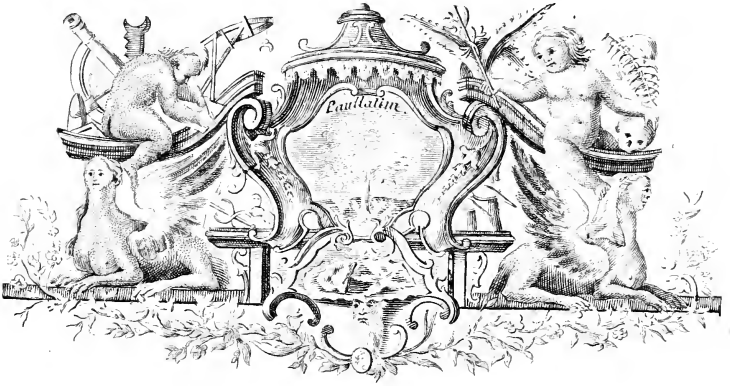
COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE.

Tomus XI.

AD ANNVM MDCCXXXIX.



PETROPOLI.
TYPIS ACADEMIAE.
cIↃ IↃ CCL.

INDEX
COMMENTARIORVM

In Classe Mathematica.

In Classe Physica.

G. W.

In Classe Historica.

Observ. Astronom.

CLASSIS PRIMA.

CONTINENS

MATHEMATICA.

DE PRODVCTIS
EX INFINITIS FACTORIBVS ORTIS.
AVCTORE
L. Eulero.

§. 1.

Cum in Analyſi ad eiusmodi quantitates peruenitur, quae numeris nec rationalibus nec irrationalibus exponi poſſunt, expreſſiones infinitae ad eas quantitates denotandas adhiberi ſolent: quae eo magis idoneae ſunt cenſendae, quo citius earum ope ad cognitionem et aeſtimationem quantitatum iis expreſſarum peruenitur. Huiusmodi igitur expreſſionum maximus et ampliſſimus eſt vſus ad valores quantitatum transcendentium, cuiusmodi ſunt logarithmi, arcus circulares, aliaeque per quadraturas curuarum determinatae quantitates, repreſentandos earumque beneficio ad tam exactam cum logarithmorum, tum arcuum circularium, tum etiam plurium aliarum quantitatum transcendentium cognitionem pertigimus. Quin etiam iſtiusmodi expreſſiones infinitae inſignem afferunt vtilitatem ad quantitates irrationales, et radices aequationum algebraicarum per numeros rationales vero proxime definiendas; quae ſi vſus ſpectetur veris expreſſionibus plerumque longe ſunt anteferendae.

§. 2. Huiusmodi autem expreſſionum infinitarum nonnulla genera inter ſe maxime diuerſa ſunt conſtituenda, quorum primum in ſe complectitur omnes ſeries infinitas, in-

finitis terminis ſignis + vel — iunctis conſtantes, quae doctrina nunc quidem iam tantopere eſt exculta, vt non ſolum plures habeantur methodi quasvis quantitates tam algebraicas quam tranſcendentes huiusmodi ſeriebus infinitis exprimendi, ſed etiam propoſita ſerie infinita inueſtigandi, cuiusmodi quantitas ea indicetur. Duplici enim modo expreſſiones infinitas cuiusque generis tractari oportet, quorum alter in conuerſione quantitatum vel algebraicarum vel tranſcendentium in expreſſiones infinitas conſiſtit; alter vero in indagatione illius quantitatis, quam propoſita exppreſſio infinita deſignat, viciſſim verſatur.

§. 3. Ad alterum genus expreſſionum infinitarum referri conuenit eas, quae ex innumerabilibus factoribus conſtant, cuiusmodi expreſſiones, quamquam iam complures ſunt inuentae ac cognitae, tamen nec modus ad eas perueniendi, nec via earum valores dignoſcendi vsquam eſt expoſita. Aeque autem dignae huius generis expreſſiones infinitae videntur, quae excolantur, ac priores ex infinito terminorum numero conſtantes, neque forte minus commodi Analyſi afferetur earum pertractatione. Praeterquam enim, quod iſtiusmodi expreſſiones naturam quantitatum quas referunt ſatis diſtincte ob oculos ponant, et ſaepe numero ad valores proximos inueniendos perquam ſunt accommodatae, inſignem praeſtant vſum ad logarithmos ipſarum quantitatum formandos, id quod in calculo ſaepiſſime ſummam affert vtilitatem. Sic ſi quantitas quaecunquae X transformata fuerit in iſtiusmodi expreſſionem $\frac{a}{\alpha}\cdot\frac{b}{\beta}\cdot\frac{c}{\gamma}\cdot\frac{d}{\delta}\cdot\frac{e}{\varepsilon}$. etc. ſtatim habebitur logarithmus quantitatis $X = l\frac{a}{\alpha} + l\frac{b}{\beta} + l\frac{c}{\gamma} + l\frac{d}{\delta} +$ etc. quae ſeries eo magis convergit

vergit, quo propius factores illi ad vnitatem inclinant. Hanc ob causam constitui in hac dissertatione theoriam huiusmodi expressionum infinitarum, quantum quidem obseruationes meae subsidii suppeditaverunt, inchoare, quo aliis facilius sit eam aliquando magis perficere.

§ 4. Primus eiusmodi expressionem infinitis factoribus contentam protulit Wallisius in Arithmetica infinitorum, vbi ostendit, si circuli diameter sit $= 1$. fore aream circuli $\frac{2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.}{3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.}$ etc. quam expressionem deduxit ex interpolatione seriei $\frac{2}{3} + \frac{2.4}{3.5} + \frac{2.4.6}{3.5.7} +$ etc. cuius terminos intermidios demonstrauerat a circuli quadratura pendere. Cum igitur istae expressiones interpolationi serierum originem suam debeant, non incongruum fore visum est tractationem hanc de productis ex infinitis factoribus constantibus ab interpolationibus incipere. Cum enim in Tomo quinto Commentariorum nostrorum methodum tradidissem interpolationes per quadraturas curuarum perficiendi, simul constabit, cuiusmodi quantitatem transcendentem producta infinita hac ratione orta exhibeant.

§. 5. Considero igitur sequentem progressionem

$$f+g)+(f+g)(f+2g)+(f+g)(f+2g)(f+3g)+(f+g)(f+2g)(f+3g)(f+4g)$$

cuius quilibet terminus, cuius index est n, inuenitur ex praecedente hunc per $f+ng$ multiplicando: ostendi autem in dissertatione allegata huius seriei terminum, cuius index est n esse $= \frac{g^{n+1}\int dx(-lx)^n}{(f+(n+1)g)\int x^{f:g}\,dx(1-x)^n}$ vtraquae integratione ita peracta, vt integralia euanescant posito $x = 0$, tumquae facto $x = 1$. Quamobrem ista expressio simul indicabit, a quanam quadratura singuli ter-

mini intermedii pendeant. Quanquam enim si n sit numerus fractus, non ita facile constat, qualem quadraturam $\int dx(-lx)^n$ contineat, tamen eodem loco ostendi posito $\frac{p}{q}$ loco n formulam $\int dx\,(-lx)^{\frac{p}{q}}$ congruere cum $\sqrt[q]{(1.2.3.\ldots\ldots p).(\frac{2p}{q}+1)(\frac{3p}{q}+1)(\frac{4p}{q}+1).\ldots\ldots(\frac{qp}{q}+1)}$ $\int dx(x-xx)^{\frac{p}{q}}\int dx(x^2-x^3)^{\frac{p}{q}}\int dx(x^3-x^4)^{\frac{p}{q}}\int dx(x^4-x^5)^{\frac{p}{q}}\ldots\ldots\int dx(x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}$ cuius reductionis ope valor ipsius $\int dx(-lx)^{\frac{p}{q}}$ per quadraturas curvarum algebraicarum exprimi potest.

§ 6. Si nunc in serie assumta terminus, cujus index est $=\frac{1}{2}$, ponatur z, ex lege seriei termini, quorum indices sunt $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, etc. sequenti modo se habebunt:

$$\overset{\frac{1}{2}}{z}+\overset{\frac{3}{2}}{z}(f+\tfrac{3}{2}g)+\overset{\frac{5}{2}}{z'}(f+\tfrac{3}{2}g)(f+\tfrac{5}{2}g)+\overset{\frac{7}{2}}{z'}(f+\tfrac{3}{2}g)(f+\tfrac{5}{2}g)(f+\tfrac{7}{2}g)\text{ etc.}$$

Quoniam autem progressio assumta tandem cum Geometrica confunnditur, hi termini interpolati euadent tandem medii proportionales inter contiguos seriei terminos. Quare si singuli termini interpolati iam ab initio tanquam medii proportionales spectentur, sequentes prodibunt approximationes ad terminum z, cuius index est $\frac{1}{2}$.

I. $z=\sqrt{(f+g)}$

II. $z=\sqrt{\dfrac{(f+g)(f+g)(f+2g)}{1(f+\frac{3}{2}g)(f+\frac{3}{2}g)}}$

III. $z=\sqrt{\dfrac{(f+g)(f+g)(f+2g)(f+2g)(f+3g)}{1(f+\frac{3}{2}g)(f+\frac{3}{2}g)(f+\frac{5}{2}g)(f+\frac{5}{2}g)}}$

etc.

ex qua progressionis lege intelligitur terminum indicis $\frac{1}{2}$ vere esse $=(f+g)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\dfrac{(f+g)}{(f+\frac{3}{2}g)}\dfrac{(f+2g)}{(f+\frac{3}{2}g)}\dfrac{(f+2g)}{(f+\frac{5}{2}g)}\dfrac{(f+3g)}{(f+\frac{5}{2}g)(f+3g)}}$

$$\frac{(f+3g)\,(f+4g)\,(f+4g)\,(f+5g)\,(f+5g)\,(f+6g)}{(f+\frac{7}{2}g)\,(f+\frac{7}{2}g)\,(f+\frac{9}{2}g)\,(f+\frac{9}{2}g)\,(f+\frac{11}{2}g)\,(f+\frac{11}{2}g)}\ \text{etc.}$$

§. 7. Nunc igitur non ſolum certum eſt hac expreſſione infinita terminum ſeriei aſſumtae

$$\overset{1}{(f+g)}+\overset{2}{(f+g)}\,(f+2g)+\overset{3}{(f+g)}\,(f+2g)\,(f+3g)+\ \text{etc.}$$

cuius index eſt $=\frac{1}{2}$, exhiberi, ſed etiam eadem expreſſio inuenta ad quadraturas curuarum reducitur. Poſito enim $n=\frac{1}{2}$, ob $p=1$. et $q=2$. fit $\int dx(-lx)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1.2.}\int dx\sqrt{(x-xx)}$; quae expreſſio debito modo integrata dat radicem quadratam ex area circuli cuius diameter eſt $=1$: vel poſita $1:\pi$ ratione diametri ad peripheriam, erit $\int dx(-lx)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Hinc ergo idem terminus, cuius index $=\frac{1}{2}$, quem poſuimus z reperitur $=\frac{g\sqrt{\pi g}}{(2f+3g)\int x^{f:g}dx\sqrt{(1-x)}}$ $=\frac{\sqrt{\pi g}}{(2f+3g)\int y^{f+g-1}dy\sqrt{(1-y^g)}}$; intergrali hoc eodem tractato modo, quo ante ratione variabilis x eſt praeſcriptum. At per reductionem formularum huius modi integralium eſt $\int y^{f+g-1}dy\sqrt{(1-y^g)}=\frac{2fg}{(2f+g)(2f+3g)}\int\frac{y^{f-1}dy}{\sqrt{(1-y^g)}}=$ $\frac{2f}{2f+g}\int y^{f-1}dy\sqrt{(1-y^g)}$. His ſubſtitutis reperitur

$$\frac{(2f+g)(2f+3g)(2f+3g)(2f+5g)(2f+5g)(2f+7g)}{(2f+2g)(2f+2g)(2f+4g)(2f+4g)(2f+6g)(2f+6g)}\ \text{etc.}$$

$=\frac{2ff(2f+g)}{\pi g}\left(\int y^{f-1}dy\sqrt{(1-y^g)}\right)^2=\frac{2ffg}{\pi(2f+fg)}\left(\frac{\int y^{f-1}dy}{\sqrt{(1-y^g)}}\right)^2$. Per hanc igitur aequationem innumerabiles quadraturae in factores infinitos, et viciſſim huiusmodi factorum infinitorum valores in quadraturas curuarum transformari poſſunt.

§. 8.

§. 8. Vt hanc aequalitatem exemplis illustremus, sit $g = 1$, eritque $\int y^{f-1} dy \sqrt{(1-y)} = \frac{2.2.4.6.8.10\ldots\ldots(2f-2)}{3.5.7.9.11.13\ldots\ldots(f+1)}$. Vnde fiet $\frac{2ff(2f+1)}{\pi} \frac{2.2.2.4.4\ldots\ldots(2f-2)(2f-2)}{3.3.5.5.7.7\ldots\ldots(2f+1)(2f+1)} - \frac{(2f+1)(2f+1)(2f+3)}{(2f+2)(2f+2)(2f+4)}$. etc. quae expressio ordinata seu ad continuitatem reducta dat $\pi = 4. \frac{2.4.4.6.6.8.8.10.10}{3.3.5.5.7.7.9.9.11}$. etc. quae est ipsa formula Wallisiana, prodiitque quicunque numerus integer affirmatiuus loco f substituatur. Haec eadem expressio autem prodit si ponatur $g = 2$. et $f =$ numero cuicunque impari integro.

§. 9. Cum igitur sit $\frac{fg}{\pi} \left(\frac{\int y^{f-1} dy}{\sqrt{(1-y^g)}} \right)^2 =$

$$\frac{(2f+g)(2f+g)(2f+3g)(2f+3g)(2f+5g)(2f+5g)}{2f\ (2f+2g)(2f+2g)(2f+4g)(2f+4g)(2f+6g)} \text{ etc.}$$

erit pari modo $\frac{bk}{\pi} \left(\frac{\int y^{b-1} dy}{\sqrt{(1-y^k)}} \right)^2 =$

$$\frac{(2b+k)(2b+k)(2b+3k)(2b+3k)(2b+5k)(2b+5k)}{2b\ (2b+2k)(2b+2k)(2b+4k)(2b+4k)(2b+6k)} \text{ etc.}$$

Quare illa expressione per hanc diuisa obtinebitur sequens aequatio libera a peripheria circuli π

$$\frac{fg(\int y^{f-1} dy : \sqrt{(1-y^g)})^2}{bk(\int y^{b-1} dy : \sqrt{(1-y^k)})^2} = \frac{2b(2f+g)^2(2b+2k)^2(2f+3g)^2(2b+4k)^2(2f+5g)^2}{2f(2b+k)^2(2f+2g)^2(2b+3k)^2(2f+4k)^2(2b+5k)^2}$$

etc. Quae radice quadrata extracta praebet hanc aequationem

$$\frac{\int y^{f-1} dy : \sqrt{(1-y^g)}}{\int y^{b-1} dy : \sqrt{(1-y^k)}} \cdot \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{2b(2f+g)(2b+2k)(2f+3g)(2b+4k)(2f+5g)}{2f(2b+k)(2f+2g)(2b+3k)(2f+4g)(2b+5k)} \text{ etc.}$$

§. 10. Haec autem expressio infinita valorem constantem non habet, nam etiamsi in infinitum continuetur, tamen alium habet valorem, si numerus factorum capiatur par, alium si numerus impar. Quamobrem nisi sit $k = g$,

quo

quo casu perinde est, vbi multiplicatio abrumpatur, bini factores coniunctim sunt accipiendi, quo facto binae obtinebuntur aequationes, prout numerus factorum capiatur par siue impar. Primo autem accurate euoluta expressione generali obtinebitur: $\frac{g\int y^{f-1}dy:\sqrt{(1-y^g)}}{k\int y^{b-1}dy:\sqrt{(1-y^k)}} = \frac{2b(2f+g)}{2f(2b+k)}\cdot\frac{(2b+2k)(2f+2g)}{(2f+2g)(2b+2k)}\cdot\frac{(2b+4k)(2f+3g)}{(2f+4g)(2b+3k)}\cdot\frac{(2b+6k)(2f+7g)}{(2f+6g)(2b+7k)}$ etc. Sumendis autem alteris terminorum paribus erit $\frac{f\int y^{f-1}dy:\sqrt{(1-y^g)}}{h\int y^{b-1}dy:\sqrt{(1-y^k)}} = \frac{(2f+g)(2b+2k)}{(2b+k)(2f+2g)}\cdot\frac{(2f+3g)(2b+4k)}{(2b+3k)(2f+4g)}\cdot\frac{(2f+7g)(2b+7k)}{(2b+5k)(2f+5g)}\cdot\frac{(2f+9g)(2b+9k)}{(2b+7k)(2f+7g)}$. etc. in quibus expressionibus loca, vbi operationem abrumpere licet, punctis sunt distincta.

§. 11. Consideremus autem attentius casum, quo est $k = g$ quippe quo expressio infinita tanquam ex simplicibus factoribus constans concipi potest; eritque $\frac{\int y^{f-1}dy:\sqrt{(1-y^g)}}{\int y^{b-1}dy:\sqrt{(1-y^g)}} = \frac{2b(2f+g)(2b+2g)(2f+3g)(2b+4g)}{2f(2b+g)(2f+2g)(2b+3g)(2f+4g)}$ quae expressio, quo minus cum praecedente ob easdem litteras confundatur, ponamus hic $2f = a$ et $2b = b$ atque $y = x^2$, quo substituto prodibit $\frac{\int x^{2f-1}dx:\sqrt{(1-x^{2g})}}{\int x^{b-1}dx:\sqrt{(1-x^{2g})}} = \frac{b(a+g)(b+2g)(a+3g)(b+4g)(a+5g)}{a(b+g)(a+2g)(b+3g)(a+4g)(b+5g)}$. etc. quae expressio cum priori. §. 9. data, quae facto pariter $y = x^2$, transit in hanc $\frac{4fg}{\pi}\left(\frac{\int x^{2f-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}\right)^2 = \frac{(2f+g)(2f+g)(2f+2g)(2f+3g)(2f+5g)(2f+5g)}{2f(2f+2g)(2f+2g)(2f+4g)(2f+4g)(2f+6g)}$ etc. comparata, insignes manifestabit proprietates, quarum veritas alias vix ostendi poterit.

§. 12. Statim enim patet si ponatur $a = 2f$; et $b = 2f+g$, illam expressionem infinitam in hanc transmutari; quamobrem etiam expressiones illis aequales, quadraturas

curuarum continentes, hoc casu fient aequales, ex quo sequens emergit aequalitas: $\frac{\int x^{2f-1}dx : \sqrt{(1-x^{2g})}}{\int x^{2f+g-1}dx : \sqrt{(1-x^{2g})}} = \frac{4fg}{\pi}$ $(\int x^{2f-1}dx : \sqrt{(1-x^{2g})})^2$, si quidem ponatur post integrationem $x = 1$. Hinc igitur sequitur fore $\pi = 4fg$ $\frac{\int x^{2f-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}} \cdot \frac{\int x^{2f+g-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$: siue posito $2f = a$, erit π $= 2ag \frac{\int x^{a-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}} \cdot \frac{\int x^{a+g-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$: quod sane est theorema maxime notatu dignum, cum eius beneficio productum duorum integralium, quorum saepissime neutrum exhiberi potest, assignari queat.

§ 13. Veritas huius theorematis quidem facile declaratur iis casibus, quibus altera formula integralis vel absolute integrationem admittit vel a circuli quadratura pendet. Ponamus enim $g = 1$, et $a = 1$; vtique erit $\pi = 2$ $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \cdot \int \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ nam $2\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ posito post integrationem $x = 1$ dat ipsam quantitatem π; atque $\int \frac{xdx}{\sqrt{(1-xx)}}$ $= 1 - \sqrt{(-xx)}$ facto $x = 1$ fit $= 1$. Simili modo si $a = 2$ manente $g = 1$ perspicitur fore $\pi = 4\int \frac{xdx}{\sqrt{(1-xx)}} \cdot$ $\int \frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}}$ nam est $\int \frac{xdx}{\sqrt{(1-xx)}} = 1$, et $\int \frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{4}$; quibus casibus theorematis veritas aliunde cognita, confirmatur.

§. 14. Reliqui autem casus, quibus neutra quantitas integralis vel actu vel per quadraturam circuli exhiberi potest, totidem praebent theoremata maxime abstrusae indaginis. Ita posito $g = 2$ et $a = 1$ fiet $\pi = 4 \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \cdot$ $\int \frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}}$; vbi $\int \frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ exhibet applicatam in curua elasti-

ca

ca rectangula, $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ vero arcum elasticae abscissae x respondentem. Quocirca rectangulum ex arcu elasticae abcissae 1 respondente et applicata respondente aequabitur areae circuli, cuius diameter est abscissa illa 1; quae proprietas elasticae fortasse alia methodo vix ac ne vix quidem cognosci demonstrarique poterit.

§. 15. Antequam autem hunc elasticae casum relinquam, inuabit vtrumque integrale per seriem ordinariam exprimere casu saltem quo $x = 1$. Cum enim sit $\frac{1}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(1-x^2)}}$ atque $(1+xx)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 +$ etc. singula membra a circuli quadratura pendebunt. Absoluta autem vtraque integratione pro casu $x = 1$ erit $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 9}{4 \cdot 16} - \frac{1 \cdot 9 \cdot 25}{4 \cdot 16 \cdot 36} + \text{etc.}\right.$ atque $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 9 \cdot 5}{4 \cdot 16 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 7}{4 \cdot 16 \cdot 36 \cdot 8} + \text{etc.}\right)$ Hinc autem approximando prodit tam prope $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{5}{6}\frac{\pi}{2}$ et $\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{3}{5}$.

§. 16. Si fuerit $a = 1$ erit $\pi = 2g \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}} \cdot \int \frac{x^g dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ quae duae expressiones integrales ita sunt comparatae, vt si fuerit $\frac{\int x^g dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ applicata curuae cuiusdam abscissae x respondens, futura sit $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ ipsa eiusdem curuae longitudo. Quamobrem si in hac curua sumatur abscissa $x = 1$, erit productum seu rectangulum ex applicata in longitudinem curuae ad aream circuli, cuius diameter est abscissa $x = 1$, vti se habet 2 ad numerum g; quae pro-

 positio

positio locum habet, dummodo g fuerit numerus affirmatiuus; valores negatiui enim sponte excipiuntur.

§. 17. Si $a-1$ minor accipiatur quam g, ita vt numeri a et g sint primi inter se, sequentia habebuntur theoremata notatu digna; nam si $a+g-1 > 2g$ tum integratio ad formulam simpliciorem reduci posset.

$$\pi = 2\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\cdot\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$\pi = 4\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$$
$$\pi = 6\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}\cdot\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^6)}}$$
$$\pi = 12\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^6)}}\cdot\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^6)}}$$
$$\pi = 8\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^8)}}$$
$$\pi = 24\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^8)}}$$
$$\pi = 10\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^{10}}}$$
$$\pi = 20\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}$$

$$\pi = 30\int\frac{x^2lx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^7lx}{\sqrt{(1-x^{10})}}$$
$$\pi = 40\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^8dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}$$
$$\pi = 12\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}\cdot\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}$$
$$\pi = 60\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}\cdot\int\frac{x^{10}dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}$$
$$\pi = 14\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}\cdot\int\frac{x^7dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}$$
$$\pi = 28\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^{14})}}\cdot\int\frac{x^8dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}$$
$$\pi = 42\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}\cdot\int\frac{x^9dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}$$
$$\pi = 56\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}\cdot\int\frac{x^{10}dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}$$
$$\pi = 70\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}\cdot\int\frac{x^{11}dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}$$

§. 18. Hoc ipso igitur inuento reductio etiam formularum integralium ad simpliciores insigniter est promota. Cum enim adhuc duae istae formulae $\frac{\int x^m dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ et $\frac{\int x^{m+n}dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ ad se inuicem tantum reduci potuissent, si n erat multiplum exponentis $2g$; ita nunc reductio etiam succedit, si n tantum ipsius g fuerit multiplum: casu intellige, quo fit $x=1$. Quemadmodum autem si n est productum exponentis g per numerum parem, quotus, qui resultat ex diuisione alterius formulae per alteram, facile assignatur, ita e contrario, si n sit factum ex g in numerum

merum imparem, tum productum formularum facillime assignatur.

§. 19. Haec omnia ergo huc redeunt, vt si cognitum fuerit integrale formulae $\frac{\int x^m dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ casu quo $x=1$, eodem casu etiam huius formulae $\frac{\int x^{m+n} dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ integrale, si sit n multiplum ipsius g, exhiberi queat. Sit enim A integrale formulae $\frac{\int x^m dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ casu, quo est $x=1$; integralia alterius formulae, ponendo g, $2g$, $3g$, etc. successiue loco n sequenti modo se habebunt.

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}} = A$$

$$\int \frac{x^{m+g} dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}} = \frac{\pi}{2(m+1)gA}$$

$$\int \frac{x^{m+2g} dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}} = \frac{(m+1)A}{m+g+1}$$

$$\int \frac{x^{m+3g} dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}} = \frac{(m+g+1)\pi}{2(m+1)(m+2g+1)gA}$$

$$\int \frac{x^{m+4g} dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}} = \frac{(m+1)(m+2g+1)A}{(m+g+1)(m+3g+1)}$$

$$\int \frac{x^{m+5g} dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}} = \frac{(m+g+1)(m+3g+1)\pi}{2(m+1)(m+2g+1)(m+4g+1)gA} \text{ etc.}$$

§. 20. Cum deinde haec formula generalis $\int x^{m+ig} dx (1-x^{2g})^{k-\frac{1}{2}}$ denotantibus i et k numeros integros quoscunque, reduci queat ad hanc formulam $\frac{\int x^{m+ig} dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$, intel-

ligitur illius formulae latissime patentis $\int x^{m+ig} dx \left(1-x^{2g}\right)^{k-\frac{1}{2}}$ integrale assignari posse ex integrali $\frac{\int x^m dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ cognito, casu saltem, quo post integrationem fit $x=1$. Casus autem, quibus i est numerus impar, praeter hoc integrale etiam circuli quadraturam π requirunt.

§. 21. Quemadmodum igitur per terminum indicis seriei supra §. 5. assumtae ad istas formularum integralium comparationes sum deductus, ita operae pretium forte erit alios terminos intermedios simili modo inuestigare. Quaeratur igitur terminus cuius index est $\frac{p}{q}$ qui ponatur $=z$, ex quo sequentes ita se habebunt

$$z^{\frac{p}{q}} + \frac{z^{\frac{p+q}{q}}(fq+g(p+q))}{q} + \frac{z^{\frac{p+2q}{q}}(fq+(p+q)g)(fq+(p+2q)g)}{q^2}, + \text{etc.}$$

Considerando nunc pari modo, quod haec progressio tandem in geometricam abeat, sequentes orientur approximationes ad terminum z.

I. $z=1(f+g)^{\frac{p}{q}}$

II. $\frac{z^{(fq+(p+q)g)}}{q}=(f+g)^{\frac{q-p}{q}}(f+g)^{\frac{p}{q}}(f+2g)^{\frac{p}{q}}$

III. $z^{\left(f+\frac{(p+q)g}{q}\right)}\left(f+\frac{(p+2q)}{q}g\right)=(f+g)^{\frac{q-p}{q}}(f+g)^{\frac{p}{q}}(f+2g)^{\frac{q-p}{q}}(f+2g)^{\frac{p}{q}}(f+3g)^{\frac{p}{q}}$ Hinc igitur elicietur verus valor ipsius $z=\frac{(f+g)^{\frac{p}{q}}(f+g)^{\frac{q-p}{q}}}{1\left(f+\frac{(p+q)}{q}g\right)^{\frac{p}{q}}}$

(f+

$$\frac{(f+2g)^{\frac{p}{q}}}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)^{\frac{(q-p)}{q}}}\frac{(f+2g)^{\frac{q-p}{q}}}{(f+\frac{(p+2q)}{q}g)^{\frac{p}{q}}}\frac{(f+3g)^{\frac{p}{q}}}{f+\frac{(p+3q)}{q}g)^{\frac{q-p}{q}}}\frac{(f+3g)^{\frac{q-p}{q}}}{(f+\frac{(p+4q)}{q}g)^{p:q}}$$

etc. Vel paucis mutatis, vt factores infinitesimi fiant $= 1$, et expressio vbi libuerit abrumpi queat

erit $$\frac{z}{(f+\frac{p}{q}g)^{\frac{p}{q}}} = \frac{(f+g)^{\frac{p}{q}}}{(f+\frac{p}{q}g)^{\frac{p}{q}}}\cdot\frac{(f+g)^{\frac{q-p}{q}}}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)^{\frac{q-p}{q}}}\cdot$$

$$\frac{(f+2g)^{\frac{p}{q}}}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)^{\frac{p}{q}}}\cdot\frac{(f+2g)^{\frac{q-p}{q}}}{(f+\frac{(p+2q)}{q}g)^{\frac{q-p}{q}}}\cdot\frac{(f+3g)^{\frac{p}{q}}}{(f+\frac{(p+3q)}{q}g)^{\frac{p}{q}}}$$ etc. cuius expressionis lex, qua factores progrediuntur, sponte elucet.

§. 22. Eiusdem autem termini intermedii z valor ope termini generalis huius seriei exprimi potest, fiet enim $z =$

$$\frac{g^{\frac{p+q}{q}}\int dx(-lx)^{\frac{p}{q}}}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)\int x^{f:g}dx(1-x)^{\frac{p}{q}}}.$$ Quare si ponatur $\int dx(-lx)^{\frac{p}{q}} =$

$$= \sqrt[q]{(1.2.3\ldots\ldots p)(\tfrac{2p}{q}+1)(\tfrac{3p}{q}+1)(\tfrac{4p}{q}+1)\ldots(\tfrac{qp}{q}+1)}$$

$$\int dx(x-x^2)^{\frac{p}{q}}.\int dx(x^2-x^3)^{\frac{p}{q}}.\int dx(x^3-x^4)^{\frac{p}{q}}\ldots\int dx(x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}$$

$= \sqrt[q]{P}$: atque $x = y^g$, quo fit $\int x^{f:g}dx(1-x)^{\frac{p}{q}} = g\int y^{f+g-1}dy$

$$(1-y^g)^{\frac{p}{q}} = \frac{ggp}{(q+(p+q)g}\int\frac{y^{f+g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}} = \frac{pfgg}{q(f+\frac{p}{q}g)(f+\frac{(p+q)}{q}g)}$$

$\int y$

$\frac{\int y^{f-1} dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}}$. Ponatur porro $\frac{\int y^{f-1} dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}} = Q$, erit $z =$

$$\frac{q(f+\frac{p}{q}g)\,P^{\frac{1}{q}}}{pfg^{\frac{q-p}{q}}\,Q}.$$

§. 23. Substituta nunc loco z superiore expressione infinita, sumtisque potestatibus exponentis q, prodibit ista aequatio:

$$\frac{q^q P}{p^q f^p g^{q-p} Q^q} = \frac{f^{q-p}}{(f+\frac{p}{q}g)^{q-p}} \cdot \frac{(f+g)^p}{(f+\frac{p}{q}g)^p} \cdot \frac{(f+g)^{q-p}}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)^{q-p}} \cdot \frac{(f+2g)^p}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)^p} \cdot \frac{(f+2g)^{q-p}}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)^{q-p}} \text{ etc.}$$

Si igitur pari modo ponatur $\frac{\int y^{h-1} dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}} = R$, erit

$$\frac{p^q h^p g^{q-p} R^q}{q^q P} = \frac{(h+\frac{p}{q}g)^{q-p}}{h^{q-p}} \cdot \frac{(h+\frac{p}{q}g)^p}{(h+g)^p} \cdot \frac{(h+\frac{(p+q)}{q}g)^{q-p}}{(h+g)^{q-p}} \text{ etc.}$$

quae duae expressiones in se mutuo ductae dabunt $\frac{h^p R^q}{f^p Q^q}$

$$= \frac{f^{q-p}\,(h+\frac{p}{q}g)^q\,(f+g)^q\,(h+\frac{(p+q)}{q}g)^q\,(f+2g)^q}{h^{q-p}\,(f+\frac{p}{q}g)^q\,(h+g)^q\,(f+\frac{(p+q)}{q}g)^q\,(h+2g)^q}$$

$$\frac{(h+\frac{(p+2q)}{q}g)^q}{(f+\frac{(p+2q)}{q}g)^q} \text{ etc.}$$

§. 24.

§. 24. Si ergo vtrinque multiplicetur per $\frac{fp}{bp}$ atque radix poteſtatis q extrahatur reperietur $\frac{R}{Q} = \frac{f(b+\frac{p}{q}g)}{b(f+\frac{p}{q}g)}$ $\frac{(f+g)(b+\frac{(p+q)}{q}g)(f+2g)(b+\frac{(p+2q)}{q}g)}{(b+g)(f+\frac{(p+q)}{q}g)(b+2g)(f+\frac{(p+2q)}{q}g)}$ etc. $=$ $\frac{\int y^{b-1}dy(1-y^g)^{\frac{p-q}{q}}}{\int y^{f-1}dy(1-y^g)^{\frac{p-q}{q}}}$, in quibus integralibus cum ita fuerint accepta, vt euaneſcant poſito $y=0$, fieri debet $y=1$, quo facto habebitur per quadraturas valor expreſſionis infinitae propoſitae. Ope huius igitur expreſſionis infinitae altera quadratura ad alteram, ſiquidem ponatur $y=1$, reduci poterit.

§. 25. Vt autem hinc eiusmodi integralium comparationes deducamus, ſicuti ex priori caſu, quo erat $p=1$ et $q=2$, ponamus hic $p=1$ et $q=3$; fietque $P=\frac{10}{3}$ $\int dx(x-x^2)^{\frac{1}{3}}.\int dx(x^2-x^3)^{\frac{1}{3}}$ et $Q=\frac{\int y^{f-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{2}{3}}}$ atque $R=$ $\frac{\int y^{b-1}dy}{(2-y^g)^{\frac{2}{3}}}$. Erit ergo $\frac{27P}{fg^2Q^3}=\frac{f\ .\ (f\ .\ (f+g)}{(f+\frac{1}{3}g)(f+\frac{1}{3}g)(f+\frac{1}{3}g)}$ $\frac{(f+g)(f+g)(f+2g)}{(f+\frac{4}{3}g)(f+\frac{4}{3}g)(f+\frac{4}{3}g)}$ etc. atque $\frac{R}{Q}=\frac{f(b+\frac{1}{3}g)(f+g)}{b(f+\frac{1}{3}g)(b+g)}$ $\frac{(b+\frac{4}{3}g)(f+2g)(b+\frac{7}{3}g)}{(f+\frac{4}{3}g)(b+2g)(f+\frac{7}{3}g)}$ etc. quae duae expreſſiones, cum in illa vna reuolutio ex tribus hic autem ex duobus factoribus conſtet, in ſe mutuo transformari nequeunt; quicquid etiam loco b ſubſtituatur.

§. 26. Sit igitur $S = \frac{\int y^{x-1} dy}{(1-y^g)^{\frac{2}{3}}}$ erit $\frac{S}{Q} = \frac{f(k+\frac{1}{3}g)}{k(j+\frac{1}{3}g)}$ $\frac{(f+g)(k+\frac{4}{3}g)(f+2g)(k+\frac{7}{3}g)}{(k+g)(j+\frac{4}{3}g)(k+2g)(j+\frac{7}{3}g)}$ etc. quae expressio cum praecedente coniuncta dabit $\frac{RS}{Q^2} = \frac{f.\ f.}{h.\ k.}$ $\frac{(h+\frac{1}{3}g)(k+\frac{1}{3}g)}{(j+\frac{1}{3}g)(j+\frac{1}{3}g)}$ $\frac{(f+g)(f+g)(h+\frac{4}{3}g)}{(h+g)(k+g)(j+\frac{4}{3}g)}$ etc. quae expressio in illam ipsi $\frac{27\,P}{jg^2 Q^{\frac{2}{3}}}$ aequalem conuertetur, ponendo $h = f+\frac{1}{3}g$, et $k = f+\frac{2}{3}g$. Quamobrem habebitur ista aequatio $\frac{27\,P}{jg^2} = Q\,RS$, seu substitutis veris valoribus erit $90 \int dx (x-x^2)^{\frac{1}{3}}$. $\int dx (x^2-x^3)^{\frac{1}{3}} = fg^2 \int \frac{y^{f-1} dy}{(1-y^g)^{\frac{2}{3}}} . \int \frac{y^{f+\frac{1}{3}g-1} dy}{(1-y^g)^{\frac{2}{3}}} . \int \frac{y^{f+\frac{2}{3}g-1} dy}{(1-y^g)^{\frac{2}{3}}}$.

§. 27. Antequam autem haec vlterius prosequamur conueniet valori ipsius P commodiorem formam generaliter tribui. Facto autem $x = z^q$, cum sit $\int dx (x^n - x^{n+1})^{\frac{p}{q}} = \frac{npq}{(n+1)((n+1)p+q)} \int \frac{z^{np-1} dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}}$, post substitutionem prodibit

$$P = 1.2.3 \ldots\ldots p . \frac{p}{q}^{q-1} . \int \frac{z^{p-1} dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}} . \int \frac{z^{2p-1} dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}}$$

$$. \int \frac{z^{3p-1} dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}} \ldots\ldots \int \frac{z^{(q-1)p-1} dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}}.$$

Ex qua expressione si extrahatur radix potestatis q, prodibit valor ipsius $\int dx (-lx)^{\frac{p}{q}}$.

§. 28.

§. 28. Posito nunc $p = 1$ et $q = 3$ prodibit $P = \frac{1}{3} \int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}}$. Facto autem $y = z^3$; obtinebitur sequens aequatio: $\int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} = 3fg^2 \int \frac{z^{3f-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{3f+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{3f+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}}$. Si nunc ponatur $3f = a$ orietur sequens aequatio notatu digna; $\int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} = ag^2 \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}}$. Quae cum superiore $\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = ag \int \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2g})}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2g})}}$ comparata iam quodammodo indicat, quo modo sequentes huius generis aequationes se sint habiturae.

§. 29. Antequam autem per inductionem quicquam concludendi periculum faciam, casus nonnullos actu euoluam. Sit igitur $p = 2$ et $q = 3$ hincque reperietur $P = \frac{8}{3} \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^3dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{8}{9} \int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}}$; $Q = \int \frac{y^{f-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$; $R = \int \frac{y^{h-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$. Expressiones autem infinitae ita se habebunt; $\frac{27.P}{8f^2gQ^3} = \frac{f.}{(f+\frac{2}{3}g)} \frac{(f+g)}{(f+\frac{2}{3}g)} \frac{(f+g)}{(f+\frac{2}{3}g)} \frac{(f+g)(f+2g)(f+2g)}{(f+\frac{5}{3}g)(f+\frac{5}{3}g)(f+\frac{5}{3}g)}$ etc. et $\frac{R}{Q} = \frac{f(h+\frac{2}{3}g)(f+g)}{h(f+\frac{2}{3}g)(h+g)}$

 (h+

$\frac{(b+\frac{5}{3}g)(f+2g)(b+\frac{8}{3}g)}{(f+\frac{5}{3}g)(b+2g)(f+\frac{8}{3}g)}$. Sit praeterea $S=\int\frac{y^{m-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$ et $T=\int\frac{y^{n-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$ erit $\frac{T}{S}=\frac{m(n+\frac{2}{3}g)(m+g)(n+\frac{5}{3}g)(m+2g)}{n(m+\frac{2}{3}g)(n+g)(m+\frac{5}{3}g)(n+2g)}$ etc. quae duae expressiones in se ductae dant $\frac{RT}{QS}=\frac{fm(b+\frac{2}{3}g)(n+\frac{2}{3}g)(f+g)(m+g)(b+\frac{5}{3}g)(n+\frac{5}{3}g)}{bn(f+\frac{2}{3}g)(m+\frac{2}{3}g)(b+g)(n+g)(f+\frac{5}{3}g)(m+\frac{5}{3}g)}$ etc.

§. 30. Haec autem expressio ad illam, cui $\frac{27P}{8f^2gQ^3}$ aequale est inuentum, reduci non potest, nisi illa multiplicetur per $\frac{f}{f-\frac{1}{3}g}$, ita vt sit $\frac{27P}{8fg(f-\frac{1}{3}g)Q^3}=\frac{f}{(f-\frac{1}{3}g)}\cdot\frac{(f+g)(f+g)(f+g)(f+2g)}{(f+\frac{2}{3}g)(f+\frac{2}{3}g)(f+\frac{2}{3}g)(f+\frac{5}{3}g)(f+\frac{5}{3}g)}$ etc. nunc enim fiet reductio ponendo $m=f$; $b=f-\frac{1}{3}g$, et $n=f+\frac{1}{3}g$. His igitur valoribus substitutis erit $\frac{27P}{8fg(f-\frac{1}{3}g)Q^3}=\frac{RT}{QS}$. Cum vero sit $S=Q$ et $R=\int\frac{y^{f-\frac{1}{3}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}=\frac{f+\frac{1}{3}g}{f-\frac{1}{3}g}\int\frac{y^{f+\frac{2}{3}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$ et $T=\int\frac{y^{f+\frac{1}{3}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$. obtinebitur haec aequatio; posito $y=z^3$; $\int\frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}}\cdot\int\frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}}=3fg(3f+g)\int\frac{z^{3f-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}}\cdot\int\frac{z^{3f+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}}\cdot\int\frac{z^{3f+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}}$. Ac si ponatur $3f=a$ erit $\int\frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}}\cdot$

$\int zdz$

$$\int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} = ag(a+g)\int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}}.$$

§. 31. Ponamus $p = 1$ et $q = 4$; habebiturque $\frac{4^4 P}{fg^3 Q^4} = \frac{f \cdot f \cdot f \cdot (f+g)(f+g)(f+g)}{(f+\frac{1}{4}g)(f+\frac{1}{4}g)(f+\frac{1}{4}g)(f+\frac{1}{4}g)(f+\frac{5}{4}g)(f+\frac{5}{4}g)}$ etc. et $\frac{R}{Q} = \frac{f(b+\frac{1}{4}g)(f+g)(b+\frac{5}{4}g)(f+2g)}{b(f+\frac{1}{4}g)(b+g)(f+\frac{5}{4}g)(b+2g)}$ etc. Sit vero vt ante $S = \frac{\int y^{m-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}}$; $T = \frac{\int y^{n-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}}$; erit $\frac{RST}{Q^3} = \frac{f \cdot f \cdot f(b+\frac{1}{4}g)(m+\frac{1}{4}g)(n+\frac{1}{4}) \cdot (f+g)}{b \cdot m \cdot n(f+\frac{1}{4}g)(f+\frac{1}{4}g)(f+\frac{1}{4}g)(b+g)}$ etc. cuius expreſſionis 6 factores in illius quatuor ſunt transmutandi, quod fiet ponendo $b = f+\frac{1}{4}g$; $m = f+\frac{2}{4}g$; et $n = f+\frac{3}{4}g$; quo facto habebitur $4^4 P = fg^3 QRST$. Quare cum ſit $P = \frac{1}{4}\int \frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^2dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}$; ſi ponatur $y = z^4$ et $4f = a$ orietur iſta aequatio: $\int \frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} = ag^3 \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+3g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}}$ cuius cum praecedentibus caſibus, quibus erat $p = 1, q = 2$; et $p = 1, q = 3$, connexio facile perſpicitur.

§. 32. Ex his igitur licebit omnes istius modi aequationes, quae orientur si ponatur $p = 1$, et $q =$ numero cuicunque affirmatiuo integro, formare; erit scilicet.

$$\text{I. } \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = ag \int \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2g})}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2g})}}.$$

$$\text{II. } \int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} = ag^2 \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}}.$$

$$\text{III. } \int \frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^2dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} = ag^3 \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+3g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}}$$

$$\text{III. } \int \frac{dz}{(1-z^5)^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^5)^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^2dz}{(1-z^5)^{\frac{4}{5}}} \int \frac{z^3dz}{(1-z^5)^{\frac{4}{5}}} = ag^4 \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{5g})^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{5g})^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{5g})^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^{a+3g-1}dz}{(1-z^{5g})^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^{a+4g-1}dz}{(1-z^{5g})^{\frac{4}{5}}}. \text{ etc.}$$

§. 33. Quo etiam eas aequationes, quae oriuntur si p non $= 1$, colligere queamus, ponamus $p = 3$ et $q = 4$; quo posito, et reliquis manentibus vt supra, erit $\frac{4^4 P}{3^4 J^3 g Q^4} = \frac{f}{(J+\frac{3}{4}g)} \frac{(f+g)}{(J+\frac{3}{4}g)} \frac{(f+g)}{(J+\frac{3}{4}g)}$ etc. vbi reliqua membra ex quaternis factoribus constantia ex his formantur singulos factores quantitate g augendo. Simili vero modo erit

erit $\frac{RST}{Q^3} = \frac{f.\,f.\,f.}{b.\,m.\,.n}\,\frac{(b+\frac{3}{4}g)\,(m+\frac{3}{4}g)(n+\frac{3}{4}g)}{(f+\frac{3}{4}g)(f+\frac{3}{4}g)(f+\frac{3}{4}g)}$ etc. vbi ſeni factores vnam reuolutionem ſeu periodum conſtituunt. Ad comparationem autem inſtituendam neceſſe eſt vtramque ſeriem ita contemplari: $\frac{4^4P}{3^4f^2g(f-\frac{1}{4}g)Q^4} = \frac{f.}{(f-\frac{1}{4}g)}$ $\frac{f}{(f+\frac{3}{4}g)}\,\frac{(f+g)\,(f+g)}{(f+\frac{3}{4}g)(f+\frac{3}{4}g)}$ etc. $\frac{bRST}{fQ^3} = \frac{f.\,f.\,(b+\frac{3}{4}g)}{m.n.\,(f+\frac{3}{4}g)}$ $\frac{(m+\frac{3}{4}g)(n+\frac{3}{4}g)(f+g)}{(f+\frac{3}{4}g)(f+\frac{3}{4}g)(b+g)}$ etc. quarum haec transmutatur in illam, ita vt fiat $\frac{4^4P}{3^4fgb(f-\frac{1}{4}g)} = QRST$, ſi fiat $b = f+\frac{3}{4}g$; $m = f-\frac{1}{4}g$; et $n = f+\frac{2}{4}g$.

§. 34. Cum igitur ſit $P = \frac{3}{2}^4 \int\frac{z^6dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}\cdot\int\frac{z^5dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}\cdot$ $\int\frac{z^8dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}} = \frac{3^4}{32}\int\frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}\cdot\int\frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}\cdot\int\frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}$. et $Q = \int\frac{y^{f-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{4}}}$; $R = \int\frac{y^{f+\frac{1}{4}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{4}}}$; $S = \int\frac{y^{f-\frac{1}{4}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{4}}} = \frac{f+\frac{2}{4}g}{f-\frac{1}{4}g}\int\frac{y^{f+\frac{1}{4}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{4}}}$ atque $T = \int\frac{y^{f+\frac{2}{4}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{4}}}$. Ex quibus poſito $y = z^4$ et $4f = a$ ſequens conficitur aequatio: $\frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}\int\frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}\int\frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}} = ag\,\frac{(a+g)(a+2g)}{1\cdot 2}\int\frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{1}{4}}}\cdot$ $\int\frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{1}{4}}}\cdot\int\frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{1}{4}}}\cdot\int\frac{z^{a+3g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{1}{4}}}$.

§. 35.

§. 35. Hoc modo progrediendo reperientur ſequentes aequationes, quando p non eſt $=1$ et quidem ſi $p=2$ inuenietur.

$$\text{I. } \int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} = ag(a+g) \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{II. } \int \frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{2}{4}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{2}{4}}} \cdot \int \frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{2}{4}}} = ag^2(a+g) \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{2}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{2}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{2}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+3g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{2}{4}}}$$

Generaliter autem quicquid ſit q, ſi ponatur $\frac{dz}{(1-z^q)^{\frac{q-2}{q}}} = Xdz$ et $\frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{qg})^{\frac{q-2}{q}}} = Ydz$ erit $\int Xdz . \int zXdz . \int z^2 Xdz \ldots\ldots \int z^{q-2} Xdz = ag^{q-2}(a+g) \int Ydz . \int z^g Ydz \int z^{2g} Ydz \ldots\ldots \int z^{(q-1)g} Ydz$.

§. 36. Simili modo ſi ſit $p=3$, ac ponatur $\frac{dz}{(1-z^q)^{\frac{q-3}{q}}} = Xdz$, et $\frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{qg})^{\frac{q-3}{q}}} = Ydz$ prodibit ſequens aequatio generalis, $\int Xdz . \int zXdz . \int z^2 Xdz \ldots\ldots \int z^{q-2} Xdz = ag^{q-3} \frac{(a+g)(a+2g)}{1 \cdot 2} \int Ydz . \int z^g Ydz . \int z^{2g} Ydz \ldots\ldots \int z^{(q-1)g} Ydz$. Atque hinc omnes has formulas in vnam latiſſime patentem colligi licet. Sint enim p et q numeri quicunque integri affirmatiui, ac ponatur $\frac{dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}} = Xdz$

$X dz$ et $\frac{z^{q-1} dz}{(1-z^{qg})^{\frac{q-p}{q}}} = Y dz$; habebitur $\int X dz . \int z X dz .$ $\int z^2 X dz \ldots \int z^{q-2} X dz = a g^{q-p} \frac{(a+g)}{1.}\frac{(a+2g)}{2.}\frac{(a+3g)}{3.} \ldots \frac{(a+(p-1)g)}{(p-1)}$. $\int Y dz . \int z^g Y dz . \int z^{2g} Y dz \ldots \int z^{(q-1)g} Y dz$.

§ 37. Cum autem sit $\int z^{q-1} X dz = \frac{1}{p}$, si per hunc factorem vtrinque multiplicetur proueniet sequens aequatio satis elegans: $\frac{a(a+g)(a+2g)(a+3g)\ldots(a+(p-1)g)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ldots} g^{q-p} = \frac{\int X dz}{\int Y dz}$. $\frac{\int z X dz}{\int z^g Y dz} . \frac{\int z^2 X dz}{\int z^{2g} Y dz} . \frac{\int z^3 X dz}{\int z^{3g} Y dz} \ldots \frac{\int z^{q-1} X dz}{\int z^{(q-1)g} Y dz}$ quae expressio omnes hactenus inuentas in se complectitur; atque ob insignem ordinem est notatu digna.

§. 38. Progrediar nunc ad aliam methodum, cuius ope ad huiusmodi expressiones ex factoribus innumerabilibus constantes peruenire licet, quae magis ad analysin est accommodata. Obseruaui enim ex reductione formularum integralium ad alias istiusmodi expressiones obtineri posse. Sit enim proposita ista formula integralis $\int x^{m-1} dx (1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$, quae non difficulter transmutatur in hanc expressionem $\frac{x^m (1-x^{nq})^{\frac{p+q}{q}}}{m} + \frac{m+(p+q)n}{m} \int x^{m+nq-1} dx (1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$. Si ergo m et $\frac{p+q}{q}$ fuerint numeri affirmatiui, atque integralia ita capiantur, vt euanescant, posito $x = 0$, tumque ponatur $x = 1$, fiet $\int x^{m-1} dx (1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{m+(p+q)n}{m} \int x^{m+nq-1} dx (1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$.

§. 39. Cum deinde simili modo sit $\int x^{m+nq-1} dx (1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{m+(p+2q)n}{m+nq} \int x^{m+2nq-1} dx (1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$ erit quoque $\int x^{m-1} dx (1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{(m+(p+q)n)(m+(p+2q)n)}{m(m+nq)} \int x^{m+2nq-1} dx (1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$. Hac

 ergo

ergo reductione in infinitum continuata prodibit: $\int x^{m-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{(m+(p+q)n)(m+(p+2q)n)(m+(p+q)n)\ldots\ldots(m+(p+\infty q)n)}{m\cdot(m+nq)(m+2nq)\cdots\cdots(m+\infty nq)}$ $\int x^{m+\infty nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$. Ac simili modo est $\int x^{\mu-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{(\mu+(p+q)n)(\mu+(p+2q)n)(\mu+(p+q)n)\ldots\ldots(\mu+(p+\infty q)n}{\mu\,(\mu+nq)(\mu+2nq)\ldots\ldots(\mu+\infty nq)}\int x^{\mu+\infty nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$; dummodo m, et nq et $\frac{p+q}{q}$ sint numeri affirmatiui, seu nihilo maiores.

§. 40. Quoniam autem si m est infinitum fit $\int x^m dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \int x^{m+\alpha}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$, quicunque numerus finitus loco α accipiatur, vti ex paragr. 38 colligitur, erit quoque $\int x^{m+\infty nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \int x^{\mu+\infty nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$. Quamobrem si praecedentium expressionum altera per alteram diuidatur, proueniet ista aequatio: $\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}}{\int x^{\mu-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}} = \frac{\mu(m+(p+q)n)(\mu+nq)(m+(p+2q)n)(\mu+2nq)(m+(p+2q)n)(\mu+3nq)}{m(\mu+(p+q)n)(m+nq)(\mu+(p+2q)n)(m+2nq)(\mu+(p+3q)n)(m+3nq)}$ etc. in infinitum, cuius expressionis ope innumerabilia producta ex infinitis factoribus constantia exhiberi possunt, quorum valores per quadraturas curuarum assignari poterunt.

§. 41. Si altera formula integralis admittat integrationem, tum commoda expressio infinita pro altero integrali habebitur. Sit enim $\mu = nq$, erit $\int x^{\mu-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{1}{(p+q)n}$, quo valore substituto prodibit $\int x^{m-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{1}{(p+q)n}\cdot\frac{nq(m+(p+q)n)2nq(m+(p+2q)n)3nq}{m(p+2q)n(m+nq)(p+3q)n(m+2nq)}$ etc. cuius ope pro innumerabilibus integralibus expressiones per continuos factores in infinitum excurrentes inueniri possunt; eo saltem casu quo $x = 1$; quippe qui plerumque potissimum desideratur.

§. 42.

