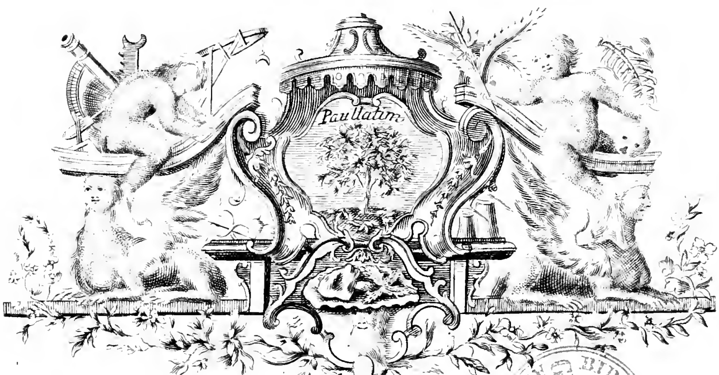
COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS *PETROPOLITANAE.*

Tomus IX.

AD ANNVM MDCCXXXVII.



PETROPOLI,
TYPIS ACADEMIAE.
cIↄIↄccxLIV.

ELISABETHAE
PRIMAE
RVSSORVM IMPERATRICI
ET AVTOCRATORI
CETERA, CETERA, CETERA.

SACRVM.

QVod TVVM *eſt* DOMINA, *literarum et bonarum artium in Ruſſia nouum incrementum, eiusque argumentum certiſſimum, Tomum hunc nonum Commentariorum Academicorum,* TE *feliciter imperante in lucem editum*, TIBI *animo deuotissimo reddimus*, TIBI *more antiquo dedicamus.*

Haud facile vnquam spes maior nostris excitata Musis est illa, qua TV *in fastigio, benignissimum sidus Imperii et Musarum diuque ad restituendas res expectatum, effulsisti, splendore* TVO *omnia exhilarasti, vitamque et animum bonis omnibus reddidisti.*

Itaque TIBI, AVGVSTISSIMA IMPERATRIX, *consummationem operis paterni Numen reseruare voluisse videtur*, TIBI, MAGNI PARENTIS, FILIAE MAGNAE, *quae virtute plus quam virili instructa, a Deo excitata, a populo vniuerso expetita, mira quin miranda nunquam satis fortitudine, Imperium paternum repetiisti ac vix illud adepta, victoriis ampliasti, gloriaque trium-*

triumphorum adaucta, pacem populo TVO *et vicino donasti, requiem Imperio et securitatem temporibus etiam futuris stabiliisti, Dulcissimo* PETRI MAGNI *Nepote, qui* TIBI *in Imperio succederet arcessito, et Principi incomparabili, Magnae Duci Catharinae Alexeidi, quae* TIBI *populoque* TVO *in deliciis est, desponsato. Quid, quod collapsa quaecunque bona instauras, noua addis, in* TVIS *erga* TE *amorem* TIBI *concilias, reliquos per vniuersum orbem in admirationem* TVI *rapis et ad mentem* MAGNI PARENTIS, *magna quaeuis paras, incepta perficis. vbique exemplum eius immortale sequeris, adeoque Illum Ipsum tanquam reducem in terris, exemplo* TVO, *sistis. Haud quoque ita pridem benignissima lege lata, solatium et spem artium et scientiarum cultoribus non solum ampliorem addidisti, sed*

exte-

exteris etiam laborum nostrorum sociis, annua stipendia continuari iussisti.

Quid igitur a TE, TVA*que prouidentia, cuius acumen nihil subterfugit, et nobis sperare non licet, qui iussu et auctoritate* TVA *in excolendis et docendis bonis artibus operam nauamus,* TVA*que benignissima voluntate suffulti, ad vtilitatem publicam et ad emolumentum et gloriam Imperii* TVI, *quantum licuerit, conferre nunquam desistimus.*

Adiuua itaque nos DOMINA, *nostrosque labores et vigorem Academiae, summa cura ab immortali* PATRE TVO *fundatae, auctae ab Augustissima* MATRE, *beneficio* TVO *sustenta!* TE *autem adiuuet* DEVS, *summus rerum arbiter, diuque saluam conseruet et sospitem, et quod prorsus excellens in* TE *est, animi excelsi decus, quo in-*

dies

dies magis magisque exſplendeſcis, ſero repetat ſibi, vt auſpiciis TVIS *Imperii ſalus immota conſtet nouisque effloreſcat incrementis. Ita feruido et ſincero animo vovet*

IMPERATORIAE
TVAE MAIESTATI

Petropoli, Calend. Octob.
A. clɔ lɔ c c xliv.

deuotiſſima
Academia Scientiarum.

INDEX
COMMENTARIORVM.

* * *

Commercium Epiſtolicum Regiae Hiſtoriae Luſitanae Academiae cum Academia Petropolitana.

* * *

In Claſſe Mathematica.

Ioh. Bernoullii Diſſertatio Hydraulica de motu aquarum per vaſa aut per canales, quamcunque figuram habentes, fluentium. pag. 3.

L. Euleri de communicatione motus, in colliſione corporum, ſeſe non directe percutientium. p. 50.

G. W. Krafftii Specimen Algebrae ad Architecturam militarem applicatae. p. 77.

L. Euleri, de Conſtructione Aequationum. p. 85.

Eiusdem de Fractionibus continuis. p. 98.

F. Moula, de maximis in figuris rectilineis. p. 138.

L. Euleri Variae obſeruationes circa ſeries infinitas. p. 160.

Dan. Bernoullii, de variatione motuum a percuſſione excentrica. p. 189.

L. Euleri Solutio problematis geometrici circa lunulas a circulis formatas. p. 207.

Eiusdem de variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi. p. 222.

In

In Claſſe Phyſica.

G. W. Krafftii de Thermometris Diſſertatio Experimentalis. p. 241.

I. Weitbrechtii Obſeruationes Anatomicae ad hiſtoriam et actionem muſculorum, labiorum, oſſis hyoidis, faucium linguae, laryngis pertinentes. p. 249.

Eiusdem Obſeruata in ſectione iuuenis 1735. cuius manus et pedes monſtroſi erant. p. 269.

Eiusdem Explicatio difficiliorum experimentorum circa aſcenſum aquae in tubos capillares. p. 275.

I. Ammani de Alſinanthemo Thalii, ſeu trientali herba Ioh. Bauhini. p. 310.

Eiusdem de Betula pumila, folio ſubrotundo. p. 314.

G. W. Krafftii Obſeruationum meteorologicarum ab anno 1726. vsque in finem anni 1736. factarum, comparatio, praelectio prima. p. 316.

Eiusdem ——— Praelectio ſecunda. p. 344.

Eiusdem Obſeruationes Meteorologicae anno 1737. inſtitutae. p. 358.

In Claſſe Hiſtorica.

T. S. Bayeri Geographia Ruſſiae vicinarumque regionum, circiter annum Chriſti DCCCCXLVIII. ex Conſtantino Porphyrogenneta. p. 367.

Obſeruatio Aſtronomica.

G. Heinſii, Obſeruatio Eclipſis Lunaris d. 8. Sept. 1737. ſt. n. Petropoli habita. p. 425.

* * *

IAm plus quinque annorum eſt quum tria noſtrorum Commentariorum volumina et alios quosdam libellos Petropoli confectos ad Regiam Hiſtoriae Luſitanae Academiam mittebamus, quae tam humaniter atque benigne a Viris illis praeſtantiſſimis excepta fuere vt ſpem noſtram omnem vicerint, quando praeter honorificum reſponſum et plurima ab Academicis Luſitanis edita opera quae nobis dono miſerant, negotium dederunt Excellentiſſimo Comiti da Ericeira vt librorum noſtrorum epitomen * concinnaret, quae quum hoc ipſo anno ad manus noſtras peruenerit non differendum putauimus grati animi aduerſus tanta beneficia teſtimonium, quod publice ab omnibus noſtrarum rerum ſtudioſis legeretur, quam ob rem exemplo Academicorum Luſitanorum, qui epiſtolas vltro citroque miſſas ei epitomae inſeri curauerunt, easdem hic repetere, poſtremas etiam noſtras atque indicem librorum nobis donatorum, quod eos

a in

* Extractos Academicos dos livros que a Academia de Petersburg mandou à de Lisboa feitos por ordem da mesma Academia pelo Conde da Ericeira, D. Francisco Xavier de Menezes Hum dos ſeus Directores, e Cenſores, do Conſelho de Guerra, Meſtre de Campo General dos Exercitos de Sua Mageſtade, e Deputado dos Tres Eſtados do Reyno, etc. Lisboa Occidental M. DCC. XXXVIII. in 4to.

in Germania et finitimis regionibus adhuc parum cognitos putamus, addere visum fuit.

Nos quidem satis mirari non potuimus industriam et multiplicem solidamque eruditionem Excellentissimi Comitis da Ericeira, qui dum nostra specimina recensuit in tam diuersis rerum argumentis non solum inoffenso pede processit, sed suas quoque obseruationes egregias identidem subiunxit, vbique vero ita nobiscum egit vt facile appareat nos in iudicem indulgentissimum incidisse, qui nec tenuia sperneret, et quae tolerabilia essent non modo non extenuaret, sed magnis etiam laudibus efferret, nihil sane illa Excellentissimi Viri agendi ratione praestabilius, nihil efficacius est ad excitanda eorum ingenia qui in studiis non publici saporis versantur atque in hoc genere ad aliquam laudem contendunt.

Sed inter omnes qui magni huius Viri et totius Academiae Historiae Lusitanae dignitatem, doctrinam et merita in patriam penitius intuentur, potestne quisquam esse tam a litterarum studiis alienus aut omnis humanitatis expers atque ignarus, quin Regis Lusitanorum IOANNIS V. fortitudinem atque sapientiam veneretur, qui toto regni sui tempore terra marique inclitus, classes Lusitanas tum Venetis tum Persis subsidio misit, Monbacciam recepit, Afros praedones in fugam egit, Sicarios seueris legibus sustu-

ſuſtulit, immenſis opibus ex India aduectis Populum ditauit, magnam praeterea argenti vim in egenos diſtribuit, iuuentutem militaribus diſciplinis inſtitui iuſſit, pacem, aſpero tempore atque ad bellum ſpectante rerum ſtatu, ſumma prudentia ſuſtentauit, celebriores artifices praemiis propoſitis Vlyſſipponem arceſſiuit, bibliothecam libris rariſſimis mirifice auxit, Hiſtoriam denique Luſitanam, cui temporis longinquitas detrimentum attulerat, Illuſtris illius Academiae Collegis tractandam demandauit, digniſſimis certe qui non modo antiqua Luſitaniae monumenta in lucem protrahant, ſed quorum praecipue cura ſtudio atque diligentia rerum tanti Regis auſpiciis geſtarum fama poſteritati propagetur.

A. 1740. d. 23. Sept.

C. G.

Litterae ad Academiam Regiam Hiſtor. Luſit. miſſae A. 1735. d. 7. Iulii.

EXCELLENTISSIMIS, ILLVSTRISSIMIS ATQVE PRAESTANTISSIMIS

REGIAE ACADEMIAE VLYSSIPPONENSIS COLLEGIS

S. D.

IOANNES ALBERTVS KORFF

SERENISSIMAE RVSSORVM IMPERATRICIS CAMERARIVS REGENDAE ACADEMIAE PETROPOLITANAE PRAEFECTVS.

ETſi iam a pluribus annis de Regia Vlyſſipponenſi Academia eiusque meritis fama ad nos peruenit, tamen praeter longinquitatem loci varia nobis impedimenta obſtiterunt, quo minus aliquid opuſculorum noſtrorum teſtandae erga Vos obſeruantiae cauſa tuto mittere poſſemus; cum vero nuper Vir Clariſſimus Antonius Ribeira Sanches, Veſtras, qui hic artem medicam feliciter et cum magna laude exercet, operam ſuam in curandis ad Vos litteris et libris quos mitteremus liberaliter pollicitus eſſet, hanc

hanc occasionem sine mora arripiendam duximus. Non quidem nos fugit Academiae Vestrae, quae in Historiarum Lusitaniae monumentis scrutandis occupatur, diuersum ab eo institutum esse quod nos tenemus, quibus et Mathesin et Physicam et Historiam seu Antiquitatis studium colere, et, quae in his doctrinis iam aliorum ingenio eruta fuerant, quoad eius fieri potest, nostra industria proferre atque amplificare incumbit; verum enim vero quando omnium artium ac disciplinarum quaedam inter se societas, communio et cognatio est, non dubitamus quin commercium litterarum, quod Vobiscum instituere cupimus, quemadmodum nobis perhonorificum est, ita communiter vtile futurum sit, nos vero in iis rebus in quibus Vestro Collegio inseruire poterimus curam omnem atque diligentiam adhibituri a Vobis id vicissim petimus, vt hanc nostram voluntatem nostraque in Vos studia, quae summa sunt, aeque bonique consulatis. Valete. Nonis Iulii A. cIↄIↄCCXXXV.

Index Librorum

ad Acad. Reg. Lusit. missorum.

Commentar. Academiae Scientiarum. Tom. I. II. et III. in 4to.

Plantarum minus cognitarum Centur. I. II. III. compleċt. Plantas circa Byzantium et in Oriente obseruatas per I. C. Buxbaum, Acad. Sc. Soc. Petrop. 1730. in 4to.

T. S. Bayeri Historia Osrhoëna et Edessena ex nummis illustrata. 1735. in 4to.

Sermones Academici in publico Conuentu habiti. 1725. et 1729. in 4to.

Abregé des Mathematiques pour l' vsage de Sa Maj. Imp. de toutes les Russies. Tom. I. II. III. à St. Pet. 1728. in 4to.

T. S. Bayeri Museum Sinicum, in quo Sinicae Linguae et Litteraturae ratio explicatur. in 8vo.

Parerga Medica conscripta a Damiano Sinopeo, Medico Ordinario Marini Nosocomii Cronstadiensis. 1734. in 8vo.

Litte-

Litterae ab Acad. Reg. Lusitana ad Petropolitanam missae A. 1736.

EXCELLENTISSIMIS, ILLVSTRISSIMIS, ATQVE PRAESTANTISSIMIS

ACADEMIAE PETROPOLITANAE COLLEGIS

CENSORES ACADEMIAE REGIAE HISTORIAE LVSITANAE REGENDAE PRAEFECTI

VTRAMQVE FELICITATEM.

Litterae, quas ad Nos dedistis, quibusque vrbanitatem, comitatemque nostram primi lacessitis, tantae humanitatis atque elegantiae plenae erant, vt existimationem Vestram apud Nos magno cumulo auxerint. Iis enim plane docemur, praeclaros illos rumores, quos de Societate Petropolitana, etsi non dubios, fama vulgauerat, maiores tamen atque praecellentiores esse, quam vt à quoquam percipi, menteue comprehendi quirent. Quapropter Clarissimo Viro Antonio Ribeyra Sanches nostrati non agere gratias non possumus, qui sedulitate sua tam magni tamque prolixi itineris spatium, quo Vlyssipo nostra ab ista Petropoli seiungitur, haud formidans, non Epistolam tantum

tantum Vestram, sed et libros ad Nos perferendos suscepit. Quod vtrumque peregregium sane munus, quanti fecerimus, ne vnis Vobis patesceret, in pleno Academiae Nostrae consessu decretum est, vt Librorum Epitome quam breuissima ab Excellentissimo Comite da Ericeyra, vno e Quinqueviris nostris, conficienda, simul cum Epistola Vestra Academicis typis traderetur, vt praeclaro illo specimine, cùm eximiam eruditionem Vestram, tum gratitudinem nostram coram omnibus testaremur. Quin et Illustrissimo scrinii nostri Magistro iniunctum est, vt opera a quibusdam Sociis nostris vsque ad hanc diem edita, ad Vos mittenda curaret, quae quidem si forte a Vobis laudari, probariue contingat, nullum profecto maius, digniusue praemium laboris sui eorum Authores expetituros esse arbitramur. Quod vero litterarum commercium nobiscum instituere tam vehementer cupitis, Nobis rem perquam gratam, perquam iucundam facitis, imo iam currentibus Nobis calcar additis, quippe quibus nihil suauius, nihil honorificentius accidere possit, quam Vos per litteras frequenter adire, Virosque omni doctrinarum genere instructissimos, de dubiis nostris, si qua occurrent (occurrent autem bene multa) consulere. Neque enim sentire vobiscum possumus in eo quòd putatis institutum Petropolitanae Academiae, quae tota in erudito puluere Mathematicorum atque Physicorum versatur, ab instituto Lusitanae, quae in studio conscribendarum Historiarum incumbit, quam longissime abhorrere, cum potius è contrario mire inter

vtramque

vtramque conueniat. Scitis enim vt Hiſtorici in memorandas res ab hominibus geſtas ſe totos conferunt, ita Phyſicos atque Mathematicos omnibus viribus atque opibus elaborare, vt res in caelis atque in terris a Deo *praeclariſſimè factas accuratè deſcribant. Illud igitur a Vobis petimus, atque maiore ſtudio rogamus, vt nullam non occaſionem arripiatis ſcribendi ad Nos, par pari quam ocyſſime, quamque libentiſſime relaturos. Valete Academici Sapientiſſimi, atque è Veſtra* Petropoli*, non Ruſſis tantum, ſed et orbi vniuerſo, pergite, vt facitis, ad inſcientiam propulſandam, facem praeferre. Ipſis eidibus Decembribus A. MDCCXXXVI. Vlyſſipone Occidentali.*

Marchio de Valença. Antonius dos Reys.

D. Didacus Fernandes de Almeyda. Comes Aſſumarenſis.

Comes da Ericeira. Nonius Silvius Tellezius.

Index Librorum

huc missorum.

IN FOLIO.

(1.) Expeditio Hispanica Apostoli S. Iacobi Maioris asserta, et ex S. Paulo Apostolo confirmata, Dissertatio Historico-Critica, accessere Appendices tres:

I.) De aede Caesar-Augustana a Columna dicta per Sanctum Iacobum constructa.

II.) De grauissima authoritate Breuiarii Romani.

III.) Sylloge Authorum omnium gentium omniumque Ordinum qui expeditionem Hispanicam S. Iacobi Maioris asserunt: Authore Emmanuele Caietano Sousa, Clerico Regulari, Regiae Maiestati a Consiliis, Bullae Sanctae Cruciatae Pro-Commissario Generali Apostolico et Regalis Academiae Quinqueviro Censore. Vlyss. MDCCXXVII. 2. Tom.

(2.) De vita et rebus gestis Nonni Alvaresii Pyreriae Lusitaniae Comitis-Stabilis Libri duo. Auctore Antonio Roderico Costio, Regiae Academiae Socio. MDCCXXIII. Tom. I.

(3) Collecaõ dos Documentos, Estatutos e mais Memoiras da Academia Real da Historia Portugueza, que neste anno de 1721. — 1733. se compuzeraõ e se imprimiraõ per ordem de seus Censores, E

Orde-

Ordenado pelo Marquez de Alegrete Manoel Telles da Sylva Secretario da mesma Academia. 14. Tom.

IN QVARTO.

(1) Historia da Academia Real da Historia Portugueza, composta por Manoel Telles da Sylva Marquez de Alegrete, Secretario da mesma Academia. Tomo Primeiro. MDCCXXVII.

(2) Memorias Para a Historia Ecclesiastica do Bispado da Guarda escrita Pelo Doutor Manoel Pereira da Sylua Leal, I. C. Vlyssipponense, Collegial do Collegio Pontificio de S. Pedro na Vniversidade de Coimbra, Cavalleiro da Ordem de Christo, e Academico da mesma Academia Real. Tomo Primeiro MDCCXXIX.

(3) Memorias Para a Historia Ecclesiastica do Arcebispado de Braga Primaz das Hespanhas escritas pelo Padre D. Ieronymo Contador de Argote, Clerigo Regular, Academico da mesma Academia. Titulo I. Da Geografia do Arcebispado Primaz de Braga, e da Geografia antiga da Provincia Baracarense MDCCXXXII. 2. Tom.

(4) Apparato para a Disçiplina, e ritos Ecclesiasticos de Portugal: na qual se trata da origem, e fundaçaõ dos Patriarchados de Roma, Alexandria, e Antiochia, o se descreue com especialidade e Patriarchado do Occidente, mostrando que as Igre-

jas de Hespanha lhe pertenciaõ por direito particular &c. Pelo ſeu Author, D. Franciſco de Almeyda, Academico da Academia Real Portugueza. Lisboa Occidental. 1735. 3. Vol.

(5) Hiſtoria Genealogica Da Caza Real Portugueza Desde a ſua Origem atè o Preſente, com as Familias Illuſtres, que procedem dos Reys e dos Sereniſſimos Duques da Bragança, por D. Antonio Caetano de Souſa Clerigo Regular, e Academico do Numero da Academia Real. MDCCXXXV. 2. Tom.

(6) Memorias Para a Hiſtoria de Portugal, que comprehendem o Governo del Rey D. JOAÕ I. Do Anno de mil e trezentos e oitenta e tres, atè o anno de mil e quatrocentos e trinta e tres, escritas pelo Academico Ioſeph Soares da Sylua. MDCCXXX. XXXI. XXXII. XXXIV. 4. Tom.

(7) Catalogo Chronologico, Hiſtorico, Genealogico, e Critico das Rainhas de Portugal, e Seus Filhos Ordenado por D. Ioze Barboſa, Clerigo Regular, Academico Real da Hiſtoria Portugueza, e Chroniſta da Sereniſſima Caſa de Bragança. MDCCXXVII. 1. Tom.

(8) Geografia Hiſtorica de todos os Eſtados Soberanos de Europa Com as mudanças, que houve nos ſeos dominios, eſpecialmente pelos tratados de Vtrecht, Raſtad, Badden &c. Com as Genealogias das Cazas Reynantes, e outras mui principaes. Composta por

por D. Luis Caetano de Lima Clerigo Regular Lisboa Occidental 1734. 2. Vol.

(9) Memorias da Ordem Militar de S. IOAÕ de Malta. Por Fr. Lucas de S. Catharina da Ordem dos Pre'gadores, seu Chronista, e Academico da Academia Real. Tomo Primeiro MDCCXXXIV.

(10) Supplemento Historico ou Memorias e Noticias da Celebre Ordem dos Templarios, Para a Historia da admiravel Ordem de Nosso Senhor Jesu Christo escrito por Alexandre Ferreira Natural da Cidade de Porto, Doutor Graduado na Faculdade de Leys pela Vniversidade de Coimbra &c. MDCCXXXV. 2. Tom.

IN OCTAVO.

(1) Tradado do modo o mais facil e o mais exacto de fazer as Cartas Geograficas, assim da Terra, como do mar, e tirar as plantas das Praças, Cidades, e edificios com instrumentos e sem instrumentos, para servir de instrucçam a fabrica das Cartas Geograficas, da Historia Ecclesiastica e Secular de Portugal, Tirado dos melhores Authores, e composto por Manoel de Azevedo Fortes, Academico da Academia Real da Historia, Cavalleiro Professo na Ordem de Christo, Brigadeiro de Infanteria dos Exercitos de Sua Magestade, que Deos guarde, e Engenheiro mor do Reyno MDCCXXII.

Litterae ad Acad. Reg. Lusit. missae.

EXCELLENTISSIMIS, ILLVSTRISSIMIS
ATQVE PRAESTANTISSIMIS
ACADEMIAE REGIAE HISTORIAE
LVSITANAE PRAEFECTIS
S. D.
Carolus de Brevern
SERENISSIMAE RVSSORVM IMPERATRICIS CONSILIARIVS
STATVS, ACADEMIAE PETROPOLITANAE PRAESES,
ORDINIS S. ALEXANDRI NEVENSIS EQVES.

QVae Vobis ante hos quinque annos Vir Illustris Ioannes Albertus de Korff reddenda curauerat commentariorum nostrorum volumina, non solum perhumaniter accepta fuisse ex litteris Vestris iam diu intelleximus, sed nuper etiam singulari atque inopinato beneficio nos obligatos agnouimus, quum V. C. Antonius Ribeyra Sanches Imp. Domus Medicus librum nobiscum communicaret, quo Excellentissimus Comes da Ericeira commentarios illos articulatim ita recensuit, vt nihil quod ad laudem commendationemque nostrae qualiscunque diligentiae pertinere posset, omitteret; quam ob rem tam propensae erga nos voluntatis indicia

indicia digna iudicaui, quae IMPERATRICI *et* AVTOCRATORI *nostrae Clementissimae nunciarem, cuius nomine atque iussu maximas nunc Vobis gratias ago. Etsi vero linguae Lusitanae inscitia nos impedit quo minus in legendis et examinandis plerisque libris quos ab Illustri Vestra Academia accepimus, similem curam adhibeamus, tamen gratum animum, quo Vestram beneuolentiam prosequimur, commentarii nostri prope diem publice testabuntur. Maximum denique fructum non modo tunc cepisse videbimur, quum suffragiis Vestris nos ornaueritis, verum etiam quotiescunque in obscuro ac perplexo itinere, quod abdita doctrinarum vestigantibus ingrediendum est, aberrantes reduxeritis in viam; vtraque igitur ratione conatus nostros mirum in modum adiuuabitis, quod vt faciatis, Vos vehementer etiam atque etiam rogamus. Dab. Nonis Sept. A.* clↄ Iↄ ccxl. *Petropoli*

Carolus de Brevern.

Christianus Goldbach. Iohan. Daniel Schumacher.

Index.

Index Librorum
ad Acad. Reg. Lusit. miss.

Commentar. Acadamiae Scientiarum Petropol. Tom. IV. V. et VI.

Bayeri de Horis Sinicis et Cyclo Horario Commentationes. Accedit eiusdem Auctoris Parergon Sinicum de Calendariis Sinicis. in 4to.

Eiusdem Historia Regni Graecorum Bactriani. Accedit Christophori Theodosii Waltheri Doctrina Temporum Indica cum Paralipomenis. in 4to.

Buxbaumii Plantarum minus cognitarum circa Byzantium Centur. IV. et V.

Euleri Mechanica siue Motus Scientia analytice exposita. Tom. I. et II. in 4to.

Eiusdem Tractatus Philosophicus de Musica tam antiqua quam hodierna. in 4to.

De L'Isle Memoires pour servir a l'Histoire & aux progrès de l'Astronomie, de la Geographie & de la Physique. in 4to.

Ammani Icones Stirpium rariorum in Ruthenorum Imperio sponte prouenientium. in 4to.

Krafftii Breuis Descriptio Experimentorum Physicorum, in vsum Auditorum suorum. in 8vo.

Oratio Statuum Russiae ad Imperatricem. Russice Lat. Gall. et Germ. in 4to.

Effigies S. Imp. Maj. aere expressa

DVO-

DVORVM LIBRORVM
HVC MISSORVM
SYNOPSES
EX DIARIO ACAD. d. 4. et 18. Sept. A. 1738.

IN libris quos Academia Regia Lufitana Societati noftrae dono dedit, non nifi duo funt latine fcripti; alterius titulus eft:

Expeditio Hifpanica Apoftoli S. Iacobi Maioris, affertа authore Emmanuele Caietano Soufa Clerico Regulari Regiae Maieftati a Confiliis, Bullae Sanctae Cruciatae Pro-Commiffario Generali Apoftolico, et Regalis Academiae Quinqueviro Cenfore. A. clↄlↄccxxvii.

Differtationem iftam, inquit Auctor, in tres partes diuidimus. In prima afferimus Expeditionem Hifpanicam Diui Iacobi effe honorificam; vnde quisquis qui pro illa decertat cenfendus eft decertare pro aris et focis, non pro re nihili; agimus enim (vt praetereamus maximum Patriae decus) de tuendo honore Ecclefiae non folum militantis, fed etiam triumphantis qui maximus vtrique acceffit ab expeditione Hifpanica Sancti Iacobi, gloriam enim vtrique detrahunt illius expeditionis impugnatores. n.37.feq.

In ſecunda aſſerimus nihil obſtare quo minus illa expeditio citra vllum erroris timorem affirmari poſſit, nullumque contra illam afferri inſolubile argumentum.

In tertia produco fundamenta quae meo iudicio reddunt expeditionem Hiſpanicam Sancti Iacobi moraliter certam et euidenter credibilem propter numerum et pondus teſtium illam affirmantium, quibus contradici non poſſe oſtenſum eſt in ſecunda parte.

Pro coronide triplici parti appono triplicem appendicem. Prima eſt defenſio Mariana pro miraculoſa fundatione ſacelli Caeſar-auguſtani, vulgo dicti de columna a Sancto Iacobo Apoſtolo erecti.

Altera eſt defenſio Sanctae Romanae Eccleſiae pro authoritate Breuiarii Romani Vrbani VIII. authoritate recogniti.

Tertia eſt catalogus teſtium ex pleriſque nationibus et ordinibus qui affirmant Expeditionem Hiſpanicam Sancti Iacobi. Haec Auctor.

De libro ipſo, cuius pleraeque Diſputationes ad aliud forum pertinent atque ab inſtituto noſtrae Academiae prorſus ſeiunctae ſunt, hic plura dicere nihil attinet.

Alteros vero libros duo qui inſcribuntur *de vita et rebus geſtis Nonni Alvareſii Pyreriae Luſitaniae Comitis-ſtabilis Auctore Antonio Roderico Coſtio Reg. Acad. Socio. A.* cIↄ Iↄ cc xxx i i i. tam magnitudo rerum a Nonno geſtarum quam excellens Coſtii facundia et Liuianae ſuppar magnopere commendant. Huius igitur vitae praecipua capita Illuſtriſſimo Praeſidi et Vobis, Viri Clariſſimi, ipſis Auctoris verbis, quoad fieri poterit, recenſebo.

Pyre-

PYreria gens inter Hiſpanas clariſſima originem refert pag. 4.
ad Mendum ſiue Menendum Principem virum
ex Regio Gothorum ſanguine procreatum, qui octauo
ſeculo cum haud modica claſſe ab Italia profectus
vt armis ſibi regnum pareret in Hiſpania facto ad Calaica
litora naufragio aegre cum pauciſſimis in terram euaſit--.
Cum autem priores huius gentis varia cognomina vſurpa- p. 5.
rint, (plures Foriaſios cognominatos conſtat) primus
omnium Rodericus Gonſalius Pyreriae cognomen aſſump-
ſit ac poſteris tradidit a pago ſuae ditionis vt creditur
deriuatum. Ab hoc quintus, et a Menendo gentis Prin-
cipe tertius decimus fuit Aluarus Gonſalius Pyreria vir
pacis bellique artibus inſignis---Quem virum nihil aeque p. 6.
illuſtrat ac filius Nonnus, et quidem quod fortaſſe mi-
randum ſit, ex altero et triceſimo natu minimus. Natus
eſt Nonnus anno Domini cIↃ.ccc.xl. menſe Iunio in
pago Bonjardinio dicto qui eſt in finibus Oppidi Certanae
in regione Beriana. Matrem habuit Irenem Gonſaluiam
Carualialem foeminam haud obſcuris natalibus et quae
poſt ſtupri conſuetudinem quam cum ipſo Nonni patre
habuerat non modo caſte vitam inſtituerit ſed etiam parce
ac duriter egerit per annos fere quadraginta noxae poenas
a corpore expetens vt a violato Numine humani erroris
veniam impetraret.

Annum expleuerat tertium decimum *Nonnus* cum
bellum exarſit inter Ferdinandum Luſitanorum et Henri-
cum Baeticorum Reges; *in eo bello* Aluarus Gonſalius p. 7.
Pyreria qui tunc erat in Regis comitatu, Nonno impe-
rat vt conſcenſo equo paucisque familiarum ſtipatus extra

oppidum procurreret quod cum impigre obiisset ad Regem tunc epulis accumbentem intromissus est rogatusque quid afferret de hostium numero atque itinere, respondit magnas esse copias, sed ita incomposite et negligenter per hosticum iter facere vt non dubitet quin parua manu fundi possint, modo dux bonus adsit. Hos animos et prudentiam in puero mirantibus omnibus, Regina praecipua beneuolentia prosecuta est, Regem alloquitur rogatque vt Nonnum inter honorarios domesticos sibi attribuat, id mereri puerum notae nobilitatis et iam spectatae virtutis. Quod Rex non concessit solum sed etiam ex ipsa vxoris oratione admonitus nobilium adolesceentium virtutem remunerandam esse et accendendam, Didacum Aluaresium Pyreriam qui vna cum Nonno fratre hostes explorauerat in suorum familiarium numerum sibi assumpsit.

pag. 10. Septimum decimum annum attigerat Nonnus cum ei pater vxorem dare decreuit. Verum is a re vxoria haud parum abhorrebat --. Quare cum non minimum negotium pater habuisset vt eius animum ad vxorem accipiendam appelleret, parenti demum praeceptis paternis Eleonoram Albinam primariam foeminam atque admodum diuitem Ferdinando Rege nuptias conciliante, collocauit, ex quo matrimonio breui tres liberos suscepit, e quibus priores duos stirpis virilis statim amisit; tertiam autem prolem sequioris sexus ac Beatricem nominatam, pag. 11. cum per aetatem licuit, Alphonso Ioannis Regis filio notho in matrimonium dedit vnde clarissima orta est soboles ad quam Principes Lusitani paternam originem, caeteri omnes fere maternam referunt.

Non

Non multo post flagrante bello inter Ferdinandum Lusitaniae et Ioannem Baeticae Regem Ferdinandi Ancorii Alcantarensium Equitum Magistri filium Nonnus per epistolam ad certamen prouocat cuius certaminis conditiones erant vt nouem sibi socios vterque deligeret omnesque paribus armis instructi aequo in loco equestri pugna dimicarent. Prouocationem Ioannes Ancorius (hoc erat pag. 12.
iuueni nomen) alacri animo excepit, idque Nonno rescripsit, *qui denegata sibi a Rege dimicandi facultate iram omnem in hostes conuertit quorum cum non paucos cecidisset, et iam confosso equo in summo vitae periculo ipse versaretur Vasquii Annii Cotii et sociorum ope seruatus est, paulo post cum ex vrbe egredi a fratre prohiberetur ferro sibi* p. 18. 19.
viam per excubitores vrbis patefecit ad Regis exercitum; sed mox pace inter Reges inita Beatrix Ferdinandi Regis p. 20.
filia Baetico Regi pacta est.

Mortuo Rege Regina rerum summae praeposita, ita p. 26. 27.
enim conuenerat pactis dotalibus, et foedere cum Rege Baetico inito, vt ipsa, si superstes marito foret, Lusitano interim moderaretur imperio, donec qui nasceretur ex Beatrice secundo loco filius annos attigisset tantae moli pares --- Contra plebs interim fremere pro libertate, arma poscere et omnia tumultu miscere ac turbare --, in- p. 28.
teriissetque adeo respublica, libertasque Lusitana impotenti Baeticorum dominatu oppressa foret, nisi Ioannes Auisiensium Equitum Magister auctore et adiutore Nonno tanto periculo patriam liberandam suscepisset.

Primum tanti moliminis consilium fuit Ioannem Ferdinandum Anderium (*Dynastam Aurenensem, qui magnitu-*

dine opum gratiaque ac potentia non ſolum apud Reginam, ſed etiam apud ipſum Regem quoad is vixit caeteros ante-
p. 29. *ceſſit)* occidere, itaque vehementer vigebat Nonnus. *Igitur* Ioannes, prouiſis quae tempus monebat, Anderium Oliſipone in ipſa regia obtruncat.

p. 30. Audita Anderii nece Nonnus inuitis ac fruſtra renitentibus fratribus Oliſiponem ad Magiſtrum conuolauit, *vbi* poſtquam arcem validis copiis et acribus ſepſit cuſtodiis Praefectum arcis ad colloquium vocat, illumque multa agendo, ſuadendo, pollicendo, eo perduxit vt pepegerit, niſi intra biduum Regina ſuppetias ferret obſeſ-
p. 31. ſis, arcem dediturum. Moxque exactis induciis, cum nihil copiarum ab Regina ſubmitteretur dedita eſt.

p. 42. *Ioannes grauiſſimis cauſis adductus* Nonnum decreuit vniuerſae Tranſtaganorum genti praeficere ius ei ac poteſtas maior quam vlli vnquam Praefecto datur; neque enim militiae tantum, ſed et domi publicam rem administrare iuſſus.

p. 53. ſ. *Cum deinde Baeticos memorabili ad Fronteriam pugna*
p. 55. *ſuperaſſet*, auolat in vrbem nouam Arrucitanam armis viriſque opulentam et ipſam Baeticorum copiis inſeſſam. Oppidum primo impetu cepit Baeticosque in arcem compulit, quam tamen obſidet paucosque intra dies ad deditionem cogit. Ea formidine motum Alecretum et ipſum in confinio ſitum oppidum natura manuque validum in partes tranſit. Id exemplum et nonnulla alia caſtella eo tracta ſequuntur quam plurimaque loca moenibus nudata.

Preme-

Premebat interim Baeticus graui obſidione Oliſiponem --- qua capta oppreſſoque ibi ac deprehenſo belli auctore partiumque duce ſummae rei compotem ſe fore putabat totumque bellum eo ſucceſſu confici.

Interea Baetico variis modis pugnam detrectante Nonnus Palmellam et Almadam oppida capit, *nec* multo poſt Baeticus Rex victa conſtantia peſtilentiae damno iam haud quaquam tolerabili obſidionem ſoluit; vnde Nonnus -- impetum capit recedentem Regem in itinere aggrediendi *quod conſilium cum Ioanni et pluribus amicis non probaretur* Nonnus depoſita ſpe inuadendi Regis ad Transtaganos redit, *paullo poſt* Portellam capit, Eboram regreditur, Villamviſſoſam per inſidias inuadit, ſed irrito ſucceſſu, *eandem rurſus vi aperta aggrediens* tormentis quatit continuata nocte dieque verberatione quo plus terroris incuteret, neque vilum tempus eo horrore vacaret. Principio magno pauori eſſe ingens fragor quo ea machina globos excutit cogente flamma nitrato puluere concepta, mox intellectum eſt plus ſtrepitus quam damni afferre, rudibus ſcilicet etiam tunc eius artis initiis, nondum enim improba hominum ingenia nitrati pulueris vehementiam aut tormentorum magnitudinem eo prouexerant, quo prouecta noſtra ac parentum noſtrorum vidit aetas ſuam in perniciem ingenioſiſſime nequam.

p. 61. p. 68. p. 69. p. 73. p. 74. 75. p. 76. p. 78. p. 79.

Plures dies ea oppugnatio tenuit ſed vel nullo vel leui effectu --- vbi ergo Nonnus trahi in longum obſidionem videt, ſimul ipſe morae impatiens ſimul aliis Prouinciae neceſſitatibus vrgentibus ſoluere obſidionem coactus eſt.

Ioanp.86.87. *Ioannes in Concilio Lusitanorum Rex designatus Nonnum* Comitem stabilem creat, qui est proximus Regio fastigio gradus quasi assiduus Regi Comes, particepsque imperii

Interea Baeticus --- reparare vires, nouum militem legere, nouas classes aedificare, vt Auisiensem plus copiarum cientem aggrederetur. Consultissimum autem putabat, si Olisiponem haud dubie rerum caput et Ioannis fidissimum praesidium interclusis maritimis commeatibus fame premeret, eaque de caussa Hispalim proficiscitur ad vrgendum classis molimen. Itaque eo instante spe celerius adornata classis Hispali soluit breuique portum Olisi-
p. 88. ponensem inuehitur ---. Classi satis erat virium ad occupandas portus fauces maritimamque nauigationem impediendam, non tamen ad oppugnandam vrbem copiae suppetebant, sed impeditis maritimis subuectionibus graue incommodum opulentae vrbi afferebat. Qua de re Ioannes crebris Olisiponensium nuntiis admonitus opem fidemque eius implorantium, cum Nonno de liberanda ciuitate agit; neque is ad iussa ac pericula capessenda segnis eas partes libenter suscipit. Igitur Portucale vrbem, quae erat alterum Lusitanae libertatis propugnaculum, se confert, *at communicato cum primoribus eius ci-*
p. 90. *uitatis consilio* agnouit Nonnus difficultatem iustae classis parandae, itaque alio cogitationes conuertit. Maxima pars regionis eius, quae Miniana a Minio flumine dicitur et Interamna, quod duos inter amnes Durium ac Minium iacet, Baetici Regis partes Sacramentumque susceperat. Commodissimum igitur visum est regionem ingredi

gredi infeſto exercitu, vt Luſitanis nouo Regi ſtudentibus fiduciae ac tutelae eſſet, caeteris veio terrori.

Igitur Nonnus Interamnam regionem infeſta manu ingreſſus Neiuae Caſtellum recipit, Viannam vrbem, Ceruerianos, Monſarenſes, Bracherenſes atque vna cum Rege Ioanne Pontemelinam oppidum intercipit. p. 91. 92. 93. 94.

Fuit hoc bellum, ciuile externumque ſimul, ideoque ea tempeſtate magna transmutatio fortunarum facta eſt in vniuerſa gente Luſitana; nam cum plerique Luſitanorum Baeticorum partibus adhaeſiſſent, creuit noua nobilitas translatis bonis eorum in nouos homines qui Ioannem ſequebantur. 96.

Oliſiponenſes non iam metus inſtantis nouae obſidionis ſollicitabat, verum ipſa obſidio coepta vrgebat. Igitur Ioannem orabant ne tam bene de ſe merentes nouo atque integro obſidio premi pateretur. Ioannes *poſt variam deliberationem Oliſiponenſium precibus, ſecundum Nonni ſententiam aſſenſus eſt et cum hoſte pugnam committere ſtatuit in qua A.* CIↃCCCLXXXV. *Baeticorum Regem vicit.* Nonnum cuius potiſſima opera tantam victoriam adeptus fuerat *Ioannes* Aurenenſis Comitis dignitate oppidique imperio et redditibus ornauit. p. 97. p. 100. p. 104. p. 110.

Paucos poſt dies quieti datos Nonnus in Tranſtaganam regionem proficiſcitur -- neque enim --- hoſtibus permittendum *exiſtimabat* vt animos tanta clade perculſos colligerent -- Stremotium igitur totius regionis praeſidiis conuocatis primoribusque in conſilium adhibitis ſibi p. 116.

d in

Nonni liberalitatem verbis amplificant, non regiae solum aequant, sed supra ipsam etiam attollunt.

p. 161. Haec Regis animum commouissent nisi insita prudentia exaggerata a veris distinguere nouisset et Nonni fidem tam exploratam habuisset vt labefactari nullo modo posset. At tamen priuati hominis magnitudini modum censuit adhibendum eundemque caeteris primoribus, quibus oppida aut redditus dominici iuris donauerat, im-
p. 163. ponendum, *quae controuersia inter Regem et Nonnum per Pontificem Eborensem composita est.*

164. *At* elapsis sexennalibus induciis cum nec prorogatae fuissent, nec pax conuenisset, bellum resumere necesse
165. fuit. *Dionysius enim Petri Lusitanorum Regis ex Agnete filius quum regio nomine insignitus regnum inuaderet* Nonnus comperta *eius* irruptione non expectatis Regis *sui* mandatis qui ad extremos Lusitaniae fines in Calaicis ob sidione Tudis vrbis tenebatur, summa festinatione copias colligit et quam maximis itineribus obuiam Dionysio ire
166. contendit. At Dionysius iam antea certior factus Nonnum cum copiis aduentare, *exercitum reducit*.

168. Interea Baetici tantis malis fracti -- coepere serio de finiendo exitiali bello cogitare. Binos vterque Regum induciarum pacisue conciliatores decreuit qui ad vtriusque regni confinia conuenirent vnusque communi vtriusque Regis consensu Ambrosius --- de Marinis nominatus est vt in pari numero tamquam in iudicio, vnde maior iudicum pars staret, ea valeret sententia Lusitanus Nonnum et Pontificem Conimbricensem elegit qui pactis prius trium men-

menſium induciis vt de pace conciliandа aut longi temporis induciis tuto tractari poſſit ineunte Februario anni Domini cIↄcccxcix, Oliuentiam profecti ſunt. *At* conſumto per diſputationes induciarum tempore ſolutoque congreſſu Nonnus Eboram, vbi tunc Rex erat, ſe recipit, eique venienti idem Rex ſex millia paſſuum obuiam progreditur.

Deſperata pace *et* apparatis -- quae ad bellum opus 170.171
erant Ioannes Alcantaram oppugnare decreuit. Sed cum 173.
obſeſſis maiora in dies auxilia aduenirent inde deducere 174.
exercitum viſum eſt. *Tandem* in decennium induciae pactae, redditis vtrinque oppidis et caſtellis dimiſſisque ſine pretio captiuis anno a Chriſto nato cIↄ.cccc vii. caeterum annitente poſtea Catharina Baeticae Regina quae ſoror erat Philippae Luſitaniae perpetua pax aequa lege ſancita eſt anno cIↄ.ccccxi.

Erat Nonno filia nomine Beatrix tantarum opum p. 175.
haeres nam liberos ſtirpis virilis quos ſusceperat breui 176.
amiſit. Rex qui periculoſum ducebat *eas* ad priuatum hominem peruenire -- Alphonſum quem caelebs ſusceperat collocandum puellae in matrimonium decreuit, idque Nonnus libentiſſime probauit; paratisque ſumma cum omnium laetitia nuptiis in generum Barcellenſem Dynaſtiam multaque alia oppida et vectigalia transtulit Regemque orauit vt generum Comitis dignitate exornaret, ſe enim in illius gratiam pacto renuntiare de non creando Comite, ſe ſuperſtite; indeque Alphonſus Comes Barcellenſis factus, qui poſtea primus Brigantinus Dux fuit, a quo Reges *Luſitaniae* ſtirpem virilem deducunt, caeteri Chriſtiani Orbis Reges foemineam

p. 176. Post haec Nonnus cum filiam ex animi sententia collocauisset, solutus iam publicis priuatisque curis, aedificandis sacris aedibus totus incubuit. Sed cum esset
p. 177. Eborae funestus nuntius de filiae obitu supra modum tanti viri animum afflixit, vt videretur eum casum nequaquam pro caetera animi magnitudine tulisse.

Caeterum Ioannes Rex bellum Mauritaniae inferre
p. 179. statuit -- factoque ingenti apparatu et magna classe vna cum tribus liberorum natu maximis et Nonno Olisipone
p. 181. soluit anno Domini clɔccccxv. *Capta* XII. *Calendas septembris anni Domini* clɔccccxv. *Septa vrbe Rex* Nonno expugnandae arcis curam dedit *quam postero die cepit.*

p. 183. Haec -- expeditio fuit Nonno vltimum operum bellicorum cum annum aetatis ageret quinquagesimum quintum. Septem inde annos priuatus vixit, nullo nec militari nec ciuili magistratu functus quos domesticis rebus componendis insumpsit perficiendoque operi templi Carmelitani -- illudque perfectum Deiparae cum dedicasset Carmelitani instituti sodalibus tradidit, seque eorum collegio adiunxit, rebus humanis valere iussis vt totus Diuinis vacaret et ne quid vmbrae dignitatis eo in statu retineret, Sacerdotis gradum recusauit, vt humillimis quibusque ministeriis quae ad non initiatos spectant, mancipatus degeret; coepit deinde per vrbem mendicare, neque Comes-Stabilis appellari sinebat, Nonni tantum nomine contentus.

Sepul-

Sepultus est -- in cella maxima Carmelitani Templi p. 187.
Olisiponensis -- ad dextrum cornu arae maximae magnifico in tumulo ex candidissimo marmore. Sepulturae honorandae affuit Rex, Eduardusque filius natu maximus cum omnium nobilium coetu. Statura fuit modica, colore candido, facie oblonga, oculis paruis sed acribus, corpore obeso quam gracili propior. Firma valetudine vsus est nec nisi semel atque iterum morbo tentatus. Nullum consilium cepit, nec vllam vnquam rem aggressus est nisi prius adorato Numine inuocataque Deiparae ope et votis nuncupatis quae non solum sedulo soluebat, sed etiam augebat. Multi vndique pietatis causa ad eius sepulchrum conueniebant, idque diu celebratum est, cum omnibus firma persuasio esset per eius merita praesentem a Deo opem impetrari ad pellendos morbos, si aegri terram ex sepulchro sumptam in aqua ebibissent. Sed p. 188.
quanquam hac aetate concursus ille vulgi refrixerit, manet, mansuraque est in sapientum animis firma opinio et existimatio de eximia viri virtute ac sanctitate, habentque omnes persuasissimum Caelestium numerum auxisse.

CLAS-

Emendanda.

Pag. IV. lin. 17. et pag. XIV. lin. 6. leg. *Ribeyro*.

Pag. V. lin. penult. leg. *aequi*.

CLASSIS PRIMA

CONTINENS

MATHEMATICA.

DISSERTATIO HYDRAVLICA
DE

MOTV AQVARVM

PER VASA AVT PER CANALES QVAMCVNQVE
FIGVRAM HABENTES FLVENTIVM.

AVCTORE
Ioh. Bernoulli.

PRAEFATIO.

H*Ydroſtatica, quae agit de aquis ſtagnantibus in* Tabula I. *vaſis inferius clauſis, habet ſuas leges demonſtratas atque principia ex ratione deducta, vnde effectus et phaenomena clare et dilucide explicantur, ita vt circa hanc ſcientiam vix amplius quid deſiderari poſſit. Aliter ſe res habet in Hydraulica, vbi non tantum de grauitatione aquarum earumque preſſionibus agitur: ſed praeterea motus qui inde naſcitur, ſi aquae per datam aperturam poſſunt effluere, aut ſi ex vno tubo in alium diuerſae amplitudinis tranſire coguntur, atque alii effectus admirandi, qui eum motum comitantur, demonſtratiue determinari debent. Haec certe ſcientia, vulgo* Hydraulica *dicta, admodum eſt ardua, neque adhuc ad leges regulasque mechanicas reuocata habetur; quicquid Auctores ea de re ſcri-*

pserunt, vel sola nituntur experientia, vel rationibus incertis omnino parumque soliditatis habentibus.

In opere hydrodynamico, quod non ita pridem in lucem edidit Filius meus, felicioribus auspiciis aggressus est materiam istam, sed fundamento nixus indirecto, *conseruatione scilicet virium viuarum, licet verissimam atque a me demonstratam, nondum tamen ab omnibus Philosophis receptam, primus ego hanc hypothesin adhibui in Dynamicis solidorum, (postquam* Hugenius *simili principio pro centro oscillationis determinando vsus est) ostendique eandem constanter ex illa hypothesi solutionem elici, quam dant ordinaria principia dynamica, ab omnibus Geometris admissa; quae sane perpetua solutionum, vtraque via erutarum, conformitas vel sola sufficeret ad conuincendam aduersariorum obstinationem.* Directam *methodum, qua* a priori *et per sola dynamices principia inuestigari possit natura motus aquarum ex vasis per foramina erumpentium aut per canales non vniformis amplitudinis fluentium, hactenus dedit nemo.*

Miratus vnde tanta difficultas, vt in fluidis non aeque ac in solidis succedat principiorum dynamicorum applicatio, tandem rem acrius animo voluens detexi veram difficultatis originem, quam in eo consistere deprehendi, quod pars quaedam virium prementium impensa in formandum gurgitem *(a me ita dictum, ab aliis non animaduersum) tanquam nullius momenti fuerit neglecta et insuper habita, non aliam ob causam, quam quia gurges conflatur ex quantitate fluidi perexigua ac veluti infinite parua, qualis formatur quotiescunque fluidum transit ex loco ampliori in angustiorem vel vice versa ex angustiori in ampliorem. In priori casu*

casu sit gurges ante transitum, in altero post transitum. Demonstraro autem ad formandum gurgitem, quantumuis paruam habeat moleculam, requiri tamen vim prementem non insensibilem nedum infinite paruam, sed finitam ac determinatam, adeoque neutiquam contemnendam, sed dignam omnino vt in computum veniat: Nam vis illa ad hunc effectum requisita, quod mirum videri potest, plane non dependet ab extensione gurgitis, qui maior minorue concipi potest, modo concipiatur vt valde paruus, semper eandem ad sui formationem absumit partem virium prementium, manentibus caeteris circumstantiis.

Quid sit gurges ac quomodo formetur, ex ipsa rei tractatione intelligetur, simulque patebit, formationem gurgitis peragi sine dispendio sensibili virium viuarum respectu quantitatis earum, quae est in totali massa aquea; hinc elucescit ratio, cur tuto et sine errore adhiberi possit theoria virium viuarum in Hydraulicis, etiamsi ad gurgitem non attendant illi, qui hac Theoria vtuntur; dummodo gurgitis existentiam non ignorent, videantque illum nihil derogare virium viuarum conseruationi, secus enim contendere non possunt, se rei veritatem perfecte et scientifice consecutos esse.

Disquisitionem hanc absoluam duabus partibus: In prima considerabo phaenomena aquarum fluentium et effluentium per vasa cylindrica aut prismatica, siue sint simplicia, siue ex pluribus composita, vt sunt canales ex variis diuersae amplitudinis tubis seu syphonibus cylindricis coagmentatis. In altera parte perscrutabor omnia vniuersalissime, cuiuscunque sint figurae tam regularis quam irregularis vasa perforata ipsisque adaptati canales ac tubi.

Ad clariorem rerum intelligentiam praemitto definitiones atque lemmata ſequentia, quorum veritas ex Dynamicis tum ex Hydroſtaticis eſt manifeſta.

1. *Vis* acceleratrix *vniformis eſt, quae dato corpori dato tempore velocitatem imprimit.*

2. *Vis* motrix *eſt, quae quando agit in corpus quieſcens, illud in motum concitat, aut quae corpus iam motum vel accelerare vel retardare vel eius directionem mutare poteſt.*

3. *Vires motrices ſunt in ratione compoſita ex ratione maſſarum et virium acceleratricium: Sic ex. gr. ad mouendam maſſam duplam cum vi acceleratrice tripla, aut quod idem eſt ad mouendam maſſam triplam cum vi acceleratrice dupla requiritur vis motrix ſextupla.*

4. *Vis motrix diuiſa per maſſam dat vim acceleratricem, per hanc vero diuiſa dat maſſam.*

5. *Grauitas abſoluta* g, *ſeu cauſa grauitatis, quaecunque illa ſit, eſt vis acceleratrix, quae cum animat determinatam maſſam corporis* m, *producit in illa vim motricem* $= gm$; *licebit autem in mente noſtra eam ſeparare a corpore et ita conſiderare tanquam extrinſecus in corpus ageret: concipimus vtique idem illud corpus grauitatis expers a vi motrice externa* gm *eadem lege acceleratum iri, qua acceleratur naturaliter. Illam autem vim* gm *extra materiam exiſtentem, vocare lubet vim motricem* immaterialem; *vnde ſi illa aliorſum translata agat in aliam maſſam* M, *accelerabitur haec vi acceleratrice* $= \frac{gm}{M}$.

6. *Vis*

6. *Vis motrix immaterialis atque inuariabilis, agens ſine impedimento in corpus, eodem modo illud accelerat ſiue adhuc quieſcat ſiue iam ſit in motu; cum enim vis illa ſemper comitetur corpus, nullum inter ſe habent motum relatiuum, adeoque vis motrix eodem modo agit in corpus motum, ac ſi vtrumque omnino quieſceret. Haec cauſa eſt cur corpora grauia inter cadendum continuo et vniformiter accelerentur ſecundum tempora; ſuppoſito ſcilicet intenſitatem vis acceleratricis non mutari inter agendum, hoc eſt, neque augeri neque minui, ſicuti reuera vis grauitatis eandem continuo ſeruat intenſitatem in corpore graui deſcendente aeque ac ab initio deſcenſus.*

7. *Intenſitas vis motricis* inuariabilis, *dicitur menſura ſecundum quam in corpore mouendo producitur maior minorue vis acceleratrix: Sic grauitas in corpore verticaliter cadente maiorem habet intenſitatem, quam ea in eodem corpore ſuper plano decliui delabente; in primo enim caſu maior producitur vis acceleratrix quam in altero, in vtroque autem grauitas eſt inuariabilis.*

8. *Vis motrix* variabilis *eſt cuius intenſitas mutatur in agendo, ſic ex. gr. vis elaſtri tenſi ab initio relaxationis maiorem habet intenſitatem, per conſequens maiorem imprimit corpori propellendo vim acceleratricem quam in progreſſu relaxationis; De his haec habetur regula: Sit ſpatium a corpore percurſum* $=x$, *maſſa corporis propulſi* $=m$, *vis motrix in fine ſpatii percurſi* $=p$, *velocitas acquiſita* $=v$, *tempus per* $x=t$, *proinde* $dt=\frac{dx}{v}$; *erit* $\frac{p\,dt}{m}$ *ſeu* $\frac{p\,dx}{mv}=dv$, *ideoque* $\int p\,dx=\frac{1}{2}mvv$; *id quod notiſſimum eſt.*

9. *Par-*

9. *Partes inferiores aquae in vase aliquo contentae premuntur a superincumbente massa aquea secundum solam profunditatem, quamcunque vas habeat figuram, hoc est, si massa aquea cogitatione diuidatur in strata horizontalia infinite paruae crassitiei, vnumquodque ex illis stratis tantundem premitur ac si illi incumberet cylindrus aqueus eiusdem altitudinis quam est ea, quae in vase respondet profunditati ipsius strati.*

10. *Hinc recte colligitur: Si amplitudines stratorum eandem crassitiem infinite paruam habentium sint* $m, m^{I}, m^{II}, m^{III}$, *etc. eorumque adeo ponduscula propria sint etiam vt* $m, m^{I}, m^{II}, m^{III}$ *etc. separari poterunt per mentis abstractionem a stratis ipsorum grauitationes, ita vt eorum sola supersit materia sine pondere, sed si ablatarum grauitationum loco totidem aliae substituantur, quae iunctim premant supremam aquae superficiem, obseruando nimirum in singulis hanc analogiam, vt sit amplitudo cuiuslibet strati ad amplitudinem supremae superficiei ita grauitatio propria strati ad grauitationem substituendam: Orietur inde in singulis stratis eadem pressio, ac si mansissent in statu suo naturali.*

11. *Voco* translationem *substitutionem illam mentalem: Vt me explicem, habeat stratum aliquod ex inferioribus amplitudinem* $= m$, *eius grauitatio vel ponduscυlum proprium* $= \pi$; *amplitudo strati supremi* $= h$, *erit* grauitatio translata *ad superficiem supremam* $= \frac{h}{m}\pi$, *quae cum reliquis omnibus ita* translatis *constituit totam vim motricem immaterialem, qua omnis aqua in vase deorsum vrgetur eodem modo ac fit naturaliter.*

Mo-

Monitum.

Monere iam conuenit in antecessum, me per totam hanc tractationem de motu aquarum fluentium abstrahere a consideratione impedimentorum peregrinorum et accidentalium, quae alterare possunt motum per regulas determinatum; Talia impedimenta sunt aquarum imperfecta fluiditas, item illarum adhaesio atque frictio ad latera vasorum, nimia tuborum gracilitas, foraminum seu luminum angustia, tenacitas particularum fluidarum ob quam non facillime a se inuicem secedunt, et quae sunt alia huiusmodi ad quae non attendo. Hoc quoque notari velim, non esse absolutae necessitatis vt semper aquarum strata in situ horizontali concipiantur, commodius illa finguntur perpendicularia ad directionem motus aquae, sic ex. gr. cum aqua ex vase ampliori transfluit in tubum angustiorem horizontalem cuius orificii vel luminis area sit in plano verticali et ad latus tubi recto, aqua in tubo contenta rectissime diuidi concipitur in strata verticalia et plano luminis parallela, eoque magis quod ipsa natura hunc quasi situm affectat; videmus enim columnam aqueam in tubo aliquo duas lineas in diametro non multum excedente habere ambas suas superficies extremas dispositas ad situm perpendicularem lateribus tubi, quamuis tubus ipse sit ad horizontem obliquus vel omnino horizontalis. Linea coniungens centra grauitatis stratorum, siue sit recta vt in tubis rectilineis, siue curua vt in tubis curuilineis, vocabitur Linea centrica *vel simpliciter* centrica; *singula quippe strata quoad materiam in centris suis collecta eum habere motum censentur quam ipsa habent strata.*

DISSERTATIONIS HYDRAVLICAE

PARS PRIMA

AGENS

DE

MOTV AQVARVM

PER VASA ET CANALES CYLINDRICOS QVI EX PLVRIBVS TVBIS CYLINDRICIS SIBI INVICEM ADAPTATIS SVNT CONFLATI.

§. 1.

Figura 1. DEtur primo canalis ABCFDE compositus ex duobus tubis cylindricis diuersae amplitudinis AGDE et GBCF, quorum ille fundum GD apertum habeat foramine GF per quod communicet cum tubo angustiori BC. Sit vero totus canalis BE plenus liquore homogeneo, per se nullius grauitatis, sed vrgeatur a parte orificii AE data vi motrici $= p$, quae aequaliter premendo expandatur per totam superficiem liquoris AE; quaeritur lex accelerationis, qua liquor per canalem profluet. Suppono autem canalem semper manere plenum liquore, quod fit concipiendo, suppeditari iugiter aliunde nouam materiam liquoris eadem quouis momento velocitate in tubum GE subingredientis ad resarciendum id, quod per alterum orificium GF egreditur in tubum GC, atque ex hoc ipso per lumen BC in auras dilabitur.

§. 2. Ex hydrostaticis assumsi vim motricem p immaterialem, qua premitur superficies liquoris AE, propagari

gari in inſtanti ad ſuperficiem GF liquoris in tubo BF contenti, idque ſiue ſtagnet liquor in toto canali, ſiue fluat dummodo plenus maneat.

§. 3. Dum tranſit liquor ex vno tubo in alterum, mutabitur vtique velocitas in ratione reciproca amplitudinum; at nulla mutatio eſt ſubitanea, ſed ſucceſſiua et gradualis, procedens per omnes poſſibiles gradus intermedios a minori ad maiorem, vel a maiori ad minorem.

§. 4. Hinc quando fluit liquor motu parallelo, ita vt quolibet momento eadem inſit velocitas ſingulis partibus liquoris in directione ab AE verſus GD, antequam partes ipſi GF proximae perueniant ad orificium GF, oportet vt per diſtantiam ſaltem minimam HG, incipiant accelerari et accelerando pergant donec in ipſo ingreſſu GF acquiſiuerint velocitatem liquoris per tubum BF fluentis motu pariter parallelo ſingulisque partibus communi.

§. 5. Formatur itaque pro latitudine indefinite parua HG, aliquis quaſi gurges IFGH ex lato in anguſtum coarctandus, per quem liquor continua acceleratione, ſed tamen per gradus, adaucta perlabi debet, manente portiuncula quam minima liquoris (quae replet ſpatiolum IFD) in quiete perpetua.

§. 6. Sit curua IMF terminans gurgitem cuiuscunque naturae, neque enim neceſſe eſt eum ſupponere alicuius determinatae figurae; mox enim demonſtrabo, eandem ſemper requiri vim motricem ad id vnice deſtinatam liquor per gurgitem cogatur, qualemcunque habeat latitudinem HG, modo ſit infinite parua, et cuiuscunque ſit naturae linea IMF, quae connectit extremitates I et F.

§. 7. Nemo putet vim illam motricem (quae exiguam adeo imo infinite paruam portiunculam liquoris per gurgitem protrudit) debere et ipſam eſſe infinite paruam adeoque contemni poſſe. Eſt enim omnino finitae quantitatis illa vis motrix, ideo quia ſi quantitas materiae mouendae eſt infinite parua, ex altera parte vis acceleratrix debet eſſe infinite magna, ad id nimirum vt tempusculo infinite paruo, quo liquor percurrit ſpatiolum HG, generari tamen poſſit mutatio finita in velocitate, vtpote ea quae fuerat velocitas in H ad eam quae iam eſt in G, ſe habet vt GF ad HI.

§. 8. Neglectio huius vis motricis, tanquam nullius momenti, in cauſa fuit, cur nemo ad hunc vsque diem extiterit, qui ex principiis ſtaticis et pure mechanicis dare potuerit leges liquorum per canales non vniformes fluentium, ſed quicunque ſusceperunt illas exacte determinare, recurrerunt meo quidem exemplo ad principium virium viuarum, de cuius applicatione ad hoc negotium aliaque in ſolidis aeque ac in fluidis forſan nunquam cogitaſſent, ſi me praeeuntem non habuiſſent, qui quippe primus docui hunc vſum deriuare ex conſeruatione virium viuarum. Sed ipſe ego non ſatis contentus indirecta hac methodo, vtpote fundata in theoria illarum virium a multis nondum admiſſa, non deſtiti inquirere in methodum directam, quae niteretur vnice principiis dynamicis a nemine negatis, donec tandem poſt meditationem

tionem longiusculam anno iam 1729. voti compos factus vidi totius rei cardinem versari in contemplatione gurgitis, antea a nemine animaduersi; nunc itaque inuenta mea, Amicis quibusdam priuatim explicata, etiam cum publico communicare consultum duco: hunc in finem gurgitis generatione iam indicata, inceptum lubet qua potero perspicuitate prosequi.

§. 9. Concipiatur abscissa $HL = t$, applicata $LM = y$, atque prioris elementum $Ll = dt$; dicaturque tubi HE amplitudo AE seu $HI = b$, tubi GC amplitudo BC seu $GF = m$, liquoris in tubo GC velocitas $= v$, adeoque liquoris in tubo HE velocitas erit $= \frac{m}{b}v$, sunt enim velocitates amplitudinibus reciproce proportionales, ob eandem rationem erit in quolibet gurgitis loco liquoris $LMml$ velocitas $= \frac{m}{y}v$, quod dicatur $= u$; iam ergo sit vis acceleratrix, qua animatur stratum liquoris, $= \gamma$, erit ex natura accelerationis $\gamma dt = udu$, proinde $\gamma y dt = yudu$, hoc est, vis motrix qua vrgetur stratum liquoris $LMml = yudu$. Haec vero vis motrix per §. 2. generatur a vi motrice partiali in tubo HE existente et expansa per totam amplitudinem AE, quae vt innotescat faciendum est vt LM ad HL seu vt y ad b ita $yudu$ ad $budu$, erit $budu$ (translata nempe ipsius $yudu$) vis motrix particularis in tubo HE, quae producere potest vim motricem $yudu$ in gurgitis strato $LMlm$, et integrando per totum gurgitem habetur $\frac{1}{2}b(vv - \frac{mm}{bb}vv)$ seu $\frac{bb-mm}{2b}vv$, quae designat vim motricem requisitam in tubo HE ad id vnice, vt in gurgite fiat acceleratio

 necefnecessaria ad mutandam velocitatem minorem in maiorem, qua opus est vt transeat liquor in tubum angustiorem GC.

Corollarium I.

Hinc patet naturam curuae IMF, vt et latitudinem gurgitis HG, non ingredi in vis motricis determinationem ad generandum motum gurgitis, datis enim amplitudinibus extremis HI et GF seu b et m, et velocitate v, semper habetur vis motrix in tubo $HE = \frac{bb - mm}{2b} vv$ pro motu in gurgite generando.

Corollarium 2.

Quod si continuante fluxu liquoris, eius velocitas v in tubo BF maneat semper constans, manifestum est etiam alteram velocitatem in tubo HE manere constantem, adeoque vim motricem vel pressionem p nihil amplius conferre ad motum in vtroque tubo accelerandum, vnde liquet totam illam vim p vnice adhiberi ad formandum gurgitem eumque in statu suo conseruandum; erit propterea $p = \frac{bb - mm}{2b} vv$.

Corollarium 3.

Fingamus tubum HE vel GE esse verticaliter erectum instar vasis cylindrici et communicare cum tubo horizontali GC; atque vim p esse ipsum pondus columnae liquoris contenti GE, ita vt (posito g designare vim naturalem acceleratricem grauium, atque HA vel $GA = a$) habeatur $p = gba =$ ponderi liquoris in GE contenti, vnde $gba = \frac{bb - mm}{2b} vv$. Sed vt v determinetur per altitutitudinem verticalem z, per quam graue aliquod libere delapſum acquirat velocitatem v, faciendum eſt $g\,dz = v\,dv$, proinde $gz = \frac{1}{2}vv$, ſubſtituendo igitur gz pro $\frac{1}{2}vv$, habebimus $gha = \frac{hh - mm}{h} \times gz$, vnde emergit $z = \frac{hh}{hh - mm} a$, id quod dat hoc Theorema hydraulicum.

Theorema.

§. 10. *Sit vas cylindricum* AGFE *verticaliter erectum inſtructumque ad fundum tubo cylindrico horizontali* FB *vtrinque aperto; ſit item tam vas quam tubus aqua iugiter plenus, vt nimirum tantum aquae eadem velocitate quam habet aqua in vaſe continuo ſuppeditetur per* AE, *quantum effluit per lumen* BC: *Dico velocitatem aquae effluentis (ſi illa naſcatur ex quiete) conuergere citiſſime ad eam quae acquiritur a graui libere cadente per altitudinem* $= \frac{hh}{hh - mm} a$, *cuius veritas patet ex Coroll. 3. praec.* Figura 2.

Corollarium 1.

Vnde ſi lumen BC ſit valde paruum reſpectu amplitudinis vaſis AE, adeo vt mm negligi poſſit reſpectu hh, prodibit $z = a$, hoc eſt, velocitas aquae effluentis ex tubo erit aequalis ei, quam graue libere delapſum ex altitudine EF acquirit. Quod eſt theorema notiſſimum, ſed ex principiis dynamicis nondum hucusque demonſtratum, praeſertim ſi adfuerit tubus BF adaptatus, cum antea creditum fuerit theorema valere tantum pro paruo foramine ad F ſuppoſito.

Corollarium 2.

Quo maius eſt lumen BC reſpectu amplitudinis vaſis AE, eo maior fit velocitas maxima aquae effluentis; aucto

aucto enim m augetur valor fractionis $\frac{hh}{hh-mm}$: donec euadente $m=h$, velocitas maxima fit infinita, quod verum esse vel hinc quoque patet, quia tunc et vas et tubus sunt eiusdem amplitudinis, formantque vnum continuum tubum reflexum, adeoque vis ponderis aquae in parte AF semper plena accelerat totam massam aqueam, vt tandem eius velocitas tempore infinito generata fiat et ipsa infinita. Nam dicendo longitudinem tubi $FC=b$, massa omnis aquae in tubo reflexo AGC erit $=ha+hb$, eaque non aliter accelerabitur quam corpus aliquod solidum quod animaretur vi acceleratrice $=\frac{gha}{ha+hb}=\frac{ga}{a+b}$, tale vtique corpus cadendo per tempus infinitum acquireret velocitatem infinitam.

Corollarium 3.

Si vero m maius esset quam h, id est, si tubus horizontalis amplior esset quam vas verticale, velocitas maxima nunquam et ne quidem tempore infinito daretur, foret enim $\frac{hbm}{hh-mm}$ negatiuum; indicio quod durante fluxu in aeternum acceleratio aquae effluentis incrementum capere non desinet: Hoc enim in casu fiet in tubo gurges inuersus respiciens orificium BC, qui vt ex sequentibus patebit eam habet naturam, vt vim motricem adiuuet potius quam diminuat, dum sese quasi subducit pressioni a tergo venienti, quo aqua in vase liberius descendere queat.

Scholium.

Hucusque considerauimus vas et tubum aquae constanter plenum, atque effluentem aquam in maxima sua velo-

velocitate adeoque aequabili ſeu vniformi, quo fit vt nulla amplius requiratur vis motrix ad aquam acceleran-dam neque per vas neque per tubum, ſed vis motrix p tota vſurpetur ad coercendum gurgitem, qui formatur ante ingreſſum ex ſpatio ampliori in anguſtius. Nunc contemplabimur velocitatem fluxus aquae tanquam creſcentem atque initium ſuum a quiete ſumentem; ita vt ad accelerationem procurandam tam in vaſe quam in tubo ſua pariter peculiaris pars vis motricis p requiratur. Examinabimus primo caſum, quo vas cum tubo conſtanter plenum ſupponitur.

§. 11. Sit x longitudo ſpatii quam aqua ex quiete in tubo percurrit, erit $\frac{m}{b}x$ longitudo quam eodem tempore percurrit in vaſe; ſic pariter exiſtente velocitate in tubo $= v$, erit quoque velocitas in vaſe $= \frac{m}{b}v$; vnde vis acceleratrix in tubo $\frac{vdv}{dx}$, eaque multiplicata per maſſam aquae mb dabit vim motricem $= \frac{mbvdv}{ax}$, quae (per §. 2) translata in vas dabit aequipollentem $\frac{bbvav}{dx}$, a qua nimirum illa in tubo $\frac{mbvdv}{dx}$ produci poteſt. Ita quoque vis acceleratrix in vaſe $= \frac{mm}{bb}vdv : \frac{m}{b}dx = \frac{mvdv}{bax}$, quae ducta in maſſam ba, dat vim motricem $= \frac{mavdv}{dx}$ ad aquam in vaſe propellendam, atque ſic ſumma trium virium motricium per gurgitem, per tubum et per vas debet aequare vim motricem totalem p, vnde haec nobis reſultat aequatio $\frac{bb-mm}{2b}vv + \frac{bbvdv}{dx} + \frac{m\;v\;v}{dx} = p$; Eſto igitur, vt ante, p ipſum pondus columnae aqueae $= gba$, et fiat vt in Coroll. 3. §. 9. $gz = \frac{1}{2}vv$, quibus ſubſtitutis prodibit haec aequatio $\frac{bb-mm}{b}z + \frac{bbdz}{dx} + \frac{madz}{dx} = ba$,

$= ha$, seu $(bb - mm) z\,dx + (bbb + bma) dz = bba\,dx$, vnde $dx = \frac{(bbb + bma) dz}{bba - bbz + mmz}$, quae debite tractata et integrata per logarithmos dabit $x = \left(\frac{bbb + bma}{bb - mm}\right) \times l\left(\frac{bba}{bba - bbz + mmz}\right)$ vnde progrediendo ad numeros (assumendo $1 = lf$), $z = \left(\frac{bba}{bb - mm}\right) \times \left(1 - \frac{1}{f^{\frac{bb - mm}{bbb + bma} x}}\right)$. Quod si aqua in vase (quod breuitatis gratia sine tubo annexo tantum habeat foramen amplitudinis m) animetur grauitate $\overset{1}{g}$ diuersa a grauitate naturali g, inuenietur $z = \frac{\overset{1}{g} bba}{g(bb - mm)} \times \left(1 - \frac{1}{f^{\frac{bb - mm}{bma} x}}\right)$.

Corollarium.

Si $x = \infty$, id quod dat casum maximae velocitatis, ad quam fluxus conuergit erit, $1 : f^{\frac{bb - mm}{bbb + bma} x} = 0$, adeoque $z = \frac{bba}{bb - mm}$ pro grauitate naturali g, quod omnino conforme est Coroll. 3. §. 9. atque si praeterea m est infinite paruum respectu ipsius b, prouenit $z = a$, prorsus vt habetur in Coroll. 1. §. 10, quae methodum egregie confirmant.

Figura 2. §. 12. Expendamus nunc casum, vbi vas AF aqua non manet plenum, sed pro mensura aquae effluentis paulatim exinanitur eiusque superficies AE continuo descendit. Finge aquam in tubo horizontali percurrisse longitudinem x, proinde ex eo effluxisse (suppono enim vas et et tubum ab initio plenum esse) quantitatem aquae $= m x$, hoc est, $=$ cylindro aqueo cuius basis est m et longitudo x; Quod si igitur in EF sumatur pars $EI = \frac{m}{b} x$, perspicuum est, horizontalem HI esse locum superficiei supremae ad quam aqua descendit in vase, postquam aquae pars $m x$ effluxit per tubum: Restabit ergo in vase columna aquea $GI = b a - m x$, cuius pondus $g(b a - m x)$ iam est id ipsum quod vocauimus p. Sic itaque vis acceleratrix aquae restantis in vase (quae in §. 11. generaliter inuenta est $= \frac{m v d v}{b d x}$) si ducatur in massam aqueam quae nunc est $b a - m x$, habebimus vim motricem $= \frac{m v d v}{b d x}(b a - m x)$ quae competit aquae per vas detrudendae, vnde iam colligendo tres vires per gurgitem, per tubum et per vas, aggregatumque aequando ipsi p, hoc est, ipsi $g(b a - m x)$, lucrabimur hanc aequationem $\frac{b b - m m}{2 b} v v + \frac{b b v d v}{d x} + \frac{m v d v}{b d x}(b a - m x) = g(b a - m x)$, vbi substituendo $g d z$ pro $v d v$, et $g z$ pro $\frac{1}{2} v v$, vt fecimus in Coroll. 3. §. 9. mutabitur nostra aequatio in hanc aliam $\frac{b b - m m}{b} z + \frac{b b d z}{d x} + \frac{m d z}{b d x}(b a - m x) = (b b a - b m x) d x$. Quae vera est aequatio, ex qua si eruatur valor ipsius z, habebitur altitudo per quam graue libere delapsum acquiret velocitatem quaesitam, nempe aequalem illi quam habebit aqua in tubo postquam quantitas $m x$ ex eo effluxit: Potest autem aequatio inuenta, in qua indeterminatae permixtae reperiuntur, per regulas nostras (ope lemmatis mox sequentis) integrari, atque ita innotescet valor ipsius z in terminis finitis: interim hoc loco ei negotio diutius non est immorandum, sufficit mihi problema reduxiſſe ad aequationem differentialem vtendo principiis pure mechanicis, quod an a quoquam alio ante me praeſtitum fuerit haud recordor me vnquam vidiſſe. Sciendum vero ipſiſſimam hanc aequationem inueniri per methodum virium viuarum, ita vt et hoc nomine vſus illarum atque bonitas ſeſe commendet contra Aduerſarios.

Corollarium 1.

Vt determinetur maxima velocitas liquoris effluentis, tum et ea in vaſe deſcendentis, ponendum eſt tantum $dz = 0$, quo facto aequatio noſtra ſuppeditabit $(bb - mm)z = bba - bmx$, proinde $z = \frac{bba - bmx}{bb - mm}$, quod, cum adhuc ipſum x incognitum in ſe contineat, nihil quidem determinat, niſi valor ipſius z ſimul etiam ex aequatione generali eruatur.

Corollarium 2.

Si m ſit valde paruum reſpectu ipſius b, aequatio generalis hanc induit formam $zdx + bdz = adx$, vnde $dx = \frac{bdz}{a - z}$, quod dat $z = a - \frac{a}{f^{x:b}}$; Ergo vt in hoc caſu z ſit *maximum* oportet x eſſe infinitum, et tunc fiet $z = a$, quod quidem ex ipſo $dx = \frac{bdz}{a - z}$, ſeu ex $dx(a - z) = bdz$ ſtatim colligi poteſt, faciendo enim propter maximum z, ipſum $dz = 0$, ac proinde $z = a$. Vnde iterum liquet in vaſe ampliſſimo aquam per anguſtiſſimum tubum effluentem ſtatim acquirere velocitatem maximam ac poſtea ſemper aequabilem atque aequalem ei quam graue libere cadens ex altitudine vaſis acquireret, vt ſupra in Coroll. 1. §. 9. inuenimus: hoc quippe in in caſu vas conſiderari poteſt tanquam ſemper plenum, quia ob vaſis infinitam quaſi amplitudinem reſpectu habito ad tubi anguſtiam, requireretur vtique tempus etiam quaſi infinitum antequam in illo deſcendat aqua ſenſibiliter.

§. 13. Ecce nunc alium caſum: Sit tubus (qui ab initio ante fluxum vsque ad C aqua plenus ponitur) indefinite continuatus, ita ſcilicet vt deſcendente aqua in vaſe, nihil extra tubum effluere poſſit ſed ſemper quicquid liquoris ex vaſe deſcendit in tubum id vna cum eo quod iam ineſſe ſupponitur iunctim propulſum intra tubum fluere cogatur: Quaeritur lex accelerationis et velocitas ipſa pro quolibet ſpatio intra tubi cauitatem percurſo; vis acceleratrix in tubo hic etiam, vt in §. 11. oſtenſum eſt, erit $= \frac{v\,dv}{dx}$, ſed maſſa aquae propellendae nunc eſt $= mb + mx$, per quam vis acceleratrix $\frac{v\,dv}{dx}$, multiplicata dat vim motricem in tubo $= \frac{mbv\,dv + mxv\,dv}{dx}$, quae translata ad amplitudinem vaſis dat vim motricem aequipollentem in vaſe $= \frac{bbv\,dv + bxv\,dv}{dx}$; Atque ſic coniunctis tribus viribus motricibus per gurgitem, per tubum et per vas, iisque aequatis vi motrici totali p, prodibit pro vaſe ſemper pleno ab affluente noua aqua haec aequatio $\frac{bb-mm}{2b} vv + \frac{bbv\,dv + bxv\,dv}{dx} + \frac{mav\,dv}{dx} = p = gba$, (conf. §. 11.). Sed pro vaſe nihil noui liquoris accipiente, haec altera $\frac{bb-mm}{2b} vv + \frac{bbv\,dv + bxv\,dx}{dx} + \frac{mv\,dv}{b\,dx}(ba - mx) = p = g(ba - mx)$, conf. §. 12., ſubſtituto gz pro $\frac{1}{2} vv$, aequatio prior dat hanc $(bb-mm) z\,dx + (bbb + bma + bbx)\,dz = bba\,dx$; poſterior vero

 hanc

hanc $(bb - mm)\, z\, dx + (bbb + bma + bbx + mmx)\, dz = (bba - bmx)\, dx$. Vtraque autem aequatio integrari poteſt per lemma ſupra promiſſum, quod nunc demonſtro.

Lemma.

§. 14. Sit aequatio integranda (et quidem ſine neceſſitate ſeparandi indeterminatas) $\alpha z\, dx + (\beta + \gamma x)\, dz = (\varepsilon + \theta x)\, dx$; ſcribendo y pro $\beta + \gamma x$, vnde $dx = \frac{dy}{\gamma}$, aequatio mutatur in hanc $\frac{\alpha}{\gamma} z\, dy + y\, dz = (\varepsilon + \theta x)\, dx$; qua multiplicata per $y^{\frac{\alpha}{\gamma} - 1}$ habebitur $\frac{\alpha}{\gamma} z y^{\frac{\alpha}{\gamma} - 1} dy + y^{\frac{\alpha}{\gamma}} dz = (\varepsilon + \theta x)\, dx \times y^{\frac{\alpha}{\gamma} - 1} = (\varepsilon + \theta x) \times \frac{1}{\gamma} (\beta + \gamma x)^{\frac{\alpha}{\gamma} - 1} \gamma\, dx$; integrando prodibit $y^{\frac{\alpha}{\gamma}} z = \int (\varepsilon + \theta x) \times \frac{1}{\gamma} (\beta + \gamma x)^{\frac{\alpha}{\gamma} - 1} \gamma\, dx = \frac{1}{\alpha} (\beta + \gamma x)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \times (\varepsilon + \theta x) - \int \frac{\theta}{\alpha \gamma} (\beta + \gamma x)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \gamma\, dx = \frac{1}{\alpha} (\beta + \gamma x)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \times (\varepsilon + \theta x) - \frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha} (\beta + \gamma x)^{\frac{\alpha + \gamma}{\gamma}} - \frac{\varepsilon}{\alpha} \beta^{\frac{\alpha}{\gamma}} + \frac{\theta}{\alpha\alpha + \alpha\gamma} \beta^{\frac{\alpha + \gamma}{\gamma}}$. Notetur hic, duos poſtremos terminos adiectos eſſe more ſolito ad rectificandam aequationem, vt nimirum euaneſcente x, etiam euaneſcat z. Diuidatur nunc aequatio per $y^{\frac{\alpha}{\gamma}}$ hoc eſt per $(\beta + \gamma x)^{\frac{\alpha}{\gamma}}$, vt emergat valor verus ipſius z, nempe $z = \frac{1}{\alpha} (\varepsilon + \theta x) - \frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha} (\beta + \gamma x)$
$$+ \left(\frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha} \beta^{\frac{\alpha}{\gamma} + 1} - \frac{\varepsilon}{\alpha} \beta^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right) \times (\beta + \gamma x)^{\frac{-\alpha}{\gamma}}.$$

§. 15. Vt igitur huius applicatio fiat ad priorem aequationem $(bb - mm)\, z\, dx + (bbb + bma + bbx)\, dz = bba\, dx$, erit hic $\alpha = bb - mm$, $\beta = bbb + bma$, $\gamma = bb$, $\varepsilon = bba$, et $\theta = 0$, quibus ſurrogatis obtinebitur

bitur $z = \frac{bba}{bb-mm} - \frac{bba}{bb-mm}(bbb+bma)^{\frac{bb-mm}{bb}} \times (bbb+bma+bbx)^{\frac{-bb-mm}{bb}}$, vel quod idem eſt, $z = \frac{bba}{bb-mm} \times \left(1-\left(\frac{bb+ma}{bb+ma+bx}\right)^{\frac{bb+mm}{bb}}\right)$. Sin vero ad poſteriorem, vbi $\alpha = bb-mm$, $\beta = bbb+bma$, $\gamma = bb-mm$, $\varepsilon = bba$, $\theta = -bm$, reſultat $z = \frac{bba-bmx}{bb-mm} + \frac{bm}{2.(bb-mm)^2} \times (bbb+bma+bbx-mmx) + \left(\frac{-bm}{2(bb-mm)^2}-(bbb+bma)^2 - \frac{bba}{bb-mm} \times bbb+bma\right) \times (bbb+bmabbx-mmx)^{-1}$, quibus in ordinem digeſtis rite procedendo, emerget tandem $z = \frac{bbax-\frac{1}{2}bmxx}{bbb+bma+bbx-mmx}$.

Corollarium 1.

Si m reſpectu b eſt valde paruum, habebitur pro vaſe ſemper pleno $z = \frac{ax}{b+x}$, pariterque pro altero caſu prodit $z = \frac{ax}{b+x}$, quod quidem omnino ita euenire decet, quia enim ob m infinite paruum, aqua tempore infinito opus habet ad effluendum, antequam ſuprema eius ſuperficies in vaſe ampliſſimo ſenſibiliter deſcendat, patet vtique perinde eſſe ac ſi ſemper plenum maneret vas, ac proinde hi duo caſus in eundem prorſus recidunt.

Corollarium 2.

Si $b = 0$, hoc eſt, ſi in tubo horizontali indefinite longo FB, ab initio fluxus nihil aquae contineatur, erit pro caſu vaſis ſemper pleni $z = \frac{bba}{bb-mm} \times \left(1-\left(\frac{ma}{ma+bx}\right)^{\frac{bb-mm}{bb}}\right)$

ſed

ſed pro altero caſu nihil noui liquoris accipientis, erit $z = \frac{hhax - \frac{1}{2}hmxx}{hma + hhx - mmx}$. In hoc poſtremo caſu hoc quoque notari dignum eſt, quod eo momento quo ſuperficies liquoris ad fundum vsque vaſis deſcenderit, id quod fit ſumendo $x = \frac{h}{m}a$, futurum ſit $z = \frac{1}{2}a$, hoc eſt, velocitas aquae in tubo poſt totalem vaſis depletionem erit ea quam graue acquireret cadendo ex dimidia vaſis altitudine.

De Canali trium pluriumue tuborum.

Figura 3. §. 16. Sit nunc Canalis AL conſtans tribus tubis AD, GC, BL ac totus aqua plenus: Sitque vis motrix p, quae expanſa vniformiter per ſuperficiem AE eandem premat vel vrgeat, quaeritur acceleratio et velocitas actualis, qua cum aqua ex tubo BL erumpit. Ante omnia hic notandum, duos fieri gurgites breuiſſimos, vnum in tranſitu per GF, alterum in tranſitu per BK, qui ſinguli ſuam propriam requirunt vim motricem transferendam ad amplitudinem AE, quibus dein addendae ſunt vires motrices columnarum aquearum in ſingulis tubis contentarum poſt translationem earum virium ad amplitudinem AE; quo facto ſumma omnium harum virium translatarum aequanda eſt vi motrici totali p, vnde reſultabit aequatio quaeſita.

§. 17. Sint igitur longitudines tuborum $AG = a$, $GB = b$, $BM = c$, eorumque amplitudines $AE = h$, $GF = m$, $BK = n$; dicatur hic etiam velocitas in tubo vltimo $BL = v$, velocitas in tubo ſecundo $GC = u = \frac{n}{m}v$.

velo-

velocitas in tubo vltimo $BL = v$, velocitas in tubo secundo $GC = u = \frac{n}{m} v$. Erit itaque per ratiocinium §. 9. adhibitum, vis motrix in superficie AE requisita pro gurgite per $GF = \frac{bb - mm}{2b} uu =$ (substituendo valorem ipsius uu qui est $\frac{nn}{mm} vv$) $\frac{bbnn - mmnn}{2bmm} vv$; item vis motrix in tubo GC requisita pro gurgite per $BK = \frac{mm - nn}{2m} vv$, haec vero translata ad amplitudinem AE, faciendo vt m ad b ita $\frac{mm - nn}{2m} vv$ ad $\frac{bmm - bnn}{2mm} vv$, dat vim motricem in tubo primo AD ad gurgitem producendum per BK; adeoque ambae vires simul sumtae $\frac{bbnn - mmnn}{2bmm} vv + \frac{bmm - bnn}{2mm} vv$, hoc est $\frac{bbmm - mmnn}{2bmm} vv$ seu $\frac{bb - nn}{2b} vv = p$. Atque ita determinata est velocitas fluxus per tres tubos, postquam illi ad aequabilitatem peruenit.

Corollarium.

Hinc patet, aquam per tres tubos eodem modo moueri, ac si secundo remoto tertius immediate primo esset adaptatus, posito scilicet fluxum ad summam et aequabilem velocitatem peruenisse; imo porro nunc liquet, quotquot supponantur tubi, vires motrices per gurgites singulos translatas ad tubum primum et iunctim sumtas, aequiualere in motrici vnicae in tubo primo adhibendae ad gurgitem vnicum, qui fieret adaptando immediate tubum vltimum ad tubum primum, adeoque eandem in vtroque casu sequi aequabilem velocitatem, ad quam conuergit fluxus, siue transeat aqua per totum canalem ex omnibus tubis compositum, siue tantum omissis intermediis per primum et vltimum sibi inuicem immediate connexos. Omnia igitur, quae supra de aequabili velocitate per duos tubos demonstrauimus, applicanda sunt ad canalem ex quot libuerit tubis constantem.

§. 18. Considerandа nunc venit acceleratio per canalem multorum tuborum, quando nimirum fluxus aquae incipit a quiete; primo tamen tubo semper pleno existente per affluxum nouae aquae, descendenti eadem velocitate succedentis. Hanc in rem nihil aliud faciendum, quam vt vis motrix pro massa aquea protrudenda per singulos tubos sumta transferatur ad amplitudinem tubi primi; aggregatum harum virium motricium translatarum, si addatur ad vim motricem per gurgites, hoc est, per illum vnicum qui fieret si vltimus tubus immediate primo adaptaretur, habebitur vis omnium, quae aequalis est facienda ipsi p.

§. 19. Vt hanc regulam applicemus ad canalem trium tuborum, quorum longitudines sint a, b, c, amplitudines h, m, n, sitque x longitudo spatii quam aqua in tubo vltimo seu tertio ex quiete incipiens percurrit, et v velocitas acquisita in hoc tubo. Erit ad imitationem operationis §. 9. $\frac{n}{m}x$ longitudo quam aqua eodem tempore percurrit in tubo secundo, et $\frac{n}{m}v$ eius velocitas acquisita; item $\frac{n}{h}x$ longitudo percursa in tubo primo et $\frac{n}{h}v$ velocitas acquisita. Hinc vis acceleratrix in tubo tertio $= \frac{v\,dv}{dx}$, eaque multiplicata per massam aqueam in hoc tubo nc, dabit vim motricem $= \frac{ncv\,dv}{dx}$, quae trans-

lata

lata in tubum primum dabit aequipollentem $\frac{bcvdv}{dx}$; Sic quoque vis acceleratrix in tubo ſecundo $\frac{nn}{mm}vdv : \frac{n}{m}dx = \frac{nvdv}{mdx}$, quae ducta in maſſam aquae mb tubi ſecundi, dat vim motricem $\frac{nbvdv}{dx}$, quae tranſlata in tubum primum gignit $\frac{bnbvdv}{mdx}$: Sic tandem etiam vis acceleratrix in tubo primo $= \frac{navdv}{dx}$, quae cum iam ſit in tubo primo vlterius non eſt transferenda, tres iſtae vires ſunt igitur $\frac{bcvdv}{dx}$, $\frac{bnbvdv}{mdx}$, $\frac{navdv}{dx}$, quarum ſumma addita ad vim per gurgites, habebitur $\frac{bb-nn}{2k}vv + (bc + \frac{bnb}{m} + na)\frac{vdv}{dx} =$ vi totali p.

§. 20. Sint nunc quatuor tubi, quorum longitudines a, b, c, e, amplitudines h, m, n, q, ſitque x longitudo in vltimo tubo percurſa, v velocitas acquiſita in vltimo tubo: Ad obſeruandam vniformitatem et legem progreſſionis ab vno tubo ad alterum, incipiam a primo, in quo vis acceleratrix $= \frac{qq}{hh}vdv : \frac{q}{h}dx$, eſt enim velocitas $= \frac{q}{h}v$, et elementum ſpatii percurrendi $= \frac{q}{h}v$, et elementum velocitatis $= \frac{q}{h}dv$, vt et elementum ſpatii percurrendi $= \frac{q}{h}dx$, habetur itaque ex lege accelerationis vis acceleratrix $= \frac{qq}{hh}vdv : \frac{q}{h}dx = \frac{qvdv}{hdx}$, eamque multiplicando per maſſam aquae mouendae ha, oritur vis motrix $\frac{hqavdv}{hdx}$, quae quia iam eſt in primo tubo non indiget vlteriori tranſlatione, ſed in tubo ſecundo vis acceleratrix $= \frac{qq}{mm}vdv : \frac{q}{m}dx = \frac{qvdv}{mdx}$ ducta in maſ-

 ſam

ſam aqueam mb dat vim motricem in tubo ſecundo $= \frac{mqhvdv}{mdx}$, quae translata in tubum primum dat aquipollentem $= \frac{bqbvdv}{mdx}$, eodem modo vis motrix translata ex tubo tertio in primum erit $= \frac{bqcvdv}{ndx}$, et vis motrix translata ex quarto in primum $= \frac{bqevdv}{qdx}$; omnes ergo ſimul ſumtae $= \frac{bqavdv}{bdx} + \frac{bqbvdv}{mdx} + \frac{bqcvdv}{ndx} + \frac{bqevdv}{qdx} = (\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} + \frac{e}{q}) \times \frac{bqvdv}{dx}$; ergo generaliter pro quocunque tuborum numero, quorum longitudines ſint a, b, c, --- π et amplitudines b, m, n, --- ω, erit ſumma omnium virium motricium in tubum primum translatarum $= (\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} + \frac{e}{q} --- + \frac{\pi}{\omega}) \times \frac{b\omega vdv}{dx}$, cui ſi addatur vis motrix $\frac{bb - \omega\omega}{2b} vv$ pro gurgitibus vniuerſis, emerget vis motrix totalis ponenda aequalis ipſi p; vnde reſultat haec aequatio $\frac{bb - \omega\omega}{2b} vv + (\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} --- + \frac{\pi}{\omega}) \times \frac{b\omega vdv}{dx} = p$, vel ſcribendo gz pro $\frac{1}{2}vv$ haec altera $\frac{bb - \omega\omega}{b} z + (\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} --- + \frac{\pi}{\omega}) \times \frac{b\omega dz}{dx} = \frac{1}{g}p$, vel $(bb - \omega\omega) zdx + (\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} --- + \frac{\pi}{\omega}) bb\omega dz = \frac{b}{g} pdx$.

Corollarium I.

Si longitudines a et π tuborum primi et vltimi, nec non longitudines intermediorum, manent inuariabiles, primi nempe per continuum affluxum et vltimi per effluxum, erit ſeries $\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} --- + \frac{\pi}{\omega}$ conſtans, quae vocetur M, et $p = gba$, vnde haec aequatio prodit $\frac{bb - \omega\omega}{b} z + \frac{Mb\omega dz}{dx} = ba$, vel $(bb - \omega\omega) zdx + Mbb\omega$

dz

$dz = bbadx$, cuius x conſtruitur per logarithmos in z datos, ipſum vero z per numerales datos in x.

Corollarium 2.

Quodſi vero nulla affluente aqua noua depleatur primus tubus, effluente nimirum per vltimum datae longitudinis, ſicuti fieret, ſi primus tubus inſtar vaſis verticaliter erecti contineret liquorem proprio ſuo pondere preſſum, dum per canalem horizontalem, quem reliqui conſtituunt, expelleretur: Erit, ſi x vocetur ſpatium per vltimum tubum ex quiete percurſum, altitudo liquoris reſtantis in vaſe cylindrico $= a - \frac{\omega x}{b}$, adeoque a ſerie $\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} + - - - + \frac{\pi}{\omega}$ auferendum iam eſt $\frac{\omega x}{bb}$, et pro $\frac{1}{g}p$ ſcribi debet $ba - \omega x$, id quod dat hanc aequationem $(bb - \omega\omega) z dx + M bb\omega dz - \omega\omega x dz = (bba - b\omega x) dx$. Quea per lemma §. 14. poteſt integrari.

Corollarium 3.

Porro ſi tubus vltimus ſit indefinite prolongatus, ita vt aquae ſuperficie ſuprema deſcendente in vaſe, aqua ex tubo vltimo non quidem effluat, ſed in eo continuo magis magisque protrudatur, ſcribendum eſt in ſerie non tantum $a - \frac{\omega x}{b}$ pro a, ſed etiam $\pi + x$ pro π, et ita pro hoc caſu acquiremus hanc alteram aequationem $(bb - \omega\omega) z dx + M bb\omega dz - \omega\omega x dz + bbx dz = (bba - b\omega x) dx$. Quae per idem lemma integrabilis eſt.

Corollarium 4.

Si computando vas ipſum pro primo tubo habeatur $\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} - - - = \frac{\pi}{\omega}$, hoc eſt, ſi longitudines tuborum,

 quo-

quorum numerus ſit N, vbique ſint proportionales ſuis reſpectiue amplitudinibus, generalis noſtra aequatio mutatur in hanc $(bb - \omega\omega)zdx + Nab\omega dz = \frac{1}{g}bpdx$.

Corollarium 5.

Si vero excepto vaſe vel tubo primo habeatur $\frac{b}{m} = \frac{c}{n} --- = \frac{\pi}{\omega}$, ſitque numerus reliquorum tuborum $= N$, erit vtique $(bb - \omega\omega)zdx + ba\omega dz + \frac{Nbb\omega dz'}{m} = \frac{1}{g}bp\,dx$.

Corollarium 6.

Eſto nunc numerus tuborum infinitus, ſed vnusquisqe eorum excepto primo longitudinis infinite paruae, ita vt omnes ſimul ſumti repraeſentent canalem conoidicum truncatum, cuius amplitudo antica $= m$, et poſtica $= \omega$, qualis eſt figura 8. RSTV, qui ſi concipiatur ſectus duobus planis proximis sr, tu ipſis SR, TV parallelis, erit $srut$ vnus ex iſtis tubulis habens pro longitudine ru elementum longitudinis RV totius canalis, et pro amplitudine planum sr; vnde vt habeatur ſumma ſeriei $\frac{b}{m} + \frac{c}{n} --- + \frac{\pi}{\omega}$, integrari debet $\frac{ur}{sr}$, quod in pluribus exemplis fieri poteſt algebraice, ex. gr. ſi ST ſit linea recta, h. e. ſi SRVT ſit conus decurtatus ordinarius; Item ſi ST ſit arcus hyperbolae cuiusuis generis ad aſymt. RT.

Figura 8

§. 21. Illuſtremus rem ipſam in priori exemplo: Sit nempe SRVT conus decurtatus, cuius amplitudo antica $SR = m$, poſtica $TV = \omega$, proinde earum ſemidiametri vt $\sqrt{m}$ et $\sqrt{\omega}$; Porro dicatur abſciſſa $Vu = t$, eius

eius elementum $ur = dt$, ſemidiameter amplitudinis $tu = y$, totaque tubi longitudo RV$=$L, inuenietur $y = \frac{t\sqrt{m} - t\sqrt{\omega} + L\sqrt{\omega}}{L}$ ipſa vero amplitudo sr, quae eſt vt $yy = \frac{(t\sqrt{m} - t\sqrt{\omega} + L\sqrt{\omega})^2}{L^2}$, quare $\frac{ur}{sr} = \frac{L^2 dt}{(t\sqrt{m} - t\sqrt{\omega} + L\sqrt{\omega})^2}$, cuius integrale debito modo rectificatum $= \frac{Lt}{t\sqrt{m\omega} - t\omega + L\omega}$, adeoque per totum canalem RSTV, ſumendo nempe Vu ſeu $t =$ VR $=$ L, habetur integrale quaeſitum $= \frac{L}{\sqrt{m\omega}} = \frac{b}{m} + \frac{c}{n} - - - + \frac{\pi}{\omega}$: Atque ſic aequatio noſtra generalis §. 20. $(bb - \omega\omega)zdx + (\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} - - - + \frac{\pi}{\omega})bb\omega dz = \frac{b}{g}pdx$, dabit pro canali ſeu tubo conico, cuius longitudo L et duae amplitudines extremae ſunt m et ω, exiſtente vaſis altitudine b, hanc aequat. $(bb - \omega\omega)zdx + ba\omega dz + \frac{bbL\omega dz}{\sqrt{m\omega}} = \frac{1}{g}bpdx$.

§. 22. Pro caſu Coroll. 1. §. 20. erit quoque $(bb - \omega\omega)zdx + Mbb\omega dz - \omega\omega x dz = (bba - b\omega x)dx$. Pro caſu Coroll. 2. eiusdem paragr. erit ſumto pro M eodem, $(bb - \omega\omega)zdx + Mbb\omega dz - \omega\omega x dz = (bba - b\omega x)dx$. Pro caſu Coroll. 3. intelligendum eſt tubum conicum in extremitate ſibi adiunctum habere tubum cylindricum indeterminatae longitudinis, et quidem amplitudinis ω, ita vt in eo aqua propulſa ſemper contineatur, atque percurrat ab initio motus per ſpatium x, Erit tunc $(bb - \omega\omega)zdx + Mbb\omega dz - \omega\omega x dz + bbxdz = (bba - b\omega x)dx$.

Scholium Generale.

§. 23. Poſſent ex his deriuari plura alia corollaria vtilia non minus quam curioſa et elegantia: Nam quae

ad

ad hanc ſpectant materiam, omne ſuum fundamentum habent in iam traditis et explicatis, licet id non indicauerim expreſſis verbis; ex. gr. ſuppoſuimus quidem aquam aliumue liquorem in primo duntaxat tubo tanquam in vaſe grauitare, indeque vrgeri per canalem ſitum horizontalem habentem, per quem dum mouetur aqua, deſtituitur quaſi ſua propria grauitate. Interim ſi in ipſo canali, ſeu in tubis qui illum componunt, retineat quoque grauitatem ſuam ſiue totam ſiue ſaltem partem, ſic vti accideret ſi tubi non eſſent horizontales, ſed vel verticales vel diuerſimode inclinati ad horizontem, id nullam prorſus habet difficultatem, poteſt enim aquae propria grauitas ex quolibet tubo (per § 2.) transferri in vas vel in tubum primum, adeo vt aqua in reliquis tubis conſiderari poſſit tanquam deſtituta grauitate, ſed translatae grauitationes vna cum pondere aquae in vaſe vel tubo primo iunctim ſumtae ſpectari queant pro eo, quod vocauimus p ſeu vim motricem fundamentalem, a qua fluxus totius maſſae aqueae generatur. Vt ſcilicet

Figura 4. ſi canalis E G B L conſtaret tribus tubis diuerſae amplitudinis AD, GC, BL, quorum primus AD haberet amplitudinem AE vel GD, alter GC amplitudinem GF vel BK, tertius BL amplitudinem BK vel ML; Primus vero debet eſſe verticalis, ſecundus faceret cum horizonte angulum GBN, tertius angulum BMO: Sint amplitudines $AE = b$, $GF = m$, $BK = n$; vis grauitatis ſeu acceleratrix naturalis $= g$; Erit vis motrix in tubo AD aqua pleno $= gb \times AG$. Item ob GB. GN :: $g \cdot \frac{g \times GN}{GB}$ $=$ vi acceleratrici aquae liquoris in tubo GC; Item BM. BO ::

$BO :: g \frac{g \times BO}{BM}$ = vi acceleratrici aquae in tubo BL. Hinc $\frac{g \times GN}{GB} \times mb$ ſeu $gm \times GN$ dabit vim motricem aquae tubi ſecundi, ſimiliter $gn \times BO$ dat vim motricem aquae in tubo tertio.

Sed transferendae iam ſunt vires motrices ex tubis obliquis GC et BL, in verticalem, faciendo $m.b :: gm\, GN.gb \times GN$, et $n.b :: gn \times BO.gb \times BO$; hunc itaque in modum conſiderari poteſt aqua vniuerſa in tubis tanquam carens grauitate, ſed eius loco preſſa prima columna AD vi motrici expanſa vniformiter per ſuperficiem AE, quae vis eſſet $= gb(AG + GN + BO) =$ (ob $AG + GN + BO$ = toti altitudini verticali canalis, quae ſit A) $gb \times A = p$. Atque ita reduximus hunc caſum aliosque ſimiles ad methodum noſtram generalem. Nota, ſi vnus pluresue ex tubis oblique ſurſum dirigatur, erit pro eo aut pro iis vis motrix translata in tubum primum negatiua, eritque ſumenda pro A exceſſus quo affirmatiuarum ſumma ſuperat ſummam negatiuarum, aut viciſſim; vno verbo, A erit exceſſus vel defectus, quo ſuperficies aquae in primo tubo altior eſt humiliorue ſupra horizontem, quam eſt ſuperficies aquae in tubo vltimo. Hoc inſeruit determinationi legis, ſecundum quam liquores oſcillantur in tubis recuruis qualibuscunque: Huc etiam refer problema ſequens a Filio mihi propoſitum ante ſex ſeptemue annos, ſed paulo generalius conceptum.

Problema Hydraulicum.

§. 24. ABCD *eſt vas aqua plenum vsque ad* EF; *Figura* 5.
GI *eſt tubus cylindricus, cuius pars* KI *aqua pariter ple-*

 na

na est: Obducto pollice super orificium GO, *tubus immergitur aquae in vase contentae, sed ita tantum vt pars tubi* MI *maior quam* KI *intra aquam externam penetret vsque ad* MN; *Remoto nunc pollice ascendet (ob praeualentem pressionem aquae externae) superficies* KL *atque ab impetu concepto pertinget supra superficiem* EF *vsque ad* PQ. *Quaeritur altitudo* MP *vel* NQ, *quousque nempe aqua in tubo ascendere valet.*

Solutio.

Dicatur pars tubi immersa HM $= a$, pars eius HK primitus aqua plena $= b$ minor quam a, amplitudo vasis EF $= h$, amplitudo tubi GO vel HI $= m$. Iam vero aqua tubum circumdans et deorsum nitens suo pondere per orificium apertum HI ingredi et ascendere conatur propellendo partem aquae HL superincumbentem; Actionem istam atque effectum hoc modo concipio: Sit ad orificium HI adaptatus alius tubus deorsum spectans amplitudinis vasis $= h$ et altitudinis HM $= a$; Sit hic tubus plenus aqua, sed tali aqua, quae leuitaret, hoc est, quae sursum niteretur et quidem tanta vi praecise quanta deorsum grauitat aqua (cuius loco illa in tubo per mentis fictionem substituitur) in vase altitudinis MH; proinde erit vis motrix aquae in hoc fictitio tubo sursum tendentis $= gha$, et sic huius respectu erit vis motrix in tubo HO aquae HL negatiua $= gmb$, quae translata in tubum fictitium dat ghb, quae vtpote contraria ipsi gha, ab hac subducenda est, et relinquet $gha - ghb$ seu $gh(a-b)$ pro vi motrice, quam vocauimus p; Cui igitur aequandae sunt vires motrices, quae a graa fluxu generantur per gurgitem formandum ad ingressum HI, per tubum HO fluendo et per tubum fictitium ascendendo. Hinc si x vocetur spatium ab aqua intra tubum HO percursum incipiendo a KL, adeoque spatium quod superficies aquae in tubo fictitio percurrit ascendendo $= \frac{m}{b}x$. Itaque ad imitationem ratiocinii §. 13. habebimus vim acceleratricem in tubo HO $= \frac{vdv}{dx}$, quae multiplicata per massam aquae sursum pellendae $mb + mx$, dat vim motricem in hoc tubo $= (mb + mx)\frac{vdv}{dx}$, transferendam in tubum fictitium, vt inde habeamus vim motricem aequipollentem $= (bb + bx)\frac{vdv}{dx}$; Et cum praeterea in tubo fictitio (in quo aqua ascendit velocitate $\frac{m}{b}v$ per spatium $\frac{m}{b}x$) vis motrix propria, non amplius transferenda, fit $= (ba - mx)\frac{mvdv}{bdx}$; quibus ergo binis viribus addita porro ea quae ad formandum gurgitem requiritur, obtinebimus vim motricem totalem $\frac{bb-mm}{2b}vv + (bb + bx)\frac{vdv}{dx} + (ba - mx)\frac{mvdv}{bdx}$; Verum quia hic p est $= gb(a - \frac{m}{b}x - b - x)$ seu $g(ba - bb - mx - bx)$, resultabit aequatio pro determinanda velocitate v, nempe haec $\frac{bb-mm}{2b}vv + (bb + bx + ma - \frac{mm}{b}x)\frac{vdv}{dx} = g(ba - bb - mx - bx)$, qua reducta scriptoque gz pro $\frac{1}{2}vv$, fiet $(bb - mm)zdx + (bbb + bbx + bma - mmx)dz = (bba - bbb - bmx - bbx)dx$, quae per Lemma est integrabilis. Si vas AC seu tubus fictitius est amplitudinis perquam magnae (qui problematis tacitus est sensus) emergit aequatio multo simplicior (neglectis nempe terminis in quibus m reperitur, ceterisque per bb diuisis) scilicet haec $zdx + (b + x)dz = (a - b)dx - xdx$,

 quae

quae integrata dat $(b+x)z = (a-b)x - \frac{1}{2}xx$, vnde si $z = 0$, h. e. si superficies KL cessat ascendere, id quod fit, quando ad maximam, quousque ascendere potest, altitudinem PQ peruenit, oportet vt tunc etiam $(a-b)x - \frac{1}{2}xx$, fit $= 0$, quocirca $a-b = \frac{1}{2}x$, seu $x = 2a - 2b$; ergo $KP = 2KM$.

