotat contractionem maximam Mercurii, quam paſſus eſt hieme praeterita d $\frac{16}{26}$. Ian. hora ſept. mutat. 1733; primus autem denotat calorem, quem accepit Mercurius ex aqua bulliente.

Methodus experiundi haec eſt: Obſeruo tribus vicibus quotidie, Sole orto, circa Meridiem, et ſub veſperam primo quae ſit altitudo Mercurii in tubo, dum expoſitus eſt aeri quieto, in loco, aperto quidem, ſed quo nec Sol, nec ventus tam facile penetrat: deinde aufero Machinam, et appendo ad brachium, cuiusdam Trabis portatilis vt a ſolo aere ambiri poſſit, et ſi ventus eſt, ſimiliter illi directe expono. Etiam ſolis ſplendentis nonnumquam vires experior. Quo facto inſtrumentum immergo aquae, cuius gratia foramen proprium glaciei incidi curaui, quod quantum poſſibile eſt, apertum ſeruo. Cumque res ad eundem laborem recidat, ad tempeſtatis quoque variationes attendo.

II. OB-

(*) Vid. eius Memoires pour ſervir a l'hiſtoire & au progres de l'Aſtron. de la Geogr. & de la Phyſique pag. 267.

II. OBSERVATIONES.

D. 9. Febr. 1734. Mane sereno, Ventus NW. Mercurius erat altus in aere quieto gr. 166; in aere libero post horam gr. 161. vento expositus gr. 166. aquae immersus ascendit ad gr. 152. siue machinam totam siue ad partem immerserim, aqua erat paulum glacie obducta, vt purgare opus esset. Extracto thermometro humiditas adhaerens momento in glaciem versa est.

Meridies serena, ventus fortis. Mercurius in aere quieto gr. 155. vento expos. gr. 166. aquae immersus gr. 152. nec vlterius ascendit cum per aliquot minuta soli exponeretur in aere quieto. Humiditas denuo in crustam versa. Flumen altum iterum decrescit.

Sub occasum serenum, ventus non tantus. Mercurius in aere quieto gr. 165. in aere libero gr. 168. in aqua gr. 152. Fluuius recessit.

D. 10. Febr. Sub ortum non adeo serenum Mercurius in aere quieto gr. 175. vento leni W. expos. gr. 176. aqua immers. gr. 152. Quia gradus caloris aquae semper idem, volebam experiri, an non in tubo circa illum locum resistentiae quicquam esset: pepuli igitur in loco calido mercurium ad gr. 80, et ita immersi aquae: deprehendi autem labi iterum mercurium vsque ad gr. 152. hoc tamen cum discrimine, vt mutatio ex calido in frigidius multo tardior esset, quam ex frigido in calidius, siue citius ascendit mercurius in aqua, quam descendit. Experimenta deinde feci in loco magis aprico, sed phaenomena erant eadem omnia.

Sole

Sole medio, feren. Thermometrum in aere quieto indicat gr. $155\frac{1}{2}$. vento expof. W. mediocri gr. 170. aquae immerf. gr. 152.

Vefpera ferena, aer quietus, Thermometrum in aere quieto gr. 170. in libero gr. 173. in aqua gr. 152.

D. 11. Febr. Mane Coelum nubilum, Thermometrum in aere quieto gr. 168. in libero $168\frac{1}{2}$, vento expofitum gr. 170. aquae immerf. gr. 152.

Meridie, fol vix penetrat, fubinde nubila, ventus O. fortis; Therm. in aere quieto 162. vento expof. per femihoram gr. 165. in aqua gr. 152. Vefperi non obferuaui, erat autem frigus ventusque vehemens.

D. 12. Febr. Mane. Ventus NO. paucus. Therm. in aere quieto gr. 168. in libero gr. 170. in aquam immerf. gr. 152.

Meridie, in aere quieto Therm. gr. 166. in libero gr. 167. in aqua gr. 152.

Nocte hora nona et decima erat Mercurii altitudo in aere quieto 170. in libero 173. in aqua 152. Coelum ferenum, lux borealis magna.

D. 13. Febr. Mane fpiffa eft nebula, Thermom. in aere quieto gr. 180, in aperto gr. 181. poft femihoram autem 179. in aqua autem gr. 152.

Meridie disiecta nebula maximam partem, fol transparet; Thermometrum in aere quieto gr. 154. in libero gr. 155. vento expof. gr. 157. aquae immerf. gr. 152.

Vefperi

Vesperi, Thermom. in aere quieto gr. 170. post horam gr. 176. Nox frigidissima, vt nolim experimentum in aqua capere.

D. 14. Febr. Mane nubes, cum niue pauca. Mercurius in Thermom. in aere quieto. gr. 170. in libero gr. 167. in aqua 152.

Meridie in aere quieto gr. 164. in libero $164\frac{1}{2}$. in aqua gr. 152.

Vesperi, Thermometrum in aere quieto gr. 162. in libero gr. 163. in aqua gr. 152.

D. 15. Febr. fere toto die ningit, ventus nullus, Thermometrum in aere quieto gr. 158. in libero gr. 157. in aqua gr. 152.

Meridie, Thermometrum in aere quieto gr. 155. in libero gr. 156. in aqua gr. 152.

Vesperi, Thermometrum in aere quieto et libero est ad gr. 156. in aqua autem gr. 152.

Perstitit Mercurius in Thermometro in aqua ad gr. 152. vsque ad illud tempus, quo fluuius glacie sua liberabatur, quod factum d. 16. 17. 18. Aprilis; postmodum vero incepit mutari sensim sensimque, ita vt d. 26. 27. 28. April. esset circiter gr. 148. 149.

D. 1. Mai. Therm. in aqua erat ante meridiem, gr. 148. coelo nubilo, imbres nonnumquam spargente, in aere 135. grad. Post meridiem venit glacies ex lacu ladoga, tanta vi, vt pontem nouum rumperet, aer erat vesperi 144. gr. Experiri erat animus, num haec glacies mutationem quandam afferret, et deprehendi aquam gr. 151. et ſi quando fruſtum glaciei in viciniam inſtrumenti affflueret, erat gr. $151\frac{1}{2}$. hoc eſt, quam proxime acceſſit ad frigus ſummum, cuius aqua hyeme capax erat.

D 2. Maii. Thermom. in aere quieto eſt gr. 142. in libero 140. aer eſt tranquillus ſine omni vento, coelum nubilum rorem pluuioſum ſpargens, glacies continuat, ſed prope ripam alteram. Ceterum circa ripam natant quaedam glaciei particulae, et adhuc dum eſt aqua gr. 151. circa decimam ſurgit Ventus W.

Circa meridiem ſerenat, Therm. in aere quieto gr. 132. In Sole gr. 119. in aqua, cui adhuc glacies innatabat, gr. 151.

D. 3. Maii. Thermom. in aere quieto mane 130, in ſole 122. circa meridiem in aere quieto gr. 123. in ſole gr. 116. in aqua gr. 150. NB. Dies ſerenus, circa meridiem nubes pluuioſae vagantes, Ventus fortis S. Glacies circa ſextam matutinam deſiit fluere. Veſperi coelum obſcurum, Therm. in aere libero gr. 135.

D. 4. Maii. Mane, pluuiola, Ventus nullus, Therm. in aere libero gr. 138. in aqua gr. 149. mox ingruit pluuia. Thermom. in aere pluuioſo gr. 136. pluuia continuat ad meridiem vsque cum vehementi vento ex W, ita vt fluuius ad quatuor pedes altior creſceret, cecidit interea Mercur. in Thermometro ad quartam horam vsque ad gr. 142. veſperi poſt occaſum ad gr. 144. in loco quieto; in aqua eodem tempore erat gr. 148. citius enim ob altitudinem fluminis accedere non poteram.

D. 5.

D. 5. Maii. Serenum, Therm. in aere quieto gr. 140. in libero vento W. expoſ. gr. 142. in aqua gr 148.

Circa meridiem nubila vagantur, Thermom. in aere gr. 130. in ſole gr. 125. in aqua, flante N O. paruo, gr. 147.

Veſperi in media pluuia gr. 140.

Sub occaſum gr. 145. in aqua gr. 147.

D. 6. Maii. Ventus W. nubes vagantes. Thermom. in aere quieto gr. 145. in libero et vento expoſ. gr. 146. in ſole gr. 135. in aqua gr. 147.

NB. Cum hodie in platea veherer verſus ſolem, ille me vehementer vrebat, a tergo autem grando cadebat.

Meridie in aere quieto 138. in libero aere gr. 139. in ſole gr. 129. in aqua aeſtuante a vento W. et alta gr. 146.

Poſt occaſum, Ventus W. deſinit, ſurgit N O. Thermom. in aere quieto gr. 145. in aqua ſatis placida gr. 146.

D. 7. Maii. Mane, ventus nullus. Thermom. in aere quieto gr. 142. in libero, ſeptentrionem verſus gr. 144. in aqua gr. 147. in ſole per nubeculas vix non transparente gr. 132.

Meridie in aere quieto (vento S W. pauco) Therm. gr. 127. in aere ſeptentrionali gr. 137. in aqua gr. $146\frac{1}{2}$. in ſole gr. 117.

Veſperi in aere libero gr. 140. in aqua 147.

D. 8. Maii. Therm. in aere quieto 132. in libero gr. 133. in aqua gr. 148.

Meridie in aere quieto gr. 125. in ſole gr. 117. in aqua gr. 148. Pomeridie in ſole gr. 123. ſed ſol transparet per aerem nebuloſum in aqua gr. 148.

Dum miror, quare aquae calor decreſcat, cum tamen aer ſit placidus, tranquillus, calidus ſine omni cruditate, ventus lenis S W. et in cauſſam inquiro: obſeruo deſtructam eſſe machinulam.

Poſtquam alia parata fuit, redii ad labores meos, et inueni

D. 7. Iunii. Therm. in aere aprico, nubibus ſparſis, vento forti N O. humili aqua, gr. 115. in aqua gr. $127\frac{3}{4}$.

D. 8. Iunii, nebuloſae nubes tranquillae, hora octaua Therm. in aere quieto aperto gr. 129. in ſole transparente continuo per ſemihoram gr. 109. in aqua $128\frac{3}{4}$.

Poſt meridiem, hora ſecunda, Ventus aliqualis W, coelo clarificato, Therm. in aere quieto gr. 108. in ſole per duo minuta gr. 103, in aere vento expoſ. ſine ſole per tria minuta gr. 118. in aqua gr. 128.

Poſt occaſum, horizonte ſeptentrionali valde nubilo, Therm. in aere aprico gr. 128. in aqua gr. $128\frac{1}{2}$.

D. 9. Iunii. hora octaua, Vento S O. Coelo nubilo, Therm. in aere quieto gr. 121. in ſole gr. 120 in aqua gr. $128\frac{1}{2}$.

Meridie, ventulus S W. pluuiola, Therm. in aere libero gr. $120\frac{1}{2}$. in aqua gr. 128.

Pome-

Pomeridie continuo haeret circa gr. 122, mox ſupra mox infra. Hora octaua gr. 123. in aqua gr. $127\frac{3}{4}$.

D. 10. Iunii. Summo mane, extra ſolem erat Therm. gr. $123\frac{1}{2}$. hora octaua, coelo vdo, ſereno, tranquillo gr. 115. in aqua gr. 128.

Meridie in ſole gr. 100. in aere ſine ſole gr. 110. in aqua gr. 127.

Pomeridie extra ſolem verſatur intra 115. et 120. in aqua $126\frac{2}{3}$.

Veſperi in aere Therm. gr. 125. in aqua gr. 127.

D. 11. Iunii. Mane hora ſexta coelum ſudum, ſine vento. Therm. in aere aprico gr. 110. in aqua 127.

Hora vndecima Therm. in aere libero, ſine ſole gr. 100. in aqua gr. 126. Hora duodecima, nubes ſparguntur, quae traiectum ſolis nonnumquam impediunt, cadit igitur Therm. in aere libero ad gr. 105. Hora prima, in ſole gr. 95. mox redeuntibus nubibus ad gr. 107. ſurgit ex S. ventus mox in NW. mutatus.

Veſperi poſt occaſum, coelo nebuloſo Therm. in aere gr. 125, in aqua gr. 126. Ambo dies calidiſſimi.

D. 12. Iunii. nocte antecedente pluit, mane nebuloſum pluuioſum, Therm. in aere libero gr. 132. in aqua gr. $126\frac{1}{2}$.

Meridie, Ventus N. fortis ſurrexit, nubes, pluuiola, Therm. in aere quieto gr. $130\frac{1}{2}$. in aqua gr. 126.

Auctum eſt frigus pomeridie ſenſim ſenſimque vt eſſet veſperi hora octauo Therm. gr. 134. in aqua gr. 126. Ventus N. Nil igitur de calore amiſit aqua.

D. 13. Iunii. hora ſeptima Therm. in aere quieto gr. 125. NB. aer reuera temperatior eſt, coelum potiſſimam partem purum, in aere libero poſt ſemihoram gr. 122. in aqua gr. 128.

NB. Si inſtrumentum aqua eximo, cadit adhuc Mercurius, tam dum teneo in aere ſupra aquam quam intra domum. Sine dubio ille aer adhuc frigus ſuum retinuit ab heſterna die, nec ſolis energiam expertus eſt, vti ille, in quo Thermometrum obſeruare ſoleo.

Meridie, Therm. in aere quieto gr. 115. in ſole gr. 110. in aqua gr. 127. ſi adhucdum eximo, cadit. Ventus fortis W. vt creſcat aqua.

Veſperi, Thermom. vento expoſ. magno W. gr. 130. in aqua gr. 128.

D. 14. Iunii. Mane, ventus W. fortis, nubes vagantes, Therm. in aere quieto erat gr. 128. in aere ſupra aquam vento expoſ. gr. 132. in aqua gr. 129. neceſſe igitur poſt extractionem iterum cadit. Bene attendendum igitur mihi in poſterum ad calorem aeris ſuper aquam.

Meridie, W. continuat, nubibus vagantibus, Thermometrum in aere quieto gr. $120\frac{3}{4}$. in aere ſeptentrionali vento expoſ. cadit intra minutum dimidium ad gr. 127. intra horam gr. $131\frac{1}{2}$. in aqua gr. $128\frac{1}{2}$.

Veſperi in aere ſeptentr. vento expoſito, ventus W. fortis Therm. gr. $132\frac{1}{4}$. aqua gr. $128\frac{1}{4}$.

D. 15. Iunii. Mane hora ſexta Thermom. in aere quieto gr. 135. poſt horam, gr. 128. ſuper aqua per minutum gr. 130. in aqua gr. $128\frac{1}{2}$. Ventus W. nubes multae vagantes.

Meri-

Meridie, Thermometrum in loco quieto gr. 118. in aere meridionali aperto, ſed extra ſolem gr. 121. verſo inſtrumento in ſole per 7. minuta aſcendit ad gr. 115. in loco ſeptentrionali vento W. expoſitum per ſemihoram gr. 129. in eodem loco, ſed a vento verſum gr. 130, alio loco ſeptentr. ſed quieto gr. 128$\frac{1}{2}$. in aqua gr. 128. Iam ventus mutatur verſus S.

Veſperi, Therm. in aere quieto ordinario eſt ad gr. 131. in libero meridionali gr. 130. in aqua gr. 128$\frac{1}{2}$. Ventus S W. ſed paululum ſenſim minuitur.

D. 16. Iunii. Mane hora ſeptima, Therm. in loco quieto gr. 128$\frac{3}{4}$. in loco a ſole irradiato, ſed a ſole verſum Thermometrum per ſemihoram gr. 128. in aere ſuper aqua gr. 128. ſuper aqua, ſed in longiore a ripa diſtantia gr. 128$\frac{1}{2}$. in aqua gr. 129.

Meridie in loco quieto gr. 111. in irradiato auerſum gr. 115. in ſole gr. 110. ſuper aqua gr. 128$\frac{1}{2}$. in aqua gr. 128.

Veſperi in loco quieto gr. 127$\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. 128$\frac{1}{2}$. in aqua gr. 128. Tota dies amoena, quieta, ſerena.

D. 17. Iunii. Mane, S W. Therm. in loco quieto gr. 116. ſuper aqua gr. 126$\frac{1}{2}$. in aqua gr. 128$\frac{1}{4}$. Mane clarum.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 110. ſuper aqua gr. 126. in aqua gr. 128.

Veſperi in loco aperto gr. 115. ſuper aqua gr. 124. in aqua gr. 127$\frac{3}{4}$. Tota dies amoena ſerena.

D. 18.

D. 18. Iunii. Pluuia. Therm. mane in loco quieto gr. 125. ſuper aqua gr. 126. in aqua gr. $127\frac{3}{4}$.

Poſt meridiem hora tertia Therm. in loco quieto gr. 117. ſuper aqua gr 122. in aqua gr. 127. S W. ſerenaſcit.

Veſperi in loco quieto Therm. gr. 125. ſuper aqua gr. 125-126. in aqua gr. $127\frac{2}{3}$. Seren. Tranquill.

D. 19. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 123. in loco irradiato, auerſim gr 123. ſuper aqua gr. 129+. in aqua gr. $128\frac{1}{2}$. ventus N O. frigidiuſculus. Seren.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 111. ſuper aqua gr. 126. in aqua gr. $127\frac{1}{2}$.

Veſperi ante ſolis occaſum in loco aperto Therm. gr. 127. ſuper aqua gr. 126. in aqua gr $127\frac{1}{4}$.

Tota dies maximam partem ſerena & tranquilla.

D. 20. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. $114\frac{1}{2}$, in loco irradiato, ſed auerſim gr. 108. ſuper aqua gr. 124. in aqua gr. 127. Coelum ſerenum, tranquillum.

Poſt meridiem hora quinta Therm. in loco quieto gr. 115. ſuper aqua gr. 120. in aqua gr. $125\frac{1}{2}$.

Veſperi in loco quieto gr. 124. ſuper aqua gr. 127, in aqua gr. $125\frac{1}{2}$.

Pomeridie toto ventus magnus W. zu N. qui aeſtum aeris inſignem paululum repreſſit.

D. 21. Iunii. Mane ſereno Therm. in loco quieto gr. 118. in aqua gr. 126.

Pomeridie in loco quieto gr. 105. in ſole per quinque minuta gr. 95. in aqua gr. 125.

D. 23. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 115. in aqua gr. $124\frac{1}{4}$. ventus O. feren.

Meridie in loco quieto gr. 108. in fole gr. 100, extra folem gr. 115. in aqua gr. $123\frac{1}{4}$. Seren. fed ventus O. facit aerem frigidiufculum.

Vefperi in loco quieto Therm. gr. 125. fuper aqua gr. 125. in aqua gr. $123\frac{1}{2}$.

D. 24. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 115. in aqua gr. 124. ferenat. Ventus paruus SW.

Meridie in loco quieto gr. 108. fuper aqua gr. 121. in aqua gr. $123\frac{1}{2}$. aer frigidiufculus ventus W. zu S. fortior. Coelum nubibus fparfis non adeo ferenum.

Vefperi in loco quieto gr. 123. fuper aqua gr. 122. in aqua gr. $123\frac{3}{4}$.

D. 25. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 118. fuper aqua gr. 125. in aqua gr. $124\frac{1}{4}$.

Meridie in loco quieto gr. 99. in fole per femihoram gr. 94. fuper aqua vltra gr. 116. in aqua gr. $122\frac{1}{2}$.

Aeftus intenfiffimus. Nubes fere nullae. Ventus NO. vtut vix perceptibilis nihilominus tamen refrigerium gratiffimum affert.

D. 26. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 103. hora nona, fuper aqua circa gr. 120 in aqua gr. 122. Aeftus fummus, coelum fudum, fine nube.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 99 in fole per femihoram gr. 92. fuper aqua circa gr. 116. in aqua gr. $121\frac{1}{2}$.

Vefperi, Therm. in loco aperto gr. 121. fuper aqua gr. 121. in aqua ipfa gr. 122.

D. 27. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 108. ſuper aqua circiter gr. 120. in aqua gr. 122.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 96. in ſole gr. 89. ſuper aqua gr. 113. ad 114. in aqua gr. 121.

Veſperi, Therm. in loco quieto gr. 116. ſuper aqua gr. $118\frac{1}{2}$. in aqua gr. 121.

Totus dies aeſtuoſiſſimus, ſtriae nubeculoſae hinc inde apparent, ſine vento. Veſperi nubes vel potius nebulae ſpiſſiores ſurgunt cum ſole rubro.

D. 28. Iunii. Mane, hora ſexta, Therm. in loco quieto gr. 116. hora ſeptima gr. 112, hora octaua gr. 108. ſuper aqua gr. 119. in aqua gr. $120\frac{5}{6}$.

Veſperi in loco quieto gr. 117. ſuper aqua gr. 119. in aqua gr. $119\frac{1}{4}$. hodie ventus W. fortior, ſeren.

D. 29. Iunii. Mane, hora nona, Thermom. in loco quieto gr. 112. ſuper aqua gr. 118. in aqua gr. $121\frac{1}{4}$. ſeren. ſed frigidior heſterno aere, Ventus tamen S.

Meridie, Nubes pluuioſae, Ventus fortis S W. Therm. in loco quieto gr. 107. ſuper aqua gr. 114-115. in aqua gr. $120\frac{5}{6}$.

Poſt meridiem pluuia ingens exſurgit cum Tonitru vnico. Thermom. in aere, pluuiae expoſitum gr. 119. Poſt pluuiam per tres horas gr. $118\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. $118\frac{1}{2}$. in aqua gr. 121. veſperi in loco aperto gr. $117\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. 119. in aqua gr. $121\frac{1}{2}$. Coelum quietum. Aer adhucdum calidiuſculus.

D. 30. Iunii. Mane pluuioſum. Ventus NO. deinde verſus ad N. Therm. in loco quieto gr. 123. pluuiae

uiae expositum et vento septentrionali gr. 127. super aqua gr. 127. in aqua gr. 121$\frac{1}{4}$.

Meridie cum paululum inclarescere videretur, Thermom. in loco aperto gr. 123. cum denuo plueret gr. 127.

Vesperi hora quarta in loco aperto gr. 126. super aqua gr. 126. in aqua gr. 121$\frac{1}{4}$. Ergo per 24. horas, nimium aucto frigore, et aere mutato ad gradus 10. nil immutatus tamen aquae calor est.

Post occasum in loco quieto Therm. ad gr. 126$\frac{1}{2}$. super aqua gr. 125-126. in aqua gr. 121$\frac{1}{2}$. serenascit. Ventus minor quantitate, sed idem plaga.

IVLIVS.

D. 1. Iulii. Mane, Thermometrum in loco quieto gr. 118. super aqua gr. 123. in aqua gr. 122. Ventus O. sed nubes contrario ordine.

Meridie eodem vento totum coelum serenum, mox nubes pomeridie vagantes. in loco quieto Therm. gr. 114. super aqua gr. 119. in aqua gr. 121$\frac{1}{2}$.

Vesperi, Therm. in loco quieto gr. 125. super aqua gr. 125. in aqua gr. 122. Malacia.

D. 2. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 115. super aqua gr. 126. in aqua gr. 122$\frac{1}{2}$. Tranquillus et serenus aer.

Ante meridiem surgunt nubes.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 111. super aqua gr. 123-124. in aqua gr. 122$\frac{1}{4}$. ventus lenis NO.

Vesperi, Therm. in loco quieto gr. 125. super aqua gr. 124. in aqua gr. 122.

D. 3. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 125 ſuper aqua gr. 124-125. in aqua gr. 123$\frac{1}{4}$. Aer tranquillus frigidiuſculus vti in autumno eſſe ſolet, nebuloſus. Toto antemeridiano tempore ſol hinc inde per nubila ſplendet.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 114. mox oritur nubes pluuioſa cum tonitru. Therm. eſt gr. 120. ſuper aqua gr. 125. in aqua gr. 123.

Obſeruo ex perpetua circumgeſtatione machinulae vincula tubuli relaxari, vt non ad eandem altitudinem ſemper conſiſtat. Curaui igitur, vt inferius repagulum affigeretur, ne altitudo tubi quicquam immutari poſtea poſſet.

Poſtquam recepi inſtrumentum, ad obuerſationes redeo.

D. 8. Iulii. Veſperi, Ventus O. exiguus. Coelum ſerenum Therm. in loco aperto gr. 125. ſuper aqua gr. 124. in aqua gr. 121.

D. 9. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 116. in loco ſeptentrionali aperto gr. 122. ſuper aqua gr. 121$\frac{1}{2}$. in aqua gr. 121$\frac{1}{4}$. Ventus N. Poſt ſummam ſerenitatem ſpiſſae nubes ex N. veniunt.

Meridie in loco quieto erat Therm. gr. 114. Oritur pluuia, ceſſante vento. In pluuia Therm. gr. 121. poſt pluuiam gr. 118. in aqua gr. 120$\frac{1}{2}$.

Veſperi, Coelo tranquillo nubeculis tecto Therm. in loco aperto gr. 123$\frac{3}{4}$. in loco ſeptentrionali gr. 123$\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. 123$\frac{1}{2}$. in aqua gr. 120$\frac{3}{4}$. ventulus N. exurgit.

D. 10.

D. 10. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 118. ſuper aqua gr. 123. in aqua gr. 121. Coelum nubilum; Ventus N. aer frigidiuſculus.

Poſt meridiem, Therm. in loco quieto gr. 115. ſuper aqua gr. 122+ in aqua gr. 120$\frac{2}{3}$. Aer frigidiuſculus ob ventum fortem NO. Nubes ſpiſſae pluuioſae, ſerenitatem interrumpentes.

Veſperi, Therm. in loco quieto gr. 124. ſuper aqua gr. 123$\frac{1}{2}$. in aqua gr. 121. ſerenum, crudus aer, ventus NO.

D. 11. Iulii. Mane, Thermometrum in loco quieto gr. 114. ſuper aqua gr. 122-123. in aqua gr. 121$\frac{1}{2}$. Tempeſtas heſterna, Ventus O.

Meridie, Thermometrum in loco quieto gr. 112. ſuper aqua gr. 122. in aqua gr. 121$\frac{1}{4}$. Tempeſtas paulo mitior, ventus O. lenis, nubes pluuioſae ſerenum coelum hinc inde tegentes.

Veſperi, Therm. in loco quieto gr. 123. ſuper aqua gr. 122$\frac{1}{2}$. in aqua gr. 121$\frac{1}{4}$. Tempeſtas eadem.

D. 12. Iulii. Mane, Thermometrum in loco quieto gr. 124. ſuper aqua gr. 123$\frac{1}{4}$. in aqua gr. 121$\frac{1}{2}$. ventus nullus, aer frigidiuſculus, pluuiola.

Poſt meridiem, Therm in loco quieto ordinario gr. 106. ſuper aqua gr. 117. in aqua gr. 120$\frac{1}{4}$. Toto hoc die ventus lenis SW. ſed nubes, tonitru praegnantes curſu contrario ambulant. Obſeruo etſi aer ſit calidior aqua, mercurium tamen, momento quo extraho, paulum cadere, id vero ſine dubio a dilatatione vitri dependere debet.

Veſperi, Thermom. in loco quieto gr. 123-24. ſuper aqua gr. 120. in aqua gr. $120\frac{3}{4}$. Coelum varium.

D. 13. Iulii. Mane, Therm. in aere quieto gr. 122. ſuper aqua gr. 121-122. in aqua gr. $121\frac{1}{2}$. Nebula ſine vento. Hora octaua nebula diſcutitur, et Therm. in ſole per minuta tria gr. 105. Meridies calidiſſima.

Veſperi, Therm. in aere quieto gr. 118. ſuper aqua gr. 119. in aqua gr. 121. Veſper placidiſſimus.

D 14. Iulii. Mane, ſeren. ventus S W. Therm. in aere quieto gr. 112. ſuper aqua gr. 119. in aqua $120\frac{3}{4}$.

Poſt meridiem, hora quarta, Therm. in loco quieto gr. 108. ſuper aqua gr. 117. in aqua gr. $119\frac{2}{3}$. ſerenitas, W. nubes vagantes.

Veſperi, Therm. in loco aperto gr. 118. ſuper aqua gr. 118. poſtquam immerſum fuerat aquae, et exemptum denuo ſibi relictum gr. 120. circiter; in aqua gr. 120. ventus deficit.

Ex hac obſeruatione video, me numquam ſatis accuratum gradum caloris aeris ſuper aqua expiſcari poſſe, ſed, dum Thermometrum ſuo ligno affixum eſt, ſemper adhuc aliquem calorem a ligno accipit, ſi illud antea in aere ſicco aut plane irradiato conſtiterat. Si vero lignum aquae immerſum fuit, tum et illud ſuum priſtinum calorem in aqua amittit, nec quicquam Thermometro communicare poteſt.

D. 15. Iulii. Mane, poſt nubila ſerenitas tranquilla, Thermometrum in loco quieto gr. 116. ſuper aqua gr. 119-120. in aqua gr. $120\frac{2}{3}$.

Meridie,

Meridie hora ſecunda, Therm. in loco quieto gr. 104. ſuper aqua gr. 115. in aqua gr. 119$\frac{1}{4}$. nubes, aer non adeo purus, hinc aeſtus ſolis per vapores eo penetrantior. Ventulus S.

Veſperi poſt occaſum, Therm. in loco quieto gr. 116$\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. 117. in aqua gr. 119$\frac{5}{6}$. ſuper aqua etiam omnes eosdem gradus 118. 119. etc. retinet, quos in aqua obtinet, ſi ſucceſſiue extraxeris et immerſeris.

D. 16. Iulii. Mane hora ſeptima ſerenum, tranquillum, Therm. in loco quieto gr. 116. ſuper aqua gr. 117. in aqua gr. 120$\frac{1}{6}$.

Aeſtus intenſus, ventulus S. Nubes interdum ſolem occultantes.

Meridie, hora ſecunda, Therm. in loco quieto gr. 99. ſuper aqua gr. 112$\frac{1}{2}$. in aqua gr. 118$\frac{2}{3}$. in ſole gr. 87.

Ventulus variat, nunc auſtralis, nunc occidentalis. Therm. hora ſexta gr. 118$\frac{1}{3}$.

Veſperi Nubes coelum plane obducunt, ventulus idem, Therm. in loco aperto gr. 117. ſuper aqua gr. 117. in aqua gr. 118$\frac{2}{3}$.

D. 17. Iulii. Mane, hora ſeptima nubes, ventulus SW. Therm. in loco quieto gr. 120. ſuper aqua gr. 120. in aqua gr. 119$\frac{1}{2}$. Hora nona, nubes hinc inde diſpercunt. Therm. in loco aperto gr. 110. ſuper aqua gr. 118. in aqua gr. 119$\frac{1}{4}$.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 106. ſuper aqua gr. 118. in aqua gr. 118$\frac{1}{3}$. Ventus SW. fortior. Nubes, ſol.

Pomeridie ventus fortis W.

Veſpe-

Veſperi ventulus S. deficit ſenſim, Therm. in loco quieto gr. 118. ſuper aqua gr. 121 - 122. in aqua gr. $118\frac{3}{4}$.

Dies aeſtuoſus, ni ventus temperaſſet aerem.

D. 18. Iulii. Mane, hora ſexta, Coelum nubilum, ventus W. Therm. in loco quieto gr. 122. ſuper aqua gr. $122\frac{1}{2}$, in aqua gr. 120.

Poſt meridiem, Therm. in loco quieto gr. 112. ſuper aqua gr. 118. in aqua gr. $118\frac{3}{4}$. ventulus W. frigidiuſculus.

Veſperi, nubes coelum tegunt, Therm. in loco quieto gr. 120. ſuper aqua gr. 120. in aqua gr. $119\frac{1}{2}$.

D. 19. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 115. ſuper aqua gr. 122. in aqua gr. 120. nubes pereunt, coelum ſerenum, calidum.

Meridie, hora tertia, Therm. in loco quieto gr. 107. ſuper aqua gr. 111 - 112. in aqua gr. 118. nubes redeunt. Hora quinta oritur ſubito turbo vehementiſſimus ex W. nubes infimae ſequebantur eius directionem, ſuperiores autem retinebant adhucdum curſum ex S W. Remiſit ſenſim ventus, et terminatus eſt pluuia. Therm. ſenſim cecidit, vt eſſet

Veſperi, hora octaua, Therm. in loco aperto gr. $121\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. $121\frac{1}{2}$. in aqua gr. $118\frac{1}{2}$.

D. 20. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 120. poſt horam in ſole gr. 100. in aere ſeptentrionali gr. 122. ſuper aqua gr. 124. in aqua gr. 119. Ventus frigidus N. aer ſerenus, flumen altum.

Meridie,

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 96. ſuper aqua gr. 113. in aqua gr. $117\frac{3}{4}$. flumen altum.

Veſperi poſt occaſum, Therm. in loco aperto gr. 130. ſuper aqua gr. 126. in aqua gr. $118\frac{1}{2}$. aqua cecidit. Ventus plane remiſit.

D. 21. Iulii. Mane, hora nona, Therm. loco quieto gr. 113. ſuper aqua gr. 121-122. in aqua gr. 119. Ventus O. Seren. Nubes.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 107. in ſole gr. 101. in aere ſeptentrionali gr. 118. ſuper aqua gr. 121. in aqua gr. $118\frac{3}{4}$. Ventus O. aeſtum ſolis reprimit. Seren.

Veſperi, hora ſexta, Therm. in loco quieto gr. 120. ſuper aqua gr. 121. in aqua gr. $118\frac{1}{2}$. Ventus O. Nocte Therm. gr. 124.

D. 22. Iulii. Therm. in loco quieto gr. 118. ſuper aqua gr. 122. in aqua gr. 120. Ventus O. frigidiuſculus ſeren.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 105. in ſole gr. 100. ſuper aqua gr. 110. in aqua gr. $118\frac{1}{2}$. Ventus O. ſeren. nubes ſpiſſae, vagantes.

Veſperi, Therm. in loco quieto gr. 118. ſuper aqua gr. $118\frac{1}{2}$. poſtquam extractum erat ex aqua, gr. $120\frac{1}{2}$, in aqua ipſa gr. 119. aer placidus, mitior, coelum ſerenum.

D. 23. Iulii. Mane, hora ſexta, Therm. in loco quieto gr. 124. ſuper aqua gr. 125. in aqua gr. 120. Coelum ſerenum tranquillum.

Post meridiem, Therm. in loco quieto gr. 105. in loco septentrionali gr. 112. in sole gr. 95. super aqua gr. $116\frac{1}{2}$. in aqua gr. 118. Ventus NO. fumum ex syluis ardentibus super vrbem pellit.

Vesperi, Therm. in loco quieto gr. 118. super aqua gr. 120-121. in aqua gr. $118\frac{1}{4}$. Ventus remittit.

D. 24. Iulii. Mane, hora octaua, Therm. in loco quieto gr. 106. super aqua gr. 120. in aqua gr. $118\frac{1}{2}$. Aer serenissimus, Ventulus ONO. placidissimus.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 99. in sole, sed a subtili fumo impedito gr. 94. in loco septentrionali gr. $115\frac{1}{2}$. super aqua gr. $116\frac{1}{2}$. in aqua gr. $117\frac{2}{3}$. Dies aestuosissimus.

Vesperi, hora septima, Therm. in loco quieto gr. 115. super aqua gr. 118. in aqua gr. $117\frac{1}{3}$. hora nona, Thermometrum in loco quieto gr. 116. super aqua gr. 119 in aqua gr. $117\frac{1}{2}$.

D. 25. Iulii. Mane, hora septima, Therm. in loco quieto gr. 109. super aqua gr. 120. in aqua gr. 118. Mane serenum, placidum, fumosum.

Meridie, hora tertia, Therm. in loco quieto gr. 96. in sole gr. 94. non altius propter fumum, in loco septentrionali gr. 108. super aqua gr. 115. in aqua gr. $116\frac{3}{4}$. Aer serenus, fumosus, propter Ventum ONO.

Vesperi, Thermometrum in loco aperto gr. 119. super aqua gr. $118\frac{1}{2}$. in aqua gr. 117.

D. 26. Iulii. Mane, Coelum nubilum, hora septima, Therm. in loco quieto gr. $115\frac{1}{2}$. [illegible] ...mente

...auia

pluuia gr. 121½. poſt pluuiam gr. 121. ſuper aqua gr. 121. in aqua gr. 117½. aer nubilus, tranquillus, refrigerans, aequalis. SO.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. 116. transeunte pluuia in ſole gr. 100. ſole tecto gr. 106. in loco ſeptentrionali gr. 110. ſuper aqua gr. 115. in aqua gr. 117. SO.

Veſperi, Therm. in loco aperto gr. 118. ſuper aqua gr. 118. in aqua gr. 117.

D. 27. Iulii. Mane, Therm. in pluuia gr. 122. in aqua gr. 117½. SSO.

Meridie, nubila disiecta, Therm. in loco quieto gr. 110. ſuper aqua gr. 115. in aqua gr. 117¼.

Veſperi, Thermom. in loco quieto gr. 117. ſuper aqua gr. 117. in aqua gr. 117½.

D. 28. Iulii. Mane, Thermom. in loco quieto gr. 115. in loco ſeptentrionali gr. 118. ſuper aqua gr. 120. in aqua gr. 117½.

Poſt meridiem, hora quinta, Thermom. in loco quieto gr. 111. ſuper aqua gr. 112. in aqua gr. 117. Hoc die ſereno ſatis, ventus ex SO, ſenſim mutatur in SSW. et W. nubibus interim ex SO. currentibus.

D. 29. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 112. in loco ſeptentrionali gr. 115. ſuper aqua gr. 118. in aqua gr. 117¼. Ventus denuo SO. ſeren.

Meridie, hora duodecima, Therm. in loco aperto gr. 110½. ſuper aqua gr. 114½. in aqua gr. 117. in ſole gr. 84.

Pomeridie, hora quarta, post solis aestum nubes spissae ex oriente surgunt, Ventus O. Thermom. in loco aperto gr. 112. in aqua gr. $116\frac{1}{2}$.

Hora quinta surgit pluuia ingens cum tonitru, Therm. in loco exposito pluuiae gr. 115. Ventus varius. O. NO. N. NW. N. O.

Vesperi, Therm. in loco ordinario gr. 120. in aqua gr. 117.

D. 30. Iulii. Mane, nebula, quae sensim dissipatur, seu altius ascendit. Therm. in loco aperto ab hora sexta ad septimam a gr. 121-117. super aqua gr. 118. in aqua gr. 118.

Meridie, in sole gr. 82. hora tertia in loco aperto gr. 110. super aqua gr. 114-115. in aqua gr. $116\frac{1}{2}$.

Vesperi in loco aperto gr. 120. super aqua gr. 121. in aqua gr. $116\frac{3}{4}$. O. Dies serenus, sparsis nubibus.

D. 31. Iulii. Mane, hora septima gr. 120. in loco aperto, super aqua gr. 121. in aqua gr. 118. Dies serenus, sparsis nubibus.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. 106. super aqua gr. 117. in aqua gr. $116\frac{1}{2}$. Ventus O. mutatur in W.

Vesperi, Therm. in loco aperto gr. 121. super aqua gr. $120\frac{1}{2}$. in aqua gr. $116\frac{3}{4}$. Ventus denuo O.

AVGVSTVS.

D. 1. August. Mane, Therm. in loco aperto gr. 121. super aqua gr. $119\frac{1}{2}$. in aqua gr. 118. O. seren.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. 116. super aqua gr. 118. in aqua gr. $117\frac{1}{2}$.

Vesperi,

Veſperi, Therm. in loco aperto gr. 120. in aqua gr. 118. Hodie, licet Ventus O. fluuius tamen altus. Poſt meridiem ſerenum.

D. 2. Auguſt. Mane, Therm. in loco aperto gr. $120\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. $120\frac{1}{2}$. in aqua gr. 118. flumen altum.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. 99. in ſole gr. 84. ſuper aqua gr. 115. in aqua gr. $116\frac{3}{4}$. horis pomeridianis fluuius cecidit.

Veſperi, Therm. in loco aperto gr. 114. ſuper aqua gr. 118. in aqua gr. $117\frac{1}{4}$. Totus dies ſerenus, Ventus ONO.

NB. Quamuis per meridiem et veſperam ſit aeſtus ſummus, nihilominus noctu et mane aer eſt frigidus.

D. 3. Auguſt. Mane, Thermom. in loco ordinario gr. 124. ſuper aqua gr. 125. in aqua gr. 118. Coelum nubilum frigidum. V. ONO.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. $119\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. 121. in aqua gr. 118. Coelum incipit clareſcere. Ventus ONO. fortis et frigidus.

Veſperi, Therm. in loco aperto gr. 121. ſuper aqua gr. $120\frac{1}{2}$. in aqua gr. 118. Coelum ſerenum, aer paulo mitior. Ventus remittit. flumen ceciderat ad 4. pedes.

D. 4. Aug. Mane, Coelum ſerenum, ſed aer frigidus, ita vt nocte antecedente multum ſudarent feneſtrae. Ventus O. Therm. in loco aperto et ſeptentr. hora ſexta gr. 126. hora nona gr. 123. ſuper aqua gr. 124. in aqua gr. 120.

Meridie, Therm. in fole gr. 104. fuper aqua gr. 119. in aqua gr. $118\frac{3}{4}$. aqua adhuc ad tres pedes creuit. O. exiguus.

Vefperi in loco aperto, Therm. gr. 121. fuper aqua gr. 121. in aqua gr. 119.

D. 5. Auguft. Totus dies nubilus. Mane, Therm. in loco aperto gr. 125. meridie gr. 115. fuper aqua poft meridiem gr. 118. in aqua gr. $120\frac{1}{4}$. fine Vento.

D. 6. Auguft. Totus dies nubilus fine vento. Mane, Therm. in loco aperto gr. 124. meridie gr. 116. fuper aqua poft meridie gr. 120. in aqua gr. 121.

D. 7. Auguft. Mane nubilum, ventulus N. Therm. in loco aperto gr. $124\frac{1}{2}$. fuper aqua gr. 124. in aqua gr. $121\frac{1}{2}$.

Meridie, Coelum nubilum, fed aer paullo clementior tamen, forte ob mutatum ventum in W. Therm. in loco aperto gr. 118. fuper aqua gr. 122. in aqua gr. $122\frac{1}{2}$. dum Thermometrum extrahis, mercurius adhucdum cadit fere ad $122\frac{1}{2}$. deinde demum iterum afcendit ad gr. 122. hoc partim fit ob dilatationem vitri in aere aqua calidiore; partim fortaffe propterea, quod aquae guttulae vitro adhaerentes in aere libero expanfae exhalent et frigidiores fiant, vnde et ☿ refrigeratur: haec autem refrigeratio eft tanto fenfibilior, quo magis frigus aquae et aeris inter fe aequantur, quo calidior aer eo minus fenfibilis lapfus, ita, vt tandem in fola quiete mercurius fubfiftat; quo frigidior contra aer, eo celerius mercurius labitur, quando extrahitur. Denuo etiam obferuo, mercurium non ad eam labi altitudinem, quando Machina

ex

ex aere aperto ſuper aqua tenetur, ad quam labitur, quando per momentum vnum vel alterum in aquam immerſa fuit; idque ob rationes iam ſupra allatas. d. 14-15. Iul.

Poſt meridiem coelum paulum clareſcit.

Veſperi, Therm. in loco aperto gr. 120. ſuper aqua gr. 124. in aqua gr. 122$\frac{1}{2}$.

D. 8. Auguſt. Mane, Coelum ſerenum, ventulus WSW. Therm. in loco aperto ſeptentrionali gr. 122$\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. 123. ſed mox extract. ex aqua gr. 123$\frac{1}{2}$. in aqua gr. 123$\frac{1}{2}$.

Meridie, Serenitas, Nubibus ſparſis ex ſeptentrione oriundis. Therm. in loco ſoli expoſito gr. 84. in loco aperto ſeptentrionali gr. 112. ſuper aqua propter ſolem non experiunda altitudo, in aqua gr. 123. Ventulus WSW.

D. 9. Auguſt. Mane, nubila, mox pluuia ingens, Ventulus S. inde quoque nubes Thermom. in loco aperto gr. 127. in pluuia et ſuper aquam gr. 128. in aqua gr. 123$\frac{1}{6}$.

Meridie in pluuia gr. 122. in ſole transmicante gr. 110. ſuper aqua gr. 125. in aqua gr. 123.