§. 42. Ponatur n loco nq, et prodibit: $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{q}{(p+q)n} \cdot \frac{n(mq+(p+q)n)}{m(p+2q)n} \cdot \frac{2n(mq+(p+2q)n)}{(m+n)(p+3q)n} \cdot \frac{3n(mq+(p+3q)n)}{(m+2n)(p+4q)n}$ etc. quae in binos factores resoluta fit simplicior euaditque $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{q}{(p+q)n} \cdot \frac{1(mq+(p+q)n)}{m(p+2q)} \cdot \frac{2(mq+(p+2q)n)}{(m+n)(p+3q)} \cdot \frac{3(mq+(p+3q)n)}{(m+2n)(p+4q)}$ etc. vnde sequentia exempla notabiliora deducuntur.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = 1 \cdot \frac{1\cdot 4}{1\cdot 3} \cdot \frac{2\cdot 6}{3\cdot 5} \cdot \frac{3\cdot 12}{5\cdot 7} \text{ etc.} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(1-xx)}} = 1 \cdot \frac{1\cdot 6}{2\cdot 3} \cdot \frac{2\cdot 10}{4\cdot 5} \cdot \frac{3\cdot 14}{6\cdot 7} \text{ etc.} = 1$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-xx)}} = 1 \cdot \frac{1\cdot 8}{3\cdot 3} \cdot \frac{2\cdot 12}{5\cdot 5} \cdot \frac{3\cdot 16}{7\cdot 7} \text{ etc.} = \frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1\cdot 5\cdot 2\cdot 11\cdot 3\cdot 17\cdot 4\cdot 23\cdot 5\cdot 29}{1\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 10\cdot 9\cdot 13\cdot 11} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1\cdot 7\cdot 2\cdot 13\cdot 3\cdot 19\cdot 4\cdot 25\cdot 5\cdot 31}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 8\cdot 7\cdot 11\cdot 9\cdot 14\cdot 13} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1\cdot 6\cdot 2\cdot 14\cdot 3\cdot 22\cdot 4\cdot 30}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 9\cdot 7\cdot 13\cdot 9} \text{ etc.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\cdot 7\cdot 4\cdot 7\cdot 6\cdot 11\cdot 8\cdot 15}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 9\cdot 7\cdot 13\cdot 9} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1\cdot 10\cdot 2\cdot 18\cdot 3\cdot 26\cdot 4\cdot 34}{3\cdot 3\cdot 7\cdot 5\cdot 11\cdot 7\cdot 15\cdot 9} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\cdot 3\cdot 6\cdot 6\cdot 9\cdot 9\cdot 12\cdot 12}{1\cdot 5\cdot 4\cdot 8\cdot 7\cdot 11\cdot 10\cdot 14} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\cdot 4\cdot 8\cdot 8\cdot 12\cdot 12\cdot 16\cdot 16}{1\cdot 7\cdot 5\cdot 11\cdot 9\cdot 15\cdot 13\cdot 19} \text{ etc.}$$

Praeterea hae expressiones notari merentur.

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{n-m} \cdot \frac{n\cdot n\cdot 2n\cdot 2n\cdot 3n\cdot 3n}{m(2n-m)(m+n)(3n-m)(m+2n)(4n-m)} \text{ etc.}$$

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{n\cdot 2m\cdot 2n\cdot (2m+n)\cdot 3n\cdot (2m+2n)\cdot 4n}{m(m+n)(m+2n)(m+2n)(m+3n)(m+3n)(2m+3n)(m+4n)} \text{ etc.}$$

§. 43. Cum autem pari modo sit $\int x^{\mu-1}dx(1-x^\nu)^{\frac{r}{s}} = \frac{s}{(r+s)\nu} \cdot \frac{1(\mu s+(r+s)\nu)}{\mu(r+2s)(\mu+\nu)} \cdot \frac{2(\mu s+(r+3s)\nu)}{(r+3s)(\mu+2\nu)} \cdot \frac{3(\mu s+(r+5s)\nu)}{(r+4s)}$ etc. erit priorem expressionem per hanc diuidendo $\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}}}{\int x^{\mu-1}dx(1-x^\nu)^{\frac{r}{s}}} =$

$\frac{(r+s)qv}{(p+q)sn} \cdot \frac{\mu(r+2s)(mq+(p+q)n)}{m(p+2q)(\mu s+(r+s)v)} \cdot \frac{(\mu+v)(r+3s)(mq+(p+2q)n)}{(m+n)(p+3q)(\mu s+(r+2s)v)}$ etc.

Haec igitur expressio infinita, quoties habet valorem finitum, toties summatio alterius integralis ad alterum reduci poterit. Huiusmodi autem casus existunt, quando factores numeratoris destruunt factores denominatoris, ita vt post destructionem finitus factorum numerus supersit. Continentur enim in hac expressione omnes omnino reductiones formularum integralium ad alias.

§. 44. Quo autem plures istiusmodi expressiones inter se comparari queant, eam hoc modo accipere visum est:

$$\frac{\int x^{a-1}dx(1-x^b)^c}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^h} = \frac{(h+1)g}{(c+1)b} \cdot \frac{f(h+2)(a+(c+1)b)}{a(c+2)(f+(h+1)g)} \cdot \frac{(f+g)(h+3)(a+(c+2)b)}{(a+b)(c+3)(f+(h+2)g)}$$

etc. Simili modo erit $\frac{\int x^{\alpha-1}dx(1-x^\beta)^\gamma}{\int x^{\zeta-1}dx(1-x^\eta)^\theta} = \frac{(\theta+1)\eta}{(\gamma+1)\beta} \cdot \frac{\zeta(\theta+2)(\alpha+(\gamma+1)\beta)}{\alpha(\gamma+2)(\zeta+(\theta+1)\eta)} \cdot \frac{(\zeta+\eta)(\theta+3)(\alpha+(\gamma+2)\beta)}{(\alpha+\beta)(\gamma+3)(\zeta+(\theta+2)\eta)}$ etc. quae expressiones, etsi re non inter se differunt, tamen quoniam habent formam diuersam, inter se comparari poterunt.

§. 45. Vt nunc ex his expressionibus eadem theoremata eliciamus, quae supra inuenimus, sit $\theta = \gamma = b = c$; $\eta = \beta = g = b$; erit $\frac{\int x^{a-1}dx(1-x^b)^c}{\int x^{f-1}dx(1-x^b)^c} = \frac{f(a+(c+1)b)(f+b)}{a(f+(c+1)b)(a+b)} \cdot \frac{(a+(c+2)b)(f+2b)(a+(c+3)b)}{(f+(c+2)b)(a+2b)(f+(c+3)b)}$ etc. atque altera formula

$$\frac{\int x^{\alpha-1}dx(1-x^b)^c}{\int x^{\zeta-1}dx(1-x^b)^c} = \frac{\zeta(\alpha+(c+1)b)(\zeta+b)(\alpha+(c+2)b)(\zeta+2b)(\alpha+(c+3)b)}{\alpha(\zeta+(c+1)b)(\alpha+b)(\zeta+(c+2)b)(\alpha+2b)(\zeta+(c+3)b)}$$

etc. Harum expressionum productum si ponatur $= \frac{f}{a}$ oportet esse $\frac{(a+(c+1)b)(f+b)\zeta}{(f+(c+1)b)(a+b)\alpha(\zeta+(c+1)b)} = 1$, hoc enim si fuerit, totarum expressionum infinitarum productum fiet $= \frac{f}{a}$. At hoc obtine-

tinebitur faciendo $\alpha = a + (c+1)b$; $\zeta = f + (c+1)b$; fietque $c = -\frac{1}{2}$, ita vt fit $\alpha = a + \frac{1}{2}b$; $\zeta = f + \frac{1}{2}b$, eritque ideo $\int \frac{x^{a-1}dx}{V(1-x^b)} \cdot \int \frac{x^{a+\frac{1}{2}b-1}dx}{V(1-x^b)} = \frac{f}{a} \int \frac{x^{f-1}dx}{V(1-x^b)} \cdot \int \frac{x^{f+\frac{1}{2}b-1}dx}{V(1-x^b)}$ seu si ponatur $x = z^2$; erit $\int \frac{z^{a-1}dz}{V(1-z^{2b})} \cdot \int \frac{z^{a+b-1}dz}{V(1-z^{2b})} = \frac{f}{a} \cdot \int \frac{z^{f-1}dz}{V(1-z^{2b})} \cdot \int \frac{z^{f+b-1}dz}{V(1-z^{2b})}$ positis a et f loco $2a$ et $2f$. Haec autem aequatio nil aliud est nisi Theorema supra inuentum §. 12. facto enim $f = b$ fit $\int \frac{z^{2b-1}dz}{V(1-z^{2b})} = \frac{1}{b}$ et $\int \frac{z^{b-1}dz}{V(1-z^{2b})} = \frac{\pi}{2b}$; vnde fiet $\pi = 2ab \int \frac{z^{a-1}dz}{V(1-z^{2b})} \cdot \int \frac{z^{a+b-1}dz}{V(1-z^{2b})}$.

§. 46. Simili modo alia huius generis theoremata inveniri possunt; sit enim $g = b$; $h = c$; $\eta = \mathfrak{G} = b$ et $\theta = \gamma$, quaeraturque casus, quo productum ambarum expressionum fiat $= 1$. Hoc autem obtinebitur si sit $\frac{\int(\alpha+(c+1)b)\int(\alpha+(\gamma+1)b)}{\alpha(\zeta+(c+1)b)\alpha(\zeta+(\gamma+1)b)} = 1$; id quod fiet capiendo $\alpha = a + (c+1)b$; $f = a + (\gamma+1)b$; $\zeta = a$. His igitur valoribus substitutis orietur sequens theorema non inelegans $\frac{\int x^{a-1}dx(1-x^b)^c}{\int x^{a-1}dx(1-x^b)^\gamma} \cdot \frac{\int x^{a+(c+1)b-1}dx(1-x^b)^\gamma}{\int x^{a+(\gamma+1)b-1}dx(1-x^b)^c} = 1$; siue si ponatur $c+1 = m$ et $\gamma + 1 = n$ habebitur $\int \frac{x^{a-1}dx}{(1-x^b)^{1-m}} \cdot \int \frac{x^{a+mb-1}dx}{(1-x^b)^{1-n}} = \int \frac{x^{a-1}dx}{(1-x^b)^{1-n}} \cdot \int \frac{x^{a+nb-1}dx}{(1-x^b)^{1-m}}$.

§. 47. Alio insuper modo concinnum theorema elici poterit ponendo $\gamma = b$ et $\theta = c$, manente $\eta = \beta = g = b$; atque efficiendo vt productum expressionum integralium fiat $= \frac{f}{a}$, quod, quo euenat, oportet esse $\frac{(\alpha+(c+1)b)(f+b)\zeta}{(f+(b+1)b)(\alpha+c)a}$ $\frac{(\alpha+(b+1)b)}{(\zeta+(c+1)b)} = 1$. Hoc vero efficietur capiendo $\alpha = a + (c+1)b$; $\zeta = f + (b+1)b$, ex quo reperietur $c + b + 1 = 0$ seu $b = -1 - c$; quare sumatur $c = -\frac{1}{2} + n$; et $b = -\frac{1}{2} - n$, atque sequens prodibit theorema: $\frac{f}{a} =$

$$\frac{\int x^{a-1}dx(1-x^b)^{-\frac{1}{2}+n}.\int x^{a+(\frac{1}{2}+n)b-1}dx(1-x^b)^{-\frac{1}{2}-n}}{\int x^{f-1}dx(1-x^b)^{-\frac{1}{2}-n}.\int x^{f+(\frac{1}{2}-n)b-1}dx(1-x^b)^{-\frac{1}{2}+n}}.$$

§. 48. Sint nunc omnes exponentes c, b, γ et θ inaequales, at $g = \beta = \eta = b$, quaeranturque casus quibus productum ambarum expressionum fiat $= \frac{(b+1)(\theta+1)}{(c+1)(\gamma+1)}$. Hoc autem eueniet si reddatur haec forma $\frac{f(bb+2b)(a+(c+1)b)\zeta(b\theta+2b)}{a(bc+2b)(f+(b+1)b)\alpha(b\gamma+2b)}$ $\frac{(\alpha+(\gamma+1)b)}{(\zeta+(\theta+1)b)} = 1$ quos factores ita expressi, vt singuli in sequentibus membris quantitate b crescant. Ponatur iam $\zeta + (\theta+1)b = bb + 2b$, seu $\zeta = b(1+b-\theta)$ et $\alpha + (\gamma+1)b = bc + 2b$, seu $\alpha = b(1+c-\gamma)$. Porro fiat $f + (b+1)b = b\theta + 2b$, seu $f = b(1+\theta-b)$ et $a + (c+1)b = b\gamma + 2b$ seu $a = b(1+\gamma-c)$. Denique debebit esse $\alpha = f$ et $\zeta = a$, quae duae aequationes requirunt vt sit $c - \gamma = \theta - b$, siue $c + b = \gamma + \theta$. Vnde sequens orietur Theorema: $\frac{(b+1)(\theta+1)}{(c+1)(\gamma+1)} =$

$$\frac{\int x^{b(1+\gamma-c)-1}dx(1-x^b)^c.\int x^{b(1+c-\gamma)-1}dx(1-x^b)^\gamma}{\int x^{b(1+\theta-b)-1}dx(1-x^b)^b.\int x^{b(1+b-\theta)-1}dx(1-x^b)^\theta}$$ dummodo sit $c + b = \gamma + \theta$.

§. 49. Alio autem insuper modo expressio illa effici potest $= 1$, ponendo $\alpha = a + (c+1)b$ et $\zeta = f + (b+1)$

$+1)b$; $f=b(\gamma+2)$; $a=b(\theta+2)$; ita vt sit $\alpha=b(3+c+\theta)$ et $\zeta=b(3+\gamma+b)$. Porro autem debet esse $\zeta+(\theta+1)b=bb+2b$, et $\alpha+(\gamma+1)b=bc+2b$; quibus postulatur vt sit $\gamma+\theta+2=0$. Ponatur ergo $\gamma=-1+n$ et $\theta=-1-n$. At si requiratur, vt productum ambarum expressionum sit $=\frac{f(b+1)(\theta+1)}{a(c+1)(\gamma+1)}$, id obtinebitur ponendo $\alpha=a+(c+1)b$, $\zeta=f+(b+1)b$; $f=b(\gamma+1)$; $a=b(\theta+1)$ vnde erit $\alpha=b(2+c+\theta)$ et $\zeta=b(2+b+\gamma)$. Tandem vero debebit esse $\gamma+\theta+1=0$. Ponatur $\gamma=-\frac{1}{2}+n$ et $\theta=-\frac{1}{2}-n$; atque habebitur hoc theorema $\frac{b+1}{c+1}=\frac{\int x^{b(\frac{1}{2}-n)-1}dx(1-x^b)^c}{\int x^{b(\frac{1}{2}+n)-1}dx(1-x^b)^b}$ $\frac{\int x^{b(\frac{3}{2}+c-n)-1}dx(1-x^b)^{-\frac{1}{2}+n}}{\int x^{b(\frac{3}{2}+b+n)-1}dx(1-x^b)^{-\frac{1}{2}-n}}$: in quo notandum est, exponentes $c, b, -\frac{1}{2}+n, -\frac{1}{2}-n$ numeros negatiuos quidem esse posse, sed tales vt cum vnitate ad affirmatiuos transeant; alioquin enim integralia valorem finitum non obtinerent casu $x=1$.

§. 50. Quemadmodum igitur non solum theorema supra inuentum circa duarum formularum integralium producta detexi hac methodo magis directa, sed etiam alia noua elicui non minus notatu digna, ita, si pari modo tres eiusmodi expressiones in se inuicem ducantur, theoremata complura circa producta trium formularum integralium prodibunt; atque vltra ad quotcunque factorum numerum progredi licebit; sed cum haec inquisitio adeo prolixum calculum requirat, vt etiam litterae vix sufficiant, cum ipsis theorematis praecipuis indicatis, tum via monstrata contentus ero.

DE FRACTIONIBVS CONTINVIS OBSERVATIONES.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Cum anno superiore incepissem fractiones continuas examini subiicere, hancque fere nouam analyseos partem euoluere, nonnullae obseruationes se interea obtulerunt, quae forte ad istam Theoriam excolendam non erunt incongruae. Quamobrem cum exploratio huius doctrinae non parum adiumenti analysi allatura esse videatur, hoc argumentum denuo aggrediar, et quae huc spectantia occurrerunt, dilucide exponam. Sit igitur proposita haec fractio continua

$$A+\cfrac{B}{C+\cfrac{D}{E+\cfrac{F}{G+\cfrac{H}{I+\text{etc.}}}}}$$

cuius valor verus reperietur continuando sequentem seriem in infinitum.

$A+\frac{B}{1.P}-\frac{BD}{PQ}+\frac{BDF}{QR}-\frac{BDFH}{RS}+$ etc. in qua serie litterae P, Q, R, S etc. sequentes obtinent valores:

$P=C$; $Q=EP+D$; $R=GQ+FP$; $S=IR+HQ$; etc. Series haec autem semper est conuergens, quantumvis crescant vel decrescant litterae B, C, D, E, F etc. dummodo omnes sint affirmatiuae, quilibet terminus enim minor est quam praecedens, maior vero quam sequens; id

quod

quod lex, qua valores P, Q, R, S etc. formantur, ſtatim declarat.

§. 2. Si ergo viciſſim haec propoſita fuerit ſeries infinita $\frac{B}{P} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BDF}{QR} - \frac{BDFH}{RS} +$ etc. eius ſumma commode per fractionem continuam exprimi poterit. Cum enim ſit $C = P$; $E = \frac{Q-D}{P}$; $G = \frac{R-FP}{Q}$; $I = \frac{S-HQ}{R}$, etc. habebitur fractio continua illi ſeriei aequalis haec:

$$\cfrac{B}{P + \cfrac{D}{\cfrac{Q-D}{P} + \cfrac{F}{\cfrac{R-FP}{Q} + \cfrac{H}{\cfrac{S-HQ}{R} + \cfrac{K}{etc.}}}}} \quad \text{ſeu} \quad \cfrac{B}{P + \cfrac{DP}{Q-D + \cfrac{FPQ}{R-FP + \cfrac{HQR}{S-HQ + \cfrac{KRS}{etc.}}}}}$$

Quare ſi data fuerit iſta ſeries $\frac{a}{p} - \frac{b}{q} + \frac{c}{r} - \frac{d}{s} + \frac{e}{t} -$ etc. ob $B = a$; $D = b:a$; $F = c:b$; $H = d:c$; $K = e:d$, etc. et $P = p$; $Q = q:p$; $R = pr:q$; $S = qs:pr$; $T = prt:qs$; etc. huius ſeriei $\frac{a}{p} - \frac{b}{q} + \frac{c}{r} - \frac{d}{s} + \frac{e}{t} -$ etc. ſummae aequalis erit ſequens fractio continua:

$$\cfrac{a}{p + \cfrac{b:a}{\cfrac{aq-bp}{app} + \cfrac{c:b}{\cfrac{p^2(br-cq)}{bqq} + \cfrac{d:c}{\cfrac{q^2(cs-dr)}{cp^2r^2} + \cfrac{e:d}{\cfrac{p^2r^2(dt-es)}{dq^2s^2} + etc.}}}}} = \cfrac{a}{p + \cfrac{bp^2}{aq-bp + \cfrac{acq}{br-cq + \cfrac{bdrr}{cs-dr + \cfrac{ces}{dt-es + etc.}}}}}$$

§. 3. Vt haec exemplis nonnullis illuſtremus, ſumamus ſeriem $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} +$ etc. cuius ſumma eſt $= l2$ ſeu $= \int \frac{dx}{1+x}$ ſi poſt integrationem ponatur $x = 1$. erit ergo $a = b = c = d$ etc. $= 1$; $p = 1$; $q = 2$; $r = 3$; $s = 4$; etc. atque $p = 1$; $aq - bp = 1$; $br - cq = 1$; $cs - dr = 1$, etc.

Hinc igitur fit $\int \frac{dx}{1+x} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{16}{1+\text{etc.}}}}}}$

ſeu huius fractionis continuae valor eſt 12.

§. 4. Contemplemur nunc hanc ſeriem $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-$etc. cuius ſumma eſt area circuli, diametrum $=1$ habentis, ſeu $=\int\frac{dx}{1+x^2}$ poſito poſt integrationem $x=1$. Erit ergo $a=b=c=d=$etc. $=1$ et $p=1$; $q=3$; $r=5$; $s=7$; etc. vnde fit:

$$\int\frac{dx}{1+xx} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2\text{ etc.}}}}}}$$

quae eſt ipſa fractio continua Brounckeri, quam pro quadratura circuli exhibuit.

§. 5. Simili modo aliis huius generis ſeriebus accipiendis prodibunt ſequentes formularum integralium conuerſiones in fractiones continuas, poſito ſcilicet poſt integrationem $x=1$:

$$\int\frac{dx}{1+x^3} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{4^2}{3+\cfrac{7^2}{3+\cfrac{10^2}{3+\text{etc.}}}}}} \quad ; \quad \int\frac{dx}{1+x^4} = \cfrac{1}{1+\cfrac{2}{4+\cfrac{3^2}{4+\cfrac{5^2}{4+\cfrac{13^2}{4\text{ etc.}}}}}}$$

$\int dx$

$$\int \frac{dx}{1+x^5} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{5+\cfrac{6^2}{5+\cfrac{11^2}{5+\cfrac{16^2}{5+\text{etc.}}}}}} \quad ; \int \frac{dx}{1+x^6} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\cfrac{13^2}{6+\cfrac{19^2}{6\ \text{etc.}}}}}}$$

§. 6. Hinc igitur ſequitur fore generaliter:

$$\int \frac{dx}{1+x^m} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{m+\cfrac{(m+1)^2}{m+\cfrac{(2m+1)^2}{m+\cfrac{(3m+1)^2}{m+\text{etc.}}}}}}$$

poſito poſt integrationem $x=1$. Ac ſi fuerit m numerus fractus habebitur:

$$\frac{dx}{1+x^{\frac{m}{n}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{n}{m+\cfrac{(m+n)^2}{m+\cfrac{(2m+n)^2}{m+\cfrac{(3m+n)^2}{m+\text{etc.}}}}}}$$

§. 7. Conſideremus nunc formulam $\int \frac{x^{n-1}dx}{1+x^m}$ quae integrata et poſt integrationem facto $x=1$ praebet hanc ſeriem: $\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{2m+n} - \frac{1}{3m+n} +$ etc. Hinc fiet $a = b = c = d =$ etc. $= 1$. et $p = n$; $q = m+n$; $r = 2m+n$; $s = 3m+n$; etc. Vnde habebitur

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{1+x^m} = \cfrac{1}{n+\cfrac{n^2}{m+\cfrac{(m+n)^2}{m+\cfrac{(m+n)^2}{m+\text{etc.}}}}}$$

quae fractio continua congruit cum vltimo inuenta.

§. 8. Proponatur iam iſta formula $\int \frac{x^{n-1}dx}{(1+x^m)^{\frac{\mu}{\nu}}}$, quae integrata facto $x=1$ praebet hanc ſeriem: $\frac{1}{n} - \frac{\mu}{\nu(m+n)} +$

$+\frac{\mu(\mu+\nu)}{1\cdot 2\nu^2(2m+n)} - \frac{\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\nu^3(3m+n)} +$ etc. quae cum generali comparata dat $a=1$; $b=\mu$; $c=\mu(\mu+\nu)$; $d=\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)$; etc $p=n$; $q=\nu(m+n)$; $r=2\nu^2(2m+n)$; $s=6\nu^3(3m+n)$; $t=24\nu^4(4m+n)$; etc. atque $aq-bp=\nu m+(\nu-\mu)n$; $br-cq=\mu\nu(3\nu-\mu)m+\mu\nu(\nu-\mu)n$; $cs-dr=2\mu\nu^2(\mu+\nu)(m(5\nu-2\mu)+n(\nu-\mu))$ $dt-es=6\mu\nu^3(\mu+\nu)(\mu+2\nu)(m(7\nu-3\mu)+n(\nu-m))$ etc. quibus ſubſtitutis, factaque reductione habebitur:

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{(1+x^m)^{\frac{\mu}{\nu}}}=\cfrac{1}{n+\cfrac{\mu n^2}{\nu m+(\nu-\mu)n+\cfrac{\nu(\mu+\nu)(m+n)^2}{(3\nu-\mu)m+(\nu-\mu)n+\cfrac{2\nu(\mu+2\nu)(2m+n)^2}{(5\nu-2\mu)m+(\nu-\mu)n+\cfrac{3\nu(\mu+3\nu)(3m+n)^2}{(7\nu-3\mu)m+(\nu-\mu)n\text{ etc.}}}}}}$$

Sit $\mu=1$ et $\nu=2$ erit $\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{(1-x^m)}}=$

$$\cfrac{1}{n+\cfrac{n^2}{2m+n+\cfrac{6(m+n)^2}{5m+n+\cfrac{20(2m+n)^2}{6m+n+\cfrac{42(3m+n)^2}{11m+n+\cfrac{72(4m+n)^2}{14m+n+\text{ etc.}}}}}}}$$

§. 9. At ſi fuerit $\nu=1$ et μ numerus integer, prodibunt ſequentes fractiones continuae:

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{(1+x^m)^2}=\cfrac{1}{n+\cfrac{2n^2}{m-n+\cfrac{1\cdot 2(m+n)^2}{m-n+\cfrac{2\cdot 4(2m+n)^2}{m-n+\cfrac{3\cdot 6(3m+n)^2}{m-n+\cfrac{4\cdot 8(4m+n)^2}{m-n+\text{ etc.}}}}}}}$$

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{(1+x^m)^3}=\cfrac{1}{n+\cfrac{3n^2}{m-2n+\cfrac{1\cdot 4(m+n)^2}{=2n+\cfrac{2\cdot 5(2m+n)^2}{=m-2n+\cfrac{3\cdot 6(3m+n)^2}{=2m-2n+\cfrac{4\cdot 7(4m+n)^2}{=2m-2n+\text{ etc.}}}}}}}$$

quae

quae expreſſio pariter ac ſequentes ob quantitates negativas non conuergunt ſed diuergunt.

§. 10. Conſequuntur haec omnia ex conuerſione fractionis continuae generalis §. 1 datae in ſeriem infinitam $A + \frac{B}{IP} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BDF}{QR} - \frac{BDFH}{RS} +$ etc. Haec eadem autem ſeries addendis binis terminis transformatur in hanc $A + \frac{BE}{IQ} + \frac{BDFI}{QS} + \frac{BDFHKN}{SV} +$ etc. Eſt vero $C = P = \frac{Q-D}{E}$; $G = \frac{S-HQ}{IQ} - \frac{F(Q-D)}{EQ}$; $L = \frac{V-MS}{NS} - \frac{K(S-HQ)}{IS}$; etc. Hinc iſta ſeries infinita $A + \frac{BE}{Q} + \frac{BDFI}{QS} + \frac{BDFHKN}{SV} +$ etc. conuertetur in ſequentem fractionem continuam:

$$A + \cfrac{B}{\cfrac{Q-D}{E} + \cfrac{D}{E + \cfrac{F}{\cfrac{E(S-HQ)-FI(Q-D)}{EIQ} + \cfrac{H}{I + \cfrac{K}{\cfrac{I(V-MS)-KN(S-HQ)}{INS} + \text{etc.}}}}}}$$

quae a fractionibus liberata tranſit in hanc:

$$A + \cfrac{BE}{Q-D + \cfrac{D}{I + \cfrac{FIQ}{E(S-HQ)-FI(Q-D) + \cfrac{EHQ}{I + \cfrac{KNS}{I(V-MS)-KN(S-HQ) + \cfrac{IMS}{I + \text{etc.}}}}}}}$$

§. 11. Si nunc viciſſim proponatur haec ſeries infinita $\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \frac{d}{s} + \frac{e}{t} +$ etc. et comparatio cum praecedente inſtituatur erit $Q = p$; $S = \frac{q}{p}$; $V = \frac{pr}{q}$; $X = \frac{qs}{pr}$; $Z = \frac{prt}{qs}$ etc. itemque $E = \frac{a}{B}$; $I = \frac{b}{BDF}$; $N = \frac{c}{BDFHK}$; etc. quibus valoribus ſeries propoſita conuertetur in hanc fractionem continuam:

$$\cfrac{a}{p-\mathrm{D}+\cfrac{\mathrm{D}}{1+\cfrac{bp:1}{\mathrm{D}a(\frac{q}{p}-\mathrm{H}p)-b(p-\mathrm{D})+\cfrac{\mathrm{DH}ap:1}{1+\cfrac{cq:p}{\mathrm{H}b(\frac{pr}{q}-\frac{\mathrm{M}q}{p})-c(\frac{q}{p}-\mathrm{H}p)+\cfrac{\mathrm{HM}bq:p}{1+\cfrac{dpr:q}{\mathrm{M}c(\frac{qs}{pr}\ \text{etc.}}}}}}}}$$

in quam fractionem continuam innumerabiles nouae quantitates ingrediuntur, quae in ſerie propoſita non inerant.

§. 12. Cum autem ſit ex §. 2. haec ſeries $\frac{b}{p} - \frac{bd}{pq} + \frac{bdf}{qr} - \frac{bdfh}{rs} +$ etc. aequalis iſti fractioni continuae

$$\cfrac{b}{p+\cfrac{dp}{q-d+\cfrac{jpq}{r-fp+\cfrac{hqr}{s-hq+\cfrac{krs}{\text{etc.}}}}}}$$

ſi haec ſeries ad praecedentem reducatur fiet $b = \mathrm{BE}$; $d = \frac{-\mathrm{DFI}}{\mathrm{E}}$; $f = \frac{-\mathrm{HKN}}{\mathrm{I}}$; etc. $p = \mathrm{Q}$; $q = \mathrm{S}$; $r = \mathrm{V}$, $s = \mathrm{X}$ etc. Ex quo fractio continua §. praecedente data transmutabitur in hanc:

$$\mathrm{A}+\cfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{Q}-\cfrac{\mathrm{IDFI.Q}}{.\mathrm{ES}+\mathrm{DFI}-\cfrac{\mathrm{EHKN.QS}}{\mathrm{IV}+\mathrm{HKNQ}-\cfrac{\mathrm{IMOR.SV}}{\mathrm{NX}+\mathrm{MORS}+\text{etc.}}}}}$$

cuius lex progreſſionis facile perſpicitur. §. 13.

§. 13. Series autem illa $A + \frac{B}{P} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BD^2}{QR} - \text{etc.}$ quam primum ex fractione continua generali elicuimus, facile transformatur in hanc formam: $A + \frac{B}{2P} + \frac{BE}{2Q} - \frac{BDG}{2PR} + \frac{BDFI}{2QS} - \frac{BDFHL}{2RT} + \text{etc.}$ quae si litterae C, E, G, I etc. per reliquas ope aequationum datarum exprimantur, abit in hanc: $A + \frac{B}{2P} + \frac{B(Q-D)}{2PQ} - \frac{BD(R-FP)}{2PQR} + \frac{BDF(S-HQ)}{2QRS} - \text{etc.}$ cui propterea aequalis est ista fractio continua:

$$A + \cfrac{B}{P + \cfrac{DP}{Q - D + \cfrac{FPQ}{R - FP + \cfrac{HQR}{S - HQ + \text{etc.}}}}}$$

§ 14. Haec omnia igitur consequuntur ex contemplatione fractionum continuarum immediate, pluresque huius generis obseruationes iam in superiore dissertatione communicaui. Nunc ergo his relictis ad alia pergo, atque aliquot modos tam ad fractiones continuas perueniendi, quam datarum istiusmodi fractionum valores per integrationes assignandi. Primum itaque, cum hic Brounckeri expressio quadtaturae circuli sit non solum demonstrata, sed etiam quasi a priori inuenta, examini subiiciam alias similes expressiones vel ab ipso Brounckero vel a Wallisio inuentas, recensentur enim a Wallisio, nec satis clare indicatur, vtrum Brounkerus omnes inuenerit, an eam duntaxat, quae pro circuli quadratura fuit exhibita. Postmodum vero etiam reliquas illas fractiones continuas, quae altioris indaginis videntur, ex principiis maxime diuersis demonstrabo, istiusque generis multo plures eruere docebo.

§. 15.

§. 15. Quae autem apud Wallisium extant huc redeunt, vt sit productum duarum harum fractionum continuarum $= a^2 =$

$$a - 1 + \cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)\,etc.}}} \quad \text{et} \quad a + 1 + \cfrac{1}{2(a+1)+\cfrac{9}{2(a+1)+\cfrac{25}{2(a+1)\,etc.}}}$$

Cum igitur simili modo sit $(a+2)^2 =$

$$a + 1 + \cfrac{1}{2(a+1)+\cfrac{9}{2(a+1)+etc.}} \cdot a + 3 + \cfrac{1}{2(a+3)+\cfrac{9}{2(a+3)+etc.}}$$

reperietur hoc modo infinitum progrediendo

$$a \cdot \frac{a(a+4)(a+4)(a+8)(a+8)(a+12)(a+12)}{(a+2)(a+2)(a+6)(a+6)(a+10)(a+10)(a+14)} \text{ etc.}$$

$$= a - 1 + \cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)+etc.}}}$$

§. 16. Si nunc productum istud ex infinitis factoribus constans per methodum in praecedente dissertatione traditam examinetur reperietur fore $\frac{a(a+4)(a+4)(a+8)\,etc.}{(a+2)(a+2)(a+6)(a+6)\,etc.}$ $= \frac{\int x^{a+1}dx : \sqrt{(1-x^4)}}{\int x^{a-1}dx : \sqrt{(1-x^4)}}$. Quocirca huius fractionis continuae valor

$$a - 1 + \cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)\,etc.}}}$$

aequabitur huic expressioni $a\frac{\int x^{a+1}dx : \sqrt{(1-x^4)}}{\int x^{a-1}dx : \sqrt{(1-x^4)}}$ positio post vtramque integrationem $x = 1$.

§. 17. Theorema hoc, quo fractionis continuae satis latae patentis valor per formulas integrales exprimitur, eo magis est notatu dignum, quo minus eius veritas est obvia. Nam quanquam ille casus quo $a = 2$, iam ante est in-

inuentus, eiusque valor per quadraturam circuli expositus, ceteri tamen casus ex eo non consequuntur. Si enim ista fractio continua modo initio praescripto conuertatur in seriem, ad tam intricatas peruenitur formulas, vt summa eius minime colligi queat; praeter casum $a = 2$. Quo circa iam pridem multam collocaui operam, vt tam veritatem istius theorematis demonstrarem, quam viam detegerem, qua a priori ad hanc ipsam fractionem continuam pertingere liceret; quae inuestigatio, quo difficilior mihi est visa, eo maiorem vtilitatem ex ea orturam esse, sum arbitratus. Quamdiu autem omne studium frustra in hoc negotio impendi, maxime dolui, methodum a Brounckero vsitatam nusquam esse expositam et forsitan omnino periisse.

§. 18. Quantum quidem ex Wallisii recensione constat, Brounckerus ad istam formam deductus est per interpolationem huius seriei: $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} +$ etc. cuius terminos intermedios ipsam circuli quadraturam praebere Wallisius demonstrauerat. Atque adeo indicatur initium huius interpolationis a Brounckero institutae. Sibi enim propositum fuisse perhibetur, singulas fractiones $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$ etc. in binos factores resoluere, qui omnes inter se continuam progressionem constituant. Ita si fuerit $AB = \frac{1}{2}$; $CD = \frac{3}{4}$; $EF = \frac{5}{6}$; $GH = \frac{7}{8}$; etc. ac quantitates A, B, C, D, E, etc. continuam progressionem constituant, series illa abit in hanc; $AB + ABCD + ABCDEF +$ etc. quae in hanc formam reducta sponte interpolatur: erit enim terminus cuius index $\frac{1}{2}$ est, $= A$; et terminus indicem $\frac{3}{2}$ habens $= ABC$; et ita porro. Ex quo tota haec interpolatio ad resolutionem singulorum fractionum in binos factores reducitur.

 §. 19.

§. 19. Ex lege autem continuitatis erit $BC = \frac{2}{3}$; $DE = \frac{4}{5}$; $FG = \frac{6}{7}$; etc. Cum igitur sit $A = \frac{1}{2B}$; $B = \frac{2}{3C}$; $C = \frac{3}{4D}$; $D = \frac{4}{5E}$; etc. statim obtinetur $A = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5}$ etc. quae autem est ipsa formula a Wallisio primum producta, qua circuli quadraturam expressit, atque maxime ab expressione Brounckeri abhorret. Quare cum ista formula interpolationem hoc modo inuestigando tam facile se praebeat, eo magis est mirandum Brounckerum eadem via ingressum ad expressionem tantopere differentem peruenisse; nulla enim via superesse videtur, quae ad fractionem continuam deduceret. Neque vero existimandum est, Brounckerum de industria valorem ipsius A per fractionem continuam exprimere voluisse; sed potius methodum quampiam peculiarem secutum, quasi inuitum in eam incidisse: cum eo tempore fractiones continuae omnino fuerint incognitae, atque hac occasione primum in medium prolatae. Ex quibus satis colligere licet, obuiam dari methodum ad istiusmodi fractiones continuas deducentem, quantumuis ea nunc quidem abscondita videatur.

§. 20. Quamuis autem diu in hac methodo reperienda irrito conatu sim versatus, tamen in alium incidi modum interpolationes huiusmodi serierum per fractiones continuas absoluendi qui mihi autem praebuit expressiones a Brounckerianis maxime diuersas. Interim tamen non sine omni vtilitate fore spero, istam methodum exponere, cum eius ope reperiantur fractiones continuae, quarum valores iam aliunde sint cogniti, et per quadraturas exhiberi queant. Cum enim deinde aliam methodum sim traditurus valores quarumcunque fractionum continuarum per quadraturas exprimendi, inde egregiae orientur comparationes

tiones formularum integralium, eo saltem casu quo variabili post integrationem definitus valor tribuitur, eiusmodi comparationes plures in praecedente dissertatione de productis ex infinitis factoribus constantibus exhibui.

§. 21. Vt igitur hunc a me inuentum interpolandi modum exponam proposita sit ista series latissime patens $\frac{p}{p+2q} + \frac{p(p+2r)}{(p+2q)(p+2q+2r)} + \frac{p(p+2r)(p+4r)}{(p+2q)(p+2q+2r)(p+2q+4r)} +$ etc. cuius terminus indicis $\frac{1}{2}$ sit $= A$; terminus indicis $\frac{3}{2} = AB$ C terminus indicis $\frac{5}{2} = ABCDE$, etc. Hinc igitur erit $AB = \frac{p}{p+2q}$; $CD = \frac{p+2r}{p+2q+2r}$; $EF; = \frac{p+4r}{p+2q+4r}$; etc. atque ex lege continuitatis $BC = \frac{p+r}{p+2q+r}$; $DE = \frac{p+3r}{p+2q+3r}$; $FG = \frac{p+5r}{p+2q+5r}$ et ita porro.

§. 22. Ad fractiones tollendas ponatur $A = \frac{a}{p+2q-r}$; $B = \frac{b}{p+2q}$; $C = \frac{c}{p+2q+r}$; $D = \frac{d}{p+2q+2r}$ etc. eritque $ab = (p+2q-r)p$; $bc = (p+2q)(p+r)$; $cd = (p+2q+r)(p+2r)$; $de = (p+2q+2r)(p+3r)$ etc. Fiat nunc $a = m - r + \frac{1}{\alpha}$; $b = m + \frac{1}{\beta}$; $c = m + r + \frac{1}{\gamma}$; $d = m + 2r + \frac{1}{\delta}$; $e = m + 3r + \frac{1}{\varepsilon}$ etc. in quibus substitutionibus partes integrae constituunt progressionem arithmeticam, cuius differentia constans est r, id quod ipsa progressio factorum illorum postulat. His igitur valoribus substitutis prodibunt sequentes aequationes, ponendo breuitatis gratia $p^2 + 2pq - pr - m^2 + mr = P$, et $2r(p+q-m) = Q$.

$$P\alpha\beta - (m-r)\alpha = m\beta + 1$$
$$(P+Q)\beta\gamma - m\beta = (m+r)\gamma + 1$$
$$(P+2Q)\gamma\delta - (m+r)\gamma = (m+2r)\delta + 1$$
$$(P+3Q)\delta\varepsilon - (m+2r)\delta = (m+3r)\varepsilon + 1$$

etc.

§. 23. Ex his igitur aequationibus emergent sequentes litterarum α, β, γ, δ, etc. comparationes inter se. $\alpha = \frac{m\beta+1}{P\beta-(m-r)} = \frac{m}{P} + \frac{p(p+2q-r):P^2}{-(m-r)+\beta}$, $\beta = \frac{(m+r)\gamma+1}{(P+Q)\gamma-m} = \frac{m+r}{P+Q} + \frac{(p+r)(p+2q):(P+Q)^2}{-m+\gamma}$ $\gamma = \frac{(m+2r)\delta+1}{(P+2Q)\delta-(m+r)} = \frac{m+2r}{P+2Q} + \frac{(p+2r)(p+2q+r):(P+2Q)^2}{-(m+r)+\delta}$

Si ergo breuitatis gratia ponatur $p^2+2pq-mp-mq+qr=R$ et $pr+qr-mr=S$, atque valores litterarum assumtarum continuo in praecedentibus surrogentur, proueniet sequens fractio continua

$$\alpha = \frac{m}{P} + \frac{p(p+2q-r):P^2}{2rR} \Big/ P(P+Q) + \frac{(p+r)(p+2q):(P+Q)^2}{2r(R+S)} \Big/ (P+Q)(P+2Q) + \frac{(p+2r)(p+2q+r):(P+2Q)^2}{2r(R+2S)} \Big/ (P+2Q)(P+3Q) + \text{etc.}$$

§. 24. Cum igitur sit $a = m-r+\frac{1}{\alpha}$ habebitur

$$a = m-r+\frac{P}{m+\frac{p(p+2q-r)(P+Q)}{2rR+\frac{(p+r)(p+2q)^2(P+2Q)}{2r(R+S)+\frac{(p+2r)(p+2q+r)(P+Q)(P+3Q)}{2r(R+2S)+\text{e.c.}}}}}$$

Hinc igitur seriei propositae $\frac{p}{p+2q} + \frac{p(p+2r)}{(p+2q)(p+2q+2r)} + \frac{p(p+2r)(p+4r)}{(p+2q(p+2q+2r)(p+2q+4r)} +$ etc. terminus cuius index est $\frac{1}{2}$ erit $A = \frac{a}{p+2q-r}$. Quoniam vero huius seriei terminus generalis indicem habens n est $= \frac{\int y^{p+2q-1}dy(1-y^{2r})^{n-1}}{\int y^{p-1}dy(1-y^{2r})^{n-1}}$ erit fractio continua inuenta seu valor litterae $a = (p+2q-r)\frac{\int y^{p+2q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$ posito post vtramque integrationem $y=1$.

§. 25.

§. 25. Cum autem in nostra fractione continua insit littera arbitraria m, innumerabiles habebuntur fractiones continuae, quarum idem est valor isque cognitus: ex quibus praecipuas contemplari iuuabit. Sit igitur primo $m-r=p$ seu $m=p+r$, erit $P=2p(q-r)$; $Q=2r(q-r)$; $R=p(q-r)$ et $S=r(p-r)$: vnde fiet

$$a=p+\cfrac{2p(q-r)}{p+r+\cfrac{(p+2q-r)(p+r)}{r+\cfrac{(p+2q)(p+r)}{r+\cfrac{(p+2q+r)(p+2r)}{r+\text{etc.}}}}}$$

At si fuerit $r>q$, ne fractio continua fiat negatiua, erit:

$$a=\cfrac{p}{1+\cfrac{2(r-q)}{p+2q-r+\cfrac{(p+2q-r)(p+r)}{r+\cfrac{(p+2q)(p+2r)}{r+\cfrac{(p+2q+r)(p+3r)}{r+\text{etc.}}}}}}$$

§. 26. Sit nunc $m=p+q$; quo et Q et S euanescat; erit autem $P=q(r-q)$ et $R=q(r-q)$, indeque proveniet

$$a=p+q-r+\cfrac{q(r-q)}{p+q+\cfrac{p(p+2q-r)}{2r+\cfrac{(p+r)(p+2q)}{2r+\cfrac{(p+2r)(p+2q+r)}{2r+\text{etc.}}}}}$$

quae fractio continua adeo praecedentibus est aequalis, etiamsi ipsae formae sint diuersae.

§. 27 Ponatur $m=p+2q$; eritque $P=2q(r-p-2q)=-2q(p+2q-r)$; $Q=-2qr$; $R=-q(p+2q-r)$, et $S=-qr$. Ex his itaque obtinebitur sequens fractio continua:

$$a=p+2q-r-\cfrac{2q(p+2q-r)}{p+2q+\cfrac{p(p+2q)}{r+\cfrac{(p+r)(p+2q+r)}{r+\cfrac{(p+2r)(p+2q+2r)}{r+\text{etc.}}}}}$$

Ita innumerabiles prodeunt fractiones continuae quarum omnium idem est valor a, qui per formulas integrales inuentus est $=(p+2q-r)\frac{\int y^{p+2q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$

$$=\frac{(p+2q-2r)\int y^{p+2q-2r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}.$$

§. 28. Antequam vlterius progrediamur casus nonnullos contemplemur. Sit igitur $r=2q$; eritque $a=p\frac{\int y^{p+2q-1}dy:\sqrt{(1-y^{4q})}}{\int y^{p-1}dy:\sqrt{(1-y^{4q})}}$. Cum ergo fiat $P=p^2+mq-m^2$; $Q=4q(p+q-m)$; $R=p^2+2pq+2qq-mp-mq$, et $S=2q(p+q-m)$, erit in genere

$$a=m-2q+\cfrac{P}{m+\cfrac{p^2(P+Q)}{4qR+\cfrac{(p+2q)^2P(P+Q)}{4q(R+S)+\cfrac{(p+4q)^2(P+2Q)(P+Q)}{4q(R+2S)+\text{etc.}}}}}$$

§. 29. Si autem pro m varios illos valores substituamus, prodibunt sequentes fractiones continuae determinatae.

$$a=p-\cfrac{2pq}{p+2q+\cfrac{p(p+2q)}{2q+\cfrac{(p+2q)(p+4q)}{2q+\cfrac{(p+4q)(p+6q)}{2q+\text{etc.}}}}}$$

Siue loco huius fractionis continuae ob $r>q$

$$a=\cfrac{p}{1+\cfrac{2q}{p+\cfrac{p(p+2q)}{2q+\cfrac{(p+2q)(p+4q)}{2q+\cfrac{(p+4q)(p+6q)}{2q+\text{etc.}}}}}}$$

Deinde ex §. 26. obtinetur pro hoc casu ista fractio

$$a=p-q+\cfrac{qq}{p+q+\cfrac{pp}{4q+\cfrac{(p+2q)^2}{4q+\cfrac{(p+4q)^2}{4q+\text{etc.}}}}}$$

Tertio

Tertio vero §. 27. ſuppeditabit hanc fractionem continuam :

$$a = p - \cfrac{2pq}{r + 2q + \cfrac{p(r+2q)}{2q + \cfrac{(p+q)(r+2q)}{2r + \cfrac{(p+q)(p+2q)}{2q + \cfrac{(p+q)(r+2q)}{2r + \text{etc.}}}}}}$$

quae cum primo hic exhibita congruit: ita vt duae tantum fractiones continuae ſimpliciores pro hoc caſu, quo $r = 2q$, habeantur.

§. 30. Ponatur nunc porro $q = p = 1$, vt fiat $a = \frac{\int yydy : \sqrt{(1-y^4)}}{\int dy : \sqrt{(1-y^4)}}$; erit primo :

$$a = 1 - \cfrac{2}{3 + \cfrac{1 \cdot 3}{2 + \cfrac{3 \cdot 5}{2 + \cfrac{5 \cdot 7}{7 + \text{etc.}}}}}$$

Deinde vero habebitur :

$$a = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{9}{4 + \cfrac{25}{4 + \cfrac{49}{4 + \text{etc.}}}}}}$$

Vnde ſequitur fore $- \frac{\int dy : \sqrt{(1-y^4)}}{\int yyay : \sqrt{(1-y^4)}} =$

$$2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{25}{4 + \cfrac{49}{4 + \text{etc.}}}}}$$

qui caſus continetur in expreſſione §. 16. data ex quo illa formula nondum ſatis demonſtrata magis confirmatur. Poſito enim ibi $a = 3$, fiet $3 \frac{\int x^4 dx : \sqrt{(1-x^4)}}{\int xxdx : \sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\int dx : \sqrt{(1-x^4)}}{\int xxdx : \sqrt{(1-x^4)}}$

$$= 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{9}{4 + \cfrac{25}{4 + \cfrac{49}{4 + \text{etc.}}}}}$$

ita vt nunc quidem conſtet formulam illam §. 16. exhibitam

bitam veram esse casibus quibus est tum $a = 2$ tum etiam $a = 3$: mox autem eius veritas in latissimo sensu euincetur.

§. 31. Sit $q = \frac{1}{2}$ et $p = 1$; manente $r = 2q = 1$ erit $a = \frac{\int y dy : \sqrt{(1-y^2)}}{\int dy : \sqrt{(1-y^2)}} = \frac{2}{\pi}$ denotante π peripheriam circuli cuius diameter est $= 1$. Generaliter itaque erit $P = 1 + m - m^2$; $Q = 3 - 2m$; $R = \frac{5-3m}{2}$ et $S = \frac{3-2m}{2}$, ideoque

$$a = m - 1 + \cfrac{1+m-m^2}{m+1^2(1-m-m^2)}$$
$$\cfrac{5-3m+2^2(1+m-m^2)(1-3m-m^2)}{8-5m+3^2(4+m-m^2)(1-5m-m^2)}$$
$$\cfrac{11-7m+\text{etc.}}{}$$

In casibus autem specialibus expositis erit

$$\frac{\pi}{2} = \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1\cdot 2}{1+\cfrac{2\cdot 3}{1+\cfrac{3\cdot 4}{1+\text{etc.}}}}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1\cdot 2}{1+\cfrac{2\cdot 3}{1+\cfrac{3\cdot 4}{1+\text{etc.}}}}}$$

$$\text{et } \frac{\pi}{2} = \cfrac{1}{\frac{1}{2}+\cfrac{1\cdot 4}{\frac{3}{2}+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{2^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\text{etc.}}}}}} = 2 - \cfrac{1}{2+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{2^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\text{etc.}}}}}$$

§. 32. Vt vsus harum formularum in interpolationibus intelligatur, proposita sit haec series: $\frac{2}{1} + \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5} +$ etc. cuius terminum indicis $\frac{1}{2}$ inueniri oporteat, qui sit $=$ A; Erit ergo $p = 2$; $r = 1$; et $q = -\frac{1}{2}$. Ponatur $A = \frac{a}{p+2q-r}$ et $A = \frac{a}{0}$, vnde incommodum datarum formularum, si fiat $p + 2q - r = 0$ satis intelligitur. Interim tamen negotium hoc absolui potest quaerendo terminum indicis $\frac{3}{2}$, qui si fuerit $= Z$ erit $A = \frac{2}{3} Z$; At $\frac{1}{2} Z$ erit terminus indicis $\frac{1}{2}$ huius seriei $\frac{4}{3} + \frac{4\cdot 6}{3\cdot 5} + \frac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7} +$ etc. quae cum generali comparata dat $p = 4$; $r = 1$; $q = -\frac{1}{2}$. ita vt fiat Z

$=$

$= \frac{2\int y^2 dy : \sqrt{(1-y^2)}}{\int y^3 dy : \sqrt{(1-y^2)}} = \frac{2\int dy : \sqrt{(1-y^2)}}{2\int y dy : \sqrt{(-y^3)}} = \frac{3}{4}\pi$. atque $A = \frac{\pi}{2}$. Cum igitur sit per §. 24. $Z = a$; et $A = \frac{2}{3}Z = \frac{2}{3}a$, erit primo generaliter ob $P = 8 + m - m^2$; $Q = 7 - 2m$; $R = \frac{23-7m}{3}$; et $S = \frac{7-2m}{2}$; $A = \frac{2}{3}a = \frac{\pi}{2} = \frac{2(m-1)}{3}$

$$+ \cfrac{2(8+m-m^2)}{3m+\cfrac{2\cdot 4\cdot 5(15-m-m^2)}{23-7m+\cfrac{\cdot 5(\ +m-m^2)(\ -2-7m-m^2)}{30-9m+\cfrac{4\cdot 6(\ -m-m^2)(26-5m-m^2)}{37-11m+\text{etc.}}}}}$$

§. 33. Casibus autem particularibus euoluendis erit $a = \frac{3}{4}\pi =$

$$4 - \cfrac{12}{5+\cfrac{2\cdot 5}{1+\cfrac{3\cdot 6}{1+\cfrac{4\cdot 7}{1+\text{etc.}}}}} \qquad = \cfrac{4}{1+\cfrac{3}{2+\cfrac{2\cdot 5}{1+\cfrac{3\cdot 6}{3+\cfrac{4\cdot 7}{1+\text{etc.}}}}}}$$

vel etiam $\frac{3}{4}\pi = 1 + \cfrac{3}{1+\cfrac{1\cdot 4}{1+\cfrac{2\cdot 5}{1+\cfrac{3\cdot 6}{1+\cfrac{4\cdot 7}{1+\text{etc.}}}}}}$

Simili modo per §. 26. habebitur $a = \frac{3}{4}\pi$

$$= \frac{5}{2} - \cfrac{3\cdot 4}{\frac{7}{2}+\cfrac{2\cdot 4}{2+\cfrac{3\cdot 5}{2+\cfrac{4\cdot 6}{2+\cfrac{5\cdot 7}{2+\text{etc.}}}}}} \qquad = 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1\cdot 3}{2+\cfrac{2\cdot 4}{2+\cfrac{3\cdot 5}{2+\cfrac{4\cdot 6}{2+\text{etc.}}}}}}$$

Denique casus §. 27. expositus dabit $a = \frac{3}{4}\pi =$

$$2 + \cfrac{2}{3+\cfrac{\cdot 4}{1+\cfrac{\cdot 5}{1+\cfrac{\cdot 6}{1+\text{etc.}}}}} \qquad \text{seu } \frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1\cdot 2}{1+\cfrac{\cdot 3}{1+\cfrac{3\cdot 4}{1+\cfrac{4\cdot 5}{1+\text{etc.}}}}}}$$

quae expressio conuenit cum superiore quodam in §. 31. exhibita.