§. 25. Idem problema solui potest facilius, si consideretur tanquam casus §. 13. concipiendo scilicet in Fig. 2. vas AF aqua plenum, ab initio fluxus habere altitudi-
Figura 5. nem $= a = MH$ et tubum FC, qui in Fig. 2. est horizontalis, iam esse verticaliter erectum atque indefinite continuatum, in quo pars infima longitudinis $b = HK$, fit ab initio aqua plena. Iam ergo si a praeualente pressione columnae aqueae in vase, aqua in tubo supra b ascendit per spatium $= x$, et proin in vase descendit per spatium $= \frac{m}{b}x$: Habebimus vim motricem in vase oriundam a pondere superstitis aquae $= g(ba - mx)$, ac vim motricem in tubo verticali, priori oppositam a pondere totius aquae in tubo existentis venientem $= g(mb + mx)$, quae translata in vas dat $g(bb + bx)$ a priori $g(ba - mx)$ subtrahendum, et ita relinquetur $p = g(ba - bb - bx - mx)$, cui aequari debet summa trium virium motricium a motu generandarum per gurgitem, per tubum, et per vas, vt inuenimus §. 13. quo facto haec suppeditatur aequatio $\frac{bb - mm}{2b} vv + \frac{bbvdv + bxvdv}{dx} + \frac{mvdv}{bdx}(ba - mx) = p = g(ba - bb - bx - mx)$, quae coniunctis coniungendis hanc habebit formam $\frac{bb - mm}{2b} vv + (bb + bx + ma - \frac{mmx}{b}) \frac{vdv}{dx} = g(ba - bb - mx - bx)$, prorsus eandem quam modo supra inuenimus. Ergo etc.

§. 26.

§. 26. Ex theoria noſtra huc vsque expoſita reddi poteſt ratio phyſica (quam nec *Newtonus* nec quisquam alius recte dedit, ex principiis nempe pure dynamicis) cur ſcilicet corpus cylindricum ſolidum, quod vniformiter mouetur, baſi ſua antrorſum verſa, in fluido continuo infinito eiusdem cum corpore denſitatis, offendat reſiſtentiam aequalem ponderi corporis cylindrici, poſito nimirum velocitatem corporis eſſe aequalem illi quam graue libere cadendo ex altitudine aequali lateri cylindri poſſet acquirere. Ex pluribus, quae mihi ſunt demonſtrationibus, hanc dare lubet theoriae noſtrae hydraulicae in hoc ſcripto ſtabilitae innixam.

Demonſtratio.

Sit cylindrus RMNS, qui moueatur ſecundum directionem lateris MN in fluido ſtagnante aeque denſo, continuo et infinito: Dicatur velocitas cylindri $= v$, latus $MN = a$, baſis ſeu amplitudo $NS = b$; Fingamus loco cylindri ſolidi eſſe tubum MS eadem materia fluida plenum, et per hunc tubum quieſcentem (vbi praeter figuram nihil aliud conſidero) fluere continua et aequabili velocitate v, integrum cylindrum fluidum, ita vt tubus ſemper plenus maneat et quantum per NS effluit tantundem per MR eadem promtitudine reſarciatur per nouum affluxum; attendenti ſit ſtatim manifeſtum, cylindrum hunc fluidum, in effluxu per NS eandem prorſus offendere vim reſiſtentem ab allapſu ad fluidum ſtagnans externum et motui oppoſitum, quam offenderet ipſe cylindrus ſolidus; quia cylindrus fluidus dum mouetur per tubum haberi poteſt pro ſolido, caeteraeque omnes circumſtantiae ſunt Figura 6.

 pa-

pares; videndum ergo eſt ſolummodo, quanta ſit reſiſtentia quam patitur fluidum egrediens in ipſo egreſſus momento. Verum euidens eſt, hanc reſiſtentiam oriri a gurgite TNSV, qui formatur pone orificium tubî NS, cuius gurgitis figura haec eſſe debet, vt in diſtantia quantumuis parua habeat aſymtoton FG perpendicularem ad directionem axi tubi, propterea quoniam ob decreſcentem motum fluidi egreſſi, amplitudines gurgitis viciſſim accreſcere ac breuiſſimo tempore veluti in infinitum dilatari debent, ſuppono enim fluidum ex tubo egrediens non eſſe permiſcibile cum altero extra ſtagnante. Hinc per ea quae §. 9. demonſtrata ſunt, et quia vltima velocitas in gurgite eſt $= 0$, erit vis per gurgitem $= \frac{1}{2} bvv$; adeoque ob conſtantem velocitatem in tubo erit per Coroll. 2. §. 9. $\frac{1}{2} bvv = p = gba$, hoc eſt, $\frac{1}{2} vv = ga$, hinc ſcribendo gz pro $\frac{1}{2} vv$, erit $z = a$, oportet ergo velocitatem requiſitam fluidi in tubo, ad id vt fiat reſiſtentia aequalis ponderi cylindri, eam eſſe debere, quam acquireret graue libere cadens ex altitudine $= a$. Q.E.D.

Corollarium.

Ex demonſtrata hac fundamentali proprietate (antea nondum ſatis accurate ſtabilita) ſequuntur vltro omnia quae de reſiſtentiis fluidorum continuorum et non elaſticorum vulgo traduntur: ſcilicet reſiſtentiae in huiusmodi fluidis perpendiculariter in plana oppoſita corporum exercitae ſunt in ratione compoſita ex duplicata velocitatis relatiuae et ſimplici denſitatis fluidi. Ex hoc denique reliqua deducuntur.

De

De presſione fluidi in fundum vaſis cylindri (ſine annexo tubo) per foramen effluentis.

1. Eſto vas cylindricum AF fluido conſtanter plenum, cuius amplitudo $AE = b$, longitudo AG vel EF $= a$, amplitudo foraminis $GB = m$. Habeat fluidum in egreſſu, poſtquam aliquamdiu iam effluxit, velocitatem $= v$, ideoque in ipſo vaſe velocitatem $= \frac{m}{b} v$. Sit GL longitudo cylindri cuius baſis m, qui cylindrus deſignet quantitatem fluidi iam egreſſi $= x$. Sit nunc porro velocitas poſtfutura $= u$, et longitudo praedicti cylindri fluidi vlterius egreſſuri $= y$, adeoque longitudo totalis tam egreſſi quam egreſſuri $= x + y$. Concipiamus autem fluidum carere omni grauitate, ac proin nullam aliam habere vim premendi fundum, quam eam, quae a motu pendet; haec vis offendit reſiſtentiam aequalem ab oppoſitione fundi, ob aequalitatem inter actionem et reactionem: Reſiſtentia vero inuenitur, ſi more ſolito quaeratur vis retardatrix, quae velocitatem columnae fluidi imminuit; illaque multiplicata per maſſam columnae, id eſt, per ba dabit reſiſtentiam vel preſſionem in fundum; rem ita perago: Aequatio §. 11. expoſita $\frac{bb-mm}{2b} vv + \frac{bbvdv}{dx} + \frac{mavdv}{dx} = p$, in praeſenti caſu (vbi longitudo tubi vtpote abſentis $b = 0$, et pondus columnae fluidi in vaſe $p = 0$) mutatur in hanc aequationem particularem $\frac{bb-mm}{2b} vv + \frac{mavdv}{dx} = 0$, et ponendo u pro v in hanc ſimilem $\frac{bb-mm}{2b} uu + \frac{maudu}{dx} = 0$. Figura 7.

2. Per

2. Per reductionem et scribendo dy pro dx (nunc enim x est constans, dum $x+y$ est longitudo indeterminata et variabilis cylindri fluidi egredientis) prouenit aequatio sub hac forma $\frac{bb-mm}{2b}dy+\frac{madu}{u}=0$; atque integrando $\frac{bb-mm}{2b}(x+y)+malu=malv+\frac{bb-mm}{2b}x$; hoc ita scribo adiiciendo duos postremos terminos constantes rectificationis gratia, eum in finem, vt euanescente y et incipiente u ab v, ipsa aequatio fiat identica. Habebitur itaque $mal(\frac{u}{v})=-(\frac{bb-mm}{2b})y$; vnde transeundo ad numeros et ponendo $1=lf$, oritur $uu=vv$ $f^{-(\frac{bb-mm}{bma})y}$.

3. Differentiando probe inuentam hanc aequationem (sumto nimirum v pro constante) habebitur udu $=-vvdy(\frac{bb-mm}{2bma}):f^{\frac{(bb-mm)y}{bma}}$. Est autem in vase vis acceleratrix negatiua, hoc est, abit illa in vim retardatricem $\frac{-mudu}{bdy}$, quae itaque erit $=vv(\frac{bb-mm}{2bba}):f^{\frac{(bb-mm)y}{bma}}$.

4. Haec vis quae nobis vsui in primo tantum momento post abolitionem vel cessationem suppositam grauitatis, quam antea columna fluidi in vase verticaliter erecto habebat, erit vtique $y=0$, et $vv=2gz$, adeoque vis illa inuenta erit $=gz(\frac{bb-mm}{bba})$, vid. art. 11. vbi $z=$ $(\frac{bba}{bb-mm})\times\left(1-f^{\frac{(bb-mm)x}{bma}}\right)$; quo igitur substituto, reperietur vis retardatrix $=g\left(1-1:f^{\frac{(bb-mm)x}{bma}}\right)$, ac proinde

de multiplicando per maſſam fluidi ba, habetur reſiſtentia vel preſſio in fundum $= gba\left(1 - 1 : f^{\frac{(bb-mm)x}{bma}}\right)$ a ſolo motu fluidi oriunda, cui ſi praeterea addatur pondus columnae fluidi gba, quod in ſitu verticali conſtanter agit in fundum ſeu moueatur fluidum ſeu quieſcat, prodibit preſſio totalis $= gba + gab \times \left(1 - 1 : f^{\frac{(bb-mm)x}{bma}}\right)$.

Corollarium.

Si $x = \infty$, erit preſſio totalis $= gba + gba : f^{\circ} = 2gba$: Eſt enim $f^{\circ} = 1$. Si vero $x = 0$, preſſio fundi erit $= gba + gba(1 - 1) = gba$, quod vel hinc quoque patet verum eſſe, quia ab initio fluxus ſolum pondus cylindri fluidi agit in fundum; poſtea creſcente x, creſcit etiam preſſio, ita tamen vt nunquam attingat $2gba$ nedum excedat, tametſi eo appropinquet data quauis quantitate propius.

Scholium.

Ne quis autem credat, ponderoſum liquorem in vaſe aliter forſan premere fundum cum ipſe mouetur quam cum quieſcit, non obſtante quod contrarium facile pateat attendenti ad naturam virium immaterialium, vt eſt grauitatis cauſa extra corpus conſiderata, quae vires agunt in inſtanti per totam maſſam animandam, adeoque eodem modo agunt eandemque preſſionem exercent in obſtaculum, ac ſi liquor grauis ei incumbens quieſceret. Probabo tamen per calculum rei veritatem in noſtro caſu; ſtatim vtique liquet, liquorem grauem deſcendendo in vaſe accelerari, debet autem eius vis motrix, quantacuntacunque illa ſit, duas habere partes, quarum vna deſtinatur ad vim retardatricem, a fundo oppoſitam, contraponderandam. altera vero pars reſidua impenditur in accelerationem deſcenſus actualis; Haec vero poſterior illa ipſa eſt, quae habetur ex aequatione §. 11. petenda, nempe $z = \left(\frac{bba}{bb-mm}\right) \times \left(1 - 1 : f^{\frac{+(bb-mm)x}{bma}}\right)$, quam differentiando et per g multiplicando habebimus $g\,dz = (v\,dv)$ $= \frac{b}{m} g\,dx : f^{\frac{(bb-mm)x}{bma}}$, idcirco vis acceleratrix reſidua in vaſe ſeu $\frac{mv\,dv}{b\,dx} = g : f^{\frac{(bb-mm)x}{bma}}$, cui ſi addatur vis, quam deſtruit, retardatrix ſupra inuenta $g\left(1 - 1 : f^{\frac{(bb-mm)x}{bma}}\right)$; faciunt ſimul vim acceleratricem $= g$, ideoque preſſionem a pondere oriundam $= gba$, hoc eſt, aequalem ipſi ponderi. Q. E. D.

Atque ita procedendum erit in reliquis caſibus, vbi vnus pluresue tubi adaptati ſunt vaſi, vt ſcilicet ante omnia quaeratur vis retardatrix ad fundum alicuius ex tubis datis, ſupponendo fluidum ſubito amittere ſuam grauitatem, atque tum vi retardatrici inuentae addatur preſſio a ſolo pondere fluidi proueniens, (conſiderando illud tanquam in quiete conſtitutum et ſtagnans) atque propagata vel immediate ad primum fundum vel mediate per praecedentes tubos ad quodcunque cupimus fundum.

Adumbratio calculi inſtituendi pro determinandis ſingulari modo velocitatibus aquae per plures tubos ex vno in alterum fluentis ac ſi ſeorſim per ſingulos ſolitarios effluerent; atque hinc inueniendis preſſionibus in fundum ſingulorum exercitis.

In

In anteceſſum monere oportet, nos hic ſupponere canalem compoſitum ex variis tubis ad ſe inuicem adaptatis qualemcunque habentibus ſitum, verticalem, horizontalem vel inclinatum, ſupponimus porro, canalem aqua conſtanter plenum eſſe, fluxumque perueniſſe ad aequabilitatem, dum tantum liquoris effluit ex quolibet tubo, quantum neceſſe eſt ad ſuppeditandum tubo proxime inferiori, vt adeo vnusquisque conſtanter plenus eſſe, atque ſinguli ita conſiderari queant ac ſi eſſent ſolitarii et ſeorſim poſiti.

Sit longitudo tubi primi et ſupremi $= a$, ſecundi proxime inferioris $= b$, tertii $= c$, etc. amplitudo primi $= h$, ſecundi $= m$, tertii $= n$, quarti $= q$, etc. foramen tubi primi $=$ amplitudini tubi ſecundi $= m$, foramen ſecundi $= n$, foramen tertii $= q$, etc. grauitas naturalis $= g$, grauitas naturalis in diuerſis directionibus obliquis $= \overset{\mathrm{I}}{\gamma}, \overset{\mathrm{II}}{\gamma}, \overset{\mathrm{III}}{\gamma}$ etc. Sit vero grauitas ex actione mutua in tubis adaptatis oriunda pro vaſe ſeu tubo primo $= \overset{\mathrm{I}}{g}$, pro ſecundo $= \overset{\mathrm{II}}{g}$, pro tertio $= \overset{\mathrm{III}}{g}$, etc. Longitudo cylindri aquei egreſſi per foramen primum $= \overset{\mathrm{I}}{x}$, ea per ſecundum $= \overset{\mathrm{II}}{x}$, per tertium $= \overset{\mathrm{III}}{x}$, etc. Altitudo vnde graue delapſum acquirit velocitatem aquae egredientis per foramen primum $= \overset{\mathrm{I}}{z}$, ea quae per ſecundum $= \overset{\mathrm{II}}{z}$, per tertium $= \overset{\mathrm{III}}{z}$, etc. His ita poſitis et reliquis vt ſunt in ſcripto hydraulico, habetur vtique pro tubis ad ſe inuicem adaptatis per translationem virium, et quidem pro ca-

canali duorum tuborum $gba + \overset{I}{\gamma} bb = \overset{I}{g} ba + \overset{II}{g} bb$ vel $ga + \overset{I}{\gamma} b = \overset{I}{g} a + \overset{II}{g} b$; pro canali trium tuborum $ga + \overset{I}{\gamma} b + \overset{II}{\gamma} c = \overset{I}{g} a + \overset{II}{g} b + \overset{III}{g} c$, etc. Has aequationes voco fundamentales. Porro clarum eſt haberi $\overset{I}{z} = \frac{nn}{mm} \overset{II}{z} = \frac{qq}{mm} \overset{III}{z}$ etc. Item $\overset{I}{x} = \frac{n}{m} \overset{II}{x} = \frac{q}{m} \overset{III}{x}$ etc. Habentur autem per §. 11. aequationes ſequentes pro tubis ſolitariis verticaliter erectis:

Pro tubo primo, $g(bb - mm)\overset{I}{z} d\overset{I}{x} + gbmad\overset{I}{z} = \overset{I}{g} bbad\overset{I}{x}$

— — ſecundo, $g(mm - nn)\overset{II}{z} d\overset{II}{x} + gmnbd\overset{II}{z} = \overset{II}{g} mmbd\overset{II}{x}$

— — tertio, $g(nn - qq)\overset{III}{z} d\overset{III}{x} + gnqcd\overset{III}{z} = \overset{III}{g} nncd\overset{III}{x}$

Et ita deinceps.

Nota, ſi quis ex tubis eſſet horizontalis, in aequatione fundamentali euaneſceret γ ad ipſum pertinens, ſic e. gr. ſi tres eſſent tubi, quorum primus tantum verticalis, ſed reliqui duo horizontales, foret aequatio fundamentalis haec $ga = \overset{I}{g} a + \overset{II}{g} b + \overset{III}{g} c$, ſin vero omnes tres eſſent verticales, haec haberetur fundamentalis $g(a + b + c) = \overset{I}{g} a + \overset{II}{g} b + \overset{III}{g} c$.

Quod nunc in hac inueſtigatione palmarium eſt, oportet definire vices grauitatum $\overset{I}{g}, \overset{II}{g}, \overset{III}{g}$ etc ex mutua actione grauitatis naturalis reſultantium, vnde poſtea tam velocitates quam preſſiones in fundo tuborum innoteſcent. Hoc

Hoc autem ita perago; Ad imitationem operationis adhibitae in §. 11. inuenietur pro singulis tubis vt sequitur:

Pro tubo primo, $\overset{I}{z} = \frac{\overset{I}{g}}{g}\left(\frac{bba}{bb-mm}\right)\times\left(1-1:f^{\frac{bb-mm}{bma}\overset{I}{x}}\right)$

Pro tubo secundo, $\overset{II}{z} = \frac{\overset{II}{g}}{g}\left(\frac{mmb}{mm-nn}\right)\times\left(1-1:f^{\frac{mm-nn}{mnb}\overset{II}{x}}\right)$

Pro tubo tertio, $\overset{III}{z} = \frac{\overset{III}{g}}{g}\left(\frac{nnc}{nn-qq}\right)\times\left(1-1:f^{\frac{nn-qq}{ncq}\overset{III}{x}}\right)$;

Atque sic porro.

Quoniam itaque $\overset{I}{z}, \overset{II}{z}, \overset{III}{z}$, vt et $\overset{I}{x}, \overset{II}{x}, \overset{III}{x}$ per se inuicem dantur, est enim $\overset{I}{z} = \frac{nn}{mm}\overset{II}{z} = \frac{qq}{mm}\overset{III}{z}$, atque $\overset{I}{x} = \frac{n}{m}\overset{II}{x} = \frac{q}{m}\overset{III}{x}$; Substituantur valores singulorum z et x per vnum expressos, et habebuntur tot aequationes, vna pauciores, quot sunt tubi vel quot species grauitatis $\overset{I}{g}, \overset{II}{g}, \overset{III}{g}$ etc. nempe ex. gr. pro tribus, seruato $\overset{I}{z}$ ad quod reliqua $\overset{II}{z}, \overset{III}{z}$ sunt reducenda vt et $\overset{II}{x}, \overset{III}{x}$ ad seruatum $\overset{I}{x}$: habebuntur hae duae aequationes: $\overset{I}{z}$ vel $\frac{\overset{I}{g}}{g}\left(\frac{bba}{bb-mm}\right)\times\left(1\ 1:f^{\frac{bb-mm}{mba}\overset{I}{x}}\right)$ $= \frac{nn}{mm}\overset{II}{z}$ vel $\frac{nn\overset{II}{g}}{mmg}\left(\frac{mmb}{mm-nn}\right)\times\left((1-1\cdot f^{\frac{mm-nn}{mnb}\times\frac{n}{m}\overset{I}{x}}\right)$, idemque illud primum etiam $= \frac{qq\overset{III}{g}}{mmg}\left(\frac{nnc}{nn-qq}\right)\times\left(1-1:f^{\frac{nn-qq}{nqc}\times\frac{q}{m}\overset{I}{x}}\right)$ Sed cum tres sint quaerendae grauitatis species $\overset{I}{g}, \overset{II}{g}, \overset{III}{g}$, alia adhuc requiritur aequatio ad determinationem probleblematis; Haec autem peti debet ex aequatione fundamentali $g a+\overset{I}{\gamma} b+\overset{II}{\gamma} c=\overset{I}{g} a+\overset{II}{g} b+\overset{III}{g} c$, aut (si quidem duo tubi supponuntur horizontales) ex hac tantum $g a =\overset{I}{g} a+\overset{II}{g} b+\overset{III}{g} c$, euanescunt namque $\overset{I}{\gamma}, \overset{II}{\gamma}$.

Faciamus applicationem, breuitatis gratia, ad casum simplicissimum duorum tuborum aqua constanter plenorum, quorum primus sit verticalis, alter horizontalis; ponamusque fluxum peruenisse ad vniformitatem, hoc est, $\overset{I}{x}, \overset{II}{x}$, etc. esse $=\infty$. Prodibit vna aequatio ex $\overset{I}{z}$ petita, $\overset{I}{g}\left(\frac{bba}{bb-mm}\right)=\frac{nn\overset{II}{g}}{mm}\left(\frac{mmb}{mm-nn}\right)$, altera vero ex fundamentali, $g a=\overset{I}{g} a+\overset{II}{g} b$, ex quibus rite procedendo elicitur $\overset{I}{g}=\frac{gnn(bb-mm)}{mm(bb-nn)}$, et $\overset{II}{g}=\frac{gbba(mm-nn)}{mmb(bb-nn)}$. Hinc omnia reliqua deriuantur, nempe $\overset{I}{z}=\frac{bbnn}{mm(bb-nn)}$, et $\overset{II}{z}=\frac{bba}{bb-nn}$, prorsus consentanea iis, quae supra demonstrata dedimus. Item pressiones in fundum cuiuslibet tubi facillime eruuntur: Quia enim singuli tubi considerari possunt, tanquam essent solitarii, adhiberi debet formula, quam inuenimus supra (pag. 40. n 4) pro tubo primo et vnico, scribendo tantum litteras, quae cuilibet alii tubo, tanquam vnico seu solitario considerato, conueniunt: Cum itaque pro illo vnico inuenta sit pressio totalis $=gba+gba\times\left(1-1:f^{\frac{bb-mm}{bma}x}\right)$, scribendum hic erit pro primo tubo pressio totalis $=gba+gba\times\left(1-1:f^{\frac{bb-mm}{bma}\overset{I}{x}}\right)$, pro secunpro ſecundo $= gmb + gmb \times \left(1 - 1 : f^{\frac{mm-nn}{mnb}\overset{\mathrm{II}}{x}}\right)$, pro tertio $= g n \overset{\mathrm{III}}{c} + g n \overset{\mathrm{III}}{c} \times \left(1 - 1 : f^{\frac{nn-qq}{nqc}\overset{\mathrm{III}}{x}}\right)$; Atque ſubſtitutis valoribus ipſarum $\overset{\mathrm{I}}{g}$, $\overset{\mathrm{II}}{g}$, $\overset{\mathrm{III}}{g}$, vel quia applicationem facimus ad duos tantum tubos, et quidem vbi $x = \infty$, nonniſi ipſarum $\overset{\mathrm{I}}{g}$ et $\overset{\mathrm{II}}{g}$ valores ſubſtitui debent, qui ſunt $\overset{\mathrm{I}}{g} = \frac{gnn(bb-mm)}{mm(bb-nn)}$, et $\overset{\mathrm{II}}{g} = \frac{gbb(mn-nn)}{mmb(bb-nn)}$, habebitur preſſio prima $= 2gba \times \frac{nn(bb-mm)}{mm(bb-nn)}$, et preſſio ſecunda $\frac{2gbba}{m} \times \frac{mm-nn}{bb-nn}$. Si praeterea $b = \infty$ ſed m et n finitae, erit preſſio prima $= 2gba \times \frac{nn}{mm} = \infty$, vt fieri par eſt, ſed preſſio ſecunda $= \frac{2ga}{m} \times (mm - nn) =$ finito.

Hac methodo probe obſeruata inuenientur pro 5 tubis, grauitates $\overset{\mathrm{I}}{g}$, $\overset{\mathrm{II}}{g}$, $\overset{\mathrm{III}}{g}$, $\overset{\mathrm{IV}}{g}$, $\overset{\mathrm{V}}{g}$, vt ſequitur:

$$\overset{\mathrm{I}}{g} = \frac{gbbssa(bb-mm)}{bbmma(bb-ss)}$$

$$\overset{\mathrm{II}}{g} = \frac{bbbssa(mm-nn)}{mmnnb(bb-ss)}$$

$$\overset{\mathrm{III}}{g} = \frac{gbbssa(nn-qq)}{nnqqc(bb-ss)}$$

$$\overset{\mathrm{IV}}{g} = \frac{gbbssa(qq-rr)}{qqrrd(bb-ss)}$$

$$\overset{\mathrm{V}}{g} = \frac{gbbssa(rr-ss)}{rrsse(bb-ss)}$$

Ex hoc laterculo plus ſatis elucet lex progreſſionis pro quocunque numero tuborum: Adeoque in canali conoidico truncato FB, vaſi cylindrico AF adaptato, qui canalis Figura 8.

nalis consideratur tanquam conflatus ex innumeris tubis infinite paruae longitudinis, inuenietur pro qualibet amplitudine N O, species grauitatis, qua stratum aquae infinite paruae crassitiei animatur, quando ad aequabilem fluxum peruenerit: dicendo enim amplitudinem $NO = y$, crassitiem strati aquei $= dx$, reliquasque litteras adhibendo quas hactenus vsurpauimus, erit grauitas animans hoc stratum $= \frac{gbb\omega\omega a(2ydy)}{y^4 dx(bb-\omega\omega)} = \frac{gbb\omega\omega a(2dy)}{y^3 dx(bb-\omega\omega)}$; proin pondus ipsum huius strati seu pressio qua vrgetur prodibit, si multiplicatur per quantitatem materiae ydx: Erit igitur haec pressio $= \frac{gbb\omega\omega a(2dy)}{yy(bb-\omega\omega)}$. Huic autem addendae sunt pressiones omnium stratorum sequentium ab O vsque ad extremum B, sed per translationem ad locum O collectae, sicuti postulat methodus nostra ab initio exposita, hunc in finem ponuntur tantisper y constans, et alia amplitudo variabilis $RS = t$, erit huius strati tdx pressio $= \frac{gbb\omega\omega a(2dt)}{tt(bb-\omega\omega)}$, quae transferatur ad locum inuariabilem N O, faciendo vt t ad y, ita $\frac{gbb\omega\omega ga(2dt)}{tt(bb-\omega\omega)}$ ad $\frac{gbb\omega\omega ay(2dt)}{tt(bb-\omega\omega)}$, cuius integrale debite correctum dat $\frac{gbb\omega\omega ay}{\omega\omega(bb-\omega\omega)} - \frac{gbb\omega\omega ay}{tt(bb-\omega\omega)}$, vbi nunc ponendo $t = y$, habetur $\frac{gbba(yy-\omega\omega)}{y(bb-\omega\omega)} =$ pressioni totali, qua nimirum aqua in N O comprimitur.

Vt igitur reperiatur z altitudo cylindri aquei cuius basis est y et pondus aequale huic pressioni, faciendum est $gyz = \frac{gbba(yy-\omega\omega)}{y(bb-\omega\omega)}$, vnde $z = \frac{bb(yy-\omega\omega)}{yy(bb-\omega\omega)}$. Ad hanc itaque altitudinem N M haerebit aqua in fistula in loco N inserta; Notandum vero, canalem F P B C, considerari

tanquam

tanquam habentem diametros amplitudinum maximae FP et minimae CB ſatis paruas reſpectu longitudinis PB, vt nimirum hoc modo tangens curuaturae FNC in quolibet puncto N faciat angulum acutiſſimum cum horizontali PB, ne alias ex alliſione aquae inter mouendum ad canalis latus nimis curuum FNC oriatur noua vis preſſionis (quam hic tanquam accidentalem negleximus) quae priori ſuperueniens augeret altitudinem NM; quemadmodum id reuera accidit, ſi canalis FB deſinit in laminam perforatam foramine amplitudinis v, cui laminae aqua perpendiculariter impingens augere poteſt compreſſionem in partibus foramini vicinis; in remotioribus augmentum illud minus ſit ſenſibile, variatque prout poſtulat curuatura gurgitis, quam autem a peculiari qualitate aquae aliusue liquoris transfluentis dependere exiſtimo, adeoque generaliter indeterminabilem.

DE COMMVNICATIONE MOTVS IN COLLISIONE CORPORVM SESE NON DIRECTE PERCVTIENTIVM.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula II et III.

QVamnam motus alterationem, si duo corpora in se mutuo impingant, vtrumque corpus ex collisione patiatur, quaestio est iam praeterito seculo producta atque multum agitata; huius vero seculi annis 1724 et 1726 ab Academia Scientiarum Regia Parisina de novo cum annexo praemio consueto publice est proposita: quo factum est, vt plures insignes Geometrae istam quaestionem accuratiori examini subiecerint, suasque meditationes iudicio inclytae illius Academiae commiserint. Hinc aliquot hac de re dissertationes publici iuris sunt factae, quibus ista quaestio non solum maiore industria est tractata, sed etiam ad summum certitudinis fastigium euectae. Quantumuis autem haec materia exhausta videatur, tamen nonnisi exigua huius quaestionis particula etiamnum est inuestigata, atque tota, quam habemus, doctrina de percussionibus est tantum casus maxime particularis quaestionis, quemadmodum proponi solet. Si enim hanc quaestionem extendamus ad corpora cuiuscunque figurae, quae quomodocunque in se inuicem irruant, regulae communicationis motus adhuc cogni-

cognitae minime sufficiunt. Quod vt magis fiat perspicuum ad hoc attendere oportet, quod regulae circa motus communicationem traditae in eiusmodi tantum collisionibus locum inueniant, in quibus recta corporum in se inuicem impingentium centra grauitatis iungens per ipsum punctum impulsus transeat, atque in contactum simul sit normalis; quarnm conditionum nisi vtraque adsit, doctrina, quam de percussionibus habemus, perperam adhibetur; et qualis in huiusmogi collisionibus motus mutatio producatur, adhuc maxime latet. Interim tamen ex his satis intelligitur, regulas receptas in collisione corporum sphaericorum semper tuto vsurpari posse, si quidem eorum centra grauitatis in ipsa figurae centra incidant. Nam quomodocunque duo globi sibi mutuo occurrant, recta per eorum centra transiens quoque per punctum contactus transibit, eritque in contactum perpendicularis. Quoties autem contingit, vt duorum corporum se mutuo percutientium recta eorum centra grauitatis iungens non per ipsum contactum normaliter transeat, toties regulae consuetae nullius erunt vsus. Huic igitur defectui cum *Cel. Dan. Bernoulli* subuenire se instituisse mihi nuper significasset, meque ad eundem laborem suscipiendum excitasset, tam propter ipsam rei dignitatem quam amicam admonitionem statim hoc negotium sum aggressus; in quo eidem viae, qua ante aliquot annos regulas communicationis motus vulgares elicui, insistens, atque quibusdam nouis a me non pridem detectis principiis mechanicis in subsidium vocatis, tandem praefixum attigi scopum. Has igitur meditationes meas in ordinem disponere, atque clare explicare visum eſt; totamque disquiſitionem tam ad corpora perfecte dura quam elaſtica, quae alias ſeorſim tractari ſolent, accommodabo.

Tabula II. Figura 1. §. 2. Quando duo corpora A et B concurrunt, ea ſe mutuo in puncto C tangent, eritque mihi in ſequentibus hoc punctum C punctum contactus. Fieri quidem poteſt, vt duo corpora concurrentia ſe mutuo in pluribus punctis vel etiam in integra quadam ſuperficiei portione tangant; ſed huiusmodi caſus in praeſenti non ſum contemplaturus, cum tractatu ſint nimis difficiles, atque methodo, qua ſum vſurus, nihilominus, ad calculum reuocari queant. In caſibus ergo, quos euoluere conſtitui, ſemper fiet contactus in puncto quopiam vti in C, quod punctum contactus ſeu punctum impulſus vocabo, ex quo effectus, quem corpora in ſe mutuo exerunt, eſt determinandus. Dabitur ergo planum, quod vtrumque corpus in puncto contactus C tangit, cuius veſtigium in figura eſt recta ECF; hocque planum vocabo planum contactus. Deinceps ſi ad hoc planum ducatur perpendicularis ef per punctum contactus C transiens, eam vocabo directionem impulſus, cum corpora concurrentia in ſe mutuo normaliter agant, atque hinc ſe mutuo ſecundum directionem ef vrgeant.

§ 3. Ex directione impulſus cum centris grauitatis vtriusque corporis comparata tres oriuntur colliſionum ſpecies. Prima ſpecies, quam colliſionem rectam appellabo, eſt, quando rectae AC et BC quae ex corporum centris grauitatis A et B in punctum contactus C ducuntur, ambae in planum contactus EF ſunt perpendiculares. Hoc ergo caſu recta iungens vtriusque cor-

Figura 2.

po-

poris centra grauitatis per punctum contactus transit, et ſimul in planum contactus eſt normalis. Regulae igitur percuſſionis; quae adhuc ſunt erutae, tantum ad has primae ſpeciei colliſiones pertinent. Ad ſecundam ſpe- Figura 3.
ciem refero colliſiones rectobliquas, in quibus altera recta BC, quae ex alterius corporis B centro grauitatis B in punctum contactus C ducitur; eſt normalis in planum contactus; altera vero AC ex centro A alterius corporis A in punctum contactus C ducta in planum contactus EF oblique cadit. Tertiae ſpeciei colliſiones, quas Figura 4.
obliquas vocabo, ita erunt comparatae, vt vtraque recta AC et BC, quae ex corporum centris grauitatis A et B in punctum contactus C ducuntur, in planum contactus EF oblique incidat.

§. 4. De prima ergo colliſionum ſpecie ſeu colliſione recta non opus eſt, vt hic verba faciam, cum ea tam ab aliis iam ſatis tractata, quam a me etiam ante aliquot annos eadem methodo, qua hic ſum vſurus, pluribus expoſita ſit. Praeterea autem colliſio recta tanquam ſpecies ſecundae ſpeciei conſiderari poteſt, cum ea facto altero angulo, qui eſt obliquus, quoque recto, in ſpeciem primam abeat, ita vt regulae ad primam ſpeciem ſpectantes in regulis ſecundae ſpeciei contineantur. Simili modo ſpecies ſecunda in tertia comprehenditur, dum alter obliquorum angulorum in rectum abit; adeo vt ſpecies tertia latiſſime pateat, et tam primam quam ſecundam in ſe complectatur. Ne autem in hiſce colliſionibus examinandis nimium diſtinear, nec ad ſolidorum contemplationem, quae ob imaginationis difficultatem taediosa

diosa esse solet, deducar, alias collisiones non tractabo, nisi quae in eodem fiunt plano. Hanc ob rem tam motus corporum directiones, quam impulsus directio itemque corporum centra grauitatis et punctum contactus mihi semper erunt in eodem plano; huc autem etiam ii casus, in quibus hoc non contingit, reduci possunt, adeo vt hac restrictione vniuersalitati nihil decedat.

§. 5. Quando duo corpora concurrunt, actio quam in se mutuo exercent fiet in ipso puncto contactus et directio vis, qua alterum alterum vrget, erit normalis in planum contactus, seu incidet in directionem impulsus. Duo ergo huiusmodi corpora, quae concurrunt, prement se mutuo in puncto contactus, et nisi sint durissima, impressionem facient, quae impressio eo erit maior, quo molliora fuerint corpora, et quo maiore vi in se mutuo irruant. Haec autem impressio siue sit maior siue minor, hoc nihil refert in motuum alteratione, et hanc ob rem eius quantitas non in computum ingredietur. Postquam vero talis impressio est facta corpora se vel restituent in pristinam figuram, vel impressionem factam retinebunt; illud scilicet euenit in corporibus elasticis, hoc vero in non-elasticis. Corpora igitur non elastica tam diu tantum in se mutuo agunt, quoad impressiones, quas patiuntur, sint maximae, tum enim, quia sese non restituunt, cessabit actio corporum reciproca, et vtrumque ea celeritate, quam hoc momento habet, moueri perget. Corpora vero elastica tam diu in se mutuo agent, quoad, impressiones, quas vtrumque est adeptum penitus fuerint restitutae. Atque haec est essentialis differentia inter corpora elastica et non elastica, ex qua regulae communicationis motus pro vtrisque debent deriuari.

§. 6.

§ 6. Ad mutuam hanc corporum actionem, ex qua alteratio motus in vtroque oritur, cum melius percipiendam, tum facilius explicandam, loco vis, qua corporum particulae, prope contactum sitae impressioni resistunt, in puncto contactus cogitatione substituo elastrum CD, quod quo magis fuerit compressum seu breuius factum, eo maiore vi sese extendendi et in longitudinem naturalem restituendi gaudeat. Qua quidem ratione vis huius elastri crescat pro diminutione longitudinis eius, nihil interest ad alterationem motus in collisione factam determinandam; sed quaecunque accipiatur ratio, eadem semper motus alteratio reperietur. Huius ergo elastri imaginarii positio CD incidere debebit in directionem impulsus, seu normalis erit in planum contactus. Quamdiu igitur hoc elastrum comprimitur, vi sua sese extendendi vrgebit vtrumque corpus; et, si corpora non fuerint elastica, eius vis cessabit subito, quando in statum maximae compressionis fuerit reductum. At si corpora fuerint elastica, tum elastrum sese in situm pristinum actu restituere ponendum est, ita vt tamdiu corpora ambo vrgeat, donec naturalem suam longitudinem recuperauerit. Hac ergo ratione alteratio motus in collisione corporum ad effectum potentiarum sollicitantium est reducta. Figura 5.

§. 7. Ad motum ergo, quem duo corpora in se inuicem impingentia post conflictum sint habitura, definiendum, requiritur, vt effectum vis elastri CD seu datae cuiuscunque vis in corpus datum determinare valeamus: ex his enim successiuis elastri pressionibus in vtrum-

vtrumque corpus exercitis coniunctim ſumtis oritur motus vtriusque corporis poſt conflictum. Quamobrem, antequam motus alterationem ex colliſione oriundam determinare liceat, inueſtigari debet, qualem effectum data potentia in dato puncto corpori cuicunque ſiue quieſcenti ſiue moto applicata producat dato tempore. In hoc vero negotio etiamnum caremus ſufficientibus principiis; quae enim habentur et ſatis nota ſunt principia, quibus potentiarum ſollicitationes definiri ſolent, ea tantum corporibus infinite paruis ſunt accommodata, atque ad corpora finitae magnitudinis applicari omnino nequeunt, niſi directio potentiae ſollicitantis per centrum grauitatis corporis transeat. Atque iſte defectus in cauſa eſt, quod colliſiones primae tantum ſpeciei ope horum principiorum explicari potuerint, ad duas reliquas vero ſpecies haec principia non ſufficiant.

§. 8. Cum igitur non ita pridem in haec deſiderata mechanicae principia incidiſſem, ea ad has de colliſionibus quaeſtiones ſoluendas feliciter accommodare licuit. Haec ergo principia imprimis proferre et explicare decet, demonſtrationem autem ſeu methodum, qua ad ea perueni, inſtitutum hoc meum exponere prohibet; ſed alia forte occaſione eorum veritatem firmiſſimis demonſtrationibus declarare licebit. Ante omnia igitur eſt notandum in omni corpore duplicem motum ineſſe poſſe, quorum alter, quem progreſſiuum voco, eſt motus centri grauitatis; alter vero motus, quem gyratorium vocabo, conſiſtit in motu conuerſionis corporis circa centrum grauitatis. Cognitis ergo tum directione et celeritate

ritate centri grauitatis, tum motus gyratorii celeritate et plaga in quam fit, totus corporis motus adaequate cognoſcitur. Motus autem gyratorius fit circa axem per centrum grauitatis transeuntem vel fixum vel mobilem; fixus quidem erit axis, ſi vires centrifugae ſingularum corporis particularum ſe mutuo deſtruant; at ſi ſe non deſtruant, axis ſitum mutabit fietque mobilis. Cum ergo hic tantum motus in eodem plano factos explorare ſit propoſitum, motus gyratorios tantum circa axem fixum conſiderabo.

§. 9. Ex hac inſtituta reſtrictione intelligitur, cuiusmodi ea corpora eſſe debeant, quorum conflictus hic ſum expoſiturus. Corpora ſcilicet ita debebunt eſſe comparata, vt, dum in ſe mutuo impingunt, directio impulſus in idem planum incidat, in quo ſita ſunt corporum collidentium centra grauitatis A et B, atque punctum impulſus C. Quare ſi puncta A, B, C in plano horizontali ſita eſſe ponamus, directio impulſus quoque horizontalis eſſe debebit, id quod eueniet, ſi planum contactus fuerit verticale. Praeterea vero corpora A et B eius indolis eſſe oportet, vt ea circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem libere rotari queant; quae proprietas non in omnia corpora competit. Quamobrem eiusmodi tantum corpora conſiderabimus, quorum axes verticales per omnium ſectionum horizontalium grauitatis centra transeant, quippe quae circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem libere rotari poſſunt. Denique motus directiones quoque in plano horizontali ſitas eſſe pono, quo tam motus ante conflictum quam poſt conflictum in plano horizontali fiant. Fig. 2, 3, 4.

§. 10. Quando quidem directiones, in quibus corpora collidentia mouentur, non fuerint horizontales, ii casus nihilominus huc facile referuntur ope motus resolutionis: in conflictu enim motus horizontales tantum variantur, verticalibus immutatis manentibus, ita vt post conflictum ope compositionis motus determinari queant. Ob hanc igitur restrictionem tractatio nostra non minus generalis erit censenda. Reliquae vero duae conditiones omnino cum plurima corpora, tum plurimos impulsus excludunt. Sed huiusmodi casus partim ob nimiam difficultatem tractandi praetermittere constitui, partim quod nonnulli ex modo, quo propositos sum tractaturus, etiam paucis mutandis resolui queant. In sequentibus ergo perpetuo id erit tenendum, me tam motuum directiones, quam corporum centra grauitatis vna cum puncto et directione impulsus in eodem plano posita esse intelligere, atque corpora eius tantum indolis admittere, quorum sectiones horizontales omnes sua grauitatis centra in eadem recta habeant sita, quae recta verticalis mihi erit axis gyrationis.

§. 11. His praemissis ad principia, quibus sum vsurus, exponenda progredior, quorum primum est, quod omne corpus habens motum progressiuum eundem motum vi insita inertiae aequabiliter in directum perpetuo conseruet; nisi a viribus externis impediatur. Corporum ergo, qualia hic contemplabor, motus centri grauitatis erit aequabilis in linea recta horizontali, qualemcunque id etiam interea habent motum gyratorium. Secundum principium in hoc consistit, quod corpus eius scilicet indolis,

dolis, vti posui, motum habens gyratorium circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem, hunc quoque motum constanter seruet aequabilem, quomodocunque interea motus progressiuus in directum immutetur. Ex his duobus principiis conficitur, quod corpus duplici motu praeditum altero progressiuo, altero gyratorio circa axem per centrum grauitatis transeuntem, vtrumque motum perpetuo conseruare debeat, nisi ab externis viribus impediatur. Horum duorum motuum autem vterque seorsim cognosci potest, progressiuus scilicet cognoscitur ex directione et celeritate centri grauitatis, gyratorius vero ex tempore, quo circa axem gyrationis conuertitur; quod ergo etiam colligetur ex celeritate angulari circa istum axem.

§. 12. Cum igitur constet cuiusmodi motus corpus sibi relictum vi propria conseruet, superest vt ostendamus, quomodo vterque motus a potentiis sollicitantibus tam generetur quam alteretur. Quemadmodum igitur motus corporis progressiuus a potentia quomodocunque applicata alteretur, ex sequente principio intelligetur. Sit corpus A, Figura 6.
cuius centrum grauitatis A moueatur in recta AB, in qua ergo sua, quam habet, celeritate vniformiter progrederetur, nisi a potentiis sollicitaretur. Sollicitetur autem a potentia Cc ipsi in puncto C applicata, et quaeritur, quomodo iste centri grauitatis motus ab hac potentia sollicitante immutetur. Dico autem huius potentiae Cc ad motum progressiuum AB alterandum effectum fore eundem, ac si tota corporis massa in centro grauitatis A esset concentrata, eique potentia Aa aequalis et

 paral-

parallela ipſi Cc eſſet applicata. Qui ergo effectus vt definiatur. reſoluatur motus corporis ſecundum AB, in duos laterales inter ſe normales AE et AF, quorum ille tantum a potentia Aa turbabitur. Sit igitur potentia $Cc = p$, maſſa corporis $= A$; celeritas ſecundum $AE = u$ et temporis elementum dt, eritque hoc tempusculo $du = -\frac{pdt}{A}$; alter vero motus AF hoc tempusculo inuariatus manebit.

§. 13. Iſta motus progreſſiui alteratio eadem ſemper eſt, quemcunque corpus ſimul habuerit motum gyrationis, ſed ab eadem potentia quoque ipſe motus gyrationis afficitur et turbatur; iſte autem potentiae ſollicitantis effectus in motu gyratorio perturbando ſequenti
Figura 7. modo definietur. Sit corpus A, quod praeter motum progreſſiuum habeat motum circa axem verticalem per centrum grauitatis A transeuntem, quaeriturque, quomodo iſte motus gyratorius a potentia Cc alteretur. Fiat motus gyratorius ſecundum ſenſum CgH ſitque celeritas puncti C circa $A = u$, et diſtantia $AC = f$ exprimet $\frac{u}{f}$ celeritatem angularem. Multiplicentur iam omnes corporis particulae per quadrata diſtantiarum ſuarum reſpectiue ab axe rotationis, ſitque horum factorum aggregatum $= S$. Sit porro potentia $Cc = p$, et ſinus anguli $ACc = m$; atque tempusculo dt fiet $du = \frac{mffpdt}{S}$, ſeu celeritatis angularis $\frac{u}{f}$ decrementum $\frac{du}{f}$ erit $= \frac{mfpdt}{S}$. Hinc perſpicitur, ſi Cc producta per centrum grauitatis A tranſeat, tum potentiam motum gyratorium omnino non afficere. Eo maior autem erit motus gyratorii alteratio, quo maiores fuerint tum diſtantia AC, tum ſinus anguli ACc.

§. 14. In collisionibus primae speciei ergo, in quibus directio impulsus per vtriusque corporis centrum grauitatis transit, a percussionis vi in neutro corpore motus gyratorius generari potest, nec, si corpora iam ante conflictum motum gyratorium habuerint, is in percussione mutabitur. Ad motum ergo ex huiusmodi collisionibus ortum determinandum sufficit prius principium nosse, quo alteratio motus progressiui est definita. At ad collisiones secundae atque tertiae speciei omnino altero quoque principio opus habemus. In secunda enim specie in altero corpore motus gyratorius vel generabitur vel alterabitur, atque in tertia specie in vtroque corpore tam gyratorius motus producetur, quam mutabitur, propter impulsus directionem per neutrius corporis centrum grauitatis transeuntem. Cum igitur leges percussionis primae speciei iam satis sint inuestigatae atque cognitae, a secunda specie ordiri conueniet, in qua, qualis mutatio ex collisione oriatur, determinabo.

§. 15. Quiescat igitur corpus IHCA, cuius centrum grauitatis sit in A, eiusque massa $= A$; in idque impingat corpus B directe motum celeritate b in directione $\mathfrak{C}B$, ita vt recta $\mathfrak{C}B$ per centrum grauitatis B ducta per punctum impulsus C transeat, simulque sit normalis in planum contactus. Haec ergo collisio erit secundae speciei, quia recta BC in planum contactus est normalis. Sit massa corporis $B = B$ atque ex A ducatur AC, quae in planum contactus oblique incidat. Sit m sinus anguli ACB, erit, ducta AG perpendiculari in BC productam, $\frac{AG}{AC} = m$ seu $m.\,AC = AG$. Ponatur TIII. Figura 1

 AG

$AG = f$, et diſtantia $BG = k$, in ipſo impulſus initio, quae diſtantia k propter impreſſiones, quas corpora durante conflictu ſibi inducunt, diminuitur. Quare ſi corpora fuerint elaſtica conflictus tam diu durabit, donec interuallum BG priſtinam obtinuerit longitudinem k; ſin autem corpora non fuerint elaſtica tum conflictus mutuaque actio ceſſabit, quando interuallum BG fuerit minimum. Sit denique ſumma omnium corporis A particularum per quadrata ſuarum ab axe verticali per A transeunte diſtantiarum multiplicatarum $= S$.

§. 16. Durante ergo conflictu vtrumque corpus in C ſollitabitur a potentia, cuius directio eſt in planum contactus normalis, ideoque corporis B motus diminuetur, dum eius directio immutata manet. Corpori vero A motus progreſſiuus imprimetur ſecundum directionem $A\alpha$ parallelam directioni $\mathfrak{G}B$ ſeu BC (§. 12.). Simul vero corpori A motus gyratorius circa axem verticalem per centrum grauitatis A transeuntem imprimetur, quia directio impulſus BG non per centrum grauitatis A transire ponitur (§. 13.). Durante autem conflictu potentia, qua vtrumque corpus vrgetur eo erit maior, quo minor euadit linea BG; ita vt quantitas huius potentiae a diminutione interualli BG pendeat. Generatim igitur iam conſtat effectus, qui ex huiusmodi colliſione oritur: ſcilicet poſt conflictum corpus B minorem quam ante habebit celeritatem, eandem tamen directionem. Corpus vero A duplicem acquiret motum, alterum progreſſiuum ſecundum directionem $A\alpha$ parallelam directioni $\mathfrak{G}B$ alterum gyratorium circa axem verticalem per A transeuntem in ſenſum CHI.

§. 17.

§. 17. Quo igitur, quanti ſint poſt conflictum hi ſinguli motus, definiam, ſit durante ipſo conflictu corporis A centrum grauitatis in A, corporis B in B. Erit, quia conflictus puncto temporis abſoluitur et impreſſiones ſunt quam minimae, vt ante $AG = f$, et ſinus anguli $ACB = m$; interuallum vero BG ſit $= x$, quod quam minimae a k differat. Sit potentia, qua vtrumque corpus hoc ſtatu ſollicitatur $= p$, quae ergo erit functio quaedam ipſius x, euaneſcens ſi fit $x = k$. Sit corporis B celeritas, quae ipſi adhuc ſupereſt in directione $\mathfrak{C}B$ $= v$; corpus vero A iam habeat motum progreſſiuum in directione $A\alpha$ parallela ipſi $\mathfrak{C}B$, cum celeritate $= u$. Celeritas vero angularis, quam corpus A acquiſiuit ſit $= r$; celeritatem autem angularem metior celeritate, quam punctum quoduis circa axem gyrationis habet, diuiſa per eiusdem puncti ab axe diſtantiam; hic enim quotus ſemper eſt conſtans. Supra vero iam eſt oſtenſum, quomodo celeritatis angularis hac ratione expreſſae incrementum a data potentia nactum determinetur. Figura 2.

§. 18. Perueniant iam elemento temporis dt in ſitus proximos; ſcilicet A in a; B in b; G in g. Eritque $Bb = v\,dt$; $A\alpha = u\,dt$. Ad motum vero angularem cognoſcendum ducatur $a\gamma$ parallela ipſi AG, erit $ga\gamma$ angulus tempuſculo dt motu angulari genitus; qui cum ſit vt celeritas angularis r et dt coniunctim erit $\frac{g\gamma}{AG} = r\,dt$ ſeu $g\gamma = fr\,dt$. Quia vero ante erat $BG = x$, erit nunc $bg = x + dx$. Cum ergo habeatur $Bg = x + u\,dt + fr\,dt = v\,dt + x + dx$, fiet $dx = dt\,(u - v + fr)$ ſeu $dt = \frac{dx}{u - v + fr}$. Conſideremus iam ſollicitationes tem-

tempusculo dt a potentia sollicitante p peractas, eritque per (§. 12.), $dv = \frac{-pdt}{B}$; $du = \frac{pdt}{A}$; $dr = \frac{m.AC.pdt}{S}$ (§. 13) $= \frac{fpdt}{S}$. Sumtis ergo integralibus erit $v = b - \frac{\int pdt}{B}$; $u = \frac{\int pdt}{A}$; $r = \frac{f\int pdt}{S}$, integrali $\int pdt$ ita accepto vt euanescat posito $t = 0$, hoc est in ipso conflictus initio. Hinc ergo obtinebitur $\int pdt = B(b-v) = Au = \frac{Sr}{f}$, seu $B(b-v) = Au = \frac{Sr}{f}$; quae proprietas etiam finito conflictu locum habet.

§. 19. Substituto loco dt eius valore $\frac{dx}{u-v+fr}$ habebitur $Bdv = \frac{-pdx}{u-v+fr}$; $Adu = \frac{pdx}{u-v+fr}$ atque $\frac{Sdr}{f} = \frac{pdx}{u-v+fr}$. Hinc formabitur ista aequatio:

$$\begin{aligned}&\alpha Budv - \alpha Bvdv + \alpha Bfrdv\\ &+ \beta Audu - \beta Avdu + \beta Afrdu = (-\alpha + \beta + \gamma)pdx\\ &+ \frac{\gamma Sudr}{f} - \frac{\gamma Svdr}{f} + \gamma Srdr.\end{aligned}$$

Ponatur $\alpha = -A$, $\beta = B$, $\gamma = \frac{ABff}{S}$, prodibitque integrando $\frac{ABv^2 + ABu^2 + ABf^2r^2}{2} - ABvu - ABfrv + ABfru = (A + B + \frac{ABff}{S})\int pdx + \frac{ABb^2}{2}$, sumto $\int pdx$ ita vt euanescat posito $x = k$, hoc est in ipso conflictus initio. Sequentem igitur adepti sumus aequationem $v^2 + u^2 + f^2r^2 - 2vu - 2frv + 2fru = b^2 + 2(\frac{1}{B} + \frac{1}{A} + \frac{ff}{S})\int pdx$, ex qua radicem extrahendo prodit $-v + u + fr = \sqrt{(b^2 + 2(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{ff}{S})\int pdx)}$. Haec ergo aequatio si cum duabus prioribus inuentis coniungatur, prae-

praebebit tres aequationes, ex quibus pro quouis conflictus tempore, tam vtriusque corporis celeritates quam corporis A motus gyratorius poterunt determinari.

§. 20. Ponamus corpora ambo esse perfecte elastica, quia tum conflictus cessat, cum x fuerit pristinam longitudinem k adeptum, ponamus $x = k$, fietque $\int p\,dx = 0$, quia per hypothesin $p\,dx$ ita est integratum, vt euanescat posito $x = k$. Quamobrem finito conflictu habebitur $b + v = u + fr$; quae aequatio cum aequationibus $B(b-v) = Au = \frac{Sr}{f}$ coniuncta, determinabit vtriusque corporis A et B celeritates post conflictum, nec non celeritatem gyratoriam, quam corpus A ex conflictu acquirit. Erit scilicet corporis B celeritas post conflictum in directione BC $= b - \frac{2ASb}{(A+B)S + ABf^2}$, corporis A vero motus progressiuus fiet in directione $A\alpha$ cum celeritate $= \frac{2BSb}{(A+B)S + ABff}$; corpus vero idem A simul habebit motum gyratorium circa axem verticalem per centrum grauitatis A transeuntem cum celeritate angulari $= \frac{2ABfb}{(A+B)S + ABff}$; vbi est b corporis B celeritas ante conflictum; $f = AB$; A et B sunt corporum massae, atque S est summa omnium productorum, quae prodeunt multiplicando singulas corporis A particulas per quadrata suarum ab axe gyrationis distantiarum.

§. 21. Si corpora omni elatere careant, tum conflictus cessabit, quando impressio, quam impulsus vtrique corpori inducit, est maxima facta, hoc est, quando interuallum BG fit minimum. Hoc vero accidit, si fit $dx = 0$. Cum autem inuenerimus $dx = dt(u - v + fr)$,

 erit

erit $dx = 0$ quando eſt $v = u + fr$; quamobrem ceſſante conflicta mutuaque corporum actione erit $v = u + fr$; quae aequatio coniuncta cum aequationibus $B(b - v) = Au = \frac{Sr}{f}$, dabit quaeſitos valores pro v, u et r, ex quibus motus vtriusque corporis poſt conflictum cognoſcentur. Inuenietur autem corporis B celeritas poſt conflictum $b - \frac{ASb}{(A+B)S + ABf^2}$, eiusque directio erit BC eadem ſcilicet, quae ante. Corporis vero A celeritas ex conflictu acquiſita erit $= \frac{BSb}{(A+B)S + ABf^2}$, hac nempe celeritate centrum grauitatis corporis A in directione Aα promouebitur. Motus vero gyratorii, quem corpus A in conflictu adipiſcitur circa axem verticalem per A transeuntem, celeritas angularis erit $= \frac{ABfb}{(A+B)S + ABff}$. Apparet ergo hoc caſu, quo corpora non elaſtica ponuntur, celeritatem corporis A vtramque duplo eſſe minorem, quam pro corporibus elaſticis; itemque decrementum celeritatis corporis B duplo eſſe minus.

§. 22. Si ponamus f euaneſcere, ita vt linea CG ſeu directio impulſus per centrum grauitatis A transeat, quo caſu recta AC normalis erit in planum contactus, tum reſultare debebunt regulae communicationis motus pro colliſionibus primae ſpeciei, iam ſatis quidem notae. Quod, quo eo facilius appareat, faciamus $f = 0$, poſitis corporibus elaſticis, quo facto prodibit corporis B celeritas poſt conflictum $b - \frac{2Ab}{A+B}$; corporis A vero celeritas, qua eius centrum grauitatis progreditur $= \frac{2Bb}{A+B}$, celeritas gyratoria vero euaneſcit; quae regulae apprime conueniunt

ueniunt cum iam inuentis: ſin autem corpora fuerint elateris expertia, erit corporis B celeritas poſt conflictum $= b - \frac{Ab}{A+B}$, et corporis A celeritas $= \frac{Bb}{A+B}$. Ex his ergo cum inuentis formulis comparatis intelligitur corporis B poſt conflictum celeritatem eo maiorem futuram eſſe, quo maius fuerit interuallum $AG = f$; contra vero celeritatem corporis A eo minorem fore. Celeritas vero gyratoria erit $= 0$, tam ſi $f = 0$ quam ſi $f = \infty$; maxima ergo erit, ſi fuerit $(A+B)S = ABff$. hoc eſt, ſi $B = \frac{AS}{Aff - S}$, ſi quidem $Aff > S$.

§. 23. Operae pretium iam erit inueſtigare, quid in huiusmodi colliſionibus conſeruetur, vtrum ante et poſt conflictum quantitas virium viuarum, an vero quantitas motus maneat eadem. Illi enim qui motus quantitatem conſeruari ſtatuunt, leges communicationis motus in colliſionibus primae ſpeciei allegare ſolent, in quibus vtique tam pro corporibus elaſticis quam non elaſticis conſeruatio quantitatis motus perſpicitur; etiamſi corpora non elaſtica ad huiusmodi conſeruationem euincendam non idonea videantur. Nam quicquid vis nomine intelligitur in colliſione corporum non elaſticorum portio quaedam virium neceſſario perire debet, cum ad impreſſiones faciendas vi opus ſit, eaque in corporibus non amplius reſtauretur. In corporibus vero elaſticis ea vis, quae ad impreſſiones impenditur iterum in corpora transfertur, dum impreſſiones ſeſe reſtituunt, ita vt quomodocunque vires metiri velimus, eadem virium quantitas in colliſione corporum elaſticorum conſeruari debeat. Cum autem in colliſionibus corporum elaſtico-

 rum

rum primae speciei tam motus quam virium viuarum, prout appellari solent, quantitas conseruetur, lis adhuc sub iudice versatur; quam ex collisionibus secundae speciei dirimere licebit.

§. 24. Inuenimus autem pro corporibus tam elasticis quam non elasticis hanc aequationem $B(b-v)=Au$, quae dat $Bb=Bv+Au$, ex qua aequabilis centri communis grauitatis progressio colligitur. Est vero Bb quantitas motus ante conflictum, Bv quantitas motus in corpore B post conflictum; quare si modo Au exhiberet quantitatem motus in corpore A post conflictum, conseruatio quantitatis motus etiam hic locum teneret. Sed cum corpus A praeter motum progressiuum celeritate u habeat motum gyratorium circa centrum grauitatis, maiorem habebit motus quantitatem, quam si solo motu progressiuo moueretur. Ex quo perspicitur in huiusmodi secundae speciei collisionibus quantitatem motus augeri, siue corpora sint elastica siue minus; cum ergo vires verae a nihilo multiplicari nequeant, satis intelligitur vires per facta ex massis in celeritates perperam mensurari. Quod autem ad quantitatem virium viuarum attinet, ea in his etiam collisionibus mirifice conseruatur; si quidem corpora ponantur elastica. Corporis enim A post conflictum celeritate progressiua u et gyratoria r lati vis viua est $=Au^2+Sr^2$. Corporis B vero vis viua post conflictum est $=Bv^2$, ita vt summa virium viuarum $=Au^2+Bv^2+Sr^2$, quae si loco u, v, et r valores inuenti §. 20. substituantur, prodibit Bb^2 vis viua ante conflictum.

§. 25.

§. 25. Impingat globus B ex materia vniformi con- Figura 3.
ſtans, cuius maſſa ſit B, motus in directione $\mathfrak{G}B$ celeritate b directe in parallelepipedum rectangulum homogeneum EFHI quieſcens ita, vt recta $\mathfrak{G}B$ in punctum contactus C ſit normalis, atque parallelepipedi centrum grauitatis A eiusque ſectio baſi parallela EFHI per A transiens in eodem poſita ſint plano cum recta $\mathfrak{G}BC$. Planum ſcilicet chartae in figura tam parallelepipedum quam globum in duas partes ſimiles et aequales diuidere ponitur. Sit $AG = f$ parallelepipedi longitudo $IH = 2c$ et latitudo $FH = 2g$, atque maſſa parallelepipedi $= A$. Si nunc ſingulae parallelepipedi particulae per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe verticali per centrum grauitatis A transeunte multiplicentur prodibit eorum ſumma $S = \frac{A}{3}(g^2 + c^2)$. Si ergo vtrumque corpus ponatur elaſticum, erit poſt conflictum celeritas corporis $B = b - \frac{2A(g^2 + c^2)b}{(A+B)(g^2+c^2)+3Bf^2}$. Corporis A vero celeritas progreſſiua in directio $A\alpha$ parallela directioni $\mathfrak{G}B$ erit $= \frac{2B(g^2+c^2)b}{(A+B)(g^2+c^2)+3Bf^2}$. Interea vero parallelepipedum circa axem verticalem per A transeuntem gyrabitur celeritate angulari $=$ $\frac{6Bfb}{(A+B)(g^2+c^2)+3Bf^2}$. Si corpora non fuerint elaſtica loco coefficientium 2 et 6 medietates 1 et 3 debent collocari.

§. 26. In quaeſtione §. 15. poſuimus corpus A, in Figura 1.
quod alterum B impingit, quieſcens, ſed ſolutio non ſit difficilior, ſi corpus A tam motum progreſſiuum in directione $A\alpha$ parallela directioni $\mathfrak{G}b$, quam motum gyratorium circa axem verticalem per centrum grauitatis A

 trans-

transeuntem tribuamus. Sit itaque celeritas corporis A progressiua $= a$, celeritas angularis $= c$, quae fiat in sensum CHI. Manentibus ergo iisdem, quibus supra vsi sumus ratiociniis, obtinebimus sequentes aequationes, $dx = dt(u - v + fr)$ atque $B(b - v) = A(u - a) = \frac{S(r - c)}{f}$. Praeterea si corpora fuerint elastica erit $-v + u + fr = b - a - fc$, at si non fuerint elastica habebitur $-v + u + fr = 0$, Quamobrem si corpora fuerint elastica, erit post conflictum celeritas corporis B in directione $\mathfrak{b}B = b - \frac{2AS(b - a - fc)}{(A + B)S + ABff}$, corporis A vero celeritas progressiua in directione $A\alpha$ erit $= a + \frac{2BS(b - a - fc)}{(A + B)S + ABff}$. Corporis denique A celeritas angularis, qua post conflictum circa axem per A transeuntem gyrabitur, erit $= c + \frac{2ABf(b - a - fc)}{(A + B)S + ABff}$ Hae vero eaedem expressiones pro corporibus non elasticis valebunt, si modo coefficientes 2 omittantur.

Figura 4. §. 27. Quamquam in hac solutione posui vtriusque corporis A et B celeritates esse in directionibus inter se parallelis et ad planum contactus normalibus, tamen ex eadem solutione facile quoque ii casus resoluentur, in quibus corporum A et B celeritates ante conflictum quasuis habeant directiones. Moueatur scilicet corpus B ante conflictum in directione bB celeritate vt bB, et corpus A in directione Aa celeritate vt Aa. Resoluantur hi motus in binos laterales inter se normales $B\mathfrak{b}$, Bq et $A\alpha$, Ap, quorum alterorum directiones $B\mathfrak{b}$ et $A\alpha$ sint inter se parallelae et in planum contactus normales, alterae vero Bq et Ap ad priores normales. Cum igitur iam constet, motus in directionibus qB et Ap factos a con-a conflictu non turbari, ponantur corpora B et A motibus ϐB et Aα tantum ferri, atque ex §. praecedente definiatur vtriusque motus post conflictum. Tum vero isti motus ex conflictu orti iterum coniungantur cum motibus secundum directiones qB et Ap, et motus ex compositione orti erunt veri corporum motus post conflictum. Motus vero gyratorius corporis A neque ab hac resolutione nec compositione motus afficietur.

§. 28. Quin etiam ex his simul intelligitur, si directiones, in quibus corpora A et B ante conflictum mouentur, non fuerint in plano horizontali, in quo centra grauitatis corporum A et B vna cum puncto impulsus C esse ponimus, motus post conflictum simili modo determinari posse. Hoc autem casu vtriusque corporis A et B motus in ternos inter se normales resolui debent, quorum vnus sit in plano horizontali ad planum contactus normalis, secundus quoque in plano horizontali sed plano contactus parallelus, tertius vero in linea verticali et proinde etiam plano contactus parallelus. In conflictu deinceps primi tantum motus considerentur, quippe qui soli a conflictu perturbantur, et quantam ex conflictu mutationem accipiant, definiatnr. Denique hi motus resultantes cum reliquis secundum leges compositionis motus iterum coniungantur, hocque pacto obtinebuntur vtriusque corporis motus post conflictum. Motus vero gyratorius corporis A tam ante quam post conflictum alius concipi non potest, nisi circa axem verticalem. Principia enim, de quibus etiamnum constat, ad alios motus gyratorios nonsunt sufficientia.

§. 29.

§. 29. Progrediamur igitur ad collisiones tertiae speciei inuestigandas, sitque corpus quodcunque A quiescens cuius massa sit $=$ A, et centrum grauitatis in A, in id impingat aliud corpus B, cuius massa sit B, et centrum grauitatis in B; sit directio corporis B recta $\mathfrak{b}$B parallela directioni impulsus, et celeritas eius $= b$. Sit C punctum impulsus et EF planum contactus, ad quod per C ducatur normalis GH, in eamque ex A et B perpendicula AG et BA demittantur, erit GH directio impulsus parallela directioni motus $\mathfrak{b}$B corporis B. Cum igitur in conflictu vtrumque corpus vrgeatur a vi, cuius directio est GH, corpori A inducetur motus progressiuus secundum directionem Aα parallelam ipsi HG, corporis B vero celeritas progressiua b in directione $\mathfrak{b}$B minuetur, directione eius, quia est parallela ipsi HG, non mutata. Vtrique vero corpori in conflictu motus gyratorius circa axem verticalem per eius grauitatis centrum transeuntem inducetur, quia recta GH per neutrius centrum grauitatis transit. Sit ergo AG$=f$, BH$=h$, et ipso impulsus initio GH$=k$. Denique sit summa omnium particularum in quadrata distantiarum suarum ab axe gyrationis multiplicatarum in corpore A$=$S; in corpore B vero $=$ R.

Figura 6. §. 30. Durante conflictu teneat recta GH cum corporum centris grauitatis A et B situm in figura iisdem litteris repraesentatum, erit vt ante AG$=f$, et BH$=h$, at cum in conflictu corpora aliquam impressionem secundum GH sibi inducant, erit distantia GH minor quam k, sit igitur ea $=x$. Hoc porro in statu sit corporis B celeritas progressiua $=v$, eiusque celeritas angu-

angularis quam iam acquisiuit $= s$. Corporis A vero celeritas progressiua sit $= u$, et celeritas angularis $= r$. Iam temporis elemento dt, transferantur puncta A, B, G, H in loca a, b, g, h, et ducantur $a\gamma$, $b\eta$ parallelae ipsis AG, BH. Erit ergo $Aa = udt$, $Bb = vdt$, atque ob motus angulares habebitur $g\gamma = frdt$, $\eta h = hsdt$. Interuallum vero gh erit $= x + dx$. At cum sit $Hg = x + udt + frdt = x + dx + vdt - hsdt$ erit $dx = dt(u - v + fr + hs)$ seu $dt = \frac{dx}{u-v+fr+hs}$. Sit porro vis, qua vtrumque corpus vi compressionis vrgetur $= p$, erit $dv = \frac{-pdt}{B}$; $du = \frac{pdt}{A}$; $dr = \frac{fpdt}{S}$ atque $ds = \frac{hpdt}{R}$. Hinc ergo fiet $\int pdt = B(b - v) = Au = \frac{Sr}{f} = \frac{Rs}{h}$.

§. 31. Si nunc loco dt substituatur $\frac{dx}{u-v+fr+hs}$, habebuntur sequentes aequationes:

$$vdv - udv - frdv - hsdv = \frac{pdx}{B}$$
$$udu - vdu + frdu + hsdu = \frac{pdx}{A}$$
$$fudr - fvdr + ffrdr + fhsdr = \frac{ffpdx}{S}$$
$$huds - hvds + fhrds + hhsds = \frac{h^2pdx}{R}$$

quae aequationes inuicem additae et integratae dabunt sequaentem aequationem $v^2 + u^2 + f^2r^2 + h^2s^2 - 2uv - 2frv - 2hsv + 2fru + 2hsu + 2fhrs = 2\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{ff}{S} + \frac{hh}{R}\right)\int pdx + b^2$. Integrali $\int pdx$ ita accepto vt euanescat posito $x = k$. Si ergo corpora fuerint perfecte elastica, conflictus cessabit, si x iterum fiat $= k$, quo casu $\int pdx$ euanescit. Si igitur v, u, r, et s,

 cor-

corporum celeritates poſt conflictum denotent, habebitur pro corporibus elaſticis haec aequatio, poſtquam radix quadrata eſt extracta $u-v+fr+bs=b$, quae cum ante inuentis $B(b-v)=Au=\frac{Sr}{f}=\frac{Rs}{b}$ coniuncta dabit

$$v=b-\frac{2ARSb}{(A+B)RS+AB(Rff+Sbb)};$$
$$u=\frac{2BRSB}{(A+B)RS+AB(Rff+Sbb)};$$
$$r=\frac{2ABRfb}{(A+B)RS+AB(Rff+Sbb)};$$
$$\text{atque } s=\frac{2ABSbb}{(A+B)SR+AB(Rff+Sbb)}.$$

§. 32. Si corpora omni elaſticitate careant loco aequationis $u-v+fr+bs=b$, hac vti oportet $u-v+fr+bs=0$. Nam cum hoc caſu conflictus mutuaque actio ceſſet, quando impreſſio vtrinque facta eſt maxima; hoc eueniet quando fit $dx=0$. Sed quia eſt $dx=dt(u-v+fr+bs)$, erit $dx=0$, ſi fuerit $u-v+fr+bs=0$. Quamobrem ſi haec aequatio cum ante inuentis $B(b-v)=Au=\frac{Sr}{f}=\frac{Rs}{b}$ coniungatur, prodibit

$$v=b-\frac{ARSb}{(A+B)RS+AB(Rff+Sbb)};$$
$$u=\frac{BRSb}{(A+B)RS+AB(Rff+bb)}$$
$$r=\frac{ABRfb}{(A+B)RS+AB(Rff+Sbb)}$$
$$\text{atque } s=\frac{ABSbb}{(A+B)RS+AB(Rff+Sbb)}.$$

Hae igitur ſunt motus communicationis leges pro colliſionibus tertiae ſpeciei, ex quibus ſi ponatur $b=0$. orientur leges pro colliſionibus ſecundae ſpeciei; atque ſi fiat

fiat $f=0$ et $h=0$, tum prodibunt leges notae pro collisionibus ſpeciei primae. Ex his vero regulis pro corporibus elaſticis iterum conſeruatio virium viuarum conſpicitur.

§. 33. Si corpus A ante conflictum non quieſcat, ſed moueatur celeritate a in directione $A\alpha$ parallela directioni $\mathfrak{C}B$ et directioni impulſus GH; habeatque iam ante conflictum vtrumque corpus motum gyratorium circa axem verticalem, in eum ſenſum vt in conflictu vterque augeatur. Sit corporis A celeritas angularis $=c$, et corporis B celeritas angularis $=e$. Quibus in calculum introductis prodibunt loco ſuperiorum aequationum ſequentes $B(b-v)=A(u-a)=\frac{S(r-e)}{f}=\frac{R(s-e)}{h}$, atque $u-v+fr+hs=b-a-fc-he$ pro corporibus elaſticis, at huius loco $u-v+fr+hs=0$ pro corporibus non elaſticis. Poſt conflictum ergo, ſi corpora ponantur elaſtica, erit corporis A celeritas progreſſiua

$$=a+\frac{2BRS(b-a-fc-he)}{(A+B)RS+AB(Rff+(Shh)}.$$

eiusque celeritas angularis

$$=c+\frac{2ABRf(b-a-fc-he)}{(A+B)+RSAB(Rff+Shh)}.$$

Corporis vero B poſt conflictum celeritas erit

$$=b-\frac{2ARS(b-a-fc-he)}{(A+B)R+AB(Rff+Shh)},$$

et eius celeritas angularis

$$=e+\frac{2ABSh(b-a-fc-he)}{(A+B)RS+AB(Rff+Shh)}.$$

Eaedem formulae omiſſis binariis inſeruiunt pro corporibus non elaſticis.

§. 34. Quando ergo corporum directiones motus progreſſiui ante conflictum parallelae fuerint directioni impulſus, tum in conflictu directiones non mutantur. Ex quo intelligitur ſi hae directiones non fuerint parallelae directioni impulſus, tum motus vt ſupra fecimus in laterales eſſe reſoluendos, quorum alteri ſint normales in planum contactus, alteri eidem paralleli. Perſpicuum enim eſt ex principiis mechanicis motus perpendiculares tantum a conflictu turbari, alteros omnino non affici. Quare poſt conflictum ope compoſitionis motus vtriusque corporis motus progreſſiuus poterit determinari. Quod autem ad motus gyratorios attinet, ii a motibus progreſſiuis nullatenus afficiuntur, et hanc ob rem easdem ſequentur leges, quascunque motus progreſſiui teneant directiones. Omnes igitur tres colliſionum ſpecies hic explicatas dedi duplici tamen reſtrictione, quarum prima corpora ſibi ita occurrere ponit, vt eorum centra grauitatis cum directione impulſus in eodem plano ſint poſita; altera vero corpora talia requirit, quae circa axem per centra grauitatis transeuntes et ad illud planum normales libere gyrari queant. Caſus autem in quibus hae conditiones locum non habent, per principia cognita tractare non licet; ſed eorum explicatio maiorem mechanicae promotionem requirit.

SPE-

SPECIMEN ALGEBRAE AD ARCHITECTVRAM MILITAREM APPLICATAE,

AVCTORE

Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Solent hodie Architecti militares ſubinde ad reſolutionem Problematum quorundam admouere Algebram, cuius inſtituti hinc et inde iam ab aliquo tempore ſpecimina publice apparent; et quod eo maiorem laudem meretur, quo propius ſic grauiſſima muniendi ſcientia ad Geometricam veritatem accedit. Idem inſtitutum hic perſequar, acturus de Propugnaculis munimentorum, Gallice *Baſtions*, quantum quidem per cognitionem harum rerum bellicarum mihi licebit. Tabula IV,

§. 2. Anguli propugnaculorum quantitas, vt ab architectis militaribus determinetur, ſequentes adhibentur ab eis Regulae et Axiomata. Nempe (1.) *Angulus propugnaculi par ſit violentiae tormentorum, vnde non ſit minor 60 gradibus, quia talem ſufficere vſus docuit.* (2.) *Rectus propugnaculi angulus optimus eſt.* Inueniunt nempe ictus tormentorum rs, rs, ad Faciem propugnaculi perpendiculariter directi, maius obſtaculum in angulo propugnaculi recto BAC, quam acuto BAC; quod idem adhuc magis patet in angulo propugnaculi obtuſo; vnde Figura 1.

 etiam

etiam angulus propugnaculi obtusus probatur, et in multis muniendi modis antiquis aeque ac recentioribus saepissime adhibitus fuit. (3.) *Propugnaculi amplitudo ea sit, quae sufficientem armatorum numerum capiat, et satis praebeat spatii ad tormenta dirigenda, caeteraque militaria munia obeunda*; cuius regulae fundamentum per se quam maxime intelligitur. Ad hanc itaque praecipue attendam, dum, datis Facie et Ala propugnaculi alicuius, inquirere volo in magnitudinem anguli propugnaculi, quae ipsum propugnaculum ex his construendum efficiat tale, vt spatium eo contentum inter omnia reliqua possibilia sit maximum.

§ 3. Problema igitur huc pertinens hunc in modum formare licet. Sit Munimenti alicuius regularis radius
Figura 2. maior DA, huic sit applicata Facies AB longitudinis a, et Ala BC longitudinis b; positio vero huius Alae talis sit, vt, continuata vsque ad punctum G radii maioris, efficiat ibi angulum constantem CGH, cuius sinus sit m, cosinus n, posito sinu toto $= 1$. Formabitur sic dimidium propugnaculi alicuius ABC, cuius spatium debet esse inter omnia reliqua possibilia maximum, quaesito ad hunc finem angulo BAK, cuius sinum pono $= x$, cosinum $= y$. Demittantur ex B et C perpendiculares BK et CH in radium maiorem, et orietur spatium ABCH, ita determinandum, vt sit maximum. Habebuntur ergo sequentes Analogiae: sin. G(m): sin. A$(x) =$ BA(a): BG$(\frac{ax}{m})$, hinc CG $= \frac{ax}{m} - b$. In triangulo CHG rectangulo est sin. totus (1): sin. G $(m) =$ CG$(\frac{ax}{m} - b)$: CH$(ax - bm)$. In triangulo BAK rectan-

rectangulo, eſt ſinus totus (1): ſin. $A(x) = BA(a)$: $BK(ax)$. Quia angulus ABG eundem ſinum habet cum ſuo deinceps poſito, et hic deinceps poſitus aequalis eſt ſummae angulorum A et G, habebitur ſinus $ABG = my + nx$, vnde oritur ſin. $G(m)$: ſin. $ABG(my + nx) = AB(a) : AG(\frac{amy + anx}{m})$. Tandem etiam fit in Triangulo rectangulo CHG, ſinus totus (1) ſin. $C(n) = CG (\frac{ax}{m} - b) : GH (\frac{anx}{m} - bn)$. Ex his inuenietur area Trianguli $ABG = \frac{AG.BK}{2} = \frac{a^2mxy + a^2nx^2}{2m}$, et area Trianguli $CHG = \frac{HG \times CH}{2} = \frac{a^2nx^2 - 2abmnx + b^2m^2n}{2m}$. Subtracta hac area à priori, reſidua erit area dimidii Propugnaculi AB $CH = \frac{a^2xy + 2abnx - b^2mn}{2}$. Haec, vt fiat maxima, per cognitas regulas de Maximis et Minimis, debet differentiari, et differentiale eius poni $= 0$. Sed ob $y = \sqrt{(1 - x^2)}$, erit $dy = -\frac{xdx}{y}$, quod ſubſtitui debet, vt habeatur aequatio, facta prius diuiſione per adx, haec ſequens, $ay^2 + 2bny = ax^2$, vel ob $x^2 = 1 - y^2$, haec $y^2 + \frac{bn}{a}y = \frac{a}{2a}$, et extracta radice aequationis reperietur tandem $y = \frac{\pm\sqrt{(2a^2 + b^2n^2)} - bn}{2a}$. Si vero ſumeretur quantitas radicalis negatiue accepta, totus valor ipſius coſinus y eſſet negatiuus, conſequenter angulus ipſe BAK fieret obtuſus; quare hoc caſu ſpatium nullum verſus partem D comprehenderetur, ſed verſus oppoſitam; itaque ſemper aſſumi debet $y = \frac{\sqrt{(2a^2 + b^2n^2)} - bn}{2a}$.

§. 4. Quoniam in methodo muniendi antiqua Batauorum angulus Alae et Cortinae ſemper rectus eſt: erit,

erit, ducta LCM perpendiculari ad alam BC, LC pars Cortinae, et LM Polygonum interius; consequenter LDM angulus ad Centrum in munimento regulari. Demittatur DN perpendicularis ad LM, eruntque GC et DN parallelae, consequenter angulus CGA, cuius sinum vocaui m, et cosinum n, erit idem cum NDA, hoc est, cum dimidio angulo ad Centrum, in quocunque munimento regulari.

§. 5. Vt iam cosinus y, qui propugnaculo maximam aream tribuit, commodius per Logarithmos inueniatur, pono $a = \frac{pbn}{\sqrt{2}}$, vnde erit $p = \frac{a\sqrt{2}}{bn}$. Substituto hoc valore fit $y = \frac{\sqrt{(pp+1)}-1}{p\sqrt{2}}$, aut $py\sqrt{2} = \sqrt{(p^2+1)}-1$.
Figura 3. Sit descriptus semicirculus ADE, radio AC $=1$, ex A erecta Tangens AB $=p$, erit secans BC $=\sqrt{(p^2+1)}$ consequenter BD $=\sqrt{(p^2+1)}-1 = py\sqrt{2}$, aut vero $y = \frac{BD}{p\sqrt{2}}$, ergo y poterit inueniri per solos Logarithmos, si tantummodo BD cognita fuerit. Sed haec BD obtinetur etiam per solos Logarithmos, considerato Triangulo BDA. Nam angulus BCA talis est, vt eius Tangens sit p, aut $\frac{a\sqrt{2}}{bn}$; euoluta igitur hac Tangente obtinebitur angulus DCA, qui vocetur A. Demittatur ex C perpendiculum CF in AD, quo facto angulus ACD bisectus erit; efficiet vero tam BAD quam FCA rectum cum FAC, quare erit BAD $=$ FCA $= \frac{1}{2}$A. Erit vero BA(p) : BD $=$ sin. BDA : sin. BAD $=$ sin. CDA : sin. BAD sin CAD : sin. FCA $=$ FC : FA $= 1$: tang. $\frac{1}{2}$A; quare si haec tangens ipsius $\frac{1}{2}$A vocetur T, erit BD $= p.$ T, aut vero $y = \frac{BD}{p\sqrt{2}} = \frac{T}{\sqrt{2}}$, vnde obtento semel angulo A facillime reperitur y.

§. 6.

§. 6. Facilitatis gratia applicationem regulae vnico exemplo illuſtrare placet. Sit ex. gr. computandus angulus propugnaculi pro Decagono regulari. Quoniam in methodo muniendi Batauа antiqua Facies ſemper eſt 24 perticarum Rhinland. erit $a = 24$. Alae longitudo eſt numerus laterum munimenti binario auctus, quod vero tantum valet vsque ad Decagonum incluſiue, in reliquis Polygonis Ala conſtanter ſtatuitur 12 perticarum, quare in noſtro exemplo erit $b = 12$. Ex §. 4. apparet, n eſſe coſinum 18°, quia ergo $p = \frac{a\sqrt{2}}{bn}$, vel vocato ſinu toto r ad reſtituendam homogeneitatem, $p = \frac{r^2 a\sqrt{2}}{bn}$, erit

$$\begin{array}{rl} 2lr = & 20.0000000 \\ la = & 1.3802112 \\ \frac{1}{2}l2 = & 0.1505150 \\ \hline & 21.5307262 \\ & 11.0573875 \\ \hline lp = & 10.4733387 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} lb = & 1.0791812 \\ ln = & 9.9782063 \\ \hline & 11.0573875 \end{array}$$

vnde reperitur $A = 71° 24'$, et $\frac{1}{2}A = 35° 42'$.

$$\begin{array}{rl} lT = & 9.8564708 \\ \frac{1}{2}l2 = & 0.1505150 \\ \hline & 9.7059558 \end{array}$$

cui reſpondent in Tabulis ſinuum 59° 28', vt adeo pro Decagono regulari angulus propugnaculi, qui hoc maximum et ſpatioſiſſimum efficiat, debeat eſſe 118° 56'. Hac methodo conſtruxi ſequentem laterculum, in quo numerus ſuperior indicat numerum laterum, in Munimen-

 to

tō quodam regulari; medius angulum propugnaculi eum, qui efficit propugnaculum ſpatioſiſſimum; inferior autem oſtendit angulum propugnaculi eum, quem aſſumit *Freitagius*, in methodo muniendi Bataua,

IV.	V	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
102° 46′	106 28	109 30	112 10	114 36	116 52	118 56	119 8	119 16
60° 0′	72 0	80 0	85 43	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0

quae quidem diuerſitas inter angulos propugnaculi *Freitagianos* et meos valde notabilis eſt; ſed, vt taceam, omnes Architectos militares negare ſe comprehendere poſſe, qua ratione adductus *Freitagius* angulum propugnaculi aſſumſerit aequalem $\frac{2}{3}$ anguli Polygoni: mea propugnacula obtuſangula *Freitagiana* robore ſuperant, iuxta id quod §. 2. allegaui, atque id inſuper largiuntur, vt *Freitagianis* ſint ſpatioſiora, imo ſpatioſiſſima.

§. 7. Sed fateor oriri ſic aliud, et quidem multo maius incommodum, ex hac propugnacula conſtruendi methodo: nempe Facies aut defenſionem plane nullam, aut exiguam, accipiunt ab Alis ſuis oppoſitis; plane nullam accipiunt in Quadrato regulari; valde paruam in Pentagono, maiorem vero in Hexagono, et reliquis; in nullo autem talem quae ſufficere poſſet; vti facile patet Figuris his deſcriptis. Quare negligenda plane eſt haec conſtructio propugnaculorum, quae nihil vtilitatis praebet.

§. 8. Alia itaque ratione idem inſtitutum aggrediar,
Fig. 4. nempe ſequente: ſit AD Polygoni cuiuslibet latus exterius; FD, GA, ſint duae lineae defendentes: erit igitur

tur quam maxime ad has lineas respiciendum, quod in priori solutione non factum est, vt propugnacula ex Alis debitam suam defensionem nanciscantur. Itaque ad hunc scopum obtinendum Facies AH propugnaculi assumenda erit in ipsa recta AE, et Ala HK demitti ita debet, vt in puncto lineae defensionis DKF finiatur; quo facto tota haec Ala ad defensionem Faciei in D construendae vtilis erit, siue cum *Pagano* et recentioribus Authoribus perpendiculariter insistat lineae defensionis, siue non. Poterit etiam facile sic obtineri Ala secundaria, quam requirit methodus Bataua antiqua, si nempe Alae breuiores HM assumantur, et Cortina LM coniungantur. His positis quaeratur angulus BAE talis, vt is efficiat triangulum AEF maximum inter omnia possibilia; quo ipso etiam area propugnaculi AHKF, vtpote pars quaedam constans prioris trianguli AEF, maxima inter possibiles reliquas habebitur.

§. 9. Quia autem assumitur munimentum regulare, erit ducta CB perpendiculari ad AD, recta $BA = BD$, angulus $AEB = DEB = FEC$; atque hinc area AEF sequenti modo inuenitur. Sit $BA = a$, BAC sinus p, cos. q tang. m; BAE sinus x cos. y tang. t; erit EAF sinus $= py - qx$; posito sinu toto $= 1$; sinus DFA autem $= py + qx$. In triangulo rectangulo ABE habebitur sin. $BEA(y) : BA\,(a) = 1 : AE(\frac{a}{y})$; porro in Triangulo DFA erit sin. $DFA(py + qx) : DA(2a) =$ sin. $D(x) : AF = \frac{2ax}{py + qx}$, atque sic obtinebitur area Trianguli $AEF = \frac{AE.\,AF.\,sin.\,EAF}{2} = \frac{a^2pxy - a^2qx^2}{py^2 + qxy}$; cuius differentiale

differentiale ad obtinendum maximum debet poni $=0$. Quod si fiat, subrogato $-\frac{ydy}{x}$ pro dx, et reducatur aequatio, praebebit illa hanc $q^2x^2+2pqxy=p^2y^2$, aut vero positis $\frac{x}{y}=t$, et $\frac{p}{q}=m$, orietur $t=m\sqrt{2}-m$ vel $t=\frac{414.m}{1000}$, vnde fit $BE=\frac{414.am}{1000}$. Datis igitur Polygono exteriori AD, quod *Paganus* in Forma regia maiori 100 perticarum assumit, et angulo DAC, ex numero laterum munimenti regularis definiendo, perpendiculum BE facillimo calculo determinatur.

§. 10. Hinc enata est sequens Tabula, in qua pro quolibet numero laterum munimenti regularis, perpendiculum BE reperire licet, in perticis, et eius partibus centesimis:

	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI	XII
BAC	30° 0′	45° 0′	54° 0′	60° 0′	64° 17′	67° 30′	70° 0′	72° 0′	73° 38′	75° 0′
BE	11.95	20.70	28.49	35.85	42.98	49.97	56.87	63.70	40.48	77.25

§. 11. Apparet ex his, constructionem modo dictam efficere munimentum satis forte, et plerasque muniendi regulas eam seruare. At nouum iam exsurgit incommodum, vnicum quidem, sed vix tolerandum: fiunt nempe anguli propugnaculorum nimis acuti, id quod robur eorum diminuit, et contra regulam est §. 2. adductam; atque, quod minime diffiteor, defectus hic eo magis noxius fit, quo maior assumitur numerus laterum munimenti alicuius regularis. Requiritur ad munimenta recte construenda perfectio; sed perfectio non simplex, verum composita, in qua regularum haud infrequenter collisio fit, ſit, vt vna alteri aduerſetur, id quod ex his etiam maxime fit manifeſtum. Quodſi itaque nihil utilitatis aut commodi ad propugnaculorum conſtructionem hic afferre mihi licuit, id tamen nactus ſum, vt oſtenderim fruſtra ex hoc principio propugnaculorum emendationem peti; ſed ſimul tamen ſpecimen Algebrae ad Architecturam militarem applicatae exhibui; intra cuius limites me contineo.

DE CONSTRVCTIONE AEQVATIONVM.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Voties in reſolutione problematum ad aequationes differentiales peruenitur, ante omnia inquirendum eſt, an iſtae aequationes integrationem admittant; perfectiſſime enim problema reſolui cenſendum eſt, quod ad conſtructionem aequationis algebraicae deducitur. At ſi aequatio, quod ſaepiſſime euenit, in formam algebraicam nullo modo transmutari poteſt, tum vel quadraturis vel rectificationibus curuarum, quarum conſtructio habetur, ad problemata reſoluenda vti oportet. Ad

 hoc

hoc vero efficiendum necesse est, vt aequatio solutionem problematis continens, et primi tantum gradus sit differentialis, et praeterea separationem variabilium admittat; si quidem regulis receptis atque iam satis cognitis vti velimus. Hoc enim istae regulae laborant defectu, vt earum ope neque aequationes differentiales altiorum graduum, neque differentiales primi gradus, quarum separatio non constat, construi queant. Hancobrem nisi aequatio ad differentialem primi gradus reduci, simulque separatio variabilium detegi potest, frustra per illas regulas constructio aequationis inuestigatur.

§. 2. Dedi autem ego iam aliquoties specimina methodi cuiusdam peculiaris multo latius patentis, cuius ope non solum plures aequationes differentiales separationem variabilium non admittentes construxi, sed etiam aequationes differentiales secundi gradus, quae nequidem ad differentiales primi gradus reduci poterant. Initio quidem seriebus infinitis, in quas aequationes propositas transmutaueram, sum vsus, earumque summas ad quadraturas reduxi. Tum vero hanc viam non satis genuinam iudicans, in methodum directam inquisiui, qua ad easdem constructiones pertingere possem. In quo etiam negotio operam non inutiliter collocaui; incidi enim in methodum aequationes modulares eruendi, quarum ope ad constructiones difficillimarum aequationum via paratur. Methodum quidem hanc fusius iam exposui, sed illius vsum eximium in construendis aequationibus illo tempore monstrare non vacabat. Interim tamen nuperrime dedi specimen illarum aequationum, quae ope rectictificationis ellipsis construi possunt. Nunc vero, quo vsus huius methodi plenius perspiciatur, casus nonnullos peruoluam speciales, ex quibus plurimarum aequationum constructiones consequantur. Principia autem ex dissertatione de infinitis curuis eiusdem generis, quam praecedente anno praelegi, petam.

§. 3 Cum igitur totum negotium ad inuentionem aequationum modularium recidat, sit $z = \int P\,dx$, et P functio quaecunque ex x et a aliisque constantibus conflata, in qua quidem integratione ipsius $P\,dx$ solum x vt variabilis tractetur. Quaeritur autem si integrale $\int P\,dx$ differentietur ponendo praeter x etiam a variabile, quale differentiale sit proditurum. Inueniri igitur debet aequatio differentialis vel primi, si fieri potest, vel altioris cuiusdam gradus, in qua a aeque insit tanquam variabilis ac x vel z. Huiusmodi ergo aequatio, quam cum *Hermanno* modularem vocaui, tres continebit variabiles z, x, et a; quae autem in aequationem duarum variabilium abibit, si vel ipsi z vel x determinatus vel ab a pendens valor tribuatur. Talis vero aequatio quamcunque habuerit formam, et cuiuscunque sit gradus differentialis, semper ope aequationis $z = \int P\,dx$ construi poterit. Nam si pro dato quoque ipsius a valore $\int P\,dx$ exhibeatur, quod per quadraturas fieri potest, et z vel x illi valori assignato aequale capiatur, determinabitur altera ipsarum z vel x per a, eiusque ideo quantitas innotescit Quocirca hac ratione pro dato alterius indeterminatae valore, alterius quantitas poterit reperiri, in quo ipsa aequationis cuiusuis constructio consistit.

§. 4.

§. 4. Aequatio autem modularis erit vel differentialis primi gradus vel secundi vel tertii vel altioris cuiusdam, prout functio P fuerit comparata. Ad quod dignoscendum et ipsam aequationem modularem inueniendam, oportet sequentes quantitates ex P definire. Primo scilicet differentietur P posito x constante et a variabili, hocque differentiale per da diuisum sit Q. Tum eodem modo Q differentietur posito a tantum variabili, et differentiale per da diuidatur; quod prodit ponatur R. Porro simili modo differentiando R et per da diuidendo orietur noua quantitas S, ex hacque vlterius T, V etc. Omnes ergo hae quantitates Q, R, S, T etc. ex data functione P erunt cognitae. His iam inuentis positoque a iterum constante, si fuerit $\int Q\,dx = \alpha \int P\,dx + K$, vbi α vtcunque datum esse potest per a et constantes, K vero denotat functionem quamcunque ex a, x et constantibus conflatam; tum aequatio modularis erit differentialis primi gradus, quae ex illa obtinetur, si loco $\int P\,dx$ substituatur z et $\frac{dz - P\,dx}{da}$ loco $\int Q\,dx$. Erit ergo aequatio modularis haec $\frac{dz - P\,dx}{da} = \alpha z + K$. Haec vero quantitas K, quia quantitate constante quacunque potest augeri vel minui, ita est accipienda, vt euanescat posito $x = 0$, si quidem integrale ipsius $P\,dx$ ita accipi debeat, vt euanescat posito $x = 0$; quod in sequentibus perpetuo est obseruandum. Loco K ergo semper scribi poterit $K - C$, estque C quantitas, quae prodit, si in K ponatur $x = 0$.

§. 5. Si $\int Q\,dx$ non pendeat a $\int P\,dx$, ideoque aequatio huius formae $\int Q\,dx = \alpha \int P\,dx + K$ inueniri nequeat, videndum est, num sit $\int R\,dx = \alpha \int Q\,dx + \beta \int P\,dx + K$ vbi

vbi iterum α et β per a et conſtantes, K vero per x, a et conſtantes dari ponitur. Si talis formae aequatio poterit formari, tum aequatio modularis erit differentialis ſecundi gradus, reperieturque per has formulas, $\int P\,dx = z$, $\int Q\,dx = \frac{dz - P\,dx}{da}$, $\int R\,dx = \frac{d\left(\frac{dz - P\,dx}{da}\right) - Q\,dx}{da}$.

Simili modo ſi vlterius progrediamur ad aequationes, in quibus $\int S\,dx$, $\int T\,dx$ etc. inſunt, tum aequatio modularis differentialis erit altiorum graduum, atque reipſa inuenietur tum ex iſtis formulis tum ex ſequentibus, quae inſunt: $\int S\,dx = \frac{d\left(\frac{d\left(\frac{dz - P\,dx}{da}\right) - Q\,dx}{da}\right) - R\,dx}{da}$

et $\int T\,dx$ aequatur differentiali huius quantitatis ipſo $S\,dx$ minuto et per da diuiſo. Hocque modo vlterius eſt progrediendum, ſi aequa - modularis ad differentialia altiorum graduum aſcendat.

§. 6. His praemiſſis praeceptis conſiderabo hanc aequationem ſpecialem $z = \int e^{ax} X\,dx$, vbi X functionem quamcunque ipſius x et conſtantium ab a non pendentem ſignificet. Atque primo quidem inueſtigabo, qualem valorem X habere debeat, vt aequatio modularis fiat tantum differentialis primi gradus; ſimulque cuiusmodi aequationes ope formulae $z = \int e^{ax} X\,dx$ conſtrui poſſint. Eſt vero e numerus, cuius logarithmus eſt vnitas, atque integrale ipſius $e^{ax} X\,dx$ ita ſumi pono, vt euaneſcat poſito $x = 0$. Cum igitur ſit $P = e^{ax} X$, et X ab a non pendeat, erit $e^{ax} X\,x\,da$ eius differentiale poſito x conſtante,

 ideoque

ideoque $Q = e^{ax} X x$. Quo ergo aequatio modularis fit differentialis primi gradus, oportet fit $\int e^{ax} X\,dx = \alpha \int e^{ax} X\,dx + K - C$. Ponamus $K = e^{ax} X p$ et fumantnr differentialia pofito a conftante habebitur $e^{ax} X x\,dx = \alpha e^{ax} X\,dx + e^{ax} X\,dp + e^{ax} p\,dX + e^{ax} a X p\,dx$ feu $X x\,dx = \alpha X\,dx + X\,dp + p\,dX + a X p\,dx$. Vnde oritur $\frac{dX}{X} = \frac{x\,dx - \alpha\,dx - dp - a p\,dx}{p}$, vbi pro p talis valor in x accipi debet, vt X ab a omnino non pendens prodeat; at α vtcunque ab a pendens effici poteft.

§. 7. Inuentis autem hinc idoneis valoribus pro X erit aequatio modularis $dz - e^{ax} X\,dx = \alpha z\,da + (e^{ax} X p - C)\,da$. Ponamus primo effe p conftans $= m$, erit $\frac{dX}{X} = \frac{x\,dx - (\alpha + m a)\,dx}{m}$, fiatque $\alpha + m a = b$ feu $\alpha = b - m a$, ita vt b et m ab a non pendeant; erit $\frac{dX}{X} = \frac{x\,dx - b\,dx}{m}$ et $lX = \frac{x^2 - 2bx}{2m}$ atque $X = e^{\frac{x^2 - 2bx}{2m}}$; conftans vero C erit $= m$. Quamobrem ex aequatione $z = \int e^{\frac{x^2 - 2bx + 2max}{2m}} dx$ oritur ifta aequatio modularis $dz = (b - m a) z\,da - m\,da + e^{\frac{x^2 - 2bx + 2max}{2m}} (dx + m\,da)$. Haec ergo aequatio, cuicunque functioni ipfius a quantitas x aequalis ponatur, vt duae tantum variabiles z et a fuperfint, femper conftrui poteft; quod quidem aliunde iam patet, quia altera variabilis z vnicam habet dimenfionem. At fi ipfi z datus per a et conftantes valor tribuatur, habebitur aequatio inter variabiles a et x tantum, quae confueto more minus tractabilis videtur: interim

rim tamen hoc modo conſtrui poterit, pro quouis ipſius a valore conſtruatur curua, cuius applicata abſciſſae x reſpondens ſit $= e^{\frac{x^2 - 2bx + 2max}{2m}}$ in hacque curua ſumatur area aequalis eidem ipſius a functioni, cui z eſt aequalis, erit abſciſſa hoc modo determinata verus valor ipſius x.

§. 8. Prodierunt haec ex poſitione $p = m$, atque m et b erant quantitates conſtantes a non inuoluentes. Ponamus autem porro $p = \beta + \gamma x$, erit $\frac{dx}{x} = \frac{x\,dx - \alpha dx - \gamma dx - \beta a dx - \gamma a dx}{\beta + \gamma x}$, quae expreſſio, quo a ex ea excedat ponatur $\frac{dx}{x} = \frac{fx dx - g dx}{mx + n}$ vbi f, g, m et n non inuoluant a, erit $\beta = \frac{n}{f + ma}$, $\gamma = \frac{m}{f + ma}$ et $\alpha = \frac{g - m - na}{f + ma}$, atque $p = \frac{n + mx}{f + ma}$. Hinc oritur $lX = \frac{fx}{m} - \frac{fn - gm}{m^2} l(mx + n)$ atque $X = e^{\frac{fx}{m}} (mx + n)^{\frac{-fn - gm}{m^2}}$, et $K = e^{\frac{ax + fx}{m}} (mx + n)^{\frac{m^2 - fn - gm}{m^2}} : (f + ma)$, ideoque $C = \frac{n^{\frac{m^2 - fn - gm}{m^2}}}{f + ma}$. Ponatur $f = 0$, quod ſine detrimento vniuerſalitatis fieri poteſt, erit $z = \int e^{ax} (mx + n)^{\frac{-g}{m}} dx$; vnde ſequens orietur aequatio modularis $dz = \frac{(g - m - na) z da}{ma} + \frac{e^{ax} (mx + n)^{\frac{-g}{m}} (madx + nda + mxda)}{ma} - \frac{n^{\frac{m-g}{m}} da.}{ma}$ Detur quomodocunque z per a ita vt ſit $dz +$

 $n^{\frac{m-g}{m}}$

$\frac{n^{\frac{m-g}{m}} da - (g-m-na)z da}{ma} = \frac{A da}{ma}$, habebitur constructio huius aequationis $A da = e^{ax}(mx+n)^{\frac{-g}{m}}(madx + nda + mxda)$, quae quidem facta substitutione $x = \frac{y-na}{ma}$ facile separatur.

§. 9. Cum igitur hae aequationes, quae ex aequationibus modularibus differentialibus primi gradus eliciuntur, receptas regulas constructionum non superent, pregrediendum est ad aequationes modulares differentiales secundi gradus. Retinebo vero priorem formam $z = \int e^{ax} X dx$ et inuestigabo, cuiusmodi functionem ipsius x esse oporteat X, quo aequatio modularis ad differentio-differentialia ascendat. Erit vero $P = e^{ax} X$, $Q = e^{ax} X x$, et $R = e^{ax} X x^2$. quare pono $\int e^{ax} X x^2 dx = \alpha \int e^{ax} X x dx + \beta \int e^{ax} X dx + K - C$. Sumatur $K = e^{ax} X p$, habebitur sumtis differentialibus $X x^2 dx = \alpha X x dx + \beta X dx + X dp + p dX + a X p dx$, vnde fit $\frac{dX}{X} = \frac{x^2 dx - \alpha x dx - \beta dx - dp - apdx}{p}$. Ponatur $p = \frac{(x-\gamma)(x-\delta)}{a}$ erit $\frac{dX}{X} = \frac{-dp}{p} + \frac{a(\gamma+\delta-\alpha)x dx - a(\gamma\delta+\beta)dx}{(x-\gamma)(x-\delta)}$. Sit $a\gamma + a\delta - \alpha a = f$ seu $\alpha = \gamma + \delta - \frac{f}{a}$ et $\beta = \frac{g}{a} - \gamma\delta$, existentibus γ, δ, et f, g, quantitatibus ab a non pendentibus. Erit ergo $\frac{dX}{X} = \frac{-dp}{p} + \frac{fx dx - g dx}{(x-\gamma)(x-\delta)}$ atque $lX - lc = \frac{\gamma f - g - \gamma + \delta}{\gamma - \delta} l(x-\gamma) + \frac{\delta f - g - \delta + \gamma}{\delta - \gamma} l(x-\delta)$ seu $X = c(x-\gamma)^{\frac{\gamma f - g - \gamma + \delta}{\gamma - \delta}} (x-\delta)^{\frac{\delta f - g - \delta + \gamma}{\delta - \gamma}}$.

§. 10.

§. 10. Ponatur $\frac{\gamma f - g - \gamma + \delta}{\gamma - \delta} = \lambda$ et $\frac{\delta f - g - \delta + \gamma}{\delta - \gamma} = \mu$. erit $f = \lambda + \mu + 2$ et $g = \gamma\mu + \delta\lambda + \gamma + \delta$ Hinc erit $X = c(x - \gamma)^\lambda (x - \delta)^\mu$, $\alpha = \gamma + \delta - \frac{\lambda - \mu - 2}{a}$ et $\beta = \frac{\gamma\mu + \delta\lambda + \gamma + \delta}{a} - \gamma\delta$, atque $K = c\frac{e^{ax}(x - \gamma)^{\lambda+1}(x - \delta)^{\mu+1}}{a}$ et $C = \frac{c(-\gamma)^{\lambda+1}(-\delta)^{\mu+1}}{a}$. Quocirca fiet $z = \int e^{ax}(x - \gamma)^\lambda (x - \delta)^\mu c\,dx$, quae dabit sequentem aequationem modularem $d\left(\frac{dz - e^{ax}(x - \gamma)^\lambda (x - \delta)^\mu c\,dx}{da}\right) = e^{ax}(x - \gamma)^\lambda (x - \delta)^\mu c\,x\,dx + (\gamma + \delta)dz - \frac{(\lambda + \mu + 2)dz}{a} - (\gamma + \delta - \frac{\lambda - \mu - 2}{a})e^{ax}(x - \gamma)^\lambda (x - \delta)^\mu c\,dx + \frac{(\gamma\mu + \delta\lambda + \gamma + \delta)z\,da}{a} - \gamma\delta z\,da + \frac{e^{ax}(x - \gamma)^{\lambda+1}(x - \delta)^{\mu+1}c\,da}{a} - \frac{(-\gamma)^{\lambda+1}(-\delta)^{\mu+1}}{a}$

Siue quod eodem redit $z = \int e^{ax}(\varepsilon x + \eta)^\lambda (\zeta x + \theta)^\mu dx$ dat istam aequationem modularem.

$$d\left(\frac{dz - e^{ax}(\varepsilon x + \eta)^\lambda (\zeta x + \theta)^\mu dx}{da}\right) = e^{ax}(\varepsilon x + \eta)^\lambda (\zeta x + \theta)^\mu x\,dx$$
$$-\left(\frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{\theta}{\zeta} + \frac{\lambda + \mu + 2}{a}\right)(dz - e^{ax}(\varepsilon x + \eta)^\lambda (\zeta x + \theta)^\mu dx)$$
$$-\left(\frac{\eta(\mu+1)}{\varepsilon a} + \frac{\theta(\lambda+1)}{\zeta a} + \frac{\eta\theta}{\varepsilon\zeta}\right)z\,da + e^{ax}(\varepsilon x + \eta)^{\lambda+1}(\zeta x + \theta)^{\mu+1}\frac{da}{\varepsilon\zeta a}$$
$$-\frac{\eta^{\lambda+1}\theta^{\mu+1}da}{\varepsilon\zeta a},$$

in qua litterae ε, ζ, η, θ, λ, μ denotant quantitates constantes ab a non pendentes.