Poſtmeridiem, coelum clareſcit, ſolis radii aquae incumbunt, ventus nullus.

Veſperi, Therm. in loco aperto gr. 127$\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. 127$\frac{1}{2}$. in aqua gr. 122$\frac{1}{2}$.

D. 10. Auguſt. Nocte antecedent epluuiae ingentes. Ventus W. frigidior. Therm. in loco aperto gr. 125. ſuper aqua vltra gr. 126. in aqua gr. 123.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. 119. ſuper aqua gr. 119. in aqua gr. 122$\frac{3}{4}$.

Veſperi,

Vesperi, Therm. in loco aperto gr. 125. super aqua gr. 126. in aqua gr. 123.

D. 11. August. Mane, nubes, hora nona serenascit, Therm. in loco aperto gr. 120. super aqua gr. 128. in aqua gr. 123. Ventus O.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. 115. super aqua gr. 124. in aqua gr. $122\frac{1}{2}$. Ventus O. fortior. Nubes sparsae.

Vesperi, Thermom. in loco aperto septentrionali gr. 128. super aqua gr. $127\frac{1}{2}$. fortasse propterea, quod aqua iam exhalet, et accumbenti aeri calorem suum communicet; in aqua gr. $122\frac{1}{2}$.

D. 12. August. Mane, hora septima, Therm. in loco aperto gr. 132. in alio aperto septentrionali gr. 132. super aqua gr. $129\frac{1}{2}$. in aqua gr. $123\frac{1}{4}$. Ventus O. frigidus, nubibus sparsis coelum obductum.

Propter excursionem Peterhofiam factam, obseruationes per dies aliquot omissae sunt.

Fuit autem d. 13. 14. Aug. tempestas turbida et pluuiosa, d. 15. coelum clarescere quidem coepit, sed vento flante O. frigido, forti. interea

D. 15. August. Post meridiem, Therm. in aqua fuit gr. 126.

D. 16. August. Mane sereno, tranquillo, Therm. in loco aperto gr. 130. super aqua gr. 128. in aqua gr. 128. Sed NB. quamuis mercurius ad eandem altitudinem stabat, extracto tamen Thermometro statim descendit ad gr. 129. quod confirmat thesin de guttulis aqueis adhaerescentibus.

Cur

Cur nunc aer ſuper aquam non aeque frigidus aut frigidior eſt quam in loco aperto et ſeptentrionali? an propter aquam calidiorem nunc exhalantem? vid. d. 11. 12. Aug.

Poſt meridiem, Therm. in loco aperto gr. 127. vento fortiſſimo NO. expoſitum gr. 129. ſuper aquam gr. $127\frac{1}{2}$ in aqua gr. $127\frac{1}{2}$. poſt extractionem ſuper aqua ad gr. 130.

Ob valetudinem, quae me intra conclaue detinuit, iterum omiſſa obſeruatio: interea fuit tempeſtas mediocris.

D. 21. Auguſt. Poſt meridiem, Therm. in ſole gr. 95. ſuper aqua quo ſol nondum penetrauerat, gr. 127. in aqua gr. 128 ſine vento.

D. 22. Auguſt. Mane, nebula, Thermom. in loco aperto gr. 132. poſt horam in loco ſeptentrionali gr. 128. ſuper aqua gr. $127\frac{5}{6}$. in aqua gr. $128\frac{1}{2}$. iterum ſuper aqua gr. $128\frac{2}{3}$. Ventus nullus.

Poſt meridiem, hora prima in ſole, coelo non ſatis claro, gr. 98. extra ſolem in loco ſeptentr. gr. 117. ſuper aqua gr. 119. in aqua gr. $127\frac{1}{2}$. iterum ſuper aqua gr. 123 Ventus nullus; vel certe paruulus SW.

D. 23. Auguſt. Mane, nebula, ſine vento, aer frigiduſculus. Therm. in loco aperto gr. 130. in aqua gr. 128.

D. 27. Auguſt. antecedentibus diebus pluuioſis duobus, mane, nebula, Therm. in loco aperto gr. 130. ſuper aquam gr. 128. in aqua gr. $127\frac{1}{2}$. denuo in aqua gr. 129. ſine vento.

Tota dies pluuioſa, nubibus a ſole nonnumquam diuiſis.

Veſperi, Therm in loco aperto gr. 125. in aqua gr. 127. ſuper aqua gr. 126.

III. COROLLARIA DEDVCTA EX OBSERVATIONIBVS.

Aquae Calor, dum ſub glacie tecta fluxit illa, nec decrementum paſſus eſt nec incrementum, ſed per totam hyemen idem permanſit, et quidem ita, vt mercurius in Thermometro, quo vſus eram, ſemper haeſerit circa gradum (152) centeſimum quinquageſimum ſecundum, quotiescunque in aquam intrudebatur inſtrumentum; qualemcunque deinde faciem aer induxerit. Non igitur ingruente gelu frigidior vmquam facta eſt aqua, nec mitiore et remittente tempeſtate calidior. Et ne quis putet, reſiſtentiam forte quandam in tubo ipſo fuiſſe, qua impeditus erat Mercurius, ne altius aſcenderet, experimentando dubium omne ſuſtuli. Transtuli enim in locum calidum inſtrumentum, et mercurium facili negotio ad gradum 80. pepuli. Apparuit hinc non modo filum mercuriale in Tubo, aequale et continuum, ſed et mox in aqua frigida ad priſtinum ſuum gradum 152. delapſum eſt. Vnde de phaenomeno certiſſimus eſſe poteram.

Quando Mercurius in aere libero expoſitus haerebat circa gradus 152-156. ille gradus caloris adhuc aptus erat, vt nix in eo deſcenderet ac conſiſteret, vti videre eſt. d. 4. 8. 9. 10. 17. 28. 30. Martii. Quando autem aſcendit ad gr. 150, 148. et vltra: nix mox liqueſcebat.

Haec memorata phaenomena confirmant ea, quae iam ante de calore aquae nota fuerunt. Eſt nimirum certus aliquis gradus, vltra quem ſi deſcendit, aqua non amplius

amplius aqua manet, ſed in glaciem conuertitur, et quidem breuiſſimo temporis ſpatio; non enim aqua ſenſim ſenſimque compactior fit, et congelaſcit, vti alia quaedam liquida, vt cera, adeps, et omnia olea. Determinauit *Cel. Boerhaue* in Chymia ſua hunc gradum, ad altitudinem Mercurii in inſtrumento *Fahrenheitiano* gr. 32-33. in inſtrumento noſtro autem indicatur gr. 152. qui quidem gradus quam proxime inter ſe concordant, poſtquam proportio inter *Boerhauianum* et noſtrum inſtrumentum innotuit; et quia in noſtro Thermometro mercurius in 10000 partes aequales diuiſus eſſe ſupponitur: ſequitur volumen mercurii in aqua feruente eſſe ad eiusdem volumen in aqua gelaſcente, vt 10000: 9848. (9850.)

Neceſſario igitur aquae fluens ſub glacie hunc eundem infimum gradum caloris conſtanter conſeruat. Id quidem iam nunc ex obſeruatione luculenter conſtat; ſed poteſt quoque haec veritas per ratiocinium facile erui; nam ſi velles, vt minueretur, tunc neceſſario in glaciem conuerteretur; ſi vero increſcere debeat, id vicinia accubantis glaciei impediet. Nam quia duo vicina corpora tamdiu mutationem caloris ſecum communicant, donec ad aequilibrium peruenerint; aqua fluente calidior fieri non poterit. Imo nulla eſt ratio, vnde calor ille augeatur. Sunt enim non niſi duo corpora, quae hoc augmentum afferre poſſent, Sol nimirum, et aer. Quamdiu autem glacies incumbens aquae, horum duorum corporum virtute non mutatur, tam diu nec aqua ipſa ſubterlabens mutationem perſentiſcet.

Quia idem aquae calor perfiftit, donec fluuius ab omni glacie liberatur: fequitur, falfam eft hypothefin illorum, qui rationem reddere fatagentes, quare foluta hyeme, glacies, cuius altitudo ad duos tresve pedes vsque excreuerat, Menfibus Martio et Aprili tandem minuatur et fragilis fiat? cauffam allegare foleant, illam iam nunc confumi tam fuperne quam inferne, fuperne propter actiuitatem folis, inferne, quod aqua calidior glaciem liquefaciat. At vero aqua femper aeque frigida manet, nihil igitur decedit glaciei dum aquae accubat, nifi per motum et frictionem, vti experientia comprobat. Nam fi foramen rotundum in glaciem inciditur, illius ora inferior, quam aqua lambit, fucceffu temporis obliqua fit, fecundum directionem aquae fluentis. Motus autem aquae et frictio non folis menfibus dictis, fed tota hyeme locum habet. A radiante igitur Sole et aere tepidiore, vel et a pluuia calidiore et copiofa omnia vnice dependent.

Quando inftrumentum ex aqua extrahebatur, ros aqueus cylindro vitreo adhaerens ftatim in glaciem conuerfus fuit, quamdiu aeris calor inferior erat calore aquae. Illi igitur, qui in hisce regionibus, rigente bruma, ex balneis calidiffimis, mox in fluminis aquam fub glaciem fe praecipitare folent: tantam mutationem corpori fuo non inducunt, quam qui immediate ex balneo in aerem liberum fe conferunt.

Poftquam aqua glacie liberata erat, vt liber aditus aeri pateret, calor aquae increfcere coepit, ita vt primo Maii die mercurius ad gradum 148. afcenderet. Differentia igitur erat intra duas hebdomadas, 4. graduum.

Factum

Factum eſt autem, vt illis ipſis Calendis Maii, glacies ex lacu Ladoga adueheretur. Cum igitur denuo in calorem aquae haec occaſione inquirere animus erat, deprehendi mercurium labi ad gr. 151. et ſi quando fruſtum glaciei in vicinia inſtrumenti flueret, ad gr. $151\frac{1}{2}$. Mutationes igitur caloris aquae, in qua experimenta capiuntur, non tam dependent a mutatione aeris incumbentis in loco obſeruationis, quam potius a temperatura omnis illius aeris, ſub quo aqua per omnem ſuam viam defluxit. Non enim in exemplo hoc putandum eſt, aquam denuo tam ſubito frigefactam eſſe, ſed illa ad hunc gradum frigida vna cum glacie illa noua affluxit, in cuius vicinia energia ſolis et aeris in aquam penetrare nondum poterat.

Circa obſeruationes aeſtate factas varia inciderunt incommoda, quae laborem difficilem reddiderunt, quamuis omnem induſtriam adhibuerim, quae in re numquam hactenus tentata poſci poteſt.

Ante omnia quam clariſſime apparuit, Thermometra noſtra plane non idonea eſſe ad expiſcandum caloris verum gradum in aere generaliter, ſed, ſi duo obſeruatores in locis non adeo longe diſſitis inſtrumentis aequalibus ad mutationem caloris attendant eodem tempore, numquam tamen phaenomena notata concordatura eſſe. Huius defectus culpa non in inſtrumento, ſed in ipſa natura caloris quaerenda eſt, quippe qui omnibus corporibus inhaeret, et tam diu ſe cum aliis vicinis communicat, quamdiu haec frigidiora ſunt. Neceſſario igitur aer, in vicinia corporum calidiorum aut intra loca anguſta et quieta deliteſcens calidior eſſe debet, quam ille, qui aut longe ab aliis corporibus

 diſtat,

diſtat, aut plane liber eſt. Inde accidit, vt vno eodemque tempore, alium caloris gradum notari a Mercurio deprehenderim, in loco quieto in vicinia domuum, vbi ventus non adeo libere vndique accedere poterat, alium in loco aperto, alium in loco ſine ſole, alium in loco a ſole irradiato, alium in plaga ſeptentrionali, alium in meridionali; alium denique ſuper terra, alium ſuper aqua fluente, ex. gr. d. 13. 14. 15. Iunii. alio tempore parum differebat, imprimis poſt pluuiam, vt d. 9. Iulii. Quae quidem inconſtantia quamuis impediat, ne accurate ſciam relationem inter calorem aeris et aquae: non tamen prohibet, quominus varias differentias caloris aquae ipſius ac temperaturae aeris inter ſe expiſcari poſſim.

Inſtitutum quidem erat, ab initio, ad calorem aeris quieti, et liberi attendere; inſequentibus vero temporibus, et quidem d. 13. Iunii didici, oportere me probe etiam notare calorem aeris ipſi aquae immediate incumbentis, ni vellem decipi in indagando calore aquae. Vidi enim tum temporis, poſtquam inſtrumentum ex aqua extraxeram, Mercurium adhucdum notabiliter cadere, cuius quidem rei nulla alia cauſſa ſubeſſe poterat, quam quod aer incumbens multo frigidior eſſet quam aqua, et aer ille, in quo alias Thermometrum obſeruare ſolebam.

Multum impedimenti quoque attulit diuerſa fluminis altitudo aut profunditas, itemque motus aquae ex vento aeſtuans. Illud enim in cauſa fuit, vt non accedere poſſem ad diſtantiam requiſitam; iſtud, vt non ſatis promte poſt extractionem gradum mercurii obſeruare mihi liceret, ſed nunc maiorem nunc minorem, pro diuerſitate aeris incum-

incumbentis, propter moram adipiſcerer; hoc, vt inſtrumentum fluctuaret, nec aequabiliter ab aqua lamberetur.

Imprimis oportebat, vt celeritate, qua potui, dexterrima ad gradus reſpicerem, poſtquam extractum erat inſtrumentum; Nam vel parciſſima mora, imprimis ſi calor aquae et aeris incumbentis multum differebat, varias incommoditates peperit: ſiquidem mercurius poſt extractionem nonnumquam paululum cadebat, mox vero aſcendebat, nonnunquam vero poſt lapſum aliquantulum quieſcebat, et tum demum aſcendebat, vt d. 12. 14. 15. Iul. d. 7. 11. 16. Aug. quod ſine dubio inde prouenit, partim, quod cylindrus vitreus in aerem calidiorem delatus, ſecundum generalem regulam de vi caloris expanſiua, prior extendebatur, vt hinc mercurius ſpatioſiorem capacitatem nactus neceſſario paululum laberetur; partim, quod guttulae aqueae cylindro extracto adhaerentes, in aere, etſi calidiore, exhalarent, hinc quadantenus refrigeſcerent, et refrigerium ſuum cum mercurio intus contento communicarent. Ex quibus omnibus apparet, quam circumſpecta ſolertia opus fuerit in negotio, quod ab initio facile videbatur, ſed perplexo tamen, quia natura vbique etiam in minimis, leges ſibi impoſitas conſtanter obſeruat. Hinc raro vnico experimento contentus eram, ſed plerumque tribus quatuorue vicibus rem repetii, vt de obſeruatione facta certus eſſem.

Phaenomena autem, quae in mutatione caloris aquae fluentis per aeſtatem occurrerunt, praecipua haec ſunt:

1.) Calor aquae lente creuit, ita vt ſummum incrementum vno die d. 25. Iun. factum, eſſet duorum

duorum graduum; deinde d. 20. 23. Iun. item d. 16. et 19. Iul. incrementa erant ad gr $1\frac{1}{2}$. Qui quidem dies etiam omnium erant aestuosissimi.

2.) Quicquid de die accessit, illius saltim dimidium noctu iterum decessit; si quidem illae frigidiores essent, et longiores, vento septentrionali simul flante. Vt d. 16. 17. 18. Iul.

3.) Noctes breuissimae mense Iunio, siquidem calidae erant, vt d. 27. Iunii. parum vel nihil immutarunt.

4.) Incrementa caloris incidebant plerumque in horas pomeridianas, queis et aer et aqua solis radios et energiam experiebantur, vt toto mense Iulio et imprimis d. 29. Iul.

5.) Aqua caloris gradum adeptum pertinaciter retinuit, nec ita facile tempestate alia ingruente, nisi post aliquot dies, illum dimisit, vt vltimo Iun. item d. 8. 9. 10. 11 - 16. Iul.

6.) Calor aquae summus erat mane, d. 29. Iul $117\frac{1}{4}$. gr. nec non d. 25. 30. 31. Iul. et 1. 2. 3. Aug. 118. grad. Meridie autem, d. 30. Iul. $116\frac{1}{2}$. gr. vt igitur augmentum totum caloris aquae hac aestate fuisset, $35\frac{1}{2}$. grad.

7.) D. 3. August. calor aquae vltima vice summum gradum 118. attigerat; ex quo tempore iterum lentis gradibus decreuit.

DE

DE DVOBVS LAPIDIBVS FIGVRATIS.

AVCTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

CVm menſe Auguſto, anni ſuperioris 1733, in *Liuonia* prope littora *Sinus Finnici* verſarer, atque inter alia etiam caſtellum aliquod dirutum, quod *Tolisburgum* vocatur, ſpectarem: accidit forte vt ibi, inter multos hinc et inde ſparſos lapides arenoſos, inuenirem duos *Figuratos*, quorum primus aſpectus ideam ſtatim illorum lapidum animo meo reuocauit, quorum pereruditam deſcriptionem et explicationem *Cl. Gmelinus* noſter *Tom. III. Commentariorum* inſeruit. Multum laetatus ego, quod ex hoc qualicunque meo reperto aſſertis citato loco explicatis accedere forſan aliquid poſſet, lapides huc attuli, traditurus eos *Cl. Gmelino* tanquam ſuos; is vero cum iam profectus hinc eſſet, hoc meo propoſito excidi. Quamuis itaque in hoc ſtudiorum genere me non adeo verſatum eſſe ingenue fatear: malui tamen, quid in re noua poſſim, periclitari, quam haec, qualiacunque demum ſint, plane ſupprimere. Tabula XII.

§. 2. Littora maris eo in loco, vbi lapides hosce reperi, munita ſunt longo tractu collium haud leuiter aſ-

 ſurgen-

surgentium, ita tamen vt a radice collium planities adhuc aliqua supersit versus mare ipsum, repleta vbicunque fere sterili arena; huic arenae interspersi sunt lapides quamplurimi ex eadem arena concreti, et quasi tantum collecti, qui solius etiam manus agitatione in pristinam arenam conteri facile possunt. Iacebant mei non multum inter se dissiti, et liberi, in superficie arenae, atque aliud quiddam inuestiganti sponte se obtulerunt, vtrumque vero quamuis sine opera obtinuerim, plures tamen postea, ex industria quaerens, inuenire non potui.

§. 3. Tota exterior figura horum lapidum ita comparata est, vt facile persuadere sibi quis posset, ortum illos suum debere spinae dorsi cum inserta medulla, animalis cuiusdam aquatici; attentius vero eos consideranti distingui merentur in iis quatuor praecipue 1. *Patellae*, 2. *Alueolus*, 3. *vtrique horum adhaerens Materia testacea*, et 4. *Lapis communis toti massae affixus*. *Patellae*, ab vna parte sunt concauae, conuexae ab altera, et vtrumque circulariter, ad sensum, ita quidem vt in Figura A recta concauitatem subtendens sit 130 partium millesimarum pedis Rhenani, quas in sequentibus quoque adhibeo; in Figura B autem 152. Interuallum, quo vna patella ab altera distat, *ba*, est vbique fere idem, et in vtroque 40 partium. In Figura B, in cuius originali patellas *a* et *b* separaui a reliquo lapide, vti paulo post dicetur, distinctas videre licet testae cuiusdam reliquias, valde tenues, leues, et albicantes: extracto quoque alueoli frusto *c* exacte patet, quod hac materia testacea integra patellae concauitas et conuexitas fuerint inductae et obductae.

§. 4.

§. 4. Perforatae conſpiciuntur hae patellae, in earum peripheria *Alueolo* in rectam extenſo, rotundo, conico. Nempe in Figura A inueni diametrum huius alueoli maiorem apud *c* 50. ſed apud *d* 47. partium, ita vt haec diameter a loco *c* vsque ad *d* in longitudine 211. partium, aliquantum decreſcat. Ipſe vero hic alueolus *circularis* non eſt, ſed *Ellipticus* in ratione axis maioris *ef* ad minorem *gh* vti 16. ad 15. ſed in figura B diameter maior apud *c* eſt 56. apud *d* vero 46. partium, ita vt hic alueolus in longitudine 214. partium multo magis decreſcat, quam prior. Erit ergo alueolus Figurae A ſi aequaliter a baſe *ehfg* porrectus eſſet $3\frac{1}{2}$ pedum Rhenan. in Figura B autem multo breuior, nempe $1\frac{1}{5}$. pedis Rhen. Id vero commune eſt vtrique lapidi, quod alueolus a concauitate patellae ad conuexitatem ipſius progrediatur decreſcendo. In Exemplari Figura B repraeſentato, conuexitatem cylindricam atterendo adimi iuſſi, vt alueolo planities 96. partes lata inducta fuerit; quo facto alueolum in *e* diffractum inueni ita, vt adhibita aliqua opera, potuerit eius pars *de* extrahi, ſimul etiam duo patellarum *a* et *b* fragmenta auferri. Extracto igitur hoc alueoli fruſto, obſeruaui in eius parte inferiori, qua per patellas tranſit, non modo veſtigia diſtincta linearum ellipticarum, quae iuncturis patellarum exacte reſpondent; ſed praeterea quoque reſiduum alicuius materiae teſtaceae adhaereſcentis, quae facile abradi poteſt. Perſpicitur etiam, quod haec materia teſtacea circa alueolum conſtituerit tubum transuerſim per patellas transeuntem, id quod non minus ex originali Figurae A concludi poteſt, vt pote in cuius extremitate *c*, quam ſimi-

Nn 2 liter

liter atterendo in planitiem reduci curaui, facies elliptica alueoli peripheria lutei coloris cincta est, quam nihil aliud esse puto, nisi peripheriam extimam eiusdem tubuli testacei alueolum ambientis. Apparent quoque in Figura A, in cuius dorso cylindrico alueolus prominet, lineolae transuersae *k i*, vel *m n*, *o p*, corpuscula transuersa vocatae a *Cl. Gmelino Dissertationis suae* §. 7. quas vero nihil aliud esse credo, quam continuationes, aeris iniuria non nihil deformatas, antecedentium linearum ellipticarum, patellarum iuncturis respondentium, quas in extracta alueoli parte *e d* Figura B detexi.

§. 5. *Lapidis communis* massa informis affixa est vtrique nostro lapidi in parte Figurarum A et B auersa, qua sine dubio, prout ex *Dissertationis Gmelinianae* §. 16. patet, aliis olim lapidibus fuerunt annexi, casu vero quodam, successu temporis, ab iisdem abrupti. Apparet haec massa lapidis communis in Figura A sub literis *t q r v*, et in Figura B sub literis *f g h*.

§. 6. De *materia testacea* iam dixi, eam in quibusdam locis distinctam apparere, non solum circa massam lapideam alueoli; sed etiam in concauitate et conuexitate patellarum; quibus hoc vnicum addo, quod in Figura B frustulum aliquod satis paruum facile separauerim, quod manifeste testaceae cuiusdam materiae faciem et naturam tenet, crassitiem vero habet 2 partium millesimarum pedis Rhenani.

§. 7. Vtriusque lapidis magna cura etiam examinaui *pondus*, atque inueni lapidis A fuisse pondus in aere

4455. granorum, in aqua vero tantum 2764. gr. ita vt in aqua amiſerit 1691. gr. lapidis vero B pondus inueni in aere 4495. gr. in aqua autem 2758. gr. qui ergo amiſit in aqua 1737. gr. vnde deduxi denſitatem lapidis A = 2.63; lapidis vero B denſitatem = 2.58 poſita denſitate aquae = 1.00. Vt comparationem aliquam inſtituere poſſem, examinaui quoque lapidis campeſtris vulgaris pondus in aere pariter et aqua, atque illud inueni 6822. gr. hoc vero 4229. gr. quod iacturam ponderis indicat 2593. gr. et denſitatem huius lapidis commonſtrat 2.63. praeciſe eandem, quam Fig. A exhibuit: vnde et Figuratum lapidem A, et campeſtrem hunc, ex eadem materia lapidea concretos eſſe credendum eſt. Concham deinde quandam vniualuem, mediae magnitudinis, eodem modo librae examini ſubieci, et inueni pondus eius in aere 919. gr. in aqua 527. gr. ita vt decrementum ponderis fuerit 392. gr. ex quibus eius denſitas prodit 2.34. ſuppoſita vbique eadem, qua ante, aquae denſitate.

§. 8. Conueniunt haec omnia cum iis, quae *Cl. Gmelinus* de his lapidibus tradidit, quare eo minus dubito eidem ſententiae accedere, quam de origine horum lapidum fouet, hancque iure maximo adſcribi poſſe puto *Nautilorum* generi, cuius, per medium horizontaliter ſecti, elegantiſſimam delineationem dedit *Clariſſ. Ioh. Philippus Breynius Med. Doctor* in Diſſertatione Phyſica de *Polythalamiis.* Omnia enim et ſingula, quae circa patellas teſtae obductas, et alueolum eadem teſta circumdatum, in praecedentibus enarraui, aptiſſime ad hoc conchyliorum genus

 quadrant,

quadrant, vtpote cuius thalami, fracta eo in loco, vbi lapis communis adhaeret, testa exteriori, lapidea materia fuerunt repleti, testa naturali superstite adhuc alicubi, alibi vero exesa, et temporum successu detrita; ita vt hi lapides omnino *formati sint in cauitatibus Nautili sub terra*, *tum externam Nautili figuram*, *tum internam organicam fabricam referentes*; quam *Nautilitarum* definitionem *Cl. Breynius* exhibet *l. c. Cap. III.* §. 29. Itaque etiam conuenientissime citatus *Clar. Auctor* lapides hosce *Gmelinianos*, qui iidem sine dubio sunt cum meis, *Orthoceratitis* accenset, speciei Polythalamiorum *l. c. Cap. VI.* §. 59. quamuis non negare velim, eos etiam sic dictis *Lituis*, alteri *Polythalamiorum* speciei, posse accommodari.

§. 9. Recenset *Cl. Gmelinus*, lapides tales figuratos inuentos in *Insula Oelandia*, quos possidet *Reuer. Iacobus a Melle*; repertos in Silesia, testante *Volckmanno*, *in Silesia subterranea*; extractos in *Borussia*, teste *Helwingio* in *Lithographia Angerburgica*; effossos in *Ingria*, ab *ipso*: annumero his repertos meos ad littora *Sinus Finnici prope Reualiam*; quibus adiicio *Nautilitas* varii generis, repertos in Ducatu Würtembergico, quos possidet *Cl. Breynius*; nec minus etiam eos, quos *Cl. de Iussieu* inuenit in *Gallia*, descriptos in *Commentariis Academiae Scientiarum Parisinae Anno* 1722. *pag.* 319. *Editionis Batauae.* Accedit insuper tantus *Cornuum Ammonis numerus*, quae per totam Europam inueniuntur, et huic *Polythalamiorum* generi subiacent. Totam igitur Europam hoc lapidum genus in locis subterraneis continere, atque id magnae inundationi maris alicuius, in quo hoc con-

chylio-

chyliorum genus reperitur, deberi, merito indicandum est. Incolis vero suis talia Conchylia annumerat, quantum constat, solum *Mare Indicum*, quod *Nautilos* alit, quorum concha est articulata, et in thalamos diuisa, qualia specimina petrefacta sunt nostri lapides; quos enim *Nautilos* producit *Mare Adriaticum* et *Mediterraneum*, ab *Aristotele* et *Plinio* allegatos, illi articulatione et thalamis carent, nec nisi vnica testa continua et contorta constant, eaque adeo tenui, vt hinc *Papyraceorum* nomine veniant. Ex *Maris Indici* igitur excursu, totam Europam peruadente, lapidum nostrorum originem cum *Cl. de Iussieu* repetere fas est, neque mirandum, quod talia conchylia, quorum exuuiae circa littora *Maris Baltici* reperiuntur, in ipso mari non amplius supersint; aut statuendum, quod ea in morem piscium et cancrorum pristinam sedem suam deseruerint: nunquam enim ibi fuerunt, sed ex *Indico Mari*, tanquam ex patria sede, vi fluctuum iactata, in nostras terras, quasi in exilium, sunt pulsa.

§. 10. Caeterum natura soli *Ingrici*, quam *Clar. Gmelinus* ope terebrae metallicae inuentam, recenset, vbi terra primo deprehensa est *duas*, lapis calcarius, cui nostri lapides figurati immixti sunt, *octo*, lapis scissilis *vnam*, et arena *multas*, perticas profunda, apprime confirmat naturam soli etiam illius *Liuonici*, quo iuxta littora maris protenditur. Animaduerti enim ex itineris totius, vsque ad *Tolisburgum*, cursu, quod, habito interspersorum montium respectu, veniatur semper in loca magis humilia, ita vt relicta vrbe *Narua*, terra, quae in *Ingria* duarum

duarum tantum perticarum profunditatem habet, fere amplius nulla superſit, ſed ibi omnia lapide calcario ſtrata quaſi ſint; vlterius deinde proficiſcenti, et ad ipſa littora maris accedenti, patuit, me quoque lapidis huius calcarii, octo perticas profundi, terminum inferiorem attigiſſe, atque in eum locum, vbi profundum arenae ſtratum incipit, deſcendiſſe; ita vt credi poſſit, ſtratum illud lapideum, continua maris alluuie exeſum et fractum, lapides noſtros temporis ſucceſſu a vinculis liberatos reliquiſſe, eosque hac ratione ſubiacenti arenae expoſitos fuiſſe.

DE

DE INVENIENDA DISTANTIA MACVLARVM SOLARIVM A SOLE.

AVCTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Ex diligenti macularum Solarium obſeruatione cognitum fuit, *citius eas diſcum Solis nobis conſpicuum permeare, quam alterum à nobis auerſum.* Inſeruit hoc phaenomenon Theoriae harum macularum duplici ex capite. Primo enim per id manifeſtum fit, *maculas iſtas non inhaerere ipſi Solis ſuperficiei*, vt quibusdam viſum eſt; ex hoc enim ſequeretur, maculas eodem tempore aduerſam et auerſam ſolis partem percurrere debere, cum, ob ingentem Solis a Terra diſtantiam, ſemper dimidiam eius partem ſenſibiliter intueamur. Secundo ex obſeruatis temporibus quibus macula aliqua in Sole conſpicua eſt, et deinde poſt eum deliteſcit, *diſtantia quoque illius maculae a Sole Geometrice deduci poteſt*, quod a pluribus quidem generaliter annotatum, a nemine vero ipſo calculo comprobatum inuenio. Tab. XIII.

§. 2. Sit corpus Solis BC, et moueatur macula in circulo concentrico EDGF, ducantur deinde ex oculo ſpectatoris in terra A duae tangentes Solem lineae ACD et et ABE; euidens eſt, maculam tantum conſpicuam fore in diſco Solis, dum arcum FG percurrit, reliquo toto periodi ſuae tempore inuiſibilis erit nobis. Nam dum arcum GD aut FE percurrit, ob ſuam obſcuritatem in Solis atmoſphaera videri nequit; cauſa enim cur in arcu FG nobis viſibilis fiat vnica eſt, quod obſcuritate ſua lucidi diſci Solaris particulam obtegat. Dum vero arcum DE percurrit, eam ob cauſam videri nequit, quod poſt corpus Solis deliteſcit. Igitur haec macula per totum arcum FEDG inuiſibilis ſit, neceſſe eſt; qui cum euidenter maior ſit arcu FG, patet ex hoc phaenomeno ſequi, quod maculae non in ipſa Solis ſuperficie circumducantur.

§. 3. Si ergo ponamus maculas in circulis Soli concentricis aequabiliter moueri circa Solem, erunt arcus FG, et FEDG proportionales temporibus quibus iſti arcus deſcribuntur; poterunt igitur arcus ipſi inueniri, ſi dentur duo tempora, quorum vnum indicat moram maculae in arcu FG viſibilis, alterum vero moram maculae in altero arcu FEDG inuiſibilis. Ducatur recta AH ex terra per centrum Solis, et radius HF, biſecabit illa in L et K arcus FG et FEDG; erit itaque tempus dimidium apparitionis per LF ad tempus dimidium occultationis per FEK vti angulus FHL ad angulum FHK, qui eſt 180°, minus angulo FHL; et componendo, erit tempus dimidium apparitionis plus tempore dimidio occultationis, hoc eſt, tempus dimidium periodi totius ad tempus dimidium apparitionis, vel quod eodem recidit, tempus periodi integrae ad tempus apparitionis integrae,

vti

vti 180. gradus ad angulum FHL. Ex hac analogia itaque inuenitur angulus FHL ex obſeruatione. Sed in triangulo FAH dantur praeterea latus AH diſtantia Solis a Terra, et angulus FAH, qui eſt ſemidiameter apparens Solis; igitur ex his poterit inueniri latus FH, a quo ſi ſubtrahatur radius corporis Solaris, remanebit MF diſtantia maculae a Solis ſuperficie.

§. 4. Exemplo inſeruire poteſt celebris illa obſeruatio *Godofredi Kirchii*, qui Lipſiae 1684. a 26. Aprilis vsque ad 7. Iulii maculam eandem aliquoties reducem obſeruauit, atque inuenit, tempus apparitionis fuiſſe 12 dierum, occultationis vero 15. dierum. Pro abſoluendo autem hoc calculo ante omnia determinari debet ſemidiameter vera corporis Solaris. In hunc finem aſſumo diſtantiam Solis a Terra mediam Hirianam 34377. ſemidiam. Terrae. Semidiametrum apparentem Solis mediam 16′ 5″, atque infero, vti ſinus totus (10 000 000) ad diſtantiam Solis a Terra (34377) ita ſinus ſemidiametri Solis apparentis (46784) ad ſemidiametrum corporis Solaris (160. 829. ſemid. terr.) Poſita igitur hac ſemidiametro corporis Solaris, fiat per inuentam regulam: vti tempus integrum periodi (27. dies) ad tempus integrae apparitionis (12. dies) ita 180. gradus ad 80. gradus, quos continet angulus FHL. Tempore obſeruationis erat ſemidiameter Solis apparens 15′ 54″, et Logarithmus diſtantiae Solis a Terra 4.00504, poſita diſtantia media 10 000; numerus illius Logarithmi eſt 10116.74, facta igitur reductione ad diſtantiam mediam aſſumtam 34377 ſemidiam.

 diam.

diametr. terr. fuit eo tempore diſtantia Solis a Terra 34778.317 ſemid. terr. Soluto igitur triangulo FHA ex datis angulis $FAH = 15' \; 54''$, $FHA = 80^{\circ} \; 0' \; 0''$ et latere $AH = 34778.317$, inuenietur FH diſtantia maculae a centro Solis 163.204 ſemid. terr. a qua diſtantia ſi ſubtrahatur ſemidiameter Solis ſuperius ſtabilita, remanebit diſtantia maculae a ſuperficie Solis 2.375 ſemid. terr. vel ſumta ſemidiametro Terrae pro 860 milliaribus Germanicis, quorum 15 gradum aequatoris efficiunt, erit diſtantia maculae a ſuperficie Solis $2042\frac{1}{2}$ milliar. Germ.

§. 5. Inter magnam macularum copiam, quas in annis 1728, 1729 et 1730 obſeruaui, non niſi vnicam vidi, de qua certus eſſe poteram quod redux ſit. Obſeruaui de ea, eam ſpatio 13 dierum in diſco Solis apparuiſſe, 14 dies autem poſt Solem latuiſſe. Cum autem Diarium illarum Obſeruationum anno 1732 incendio mihi perierit, neſcio amplius dies illarum obſeruationum vel annum; quare nec conuenientem ſemidiametrum nec diſtantiam a Terra Solis pro calculo exinde ducendo aſſumere poſſim. Si vero retineantur diſtantia Solis a Terra, et ſemidiameter Solis apparens, mediae, inuenietur, diſtantiam illius maculae a Solis ſuperficie fuiſſe 1501.56 milliar. Germ.

DE

DE CIRCVLATIONE SANGVINIS COGITATIONES PHYSIOLOGICAE.

AVTORE
Iosia Weitbrecht.

CAP. II. (*)

Examen virium, quae motum Sanguinis producunt.

Prolegomena.

§. 1.

QVando corpus quodcunque mouetur, illud cum velocitate quadam locum ſuum mutat. Hanc autem velocitatem concepit a vi quadam, et illa quidem, vel innata, vel aliunde accedente. Recte igitur *Pecquetus* Sanguinem vel proprio ruere incitabulo vel alieno impelli, enunciat. Tabula XIV.

§. 2. Nulla autem alia vis hactenus inter phyſicos cognita eſt, quae motum producere poteſt externe accedens, niſi aut vis grauitatis, aut vis magnetica vel attractiua, aut vis alius corporis moti, certa velocitate in corpus mouendum irruentis vel impetum facientis.

§. 3. Non adeo difficile erit, haec adplicare ad ſanguinem, cuius motum ſupponimus. Sunt enim tria

 potiſſi-

(*) Cap. I. vid. Tom. VI. p. 276.

potiſſimum corpora, quae experimentis et obſeruationibus moueri docemur, & quorum motu perfecte ſublato, motus quoque ſanguinis tollitur: cor ipſum, quatenus duobus ventriculis terminatur; cordis auriculae; et arteriae. Non dubium eſt igitur, quin tria haec corpora potentiae illae mouentes ſint, quae motum Sanguini imprimunt. An vero illa Sola ſint, an vero grauitas quoque Sanguinis ad ſui motum quicquam conferat; item, an vaſorum capillarium ſumma anguſtia vim attractiuam cum effectu ſpecioſo exerceat? id quidem eſt, quod alii in dubium vocant, alii autem aſſeuerant, et de quo in ſequentibus diſpiciemus.

§. 4. Materia ergo ipſa per ſe in quinque ſectiones diſpeſcitur, vt primo de grauitatione Sanguinis, deinde de actione cordis, porro de actione arteriarum, tandem de actione auricularum, et denique de attractione vaſorum capillarium in hoc capite agamus.

Sectio I.

De Grauitatione Sanguinis.

§. 5. Sanguinem grauem eſſe, quia ponderat, quin ſupponamus, nihil eſt, quod impedit. Omne autem graue deorſum tendit, et vi huius tendentiae preſſionem in ſubiecta corpora exercet, quae preſſio grauitatio quoque dici ſolet.

§. 6. Non mirum eſt igitur, dari phyſicos, qui ſanguini preſſionem ſimilem (§. 5.) tribuere velint. Atque id quidem recte; partim vi legitimae conſequentiae; partim, ſuffragante experientia.

§. 7.

§. 7. Non autem circa generalia iſta (§. 5 6) verſatur praeſens noſtra conſideratio; ſed magis determinate ſcire oportet: an grauitatio ſanguinis motum ſui in vaſis promoueat? ſiue, an motus huius liquoris celerior fiat ex eo, quod grauitate ſua deorſum tendat?

§. 8. Maioris dilucidationis ergo non inutile erit praemittere, quid alii, et quibus rationibus de hoc (§. 7.) problemate differuerint. Quaeſitum enim fuit: an arteriae iunctae cum venis (Cap. I. §. 12.) pro ſiphone vel tubis communicantibus haberi poſſint? an igitur ſanguini in his vaſis contento idem accidat, quod aliis liquoribus, e. gr. aquae in iſtis tubis accidere deprehenditur? Atque hanc quidem quaeſtionem adeo firmiter coniunxerunt cum praecedente (§. 7.), vt qui hanc vltimam aſſeuerarunt, eo ipſo primam quoque ſtabilire crederent; qui vero primam negare contenderunt, ſatisfeciſſe ſcopo autumarent, ſi vltimam deſtruxiſſent. Exemplo ſint *Pecquetus* et *Guilielmini*. Ille ſanguinem ſuo proprio pondere moueri negauit ex eo, quod vaſa ſanguiveha rationem ſiphonis non habeant, atque hanc diſſimilitudinem argumentis quinque adſtruxit. 1.) Quia in ſiphone tranſitus liquoris ex vno crure in aliud fiat tempore eodem: in vaſis autem diuerſo; 2.) quia ligata vena iugulari ſanguis nihilominus ſupra ligaturam accurrat; 3.) quia in cadauere venae turgeant euacuatis arteriis; 4.) quia vena cruralis ligata euacuetur verſus cor; 5.) quia arteria cruralis ligata euacuetur verſus extrema. *Guilhelmini* contra, grauitatem ſanguinis motum ſui adiuuare aſſerit ex eo, quod ſecundum naturam fluidorum partim aequilibrium in vaſis inferioribus

tamquam

tamquam in ſiphone recuruo conſeruet, partim in vena ſuperiore proprio pondere ex capite verſus cor relabatur, et ſui regreſſum promoueat.

§. 9. Dum, vt propius ad rem accedamus, circuitum ſanguinis aſſerimus, transitum illius ex vno vaſe in aliud dicimus (Cap. I. §. 1.); arteriae igitur et venae inter ſe cohaerent (Cap. I. §. 12.). Praeterea in erecto homine vaſa ſitum perpendicularem, vel perpendiculo proximum, et ad illud facile reducendum ſeruant. Nihil igitur ex parte ſitus impedit, quo minus arterias cum venis ſuis correſpondentibus pro tubis communicantibus habeamus. Quapropter quicquid fluido cuiuis accidit, quatenus iſtiusmodi tubis continetur: id omne quoque ſanguini accidere eatenus debere neceſſe eſt. Atqui in tubis communicantibus fluida vtrinque ad altitudinem ab horizonte in ratione denſitatum inuerſa diſtantem, vi ponderis quieſcunt: nulla igitur eſt ratio, quare ſanguis poſitis iisdem, aequilibrium ſimile non ſeruet? Eadem ratione ſanguis ex tubo breuiore effluit, ſi longior vltra libellam repletur. Similiter in tubo communicante inuerſo omnia ſe habent cum ſanguine, vti cum aliis fluidis modo ſimili.

§. 10. Nihil igitur peccat *Guilielmini*, dum aequilibrium ſanguinis ex ſiphonum conuenientia adſtruit: quicquid contradicant argumenta *Pecqueti*, quae (conceſſa tantiſper illorum veritate) tum demum ſuo ſtarent robore, ſi grauitatio ſanguinis pro ſolo principio motus, non autem pro adiumento tantum venditaretur. Verum enim vero nimis praeceps mihi videtur et minus legitima illatio,

tio, si posita illa conuenientia, sanguinem grauitate sua promoueri atque adiuuari ita nude et simpliciter ponamus. Ita alter bonam caussam male defendit, alter in abusum vertit.

§. 11. Quaeramus veritatis limites, et videamus, quatenus experimenta artis cum phaenomenis naturae conueniant. Quae omnia vt dilucide distinguantur et explicentur, attendendum erit potissimum ad diuersam positionem vasorum, quae in genere duplex est; siue enim illa ita inter se connexa sunt, vt repraesentari animo possint ceu tubi descendentes, quorum crura tubo communicanti insistunt, seu ceu tubi ascendentes, qui suis ipsi cruribus insistunt. Cum his aequiparare solent arterias et venas superiora petentes; cum illis arteriam magnam et venam cauam cum annexis suis in partibus inferioribus. Deinde, aliae erunt apparitiones, si siphones *vacuos* statuamus; aliae, si consideremus, illos iam esse *impletos*.

§. 12. Sint igitur duo tubi A et B, quorum communicans C est capillaris. Ponamus tubos vacuos. Impleatur tubus, A, aqua pura, quo facto remotis obstaculis, videbis, aquam per tubum capillarem C transire celerrime, in tubo B ascendere, et in A descendere eousque et tam diu, donec altitudo aquae vtrinque aequalis fuerit; tum vero aquam quiescere. Affundatur aqua denuo in tubum alterutrum A: Similiter columna breuior tam diu augebitur, donec massa iterum ad aequilibrium et quietem fuerit redacta. Si vero tubus B breuior erit, quam A, ex illo tam diu effluet, donec idem effectus obtineatur. Quo subtilior est tubus capillaris, eo plus temporis insumitur transitu aquae totali, non Figura 1.

obſtante illa celeritate in principio tranſitus; et quo altior euadit columna aquea, eo longiore mora altitudo aequalis obtinebitur. Preſſio enim, quam aqua in iſtis tubis grauitans exercet, iuxta communes regulas hydroſtaticas ex facto altitudinis in baſin aeſtimari debet.