§. 34. Ex hac itaque interpolandi methodo innumerabiles consecuti sumus fractiones continuas, quarum valores per quadraturas curuarum seu formulas integrales assignari possunt. Cum autem istae fractiones continuae in initio sint irregulares initia quae anomaliam continent resecentur, vt habeantur fractiones continuae vbiquae eadem lege procedentes. Ita ex §. 25, ponendo $p+2q-r=f$ et $p+r=h$; prodibit sequens aequatio:

$$r+\cfrac{fh}{r+\cfrac{(f+r)(h+r)}{r+\cfrac{(f+r)(h+2r)}{r+\text{etc.}}}}=\frac{h(f-r)\int y^{h+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}-f(h-r)\int y^{f+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{f+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}-h\int y^{h+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$$

quae aequatio semper est realis, nisi fiat $f=h$. At casu quo $f=h$ ponatur $f=h+dw$, reperieturque

$$\frac{\int y^{h+r+dw-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{h+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}=1-r\,dw\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{h+2r-1}dx}{1+x^{2r}}$$

posito post integrationem $x=1$. Hinc ergo erit

$$r+\cfrac{hh}{r+\cfrac{(h+r)^2}{r+\cfrac{(h+2r)^2}{r+\text{etc}}}}=\frac{r+hr(h-r)\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{h+2r-1}dx}{1-x^{2r}}}{1-hr\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{h+2r-1}dx}{1-x^{2r}}}$$

$$=\frac{r(h-r)^2\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{h-1}dx}{1-x^{2r}}}{1-r(h-r)\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{h-1}dx}{1-x^{2r}}}.$$

Verum ex natura integralium est $\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{h+2r-1}dx}{1-x^{2r}}=\frac{-1}{rx^r}\int\frac{x^{h+2r-1}dx}{1-x^{2r}}+\frac{1}{r}\int\frac{x^{h+r-1}dx}{1-x^{2r}}+\frac{1}{r}\int\frac{x^{h+r-1}dx}{1+x^r}$ posito $x=1$. Quo circa habebitur

$r+$

$$r+\cfrac{bb}{r+\cfrac{(b+r)^2}{r+\text{etc.}}}=\frac{r+h(b-r)\int\frac{x^{b+r-1}dx}{1+x^r}}{1-b\int\frac{x^{b+r-1}dx}{1+x^r}}=$$

$$\frac{1-(b-r)\int\frac{x^{b-1}dx}{1+x^r}}{\int\frac{x^{b-1}dx}{1+x^r}};$$ quae forma autem congruit cum ea, quae §. 7. est data.

§. 35. Simili modo ex §. 26. ponendo $p=f$ et $p+2q-r=h$, sequitur fore

$$2r+\cfrac{fh}{2r+\cfrac{(f+r)(b+r)}{2r+\cfrac{(f+2r)(b+2r)}{2r+\text{etc.}}}}=\frac{2(r-f)(r-b)\int\frac{y^{f-1}dy}{V(1-y^{2r})}-h(f+b-3r)\int\frac{y^{b+r-1}dy}{V(1-y^{2r})}}{2h\int\frac{y^{b+r-1}dy}{V(1-y^{2r})}-(f+b-r)\int\frac{y^{f-1}dy}{V(1-y^{2r})}}.$$

Quoniam autem formula manet immutata si f et h inter se commutentur, manifestum est esse debere

$$\frac{h\int y^{b+r-1}dy:V(1-y^{2r})}{\int y^{f-1}dy:V(1-y^{2r})}=\frac{f\int y^{f+r-1}dy:V(1-y^{2r})}{\int y^{b-1}dy.V(1-y^{2r})},$$ posito post omnes integrationes $y=1$. Hoc vero theorema iam continetur in iis, quae in praecedente dissertatione de productis ex infinitis factoribus constantibus exhibui; ibi enim plura huius generis theoremata produxi ac demonstraui.

§. 36. Hic autem pari modo casus notari meretur, quo est $f=b+r$, hoc enim tam numerator quam denominator fractionis inuentae euanescit. Posito autem vt ante $f=b+r+dw$ et calculo subducto orietur

$$2r+\cfrac{b(b+r)}{2r+\cfrac{(b+r)(b+2r)}{2r+\cfrac{(b+2r)(b+3r)}{2r+etc.}}} = \frac{b+2b(r-b)\int\frac{x^{b-r}dx}{1+x^r}}{-1+2b\int\frac{x^{b-r}dx}{1+x^r}}$$

Quare si ponatur $b=r=1$; habebitur

$$2+\cfrac{1\cdot 2}{2+\cfrac{2\cdot 3}{2+\cfrac{3\cdot 4}{2+\cfrac{4\cdot 5}{2+etc.}}}} = \frac{1}{2l2-1}$$

Ceterum si aequatio §. 27. eodem modo tractetur, prodibit forma illi ipsi, quam ex §. 25. elicui, omnino similis.

§. 37. His expositis, quibus interpolatio serierum ad fractiones continuas reducitur, reuertor ad expressiones Brounckerianas, atque methodum tradam genuinam non solum ad eas perueniendi, sed etiam eiusmodi, quae videatur ab ipso Brounckero esse vsurpata. Maxime autem discrepant fractiones continuae hactenus inuentae a Brounckerianis, cum valores litterarum A, B, C, D, etc. methodo exposita ita a se inuicem pendeant, vt inter se comparari facile queant, methodo Brounckeri autem inter se diuersi prodierint, vt eorum mutua relatio non perspiciatur. Quod ipsum discrimen me tandem ad inuentionem alterius methodi nunc aperiendae manuduxit.

§. 38. Antequam autem ipsum interpolandi modum exponam, sequens lemma latissime patens praemitti conveniet. Si fuerint innumerabiles quantitates $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, etc. quae ita a se inuicem pendeant vt sit:

$$\alpha\beta - m\alpha - n\beta - \varkappa = 0$$
$$\beta\gamma - (m+s)\beta - (n+s)\gamma - \varkappa = 0$$

$\gamma\delta$

$$\gamma\delta-(m+2s)\gamma-(n+2s)\delta-\varkappa=0$$
$$\delta\varepsilon-(m+3s)\delta-(n+3s)\varepsilon-\varkappa=0$$
etc.

ac tribuantur litteris α, β, γ, δ, etc. ſequentes valores:

$$\alpha=m+n-s+\frac{ss-ms+ns+\varkappa}{a}$$
$$\beta=m+n+s+\frac{ss-ms+ns+\varkappa}{b}$$
$$\gamma=m+n+3s+\frac{ss-ms+ns+\varkappa}{c}$$
$$\delta=m+n+5s+\frac{ss-ms+ns+\varkappa}{d}$$
etc.

ſuperiores aequationes transformabuntur in ſequentes ſimiles:

$$ab-(m-s)a-(n+s)b-ss+ms-ns-\varkappa=0$$
$$bc-mb-(n+2s)c-ss+ms-ns-\varkappa=0$$
$$cd-(m+s)c-(n+3s)d-ss+ms-ns-\varkappa=0$$
$$de-(m+2s)d-(n+4s)e-ss+ms-ns-\varkappa=0$$
etc.

Atque ex hoc ipſo vt iſtiusmodi formae ſimiles prodeant, ſubſtitutiones illae ſunt ortae.

§. 39. Si nunc ſimili modo hae vltimae aequationes ope idonearum ſubſtitutionum in ſui ſimiles transmutentur, reperientur loco a, b, c, d, etc. ſequentes ſubſtitutiones

$$a=m+n-s+\frac{4ss-2ms+2ns+\varkappa}{a_1}$$
$$b=m+n+s+\frac{4ss-2ms+2ns+\varkappa}{b_1}$$
$$c=m+n+3s+\frac{4ss-2ms+2ns+\varkappa}{c_1}$$
$$d=m+n+5s+\frac{4ss-2ms+2ns+\varkappa}{d_1}$$
etc.

quibus factis ſequentes prouenient aequationes:

$$a_1b_1-(m-2s)a_1-(n+2s)b_1-4ss+2ms-2ns-\varkappa=0$$
$$b_1c_1-(m-s)b_1-(n+3s)c_1-4ss+2ms-2ns-\varkappa=0$$

$$c_1 d_1 - m c_1 - (n+4s) d_1 - 4ss + 2ms - 2ns - \varkappa = 0$$
$$d_1 e_1 - (m+s) d_1 - (n+5s) e_1 - 4ss + 2ms - 2ns - \varkappa = 0$$

etc.

§ 40. Vlterius igitur pergendo poni debebit:

$$a_1 = m + n - s + \frac{6ss - 2ms + 2ns + \varkappa}{a_2}$$
$$b_1 = m + n + s + \frac{6ss - 2ms + ns + \varkappa}{b_2}$$
$$c_1 = m + n + 3s + \frac{6ss - 2ms + 2ns + \varkappa}{c_2}.$$

etc.

Atque ex his substitutionibus emergent hae aequationes:

$$a_2 b_2 - (m-3s) a_2 - (n+3s) b_2 - 9ss + 3ms - 3ns - \varkappa = 0$$
$$b_2 c_2 - (m-2s) b_2 - (n+4s) c_2 - 9ss + 3ms - 3ns - \varkappa = 0$$
$$c_2 d_2 - (m-s) c_2 - (n+5s) d_2 - 9ss + 3ms - 3ns - \varkappa = 0$$

etc.

§. 41. Si nunc hae substitutiones continuentur in infinitum, atque perpetuo sequentes valores in praecedentibus substituantur, litterarum α, β, γ, δ, etc. valores exprimentur fractionibus continuis sequentibus:

$$\alpha = m + n - s + \cfrac{ss - ms + ns + \varkappa}{m + n - s + \cfrac{4ss - 2ms + 2ns + \varkappa}{m + n - s + \cfrac{6ss - 3ms + 2ns + \varkappa}{m + n - s + \cfrac{16ss - 4ms + 4ns + \varkappa}{m + n + s + \text{etc.}}}}}$$

$$\beta = m + n + s + \cfrac{5ss - ms + ns + \varkappa}{m + n + s + \cfrac{4ss - 2ms + 2ns + \varkappa}{m + n + s + \cfrac{6ss - 3ms + 2ns + \varkappa}{m + n + s + \cfrac{16ss - 4ms + 4ns + \varkappa}{m + n + s + \text{etc.}}}}}$$

$$\gamma = m + n + 3s + \cfrac{ss - ms + ns + \varkappa}{m + n + 3s + \cfrac{6ss - 2ms + 2ns + \varkappa}{m + n + 3s + \cfrac{ss - 3ms + 3ns + \varkappa}{m + n + 3s + \text{etc.}}}}$$

quae fractiones continuae satis sunt similes iis, quas Brounckerus dedit, cum sequentes in praecedentibus non continentur.

§. 42.

§. 42. Quo autem vſus harum formularum in interpolationibus pateat, propoſita ſit haec ſeries: $\frac{p}{p+2q} + \frac{p(p+2r)}{(p+2q)(p+2q+2r)} + \frac{p(p+2r)(p+4r)}{(p+2q)(p+2q+2r)(p+2q+4r)} +$ etc. cuius terminus indicis $\frac{1}{2}$ ſit $= A$; terminus indicis $\frac{3}{2} = ABC$; terminus indicis $\frac{5}{2} = ABCDE$; et ita porro. His poſitis erit $AB = \frac{p}{p+2q}$; $CD = \frac{p+2r}{p+2q+2r}$; $EF = \frac{p+4r}{p+2q+4r}$; etc. Ponatur nunc $A = \frac{a}{p+2q-r}$; $B = \frac{b}{p+2q}$; $C = \frac{c}{p+q+r}$; $D = \frac{d}{p+2q+2r}$; etc. eritque $ab = p(p+2q-r)$; $bc = (p+r)(p+2q)$; $cd = (p+2r)(p+2q+r)$; $de = (p+3r)(p+2q+2r)$; etc. Iam fiat vlterius $a = p+q-r+\frac{g}{\alpha}$; $b = p+q+\frac{g}{\beta}$; $c = p+q+r+\frac{g}{\gamma}$; $d = p+q+2r+\frac{g}{\delta}$; etc. quibus valoribus ſubſtitutis emergent ſequentes aequationes, facto $g = q(r-q)$:

$$\alpha\beta - (p+q-r)\alpha - (p+q)\beta - q(r-q) = 0$$
$$\beta\gamma - (p+q)\beta - (p+q+r)\gamma - q(r-q) = 0$$
$$\gamma\delta - (p+q+r)\gamma - (p+q+2r)\delta - q(r-q) = 0$$
$$\delta\varepsilon - (p+q+2r)\delta - (p+q+3r)\varepsilon - q(r-q) = 0$$

etc.

§. 43. Comparatis his aequationibus cum iis, quas §. 38. aſſumſimus, reperietur:

$m = p+q-r$; $n = p+q$; $\varkappa = qr-qq$; et $s = r$ vnde fiet $ss - ms + ns + \varkappa = 2rr + qr - qq$; $4ss - 2ms + 2ns + \varkappa = 6rr + qr - qq$; $9ss - 3ms + 3ns + \varkappa = 12rr + qr - qq$; etc. Quibus valoribus omnibus ſubſtitutis obtinebuntur ſequentes fractiones continuae, quibus litterae a, b, c, d, etc. exprimentur.

$$a = p+q-r+\cfrac{qr-qq}{2(p+q-r)+\cfrac{2(p+q-r)+qr-qq}{2(p+q-r)+\cfrac{6rr+qr-qq}{2(p+q-r)+\cfrac{12rr+qr-qq}{2(p+q-r)+\text{etc.}}}}}$$

$b =$

$$b = p+q+\cfrac{qr-qq}{2(p+q)+\cfrac{rr+qr-qq}{2(p+q)+\cfrac{rr+qr-qq}{2(p+q)+\cfrac{rr+qr-qq}{2(p+q)+\text{etc.}}}}}$$

$$c = p+q+r+\cfrac{qr-qq}{2(p+q+r)+\cfrac{rr+qr-qq}{2(p+q+r)+\cfrac{rr+qr-qq}{2(p+q+r)+\cfrac{rr+qr-qq}{2(p+q+r)+\text{etc.}}}}}$$

etc.

§. 44. Cum autem ſeriei propoſitae terminus qui indicem habet n ſit $= \frac{\int y^{p+2q-1} dy (1-y^{2r})^{n-1}}{\int y^{p-1} dy (1-y^{2r})^{n-1}}$; erit $A = \frac{a}{p+2q-r} = \frac{\int y^{p+2q-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}$; ſeu $a = (p+2q-r) \frac{\int y^{p+2q-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}$. Deinde ob $ab = p(p+2q-r)$ erit $b = \frac{p \int y^{p-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p+2q-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}$. Quoniam autem eſt per theorema in praecedente diſſertatione expoſitum $\frac{p \int y^{p-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p+r-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}} = \frac{f \int y^{f-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p+r-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}} = \frac{(f+r) \int y^{f+2r-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p+r-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}$ ponatur $f = p+2q-r$; quo facto erit $b = \frac{(p+2q) \int y^{p+2q+r-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p+r-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}$. Simili vero modo progrediendo erit $c = \frac{(p+2q+r) \int y^{p+2q+2r-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p+2r-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}$ et $d = \frac{(p+2q+2r) \int y^{p+2q+3r-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p+3r-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}$ etc.

§. 45.

§. 45. Cum igitur lex progreſſionis harum formularum integralium conſtet, colligetur huius fractionis continuae generalis

$$p+q+mr+\cfrac{qr-qq}{2(p+q+mr)+\cfrac{2rr+qr-qq}{2(p+q+mr)+\cfrac{rr+rr-qq}{2(p+q+mr)+\text{etc.}}}}$$

valor eſſe $= (p+2q+mr)\dfrac{\int y^{p+2q+(m+1)r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p+(m+1)r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$

Quare ſi ponatur $p+q+mr=s$, ita vt ſit $p=s-q-mr$, proueniet ſequens fractio continua:

$$s+\cfrac{qr-qq}{2s+\cfrac{2rr+qr-qq}{2s+\cfrac{rr+qr-qq}{2s+\cfrac{12rr+qr-qq}{2s+\cfrac{20rr+qr-qq}{2s+\text{etc.}}}}}}$$

cuius propterea valor erit iſta expreſſio

$$(q+s)\frac{\int y^{q+r+s-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{r+s-q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}.$$

§. 46. Simili modo cum huius fractionis continuae

$$s+r+\cfrac{qr-qq}{2(s+r)+\cfrac{2rr+qr-qq}{2(s+r)+\cfrac{6rr+qr-qq}{2(s+r)+\text{etc.}}}}$$

valor ſit $= (q+r+s)\dfrac{\int y^{s+2r+q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{s+2r-q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$

Harum duarum itaque fractionum continuarum productum erit $= (s+q)(s+r-q)$ quemadmodum productum formularum integralium declarat. Eſt enim per theorema in praecedente diſſertatione datum:

$$\frac{f}{g}=\frac{\int x^{a-1}dx:\sqrt{(1-x^{2r})}\,.\int x^{a+r-1}dx:\sqrt{(1-x^{2r})}}{\int x^{f-1}dx:\sqrt{(1-x^{2r})}\,.\int x^{f+r-1}dx:\sqrt{(1-x^{2r})}}$$ ad quam

formam productum formularum integralium ſponte reducitur.

§. 47. Fractio continua inuenta in aliam commodiorem formam poteſt transmutari eo quod ſinguli numeratores in factores reſolui poſſunt: ita habebitur iſta fractio continua

$$s + \cfrac{q(r-q)}{2s + \cfrac{(r+q)(2r-q)}{2s + \cfrac{(2r+q)(3r-q)}{2s + \cfrac{(3r+q)(4r-q)}{2s + \text{etc}}}}}$$

cuius adeo valor erit $= (q+s)\dfrac{\int y^{r+s+q-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{r+s-q-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}$

Quocirca ſi ad fractionem continuam addatur s vt vbique eadem ſit progreſſionis lex, erit

$$\frac{(q+s)\int y^{r+s+q-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})} + s\int y^{r+s-q-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{r+s-q-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}$$

$$= 2s + \cfrac{q(r-q)}{2s + \cfrac{(r+q)(2r-q)}{2s + \cfrac{(2r+q)(3r-q)}{2s + \cfrac{(3r+q)(4r-q)}{2s + \text{etc.}}}}}$$

§. 48. Si nunc ponatur $r = 2$ et $q = 1$, prodibunt coniunctim omnes fractiones continuae a Brounckero exhibitae, quae omnes continebuntur in hac fractione continua:

$$s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{9}{2s + \cfrac{25}{2s + \cfrac{49}{2s + \cfrac{81}{2s + \text{etc.}}}}}}$$

cuius propterea valor erit $= (s+1)\dfrac{\int y^{s+2}dy : \sqrt{(1-y^4)}}{\int y^s dy : \sqrt{(1-y^4)}}$

quae expreſſio apprime congruit cum ea, quam ſupra, ante-

antequam veritas omnino conſtaret, aſſignauimus, vide §. 16.

§. 49. Cum igitur hactenus plurimas dederim fractiones continuas, quarum valores per formulas integrales aſſignari poſſunt, methodum nunc directam exponam, cuius ope ex formulis integralibus viciſſim ad fractiones continuas peruenire liceat. Nititur autem haec methodus reductione vnius formulae integralis ad duas alias, quae reductio non multum diſſimilis eſt illi ſolitae, qua formulae cuiusdam differentialis integratio ad integrationem alius reducitur. Sint igitur huiusmodi formulae integrales infinitae $\int Pdx$; $\int PRdx$; $\int PR^2dx$; $\int PR^3dx$; $\int PR^4dx$ etc. quae ita ſint comparatae, vt ſi ſingulae ita integrentur, vt euaneſcant poſito $x = 0$, tumque ponatur $x = 1$ ſit vt ſequitur:

$$a\int Pdx = b\int PRdx + c\int PR^2dx$$
$$(a+\alpha)\int PRdx = (b+\beta)\int PR^2dx + (c+\gamma)\int PR^3dx$$
$$(a+2\alpha)\int PR^2dx = (b+2\beta)\int PR^3dx + (c+2\gamma)\int PR^4dx$$
$$(a+3\alpha)\int PR^3dx = (b+3\beta)\int PR^4dx + (c+3\gamma)\int PR^5dx$$

et generaliter

$$(a+n\alpha)\int PR^ndx = (b+n\beta)\int PR^{n+1}dx + (c+n\gamma)\int PR^{n+2}dx$$

§. 50. Si igitur huiusmodi habeantur formulae integrales, facili negotio ex iis fractiones continuae formabuntur. Cum enim ſit

$$\frac{\int Pdx}{\int PRdx} = \frac{b}{a} + \frac{c\int PR^2dx}{a\int PRdx}$$
$$\frac{\int PRdx}{\int PR^2dx} = \frac{b+\beta}{a+\alpha} + \frac{(c+\gamma)\int PR^3dx}{(a+\alpha)\int PR^2dx}$$
$$\frac{\int PR^2dx}{\int PR^3dx} = \frac{b+2\beta}{a+2\alpha} + \frac{(c+2\gamma)\int PR^4dx}{(a+2\alpha)\int PR^3dx}$$
$$\frac{\int PR^3dx}{\int PR^4dx} = \frac{b+3\beta}{a+3\alpha} + \frac{(c+3\gamma)\int PR^5dx}{(a+3\alpha)\int PR^4dx}$$

etc.

erit substituendo quemque valorem in praecedente aequatione

$$\frac{\int Pdx}{\int PRdx} = \frac{b}{a} + \cfrac{c:a}{\cfrac{b+\beta}{a+2\alpha} + \cfrac{(c+\gamma):(a+\alpha)}{\cfrac{b+2\beta}{a+2\alpha} + \cfrac{(c+2\gamma):(a+2\alpha)}{\cfrac{b+\beta}{a+3\alpha} + \cfrac{(c+3\gamma):(a+3\alpha)}{\cfrac{b+\beta}{a+\alpha} + \text{etc.}}}}}$$

Haec vero expressio inuersa et a fractionibus partialibus liberata abit in hanc:

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \cfrac{a}{b + \cfrac{(a+\alpha)c}{b+\beta + \cfrac{(a+2\alpha)(c+\gamma)}{b+2\beta + \cfrac{(a+3\alpha)(c+2\gamma)}{b+3\beta + \cfrac{(a+4\alpha)(c+3\gamma)}{b+4\beta + \text{etc.}}}}}}$$

§. 51. Si fuerit etiam designante n numerum negativum $(a+n\alpha)\int PR^n dx = (b+n\beta)\int PR^{n+1}dx + (c+n\gamma)\int PR^{n+2}dx$, sequentes habebuntur aequationes.

$$(a-\alpha)\int\frac{Pdx}{R} = (b-\beta)\int Pdx + (c-\gamma)\int PRdx$$

$$(a-2\alpha)\int\frac{Pdx}{R^2} = (b-2\beta)\int\frac{Pdx}{R} + (c-2\gamma)\int Pdx$$

$$(a-3\alpha)\int\frac{Pdx}{R^3} = (b-3\beta)\int\frac{Pdx}{R^2} + (c-3\gamma)\int\frac{Pdx}{R}$$

$$(a-4\alpha)\int\frac{Pdx}{R^4} = (b-4\beta)\int\frac{Pdx}{R^3} + (c-4\gamma)\int\frac{Pdx}{R^2}$$

etc.

Hinc igitur pari modo conficietur:

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \frac{-(b-\beta)}{c-\gamma} + \frac{(a-\alpha)\int Pdx:R}{(c-\gamma)\int Pdx}$$

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx:R} = \frac{-(b-2\beta)}{c-2\gamma} + \frac{(a-2\alpha)\int Pdx:R^2}{(c-2\gamma)\int Pdx:R}$$

$$\frac{\int Pdx:R}{\int Pdx:R^2} = \frac{-(b-3\beta)}{c-3\gamma} + \frac{(a-3\alpha)\int Pdx:R^3}{(c-3\gamma)\int Pdx:R^2}$$

etc.

Ex his autem aequationibus producetur

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx}$$

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \frac{-(b-\beta)}{c-\gamma} + \cfrac{(a-\alpha):(c-\gamma)}{\frac{-(b-2\beta)}{c-2\gamma} + \cfrac{(a-2\alpha):(c-2\gamma)}{\frac{-(b-3\beta)}{c-3\gamma} + \cfrac{(a-3\alpha):(c-3\gamma)}{\frac{-(b-4\beta)}{c-4\gamma} + \text{etc.}}}}$$

siue fractionibus partialibus sublatis

$$\frac{(c-\gamma)\int PRdx}{\int Pdx} = -(b-\beta) + \cfrac{(a-\alpha)(c-2\gamma)}{-(b-2\beta)+\cfrac{(a-2\alpha)(c-3\gamma)}{-(b-3\beta)+\cfrac{(a-3\alpha)(c-4\gamma)}{-(b-4\beta)+\text{etc.}}}}$$

Duplex igitur habetur fractio continua, cuius vtriusque idem est valor $\frac{\int PRdx}{\int Pdx}$.

§. 52. Praecipuum autem est in hoc negotio, vt definiantur idoneae functiones ipsius x loco P et R substituendae, quo fiat $(a+n\alpha)\int PR^n dx = (b+n\beta)\int PR^{n+1} dx + (c+n\gamma)\int PR^{n+2}dx$ eo saltem casu, quo post singulas integrationes ponitur $x=1$. Ponamus igitur esse generaliter $(a+n\alpha)\int PR^n dx + R^{n+1}S = (b+n\beta)\int PR^{n+1}dx + (c+n\gamma)\int PR^{n+2}dx$, atque $R^{n+1}S$ eiusmodi esse functionem ipsius x, quae euanescat posito tam $x=0$, quam $x=1$. Sumtis ergo differentialibus, et facta per R^n diuisione, erit: $(a+n\alpha)\,Pdx + RdS + (n+1)\,SdR = (b+n\beta)\,PRdx + (c+n\gamma)\,PR^2dx$; quae aequatio, cum semper locum habere debeat, quicquid sit n, in duas resoluitur aequationes has:

$$aPdx + RdS + SdR = bPRdx + cPR^2dx \quad \text{et}$$
$$\alpha Pdx + SdR = \beta PRdx + \gamma PR^2dx$$

Ex his aequationibus elicitur duplici modo $Pdx = \frac{RdS+SdR}{bR+cR^2-a} = \frac{SdR}{\beta R+\gamma R^2-\alpha}$, vnde fit $\frac{dS}{S} = \frac{(b-\beta)RdR+(c-\gamma)R^2dR-(a-\alpha)dR}{\beta R^2+\gamma R^3-\alpha R} = \frac{(a-\alpha)dR}{\alpha R} + \frac{(\alpha b-\beta a)dR+(\alpha c-\gamma a)RdR}{\alpha(\beta R+\gamma R^2-\alpha)}$. Ex hac ergo aequatione definitur S per R; inuento autem S erit $P = \frac{SdR}{(\beta R+\gamma R^2-\alpha)dx}$, indeque cognitae erunt formulae $\int Pdx$ et $\int PRdx$, quibus valor fractionum continuarum superiorum determinatur.

§. 53. Quoniam igitur quantitas R per x non definitur, pro ea functio quaecunque ipsius x accipi poterit. At cum conditio quaestionis postulet vt $R^{n+1}S$ euanescat posito tam $x = 0$, quam $x = 1$, eo ipso natura functionis loco R accipiendae determinatur. Deinde vero etiam ad hoc est respiciendum vt integralia $\int PR^n dx$ posito post integrationem $x = 1$, finitum obtineant valorem, si enim integralia ista hoc casu fierent vel 0 vel ∞, tum difficulter valor $\frac{\int PRdx}{\int Pdx}$ colligeretur. Prius incommodum tutissime euitatur, tribuendo ipsi R eiusmodi valorem, vt PR^n nunquam negatiuum induat valorem, quamdiu x intra limiter 0 et 1 consistit. Ne autem $\int PR^n dx$ posito $x = 1$ fiat infinitum, difficilius saepenumero obtinetur. Conueniet autem casus, quibus n est numerus vel affirmatiuus vel negatiuus a se inuicem discernere; cum saepissime, si his conditionibus satisfiat existente n numero affirmatiuo, simul reliquis casibus satisfieri nequeat. Sin autem conditiones praescriptae tantum impleantur casibus, quibus n est numerus affirmatiuus, tum prioris fractionis continuae tantum valor exhiberi potest; posterioris vero tantum, si conditionibus fuerit satisfactum, existente n numero negatiuo.

§. 54. Incipiamus euolutionem huius methodi valores fractionum continuarum inueniendi ab exemplis iam ante tractatis, et primo quidem proposita sit ista fractio continua:

$$r + \cfrac{fh}{r + \cfrac{(f+r)(h+r)}{r + \cfrac{(f+r)(h+r)}{r + \text{etc.}}}}$$

cuius valor supra §. 34. assignatus est iste

$$\frac{h(f-r\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})} - f(h-r)\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{\int\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})} - h\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}$$

Com-

Comparetur ergo haec fractio continua cum ista generali:

$$\frac{a\int P dx}{\int PR dx} = b + \cfrac{(a+\alpha)c}{b+\beta+\cfrac{(\alpha+2\alpha)(c+\gamma)}{b+2\beta+\cfrac{(\alpha+\alpha)(c+2\gamma)}{b+\beta+\text{etc.}}}}$$

eritque $b = r$; $\beta = 0$; $\alpha = r$; $\gamma = r$; $a = f - r$; $c = h$.
His valoribus substitutis orietur $\frac{dS}{S} = \frac{rRdR + (b-r)R^2 . R - (f-2r)dR}{rR^3 - rR}$ $= \frac{(f-2r)dR}{rR} + \frac{rdR + (b-f+r)RdR}{r(R^2-1)}$: atque integrando $lS = \frac{f-2r}{r} lR + \frac{b-f}{2r} l(R+1) + \frac{b-f+2r}{2r} l(R-1) + lC$ seu $S = CR^{\frac{f-2r}{r}} (R^2-1)^{\frac{b-f}{2r}} (R-1)$. Hinc itaque erit $R^{n+1}S = R^{\frac{f+(n-1)r}{r}} (R^2-1)^{\frac{b-f}{2r}} (R-1)$, atque $P dx = \frac{CR^{\frac{f-2r}{r}} (R^2-1)^{\frac{b-f}{2r}} dR}{r(R+1)}$.

§. 55. Cum autem $R^{n+1}S$ duobus casibus euanescere debeat posito tam $x = 0$ quam $x = 1$; idque quicunque numerus affirmatiuus loco n substituatur; ad negatiuos enim valores ipsius n respicere non est opus. Ponamus vero f, h, et r esse numeros affirmatiuos atque $h > f$, quod tuto assumere licet nisi sit $f = h$, deinde sit etiam $f > r$. His positis manifestum est formulam $R^{n+1}S$ duobus casibus euanescere scilicet si $R = 0$ et $R = 1$: hocque etiam locum habet si sit $f = h$. Dummodo ergo sit $f > r$ poni poterit $R = x$. eritque $P dx = \frac{x^{\frac{f-2r}{r}} (1-x^2)^{\frac{b-f}{2r}} dx}{1+x}$ determinata constante C. Ex his itaque valor fractionis continuae propositae erit $= \frac{(f-r)\int \frac{x^{\frac{f-2r}{r}} (1-x^2)^{\frac{b-f}{2r}} dx}{1+x}}{\frac{\int x^{\frac{f-r}{r}} (1-x^2)^{\frac{b-f}{2r}} dx}{1+x}}$

Posito

Posito autem $x = y^r$ erit valor quaesitus $=$

$$\frac{(f-r)\int y^{f-r-1}(1-y^{2r})^{\frac{b-f}{2r}}dy:(1+y^r)}{\int y^{f-1}(1-y^{2r})^{\frac{b-f}{2r}}dy:(1+y^r)}.$$

§. 56. Aliam igitur nacti sumus expressionem huius fractionis continuae

$$r+\cfrac{fb}{r+\cfrac{(f+r)(b+r)}{r+\text{etc}}}$$

valorem continentem, quae etsi formulas integrales in se complectitur, tamen discrepat ab expressione ante inuenta. Haec enim posterior expressio locum non habet nisi sit $f > r$, pro b autem accipi oportet maiorem quantitatum binarum f et b, siquidem fuerint inaequales. Attamen si etiam f fuerit minus quam r, valor fractionis continuae exhiberi potest considerando hanc

$$r+\cfrac{(f+r)(b+r)}{r+\cfrac{(f+2r)(b+2r)}{r+\text{etc.}}}$$

cuius valor erit $= \dfrac{f\int y^{f-1}(1-y^{2r})^{\frac{b-f}{2r}}dy:(1+y^r)}{\int y^{f+r-1}(1-y^{2r})^{\frac{b-f}{2r}}dy:(1+y^r)}$ quae nulla indiget restrictione. Posito enim hoc valore $=$ V erit fractionis continuae propositae valor $= r + \frac{fb}{V}$.

§. 57. Casus ille quo $f = b$, qui ante peculiari modo erat erutus, eiusque valor in §. 34. inuentus $=$

$$\frac{1-(b-r)\int x^{b-1}dx:(1+x^r)}{\int x^{b-1}dx:(1+x^r)} = \frac{(b-r)\int x^{b-r-1}dx:(1+x^r)}{\int x^{b-1}dx:(1+x^r)}$$

ex hac posteriore expressione sponte fluit; facto enim $f = b$, expressio §. 55. inuenta abibit in hanc $\dfrac{(b-r)\int y^{b-r-1}dy:(1+y^r)}{\int y^{f-1}dy:(1+y^r)}$

om-

omnino eandem ex quo conſenſus ambarum expreſſionum generalium ſatis perſpicitur. Hic autem tuto accipere licet eſſe $b > r$, cum ii caſus, quibus hoc ſecus accidit, facillime ad hos reducantur, vti modo eſt monſtratum.

§. 58. Quo autem conſenſus ambarum expreſſionum omni caſu intelligatur, praemittendum nobis eſt hoc lemma, quod ab aliis iam eſt demonſtratum. Si fuerit ſeries $1 + \frac{p}{q+s} + \frac{p(p+s)}{(q+s)(q+2s)} + \frac{p(p+s)(p+2s)}{(q+s)(q+2s)(q+3s)} +$ etc. in qua ſint quantitatis p, q, et s affirmatiuae atque $q > p$; huius ſeriei in infinitum continuatae ſumma erit $= \frac{q}{q-p}$. Huius autem lemmatis veritas per methodum meam generalem ſeries ſummandi ſequenti modo euinci poteſt. Conſideretur enim haec ſeries $x^q + \frac{p}{q+s} x^{q+s} + \frac{p(p+s)}{(q+s)(q+2s)} x^{q+2s} +$ etc. cuius ſumma dicatur z, eritque differentiando $\frac{dz}{dx} = q x^{q-1} + p x^{q+s-1} + \frac{p(p+s)}{(q+s)} x^{q+2s-1} +$ etc. atque $x^{p-q-s} dz = q x^{p-s-1} dx + p x^{p-1} dx + \frac{p(p+s)}{q+s} x^{p+s-1} dx +$ etc. quae aequatio integrata dat $\int x^{p-q-s} dz = \frac{q x^{p-s}}{p-s} + x^p + \frac{p x^{p+s}}{q+s} +$ etc. $= \frac{q x^{p-s}}{p-s} + x^{p-q} z$ Ex hac aequatione differentiata prodibit iſta $x^{p-q-s} dz = q x^{p-s-1} dx + x^{p-q} dz + (p-q) x^{p-q-1} z dx$ ſeu $dz (1 - x^s) + (q-p) x^{s-1} z dx = q x^{q-1} dx$ ſiue $dz + \frac{(q-p) x^{s-1} z dx}{1-x^s} = \frac{q x^{q-1} dx}{1-x^s}$, cuius integralis eſt $\frac{z}{(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}}$ $= q \int \frac{x^{q-1} dx}{(1-x^s)^{\frac{q-p+s}{s}}} = \frac{q x^q}{(q-p)(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}} - \frac{pq}{q-p} \int \frac{x^{q-1} dx}{(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}}$: vnde erit $z = \frac{q x^q}{q-p} - \frac{pq(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}}{q-p} \int \frac{x^{q-1} dx}{(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}}$. Quare

 facto

facto $x = 1$, erit $z = \frac{q}{q-p} = 1 + \frac{p}{q+s} + \frac{p(p+s)}{(q+s)(q+2s)}$ $+$ etc. quae est demonstratio lemmatis dati, ex qua simul intelligitur lemmatis veritatem non consistere nisi sit $q > p$.

§. 59. Cum igitur valorem huius fractionis continuae

$$r + \cfrac{fb}{r + \cfrac{(f+r)(b+r)}{r + \cfrac{(f+2r)(b+2r)}{r + \text{etc.}}}}$$

duplici modo habeamus expressum, quorum alter est $=$

$$\frac{b(f-r)\int y^{b+r-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})} - f(b-r)\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{f\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})} - b\int y^{b+r-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}$$

alter vero, qui in §. 56. est erutus $= r +$

$$\frac{b\int y^{f+r-1}dy\,(1-y^{2r})^{\frac{b-f}{2r}} : (1+y^r)}{\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f}{2r}} : (1+y^r)},$$

operae pretium erit harum expressionum consensum declarare. Cum igitur sit $\frac{1}{1+y^r} = \frac{1-y^r}{1-y^{2r}}$ erit $\int y^{f-1}\,dy\,(1-y^{2r})^{\frac{b-f}{2r}} : (1+y^r) = \int y^{f-1}\,dy\,(1-y^{2r})^{\frac{b-f-2r}{2r}} - \int y^{f+r-1}\,dy\,(1-y^{2r})^{\frac{b-f-2r}{2r}}$, atque $\int y^{f+r-1}\,dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f}{2r}} : (1+y^r) = \int y^{f+r-1}\,dy\,(1-y^{2r})^{\frac{b-f-2r}{2r}} - \int y^{f+2r-1}\,dy\,(1-y^{2r})^{\frac{b-f-2r}{2r}} = \int y^{f+r-1}\,dy\,(1-y^{2r})^{\frac{b-f-2r}{2r}} - \frac{f}{b}\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-2r}{2r}}$.

Ponatur $\frac{\int y^{f+r-1}dy\,(1-y^{2r})^{\frac{b-f-2r}{2r}}}{\int y^{f-1}\,dy\,(1-y^{2r})^{\frac{b-f-2r}{2r}}} = V$, erit valor po-

sterior

ſterior fractionis continuae $= r + \frac{bV - f}{1 - V}$. Ponatur praeterea $\frac{\int y^{b+r-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{f+r-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}} = W$ erit prior valor $= \frac{b(f-r)W - f(b-r)}{f - bW}$, ex quorum aequalitate ſequitur fore $V = \frac{f}{bW}$ ita vt ſit $\int y^{f+r-1} dy (1-y^{2r})^{\frac{b-f-2r}{2r}} = \frac{f \int y^{f+r-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{b \int y^{b+r-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}$, cuius aequalitatis ratio per Theoremata in praecedente diſſertatione exhibita conſtat: eſt enim per vnum ex illis theorematis $\frac{\int y^{f+r-1} dy (1-y^{2r})^{\frac{b-f-2r}{2r}}}{\int y^{f+2r-1} dy (1-y^{2r})^{\frac{b-f-2r}{2r}}}$

$$= \frac{\int y^{f+r-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{b+r-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}.$$

§. 60. Conſideremus nunc hanc fractionem continuam

$$2r + \cfrac{fb}{2r + \cfrac{(f+r)(b+r)}{2r + \cfrac{(f+2r)(b+2r)}{2r + \text{etc.}}}}$$

cuius valor ſupra §. 35. inuentus eſt $=$

$$\frac{2(f-r)(b-r)\int y^{f-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})} - b(f+b-3r)\int y^{b+r-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{2b\int y^{b+r-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})} - (f+b-r)\int y^{f-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}$$

ſi nunc haec fractio continua comparetur cum hac $\frac{a \int P dx}{\int Q dx} = b$

$$=b+\cfrac{(a+\alpha)c}{b+\beta+\cfrac{(a+2\alpha)(c+\gamma)}{b+2\beta+\cfrac{(a+3\alpha)(c+2\gamma)}{b+3\beta+\text{etc.}}}}$$

erit $b=2r$; $\beta=0$; $\alpha=r$; $\gamma=r$; $a=f-r$ et $c=h$. Hinc igitur ex §. 52. habebitur $\frac{dS}{S}=\frac{(f-2r)\,dR}{rR}+\frac{2c\,dR+(h-f+r)R\,dR}{r(R^2-1)}$ et integrando $S=CR^{\frac{f-2r}{r}}(R^2-1)^{\frac{h-f-r}{2r}}(R-1)^2$ vnde fit $P\,dx=CR^{\frac{f-2r}{r}}(R^2-1)^{\frac{h-f-3r}{2r}}(R-1)^2\,dR$ et $R^{n+1}S=CR^{\frac{f+(n-1)r}{r}}(R^2-1)^{\frac{h-f-r}{2r}}(R-1)^2$, quae expressio duobus casibus euanescit, ponendo tum $R=0$ tum $R=1$, modo sit $f>r$ et $h+3r>f$, quibus conditionibus semper satisfieri potest.

§. 61. Sit igitur $R=x$ et constante C determinata erit $P\,dx=x^{\frac{f-2r}{r}}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{h-f-3r}{2r}}(1-x)^2$: vel posito $R=x=y^r$, erit $P\,dx=y^{f-r-1}\,dy\,(1-y^{2r})^{\frac{h-f-3r}{2r}}(1-y^r)^2$, ex quibus erit valor fractionis continuae propositae $\frac{\int Pdx}{\int PRdx}=\frac{(f-r)\int y^{f-r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-3r}{2r}}(1-y^r)^2}{\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-3r}{2r}}(1-y^r)^2}$ quae per theoremata superioris dissertationis ad priorem formam reducetur, euoluendo quadratum $(1-y^r)^2$, quo facto vtraque formula integralis in binas simpliciores resoluetur. Ipsam autem reductionem in exemplo sequente latius patente declarabo.

§. 62.

§. 62. Si habeatur haec formula integralis $\int y^{m-1}dy(1-y^{2r})^{\varkappa}(1-y^{r})^{n}$, atque $(1-y^{r})^{n}$ resoluatur in seriem $1-ny^{r}+\frac{n(n-1)}{1.2}y^{2r}-$ etc. cuius alternis terminis sumendis formula integralis proposita reducetur ad binas sequentes;

$$\int y^{m-1}dy(1-y^{2r})^{\varkappa}\left(1+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{m}{p}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{m(m+2r)}{p(p+2r)}+\text{etc.}\right.$$

$$-\int y^{m+r-1}dy(1-y^{2r})^{\varkappa}\left(n+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{(m+r)}{(p+r)}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{(m+r)(m+3r)}{(p+r)(p+3r)}\text{ etc.}\right.$$

posito breuitatis gratia $m+2\varkappa r+2r=p$. Quare si fuerit vt in casu praecedente $n=2$ erit $\int y^{m-1}dy(1-y^{2r})^{\varkappa}(1-y^{r})^{2}=\frac{m+p}{p}\int y^{m-1}dy(1-y^{2r})^{\varkappa}-2\int y^{m+r-1}dy(1-y^{2r})^{\varkappa}$. Ex quo habebitur $\frac{a\int Pdx}{\int PRdx}$

$$=\frac{\frac{(f-r)(f+b-3r)}{b-2r}\int y^{f-r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{2r}}-2(f-r)\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{2r}}}{\frac{f+b-r}{b-r}\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{br}}-2\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{2r}}}$$

$$=\frac{b(f+b-3r)\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{2r}}-2(f-r)(b-r)\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-r}{2r}}}{(f+b-r)\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-r}{2r}}-2b\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-r}{2r}}}$$

quae expressio cum aequalis esse debeat illi, quae supra §. 35. est inuenta, praebebit hanc aequationem:

$$\frac{\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-r}{2r}}}{\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-r}{2r}}}=\frac{\int y^{b+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{f-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$$ cuius quidem ratio iam in theorematis superioris dissertationis continetur.

§. 63. Sumamus nunc vicissim pro P et R datos valores, ex iisque fractiones continuas formemus; atque ponamus

namus $P = x^{m-1}(1-x^r)^n(p+qx^r)^\varkappa$, et $R = x^r$. Cum autem esse debeat $(\alpha+\nu\alpha)\int PR^\nu dx = x(b+\nu\beta)\int PR^{\nu+1}dx + (c+\nu\gamma)\int PR^{\nu+2}dx$, hincque ob P et R datas fiat ex §. 52. $S = \frac{1}{r}x^{m-r}(1-x^r)^n(p+qx^r)^\varkappa(\gamma x^{2r}+\beta x^r-\alpha)$ erit $\frac{dS}{S} = \frac{(m-r)dx}{x} + \frac{nrx^{r-1}dx}{-1+x^r} + \frac{\varkappa qrx^{r-1}dx}{p+qx^r} + \frac{2\gamma rx^{2r-1}dx+\beta rx^{r-1}dx}{\gamma x^{2r}+\beta xr^r-\alpha} = \frac{(a-\alpha)rdx}{\alpha x} + \frac{(\alpha b-\beta a)rx^{r-1}dx+(\alpha c-\gamma a)rx^{2r-1}dx}{\alpha(\gamma x^{2r}+\beta x^r-\alpha)}$. Sit nunc $(p+qx^r)(x^r-1) = \gamma x^{2r}+\beta x^r-\alpha$, erit $\gamma = q\beta = p-q$ et $\alpha = p$. Sit praeterea $\frac{(a-\alpha)r}{\alpha} = m-r$, erit $a = \frac{mp}{r}$. Vnde debebit porro esse $nqr+\varkappa qr+2qr = \frac{cpr-mpq}{p}$ seu $c = \frac{mq}{r}+nq+(\varkappa+2)q$, et tandem $b = \frac{m(p-q)}{r}+(n+1)p-(\varkappa+1)q$. Dummodo ergo m et $n+1$ fuerint numeri affirmatiui, quo $R^{\nu+1}S$ euanescat posito tam $x=0$, quam $x=1$, prodibit sequens expressio

$$\frac{\int x^{m+r-1}dx(1-x^r)^n(p+qx^r)^\varkappa}{\int x^{m-1}dx(1-x^r)^n(p+qx^r)^\varkappa} = \frac{\int PRdx}{\int Pdx}$$

quae propterea aequalis erit huic fractioni continuae

$$\cfrac{mp}{m(p-q)+(n+1)pr-(\varkappa+1)qr+\cfrac{pq(m+r)(m+nr+(\varkappa+2)r)}{m(p-q)+(n+2)pr-(\varkappa+2)qr+\cfrac{pq(m+2r)(m+(n+1)r+(\varkappa+2)r)}{m(p-q)+(n+3)pr-(\varkappa+3)qr+\text{etc.}}}}$$

§. 64. Quo fractio continua simpliciorem induat formam, ponatur $m+nr+r = a$; $m+\varkappa r+r = b$; et $m+nr+\varkappa r+r = c$, fiet $\varkappa = \frac{c-a}{r}$; $n = \frac{c-b}{r}$ et $m = a+b-c-r$; ideoque erit

$$\cfrac{p(a+b-c-r)}{aq-bq+\cfrac{pq(a+b-c)(c+r)}{(a+r)p-(b+r)q+\cfrac{pq(a+b-c+r)(c+2r)}{(a+2r)p-(b+2r)q+\cfrac{p(a+b-c+2r)(c+3r)}{(a+3r)p-(b+3r)q+\text{etc.}}}}}$$

=

$$= \frac{\int x^{a+b-c-1} dx (1-x^r)^{\frac{c-b}{r}} (p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{\int x^{a+b-c-r-1} dx (1-x^r)^{\frac{c-b}{r}} (p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}$$ posito post vtramque integrationem $x = 1$. Requiritur autem vt sint $a+b-c-r$ et $c-b+r$ numeri affirmatiui. Sin autem ponatur breuitatis causa $a+b-c-r = g$ erit

$$\frac{\int x^{g+r-1} dx (1-x^r)^{\frac{c-b}{r}} (p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{\int x^{g-1} dx (1-x^r)^{\frac{c-b}{r}} (p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}$$

$$= \cfrac{pg}{ap-bq+\cfrac{pq(c+r)(g+r)}{(a+r)p-(b+r)q+\cfrac{pq(c+2r)(g+2r)}{(a+2r)p-(b+2r)q+\text{etc.}}}}$$

quae aequatio latissime patet, et omnes hactenus erutas fractiones continuas sub se comprehendit.

§. 65. Si quantitates c et g inter se commutentur, prodibit sequens fractio continua

$$\cfrac{pc}{cp-bq+\cfrac{pq(g+r)(c+r)}{(a+r)p-(b+r)q+\cfrac{pq(g+2r)(c+2r)}{(a+2r)p-(b+2r)q+\text{etc.}}}}$$

cuius adeo valor erit $\dfrac{\int x^{c+r-1} dx (1-x^r)^{\frac{g-b}{r}} (p+qx^r)^{\frac{g-a}{r}}}{\int x^{c-1} dx (1-x^r)^{\frac{g-b}{r}} (p+qx^r)^{\frac{g-a}{r}}}$.

Quare cum fractiones hae continuae datam inter se teneant rationem, scilicet g ad c hinc sequens orietur Theorema restituto loco g suo valore $\dfrac{c\int x^{a+b-c-1} dx (1-x^r)^{\frac{c-b}{r}} (p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{\int x^{a+b-c-r-1} dx (1-x^r)^{\frac{c-b}{r}} (p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}$

$$= \frac{(a+b-c-r)\int x^{c+r-1} dx (1-x^r)^{\frac{a-c-r}{r}} (p+qx^r)^{\frac{b-c-r}{r}}}{\int x^{c-1} dx (1-x^r)^{\frac{a-c-r}{r}} (p+qx^r)^{\frac{b-c-r}{r}}}$$

Sub

Sub qua amplissima forma plurimae egregiae reductiones particulares continentur. Sit verbi gratiae $b = c + r$ erit

$$\frac{c\int x^{a+r-1}dx(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}} : (1-x^r)}{\int x^{a-1}dx(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}} : (1-x^r)} = \frac{a\int x^{c+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{a-c-r}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^r)^{\frac{a-c-r}{r}}}$$

$= c$, vnde sequitur fore $\int \frac{x^{a+r-1}dx(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{1-x^r} = \frac{\int x^{a-1}dx(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{1-x^r}$.

Habebitur ergo hinc istud theorema latius patens $\frac{\int x^{m-1}dx(p+qx^r)^{\kappa}}{1-x^r} = \frac{\int x^{n-1}dx(p+qx^r)^{\kappa}}{1-x^r}$, vbi semper integrationibus ita institutis vt euanescant integralia posito $x = 0$, fieri intelligitur $x = 1$. Excipitur autem solus ille casus quo est $q + p = 0$; quo incommodum accidit.

§. 66. Fractiones continuae, quas hactenus eruimus ope interpolationum, huc redeunt vt denominatores partiales sint constantes. Quo igitur formam generalem nunc inuentam ad eas transferamus, ponatur $p = q = 1$; prodibitque haec fractio coutinua

$$\cfrac{cg}{a-b+\cfrac{(c+r)(g+r)}{a-b+\cfrac{(c+2r)(g+2r)}{a-b+\cfrac{(c+3r)(g+3r)}{a-b+\text{etc:}}}}} = \frac{c\int x^{g+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(1+x^r)^{\frac{c-a}{r}}}{\int x^{g-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(1+x^r)^{\frac{c-a}{r}}}$$

vel eiusdem valor erit quoque $= \frac{g\int x^{c+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{g-b}{r}}(1+x^r)^{\frac{g-a}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^r)^{\frac{g-b}{r}}(1+x^r)^{\frac{g-a}{r}}}$

existente $g = a + b - c - r$. Ponatur $a - b = s$ ob $a + b = c + g + r$ erit $a = \frac{c+g+r+s}{2}$ et $b = \frac{c+g+r-s}{2}$, vnde

vnde fiet $\cfrac{cg}{s+\cfrac{(c+r)(g+r)}{s+\cfrac{(c+2r)(g+2r)}{s+\text{etc.}}}}$

$$=\frac{c\int x^{g+r-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{c-g-r-s}{2r}}(1-x^r)^{\frac{s}{r}}}{\int x^{g-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{c-g-r-s}{2r}}(1-x^r)^{\frac{s}{r}}}=$$

$$\frac{g\int x^{c+r-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{g-c-r-s}{2r}}(1-x^r)^{\frac{s}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{g-c-r-s}{2r}}(1-x^r)^{\frac{s}{r}}}$$

§. 67. Ponamus vt ad formam §. 47. perueniatur $2s$ loco s, sitque $c=q$ et $g=r-q$, habebitur haec fractio continua $\cfrac{q(r-q)}{2s+\cfrac{(q+r(2r-q)}{2s+\cfrac{(q+2r)(3r-q)}{2s+\text{etc.}}}}$

cuius valor adeo erit vel $=\dfrac{q\int x^{2r-q-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{q-r-s}{r}}(1-x^r)^{\frac{2s}{r}}}{\int x^{r-q-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{q-r-s}{r}}(1-x^r)^{\frac{2s}{r}}}$

vel $=\dfrac{(r-q)\int x^{q+r-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{-q-s}{r}}(1-x^r)^{\frac{2s}{r}}}{\int x^{q-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{-q-s}{r}}(1-x^r)^{\frac{2s}{r}}}$. Eiusdem autem fractionis continuae valor ante est inuentus $=$ $\dfrac{(q+s)\int y^{r+s+q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{r+s-q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}-s$. Quamobrem istae

formulae integrales interſe erunt aequales; quod eſt theorema minime contemnendum.

§. 68. Sit vti §. 48. poſuimus $r = 2$, et $q = 1$ erit

$$\frac{(1+s)\int y^{s+2}dy : \sqrt{(1-y^4)}}{\int y^s dy : \sqrt{(1-y^4)}} - s = \frac{\int x^2 dx (1-x^4)^{\frac{-s-1}{2}} (1-x^2)^6}{\int dx (1-x^4)^{\frac{-s-1}{2}} (1-x^2)^5}$$

quae aequalitas conſpicua eſt ſi $s = 0$; caſibus autem quibus s eſt numerus integer impar, aequalitas non difficulter oſtenditur. Vt ſi fuerit $s = 1$, erit poſterior formula $\frac{\int xxdx : (1+xx)}{\int dx : (1+xx)} = \frac{x - \int dx : (1+xx)}{\int dx : (1+xx)} = \frac{4-\pi}{\pi}$ poſito $x = 1$. Prior vero formula dabit in $\frac{2\int y^3 dy : \sqrt{(1-y^4)}}{\int y dy : \sqrt{(1-y^4)}} - 1 = \frac{4}{\pi} - 1 = \frac{4-\pi}{\pi}$ prorſus vti praecedens. At ſi s numerus par, per euolutionem poteſtatis $(1-xx)^s$ conſenſus ambarum expreſſionum facile perſpicietur.

§. 69. Praeter fractiones autem continuas hactenus erutas forma generalis inuenta innumerabiles alias ſub ſe complectitur; ex quibus nonnullas euoluere expediet. Sit igitur $g = c$, eritque huius fractionis continuae

$$\cfrac{c^2}{s + \cfrac{(c+r)^2}{s + \cfrac{(c+2r)^2}{s + \text{etc.}}}}$$

$$\text{valor} = \frac{c\int x^{c+r-1} dx (1-x^r)^{\frac{s}{r}} : (1-x^{2r})^{\frac{r+s}{2r}}}{\int x^{c-1} dx (1-x^r)^{\frac{s}{r}} : (1-x^{2r})^{\frac{r+s}{2r}}}.$$ Ponatur

$c = 1$, et $r = 1$, eritque

$$\cfrac{1}{s + \cfrac{4}{s + \cfrac{9}{s + \cfrac{16}{s + \text{etc.}}}}} =$$

$$= \frac{\int x\,dx(1-x)^s:(1-xx)^{\frac{s+1}{2}}}{\int dx(1-x)^s:(1-xx)^{\frac{s+1}{2}}},$$ cuius expressionis valores, quos pro variis ipsius s significationibus induit, investigemus. Posito igitur huius expressionis valore $= V$, erit vt sequitur:

$$\text{si } s=0;\ V=\frac{\int xdx:\sqrt{(1-xx)}}{\int dx:\sqrt{(1-xx)}}=\frac{1}{2\int dy:(1+yy)}$$

$$\text{si } s=2;\ V=\frac{2\int dx:\sqrt{(1-xx)}-3\int xdx:\sqrt{(1-xx)}}{2\int xdx:\sqrt{(1-xx)}-\int dx:\sqrt{(1-xx)}}=\frac{1}{2\int y^2dy:(1+yy)}-2$$

$$\text{si } s=4;\ V=\frac{19\int xdx:\sqrt{(1-xx)}-12\int dx:\sqrt{(1-xx)}}{3\int dx:\sqrt{(1-xx)}-4\int xdx:\sqrt{(1-xx)}}=\frac{1}{2\int y^4dy:(1+yy)}-4$$

Generaliter autem erit

$$V=\frac{1}{2\int y^s dy:(1+yy)}-s,$$ ex qua forma apparet, si fuerit s numerus integer par, quadraturam circuli inuolui, contra autem si s impar, logarithmos.