§. 11. Tribuatur ipsi x valor vel constans vel ab a quomodocunque pendens, et sumto da constante loco omnium terminorum, in quibus non inest z scribatur $A\,da$

denotante A functionem resultantem ipsius a et constantium. Quo facto abibit aequatio modularis in sequentem aequationem duas tantum variabiles z et a inuoluentem: $ddz + (\frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{\theta}{\zeta} + \frac{\lambda + \mu + 2}{a})dz + (\frac{\eta(\mu+1)}{\varepsilon a} + \frac{\theta(\lambda+1)}{\zeta a} + \frac{\eta\theta}{\varepsilon\zeta})z\,da = A\,da$, seu $\frac{ddz}{da} + (b + \frac{c}{a})dz + (f + \frac{g}{a})z\,da = A\,da$ positis $\frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{\theta}{\zeta} = b$, $\lambda + \mu + 2 = c$, $\frac{\eta\theta}{\varepsilon\zeta} = f$, et $\frac{\eta(\mu+1)}{\varepsilon} + \frac{\theta(\lambda+1)}{\zeta} = g$. Haec ergo aequatio differentio-differentialis ope aequationis $z = \int e^{ax}(\varepsilon x + \eta)^{\lambda})(\zeta x + \theta)^{\mu}dx$ poterit construi. Simili modo si ipsi z tribuatur valor vel constans vel ab a pendens, aequatio modularis abibit in aequationem differentio differentialem inter x et a multo magis implicatam, cuius nihilo minus constructio potest exhiberi.

§. 12. Quo autem obtineamus aequationes differentialis primi gradus, quae hoc modo construi queant, oportet, vt aequationes ita erutae ad differentiales primi gradus reduci queant. Id quod succederet si talis ipsius x valor posset assignari, vt A euanescat, hoc vero admodum difficulter potest praestari, nisi plures litterarum arbitrariarum definire velimus. Assumo ergo aequationem fundamentalem magis compositam hanc $z = E\int e^{ax}(\eta + \varepsilon x)^{\lambda}(\theta + \zeta x)^{\mu}dx + F\int e^{-ax}(\eta - \varepsilon x)^{\lambda}(\theta - \zeta x)^{\mu}dx$, vbi E, F, ε, ζ, η, θ, λ, μ sint quantitates constantes ab a non pendentes. Posito vero vt ante $b = \frac{\theta}{\zeta} + \frac{\mu}{\varepsilon}$, $c = \lambda + \mu + 2$, $f = \frac{\eta\theta}{\varepsilon\zeta}$ et $f = \frac{\eta(\mu+1)}{\varepsilon} + \frac{\theta(\lambda+1)}{\zeta}$, inuenietur ex hac aequatione sequens modularis:

d(dz

$$d\left(\frac{dz - Ee^{ax}(\eta+\varepsilon x)^{\lambda}(\theta+\zeta x)^{\mu}dx - Fe^{-ax}(\eta-\varepsilon x)^{\lambda}(\theta-\zeta x)^{\mu}dx}{da}\right)$$

$$= Ee^{ax}(\eta+\varepsilon x)^{\lambda}(\theta+\zeta x)^{\mu}xdx - Fe^{-ax}(\eta-\varepsilon x)^{\lambda}(\theta-\zeta x)^{\mu}xdx$$

$$-(b+\tfrac{c}{a})(dz - Ee^{ax}(\eta+\varepsilon x)^{\lambda}(\theta+\zeta x)^{\mu}dx - Fe^{-ax}(\eta-\varepsilon x)^{\lambda}(\theta\ \zeta x)^{\mu}dx)$$

$$-\left(f+\frac{g}{a}\right)zda + \frac{Ee^{ax}(\eta+\varepsilon x)^{\lambda+1}(\theta+\zeta x)^{\mu+1}da}{\varepsilon\zeta a} -$$

$$\frac{Fe^{-ax}(\eta-\varepsilon x)^{\lambda+1}(\theta-\zeta x)^{\mu+1}da}{\varepsilon\zeta a} - \frac{(E-F)\eta^{\lambda+1}\theta^{\mu+1}da}{\varepsilon\zeta a}.$$

§. 13. Quo nunc talis valor pro x ſubſtituendus inueniatur, vt omnes termini praeter eos in quibus ineſt z euaneſcant, facio $E = F = 1$, quo terminus vltimus euaneſcat. Deinde pono $\frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{\theta}{\zeta} = 0$ ſeu $b = 0$, atque facio $x = \frac{-\eta}{\varepsilon}$, vt ambo termini penultimi euaneſcant, ad quod quidem requiritur vt $\lambda + 1$ et $\mu + 1$ ſint numeri affirmatiui. Quia itaque x conſtantem habet valorem, omnes termini in quibus ineſt dx euaneſcent. Fiat breuitatis gratia $\varepsilon = -1$, $\zeta = 1$, et $\eta = \theta = b$, erit $b = 0$ $c = \lambda + \mu + 2$, $f = -b^2$, et $g = \lambda b - \mu b = b(\lambda - \mu)$. atque aequatio fundamentalis abibit in hanc:

$$z = \int e^{ax}(b-x)^{\lambda}(b+x)^{\mu}dx + \int e^{-ax}(b+x)^{\lambda}(b-x)^{\mu}dx.$$

In qua ſi ſumatur $x = b$ et a tanquam variabilis tractetur prodibit ſequens aequatio inter z et a, ſi da conſtans ponatur: $\frac{ddz}{da} + \frac{cdz}{a} + (f + \frac{g}{a})zda = 0$, quae in aequationem differentialem primi gradus transmutabitur facto $z = e^{\int tda}$, prodibit enim $dt + t^2da + \frac{ctda}{a} + (f + \frac{g}{a})da = 0$ Ponatur $ta^c = y$ ſeu $t = a^{-c}y$ habebitur $dy +$

y^2da

$\frac{y^2 da}{a^c} + (f a^c + g a^{c-1}) da = 0$. Fiat porro $a^{1-c} = u$; erit $\frac{da}{a^c} = \frac{du}{1-c}$ adeoque $dy + \frac{y^2 du}{1-c} + \frac{f}{1-c} u^{\frac{2c}{1-c}} du + \frac{g}{1-c} u^{\frac{2c-1}{1-c}} du = 0$, seu $(\lambda + \mu + 1) dy = y^2 du - b^2 u^{\frac{-2\lambda - 2\mu - 4}{\lambda + \mu + 1}} du + b(\lambda - \mu) u^{\frac{-2\lambda - 2\mu - 3}{\lambda + \mu + 1}} du$. Ponatur $\lambda + \mu = m$, $\lambda - \mu = n$, habebitur ista aequatio $(m+1) dy = y^2 du - b^2 u^{\frac{-2m-4}{m+1}} du + n b u^{\frac{-2m-3}{m+1}} du$ quae construi potest ex aequatione $z = \int e^{ax} (b - x)^{\frac{m+n}{2}} (b + x)^{\frac{m-n}{2}} dx + \int e^{-ax} (b + x)^{\frac{m+n}{2}} (b - x)^{\frac{m-n}{2}} dx$. Nam si post integrationem ita institutam, vt posito $x = 0$, z euanescat, capiatur $x = b$, et pro a substituatur $u^{\frac{-1}{m+1}}$ habebitur functio ipsius u quae sit V, erit $y = \frac{-(m+1) d V}{V du}$ qui est verus valor ipsius y in aequatione inuenta. Notandum vero est $m + n$ et $m - n$ numeros affirmatiuos esse debere.

§. 14. Si tam $\frac{m+n}{2}$ quam $\frac{m-n}{2}$ fuerint numeri integri affirmatiui, tum valor ipsius z per integrationem poterit exhiberi, et proinde valor ipsius V reipsa assignari. His igitur casibus aequatio proposita $(m+1) dy = y^2 du - b^2 u^{\frac{-2m-4}{m+1}} du + n b u^{\frac{-2m-3}{m+1}} du$ more consueto poterit integrari, eiusque integrale exhiberi. Ponatur ergo $m = i + k$, et $n = i - k$ denotantibus i et k numeros ris integris affirmatiuis, et habebimus hanc aequationem $(1+i+k)dy=y^2du-b^2u^{\frac{-2i-k-4}{i+k+1}}du+(i-k)bu^{\frac{-2i-2k-2}{i+k+1}}du$; quae non solum modo supra exposito construi, sed etiam consueto more separari et integrari poterit. Nam in aequatione $z=\int e^{ax}(b-x)^i(b+x)^k dx+\int e^{-ax}(b+x)^i(b-x)^k dx$ post integrationem, quae actu succedet, ita institutam, vt posito $x=0$ euanescat z, ponatur $x=b$ et pro a substituatur hic valor $u^{\frac{-1}{i+k+1}}$; quo facto z aequabitur functioni cuidam ipsius u, quae sit V; inuento vero V erit $y=\frac{-(i+k+1)dV}{Vdu}$. Si fiat insuper $k=i$ prodibit aequatio a Com. *Riccato* quondam proposita $(1+2i)dy=y^2du-b^2u^{\frac{-4i-4}{2i+1}}du$, cuius adeo constructio vniuersalis est exhibita.

DE FRACTIONIBVS CONTINVIS. DISSERTATIO.

AVCTORE
Leonh. Euler.

§. 1.

Varii in Analyſin recepti ſunt modi quantitates, quae alias difficulter aſſignari queant, commode exprimendi. Quantitates ſcilicet irrationales et transcendentes, cuiusmodi ſunt logarithmi, arcus circulares, aliarumque curuarum quadraturae, per ſeries infinitas exhiberi ſolent, quae, cum terminis conſtent cognitis, valores illarum quantitatum ſatis diſtincte indicant. Series autem iſtae duplicis ſunt generis, ad quorum prius pertinent illae ſeries, quarum termini additione ſubtractioneue ſunt connexi; ad poſterius vero referri poſſunt eae, quarum termini multiplicatione coniunguntur. Sic vtroque modo area circuli, cuius diameter eſt $=1$, exprimi ſolet; priore nimirum area circuli aequalis dicitur $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-$ etc. in infinitum; poſteriore vero modo eadem area aequatur huic expreſſioni $\frac{2.4}{3.3}\cdot\frac{4.6}{5.5}\cdot\frac{6.8}{7.7}\cdot\frac{8.10}{9.9}\cdot\frac{10}{11}$ etc. in infinitum. Quarum ſerierum illae reliquis merito praeferuntur, quae maxime conuergant, et pauciſſimis ſumendis terminis valorem quantitatis quaeſitae proxime praebeant.

§. 2. His duobus ſerierum generibus non immerito ſuperaddendum videtur tertium, cuius termini continua diui-

diuiſione inter ſe connectuntur, quas ſeries propterea fractiones continuas appellare conueniet. Minus quidem vſitatum eſt hoc ſerierum genus duobus reliquis; ſed non ſolum aeque diſtincte valorem quantitatis, quam exprimit, ob oculos ponit, verum etiam perquam eſt aptum ad valorem illum proxime inueniendum. Tam parum autem hoc ſerierum genus etiamnum eſt excultum, vt praeter vnam vel alteram huius generis ſeriem iam cognitam, nequidem methodus habeatur vel huiusmodi ſerierum veros valores inueniendi vel datas quantitates transcendentes in tales expreſſiones conuertendi. Cum igitur iam pridem in his fractionibus continuis examinandis laborauerim, atque plura cum ad earum vſum tum inuentionem pertinentia non parui momenti obſeruauerim, ea hic exponere conſtitui, quo aliis viam easdem tractandi planiorem efficerem. Quamuis enim nondum ad completam huius doctrinae theoriam pertigerim, tamen haec, quae magno labore elicui, inſigne adiumentum allatura eſſe confido, ad iſtam doctrinam magis perficiendam.

§. 3. Quo igitur, quid nomine fractionum continuarum intelligam, clarius percipiatur, ampliſſimum earum exemplum ante omnia exhibeo:

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\varepsilon}{f+\text{etc.}}}}}}$$

ex quo ſcribendi modo quilibet ſignificationem huius expreſſionis facile cognoſcet. Quantitas ſcilicet haec conſtat duobus membris numero integro *a* et fractione cuius numerator eſt α, denominator vero iterum ex duobus compoſitus eſt membris integro nimirum *b* et fractione cuius numerator eſt β, denominator vero rurſum duobus conſiſtit membris integro vide, licet *c* et fractione vt ante: ſicque porro in infinitum. Duplices hic occurrunt quantitates, quas etiam litteris ex latino et graeco alphabeto deſumtis diſtinxi; Harum quantitatum eas, quas etiam graecis litteris denotaui numeratores appellabo, quia fractionum ſequentium numeratores reuera conſtituunt; reliquas vero quantitates latinis litteris expreſſas ad diſtinctionem omnes denominatores vocabimus; omnes enim praeter primam reuera ſunt partes denominatorum.

§. 4. Primus, qui, quantum mihi conſtat, huiusmodi fractionem continuam protulit, erat Vicecomes *Brouncker*, qui poſt communicatam ſecum *Wallisii* quadraturam circuli, eandem expreſſionem ita commutauit, vt aſſeueraret, aream circuli ſe habere ad quadratum diametri vti 1 ad

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\text{etc.}}}}}}$$

vbi

vbi numeratores ſunt quadrata numerorum imparium, denominatores vero 2. Qua autem via *Brounckerus* in hanc expreſſionem inciderit, non conſtat, atque merito foret dolendum, ſi eius methodus periiſſet; cum non ſit dubitandum, quin eadem methodo plura praeclara in hoc genere exhiberi poſſent. *Walliſius* quidem, dum hanc fractionem recenſet, ipſe demonſtrationem concinnare eſt conatus, quae autem minus eſt genuina, atque penitus ab auctoris methodo diuerſa eſſe videtur. *Walliſius* autem hanc totam inuentionem deriuat ex ſequente theoremate quod ſit:

$$a^2 = \left((a-1)+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)\text{ etc.}}}}\right)\left((a+1)+\cfrac{1}{2(a+1)+\cfrac{9}{2(a+1)+\cfrac{25}{2(a+1)\text{ etc.}}}}\right)$$

cuius veritatem per inductionem ſatis confirmat, ſed, quod caput eſt, analyſin non affert, qua ad hoc theorema ſit peruentum.

§. 5. Commode autem atque facile ex data huiusmodi fractione continua valor eius vero proximus poteſt determinari, quin et limites definire licet, intra quos verus valor contineatur, vt, ſi quadratura quaepiam vel alia quantitas tranſcendens hoc modo fuerit expreſſa, facili negotio ea ipſa proxime aſſignari queat. Oſtendam hoc ex generali fractionum continuarum forma:

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \text{etc.}}}}}$$

in qua omnes quantitates ingredientes affirmatiuas pono. Apparet autem valorem vero propinquum obtineri, si fractio continua alicubi abrumpatur, atque eo propiorem valorem inuentum iri, quo longius fractio continuetur, Ita sumendo tantum a habebitur valor minor vero, cum annexa fractio tota negligatur. Sumendo autem $a + \frac{\alpha}{b}$, valor habebitur maior vero, quia in fractione denominator b est iusto minor. Sin autem sumatur

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c}}$$

habebitur iterum valor iusto minor ob fractionem $\frac{\beta}{c}$, indeque denominatorem $b + \frac{\beta}{c}$ nimis magnum. Atque hoc modo fractionem continuam successiue abrumpendo alternatiue valores iusto maiores et minores prodibunt; vnde quamtumuis prope ad verum fractionis continuae valorem accedere licebit.

§. 6. Sequens igitur habebitur expressionum series:

$$a,\ a + \frac{\alpha}{b},\ a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c}},\ a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d}}},\ \text{etc.}$$

qua-

quarum, quae ſunt ordine impares, vt prima, tertia, quinta, etc. minores ſunt vero fractionis continuae valore: pares autem erunt maiores eodem. Quare cum terminus tertius maior ſit primo, quintus maior tertio et ita porro; termini impares creſcendo tandem verum fractionis continuae valorem attingent; termini pares vero, qui continuo decreſcunt, decreſcendo tandem ad verum fractionis continuae valorem deſcendent. Si autem hae expreſſiones in fractiones ſimplices transmutentur, ſequens prodibit earundem expreſſionum ſeries:

$$\frac{a}{1};\ \frac{ab+\alpha}{b};\ \frac{abc+\alpha c+\beta a}{bc+\beta};\ \frac{abcd+\alpha cd+\beta ad+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b}$$

quae ſi attentius inſpiciatur, facile colligetur lex, qua iſti termini progrediuntur; cuiusque ope ſine operoſa fractionum illarum compoſitarum reductione has fractiones, quousque libuerit, continuare licet. Nimis quidem hae fractiones ſtatim fiunt prolixae; ſed in exemplis quibus hae litterae numeris exprimuntur, perquam commode haec ſeries continuatur.

§. 7. Lex autem progreſſionis harum fractionum ex ſequente ſchemate clare percipietur:

$$\begin{array}{cccccc} & a & b & c & d & e \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+\alpha}{b}; & \frac{abc+\alpha c+\beta a}{bc+\beta}; & \frac{abcd+\alpha cd+\beta ad+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b}. & \\ & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \end{array}$$

Scilicet his fractionibus ſupra ſcripti ſunt denominatores fractionis continuae, infra vero numeratores tanquam indices; ipſis autem fractionibus praefixa eſt fractio $\frac{1}{0}$, quippe quae ex ipſa lege mox declaranda in hunc locum pertinet.

tinet. Lex iam progreſſionis in hoc conſiſtit vt cuiusque fractionis numerator per indicem ſupra ſcriptum multiplicatus vna cum numeratore praecedentis fractionis per ſuum infra ſcriptum indicem multiplicato praebeat numeratorem ſequentis fractionis: Atque eodem modo cuiusque fractionis denominator per indicem ſuum ſupra poſitum multiplicatus vna cum denominatore praecedentis fractionis per indicem ſuum infra ſcriptum multiplicato praebeat denominatorem fractionis ſequentis. Lex quidem haec ex ipſa inſpectione harum fractionum, ſi vlterius continentur, facile obſeruatur; ſed eadem etiam ex ipſa fractionum continuarum natura deduci poteſt: quam demonſtrationem autem hic apponere ſuperfluum iudico.

§. 8. Si iſtarum fractionum differentiae capiantur, ſubtrahendo quamque a praecedente, ſequens orietur ſeries:

$$\frac{1}{0} - \frac{\alpha}{1 \cdot b} + \frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)} - \frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)} + \text{etc.}$$

cuius numeratorum progreſſio per ſe eſt manifeſta, denominatores vero ex binis denominatoribus praecedentibus formantur. Cum igitur ſuperioris ſeriei vltimus terminus, qui verum fractionis continuae valorem exhibet, componatur ex primo, quem reiecto $\frac{1}{0}$ ſumamus a, et omnibus differentiis, erit verus fractionis continuae propoſitae valor $=$:

$$a + \frac{\alpha}{1 \cdot b} - \frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)} + \frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)} - \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{(bcd+\beta d+\gamma b)(bcde,} \text{etc.}$$

Habemus adeo ſeriem infinitam primi generis, cuius termini additione et ſubtractione inter ſe coniunguntur, valori fractionis continuae propoſitae aequalem; haecque ſeries valde

valde conuergit, atque ad valorem illum proxime inueniendum admodum eſt apta. Si bini termini coniungantur alternationis ſignorum euitandae cauſa, reperietur eadem fractio continua aequalis ſequenti ſeriei:

$$a + \frac{\alpha c}{1(bc+\beta)} + \frac{\alpha\beta\gamma e}{(bc+\beta)(bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta)} + \text{etc.}$$

cuius numeratorum et denominatorum lex ex ſuperiore ſponte ſe prodit. Vehementer autem haec ſeries conuergit, atque eius ope citiſſime vero proxima ſumma inueniri poteſt.

§. 9. Quo magis igitur haec ſeries vltima inuenta conuergit, eo magis etiam ipſa fractio continua conuergere cenſenda eſt; quia datus terminorum ſeriei numerus dato fractionum numero fractionis continuae reſpondet. Perſpicuum ergo eſt fractionem continuam eo magis conuergere, quo minores ſint eius numeratores α, β, γ, etc. maioresque denominatores a, b, c, etc. Omnes autem hos numeros tam numeratores quam denominatores integros ponere licet; nam ſi eſſent fracti per notam fractionum reductionem in integros transmutari poſſent, ſingularum ſcilicet fractionum numeratores et denominatores per eundem numerum multiplicando. Poſitis ergo omnibus numeris tam α, β, γ, etc. quam a, b, c, etc. integris fractio continua maxime conuerget, ſi omnes numeratores α, β, γ, etc. aequentur vnitat; deinde vero conuergentia eo erit maior, quo maiores fuerint denominatores a, b, c, d, etc. Vnitate ſcilicet numeratores minores eſſe nequeunt, ſi enim alicubi numerator eſſet $= 0$; ibidem fractio continua abrumperetur, foretque fractio finita. Idem quoque accidit, ſi denominatorum aliquis fiat $=\infty$, ibidem enim pariter fractio continua abrumpetur atque in fractionem finitam transibit.

§. 10. Si igitur sequens proposita sit fractio continua, cuius omnes numeratores sint vnitates:

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \text{etc.}}}}}}$$

ad eius valorem appropinquabunt fractiones sequentis seriei

$$\begin{array}{ccccc} & a & b & c & d & e \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+1}{b}; & \frac{abc+c+a}{bc+1}; & \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b} \end{array}$$

quae series ope vnicae indicum a, b, c, d, etc. progressionis continuatur. Scilicet cuiusque fractionis tam numerator quam denominator per indicem multiplicatus et praecedentis fractionis numeratore et denominatore respectiue auctus, dabit numeratorem et denominatorem sequentis fractionis. Valor deinde huius fractionis continuae aequabitur summae sequentis seriei:

$$a + \frac{1}{1.b} - \frac{1}{b(bc+1)} + \frac{1}{(bc+1)(bcd+d+b)} - \frac{1}{(bcd+d+b)(bcde \text{ etc.}}$$

vel summae huius, in quam ista transmutatur

$$a + \frac{c}{(bc+1)} + \frac{e}{(bc+1)(bcde+de+be+bc+1)} + \text{etc.}$$

cuius

cuius ſeriei denominatores formantur ex alternis denominatoribus ſeriei fractionum ſuperioris; ideoque facile continuantur.

§. 11. Si in tali fractione continua, cuius numeratores omnes ſunt vnitates, denominatores fuerint numeri fracti, expediet talem fractionem continuam in aliam transformare, in qua tam numeratores quam denominatores ſint numeri integri. Ita ſi huiusmodi propoſita eſſet fractio continua.

$$a+\cfrac{1}{\frac{b}{B}+\cfrac{1}{\frac{c}{C}+\cfrac{1}{\frac{d}{D}+\cfrac{1}{\frac{e}{E}+\cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}$$

haec tollendis fractionibus particularibus transmutabitur in ſequentem formam:

$$a+\cfrac{B}{b+\cfrac{BC}{c+\cfrac{CD}{d+\cfrac{DE}{e+\text{etc.}}}}}$$

Simili modo viciſſim quaeuis fractio continua in aliam transmutari poteſt, cuius omnes numeratores ſint vnitates, denominatores vero numeri fracti, erit ſcilicet:

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \cfrac{\zeta}{\text{etc.}}}}}} = a + \cfrac{1}{\frac{b}{\alpha} + \cfrac{1}{\frac{\alpha c}{\beta} + \cfrac{1}{\frac{\beta d}{\alpha\gamma} + \cfrac{1}{\frac{\alpha\gamma e}{\beta\delta} + \cfrac{1}{\frac{\beta\delta f}{\alpha\gamma\zeta} + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}}$$

quae posterior forma ex priore facile formatur.

§. 11. Cum igitur data fractione continua eius valor vel verus ipse, si quidem fractio abrumpatur, vel vero proximus per fractionem ordinariam exhiberi queat; vicissim quoque fractio ordinaria in fractionem continuam transformari poterit. Quae transmutatio quomodo sit instituenda in fractionibus continuis, quarum numeratores omnes sint vnitates, denominatores vero numeri integri, primum ostendam. Omnis autem fractio finita, cuius numerator et denominator sunt numeri integri finiti in huiusmodi fractionem continuam transformatur, quae alicubi abrumpitur; fractio autem cuius numerator et denominatorsunt numeri infinite magni, cuiusmodi dantur pro quantitatibus irrationalibus et transcendentibus, in fractionem vere continuam et in infinitum excurrentem transibit. Ad talem fractionem continuam inueniendam sufficiet denominatores tantum assignasse, cum numeratores omnes vnitates esse ponamus. Hi vero inuenientur inter numeratorem et denominatorem fractionis propositae eandem operationem instituendo, quae ad maximum earum commu-

nem

nem diuiſorem inueſtigandum inſtitui ſolet. Numerator ſcilicet per denominatorem diuidatur, et per reſiduum ipſe denominator, et ita porro ſemper per reſiduum praecedens diuiſor. Quoti vero ex hac continuata diuiſione orti erunt denominatores fractionis continuae quaeſiti.

§. 12. Sic ſi haec propoſita ſit fractio $\frac{A}{B}$ in fractionem continuam transmutanda, cuius omnes numeratores ſint vnitates; diuido A per B, ſitque quotus a et reſiduum C, per hoc reſiduum C diuidatur praecedens diuiſor B, ſitque quotus b reſiduumque D, per quod C diuidatur et ita porro donec ad reſiduum $= 0$, quotumque infinite magnum perueniatur. Operatio autem haec ſequenti modo repraeſentatur.

$$\begin{array}{llllllll}
B\,|\,A\,|\,a & & & & & \\
 & C\,|\,B\,|\,b & & & & \\
 & & D\,|\,C\,|\,c & & & \\
 & & & E\,|\,D\,|\,d & & \\
 & & & & F\,|\,E\,|\,e & \\
 & & & & & G \text{ etc.}
\end{array}$$

Hac igitur operatione inueniuntur quoti, a, b, c, d, e, etc. quibus cognitis erit

$$\frac{A}{B} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{etc.}}}}}$$

 ſi

ſi enim ſit reſiduum $G=0$, erit $e=\frac{E}{F}$ atque $\frac{1}{e}=\frac{F}{E}$ hincque porro $d+\frac{1}{e}=d+\frac{F}{E}=\frac{D}{E}$; ac $\frac{1}{d+\frac{1}{e}}=\frac{E}{D}$;

$c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}=c+\frac{E}{D}=\frac{C}{D}$. Hocque modo vsque ad initium aſcendendo fractio continua reperietur $=\frac{A}{B}$.

§. 13. Si in fractione $\frac{A}{B}$ fuerit $A<B$ tum primus quotus a erit $=0$, reſiduumque primum $=A$, ita vt tum B per A diuidi debeat. Hoc ergo caſu erit

$$\frac{A}{B}=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\text{etc.}}}}}$$

Caſu autem quo $A<B$ vnicus in fractione continua prodibit terminus, ſi ratio inter A et B fuerint multipla; duobus autem conſiſtet fractio continua denominatoribus, ſi ratio $A:B$ pertinnat ad genus rationum ſuperparticularium, plures vero aderunt denominatores, ſi ratio $A:B$ ad genus ſuperpartientium referatur. Reuera autem fractio continua in infinitum excurret, ſi ratio A ad B non fuerit vt numeri ad numerum, ſed vel irrationalis vel transcendens. Ad huiusmodi autem expreſſiones in fractiones continuas transmutandas, oportet vt numeris rationalibus ſint expoſitae ſaltem vero proxime, quemadmo-

admodum hoc fieri ſolet per fractiones decimales. Tales igitur expreſſiones ſi habeantur, modo praeſcripto fractiones continuae formabuntur.

§. 14. Cum autem fractio vel alia expreſſio in huius modi fractionem continuam fuerit conuerſa, tum eius expreſſionis valor proximus modo §. 10. expoſito poterit aſſignari. Vti ſi inuenta fuerit haec expreſſio.

$$\frac{A}{B} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{etc.}}}}}$$

atque ex denominatoribus a, b, c, d, etc. formetur ſequens fractionum ſeries

$$\begin{array}{cccccc} & a & b & c & d & e \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+1}{b}; & \frac{abc+c+a}{bc+1}; & \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b} & \text{etc.} \end{array}$$

hae fractiones proxime aequales erunt expreſſioni $\frac{A}{B}$, eoque minus diſtabunt, quo remotiores fuerint a prima. Ita autem quaelibet harum fractionum erit comparata, vt alia per numeros non maiores exhiberi nequeat, quae propius ad valorem $\frac{A}{B}$ accederet. Hoc itaque modo ſequens problema commode ſoluetur: *Datam fractionem ex magnis numeris conſtantem in ſimpliciorem conuertere, quae ad illam propius accedat, quam fieri poteſt numeris non maioribus.* Problema hoc Wallifius magno ſtudio pertractauit, ſolutionem vero dedit vehementer operoſam atque difficilem.

§. 15. Ad methodum noſtrum ad ſolutionem huius problematis auccommodandam, ſit propoſita fractio $\frac{355}{113}$, quae ſecundum *Metium* rationem peripheriae ad diametrum proxime exprimit; quaeramus igitur fractiones minoribus numeris conſtantes ab iſta fractione tam parum diſcrepantes, quam fieri poteſt. Diuido ergo 355 per 113 atque inuenio

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}$$

vnde formo ſequentes fractiones:

$$\begin{array}{cccc} 3, & 7, & 16, & \\ \frac{1}{0}, & \frac{3}{1}, & \frac{22}{7}; & \frac{355}{113} \end{array}$$

fractiones ergo $\frac{3}{1}$ et $\frac{22}{7}$ propius ad fractionem $\frac{355}{113}$ accedunt, quam vllae aliae numeris non maioribus compoſitae; erit autem altera $\frac{22}{7}$ maior, altera $\frac{3}{1}$ minor quam propoſita, vti iam ſupra in genere annotauimus. Has fractiones principales appellare liceat, nam praeter has aſſignari poſſunt aliae minus principales quaeſito aeque ſatisfacientes; ſcilicet vti fractio $\frac{22}{7}$ ex praecedentibus cum indice 7 eſt formata, ita minus principales eodem modo formabuntur, loco 7 minores numeros ſingulos ſubſtituendo.

§. 16. Si autem ratio peripheriae ad diametrum exactior accipiatur, diuiſioque continua vti eſt praeceptum inſtituatur, ſequens quotorum ſeries prodibit 3, 7, 15,

1, 292,

1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14 etc. ex quibus ſequenti modo fractiones ſimpliciores eruentur.

$$
\begin{array}{cccccccl}
 & 3, & 7, & 15, & 1, & 292, & 1, & \\
\frac{1}{0}, & \frac{3}{1}; & \frac{22}{7}; & \frac{333}{106}; & \frac{355}{113}; & & \frac{103993}{33102} & \textit{principales.} \\
\hline
 & \frac{2}{1}, & \frac{19}{6}; & \frac{311}{99}; & & & \frac{103638}{32989} & \textit{minus principales.} \\
 & \frac{1}{1}; & \frac{16}{5}; & \frac{289}{92} & & ; & \frac{103283}{32876} & \\
 & ; & \frac{13}{4}; & \frac{267}{85} & & ; & \frac{102928}{32763} & \\
 & ; & \frac{10}{3}; & \frac{245}{78} & & & \text{etc.} & \\
 & ; & \frac{7}{2}; & \frac{223}{71} & & & & \\
 & ; & \frac{4}{1}; & \frac{201}{64} & & & & \\
 & & \text{etc.} & & & & &
\end{array}
$$

Hoc igitur pacto duplices fractiones nacti ſumus, quarum aliae nimis ſunt magnae, aliae nimis paruae; nimis magnae ſcilicet ſunt, quae ſub indicibus 3, 15, 292, etc. continentur, reliquae nimis ſunt paruae. Atque hinc facile integram tabulam *Walliſianam* condere licet, quae omnes complectitur rationes ad veram peripheriae ad diametrum rationem propius accedentes, quam fieri poteſt numeris non maioribus.

 §. 17.

§. 17. Hac etiam methodo definire licebit rationem constitutionis annorum bissextilium, quo annorum initia perpetuo in eandem tempestatem incidant. Pendet haec determinatio a quantitate anni tropici, quam iuxta accuratissimas obseruationes ponam $365^{d.}\, 5^{h.}\, 49'\, 8''$. Excessus ergo supra 365 dies erit $5.^{h.}$, $49'\, 8''$, qui si aequaretur quartae diei parti, tuto semper quartus quisque annus bissextilis constitueretur; sed cum iste excessus minor sit 6 horis, numerus annorum bissextilium minor debet accipi; quod cognoscetur ex ratione 24 *h.* ad 5 *h.* $49'$, $8''$ seu ex fractione $\frac{21600}{5237}$, ex qua sequitur in interuallo 21600 annorum tantum 5237 annos bissextiles constitui oportere. Cum autem haec periodus nimis sit magna, minores obtinebimus periodos, fractiones minoribus numeris constantes inuestigando, quae proxime fractioni $\frac{21600}{5237}$ sint aequales. In hunc finem sequentem diuisionem instituo.

5237	21600	4			
	20948				
	652	5237	8		
		5216			
		21	652	31	
			651		
			1	21	21

Iam ex quotis inuentis 4, 8, 31, 21, qui erunt denominatores fractionis continuae, sequentes formentur fractiones

$$\begin{array}{ccccc} 4, & 8, & 31, & 21 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{4}{1}, & \frac{33}{8}, & \frac{1027}{249}, & \frac{21600}{5237}. \end{array}$$

Ha-

Harum fractionum ſecunda $\frac{4}{1}$ ſtatim dat rationem calendarii Iuliani, quo quartus quisque annus ponitur bisſextilis. Propius ergo ſcopus attingeretur, ſi annis 33 tantum 8 anni bisſextiles collocarentur; ex fractione tertia. Cum autem expediat pro annorum periodo numerum pariter parem habere, ſumamus fractiones minus principales quartae respondentes, quae habeant numeratores per 4 diuiſibiles; quae erunt.

$$\frac{136}{33};\ \frac{268}{65};\ \frac{400}{97};\ \frac{532}{129};\ \frac{664}{161};\ \text{etc.}$$

quarum tertia $\frac{400}{97}$ ad computum calendarii eſt commodiſſima. Apparet autem ex ea, interuallo annorum 400 tantum 97 annos bisſextiles conſtitui debere; ſeu tres annos hoc interuallo, qui in calendario Iuliano bisſextiles eſſent, in communes eſſe transmutandos; id quod etiam Conſtitutio Gregoriana praecipit. Ex quo intelligitur minore annorum interuallo accuratiorem correctionem adhiberi non poſſe. Accuratiſſime autem cum ſole calendarium conciliabitur, ſi interuallo 21600 annorum denuo vnus annus, qui ſecundum conſtitutionem Gregorianam bisſextilis eſſe deberet, in communem transmutetur.

§. 18. Quaeramus iam fractiones, quae ad $\sqrt{2}$ tam prope accedant, vt aliae minoribus numeris conſtantes propius accedere nequeant. Eſt vero $\sqrt{2} = 1,41421356 = \frac{141421356}{100000000}$, quae fractio, ſi diuiſione continua iuxta modum praeſcriptum tractetur, dabit hos quotos, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, etc. ex quibus ſequentes formabuntur fractiones quaeſito ſatisfacientes, tam principales quam minus principales

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 2, & 2, & 2, & 2, & 2, & 2 \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{7}{5}, & \frac{17}{12}, & \frac{41}{29}, & \frac{99}{70}, & \frac{239}{169} \\ & & \frac{2}{1}; & \frac{4}{3}; & \frac{10}{7}; & \frac{24}{17}; & \frac{58}{41}; & \frac{140}{99} \\ V & \Lambda & V & \Lambda & V & \Lambda & V & \Lambda \end{array}$$

quarum fractionum alternae ſigno V notatae maiores ſunt quam $\sqrt{2}$, reliquae vero ſignum Λ habentes minores quam $\sqrt{2}$.

§ 19. Notatu digna eſt haec proprietas ipſius $\sqrt{2}$, quod omnes quotos praeter primum habeat aequales binario, ita vt ſit

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}$$

Simili modo vero etiam ſi $\sqrt{3}$ euoluatur, reperiuntur quoti 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1 etc. ita vt ſit

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}}}$$

Quamuis

Quamuis enim non constet ex ipsa diuisione, vtrum quoti hac lege vlterius progrediantur, tamen id non solum probabile videtur, sed etiam sequenti modo demonstrari potest, quo valores huiusmodi fractionum continuarum, in quibus denominatores vel sunt omnes aequales vel alterni vel terni etc. a posteriori inuestigare docebimus.

§. 19. Sit igitur proposita sequens fractio continua

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \text{etc.}}}}} \quad \text{quae ponatur} = x$$

erit

$$x - a = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \text{etc.}}}}} = \frac{1}{b + x - a}$$

hinc erit

$$x^2 - 2ax + bx + a^2 - ab = 1$$

atque

$$x = a - \tfrac{b}{2} + \sqrt{(1 + \tfrac{bb}{4})}.$$

Quare si fuerit $b = 2$ et $a = 1$, erit

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}} = \sqrt{2}$$

 si

si ergo ponatur $b = 2a$ erit

$$\sqrt{(a^2+1)} = a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a \text{ etc.}}}}}$$

vnde ex omnibus numeris, qui vnitate quadratum excedunt expedite per approximationem radix quadrata extrahi potest; vti posito $a = 2$ sequentes fractiones ad $\sqrt{5}$ proxime inueniendam inseruient.

$$\begin{array}{cccccccc}
2, & 4, & 4, & 4, & 4, & 4, & 4 & \\
\frac{1}{0}; & \frac{2}{1}; & \frac{9}{4}; & \frac{38}{17}; & \frac{161}{72}; & \frac{682}{305}; & \frac{2889}{1292}; & \text{etc.} \\
 & \frac{1}{1}; & \frac{7}{3}; & \frac{29}{13}; & \frac{123}{55}; & \frac{521}{233}; & \frac{2207}{987} & \\
 & ; & \frac{5}{2}; & \frac{20}{9}; & \frac{85}{38}; & \frac{360}{161}; & \frac{1525}{682}; & \\
 & ; & \frac{3}{1}; & \frac{11}{5}; & \frac{47}{21}; & \frac{199}{89}; & \frac{843}{377}; &
\end{array}$$

§. 20. Sit nunc proposita sequens fractio continua

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c \text{ etc.}}}}}}}$$

quae

quae ponatur $=x$ atque valor ipſius x reperietur ſequente modo

$$x-a=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b \text{ etc.}}}}}} = \cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\overline{x-a}}}$$

hinc ergo erit $x-a=\frac{x+c-a}{bx+bc-ab+1}$, ſeu

$$bxx+bcx-2abx=abc-a^2b+c.$$

Si ergo fuerit $c=2a$ erit

$$bxx=aab+2a \text{ atque } x=\sqrt{(a^2+\tfrac{2a}{b})}$$

ſimili modo ſi ponatur

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d \text{ etc.}}}}}}}$$

erit $x-a=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\overline{x-a}}}}$

vnde

vnde ſequitur

$$(bc+1)x^2+(bcd+b+d-c-2abc-2a)x-abcd+a^2bc-ab$$
$$-ad+aa-cd+ac-1=0.$$

Atque hoc modo omnes huiusmodi fractiones continuas, quarum denominatores vel omnes vel alterni vel terni vel quaterni etc. ſunt inter ſe aequales, ſummare licet. Semper autem ſumma ſeu valor x eſt radix ex aequatione quadrata.

§. 21. Antequam ad alias fractiones continuas, in quibus denominatores progreſſiones arithmeticas conſtituunt, ſummandas progrediamur; quantitates quasdam tranſcendentes euoluamus, quae in fractiones continuas conuerſae dent denominatores in progreſſione arithmetica progredientes, quo ex his via euadat planior eiusmodi fractiones continuas ſummandi. Hoc igitur logarithmis aliisque expreſſionibus transcendentibus tentans deprehendi in eiusmodi fractiones continuas deduci, ſi numerus cuius logarithmus hyperbolicus eſt vnitas, eiusque poteſtates quaeque conſiderentur. Poſito igitur hoc numero $=e$, erit $e=$ 2, 718281828459O4, qua expreſſione in fractionem continuam conuerſa erit

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1 \text{ etc.}}}}}}}}}}$$

cuius

cuius denominatores terni conſtituunt progreſſionem arithmeticam 2, 4, 6, 8 etc. reliqui ſunt vnitates. Quae lex etſi ex ſola obſeruatione eſt deprehenſa, tamen probabile videtur eam in infinitum valere, quod quidem infra certo confirmabitur. Simili modo ſi $\sqrt{e} = 1,6487212707$ in fractionem continuam conuertatur erit

$$\sqrt{e} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{13 \text{ etc.}}}}}}}}}}$$

cuius progreſſionis lex ſimilis eſt praecedentis. Similiaque obſeruare licet in aliis fractionibus continuis, in quas poteſtates ipſius e transmutantur.

§. 22. Simili modo conſideraui radicem cubicam ex numero e cuius logarithmus hyperbolicus eſt 1, inuenique

$$\frac{\sqrt[3]{e} - 1}{2} = 0,1978062125 = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{30 + \cfrac{1}{42 + \cfrac{1}{54 + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}}$$

in cuius fractionis continuae denominatoribus praeter primum progreſſio arithmetica obſeruatur. Simile accidit, ſi poteſtates exponentium integrorum ipſius e conſiderentur et in fractiones continuas transformentur. Sic conſiderans quadratum reperi

$$\frac{e^2-1}{2} = 3,19452804951 =$$

$$3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{13 + \cfrac{1}{15} \text{ etc.}}}}}}$$

Deinde etiam ex ipſo numero e, ex quo formata fractio continua interruptam habuit progreſſionem arithmeticam denominatorum, obſeruaui paucis mutandis huiusmodi fractionem continuam ab interruptione liberam formari poſſe. Prodiit enim

$$\frac{e+1}{e-1} = 2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{26 + \text{etc.}}}}}}}$$

in qua regularis ineſt progreſſio arithmetica differentia 4 progrediens

§. 23.

§. 23. Cum igitur obſeruaſſem tantam conuenientiam inter fractiones continuas, in quibus denominatores modo interruptam modo non interruptam conſtituant progreſſionem Arithmeticum; in eam incidi cogitationem, num forte fractio continua, in qua interrupta ſit denominatorum progreſſio, in aliam non interruptam transformari poſſit. Conſideraui igitur progreſſionem quamcunque a, b, c, d, e, etc. interque binos contiguos vbique hos duos numeros m, n interpolaui, vt prodiret ſequens fractio continua

$$a+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{d\ \text{etc.}}}}}}}}}}$$

hancque inueni aequalem ſequenti fractioni continuae, in qua denominatores ſine interruptione progrediantur.

$$\frac{1}{mn+1}\left((mn+1)a+n+\cfrac{1}{(mn+1)b+m+n+\cfrac{1}{(mn+1)c+m+n+\cfrac{1}{(mn+1)d+m+n+\cfrac{1}{\text{etc.}}}}}\right)$$

Demonſtratio huius conuenientiae in hoc conſiſtit, quod fractiones ordinariae, quibus ad valorem vtriusque acceditur, inter ſe conueniant: prout tentanti patebit.

§. 24. Si quantitates interpolatae m, n inuertantur ordine, fractio continua poſterior diſcrimen tantum in primo termino patietur ex quo ſequens ſatis elegans theorema conficitur, quo erit

$$a + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{c \text{ etc.}}}}}}} - \left(a + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{c \text{ etc.}}}}}}} \right) = \frac{n-m}{mn+1}$$

Quicunque ergo numeri loco a, b, c, d, etc. ſubſtituantur differentia inter duas fractiones continuas ſemper erit cognita atque conſtans ſcilicet $= \frac{n-m}{mn+1}$.

§. 25. Ex eadem inuenta aequalitate inter fractiones continuas ſuperiores, interruptam ſcilicet et non interruptam, ſequens conſequitur aequalitas diuidendo vnitatem per vtramque et addendo vtrinque eandem quantitatem A

A+1

$$A+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{c \text{ etc.}}}}}}}} = A+\cfrac{mn+1}{(mn+1)a+n+\cfrac{1}{(mn+1)b+m+n+\cfrac{1}{(mn+1)c+m+n \atop \text{etc.}}}}$$

Huius ergo aequationis ope quamuis fractionem continuam, interruptam habentem progressionem denominatorum binis quantitatibus m et n conuertere licebit in aliam, in qua denominatores sine interruptione progrediantur. Si ergo vt in fractionibus superioribus habuimus ponatur $m = n = 1$, sequens prodibit aequatio

$$A+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1 \text{ etc.}}}}}}} = A+\cfrac{2}{2a+1+\cfrac{1}{2b+2+\cfrac{1}{2c+2+\cfrac{1}{\text{etc.}}}}}$$

Cum igitur ex §. 21. sit

$$\frac{1}{e-2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4 \text{ etc.}}}}}$$

erit

erit ponendo $A = 1$, $a = 2$, $b = 4$, vt sequitur

$$\frac{1}{e-2} = 1 + \cfrac{2}{5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 \text{ etc.}}}}}}$$

hincque erit vnitatem per vtrumque diuidendo

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{26 + \text{ etc.}}}}}}}}$$

Simili modo ex eodem paragrapho reperietur

$$\sqrt{e} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 \text{ etc.}}}}}}}} = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{28 \text{ etc.}}}}}$$

Haeque

Haeque fractiones continuae nunc inuentae tantopere conuergunt, vt facili negotio valores ipsorum e et $\sqrt{e}$ quantumuis prope reperiri queant.

§. 26. Vicissim vero etiam hinc fractio continua in qua denominatores ordine non interrupto progrediuntur, transmutari poterit in aliam, in qua denominatores interrupti sint duobus constantibus numeris m et n: ita inueni fore

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e \text{ etc.}}}}} = a-n+\cfrac{mn+1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{\frac{b-m-n}{mn+1}+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{\frac{c-m-n}{mn+1}+\cfrac{1}{m \text{ etc.}}}}}}}}$$

Vel tollendo fractiones in his denominatoribus, si opus visum fuerit, erit

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d \text{ etc.}}}} = a-n+\cfrac{mn+1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{mn+1}{b-m-n+\cfrac{mn+1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{mn+1}{c-m-n+\cfrac{mn+1}{m+\cfrac{1}{n \text{ etc.}}}}}}}}}$$

si

ſi ergo ponatur $m = n = 1$, habebitur

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d \text{ etc.}}}} = a-1+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\tfrac{1}{2}b-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\tfrac{1}{2}c-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\tfrac{1}{2}d-1+\cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}}}}}}$$

§. 27. Quemadmodum hic fractiones continuas, quarum denominatores ita interrupto ordine progrediuntur, vt inter binos quosque contiguos duae interpoſitae ſint quantitates conſtantes, conſiderauimus, ita eadem reductio extendi poteſt ad quatuor vel ſex vel octo etc. quantitates conſtantes interpolatas. Numerus autem impar quantitatum conſtantum interpolari nequit. Sic ſi inter quantitatum a, b, c, d, etc. binas quasque contiguas interpolentur hae quatuor m, n, p, q, ponaturque breuitatis gratia $mnpq + mn + mq + pq + 1 = P$; et $mnp + npq + m + n + p + q = Q$ erit

$$a+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{m \text{ etc.}}}}}}} = \frac{1}{P}\left(Pa+npq+n+q+\cfrac{1}{Pb+Q+\cfrac{1}{Pc+Q+\cfrac{1}{Pd+Q+\text{etc.}}}}\right.$$

Atque

Atque si fuerit $m = n = p = q = 1$, habebitur

$$a + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 \text{ etc.}}}}}}}} = \tfrac{1}{5}\left(5a + 3 + \cfrac{1}{5b + 6 + \cfrac{1}{5c + 6 + \cfrac{1}{5d + 6 + \text{etc.}}}}\right)$$

Ex quibus noua fractionum continuarum conuersio nascitur.

§. 28. Cum autem in praecedentibus, vbi numerum e cuius logarithmus est $= 1$, eiusque potestates in fractiones continuas conuerti, progressionem arithmeticam denominatorum tantum obseruauerim, neque praeter probabilitatem de huius progressionis continuatione in infinitum quicquam affirmare valuerim; in id potissimum incubui, vt in huius progressionis necessitatem inquirerem, eamque firmiter demonstrarem. Hocque etiam feliciter sum consecutus ex peculiari modo, quo integrationem huius aequationis $a\,dy + y^2\,dx = x^{\frac{-4n}{2n+1}}\,dx$ reduxi ad integrationem huius $a\,dq + q^2\,dp = dp$ Posito enim $p = (2n + 1)\, x^{\frac{1}{2n+1}}$ inueni esse

$$q = \frac{a}{p} + \cfrac{1}{\frac{3a}{p} + \cfrac{1}{\frac{5a}{p} + \cfrac{1}{\frac{7a}{p} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\frac{(2n-1)a}{p} + \cfrac{1}{x^{\frac{2n}{2n+1}}y}}}}}}$$

Vnde cum q per p dari queat, sitque $p = (2n+1)x^{\frac{1}{2n+1}}$, formari potest aequatio finita inter x et y, quae integralis erit aequationis $ady + y^2dx = x^{\frac{-4n}{2n+1}}dx$, quoties n est numerus integer affirmatiuus.

§. 29. Si ergo n ponatur numerus infinitus expressio inuenta erit fractio continua in infinitum excurrens, cuius denominatores constituent progressionem arithmeticam. Quamobrem habebitur sequens aequatio

$$q = \frac{a}{p} + \cfrac{1}{\frac{3a}{p} + \cfrac{1}{\frac{5a}{p} + \cfrac{1}{\frac{7a}{p} + \cfrac{1}{\frac{9a}{p} + \text{etc.}}}}}$$

atque

atque q seu valor huius fractionis continuae ex ista aequatione $a\,dq + q^2\,dp = dp$ definietur. Erit vero $\frac{a\,dq}{1-qq} = dp$ atque $\frac{a}{2}\,l\,\frac{1+q}{1-q} = p + C$. quae constans ex eo debet determinari, quod posito $p = 0$ fiat $q = \infty$. Quamobrem erit

$\frac{a}{2}\,l\,\frac{q+1}{q-1} = p$, atque $\frac{q+1}{q-1} = e^{\frac{2p}{a}}$ vnde fiet $q = \frac{e^{\frac{2p}{a}} + 1}{e^{\frac{2p}{a}} - 1}$,

qui est valor fractionis continuae inuentae. Deinde vero cum sit $e^{\frac{2p}{a}} = 1 + \frac{2}{q-1}$ habebitur

$$e^{\frac{2p}{a}} = 1 + \cfrac{2}{\frac{a-p}{p} + \cfrac{1}{\frac{3a}{p} + \cfrac{1}{\frac{5a}{p} + \cfrac{1}{\frac{7a}{p} + \text{etc.}}}}}$$

§. 30. Si ponatur $\frac{a}{2p} = s$, seu $a = 2ps$ erit

$$e^{\frac{1}{s}} = 1 + \cfrac{2}{2s - 1 + \cfrac{1}{6s + \cfrac{1}{10s + \cfrac{1}{14s + \text{etc.}}}}}$$

 Atque

Atque ex priore inuenta aequatione erit

$$\frac{e^{\frac{1}{s}}+1}{e^{\frac{1}{s}}-1}=2s+\cfrac{1}{6s+\cfrac{1}{10s+\cfrac{1}{14s+\cfrac{1}{18s+\text{etc.}}}}}$$

Si denominatores huius interpolentur binis vnitatibus habebitur

$$\frac{e^{\frac{1}{s}}+1}{e^{\frac{1}{s}}-1}=2s-1+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3s-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5s-1+\cfrac{1}{1\ \text{etc.}}}}}}}}$$

Ex qua oritur ſequens fractio continua

$$e^{\frac{1}{s}}=1+\cfrac{1}{s-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3s-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5s-1+\cfrac{1}{1\ \text{etc.}}}}}}}}}$$

Ex his vero formulis fluunt omnes ſupra inuentae, quibus poteſtates quasdam ipſius e per fractiones continuas expreſſimus, ex quo neceſſitas progreſſionis ante tantum obſeruatae intelligitur.

§. 31. Iam ergo nacti ſumus fractionem continuam, cuius denominatores progreſſionem arithmeticam conſtituunt, cuiusque valorem exhibere licuit. Cum autem haec progreſſio ſit ſpecies tantum arithmeticae, generalem contemplatus ſum progreſſionem arithmeticam atque fractionem continuam, cuius denominatores eam progreſſionem conſtituant, ſequenti modo ad ſummam reuocaui. Sit ſcilicet ſequens fractio continua, cuius valorem, quem quaero, pono $= s$, ita vt ſit

$$s = a + \cfrac{1}{(1+n)a + \cfrac{1}{(1+2n)a + \cfrac{1}{(1+3n)a + \cfrac{1}{(1+4n)a + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}$$

ex qua quo valorem ipſius s eruam ab approximatione ad eum ordior. Erit itaque per methodum ſupra traditam

$$\begin{array}{llll} a, & (1+n)a, & (1+n)2a, & (1+3n)a \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{(1+n)a^2+1}{(1+n)a}; & \frac{(1+n)(1+2n)a^3+(2+2n)a}{(1+n)(1+2n)a^2+1} \end{array}$$

quae fractiones continuo magis ad valorem verum ipſius s accedunt; atque fractio infiniteſima verum ipſius s valorem dabit.

§. 32. Si hae fractiones vlterius continuentur facile obſeruabitur lex, qua formatae ſunt; ex eaque concludetur fractionem infiniteſimam poſt numeratoris et denominatoris diuiſionem per primum denominatoris terminum fore

$$\frac{a+\frac{1}{1.na}+\frac{1}{1.2.1(1+n)n^2a^3}+\frac{1}{1.2.3.1(1+n)(1+2n)n^3a^5}+\text{etc.}}{1+\frac{1}{1(1+n)na^2}+\frac{1}{1.2(1+n)(1+2n)n^2a^4}+\frac{1}{1.2.3(1+n)(1+2n)(1+3n)n^3a^6}\ \text{etc.}}$$

cui adeo s aequatur. Poſito ergo $a=\frac{1}{\sqrt{nz}}$ erit $s=\frac{1}{\sqrt{nz}}\cdot$

$$\frac{1+\frac{z}{1.1}+\frac{z^2}{1.2.1(1+n)}+\frac{z^3}{1.2.3.1(1+n)(1+2n)}+\text{etc.}}{1+\frac{z}{1(1+n)}+\frac{z^2}{1.2.1(1+n)(1+2n)}+\frac{z^3}{1.2.3(1+n)(1+2n)(1+3n)}+\text{etc.}}$$

qui valor quo obtineatur, ponatur

$$t=1+\frac{z}{1.1}+\frac{z^2}{1.2.1(1+n)}+\frac{z^3}{1.2.3.1(1+n)(1+2n)}+\text{etc.}$$

et $$u=1+\frac{z}{1(1+n)}+\frac{z^2}{1.2(1+n)(1+2n)}+\frac{z^3}{1.2.3(1+n)(1+2n)(1+3n)}+\text{etc.}$$

ita vt futurum ſit $s=\frac{t}{u\sqrt{nz}}$. Ex inſpectione autem harum duarum ſerierum intelligitur fore $dt=udz$; atque ſimili modo deprehendetur eſſe $udz+ndu=tdz$. Ponatur $t=vu$, quo ſit $s=\frac{v}{\sqrt{nz}}$, erit $vdu+udv=udz$; atque $udz+nzdu=uvdz$; ex quibus ſequitur $\frac{du}{u}=\frac{dz-dv}{v}=\frac{vdz-dz}{nz}$, hincque ſequens aequatio inter z et v tantum conſiſtens $nzdv-vdz+v^2dz=nzdz$; quae ſubſtituto $v=z^{\frac{1}{n}}q$ et $z=r^n$, abibit in hanc

$$dq+q^2dr=nr^{n-2}dr.$$

Ex

Ex qua aequatione, si q determinetur per r ponaturque $r = n^{-\frac{1}{n}} a^{-\frac{2}{2}}$, erit valor quaesitus $s = arq$.

§. 33. Assignatio ergo valoris fractionis continuae propositae, quem posui s, existente

$$s = a + \cfrac{1}{(1+n)a + \cfrac{1}{(1+2n)a + \cfrac{1}{(1+3n)a + \cfrac{1}{(1+4n)a \text{ etc.}}}}}$$

perducta est ad resolutionem huius aequationis $dq + q^2 dr = n r^{n-2} dr$; ita autem huius aequationis integrale accipi debet, vt facto $a = \infty$ fiat $s = \infty$, vel posito $a = 0$ fiat $s = 1$. Vnde sequens pro introducenda constante in integrando regula nascitur, vt casu quo non est $n > 2$ fiat $q = \infty$ posito $r = \infty$. Ponimus autem n esse numerum affirmatiuum, quo fractio continua oriatur, qualem hactenus considerauimus denominatores affirmatiuos habentem.

§. 34. Constat autem aequationem inuentam $dq + qq dr = n r^{n-2} dr$ congruere cum aequatione olim a *Com. Riccati* proposita; iisque propterea tantum casibus esse integrabilem, quibus n est numerus huius formae $\frac{2}{2m+1}$ denotante m integrum, eumque affirmatiuum, quo pro n obtineamus numeros affirmatiuos. Ob hos igitur casus sequentis fractionis continuae

$a +$

$$a+\cfrac{1}{\frac{(2m+3)a}{2m+1}+\cfrac{1}{\frac{(2m+5)a}{2m+1}+\cfrac{1}{\frac{(2m+7)a}{2m+1}+\text{etc.}}}}$$

valor ſemper per expreſſionem finitam exhiberi poterit. Quod quidem per ſe facile conſtat, nam facto $m=0$, habemus hanc fractionem continuam

$$a+\cfrac{1}{3a+\cfrac{1}{5a+\cfrac{1}{7a+\cfrac{1}{9a+\text{etc.}}}}}$$

cuius valorem iam ſupra inuenimus. Ad hanc vero reduci poteſt illa generalis poſito enim $a=(2m+1)b$ habebitur

$$(2m+1)b+\cfrac{1}{(2m+3)b+\cfrac{1}{(2m+5)b+\cfrac{1}{\text{etc.}}}}$$

quae in iſta iam cognita toties continetur, quoties m fuerit numerus integer affirmatiuus.

§. 35. Apparet igitur per hanc ipſam fractionum continuarum reſolutionem integrationem aequationis $dq+q^2dr=nr^{n-2}dr$ deduci ad integrationem huius aequationis $dq+q^2dr=2dr$, ſiquidem n fuerit $=\frac{2}{2m+1}$ denotante ſtante m numerum integrum affirmatiuum. Quam ipſam reductionem iam ſupra §. 28 eodem modo, quo ex hoc fonte perfici poteſt, expoſui. Quo autem intelligatur, quomodo hac ratione verus huiusmodi fractionum continuarum valor reperiatur, conſiderabo caſum $n = 2$ ſeu $m = 0$, quo orietur

$$s = a + \cfrac{1}{3a + \cfrac{1}{5a + \cfrac{1}{7a + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}$$

Reperietur vero s ex hac aequatione $dq + q^2 dr = 2 dr$, quae debito modo integrata dat $r = \frac{1}{2\sqrt{2}} l \frac{q + \sqrt{2}}{q - \sqrt{2}}$ ex qua prodibit $q = \frac{(e^{2r\sqrt{2}} + 1)\sqrt{2}}{e^{2r\sqrt{2}} - 1}$. Eſt vero $r = \frac{1}{a\sqrt{2}}$ atque $s = arq = \frac{q}{\sqrt{2}}$, vnde proueniet valor ipſius $s = \frac{e^{\frac{2}{a}} + 1}{e^{\frac{2}{a}} - 1}$, prorſus vt iam ſupra inuenimus (§. 28.).

DE

MAXIMIS

IN

FIGVRIS RECTILINEIS.

AVCTORE

Frid. Moula.

Tabb. V. et VI.

Mirum non immerito videri poteſt, cum figuras rectilineas nemo Geometrarum inſalutatas praeterire poſſit, earum tamen areas ab analyſi infinitorum hucusque intactas remanſiſſe, neque circa eas quaeſtiones de *Maximis* habitas fuiſſe. Num minus intereſt, minusue ſaltem iuuat nouas illis proprietates aſſignare quam aliis bene multis curuis quarum infrequentior eſt vſus? Quapropter non iniucundum iis fore exiſtimaui quibus nihil niſi arduae ſit indaginis nodisque difficilibus refertum non ſapit, ſi Maximorum inueniendorum methodo ad Figuras rectilineas applicata, maximas earum areas inueſtigarem, determinaremque. Hoc conſilio a triangulis figurarum ſimpliciſſimis ordiar, deinde ad Quadrilatera progrediar et poſtremo Poligona attingam, perluſtraturus vbique omnes qui poſſunt occurrere caſus. Ante omnia autem expedire arbitror, initium a duorum lemmatum demonſtratione eſſe faciendum, quorum vtroque ſuperſtruuntur ſolutiones, cum nondum forte cuique ſatis conſtent.

Lemma

Lemma I.

Area Trianguli ABC *aequatur dimidio Rectangulo ex duobus quibusuis Lateribus* AB, AC *v. gr. in ſinum anguli intercepti* A *ducto* (*poſito ſinu toto* $= 1$)

Demonſtratio.

Sit Triangulum ABC et ducatur v. gr. BD perpendicularis in AC, ſitque ſinus anguli $BAC = x$, area Trianguli ABC aequalis erit facto ex dimidia BD in AC, ſeu $\frac{AC.\ BD}{2}$. Quid autem ſubſtituendum ſit loco BD, reperietur faciendo hanc analogiam, vt AB ad BD; ita ſinus totus, ad ſinum anguli BAC, ſeu $AB : BD = 1 : x$. Ergo $AB.\ x = BD$ et proinde area Trianguli, ponendo $AB.\ x$ pro BD, $= \frac{AC.\ AB.\ x}{2}$. Cum autem ſinus anguli cuiuscunque acuti, poſitiuus ſumtus, poſitiuus quoque maneat, ſi in alteram partem cadat, id eſt ſi angulus fiat obtuſus, ſequitur aream Trianguli ſemper eſſe $= + \frac{AB\ AC\ x}{2}$. Q. E. D. Fig. 1. et 2.

Lemma II.

In Triangulo quocunque ABC, *quadratum cuiusuis lateris aequale eſt quadratis reliquorum laterum, minus duplo rectangulo eorundem laterum in coſinum anguli intercepti, ſcil. v. gr.* $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.\ AC$ *in coſ.* A (*poſito ſinu toto* $= 1$). Figura 1.

Demonſtratio.

Ducta, v. gr. BD normali in AC, vt ſupra, et ſinu anguli BAC vocato x, erit $BC^2 = BD^2 + AC^2 -$

$2\,AC.AD + AD^2$, seu (substituendo loco BD^2 eius valorem $AB^2 - AD^2$) $= AB^2 + AC^2 - 2\,AC.AD$. Iam vero AB est ad AD vt sinus totus ad cosinum anguli BAC, vel $AB : AD = 1 : \sqrt{(1 - xx)}$, vnde AD inuenitur $= AB\sqrt{(1 - xx)}$, quo valore substituto, erit $BC^2 = AB^2$
Figura 2. $+ AC^2 - 2\,AC.AB\sqrt{(1-xx)}$. Sin autem angulus BAC obtusus fuerit, reperietur $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC.AD$, sed hoc casu pro AD substituendum erit $-AB\sqrt{(1-xx)}$, quia cosinus anguli BAD fit negatiuus respectu anguli BAC. Quamobrem quisquis fuerit angulus BAC, semper habebitur $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB.AC.\sqrt{(1-xx)}$. Q. E. D.

Nunc vero licet maximarum arearum inuestigationem in triangulis aggredi. Omnibus autem quaestionibus quae circa hanc materiam haberi possunt, sequentium quinque problematum solutione satisfactum iri puto:

Problema I.

Figura 3. *Datis duobus lateribus* AB, AC, *inuenire tertium* BC, *vt area trianguli fiat maxima.*

Solutio.

Sit $AB = a$, $AC = b$, $BC = y$, sinusque anguli $BAC = x$. Area trianguli ABC erit, vi prioris Lemmatis $= \frac{AB.AC.\text{sin}.A}{2} = \frac{abx}{2}$. Cum autem haec area maxima esse debeat, erit eius differentiale = nihilo, scilicet $\frac{ab\,dx}{2} = 0$ et proinde $dx = 0$. Iam vero posterius lemma quo constat $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AC.AB.\text{cos}.A$ alteram suppeditat aequationem, nempe $yy = aa + bb -$

2 ab

$2ab\sqrt{(1-xx)}$ cuius ſi differentiale ſumatur, prodibit $ydy = \frac{abxdx}{\sqrt{(1-xx)}}$, ſeu $dx = \frac{ydy\sqrt{(1-xx)}}{abx}$. Cum vero inuentum ſit $dx=0$, fiat quoque in aequatione modo inuenta $dx=0$, erit igitur $\frac{ydy\sqrt{(1-xx)}}{abx}=0$ ex qua elicitur $x=1$; BC igitur ſeu y fiet (ponendo 1 pro x in aequatione $yy=aa+bb-2ab\sqrt{(1-xx)})=\sqrt{(aa+bb)}$. Q.E.I.

Corollarium 1.

Ex eo quod ſit $x=1$, ſeu ſinus anguli BAC aequalis ſinui toti, quodque y ſeu BC ſit $=\sqrt{(aa+bb)}$, manifeſtum eſt duo latera data ita diſponi debere, vt conſtituant angulum BAC rectum. Sic enim area trianguli ABC fit maxima.

Corollarium 2.

Ita etiam confirmatur muniendi peritorum praxis, qui in omnibus Polygonis ab Hexagono inſuper, angulum Propugnaculi rectum conſtituunt; nam manentibus iisdem tum faciebus, tum Lateribus vt et altitudine, Propugnaculum maximam adipiscetur capacitatem ſoliditatemque.

Scholion.

Demonſtrari quoque potuiſſet absque calculo angulum BAC eſſe debere rectum. Cum enim area Trianguli ABC inuenta $=\frac{abx}{2}$ debeat eſſe *maximum*, huius quantitatis valor, non propter conſtantes a et b quippe quae datae ſunt, ſed propter vnicam variabilem x augeri poteſt. Euadet igitur $\frac{abx}{2}$ maximum, ſi fuerit x infinitum, at nullus datur ſinus infinitus, tum maximus demum fit cum aequatur radio, seu sinui anguli recti. Proinde vt $\frac{abx}{2}$ sit maximum, necesse est, vt x sit sinus anguli recti.

Figura 3. Idem etiam ope vulgaris geometriae palam fit, si concipiatur triangulum ABC super basi, v. gr. AC et alterum latus BA perpendiculare erectum ad parallelas AC et BD. Tum enim primo adspectu patet, quaquaversus inclinetur AB, altitudinem trianguli ABC minorem reddi, et consequenter aream, quae altitudini in dimidiam basim ductae semper aequalis est, minorem futuram.

Problema 2.

Figura 1. *Dato latere* BC *et summa laterum* AB+AC, *inuenire vtrumque, ita vt triangulum sit maxime capax.*

Solutio.

Sit BC $=a$, AB+AC $=b$, AB $=y$, proindeque AC $=b-y$. Sitque praeterea sinus anguli BAC $=x$. Ope prioris lemmatis obtinebitur area trianguli ABC $=\frac{(by-yy)x}{2}$ quae cum maxima ponatur, erit eius differentia aequanda nihilo, quare fiet $(b-y)y\,dx=(2y-b)x\,dy$ et $dx=\frac{(2y-b)x\,dy}{y(b-y)}$. Ope vero posterioris fit BC², id est $aa=bb-2by+2yy-2(by-yy)\sqrt{(1-xx)}$, cuius differentia est $dy((2y-b)\sqrt{(1-xx)}+(2y-b)(1-xx))$ $+dx(b-y)xy=0$, quae, si substituatur loco dx, eius valor superius inuentus et per dy diuidatur, mutabitur in hanc $(2y-b)\sqrt{(1-xx)}+(2y-b)=0$. Vnde diuidendo per $\sqrt{(1-xx)}+1$, elicietur $2y-b=0$, seu $y=\frac{b}{2}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium.

Manifeſtum eſt ergo, dato vno latere ſummam duorum reliquorum in duas partes aequales eſſe ſecandam, quo triangulum exinde conflatum quam maximae ſit capacitatis.

Scholion.

Haud quoque difficulter apertum ſit, tum aream futuram maximam, cum triangulum fuerit Iſoſceles, ſi pro data ſumma laterum AB, AC, ſupponatur filum eiusdem longitudinis, cuius ambo extrema punctis B et C lineae datae BC tanquam focis ſint affixa, hocque filo deſcribendam eſſe Ellipſin LAM. Notum eſt enim AN tum maximam fore, nempe dimidium axis coniugati, cum AB facta fuerit AC; at AN eſt altitudo trianguli, quae cum omnium maxima ſit, ducta in dimidiam conſtantem BC, dabit aream maximam. Figura 4.

Problema 3.

Data baſi BC *et angulo* A *inuenire* AB *et* AC, *ita vt triangulum fiat maximum.* Figura 5.

Solutio.

Sit data BC $= a$ et ſinus anguli BAC $= m$. Sit porro AB $= y$ et AC $= z$. Superioribus inſiſtendo veſtigiis, area trianguli ABC, per prius lemma, fiet $= \frac{myz}{2}$. Ponatur nunc haec area maxima, erit differentiale ipſius $\frac{myz}{2}$ aequale nihilo, ſcilicet $\frac{(ydz + zdy)m}{2} = 0$, proinde $dz = \frac{-zdy}{y}$. Iam ex altero lemmate orietur aequatio,

quatio, in qua differentiata ſubſtituendus erit valor ipſius dz modo inuentus, quo relatio inter latera quaeſita y et z innoteſcat. Habetur autem ſecundum hoc lemma BC^2 ſeu $aa = yy + zz - 2zy\sqrt{(1-mm)}$, et ſumtis differentialibus $zdz + ydy = (ydz + zdy)\sqrt{(1-mm)}$, ſiue $dz(z - y\sqrt{(1-mm)}) = dy(z\sqrt{(1-mm)} - y)$ et poſito $\frac{-zdy}{y}$ loco dz, eruitur tandem $y = z$. Verum ex eo quod y et z ſint inter ſe aequalia; patet vtrumque dari, nam anguli ABC et ACB quos ſubtendunt dantur, ſunt enim $= 180^\circ -$ angulo BAC dato. Q. E. I.

Corollarium.

Sequitur ergo triangulum, cuius latus vnum et angulus eidem lateri oppoſitus dantur, iſosceles circa angulum A eſſe conſtruendum, ſi maximam complecti debeat aream.

Scholion.

Eodem quo in ſcholio praecedenti vſus ſum modo demonſtrari quoque poteſt, aream tum fore maximam cum latera AB, AC aequalia inter ſe fuerint. Facillimum enim eſt captu, quo magis inaequales fuerint AB et AC, eo minorem fieri aream trianguli. E contra quo inaequalitas laterum minor, eo area maior. Area ergo maxima erit, cum inaequalitas fuerit nulla, ſeu cum triangulum fuerit iſoſceles.

Figura 1.

Problema 4.

Dato Perimetro vna cum angulo A *determinare latera, ita vt triangulum ſit maximum.*

Solutio.

Solutio.

Quamuis ex ſolutione praecedentis problematis apertum fiat latera in hoc caſu circa angulum datum A aequalia eſſe debere, tamen lubet hoc et analytice demonſtrari. Sit igitur perimeter trianguli $= a$, $AB = x$, $AC = y$, proindeque $BC = a - x - y$. Sit porro ſinus anguli $BAC = m$. Area trianguli, vi prioris lemmatis, erit $\frac{mxy}{2}$, qua poſita maxima, $\frac{(ydx + xdy)m}{2}$ differentiale ipſius $\frac{mxy}{2}$ aequale erit nihilo, conſequenter $ydx = -xdy$, et $dx = \frac{-xdy}{y}$. Nunc vero per poſterius lemma, BC^2, ſeu $aa - 2ax - 2ay + 2xy = -2xy\sqrt{(1 - mm)}$, cuius aequationis differentia eſt $xdy + ydx - adx - ady = (-xdy - ydx)\sqrt{(1 - mm)}$, ſeu $dx(y - a + y\sqrt{(1 - mm)}) = dy(a - x - x\sqrt{(1 - mm)}$, in qua ſubſtituendo valorem ipſius dx modo inuentum, elicitur $x = y$. Valor autem x et y, exinde quod ſint aequalia, indicatur. Cum enim vnusquisque angulorum in triangulo ABC cognoſcatur, quippe quod ſit Iſosceles, perimeterque detur, cognoſcentur et latera. Si ſinus anguli ACB, v. g. dicatur n, erit x, ſeu AB vel $AC = \frac{an}{m + 2n}$ et $BC = a - 2x = \frac{am}{m + 2n}$. Q. E. I.

Corollarium.

Ex hac ergo ſolutione perſpicuum eſt, ſi triangulum cuius et peripheria et angulus vnus dantur, quaeratur maxime capax, illud ſic eſſe conſtruendum, vt latera circa angulum datum ſint aequalia.

Scholion.

Huius problematis geometrica demonſtratio plane eadem eſt quae praecedentis, vel potius problematis ſecundi. Alterum enim haud abſimile multum alteri, nullumque aliud intereſt discrimen, niſi quod varie limitetur longitudo laterum AB et AC.

Problema 5.

Dato perimetro, determinare latera, quo triangulum fiat maximae capacitatis.

Solutio.

Ex praecedentis problematis ſolutione iam fit manifeſtum hoc in caſu duo latera ad minimum futura aequalia, cum ſuperior demonſtratio pro quolibet angulo valeat; quapropter ſupereſt tantum vt tertium quaeratur latus. Id quidem eodem qui in praecedentibus problematis adhibitus eſt modo, inueniri poteſt; ſed praeſtabit Figura 5. alia, eaque compendioſiore via aggredi. Sit ergo ſumma laterum $= a$, et latera aequalia, v. gr. AB. AC$= x$, proinde B C$= a - 2x$ et quaeratur perpendiculum AD quod erit $= \sqrt{}(BA^2 - BD^2) = \frac{\sqrt{}(4ax - aa)}{2}$. Ducatur nunc hoc perpendiculum in dimidiam BC, vt habeatur area trianguli ABC quae maxima poni debet, erit igitur $\frac{\sqrt{}(4ax - aa)(a - 2x)}{4}$ *Maximum* et proinde eius differentia $2aadx - 6axdx = 0$, vnde elicitur $x = \frac{a}{3}$ et per conſequens quoque BC$= \frac{a}{3}$. Q. E. I.

Corol-

Corollarium.

Hinc perſpicere licet lineam ex qua conficiendum eſſet triangulum maximum in tres partes aequales fore ſecandam, ſeu quod eodem recidit, ex omnibus triangulis Iſoperimetris, aequilaterum inuoluere maximam aream.

Scholion.

Cum ex praecedenti problemate inferri poſſet triangulum cuius perimeter datur, quodque maximum eſſe debet, ad minimum duo latera habiturum aequalia, liquido inde apparet omnia latera fore aequalia. Nulla enim ſubeſt cauſa cur potius AB et AC, quam AC et BC, vel AB et BC aequalia cenſeri debeant; cumque eodem iure de quibusuis lateribus idem dici poſſit, ſequitur omnia latera eſſe aequalia.

Hactenus eſt quod de triangulis dici queat. De quadrilateris nunc videndum eſt quo caſu maximam naniſcantur aream. Nihil in hoc deſiderandum confido, ſolutis ſeptem ſubſequentibus problematis.

DE QVADRILATERIS.

Problema I.

Datis quatuor lineis AB, AC, DC, DB, *determinare Quadrilaterum ex iis formatum quod maximam habeat aream.* Figura 1.

Solutio.

Sit $AB = a$, $AC = b$, $DC = c$, $DB = e$; ſinus anguli $BAC = x$, ſinusque anguli $BDC = y$. Ducatur porro diagonalis BC, erit area trianguli $BAC = \frac{abx}{2}$; et area triangnli $BDC = \frac{cey}{2}$, per lemma prius. Cum autem vtriusque areae summa sit = areae quadrilateri, fiet $\frac{abx + cey}{2}$ maximum, proinde eius differentiale = erit nihilo, nempe $abdx + cedy = 0$, et $abdx = -cedy$. Porro ex posteriori lemmate suppeditatur sequens aequatio, $BC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sqrt{(1-xx)} = c^2 + e^2 - 2ce \sqrt{(1-y^2)}$, cuius differentiale est $\frac{abxdx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{ceydy}{\sqrt{(1-yy)}}$, vel (substituendo $-abdx$ loco $cedy$) $\frac{x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{-y}{\sqrt{(1-yy)}}$. Ex quo intelligi potest angulum BAC aequalem esse angulo BDP qui deinceps est anguli BDC, cum tangens anguli BAC sit aequalis − tangenti BDC, seu tangenti BDP. Seu si lubeat aequationem hac induere forma, $x\sqrt{(1-yy)} + y\sqrt{(1-xx)} = 0$, ex ea cernere licet sinum summae angulorum BAC et BDC aequalem nihilo ob oculos quoque id assertum ponere, nempe angulum BAC aequalem esse angulo BDP. Q. E. I.

Corollarium 1.

Cum quadrilatera inscripta circulo hanc habeant proprietatem, vt anguli oppositi duobus rectis aequales sint, patet quadrilaterum ABDC hac proprietate itidem gaudens circulo debere inscribi, quo eius area quam maximae sit capacitatis.

Corollarium 2.

Haud volupe forsan non erit ostendere quomodo, praecedentis solutionis ope, proprietates huiusmodi quapladrilaterorum, respectu ad circulum nequaquam habito, deriuari queant; et quidem eo magis quod licet hoc a pluribus tentatum, a nemine tamen adhuc praestitum sit. Duabus haecce quadrilatera potissimum insigniuntur proprieratibus, quarum prior, eaque admodum trita, haec est: *Rectangulum Diagonalium aequalis est summae Rectangulorum laterum oppositorum*, scilicet $AD.BC = AB.DC + AC.AD$. Altera vero, minus quod sciam, nota, ob eamque rem digna cuius demonstratio hic subiungatur, sic sonat: *In quadrilatero quocunque inscripto, Diagonalis* AD *est ad Diagonalem* BC, *vt* $AB.AC + BD.DC$, *ad* $AB.BD + DC.AC$. Vtrumque theorema sic demonstratur. Figurâ 7.

Prioris Theorematis Demonstratio.

In superiore problemate inuentum est $BC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sqrt{(1-xx)} = c^2 + e^2 - 2ce\sqrt{(1-yy)}$, vbi animaduertendum est, loco $-\sqrt{(1-yy)}$ poni posse $+\sqrt{(1+xx)}$; cum cosinus anguli BAC aequalis sit cosinui anguli BDC, nisi quod alter respectu alterius sit negatiuus. Demonstratum est enim angulum BAC aequalem esse angulo BDP. Itaque facta hac substitutione, orietur haec aequatio $\frac{BC^2 - c^2 - e^2}{2ce} = \frac{a^2 + b^2 - BC^2}{2ab}$, vnde $(BC^2 - a^2 - b^2)ce = (c^2 + e^2 - BC^2)ab$, siue $BC^2 = \frac{(a^2+b^2)ce + (c^2+e^2)ab}{ab+ce}$. Iam vero eadem via parique ratiocinio habebitur $\frac{AD^2 - b^2 - c^2}{bc} = \frac{a^2 + e^2 - AD^2}{ae}$, et $AD^2 = \frac{(a^2+ec)bc + (b^2+c^2)ae}{ae+bc}$; proinde erit $BC^2 \times AD^2 = \frac{(a^2+b^2)ce + (c^2+e^2)ab}{ab+ce}$

$\times \frac{(a^2+e^2)bc+(b^2+c^2)ae}{ae+bc}$; quarum fractionum numeratores reciproce per denominatores diuidendo, prodit $BC^2.AD^2 = (ac+be)^2$, siue $BC.AD = ac+be$, scilicet rectangulum Diagonalium aequale rectangulo laterum oppositorum. Q. E. D.

Posterioris Demonstratio.

Posterioris Theorematis Demonstratio sponte se exerit. Cum enim $BC^2 : AD^2 = \frac{(a^2+b^2)ce+ab(c^2+e^2)}{ab+ce} : \frac{(a^2+e^2)bc+ae(b^2+c^2)}{ae+bc}$; seu $BC^2 : AD^2 = (ae+bc)^2(ac+be) : (ab+ce)^2(ac+be)$; erit $BC^2 : AD^2 = (ae+bc)^2 : (ab+ce)^2$, seu $BC : AD = ae+bc : ab+ce$. Q. E. D.

Figura 8. Iam vero si circulum in quo describendum est quadrilaterum ABDC determinare lubeat, ducatur ad centrum O, v. gr. BO et demisso perpendiculo BE in AD, et FO in BD; lateribus vt supra nuncupatis, $AB = a$, $AC = b$, $DC = c$, $BD = e$, radioque posito $= r$; ob triangula similia BOF et BEA, obtinebitur $BE = \frac{ae}{2r}$, proindeque $AE + DE$ seu $AD = \frac{a\sqrt{(4r^2-e^2)}+e^2\sqrt{(4r^2-a^2)}}{2r}$. In priori autem theoremate valor ipsius AD in meris habetur datis, nempe AD erit $= \frac{\sqrt{(ac+be)(ab+ec)}}{\sqrt{(ae+bc)}}$. Cognita vero AD, euoluere iam licet r ex aequatione $AD = \frac{a\sqrt{(4rr-e^2)}+e\sqrt{(4rr-aa)}}{2r}$, ex qua sublatis signis radicalibus,

dicalibus, deuenitur ad hanc: $r^2 = \frac{AD^2 a^2 e^2}{2a^2e^2 + 2AD^2(a^2+e^2) - AD^4 - a^4 - e^4}$ et denique substitutis valoribus ipsarum AD^2 et AD^4 et diuidendo per $a^2 e^2$ ad istam

$$\frac{\sqrt{(ac+be)(ab+ce)(ae+bc)}}{\sqrt{(a+b+c-e)(a+b-c+e)(a-b+c+e)(-a+b+c+e)}} = r,$$

quae dat pro quadrati inscripti latere $r\sqrt{2}$, vt notum est.

Problema 2.

Datis tribus lateribus, AB, AC, CD, *cum angulo* A *vel* C *inuenire quartum latus* BD, *ita vt area fiat maxima.*

Solutio.

Sint $AB = a$, $AC = b$, $CD = c$, $BD = y$, sin. ang. $A = m$, sinusque anguli $D = x$. Ducta perinde ac in praedenti Problemate Diagonali BC, fiat quadrilateri area $\frac{abm + cyx}{2}$, constans ex areis triangulorum ABC et CDB, secundum lemma prius expressis, maxima, ita eius differentiale $\frac{cydx + cxdy}{2}$ euadet aequalis nihilo, proindeque $dx = \frac{-xdy}{y}$. In aequatione vero $BC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sqrt{(1-m^2)} = c^2 + y^2 - 2cy\sqrt{(1-xx)}$ ex posteriori lemmate orta, eaque differentiata, nempe $ydy - cdy\sqrt{(1-xx)} + \frac{cyxdx}{\sqrt{(1-xx)}} = 0$, valor ipsius dx mox inuentus substituendus est; quo facto tandem obtinetur $c = y\sqrt{(1-xx)}$. Cum autem Diagonalis BC sit determinata, propter latera BA, AC et sinum anguli BAC data, y quoque datur et quidem erit hypothenusa in triangulo BCD; nam $y : c = 1 : \sqrt{(1-xx)}$. Figura 2.

Si

Si ſinus anguli C aſſumtus fuiſſet datus, haec prodiiſſet aequatio $a = y\sqrt{(1-xx)}$ ($x =$ ſinui anguli B), vnde pari modo perſpicere licet latus BD itidem hypothenuſam eſſe in triangulo ADB (ducta Diagonali AD). Q. E. I.

Scholion.

Ex Solutione Problematis primi de triangulis facile concludere licuiſſet hoc ita fore, quippe quod nihil aliud hic quaeratur niſi tertium latus in triangulo BCD, cuius duo latera dantur. At demonſtratum eſt haec duo latera ſibi inuicem normalia eſſe debere.

Problema 3.

Datis iisdem tribus lateribus, ſed cum angulo B *vel* D, *determinare Quadrangulum maximum.*

Solutio.

Figura 6. Lateribus vt antea nuncupatis, ſit v. gr. ſinus anguli $D = m$ et ſinus anguli $A = x$. Differentiale areae quadrilateri $\frac{abx + cym}{}$ quae maxima ponitur, erit $= 0$, ſcilicet $abdx + cmdy = 0$; vnde $dx = \frac{-cmdy}{ab}$, ſed dx inuenitur $= \frac{dy\sqrt{(1-xx)}(y - c\sqrt{(1-mm)})}{abx}$ per poſterius lemma quo $BC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sqrt{(1-xx)} = c^2 + y^2 - 2cy\sqrt{(1-m^2)}$. Eſt ergo $\frac{-cmx}{\sqrt{(1-xx)}} = y - c\sqrt{(1-m^2)}$ et vtrinque ſumendo quadrata $\frac{c^2m^2x^2}{1-xx} = y^2 + c^2 - 2cy\sqrt{(1-m^2)} - c^2m^2$, ſeu $\frac{c^2m^2}{1-xx} = y^2 + c^2 - 2cy\sqrt{(1-m^2)}$. Erit quoque per conſequens $\frac{c^2m^2}{1-xx} = BC^2$. Nunc vero ob triplicem ipſius BC

BC^2 valorem, x et y determinabuntur. Sed praeſtat ipſam BC inueſtigare, cum ſtatim deueniatur ad aequationem cubicam in qua ſecundus terminus deeſt. Cognita vero BC, x et y dantur. Q. E. I.

Si angulus B datus fuiſſet, v. gr. $=n$, prodiiſſet $\frac{an}{\sqrt{(1-xx)}}=AD$ (ſinu anguli C poſito $=x$).

Problema 4.

Datis tribus lateribus AB, AC, CD, *inuenire quartum* BD, *areamque maximam.*

Solutio.

Retentis iisdem laterum denominationibus, area quadrilateri ABCD per prius lemma ſic exprimetur $\frac{(ab+cy)x}{2}$, exiſtente x ſinu anguli BAC, vel BDC: cum per ſolutionem problematis primi de quadrilateris pateat hoc in caſu quadrilaterum, ſi maxime ſit capax, circulo inſcribi poſſe; proindeque angulorum BAC, vel BDC vnum eundemque eſſe ſinum. Vtrique pariter idem erit coſinus, niſi quod alter alterius reſpectu negatiuus ſit. Quare BC^2 erit (per lemma ſecundum) $=a^2+b^2+2ab\sqrt{(1-xx)}=c^2+y^2-2cy\sqrt{(1-xx)}$. Differentiatis his aequationibus, prodit $dy(c(1-xx)-y\sqrt{(1-xx)})=x\,dx(ab+cy)$; locoque dx ſubſtituto $\frac{-cxdy}{ab+cy}$ ipſius valore deſumto ex aequationis $\frac{(ab+cy)x}{2}$ factae maximae, differentiatione; obtinetur tandem $c=y\sqrt{(1-xx)}$. Ex qua patefit angulum BCD rectum efficiendum eſſe; cum $c:y=\sqrt{(1-xx)}:1$. Vt denique y innoteſcat, ex duplici aequatione ad BC^2 et ex vltima, emergit iſtaec $\frac{a^2+b^2-c^2-y^2}{2ab+2cy}=\frac{c}{y}$; (vtrobique ſcilicet quaerendo $\sqrt{(1-xx)}$) ſeu $y^3-(a^2+b^2-3c^2)y+2abc=0$, quae reſoluta dat y. Q. E. I.

Corollarium.

Ex dimidia igitur BD deſcribendus eſt circulus ad cuius ſemiperipheriam adaptare licebit latera AB, AC, CD, ita quadrilaterum ABCD maximam complectetur aream.

Problema 5.

Datis duobus lateribus AB, AC, *et ſumma reliquorum* BD+DC, *deſcribere quadrilaterum maximum.*

Solutio.

Sit $AB=a$, $AC=b$, $BD+DC=c$, $BD=y$, DC igitur erit $=c-y$. Hic autem non ſecus ac in problemate ſuperiori inferre licet ex Problemate 1. de Quadrilateris, quadrilaterum de quo agitur inſcriptibile eſſe circulo, et per conſequens ſinum anguli BAC eſſe quoque ſinum anguli BDC et coſinum vnius eſſe alterius coſinum, modo hic negatiue, ſi illic poſitiue aſſumtus fuerit. Quamobrem tantum reſtat vt latera BD, DC determinentur, quod fiet viam hucusque tritam calcando. Ponatur $\frac{(ab+cy-yy)x}{2}=$ area quadrilateri, maxima (quam ſuperius x retinens ſignificationem, eandemque in duobus ſubſequentibus problematis retenturum), erit eius differentiale $(ab+cy-yy)dx+(cx-2yx)dy=0$ et proinde $\frac{xdy(2y-c)}{ab+cy-y^2}=dx$, qui valor ſi ſubſtituatur in differentiali harum aequationum $BC^2=a^2+b^2-2ab$ $\sqrt{(1-xx)}$

$\sqrt{(1-xx)} = 2y^2 + c^2 - 2cy + 2(cy-y^2)\sqrt{(1-xx)}$, fcilicet in $\frac{abxdx}{\sqrt{(1-xx)}} = dy(2y-c+(c-2y)\sqrt{(1-xx)} - \frac{(cy-yy)xdx}{\sqrt{(1-xx)}}$, prodit (vtrinque per $\sqrt{(1-xx)}$ multiplicando), $(2y-c)\sqrt{(1-xx)}+c-2y=0$, et diuidendo per $\sqrt{(1-xx)}-1$, reftat $2y-c=0$, id eft $y=\frac{1}{2}c$. Q. E. I.

Scholion.

Hoc pro comperto habere, iam ex problematis fecundi folutione de triangulis licuiffet. Nulla enim refert quomodocunque difpofita fuerint latera AB, AC; feu, quod eodem recidit, quantacunque fuerit BC.

Problema 6.

Dato vnico latere AB *cum fumma reliquorum* AC+CD+BD, *determinare quadrilaterum maximum.*

Solutio.

Sit $AB=a$, fumma reliquorum laterum $=b$, AC $=y$, $BD=CD$ per folutionem praecedentem, $=\frac{b-y}{2}$ fiat, breuitatis gratia $=z$. Area quadrilateri maxima facienda, erit $\frac{(ay+z^2)x}{2}$, ex cuius differentiatione (fubftituendo $\frac{-dy}{2}$ loco dz) oritur $dx = \frac{(z-a)xdy}{ay+zz}$. Item $BC^2 = a^2+y^2-2ay\sqrt{(1-xx)} = 2z^2(1+\sqrt{(1-xx)})$ quae differentiata dat $dy(y-a\sqrt{(1-xx)}) + \frac{ayxdx}{\sqrt{(1-xx)}} = 2zdz(1+\sqrt{(1-xx)}) - \frac{z^2xdx}{\sqrt{(1-xx)}}$, vel, vice dz fcribendo $\frac{-dy}{2}$, fubftitutoque valore ipfius dx nuper inuento;

to; $(y+z)\sqrt{(1-xx)}+(z-a)(1-xx)=(z-a)(-xx)$, ſeu denique $(y+z)\sqrt{(1-xx)}+z-a=0$. In qua aequatione ſi loco $\sqrt{(1-xx)}$ ſubſtituatur $\frac{a^2+y^2-2z^2}{2(ay+zz)}$ deſumtum ex aequationibus ad BC^2 prodibit $y^3+zyy+(2az-2z^2-a^2)y+aaz-2az^2=0$ quae diuiſa per $(y+a)(y-a+2z)$ dat tandem $y-z=0$; ſcilicet $y=z$, ſeu $y=\frac{1}{3}b$. Q. E. I.

Scholion.

Cum nulla ſit ratio cur Triangulum BCD potius quam ADC Iſoſceles ponendum ſit, quod tamen fieri debet ex demonſtratis, manifeſtum eſt AC eſſe $=$ BD vel DC, ſeu b in tres partes aequales eſſe ſecandam.

Problema 7.

Data ſumma omnium laterum deſcribere quadrilaterum maximum.

Solutio.

Sit ſumma omnium laterum $=a$, AB$=y$, vnumquodque reliquorum $=z$, quippe quae aequalia, per ſolutionem praecedentem, ſint habenda. Hoc modo area quadrilateri $\frac{yzx+z^2x}{2}$ maxima erit ponenda vt ope differentiationis prodeat valor ipſius dx vel dy in ſubſequentibus aequationibus ſubſtituendus, erit igitur $dx=\frac{(y-z)xdy}{3z(y+z)}$, ſi nempe loco dz ſcribatur $\frac{-dy}{3}$ (eſt enim $y+3z=a$). Porro cum ſit $BC^2=y^2+z^2-2yz\sqrt{(1-xx)}=2z^2+2z^2\sqrt{(1-xx)}$, habetur $dy(y-z\sqrt{(1-xx)})$

$x x))-y d z \sqrt{(1-x^2)}+\frac{z y x d x}{\sqrt{(1-x x)}}=d z(z+2 z \sqrt{(1-x x)})$ $-\frac{z^2 x d x}{\sqrt{(1-x x)}}$, ceu $d y(3 y+z) \sqrt{(1-x x)}+d y(y-z)(1-x x)=-3 z x d x(y+z)$ et loco $d x$ substituendo $\frac{(y-z) x d y}{(y+z) 3 z}$, obtinetur $(3 y+z) \sqrt{(1-x x)}+y-z=0$. Nunc autem si vice $\sqrt{(1-x x)}$ ponatur $\frac{y-z}{2 z}$, et aequatio diuidatur per $3 y+3 z$, prodit tandem $y-z=0$; seu $y=z=\frac{a}{4}$. Q. E. I.

Corollarium.

Ex omnibus ergo quadrilateribus eiusdem perimetri, quadratum maxima gaudet area.

Scholion.

Ex Problemate praecedenti sine vllo negotio perspicere licuisset lineam a in quatuor partes aequales secandam esse. Quo enim potiori iure AB cuilibet reliquorum laterum aequalis ponenda non esset? Cumque hoc de singulis lateribus dici queat, sequitur omnia aequalia esse debere.

Absolutis itaque omnibus quae circa quadrilatera moueri possunt quaestionibus, ad Polygona cuiusuis generis progrediendum est. Quae autem, circa ea, potissimum nosse iuuat, tria subsequentia continent Problemata.

DE POLYGONIS

Problema 1.

Figura 9. *Datis omnibus Polygoni lateribus inuenire Polygonum capacissimum.*

Solutio.

Sit polygonum ABCDEF etc. cuius omnia latera dantur, ponaturque esse maximum; hoc pacto quadrilatera, vtpote ADCB, BEDC in quae diuidi poterit, erunt maxima et per problematis 1. de Quadrilateris solutionem, inscribi circulo poterunt. Sed manifestum est haec quadrilatera in vno eodemque circulo esse inscriptibilia, cum circulus ea in tribus vtrique Quadrilatero communibus punctis, scil. B, C, D, tangat. Id autem de ceteris quae pari modo formari possunt quadrilateris, dici potest. Ergo omnia isthaec quadrilatera, id est totum Polygonum inscribi debet circulo, quo maxime sit capax. Q. E. I.

Problema 2.

Dato vnico latere Polygoni cum summa reliquorum determinare Polygonum maximum.

Solutio.

Figura 9. Si vnicum latus cum summa reliquorum detur, euidens est Polygonum etiamnum in circulo esse inscribendum, quo eius area sit maxima. Iamiam enim, in superiore scil. solutione, pro quibusuis lateribus, id fieri debere demonstratum est. Ast ex Problemate 5. de Triangulis, et 7. de Quadrilateris, non minus liquet reliqua latera fore aequalia, seu *a* (si summa reliquorum laterum

rum ſit $=a$) in tot partes aequales quot latera ponuntur, diuidendum eſſe. Ergo Polygonum hoc capaciſſimum erit, ſi circulo inſcriptum fuerit, omniaque latera, praeter datum, aequalia fuerint facta. Q. E. I.

Problema 3.

Data ſumma omnium laterum definire Polygonum maximum.

Solutio.

Ob rationess in duobus praecedentibus Problematis memoratas, haud operoſe inferre licet Polygonum hoc non ſecus ac praecedentia in circulo inſcriptum, maximam nanciſci aream, et inſuper omnia latera habere aequalia. Hoc ergo in caſu Polygonum erit regulare, omnia latera, omnesque angulos aequalia habebit. Q. E. I. Figura 9.

Corollarium 1.

Quaecunque ergo Polygona regularia, inter omnia eiusdem perimetri, maximum ambiunt ſpatium. Sic comprobatur architectorum militarium in munimentorum delineatione vſus. Congruunt hoc pacto facilitas et vtilitas.

Corollarium 2.

Exinde non inelegans, vltro ſeſe quaſi offerens Conſectarium, minime praetermittendum eſt. Cum enim in praecedenti problemate non circumſcriptus ſit laterum numerus, pro quouis laterum numero ſolutio valet, hinc pro Polygono infinito laterum numero conſtante. Sed cum tale Polygonum nihil aliud ſit quam circulus, ſequitur circulum inter omnes figuras Iſoperimetras maxima pollere area: quod quidem paſſim, iam dudumque, minus tamen directe extat demonſtratum.

VA-

VARIAE OBSERVATIONES
CIRCA
SERIES INFINITAS.

AVCTORE
Leonh. Euler.

Obſeruationes, quas hic proferre conſtitui, plerumque circa eiusmodi ſeries verſantur, quae prorſus ſunt diuerſae ab iis, quae etiamnum tractari ſunt ſolitae. Cum enim adhuc nullae aliae ſeries ſint conſideratae, niſi quarum vel terminus generalis eſſet datus, vel lex ſaltem, qua ex datis aliquot terminis ſequentes inuenire liceret; ita hic eiusmodi potiſſimum ſeries ſum contemplaturus, quae neque terminum generalem proprie ſic dictum, neque legem continuationis agnoſcant; ſed quarum natura per alias conditiones determinetur. De huiusmodi ergo ſeriebus eo magis erit mirandum, ſi ſummari poterunt, cum ad methodos ſummandi adhuc cognitas neceſſario vel terminus generalis, vel lex progreſſionis requiratur; quibus deficientibus vix alia via patere videatur, qua ad ſummas cognoſcendas pertingere queamus. Ad has autem obſeruationes me peculiaris ſeries a Cel. *Goldbach* mecum communicata deduxit, cuius ſummationem maxime admirandam *Viri Celeb.* permiſſu hic primo loco ſum demonſtraturus.

Theo-

Theorema I.

Huius seriei in infinitum continuatae

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{26} + \tfrac{1}{31} + \tfrac{1}{35} + \text{etc.}$$

cuius denominatores vnitate aucti dant omnes numeros, qui sunt potestates vel secundi vel altioris cuiusuis ordinis numerorum integrorum, cuiusque adeo terminus quisque exprimitur hac formula $\frac{1}{m^n - 1}$, *denotantibus* m *et* n *numeros integros vnitate maiores; huius seriei autem summa est* $= 1$.

Demonstratio.

Hoc est Theorema a *Celeb. Goldbach* primum mecum communicatum, quod me etiam ad sequentes propositiones manuduxit. Ex inspectione autem huius seriei facile intelligitur, quam irregulariter ea progrediatur, et propterea quisque in his rebus versatus maxime modum admirabitur, quo *Vir Celeb.* summam huius singularis seriei inuenit; sequenti vero modo mihi hoc Theorema demonstrauit. Sit

$$x = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \text{etc.}$$

deinde cum sit

$$1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \text{etc.}$$

erit hanc seriem ab illa auferendo

$$x - 1 = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \text{etc.}$$

ex denominatoribus ergo exclusi sunt omnes potestates binarii cum binario ipso; reliqui vero numeri omnes occurrunt.

Ab hac ferie porro fubtrahit hanc

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \text{etc.}$$

et reftabit

$$x - 1 - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

denuoque fubtrahit

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \text{etc.}$$

reftabitque

$$x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \text{etc.}$$

Atque fimili modo omnes reliquos terminos fucceffiue tollendo reperietur tandem

$$x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{9} - \text{etc.} = 1$$

feu

$$x - 1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \text{etc.}$$

cuius progreffionis denominatores vnitate aucti dant omnes numeros, qui non funt poteftates. Quare fi ifta feries ab initio affumta

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \text{etc.}$$

fubtrahatur, relinquetur

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \text{etc.}$$

cuius feriei igitur, in qua denominatores vnitate aucti dant omnes omnino poteftates numerorum integrorum, fumma eft $= 1$. Q. E. I.

Theorema 2.

Huius feriei in infinitum continuatae

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \text{etc.}$$

cuius

cuius denominatores vnitate aucti dant omnes poteſtates pares, ſumma eſt $=l2$; atque huius ſeriei

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\text{etc.}$$

in infinitum continuatae, cuius denominatores vnitate aucti dant omnes poteſtates impares, ſumma aequalis eſt $1-l2$. Quarum ſerierum prioris terminus quisque eſt $\frac{1}{(2m-2)^n-1}$, poſterioris vero terminus quilibet hac continetur formula $\frac{1}{(2m-1)^n-1}$; retinentibus m et n praecedentes valores.

Demonſtratio.

Confideretur ſequens ſeries, cuius ſumma ponatur x;

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\text{etc.}$$

Iam cum ſit

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\text{etc.}$$

ſublata hac ſerie ab illa prodibit ſequens

$$x-1=\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\frac{1}{18}+\text{etc.}$$

a qua ſubtrahatur

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\frac{1}{216}+\text{etc.}$$

erit

$$x-1-\frac{1}{5}=\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\frac{1}{18}+\text{etc.}$$

ſimili modo ob

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\text{etc.}$$

erit

$$x-1-\frac{1}{5}-\frac{1}{9}=\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\frac{1}{18}+\text{etc.}$$

 Omni-

Omnibus ergo terminis hoc modo ſublatis prodibit

$$x = 1 + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{19} + \text{etc.}$$

cuius denominatores conſtituunt ſeriem naturalem numerorum imparium exceptis iis, qui vnitate aucti ſunt poteſtates, vti ex formatione huius ſeriei intelligitur. Cum vero ſit

$$l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \text{etc.}$$

atque

$$x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \text{etc.}$$

erit $x = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} + \text{etc.} - l2.$

Illo ergo pro x inuento valore ſublato ab iſto, in quo omnes omnino numeri impares occurrunt, reſtabit

$$0 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{31} + \tfrac{1}{35} \text{ etc.} - l2,$$

ſeu iſta

$$l2 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{31} + \tfrac{1}{35} + \text{etc.}$$

cuius ſeriei denominatores ſunt ii numeri impares, qui vnitate aucti dant omnes poteſtates pares. Huius ergo ſeriei ſumma eſt $l2$, prout in propoſitione eſt aſſertum. Q. E. Vnum.

Cum vero praecedens Theorema ſit

$$1 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{26} + \tfrac{1}{31} + \tfrac{1}{35} + \text{etc.}$$

vbi denominatores vnitate aucti dant omnes numeros, qui ſunt poteſtates tam pares quam impares, habebitur illa ſerie ab hac demta

$$1 - l2 = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{26} + \tfrac{1}{48} + \text{etc.}$$

cuius denominatores adeo ſunt ii numeri pares, qui vnitate aucti dant omnes poteſtates impares. Q. E. Alterum.

Theo-

Theorema 3.

Posito π pro peripheria circuli, cuius diameter est 1, *erit*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{28} - \frac{1}{48} - \frac{1}{80} - \frac{1}{120} - \frac{1}{124} - \frac{1}{168} - \frac{1}{224} + \frac{1}{244} - \frac{1}{288} - \text{etc.}$$

cuius seriei denominatores sunt numeri pariter pares, vnitate vel maiores vel minores quam potestates numerorum imparium. Illae autem fractiones, quarum denominatores vnitate excedunt potestates, signum habent $+$ *reliquae signum* -1.

Demonstratio.

Cum sit

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc.}$$

cuius seriei eae fractiones, quarum denominatores vnitate deficiunt a numeris pariter paribus, signum habent -1, reliquae signum $+$. Ad illam seriem vero addatur haec geometrica

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \text{etc.}$$

erit

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{etc.}$$

a qua subtrahatur

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \text{etc.}$$

erit

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{etc.}$$

in qua serie nec 3, et 5 nec eorundem potestates amplius insunt, simili modo 7 eiusque potestates tollentur addendo hanc seriem

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{7} - \frac{1}{49} + \text{etc.}$$

eritque

$$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\text{etc.}$$

Pari modo tollendo reliquos terminos, qui non ſunt poteſtates, ſimul enim poteſtates tolluntur, prodibit tandem

$$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{12}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+\frac{1}{20}-\frac{1}{20}+\frac{1}{24}-\frac{1}{28}-\text{etc.}=1$$

ſeu

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+\frac{1}{28}-\frac{1}{48}-\frac{1}{80}-\frac{1}{120}\text{ etc.}$$

ob binos terminos ſeſe plerumque deſtruentes, ita vt ſoli ſuperſint, qui ſolitarii erant: ſolitariae autem erant eae fractiones, quarum denominatores, qui ſemper prodierant pariter pares, vnitate vel aucti vel minuti poteſtates numerorum imparium efficiebant. Signa vero horum terminorum legem ſeruant praeſcriptam. Q. E. D.

Theorema 4.

Denotante π vt ante peripheriam circuli cuius diameter eſt $=1$, erit

$$\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{28}-\frac{1}{124}+\frac{1}{244}+\frac{1}{344}\text{ etc.}$$

cuius ſeriei denominatores omnes ſunt numeri pariter pares vnitate vel maiores vel minores, quam poteſtates numerorum imparium non quadratae; atque illae fractiones quarum denominatores vnitate ſuperant tales poteſtates, ſignum habent $+$; reliquae quarum denominatores deficiunt ab huiusmodi poteſtatibus non quadratis ſignum habent $-$.

Demonſtratio.

Per Theorema praecedens tertium inuenimus

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+\frac{1}{28}+\frac{1}{48}-\frac{1}{80}-\frac{1}{120}-\frac{1}{124}\text{ etc.}$$

in qua ſerie primo occurrunt denominatores, qui ab omnibus

bus quadratis imparibus vnitate deficiunt, eaeque fractiones omnes habent fignum idem $-$. Cum vero fit

$$\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{24}+\tfrac{1}{48}+\tfrac{1}{80}+\tfrac{1}{120}+\tfrac{1}{168}+\text{etc.}=\tfrac{1}{4}$$

habebitur loco harum fractionum omnium fubftituendo $\frac{1}{4}$ fequens forma

$$\tfrac{\pi}{4}=1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{28}-\tfrac{1}{124}+\tfrac{1}{244}+\tfrac{1}{344}\text{ etc.}$$

feu

$$\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{3}{4}=\tfrac{1}{28}-\tfrac{1}{124}+\tfrac{1}{244}+\tfrac{1}{344}\text{ etc.}$$

cuius feriei denominatores funt numeri pariter pares vel vnitate maiores vel minores quam poteftates numerorum imparium non quadratae, ob quadratas iam exclufas, atque prout vnitate funt vel maiores vel minores, fractiones etiam habent fignum $+$ vel $-$. Q. E. D.

Corollarium 1.

Ad feriem ergo continuandam omnium numerorum imparium, qui non funt poteftates fumendae funt poteftates exponentium imparium, eaeque vnitate vel augendae vel minuendae, quo prodeant numeri pariter pares, qui erunt denominatores feriei inuentae: feruata fignorum regula.

Corollarium 2.

Cum autem omnis numerus impar vel fit $4m-1$ vel $4m+1$, poteftates autem exponentium imparium a $4m-1$ ortorum, fi vnitate augeantur, illae autem, quae a $4m+1$ oriuntur fi vnitate minuantur, dent numeros pariter pares; aequabitur $\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}$ feriei terminorum qui omnes in hac forma $\frac{1}{(4m-1)^{2n+1}+1}$ continentur, dem-

ta

ta ferie terminorum in hac forma $\frac{1}{(4m+1)^{2n+1}-1}$ contentorum; vbi loco m et n omnes numeri integri affirmatiui accipi debent praeter eos, qui vel $4m-1$ vel $4m+1$ faciunt poteftates.

Corollarium 3.

Aequabitur ergo $\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}$ aggregato fequentium ferierum infinitarum

$$\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}=\left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{3^3+1}+\frac{1}{3^5+1}+\frac{1}{3^7+1}+\frac{1}{3^9+1}+\text{etc.}\\
-\frac{1}{5^3-1}-\frac{1}{5^5-1}-\frac{1}{5^7-1}-\frac{1}{5^9-1}+\text{etc.}\\
+\frac{1}{7^3+1}+\frac{1}{7^5+1}+\frac{1}{7^7+1}+\frac{1}{7^9+1}+\text{etc.}\\
+\frac{1}{11^3+1}+\frac{1}{11^5+1}+\frac{1}{11^7+1}+\frac{1}{11^9+1}+\text{etc.}\\
-\frac{1}{13^3-1}-\frac{1}{13^5-1}-\frac{1}{13^7-1}-\frac{1}{13^9-1}+\text{etc.}\\
+\frac{1}{15^3+1}+\frac{1}{15^5+1}+\frac{1}{15^7+1}+\frac{1}{15^9+1}+\text{etc.}\\
\qquad\qquad\text{etc.}\quad\text{etc.}
\end{array}\right.$$

Corollarium 4.

Hac ergo ferie eousque continuata, donec denominatores fiant maiores quam 100000 habebitur $\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{28}-\frac{1}{124}+\frac{1}{244}+\frac{1}{344}+\frac{1}{1332}+\frac{1}{2188}-\frac{1}{2196}-\frac{1}{3124}+\frac{1}{3376}-\frac{1}{4912}+\frac{1}{6860}-\frac{1}{9260}+\frac{1}{12168}+\frac{1}{16808}+\frac{1}{19684}-\frac{1}{24368}+\frac{1}{29792}-\frac{1}{35936}+\frac{1}{42876}-\frac{1}{50652}+\frac{1}{59320}-\frac{1}{68920}-\frac{1}{78124}+\frac{1}{79508}-\frac{1}{91124}$.