§. 13. Haec experimenta ad motum ſanguinis adplicita (§. 12.) ſequentia docent: 1.) Si ſupponamus vaſa *vacua* (§. 11.), et iam nunc implenda: omnino fiet, vt ſanguis arteriis infuſus, remoto etiam omni impetu a vi cordis concepto, ſua propria grauitate tandem per extremitates capillares aliosue ductus communicantes, ceteris paribus, in venarum alueos transeat. Quamuis enim non negandum ſit, arterias capillares, quales ſtructura corporis animalis nobis exhibet, longe ſubtiliores eſſe, quam vt vlla arte illarum anguſtias imitando obtinere poſſimus: manent illae tamen nihilominus tubi peruii penetrabiles, et hinc ad obtinendum effectum quaeſitum idonei. Atque in hoc caſu aſſentiendum omnino erit *Guilielmino*. At vero 2.) ſi ſanguis grauitatione ſua vna ſemel vice anguſtias capillarium ſuperauit, atque ad aequilibrium perductus eſt: tum grauitas in aeternum nihil amplius ad motum eius confert; ſed quieſcet ille, vi huius ipſius naturae grauitantis in venis tam diu, donec altitudo eius in arteriis per nouam additionem aucta fuerit. Atque haec proprietas conſtans manet, etiamſi, eadem manente venae capacitate, arteriae diameter ad varias diſtantias extendatur; ſiquidem nihil in aequilibrio fluidi mutatur, etiamſi Figura 2. tubum B α reſpectu tubi A vel centies amplicaueris. Tantum igitur abeſt, vt ſanguis grauitate ſua ſe promoueat,

ueat, posito semel aequilibrio, vt potius motum sui in venis ob eandem caussam impediat.

§. 14. Quoniam vero vasa naturaliter non sunt inania, sed *plena*, et nos scire oportet, quid in homine perfecto reuera accidat, non, quid accidere possit? omnis quaestio eo reducitur, vt sciatur, an tubus venosus breuior sit, quam arteriosus, et hinc sanguis, quum aorta vltra libellam repletur, ex vena in cor delabatur, et quanto temporis spatio hoc peragatur? Sit igitur aequilibrium sanguinis tam venosi quam arteriosi circa terminum insertionis venae in cor, ad lineam A B. Augeatur sanguis arteriosus additione noua, vndecunque illa facta fuerit, vsque ad angulum aortae C. Quodsi grauitas vllo modo aliquid contribuere potest ad motum sanguinis, id omne a solo hoc excessu altitudinis, C B, proueniat, necesse est. Cum vero experimenta doceant (§. 12.), quo subtiliores sint tubi capillares, et quo altiores sint columnae fluidi, eo difficiliorem esse transitum, eoque longiorem moram trahi; cum praeterea sanguis tenacitate sua multo vehementius resistat, quam aqua, et hinc motus lentissimus efficiatur, qui cum celeritate motus cordis minime respondet; cum porro basis capillarium in quam pressio exercetur, minima sit; cum denique in homine perfecto et sano circa lineam A B aequilibrium fingere absurdum sit, siquidem sanguis in vasis A D et A E continuus, et longe supra libellam A B et F C, eleuatus sit: ita subducendus mihi calculus videtur, vt enunciandum sit, sanguinis transfusionem grauitatione sua aut plane nihil, aut certe adeo parum promoueri, vt haec vis respectu aliarum potentiarum insigni celeritate agentium pro insensibili et nulla habenda sit. Figura 3.

§ 15. Ne vero huic ſanguinis grauitationi omnem ſuam vtilitatem denegemus; non negligenda erit conditio, quam hactenus vaſis noſtris communicantibus (§. 12.) tacite affinximus. Conſiderauimus nempe effectus, quaſi cum tubis rigidis res nobis eſſet, qui tamen in animalibus elaſtici ſunt (Cap. I. §. 9.) et extenſiles. Quamuis igitur probabile non videatur (§§. 13. 14.), per illam promoueri poſſe transfuſionem per extremitates capillares, aut effuſionem in cor: tamen, quia ſanguis non ſolum in baſin vaſorum, ſed et ad latera illorum (Cap. I. §. 6. 9.) premit: eatenus haec preſſio promotionem ſanguinis in aorta deſcendente adiuuare cenſenda eſt, quatenus latera eius extendere nititur, et capacitatem pro ſanguine recipiendo ampliorem reddit.

§. 16. Reſtat, vt examinemus, quid de tubis aſcendentibus (§. 11.) dici poſſit. Verum quidem eſt, ſi tubi A et B, per capillarem C cohaerentes aqua impleantur, fore vt haec effluat ex tubo longiore, B, etiamſi tubulus C capillaris fuerit: vnde ſequeretur, rationem ſufficientem adeſſe circulationis per vaſa capillaria cephalica, imprimis, quia paullo inferior venae inſertio in cor huic opinioni plurimum fauere videtur. At vero, primo, vt experimentum ſuccedat, ſupponi debet, tubos eſſe repletos: ergo ſanguis in arterias *vacuas* numquam aſcendet. Deinde, ſi ille quoque per aliam quamcunque potentiam non ſolum aſcenderit, ſed et capillares tubulos iam tranſiuerit, vt in venis ſuo ſolo pondere deſcendere poſſet: id tamen numquam propter ſimilitudinem vaſorum cum ſiphone ſed alias ob cauſſas eueniet. Quia enim ratio phyſica experimenti in preſſione aeris

Figura 4.

aeris a grauitante humore adiuta, atque in alterutro tubo ſuperata conſiſtit; in venis autem et arteriis nullus ſeparatus aer cum atmoſphaera externa communicans, ſed aut plenitudo aut vacuum (Cap. I. §. 10.) locum habet: hinc, poſita plenitudine, ſanguis haerebit; poſito autem vacuo cordis antro poſt ſyſtolem, omnino quicquid in venis eſt, deſcendet ob grauitationem ſuam naturaliter deorſum tendentem, non autem, quia ille in tubo communicante longiore continetur. Atque his ſub limitationibus ſpecioſae *Guilielmini* argumentationes verae quidem eſſe videntur; ſed ſi ſcapham ſcapham dicere velimus, figmenta potius quam ſolida adiumenta ſunt. Quid enim lucri denique fecimus? Nihil ſane. Deſcendat enim ſanguis grauitate ſua in vena: quia ſimiliter in arteriarum tractu nulla atmoſphaerae preſſio ob allegatam cauſſam locum habet, nullus quoque ſanguis ſurſum premetur, qui deſcendentem a tergo ſequi poſſit. Vt taceamus de inſigni ſubtilitate tubulorum capillarium in cerebro, quae neceſſario per hanc preſſionem ſuperari deberet, ſi experimentum hoc ſub initium huius Paragraphi allegatum ad exponendam cauſſam tranſitus ſanguinis per vaſa ſuperiora applicari poſſet.

§. 17. Qui denique perpendit, conditionem poſitionis vaſorum perpendicularis, quae neceſſario ſupponi debet, ſi aliqua ex grauitatione vtilitas redundet, (§. 11.) adeo particularem eſſe, vt non ſolum in homine non ſemper erecto, ſed cubante, nullum locum habeat, ſed et in pluribus animalibus plane exulet; cum tamen in omni hoc caſu nihilominus ſanguinis motus aeque bene et commode procedat; quemadmodum plura animalia ſitum quemcunque e gr. declinationem capitis in paſcuo, ſine turbatione circuli *Harueiani* feliciter affectare poſſunt: ille penitus conuictus erit, quam parum virium in ſanguinis grauitatione pro motu eius facilitando, quaerendum ſit.

§. 18. Ponderatis itaque et excuſſis vtrinque momentis, ſequentes emergunt propoſitiones:

1.) *Sanguis in arteriis et venis inferioribus deorſum tendit, in ſe viciſſim grauitat, et aequiponderat* (§. 5. 12.).

2.) *Sanguis in arteriis ſuperioribus et venis inferioribus grauitate ſua motum ſui impedit* (§. 5. 13. 16.).

3.) *Sanguis in venis ſuperioribus ſuo pondere, conceſſo loco, deſcendit, ſed non poſt ſe trahit ſanguinem arterioſum* (§. 5. 16.).

4.) *Grauitatio ſanguinis mutua aequilibrium producens* (§ 18. 1.) *eſt minima*, ob baſin capillarium infinite paruam, reſpectu altitudinis vaſorum.

5.) *Grauitatio ſanguinis actionem ſuam exſerit potius in latera vaſorum; quam in extremitates capillares* (§. 15.). Nam preſſio grauium aeſtimatur ex facto altitudinis in baſin: atqui in capillaribus baſis eſt infinite parua: ergo haec preſſio in baſin, reſpectu preſſionis ad latera eſt nulla.

6.) *Grauitatio ſanguinis non poteſt annumerari viribus, quarum actione ille ipſe in vaſis inferioribus promouetur et transfunditur*; ſiue: *vis grauitatis ratione reliquarum potentiarum motum ſanguinis generantium eſt nulla* (§. 7. 14.). Aequilibrium enim non producit motum, ſed quietem (§. 13.).

Sectio

Sectio 2.

De actione et viribus Cordis.

§. 19. Dum in cauſſam, quae ſanguinem ex corde expellit, inquirimus: ſedulo abſtinebo, ne conſiderando momenta hypotheſium exploſarum de ebullitione, fermentatione, flammula cordis etc. tempus inutiliter teram, quod meditationis genus pro peccato philoſophico ſemper habendum duxi. Eſt enim modus alius magis rationalis, qui accuratius expendi meretur, et qui in actione cordis conſiſtit.

§. 20. *Cordis* autem *actio* hac fere ratione ſe habet, vt ventriculorum latera, quibus cauitates illius ad plenitudinem vsque repletae terminantur, propius ad ſe accedant, et harum ipſarum cauitatum capacitatem minorem efficiant, quam vt priſtina ſanguinis quantitas in illis contineri queat: cuius effectus igitur proximus ille eſt, vt id, quod contineri non poteſt, extra cauitates cordis aliorſum exprimatur.

§. 21. Haec *actionis* idea (§. 20.) non niſi phaenomenis ſuperſtructa a nemine in dubium vocatur: ſed ex diuerſo conſiderandi modo diuerſae quoque aeſtimationes virium illam actionem producentium obortae ſunt, quas ſatis graphice Iurinus perſtrinxit, quarumque defectus praecipuos indicauit. Ceterum ſi *noſtra* methodus ad veritatem et naturam magis acceſſerit, *aliorum* ſententiis damnandis ac refutandis immorari eo ipſo ſuperſedebimus.

§. 22.

§ 22. Nullus autem datur motus, qui maiorem similitudinem habet, et facilius comparari potest cum praedicta contractione cordis et inde producta expulsione sanguinis (§. 20.), quam motus fluidi intra canalem aliquem seu tubum contenti, ab vrgente embolo superficiei alterutri applicito in motum concitati. Nam dum Embolus truditur, capacitas tubi continuo minuitur, et tantum fluidi extra tubum eiicitur, quantum in spatio, quod embolus sensim sensimque occupauit ac transiuit, poterat contineri. Cum igitur quantitas fluidi expulsi dependeat praecise ab angustata tubi capacitate: perinde erit, quomodocunque capacitas minuatur, siue trudendo embolum, siue, applicando ad se propius latera canalis: et, si decrementum cauitatis aequale est in vtroque casu, eodem tempore; volumen expulsi fluidi eodem tempore etiam aequale futurum est.

§. 23. Quando embolus in fluidum oppositum agit: tum vis tota emboli quouis momento adplicita quouis momento iterum consumitur, totum fluidi volumen in motum ciendo; et quo momento embolus agere cessat, motus quoque fluidi intra canalem contenti sistitur, et sola illa fluidi pars, quae proiecta fuit, motum suum data velocitate continuat. Quando igitur motus totius fluidi per datum tempus durare debet; vis quoque illa tota, quouis tempusculo, siue integro illo tempore denuo et continuo instaurari ac repeti debet. Contra vero se res habet in percussione corporum solidorum; si enim corpus solidum, A, vi data, in aliud solidum, B, impingit, illique omnem, quo polluit, motum communicat: tunc

cor-

corpore A in quiete ſubſiſtente, nihilominus totum corpus B motum ſuum, pro virium excitatarum quantitate continuat. Actio igitur cordis non in percuſſione, vel ſimplici quodam ictu conſiſtit: ſed nulla commodiore et magis propria appellatione, quam *Truſionis* voce inſigniri poteſt; quae quidem *Truſio, eſt continuata et temporibus infinite paruis per ſummam ſpatiolorum infinite paruorum repetita emboli ad fluidum (ſiue, facta applicatione, laterum cordis ad ſanguinem) mouendum applicatio; et quantitas Truſionis eſt quantitas et ſumma omnium ictuum, quibus vis cordis per ſpatium datum, tempore dato, ſanguinem oppoſitum in motum egit.* Si quis autem eſt, cui haec truſionis vocula non arridet, et qui *preſſionem* ſubſtituere malit; illi non refragabor: modo per illam non intelligatur nuda et mortua ſollicitatio ad motum, ſed per quam motus actu producatur talis, qualis in data definitione noſtra determinatur ac reſtringitur.

§. 24. Quando cor actionem ſuam exerit (§. 20.), illius volumen ſecundum omnem dimenſionem decreſcit; abſoluta autem actione ad priſtinam extenſionem reducitur. Atque haec dimenſionum variatio reciproca per viciſſitudines aequabiliter ad ſenſum continuatur. Ea autem proprietas, qua fibrae certa vi dilatatae ſeu tenſae, ſublata illa vi ad priſtinam figuram redeunt, non aliunde prouenire ſcitur, quam ex eo, quod ſint elaſticae. *Vis* igitur *cordis eſt Elaſticitas cordis.*

§. 25. Quia Cordis actio in eo conſiſtit, vt latera ventriculorum propius ad ſe accedant, atque iterum dimoueantur (§. 20.); *Vis ventriculi cuiuslibet eſt elaſticitas* *laterum*; haec autem *elaſticitas laterum* eſt *aequalis ſummae elaſticitatum* huc conſpirantium ſingularum *fibrarum*, *ex quibus latera* ventriculi *componuntur*.

§. 26. *Quantitatem* Virium cordis ſi determinare velimus: ante omnia aequiuocas et vagas ſignificationes ſemouere oportet: quaeſtio enim triplici ſenſu proferri, atque in tres alias diuidi poteſt, quae bene inter ſe diſtingui debent, ſi ſufficienter reſpondere velis. *Primum* enim problema hoc eſt: Quanta eſt vis ſeu elaſticitas cordis abſoluta; ſiue: quanta celeritate latera ventriculorum ad ſe accedunt, ſublata omni reſiſtentia? *Altera* quaeſtio haec eſt: ſi cor agit tota elateris ſui intenſitate, et ſanguis expreſſus per medium non reſiſtens traiici debet; quanta eſt illa vis, qua ſanguis exprimitur? ſiue, quanta eſt celeritas, qua ſanguis cordis ventriculos egreditur? *Tertius* problematis ſenſus hic eſt: ſi ſanguis per medium reſiſtens traiici debet; quanta eſt illa vis cordis, quae ſanguinem in vaſis promouet? ſiue, quanta celeritate ſanguis mouetur in arteriis elaſticis, plenis, vi cordis?

§. 27. Facile patet intelligentibus, quod ſenſus problematis *primi* (§. 26) proprie inuoluit *vim* cordis *abſolutam*, ſubiectiuam, et cordi ipſi inhaerentem, eſſentialiter conſideratam, et ab omni effectu abſtractam; patet porro, quod haec vis ſubiectiua maneat conſtans et ſemper eadem, mutatis vtcunque conditionibus aliunde accedentibus; patet denique, quod aequalis ſit illi vi, qua ſanguis iuxta ſenſum problematis ſecundi et tertii eiici debet ex corde per medium ſiue reſiſtens, ſiue non reſiſtens. Si igitur huius Vis ſeu Elaſticitatis quantitas aſſignari poſ-

ſet

ſet menſura quadam, omnia dicta problemata facile reſoluta forent. Vbi enim Vis eſt eadem; ibi effectus quoque idem erit quantitate, et nonniſi diuerſo applicandi modo diſſentiens. Agedum igitur, et proſequamur, vsque dum licet inſtitutum, inueſtigando et comparando proprietates illas, quae ex ſpeciali elaſticitatis conſideratione atque applicatione poſſunt deduci. En autem ſequentes.

§. 28. Fibra eadem elaſtica diuerſo tempore varios elateris gradus poſſidere poteſt, qui quidem maxime ab eius laxitate aut rigiditate pendent. Vis autem cordis eſt elaſticitas cordis (§. 24.): *Creſcente* igitur hoc *elatere*, cuius fibrae laterum (§. 25.) capaces ſunt, *aut decreſcente*, *vis cordis augetur vel minuitur.*

§. 29. Fibra elaſtica eadem diuerſo tempore magis et minus tendi ac produci poteſt. Idem accidere poteſt fibris duabus aequalibus, eodem tempore. Fibra autem tenſa et producta vires maiores adquirit, quo magis producitur, et aucta elateris intenſitate augetur virium quantitas. *Vis* igitur *cordis* pro tenſione fibrarum ſuarum, ſiue pro intenſitate elateris ſui *varie intendi*, minui atque augeri *poteſt*; et *duo corda* fibrarum *elaſticitate aequalia* eodem tempore *diuerſa* elaſticitatis et *virium intenſitate* poſſunt gaudere.

§. 30. Experientia conſtat, cordis actionem eſſe nunc celeriorem nunc tardiorem; nunc fortiorem, nunc debiliorem. Actu igitur euenire diſcimus, cuius poſſibilitas ex natura rei (§ 28. 29.) eluceſcit: quod videlicet *Vis cordis ſua patiatur augmenta et decrementa.*

§. 31. Quia variante intensitate virium cordis numerus fibrarum latera ventriculi componentium constans manet: vis elastica cordis non a fibrarum numero solo producitur, sed aliunde fibris superadditur. *Non* igitur *vis cordis est in ratione massae*, nisi singulae fibrae elasticitatibus respectiuis et correspondentibus, tam quoad magnitudinem et gradum elateris (§. 28.) quam quoad intensitatem (§. 29.) aequalibus gaudeant.

§. 32. Intensitas virium cordis sequitur intensitatem elateris fibrarum, ex quibus latera ventriculorum componuntur: intensitas autem elateris fibrae sequitur rationem virium, quibus tenditur, seu producitur. Quo magis igitur ventriculorum latera a se inuicem remouentur, eo maior est vis, qua ad sese accedere nituntur. In eo autem temporis puncto, quo fibra tensa a vi producente sibi relinquitur, vis producens omnium antecedentium est maxima, hinc et intensitas elasticitatis omnium praecedentium maxima. Quapropter, quando *in systole Cor* agere et contrahi incipit, *celeritate maxima mouetur*, quam intensitas elateris in antecedente diastole concipere poterat.

§. 33. Si vires, quibus latera producuntur, tantae sint numero vel quantitate, vt, si fibrae tensae vlterius producerentur, elasticitatem suam plane amitterent: erit ille gradus intensitatis summus; sine, tunc erit *vis cordis* omnium possibilium *maxima*. Si contra vires tendentes tam exiguae sunt, vt, si vlterius minuerentur, plane nulla laterum productio oriretur: erit ille *gradus* intensitatis *minimus*. Similia accidunt, si fibrae aut summe robustae sunt,

ſunt, aut ſumme debiles, vnde gradus elaſticitatis maximus aut minimus oritur (§. 28.).

§. 34. *Cor* ſemper *agit vi tota*, *qua animatum* ſeu vigoratum *eſt*: Sed non gaudet ſemper elatere, cuius capax eſt, (§. 28.) maximo aut minimo; neque agit ſemper elaſticitatis, quam poſſidet, intenſitate omnium poſſibilium maxima aut minima (§. 29. 33.); imo fortaſſe numquam ad hos duos gradus extremos peruenitur, niſi in acutiſſima febre, et in articulo mortis.

§. 35. Ex hactenus deſcripta (§. 25 - 34.) Cordis *Elaſticitate* ſecundum omnes ſuas proprietates et circumſtantias conſiderata haec emergit Vis ſubiectiuae (§. 27.) et abſolutae definitio: *Eſt Vis cordis in ratione compoſita ex numero fibrarum conſpirantium* (§. 31.), *quantitate Elateris* (§. 28.), *et intenſitate eius* (§. 29.). Quemadmodum vero nulla vis ſecundum eſſentiam ſuam et geneſin conſiderata menſuram admittit, ſed haec demum ex comparatione effectuum obtinetur: ita etiam praeſens noſtra virium Cordis deſcriptio ad vlteriorem aut vberiorem cognitionem viam non aperit. Nemo enim numerum fibrarum elaſticarum, nemo magnitudinem aut intenſitatem Elateris, ſaltim generaliter, aſſignare poteſt, vt cum effectibus inde ſequentibus comparatio inſtitui poſſit. Praeterea in fibris elaſticis ſibi relictis actio Elateris tota eſt ſubita et quaſi momentanea eſt igitur *actio cordis libera*, abſoluta, ſiue *congreſſus* laterum, ſublatis omnibus reſiſtentiis *momentaneus*, vt nullam temporis rationem in hoc negotio habere liceat. Iſtiusmodi igitur proprietates, etſi ſcopo noſtro quodammodo

 fauent,

fauent, certe non fatisfaciunt. Quapropter videamus, quovsque in indaganda virium aestimatione per *effectus* penetrare possimus.

§. 36. *Effectus* autem *proximus* is est, vt sanguis in ventriculi cauitate contentus extra illam protrudatur (§. 20.); qui quidem iam eiectus aut cursum suum emetitur per medium non resistens, aut corporibus resistentibus (§. 26.) obiicitur. Illam *Velocitatem* sanguinis, qua per medium non resistens, transfertur, dicemus velocitatem *absolutam*; alteram vero, velocitatem *respectiuam*.

§. 37. In huius celeritatis *absolutae* (§. 37.) aestimatione perpendenda potissimum occurrunt sequentia. 1.) *Capacitas ventriculi*, et *Massa sanguinis* quae omnino tanta assumi potest, quanta in ventriculo non ad summum gradum (§. 34.) extenso continetur. 2.) *Sectio orificii*, per quod illa Massa eiicitur. 3.) *Tempus*, quo *motus* cordis absoluitur; quibus quidem datis, celeritate ista sanguinis absoluta determinatu nihil facilius est. Consideretur
Figura 5. enim Massa sanguinea in ventriculo contenta, tamquam figurae regularis, cuius volumen efficiat cylindrum datae altitudinis a ac diametri siue sectionis $d = a\,d$. Quia motus sanguinis ex ventriculo cordis in aortam sequitur leges motus fluidi in cylindro vi emboli trusi (§. 22.), erit *Celeritas sanguinis* per orificium fluentis ad velocitatem eius in ventriculo *in ratione sectionum reciproca*: et volumen illud cylindricum in ventriculo $= ad$ mutabitur exeundo per orificium, in volumen aliud $= \alpha\delta$, cuius basis est sectio orificio $= \delta$, altitudo autem $= \alpha = \frac{a\,d}{\delta}$ in ratione directa voluminis cylindrici intra ventriculum, et inuersa sectionis

nis orificii. *Celeritas* igitur *totius massae sanguineae extra cor proiectae* ea est, vt in tempore, quo cor contrahitur emetiatur spatium $= ad:\delta$, quod est ad altitudinem cylindri sanguinei in corde, vti est huius cylindri sectio ad sectionem orificii; et *vis cordis* (§. 35.) *tanta* est, *quanta* requiritur, vt massa proiicienda cum dicta celeritate feratur.

§. 38. Sed haec omnia (§. 37.) nimis generalia sunt, et calculum istum numero determinato, et cum phaenomenis naturae congruente exprimere, omnino impossibile. Quamuis enim primo loco videatur, massam eiiciendam assumi posse tantam, quantam ventriculus non ad summum gradum tensus capit: id tamen pro certo affirmare non licet; quia non constat, an contractio laterum absoluta, sublatis omnibus resistentiis exercita omnem plane cauitatem tollat? multo minus experimentando res in tuto collocari potest. Deinde nec tempus sciri potest, quo motus iste absoluitur. Quemadmodum enim dici non potest, illum fore momentaneum, pari modo, ac si latera coeuntia nullam resistentiam (§. 35.) paterentur: ita nec tempori, quo systole talis, qualis in corpore animali reperitur, peragitur, aequiparari potest. Sola sectio orificii patet scrutinio anatomico, quae quidem ibi quaeri debet, vbi valuularum semilunarium radices sunt applantatae, et semper constans manet, quia sanguini exeunti nihil resistere supponitur.

§. 39. Fac autem conditiones in hoc casu secundo (§. 37.) omnes esse datas: dolendum tamen est, illum a natura abhorrere. Non enim sanguis e corde proiectus vacuum

vacuum transilit; sed statim, atque orificium egredi annititur, pluribus resistentiis obiicitur. Praecipuum igitur *Problema* (§. 26.) *de* determinanda *celeritate* sanguinis *respectiua* adhuc remanet; quod quidem eo difficilius resolutu semper fuit, quo minus illarum *resistentiarum* mensura cognita fuit; sine qua tamen in aestimatione virium per effectus multum proficere impossibile est. Videlicet Cor in sanguinem arteriosum non agit immediate, sed portioni tantum intra ventriculos suos contenti atque exeunti motum certum imprimit, qualem concipere (§. 37.) docuimus, et qui deinde cum reliqua massa extra cor subsistente communicatur. In aestimando autem motu portionis exeuntis non solum denuo ad omnia illa adtendendum est, quae (§. 37) monuimus, et constantia manent; sed praeterea id, quod differentiam inter motum eius absolutum et respectiuum (§. 36.) constituit, cognitum esse, et omnium *resistentiarum* differentiam istam constituentium exacta *scientia* haberi debet.

§. 40. Ante omnia autem sollicitos nos esse oportet, *quaenam* illa obiecta sint, quae verae *resistentiae* dici possint, ne de non-entis alicuius affectionibus verba facere videamur. Et inter has quidem absque omni dubio primo loco *valuulae semilunares* ad principia arteriarum collocatae (Cap. I. §. 15.) considerandae sunt; quae quidem non sui ipsarum mole resistunt, sed eatenus exitum sanguini truso negant, quatenus sanguis in aorta contentus, et ab antecedente arteriae contractione valuulas versus directus his ipsis insistit, et suo pondere (§. 18. n. 2.) sibi apprimit.

§. 41.

§. 41. Inter *resistentias* cordi obiectas porro numerari solet *omnis* reliqua *massa sanguinea* in omni *arteriarum* tractu delitescens: adeo immisericordes fuere hactenus Virium aestimatores, vt tantum oneris mouendi exili cordis potentiae hactenus imponerent. Siquidem isti fere omnes, (si *Morlandum* excipias, cui tamen id *Iurinus* vitio vertere velle videtur) tamquam indubitatam veritatem assumserunt, actione cordis totam massam sanguinis arteriosam eodem tempore in motum cieri, et sanguinem propterea systoles tempore in venas traiici. Equidem in Capite primo (§. 36. 37. 43.) adstruere conatus sum, sanguinis transfusionem ex arteriis capillaribus in venas non fieri tempore systoles cordis, vnde sequeretur, actionem cordis non esse illam, quae totius massae sanguinis arteriosae motum immediate producat, non igitur vim cordis necessario esse tantam, vt huic motui producendo par sit. Quodsi praeterea considero: contrariae sententiae Fautores illam aut precario assumere, aut argumentis quidem, at plane non idoneis, qualia Bellinus suppeditauit, fulcire; neque minus illa posita omnem rationem tolli, quare aut arteriae dilatentur, aut quare arteriae et venae non simul, imo venae prius et tum arteriae dilatentur, et sanguis eodem tempore quo ventriculum sinistrum exit, non in dextrum (Cap. I. § 41.) delabatur? Haec mea sententia, quod *non totus sanguis arteriosus actione cordis moueatur eodem tempore*, etsi nondum plenarie euoluta aut mathematice demonstrata; tanta tamen euidentia radiat, vt facile auderem illam pro principio in sequentibus adhibere. Sed ne molestus euadam rigorosis quibusdam examinatoribus; malo illam, vt nondum iudicatam relinquere, et ex vlterioribus meditationibus circa modum, quo ſanguis e corde proiectus ſanguini arterioſo motum communicat, tamquam corollarium deducere.

§. 42. De *arteriis* non ſatis conuenit inter ſcriptores. Alii enim ſimiliter illas numerant inter *reſiſtentias*, cordis viribus obiectas, et impedientes, ne ſanguis vbique eadem celeritate progrediatur: alii autem in ipſis inueniunt principium motus ſanguinis continuandi. Proueniunt ſine dubio propoſitiones iſtiusmodi contrariationis ſpeciem prae ſe ferentes, ab ideis vagis, ne dicam, falſis. Studeamus igitur ſingulis terminis aſſignare valorem ſuum iuſtum ac determinatum.

§. 43. Quodcunque corpus A alii corpori B, ſiue moto, ſiue ad motum vi quacunque ſollicitato ita obiicitur, vt aut huius B motus minuatur, aut plane ceſſet, manente aut mutata eius directione, illud corpus A huic corpori B reſiſtere dicitur. Haec reſiſtentia corporis A proficiſcitur a conatu in ſtatu ſuo perſeuerandi, qui conatus motui corporis B contrarius a phyſicis plerumque vocatur *Reactio*. Atque haec reactio ſemper aequalis eſt actioni ſiue quantitati impetus, quam corpus in obiectum irruens conſumit, illam reſiſtentiam ſuperando. Quodſi igitur latera arteriae ſunt *rigida*, vt reactio illorum aequalis ſit toti preſſioni, quam ſanguis exercet; in hoc caſu arteria quidem quam maxime reſiſtit, ſed tamen ita, vt non niſi directio ad latera mutationem patiatur, motus autem progreſſiuus nullam plane celeritatis iacturam (ſepoſitis frictionibus) faciat. Haec igitur *reſiſtentia*, quae in illo temporis momento locum habet, quando arteria ſatis dila-

dilatata (§. 33.) eſt, non niſi *imaginaria* eſt; quod quidem Dynamices gnaris absque vlteriore deductione luculenter patet. Sint autem latera arteriae *elaſtica*, determinata quadam vi producenda: tum illa irruenti ſanguini tam diu reſiſtunt, donec vis elaſtica a vi illa determinata ſuperata fuerit; quo facto extenduntur, cedunt, et fugiunt quaſi ſanguinem. Haec igitur *laterum extenſibilitas* ſiue vis elaſticae oppreſſio pro *reſiſtentia* et reactione *vera* haberi meretur, partim, quatenus in cauſa eſt, cur ſanguis directionem ſuam verſus latera retineat, et progresſum verſus extremitates arteriarum negligat aut ſuſpendat, partim, quatenus portio determinata virium extendendis lateribus conſumitur, et ſanguis corde expulſus minore maſſa et minore celeritate, id eſt, tota impetus quantitate, quam a cordis impetu conceperat, diminuta progrediatur. Sin latera extenſa *in* ſui *reſtitutionem* nitantur, et hinc non modo reactione ſua totalem ſanguinis impetum deſtruant, ſed etiam *exceſſu virium* elaſticitatis illi nouum *motum imprimant*, tunc adeo nullam reſiſtentiam in hoc caſu fingi aut concipi oportet, quin potius haec *reactio* pro *adiumento* motus circulatorii haberi debeat. Denique, quia aliunde, vt demonſtratum aſſumitur, vaſorum capillarium anguſtias magnam remoram obiicere fluido transeunti, vaſa autem arterioſa in extremitatibus ſuis adeo anguſta ſunt, vt vix vnico ſanguineo globulo minimo ſimul tranſitum concedat: igitur haec extremitatum *anguſtia inter reſiſtentias* ſanguini arterioſo obiectas ſemper *habita* fuit. Atque hanc quidem *normam* in ſequentibus ſeruandam putem, ſi veram *virium* reſiſtentium *aeſtimationem* inuenire velimus. Sed ad rem propius accedamus.

 §. 44.

§. 44. *Resistentiam* igitur *primam* (§. 40.) sanguini extra cor proiiciendo obiiciunt *valuulae* cum super incumbente sanguine, cuius quidem vis dupliciter considerari potest, quatenus suae propriae massae pondere resistit, et quatenus ab aorta in sui contractionem nitente valuulis apprimitur. Huius autem molis quantitas assumitur tanta, quanta comprehendi concipitur sub basi, quae aequalis est sectioni aortae proxime ad valuulas, et sub altitudine a valuulis vsque ad summam arteriarum cohaerentium fastigium mensurata. Etsi enim tanta praecise quantitas valuulis actu non incumbat: tamen, quando ista massa vt quiescens et non nisi suo pondere resistens supponitur, huic *mensurae indicatae*, quae in omnibus fluidis grauitantibus obseruatur, necessario locus concedi debet.

Figura 6. §. 45. Dum valuulae clausae *a* sibi inuicem accumbunt, illarum orae *b* triangulum formant, et a lateribus aortae *d* quam longissime distant. Est igitur illarum inclinatio ad aortam minima, et angulus incidentiae filorum sanguineorum valuulis insistentium ACB *ac*B maximus, hinc et pressio illorum maxima. Concipiatur iam valuula propius ad aortam accedere, et eius inclinatio
Figura 7. crescere, vt in ACD: tum Basis Cylindrica (§. 44.) dicta diminuitur in ratione, quae est vt CB (= CD): ED; neque minus pressio sanguinis deorsum pellens valuulam eleuatam CD, est ad pressionem, qua valuulae infimo loco positae CB innititur, in ratione CF (= ED): CD et similiter decrescit. Quo magis igitur valuulae aperiuntur, eo minus resistentiae ab incumbente cylindro sanguineo patiuntur. Et hoc *resistentiae decrementum* aestimari potest

poteſt *in ratione quadrata ſinuum* ED *angulorum inclinationis* ECD.

§. 46. Haec ex *vna* ſuperficie (§. 45.) valuularum accidunt. Videamus, quid fiat ex *altera.* Sunt autem per omnia eadem. Quo magis valuulae eleuantur, eo minus ſanguinis impetu directo in illas impingere poteſt. Decreſcunt enim ſimiliter baſes CF, C*f.* in ratione eorundem ſinuum angulorum inclinationis ED (§.45.). Porro, quo propius valuulae inclinantur ad arteriarum latera, eo debilior etiam fit impetus ſanguinis in illas, ſeruando itidem rationem (in quacunque virium hypotheſi illam aeſtimare velis) quantitatis ſinuum eorundem angulorum. Quo magis igitur valuulae aperiuntur, eo minus virium ad illas eleuandas applicatur. Figura 7.

§. 47. Quamuis autem reſiſtentia a ſanguine valuulis inclinationem ſuam mutantibus (§. 45.) incumbente producta minuatur: tamen non putandum eſt, hoc reſiſtentiae decrementum inferre totalem eius abolitionem. *Sola applicatio* hic mutatur. Dum enim valuulae aperiuntur, a ſe inuicem diſcedunt, et foramen quoddam formant, per quod ſanguis aut ex ventriculo in arterias, aut ex ventriculo in arterias, aut ex his viciſſim in ventriculum labi poſſit. Quantum igitur baſis columnae ſanguineae valuulis inſiſtentis decreſcit; tantum accedit baſi columnae, quae huic fienti foramini inſiſtere fingi debet.

§. 48. *Reſiſtentia* igitur, ſanguini extra cor prorumpere nitenti, *a maſſa* iſtius columnae (§. 44.45.) *oppoſita ſemper manet eadem* et aequalis ponderi cylindri ſanguinei, cuius menſuram (§. 44.) indicauimus.

§. 49. Similiter, quamuis impetus ſanguinis in valuulas irruentis diminuatur, partim ob decrementum maſſae allabentis, partim ob mutatum angulum incidentiae (§.46.): non tamen inde totalis quies infertur. Quo magis enim valuulae a ſe diſcedunt inuicem, eo maius foramen in ſui medio relinquunt. *Quo minus* igitur *ſanguinis in valuulas irruit*, *eo plus per foramen amplificatum erumpere* conatur.

§. 50. Quia autem valuulae aperiuntur ſenſim, ſiue quia non in inſtanti foramen illud (§ 47.) fieri ſupponitur: *Sanguis* concipi poteſt, quaſi *erumpat* per illud *ſub forma*
Figura 8 *pyramidis* cuiusdam triangularis, cuius latera ſunt quodammodo concaua. Neque ſectio huius pyramidis Fig. 8. melius comparari poteſt, quam cum ſectione gladii cuiusdam tripennis. Qualis autem ſit ratio inter diuerſas eius diametros, id quidem ſcitu difficilimum, imo plane impoſſibile eſt; ſiquidem illius infinitae variationes eſſe poſſunt,
Figura 9. ex. gr. A. B. C. D. quarum determinatio partim a quantitate virium cordis, illarumque applicatione, partim a flexilitate valuularum, partim a conſtitutione aortae tam quoad eius elaſticitatem, quam capacitatem, dependet, et quae per experimenta nullo modo indagari aut definiri poteſt.

§. 51. Patet ex propoſitis (§. 44-50.), *Vim cordis* (§. 35.) per effectus conſideratam (§. 39.), generaliter dici poſſe *tantam*, *vt ſanguis in Corde contentus et expulſus certam velocitatem* (§. 37.) *nanciſcatur*, *qua pars feratur in valuulas* (§. 44.), *illasque ſuperato pondere incumbentis ſanguinis ad latera aortae admoueat*, *pars vero per rimam datam intra columnam ſanguineam tamquam cuneus traiiciatur*, *et diuerticulum ſibi efficiat.* Nondum licet

licet determinare ſtrictius, *quale* ſit illud diuerticulum, et quomodo fiat? nondum enim reliquas reſiſtentias omnes examinauimus. Interim operae pretium videtur, *methodum* qua haec omnia peraguntur, quantum licet, propius examinare.

§. 52. Diximus (§. 50.), ſanguinem e corde prorumpere per datam valuularum rimam *ſub forma pyramidis* cuiusdam. Haec autem rimula ſub initium motus neceſſario quam minima eſt, vt non niſi guttula ſola, apicem pyramidis conſtituens transmittatur. Iſta ſanguinis guttula impetum facit in ſanguinem arterioſum quieſcentem velocitate data, et duos imprimis effectus praeſtat, partim vt guttulas ſanguineas in prima ſectione f. 10. 1. aortae contentas dirimat, partim, vt ſeruata directione ſimiliter per ſectionem ſecundam, tertiam &c. viam ſibi paret, idque tam diu, donec vires ſuae abſumtae ſunt. Videmus enim, ſi in vas fluido repletum, aliud fluidum homogeneum ex altitudine data guttatim decidat, illud non in ſuperficie in momento contactus cohaerere, ſed ad certam quandam profunditatem pertingere, donec vis ſua cadendo ſub finem lapſus acquiſita iterum euaneſcat. Figura 10.

§. 53. Dum igitur *prima* ſectio diuiditur, omnibus globulis in area ſectionis illius contentis motus communicatur, et dum locum cedere irruenti globulo coguntur, ſibi ipſi nouum ſpatium, quo ſe proripiant, quaerere annitantur. Exercent autem preſſionem tam ad latus aortae, quam in ſuperincumbentem ſanguinis maſſam, a quibus viciſſim duplicem reactionem patiuntur. Etiamſi autem ſuperincumbens maſſa non niſi ſuo pondere reſiſtat, Figura 11.

et

et tamquam vis mortua absque vlla velocitate consideranda sit: tamen, quia (sublata extensibilitate arteriarum) vi impenetrabilitatis suae (Cap. I. §. 6.) ista loco cedere non potest, quin et totalis massa sanguinis tam arteriosi quam venosi antecedens simul promoueatur: non modo prima illa pyramidis guttula, sed et tota sectio respectu massae sanguinea vniuersae, pro infinite parua, et vis sua, qua columnam reliquam impetit pro nulla, aut certe non pro tanta haberi potest, quanta ad superandam reactionem requiritur. Columna igitur ipsa in hoc casu immota persistit. At vero longe alia ratio est inter aream primam sanguineam, et sectionem lateris elastici aortae ipsius. Quia enim aorta plena vbique est, et hinc perimeter ipsius sanguini vbique arcte accumbat: nullum punctum in illa perimetro concipi potest, quod non ab accumbente sanguine pressionem sustineat. *Vis* igitur *omnis*, *quam area ista a prima guttula concepit*, *in extendenda perimetro aortae consumitur*, quae extensa locum concedit guttulae, quem superincumbens massa denegabat.

§. 54. Quae huic *primae* guttulae (§. 52.) circa primam sectionem (§. 53.) accidunt; ea omnia, ceteris paribus in *secunda*, *tertia* etc. Sectione repetuntur, eousque, donec omnis guttulae vis sit consumta. Neque putandum est, postquam haec guttula primam sectionem transgressa fuerit, perimetrum aortae statim iterum contrahi atque coarctari. Dum enim immediate proximae pyramidis guttulae antecedentem primam a tergo insequuntur, illae diametrum aortae iam dilatatam non solum in eo statu seruant sed etiam pro ratione quantitatis vlterius

dila-

dilatant; quod omne de reliqua pyramidis portione, verum esse putandum est. Haec autem dilatatio laterum aortae tam diu durat, donec aut vis sanguinis irruentis ipsa minuatur, aut aorta vlteriorem expansionem non ferat, sed elatere suo speciem rigiditatis induat, aut vtrumque fiat, et proiectioni sanguinis terminus figatur.

§. 55. Missa autem ista consideratione, aliqua etiam ponderatione opus est *moles sanguinis quauis systole e corde proiecti.* Plerique scriptores physiologi, circa determinationem virium cordis occupati, quantitatem sanguinis in ventriculo contenti et eiecti vnam eandemque audacter statuunt, et in calculis suis vnciam vel vnam vel duas adhibent, et hinc ventriculos totaliter depleri aut aperte affirmant, aut tacite supponunt. At vero fateor mihi omnia suspecta videri et dubia, quae in istiusmodi rebus nondum satis expositis, absque demonstrationibus ac precario pro veritatibus stabiliuntur. Nemo igitur vitio mihi vertet, si hypothesin istam, quae quantitatem sanguinis eiecti ad capacitatem ventriculi mensurat, falsitatis arguere audeam. Non nego, omnem sanguinem in ventriculo contentum in motum ciri, id enim ex natura systoles (§. 20. 22.) necessario sequitur; sed de eo dubito, *an omnis ille sanguis* etiam *vnica systole exterminetur?*

§. 56. Nondum quidem locus est, integram demonstrationem veritatis, quaecunque illa denique fuerit, hic intexere: quia tamen nihil eorum in hoc capite omittendum censeo, quae ad mensuram virium cordis quodammodo facere possunt; relictis iis, quae de intensitate illarum (§. 28-35.) dicta huc transferri possent, vnicum momentum indicabo,

cabo, quod consideratio memoratae pyramidis (§. 50.) sanguineae nobis suppeditat. Supponimus nimirum, vim sanguinis e corde irruentis tantam, vt resistentias tam a grauitatione columnae sanguineae, quam aliunde obortas vincere possit. Non dubium est, quin haec duo in se inuicem reagentia (§. 40-43.) sub finem systoles ad aequilibrium primo reducantur, mox vero impetus ille sanguinis a resistentiis dictis vicissim superetur. Quodsi igitur vel maxime probaueris, ventriculorum latera exactissime claudi tempore systoles: cessante tamen illa nihil est, Figura 12. quod sanguinem *a* intra limites valuularum *b* consistentem vlterius protrudere possit. Quapropter si nullus alius, *ille* saltim *sanguis tempore diastoles in ventriculos relabitur*.

§. 57. Diu fateor haesit meditatio nostra circa vnicum hunc angulum (§. 40.); quae tamen vel hoc solo nomine fertilissima dici meretur, quod tam foecundas et omnino vtiles considerationes nobis suppeditauit: siquidem inter alia denuo luculenter patet tam necessitas quam ratio iam aliquoties allegati phaenomeni *Harueiani* (Cap. I. §. 18.); quod nimirum in momento systoles cordis aorta proxime applantata dilatetur, vnde iam diuerticulum illud (§. 51.) quadantenus innotescit. Quamuis autem facile concedam, naturam multo citius negotium suum absoluere, quam nos aut cogitando aut scribendo legendoue assequi valeamus: hoc tamen etiam neutiquam erit diffitendum, illam, etsi velocissime, non tamen per saltus, sed pedetentim procedere, et hinc eo cautiores pedissequos poscere, quo facilius in tanta festinatione ab ipsius via vera declinare, et in errorum labyrinthum delabi possimus.

fimus. Iam vero promoueamus pedem aliquantulum, et preſſius inſiſtamus arteriarum dilatationi, indagaturi, *quousque illa eodem ſyſtoles ſynchroniſmo ſecundum tractum ramorum terminetur?* Ad hanc enim quaeſtionem ſi ſufficienter reſpondere poſſimus, facile erit diiudicatu, quomodo diſputatio illa (§. 41.) de quantitate maſſae a corde mouendae, dirimi debeat. Ad quem ſcopum vt pertingamus, duo imprimis problemata ſimul nobis enodanda occurrunt, quae autem omnia mirifice inter ſe cohaerent; nempe: *an arteriae omnes et ſingulae in toto corpore ſimul dilatentur, vi eadem cordis vnica? et quanta in genere dilatatio eſſe ſoleat?*

Sectio 3.