§. 70. Proposita nunc nobis sit haec fractio continua

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{4}{3+\cfrac{9}{4+\cfrac{16}{5+\cfrac{25}{6+\text{etc.}}}}}}$$

Comparetur haec cum forma §. 64. exhibita, fietque $pq\,cg=1$; $pq(c+r)(g+r)=4$, $pq(c+2r)(g+2r)=9$; $ap-bq=2$, et $(p-q)r=1$, vnde erit $c=g=r$; $p=\frac{\sqrt{5}+1}{2r}$; $q=\frac{\sqrt{5}-1}{2r}$; $a=\frac{r(1+3\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}$ et $b=\frac{r(5\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{5}}$, quibus

bus ſubſtitutis habebitur valor propoſitae fractionis continuae

$$= 1 + \frac{(\sqrt{5}-1)\int x^{2r-1}dx(1-x^r)^{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}(1+\sqrt{5}+(\sqrt{5}-1)x^r)^{\frac{-\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}}{2\int x^{r-1}dx(1-x^r)^{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}(1+\sqrt{5}+(\sqrt{5}-1)x^r)^{\frac{-\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}}$$

Ex qua expreſſione ob exponentes ſurdos nihil concludi poteſt notatu dignum.

§. 71. Cum in his fractionibus continuis numeratores partiales ex duobus fractoribus ſint compoſiti, ita nunc ad eiusmodi fractiones continuas pergam, in quibus numeratores hi partiales progreſſionem arithmeticam conſtituant. Fiat igitur, ad §. 50. recurrendo, $\gamma = 0$ et $c = 1$. erit

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \cfrac{a}{b+\cfrac{a+\alpha}{b+\cfrac{\beta+a+2\alpha}{b+\cfrac{2\beta+a+3\alpha}{b+\cfrac{3\beta+\text{etc.}}{}}}}}$$

Oportet autem ſumi $\frac{dS}{S} = \frac{(a-\alpha)dR}{\alpha R} + \frac{(\alpha b-\beta a)dR+\alpha RdR}{\alpha(\beta R-\alpha)} = \frac{(a-\alpha)dR}{\alpha R} + \frac{dR}{\beta} + \frac{(\alpha^2+\alpha\beta b-\beta^2 a)dR}{\alpha\beta(\beta R-\alpha)}$, vnde fit $S = Ce^{\frac{R}{\beta}}R^{\frac{a-\alpha}{\alpha}}(\beta R-\alpha)^{\frac{\alpha^2+\alpha\beta b-\beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}$.

Ponatur $R = \frac{\alpha x}{\beta}$, erit $S = Ce^{\frac{\alpha x}{\beta\beta}}x^{\frac{a-\alpha}{\alpha}}(1-x)^{\frac{\alpha^2+\alpha\beta b-\beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}$ ac $R^{n+1}S$ duplici caſu euaneſcit, poſito ſcilicet tam $x = 0$ quam $x = 1$, modo ſit $\alpha^2+\alpha\beta b > \beta^2 a$. Hinc ergo erit $Pdx = e^{\frac{\alpha x}{\beta\beta}}x^{\frac{a-\alpha}{\alpha}}dx(1-x)^{\frac{\alpha^2+\alpha\beta b-\alpha\beta^2-\beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}$ atque fractionis continuae propoſitae valor $= \frac{\int PRdx}{\int Pdx} =$

$$\frac{\alpha\int e^{\frac{\alpha x}{\beta\beta}}x^{\frac{a}{\alpha}}dx(1-x)^{\frac{\alpha^2+\alpha\beta b-\alpha\beta^2-\beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}}{\beta\int e^{\frac{\alpha x}{\beta\beta}}x^{\frac{a-\alpha}{\alpha}}dx(1-x)^{\frac{\alpha^2+\alpha\beta b-\alpha\beta^2-\beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}}$$ poſito poſt integrationem $x = 1$.

§. 72.

§. 72. Vt hic casus exemplo illustretur sit $a = 1$, $b = 1$, $\alpha = 1$, et $\beta = 1$, habebitur haec fractio continua

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\text{etc.}}}}}$$

cuius valor erit $= \frac{\int e^x x\,dx}{\int e^x dx} = \frac{e^x x - e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{1}{e-1}$ posito $x = 1$. Vnde erit $e = 2 + \cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\text{etc.}}}}}$

qua expressione satis cito ad valorem numeri e, cuius logarithmus est $= 1$, pertingitur.

§. 73. Ponamus nunc in superiori fractione continua §. 71. data, esse $\beta = 0$, vt sit

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \cfrac{a}{b+\cfrac{a+\alpha}{b+\cfrac{a+2\alpha}{b+\cfrac{a+3\alpha}{b+\text{etc.}}}}}$$

erit $\frac{dS}{S} = \frac{(a-\alpha)dR}{\alpha R} - \frac{bdR}{\alpha} - \frac{RdR}{\alpha}$, hincque $S = CR^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} e^{\frac{-2bR-RR}{2\alpha}}$; Duplici nunc casu $R^{n+1}S$ euanescit, quorum alter est si $R = 0$, alter si $R = \infty$, modo sint a et α numeri affirmatiui. Ponatur ergo $R = \frac{x}{1-x}$ eritque $S = Cx^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} : (1-x)^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} e^{\frac{2bx-(2b-1)xx}{2\alpha(1-x)^2}}$. Ob $dR = \frac{dx}{(1-x)^2}$ erit $\int Pdx$

 =

$$=\int \frac{x^{\frac{a-\alpha}{\alpha}}\,dx}{(1-x)^{\frac{a+\alpha}{\alpha}}\, e^{\frac{2bx-(2b-1)xx}{2\alpha(1-x)^2}}} \quad \text{atque} \quad \int PR\,dx =$$

$$\int \frac{x^{\frac{a}{\alpha}}\,dx}{(1-x)^{\frac{a+2\alpha}{\alpha}}\, e^{\frac{2bx-(2b-1)xx}{2\alpha(1-x)^2}}}.$$

§. 74. Sit denique in §. 50, $a=1$; $\beta=1$ $\alpha=0$, $\gamma=0$, erit $\frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\beta+\cfrac{1}{b+2\beta+\cfrac{1}{b+3\beta+\text{etc.}}}}}$

atque $\frac{dS}{S} = \frac{R^2dR+(b-\beta)RdR-dR}{\beta R^2}$; vnde fiet $S = e^{\frac{RR+1}{\beta R}} R^{\frac{b-\beta}{\beta}}$, et $Pdx = e^{\frac{RR+1}{\beta R}} R^{\frac{b-2\beta}{\beta}} dR$ atque $PR\,dx = e^{\frac{RR+1}{\beta R}} R^{\frac{b-\beta}{\beta}} dR$. Oportet autem R talem esse functionem ipsius x, vt R^{n+1} euanescat posito tam $x=0$, quam $x=1$. Eiusmodi autem functionem assignare, opus est multo difficilius, quam pro reliquis casibus. Neque igitur hunc casum eadem methodo resoluere conabor sed eum alii methodo nunc exponendae reseruabo.

§. 75. Huius quidem methodi ad fractiones continuas perueniendi iam ante aliquod tempus feci mentionem, sed quoniam tum casum tantum particularem tractaui, hic eam fusius exponere conueniet. Continetur ea autem non vti praecedens formulis integralibus, sed resolutione aequationis differentialis similis illi, quam quondam Comes Riccati pro-

propoſuit. Conſidero ſcilicet hanc aequationem $ax^m dx + bx^{m+1} y dx + cy^2 dx + dy = 0$, quae ponendo $x^{m+3} = t$ et $y = \frac{1}{cx} + \frac{1}{xxz}$ tranſit in hanc: $\frac{-c}{m+3} t^{\frac{-m-4}{m+3}} dt - \frac{b}{m+3} t^{\frac{-1}{m+3}} z dt - \frac{(ac+b)}{(m+3)c} z^2 dt + dz = 0$, quae ſimilis eſt priori. Quare ſi conſtaret valor ipſius z per t, ſimul y per x innoteſceret. Reducatur autem eodem modo haec aequatio ad aliam ſui ſimilem ponendo $t^{\frac{2m+5}{m+3}} = u$, et $z = \frac{-(m+3)c}{(ac+b)t} + \frac{1}{ttv}$, ac iſtiusmodi reductiones continuentur in infinitum, quo facto ſi omnes valores poſteriores in praecedentibus ſubſtituantur, exprimetur y ſequenti modo.

$$y = \cfrac{Ax^{-1} + 1}{-Bx^{-m-1} + \cfrac{1}{Cx^{-1} + \cfrac{1}{-Dx^{-m-1} + \cfrac{1}{Ex^{-1} + \cfrac{1}{-Fx^{-m-1} + \text{etc.}}}}}}$$

litterae vero A, B, C, D, etc. ſequentes obtinebunt valores

$$A = \frac{1}{c}$$

$$B = \frac{(m+3)c}{ac+b}$$

$$C = \frac{(2m+5)(ac+b)}{c(ac-(m+2)b)}$$

$$D = \frac{(3m+7)c(ac-(m+2)b)}{(ac+b)(ac+(m+3)b)}$$

$$E = \frac{(4m+9)(ac+b)(ac+(m+3)b)}{c(ac-(m+2)b)(ac-(2m+4)b)}$$

$$F = \frac{(5m+11)c(ac-(m+2)b)(ac-(2m+4)b)}{(ac+b)(ac+(m+3)b)(ac+(2m+5)b)}$$

etc.

quae determinationes ſimplicius ſequentibus aequationibus comprehenduntur:

AB =

$$AB = \frac{m+3}{ac+b} \qquad DE = \frac{(3m+7)(4m+9)}{ac-(2m+4)b}$$

$$BC = \frac{(m+3)(2m+5)}{ac-(m+2)b} \qquad EF = \frac{(4m+9)(5m+11)}{ac+(2m+5)b}$$

$$CD = \frac{(2m+5)(3m+7)}{ac+(m+3)b} \qquad FG = \frac{(5m+11)(6m+13)}{ac-(3m+6)b}$$

etc. etc.

76. Si nunc hi valores in fractione continua inuenta ſubſtituantur reperietur:

$$cxy = 1 + \cfrac{(ac+b)x^{m+2}}{-(m+3) + \cfrac{(ac-(m+2)b)x^{m+2}}{(2m+5) + \cfrac{(ac+(m+3)b)x^{m+2}}{-(3m+7) + \cfrac{(ac-(2m+4)b)x^{m+2}}{(4m+9) + \text{etc.}}}}}$$

Ex hac expreſſione patet aequationem propoſitam abſolute eſſe integrabilem caſibus quibus b aequatur termino cuipiam huius progreſſionis $-ac$; $-\frac{ac}{m+3}$; $-\frac{ac}{2m+5}$; $-\frac{ac}{3m+7}$; etc. $-\frac{ac}{im+2i+1}$ deinde etiam caſibus quibus b eſt terminus huius progreſſionis: $\frac{ac}{m+2}$; $\frac{ac}{2(m+2)}$; $\frac{ac}{3(m+2)}$; etc. $\frac{ac}{im+2i}$ Fractio autem haec continua aequationis propoſitae exhibet integrale huius conditionis, vt poſito $x=0$, fiat $cxy=1$, ſiquidem $m+2>0$; at ſi $m+2<0$, tum integrale hanc tenet legem vt poſito $x=\infty$ fiat $cxy=1$.

§. 77. Ponamus eſſe $b=0$; atque $a=nc$, ac poſt integrationem poni $x=1$; proueniet ex hac aequatione $ncx^m dx + cy^2 dx + dy = 0$ ſequens fractio continua, qua valor ipſius y definietur, caſu quo ponitur $x=1$:

$$y = \frac{1}{c} + \cfrac{n}{-\frac{(m+3)}{c} + \cfrac{n}{\frac{(2m+5)}{c} + \cfrac{n}{-\frac{(3m+7)}{c} + \cfrac{n}{\frac{(4m+9)}{c} + \text{etc.}}}}}$$

ſiue

ſiue ponatur $c = \frac{1}{\varkappa}$, ex aequatione $nx^m dx + y^2 dx + \varkappa dy = 0$, valor ipſius y caſu quo $x = 1$, ita ſe hebebit

$$y = \varkappa + \cfrac{n}{-(m\varkappa + 3\varkappa) + \cfrac{n}{(2m\varkappa + 5\varkappa) + \cfrac{n}{-(3m\varkappa + 7\varkappa) + \text{etc.}}}}$$

ſeu

$$y = \varkappa - \cfrac{n}{m\varkappa + 3\varkappa - \cfrac{n}{2m\varkappa + 5\varkappa - \cfrac{n}{3m\varkappa + 7\varkappa - \cfrac{n}{4m\varkappa + 9\varkappa - \text{etc.}}}}}$$

§. 78. Si ergo propoſita ſit iſta fractio continua

$$b + \cfrac{1}{b + \beta + \cfrac{1}{b + 2\beta + \cfrac{1}{b + 3\beta + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}$$

erit $\varkappa = b$; $n = -1$; $(m + 2)b = \beta$ ſeu $m = \frac{\beta}{b} - 2$. Quare huius fractionis continuae valor erit valor ipſius y caſu quo $x = 1$, ex hac aequatione $x^{\frac{\beta - 2b}{b}} dx = y^2 dx + b dy$, integratione ita inſtituta, vt poſito $x = 0$, fiat $xy = b$. cum ſit $m + 2 > 0$, ſi quidem $\frac{\beta}{b}$ ſit numerus affirmatiuus.

DETERMINATIO CALORIS ET FRIGORIS GRADVVM PRO SINGVLIS TERRAE LOCIS AC TEMPORIBVS.

§. 1.

Tab I. Hoc loco in caloris et frigoris gradus a priori inquirere conſtitui, quatenus a ſola actione ſolis proficiſcuntur: et hanc ob rem neque ad ventos, neque ad tempeſtatum diuerſitatem, quibus actio ſolis vehementer turbatur, reſpicio. In hoc itaque potiſſimum ero occupatus, vt remotis iſtis impedimentis pro quouis terrae loco et tempore gradum caloris frigorisue definiam a ſola actione ſolis oriundum. Cum igitur ad hoc expediendum neceſſe ſit gradum caloris quendam fixum et conſtantem adhibere, huius loco eum aſſumo, qui in ipſa ſolis ſuperficie perpetuo viget, quemque conſtanter littera *c* deſignabo.

§. 2. Ad effectum autem ſolis in calore producendo definiendum concipio corpus plana ſuperficie praeditum perpetuo ſolii ita expoſitum eſſe, vt radii ſolares normaliter in eius ſuperficiem planam incidant. Senſim igitur iſtud corpus a ſole calefiet, atque continuo maiorem caloris gradum recipiet, donec tandem ſummum gradum acquiſierit, quem ſi ſemel fuerit conſecutum, eum in aeternum ſit conſeruaturum. Gradum iſtum caloris appellabo vltimum ſiue naturalem caloris gradum, quem his circumſtantiis exerere valet.

§. 3. Cum igitur calor a radiis ſolis proficiſcatur hique diuergant ita, vt in duplicata ratione diſtantiarum a ſole fiant rariores; etiam vltimus caloris gradus, quem

ſol

ſol ſuperficiei planae directe oppoſitae inducere poteſt, tenebit rationem reciprocam duplicatam diſtantiarum a ſole. Quare ſi diſtantia huius corporis a ſole ponatur $= s$, et ſemidiameter ſolis $= 1$, erit vltimus caloris gradus $= \frac{c}{ss}$; quoniam, ſi corpus in ipſa ſolis ſuperficie ſeu in diſtantia 1 ab eius centro eſſet poſitum, eundem caloris gradum acciperet, qui in ſuperficie ſolis exiſtit.

§ 4. At ſi radii ſolis oblique in ſuperficiem corporis cadant, tum vtique tantus calor non generabitur, quam praecedente caſu, quo radii ſolis normaliter in ſuperficiem incidebant. Primo quidem ſatis perſpicuum eſt, ſi ſolis radii tantum lambant ſuperficiem, ſeu ſi angulus incidentiae radiorum euaneſcat, tum effectum omnino nullum a ſole produci poſſe. Ex quo ſatis tuto aſſumi poſſe videtur, gradum caloris vltimum, quem ſuperficies recipit eſſe ſinui anguli incidentiae proportionalem; quando quidem ſuperficies illuminatur. Nam ſi ſol infra horizontem verſetur, tum ſinus incidentiae fieret negatiuus non autem videtur, effectum ſolis vnquam in negatiuum abire poſſe. Quare, ſi ſol ſub horizonte exiſtit, eius effectus aliter ſpectari nequit, ac ſi ipſum horizontem occuparet, hoc eſt vltimus gradus caloris ſemper erit $= 0$, quantumuis profunde ſol ſub horizonte ſit ſubmerſus.

§. 5. Si ergo ſumatur in terra locus quicunque, definiri poterit gradus caloris, quem radii ſolis in data obliquitate incidentes tandem inducerent, ſi quidem ſol perpetuo eundem ſitum respectu iſtius loci retineret. Namque ſit altitudinis ſolis ſupra horizontem illius loci ſinus $= v$, poſito ſinu toto $= 1$, erit vltimus caloris gradus, cuius hic locus eſt capax $= \frac{cv}{ss}$, denotante ſemper s di-

ſtantiam ſolis a terra, exiſtente ſemidiametro ſolis $= 1$; ſiue etiam ſpectari poteſt s tanquam cotangens ſemidiametri ſolis apparentis. Vel ſi tangens ſemidiametri ſolis apparentis ponatur $= \varkappa$, erit vltimus gradus caloris $= c\varkappa^2 v$: ſi quidem ſol verſetur ſupra horizontem: at ſi ſol ſub horizonte lateat, gradus iſte erit $= 0$, qui eſt extremus ſummusque frigoris gradus.

§. 6. Hoc igitur modo vbique terrarum calor foret comparatus, ſi ſol reſpectu terrae quieſceret, ac perpetuo eundem ſitum retineret. Scilicet in iis regionibus in quibus ſol appareret, foret aliquis caloris gradus, isque eo maior, quo magis ſol fuerit eleuatus. In altero autem hemisphaerio, a ſole averſo, ſummum perpetuo regnaret frigus, niſi quatenus calor partis oppoſitae influeret. Hic vero ab iſtiusmodi circumſtantiis cogitationes prorſus abſtineo, neque alium caloris fontem praeter ſolem, conſidero. Hancque ob rem omnem materiam terreſtrem cuiusvis gradus caloris et frigoris aeque ſuſceptibilem pono, ita vt quouis tempore in eum ſtatum conſtituatur, quem regulae requirunt.

§. 7. Si igitur terrae regio iam illum ipſum habeat caloris gradum, quem ſol ipſi communicare conetur, quemque actu tandem induceret, niſi eum iam haberet; tum nulla eueniet mutatio caloris in ea regione, ſed ille ipſe gradus conſeruabitur. At ſi praeſens regionis calor vel maior ſit vel minor, quam calor naturalis ſitui ſolis reſpondens, tum paullatim ille calor vel diminuetur vel augebitur, donec tandem calori ſolis naturali aequalis fiat. Veriſimile autem videtur, caloris illius vel augmenta vel decrementa, quae dato tempore gignuntur, differentiae

calorum

calorum ſolis ſcilicet naturalis et proprii, quem corpus habet, eſſe proportionalia. Cum enim aequalitas amborum caloris graduum tanquam finis ſit propoſita, eo fortior ad eam obtinendam erit actio, quo maior fuerit inaequalitas.

§. 8. Si ergo ponamus in regione terrae quadam caloris praeſentis gradum eſſe z; atque ſolem in altitudine ſupra horizontem verſari, cuius ſinus ſit $= v$; erit calor naturalis a ſole oriundus $= c\varkappa^2 v$, denotante c gradum caloris in ſuperficie ſolis et $\varkappa$ tangentem ſemidiametri apparentis ſolis. Tempuſculo igitur dt calor regionis z incrementum accipiet proportionale exceſſui $c\varkappa^2 v - z$, ſiquidem fuerit $c\varkappa^2 v > z$, contrario enim caſu calor z decrementum patietur. Hinc ergo erit $dz = \alpha\, dt\,(c\varkappa^2 v - z)$: ac ſi ſol perpetuo iſtum ſitum obtineret, foret integrando $\alpha t = l\frac{C}{c\varkappa^2 v - z} = l\frac{c\varkappa^2 v - f}{c\varkappa^2 v - z}$, ſi f denotet gradum caloris, qui in ea regione fuit, principio a quo tempus t computatur.

§. 9. His nunc praemiſſis hypotheſibus pro quouis terrae loco gradum caloris difinire conabor ad quamlibet horam dati diei. Sit igitur HOR horizon loci propoſiti, Z zenith, P polus mundi borealis, et AOB parallelus, in quo ſol die propoſito mouetur. Sit eleuationis poli PR ſinus $=$ P coſinus $= p$, poſito ſinu toto $= 1$; ſinus declinationis borealis ſolis $=$ Q, coſinus $= q$, ſinusque Q abibit in ſui negatiuum, ſi declinatio ſolis ſit auſtralis. Ponamus ſolem in S verſari, angulumque APS eſſe $= t$, qui angulus exprimit tempus, quo ſol poſt tranſitum per meridianum ex A in S peruenit; an- Tab. I. fig. 1.

gulique APS ſinus ſit $= x$ coſinus $= y$; erit $dt = \frac{dx}{y} = \frac{-dy}{x}$ ob $xx + yy = 1$.

§. 10. Quoniam nunc in triangulo ſphaerico PZS dantur primo angulus ZPS, cuius ſinus eſt x et coſinus y; deinde latus PZ, cuius ſinus eſt p, coſinus P; et tertio latus PS cuius ſinus eſt q, coſinus Q, reperietur lateris ZS coſinus $= pqy + PQ$; qui ſimul eſt ſinus altitudinis ſolis ſuper horizonte, dum in S verſatur. Solis igitur occaſus continget in puncto O, exiſtente anguli APO coſinu $= \frac{-PQ}{pq}$. Ponamus autem eſſe angulum ipſum APO $= g$, quo ſemiſſis temporis diurni deſignabitur atque poſito angulo 180. grad. $= \pi$, erit $\pi - g$ tempus dimidiae noctis.

§. 11. Inquiramus nunc primum in varietatem caloris regionis propoſitae, quamdiu ſol ſupra horizontem verſatur, ſitque tempore t poſt meridiem, quo ſol in S reperitur, gradus caloris in loco propoſito $= z$. Quoniam vero hoc tempore eſt ſinus altitudinis ſolis $= pqy + PQ$, erit calor ſolis naturalis $= c\kappa^2 (pqy + PQ)$. Quamobrem tempusculo dt, quod per angulum SPs repraeſentatur, calore z incrementum capiet dz tantum, vt ſit $dz = \alpha dt\ (c\kappa^2 pqy + c\kappa^2 PQ - z)$, in qua aequatione α quantitatem quandam conſtantem denotat, per obſeruationes determinandam.

§. 12. Aequatio differentialis inuenta $dz = \alpha dt\ (c\kappa^2 pqy + c\kappa^2 PQ - z)$ reducatur ad hanc formam $dz + \alpha z dt = \alpha c\kappa^2 dt\,(pqy + PQ)$ quae multiplicata per $e^{\alpha t}$ denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$, fiet integrabilis: erit enim integrale $e^{\alpha t} z =$

$\alpha c\kappa^2$

$\alpha c n^2 \int e^{\alpha t} dt (pqy + PQ) = c n^2 PQ e^{\alpha t} + \alpha c n^2 pq \int e^{\alpha t} dx$ ob $y dt = dx$. Cum autem ſit $t = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ erit $\int e^{\alpha t} dx = \int e^{\frac{\int \alpha dx}{\sqrt{(1-xx)}}} dx = \frac{e^{\alpha t}(x + \alpha \sqrt{(1-xx)})}{1+\alpha\alpha}$. Addita ergo indefinita conſtante habebitur $e^{\alpha t} z = C c n^2 pq + c n^2 PQ e^{\alpha t} + \frac{\alpha c n^2 p q e^{\alpha t}(x+\alpha y)}{1+\alpha\alpha}$, atque calor quaeſitus $z = e^{-\alpha t} C c n^2 pq + c n^2 PQ + \frac{\alpha c n^2 pq(x+\alpha y)}{1+\alpha\alpha}$.

§. 13. Hinc igitur reperietur calor meridianus loci propoſiti faciendo $t = 0$, quo facto erit $x = 0$, et $y = 1$. Quare tempore meridiei erit calor $= C c n^2 pq + c n^2 PQ + \frac{\alpha^2 c n^2 pq}{1+\alpha\alpha}$ Si detur calor meridianus, isque ponatur $= f$, determinabitur inde conſtans quantitas C, quae per integrationem eſt ingreſſa, eritque $C c n^2 pq = f - c n^2 PQ - \frac{\alpha^2 c n^2 pq}{1+\alpha\alpha}$; vnde ex dato calore meridiano definietur calor pro quauis hora eiusdem diei, ita vt ſole in S exiſtente poſt meridiem ſit calor regionis propoſitae $z = e^{-\alpha t} f + c n^2 PQ(1 - e^{-\alpha t}) + \frac{\alpha c n^2 pq(x+\alpha y)}{1+\alpha\alpha} - \frac{\alpha^2 c n^2 pq e^{-\alpha t}}{1+\alpha\alpha}$.

§. 14. Inueſtigemus nunc gradum caloris, qui fuit eodem die, cum ſol eſt ortus; poni debebit $t = -g$, eritque pariter ac in occaſu $y = \frac{-PQ}{pq}$ at $x = -\frac{\sqrt{(p^2q^2 - P^2Q^2)}}{pq}$, ob angulos ante meridiem negatiuos. Ex quibus prodibit calor, quando ſol oritur $= e^{\alpha g} f - c n^2 PQ(e^{\alpha g} - 1) - \frac{\alpha c n^2 (\alpha PQ + \sqrt{(p^2q^2 - P^2Q^2)})}{1+\alpha\alpha} - \frac{\alpha^2 c n^2 pq e^{\alpha g}}{1+\alpha\alpha} = e^{\alpha g}(f - c n^2 PQ - \frac{\alpha^2 c n^2 pq}{1+\alpha\alpha}) + \frac{c n^2 PQ - \alpha c n^2 \sqrt{(p^2q^2 - P^2Q^2)}}{1+\alpha\alpha}$. At ſi anguli g ſinus ponatur $= m$, coſinus $= n$; erit calor tempore ortus ſolis $= e^{\alpha g}(f + c n^2 npq - \frac{\alpha^2 c n^2 pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{c n^2 npq - \alpha c n^2 mpq}{1+\alpha\alpha}$.

§. 15.

§. 15. Perueniet nunc ſol ad occaſum in O fietque $t = g$; $y = n = \frac{-PQ}{pq}$ et $x = m = \frac{\sqrt{(p^2q^2 - P^2Q^2)}}{pq}$, ideoque $PQ = -npq$. Hinc igitur tempore occaſus ſolis prodibit calor loci propoſiti $= e^{-\alpha g}(f + c\varkappa^2npq - \frac{\alpha^2c\varkappa^2pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{c\varkappa^2npq + \alpha c\varkappa^2mpq}{1+\alpha\alpha}$. Maximus autem hoc die calor erit tum, quando fit $z = c\varkappa^2pqy + c\varkappa^2PQ$; quippe quo tempore erit $dz = 0$. Subſtituto autem hoc valore in aequatione inuenta prodibit $e^{-\alpha t}(f - c\varkappa^2PQ \frac{-\alpha^2c\varkappa^2pq}{1+\alpha\alpha}) = \frac{c\varkappa^2pq(y-\alpha x)}{1+\alpha\alpha}$; ex qua valor anguli t erutus et in tempus conuerſus praebebit momentum maximi caloris a meridie computando.

§. 16. Cum igitur calor tempore ſolis occaſus ſit repertus, quem ponamus breuitatis gratia $= b$, quantum iſte calor ſequente nocte diminuatur, inueſtigemus. Verſetur itaque ſol poſt occaſum in V, et ponatur angulus OPV $= t$, et calor tum ſit $= z$, dum ergo ſol per arculum Vv progreditur erit decrementum caloris $dz = -\alpha z\, dt$, hincque $l\frac{b}{z} = \alpha t$; ex quo fiet $z = e^{-\alpha t}b$. Sequente igitur die, cum ſol iterum orietur, prodibit calor $= e^{-2\alpha(\pi-g)}b$. Per totam ergo noctem calor diminuetur, vnde quauis nocte frigus ſummum erit, quando ſol oritur.

§. 17. Cum igitur primo die tempore ortus ſolis gradus caloris fuiſſet $= e^{\alpha g}(f + c\varkappa^2npq - \frac{\alpha^2c\varkappa^2pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{c\varkappa^2pq(n+\alpha m)}{1+\alpha\alpha})$; die ſequente calor tempore ortus ſolis erit $= e^{\alpha g - 2\alpha\pi}(f + c\varkappa^2npq - \frac{\alpha^2c\varkappa^2pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{e^{-2\alpha(\pi-g)}c\varkappa^2pq(n-\alpha m)}{1+\alpha\alpha}$; ſi quidem ſol ponatur interea eandem declinationem conſeruare. At ſi hoc eodem ſequente die calor tempore meridiei ponatur Φ, debebit calor tempore ortus eiusdem diei eſſe $= e^{\alpha g}(\Phi + c\varkappa^2npq - \frac{\alpha^2c\varkappa^2pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{c\varkappa^2pq(n+\alpha m)}{1+\alpha\alpha}$ vnde prodibit

$\Phi +$

$$\Phi + cx^2npq - \frac{\alpha^2cx^2pq}{1+\alpha\alpha} - \frac{e^{-\alpha g}cx^2pa(n+\alpha m)}{1+\alpha\alpha} = e^{-2\alpha\pi}$$
$$\left(f + cx^2npq - \frac{\alpha^2cx^2pq}{1+\alpha\alpha}\right) - \frac{e^{\alpha g-2\alpha\pi}cx^2pa(n-\alpha m)}{1+\alpha\alpha}$$

§. 18. Si ſol perpetuo eandem declinationem conſeruaret, tum quoque perpetuo eadem diei hora idem gradus caloris haberetur. Hoc igitur caſu foret $\Phi = f$, atque calor tempore ortus ſolis primo die aequalis calori ſequentis diei eodem tempore. Hinc igitur erit $e^{\alpha g}(1 - e^{-2\alpha\pi})\left(f + cx^2npq - \frac{\alpha^2cx^2pq}{1+\alpha\alpha}\right) = \frac{cx^2pq(n+\alpha m - e^{-2\alpha(\pi-g)}(n-\alpha m))}{1+\alpha\alpha}$ atque calor meridianus, qui erit conſtans, definietur $f = \frac{cx^2pq(e^{-\alpha g}(n+\alpha m) - e^{\alpha g-2\alpha\pi}(n-\alpha m))}{(1-e^{-2\alpha\pi})(1+\alpha\alpha)} - cx^2npq + \frac{\alpha^2cx^2pq}{1+\alpha\alpha}$. Sub aequatore ergo, ob $P = 0$, et $p = 1$, itemque $m = 1$ et $n = 0$, hineque $g = \frac{\pi}{2}$ foret conſtans calor meridianus $f = \frac{\alpha cx^2ae^{-\alpha\pi}}{(1+\alpha^2)(1-e^{-\alpha\pi})} + \frac{\alpha^2cx^2q}{1+\alpha\alpha}$.

§. 19. Formulae iſtae tantopere ſunt compoſitae et perplexae; vt ex iis vix quicquam concludi queat Huius autem incommodi ratio in eo eſt poſita, quod amplitudo ortiua et occidua in eas ingrediatur, atque lex continuitatis ſit interrupta: quoniam pro nocte alio ſum vſus calculo alio pro die. Quamobrem vt aliquid ad vtilitatem deriuare queamus, neceſſe eſt aliquantum a veri ſimilitudine recedere, atque continuam legem aſſumere, ſecundum quam gradus caloris mutentur. Ita cum calores ſolis ſupra horizontem exiſtentis ſint ſinibus altitudinum proportionales; eadem lege oportebit calorem ſolis naturalem ſub horizonte latentis negatiuum ſtatuere, ac ſinui depreſſionis ſub horizonte proportionalem.

§. 20. Hac autem admissa hypothesi facile perspicitur conclusiones inde deducendas veritati minus fore consentaneas, eo quod soli hoc pacto, quando sub horizonte versatur, non solum omnis effectus ad calorem generandum adimatur, sed etiam vis contraria frigorifica tribuatur. Qua quidem in re experientia adversari videtur, cum sol sub horizonte calori praesenti plus nocere non possit, quam si prorsus ab esset; at dum ipsum horizontem occupat, iam perinde est, ac si prorsus foret sublatus. Quicquid autem sit, conueniet ex hac hypothesi consequentias formare, quae nihilominus aliquam vtilitatem habere poterunt, cum iam ante pateat, qua in parte conclusiones ab experientia dissentire debeant.

5. 21. Quoniam hoc pacto continuitatis lex observatur, ex aequatione supra inuenta $z = e^{-\alpha t}(f - cn^2 PQ - \frac{\alpha^2 cn^2 pq}{1+\alpha\alpha}) + cn^2 PQ + \frac{\alpha cn^2 pq(x+\alpha y)}{1+\alpha^2}$, quae praebet calorem post meridiem tempore t, existente calore meridiano $= f$, etiam gradus caloris nocturni poterunt determinari. Ita sequente media nocte ob $t = \pi$ et $x = 0$, $y = -1$, erit gradus caloris $= e^{-\alpha\pi}(f - cn^2 PQ - \frac{\alpha^2 cn^2 pq}{1+\alpha\alpha}) + cn^2 PQ - \frac{\alpha^2 cn^2 pq}{1+\alpha\alpha}$. Sequentis autem diei meridie erit calor $= e^{-2\alpha\pi}(f - cn^2 PQ - \frac{\alpha^2 cn^2 pq}{1+\alpha\alpha}) + cn^2 PQ + \frac{\alpha^2 cn^2 pq}{1+\alpha\alpha}$, ob $t = 2\pi$ et $x = 0$, $y = 1$.

§. 22. Incrementum ergo caloris, a meridie primi diei ad meridiem sequentem erit $= (1 - e^{-2\alpha\pi})(cn^2 PQ + \frac{\alpha^2 cn^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$. Si ergo sol perpetuo eandem declinationem retineret, foret etiam quotidie eadem semper caloris conditio, atque meridianus calor constans. Hoc itaque casu erit calor meridianus $f = cn^2(PQ + \frac{\alpha^2 pq}{1+\alpha\alpha})$. Singulis ergo diebus

diebus, cum maximus calor incidat, quando eſt $e^{-\alpha t}(f - cx^2 PQ - \frac{\alpha^2 cx^2 pq}{1+\alpha\alpha}) = \frac{cx^2 pq(y-\alpha x)}{1+\alpha\alpha}$ incidet noſtro caſu maximus calor poſt meridiem, quando fit $y = \alpha x$ ſeu $\frac{x}{y} = \frac{1}{\alpha}$: atque ipſe calor maximus erit $= cx^2(PQ + \frac{\alpha pq}{\sqrt{(1+\alpha\alpha)}})$; hoc eſt quando ſol iam tantum meridianum eſt transgreſſus, vt ſit anguli APS tangens $= \frac{1}{\alpha}$. Quare cum maximus calor circiter in horam tertiam pomeridianam incidere obſeruetur, idque tum quando aeſtas maxime eſt aequabilis, erit proxime $\alpha = 1$.

§. 23. Cum igitur, ſole eandem declinationem conſeruante, incrementum caloris meridiani vno die ſit $= (1 - e^{-2\alpha\pi})(cx^2 PQ + \frac{\alpha^2 cx^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$, erit incrementum duobus diebus acquiſitum $= (1 - e^{-4\alpha\pi})(cx^2 PQ + \frac{\alpha^2 cx^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$, atque generaliter incrementum n diebus acquiſitum erit $= (1 - e^{-2n\alpha\pi})(cx^2 PQ + \frac{\alpha^2 cx^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$. Cum igitur ſol tempore vnius diei circiter $\frac{1}{365}$ partem ecclipticae percurrat; n diebus conficiet $\frac{n}{365}$ partes; hoc eſt angulum $\frac{2\pi n}{365}$; denotante π angulum 180. graduum. Tempore ergo, quo ſol ecclipticae arculum ds percurrit, ob $n = \frac{365 ds}{2\pi}$, erit incrementum caloris meridiani $= (1 - e^{-365\alpha ds})(cx^2 PQ + \frac{\alpha^2 cx^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$; puta in eadem eleuatione poli, vbi tum eſt meridies.

§. 24. Quoniam autem propter exponentem $365\alpha ds$ infinite paruum eſt $e^{-365\alpha ds} = 1 - 365\alpha ds$, erit, dum ſol per arculum ecclipticae ds progreditur, exiſtente tota ecclipticae circumferentia $= 2\pi$, incrementum caloris meridiani $= 365\alpha ds(cx^2 PQ + \frac{\alpha^2 cx^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$; in qua expreſſione denotat α numerum vnitati priximе aequalem; c

gradum caloris constantem in superficie solis; P eleuationis poli in loco proposito sinum, Q sinum declinationis solis borealis; atque p et q cosinus sinibus P et Q respondentes. Denique $\varkappa$ est tangens semidiametri solis apparentis, atque $\int$ denotat ipsum calorem meridianum tempore oblato.

Fig. I. §. 25. Denotet ergo AVB aequatorem, et EVL
Fig. 2. ecclipticam, intersectio V aequinoctium vernum atque P polum loci propositi. Versetur sol in S post aequinoctium vernum, et ponatur arcus VS $= s$ existente tota ecclipticâ $= 2\pi$; atque sit arcus VS sinus $= u$; anguliique SVT, qui est 23° 29′, sinus $= m$; calor meridianus autem, dum sol in S versatur $= r$. His positis erit $Q = mu$, et $q = \sqrt{(1-m^2uu)}$; ac dum sol per arculum ds progreditur erit incrementum caloris meridiani $dr = 365\,\alpha\, ds\left(c\varkappa^2 mPu + \frac{\alpha^2c\varkappa^2 p\sqrt{(1-m^2uu)}}{1+\alpha\alpha} - r\right)$ existente $ds = \frac{du}{\sqrt{(1-uu)}}$. Ponatur breuitatis gratia n pro numero $365\,\alpha$ erit $dr + nr\,ds = \left(c\varkappa^2 mPu + \frac{\alpha^2c\varkappa^2 p\sqrt{(1-m^2uu)}}{1+\alpha\alpha}\right) n\,ds$.

§. 26. Postrema haec aequatio integrata dabit $e^{ns}r = c\varkappa^2 n\int e^{ns}ds\left(mPu + \frac{\alpha^2 p\sqrt{(1-m^2uu)}}{1+\alpha\alpha}\right) = \frac{c\varkappa^2 mnP}{1+nn}e^{ns}\left(nu - \sqrt{(1-uu)}\right) + \frac{\alpha^2c\varkappa^2np}{1+\alpha\alpha}\int e^{ns}ds\sqrt{(1-m^2u^2)}$. Ad integrale posterioris membri inueniendum oportet nosse, esse $\int e^{ns}u^\nu ds = \frac{e^{ns}u^{\nu-1}\left(nu - \nu\sqrt{(1-uu)}\right) + \nu(\nu-1)\int e^{ns}u^{\nu-2}ds}{nn+\nu\nu}$; vnde est $\int e^{ns}ds = \frac{e^{ns}}{n}$; $\int e^{ns}u^2ds = \frac{e^{ns}u\left(nu - 2\sqrt{(1-uu)}\right) + \frac{2}{n}e^{ns}}{4+nn}$ $= \frac{e^{ns}\left(2 + n^2u^2 - 2nu\sqrt{(1-uu)}\right)}{n(4+nn)}$; $\int e^{ns}u^4ds =$

e^{ns}

$$\frac{e^{ns}u^3(uu-4\sqrt{(1-uu)})+\frac{12e^{ns}}{n(4+nn)}(2+n^2u^2-2nu\sqrt{(1-uu)})}{16+nn}$$

$$=\frac{e^{ns}(24+12n^2u^2+4n^2u^4+n^4u^4-4nu(6+4uu+nnuu)\sqrt{(1-uu)})}{n(4+nn)(16+nn)}$$

atque ita porro.

§. 27. Quoniam ergo est $\sqrt{(1-m^2u^2)}=1-\frac{m^2u^2}{2}-\frac{m^4u^4}{8}$ — etc. erit $\int e^{ns}ds\sqrt{(1-m^2u^2)}=e^{ns}\left(\frac{1}{n}-\frac{mm(2+nnuu-2nu\sqrt{(1-uu)})}{2n(4+nn)}-\frac{m^4}{8}\right.$ $\left.\frac{(24+12n^2u^2+4n^2u^4+n^4u^4-4nu(6+4u+nnuu)\sqrt{(1-uu)})}{n(4+nn)(16+nn)}\right.$ — etc.) + const. Ponamus $s=0$, erit $u=0$ et $\sqrt{(1-uu)}=1$; fietque calor meridianus in aequinoctio verno $r=C-\frac{cx^2mnP}{1+nn}+\frac{\alpha^2cx^2np}{1+\alpha\alpha}\left(\frac{1}{n}-\frac{mm}{n(4+nn)}-\frac{3m^4}{n(4+nn)(16+nn)}\right.$ $\left.-\frac{45m^6}{n(4+nn)(16+nn)(36+nn)}\right.$ — etc. At posito $s=2\pi$, r denotabit calorem meridianum in sequente aequinoctio verno, ita vt sit $e^{2n\pi}r=C-\frac{cx^2mnPe^{2n\pi}}{1+nn}+\frac{\alpha^2cx^2npe^{2n\pi}}{1+\alpha\alpha}$ $\left(\frac{1}{n}-\frac{m^2}{n(4+nn)}-\frac{3m^4}{n(4+nn)(16+nn)}\right.$ — etc.

§. 28. Cum autem post innumerabiles reuolutiones solis perpetuo idem calor meridianus in aequinoctium vernum incidere debeat, oportebit quantitatem constantem C esse $=0$; si pro loco proposito ponatur calor meridianus in aequinoctio verno $=a$, erit $a=\frac{\alpha^2cx^2p}{1+\alpha\alpha}\left(1-\frac{m^2}{4+n^2}-\frac{3m^4}{(4+n^2)(16+n^2)}\right.$ — etc.) $-\frac{cx^2mnP}{1+nn}$. Atque dum sol in loco quocunque S ecclipticae versatur, erit calor me-

 ridianus

ridianus $r = \frac{\alpha^2 c\kappa^2 p}{1+\alpha\alpha}\left(1 - \frac{m^2(2+n^2 \; {}^2 - 2nu\sqrt{(1-uu)})}{2(4+nn)} - \frac{m^4(24+16n^2u^2+4n^2n^4+n^4u^4}{8(4+nn)}\right.$
$\left. - \frac{4nu(6+n^2+nnuu)\sqrt{(1-uu)}}{(1+nn)}\right) + \frac{c\kappa^2 mnP(nu-\sqrt{(1-uu)})}{1+nn}$.

§. 29. Cum n sit numerus valde magnus, quippe proxime aequalis numero 365, ob $\alpha = 1$, atque m numerus vnitate minor, scilicet $= 0,3982823$. pro dato terrae loco ad quemuis anni cuiusque diem proxime poterit definiri calor meridianus. Aequinoctio nimirum verno erit calor meridianus $\frac{c^2\kappa^2 p}{1+\alpha\alpha} - \frac{c\kappa^2 mnP}{1+nn}$: aequinoctio vero autumnali erit calor meridianus $= \frac{\alpha^2 c\kappa^2 p}{1+\alpha\alpha} + \frac{c\kappa^2 mnP}{1+nn}$. At solstitio aestiuo habebitur calor meridianus $= \frac{\alpha^2 c\kappa^2 p}{1+\alpha\alpha}\left(1 - \frac{m^2n^2}{2(4+nn)} - \frac{m^4n^4}{8(4+nn)(16+nn)} - \text{etc.}\right) + \frac{c\kappa^2 mn^2 P}{1+nn} = \frac{\alpha^2 c\kappa^2 p\sqrt{(1-mm)}}{1+\alpha\alpha} + \frac{c\kappa^2 mn^2 P}{1+nn}$; atque solstitio hyemali erit calor meridianus $= \frac{\alpha^2 c\kappa^2 p}{1+\alpha\alpha}\left(1 - \frac{m^2n^2}{2(4+nn)} - \text{etc.}\right) - \frac{c\kappa^2 mn^2 P}{1+nn} = \frac{\alpha^2 c\kappa^2 p\sqrt{(1-mm)}}{1+\alpha\alpha} - \frac{c\kappa^2 mn^2 P}{1+nn}$, neglectis terminis nimium exiguis.

§. 30. Sub aequatore ergo est calor meridianus in aequinoctio verno $= \frac{c\kappa^2}{2}$, in solstitio aestiuo $= \frac{c\kappa^2}{2} - \frac{c\kappa^2 m^2n^2}{4(4+nn)}$; in aequinoctio autumnali $= \frac{c\kappa^2}{2}$; et in solstitio hyemali $= \frac{c\kappa^2}{2} - \frac{c\kappa^2 m^2n^2}{4(4+nn)}$. At sub eleuatione poli 60°; erit calor meridianus in aequinoctio verno $\frac{c\kappa^2}{4} - \frac{c\kappa^2 mn\sqrt{3}}{2(4+nn)}$; in solstitio aestiuo $= \frac{c\kappa^2}{4} - \frac{c\kappa^2 m^2n^2}{8(4+nn)} + \frac{c\kappa^2 mn^2\sqrt{3}}{2(1+nn)} = \frac{c\kappa^2\sqrt{1-m}}{4} + \frac{c\kappa^2 mn^2\sqrt{3}}{2(1+nn)}$; in aequinoctio autumnali $= \frac{c\kappa^2}{4} + \frac{c\kappa^2 mn\sqrt{3}}{2(4+nn)}$, et in solstitio hyberno $= \frac{c\kappa^2}{4} - \frac{c\kappa^2 m^2n^2}{8(4+nn)} - \frac{c\kappa^2 mn^2\sqrt{3}}{2(1+nn)} = \frac{c\kappa^2\sqrt{1-mm}}{4} - \frac{c\kappa^2 mn^2\sqrt{3}}{2(1+nn)}$. Sub ipso denique polo boreali erit calor in aequinoctio verno $= \frac{-c\kappa^2 mn}{1+nn}$; in solstitio aestiuo $= \frac{c\kappa^2 mn^2}{1+nn}$; in aequinoctio autumnali $= \frac{c\kappa^2 mn^2}{1+nn}$; atque in solstitio hyberno $= \frac{-c\kappa^2 mn^2}{1+nn}$: in quibus formulis denotat $n = 365$, cum posuerimus $\alpha = 1$.

§. 31.

§. 31. Ex formula inuenta intelligitur, calorem meridianum non fore maximum ipso solstitio aestiuo, neque minimum solstitio hyberno; sed aliquantum post has tempestates incidere. Quod tempus vt definiatur pro quavis eleuatione poli, quaeratur, quando fiat $dr = 0$. Hoc autem euenit, cum fit $r = c\varkappa^2 m P u + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 p \sqrt{(1-m^2u^2)}}{1+\alpha\alpha}$: erit ergo $c\varkappa^2 m P u + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 p \sqrt{(1-m^2u^2)}}{1+\alpha\alpha} = \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 p \sqrt{(1-m^2u^2)}}{1+\alpha\alpha} + \frac{c\varkappa^2 mnP(nu-\sqrt{(1-uu)})}{1+nn}$; est enim proxime $r = \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 p \sqrt{(1-m^2u^2)}}{1+\alpha\alpha} + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pm^2 \sqrt{(1-uu)}}{(1+\alpha^2)n\sqrt{(1-m^2u^2)}} + \frac{c\varkappa^2 mnP(nu-\sqrt{(1-uu)})}{1+nn}$; generaliter sumendis iis tantum terminis, in quibus n plurimas habet dimensiones.

§. 32. Ad tempus igitur definiendum, quo calor meridianus est maximus, ista habetur aequatio $u = -n\sqrt{(1-uu)}$ et $\frac{u}{\sqrt{(1-uu)}} = -n$ ergo $u = \frac{n}{\sqrt{(1+nn)}}$ et $\sqrt{(1-uu)} = \frac{1}{\sqrt{(1+nn)}}$. Maximus ergo calor meridianus, pariter ac maximum frigus incident post solstitia; at discrimen ne vnicum quidem diem adaequat, ita vt satis tuto ipsa solstitia pro momentis, in quibus calor meridianus tum sit maximus tum minimus, haberi queant. Quodsi cum obseruationibus minus congruat, id hypothesi a veritate nimium aberranti est tribuendum. Vi hypothesis enim in solstitio aestiuo calor per noctem minime diminuitur, per diem autem maxime augetur.

§. 33. Quoniam calor meridianus sub aequatore non multum variatur per anni tempestates, ex eo commodissime calor in superficie solis poterit determinari. Denotet enim i maximum calorem meridianum sub aequatore obseruatum, qui cum sit $= \frac{c\varkappa^2}{2}$, erit $c = \frac{2i}{\varkappa^2}$. At cum $\varkappa$ sit tangens semidiametri solis apparentis, si pro $\varkappa$ sumatur

matur tangens $16'$, fiet $c = 92328\ i$; ita vt calor in ſuperficie ſolis propemodum ſit centies millies maior, quam ſummus calor tempore meridiei, ſub ipſo aequatore. Verum vt ratio multiplicationis caloris pateat, notandum eſt, ſummum calorem meridianum ſub aequatore duplo maiorem eſſe, quam medium gradum caloris, inter gradus caloris meridiani aequinoctialis veri et autumnalis, ſub eleuatione poli $60°$.

§. 34. Qui formulas datas contemplabitur, mox perſpiciet, ſummum calorem meridianum neque ſub aequatore neque ſub polis deprehenſum iri. Quamobrem operae pretium erit illas regiones terrae determinare, in quibus tempore ſolſtitii aeſtiui maximus obſeruari debeat calor. Calculo vero ſubducto reperietur harum regionum eleuatio poli 41. graduum: fieri enim debet $\frac{P}{p} = \frac{2m}{\sqrt{(1-mm)}}$. His vero regionibus erit calor meridianus in ſolſtitio aeſtiuo $= \frac{cx^2\sqrt{(1+mm)}}{2} = \frac{1,3215\ cx^2}{2}$, cum ſummus calor meridianus ſub aequatore ſit $= \frac{cx^2}{2}$.

§. 35. Hinc igitur ſequentem tabellam deduxi, in qua pro variis poli eleuationibus conſpiciuntur gradus caloris meridiani, tempore tam aequinoctiorum quam ſolſtitiorum.

Calor

Calor meridianus.

Eleuatio Poli.	Aeq. Verno	Solſtit. Aeſt.	Aeq. Aut.	Solſtit. hyb.
0°	0, 500	0, 459	0, 500	0, 459
10°	0, 492	0, 521	0, 492	0, 382
20°	0, 469	0, 567	0, 470	0, 295
30°	0, 432	0, 596	0, 434	0, 198
40°	0, 382	0, 607	0, 384	0, 095
50°	0, 321	0, 600	0, 322	-0, 010
60°	0, 249	0, 574	0, 251	-0, 115
70°	0, 170	0, 531	0, 172	-0, 218
80°	0, 085	0, 472	0, 088	-0, 313
90°	-0, 001	0, 398	0, 001	-0, 398

§. 36. Cum autem hac theoria pro quouis loco ſolis in eccliptica detur calor meridianus, r ita vt ſit $r = \frac{cx^2 \cdot \sqrt{(1-n^2u^2)}}{2} + \frac{cx^2 pm^2 u\sqrt{(1-nu)}}{2n\sqrt{(1-m^2u^2)}} + \frac{cx^2 mnP(nu-\sqrt{(1-uu)})}{1+nn}$. Hoc ergo die tempore t poſt meridiem erit calor $= e^{-\alpha t} cx^2 \left(\frac{pm^2u\sqrt{(1-nu)}}{2n\sqrt{(1-m^2u^2)}} - \frac{mnP\sqrt{(1-uu)}}{1+nn} \right) + cx^2 mPu + \frac{cx^2 p(x+y)\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2}$ ſeu neglectis terminis qui per n ſunt diuiſi erit calor iſte $Z = cx^2 \left(mPu + \frac{p(x+y)\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2} \right)$; vnde ſequitur maximum cuiusuis diei calorem incidere in horam tertiam pomeridianam: ideo quia poſuimus $\alpha = 1$. Nam ſi α maius foret, maximus calor propius ad meridiem incideret.

§. 37. Quamobrem ſi longitudinis ſolis ſinus ponatur $= u$; atque P deſignet ſinum eleuationis poli, p eius coſinum; ac m ſinum inclinationis ecclipticae ad aequatorem: erit pro dato loco

	Calor.
Meridie	$cx^2\left(mPu+\frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2}\right)$
hora 3.	$cx^2\left(mPu+\frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{\sqrt{2}}\right)$
hora 6	$cx^2\left(mPu+\frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2}\right)$
hora 9	$cx^2\left(mPu+0\right)$
hora 12	$cx^2\left(mPu-\frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2}\right)$
mane	
hora 3	$cx^2\left(mPu-\frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{\sqrt{2}}\right)$
hora 6	$cx^2\left(mPu-\frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2}\right)$
hora 9	$cx^2\left(mPu-0\right)$
hora 12	$cx^2\left(mPu+\frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2}\right)$

§. 38. Hinc autem clariſſime inſufficientia huius hypotheſis elucet, cum ſub aequatore ipſo media nocte maius frigus deberet regnare, quam rigidiſſima hyeme ſub polis. Cauſa quidem huius abſurdi ſponte ſe offert, quoniam ſecundum theoriam ſub aequatore tempore nocturno calor maxime imminui debeat, eo quod ſoli ſub horizonte latenti adeo vim frigefaciendi tribuimus, eamque eo maiorem, quo profundius ſit ſubmerſus: in zona autem torrida profundiſſime ſubmergitur. Quocirca iſta theoria correctione indiget maxima, ſi quidem ad obſervationes accommodari debeat.