Corollarium 5.

Cum omnes denominatores per 4 diuidi poffint, erit $\pi=3+\frac{1}{7}-\frac{1}{31}+\frac{1}{61}+\frac{1}{86}+\frac{1}{333}+\frac{1}{547}-\frac{1}{549}-\frac{1}{781}+\frac{1}{844}$ etc.

Quae

Quae feries ideo notari meretur, quod eius duo primi termini iam dent Archimedis proportionem peripheriae circuli ad diametrum.

Theorema 5.

Retinente π priorem fignificationem, erit

$$\frac{\pi}{4} - l2 = \frac{1}{26} + \frac{1}{28} + \frac{1}{242} + \frac{1}{244} + \frac{1}{342} + \frac{1}{344} + \text{etc.}$$

cuius feriei haec eft lex, vt numeri medii inter binos denominatores binario differentes, fcilicet 27, 243, 343, *etc. fint poteftates exponentium imparium ortae a numeris imparibus, quae vnitate auctae fint per* 4 *diuifibiles feu numeri pariter pares.*

Demonftratio.

Cum per Theorema tertium fit

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{28} - \frac{1}{48} - \frac{1}{80} \text{ etc.}$$

fractionum figno $-$ affectarum denominatores funt numeri pariter pares vnitate deficientes a poteftatibus numerorum imparium; fractionum vero figno $+$ affectarum denominatores funt quoque pariter pares vnitate fuperantes poteftates numerorum imparium; atque praeterea fit per Theorema fecundum

$$1 - l2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \text{etc.}$$

cuius feriei denominatores deficiunt vnitate ab omnibus potentiis numerorum imparium; haec feries complectetur omnes terminos illius figno $-$ affectos, et praeterea fractiones denominatores habentes impariter pares vnitate deficientes a poteftatibus numerorum imparium. Quare

 fi haec

ſi haec ſeries ad illam addatur prodibit

$$\frac{\pi}{4} - l2 = \frac{1}{26} + \frac{1}{28} + \frac{1}{242} + \frac{1}{244} + \frac{1}{342} + \frac{1}{344} + \text{etc.}$$

cuius binae fractiones erunt ita comparatae, vt prioris denominator ſit numerus impariter par, poſterioris binario maior pariter par, mediusque numerus inter binos huiusmodi denominatores ſit poteſtas numeri imparis; quae ergo poteſtas vnitate aucta dare debet numerum pariter parem. Q. E. D.

Corollarium 1.

Quia hae poteſtates numerorum imparium ita ſunt comparatae, vt vnitate auctae fiant per 4 diuiſibiles, erunt eae poteſtates imparium dimenſionum, quae oriuntur a numeris huius formae $4m-1$, qui ipſi non ſunt poteſtates.

Corollarium 2.

Si ergo omnes ſumantur numeri huius formae $4m-1$, quae non ſunt poteſtates, eorumque capiantur omnes poteſtates exponentium imparium; hae poteſtates vnitate tam auctae quam minutae dabunt omnes fractionum ſeriei inuentae denominatores.

Corollarium 3.

Si binae fractiones in vnam coaleſcant erit

$$\frac{\pi}{4} = l2 + \frac{2 \cdot 27}{26 \cdot 28} + \frac{2 \cdot 243}{242 \cdot 244} + \frac{2 \cdot 343}{342 \cdot 344} + \text{etc.}$$

Quae ſeries formabitur ſumendis omnibus fractionibus, quae oriuntur ex hac forma $\frac{2(4m-1)^{2n+1}}{(4m-1)^{4n+2}-1}$ ſubſtituendo

loco

loco m et n omnes numeros integros ſucceſſiue praeter eos ipſius m valores, qui reddant $4m-1$ poteſtatem.

Theorema 6.

Seriei huius

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{63}+\frac{1}{80}+\frac{1}{255}+\frac{1}{624}+\textit{etc.}$$

cuius denominatores vnitate aucti dant omnia quadrata, quae ſimul ſunt altiores poteſtates; huius inquam ſeriei in infinitum continuatae ſumma eſt $\frac{7}{4}-\frac{\pi^2}{6}$: *denotante* π *peripheriam circuli, cuius diameter* $=1$.

Demonſtratio.

Hoc quoque Theorema a *Cel. Goldbachio*, verum ſine demonſtratione accepi, atque iisdem quibus ante veſtigiis inſiſtens hanc inueni demonſtrationem. Cum ante aliquot annos incidiſſem in huius ſeriei

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\text{etc.}$$

ſummam $=\frac{\pi^2}{6}$, hanc ipſam ſeriem ita ſum contemplatus

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\text{etc.}$$

Iam cum ſit

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\text{etc.}$$

atque

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\frac{1}{729}+\text{etc.}$$

ſimilique modo

$$\frac{1}{24}=\frac{1}{25}+\frac{1}{625}+\text{etc.} \quad \text{et} \quad \frac{1}{35}=\frac{1}{36}+\text{etc.}$$

ſi loco harum ſerierum geometricarum ſubſtituantur ſummae prodibit

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{99}\ \text{etc.}$$

cuius ſeriei denominatores vnitate aucti dant omnes numeros quadratos, praeter eos, qui ſimul ſint alius ſpeciei poteſtates. Cum autem ſumendis omnino quadratis vnitate minutis ſit

$$\tfrac{3}{4}=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{24}+\tfrac{1}{35}+\tfrac{1}{48}+\tfrac{1}{63}+\tfrac{1}{80}+\text{etc.}$$

proueniet ab hac ſuperiorem ſeriem ſubtrahendo

$$\tfrac{7}{4}-\tfrac{\pi^2}{6}=\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{63}+\tfrac{1}{80}+\tfrac{1}{255}+\text{etc.}$$

qui denominatores vnitate aucti dant omnes numeros quadratos, qui ſimul ſunt alius generis poteſtates. Q.E.D.

Conſtituunt haec ſex theoremata alterum obſeruationum iſtarum partem, quibus ſcilicet ſeries additione ſubtractioneue terminorum ortae ſunt conſideratae. Sequentia vero theoremata circa ſeries, quorum termini in ſe inuicem multiplicantur, verſabuntur; neque minus erant admirabilia, quam praecedentia, cum in iis pariter lex progreſſionis tantopere ſit irregularis. Discrimen autem in hoc potiſſimum erit poſitum, quod in theorematis praecedentibus progreſſio terminorum ſecuta ſit ſeriem poteſtatum, quae per ſe eſt maxime irregularis; in his autem termini progrediantur ſecundum numeros primos, quorum progreſſio non minus eſt abſtruſa.

Theorema 7.

Factum continuum in infinitum ex his fractionibus $\frac{2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19}{1\cdot2\cdot4\cdot6\cdot10\cdot12\cdot16\cdot18}$ *etc. vbi numeratores ſunt omnes numeri primi, denominatores vero vnitate deficiunt a numeratoribus. Hoc factum inquam aequale eſt ſummae huius ſeriei*

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\textit{etc.}$$

eſtque adeo infinitum.

Demon-

Demonſtratio.

Nam ſit

$$x = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \text{etc.}$$

erit

$$\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \text{etc.}$$

qua ſerie ab illa demta reſtat

$$\tfrac{1}{2}x = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \text{etc.}$$

in qua nulli amplius denominatores pares inſunt. Ab hac denuo auferatur iſta ſeries

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}x = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{21} + \text{etc.}$$

reſtabit

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}x = 1 + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \text{etc.}$$

in cuius denominatoribus nec per 2 nec per 3 diuiſibiles reperiuntur. Quo autem etiam numeri per 5 diuiſibiles egrediantur, ſubtrahatur iſta ſeries

$$\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}\cdot\tfrac{1}{5}x = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{35} + \text{etc.}$$

reſtabitque

$$\frac{1\cdot 2\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 5}x = 1 + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \text{etc.}$$

Atque ſimili modo tollendis omnibus terminis tum per 7 tum per 11 etc. omnesque numeros primos diuiſibilibus tandem reperietur

$$\frac{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 10\cdot 12\cdot 16\cdot 18\cdot 22\cdot \text{etc.}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot \text{etc.}}\,x = 1.$$

Quare cum ſit

$$x = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \text{etc.}$$

erit

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \text{etc.} = \frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\ \text{etc.}}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 10\cdot 12\cdot 16\cdot 18\cdot 22\ \text{etc.}}$$

cuius expreſſionis numeratores conſtituunt progreſſionem numerorum primornm, denominatores vero vnitate ab iis deficiunt. Q. E. D.

Corollarium I.

Expreſſiones ergo $\frac{2 . 3 . 5 . 7 . 11 . 13 . etc.}{1 . 2 . 4 . 6 . 10 . 12 . etc.}$ valor eſt infinitus, et poſito abſolute infinito $= \infty$, erit iſtius expreſſionis valor $= l \infty$, quod infinitum inter omnes infiniti poteſtates eſt minimum.

Corollarium 2.

Cum vero haec expreſſio $\frac{4 . 9 . 16 . 25 . 36 . 49 . etc.}{3 . 8 . 15 . 24 . 35 . 48 . etc.}$ finitum habeat valorem ſcilicet 2; ſequitur infinities plures eſſe numeros primos, quam quadratos, in ſerie omnium omnino numerorum.

Corollarium 3.

Verum etiam hinc intelligitur infinities pauciores extare numeros primos, quam numeros integros; haec enim expreſſio $\frac{2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 \; etc.}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 \; etc.}$ abſolute infinitum habet valorem, cum ſimilis a numeris tantum primis ortae valor ſit logarithmus iſtius infiniti.

Theorema 8.

Si ex ſerie numerorum primorum ſequens formetur expreſſio

$$\frac{2^n . \; 3^n . \; 5^n . \; 7^n . \; 11^n . \; etc.}{(2^n-1)(3^n-1)(5^n-1)(7^n-1)(11^n-1) \; etc.}$$

erit

erit eius valor aequalis ſummae huius ſeriei

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \textit{etc.}$$

Demonſtratio.

Sit

$$x = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{etc.}$$

erit

$$\frac{1}{2^n} x = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \text{etc.}$$

vnde oritur

$$\frac{(2^n - 1)}{2^n} x = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \text{etc.}$$

Porro eſt

$$\frac{(2^n - 1)}{2^n} \cdot \frac{1}{3^n} x = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{15^n} + \frac{1}{21^n} + \text{etc.}$$

vnde fiet

$$\frac{(2^n-1)(3^n-1)}{2^n \cdot 3^n} x = 1 + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \text{etc.}$$

Similibus ergo operationibus pro ſingulis numeris primis inſtitutis omnes ſeriei termini praeter primum tollentur, reperieturque

$$1 = \frac{(2^n-1)(3^n-1)(5^n-1)(7^n-1)(11^n-1)\ \text{etc.}}{2^n \quad 3^n \quad 5^n \quad 7^n \quad 11^n \quad \text{etc.}} x$$

et loco x ſerie reſtituta fit

$$\frac{2^n \quad 3^n \quad 5^n \quad 7^n \quad 11^n \quad \text{etc.}}{(2^n-1)(3^n-1)(5^n-1)(7^n-1)(11^n-1)\ \text{etc.}} = 1$$

$$= 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{etc.}$$

Q. E. D.

Corollarium 1.

Cum posito $n = 2$ fit $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{6}$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter est 1, erit

$$\frac{4.\ 9.\ 25.\ 49.\ 121.\ 169.\ \text{etc.}}{3.\ 8.\ 24.\ 48.\ 120.\ 168.\ \text{etc.}} = \frac{\pi^2}{6},$$

seu

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2.\ 2.\ 3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 11.\ 11.\ \text{etc.}}{1.\ 3\ \ 2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ \text{etc.}}$$

Corollarium 2.

Cum praeterea posito $n = 4$ fit

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = \frac{\pi^4}{90}.$$

erit

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{4.\ 4.\ 9.\ 9.\ 25.\ 25.\ 49.\ 49.\ 121.\ 121.\ \text{etc.}}{3.\ 5.\ 8.\ 10.\ 24.\ 26.\ 48.\ 50.\ 120.\ 122.\ \text{etc.}}$$

Hac igitur expressione per illam diuisa prodit

$$\frac{\pi^2}{15} = \frac{4.\ 9.\ 25.\ 49.\ 121.\ 169.\ \text{etc.}}{5.\ 10.\ 26.\ 50.\ 122.\ 170.\ \text{etc.}}$$

Theorema 9.

Si quadrata numerorum primorum imparium omnium resoluantur in duas partes vnitate a se inuicem differentes, harumque partium impares sumantur pro numeratoribus, pares vero pro denominatoribus seriei ex factoribus compositae valor huius expressionis erit $\frac{5.\ 13.\ 25.\ 61.\ 85.\ 145.\ \text{etc.}}{4.\ 12.\ 24.\ 60.\ 84.\ 144.\ \text{etc.}} = \frac{3}{2}$

Demon-

Demonſtratio.

Per theorematis praecedentis Coroll. 1. habemus

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{4.\ 9.\ 25.\ 49.\ 121.\ 169.\ 289.\ \text{etc.}}{3.\ 8.\ 24.\ 48.\ 120.\ 168.\ 288.\ \text{etc.}}$$

At in Coroll. 2. ſequentem elicuimus aequationem

$$\frac{\pi^2}{15} = \frac{4.\ 9.\ 25.\ 49.\ 121.\ 169.\ 289.\ \text{etc.}}{5.\ 10.\ 26.\ 50.\ 122.\ 170.\ 290.\ \text{etc.}}$$

Quarum expreſſionum ſi illa per hanc diuidatur, π ex calculo egredietur, habebiturque

$$\frac{5}{2} = \frac{5.\ 10.\ 26.\ 50.\ 122.\ 170.\ 290.\ \text{etc.}}{3.\ 8.\ 24.\ 48.\ 120.\ 168.\ 288.\ \text{etc.}}$$

cuius expreſſionis numeratores ſunt vnitate maiores quam quadrata numerorum primorum, denominatores vero vnitate minores. Si ergo vtrinque per $\frac{5}{3}$ diuidatur ſingulaeque fractiones per 2 deprimantur, habebitur

$$\frac{3}{2} = \frac{5.13.25.61.85.145.\ \text{etc}}{4.12.24.60.84.144.\ \text{etc.}}$$

vbi numeratores ſunt vnitate maiores quam denominatores reſpondentes, atque quisque numerator cum ſuo denominatore facit quadratum numeri primi imparis, ob ſublatum diuiſione quadratum numeri primi paris 2. Q. E. D.

Theorema 10.

Si π vt hactenus ſignificet peripheriam circuli, cuius diameter eſt $=1$, erit

$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{80.\ 224.\ 440.\ 624.\ 728.\ \text{etc.}}{81.\ 225.\ 441.\ 625.\ 729\ \text{etc.}}$$

cuius expreſſionis denominatores ſunt quadrata numerorum imparium non primorum, numeratores vero vnitate minores.

Demonſtratio.

A *Walliſio* habetur ſequens expreſſio pro π, nempe

$$\frac{\pi}{4} = \frac{8.\ 24.\ 48.\ 80.\ 120.\ 168.\ \text{etc.}}{9.\ 25.\ 49.\ 81.\ 121.\ 169.\ \text{etc.}}$$

 quae

quae fractiones ex omnibus omnino quadratis imparibus formantur. Per Coroll. 1. vero Theor. 8 erat

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{4 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 121 \cdot 169 \cdot \text{ etc.}}{3 \cdot 8 \cdot 24 \cdot 48 \cdot 120 \cdot 168 \cdot \text{ etc.}}$$

siue

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 121 \cdot 169 \cdot 289 \cdot \text{ etc.}}{8 \cdot 24 \cdot 48 \cdot 120 \cdot 168 \cdot 288 \text{ etc.}}$$

quae fractiones ex solis numerorum primorum imparium quadratis sunt formatae. Si iam hae duae expressiones in se mutuo ducantur prodibit

$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{80 \cdot 224 \cdot 440 \cdot 624 \cdot 728 \cdot \text{ etc.}}{81 \cdot 225 \cdot 441 \cdot 625 \cdot 729 \cdot \text{ etc.}}$$

quae ideo fractiones quadrata numerorum imparium non primorum sequuntur. Q. E. D.

Theorema 11.

Sumto π pro peripheria circuli, cuius diameter est 1, erit

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \text{ etc.}}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 24 \cdot \text{ etc}}$$

cuius expressionis numeratores constituunt progressionem numerorum primorum, denominatores vero sunt numeri pariter pares vnitate vel maiores vel minores quam numeratores respondentes.

Demonstratio.

Cum sit

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \text{ etc.}$$

erit

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{15} - \frac{1}{21} + \text{ etc.}$$

quibus seriebus additis fit

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \text{ etc.}$$

Deinde

Deinde eſt

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{35} - \frac{1}{55} + \text{etc.}$$

qua ſublata prodit

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{etc.}$$

in qua ſerie nulli amplius occurrunt denominatores vel per 3 vel per 5 diuiſibiles. Simili modo tollentur omnes per 7 diuiſibiles addendo

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{4\cdot 4}{5\cdot 3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{7} - \frac{1}{49} - \frac{1}{77} \text{ etc.}$$

prodibit autem

$$\frac{8\cdot 4\cdot 4}{7\cdot 5\cdot 3}\cdot\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} \text{ etc.}$$

Perſpicitur autem denominatores per numerum primum huius formae $4n-1$ diuiſibiles tolli additione, vnde iſte nouus factor $\frac{4n}{4n-1}$ accedit: denominatores vero per numerum primum formae $4n+1$ diuiſibiles tolli ſubtractione, vnde nouus factor iſte $\frac{4n}{4n+1}$ adiicietur. Horum ergo factorum ſucceſſiue addendorum donominatores erunt numeri primi; numeratores vero numeri pariter pares vnitate vel maiores vel minores quam denominatores. Hoc ergo modo ſi auferantur omnes termini ſeriei initio aſſumtae, prodibit tandem

$$\frac{\text{etc.}\ 24.\ 20.\ 16.\ 12.\ 12.\ 8.\ 4.\ 4.}{\text{etc.}\ 23.\ 19.\ 17.\ 13.\ 11.\ 7.\ 5.\ 3.}\ \frac{\pi}{4} = 1.$$

Ex qua oritur

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 17.\ 19.\ 23.\ \text{etc.}}{4.\ 4.\ 8.\ 12.\ 12.\ 16.\ 20.\ 24.\ \text{etc.}}$$ Q. E. D.

Theorema 12.

Si omnes numeri primi impares in duas partes vnitate a ſe inuicem differentes diuidantur atque partes pares

ſu-

sumantur pro numeratoribus, impares vero pro denominatoribus, erit factum continuum

$$\frac{2.\ 2.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ \text{etc.}}{1.\ 3.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 9.\ 11.\ \text{etc.}} = 2$$

Demonſtratio.

Cum ſit per Theorema praecedens $\frac{\pi}{4} = \frac{3.\ 5.\ 7.\ \text{etc.}}{4.\ 4.\ 8.\ \text{etc.}}$ erit

$$\frac{16}{\pi^2} = \frac{4.\ 4.\ 4.\ 4.\ 8.\ 8.\ 12.\ 12.\ 12.\ 12.\ 16.\ 16.\ \text{etc.}}{3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 11.\ 11.\ 13.\ 13.\ 17.\ 17\ \text{etc.}}.$$

At ex Coroll. 1. Theor. 8. ſi per $\frac{3}{4}$ multiplicetur habetur

$$\frac{\pi^2}{2} = \frac{3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 11.\ 11.\ 13.\ 13.\ \text{etc.}}{2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 12.\ 14.\ \text{etc.}}$$

quarum expreſſionum vtraque per numeros primos impares formatur. Si ergo hae in ſe inuicem multiplicentur, prioris denominator deſtruet numeratorem poſterioris, atque praeterea tam ex illius numeratore quam huius denominatore medietas terminorum auferetur. Prodibit ſcilicet

$$2 = \frac{4.\ 4.\ 8.\ 12.\ 12.\ 16.\ 20.\ 24.\ \text{etc}}{2.\ 6.\ 6.\ 10.\ 14.\ 18.\ 18.\ 22.\ \text{etc.}}$$

vbi numeratores ſunt numeri pariter pares, denominatores vero impariter pares vtrique vnitate vel maiores vel minores quam numeri primi impares. Si ergo ſingulae fractiones per binarium deprimantur, numerator continebit numeros pares, denominator vero impares, atque bini reſpondentes et vnitate a ſe inuicem different, et coniuncti numerum primum conſtituent. Habebitur igitur

$$2 = \frac{2.\ 2.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ \text{etc.}}{1.\ 3.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 9.\ 11.\ \text{etc.}}$$

Q. E. D.

Theo-

Theorema 13.

Si omnes numeri impares non primi in duas partes diuidantur vnitate a se inuicem distantes harumque pares pro numeratoribus impares vero pro denominatoribus accipiantur, erit

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14.\ 16.\ 18.\ 20.\ 22.\ 24.\ \text{etc.}}{5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 13.\ 17.\ 17.\ 19.\ 23.\ 25.\ \text{etc.}}$$

Demonstratio.

Cum per *Wallisii* quadraturam circuli sit

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.\ 2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 8.\ 10.\ 10.\ 12.\ 12.\ \text{etc.}}{1.\ 3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 9.\ 9.\ 11.\ 11.\ 13.\ \text{etc.}}$$

cuius expressionis si singuli numeratores ad suos respondentes denominatores addantur, prodeunt omnes omnino numeri impares. At quoniam similis expressio, si ex numeris imparibus primis tantum formatur, aequatur binario, vti in praecedente Theoremate est demonstratum, quo erat

$$2 = \frac{2.\ 2.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ \text{etc.}}{1.\ 3.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 9.\ 11.\ \text{etc.}}$$

si illa expressio per hanc diuidatur, proueniet

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14.\ 16.\ 18.\ 20.\ 22.\ 24.\ \text{etc.}}{5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 13.\ 17.\ 17\ 19.\ 23.\ 25.\ \text{etc.}}$$

quae similiter ex numeris imparibus non primis formatur. Numeratores scilicet erunt numeri pares, denominatores vero impares vnitate a numeratoribus distantes, atque singuli numeratores ad suos respondentes denominatores additi dabunt omnes numeros impares non primos. Q. E. D.

Theorema 14.

Denotante vt hactenus π *circuli peripheriam cuius diameter est* 1, *dico fore*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 17.\ 10.\ 23.\ 29.\ 31.\ \text{etc.}}{2.\ 6.\ 6.\ 10.\ 14.\ 18.\ 18.\ 22.\ 30.\ 30.\ \text{etc.}}$$

cuius

cuius expreſſionis numeratores conſtituunt ſeriem numerorum primorum imparium, denominatores vero ſunt numeri impariter pares vnitate vel minores vel maiores quam numeratores reſpondentes.

Demonſtratio.

Per Coroll. Theor. 8. ſi per $\frac{3}{4}$ multiplicetur eſt

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 11.\ 11.\ 13.\ 13.\ etc.}{2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 12.\ 14.\ etc.}$$

in qua numeratores ſunt numeri primi impares bis poſiti, denominatores vero numeri tam pariter pares quam impariter pares, vnitate vel maiores vel minores quam ipſi numeri primi. Deinde Theoremate 11. demonſtrauimus eſſe

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 17.\ 19.\ 23.\ etc.}{4.\ 4.\ 8.\ 12.\ 12.\ 16.\ 20.\ 24.\ etc.}$$

in qua expreſſione numeratores ſunt numeri primi impares ſemel poſiti, denominatores vero numeri pariter pares vnitate diſtantes a numeris primis, ita vt haec expreſſio inpraecedente ſit contenta. Quare ſi illa expreſſio per hanc diuidatur prodibit

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 17.\ 19.\ etc.}{2.\ 6.\ 6.\ 10.\ 14.\ 18.\ 18.\ etc.}$$

in qua numeri impares primi numeratores conſtituunt, denominatores vero ſunt numeri impariter pares vnitate vel maiores vel minores quam numeratores. Q. E. D.

Theorema 15.

Denotante π *peripheriam circuli, cuius diameter eſt* 1, *erit*

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} - \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \frac{1}{33} - \frac{1}{35} - \frac{1}{37} \text{ etc.}$$

cuius ſeriei denominatores ſunt numeri impares omnes, ratio

tio signorum autem hoc nititur fundamento. Numeris primus huius formae $4n-1$ datur signum $+$; numeris primis autem huius formae $4n+1$ signum -1. Deinde numeris compositis id tribuitur signum, quod ipsis ratione compositionis ex primis cum suis signis secundum multiplicationis regulam competit.

Demonſtratio.

Quemadmodum vſitatis hic operationibus haec ſeries

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\text{etc.}$$

conuerſa eſt in hanc expreſſionem $\frac{3.\ 5.\ 7.\ 11.\ \text{etc.}}{4.\ 4.\ 8.\ 12.\ \text{etc.}}$, ita viciſſim methodus poteſt excogitari, qua hanc expreſſionem

$$\frac{3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ \text{etc.}}{4.\ 4.\ 8.\ 12.\ 12.\ \text{etc.}}$$

in ſeriem

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\ \text{etc.}$$

transmutare liceat. Atque ſi haec methodus ad expreſſionem theoremate praecedente inuentam

$$\frac{\pi}{2}=\frac{3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 17.\ \text{etc.}}{2.\ 6.\ 6.\ 10.\ 14.\ 18.\ \text{etc.}}$$

adhibeatur, iſta expreſſio abibit in iſtam ſeriem propoſitam

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\ \text{etc.}$$

cuius propterea ſumma eſt $\frac{\pi}{2}$. Ad idem a poſteriore colligere licet, ponendo

$$x=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{17}\ \text{etc.}$$

eritque

$$\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{27}+\frac{1}{33}-\text{etc.}$$

atque ſubtrahendo prodibit

$$\frac{2}{3}x=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}\ \text{etc.}$$

Deinde

Deinde cum ſimili modo ſit

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}x = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{35} + \frac{1}{55} \text{ etc.}$$

prodibit addendo

$$\frac{6.\ 2}{5.\ 3}x = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} \text{ etc.}$$

Atque ſimiliter omnibus tollendis terminis praeter primum 1 inuenietur

$$x = \frac{3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 17.\ 19.\ \text{etc.}}{2.\ 6.\ 6.\ 10.\ 14.\ 18.\ 18.\ \text{etc.}} = \frac{\pi}{2}.$$

Atque hinc ſimul ratio ſignorum ſeriei propoſitae colligitur eadem ipſa, quam deſcripſimus. Q. E. D.

Corollarium.

Summa ergo ſeriei propoſitae

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} \text{ etc.}$$

duplo maior eſt quam ſumma huius ſeriei

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \text{ etc.}$$

Quare cum ipſae fractiones ſint vtrinque eaedem, ſolis ſignis effectum eſt, vt altera alterius ſit dupla.

Theorema 16.

Poſito π *vt hactenus pro peripheria circuli cuius diameter eſt* 1, *erit*

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} \textit{ etc.}$$

Fractionum autem affirmatiuarum denominatores ſunt vnitate minores quam numeri impares non poteſtates; fractionum autem negatiuarum denominatores ſunt vnitate maiores. Cuiusque autem fractionis ſignum congruit cum ſigno numeri imparis vel vnitate maioris vel minoris non poteſtatis in praecedente Theoremate.

Demon-

Demonſtratio.

Haec ipſa ſeries oritur ex conuerſione praecedentis ſecundum modum in Theorematis 1. 2. 3. vſitatis, quo continuo progreſſiones geometricae vel adduntur vel demuntur, quoad ſolus primus terminus ſuperſit. Q.E.D.

Theorema 17.

Si numeris imparibus primis huius formae $4n-1$ *tribuatur ſignum* $+$, *reliquis huius formae* $4n+1$ *ſignum* $-$, *numeris vero compoſitis ea ſigna, quae ipſis per regulas multiplicationis ex primis competunt; erit*

$$\frac{3\pi}{8}=1+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{25}+\frac{1}{33}-\frac{1}{35}-\frac{1}{39}+\frac{1}{49}-\frac{1}{51}\ etc.$$

qui denominatores ſunt facta vel ex duobus vel ex 4 vel ex 6 vel etc. numeris primis.

Demonſtratio.

Cum enim per Theorem. 15 ſit

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\ \text{etc.}$$

vbi denominatores ſunt omnes numeri impares et ſigna eam tenent legem quam praeſcripſimus; atque praeterea ſit

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\text{etc.}$$

quarum ſerierum ii termini ſigna habent eadem, quorum denominatores ſunt facta vel ex binis vel quaternis, vel ſenis etc. numeris primis. His ergo ſeriebus additis ſoli, iſti termini remanebunt, diuiſioneque facta per 2 erit

$$\frac{3\pi}{8}=1+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{25}+\frac{1}{33}\ \text{etc.}$$

quae eſt ipſa ſeries propoſita, atque ex lege ſignorum ſimul ſequitur, eas fractiones habere ſignum $+$, quarum denominatores in hac forma $4n+1$ continentur; reliquas ſignum $-$. Q. E. D.

Corollarium.

Si ab huius theorematis ferie fubtrahatur ifta

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc.}$$

prodibit

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} \text{ etc.}$$

cuius denominatoris funt vel ipfi numeri primi vel facta ex ternis vel quinis vel etc. ii vero qui funt formae $4n-1$ fignum habent $+$ reliqui formae $4n+1$ fignum $-$.

Theorema 18.

Si omnibus numeris primis tribuatur fignum $-$, cuique vero numero compofito id fignum quod ipfi fecundum multiplicationis regulas competit, atque ex omnibus numeris fequens formetur feries

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \text{etc.}$$

erit eius fumma in infinitum continuatae $= 0$.

Demonftratio.

Sit enim $x =$ fummae iftius feriei feu

$$x = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \text{ etc.}$$

erit per operationes in pofterioribus theorematis adhibitas

$$\frac{3}{2}x = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \text{ etc.}$$

atque fimili modo

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}x = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} \text{ etc.}$$

Denique hac operatione infinities repetita erit

$$\frac{3.\ 4.\ 6.\ 8.\ 12.\ 14.\ \text{etc.}}{2.\ 3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ \text{etc.}}\, x = 1.$$

At cum fit per Theor. feptimum

$$\frac{2.\ 3.\ 5.\ 7.\ 11.}{1.\ 2.\ 4.\ 6.\ 10.} \text{ etc.} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.}\ l\infty:$$

facile intelligitur et noftrum ipfius x coefficientem effe infinite

infinite magnum. Quare quo factum aequale esse possit 1 erit $x = 0$, et hanc ob rem habebitur

$$0 = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} \text{ etc.}$$

cuius denominatores, qui sunt vel ipsi primi vel f cta ex ternis, quinis, etc. habent signum − reliqui signum +. Q.E.D.

Corollarium 1.

Modus ergo apparet, quo in progressione harmonica signa in singulis terminis sint distribuenda, vt summa totius seriei fiat $= 0$.

Corollarium 2.

Cum inuenerimus $x = 0$, erit quoque $\frac{1}{2}x = 0$, et hanc ob rem habebimus quoque

$$0 = 1 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{15} \text{ etc.}$$

in qua numeri tantum impares occurrunt; descriptamque ratione signorum tenent legem.

Theorema 19.

Summa seriei reciprocae numerorum primorum

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{1} + \text{ etc.}$$

est infinite magna; infinities tamen minor, quam summa seriei harmonicae $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} +$ *etc. Atque illius summa est huius summae quasi logarithmus.*

Demonstratio.

Ponatur $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} +$ etc. $= A$ atque $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} +$ etc. $= B$ et $\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} +$ etc. $= C$. atque ita porro omnes potestates peculiaribus litteris designando; erit posito e pro numero cuius logarithmus hyperbolicus est 1

$$e^{A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+\text{etc.}} = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}\ \text{etc.}$$

Nam est

$$A+\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{3}C+\tfrac{1}{4}D\ \text{etc.} = l\tfrac{2}{1}+l\tfrac{3}{2}+l\tfrac{5}{4}+l\tfrac{7}{6}+\ \text{etc.}$$

ideoque

$$e^{A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D} = \frac{2.3.5.7.\text{etc.}}{1.2.4.6.\text{etc}} = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\ \text{etc.}$$

per Theor. 7. At non solum B, C, D, etc. habebunt valores finitos, sed etiam $\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+$ etc. valorem habet finitum. Quare quo

$$e^{A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+\text{etc.}}\ \text{sit} = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ \text{etc.} = \infty.$$

oportet vt A sit infinite magnum, cumque ideo eius respectu sequentes termini $\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+$ etc. euanescant, erit

$$e^{A} = e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\text{etc.}} = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\ \text{etc.}$$

Atque consequenter erit

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{13}+\tfrac{1}{17}+\ \text{etc.}$$
$$= l\,(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}+\ \text{etc.})$$

illius ergo seriei summa erit infinities minor quam huius, atque cum huius summa sit $= l\infty$ erit

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{11}+\ \text{etc.} = l.\,l\infty.$$

Q. E. D.

DE

DE VARIATIONE MOTVVM A PERCVSSIONE EXCENTRICA.

AVCTORE
Daniele Bernoulli.

§. 1.

Percuſſionem *excentricam* voco, quando linea ducta per punctum impulſus perpendiculariter ad corporis ſuperficiem non tranſit per eiusdem corporis centrum grauitatis. Excentrica itaque eſſe poteſt percuſſio vel ratione vnius tantum corporis vel ratione ſimul vtriusque; et de tali quidem percuſſione nihil adhuc, quantum ſcio, publici iuris factum fuit ab iis, qui de motu corporum a percuſſione egerunt. Nouum itaque argumentum eſt idemque in mechanica, ſi recte iudico, vtiliſſimum: Prius vero, quam illud aggredior, aliqua de motu corporum vniformi monenda eſſe exiſtimo. Tabula VII.

§. 2. In corpore libero duo eſſe poſſunt motus permanentes atque vniformes, nempe *progreſſiuus* et *rotatorius*: progreſſiuus mihi eſt, quo ſingulae corporis partes velocitate communi ac directione parallela in linea recta progrediuntur: rotatorium autem voco, qui fit circa axem per centrum grauitatis tranſeuntem, ratione cuius velocitates diuerſarum partium ſunt diſtantiis ab axe proportionationales. Vterque motus in vno eodemque corpore ſimul eſſe atque permanere poteſt, ita vt neuter a neutro afficiatur vllamue patiatur mutationem: tunc vero cum ſimul adeſt vterque in vno corpore, motum inde prouenientem vocabo *mixtum*; aliquando etiam conſiderabimus motum circa alium axem, quam qui transit per centrum grauitatis, huncque motum vocabo *gyratorium*, qui adeoque diſtinguendus erit a motu rotatorio: motus autem gyratorius reipſa non differt a motu mixto pro dato temporis puncto, quandoquidem ſemper motus aſſignari poteſt progreſſiuus aliusque rotatorius, qui ſimul in corpore exiſtentes non differunt per minimum temporis ſpatiolum a motu gyratorio, de quo ſermo eſt.

§. 3. Praemiſſis iſtis definitionibus iam dicemus ſub quibusnam hypotheſibus problema noſtrum tractabimus. Res itaque nobiscum ita erit inſpicienda, quaſi motus corporum fiat ſuper plano horizontali et perfecte laeui, ita vt motus tam progreſſiuus quam rotatorius (cuius quidem axem ponemus conſtanter perpendicularem ad planum iſtud) integri conſeruentur, niſi percuſſionis momento: vel ſi mauis quaſi planum abeſſet ipſaque corpora grauitate eſſent deſtituta ſolaque ipſis inertia inhaereret. Tum etiam ſtatuemus percuſſionem fieri in inſtanti, quamuis hypotheſis iſta minime conueniat cum rigore geometrico, prouti id ex ipſo corporum percuſſorum ſono et ex tempore vibrationis, quod cuiuis ſono conuenire non ita pridem a Geometris fuerit determinatum, facile intelligitur. Denique etiam ponemus illam lineam, quae per punctum impulſus perpendiculariter ducitur ad ſuperficiem

ficiem corporis, esse in plano ad axem rotationis perpendiculari et per centrum grauitatis transeunte: ita nempe axis rotationis post percussionem idem manet, qui fuit ante percussionem nec nouus motus rotatorius circa alium axem accedit, quod alias fieret. Ad hosce casus restringemus solutionem nostram, ne nimis fiat intricata, nimisque a collisione corporum hactenus considerata recedat.

§. 4. Licebit saluis praefatis hypothesibus corpora considerare tanquam diuisa in infinita strata ad axem rotationis perpendicularia eaque omnia strata ponere veluti vnita in plano per centrum grauitatis transeunte, ita vt nunc problema nostrum eo sit reductum, vt *si super plano indefinito duo plana cuiuscunque figurae et vtcunque inaequaliter grauia moueantur tam motu progressiuo quam rotatorio, atque sic in se inuicem in quocunque puncto impingant, determinetur motus vterque in vtroque graui post collisionem futurus.* Solutioni huius problematis inseruient sequentes propositiones:

Problema.

§. 5. *Si planum fuerit horizontale et vtcunque graue* Fig. 1. et 2. **ABC** *mobile circa punctum* D, *siue intra planum, vti in figura prima, siue extra planum, vti in secunda figura sumtum; sique alicubi veluti in* B *potentia qualiscunque applicata fuerit, quae planum istud in gyrum agat circa punctum fixum* D, *inue ire massam quae plano proposito substitui possit in* B, *vt accelerationes vtroque modo eadem fiant lege.*

So-

Solutio.

Accipiatur in plano maſſula infinite parua, quam vocabimus m, poſita in puncto quocunque E, dicaturque maſſula ipſi ſubſtituenda in puncto B, μ et concipiatur factam eſſe rotationem minimam, qua B peruenerit in b et E in e; erit (ductis DB, Db, DE, De vna cum minimis Bb et Ee) $Ee = \frac{DE}{DB} \times Bb$, quia ſpatiola B$b$ et Ee eodem tempuſculo deſcripta ſe habent vt DB ad DE: hoc igitur reſpectu poſtulat requiſita actionum aequalitas, vt ſumatur $\mu : m = DE : DB$: Porro vis acceleratrix in E ſe habet ad vim acceleratricem in B vt DB ad DE et hoc altero reſpectu fit rurſus $\mu : m = DE : DB$; vnde vera ratio quaeſitae maſſulae μ ad aſſumtam maſſulam m eſt vt DE^2 ad DB^2: atque ſi omnibus maſſulis planum ABC componentibus aliae ſecundum praefatam legem ſubſtituantur, habebitur tandem maſſa integra in B toti plano ſubſtituenda, vt vtroque modo accelerationes pari fiant lege.

Corollarium.

Si planum propoſitum ABC verticaliter ſuſpendatur ex puncto D atque ſic ſecundum regulas notas centrum oſcillationis quaeratur, dicaturque diſtantia centri oſcillationis a puncto ſuſpenſionis t, diſtantia centri grauitatis ab eodem puncto ſuſpenſionis r, maſſa totius plani M et diſtantia $DB = a$; dico fore maſſam in B ſubſtituendam $= \frac{rt}{aa} M$.

Scholium.

§. 7. Apparet ex ipſa demonſtratione, vim ſiue potentiam in B applicatam, quae planum in gyrum agit idemque

idemque continue certa lege accelerat, poſſe eſſe aut fingi qualemcunque ſine rei mutatione: ſic itaque nominatim motus plani gyratorius etiam ortus ſupponi poteſt a percuſſione in B facta, quandoquidem percuſſio nihil aliud ſit quam potentia veluti infinita et quaſi infinite parum durans. Igitur ſi planum fixum fuerit in D, ſic tamen vt libere circa iſtud punctum gyrari poſſit, ſique percutiatur in B, planum iſtud non aliam poſt percuſſionem habebit velocitatem, quam ſi eiusdem maſſae ſubſtituta fuerit alia in puncto B concentrata et $= \frac{rt}{ai} M$, et in hoc caſu velocitas puncti B poſt percuſſionem (quaecunque fuerit ante percuſſionem) ex legibus ordinariis motuum a percuſſione innoteſcit.

Caeterum poteſt motus iſte gyratorius circa punctum D conſiderari ad temporis punctum, quaſi motus mixtus ex progreſſiuo et ex rotatorio, quos §. 2. definiuimus; ſi enim centrum grauitatis ponamus in M idemque motum velocitate v, licebit ad temporis punctum rem ita intueri, ac ſi motus adeſſet progreſſiuus ſub eadem velocitate v et perpendicularis ad lineam DM aliusque rotatorius, quo punctum D circa centrum grauitatis M velocitate v in directionem contrariam rotaretur: vtroque enim modo ſingula plani puncta, velocitate et directione iisdem primo temporis momento mouentur.

Si porro concipiatur axem, quo punctum D firmatur tolli, tunc vterque praefatus motus, progreſſiuus nempe et rotatorius, conſeruabitur et ita quidem, vt centrum grauitatis M, in directione ad rectam DM perpendiculari, moueri pergat velocitate v, dum quoduis plani punctum

 circa

circa centrum grauitatis M rotetur velocitate distantiae a centro grauitatis proportionali, atque sic describat cycloidem siue contractam siue elongatam: ipsum autem punctum D velocitate v rotatum motu suo mixto describet cycloidem ordinariam, cuspidem in ipso puncto D habentem.

§ 8. Ponamus iam planum ABC esse quiescens et liberum siue nullibi fixum idemque percuti: acquiret planum a percussione motum mixtum ex progressiuo et rotatorio, atque sic punctum aliquod erit D, quod primo a percussione (quam in instanti fieri supra posuimus) momento etiamnum quiescit: poterit autem punctum istud D considerari tanquam punctum, in quo planum fixum esse posuimus §. 5. Sequitur exinde planum quiescens et liberum talem a percussione motum accipere, vt statim punctum D quiescat, punctum autem percussum ea velocitate moueatur, quam acquireret massa $\frac{rt}{aa}M$ ab eadem percussione directe facta: litterarum harum significationes fuerunt definitae §. 5. Magna igitur problematis pars in in eo versatur, vt punctum istud D in plano libero definiatur. In ista vero disquisitione incipiemus a casu simpliciori ponendo scilicet loco plani ABC lineam rectam; nec enim difficile postea erit solutionem a linea ad figuram quamcunque extendere.

Problema.

§ 9. *Sit itaque primo loco linea recta* AC *vtcunque*
Figura 3. *inaequaliter grauis et quiescens eademque perpendiculariter percutiatur in* B, *quaeritur punctum* D, *quod primo a percussione momento quiescit atque sic puncti fixi, circa quod linea* AC *gyretur, vices obeat.*

Solu-

Solutio.

Assumo punctum D ibi fore, vbi inertia lineae A C minima fit: vbicumque enim pluribus mutationibus locus est, natura semper seliget minimam; et quando inertia lineae grauis minima est, tunc graue impellens minimam a percussione patitur velocitatis mutationem.

Sit iam massa totius lineae grauis $= M$: sit eius centrum grauitatis in M, atque centrum oscillationis (quod nimirum adesset si linea ex puncto quaesito D suspenderetur) in N; erit massa in puncto percussionis B massae M substituenda vi §. 5. $= \frac{DM \times DN}{DB^2} \times M$; atque haec massa vi nostrae hypotheseos debet esse minor, quam si quoduis aliud punctum D seligatur. Huic autem hypotesi satisfieri in fine dissertationis demonstrabimus, si punctum N cadat in B, id est, si punctum D tale sumatur, vt centrum oscillationis conueniens puncto suspensionis D cadat in B. Demonstrauit porro *Hugenius*, si punctum B sit centrum oscillationis pro puncto suspensionis D, fore etiam punctum D centrum oscillationis pro puncto suspensionis B, ita vt ambo puncta sint reciproca: sic itaque punctum D est perfecte definitum. Q. E. F.

§. 10. Non difficile est multis aliis modis idem soluere problema, hanc autem solutionem aliis praetuli, quod ipsa problematis indoles haud parum inde illustretur: nec enim inelegans theorema est, quod minor fit percussio, si linea figatur in puncto definito D, quam si in quocunque alio puncto figatur. Caeterum poterit haec propositio etiam experimento illis probari, qui harum

 rerum

rerum rudes sunt: nempe si virga AC aquae supernatet atque percutiatur in puncto B, solum erit punctum D, idque digitis percipi potest, quod nihil a percussione patiatur, atque si globulus virgae sit appositus, velocitatem a percussione eo maiorem accipiet, quo magis distet a puncto D: in ipso autem hoc puncto nullam acquiret.

§. 11. Quia $DN = DB$ (per §. 9.) et quia massa in puncto percussionis B substituenda est generaliter $= \frac{DM \times DN}{DB^2} \times M$ (per §. 6.) erit nunc massa haec $= \frac{DM}{DB} \times M$; adeoque in virga libera punctum B a percussione non aliter mouebitur primo momento, quam massa simplex eadem vi directe percussa, quae fuerit $= \frac{DM}{DB} \times M$, atque punctum D eodem momento plane quiescet: Vnde nunc oppido liquet solutio sequentis problematis.

Problema.

§. 12 *Determinare in virga quiescente* AC *vtcunque inaequaliter graui motum, quem accipiet a corpore elastico datae massae et data velocitate in punctum* B *perpendiculariter incidente; tum etiam motum ipsius corporis impingentis post percussionem.*

Solutio.

*S*it massa virgae AC rursus $= M$: massa corporis impingentis $= m$; velocitas corporis impingentis $= v$; erit massa in B substituenda $= \frac{DM}{DB} \times M$ atque per vulgares regulas motuum a percussione erit velocitas puncti B post percussionem $= \frac{2m \times DB}{m \times DB + M \times BM} \times v$, adeoque velocitalocitas centri grauitatis $M = \frac{2m \times DM}{m \times DB + M \times DM} \times v$. Itaque a percuſſione virga acquirit motum mixtum, progreſſiuum quo centrum grauitatis mouetur in linea recta ad AC perpendiculari, velocitate $\frac{2m \times DM}{m \times DB + M \times DM} \times v$ et rotatorium, quo punctum B rotatur circa centrum grauitatis velocitate $\frac{2m \times MB}{m \times DB + M \times DM} \times v$. Denique velocitas quam corpus impingens habebit poſt percuſſionem eſt $= \frac{m \times DB - M \times DM}{m \times DB + M \times DM} \times v$. Q. E. F.

§. 13. Quia velocitas puncti B per omnes velocitatis gradus transit, a quiete ſcilicet vsque ad eum velocitatis gradum, quem a percuſſione obtinet, dum interea punctum D plane quieſcit, conſequens eſt, ſi virga AC vtcunque gyretur circa punctum D atque ſic gyrata percutiatur, idem punctum D primo a percuſſione momento rurſus in quiete manſurum, et velocitatem puncti B recte definitum iri, ſi maſſae totius virgae, vt antea, ſubſtituatur in B maſſa $\frac{DM}{DB} \times M$. Notetur autem, motum gyratorium circa punctum D proprie eſſe motum mixtum, fingendo velocitates puncti D, ratione motus progreſſiui et rotatorii, eſſe contrarias et aequales.

§. 14. Cum praeterea mutatio velocitatis puncti percuſſi B pendeat vnice a velocitate relatiua vtriusque grauis, apparet etiam, ſi virga AC ante percuſſionem habeat motum progreſſiuum (praeter gyratorium circa D in ſuperiori paragrapho deſcriptum) in directione perpendiculari ad AC, fore vt velocitas puncti D ante et poſt percuſſionem eadem maneat, et a percuſſione mutationem vnice orituram esse in motu gyratorio, qui fit circa punctum D. Nec enim motus, qui corpori percutienti et virgae communis est, quicquam ad velocitatum mutationem conferre potest.

§. 15. Ex istis duobus praecedentibus paragraphis emergit regula determinandi motum in virga AC post percussionem, quiscunque fuerit ipsius motus mixtus ante percussionem, poteritque vel ipsum corpus percutiens esse virga alia pariter motu quocunque mixto lata, et in hac quoque virga motus post percussionem determinari.

Regula Generalis

Determinandi motum a percussione in duabus virgis motu quocunque tum progressiuo tum rotatorio se inuicem in puncto quocunque percutientibus.

Sit linea AC *percussa in puncto* B: *quaeratur per* § 9. *punctum* D, *tum etiam velocitas ipsi insita*: *dico punctum illud velocitatem suam ante et post percussionem seruaturum esse* (*per* § 14); *idemque valebit pro altera linea graui. Deinde pro vtraque virga substituatur in puncto percussionis* B *massa* §. 11. *definita* (*confer* §. 13.) *et poterunt harum massarum velocitates post percussionem determinari per regulas iam diu inuentas. Cognitis autem velocitatibus pro duobus punctis* (*qualia in virga* AC *sunt puncta* D *et* B) *potest exinde motus singulorum punctorum in vtraque virga definiri. Sequens analysis rem magis illustrabit.*

Solutio Problematis analytica.

Virga AC nobis erit linea percussa atque in linea percutiente puncta velocitatesque analogas litteris minoribus

ribus deſignabo, quae in virga percuſſa litteris iisdem ſed maioribus denotantur: porro motus progreſſiuos vtriusque virgae in communem fieri plagam ponemus, adeo vt ſi plagae ſint oppoſitae, ſignum velocitatis in motu progreſſiuo corporis impingentis ſit negatiuum ponendum. Ita quoque ratione motus rotatorii in vtraque virga puncta percuſſa B et b in plagam hanc communem ferri conſiderabimus, quod ratione ſignorum velocitatibus praefigendorum recte erit obſeruandum.

Hisce monitis ſit maſſa lineae $AC = M$, lineae $ac = m$; velocitas centri grauitatis $M = U$ et velocitas centri grauitatis $m = u$: hisce velocitatibus deſignantur motus progreſſiui: ratione autem motuum rotatoriorum ponemus velocitatem puncti $B = V$ et puncti $b = v$, adeo vt velocitates abſolutae horum punctorum ſint $U + V$ et $u + v$. Inde ſequitur velocitas abſoluta puncti $D = U - \frac{DM}{BM} \times V$ et ſimilis velocitas puncti $d = u - \frac{dm}{bm} \times v$: Vtraque autem velocitas a percuſſione immutata manet. En igitur velocitates punctis D et d poſt percuſſionem conuenientes. Eſt porro maſſa in puncto B ſubſtituenda $= \frac{DM}{DB} \times M$ et in puncto b maſſa ſimilis $\frac{dm}{db} \times m$: ſunt itaque per regulas notas quaerendae velocitates corporum elaſticorum a percuſſione, cum maſſae corporum ſunt $\frac{DM}{DB} \times M$ et $\frac{dm}{db} \times m$ atque velocitas ante percuſſionem $U + V$ et $u + v$: Velocitates iſtae quaeſitae tales ſunt:

Velocitas abſoluta puncti B poſt percuſſionem $=$

$$u + v + \frac{dm \times DB \times m - DM \times db \times M}{dm \times DB \times m + DM \times db \times M} \times (u + v - U - V)$$

Velo-

Velocitas similis puncti $b =$

$$u + v - \frac{2\,DM \times db \times M}{dm \times DB \times n + DM \times db \times M} \times (u + v - U - V)$$

Ex definitis velocitatibus punctorum D, d, B et b, sequitur fore post percussionem velocitatem centri grauitatis $M =$

$$\frac{MB}{DB} \times U - \frac{DM}{DB} \times V + \frac{DM}{DB} \times (u + v) + \frac{DM \times dm \times DB \times m - DM^2 \times db \times M}{DB \times dm \times DB \times m + DB \times DM \times db \times M} \times (u + v - U - V)$$

similiterque velocitatem centri grauitatis $m =$

$$\frac{mb}{db} \times u - \frac{dm}{db} \times v + \frac{dm}{db} \times (u + v) - \frac{2\,DM \times dm \times M}{dm \times DB \times m + DM \times db \times M} \times (u + v - U - V)$$

Velocitates istae posteriores ad centra grauitatis pertinentes permanent durante motu in eodem statu: sed velocitates absolutae punctorum B et b considerandae sunt tanquam compositae ex velocitatibus motus progressiui et motus rotatorii, quorum demum vterque seorsim in statu eodem permanet; velocitas autem motus rotatorii hic habetur, si a velocitate absoluta subtrahatur velocitas motus progressiui. Atque sic definita sunt omnia ad motum vtriusque lineae post percussionem pertinentia. Q.E.F.

§. 16. Lubet hic aliquos solutionis istius enumerare casus particulares.

Exemplum I.

Figura 4. Quaeritur qualis sit futurus motus virgae grauis ac solo motu progressiuo indicato per mm progredientis atque puncto b in obstaculum fixum B impingentis.

Hic consideranda est massa lineae AC figurae tertiae tanquam infinita simulque quiescens atque etiam velocitas

locitas rotatoria indicata per v eſt ponenda nulla: Eſt igitur $M = \infty$; $U = o$; $V = o$ et $v = o$: Hisce valoribus ſubſtitutis in praecedente paragrapho, reperietur centrum oſcillationis d (quod nimirum virgae ex puncto b ſuspenſae conuenit) ſua velocitate u in antecedentia motum continuare; punctum b eadem velocitate repelli et centrum grauitatis m habiturum eſſe velocitatem in antecedentia $u - \frac{2dm}{db} \times u$; ac ſi fuerit $dm = mb$, quieſcet poſt impulſum centrum grauitatis motusque, qui ante impulſum ſolus fuit progreſſiuus, poſt impulſum ſolus erit rotatorius: fit autem in linea vniformiter graui $dm = mb$ ſumendo $bc = (\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}}) \times ac$.

Exemplum 2.

Sint ambae virgae AC et ac vniformis grauitatis habeantque maſſas aequales: occurrant ſuis extremitatibus C et c ſibi inuicem velocitatibus aequalibus et contrariis ſine vllo motu rotatorio, quaeritur hic motus a percuſſione.

In hoc exemplo eſt $M = m$; $U = u$; $V = o$; $v = o$; Figura 5. $CM = \frac{1}{2} AC$; $cm = \frac{1}{2} ac$; $DM = \frac{1}{6} AC$; $dm = \frac{1}{6} ac$; puncta autem B et b coincidunt cum punctis C et c. Sic inuenitur velocitas puncti $d = u$ atque velocitas puncti $D = -u$, quod indicat ambo haec puncta priſtina ſua velocitate motum continuare: velocitas autem puncti b inuenitur $= -u$ et puncti $B = u$, ſic vt quoduis priſtina velocitate poſt impulſum retrogrediatur: denique centra grauitatis ab impulſu dimidiam ſeruabunt velocitatem ſeruata ea quam habuerunt motus plaga.

 Si

Si porro iisdem ſeruatis hypotheſibus omnibus ante impulſum ineſſe ponatur corporibus motus rotatorius, qui ratione punctorum B et b eandem habeat directionem impulſus momento cum motu corporis progreſſiuo atque eandem velocitatem, ita vt eo momento puncta A et a quieſcant, erit ſtatuendum, ſeruatis caeteris vt ante, $V = U$ et $v = u$, atque ſic fiet poſt impulſum

$$\text{velocitas puncti } d = \tfrac{2}{3}u$$
$$\text{velocitas puncti } b = -2u$$
$$\text{velocitas puncti } m = 0,$$

Velocitas autem ſimilium punctorum in altera virga ſunt ſub directione contraria eaedem. Videmus exinde fore, vt centra grauitatis poſt impulſum quieſcant atque puncta B et b circa eadem rotentur velocitate, quam immediate ante impulſum motu ſuo mixto habuerunt.

Exemplum 3.

Ponantur virgae ſe inuicem in centris grauitatis percutere; erit $DM = DB$ et $dm = db$, et quaecunque ſit velocitas rotatoria, erit $V = 0$ et $v = 0$, atque propterea fiet poſt percuſſionem

$$\text{velocitas puncti } B = \frac{2mu + MU - mU}{m + M},$$

atque

$$\text{velocitas puncti } b = \frac{2MU + mu - Mu}{m + M},$$

quae formulae indicant centra grauitatis eundem a percuſſione motum accipere, ac ſi corpora non rotarentur, motum autem rotatorium a percuſſione non mutari, quia nempe velo-

velocitas puncti D fit $=U-\frac{DM}{BM}\times V$

et

velocitas puncti $d=u-\frac{dm}{bm}\times v$,

in quibus formulis valores litterarum V et v, vtut infinite parui non funt negligendi.

§. 17. Inftituto recte calculo, quem formulae noftrae inftituendum indicant, reperietur fummam virium viuarum a percuffione non immutari, et centrum grauitatis vtrique corpori commune velocitatem quoque fuam ante et poft percuffionem eandem feruare. Hasce enim leges natura conftantiffime fequitur.

§. 18. Hactenus de percuffione ea, qua virgis in locis B et b perfectam ineffe elafticitatem pofuimus: fint vero nunc omni elafticitate deftitutae virgae in loco percuffionis; eadem erit problematis foluendi methodus: puncta nimirum D et d elafticitatem fuam non mutatam a percuffione feruant; puncta vero B et b, poftquam in iisdem maffae $\frac{DM}{DB}\times M$ et $\frac{dm}{db}\times m$ loco maffarum integrarum fubftitutae fuerunt, velocitatum mutationem a percuffione patiuntur, quam eaedem maffae in corporibus mollibus, iisdem velocitatibus fe inuicem percutientibus, fubeunt fecundum leges cognitas.

§. 19. Haec quae ab initio paragraphi noni huc vsque monita fuerunt, omnes problematis noftri partes latiffime determinant pro duabus virgis rectis et vtcunque inaequaliter grauibus. At vero qui attente folutionem noftram perlegerit, facile viderit folutionem fefe extendere ad plana qualiacunque et vtcumque inaequaliter grauia. Fig. 1. et 2.

uia. Quod si enim planum percutiatur in B in directione BR ad plani peripheriam perpendiculari, atque si per centrum grauitatis M ducatur DR ad BR perpendicularis, poterit id ipsum punctum R haberi pro puncto percusso in linea DR, posito scilicet centro oscillationis totius plani, ex puncto R suspensi, in D: simul autem centra D circuli concentrici infinite propinqui describantur atque massa plani inter quosuis circulos proximos posita referatur ad particulam lineae DR inter eosdem circulos contentam: talis enim linea centrum oscillationis pro eodem puncto suspensionis R similiter habebit in D, adeo vt tam in linea quam in plano motus gyratorius circa punctum D sit idem censendus, dum motus quoque progressiuus in vtroque manifeste est idem. Patet igitur quid faciendum sit ad problematis nostri solutionem pro duobus planis qualibuscumque; et ex paragrapho tertio apparet insuper apparet, quomodo solutio a planis possit ad quaeuis corpora extendi, modo res tota ita sit comparata, vt axis motus rotatorii sibi constanter parallelus esse debeat atque libere in directum moueri possit.

Neque id morabitur Lectorem, quod vbique posui directionem impulsus perpendicularem; si enim obliqua sit, poterit illa resolui in perpendicularem et parallelam; de illa plenissime egimus, haec autem nullam in motu mutationem producit.

§. 20. Denique etiam hoc notandum est, quod etsi §. 14. et sequentibus directionem motus progressiui mox ante percussionem posuerimus ad lineam AC perpendicularem, possit facile pro directione qualicunque res expediri hunc in modum.

Fac

Fac virgam AC ante percuſſionem duplicem habere motum, alterum rotatorium circa centrum grauitatis M, alterum progreſſiuum eundemque ad lineam AC obliquum; reſolues hunc poſteriorem in perpendicularem ad lineam alterumque eidem parallelum. Motus progreſſiuus perpendicularis cum rotatorio coniunctus eam a percuſſione accipiet mutationem quam iam expoſuimus: parallelus autem idem manebit qui fuit ante percuſſionem; patet inde omnis qui a percuſſione virgae AC inerit motus, idemque etiam patebit in virga altera percutiente, ſi et haec motum habere progreſſiuum obliquum ſtatuatur. Atque ſic problema noſtrum ex omni parte abſolutum puto.

Demonſtratio Propoſitionis §. 9. aſſumtae.

Quod in virga ex puncto D *ſuſpenſa et centrum oſcillationis habente in* N, *maſſa expreſſa per* $\frac{DM \times DN}{DB^2} \times M$ *minor ſit quam centrum oſcillationis* N *cadit in punctum* B, *quam in quocunque alio caſu.* Figura 3.

Sumatur in figura tertia punctum *d* infinite propinquum puncto D ſitque centrum oſcillationis virgae ex puncto *d* ſuſpenſae in *n*, erit ex natura *maximorum et minimorum*

$$\frac{DM \times DN}{DB^2} \times M = \frac{dM \times dn}{dB^2} \times M$$

ſiue

$$(DM \times DB + DN \times DB - 2DM \times DN)\, dD = DM \times DB \times nN.$$

Demonſtraui autem poſt *Hugenium* in *Comment. Tom. II.* " *pag.* 213. " ſi magnitudo eadem nunc breuius nunc "longius ſuspenſa agitetur, fore vt diſtantiae axium oſcil- "lationis a centro grauitatis ſint reciproce proportiona- "les diſtantiis centrorum oſcillationis ab eodem grauita- "tis centro, " vi huius propoſitionis eſt

$$dM : DM = NM : nM,$$

vnde

$$dD . DM = nN : nM;$$

hinc

$$nN = \frac{nM \times dD}{DM},$$

hocque valore ſubſtituto in ſuperiori aequatione emergit

$$DM \times DB + DN \times DB - 2DM \times DN = nM \times DB$$

vel

$$DM \times DB + (DN - nM) DB = 2DM \times DN$$

vel

$$2DM \times DB = 2DM \times DN,$$

ſeu denique

$$DN = DB. \quad Q. E. D.$$

SOLV-

SOLVTIO PROBLEMATIS GEOMETRICI CIRCA LVNVLAS A CIRCVLIS FORMATAS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

IN exercitationibus Mathematicis Celeb. *Dan. Bernoulli* Venetiis editis mentio ſit problematis cuiusdam, quod Vir Celeb. *Goldbachus* quondam propoſuiſſet, quo poſtulabatur vt in duabus lunulis oppoſitis a duobus circulis ſe mutuo interſecantibus formatis duae rectae aequales ita applicentur, vt a lunulis partes aequales abſcindant. Subiuncta vero eſt ibi etiam ſolutio huius problematis facilis quidem, ſed tantum particularis, cum eidem innumerabiles aliae ſolutiones ſatisfacere poſſint. Praeterea autem ſolutio, quae ibi eſt data, non ſolum Geometrico modo ſine analyſi exhibetur, ſed etiam analyſis ad id ſoluendum minus idonea cenſetur. Quod analyſios incommodum, etiamſi in pluribus problematis Geometricis allegari ſoleat, tamen mihi quidem non tam analyſi, quam analyſtae imputandum videtur. In hoc certe problemate clare oſtendam, analyſin ad id ſoluendum non ſolum non eſſe ineptam, ſed etiam methodo Geometri- Tabb. VIII. et IX.

cae

cae longe esse praeferendam, cum eius ope generalem huius problematis solutionem sim traditurus, quod geometrica via vix praestari poterit.

Figura 1. §. 2. Sint igitur duo circuli $aObmS$ et AOBMS centris c et C descripti, qui se mutuo in O et S secent, lunulasque oppositas $ObmS$AO et OBMSaO formantes, in quibus secundum problema ita applicari debent rectae aequales Ab, aB, vt a lunulis areas aequales OAb et OaB abscindant. Ad hoc ergo problema soluendum requiruntur primo ipsi circuli, deinde situs eorum mutuus ratione intersectionis, et tertio modus applicandi rectas aequales Ab et aB, vt areae OAb et OaB fiant inter se aequales. Ponamus autem figuram nostram conditionibus problematis satisfacere; eritque tum $Ab = aB$ atque trilineum $OAb =$ trilineo OaB; plures enim aequationes problema nondum suppeditat.

§. 3. Cum areae OAb et OaB, quae aequales esse debent praeter rectas Ab et aB diuersorum circulorum arcubus includantur, difficulter eae ad expressiones algebraicas reuocarentur. Quare ad hoc incommodum euitandum ducta recta Aa adiiciatur ad vtramque aream idem trilineum AOa, quo facto esse oportebit trilineum $AbOa =$ trilineo aBOA, qua aequatione vice prioris vtemur, cum vtrumque trilineum praeter rectas vnico arcu circulari claudatur. Tale autem trilineum si analytice exprimatur, expressio duabus constabit partibus, quarum altera erit algebraica, altera vero arcum circularem inuoluet, quae cum esse debeant inter se aequales, necesse est vt seorsim partes algebraicae inter se aequentur, atque etiam partes a circuli quadratura pendentes. Requiritur enim algebraica problematis ſolutio, quae non obtineretur, ſi quantitas algebraica arcui circulari aequaretur.

§. 4. Aequatur autem trilineam $bOaA$ ſectori cb Oa demto rectilineo ſpatio $bcaA$; atque trilineum $BOAa$ aequale eſt ſectori $CBOA$ demto ſpatio rectilineo $BCAa$. Quamobrem cum ſit ſector $cbOa -$ ſpatio bc $aA =$ ſectori $CBOA -$ ſpatio $BCAa$, neceſſe eſt vt ſit ſector $cbOa =$ ſectori $CBOA$; et ſpatium $bcaA =$ ſpatio $BCAa$. Quo igitur areae OAb et OaB fiant aequales, atque problema Geometrice conſtrui queat, duplex aequatio erit reſoluenda, quarum prima eſt vt ſit ſector $bcOa =$ ſectori $CBOA$ atque ſpatium $bcaA =$ ſpatio $BCAa$, cum quibus aequationibus ſi tertia coniungatur, qua eſſe debet $Ab = aB$, problemati erit ſatis factum.

§. 5. Quo igitur iſtae conditiones obtineantur, ponatur radius circuli $ca = cb = c$; atque radius $CA = CB = C$. Deinde ductis chordis ab et AB, in easque ex centris demiſſis perpendiculis cd et CD ſit $ad = ab = b$ atque $AD = AB = B$. His poſitis erit ſinus dimidii anguli $bca = \frac{b}{c}$, atque ſinus dimidii anguli $BCA = \frac{B}{C}$ poſito toto $= 1$. Hinc porro erit arcus $bOa = 2c.\,A$ ſin. $\frac{b}{c}$, vbi A ſin. $\frac{b}{c}$ denotat arcum cuius ſinus eſt $\frac{b}{c}$ in circulo radii 1; parique modo erit arcus $BOA = 2C.\,A$ ſin. $\frac{B}{C}$; atque ex his orietur ſector $bOac = c^2.\,A$ ſin. $\frac{b}{c}$, et ſector $BOAC = C^2.\,A$ ſin. $\frac{B}{C}$. Quamobrem ob aequalitatem ſectorum horum habebimus ſequentem aequationem $c^2.\,A$ ſin. $\frac{b}{c} = C^2.\,A$ ſin. $\frac{B}{C}$

§. 6. Cum ergo debeat esse A sin. $\frac{b}{c}$: A sin. $\frac{B}{C} = C^2 : c^2$, atque diuersi arcus circulares algebraice assignari nequeant, nisi rationem teneant rationalem, ante omnia requiritur vt ratio $C^2 : c^2$ sit rationalis. Sit igitur $C^2 : c^2 = N : n$ denotantibus N et n numeros integros, eritque nA sin. $\frac{b}{c} =$ N A sin. $\frac{B}{C}$; atque porro debebit esse sinus arcus n. A sin. $\frac{b}{c} =$ sin. arcus N. A sin. $\frac{B}{C}$. Ex inuentione autem sinuum arcuum multiplorum constat esse sinum

$$\text{arcus } n\text{A sin. } \frac{b}{c} = \frac{nb(c^2-b^2)^{\frac{n-1}{2}}}{1. \quad c^n} - \frac{n(n-1)(n-2)b^3(c^2-b^2)^{\frac{n-3}{2}}}{1.\ 2.\ 3\ c^n}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)b^5(c^2-b^2)^{\frac{n-5}{2}}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5 \quad c^n} - \text{etc.}$$

similique modo sinus arcus N.A sin. $\frac{B}{C}$ exprimetur. Quamobrem sequens habebitur aequatio algebraica

$$\frac{nb(c^2-b^2)^{\frac{n-1}{2}}}{1. \quad c^n} - \frac{n(n-1)(n-2)b^3(c^2-b^2)^{\frac{n-3}{2}}}{1.\ 2.\ 3\ c^n} +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)b^5(c^2-b^2)^{\frac{n-5}{2}}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ c^n} - \text{etc.} =$$

$$\frac{NB(C^2-B^2)^{\frac{N-1}{2}}}{1. \quad C^N} - \frac{N(N-1)(N-2)B^3(C^2-B^2)^{\frac{N-3}{2}}}{1.\ 2.\ 3.\ C^N} +$$

$$\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)B^5(C^2-B^2)^{\frac{N-5}{2}}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ C^N} - \text{etc.}$$

quae aequatio ob N et n numeros integros semper finito constabit terminorum numero, ex eaque licebit pro data

data ratione inter C^2 et c^2 relationem quam B et b inter se tenere debent, definire.

§. 7. Determinabo autem in subsidium sequentium operationum relationem inter B et b pro casibus quibusdam simplicioribus; sitque primo $C^2 : c^2 = 2 : 1$ seu $C = c\sqrt{2}$, vnde ob $N = 2$ et $n = 1$ sequens prodibit aequatio $\frac{b}{c} = \frac{2B\sqrt{(C^2 - B^2)}}{C^3}$ seu $bc = B\sqrt{(C^2 - B^2)}$. Secundo sit $C = c\sqrt{3}$, seu $N = 3$ et $n = 1$, eritque $\frac{b}{c} = \frac{3B(C^2 - B^2)}{C^3} - \frac{B^3}{C^3}$ siue $3bCc = 3BC^2 - 4B^3$. Tertio sit $C = 2c$ seu $N = 4$ et $n = 1$, fiet $\frac{b}{c} = \frac{4B(C^2 - B^2)^{\frac{3}{2}}}{C^4} - \frac{4B^3\sqrt{(C^2 - B^2)}}{C^4}$ seu $4bcC^2 = (4BC^2 - 8B^3)\sqrt{(C^2 - B^2)}$. Quarto sit $C^2 : c^2 = 3 : 2$ seu $N = 3$ et $n = 2$, erit $\frac{2b\sqrt{(c^2 - b^2)}}{c^2} = \frac{3BC^2 - 4B^3}{C^3}$. Quinto si fuerit $C^2 : c^2 = 4 : 3$ erit $\frac{3bc^2 - 4b^3}{c^3} = \frac{(4BC^2 - 8B^3)\sqrt{(C^2 - B^2)}}{C^4}$. Hique casus sufficiant ad exempla, quae afferemus, adornanda.

§. 8. Cum igitur primae conditioni, qua sectores inter se debent esse aequales, sit satisfactum determinata relatione chordarum ex data circulorum relatione, ad reliquas conditiones progrediamur, quarum secunda requirit vt quadrilaterum $bAac$ aequale sit quadrilatero $BaAC$; vnde sequens emergit aequatio $\Delta bac - \Delta baA = \Delta BAC - \Delta BAa$, quae quo analytice exprimatur demittantur ex punctis A et a in chordas ab et AB perpendicula Ae et aE, sitque $Ae = p$ et $aE = P$, ex quibus illa aequatio per symbola ita exprimitur $b\sqrt{(cc - bb)} - bp = B\sqrt{(C^2 - B^2)} - BP$;

$-BP$, ex qua relatio perpendiculorum Ae et aE determinatur, ita vt dato altero alterum quoque innotescat.

§. 9. Tertia conditio requirit, vt sit recta Ab aequalis rectae aB, ad quod obtinendum pono $de = q$, atque $DE = Q$; vt sit $be = b + q$; $ae = b - q$ atque $BE = B + Q$ et $AE = B - Q$. Hinc orietur $Ab^2 = p^2 + b^2 + 2bq + q^2$; et $aB^2 = P^2 + B^2 + 2BQ + Q^2$, quare sequens habebitur aequatio $p^2 + b^2 + 2bq + q^2 = P^2 + B^2 + 2BQ + Q^2$, ex qua relatio inter Q et q determinatur. Hae aequationes autem nondum ad coniunctionem circulorum respiciunt, sed eaedem prodiissent, si vterque circulus seorsim fuisset consideratus.

§. 10. Coniungendi autem circulos modus hoc determinatur, quod triangula baA et BAa commune habent latus Aa; erit igitur ex vtroque $Aa^2 = p^2 + b^2 - 2bq + qq = P^2 + B^2 - 2BQ + Q^2$. Haec autem aequatio, si ab illa quae ante est inuenta subtrahatur, dat $4bq = 4BQ$, atque si addatur prodit $2p^2 + 2b^2 + 2q^2 = 2P^2 + 2B^2 + 2Q^2$. Loco ergo duarum inuentarum postremarum aequationum substitui possunt hae simpliciores $bq = BQ$ atque $p^2 + b^2 + q^2 = P^2 + B^2 + Q^2$.

§. 11. Vocatis ergo vt fecimus $ca = cb = c$; $CA = CB = C$; $da = db = b$; $DA = DB = B$; $Ae = p$; $de = q$; $aE = P$ et $DE = Q$; problema per sequentes quatuor aequationes soluetur

I. $C^2 A \text{ fin. } \frac{B}{C} = c^2 A \text{ fin. } \frac{b}{c}$
II. $B\sqrt{(C^2 - B^2)} - BP = b\sqrt{(c^2 - b^2)} - bp$
III. $BQ = bq$
IV. $P^2 + B^2 + Q^2 = p^2 + b^2 + q^2$.

Si autem ex tertia et quarta aequatione determinentur Q et q, earum loco fequentes poterunt fubftitui $Q = b\sqrt{\left(1 + \frac{P^2 - p^2}{B^2 - b^2}\right)}$ et $q = B\sqrt{\left(1 + \frac{P^2 - p^2}{B^2 - b^2}\right)}$.

§. 12 Ad problema ergo foluendum ante omnia opus eft, vt in duobus circulis inaequalibus aequales fectores formentur, quod femper fieri poteft, fi areae circulorum inter fe rationem habuerint vt numerus ad numerum. Hoc autem ope diuifionis angulorum facile praeftibitur; Sumto enim fectore BCA pro arbitrio, fector fector bca obtinebitur fumendo angulo bca tanto, vt $\angle bca : \angle BCA = AC^2 : ac^2$. Cum enim fit $A \text{ fin. } \frac{b}{c} : A \text{ fin. } \frac{B}{C} = C^2 : c^2 = AC^2 : ac^2$; atque $A \text{ fin. } \frac{b}{c}$ exprimat dimidium angulum acb, pariterque $A \text{ fin. } \frac{B}{C}$ dimidium angulum ACB, erit $\angle bca : \angle BCA = AC^2 : ac^2$.

§. 13. Conftitutis ergo in duobus circulis fectoribus aequalibus, fumatur fuper chorda alterius circuli arbitraria altitudo, fcilicet fuper chorda ab altitudo $Ae = p$; ex qua quidem nondum conftat punctum e ex quo punctum A innotefceret. At cum fit $de = q = B\sqrt{\left(1 + \frac{P^2 - p^2}{B^2 - b^2}\right)}$; atque $B\sqrt{(C^2 - B^2)} - BP = b\sqrt{(c^2 - b^2)} - bp$; erit $P = \sqrt{(C^2 - B^2)} - \frac{b\sqrt{(c^2 - b^2)}}{B} + \frac{bp}{B}$ atque $P^2 - p^2 = C^2 - B^2 + \frac{b^2 c^2}{B^2} - \frac{b^4}{B^2} + \frac{b^2 p^2}{B^2} + \frac{2bp(c^2 - B^2)}{B} - \frac{2b^2 p\sqrt{(c^2 - b^2)}}{B^2}$

 —

$-\frac{2b\sqrt{(C^2-B^2)(c^2-b^2)}}{B}-p^2$. Ex quibus elicitur $\frac{P^2-p^2}{B^2-b^2}=$

$$\frac{B^2C^2+b^2c^2-b^4-B^4+2Bbp\sqrt{(C^2-B^2)}-2b^2p\sqrt{(c^2-b^2)}-2Bb\sqrt{(C^2-B^2)(c^2-b^2)}}{B^2(B^2-b^2)}$$

$$-\frac{p^2}{b^2};\ \text{atque}\ q^2=\frac{B^2C^2+b^2c^2-B^2b^2-b^4}{B^2-b^2}-p^2+$$
$$\frac{2Bbp\sqrt{(C^2-B^2)}-2b^2p\sqrt{(c^2-b^2)}-2Bb\sqrt{(C^2-B^2)(c^2-b^2)}}{B^2-b^2}.$$

Ex qua aequatione ſumto pro lubitu puncto e cognoſcetur punctum A, quo dato alter circulus ABMS facile deſcribetur. Namque ſuper Aa conſtituatur triangulum ABa ſumendo AB$=$2B et aB$=$Ab, tumque ſuper AB fiat triangulum iſosceles ACB ſumendo AC$=$BC$=$C et centro C radio AC$=$BC$=$C deſcribatur circulus ABMS, quo facto abſcindent rectae Ab et aB, quae per conſtructionem ſunt aequales, a lunulis ObmSA et OBMSa areas aequales OAb et OaB, vt problema poſtulat.

§. 24. Cum igitur ſumto pro lubitu interuallo $de=q$, ipſi reſpondeat applicata eA$=p$; innumerabilia dabuntur puncta A, ex quibus poſitio alterius circuli determinabitur, quo ipſo quaeſtioni infinitis modis ſatisfiet. Omnia autem haec puncta A in curua quadam continua erunt poſita, cuius natura ſequenti aequatione eſt expoſita

$$p^2+q^2=\frac{2Bbp\sqrt{(C^2-B^2)}-2b^2p\sqrt{(c^2-b^2)}}{B^2-b^2}+$$
$$\frac{B^2C^2+b^2c^2-B^2b^2-b^4-2Bb\sqrt{(C^2-B^2)(c^2-b^2)}}{B^2-b^2}$$

Ex qua aequatione intelligitur locum omnium punctorum A eſſe circulum cuius centrum in recta cd, ſi opus eſt producta ſit ſitum. Perſpicitur ergo duos circulos, in in quibus duo ſectores aequales habentur, innumerabilibus modis ita coniungi poſſe, vt problemati ſatisfiat.

§. 15. Haec eſt igitur generalis problematis ſolutio, ex qua poſtquam circuitus ille, in cuius peripheria ſita ſunt omnia puncta A fuerit deſcriptus, facilis quoque problematis conſtructio conſequitur. Quo autem omnes modi hoc problema ſoluendi clarius ob oculos ponantur, ex ſolutione vniuerſali particulares adornabimus, quas deducemus ex quantitate anguli, quo rectae bA et Ba in ſe mutuo inclinant. Obſeruaui enim hunc angulum a ſolis circulis et ſectoribus pendere, neque a variatione interſectionis mutari.

§. 16. Producantur itaque rectae bA, Ba, donec ſibi occurrant in Z; et analytice exprimatur quantitas anguli Z, quod fiet dum tangens ipſius quaeritur. Haec autem tangens ſequenti modo obtinebitur. Ex triangulo baA habetur primo tang. $bAe = \frac{b+q}{p}$; et tang. $aAe = \frac{b-q}{p}$ ex quibus reperitur tang. $bAa = \frac{2bp}{p^2+q^2-b^2}$; quare tangens anguli ZAa erit $= \frac{2bp}{b^2-p^2-q^2}$. Simili modo erit tangens anguli $ZaA = \frac{2BP}{B^2-P^2-Q^2}$. Tangens gitur ſummae horum angulorum reperietur $=$

$$\frac{2bp(B^2-P^2-Q^2)+2BP(b^2-p^2-q^2)}{(B^2-P^2-Q^2)(b^2-p^2-q^2)-4BbPp};$$

cuius negatiuo tangens anguli Z aequatur.

§. 17. Cum vero ſit $Q = b\sqrt{(1+\frac{P^2-p^2}{B^2-b^2})}$ erit $B^2-P^2-Q^2 = B^2-b^2-\frac{B^2P^2+b^2p^2}{B^2-b^2}$; atque ob $q = B\sqrt{(1+\frac{P^2-p^2}{B^2-b^2})}$, erit $b^2-p^2-q^2 = b^2-B^2-\frac{B^2P^2+b^2p^2}{B^2-b^2}$. Ex quibus

quibus reperitur $2bp(B^2-P^2-Q^2)+2BP(b^2-p^2-q^2) = 2(B^2-b)(bp-BP)-\frac{2(B^2P^2-b^2p^2)(bp+BP)}{B^2-b^2} = -\frac{2(BP-bp)[(B^2-b^2)^2+(BP+bp)^2]}{B^2-b^2}$. Deinde erit $(B^2-P^2-Q^2)(b^2-p^2-q^2-4BbPp=\frac{(B^2P^2-b^2p^2)^2}{(B^2-b^2)^2}-(B^2-b^2)^2-4BbPp=\frac{(B^2P^2-b^2p^2)^2-(B^2-b^2)^4-4BbPp(B^2-b^2)^2}{(B^2-b^2)^2} = \frac{[(BP+bp)^2+(B^2-b^2)^2][(BP-bp)^2-(B^2-b^2)^2]}{(B^2-b^2)^2}$.

§. 18. His ergo valoribus in expreſſione inuenta ſubſtitutis prodibit tangens anguli $AZa=$
$\frac{2(B^2-b^2)(BP-bp)[(BP+bp)^2+(B^2-b^2)^2]}{[(BP+bp)^2+(B^2-b^2)^2][(BP-bp)^2-(B^2-b^2)^2]} = \frac{2(B^2-b^2)(BP-bp)}{(BP-bp)^2-(B^2-b^2)^2}$. Ex qua expreſſione intelligitur tangentem ſemiſſis anguli ad Z fore $=\frac{B^2-b^2}{BP-bp}$. Cum vero ſit $B\sqrt{(C^2-B^2)}-BP = b\sqrt{(c^2-b^2)}-bp$, erit tang. ang. $\frac{1}{2}Z=\frac{B^2-b^2}{B\sqrt{(C^2-B^2)}-b\sqrt{(c^2-b^2)}}$ ex qua expreſſione intelligitur quantitatem anguli Z per ſolas quantitates C, c, B, b determinari, neque a litteris variabilibus P, p, Q, et q pendere.

§. 19. Ponatur angulus $Z=0$, quo rectae Ab et aB partes aequales a lunulis abſcindentes fiant inter ſe parallelae, qui eſt caſus, quem *Celeb. Daniel Bernoulli* ſolum dedit ſolutum; Hoc ergo poſito fiet tang. $\frac{1}{2}Z = 0$, ideoque erit $B^2-b^2=0$ et $B=b$. Cum autem ſit $B=b$ ex aequatione $BQ=bq$ ſequitur fore $Q=q$; atque aequatio $P^2+B^2+Q^2=p^2+b^2+q^2$ ſuppeditabit $P^2=p^2$; ex qua ſequitur fore vel $P=p$ vel $P=-p$. Aequalitas autem $P=p$ ad inſtitutum noſtrum eſt inutilis; ex ea enim ſequeretur fore $C=c$, adeoque circuli forent aequales, qui caſus in problema non cadit. Quod autem futu-

futurum esset $C=c$ declarat haec aequatio $B\sqrt{(C^2-B^2)}-BP=b\sqrt{(c^2-p^2)}-bp$.

§. 20. Sit igitur $P=-p$, quo posito aequatio $B\sqrt{(C^2-B^2)}-BP=b\sqrt{(c^2-b^2)}-bp$ transibit in hanc $2p=\sqrt{(c^2-b^2)}-\sqrt{(C^2-B^2)}$, vnde elicitur $p=\frac{\sqrt{(c^2-b^2)}-\sqrt{(C^2-B^2)}}{2}$ et $P=\frac{\sqrt{(C^2-B^2)}-\sqrt{(c^2-b^2)}}{2}$. Erit ergo p quantitas constans neque a q pendebit, et hanc ob rem locus puncti A erit linea recta parallela chordae ba et ab ea distans interuallo $\frac{\sqrt{(c^2-b^2)}-\sqrt{(C^2-B^2)}}{2}$, quae expressio si fuerit affirmatiua hoc interuallum a chorda ab versus dextram est capiendum, sin autem fuerit negatiua versus sinistram; si quidem figura ita delineatur, vti in tabula repraesentatur.

§. 21. Cum praeterea sit $B=b$, non solum circulorum inter se debebunt esse aequales, sed etiam chordas AB, ab aequales esse oportet. Quare si ambo circuli super hac chorda communi describantur, vt in fig. 2. Figura 2. vbi $\alpha\beta$ est chorda communis, et c et C circulorum centra, erit lunula $M\alpha m\beta$ quadrabilis. Ob aequales enim sectores $c\alpha m\beta$ et $C\alpha M\beta$ erit lunula $M\alpha m\beta =$ spatio $C\alpha c\beta$. Quae proprietas cum sit communis omnium lunularum quadrabilium, perspicuum est ope cuiusuis lunulae quadrabilis problema propositum solui posse, ita vt lineae partes aequales abscindentes inter se fiant parallelae; atque etiam intelligere licet alio modo problemati in hoc sensu satisfieri non posse.

Fig. 2. et 3. §. 22. Data ergo quacunque lunula quadrabili $M\alpha m\beta$, problema ſequenti modo reſoluetur. Deſcribatur circulus $bmnOaS$ aequalis circulo $\alpha m\beta c$, in eoque applicetur chorda $ab = a\beta$, in eamque ex centro c demittatur perpendiculum ed producendum ſi opus. Iam cum linea recta, in qua omnia puncta A ſunt ſita, ſit parallela chordae ab ab eaque interuallo $p = \frac{\sqrt{(c^2-b^2)} - \sqrt{(C^2-B^2)}}{2}$ distet, erit $p = \frac{c\delta - C\delta}{2} = \frac{-Cc}{2}$. Ex altera igitur parte centri in recta $cnad$ capiatur $df = \frac{1}{2}Cc$, et per f ducatur recta ipſi ba parallela infinita $mf\alpha B$, quae erit locus omnium punctorum A.

§. 23. Sumto ergo in hac recta vbiuis puncto A ſaltem intra circulum aOb, quo recta Ab tota in circulo hoc ſit ſita. Deinde ex a ipſi Ab ducatur parallela et aequalis aB, quae rectae mA occurat in B ita vt ſit $AB = ab$, et figura $AbaB$ parallelogrammum. Alter igitur circulus ita deſcribi debet, vt per puncta A et B tranſeat, id quod facile perficitur cum radius eius $C\alpha = C\beta$ ſit datus. Ex vna ergo lunula quadrabili data infinitis modis duo circuli lunulam formantes ita componi poſſunt, vt rectae aequales areas abſcindentes ſint inter ſe parallelae. Atque in hac conſtructione continetur ſolutio problematis *Cel. Dan. Bernoulli* loco cit. data.

§. 24. Ponamus nunc angulum ad Z eſſe rectum, adeoque $\frac{1}{2}$ Z ſemirectum, cuius tangens ſinui toti 1 aequatur. Erit igitur $B^2 - b^2 = B\sqrt{(C^2-B^2)} - b\sqrt{(c^2-b^2)}$, atque $B^2 - b^2 = BP - bp$, ex qua fit $P = \frac{bp}{B} + \frac{B^2-b^2}{2}$ atque $\frac{P^2-p^2}{B^2-b^2} = \frac{-p^2}{B^2} + \frac{2bp}{B^2} + \frac{B^2-b^2}{B^2}$, vnde erit $q^2 = 2B^2 - (b-p)^2$.

$(b-p)^2$ seu $q^2+(b-p)^2=2B^2$. Locus ergo punctorum A erit circulus radio $=B\sqrt{2}=\frac{AB}{\sqrt{2}}$ descriptus, cuius centrum in recta cd si opus est producta erit situm, atque a d versus dextram distabit interuallo $b=bd=\frac{1}{2}ab$.

§. 25. Ad hunc vero casum requiritur, vt sectores circulorum non solum sint aequales, sed insuper etiam vt sit $B^2-b^2=B\sqrt{(C^2-B^2)}-b\sqrt{(c^2-b^2)}$. Quae aequalitas quo cum sectorum aequalitate coniungatur, conueniet ad exempla descendere, et primo quidem sit $C=c\sqrt{2}$, erit $bc=B\sqrt{(C^2-B^2)}=B\sqrt{(2c^2-B^2)}$ et $c^4-bbcc=(c^2-B^2)^2$; vnde fiet $c\sqrt{(c^2-b^2)}=c^2-B^2$ et $B^2=c^2-c\sqrt{(c^2-b^2)}$. Quocirca habebitur $c^2-b^2-c\sqrt{(c^2-b^2)}=bc-b\sqrt{(c^2-b^2)}$ seu $b^2+bc-cc=(b-c)\sqrt{(c^2-b^2)}$ quae quadrata dat $2b^4=bbcc$ seu $b=\frac{\mp c}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{(c^2-b^2)}=\frac{c}{\sqrt{2}}$. Erit ergo angulus bca rectus et proinde angulus ACB semirectus; quia hic circulus duplo maior ponitur quam ille.

§. 26. Prodiit hic valor ipsius b negatiuus, quo $\sqrt{(c^2-b^2)}$ affirmatiuum obtineat valorem, atque sector abc minor fiat quadrante. Eadem vero prodiisset expressio, si angulus ad Z tribus rectis aequalis positus fuisset; tum enim orta esset ista aequatio $B^2-b^2=b\sqrt{(c^2-b^2)}-B\sqrt{(C^2-B^2)}$, quae reducta idem dat quod ante inuenimus, praeterquam quod hinc prodit $b=\frac{+c}{\sqrt{2}}$. Vtraque vero determinatio eodem redit, nam cum hic sit b negatiuum, alia differentia non resultat, nisi quod centrum circuli puncta A continentis ex altera parte ipsius d sit capiendum, id quod etiam altera solutio postulat.

 §. 27.

Figura 4. § 27. Deſcribantur ergo duo circuli, quorum alter altero ſit duplo maior, atque in minore abſcindatur quadrans abc; in maiore vero octans ACB, qui duo ergo ſectores inter ſe erunt aequales. Ductis nunc in chordis ab, AB ex centris c et C perpendiculis cd, CD; erit $ac = c$; $AC = C = c\sqrt{2}$, $ad = bd = b = \frac{c}{\surd}$, et $cd = \frac{c}{\sqrt{2}}$; $AD = B = c\sqrt{(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})}$ et $CD = c\sqrt{(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})}$. Si nunc CD producatur in H, vt ſit $DH = AD$, erit $AH = B\sqrt{2}$, ideoque radius circuli, qui eſt locus omnium punctorum A; prout ante explicuimus. Ex his vero ſequenti modo problema propoſitum ita reſoluetur, vt rectae abſcindentes ſint inter ſe normales.

Tabula IX. Figura 1. et Tabula VIII. Figura 4. §. 28. Deſcribatur nunc minor circulus abc, et in cd producta ſumatur $dg = b = bd$, et centro g radio $gh = AH = B\sqrt{2} = c\sqrt{(2 - \sqrt{2})}$ deſcribatur circulus $ihkA$, qui erit locus omnium punctorum A. Secabit is autem cd in h et chordam ab in i et k, vt ſit $dh = c\sqrt{(2 - \sqrt{2})} - \frac{c}{\sqrt{2}}$, et $di = dk = c\sqrt{(\frac{3}{2} - \sqrt{2})} = c - \frac{c}{\sqrt{2}} = bc - bd$. Sumto nunc in hac circuli peripheria puncto quocunque A, ductaque Ah, ad eam ex a normalis et ipſi Ah aequalis ducatur aB. Deinde radio $CA = CB = c\sqrt{2}$ deſcribatur circulus BOAC, quo facto erit areae OAh = areae OaB.

§. 29.

§. 29. Si punctum A capiatur in ipso puncto b, circuli se ita intersecabunt vt fig. 2. repraesentat, eritque $OAb = OaB$. Sin autem punctum A capiatur in i vt in fig. 3. repraesentatur, erit aB ad ab normalis et maioris circuli centrum C in Ba producta erit situm, eritque $aC = Aa = c$ et $BC = ab$. Si denique punctum A in k capiatur, prodibit fig. 4. in qua iterum aB ad ab est normalis, et centrum maioris circuli C in ba producta erit situm. Habebitur autem $aC = aB = c$; et $AC = BC = ab$; vnde duorum postremorum casuum constructio facillime consequitur. Tabula IX. Figura 2. Figura 3. Figura 4.

DE VARIIS MODIS CIRCVLI QVADRATVRAM NVMERIS PROXIME EXPRIMENDI.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

A*rchimedes* et qui ipſum ſunt ſecuti rationem diametri ad peripheriam in numeris proximam inueſtigauerunt ex polygonis regularibus circulo tam inſcriptis quam circumſcriptis. Cum enim perimeter polygoni inſcripti minor, circumſcripti vero maior ſit ipſa circuli peripheria, ſatis commodum hinc deduxerunt modum limites intra quos peripheria contineatur, definiendi; praeſertim cum hi limites eo propius ad ſe inuicem accedant, quo plurium laterum polygona accipiantur. Ita cum poſito radio circuli $= 1$, latus polygoni 96. laterum inſcripti ſit

$$= \surd(2 - \surd(2 + \surd(2 + \surd(2 + \surd 3),$$

latus vero circumſcripti totidem laterum

$$= \frac{2\surd(2 - \surd(2 + \surd(2 + \surd 2 + 3)}{\surd(2 + \surd(2 + \surd(2 + \surd 2 + \surd 3)},$$

ſequentes prodibunt limites intra quos tota peripheria circuli continetur, minor ſcilicet

$$96\surd(2 - \surd(2 + \surd(2 + \surd(2 + \surd 3)$$

et

et maior

$$\frac{192\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}}}}{\sqrt{(2+\sqrt{})2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}}}.$$

§. 2. Perspicitur autem ex hoc solo exemplo quam difficile et operosum sit limites hos in numeris rationalibus saltem exhibere propter tot totiesque repetitas radicis quadratae extractiones: qui labor etiam eo maior euadit, si polygona adhuc plurium laterum considerentur: adeo vt per hunc modum ne quidem speranda fuisset exactissima diametri ad peripheriam ratio, quae nunc quidem constat, et in fractionibus decimalibus ad 127 figuras est producta: Posita nimirum diametro $= 1$, exprimetur peripheria sequenti fractione decimali.

3, 14159265358979323846264338327950288419
71693993751058209749445923078164062862
08998628034825342117067982148086513272
3066470938446 +

cuius fractionis centum cyphrae priores *Cl. Machino* debentur, omnes vero *Cl. Lagny* peculiari modo etiamnunc celato elicuit.

§. 3. Methodo ergo Archimedeae per polygona inscripta et circumscripta procedenti merito praeferenda est altera methodus hoc potissimum tempore exculta, qua circuli peripheria per series infinitas conuergentes exprimi solet. Si enim huiusmodi series vehementer conuergat, atque insuper ipsi seriei termini facile in fractiones decimales conuerti queant, multo minori opera ratio diametri ad peripheriam proxima numeris rationalibus exprimi poterit, quam per illam alteram methodum, quae

tot

tot radicum extractiones requirit. Quo autem hac ratione calculus commode ad finem perduci queat, ſeries ad hoc inſtitutum idoneae ſunt ſeligendae, quas duo ſequentia requiſita, vti iam innui, habere oportet. Primo ſcilicet, ſeries debet eſſe vehementer conuergens, ſeu eiusmodi, vt quiuis terminus multo ſit minor praecedente, quo non admodum multis terminis accipiendis ratio verae ſatis propinqua obtineatur. Quo pauciores enim termini a vero valore minime differunt, eo aptior erit cenſenda ſeries ad veram diametri ad peripheriam rationem dignoſcendam.

§. 4. Alterum requiſitum poſtulat vt ſinguli ſeriei termini non ſint admodum compoſiti, ſeu ſimplicibus conſtent numeris. Quo magis enim ſinguli termini fuerint complicati; eo maiore labore quiuis in fractionem decimalem conuertetur, et fortaſſe plus operae requiretur ad decem terminos colligendos, quam mille terminos alius ſeriei ſimplicioris, tanto minus autem conuergentis. Deinde vero ad calculum faciliorem reddendum quisque terminus ita debet eſſe comparatus, vt praecedente iam in fractionem decimalem euoluto, ſequens ex eo facile inueniri queat; quae proprietas potiſſimum in ſeries geometricas iisque affines cadit, in quibus quilibet terminus ex praecedente per ſolam diuiſionem obtinetur. Hancobrem ex ſeriebus, quibus arcus circulares exprimi ſolent, eae praecipue ad hunc vſum erunt accommodatae, quae ex tangente data arcum reſpondentem definiunt; hae enim a ſeriebus geometricis hoc tantum differunt, quod ſinguli termini per numeros impares inſuper ſint diuiſi, vnde in calculo parum naſcitur moleſtiae.

§. 5.

§. 5. Reiectis igitur aliis feriebus, quibus arcus vel ex finu vel chorda definitur, tanquam ad noſtrum inſtitutum minus idoneis, praecipue eam feriem contemplabimur, qua ex data tangente arcus circuli reſpondens determinatur. Eſt autem poſito radio circuli $= 1$, arcus tangenti x reſpondens $= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} -$ etc. in infinitum; ex qua intelligitur, quo minor accipiatur tangens x eo facilius arcum reſpondentem aſſignari poſſe. Poſito ſcilicet $x = \frac{1}{10}$, facili negotio arcus tangenti $\frac{1}{10}$ reſpondens in fractione decimali etiam ad mille figuras definiri poſſet; minori vero etiam opera arcus determinaretur, qui tangenti $\frac{1}{100}$ vel $\frac{1}{1000}$ etc. reſponderet. Sed hinc ne minimum quidem ſubſidium conſequitur ad rationem, quam diameter ad totam peripheriam tenet, cognoſcendam; cum omnes iſtiusmodi arcus, quorum tangentes ſunt $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ſeu tales, quae feriem vehementer conuergentem et ſimul leui labore ſummabilem reddant, cum integra peripheria ſint incommenſurabiles, atque ratio inter eos et peripheriam aſſignari penitus nequeat.

§. 6. Quo igitur huius feriei ope ratio, quam diameter ad peripheriam tenet, inueſtigari poſſit, talis tangens pro x ſubſtitui debet, cuius arcus reſpondens ad totam peripheriam rationem habeat cognitam. Arcuum autem cum tota peripheria commenſurabilium vnicus datur, qui tangentem habeat rationalem, isque eſt arcus $45°$, eius ſcilicet tangens radio circuli 1 aequatur. Poſito ergo $x = 1$, prodibit octaua totius peripheriae pars

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \text{ etc.}$$

quae eſt ipſa feries Leibnitiana, ita vt hinc prodeat ratio

 diametri ad peripheriam vt 1 ad

$$4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\text{etc.}\right).$$

Haec autem ſeries tam parum conuergit, vt plures quam 10^{50} termini colligi deberent, quo fractio decimalis ad centum tantum figuras extendatur; qui labor fere in aeternum ſuperari non poſſet. plura quidem habentur compendia, quibus iſta ſummatio facilior reddi poſſet, ſed cum iis haec ſeries in alias transformetur, in ſeries alias magis conuergentes potius inquiram, quibus immediate ſcopus intentus obtineri queat.

§. 7. Aliud igitur ſubſidium ſupereſſe non videtur, niſi vt arcus talis quaeratur, cuius tangens quidem ſit irrationalis, ſed tamen vnico conſtet termino; ſi enim pro x quantitas irrationalis magis compoſita ſubſtitueretur, tum labor ad terminos colligendos inſuperabilis euaderet, etiam ſi ſeries maxime conuergeret. Duo autem tantum extant huiusmodi arcus, alter $60°$ alter $30°$, quorum illius tangens eſt $=\sqrt{3}$ huius vero $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ponamus ergo $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, nam pro x non ſubſtitui conuenit $\sqrt{3}$, quia ſeries diuergens oriretur; eritque duodecima totius peripheriae pars

$$=\frac{1}{1.\sqrt{3}}-\frac{1}{3.3\sqrt{3}}+\frac{1}{5.3^2\sqrt{3}}-\frac{1}{7.3^3\sqrt{3}}+\frac{1}{9.3^4\sqrt{3}}-\text{etc.}$$

vnde ratio diametri ad peripheriam prodit vt

$$1 \text{ ad } \frac{2\sqrt{3}}{1}-\frac{2\sqrt{3}}{3.3}+\frac{2\sqrt{3}}{5.3^2}-\frac{2\sqrt{3}}{7.3^3}+\text{etc.}$$

quae ſeries iam ſatis conuergit, cum quisque terminus plus quam ter minor ſit praecedente. Colligendis autem circiter 210 terminis, ratio in fractionibus decimalibus ad centum figuras exacta obtinebitur, qui labor iam ſuperabilis foret.

§. 8.

§. 8. Ope huius ſeriei etiam reuera a Geometris Anglis ratio diametri ad peripheriam in fractionibus decimalibus vsque ad 74 figuras exacta eſt determinata; atque integer calculus extat in tabulis mathematicis a *Scharpio* aliisque editis. Maxima autem huius calculi difficultas in hoc conſiſtit, quod ante omnia radicem quadratam ex 3 in fractionibus decimalibus ad tot figuras extrahi oportet, ad quot ratio quaeſita exacta eſſe debet. Inuenta autem fractione decimali ad 100 v. gr. figuras iuſta, quae ipſi $2\sqrt{3}$ ſeu $\sqrt{12}$ ſit aequalis, tum haec fractio continuo per 3 eſt diuidenda, quo obtineantur termini

$$\frac{2\sqrt{3}}{1},\ \frac{2\sqrt{3}}{3},\ \frac{2\sqrt{3}}{3^2},\ \frac{2\sqrt{3}}{3^3}\ \text{etc.}$$

Quo facto iſti termini ſucceſſiue per numeros impares 1. 3, 5, 7, etc. ſunt diuidendi, vt prodeant ipſi ſeriei termini

$$\frac{2\sqrt{3}}{1},\ \frac{2\sqrt{3}}{3.3},\ \frac{2\sqrt{3}}{5.3^2},\ \frac{2\sqrt{3}}{7.3^3}\ \text{etc.}$$

Denique ſumma terminorum ordine parium a ſumma ordine imparium ſubtrahatur, et reſiduum dabit valorem peripheriam circuli exprimentem, cuius diameter eſt $= 1$.

§. 9. Antequam autem exponam; quomodo ope eiusdem ſeriei, qua arcus ex data tangente exprimitur, proxima ratio diametri ad peripheriam multo facilius et exactius definiri queat, conueniet compendium aliquod monſtraſſe, cuius beneficio huiusmodi ſerierum ſumma multo leuiori opera inueniri poterit. Scilicet cum arcus tangenti $\frac{1}{p}$ reſpondens ſit

$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} - \frac{1}{7p^7} + \text{etc.}$$

 Hu-

Huius feriei ponamus iam n terminos in vnam fummam effe collectos, exiftente n numero pari, fummamque inuentam effe $= S$, dico fore fummam totius feriei in infinitum continuatae

$$= S + \frac{1}{p^{2n-1}} \left(\frac{1}{(1+p^2)(2n-1)} - \frac{2p^2}{(1+p^2)^2 (2n-1)^2} \right.$$
$$\left. + \frac{2^2(p^4 - p^2)}{(1+p^2)^3 (2n-1)^3} - \frac{2^3(p^6 - 4p^4 + p^2)}{(1+pp)^4 (2n-1)^4} + \text{etc.} \right)$$

Reliquorum ergo terminorum fummatio reducitur ad fummationem alius feriei, in qua quisque terminus circiter $2n-1$ vicibus minor eft praecedente; ita vt quo plures termini actu fuerint collecti, ifta noua feries eo magis fiat conuergens.

§. 10. Quamuis haec noua feries, quae fummam omnium reliquorum terminorum prioris feriei complectitur, vehementer conuergat, tamen, ad eius fummam inueniendam noua quoque compendia adhiberi poffunt. Pofita enim fumma

$$\overset{1}{\frac{1}{p}} - \overset{2}{\frac{1}{3p^3}} + \overset{3}{\frac{1}{5p^5}} - - - - - - \overset{n}{\frac{1}{(2n-1)p^{2n-1}}} = S,$$

erit arcus, cuius tangens eft $\frac{1}{p}$

$$= S + \frac{1}{p^{2n-1}(2n(1+pp) + p^2 - 1)} \text{ proxime};$$

qui valor eo erit exactior, quo plures termini actu fuerint collecti, feu quo maior fuerit numerus n, modo fit par vti monui. Atque fi fuerit $n = p^{\mu}$ tum haec forma fractionem decimalem iuftam reddet ad tot figuras, quot

quot exprimit $(2n+3+3\mu)lp$. Facto autem breuit..tis gratia

$$\frac{2}{(1+pp)(2n-1)} = q$$

erit vera ſumma ſeriei

$\frac{1}{p} - \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} -$ etc. in infinitum continuatae

$$= S + \frac{1}{2p^{2n-1}}\left(\frac{q}{(1+qp^2+q^2p^2-q^3(2p^4-p^2)+q^4(4p^6-8p^4+p^2)\text{etc.}}\right)$$

ſeu

$\frac{1}{2p^{2n-1}}$ denuo diuidi debet per

$$\frac{1}{q}+p^2+qp^2-q^2(2p^4-p^2)+q^3(4p^6-8p^4+p^2)-\text{etc.}$$

et quotus reſultans ad S adiectus dabit arcum, cuius tangens $=\frac{1}{p}$.

§. 11. His expoſitis ſubſidiis, quae conſequentur ex methodo mea ſeries ſummandi alibi tradita, progredior ad aliam viam multo faciliorem aperiendam, qua eiusdem ſeriei arcum ex data tangente exprimentis ope ratio diametri ad peripheriam quantumuis exacte leui opera definiri poterit, ſine vlla taedioſa radicum extractione. Reſoluo ſcilicet arcum cuius tangens eſt $=1$ in duos pluresue arcus, quorum tangentes ſint rationales. Cum enim horum arcuum tangentes ſint vnitate minores, ex iis per ſeriem generalem arcus ipſi facile determinari poterunt. Qui arcus in ſe ſpectati etiamſi cum tota peripheria ſint incommenſurabiles, tamen quia coniunctim ſumti arcui 45 graduum cuius tangens $=1$, aequantur; eorum ſumma dabit octauam totius peripheriae partem, ex qua ratio diametri ad peripheriam quaeſita ſponte fluit. Poſito enim $\alpha =$

 arcui

arcui cuius tangens $= 1$, erit diameter ad peripheriam vt 1 ad 4α

§. 12. Ponamus ergo $A t\, 1 = A t \frac{1}{a} + A t \frac{1}{b}$ debebit esse $1 = \frac{a+b}{ab-1}$; vnde fiet $ab - 1 = a + b$ atque $b = \frac{a+1}{a-1}$. Quo autem a et b fiant numeri integri, quod ad calculum facilorem reddendum requiritur, pono $a = 2$, eritque $b = 3$. Arcus ergo cuius tangens $= 1$, quem posui $= \alpha$ aequalis est summae arcuum quorum tangentes sunt $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ Quocirca arcus α aequabitur aggregato duarum sequentium serierum

$$+ \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \text{etc.}$$

quarum vtraque magis conuergit, quam illa superior ex tangente $\frac{1}{\sqrt{3}}$ deducta, nec vlla radicum extractione impeditur. Quare ope harum duarum serierum ratio diametri ad peripheriam leuiori negotio ad multo plures figuras exacta definiri poterit, quam per vnicam illam seriem fieri licuit, praesertim si subsidia indicata adhibeantur.

§ 13. Si nunc seriei

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \text{etc.}$$

summa in fractionibus decimalibus desideretur iusta ad centum figuras, tum colligi debent 154 termini, atque ad eorum summam addi oportet $\frac{1}{2^{307}.1543}$, quo summa quaesita obtineatur; vnico scilicet subsidio §. 10. indicato vtor, quo tota seriei summa erat

$$= S + \frac{1}{p^{2n-1}(2n(1+pp)+pp-1)}.$$

Sin

Sin autem ſumma ad 200 figuras deſideretur tum 318 termini actu colligi debebunt. Altera vero ſeries

$$\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} \text{ etc.}$$

ad fractionem decimalem, quae ne in centeſima quidem figura fallat, reducetur colligendis actu 96 terminis; quo autem ad ducentas figuras exacta obtineatur, 200 termini actu ſunt colligendi. Ad rationem ergo diametri ad periperiam in fractione decimali ad 100 figuras iuſta inueniendam ſimul 250 termini addi debent, dum ad idem obtinendum ex ſerie

$$\frac{1}{1\sqrt{3}} - \frac{1}{3.3\sqrt{3}} + \frac{1}{5.3^2\sqrt{3}} - \text{etc.}$$

ſola plures quam 200 termini addi debent.

§. 14. His autem veſtigiis inſiſtendis in promtu erit arcum α cuius tangens $=1$ infinitis aliis modis in duos pluresue arcus reſoluere, quae ſeries multo magis conuergentes producant. Cum enim ſit

$$At\frac{1}{p} = At\frac{1}{p+q} + At\frac{q}{p^2+pq+1},$$

erit

$$At\tfrac{1}{2} = At\tfrac{1}{3} + At\tfrac{1}{7}.$$

Quare cum ſit

$$\alpha = At\tfrac{1}{2} + At\tfrac{1}{3}$$

erit nunc

$$\alpha = 2\,At\tfrac{1}{3} + At\tfrac{1}{7},$$

atque α iterum his duabus ſeriebus coniunctis aequabitur

$$+\frac{2}{1.3} - \frac{2}{3.3^3} + \frac{2}{5.3^5} - \frac{2}{7.3^7} + \text{etc.}$$
$$+\frac{1}{1.7} - \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} - \frac{1}{7.7^7} + \text{etc.}$$

quae

quae multo magis conuergunt, quam priores. Commodissima autem forte resolutio erit

$$\alpha = 4\,\mathrm{A}t\tfrac{1}{5} - \mathrm{A}t\tfrac{1}{239}$$

vel

$$\alpha = 4\,\mathrm{A}t\tfrac{1}{5} - \mathrm{A}t\tfrac{1}{70} + \mathrm{A}t\tfrac{1}{99},$$

quippe qui arcus ope serierum maxime conuergentium definiri possunt. Sed quisque, cui lubuerit huiusmodi calculum suscipere, facile sibi commodissimam resolutionem eliget.