De actione Arteriarum.

§. 58. Sepoſita tantisper quaeſtione prima reſpiciamus ad alteram; *quanta* nimirum *dilatatio* eſſe ſoleat? Sine omni dubio generatim reſpondendum eſt, illam eſſe *tantam, quanta requiritur, vt moles ſanguinis e corde proiecti locum ſufficientem nanciſcatur* (Cap. I. §. 17.). Quodſi igitur arteriae omnes ſimul pulſant eodem temporis momento, quo, vi cordis, iſte ſanguis proiicitur: neceſſario nulla arteria eſt, quae non aliquantam illius maſſae portionem intra cauitatem ſuam tum temporis dilatatam recipiat. Sanguis igitur proiectus, ceteris paribus, per totum ſyſtema arterioſum aequaliter diſtribuetur. Quodſi igitur data fuerit quantitas proiecti ſanguinis, maſſaque ſanguinis arterioſi, et arteriarum capacitas: quantitas quoque dilatationis, ſiue differentia diametrorum non difficilis erit determinatu.

§. 59. Liceat autem loco infinitarum diuiſionum aortae aſſumere vnum canalem arterioſum, eiusdem vbique capacitatis, et tantae longitudinis, quanta requiritur, a tota maſſa ſaguinis arterioſi; quod ad calculum facilitandum nemo non concedet. Porro aeſtimabimus maſſam ſanguinis arterioſi, quando arteriae in ſtatu dilatato eſſe concipiuntur, ad minimum quinque librarum, ſiue $= 60$ vnciam; vncia autem ſanguinis occupat ſpatium $1\frac{1}{2}$ digitorum. Sunt igitur vnciae ſanguinis $60 = 90$ digit. $= 90000$ lin. Diameter aortae dilatatae iuxta plerasque obſeruationes eſt $= 10$ lin. erit igitur ſectio eius $= \frac{314}{4}$ lin. et conſequenter longitudo canalis arterioſi, qui quinque libras ſanguinis continet $= 1146\frac{1}{3}\frac{5}{1}\frac{6}{4}$ lin. $= 11$ ped. 4 dig. $6\frac{1}{3}\frac{5}{1}\frac{6}{4}$ lin. quae longitudo, ſiue arteria dilatetur, ſiue contrahatur, conſtans eſt, vt cuiuis attendenti facile patet. Quodſi iam concedere velim, quod maſſa ſanguinis proiecti aequalis ſit duabus vnciis (§. 56.): erit maſſa ſanguinis arterioſi, tempore contractionis $= 60$ vnc. $- 2 = 58$ vnc. $= 87000$ lin. et differentia diametrorum $= 10 - \sqrt{96\frac{4}{9}}$ lin. $= 10 - 9\frac{4}{5}$ lin. quam proxime; ſi vero maſſam ſanguinis proiecti vnciae aequalem ponas, quod magis veroſimile eſt, erit differentia diametrorum $= 10 - \sqrt{98\frac{1}{3}} = 10 - 9\frac{24}{25}$. lin. Sin denique vna ſyſtole dimidiam vnciam proiici ſtatuas, quod omnium maxime probabile eſt: differentia diametrorum vix erit aſſignabilis.

§. 60. Quis autem eſt, qui non primo quoque obtutu videat, hanc differentiam, quae in primo caſu vix $\frac{1}{5}$ lineae, in altero circiter $\frac{1}{25}$ lineae, in tertio vero propemodum nihilo aequalis eſt, adeo paruam eſſe, vt plane non reſpondeat ideae,

ideae, quam communiter de pulſu et dilatatione arteriarum concipimus. Si enim conſideramus vehementiam pulſus in arteriis carpi, et temporum, quae propemodum minimae ſunt illarum, quas tactu explorare ſolemus; harum ipſarum ditatio maior omnino eſſe videtur. Quodſi autem vaſa minora iſtum terminum transgrediuntur, quanto magis vaſa maiora ampliabuntur. Non igitur erramus, ſi differentiam diametrorum canalis arterioſi contracti et dilatati vni lineae aequalem ponamus. Quapropter ſit diameter minima canalis arterioſi $= 9$ lin. erit ſectio eius $= \frac{25434}{400}$ lin. quae ducta in longitudinem ſupra indicatam $= 1146\frac{156}{314}$ lin. dabit maſſam ſanguineam in arteria contracta contentam $= 72900$ lin. $= 72\frac{9}{10}$ dig. differentia igitur maſſarum erit $= 17100$ lin. $= 17\frac{1}{10}$ dig. $= 11\frac{2}{5}$ vnc. ſanguinis, quae aequalis eſt portioni ſanguineae, quae vna ſyſtole in aortam proiici debebat. Iam vero magis vero ſimile eſt, in tractu arteriarum multo plus ſanguinis contineri, quam quinque libras et fortaſſe non erraueris, ſi illam maſſam decem libris aequalem ſtatuere velis; in quo caſu, ſi diameter aortae ſit $= 10$ lin. erit longitudo canalis arterioſi $= 22$ ped. 9 dig. $2\frac{312}{314}$ lin. Sit autem diameter minor $= 9$ lin. tum ſectio arteriae $= \frac{25434}{400}$ ducta in hanc longitudinem dabit volumen ſeu maſſam minorem ſanguinis $= 145800$ lin. quae quantitas a decem libris ſeu 120 vnciis $= 180$ dig. $= 180000$ lin. ſubducta, relinquet differentiam $= 34200$ lin $= 34\frac{1}{5}$ dig $= 22\frac{4}{5}$ vnc. ſang. At vero cum impoſſibile ſit, (ſiue iam quinque ſiue decem libras ſanguinis in arteriarum tractu contineri aſſumſeris,) vt vel maximum, quod homini dari poteſt, cor tantam quantitatem ſanguinis, nimirum vncias vndecim aut viginti duas capere, nedum in aortam traiicere queat, et praeterea a vera massa, quanta probabiliter (§. 56.) transfundi potest, vehementer differat: haec tria necessario inde sequuntur: *Aut* enim *pulsus et dilatatio arteriarum non fit in omnibus arteriis simul*; *aut idea pulsus, qualem hactenus vulgo concepimus, falsa est idea*; *aut hoc vtrumque locum habet.*

§. 61. *Pulsus*, desinientibus ita praecipuis scriptoribus, *est perceptio impetus arteriae in digitum tangentem*; aestimamus huius impetus quantitatem ex robore et impressione, quam in partem tangentem fieri persentiscimus. Absit, vt negem phaenomenon; omni iure differentiam diametrorum arteriae contractae et dilatatae vni lineae aequalem supra § 60.) posuimus, ita enim reuera apparet: sed caussam phaenomeni vt admittam, vix mihi patior persuaderi. Videlicet, aut arteria tota pulsat, aut pars eius; vtroque modo potest obtineri effectus idem, phaenomenon idem. Demonstrauimus autem (§.60.), si pars arteriae pulsat, hoc est, si latera eius diducuntur, hanc apparentem diametri augmentationem impossibilitatem inuoluere. Non igitur solum latus arteriae esse potest, cuius impetum digitus tangens sustinet, sed in ipsa arteria tota quaeri effectus et phaenomeni ratio debet, id igitur, quod pulsare sentimus, non est nisi arteria tota, loco suo mota, et digito exploranti propius applicita. Quibus rite perpensis apprime fauet ipsa arteriarum figura, quae tortuosis flexionibus suis vbique mire se insinuant, et in quas irruptio sanguinis potissimum fieri debet. Quando igitur sanguis in arteriam
Figura 13. intruditur, canalis ABCDE turgescit, et figuram aliam
AβC,

AβCδE induit, ſi vero pulſum exploras in β, non putandum eſt, diametrum canalis ABC a B creuiſſe vsque in β; ſed potius totum vas translatum eſt ex ABC in AβC, et ex CDE in CδE; et viciſſim, quando vas iterum reſtituitur, ex AβCδE in ſitum ABCDE denuo transfertur. Atque haec reciproca arteriae translocatio motum quendam vibratorium, et micationem producit; quae pro varia arteriarum poſitione ac vicinia efficit, vt vas vibrans hic in ſitu AβC, illic in ſitu ABC ſentias, hic igitur productio, illic reſtitutio arteriae perceptionem pulſus tibi ingeneret.

§. 62. Hactenus (§. 58-61.) *ſimultaneum* omnium arteriarum *pulſum* ſuppoſuimus: videamus, quatenus haec hypotheſis admitti poſſit. Arterias ſingulas ſimul dilatari qui autumant, ad experientiam prouocant, iudicem in hoc caſu non tam fallacem, quam minus intelligibilem. Certe interualla pulſationum adeo breuia ſunt, vt indubia experimenta capere res praeceps ſit ac difficilis. Non igitur hoc argumentandi genus ita perfunctorie admittendum eſt, niſi certus ſis, obſeruatorem omni poſſibili cautela vſum fuiſſe; quamquam, ſi in animalibus viuis experimenta inſtituere velis, velocitas pulſus beſtiae ligatae et anhelantis omnem fere diligentiam eludat, vt hac methodo parum proficere poſſimus. Iam quod ad me attinet, illa ipſa experientia in meo corpore capta conuictus in ſententiam contrariam trahor; deprehendo enim ex. gr. pulſum arteriae iugularis non eſſe ſimultaneum cum pulſu arteriae carpi. Quia autem ex noſtra deſcriptione pulſationis (§. 61.) accidere poteſt, illam tunc quoque ſentiri poſſe, quando arteria in in priſtinam ſuam figuram reſtituitur: ſequitur ex hac dif ferentia temporis nihil certi poſſe concludi. Qui vero tempus ſyſtoles cordis et pulſus arteriarum inter ſe conferre ſatagunt, ſimiliter rem ſumme arduam adgrediuntur, quia arterias in puncto pulſare, cor autem motum protractiorem exercere perſentiſces, nec quodnam punctum ſyſtoles puncto pulſationis reſpondeat, facile determinaueris. Certum eſt quidem, momentum illud temporis, quo apex cordis latera pectoris ferit, non coincidere cum appulſu arteriae carpi aut carotidis: ſed eo ipſo, quia ſyſtole cordis non fit in inſtanti, nec ergo ſciamus, an illud momentum ſit principium, an medium, an finis ſyſtoles; inde inferre non licet, ſyſtolem cordis et pulſum arteriarum non eſſe ſimultaneum; quemadmodum viciſſim ex ſimultaneitate ſyſtoles et pulſus ex. gr. arteriae carpi non ſequitur, quod cor ſanguinem vsque ad arteriam illam eodem momento in motum cieat, quia alia quaedam cauſſa huius ſimultaneitatis, ipſa videlicet variata pulſationis perceptio, ſubeſſe poteſt. Interea, quia tempora interuallorum, queis tam pulſationes inter ſe, quam ſyſtole et pulſationes differunt, non adeo inſignia ſunt, vt alternatiua et vtrinque aequali menſura ſe inuicem ſubſequantur; quia etiam arteriarum ſociarum, ex. gr. carotidum, in carpo, temporibus, pede, pulſatio exacte correſpondent, quod fieri non poſſet, niſi ab vna eademque potentia communi vrgerentur; quia porro accelerato aut retardato motu cordis pulſationes arteriarum coincidentes eodem momento ſimiliter accelerantur aut retardantur, quod ſimiliter non fieri poſſet, niſi ſanguis in arteriis immediate a corde impelleretur: *veroſimile eſt* omnino, *pulſum*, *etſi non eodem tempo-*

temporis momento, tamen eodem vnius ſyſtoles ſynchroniſmo per omnem arteriarum tractum continuari. Denique ſanguis grauitatione ſua in latera vaſorum premit, et extenſionem illorum adiuuat (§. 15.): augetur haec preſſio, aucta mole, et quidem in inſtanti; in ſyſtole autem ſanguinis arterioſi moles augetur: tempore igitur ſyſtoles latera arteriarum per ſanguinem auctum et grauitate ſua prementem ad maiorem extenſionem ac dilatationem ſollicitantur, et quidem in inſtanti ac ſecundum omnem tractum arteriarum, quousque ſanguis grauitans pertingit. Noſtra igitur ſententia, quod *arteriarum pulſus cum ſyſtole cordis* coincidat, ex his rationibus probabilior euadit ac corroboratur.

§. 63. Demonſtraui alio loco, dari in tubis capillaribus reſiſtentiam aliquam, non a vi attractiua aut fluido contraponderante, ſed ab illorum anguſtia deriuandam, quae humana induſtria adeo augeri poſſit, vt ad inſignem altitudinem ſuperincumbens fluidum in quiete ſeruetur. Vaſa autem capillaria in corpore animali omni imaginatione ſubtiliora atque anguſtiora ſunt: ergo illorum reſiſtentia ſimiliter ſe habet. Preſſio autem eſt in ratio baſeos et altitudinis fluidi; ſi igitur ſectio arteriolae capillaris minima eſt, quae pro baſi haberi debet; tum reſiſtentia erit maxima, et infinitae altitudinis columna ſuperincumbens immota haeret.

§. 64. Conſidera igitur: dilatationem tuborum arterioſorum incipere in principio aortae (§. 35.); et continuari per omnem tractum arteriarum (§. 62.); per illam vero nihil intendi a natura, niſi vt locus concedatur eiecto ex corde ſanguini (§. 55. 56. 58.); hunc ſanguinem per omnes arteriarum anfractus aequaliter et commode diſtribui (§. 58.); conſidera praeterea, eam eſſe inter aortam et arteriae ramos maiores et inter extremitates vltimas capillares proportionem, vt hae minimam portionem illius maſſae diſtribuendae ſortiantur, huius igitur portiunculae vim eſſe minimam, reſiſtentiam contra anguſtiarum capillarium eſſe maximam (§. 63.); An non magis magisque veroſimile videtur, has extremitates capillares quaſi pro clauſis haberi poſſe, et motui ſanguinis terminum in illis figi, donec haec reſiſtentia a viribus maioribus aliunde accedentibus ſit ſuperata? *nullum* igitur *ſanguinem tempore ſyſtoles cordis in venas transfundi* (§. 41.) *vi cordis*?

§. 65. Arteria dilatata, plena, elaſtica in reſtitutionem ſui nititur: ſublata igitur vi extendente contractio actu ſequitur; quia igitur hoc modo capacitas vaſis minuitur, vt tantum ſanguinis denuo expellatur quantum a corde ſuſceptum fuit (Cap. I. §. 23.): non dubium eſt, quin haec ipſa vis ſe contrahendi pro principio haberi debeat, vnde hic traiectus deriuandus ſit; de cuius actionis natura et quantitate paucis nunc nobis erit diſpiciendum.

§. 66. Quia contractio arteriarum effectus eſt elaſticitatis illarum: tota etiam haec actio iisdem legibus ſubiecta eſt, quas natura elaſticitatis requirit, quasque ſupra, cum de vi cordis ageremus (§. 28 - 34.), commemorauimus. Et quidem generaliter elaſticitas arteriarum dependet a robore ac firmitate fibrarum, ex quibus illae componuntur. Quo robuſtiores igitur fibrae, eo maioris elaſticitatis ſunt capaces: quo debiliores fibrae, ad eo minorem

norem gradum ſe patiuntur extendi. Neque minus arteria robuſta maiorem virium extendentium impetum ſuſtinet; arteria debilis minorem. Porro intenſitas ipſa virium elaſticarum arteriae, queis in ſui reſtitutionem nititur, ſequitur intenſitatem virium, queis ipſa fuit extenſa ſeu producta. Atqui haec extenſio prouenit ab augmento ſanguinis certa velocitate irruentis, augmentum et celeritas ſanguinis a vi cordis illum intrudente. *Vis* igitur *arteriae*, qua ſe contrahit, *eſt in ratione compoſita numeri fibrarum conſpirantium, quantitate elateris, et intenſitate eius*; ac reſpondet vi cordis, quatenus haec per excitatum ſanguinis irruentis impetum effecit arteriae extenſionem. Quo intenſior igitur actio cordis, quo maior dilatatio arteriae: eo fortior quoque eſt illarum contractio; e contra, quo languidior actio cordis eſt, eo minor dilatatio, eo debilior quoque contractio arteriae erit. Haec et plura ſimilia theoremata absque vlteriori argumentatione ex natura elaſticitatis fluunt, atque experientia confirmantur; ſiquidem plura adhuc corollaria inde deduci posſent, quae ad illuſtrandas veritates phyſiologicas ac pathologicas facerent, ni nimium a propoſito noſtro deflecteremur. Haec igitur generaliter dicta ſatis ſunto.

§. 67. Quodſi iam magis praeciſe in quantitatem virium, queis arteriae in ſanguinem expellendum agunt, inquirere velimus, tanta ſollicitudine opus non eſſe putauerim, quanta vires cordis indagare oportuit. Quia enim intenſitas actionis illarum dependet ab actione cordis (§. 66.): quantitas virium, queis arteriae ſe contrahunt, facile determinari a priori poteſt, ſi cognita fuerit quantitas virium cordis, quae in arteriis dilatandis impenduntur ac consumuntur. Ex effectu autem, si illa concludi debet, dicendum est in genere: vim arteriarum sese contrahentium tantam esse, vt portio sanguinis per systolem cordis in ipsas intrusa denuo terminis suis eiiciatur, antequam systole sequente noua nouus quoque sanguis irrumpat. Ad quod problema strictius soluendum oportet nosse, 1.) quanta sit massa mouenda? quae pro capacitate arteriarum, et pro hypothesi pulsus varia esse potest. 2.) Qua celeritate motus fiat? quae quidem, quamuis itidem varia est pro ratione interuallorum temporis inter duas pulsationes, in hoc tamen constans est, vt semper dimidium interualli tempus receptione sanguinis, alterum dimidium expulsione illius consumi licite supponamus. Via autem, quam massa mota emetitur, partim a modo, quo contractio arteriae atque sanguinis eiectio fit, partim a quantitate sanguinis actu expellendi (§. 56.), partim ab orificiorum, per quae exit, constitutione deriuari debet.

§. 68. Haud difficile foret, ad melius intelligendum ea, quae paragrapho antecedente diximus, omnia ea, quae de similitudine siphonis (§. 22. 23.) commentati sumus, ad actionem arteriarum applicare. Sed alia succurrit methodus, quae expiscandae mensurae virium tam cordis quam arteriarum apprime fauet, et quae in omni casu adhiberi potest, siue arterias simul omnes, siue successiue (§. 62) agere supposueris. Videlicet loco vasis arteriosi, elastici, dilatabilis finge vas rigidum, et in locum fluidi, soliditatis speciem intra canalem induentis impenetrabilis, suppone fluidum elasticum. Sit vas plenum clau-

claufumque firmiter vndequaque. Quodfi iam plus fluidi addideris, maffa prior in volumen minus comprimetur, vt noua portio locum neceffarium nancifcatur; et ambae fimul fumtae volumen priftinum conftituent. Facta compreffione elater fluidi augetur in ratione maffarum. Auferatur vis comprimens, fiue ceffet quomodocunque illius actio, vas autem claufum maneat eiusdem capacitatis, ne fluidi compreffi volumen quicquam mutetur: tum fluidum fuas vires conceptas habebit et elateris follicitationes ad motum. Aperiatur iam vas ex aliquo latere; tum viribus iftis mortuis fuccedent viuae, quae motum fluidi actu producent; fluidum igitur profiliet pro quantitate virium pellentium; funt autem hae in ratione elateris aucti, et hoc augmentum in ratione vis comprimentis. Fluidum igitur mouebitur pro quantitate virium, queis compreffum fuerat.

§. *69.* Videmus, re hac methodo confiderata eundem effectum obtineri, ac fi vas elafticum, fluidum vero rigidum fuerit. Fluidum elafticum colligitur in fpatium minus, quantum videlicet requirit fluidum denuo accedens, et plus maffae quidem adeft, fed fub eodem volumine; Hoc vero idem eft, ac fi fluidum non elafticum volumine auctum reciperetur in vas elafticum, dilatatum et ampliatum. Neque minus: quodfi fluidum elafticum compreffum iterum fe expandit, et vi fua locum fibi extra vas per datam portam quaerit; non illud totum effluit, fed tantum, quantum denuo accefferat; et fpatium, quod prius occupauerat, adhuc adimpletum permanebit; fiue: continebitur maffa prior fluidi fub volumine priftino. At vero idem fiet, fi vas elafticum fe contrahit; expellendo enim portionem, quantam receperat, capacitas ipsius ampliata ad pristinos terminos deducitur, vt nil nisi massa pristina spatio pristino contineatur. Quodsi igitur sub nomine vasis intellexeris tractum totum arteriarum pulsantium, et sub nomine fluidi sanguinem arteriosum in omni illo tractu dilatato contentum: possibile erit determinare vim elasticam arteriarum, et celeritatem sanguinis in venas proiiciendi, quae omnino tanta erit et esse debet, vt resistentiae ab extremitatibus capillaribus (§. 63.) obiectae, et si quae aliae occurrant, vinci possint.

Sectio 4.

De actione Auricularum.

§. 70. Auriculas in perpetuo motu reciproco esse cum ventriculis cordis, et hunc motum in dilatatione et contractione consistere, obseruationibus discitur certissime. Illas igitur ad potentias sanguinis circuitum promouentes pertinere (§. 3.), nemo dubitat. De quantitate actionis huius nemo, de modo autem pauci, et ii quidem non nisi generaliter structuram eius muscularem allegando, quicquam commemorauere. Omnes in eo versantur, et mire se dilacerant, vt rationem reddant, quare auricula dextra capacior sit sinistra? quam quisque proferre et stabilire conatur systemati suo conuenienter.

§. 71. Nostrum est, non fingere hypotheses, sed ex indubitatis phaenomenis et veritatibus ea, quae sequuntur, explicare, quae non sequuntur, relinquere. Ad scopum igitur nostrum obtinendum postulamus concedi sequentia:

1.) Pa-

1.) Patere viam ſanguini ex vtraque caua tam in auriculam dextram quam ventriculum eiusdem lateris; et patere viam ex vena pulmonali in auriculam et ventriculum lateris ſiniſtri.

2.) Sanguinis motum in vena caua inferiore eſſe lentisſimum.

3.) Sanguinem in vena caua ſuperiore indeſinenter deſcenſum et lapſum aut in auriculam aut in ventriculum, qua via patet, affectare.

4.) Sanguinis deſcendentis motum eſſe quidem acceleratum, ſed tamen ob breuitatem temporis pro aequabili habendum eſſe; hinc nullam vim ei ineſſe, niſi preſſionem a grauitate ortam.

5.) Sanguinem in venae pulmonalis ramis illis, qui ex ſuperioribus pulmonum partibus verſus cor deſcendunt, ſimilem continuam preſſionem et motum exercere vi grauitatis ſuae.

6.) Pulmonem in perpetua actione et voluminis ſui variatione eſſe.

7.) Sanguinem ex vena pulmonali in auriculam ſiniſtram et ventriculum non ſola preſſione a grauitate ſua orta, illabi: ſed impetu concepto ex actione pulmonum, vi viua irruere.

8.) Sanguinis motum nullam pati moram, actionem igitur potentiarum non debere officio ſuo deeſſe, ſed indefeſſam continuari temporibus et rhythmis determinatis.

9.) In ventriculis et auriculis poſt ſyſtolem ſuam vacuum exiſtere reſpectu totius capacitatis ſuae.

10.) La-

10.) Latera ventriculorum in diaſtole non niſi ad certum gradum relaxari, et hinc vi quadam extranea vlterius extendi debere, vt apta fiant ad nouam ſyſtolen.

Omnes hae propoſitiones partim ex iis, qua in Capite primo, et in hoc ſecundo iam ſtabilivi, partim ex adſcititiis principiis anatomicis ita facile poſſunt demonſtrari, vt earum ampliori deductione ſuperſedeam. Properemus igitur ad concluſiones.

§. 72. Quando Cor in ſyſtole eſſe incipit; contractio auricularum finita eſt. Si igitur tum auricularum latera velles diducta, neceſſario vacuum haberes. Vbi autem vacuum eſt, ibi reſiſtentia eſt nulla. *Sanguis* igitur *ex vtraque Caua in auriculam dextram*, *et ex vena pulmonali in auriculam ſiniſtram celeritate qualicunque influit*, et illarum capacitates adimplet, ac *dilatat*.

§. 73. Auricula dilatata, elaſtica in ſui reſtitutionem nititur. Vis huius niſus eſt in ratione numeri fibrarum ad contractionem correſpondentium, quantitatis, et intenſitatis elateris ſui. Hac vi ſua ingenita, *exprimunt ſanguinem*, *finita actione cordis*, *in ventriculos reſpectiuos vacuos*. Quantitas maſſae determinatur a capacitate auricularum, non neglectis iis cautelis, quas in determinanda quantitate ſanguinis e corde prorumpentis (§. 56. 57.) itemque in Capite I. §. 27. 28. 29. allegauimus. Celeritas autem, qua in latera ventriculorum irruit, a celeritate, qua muſculi auricularum ſe contrahunt, et ab orificio, quo auricula in ventriculum hiat, dependet, et ex idea emboli, capacitatem tubi minuentis (§. 22. 23.) ſimili modo deduci poteſt.

§. 74.

§. 74. Laxata ventriculorum latera vi extranea dilatari debent (§. 75. n. 8. 10.). Quia autem motus in vena caua inferiore est lentissimus (n. 2.), et eius celeritas minima; neque minus, quia vis sanguinis, descendentis (n. 4.) in sola pressione consistit: *patet hinc necessitas auriculae dextrae*, *vt nisu suo se restituendi motum nouum imprimat sanguini*, non solum suo, sed et alteri ex vena caua vtraque (n. 1.) allabenti, quae vtraque massa iunctim sumta, celeritate concepta, in laxata ventriculorum latera irruit, et illa subito, quantum necesse est (n. 10.), extendit. Neque minus *patet necessitas auriculae sinistrae*, *vt* nimirum *latera ventriculi sinistri* per sanguinem velocitate concepta iniectum *subito extendantur*; quia circulatio sanguinis moram non patitur.

§. 75. Quia sanguinis motus in cauis est lentus (§. 75. n. 2. 4.): igitur *omnis* eius *acceleratio a sola actione auriculae dextrae proficisci debet.* Quia e contrario sanguis ex pulmone in cor sinistrum vi viua et cum celeritate (n. 7.) irruit: igitur omnis *vigoratio*, qua *ventriculo sinistro* opus est, *non a sola auricula sinistra ingeneratur*, *sed* illa *a quantitate* impetus sanguinis *ex auricula et vena pulmonali* prorumpentis *aggregata* proficiscitur. En veram caussam physicam et finalem, quare auricula dextra capacior et fortior sit et esse debeat, quam sinistra. Qui ad rationem huius inaequalitatis reddendam, densitatem et (contradictorie plane) fluiditatem maiorem sanguinis, quam in pulmone nanciscitur, somniant, illi tenebris circumfusi caligant, et oleum ac operam, quam inanem ludebant, perdidere.

Sectio 5.

De Attractione vasorum capillarium.

§. 76. Saepe accidit, vt, qui in explicandis phaenomenis naturae occupati sunt, tales caussas in medium producant, quae non nisi speciem quandam veri habent: cuius quidem erroris nulla alio ratio est, quam quod nec effectus nec caussae ideam distinctam habeant, sed sola speciosa aliqua similitudine partiali, quae tamen nihil ad rhombum facit, decipi se patiantur, vt miros paralogismos committendo et sibi et aliis fucum vendant. Horum ex numero sunt illi, qui postquam generaliter intellexerunt, aquam in tubulo capillari sursum ascendere, hanc legem ad motum sanguinis explicandum applicari posse autumantes, statim concludunt: Ergo extremitates capillares venarum sanguinem attrahunt; Ergo hac attractione sanguis ex arteriis in venarum alueos facilitatur. Sed si distincte quaesiuerimus ex natura, illa quoque distincte respondebit.

Figura 14. §. 77. Sit Tubus capillaris AB, qui superficiem aquae, in vase V tangens, replebitur supra libellam vsque ad altitudinem BC; si remoueris tubum ab aqua; illa portio recepta et attracta in spatio BC immota haerebit.

Si profundius immerseris tubum ad altitudinem BD, tum et aqua in tubo ascendet vsque ad altitudinem F, ita vt sit BC = DF, et BD = FC; (si nimirum angustia tubi vbique sibi aequalis est, quod ad facilius intelligendum experimentum supponimus). Si extraxeris tubum, aqua iterum descendet, donec ad pristinam altitudinem BC peruenerit.

Si

Si tubum AB inuertas, vt extremitas B sursum spectet: aqua in cauitate CB haerens descendit ex BC vsque in EA, et reliquum spatium BE = AC aqua vacuum relinquit.

Sit Tubus AB maioris diametri AS, qui desinat in tubulum capillarem BC, cuius attractio tanta sit, vt, si superficiem aquae tangat, fluidum in illo ascendat et haereat ad altitudinem DC. Si repleueris totum hunc tubum AC fluido, tum illud descendet, et effluet per foraminulum C, tam diu, donec superficies fluidi superior AS peruenerit vsque ad terminum D; et ex tota massa fluidi nihil remanebit residuum, nisi quantum angusta tubi capillaris capacitas CD virtute attractionis capere et retinere potest. Figura 15.

Procedit hoc experimentum, siue Tubi AC repleti extremitas C superficiem aquae tangat, siue totus tubus liber sit circumquaque.

Idem erit phaenomenon, si tubus capillaris BC cum tubo maiori AC non in directum iaceat, sed illi ad angulum quemcunque ita inclinentur, vt capillaris FC in situ infra horizontem HO depresso, maior autem AB in situ supra horizontem eleuato conseruetur. Figura 16.

§. 78. Ex his experimentis (§. 71.) sequitur: 1.) *vim attractricem non agere nisi ad certum aliquem terminum, quem numquam transgrediatur*; 2.) hanc *vim non esse tantam, vt superincumbentem aliam massam suspensam tenere possit*, sed potius superatam illius massae superincumbentis pondere, *descensum cedere illi*, donec retinendae portioni suae determinatae residuae denuo par sit. 3.)

Tantum igitur abesse, vt tubus capillaris vltra debitam altitudinem repletus, et altero orificio immissus fluido cuidam, plus vltra recipiat, vt potius, quae superflua sunt et onerosa, demittat.

§. 79. *An igitur extremitates capillares venarum sanguinem sugunt, et motum eius facilitant? id quidem*, ex demonstratis (§. 71. 72.) puto *nemo intelligens concesserit.* Attrahant illae quidem per me sanguinem, si vacuae fuerint, attrahant ad ingentem altitudinem, quousque propter angustiam vasorum licebit. Quia venae naturaliter plenae sunt, et iam vltra terminum altitudinis fixum repletae: ista vis attractiua adeo non plus attrahet, aut sustinebit sanguinem venosum, vt potius descensum concederet, quam ascensum iuuaret, si nulla alia vis in corpore adesset, quae huic descensui valide resisteret. Qui igitur phaenomena ista de applicatione emplastrorum, cataplasmatum, vnguentorum, quorum partes aquosas, oleosas, spirituosas, a superficie corporis absorberi experimur, explicare aggrediuntur, ad principia longe alia, ex hydraulicis eruenda confugere debent; quia in attractione tubulorum capillarium parum solatii inuenient.

OBSER-

OBSERVATIONES ANATOMICAE AD HISTORIAM ET ACTIONEM MVSCVLORVM FRONTALIVM, OCCIPITALIVM, PALPEBRARVM, FACIEI *pertinentes.*

AVTORE
Iosia Weitbrecht.

MVsculi *frontales*, *superciliorum* et *palpebrarum* ita inter se nectuntur, vt de vno nihil exacte referri queat, quin et simul alterius mentio fiat. Sed nec de *frontalibus* atque *occipitalibus* quicquam stabile dici potest, quin accurata incumbentium ac substratarum membranarum cognitio praemittatur: in quarum recensione omnium accuratissime *Cel. Winslowius* se gessit, vt pauca adiicienda supersint; quae tamen prorsus negligenda non sunt, quia determinatio situs, actionis ac nexus musculorum dictorum inde dependet. Tabula XV.

II. Subter pinguedinem cuti casuariae immediate accumbentem detegitur tunica aliqua singularis, quam vel cum *Vesalio* panniculum carnosum, vel cum *Winslowio membranam pellicularem* dixeris, perinde est; quamuis posteriorem denominationem cum idea rei ipsius magis conuenire fatear. Haec *membrana* in tota exteriore superficie sua plurimas fibras disiicit, quae ipsam massam pinguedinis penetrant, illam in cellulas diuidunt, et

 subin-

ſubinde *arctiſſimam*, cum ea atque ipſa cute, *connexionem*, imprimis *in vertice* ſecundum longitudinem ſuturae, efficiunt. Obtegit illa porro omnem amplitudinem capitis in regione frontali, temporali, verticali atque occipitali; *nec* tamen *eandem* vbique *craſſitiem* ſeruat.

III. Membranam pellicularem (II.) ſubſequitur *Galea aponeurotica* ex *duabus laminis*, per tunicam cellularem diſtinctis conſtans, et ſimiliter toti caluariae ita obducta, vt etiam ad orbitae crepidinem vsque continuari, imo et lamellam aliquam ſuper ipſam palpebram ſuperiorem proiicere videatur. *Tenuior* eſt ſupra muſculum temporalem, ad cuius circumferentiam inſertionis circularem firmiter accreſcit; *tenuiſſima* autem ſub muſculis frontalibus, et circa inferiora temporum, vbi verſus os Zygomaticum demittitur.

IV. Integumentorum numerum complet *perioſtium*, ſimiliter ex *duplici* tunica contextum, quarum *exterior* laxa et mobilis muſculum temporalem externe obducit, *interior* vero cranio ipſi ſtrictiſſime inhaeret.

Figura 1. V. Muſculi *occipitales* paullo ſupra lineam acutam transuerſalem (lit. *a*.) e regione ſinus cruciformis oſſi occipitis adnaſci ſolent. Vtplurimum maſſa illorum carnea *quadrilatera* eſt, ita vt linea inſertionis vtriusque (lit. *b*. *c*.) non eandem directionem ſeruet, ſed quadantenus verſus ſe inclinentur (lit. *d*.). Oblique ſurſum progreſſi proiectiones ſuas *tendineas* laminae *exteriori* galeae aponeuroticae (III.) intexunt, vel potius, vbi crebriores ſunt, *ipſiſſimam* hanc *laminam* conſtituunt. Propter ſitum et progreſſum muſculorum obliquum fibrae iſtae tendineae vtrin-

vtrinque verſus mediam atque elatiorem muſculorum temporalium ſedem *diuergunt* (lit. *e*), tantum abeſt, vt, quod *Santorinus* perperam poſuit, circa verticem ſe decuſſent. Eidem huic laminae exteriori innaſcuntur aponeuroſes muſculorum *eleuatorum auris*, inter quarum texturam fibrae *occipitalium* denique deſinunt.

VI. Muſculi *frontales* cum Galea aponeurotica nihil commune habent, niſi ſolam *contiguitatem*, et forte fibroſitates quasdam cellulares interiectas. Immediate enim ſub cutis pinguedine ita intexuntur ipſiſſimae illi *membranae pelliculari* (II), vt vnam eandemque maſſam in regione frontali conſtituant; vnde ſequitur, illos galeae ſimpliciter *inſterni* non autem complicari. Porro *nullibi oſſi* alicui innaſcuntur; ſed, quemadmodum de membrana diximus, illam fibris disiectis cum pinguedine commiſceri: ita etiam hi muſculi frontales tota ſuperficie ſua externa ſecundum omnem latitudinem cum eadem pinguedine, et conſequenter cum *cute ipſa* committuntur. Fibrarum muſcularium extremitates *ſuperiores* ſenſim in membrana omnem carnoſitatem deponunt. *Inferiorum* autem aliquae, quae *circa mediam frontem* ſedem ſuam nactae ſunt, *profundius* diductae cum *pyramidalibus* narium coaleſcunt; *reliquae* circa *depreſſores* ſuperciliorum et *orbicularem* palpebrarum plane euaneſcunt; de qua connexione inferius (X.) plura afferemus.

VII. Relictis iis, quae de *inceſſu* et *quantitate* fibrarum in muſculis *frontalibus* vulgo diſputantur, et a *Morgagno*, *Santorino*, *Winslowio* ſatis diſcuſſa ſunt: eam tantummodo quaeſtionem examinabimus, quae ad *actionem*

tam

tam *frontalium*, quam *occipitalium* pertinet: *an* nimirum *musculi digastrici sint? an* igitur *ad eandem actionem conspirent, et se adiuuent? an* vero *diuersimode agant?* Musculorum digastricorum, ex. gr. illorum, qui ad maxillam inferiorem et os hyodes pertinent, et si quos alios, qui tendineas inscriptiones habent, huc referre velis, *ea* proprietas est, vt *duo ventres* carnei *per vnum* in medio interiectum *tendinem communem* connectantur, et quidem ita, vt tendo ille medius vtrinque in fibris carneis euanescat. At vero *talis* connexio inter musculum *frontalem* atque *occipitalem nullibi* conspicitur, quippe *duabus* distinctis (VI.) *tunicis* intexuntur; neque quisquam aponeurosim *occipitalis* in *frontalis* carnem modo indicato desinere demonstrauit. Sed ne de solo nomine disputare videamur: concedamus esse *digastricos*; quia non negamus, aliqualem saltim inter illos connexionem intercedere, quippe *membrana pellicularis et* musculus *frontalis* galeae aponeuroticae, vt stratum super stratum, imponitur. At vero exinde non sequitur, illos in actionibus suis conspirare, quod tamen de aliis digastricis dici potest. Hoc eo clarius patebit, si in *singulorum* actiones separatim inquirimus. Musculi enim *frontales nulli adnascuntur ossi*. Ergo, quando fibrae illorum contrahuntur, ambo illorum extrema versus mediam partem appropinquant; ergo *cutis*, cui adnascuntur, in *elatiore* fronte *descendit*, circa *supercilia* autem *ascendit*, et in *media* fronte in angustius spatium coaceruatur, id est, *corrugatur*. Atque haec actio non solum ex *situ*, et *connexione* musculorum *frontalium* (VI.) per *generales regulas*, quas de motu musculari in Commentar. Tom. IV. indicauimus, per legitimam consequentiam

tiam determinatur; sed et *experientia* comprobatur: quippe in *corrugatione* frontis tam supercilia *tolli*, quam elatiorem cutis sedem non capillatam *dorsum trahi*, oculis cernimus; imo si cutim illam manu sursum cogere tentaueris, in ipso corrugationis actu illam manifesto fortius deduci, et resistentiam a digitis factam superari experieris. Contra vero musculi *occipitales* altero sui extremo firmiter *ossi innascuntur*, atque hoc modo punctum motus *fixum* nanciscuntur: ergo, si agunt, aponeuroses illorum tendineae necessario *versus radicem* illam *fixam* appropinquant, et cutim, si quidem obsequitur, secum *versus occiput* retrahunt. Tantum igitur abest, vt, si *frontales* et *occipitales simul* eodem temporis momento contrahuntur, in eadem actione *conspirent*, vt potius sibi mutuo *resistant*, quia *illi* cutim *versus frontem*, *hi* vero *versus occiput*, directione plane *contraria* traherent. Non quidem negandum est, in frontis contractione, etiam in vertice et syncipitis elatiore sede cutis ipsius diductionem sentiri. Verum *primo non* de eo quaeritur, *an cutis trahatur*? sed *an* haec tractio a musculis *occipitalibus* proueniat, et *an hi* etiam simul cum *frontalibus* contrahuntur? quod certe tactu plane nequit explorari; neque etiam vnum ex altero consequitur. *Deinde galea* ista *aponeurotica* multo *strictius* caluariae obducta est, quam vt tam vagas et *laxas* cutis *motitationes* producere aut *pati* posset. Denique illa ipsa *tractio* et motitatio cutis, *circa verticem*, *sinciput* et *occiput*, nos conuincit, illos musculos non *coadiutores*, sed potius *antagonistas* esse; quia in *corrugatione* frontis omnem cutem in memoratis regionibus similiter *verſus frontem* trahi perſentiſcimus, quae motus *directio actioni* muſculorum *occipitalium* plane *contraria* eſt.

VIII. Qualis *effectus actionis* muſculorum *occipitalium* ſit, propius determinare non audeo. Quapropter, *quid ſuſpicer*, breuibus ediſſeram. Aut enim *cutim* in corrugatione frontis verſus anteriora tractam, *laxatis* muſculis *frontalibus retrorſum* ducunt, aut contractione ſua *aponeuroſin* et *galeam*, qua muſculi *temporales* obducuntur, firmiter *tendunt*; hos muſculos quadantenus *comprimunt*, atque ita illorum actioni *velificantur*; quemadmodum experimur, virtutem muſculi per *ligaturas* multum corroborari: aut fortaſſe *vterque vſus* locum habere poteſt.

IX. In Galea aponeurotica iuxta muſculum occipitalem plerumque tantum non horizontaliter verſus auriculam decurrit *lacertus* aliquis *muſculoſus*, teres et carnoſus, et in tunica concham externe inueſtiente terminatur. Nullus dubito, quin hic ſit *occipitalis minor Santorini*; interim vero nullatenus confundi debet cum aliis *auriculae* muſculis *poſticis* ſeu *retractoribus*, quippe qui non in galea, aut certe non in lamina eius exteriore, ſed multo *profundius* perioſtio ipſi (IV.) innaſcuntur, et quos ſaepiſſime in *tres* ſocios a natura diuiſos (propemodum, vt a *Veslingio* pinguntur) deprehendi; vt *nimis durum* mihi videatur, ſi *Cl. Winslowius* illis autoribus, qui *tres* muſculos et notarunt et delinearunt, ita nude et ſimpliciter imputare velit, quaſi illi diuiſiones iſtas *ſoli ſcalpello* ſuo deberent.

X. Vix

X. Vix vllus alius musculus tam varias diuisiones passus est atque Musculus *Orbicularis palpebrarum*; quae omnes etiam eo minus inter se concordant, quia pro lubitu tantummodo assumtae nullo stabili fundamento nituntur. Sequar tamen in examine *ordinem Winslowii*. Huius quidem musculi portio *prima* (lit. *a*.), seu fibrarum, quae quam longissime a palpebris distant, *ordo extimus* omnino circa canthum externum in orbem fertur, et quemadmodum in *Santorino* et *Walthero* delineatus est, super os malae, eadem fere latitudine *reflectitur*, atque vsque ad *ligamentum ciliare* (lit. *e*.) dictum, *coarctatis* fibris ascendit. Hic ordo in media malae regione per *accessorium lacertum* nigricantem (quem *inferiorem* dixero (lit. *b*.),) corroboratur, cuius *pars* cum pyramidali narium (lit. *k*) commissa ligamentum superscandit et cum frontalibus (lit. *i*.) descendentibus confunditur, *pars* autem *sub ligamento* absconditur et in vicinia terminatur. Quod vero *incessum* et *connexionem* fibrarum huius ordinis in *elatissima orbitae sede* attinet: meas quidem obseruationes neque cum *Santorino* neque cum *Winslowio* conuenire intelligo. Non cum *Santorino*, qui *hunc ordinem in Tabula sua lit*. C. ita pingit, quasi *subter frontalem* subduceretur, atque ita describit §. VI. quasi tumentes *corrugatoris superciliorum* lacertuli ex illo componerentur: non cum *Winslowio*: qui *hoc* eodem *ordine* musculum *frontalem tegit*, ordinem autem *secundum* inter corrugatorem et frontalem locat; qui quidem *situs Santoriniano* plane *contrarius* est atque inuersus. Videlicet, vbi *ordo primus* in dicto loco ad musculi *frontalis* fibras peruenit, eius progressus quidem omnino *interrumpi*, neque ad angulum internum continuari videtur. Figura 2.

videtur. Sed eius loco alius ſingularis *lacertus acceſſorius* (quem *ſuperiorem* (lit. *c.*) vocabo) ex hoc angulo ortus *ad eandem* orbitae ſedem oblique ſurgit, et cum *ordine primo* facta manifeſta fibrarum *decuſſatione* (lit. *d.*) ita confunditur, vt alter verſus tempora, alter verſus frontem directione ſeruata *in cute obliterentur*. *Frontalis* autem in hoc occurſu ita immiſcetur atque euaneſcit, vt *nec ſupra, neque infra* orbicularem progredi dici queat. Neque minus *corrugator ſuperciliorum* ſubiacens adeo *ab ordine primo* et *lacerto* iſto *ſuperiore* diſtat, vt *per* interſperſam *pinguedinem* ſufficienter diſtinguantur.