§. 39. Ob has difficultates tentabo rem expedire per priorem hypotheſin, quae veritati magis eſt conſentanea; manentibus ergo poſtremis denominationibus, praeterquam quod r denotet gradum caloris tempore ortus ſolis, reperietur haec aequatio $dr+nrds=$

$$\frac{cx^2ne^{-2\alpha\pi}ds(mPu(e^{2\alpha g}-1)+\alpha(1+e^{-\alpha g})\sqrt{(p^2-m^2u^2)})}{(1+\alpha\alpha)(1-e^{-2\alpha\pi})}$$ vbi g denotat

notat arcum, cuius ſinus eſt $\frac{\sqrt{(p^2-m^2u^2)}}{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}$ Ex qua aequatione, cum n ſit numerus tam magnus ſcilicet 365, erit proxime $r = \frac{c\varkappa^2}{1+\alpha\alpha} \frac{e^{-2\alpha\pi}(mPu(e^{2\alpha g}-1)+\alpha(e^{2\alpha g}+1)\sqrt{(p^2-m^2u^2)})}{(1-e^{-2\alpha\pi})}$

vnde reperitur calor meridianus $f = \frac{c\varkappa^2 e^{-\alpha g}}{1+\alpha^2}$. $\left(\frac{(e^{2\alpha g-2\alpha\pi}-1)mPu+(e^{2\alpha g-2\alpha\pi}+1)\alpha\sqrt{(p^2-m^2u^2)}}{1-e^{-2\alpha\pi}}\right) + c\varkappa^2 mPu + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{1+\alpha\alpha}$. Calor in occaſu erit $= \frac{c\varkappa^2 e^{-2\alpha g}((e^{2\alpha g}-1)mPu+(e^{2\alpha g}+1)\alpha\sqrt{(p^2-m^2u^2)})}{(1+\alpha^2)(1-e^{-2\alpha\pi})}$, ergo quouis die ſe habet calor ortus ad calorem occaſus vt $e^{-2\alpha\pi}$ ad $e^{-2\alpha g}$ ſeu vt $e^{2\alpha g}$ ad $e^{2\alpha\pi}$; quo breuiores ergo ſunt dies, eo maior eſt differentia inter gradus caloris in ortu et occaſu.

§. 40. Poſt meridiem ergo tempore t quod in arcum aequatoris conuerſum dat angulum t, erit calor in regione propoſita $z = \frac{c\varkappa^2 e^{-\alpha(t+g)}}{(1+\alpha^2)(1-e^{-2\alpha\pi})}\left((e^{2\alpha(g-\pi)}-1)Pu\right)+(e^{2\alpha(g-\pi)}+1)\alpha\sqrt{(p^2-m^2u^2)}\Big)+c\varkappa^2 mPu+\frac{\alpha c\varkappa^2 p(x+\alpha y)\sqrt{(1-m^2u^2)}}{1+\alpha^2}$, vbi u denotat ſinum longitudinis ſolis; x ſinum anguli t et y coſinum ipſius: g vero angulum cuius ſinus eſt $\frac{\sqrt{(p^2-m^2u^2)}}{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}$ et coſinus $= \frac{-mPu}{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}$ ſeu $g = \frac{\pi}{2} + \text{Ar. ſin.} \frac{mPu}{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}$ vel $dg = \frac{mPdu}{(1-m^2u^2)\sqrt{(p^2-m^2u^2)}}$.

DE MOTIBVS OSCILLATORIIS CORPORVM HVMIDO INSIDENTIVM.

AVCTORE
Daniele Bernoulli.

§. 1.

Communicaui non ita pridem cum Academia dissertationem de statu aequilibrii corporum humido insidentium, quae prius est perlegenda quam praesentis argumenti disquisitio suscipiatur: sunt enim prioris dissertationis propositiones fere totidem lemmata hisce disquisitionibus, alias non parum nodosis, felicem exitum praeparantia: quapropter praemissa ista omnia, vt huius dissertationis partem facientia considerari, simulque tres figuras, vt ibi fuerunt explicatae atque adhibitae, rursus adhiberi velim.

§. 2.

Ordinem hic seruabo, quem in priori dissertatione adhibui: prius scilicet de planis humido verticaliter insidentibus dicam, deinde de corporibus qualibuscunque; in priori autem casu oscillationes fieri in ipso plano proposito putabimus. Intelligo autem per oscillationes motus reciprocos, quos facit planum, siue corpus ex statu aequilibrii firmi deturbatum, sibique postea relictum. Hi motus eo fient frequentiores, quo firmius habent aequilibrium, cum sunt in statu aequilibrii posita. Sunt autem motus isti reciproci duplicis generis: alii sunt isochroni, alii tales non sunt: de oscillationibus isochronis potissimum

agere

agere conſtitui: ſed iſochronae eſſe nequeunt, niſi excurſiones angulares veluti infinite paruae conſiderentur: igitur ſitus omnes corporis, tanquam ſitui aequilibrii proximos, conſiderabimus.

§. 3.

Sit nunc vt in praemiſſa diſſertatione, M Q ſuperficies fluidi, cui planum graue F E G (fig. 3 et 4) inſidet, quod ſic in ſtatu aequilibrii poſitum putetur. Sit porro A centrum grauitatis totius plani et B centrum grauitatis homogeneae partis ſubmerſae. Concipiatur rurſus vectis verticalis A R eiusque longitudo ponatur $= 1$, intelligendo ſimul per vnitatem ſinum totum: um in punctis A et R applicatae intelligantur potentiae minimae contrariae et aequales, horizontales et ipſi plano parallelae: iſtae potentiae planum declinabunt in ſitum proximum *f e g*, perveniente puncto R in *r*, A in *a*, B in *b*; eritque angulus *r a* R angulus minimus inclinationis, cuius ſinum vocauimus α: his ita poſitis, biſectaque recta F G in puncto H, demonſtrauimus §. 9. praemiſſae diſſertationis, fore Tab. I.

$$A\,a = H\,N \times \alpha$$
$$B\,c = H\,N \times \alpha$$
$$b\,c = [AB + \tfrac{FG^3}{12\,M})\,\alpha$$

vbi M ſignificat maſſam ſiue pondus totius plani, quod exprimi debet per magnitudinem partis ſubmerſae.

Deinde demonſtrauimus quoque §. 11. fore quamuis potentiam planum declinantem $= [AB \times M + \tfrac{1}{12} FG^3]\,\alpha$.

§. 4.

Iam vero nobis duo ab inuicem distinguendi veniunt casus, quorum *primus* est, quum est $Aa = 0$, id est, cum ab mutato plani situ, centrum grauitatis plani, situm non mutat, isque obtinet, cum linea verticalis A R secat lineam F G bifariam, quia tunc fit $HN = 0$; *secundus* casus est, vbi contrarium fit. In primo casu planum durante situs sui mutatione simpliciter circa suum centrum grauitatis rotatur, et statim ac potentiae agere cessant, planum motibus reciprocis circa centrum grauitatis agitabitur. In altero casu cessantibus potentiis, planum motu agitabitur mixto, altero oscillatorio et rotatorio circa centrum grauitatis, altero verticali et parallelo, quo planum alternis vicibus descendit atque ascendit. In priori casu oscillationes plani omnes, siue maiores siue minores sunt necessario isochronae; at vero in casu secundo agitationes non nisi certo in casu sunt isochronae; nisi enim ambo motus, ex quibus istae agitationes componuntur, inter se tautochroni fiant, vt eodem absoluantur tempore, non possunt non agitationes esse valde irregulares. Vt ordine procedam, incipiam a casu priori, cui sequens inseruiet lemma.

§. 5.

Lemma.

Quum planum F E G potentia vtcunque applicata circa punctum A mouetur, motus eadem fiet lege, ac si illi plano substituatur punctum graue in R, cuius massa ita fuerit determinata. Sumatur nempe aggregatum singularum particularum planum componentium multiplicatarum per quadratum suae distantiae a puncto A et diuisarum per quadratum A R. De-

Demonſtrationem huius lemmatis dedi in diſſertatione *de motu corporum a percuſſione excentrica*. §. 5. *vid Comm. Tom.* IX. *p.* 191. ſi itaque centro A ducantur duo circuli infinite propinqui, et dicatur circuli interioris radius x atque maſſula plani inter duos circulos intercepti $d\zeta$ erit, ob $AR = 1$, maſſa in R ſubſtituenda $= \int x x d\zeta$.

§. 6.

Cum R ſit punctum ad libitum ſumendum, poterit ita locari, vt maſſa in R ſubſtituenda ſit praeciſe maſſae plani aequalis, id eſt, vt $\int x x d\zeta = M$. De iſto puncto plurimas proprietates demonſtraui in diſſertatione *de mutua relatione centri virium, centri oſcillationis et centri grauitatis*, *vid. Comm. Tom.* 2. *p.* 208. vbi punctum R hac lege determinatum voco centrum virium viuarum. Inter alias proprietates vna eſt, quae huc maxime facit, quamque notatu plane dignam puto: nempe *ſi punctum rotationis A eſt in ipſo centro grauitatis, vti hic eſt, fore tunc oſcillationes plani, ex puncto R verticaliter ſuſpenſi, brachyſtochronas, id eſt, minoris durationis, quam ſi planum ex quouis alio puncto ſuſpendatur. vid. p.* 214.

Poteſt itaque longitudo A R in quouis plano vtcunque graui, iteratis experimentis ſine calculo proxime explorari, imo poteſt vnico experimento inueniri hunc in modum: *aſſumatur punctum quodcunque, ex quo planum ſuſpendatur atque deinde oſcillatur, erit A R aequalis mediae proportionali inter diſtantiam puncti aſſumti a centro grauitatis et diſtantiam centri oſcillationis a centro grauitatis. vid. p.* 212.

Longitudinem autem A R hac lege determinatam, vocabo *longitudinem brachyſtochronam*, eamque porro deſignabo per vnitatem.

§. 7.

§. 7.

Lemma.

Sit longitudo penduli alicuius ſimplicis $= L$, diſtantia minima puncti grauis oſcillantis a puncto infimo $= \alpha$, erit vis acceleratrix in iſto ſitu $= \frac{\alpha}{L}$, habetur autem vis acceleratrix, ſi diuidatur potentia mobili directe applicata per maſſam eius, eruntque omnes motus oſcillatorii iſochroni, ſi in iisdem a puncto aequilibrii diſtantiis ſit vis acceleratrix eadem. Notiſſima haec ſunt in mechanicis.

§. 8.

Problema.

Inuenire longitudinem penduli iſochroni cum motibus oſcillatoriis plani F E G fluido verticaliter immerſi.

Solutio.

Sit longitudo quaeſita $= L$; ponaturque diſtantia puncti oſcillantis a puncto infimo $= \alpha$; erit vis eius acceleratrix $= \frac{\alpha}{L}$. Eſt vero potentia P planum F E G in ſitu inclinato *feg* detinens $= [AB \times M + \frac{FG^3}{12}]\alpha$ per §. 3. haecque ipſa eſt, quae in plano oſcillante puncto R vel *r* applicata intelligi debet: poteſt porro maſſae plani ſubſtitui in R vel *r* punctum graue M per §. 6. eſtque diſtantia puncti *r* a puncto aequilibrii R etiam $= \alpha$, quia α ſignificat angulum *r a* R et ponitur *a* R vel A R $= 1$. Eſt ergo hic vis acceleratrix $= [AB \times M + \frac{FG^3}{12}]\alpha : M$. oportet itaque per §. 7. facere $\frac{\alpha}{L} = [AB \times M + \frac{FG^3}{12}]\alpha : M$ et hinc fit

L =

$$L = \frac{12M}{12M \times AB + FG^3}$$

aut quia $AR = 1$, poteſt homogeneitatis cauſa poni

$$L = \frac{12M \times AR^2}{12M \times AB + FG^3}$$

in qua aequatione M denotat ſpatium plani ſubmerſum Q. E. I.

§. 9.

Corollarium I.

Apparet ex hac aequatione oſcillationes admodum accelerari ab aucta ſectione aquae cum plano, quae indicatur per F G, atque ſi F G ſit veluti nulla, vti eſſet in bacillis aquae ſubmerſis vel in omnibus planis fere totis ſubmerſis, quorum latitudines ſuperiora verſus decreſcunt, poſſe tunc cenſeri

$$L = \frac{AR^2}{AB}.$$

Igitur in triremibus, quae ratione molis magnam habent latitudinem in ſuperficie aquae, oſcillationes latitudinales citiores erunt, ſed ſimul minores ceteris paribus, quam in aliis nauium generibus.

§. 10.

Corollar. II.

Oſcillationes porro accelerantur ab aucto valore AB: quo humilius itaque centrum grauitatis plani poſitum eſt, eo celerius perficiuntur, ſed rurſus ceteris paribus minores.

§. 11.

Corollar. III.

Denique oſcillationes accelerantur ceterisque paribus fiunt minores a diminuta *longitudine brachyſtochrona*. Patet autem ex conſtructione generali huius *longitudinis bra-*

chyſochronae in fine §. 6. expoſita, quod eo minor ſit, quo magis maſſa plani eſt circa centrum grauitatis concentrata.

Hae obſeruationes regulas architecturae nauali non parum illuſtrant atque confirmant, quum de ſubuerſione nauium vitanda ſermo eſt.

Quae de planis hucusque commentati ſumus, extendi etiam poſſunt ad corpora, quae prisma rectum formant, et quorum ſtrata ad prisma perpendicularia ſimilia ſimiliterque poſita ſunt.

§. 12.

Iam vero regulas noſtras exemplis aliquibus illuſtrabo. *Exemp. I.* Sit bacillus rectus craſſitiei minimae ſed vniformis compoſitus ex duabus partibus longitudine aequalibus; ſit grauitas ſpecifica partis ſuperioris dimidia grauitatis ſpecificae alterius partis, longitudo totius bacilli ſit $= a$: putetur bacillus tantum non totus ſubmerſus exiſtente gravitate ſpecifica fluidi tantillo maior ſesquialtera grauitate ſpecifica partis leuioris bacilli.

Hic eſt $AB = \frac{a}{12}$; $FG = 0$ et $AR = a\sqrt{\frac{11}{12}}$; et inde fit $L = \frac{11}{12}a$.

Exemp. II. Habeatur (vt in priori diſſertatione §. 15.) planum quadratum aequaliter craſſum, vbique homogeneum humido verticaliter inſidens, ita vt habeat duo latera horizontalia, totidemque verticalia. Sint rurſus gravitates ſpecificae aquae et plani vt m ad n, ponaturque latus quadrati $= 2a$; quaeritur longitudo penduli iſochroni. Hic fit $FG = 2a$, initoque calculo prodit $AB = \frac{n-m}{m}a$; $M = \frac{4n}{m}aa$; $AR = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, hisque valoribus ſubſtitutis in aequatione §. 8. oritur $L = \frac{4mna}{6nn-6mn+mm}$.

Si

Si fuerit $m = 3n \pm n\sqrt{3}$, erit $L = \infty$; sunt enim hi duo valores quantitatis m limites, intra quos aequilibrium firmum non subsistit.

Si fuerit m tantillo maior quam n, fit $L = 4a$, atque si ponatur $m = 5n$, fit $L = 20a$ etc.

Exemp. III. Si pro plano assumatur circulus ex circulis concentricis homogeneis quidem, sed tamen inter se vtcunque heterogeneis, compositus. Apparet planum in omni situ obtinere aequilibrium atque adeo pendulum isochronum esse debere infinitae longitudinis, oportet itaque, vt sit semper $AB = \frac{-FG^3}{12M}$: hanc proprietatem a posteriori erutam calculo analytico, qui voluerit, confirmare poterit: proprietas autem ista huc redit, vt si sumatur segmentum circuli homogenei quodcunque, sit in illo segmento distantia centri grauitatis a centro circuli aequalis parti duodecimae cubi chordae diuisi per aream segmenti.

§. 13.

Venio nunc ad casum alterum, quem §. 4. exposui, quo scilicet plana motu duplici agitantur, rotatorio, quem hucusque considerauimus et parallelo verticali, quo planum alternis vicibus immergitur et emergitur. Istud alterum argumentum tot difficultatibus prima fronte intricatum apparet, vt nihil aliud de eo affirmare ab initio ausus fuerim, quam quod motus isti reciproci admodum inaequales et irregulares esse debeant. Sed re attentius perpensa, animaduerti, quod vtrumque, oscillationis genus vtcunque ab initio irregulare tandem ad vniformem tendat statum permanentem, quem accurate determinare liceat. Erunt fortasse, quibus argumentum istud tanti momenti

menti non esse videbitur, quod tam exquisitum mereatur examen. Non inquiram heic momentum problematis istius specialis, at argumentum, in ampliori extensione consideratum, mihi videtur vtilissimum et a paucis adhuc pertractatum: problema autem, quod nunc tractabimus, argumento generali lumen affundet.

§. 14.

Si habeatur systema corporum ita connexorum, vt cognito motu vnius corporis non innotescat statim motus corporis alterius, etsi acceleratio cuiusuis corporis pendeat a situ corporum singulorum, determinatio motus singulorum corporum plerumque fit admodum difficilis: si vero motus minimi sint et reciproci siue oscillatorii, legi subiiciuntur fere generali, quae in hoc consistit, vt motus perturbati, inaequales diuersae durationis tendant ad statum vniformem, quo singula corpora oscillationes suas eodem perficiunt tempore et excursiones suas simul incipiunt simulque finiunt. In isto statu perdurationis obtinent excursiones singulae constantem aliquam inter se rationem, et distantiae corporum a puncto aequilibrii proportionem constanter eandem seruant, siue oscillationes maiores fiant siue minores.

Ad hunc quidem statum durationis corpora post tempus demum infinitum peruenire deberent; at vero si corporibus statim ab initio talis concilietur situs, vt singulorum distantiae a puncto aequilibrii obtineant modo dictam proportionem constantem, tunc omnes systematis motus perdurabunt in eodem statu eruntque inter se isochroni. Haec melius intelligentur, si attendatur ex. gr. ad oscillationes

sin-

ſingulares, quas corpora filo flexili connexa atque verticaliter ſuſpenſa faciunt: has oſcillationes in peculiari diſſertatione Comm. Tom. VI. inſerta conſideraui atque penitus explicaui.

Oſtendi autem in qua proportione corpora ſingula a linea verticali deduci debeant, vt deinde ſimul ſibi relicta, omnia oſcillationes ſuas ſimul perficiant: monſtraui ſimul hunc vniformitatis et durationis ſtatum tot diuerſis modis obtineri poſſe, quot corpora filo ſunt connexa, atque ſic catenam pendulam infinitis modis oſcillationes vniformes et aequabiles efficere poſſe: niſi autem corpora ſingula debita proportione ab linea verticali deducta fuerint, cum moueri incipiunt, oſcillationes ſingulae erunt irregulares, inconſtantes, perturbatae, ſed quae tamen continue magis magisque ad vniformitatis ſtatum vergent. Hae annotationes inſeruiunt ad motum tremulum chordarum ſonorarum intelligendum: poteſt enim vnius eiusdemque chordae ſonus ex multis tonis eſſe compoſitus.

§. 15.

Apparet igitur problema noſtrum iam eo eſſe deductum, vt inueniatur, in qua proportione, vtrumque oſcillationum genus fieri debeat, vt ambo eodem ſemper tempore abſoluantur. Huius problematis ſolutioni praemittendum eſt problema hoc alterum.

Problema.

Sit in fig. 3. et 4., praeter ambas potentias P, P hactenus conſideratas, potentia tertia π puncto R in directione verticali applicata et planum ſurſum trahens, ſint- Tab. I

que omnia in aequilibrio posita, oporteatque inuenire potentias horizontales P, P et potentiam verticalem π.

Solutio.

Ponatur tres praefatae potentiae planum detinere in situ feg, puteturque sic plani centrum grauitatis A peruenisse in a, atque partis submersae centrum grauitatis homogeneae ex B peruenisse in b: sumaturque rursus A R pro sinu toto 1, sitque sinus anguli minimi R $ar = \alpha$, eleuatio autem minima (cuius iam maguitudo simul pendet a magnitudine potentiae verticalis) sit $= \beta$. In hoc casu notandum est, magnitudinem partis submersae non eandem esse in vtroque plani situ, quin emergi in situ feg particulam, quae est $= FG \times \beta - FG \times HN \times \alpha$: patet autem esse potentiam verticalem π ponderi huius particulae, post mutationem situs emersae, aequalem, vnde statim obtinetur

$$\pi = FG \times \beta - FG \times HN \times \alpha.$$

Quod attinet ad potentiam horizontalem P, vt haec determinetur, oportet inquirere in lineolem horizontalem bc, haecque eodem modo inuenietur, quo vsi sumus §. IX. praecedentis dissertationis: sic reperietur peractis omnibus secundum notas staticae leges

$$bc = \left(\frac{AB + \frac{1}{3} \times FN^3 + \frac{1}{3} GN^3}{M}\right)\alpha - \frac{FG \times HN \times \beta}{M}$$

Si haec conferantur porro cum §. 6. praecedentis dissertationis, apparebit esse potentiam $P = \frac{bc}{AR} \times M$, siue $= bc \times M$: substituto igitur valore inuento lineolae bc prodibit

$$P = [AB \times M + \tfrac{1}{3} \times FN^3 + \tfrac{1}{3} \times GN^3]\alpha - FG \times HN \times \beta.$$

atque sic satisfactum est problemati.

§. 16.

§. 16.

Putetur iam potentias horizontales P, P, et verticalem π ſimul euaneſcere, atque ſic apparebit planum ad rotationem circa punctum A animari potentia P, ſimulque ad deſcenſum ſollicitari potentia π: ſique porro AR ea lege conſtruatur, quam §. 6. expoſuimus, poterit maſſa plani conſiderari tanquam concentrata in R. Et hoc modo fit vis acceleratrix in R ratione motus rotatorii $= \frac{P}{M}$ atque ratione motus verticalis paralleli fit vis acceleratrix $= \frac{\pi}{M}$.

§. 17.

Problema.

Poſito vtroque oſcillationum genere eiusdem durationis inter ſe, quaeritur longitudo penduli iſochroni communis et ratio excurſionum, quas punctum R vtroque motu deſcribit.

Solutio.

Quum per hypotheſin punctum R eodem tempore motu rotatorio deſcribit arculum α, quo deſcendit per altitudinem minimam β, oportet vt ſit eadem ratio inter vires accelerantes $\frac{P}{M}$ et $\frac{\pi}{M}$ quae eſt inter vias deſcribendas α et β, vnde oritur talis aequatio

$$\alpha\pi = \beta P$$

ſubſtituantur pro π et P valores §. 15. dati, eritque

$$FG \times \alpha\beta - FG \times HN \times \alpha\alpha = [AB \times M + \tfrac{1}{3}FN^2 + \tfrac{1}{3}GN^2]\alpha\beta - FG \times HN \times \beta\beta,$$

cuius aequationis homogeneitas ita reſtituetur

$$FG \times AR^2 \times \alpha\beta - FG \times HN \times AR\alpha\alpha = [AB \times M + \tfrac{1}{3}FN^2 + \tfrac{1}{3}GN^2]\alpha\beta - FG \times HN \times AR \times \beta\beta.$$

Ponatur

Ponatur nunc quantitas cognita $\frac{FG \times AR^2 - AB \times M - \frac{1}{3}FN^3 - \frac{1}{3}GN^3}{FG \times HN}$ $= 2Q$; hoc facto, reductaque aequatione inuenitur

$$\beta = \left(\frac{\mp \sqrt{(AR^2 + Q^2)} - Q}{AR}\right) \alpha,$$

atque sic iam satisfecimus parti problematis posteriori, qua quaerebatur ratio inter β et α: vt iam et pendulum simplex isochronum inueniatur, quod vocabimus L, considerabimus esse $L = \frac{M\alpha}{P}$ vel etiam $L = \frac{M\beta}{P}$ (vid. §. §. 7. et 8.): si priori valore vtamur atque valorem ipsius P substituamus (§. 15.) erit

$$L = \frac{M \times \alpha}{[AB \times M + \frac{1}{3}FN^3 + \frac{1}{3}GN^3]\alpha - FG \times HN \times \beta},$$

vel posito pro β valore ipsius inuento, factaque deinde divisione per α, habebitur tandem restituta simul terminorum homogeneitate

$$L = \frac{M \times AR^2}{M \times AB + \frac{1}{3}FN^3 + \frac{1}{3}GN^3 + FG \times HN[Q \mp \sqrt{(AR^2 + Q^2)}]}$$

Q. E. I.

§. 18.

Corollar. I.

Ex duplicitate signorum quantitati radicali praefixorum sequitur, duobus diuersis modis oscillationes fieri posse vniformes et omnes tautochronas atque pendulum simplex isochronum quouis modo alius esse longitudinis.

§. 19.

Corollar. II.

Si sit $HN = 0$, erit $Q = \infty$ et $FN = GN = \frac{1}{2}FG$: tuncque, si seligatur signum superius, fiet $\beta = 0$ et

et $L = \frac{M \times AR^2}{M \times AB + \frac{1}{3} FN^3 + \frac{1}{3} GN^3} = \frac{12 M \times AR^2}{12 M \times AB + FG^3}$

vt inuenimus §. 8. ſed ſi ſeligatur ſignum inferius, fit $\mathfrak{E} = \infty \alpha$, vel quod eodem recidit, $\alpha = 0$ et $L = \frac{M}{FG}$.

In priori caſu ſunt oſcillationes verticales nullae prae oſcillationibus rotatoriis, in caſu altero ſunt rotatoriae nullae prae verticalibus: ſequitur itaque tanquam corollarium, ſi planum motibus reciprocis minimis modo immergatur modo emergatur, ſine vlla plani motu rotatorio, fore longitudinem penduli hisce oſcillationibus iſochroni $= \frac{M}{FG}$, quod theorema in omnibus etiam corporibus humido inſidentibus valet, ſi per M intelligatur volumen, quod corpus ſub aqua occupat et per FG ſectio, quam corpus cum ſuperficie aquae facit.

§. 20.

Pauca quaedam addam circa oſcillationes corporum; nec enim multis adhuc opus eſt, vt appareat, quomodo hic ſit procedendum, ſi modo attente prius perlecta fuerint, quae in praecedenti diſſertatione monui §. §. 18. 19. et *ſeqq.* quibus demonſtrauimus, quod ſi corporis inclinatio fiat in plano ad lineam, poſitione datam *hh*, perpendiculari (fig. 5.) atque ſi productae AB applicentur potentiae horizontales aequales et contrariae in ipſo inclinationis plano, altera in puncto A, altera quae ab hoc puncto diſtat linea AR eadem lege, vt ſupra §. 6. conſtructa, demonſtrauimus, inquam, quod ſit quaeuis harum potentiarum corpus inclinantium Tab. I. fig. 5.

$$= (AB \times M + \tfrac{1}{3} \int y^3 dx + \tfrac{1}{3} \int Z^3 dx)\, \alpha$$

Sed demonſtrauimus porro praeter haſce duas potentias duas alias requiri potentias itidem horizontales, aequales et contrarias, iisdemque punctis applicatas, ſed in plano ad prius perpendiculari agentes, easque potentias ſimul definiuimus.

His omnibus in memoriam reuocatis, poſſemus iam omnes corporum oſcillationes vtcunque compoſitas definire, modo iam regulares et inter ſe tautochronae factae fuerint, eodem modo et ratiocinio, quo vſi ſumus §. 17. Sunt autem in corpore omni, quod ſine ſelectu accipitur, minimum tria oſcillationum genera:

Primum eſt rotatorium circa punctum A in plano ad lineam *hh* poſitione datam perpendiculari.

Alterum pariter rotatorium circa idem punctum A ſed in plano ad primum planum perpendiculari.

Tertium eſt verticale et parallelum, quo totum corpus motu parallelo aſcendit et deſcendit: ſed vererer ne faſtidium Lectori excitarem; ſi oſcillationes has ita perplexas velim ſine reſtrictione examinare, poſtquam methodum ad hunc finem neceſſariam iam tradidi; dicam igitur nunc tantum de iis oſcillationibus, quae ſimplices fiunt.

Duo autem requiruntur, vt ſimplices ſint, *primo* vt ſit $HN = 0$; *ſecundo* vt ſit $\pi\Phi = 0$; lineas et puncta figurae tertiae explicauimus §. 19. praemiſſae Differt.

§. 21.

Problema.

Determinare longitudinem penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus ſimplicibus corporis humido inſidentis.

Solutio.

Solutio.

Quia potentia corpus ad rotationes oſcillatorias puras et ſimplices animans eſt $= [AB \times M + \frac{1}{3}\int y^3 dx + \frac{1}{3}\int Z^3 dx]\,\alpha$, erit vis acceleratrix $= \frac{[AB \times M + \frac{1}{3}\int y^3 dx + \frac{1}{3}\int Z^3 dx]\,\alpha}{M}$: vnde (per §. 8.) erit longitudo quaeſita $= \frac{M}{P}$, ſiue

$$L = \frac{M \times AR^2}{AB \times M + \frac{1}{3}\int y^3 dx + \frac{1}{3}\int Z^3 dx}.$$ Q. E. I.

§. 22.

Ad illuſtrandam aequationem hanc generalem, eodem vtemur exemplo, quod adhibuimus §. 22. ſuperioris diſſertationis: habeatur ſcilicet cylindrus rectus homogeneus, cuius grauitas ſpecifica ſit ad grauitatem ſpecificam fluidi vt n ad m: ſit altitudo cylindri $= a$; radius baſeos $= b$; ponaturque axis cylindri fluido immerſi verticalis; quaeritur pendulum ſimplex iſochronum cum oſcillationibus minimis cylindri.

Demonſtrauimus autem loco citato, eſſe $M = \frac{nc}{2m} \times abb$ atque $P = \frac{mnc}{4mm}\,aabb - \frac{nc}{4m}\,aabb + \frac{c}{3}\,b^4$: ſique calculus recte ponatur fiet porro $AR = \sqrt{(bb + \frac{1}{12}aa)}$. His valoribus ſubſtitutis, fit

$$L = \frac{mna^3 + 12\,mnabb}{48\,mnaa - 48\,mnaa + 24\,mmbb}$$

ſiquе fuerint verbi gratia $a = 2b$, erit $L = \frac{4mnb}{24mn - 24mn + mm}$ atque, ſi porro poneretur $6m = 7n$, foret $L = 56.\,b$.

CONSIDERATIO PROGRESSIONIS CVIVSDAM AD CIRCVLI QVADRATVRAM INVENIENDAM IDONEAE.

AVCTORE
L. Eulero

§. 1.

Posita arcus cuiusdam in circulo, cuius radius sit $=1$, tangente $=t$, erit ipse arcus $=\int\frac{dt}{1+tt}$; si iam loco differentialium dt substituantur particulae tangentis finitae quidem, sed valde exiguae, atque integrationis loco actualis eiusmodi particularum additio perficiatur, expressio prodibit eo propius ad arcum propositum accedens, quo minores capiantur particulae tangentis t. Sic diuisa tangente in n partes aequales, quarum quaelibet erit $\frac{t}{n}$, vicem differentialis dt subeunda, loco t successiue poni debebunt valores $\frac{t}{n}$, $\frac{2t}{n}$, $\frac{3t}{n}$ . . . . vsque ad $\frac{nt}{n}$; quo facto arcus cuius tangens est t aequabitur huic progressioni $\frac{nt}{nn+tt}+\frac{nt}{nn+4tt}+\frac{nt}{nn+9tt}+\ldots\ldots\frac{nt}{nn+nntt}$ quae expressio eo minus a vero arcus valore differet, quo maior capiatur numerus n. Semper autem haec expressio nimis erit parua, nisi pro n sumatur numerus reuera infinitus.

§. 2. Cum igitur sumto pro n numero finito ista progressio $\frac{nt}{n^2+t^2}+\frac{nt}{n^2+4t^2}+\frac{nt}{n^2+9t^2}+\ldots\ldots+\frac{nt}{n^2+n^2t^2}$ eo propius exprimat arcum cuius tangens est t, quo maior fuerit numerus n; perpetuo autem hoc modo valor pro-

prodeat nimis paruus, inuestigabo, quantum ista expressio quouis casu a vera arcus longitudine deficiat. Quodsi enim defectus commode atque ad calculum accommodate exhiberi queat, per seriem vehementer conuergentem, ista methodus cuiusque arcus longitudinem determinandi perquam facilis et idonea videtur.

§. 3. Ad hoc inuestigandum singulos expressionis terminos methodo consueta in progressionem geometricam resoluo infinitam, vt sequitur

$$\frac{nt}{n^2+t^2} = \frac{t}{n} - \frac{t^3}{n^3} + \frac{t^5}{n^5} - \frac{t^7}{n^7} + \text{etc.}$$
$$\frac{nt}{n^2+4t^2} = \frac{t}{n} - \frac{2^2t^3}{n^3} + \frac{2^4t^5}{n^5} - \frac{2^6t^7}{n^7} + \text{etc.}$$
$$\frac{nt}{n^2+9t^2} = \frac{t}{n} - \frac{3^2t^3}{n^3} + \frac{3^4t^5}{n^5} - \frac{3^6t^7}{n^7} + \text{etc.}$$
$$\frac{nt}{n^2+16t^2} = \frac{t}{n} - \frac{4^2t^3}{n^3} + \frac{4^4t^5}{n^5} - \frac{4^6t^7}{n^7} + \text{etc.}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\frac{nt}{n^2+n^2t^2} = \frac{t}{n} - \frac{n^2t^3}{n^3} + \frac{n^4t^5}{n^5} - \frac{n^6t^7}{n^7} + \text{etc.}$$

§. 4. Ponamus progressionis nostrae oblatae

$$\frac{nt}{n^2+t^2} + \frac{nt}{n^2+4t^2} + \frac{nt}{n^2+9t^2} + \ldots + \frac{nt}{n^2+n^2t^2},$$

valorem iam esse actu determinatum, eumque esse $= s$; ac transformatio facta sequentem suppeditabit aequationem:

$$s = \begin{cases} +\frac{t}{n}\,(1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots + n^0) \\ -\frac{t^3}{n^3}\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) \\ +\frac{t^5}{n^5}\,(1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4) \\ -\frac{t^7}{n^7}\,(1^6 + 2^6 + 3^6 + \ldots + n^6) \\ +\frac{t^9}{n^9}\,(1^8 + 2^8 + 3^8 + \ldots + n^8) \\ -\frac{t^{11}}{n^{11}}\,(1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \ldots + n^{10}) \\ \text{etc. in infinitum} \end{cases}$$

§. 5. Quoniam in hac expreſſione coefficientes terminorum $\frac{t}{n}$, $\frac{t^3}{n^3}$, $\frac{t^5}{n^5}$, etc. ſunt ſummae progreſſionum poteſtatum parium ſeriei numerorum naturalium: ſummae hae autem ſe habent ſequenti modo

$$1^0 + 2^0 + \ldots + n^0 = n$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

$$1^6 + 2^6 + \ldots + n^6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}$$

$$1^8 + 2^8 + \ldots + n^8 = \frac{n^9}{9} + \frac{n^8}{2} + \frac{2n^7}{6} - \frac{7n^5}{15} + \frac{2n^3}{9} - \frac{n}{30}$$

etc.

ſubſtituantur hi valores definiti loco indefinitorum, ac prodibit ſequens aequatio

$$s = \begin{cases} +t \\ -\frac{t^3}{3} - \frac{t^3}{2n} - \frac{t^3}{6n^2} \\ +\frac{t^5}{5} + \frac{t^5}{2} + \frac{t^5}{3n^2} - \frac{t^5}{30n^4} \\ -\frac{t^7}{7} - \frac{t^7}{2} - \frac{t^7}{2n^2} + \frac{t^7}{6n^4} - \frac{t^7}{42n^6} \\ +\frac{t^9}{9} + \frac{t^9}{2n} + \frac{2t^9}{3n^2} - \frac{7t^9}{15n^4} + \frac{2t^9}{9n^6} - \frac{t^9}{30n^8} \\ \text{etc. etc.} \end{cases}$$

cuius

cuius lex processus vlterioris pendet a coefficientibus formulae generalis series summandi. Praecipue autem ad continuandam hanc seriem notari conuenit coefficientes vltimorum terminorum in quaque expressione, quae hanc tenent progressionem: $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{42}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{5}{66}$; $\frac{691}{2730}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{3617}{510}$; $\frac{43867}{798.42}$; $\frac{174611}{330}$; $\frac{854513}{6.23}$; $\frac{236364091}{5.546}$; quam hucusque produxisse sufficit.

§. 6. Disponantur termini inuentae expressionis secundum columnas a summo ad imum extensas, atque ad legem, qua singulae columnae progrediuntur, ordinentur; quo facto erit $s =$

$$+t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\frac{t^9}{9}-\frac{t^{11}}{11}+\text{etc.}$$
$$-\frac{t^2}{2n}(t-t^3+t^5-t^7+t^9-t^{11}+\text{etc.})$$
$$-\frac{t^2}{6n^2}(t-2t^3+3t^5-4t^7+5t^9-6t^{11}+\text{etc.})$$
$$-\frac{t^4}{30n^4}(t-5t^3+14t^5-30t^7+55t^9-91t^{11}+\text{etc.})$$
$$-\frac{t^6}{42n^6}(t-\frac{28}{3}t^3+42t^5-132t^7+\frac{1001}{3}t^9-728t^{11}+\text{etc.})$$
$$\text{etc.}$$

quae series omnes hanc tenent legem, vt potestas $\frac{t^m}{Nn^m}$ multiplicari debeat per istam seriem $t-\frac{(m+1)(m+2)}{2.\ 3}t^3+\frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}t^5+$ etc.

§. 7. Quanquam haec series ob m numerum integrum affirmatiuum in infinitum excurrit, tamen semper habet summam finitam, quae sequenti modo inuenietur. Ponatur tantisper seriei illius summa $= v$ erit $m\ v =$

$$\frac{mt}{6}-\frac{m(m+1)(m+2)}{3.\ 2.\ 3}t^3+\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 5}t^5-\text{etc.}$$
$$=$$

$= \frac{(1-t\sqrt{-1})^{-m}-(1+t\sqrt{-1})^{-m}}{2\sqrt{-1}}$. Haec autem expressio transmutatur in istam $mv = \frac{(1+t\sqrt{-1})^{m}-(1-t\sqrt{-1})^{m}}{2(1+tt)^{m}\sqrt{-1}}$. At binomiis his actu ad potestatem exponentis m euectis prodibit per aliam seriem $mv = \frac{1}{(1+tt)^{m}}\left(\frac{mt}{1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}t^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}t^5 - \text{etc.}\right)$ quae ad nostrum institutum maxime est accommodata, cum sponte abrumpatur, quando m est numerus integer affirmatiuus.

§. 8. Series ergo v, per quam terminus quisque $\frac{t^m}{Nn^m}$ multiplicari debet, nunc transmutata est in hanc $\frac{1}{m(1+tt)^{m}}\left(\frac{mt}{1} - \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(m-2)}{3}t^3 + \text{etc.}\right)$; quamobrem habebitur

$$s = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11} + \text{etc.}$$

$$- \frac{t^3}{2n(1+tt)}$$

$$- \frac{t^2}{2.6n^2(1+tt)^2}\cdot\frac{2t}{1}$$

$$- \frac{t^4}{4.30n^4(1+tt)^4}\left(\frac{4t}{1} - \frac{4.3.2}{1.2.3}t^3\right)$$

$$- \frac{t^6}{6.42n^6(1+tt)^6}\left(\frac{6t}{1} - \frac{6.5.4}{1.2.3}t^3 + \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}t^5\right)$$

$$- \frac{t^8}{8.30n^8(1+tt)^8}\left(\frac{8t}{1} - \frac{8.7.6}{1.2.3}t^3 + \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5}t^5 - \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{5t^{10}}{10.66n^{10}(1+tt)^{10}}\left(\frac{10t}{1} - \frac{10.9.8}{1.2.3}t^3 + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{601t^{12}}{12.13.210n^{12}(1+tt)^{12}}\left(\frac{12t}{1} - \frac{12.11.10}{1.2.3}t^3 + \text{etc.}\right.$$

$$- \frac{7t^{14}}{14.6n^{14}(1+tt)^{14}}\left(\frac{14t}{1} - \frac{14.13.12}{1.2.3}t^3 + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{3617t^{16}}{16.17.30n^{16}(1+tt)^{16}}\left(\frac{16t}{1} - \frac{16.15.14}{1.2.3}t^3 + \text{etc.}\right)$$

etc.

§. 9.

§. 9. Cum nunc huius expressionis prima series $t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} +$ etc. illum ipsum circuli arcum denotet, cuius tangens est t, quem quaerere instituimus, sit z iste arcus atque manente $s = \frac{nt}{n^2+1^2} + \frac{nt}{n^2+4^2} + \frac{nt}{n^2+9^2} + \ldots\ldots + \frac{nt}{n^2+n^2t^2}$, reperietur arcus $z = s + \frac{t^3}{2n(1+tt)} + \frac{1}{6} \cdot \frac{tt}{2nn(1+tt)^2} \cdot 2t + \frac{1}{30} \cdot \frac{t^4}{4n^4(1+tt)^4} (4t - 4t^3) + \frac{1}{42} \cdot \frac{t^6}{6n^6(1+tt)^6} (6t - 20t^3 + 6t^5) + \frac{1}{30} \cdot \frac{t^8}{8n^8(1+tt)^8} (8t - 56t^3 + 56t^5 - 8t^7) + \frac{5}{66} \cdot \frac{t^{10}}{10n^{10}(1+tt)^{10}} (10t - 120t^3 + 252t^5 - 120t^7 + 10t^9) + \frac{691}{13.210} \cdot \frac{t^{12}}{12n^{12}(1+tt)^{12}} (12t - 220t^3 + 792t^5 - 792t^7 + 220t^9 - 12t^{11}) + \frac{7}{6} \cdot \frac{t^{14}}{14n^{14}(1+tt)^{14}} (14t - 364t^3 + 2002t^5 - 3432t^7 + 2002t^9 - 364t^{11} + 14t^{13})$ + etc.

§. 10. Expressio haec commodissime accommodabitur ad casum, quo est $t = 1$, cum alterni seriei termini euanescant, atque insuper arcus z abeat in quartam semiperipheriae circuli partem, posita ergo semiperipheria circuli $= \pi$, ita vt sit $z = \frac{\pi}{4}$, sumtoque quocunque numero integro affirmatiuo pro n erit $\frac{\pi}{4} = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \frac{n}{n^2+16} + \ldots \frac{n}{n^2+n^2} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2n^2} - \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{2^3 \cdot 6n^6} + \frac{5}{66} \cdot \frac{1}{2^5 \cdot 10n^{10}} - \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{2^7 \cdot 14n^{14}} + \frac{43867}{19 \cdot 42} \cdot \frac{1}{2^9 \cdot 18n^{18}} - \frac{854513}{6 \cdot 23} \cdot \frac{1}{2^{11} \cdot 22n^{22}}$ + etc. Hinc igitur erit $\pi = \frac{4n}{n^2+1} + \frac{4n}{n^2+4} + \frac{4n}{n^2+9} + \ldots\ldots \frac{4n}{n^2+n^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1n^2} - \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 5n^6} + \frac{5}{66} \cdot \frac{1}{2^4 \cdot 5n^{10}} - \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{2^6 \cdot 7n^{14}} + \frac{43867}{19 \cdot 42} \cdot \frac{1}{2^8 \cdot 9n^{18}} - \frac{854513}{6 \cdot 23} \cdot \frac{1}{2^{10} \cdot 11n^{22}}$ + etc. quae series eo magis conuergit, quo maior numerus pro n accipiatur.

§. 11. Quamuis autem haec series eo magis conuergere videatur, quo maior sit numerus n tamen perpetuo ad certum vsque terminum tantum conuergit, post quem

termini crescent iterum; hancque ob causam non iuuat seriem eo vsque adhibere, quoad termini diuergere incipiant, sed expediet operationem ibi finire, vbi maxima obseruatur conuergentia. Namque si fractionum $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{42}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{5}{66}$; etc. ea quae indicem habet ν ponatur $= X$, atque sequens $= Y$ erit semper $\frac{Y}{X} > \frac{(\nu-1)(2\nu-1)}{2\pi^2}$, atque ν in infinitum crescente fiet $\frac{Y}{X} = \frac{\nu^2}{\pi^2}$. Ex quo apparet terminos istius seriei continuo magis crescere, atque nullam progressionem geometricam quantumuis conuergentem cum ea coniunctam eam reddere posse conuergentem. Hinc autem concluditur in serie paragr. praec. plures terminos accipi non licere quam ad summum $\frac{\pi n}{\sqrt{2}}$ hoc est proxime $2n$: etiamsi enim sumerentur plures termini, summa non ad veram propior accedens reperiretur.

§. 12. Ex hoc vero ipso subsidium ad valorem ipsius π propius inueniendum ope seriei paragraphi 10, consequitur. Ponamus enim seriei: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1n^2} - \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 3n^6} + \frac{5}{66} \cdot \frac{1}{2^4 \cdot 5n^{10}} -$ etc. iam actu esse additos μ terminos, ac sequentem terminum esse $= P$, eius loco sumatur ista expressio $\frac{\pi^4 n^4 P}{\pi^4 n^4 + \mu^4}$, isque loco omnium reliquorum addatur vel subtrahatur, prout terminus P habuerit signum $+$ vel $-$ 1. Est vero proxime $\pi^4 = 90,740909$, vnde loco termini P substitui poterit $\frac{P}{1 + \frac{16\mu^4}{36 \cdot n^4}}$. Hocque modo eo propius ad verum valorem ipsius π accedetur, quo maior fuerit numerus μ: hoc est quo plures termini iam fuerint additi.

§. 13. His tamen non obstantibus series paragrapho decimo data semper dat valorem ipsius π nimis magnum, quic-

quicquid pro n ſubſtituatur; eo propius autem acceditur, quo maior numerus pro n ſubſtituatur. Sumto enim 1 pro n prodit $\pi = 3,1646 +$ quae expreſſio iam in figura ſecunda a vero valore 3,1415926535897932 aberrat. Si ponatur $n = 3$, prodibit $\pi = 3,1415927216 +$ a vero valore in octaua figura diſcrepans. At ſi ponatur $n = 5$ reperietur per eandem methodum

$$\pi = 3,1415926535900726 +$$
$$\underline{3,1415926535897932}$$
$$0,0000000000002794$$

cuius numeri exceſſus in decima tertia demum figura conſpicitur. Haecque aberratio a veritate eo magis eſt notatu digna, quo minus vitium in ratiocinio inſtituto deprehendi poteſt. Ad quod accedit vt iſta formula aberratione hac non obſtante commode ad valorem ipſius π inueniendum inſeruire queat, ſubſtituendo ſcilicet maiores numeros loco n.

§. 14. Ex his exemplis quibus 1, 3, et 5 loco n ſubſtituimus per inductionem concludi poſſe videtur, valorem ipſius π in fractionibus decimalibus fere ad triplo plures figuras iuſtum repertum iri, quam n contineat vnitates, ſiquidem prima figura 3 computetur; prima autem hac figura non computata videtur numerus figurarum iuſtarum fore $= 2\frac{1}{2}.n$. Sic ſi ponatur $n = 2$ reperitur $\pi = 3,141635$ cuius quinta figura quaternario nimis eſt magna. Ac poſito $n = 4$ prodit $\pi = 3,14159265374 +$ cuius decima figura binario maior eſt vera. Poſito autem $n = 6$ reperitur, $\pi = 3,1415926535897935 58 +$ cuius figura demum decima ſexta a veritate recedit.

§. 15. Si nunc in causam huius a veritate aberrationis calculi inquiramus, aliam detegere non valemus, nisi diuergentiam seriei §. 10. allatae; reliqua enim omnia prorsus se recte habere deprehenduntur. Namque si t vnitatem excedat, eo maior reperietur aberratio a veritate, quo minor accipiatur numerus n; id quod clarissime se manifestabit si t ponatur infinitum atque simul u = numero infinito. Ponamus enim $t = \infty$, quo casu in §. 9. abibit z in quartam peripheriae partem, eritque ideo $z = \frac{\pi}{2}$. Sit insuper $n = pt$, denotante p numerum quemcunque affirmatiuum siue integrum siue fractum, eritque ob $z = \frac{\pi}{2} = s + \frac{1}{2p}$ ac reliqui termini omnes negligi posse videntur, quod tamen in terminis infinitesimis perperam fit, quippe qui tandem ad finitam magnitudinem excrescere possunt.

§. 16. Interim tamen notari meretur errorem satis esse exiguum, nisi p sit numerus vnitate minor, atque quo maior valor ipsi p tribuatur eo minorem fore aberrationem a veritate. Cum enim hoc casu sit $s = \frac{p}{p^2+1} + \frac{p}{p^2+4} + \frac{p}{p^2+9} + \frac{p}{p^2+16} + \frac{p}{p^2+25} +$ etc. in infinitum; videatur huius seriei summa posse per quadraturam circuli definiri, quod tamen secus se habet. Per vltimam enim aequationem foret $s = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2p}$ seu $\frac{\pi}{2p} - \frac{1}{2pp} = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+4} + \frac{1}{p^2+9} + \frac{1}{p^2+16} +$ etc. cuius quidem aequationis falsitas si $p = 0$ sponte elucet. At sumto $p = 1$ foret $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{26} +$ etc. $= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$. Vera autem summa per alias regulas reperitur $= \frac{\pi}{2} - 0,4941222793$ ita vt illa summa sit iusto minor, idque parte $0,0058777206$ sin autem ponatur $p = 2$, habebitur ista

series

ſeries $\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{13} + \frac{1}{20} +$ etc. cuius ſumma per viam hanc erroneam prodit $= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4} - 0,125$; cum tamen conſtet veram ſummam eſſe $= \frac{\pi}{4} - 0,124994522075$, ita vt illius defectus tantum ſit $= 0,000005477924$. Multo autem adhuc minor erit aberratio ſi maiores numeri pro p accipiantur: ſic ſi $p = 3$, in nona demum figura accidet aberratio, atque quocunque numero pro p ſumto prodibit ſumma iuſta ad $3p$ figuras.

§. 17. Ex his ſatis perſpicitur, quam caute circa ſummationem ſerierum diuergentium verſari oporteat, praeſertim ſi eiusmodi ſeries diuergentes occurrant infinitae. Huiusque rei adhuc vnum exemplum afferre viſum eſt, ex quo neceſſitas ſummae circumſpectionis clarius elucebit. Propoſita ſit ſeries quaecunque $\overset{1}{a}+\overset{2}{b}+\overset{3}{c}+\overset{4}{d}+\overset{5}{e}+\overset{6}{f}+\overset{7}{g}+\overset{8}{h}$ + etc. cuius conſtat terminum quemcunque indicis x fore $= a + \frac{(x-1)}{1}(b-a) + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}(c-2b+a) + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(d-3c+3b-a) +$ etc. Ex hac forma definiantur omnes termini praecedentes verſus ſiniſtram in infinitum progredientes, eritque vt ſequitur

term. indicis $0 = a + (a-b) + (a-2b+c) + (a-3b+3c-d) +$ etc.

term. indic. $-1 = a + 2(a-b) + 3(a-2b+c) + 4(a-3b+3c-d) +$ etc

term. indic. $-2 = a + 3(a-b) + 6(a-2b+c) + 10(a-3b+3c-d) +$ etc

term. ind. $-3 = a + 4(a-b) + 10(a-2b+c) + 20(a-3b+3c-d) +$ etc

etc.

§. 18. Colligantur omnes hi termini antecedentes in infinitum, reperieturque omnium ſumma $= \frac{a}{1-1} + \frac{a-b}{(1-1)^2} + \frac{a-2b+c}{(1-1)^3} + \frac{a-3b+3c-d}{(1-1)^4} +$ etc. quae in ſeries innumerabiles ſecundum litteras a, b, c, d, e, etc. reſoluta abibit in hanc formam:

$$+ a\left(\frac{1}{1-1} + \frac{1}{(1-1)^2} + \frac{1}{(1-1)^3} + \frac{1}{(1-1)^4} + \text{etc.}\right)$$
$$- b\left(\frac{1}{(1-1)^2} + \frac{2}{(1-1)^3} + \frac{3}{(1-1)^4} + \frac{4}{(1-1)^5} + \text{etc.}\right)$$
$$+ c\left(\frac{1}{(1-1)^3} + \frac{3}{(1-1)^4} + \frac{6}{(1-1)^5} + \frac{10}{(1-1)^6} + \text{etc.}\right)$$
$$- d\left(\frac{1}{(1-1)^4} + \frac{4}{(1-1)^5} + \frac{10}{(1-1)^6} + \frac{20}{(1-1)^7} + \text{etc.}\right)$$

§. 19. Series hae ſingulae autem ſummationem admittunt; atque ſummis earum loco ſubſtitutis prodibit aggregatum omnium terminorum antecedentium verſus ſiniſtram in infinitum, vt ſequitur

$$+ a \cdot \frac{1}{(1-1)-1} = - a$$
$$- b \cdot \frac{1}{((1-1)-1)^2} = - b$$
$$+ c \cdot \frac{1}{((1-1)-1)^3} = - c$$
$$- d \cdot \frac{1}{((1-1)-1)^4} = - d$$
$$+ \text{etc.}$$

Ex quo videtur terminorum horum antecedentium ſumma fore $= - a - b - c - d -$ etc. Quare ſi ſeries quaecunque infinita $a + b + c + d + e +$ etc. etiam verſus ſiniſtram in infinitum continuaretur, foret totius ſeriei vtrinque in infinitum abeuntis ſumma ſemper $= 0$; ſi quidem ratiocinium hoc eſſet iuſtum.

§. 20. Neque vero hoc ratiocinium ſemper fallit, ſed in innumerabilibus ſeriebus veritati conſentaneum deprehenditur. Primo enim omnes progreſſiones geometricae hac gaudent proprietate vt in infinitum vtrinque progredientes ſummam habeant $= 0$. Scilicet ſeriei $n + n^2 + n^3 + n^4 +$ etc. ſumma eſt $= \frac{n}{1-n}$ partis autem praecedentis $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} +$ etc. ſumma eſt $= \frac{n}{n-1}$, quae cum illa iuncta producit nihil. In infinitis autem ſeriebus

ſeriebus aliis ratiocinium hoc maxime a veritate recedit, cuiusmodi eſt ſeries $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} +$ etc. quae antrorſum continuata ſui fit ſimilis et aequalis, ſcilicet $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} +$ etc. cuius adeo totius ſumma non fit 0 ſed potius duplo maior. Haec igitur propoſuiſſe non minoris vtilitatis eſſe arbitror, quam ſummo rigore demonſtratas veritates.