§ 15. Possunt quoque aliae series, quibus etiam arcus ex data tangente definitur, non minori successu vsurpari, si ita visum fuerit; series autem hae, quae commode in vsum vocari poterunt, sunt sequentes praecipue.

$$\mathrm{A}t.\ \frac{p}{p^2-1} = \frac{1}{p} + \frac{2}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} - \frac{1}{7p^7} - \frac{2}{9p^9} - \frac{1}{11p^{11}} + \text{etc.}$$

$$\mathrm{A}t.\ \frac{2p}{2p^2-1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{3.2p^3} - \frac{1}{5.2^2.p^5} - \frac{1}{7.2^3p^7} + \frac{1}{9.2^4p^9} + \text{etc.}$$

$$\mathrm{A}t.\ \frac{3p}{3p^2-1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{5.3^2.p^5} + \frac{1}{7.3^3\,p^7} - \frac{1}{11.3^5.p^{11}} + \frac{1}{13.3^6.p^{13}} - \text{etc.}$$

$$\mathrm{A}t.\ \frac{3p(pp-1)}{p^4-4pp+1} = \frac{3}{1.p} + \frac{3}{5.p^5} - \frac{3}{7.p^7} - \frac{3}{11.p^{11}} + \frac{3}{13.p^{13}} + \text{etc.}$$

Ex hac vltima serie est ponendo $p = 2$

$$\mathrm{A}t\,18 = 3\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} - \frac{1}{11.2^{11}} + \frac{1}{13.2^{13}} + \frac{1}{17.2^{17}} - \text{etc.}\right)$$

ad quem arcum si addatur $\mathrm{A}t\frac{1}{18}$, qui per vulgarem seriem facile exhibetur, prodit quarta peripheriae pars seu 2α. Simili modo ex serie secunda prodit $2\alpha =$

$$1 + \frac{1}{3.2} - \frac{1}{5.2^2} - \frac{1}{7.2^3} + \frac{1}{9.2^4} + \frac{1}{11.2^5} - \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \frac{1}{11.2^{11}} + \text{etc.}$$

§. 16,

§. 16. Quando autem in hoc negotio arcus fuerit inueniendus per feriem Leibnitianam, cuius tangens quidem fit parua, fed eius numerator non $= 1$, tum difficulter fingulos feriei terminos euoluere liceret. His igitur cafibus conueniet arcum in duos alios refoluere, quorum tangentes pro numeratore habeant vnitatem, id quod faepius fieri poteft. Sit enim arcus inueftigandus cuius tangens eft $\frac{a}{b}$; ponatur $At\frac{a}{b} = At\frac{1}{m} + At\frac{1}{n}$; eritque $\frac{m+n}{mn-1} = \frac{a}{b}$. Hinc fiet $(ma-b)(na-b) = a^2 + b^2$. Quamobrem inquirendum eft, vtrum $a^2 + b^2$ in duos factores refolui poffit, quorum vterque denominatore b auctus per numeratorem a fiat diuifibilis. Quod cum acciderit erunt quoti ex iftis diuifionibus orti valores pro m et n fubftituendi. Sic fi quaerendus fit arcus cuius tangens $= \frac{7}{9}$, quia eft $7^2 + 9^2 = 130 = 5 . 26$ erunt valores ipforum m et n hi $\frac{5+9}{7}$ et $\frac{26+9}{7}$ feu 2 et 5. Erit itaque $At\frac{7}{9} = At\frac{1}{2} + At\frac{1}{5}$, vnde non difficulter $At\frac{7}{9}$ reperitur.

§. 17. Saepius autem cum fumma quadratorum non habet factores huius indolis, arcus in duos eiusmodi alios arcus refolui nequit. His ergo cafibus propofitus arcus in tres pluresue arcus refolui debebit, quod fequenti modo fiet. Sit propofitus arcus cuius tangens eft $\frac{x}{a}$ erit

$$At\frac{x}{y} = At\frac{ax-y}{ay+x} + At\frac{1}{b}.$$

Si nunc in integris valor pro a inueniri nequeat, vt $ax - y$ fiat diuifor ipfius $ay + x$, tum faltem in fractis quaeratur, et pro $At\frac{1}{a}$ ponatur $At\frac{b-a}{ab+1} + At\frac{1}{b}$; denuoque difpiciatur, vtrum detur numerus integer, qui pro b fubftituſtitutus reddat $b-a$ diuiſorem ipſius $ab+1$. Ita ergo pergendo ſequentes orientur formulae

$$\text{I.}\quad At\tfrac{x}{y}=At\tfrac{ax-y}{ay+x}+At\tfrac{1}{a}$$

$$\text{II.}\quad At\tfrac{x}{y}=At\tfrac{ax-y}{ay+x}+At\tfrac{b-a}{ab+1}+At\tfrac{1}{b}$$

$$\text{III.}\quad At\tfrac{x}{y}=At\tfrac{ax-y}{ay+x}+At\tfrac{b-a}{ab+1}+At\tfrac{c-b}{bc+1}+At\tfrac{1}{c}$$

$$\text{IV.}\quad At\tfrac{x}{y}=At\tfrac{ax-y}{ay+x}+At\tfrac{b-a}{ab+1}+At\tfrac{c-b}{bc+1}+At\tfrac{d-c}{cd+1}+At\tfrac{1}{d}.$$

§. 18. Si ergo a, b, c, d, etc. fuerit progreſſio quaecunque numerorum tandem in infinitum creſcentium, habebimus ſeriem arcuum infinitam, qui omnes ſimul ſumti dato arcui aequantur. Erit ſcilicet

$$At\tfrac{x}{y}=At\tfrac{ax-y}{ay+x}+At\tfrac{b-a}{ab+1}+At\tfrac{c-b}{bc+1}+At\tfrac{d-c}{cd+1}+At\tfrac{e-d}{de+1}+\text{ etc.}$$

Neceſſe autem eſt vt progreſſionis a, b, c, d, etc. terminus infiniteſimus ſit infinite magnus, quia arcus cuius ille cotangens eſt negligitur, hinc non contemnendae ſequuntur ſeries arcuum ſummabiles; vt poſito $\frac{x}{y}=1$ et pro a, b, c, d, etc. ſerie numerorum imparium 3, 5, 7, 9 etc. habebitur

$$At\,1=At\tfrac{1}{2}+At\tfrac{1}{8}+At\tfrac{1}{18}+At\tfrac{1}{32}+\text{ etc.}$$

in qua tangentium denominatores ſunt dupla quadrata numerorum naturalium. Simili modo erit

$$At\,1=At\tfrac{1}{3}+At\tfrac{1}{7}+At\tfrac{1}{13}+At\tfrac{1}{21}+At\tfrac{1}{31}\text{ etc.}$$

§. 19. Coronidis loco theorema non inelegans ſubiungam, quod ad naturam circuli penitius inſpiciendam inſeruire poteſt. In circulo ſcilicet cuius radius ſeu ſinus totus $=1$, eſt arcus quicunque A aequalis huic valori

ſin. A.

$$\frac{\text{ſin. } A}{\text{coſ. } \tfrac{1}{2}A.\ \text{coſ. } \tfrac{1}{4}A.\ \text{coſ. } \tfrac{1}{8}A.\ \text{coſ. } \tfrac{1}{16}A.\ \text{coſ. } \tfrac{1}{32}A.\ \text{etc.}}$$

Vel quod perinde eſt per ſecantes erit

$$A = \text{ſin. } A.\ \text{ſec. } \tfrac{1}{2}A.\ \text{ſec. } \tfrac{1}{4}A.\ \text{ſec. } \tfrac{1}{8}A.\ \text{ſec. } \tfrac{1}{16}A.\ \text{etc.}$$

quae expreſſio commode adhiberi poteſt ad logarithmum cuiusuis arcus ex datis logarithmis ſinuum et ſecantium inueniendum: erit ſcilicet

$$\text{l. } A = \text{l. ſin. } A + \text{l. ſec. } \tfrac{1}{2}A + \text{l. ſec. } \tfrac{1}{4}A + \text{l. ſec. } \tfrac{1}{8}A + \text{etc.}$$

vbi notandum, ſi tabula logarithmorum conſueta vtamur, a quouis logarithmo logarithmum ſinus totius auferri debere. Sic ſi logarithmus arcus 1 gradus quaeratur erit

log. ſin.	1°	=	(-2), 2418553
log. ſec.	$30'$	=	0, 0000165
log. ſec.	$15'$	=	0, 0000041
log. ſec.	$7\frac{1}{2}'$	=	0, 0000010
log. ſec.	$3\frac{3}{4}'$	=	0, 0000003
log. Arc.	1°	=	(-2), 2418762

log. 180	=	2, 2552725
l. A. 1°	=	(-2), 2418762
l. A. 180°	=	0, 4971487

cui logarithmo reſpondet numerus 3, 14159.

§. 20. Demonſtratio huius theorematis pendet a mutua relatione ſinuum et coſinuum angulorum, qui inter ſe rationem duplam tenent. Cum enim ſinus anguli cu-

 iusque

iusque in ſuum coſinum multiplicatus producat ſemiſſim ſinus anguli dupli, aequabitur ſinus cuiusuis anguli per coſinum dimidii anguli diuiſus duplo ſinus anguli dimidii ita erit

$$\frac{\text{ſin. } A}{\text{coſin. } \frac{1}{2} A} = 2 \text{ ſin. } \frac{1}{2} A.$$

Simili ratione cum ſit

$$\frac{\text{ſin. } A}{\text{coſ. } \frac{1}{2} A . \text{ coſ. } \frac{1}{4} A} = \frac{2 \text{ ſin. } \frac{1}{2} A}{\text{coſin. } \frac{1}{4} A}$$

erit per eandem proprietatem

$$\frac{\text{ſin. } A}{\text{coſin. } \frac{1}{2} A . \text{ coſ. } \frac{1}{4} A} = 4 \text{ ſin. } \frac{1}{4} A.$$

Atque vlterius pergendo habebitur

$$\frac{\text{ſin. } A}{\text{coſin. } \frac{1}{2} A . \text{ coſin. } \frac{1}{4} A . \text{ coſin. } \frac{1}{8} A} = 8 \text{ ſin. } \frac{1}{8} A.$$

Ex quibus concluditur, ſi progreſſio coſinuum in infinitum continuetur, fore

$$\frac{\text{ſin. } A}{\text{coſ. } \frac{1}{2} A . \text{ coſ. } \frac{1}{4} A . \text{ coſ. } \frac{1}{8} A . \text{ coſ. } \frac{1}{16} A \text{ etc.}} = \infty \text{ ſin. } \frac{1}{\infty} A.$$

$=$ arcui ipſi A. Q. E. D.

CLAS-

CLASSIS SECVNDA.

CONTINENS

PHYSICA.

DE
THERMOMETRIS
DISSERTATIO EXPERIMENTALIS,

AVTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

CVm inter ſolida et fluida nullum hucusque corpus inuentum ſit, quod non quaquauerſum ab igne et calore extendatur, veluti Experimenta *Celeb. Muſſchenbroekii in Tentam. Academicorum Florentinorum*, *Parte II. pag.* 12. *ſeqq.* abunde et iucunde docent: adhibentur optimo ſucceſſu hodie a Phyſicis, pro determinando aliquo caloris gradu, Inſtrumenta non ſine multo artificio ſic adaptata, vt minimam quamuis fluidi incluſi rarefactionem vel condenſationem admodum ſenſibilem, et oculis diſtinguendam, reddant. Atque quidem cunctorum fluidorum mercurius viuus huic ſcopo obtinendo ab omnibus merito creditur eſſe aptiſſimus, quia, ſi purus fuerit, aeque dilatabilis non ſolum eſt, ſed etiam manet, nulliſque obnoxius eſt mutationibus, quibus alia fluida premuntur; praeſertim vero etiam, quia non niſi magno calore ad ebullitionem cogitur, adeoque, vi huius proprietatis, intenſo alicuius caloris gradui cognoſcendo inſeruire poteſt.

§. 2.

§. 2. Liberata ſic, mercurii auxilio, iamdiu ſunt Thermometra noſtra pluribus vitiis, quibus *Drebbeliana*, et quae in horum loci ſucceſſerunt, *Florentina*, laborare non ſine taedio obſeruata fuerunt. Non tamen ex omni parte adhuc ſunt perfecta. Nondum enim in iis incommoda, quae mox enarrabo, fuerunt ſublata. Primo, vitrum ipſum, quo mercurius continetur, a calore extenſionem, a frigore contractionem, patitur; quo fit, vt interior cauitas modo amplior, modo anguſtior euadat, id quod impedit, vt verae aſcenſuum aut deſcenſuum fili mercurialis quantitates obſeruari queant. Secundo, nondum confirmata, et extra omnem formidinem erroris poſita mihi videtur proportio, quam tenet volumen maſſae eiusdem mercurialis aquae feruidae, et aquae iamiam in glaciem abeunti, impoſitae. Adhibentur enim optime hi duo caloris gradus pro norma Thermometrorum, cum ille, ſaltim in vna eademque aqua, ſit fere conſtans, nec niſi modicae alicui variationi obnoxius; hic vero aquae inhaereat, cum ipſa eſt in ſtatu voluminis ſui medio; dum nimirum remittente ebullitione ſenſim contrahitur, vsque ad ſtatum incipiendae gelationis; quo initium capiente quieſcit quaſi aqua, et poſtea dum augetur frigus, denuo extenditur. Qualis autem ſit variatio caloris in aqua ebulliente, didici duobus Experimentis hunc in finem inſtitutis. Nempe hoc anno 1738, Februarii 15, cum Barometrum teneret altitudinem magnam, ſcilicet $30\frac{34}{100}$ pollicum Londinenſ. duodecimal. obſeruaui, Thermometrum aquae ebullienti per ſemihorium inſiſtens, mercurium tandem conſtanter fixum tenuiſſe ad 3039 gradus diuiſionis arbitrariae factae; cum

deinde

deinde Februarii 22, Barometrum tandem descendisset ad 28 $\frac{35}{100}$ pollices, vidi calorem aquae ebullientis Thermometrum non altius coëgisse, quam ad gradus 3022, quae differentia horum graduum 17, efficit $\frac{14}{1000}$ pedis Rhenani, quaeque ideo valde est exigua, non tamen contemnenda, si accuratiores desiderentur obseruationes. Inueni enim, factis dimensionibus mercurii in vtroque statu aquae feruentis, habuisse volumina rationem inter se, vti 50439 ad 50425, in modo memoratis duabus altitudinibus Barometri, vel quam proxime, vti 10000 ad 9997. Tertium denique incommodum etiam hoc est, quod Thermometra corporum fluidorum tantum calori examinando apta sint, non vero solidorum; quamuis hoc ex aliqua parte sublatum sit ingeniosissimis inuentis *Cel. Musschenbroekii*, qui Pyrometro suo, et *b. Leutmanni* nostri, qui alia machina, solidorum extensiones, a calore oriundas, metiri instituerunt. *Vid. Tentam. Acad. Florent. l. c.* et *Commentarii nostrae Academiae Tomo IV. pag.* 216. Quae autem, ad primum et secundum dictorum incommodorum leuanda, Experimenta me docuerint, praesenti scripto sum expositurus.

§. 3. Quamuis non difficile sit, datis, capacitate cylindri amplioris in Thermometri imo, et capacitate tubuli annexi, adhibito calculo, inuenire, quantum dilatatus sit mercurius in quocunque gradu haerens: optime tamen ipsa diuisio graduum in latere adscriptorum sic instituitur, vt numerus adscriptus statim monstret, quanta sui, per calorem aquae ebullientis extensi, voluminis parte, mercurius in quolibet aëris statu sit condensatus, vt molestia calculi et mensurarum euitetur; qua ratione

Clariſſ. De L'Isle diuiſionem Thermometrorum adornare ſolet; in quibus, ſi ex. gr. altitudo mercurii monſtret gradum 150, id indicat, mercurium in praeſenti calore condenſatum eſſe parte $\frac{150}{10035}$ vel $\frac{3}{205}$ voluminis eius, quod tenuit in aqua ebulliente. Sed pro hac diuiſione abſoluenda opus eſt, vt accuratiſſime ſciatur ratio voluminum, quam eadem maſſa mercurii tenet in aqua ebulliente, et aqua gelaſcente, vt vtrique huic gradui, pro norma aſſumtis, legitimus numerus adſcribi queat, ita vt Thermometra haec ſint vniuerſalia. Haec ratio in Thermometris modo dictis ſtabilita eſt 200:197, et quam, vt confirmare poſſim, ſequentia cepi experimenta.

§. 4. Globulum parari curaui aureum, vt nempe in mercurio ſubmergeretur, cuius diameter eſt $\frac{48}{1000}$ pedis Rhenani; ne vero a mercurio, calido praeſertim, exedatur, effeci vt diligentiſſime vernice obduceretur. Atque tum Ianuarii 31. anni 1738, cum frigus forte regnaret, per bilancem accuratiſſime inquiſiui huius globuli, vna cum annexo filo ſerico tenuiſſimo, pondus, quod erat 464 granorum. Poſtea expoſui libero aeri vas amplum aqua repletum, cui aquae vaſculum mercurio bene purgato plenum inſiſtebat. In vaſe amplo poſt quadrantem horae aqua cepit congelari; quo ipſo momento, cum iudicarem mercurium eundem cum aqua gelaſcente frigoris gradum concepiſſe, globuli aurei pondus reſpectiuum, quod nempe, dum mercurio immerſus erat, ſuperſtes ipſi adhuc manebat, ſolicite examinaui, et deprehendi $88\frac{3}{8}$ gran. Idem Experimentum repetii Februarii 2, cum frigus adhuc intenſius eſſet quam prius, inueniqne globuli aurei cum filis annexis pondus eſſe $461\frac{3}{4}$ gran. reſpectiuum

vero

vero tantum 86. gran. Denique Februarii 3, cum frigus paulo mitesceret, imposui idem vasculum mercurio plenum aquae ebullienti per aliquod tempus, cumque pondus globuli aurei absolutum esset adhuc $461\frac{3}{4}$ gran. respectiuum erat $91\frac{3}{4}$ gran. Sed in extracto globulo obseruaui, vernicem hinc et inde ab aquae calore fuisse solutum, et aurum albis maculis inquinatum; quae, cum vererer vt volumen globuli vel in sequentem solum diem idem sit mansurum, reiterationem huius Experimenti impediuerunt. Sunt autem grana memorata non Medica, sed ad libram Hollandicam adaptata, ita quidem, vt 160. grana mihi adhibita efficiant 167 Grana Medica.

§. 5. Vt igitur nunc ad vsum horum Experimentorum Thermometricorum accedam, necesse est, vt antea totum negotium ad symbola generalia redigam. Sit itaque massae mercurialis Thermometro inclusae volumen, quod in aqua ebulliente acquirit, $=V$, atque respondens densitas $=D$; eiusdem massae, in alio quocunque minori caloris gradu locatae, volumen, priori minus, sit $=v$, densitas vero congruens $=d$; sitque Thermometrum ita in gradus diuidendum, vt numeri adscripti condensationem voluminis per aquam ebullientem acquisiti, in partibus decies millesimis dicti voluminis, denotent, atque talis aliquis numerus adscriptus sit $=\frac{n}{10000}$. Et, quoniam condensatio est respectus differentiae voluminum ad volumen maius constans, erit ea $=\frac{V-v}{V}$; quam ergo, cum numerus adscriptus denotare debeat, erit $\frac{V-v}{V}=\frac{n}{10000}$, vnde fit $n=10000-\frac{10000\,v}{V}$, et consequenter $V:v=10000:10000-n$; vel etiam, quia in eadem massa densitates

 sunt

ſunt inuerſe vti volumina, erit $D:d = v:V$, adeoque ex his $n = 10000 - \frac{10000\,D}{d}$. Sin itaque, Thermometro aquae iamiam gelaſcenti impoſito, altitudini mercurii gradus legitimus ſit adſcribendus, opus eſt, vt ſciatur ratio $v:V$, hoc eſt, voluminis mercurialis in aqua iamiam gelaſcente, et in aqua ebulliente. Statuit hunc numerum n *Clariſſ. De L'Isle* conglaciationi aquae conuenientem $= 150$, ita vt in tali caloris gradu mercurius condenſatus ſit parte $\frac{3}{200}$ voluminis ſui per aquam ebullientem extenſi. Erit igitur poſito $n = 150$, $V:v = 10000:9850 = 200:197$, vti ſupra iam innui §. 3. Videamus ergo, quaenam ex his experimentis ſit ratio inter V et v, et quisnam exinde prodeat numerus n, aſdcribendus loco mercurii, quem occupat, dum Thermometrum aquae gelaſcenti eſt impoſitum.

§. 6. Cum in his Experimentis dentur tria pondera voluminis mercurialis eiusdem, aequalis nempe ſphaerulae aureae, et, poſito volumine eodem, pondera ſint vti denſitates corporum: poterimus ſtatim eruere denſitatem mercurii aquae gelaſcenti et aquae ebullienti impoſiti; ſunt enim hae denſitates vti iactura ponderis, quam ſphaerula aurea in quolibet caſu paſſa eſt. Quare erit per Experim. I. et III. $D:d = 370:375\frac{5}{8} = 2960:3005$, quae ratio ſubſtituta in formula ipſius $n = 10000 - \frac{10000\,D}{d}$ praebet $n = 149\frac{2255}{3005}$. Per Exper. vero II. et III. habebitur $D:d = 370 . 375\frac{3}{4} = 1480:1503$, quae ratio denuo ſubſtituta in formula ipſius n, praebet $n = 153\frac{41}{1503}$; qui quidem duo numeri inuenti ſatis bene congruunt pro ſubtilitate huius Experimenti; et ſi ad eorum medium, tan-

tanquam ad aſylum in rebus dubiis conſuetiſſimum, confugiamus, erit $n=151\frac{1}{3}$ quam proxime, pro quo, maioris commoditatis gratia, in diuidenda ſcala Thermometri, aſſumi poterit, ſine errore conſiderabili, $n=150$.

§. 7. Patet vero, ex allegato calculo, Experimenta hoc modo inſtituta ſumme ſubtilia eſſe, et exactitudinem requirere haud vulgarem. Nam in primo Experimento eſt $d=375\frac{5}{8}$, in ſecundo autem eſt $d=375\frac{3}{4}$, quae duo pondera non niſi $\frac{1}{8}$ parte grani differunt; producunt tamen differentiam in ſcala Thermometri $3\frac{1}{3}$ graduum. Quamuis autem bilance vſus fuerim, quae lancibus ſolis onerata exactiſſimum tenebat aequilibrium, et pondera omnia indicata bis, in vtramque lancem nempe ſucceſſiue ea imponendo, examinauerim, atque ſic, ſumendo medium proportionale ponderum in vtraque lance inuentorum, omni diligentia vſus fuerim: vix tamen potui euitare errorem tam exiguum, qualis eſt $\frac{1}{8}$ vnius grani. Neque vero melior Experimenti huius ſucceſſus ſperandus eſt, ſi adhibeatur ſphaera aurea maioris diametri, niſi addatur ſimul Bilanx omnium quae poſſibiles ſunt optima et ſelectiſſima.

§. 8. Alteram difficultatem, quae in contractione et dilatatione vitri conſiſtit, ſequenti modo, ſi non penitus tolli, multum tamen leuari poſſe puto. Conſtat Experimentis quotidianis, fluidum Thermometro alicui incluſum, ſubito et per ſaltum deſcendere primum, ſi aquae feruenti immergatur Inſtrumentum, et poſtea demum, dum calorem aquae feruentis concipit, aſcendere. Vocarunt hunc ſubitaneum deſcenſum in aqua feruida, et eundem ſubitaneum aſcenſum in aqua gelida, ſaltum Immer-

 ſionis,

ſionis, Academici Florentini. Spatium vero, per quod fit hic ſaltus Immerſionis, et quod vocabo Spatium Immerſionis, haud adeo difficulter in vtroque caſu Experimentis definiri poteſt. Igitur ad id quam maxime attendendum erit pro determinanda ratione voluminum mercurii in aqua feruida et gelaſcente. Eſt enim extra omne dubium poſitum, quod ſaltus hic debeatur ſubitaneae dilatationi et contractioni voluminis in vitro, adeoque ſpatium immerſionis pro menſura variationis in vtroque volumine poſſe aſſumi. Ponamus igitur Thermometrum mercurio repletum ED; immergatur illud primo aquae feruenti, obſeruari poterit ſpatium immerſionis, vi cuius, cum mercurius apparenter eſt in altitudine CA, ſi cylindrus CD non fuiſſet dilatatus à calore, teneret altitudinem Ca. Immergatur deinde idem Thermometrum aquae gelaſcenti; obſeruari rurſus poterit ſpatium Immerſionis, vi cuius, cum mercurius apparenter eſt in altitudine CB, ſi cylindrus CD non fuiſſet contractus a frigore, teneret altitudinem Cb. Poſitis igitur volumine cylindri CD, quod in äëre libero habet, $= f^3$, area ſectionis AE aut BF $= a^2$, denſitate mercurii in aqua feruenti $= D$, denſitate autem mercurii in aqua gelaſcente $= d$; erit ob pondus mercurii in vtroque ſtatu idem, aequatio haec: $(f^3 + a^2 . Ca) D = (f^3 + a^2 . Cb) d$, vnde fit $D : d = f^3 + a^2 . Cb : f^3 + a^2 . Ca = f^3 + a^2 . (CB - Bb) : f^3 + a^2 . (CA + Aa)$; poterit ergo inueniri ex obſeruatis altitudinibus apparentibus CB et CA, ſpatiis immerſionum Aa et Bb, et dato volumine Cylindri CD, ratio denſitatum non quidem adhuc exactiſſima, ſed ſaltim multo exactior, quam ſi ſolae altitudines apparentes CA et CB obſeruentur.

Tabula X. Figura I.

OB-

OBSERVATIONES ANATOMICAE AD HISTORIAM ET ACTIONEM MVSCVLORVM LABIORVM, OSSIS HYOIDIS, FAVCIVM, LINGVAE, LARYNGIS PERTINENTES.

AVCTORE
Iosia Weitbrecht.

§. I.

MVſculum quadratum Colli, vulgo *platyſma myoides* dictum, quem non ſine gloriae captatione primus in ſimia detexit *Galenus* (1), inter buccarum et labrorum muſculos retulerunt veteres Anatomici; quippe quem ita deſcribebant, ac ſi e vertebris, ſcapulis et clauiculis oriretur, atque in buccarum regione circa labiorum angulos terminaretur. *Arantius* (2) autem poſtquam animaduertiſſet, hunc muſculum maxillae inferiori adnaſci, muſculorum iſtud os mouentium ordini adſcripſit. Inde factum eſt, vt ſequentes Scriptores in diuerſa abierint. Aliqui enim, vt *Veslingius*, *Bartholinus*, veterum ſententiam quidem retinuerunt; adhaeſione ad maxillam non negata: aliqui autem, imo plurimi *Arantii* ſententiam amplexi hoc platysma omnino maxillae muſculis, tanquam *deductorem* adnumerarunt, conceſſa eiusdem expanſione ad labia vsque. Nouiſſime autem *Cel. Wins-* Tabula X. Figura II.

(1) de Adminiſtr. Anat. Cap. IV. (2) Obſeru. Anat. C. 30.

Winslowius (3) hoc officium illi rurſus ademit, et aliud ipſi attribuit; dum ope adhaeſionis ſuae ad maxillam integumenta colli *ſurſum* trahere arbitratur. Omnium poſtremo autem *Cel. Albinus* (4), num maxillae inſeruiat? difficile quidem dictu iudicauit, in aduerſam tamen partem inclinans. Putarem, *vtrumque* vſum concedi poſſe huic membranae muſculoſae, dummodo ad terminos eius, terminorumque ſtatum fixum attenderimus. Dum enim Veteres eam circa ſedem oſſium pectoris, clauicularum, ſcapularum, cuti cohaerere tradiderunt, in eo quidem falſi ſunt, et omnino aſſentiendum *Santorino* (5) eſt, qui cutem inter et platysma *ſtratum adipoſum* interiacere recte docuit: attamen, cum tota fere fibrarum planities exterior latera maxillae tranſcendat, ac verſus laborum angulum proiiciatur, qui terminus multo mobilior eſt, quam circa pectus; *motui lab. orum* inſeruire, non ſine ratione Veteres ſtatuerunt. Porro, ex ſola quidem cohaeſione fibrarum interiorum (qualem *Winslowius* recte deſcribit) cum maxilla, concludere non licet, illas ad oſſis huius depreſſionem facere. Maxilla enim inferiore ad ſuperiorem appreſſa iſtae fibrae terminum fixum nanciſcuntur; vnde illa actio neceſſario oritur, quam *Winslowius* in medium protulit. At vero, quando muſculi maxillam eleuantes agere ceſſarunt: nulla ratio ſupereſt, quare platysma ad illam *deprimendam* non concurrat; quippe maxilla, quae vel ſolo proprio pondere decidit, motum liberrimum habet, platysma autem in adipoſa tunica ſatis pertinaciter innaſcitur.

(3) Traité des Muſcles §. 749. et 1126. ſeqq. (4) Hiſtor. Muſc. hom. L. III. C. XXXV. (5) Obſeru. Anat. Cap. I. §. XXXIII.

§. 2.

II. In deſcribendis *labiorum muſculis* omnem laudem promeruit diligentia *Santorini*; cui vero *Cel. Albinus*, ſi non anteferendus, certe neutiquam poſtponendus. Quamuis enim nulla fere ſit facies, quae cum altera perfecte conueniat: *illius* tamen icones, et *amborum* commentarii inquiſitionibus noſtris plurimam partem reſpondent. Fatendum tamen mihi eſt, curuaturam (6) ſuperiorem ſecundi ordinis fibrarum illarum, quae labrum ſuperius compingunt, numquam adeo diſtinctam apparuiſſe; ita, vt partim *Waltheriana* (7) *correctio* placeat, partim non male actum videatur, ſi non ſolum *ordo* (8) *ſecundus*, vti *Albinus* (9) fecit, ſed et *tertius*, quem idem Cel. Autor *naſalem labii ſuperioris* (1) vocat, cum *Winslowio* (2) pro vno *muſculo ſemi orbiculari acceſſorio* (*ſurdemi-orbiculaire*) habeatur.

III. *cowperi* (3) *conſtrictor alae naſi*, vel *inciſorius minor ſuperior*, omnino *duplex* eſt, hiatu inter vtrumque relicto, qui *philtro* reſpondet. Quem quamuis *Euſtachius* in contractiorem lacertum coegiſſe videatur, non tamen vnicum, vti *Santorinus* (4) putat, ſed *duos* diſtinctos muſculos, dextrum in fig I. ſiniſtrum in fig. II. Tabulae XLI. delineauit. Hi vero muſculi labia non niſi per accidens deprimunt, quatenus nimirum illa cum narium alis cohaerent. Hinc recte a *Cowpero* et *Albino* (5) ad ſolas nares referuntur, *conſtrictorum* vel *de-*

(6) Santorini C I. §. XIX. Tab. I. lit. h. (7) Anatome tener. muſc. repetit. Tab. I. lit. h. (8) Santorini Tab. I. lit. I. C. I. §. XX. (9) L. III. C. XVII. (1) L. III. C. XV. (2) Traite de la tète. §. 555. (3) Myotom. reform. 1724. Tab. XXV. fig. VI. nr. 37. (4) C. I. §. XVIII. (5) L. III. C. XVIII.

pressorum nomine; quippe deprimendo alas narium illas etiam simul constringis.

IV. Circa *eleuatores labii inferioris proprios duo* potissimum notanda habeo: primo, illos musculos, quos pro talibus venditat (6) *Santorinus*, quosque *leuatores menti* (7) *Albinus* vocat, eleuatorum officio fungi neutiquam posse; hi enim musculi multo humilius maxillae adhaerescunt quam labio, inde potius *labium* deprimunt ac versus maxillam adducunt; quod et illorum incuruatio et congressus ita persuadet. Secundo: istud par confundi non debere cum *eleuatore labii inferioris proprio* (8) *Cowperi*. Videlicet soluto a gingiuis labio deprehendes iacere aliud par musculorum longitudinale, rectum, crassiusculum, duas tresue lineas latum, infra alueolos dentium incisoriorum adnitum, et directe in menti carnem turgidam exporrectum, cuius ope mentum quadantenus eleuari posse mihi visum est, vnde *hos* potius, quam illos leuatores menti non inepte vocare licuisset. Sunt ergo *eleuatores Santorini* et *Albini* a *Cowperianis* longe *diuersi*. *Illi* enim vtrinque circa alueolum dentis canini; *hi* infra alueolos incisorum oriuntur: *Illi* incuruo incessu congrediuntur in labio; *hi* recta in menti carnem demittuntur: *illos Cowperus* Tab. XXXI. pro interna parte depressoris labii inferioris vulgo quadrati dicti, habere, et numero 25. indicare visus est; *hos* in eadem figura numero 26. distinctissime repraesentauit. Laudandus igitur est Dexterrimus *Heisterus* (9), qui solus hunc *eleuatorem* verum *Cowperi*, neglecto altero restituit.

V.

(6) C. I. §. XXIX. (7) L. III. C. XIX. (8) Tab. XXXI. nr. 26.
(9) Comp. Anat. §. 319.

V. Faſciculos laterales, ſiue acceſſorios ad orbicularem inferiores *Winslowii* (1) et (2) *Albini*, quos Inuentori *Santorino* (3) *inferioris labri productores* nominare placuit, ad contrahenda labii latera ſedemque mediam in priora producendam non ſolum ſed et corrugandam cum ſemiorbiculari conſpirare exiſtimo; idque eo magis, quod hic tanta latitudine non diffundatur, quanta in ſemiorbiculari labri ſuperioris obſeruari ſolet.

VI. Muſculi *digaſtrici* corpus poſticum ſemper vnicum eſt et ſimplex; ſed poſtquam *tendo intermedius* angulum oſſis hyoidis reliquit, ſaepiſſime in *duos* diſtinctos ventres iterum dirimitur, interdum in vno tantum latere, interdum in ambobus ſimul. Dico *ſaepiſſime*; vix enim vllus muſculus alius eſt, qui tam frequentes variationes admittat. Meminit earum quoque (4) Cel. *Albinus*. Si vtrinque duplices ſunt: bini interiores acceſſorii vel ita congrediuntur, vt extremitatibus ſuis in ipſam menti mediam ſedem inſerantur; vel antequam ad mentum acceſſerunt, circa medium muſculi mylohyoidis non ſine mutua confuſione decuſſantur, ita, vt, qui a dextris incedit, in latere menti ſiniſtro, et qui a ſiniſtris, in dextro latere infigatur, ambo autem ſub ventrium principalium extremitatibus abſcondantur. *Digaſtricus* ſtylohyoidem *rariſſime* non perforat. Perforatio autem fit longe ab oſſis hyoidis angulo. Relicto hoc demum traiectu tendo medius ad dictum hunc angulum accedit, ibique per commiſſuram membranaceam firmatus ad mentem denique reflectitur. Haec commiſſura quamuis ſaepe nil ſit niſi membrana tendini pertinaciter adhae-

 rens

(1) §. 596. (2) L. III. C. XVII. (3) C. I. §. XXX. (4) L. III. C. XLII.

rens et accreta, a *Cowpero* Tab. XXIII. et XXXI. optime expressa: aliquoties tamen et annularem structuram deprehendi, quae tendini tamquam trochleam traiicienti motum reciprocum liberrimum concessit. Quemadmodum vero hic *musculus*, fixa per eleuatores suos maxilla, *os hyoides* cum partibus adhaerentibus, in deglutitione potenter *eleuat*, quem vsum *Cel. Winslowius* sapientissime introduxit: ita etiam idem hic musculus vicissim maxillam, laxatis eleuatoribus, et osse hyoide per sterno- et coraco-hyoides deducto et fixo, multo commodius deprimit, quam si in angulum posteriorem infixus fuisset. Ore enim clauso maxillae processus condyloides in cauitate pone apophysin zygomaticam residet. Quando autem os aperire velis, idem processus situm mutat, et ope musculi pterygoidis externi super apophyseos istius tuberculo versus anteriora producitur; quod tuberculum, cum multo *demissius* positum sit quam cauitas, necessario efficit, vt angulus maxillae posterior inter aperiendum os aliquantum descendat. Quodsi igitur *digastricus* huic angulo insertus fuisset: aut huius descensui inter agendum quam maxime obstitisset; aut illius exortus pone apophysin mastoidem et directio mutari debuisset. An autem et caput moueat, vti ingeniosissimo alicui Viro visum est? id fieri quidem posse non negauerim; *quamuis certe huic officio paratus non sit.*

VII. Sed quoniam ad os hyoides et deglutitionem peruentum est, non possum non paullo fusius explicare insignem *vtilitatem*, quem musculi vicini in promouenda saliuae excretione ex *glandula whartoniana* praestant. Haec

Haec enim glandula mufculum mylohyoidem et digaftricum, infimulque maxillam et os hyoides interiacet, vt ab illis durante eorum actione et offe hyoide ad maxillam adducto blande prematur et faliua in ductum excretorium determinetur. Ductus autem ipfe dum e glandula egreditur, a vicinis partibus folutus non eft, vti *ductus ftenonianus*, fed glandulae fublingualis fuperficiei incumbit; cuius membranae intexitur, et fimul cum illa compreffionem mufculi cerato-gloffi defuper, et mylohyoidis, qui inter vtramque glandulam profunde fe infinuat, inferne perpetuo experitur. Quemadmodum vero glandula fublingualis cum maxillari arcte cohaeret, vt illa faepe pro cauda huius haberi poffit: ita hunc ductum excretorium etiam in homine *pro ductu communi* ad vtramque glandulam pertinente habendum effe mihi videtur. Quamuis enim *ofcula* illa *excretoria*, quae *Cel. Heifterus* (5) ad latera linguae iuxta monitum oculatiffimi *Morgagni* (6) introducta delineauit, plane non negauerim: femper tamen ita mihi apparuere, ac fi non e glandula illa fublinguali prolongata, fed *ab aliis* quibusdam glandulis *folitariis*, quales labiales effe folent, et quae iuxta latus linguae turgefcentiam quandam, membrana in nonnullis obiectis *caudata* obtectam, efficiunt, prouenirent. Quam *opinionem* vlterius examinandam relinquo, facile illam deferturus, vbi primum certiora vel propriis vel alienis disquifitionibus edoctus fuero.

VIII. Mufculus *ftylohyoides alter* frequentius adeft, quam vulgo putatur; vnde non folum fides habenda (7) Cow-

(5) Comp. An. Tab. VII. fig. 33. (6) Adu. Anat. VI. An. C.
(7) Cap. XIII. §. XLVI.

Cowpero, *Duglaſſio* (8) et *Santorino* (9) eſt, ſed et huius *deſcriptio* vt *genuina* et ſatis *conſtans* admittenda. Sed nec *Cowperus*, nec *Duglaſs*, nec *Santorinus* pro *detectoribus* primis haberi poſſe mihi videntur: putauerim enim, illum iam ab *Euſtachio* (1) delineatum eſſe. Recipiendus eſt igitur in poſterum vt *ordinarius*, in muſculorum cenſum, vti iam fecere *Duglaſſius* et *Albinus* (2). Plerumque ipſi corniculo oſſis hyoidis affixus eſt, vnde nomen ſtylo chondro hyoides non ineptum. Tum vero ligamenti, quod vulgo ex proceſſu ſtyloide ad haec cornicula deducunt Anatomici, ne veſtigium quidem vllum apparet; vti in *hiſtoria* mea *ligamentorum* ampliter declaraui.

IX. Si qui ſunt *muſculi*, qui negotium faceſſunt profectori alicui: hoc certe de *linguae*, *vuulae* et *pharyngis* muſculis dicendum eſt, quamuis non tam ipſa rerum multiplicitas, quam potius ambigua Auctorum fluctuatio miraque nominum confuſio hanc difficultatem pariat, quae fortaſſe nimia quoque ſubtilitate adaucta eſt. Incipiamus ab vuulae muſculis. Huius *duo paria* primus *Fallopius* (3) deſcripſit atque ad fauces retulit. Deſcripſit autem ita, vt verius quicquam dici vix poſſit. Atque hi ſunt illi bini, quos *Platerus* (4) par *gracile et latum* faucium; *Laurentius* (5) *primum et ſecundum* par faucium; *Spigelius* (6) et *Bauhinus* (7) *par dilatans* faucium *ſphenopharyngeum* et par *ſecundum* vocitauerunt; qui omnes in deſcriptione ſua *Fallopium* maximam partem fideliter ſequuti ſunt. Poſtquam vero circa tempora *Riolani* nomina

(8) Deſcriptio comparata muſculorum C. XII. §. 54. (9) C. VI §. 20.
(1) Tab. XLI. fig. XI. (2) L. III. C. XLIV. (3) Obſeru. Anat.
(4) Tab. p. 76. (5) Andr. Laurentii Hiſtor. Anat. L. V. C. XIX.
(6) De H. C. fabrica L. IV. C. VI. (7) L. III. C. LXXXVI.

mina propria rebus imponendi mos inualuit, cum nominibus horum musculorum etiam descriptiones mutatae sunt. Vocati igitur a *Riolano* (8), et iuxta huius Viri autoritatem a *Bauhino* (9), *Veslingio* (1), *Dominico de Marchettis* (2) *pterygostaphylini externi et interni*, cum tamen ab his processibus neutiquam oriantur. Musculi enim externi vel et *superioris pars altera* e radice apophyseos spinosae ossis spenoidis, *altera* ex membrana tubae oritur; *haec* in spinam alae internae secundum longitudinem innascitur, *illa* circa corniculum reflectitur. Has duas partes vno nomine a figura desumto, *circumflexus palati*, *Albinus* (3) comprehendit: *Winslowius* (4) autem duobus nominibus insigniuit, dum partem *breuiorem pterygosalpingeum*, *longiorem* vero *spheno-salpingo-staphylinum* vocitauit. Qua ratione existimationi *Valsaluae* (5) optime consulitur, qui ab aliis notatus est, quod hunc musculum vt nouum venditarit, id quod de altera breuiore parte omnino admitti potest. Neque etiam *Pterystaphylinus internus* ab inferna parte alae internae educitur, vti *Riolanus* vult; sed, vt recte *Fallopius* docet a propinqua parte musculi antecedentis, hoc est, circa apicem acutum seu apophysin spinosam ossis sphenoidis; quae regio seu vicinia nihil aliud est, quam portio ossea ossis petrosi, quae ad formandam tubam concurrit, cuius originis respectu *Valsalua* (6), *Santorinus* (7), *Winslowius* (8) huic musculo *salpingo-* vel *petro-salpingo-staphylini* nomen strictius dederunt, cum *sphenosta-*

(8) Arthropogr. L. V. C. XIX. (9) L. III. C. LXXXIII. (1) Syntagm. C. XI (2) Anatomia C. XI. (3) L III C LXI (4) Traité de la tête §. 498 499. (5) Tract. de Aure C. I. §. XVIII. (6) C. II, §. XIX. (7) C. VII. §. XV. (8) l. c. §. 501.

noſtaphylinum Cowperi nimis generale eſſet. *Albinus* (9) autem ab officio ſuo *leuatorem palati mollis* vocauit. Ceterum inſertio horum binorum parium in vuulam omnino *cum quadam latitudine* accipienda eſt, ita, vt totum velum illud molle oſſibus palati continuum illo termino intelligatur. *Illud* par limbo oſſium *propius* eſt, *hoc* vero regionem *humiliorem* occupat. Vſum vero et officia adeo ſollicite et neruoſe *Albinus* excuſſit, vt ſuperaddi nihil poſſit.

X. *Pharyngoſtaphylinus Valſaluae* (1) et *thyroſtaphylinus*, ſeu *thyropalatinus Santorini* (2) omnino *vnus idemque* muſculus eſt, neque tot minutiae cum *Santorino* ſectandae. Aſſentior igitur cum *Winslowio* (3), tum *Albino* (4), qui vtrumque ſub nomine *palatopharyngei* quam optime deſcripſit.

XI. Muſculus *Ceratoſtaphylinus* a *Cel. Heiſtero* (5) detectus omnino vti *ſingularis* muſculus admitti debet. Oritur tenaci tendine ex alae interioris corniculo, et in velo palati cum inſertione pterygoſtaphylini externi eiusdem Auctoris commiſcetur. Mallem etiam ipſum nomen ab *Auctore* effictum retineri, quam cum pterygoſtaphylino inferiore *Winslowii* (6) commutari. Denique *palatoſtaphylinus Duglaſſii* (7), et *azygos Morgagni* (8) et *Albini* (9) nonniſi *vnus* muſculus ſunt, et falſo pro duobus diuerſis ab *Heiſtero* (1) venditantur. *Morgagnus* enim

(9) L. III. C. LX. (1) C. II. §. XIX. (2) C. VII. § XII. (3) l. c. §. 496. 497. (4) L. III. C. LVIII. (5) C A. not. 72. (6) l. c. §. 500. (7) l. c. §. 76. (8) Adu. An. I. n. 8. (9) L. III. C. LXII. (1) l. c. §. 326. n. 6. 7.

enim per *musculos columellae* dicto loco non palatostaphylinum aliquem sed *pharyngo-* et *thyreo-staphylinos*, de quibus ante (X.), intellexerat.

XII. *Fallopii tertius faucium musculus* est proprie omnis ille apparatus, quem vulgo hodie nominibus *Cephalo-salpingo-pterypo-mylo-hyo-chondro-syndesmo-thyreo-crico-pharyngeorum* indigitare solemus. Nuperrime autem *Albinus* (2), tot nomina non sine ratione abhorrens, illum in *tres* portiones diuisit, quarum *vna* a cartilaginibus laryngis orta ipsi est *constrictor pharyngis inferior*, *altera* ex osse hyoide educta *constrictor pharyngis medius* *tertia* denique a capite et vicina maxillarum et linguae regione deriuata *constrictor pharyngis superior*. Sed omnem rem ab ouo repetamus. *Fallopii* descriptionem presse sequitur *Platerus* (3). Sed *Laurentius* (4) in *duos* musculos diuidit, dum partem *inferiorem*, quae cartilaginis scutiformis lateri adnascitur, a reliquis ad os hyodes accedentibus separat, fibras autem *ad linguam properantes* plane negligit. Hae partes sunt musculi pharyngis *cephalopharyngeus* et *oesophageus Riolani* (5), qui autem terminos primi non in osse hyoide sed in ipsa pharyngis tunica ponens occasionem dedit musculos multiplicandi. *Riolanum Veslingius* (6) et *D. de Marchettis* (7) imitantur. *Spigelius* (8) et *Bauhinus* (9) nomina noua *Riolani* quidem retinuere; sed totum *Fallopii* apparatum dixerunt *cephalopharyngeum*, *oesophageum*

(2) L. III. C. LIV. LV. LVI. (3) In Tabulis. (4) l. c. L. V. C. XIX. par tertium et quartum faucium. (5) l. c. L. V C. XVIII (6) l. c. Cap. II Gulae par primum et sphincter. (7) l. c. C. XI. par primum et quartum. (8) l. c. L. IV. C. VI. Faucium constringens par secundum et primum. (9) l. c. L. III. C. LXXXVI. par tertium et quintum.

geum tamquam *diuerſum* ab illo muſculum conſiderantes; cui opinioni ſine dubio anſam dedit, quod *Laurentius* inſertionem *Fallopianam* in originem et principium mutauerat, *hi* autem libros magis quam cadauera conſulerent. Poſtquam vero *Valſalua* (1) muſculos *hyopharyngeos* tamquam *nouum* par reſtituiſſet, inſequentium temporum Anatomici quidam, ad harum variarum denominationum hiſtoriam et ſcaturiginem non attendentes non ſolum *hos* receperunt, vtpote qui negari non poterant; ſed et *cephalopharyngeos* retinuerunt; qui ambo tamen reuera nihil aliud ſunt, quam illae ipſae fibrae, quas *ab ea parte, qua baſis capitis ceruici iungitur, deſcendere et in latera hyoidis inſeri* dixerat *Fallopius*. Singulares igitur cephalopharyngei ab hyopharyngeis diſtincti non dantur, ſiquidem et illi, qui diligentius circa hanc partem verſati ſunt, vt *Valſalua*, *Santorinus*, *Albinus* tale par non agnoſcunt; quem enim *Santorinus* (2) deſcribit, muſculus *azygos extraordinarius* eſt, et cum cephalopharyngeo neutiquam commiſcendus. Quod autem *Valſalua* (3) cephalopharyngeo *pharyngoſtaphylinum ſuum* ſubſtituere voluerit, in eo quidem nimium a tramite deflexit; ſi enim thyreo-pharyngo-ſtaphylinum (X.) in ſitu ſuo detegere velis, id facile impetrabis, ſi thyreopharyngeum a latere cartilaginis ſcutiformis ſolutum reflexeris.

XIII. *Hyopharyngeo Valſalua* (4) *duplicem* originem aſſignauit, cornua oſſis hyoidis, et appendices cartilagineas, ſeu graniformes. In qua re a *Santorino* (5) ani-

---

(1) l. 2. C. II §. XX. (2) l. c. C. VII. §. II. (3) l. c. C. II. §. XX. (4) l. c. C. II. §. XX. (5) l. c. C. VII. §. VIII.

nimaduerſus eſt, qui non duplicem, ſed vnam ſimplicem *continuam* inſertionem eſſe vult. Equidem fateor meas obſeruationes magis cum *Valſaluianis* conuenire, vnde *chondro-pharyngei* nomen non inepte a *Duglaſſio* (6) introductum eſt: putem vero, accuratiſſimum *Albinum* (7) omnium optime litem dirimere, qui iſtiusmodi varietates diligenter annotauit. Contra vero *Santorini* monitum *aliud* negligi non debet, quando eodem paragrapho dicit, „*fibras eas, quae in faſciculum collectae, ab ex-*„*tremis cornubus deriuantur, in inferiorem pharyngis par-*„*tem deſcendentes ſub thyropharyngeo produci*„. Videlicet *fibrae hyopharyngei* tam *ſurſum*, quam *recta* ad latus ac *deorſum* in pharyngem proiiciuntur, quas poſtremas fibrae thyreopharyngei proximae ſuperſcandunt.

XIV. Diximus ſupra (IX.), muſculorum faucium par primum *Fallopii* a *Spigelio* et *Bauhino ſphenopharyngeum* vocatum eſſe. Hoc vero par poſtquam ab aliis non ad fauces in genere, ſed ſpeciatim *ad vuulam* relatum eſt: mutato nomine vocabulum tamen non euanuit, ſed muſculis aliis impoſitum; non ſine magno et diſcentium et ſecantium incommodo. Ante omnia igitur notandum eſt, *aliud* par eſſe ſphenopharyngeum *Spigelii* et *Bauhini*; *aliud* ſphenopharyngeum *Riolani*; *aliud* denique ſphenopharyngeum *Veslingii* et *D. de Marchettis.* *Riolanus* (8) enim muſculos ſuos ab acuto apice oſſis ſphenoidis deducit; *Veslingius* (9) et *D. de Marchettis* (1) ex ſinu vel cauitate alarum. Porro *D. de Marchettis* mu-

(6) l. c. Cap. XV. 74. II. (7) l. c. Lib. III. Cap. LV. (8) l. c. L. V. Cap. XVIII. (9) l. c. Cap. III (1) l. c. Cap. XI.

musculos suos noua voce, par *pterygopharyngeum* adpellauit, quae denominatio quum illorum origini magis conuenire videretur, postea a *Cowpero*, *Santorino* (2), *Duglassio* (3) adscita est; neglecto interim sphenopharyngeo *Riolani*. *Valsalua* (4) autem, cui et ipsi sphenopharyngei nomen non arridebat, et hos pterygopharyngeos et mylopharyngeos a *Duglassio* (5) et *Santorino* (6) postmodum superadditos omnes in vnam massam coniectos nouo *glosso-pharyngei* nomine fabrefacto indigitauit, cuius quidem deuiationis caussa sine dubio exinde prouenit, non quod pterygo- et mylo-pharyngeos non viderit, vti *Santorinus* putarat, sed quod examina sua in obiectis ex corpore euulsis, non in situ naturali, instituerit: quo posito descriptiones paris glossopharyngei *Valsaluae* et pterygo-ac mylo-pharyngei *Santorini* proxime inter se conueniunt. Hic vero *Santorini* diligentia imprimis laudanda est; qui quamuis ante ipsum quidem *Duglassius* mylopharyngeum indicauerit, vti recte *Heisterus* monet: nihilominus tamen non solum originem huius paris (7) ex inferiore maxilla, pone vltimum dentem molarem, et alterius pterygopharyngei (8) ex alae interioris corniculo strictius indicauit, sed etiam incessus horum musculorum recuruos et versus occiput reflexos fusius explicauit. In qua re accuratissimum alias *Winslouium* multum antecessit, qui partim mylopharyngeum distincte

(2) l. c. Cap. VII. § III. (3) l. c. Cap. XV. §. 74. VII. (4) l. c. Cap. II. § XX. (5) l. c. §. 74. VI. (6) l. c. Cap. VIII. §. V. (7) Portio constrictoris superioris pharyngis Albini, qua ex interna parte maxillae inferioris iuxta superiora fossulae molaris postremi procedit. L. III. Cap. LVI. (8) Portio ex interna totius longitudinis hamuli processus pterygoidei, et huius ipsius lamellae internae ad hamuli radicem Albini l. c.

ſtincte non (9) detexit; (deſcriptio enim myloglosſi ſui (1) huc, vti *Albinus* (2) ſuſpicatur, minime quadrat) partim pterygopharyngeum cum petro- et ſalpingo-pharyngeo commiſcuit, qui ambo tamen quoad originem toto pollice diſtant, nec eodem tramite recurro incedunt.

XV. *Periſtaphylo-pharyngei* (3) *Winslowiani* mihi quidem nil aliud eſſe videntur, quam ea oeſophagei portio, quam *Cowperus* ex tendine pterygoſtaphylini ſui educit et Tab. XXVIII. fig. II. lit. L. diſtincte repraeſentat. Qua in re num recte auguratus ſim, nemo melius niſi ipſe *Cel. Autor* iudicare poteſt. Certe huius deſcriptio cum illius icone, et icon cum obiecto plurimum concordat: tum vero ad hyperopharyngaeum *Santorini* (4) aut palatopharyngeum *Albini* (5) referri non poteſt. Recte autem *Cowperus* ſe ipſum correxit, dum hanc portionem pro pterygopharyngeo, vti pridem fecerat, haberi noluit, quippe a quo occultatur, ita, vt ſi illam detegere velis, hunc prius a corniculo et ala ſoluere debeas.

XVI. Sed quid denique factum eſt ex *ſpheno-pharyngeo Riolani*? (XIV.) An igitur nullus muſculus ex acuto apice oſſis ſphenoidis in pharyngem egreditur? Non euanuit quidem ipſe muſculus, ſed tamen in alium mutatus eſt ab Autoribus. *Duglaſſius* (6) et *Santorinus* (7)

 Sal-

(9) l. c. §. 480. (1) l. c. §. 517. (2) Lib. III. Cap. LVI. not. (3) l. c. §. 478. (4) l. c. Cap. VII. §. XIII. (5) l. c. Lib. III. Cap. LVIII. not. et Winsl. l. c. §. 478. (6) l. c. Cap. XV. §. 74. VIII. (7) l. c. Cap. VII. §. IV.

ſalpingopharyngeum vocitarunt. *Ille* originem in *extremitate* partis *oſſeae tubae*, hic in *poſtica crepidine cartilaginea* tubae ponit. *Winslowius* (8) *duos* producit, petropharyngeum et ſpheno-ſalpingo-pharyngeum. Poſſunt autem hi omnes facile conciliari. Cum enim principium muſculi non teres, ſed paullum diffuſum ſit: denominatio etiam ab origine deſumta latitudinem quandam admittit; inde, poſita origine *Duglaſſii*, petropharyngeus, et iuxta *Santorinum* ſalpingopharyngeus, vel vtroque nomine dici poteſt. Atque haec eſt ſine dubio illa *portio conſtrictoris pharyngis ſuperioris Albini* (9), quae ab imo petroſo procedit. Sed liceat et *meas* interſpergere obſeruationes. Ego non modo ex iisdem principiis, ſed et *ex ipſo apice* proceſſus ſpinoſi oſſis ſphenoidis muſculum teretem oriri aliquoties vidi. Ambo ſibi lateraliter accumbentes, recta (vt *Santorini* verbis vtar) demiſſi in pharyngem deſcenderunt. Ad hos autem mylo et pterygo-pharyngei verſus poſteriora reflectentes ita accedunt, vt aliquas fibras cum illis commiſceant, et quaſi *repagulum* aliquod nanciſcantur, quo prolongata eorum caruatura ſuſtinetur. Deficiente hoc poſtremo muſculo, certe *expanſio* quaedam *tendinea* ex eodem apice egreditur, quae eiusdem repaguli vicem praeſtet. Muſculus autem *ſalpingopharyngeus Santorini*, *Duglaſſii*, et *Winslowii* plane non confundendus eſt cum *ſalpingopharyngeo Albini* (1), quem hic Auctor ex *Euſtachio* et *Drackio* reſtituit; quem vero ipſe *ego* hactenus detegere non valui.

XVII.

(8) l. c. §. 476. (9) l. c. Lib. III. Cap. LVI. (1) l. c. Lib. III. Cap. LVII.

XVII. Cuſo ſemel nomine *gloſſopharyngei* a *Valſalua*, quo quid intelligi debeat, ſupra (XIV.) indicauimus, placuit *Santorino* (2) illud retinere. Cum vero longe alium fibrarum faſciculum hoc vocabulo indicet, mire ſed inutiliter certe ſe torquet, vt ſuam deſcriptionem cum *Valſaluiana* conciliet, quae tamen re ipſa diſcrepant. Eſt autem *gloſſopharyngeus Santorini* nil aliud niſi illa fibrarum *portio geniogloſſi*, quae ex mento lateraliter demiſſa et inflexa ſub ceratogloſſo retrorſum incedit, tum partim ſurſum diffuſa ſub ſtylogloſſo et mylopharyngeo abſconditur, partim vero ſtylopharyngeum eo praeciſe loco, vbi hic in pharyngem implantatur, transgreſſa cum hyopharyngeo verſus poſteriora properat. Quae poſtrema *ea* eſt, quam *Winslowius* muſculum *geniopharyngeum* (3) nominauit; *Albinus* autem ad *conſtrictorem pharyngis ſuperiorem* (4) retulit. Quapropter, ſi mylopharyngeum in cenſum muſculorum pharyngis recèperis, et geniogloſſum bene deſcripſeris: gloſſopharyngeum nomen plane exterminari deberet, niſi portio illa, quam *Albinus* ad eundem conſtrictorem componendum ex latere radicis linguae deriuat, obſtaret, de cuius exiſtentia, vti autoritatem et fidem Viri veneror, ita ſententiam meam, ob defectum ſufficientis indagationis ſuspendo.

XVIII. Qualis confuſio eſt in deſcribendis muſculis pharyngis: talis etiam propemodum deprehenditur in *myographia linguae*. *Veſalius* (5) *quatuor* paria enumeraue-

(2) l. c. Cap. VII. §. VI. (3) l. c. §. 480. (4) l. c. Lib. III. Cap. LVI.
(5) C. H. Fabric. Lib. II. Cap. XIX.

rauerat, cum *vno nono* ſimplici. De pari eius ſecundo et tertio nulla vmquam fuit diſputatio. Omnes enim Anatomici iſtud pro *ceratogloſſis*, hoc pro *ſtylogloſſis* aſſumſerant; niſi quod iſtud poſtmodum ratione diuerſae originis ex oſſe hyoide in tria alia nempe in *baſio-chondro-cerato-gloſſos* (6) diuiſum fuerit. *Nonus Veſalii* a *Columbo*, *Fallopio*, *Riolano*, *Spigelio* et ſequentibus ſcriptoribus omnibus pro *genioglоſſo* erat agnitus. Sed par eius *primum quale* fuerit, nemo recte aſſequutus eſt. *Fallopius* (7) ſuſpicabatur, per illud intelligi debere par *geniohyoides*; quod et veroſimillimum. Expunxit igitur hoc par ex catalogo muſculorum linguae, et ad os hyoides retulit, cui et hodienum annumeratur. *Columbus* (8) *Veſalium* aut correxit, aut aliud par primum ſubſtituit; quod autem intellectu aeque obſcurum eſt. *Tales* enim muſculi, *quales Columbus* deſcribit, non dantur. Quapropter et *hoc* par *Fallopius*, *Laurentius*, *Riolanus* reiecerunt, quos merito ſequuti ſunt *omnes* Auctores genuini. Solus *Spigelius* (9) vtrumque par tam *Veſalii* quam *Columbi* inepte retinuit, *illudque* par *tertium hypſilogloſſum*, *hoc* par *primum linguale* vocauit, in quo Compilatorem ſimilem *Bauhinum* (1) aliqua ex parte ſectatorem habuit. Sed neſcio quo pacto etiam Dexterrimus *Duglaſſ* (2) ſeductus eſt, vt lingualem ſuum pro linguali *Spigelii* et *Columbi* habuerit, qui tamen diuerſiſſimi ſunt. *Iſti* enim bini *Viri* originem in baſi oſſis hyoidis ponunt; *Duglaſſius* autem in baſi linguae. *Lingualis Spigelii nullibi*

(6) vid. Duglaſſ. l. c. Cap. XIII. §. 59. Albinus l. c. Lib. III. Cap. XLIX. L. LI. Winslow. l. c. §. 520. (7) Obſ. Anat. de muſculis oſſis hyoidis. (8) De re Anatom. Lib. V. Cap. XIII. (9) l. c Lib. IV. Cap. VI. de lingua. (1) l. c. Lib. III. Cap. XC. IV. (2) l. c. Cap. XIII. §. 61.

libi exſtat; ſed *Lingualis Duglaſſii idem* eſt cum *Linguali Albini* (3), qui detegitur, quando baſio-chondro-cerato-gloſſum ab oſſe hyoide et a latere geniogloſſi ſolutum linguam verſus reflexeris.

XIX. Denique *quartum par Veſalii* aeque *fictitium* ac primum tamen eadem fata non expertum eſt; ſed ab *omnibus* fere ſcriptoribus, *Fallopio et Neotericis* exceptis, *myloglosſi* nomine conſeruatum. Certe, ſi aſſumas cum *Veſalio*, *hos muſculos ex inferioris maxillae lateribus intus ad dentium molarium radicem*, et quidem *ſtrictim ex oſſe* enaſci: tales nullibi dari aſſentior, niſi forte mylopharyngeus ex maxilla inferiore ortus pro hoc pari accipiendus ſit. Si vero per hos terminos tantummodo *regionem* iſtam circa maxillam *cum quadam latitudine* intelligere liceret: magnam ſane quoad reliqua ſimilitudinem inter hunc muſculum *mylogloſſum Veſalii* et *lingualem Albini* ac *Duglaſſii* deprehenderes. Imo putauerim, *muſculum* illum, de cuius ſtructura et terminis *Verheyhenius* (4) in deſcriptione ſua dubitauit, et quem *Veslingius* (5) olim delineauit, nil aliud eſſe niſi *lingualem Albini*, etiamſi hi duo Viri *nomen mylogloſſum* vna cum *definitione*, vtpote tum temporis magis *recepta*, adoptauerint; in qua opinione eo magis confirmor, quod et ramum nerui lingualis, qui hunc muſculum comitari ſolet, *Veslingius* ſimul annotauerit.

XX. Circa *Laryngis muſculos* quamuis per decem annorum decurſum ſaepe ac multum verſatus fuerim: omnia

(3) l. c. Lib. III. Cap. LIV. (4) Anat. C. H. Tract. IV. Cap. XIX. (5) l. c. Tab. XI. fig. XIV. E 2.

omnia tamen, quae tum temporis vt singularia notaueram, a nouissimis Scriptoribus plurimam partem diserte Tabula X. Figura II. exposita sunt. Coronidis loco non possum non *iconem* communicare, qui musculum *cricothyreoidem duplicem* iuxta ideam *Albini* (6) *ex toto distinctum* habitu adeo natiuo exprimit, vt putares, aut descriptionem ad figuram aut hanc ad illam studio accommodatam fuisse, cum tamen illam iam anno 1733. delineari curauerim. Denotatur autem

Tabula X. Figura II.

a. Cartilago scutiformis.
b. Annulus cartilagineus tracheae.
c. Musculus cricothyreoides dexter anterior.
d. —— —— —— —— lateralis.
e. —— —— —— sinister anterior.

OB-

(6) l. c. Lib. III. Cap. LXIII.

OBSERVATA IN SECTIONE IVVENIS 1735. CVIVS MANVS ET PEDES MONSTROSI ERANT.

AVCTORE
Iosia Weitbrecht.

NVtritus eſt per aliquot annos in Academia iuuenis quidam, nomine Fomka (Thomas), qui in artuum ſuorum extremitatibus variis defectibus laborabat; quo per morbum e viuis ſublato, operae pretium duxi inquirere, quales mutationes organa ſub habitu iſto externo monſtroſo ac difformi latentia paſſa eſſent. Harum mutationum breuem dabo deſcriptionem, quam illi, qui circa indagandas monſtrorum origines verſantur, in ſuos forte vſus conuertere poterunt. Tabula X. Fig. III. - V.

Erat homo ſtaturae breuis; in manu dextera gerebat pollicem et vnum digitum; in manu ſiniſtra pollicem, et duos digitos, in pede autem vtroque pollicem et vnum digitum. Harum extremitatum articulationes erant incuruam poſitionem nactae, ita, vt digiti non niſi tamquam ſcarabaeorum cornua verſus ſe inclinari potuerint, hinc ipſe difficulter aliquid apprehenderit, et difficilius longe inceſſerit. Si crura in directum iacebant cum corpore et femore, vix quicquam praeternaturale circa poplitem apparebat; in inceſſu autem vterque pes genu flexionem vix admittebat. Acetabuli autem iunctura ita erat comparata, vt femora attolli quidem, ſed dextrum non niſi abduci, ſiniſtrum autem non niſi adduci poſſet.

Interna viſcera cadaueris labe omni carebant, praeter cauſſas et effectus morbi, diarrhoeae. Polypi autem omnia vaſa tam venoſa quam arterioſa obſederant.

Oſſa humeri, cubiti, femoris, tibiae a ſtructura ordinaria nil receſſerant; ſed omnis degeneratio in oſſibus carpi, metacarpi, tarſi et metatarſi atque in phalangis digitorum deprehendebatur; quae nunc tamquam praeſentia deſcribo.

Oſſa carpi ſunt ſeptem in quauis manu, magis quidem irregularia quam in ſtatu naturali, ſed diſcernibilia tamen; iuncturarum faciebus tam inter ſe quam ad radiorum et oſſium metacarpi articulationem accommodatis. Quatuor ordinem ſuperiorem conſtituunt; tria inferiorem; deeſt enim os ſeptimum, omnino quidem in dextera, ita vt inter os ſextum et octauum hiatus re-

Tabula X, Figura III. linquatur, os autem octauum vnica cauitate glenoide gaudeat pro recipiendo oſſe metacarpi digiti vnici. Contra vero in ſiniſtra manu os octauum non modo, vti naturaliter eſſe ſolet, pro locandis duobus oſſibus metacarpi duas foſſulas habet, ſed et multo craſſius ac latius diffu-

Figura IV. ſum euaſit, dum os ſeptimum tuberoſum cum illo coaluiſſe videatur. In dextera os quintum ſolum cum metacarpo pollicis iungitur, et os ſextum iunctura cum metacarpo caret; in ſiniſtra autem os metacarpi pollicis cum ambobus oſſibus quinto et ſexto articulatur. Bini ordines etiam motum inter ſe admittunt.

In

In vtraque manu finguli pollices et digiti fuis offibus metacarpi gaudent. In finiftra bini digiti funt auricularis atque annularis, vti patet ex articulatione cum carpo, atque ex ipforum offium proportione. Digitus autem in dextera, ratione craffitiei offium et ratione bafeos offis metacarpi, index effe videtur, fed articulatio cum carpo vel annularem vel auricularem effe vel vtriusque vicem gerere indicat.

Os metacarpi pollicis dextri in iunctura cum carpo deficit, non enim bafi duplicata gaudet in medio eleuata, fed in foueolam glenoidem folam excauata eft. Extremitas eius altera, quae iuncturam cum phalanga prima conftituit, nimis compreffa eft. Os metacarpi pollicis finiftri autem cum ftatu naturali perfecte conuenit.

Os metacarpi digiti dextri in bafi fua proceffum habet fubrotundum pro articulo cum carpo; vnde os indicis quodammodo, vti diximus, repraefentat; fed tuber laterale fermo deeft. Capituli autem extremitas inuerfe quafi appofita eft, quippe in dorfo diffufa palmam verfus anguftatur, cum naturali ordine in palmae regione in duos proceffulos explanari debeat. Offa metacarpi digitorum annularis et auricularis in finiftra a naturali ftatu non recedunt; et iufto modo tam inter fe quam cum carpo articulantur; folum os metacarpi annularis in iunctura bafeos cum carpo rotundius eft, et iunctura laterali pro offe metacarpi medio caret. Deficiunt igitur in dextera manu offa metacarpi tria, in finiftra autem duo: ita, vt ne veftigium vllum fit repertum.

Oſſa phalangarum tam pollicum quam digitorum in vtraque manu quoad formam, atticulationem et appendices cum habitu naturali omnino conueniunt; hoc tamen cum diſcrimine, quod phalanga prima pollicum iuſto tenuior, extima autem nimis compreſſa et applanata, et in apicibus plane perforata ſit pro vaſorum transitu. In reliquis digitis phalanga capitulis non adeo rotundis ſed magis appreſſis gaudet, extimum autem os digiti auricularis ſiniſtri nimis extenuatum eſt.

Oſſa tali et calcis naturali proportione, ſtructura et articulatione incedunt. Calcaneum dextrum autem in latere externo proceſſulum habet, cui fibula inſiſtit. Oſſa nauicularia protuberantia laterali carent. Dextrum articulatur cum talo poſticitus, lateraliter cum oſſe cuboide, anterius cum oſſe cuneiformi vnico; ſiniſtrum autem cum cuneiformibus duobus. Os cuboides dextrum articulatur cum calcaneo, cum oſſe ſcaphoide et cum oſſe metatarſi vnius digiti; ſiniſtrum vero praeterea cum oſſe cuneiformi altero; ceterum et ſulcus pro transitu tendinis peronei poſtici perfectus adeſt. Sola oſſa cuneiformia multum differunt. In dextero pede vnicum, in ſiniſtro duo adſunt. Ambo maiora iuncturam ſuam anteriorem ita exſculptam habent, vt oſſa metatarſi pollicis non directe ſed lateraliter applantentur, atque ita extremitas pedis ad curuaturam illam diſponatur.

Os cuneiforme ſiniſtrum alterum reuera nomen ſuum tuetur, quippe inter os primum, ſcaphoides et cuboides inclauatum eſt.

Oſſa

Oſſa metatarſi tam quoad formam quam quoad iun-cturas naturalibus non ſunt ſimilia, imo tota digitorum et pollicum extremitas maiorem quam reliqua oſſa diſ-formitatem prae ſe fert. Iunctura oſſis dextri pollicis ſimplex et oualis, ſiniſtri autem duplex eſt, per inter-mediam lineam protuberantem diſtincta. Oſſa metatarſi digitorum proceſſu laterali, quo alias os quintum gau-det, deſtituuntur. Dextrum ſimplex eſt. Siniſtrum, quaſi ex duobus coaluiſſet, apparet; hinc et duplici iunctura pro articulatione cum oſſe cuboide inſtructum eſt. Pha-langae primae cum oſſibus metatarſi non in directum ia-cent, ſed ad latera appoſitae ſunt, vt curuaturam efficiant. Reliquae phalangae nil extraordinarii oſtendunt. Deſunt igitur in dextero pede oſſa cuneiformia duo, oſſa me-tatarſi tria cum digitis reſpondentibus, in ſiniſtro os cuneiforme vnicum, oſſa metatarſi tria cum iisdem digi-tis tribus reſpondentibus. Tabula X. Figura V.

Muſculi manuum omnes aderant, imo in ſiniſtra ne palmaris quidem deficiebat, ſine aponeuroſi tamen. Tendines extenſorum et flexorum, qui ad digitos perti-nent, tot aderant, quot numerus digitorum poſcebat, id quod et de lumbricalibus intelligendum. In manu dex-tera erat tam abductor quam adductor interoſſeo ſimilis, in ſiniſtra autem interoſſei duo.

In vtroque pede aderant ſequentes muſculi: 1. Fle-xor pedis, tibialis anticus, vna cum retinaculo aliquo ligamentoſo ex malleo interno ipſum transſcendente. Ter-minabatur in phalangae primae pollicis tubere laterali, et anterius in oſſe metatarſi. 2. Extenſores digitorum com-

communes, longus et breuis, ſinguli in tres tendines diremti, quorum vnus ad pollicem reliqui duo ad digiti phalangam mediam et vltimam acceſſere. Quia etiam phalanga prima digiti cum oſſe ſuo metatarſi non in directum iaceat, ſed ad angulum lateraliter illi apponatur: hinc tendines extenſorum circa iuncturam ligamentum nacti ſunt, vt cum digito reflecti poſſent. 3. Extenſor pollicis longus in phalangam primam tendine duplici terminatus. 4. Peroneus poſticus, cuius tendo ſulcum in oſſe cubiformi transgreſſus partim in hoc ipſo oſſe, partim in medio oſſe metatarſi pollicis eſt inſertus. 5. Flexor pollicis breuis. 6. Lumbricalis, cuius tendo cum rudimento extenſoris breuis coaluit. 7. Abductor proprius minimi digiti, ex oſſe metatarſi eductus. 8. Perforans, non a tibia, ſed ex fibula ortus, non niſi in tendines duos diremtus, qui cum tendinibus perforatis connati ad extremam pollicis et digiti phalangam continuabantur.

Contra vero in vtroque pede defecit flexor pollicis longus, cuius venter cum peroneo poſtico coaluit.

Singulatim in pede dextro aderant peroneus anticus, ſeu medius, et minor; qui ambo autem in pede ſiniſtro deſiderati ſunt.

IX.

EXPLICATIO
DIFFICILIORVM EXPERIMENTORVM
CIRCA
ASCENSVM AQVAE IN TVBOS CAPILLARES.

AVCTORE

Iosia Weitbrecht.

§. 1.

IN dissertatione (*) de ascensu aquae in tubis capillaribus difficiliora quaedam experimenta, et alia, quae theoriae ibidem stabilitae contraria viderentur, in peculiari scripto ad examen reuocare pollicitus eram; quod promissum complere in hisce paginis nunc adgredior. Vt autem ordine procedamus, omnia istiusmodi phaenomena commode in *tres* classes distribuemus. Erunt enim *alia*, quae competunt tubis capillaribus cylindricis, seu eiusdem vbique diametri; *alia*, quae occurrunt in tubis conicis, seu diametro quomodocunque variante; *alia* denique, quae ad siphones pertinent, horumque naturam inuoluunt. Tabula XI. et XII. Fig. 1—40.

§ 2. In *tubis cylindricis* ante omnia attendendum est, vt in singulis experimentis *veram altitudinem* nanciscamur, ad quam aqua in illis virtute sola attractionis ascendere potest; cuius caussa singularem proprietatem considerare oportet, quam sequenti propositione includimus: *In tubo capillari cylindrico, aqua ad eandem altitudinem*

(*) Commentar. Tom. VIII. in fine pag. 309.

Tabula XI. *ſupra libellam eleuatur, quousque licet tubulus immergatur.* Huius propoſitionis veritatem experientia abunde commonſtrat.
Experim. 1. Si enim tubus AB ſuperficiem aquae in vaſe tangat, haec ad datam altitudinem BC rapitur, tumque ſub-
Figura 1. ſiſtit. Si idem tubus profundius immergatur vsque ad *b*, tunc aqua in illo non ſolum ad altitudinem cum ſuperficie aquae in vaſe parallelam ſtabit, ſed et vltra libellam porro aſcendet ad altitudinem *bc*, aequalem illi, ad quam rapta fuerat, cum extremitas tubi aquam tantummodo lambebat. Si immerſio fiat ad C: aqua aſcendet vsque ad D; ita vt ſit DC=BC. Verbo: ad quamcunque profunditatem tubulum capillarem immergas; ſemper altitudines ſupra libellam ſibi aequales erunt. Agnouit hanc veritatem quoque *Cel. Muſſchenbroek* in Diſſertatione phyſica de Tubis capillaribus Vitreis Cap. I. Exper. III.

§. 3. Non ſolum vero *eadem altitudo*, et conſequenter, ob diametrorum aequalitatem, *eadem aquae quantitas erit, quando cylindrus aqueus* in tubo continuus eſt; ſed etiam, quando ille *per interiectum aerem in portiones*
Exper. 2. *diremitur.* Sit enim tubulus AB cylindricus, cuius oſcu-
Figura 2. lum B ſuperficiei aquae in vaſe perpendiculariter admotum lambat, et attrahat, quantum oportet, ad debitam altitudinem. Remotus iſte tubulus, et paulum inclinatus, vt aqua attracta CD verſus oſculum ſuperius A moueatur, et ſpatium relinquat aeri DB, immergatur denuo profundius in vaſculum: tum aqua tam intra tubulum BF, quam in vaſe ſtabit ad altitudinem eandem, et quantitas attracta
Figura 3. CD haerebit ſupra illam interiecta bulla aerea DF. Si quantitas CD maior erit, quam attractio concedit, et eadem

dem methodo procedas: tum aquae noua portio non aſcendet ad libellam aquae in vaſculo F, ſed depreſſius ſtabit ad BG, et quidem eo profundius, quo magis altitudo DC altitudinem debitam excedit. Quodſi vero quantitas DC minor fuerit, quam attractioni competit, et omnia denuo eadem methodo peragas: tum aqua non ſolum ad libellam vsque BF, ſed et multo altius ad FG aſcendet, quantum nimirum requiritur, vt ſumma altitudinum DC et FG aequalis fiat altitudini debitae. Verbo, ſumma altitudinum CD et BG (fig. 3. 4.) ſemper eſt aequalis ſummae altitudinum CD et BF (fig. 2.), ſi immerſio ſemper ad eandem profunditatem facta eſt; et, ſi interiecta bulla aerea eiusdem ſemper eſſet altitudinis: punctum C ſemper ad eandem altitudinem ſupra libellam ſtaret, quemadmodum in experimento antecedente (§. 2.) factum eſt.

Tabula XI. *Exper.* 2. Figura 4.

§. 4. Quod vero per experimenta antecedentia (§. 2. 3.) actu ita ſe habere intelleximus: id neceſſario ita fieri debere ex theoria noſtra ſequitur. Tota enim ſuperficies interna tubi attrahit, quando aqua ad debitam diſtantiam acceſſit; et quia tubus in tota longitudine eiusdem vbique diametri ſupponitur; omnes peripheriae, quotquot ſuperficiei cylindri aquei immediate proximos conceperis, inter ſe aequales erunt, hinc ſemper non niſi eandem quantitatem aquae eleuare ac ſuſpendere valebunt: ſemper igitur aqua in tubo ad eandem altitudinem ſupra libellam in vaſe aſcendit; quia quicquid infra libellam continetur, id omne ab aequali cylindro aqueo in vaſe aequilibrari cenſendum eſt. Neque quicquam refert, etiamſi per interiectum aerem in partes diuidatur. Sunt enim tres peripheriae vi-

 treae,

Tabula XI. treae, C, D et F, quae virtutem ſuam attractiuam in aquam exercent, et quae inter ſe aequales ſunt: quia autem harum binae, D et F, quae bullam vtrinque tangunt, ſibi contrariae ſunt; hinc ſe mutuo deſtruunt, et ſola attractio peripheriae ſupremae reſtat, a cuius actione totus effectus dependet.

§. 5. Quodſi igitur accidit, vt tubulus aquam ad maiorem altitudinem retineat, quam vis attractiua peripheriae ſupremae conſeruare ſolet: neceſſario exinde ſequitur, aliam quandam cauſſam ſubeſſe, cui ſuſtentatio quantitatis ſuperfluae tribuenda ſit. Dum enim dico. aquam non niſi ad datam altitudinem aſcendere, non ſimul nego, fieri poſſe, vt aqua ad maiorem altitudinem, in tubulo aliter ac per attractionem ſimplicem repleto, haereat ac ſuſtentetur. Hoc enim experimenta abunde docent. Obſeruarunt id etiam *Petit* in hiſt. Ac. ſc. Par. 1724. et *Musſchenbroek* l. c. Exp. IV. Quaeramus igitur huius phaenomeni limites et cauſſas.

§. 6. Admoueatur tubulus AB ſuperficiei aquae V,
Exper. 3. vt haec aſcendat ad altitudinem quamcunque BC. Quo
Figura 5. facto eleuetur tubulus paullulum, vt a ſuperficie aquae ad altitudinem B*b* recedat. In hoc receſſu cylinder aqueus CB a ſuperficie non auellitur, ſed intra tubum a C ad *c* deſcendit, atque inter terminum tubi B et ſuperficiem aquae *b*, conus aliquis, vt ita vocem, aqueus B*b* formatur; coutinuata autem tubi eleuatione iſte rumpitur, et cylinder aqueus ad priſtinam altitudinem C reſilit. Huius quidem phaenomeni cauſſa in promtu eſt. Primo enim attra-

attractio, quae inter particulas aqueas intercedit, non permittit, vt in ipſo receſſus puncto totalis auulſio fiat; reſtat igitur tantiſper cohaeſio aliqualis inter cylindrulum in tubo, et aggerem aqueum circa tubi extremitatem genitum, et inter aquam in vaſe. Fac iam tubulum, qui aquae ſufficientem quantitatem hauſit, eleuari, et aquam ad eandem altitudinem intra eum conſeruari: eo ipſo per generationem atque additionem conuli illius cylindrulus altitudinis maioris orietur, quam qui a peripheria C ſuſtineri poteſt; ergo neceſſario aqua intra tubulum tantillum deſcendere debet, quantum nimirum altitudo illius conuli requirit. Quia vero, continuata tubi eleuatione, conulus tandem maior et grauior euadit; quam vt cohaeſio eius cum cylindrulo a mutua aquae attractione conſeruari poſſit: neceſſario tandem rumpitur, et conulus cum aqua in vaſe miſcetur, cylindrulus autem denuo ad eam altitudinem intra tubulum eleuatur, quantum vis attractiua peripheriae ſupremae ſuſtentare valuerat. Tabula XI.

§. 7. Quando experimentum antecedens cum tubulo, cuius latera tenuia ſunt, capitur et lente inſtituitur; tunc, vti diximus, altitudo ad quam cylinder reſilit, eadem eſt, ad quam conſtiterat ante auulſionem. Quando autem tubulus ex vitro craſſiore conflatus eſt, vt extremitas eius B latam baſin conſtituat: tum facta auulſione cylinder ad *altitudinem maiorem* reſilit, et quidem, quo celerius tubulum auellis, eo altius aqua aſcendit; baſi autem tubi B circa orificium gutta aquea adhaereſcit. Ita e. gr. tubulus, qui perpendiculariter immiſſus aquam attraxerat ad altitudinem $6\frac{3}{10}$ linearum; cum idem ille ex aqua celeriter Figura 6. *Exper.* 4.

leriter extraheretur, retinuit illam ad altitudinem 7. linearum, et cum alia vice extractio multo celerius repeteretur, erat altitudo 8. linearum.

§. 8. Atque hi ſunt illi caſus, de quibus (§. 5.) loquuti ſumus, et qui a regula noſtra generali (§. 1.) deflectunt, quorum vero ratio ex theoria noſtra itidem optime deducitur. Aquam enim tubo vbique adhaerere docuimus (Prop. XIV.); ergo quo craſſius eſt vitrum, et conſequenter, quo latior eſt baſis circa orificium inferius, quae aquam in vaſe lambit, eo maior gutta inter remouendum adhaeret. Praeterea attractio inter vitrum et aquam maior eſt, quam inter particulas aqueas ipſas (Prop. IX.); ergo quo celerius tubus auellitur, eo plus aquae huic eidem baſi adhaereſcit. Porro vim attractiuam, quae aquam in tubo actu eleuat, definiuimus (Prop. XXVIII.), quod ſit $= d(p-q)$. Quando igitur tubulus remouetur, vis illa $= q$ euaneſcit, et vis eleuans p tota, non imminuta agit, cylindrus igitur aqueus ad altitudinem maiorem aſcendit, et portionem guttae baſi adhaerentis ſecum intra cauitatem tubi rapit. Denique iſta vis eleuans non ſolum non imminuitur, ſed etiam adiuuatur ope eiusdem guttae orificio extremo adhaerentis. Haec enim cum ab attractione limbi vitrei retinetur, in ſimul etiam repagulum quaſi conſtituit, cui portio quaedam cylindri intra tubum inſiſtere poteſt, quae non prius deſcendit, quam gutta iſta tanta euaſerit, vt pondere ſuo proprio cohaſionem rumpat, ac delabatur.

§. 9. Si quis autem foret, qui dubitet, guttam baſi extremae adhaerentem cylindri deſcenſum impedire poſſe, vt vt ad maiorem altitudinem conſeruari queat, quam quae peripheriae tubi ſupremae conuenit, ille ad ſequentis experimenti phaenomena diuerſa animum appellere non dedignetur. Tabula XI.

I. Tubulum AG qui ſua ſponte aquam attraxit ad altitudinem $6\frac{1}{2}$ linearum, ad eandem altitudinem repleui, inclinatumque, vt attracta quantitas in ſitum BC recederet, denuo immerſi: quo facto, et extracto tubo, obſeruaui, inferiorem aquam non omnem effluere, ſed perſiſtere ad altitudinem duarum circiter linearum DG, inſimul ſuperficiem eius infimam fieri conuexam et limbo orificii G adhaerere; inter portionem ſuperiorem autem BC, et inferiorem DG bullam aeream CD interceptam eſſe. Exper. 5. Figura 7.

II. Poſtquam portionem ſuperiorem BC auxi ad altitudinem $7\frac{1}{2}$. lin et porro eadem methodo proceſſi: reſtitit portio inferior GD ad altitudinem vnius lineae, cum iisdem phaenomenis. Figura 8.

III. Aucta portine ſuperiore BC ad altitudinem 8. linearum: obſeruaui, loco portionis DG, reſtare tantummodo particulam conuexam G, quae tamquam ſemiglobulus aqueus ad marginem orificii circumquaque haerebat, cauitatem vitri autem non intrabat. Figura 9.

IV. Denique aucta portione BC ad altitudinem $8\frac{1}{2}$. linearum, et ceteris eadem methodo peractis obſeruaui, portionem DG omnem effluere, excepta pellicula ſeu lamellula aquea, D, tenuiſſima, ſemigloboſa, ad marginem oſculi inferioris adhaerens, ſolo aere plena; quae autem leuiſſima ſuccuſſione rumpebatur, vt bulla aerea CD lamellae inſiſtens aufugeret: et portio BC $8\frac{1}{2}$. linearum ad oſculum inferius plane deſcenderet. Figura 10.

V. Por-

Tabula XL. V. Portionem BC, quae ab isto tubo attrahebatur ad altitudinem $6\frac{1}{2}$. linearum, auxi plus quam duabus lineis, vt

Exper. 5. euaderet 9, 10, vel plures lineas alta; quo facto, quando,

Figura 9. intercepta bulla aerea nouam aquae portionem admittere tentabam, vel quando interpositis pluribus bullis, massae partiales aqueae, BC, ED, FG simul sumtae maiores erant altitudine $8\frac{1}{2}$, vel 9, vel 10. linearum: tunc aqua superflua nullo modo inter tubum retinebatur, sed omnis effluebat.

§. 10. Experimentum hoc (§ 9.) commemoratum duas potissimum veritates manifeste demonstrat. Altera est, quam assumsimus §. 8°, quod *gutta aquea extremitati tubi adhaerens descensum cylindri aquei* BC *intra tubum impediat.* Hoc enim ex phaenomeno imprimis III. et IV. luculentissime apparet, dum quantitas cylindri BC et consequenter pondus eius ita augetur, vt aqua DG infra aerem interceptum posita fere omnis eiiciatur, et sola aliqua lamella restet, quae limbo orificii adhaerens globosa et vacua incumbentem aeris intercepti bullam sola tenacitate sua ab attractione particularum aquearum dependente retineat, donec ope succussionis diffringatur, aeremque dimittat; quemadmodum fieri solet, quando in liquore aliquo spumante bullulae aereae, rupta fluidi lamella tenui, globosa, dissiliunt. Altera veritas haec est, *quod augmentum cylindri aquei* BC *vltra debitam altitudinem suos limites habeat*, et vltra duas tresue lineas extendi vix possit. Nam in phaenomeno I. aqua conseruabatur infra aerem interceptum ad duas lineas, in phaenomeno II. tantum ad lineam, et in phaenomeno IV. et V. plane omnis

aer

aer et aqua superflua ei subiecta eiiciebatur. Quippe omnis diuersitas altitudinis eo redit, ne cylinder aqueus BC plus augeatur, quam cohaesio guttulae infimae cum limbo orificii inferioris resistere possit. Tabula XI.

§. 11. Atque ex his facile patet, quo loco habenda sit *Cel. Musschenbroekii* sententia, quam Experimenti XI. Scholio, Cap. I. adiecit. Postquam enim in experimento adhibita sua encheirisi vidit, infra interceptam aeris bullam nouam aquae portionem ad duas tresue lineas sustineri; exinde conclusit, fieri hoc modo posse, vt multo plus aquae, quam 20. linearum (quae erat altitudo ordinaria) in tubo suspensum haereat, modo portiones aqueae frequentibus bullis aereis sint interruptae. In quam opionem delapsus est, quia animo eius nescio quae aeris tenacitas et adhaesio ad tubi parietes insederat, in quam superabundantis huius aquae suspensionem reiiciebat. Inde enim ita visus est ratiocinari. Si vna bulla aerea suspendere potest aquam ad duas tresue lineas: possunt etiam bullae duae pluresue aquam suspendere ad quatuor, sexve aut plures lineas. At vero, si placuisset *Cel.* Auctori, experimenti periculum facere: omnem illam fictitiam aeris tenacitatem vel saltim effectum eius praetensum euanescere, et suspensionem augmenti aquei ab alia caussa dependere, pro perspicacitate sua mox intellexisset. Figura 11.

§. 12. Apparet ex dictis (§. 5—10.), in experimentis faciendis multa cautela opus esse, vt *veras* attractionum altitudines in singulis tubulis nanciscamur, quod tamen tanto magis necessarium est, quanto minus fieri

 potest,

poteſt, vt ſine hac rectitudine iuſtas comparationes inter illas inſtituamus. Huius rei methodum aliquam ex experimento 2. (§ 3.) diſcimus. Quodſi enim ſcire velis, num veram altitudinem nactus fueris; immitte, intercepto interuallo aereo, tubulum ad fundum vaſis, et adtende, an aqua noua intrans ad libellam vsque aſcendat. Si enim libellam ſuperet, altitudinem quaeſitam augere, ſi infra libellam deprimatur, illam diminuere debes eousque, donec aquae nouae in tubulo, et in vaſe eadem ſit altitudo. In qua methodo tamen ante omnia certus eſſe debes, tubum, quo vteris, cylindricum eſſe.

§. 13. Venio nunc ad propoſitionem, quam *Cel. Muſſchenbroek* inuitus quidem, vti teſtatur, amplexus eſt, multisque experimentis tam in aere, quam in vacuo factis Cap. I. exp. XV. et Cap. VII. Exp. V. ſtabilire contendit; quae, ſi vera eſt, totam theoriam noſtram plane euertit. Cum igitur mea plurimum interſit ſcire, vtrum vera ſit illa, nec ne? nemo mihi vitio vertet, ſi paullo attentius in rei veritatem inquiram. Propoſitio autem iſta ad hanc fere ſententiam redit: *Quo tubi vitrei maiorem longitudinem habent; eo quoque altius aquam in ſe rapiunt.* Vnde concludit, cauſſam eleuantem per totam tubi longitudinem eſſe diffuſam, et quo longior tubus ſit, eo plus virium eleuantium adeſſe. Experimenta quidem, e quibus *Cel.* Auctor theſin ſuam elicuit, adeo ſollicite ac circumſpecte inſtituta eſſe teſtatur, vt de illorum rectitudine dubitandi locus plane nullus relictus eſſe videatur, idque eo magis, quod omnino in experimentando habitum ſibi adquiſiuerit, et vbique ſingularem dexteritatem oſtenderit.

Inte-

Interim tamen a me impetrare nondum potui, vt propterea thesin illam amplecterer, et propositionem contrariam, qualis ex theoria nostra sequitur, desererem sequentibus argumentis munitam. Tabula XI.

§. 14. Et *primo* quidem absit, vt de experimentorum fide dubitem; neque etiam *Cel.* Auctorem alicuius *praecipitantiae* arguam. Sed eandem gratiam vicissim peto et mihi et aliis, qui contrarium statuunt. Nulla enim ratio est, quare aliis mihiue, qui itidem experimentando rem adgressi sumus, minorem fidem habeam, quam *Cel.* Auctori. Hoc enim esset auctoritatibus pugnare, si vnus sibi soli fidi postularet. Docent autem non solum experimenta *Carreana*, longitudinem tubi ad altitudinem aquae nihil conferre; sed etiam *Exc. Bülfingerus* repetitis sollicite experimentis idem deprehendit, et contra *Sturmium* annotauit in Diff. sua §. IV. 3. Ipse ego denique non semel, sed vicibus multoties repetitis, cum tubis non aliquot pollices sed tres et quatuor pedes longis tentamina feci, neque quicquam discriminis, obseruatis necessariis cautelis, deprehendi. Ita, e. gr.

I. Sumsi tubum capillarem, cuius orificii diameter erat 0, 1. lin. attrahebatur aqua, quando orificium inferius aquam in vase lambebat, ad altitudinem 5. pollic. 4. lin. Altitudo tubi vacua supra aquam erat 8. poll. 8. lin. Abstuli 4. pollices sine concussione notabili, vnde aqua ad eandem altitudinem substitit. Euacuatum tubum denuo admoui ad vasculum, vnde ascendit ad eandem altitudinem. Abstuli denuo pollices duos, et quieeuit aqua porro ad eandem altitudinem. Euacuatum tubum tertia vice im- *Exper. 6.*

 pleui

Tabula XI. pleui eadem methodo ad altitudinem eandem. Abſtuli tertio pollices duos; et ſemper eadem altitudo conſeruata fuit.

Exper. 7. II. Tubi capillaris diameter erat 0,1. linearum; altitudo totalis erat 19. poll. 2,3. lin. Methodo priori adhibita, aqua aſcendit ad 5. pollices, 2,5. lineas. Abſtuli portionem tubi, vt altitudo vacua ſupra aquam eſſet 10. poll. 6,8. lin. quo facto aqua ad eandem altitudinem quieuit. Euacuaui tubum et denuo impleui, vnde aqua ad priſtinam altitudinem aſcendit. Abſtuli iterum 5. poll. 6,8. lin.; vt longitudo tubi ſupra aquam eſſet 5. poll. ſed altitudo aquae non mutabatur. Tubulo iterum euacuato, et denuo impleto, aqua iterum ad primam altitudinem 5. poll. 2,5. lin. aſcendit.

Cui bono autem, eadem phaenomena ad nauſeam repetere? *Primum* igitur argumentum meum ab experientia immediata deſumtum *demonſtrat*, *diuerſam tubi longitudinem altitudines, ad quas aqua in illo aſcendit, neutiquam mutare.*

§. 15. *Alterum* argumentum itidem experientia nobis ſuppeditat, quod in phaenomenorum analogia conſiſtit. Eſt nimirum idem illud experimentum, quo (§. 2.) oſtendimus, ſemper eandem manere altitudinem aquae eleuatae ſupra libellam, quousque licet tubulus immergatur. Hoc verum eſſe agnouit ipſe *Cel. Muſſchenbroek* in Exp. IV. quo dixit: „Tubulum, in quo aqua aſcendit ad altitudinem „20. linearum, dum ſuperficiem aquae lambebat, eundem „profundius immiſſum recepiſſe in ſe aquam ad eandem a „ſuperficie altitudinem, vt antea.„ Quodſi igitur in tubo ſiue parum ſiue profundius immiſſo aqua ad eandem altituditudinem ſupra libellam aſcendit: ſequitur omnino, *longitudinis diuerſitatem ad eleuationem nihil conferre.*

§. 16. *Tertium* denique argumentum conſideratio experimentorum *Muſſchenbroekianorum* ſuppeditat, quod *nulla proportio ſeruetur inter longitudines tubi et altitudines aquae*; dum iuxta illa non ſolum duo diuerſae longitudinis tubi aliquando aeque excelſe aquam eleuent, ſed etiam idem tubus diuerſae longitudinis aquam ad eandem aliquando altitudinem attollat; quae quidem inconſtantia ab ipſo *Cel.* Auctore agnita totam rem quam maxime ſuſpectam reddit, et non ſine probabilitate coniicere iubet, iſtam altitudinis diuerſitatem a negotio quodam alieno potius quam a variata tubulorum longitudine deriuari debere.

§. 17. Quibuscunque igitur hanc propoſitionem (§. 13—16.) denuo ad examen reuocare aliquando placuerit, iis ſuaſor ſum, vt ante omnia *de captandis veris altitudinibus* ſolliciti ſint, atque ad facienda tentamina tubulos potius anguſtiores, quorum diametri 0,1. vel 0,2. lineas vix excedunt, quam ampliores eligant, quia in illis error facilius detegitur. In implendis autem tubis iſtis anguſtioribus plane non exſpectandum eſt per 12. horas vel integrum nychthemeron; ſed, quando aqua altitudinem debitam quam proxime attigit, tubulus aliquanto profundius immergatur, vt aqua vlterius aſcendat, tumque iterum extrahatur ita, vt oſculo ſuo ſuperficiem fluidi in vaſe lambat; quo facto cylinder aqueus intra tubum breui tempuſculo ad iuſtam et quaeſitam altitudinem ſubſidet. Quando tubus ex aqua extrahitur, attendatur, vt ſemper aequalis guttula extremitati inferiori adhaereat. In decurtando tubo opera danda eſt, vt per fractionem ſuccuſſio quam minima fiat. Ad ſcopum obtinendum quidem non opus eſt euacuatione tubi et noua repetita repletione, quia etiam poſt decurtationes ſatis obſeruari poteſt, num aqua ad minorem altitudinem ſubſidat. Si cui tamen iſta methodus placuerit, ſateor me non probare poſſe, vt exſugendo rem adgrediaris; quia hoc modo vix euitari poteſt, quin ſenſim aliquid ſaliuae adhaereat, qua poſtmodum tam vitri quam aquae puritas multum turbatur. Praeſtat, vel linteo puro aquam ſenſim auferre, vel quemadmodum *Cel. Krafftius* noſter in Exper. Phyſ. pag. 57. 58. fieri docet, alium tubulum anguſtiorem vacuum oſculo inferiori admouere, qui mox omnem aquam extrahet et reſorbebit.

§. 18. Reſtat denique ſcrupulus remouendus, quem experimentum *Muſſchenbroekianum* ſeptimum Cap. I. nobis iniicit. Illud autem tale recenſetur: „Si tubulus continens 20. lineas aquae in ſe, ex vaſe ſublatus lente inclinetur, vt parallelus horizonti euadat: tum aqua in tubo mouebitur ab vno extremo verſus aliud, ita tamen, vt occupet accurate mediam tubi partem, relinquatque ambas extremitates vacuas aqua, et tantum aere plenas.„ His poſitis aut in experimento latet hallucinatio, aut theoria noſtra falſa eſt. Haec enim poſtulat, vt, quando inclinato vtcunque tubo cylinder aqueus ab orificio inferiore paullum receſſerit, peripheria vtrique cylindri extremitati proxima vi ſua attractiua aequaliter agat, et conſequenter propter peripheriam inferiorem cum pondere cylindri conſpirantem hic ipſe non aſcenſum ſed deſcenſum affectet. Quando igitur tubus tandem horizonti parallelus poneretur,

tur, aqua non niſi per ſaltum, cuius nulla eſſet ratio, Tabula XI.
mediam tubi partem occupare poſſet. Huic conſequentiae porro fauet experimentum *Muſſchenbr.* inſequens octauum; iuxta hoc enim, „ſi extremum eiusdem tubi, quod aquae„ immerſum fuit, altius eleuetur ſupra horizontem, infra„ quem quem deprimatur extremum alterum: tum aqua de-„ ſcendit verſus humilius extremum motu concitato.„ Quodſi igitur in hoc caſu aqua intra tubum inclinatum deſcendit: quare in caſu priore, in quo tamen circumſtantiae eaedem ſunt, aſcendit? Sed quicquid horum ſit, confugiamus ad experientiam optimum veritatis indicem. Haec autem ita ſe habet: Si tubus, qui aquam ſufficientem attraxit, incli- Exper. 8.
netur: aqua attracta CD paululum ab orificio inferiore Figura 12.
recedit, quo facto, *quomodocunque tubum inclinaueris, aqua in eodem ſitu* CD *immota haerebit; etiamſi tubum horizontaliter poſueris.* Quodſi vero orificium B ſupra horizontem vel parum eleuetur, aqua CD mox deſcendit ad orificium alterum A, et aeque parum diſtat ab illo, donec tubus perpendiculariter erigatur; tunc enim ad ipſam oram plane deſcendit. Ex quo phaenomeno rite percepto Theoriae noſtrae vim nullam inferri clariſſime apparet.

§. 19. Pergo ad illa phaenomena, quae obſeruantur in *tubis diuerſae diametri*, quorum explicatio genuina, non neglectis eis quae theoria poſcit, ſequenti potiſſimum propoſitione nititur: *In tubo anguſtiori particula aquea a pluribus punctis vitreis reſpondentis peripheriae ſimul attrahitur, quam in tubo ampliore.* Sit enim ſemidiameter Figura 13.
tubi $AC = a$, radius actiuitatis vitri $AB = PT = Pt = b$, diſtantia particulae attrahendae a peripheriae attrahentis pun-

cto

Tabula XI. cto $AP = x$, $= AZ = z$: erit $AT = \sqrt{bb - xx}$, $ZP = x - z$, $ZC = a - Z$, $Zt = \sqrt{bb - (x-z)^2}$; Porro $AZ : Zt = Zt : ZC + AC$; vnde $Zt = \sqrt{2az - zz} = \sqrt{bb - (x-z)^2}$, $2az - zz = bb - xx + 2xz - zz$, $2az - 2xz = bb - xx$, $z = \frac{bb - xx}{2a - 2x}$. Est autem $AZ : At = At : 2AC$, vnde $\overline{At}^2 = \frac{a(bb-xx)}{a-x}$ et $\overline{AT}^2 = bb - xx$; Ergo $\overline{AT}^2 : \overline{At}^2 = bb - xx : \frac{a(bb-xx)}{a-x}$; et $AT : At = \sqrt{a-x} : \sqrt{a}$. Atqui recta At est chorda arcus At, et maior quam recta AT; ergo et ipse arcus At maior erit quam AT. Sint igitur duo tubi, semidiameter vnius A maior $= a$, alterius B minor $= \alpha$; erit chorda At in A ad chordam in B $= \sqrt{\frac{a(bb-xx)}{a-x}} : \sqrt{\frac{\alpha(bb-xx)}{\alpha-x}}$; et quando distantia x constans ponitur $= \sqrt{\frac{a}{a-m}} : \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-m}}$ et quadrata chordarum $= a\alpha - am : a\alpha - \alpha m$. Ergo, quia rectangulum $a\alpha = a\alpha$, et $am > \alpha m$; sequitur chordas illas, et consequenter ipsos arcus peripheriarum attrahentium maiores esse in tubo minore quam in maiore; nimirum: Quadrata chordarum sunt in ratione composita directa radiorum et reciproca differentiarum inter radium et distantiam puncti attrahendi. Ergo *ad eandem particulam aqueam, quae in eadem distantia posita est, attrahendam plura puncta peripheriarum respondentium vim suam exerunt in tubo angustiore, quam in ampliore.*

§. 20. Cum igitur eadem peripheriae portio in circulo minore minus attrahat aquae, quam in maiore (Tentam. Prop. XXX.): et eadem particula aquea a pluribus punctis vitreis sollicitetur in tubo angustiore quam ampliore (§.19.): necessario *aqua multo velocius sursum rapitur in tubo angustiore quam in ampliore.* Vnde huius phaenomeni

Exper. 9.

meni ab omnibus, qui circa hanc rem verſati ſunt, obſeruati ratio ſufficienter patet. Tabula XL.

§. 21. *Quando igitur eadem gutta aquea a duabus peripheriis inaequalis diametri ſollicitatur: mouebitur illa potius verſus peripheriam diametri minoris, quam verſus alteram.* Ab hac cauſſa dependet phaenomenon ſequentis experimenti. Sit tubus inaequalium diametrorum A B. *Exper.* 10. Confluat in confinio vtriusque diametri guttula aliqua *a b* Figura 14. ex reliquiis aquae non ſatis euacuatae: videbis, in quocunque ſitu inclinato tubus ſeruetur, guttulam iſtam ſumma velocitate verſus *a* rapi. Quando erigis tubulum, vt pars Figura 15. anguſtior A *a* ſurſum ſpectet, guttula in aliquo loco *a b* immota haerebit. Contra vero, quando tubulum inuertis, Figura 16. vt pars amplior *b* B ſurſum ſpectet, guttula *a b* adeo non ſurſum eleuatur verſus B, vt potius verſus A deſcendat, quia in hoc caſu ponduſculum guttulae cum actione fortiori peripheriae anguſtioris conſpirat.

§. 22. *Sequitur* etiam ex hoc experimento (§. 21.), *in tubo inaequalis diametri peripheriam anguſtiorem ſuſtinere poſſe aquam ad altitudinem maiorem, quam peripheria amplior.* Suſtinet enim peripheria *a* aquam ad altitudinem *a b*, quam peripheria *b* ad eandem altitudinem Fig. 15. 16. ſuſtinere non poteſt; quia in hoc caſu ſollicitationes ad aſcenſum minores ſunt, quam in illo.

§. 23. Huc pertinent bina experimenta *Iuriniana* (*) *Exper.* 11. ſeptimum et octauum, quae ita ſe habent: „Conſtet tubus „ Figura 17. CD duabus partibus, in quarum ampliore aqua ſponte aſcen-„ Figura 18.

 ſura

(*) Iac. Iurini Differt. phyſico-mathemat. I.

Tabula XI. sura sit ad altitudinem BF; at pars angustior, si satis,, longa sit, aquam eleuatura sit ad altitudinem CD: Hoc,, tubo aqua repleto, et osculo C partis amplioris immer-,, so in aquam AB, omnis aqua tubo contenta suspenditur,, supra libellam. Immerso osculo D partis angustioris aqua,, confestim descendit, et subsistit tandem ad altitudinem GD,, parem lineae BF,,. Cum his conspirant eiusdem *Celeb.* Auctoris experimenta bina sequentia, nonum et decimum, quae repetere superuacaneum duco. Ex quibus omnibus *sequitur, in tubulis conicis* vel inaequalis diametri *altitudines aquarum esse reciproce vti diametros peripheriae supremae, cui summa aquae superficies proxime adhaeret.* Has vero ita aestimari debere, ex theoria nostra prono alueo sequitur. In mensuram enim altitudinis aquae suspensae (Prop. XXVIII.) nihil ingreditur nisi consideratio virium suspendentium, et diametri d, quatenus haec exprimit rationem peripheriae annulorum vitreorum, quibus superficies aquae inter ascendendum successiue applicatur. Quando igitur diximus, altitudines esse in ratione reciproca diametrorum, id necessario de diametris peripheriae tubi (non inferioris aquam lambentis, sed) superioris, quam aqua ascendendo attigit, intelligendum est; consequenter *positis diametris hisce aequalibus altitudo etiam semper aequalis erit, amplitudinibus tuborum vtcunque diuersis et inaequalibus.*

§. 24. Non autem sufficere videtur demonstrare ne-
Exper. 11. cessitatem propositionis. Sunt qui scrupulum iniiciunt, et
Figura 19. paradoxon inde deduci putant. Quaerunt enim, si peripheria C in tubo cylindrico ABD suspendere non potest nisi

nisi columnulam aqueam sub basi BD et altitudine BC comprehensam: quare eadem peripheria in tubis conicis vel plus suspendit, si basis EF maior est; vel minus, si basis HK minor est, quam basis BD? Proponit eandem obiectionem, verbis paullo aliter inflexis et ad suas figuras accommodatis *Cel. Iurinus* l. c. Quibus rationes mechanicae sufficiunt, iis abunde respondet idem *Cel. Iurinus*, dum velocitates in ratione reciproca sectionum, et consequenter momenta columnarum aquearum in quacunque tuborum amplitudine eadem esse docet. Qui autem caussam magis physicam scire auent, iis ex theoria respondebimus. Tabula XI. Figura 20. Figura 21.

Tabula XII. Figura 22.