XI. *Ordo tertius* (lit. *g.*), ſeu fibrarum illa feries, quae *palpebris* proprie incumbit, omnino ductu magis elliptico incedit, atque angulum *externum* flexura quadam acutiore ambit; in cantho autem *interno* communionem adeo manifeſtam inter ſe non habet, ſed per interiectum *ligamentum ciliare* diſtinguitur. Hic autem ordo, non in ſuperiore ſed, in inferiore palpebra et *latior* et *denſior* eſt; quippe in illa inter ordinem ſecundum et tertium notubile aliquod *interuallum* fibris carneis deſtitutum relinquitur.

XII. Huius ordinis *tertii* fibrae, quo magis ad palpebrarum limbum appropinquant, eo magis directe et *parallele* incedunt, eoque magis illarum connexio in angulo externo obliteratur; vnde *ordo quartus* (lit. *h*) emergit. Hae fibrae omnes, quamuis in genere craſſiores ſint, quam vulgo delineantur: *vnicus* tamen *lacertus* inſigni quadam *turgeſcentia* prae aliis conſpicuus eſt, qui cum ipſo tarſi margine extremo *parallele* excurrit, ciliorum radices tegit, et iuxta canales lacrymales verſus ligamentum ciliare produciducitur. Atque iste lacertulus mea quidem opinione Musculum illum *ciliarem Riolani* constituit, qui semper adest, modo disquisitio subtili cultello instituatur: quicquid contradicant *Dom. de Marchettis*, *Blasius*, *Diemerbroek*, *Santorinus*, qui hunc musculum nuspiam adesse, nec a quoquam facile demonstratum iri contendunt.

XIII. Totus hic *apparatus musculosus* ad palpebram pertinens (XXI.XII.) circumquaque quidem tam cuti quam pinguedini adnascitur: sed *in angulo interno* imprimis insertionem *fixam* nactus est. Non autem, vt recte *Santorinus* monet, in vnum punctum omnes fibrae cohaerent; sed in tota anguli vicinia diffunduntur. Imprimis *ordo primus* et *secundus* cum *lacertis* suis *adscititiis* (superiore et inferiore X.) partim in *ligamento ciliari* ipso, quam late illud patet, partim *subter illud* in osse nasali, et sacculi lacrumalis tunica implantantur. Ordinis *tertii* autem fibrae quaedam etiam *in margine orbitae* obliterari videntur. *Ligamentum* autem istud (lit. *e.*), vulgo *ciliare* dictum, et a *Santorino* ac *Walthero* per asteriscum indicatum, plane non *tendo communis* est, in quem omnes istae fibrae vniuntur, *neque* etiam pro *productione* aut colligatione *cartilaginum* tarsi, et palpebrarum haberi debet; sed re ipsa nil nisi *verum ligamentum cutaneum* est, siue *productio* alba, et *tenax*, qua *cutis* ipsa *ossi* nasali firmiter adnascitur. Atque hoc prudenti naturae consilio factum esse arbitror, vt hac ratione, *fixa cute*, omnis ille *apparatus* in illud insertus etiam simul *figeretur*, atque in motu suo determinaretur. Inde enim accidit, vt, quando *orbicularis* sese contrahit, orbem Figura 2.

 angu-

angustiorem efficiat, et ipsa cutis, qua orbita et palpebrae tectae sunt, *versus* angulum *internum* maxime trahatur; imprimis vero, quando oculum *claudimus*, *lacertus adscititius inferior*, cutem *malae*, lacertus autem *superior* cutem *superciliorum* versus hunc insertionis locum ducit et corrugat.

Figura 2. XIV. Musculus *Zygomaticus minor Santorini* (lit. *n.*), si non perpetuo adest et perfectus: semper tamen *aliqua* eius *vestigia* deprehenduntur; id quod nemini mirum videbitur, si infinitae facierum varietates considerantur. Interdum inueni et *maiorem* et *minorem* ex eadem sede, tamquam radios *ex centro* oriri: alio tempore loco minoris ex medio Zygomatico maiore vidi *fasciculum* insignem oblique sursum ferri, versus incisorium, illique innasci. *Zygomaticum maiorem* si quidem denominatio aliqua a functione assignanda est, neque Eleuatorem labiorum, neque Abductorem solum, sed *Diductorem* rimae oris, vel cum *Heistero risorium* nominare mallem; quia reuera *actio* eius est, *rimam* et angulum oris *diducere*, atque *oblique sursum tollere*, quem motum *inter ridendum* fieri obseruamus.

XV. Musculum aliquando inueni, *risorio Santorini*, vt ouum ouo similem. Saepe autem fibrae tantum vestigia eius mentientes adfuere, quarum origo ita comparata mihi videbatur, vt omnino pro *quadrati colli* sobole haberi possent, quod et ipsum *Santorinum* quadantenus *suspicatum* esse, non tamen plane affirmasse, ex eius Paragrapho XXXIV. apparet.

XVI. Me-

XVI. Meminit *Santorinus* Cap. I. §. 23. *Triangularem labiorum* aliquando longioribus fibris, quae mento proximiores ſunt, *vlterius* prolatis *in aduerſum* latus ferri, et compari ſuo ita occurrere, vt *vna* habeatur *eademque* fibrarum *continuatio* ab vno ad alium oris angulum, nullo interiecto diuiſionis ſigno. Apparent huius combinationis veſtigia etiam in Tabulis Euſtachianis XXXI. et XXXVI. Ego illam tantum non ſemper deprehendi, quotiescunque circa has partes ſtudioſius inquiſiui. Iacet nimirum immediate ſub cute *faſciculus muſcularis* elegans, *planus*, ex vno maxillae latere verſus aliud, proxime infra mentum *in orbem ductus* (lit. *g*.), qui non ſolum triangulares inter ſe committit, ſed et imprimis *digaſtricos* in ſua inſertione *tegit* et cohibet. Tam *creberrima* huius muſculi obſeruatio, quam *ſitus* eius ab *Euſtachiano* discrepans et *profundior* me determinarunt, vt illum delineari curarem, et cum Academia communicarem. Figura 3.

Expli-

Explicatio Figurarum.

TABVLA XV.

Fig. 1.

a. Linea horizontalis situm prominentiae acutae ossis occipitis indicans.

b. Linea insertionis Musculi occipitalis dextri.

c. Linea insertionis - - sinistri.

d. Angulus inclinationis musculorum.

e. Directio fibrarum muscularium.

Fig. 2.

Exhibet Musculum orbicularem palpebrae sinistrae cum vicinia.

a. Musculi orbicularis portio prima *Winslowii.*

b. Lacertus accessorius inferior.

c. Lacertus accessorius superior.

d. Decussatio portionis primae, et lacerti accessorii superioris.

e. Ligamentum cutaneum, seu ciliare *Santor.* seu, tendo ligamentosus *Winslowii.*

f. Portio Orbicularis secunda *Winsl.*

g. Portio tertia.

h. Portio quarta, seu musculus ciliaris *Riolani.*

i. Portio musculi frontalis ad nasum descendentis.

k. Pyramidalis narium.

l. Musculus incisorius.

m. Musculus Zygomaticus maior.

n. Musculus Zygomaticus minor.

o. Fouea, vtplurimum pinguedine turgens.

Fig. 3.

a. Limbus maxillae inferioris.

b. Cutis reflexa.

c. Portio platysmatis myoidis.

d. Digastricus dexter ad maxillam tendens.

e. Digastricus sinister.

f. Mylohyoides subiacens.

g. Fasciculus muscularis planus, infra mentum circulariter subductus, et commissuram musculorum triangularium labii constituens.

CLAS-

CLASSIS TERTIA
CONTINENS
HISTORICA.

ELEMENTA CALMVCICA.

AVCTORE
T. S. Bayer.

SVperioribus in Commentariis litteraturam Mangiuricam explicatam dedi. Nunc de Calmucica quaedam adiicienda iudicaui, tantummodo vt illius ab Mangiurica diuersitas cognoscatur. Primum Calmucica quaedam in *Nicolai Vuitsenii* opere inueni. Deinde *Fridericus Grossius*, collega noster, quem honoris caussa nomino, a legato Principis populi Songar elementa litteraturae huius Moscuae impetrauit et ad me Petropolin transmisit. Ad extremum nactus sum haec elementa *Grossianis* ferme congruentia, scripta manu *Lobsang Ischi*. Is quondam scriba apud Songarenses fuit, inde captus a Russis christianae religioni sese tradidit; ex quo nomen ei Basilius Timothei filius, nunc est. Vltima littera *p*, omissa a Basilio, a legato autem descripta, plane est Tangutana. Finales quoque adiectae sunt in Schemate. Cetera ex collata litteratura Mangiurica facile suppleri poterunt. Nomen Basilii subieci, hoc modo: *Kalmatski ime* (Calmucicum nomen) *Lobsang Ischi*, *Oroski* (Russice) *krischtschona* (baptizati) *ime* (nomen) *Vasili Timofeief* (Basilius Timothei filius). Haec Russica sunt, scripta litteris Calmucicis.

DE VENEDIS, ET ERIDANO FLVVIO.

AVCTORE
T. S. *Bayer.*

QVoniam ex Herodoto Eridanum et Venedos his locis ad Balticum mare posui, eius rei rationem vt reddamus, tempus est. His autem verbis eius, vt ita faceremus, commoti sumus (*a*): οὔτε γὰρ ἔγωγε ἐνδέκομαι Ἠριδανὸν καλέεσθαι πρὸς βαρβάρων ποταμὸν, ἐκδιδόντα ἐς θάλασσαν τὴν πρὸς βορέην ἄνεμον, ἀπὸ τεῦ τὸ ἤλεκτρον φοιτᾶν λόγος ἐστὶ, οὔτε νήσους οἶδα κασσιτερίδας ἐούσας, ἐκ τῶν ὁ κασσίτερος ἡμῖν φοιτᾷ. Τοῦτο μὲν γὰρ Ἠριδανὸς αὐτὸ κατηγορέει τὸ οὔνομα, ὡς ἐστὶ Ἑλληνικὸν καὶ οὔτι βαρβαρικὸν, ὑπὸ ποιητῶν δέ τινος ποιηθέν. οὔτε δὲ οὐδενὸς αὐτόπτεω γενομένου, οὐ δύναμαι ἀκοῦσαι τοῦτο μελετῶν ὅκως θάλασσά ἐστι τὰ ἐπέκεινα Εὐρώπης. ἐξ ἐσχάτης δ' ὧν ὁ κασσίτερος ἡμῖν φοιτᾷ καὶ τὸ ἤλεκτρον *Neque enim*, inquit, *mihi persuasum est; Eridanum vocari apud barbaros fluuium, qui se praecipitet in septemtrionale mare, vnde succinum perferri dicunt: neque insulas noui Cassiteridas, vnde stannum ad nos perferri praedicant: nam quod Eridanum attinet, ipsum illud nomen opinionem famamque rei euertit, Graecum enim est, non barbaricum, a poetarum aliquo confictum. Neminem*

(*a*) Lib. III. Cap. 115.

minem ſane cognoui, qui eas viderit terras, neque, cum id maxime agerem intelligere potui, quem in modum mare ad vlteriorem Europam ſe habeat. Id vtique conſtat, ab extrema Europa et ſtannum et ſuccina ad nos perferri. Duo acceperat Herodotus, primum (ſuccina et ſtannum ab extrema Europa et oceano ſeptemtrionali perferri, quod vel ipſo indice, ſine contrauerſia erat, mercatoribus Ionicis et Ponticis,) Adriaticis et Atticis referentibus: alterum, fluuium a quo ſuccinum perferatur Eridanum et inſulas vnde ſtannum Caſſiteridas appellari; quod Herodotus veretur ne ex vano hauſtum ſit et a poetis confictum. Cauſſa ea eſt, quod Ἠριδανὸς ϗ Κασσιτερίδες νῆσοι nihil barbari ſonant; ſed Graeci ſermonis vocabula ſunt. Nam Κασσιτερίδες παρὰ τὸ κασσίτερος, *a ſtanno*, Graece dicebatur: itaque etiam Ἠριδανὸν putabat eo genio eſſe, cum praeſertim ſonus oris Graii ſe quaſi ſorex proderet. Nec fallitur in primo. Nam Pontici mercatores, cum ſtannum ex inſulis extremae Europae acciperent, nec nomen tamen regionis gentisque cognoſcerent, ipſi finxerunt a ſtanno, vt eorum poſteri ab ſitu ad occidentem Europae Heſperidas dixerunt. Sic Dionyſius Afer

αὐτὰρ ὑπ' ἄκρην
Ἱερὴν, ἥν ἐνέπουσι κάρην ἔμμεν Εὐρωπείης
Νήσους θ' Ἑσπερίδας, τόθι κασσιτέροιο γενέθλη
Ἀφνειοὶ ναίουσιν ἀγαυῶν παῖδες Ἰβήρων.

at ſub promontorio
Sacro, quod dicunt caput eſſe Europae,
Atque ſub inſulis Heſperidibus, (vbi ſtanni origo,)
Diuites habitant filii illuſtrium Iberorum.

Ex hoc loco certum eſt, eum inſulas nullas quam Britanniam dicere, quamquam quae adhuc inſcitia erat, Britannicas inſulas ab his diſtinguit, et Rheno praetendit. De Eridani vocabulo autem dicam poſtea. Nam mihi nunc excitandus quaſi eſt lector, vt quod verum rectumque in hac narratione eſt, illud ſtabilitum plane et confirmatum in animo gerat. Hoc dico, quod plane ab ſeptemtrione et ſuccinum et ſtannum aduectum ſit in Graeciam, quodque vt ſtannum omnino ex inſula Europae extremae ſubiecta, et illis teſtibus et natura ipſa ſuffragante, allatum fuiſſe oportuit, vt deinde ſuccinum ab hoc mari Baltico, quod plerique ſeptemtrionale dicebant, ita aequum non eſt, iis, qui haec omnia tam vera prodiderunt, in vno fidem derogare, quod a flumine perferri dicunt Eridano, qui ſe in oceanum illum ſeptemtrionalem, ſeu Balticum mare praecipitet.

Hic fluuius, quoniam extra orbis noti vias ſitus erat, ſatis opportunus eſt viſus Graecis ad fabulas, quae praeſertim ſuccini, gemmae pretioſiſſimae, memoriam complecterentur. Auctori Theogoniae Heſiodae res nondum matura fuit fictionibus: tantummodo de fluuio Eridano iam audiuerat. Eum enim cum aliis Scythicis et ſeptemtrionalibus fluuiis recenſet, quam Thitys Oceano pepererit (*b*). Idem ille Electras quidem duas, alteram Thaumantis et Oceani, alteram Iouis et Thetydos filiam commemorat, ſed nihil illud adhuc ad ſuccinum, cum tamen ſtannum nouit, quod etiam a ſeptemtrione aduchebatur nihil item ille de Heliadibus. Poſſis itaque ſuſpicari, iam Thaletis Mileſii temporibus, cum illa theogonia eſt edita et ſtannum

(*b*) Lib. III. Cap. 115. v 338.

rum et fuccinum allata fuiffe in Graeciam. Illius temporis aut paullo vetuftior videtur fuiffe auctor *Batrachomyamachias*, qui παρ᾽ ὄχθαις Ἠριδανοῖο Phyfignatum ranam editam fuiffe canit. At *Phaethon* Solis et *Clymenes* filius Homero ignotus fuit, *Hefiodus Phaethontem* canit, at illum *Cephali* et *Aurorae* filium. Nondum igitur ante *Thaletum Milefium* fabula illa de *Phaethonte* et *Electridibus* et fuccino exculta fuit. *Hyginus* quidem ait (*c*): *harum Heliadum lachrymae, vt Hefiodus indicat, in electrum funt duratae.* Sed quis is eft *Hefiodus*? qui hodie exftat, nihil de illis nouerat. Ne Onomacritus quidèm in Argonauticis quidquam de Eridano et Phaethonte veluti notis fabulis. Primus, qui Eridani fabulas tangeret, *Aefchylus* fuit et fecundum eum, vt *Plinius* annotauit (*d*) *Philoxenus*, *Nicander*, *Euripides*, *Satyrus*. Euripides in Hippolyto Stephanephoro nondum perfectam habet fabulam (*e*), vbi chorus:

Ἠλιβάτοις ὑπὸ κευθμῶσι γενοίμαν
Ἵνα με πτεροῦσαν ὄρνιν
Θεὸς ἐν ποταναῖς ἀγέλῃσιν θείη,
Ἀρθείην δ᾽ ἐπὶ πόντιον κῦμα
Τᾶς Ἀδριηνᾶς ἀκτᾶς
Ἠριδανοῦ δ᾽ ὕδωρ
Ἔνθα πορφυρὸν σταλάσσουσιν
Εἰς ὄιδμα πατρὸς τριτάλαιναι
Κόραι, Φαέθοντος ὄκτῳ, δακρύων
Τὰς ἠλεκτροφαεῖς αὐγάς.

Vtinam

(*c*) p. 224. ed. Munkeri. (*d*) Lib. XXXVII. Cap. 2. (*e*) v. 732.

Vtinam ſub altiſſimis receſſibus verſarer
Vbi me volucrem pennatam
In volucribus gregibus Deus eſſe iuberet,
Et tollerer ſuper maris fluctibus
Adriatico in littore
Eridanique in fluentis,
Vbi ſtillant purpuream
In aquam, patris ter miſerae
Puellae, Phaethontis miſeratione, lacrumarum
Electrum aemulatores ſplendores.

Filias Euripides dicit, quas ſorores fuiſſe poſt eum alii cecinerunt, veluti id aptius fabulae inſtruendae eſſet. Inter extremos *Apollonius Rhodius* excolendae fabulae artifex qui Eratoſthenι condiſcipulo in Alexandrina bibliotheca ſucceſſit ſub Ptolemaeo Euergete. Aratus Solenſis et Eratoſthenes aequales fuere Vter alterius exemplo Eridanum in cataſterismis poſuerit, non liquet. Vterque ſane habet (*). *Apollonius Rhodius* autem in Argonauticis (*f*) λέψανον Ἐριδανοῖο πολυκλαύςυ ποταμοῖο, fabulis iam ita adultis vt non modo Phaethontis ſororum, ſed etiam Apollinis ipſius lacrumas ſuccina eſſe dicerent, Electridas inſulas et Eridanum ad ſeptemtrionem collocat.

ἱερὴν ἠλεκτρίδα νῆσον
Ἀλλάων ὑπάτην, ποταμȣ̃ σχεδὸν Ἠριδανοῖο
ſacram Electride inſulam
Omnium extremam, iuxtra Eridanum flumium

Iſthic ait Argonantas penetraſſe vsque in Eridanum ἵνα τ' εἰσὶ πύλαι καὶ ἐδέθλια νυκτός, *vbi portae et cubilia noctis*

(* Anatus in phoenomenis v 359 V. Nonnu in Dionyſ. l 23 v. 240. l. 38. 90. ſeq. v. 430. ſeq Dion. Afer v. 290. ſeq. (*f*) Lib. IV. v. 507.

ctis sunt, hoc est sub vltimo borea. Attamen Eridanum cum Rhodano et Pudo misceri addit. Malo id ex scholiastae eius verbis intelligere te, quam ex Apollonii ipsius versibus: Ῥοδανὸς ποταμὸς Κελτικῆς τῷ Ἠριδανῷ συμμιγνύμενος καὶ σχιζόμενος, τῇ μὲν εἰς ὠκεανὸν φέρεται, τῇ δὲ καὶ εἰς τὸν Ἰόνιον κόλπον, τῇ δὲ εἰς τὸ Σαρδόνιον πέλαγος. *Rhodanus fluuius Celticae Eridano mistus ac rursus in diuersa ita abit, vt partem in oceanum* (septemtrionalem) *partem in Ionium* seu *Adriaticum*, *partem in Sardonium* hoc est Ligusticum *exoneretur*. Isthic ad Eridanum ait Apollonius Phaethonta semiustulatum caelestibus flammis in lacus profundissimi ostium ab caelo cecidisse. Lacum teterrimum odorem spirare, circa eum autem lacum Heliadas in αἰγάρους seu populos (vt Plinius et Hyginus in fabulis interpretantur) mutatas flere: lacrumas ab humo exceptas sole aestuante siccari cum lacus inundat terram, succina deuolui in Eridanum. Alii adhuc illud fabulae adiiciunt, Celtas narrare, Apollinem cum ad Hyperboreos accederet caelo, ob iurgia cum Ioue, relicto, quod Asklepius Apollinis e Coronide filius a Ioue esset fulmine ictus, aut, vt scholiasta Apollonii addit, cum Apollo ob Cyclopum caedem cogeretur coelo exulare isthic apud Hyperboreos, nec edisse, nec bibisse, sed sua fleuisse succina.

Iam velim mecum consideretis, quod verissimum sit in his fabulis, atque quibus ab caussis veris admista fuerint tum vana, tum obscura. Eridanum dico Dunam esse fluuium prope Rigam. Nam quae nunc Duna, ea olim Ῥϋδων *Rhudon*, ita vt abiecto principio, extremum vocabuli

cabuli ad hoc vsque tempus perseuerauerit. *Marcianus Heracleota*: μετὰ δε τὰς ἐκβολὰς τοῦ Ὀυιςοῦλα ποταμοῦ ἐκδέχονται Χρόνου ποταμοῦ, ἑξῆς ἐισι Ῥουδῶνος ποταμοῦ ἐκβολαὶ. Ὁ δὲ Ῥούδων ποταμὸς ἐκ τοῦ Ἀλαύνου ὄρους Φέρεται. *Vistulae*, *Chroni*, *Rhudonis ostia se deinceps excipiunt. Rhudon ex Alauno monte fertur Claudius Ptolemaeus*:

Τοῦ Ὀυιςοῦλα ποταμοῦ ἐκβολαὶ	με	νς
Χρόνου ποταμοῦ ἐκβολαὶ	ν	νς
Ῥούβωνος ποταμοῦ ἐκβολαὶ	νγ	νζ
Τουρούντου ποταμοῦ ἐκβολαὶ	νςL'	νηL'
Vistulae ostia - -	45.	56.
Chroni ostia - -	50.	56.
Rhubonis ostia -	53.	57.
Turunti ostia - -	56.½	58.½

Rhubonem perperam dicit, vt ex Marciano intelligis. Quamquam autem secundum Ptolemai rationes orientalior est Rhudon quam Duna, tamen ab eodem littus omne maris septemtrionalis, vt illi dicebant, seu Baltici magis ad orientem summouetur. Nec adeo constare poterat Ptolemaeo longitudinis et latitudinis exacta ratio. Sed si Vistulae situm cum Rhudonis ostiis comparamus, mihi est manifestius, quam Dunam esse Rhudonem veterem. Scio quid hic *Olaus Rudbeckius* tumultuatus sit, sed huic mihi videor alibi satisfecisse (*g*), nec tanti est, vt hoc loco quidquam amplius dicam. Quod autem *Marcianus* dicit, Rhudonem ex Alauno monte fluere, id nos etiam confirmat. Nam a veteribus Borysthenis quoque fontes po-

(g) De numo Rhodio p. 11.

ponuntur in Alaunicis montibus. Non quod aliqui iſthic montes ſunt, vnde Danapris fuit, ſed quod viri boni e montibus plerumque flumina oriri nouerant, eo, montes iſthic collocarunt, vbi Danapris fontes eſſe accipiebant. Iam nec Duna ex monte aliquo Alauno praecipitatur: attamen ex iisdem fere paludibus, ex quibus Bonyſthenes. Hoc priſci homines acceperant. Hi vero barbarum vocabulum Rhudonis, in Eridanum mutarunt, vt aptius esſet ori Graeco. Eridano conſtituto, iam cetera in vado ſumus. At, inquies, nullum ad Dunam ſuccinum eſt. Nempe priſci mortales tantum mercatus ſuccini ad Eridanum inſtitui acceperant, vt *Herodotus* ait: ἀπό τευ ἠλεκτρον φοιτᾶν λόγος ἐστί, *a quo Eridano ſuccinum perferri*, fama eſt. Hoc ſatis erat ad longam de Eridano fabulam cudendam veluti illic ſuccina legerentur. Haec autem ratio mercatus docet, ſuccina primum a populis ad Eridanum transmiſſa eſſe ad Scytas et ſecundo Boryſthene ad cataractas, hic excepta eſſe a Boryſthenitis Graecis, qui ſe Olbitas dicere malebant. Mea enim ſententia, vt nunc eſt, Olbitae vltra cataractas non nauigarunt. Nam primum ex *Conſtantino Porphyrogenneta* de adminiſtrando imperio ſatis apparet, quae cataractarum illarum natura et quam impenetrabiles illis temporibus atque ea ruditate nauigandi Graecis fuerint. Tum vero *Herodotus* teſtatur, ſolos quadraginta dies Boryſthenem nauigari potuiſſe. Quod ſi recte conſideres aduerſo flumine ſpatium fuit intra cataractas et tametſi aliter ſenſi olim, in eo me nunc ipſe reprehendo. Cetera quae in fabulis illis ſunt ad mercatum antiquiſſimum et naturam ſuccini, vt tunc explicari poterat, refero. Hoc inſigniter poſſet confirmari ſi exſtaret is ſcriptor, ex quo Euſtathuis ad *Dionyſium Afrum* v. 311. de Panticape, qui ſupra cataractas fluit, habet, ad eum fluuium ἡδυφανὴς ἤλεκτρος μήνης ἀρχομένης αὔξεται, διάτις αὐγή. De arboribus ſucciniferis etiam *Sotacus* apud *Plinium* (*b*). *Sotacus credidit in Britannia arboribus effluere, quas electridas vocauit.* Male hoc *in Britannia.* Ceterum tametſi *Harduinus* ex Manuſc. legit: *petris effluere*, tamen potius crediderim Sotacum illum peruulgatae opinionis de arboribus, quam nouae ſententiae de petris auctorem fuiſſe. Orta eſt opinio ex coniectura. Videbant enim ſuccina reſinae ſimilia eſſe et incendi et fluere et olere reſinoſum. Inde nihil aliud in mentem veniebat, quam ab arboribus ſuccina ſtillare, vt in Pruſſia quoque multorum iudicium fuit. Phaethontem aliquando ſuſpicatus ſum Graecum fuiſſe ciuem e Ponticis coloniis, qui cum mercatus ſuccinarii cauſa ſeptemtrionem verſus profectus euerſa naue in aquis perierit: *Heliades* autem ſorores ſeu ſocios illius mercatus caſum illum doluiſſe. Sed forte verius etiam hoc totum ad naturae commentationem traducas, cum videretur ſol ὁ ἥλιος φάεθων aut radii ſolares, tamquam filius aliquis ſolis matura facere in arboribus ſuccina, idcirco erimi fabulae auctores non ſorores ſed filias *Phaethontis* prodidere *Heliadas.* Niceas apud *Plinium*, *ſolis radiorum ſuccum intelligi voluit: hos circa occaſum credit vehementius in terram actos, pinguem ſudorem in ea parte oceani relinquere, deinde aeſtibus in Germanorum littora eiici.*

Veriora aliquantum comperit *Pytheas Maſſilienſis Plinius* ſic ait: *Pytheas Guttonibus Germaniae genti accoli aeſtua-*

(*b*) Lib. XXXVII. Cap. 2.

aestuarium oceani Mentonomon nomine, spatio stadiorum sex millium: ab hoc diei nauigatione insulam abesse Abalum: illuc vere fluctibus aduehi et esse concreti maris purgamentum: incolas pro ligno ad ignem vti eo, proximisque Teutonis vendere. Huic et Timaeus credidit, sed insulam Baltiam vocauit. Haec postea interpretabimur. Id enim proposito nostro satis est, quod intelligimus iam tum, hoc est, ante *Philippum Amyntae* Macedonem succinarium a Tutonis exercitum fuisse. Is quoque *Plinius* auctor est, Romanos primum succina accepisse a Venetis ad Adriam, sed ostendi, cum de numis Romanis in agro Prussico repertis dicerem, antea Tarentinos iam cognouisse. Haec sunt illa tempora cum maxime succinaria fabula est conflata et quoniam ad Padum mercatus illius gemmae instituerentur a Tarentinis, is fluuius nomen Eridani commeruit. Ab Italis Alexandrini acceperunt. Nam etiam nomen Italicum *funini* vulgatum est in Aegypto, vt ex *Clementis Alexandrini Stomatis* colligo (*i*). Τὸ δάκρυον, inquit, τῦ σύχιον ἐπισπᾶται τὰ κάρφη ϗ τὸ ἤλεκτρον τὰς ἀχυρμὰς ἀνακινεῖ. Cum in honore esset Alexandriae, βερονικη dici coepit (vnde *vernicem* adhuc dicimus) et corruptum ex eo βερνικάριον. *Nicomedes* in glossis: βαρνικάριον νιτρον ἐρυθρὸν, οι δὲ ἤλεκτρον, οι δὲ βερονίκην. Credo a *Beronice Ptolemaei* et *Arsinoes filii Ptolemaei Soteris* coniuge, cuius crines *Conon Samius* et *Callimachus* consecrarunt, *deuotas flaui verticis exuuias*, vt *Catullus* loquitur. Quod exemplum Nero Caesar imitatus, quodam in carminae Pappaeae crines succina vocauit. Et sic *Nonnus Panopolita* (*k*).

(*i*) I. 370. (*k*) Dionys. Lib. XLII. 25.

εἰς σε κομίουμι
Δῶρα διαςίλβοντα φεραυγέος Ἠριδανῖο
Ἠλιάδων δ' ὅλον ὄλβον ἐπαισχύνει σέο μορφὴ
Λευκὴν ἐρευθιόωσα, βολαῖς δ' ἀντιέροπος ἠοῦς
Ἴκελος ἠλέκτρῳ Βερόης ἀμαρύσσεται αὐχήν.

ad te feram
Munera lucida lucidi Eridani,
Heliadum tamen omnes diuitias pudore suffundit tua forma
Candidum rubens radiis verum contra splendens aurorae
Similis electro Beroes resplendet ceruix.

Mirum igitur non eſt, vt dixi antea, ſi Padum, vnde ſuccina Tarentini et Alexandrini accipiebant, illum Eridanum eſſe putauere. Scholia in Aratea Germanici: *ab Arato et Pherecyde Eridanus Padus eſſe putatur.* Marcianus Capella: *Italia etiam Pado flumine memoranda, quem Graecia dixit Eridanum.* L. Ampelius: *Eridanus et Tiberinus in Italia.* Sed quid per obſcura nomina incedimus, cum habemus Polybium (*l*) ὁ πάδος ποταμὸς, ὑπὸ δὲ τῶν ποιητῶν Ἠριδανὸς θρυλλούμενος. *Theophraſtus* quoque (*m*) ἐπεὶ καὶ τὸ ἤλεκτρον λίθος, καὶ γὰρ ὀρυκτὸν τὸ περὶ λυγγιςήν. *Theophraſtus in Liguria effodi dixit*, inquit *Plinius.* Sic alii apud Plinium. Nemo tamen eos lepidius exagitauit quam Lucianus Samoſatenſis. Erant enim ſuccina teſte Plinio etiam apud Macedonas Syros in honore. Lucianus autem (*n*) ita ridet, vt adpareat hominem ob ſuccini luxuriam ab Nerone ante ſe natum inuectam, non ignoraſſe, vnde ſuccina perferentur. Itaque fingit, ſe profectum naui ad Eridanum, ſe Padum Italiae, id vnum ſpectaſſe, quomodo explicato ſinu cadentes Heliadum lacrumas exciperet, ὡς

(*l*) Lib. II. Cap. 16. (*m*) περὶ λίθων f. 6. (*n*) Tom. II. p. 369.

ὡς ἤλεκτρον ἔχοιεν, vt et ipſe ſuccina, rem adeo pretioſam haberet. Sed cum proficiſceretur aduerſo flumine, nec arbores iſtas ſuccini feraces vsquam locorum vidiſſe, nec electrum nec notum Phaethontis nomen et adeo carminibus celebratum apud *Patauinos* inaudiuiſſe: quaerentem etiam ex nautis, quando tandem ad illa feracia ſuccinis loca peruenturi eſſent, irriſum inſuper interrogatumque fuiſſe, quae ſibi ſuccina diceret, quem Eridanum? Narraſſe ſe fabulam omnem veluti ad gnaros: tum vero illos ſciſcitatos eſſe, quis impoſtor haec tam manifeſte vana ipſi narraſſet: neque enim ſe aurigam caelo lapſum audiuiſſe, neque eiusmodi arbores: ſi quid eius rei apud ſe naſceretur, nae ſe non duorum mercede obolorum remigaturos, cum poſſent e collectis arborum lacrumis opes vel regias comparare. Itaque ſe perturbatum ſpe omni peregrinationis excidiſſe, veluti ſuccinum mox ſinu excipiendum, rem adeo caram et pretioſam aliquis excuſſiſſet, cum iam ſecum computaſſet, quantus ex vna re fructus ſibi rediturus eſſet. Sic ille Graeculos naſo adunio ſuſpendebat.

Alii cum animaduerterent Rhodanum in Iberia aliquid eiusmodi habere, quod Eridano conueniat, hic putarunt ſe ſuccina reperturos. In eorum numero, nec dicam poetas, *Theophraſtus* quoque fuit. *Theophraſtus* inquit *Plinius*, *oceano id exaeſtuante*, *ad Pyrenaei promontorium eiici*: *quod et Xenocrates credidit*, *qui de iis nuperrime ſcripſit.* *Athenaeus* (*o*) *Hieronem* Syracuſanorum regem in naui aedificanda ſcribit aliam ex Italia materiam, aliam ex Iberia petiiſſe, κάνναβιν τε καὶ κίττον ἐκ τοῦ

(o) Lib. V. Cap. 10.

τῦ Ἠϱιδανῦ sic enim legit *Eustathius*, cum *Cassaubonus* e codice suo edidit Ῥοδανῦ τῦ ποταμῦ.

Hae cum tam discrepantes essent sententiae, accessit *Apollonius Rhodius*, qui omnes inter se conciliaret. Credidit enim Eridanum tribus alueis et in septemtrionalem oceanum et in *Adriaticum Ligusticumque* mare effundi. *Rhodanum* dicit et *Padum* et illum ignotum, at illustrem poetarum monumentis Eridanum. Coniectura haec erat nixa fide vanorum hominum, nec nisi poetae condonanda. Argute sane *Plinius*: *faciliorem veniam facit ignorati succini, tanta orbis ignorantia.*

Alia quoque caussa est, quamobrem Eridanum crederent esse Padum. Audiuerant ab Eridano perferri succina, audiuerant quoque a Venetis perferri. Iam Veneti ad Padum erant, idcirco in opinione sua confirmabantur. Sed nos in his obstinati sumus. Scilicet audiuerant, succina legi a Venedis. Venedae igitur in his succiniferis regionibus coluere et succina transmisere ad Rhudonem seu Eridanum. *Scylax Caryandensis*: μετὰ δὲ Κελτὲς Ἐνετόι ἔισιν ἔθνος ϗ ποταμὸς Ἠϱιδανὸς ἐν αὐτοῖς. Non satis apparet inaudiueritne Scylax aliquid de Venetis Circumpadanis, an de Venedis nostris. Nam profecto ne dicam Scylaci, Herodoto quoque lttus omne Adriatici maris ita ignorabatur, vt huius Baltici. Celtas autem dicebant etiam veteres non modo populos ad Rhenum, verum etiam omnes Germanos et Ephorus id nomen protendebat vsque ad Vistulam. Inde rursum noui errores. Pausanias (*p*) Eridanum per Gallos volui ait, serius autem

(*p*) f. 10.

tem Gallos vocatos, qui antea Celtae dicerentur. (*Scholia Hesiodi* Theog. v. 338. Ἠριδανὸς ποταμὸς Κελτῶν.)

In his tenuibus sane vestigiis consecutus sum Venedas coluisse antiquissimis temporibus a Vistula admodum ad Dunam fluuium. Hic ergo Electrides quoque insulae fuere. Credo Graecos de Sembia et vtraque Neringia in Prussiae littoribus inaudiuisse, fortassis etiam de insulis, quae Liuoniae praetenduntur. *Plinius* de Electridibus: vanitatis certissimum documentum: *adeo, vt quas earum designent Graeci, haud vmquam constiterit.* Saluae e contrario nunc res sunt, vbi situs locorum insulas continenti praetentas omnium oculis obiicit. Hic succina proueniunt, hic Electrides sunt.

Postquam Venedas suis in locis constituimus, quae gens, vnde orta sit, quaeremus. Habet suos Venetos *Homerus* in Paphlagonia (*q*). Prolixus in iis est pro sua consuetudine *Homerus* et ad Eustathium et ad Periegetem. In quibus id quoque est, veteres Ὀυενετίαν quinque syllabis pronunciatiasse, suo tempore Βενετίαν dici. Nihil dicam de his, quae de Venetis ad Padum illorum e Cappadocia colonis referuntur. Nihil enim facilius est, quod *Grotius* prudenter monuit, quam vt in longe dissitarum gentium nominibus, si forte aliquo sono congruant, decipiamur. De his nostris Venedis dicam. *Iornandes* sic ait: *ab vna exorti stirpe tria nunc nomina reddidere Veneti,*

(q) Il. B, 852. Schol. Apoll. ad Lib. II. v. 358.

neti, *Antes*, *Sclaui*. Leibnitius in miscellaneis Berolinensibus Antes et Vendos eosdem esse opinatus est et sola pronunciatione differre, *littera w*, (*vt passim fit*) *nunc praeposita*, *nunc omissa*. In eo ego deliberandum censeo, propendet tamen in diuersa animus. Sed qui possunt eiusdem stirpis et Venedae et Sclaui esse, qui toto genere linguae discreparunt. *Hartenochius* Sclauonice fuisse locutos contendit, quod nunc Vinidi eo sermone vtantur. Verum enim vero si rem explorari ab stirpe oportet, Venedae nequaquam Sclauonice sunt locuti. Nam illi qui adhuc in agro Luneburgico supersunt, medii inter Germanos, adsciuerunt quidem quaedam Germanica, sed totum adhuc sermonem *Prutenicum* qualis olim fuit Lituanicum Curonicum conseruant, vt eorum lingua tantum differat a Sclauonica, quantum Lusitanica ab Islandica et Romana a Graeca. Id alias pluribus ostendam, cum cognatas linguas inter se conferam in tabula, ad constituendam populorum Scythicorum necessitudinem. Nunc tantum preces sanctissimas domini deique nostri ex *Io Georgii Eccardi* historia studii Etymologici in testimonium producam. Caue scopulum (v. Leib. Coll ét. etym.). Sunt in his plurima Germanica, quaedam Sclauonica, quod Venedae inter eas gentes coiuerunt, at manent adhuc vestigia veteris linguae Scythicae, quae non nisi ab antiquissima stirpe. Nisi qui dicere malit, et Scythas et Sarmatas in vnum corpus confluxisse. Id vero ipsum nomen

men Venedarum indicare videtur. Nam *Venden* his, quas dixi linguis significat *ſocietatem colligere*, quod veroſimilius eſt ἔτυμον, quam *Matthaei Praetorii*, qui quaſi *Panaitas*, *rerum dominos dictos* putauit. Sed Venedi in Hexapoli Luſatiae ob longum vſum linguae Sclauonicae magis adhuc degenerarunt. Venedas autem Sarmatici corporis non fuiſſe, etiam *Cornelius Tacitus* audiuerat: *Venedi multum a moribus Sarmatarum traxerunt: nam quidquid inter Peucinos Fennosque ſyluarum ac montium erigitur, latrociniis pererrant: hi tamen inter Germanos potius referuntur, quia et domos figunt et ſucta geſtant et pedum vſu ac pernicitate gaudent, quae omnia diuerſa Sarmatis ſunt, in plauſtro equoque viuentibus.*

DE CONFVCII LIBRO

Chūn çiū.

AVCTORE

T. S. Bayer.

EX omni copia Sinicorum librorum pauci quidam publica auctoritate et legibus imperii ſic comprobati fuerunt, vt ſecundum eos iuuentus erudiatur, prouecti aetate ſtudiisque litterarum examinentur et pro portione cognitionis eorum ſcientiaeque, dignitatum gradus conſequantur, denique, vt quidquid ad morum diſciplinam, ad rempublicam adminiſtrandam, contemplandam naturam, vetuſtiſſimam rerum geſtarum memoriam proponatur, ex iisdem diiudicari oporteat. Hos libros Miſſionarii omnium ordinum percommode *claſſicos* vocitarunt, vt quondam ciues Romani claſſici fuerunt dicti, qui in prima claſſe propter facultates ſuas cenſebantur, cum *infra claſſem* dicerentur, ſecundae ceterarumque ciues, qui minorem ſummam aeris apud cenſores profiterentur, proletarii et capite cenſi in extrema conſiſterent, aut potius nullo loco haberentur. Eum in modum, librorum Sinicorum quatuor claſſes conſtituere mihi videor poſſe, vt in prima ſint *Kīm*. *Kīm*, proprie, *fila recta in opere textorio*, ſeu *ſtamen*, ſignificat, vt *Gvey*, *transuerſa fila*, ſeu *ſubtemen*. Inde illarum vocum notatio ad caelum relata fuit, vt *kīm* dicantur *ſtellae fixae*, *auſter et ſeptemtrio*,

Tabula XVI. Figura [1.]

trio, seu *latitudo astronomica*: *gvéy* econtrario, *planetae*, *oriens et occidens*, seu *longitudo astronomica*. Relata quoque fuit ad alias res, estque *kim*, *norma*, *ratio regulaque*, secundum quam aliquid exigatur. Iam caussa apparet, cur *V kim*, *quinque libri*, et quasi *Pentateuchus* nuncupentur, qui primum dignitatis gradum tenent atque hoc ordine recensentur. Primum est *Ye kim* deinde *Xu kim*, postea *Xi kim*, tum *Ly ki*, et quinto loco *Chun çieu*. Altera in classe sunt libri *Su xu*, seu *quatuor libri* et quasi *Tetrateuchus*. Tres, inquam, Confuciani, *Ta hio*, *Chum yûm*, et *Lun yú*: quarto loco scripta *Mem çu*, seu *Mem cii* philosophi, qui annis centum et octo post Confucii mortem natus est (*a*). Hi libri sic paullo minori in dignitate sunt, quam *V kim*, vt ceteroqui sint in summa. Idcirco *V kim* et *Su xu* communi nomine dicuntur *Lo kim*, id est, *sex Kim*, seu *sex libri classici* (*b*). Intra has duas classes Philippus Coupletus et ex eadem Societate ceteri omnes constiterunt, praeter vnum *Nicolaum Longobardum*. Hic commotus testimonio *Michaelis* Doctoris Sinici, sed, qui Christianum nomen professus fuit (*c*), non modo illos, quos dixi, libros, sed eorum quoque veteres interpretes et philosophiam *Sim ly* et annales *Tum kién* classicis inseruit. Antonius de S. Maria, Missionariorum ex familia Francisci praefectus (*d*), eosdem

Tabula XVI Figura [2]

[3] [4]

[5] [6] [7.]

[8]

[9.]

[10. 11. 12.]