DE

DE NOVO GENERE OSCILLATIONVM.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Quamuis doctrina de oſcillationibus corporumque motibus reciprocis iam tanto ſtudio ſit pertractata, vt in ea nihil omnino noui proferri poſſe videatur; tamen in hac diſſertatione nouum prorſus genus oſcillationum ſum prolaturus, quod cum a nemine adhuc tactum eſt, tum etiam ſingulari analyſi indiget. Primum quidem anſam de eo cogitandi mihi praebuit Clariſſimus Collega Krafft, in diſſertatione, quam de inſolitis quibusdam oſcillationibus horologii portatilis ſuſpenſi praelegit; deinde vero etiam, cum aeſtum maris eſſem contemplatus, deprehendi iſtum maris motum reciprocum ad idem oſcillationum genus pertinere.

§. 2. Corpus quodcunque oſcillationes perficere motuue reciproco praeditum eſſe dicitur, quando vel totum vel eius partes in dato ſpatio ita perpetuo mouentur, vt eundo et redeundo alternatim in plagas oppoſitas progrediantur. Hac enim ratione comparatus eſt motus pendulorum, qui in hac doctrina tanquam caſus ſimpliciſſimus ſpectari ſolet, ad quem omnia reliqua oſcillationum genera reuocari conueniat: cuiusmodi ſunt vibrationes chordarum, tremores campanarum, vndulationes aquarum; atque

atque etiam fluxus et refluxus maris. In quibus omnibus motuum ſpeciebus talis reciprocatio alternaque commutatio ſecundum plagas oppoſitas fieri obſeruatur.

§. 3. Cum igitur haec proprietas communis ſit omni motui oſcillatorio, exponam qua in re nouum genus nunc quidem examini ſubiiciendum a reliquis ſatis iam agitatis Tab. I. diſcrepet. Sit ergo ACB linea vel curua vel recta id Fig. 6. et 7. ſpatium repreſentans, in quo corpus vel portio corporis quaecunque motu reciproco feratur, ita vt alternis vicibus modo verſus dextram in directione ACB modo verſus ſiniſtram in directione BCA promoueatur. Cum igitur nullum corpus ſibi ſoli relictum et liberum iſtiusmodi motu reciproco cieri queat, ſed vniformiter in directum progredi nitatur, viribus opus eſt ad motum oſcillatorium producendum, in quarum diſcrimine praecipua diuerſitas ipſius motus oſcillatorii conſiſtit.

§. 4. Quando autem ad vires attendimus perinde eſt cuiusnam figurae ſpatium, in quo fit motus, accipiamus; et propterea hoc ſpatium commodiſſime nobis repraeſentabitur per lineam rectam ACB. Cum igitur motus al- Fig. 7. ternatim verſus dextram et ſiniſtram contingat, eiusmodi opus eſt viribus, quae corpus modo verſus dextram modo verſus ſiniſtram impellant. Hae ergo vires debent eſſe maxime variabiles, atque ſubinde ſui negatiuae fieri; vis enim verſus ſiniſtram pellens conſiderari poteſt inſtar vis negatiuae verſus dextram vrgentis. Quare ſi fuerit p vis, quae corpus, dum in M verſatur, ſollicitat, neceſſe eſt vt p ſic quantitas variabilis, quae non ſolum pro variis circumſtantiis maior minorue fiat, ſed etiam in ſui negativam abeat.

§. 5. Quodſi quantitas huius vis per p ſolum locum, quem corpus in ſpatio ACB occupat, determinatur, oſcillationes inde ortas ad primum genus refero: in hocque genere continentur omnes oſcillationum ſpecies etiamnum tractatae, quae quidem in vacuo fieri ponuntur. Pro hoc itaque oſcillationum genere vis p exprimetur functione quapiam quantitatis, a qua locus corporis M pendet, ſcilicet functione quadam ſpatii MC, exiſtente C puncto fixo ſpatii ACB. Quoties autem iſtiusmodi oſcillationes iſochronae deprehenduntur, vis p directe proportionalis eſt ſpatio MC; quae ſi corpus verſetur inter A et C, tendit ad dextram, corpore autem inter C et B puta in N exiſtente, ſui fit negatiua atque corpus verſus ſiniſtram vrgebit vi, quae ſit vt NC.

§. 6 Ad ſecundum oſcillationum genus refero eas, quae oriuntur a vi p partim a ſpatio MC partim a celeritate, quam corpus in M habet, pendente, eritque his caſibus p functio quaedam cum ſpatii MC tum etiam celeritatis in M. Ad hoc genus praecipue pertinent eae oſcillationes, quae in medio reſiſtente fieri concipiuntur: quia enim reſiſtentia functioni cuidam celeritatis eſt proportionalis, corpus praeter vim ſollicitantem abſolutam retardari cenſendum eſt a reſiſtentia, quae eſt vis directioni motus, quam corpus habet, perpetuo contraria. Quomodo autem pro data lege reſiſtentiae vim abſolutam comparatam eſſe oporteat, vt oſcillationes fiant iſochronae, id in Tractatu meo de motu corporum fuſius expoſui.

§. 7. Ad tertium denique oſcillationum genus eas refero, in quibus corpus praeter vim abſolutam a ſpatio MC pendentem ſollicitatur a vi, cuius quantitas determinatur

minatur per tempus, quod a termino quodam fixo eſt ellapſum, dum corpus in M verſatur. Huiusmodi oſcillationes a nemine adhuc, quantum ſcio, ad calculum ſunt reuocatae; etiamſi tales oſcillationes non parui momenti in mundo fieri quotidie obſeruentur. Ad hoc enim genus pertinent oſcillationes ſupra memoratae atque a Clariſſimo Profeſſore Krafft primum obſeruatae, in quibus vires oſcillationes producentes a motu horologii interno atque idcirco a tempore pendent; accedit autem, inſuper vis abſoluta a pondere horologii oriunda, quae diſtantiae a ſitu aequilibrii eſt proportionalis.

§. 8. Manifeſtum autem eſt in eodem hoc genere contineri motum maris reciprocum ſeu alternam eleuationem et depreſſionem. Praecipua enim vis mare ad hunc motum ciens a loco lunae pendet, qua interuallo duodecim fere horarum alternatim attollitur atque deprimitur: vnde haec vis neque a ſitu aquae neque ab eius celeritate pendet, ſed potius a temporis momento. Praeter hanc vero vim mare vrgetur a vi propria grauitatis, qua ſi ſupra libellam ſit eleuatum, deprimitur, contra vero attollitur, ſi eius ſuperficies infra libellam verſetur. Quocirca ſi ex effectu harum duarum virium motus maris debeat definiri, ante natura oſcillationum ad hoc tertium genus pertinentium inueſtigari oportebit.

§. 9 Ponamus igitur oſcillationes fieri in ſpatio ACB, corpusque dum in M verſatur ſollicitari a duplici vi, quarum altera a loco M pendeat ſpatioque MC ſit proportionalis: ab hac ergo vi corpus, dum in ſpatio AC exiſtit, vrgebitur verſus dextram, contra autem, ſi ſit in ſpatio BC ſitum, verſus ſiniſtram. Altera autem vis pendeat a Tab. I fig. 7 et 8.

tempore, eaque corpus certis momentis verſus dextram, certisque aliis momentis verſus ſiniſtram impelli, idque ſine vllo reſpectu ad corporis locum habito. Exprimamus autem tempus vniformiter fluens per peripheriam circuli FDHE, quippe quae, cum in ſe ipſum redeat, idonea eſt ad tempus quantumuis denotandum. Vires porro ſint proportionales ſinibus arcuum tempora denotantium, vrgeantque eae verſus dextram, ſi ſint affirmatiui, contra vero ſi fiant negatiui verſus ſiniſtram.

§. 10. Sit F temporis initium, quo oſcillationes inceperunt, fluatque tempus ſecundum ductum FTDHE. Initio igitur hoc vis corpus ſollicitans erit nulla, at poſt tempus FT corpus verſus dextram pelletur vi vt PT; quae vis fiet maxima elapſo tempore FD; poſtmodum iterum decreſcet, donec euaneſcat poſt tempus FDH. Deinde dum tempus ex H per E in F fluit, vis iſta erit negatiua, ac corpus verſus ſiniſtram ſollicitabit; atque elapſo tempore per totam peripheriam expreſſo, eaedem vis ſollicitantis redibunt reuolutiones, vnde in corpore propoſito motum oſcillatorium generari neceſſe eſt; idque ſi hae ſolae vires agerent: a priori autem vi abſoluta a loco corporis pendente iſte motus oſcillatorius eo magis turbabitur, quo maior quouis momento inter has vires reperietur diſſenſus.

§. 11. Ponatur circuli FDHE radius $FG = DG = a$; tota circumferentia $FDHE = 4c$ ita vt c quadrantem circuli denotet: atque elapſum iam ſit tempus per arcum FT repraeſentatum, quod poſito arcu $FT = t$, ſit $= \frac{t}{\sqrt{a}}$: ob homogeneitatem enim conuenit tempus per functionem dimidiae dimenſionis linearum exprimi. Hoc praeterea tempo-

temporis momento exiſtat corpus in loco M, ſitque ſpatium $MC = s$; atque hoc in loco celeritatem habeat verſus dextram tantam, quanta debetur altitudini v. Hoc ergo in loco a priori vi verſus dextram ſollicitabitur, haecque vis, cum proportionalis ſit ſpatio MC, ponatur $= \frac{s}{b}$ exiſtente vi grauitatis $= 1$.

§. 12. Ab altera igitur vi a tempore pendente pariter vrgebitur ad dextram, ſinui PT proportionaliter, ſi quidem ſinus arcus FT ſit affirmatiuus. Ponamus arcus $FT = t$ ſinum $PT = y$, atque vim corpus verſus dextram pellentem eſſe $= \frac{y}{g}$. Cum igitur corpus in M ſollicitetur ab his viribus coniunctim in eandem plagam puta verſus dextram vi $= \frac{s}{b} + \frac{y}{g}$; acceleratio, dum ſpatii elementum Mm abſoluit, innoteſcet. Quoniam vero eſt $Mm = -ds$ prodibit per legem accelerationis $dv = -ds\left(\frac{s}{b} + \frac{y}{g}\right)$, cuius aequationis integratio determinanda erit ex initio motus, ſcilicet ex loco, quem tum corpus occupauit a celeritate, quam eo tempore habuit.

§. 13. Praeter hanc vero aequationem natura circuli ſuppeditat iſtam $dt = \frac{ady}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$ ex qua fit $t = a\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\frac{y}{a}$ denotante A ſin. $\frac{y}{a}$ arcum cuius ſinus eſt $\frac{y}{a}$ in circulo ſemidiametrum habente $= 1$: ſimilique modo inuerſe erit $y = a\,\text{ſin.}\,\mathrm{A}\frac{t}{a}$: denotante pariter ſin. A $\frac{t}{a}$, in circulo cuius radius eſt 1, ſinum arcus $\frac{t}{a}$. Si ergo fiat $t = c$, erit $y = a$ et ſi $t = 2c$ fiet $y = 0$; ac generaliter denotante i numerum quemcunque integrum, ſi fuerit $t = 2ic$ erit $y = 0$; ſin $t = (4i + 1)c$ erit $y = a$; at ſi $t = (4i - 1)c$; fiet $y = -a$. Hinc igitur pro lubitu t loco y, vel y loco t in computum introducetur.

§. 14. Quia vero quatuor habentur incognitae ad problema resoluendum tribus opus erit aequationibus; quarum duae quidem iam sunt exhibitae. Tertia vero aequatio ex consideratione temporis est deducenda. Cum enim totum tempus sit $= \frac{t}{\sqrt{a}}$, erit tempusculum, quo elementum Mm absoluitur $= \frac{dt}{\sqrt{a}}$, idem vero tempus habetur $= -\frac{ds}{\sqrt{v}}$ vnde ista emerget aequatio $\sqrt{v} = \frac{-ds\sqrt{a}}{dt}$. Quamobrem cum habeantur hae quatuor variabiles s, t, y et v, ope trium aequationum $dv = -ds\left(\frac{s}{b} + \frac{y}{g}\right)$; $dt = \frac{a\,dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$ et $\sqrt{v} = \frac{-ds\sqrt{a}}{dt}$, duae quaecunque poterunt eliminari, atque aequatio inter duas reliquas elici.

§. 15. Motus autem oscillatorius commodissime cognoscetur, si ad datum quoduis temporis momentum assignari poterit in spatio A B locus, in quo tum corpus versabitur. Hanc ob rem conueniet variabiles y et v eliminari atque aequationem inter s et t inueniri. Cum igitur per duas posteriores aequationes sit $y = a$ sin. A. $\frac{t}{a}$ et $v = \frac{a\,ds^2}{dt^2}$, si elementum temporis constans ponatur erit $dv = \frac{2\,a\,ds\,dds}{dt^2}$; qui valores in prima aequatione $dv = -ds\left(\frac{s}{b} + \frac{y}{g}\right)$ substituti praebebunt hanc aequationem inter s et t: $\frac{2\,a\,ds\,dds}{dt^2} = -ds\left(\frac{s}{b} + \frac{a}{g}\text{ sin. A}\frac{t}{a}\right)$ seu $2\,a\,dd\,s + \frac{s\,dt^2}{b} + \frac{a\,dt^2}{g}$ sin. A$\frac{t}{a} = 0$: quam ergo bis integrari oportet, vt aequatio finita inter s et t obtineatur.

§. 16. Antequam integrationem huius aequationis suscipiam, quippe quae non parum est difficilis, casus nonnullos singulares perpendisse iuuabit. Ac primum quidem euanescat penitus vis illa a momento temporis pendens, ita vt corpus a sola vi $\frac{s}{b}$ a spatio MC pendente sollicitetur.

tetur. Hoc posito erit $g = \infty$, atque haec habebitur aequatio $2abdds + sdt^2 = 0$, quae per ds multiplicata et integrata dat $abds^2 + \frac{s^2dt^2}{2} = \frac{Cdt^2}{2}$; seu $\frac{-ds\sqrt{a}}{dt} = \sqrt{\frac{C-s^2}{2b}} = +\sqrt{v}$, ex qua aequatione valor constantis C est determinandus ita, vt celeritas initialis congruat cum proposita. Ponamus celeritatem in C deberi altitudini h, fiet $C = 2bh$, atque ista emerget aequatio $\frac{-ds\sqrt{2ab}}{\sqrt{(2bh-ss)}} = dt$.

§. 17. Aequatio haec vltima integrari potest concessa circuli quadratura, fitque $t = C - \sqrt{2ab}$. A sin. $\frac{s}{\sqrt{2bh}}$. Quoniam autem est $\sqrt{v} = \sqrt{\frac{2bh-ss}{2b}}$; motus initium, quo celeritas euanescebat, incidit in punctum A existente CA $= \sqrt{2bh}$: ex quo definitur constans $C = \sqrt{2ab}$ A sin. 1. Quocirca tempus per spatium AM seu t erit $= \sqrt{2ab}$. A cos. $\frac{s}{\sqrt{2bh}}$: quare cum tempus positum sit $= \frac{t}{\sqrt{a}}$, habebitur ipsum tempus $\frac{t}{\sqrt{a}} = \sqrt{2b}$. A cos. $\frac{s}{\sqrt{2bh}}$. In punctum itaque medium C corpus ex A pertinget tempore $= \sqrt{2b}$ A cos. $0 = \frac{\pi\sqrt{2b}}{2} = \frac{\pi\sqrt{b}}{\sqrt{2}}$ denotande π peripheriam circuli cuius diameter $= 1$. Vnde non solum natura harum oscillationum sed etiam isochronismus perspicitur.

§ 18. Ponamus nunc vim istam spatio MC proportionalem euanescere, alteramque a tempore pendentem solam corpus vrgere, cui conditioni satisfiet ponendo $b = \infty$, quo facto ista emerget aequatio $2gdds + dt^2$ sin. A $\frac{t}{a} = 0$. Ad quam integrandam notari iuuabit esse diff. sin. A. $\frac{t}{a} = \frac{dt}{a}$ cos. A $\frac{t}{a}$; atque diff. cos. A $\frac{t}{a} = -\frac{dt}{a}$ sin. A $\frac{t}{a}$. Integratione ergo prima vice instituta prodibit $2gds - adt$ cos. A $\frac{t}{a} = Cdt$: vnde fit $\frac{ds}{dt} = \frac{C + a \text{ cos. A } \frac{t}{a}}{2g}$ atque celeritas

leritas in $M = \sqrt{v} = \frac{-ds\sqrt{a}}{dt} = \frac{-Ca - a^2 \cos. A\frac{t}{a}}{2g\sqrt{a}}$. Ponatur initio temporis celeritas fuiſſe verſus dextram et debita eſſe altitudini h; erit $2g\sqrt{ah} = -Ca - a^2$ ideoque $Ca = -a^2 - 2g\sqrt{ah}$, ex quo fiet poſt tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$ celeritas in eandem plagam $\sqrt{v} = \sqrt{h}\frac{+a\sqrt{a}\sin. v. A\frac{t}{a}}{2g}$.

§. 19. Cum igitur ſinus verſus cuiusque arcus ſemper ſit affirmatiuus, intelligitur celeritatem $\sqrt{v}$ ſemper fore affirmatiuam ſeu verſus dextram eſſe directam, ſi quidem initio temporis celeritas $\sqrt{h}$ in eandem plagam tendat. Hoc ergo caſu corpus per rectam A B in infinitum progredietur, motu quidem inaequabili; elapſis enim temporibus $\frac{0}{\sqrt{a}}$; $\frac{4c}{\sqrt{a}}$; $\frac{8c}{\sqrt{a}}$; $\frac{12c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{4ic}{\sqrt{a}}$ celeritas corporis a ſiniſtra ad dextram erit $= \sqrt{h}$; elapſis autem temporibus $\frac{c}{\sqrt{a}}$; $\frac{3c}{\sqrt{a}}$; $\frac{5c}{\sqrt{a}}$; et generatim $\frac{(2i+1)c}{\sqrt{a}}$ celeritas erit $= \sqrt{h} + \frac{a\sqrt{a}}{2g}$; temporibus denique $\frac{2c}{\sqrt{a}}$; $\frac{6c}{\sqrt{a}}$; $\frac{10c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{2(2i+1)c}{\sqrt{a}}$ celeritas erit maxima et $= \sqrt{h} + \frac{a\sqrt{a}}{g}$. Quamobrem niſi celeritas initialis $\sqrt{h}$ ſit negatiua ſeu verſus ſiniſtram tendat, motus non dabitur reciprocus, nullaeque abſoluentur oſcillationes.

§. 20. Vt igitur motus oriatur oſcillatorius, quo corpus perpetuo in eodem intervallo contineatur, in quo alternis vicibus eundo et redeundo moueatur, neceſſe eſt vt celeritas aeque ſaepe fiat negatiua ac affirmatiua: id quod eueniet, ſi corpus initio verſus ſiniſtram moueatur celeritate $= \frac{a\sqrt{a}}{2g}$: ſeu ponendo $\sqrt{h} = \frac{-a\sqrt{a}}{2g}$. Hac autem hypotheſi facta prodibit ad datum tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$ celeritas verſus

ſus dextram ſeu $\sqrt{v} = \frac{-a\sqrt{a}.\text{coſ. A}\frac{t}{\alpha}}{2g}$. Temporibus igitur $\frac{0}{\sqrt{a}}$; $\frac{4c}{\sqrt{a}}$; $\frac{8c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{4ic}{\sqrt{a}}$, celeritas erit $= \frac{-2\sqrt{a}}{2g}$; temporibus $\frac{c}{\sqrt{a}}$; $\frac{5c}{\sqrt{a}}$; $\frac{6c}{\sqrt{a}}$ et generaliter tempore $\frac{(4i+1)c}{\sqrt{a}}$; itemque temporibus $\frac{3c}{\sqrt{a}}$; $\frac{7c}{\sqrt{a}}$ et generaliter tempore $\frac{(4i+3)c}{\sqrt{a}}$ celeritas erit $= 0$. Temporibus denique $\frac{2c}{\sqrt{a}}$, $\frac{6c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{(4i+2)c}{\sqrt{a}}$ celeritas erit $= \frac{a\sqrt{a}}{2g}$

§. 21. Cum igitur caſu quo oſcillationes regulares abſoluuntur, ſit $\sqrt{v} = \frac{-a\sqrt{a}}{2g}$ coſ. A $\frac{t}{a}$; erit $\frac{ds}{dt} = \frac{a}{2g}$ coſ. $\frac{t}{a}$, ſeu $2gds = adt$ coſ. A $\frac{t}{a}$, cuius integrale eſt $2gs = C + aa$ ſin. A $\frac{t}{a}$. Ponatur conſtans $C = 0$, quo ſpatium s quod a medio puncto C computatur, tam crebro fiat negatiuum quam affirmatiuum, erit $s = \frac{aa}{2g}$ ſin. A $\frac{t}{a}$. Temporibus ergo $\frac{0}{\sqrt{a}}$; $\frac{2c}{\sqrt{a}}$; $\frac{4c}{\sqrt{a}}$ et $\frac{2ic}{\sqrt{a}}$ corpus exiſtet in puncto C. Temporibus vero $\frac{c}{\sqrt{a}}$; $\frac{5c}{\sqrt{a}}$, et generaliter $\frac{(4i+1)c}{\sqrt{a}}$ corpus verſabitur in A, exiſtente $CA = \frac{aa}{2g}$. Temporibus autem $\frac{3c}{\sqrt{a}}$; $\frac{7c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{(4i+3)c}{\sqrt{a}}$ corpus ſitum erit in B, exiſtente $CB = \frac{aa}{2g}$. Tempus denique, quo corpus vel ex A in B vel viciſſim ex B in A pertingit erit $= \frac{2c}{\sqrt{a}} = \pi\sqrt{a}$ denotante $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam.

§. 22 His igitur caſibus euolutis iam ſatis intelligere licet, quomodo in integratione aequationis differentio differentialis $2addds + \frac{sdt^2}{b} + \frac{adt^2}{g}$ ſin. A $\frac{t}{a} = 0$ verſari oporteat; ex qua aequatione deriuandus eſt motus, corpus ſi ab vtraque vi coniunctim cieatur. Ac primo quidem tentemus integrationem eo modo, quo in integrationibus

aequationum differentialium cuiuscunque gradus, in quibus altera variabiles plus vna dimensione non habet, vti soleo. Qui modus, tametsi ad constructionem aequationis propositae manuducet, tamen vehementer implicabitur formulis integralibus, ita vt alia integrandi methodus particularis quidem illi sit anteferenda.

§ 23. Methodus autem mea prior ita se habet: reiectis omnibus terminis, in quibus illa variabilis, quae plures vna dimensiones nusquam habet, non inest, residua aequatio integretur. Ex nostra igitur aequatione emerget ista $2adds + \frac{sdt^2}{b} = 0$, quae, cum sit ea ipsa, quam primo casu habuimus, bis integrata dabit $t = \sqrt{2ab}.\mathrm{A}\cos.\frac{s}{C}$ ex qua oritur $s = C\cos.\mathrm{A}.\frac{t}{\sqrt{2ab}}$. Quo ipsius s valore inuento regula mea porro postulat, vt s producto ex hoc valore in nouam variabilem ponatur aequalis: sit itaque $s = u\cos.\mathrm{A}\frac{t}{\sqrt{2ab}}$, erit $ds = du\cos.\mathrm{A}\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{udt}{\sqrt{2ab}}\sin.\mathrm{A}\frac{t}{\sqrt{2ab}}$; atque $dds = ddu\cos.\mathrm{A}\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{2dtdu}{\sqrt{2ab}}\sin.\mathrm{A}\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{udt^2}{2ab}\cos.\mathrm{A}\frac{t}{\sqrt{2ab}}$.

§. 24. Si iam isti valores in aequatione proposita $2adds + \frac{sdt^2}{b} + \frac{adt^2}{g}\sin.\mathrm{A}\frac{t}{a} = 0$ substituantur, prodibit ista aequatio $2addu\cos.\mathrm{A}\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{4adudt}{\sqrt{2ab}}\sin.\mathrm{A}\frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{adt^2}{g}\sin.\mathrm{A}\frac{t}{a} = 0$. Cum nunc habeatur aequatio, in qua altera variabilis u ipsa non inest, ponatur $du = pdt$, atque aequatio proposita abibit in hanc differentialem primi gradus $2adp\cos.\mathrm{A}\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{4apdt}{\sqrt{2ab}}\sin.\mathrm{A}.\frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{adt}{g}\sin.\mathrm{A}\frac{t}{a} = 0$: quae vlterius transit in hanc $dp - \frac{2pdt}{\sqrt{2ab}}\tang.\mathrm{A}\frac{t}{\sqrt{2ab}} = -\frac{dt}{2g}.\frac{\sin.\mathrm{A}\frac{t}{a}}{\cos.\mathrm{A}\frac{t}{\sqrt{2ab}}}$ quae ad integrationem magis est accommodata.

§. 25.

§. 25. Cum nunc sit $\frac{-dt}{\sqrt{2ab}}$ sin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} =$ diff. cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$, aequatio vltima transformabitur in hanc $dp + \frac{2p \text{ diff. cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}}}{\text{cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}}} = \frac{-dt}{2g} \cdot \frac{\text{sin. A } \frac{t}{a}}{\text{cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}}}$ quae multiplicata per cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$. cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ fit integrabilis, atque integralis aequatio erit haec p cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$. cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} = C - \frac{1}{2g} \int dt$ sin. A $\frac{t}{a}$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ vel si constans in ipso integrali inuolvatur, erit $p = \frac{-1}{2g \text{ cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}}}$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} \int dt$ sin. A $\frac{t}{a}$. cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ Cum igitur per t detur p, ex eo reperietur $u = \int p\, dt$ ac denique $s =$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} \cdot \int p\, dt$.

§. 26. Quantumuis autem non solum prima integratio, sed etiam altera difficiles videantur, tamen vtraque re bene perpensa satis commode absolui potest. Transmutatione enim integralium fit $\int dt$ sin. A $\frac{t}{a}$ cos. A. $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ $= \sqrt{2ab}$ sin. A $\frac{t}{a}$ sin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{\sqrt{2ab}}{a} \cdot \int dt$ cos. A $\frac{t}{a}$. sin $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ $= \sqrt{2ab}$ sin. A $\frac{t}{a}$ sin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} + 2b$ cos. A $\frac{t}{a}$. cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ $+ \frac{2b}{a} \int dt$ sin. A $\frac{t}{a}$. cos. A. $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$, quae posterior formula integralis cum propositae sit similis, habebitur $\int dt$ sin. A $\frac{t}{a}$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} = \frac{a\sqrt{2ab} \text{. sin. A } \frac{t}{a} \text{. sin. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}} + 2ab \text{ cos. A } \frac{t}{a} \text{. cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}}}{a - 2b}$

$+ C$ vnde fiet $p = \frac{C}{\text{cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}} \text{ . cos. A. } \frac{t}{\sqrt{2ab}}} -$

$$\frac{a\sqrt{2ab} \text{. sin. A. } \frac{t}{a} \text{ . } \int \text{A . } \frac{t}{\sqrt{2ab}} - 2ab \text{ cos. A } \frac{t}{a} \text{ cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}}}{2g(a-2b) \text{ cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}} \text{ . cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}}}.$$

ex qua aequatione valor ipsius p per quantitates finitas habetur expressus.

§. 27. Quoniam porro est $u = \int p\,dt$, multiplicetur valor ipsius p inuentus per dt, quo facto singula membra deprehendentur integrabilia; prodibit autem $u = D + \frac{C \text{ sin. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}}}{\text{cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}}} - \frac{a^2 b \text{ sin. A } \frac{t}{a}}{g(a-2b) \text{ cos. } \frac{t}{\sqrt{2ab}}}$. Quare cum sit $s = u$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ orietur tandem ista aequatio $s = D \text{ cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}} + C \text{ sin. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2 b \text{ sin. A } \frac{t}{a}}{g(a-2b)}$, cuius quantitates constantes ex circumstantiis casus propositi debent definiri. Quod, quo facilius fieri queat, celeritas $\sqrt{v}$ est definienda, quae cum sit $= \frac{-ds\sqrt{a}}{dt}$, erit $\sqrt{v} = \frac{+D}{\sqrt{2b}} \text{ sin. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{C}{\sqrt{2b}} \text{ cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{ab\sqrt{a} \cdot \text{cos. } \frac{t}{a}}{g(a-2b)}$. Ex his ergo aequationibus ad datum quoduis tempus cum locus corporis in recta AB tum etiam celeritas, qua mouebitur, poterit determinari.

§. 28. Casus quo $2b = a$ seu $\sqrt{2ab} = a$, peculiari indiget integratione, neque praecedens ad hunc casum patet. Erit enim $\int dt \text{ sin. A } \frac{t}{a} \cdot \text{cos. A } \frac{t}{a} = \frac{1}{2} a \text{ sin. A } \frac{t}{a} \cdot \text{ sin. A } \frac{t}{a} + C$. ideoque $p = \frac{C}{\text{cos. A } \frac{t}{a} \cdot \text{cos. A } \frac{t}{a}} - \frac{a \text{ sin. A } \cdot \frac{t}{a} \text{ sin. A } \frac{t}{a}}{4g \text{ cos. A } \frac{t}{a} \cdot \text{cos. A } \frac{t}{a}}$.

Vnde fit $\int p\,dt = u = \frac{C \text{ sin. A } \frac{t}{a}}{\text{cos. A } \frac{t}{a}} - \frac{a^2 \text{ sin. A } \cdot \frac{t}{a}}{4g \text{ cos. A } \frac{t}{a}} + \frac{at}{4g} + D$.

Consequenter habebitur $s = D \text{ cos. A } \frac{t}{a} + C \text{ sin. A. } \frac{t}{a} + \frac{at}{4g}$ cos. A $\frac{t}{a}$. mutata constante C. Hinc itaque oritur $\sqrt{v} = \frac{-ds\sqrt{a}}{dt} = \frac{D}{\sqrt{a}} \text{ sin. A } \frac{t}{a} - \frac{C}{\sqrt{a}} \text{ cos. A } \frac{t}{a} - \frac{a\sqrt{a}}{4g} \text{ cos. A } \frac{t}{a} + \frac{t\sqrt{a}}{4g} \text{ sin. A } \frac{t}{a}$.

A $\frac{t}{a}$. Ex quo istae oscillationes post tempus infinitum in infinitum excrescent ac per spatium infinite magnum excurrent.

§. 29. Cum istae integrationes penitus sint insolitae, ac propterea non cuiuis diiudicatu faciles, aliam methodum particularem exponam, cuius ope eaedem aequationes integrales erui queant. Cum aequatio proposita esset $2adds + \frac{sdt^2}{b} + \frac{adt^2}{g}$ sin. A $\frac{t}{a} = 0$, ea sinum arcus $\frac{t}{a}$ per seriem exprimendo transibit in hanc $2adds + \frac{sdt^2}{b} + \frac{dt^2}{g}$ $\left(t - \frac{t^3}{1.2.3a^2} + \frac{t^5}{1.2.3.4.5a^4} - \frac{t^7}{1.2\ldots7a^6} + \text{etc.}\right) = 0$. Assumatur iam pro s iste valor indefinitus, $s = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 + \varepsilon t^4 + \zeta t^5 + \eta t^6 +$ etc. erit substitutione facta vt sequitur:

$$\frac{2adds}{at^2} = 2.1.2\gamma a + 2.2.3\delta at + 2.3.4\varepsilon at^2 + 2.4.5\zeta at^3 + 2.5.6\eta at^4 + \text{etc.}$$

$$\frac{s}{b} = \frac{\alpha}{b} + \frac{\beta t}{b} + \frac{\gamma t^2}{b} + \frac{\delta t^3}{b} + \frac{\varepsilon t^4}{b} + \text{etc.}$$

$$\frac{a}{g}\text{ sin. A }\frac{t}{a} = \frac{t}{g} - \frac{t^3}{1.2.3a^2g} + \text{etc.}$$

§. 30. Si nunc harum trium serierum termini singuli homogenei ponantur $= 0$, coefficientes assumti seriei, cui s aequale est positum, ita definientur vt sit:

$$\gamma = \frac{-\alpha}{1.2.2ab}; \quad \delta = \frac{-b-\beta g}{2.3g.2ab}; \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{1.2.3.4.2^2a^2b^2}$$

$$\zeta = \frac{2b + a + \frac{\beta ag}{b}}{1.2.3.4.5.2^2.a^3gb}; \quad \eta = \frac{-\alpha}{1.2.3.4.5.6\,2^3.a^3b^3}$$

$$\theta = \frac{-b - \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4b} - \frac{\beta a^2g}{4bb}}{1.2.3\ldots\ldots7.2a^5bg}. \quad 2 = \frac{\alpha}{1.2\ldots\ldots8.2^4a^4b^4}$$

$$\varkappa = \frac{b + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4b} + \frac{a^3}{8bb} + \frac{\beta a^3g}{8b^3}}{1.2.3\ldots\ldots9.2a^7bg}; \quad \lambda = \frac{-\alpha}{1.2\ldots\ldots10.2^5a^5b^5}$$

$$\mu = \frac{-b - \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4b} - \frac{a^3}{8bb} - \frac{a^4}{16b^3} - \frac{\beta a^4g}{16b^4}}{1.2.3\ldots\ldots11.2a^9bg}; \quad \text{etc.}$$

vnde reliquorum coefficientium valores cognosci poterunt.

§. 31 Coefficientes quidem poteſtatum parium ipſius t ſatis regulariter progrediuntur, at poteſtatum imparium exponentes ad has formas rediguntur.

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\,; \qquad \delta = \frac{-a+3b}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2ag(a-2b)} - \frac{\mathfrak{E}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2ab}$$

$$\zeta = \frac{a^2-4b^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 4a^3bg(a-2b)} + \frac{\mathfrak{E}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 4a^2b^2}$$

$$\theta = \frac{-a^3+5b^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 7\cdot 8a^5b^2g(a-2b)} - \frac{\mathfrak{E}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 7\cdot 8a^3b^3}$$

$$\varkappa = \frac{a^4-16b^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 9\cdot 16a^7b^3g(a-2b)} + \frac{\mathfrak{E}}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot 9\cdot 16a^4b^4}$$

etc.

Quare ſi ſeries $\alpha + \mathfrak{E}t + \gamma t^2 +$ etc. in ſeries ſimplices regulares reſoluatur, prodibit $s =$

$$\alpha\left(1 - \frac{t^2}{1\cdot 2\cdot 2ab} + \frac{t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4a^2b^2} - \frac{t\mathfrak{E}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 6\cdot 8a^3b^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+\mathfrak{E}\sqrt{2ab}\left(\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2ab\sqrt{2ab}} + \frac{t^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 5\cdot 4a^2b^2\sqrt{2ab}} - \text{etc.}\right)$$
$$+\frac{ab\sqrt{2ab}}{g(a-2b)}\left(\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2ab\sqrt{2ab}} + \frac{t^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 4a^2b^2\sqrt{2ab}} - \text{etc.}\right)$$
$$-\frac{a^2b}{g(a-2b)}\left(\frac{t}{a} - \frac{t^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot a^3} + \frac{t^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot a^5} - \text{etc.}\right)$$

quae ſeries cum ſingulae ſint ſummabiles, obtinebitur loco s ſequens valor finitus, $s = \alpha$ coſ. A. $\frac{t}{\sqrt{2ab}} + \mathfrak{E}\sqrt{2ab}$. ſin. A. $\frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{ab\sqrt{2ab}}{g(a-2b)}$ ſin. A. $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2b}{g(a-2b)}$ ſin. A. $\frac{t}{a}$. quae aequatio ſi conſtantes α et $\mathfrak{E}$ aliquantillum mutentur plane congruit cum ea, quae ſupra §. 27. ope integrationis eſt eruta.

§. 32. Retineamus aequationes ſupra inuentas $s =$ D coſ. A. $\frac{t}{\sqrt{2ab}} +$ C ſin. A. $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2b}{g(a-2b)}$ ſin. A $\frac{t}{a}$ et $\sqrt{v} = \frac{D}{\sqrt{2b}}$ ſin. A. $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{C}{\sqrt{2b}}$ coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{ab\sqrt{a}}{g(a-2b)}$ coſ. A $\frac{t}{a}$ in quibus caſus ambo ſpeciales ſupra tractati egregie continentur. Ponamus nunc autem initio quo $t = 0$, corpus quieuiſſe in C, ita vt tum fuerit tam $s = 0$ quam $\sqrt{v} = 0$. Fiet itaque $D = 0$; et $C = \frac{ab\sqrt{2ab}}{g(a-2b)}$, quibus valoribus

loribus ſubſtitutis erit $s = \frac{a^2\sqrt{2ab}}{g(a-2b)}$ ſin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2 b}{g(a-2b)}$ ſin A $\frac{t}{a}$ atque $\sqrt{v} = \frac{ab\sqrt{2}}{g(a-2b)}$ (coſ. A $\frac{t}{a}$ — coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$), ex quibus aequationibus ad datum tempus tum locus corporis, tum eius celeritas innoteſcent.

§. 33. Vt naturam harum oſcillationum penitius inſpiciamus, varias relationes quantitatum a et b contemplemur, quibus arcus $\frac{t}{a}$ et $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ commenſurabiles reddantur. Ac primo quidem incipiamus a maximo ipſius b valore, quo caſu vis a ſpatio s pendens euaneſcit. Cum igitur hoc caſu ſit ſin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} = \frac{t}{\sqrt{2ab}}$, fiet $s = \frac{-at}{2g} + \frac{a^2}{2g}$ ſin. A $\frac{t}{a}$; atque $\sqrt{v} = \frac{+a\sqrt{a}}{2g} \int$ verſ. A $\frac{t}{a}$. Ergo

ſi tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit ſpatium s	ac velocitas $\sqrt{v}$
$\frac{0c}{\sqrt{a}}$	0	0
$\frac{c}{\sqrt{a}}$	$\frac{-ac+aa}{2g}$	$\frac{a\sqrt{a}}{2g}$
$\frac{2c}{\sqrt{a}}$	$\frac{-2ac}{2g}$	$\frac{2a\sqrt{a}}{2g}$
$\frac{3c}{\sqrt{a}}$	$\frac{-3ac-aa}{2g}$	$\frac{a\sqrt{a}}{2g}$
$\frac{4c}{\sqrt{a}}$	$\frac{-4ac}{2g}$	0
$\frac{5c}{\sqrt{a}}$	$\frac{-5ac+aa}{2g}$	$\frac{a\sqrt{a}}{2g}$.

§. 34. Hoc igitur caſu, quo cum b ponimus infinitum, tum corpus initio in C quieuiſſe aſſumimus, corpus ex C verſus dextram CB continuo vltra progrediatur, motu alternatim accelerato et retardato. Quanquam autem hoc caſu oſcillationes non contingunt, tamen ab eo examen ordiri viſum eſt, vt nexus inter motus hoc modo oriundos, dum b pedetentim minorem valorem conſequitur, clarius pateat. Ponamus $b = \frac{nna}{2}$ vt ſit $\sqrt{2ab} = na$; vnde fiet $s = \frac{n^2 a^2}{2g(nn-1)}$ (ſin. A $\frac{t}{a} - n$ ſin. A $\frac{t}{na}$) atque $\sqrt{v} = \frac{n^2 a\sqrt{a}}{2g(nn-1)}$ (coſ. A $\frac{t}{na}$ — coſ. A . $\frac{t}{a}$): in quibus ex-

expreſſionibus arcuum $\frac{t}{a}$ et $\frac{t}{na}$ ſinus et coſinus inter ſe comparari poterunt, quoties n fuerit numerus rationalis.

§. 35. A valore ipſius n, qui priore caſu erat infinitus, deſcendamus ad valores continuo minores, quoad peruenietur ad caſum $n = 1$; quo per peculiarem aequationem fit $s = \frac{-a^2}{4g}$ ſin. A $\frac{t}{a} + \frac{at}{4g}$ coſ. A $\frac{t}{a}$; $ac\sqrt{v} = \frac{t\sqrt{a}}{4g}$ ſin. A $\frac{t}{a}$, quo caſu oſcillationes tandem in infinitum excreſcunt: motus autem ita ſe habebit.

Si tempus $=$	erit ſpatium s	ac celeritas $\sqrt{v}$
$\frac{t}{\sqrt{a}}$		
$\frac{c}{\sqrt{a}}$	0	0
$\frac{2c}{\sqrt{a}}$	$-\frac{aa}{4g}$	$+\frac{c\sqrt{a}}{4g}$
$\frac{3c}{\sqrt{a}}$	$-\frac{2ac}{4g}$	0
$\frac{4c}{\sqrt{a}}$	$+\frac{a^2}{4g}$	$-\frac{3c\sqrt{a}}{4g}$
$\frac{5c}{\sqrt{a}}$	$+\frac{ac}{4g}$	0
	$-\frac{a^2}{4g}$	$+\frac{5c\sqrt{a}}{4g}$

§. 36. Euolutis igitur caſibus, quaſi extremis, ſcilicet $n = \infty$ et $n = 1$. videamus quantum caſus intermedii, quibus pro n ſucceſſiue numeros integros ponemus, ab extremis diſcrepent. Ponamus itaque $n = 2$, ſeu $b = 2a$: erit $s = \frac{2a^2}{3g}$ (ſin. A $\frac{t}{a} - 2$ ſin. A $\frac{t}{2a}$) atque $\sqrt{v} = \frac{2a\sqrt{a}}{3g}$ (coſ. A $\frac{t}{2a} -$ coſ. A. $\frac{t}{a}$). Quoties igitur fuerit $t = 4ic$, erit $s = 0$; at celeritas euaneſcet, quoties ſit $t = \frac{sic}{3}$, deſignante i numerum integrum quemcunque. Motus ergo ſe habebit, vt ex hac tabella perſpicietur.

Si

Si tempus $= \frac{t}{\sqrt{a}}$	erit ſpatium s	ac celeritas $\sqrt{v}$
et $t = \frac{0c}{3}$	0	0
$t = \frac{4c}{3}$	$\frac{-2a^2}{3g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	$\frac{+4a\sqrt{a}}{3g}$ coſ. A. $\frac{2c}{3a}$
$t = \frac{8c}{3}$	$\frac{-6a^2}{3g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	0
$t = \frac{12c}{3}$	0	$\frac{-4a\sqrt{a}}{3g}$.
$t = \frac{16c}{3}$	$\frac{+6a^2}{3g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	0
$t = \frac{20c}{3}$	$\frac{+2a^2}{3g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	$\frac{+4a\sqrt{a}}{3g}$ coſ. A $\frac{2c}{3a}$
$t = \frac{24c}{3}$	0	0

§. 37. Eaedem igitur motus reuolutiones redeunt elapſo tempore $= \frac{8c}{\sqrt{a}}$, ſeu bis percurſa peripheria circuli; intereaque tres oſcillationes abſoluuntur, quarum media fit per ſpatium duplo maius quam ceterae. Simili modo progrediendo patebit, ſi ponatur $n = 3$, easdem periodos fore redituras poſt tempus $\frac{12c}{\sqrt{a}}$, ſeu peripheria circuli ter confecta: atque ita porro, donec ſi $n = \infty$, periodorum nulla fit reuolutio, atque corpus in eandem plagam perpetuo progredi pergit. Namque ſi $n = 3$, celeritas $\sqrt{v}$ toties euaneſcit, quoties euenit $t = 3ic$: ac ſi $n = 4$, celeritas corporis euaneſcet partim caſibus quibus $t = \frac{16ic}{3}$ partim quibus eſt $t = \frac{16ic}{5}$. Poſito ergo $t = \frac{16ic}{15}$, ſi loco i ſucceſſiue omnes numeri integri ſubſtituantur, celeritas corporis deprehendetur nulla caſibus quibus i eſt,

0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25 etc.

different: 3, 2, 1, 3, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 3, 1,

poſt tempus adeo $16c$ eadem periodus repetetur, ſeptiesque vna periodo celeritas corporis erit nulla, totidemque vna periodus continebit inaequales oſcillationes: ſi quidem

vna oſcillatio ſumatur inter duos terminos, quibus celeritas eſt $= 0$.

§. 38. Magis fient hae oſcillationes regulares, ſi fuerit $n < 1$ atque $\frac{1}{n}$ numerus integer. Ponamus itaque eſſe $b = \frac{a}{2n^2}$ vt ſit $\sqrt{2ab} = \frac{a}{n}$, eritque $s = \frac{a^2}{2g(nn-1)}$ ($\frac{1}{n}$ ſin. A. $\frac{nt}{a}$ – ſin A $\frac{t}{a}$) atque $\sqrt{v} = \frac{a\sqrt{a}}{2g(n^2-1)}$ (coſ. A $\frac{t}{a}$ – coſ. A. $\frac{nt}{a}$). Toties igitur celeritas corporis euaneſcet, quoties fuerit $t = \frac{4ic}{n\pm 1}$. In idem autem punctum C quo $s = 0$ corpus non recidet, niſi ſit $t = 2ic$. At ſi ſumatur $t = \frac{4ic}{n-1}$ fiet $s = \frac{-a^2}{2gn(n+1)}$ ſin. A $\frac{t}{a}$, ſin autem capiatur $t = \frac{4ic}{n+1}$, fiet $s = \frac{-a^2}{2gn(n-1)}$ ſin. A $\frac{t}{a}$. Ex his ergo formulis ponendo ſucceſſiue loco n numeros 2, 3, 4, 5, etc. natae ſunt ſequentes tabellae, ex quibus motus oſcillatorius corporis duplici vi ſollicitati cognoſci poterit.

Sit $n = 2$ ſeu $b = \frac{a}{8}$

Ad tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit ſpatium s	et celeritas $\sqrt{v}$
ſi $t = 0\,c$	0	0
ſi $t = c$	$-\frac{aa}{6g}$	$+\frac{a\sqrt{a}}{6g}$
ſi $t = \frac{4}{3}c$	$-\frac{aa}{4g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	0
ſi $t = 2c$	0	$-\frac{a\sqrt{a}}{3g}$
ſi $t = \frac{8}{3}c$	$+\frac{aa}{4g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	0
ſi $t = 3c$	$+\frac{aa}{6g}$	$+\frac{a\sqrt{a}}{6g}$
ſi $t = 4c$	0	0

Sit

Sit $n = 3$ seu $b = \frac{a}{18}$.

Ad tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit ſpatium s	et celeritas $\sqrt{v}$
ſi $t = 0\ c$	0	0
ſi $t = c$	$-\frac{aa}{12g}$	0
ſi $t = 2\ c$	0	0
ſi $t = 3\ c$	$+\frac{aa}{12g}$	0
ſi $t = 4\ c$	0	0

Sit $n = 4$, ſeu $b = \frac{a}{32}$

Ad tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit ſpatium s	et celeritas $\sqrt{v}$
ſi $t = 0$	0	0
ſi $t = \frac{4}{5}\ c$	$-\frac{a^2}{24g}$ ſin. A $\frac{4c}{5g}$	0
ſi $t = c$	$-\frac{a^2}{30g}$	$-\frac{a\sqrt{a}}{30g}$
ſi $t = \frac{4}{3}\ c$	$-\frac{a^2}{40g}$ ſin. A $\frac{2c}{3g}$	0
ſi $t = \frac{8}{5}\ c$	$-\frac{a^2}{24g}$ ſin. A . $\frac{2c}{5g}$	0
ſi $t = 2\ c$	0	$-\frac{a\sqrt{a}}{15g}$
ſi $t = \frac{12}{5}\ c$	$+\frac{a^2}{24g}$ ſin. A . $\frac{2c}{5g}$	0
ſi $t = \frac{8}{3}\ c$	$+\frac{a^2}{40g}$ ſin. A . $\frac{2c}{3g}$	0
ſi $t = 3\ c$	$+\frac{a^2}{30g}$	$-\frac{a\sqrt{a}}{30g}$
ſi $t = \frac{16}{5}\ c$	$+\frac{a^2}{24g}$ ſin. A $\frac{4c}{5g}$	0
ſi $t = 4\ c$	0	0

Sit $n = 5$ ſeu $b = \frac{a}{50}$.

Ad tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit ſpatium s	et celeritas $\sqrt{v}$
ſi $t = 0$	0	0
ſi $t = \frac{2}{3}\ c$	$-\frac{aa}{40g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	0
ſi $t = c$	$-\frac{aa}{60g}$	0
ſi $t = \frac{4}{3}\ c$	$-\frac{aa}{40g}$ ſin. A . $\frac{2c}{3a}$	0
ſi $t = 2\ c$	0	0

si $t = \frac{8}{3} c$	$+ \frac{aa}{40g}$ sin. A $\frac{2c}{3a}$	0
si $t = 3c$	$+ \frac{aa}{60g}$	0
si $t = \frac{10}{3} c$	$+ \frac{aa}{40g}$ sin. A $\frac{2c}{3a}$	0
si $t = 4c$	0	0

§. 39. Inter hos casus omnes maxime notari meretur is, quo erat $2b = a$: eo quod spatium, in quo continetur quaeque oscillatio continuo augetur, ac tandem in infinitum excrescit: qui effectus eo magis est admirandus, quod huic soli casui est proprius, atque a viribus finitis oriatur. Ex hoc igitur casu, si quidem commode ad praxin reuocari posset, inuentio perpetui mobilis deriuari posse videtur: pendulum enim in cycloide oscillans iam ita est comparatum, vt impulsiones a grauitate oriundae versus situm aequilibrii, sint vt spatia percurrenda. Quare si tali pendulo istiusmodi automaton applicetur, quod alteram vim a tempore pendentem producat, vis oscillationes tantopere augentis portio tum ad automati intensionem renouandam, quoties opus est, tum ad resistentiam et frictionem superandam impendi posset, ita vt si oscillationes non increscant, tamen datae quantitatis perpetuo conseruentur.

§. 40. Si nunc in causam inquiramus, propter quam solus iste casus oscillationes continuo adaugeat, aliam non deprehendimus, nisi quod hoc casu tempus vnius oscillationis integrae ex vno itu vnoque reditu compositae, quae producitur a sola actione vis a spatio s pendente, aequale sit tempori, quod per totam circuli FDHE peripheriam exprimitur. Si enim corpus a sola vi $\frac{s}{b}$ sollicitetur, tempus vnius oscillationis integrae ex itu et reditu con-

conſtantis erit $= 2\pi\sqrt{2b} = \frac{4c}{a}\sqrt{2b}$ ob $1:\pi = a:2c$. Tempus autem per totam circuli peripheriam expreſſum eſt $= \frac{4c}{\sqrt{i}}$; quare vt haec tempora ſint aequalia, neceſſe eſt ſit $2b = a$. qui eſt ipſe caſus memoratus.

§. 41. Hinc etiam natura diſcriminis, quod inter oſcillationes reliquorum caſuum obſeruauimus, penitius inſpici poteſt. Pendet enim hoc diſcrimen partim a quantitate litterae g, qua quidem nulla alia diuerſitas oſcillationibus inducitur, niſi quod per eo maiora ſpatia fiant, quo minorem valorem habeat g, ceterum autem tam ratione motus quam temporis ſui maneant ſimiles. Partim autem differentia oſcillationum, qua indoles ipſarum maxime immutatur, ſita eſt in diuerſo habitu literarum a et b, quo ipſo ratio remporum oſcillationum ab ambabus viribus ſeorſim oriundarum definitur. Eſt enim tempus vnius oſcillationis ſola agente vi $\frac{s}{b}$ ad tempus vnius oſcillationis a ſola vi $\frac{y}{g}$ ortae vt $\sqrt{2b}$ ad $\sqrt{a}$. Ex quo intelligitur, quo magis haec ratio a commenſurabilitate recedat, eo magis oſcillationes futuras eſſe irregulares.

EXPLICATIO PHAENOMENORVM QVAE A MOTV LVCIS SVCCESSIVO ORIVNTVR.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Si radii lucis in inſtanti per quantumuis magna intervalla propagarentur, tum non ſolum quaeque obiecta eo ipſo momento, quo lucem emittere incipiant, apparerent, ſed etiam in eadem directione, quam radius viſivus tenet, cernerentur, neque in hac obſeruatione motus ſiue obiecti ſiue ipſius ſpectatoris vllum diſcrimen produceret. Aliter res ſe habet, ſi radii lucis non in inſtanti propagantur, ſed ad datum ſpatium abſoluendum dato tempore opus habent. Primo enim cum obiectum ante occultum ſubito lucem emittere incipiat, id eo ipſo momento a ſpectatore non cernetur, ſed eo tardius, quo maior fuerit diſtantia inter obiectum et ſpectatorem. Deinde etiam, niſi tam obiectum quam ſpectator quieſcant, diſcrimen deprehendetur in directione, in qua obiectum apparebit, inaequalitasque intercedet inter directionem, in qua obiectum eodem momento conſpiceretur ab obſeruatore, ſi radii in inſtanti propagarentur, eamque directionem, in qua actu conſpicitur.

§. 2. Lucem autem non in inſtanti propagari euincunt obſeruationes ecclipſium ſatellitum Iouis; quibus conſtat radios

dios lucis circiter 8. minuta prima impendere ad ſpatium, quod inter ſolem et terram interiacet percurrendum. Quare ſi parallaxin ſolis horizontalem aſſummamus 10. minutorum ſecundorum, reperietur diſtantia ſolis a terra = 20618 ſemidiametrorum terreſtrium; ac lux ad tantum ſpatium abſoluendum impendet 8. minuta prima. Ex quo definiri poteſt lucis celeritas, quippe quae tanta erit, qua vno minuto ſecundo abſoluet ſpatium 43. ſemidiametrorum terreſtrium. Quodſi ergo celeritates quasuis metiamur, vti conſtanter faciemus, ſpatiis vno minuto ſecundo percurſis, erit nobis lucis celeritas per 43. exprimenda, dum vnitas ſemidiametrum terrae indicat. Ponamus autem ne nimium his obſeruationibus fidamus numerum indefinitum *c* pro lucis celeritate; cenſeamusque lucem tempore vnius minuti ſecundi *c* ſemidiametros terrae percurrere.

§. 3. Vt nunc omnia phaenomena, quae ex ſucceſſiva lucis propagatione conſequuntur, eo diſtinctius euoluamus atque ob oculos ponamus, quatuor caſus ſeorſim examini ſubieciemus. Primo ſcilicet tam obiectum quam ſpectatorem in perpetua quiete collocabimus. Secundo obiecto quidem motum tribuemus, ſpectatorem vero in quiete relinquemus. Tertio eos caſus perpendemus quibus obiectum quieſcit, ſpectator vero ſuum ſitum continuo mutat. Quarto denique vtrique cum obiecto tum ſpectatori motum adiudicabimus. Atque vt noſtra inueſtigatio latius pateat, motum, quem vel in obiecto vel ſpectatore vel in vtroque conſtituemus, tum rectilineum faciemus tum etiam curuilineum. Quod inſtitutum ſi generatim pertractaverimus, tum demum ad phaenomena corporum coeleſtium progrediemur, atque anomalias, quae ex

motu

motu lucis ſucceſſiuo obſeruationibus aſtronomicis inducuntur, diligenter enumerabimus.