§. 25. Sit igitur tubus conicus ABCD, cuius diameter inferior maior AD, superior minor BC; sit aqua attracta ad altitudinem bB; dico: virtutem attractiuam peripheriae superioris diametro BC respondentis reuera plus non sustinere quam columnam cylindricam mediam bBCc; reliquam autem portionem huius coni aquei truncati, quae generatur, quando triangulum ABb circa cylindrum rotari concipitur, sustineri a virtute alia. Constat enim, latus tubi obliquum AB, cuius ope aqua eleuatur, resolui posse in duo alia Aa, et aB, quorum illud se habet ad hoc, vti sinus anguli inter latus et basin tubi BAb ad cosinum eiusdem anguli. Quando autem ascensus ad debitam altitudinem factus est, tum latus verticale Aa=Bb munere suo functum est, atque ad sustentationem porro nihil confert, sed cylindrulus dictus a solo supremo annulo BC sustinetur, quemadmodum (Tentam. Prop. XXV.) demonstrauimus. Contra vero latus horizontale aB=Ab otiosum non manet, sed basin annularem Ab, cD format Figura 23.

 =AD

Tabula XII. Figura 24. $= \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2$, a qua reliqua portio obuoluta immediate dependet. Similis ratio eſt, ſed contraria, quando tubus inuertitur, vt baſis minor BC inferior ſit; tunc enim baſis iſta annularis Ab, cD, a latere aB generata, quae antea deſcenſum aquae impediuerat, iam illius aſcenſum moratur, et portionem inter AaB interceptam ad deſcenſum ſollicitat. Quapropter peripheria ſuperior AD non ſolum maſſam coni truncati aquei ABCD ſuſpendit, ſed et vim lateris horizontalis aB deorſum nitentem ſuperare debet, id quod eo recidit, ac ſi totus cylindrus maior AadD ab eadem peripheria ſuſpendi deberet.

§. 26. Quemadmodum vero tale latus horizontale Ab in tubis conicis nonniſi ex reſolutione lateris verticalis reſultat: ita illud reuera adeſt, quando tubus aliquis dato con-
Figura 25. ſilio hoc modo conſtruitur, qualem figura 25. exhibet, id quod executu adeo difficile non eſt. Atqui in huiusmodi tubis negari non poteſt, latera DE attrahere, ſi aqua in eius viciniam defertur; quippe videmus, guttulam a baſi tubi quacunque ſuſpendi. Quodſi igitur ſuprema peripheria tubi AF ſuſtinere poteſt cylindrulum aqueum AFG: poteſt etiam peripheria laterum DF et FE proxima ſuſtinere canaliculum, quo cylindrulus ille circumdatur, quales peripheriae tot numero eſſe finguntur, quot puncta in latere DF concipiuntur.

Exper. 12. §. 27. Atque hoc phaenomenon *non poteſt non in vacuo etiam apparere*, cuiuscunque longitudinis et capacitatis ſit tubus; modo pars ſuprema tubuli capillaris adeo anguſta ſit, vt eius peripheria altitudini reciproce reſpondeat.

deat. Quippe omnis res ad virtutem attractiuam tam peripheriae tubuli capillaris, quam laterum DF, FE, itemque et ad cohaesionem particularum aquearum inter se reducitur; quae binae virtutes per vacuum non abolentur. Quapropter omnis illa insignis difficultas, quae in considerando hoc experimento in vacuo se offerre videtur, (*Iur.* Diss. II.) plane euanescit. Tabula XII. Figura 25.

§. 28. Cum his experimentis (§. 25.) autem plane non confundendum est *aliud*, *quando* nempe *aqua* in tubo ampliore a *portione* in angustiore *per interiectam bullam aeream dirimitur*. Quamuis enim in hoc attractio lateris horizontalis omnino cessat, propterea tamen in illis neutiqam reiici debet. Quippe circumstantiarum varietas caussarum quoque diuersitatem facile admittit. In illis quidem continuitas fluidi per cohaesionem particularum aquearum, in hoc autem per interiectum corpus aereum elasticum efficitur. Et cum ibi sola atmosphaerae pressio et attractio peripheriae supremae occurrit: ita hic praeter atmosphaere pressionem et peripheriae summae C attractionem, etiam attractio peripheriarum D et E, et denique aer inclusus, qui eandem cum atmosphaera externa densitatem conseruat, considerari debent; vnde omnino explicatio longe alia emergit. Haec autem vt facilior euadat, reducamus experimentum ad casum simpliciorem, qualem *Exc. Bilfingerus* (Diss. §. LII.) fecit. Sit tubus cylindricus AB, in quo suspendatur aquae quantitas CD et EB, et sit interiectus aer DE. Hic quidem idem illud accidit, quod supra (§. 3.) asseruimus, nimirum, *summam altitudinum* CD *et* EB *aequalem fore altitudini illi, ad* Figura 26. Figura 26. Exper. 2.

 quam

Tabula XII. *quam in eodem tubo aqua non interrupta aſcendere potuiſſet.* Primo enim non ſolum peripheria C portionem CD ſuſtentat, ſed etiam peripheria D, quae omnino negligi non debet, eandem ad deſcenſum ſollicitat. At vero, quia tubus cylindricus eſt, peripheriae D et C aequales ſunt; ergo vis, qua vtraque aquam attrahit, etiam aequalis eſt, et vna alteram niſu contrario deſtruit. Porro atmoſphaera quidem tota grauitate ſua ſuperficiei C incumbit, ſed effectus per eiusdem atmoſphaerae actionem reciprocam in ſuperficiem B itidem deſtruitur. Solum igitur pondus portionis CD reſtat, cuius grauitate portio EB, mediante interiecta bulla DE, deorſum premitur. Cum vero portio BE tanta non ſit, quantam peripheria E, aequalis peripheriae B, ex hypotheſi attrahere poteſt: ergo exceſſu virtutis huius reliqua portio CD, tamquam altitudinis debitae complementum, ſuperabundante peripheriae illius virtute ſuſtinetur. Inde *clarum eſt, experimentum in vacuo ſuccedere non poſſe.* Si enim tum bulla aerea deficit: nihil eſt, quod effectum grauitatis ponduſculi CD moretur; haec igitur portio in vacuo deſcendit, donec cum portione altera EB coniungatur. Si vero bullam etiam ſub recipiente vacuo incluſam ponas, haec elatere ſuo vtramque portionem aquae accumbentem disiiciet; et experimentum plane irritum reddetur.

Exper. 13. §. 29. Applicemus hanc explicationem ad caſum magis compoſitum, quando nempe tubulus non eiusdem Figura 27. vbique capacitatis eſt. Sit talis tubus AB, portio aquea ſuperior in tubulo anguſtiore CD, portio inferior in tubo ampliore EB, bulla aerea interiecta DE. Sit altitudo, ad ad quam peripheria C aquam attollere poteſt, $=FG$; altitudo peripheriae D reſpondens $=HG$; altitudo peripheriae E reſpondens $=HI$. Hoc tubo ita impleto, portio CD ſollicitatur a diuerſis viribus contrariis, a peripheria C ſurſum; a peripheria D autem, itemque a preſſione atmosphaerae cum proprio ponduſculo conſpirante deorſum. Quodſi iam vires peripheriarum C et D aequales eſſent: idem accideret, quod in exemplo antecedente (§. 28.); et portio CD ſolo ponduſculo ſuo, et preſſione atmoſphaerae, verſus ſubiectam portionem EB, mediante bulla, vrgeretur. At vero, quod rectiſſime indicauit *Cel. Iurinus*, iſtae peripheriae aequales non ſunt, quia ſuperior tubulus AD inter fabricandum plerumque figuram conicam nanciſcitur. Attractio igitur peripheriae C per alteram D non tota deſtruitur, ſed virtus eius adhucdum tanta eſt, vt poſſit aquam ſuſtinere ad altitudinem FH, aequalem differentiae altitudinum, binis iſtis peripheriis reſpondentium FG et HG. Iam vero peripheria C actu non ſuſtentat niſi portiunculam CD ad altitudinem FK; ergo reſtat virtus, aequalis altitudini KH. Non ſolum igitur portio CD ponduſculo ſuo in portionem EB ſubiectam non premit, ſed nec Atmoſphaerae pondus ſuperficiei C incumbens preſſionem ſuam totalem in eandem portionem EB ſolam libere exercet, quia ſuperare etiam debet eandem reſtantem virtutem attractiuam peripheriae C ad altitudinem KH. Quodſi igitur euenire debet, vt aequilibrium oriatur inter preſſionem atmoſphaerae imminutam et partialem, qua portio EB, mediante portione CD et bulla DE, deorſum vrgetur, et inter eiusdem atmoſphaerae preſſionem totalem et liberam, qua in ſuperficiem B reagitur: neceſſario in

Tabula XII. ſubſidium vocari debet pondus cylindri aquei altitudinis KH, quod virtuti iſti reſtanti aequipollet, et ſimiliter deorſum nititur. Ad conſeruandum igitur aequilibrium portionis EB altitudo aequalis eſſe debet ſummae altitudinum KH et HI = KI; ſiue: *ſumma altitudinum vtriusque portionis* CD et EB = FK + KI *aequalis erit ſummae* FI *ex altitudine* HI, quae peripheriae E competit, *et ex differentia altitudinum* FH, peripheriis C et D reſpondentium; ſiue: vti *Cel. Iurinus* expreſſit, *altitudini peripheriae* C *totali* FG, *demta differentia altitudinum peripheriis* D *et* E *reſpondentium.*

Figura 27. Exper. 14. §. 30. Quodſi igitur altitudo cylindri aquei CB maior eſt altitudine KI, ille deſcenſum continuat, donec ad debitam altitudinem conſiſtat; quae admodum variare poteſt, pro varia differentia peripheriarum C, D et E. Poſita enim peripheria C eadem, quando D = E fuerit: erit ſumma altitudinum vtriusque portionis CD et EB, aequalis altitudini totali FH + HG, *q* = FG, quia tum erit HI = HG. Quando autem peripheria D imminuitur, vt aequalis fiat peripheriae C; quod accidere poteſt, quando tubulus capillaris AD non conicus ſed cylindricus eſt: tunc harum binarum peripheriarum virtus mutuo deſtruitur; portio igitur CD et atmoſphaera incumbens grauitate totali in ſubiectam portionem EB agunt, cuius pondere addito reactio atmoſphaerae in baſin B neceſſario ſuperatur. In hoc caſu igitur aqua EB non ſuſtentatur, ſed deſcendit, donec FI = HI fiat, quod etiam euenit, quando portio CD plane aboletur. Haec omnia cum experimentis egregie conueniunt, quando pro iis captandis tubus ſatis longus adhibetur, vt nunc portio CD nunc EB augeri minuiue poſſit.

§. 31.

§. 31. Ex genuina huius phaenomeni explicatione Tabula XII. (§. 29.) allata *apparet*, *illud in vacuo succedere non posse*. Nulla enim tum erit atmosphaerae pressio in superficiem Figura 27. C et E. Vis igitur peripheriae C sola tanta est, vt non solum destruere possit vim peripheriae D reagentem, sed et simul sustentare portionem CD, ne descendat, quemadmodum (§. 21.) dictum est. Peripheria autem E tantae virtutis non est, vt portionem aquae attrahere possit ad altitudinem EB=KI; neque pressio atmosphaerae adest in basin B agens. Quapropter in vacuo, deficiente *Exper.* 15. bulla DE, portio CD in situ suo conseruabitur, portio autem EB grauitate sua descendet eousque, donec ad altitudinem HI, peripheriae E conuenientem haereat. Atque ex his binis exemplis (§. 28. 29.) luculenter patet, pressionem aeris negligendam non esse, sed in explicatione horum effectuum physica omnino attentionem mereri. Videlicet in iis solis casibus negligi potest, in quibus non tam pressio, quam applicatio pressionis vtrinque aequalis est, vt semper aequaliter in se inuicem agere, et se mutuo destruere possit, quod idem est ac si plane non ageret; id quod fit, quando ex. gr. aqua in tubo continua est; tunc enim eadem oriuntur phaenomena, siue experimenta instituantur in aere, siue in vacuo (§. 27.). Quando autem portiones diremptae sunt: phaenomena longe alia manifestantur in vacuo, quam in aere; Et quidem, quando in vacuo etiam bulla aeris ipsa deficit, denuo alia accidunt in tubo cylindrico (§. 28.), alia in tubo inaequalis diametri, vt paullo ante diximus. Quando autem *Exper.* 16. tubum siue cylindricum, siue inaequalis amplitudinis, in quo portiones interposita bulla diremptae sunt, in vas re-

 cipiens

Tabula XII. cipiens includis, et aerem circumquaque exhaurire ſatagis: bulla iſta, quae prius eiusdem elateris cum aere externo fuerat, extenditur, et portiones aqueas vtrinque accumben-
Exper. 17. tes ſimul extra tubum expellit. Quando denique tubum, ſiue aequalis ſiue inaequalis diametri, aqua intus ſiue continua ſiue per bullam diremta, ita ad vas recipiens adaptaueris, vt alterum extremum gracilius extra illud promineat; atque aerem recipientis exhaurire adgrediaris: atmoſphaera exterior portionem DC adeo vrget, vt illam mox detrudat et perrumpat, ipſaque per tubum viam patulam in recipiens ſibi ſternat.

§. 32. Reſtant bina experimenta *Muſſchenbroekiana* Cap. IV. Exp. X. XI. quae huic negotio obſtare videntur. Quia vero per meam experientiam omnia *alia* edoctus ſum; non duxi, neceſſarium eſſe, vt illis enodandis diutius immorarer.

§. 33. Progredior ad *ſiphones*, ſiue ad *tubos* vario modo *inflexos*, qui plura phaenomena in admirationem rapientia produxerunt. *Alia* enim oriuntur, quando ſiphonem vacuum implere velis per attractionem; *alia*, quando illum quomodocunque repletum teneas in aere; *alia* denique, quando altero oſculo tangas aquam in vaſe. In quibus omnibus explicandis variatio cauſſarum, illarumque applicatio quam maxime attendi debet, quae ſunt 1. *vis attractiua* peripheriarum, quas aqua intra tubum attingit, 2. *preſſio atmoſphaerae*, quae hisce caſibus plurimum ſe immiſcet, et 3. *pondus aquae*; ex quibus varie combinatis nunc quies nunc motus producitur, quemadmodum ſequentes regulae docebunt.

RE-

REGVLA GENERALIS.

Tabula XII.

§. 34. *Sit ſipho plenus* ABC, *cuius crura differant longitudine et diametro quomodocunque; quando differentia crurum aequalis eſt vel minor altitudine, ad quam aqua eleuari poteſt virtute attractina peripheriae, quae aquam inter mouendum dimittere deberet: nullus erit motus*, ſed aqua intus in ſiphone quieta haerebit. *Quando differentia crurum maior eſt iſta altitudine, aqua effluet per crus longius.* In ſiphone ampliore ACDB ordinario aqua effluit per crus longius, quaecunque ſit crurum differentia; propter aequilibrium virium, queis quaeuis columna AC et BD deſcendere et per oſcula A et B effluere nititur, a pondere exceſſus columnae EA ſuperatum. Praeter pondera enim columnarum iuncta cum preſſione atmoſphaerae vtrique orificio A et B incumbentis nulla alia vis hic locum habet; nihil igitur eſt, quod aſcendentem columnam DB impediat aut retardet. At vero in tubo capillari attractio peripheriae e. gr. *b* aſcendentem columnam *b*D ad deſcenſum ſollicitat, qui niſus a pondere columnae EA ſuperari debet. Quando igitur attractio peripheriae *b* tanta eſt, vt columnam aqueam ſuſtinere poſſit ad altitudinem EA: nullus erit motus; aequiponderant enim vtrinque, praeter atmoſphaeram, columna CE et DB, itemque columna EA et vis peripheriae oſculi B, vel *b*. Si columna EA minor eſſet altitudine requiſita: ſimiliter foret quies, et effluxus adeo non ſequeretur per oſculum A, vt potius prolongato tubo in Bβ columna cruris DB deſcenſura eſſet. Quando denique differentia crurum altitudinem iſtam excedit, vt attractio peripheriae B conſumatur ſuſtinenda columna e. gr. E*a*: tunc portio reliqua *a*A ſibi relicta et a nulla re im-

Figura 33. Fig. 35. 36.

Figura 28.

Tabula XII. pedita proprio pondere descendit et effluit; cum vero semel effluxus incepit, ille continuatur, quia differentia columnarum CA et D*b* semper augetur.

§. 35. Ex hac regula *generali* (§. 34.) sequuntur *leges* pro *casibus specialioribus*.

I. Pro effluxu, quando siphonis repleti crus alterum aquae in vase admouetur.

1. *Quando osculum cruris breuioris aquam in vase lambit, haec semper effluit per orificium cruris longioris; quomodocunque differant crura longitudine vel diametro.*

Figura 28. Quando enim contactus fit: actio peripheriae B in columnam DB cessat, quia facto motu semper noua aqua a pressione atmosphaerae suggeritur. Nihil igitur est, quod columnam EA suo pondere descendere nitentem sufflaminet; et res ad eum casum rediit, ac si sipho ex tubis non capillaribus constaret. Quapropter effluet aqua ex crure longiore; quaecunque crurum differentia fuerit.

2. *Quando orificium cruris longioris aquam lambit: haec non effluit versus vas, nisi differentia crurum maior fuerit altitudine, quae peripheriae cruris breuioris competit.*

Contactus enim in hoc casu nullam mutationem caussarum affert; et effectus omnis dependet a reciproco conatu columnae EA et attractionis peripheriae cruris breuioris, quam aqua deserere deberet, dum per crus alterum in vas effluxura esset. Redundante igitur columnarum differentia, sequitur effluxus: praeualente autem attractione peripheriae, erit quies (§. 34. Reg. Gen.).

3. *Quan-*

3. *Quando aqua effluit; effluxus semper fit per orificium cruris longioris; quodcunque orificium superficiem aquae in vase lambat.* Tabula XIII.

Nam effluxus dependet a praeualente differentia columnarum aquearum.

II. Pro replendis siphonibus vacuis.

1. *Sit Sipho, crurum diametro aequalium, et longitudinis cuiuscunque; sit autem crus, cuius osculum aquam lambit, breuius quam altitudo ad quam peripheria interna aquam successiue eleuare potest: in tali siphone aqua per admotum crus ascendet, et pergendo in altero descendet, donec totus tubus sit impletus. Quando crus alterum breuius est crure admoto, aqua quiescet; quando longius est, effluet.* Figura 29.

Quando enim aqua per C ad D transiit: differentia columnarum aquearum A C minor est altitudine quam peripheria D sustinere potest, ex hypothesi. Descendit igitur aqua versus B, quia manente eadem peripheria differentia ista continuo decrescit; et postquam crus repletum est, aqua vel effluit ex B vel quiescit (§. 34. et 35. I. 1. 2.).

2. *Sint omnia, vt ante, sed crura diametro inaequalia: In crure angustiore aqua quidem ascendet; sed postquam ad D peruenit, quiescet, si differentia columnarum A C maior fuerit, quam a peripheria cruris amplioris sustineri possit. Quando autem aqua per crus amplius ascendit, crus alterum angustius totum replebitur, vel quiescente postmodum aqua vel effluente, pro ratione longitudinis A C.* Figura 30. Figura 31.

Tabula XII. In primo enim caſu, quando velis, vt aqua porro deſcendat, actio peripheriae D a columnae pondere AC ſuperaretur, et fieret in deſcenſu aſcenſus, quod eſt abſurdum. In altero caſu peripheria C differentiam BD ſubſtinere poteſt ex hypotheſi, ergo crus anguſtius repletur, quia differentia continuo minuitur. Cetera ſe habent, vt (I. 1. 2. II. 1.).

§. 36. Atque ex his regulis (§. 34. 35.) omnia phaenomena, quae in experimentis Clariſſimorum virorum *Hauksbeyi*, *Iurini*, *du Fay*, *Muſſchenbroekii*, et aliorum occurrunt, facillime ſolui poſſunt; id quod aliquibus exemplis commonſtrare non inutile erit.

Exper. 18. *Figura* 32. „§. 37. Ex. gr. Differt. *Iurin.* Exp. 1. 2. Sit „ſipho capillaris ABFC, conſtans cruribus duobus longi-„tudine et diametro inaequalibus. Aſcendat in longiore „et anguſtiore AB, ad altitudinem AB; in crure breuiore „autem et ampliore BC non niſi ad altitudinem FC. „Ex tali ſiphone repleto aqua effluit per orificium A, „et relicto crure BC vacuo, in altero crure ſuſpenditur „ad altitudinem AB; ſiue oſculum A aquam in vaſe lam-„bat, ſiue ſupra illam extollatur: ſi differentia crurum AG „maior fuerit altitudine FC. Si minor fuerit differentia, „in neutro caſu effluit. *Exper.* 19.

Ratio abunde patet ex §. 35. *I. reg.* 2. *et* §. 34. *Reg. Gen.*

§. 38. Eadem experimenta repetit *Cel. Muſſchenbroek* Cap. VI. Exp. I. II. cuius primi phaenomenon tamen diuerſum putat a ſuo experimento Cap. V. Exp. X. quod

quod ita se habet: „Sit sipho bicruralis ABGFC, cuius „crus FC sit 4. lin. GA, 6. lin. Imponatur crus lon- „gius AG aquae et breuius crus FC extra eam promi- „neat, ascendet aqua sursum, superat flexuram FG, descen- „ditque vsque ad oram breuiorem C, ad quam haerebit, „nulla effluente gutta. „ At vero, non mirandum est, esse phaenomena diuersa, cum diuersum experimentum sit. Agitur enim in isto capite V. de *tubis vbiuis aeque latis*, et tacite supponitur, crus GA, etsi longius, *breuius* tamen esse, *quam altitudo* requirit, ad quam aqua *sua sponte* in illo eleuaretur. Cum igitur peripheria osculi C aquam suspendere potest ad altitudinem cruris longioris GA: potest etiam eadem diameter illam suspendere ad altitudinem BA, quae est differentia crurum. *Accidit igitur, quod regula nostra* II. 1. (§. 35.) *requirit*; nec experimentis *Iurinianis* contradicitur. *Exper.* 20. Figura 33. Tabula XII.

§. 39. Cum binis experimentis (§. 37.) congruunt „tria *Iuriniana* sequentia. Exp. 4. Sit sipho ABFC in „quo aqua ascensura est ad altitudinem CF, si osculum C „aquam attingit. In tali siphone repleto si osculum C at- „tollatur supra aquam DE, aqua suspendetur in siphone, „nisi differentia crurum BA maior sit altitudine FC„. *Ratio patet ex regula generali* (§. 34.). *Exper.* 21. Figura 34.

„Exp. 11. Sit ABC sipho eiusmodi, in cuius crure „breuiore et angustiore AB sustineri possit columna aquea „altitudinis EF, si quidem istud crus ea longitudine fuerit; „at in crure longiore et ampliore BC aqua suspendi ne- *Exper.* 22. Figura 35.

queat

Tabula XII. „queat supra altitudinem GH; si repletus iste sipho eo situ „tenetur, quem exhibet figura, non effluet aqua ex C aper„tura cruris longioris, nisi DC, differentia duorum crurum „AB, BC superet altitudinem FE„. *Plane, vti docet regula generalis* (§. 34.).

Exper. 23. Figura 36. „Exp. 12. Si crus angustius BC longius fuerit crure AB „(positis altitudinibus EF et GH respectiuis iisdem); effluet „aqua per osculum C, si differentia crurum DC maior sit „altitudine GH: aliter tota aqua sustinebitur„. *Fundatur eadem regula generali* (§. 34.).

Quae cum vera sint, necessario bina experimenta *Musschenbroekiana* Cap. V. Exp. VIII. et Cap. VI. Exp. III. corruunt, in quibus asseritur: „aquam non effluere ex oscu„lis crurum longiorum, quamuis differentiae crurum ex„cedant longitudinem attractioni cruris breuioris compe„tentem„. Cuius contrarietatis caussam exinde natam esse suspicor, quod in repetitione experimenti *Iuriniani* vndecimi loco vocis, *nisi*, particula *quamuis*, posita fuerit: id quod festinanti calamo facile accidere potest. Vnde etiam praetensa ejus explicatio cessat.

Figura 34. Exper. 24. §. 40. Exp. *Iur.* 5. „Sint omnia, vt ante (§. 39. „Exp. 4.) vbi osculum C vel minimum immergitur in „aquam: illico aqua guttatim cadit ex orificio A, etiamsi „AB multo minor sit altitudine FC„. *Rationem suppeditat regula* I. 1. (§. 35). Rectissime igitur erroris a *Iurino* arguitur *Hauksbejus*, qui „aquam non effluxuram putat „ex osculo A, nisi altitudo BA superet altitudinem CF. Confer, si placet, duo experimenta *Musschenbr*. Cap. V. Exp. VII. et Exp. IX. sibi contrariantia.

§. 41.

§. 41. Exp. *du Fay*. I. In tubi recurui BAC crure capillari A*a*C afcendit aqua fupra libellam ad altitudinem A*a*. Cum idem tubus in fitum fiphonis inuerteretur: aqua effluxit ex cruris longioris ofculo C; plane, vti leges fiphonis communes expofcunt. Tabula XII. Figura 37. Figura 38. Exper. 25.

Defcendit enim ex *a* verfus C, non folum, *quia columnula* A*a* pondere fuo *deorfum nititur*, fed etiam, *quod attractio* peripheriae *a fortior* eft, quam attractio peripheriae B (§. 19. 21.). *Effluxit* autem, *quia* fine dubio attractio pheripheria B tanta non erat, vt columnam A*a*C fufpendere poffet ad altitudinem AC (§. 34.).

II. In fitu primo (fig. 37.) Columna A*a* flando deprimebatur paulum infra libellam AB, vsque ad *cb*, vt columna aquae altior effet in crure ampliore. Quo facto, et fiphone denuo inuerfo (fig. 38.) motus aquae iterum determinabatur verfus ofculum C cruris anguftioris, columnulam breuiorem continentis; et nihil effluebat ex crure ampliore, nifi columnula A*a* tantum deprimebatur infra libellam, quantum prius fteterat fupra libellam, vt effet $A\alpha = A a = B\beta$. Exper. 26

Quando columna aquea in crure capillari parum deprimitur infra libellam, ad altitudinem A*c*: differentia columnarum B*b* minor erit altitudine A*a*, ad quam peripheria *c* aquam fufpendere poteft. Omnes enim peripheriae tubi capillaris αAC aequales funt. Defcendit igitur aqua in crure AC, quia non folum peripheria *c* nifum pondufculi B*b* impedit, fed etiam fortius agit quam peripheria B, huiusque attractionem deftruit (§. 35. II. §. 19.). At vero, quando $A\alpha = A a$ erit: virtus peripheriae α fufpenfione columnae $B\beta$ tota confumitur; quae confequen- Fig. 37. 38.

Tabula XIX. ter descendit restante virtute attractiua peripheriae B; tumque effluit ex osculo D, quia columna Dβ, continuo augetur (§. 34.). *Nulla igitur re, praeter iustam comparationem attractionum peripheriarum a* α et B, *et ponderis differentium columnarum* Aa Bβ et Dβ, *itemque pressionis atmosphaerae in siphonis oscula* C et D *ad explicanda haec phaenomena opus est.*

Exper. 27. Figura 39. §. 42. Non reticendum denique mihi videtur *elegans* experimentum *Celeb. Musschenbroekii* Cap. V. Exper. V. „Tubum inflexit in formam ABCGDFK, ita, vt curuatura superior D esset altior, quam extremitas A, et curuatura inferior C depressior quam K. Erat tubus cylindricus eiusdem formae, ac depingitur, paullum tamen angustior. Huius extremitas K immissa fuit aquae, quae vltro ascendit ad D, et curuatura superata descendit ad C, qua pertransata ascendit vsque ad B tantum, non ad summum orificium A, manebatque distantia AB $1\frac{1}{2}$. lineae vacua. Euacuato et inuerso tubo, extremum eius A immersum fuit aquae, quae ascendit, impleuitque tandem tubum DK, excepta parte vltima $1\frac{1}{2}$. lineae. Tubum impletum ex aqua exemit, visurus, an efflueret ex orificio K, an descenderet in crure BC?„ sed mansit aqua in tubo, effluxitque nihil. *Cel.* Auctor omnem lapidem mouet, vt phaenomeni *primi* huius experimenti rationem expiscetur, quae, vt verum fatear, mihi difficillima inuentu, imo *impossibilis* videtur, *si* quidem *omnia se habent, vti supponuntur.* De veritate phaenomeni plane non dubito. Liceat igitur augurari. Vereor, vt tubus perfecte cylindricus fuerit, et, ne crura CA et FK magis conica

et

et verſus extremitates ampliora fuerint, quam circa CGD; Tabula XL.
id quod facile accidere potuit, quando ſiphonem, iuxta methodum in praefatione ſua expoſitam, ex parte alicuius Exper. 28.
tubi media exſciſſa fabrefecit; quippe *in ſiphone ſimili*, cu- Figura 40.
ius crus AC verſus L producta ſenſim anguſtabatur, *aqua* non ſolum ad A, ſed et *vltra* M vsque ad L *adſcendit*. *Phaenomenon alterum*, quod nihil effluebat, quando tubus extra aquam tenebatur, nihil difficultatis habet; quippe actio peripheriae B attractiua ſatis fortis erat, vt columnam aqueam ad altitudinem HK ſuſpendere potuerit.

§. 43. Atque haec ſunt experimenta potiora, quae explicare operae pretium duxi; quia phaenomena talia ſuggerunt, quae vel theoriam attractionis euertere, vel difficultatibus ſaltim obnoxia eſſe videntur. Quam theoriam ſiue *Hauksbejanam*, ſiue *Iurinianam* ſed plenius euolutam, dixeris, mihi perinde erit. Talis enim denominatio veritati rei nec proderit nec officiet: modo ſemper meminerimus, voce attractionis non cauſſam phyſicam ſpecialem, ſed phaenomenon aliquod generale indigitari, cuius cauſſa detegenda reſtet. Quemadmodum vero omnia facile et naturaliter exinde fluere intelligimus: ita accuratior phaenomenorum enodatio abunde docuit, naturam fluidi ſubtilis cuiuscunque et leges preſſionis, quales vulgo hactenus in hydroſtatica cognitae ſunt, neutiquam in hoc negotio locum habere poſſe; vt ſuperfluum imo inutile ſit, ad iſtiusmodi adminicula confugere. Quo ipſo tamen eos deterreri nolim, qui ad eruendas forte alias preſſionis leges hactenus incognitas, et ad attractionis phaenomena magis accommodatas animum appellere forte adgrediuntur.

DE
ALSINANTHEMO THALII,
SEV
TRIENTALI HERBA IOANNIS BAVHINI.
AVCTORE
J. Amman.

Tabula XIII. ELegantis huius plantulae in Botanicorum operibus saepe quidem mentio fit, nullibi tamen character illius bene designatur. Sunt qui ad Pyrolae genus retulerunt, sunt alii, qui peculiare exinde genus constituerunt; sed male omnes, vti ex sequenti descriptione patebit.

Primo statim vere, niue et glacie liquefactis, ex radice crassiuscula albente, longe lateque serpente, multasque fibras fortes emittente, albentes itidem, et alte admodum in terram demissas, cauliculus surgit singularis, teres, tenellus, glaber, non ramosus, biuncialis aut triuncialis, aliquando et spithamalis, prope radicem nudus et flauescens; huic ad vnciae vnius aut alterius in altioribus plantis a radice distantiam, adnascuntur foliola aliquot, tria vtplurimum, nullis pediculis insidentia, quorum primum, radici scilicet proximum, vix duarum linearum longitudinem assequitur, secundum semunciali fere est longitudine, tertium autem vncialem iam et longiorem subinde obtinet. Ex cauliculi summitate folia alia oriuntur, multo maiora iis, quae cauliculi lateribus absque pediculis adnascuntur, in vmbellae quodammodo speciem

disposita,

dispoſita, quina, ſena et plura etiam, perbreuibus pediculis ſuſtentata, magnitudine diuerſa, alia enim vncialem, alia ſemuncialem, alia biuncialem habent longitudinem; omnia vero pallide virent et glabra ſunt atqne parum ſplendentia, vtrinque anguſtata, ab anguſta ſcilicet baſi paulatim latiora facta ad medium eorum vsque, vnde iterum paulatim contractiora fiunt, donec deſinunt in apicem. Medium horum percurrit nervus ex pediculo continuatus, albicans, auerſa praecipue parte conſpicuus, multos laterales ramos emittens, ex quibus infiniti alii ſubtiliſſimi quaquaverſum egrediuntur.

Ad exortum foliorum horum vmbellatorum aut ſtellatorum, aliquando quoque ex ala ſupremi eorum, quae cauliculo adnaſcuntur, pedicelli ſurriguntur modo ſingulares, modo bini vel terni, ſeſcunciales et biunciales, tenuiſſimi, glabri, viridantes albenteſue aut ruffi, quorum ſummitates expanduntur in ſex vel ſeptem aut octo foliola anguſtiſſima, duas circiter lineas longa, ſtriata, rubentia, acutiſſima, quae calycem efficiunt; in cuius medio embryo conſpicitur aciculae capitelli magnitudine et forma, piſtillo tenuiſſimo flaueſcenti inſtructus. Fundo autem calycis circa embryonem adhaeret flos monopetalus, rotatus, multifidus, ſpecioſus, albus, in ſex vel ſeptem ſegmenta, acuta fere, ad baſin vsque diuiſus. Creſcente embryone flos a fundo calycis auellitur, ſurſumque eleuatur, deciditque integre cum foramine in medio conſpicuo, in quo embryo ſitus erat. Ad tumentes huius foraminis oras totidem oriuntur ſtamina, quot ſunt floris ſegmenta, capillaria prorſus et ſubtiliſſima, albentia, lineam vnam cum dimidia longa, apicibus onuſta croceis, qui genitali puluiſculo ſcatent. Delapſis floribus, vti creſcente embryone fieri diximus, embryo tandem fit fructus ſiccus, ſubrotundus, vix ad grani piperis magnitudinem accedens, ex viridi ruffus, et per maturitatem apice dehiscens, in quo ſemina continentur parua, ſeptem vel octo, ab vna parte gibba vel conuexa, ab altera anguloſa, dura admodum, nigricantia, placentae affixa. Vnumquodque praeterea ſemen membranula peculiari tenuiſſima, dilute cinerea, obductum eſt. Teſta fructus per maturitatem in varia fruſta collapſa, ſemina iſta, membranulis his dilute cinereis amicta, diu adhuc ſuper calycem remanent, rubique caeſii fructum non male repraeſentant.

Naſcitur in Ingriae et Careliae Alnetis Betuletisque frequentiſſime ad arborum radices inter muſcos, floretque primo vere, fructum vero fert Iunio Iulioque menſibus.

Maioris et *minoris* mentionem faciunt quidam Auctores, quae tantum varietates ſunt a ſolo humidiori vel ſicciori, ſolis radiis magis vel minus expoſito, pendentes.

Ex data iam deſcriptione concludi poteſt, ad quodnam genus plantarum pertineat, vel an nouum inde conſtitui poſſit. Flos monopetalus, multifidus, rotatus; fructus vnicapſularis, apice dehiscens, pluribus ſeminibus faetus placentae affixis, characteres ſunt, ni fallor, *Lyſimachiae*; hos igitur cum noſtra plantula eosdem omnes habeat, ad idem genus neceſſario referri debet. Poteſt ergo nominari: *Lyſimachia humilis, ſtellatis foliis, flore albo.*

Huius

Huius porro ſynonyma ſunt,

Herba Trientalis **Cord. Obſ. Sylv. Joh. Bauh. Rivin.** *Flor. Jenenſ.*

Herba puſilla trientalis cauliculo ſingulari **Hort. Luſat.**

Ἀλσινάνθεμος *et* Ἀστεριάνθεμος *Thal.*

Pyrola Alſines flore Europaea **C. Bauhin. Pin. 191.** *et Prodr. vbi ſatis bona figura.* *Mor. Hiſt. Ox.* **Rai.** *Hiſt. et Meth. emend.*

Pyrolae affinis Alſinanthemos noſtras alpina **Pluk. Alm.**

Pyrola longo folio, flore albo ſingulari, Polonica **Barrel.** *Ic.* 1156. *f.* 2.

Tabula XIII.

Fig. 1. Plantam integram naturali magnitudine demonſtrat.
Fig. 2. Floris auerſam partem cum calyce.
Fig. 3. Fructum maturum, antequam dehiſcit.
Fig. 4. Semina placentae affixa poſt collapſam teſtam.
Fig. 5. Semen.

DE

DE
BETVLA PVMILA,
FOLIO SVBROTVNDO.

AVCTORE
J. Amman.

Tabula XIV. ARboris, cui omnes fere rei herbariae ſcriptores Betulae nomen tribuerunt, duae hactenus ſpecies aut potius varietates, a natura ſoli pendentes, Botanicis innotuerunt; quarum altera arboreſcit, trunco ſatis craſſo et recto, ramisque et virgis minus dependentibus; altera autem fruteſcit magis, nullo ſpectabili trunco aſſurgens, ramis et virgis deorſum pendentibus. Priori ſeu arboreſcenti nihil frequentius in Ingria et Carelia, in quibus regionibus in magnam excreſcit altitudinem; poſterior ſeu fruteſcens Betula rarius occurrit. Verum praeter duas hasce varietates alia ſpecies reperitur plane diuerſa, in paluſtribus locis dictarum regionum proueniens, a nemine adhuc deſcripta, quam *Betulam pumilam folio ſubrotundo nuncupaui*: Eſt autem noua haec ſpecies humilis admodum, vix humanam altitudinem aſſequens, virgis in plurimos et erectos ramulos brachiatis, cortice ſpadiceo, ſplendenti, in tenuiſſimas philyras ductili, veſtitis.

Ramulis hinc inde nullo ordine adnaſcuntur foliola ſubrotunda, breuiſſimis, vix lineam longis, pediculis inſidentia, profunde dentata, viſcoſa, ſuperne laete viridia, inferne pallide vireſcentia, vnciam plus minus lata, tantundem

tundem longa siue parum vtplurimum breuiora, singularia, non raro tamen bina, terna aut quaterna, ex vno puncto excrescentia: medium eorum neruus percurrit in plurimos laterales ramos ramulosque diuisus, auersa praecipue parte conspicuos.

Ex eodem cum foliolis exortu egrediuntur corpuscula cylindracea, ex viridi flauescentia, vnciae trientem circiter longa, lineam cum dimidia lata, ex squamulis trifidis, profunde sectis et axi affixis, composita, sub quibus continentur futurorum seminum embryones, qui, si ab julorum puluere foecundante impraegnati fuerint, abeunt in semina minutissima, membranula peculiari, pallide virescenti, et ad latera extanti, inclusa.

Tabula XIV.

Fig. 1. Ramum naturali parumper minori magnitudine demonstrat.
Fig. 2. Folii infernam partem naturali magnitudine exhibet.
Fig. 3. Eiusdem partem supernam.
Fig. 4. Fructum integrum.
Fig. 5. Squamulam trifidam.
Fig. 6. Semen membranula ad latera extanti inclusum.
Fig. 7. Semen nudum.

Nota. Rationem, quod descriptio et icon Betulae pumilae in Commentarios nostros relatae sint, Auctor descriptionis in *Icon. et descript. stirp. rar. in Imperio Rutheno sponte prouenientium* p. 180. ita explicauit, vt plura addere superuacaneum esset. Non impar ratio est scripti de Trientali; quod ante edita Caroli Linnaei genera in conuentu Academico praelectum Commentariisque insertum fuit. Dumque iam scripta haec Ammaniana prelo committuntur, neutrum Autorum offendi persuasissimi sumus: Opera enim vnitis viribus in incrementum scientiarum a viris doctrina inclytis collocata vtrique Autori laudem affert; et forte in Ammanianos manes rigidi nimis censeremur, si vltima fere eius laborum monumenta silentio premeremus.

OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM, AB ANNO 1726 VSQVE IN FINEM ANNI 1736 FACTARVM, COMPARATIO.

PRAELECTIO PRIMA.

AVCTORE
Georgio Wolfg. Krafft.

§. 1.

Obseruationes meteorologicae, e quibus sequentes deductiones elicui, inceptae sunt a Clarissimo quondam *F. C. Maiero*, die 27 Febr. st. v. 1726. qui Vir, meritis praecipue Astronomicis spectabilis, cum 24 Nouembr. 1729 pie defunctus esset: continuatio harum obseruationum mihi demandata fuit, quam etiam omni qua potui diligentia et cura hucusque peregi. Cum vero vnice eum in finem obseruationes instituantur, vt ex iis talia deriuentur consectaria, quae ad incrementum scientiae et theoriae faciunt: putaui numerum harum obseruationum per tot annos institutarum abunde iam iam sufficere, vt aliquid saltem lucis tempestatum variabilium, atque aliorum phaenomenorum huc pertinentium, theoria ex iis lucrari possit. Ex obseruationum sola accumulatione non emendantur scientiae Physicae, sed diffunduntur: et, mea qualicunque sententia, aliquid veri, quam primum id fieri potest, ad theoriam, et vtilitatem publicam, ex iis decerpere praestat, quam eo vsque expectare, donec veritas manibus quasi palpari possit. Hoc enim saepissime moram rebus vtilissimis affert nimis diuturnam: illud vero, licet

non

non ſit ex omni parte perfectum, vſu tamen non caret; atque ſub oculos ponit, qua ratione obſeruationes ſubinde ad finem earum obtinendum accommodatius inſtituendae ſint; cum certo conſtet, nos plerasque veritates Phyſicas non aliter niſi per continuam quaſi approximationem conſequi poſſe.

§. 2. In Obſeruationibus Meteorologicis praecipue hodie attendi ſolet ad mutationes altitudinum mercurii in tubo *Toricelliano*, vel, ad obſeruationes Barometricas. Quoniam vero nimis longum foret, atque vſu etiam careret, eas omnes huc transſcribere, potius eſſe iudicaui, in tabula ſequenti cuiuslibet menſis maximam et minimam, vna cum vtriusque differentia, apponere; vbi quidem numeri ante punctum poſiti, ſignificant partes duodecimas pedis Londinenſis, hoc eſt, pollices Londinenſes; numeri autem poſt punctum poſiti denotant horum pollicum partes centeſimas, quam quidem menſuram conſtanter retineo. Erat itaque:

			Alt. max.		*Alt. min.*		*Diff.*
1726	Martius	—	30. 22	—	28. 22	—	2. 00
	Aprilis	—	30. 14	—	28. 80	—	1. 34
	Maius	—	29. 97	—	29. 44	—	0. 53
	Iunius	—	29. 80	—	29. 14	—	0. 66
	Iulius	—	29. 84	—	29. 05	—	0. 79
	Auguſtus	—	29. 84	—	28. 64	—	1. 20
	Septemb.	—	29. 97	—	28. 72	—	1. 25
	October	—	30. 22	—	28. 64	—	1. 58
	Nouemb.	—	30. 30	—	28. 51	—	1. 79
	Decemb.	—	29. 89	—	28. 47	—	1. 42

		Max.	Min.	Diff.
1727	Ianuar. —	30. 68 —	29. 09 —	1. 59
	Februar. —	30. 05 —	28. 30 —	1. 75
	Mart. —	30. 14 —	28. 55 —	1. 59
	April. —	30. 05 —	28. 89 —	1. 16
	Maius —	29. 76 —	29. 14 —	0. 62
	Iunius —	29. 89 —	29. 05 —	0. 84
	Iulius —	29. 80 —	28. 97 —	0. 83
	Augußt. —	29. 84 —	29. 16 —	0. 68
	Septemb.—	29. 76 —	28. 80 —	0. 96
	Octob. —	29. 84 —	28. 22 —	1. 62
	Nouemb.—	29. 89 —	28. 89 —	1. 00
	Decemb.—	29. 97 —	28. 89 —	1. 08
1728	Ianuar. —	30. 34 —	28. 97 —	1. 37
	Februar. —	30. 18 —	28. 89 —	1. 29
	Martius —	30. 05 —	28. 76 —	1. 29
	Aprilis —	29. 89 —	28. 80 —	1. 09
	Maius —	29. 93 —	28. 89 —	1. 04
	Iunius —	29. 89 —	29. 14 —	0. 75
	Iulius —	29. 76 —	29. 05 —	0. 71
	Augußt. —	29. 76 —	28. 93 —	0. 83
	Septemb.—	30. 09 —	29. 01 —	1. 08
	Octob. —	30. 26 —	29. 18 —	1. 08
	Nouemb.—	30. 09 —	28. 59 —	1. 50
	Decemb.—	30. 47 —	29. 14 —	1. 33

		Max.	Min.	Diff.
1729	Ianuar.	29. 84	28. 55	1. 29
	Februar.	30. 26	29. 14	1. 12
	Martius	29. 80	28. 68	1. 12
	April.	29. 93	28. 80	1. 13
	Maius	29. 80	28. 89	0. 91
	Iunius	29. 80	29. 05	0. 75
	Iulius	29. 64	29. 09	0. 55
	August.	29. 89	29. 14	0. 75
	Sept.	30. 14	29. 22	0. 92
	Octob.	29. 93	28. 18	1. 75
	Nou.	30. 30	28. 89	1. 41
	Dec.	30. 11	29. 10	1. 01
1730	Ianuar.	30. 16	28. 90	1. 26
	Februar.	30. 32	29. 17	1. 15
	Martius	30. 29	29. 03	1. 26
	April.	29. 84	29. 14	0. 70
	Maius	29. 89	29. 07	0. 82
	Iunius	29. 58	29. 28	0. 30
	Iulius	29. 74	28. 89	0. 85
	Augult.	29. 77	28. 86	0. 91
	Sept.	30. 07	28. 89	1. 18
	Octob.	30. 04	28. 84	1. 20
	Nou.	30. 20	28. 44	1. 76
	Dec.	30. 37	28. 83	1. 54

		Max.	Min.	Diff.
1731	Ianuar. —	30. 07 —	28. 37 —	1. 70
	Februar. —	29. 94 —	28. 87 —	1. 07
	Martius —	29. 95 —	28. 44 —	1. 51
	Aprilis —	29. 74 —	28. 90 —	0. 84
	Maius —	29. 74 —	28. 94 —	0. 80
	Iunius —	29. 66 —	28. 93 —	0. 73
	Iulius —	29. 53 —	28. 93 —	0. 60
	Auguſt. —	29. 83 —	29. 11 —	0. 72
	Sept. —	29. 82 —	28. 54 —	1. 28
	Octob. —	30. 24 —	28 72 —	1. 52
	Nou. —	29. 89 —	28. 51 —	1. 38
	Dec. —	30. 24 —	28. 23 —	2. 01
1732	Ianuar. —	30. 14 —	28. 94 —	1. 20
	Februar. —	29. 75 —	28. 52 —	1. 23
	Martius —	29. 56 —	28. 52 —	1. 04
	April. —	30. 14 —	28. 76 —	1. 38
	Maius —	29. 67 —	29. 05 —	0. 62
	Iunius —	29. 66 —	29. 12 —	0. 54
	Iulius —	29. 71 —	29. 10 —	0. 61
	Aug. —	29. 75 —	29. 06 —	0. 69
	Sept. —	29. 76 —	28. 34 —	1. 42
	Octob. —	29. 65 —	29. 14 —	0. 51
	Nou. —	29. 82 —	28. 54 —	1. 28
	Dec. —	,, ,, —	,, ,, —	,, ,,

		Max.		Min.		Diff.	
1733	Ianuar.	"	"	"	"	"	"
	Februar.	"	"	"	"	"	"
	Martius	30.	29	29.	06	1.	23
	April.	29.	97	29.	11	0.	86
	Maius	29.	93	29.	14	0.	79
	Iunius	29.	91	29.	00	0.	91
	Iulius	"	"	"	"	"	"
	August.	29.	80	29.	20	0.	60
	Sept.	30.	10	28.	92	1.	18
	Octob.	29.	80	28.	62	1.	18
	Nou.	30.	44	28.	82	1.	62
	Decemb.	30.	13	28.	74	1.	39
1734	Ianuar.	30.	13	28.	75	1.	38
	Februar.	29.	98	28.	56	1.	42
	Martius	30.	03	28.	80	1.	23
	April.	30.	21	29.	10	1.	11
	Maius	30.	07	29.	00	1.	07
	Iunius	30.	05	29.	30	0.	75
	Iulius	29.	81	29.	40	0.	41
	August.	29.	98	29.	03	0.	95
	Sept.	30.	18	29.	09	1.	09
	Octob.	30.	28	29.	03	1.	25
	Nou.	30.	55	29.	18	1.	37
	Dec.	30.	05	29.	10	0.	95

		Max.	Min.	Diff.
1735	Ianuar. —	30. 13 —	28. 80 —	1. 33
	Febr. —	29. 84 —	28. 92 —	0. 92
	Martius —	29. 89 —	29. 10 —	0. 79
	April. —	30. 29 —	29. 20 —	1. 09
	Maius —	30. 06 —	29. 00 —	1. 06
	Iunius —	29. 79 —	29. 18 —	0. 61
	Iulius —	,, ,, —	,, ,, —	, ,,
	Auguſt. —	,, ,, —	,, ,, —	, ,,
	Sept. —	30. 50 —	29. 20 —	1. 30
	Octob. —	30. 44 —	28. 40 —	2. 04
	Nou. —	30. 20 —	29. 12 —	1. 08
	Dec. —	30. 05 —	28. 48 —	1. 57
1736	Ianuar. —	30. 20 —	29. 43 —	0. 77
	Februar. —	29. 98 —	28. 98 —	1. 00
	Martius —	30. 08 —	29. 15 —	0. 93
	April. —	30. 40 —	28. 95 —	1. 45
	Maius —	29. 96 —	29. 15 —	0. 81
	Iunius —	29. 98 —	29. 13 —	0. 85
	Iulius —	29. 90 —	29. 50 —	0. 40
	Auguſt. —	30. 00 —	29. 49 —	0. 51
	Sept. —	30. 02 —	28. 70 —	1. 32
	Octob. —	30. 13 —	28. 98 —	1. 15
	Nou. —	30. 23 —	28. 65 —	1. 58
	Dec. —	29. 95 —	28. 41 —	1. 54

§. 3.

§. 3. Apparet ex his altitudinibus Barometri, earum maximam in his vndecim annis fuiſſe 30. 68, eamque ſemel occurrere. Fuit autem ea Anno 1727, Ianuarii 22, tempore matutino, cum veſpere diei praecedentis eſſet 30. 64, et circa meridiem diei ipſius 30. 51, in ſerenitate aliquot dierum, ſed frigore ingenti, et flante Euro. Minima vero harum altitudinum eſt 28. 18, quae etiam ſemel tantum occurrit. Accidit ea Anno 1729, Octobris 12, circa meridiem, cum in eiusdem diei tempore matutino fuiſſet 28. 26, et tempore veſpertino 28. 39, tempeſtate procelloſa et pluuioſa aliquot dierum. Eo ipſo etiam die fluuii Neuae noſtri exundatio erat omnium fere maxima, quae ſemper creuit usque ad horam 6. poſt merid. Harum duarum altitudinum differentia eſt 2. 50, vel praeciſe $2\frac{1}{2}$ pollicum Londinenſium, vt adeo hoc ſpatium variationem Barometri Petropolitanam maximam quam proxime determinet, vtpote vndecim annorum tempore definitum. In Transactionibus Anglicanis Num. 294 pag. 45. memoratur, *Derhamum* vnico anno 1698 reperiſſe altitudinem Barometri maximam 30. 40, minimam vero 28. 28. quarum differentia eſt 2. 12. In Hiſtoria Academiae Scientiarum Pariſinae ſcribitur, maximam Barometri ſimplicis altitudinem inuentam eſſe in menſura Pariſina 28 poll. 4 lin. et minimam 26 poll. 4 lin. quarum differentia eſt 2 pollicum; aſſumta igitur proportione pedis Londinenſis ad pedem Pariſinum = 15: 16, erit haec differentia in noſtra menſura 2. 13, quae fere coincidit cum ea, quam inuenit *Derhamus* in Anglia. Praeterea in Transact. Anglic. memoratur, in In-

 ſula

ſula Iamaica, Latitudinis Borealis 20°, mercurium in Barometro plus quam $\frac{3}{10}$ pollicis Londinenſis nunquam variari, obſeruatum eſſe, quod in noſtra menſura facit 0. 30 poll. Quodſi itaque allegatas Barometri variationes in tabellam colligere velimus, Latitudinibus locorum diſtinctam, exſurget inde hic ſequens laterculus:

Lat. Loci.		*Var. Barom.*
20°.	Inſ. Iamaica — —	0. 30 poll.
49.	Pariſii — — —	2. 13
51.	Londinum — —	2. 12
60.	Petropolis — —	2. 50

Vt adeo haud leuis ſuſpicio exinde naſcatur, variationes Barometri eſſe eo maiores, quo viciniora Polo ſint loca, in quibus obſeruationes inſtituuntur. Ex Obſeruationibus Barometricis, quas Clar. *de la Croyere* Archangelopoli inſtituit in ſpatio circiter vnius anni, inuenio fuiſſe maximam altitudinem 27 poll. 11$\frac{5}{8}$ lin. pedis Pariſ. anno 1729, Aprilis 25, noui ſtyli, in multa ſerenitate. Minimam vero 26. poll. 2$\frac{7}{12}$ lin. dicti pedis, anno 1727 Iunii 12, noui ſtyli, quarum differentia eſt 1 poll. 9$\frac{1}{4}$ lin. vel in noſtra menſura 1. 89 poll. Angl. quod hypotheſi noſtrae quidem non fauet; ſed tempus nimis breue in cauſa eſſe iudico, quod vetuit vt omnium maxima et minima altitudo obſeruari potuerint. Ex maxima porro et minima altitudine Petropolitana Barometri efficitur ibidem eius altitudo media 29. 43 pollicum Londinenſium. Quantum vero aeſtimare licet, Obſeruationes Barometricae, hic loci factae, obſeruatae ſunt omnes in eleuatione circiter 30 pedum Londinens. ſupra maris Balthici ſuperficiem. §. 4.

§. 4. Alterum, quod ex his Obſeruationibus Barometricis deducere licet, conſiſtit in variationibus Barometri menſtruis, hoc eſt, in illis, quae in ſingulis menſibus accidunt. In his itaque ſtatim in oculos incurrit, eas in primis et vltimis anni menſibus fere conſtanter eſſe maiores, in mediis vero anni menſibus conſtanter minores. Eandem hanc Barometri legem obtinere quoque obſeruaui in altitudinibus Barometricis Vltraiecti in Batauia à Clariſſimo *Muſſchenbroekio* pro anno 1728 annotatis, et peculiari tabula expreſſis, quae Diſſertationibus perſpicaciſſimi huius Viri Phyſicis et Geometricis annexa eſt. Idem confirmatur quoque egregie ex Obſeruationibus Clariſſimi *de la Croyere* ſupra citatis. Atque haec quidem lex adeo conſtans eſt, vt in obſeruationibus noſtris vndecim annorum non niſi aliquot exceptiones dentur. Cum autem ex obſeruationibus in Inſula Iamaica inſtitutis appareat, variationem totalem Barometri ibi tam paruam eſſe, vt tantum $\frac{3}{10}$ pollicis exaequet: haud leuis coniectura formari poteſt, calorem aëris in cauſa eſſe, quod per breuius ſpatium mercurius in Barometro euagetur; atque hinc in anguſtiores carceres redigi eius excurſiones in menſibus anni mediis, hoc eſt, aeſtiuis et calidis. Quod vt eo magis confirmem, examinabo illos menſes, in quibus lex allegata non plane locum habuit. Prima itaque exceptio ab hac regula facta eſt anno 1732 menſe Octobri, qui variationem menſtruam Barometri praebuit 0. 51 tantum, cum ad minimum debuiſſet integrum pollicem exaequare. Eo vero tempore vtebar Thermometro mercuriali, quod, in loco a ventis et ſole libero, in maximo calore aeſtiuo mon-

 ſtrabat

ſtrabat gradum 690, et in tempore congelationis gradum 453. ſequentes autem menſes adiunctos oſtenderunt calorum gradus

		Max. cal.	Min. calor.	med.
1732	Auguſtus	665	490	577
	September	576	425	500
	October	556	424	490
	Nouember	502	278	390
	December	448	259	353

ex quo apparet, menſis Octobris calorem medium fere eundem fuiſſe cum calore menſis praecedentis; ſed et in menſe Octobri idem Thermometrum vtplurimum monſtrauit gradum altiorem quam 500; quare iudicandum puto, calorem huius menſis inſolitum in cauſa fuiſſe, quo minus conſuetas ſuas excurſiones Barometrum peragerct. Secunda exceptio a regula facta eſt Anno 1734 menſe Decembri, qui variationem menſtruam Barometri praebuit 0. 95 tantum. Obſeruaui autem eo anno in Thermometro mercuriali, quod, in loco a ventis et ſole libero, calore ſummo aeſtiuo monſtrabat 900, facta congelatione autem 688, fuiſſe ſequentes menſium calores.

		Max. cal.	Min. calor.	med.
1734	Iulius	895	824	859
	Aug.	880	756	818
	Sept.	788	660	724
	Octob.	720	506	613
	Nou.	626	450	538
	Dec.	642	450	546

1735

1735	Ianuar.	—	625	—	445	—	535

ex quibus iterum patet, menſem Decembrem huius anni calore ſuo maiori, quam eſſe debebat, variationes Barometri coërcuiſſe, quod etiam eo magis ex hoc apparet, quod Thermometri minimus gradus caloris, neglectis tantum diebus vltimis duobus huius menſis, fuerit 501, ex quo fit medius 571, qui indicat, calorem huius menſis ſolito longe fuiſſe maiorem. Tertia exceptio facta eſt anno 1735 menſibus Februario et Martio. Vt igitur hic oſtendam, calorem horum menſium in culpa fuiſſe: comparabo eos cum iisdem menſibus anni praecedentis 1734. Erat autem anno 1734 calor medius Februarii 511, Martii 615; idem calor erat 1735 in Februario 542, in Martio 649; vnde ſatis conſtat, menſes Februarium et Martium anni 1735 iuſto calidiores fuiſſe. Quarta denique exceptio facta eſt anno 1736 menſibus Ianuario et Martio, qui denuo calidiores erant quam par fuit, id quod inſolitae degelationes eo tempore ſatis ſuperque docuerunt.

§. 5. Cum Aurorae Boreales in hac noſtra regione frequentiſſime occurrere ſoleant, atque eae etiam, pauciſſimis forſan exceptis, ſolerter in noſtris Obſeruationibus annotatae ſint: apponam hic earum catalogum generalem, cum praecipuis circumſtantiis, quae in vnaquaque earum fuerunt animaduerſae. Si vero in aliqua nihil praecipui potuit annotari, eius tantummodo diem, quo accidit, indicabo.

1726 Martii 16 ſt. v. in perfecta ſerenitate aliquot dierum obſeruata fuit veſperi Lux Borea, flante Zephyro, quam poſtero die nix leuis ſecuta eſt.

Octob. 8 tempore nubiloſo aliquot dierum viſa eſt Lux Borea, quam poſtero die iterum nix ſecuta fuit. Apparuit haec in Gallia, Anglia, et multis aliis regionibus, plurimisque deſcriptionibus celebrata eſt; ita vt Clariſſimus *de Mairan* hanc prae aliis elegerit, cui Tractatum Phyſicum et Hiſtoricum de Aurora Boreali 1733 editum, ſuperſtrueret, vti videre licet pag. 195 l. c. Dolendum ergo eſt, quod haec Lux Borea tam celebris hic loci ob nubes non potuerit recte obſeruari.

1727 Februarii 7

9

10

11

Martii 2 viſam in Gallia Auroram annotat Clariſſ. *de Mairan*; hic vero nulla viſa fuit; ſed eo die, procelloſo, apparuerunt Parhelii.

13

Septembris 7 obſeruata etiam a Clariſſ. *de la Croyere*, in vrbe Cola.

11

Octob.

1727 Octobris 3

4 quae praeter magnitudinem nihil praecipui ostendit. Obseruata etiam Colae, a Dn. *de la Croyere.*

Decembris 9 quam radiis destitutam obseruauimus.

1728 Ianuarii 18 quo tempore turbulenta nix cadebat.

Februarii 1 quae radiis destituta fuit, marginem obscurum, sed reliquum spatium transparens, habuit.

2 in qua duplex arcus visus fuit, sed vterque sine virgis ascendentibus. Obseruata haec etiam fuit a Clariss. *Musschenbroekio* Vltraiecti Batauorum, et annotata in Ephemeridibus Meteorologicis eius pro hoc anno.

20

21

22

26 In qua altitudo arcus fuit 29°, amplitudo crurum 160°.

27

28 quae vix sensibilis fuit, quamuis coelum serenum esset.

Martii 16

22 Cuius radii copiosi vsque in verticem ascenderunt; quae rursus a Clarissimo *Musschenbroekio* annotata quoque est, vt aliae adhuc quaedam.

23

Aprilis 20

Augu-

1728	Augusti	14	
	Septembr.	15	
		17	
		26	
		27	
		30	
	Octobris	14	
		16	
		19	
		22	
		27	
	Nouembr.	22	
1729	Aprilis	21	
	Augusti	18	
		30	Quam ego obſeruaui hora 7 p. m. lucente adhuc ſole, verſus plagam NOO. colore rubro et coeruleo, Iridis inſtar ludentem; quae vero non arcus, ſed trabis longioris et ramoſae, figura apparuit, parumque durauit, ingruente mox pluuia larga.
	Septembr.	10	
		11	
	Nouembr.	5	De qua Clariſſ. *de Mairan* dicit, quod fuerit *remarquable par un grand cercle vertical, qui l' accompagnoit.* pag. 197. l. c.
1730	Ianuarii	5	
	Februarii	4	Memorata quoque a Clariſſimo *de Mairan*, cui apparuit *avec une bande*

bande rouge zodiacale. Fuit haec Aurora omnium, quae hic loci obseruatae sunt, maxima, in qua fere totum coelum ardere videbatur. Coepit circa horam nocturnam 9, in summa serenitate; atque in ea primum virgae candentes ab Oriente, Occidente, et Septentrione, ascendebant versus punctum verticale, vltra quod saepissime porrigebantur. Circa hoc punctum vert[illegible]le nucleum quendam formabant lucidum, ita vt coelum fornicis luminosi speciem prae se ferret. Versus Septentrionem arcus erat, cuius crura horizonti fere insistebant, summitas autem parum a puncto verticali aberat. Intra hunc arcum plurimae conspiciebantur virgae intermediae, vaga et inconstanti luce ludentes, hinc et inde motae, quamuis aër tranquillus esset, sine omni sensibili vento. Eis in locis, vbi virgae ab Oriente et Occidente ascendentes desinebant, inceperunt formari duo crura noui arcus versus meridiem positi, qui breui completus fuit, et cuius altitudo erat quasi 7°. Huius pars interior nigra videbatur, instar nebulae, per quam tamen Mars, eo tempore oriens, prope spicam Virginis clare

clare aſpiciebatur. Haec obſcuritas cingebatur arcu lucido, primum plane quieto, et ſine virgis lucente; donec tandem circa mediam noctem etiam exinde virgae aſcenderent, et trabes e Septentrione aſcendentes, punctum verticale transeuntes, cum virgis et arcu meridionali coniungerentur. Cum pars meridionalis huius Aurorae maxime flagrare inciperet, minuebantur virgae Septentrionales; et illa aliquando etiam ipſa in plures quaſi nubeculas ſubobſcuras reſoluebatur, mox tamen ad priſtinam arcus figuram redibat. Colores etiam, praecipue in virgis a Septentrione aſcendentibus, obſeruati ſunt rubri. Moſcuae quoque haec lux viſa eſt ab hora 9 nocturna vsque ad 3 matutinam, in omnes plagas aequaliter extenſa, cum virgis rubris, et nucleo in vertice formato; ventus ibi tum erat NW lenis, et ſumma ſerenitas.

1730 Februarii 23 Lux Borea per totum coelum virgis vagis, rubro colore tinctis, ludens, et nubibus permixta; annotata etiam a Clar. *de Mairan.*

26 Lux Borea tenuis, et nubibus tecta.

27

1730

1730 Martii 2

4

5 Lux Borea tenuis, quieta, pallida, cuius arcus tenebat altitudinem 9°, amplitudo crurum 90°.

7 Lux Borea intra nubes viſa.

27 Perfecta ſerenitas, cum arcu lucido Aurorae Borealis quietae, radiis deſtitutae; ſummitas arcus erat 12°.28′, non exacte verſus Boream poſita, ſed deflexa ad Occidentem. Arcus extremitates non accurate notabantur, ſed ſenſim in obſcura deſinebant.

29 Lux Borea humilis, et tenuis.

Aprilis 3 Hoc die terra niue liberabatur, et euidenter fumos quaſi emittere conſpiciebatur; hinc nebula denſa mane orta; veſperi hora 11 Lux Borea oriebatur, maximam partem primo nubibus tecta, mox vero omnino nebulis inuoluta.

4 Lux Borea, humilis et quieta.

8

11 Lux Borea humilis, et tranquilla, lucente Luna, et in NW occidente.

Maii 18 Circa mediam noctem Lux Borea apparuit, vix viſibilis ob crepuſculum. Verſus Orientem nihil eius conſpiciebatur, verſus Occidentem vero pars, ex qua aſcendebant virgae pallidae et breues; altitudo arcus interrupti, quantum quidem ex parte conſpicua colligi potuit, erat circiter 45°; coelum perfecte ſerenum erat, exceptis aliquot nubibus in Occidente, ſlante fortiter Borea. Eodem hoc die Berolini grauiſſima tempeſtas exorta eſt, hora 9. p. m. in qua tribus fulminis ictibus turris templi S. Petri incenſa fuit, et magnum incendium in vrbe exortum.

1730 Augusti 8

12 Lux Borea humilis, ſed virgis albis, viam lacteam imitantibus, conſpicua, cum arcu diſtincto, cuius vertex a Septentrione paullo verſus Occidentem declinabat.

13

26 Lux Borea tranquilla, e qua paucae virgae aſcendebant. Arcus diſtincti altitudo erat 9° 12′, amplitudo 84°.

28

Septembr. 2 Lux Borea inter nubes.

6 Lux Borea humilis, arcu diſtincto, cuius radii erant intra arcum.

23 Lux Borea humilis et quieta, poſt pluuiam tenuem.

28 Lux Borea humilis et quieta, viſa quoque Francofurti ad Moenum.

30

Octobr. 6 Lux Borea humilis, et breues virgas, ſeu potius globos, emittens.

1730

1730 Octobr. 9 Lux Borea lucente Luna.

11 Lux Borea debilis, lucente Luna, quae Halone cingebatur.

12 Lux Borea Iridis instar coloribus distincta, radii breues et sine coloribus; arcus horizonti nulla parte insistit.

22 Nulla Lux Borea hic loci visa est, forsan ob nubes et pluuias aliquot dierum; sed, vti ex Nouellis publicis huius anni constat, Coloniae *Allobrogum* apparuit arcus Aurorae Borealis, cuius altitudo erat 12°, amplitudo 75°. Memorabilis autem est haec Aurora, quoniam, testante *Mairano*, magna et completa apparuit in America. pag. 197. l. c.

25 Lux Borea, mane hora 4. conspicua, in qua ex arcu satis confuso virgae ascenderunt, et quae breui post in nigras nubes coacta est. Hanc hora 10 vespertina secuta est alia Lux Borea, primum per rimas nubium candore suo conspicua, et subalbicantibus virgis; quae postea, cum coelum nubibus paulum liberaretur, per totam noctem in vertice lusit accensis et extinctis virgis, quae ad modum fulgurum vibrabant quandoque.

27 Lux Borea inter nubes per rimas conspicua.

30 1730

1730 Decembr. 3 Lux Borea, quam vidi hora 4 matutina quietam et humilem.

22 Lux Borealis quieta, cum insigni nebula.

30

1731 Febr. 18 Lux Borea humilis et splendens ad modum incendii nocturni.

19 Lux Borea eleuatior quam hesterna, sed quieta.

24 Lux Borea per nebulas conspicua.

26 Lux Borea humilis, parua, et tranquilla.

Martii 3 Lux Borea eleuata, candida, lucente Luna.

23 Lux Borea humilis, paucas eiiciens trabes.

Augusti 18 Lux Borea grandis, quieta, et arcu lucidissimo praedita, mane circa horam 3.

Septemb. 15

21

22 Lux Borea hora 8 vespertina verticalis, inter nubes.

23

26 Lux Borea verticalis et Australis.

27 Lux Borea verticalis.

Octobris 22

Decemb. 9 Lux Borea quieta, in perfecta serenitate, quam subito nubes continuae sequuntur, altero die serenitas redit.

1731

1731	Decemb.	10	Lux Borea humilis et quieta.
		24	Lux Borea circa mediam noctem, quam ſequenti die frigus maximum, cum perfecta ſerenitate, excipit.
1732	Ianuarii	18.	
		19.	
	Febr.	6.	
		8.	
	Martii	10	Lux Borea inter nubes.
	Auguſti	16	Veſtigia Lucis Borealis in nubecula albicante tenui, et ſubinde euaneſcente.
	Septemb.	7	Lux Borea circa mediam noctem, furente Auſtro.
		10	Lux Borea circa mediam noctem. Pariſiis quoque viſa. v. *Comment. Acad. Scient. Pariſ.* 1733.
	Octobris	29	Serenitas per integram diem, veſperi vero nubes continuae poſt mediocrem Auroram Borealem, Pariſiis quoque viſam; vid. l. c. quam pruinae, nebulae, et copioſae pluuiae aliquot dierum, ſequuntur.
	Nouemb.	3.	
		8	Lux Borea inter nubes continuas, nusquam disruptas, conſpicua inſtar fulgurum ſaepe redeuntium verſus Ortum et Septentrionem.
1733	Martii	11	Lux Borea parua.
		14.	

1733.

1733	Septemb.	25	hora 9 p. m. Aurora Borealis cum arcu Iridis a Capite Tauri per Pleiades et mediam Andromedam transiens.
	Octobris	31	accrescente flauio
	Nouemb.	1	Parisiis quoque visa. l. c.
	Decemb.	20	
1734.	Februarii	12	Lux Borea, quam die sequenti continuae nebulae exceperunt.
		25	Lux Borea humilis in perfecta serenitate multorum dierum,
		27	
	Martii	6	
		11	
	Septemb.	13	Aurora Borea debilis.
		19	Circa horam 9 p. m. Lux Borea per nubes visa.
		21	
		23	Lux Borea in perfecta serenitate aliquot dierum.
	Octobr.	3	Lux Borea, quam pruina et congelatio sequuntur.
		4	
		19	Lux Borea circa horam 11 p. m. sequenti mane hora 2 matutina vidi Lumen *Cassinianum* extensum vsque ad signum Cancri, in perfecta serenitate
		20	
1735	Ianuarii	24	Lux Borea, quam sequenti die Parhelii coloribus rubro et coeruleo distincti

			ſtincti excipiebant, circa horam 3 p. m.
1735	Febr.	21	Lux Borea, quam fortis congelatio ſequitur.
	Septemb.	12	Lux Borea quieta, in perfecta ſerenitate.
		30	Lux Borea, cum congelatione.
	Nouemb.	3	Lux Borea, quam nix copioſa ſequitur.
	Decemb.	7	Lux Borea, quae perfectam ſerenitatem in nebulam denſiſſimam et nubes continuas mutat.
		9	
		27	
1736	Febr.	5	Lux Borea, poſt Parhelios eo die viſos, in perfecta ſerenitate aliquot dierum.
		6	
	Martii	25	
	Auguſti	2	
		25	
	Sept.	15	
	Nouemb	6	
		20	Lux Borea, in quo loco virgarum lucidarum erant vtrinque circa Septentrionem aequaliter diſtantes trabes obſcurae, inſtar nubium oblongarum.

Intra annos 1727, 1728, et 1729. multae Aurorae Boreales, et plures quam in iisdem annis hic annotatae ſunt, obſeruatae fuerunt diligentiſſime a Clariſſ. *de la Croyere*, qui inſignem curam huic phaenomeno coeleſti impendit. Harum itaque comparatio exacta cum noſtris hic memoratis multum lucis inferre poterit dubiis adhuc theoriis circa hanc materiam, si aliquando instituatur. Ex meis Obseruationibus colligitur, intra hos vndecim annos ad minimum spectatas fuisse 141 Auroras Boreales; frequentiores eas esse solere circa tempora vtriusque Aequinoctii; permultaque adesse indicia, quae earum materiam non longius quam ab Atmosphaera nostra petendam esse arguant.

§. 6. Ex hypothesi Clarissimi quondam *Maieri* nostri, quam in Tomis horum Commentariorum I. et IV. explicatam dedit, deducere possumus materiae lucidae Aurorarum Borealium a terra distantiam ex aliquot exemplis nostrarum Obseruationum. Est enim per pag. 130 Tomi IV. distantia huius materiae ab oculo spectatoris $y = \frac{2am\, g^2 q^2}{b^2 - g^2 q^2}$, in qua formula est $a =$ semidiametro terrae, $m =$ sinui altitudinis arcus supra horizontem; $g =$ cosinui dimidiae amplitudinis, $q =$ cosinui Latitudinis Loci in quo spectator est, $b =$ sinui ($90^\circ +$ Latitud. Loci $-$ alt. arcus) et denique 1 est sinus totus. Vt vero calculus allegatae formulae ope Logarithmorum absolui queat, diuidantur eius numerator et nominator per b, quo facto abibit ea in $2am \frac{\frac{g^2 q^2}{b^2}}{1 - \frac{g^2 q^2}{b^2}}$ est autem haec adiuncta fractio nihil aliud quam quadratum tangentis anguli cuiusdam, cuius sinus est $\frac{gq}{b}$; quare quaesito hoc angulo, ope Logarithmorum, vocetur eius Tangens t, eritque $y = 2amt^2$, vel $ly = l2 + la + lm + 2lt - 3$ log. radii; Ex obseruatione anni 1730, Mar-

Martii 5, erat altitudo arcus $= 9°$, ſemiamplitudo eius $= 45°$, ſub Latitudine noſtra $59° \ 57'$; erit itaque ſubducto hoc calculo, poſita $a = 860$ milliar. Germanicis:

$lg = 9.8494850$		$l2 = 0.3010300$	
$lq = 9.6996258$		$la = 2.9344984$	
19.5491108		$lm = 9.1943324$	
$lb = 9.7993394$		$2lt = 19.6645058$	
9.7497714	$34° \ 12'$	2.0943666	

cui reſpondent $124\frac{2}{10}$ milliaria Germanica. Ex obſeruatione anni eiusdem, Auguſti 26, erat altitudo arcus $=$ $9° \ 12'$, ſemiamplitudo $= 42°$, erit itaque, poſitis reliquis vt ante, diſtantia quaeſita $145\frac{3}{10}$ milliar Germ. Ex obſeruatione anni eiusdem, Octobris 22, quae Coloniae Allobrogum facta fuit, Aurorae etiam in America obſeruatae, et in qua eſt altitudo arcus $= 12°$, ſemiamplitudo $= 37° \ 30'$, ſub latitudine $46° \ 12'$, erit denuo diſtantia quaeſita $281\frac{9}{10}$ milliar. German. quae fere duplo maior eſt, quam ex allegatis ſecunda.

§. 7. Adiungam his alia quaedam leuioris momenti, donec reliqua, quae huc pertinent, omnia abſoluere poſſim, quae ſecunda Diſſertatione ſum comprehenſurus. Primo quidem circa initium gelationis in quouis anno deprehendi, id ſemper cum aſpectu Planetarum quodam inſigni coniunctum fuiſſe. Non haec dico eum in finem, vt vanae illi, et ſuperſtitioſae, Aſtrologiae patrocinari velim, optime enim ſcio, quam multa friuola et ſcientiis indigna ibi contineantur. Sed multiplici experientia edoctus impetrare a me nequeo, vt credam, nihil plane harmoniae, non dico influxus, ſtellarum aſpectibus et poſitionibus intercedere cum tempeſtatibus vagis; atque in ea opinione ſum, vt limites tranſilire eos putem, qui nimis heroico auſu falſa forſan cum veris profligant, et omnia huc pertinentia ſusque deque faciunt; cuius ſententiae meae etiam magnum quondam *Keplerum* fuiſſe inuenio, quam in Tractatu Germanico, cui titulus eſt: *Tertius Interueniens*, eximie plane expoſuit, et multis non ſpernendis rationibus adſtruxit. Accidit itaque congelatio prima cuiusque anni,

1729. Octobris 22, altero die poſt □ ♄ ☿.
1730. Octobris 4, altero die poſt △ ♄ ☿.
1731. Octobris 11, altero die poſt ☍ ♄ ♃.
1732. Octobris 7, altero die poſt □ ♄ ♂.
1733. Octobris 6, altero die poſt ⚹ ♂ ♀.
1734. Septemb. 21, altero die poſt ⚹ ☉ ♃.
1735. Octobris 12, in ipſa Quadratura prima ☉ et ☾.
1736. Octobris 22, altero die poſt □ ☉ ♃.

§ 8. Iuuat etiam condere catalogum tonitruum omnium, quae in his annis audita fuerunt. Sunt igitur ea:

1726. Maii 28. Iunii 5. 8. 13. 26. 27. Iulii 10. 12. 19. Septembris 6.
1727. Maii 31. Iunii 5. 15. 28. 30. Iulii 8.
1728. April. 24. 29. 30. Maii 2. Iunii 11. 16. Iulii 21. 23. Auguſti 5. 6.
1729. Maii 9. 12. Iunii 17. 23. Iulii 1. 18. 29.
1730. Maii 15. 20. 26. Iunii 1. 13. 24. Iulii 4. 5. 6. 31. Auguſti 19. 25.

1731.

1731. Maii 9. 23. Iulii 2. 12.
1732. Aprilis 14. Maii 17. 20. Iunii. 7. 8. Iulii 16. 30. 31. Nouembris 22.
1733. Maii 31. Iunii 2.
1734. Maii 11. 13. 16. Iulii 3. 26.
1735. Aprilis 21. 24. 25. Maii 2. 5. 6. 7. 12. 13. 19. 29. 30. 31. Iunii 12. 27. 29. Iulii 2. atque aliis diebus huius mensis ad minimum decies. Augusti 21.
1736. Aprilis 30. Maii 12. 13. 16. Iulii 1. 2. 4. 6. 7. 16. 23. Augusti 6. 17. 22.

adeoque intra hos vndecim annos ad minimum tonitrua audita sunt 107 vicibus.

§. 9. Denique referam quoque quid circa hirundines obseruauerim; de quibus notum est, eas, durante per hyemem frigore, sub tectis, aut in paludibus, quasi mortuas delitescere, postea vero ingruente verno calore reuiuiscere, et aestatem quasi referre. Quo igitur die sequentium annorum prima vice hirundines calore excitatas et volantes viderim, coronidis loco hic adiungam:

1730. Maii 5.
1731. Maii 7.
1733. Maii 9.
1734. Maii 4.
1735. Aprilis 30.
1736. Aprilis 28.

Vt adeo hic loci medium tempus reditus harum auicularum statui possit in Festo Inuentionis Crucis, quod incidit in Maii 3 diem; et quod tempus in Germania et adiacentibus regionibus in principium mensis Aprilis incidere, iam diu est annotatum.

OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM, AB ANNO 1726 VSQVE IN FINEM ANNI 1736 FACTARVM, COMPARATIO.

PRAELECTIO SECVNDA.

AVCTORE
Georgio Wolffg. Krafft.

§. 1.

Tabula XV.

Cum in obseruationibus de calore et frigore annorum praeteritorum institutis adhibita fuerint fere semper Thermometra Florentina, quorum vitia abunde nota sunt hodie: nihil fere in illis est, quod ad vsum aliquem applicari possit. Ab anno autem 1736 adhibui Thermometrum mercurio repletum, cuius diuisio incipit descendendo ab eo puncto, quod mercurius, aquae feruenti imposito Instrumento, attingit, et quod diuisione a Clariss. *Del'Isle* adhibita adornatum est, per quam nempe indicatur, quanam sui parte mercurius aqua feruente dilatatus quouis tempore se contraxerit. Ope huius Thermometri igitur obseruaui anni, 1736 maximum calorem fuisse d. 1. Iulii in meridie, quo tonitrua audiebantur, notante nimirum instrumento gradus 1083; maximum vero frigus fuisse d. 8. Februarii, sub gradibus 1700, in perfecta serenitate aliquot dierum. Volumen igitur mercurii aqua feruida extensum contractum fuit 1 Iulii partibus $\frac{1083}{100000}$, sed 8 Febr. partibus $\frac{1700}{100000}$. Reliquorum annorum praecedentium dies maxime calidi et maxime frigidi, Thermometris Florentinis aestimati, fuerunt illi, quos sequens Tabella indicat.

Annus

Annus		*calor max.*		*frigus max.*
1726	—	11 Iulii	—	9 Mart.
1727	—	2 Iulii	—	2 Febr.
1728	—	18 Iulii	—	7 Ian.
1729	—	12 Maii	—	24 Ian.
1730	—	11 Iun.	—	20 Dec.
1731	—	27 Iun.	—	19 Ian.
1732	—	27 Iul.	—	20 Ian.
1733	—	20 Iun.	—	13 Mart.
1734	—	16 Iul.	—	30 Dec.
1735	—	5 Iul.	—	4 Febr.
1736	—	1 Iul.	—	8 Febr.

§. 2. De Thermometris Florentinis annotatum eſt iam diu, praeſertim a Cel. *Halleio*, *Transact. Anglic. num.* 197 *pag.* 650. Spiritum vini in iis contentum ſucceſſu temporis partem vis expanſiuae ſuae amittere. Didici hoc idem phaenomenon ſpatio duorum annorum. Cum enim per annos 1734, 1735, et 1736 obſeruationes meas inſtituiſſem cum duobus Thermometris, mercuriali altero, ſed arbitraria diuiſione inſtructo, altero Florentino, deprehendi in anno 1736 Spiritum vini deſiiſſe eousque ſe extendere, quo ante biennium ſolebat. Reſponderunt enim ex. gr. Thermometri mercurialis, cuius gradus aſcendendo numerabantur, gradui 838 in Florentino anno 1734 gradus 120, anno 1736 vero non niſi 95. Ex innumeris aliis exemplis haec tantum adhuc adiungam:

Therm.

Therm. merc.			*Therm. Flor.*
838	- -	1734	- - - 120
		1736	- - - 95
853	- -	1734	- - - 150
		1736	- - 125
856	- -	1734	- - - 150
		1736	- - - 133
865	- -	1734	- - - 156
		1736	- - - 155
866	- -	1734	- - - 166
		1736	- - - 146
895	- -	1734	- - - 210
		1736	- - - 205

Annotari quoque merentur, horologii Anglicani optime conſtituti, ſed in conclaui non calefacto aſſeruati, a ventis autem tuti, motum a ſolo frigore bis interruptum fuiſſe, nempe 1730 diebus 18 et 19 Nouemb. et 1731 10 Ianuarii; et ſaepius etiam in ipſo adhuc medio menſis Maii congelationes accidere fortiſſimas, flante nimirum Borea, id quod ex. gr. factum eſt anno 1731 diebus 12 et 16 Maii.

§ 3. Quamuis indubium ſit, conſpicuos plane eſſe effectus aucti ponderis atmoſphaerici in Thermometra Drebbeliani: non intermittam tamen adiungere ſequentem Tabellam, ex qua differentia graduum dicti Thermometri aſcendendo numeratorum clare perſpiciuntur:

Therm.

Therm. merc.		*Drebbel.*		*alt. Barom.*
1440	— —	1617	— —	29. 63
		1730		29. 93
1450	— —	1674	— —	29. 74
		1730		29. 91
1446	— —	1755	— —	30. 02
		1798		30 10
		1805		30. 13
1390	— —	1497	— —	29. 58
		1636		30. 00
		1556		29. 75
1396	— —	1645	— —	30. 02
		1620	— —	29. 93
1380	— —	1560	— —	29. 90
		1552		29. 70
1342	— —	1445	— —	29. 80
		1420		29. 70

§. 4. Confirmatur denique etiam multis exemplis ex noſtris obſeruationibus regula illa, quae in *Collection. Vratislauienſ. anno* 1717 *menſe Auguſto p.* 123. legitur: quod nempe, calore poſt tonitrua non ceſſante, vtplurimum noua redeant. Nam apud nos anno 1726 10 Iulii tonuit veſperi; praecedente meridie oſtendebat Thermometrum Florentinum gradus 67, poſtero meridie 68, tertio meridie poſt iterum tonuit, et oſtendit poſteà Thermom. gradus 58. Anno 1730 1 Iunii tonitrua audiebantur in meridie, Thermometro oſtendente gradus $13\frac{1}{2}$, poſt meridiem hora 3 oſtendebat gradus 14, et redierunt tonitrua. Anno eodem, 4 Iulii, ante merid. hora 7 erat Thermometrum in gradu $17\frac{1}{2}$, vefperi in gradu 24, cum coelum valde tonaret; poftero die in meride erat gradus caloris $25\frac{1}{2}$, et redierunt tonitrua. Anno 1732 7 Iunii hora 10 p. m. erat gradus caloris $10\frac{1}{2}$ atque audiebantur tonitrua vehementia; fequentis diei mane hora 8 oftendebat Thermometrum gradum caloris 12, et noua tempeftas exorta eft hora 11 a. m. Quod idem phaenomenon multis adhuc aliis exemplis confirmari poffet, nifi haec fufficerent.

§. 5. Niuium et pluuiarum quantitas accurata his annis obferuari non potuit, cum hoc negotium difficulter in aedibus priuatis, et faepe commutandis, obtineri poffit. Quantum vero ex aeftimatione licet iudicare, ceciderunt niues aut pluuiae, tempore omni in vnam fummam per totum annum collecto,

Anno	1726	- - - - -	40 dies.
	1727	- - - - -	48
	1728	- - - - -	50
	1729	- - - - -	60
	1730	- - - - -	37
	1731	- - - - -	38
	1732	- - - - -	32
	1733	- - - - -	29
	1734	- - - - -	35
	1735	- - - - -	40
	1736	- - - - -	37

ex quo apparet, annum 1729 inter omnes hos reliquos fuiffe maxime madidum; et pro quolibet anno, termino aliquo medio, affumi poffe 40 dies integros pluuiae aut niuibus deftinatos.

§. 6.

§. 6. Accidere ſolet haud raro in hac noſtra vrbe, vt fluuius Neua intumeſcat, ripas ſuas egrediatur, atque circumiecta loca humilia totius vrbis inundet, modo altius, modo minus, prout nempe venti inundationes has efficientis vis fuerit maior aut minor. Praecedentium annorum dies ſequenti tabella annotati inſigniti fuerunt hoc phaenomeno, quorum illi, qui aſteriſco notati ſunt, prae reliquis inſignes oſtendunt inundationes:

Anno	1726	Aprilis 14. Sept. 18*. Nou. 1*
	1727	Sept. 18. 21*. 22. Oct. 11. 12. 22. 23. Nou. 24. 29.
	1728	Aug. 3*. Nou. 3.
	1729	Octob. 3*. 12*. Dec. 17.
	1730	Ian. 3. 26. 27. Aug. 11. Dec. 19.
	1731	Febr. 4. Iun. 5. Iul. 10. 13.
	1732	Sept. 15*.
	1733	Aug. 25. Sept. 6*. Oct. 5. 8*. 23. 31*. Nou. 3. Dec. 12*.
	1734	Ian. 1. 18. Febr. 4. April. 22. Maii 4. Sept. 19.
	1735	Febr. 8. 26*. Martii 11. April. 17. Maii 15 Octobr. 24.
	1736	Sept. 10*. Dec. 13*. 17. 18. 19*. 24. 28*.

Pauciſſimis caſibus exceptis, omnes hae inundationes acciderunt flante fortiter vento Auſtro-Zephyro, vel *S. W.* verſus quam nempe plagam fluuii pars praecipua in Sinum Finnicum effunditur, atque ſemper eo altius ſubmerſerunt terram, quo fortior ventus modo indicatus eſſet, longiusque duraret.

 §. 7.

§. 7. Audiri quandoque solent tonitrua etiam in hyeme, ingruentis frigoris, vt communis fert sententia, indicium datura. Accidit idem apud nos quoque, sed non nisi semel in his annis, vti tum temporis id ex relatione plurium hominum fide dignorum accepi, nempe Anno 1732, Nouembris 22, circa horam 5 matutinam; quo tempore regelatio aliquot dierum fuit, et terra niue omni fere exuta; neque diffiteri possum, insecutum esse eo tempore haec tonitrua frigus satis intensum.

§. 8. Rariores etiam solent esse in hoc nostro climate grandines, de quibus in *Collection. Vratislauiens. Anno* 1717 *mense Iulio p.* 18. idem affirmatur; et p. 20. dicitur, eos ordinarie procellam vehementem comitem habere; de quo posteriori effato ex sequenti laterculo indicium ferri poterit. Accidit nempe vt grandinaret hic loci

Anno 1728. 7 Iunii, intermixta pluuia, et flante Zephyro mediocri.

1729. 19 Sept. sine omni vento.

1731. 23 Maii parum grandinauit, flante forti Borea-Zephyro, siue N. W.

24. Maii grando copiosius cecidit, flante adhuc eodem vento.

1735. 5 Maii et 2 Iulii, sine omni vento.

Neque etiam sine exceptione multa verum esse deprehendi, Eurum serenitatem efficere, et Zephyrum afferre pluuias. Afferri enim hic possent, si necesse esset, exempla quam plurima, quae vtramque hanc sententiam plane infringunt

§. 9.

§. 9. Quamuis subita Barometri mutatio ordinarie soleat procellas subito secuturas indicare: non tamen desunt plurima exempla, quae demonstrant, ventos saepius quam maxime furere, etiamsi nulla Barometri mutatio praecesserit. Ita e. gr. 1730. 18 Aug. erat procella fortissima, ex Occidente imbrem vehementem ferens: sed Barometri altitudo per tres continuos dies constans, nempe 29 dig. 1 lin. Procellae vero omnes annorum praecedentium sequenti tabella continentur:

Anno	1726.	Martii 2. 3. 15. 18. 19. 22. Iun. 30. Sept. 15. 16. 22. 28. 29. Oct. 5. 20. 27. Nou. 5.
	1727.	Ian. 11. 27. Febr. 17. 19. 28. Mart. 2. Sept. 21. Octob. 11. Nou. 18. Dec. 6.
	1728.	Totus annus sine procella.
	1729.	Aug. 27. 31. Octobr. 2. 3. 12. 13. 26. 27. 29. Nou. 19.
	1730.	Ian. 11. 18. Aug. 18. Sept. 21. Oct. 26. Dec. 27.
	1731.	Febr. 3. 7. 22. Mart. 7. 13. 30. Apr. 10. 15. 21. 29. Iun. 5. 22. Iul. 10. Octob. 20. Nou. 22.
	1732.	Ian. 14. 26. Febr. 6. Apr. 25. Maii 4. 22. Aug. 7. Sept. 15. Oct. 2. 11. Nou. 9. 25.
	1733.	Mart. 11. Apr. 7. 9. Maii 5. Iun. 10. Sept. 4. 6. Octob. 8. 20. 31. Dec. 1. 10. 12. 31.

1734. Ian. 1. 4. 18. 26. Febr. 3. 14. Apr.
15. 17. 22. Maii 4. Iul. 19. Aug.
3. 25. Sept. 19. Octob. 16. Nou.
14. Dec. 19.

1735. Ian. 4. 5. 6. Febr. 8. Mart. 11. 13.
Apr. 21. Octob. 19. 25.

1736. Apr. 14. Maii 2. Iul. 10. 24. Aug.
7. Sept. 10. 13. Dec. 13. 18.

ex quibus elicitur, menſem Octobrem eſſe maxime procelloſum; huncque proxime inſequi Septembrem, Martium et Ianuarium.

§. 10. Cum anno praeterito 1736. d. 10. Septembris magna eſſet fluuii noſtri inundatio, Zephyrusque vehementiſſime flaret: obſeruaui, capto ſtatim experimento, vim venti talem fuiſſe, qua aſſerculum, cuius latitudo 208 part. milleſ. ped. Rhenani, longitudo 382, pondus 346 gran. eleuare potuit vsque ad angulum 80 graduum, idque fere conſtanter, non ſubſultim tantum. Ex qua obſeruatione vt celeritas venti illius indagetur, ſit aſſerculus vento expoſitus A C, ſed circa A liberrime mobilis, et in ſitu A C verticaliter dependens. Aſſumamus, cum *Mariotto*, preſſionem aëris moti in aſſerculum verticaliter dependentem eandem eſſe cum ea, quam exerceret pondus voluminis aërei, cuius baſis eſt ſuperficies aſſerculi, et altitudo illa, quae debetur celeritati aëris moti. Itaque ſi altitudo celeritati venti debita ſit $= v$ part. milleſ. ped. Rhen. aſſerculi longitudo A C $= a$, latitudo $= b$, atque vna pars milleſima cubica aëris ponderet m grana: erit preſſio modo dicta in aſſerculum

Tabula XV. Figura 1.

culum verticalem $= abmv$ gran. Iam ponatur afferculus per vim venti eleuari vsque in fitum A H, eritque vis venti in A C ad vim venti in fitu obliquo A H, in ratione directa primo finuum angulorum incidentiae, hoc eft in ratione fin. E D A, qui rectus eft, fi ftatuatur ventum horizontaliter progredi, ad fin. E B A; et fecundo in ratione etiam directa fuperficierum, quibus in vtroque fitu ventus incumbit, nempe A C et A K, ducta nimirum horizontali G H, quia hae fuperficies, aeque latae, tenent rationem longitudinum. Vocatis ergo finu toto $= 1$. anguli C A H finu $= s$, cof. $= c$, erit, vis venti in A C ($abmv$) ad vim venti in A H $= 1$. AC: c. A K; fed vero A C: AK $=$ A H : A K $= 1 : c$; ergo modo dictae vires inter fe erunt vti 1 ad c^2, et confequenter vis in afferculum obliquum agens $= abc^2mv$, cuius directio, vtpote omnium fimplicium aëris impulfuum media, tranfibit per medium afferculi B, et perpendiculariter in eundem effectum fuum exferet. Sit ergo ducta perpendicularis B F $= abc^2mv$; et quoniam centrum grauitatis afferculi ponitur etiam effe in medio ipfius puncto B: exponatur pondus afferculi per rectam verticalem B M $= p$, quae refoluatur in laterales B K et B L, illam perpendicularem ad afferculum, hanc parallelam; exferet haec vim fuam folummodo in firmitatem axis A, illa vero in directum contraria erit impulfui aëris B F. Eft vero in Triangulo B K M, finus totus (1): B M (p) $=$ fin. K M B (s): B K (ps). Cum igitur, ex aequilibrio afferculi, debeat effe B K $=$ B F: habebitur $ps = abc^2mv$, aut $\frac{ps}{abc^2m} = v$. Si vero corpus aliquod ex altitudine v deciderit, acquirit per regulas

Me-

Mechanicae tantam celeritatem, qua aequabiliter motum tempore vnius minuti secundi percurrere potest spatium $250\,\sqrt{v}$. Ventus igitur habens celeritatem debitam altitudini modo inuentae, poterit tempore vnius minuti secundi absoluere spatium $\frac{250\sqrt{(ps)}}{c\sqrt{(abm)}}$ part. millesf. ped. Rhenani, vel etiam $\frac{\sqrt{(ps)}}{4c\sqrt{(abm)}}$ ped. Rhen. In applicatione ad experimentum modo memoratum, erit $p = 346$ gran. $s =$ sinui 80°, $c =$ cos. 80°, $a = 382$, $b = 208$, et quoniam pes cubicus aëris pondus habet 585 gran. erit $m = \frac{585}{1000000000}$ gran. vnde finito calculo inuenietur, ventum tum temporis ita rapidum fuisse, vt tempore vnius minuti secundi $123\frac{2}{10}$ pedes Rhenanos percurrerit.

§. 11. Supersunt aliae adhuc quaedam Obseruationes Meteorologicae, quae rarius accidunt, et quas omnes breuiter comprehendam. Parhelii primo visi sunt sequentes:

Anno 1727. Martii 2 post serenitatem duorum dierum, subsequente procella, et niue copiosa.

1730. Ianuarii 4 Parhelii non adeo distincte visi sunt, subsequente altero die Luce Boreali. Nouembris 15 Parhelios vidi non valde distinctos, Iride ex vtraque parte solis veri A comprehensos; arcus Iridis vtrinque eousque extendebantur, quousque tenues aderant nubes; lucente nimirum Sole inter paucas nubes tenues. In *aa* conspiciebatur color viridis, in *bb* vero ex albo flauus. Durauit hoc phaenomenon ab hora 2 postmerid. vsque fere ad Solis occasum, subsequente niue modica.

Figura 2.

1731

1731. Ianuarii 12 Parhelii visi sunt, ex relatione aliorum.

Ianuarii 15 hora 9 a. m. circa Solem vtrinque arcus apparebant, qui angulum B D C efficiebant 48°, coloribus flauo et rubescente insigniti. In parte inferiori arcuum globi duo lucidiores apparuerunt, durauitque hoc spectaculum vsque ad horam 11. a. m. serenitatem, quae tunc erat, subsequentibus nubibus aliquot dierum.

Septembris 2, hora 8 matutina, visus est circulus interruptus circa Solem, coloribus Iridis ludens, qui angulum efficiebat 20°, subsequente perfecta serenitate.

1732. Ianuarii 24. fere toto tempore matutino Parhelii videbantur F et G, constituentes angulum in oculo spectatoris F H G 45°; arcus in A C et B D erant distinctissimi, et solem versus rubro colore tincti; in E vero obscure, nec nisi Sole manu obtecto, videbantur; in F et G obscurae conspiciebantur Solis imagines. Figura 3.

1735. Ianuarii 25. hora 3 p. m. Parhelii coloribus, rubro et coeruleo, comitantibus apparuerunt.

1736. Februarii 5. tres Soles visi sunt, duo nempe Parhelii, subsequente Luce Borea eo ipso, et postero, diebus.

Reliqui Solis Halones, nullis Parheliis conspicui, apparuerunt:

1727. Aprilis 17. 24. 25.* cuius Diameter 30°. Decembris 10.

1728. Iulii 21.

Luna quoque Aula cincta obseruabatur

1730. Ianuarii 14, quae aula valde tenuis erat, subsequente serenitate.

Februarii 18.

Martii 19. 25. quo die Sol occidens caudam albam et lucidam per nubes raras trahebat; Luna vero cum Paraselene et cauda rubra oriebatur, subsequente serenitate perfecta quatuor dierum.

Octobris 11. hora 9 p. m.

Nouembris 14 hora 5 p. m. Luna oriebatur sursum et deorsum cuspidata longiori cauda.

1733. Nouembris 7. conspiciebatur coelo sereno HaloLunaris, subsequentibus pluuiis et niuibus.

1734. Septembris 27. aderat Halo Lunaris duplex, sed imperfectus, hora 10 p. m. in serenitate, subsequente tempestate nubila.

1735. Martii 26. hora 9 p. m. Luna conspiciebatur in cruce, pallida primum, breui post in Aula valde magna, cum aër esset plenus vaporibus, subsequente serenitate.

1736.

1736. Septembris 13. hora 10 p. m. apparebat Aula Lunaris flante fortiter Zephyro, ſubſequente frigore

Decembris 31. idem phaenomenon viſum eſt, inſequente niue.

§ 12. Primus fortaſſe, qui obſeruauit glaciem ipſam, duriſſimam quoque, continua exhalatione aliquid ſui ponderis deperdere, fuit *Mr. Sedileau*, vti videre licet *in Memoires de Mathem. et Phyſique* 1692. Ita tamen parce hanc exhalationem fieri credidit, vt non niſi poſt aliquot dies fiat ſenſibilis. Sed, vt taceam, me deprehendiſſe, in fruſto glaciei bilanci accurate impoſito, ſingulis fere minutis primis decrementum aliquod ponderis ſenſibile; hoc ſolum adhuc referam, quod Anno 1730 Ianuarii 10, hora 4 p. m. e glacie, quam fluuius noſter quotannis induit, inſignes et copioſos vapores egredi, et ad altitudinem aliquot pedum aſcendere, diſtinctiſſime viderim, tempore multum ſereno, neque valde frigido.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE ANNO 1737 INSTITVTAE

A

Georgio Wolffg. Krafft.

§. 1.

Cum in praecedentibus ſatis explicatam dederim deſcriptionem omnium eorum, quae in Meteorologicis obſeruare potui ſpatio vndecim annorum: haud inutile fore ſpero, ſi eodem ordine et ſequentes quoſuis annos pertractem; vt quicquid ex his promanare poteſt vtilitatis, illud quam citiſſime in publicos vſus redundet.

§. 2. Durante igitur anno 1737 obſeruatae fuerunt a me altitudines Barometri ſingulis menſibus maximae et minimae ſequentes:

		Max.	*Min.*	*Diff.*
1737	Ianuar.	30. 25	28. 44	1. 81
	Febr.	30. 35	28. 68	1. 67
	Martius	30. 62	29. 23	1. 39
	April.	30. 50	29. 00	1. 50
	Maius	30. 04	29. 42	0. 62
	Iunius	29. 82	29. 04	0. 78
	Iulius	29. 70	29. 12	0. 58
	Auguſt.	29. 80	29. 04	0. 76
	Sept.	30. 20	29 40	0. 80
	Octob.	30. 04	29. 06	0. 98
	Nou.	30. 14	28. 58	1. 56
	Dec.	30. 95	29. 07	1. 88

Vbi

Vbi quidem rurſus numeri ante punctum poſiti ſignificant partes duodecimas pedis Londinenſis, hoc eſt, pollices Londinenſes; numeri autem poſt punctum poſiti, denotant horum pollicum partes centeſimas, quam quidem menſuram conſtanter retineo.

§ 3. Apparet ex his altitudinibus Barometri, earum maximam hoc anno fuiſſe 30. 95; fuit autem ea obſeruata die 24 Decembris ſtyli vet. hora 10 nocturna; cum eo mane fuiſſet 30. 94, et ſequenti die 30. 89 in perfecta ſerenitate ſex dierum continuorum, flante Euro, frigore ſatis magno, et terra ab aliquot iam diebus ab omni niue liberata. Minima vero harum altitudinum eſt 28. 44, quae obſeruata fuit die 9 Ianuarii hora 9 nocturna, cum nubibus continuis coelum eſſet obductum per aliquot dies, et aër impetuoſus multam niuem ferret. Cum ergo haec altitudo maxima Barometri maior adhuc ſit quam ea, quae in omnibus annis praecedentibus maxima inuenta eſt: mutatur hinc quoque ſpatium variationum Barometricarum. Nam cum maxima altitudo nunc ſit 30. 95, et minima 28. 18, erit ſpatium variationes Barometri omnes tempore 12 annorum includens 2. 77. Caeterum id, quod in praecedentibus obſeruationibus Barometricis iam obſeruaui, etiam hoc anno confirmatur, variationes nempe menſtruas in primis et vltimis anni menſibus eſſe maiores, minores vero in mediis.

§. 4. Aurorae Boreales, quae hoc anno apparuerunt, ſunt ſequentes:

1737 Martii 17 visa fuit vesperi hora 10 Lux Borealis in perfecta serenitate, et aliqua gelatione.

30.

31 Vtraque harum in perfecta serenitate, splendente Luna; sequebatur multum niuis.

Aprilis 13 in perfecta serenitate, quam nubes paucae exceperunt.

Augusti 12 Lux Borea inordinata, multis trabibus hinc et inde motis ludens, in serenitate multa, post pluuiam fortem et tonitrua.

13 Lux Borea debilis, in multa serenitate.

14 Lux Borea humilis, et tranquilla, in serenitate, quam altero die imber breuis secutus est.

24 hora 1 matutina erat magna tempestas, cum fulguribus et tonitruis fortissimis, rediens hora 6 p. mer. fragore paulum imminuto; hora 11 p. m. visa sunt vestigia Lucis Boreae manifesta, inter multas nubes diuisas, subsequente pluuia larga et fere continua altero die.

Septemb. 7 In serenitate dubia apparuerunt vestigia Lucis Borealis.

Octobris 12 In perfecta serenitate, orta post nubes continuas aliquot dierum, visa est Lux

Lux Borea vesperi hora 10, quam rursus nubes continuae cum pluuiis exceperunt.

§. 5. Prima congelatio facta est die 6 Octobris, satis fortis, fere vbique per totum diem subsistens, et quae per aliquot dies subsequentes continuo durauit. Contigit ergo haec prima congelatio altero die post ☍♃♀, atque in ipso die □☉, quam die 7 Octobris △☉♄ insecutus est.

§. 6. Tonitrua hoc anno audita sunt diebus sequentibus: Aprilis 30, durante pluuia fere per totum diem. Maii 13 cum pluuia. Iunii 2 cum pluuia forti. 26 sine pluuia. Iulii 18 sine pluuia. 25 cum pluuia larga. 30 sine pluuia. Augusti 12 cum pluuia forti. 24 hora 1 matutina, redeuntia post meridiem hora 6. Quibus adiungo, primas hirundines mihi visas fuisse die 27 Aprilis.

§. 7. Ope Thermometri mercurialis, quod in praecedentibus descriptum fuit, obseruaui, hoc anno maximum calorem fuisse Iunii 2, quo die hora 5 post mer. Thermometrum ostendebat gradum 1128, et audiebantur vesperi tonitrua, flante fortiter vento S. W. Maximum vero frigus fuit Februarii 8, ostendente Thermometro vesperi hora 10 gradus 1675 in perfecta serenitate aliquot dierum. Idem Thermometrum die 17 Martii in perfecta serenitate Soli libero hora 2 post mer. expositum, monstrauit in summo calore gradus 1340. Deinde vero die 20 Maii in perfecta serenitate octo dierum continuorum libero Soli expositum eo vsque ascendit, vt ostenderet tandem

dem gradus 910. Neque hic loci praetereo, me die 25 Ianuarii Barometrum expoſuiſſe calori balnei ſudatorii domeſtici, mediocriter calefacti, quod, cum ab initio erat in altitudine 29. 02, poſt elapſum ſemihorium acquiſiuit altitudinem 29. 10, poſtea libero aëri commiſſum rediit ad numerum 29 05, et poſtero die oſtendit 29. 29. Extenſus ergo fuit mediocri calore mercurius Barometro contentus.

§. 8. Pluuias et Niues aeſtimatione tantum perpendentes, inueniemus in hoc anno dies 43 integros pro pluuioſis et niuoſis eſſe habendos; atque menſium habita ratione Iulium pluuiarum fuiſſe feraciſſimum. Fluuii noſtri Neuae tumores ſenſimus Ianuarii 6. Aprilis 1. Iunii 3. flante fortiter N. W. Nouembris 24. Decembris 6. quorum vltimus ſolus inundationem paruam effecit, flante fortiter vento S. W. Nec niſi ſemel toto hoc anno grandinauit, ſcilicet Iunii 11 flante fortiter Zephyro.

§. 9. Procellas experti ſumus diebus ſequentibus: Ianuarii 6. 9. Februarii 10. 12 14 Martii 27. Aprilis 20 Maii 4. Iunii 3. Iulii 2. 3. 8. Auguſti 27. Octobris 10. Nouembris 3 4. Decembris 6.

§. 10. Reliqua, quae referri huc debent, comprehendam ſequentibus. Iridis pars tantum viſa eſt Iulii 3. hora 7. p. m. Duplex vero Iris apparuit poſt parcam pluuiam Auguſti 6, hora 6½ p. m. atque denuo alia ſimplex pulcherrima Auguſti 17 circa horam 6 poſt mer. Deinde Auguſti 26 poſt leuem pluuiam ſpectandam ſe praebuit alia Iris primaria integra, cum veſtigiis ſecundariae.

dariae. Pallorem Lunae Nouembris 25 hora 8 vespertina valde conspicuum nix fortis insecuta est. Halone cincti Luna visa est, in perfecta serenitate aliquot dierum subsequentium Decembris 21 hora 10 vespertina. Illud vero, quod omnium spectatorum excitauit admirationem, sequens fuit phaenomenon. Decembris 5, circa horam 10 nocturnam, cum nubes continuae totum aërem tenerent, apparuit subita rubedo harum nubium vniuersalis, fortis, aliquando tamen paulum intermittens, sed sine minimo indicio materiae alicuius lucentis, aliquot horarum spatio durans, aliquotque sequentibus diebus rediens in iisdem circumstantiis. Similes coeli rubedines, nubibus etiam obducti, animaduersae quoque sunt Decembris 15 et 17, hora 3 min. 50 post merid. quae vero non nisi per $\frac{3}{4}$ horae durarunt. Denique in perfecta serenitate multorum dierum visa est eadem rubedo coeli fortis et generalis Decembris 22, circa horam 7 matutinam. Vt vero haec phaenomena vltima non adscribo nisi crepusculo et aurorae Solis occidentis et orientis, atque aëri tum temporis refertissimo vaporibus copiosissimis, cum terra niue per maximam mensis totius partem esset destituta, et fere semper roraret: ita primam rubedinem tribuo Aurorae Boreali, quae nubibus tecta fuit. Nam Decembris 15 et 17 Sol occidebat hic $2^h\ 47'$, quibus si addatur duratio crepusculi $2^h\ 57'$, oritur tempus, quo integra lucis solaris priuatio coepit $5^h\ 44'$; sed rubedo primum visa est $3^h\ 50'$, et durauit per $45'$, ergo finem nacta est $4^h\ 35'$, cum scilicet nondum omnem plane lucem solarem horizon noster amisisset, sed debilissima tamen adhuc illustraretur. Idem applicari potest ad alteram ru-

 be-

bedinem Decembris 22 mane conſpicuam. Oriebatur eo tempore Sol 9^b $8'$, a quo tempore ſi ſubtrahatur duratio crepuſculi 2^b $53'$; oritur momentum, quo primum illuſtrari coepit aër radiis ſolaribus 6^b $15'$. Igitur cum haec rubedo viſa ſit circa horam 7, viſa eſt praeciſe eo tempore, quo Solis radii copioſiores aëri noſtro vaporibus repleto inciderunt. Eo autem tempore, quo prima vice rubedo haec viſa fuit, nempe Decembris 5, hora nocturna 10, occidebat Sol 2^b $47'$, quod tempus durationi crepuſculi 2^b $57'$ iunctum efficit tempus 5^b $44'$, quo aër noſter radiis ſolaribus priuabatur. Luna eo die non niſi 1^b $8'$ poſt mediam noctem oriebatur; igitur neutrum horum ſiderum rubedinis viſae rationem in ſe continere tum potuit. Quapropter nullam aliam cauſam ſupereſſe puto, quam Auroram Borealem, poſt nubes deliteſcentem, et fortaſſe maximam coeli partem occupantem; cum frequenti experientia edocti ſimus, dari quandoque Auroras Boreales, per rimas nubium tantum conſpicuas. Cui ſententiae etiam illud fauet, quod rubedo haec modo intenſior modo remiſſior viſa fuerit; prout nempe virgae vehementiores aut remiſſiores in Luce Boreali aſcenderunt.