(*a*) Ante A. C. 372. (*b*) Videatur Philippi Coupleti declaratio Proëmialis ad Confucium p. 15. (*c*) p. 259. inter epistolas Leibnitianas Tomo II. ed Kortholti, vbi pro *Tien kien* legi oportet *Tum kien*. (*d*) Perperam ibi quoque *Ta civen sing ly*.

eadem auctoritate esse contendit, qua sint antea a me commemorati libri. Coupletus, neque interpretes qui fue-
Tabula XVI. Figura 13 rint, reticuit, neque quae illa philosophia naturalis *Sim ly ta civen*, quanta denique eorum omnium apud Sinos sit auctoritas, dissimulauit. Neque eo inficias, cum hi-
[14] storicorum multitudo exstet prope infinita, annales *Tum kién*, qui multis voluminibus omnium memoriam aetatum complectuntur, quorumue maxima pars ex officina
[15] *Çu chí* in bibliotheca Regis Prussiae Berolini est reposita, ceteris chronicis fama et existimatione eruditorum longe anteire. Itaque nihil me vetat, hosce libros, quod et ipsi publica auctoritate sunt confirmati, in classe ponere, attamen tantummodo in tertia. Proletarii denique nobis erunt quarta in classe, cum priuati sint omnes et quasi sine censu. At Iesuitae cum classicos tantummodo appellant *Lo kīm*, seu *sex volumina*, quae in prima classe et in secunda recensuimus, tum Sinorum iudicio, tum suo quodam iure agunt. Vt in Romanorum ciuium classibus census grauis aeris, sic in hac controuersia, antiquitas decernit. Recepti sunt igitur omnes hi libri, at dignitate fortunaque diuersa. Non potuerunt vel Nicolaus Longobardus, vel Antonius de S. Maria, vel Nauarreta, ceterique Iesuitarum aduersarii diffiteri, illam de natura commentationem, auspiciis *Tum lo* Imperatoris, circiter A. C. 1415 promulgatam fuisse. Interpretum Sinicorum, item vt auctorum chronici *Tum kien* diuersae fuerunt aetates, vniuersi tamen, Sinis ipsis testantibus, Confucio multo recentiores exstiterunt. Itaque Iesuitae, cum hos vel a priscorum Sinorum sententia, vel alioqui a vero aberrasse deprehendant, non admittunt tamquam classicos,

hoc

hoc eſt, quod cuiuis licet ſapienti homini, ab eorum opinionibus ad vetera monumenta prouocationem ſibi dari poſtulant. Vt ſi de Ariſtotelis philoſophia diſceptatio oriatur, non modo Conimbricenſes, et Scholaſticos, ſed etiam Porphyrium ceteroſque interpretes Graecos, tametſi priſcos, non huius faciemus, vbi in Ariſtotele mens erecta et ſubtilis omnia alia reperiet. At Sini peregrinos homines vetera monumenta ſuae gentis eorum arbitratu explicare non ferent, non patientur. Ne iſthuc quidem in Ariſtotele ſtatui aequo animo paſſi ſunt Scholaſtici, tamen vis veritatis tempusque, quantum potuerint, non obſcurum eſt. Irriſus eſt a Bonzio aduerſario *Matthaeus Riccius*, vt *Longobardus* teſtatur, econtrario collaudatus idem eſt a litteratiſſimis inter Sinas viris, neque vnquam Ieſuitis fraudi fuit, ab omnium interpretum ſententia disſenſiſſe, cum praeſertim aliis in diſciplinis demonſtraſſent, quantum Europaei et ingenio et ſcientia Sinos antecellant. Sed tametſi hi libri claſſici tanta in auctoritate ſunt, attamen eorum non eadem ſemper fuit conditio. Nam liber *Chun çieu* ſero ad ſummum gradum eſt euectus, cum quidam ex philoſophis, vt *Tu yu*, dignum indicasſent, qui ceteris *Kim* aequiperetur, immo cum *Lieu chi ki* antiquitate quoque cum *Xu kim* comparaſſet. Receptus eſt denique in primam claſſem ſub dynaſtia *Sy Hia*, quae vt ad R P. Stephanum Soucietum (*e*) relatum fuit, in *Xen Sy* ceteriſque occidentalibus prouinciis extra moenia regnauit, cum dynaſtia *Sum* orientales teneret, donec *Sy Hia* circiter A. C. 1226. a Gingiſiane debellata et deleta fuit.

(*e*) *Obſervations Mathematiques Aſtronomiques etc.* Tomo II. p. 2.

fuit. Sed omnium librorum classicorum tantum fragmenta habemus. Nam Imperator *Xi Hoam ty* anno ante C. N. 213. omnes libros toto imperio, quod primus omnium Imperatorum summo dominatu rexit, moenibusque ad septemtrionem et occidentem cinxit, opere, nisi adhuc exstaret, ad posteritatem incredibili, omnes igitur libros, praeter medicos et iuridicos mandato seuerissimo conquisitos exussit. Tanto eorum flagrauit odio, vt anno post, litteratos homines complures viuos sub terra defoderet, credo, quod simul cum chartis ipsam rerum sententiarumque, quas in iisdem damnabat, memoriam in his eruditis viris superstitem, exstinctam vellet, ne aliquando ex ea libri ipsi ab obliuione atque interitu vindicari possent. Annis post, tribus et septuaginta *Vu Ty*, ex dynastia *Hia* regnare coepit, Imperator, quemadmodum Sini iudicarunt, ita fortissimus rebusque gestis clarissimus, vt singulari fuit sapientia. Is vndique toto imperio fragmenta librorum maximo cum discrimine occultata congessit, partem etiam ex doctorum hominum memoria requisiuit. Illius etiam studio iterum digesti emendatique sunt prisci libri, et commentariis illustrati: qui interpretes sub familia *Hia*, omnium, qui eos consecuti sunt, duces et antesignani fuerunt. Item igitur his in libris euenit, quod Romae post exustum ciuili inter optimates et Marianam factionem bello Capitolium, Sibyllinis carminibus accidit. Nam quaesitis Samo, Ilio, Erythris, per Africam quoque ac Siciliam et Italicas colonias Cumaeae Sibyllae ceterarumque, si quae fuerunt aliae, carminiminibus, datum ſacerdotibus et eorum magiſtris negotium eſt, *quantum humana ope poſſent, vera diſcernere* (*f*). Vereor autem, ne idem deinde Sinicis libris quoque acciderit, quod Sibyllinis, quibus non modo ita integris, ſed etiam vitiatis ſuſpectisque poſtea vſi ſunt Romani, quamobrem a C. Tiberio Caeſare accepimus (*g*), *quia multa vana ſub nomine celebri vulgabantur, ſanxiſſe Auguſtum, quem intra diem ad praetorem vrbanum deferrentur, neque habere priuatim liceret.*

Venio nunc ad Confucii *Chun çieu* ſpeciatim recenſendum. Is liber hiſtoriam multorum annorum complectitur. Enimuero neque de ea hiſtoria, neque de toto libro dicere me poſſe ſentio, priusquam explicatum a me ſit, qui ſtatus imperii Sinici et antea fuerit, et illis temporibus, quae liber *Chun çieu* comprehendit. Tres dynaſtiae ſeu familiae Imperatoriae, quae in Sinis primae fuerunt, ſibique ſucceſſerunt, maxima feruntur fama, quod earum res partem in *Xu kim*, partem in *Chun çieu* ceterisque libris claſſicis traduntur: ſed multo, vt opinor, maxime, quod ſtatus imperii, qui tam fuit, a *Xi Hoam Ty*, quem ſupra commemoraui, penitus ſublatus, neque vmquam, imminuta Imperatorum maieſtate, reſtitutus, immenſum ſui deſiderium, apud obſtinatos libertatis recordatione animos, et nullam imperii, etiam multo ſapientius, iuſtius clementiusque et ſecundiſſima ex merito gloria gerendi geſtique felicitatem, extra illam libertatis conditionem, ſatis aeque adſenſu ferentes, reli-

(*f*) Tacitus Annalium Lib. VI. Cap. 12. (*g*) Tacitus ibidem.

reliquit. Miraculo ſimile eſt, potuiſſe tantum imperium ruinam atque interitum poſt tot ſecula effugere, in quo libri ſint legum auctoritate confirmati, quos vniuerſi in caelum fere laudibus, explicent publice, priuatim ediſcant, quos Imperatores ipſi in deliciis honoreque habeant, ex quibus ſibi ſuisque exempla ad imitandum proponant, in quibus tamen ſeditionum foecundae ſint ſegetes, cum in primis liceat licueritque impune, formulam illam imperii, quam hi libri produnt, vti optimam commendare, quae, niſi euerſa Imperatorum maieſtate, aut ſaltem magnopere imminuta, exiſtere non poſſit. Neque vero obſcurum eſt, res Sinici imperii ex armalibus recordanti, nihil adeo tot domuum Imperatoriarum ruinam acceleraſſe, quam animum populi, illius vetuſtiſſimi ſtatus deſiderio et exſpectatione imbuti. Ea quoque cauſſa fuiſſe videtur, quamobrem Confucius, qui naſcentem aetate ſua et ad id faſtigium, quod deinde conſecuta eſt, adſpirantem, ſed libratam adhuc mutua principum aemulatione potentiam ferre non poſſet, et magiſtratu euerſus fuerit et ad mortem quaeſitus, vt diu cum egeſtate conflictatus, nusquam tutum fortunis ſuis locum reperiret, ac denique vel maritimo curſu, vel terreſtri itinere ad barbaros fugiendi conſilium caperet. Habebat ille multa, quae in ſeculo ſuo, iure meritoque redargueret, virtutis, neque ita impenſe, vt cupiebat Confucius, neque quantum ea ſuperiorem aetatem floruiſſe exiſtimabat, ſtudioſo, tametſi etiam olim foeda exempla haud minus, quam Confucii ſeculo, ſtatuta fuerant. Sed iſthuc apparet, eum potiſſimum reprehendiſſe, quod priſtinus imperii ſtatus conuelleretur, cum etiam minimis in caeremoniis nihil nouari mallet, quae

prae-

praecepta deſtinato principum conſilio vehementer aduerſabantur. Idcirco *Xi Hoam Ty* cum tandem optata ceterorum principum, et maxime maiorum domus ſuae impetraſſet, oppreſſisque tot regulis, ſolidum imperium plena poteſtate gubernaret, hanc cum philoſophorum tum hiſtoricorum ſeditioni nimis ſeuere repreſſit. Sed videbat, monarchiam conſiſtere non poſſe, niſi infinita priſtini ſtatus, vtcumque turbulenti et in commune pernicioſi, exiſtimatio ex animis hominum vi maxima illata exſtirparetur.

Principio Sinae multo minoribus terminis circumſcriptae fuerunt, quam nunc ſunt. Confucii aetate fere intra hos limites, quos nunc ſub borea et occidente murus Sinicus definit, et florentiſſima quidem pars earum intra fluuios *Hoam* et *Kiam* atque regnum *Xan tum* comprehenſa fuit. *Quam tum et Quam ſy* regna ſub auſtro maxima annis denique centum et ſeptuaginta ante C. N. huic imperio ſeſe ſubiecerunt, cum ab omni aeuo ſui iuris fuisſent. Sed neque imperii, ea quae nunc eſt, diuiſio locum inuenit, neque ea vel prouinciarum vel vrbium, fluuiorum, montium, quae hodie celebrantur nomina exſtiterunt. Quotiescunque *Philippus Coupletus* in vetuſtiſſima memoria regionum locorumque, quae nunc ſunt, nomina adhibet, hiſtoricorum recentiorum auctoritatem ſequitur, qui pro obſoletis ſubſtituerant noua. Nam vt apud nos veteri in Latio et Graecia omnique veteris orbis geopraphia antiquariorum induſtria elaborauit, ne quem ex priſca memoria locum, vbi nunc ſitus ſit, quoue nomine nuncupetur, ignoraremus, ita eodem in ſtudio Si-

nenſes occupatos fuiſſe inuenio, vt id ipſum in orbe ſuo poſteritati non lateret. Fuerunt deinde multi principatus, qui ad ſui defenſionem et ad populorum commune vinculum vni alicui ſumamm rerum ſine ſucceſſione eius domus committerent. Tandem quod hi principatus haereditarii eſſent, placuit, vna in domo ſummam dignitatem transferri ad ſeros nepotes. Sic orta eſt prima dynaſtia
Tab. XVI. F. [16] [17] Imperatorum *Hia*, hac euerſa, ſucceſſit ſecunda *Xam*,
[18] et huic oppreſſae tertia *Cheu*, ſub qua Confucius vixit.
[19.] Ceteri principatus etiam Confucii aeuo dicebantur *que*, quod vocabulum ſiue *regnum* ſiue *principatum* interpreteris, haud magno in diſcrimine ponam. Reguli igitur illi ex proſapia *Hoam Ty* (*b*) item vt Imperatoriae domus orti, agros ſuos ex haereditate tenebant, at legibus et inſtitutis ex foedere cum Rege deuincti erant, et ad maieſtatem eius tuendam et ad omnem vim externam mutuis auxiliis opibusque propulſandam. Propter hanc conſociactionem dicta fuerant *Liě quě*, ſeu *diſtributa atque coniuncta regna*. Eorum, mea in editione libri *Chūn çieū* tabula geographica exſtat, inſcripta: *Liě quě*
[20] *yu ty chi tu*, *diſtributorum regnorum geographica tabula*. Fuit haec ſane, quod ex monumentis conſtat, antiquiſſima publicarum rerum forma, ſatis ad totius corporis hominum in ſocietate viuentium conſeruationem apta, donec tempus et multitudo mortalium et vicinorum populorum conditio, neceſſitatem eam impoſuit, vt publica res, niſi ſub vnius dominatu, ſalua eſſe non poſſet. Vetus

(*b*) Confer omnino *Tabulam Genealogicam trium familiarum Imperialium monarchiae Sinicae* ex Sinico Latine editam a P. Coupleto.

tus illa Sinicae rei publicae formula istiusmodi vtique fuit, qualem apud diuinum Mosen in Genesi, vetustissimo omnium exemplo discriptam reperimus in Kedorlaomare rege Elamita regulisque ei dicto audientibus *(i)*, ne nunc alia quoque sanctissimae scripturae monumenta in testimonium producam. Et apud Graecos bello Troiano ille regum rex Agamemnon ceterique reges haud dissimili conditione fuerunt. Apud Sinos vero regum regis maiestatem in his fere maxime sitam fuisse reperio, quod regulos ad comitia vocandi et de communi re consulendi potestatem haberet, quod iis in comitiis sublimi loco praesideret, quod quaedam sacra solus perageret, quae ceteros regulos peragere ius fasque non fuit, quod denique quibusdam aliis honoribus caeremoniisque ante ceteros regulos coleretur, quorum omnium quaedam in *Li ki* ad memoriam supersunt. Quemadmodum in principum consensione maiestatis eius cardo versabatur, ita in dissensionibus vis principum maiestate fuit potior. Inde paullatim nihil praesidii in communem vniuersorum salutem coepit esse, si praesertim rex iniuste atque immoderate sese gereret, aut principum aliqui virium fiducia insolescerent. Sic dynastia *Hia* deleta est, cum *Tam* regulus, iniuria accepta, ab octingentis regulis populoque contra postremum regem voluptatibus immersum concitatus, arma sumsisset. Is auctor fuit dynastiae Imperatoriae *Xam*. At haec dynastia, vt potentiam domus suae muniret, ad extremum coepit regulos atterere, donec postremus tam principes, quam populum crudelitate et superbia offendit. Sic enim regn-

(i) Geneseos Cap. XIV.

regulo *Ten* principatus, qui ea in regione fuit, quam Pequinenfi regno nunc accenfent, tam felici effe contigit, vt fumma rerum potiretur. Victor regulas *Fa*, nomine abrogato, quod ei antea fuerat, *Vu Vam*, quafi *Ptolemaeum regem* dici fe voluit, dynaftiamque Imperatoriam, quam in domo fua exorfus eft, *Cheu* nominauit. Vt Sini chronologi, qui nunc funt, a nobis flagitant, (nam tota illorum temporum chronologia res eft admodum incerta) ab anno ante C. N. 1122 per 873 annos, Imperatores ex hac domo 35 exftiterunt.

Hunc *Vu Vam* Imperatorem annales Sinici impenfe laudant, neque minus Abdallah Abu Said Beidaccaeus (*k*), qui hiftoriam Sinicam ex ore quorundam philofophorum Sinenfium, qui ante hos quadringentos et fexaginta annos cum Hulacu Chano fuerunt, commentatus eft Perfice. Et laudem vero illam ab iuftitia, clementia fapientiaque confecutus effe dicitur: credo tamen munificentia et priftino regni ftatu reftituto vniuerfos fibi vel maxime deuinxiffe. Nam cum quaedam regulorum familiae a dynaftia *Xam* de gradu deiectae, aliae oppreffae effent, et illas poftliminio ad dignitates reduxit et bene de optimo publico meritos ex inferiori loco ad fimilem fplendorem euexit.

Igitur in mea editione libri *Chun çieu*, tabulae geographicae, de qua fupra dixi, *xue* feu *praefatio*, de meritis eius et de ftatu imperii, qui tum fuit, fic retulit:

Tabula XVI. Figura 21.

Chuén

(*k*) p. 26 vocat eum حو فرا ونك *Giu Fra Vang*. At fcribae alicuius hic error fuit, quem Andreas Muller non fuftulit totum. Apparet, fcriptum fuiffe a Beidauaeo چو فو وانك *Tfcheu Vu Vang*, i e. *Cheu*, (vt recepto more fcribimus, *Tfcheu*) dynaftiae rex, nomine *Vu Vam*.

Tabula XVI, Figura 22.

Chuén *Dilatauit ſapienter*
chìm *et ponderauit vnius cuiusque merita*
Vu Vam } *Vu Vam Imperator,*
kĕ *qui vicit et ſubegit*
Xām. *dynaſtiam imperii ſecundam Xam.*
Quām yeu } *Ad ſolis inſtar illuſtrauit*
tiēn hia. } *terrarum orbem, ſeu, Imperium Sinicum.*

Poſtquam deinde narrauit, quemadmodum quindecim fratres huiusce *Vu Vam* et quadraginta ex *kì ſim*, ſeu *ki* coniugis eius familia, regnis aucti fuerint, ita deinceps fatus eſt auctor: [23.]

Cĭo *Officiorum dignitatumque cum adſignatis reditibus (fuerunt)* [24.]
u *quinque*
pìn *ordines:*
eulh *et*
tù *terrarum (adſignatarum fuerunt)*
ſan *tres*
tèm. *ſpecies.*
Cūm, *Eius qui Cūm dicebatur,*
Heû *(et eius) qui Heû dicebatur,*
pe *centum*
li. *ſtadia Sinica fuerunt.*

Pĕ,

Pĕ, *Eius*, *qui Pĕ apellabatur*
cie } 70
xe }
ly. *ſtadia Sinica fuerunt*.
Çu, *Eius*, *qui Çu vocabatur*,
Nân, *et eius*, *qui Nân appellabatur*,
u } 50
xe }
ly. *ſtadia Sinica fuerunt*.

Poſſimus *Cūm* vocare *Regulum*, *Heû* vero *ethnarcham*, *Pĕ*, *Ducem*, nam reuera *ducem belli* ſignificat, *Çu*, *dynaſtam* et *Nân*, *Praeſidem*, vt apud Romanos, prouinciarum fuerunt praeſides. Summam deinde horum a dynaſtiae *Chēu* conditore adſignatorum *qŭe*, ſeu principatuum colligit 1800. At vero, inquit:

Tabula XVI. Figura 25.

Chēu *ſub Chēu*
xĕ, *familia*,
kí } *paullatim facta ſunt debilia* (*regna*)
xuai }
Chuen *inuerterunt*
Siám *formam ſtatus*
tūn } *et ſeſe mutuo deuorarunt*.
miĕ. }
So *Numerando*
pe *centum*
nien *annos*
kiēn, *intra*,

lie

lie *distributa*
qve *regna*
mào *penitus*
cin. *fidelia fuerunt.*
Chūn }
çieu } *Libri Chūn çieu*
chi }
xi, *aetate,*
kién *scilicet*
yū }
kim } *in hoc libro (commemoratae)*
chuen } *dignitates cum prouentibus ad posteros hae-*
che } *reditate propagatae*
çúm *in summa sunt*
ye }
pe }
eulh } 124
xe }
su }
qve. *regna.*

Quemadmodum igitur reguli et principes minores intra centum annos in fide Imperatoris et obsequio perstiterunt, post autem eidem refragari atque inter se simultates serere, et foedera passim ferire coeperunt, ita *Y Vam* Imperator ex familia *Cheu* nonus, qui 228 annis post conditam familiam imperio potitus est, tum ob mentis debilitatem, tum, quod regulis, qui ad comitia veniebant, ni-

 mium

mium concedebat, maieſtatem imperii publico ludibrio expoſuit. Eius filius labantem iam crudelitate et impotentia animi amplius concuſſit, nepos vero *Siven vam* prudentia inſigni ſuffulciuit. Iterum vniuerſorum animos abs ſe abalienauit eiusdem pronepos *Yeu Vam.* Sic ad imperium peruenit *Pim vam* huius filius, tertius et decimus iſtius familiae. *Vu Vam* ſedem imperii conſtituerat in vrbe, quae nunc *Sy gan ſu* vocata, in *Xen ſy* ſita eſt. At
Tabula XVI. Figura 26. *Pim vam* eam in *Vam chim* vrbem transtulit: ſita illa fuit in prouincia, quae nunc *Ho nan* dicitur. Hoc conſilium vt prudenter captum fuiſſe videtur, propior enim nunc regulis maxime florentibus erat Imperator, ſic audaciores reddidit regulos, qui iam impune inter ſe foedera faciebant et bella ferendo poteſtatem in dies magis magisque augendi cupiditate flagrabant et Imperatori dicto audientes non erant.

Inter tot principatus duodecim maxime fuerunt inſignes, tum propter opes, tum ob diuturnitatem ſucceſſionis. Succeſſionem regulorum illis in dynaſtiis eruditus editor Sinus ad ſingulos annos in *Chūn çiēu* diligentiſſime annotauit, regiones in tabula deſcripſit. Et tantum potuit vis obfirmatorum antiqui ſtatus ſtudio animorum, vt non minus quam Imperatoriam dynaſtiam *Chēu*, hos quoque regulos rebelles aſteriſſimis inſereret poſteritas. In *Xan tum*, vt nunc quidem prouincia vocatur, fuerunt, *Lu*, *Cî*, et *Kì*, in *Ho nan*, *Gvéy*, *Súm*, *Chìm* et *Chîn*, in *Hu quam*, *Çù*, in *Pe kim*, *Çí* et *Çâo*, in *Xen ſy*, *Çîn*, in *Xan ſy*, *Çin*. Sed multo plures principatus, praeci-

Tabula XVI. F.[27.][28.]

praecipue in *Xam tum* exſtiterunt non obſcuri, in pri [29.][30.]
mis vero *Yēn*, *V̂* *Hân* *Chū* *Siao* *chū* *Yve* *Kiù* *Pie* [31.][32.]
et alii. Non erit in conſulte factum, ſi regulos ex duo- [33.][34.]
decim dynaſtiis praecipuis, qui ad aetatem libri *Chūn çīeu* pertinent, hic ordine ſuo ponam.

I. *Lù* reguli, qui omnes a dignitate in imperio vocati ſunt *Cūm* (*l*). [35.]

Yn cūm, cuius annus primus congruit cum anno 49. Imperatoris *Pîm Vâm* et cum 56. cycli XXXIII. ſeu, cum A. ante C. N. 722. inde vsque a vere, a qua auctumnitate omnes omnium regulorum cunctis in dynaſtiis anni et quidem ſemper abſoluti numerantur. [36.]

Huôn cūm,	ab A. ante C. N.	711.	annos	18.	[37.]
Chuām cūm,	- -	693.	-	32.	[38.]
Mìn cūm,	- -	661.	-	2.	[39.]
Hỳ cūm,	- - -	659.	-	33.	[40.]
Vēn cūm,	- - -	626.	-	18.	[41.]
Sīvēn cūm,	- -	608.	-	18.	[42.]
Chîm cūm,	- -	590.	-	18.	[43.]
Siām cūm,	- -	572.	-	31.	[44.]

 Chao

(*l*) Idcirco in tabula Sinicorum characterum tantum in primo nomine (num. 36) poſuimus *Cum*, ne eadem in littera ſaepius repetenda fruſtra fatigaremus operas.

Tabula XVI. Figura 45. *Chao cūm*, - - 541. - 32.

[46.] *Tým cūm*, - - - 509. - 15.

[47.] *Gāi cūm*, - - - 494. - —

In eius 14. anno desinit liber *Chūn çieū*.

[48.] II. *Çí*, reguli, qui omnes dicuntur *Cūm*.

[49.] *Hi cūm*. Eius nonus annus congruit cum primo anno *Yǹ cūm*, in *Lù*, 33. annus, quo obiit, cum A. ante C. N. 698.

[50.] *Siām cūm*, ab A. ante C. N. 697. annos 12.

[51.] *Hùon cūm*, - - 685. - 43.

[52.] *Hiáo cūm*, - - 642. - 10.

[53.] *Chāo cūm*, - - 632. - 24.

[54.] *Hóei cūm*, - - 608. - 10.

[55.] *Kìm cūm*, - - 598. - 17.

[56.] *Lîm cūm*, - - 581. - 28.

[57.] *Chuām cūm*, - - 553. - 6.

[58.] *Kìm cūm*, - - 547. - 58.

[59.] *Gān yú S. Gān infans*, - 489. - 1.

[60.] *Taó cūm*, - - 488. - 4.

[61.] *Kièn cūm*, - - 484. - —

In eius 4. anno desinit liber *Chūn çieū*.

III.

III. *Çin*, cuius dynaſtiae reguli partim *Heu*, partim *Cum* fuerunt. Tabula XVI. Figura 62.

O heu. Eius annus ſecundus congruit cum primo anno *Yn cum* in *Lù*, 6. quo obiit, cum A. ante C. N. 718. [63.]

Gai heu, ab A. ante C. N.			717.	annos	9.	[64.]
Siao çu heu,	-	-	708.	-	4.	[65.]
Mièn heu,	-	-	704.	-	28.	[66.]
Hién cum,	-	-	676.	-	26.	[67.]
Hóei cum,	-	-	650.	-	16.	[68.]
Ven cum,	-	-	633.	-	7.	[69.]
Siam cum,	-	-	627.	-	7.	[70.]
Lim cum,	-	-	620.	-	14.	[71.]
Chim cum,	-	-	606.	-	7.	[72.]
Kim cum,	-	-	599.	-	19.	[73.]
Ly cum,	-	-	580.	-	8.	[74.]
Cum cum,	-	-	572.	-	15.	[75.]
Pim cum,	-	-	557.	-	26.	[76.]
Chao cum,	-	-	531.	-	6.	[77.]
Kim cum,	-	-	525.	-	14.	[78.]
Tim cum,	-	-	511.	-	—	[79.]

In eius 31. anno *Chun çieu* deſinit.

Tabula XVI. Figura 80. IV. *Gvéy*, cuius reguli omnes *Cūm.*

[81.] *Hûon cūm.* Eius 13. annus congruit cum primo anno *Ỳn cūm* in *Lù*: 16, quo a suis occisus est, cum A. ante C. N. 719.

[82.] *Sīvēn cūm*, ab A. ante C. N. 718. annos 19.

[83.] *Hoēi cūm*, - - 699. - 31.

[84.] *Y cūm*, - - 668. - 9.

[85.] *Vèn cūm*, - - 659. - 25.

[86.] *Chîm cūm*, - - 634. - 35.

[87.] *Mŏ cūm*, - - 599. - 11.

[88.] *Tim cūm*, - - 588. - 12.

[89.] *Hién cūm*, - - 576. - 33.

[90.] *Siām cūm*, - - 542. - 9.

[91.] *Lîm cūm*, - - 534. - 42.

[92.] *Cho cūm*, - - 492. - —

In cuius 12. anno liber *Chūn çiēu* desinit.

[93.] V. *Çí*, cuius reguli *Cūm* dicti.

[94.] *Sīvēn cūm.* Eius 28. annus congruit cum primo anno *Ỳn cūm* reguli in *Lù*: 35. annus, quo mortuus est, cum A. ante C. N. 715.

[95.] *Hûon cūm*, ab A. ante C. N. 714. annos 20.

[96.] *Gāi cūm*, - - 694. annos 20.

Tabula XVII Figura 1. *Mŏ cūm*, - - 674. - 29.

[2.] *Chuām cūm*, - - 645. - 34.

Vēn

Vēn cūm, - - 611. - 20. Tab. XVII. Figura 3.

Kìm cūm, - - 591. - 49. [4.]

Lîm cūm. - - 542. - — [5.]

Illius anno 12. siue A. ante C. N. 531. *mie, exstincta est haec familia.* [6.]

Táo cūm, tūm qve seu, *Táo cūm restituit* regnum *Çí*, quod ei ex haereditate debebatur, 521. - 3. [7.] [8.]

Chāo cūm, - - 518. - 28. [9.]

Chîm cūm, - - 490. - — [10.]

Eius in anno 10. *Chūn çieu* desinit.

VI. *Chîm*, Reguli dicti *Cūm*. [11.]

Chūam cūm. Eius 22. annus congruit cum 1. anno *Tù cūm*, reguli in *Lù*. 43. quo mortuus est, cum A. ante C. N. 701. [12.]

Chūim cūm, ab A. ante C. N. 700. annos 28. [13.]

Vēn cūm, - - 672. - 45. [14.]

Mō cūm, - - 627. - 23. [15.]

Siām cūm, - - 594. - 20. [16.]

Chîm cūm, - - 584. - 14. [17.]

Hì cūm, - - 570. - 5. [18.]

Kièn cūm, - - 565. - 49. [19.]

Tím

Tab. XVII. Figura 20.	*Tim cum*,	-	-	529.	-	16.
[21.]	*Hien cum*,	-	-	513.	-	13.
[22.]	*Xim cum*,	-	-	500.	-	—

In eius 20. anno desinit *Chun cieu.*

[23.] VII. *Ҫao*, cuius reguli *Cum.*

[24.] *Huôn cum.* Eius annus 23. congruit cum anno primo *Yn cum* dynastae in *Lu*: annus eiusdem 55. quo mortuus est, cum anno ante C. N. 702.

[25.] *Chuam cum*, ab A. ante C. N. 701. annos 40.

[26.]	*Chao cum*,	-	-	661.	-	9.
[27.]	*Cum cum*,	-	-	652.	-	35.
[28.]	*Vèn cum*,	-	-	617.	-	23.
[29.]	*Siven cum*,	-	-	594.	-	17.
[30].	*Chim cum*,	-	-	575.	-	23.
[31.]	*Vu cum*,	-	-	554.	-	27.
[32.]	*Pim cum*,	-	-	527.	-	4.
[33.]	*Tao cum*,	-	-	523.	-	9.
[34.]	*Xim cum*,	-	-	514.	-	5.
[35.]	*Yn cum*,	-	-	509.	-	4.
[36.]	*Cim cum*,	-	-	505.	-	4.
[37.]	*Yam cum*,	-	-	501.	-	—

Eius anni 21. desinit liber *Chun cieu.*

VIII.

VIII. *Chîn*, cuius reguli *cūm* dicti fuere. Tab XVII. Figura 38.

Huôn cūm. Eius annus 23. congruit cum primo anno *Yǹ cūm* reguli in *Lù*: annus 38. quo anno est mortuus, cum A. ante C. N. 707. [39.]

Ly cūm, ab A. ante C. N.	706.	annos	7.	[40.]
Chuām cūm, - -	699.	-	7.	[41.]
Sivēn cūm, - -	692.	-	45.	[42.]
Mŏ cūm, - -	647.	-	16.	[43.]
Cūm cūm, - -	631.	-	18.	[44.]
Lîm cūm, - -	613.	-	15.	[45.]
Chîm cūm, - -	598.	-	30.	[46.]
Gāi cūm, - -	568.	-	35.	[47.]

dynostia *Chîn*, post 35. *Gai cūm* annum aut potius eo ipso *miĕ*, *deleta est.*

Hoéi cūm eam restituit -	529.	-	24.	[48.]
Hôai cūm, - -	505.	-	4.	[49.]
Mìn cūm. - -	501.	-	—	[50.]

In eius 21. anno desinit in *Chūn çieu.*

IX. *Kì.* Eius dynastiae reguli dicti *Cūm.* [51.]

Vu cūm. Eius 29. annus congruit cum anno primo *Yǹ cūm* reguli in *Lù*: annus 47. quo obiit, conuenit cum A. ante C. N. 704. [52.]

Tabula XVII Figura 53. *Cim cūm*, ab A. ante C. N. 703. annos 23.
[54.] *Cūm cūm*, - - 680. - 8.
[55.] *Hoei cūm*, - - 672. - 13.
[56] *Chim cūm*, - - 654. - 10.
[57.] *Huôn cūm*, - - 636. - 70.
[58] *Hiao cūm*, - - 566. - 17.
[59.] *Ven cūm*, - - 549. - 14.
[60.] *Pim cūm*, - - 535. - 18.
[61.] *Tào cūm*, - - 517. - 12.
[62.] *Hì cūm*, - - 505. - 19.
[63.] *Mìn cūm*, - - 486. - —

Eius in anno 6. definit *Chūn çiēu.*

[64.] X. *Súm.* Eius dynastiae reguli dicti sunt *Cūm.*
[65] *Mò cūm.* Sed ipso in Confucio (*m*) vocatur *Hò*,
[66.] vel *Hô.* Quem vero errorem vel typi, vel potius euanidae veteri in cortice litterae esse opinor: nam paullo post etiam in Confucio *Mò cūm* reperio. Eius 7. annus congruit cum anno primo *Yn cūm* in *Lù*: Annus eiusdem postremus cum A. ante C. N. 720.

[67.] *Chuām* { *cūm*, ab A. ante C. N. 719. annos 10.
[68.] *Chuām* { *cūm*, - - 709. - 18.

Mìn

(*m*) Lib. II. p. 13.

Min cūm, - - 691. - 10. Tabula XVII Figura 69.
occisus est.
Huôn cūm, - - 681. - 31. [70.]
Siām cūm, - - 650. - 8. [71.]
Ab hoc 8. anno nullam interpres Sinicus mentionem facit regulorum *Súm*, neque caussam, vt solet, in tabulis posuit.
Chīm cūm, - - 636. - 17. [72.]
Chao cūm, - - 619. - 9. [73.]
occisus est.
Vēn cūm, - - 610. - 22. [74.]
Cūm cūm, - - 588. - 13. [75.]
Pim cūm, - - 575. - 44. [76.]
Yven cūm, - - 531. - 15. [77.]
Kìm cūm, - - 516. - — [78.]
Illius in anno 36. desinit *Chūn çieu.*

XI. *Çin*, eius dynastiae reguli dicti sunt *Cūm.* [79.]
Vēn cūm. Eius 44. annus congruit cum anno primo *Yǹ cūm* in *Lù*: 50. qui vltimus eius fuit, cum A. ante C. N. 716. [80.]
Nym cūm, ab A. ante C. N. 715. annos 12. [81.]
Cho çu, - - 703. - 6. [82.]
Vu cūm, - - 697. - 20. [83.]
Te cūm, - - 677. - 2. [84.]
Sivēn cūm, - - 675. - 12. [85.]

Tabula XVII Figura 86.	*Chim cūm,*	-	-	663.	-	4.
[87]	*Mŏ cūm,*	-	-	659.	-	39.
[88.]	*Cam cūm,*	-	-	620.	-	12.
[89.]	*Cūm cūm,*	-	-	608.	-	4.
[90]	*Hûon cūm,*	-	-	604.	-	28.
[91.]	*Kìm cūm,*	-	-	576.	-	40.
[92.]	*Ngāi cūm,*	-	-	536.	-	36.
[93.]	*Hóei cūm,*	-	-	500.	-	9.
[94.]	*Taó cūm,*	-	-	491.	-	—

In eius anno 11. desinit *Chūn çieū.*

[95] XII. *Çù.* Eius reguli ausi sunt sese nuncupare *Vam*, quemadmodum ipsi Imperatores.

[96.] *Vu Vam.* Eius 19. annus cum anno primo *Yǹ cūm*, in *Lù* congruit: annus 51. quo obiit, cum A. ante C. N. 690.

[97. 98.]	*Ven* { *Vam*, ab A. ante C. N.			689. annos		15.
	Ven { *Vam,*	-	-	674.	-	3.
[99.]	*Chim vam,* occisus est.	-	-	671.	-	46.
[100.]	*Mo vam,*	-	-	625.	-	12.
[101]	*Chuām vam,*	-	-	613.	-	23.
[102.]	*Cūm vam,*	-	-	590.	-	31.
[103. 104.]	*Cam vam,* }	-	-	559.	-	15.
	Cam vam, }	-	-	544.	-	4.
[105.]	*Lîm vam,* occisus est.	-	-	540.	-	12.

Pim

Tabula XVII

Pim vam,	-	-	528.	- 13.	Figura 106.
Chao vam,	-	-	515.	- 27.	[107.]
Hóei vam,	-	-	488.	- —	[108.]

Eius in anno 8. *Chun çieu* desinit.

Hoc rerum statu, non potuerunt Imperatores vel factiones tollere, vel vniuersos regulos, praecipue potentiores ad obsequium adigere, donec dynastia *Cheu* exstincta fuit et quarta *Çîn*, successit. Hae est orta ex [109.] dynastia, quam vndecimo loco posui, et quae pristinum nomen retinuit in Imperatoria domo. Anno ante C. N. 478. dynastia *Chîn*, quam octauo loco commemoraui, a regulo *Çù* euersa est, postquam per annos 645 quatuor et viginti principes ex successione habuerat. Annis admodum quinque post, regnum *û*, quod 650 annis sub 20 regulis fuerat, a regulo *Tvě* subuersum est. Sed in primis ab anno ante C. N. 425 atrocius incendium coortum est, quod bellum trecentos admodum annos summa vi gestum fuit. Haec epocha a Sinis *Chén qvě*, *bellantia regna*, dicitur. Tum euersa sunt, A. ante C. N. 376 [110.] regnum *Çín*, quod tertio loco posui, cum annos 741 sub 38 principibus fuisset; anno post regnum *Chim*, ordine nostro sextum, quod intra annos 432 dynastis 23 subiectum fuerat: anno 286 regnum *Súm*, quod ab annis 381 dynastas 32 habuerat: eodem fere tempore regnum *Lù*, quod 34 regulos numerauerat et regnum *Gvéy*, quod 37 principes ex successione habuerat. Potentissimi ex ceterorum oppreſſione euaſerant, reguli dynaſtiae *Çi*, in noſtra recenſione ſecundo loco poſitae et dynaſtiae *Çin*, quae denique ſub *Hiao Ven Vam* A. ante C. N. 249. Imperatoria familia *Cheu* deleta, ſummo imperio potita eſt. Tres tantummodo dies felicitati ſuae ſuperfuit *Hiao Ven Vam.* Ei filius *Chuam ſiam vam* ſucceſſit, qui 37 eius domus fuit. Tertio anno poſt etiam is, extremus familiae *Çin* fato functus, haeredem imperii ex adoptione reliquit *Xi Hoam Ty.* Hic intra annos 37 quos regnauit, regulis *Hân*, *Gvéy*, *Çù*, *Yēn*, *Chao*, *Çî*, qui ſoli, vel ex ſucceſſione, vel reſtitutis poſtliminio dynaſtiis ſupererant, penitus de medio ſuſtulit, ſtatumque imperii, dynaſtiarum et nomine et dignitate conditioneque reliqua abrogatis, reformauit, vt 36 prouinciae ſub abſoluta monarchia praefectos ſuos deinceps acciperent.

Nunc inoffenſo pede ad librum *Chūn çīeu*, qui earum rerum partem aliquam attigit, accedere poſſumus. Libri illius duas editiones ad manum habeo. Vna in bibliotheca Auguſta exſtat, forma maiori, *Vam Lie* Imperatore, anno 33. cycli LXXII. ſeu A. C. 1596 ſeptimo anni menſe impreſſa, ſine officinae nomine. Alteram editionem minori forma dono R. P. Dominici Parrenini poſſideo, ex officina *Qvéy pie* ad omnem vſum accommodatiorem. Itaque de hac potiſſimum dicemus. Totus liber annos complectitur 242 inde ab A. ante C. N. 722. ad verem anni ante C. N. 481. Mea editio octo codicillis conſtat et in triginta *kiven* ſeu libros diuiſa

Tabula XVII Figura III.

uiſa eſt: altera vno in codicillo in quatuor tantummodo *kiven* diſpertita eſt. Natus fuerat Confucius in regno *Lù* A. 47. cycli XXXVI. ante C. N. 551. obiit 480 anno ante C. N. vno poſt finitum librum *Chūn çieu.* In eodem regno *Lù* magiſtratum geſſit, quo ſe 55. aetatis anno abdicauit. Fuit igitur eadem aetate, qua apud Graecos Solon, Theognides, Thales Mileſius, Anaximander, Anaximenes et ex hiſtoricis Pherecydes, ſed ita vt omnibus iis minor eſſet natu, aequalis fere Pythagorae et Democrito. Illius item vitae temporibus Iudaei ex Babylone redierunt et Coss. Romani regibus vrbe pulſis rem publicam adminiſtrarunt. Quae ea cauſſa commemoranda duxi, vt, qui tam reliquo in orbe ſapientiae fuerit cultus, quae memoriarum veterum prodendarum ſtudia viguerint, cum Confucius ſuo in orbe illa exerceret, ſimul hoc loco recordaremur. Sed cum Confucii vita iis annis circumſcribatur, vt principium libri centum annis et ſeptuaginta ante eum annum quo natus eſt, exordiatur, iam per ſe quisque ſentiet, eum quae ante ſe ſeque puero, adoleſcente, fortaſſis et iuuene geſta fuerunt, aliunde repetiiſſe. Itaque mihi videtur aliquis qui in regno *Lù* magiſtratum geſſerit, a primo anno *Yn cūm*, reguli in *Lù* hoc negotium conſignandi res ſuae aetatis ſuſcepiſſe, hos vero commentarios alii deinceps videntur continuaſſe, donec Confucius eosdem nactus paene ad exitum vitae ſuae perduxit. In regno *Lù* auctores libri extitiſſe conieci, quod ante omnes dynaſtias praecipuus ab iis huic regno honor eſt habitus, quod ex tota diſpoſitione libri, de qua poſtea dicam, obſcurum eſſe non poteſt.

Et

Et retinuisse Confucium superiorum auctorum ipsa verba, vno ex loco demonstrabo. Ad octauum annum *Yn cūm*, id est, ad A. ante C. N. annis ante Confucium natum amplius centum et sexaginta, sic est in *Chūn çieū* relatum (*n*):

Tabula XVII Figura 112.

Chūn.	*Vere.*
San	*Tertio*
Yve.	*mense.*
Chim	*Dynastiae Chim*
pe	*ducis*
sú	*minister*
Yvēn	*nomine Yven* (*o*)
lây	*venit*
qvēy	*et recepit se*
Fām.	*in Fām* (*p*).
kèm yn.	*die 27 cycli dierum sexagenarii.*
Ngo	*Ego*
ge	*profectus sum*
Fām.	*in Fām.*

In dispositione totius operis, nullum cycli vel annorum vel mensium vestigium reperitur, quod cum etiam in

(*n*) Lib. III. p. 1. (*o*) Addit commentator *ta fu*, seu ex maioribus magistratibus eum fuisse. (*p*) Commentator: *Fām* dynastiae *Chim* oppidum fuit.

in ceteris *Kīm* obſeruauerim, reticere me propter veterem Sinici populi chronologiam non oportet. Neque hic ſecundum Imperatorum, ſed ſecundum regulorum in *Lù* annos digeſtus eſt liber. Et quamquam complures *Cūm*, ſeu reguli aequali dignitate fuerunt, tamen quotiescumque ſine dynaſtiae nomine *Cūm* dicitur, regulum *Lù* dici apparet. Hoc eſt, quod dixi, me mouere, vt credam, auctorem primum huius libri ceterosque deinceps, ita vt ipſum Confucium ex hoc regno fuiſſe ortos atque in eodem magiſtratus geſſiſſe. Imperatoris cuiusdam nomen nusquam toto in libro occurrit. Si qua vel mortis eius vel alia cauſſa, Imperatoris mentio incidat, tantum ſine nominê certo *Tiēn Vâm*, *Caeli* vel *Caeleſtis Rex* dicitur, quod modeſtiae cauſſa factum videtur, vt adhuc apud Sinos fieri aſſolet. Cum autem de eo ſermo incidit, peculiaria ſaepenumero vocabula adhibentur. Soli Imperatores dicuntur *pūm*, cum *mortui* fuerint. Vt ad 15. annum *Hoâm cūm* reguli in *Lu*, cum de morte *Huôn Vâ n* Imperatoris refertur, ita proditum eſt (q): *ſan yve, yĕ vi, tiēn vâm pūm: tertio menſe, ye vi ſeu* 32. *die cycli ſexagenarii, Caeleſtis Rex obiit.* De ceterorum regulorum morte quoties proditur, alia et littera et vox eſt. Nam reguli dicuntur *hūm*, qui magiſtratus minores geſſerant, *çĭ* ſcilicet hoc item vt alia eiusmodi, ad priſcas gentis caeremonias pertinet, cum is honor Imperatoribus haberetur, vt de iis aliter loquerentur, quam vel de ceteris in dignitate viris, vel de priuatis.