Tab. II. fig. 1. §. 4. Quieſcat igitur obiectum lucidum in O ſitque ſpectator in A pariter in quiete conſtitutus. Ponatur diſtantia obiecti ab obſeruatore ſeu recta $OA = u$ ſemidiametrorum terrae, erit tempus quo radius ex obiecto emiſſus ad ſpectatorem pertingit $= \frac{u}{c}$ minutorum ſecundorum. Quodſi ergo obiectum ante fuerit obſcuratum, nunc autem ſubito radios emittere incipiat, non hoc ipſo momento a ſpectatore cernetur ſed demum poſt $\frac{u}{c}$ minuta ſecunda. Atque eo tardius apparere incipiet, quo longius fuerit remotum. Si igitur praeterea aliud adſit obiectum in o quod ſimul lucere incipiat, cuius a ſpectatore diſtantia Ao ſit $= v$ ſemid. terrae, id quidem prius cernetur, ſi diſtantia v minor fuerit quam u; ac poſtquam obiectum o apparuit, alterum obiectum O demum elapſis $\frac{u-v}{c}$ minutis ſecundis fiet conſpicuum.

§. 5. Quam primum autem obiectum O a ſpectatore conſpicietur, id in directione OA apparebit prorſus ac ſi radius lucis OA in inſtanti ab O ad A proceſſiſſet: neque igitur quantitas diſtantiae OA vllum diſcrimen in ſitum obiecti obſeruatum inferet. Cum enim radius lucis OA occulum ſpectatoris in quiete poſitum feriat in directione OA, obſeruator obiectum in eadem directione ſitum iudicabit. Quare cum res eodem modo ſe habeat in altero obiecto o, eadem diſtantia ſeu angulus OAo inter ambo obiecta obſeruabitur, ſiue lux propagetur in inſtanti ſiue quantumuis lente, neque diuerſitas diſtantiarum horum amborum obiectorum vllum diſcrimem in ſitu obſeruato producet. Quotcunque igitur fuerint obiecta

lucida,

lucida, dummodo ſingula quieſcant, ea a ſpectatore pariter quieſcente perinde ratione ſitus obſeruabuntur, ac ſi propagatio lucis eſſet inſtantanea.

§. 6. Accedamus nunc ad caſum ſecundum, quo ſpectator iterum ponitur quieſcens in A, obiecto autem O motus tribuitur in directione O V quacunque cum celeritate. Sit diſtantia obiecti in O conſtituti a ſpectatore O A $= u$ ſemid. terrae, eiusque celeritas ſecundum directionem rectilineam O V tanta, qua vno minuto ſecundo abſoluat s ſemidiametros terrae; ſitque anguli AOV ſinus $= m$, coſinus $= \mu$ exiſtente ſinu toto $= 1$. Primum igitur manifeſtum eſt, ſi obiectum O ſubito radios emittere incipiat, ſpectatorem obiectum non eo ipſo momento viſurum eſſe, ſed aliquanto tardius, ſcilicet poſt $\frac{u}{c}$ minuta ſecunda: atque hoc ipſo momento obiectum conſpectum iri in directione A O, etiamſi hoc tempore obiectum non amplius in hoc loco O verſetur. Quocirca retardatio apparitionis eodem modo eſt comparata, ſiue obiectum quiescat ſiue ſecus, haecque retardatio a ſola diſtantia obiecti a ſpectatore, ſeu ſpatio a radio emetiendo donec in oculum incurrat, pendet. Tab. II. fig. 2.

§. 7. Dubium hoc loco oriri poteſt, quod, cum obiectum in motu poſitum aſſumatur, inde tamen radios aeque emanare ſtatuamus, ac ſi obiectum quieſceret: lapis enim proiectus allegari poteſt, qui a motu hominis proiicientis cum ratione directionis tum etiam celeritatis afficitur. At obiecti lucidi ratio longe aliter eſt comparata; primo enim cum obiectum quaqua verſus radios emittat, ab eo vis obiecti producetur, qui recta ab obiecto in oculum eiicitur, vnde ſiue obiectum quiescat ſiue moueatur

radii id repreſentantis eadem erit directio. Deinde nullo modo ſtatui poteſt, celeritatem lucis a motu obiecti lucidi affici, cum enim veri ſimile ſit, radios lucis non actu ab obiecto ad nos proiici, ſed per aetherem vndularum inſtar propagari, celeritas lucis a ſola aetheris elaſticitate pendebit, neque motus obiecti ipſius vllo modo particeps erit. Quocirca nullum dubium ſupereſſe poteſt, quin emiſſio radiorum cum ratione directionis tum celeritatis eodem fiat modo ex obiecto vtcunque moto ac ex quieſcente.

§. 8. Quamuis autem obiecti motus in emiſione radiorum nil turbet, tamen directio, in qua conſpicitur a ſpectatore, mutatur. Ponamus enim ex obiecto, dum in O eſt, emanare radium OA in oculum ſpectatoris, qui demum poſt $\frac{u}{c}$ minuta ſecunda eo pertinget. Interea autem ipſum obiectum vi motus, quo vno minuto ſecundo ſpatium s ſemidiametrorum terrae abſoluit proceſſit in V, ita vt ſit ſpatium $OV = \frac{us}{c}$ ſemid. terrae. Ex quo ſpectator obiectum in O conſpiciet, cum id iam revera eſt in V; hocque in loco eo ipſo momento videret, ſi lux in inſtanti propagaretur. Vocabimus igitur directionem AV in qua obiectum tempore obſeruationis actu deprehenditur, locum obiecti verum, directionem vero AO, in qua conſpicitur, locum apparentem: vnde locus verus a loco apparente diſcrepabit angulo O A V, qui angulus in eodem plano erit conſtitutus, in quo ſpectator et via obiecti verſantur.

§. 9. Vt quantitas huius diſcrepantiae ſeu anguli OA V innoteſcat, conſideremus triangulum AOV in quo datur relatio laterum AO et OV, cum ſit $AO : OV = u : \frac{us}{c}$

$\frac{\mu s}{c} = c : s$; ſiue erit AO ad OV vt celeritas lucis ad celeritatem obiecti; datur autem in eodem triangulo praeterea angulus AOV cuius ſinus eſt $= m$ et coſinus $= \mu$. Quare poſitis quantitatibus proportionalibus c et s loco laterum OA et OV, ſi ex A in OV ducatur perpendicularis AP, erit AP $= mc$ et OP $= \mu c$, vnde fit VP $= \mu c - s$. Anguli igitur OAP tangens erit $= \frac{\mu}{m}$, et anguli VAP tangens $= \frac{\mu c - s}{mc}$; ex quibus emergit horum angulorum differentiae OAV tangens $= \frac{ms}{c - \mu s}$ propter $m^2 + \mu^2 = 1$. Ad locum igitur obſeruatum AO obiecti verſus eam regionem, in quam obiectum promouetur, addi debet angulus, cuius tangens eſt $\frac{ms}{c - \mu s}$ vt prodeat locus obiecti verus pro momento obſeruationis. Vnde patet iſtam aequationem non a diſtantia obiecti a ſpectatore pendere, ſed cum celeritate lucis tum celeritate obiecti tum etiam angulo O determinari.

§. 10. Si via OV in qua obiectum mouetur incidat in directionem AO vel euaneſcente angulo AOV vel ad duos rectos vsque excreſcente, erit $m = 0$ quare hoc caſu aequatio ſeu correctio loci apparentis fiet nulla. Poſito autem angulo AOV recto quo caſu fit $m = 1$ et $\mu = 0$, prodibit anguli OAV tangens $= \frac{s}{c}$, vnde differentia inter locum obiecti viſum et verum eo erit maior, quo maior fuerit celeritas obiecti. At ſi, vti plerumque accidere ſolet, celeritas obiecti valde ſit exigua ratione celeritatis lucis, angulus OAV valde fiet paruus, eiusque tangens quae ſatis tuto pro ipſo arcu aſſumi poterit, erit $= \frac{ms}{c}$. Denique intelligitur, ſi lux in inſtanti propagaretur, tum aequationem illam ad locum obſeruatum addendam euaneſcere

ob $c = \infty$: vnde etiam locum, quo obiectum quouis momento appareret, si radii in instanti propagarentur, pro loco vero assumimus.

Tab. II. fig. 3. §. 11. Prosequamur iam obseruationes obiecti O in directum OM vniformiter progredientis videamusque sub quonam angulo OAM obiectum quouis momento apparere debeat. Maneat distantia $OA = u$, quae simul sit normalis ad semitam obiecti OM. Ponamus obseruationum initium, cum obiectum in O apparuit; reuera ergo obiectum ante iam extitit in O idque tempore $\frac{u}{c}$ minut. sec. Peruenerit obiectum in M existente anguli OAM tangente $= t$ erit $OM = ut$; quare cum obiectum spatium s minuto secundo absoluat, ex O in M peruenit tempore $\frac{ut}{s}$ min. sec. postquam ergo in O fuit obseruatum, tempore $\frac{ut}{s} - \frac{u}{c}$ min. secund. in M existet. Quoniam nunc obiectum a spectatore distat interuallo $MA = u\sqrt{(1+tt)}$, tardius in M conspicietur idque $\frac{u\sqrt{(1+tt)}}{c}$ minut. secund. Quocirca cum obiectum in O apparuit, ab eo momento angulum OAM cuius tangens $= t$, confecisse obseruabitur tempore $\frac{ut}{s} + \frac{u\sqrt{(1+tt)}-u}{c}$ min. secund.

§. 12. Ponamus spatium $OM = z$ semid. terrae atque obiectum vniformiter motum obseruabitur hoc spatium conficere tempore $\frac{z}{s} + \frac{\sqrt{(u^2+z^2)}-u}{c}$ men. sec. Hanc ob rem nisi tarditatis lucis ratio habeatur, hoc obiectum motu inaequabili progredi censebitur etiamsi reuera motu aequabili feratur. Quae inaequabilitas vt clarius intelligatur ponamus obiectum spatium $z + dz$ confecisse id quod euenet tempore $\frac{z}{s} + \frac{\sqrt{(u^2+z^2)}-u}{c} + \frac{dz}{s} + \frac{zdz}{c\sqrt{(u^2+z^2)}}$; ex quo tempore $\frac{dz}{s} + \frac{zdz}{c\sqrt{(u^2+z^2)}}$ spatiolum dz percurrisse, ideoque

ideoque celeritatem $\frac{1}{\frac{1}{s}+\frac{z}{c\sqrt{(u^2+z^2)}}} = \frac{cs\sqrt{(u^2+z^2)}}{c\sqrt{(u^2+z^2)}+sz}$ habere aestimabitur. Atque cum spatium fere iam infinitum confecit, aestimabitur progredi celeritate $\frac{cs}{c+s}$, cum initio obseruatum esset celeritate s ferri, vnde hoc obiectum continuo retardari putabitur, quamuis reuera aequabiliter progrediatur.

§. 13. Moueatur nunc obiectum O in peripheria circuli OVMN aequabiliter, in cuius centro A constitutus sit spectator immobilis. Ponatur distantia obiecti O a spectatore A, quae perpetuo erit eadem seu radius circuli $OA = u$ semid. terrae: sitque celeritas obiecti tanta, qua singulis minutis secundis conficiat s semidiametros terrae. Si ergo ponatur ratio diametri ad peripheriam $= 1 : \pi$ obiectum reuertetur in idem punctum O, cum emensum erit spatium $2\pi u$ semidiametrorum terrae; vnde vna reuolutio absoluetur tempore $\frac{2\pi u}{s}$ minut. sec. Quare cum obiectum circa spectatorem tempore $\frac{2\pi u}{s}$ minut. sec. absoluat angulum 360. grad. dato minutorum secundorum numero, puta n, conficiet angulum $\frac{180ns}{\pi u}$ graduum; talisque appariturus esset motus, si lux in instanti propagaretur. Tab. II. fig. 4.

§. 14. At cum radius antequam ab obiecto in O versante ad spectatorem A vsque pertingat, impendat $\frac{u}{c}$ min. sec. interea ipsum obiectum ex O promouebitur vsque in V, existente angulo $OAV = \frac{180s}{\pi c}$ grad. Quare cum obiectum spectatori in O apparet, id eo momento reuera iam in V versabitur, ac differentia inter locum appa-

rentem O et locum verum V erit angulus OAV $= \frac{180\,s}{\pi c}$ grad. qui angulus ad locum apparentem versus plagam OM secundum quam obiectum progreditur, addi debet, vt prodeat locus obiecti verus. Deinde quia eadem ratio vbique manet, vbicunque obiectum in peripheria circuli reperiatur, ita, vt si appareat in M, locus verus sit N, differens ab obseruato angulo MAN $= \frac{180\,s}{\pi c}$ grad. motus per totam peripheriam videbitur aequabilis, perinde ac si lux in instanti propagaretur.

§. 15. Ponamus tempus vnius reuolutionis obiecti per totam circuli peripheriam esse constans, vti in systemate Ptolemaico et Tychonico statuitur, quo omnia astra tempore vnius diei siderei circa terram quiescentem rotari ponuntur, sitque hoc tempus $\varkappa$ min. secund. habebitur haec aequatio $\frac{2\pi u}{s} = \varkappa$ indeque $s = \frac{2\pi u}{\varkappa}$. Quamobrem locus obiecti verus V discrepabit a loco apparente O angulo OAV $= \frac{360\,u}{c\varkappa}$ grad. ex quo discrimen inter locum apparentem et verum eo erit maius, quo maior fuerit distantia obiecti a spectatore. Si igitur distantia obiecti, veluti stellarum fixarum, sit quasi infinite magna, locus verus ab apparente maxime discrepabit; atque si duarum stellarum fixarum distantiae fuerint inaequales, loca apparentia quouis tempore maxime different a veris, neque distantia vera earum, seu angulus ad terram, quo a se inuicem distant, vllo modo definiri poterit.

Tab. II. fig. 5. §. 16. Pertractato casu secundo aggrediamur casum tertium, quo obiectum quiescere spectator vero moveri ponitur. Quiescat igitur obiectum in O spectator vero in A constitutus moueatur vniformiter in directione

A a. Sit ſpectatoris celeritas $= r$ qua ſcilicet tempore vnius minuti ſecundi r ſemidiametros terrae conficiat; anguli vero OAa ſinus ſit $= m$ coſinus $= \mu$. Manifeſtum autem eſt omnia plane ac propterea etiam apparentiam manere eandem, ſiue caſus vti eſt propoſitus locum obtineat, ſiue tam ſpectatori quam obiecto motus aequabilis in directionibus parallelis tribuatur. Hancobrem concipiamus toti ſyſtemati imprimi motum in directione ipſi Aa oppoſita atque celeritate $= r$; quo fiet vt ſpectator in A quieſcat, obiectum O vero in directione OV parallela ipſi Aa promoueatur, idque celeritate $= r$. Hoc igitur pacto praeſens caſus eſt reductus ad caſum praecedentem.

§. 17. Quoniam igitur ſpectator in A quieſcit, obiectum vero in directione OV aequabiliter progreditur celeritate $= r$, angulique VOA, qui aequalis eſt angulo OAa ſinus eſt $= m$ coſinus $= \mu$, innoteſcet diſcrimen inter locum obiecti apparentem et verum. Si enim radius OA, quem obiectum dum in O erat emiſit, in oculum ſpectatoris incidat, tum ſpectator videbit obiectum in directione AO, qui erit locus apparens; hoc autem momento obiectum iam erit in puncto V, ita vt directio AV praebeat locum verum. Inuenimus autem ante anguli OAV tangentem eſſe $= \frac{mr}{c-\mu r}$; quare ſi vera obiecti elongatio a directione Aa deſideretur, ad elongationem obſeruatam, quae erat angulus OAa, addi debet angulus, cuius tangens eſt $= \frac{mr}{c-\mu r}$, ſicque obtinebitur angulus VAa, qui exprimit veram obiecti elongationem a directione Aa tempore obſeruationis.

§. 18.

§. 18. His definitis tollamus motum communem, quem ſpectatori atque obiecto tribuimus; quo facto obiectum, vt caſus erat propoſitus, quieſcet in O, ſpectator vero celeritate r in directione Aa promouebitur. Dum autem radius ex obiecto O emittitur erat ſpectator in A vnde progredietur per aliquod ſpatium puta Aa, antequam obiectum ipſi appareat. Quam primum igitur obiectum videbit, id in directione $a\,o$ conſpiciet parallela directione AO, falleturque iterum angulo oAO $=$ OAV cuius tangens eſt $= \frac{mr}{c-\mu r}$. Quamobrem ſi ſpectator qui in recta Aa vniformiter progreditur celeritate $= r$ conſpiciat obiectum lucidum ſub angulo OAa cum ſua motus directione, cuius ſinus eſt $= m$ coſinus $= \mu$, hunc angulum augere debebit angulo cuius tangens eſt $\frac{mr}{c-\mu r}$, vt obtineat directionem veram, in qua obiectum verſatur.

§. 19. Quanquam haec correctio deducta eſt ex converſione caſus tertii ad ſecundum, tamen aeque eſt legitima, ac ſi ex ipſius caſus propoſiti contemplatione eſſet deducta. Quamuis enim videatur, cum radius in directione OA ex obiecto O ad ſpectatorem in A ſitum perveniat, ſpectatori verum obiecti ſitum repraeſentari debere; id tamen tantum valet, quando ſpectator quieſcit. Namque ſi ſpectator in motu fuerit poſitus radius in eius oculum incidens non ſub ea directio, in retinam impingit, in quam impingeret ſi quieſceret, ſed incidentiae angulus ſimul ex motu oculi debet definiri. Simile ſcilicet hic radio accidit, quod vento in vela mota impingenti, cuius effectus definiri non poteſt, niſi ſimul motus velorum ratio habeatur.

§. 20.

§. 20. Inueſtigemus igitur effectum, quem radius lucis in oculum motum exerit, et in diſcrimen ſitus apparentis et veri ſecundum regulas motus inquiramus. Quiescat igitur obiectum in puncto O, ſpectator vero vniformiter promoueatur in recta AE celeritate r: ac dum in A verſatur excipiat radium OA ex obiecto emiſſum. Cum ergo radius in directione OA celeritate c impingat in oculum A celeritate r in directione AE motum, reſoluatur motus radii in duos laterales, quorum alter PA ſit normalis ad AE, alter OP cum directione AE congruat. Quodſi igitur OA celeritatem lucis c exprimat, erit PA vt celeritas normalis ad AE, et OP erit celeritas in directione EA, quae cum ſit contraria celeritati oculi r, eundem praeſtabit effectum, ac ſi celeritate r augeretur, atque in oculum quieſcentem incurreret. Tab. II. fig. 6.

§. 21. Sumta ergo AE tanta, vt ſit $OA : AE = c : r$, celeritas radii OP augeatur parte $OQ = AE$ atque oculus in A quieſcens radium excipiet, cuius motus erit compoſitus ex motu PA et motu QP, ex quo reſultabit radius QA, in cuius directione obiectum a ſpectatore in A conſtituto cernetur. Spectatori ergo, qui etſiamſi moueatur ſibi in A quieſcere videtur, obiectum apparebit ſub angulo QAE, cum tamen ipſi, ſi lux in inſtanti propagaretur, ſub angulo OAE apparere deberet: vnde angulus QAO conſtituet exceſſum loci obiecti veri ſupra apparentem. Ponamus anguli apparentis QAE ſinum eſſe $= m$ coſinum $= \mu$; cum autem ſit $OA = c$; $OQ = AE = r$, ponamus tantisper $AQ = y$, erit $AP = my$; $PQ = \mu y$, et $OP = \mu y - r$: atque $c^2 = yy - 2\mu ry +$

r^2 seu $y = \mu r + \sqrt{(c^2 - m^2 r^2)}$. Hinc anguli QAP tangens erit $= \frac{\mu}{m}$, anguli OAP tangens $= \frac{-m^2 r + \mu\sqrt{(c^2 - m^2 r^2)}}{m\mu r + m\sqrt{(c^2 - m^2 r^2)}}$ vnde anguli QAO tangens $= \frac{mr}{\sqrt{(c^2 - m^2 r^2)}}$ atque sinus $= \frac{mr}{c}$.

§. 22. Diuersas ergo praebuerunt correctiones ambo isti casum propositum euoluendi modi, quarum discrimen etsi est valde exiguum et contemnendum, siquidem r respectu c fuerit quantitas valde parua, tamen in originem discrepantiae diligentissime erit inquirendum, vt, vtri determinationi magis sit fidendum, planum fiat. Ac primo quidem constat, differentiam ex eo oriri, quod in posteriore consideratione assumsimus radium QA sensum obiecti in oculo excitantem ferri celeritate $y = \mu r + \sqrt{(c^2 - m^2 r^2)}$ cum priori considerandi modo radio visuo celeritatem c tribuissemus. Si enim loco y in posteriore modo ponamus c, seu $c - \mu r$ loco $\sqrt{(c^2 - m^2 r^2)}$ prodibit angali QAO tangens omnino vt antea $= \frac{mr}{c - \mu r}$. Quaestio itaque huc redit, vtrum ratiocinium veritati magis sit consentaneum.

Tab. II. fig. 5. §. 23. Hoc dum perpendemus, mox intelligemus in priore ratiocinio vitium esse commissum. Cum enim reductione tertii casus ad secundum toti systemati in quo cum obiectum O tum spectator A versantur motum secundum directionem Aα celeritate r tribuissemus, definiri debuisset, vtrum similis motus medio, per quod radii propagantur, simul sit impressus an non. Namque si, vti fecimus medium in quiete relinquatur, casus, ad quem reductio est facta, omnino erit diuersus a casu proposito, quia in casu proposito medium vna cum obiecto quiescebat, in casu autem mutato medium habebatur quiescens cum spectatore.

tore: ex quibus dissimilitudo casuum, ac proinde illegitima reductio clare apparet. Ipsum itaque medium in directione Aα simul promoueri debuisset celeritate r, qui motus si pariter in radios transferatur, prodibit prorsus vt altero modo anguli OAV sinus $= \frac{mr}{c}$.

§. 24. Cum igitur posterius ratiocinium cum veritate conspiret, atque anguli, quo locus obiecti verus ab apparente discrepat, sinus sit $\frac{mr}{c}$, non autem eius tangens sit $= \frac{mr}{c-\mu r}$, perspicuum est aliter obiectum quiescens spectatori moto esse appariturum, aliter obiectum motum spectatori quiescenti, etiamsi motus posterior priori sit aequalis et oppositus. Ratio huius discriminis in eo latet, quod lucem instar soni per motum vndulatorium propagari posuimus, quo pacto motus obiecti radios emittentis celeritatem radiorum non afficit; verum medium, si moueatur, eundem motum cum motu radiorum miscebit; ac propagationem vndularum vel accelerabit vel retardabit, prout motus medii motui radiorum vel sit secundus vel aduersus. Cuique haec plana fient, si quae hactenus de luce sumus commentati, ad sonum atque auditum accommodentur.

§ 25. Perfecta autem similitudo inter casum secundum et tertium conseruaretur, si lux non motu vndulatorio sed actuali eiaculatione ex corpore lucente emittatur. Si enim ponamus particulas lucis, quae radios constituunt, ex corpore lucido quiescente actu explodi celeritate c, quam luci tribuimus, idem corpus, si moueatur, suum motum cum motu radiorum coniunget: neque medium, siue moueatur siue quiescat, quicquam motum radiorum afficiet; instar

Tab. II. fig. 2. vacui enim conſiderari poterit. Ex hac autem hypotheſi alia reperietur correctio ſitus apparentis in caſu ſecundo. Si enim obiectum lucidum moueatur in directione O V celeritate s hoc ipſo motu celeritas radio OA naturalis c afficietur, tam ratione directionis, ſecundum quam eiiciuntur, quam ratione celeritatis, quae vel augebitur vel diminuitur.

Tab. II. fig. 2. §. 26. Ponamus eum radium ſenſum obiecti O in oculo ſpectatoris excitare, qui ſi obiectum quieſceret, emitteretur in directione O E celeritate c: quoniam autem obiectum in directione O V celeritate s promoueri ponitur, ſi capiatur $OV : OE = s : c$, radius O E a motu obiecti ita afficietur, vt eius directio cadat in diagonalem OA parallelogrammi O E A V, atque iſto pacto ſpectatorem offendat, celeritatem vero iſte radius O A habebit tantam, quae ſe habeat ad naturalem c vti O A ad O E. Cum igitur obiectum interea, dum radius ad ſpectatorem pertingit, progreditur per ſpatium $OV = s$; ſpectator in aeſtimatione loci obiecti falletur angulo OAV. Quodſi ergo ſinus anguli AOV ponatur $= m$ erit perpendicularis Vp in AO ducta $= ms$ atque ſinus anguli $OAV = \frac{Vp}{AV} = \frac{ms}{c}$, qui error apprime congruit cum eo, quem pro caſu tertio inuenimus.

§. 27. Plurimum igitur inter eſt noſſe, vtrum lux per actualem exploſionem particularum lucidarum ex obiecto lucido generetur, an ſimili modo, quo ſonus per aërem propagatur. Si enim prior modus in natura locum habeat, tunc ſimiles forent differentiae inter loca apparentia et vera pro caſu ſecundo et tertio, tutoque liceret alterum caſum ad alterum ope motus contrarii toti ſyſtemati impreſſi reducere. Quodſi autem modus poſterior locum

cum habeat, radiique lucis inſtar ſoni propagentur, tum illicita erit iſta reductio; etſi diſcrimen eſt prorſus contemnendum, niſi obiectis ſtupendae celeritates tribuantur, vti fit in ſyſtematibus mundi Ptolemaei et Tychonis. Quanquam autem poſterior ſententia veritati magis conſentanea videtur, tamen pro praeſenti inſtituto ſequamur priorem propter eximiam conuenientiam inter correctiones ad caſus ſecundum et tertium pertinentes.

§. 28. Perſequemur igitur hic potiſſimum eam hypotheſin, qua radii lucis ex obiecto lucido actu explodi ponuntur, atque aſſumamus radios, qui ex ſole ad nos perueniunt, ſumma celeritate ex ipſo ſole eſſe eiaculatos, vnde tempore 8. circiter minutorum ad nos pertigerint. Quamuis enim haec hypotheſis minus ſit probabilis quam altera, qua lumen inſtar ſoni propagari ſtatuitur, tamen magis eſt accommodata ad noſtrum inſtitutum atque motus compoſitionem recipit, cuius altera hypotheſis minus eſt capax. Si enim propagatio lucis in generatione pulſuum per medium ſubtile conſtet, tum ſi ad ſenſationem reſpiciamus, non tam ad tempus, quo pulſus per datum ſpatium vehuntur, erit attendendum, quam ad proprium cuiusuis particulae motum tremulum, qui maxime diuerſus eſſe potetit a motu progreſſiuo radiorum.

§. 29. Stabilita igitur hac hypotheſi, phaenomena caſus primi, quo tam obiectum quam ſpectatorem in quiete poſuimus, omnino manebunt vt ſupra expoſuimus: pro caſu ſecundo autem ea mutatio adhiberi debet, cuius fecimus mentionem, ſcilicet loco anguli OAV, qui praebet differentiam inter locum obiecti apparentem et verum, cuius tangens erat $= \frac{ms}{\theta - \mu s}$ ſubſtitui debet angulus cuius ſi-

Tab. II. fig. 6. nus eſt $\frac{ms}{c}$. Quae autem de caſu tertio §. 20. attulimus ea, cum ſint ex compoſitione motus deducta, recte ſe habent, ac ſi obiectum ſpectatori in A conſtituto, qui ſecundum directionem AE celeritate r promoueatur, appareat in directione AQ ſeu ſub angulo QAE cuius ſinus eſt m, adhunc angulum addi debet angulus QAO, cuius ſinus eſt $= \frac{mr}{c}$, vt prodeat ſitus obiecti verus.

Tab. II. fig. 7. §. 30. Vt autem phaenomena caſus ſecundi diſtinctius euoluamus, examinemus miſſionem radiorum, quae ex obiecto mobili fit. Quieſcat igitur primum obiectum in O, ac radii ex eo quaqua verſus emittentur aequali celeritate c; ita vt ſpectator A, vbicunque conſiſtat, radium OA ex obiecto excipiat celeritate c motum, vnde ſi diſtantia OA fuerit u, radius OA ex obiecto ad ſpectatorem perueniet tempore $\frac{u}{c}$ minut. ſecund. Ponamus nunc obiectum celeritate s in directione OV progredi, iſte motus cum motu naturali ſingulorum radiorum debebit coniungi. Deſcribatur igitur centro O radio OC, qui ſit ad OV vti c ad s circulus CBFD; eiusque quilibet radius OB praebebit radium lucis vna cum ipſius celeritate, qui ex obiecto quieſcente emitteretur. At ob motum obiecti radius OB non hanc directionem conſeruabit, ſed progredietur per diagonalem OI parallelogrammi OBIV, eiusque celeritas erit vt OI.

§. 31. Si iam hoc modo ſinguli radii OB cum motu obiecti coniungantur, reperientur puncta I ſita eſſe in peripheria circuli GIH centro V radio $VG = OC = c$ deſcripti: atque quaelibet recta OI ex loco obiecti O ad hanc alteram peripheriam ducta exhibebit celeritatem radii OA in directione OI emiſſi. Ab hoc igitur obiecto

ſpecta-

ſpectator in A excipiet quidem radium OA, ſed alia celerirate motum, quae ſe habet ad celeritatem naturalem *c* vti recta OI ad radium OF. Hinc intelligitur, ſi celeritas obiecti OV fuerit aequalis vel maior quam celeritas lucis naturalis, euenire poſſe, vt recta OA ex obiecto ad ſpectatorem ducta circulum centro V deſcriptum nusquam ſecet, quodſi euenerit obiectum a ſpectatore prorſus non conſpici poterit. Fieri etiam poteſt vt, radius ad ſpectatorem tam lente perueniat, vt in organo viſus nullum effectum producere poſſit, quo caſu pariter obiectum erit inconſpicuum.

§. 32. In hac hypotheſi etiam phaenomena obiecti in periphaeria circuli reuoluentis et ſpectatoris in centro A conſtituti aliter ſe habebunt. Ponamus enim obiectum in peripheria circuli OV circumagi celeritate $= s$: ſitque radius $OA = u$. Cum igitur ex obiecto, dum in O erat, radius ad ſpectatorem pertingit, obiectumque in O ipſi repraeſentat, tum obiectum non amplius erit in O, ſed in loco V, adeo vt obſeruator fallatur. Si quidem obiectum moueretur eadem celeritate ſecundum tangentem OV, tum interea obiectum perueniret in V, foretque angulus OAV, errorem exprimens, tantus, vt eius ſinus ſit $= \frac{s}{c}$ ob angulum VOA rectum; radiusque tanta celeritate ad ſpectatorem perueniret, quae ſe habet ad celeritatem *c*, vti AO ad AV. Quanquam autem obiectum non in directum ſed in circulo progredi ponitur, tamen emiſſio radiorum, dum eſt in O, vtroque caſu aequaliter afficietur; ita vt etiam hoc caſu radius OA ad ſpectatorem veniat celeritate $= \frac{c \cdot AO}{AV}$. Tab. II. fig. 8.

§. 33.

§. 33. At error obſeruationis a loco obiecti vero alius erit, ſi obiectum in circulo promoueatur. Cum enim, ſi in directum OV progrederetur, interea dum radius ex O ad A pertingit, perueniat ad V vsque; eodem interuallo per peripheriam circuli latum abſoluet arcum OU, aequalem tangenti OV; eritque error nunc angulus OAU, vtique maior quam foret ſi obiectum in directum moueretur. Quoniam vero eſt anguli OAV ſinus $= \frac{s}{c}$, erit eiusdem coſinus $= \frac{\sqrt{(c^2-s^2)}}{c} = \frac{AO}{AV}$; vnde ob $AO = u$ erit $AV = \frac{cu}{\sqrt{(c^2-s^2)}}$, et $OV = \frac{su}{\sqrt{(c^2-s^2)}}$, atque velocitas radii OA in oculum ſpectatoris incidens erit $= \sqrt{(c^2-s^2)}$. Quare ſi obiecti celeritas s aequalis fuerit vel adeo maior quam celeritas lucis naturalis c, tum nequidem obiectum a ſpectatore cerni poterit, quod idem eueniet ſi s valde prope ad c accedat.

§. 34. Vt quantitas anguli OAU definiatur, ſit $1 : \pi$ ratio diametri ad peripheriam, eritque $\pi u =$ ſemiperipheriae circuli ſeu arcui 180. graduum. Fiat igitur $\pi u : 180^\circ = OU \left(\frac{su}{\sqrt{(c^2-s^2)}}\right) : \frac{180s}{\pi\sqrt{(c^2-s^2)}}$, ex qua analogia praebebit $\frac{180s}{\pi\sqrt{(c^2-s^2)}}$ in gradibus angulum OAU, quo locus obiecti viſus a vero diſcrepat. Cum praeterea obiectum vno minuto ſecundo percurrat s ſemidiametros terrae, totam peripheriam $2\pi u$ abſoluet tempore $\frac{2\pi u}{s}$ min. ſec. Ponamus tempus vnius reuolutionis eſſe conſtans atque $\varkappa$ min. ſec. fiet $s = \frac{2\pi u}{\varkappa}$. Quamobrem angulus OAU erit $= \frac{360u}{\sqrt{(c^2\varkappa^2-4\pi^2u^2)}}$; ob duplicem igitur cauſam creſcit error ſeu angulus OAU creſcente diſtantia AO, ac facta $u = \frac{c\varkappa}{2\pi}$, error in infinitum augebitur; hoc vero caſu obiectum ceſſabit ſpectatori apparere. Quare ſi ſtellae cunctae circa terram quietam tem-

tempore 24. horarum circumagerentur, eae quae magis distarent quam 591287 semidiametros terrae nequidem conspicuae forent, hoc est quae tricies magis essent remotae quam sol: ex quo ne vnica quidem stella fixa esset conspicua.

§. 35. Videbimus autem rem longe aliter se esse habituram, si terrae motum circa axem, sideribus vero quietem tribuamus, quamuis primo intuitu similia phaenomena accidere debere videantur. Neque vero hoc mirum videbitur, si hanc rem attentius perpendamus; licet enim saluis legibus et regulis mechanicis vniuerso cuidam systemati corporum, motum aequabilem in directum imprimere, ita, vt nil in phaenomenis mutetur, at vel motum inaequabilem vel curuilineum tribuere minime licet. Ex quo manifestum est, casum maxime immutari, si motus circularis, quem spectator habeat, transferatur ad astra, iisque motus circulares, eodem tempore periodico absoluendi, adiudicentur. Tali autem illegitima translatione motus lucis potissimum perturbari debet.

§. 36. Ponamus igitur spectatorem in A constitutum promoueri continuo per peripheriam circuli ABD, celeritate tanta, qua tempore vnius minuti secundi absoluat r semidiametros terrae. Concipi scilicet potest circulus ABD tanquam parallelus terrae qui spatio diei siderei seu 23. horis, $56' \; 4''$ circa axem reuoluatur ab occidente in orientem, ita, vt punctum E spectatori versus orientem sit situm. Ponatur cosinus eleuationis poli, quae respondet loco spectatoris in A, $= p$, posito sinu toto atque semidiametro terrae $= 1$, erit $p =$ semidiametro paralleli AC, ex quo circumferentia paralleli erit $= 2\pi p$, quam cum Tab. II. fig. 9.

 specta-

ſpectator abſoluat tempore 86164″, vno minuto ſecundo conficiet ſpatium $\frac{\pi p}{43082}$ ſemid. terrae. Hinc ergo dabitur celeritas ſpectatoris $r = \frac{p}{13713\,74}$, ac log. $r = lp - l$ ſin. tot. — 4, 1371461 $= lp - 14$, 1371461; tantaque celeritate ſpectator verſus orientem ſecundum directionem tangentis A E progredietur.

§. 37. Appareat nunc iſti ſpectatori ſidus in directione A O, quaeriturque ſitus huius ſideris verus A o, ſub quo appareret, ſi vel terra quieſceret vel radii in inſtanti propagarentur; ſidus autem quieſcere aſſumimus. Ex ſidere O in planum paralleli demittatur perpendiculum O P, atque ex P in radium C A productum normalis PQ. Quoniam vero planum paralleli in aequatorem coeli incidit rectaque C A Q meridianum loci A denotat, meridianus enim eſt planum normale ad A B D idque in recta C A Q ſecat; dabit angulus O A P declinationem ſideris obſeruatam, angulus P A Q autem diſtantiam circuli horarii a meridiano loci A. Cum igitur figura ſidus in declinatione boreali ac verſus occidentem ſitum repraeſentet, ſit ſinus declinationis borealis ſeu anguli O A P $= a$, coſinus $= \alpha$. anguli P A Q ſeu diſtantia ſideris horaria a meridiano verſus occidentem, ſinus $= b$, coſinus $= \beta$.

§. 38. His poſitis ſit ſideris obſeruati diſtantia a terra O A $= u$, quae quidem quaſi infinita aſſumitur attamen ex calculo euaneſcet; erit ergo O P $= au$ et A P $= \alpha u$; porro erit P Q $= \alpha bu$ et A Q $= \alpha\beta u$. In tangentem A E productam ex P ducatur normalis P R, eritque P R $=$ A Q $= \alpha\beta u$: αb eſt ſinus diſtantiae ſtellae a meridiano in circulo poſitionis ſumta, ſeu circulo per polos meridiani ducto: ducta autem recta O R perpendicularis erit ad rectam A R.

At

At vero habebitur $AR = abu$ et $OR = u\sqrt{(1-a^2b^2)}$: vnde anguli OAE, quem locus ſideris viſus cum directione AE, in qua ſpectator promouetur, conſtituit, ſinus erit $= \sqrt{(1-a^2b^2)}$. Verus itaque ſideris locus erit in o puncto in plano OAE ſito, atque angulo OAo, cuius ſinus eſt $\frac{r\sqrt{(1-a^2b^2}}{c}$, magis verſus occidentem remoto. Abſcindatur ergo in plano OAR angulus OAo, cuius ſinus ſit $= \frac{r\sqrt{(1-a^2b^2)}}{c}$ et coſinus $= \frac{\sqrt{(c^2-r^2+a^2b^2r^2)}}{c}$; eritque o locus ſideris verus.

§. 39. Inueſtigemus iam quantum locus verus a loco viſo cum ratione declinationis tum aſcenſionis rectae diſcrepet. Ponamus breuitatis gratia ſinum anguli $OAo = n$, et coſinum $= \nu$; demittamusque ex o in AR perpendicularem or, erit anguli oAr ſinus $\nu\sqrt{(1-a^2b^2)} - n\alpha b$ et coſinus $= \nu\alpha b + n\sqrt{(1-a^2b^2)}$: vnde ob $Ao = u$, prodibit $or = u(\nu\sqrt{(1-a^2b^2)} - n\alpha b)$ et $Ar = u(\nu\alpha b + n\sqrt{(1-a^2b^2)})$. Ex o in planum paralleli demittatur perpendicularis op, erit ob triangula ORP et orp ſimilia $op = au(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-a^2b^2)}})$ et $pr = \alpha\beta u(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-a^2b^2)}})$ atque hinc $Ap = u\sqrt{(1-a^2(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-a^2b^2)}})^2)}$. Inſuper vero eſt $pq = Ar$ et $Aq = pr$.

§. 40. Vera ergo ſideris declinatio indicabitur angulo oAp, cuius ſinus erit $= a(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-a^2b^2)}})$ coſinus vero $= \sqrt{(1-a^2(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-a^2b^2)}})^2)}$; dum apparentis declinationis erat ſinus $= a$, coſinus $= \alpha$. Vera autem ſideris elongatio a meridiano verſus occaſum exprimetur angulo qAp, cuius ſinus erit $\frac{pq}{Ap} = \frac{\nu\alpha b + n\sqrt{(1-a^2b^2)}}{\sqrt{(1-a^2(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-a^2b^2)}})^2)}}$ et coſinus $= \frac{Aq}{Ap} = \frac{\alpha\beta(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-a^2b^2)}})}{\sqrt{(1-a^2(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-a^2b^2)}})^2)}}$; ita vt anguli qAp tangens ſit $=$

$\frac{n-n\alpha^2 \ ^2+v\alpha b\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}{v\alpha\beta\sqrt{(1-\alpha^2 \ ^2)}-\alpha^2 b\beta}$, cum anguli apparentis QAP tangens esset $= \frac{b}{\beta}$. Excedit ergo vera elongatio qAp apparentem QAP angulo PAp, cuius tangens est $= \frac{n\beta}{na^2 b+v\alpha\sqrt{(1-\alpha^2 \ ^2)}}$ $= \frac{\beta r}{\alpha^2 br+\alpha\sqrt{(c^2-r^2+\alpha^2 v^2 r^2)}}$ restitutis loco n et v valoribus adimus.

§. 41. Quoniam vero terra secundum signorum coelestium ordinem reuoluatur, si ascensio recta obseruata computetur ab aequinoctio verno, haec ascensio recta diminui debet angulo qAp, vt oriatur ascensio recta vera. Deinde vero etiam declinatio obseruata per diminutionem corrigi debebit, ita vt verus sideris locus propius ad aequatorem accedat, quam obseruatur. Si quidem fuerit $a > a\left(v-\frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}\right)$ seu $c+\alpha br > \sqrt{(c^2-r^2+\alpha^2 b^2 r^2)}$ id quod quidem semper contingit, si b affirmatiuum obtineat valorem, sidusque versus occidentem spectetur; contrarium euenit, si sidus versus orientem aspiciatur, quo casu declinatio augeri debet.

§. 42 Obseruetur sidus, dum per meridianum loci, in quo spectator versatur, transit, fiet $b = 0$ atque $\beta = 1$: maneatque declinationis borealis obseruatae sinus $= a$, cosinus $= \alpha$, vnde vera sideris declinatio tanta censeri debebit, vt eius sinus sit $= va = \frac{a}{c}\sqrt{(c^2-r^2)}$. Cum autem r sit quantitas vehementer exigua respectu ipsius c, erit $\sqrt{(c^2-r^2)} = c-\frac{r^2}{2c}$, vnde verae declinationis sinus erit $= a-\frac{arr}{2cc}$, cosinus vero $\alpha+\frac{a^2 r^2}{2\alpha cc}$, quare vera sideris declinatio minor erit quam vera, angulo, cuius sinus est $= \frac{arr}{2\alpha cc}$, quod discrimen ob quadratum ipsius r tam est exiguum, vt tuto negligi queat: adeo vt declinatio obseruata

ſeruata a vera non diſcrepet, ſi quidem obſeruatio in meridiano inſtituatur.

§. 43. Deinde cum angulus QAP euaneſcit, fiet anguli qAp tangens $= \frac{r}{\alpha\sqrt{(cc-rr)}}$; vnde cum quaecunque ſtella in meridiano obſeruatur, ea reuera per meridianum iam transiiſſe erit cenſenda, anguloque a meridiano verſus occidentem iam diſtare, cuius ſinus vel tangens ſit $= \frac{r}{\alpha c}$, ob r valde paruum. Vel correctio ita erit inſtituenda, vt aſcenſio recta ſtellae obſeruata diminuatur angulo, cuius ſinus eſt $= \frac{r}{\alpha c}$. Eſt autem $r = \frac{p}{1371,4}$ et $c = 43$ vnde fit $\frac{r}{c} = \frac{p}{589676}$. Quodſi ergo obſeruator ſub aequatore verſetur, quo caſu ſit $p = 1$, atque tranſitum ſtellae per ipſius zenith obſeruet, ab aſcenſione recta aeſtimata auferre debebit angulum 20. minutorum tertiorum, quae correctio tuto negligi poteſt.

§. 44 Ponamus ſtellam obſeruari in circulo ſextae horae verſu soccaſum, fiet $b = 1$ et $\beta = 0$, vnde ſinus verae ſtellae declinationis erit $= \nu a - n\alpha$ et coſinus $= na + \nu\alpha$, cum declinationis apparentis ſinus eſſet a, et coſinus α. maior igitur eſt declinatio apparens quam vera, exceſſusque eſt angulus cuius ſinus eſt $= n = \frac{ar}{c}$, qui angulus ſi fit maximus, quod euenit ſi $a = 1$ et $p = 1$, tamen ne quidem ad ſemiſſem vnius minuti ſecundi aſſurgit. Aſcenſio vero recta obſeruata omnino non diſcrepabit a vera, eo quod $\beta = 0$, qua hypotheſi tangens anguli PAp evaneſcit: idem autem vſu venit ſi obſeruatio in altero circulo horario verſus orientem inſtituatur; ibi autem declinatio obſeruata non minui ſed augeri debet angulo cuius ſinus eſt $= n = \frac{ar}{c}$.

§. 45. Ex his intelligitur, variationem apparitionis ſiderum, quae quidem a motu terrae diurno proficiſcitur, ob ingentem paruitatem tuto negligi poſſe; ita vt loca ſtellarum apparentia ſine errore pro veris haberi queant; nunquam enim diſcrimen ad integrum minutum ſecundum, imo ne ad ſemiſſem quidem aſſurgit. Haecque perinde ſe habent in vtraque motus lucis hypotheſi; altera enim dat pro aequatione angulum, cuius tangens eſt $\frac{mr}{c-\mu r}$, altera angulum cuius ſinus eſt $\frac{mr}{c}$, qui duo anguli cum fractio $\frac{r}{c}$ ſit quam minima, a ſe inuicem non diſcrepant. Verum ſi loco motus terrae diurni, ſimilis motus ſideribus tribuatur ad mentem Ptolemaei, tum non ſolum aberrationes obſeruationum a locis veris pro vtraque hypotheſi maxime prodirent diuerſae, ſed etiam ipſae aberrationes fierent tam vaſtae, vt nil certi ad locum verum definiendum ex iis concludi poſſet; quae ſola circumſtantia ſufficere poteſt ad ſyſtemata terrae immotae funditus ſubuertenda.

Tab. II. fig. 9. §. 46. Cum igitur motus terrae diurnus nullam ſenſibilem differentiam inter loca ſiderum apparentia ac vera producat, videamus, quantum motus annuus in hoc negotio valeat. Repraeſentet igitur nunc circulus ABD orbitam terrae in qua circa ſolem C reuoluatur; tuto autem hic circulum pro orbita terrae vera aſſumere licet. Huius ergo circuli ſemidiameter AC erit 20618 ſemid. terrae, vnde eius peripheria continebit, 129546 ſem. terrae, quod ſpatium cum emetiatur anno ſydereo ſeu 31558140″, vno minuto ſecundo abſoluet ſpatium $\frac{129546}{31558140}$ ſemid. terrae, quod erit valor ipſius r, vnde cum ſit $c = 43$ fiet $\frac{r}{c} = 0,0000954, 6 = \frac{1}{10475}$, qui valor fere

fere ſexagies maior eſt, quam ante erat pro motu diurno, ex quo iam intelligitur, motum annuum ſenſibilem variationem obſeruationibus inducere debere.

§. 47. Primo quidem ipſe ſol, ad cuius locum reliqua ſidera ſunt referenda, nunquam in ſuo vero ſitu apparebit, ſed ſub angulo acuto ad tangentem AE. Hanc-obrem longitudo ſolis obſeruata continuo erit nimis parua, ad eamque addi debet angulus cuius ſinus eſt $\frac{r}{c}$, ſecundum ſignorum ſeriem, qui angulus prodit $20''$. Cum igitur ſol apparet in initio arietis, eius locus verus cenſeri debet o S, $0°, 0', 20''$. Atque hoc modo ante loca ſolis obſeruata corrigi oportet, antequam ſiderum loca cum ſolis loco comparentur. Cum autem iſta aberratio loci ſolis apparentis a loco vero perpetuo ſit eadem, motus ſolis in eccliptica ex terra eodem modo conſpicietur ac ſi radii in inſtanti propagarentur, neque hinc noua anomalia motui ſolis admiſcebitur.

§. 48. Cognito igitur vero ſolis loco geocentrico obſeruetur a ſpectatore A ſidus O in directione OA, ex quo in planum orbitae terrae ſeu ecclipticae demittatur perpendicularis OP, atque ex B in CA productam pariter perpendiculum PQ. Ducta igitur AP, praebebit angulus OAP latitudinem ſtellae obſeruatam, cuius ſinus ſit $= a$, coſinus $= \alpha$. Angulus vero QAP dabit diſtantiam ſtellae a loco ſoli oppoſito in eccliptica; quae in gradibus ecclipticae obtinebitur, ſi a puncto ſoli oppoſito ſubtrahatur longitudo ſtellae obſeruata; ſit igitur huius anguli PAQ ſinus $= b$, coſinus $= \beta$. Cum igitur iam reliqua maneant vt ante in motu terrae diurno, verus ſideris locus erit in directione Ao; atque vera latitudo definietur angulo

gulo o Ap ; veraque differentia longitudinis ſideris et loci ſoli oppoſiti angulo q Ap.

§. 49. Cum igitur verae ſideris latitudinis o Ap ſinus ſit $= a\left(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}\right) = \frac{a}{c}\left(\sqrt{(c^2 - r^2 + \alpha^2 b^2 r^2)} - \alpha b r\right)$, fiet iſte ſinus ob r reſpectu c vehementer paruum, $= a\frac{-\alpha a b r}{c}$; eiusque coſinus $= \alpha + \frac{\alpha^2 b r}{c}$. Latitudo ergo ſtellae obſeruata diminui debet angulo, cuius ſinus eſt $\frac{abr}{c}$, ſiue latitudo ſit borealis ſiue auſtralis. Haec autem diminutio tantum locum habet cum angulus PAQ ſinum b habet affirmatiuum, hoc eſt cum ſol ad coniunctionem ſtellae accedit: ſeu a tempore oppoſitionis ad coniunctionem vsque. Contra autem a coniunctione ſtellae cum ſole vsque ad oppoſitionem latitudo ſtellae debet augeri ob b negatiuum, atque ad latitudinem obſeruatam ſiue borealem ſiue auſtralem addi debet angulus cuius ſinus eſt $= \frac{abr}{c}$.

§. 50. Vt haec correctio facilius ad calculum aſtronomicum accommodari queat, ſequens adhibeatur regula. Ex canone logarithmorum conſueto excerpantur logarithmi ſinuum cum latitudinis ſtellae obſeruatae, tum diſtantiae ſtellae a puncto in eccliptica ſoli oppoſito ſecundum longitudinem, hique logarithmi addantur et a ſumma auferatur iſte logarithmus 18,7057289. reſiduo logarithmo quaeratur numerus reſpondens ex tabula logarithmorum numerorum naturalium, qui numerus praebebit aequationem latitudinis: quae a latitudine obſeruata ſubtrahi debet, ſi ſtellae locus in eccliptica intra locum ſolis et eius oppoſitionem verſetur; addi vero debet, ſi locus ſtellae in eccliptica intra punctum ſoli oppoſitum ipſumque ſolis locum contineatur.

§. 51.

§. 51. Vt ista operatio exemplo illustretur ponamus stellae cuiusdam latitudinem obseruatam esse 75°, 17′, 48″; longitudinem vero fuisse deprehensam 5 S, 13° 20′ 55″: eoque tempore solis longitudinem fuisse 7 S, 25°, 42′, 35″: computus ergo instituatur vt sequitur

	Longitudo ♂ ☉	7 S, 25°, 42′, 35″
	Longitudo ☍ ☉	1 S; 25°, 42′, 35″
subtr.	Longitudo stellae	5 S; 13°, 20′, 55″
	Ergo ang. QAP =	8 S, 12°, 21′, 40″

seu ang. QAP = 252°, 21′, 40″ cuius sinus cum sit negatiuus, latitudo obseruata debet augeri per æquationem: ex quo erit b sinus anguli 72°, 21′, 40″: eiusque logarithm. = 9,9790862

addatur log. 75°, 17′, 48″ = 9,9855400

subtr. 19,9646262

18,7057289

1,2588973

Ad latitudinem ergo obseruatam addi debent 18″, 9‴ vnde vera latitudo erit 75°, 18′, 6″, 9‴.

§. 52. Cum igitur latitudo stellae obseruata est nulla, tum etiam latitudo vera euanescet, vnde stellae in ipsa ecliptica sitae etiam semper in ecclíptica apparebunt. Quo magis autem stella quaepiam ab ecclíptica est remota, eo magis latitudo apparens discrepare poterit a latitudine vera, ceteris paribus; maxima enim differentia incidit in quadraturas stellae cum sole, estque $\frac{ar}{c}$; quae addi debet in quadratura priore, seu ea, quae post coniunctionem cum sole accidit, in posteriore autem quadratura coniunctionem praecedente subtrahi debet. At cum stella proxime ad polum ecclipticae erit obseruata tum ob α quantitatem val-

de paruam, denotabit autem α ſinum diſtantiae ſtellae a polo ecclipticae obſeruatam, alio calculo erit opus. Cum enim ſit $a = \sqrt{(1-\alpha^2)} = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ erit ſinus verae ſtellae latitudinis $= a - \frac{ar^2}{2cc} - \frac{\alpha abr}{c} = 1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{r^2}{2cc} - \frac{\alpha br}{c}$, eiusque coſinus $= \sqrt{(\alpha^2 + \frac{r^2}{cc} + \frac{2\alpha br}{c})}$ qui erit ſinus verae diſtantiae ſtellae a polo ecclipticae.

§. 53. Si igitur ſtella in ipſo polo ecclipticae obſervetur, tum reuera ab hoc polo diſtabit angulo cuius ſinus eſt $\frac{r}{c}$, qui angulus circiter $20''$ conficit. At ſi diſtantia ſtellae a polo obſeruata fuerit circiter $20''$, vt α fere aequale ſit ipſi $\frac{r}{c}$, tum expediet veram ſtellae a polo diſtantiam definire ex eius ſinu, qui eſt $\sqrt{(\alpha^2 + \frac{r^2}{cc} + \frac{2\alpha br}{c})}$ neque ad radicis extractionem iuuabit approximatione vti. Veluti ſi ſtella obſeruetur a polo ecclipticae diſtare angulo $30''$, ſitque angulus PAQ rectus ſeu ſtella in poſteriore quadratura, erit $b = 1$ et ſinus diſtantiae verae a polo $= \alpha + \frac{r}{c}$ ſeu $50''$ ſin ſtella in priore quadratura fuerit obſeruata, erit vera diſtantia a polo $= 10''$. In coniunctione autem vel oppoſitione reperietur vera diſtantia a polo $= 36''$, cum tamen alias in oppoſitione et coniunctione latitudo vera ab obſeruata non diſcrepet.

§. 54. Videamus nunc quanam correctione longitudo ſtellae obſeruata indigeat; ſupra autem inuenimus ad angulum QAP addi debere angulum PAp, cuius tangens eſt $= \frac{\beta r}{a^2br + \alpha\sqrt{(c^2 - r^2 + x^2b^2r^2)}}$ tanto igitur angulo longitudo ſtellae obſeruata debebit diminui, vt prodeat eius longitudo vera ſi quidem anguli PAQ coſinus β fuerit affirmatiuus, contra enim addi debet aequatio, ſi β fiat negatiuum. Quoniam vero r eſt valde paruum reſpectu c fiet

illius

illius anguli tangens $= \frac{\mathfrak{C} r}{ac + a^2 br - \frac{ar^2}{2c} + \frac{a^3 b^2 r^2}{2c}}$ quae nisi stella proxime ad polum ecclipticae fuerit sita abit in hanc $\frac{\mathfrak{C} r}{ac}$. Manente ergo stellae a polo distantia maxima aequatio longitudinis erit in coniunctione et oppositione cum sole, illo quidem casu addi hoc vero subtrahi debet angulus, cuius tangens est $\frac{r}{ac}$: in quadraturis autem haec correctio fit nulla.