CLASSIS

CLASSIS TERTIA.

CONTINENS

HISTORICA.

GEOGRAPHIA RVSSIAE
VICINARVMQVE REGIONVM
CIRCITER A. C. DCCCCXLVIII.

Ex Constantino Porphyrogenneta.

AVCTORE

T. S. B.

ILlis ipsis temporibus, quibus Sphendosthlabus, seu Suiatoslaus, Ingoris filius, rebus praefuit, paulo post Kiouiam ab Olego captam, Constantinus Porphyrogenneta Imperator regiones ad Danubium, Borysthenem, Pontum, Caucasum, Volgam et vltra ad Iaicum vsque, in libro de administrando imperio ita descripsit, vt vel maximum operae pretium ad illustrandas Russicas origines in huiusce libri explicatione situm videatur. Scripsit Imperator librum πρὸς τὸν Θεοςεφῆ ϗ Πορφυρογέννητον Βασιλέα Romanum, filium suum, et ita scripsit, vt sermonem ingressus ab auspiciis eius et consecratione, tamquam recentissima in memoria suscepti imperii, quemadmodum se gerere oporteat, demonstret. Romanus autem A. C. 948. in ipsa paschatos solemnitate a patre Imperator et collega dictus diadema accepit: Constantinus Imp. A. C 959. xv. Nouembris decessit. Ex eo consequitur, Constantinum ante A. C. 948. vtique non scripsisse librum, cuius tota ratio auspiciis Romani inseruit: at cum ad excessum vsque duodecim propemodum anni superfuere Constantino, dubitari posse video in satis magno interuallo, quem praecipue annum huicce libro vindicari conueniat. Tab. XVI.

Nihilo

Nihilo tamen minus nos a recenti memoria auſpiciorum Romani et ab A. C. 948. ad ſummam ab A. C. 949. diſcedere patitur Conſtantinus, quando eius verba et totam inſtituti commentandique rationem conſideramus. Huc accedit, quod auctor eſt annis ante ſe quinque et quinquaginta, Turcas Pazinacitis vrgentibus, a Boryſthene pulſos in Pannoniam ſe recepiſſe. Si A. C. 949. Conſtantinus ſcripſit, Turcae impreſſionem illam fecere A.C. 894. ſin ille A. C. 948. ſcripſit, Turcicae inuaſionis memoria inſignitus erit annus 893. Et hoc ipſo anno Eggehardus Vragienſis tum Zuentoboldi Marahenſium regis mortem ponit, tum, *regnum Zuendebaldi*, inquit, *filii eius pauco tempore infeliciter tenuerunt, Vngaris omnia populantibus.* Habeo auctores alios, qui Vngarorum, ita enim Turcas vocarunt, inuaſionem huic anno vindicant, vt alias dicam copioſius. Quare nihil verius eſt, quam A. C. 948. Conſtantinum de imperio adminiſtrando commentantem, res vicinarum gentium prodidiſſe, vt ad eum vsque annum in aula Byzantia cognitae fuerunt. Et Guilielmus Delislius quidem e Regia Pariſinorum Academia, huius clariſſimi viri collegae noſtri frater, Anselmo Bandurio Imperium orientale euulganti eam operam praeſtitit, vt e Conſtantino tabulam geographicam deſcriberet, quae nos ab eodem labore ſuſcipiendo ſubleuare eſt viſa. Attamen dum omnia more meo perquirebam et indagabam, ſenſi eum in nonnullis aberraſſe, vt obſcuro in negotio labi et falli humanum eſt. Praeterea paucas tantum rationes edidit (1), cur aliqua iis maxime in locis poſuerit, quod video, vt accuratius fiat, non modo vtile eſſe, ſed

(1) Apud Bandurium Imperii Orientalis T. II. animaduerſionibus in librum de adminiſtrando imperio praemiſſae ſunt Delislii annotationes in tabulas a ſe concinnatas.

ſed etiam neceſſarium. In his enim ſaepe ſoleo dolere, exſtare tabulas diligentiſſimorum geographorum, non autem ſubiunctas eſſe eorum commentationes, quibus auctoritatibus permoti, et vbi illae deficiunt, quibus argumentis atque diuinationibus ducti vnumquodque nomen ſuis in ſpatiis retulerint in tabulas. Ita explorata ab obſcuris, vera a falſis, diſcerni non poſſunt. Huic incommodo ſic medebimur, vt in Heredoti Scythica Geographia inſtituimus: nam cauſſas ediſſeremus omnes, quae nobis vniuscuiusque gentis atque loci ſitum, ex Conſtantini Imp. ſententia qualis fuerit, perſuaſerunt. Denique animus nobis eſt, non modo Conſtantinum auctorem et ducem adhibere in tabula, ſed quaedam etiam alia monumenta illorum temporum, quae regiones ad Balthicum mare et ad Viſtulam explicarunt. Sed haec deinceps nobis curae cordique erunt, nunc in Conſtantino Imp. verſabimur.

Incipiam a Caucaſo et Phaſide, non tam ea cauſſa, quod veteres hoc flumine, vt poſt fere omnes, Maeotide atque Tanai, Europam Aſiamque terminarunt (2), quam quod vlteriores regiones ſuscepto labori non inſeruiunt. Phaſis nunc quoque, vt e tabula Ponti Euxini MS. cognoui, veteri vocabulo فاش موتي *Phaſch fluuius* vocatur et ad auſtrum habet فاش شالة *Phaſch caſtellum*, antiquam Phaſin. Scylax Caryandenſis iam ante Darii Hyſtaſpis expeditionem: Φάσις ποταμὸς ϗ Φάσις Ελληνὶς πόλις. Auctor de fluminibus incertus, quem Plutarchum imperiti dixerunt: Φάσις ποταμὸς παραρέων τὴν πόλιν, ex Cte-

(2) Agathemeres p. 3. ed. Hudſ. Arrianus in Periplo Ponti Euxini ex Aeſchylo p. 19.

Ctesippi rerum Scythicarum secundo. Plinius ipsis *in faucibus* fluminis vrbem ponit. Arrianus, qui Hadriani Imp. XX anno Cappadociae, cui Tibarena et Colchis accensebatur, praefuit, cum litora prouinciae suae a Trapezunte ad Dioscuriada circumueheretur, castelli huius situm et munimenta ita descripsit (3), vt ceteros scriptores, apud quos vrbis memoria exstat, hoc loco minime desideremus. Videtur tamen castellum ad Septentrionem fluminis statuere, non, vt in tabula Turcica est, ad austrum. Fluuius ipse, vt Agathemeres testatur (4) haud magno interuallo a fontibus abfuit. nauigabilem ad stadia 180. edidit Scylax. Colchidem a Tyanica, extrema Cappadociae regione, dirimebat Ophis fluuius, qui in periplo litorum a Trapezunte aberat, vt maxime, stadia 270. a Phaside 1170. Itaque ab hoc Ophi Colchis ad Dioscuriadem vsque censebatur Arriani aetate. Multi in Colchide populi ab eodem ponuntur, in his Lazi, Lazis finitimi Apsilae, Apsilis Abasgi, Abasgis Sanigae ad ipsam vrbem Dioscuriada, quae tum Sebastopolis dicebatur. Ab hac vrbe εἰς τὴν παλαιὰν Λαζικὴν, *vsque ad veterem Lazicam* Arrianus in circuitu maritimo numerat stadia 1370. ita, vt regio, interiectis Sindis et Achaeis finitima sit Bosporanis, qui tum a Bosporo Cimmerio vsque ad Sindicam stadiis 540. extendebantur. Recordemur Herodoti aetate Lazios ad Maeotin coluisse. Inde verosimile est digressos ad Pontum iis fere in locis consedisse. vbi hac nostra in tabula Zichia est, denique Colchis pulsis, ad Phasin se recepisse. In Peutingeriana tabula Lazi isthic inscripti sunt, vbi in hac nostra est Zichia. Videtur auctor *veterem Lazicam* in animo habuisse. Nam

(3) p. 9. (4) p. 48.

Nam Plinii aetate, quem primum huiusce rei testem citare possum, atque deinceps, vt e Byzantiis scriptoribus satis apparet, multis seculis in Colchide ad Phasin coluere Lazi, ne dicam Theodosio Imp. cuius aetate Peutingerianam tabulam editam esse, Marcus Velserus censuit. Isthic igitur in Colchide cum colerent, eo Procopius Caesariensis (5), Lazos Colchos veteres esse, scripsit. Sed vt grauissimus suorum temporum auctor est Procopius, ita in vetustis parum idoneus testis. Colchi, vt Herodotus nos docuit, ipsa in lingua Αἰγύπτιόν τι habuere, certum originis Aegyptiae argumentum, tum alia Aegyptii moris, quae quamquam non ita ad stirpem Aegyptiam demonstrandam valent, tamen illi superiori rationi adiecta consistunt. Verum, vt dixi supra, Lazi inter Sauromatas Herodoti aetate descripti, sero Zichiam intrarunt, serius Colchidem. Igitur adeo non sunt Colchi, vt neque Franci sunt Galli, neque Mauri Hispani fuere, aut Lusitani. Ioannes Tzetzes vero (6), οἱ δὲ Κόλχοι Ινθικοὶ Σκύθαι εἰσὶν, οἱ καὶ Λαζοι καλέμενοι πλησίον οἰκῦντες Αυγῶν τῶν πρὸς Μασσαγετῶν, ὧν Κόλχων τὰ Φάρμακα αὐθημερὸν ἀναιρῦσι. *Colchi sunt Indici Scythae, etiam Lazi cognominati, qui proxime Augenses colunt, quemadmodum Augenses vicini sunt Massagetis: quorum Colchorum venena ad hunc vsque diem colligunt.* Talium testimonia hominum, qualis Tzetzes fuit, inuitus produco: producenda tamen sunt nonnumquam, ne qui, quasi quod pueri in faba repererint, contra nos proferant, quae contempsimus. Qui, malum Ινδικοὶ Σκύθαι; Nempe venit mihi in mentem Ροδίων Χρησμὸς. Rho-

(5) De B. G. l. IV. c. I. (6) Scholiis in Lycophronis Cassandram v. 174.

Rhodii, cum Lindiae Mineruae quotidie ſacra facientes, eius in fano conuiuia agitarent, Apollinem conſuluere, liceretne ἀμίδαν εἰσφέρειν, riſit ſtoliditatem et licere dixit: at cum iterum quaererent: Χαλκῆν ἢ ὀστρακίνην, iratus reſpondit, μη δὲ ἑτέραν. Hunc in modum inter Geographos ſunt (7) qui Ινδοσκυθῶν hibrido nomine ſeſe iactarunt, vt τῶν Γαλλοκελτῶν, quo nomine in diuerſis auctorum ſententiis dubium reliquerunt, Indine eſſent, an Scythae, Galli an Celtae: non hoc Apollo ſiuerit, non Mineruа ferat ſua ad puluinaria. Sic Tzetzes cum reperiret Lazos ab aliquibus ſcriptotibus accenſeri Scythis, eosdem tamen Colchos veteres eſſe credidit, Colchos denique Aegypto profectos, eo aſſenſus eſt his, qui tum Indiam ſupra Aegyptum latiſſimis ſpatiis porrigebant, eiusque regionis populo accenſuit Lazos: et eosdem vero etiam Scythas, ne ſuos auctores offenderet, qui Scythas eſſe dixerant. Nam ab illis Scythis, quos Dionyſius Periegetes ad borealem Indi fluminis tractum et illum fabuloſum Alexandri Caucaſum ponit, Tzetzes non videtur reperiuiſſe, cum ille admirator Herodoti non ignoraret Aegyptiae Colchorum ſtirpis veterem famam. Et vehementer meam coniecturam confirmat Menologium Baſilii Porphyrogennetae Imp. aequale Tzetzae temporibus, in quo Lazi Aethiopes vocantur (8): ἐν τῇ Σεβαστοπόλει τῇ μεγάλῃ παρεμβάλλουσιν ὁ Ψάρος καὶ ὁ Φασις ποταμοί. οὗτινος Φασιδος ἐσώτεροι οἱ Αἰθιοπες κατοικοῦσιν. *In Sebaſtopoli magna praeterfluunt Pſarus et Phaſis flumina, cuius Phaſidis interiores ſunt incolae Aethiopes.* Incommode hic etiam de Apſaro et Phaſide; quam

(7) Vide Dionyſium Periegeten v. 1088 et ibi Euſtathium. (8) T. I. p. 221 Confer etiam Henrici Brenneri notas in Moſem Chorenenſem p. 60.

quam difficultatem Iosephus Simonius Assemannus non sustulit, cum ita interpretatur isthoc παρεμβάλλουσι, *quam fluuii duo interscindunt.* Nimirum auctor credidit, eodem alueo ad Sebastopolin Apsarum et Phasidem exonerari. At Aethiopes illi sunt Lazi, Tzetzae Indoscythae. Sic multos alios Tzetzae similes ἐπ' αὐλοφόρῳ in vanitate deprehendi. Nicolaus Vitsenius (9) e Petro a Valle obseruauit, ad Caucasum, his nostris temporibus quoque *Lesgos* agere, veteres Lazios. Tantummodo hic caueant Germani, ne Λάζους more suo pronuncient, sed leniori sibilo et quasi ductili, vt *Lagjos* et paene vt *Lesgos* Sic enim prisci suum *z* enunciarunt: posteriores acerbiorem sibilum τζ scripserunt, vt in ipso Tzetzae nomine. Non possum, hoc loco reticere, quae generosissimus Chiliarcha Garberus qui Imperatorio mandato regiones ad Caucasum orientalem dimensus est, me docuit: regionem *Lesgistan*, vt Persae vocant, intra Caucasum et ad mare Caspium multos populos continere, in quibus sunt Taulinzi, Akuschinzi, Cubinzi, Kuraelii, Dagistani, Dzari, Kumaki, Chaitaki, Tabassaran: linguas istarum nationum multas et diuersas inter se esse, vnam *Lesgicam* in Kubah apud Kuraclios et Kuraeios Dagistanorumque quosdam vigere, ab omnibus aliis linguis toto genio discrepantem: Georgianos referre, priscis temporibus Lesgos ad Pontum Euxinum vsque coluisse, pulsos deinde a Cargvelis (seu Georgianis in Carguel prouincia, quam nostri Carduel vocare solent) in montes sese recepisse.

 Redeo

(9) In Nord en Oost Tartarye p. 683.

Redeo ad Constantini Imp. tempora. Supra *Lazios* ad boream ponit *Abasgos* et *Apsilos*, tum *Zichios*, porro *Papagios*, denique *Casachios* et supra eos Caucasum, supra Caucasum *Alanos* in campestribus locis (10). Totus Caucasi tractus, et eius vicini, tam ad austrum, quam ad boream occidentemque, campi, non sic sunt explorati, vt hic non aut errare possimus, aut haerere debeamus Fieri potest, vt isthic campum constituamus, vbi excelsa iuga assurgunt, ibi nos montem, vbi ingens planities est. Sicuti nunc est in tabulis, Mengrelia ad Pontum Euxinum satis campestris videtur esse, ad boream et austrum Caucaseis iugis inclusa. Confirmari hoc video ab Arriano. Is enim cum a Trapezunte littora Caspia obiisset, saepe excensionem faciens, ad Dioscuriada denique et Astelephum, haud longe a Dioscuriade, κατείδομεν, inquit, τὸν Καυκασον τὸ ὄρος, τὸ ὕψος μάλιστα κατὰ τὰς Ἀλπεις τὰς Κελτικὰς, καὶ τοῦ Καυκάσου κορυφή τις ἐδείκνυτο (1), *conspeximus Caucasum montem altitudine ea, qua Alpes Celticae sunt, et nobis Caucasi quidam vertex monstratus est.* Igitur toto illo littore nulli montes, et ad Dioscuriada, seu Sebastopolin quoque, longius reiecti. Plinius (2) in Colchide ait, iuga Caucasi ad Riphaeos montes torqueri, *altero latere in Euxinum et Maeotin, altero in Caspium et Hyrcanum mare, deuexa*, vt duo quasi cornua montis esse intelligas, quae loca depressiora et planiora includant. Cum autem Constantinus praeter montem etiam fluuios adhibet ad situm populorum definiendum, consideremus ante omnia, quae dicat flumina, quibus locis describat.

Ab

(10) p. 113. (1) In periplo Ponti Euxini p. 12. (2) l. VI. c. 5.

Ab orientali Maeotidos regione multos fluuios in paludem exonerari ſcribit (3). Primus eſt *Tanais. Cui non dictus Hylas?* In tabula mea Turcica تن صوي quod Mesgninus Meninskius *Ten* pronunciat, alii *Tan*, vt Arabes quidam, qui تان *Tan* ſcribunt, Albugaſi Bahadur Chan *Tin*, adſcripto vocalis ſigno. In eo differt a Danubio, quem طنا *Dona* et طونه وطونا *Duna*, *Dunab* Turcae vocant: adiacentes populi et Ruſſi *Dunai*: quamquam Meninskius obſeruauit, etiam Danubium a quibusdam تن appellari, et Acron ad Horatium, Tanaim quoque fuiſſe dictum. Credo ego totum hoc, *Tan Ton Don Dunai* alicuius in populi, et veteris vero, ſermone nihil aliud, quam *fluuium* aut *aquam* ſignificaſſe, atque ab eadem voce Tanaim, Danubium, Dunam, Duinam, et terminatione ſua Ptolemai Ρούδων, nomina ſua accepiſſe. Secundum Tanaim ſunt flumina Χωρακουλ, ἐν ᾧ καὶ τὸ Βερζήτικον ἁλιεύεται *Choracul in quo piſcis* (4) *capitur*, et Βαλ *Val*, et Βουρλικ *Burlik* ſeu *Vurlik*, et Χάδηρ *Chadir*, et alii plures. Difficile eſt, vbi nulla veſtigia nominum exſtant, quod cuique fluuio nomen, qui ſitus fuerit, reperire. Tamen inuento, Verucho flumine, de quo dicam poſtea, ſpatium ſaltem inter Tanaim et Chadirum tenemus, in quo cetera flumina deſcribenda ſint, ne Chadirum forte putemus eſſe, qui eſt Vkruch. De Burlico ſic ait: ἐκ δὲ τῆς Μαιώτιδος λίμνης ἐξέρχεται στόμιον τὸ Βουρλικ καὶ πρὸς τὴν τοῦ Πόντου θάλασσαν καταῤῥεῖ, ἐν ᾧ ἐστιν Βόσπορος, *ex Maeotide palude exit oſtium Burlik, et in Pontum Euxinum exoneratur, eo loco, vbi Bosporus eſt.* Subob-

(3) p. 113. (4) De hoc piſce vide Bandurium ab hunc librum Conſtantini Imp. p. 126. 127.

obſcura haec ſunt: tamen apparet eum *Burlik* vocare Maeotidis oſtium, vbi ſe Ponto miſcet, ſeu ipſum Boſporum Cimmerium. Nam iſta ἐν ᾧ ἐςιν ὁ Βόσπορος, ſiue ſic interpretari poſſis ἐν ᾧ δηλονότι τῷ τόπῳ ἐςιν ὁ Βόσπορος ſiue ἐν ᾧ δηλονότι τῷ ςομιῷ τῷ Βέρλικ καλουμένῳ ἐςιν ὁ Βόσπορος, vt Boſporum dicat traiectum, *Burlik* ipſum alueum e Maeotide ſe exonerantem in Pontum. Nomen *Burlico* a Chazaris impoſitum videtur, vt antea a Graecis Boſporo. Eſt autem بيرلك *Birlik* et *Burlik*, Turcice *vnio*, *conſociatio*, quo vocabulo confluentem cum Ponto Maeotidem commode vocarunt. Et Turcica lingua ad explicandas Chazaricas voces lubenter vtor, quia in vicinia harum regionum Chazari, Turcici corporis populus, coluere. At Imperator praeterea inter fluuios, qui in Maeotidem exonerantur, Burlicum recenſet. Videtur igitur eſſe ille fluuius, quem in charta Turcica قوبان *Kuban* vocari video. Poteſt fieri, vt hic fluuius deuectus in Maeotin ſuper eius vndis natet coloremque ſeruet vsque ad Boſporum, vnde ipſius Boſpori nomen *Burlik* ei quoque tributum ſit. Ea natura fluuios alios commemorari ſcio, vt erat in Ponto Phaſis (5), et Titareſius ille Homericus, qui Peneo permiſtus καθ' ὕπερθεν ἐπιῤῥέει ἠΰτ' ἔλαιω. Infra Burlicum Χάδηρ *Chadir* fuit. Conveterum morem Graecorum *Chadir* dico, quod ita ſcio Conſtantinum pronunciaſſe. Clariſſimus Delislius hoc nomen illis aquis attribuit, quae mediae inter Aſiae continentem atque inſulam, in qua eſt Tamatarcha, e Maeotide feruntur in Pontum. At hic non tam fluuius eſt, quam Maeotidos alterum oſtium et alter quaſi Boſporus. Tamen

(5) Arrianus in Ponto Euxino p. 8.

Tamen a Delislii opinione non abhorreo, cum حدير قدور *Chadir et Chadur* Turcice *descensum*, *decliuitatem*, *accliuem alueum* significat, quod his Maeoticis ostiis pulcre conuenit Si quis alteri alueo Veruchi, in Maeotidem se exoneranti, tribuere nomen *Chadir* malit, multo magis assentire lubet, ne nimis longe a Constantini fide recedamus. Supra Burlicum Maeotidi miscetur Βαλ *Val*. Turcae hodie وال *Val* dicunt *cetum*, *piscem magnum*, forte sic etiam olim Chazari. Et potuit ille fluuius sic vehere piscem, vt superior Χωζακσλ *Verziticon*. Chorakul forte a قره seu قرا *kara*, quod non modo *nigrum*, *malum*, significat, sed et *terram continentem*, et a قول *kol* siue *kul*, quorum alterum *brachium*, alterum *seruum*. Vel sic tamen incertum, an *nigrum seruum* aut *nigrum brachium*, an a vicino promontorio continentis *brachium* dixerint. Sed haec nos non oportet morari. Itaque haec nomina conueniunt illis fere fluminibus, quibus nos adscripsimus: quamquam et plura exstant flumina iis in littoribus, et ceterorum nomina se reticere ait Constantinus, vt hic facile errare possimus, tamen is error non latius pertinebit.

Bosporum Imperator ait XVIII. M. P. latum et obiectum esse Bosporo τὸ Ταμάταρχα λεγόμενον κάστρον *castellum nomine Tamatarcha*. Sic Anselmus Bandurius e MS. codice emendauit. Tamatarcha credidi a طمان *Taman* et a ترك *Terk* dicta fuisse, quasi *nebulae pharetram*. Insula haec, in qua Tamatarcha fuit, ea in parte, qua Bosporo opposita est, magnum sinum habet, cuius in intimo recessu tabula Turcica ponit طمان *Taman*

man ſeu *Tuman*, vetuſta Tamatarcha. Nebula autem, cuius pharetram dixere vrbem, omni in palude et in Ponto ſupra modum offundi dicitur. Eodem in loco veteres poſuere Phanagorium. Si ex hac inſula traiicias in Aſiae continentem, tum ipſo Aſiatico in littore tabula Turcica duas turres pictas habet, alteri ad auſtrum adſcripto nomine اطبون *Athun*, alteri ad boream تمرك *Temrak*. Medio autem in Bosporo ante Tamatarchicum ſinum tabula Turcica inſulam ſatis magnam ponit ſine nomine. Haec eſt Conſtantini Imp. *Atech*. Ἐν δὲ τῷ μέσῳ τῶν αὐλῶν ιη μιλίων νησίον μέγαν χαμηλὸν, τὸ λεγόμενον Ἀτεχ *in medio* 18 *milliarium* (quae latitudo eſt Bospori ſecundum Conſtantinum, ſi Bosporo ſinum ad Tamatarcha accenſeas) *inſula eſt magna et depreſſa humilitate Atech*. Turcae اتك *Atek* et *Etek*, vt Menninskius explicuit, *ſinum*, *laciniam et gremium veſtis*, *tentorii*, *aliarum rerum* appellant. Qua voce Chazari in huiusce inſulae nomine perquam eleganter vſi videntur.

A Tamatarchis ad fluuium Οὔκρουχ *Vkruch* Conſtantinus M. P. XVIII. aut XX. ponit. Ergo hic fluuius tanto ſpatio, ſeu paullo ampliori a Tamatarchis abfuit, quanto a Taurica Cherrhoneſo Tamatarcha. Apparet, alium, quam hunc, quem in tabula conſignaui, eſſe non poſſe. Ab Vkruch fluuio vsque ad Nicopſin fluuium Conſtantino ſunt M. P. ccc. Eam dimenſionem, vt potui, ſecutus ſum in tabula: nam neque anfractus et receſſus littorum iſtorum ita noti ſunt nobis, neque fluuiorum nomina, vt aliquid certi ſtatuere queamus. Amicorum meorum aliquis me monuit, poſſe fieri, vt fluuii

fluuii nomen sit Slauonicum: nam Кругъ *Krug* Slauonis esse *circulum*, a quo sinuosus fluuius nomen duxerit; Chazaros autem, vt Turcarum mos est, in multis peregrinis, vocalem adiecisse initio vocis, vt in *Iskender*. Mihi quoque de Nicopsi in mentem venit, Slauonicum esse, et vt Перекопъ seu Прекопъ *Perecop* et *Precop* fossam appellant Slauoni, ita Нїкопъ dixisse *fluuium*, veluti *non arte et opera ductam fossam*. A Nicopsi fluuio μέχρι τῦ κάςρυ Σωτηριοπόλεως M. P. ccc. sunt, Imperatore teste (6). Soteriopolis, quae quondam Pityus Magna. Zonaras (7) scribit, Constantinum M. triremibus profectum Soteriopolin, vt isthic thermis vteretur. Σωτηρίοπολις, inquit, ἡ νῦν Πύθια. Duae vrbes fuerunt, altera Pityus prope a Trapezunte, ad Septentrionem Dioscuriadis altera. Illa in Tabula Turcica veterem memoriam insignitam habet nomine fluminis conseruato. Est ibi اسكي طرابوزون *Antiqua Trapezus*, tum فوتنه موين *Phutineh fluuius*, quod فوتيه *Phutieh* puto scribendum fuisse, corruptum ex Pityunte. Plinius *flumen et oppidum Pityus*. De altera autem Pityunte Arrianus (8): ὁρμηθεῖσιν ἐκ Διοσκυριάδος, πρῶτος ἂν εἴη ὅρμος ἐν Πιτυῦντι, ςάδιοι τριακόσιοι πεντήκοντα, *nauigantibus a Dioscuriade primus portus in Pityunte stadia CCCL*. Igitur tam e dimensione Constantini, quam ex veteri geographia, Soteriopolin suo in loco constituere possumus. Et cum ab Vkruch ad Nicopsin M. P. trecenta sunt, teste Constantino, trecenta alia a Nicopsi ad Soteriopolin, ergo

(6) p. 114. (7) T. II. p. 10. (8) l. c. p. 18.

go inter Vkruch et Soteriopolin in medio Nicopſis fluuius et vrbs deſcribi a nobis debuerunt. Intra Nicopſin et Soteriopolin illo aeuo Abasgi et Apſilae (9) coluerunt, gentes, vt omnas conſentiunt, eiusdem corporis duae. Abasgos credo populum, qui hodie *Awchaszi* vocantur: multi inter eos Chriſtiani, qui in ſacris Georgiana lingua vtuntur.

Redeo ad Nicopſin, ad quem fluuium Imperator (10) eiusdem nominis vrbem ponit. Ab eo flumine vsque ad Vkruchum Ζιχία fuit (1). Euſtathius Theſſalonicenſis ad Dionyſium Periegeten (2): ὁι Σινδοὶ ὁι ϗ Ζικχοι. Neſcio quam recte. Sindos Herodotus (3) ita collocauit, vt inde ad Themiſcyram, quae ſuper Thermodonte fuit, ſumma Ponti latitudo cenſeretur: hoc eſt ad hunc Vkruchum noſtra in Zichia. Neque tamen Herodotus Euſtathio inſeruit, vt quod vult concludat. Conſtantini regio tota maritima (4). Littori obiectae in Ponto inſulae: vna magna, tres paruae, aliae minores, Imperator ait: Τὸ μέγα νησίον ϗ τὰ τρία νησια ἔνθοδεν δὲ τούτων εἰσὶ ϗ ἕτερα νησία τὰ ἐπινοηθένλα ϗ παρα τῶν Ζιχιῶν κλιοθένλα, τί τε Τουργάνηρχ ϗ τὸ Τζαρβαγάνι ϗ ετερον νησιον, ϗ εἰς τὸν τοῦ ποταμοῦ λιμένα ἕτερον νησιόν ϗ εἰς τὰς Πτελέας ἕτερον, *magna inſula et tres inſulae, intra eas vero ſunt et aliae inſulae a Zichis cultae, vna Turganirch, altera Tſarbagani et alia iterum inſula, et in oſtio fluuii* (puta Nicopſeos) *alia, alia denique in Pteleis*, ad quam confugiant Zichi, cum Alani inuadunt prouinciam. Nomina inſularum aliquid Turcici continere viden-

(9) Conſtantinus l. c. p. 114. (10) ib p. 113. (1) ib. p. 113. (2) ad v. 680. (3) l. IV. c. 86. (4) Conſtantinus de A. I. p. 113.

dentur. In primo vocabulo nolim argutari: multa enim in mentem veniunt nobis. In altero ſane videtur چار *Tſchar* et بغانه *Baghana* apparere, quorum iſthuc *thronum* ſignificat, et multis in populis ad Caucaſum regis ſeu principis titulo ab omni aeuo inſeruiit, hoc autem *puerum* ſeu *filiolum* ſignificat. Quas Pteleas dicat, non video. Guilielmus de Rubruquis circiter A. 1250. *Vltimum orificium Tanais eſt Ziquia* (in alio MS. Britannico, *Zibia*) *quae non obedit Tartaris, et Sueui et Hiberi, qui non obediunt Tartaris.* Supra Zichiam erat Παπαγία *Papagia* (5). Papagos alio loco Imperator (6) Zichiorum in corpore recenſet, cum ſic ait: ἐν Ζηχίᾳ πρὸς τον τόπον τῆς Πάγης τῆς ὅσης πρὸς τὸ μέρος τῆς Παπαγίας, ἐν ᾧ καλοιοῦσι Ζηχοί. Et haec quidem ſubobſcura atque ambigua ſunt: at cum rurſum dicit: ἐν Ζηχίᾳ ἐν τῷ τόπῳ τῷ καλουμένῳ Πάπαγι *in Zichia, loco illo, qui Papagi vocatur*, apparet, vt puto, Imperatori illam mentem fuiſſe, vt Zichiam prouinciam diſtribui voluerit inter duos eiusdem corporis populos, Zichios et Papagos, ita autem vt Papagi magis ad boream colerent, Papagi pagus in medio eſſet. In illa regione Zichiae, ἐννέα, inquit, πηγαὶ ἄφθαι ἀναδίδουσαι, in altera Papagi item huiusce materiae ſcaturigo eſt. Ridiculum eſt, cum Ioannes Meurſius et Anſelmus Bandurinus Latine conuerterunt, *nouem ſunt fontes, qui vlcera in ſummo ore faciunt.* Nimis ſtricte Graecam vocem interpretati, non ſenſere Imperatorem dicere نفط *Naſhtam.* Addit enim haec fontium ἔλαια partim rubra eſſe olea, alia flaua, nonnulla ſubnigra. Et Bandurium hoc fugere

 non

(5) de A. I. p. 113. (6) de A. I. p. 156.

non debuit, qui quae Petrus Lambecius de hac voce obseruauerat, in Antiquitatibus Constantinopolitanis ipse edidit (7). Prope Papagi pagum Constantino dicitur esse regio Σαπαξὶ *Sapaxi*, quod *puluerem* significet. Est sane hoc Turcicum سابيا *Safija*, *puluis*, et a Constantino Σαπικιον quoque enunciatur. Πλησιον τȣ̃ Χωρίȣ τὰ Σαπικιȣ est θέμα Δερζίνης *Derzinis regio*: etiam eo in loco fontes naphthae. Τα Σαπικιȣ Bandurius e codice Parisino, cum antea Meursius edidisset Τασαπίȣ, quod paene credo esse verius. Est etiam naphthae fons in agro Χαμȣχ *Chamuch*, qui ager a veteri possessore nomen gessit. Ceterum Papagi, siue Sapaxi, et Chamuch a mari distabant vnius diei itinere, quod quis equo vectus conficiat. In themate Δερζήνης *Derzinis* πλησιον τȣ̃ χωρίȣ τȣ̃ Σαπικίȣ ϗ τȣ̃ χωρίȣ τȣ̃ ὀνομαζομένȣ Επισκοπιȣ *proxime regionem Sapiciam et dictam Episcopium*, iterum alios fontes naphthae recensens, simul locorum illorum situm nobis demonstrauit. Addit thema Τζιλιαπερτ *Tziliapert* sub regione Σρεχιαβαραξ *Srechiauarax* ob naphthae vbertatem: at cum nulla situs nota adiecta sit, vt nimis incerta in tabula nostra praetermittenda duximus.

Supra Papagiam ad Septemtrionem, Constantino teste est Κασαχία seu Καζαχία (8) *Casachia*. Cl. Delislius Casachiam medio Caucaso in quandam planitiem abstrusit. Cum autem Imperator diserte scribit, ἄνωθεν τῆς Κασαχιας *supra Casachiam* esse montes Caucaseos, et vltra hos montes esse τὴν Χῶραν τῆς Αλανίας, ea caussa indu-

(7) Imperii Orientalis T. II. p. 817. (8) p. 113. 111.

inducor, vt Caſachiam in interiori et citeriori ad Pontum planitie ponam. Haec eſt omnium vetuſtiſſima Caſachicae gentis et ſedis memoria. De Alanica non opus eſt, vt multa dicam, quoniam regionis eius ſitus clariſſime demonſtratus eſt, cum Alani Conſtantino dicuntur coluiſſe in planitie vltra Caucaſum ſeu ad boream montis, hoc eſt, inter oſtia Volgae et Tanais. Igitur ab occaſu vicinos habuere Chazaros, quorum fines, qui fuerint verſus Alaniam et Zichiam, paullo infra declarabo. Supra Alaniam Conſtantino teſte eſt Οὐζ, *Vs* populus. Deliſlius *Vzos* medios inter Tanaim et Volgam poſuit, propiores vero Tanai. Non hoc dixerat Imperator, cuius verba expendenda nobis ſunt hoc loco (9): Ἰστέον, ὅτι οἱ Πατζινακῖται τὸ ἀπ' ἀρχῆς εἰς τὸν ποταμὸν Ἀτηλ τὴν αὐτῶν εἶχον κατοίκησιν, ὁμοίως δὲ καὶ εἰς τὸν ποταμὸν Γεηχ, εἰχοντες τούς τε Μαζάρους συνοροῦντας καὶ τοὺς ἐπονομαζομένους Οὐζ. Πρὸ ἐτῶν δὲ ν' οἱ λεγόμενοι Οὐζ μετὰ των Χαζάρων ὁμονοήσαντες, καὶ πόλεμον συμβαλόντες πρὸς τοὺς Πατζινακίτας ὑπερίσχυσαν καὶ ἀπὸ τῆς ἰδίας χώρας αὐτοὺς ἐξεδίωξαν καὶ κατέσχον αὐτὴν μέχρι τῆς σήμερον οἱ λεγόμενοι Οὐζοὶ. οἱ δὲ Πατζινακῖται φυγόντες περιήρχοντο ἀναψηλαφῶντες τόπον εἰς τὴν αὐτῶν κατασκήνωσιν. Καταλαβόντες δὲ τὴν σήμερον παρ' αὐτῶν κρατουμένην γῆν, καὶ εὑρόντες τοὺς Τούρκους οἰκοῦντας ἐν αὐτῇ, πολέμου τρόπῳ τούτους νικήσαντες καὶ ἐκβαλόντες ἐξεδίωξαν αὐτοὺς καὶ κατεσκήνωσαν ἐν αὐτῇ καὶ δεσπόζουσι τῆς τοιαύτης χώρας, ὡς εἴρηται, μέχρι τῆς σήμερον ἔτι νέ: *Pazinacitae*, inquit, *initio coluerant ad fluuium Atil et ſimiliter ad fluuium Geich: habuere vicinos*

(9) p. 105.

Mazaros et populum, quem vulgo vocant Vs: ante annos autem quinquaginta, Vsi, cum Chazaris foedere inito ad gerendum bellum, superiores euasere Yazinacitis eosque regionibus suis pepulerunt: has autem regiones Vsi ad hunc vsque diem tenent. Vetus igitur regio Patzinacitarum fuit ad *Atil.* Recte Delislius *Volgam* eum fuisse vidit. Is est Theophanis Byzantii Ἀτάλης et Ἀτελ, Turcarum et Tatarorum اتل *Atil.* Sed Γεηχ qui esset, quamquam Delislius in annotationibus sensit, tamen in tabula neglexit. Lego *Gëch*, non vt ille, *Geech.* Nam et Imperatoris huius temporibus, et multo tempore ante eum, τὸ H pronunciatum est medio sono inter E et I, propiori tamen ad postremam vocalem, et paene ita, vt nihil differret: hoc secutus sum in omnibus vocibus barbaris, in quibus etiam accentus praetermittere soleo, quod ignotae pronunciationi magis officiunt, quam adiumento sunt nobis. Nunc non est obscurum ab Imperatore dici يايق *Jaik* fluuium, qui in Caspium mare se exonerat. Et cum Menander Protector in legationibus (10) τὰ ῥεῖθρα τοῦ Ιχ et τὸν Δαϊχ iisdem in regionibus commemorat, alterutrum eorum Jaicum esse opinor: immo pro Γαϊχ e Valesiano codice est editum. Abulgasi Bahadur Chan in Genealogia Turcica hos tres fluuios تين, اتل, يايق, *Tin* (Tanaim) *Atel* et *Jaik* frequenter coniunxit. Quae cum ita sint, Patzinacitae a Volga ad Jaicum regiones tenuere: easdem occuparunt Vzi et Mazari pulsis Patzinacitis, annis antequam haec scripsit Constantinus, quinquaginta seu potius, vt infra accuratius edidit, quinque et quinquaginta, hoc est, circiter A.C. 893. cum

(10) p. 109. ed. Parisinae.

cum Leo Philoſophus, Conſtantini pater, imperaret. Vbi Imperator ait, Pazinacitas illis priſcis in ſedibus vicinos habuiſſe cum Mazaros tum Vzos, ſunt, qui pro Mazaris τὸς τε Χαζάρους legi malint, nulla neceſſitate, et MSS. libris et editis refragantibus. Cauſſam interſerunt, quod Vzi deinde dicantur μετὰ τῶν Χαζαρων ſocietate inita Pazinacitas pepuliſſe. Immo potiori iure alterum emendauerim μετὰ των Μαζάριων Sic enim Imperator rem omnem narrat: *Pazinacitae ab Vzis pulſi fugientes et circumcurſitantes quaerebant, vbinam ſedes ſuas collocarent: profecti vero in terram, quam nunc tenent, Turcas, quos iſtbic reperiebant colere, bello victos expulerunt, eaque in regione tentoria fixerunt: rerum autem ibi potiuntur, vt ſupra dictum, ad hunc diem, annos quinque et quinquaginta.* Ex his conſequitur, non Chazaros ſocietate cum Vzis inita Patzinacas ſedibus eieciſſe, ſed Mazaros. Nam vt tum erat, qui potuere Chazari et Vzi arma coniungere, tanto interuallo ſeiuncti? Si Chazari eo bello ſuperiores fuere, qui potuere Turcae pelli, neceſſarii Chazarorum, inuitis Chazaris? Nihil igitur eſt reliquum, quam vt ſic emendemus Conſtantinum, quemadmodum ſupra poſuimus. Igitur Mazari quoque ſupra Vzos inter Tanaim Volgam et Iaicum conſederunt. Et Abulgaſi Bahadur Chan cum de قبجاق *Kibgjak* agit, ita fatur: *Huic, poſtquam adoleuit,* اوغوز *Ogus copias tradidit, vt* وروش والاق وماجار وباشغر *et Ruſch et Olak et Magjar et Baskir, qui iuxta fluuios* تين واتيل ويايق *Tin et Atil et Jaik colebant, debellaret: hic poſtquam eos vicit, per trecentos annos iſtis in locis regnauit, omnes* قبجاق ديرلار *Kibgjak dirlar dicti ſunt: inter Oguſum et Gengis chan*

chan regem nulli alii quam Kipgjaki ſubditi annos quater mille inter tres fluuios coluere et locus vocatur دست قبجاق *Deſti Kibgjak*, *ſeu campus Kibgjak*. Quater mille anni, inficeta fabula eſt: at iſtae regionum intra Tanaim Volgam et Jaicum gentes nulli magis tempori conueniunt, quam huic. Videntur igitur iam tum Ruſſi ſuperiores regiones occupaſſe, ſub iis ad Caſpium mare Vzi, medii ad Morduanos vsque Mazari egerunt. Mazari ſine dubio horum, qui nunc Hungari dicuntur, maiores exſtiterunt. Ita ſeſe ipſi appellant. Albertus Molnar in Lexico Hungarico: *Hungaria*, *Magyar orszag*. *Hungarus*, *Magyar*. Turcis Hungarus مجار *Magjar* et مجارلو *Magjarlu*, Hungaria *Magjar* et مجار قرالى *Magjar krali*, Hungariae rex. Eodem nomine Hungari Polonis. Cum Hungari ipſi ab illa ſtirpe ſuam gentem repetunt, nihil dubitationis ſupereſt. Hungari enim noſtri adeo non ſunt Hungari, vt neque Turcae Conſtantini in Pannonia, quamquam eos quoque illarum aetatum ſcriptores Germani vocauere Hungaros. Cum autem prope Morduanos coluere Magjari, mirum non eſt, quod tam multa Fennica in hoc Hungarico ſermone admiſta ſunt, vt Olaus Rudbequius, Olai filius, demonſtrauit, Matthias Belius autem minime diffitetur: Fennici enim corporis fuere Morduani. Vzi Pazinacitas quosdam, qui ſe dediderant, inter ſe colere paſſi ſunt. Eos, Imperator ſcribit, a ceteris Pazinacitis habitu ſe discreuiſſe: veſtibus enim ad genua curtatis et manicis abſciſſis, ſignificaſſe, ſe a reliquo populi ſui corpore fuiſſe aualſos. Cum autem Imperator Vzos εἰς τὸν ποταμὸν

Ατηλ

(1) p. 62.

Ατηλ agere ſcribit, id quidem nihil aliud eſt, quam πρὸς τὸν ποταμὸν Ατηλ, *ad fluuium Atil.* Idcirco nos regionem Vziam ad occidentalem ripam Volgae aliquanto ſpatio protendimus. Cauſſam quoque aliam, ſane iuſtam, vt ita faceremus, habuimus. Nam Imperator tradit Εννέα κλίματα *Nouem climata* ſeu regiones Chazarorum vicinas fuiſſe Alaniae, ita tamen, vt etiam ab Vzis infeſtari poſſent. Itaque non ita longe a Nouem climatibus reiecti fuere Vzi, vt totus Volga eos ſepararit. Οἱ Οὖζοι, inquit, δύνανται πολεμεῖν τοὺς Χαζάρους, ὡς αὐτοῖς πλησιάζοντες, *Vzi poſſunt bello impetere Chazaros, quippe cum eorum vicini ſint.* Idem paullo ante dixerat (2), etiam Pazinacitas ab Vzis bello infeſtari poſſe. Quae cum ita ſint, haud longe a Tanai, quo Pazinacitae continebantur, abfuerunt Vzi. Quemadmodum a Garbero Chiliarcha accepimus, in Taulinis montibus ſeu تاولیستان *Tauliſtan*, multi populi paruis prouinciis deſcribuntur, linguis admodum viginti diuiſi, in quibus nominantur Taulinzi, Oſſi, Suani, Dziki ſeu Gjiki, Tuſchi. Haud equidem dubitarim Oſſos eſſe Vzos. Exſtat etiam memoria priſcae ſedis Mazarorum, inter Tanaim et Volgam. Nempe fluuius Kuma, e Caucaſeis montibus ſeptemtrionem et orientem verſus in planitiem deuectus, auctusque multis amnibus, orientem atque auſtrum petit, donec Caſpio mari miſcetur: duorum itinere dierum a Caucaſo, Biuara fluuius, ex planitie inter Tanaim et Volgam profectus, in Kumam incidit. Ad confluentes fluuios vrbis magnae cadauer iacet, palatiorum rudera, et ſubterranearum cellarum ſubſtructiones

(2) p. 61.

ctiones. Czyrkaeſſi et ceteri vicini populi vrbem eam nationis *Magjar* fuiſſe conſentiunt.

Venio ad Chazaros in Europam. E Theophane Byzantio in rebus Iuſtiniani Rhinotmeti clariſſime tenemus τὴν Χαζαρίαν in parte ſeptemtrionali Cherrhoneſi Tauricae fuiſſe. Sed quoniam in harum gentium finibus ſaepe mutatum eſt, in Conſtantini Imp. aetate vt fuerit, accuratius expendemus. Nam Tamatarcha vbi ſita fuerint, demonſtraui. His in Aſiae continenti ad Maeotida fuere coniuncta Εννέα κλήματα *Nouem climata*, ſeu regiones Chazarorum, et vicinos habuere ad Vcruchum Zichios, tum Alanos ad orientem, et Vzos ad borapelioten. E Tamatarchis et Nouem climatibus Chazari neceſſaria repetebant (3). Cetera vt accuratius teneamus, primum opus eſt littora et fluuios aliaque, in quibus mutari natura non eſt paſſa, conſideremus. Sic non modo in Chazaria, ſed etiam in ceteris reginoibus inoffenſo pede verſabimur. Conſtantinus, dum iter Patronae a Danubio in Chazariam et Tanaim explicat, ſimul fluuios interiectos ordine ſuo recenſet. Duo inquit ille, maximi, Δάναστρις ϗ Δάναπρις. Danaſtris, nunc Polonis *Dniſter* et *Nieſter*, Herodoti Tyras: Δάναπρις, nunc *Dniper* et *Niper*, eſt Boryſthenes vetus, vt ex ipſo ſitu cognoſcimus. De Danapri nullum eſt dubium. Periplus Ponti Euxini incerto auctore (4): Βορυσθένην ποταμὸν τὶν νῦν Δάναπριν λεγόμενον, *Boryſthenem fluuium nunc Danaprim dictum*. Idem in hunc modum etiam aliis in locis In tabula Turcica Boryſtenes اوفي موين *Oſi*

ſeu

(3) Conſtantinus p. 62. (4) p. 8. 9. 16. ed. Hudſon.

feu *Ifi fluuius*, et in promontorio, quod ex aduerfo oftiorum Boryfthenis et Bogi eft قلعة اوذي *Odfi caftellum*, illa inquam vrbs, quam nomine Oczakow magis nouimus. Tyram auctor peripli alio, quam hoc Tyrae nomine, non infigniuit. Tyram etiam Geographus Rauennas Conftantino Imp. fere aequalis nominat (5). *Flumina Ava, Boryfthenis, Danapris, quae cadunt in mare Ponticum: item fluuius Tyram, item Bagos folam: de quibus nominibus teftatur Iordanis fapientiffimus cosmographus.* De *Ava* Placidus Porcheron nihil inuenit, quod diceret. Videtur autem Rauennas *Sauiam* in animo habuiffe, et vrbis atque fluminis nomina confudiffe. Periplus Ponti Euxini Ὀλβίαν Σαβίαν vocat Olbiam feu Boryfthenem vrbem veterem, Graecorum coloniam ad Danaprin. E contrario Rauennas ille Boryfthenem fluuium a Danapri perperam diftinguere videtur. At Iornandes (6), *flumina Tyram, Danaftrin, et Vagofolam, magnumque illum Danaprum*, inde ab Iftro recenfet. Et paullo poft: *Antes ad Pontum mare curuantur, a Danaftro extenduntur vsque ad Danaprum, quae flumina multis manfionibus ab inuicem abfunt. Tyram Danaftrin* forte per appofitionem dixit, vt plane fit, qui nunc *Nifter*, in quo Dionyfius Petauius ad Nicephorum Conftantinopolitanum (7) nequidquam dubitauit. Nicephorus fcribit (8), Afparuchum, Danapri et Danaftri fluminibus traiectis, ad Danubium confediffe. Sic Ammianus Marcellinus (9) *amnem Danaftrum inter Hiftrum et Boryfthenem* ponit. Cedrenus ordine recenfet (10), Da-

Ccc 2 nubium,

(5) p. 143. ed. Porcheronis. (6) p. 194. ed. Murat. (7) In animaduerfionibus p. 77. (8) In Hiftoria Conftantinopolitana p. 23. (9) l. XXXI. 3. p. 479. ed. Gronov. (10) p. 464.

nubium, Danaſtrin, Danaprin, Necropyla. Ex hoc ſitu atque ex fluminum interuallo ſatis apparet Danaſtrum eſſe, qui nunc Dniſter ſeu Niſter, eodem vocabulo, at Turcis توله موسي *Tuleh* fluuius dicitur. Mirari ſubit, quid in mentem venerit Iſaaco Voſſio (1), vt Petauium ne dubitare quidem pateretur, ſitne is Danaſtrus, qui veteribus Tyras. *Is*, inquit, *eſt Hypanis, qui eodem cum Boryſthene oſtio in Pontum profluit*: et addit, illum etiam nunc Niperum vocari. Vt vanum eſt hoc poſtremum, ita cetera ſunt omnia quae ſcripſit: nam fluuium, qui Danapri oſtiis miſcetur, *Bog* vocant Poloni. Is eſt Iornandis *Vago ſola*, Ruennatis *Bagos ſola*, Conſtantini Imp. Βογȣ veterum Hypanis. Conſtantinus Imp. ceteros fluuios nominans ſic ait: Συγγȣλ, Υβȣλ, Αλμαται, Κȣφις, Βογȣ̃. *Kuphis* Delislio viſus eſt, eſſe is ipſe, quem ex Herodoto Hypacyrin et Gerrhum nominauimus. Theophanes Byzantius (2) iſti ſententiae inſeruire videtur, cum ita ſcripſit: Bulgaros olim ſupra Pontum Euxinum in ſeptemtrionalibus regionibus coluiſſe, et ad Maeotidem, ἐις ἣν ἐισάγεται ποταμὸς μέγισος ἀπὸ τȣ̃ ὠκεανȣ̃ καταφερόμενος διὰ τῆς τῶν Σαρματῶν γῆς, λεγόμενος Ατελ, ἐις ὃν ἄγεται ὁ λεγόμενος Ταναῒς ποταμὸς ϗ ἀυτὸς ἀπὸ τῶν Ιβηρίων πυλῶν εξερχόμενος, τῶν ἐν τοῖς Καυκασίοις ὄρεσιν. ἀπὸ δὲ τῆς μίξεως τȣ̃ Ταναι ϗ τȣ̃ Ατελ ἄνωθεν τῆς προλεχθείσης Μαιώτιδος λίμνης σχιζομένȣ τȣ̃ Ατελ ἔρχεται ὁ λεγόμενος Κȣ̃φις ποταμὸς ϗ ἀποδίδει εις τὰ τέλος τῆς Ποντικῆς θαλάσσης, πλησίον τῶν Νεκρῶν πυλῶν ἐις τὸ ἄκρωμα τὸ λεγόμενον Κριȣ̃ πρόσωπον, *in quam*

(1) In notis ad Periplum Ponti Euxini p. 83. ed. Hudſon. v. in Melam.
(2) p. 296. 297.

quam se exonerat fluuius maximus, ab oceano deuectus per Sarmaticas terras, Atel: in quam etiam se exonerat Tanais fluuius, qui et ipse ab Iberiis portis, quae in Caucaso monte sunt, descendit: postquam Atel se miscuit Tanai, iterum Atel supra modo dictam Maeotin cursu suo diuergit, atque ab eadem regione Cuphis fluuius descendit, et in Ponticum mare prope Necropyla ad Criuprosopon promontorium effunditur. Magna est miseria, vbi in auctores huic similes incidimus. Tamen superanda etiam illa molestia est. Superari autem nullo modo potest, nisi si recordemur, quod saepenumero monui, quam formam geographiae istius nonnulli nobis traditam reliquerint. Est illis Caucasus ad boream remotissimus, Caspium mare paene ad boream Ponti Euxini, inter vtrumque coniunctio exstitisse visa. Inde facile fuit Theophani, vt Volgam et Tanaim eodem alueo confluentes deduceret in Pontum. Cuphin ad Necropyla exonerari ait, quod minime contemno: Cuphin item ab Volga et Tanai, quod est perridiculum. Modo vbi tam vanus est Theophanes, non item Cuphis ostia eum fefellerint: ni id acciderit, necesse est, vt quaeramus Cuphin eodem nomine fluuium alium in Asia. Geographus Rauennas (3): *per Chazirorum patriam plurima transeunt flumina. inter cetera fluuius maximus Cuphis.* Nihilo hoc aduersum videtur Theophani, nisi Rauennas Chazariae Nouem climata in Asia respexit, cum mox subiungit Lazicam. At, si Menandrum Protectorem videas (4), Cuphis paludibus miscetur, neque ita procul ab Alania est, immo ad orientem Tanais. Quare is Cuphis Menandri alius est, quam hic Constantini. Nicephorus

(3) p. 154. (4) p. 109.

Conſtantinopolitanus (5) vt Theophanes: περί τὴν Μαιῶτιν λιμνην καλὰ τὸν Κώφινα ποlαμὸν καθίςαlαι ἡ πάλαι λεγομένη μεγάλη Βυλγαρία, *circa Maeotin paludem iuxta Cophina fluuium eſt olim dicta magna Bulgaria.* Bene quod περὶ τὴν Μαιῶτιν, at Theophanes diſertius, cum Necropylis miſceri tradit. Nomen ſine dubio Turcicum eſt, ſiue a كف *Küſ*, *mucore*, ſiue a كف *Küſ* et كف *Kuf bubone, noctua.* Proxime ante Cuphin Conſtantinus recenſet Αλμαlαι. Quodſi Delislium audimus, is fluuius hodie nomen ſeruat *Alma.* Nihil eſt veroſimilius. Quare cum Bogus, Cuphis, Alma, naturali ſitus ordine ponuntur, ſequitur *Hybul* et *Syngul* ita ſuccedere, vt proximus ad Tanaim ſit Syngul. *Hybul* e MS. Bandurii, erat enim a Meurſio Υψυλ editum.

Remorabitur nos adhuc Danapris ſeu Boryſthenes. Necropyla ſinus ad Danaprin iam ſic ſatis notus. In promontorio orientali ad oſtia fluminis exonerantis ſe in ſinum, τὰ Αδαρα *Adara* (6), locus vicinior Necropylis, quam flumini. Illa in palude, quam Danapris et Bogi oſtia efficiunt, propius ad mare *S. Aetherii inſula* fuit (7): ab hac aduerſo Danapri nauigabatur ad alteram S. Georgii (8). Porro occurrebat aduerſo flumine πέραμα τῦ Κραρίυ, ἔχον τὸ μὲν πλάτος ὅσον τῦ Ιπποδρομίυ, *Crarii traiectus, cuius latitudo vt Hippodromii*, altitudo ab inferiori parte, quantum oculi proſpicere poſſunt, et quantum iactus ſagittae ſpatium exigit. Latitudinem Hippodromii Conſtantinopolitani ςαδιάιαν fuiſſe reperio. Traiectum excipiebant cataractae ſeptem Boryſthenis. Φραγμὺς Con-

(5) p. 22. (6) Conſtantinus p. 113. (7) ib. p. 61. (8) p. 60.

Constantinus vocat (9). Et is quidem cataractas nominat a secundo flumine exorsus, non ab aduerso, in quo nos nunc quasi constitimus. Sequemur ordinem Constantini. Prima secundo flumine cataracta a Russis et Slauis vocabatur Εσσȣπὴ *Essupi*: ipse interpretatur, μὴ κοιμάσαι, *non dormi*. Anselmus Bandurius Ragusanus, Slauicae gentis decus, putat (10) legendum Νεσσȣπη *Nessupi*. *Nesupi*, inquit, *nostratibus significat non dormitare*. Sic Ragusanis: Bohemis *Nesupey*, Sorabis Lusatiae *Nespai*, vt Christiani Schoetgenii V. C. amicus obseruauit: (1) Russi Нѣспи *Nespi* dicunt. Quoniam in ceteris cataractis nomina Russica a Slauis vehementer et toto genio discrepant, mirum est, hac in voce Russos et Slauos concinisse. Vereor autem, ne nomen Russicum exciderit, vt solum Slauicum exstet. Hanc cataractam Imperator ait, adeo angustam esse, ὅσον τὸ πλάτος τȣ̃ Τζυκανιςηρίȣ. Tzycanisteria, in quibus Imperator cum nobilibus hominibus eques ludebat pila, duo Constantinopoli fuere: alterum vetus, alterum nouum: incertum quod dicat, et incertius quae alterutrius latitudo fuerit. De cataracta vero Imperator, μέσον αὐτȣ̃ πέτραι εἰσὶ ῥιζημαῖαι, ὑψηλαὶ, νησίων δίκην ἀποφαινόμεναι, *in cataracta rupes sunt praeruptae et altae, quae tamquam insulae spectantur*: ad has rupes allidi fluctus, et inde praecipitari. Secunda cataracta a Russis vocata fuit Ουλβορσι *Vluorsi*, a Slauis Οςροβȣνιπραχ *Ostrovuniprach*, interprete Constantino τὸ νησίον τȣ̃ Φραγμȣ̃, *insula cataractae*. Bandurius *Osctrobuniprag* legit, et *nostratibus*, inquit, *acutum collis limen dicitur*. Sed non ita potuit falli Constantinus, cum in aula suos μεθερμηνευτὰς sub dispositione magistri offi-

(9) p. 59. &c. (10 In Constantinum de A. I. p. 37. (1) Originum Russicarum Sect. III. p. 6.

officiorum haberet, suos δραγομάνους, vt tum dicebant: et illum suum praecipua auctoritate μέγαν διερμηνευτὴν, qui explicare haec possent, cum deinde Constantinopolis ipsa afflueret Sclauis, aula complures admouisset officiis, adeo vt multas voces Slauonicas lingua Graeca adoptarit. Imperator hanc cataractam priori similem fuisse scribit, quam insularum speciem retulisse dixerat: inde nomen cataractae Slauonicum. Russi cataractam vocant порогъ *porog*: at vt me amicus Astracanensis, Slauonice perquam doctus, certiorem reddidit, Slaui id ipsum прагъ *prag* enunciunt. Et Острòвъ *ostrow* insula est tum Russice, tum Slauice, inde Cedreni (2) locum Οςροβȣ dictum puto. Eodem auctore Astracanensi Slaui dicunt остров-ной прагъ *Ostrownoi prag*, sed multo elegantius eis videtur островний прагъ *Ostrowni prag*, vt sit *insularis cataracta*. Et hunc in modum Constantini Οςροβȣνι πραγ erit non *Ostrowuni prag* legendum, sed *Ostrowni prag*, ita vt ȣ consonantis vicem praestet. Tertia cataracta Γελανδρὶ Slauice explicat Imperator ἦχος Φραγμȣ̃ *sonitum cataractae*. Nemo est, qui mihi hoc explicet: negant omnes Slauonicum esse. Idcirco credidi Russicum nomen fuisse, et Slauonicum alterum, quod apponere solet Imperator, scribarum incuria excidisse. At Schoetgenii V. C. amicus: *Gelandri Bohemis est tumultus, siue sonus furentium.* Apprime ad Constantini sententiam. Quarta cataracta Russis Αειφαρ *Aiphar*, Slauis Νεασητ *Neasit*, a *pelicano*, qui inter saxa huius cataractae nidos habet. Nihil melius conseruatum: est enim tam Russis, quam Slauis Неясынь *Nejasit*, *pelicanus*. Ita cum Inter-

(2) p. 705.

terpretes Alexandrini S. Dauidis Regis ſtropham conuertunt Graece (3) ὡμοιώθην πελεκᾶνι ἐρημικῷ, ἐγενήθην ὡσεὶ νυκτικόραξ ἐν οἰκοπέδῳ, Slauonicus interpres pro πελεκᾶνι *Nejaſit* poſuit. Quinta cataracta Ruſſis Βαρουφορος, Slauis Βουλνιπραχ *Vulniprach*, qui *paludem magnam* efficit. Amico cuidam et doctiſſimo et acutiſſimo viſum eſt ex волненной порогѣ ſeu прагѣ corruptum eſſe, vt ſit *cataracta fluctibus vexata.* Vt Schoetgenius obſeruatum reliquit, *wolny* Bohemis *expeditus.* Iam ſexta cataracta Ruſſis Λεαντι *Leanti*, Slauis Βερουτζη *Verutzi* βρασμα νερου *vertigo fluminis*: plane a Вирѣ *vir*, *vertigine* eſt виручїи *virutzi*, *vertigine actum.* Hiſtoriographus ad cataractas бѣлобережїя victum ſcribit a Pezenigis Suendoſtlaum: credo has ipſas eſſe, quas *Verutzi* vocat Imperator. Quare hoc Bandurius e MS. recte edidit, cum ante legeretur Βερόνζη *Verontzi.* Denique ſeptimae nomen cataractae Ruſſis Στρουβουν *Struvun*, Slauis Ναπρεζη *Napreſi*, μικρὸς Φραγμὸς, *parua cataracta.* Amicus noſter ſuſpicatus eſt, corruptum eſſe ex Напряги vel Напрещи *Napreſchi*, *intendere vela*, quod quidem in parua cataracta fieri potuiſſe veroſimile eſt. Mirum, quam Ruſſica vocabula nemo interpretari poſſit: adeo nihil Slauonici continent, vt ne ſonum quidem vel tenuem Slauonici oris. Incertum deinde adhuc, an Ruſſica illa nomina cum Slauicis ſignificatione congruerint. Sed de his alias.

Naturae iſtis quaſi veſtigiis ad diſponenda regionum nomina commode vtemur. Primum Chazaros in Europa,

(3) Pſalmo CII. v. 7.

pa, suis spatiis, vt tunc fuere, definiemus. Dixi eos in septemtrionali regione Cherrhonesi Tauricae coluisse. Ad hoc vsque tempus in قرم اطاس *Krim insula* (vt nunc Tattari dicunt a veteri voce Κρημνή) ad orientem seu ad Bosporum Cimmerium, est تقيل كرش *Tekiel kirsch*, quod quamquam a *confluenti niue*, vi vocis videtur ductum, tamen fortassis corrupto sono *Chazarorum* potius veterem memoriam conseruat. Nihil aliud de hac gente dicam, quam quod vel maxime ad situm regionum pertinet: merentur enim res eorum peculiarem dissertationem. Tenebant autem tantummodo interiorem Cherrhonesum ad boream: littus omne a Chersone ad Bosporum vrbem M. P. CCC. Romanorum fuit. Hoc *thema Chersonis* dicitur Constantino in Thematibus (4): Κλίματα vero et vrbes Chersonis κάστρα των κλιμάτων, in libro de administrando imperio (5). Diximus ex Herodoto, fossam a Scythis ductam fuisse ad muniendam Cherrhonesum. De hac fossa sic habet Constantinus (6). Veteres e Maeotide, fossa in Necropyla ducta, vltro citroque nauigasse. Ο δὲ αὐτὸς κόλπος, inquit, τῆς Μαιώτιδος ἔρχεται ἀντικρὺ τῶν Νεκροπύλων τῶν ὄντων πλησίον τοῦ Δαναπρεως ποταμοῦ, ὡς ἀπὸ μιλίων δ', καὶ μίσγεται, ἐν ᾧ, καὶ σούδαν οἱ παλαιοὶ ποησάμενοι διεβίβασαν τὴν Θάλασσαν, μέσον ἀποκλήσαντες πᾶσαν τὴν Χερσῶνος γῆν καὶ τῶν Κλιμάτων καὶ τὴν Βοσπόρου γῆν κρατοῦσαν μέχρι ά μιλίων, ἢ καὶ πλειόνων τινῶν. Subobscura haec sic interpretor: *Sinus occidentalis Maeotidis situs est e regione Necropylorum, quae sunt ad Danaprin fluuium: distat autem sinus ille M. P. IV. a Necropylis et miscetur* (immo

(4) p. 30. (5) p. 113. (6) de A. I. p. 113.

(immo quondam miſcebatur ante Conſtantinum) *eo in loco, vbi veteres foſſa ducta traiecerunt mare: ea foſſa abſciderunt Cherſonem, Climata* (ſeu littora Cherſoneſi a Cherſone ad Bosporum vrbem) *et Bospori vrbis agrum* (a continenti Scythiae) *is denique littorum a Cherſone ad Bosporum circuitus fuit M. P. clɔ. et amplius.* Sic e Maeotide nauigatio in Necropyla longe breuior fuit, quam ſi littora illa totius Cherrhoneſi circumnauigarent. Hanc puto eſſe ſententiam verborum: nullam enim aliam reperio. Illa autem foſſa Conſtantini aetate adeo fuit obſtructa et obruta humo, vt denſam ſyluam ferret. Duae per hanc ſyluam viae: vna Cherſonem petere ſolebant Pazinacitae et Climata Cherſonis, altera Bosporum. Non autem tantummodo ad Cuphin vsque littora Graeci tenuere, ſed etiam vsque ad Danaprin. Nam inter Danaprin et Cherſonem ſalinae et portus Cherrhoneſitarum fuere, ἀπὸ μὲν τȣ̃ Δαναπρεως ποταμȣ̃ μετὰ Χερσῶνος εισι μιλια τ'. ἐν τῷ μέσῳ δὲ λίμναι ϗ λιμένες εισιν, εν αἷς Χερσωνῖται τὸ ἅλας εργάζονται (7), *a Danapri vsque ad Cherſonem ſunt M. P. CCC. in medio paludes et portus, in quibus Cherſonitae ſalem et conficiunt et diuendunt.* Eſt enim extrema vox ambiguae ſignificationis, ita, vt altera ſignificatio ad paludes et ſalinas referatur, altera ad portus. Hos portus neceſſe eſt vltra Necropyla haud longe a Boryſthene fuiſſe, quia Necropyla ipſa nullo modo nauigari poſſe Conſtantinus teſtatur. Iam Dio Chryſoſtomus de his ad Boryſthenis oſtia ſalinis (*) ταύτῃ δὲ ϗ ἁλῶν εςι τὸ πλῆθος, ὅθεν οἱ πλείȣς τῶν βαρβάρων λαμβάνȣσιν, ὠνȣ́μενοι τȣ̀ς ἅλας. Καὶ τῶν Ελλήνων ϗ Σκυ-

Ddd 2 θνῶ

(7) P. 113. (*) In Boryſthenitica p. 437.

θῶν οἱ Χεῤῥόνησον οἰκοῦντες τὴν Ταυρικήν. *Hic vero etiam ſalis eſt copia, vnde plerique barvari ſalem petunt venduntque. Et Graeci quoque Scythaeque, qui Cherrboneſum incolunt Tauricam.* Inde a Boryſthenis oſtiis ad Crarii traiectum videntur adhuc Cherſoneſitae coluiſſe: Conſtantinus enim ait (8): eo traiectu, Pazinacitas, qui ad occidentem fluminis agebant, traieciſſe in Cherſonem, Cherrhoneſitas vero in Ruſſiam. Et cum alibi de legatis tradit (9), morem hunc fuiſſe ſcribit, cum per Pazinacitas Conſtantinopolin ventitarent, vt Cherſone ſubſiſterent, donec vltro citroque obſidibus datis deducerentur a Pazinacitis: ergo ad traiectum Cherſoneſitae pertinuerunt, ne opus eſſet, vt a Chazaris quoque commeatum peterent legati. Iterum Pazinacas Cherſoni vicinos fuiſſe ſcribit Imperator (10) et alibi (1), vicinos τῷ μέρει τῆς Χερσῶνος, ita vt impreſſionem facere poſſent, cum vellent. Vt illo in loco de Patzinacia occidentali loqui videtur, ita in altero plane de orientali fatus eſt. Illa ad Crarii traiectum finitima erat Cherſoni, Boryſthene fluuio intercedente: haec ad orientem eius traiectus, contermina fuit parti Cherſonis, ſuccedentibus deinde Chazaris, qui reliquam Cherſonem et Climata a Pazinacitis orientalibus ſeparabant. Loqui autem Imperatorem de orientalibus, manifeſtum eſt. Nam cum paullo ante de Pazinacitis Bulgarorum, Ruſſorum, et Turcarum vicinis, hoc eſt, de occidentalibus diſſeruiſſet, huic ſermoni ſubiungit: ὅτι καὶ ἕτερος λαὸς τῶν Πατζινακιτῶν τῷ μέρει τῆς Χερσῶνος παράκειται, *etiam alter populus Pazinacitarum parti Cherſonis adiacet.* Igitur inde a Crarii traiectu et ad cataractas,

(8) p. 60. (9) p. 57. (10) p. 55. confer Cap. VII. (1) p. 57.

ctas, Pazinacitae occidentales Chazaris collimitabant. Cataractis vtique Pazinacitae praetendebantur. Nam cum Russorum nauigationem describit Imperator, ad cataractarum orientalem ripam excensionem fecisse scribit, et Pazinacitas tamquam infensissimos hostes vehementer cauisse, eamque ob caussam, ne opprimerentur, egisse excubias (2). Alio loco quem infra adferam, disertius scripsit, quemadmodum Pazinacitae Russos isthic circumuenire sint soliti. Tradit deinde ad Crarii traiectum Pazinacitas saepenumero excepisse Russos, nauium classe opposita. Hi vero iam occidentales sunt Pazinacitae. Qui limites Chazarorum et Pazinacitarum deinceps fuerint, non inuenio: videntur autem non ita prorsi fuisse, quam transuersi a Cuphi flumine ad Tanaim. Nam ad Tanaim Chazaros pertinuisse liquet, quia ad eum fluuium munitissimum castellum *Sarkel* tenuerunt, cuius situm arcis si explorauerimus, iam quoque fines Chazariae ad borapelioten definitos tenebimus. Σαρκελ e Chazarorum lingua Imperator graece edidit Ασπρον Οσπίτιον, *Album Hospitium*. Leontius Byzantius (3): Σάρκελ Λευκὸν ὄικημα, *Alba domus*. Linguam Chazarorum Turcicam fuisse reperio. Iam شهر *Scher vrbem* significat, كل *Kil*, *lutum*, *argillam*. اقشهر *Akscher*, *Alba vrbs* in Rumaea s. Asia minori, corrupte اقصار vt Abulfeda indicat. Nam cum ad aedificandum castrum *Sarkel* eo in loco non essent lapicidinae, furnos construxerunt, et lateribus coctis calceque e vicini fluminis minutissima glarea, ἐκ μικρῶν τινων καχλιδιων materiam pararunt, teste Constantino. In condendo castro Graeci, seu, quia ita maluerunt dici, Romani opem tule-

(2) p. 60. (3) p. 76.

tulerunt. Conſtantinus: ὁ Χαγάνος ὁ ϗ Πεχ Χασαρίας, quae verba aliter interpretari non poſſumus, quam, *Chaganus Chazariae, qui etiam Pech dicitur*: tamen cum addit Imperator, εἰς τὸν Βασιλέα πρέσβεις ἀποςειλαντες, et quae ſunt deinceps, ipſa nos neceſſitas cogit, vt emendemus ϗ ὁ Πεχ. Tum praeterea hoc ipſa ratio ſuadet. Diuerſi enim ſunt *Chaganus* et *Pech*. Vt خاقان *Chakan* apud Turcicas gentes Imperatorius atque Regius titulus fuit, quo maior eſſet nullus, ita بك *Beg* tantum Principis et Ducis, qualem in Sogdiana Alexandri M. aetate fuiſſe Bochum illum puto. Et ita eſſe ſcribendum, Leontius Byzantius, aut quisquis is eſt, qui iuſſu Conſtantini Imp. res Theophili Imp. ſcripſit, demonſtrat (5): ὅ τε Χαγάνος Χαζαρίας ϗ ὁ Πὲχ πρὸς τὸν Αὐτοκράτορα ἔπεμπον πρεσβευτὰς. Vbi Chazarorum Rex et Begus quidam, ſeu gentis Chazaricae Princeps, legatis miſſis Theophili Imp. opem implorauerunt, is τὸν Σπαθαροκανδίδατον Πετρωνᾶ, τὸν ἐπονομαζόμενον Καμαтηρὸν et cum eo τον Κατεπάνω Παφλαγονιας cum chelandiis operisque ad condendum caſtellum *Sarkel* miſit. Clariſſimus Deliſlius *Sarkel* ponit ad fontes *Donez*, ſeu Tanais minoris. Cauſſas edicit hasce: eſſe iſthic vrbem *Bielogrod*, quod nomen ipſum *Sarkel* ſeu *Albam vrbem* exprimat, et cum Conſtantinus ſcripſit, ad fontes Tanais conditum eſſe caſtellum, videri ſibi veteres hunc potiſſimum *Donez* Tanaim vocaſſe. Tradere enim Imperatorem fontes Tanais e Riphaeis montibus oriri; at *Don* maiorem illum vbi primum ſcaturit, montes habere nullos in vicinia: denique ſi Sarkel ad Tanais maioris fontes, non ad minoris conditum fuerit, trecentis

(5) p. 76.

tis et amplius milliaribus a Chazaria dissitum fuisse, quod vero non sit simile. Haec Delislio ita sunt visa. In re ipsa doctissimo viro adsentior. Inuenio enim Pazinacas supra Donezum ad Tanaim alterum egisse, eo Sarkel non potuit ad huiusce Tanais fontes in Chazarorum potestate esse. At cum Donetzi ripam strigam obiectam Pazinacis haberent Chazari, fontes eius contra eosdem, vt antea contra Turcas, quamuis cognatos suos, munitos habuerunt. Leontius Byzantius: ἔστι κατὰ Τάναϊν ποταμὸν, ὃς τοὺς Πατζινακίτας ἐντεῦθεν, καὶ αὐτοὺς διείργει τοὺς Χαζάρους ἐκεῖθεν, *castrum est ad Tanaim, qui fluuius Pazinacitas inde, atque hinc ipsos Chazaros distermin at.* Nihil magis perspicue dici potest, vt Donetzum esse putemus, quem Imperator vocauit Tanaim. Iam Constantinus scripsit (6), Petronam a Danubio euectum, iter dierum sexaginta fecisse ad hunc locum. Si, vt erat Herodoti aetate nauigatio Graecorum (7), longo die LXX. millia orgyiarum noctu LX. millia confecta sunt et a faucibus Ponti ad Phasin, quae maxima Ponti longitudo est, Herodotus ipse diebus nouem, octo noctibus nauigauit, qui potuit Petronas totos dies sexaginta consumere in hoc cursu? Herodotus ex dierum interuallo concludit, Ponti longitudinem esse ἕνδεκα μυριάδας καὶ ἑκατὸν ὀργυιέων hoc est, orgyias 1110000. (vbi e Laurentii Vallae versione a Iacobo Gronouio relictum est: *centum et decem millia orgyiarum et centum*) siue στάδιοι ἑκατὸν καὶ χίλιοι καὶ μύριοι hoc est 11100. stadia. Hic tametsi Herodotus summam venti opportunitatem nactus fuerit, tamen vel aduerso quemadmodum sexaginta

(6) l. c. (7) L. IV. c. 86.

ginta dies nauigauerit a Danubio ad fontes Tanais Petronas? At tum Theophanis Continuator, tum Constantinus scribunt, a Danubio profectum petiisse Chersonem, isthic res composuisse et suscepisse operas, inde circumuectum esse Cherrhonesum. Mora illa aliquid temporis requisiuit. Tamen vel sic longum iter fuit, videturque in primis Tanais retardasse, praesertim cum ad fontes vsque nauigandum esset. Sic constituto situ castri *Sarkel*, fines Chatzariae intra Donetzum, Tanaim, Cherrhonesi littora, et cataractas Borysthenis inclusimus.

Pazinacitas supra Chazaros a Tanai ad Borysthenem, inde vero ad Dunubium coluisse demonstrabo. Regio ipsa Constantino Πατζινακία, populus et ipsi et Leontio Byzantio Πατζινακιται, ceteris fere, vt Cedreno, Symeoni Lagothetae, Leoni Grammatico Πατζινάκαι. Luithprando Ticinensi (8) *Pizenaci*: iisdem enim temporibus, paullo tamen ante Constantinum scripsit: *Constantinopolis habet ab aquilone Hungaros, Pizenacos, Chazaros, Russos*, Eggehardo Vragiensi (9), *Pezinegi* et *Pecenati*, *Pedenei*, *Pedinei Pezineigi*. Monacho Trium Fontium (10) *Pezenatae*, forte *Pezenacae*. Hic est ille populus Russicis monumentis et Polonicis celebratus Печенѣги *Peczenigi*, seu vt nunc in Vcrainia a Slauis pronunciari audio *Peczenihi*. Gens digna, cuius res aliquanto accuratius explicentur: nunc tantum horum temporum regiones Patzinacicas definiemus. Quas regiones antea tenuerint, vt pulsi traiecerint Tanaim, supra diximus. Nunc ab Alania distabant sex dierum itinere,

(8) p. 92. ed. Reuberi. (9) p. 420. 220. 451. (10) p. 225.

itinere, ab Vzia quinque (1). Quis mihi negabit, Patzinacas supra Donetzum ad Tanaim pertinuisse, vnde viciniores Vzi, paullo magis dissiti Alani. Ab Russia, inquit Constantinus, Pazinacae vnius itinere diei absfuere. Igitur ad Borysthenem infra Kiouiam sic collocandi sunt, vt vnius diei iter inter vrbem atque agrum Pazinacicum intersit: inde ad Crarii traiectum, vt supra diximus, Cherson excepit. Imperator (2): ὅτι ϗ τοῖς Ρῶς οἱ Παῤζινακῖται γείτονες ϗ ὅμοροι καθεστήκασι, *Russis etiam Patzinacitae finitimi et contermini sunt.* Tum addit, semina illa bellorum inter Russos et Patzinacitas, quae nobis veteris Russicae gloriae caussa commemorandae sunt eius verbis:

Καὶ πολλάκις, ὅταν μὴ πρὸς ἀλλήλους εἰρηνεύουσι, πραιδεύουσι τὴν Ρωσίαν καὶ ἱκανῶς αὐτὴν παραβλάπτουσι καὶ λυμαίνονται. ὅτι καὶ οἱ Ρῶς διὰ σπουδῆς ἔχουσιν εἰρήνην ἔχειν μετὰ τῶν Παῤζινακιτῶν. ἀγοράζουσι γὰρ ἐξ αὐτῶν βόας, καὶ ἵππους, καὶ πρόβατα, καὶ ἐκ τούτων εὐμαρέστερον διαζῶσι καὶ τρυφερότερον. ἐπεὶ μηδὲν των προειρημένων ζώων ἐν τῇ Ρωσίᾳ καθέστηκεν. ἀλλ' οὐδὲ πρὸς ὑπερορίους πολέμους ἀπέρχε-

Et saepe, cum inter se pacem non colunt, depraedantur Russiam, et admodum agunt feruntque: quare Russi diligenter pacem cum Patzinacitis seruant: nam ab iis boues, equos, et oues mercantur, et inde iam commodius lautiusque victitant: nam neque boues, neque oues, aut equi in Russia sunt. Ac ne quidem ad bella supra fines (puto bella cum borealibus populis aut cum orientalibus et Slauis ὑπερόρια dici) *omnino exire possunt Russi*

(1) Constantinus Imp. l. c. p. 106. (2) p. 55.

θαι δύνανται ὅλως οἱ Ῥῶς, εἰ μὴ μετὰ τῶν Πατζινακιτῶν εἰρηνεύοντες, διότι δύνανται ἐν τῷ ἐκείνους τῶν οἰκείων ὑποχωρεῖν, αὐτοὶ ἐπερχόμενοι τὰ ἐκείνων ἀφανίζειν τε καὶ λυμαίνεσθαι. διὸ μᾶλλον ἀεὶ σπουδὴν οἱ Ῥῶς τίθενται διά τε τὸ μὴ παραβλάπτεσθαι παρ' αὐτῶν, καὶ τὸ ἰσχυρὸν εἶναι τὸ τοιοῦτον ἔθνος συμμαχίαν παρ' αὐτῶν λαμβάνειν καὶ ἔχειν αὐτοὺς εἰς βοήθειαν, ὡς ἂν καὶ τῆς ἔχθρας αὐτῶν ἀπαλλάττωνται καὶ τῆς βοηθείας καταπολαύοιεν. ὅτι οὐδὲ πρὸς τὴν βασιλεύουσαν ταύτην τῶν Ῥωμαίων πόλιν οἱ Ῥῶς παραγίνεσθαι δύνανται, εἰ μὴ μετὰ τῶν Πατζινακιτῶν εἰρηνεύοντες, οὔτε πολέμου χάριν, οὔτε πραγματείας. ἐπειδὴ ἐν τῷ μετὰ τῶν πλοίων εἰς τοὺς φραγμοὺς τοῦ ποταμοῦ γίνεσθαι τοὺς Ῥῶς, καὶ μὴ δύνασθαι διελθεῖν, εἰ μὴ ἐξαγάγωσι τοῦ ποταμοῦ τὰ πλοῖα αὐτῶν, καὶ ἐπὶ τῶν ὤμων βαστάζοντες διαβήσωσιν. ἐπιτίθενται τότε αὐτοῖς οἱ τοῦ

Russi, nisi cum Patzinacitis pax sit, quia Pazinacitae possunt, cum Russi suis finibus excedunt, irruere, Russicum agrum pessundare et deuastare. Ideo magis semper maximum studium in eo posuerunt Russi, ne a Pazinacitis laedantur, sed vt potius, cum haec gens tam valida est, ab ea subsidia impetrent et opem, simulque vitent eius hostiles impetus, et auxiliis submittendis perfruantur: nam Russi quoque ad Imperatoriam hanc Romanorum vrbem, (Constantinopolin) nisi cum Pazinacitis pacem habeant, proficisci non possunt, neque belli caussa inferendi, neque mercandi: cum enim Russi in nauibus suis ad cataractas Borysthenis veniunt, neque tamen transire possunt, nisi si e flumine naues suas subducant, et humeris portent, donec praetergressi sint cataractas, tum Pazinacitae eis insidiantur, et multo facilius, cum duos labores Russi per-

τοίτοιούτου ἔθνους τῶν Πατζινακιτῶν καὶ ῥαθίως ἅτε πρὸς δύο πόνους ἀντέχειν, μὴ δύνανται, τροποῦνται, καὶ κατασφάζονται.

ferre non possunt (portandi humeris scaphas suas et pugnandi) *in fugam vertuntur, et clade accepta succumbunt.*

Adiiciam alium locum huic similem, e Constantino Porphyrogenneta (3):

Ὅτι τοῦ βασιλέως Ῥωμαίων μετὰ τῶν Πατζινακιτῶν εἰρηνεύοντος, οὔτε Ῥῶς πολέμου νόμῳ κατὰ τῆς Ῥωμαίων ἐπικρατείας, οὔτε οἱ Τοῦρκοι δύνανται ἐπελθεῖν, ἀλλ' οὔτε ὑπὲρ τῆς εἰρήνης μεγάλα καὶ ὑπέρογκα χρήματά τε καὶ πράγματα παρὰ τῶν Ῥωμαίων δύνανται ἀπαιτεῖν, δεδιότες τὴν διὰ τοῦ τοιούτου ἔθνους παρὰ τοῦ βασιλέως κατ' αὐτῶν ἰσχύν, ἐν τῷ ἐκείνους κατὰ Ῥωμαίων ἐκστρατεύειν, οἱ Πατζινακῖται, καὶ τῇ πρὸς τὸν βασιλέα φιλίᾳ συνδούμενοι, καὶ παρ' ἐκείνου διὰ γραμμάτων καὶ δώρων ἀναπειθόμενοι, δύνανται ῥαδίως κατὰ τῆς χώρας τῶν τε Ῥῶς καὶ τῶν Τούρκων ἐπέρχεσθαι καὶ ἐξανδραποδίζεσθαι τὰ τούτων

Quando Imperator Romanus cum Pazinacitis pacem colit neque Russi aperto bello contra Romanum Imperium mouere possunt, neque Turcae: immo ne quidem pro pace danda magnam et intolerabilem vim pecuniae, resque alias item intolerabiles a Romanis exigere possunt, metuentes Pazinacitarum ab Imperatore contra se excitatam potentiam: eo enim tempore, cum Romanos bello premunt, Pazinacitae et coniuncti Imperatori amicitia, et ab eo litteris muneribusque exorati, regionem Russorum et Turcarum inuadunt, et in seruitutem abripiunt coniuges liberosque eo-

(3) P. 53.

γυναῖα καὶ παιδάρια, καὶ ληΐζωθαι τὴν χώραν αὐτῶν. *rum, et totum agrum deuastant.*

Quod ait Imperator, Russos magnam vim pecuniae pro pace a Romanis exegisse, hoc vero Russicorum monumentorum fidem confirmat, cum grandem pecuniam pro pace a Constantinopolitanis expressam tradunt. Cum autem scribit, etiam alias res magnas et intolerabiles poposcisse, hoc quid sit, alio loco declarat (4). Nam praefatus, quanta opum et quam insatiabili cupiditate boreales gentes sint, quam petitiones eorum et mandata intolerabili impudentia, sic ait: εἴτε ἀξιώσουσί ποτε καὶ αἰτήσωνται εἴτε Χάζαροι, εἴτε Τοῦρκοι, εἴτε καὶ Ῥῶς, ἢ ἕτερόν τι ἔθνος τῶν βορείων καὶ Σκυθικῶν, οἷα πολλὰ συμβαίνει, ἐκ τῶν βασιλείων ἐσθήτων, ἢ στεμμάτων, ἢ στολῶν, ἕνεκά τινος δουλείας καὶ ὑπουργίας αὐτῶν ἀποσταλῆναι αὐτοῖς, οὕτω χρή σε ἀπολογήσασθαι, *cum volent, et petent, siue Chazari, siue Turcae, aut Russi, aut alia aliqua septemtrionalis et Scythica gens, vt saepe accidit, ex regiis vestibus, aut diadematibus, aut stolis, pro seruitio et ministerio suo sibi mitti, ita oportet te excusare.*

De situ Pazinacitarum alibi Constantinus (5): ἡ δὲ Πατζινακία πᾶσαν τὴν γῆν τῆς τε Ῥωσίας καὶ Βοσπόρου κατακρατεῖ, καὶ μέχρι Χερσῶνος, καὶ ἕως τὸ Σαράτ, Βουρὰτ καὶ τῶν λ΄ μερῶν. Quem locum sic explico: *Pazinacitas omnem regionem intra Russiam et Bosporum tenuisse*, videtur enim μέχρι excidisse, cum fuerit antea μέχρι τῆς τε Ῥωσίας. Bosporum dicit regiones veteres

(4) p. 63. (5) p. 105. 106.

res Bosporanas, vbi nunc Chazari et Cherrhonesitae. Μέχρι Χερσῶνος, id ipsum confirmat, quod supra ostendi, Patzinacitas iuxta Chersonem ad cataractas quoque egisse. *Sarat* et *Burat* sunt regiones Pazinacitarum maxime orientales ad Tanaim, vbi etiam triginta regiones paruae fuisse videntur. Nam Pazinacitae antequam e Transuolganis regionibus pulsi sunt, in octo κλίματα ϗ θέματα *regiones* diuisi fuere: mansere in eadem conditione etiam postea. Et ad occidentem Danapris fuere quatuor: πέρα τȣ̃ Δανάπρεως ποταμȣ̃ πρὸς τὰ ἀνατωλικότερα ϗ βορειότερα μέρη ἀποβλέποντα πρὸς τε Ουζιαν ϗ Χαζαριαν ϗ Αλανιαν ϗ τον Χερσῶνα ϗ τὰ λοιπὰ κλίματα, *trans Danaprin fluuium ad orientaliores et borealiores partes respiciebant Vsiam, Chazariam, Alaniam, et Chersonem, ceterasque regiones.* Regiones, seu populos quatuor, duobus locis recenset, nominibus diuersis:

Κȣαρτζιτζȣρ	Τζȣρ
Συρȣκαλπεη	Κȣλπεη
Βοροταλματ	Ταλματ
Βȣλοτζοσπον	Τζοπον

Si ordine naturali posuit, primi ad orientem *Quartzitzur*, seu *Tschur*, et *Syrucalpei*, seu *Kulpei*: tum ad septemtrionem *Vorotalmat*, seu *Talmat*, et *Vulotschospon*, seu *Tschopon*. At hunc ordinem non sequitur: nam alibi *Quartzitzur* ad Borysthenem collocat, ex aduerso Cisborysthenicae regionis *Jawdiertim*. Supra citato loco maxime orientales regiones, in quibus desiit Patzinacia, Σαρατ et Βȣρατ, videntur esse *Syrucalpei* et *Vorotalmat*. Reliquas duas, *Quartzitzur*, ad Borysthenem, vt Impe-

(5) p. 105. 106.

rator poſtulabat, conſtitui, *Vulotzospon*, pro arbitrio meo.

Venio ad Patzinaciam occidentalem, quam dixi a Boryſthene ad Danubium protendi. A Danaſtri ad Danaprin N. P. LXXX. litus, ὁ Χρυσός λεγόμενος Αἰγιαλός, *Aureum littus*. S. Aetherii inſulam iam ſupra ſuo loco vindicaui. Inde ſoluentibus Ruſſis, quorum iter Conſtantinus deſcripſit (6), primus a dextera Ἀσπρὸς ποταμὸς *Albus fluuius* occurrebat: ſecundum eum *Selina* fluuius τοῦ Δανούβεως παρακλάδιον *Danubii ramus* ſeu oſtium. *Selinam*, inquit Delislius, *non diuerſum eſſe a Saulina fluuio, iudico, quem tabula MS. maris Pontici, Conſtantinopoli deſcripta, ad vnum ex oſtiis Danubii exhibet, quamuis hunc Danubium inter et Boryſthenem fluere colligi ex Conſtantino poſſe videatur.* Immo cum Conſtantinus παρακλάδιον Danubii vocat, nihil iam reliquum eſt, quam vt in ſententiam Delislii concedamus. Quod ad Aspron, Delislius, cum fluuium nullum inter Danaſtrin et Danubium reperiret, eo nomine ſinum quendam inſigniuit. Credo ego tamen fluuium fuiſſe et eum vero, de quo Geographus Rauennas (7): *ex Sarmatiae montibus flumen venit, quaſi ad partem Danubii, qui dicitur Appion*. Forte *Aspron* facili litterarum errore. Eſt etiam Διστρα commemorata Imperatori (8): ἀπὸ δὲ κάτωθεν τῶν μερῶν Δανούβιου ποταμοῦ, τῆς Δίστρας ἀντιπέρα ἡ Πατζινακία παρέρχεται καὶ κατακρατεῖ ἡ κατοικία αὐτῶν μέχρι τοῦ Σάρκελ, τοῦ τῶν Χαζάρων κάστρου, *ab imis Danubii fluminis regionibus, e regione Diſtrae* Patzi-

(6) p. 61. (7) p. 160. (8) p. 111.

Patzinacia procedit et pergit eorum ſedes vsque ad Sarkel Chazarorum caſtrum. Delislius putauit fluuium dici: at vrbem Diſtram citat Imperator. Celebris vrbs Διϛρα, Δρίϛα, Δρὶϛρα, Δρίϛον multis ſcriptoribus. *Olim Doroſtolum Moeſiae inferioris vrbs ad Iſtrum*, vt recte obſeruauit Anſelmus Bandurius. Anna Comnena (9) Δρίϛρα πόλις ἡ περὶ των Ιϛρον διακειμένων περιφανης. Cedrenus (10) τὸ Δορόϛολον, ὃ καὶ Δρίϛρα καλεῖται. Ad fluuium ſitam eſſe, etiam Cedrenus confirmat. Menologium Baſilii Imp. (1) Πασικράτης καὶ Βαλεντῖνος ὑπῆρχον ἐκ τῆς πόλεως Δωροϛόλου τῆς Καππαδοκιας. Recte Clemens XI. P. R. interpretatur: *ex ciuitate Doroſtolo in Macedonia.* Nam Menologium alio loco (2): Δάδας, Μάξιμος καὶ Κινλιλιανὸς ὑπῆρχον ἐκ τῆς πόλεως Δοροϛόλου τῆς Μακεδονίας. Sed accuratius alibi (3), ἐκ πόλεως Δοροϛόλου Μυσίας τῆς Θρακης et Δορόϛολον τῆς Θράκης. Recte prout tempora fuere: nunc enim ad Bulgariam pertinebat. Selinam fluuium excipiebat Κώνοπα *Conopa*, ſed ad Bulgariam Nigram pertinens, tum Conſtantia vrbs, et Βάρνας, ſeu *Varna*, fluuius, nota nomina, et *Ditzina* fluuius, vt Imperator ait, vicinus Varnae. Iam vt idem teſtatur, Pazinacitae ad auſtrum e regione Doroſtoli colebant. Alio loco ſcribit (4), Pazinacitas ſex horarum interuallo a Bulgaria abſuiſſe: interierat enim Danubius, et aliquantum agri, quem Pazinacitae reliquerant incultum, veluti munimentum contra Bulgaros. Iterum tradit (5), a Bulgaria ad Danaſtrin vsque et Danaprin coluiſſe, et quidem diſertis verbis, ad littora

(9) Alexiados p. 194. (10) p. 674. 675 Conf. Zoraram T II p. 212. (1) T. III p. 68. (2) ib. p. 75. (3) ib. p. 172. 191. (4) p. 106. (5) p. 58

littora ipſa, vt in littora inde a Danubio ad Danaprin nihil iuris fuerit Imperatori Romano. Ea cauſſa Ruſſi, cum Conſtantinopolin nauigiis ſuis peterent, inde a S. Aetherii inſula excenſionem facere non audebant, donec Selinam eſſent praetergreſſi. Pazinacitae enim ſua in regione nauium curſum obſeruabant, ſi quas earum poſſent intercipere. Vt a Bulgaris Danubii ripa ſtriga ſeparabantur, ita qui limites magis ad occidentem fuerint, exquiram. Imperator fluuios in Danubium ſeſe exonerantes recenſens (7), quinque ex iis Pazinacitis adſcribit, Βαῤῥουχ, Κουβου, Τρουλλος, Βρουτος, Σερετος. Et *Brutus* quidem vel vocis ſono cognoſcitur: eſt enim *Porata* Herodoti, nunc *Prut*. *Seretus* quoque nunc *Siret*, ergo Herodoti *Ararus*. In ceteris haeremus. Delislius credidit *Trullum* et *Varuch* eſſe fluuium *Maroſch*, in quo ei minimo adſentior, cum *Maroſch* ſine dubio is eſt, qui a Conſtantino *Moriſis* vocatur. Quare Varuchum puto Alutam eſſe: Trullum, qui fere ex aduerſo in Danubium incidit. Ad Alutam vsque Pazinacitae degerunt. Nam inde iam, vt poſtea declarabo, flumina Turciae ſuccedunt. Cum autem Pazinacitae dicuntur quatuor dierum via diſtare a Turcis, (8) id interpretor e Conſtantino (9) de ſolitudine inter Pazinaciam et Turciam, quam Pazinacitae hieme deſerebant: ſub verem a Danapris regionibus reuerſi totam aeſtatem exigebant prope Turcas. Toto tractu ab Varucho et Danubio ad Danaprin Pazinacitarum climata quatuor exſtiterunt, aliis alibi nominibus dicta Conſtantino (10), τὰ δυτικότερα καὶ ἀρκτικότερα ἔνθεν τοῦ Δανάπρεως.

Για-

(6) p. 61. (7) p. 108. 110. (8) p. 58. 59. (9) p. 106. (10) . . .

Γιαζιχοπὸν	Χοπον
Χαβυξιγγυλα	Γυλα
Χαροβοη	Χαροβοη
Ιαβδιερτιμ	Ηρτην

Gjazichopon ſeu *Chopon*, πλησιάζει τῇ Βυλγαρίᾳ *accedit ad Bulgariam*, tum τὸ κάτω, *infra Chopon* erant *Gyla* proxime Turcas. *Charavoi* iuxta Ruſſos, itaque ad Boryſthenem, denique *Jawdiertim*, ſeu *Irtin*, proximo Slauos, Ruſſorum tributarios. Populi *Jawdierlim*, *Chavuxingyla* ſiue *Gyla* et in altera Pazinacia *Quartzitzur* vno nomine ſe vocabant Κάγγαρ *Cangar* (1), hoc eſt, ἀνδρειωτάτους καὶ εὐγενεστέρους *fortiores et nobiliores* (2).

Horum climatum ad boream ſitus ita explicandus eſt nobis, vt ſimul Ruſſiae fines ingrediamur. Iis in finibus Imperator Kiouiam ponit, vnius itinere diei a Pazinacitis τὸ κάστρον Κίοβα τὸ ἐπονομαζόμενον Σαμβατας (3), *vrbs Kiova cognomine Samwatas*. Vrbs ſane tota Europa ipſoque in Oriente celebris. Nolo hic iam Dithmari Merſeburgenſis, Adami Bremenſis aliorumque de ea proferre impenſe aggeſtas laudes. Naſſireddinus Tuſaeus (4) et Olugbeg in tabulis geographicis prouinciam ponunt روس *Rus*, et in ea كويابه مدينة روس *Kujavah vrbem Ruſſiae*. Apud Olugbegum corruptius, non modo in Ioannis Grauii, ſed etiam in Ioannis Hudſonis editione كويا *Cuja*. Credas Cujauiam vrbem in palatinatu

(1) p. 106. 107. (2) Vide cogitata Strahlenbergii de hoc *Cangar* in Introductione *Septemtrionalis et Orientalis Europae et Asiae* p. 65. (3) p. 59. (4) p. 45. ed. Grauii.

Cuiauienſi dici: ſed eſt plane Conſtantini Κιοαβα, aut vt ille etiam habet Κιοβα *Kioua*. Eggehardo Vragienſi (5) *Kitawa* et *Cuiewa*. Aliis aliter corruptum. Eggehardus ad A. C. 1018 *In hac magna ciuitate Kitawa, quae caput eſt huius regni, plus trecentae eccleſiae habentur et nundinae octo, populi autem ignota manus.* Conſtantinus Imperator (6) de ſitu Ruſſiae ἐις δὲ τὰ ὑψηλότερα τȣ̃ Δανάπρεως ποταμȣ̃ μέρη κατοικȣ̃σιν ὁι Ρῶς, *ad ſuperiores partes Boryſthenis fluuii colunt Ruſſi.* Infra vrbem ad Danaprin erat τὸ Βιτεζεβη, ὅπερ ἐςι πακτιωτικὸν κάςρον τῶν Ρῶς, ſine dubio, vt Slauoni enunciarunt, *Vitepski Ruſſorum vrbs tributaria.* Nullum vrbis veſtigium reperio ad Danaprin. Vrbs eſt illo nomine in Lithuania ad fontes Dunae, a qua totus palatinatus Vitepskenſis: nihil autem ad hanc Kiouienſem. Praeterea vrbes in Ruſſia Imperator nominat (7) Μιλινίσκα, Τελιȣτζα, Τζερνιγωγα et Βȣσεγραδε. Βȣσεγραδὲ *Viſegardia* ſeu *Wyzgrod* haud ita longe a Kiouia et Τζεργιγωγα eſt *Czernichow* ad Desznam fluuium. Μελινισκαν Delislius credidit *Mſenesk* eſſe. Cum autem Imperator ab hac vrbe naues Kiouiam veniſſe ſcribit, non ſane eſt *Mſenesk*, quae vrbs a fluuiis remotior eſt: Sed ſi nominis in veſtigio pedem figas, eſt *Smolensko.* Τελιȣτζα quae fuerit non inuenio: quare praetermittendam potius duxi, quam cum Delislio incerto ſtatuendam loco. Iam ἀπὸ τῆς ἔξω Ρωσίας, inquit, μονόξυλα κατερχόμενα ἐν Κωνςαντινȣπόλει, ἐισὶ μέν ἀπὸ Νεμογάρδας, ἐν ῳ̃ Σφενδοσθλάβος ὁ ὑιὸς Ιγγωρ, τȣ̃ ἄρχοντος Ρωσίας, ἐκαθέζετο, *ab exteriori Ruſſia lintres deſcendunt Conſtantinopolin: ſunt autem ab Nemo-*

(5) p. 427. 451. (6) 112. (7) p. 59.

mogardas, *vbi Suendoſtiabus filius Ingoris principis Ruſſiae conſedit.* Νεμογαρδας eſt ſine dubio Νεογαρδα, *Neogrod* ſeu *Nouogrod.* Credidi initio eſſe, quod Delislio viſum, *Nouogrod Sieuirsky* haud ite longe a *Czernigoga.* Et quamquam, quod ex Ruſſicis monumentis conſtat, haec quoque vrbs in poteſtate Ruſſorum cum tota Sieueria fuit, tamen potius cenſeo eſſe *Nouogrod Weliki*, et circumiectum agrum τὴν ἔξω Ρωσίαν dici. Nam in Ruſſicis monumentis inuenio, Suendoſtlabum, ita vt Imperator ſcribit, illa in Nouogardia egiſſe. Nouogrodienſes merces ſuas conuehebant Smolenſcum, inde ſecundo Danapri lintribus Kiouiam: qua ex re ortus Conſtantini Imp. error, vt etiam Nouogrodum crederet ad Danaprin ſitum fuiſſe.

Proxime Ruſſos Kiouienſes, eorum tributarii Slauoni egerunt, ſupra Pazinacitarum regionum *Jawdiertim.* Nominantur Conſtantino Ουλτινοι Δερβλενινοι, Λενζενίνοι καὶ λοιποὶ Σκλάβοι (8). Forte Δρεβλενίνους Imperator ſcripſit. Noti in hiſtoriis tum Ruſſicis, tum Polonicis Древляне *Drewliani*, voce ducta a *ligno et ſyluis.* Λενζινίνοι, ſeu, vt alibi Λενζανήνοι, forte vt putat amicus meus, Лѣсные, *Lisnie*, *ſylueſtres.* Κριβιτζοι ſeu Κριβητανοὶ (9) *Crivitzi*, *Criviteni*, noti item Ruſſicis hiſtoriis Кривичи *Crivizi.* Horum ſitum ſatis accurate tenemus. Nam cum Pazinacitarum ſedes ad boream ita produximus, vt haud procul ab Kiouia abſimus, regioni autem *Jawdiertim* illi ipſi Drewliani, Lenzinini, et Crivitzi vicini fuiſſe dicuntur, ſequitur eos ad Pripelium ſeu *Pripiecz* fluuium fuiſſe. Hoc egregie confirmat Imperator,

 cum

(8) p 106. (9) p. 59.

cum ſic ait de illis populis: εἰς τὰ ὄρη αὐτῶν κόπτουσι τὰ μονόξυλα ἐν τῷ τοῦ χειμῶνος καιρῷ καὶ καταρτήσαντες αὐτῶν, τοῦ καιροῦ ἀνοιγομένου, ἡνίκα διαλυθῇ ὁ παγετὸς, εἰς τὰ πλησίον οὖσας λίμνας εἰσάγουσιν αὐτὰ καὶ ἐπειδὴ ἐκεῖναι εἰσβάλλωσιν εἰς ποταμὸν τὸν Δάναπριν, ἀπὸ τῶν ἐκεῖσε, οὕτοι εἰς τὸν αὐτὸν ποταμὸν εἰσέρχονται καὶ ἀπέρχονται εἰς τὸ Κιόβα καὶ σύρουσιν εἰς τὴν ἐξάρτησιν καὶ ἀπεμπολοῦσιν αὐτὰ εἰς τοὺς Ῥῶς, *in montibus ſuis caedunt lintres hieme et fabricant, tum vere, vbi ſoluta nix fuerit, in proximas paludes deducunt et quia illae paludes in Danaprin ſe exonerant, inde iam et ipſi flumen per paludes ingreſſi Kiouiam nauigant, lintres educunt, et vendunt Ruſſis.* Montes aut potius ſupercilia, ſyluas, paludes ad Pripelium inuenimus: Pripelium ipſum Danaprin dixit, quia illo flumine miſcetur. Drewliani igitur et Lenzinini in primis ob vim nominum illis in montibus et ſaltibus egiſſe videntur ad paludes. De Vltinis nihil occurrit, quod dicam. Proxime Criuizos Βερβιανοι Δρουγουβῖται et Σερβιοι *Veruiani*, *Druguuitae et Seruii* Ruſſorum tributarii collocantur. Hi videntur vniuerſi ſub iſtis paludibus coluiſſe vsque ad Crapaticos montes, in quibus Chrovati fuere. Lubet locum integrum huc referre. Hiemem, inquit, ſic agunt Ruſſi Kiouienſes. Nouembri ineunte, εὐθέως οἱ αὐτῶν ἄρχοντες ἐξέρχονται μετὰ πάντων τῶν Ῥῶς ἀπὸ τὸν Κιαβον καὶ ἀπερχονται εἰς τὰ πολίδια, ἃ λέγεται Γυρα, ἤγουν εἰς τὰς Σκλαβινίας τῶν τε Βερβιανων καὶ τῶν Δρουγουβίτων καὶ Κριβιτζων καὶ τῶν Σερβιων καὶ λοιπῶν Σκλαβων, οἵτινές εἰσι πακτιῶται τῶν Ῥῶς, *illico proceres exeunt Kiovia cum omnibus Ruſſis* (puta cum omni militari manu et nobilitate, relictis in vrbe ci-

ciuibus) *et in vrbes, quas Gyra vocant, concedunt, siue etiam in Slauinicam regionem Veruianorum, Druguuitarum, Criuizarum et Seruiorum ceterorumque Sclauorum, qui Russorum sunt tributarii.* Exacta hieme, Aprili mense Kiouiam redire et mercaturas Byzantias exercere consueuerunt.

Qui populi Russos ad orientem contigerint, in Constantino non inuenio, nisi si eo referendi sunt Morduani. Μορδία Constantini a finibus Pazinacitarum decem dierum via abfuit (10). Ex quo colligere possumus, iisdem in saltibus iam tum egisse Morduanos, in quibus nunc sunt. Legebatur in MS. Meursii Μοδία, ex quo Meursius coniecturam duxit Μηδίαν esse. Nescio quid in eo sit, quod placuerit Bandurio, praesertim cum in MS. Regio Parisino legeret Μορδίαν. Delislius *Modiam* retinuit et intra Caucasum descripsit, cum asterisco, quo incomperti situs loca insigniuit. Credo eum quoque Meursii Mediam respexisse.

Discedamus nunc e Russia in Bulgariam, quam a tergo reliquimus. Bulgaria Nigra a Danubio ad Haemum montem pertinuit. Vrbes in ea multae, cum primis vero Πρέσθλαβον (1), *Pereslaue.* Zonaras (2) et Cedrenus (3) τὴν μεγάλην Περσθλάβαν ϗ τὴν μικρὰν commemorant. Μεγάλη Περίσθλαβα ad Istrum. Anna Comnena descripsit (4): Πόλις δ᾽ αὕτη περιφανὴς περὶ τὸν Ἴστρον διακειμένη πολὺ μὲν οὔτ᾽ ὄνομα τοῦτο ἔχουσα τὸ βαρβαρικὸν, ἀλλ᾽ ἑλληνίζουσα περὶ τὴν προσηγορίαν Μεγαλήπολις

(10) p. 59. (1) p. 109. (2) p. 224. (3) p. 704. (4) p. 194.