Tab XVII. Figura 113.

[114]

[115.]

[116.]

(q) Lib. VI. p. 8.

Anni deinde regum *Lù*, ſi non ita pauci ſint, iterum in *Xam*, *priores*, *chum*, *medios* et *hia*, *poſtremos* diuiduntur, annorum numeris et recenſione, non interrupta ſerie procedentibus. Interpres Sinus mea in editione minoribus litteris et Imperatorum dynaſtarumque nomina et ſingulorum annos et anni eiusdem ex cyclo ſexagenario appellationem ſubiecit. Quamuis mea in editione numeri paſſim vitioſe ſint exarati, tamen errores ex ſucceſſionibus perpetuis facile poſſunt animaduerti. Hinc cognouimus, primum annum *Yǹ cūm* in *Lu*, cum 49. anno *Pím Vâm* Imperatoris et cum 56 anno Cycli XXXIII. componendum eſſe, vnde in calculo annus ante C. N. 722. exiit, quem tamquam verum recipimus, licet chronologia Sinica nondum ſatis excuſſa ſit. Nam cum cyclus annorum et menſium ſexagenarius Confucii aetate fuerit nullus, quidquid aliquot poſt ſeculis eruditi chronologi ſub dynaſtia *Hia*, ex regum ſucceſſione, dierum cyclo, eclipſibus, forte et tabulariis publicis in tanta monumentorum clade, hic effecerunt in cyclo annorum ſuperioris aeui, non maiorem firmitatem habere poteſt, quam vel Fabii Pictoris, vel Catonis, vel Terentii Varronis in A. V. C. regibus, conſulibus, praetoribus diſponendis impenſa ſedulo opera. Tametſi enim in his chronologiae Romanae triumuiris, diuerſitas, quae inter eos intercedit et aliorum diſſenſio, falli eorum vnumquemque potuiſſe, non plane demonſtraret, tamen infinita ſunt ab eruditis noſtra memoria ſuperiorique ſeculo retecta et propoſita, ex quibus eorum errores redarguantur. Vnusquisque annus cuiuscumque reguli a primo die veris recenſetur, ſolidus-

Tab. XVII. Figura 117.

lidusque ad eundem pertinet, quacumque anni parte decesserit. *Chao cūm* reguli in *Lu* initia ponuntur in vere, cum initio anni ante C. N. 541. Et sic Confucius ipse (r): *Chūn, vâm chim yvě, Cūm cie gvéy Vere, Imperatorio primo mense, Regulus auspicatus est regnum.* Attamen Confucius (s) superiori libro, de *Siam cum* patre huius *Chao cūm*, dixerat: *Tūm, xe yvě, qvèi yeu çâm ngò kiūn Siām cūm. Hyeme, decimo mense, qvei yeu sine 10. die cycli sexagenarii sepultus est noster venerabilis regulus (quem proceres et populus venerati sunt) Siām cūm.* Hoc ipsum in tota Chronologia Philippi Coupleti ab vnoquoque haud aegre animaduerti poterit. Nescio an hoc seculo aliquid in eo sit mutatum, aut an haecce ratio non ex more recepta fuerit a chronologis, sed compendii caussa aut per inaduertentiam. Nam cum calendarium A. 1723. iam esset excusum typis inscriptumque *Ta Cim Kam Hi lo xe eulh nien, Magnae dynastiae Çim Kam Hi Imperatoris 62 anno*, Imperatore eo anno defuncto, meo in exemplari penicillo adscriptum fuit *lo xe eulh nien, cie gvěy Yum chim yven nien, 62 anno* [119.] scilicet *Kam Hi* Imperatoris, *ineuntis imperii Ium Chim primo anno.* Calendarium proximi 1724. anni iam typis exprimit eiusdem *Yum chim* secundum annum.

Tab. XVII. Figura 118.

Annis illum in modum ordinatis, vnumquemque auctores libri in quatuor tempestates, *verem, aestatem, autumnum* et *hiemem* dispescuerunt, quae tempora vbique

 primo

(r) Lib. XXIV. p. 2. (s) Lib. XXIII. p. 10.

primo loco ponuntur. Sic Thucydides annos belli Peloponensiaci secundum aestatem atque hiemem distribuit, γέγραπται δ' ἑξῆς ὡς ἕκαστα ἐγίγνετο κατὰ θέρος καὶ χειμῶνα. Nihil igitur vero est similius, quam *Chūn çieu*, id est, *Verem* et *autumnum* librum dictum fuisse a duabus ex his tempestatibus, vt, si Thucydidis historia inscriberetur θέρος καὶ χειμών. Nam quae *Philippus Couplетus* de hoc nomine sensit (*t*), ea sunt quidem mihi, ὡς ἐν αἰνίγματι. *Titulum operis sui*, inquit, *petiuit ab vere et autumno, propterea quod cum virtute sapientiaque Principis efflorescat amoenissimi veris instar respublica, vti e contrario cum eiusdem stultitia et improbitate, ceu autumnali caelo frondes ac flores diffluere totam, marcescere et consenescentis instar, tandem emori necesse est.* Illa quidem argute eleganterque dicta si cui magis allubescent, quam mea haec opinio, non pugnabo: nam mea me delectat simplicitas. Menses deinde subiecti sunt singulis auctumnitatibus quaterni, sic vero, vt numeri mensium vsque ad duodecimum procedant, neque ex cyclo sexagenario designentur. Dicuntur *chim ẏve*, *eulh ẏve*, *san ẏve* et *xe*
Tab. XVII. Figura 120. *ẏve*, *decimus mensis*, deinde *xe ẏeu ẏĕ ẏve*, *decimus et primus mensis* et *xe ẏéu eulh ẏve*, *decimus atque secundus mensis*. Primus veris mensis semper nuncupatur *Vâm*
[121.] *chim ẏve*, *Imperatorius primus mensis*. At si forte ille non exstet, alter similiter *Vam eulh ẏve*, *Imperatorius secundus mensis*, et si hic quoque desit, tertius vocitatur *Vam san ẏve*. Hoc enim Imperatorum honori tributum fuit, vt qui *Tiēn Vâm*, *Caeli reges* viderentur esse. Bis occur-

(*t*) In prooemiali declaratione p. 19.

occurrit *Tün yüe*, *intercalaris menſis*, A. 37. cycli XXXV. Tab. XVII. Figura 122.
hieme, poſt decimum menſem et A. 48. cycli XXXVII. etiam hieme. Sed neque autumnitates illae, neque menſes ponuntur, niſi ſi quid memoria dignum annotari oportuerit. Sunt quidem nonnumquam et menſes et menſium quoque dies appoſiti, vacuo deinde ſpatio, ſed hoc lacunam indicat, quam in hiſce fragmentis non ſunt auſi ſupplere interpretes. Hac de re ſic *Martinus Martinius* in Hiſtoria Sinica (u): *Sed eorum ſeruandi mirabilem modum reperio. Aiunt enim quandam anum librorum amantem, Confutii Mentiique, nec non aliorum nonnullorum libros diuiſis paginis ad domus parietes agglutinaſſe. Nondum ea tempeſtate papyrus erat in vſu, ſed arborum corticibus ac foliis animi decreta mandabant, vt nunc Indi ſolent. Et quoniam erant e materia ſolida candidaque calce obliti, non difficulter latuere, quoad exſtincta Cinae ſtirpe, ab haeredibus vetulae ſunt ex prompti factique iuris publici. Quamquam aliquot litterae vel tempus vel corticis brunſcentis culpa legentium oculis ſe ſubduxerant, praeſertim in Confucio. Quas litteras licet, quales fuerint aut eſſe debeant, non ignorent, cum tamen illius libros recudunt, eas inſerere non audent, ſed notant in margine. Tanta enim eſt Confucii librorum aeſtimatio, vt aliquid in iis etiam aperte mutilatum emendare nefas putent.* Litteras vetuſtate euanidas vel putredine quas ſciant Sini quales fuerint, tamen non audere reponere, non ita, vt res ſe habet, pronunciatum eſt, verum vt locus daretur argutae ſententiolae, quae iis verbis ſubiicitur, et a nobis, vtpote quae huc non pertineat, praetermiſſa eſt.

(u) Lib VI. p. 240. ed. Amſtel. 1659.

Quae cum dico, excuſatum vt maxime cupio *Martinum Martinium*. Nam cum, quod mihi conſtat, ex ſcheois eius ſimpliciter planeque ſcriptis, Monachienſis collegii diſertiſſimi viri, quibus hoc negotium datum fuit, hanc hiſtoriam Sinicam magnificentiori elegantiorique cultu inſtruerent, multum ex remotarum rerum inſcientia peccarunt, ſaepe coniecturas ſuas et meditata non minus conſectati ſunt, quam Martinii fidem. Emendatos ſub dynaſtia *Han* Confucii libros fuiſſe et quantum potuit, induſtria ſumma reſtitutos, ne Sini quidem diffitentur: neque enim religioni ſibi duxerunt, quae vera eſſe recordabantur, ea reſtituere. At quae quidem lacunae ſunt, nihil prorſus inibi meminerant, quid olim fuerit ſcriptum. Quod autem de margine commemoratur, iſthuc profecto *Martino Martinio* numquam potuit ſcribenti in mentem venire. Monachienſes ſcilicet credebant, Sinicis in libris id poſſe confieri, quod nobis licet in noſtris facere: quippe viri cetera eruditi, earum vero rerum non item ſcientes, quid dicerent non videbant. Docti Sinorum interpretes bene videntur de Confucio meriti, cum multa eius verbis, ſubiecerint minoribus exarata litteris, quae lumen obſcuritati praeferant: in his vero locis, vbi lacunas eſſe dixi, etiam interpretes ſiluerunt vacuaque reliquerunt ſpatia, quod argumento eſt, eos iam tum ſub dynaſtia *Han*, cum primum repararentur libri quid olim iisdem in locis fuerit ſcriptum, ignoraniſſe.

Reliquum eſt, vt de diebus quoque dicamus. Et illi non ſemper quidem, nihilo ſecius haud raro occurrunt, non niſi cyclo ſexagenario notati. Hos dies cum tempestatibus annorum mensibusque, praesertim intercalaribus et eclipsibus comparatos, forma annorum illo aeuo quae fuerit, patefacere posse auctumo, vt mirer, Sinos ipsos, eam formam cognosci alicunde posse, desperare. Eclipses solares, hae enim solae eo in libro locum inueniunt, in prioribus annis minime fuerunt accurate recensitae. Tum vero ab A. 58. Cycli XXXIII. vsque ad annum 9. Cycli XXXIV. et ab eo anno vsque ad 23. a 23. vsque ad 42. et a 54. vsque ad 3. Cycli XXXV. magnis interuallis occurrunt nullae, ne quid de aliis defectibus dicam, quos deinde astronomi sub dynastia *Han* expleuerunt calculi ope. Posterioribus annis, quibus Confucius manum admouit, maiorem accurationem deprehendo. Dies eclipsium a Philippo Coupleto in Chronologia Sinica praetermissi fuerunt, vna quoque eclipsis omissa, alia anno non suo, errore fortassis typi adscripta fuit. Eam ob caussam omnium eclipsium in *Chūn çieu* catalogum consignaui, quem hic inserere constitueram, nisi deinde egregia doctissimi viri, *Antonii Gaubilii* opera (v) me ab hoc consilio, vtpote superuacaneo absterruisset; nam vniuersas ex *Chūn çieu* eclipses exhibuit, interpretum Sinicorum calculos examinauit, suos denique ex Europaeis tabulis initos adiecit. Pauca hic bona eius venia monebo. Prima eclipsis in *Chūn çieu* notata est ad 3. annum *Yn Cūm* in *Lù*, qui annus cum A. 58. Cycli XXXIII. et A. ante C. N. 720 conuenit, hunc in modum: *Chūn, Vâm eulh yve, ki sú, ge yeu xe chi. Vere, Imperatorio* Tab. XVII. Figura 123.

(v) Tom. II. p. 156. Tom. III. p. 235. seq.

torio secundo mense (Imperatorius dicitur secundus, quod illo anno primus mensis non occurrit) *die dicto kì sú*, (seu die 6. cycli sexagenarii dierum) *Solis fuit eclipsis.* Altera obseruata est ad A. 9. Cycli XXXIV. seu A. ante C. N. 709. aut, vt in *Chūn çieu* est, ad A. 3. *Huôn cūm* in *Lù*, et relata his verbis: *Çiēu, cie yve, gîn xîn,* Tab. XVIII. Figura 1. *sŏ, ge yeu xe chi, ki. Autumno, septimo mense, die gîn xîn*, (seu 9. cycli dierum) *noui unium fuit, solis fuit eclipsis, eaque totalis.* R. P. Gaubilius (x: *Autumno, primo mense, primo eius die gîn xîn, eclipsis totalis*, et ex calculo *Him yun ki octauo mense, eius primo die, gin xîn dicto.* Ipse denique in calculo suo octauum mensem posuit. Ego *septimum mensem* ex duabus editionibus *Chūn çiēu* accurate edidi, quidquid deinde eius rei sit, quamobrem ab eo discedatur. Aliquoties deinde etiam R. P. *Gaubilius* adiecit, quotus mensis dies fuerit, qui ex cyclo sexagenario tantum indicatur in *Chūn çieu.* Eclipsis A. ante C. N. 481. quam veluti postremam ex *Chūn çieu* ponit, in libro non occurrit. Eclipsis aestate contigit: at *Chūn çieu*, initio veris desiit. Denique obseruari velim, nonnumquam superioribus in annis, vt ad Annos ante C. N. 709. 669. 668. 664. 655. 612. 575. 574. 559. 553. nouilunia quoque notari, eum in modum, vt supra in secunda eclipsi verba proposui ab A. autem 553. non interrupta serie, ad vnamquamque eclipsin, notatur primo loco, *nouilunium fuisse.* Hoc vero istius aetatis rudi-

(x) L. c. Tom III. p. 239. Ib p. 245. pro A. 592. errore typorum est 692 quod per se quisque facile animaduertet.

ruditatem demonſtrare videtur, cum exiſtimarint, fieri poſſe, vt eclipſis ſolaris etiam contingat alia in phaſi lunae. Experiundi cauſſa, a Confucio diligentius, quam alias, nouilunia ecliptica obſeruata fuerunt, quod quis adeo reprehendat? verum nihil magis ad ſcientiam Aſtronomicam, vel in Confucio vel in vniuerſo illo aeuo requiri oportere ſentio, quam notationem eorum, quae de caelo obſeruata ſint. Iam aſtronomi, qui multis poſt ſeculis fuerunt, eadem in perſuaſione exſtiterunt poſſe eclipſes etiam extrema in phaſi euenire. Itaque in Annalibus passim ita occurrit, vt in celebri illa eclipſi *Quamuutiana*, annales *Tum kien* (y) habent, *Qvèy bài, boéi, ge yeu xe chi. Die qvèi bài, poſtrema lunae phaſi, ſolis fuit eclipſis.* Sed hunc errorem eiusque cauſſam, R. P. Gaubilius diligenter copioſeque retexit. Tab. XVIII. Figura 2.

Ita igitur temporum notatio atque diſpoſitio operis ſeſe habet in libro *Chūn çieū.* Sed, ſi res eodem in libro traditas videamus, placere poteſt antiquitatis ſimplicitas, ſapientiam qualemcunque aut lumina orationis, aliaque vel maiora, vel cultiora, fruſtra requiſiueris. Praemiſſa ſunt mea in editione, vt apud nos quoque quibusdam in libris fieri ſolet, ſummorum virorum de *Chūn çieū* teſtimonia, de quibus alias dicam, cum de interpretibus huius libri tractabo. Magnifica iſta ſunt quidem, ſed iudicio ab immenſa magiſtri exiſtimatione corrupto prolata. Scilicet ſunt hi commentarii, quales paſſim apud

 nos

(y) Lib. XLII. p. 12. b.

nos ciues honesti atque agrestes quoque homines memoriae iuuandae caussa consignant, quo die eclipsis animaduersa sit, quo quis principatum adierit, quo sit natus, mortuus, occisus, submersus, sepultus, quo die praelium commissum sit, vel proximus arserit Vcalegon, vel terrae motus exstiterit, aut procella et insolita pluuiae copia, eluuiones, locustae, vredines. Sic prisci Romanorum Graecorumque annales fuerunt, teste *M. Tullio*, cuius locum, tametsi prolixum, non grauabor totum hic ponere (z): *Atqui, ne nostros contemnas, Graeci ipsi sic initio scriptitarunt, vt noster Cato, vt Pictor, vt Piso. Erat enim historia nihil aliud nisi animalium confectio, cuius rei memoriaeque publicae retinendae caussa, ab initio rerum Romanarum vsque ad P. Mucium Pontificem Maximum res omneis singulorum annorum mandabat litteris. Pontifex Maximus efferebatur in album et proponebat tabulam domi, potestas vt esset populo cognoscendi: ii qui etiam nunc annales maximi nominantur. Hanc similitudinem scribendi multi secuti sunt, qui sine vllis ornamentis monumenta solum temporum, hominum, locorum gestarumque rerum reliquerunt. Itaque qualis apud Graecos Pherecydes* (is Pherecydes, quem supra diximus aetate Confucii fuisse) *Hellanius, Acusilaus fuit aliique permulti: talis noster Cato et Pictor et Piso, qui neque tenent, quibus rebus ornatur oratio, et dum intelligatur quid dicant, vnam dicendi laudem putant esse breuitatem.* Quare id quoque nostrum de *Chŭn çieu* iudicium oportebit esse, quod, *Sempronius Assellio Numantini* belli scriptor de priscis

(z) De Oratore Lib. II p. 355

ſcis Romanorum annalibus tulit (*a*): *annales libri tantum, quod factum quoque anno geſtumue ſit, id demonſtrabant, id eſt, eorum quaſi, qui diarium ſcribunt, quam Graeci ἐφημερίδα vocant: nobis non modo ſatis eſſe video, quod factum eſſet, id pronunciare, ſed etiam quo conſilio quaque ratione geſta eſſent demonſtrare. Nam neque alacriores ad rem publicam defendendam, neque ſegniores ad rem perperam faciundam annales libri commouere quidquam poſſunt.* Nunc id agam videlicet, operamque dabo, vt ne quis meo iudicio fidem derogare, contra ea, vt pro ſe quisque, quemadmodum de hoc libro iudicari oporteat, ſtatuere ſecum poſſit. Nam poſtquam bonam eius libri partem Latine conuerti, in quo labore non inficior interpretes Sinos mihi vt maxime adiumento fuiſſe, et exilitas rerum et taedium inanis operae, temporisque fructuoſius collocandi diſpendium, impetum animi mei ſuſtinuit, vt deinde reliquos codices et poſteriores in primis, quos Confucius elaborauit ſic tantummodo euoluerem vt certo conſtare mihi poſſet, quod iam tum ſuſpicabar, ceteros nulla cultura priores antecellere. Igitur ſatis erit, ſi de mea verſione tantum excerpam, quantum lectores mei ad cognitionem et vel ad ſatietatem a me requirent.

Chūm çieu, yvên kivèn, ſeu primus libellus.

Tab. XVIII. Figura 3.

Yǹ Cūm	*Yǹ Cūm, ſeu, Yǹ Reguli in Lu*
Xam.	*primi anni.*
Yven	*Primus*

[4]

 nien.

(*a*) Apud A. Gellium Lib. IV. Cap. 18.

nien. *annus.*

Tab. XVIII. Figura 5. *Chūn.* *Vere.*

[6.] *Vâm* *Imperatoris*

chim *primus*

yve. *mensis.*

Nihil ad hunc mensem annotatum est.

[7.] *San* *Tertius*

yve. *mensis.*

[8.] *Cūm* *Regulus, scilicet in Lu, nomine Yn*

kiě *et*

Chū *Chu dynastiae regulus*

Ŷ *Fù* } *Y fù*

mîm *yū* } *iurarunt seu foedus icerunt*

miě. *in Miě.*

Fù, hoc accentu scribendum monet Commentarius Sinicus, cum alioqui etiam *fú* pronuncietur. Ex eodem teneo, *Miě*, regionem fuisse in *Lu* sitam. Iurare autem solebant prisci mortales in Sinis, epoto animantis sanguine: animantem defodiebant et sanguine scribebant iuramenti formulam in cortice.

[9.] *Hiá* *Aestate*

[10.] *u* *Quintus*

yve. *mensis.*

Chím

Tab. XVIII. Figura 11.

Chim pe	*Chim pe, seu Chim regni Dux*
ke tuón yū	*occupauit particulam*
Yèn.	*terrae seu regionis Yèn.*

Scholiasta Sinus, *Yèn* monet hoc accentu legendum esse, regionemque in regno *Chim*

Cieū.	*Autumno.*	[12.]
Cie	*S ptimus*	[13.]
yve.	*mensis.*	
Tien Vàm	*Imperatoris (scilicet, Pim Vam, nomine)*	[14]
sú	*minister*	
çùi hivèn	*dictus, Çai hivèn*	
lày	*venit*	
qvēy	*et recepit se*	
Hoéi,	*ad Hoéi,*	
Cūm	*Reguli Yn Cūm, in Lu*	
chúm	*alterum ex tribus*	
çu chi	*filium,*	
Fum.	*in Fúm.*	

Çai hiven, proprie significat, *gubernatorem seu praefectum magni nominis*, videturque hic titulus honoris magistratui cuidam tributus fuisse. Ad *Fúm* scholiasta addit: 反鳳方賄 *Fúm*, *fām fuā fum fān*. Fum, *fuit pars Fúm regionis rebellis*.

Tab XVIII. Figura 15.

	kieu	*Nonus*
	yve.	*mensis.*
[16.]	*kie*	*Etiam*
	Súm	*Sum*, *reguli*
	gin	*minister*
	mîm / *yū*	*iurauit*
	Siēu.	*et Siēu regulus.*

Scholiasta explicat: *Lu*, *Súm*, *Siēu*, *san qve*, *cūm gvey mim*. *Lu*, *Sum et Siēu*, *tria regna*, *inter se foedus icerunt.*

[17]	*Tūm.*	Hieme.
[18]	*xe* / *yeu* / *eulh*	*duodecimus*
	yve.	*mensis.*
[19]	*Çi* / *pe*	*Çi pĕ*, *seu*, *Çi dynastiae Dux*
	lây	*venit.*

Addit

Addit Scholiasta, *y' Lù, s. ad regulum Lù.*

Cūm *Reguli Yǹ cūm in Lù* Tab XVIII. Figura 20.

çu *Çu, seu, dynasta regionis cuiusdam*

Ye / *sui* } *Ye sui, nomine*

ço. *mortuus est.*

Sui, proprie dignitatis nomen. Scholiasta: *Ye sui, Lu* 大夫 *ta fū, in regno Lù, fuit ex maioribus senatoribus, qui regulo proponere solebant promouendos ad dignitates.*

Eulh *Secundus* [21.]

nien. *annus, scilicet Yǹ Cūm, reguli.*

Chūn. *Vere.* [22.]

Cūm *Regulus Lu* [23.]

hoéi / *sio* / *yū* } *amice congressus est cum dynasta Sio,*

Cien. *in Cien.*

Scholiasta: *Sio chi,* 近 *kin y Lù chè yè. Sio in vicinia regni Lu fuit.* Et, *Cien, Lu ty. Cien* (vbi conuenerunt) *est terra in regno Lu.*

Hia. *Aestate.* [24.]

u *Quintus* [25.]

yve. *mensis.*

Kiù

Tab. XVIII. Figura 26.

Kiü — *Kiü, dynastae*
gîn — *minister*
ge — *adiit*
Hiām. — *dynastam Hiām, s. venit in Hiām.*

Interpres Sinus: *Hiām siao qve. Hiām, est parvum regnum.* Simul monet, hic ipsum huius regni principem intelligendum esse.

Vû — *Vû*
Hài — *Hài*
Süi. — *Mandarinus fuit.*
Sui — *Mandarinus*
gĕ — *adiit*
kiĕ. — *regionem kiĕ.*

Mandarinos Lusitani vocant omnis generis magistratus in Sinis aliisque regnis, non a Lusitanica aliqua voce, vt plerique existimant, sed a *Malabarico Mándiri, Minister*, vt me R. R. Missionarii Danici monuerunt (*b*). Eodem nomine hic vtar, tamquam noto. Scholiasta: *Kiĕ, fü yûm qve. Kiĕ, fuit parvum regnum.*

[27] *Çiēu.* — *Autumno.*
[28.] *Pa* — *Octauus*
yve. — *mensis.*
[29.] *kèm xîn.* — *die, kèm xîn, s. 17. die cycli sexagenarii.*

Cūm

(*b*) Epistola Scripta Trangambariae 1735. 30. Dec.

Cūm	*Dynaſta Lù*	Tab XVIII. Figura 30.
kie	*et*	
Sio	*dynaſta Sio*	
mîm *yū*	*foedus icerunt*	[31.]
Tam.	*in Tam.*	

Scholiaſta: *Tam, regio in Lu.*

Kieu	*Nonus*	
yve.	*menſis.*	
Kì	*Praefectus ki*, (*Ta fu*, fuiſſe Scholiaſta monet)	
Ly *ſiū*	*nomine Ly ſiū*	[32.]
lây	*venit*	
Ym *niù.*	*vt Ym duceret vxorem.*	

Scholiaſta docet in *Ly ſiū*, ſecundum characterem *ſiù* pronunciari oportere: nam etiam *tèû* efferri poteſt.

Tūm.	*Hieme.*	[33.]
Xe	*Decimus*	[34.]
yve.	*menſis.*	
Pe *kì*	*Pe kì* (reguli *Lu* coniux, vt Scholiaſta monet)	[35.]

qvēi } *recepit se*
yū }
Ki *ad Ki praefectum.*

Addit Scholiasta: 着逆所繻裂 *liě siū sò Ym chè*, *scidit ornatum*, (nescio quem,) *muliebrem quem Ym habuit.* Videtur caeremonia indicari, qua regina aut despondit virginem et elocauit, aut nouis nuptis honorem exhibuit.

Tab. XVIII. Figura 36.

Ki } *Idem Ly siu, in Ki dignitate*
çù }
pe *Dux*
kiu } *et dynasta Kiù*
çù }
mîm } *foedus iniuerunt*
yū }
Miě *in Miě.*

Interpres: *Miě* 邑莒 *kiù yě. Miě est in dynastia Kiu, villa moenibus circumdata.*

[37] *Xe* } *duodecimus*
yeu }
eulh }
yve. *mensis.*

[38] *Tě* } *die 52. cycli sexagenarii.*
mào. }

[39.] *Fū* } *τȣ Fu gin*
gîn }

çù

çù }
xi } *çù xi, (secundus natu filius)*
hum. *mortuus est.*

Scholiasta: *Çù xí,* 也子仲 *Chum çù yè,*
filius natu secundus fuit.

Chīm. *Dynastiae Chīm.* Tab. XVIII. Figura 40.
gîn *populus*
fa *vicit*
Gvéy. *regulum Gvéy.*
San *Tertius* [41.]
nien. *annus reguli Yn cum, in Lù.*
Chūn. *Vere.* [42.]
Vâm *Imperatorius* [43.]
eulh *secundus*
yve. *mensis.*
kì }
sú. } *sexto die cycli sexagenarii.*
Ge *solis*
yeu *fuit*
xe }
chi. } *eclipsis.*
san *Tertius* Tab XIX, Figura 1,
yve. *mensis.*

Tabula XIX. Figura 2.

	Kèm sio	47. *die cycli sexagenarii dierum*
[3.]	*Tien Vâm*	*Caeli Rex* Imperator, sc. *Pim Vam.*
	pum.	*obiit.*
[4.]	Hia.	*Aestate.*
[5.]	*Su yve.*	*Quartus mensis.*
[6.]	*Siñ mào.*	28. *die cycli sexagenarii.*
[7.]	*Yim xi,*	*Yìm xi,*
	ço.	*mortuus est.*

Interpres: *Tien çu ta fu. Imperatoris mandarinus ex maioribus magistratibus.*

[8.]	*Ciēu.*	*Autumno.*
[9.]	*Vu xi çu*	*Vu xi dynasta, qui,* (teste Scholiasta,) *apud Imperatorem, Ta fū, fuit,*
	lay	*venit,*
	kieu	*vt seu peteret, seu exigeret*
	fú.	*sumptus ad funus.*

Forte Imperatorium. Nondum enim vacauit interpretis commentarium hoc loco excutere.

[10]	*Pa yve.*	*Octauus mensis.*

Kèm

Kem xîn	17. *die cycli sexagenarii*	Tabula XIX. Figura 11.
Súm	*Súm, dynastiae*	[12.]
Cūm	*regulus*	
Hô	*Hô, nomine*	
çŏ.	*mortuus est.*	
Tum.	*Hieme.*	[13.]
Xe yeu eulh	*duodecimus*	[14.]
yuĕ.	*mensis.*	
Çì	*Çì*	[15.]
heù	*ethnarcha*	
Chìm	*et dynastiae Chìm*	
pe	*Dux*	
mîm yū	*foedus inierunt*	
Xe muen	*in Xe muen.*	

Commentarius regionem in regno *Çì*, fuisse declarat.

qvèi vi	*die* 20. *cycli sexagenarii*	[16.]
çàm	*sepultus est*	[17.]
sùm	*sùm dynastiae regulus*	

Mŏ cūm } *Mŏ cūm.*

Is ipſe, qui paullo ante dicebatur alio charactere *Ho cūm.*

Chūn çieu kiven chi eulh, *ſeu ſecundus libellus.*

Tabula XIX. Figura 18. *Yà Cūm chum.* } *Yà Cūm, reguli in Lu media aetas.*

[19.]	*Sù*	*Quartus*
	nien.	*annus.*
[20.]	*Chūn,*	*Vere,*
[21.]	*Vâm*	*Imperatoris*
	eulh	*ſecundus*
	yve.	*menſis.*
[22.]	*Kiù*	*Dynaſtiae Kiù*
	gîn	*miniſter*
	fă	*vicit*
	Kì	*Kì regulum*
	ciù	*occupauitque*
	Mêu lêu.	*Mêu lêu*

Scholiaſta: *ye*, ſeu villam in regno *Kì* fuiſſe refert.

Yù

Tabula XIX. Figura 23.

Yú xiñ	45. *die cycli ſexagenarii*
Gvey	*Gvéy* regulum (*nomine*, *Hûon Cūm*) [24]
Cheu hiu	*Cheu hiu*
xí,	*occidit*,
kī	*qui*
kiun	*partes ſuas perfecte impleuerat*
huôn	*et conſeruauerat* (*populum*)

Interpres tradit, eum fuiſſe *Gvéy cūm çu*, *Gvéy reguli dynaſtam.*

Hia	*Aeſtate* [25.]
Cum	*Regulus in Lu*, (*Yn Cum*) [26.]
kie	*et*
Sum Cum	*regulus in Sum*, (*Chuam cum*, *nomine*)
yú yū	*ſine caeremoniis conſuetis conuenerunt*
Cim.	*in Cim.*

Scholiaſta: *Cím*, *villa in dynaſtia Gvey.*

Sum Cum,	*Sum dynaſtiae regulus*, (*nomine*, *Chuam Cum*) [27.]
Chin Heû,	*Chin dynaſtiae etnarcha*, (*nomine*, *Hûon Cum*)

Çí gîn — *Çí dynastiae minister, (nomine Sivēn, quo nomine etiam regulus ipse dicebatur)*

Gvéy gîn — *et Gvéy dynastiae minister (ille, Chēu hiū, quem supra nominauerat)*

fa — *superarunt*

Chim. — *Chim regulum.*

Tabula XIX. Figura 28. *Çicu.* — *Autumno.*

[29] *Hōei sui,* — *Hōei sui,*

sui. — *Mandarinus factus est.*

[30] *Hóei* — *Congressi sunt*

Sum Cum — *Sum regulus,*

Chin Heu — *Chin ethnarcha,*

Çí gîn — *Çí dynastiae minister,*

Gvéy gîn — *Gvéy dynastiae minister,*

fa — *et superarunt*

Chim. — *Chim regulum.*

[31.] *Kieu* — *Nonus*

yve. — *mensis.*

[32.] *Gvéy gin* — *Gvéy dynastiae minister*

xa

xū
Cheū
biū
yū — *damnauit Cheu biu*

Po — *in Po*

Scholiasta: *Po, regio in dynastia Chin.*

Fūm — *Hieme.* Tabula XIX. Figura 33.

Xe
yeu
eulh — *duodecimus* [34.]

yve. — *mensis.*

Gvéy
gîn — *Gvey dynastiae minister* [35.]

lie — *firmauit et stabiliuit*

Çin. — *Cin dynastiam.*

û — *Quintus* [36.]

nien. — *annus.*

Chūn. — *Vere.* [37.]

Cūm — *Regulus Lu, (Yn Cūm)* [38.]

qvōn
yû
yū — *diligenter inspexit pisces, seu piscaturam*

Tam. — *in Tam.*

Scholiasta: *Tam, regio in Lu.*

Tabula XIX, Figura 39.

	Hia.	*Aestate.*
[40.]	*Su*	*Quartus*
	yve.	*mensis.*
[41.]	*çam*	*sepultus est*
	Gvéy	*dynastiae Gvéy regulus*
	Huôn Cūm.	*Huôn cūm.*
[42.]	*Çiēu.*	*Autumno.*
[43.]	*Gvéy*	*Gvéy dynastiae*
	sùi	*Mandarinus*
	gĕ	*profectus est*
	Chîm.	*in Chîm.*

Scholiasta: C*hîm*, *paruum quoddam regnum*

[44.]	*Kieu*	*Nonus*
	yve.	*mensis.*
[45.]	*Lao chum çu*	*Lao secundus natu filius*
	cūm,	*circuiuit domum,*
[46.]	*çō*	*incepit*
	hiēn	*offerre*
	lo	*sex*
	yu.	*alas auium.*

Videtur vtrumque aliquid ex ritibus Sinicis continere, quod explanandi mihi non est data copia.

[47.]	*Chū*	*Chū dynastiae*

gîn

gîn	*minister*
Chím	*et Chím dynastiae*
gîn	*minister*
fă	*vicerunt*
Sum.	*regulum Súm.*
Mûm.	*Parui vermes, qui segetes nascentes corrodere et corrumpere solent, (scilicet, illo tempore in regno Lu, cladem segeti intulerunt.)* Tabula XIX Figura 48.
Tūm.	*Hieme.* [49.]
Xĕ / *yéu* / *euh*	*duodecimus* [50.]
yuĕ.	*mensis.*
Sīn / *sū.*	*octuodecimo die cycli sexagenarii* [51.]
Cūm	*Reguli in Lu* [52.]
çù	*çu, seu dynasta*
Kēu	*nomine Kēu*
çŏ.	*mortuus est.*
Súm	*Súm reguli* [53.]
gîn	*minister*
fă	*vicit*
Chím.	*regulum Chím*
Gvèy	*Venatio fuit*

	Chām *cò*	*apud Chām cò*

Scholiasta: *Chām cò villa in dynastia Chim.*

Tabula XIX. Figura 54.	*Lo*	*Sextus*
	nien.	*annus.*
[55.]	*Chun.*	*Vere.*
[56.]	*Chim*	*Reguli Chim*
	gin	*minister*
	lay	*venit*
	Xū pim	*in Xū pim.*
[57.] Tabula XX. Figura 1.	*Hia.*	*Aestate.*
	V	*Quintus*
	yve.	*mensis.*
[2.]	*Sīn yeu.*	58. *die cycli sexagenarii.*
[3.]	*Cum*	*Regulus in Lu*
	hoéi	*amice congressus est*
	Çī Hèu,	*cum etnarcha in Çī,*
	mîm yū	*foedus inierunt*
	y.	*in Y.*

Scholiasta: *Y regio dynastiae Çī*

çīeu

çieū.	*Autumno.*	Tabula XX, Figura 4.
cie	*Septimus*	[5.]
yve	*mensis.*	

Nihil annotatum est.

Tūn	*Hieme*	[6.]
Sūm	*Sūm regali*	[7.]
gîn	*minister*	
ciù	*occupauit*	
Châm *cò*	*Châm cò.*	

Scholiasta: *Châm cò, villa in dynastia Chîm.*

cie	*Septimus*	[8.]
nien.	*annus.*	
Chūn.	*Vere.*	[9.]
Vâm	*Imperatoris*	[10.]
san	*tertius*	
yvè.	*mensis.*	
xo *kì*	*xo kì*	[11.]
quēi *yū*	*recepit se ad*	
Kì.	*Kì.*	

 Inter-

Interpres scribit, fuisse hanc *xǒ kì* 娣 *ty*, *sororem natu minorem*, reginae *Pě kì* de qua item, vt de hoc *Kì*, supra dictum est.

Tabula XX. Figura 12.	*Tem*	*Dynastiae Tem*
	hêu	*etnarcha*
	ço.	*mortuus est.*
[13.]	*Hia.*	*Aestate.*
[14]	*Chim*	*Moenia ducta vel renouata sunt*
	Chum Kieu	*in Chum kieu,*

Interpres: *Chum kieu, villa in regno Lù.*

[15.]	*Çì heû*	*Çì ethnarchae*
	su	*Mandarinus*
	kī	
	ty	
	nien	
	lây	*venit*
	Pim.	*in Pim*
[16.]	*Çīeu.*	*Autumno.*
[17.]	*Cūm*	*Regulus in Lù*
	fa	*vicit*
	Chū.	*dynastam Chu.*
[18]	*Tūm.*	*Hieme.*

Tien

Tabula. XX.
Figura 19.

Tiēn / *Vâm*	*Imperatoris*
sù	*minister*
fàn / *pĕ*	*Fân pĕ praefectus*
lay	*venit*
Pím.	*in Pím.*

Interpres: F*ân* Pe, *terra sub ditione Imperatoris*

Sio	*Sio dynasta* [20.]
sa / *Fàn* / *pĕ* / *yū*	*vicit Fân Pe praefectum*
çù	*Çù dynasta*
kiēu / *y*	*in kiēu y*
qvēi.	*se recepit.*

Chūn çieū kiven chi san, seu tertius libellus.

Yn / *Cūm*	*Yǹ cūm, reguli in Lù* [21.]
hia	*extrema aetas.*
pa	*Octauus* [22.]
nien.	*annus.*

Tabula XX. Figura 23. *Chim.* *Vere.*

[24.] *Sum* *Cum* } *Sum regulus*

Gvéy *heu* } *et Gvéy etnarcha*

yú *jū* } *sine caeremoniis conuenerunt*

Chui. *in Chui.*

Interpres: *Chui, regio in regno Gvéy*

[25.] *San* *Tertius*

yve. *mensis.*

[26.] *Chim* *pe* } *Chim ethnarchae*

sú *Mandarinus*

Yven *Yven nomine*

lây *venit*

qvēy *et recepit se*

Fam. *in Fam.*

Interpres: *Fam villa in Chim*

[27.] *Kèm* *yn* } *27. die Cycli sexagenarii.*

[28.] *Ngo* *Ego*

ge *profectus sum*

Fām. *in (eandem villam Fām.)*

Hiá.

Hiá.	*Aestate.*	Tabula XX. Figura 29.
Lo	*Sextus*	[30.]
yve.	*mensis.*	
kì bái.	*36. die cycli sexagenarii.*	[31.]
Çi	*Çi*	[32.]
hèu	*ethnarcha*	
lào fù	*venerabilis senex*	
çŏ.	*mortuus est*	

Interpres monet, sermonem esse de *Sivēn cūm*, regulo in *Çí*.

Sīn bái	*48. die cycli sexagenarii.*	[33.]
Siéu Nàn	*Siéu dynastiae praeses*	[34.]
ço.	*mortuus est.*	
Çieū.	*Autumno.*	[35.]
Cie	*Septimus*	[36.]
yve.	*mensis.*	
Kèm ù.	*septimo die cycli sexagenarii,*	[37.]
Súm cūm,	*Súm regulus,*	[38.]
Çì hêu	*et Çì ethnarcha*	

Gvéy bèu	*et Gvéy ethnarcha*
mîm yū	*coniurarunt*
Và vŏ.	*in Và vŏ*

Interpres: *Và vŏ, in regno Cheu.*

Tabula XX. Figura 39.

	Pa	*Octauus*
	yvĕ.	*mensis.*
[40.]	*çàm*	*sepultus est*
	Çi	*Çi dynastiae regulus*
	Sivēn Cūm.	*Sivēn cūm nomine.*
[41.]	*Kiu*	*Nonus*
	yvĕ.	*mensis.*
[42.]	*Sīn mao.*	*28. die cycli sexagenarii*
[43.]	*Cūm*	*Regulus in Lù*
	kiĕ	*et*
	Kiù gìn	*Kiù dynastiae minister*
	mîm yū	*coniurarunt*
	Fêu lây	*in Fêu lây*

Interpres: *Fêu lây, villa in regno Kiù*

Mim

Mím.	*Vermes segetem nascentem corroderunt.*	Tabula XX. Figura 44.
Tūm	*Hieme.*	[45.]
xe *yeu* *eulh*	*duodecimus*	[46.]
yuĕ.	*mensis.*	
Yu *Hiái*	*Yu Hiái*	[47.]
çŏ.	*mortuus est.*	
Kieu	*Nonus*	[48.]
nien.	*annus.*	
Chūn.	*Vere.*	[49.]
Tiēn *Vam*	*Imperatoris*	[50.]
su	*minister*	
Nān *ki*	*nomine Nan ki*	
lay	*venit.*	
Pîm.	*in Pim.*	
San	*Tertius*	[51.]
yuĕ.	*mensis.*	
quèi *yeu*	*die 10. cycli sexagenarii*	[52.]
Ta	*Magna*	[53.]
Xú	*pluvia*	

ſive *et nix.*

Tabula XX. Figura 54. Hie Hie

ço. *mortuus eſt.*

Interpres: *Hie, reguli in* **Lu**, *ta fu.*

[55.] Hia. *Aeſtate.*

[56.] Chim *Moenia ducta ſunt*

Lâm. *circa Lâm*

Interpres: *Lâm, villa in* **Lu.**

[57.] Çiēu. *Autumno.*

[58.] Cie *Septimus*

yve. *menſis.*

Nihil additur.

[59.] Tūm. *Hieme.*

[60.] Cūm *Regulus Lu*

hoéi *amice congreſſus eſt*

Çi *cum Çi ethnarcha*

heû

yū

Kēm *in Kēm*

Interpres: *Kēm terra in dynaſtia Sum.*

Fig: 1.

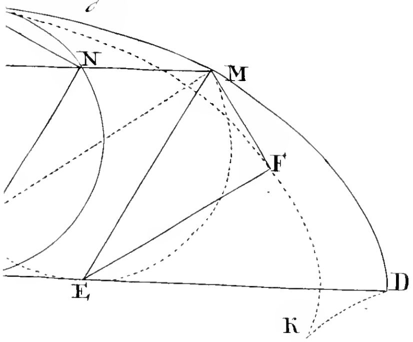


Fig: 2.

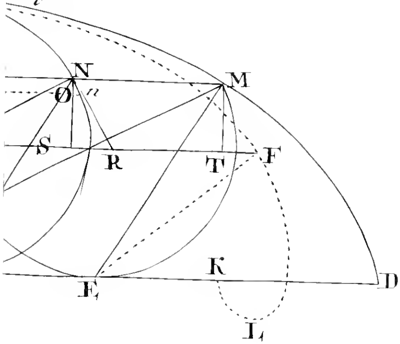


Fig. 1.