ᾗ ἴσα ᾗ λεγομένη. ἀφ' ȣ̄ δὲ Μόκρος ὁ τῶν Βȣλγάρων βασιλεὺς καὶ οἱ ἐξ ἐκείνȣ γενόμενοι τῆς ἑσπέρας κατέδραμον, σύνθετον ἐκτήσατο τὴν προσηγορίαν ἀπό τε τῆς Ἑλληνικῆς σημασίας, Μεγάλη ἐπονομαζομένη, καὶ τὴν ἀπὸ τῶν Σθλαβογενῶν ἐπισυρομένη λέξιν, Μεγάλη Περισθλαβα πανταχόθεν τȣ̃τοις φημιζομένη, *vrbs haec celebris ad Istrum sita, nomen peregrinum olim non gessit, sed Graeco nomine Megalopolis dicta, re etiam fuit: ex quo Mocrus Bulgarorum rex et eius posteri occidentem incursauere, compositum nomen habuit a Graeco* Μεγάλη *et Slauonico* Μεγάλη Περισθλαβα, *vbique celebrata et nuncupata.* Consentiunt Zonaras (5) et Ioannes Curopalata Scylitzes, siue magis Cedrenus (6), qui haud ita longe a Dorostolo ponunt. Nicetas Choniata in Isaacio Comneno (7) Περισθλαβα πόλις Ὠγυγία ἐκ πλίνθȣ πᾶσα ὁπτῆς καὶ πλείστην ὅσην περὶ τὸν Αἷμον τὸν περίμετρον ἔχȣσα. *Peristhlava vrbs Oggya, tota latericia et maximam partem in circuitu suo super Haemo sita.* De Haemo iterum Cedrenus et Zonaras consentiunt in rebus Ioannis Tzimitzis, qui vrbem Suendosthlauo Regi Russiae eripuit. Ex eo tempore Αχριδα regia Bulgarorum fuit (8). Nota duoque in Bulgaris Πλισκοβα, eodem nomine, quo haec Plescouia non ita longe a nobis sita est (9). Ad occidentem fines Bulgariae coniuncti fuere finibus Turcicis.

Turcae antea iuxta Chazaros coluere, iisdem quibus Pazinacitae in hac tabula descripti sunt spatiis. Inde pulsi sunt

(5) T. II. p. 224. (6) T. II. p. 672. seq. (7) p. 238. (8) Cedrenus p. 710. Zonaras p. 713. (9) Cedrenus p. 704.

ſunt circiter A. C. 893. vt e Conſtantino demonſtrauimus. Conſentiunt in anno Regino Prumienſis et Eggehardus Vragienſis, aliique, ſed *Hungaros* vocant. Nam etiam ſuperioribus ſeculis, cum noſtri de Hunnis aut Hungaris loquuntur, Graeci fere Τούρκους dicunt, rarius Οὔννους καὶ Οὔγγρους. Quare cum horum populorum memoria ſeu apud noſtros ſcriptores, ſiue apud Graecos occurrit, cauenda eſt offenſio. Conſtantinus hos Turcas etiam Chazaros appellat (10): ὅτι καὶ Μαύρη λεγομένη Βουλγαρία δύναται τοῖς Χαζάροις πολεμεῖν, *Bulgaria Nigra poteſt etiam bellum gerere cum Chazaris.* Nullos, inquam alios dicit, quam hos Turcas, qui vt Chazari ipſi, ab eadem ſtirpe vno ſermone vſi ſunt. Omnia enim nomina, tum regionum et vrbium, tum hominum et rerum, Turcice explicari poſſunt ſine negotio. Quare, vt teſtatur Imperator (1), hi Turcae enixe colebant Turcas, πρὸς τὴν ἀνατολὴν, εἰς τὰ τῆς Περσίδος μέρη, *ad orientem iuxta Perſarum regionem* et ad eos aſſidue mittebant negotiatores aut mandata ab iis petebant. Haec eſt تورکستان *Turkeſtan*: hi ſunt, quos Εῴους Τούρκους vocat Cedrenus (2). Notandus autem eſt noſtrorum haud leuis error, cum Hungaros, qui nunc Slauis permiſti colunt, nomine non ſuo vocant, iisque omnia tribuunt, quae de Hungaris vsquam prodita fuere. Nos igitur more et conſuetudine noſtrorum Hungaros vocabimus: ipſi ſe *Magyar* verius ad hiſtoriae fidem appellant. Neque tamen hi Mazari quidquam commune habent, cum iſtis Turcis, qui Conſtantini aetate coluere in Pannonia, vt ne quidem cum Hunnis vetuſtis. Sed hoc nunc non agimus. Continebantur

(10) p. 62. (1) l. c. p. 108. (2) p. 696.

bantur autem Turcae isti fluminibus, in quibus Imperatore teste (3), primus Τιμησης *Timisis*: notus adhuc fluuius ad Temesuariam: tum Τουτης *Tutis* qui sit, nescio. At Μορησης *Morisis* est *Marosch*, Geographi Rauennatis *Maruscus* (4), pro quo in codice Vrbinate bibliothecae Vaticanae est *Mariscus*, Herodoti Μάρις. Κρισος *Crisus*, qui sit, alii mihi monstrent: nam Τίτζα est *Theysse*. Imperatore teste, magna Turcarum pars ad orientem Tizae et Morisis coluere. Ad boream Turcis vicini fuere tum Pazinacitae, tum Chrovati. *Harvat* et *Hravat* (5) Crovati sese vocant: inde Crapatici et Carpatici montes. Constantinus (6): πρὸς τὸ βορειότερον μέρος οἱ Πατζινακῖται, οἱ δὲ Χρώβατοι πρὸς τοῦ ὄρη τοῖς Τούρκοις παράκεινται, *ad boream Pazinacitae, Chrovati vero in montibus iuxta Turcas colunt*. Hi sunt Crapatici seu Carpatici montes, *Hravatici* seu *Harvatici*. Populus ipse Ioanni Zonarae Κράβατοι (7), vt nunc etiam *Cravatos* vocamus, Χόρβατοι Cedreno (8). Nomen Constantinus e Francica lingua explicare sibi est visus (9): οἱ τὴν πολλὴν Χώραν κατέχοντες *qui multam regionem tenent*. Lucius et Bandurius (10) negant hodie quidquam significare. Bohemi dicunt *hravati*, *terram rastro proscindere* et *hrabe rastrum*: Russi hodie eiusmodi aliqua voce, *summa vi laborare*. Vltra Βαγιβαρείαν erant Βελοχρώβατοι sub Ottone M. Imperatore, aut vt iis ait, *Franciae rege*. Anselmus Bandurius: *Bagibarias vocabulum Slauum est Graece detortum, id est*

(3) p. 108. 110. (4) p. 144 (5) Vberior explicatio doctrinae Christianae in Illyricam linguam conuersa per Tomeum Marnauitium, Romae typis Congregationis de propaganda fide A. 1627. *u yazik baruatski zapouidyu*. (6) p. 62. (7) p. 227 t. 11. (8) p. 717 (9) p. (10) ad Constantinum de A. I. p. 91. 92.

id est Βαβειαορια (*Babia oria*) *id est*, *Babii montes*, *Slaue*, *Babie gore*, *id est*, *vetulae et vetularum montes*, *quo nomine Carpatici montes Poloniam ab Hungaria disterminantes ab aliquibus dicuntur.* Elegans coniectura, nisi potius putabimus Βαγι βάρειαν dictam a *Vaga* flumine, quod in Danubium exoneratur. Βελοχρώβατοι ab Imperatore etiam Ασπροι Χρωβάτοι vocati, quod ipsum бѣло *bielo* in Slauonicis linguis significat. Horum pars ante Constantini Porphyrogennetae tempora Istrum traiecit, et tum in Dalmatia, tum in Illyrico consedit. Istis ad septemtrionem finibus Turcae descripti, vicinos ad occidentem habuere Francos (1). Vt ait Imperator, ἡ Φραγγία ἡ καὶ Σαξία *Francia*, *quae et Saxonia*. Nam vt Otto M. e Saxonibus fuit, ita huius quoque nomen regionis cognosci, et cum Francia permisceri Constantinopoli potuit. Non modo Albi Chrovati deuicti ab hoc Ottone, sed alii quoque in Dalmatia Chrovati, extremae prouinciae imperii Germanici fuerunt, Constantino teste. Ad meridiem Imperator Turcis iungit τὴν Μεγάλην Μοραβίαν *Magnam Morauiam*, τοῦ Σφενδοπλόκου regionem. Hoc obscurum esse posset, nisi adderet, totam regionem Sphendoploci quondam magni a Turcis deuastatam teneri (2). Erat autem Morauia proprie sic dicta, regio Slauonici populi ad Morauam fluuium: (3) tum vero agrum omnem vltra Danubium ad Crapaticos montes terramque interiectam inter Danubium et Σαβα seu *Sauum* comprehendebat. (4) Magnam illam Morauiam vniuersam postea Turcae tenuerunt. Μετὰ δὲ τὴν τελευτὴν τοῦ αὐτοῦ Σφενδοπλόκου ἕνα χρόνον ἐν εἰρήνῃ διατελέσαντες,

(1) p. 110. (2) p. 108. 111. (3) Constantinus p. 111. (4) ib.

ἔριδος καὶ σάσεως ἐν αὐτοῖς ἐμπεσούσης, καὶ πρὸς ἀλλήλους ἐμφύλιον πόλεμον ποιήσαντες, ἐλθόντες οἱ Τοῦρκοι τούτους παντελῶς ἐξωλόθρευσαν καὶ ἐκράτησαν τὴν αὐτῶν Χώραν, εἰς ἣν καὶ ἄρτιως οἰκοῦσι, *post mortem autem eiusdem Suentoploci vno anno pacem inter se coluere Suentoploci filii, tum vero ortis dissidiis et intestino bello, Turcae superuenientes hos plane disperdiderunt, regionemque eorum occupatam ad hunc diem tenent.* Moraui, qui cladi superfuere, eodem teste, dispersi sunt per Bulgariam, Chrobatiam, ceterasque nationes: quidam inter Turcas consederunt. Albericus in Chronico ad A. C. 893. *His diebus gens Vngarorum sub primo duce suo Alino ex Scythia egressa ac a Pezenatis* (forte scripsit *Pezenacis*) *pulsa, Auaribus eiectis Pannoniam inhabitare coepit.* Adfert deinde ex Liuthprando et Sigeberto Gemblacensi testimonia. Et Sigebertus quidem res ad eundem annum refert: Liuthprandus ipso in ingressu historiae attingit, sed sine anno. Eggehardus Vragiensis (5): *Zuendibolh rex Marahensium Slauorum, vir inter suos prudentissimus et ingenio callidissimus, diem clausit extremum.* Et interiectis nonnullis: *regnum Zuendebalchi, filii eius pauco tempore infeliciter tenuerunt, Vngaris omnia populantibus.* Regino Prumiensis vero, quem alioqui Eggehardus sequitur, ad A. C. 894. *Circa haec tempora Zundibolch, rex Marahensium Slauorum, vir inter suos prudentissimus et ingenio callidissimus, diem clausit*

(5) p. 231. ed. Eccardi.

ſit extremum: cuius regnum filii eius pauco tempore infeliciter tenuerunt, Vngaris omnia vsque ad ſolum populantibus. Vides ipſa Reginonis verba apud Eggehardum: tamen cum ab anno Eggehardus diſceſſit, iuſtam cauſſam habuiſſe videtur. Hanc autem cauſſam fuiſſe video, quod Suendoplocum Eggehardus inuenit A. C. 893. diem obiiſſe ſupremum, et vno poſt anno, vt Conſtantinus quoque auctor eſt, Hungaros ſiue Turcas occupaſſe Morauiam. Igitur A. C. 893. aut paullo ante, Turcae a Pazinacitis pulſi, nec ſane illico fracti, vt erat gens bellicoſa, intra Boryſthenem et Danubium ſeſe continuere, denique impreſſionem in Pannoniam fecere ab Arnolpho Imp. excitati contra Morauos, A. C. 894. Regiones vero inter Danubium et Boryſthenem iam antea tenuere, quam e regionibus Transboryſtheniticis eiecti ſunt, et quidem ſi Reginonem Prumienſem audiamus, iam A. C. 889. niſi tum primum motus Pazinacitarum coegerint magis ad Boryſthenem atque vltra fluuium, Danubium verſus, cedere.

In regione Turcarum Pons Traiani quoque fuit, et Βελαγραδα *Belagrada* (БѢлогородЪ *Alba vrbs*, *Vueiſſenburg*) tribus diebus a ponte. Cedreno (6), ὁ τῶν Βελογραδων ἄρχων commemoratur. Notum etiam tum Sirmium ad Sauum fluuium. Vnum praeterea e Conſtantino animaduerti velim, Chrobatos quoque ad me-

 ridiem

(6) p. 716.

ridiem Turcarum poni. Hos puta Chrovatos in Dalmatia, Illyrico, et Pannonia, ſeiunctos a reliquo corpore. Σερβλοι Ασπροι, *Servli Albi*, vt ipſe Imperator e Latina lingua explicat, Δȣλοι *Servi*, ea tempeſtate in regione Βοικι *Voiki* fuerunt, proxime Francos et Chrovatos Albos. Latius deinde ad meridiem Slauoni coluere. Sed nos vlteriora Danubii non item ad noſtram curam pertinere iudicamus. Nam hoc officio, illuſtrandis e Conſtantino Porphyrogeneta Ruſſiae finibus et vicinis populis, defuncti, nihil vltra moramur Sclauos. Tamen quidquid de eorum ſitu adhuc dixit Conſtantinus, e Delislii tabula noſtrae adiecimus, ne quid deeſſe videretur.

OB-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE.

OBSERVATIO
ECLIPSIS LUNARIS
die 8. Septembris 1737. ſt. n. Petropoli habita.
REFERENTE
G. *Heinſio.*

§. 1.

EClipſes lunares vſu ſuo, qui eximius alias in Aſtronomiam et Geographiam redundat, nonnihil priuari videntur, quod iſtarum obſeruationes ad ſummam exactitudinem exigere non liceat. Cauſa praecipua quaeri debet in vmbrae terreſtris termino, qui propter adiacentem penumbram denſam admodum incertus conſpici ſolet. In diuerſis quoque Eclipſibus vmbra diuerſae denſitatis, vt ſic dicam, deprehenditur. Haec in eclipſi praeſenti non ſolum valdè diluta apparuit, ſed cum penumbra quoque tantum confundebatur, vt ſucceſſum obſeruationis fere deſperaremus. Huic incommodo acceſſerunt aliae circumſtantiae, quae obſeruationem magis dubiam reddiderunt. Fuit Eclipſis horizontalis luna ad occaſum vergente, ſiquidem et initium tantum et nonnullas phaſes ante obſcurationem maximam, quae ſub ipſo fere lunae occaſu contigit, obſeruare potuimus. Vapores in vicinia horizontis, praeſentia luminis crepuſcularis, mutatio diſci lunaris in figuram oualem, quae ad horizontem ex refractionis diuerſitate in exiguis diſtantiis oriri ſolet, dubiam ſane obſeruationem reddere valent. Licet autem poſtremo incommodo mutationis diſci medelam attulerimus; ob cauſas tamen ante allegatas, praeſertim male termi- Tab. XVII. et XVIII.

terminatae vmbrae, obſeruationem incertitudine ſua prorſus exuere non licuit. Quae praeſtita fuerint, ex ſequentibus patebunt.

OBSERVATIO
ECLIPSIS LUNARIS
d. 8. Septembr. 1737. ſt. n.

Ordo obſeruat:	*Tempus verum.* h ′ ″	*Momenta obſeruationum.*
1.	15. 49. 0	Penumbra iam apparet.
2.	16. 0. 0	Penumbra denſa ad limbum lunae prope Ariſtarchum videtur.
3.	16. 5. 48	Initium colligitur ex notabili luminis decremento ad limbum lunae in diſtantia 5. grad. ab Ariſtarcho verſus Platonem computata,
4.	16. 9. 17	Limbus lunae in puncto ingreſſus ante notato diſparet prorſus. Nullus autem terminus inter vmbram et penumbram diſtingui poteſt.
5.	16. 17. 48	Vmbra ad Ariſtarchum.
6.	— 18. 47	Ariſtarchus lumine ſuo priuatur. Per Tubum 8. pedd. haec Ariſtarchi diſparitio 16.″ citius viſa eſt. Terminus inter vmbram et penumbram nondum certus.
7.	— 24. 0	Galiléus extinctus
8.	— 24 50	Phas: 1. 2. dig: 5.′
9.	— 25. 5	Plato vmbrae totus immerſus
10.	— 30. 25	Phas: 11. 2. dig: 26.′

Ti-

	h ′ ″	
11.	16. 23. 3.	Timocharis obſcuratus
12.	— 35. 54.	Phaſ. III. 2. dig. 56.′
13.	— 37. 36.	Eudoxus vmbra inuolutus
14.	— 40. 28.	Copernicus totus in vmbra
15.	— 40. 54.	Phaſ. IV. 3. dig. 24.′
		Poſthaec Luna inter craſſiores nebulas in vicinia horizontis recondita vlteriorem obſeruationem prohibuit; vnde et phaenomenum iſtud rarum, quo in Eclipſibus horizontalibus luminaria ſimul ſupra horizontem conſpiciuntur, obſeruari non potuit.

§. 2. Circa obſeruationes praecedentes ſequentia notari debent. Tempus verum ad examen trium horologiorum inter ſe probe conſentientium per culminationes Solis d. 8. et 9. Septembr. determinatum eſt In obſeruationibus 1. 2. 3. adhibitus fuit tubus aſtronomicus 8. pedum; in obſeru. 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 14, Tubus Newtonianus, obſeruante Cl. *Liberto*; vnde cum per omnes obſeruationes terminus vmbrae valde incertus fuerit, maiora autem teleſcopia vmbram dilutiorem repraſentent, obſeruationum exactitudinem ſufficientem afferere vix poſſumus. In obſeru. 3. initium vel potius luminis decrementum notabile 12. ſecund. ſerius, ſcilicet $16.^{h}\ 6.' \ 0.''$ per tubum Newtonianum obſeruatum fuit, ſed tempus ipſum initii, vt ex obſeru. 3. 4. patet, valde dubium remanet.

§ 3. Cum vmbrae terminus diſtinctior videretur per tubum minorem, ac per maiores; ad obſeruationes phaſium n. 8. 10 12. 15. elegi tubum quadrantis portatilis 2 pedum, easque, vt a refractione diſco lunae figuram oualem in vicinia horizontis inducente ipſae immunes ſint, ſequenti modo inſtitui. In foco Tubi Quadrantis extenſa ſunt fila V, H, ad angulos rectos ſe inuicem decuſſantia, quorum H in ſitum horizontalem, V in verticalem redigitur, quando ope perpendiculi e centro quadrantis ſuſpenſi planum quadrantis in ſitum verticalem componitur. Diſpoſito ſic quadrante obſeruaui interualla temporum quibus limbus lunae S in tubo aſtronomico apparenter ſuperior, cornu phaſis praecedens A et cornu ſequens B ad filum horizontale appulerunt. Cum enim in eadem altitudine refractiones ſint eaedem, dicta vero lunae loca ad eandem altitudinem ſucceſſiue perueniant, nihil de eo timendum eſt, quod alias ex diuerſitate refractionis originem ducit. Deprehenſum autem fuit interuallum temporis inter appulſum

Figura 1.

		ipſius S ad H et A ad H			ipſius A ad H et B ad H
in phaſi.	1.	3.′	45″	—	23″
	2.	3.	28½	—	38
	3.	3.	9	—	50
	4.	2.	54½	—	58

§. 4. Conditiones harum obſeruationum ſunt. In prima phaſi vmbra etiam per tubum iſtum minorem adhuc

huc male terminata apparuit. Obſeruationem phaſeos ſecundae certam habeo et reliquis omnibus antepono, vmbra ſatis bene terminata per tubum memoratum apparente. Phaſis 3tia, ob dubium praecedentis cornu appulſum ad filum horizontale, incerta eſt. Phaſis 4ta certa quidem, ſed cum iam nebulae in vicinia horizontis diſcum lunae inuoluerent, eam phaſi ſecundae poſtpono.

§. 5. Conſtructio harum phaſium ex obſeruationibus paecedentibus ſtatim expediri poſſet, ſi modo mora tranſitus diſci lunaris per filum horizontale daretur. Ductis enim rectis Vy, Hy ad angulos rectos ſe mutuo in y ſecantibus, quarum Vy filum verticale, Hy horizontale repraeſentat, ſi in ſcala aliqua, cuius partibus valor ſecundorum temporis tribuatur, linea aequalis capiatur morae tranſitus diſci lunaris per filum horizontale, eaque ex y in r transferatur, per r vero recta rR ad HyS parallela ducatur, patet, intra yS, rR parallelas contineri diſcum lunae expreſſum per partes temporis morae tranſitus eius per filum horizontale, ac proinde circulum ASB intra easdem tanquam tangentes deſcriptum lunae diſcum ſub dicta conditione referre. Si igitur ope eiusdem ſcalae ya aequalis fiat interuallo temporis inter appulſus limbi ſuperioris S et cornu praecedentis A ad filum horizontale; ab vero aequalis interuallo temporis inter appulſus cornuum praecedentis A' et ſequentis B' ad idem filum; per a et b deinde rectae aA, bB, ad HS parallelae ducantur peripheriam circuli ASB in A et B ſecantes; manifeſtum eſt, in A eſſe cornu praecedens, in B conſequens phaſeos quaeſitae, ac proinde iſtam facillime deſcribi poſſe, ſi ſemidiameter vmbrae detur.

Figura 1.

 §. 6.

§. 6. Requiritur ergo ad conſtructiones phaſium mora tranſitus diſci lunaris per filum horizontale et deinde ſemidiameter vmbrae. Priorem ex obſeruatione immediate acquirere non licuit; pars enim inferior diſci lunaris ad R eclipſata erat Igitur vt iſtam aliunde deducere poſſem, moram tranſitus diſci lunaris per filum verticale obſeruaui, eamque circa duas poſteriores phaſes 2.′ 20″½, inueni. Sed haec ſola non ſufficit. Requiritur praeterea vt habeatur mora tranſitus diſci lunaris per horarium. Hanc quidem per obſeruationem durante Eclipſi eruere conditio mutati per refractionem diſci lunaris prohibuit; iſta tamen, luna culminante, per tubum Sextantis muralis a Cl. *de L'Isle* probe obſeruata fuit 2.′ 4½″. Licet autem interea a culminatione lunae vsque ad eclipſin eius luna diametrum apparentem morae tranſitus per horarium reſpondentem reuera mutauerit, tum propter mutatum lunae locum in orbita, tum propter variatam eius declinationem, tum etiam propter viciniorem iſtius poſitionem ad horizontem; pro praeſenti tamen dubiarum, vt ſupra notaui, obſeruationum negotio moram tranſitus lunae per meridianum ſufficere, et neglecta mutatione, quippe, praeſertim cum per partes temporis exprimatur, admodum exigua, iſtam absque errore ſenſibili pro mora tranſitus lunae per horarium durante Eclipſi haberi poſſe iudicaui.

§. 7. Hisce iam inſtructus, mora ſcilicet tranſitus diſci lunaris per filum verticale, moraque tranſitus eius per horarium, inueſtigationem morae tranſitus lunae per filum horizontale ſequenti modo continuaui. Ductae ſint, vt ante lineae Vy, Hy, ad ſe inuicem normales, haec filum horizontale, iſta verticale, repraeſentantes. In ſcala

Figura 2.

aliqua,

aliqua, ſecunda vel ſemiſecunda temporis referente, capta ſit yS aequalis ſemimorae tranſitus diſci lunaris per horarium, et conſtructo exinde quadrato $ySDP$, centro D radio DP deſcriptus ſit circulus PSC, qui magnitudine exponit diſcum lunae per partes temporis morae tranſitus eius per horarium, poſitione vero lunam limbo ſuo apparenter ſuperiori S ad filum horizontale HS, limbo praecedenti P ad filum verticale VP ſimul appellentem. Ope eiusdem ſcalae ex D interuallo DI aequali ſemimorae tranſitus diſci lunaris per filum verticale interſecetur verticalis linea VP in I, iunctaque DI producatur, donec ſecet horizontalem lineam HS in K. Dico DIK eſſe diurnum lunae, quem centrum lunae in tubo aſtronomico (cuius repraeſentationi figura pro praeſenti negotio, iuna ad occaſum vergente, accomodata eſt) apparenter aſcendendo percurrit; lineam vero DK magnitudine ſua ſemimoram tranſitus diſci lunaris per filum horizontale exhibere. Centrum enim lunae eſt in D tunc, quando limbus eius praecedens tangit lineam verticalem in P, et radius diſci lunaris aequalis factus eſt ſemimorae tranſitus lunae per horarium. Interea igitur, dum dimidium diſci lunaris traiicere debet lineam verticalem VP et centrum lunae ex D in eandem lineam transferri, patet, centrum lunae lineam deſcribere debere, quae ſit ad radium diſci lunaris, vt ſemimora tranſitus lunae per filum verticale ad ſemimoram tranſitus eius per horarium; ſpatia enim, habito lunae motu vniformi, propter conſtantem eius celeritatem ſunt vt tempora, quibus deſcribuntur; vnde cum DI ad DP vi conſtructionis dictam rationem habeat, luna autem proxime in diurno feratur, manifeſtum eſt, poſitionem lineae DI eſſe ferè poſitionem diurni centri lunae. Mutatio declinationis pariter ac motus lunae proprius in aequatore ab occaſu verſus ortum hic nihil turbant, cum vtrumque inuoluat mora tranſitus et per filum verticale et per horarium, interim tamen notandum, quod DI ſit diurnus apparens, quam ſcilicet centrum lunae ex mutata declinatione percurrit et quidem velocitate reſultante ex motibus communi et proprio in aequatore ad plagas contrarias directis. Sit igitur DI producta diurnus apparens centri lunae. Quoniam lunae centrum eſt in D, quando limbus eius ſuperior S tangit lineam horizontalem HS, patet, centrum lunae percurrere deberé lineam DK et in K punctum interſectionis diurni cum horizontali HS transferri, interea, dum dimidium diſci lunaris lineam horizontalem traiicit; quare DK ſpatium a centro lunae in diurno interea deſcriptum magnitudine ſua ope ſcalae explorata tempus dimidiae morae tranſitus diſci lunae per filum horizontale exponet.

§. 8. Datur ergo per conſtructionem mora tranſitus diſci lunaris per filum horizontale. Sed eandem per calculum eruere licet. Datur ſcilicet ratio DI: DP eadem cum ratione morae tranſitus diſci per filum verticale ad moram tranſitus eius per horarium, eademque cum ratione DK: KS propter ſimilia DKS, DIP triangula. Datur praeterea DS radius diſci lunaris ſeu ſemimora tranſitus diſci per horarium. Problema igitur huc redit vt in triangulo DKS ad S rectangulo ex data baſi DS, dataque ratione hypothenuſae DK ad cathetum KS inueniatur hypothenuſa DK. Poſitis igitur $DI : DP = m : n$,

DS

$DS = a$, $DK = x$, fit $KS = \frac{nx}{m}$, $x^2 - \frac{n^2x^2}{m^2} = a^2$ et reducta aequatione x seu $DK = \frac{ma}{\sqrt{(m^2 - n^2)}}$.

§. 9. Vtroque modo tum per constructionem tum per calculum circa duas posteriores phases semimoram transitus disci lunaris per filum horizontale inueni 2′ 15″; circa duas autem priores phases moram transitus tum per filum verticale tum per horizontale paulum diuersam, parum tamen a priori discrepantem sumsi, propter mutatum interea diurni cum verticali angulum.

§. 10. Inuenta iam mora transitus lunae per filum horizontale, loca cornuum A, B in vnaquaque phasi vel methodo §. 5 praescripta, vel etiam in praesenti schemate fig: 2. in disco lunae designari possunt, si in posteriori casu K α ope scalae aequalis fiat interuallo temporis inter appulsum limbi superioris S et appulsum cornu praecedentis A, ad filum horizontale; et $\alpha\beta$ aequalis interuallo temporis inter appulsus cornuum praecedentis A et sequentis B ad idem filum; per α et β vero ad HS parallelae Aα, Bβ, agantur, disci lunaris peripheriam in A et B secantes; quibus factis loca cornuum in A et B determinata sunt.

§ 11. Definita sic loca cornuum A, B, iungantur recta AB, et ad istam ex centro disci D perpendicularis DF demittatur eaque versus Z indefinite producatur. Et patet in linea DZ alicubi haerere centrum vmbrae, idque facile determinari posse puta in Z, si modo habeatur vmbrae semidiameter, intersecando scilicet ex A vel B interuallo semidiametri vmbrae lineam DZ in Z.

Hoc

Hoc centro radioque vmbrae ſi deſcribatur arcus A x B, habebuntur, phaſis obſcurationis A x B Q, poſitio eius reſpectu verticalis V P et diurni D K, ratio Q x : Q q ſeu ratio partis diametri lunae obſcuratae ad integram diametrum, hoc eſt quantitas phaſeos obſcurationis; nec non diſtantia centrorum lunae et vmbrae D Z.

§. 12. Hae deductiones, licet data omnia rite ſe habeant, phaſes exactas nondum ſiſtunt. Exactae eſſent, ſi peripheria vmbrae A x B interea temporis, dum cornua A, B, filum horizontale traiiciunt, immota fuiſſet. Aſt cum vmbra reuera iſto temporis interuallo intra diſcum lunae progrediatur, cornu ſequens non amplius in eo peripheriae diſci lunaris loco haeret, quando ad filum horizontale appellit, vbi in iſto temporis momento extitit, quo cornu praecedens ad filum horizontale appulit. Hac loci mutatione cornu ſequens priuari debet, vt phaſes exactae prodeant. Hunc in finem ſchema eclipſis praeſentis ſatis amplum modo conſueto conſtruxi, requiſitis ad iſtud ex calculo per Tab. aſtron. petitis. Inueſtigaui deinde phaſes ex obſeruatione per methodum hactenus traditam, ſumta vmbrae ſemidiametro ex calculo eâque ex data ratione ſemidiametri lunae ad radium vmbrae reducta ad partes diſci lunaris, per quas hactenus diſcus lunae expoſitus fuit. Has phaſes tanquam veras ſchemati Eclipſis conſtructo applicui. Quibus factis circa ſingulas phaſes promoto vmbrae centro in orbita eius viſa (habito lunae loco immoto) per tantum ſpatium, quantum interuallo temporis inter appulſus cornuum ad filum horizontale reſpondet, cognoui, qualem loci mutationem

tationem cornu ſequens in peripheria diſci lunaris interea ſubiit. Haec loci mutatio relata ad diurnum in ſchemate Eclipſis expreſſum innotuit proinde in partibus temporis, quae motui vmbrae interea facto reſpondent. *Si* igitur hae temporis partes addendo vel ſubtrahendo, pro ſchematis Eclipſis conditione, applicentur momento temporis in obſeruatione, quo cornu ſequens ad filum horizontale appulit; habetur proxime momentum temporis, quo cornu ſequens ad filum horizontale appuliſſet, quando vmbra, durante tranſitu cornuum per filum horizontale, immota in diſco lunae permanſiſſet. Differentia inter hoc momentum temporis correctum et tempus appulſus cornu praecedentis ad filum horizontale, ſi iuxta methodos §. §. 5. 10. 11. traditas tractetur, ad veram phaſeos quantitatem deducit.

§. 13. In praeſenti negotio factis experimentis, hactenus recenſitam correctionem tum propter exiguum inter appulſus cornuum temporis interuallum, tum propter poſitionem vmbrae reſpectu diſci lunaris hic fauentem, inſenſibilem eſſe, ac proinde phaſes per methodum ſupra traditam, omiſſa correctione, erutas pro veris haberi poſſe, deprehendi. Et haec etiam cauſa fuit, cur in obſeruatione phaſium appulſus cornuum ad filum horizontale, praeuiſa iſtorum commoda poſitione, elegerim prae appulſibus eorundem ad filum verticale, ex quibus alias pari methodo phaſes erui poſſunt a refractione non turbatae.

§. 14. Quoniam hac correctione momenti appulſus cornu ſequentis ad filum horizontale efficitur, vt vmbra a moa momento appulſus cornu praecedentis vsque ad appulſum ſequentis quaſi immota perſiſtat; manifeſtum eſt, quantitatem phaſeos reſpondere momento temporis, quo cornu praecedens ad filum horizontale appulit. Et hoc modo intelligi debent momenta temporis, quibus in recenſione obſeruationis Eclipſis praeſentis phaſes ſupra adſcriptae fuerunt.

§. 15. Praemiſſis hisce, ſumtisque nunc cornuum appulſibus ad filum horizontale tanquam correctis, ad ſemidiametri vmbrae inueſtigationem, quam conſtructio phaſium requirit, progredior. Methodus, qua in obſeruatione phaſium vſus ſum, ad determinationem quoque ſemidiametri vmbrae deducit, ſi praeter appulſus cornuum ad filum horizontale, momentum quoque temporis obſeruetur, quando peripheria vmbrae ad idem filum appellit.
Figura 3. Sint A, B cornua phaſis iuncta rectâ A B, A L B peripheria vmbrae tangens rectam D L E, quae filum horizontale repraeſentet. Ex A et B in D E demiſſae ſint perpendiculares A D, B E. Manifeſtum iam eſt, vi §. 5. interuallo temporis inter appulſum peripheriae vmbrae L ad filum horizontale et appulſum cornu praecedentis A ad idem filum, hoc cornu praecedens aſcendendo attolli per lineam A D; et eodem modo cornu ſequens B per lineam B E interuallo temporis inter appulſus peripheriae vmbrae et cornu ſequentis ad filum horizontale. Haec momenta appulſuum cornuum A, B, itidem iuxta §. 12. correcta intelligi debent, facta computatione a momento temporis, quo peripheria vmbrae appulit ad filum horizontale. Dantur ergo A D, B E expoſitae per

partes

partes temporis et relatae ad diametrum lunae per moram tranſitus eius per filum horizontale expreſſam. Datur praeterea ex iisdem obſeruatis linea D E inter perpendiculares A D, B E intercepta, vt infra §. 23. fuſius monſtrabo; vnde quaeſtio huc redit, vt ex data punctorum A, B, poſitione reſpectu lineae D E, inueniatur centrum C et radius A C circuli, qui per iſta puncta A, B, transeat et lineam D E tangat. Solutio haec eſt. Sit L punctum, in quo vmbra tetigit lineam D E. Si iſtud punctum L per D L vel L E ſciretur, darentur tria puncta, per quae circulus A L B tranſit, vnde per elem. geom. circulus poſitione et magnitudine daretur. Quaerenda igitur eſt D L. Iungantur A L, BL; et quia D E tangit circulum A L B in L per hyp. erit per 32 III. Elem: A B L $=$ D L A, L A B $=$ B L E. Iungatur L C; erit per 20. III. Elem:, A B L $= \frac{1}{2}$ A C L, L A B $=$ $\frac{1}{2}$ L C B. Ductis iam ex C perpendiculis C F, C G ad A L, L B, reſpectiue, erit A C F $= \frac{1}{2}$ A C L, et B C G $= \frac{1}{2}$ L C B, Hinc A C F ($= \frac{1}{2}$ A C L $=$ A B L) $=$ D L A, B C G ($= \frac{1}{2}$ L C B $=$ L A B) $=$ B L E; vnde cum ad F et D, G et E ſint recti; erunt triagula D L A, A C F; B L E, B C G, ſimilia, et A D: A L $=$ A F: A C, B E: B L $=$ B G: B C. Vocatis iam A D $= a$, B E $= b$, D E $= c$, D L $= x$, A C $=$ L C $=$ B C $= y$; fit L E $= c - x$, A L $= \sqrt{(a^2 + x^2)}$, A F $= \frac{1}{2}$ A L $= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + x^2)}$, B L $= \sqrt{(b^2 + (c-x)^2)}$, B G $= \frac{1}{2}$ B L $= \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 + (c-x)^2)}$. Prima analogia ſuppeditat $y = \frac{a^2 + x^2}{2a}$, ſecunda $y = \frac{b^2 + (c-x)^2}{2b}$; facta aequationum reductione poſitaque $m = \frac{ac}{a-b}$, prodit $x = m \pm \sqrt{(m^2 - mc + ab)}$. Inuenta x, dabitur et $y = \frac{a^2 + x^2}{2a}$ radius circuli, qui quaeritur.

 §. 16.

§. 16. Subſtitutis numeris ex obſeruationibus phaſium iuxta praecepta §. 15. inſtitutis, quas hic recenſere ſuperſedeo, deprehendi ſemidiametrum vmbrae ſummúm ad 37. minuta prima circuli maximi aſcendere, ex phaſibus diuerſis diuerſa ſemidiametri vmbrae quantitate reſultante. Reductio haec ſemidiametri vmbrae §. 15. inuentae ad partes circuli maximi inſtituitur ope diametri lunae horizontalis, quae in iisdem partibus dari debet, et ope rationis ſemidiametri lunae ad radium vmbrae ex §. 15. nota. Sic ex obſeruationibus nihil certi de magnitudine ſemidiametri vmbrae ſtatuere licet. Calculus ex Tab. Aſtron. iſtam 3. minutis primis et vltra maiorem prodit. Sed exactiorem quoque iſtius determinationem ex obſeruatione praeſentis Eclipſis non expectaui, vbi terminus vmbrae incertus omnes conatus dubios reddidit.

§. 17. Aliunde igitur petenda erat ſemidiameter vmbrae, vt phaſium determinationem inſtituere poſſem. Cum ſemidiameter vmbrae aequalis ſit differentiae inter parallaxin lunae horizontalem et ſemidiametrum Solis apparentem, neglecta parallaxi Solis horizontali; parallaxis autem horizontalis lunae cum diametro eius horizontali arctè connexa ſit; diametros ſolis et lunae per obſeruationem acquiſitas, quippe ad quas in obſeruatione Eclipſium ſemper attendi ſolet ac debet, contemplatus ſum, vt exinde ad ſemidiametrum vmbrae argumentari poſſem.

§. 18. Mora tranſitus diſci Solis per Meridianum die 8. Septembr. ex obſeruatione mea deprehenſa fuit 2′. 8¾″; facta reductione partium temporis ad partes diurni et inde ad partes circuli maximi, prodit diameter Solis 32′. 0″, praeciſe

praecise vt in Tabulis Ludouicianis extat. Diameter lunae duplici modo ex obseruatione habetur. Primo per micrometrum a Cl. *de L' Isle* mensurata paulo post culminationem lunae in altitudine eius circiter 22°, deprehenditur $30'. 17''$. cui respondet diameter lunae horizontalis $30'. 6''$. Deinde ex mora transitus disci lunaris per meridianum $= 2'. 4\frac{1}{2}''$, subtractis $4''$, quae motui lunae proprio in diurno ad plagas contrarias iis, ad quas luna fertur motu communi, directo, interea temporis, quo discus lunae meridianum traiecit, debentur; cognoscitur diameter lunae seu potius mora transitus eius motu proprio priuatae per meridianum $= 2'. 0\frac{1}{2}''$, cui in partibus diurni respondent $30'. 15''$, in partibus vero circuli maximi $29'. 59''$, facta scilicet reductione, ope declinationis lunae visae $7^\circ. 44'$. ex altitudine centri lunae meridiana acquisitae; vnde diameter lunae horizontalis prodit $29'. 48''$, qua ab eadem per Micrometrum determinata differt $18''$ in defectu. Si media sumatur inter vtramque, euincitur diameter lunae horizontalis $29'. 57''$. quam pro vera diametro eo libentius habeo, quo certior sum, in mora transitus disci lunaris per meridianum $\frac{1}{4}$ vnius secundi temporis in defectu vix peccatum fuisse. Tabulae Ludouicianae in Eclipsi diametrum lunae horizontalem $30'. 1''$. assignant, parum proinde ab ista diuersam, quam obseruatio culminationis lunae 4 horas et vltra ante Eclipsin exhibuit. Consentientibus sic calculo et obseruatione circa diametrum Solis lunaeque diametrum horizontalem, quantitates parallaxeos lunae horizontalis pariter ac semidiametri vmbrae ope Tabularum earundem statuere non dubito, ac si ex obseruatione ipsa habeantur. Sumam ergo ex Tabulis Ludouicianis semidiametrum

trum vmbrae deductum 40′ 33″; diametrum vero lunae horizontalem adhibebo 30′. 0″.

§. 19. His iam determinatis de constructione phasium §. §. 5. 10. nihil amplius monere restat, quam quod in applicatione semidiametri vmbrae ad constructionem phaseos, magnitudo eius reducatur ad partes eas, quibus discus lunae in schemate expressus est, v. c. in casu §. 5. inferendo vt 30′. 0″ ad moram transitus lunae, per filum horizontale ita 40′. 33″. ad quaesitam semidiametri vmbrae magnitudinem; vel in casu §. 10. inferendo, vt 30′. 0″ ad moram transitus lunae per horarium, ita 40′. 33″ ad quaesitum vmbrae semidiametrum.

§. 20. Iuuat nunc exponere methodum, qua per calculum in earundem phasium quantitates inquisiui, vt de illis non solum vtroque modo, et per constructionem et per calculum certior sim, sed viam quoque sternam, ope datorum quorundam calculo prius eliciendorum perueniendi ad reliquas deductiones ex obseruatione praesentis Eclipsis instituendas.

Figura 2. §. 21. Positis iisdem in fig. 2. quae supra §. 7. seqq. posuimus, inuestigemus ope calculi quantitatem phaseos AxB, hoc est rationem $Qx : Qq$. Hunc in finem per cornua A, B, ductae intelligantur chordae A G, B T ad H S parallelae, ad quas perpendicularis sit lunae diameter S D R ad lineam verticalem V P parallela, bisecans chordas respectiue in E, L; secans autem rectam A B cornua iungentem in M. Diameter lunae S R exprimatur per partes temporis morae transitus eius per filum

filum horizontale, quae per §. 9. datur. Licet enim supra § 7. in constructione schematis (fig. 2) diameter lunae expressa fuerit per moram transitus eius per horarium, exinde tamen nullus error timendus, cum lineae schemati inscriptae eandem ad diametrum SR rationem retinent, per quascunque partes diameter ista exprimatur. Diametrum lunae per moram transitus eius per filum horizontale hanc ob causam requiro, vt linearum SE, SL ratio ad diametrum immediate ex obseruatione habeatur. SE scilicet datur per interuallum temporis inter appulsus limbi lunae S et cornu praecedentis A ad filum horizontale; SL vero per interuallum temporis inter appulsus limbi lunae S et cornu sequentis B ad idem filum. Datis hisce habentur $EL = SL - SE$, $ER = SR - SE$, $LR = SR - SL$, $AE = \sqrt{(SE \times ER)}$, $LB = \sqrt{(SL \times LR)}$. Iam ex similitudine triangulorum AEM, BLM, fit $AE + BL : AE = EL : EM$; vnde EM datur et proinde $AM = \sqrt{(AE^2 + EM^2)}$. Porro datur $ML = EL - EM$ et $BM = \sqrt{(BL^2 + ML^2)}$, quare tandem habetur $AB = AM + BM$, et $AF = \frac{1}{2} AB$. Requiritur nunc semidiameter vmbrae AZ vel Zx, quae quidem per methodum §. 15. statim in ista mensura datur, qua in praesenti negotio diameter lunae et omnes reliquae lineae exhibentur; sed cum per §. 18 sumta fuerit vmbrae semidiameter ex Tab. astron. per partes circuli maximi expressa, haec iuxta §. 19. reducta intelligi debet ad partes eius mensurae, qua in praesenti calculo vtimur. Datis sic AZ, AF, in triangulo AFZ ad F rectangulo dabitur $FZ = \sqrt{(AZ^2 - AF^2)}$ et $Fx = Zx$ (vel AZ) $- FZ$. Ex praecedentibus iam dantur LB, MB, EM,

nec

nec non $DE = SE - SD$ (ſemidiam. lunae); vnde dabitur $DM = DE + EM$. Ex ſimilitudine vero triangulorum MLB, MDF, inferendo $MB : BL = DM : DF$ dabitur DF et $Dx = DF - Fx$, tandemque $Qx = DQ - Dx$, quantitas phaſeos, quae quaeritur, expreſſa per partes easdem, quibus diameter lunae hactenus expoſita fuit; vnde inferendo, vt mora tranſitus diſci lunaris per filum horizontale, ad quantitatem phaſeos inuentam, ita 12 digiti Ecliptici ad quartum proportionalem, acquiritur quantitas phaſeos in digitis eclipticis, eorumque ſubdiuiſionibus.

§. 22. Hac methodo determinaui quantitates phaſium ſecundae et quartae; circa phaſes autem primam et tertiam, vtpote dubias, ſimplici conſtructione contentus fui. Phaſium quantitates ipſas in digitis eclipticis expreſſas ſupra in recenſione obſeruationis expoſui.

Figura 3. §. 23. Per computum hactenus traditum peruenitur etiam ad quantitatem lineae DE (fig. 3,) quam §. 15 datam ſuppoſui. Per A cornu praecedens (fig: 3) ducta ſit Ab parallela ad DE, quae inter parallelas AD, BE contenta aequalis erit ipſi DE; Bb autem reſpondebit interuallo temporis inter appulſus cornuum ad filum horizontale, quod DE repraeſentat, et eadem eſt cum recta EL (fig: 2). Hinc in triangulo ABb ad b rectangulo datur Bb, et AB diſtantia cornuum §. 21. vnde dabitur $Ab = DE = \sqrt{(AB^2 - Bb^2)}$.

§. 24. Phaſium determinationem prolixe hactenus expoſitam ad vſum tandem traducamus. Vſus iſte verſatur

ſatur circa determinationem temporis initii, finis Eclipſis, obſcurationis maximae, oppoſitionis ſolis et lunae; horarii lunae a ſole, latitudinis lunae in oppoſitione, diſtantiae centrorum minimae, quantitatis eclipſis, inclinationis orbitae lunae viſae et verae ad circulum latitudinis vel Eclipticam, diſtantiae lunae a nodo, loci lunae in oppoſitione, et quae ſunt huius generis alia. Finis eſt ope phaſium ad haſce deductiones perueniendi, adhibitis ſcilicet centrorum lunae et vmbrae diſtantiis ex quantitate phaſis cuiuslibet petendis. Diſtantia centrorum lunae et vmbrae DZ aequalis eſt ſummae ſemidiametrorum vmbrae Figura 2. Zx et lunae DQ, demta quantitate phaſeos Qx. Datis itaque ſemidiametris vmbrae et lunae, et quantitate phaſeos, datur diſtantia centrorum lunae et vmbrae.

§. 25. His praemiſſis, ſit fig: 4 ſchema eclipſis praeſentis ſitu inuerſo, vt cum deſignatis ex obſeruatione Figura 4. phaſibus eó melius conferri poſſit, repraeſentatum. GQK referat vmbram terrae, C centrum eius, CN latitudinem lunae meridionalem in ☍ ſolis et lunae, NI orbitam lunae viſam, CH perpendicularis ad NI diſtantiam centrorum minimam. Lunae centro ab I verſus N moto diſcus lunae ſucceſſiue immergatur vmbrae terreſtri, easque phaſes ſubeat, quas ex obſeruatione acquiſiuimus. Ponamus centrum lunae fuiſſe in A tempore phaſeos primae obſeruatae, in B tempore ſecundae, in D momento tertiae. Iunctis AC, BC, DC, erit AC diſtantia centrorum lunae et vmbrae in prima phaſi, BC in ſecunda, DC in tertia; quae diſtantiae vi §. 24. dantur. A prima phaſi vsque ad ſecundam centrum lunae ſpatium AB,

 a ſecunda

a ſecunda vsque ad tertiam phaſin ſpatium BD peragrauit; vnde cum motus lunae durante Eclipſi vniformis ſupponi poſſit, dabitur ratio linearum AB, BD, eadem cum ratione interuallorum temporis inter phaſin primam et ſecundam, ſecundam et tertiam.

§. 26. Opera igitur danda eſt, vt ex AC, BC, DC magnitudine datis et ratione $AB:BD$ inueniantur, CH diſtantia centrorum minima, ſeu altitudo communis triangulorum ACB, BCD; DH diſtantia centri lunae a tertia phaſi vsque ad obſcurationem maximam; et reliqua §. 14. memorata, quae inde pendent. Centro C radiis

Figura 5. CD, CB, deſcriptis circulis concentricis DEL, BFM, problema huc redit: *Datis per radios DC, BC, duobus circulis concentricis DEL, BFM, ex puncto A extra iſtos per diſtantiam CA dato, ducere ſecantem ABD, ſic vt portiones eius, AB, AD, ſint in data ratione.*

Solutio. Ex A ad circulos BFM, DEL ductae ſint tangentes AM, AL, et ad iſtas ex centro C normales CM, CL; et manifeſtum eſt dari $AM = \sqrt{(AC^2 - CM^2)} = \sqrt{(AC^2 - BC^2)}$, et $AL = \sqrt{(AC^2 - CL^2)} = \sqrt{(AC^2 - DC^2)}$. Producta AD ſecet circulos ex altera parte in d, b; ſitque ad AD productam ex centro C perpendicularis CH, quae chordas Bb, Dd biſecet in H, vt ſit $Bb = 2BH$, $Dd = 2DH$. Ponatur iam $AL = g$, $AM = f$, $AB:BD = m:n$, $AB = x$, $BH = y$; eritque $AD:AB = m+n:m$, $AD = \frac{(m+n)x}{m}$, $BD = \frac{nx}{m}$, $DH = y - \frac{nx}{m}$. Per 36. III. Elem: eſt $AM^2 = AB \times Ab = AB \times (AB + 2BH)$, $AL^2 = AD \times Ad = AD \times (AD + 2DH)$.

= DH). Subſtitutis expreſſionibus algebraicis ex aequatione prima fit $f^2 = (x + 2y) \times x$, è ſecunda $g^2 = (\frac{(m+n) \times x}{m} + 2y - \frac{2nx}{m}) \times \frac{(m+n) \times x}{m}$; factaque aequationum reductione fit $x = V(\frac{m}{n}(f^2 - \frac{m}{m+n} g^2))$. Inuentâ vero x, habetur $y = \frac{f^2 - x^2}{2x}$.

§. 27. Datis AC, BC, DC, diſtantiis in partibus circuli maximi, prouti per §. §. 18. 24. facillime inueniri poſſunt; in iisdem quoque dabitur recta AB; et cum habeatur interuallum temporis inter phaſin primam in A, et ſecundam in B, inferendo, vt hoc interuallum temporis ad vnam horam, ita AB inuenta ad quartum, dabitur *horarius lunae in orbita viſa.* Ope iſtius horarii ſi inuenta BH conuertatur in tempus, idque momento temporis phaſeos 2.dae in B addatur, inuenitur *momentum obſcurationis maximae*, centro lunae in H verſante. Ex datis BH, BC in partibus circuli maximi, datur in iisdem *diſtantia centrorum minima* $CH = V(BC^2 - BH^2)$ et proinde pars diametri lunae obſcurata in obſcuratione maxima aequalis ſummae ſemidiametrorum lunae et vmbrae demta centrorum diſtantia minima; quae pars ſi ope diametri lunae ad digitos eclipticos reducatur, *quantitas Eclipſis* in iisdem habetur. In initio et fine Eclipſis diſtantia centrorum lunae et vmbrae aequalis eſt ſummae ſemidiametrorum vmbrae et lunae = IC, ſi v. g. in I centrum lunae in initio Eclipſis ponatur; vnde in triangulo ICH ad H rectangulo ex datis IC, CH, inuenitur $IH = V(IC^2 - CH^2)$, quae ope horarii lunae in orbita viſa ad partes temporis reducta manifeſtat interuallum temporis inter obſcurationem maximam et initium vel finem eclipſeos; quod ſi ſubducendo Figura 4.

vel addendo applicetur momento obſcurationis maximae, acquiritur *tempus initii* vel *finis eclipſis*.

§. 28. Methodum hanc ſubſtitutis ex obſeruatione numeris perſequi quidem tentaui, ſed ſucceſſu minus felici. Diſtantiae centrorum, quae requiruntur, omnes non admodum certae ſunt, et quod maximum interualla temporum, quae rationem AB:BD determinant, tam exigua, vt, ſi minimus error vel in diſtantiis AC, BC, DC, vel ratione AB:BD commiſſus fuerit, iſte in determinatione poſitionis rectae AD productae admodum notabilis euadat. Miſſo igitur hoc negotio, rem aliter tentaui, aſſumto ex Tab. aſtron. motu horario lunae in orbita viſa. Cum enim de diſtantiis centrorum lunae et vmbrae in phaſi 2. et 4. certior eſſem, poſito centro lunae in A momento phaſeos 2, in D tempore phaſeos 4, interuallum temporis inter phaſin 2. et 4. quo luna ſpatium AD peragrauit, ope horarii lunae in orbita viſa reduxi ad partes circuli maximi, vt ſpatium AD in eadem menſura habeatur, in qua dantur AC, DC, diſtantiae centrorum in 2. et 4. phaſi. Hoc enim pacto trianguli ACD tria dantur latera, e quibus altitudo eius CH, diſtantia centrorum minima, quaeritur; reliqua vero vt ante §. 27. determinantur. Numeris ſubſtitutis negotium quidem melius, ac ante, ſucceſſit, ob latus AD tamen valde exiguum determinatio poſitionis ipſius AD productae adhuc notabiliter incerta permanſit, ſi vel diſtantiae AC, DC, vel latus AD paululum magnitudine variarentur. Vtraque methodus exactiorem promittit executionem, ſi ex obſeruatione habeantur diſtantiae centrorum vmbrae et lunae ante et poſt obſcurationem maximam; quales vero praeſens obſeruatio non ſuppeditat. §. 29.

§. 29. Methodus adhuc alia superest recensenda, quam pro praesentis negotii conditione successu satis felici sum prosecutus. In singulis scilicet phasibus v. g. centro lunae versante in A, attendi non solum ad distantiam centrorum lunae et vmbrae AC, sed simul quoque ad angulum ACG, quem distantia dicta efficit cum Ecliptica. Angulus iste ex obseruatione tum per constructionem tum per calculum phaseos §. §. 11. 21. habetur. Datur enim positio centri vmbrae Z respectu diurni KD per centrum lunae D transeuntis. Ex Z ad diurnum KD ducta normalis ZN circulum declinationis centri vmbrae repraesentat. Ex dato phaseos obseruatae tempore datur locus solis in Ecliptica, et proinde locus centri vmbrae ipsi oppositus, ex quo dato angulus Eclipticae cum meridiano seu circulo declinationis per Tab. astron. statim cognoscitur. Error sensibilis non euadit, si pro omnibus phasibus adhibeatur angulus Eclipticae cum meridiano, qui loco centri vmbrae in oppositione solis et lunae respondet. Si igitur angulus NZO aequalis fiat inuento angulo Eclipticae cum circulo declinationis, habebitur etiam DZO angulus, quem linea centra lunae et vmbrae iungens cum Ecliptica format. Per calculum idem angulus DZO facile inuenitur. Ex §. 21. enim dantur DM, DF, DI, DP. Igitur in triangulo DMF inferendo DM: DF = Sinus totus : Sin. DMF, datur DMF = PDZ Et in triangulo PDI inferendo DI : DP = Sinus totus : Sin. PID, datur PID, eiusque complementum ad rectum PDI, vnde dabitur IDZ = PDI + PDZ, a quo si subtrahatur rectus, habetur DZN in triangulo DNZ ad N rectangulo; quare cum detur OZN angulus Eclipticae

Figura 4.

Figura 2.

cum circulo declinationis, habebitur etiam quaesitus DZO = OZN − DZN. Notandum hic, tum quoad constructionem, tum quoad calculum, quod, cum NDK sit diurnus apparens §. 7. angulo IDZ correctio aliqua applicari debeat petenda ex mutata interea lunae declinatione, dum centrum lunae spatium DI in diurno apparenti confecit.

Figura 4. §. 30. Sit iam in data phasi centrum lunae in A, distantia centrorum lunae et vmbrae AC; et per §. 29. dabitur angulus ACG eiusque complementum ad rectum ACN. Sumto igitur ex Tab: astron. angulo ANC, Inclinationis orbitae visae AN cum circulo latitudinis NC, in triangulo ACN, ex datis angulis ACN, ANC, et latere AC inueniuntur, CN *latitudo lunae in oppositione*, et AN distantia centri lunae in data phasi a loco oppositionis, quae AN si ope horarii lunae in orbita visa ex Tab: astron. sumti conuertatur in tempus, idque tempori phaseos in A addatur, *momentum oppositionis solis et lunae* prodit. Sit IC aequalis summae semidiametrorum lunae et vmbrae, eritque initio eclipseos centrum lunae in I. Ex resolutione trianguli INC, in quo latera NC, IC et angulus INC orbitae visae cum circulo latitudinis dantur, innotescit IN, quae si ope horarii lunae in orbita visa in tempus conuertatur, idque a tempore oppositionis in N subducatur, remanet *momentum initii eclipsis* in I.

§. 31. In eadem momenta per constructionem schematis inquisiui. Lineam AC in data phasi inclinaui versus Eclipticam CG in angulo ACG per §. 29 dato. Facta AC = distantiae centrorum lunae et vmbrae in data phasi

phasi §. 11. acquisitae, per A ad CN duxi lineam AN inclinatam ad NC in angulo aequali inclinationi orbitae visae ad circulum latitudinis ex Tab. astron. depromtae. Hoc facto innotuerunt NC *latitudo lunae in oppositione*, AN, AI, (si scilicet interuallo IC aequali summae semidiametrorum lunae et vmbrae, ex C recta NA producta intersecetur in I), e quibus AN, AI ope horarii lunae in orbita visa instar scalae in 60. minuta temporis diuisi, et momento temporis phasis in A, facile eruuntur *momenta oppositionis et initii Eclipsis.*

§. 32. Factis vtroque modo circa phases 2, 3, 4, experimentis, deductiones quidem inter se dissentientes deprehendi, quales plerumque ex eiusmodi obseruationum genere prodire solent, qualesque in praesenti negotio expectaui. Interim tamen praeter spem in determinatione initii Eclipsis et latitudinis lunae in oppositione consensum sufficientem deprehendi, discrepantia maxima circa initium non nisi ad 30. secunda temporis, circa latitudinem lunae in oppositione ad 20. secunda circuli maximi assurgente. Initium, e deductis medium, contigit $16^h. 9'. 25''$ tempore vero; latitudo lunae in oppositione, e deductis media, $40'. 40''$.

§. 33. Positis hisce tanquam veris fundamenti loco, reliqua eclipseos momenta deduxi, vt sequuntur. Nimirum in triangulo ICN ex datis, IC = summae semidiametrorum lunae et vmbrae, NC latitudine lunae in oppositione, INC inclinatione orbitae visae ad circulum latitudinis, inuentam IN ope horarii lunae in orbita visa reduxi ad tempus, eoque ad tempus initii §. 32. positum addito, innotuit Figura 4.

innotuit *tempus oppositionis.* Deinde in triangulo HNC, ad H rectangulo ex datis NC, HNC, eiusque complemento ad rectum HCN, inuestigaui HC *distantiam centrorum minimam*, et inde iuxta §. 27. *quantitatem Eclipsis* in digitis eclipticis. Denique in eodem triangulo inuenta HN, eaque ad tempus reducta, innotuit differentia temporis inter obscurationem maximam et oppositionem, adeoque et ipsum *tempus obscurationis maximae.*

MOMENTA HVIVS CALCVLI
sunt:

EX COMPARATIONE OBSERVATIONVM
iuxta §. 32.

Initium Eclipsis	$16^h. \ 9'. \ 25''.$
Latitudo lunae in ☍	$40'. \ 40''.$

Ex Tabulis Ludouicianis.

Inclinatio orbitae visae lunae ad circulum latitudinis seu	INC	=	$84°. \ 35'.$
Complementum eius	HCN	=	$5°. \ 25'.$
Motus horarius lunae in orbita visa		=	$28'. \ 13''.$
Semidiameter vmbrae		=	40. 33
Semidiameter lunae consentiente obseruatione		=	15. 0
Summa semidiametrorum lunae et vmbrae		=	55. 33.

Ex

Ex Deductionibus iuxta §. 33.

Tempus oppoſitionis Solis et Lunae.	17^h.	38'.	25".
Tempus obſcurationis maximae	17.	30.	15
Diſtantia centrorum minima.		40'.	29".
Quantitas Eclipſis	5. dig	59'.	

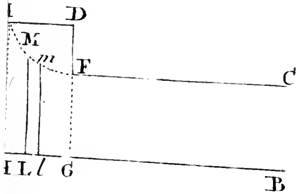
§. 34. Si initium ex obſeruationibus deductum §. 32. conferatur cum n. 4 obſeruationis Eclipſis noſtrae, patet, momentum temporis, quo limbi lunaris diſparitio per Tubum Newtonianum obſeruata fuit, apprime conſentire cum tempore initii deducti. Tempus autem initii pariter ac oppoſitionis Solis et Lunae ex obſeruationibus deductum, facta eius comparatione cum calculis pro praeſenti eclipſi inſtitutis, deprehenditur ſemper anteuertere id, quod ex calculo elicitum fuit. Sequens tabula manifeſtat diſcrepantiam momentorum ex obſeruatione praeſenti et calculis diuerſis deductorum.

	Initium	*Tempus obſcur: maxim:*	*Tempus* ☍	*Latitudo* ☽ *in* ☍
Ex obſeruatione	$16^h.9'.25''$	$17^h.30'.15''$	$17^h.38'.25''$	$40'.40''$
Ex calculo Cl. Winsheimii	16. 21. 0	— — —	17. 47. 37.	41. 1
Ex Elem: P. Grammatici	16^h. 15. 0	— — —	17. 42. 0	40. 49.
Ex Ephem: Manfredi	16^h. 13 0	17. 32. 0	— — —	— —
Ex Ephemer: Ghisleri	16. 33. 0	17. 49. 0	— — —	— —

§. 35. Calculus Cl. Winsheimii iuxta Tabulas Ludouicianas institutus est, adhibitis omnibus, quae in recentioribus Tabularum Ludouicianarum editionibus annotatae fuerunt, correctionibus. Idem calculus, elementa, quae requirebantur, in deductionibus meis suppeditauit. Ex Elementis à P. Grammatici in diss. de Solis et Lunae Eclipsibus, computatis, prouti ista ad Meridianum Vraniburgensem Rostius in Astronomo sincero suo reduxit, constructione schematis initium deduxi. Meridianorum autem differentiam pro instituendis temporum reductionibus statui, Parisiensis et Petroburgensis $1^h. 52'$. Vraniburgensis et Petropolitani $1^h. 10'$. Bononiensis et Petropolitani $1^h. 16'$.

Emendanda.

Pag. 10. l. 5. §. 1. BC lege GC. pag. 30. l. 5. a fin. R T lege R V. pag. 72. l. 1. in margine lege Fig. 5. pag. 149. l. 6. aequalis lege *aequale*. ead. pag. l. 8. AC. AD. lege AC. BD. pag. 209. §. 4. trilineam lege *trilineum*. ead. pag. l. 12. *bcOa* lege *cbOa*. ead. pag. §. 5. l. 4. $ad = ab = b$ lege $ad = db = b$. ead. pag. et eod. §. l. 5. AD = AB = B lege AD = DB = B. pag. 218. l. 9. *ed* lege *cd*. ead. pag. l. 10. *mfa*B lege *mf*AB. pag. 282. l. 6. ponatur in margine Fig. 11. pag. 375. l. 21. Verucho l. *Vkrucho*. p. 376. l. 23. con l. *contra*. ib. in not. Arriauus l. *Arrianus*. p. 377. Veruchi l. *Vkruchi*. p. 380. l. 19. ἔνθοδεν l. ἔνδοθεν. pag. 383. l. 24. αὐλῶ νκραλυμένην l. αὐλῶν κραλυμένην. p. 408. l. 5. N. P. l. M. P. p. 409. in notis Zoraram lege *Zonaram*.



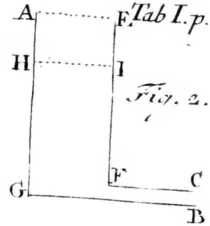
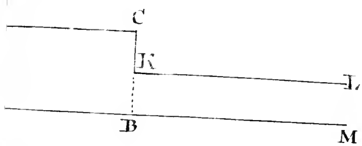


Fig. 2.



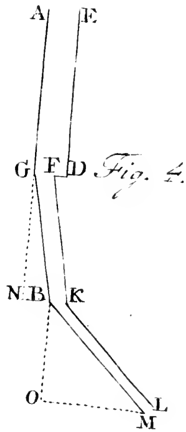
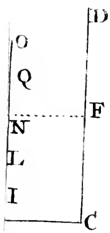


Fig. 4.



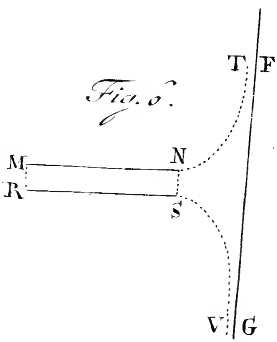


Fig. 6.

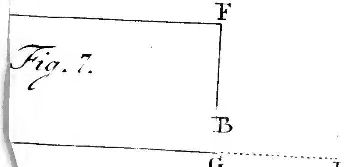


Fig. 7.

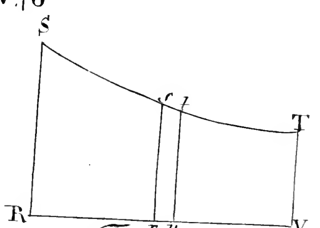


Fig. 8.

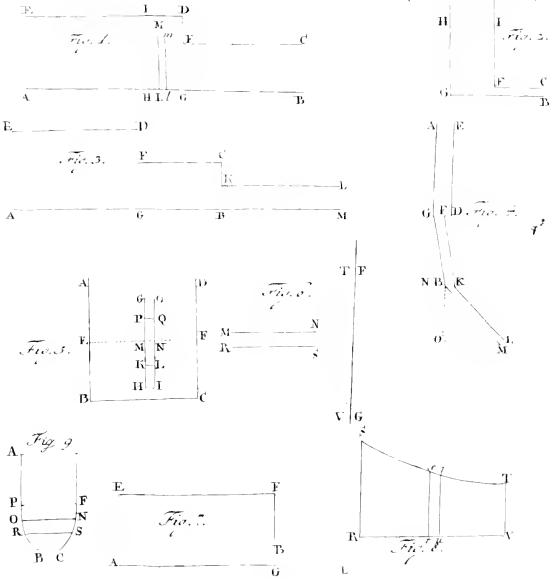
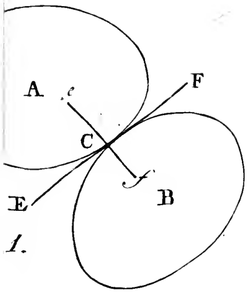


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9



1.

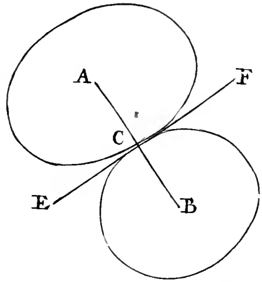


Fig. 2.

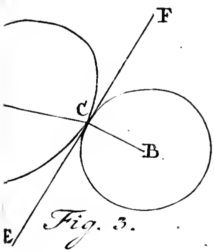


Fig. 3.

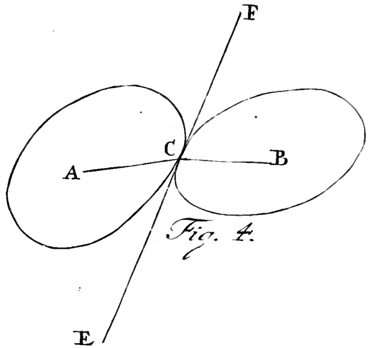


Fig. 4.

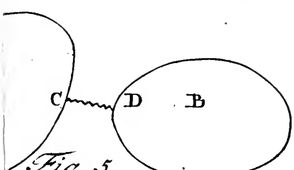


Fig. 5.

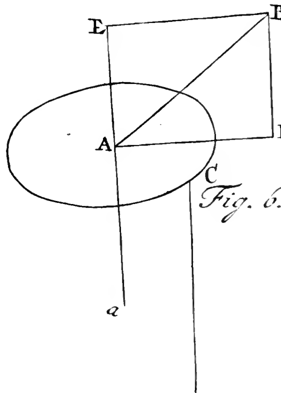


Fig. 6.

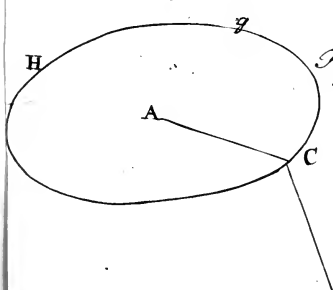


Fig. 7.

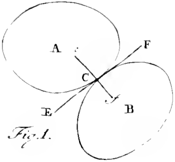


Fig. 1.

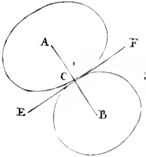


Fig. 2.

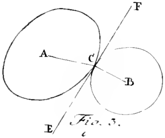


Fig. 3.

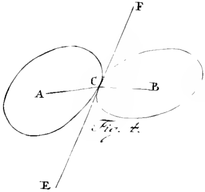


Fig. 4.

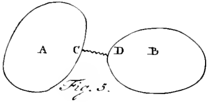


Fig. 5.

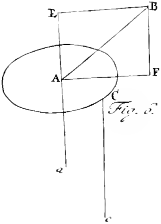


Fig. 6.

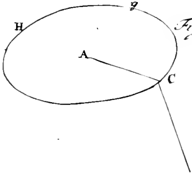
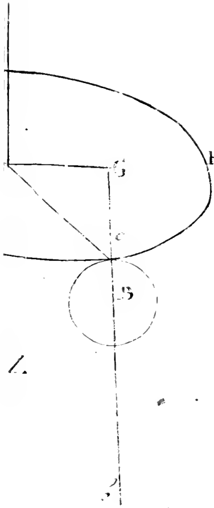


Fig. 7.



1.

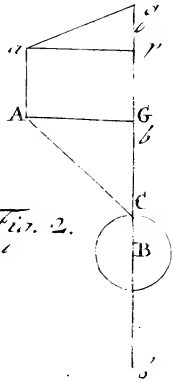


Fig. 2.

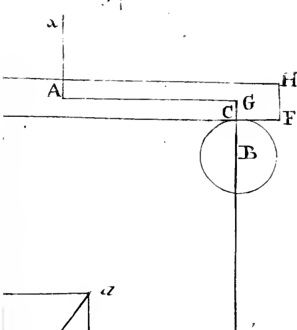
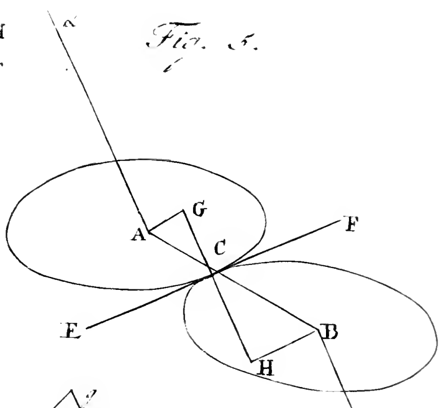


Fig. 3.



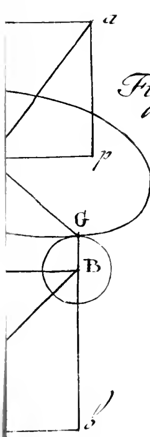


Fig. 4.

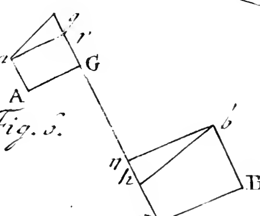


Fig. 5.

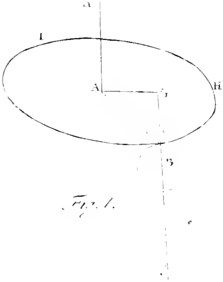


Fig. 1.

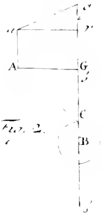


Fig. 2.

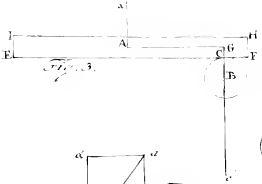


Fig. 3.

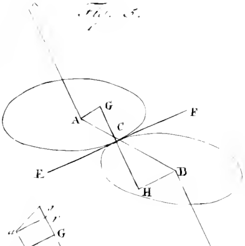


Fig. 5.

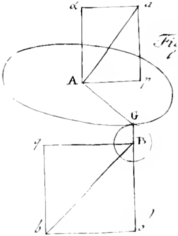


Fig. 4.

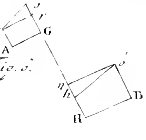


Fig. 5.

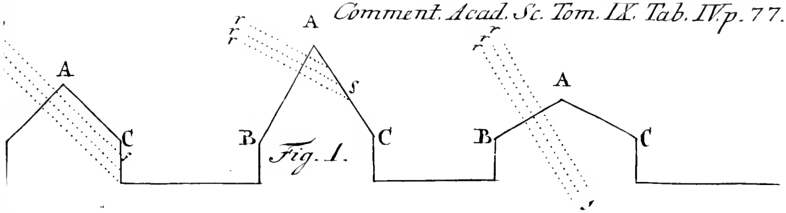


Fig. 1.

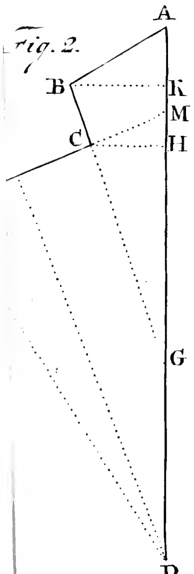


Fig. 2.

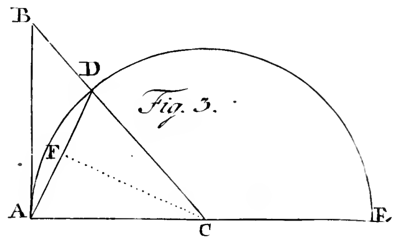


Fig. 3.

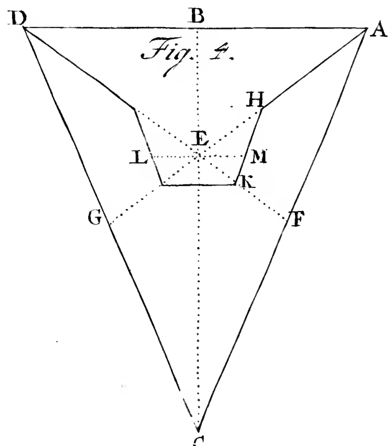


Fig. 4.

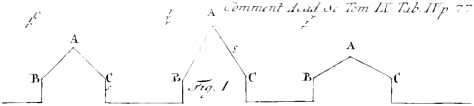


Fig. 1

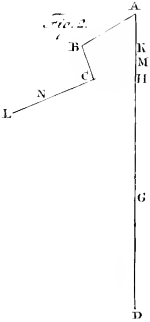


Fig. 2

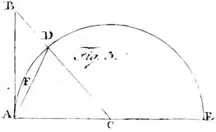


Fig. 3

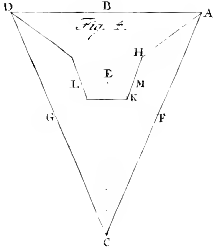
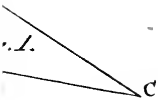


Fig. 4



..1.

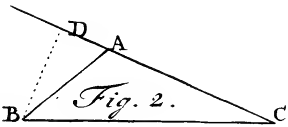


Fig. 2.

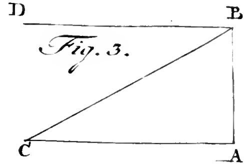
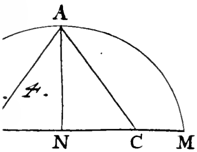


Fig. 3.



. 4.

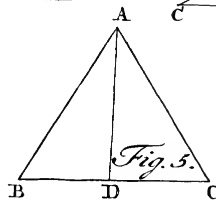


Fig. 5.

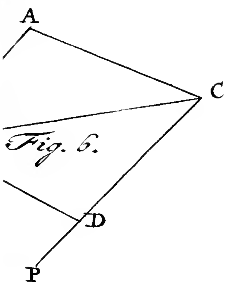


Fig. 6.

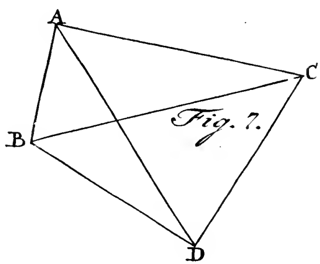


Fig. 7.

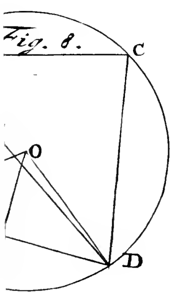


Fig. 8.

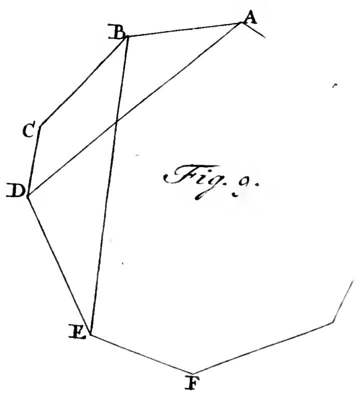
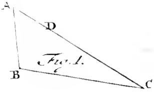
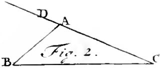
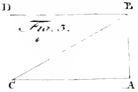
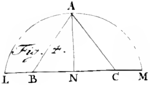


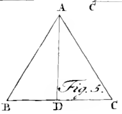
Fig. 9.

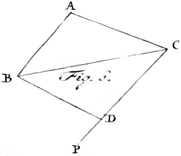

A
D
Fig. 1.
B
C

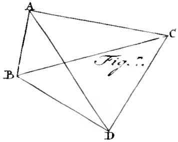

D
A
Fig. 2.
B
C


D
B
Fig. 3.
C
A


A
Fig. 4.
L
B
N
C
M


A
Fig. 5.
B
D
C


A
C
B
Fig. 6.
D
P


A
C
Fig. 7.
B
D

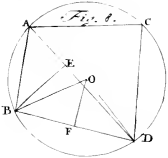
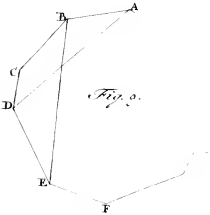


Fig. 8.
A
C
E
O
B
F
D


B
A
C
D
Fig. 9.
E
F

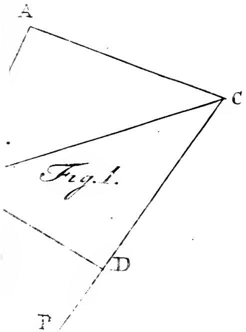


Fig. 1.

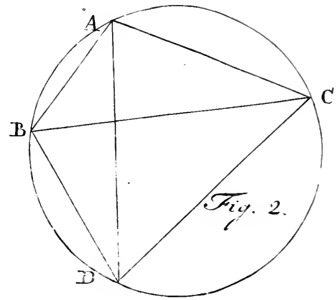


Fig. 2.

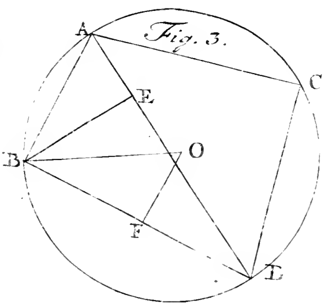


Fig. 3.

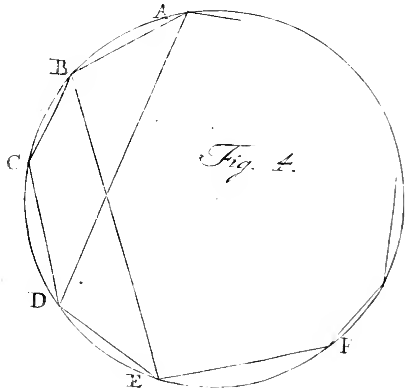


Fig. 4.

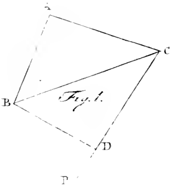


Fig. 1.

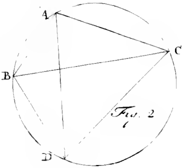


Fig. 2

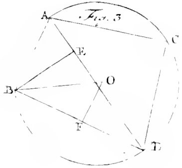


Fig. 3

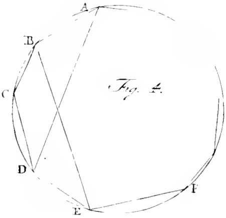
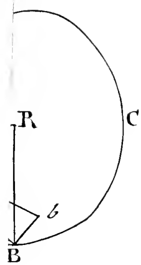


Fig. 4.



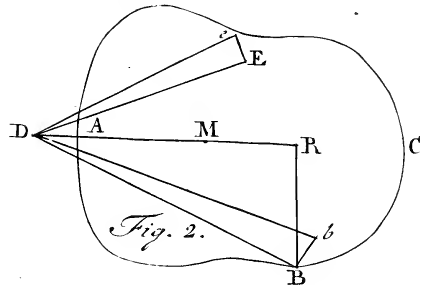
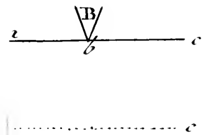


Fig. 2.



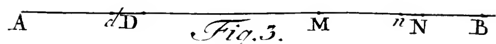


Fig. 3.

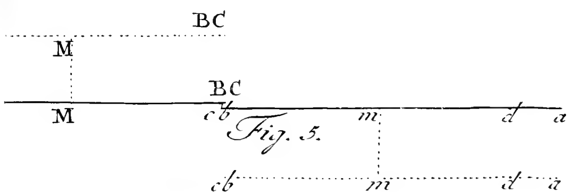


Fig. 5.

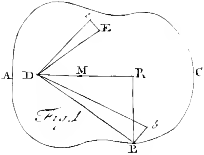


Fig. 1

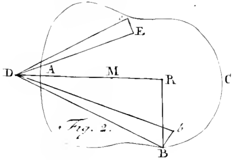


Fig. 2.

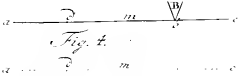


Fig. 4.

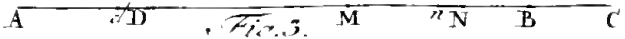


Fig. 3.

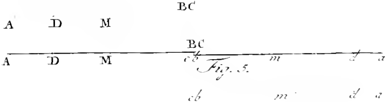
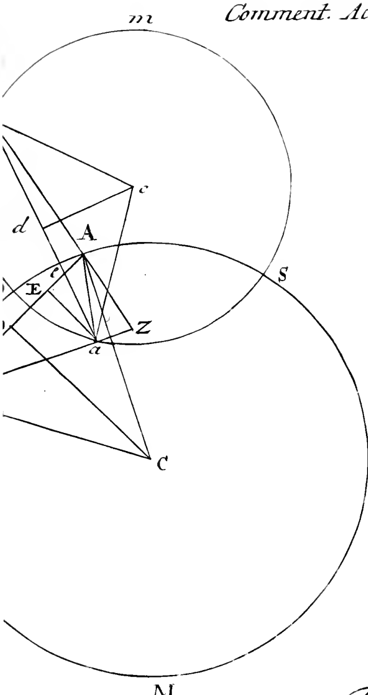


Fig. 5.



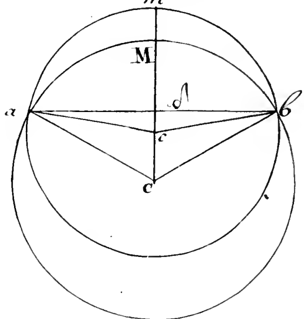


Fig. 2.

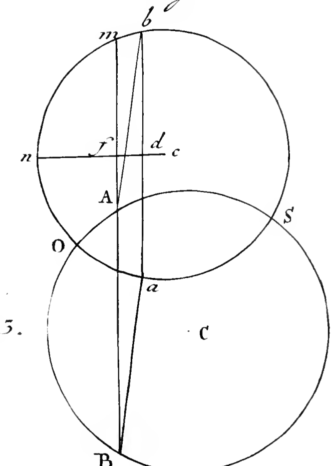


Fig. 3.

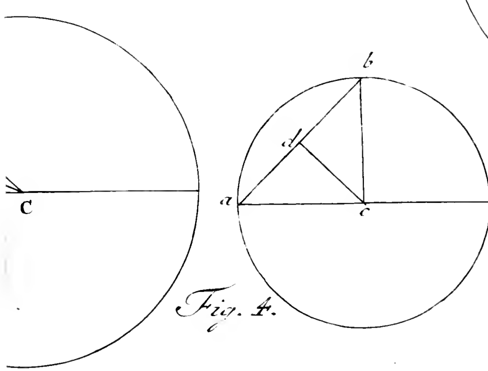


Fig. 4.

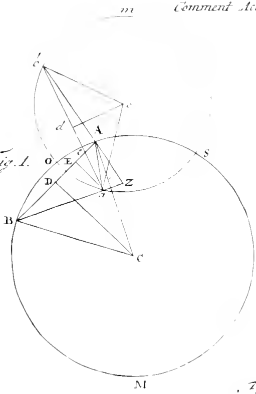


Fig. 1.

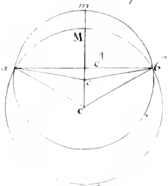


Fig. 2.

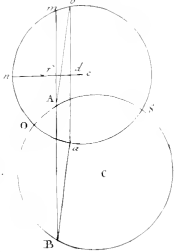


Fig. 3.

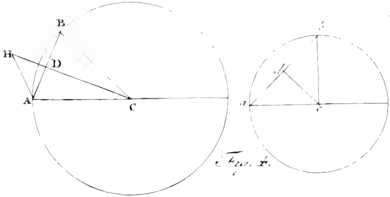
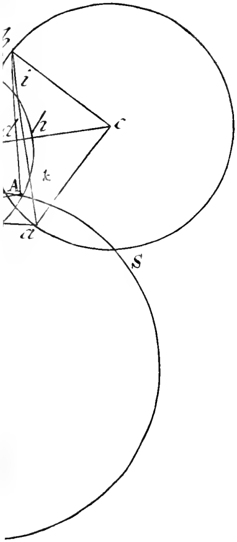


Fig. 4.



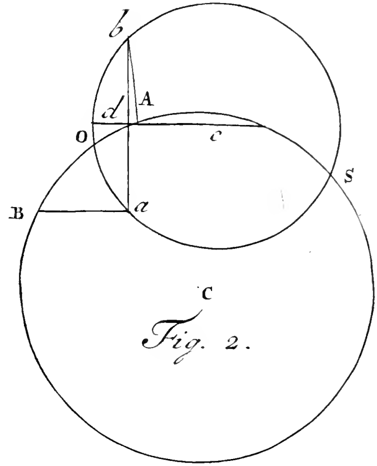
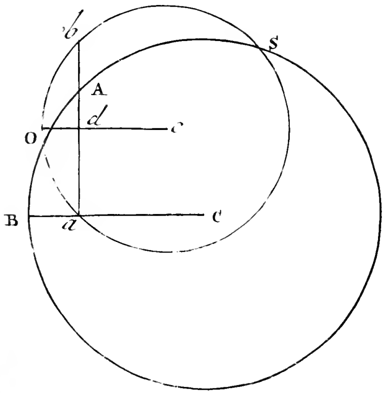


Fig. 2.



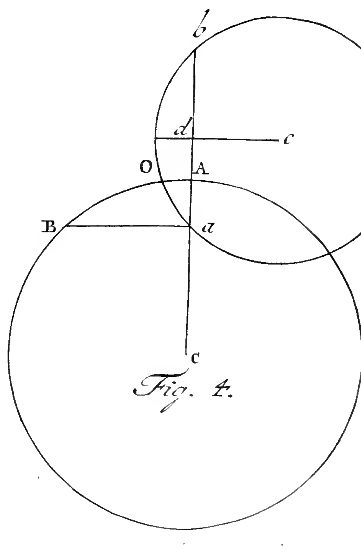
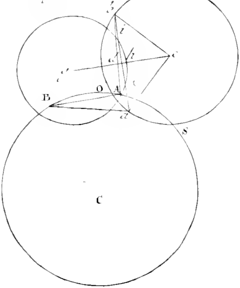


Fig. 4.

Fig. 1.



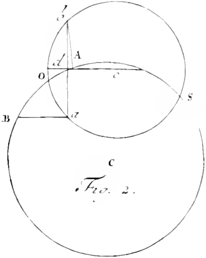


Fig. 2.

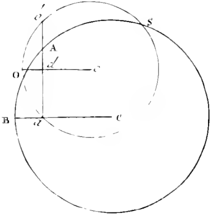


Fig. 3.

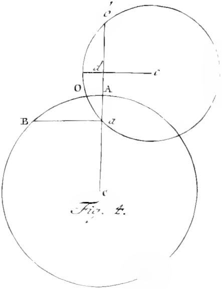


Fig. 4.

Fig. 2.

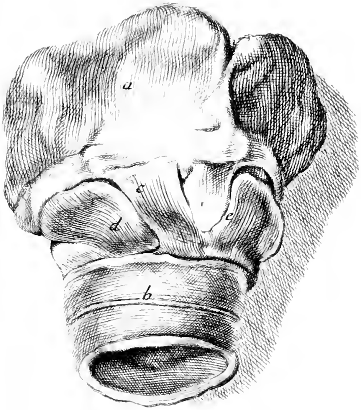


Fig. 3

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 1.

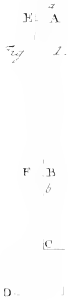


Fig. 2.

Fig. 3

Fig. 4

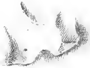


Fig. 5

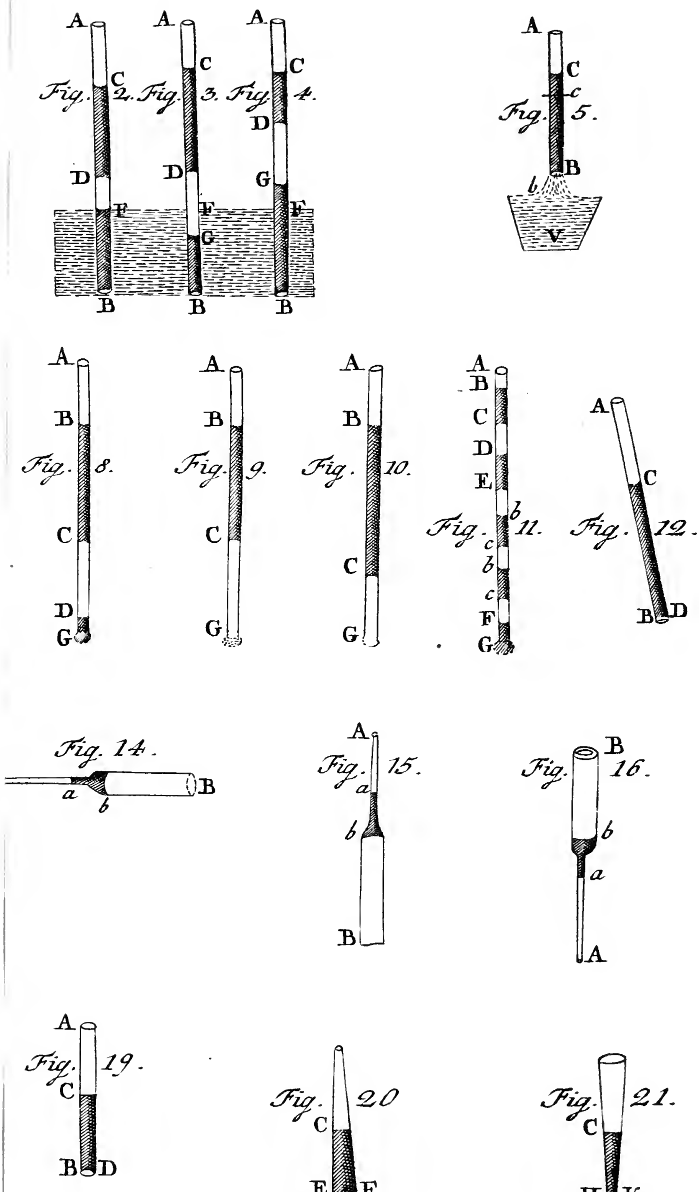


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 19.
Fig. 20
Fig. 21.
A
B
C
D
E
F
G
H
K
V
a
b
c

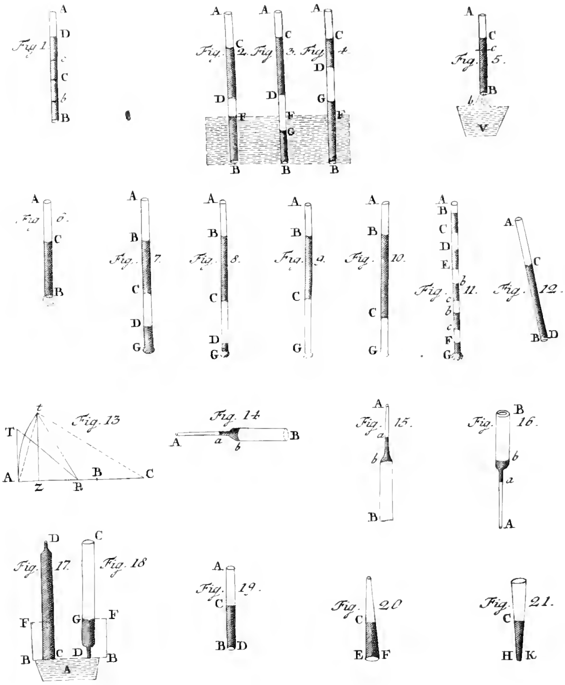
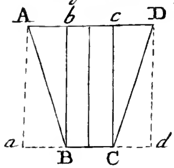


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18
Fig. 19.
Fig. 20
Fig. 21.

Fig. 24.



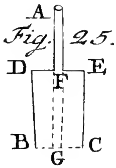


Fig. 25.

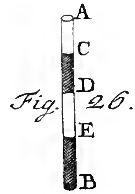


Fig. 26.

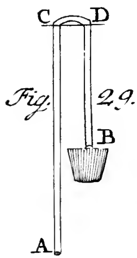


Fig. 29.

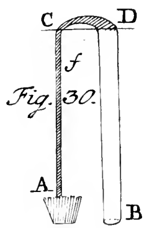


Fig. 30.

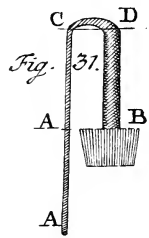


Fig. 31.

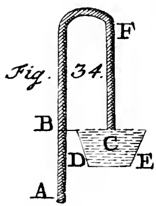


Fig. 34.

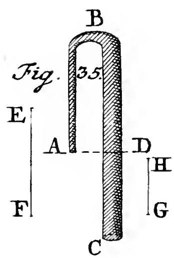


Fig. 35.

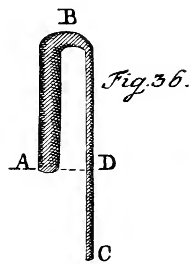
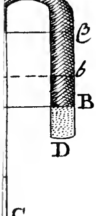


Fig. 36.

Fig. 38.



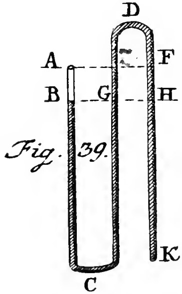


Fig. 39.

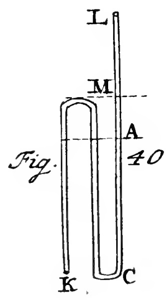


Fig. 40.

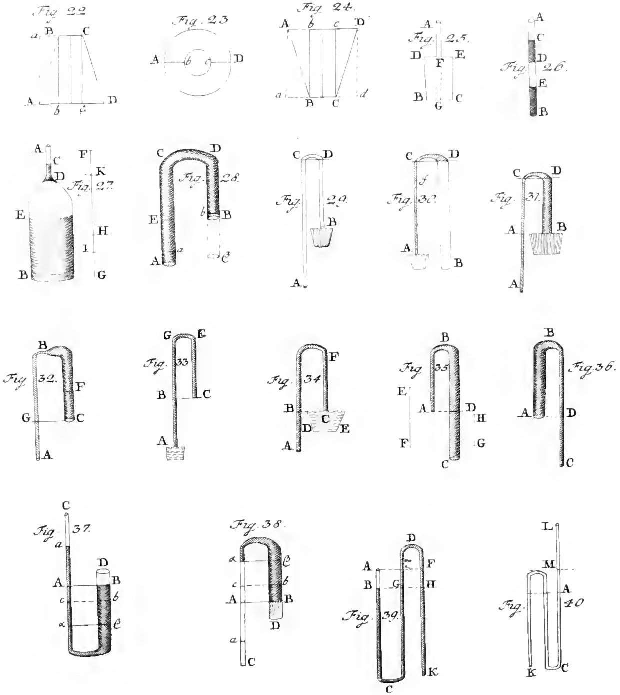


Fig. 22
a B C A b c D
Fig. 23
A b c D
Fig. 24.
A b c D a B C d
Fig. 25.
A D F E B G C
Fig. 26.
A C D E B
Fig. 27.
A C D E B F K H I G
Fig. 28.
C D E A a b B
Fig. 29.
C D B A
Fig. 30.
C D f A B
Fig. 31.
C D A B A
Fig. 32.
B F G C A
Fig. 33
G E B C A
Fig. 34
F B C D E A
Fig. 35
B E A D H F G C
Fig. 36.
B A D C
Fig. 37.
C a D A B c b α β
Fig. 38.
α β c b A B D a C
Fig. 39.
D A F B G H C K
Fig. 40
L M A K C

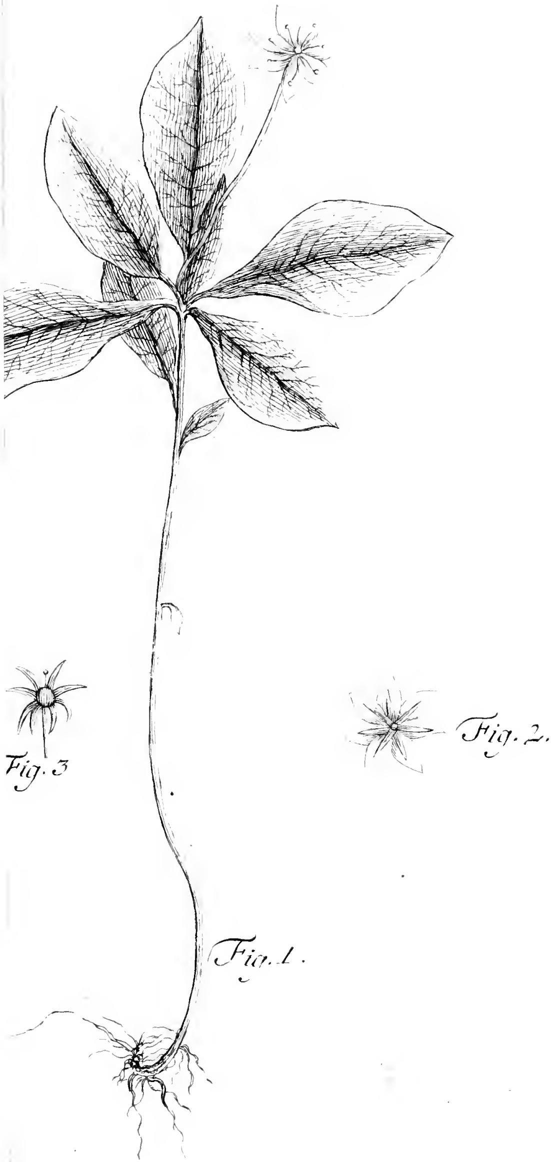


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3

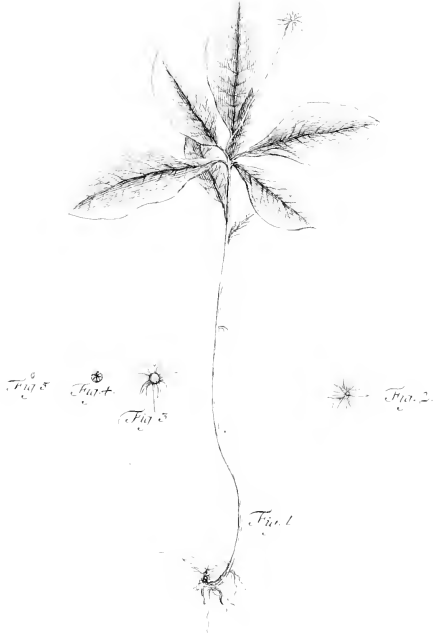


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5

Fig. 3.

Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7.

Fig. 1.

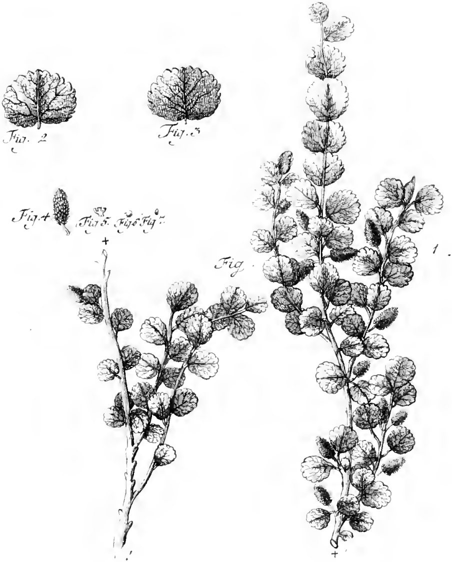


Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6
Fig. 7.
Fig. 1.

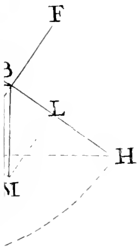


Fig. 2.

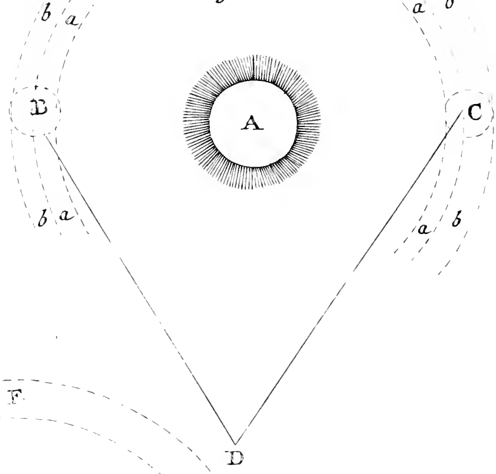


Fig. 3

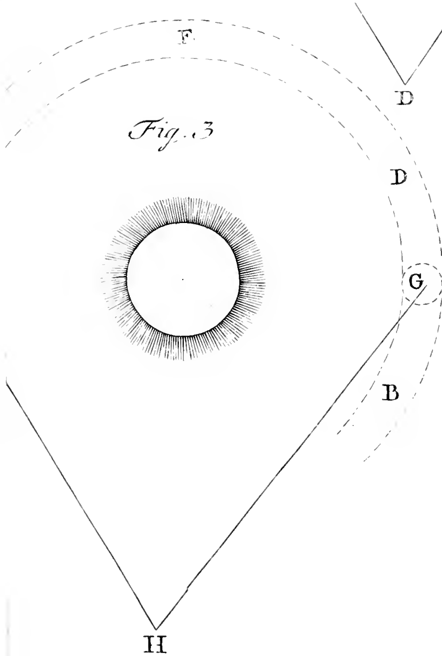


Fig. 1

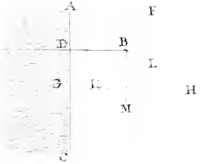
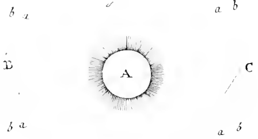
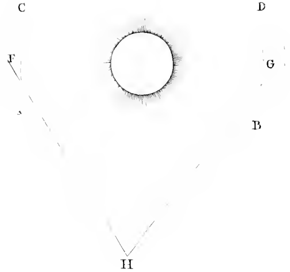


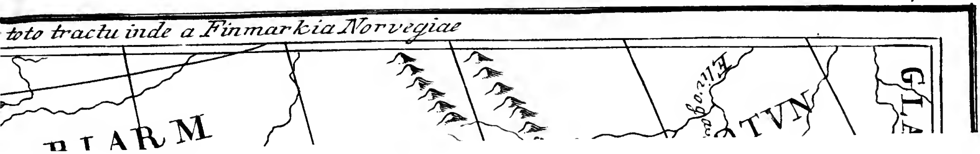
Fig. 2

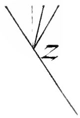


D

Fig. 3




toto tractu inde a Finmarkia Norvegiae
BIARM
TVN


Z


Tabula Geographica
RVSSIAE
vicinarumque Regionum
circiter
A.C.
IϽCCCCXLIX
NORVEGIA
DANI
VARAGIUM
MARE
FINLAND
KYRIALAND
BIARM
IOTVNHEIM
GLAESISVALLIR
KYRIALAND
KLAENOGARD
HOLMGARD
OSTROGARD
EYSTLAND
KURLAND
RVSSIA
MERIA
MVROMA
BOLGARIA
SCHEREMIS
MESCHERA
MORDIA
LETTOVIA
SLAVONIA
PRVS
GARDARIKIA
POLONIA
SIVERIA
MAZARIA
PATZINACIA
CHAZARIA
VZIA
MARE CASPIVM
TVRKESTAN
TVRCIA
ALBA
SERBIA
DALMATIA
BVLGARIA NIGRA
PONTVS EVXINVS
ALANIA
ZICHIA
ABASGIA
LAZICA
Gandwich
Onega Lac.
Vorotalmai
Kapgjak

Fig. 1

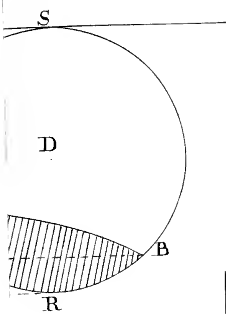


Fig. 3.

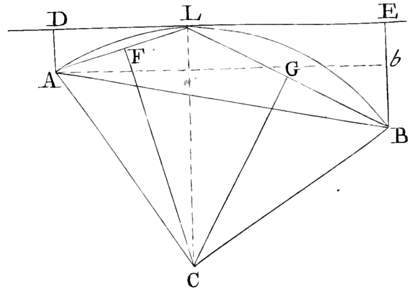


Fig. 2

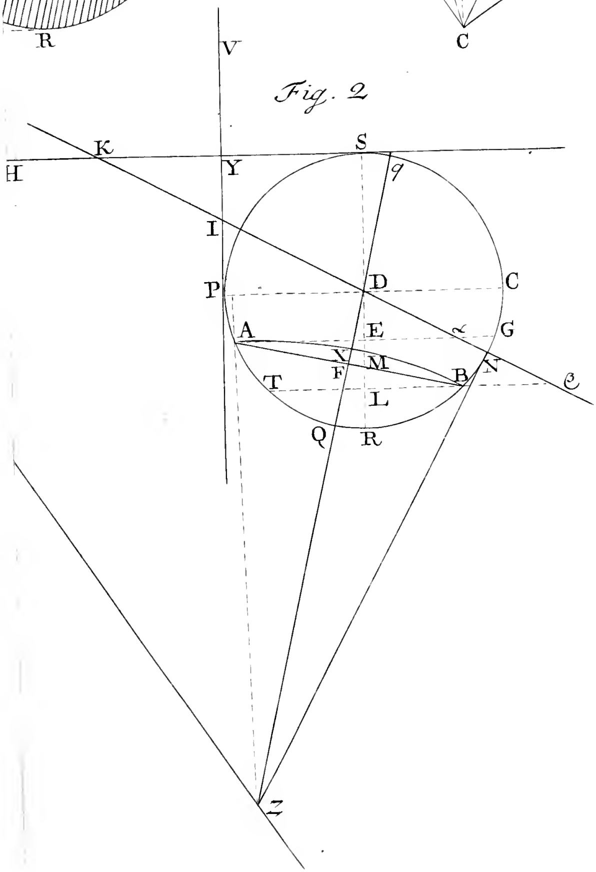


Fig. 1

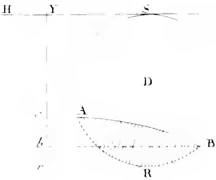


Fig. 3

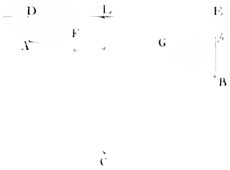
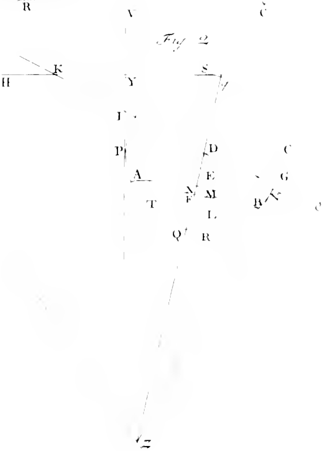


Fig. 2



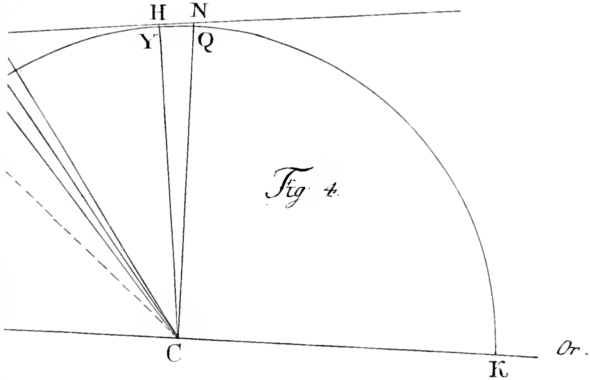


Fig. 4.

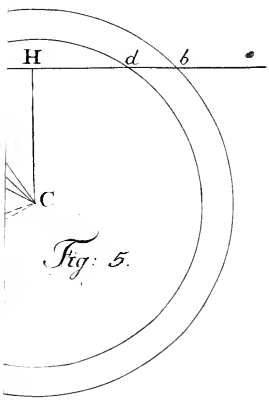


Fig. 5.

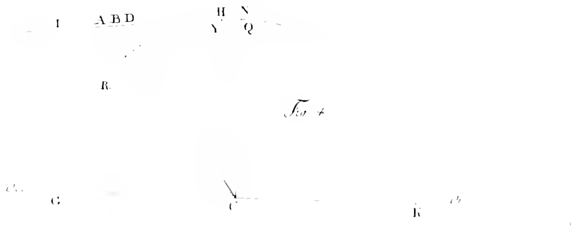


Fig. 4

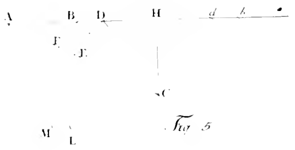


Fig. 5