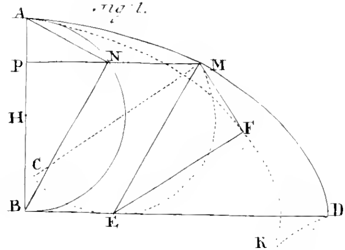
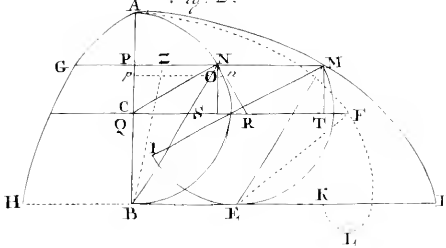


Fig. 2.



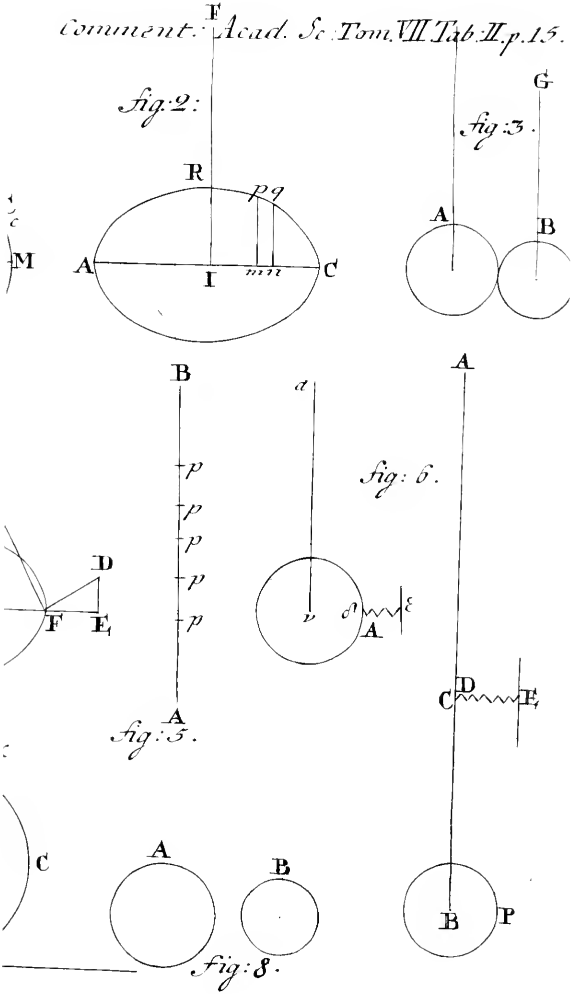


fig: 2:
F
R
p q
M
A
I
m n
C
fig: 3.
G
A
B
B
d
fig: 6.
p
p
p
p
p
D
F
E
ν
δ
A
ε
A
C D
E
A
fig: 5.
C
A
B
B
P
fig: 8.

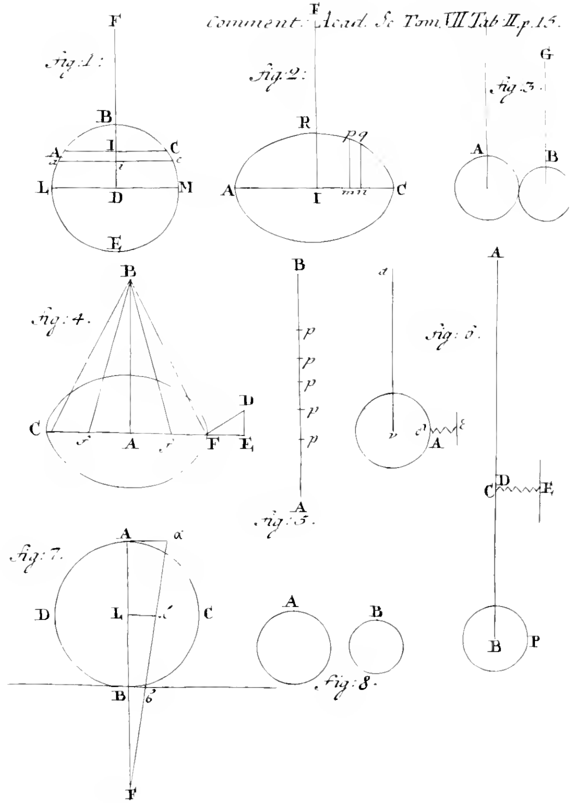


Fig: 1:
Fig: 2:
Fig: 3.
Fig: 4.
Fig: 5.
Fig: 6.
Fig: 7.
Fig: 8.

fig. 2.

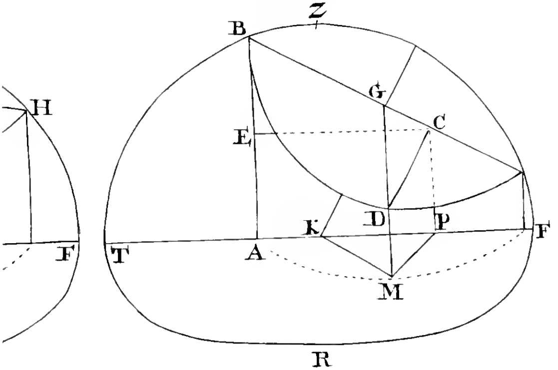


fig. 3.

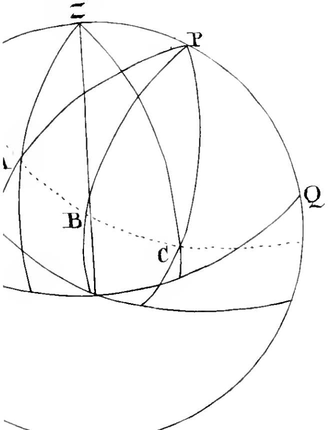


fig. 1.

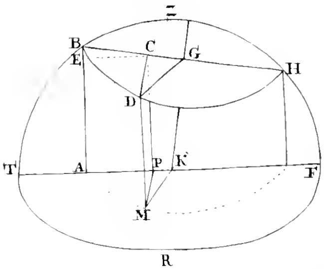


fig. 2.

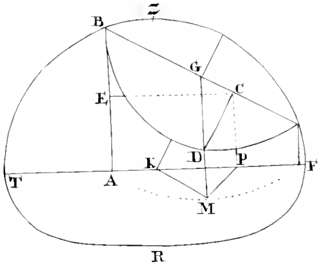


fig. 3.

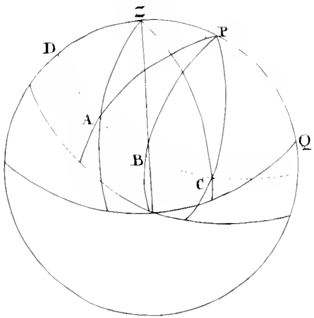


fig: 1.

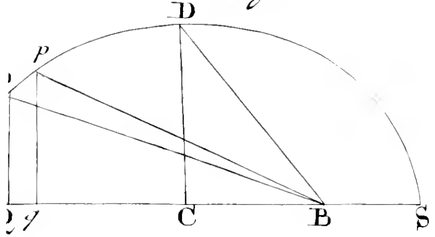


fig: 2

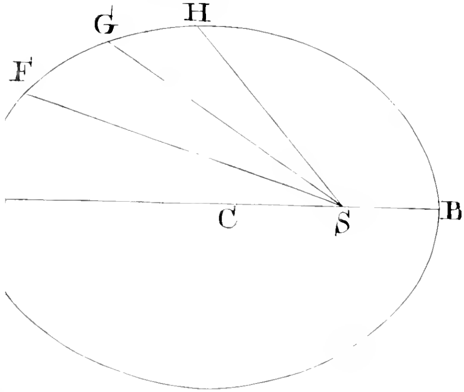


Fig. 1.

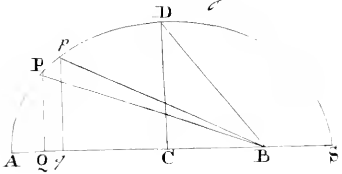
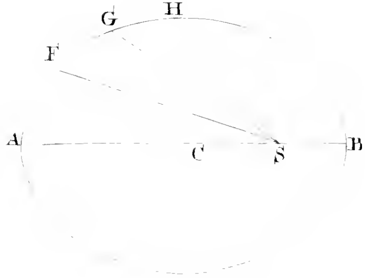


Fig. 2



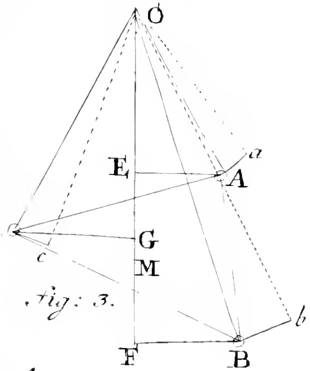


fig: 3.

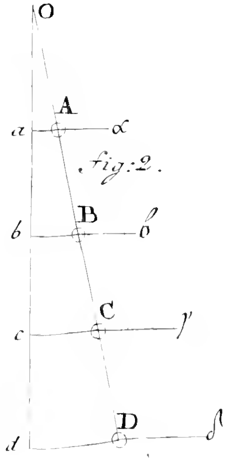


fig: 2.

..: 4.

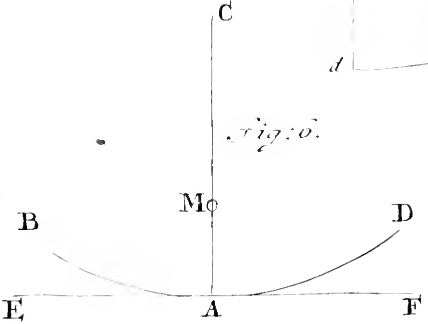


fig: 6.

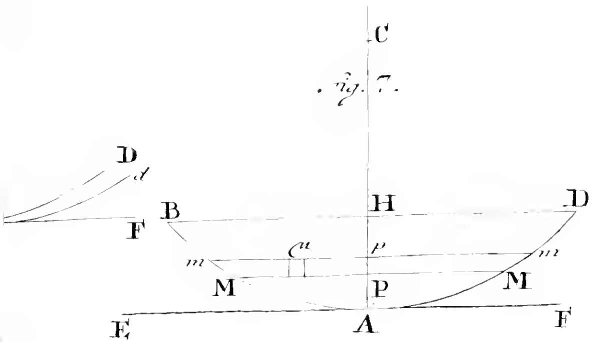


fig. 7.

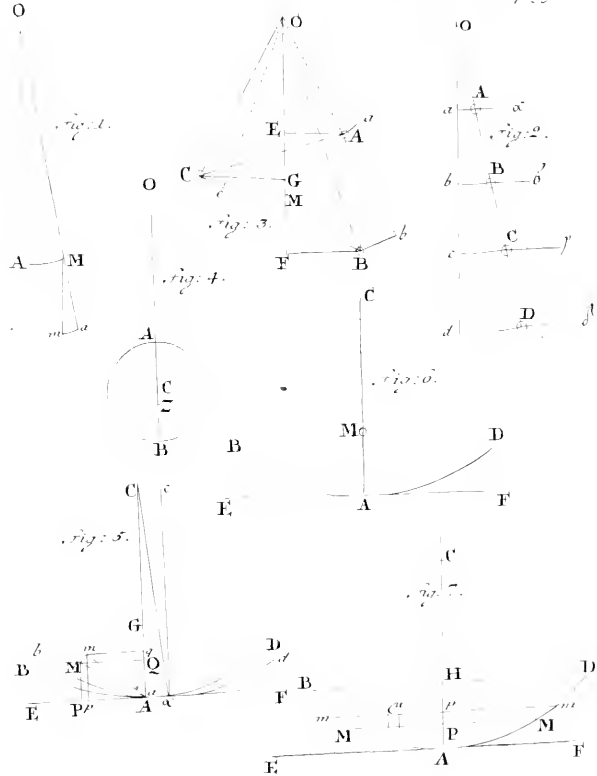
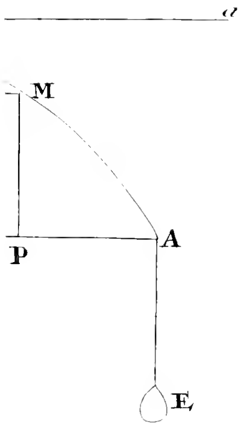
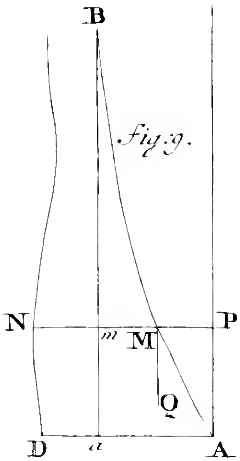
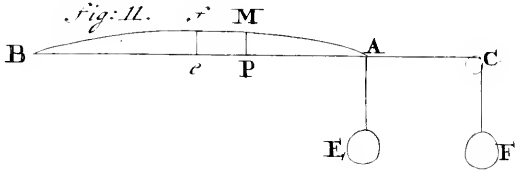


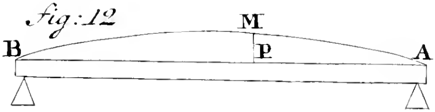
fig: 1.
fig: 2.
fig: 3.
fig: 4.
fig: 5.
fig: 6.
fig: 7.
O
A
M
m
a
E
G
C
B
F
D
H
P
Q

8.









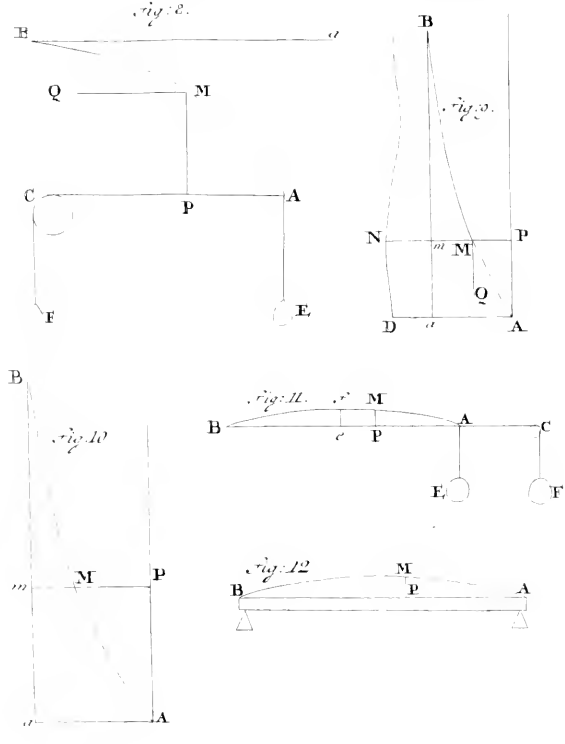
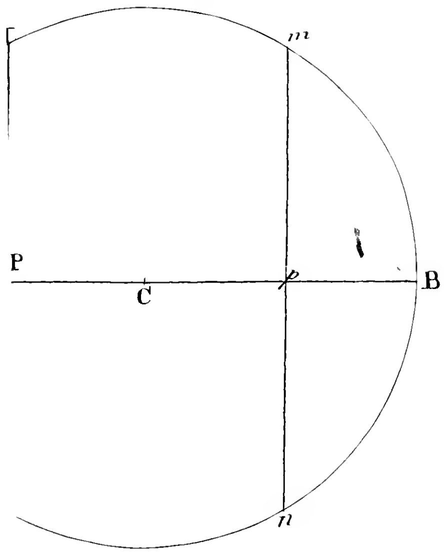
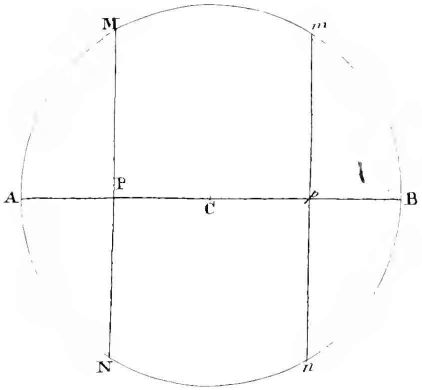


fig: 8.
B
a
Q
M
C
P
A
F
E
fig: 9.
B
N
m
M
P
Q
D
a
A
fig: 10
B
m
M
P
a
A
fig: 11.
r
M
B
e
P
A
C
E
F
fig: 12
M
B
P
A


m
P
p
B
C
n


M
m
P
A
C
p
B
N
n

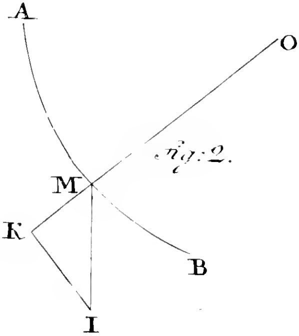


fig: 2.

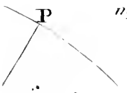


fig: 4.

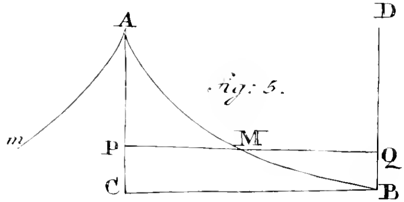


fig: 5.

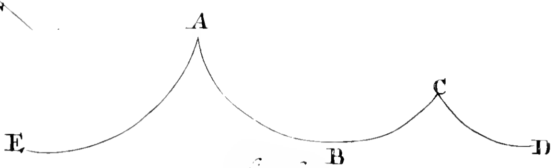


fig: 6.

Fig. 1

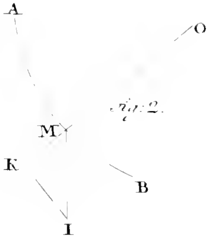


Fig. 2.

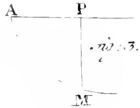


Fig. 3.

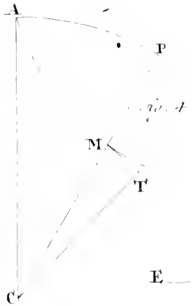


Fig. 4

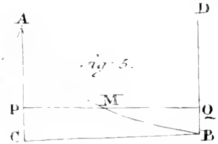


Fig. 5.

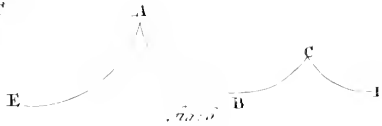


Fig. 6

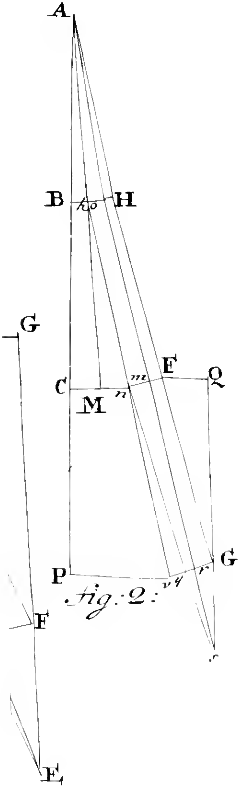


fig: 2.

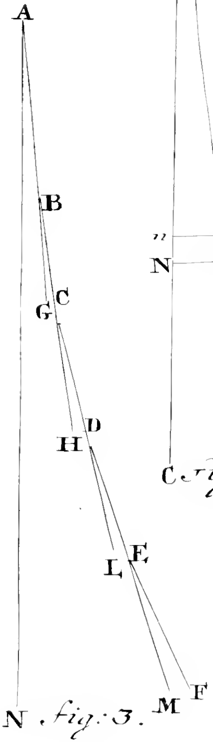


fig: 3.

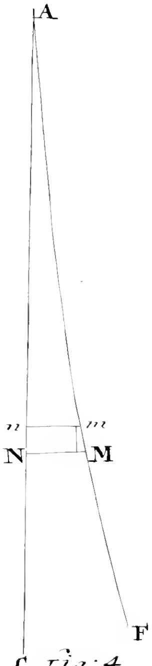


fig: 4.

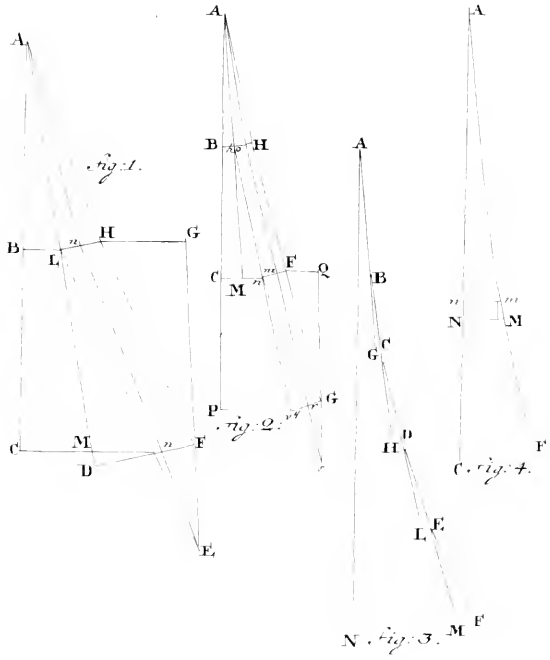
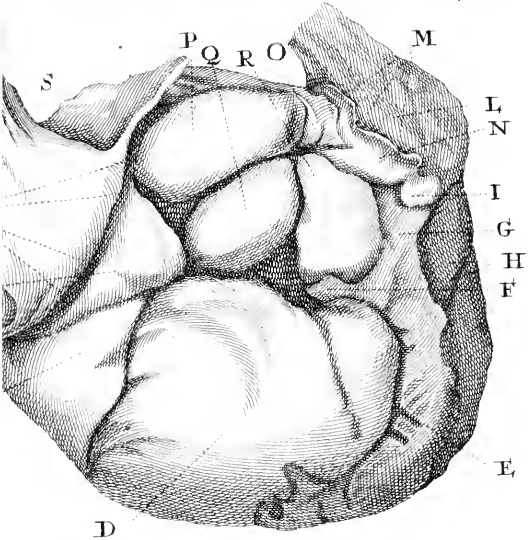
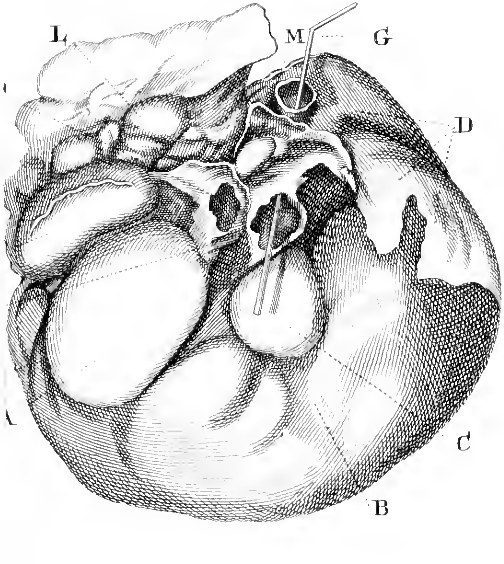
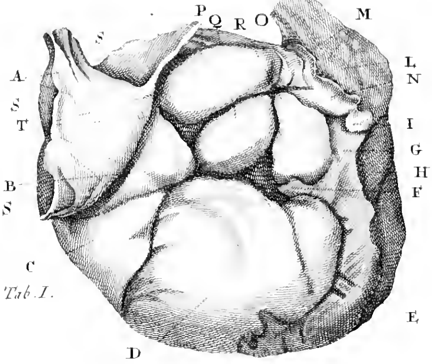


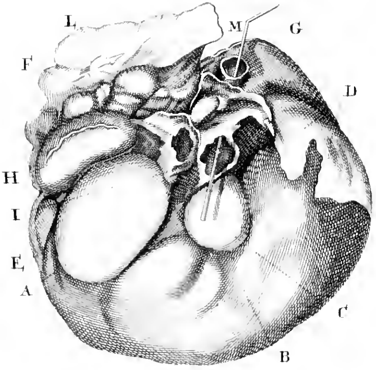
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.


P
Q
R
O
M
S
L
N
I
G
H
F
E
D

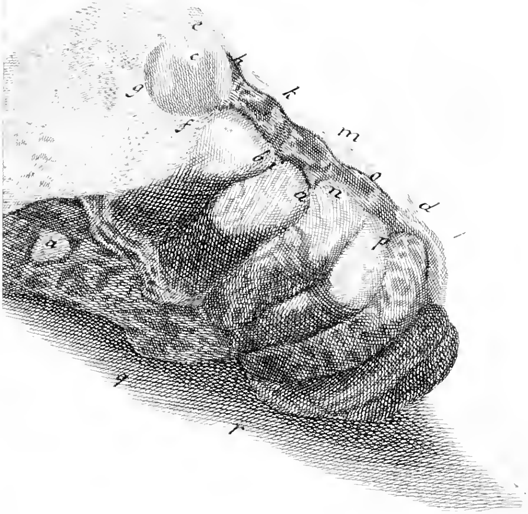

L
M
G
D
A
C
B



Tab. I.



Tab. II.


e
c
h
g
k
f
m
g
o
a
n
d
a
p
q
r

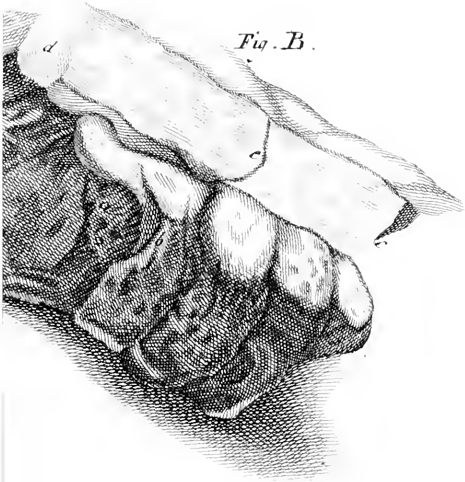

d
Fig. B.
c
a
b
c

Fig. A

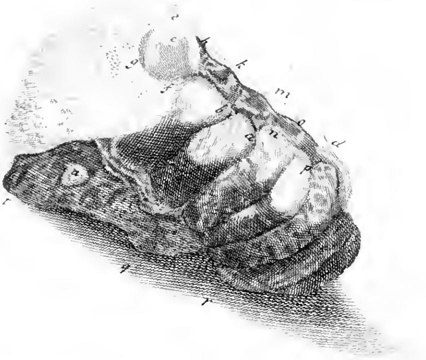
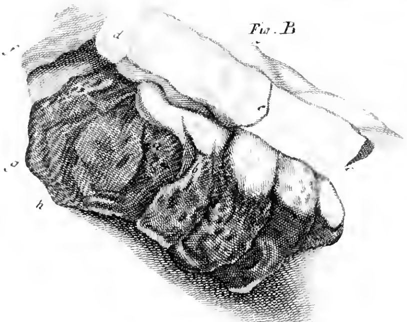
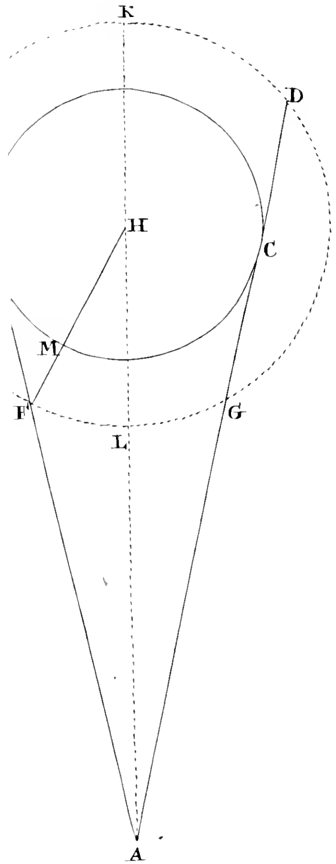
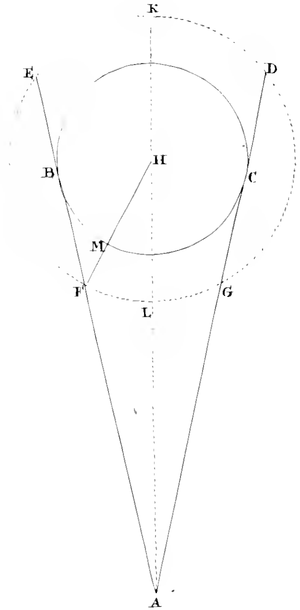
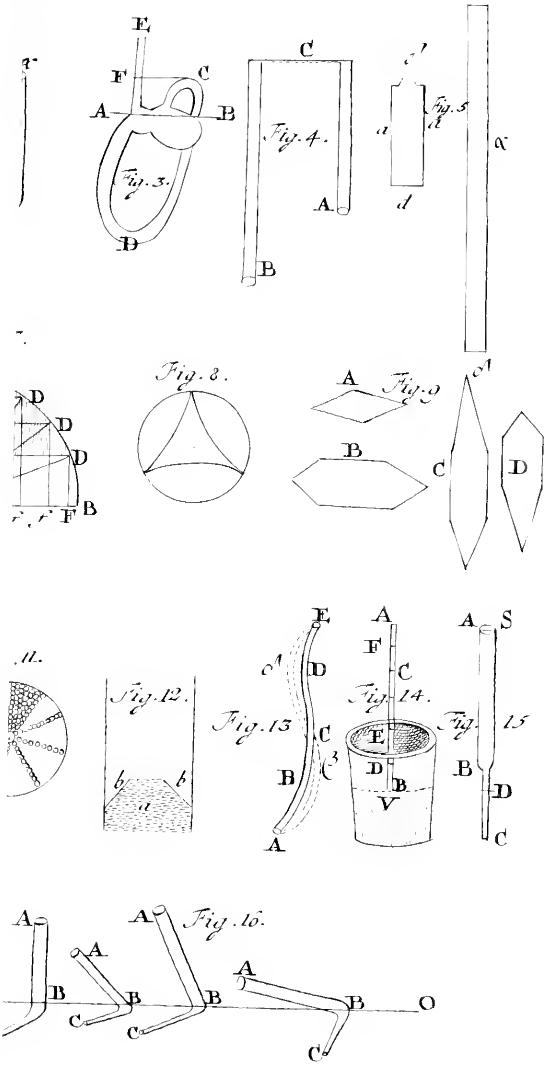


Fig. B




K
D
H
C
M
F
G
L
A


K
E
D
H
B
C
M
F
G
L
A


E
F
C
A
B
Fig. 3.
D
C
Fig. 4.
A
B
d
Fig. 5
a
a
d
α
D
D
D
F
B
Fig. 8.
A
Fig. 9
B
C
D
11.
Fig. 12.
b
b
a
E
D
Fig. 13
C
B
A
A
F
C
Fig. 14.
E
D
B
V
A
S
Fig. 15
B
D
C
A
A
A
Fig. 16.
A
B
B
B
B
O
C
C
C

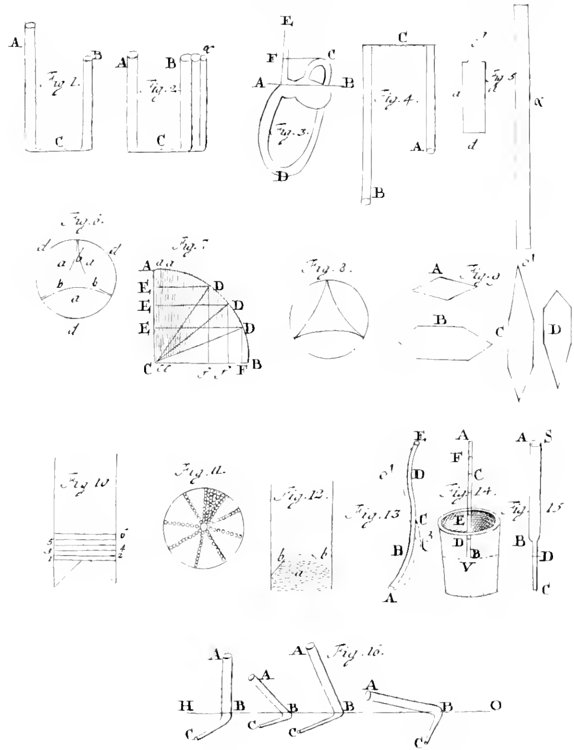


Fig. 2.

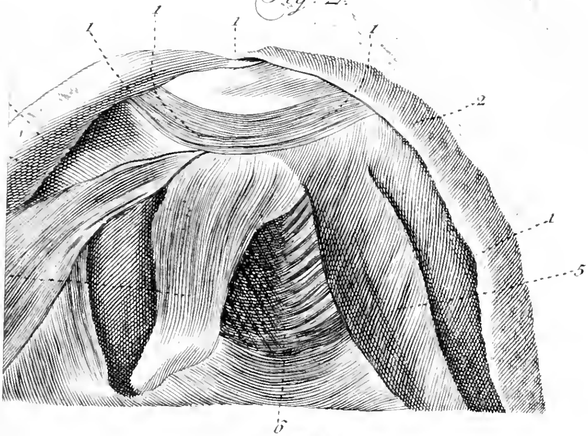


Fig. 1.

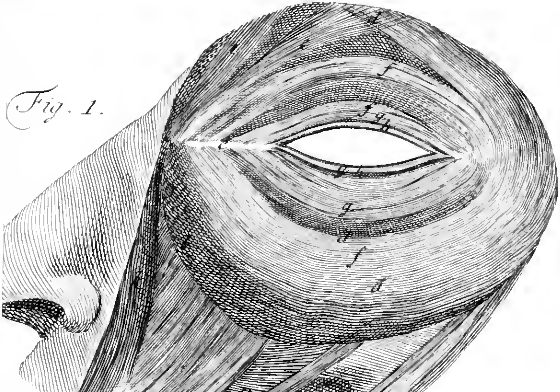


Fig. 2.

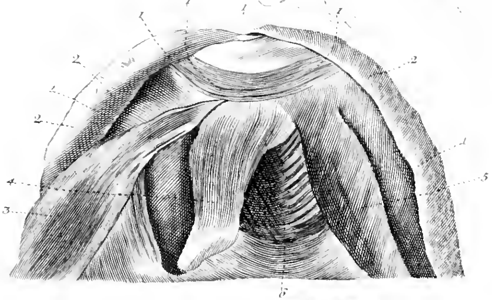
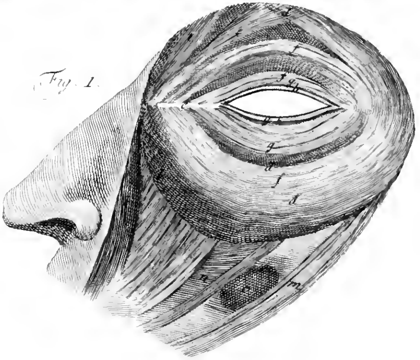


Fig. 1.



[1]緯[2]五經[3]易經[4]書經[5]詩經[6]禮記[7]春秋[8]四書[9]大

學[10]中庸[11]論語[12]孟子[13]性理大全[14]通鑑[15]眘治[16]夏

[17]商[18]周[19]國[20]列國輿地之圖[21]說[22]傳稱武王克商[0]

光有天下[0][23]姬姓[24]爵五品[0]而土三等[0]公侯百

里伯七十里[0]子男五十里[0][25]周室既衰轉相

吞滅[0]數百年間[0]列國耗盡[0]春秋之世[0]見於

經傳者總一百二十四國[0][26]王城[27]燕[28]吳[29]韓邾

[31]小邾[32]越[33]莒[34]薛[35]魯[36]隱公[37]桓[38]莊[39]閔[40]僖[41]文[42]宣[43]成

緯[1]五[2]經易[3]經書[4]經詩[5]經禮[6]記春[7]秋四[8]書大[9]

學中[10]庸論[11]語孟[12]子性[13]理大全通[14]鑑[illegible][15]治夏[16]

商[17]周[18]國[19]列[20]國與地乙圖說[21]傳[22]稱武王克商

光有天下姬[23]姓爵[24]五品而土三等公侯伯

里伯七十里子男五十里周[25]室既衰轉相

呑滅數百年間列國耗盡春秋之世見於

經傳者總一百二十四國王[26]城燕[27]吳[28]韓[29]邾

小[31]邾越[32]莒[33]薛[34]魯[35]隱[36]公桓[37]莊[38]閔[39]僖[40]文[41]宣[42]成[43]

襄[44]昭[45]定[46]哀[47]齊[48]僖[49]公襄[50]桓[51]孝[52]昭[53]惠[54]頃[55]靈[56]莊[57]

景[58]安[59]孺悼[60]簡[61]晉[62]鄂[63]侯哀[64]小[65]子侯緡[66]獻公

惠[68]文[69]襄[70]靈[71]成[72]景[73]厲[74]悼[75]平[76]昭[77]頃[78]定[79]衛[80]桓[81]公

宣[82]惠[83]懿[84]文[85]成[86]穆[87]定[88]獻[89]襄[90]靈[91]出[92]蔡[93]宣[94]桓[95]哀[96]

1 傷 2 莊 3 文 4 景 5 靈 6 滅 7 悼 公 8 東 國 9 昭 10 成 11 鄭 人 12 莊 13 莊

14 大 15 傷 16 襄 17 成 18 僖 19 簡 20 定 21 獻 22 聲 23 曹 24 桓 25 莊 26 昭 27 共 文

29 宣 30 成 31 武 32 平 33 悼 34 聲 35 隱 36 靖 37 陽 38 陳 39 桓 40 厲 41 莊 42 宣 43 穆

44 共 45 靈 46 成 47 哀 48 惠 49 懷 50 閔 51 杞 52 武 53 靖 54 共 55 惠 56 成 57 桓 58 孝

59 文 60 平 61 悼 62 僖 63 閔 64 宋 65 穆 66 和 67 殤 68 莊 69 閔 70 桓 71 襄 72 成 73 昭

74 文 75 共 76 平 77 元 78 景 79 秦 80 文 81 寧 82 出 子 83 武 84 德 85 宣 86 成 87 穆

88 康 89 共 90 桓 91 景 92 哀 93 惠 94 悼 95 楚 96 武 王 97 文 98 堵 99 成 100 穆 101 莊

102 共 103 康 104 郟 敖 105 靈 106 平 107 昭 108 惠 109 奈 110 戰 國 111 奄 辟 112 負 三 月

1 隱 2 莊 3 文 4 景 5 靈 6 成 7 悼 公 8 東 國 昭 9 成 10 鄭 11 人 莊 12 莊 13

人 14 楊 15 襄 16 成 17 僖 18 簡 19 定 20 獻 21 聲 22 曹 23 桓 24 莊 25 昭 26 共 27 文

宣 29 成 30 武 31 平 32 悼 33 聲 34 隱 35 靖 36 陽 37 陳 38 桓 39 厲 40 莊 41 宣 42 穆 43

共 44 靈 45 成 46 哀 47 惠 48 懷 49 閔 50 杞 51 武 52 靖 53 共 54 惠 55 成 56 桓 57 孝 58

文 59 平 60 悼 61 僖 62 閔 63 宋 64 穆 65 和 66 殤 67 莊 68 閔 69 桓 70 襄 71 成 72 昭 73

文 74 共 75 平 76 元 77 景 78 秦 79 文 80 寧 81 出 82 子 武 83 德 84 宣 85 成 86 穆 87

康 88 共 89 桓 90 景 91 哀 92 惠 93 悼 94 楚 95 武 96 王 文 97 堵 98 成 99 穆 100 莊 101

共 102 康 103 郟 104 敖 靈 105 平 106 昭 107 惠 108 秦 109 戰 110 國 奄 111 侯 春 112 三 月。

鄭伯使宛來歸祊。庚寅。我入祊。天 113 王 三 114 月。

乙未天王崩。薨 115 卒 116 僖 117 王 正 月。公 即 位 冬 118 十

月。癸 酉 葬 我 君 襄 公。六 十 二 年 郎 位 維 正

元 年 120 十 有 一 月 121 王 正 月 122 閏 月 春 123。王 二 月。已

巳日有食之秋七月壬辰朔日有食之既

癸亥晦日有食之

隱公上

元年

元年春王正月三月公及邾儀父盟于蔑

夏五月鄭伯克段于鄢秋七月天王使宰

咺來歸惠公仲子之賵九月及宋人盟于

宿冬十有二月祭伯來公子益師卒二年

春公會戎于潛夏五月莒人入向無駭帥

已。日有食之。[1]秋七月。壬辰。朔。日有食之。既。

[2]癸亥。晦。日有食之

[3]隱公上。[4]元年。

元年[5]春[6]王正月[7]三月[8]公及邾儀父盟于蔑。

夏[9]五[10]月[11]鄭伯克段于鄢[12]秋七[13]月[14]天王使宰

咺來歸惠公仲子之賵[15]九月[16]及宋人盟于

宿。冬[17]十[18]有二月[19]祭伯來[20]公子益師卒[21]二年

[22]春[23]公會戎于潛[24]夏[25]五月[26]莒人入向。無駭帥

師入極[27]秋[28]八月[29]庚辰[30]公及戎盟于唐[31]九月

[32]紀裂繻來逆女[33]冬[34]十月[35]伯姬歸于紀[36]紀子

伯莒子盟于密[37]十有二月[38]乙卯[39]夫人子氏

薨[40]鄭人伐衛[41]三年[42]春[43]王二月[44]己巳[45]日有食

乙三月庚戌天王崩夏四月辛卯尹氏卒
秋武氏子來求賻八月庚辰宋公和卒冬
十有二月齊侯鄭伯盟于石門癸未葬宋
穆公
隱公四年春王二月莒人伐
杞取牟婁戊申衛州吁弒其君完夏公及
宋公遇于清宋公陳侯蔡人衛人伐鄭秋
翬帥師會宋公陳侯蔡人衛人伐鄭九月
衛人殺州吁于濮冬十有二月衛人立晉

乙三月庚戌天王崩夏四月辛卯尹氏卒
秋武氏子來求賻八月庚辰宋公和卒冬
十有二月齊侯鄭伯盟于石門癸未葬宋
穆公
隱公中四年春王二月莒人伐
杞取牟婁戊申衛州吁弒其君完夏公及
宋公遇于清宋公陳侯蔡人衛人伐鄭秋
翬帥師會宋公陳侯蔡人衛人伐鄭乙月
衛人殺州吁于濮冬十有二月衛人立晉
五年春公觀魚于棠夏四月葬衛桓公秋
衛師入郕乙月考仲子宮初獻六羽邾人
鄭人伐宋螟冬十有二月辛巳公子彄卒
宋人伐鄭圍長葛六年春鄭人來輸平夏

五[1]月辛[2]酉公[3]會齊侯盟于艾秋[4]七[5]月冬[6]宋[7]
人取長葛[8]七年[9]春[10]王三月[11]叔姬歸于紀滕[12]
侯卒[13]夏城[14]中丘[15]齊侯使其弟年來聘秋[16]公[17]
伐邾[18]冬天[19]王使凡伯來聘[20]戎伐凡伯于楚
丘以歸[21]隱公下[22]八年[23]春[24]宋公衛侯遇于垂[0]
三[25]月鄭[26]伯使宛來歸祊庚[27]寅我[28]入祊夏[29]六[30]
月己[31]亥蔡[32]侯考父卒辛[33]亥宿[34]男卒秋[35]七[36]月
庚[37]午宋[38]公齊侯衛侯盟于瓦屋[39]八月葬[40]蔡

五月辛酉公會齊侯盟于艾秋七月冬宋
人取長葛七年春王三月叔姬歸于紀滕
侯卒夏城中丘齊侯使其弟年來聘秋公
伐邾冬天王使凡伯來聘戎伐凡伯于楚
丘以歸隱公下八年春宋公衛侯遇于垂
三月鄭伯使宛來歸祊庚寅我入祊夏六
月己亥蔡侯考父卒辛亥宿男卒秋七月
庚午宋公齊侯衛侯盟于瓦屋八月葬蔡
宣公九月辛卯公及莒人盟于浮來螟冬
十有二月無駭卒九年春天王使南季來
聘三月癸酉大雨震電庚辰雨雪挾卒夏
城郎秋七月冬公會齊侯于防

…A CALMUCICA

	o	u	ö	ü
i	o	u	ö	ü
ni	no	nu	nö	nü
	cho	caret	caret	chü
i	caret		kö	kü
		gu	caret	gü
ni	caret		ngö	ngü
i	bo	bu	bö	bü
i	mo	mu	mö	mü
i	lo	lu	lö	lü
i	do	du	dö	dü
i	to	tu	tö	tü
i	sſo	sſu	sſö	sſü
i	ſcho	ſchu	ſchö	ſchü
i	tscho	tschu	tschö	tschü
	zo	zu	zö	zü
	ro	ru	rö	rü
	jo	ju	jö	jü
…ret			kö	kü
	wo	wu	wö	wü
	po	pu	pö	pü

kalmudski ime Lobsung Ischi Oruschi Kirischtschoma ime Basili Timofei Ieur.

ELEMENTA CALMUCICA