§. 55. Haec igitur correctio commode per logarithmos sequenti modo institui poterit; ad logarithmum cosinus anguli QAP addatur 1, 2942710, atque a summa subtrahatur logarithmus cosinus latitudinis stellae obseruatae residui logarithmi quaeratur numerus respondens, qui dabit numerum minutorum secundorum addendum vel subtrahendum longitudini obseruatae, prout stella vel coniunctioni solis vel oppositioni fuerit propior. Sic in exemplo §. 51. allato est ang. QAP $= 252°, 21', 40''$ cuius cosinus est negatiuus, vnde longitudo obseruata augeri debebit. Iste autem cosinus congruit cum sinu anguli $17°, 38', 20''$ cuius logarith. $=$ 94814666

add. 1, 2942710

auferat. log. sin. $14°, 42', 12''$ 10, 7757376

9, 4045158

1, 3712218

hinc aequatio prodit $23'', 30'''$, quae ad longitudinem obseruatam addi debet, ita vt vera longitudo sit 5 S, $13°, 21', 18'', 30'''$.

§. 56. Aliter autem correctio erit instituenda, si stella polo ecclipticae fuerit proxima, ita vt sinus eius

 distan-

distantiae ab hoc polo α tam sit paruus vt prae termino αc reliqui termini non euanescant, tam enim a longitudine obseruata angulus subtrahi debebit, vel ad angulum QAP addi debebit angulus cuius tangens est $= \frac{\frac{\beta r}{c}}{\alpha + \frac{a^2 b r}{c}}$ Quare si α omnino euanescat, fiatque $a = 1$, anguli addendi PAp tangens erit $= \frac{\beta}{b}$; quare cum anguli QAP tangens sit $= \frac{b}{\beta}$, fiet angulus QAp rectus. Stellae igitur in ipso polo ecclipticae visae latitudo erit diminuenda 20. sec. eiusque longitudo 90. gradibus superabit longitudinem solis.

§. 57. Quaestio hic moueri potest non inelegans, qua quaeratur, quo situ stella in ipso ecclipticae polo revera posita quouis tempore spectatoribus terrestribus apparere debeat. Quum igitur verae huius stellae latitudinis sinus sit 1, habebitur ista aequatio $1 = \frac{a}{c}(\sqrt{(c^2 - r^2 + a^2 b^2 r^2)} - abr)$ seu $c + aabr = a\sqrt{(c^2 - r^2 + a^2 b^2 r^2)}$ vnde sumtis quadratis fit $\alpha^2 c^2 + 2\alpha abcr + a^2 r^2 = 0$, ex qua aequatione oritur tangens distantiae apparentis huius stellae a polo ecclipticae $= \frac{\alpha}{a} = \frac{-br + r\sqrt{(b^2 - 1)}}{c}$. Hinc igitur patet stellam talem polarem ex terra nunquam alio situ conspici posse, nisi sit $bb = 1$, hoc est nisi in quadratura cum sole priore, quae post coniunctionem contingere solet. Hoc autem casu fit $b = -1$ atque haec stella a polo angulo cuius tangens est $\frac{r}{c}$ seu angulo 20″ distare perpetuo obseruabitur. Ex quo haec stella circa verum polum circulum spatio vnius anni absoluere cernetur, cuius radius erit 20″.

§. 58.

§. 58. Diligenter igitur cauendum eſt, ne haec ſtel larum variatio annua a motu lucis ſucceſſiuo oriunda cum parallaxi confundatur. Expediet ergo ad parallaxin annuam ſtellarum fixarum commodiſſime inueſtigandam ſtella fixa vti, quae in ipſa eccliptica ſit ſita, quia eiusmodi ſtellarum latitudo non alteratur. Deinde longitudo huius ſtellae bis eſt obſeruanda eodem anno, quando ea cum ſole in quadraturis deprehenditur, his enim caſibus longitudo obſeruata a vera non diſcrepat. Ita ſi fuerit T*t* orbita terrae, S ſol et O ſtella fixa in plano ecclipticae ſita, obſeruetur ea primum in □ cum terra eſt in T angulusque OTS vel reuera rectus vel proxime; deinde obſeruetur eadem ſtella cum terra verſatur in *t* exiſtente angulo O*t*S iterum fere recto. His factis dati erunt anguli OTS et O*t*S fere recti, itemque ex theoria terrae per obſeruationes corrigenda angulus TS*t*, ex quibus definiri poterit diſtantia SO per ſemidiametros orbis magni. Tab. III. fig. 1.

§. 59. Hac igitur ratione obſeruationes ſtellarum fixarum ſunt corrigendae; alia autem correctione eſt opus pro obſeruationibus planetarum, quippe qui non quieſcent, ſed pariter ac terra circa ſolem reuoluuntur. Pertinet igitur haec correctio ad caſum quartum, quo tam obiectum quam ſpectatorem in motu collocamus. Moueatur igitur obiectum O in recta OV celeritate aequabili *s* ſpectator vero A promoueatur ſecundum directionem AE celeritate $= r$; ſint autem rectae OV et AE in eodem plano poſitae, quoniam haec potiſſimum ad motum planetarum ſumus accommodaturi qui fere in eodem plano circa ſolem rotantur, in quo ſita eſt orbita terrae. Emittat obiectum, dum in O verſatur radium, qui incidat in oculum ſpecta- fig. 2.

toris in A conſtituti, et hancobrem concipiatur radius O F quem obiectum emiſſurum fuiſſet celeritate c ſi in O quieuiſſet, hicque radius, poſtquam motum obiecti recepit, oculum ſpectatoris in A feriat; hoc itaque fiet; ſi fuerit completo parallelogrammo $OF : OV = c : s$; radiusque OA peruenet ad ſpectatorem celeritate $= \frac{c \cdot AO}{OF}$.

§. 60. Radius OA autem qui in oculum A celeritate r in directione AE motum impingit, eundem praeſtat effectum, ac ſi in directione QA in oculum quiescentem incideret, exiſtente OAEQ parallelogrammo, ac $OA : AE = \frac{c.AO}{OF} : r$; vnde erit $OF : AE : OV = c : r : s$. Videbit ergo ſpectator in A obiectum in directione AQ, ideoque ſub angulo ad ſui motus directionem QAE. Dum autem radius ex obiecto in O exiſtente ad ſpectatorem vsque peruenit, ipſum interea obiectum proceſſit in V ita vt ſit $OF : OV = c : s$ ex quo ſpectator obiectum videre deberet hoc ipſo momento in directione AV; diſcrepat ergo locus a ſpectatore viſus AQ a loco vero AV angulo QAV hicque angulus erit correctio ad ſitum obſeruatum QAE addenda Quantus igitur ſit iſte angulus videamus, conſtat quidem ex duabus partibus QAO et OAV, quae addi debent, ſi quidem motus obiecti et ſpectatoris tendant in plagas contrarias, vti in figura aſſumimus.

§. 61. Sit anguli QAE, ſub quo obiectum ſpectatori apparet, ſinus $= m$, coſinus $= \mu$, ponanturque lineae $OF = AV = c$; $AE = OQ = r$; et $AF = OV = s$. Ex O in AQ demittatur perpendiculum Op, erit $\frac{Op}{OQ} =$ ſin. $OQA =$ ſin. $QAE = m$, adeoque $Op = mr$

et

et $Qp = \mu r$. Producatur VO, donec AQ ſecet in q, ſitque anguli QOq, qui inclinationem directionum OV ad AE exprimit verſus plagam AE, ſinus $= n$, coſinus $= \nu$, erit ang. Oqp ſinus $= m\nu + \mu n$. Hinc itaque oritur $m\nu + \mu n : QO\ (r) = m : Oq\ (\frac{mr}{m\nu + \mu n})$. Nunc ex V demittatur in AQ perpendicularis VP, erit ob triangula qOp et qVP ſimilia:

$$qO : Op = qV \quad : VP$$
$$\frac{mr}{m\nu + \mu n} : mr = \frac{mr}{m\nu + \mu n} + s : mr + s(m\nu + \mu n).$$

Vnde anguli QAV erit ſinus $= \frac{VP}{AV} = \frac{mr + s(m\nu + \mu n)}{c}$ vel ſi anguli VqA, quem directio obiecti cum radio viſuo conſtituit, dicatur ſinus $= q$ erit anguli QAV ſinus $= \frac{mr + qs}{c}$.

§. 62. Conſentit iſta formula cum omnibus praecedentibus easque tanquam caſus ſpeciales ſub ſe complectitur. Namquae ſi vti caſu primo ſpectator et obiectum quieſcant, tum ob r et $s = 0$ fit aberratio $= 0$. Atque ſi vti in caſu ſecundo ſpectator quieſcat obiectum vero in directione OV promoueatur, tum ſinus anguli QAV fit $= \frac{qs}{c}$ denotante q ſinum anguli, quem radius viſiuus AQ cum directione motus obiecti conſtituit. Denique ſi obiectum in quiete ponatur, ſpectator vero moueatur, qui erat caſus tertius, tum fit vti inuenimus ſinus anguli aberrationis QAV $= \frac{mr}{c}$. Intelligitur porro ſi r et s ſint valde paruae reſpectu ipſius c, tum angulum cuius ſinus eſt $\frac{mr + qs}{c}$ proxime fore aequalem ſummae angulorum, quorum ſinus ſint $\frac{mr}{c}$ et $\frac{qs}{c}$, ex quo correctiones quae ſeorſim cum ex motu obiecti tum ex motu ſpectatoris oriuntur, coniungere licet.

§. 63.

§. 63. Si obiectum O in eadem recta O V ſed in plagam oppoſitam $o\,q$ progrediatur, tum eius celeritas s negatiue debet accipi: atque angulus aberrationis loci apparentis a vero erit $= \frac{mr - qs}{c}$, licet enim, ſi r et s prae c ſint vehementer paruae, ipſum angulum ſeu arcum loco ſinus ſubſtituere. Fieri igitur poteſt vt aberratio evaneſcat locusque apparens cum vero congruat. Hoc ſcilicet eueniet, ſi fuerit $r : s = q : m = \mathrm{O\,Q} : \mathrm{O}\,q$. At erit $r : s = \mathrm{AE} : \mathrm{AF}$; vnde recta E F erit radio A Q parallela. Ponamus directiones A E et V O concurrere in Z, erit $\mathrm{AE} : \mathrm{AF} = \mathrm{AZ} : q\,\mathrm{Z}$ vel O Z. Cum ergo obiectum O et ſpectator A mouentur verſus punctum Z celeritatibus rationem diſtantiarum a puncto Z proportionalibus, locus apparens cum vero congruet.

§. 64. Applicemus hanc doctrinam ad obſeruationes planetarum corrigendas, quos in circulis concentricis circa ſolem motu vniformi ferri ponamus, ipſasque orbitas in plano ecclipticae ſitas; excentricitas enim, motus inaequabilitas et inclinatio orbitarum, quoniam hae res ſatis ſunt exiguae, inſenſibile diſcrimen in correctionem a motu lucis oriundam inferent. Quoniam igitur celeritates planetarum in ſuis orbitis tenent rationem reciprocam ſubduplicatam diſtantiarum a ſole, diſtantiae autem ita ſe habent vt ſit

log. diſt. ♄ a ☉ = 6,9794600
log. diſt. ♃ a ☉ = 6,7160965
log. diſt. ♂ a ☉ = 6,1829850
log. diſt. ⊕ a ☉ = 6,0000000
log. diſt. ♀ a ☉ = 5,8593365
log. diſt. ☿ a ☉ = 5,5878232

celeri-

celeritates planetarum ad celeritatem lucis naturalem c applicatae ita se habebunt:

$$l \frac{c}{\text{cel. } ♄} = 4,5098840$$

$$l \frac{c}{\text{cel. } ♃} = 4,3782022$$

$$l \frac{c}{\text{cel. } ♂} = 4,1116465$$

$$l \frac{c}{\text{cel. } ♁} = 4,0201540$$

$$l \frac{c}{\text{cel. } ♀} = 3,9498222$$

$$l \frac{c}{\text{cel. } ☿} = 3,8140656$$

Vtemur enim potissimum logarithmis harum quantitatum, quia hoc modo ipsa correctio obseruationum in minutis secundis facillime obtinetur. Denique cum hae correctiones sint satis paruae, tuto affirmare poterimus planetas, dum radii ab iis ad nos vsque perueniunt, interea in directum progredi.

§. 65. Incipiamus a planetis superioribus, sitque S sol, T terra in sua orbita sita atque Oo orbita planetae cuiusdam superioris. Obseruetur in terra T planeta indirectione TO, sitque celeritas terrae in directione TE secundum signorum seriem $= r$, celeritas planetae autem in directione tangentis OQ $= s$: noteturque punctum A quod soli est oppositum. Ponatur anguli OTE, sub quo planeta conspicitur sinus $= m$, cosinus $= \mu$, erit ob angulum ATE rectum, μ sinus anguli ATO, quo planeta ab oppositione Tab. III. fig. 3.

tione solis A versus consequentia distare obseruatur, m vero erit eiusdem distantiae cosinus. Nunc ad angulum QOT inueniendum, quem directio radii OT cum directione motus planetae constituit, sit distantia terrae a sole $TS = a$, distantia planetae a sole $OS = b$, erit b : sin. $OTS(\mu) = a$: sin. $TOS\left(\frac{\mu a}{b}\right)$, vnde anguli TOQ sinus erit $= \sqrt{\left(1 - \frac{\mu^2 a^2}{b^2}\right)}$.

§. 66. Cum autem sit ex natura motus planetarum $r : s = \frac{1}{\sqrt{a}} : \frac{1}{\sqrt{b}}$ erit $r^4 : s^4 = b^2 : a^2$, atque sinus anguli $TOQ = \sqrt{\left(1 - \frac{\mu^2 s^4}{r^4}\right)} = 1 - \frac{\mu^2 s^4}{2r^4}$ ob $r > s$ et $\mu < 1$. Sit nunc verus planetae locus TV, verusque angulus, sub quo planeta cerni deberet VTE, superans angulum apparentem OTE angulo VTO, erit anguli huius VTO sinus $= \frac{mr}{c} - \frac{s}{c}\sqrt{\left(1 - \frac{\mu^2 s^4}{r^4}\right)} = \frac{mr}{c} - \frac{s}{c}\sqrt{\left(1 - \frac{\mu^2 a^2}{b^2}\right)}$. Ex quo distantia planetae a loco oppositionis solis A obseruata diminui debet angulo, cuius sinus est $\frac{mr}{c} - \frac{s}{c}\sqrt{\left(1 - \frac{\mu^2 a^2}{b^2}\right)}$, seu si posterior terminus priorem superet, augeri debet distantia planetae ab oppositione solis versus consequentia sumta angulo, cuius sinus est $\frac{s}{c}\sqrt{\left(1 - \frac{\mu^2 a^2}{b^2}\right)} - \frac{mr}{c}$. Vel, quod perinde est, tanto angulo longitudo planetae obseruata augeri debet.

§. 67. Si planeta obseruetur in ipsa oppositione solis A, fiet $\mu = 0$ et $m = 1$: vnde longitudo planetae obseruata augeri debet angulo, cuius sinus est $= \frac{s}{c} - \frac{r}{c}$, vel cum $r > s$, longitudo obseruata diminui debet angulo, cuius sinus est $\frac{r-s}{c}$, sin planeta in coniunctione cum sole obseruetur, fiet $m = -1$ et $\mu = 0$, tum igitur longitudo obseruata augeri debebit angulo, cuius sinus est $\frac{s+r}{c}$: haecque erit maxima correctio adhibenda. Obseruetur autem

tem planeta in alterutra quadratura, tum ob $m = 0$ et $\mu = \pm 1$, longitudo planetae augeri debebit angulo, cuius finus eſt $\frac{s}{c} \sqrt{(1 - \frac{a^2}{b^2})}$. Generatim autem haec adhibeatur regula, ſubtrahatur locus ſoli oppoſitus a loco planetae in eccliptica obſeruatae, reſiduique arcus ſinus ponatur μ, coſinus $= m$: tum quaeratur angulus, cuius ſinus ſit $\frac{\mu r}{b}$, eiusdemque anguli coſinus ponatur $= q$: quo facto aequatio ad longitudinem planetae obſeruatam addenda erit $\frac{qs}{c} - \frac{mr}{c}$, ipſum enim arcum loco ſinus ſubſtituimus.

§. 68. Computus autem facillime inſtituetur quaerendo valores expreſſionum $\frac{qs}{c}$ et $\frac{mr}{s}$ ſeorſim, quae cum ſint ſinus vel multipla ſinuum, inſtar ſinuum conſiderari poterunt. Quia autem anguli iis ſinibus aequales quaeruntur, ſumantur logarithmi quantitatum $\frac{qs}{c}$, $\frac{mr}{c}$ ex tabula ſinuum ab iisque auferatur logarithmus, 4,6855749; quo facto reſidui logarithmi in tabula logarithmorum numerorum naturalium quaeratur numerus reſpondens, qui dabit angulum quaeſitum in minutis ſecundis. Eſt autem $l\frac{c}{r} = 4,0201540$ et $l\frac{c}{s}$ pro dato planeta ex tabula ſuperiore debet ſumi, vnde etiam relatio diſtantiarum a et b ſeu fractio $\frac{a}{b}$ eſt petenda.

§. 69. Dum locus ſolis eſt 9 S, 15°, 37′, 45″ obſeruatur Iouis longitudo 1 S, 20°, 8′, 25″ quaeriturque longitudo vera. Ante omnia autem notandum eſt in calculo minuta ſecunda tuto negligi poſſe, quia ne minutis quidem neglectis aequatio deſiderata variatur. Calculus vero ita ſe habet

a long. ♃ — 1 S, 20°, 8′
ſubtr. ☌ ☉ — 3 S, 15°, 37′
304°, 31′ = 10 S, 4°, 31′
cuius ſinus μ = − ſin. 55°, 29′ et
coſinus m = + ſin. 34°, 31′
Porro log. b = 6, 71 69065
log. a = 6, 0000000

$l \frac{b}{a}$ = 0, 7160965
$l \mu$ = 9, 9159069

$l \frac{\mu a}{b}$ = 9, 1998104 = log. ſinus
cui reſpond. log. coſinus ſeu $l q$ = 9, 9944789
atque eſt $l m$ = 9, 7533118
Deinde eſt $l \frac{c}{r}$ = 4, 0201540
et $l \frac{c}{s}$ = 4, 3782022

Ergo $l q$ = 9, 9944789
ſubtr. $l \frac{c}{s}$ = 4, 3782022

5, 6162767
ſubtr. 4, 6855749

0, 9307018 ergo $\frac{qs}{c}$ = 8″, 31‴
Ac $l m$ = 9, 7533118
ſubtr. $l \frac{c}{r}$ = 4, 0201540

5, 7331578
ſubtr. 4, 6855749

1, 0475829 ergo $\frac{mr}{c}$ = 11″, 6‴,
vnde $\frac{qs - mr}{c}$ = − 2″, 35‴, ex quo vera Iouis longi toto Geocentrica erit 1 S, 20°, 8′, 22″, 25‴

§. 70.

§. 70. Cum maxima differentia inter locum obſervatum et verum eueniat, cum planeta eſt in coniunctione cum ſole, videamus quanta ea ſit in tribus planetis ſuperioribus, quibus adiiciamus correctiones in quadraturis et oppoſitione adhibendas.

In coniunctione ♄ cum ☉ differentia eſt $26'', 4'''$ }
In coniunctione ♃ cum ☉ differentia eſt $28'', 18'''$ } addenda
In coniunctione ♂ cum ☉ differentia eſt $35'', 35'''$ }

In oppoſitione ♄ et ☉ differentia eſt $13'', 18'''$ }
In oppoſitione ♃ et ☉ differentia eſt $11'', 4'''$ } auferenda
In oppoſitione ♂ et ☉ differentia eſt $3'', 47'''$ }

In quadrat ♄ et ☉ differentia eſt $6'', 20'''$ }
In quadrat ♃ et ☉ differentia eſt $8'', 28'''$ } addenda
In quadrat ♂ et ☉ differentia eſt $12'', 2'''$ }

Inter oppoſitionem ergo et quadraturas dabitur locus, in quo aequatio eſt nulla, planetaque in vero loco conſpicitur: euenit autem hoc quando anguli ATO tangens obſeruatur $\frac{b}{\sqrt{a(a+b)}}$ idque vtrinque circa oppoſitionem.

§. 71. Reſtant nobis planetae inferiores ambo Venus et Mercurius, quorum motum apparentem vt corrigamus, ſit T locus terrae in quo habeat celeritatem r ſecundum tangentem TE ſuae orbitae: exiſtat ſol in S centro tum orbitae terrae tum etiam orbitae OAo planetae inferioris O. Sit ſemidiameter orbitae terrae $ST = a$, orbitae planetae $OS = AS = b$, atque appareat planeta ſpectatori in terra conſtituto in directione TO ſub angulo OTE cuius ſinus ſit $= m$, coſinus $= \mu$. Erit ergo planetae elongationis a ſole verſus conſequentia ſeu anguli OTS Tab. III. fig. 4.

 ſinus

ſinus $= -\mu$, coſinus $= m$. Quare cum in triangulo T OS dentur latera SO $= b$, ST $= a$ et angulus STO erit $b : -\mu = a :$ ſin. TOS, ſeu ſin. TOS $= \frac{-\mu a}{b}$, cuius anguli coſinus erit $= \sqrt{(1 - \frac{\mu^2 a^2}{b^2})}$ qui ſimul erit ſinus anguli TOQ, quem radius viſiuus cum directione motus planetae conſtituit.

§. 72. Exprimat s celeritatem planetae, quam habet ſecundum directionem tangentis OQ orbitae ſuae, qui motus vti in figura repraeſentatur, cum ſit motui terrae contrarius, verus planetae locus erit in directione TV angulum maiorem cum TE conſtituente, quam directio apparens OT, ex quo ad locum planetae in eccliptica obſeruatum addi debet angulus OTV cuius ſinus ſit $= \frac{mr}{c} + \frac{s}{c}\sqrt{(1 - \frac{\mu^2 a^2}{b^2})}$. Quare a loco planetae in eccliptica obſeruato ſubtrahi debet locus ſolis, arcusque reſidui coſinus ponatur $= m$; ſinus vero $= \mu$ ſiue affirmatiuus ſiue negatiuus ſit perinde eſt. Tum quaeratur angulus, cuius ſinus ſit $= \frac{\mu a}{b}$, eiusdemque coſinus ponatur $= q$, quo facto ad longitudinem planetae obſeruatam addatur angulus $\frac{mr}{c} + \frac{qs}{c}$; prodibitque longitudo planetae vera geocentrica; ac vera planetae elongatio a ſole.

§. 73. Haec ita ſe habent, quando planeta ſub directione TO viſus magis a terra remotus eſt quam ſol, ac loco B poſt ſolem in ſua orbita eſt propior; at cum planeta in eadem directione To conſpicitur, propior autem terrae eſt quam ſol, tum alia correctio eſt inſtituenda. Hoc enim caſu angulus Toq, quem directio viſa cum directione motus oq conſtituit, aequalis quidem eſt angulo

TOQ

TOQ, at quia celeritas oq conspirat cum motu terrae erit angulus oTv, quo longitudo apparens augeri debet $= \frac{mr}{c} - \frac{s}{c} \sqrt{(1 - \frac{\mu^2 r^2}{b^2})} = \frac{mr}{c} - \frac{qs}{c}$.

§. 74. Maxima ergo aequatio locum habet, quando planeta post solem in B conspicitur, tum enim $m = 1$ et $\mu = 0$, vnde longitudo apparens nimis est parua angulo $\frac{r}{c} + \frac{s}{c}$. In altera autem coniunctione qua planeta recte intra solem et terram conspicitur, longitudo observata diminui debet angulo $\frac{s}{c} - \frac{r}{c}$, quia $s > r$. In maxima vero planetae elongatione a sole visa, quae proxime contingit cum $\frac{\mu^2 a^2}{b^2} = 1$ seu $\mu^2 = \frac{b^2}{a^2}$ et $m = \sqrt{(1 - \frac{b^2}{a^2})}$; erit aequatio longitudini obseruatae addenda $= \frac{r}{c} \sqrt{(1 - \frac{b^2}{a^2})}$; quae ergo cum planeta in orbitae suae semisse AOB versatur ad elongationem a sole obseruatam addi, at cum planeta in altera semisse deprehenditur subtrahi debet. Cum igitur vera elongatio maxima eueniat cum anguli VTS sinus sit vel $+ \frac{b}{a}$ vel $- \frac{b}{a}$, sit tum anguli apparentis OTS sinus $= \mu$ cosinus $= m$, erit $\mu + \frac{mr}{c} \sqrt{(1 - \frac{b^2}{a^2})} = \frac{b}{a}$ et $\mu = \frac{b}{a} - \frac{r}{c}(1 - \frac{b^2}{a^2})$; in altera autem elongatione maxima versus D fiet $\mu = \frac{b}{a} + \frac{r}{c}(1 - \frac{b^2}{a^2})$. magis igitur a sole elongari obseruabitur versus D quam versus C.

§. 75. Obseruatus sit mercurius in ecclíptica 4 S, 19°, 31′, 15″, dum sol esset in 3 S, 27°, 14′, 55″, atque tum mercurius longius distet a terra quam sol. Quare

a longitudine	☿ 4 S, 19°, 31′
subtrahatur locus	☉ 3 S, 27°, 15′
residuum	0 S, 22°, 16′

ergo

ergo $m =$ ſin. 67°, $44'$, et $\mu =$ ſin. 22°, $16'$.

Poro erit	$l\,\mu$	$=$	9, 5785450
addatur	$l\,a$	$=$	6, 0000000
			15, 5785450
ſubtr.	$l\,b$	$=$	5, 5878232
$l\frac{\mu a}{b}$		$=$	9, 9907218
Hinc fit	$l\,q$	$=$	9, 3106849
ſubtr.	$l\frac{c}{s}$	$=$	3, 8140656
auferatur			5, 4966193
			4, 6855749
			0, 8110444

ergo $\frac{qs}{c}$ dabit $6''$, $28'''$

Cum iam ſit	$l\,m$	$=$	9, 9663437
ſubtrah.	$l\frac{c}{r}$	$=$	4, 0201540
			5, 9461897
auferatur			4, 6855749
			1, 2606148

vnde $\frac{mr}{c}$ praebet $18''$, $13'''$.

Quocirca longitudo obſeruata augeri debet angulo $\frac{mr}{c} + \frac{qs}{c} = 24''$, $41'''$. At ſi mercurius terrae propior fuiſſet quam ſol, in eadem autem directione apparuiſſet, tum ad longitudinem addi deberet $\frac{mr}{c} - \frac{qs}{c} = 11''$, $45'''$.

§. 76. Aequationes autem veneris et mercurii in coniunctionibus atque elongationibus maximis ita ſe habent.

In

		Aequatio	
In coniunctione ſuperiore	♀ et ☉.	42″, 50‴	add.
In coniunctione ſuperiore	☿ et ☉.	51″, 20‴	
In coniunctione inferiore	♀ et ☉.	3″, 28‴	ſubtr.
In coniunctione inferiore	☿ et ☉.	11″, 58‴	
In elongatione max.	♀ et ☉.	13″, 36‴	add.
In elongatione max.	☿ et ☉.	18″, 9‴	

Ope regularum itaque hic traditarum obſervationes tam ſtellarum fixarum quam planetarum ab iis erroribus, qui ex propagatione lucis ſucceſſiua oriuntur, poſſunt liberari, earumque loco vera ſiderum loca geocentrica quidem definiri. Neque vero in his determinationibus multum inter eſt vtra hypotheſis propagationis lucis aſſumatur, cum diſcrimen oriatur inſenſibile. Ceterum ſi lux vel celerius vel tardius propagetur, quam hic aſſumſimus, omnes aberrationes in eadem ratione debebunt vel diminui vel augeri. Denique ſi lux tempore opus habet definito, quo per datum interuallum transuehatur, nullum ſyſtema mundi, in quo terra immota ponitur, conſiſtere poteſt; id quod notum eſt argumentum pro hypotheſi Copernicana.

METHODVS FACILIS COMPVTANDI ANGVLORVM SINVS AC TANGENTES TAM NATVRALES QVAM ARTIFICIALES

AVCTORE
Leonhardo Eulero.

§. 1.

Exposui anno praeterito methodum inueniendi valores eiusmodi expressionum, quae sint producta ex infinitis factoribus certa quadam lege progredientibus, eaque methodus deducta erat ex formulis integralibus, quarum integratio a se inuicem pendet. Nunc autem, cum nuper exposuissem modum summandi huiusmodi series

$$\frac{1}{1\pm p} \pm \frac{1}{4\pm p} + \frac{1}{9\pm p} \pm \frac{1}{16\pm p} + \frac{1}{25\pm p} \pm \text{etc.}$$

ex eo nactus sum commodam atque aptam methodum quam plurimorum productorum, ex infinitis factoribus constantium, valores determinandi, eiusque beneficio mihi licuit innumerabiles istiusmodi expressiones definire, quae per alteram mothodum vel omnino tractari non poterant, vel saltem tam expedite et concinne non absoluuntur. Quod negotium, quo clarius ob oculos ponatur, in sequentibus problematis sum complexurus.

Problema. 1.

§. 2. Inuenire valorem huius expressionis per continuos factores in infinitum progredientis.

1 +

$\frac{1+p}{1}$. $\frac{4+p}{4}$. $\frac{9+p}{9}$. $\frac{16+p}{16}$. $\frac{25+p}{25}$. $\frac{36+p}{36}$. etc.

Solutio.

Ponatur huius expreſſionis propoſitae valor quaeſitus $= s$, et ſumtis logarithmis, erit $ls = l(1+p) + l(1+\frac{p}{4}) + l(1+\frac{p}{9}) + l(1+\frac{p}{16}) + l(1+\frac{p}{25}) + l(1+\frac{p}{36}) +$ etc.

His igitur logarithmis per ſeries notas expreſſis habebitur

$$\begin{aligned} ls = &+ \tfrac{p}{1} - \tfrac{p^2}{2} + \tfrac{p^3}{3} - \tfrac{p^4}{4} + \tfrac{p^5}{5} - \tfrac{p^6}{6} + \text{etc.} \\ &+ \tfrac{p}{4} - \tfrac{p^2}{2\cdot 4^2} + \tfrac{p^3}{3\cdot 4^3} - \tfrac{p^4}{4\cdot 4^4} + \tfrac{p^5}{5\cdot 4^5} - \tfrac{p^6}{6\cdot 4^6} + \text{etc.} \\ &+ \tfrac{p}{9} - \tfrac{p^2}{2\cdot 9^2} + \tfrac{p^3}{3\cdot 9^3} - \tfrac{p^4}{4\cdot 9^4} + \tfrac{p^5}{5\cdot 9^5} - \tfrac{p^6}{6\cdot 9^6} + \text{etc.} \\ &+ \tfrac{p}{16} - \tfrac{p^2}{2\cdot 16^2} + \tfrac{p^3}{3\cdot 16^3} - \tfrac{p^4}{4\cdot 16^4} + \tfrac{p^5}{5\cdot 16^5} - \tfrac{p^6}{6\cdot 16^6} + \text{etc.} \\ &\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Sumantur differentia; eritque

$$\begin{aligned} \frac{ds}{sdp} = &\ 1 - p + p^2 - p^3 + p^4 - p^5 + \text{etc.} \\ &+ \tfrac{1}{4} - \tfrac{p}{4^2} + \tfrac{p^2}{4^3} - \tfrac{p^3}{4^4} + \tfrac{p^4}{4^5} - \tfrac{p^5}{4^6} + \text{etc.} \\ &+ \tfrac{1}{9} - \tfrac{p}{9^2} + \tfrac{p^2}{9^3} - \tfrac{p^3}{9^4} + \tfrac{p^4}{9^5} - \tfrac{p^5}{9^6} + \text{etc.} \\ &+ \tfrac{1}{16} - \tfrac{p}{16^2} + \tfrac{p^2}{16^3} - \tfrac{p^3}{16^4} + \tfrac{p^4}{16^5} - \tfrac{p^5}{16^6} + \text{etc.} \\ &\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Cum nunc hae ſeries omnes ſint geometricae, ſummari poterunt, hocque facto prodibit

$$\frac{ds}{sdp} = \frac{1}{1+p} + \frac{1}{4+p} + \frac{1}{9+p} + \frac{1}{16+p} + \frac{1}{25+p} + \text{etc.}$$

Huius autem ſeriei ſummam nuper exhibui; vnde ſi circuli cuius diameter $= 1$, peripheria ponatur $= \pi$ erit $\frac{ds}{sdp} = \frac{\pi\sqrt{p}-1}{2p} + \frac{\pi\sqrt{p}}{p(e^{2\pi\sqrt{p}}-1}$. Ponatur facilitatis gratia $p = qq$, erit $dp = 2qdq$, atque aequatio inuenta abibit in hanc

 $\frac{ds}{s} =$

$\frac{ds}{s} = \pi dq - \frac{dq}{q} + \frac{2\pi dq}{e^{2\pi q} - 1} = -\pi dq - \frac{dq}{q} + \frac{2e^{2\pi q}\pi dq}{e^{2\pi q} - 1}$

Cuius integrale eſt $ls = lC - \pi q - lq + l(e^{2\pi q} - 1)$ ſeu $s = \frac{C(e^{2\pi q} - 1)}{e^{\pi q} q} = \frac{C(e^{2\pi\sqrt{p}} - 1)}{e^{\pi\sqrt{p}}\sqrt{p}}$, vbi conſtantem C ita determinari oportet, vt poſito p vel $q = 0$ fiat $ls = 0$. At facto $q = 0$, fit $e^{2\pi q} - 1 = 2\pi q$, ideoque $ls = 0 = lC - \pi q - lq + l2\pi q = lC + l2\pi$, ergo $C = \frac{1}{2\pi}$. Conſequenter expreſſionis propoſitae

$\frac{1+p}{1} \cdot \frac{4+p}{4} \cdot \frac{9+p}{9} \cdot \frac{16+p}{16} \cdot \frac{25+p}{25} \cdot \frac{36+p}{36}$. etc.

valor erit $= \frac{e^{2\pi\sqrt{p}} - 1}{2e^{\pi\sqrt{p}}\pi\sqrt{p}}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

§. 3. Quodſi loco p ponatur $4p$, habebitur iſta expreſſio:

$\frac{1+4p}{1} \cdot \frac{1+p}{1} \cdot \frac{9+4p}{9} \cdot \frac{4+p}{4} \cdot \frac{25+4p}{25} \cdot \frac{9+p}{9}$. etc.

cuius igitur valor erit $\frac{e^{4\pi\sqrt{p}} - 1}{4e^{2\pi\sqrt{p}}\pi\sqrt{p}}$.

Coroll. 2.

§. 4. Cum iam in hac expreſſione praecedens contineatur, diuidatur haec per illam, prodibitque

$\frac{1+4p}{1} \cdot \frac{9+4p}{9} \cdot \frac{25+4p}{25} \cdot \frac{49+4p}{49}$. etc.

cuius proinde valor eſt $\frac{e^{2\pi\sqrt{p}} + 1}{2e^{\pi\sqrt{p}}}$.

Coroll.

Coroll. 3.

§. 5. Hinc igitur nanciſcimur valorem huius expreſſionis propoſitae affinis:

$$\frac{1+p}{1} \cdot \frac{9+p}{9} \cdot \frac{25+p}{25} \cdot \frac{49+p}{49} \cdot \frac{81+p}{81} \cdot \text{etc.}$$

quippe cuius valor erit $= \dfrac{e^{\pi\sqrt{p}}+1}{2e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{p}}}$.

Coroll. 4.

§. 6. Diuidatur per hanc ipſa expreſſio propoſita, fiet

$$\frac{4+p}{4} \cdot \frac{16+p}{16} \cdot \frac{36+p}{36} \cdot \frac{64+p}{64} \cdot \frac{100+p}{100} \cdot \text{etc.}$$

huius ſcilicet valor erit $= \dfrac{e^{\pi\sqrt{p}}-1}{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{p}}\pi\sqrt{p}}$.

Coroll. 5.

§. 7. Si nunc expreſſio §. 5. per expreſſionem §. 6. diuidatur, prodibit haec forma

$$\frac{1+p}{1} \cdot \frac{4}{4+p} \cdot \frac{9+p}{9} \cdot \frac{16}{16+p} \cdot \frac{25+p}{25} \cdot \frac{36}{36+p} \cdot \text{etc.}$$

cuius valor erit $= \dfrac{(e^{\pi\sqrt{p}}+1)\pi\sqrt{p}}{2(e^{\pi\sqrt{p}}-1)}$.

Coroll. 6.

§. 8 Si ſumantur binae huiusmodi ſeries, atque altera per alteram diuidatur, obtinebuntur ſequentes ſummationes.

$$\frac{1+p}{1+q} \cdot \frac{4+p}{4+q} \cdot \frac{9+p}{9+q} \cdot \frac{16+p}{16+q} \cdot \text{etc.} = \frac{e^{\pi\sqrt{q}}(e^{2\pi\sqrt{p}}-1)\sqrt{q}}{e^{\pi\sqrt{p}}(e^{2\pi\sqrt{q}}-1)\sqrt{p}}$$

$\frac{1+p}{1+q}$

$$\frac{1+p}{1+q}\cdot\frac{4+q}{4+p}\cdot\frac{9+p}{9+q}\cdot\frac{16+q}{16+p}\cdot\text{etc.}=\frac{(e^{\pi\sqrt{p}}+1)(e^{\pi\sqrt{q}}-1)\sqrt{p}}{(e^{\pi\sqrt{p}}-1)(e^{\pi\sqrt{q}}+1)\sqrt{q}}$$

$$\frac{1+p}{1+q}\cdot\frac{9+p}{9+q}\cdot\frac{25+p}{25+q}\cdot\text{etc.}=\frac{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{q}}(e^{\pi\sqrt{p}}+1)}{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{p}}(e^{\pi\sqrt{q}}+1)}$$

$$\frac{4+p}{4+q}\cdot\frac{16+p}{16+q}\cdot\frac{36+p}{36+q}\cdot\text{etc.}=\frac{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{q}}(e^{\pi\sqrt{p}}-)\sqrt{q}}{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{p}}(e^{\pi\sqrt{q}}-1\sqrt{p}}.$$

§. 9. Ex ſolutione igitur huius primi problematis conſequuti ſumus valores eiusmodi productorum infinitis fractionibus contentorum, quarum tam numeratores quam denominatores ſunt qnadrata vel numerorum omnium in ſerie naturali prpgredientium, vel imparium tantum vel parium, eaque datis numeris aucta. Cum igitur iſtiusmodi factores in ſimplices reales, qui arithmeticam teneant progreſſionem, reſolui nequeant, iſtae ſummationes methodo iam ante expoſita abſolui non poterunt. At viciſſim hinc non intelligitur, quinam proditurí ſint valores, ſi vel p vel q negatiue accipiatur ob exponentes $\pi\sqrt{p}$ et $\pi\sqrt{q}$, qui hoc caſu fiunt imaginarii. Quamobrem hos caſus in ſequenti problemate euoluemus.

Problema 2.

§. 1. Inuenire valorem huius expreſſionis per continuos factores in infinitum progredientis

$$\frac{1-p}{1}\cdot\frac{4-p}{4}\cdot\frac{9-p}{9}\cdot\frac{16-p}{16}\cdot\frac{25-p}{25}\cdot\frac{36-p}{36}\cdot\text{etc.}$$

Solutio.

Ponatur valor quaeſitus $=s$, eritque logarithmis ſumendis,

$$ls=l(1-p)+l(1-\tfrac{p}{4})+l(1-\tfrac{p}{9})+l(1-\tfrac{p}{16})+l(1-\tfrac{p}{25})+\text{etc.}$$

His

His vero logarithmis in ſeries conuerſis habebitur:

$$l\,s = -\frac{p}{1} - \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4} - \frac{p^5}{5} - \text{etc.}$$
$$-\frac{p}{4} - \frac{p^2}{2\cdot 4^2} - \frac{p^3}{3\cdot 4^3} - \frac{p^4}{4\cdot 4^4} - \frac{p^5}{5\cdot 4^5} - \text{etc.}$$
$$-\frac{p}{9} - \frac{p^2}{2\cdot 9^2} - \frac{p^3}{3\cdot 9^3} - \frac{p^4}{4\cdot 9^4} - \frac{p^5}{5\cdot 9^5} - \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Sumtisque differentialibus prodibit:

$$\frac{-ds}{s\,dp} = +1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + \text{etc.}$$
$$+\frac{1}{4} + \frac{p}{4^2} + \frac{p^2}{4^3} + \frac{p^3}{4^4} + \frac{p^4}{4^5} + \text{etc.}$$
$$+\frac{1}{9} + \frac{p}{9^2} + \frac{p^2}{9^3} + \frac{p^3}{9^4} + \frac{p^4}{9^5} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Quae ſeries cum ſingulae ſint geometricae, ſummae illarum loco ſubſtituantur, hincque erit

$$\frac{-ds}{s\,dp} = \frac{1}{1-p} + \frac{1}{4-p} + \frac{1}{9-p} + \frac{1}{16-p} + \frac{1}{25-p} + \text{etc.}$$

At iſtius ſeriei ſummam nuper elicui, quae, ſi ſubſtituatur, orietur

$$-\frac{ds}{s\,dp} = \frac{1}{2p} - \frac{\pi\sqrt{p}}{2p\,\text{tang.}\,A\,\pi\sqrt{p}}$$

Sit commodi ergo $p = qq$ eritque

$$-\frac{ds}{s} = \frac{dq}{q} - \frac{\pi\,dq}{\text{tang.}\,A\,\pi q} = \frac{dq}{q} - \frac{\pi\,dq\,\text{cos.}\,A.\,\pi q}{\text{sin.}\,A\,\pi q}$$

Quoniam nunc eſt $d.\ \text{sin.}\ A.\ \pi q = \pi\,dq\ \text{cos.}\ A.\ \pi q$, erit integrale aequationis inuentae,

$l\,C - l\,s = l\,q - l\,\text{sin.}\ A.\ \pi q$; conſtante autem C ita definita vt facto p vel $q = 0$ euaneſcat $l\,s$ prodibit $l\,C = l\,q - l\,\pi q = -l\,\pi$. Quocirca erit $\frac{1}{\pi s} = \frac{q}{\text{sin.}\,A.\,\pi q} = \frac{\sqrt{p}}{\text{sin.}\,A.\,\pi\sqrt{p}}$ hincque $s = \frac{\text{sin.}\,A.\,\pi\sqrt{p}}{\pi\sqrt{p}}$ ſiue

$$\frac{1-p}{1}\cdot\frac{4-p}{4}\cdot\frac{9-p}{9}\cdot\frac{16-p}{16}\cdot\frac{25-p}{25}\cdot\text{etc.} = \frac{\text{sin.}\,A.\,\pi\sqrt{p}}{\pi\sqrt{p}}.$$

Q. E. I.

Coroll. 1.

Coroll. 1.

§. 11. Quodsi loco p ponatur $4p$, habebitur ista expressio:

$$\frac{1-4p}{1} \cdot \frac{1-p}{1} \cdot \frac{9-4p}{9} \cdot \frac{4-p}{4} \cdot \frac{25-4p}{25} \cdot \text{etc.}$$

cuius valor erit $= \frac{\sin. A \cdot 2\pi\sqrt{p}}{2\pi\sqrt{p}} = \frac{\sin. A \cdot \pi\sqrt{p} \cdot \cos. A \cdot \pi\sqrt{p}}{\pi\sqrt{p}}$.

Coroll. 2.

§. 12. Diuidatur haec series per illam, prodibitque $\frac{1-4p}{1} \cdot \frac{9-4p}{9} \cdot \frac{25-4p}{25} \cdot \text{etc.} = \cos. A \cdot \pi\sqrt{p}$ siue $\frac{1-p}{1} \cdot \frac{9-p}{9} \cdot \frac{25-p}{25} \cdot \text{etc.} = \cos. A \cdot \frac{\pi\sqrt{p}}{2}$.

Coroll. 3.

§. 13. Cum iam sit $\frac{1-p}{1} \cdot \frac{4-p}{4} \cdot \frac{9-p}{9} \cdot \frac{16-p}{16} \cdot \text{etc.} = \frac{\sin. A \cdot \pi\sqrt{p}}{\pi\sqrt{p}} = \frac{2 \sin. A \frac{1}{2}\pi\sqrt{p} \cdot \cos. A \cdot \frac{1}{2}\pi\sqrt{p}}{\pi\sqrt{p}}$ erit

$$\frac{4-p}{4} \cdot \frac{16-p}{16} \cdot \frac{36-p}{36} \cdot \frac{64-p}{64} = \frac{2 \sin. A \cdot \frac{1}{2}\pi\sqrt{p}}{\pi\sqrt{p}}.$$

Coroll. 4.

§. 14. Diuidatur per hanc expressionum praecendens orietur.

$$\frac{1-p}{1} \cdot \frac{4}{4-p} \cdot \frac{9-p}{9} \cdot \frac{16}{16-p} \cdot \frac{25-p}{25} \cdot \frac{36}{36-p} \quad \text{etc.}$$

cuius valor erit $= \frac{\pi\sqrt{p}}{2 \tang. A \frac{1}{2}\pi\sqrt{p}}$.

Coroll.

Coroll. 5.

§. 15. Si ſumantur binae huiusmodi ſeries, earumque altera per alteram diuidatur, obtinebuntur ſequentes ſummationes.

$$\frac{1-p}{1-q}\cdot\frac{4-p}{4-q}\cdot\frac{9-p}{9-q}\cdot\frac{16-p}{16-q}\text{ etc} = \frac{\sqrt{q}\,\text{ſin. A.}\,\pi\sqrt{p}}{\sqrt{p}\,\text{ſin. A.}\,\pi\sqrt{q}}$$

$$\frac{1-p}{1-q}\cdot\frac{4-q}{4-p}\cdot\frac{9-p}{9-q}\cdot\frac{16-q}{16-p}\text{ etc.} = \frac{\sqrt{p}\,\text{tang. A.}\,\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{q}}{\sqrt{q}\,\text{tang. A.}\,\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{p}}$$

$$\frac{1-p}{1-q}\cdot\frac{9-p}{9-q}\cdot\frac{25-p}{25-q}\cdot\frac{49-p}{49-q}\text{. etc.} = \frac{\text{coſ. A.}\,\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{p}}{\text{coſ. A.}\,\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{q}}$$

$$\frac{4-p}{4-q}\cdot\frac{16-p}{16-q}\cdot\frac{36-p}{36-q}\cdot\frac{64-p}{46-q}\text{. etc.} = \frac{\sqrt{q}\,\text{ſin. A.}\,\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{p}}{\sqrt{p}\,\text{ſin. A.}\,\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{q}}$$

§. 16. In his expreſſionibus ſinus, coſinus et tangentes referuntur ad ſinum totum $= 1$, ſeu arcus circulares in circulo ſunt capiendi, cuius ſemidiameter eſt $= 1$. In tali igitur circulo exprimet π ſemiſſem peripheriae ſeu arcum 180. graduum. In numeris autem proximis erit, vt conſtat,

$$\pi = 3,14159265357989$$

Quodſi vero $\sqrt{p}$ et $\sqrt{q}$ fuerint numeri rationales, tum ſinus et tangentes, geometrice poterunt exhiberi, erit ſcilicet

ſin. A. $\pi = 0$	ſin. A. $\frac{1}{2}\pi = 1$	ſin. A. $\frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$	ſin. A. $\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$
coſ. A. $\pi = -1$	coſ. A. $\frac{1}{2}\pi = 0$	coſ. A. $\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$	coſ. A. $\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$
tang. A. $\pi = 0$	tang. A. $\frac{1}{2}\pi = \infty$	tang. A. $\frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}$	tang. A. $\frac{1}{4}\pi = 1$.

§. 17. Expreſſionum harum vſus primum in hoc conſiſtit, vt earum ope peripheria circuli multifariam

per iſtiusmodi producta continua concinne poſſit exhiberi. Quod vt appareat ponamus $p = \frac{m^2}{n^2}$ et cum π ſit arcus 180. graduum erit per §. 10.

$$\frac{n^2-m^2}{n^2} \cdot \frac{4n^2-m^2}{4n^2} \cdot \frac{9n^2-m^2}{9n^2} \cdot \frac{16n^2-m^2}{16n^2} \text{ etc.} = \frac{n \text{ ſin. A. } \frac{m}{n} \, 180^\circ}{m\pi}$$

ſeu

$$\pi = \frac{n}{m} \text{ ſin. A. } \frac{m}{n} \, 180^\circ \, \frac{n^2}{n^2-m^2} \cdot \frac{4n^2}{4n^2-m^2} \cdot \frac{9n^2}{9n^2-m^2} \cdot \frac{16n^2}{16n^2-m^2} \text{. etc.}$$

vnde emergunt ſequentes pro valore ipſius π expreſſiones.

Si $m = 1$, $n = 2$

$$\pi = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{64}{63}, \frac{100}{99} \cdot \frac{144}{143} \text{. etc.}$$

ſeu $\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12 \cdot}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13}$ etc.

quae eſt ipſa expreſſio Walliſii alibi a me demonſtrata.

Si $m = 1$ et $n = 3$

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{81}{80} \cdot \frac{144}{143} \cdot \frac{225}{224} \text{ etc. ſeu}$$

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 15 \cdot}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 16} \text{ etc.}$$

Si $m = 1$ etc. $n = 4$

$$\pi = 2\sqrt{2} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{64}{63} \cdot \frac{144}{143} \cdot \frac{256}{255} \text{. etc. ſeu}$$

$$\pi = 2\sqrt{2} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 20}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21} \text{ etc.}$$

Si $m = 1$ et $n = 6$

$$\pi = 3 \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{144}{143} \cdot \frac{324}{323} \cdot \frac{576}{575} \text{ etc. ſeu}$$

$$\pi = 3 \cdot \frac{6 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 24 \cdot 24 \cdot}{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 25} \text{ etc.}$$

§. 18. Expreſſiones hae, quanquam ſatis cito convergunt, tamen ſunt aptiores ad logarithmum ipſius π inueniendum, quam ad ipſum valorem π. Ita erit ex vltima expreſſione

$$l\pi = l\,3 + l\,\frac{36}{35} + l\,\frac{144}{143} + l\,\frac{324}{323} + \text{etc. ſeu}$$

$$l\pi = l\,3 + \frac{1}{6^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 6^4}\left(1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \text{etc.}\right)$$

+

$$+ \frac{1}{3 \cdot 6}\left(1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{4 \cdot 6^2}\left(1 + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \frac{1}{25^4} + \text{etc.}\right)$$
etc.

vnde calculus ſequenti modo inſtituetur ad logarithmum hyperbolicum ipſius π inueniendum

$l\,3 = 1,098612288668$

$l\,\frac{36}{25} = 0,028170876966$

$0,017914835217 = \frac{1}{8^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}\right)$

$0,000031760507 = \frac{1}{2 \cdot 6^4}\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \text{etc.}\right)$

$0,000000123907 = \frac{1}{3 \cdot 6^6}\left(\frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \text{etc.}\right)$

$0,000000000607 = \frac{1}{4 \cdot 6^8}\left(\frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \text{etc.}\right)$

4

$l\,\pi = 1,144729885879$

Logarithmus hic hyperbolicus ſi multiplicetur per

0, 434294481903251

prodibit logarithmus communis valoris π ſeu numeri

3, 141592653579 89 etc.

qui logarithmus a Cl. Sharpio in Tabulis mathematicis computatus eſt

0,49714,98726,94133,85435,12682,88290 etc.

§. 19. Cum autem peripheria circuli per ſe ſatis ſit cognita ex approximationibus iam diligentiſſime peractis, vſu harum expreſſionum in hoc negotio ſuperſedebimus. Alter autem vſus, qui ex his expreſſionibus duci poteſt, conſiſtit in inueniendis ſinibus et tangentibus et ſecantibus quorumcunque angulorum, qua quidem in re opus eſt

nosse valorem ipsius π. Ita si ponamus $\pi = 2q$ ita vt sit q arcus 90 graduum erit

$$\text{sin. A} \cdot \frac{m}{n} q = \frac{m}{n} q \cdot \frac{4n^2 - m^2}{4n^2} \cdot \frac{16n^2 - m^2}{16n^2} \cdot \frac{36n^2 - m^2}{36n^2} \cdot \frac{64n^2 - m^2}{64n^2} \text{ etc.}$$

hincque

$$\text{cosec. A} \cdot \frac{m}{n} q = \frac{n}{mq} \cdot \frac{4n^2}{4n^2 - m^2} \cdot \frac{16n^2}{16n^2 - m^2} \cdot \frac{36n^2}{36n^2 - m^2} \cdot \frac{64n^2}{64n^2 - m^2} \text{ etc.}$$

Porro ex §. 12. posito $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$ habebitur

$$\text{cos. A} \cdot \frac{m}{n} q = \frac{n^2 - m^2}{n^2} \cdot \frac{9n^2 - m^2}{9n^2} \cdot \frac{25n^2 - m^2}{25n^2} \cdot \frac{49n^2 - m^2}{49n^2} \text{ etc.}$$

hincque

$$\text{sec. A} \cdot \frac{m}{n} q = \frac{n^2}{n^2 - m^2} \cdot \frac{9n^2}{9n^2 - m^2} \cdot \frac{25n^2}{25n^2 - m^2} \cdot \frac{49n^2}{49n^2 - m^2} \text{ etc.}$$

Denique ex §. 14. deducitur pari modo

$$\text{tang. A} \cdot \frac{m}{n} q = \frac{m}{n} q \cdot \frac{n^2}{n^2 - m^2} \cdot \frac{4n^2 - m^2}{4n^2} \cdot \frac{9nn}{9n^2 - m^2} \cdot \frac{16n^2 - m^2}{16n^2} \text{ etc.}$$

hincque

$$\text{cot. A} \cdot \frac{m}{n} q = \frac{n}{mq} \cdot \frac{n^2 - m^2}{n^2} \cdot \frac{4n^2}{4n^2 - m^2} \cdot \frac{9n^2 - m^2}{9n^2} \cdot \frac{16n^2}{16n^2 - m^2} \text{ etc.}$$

Hae vero formulae, etsi vehementer conuergunt, tamen multo sunt aptiores ad logarithmos sinuum, tangentium et secantium inueniendos; quem vsum singularem antequam exponamus, methodum facilem aperiemus, ipsos sinus et tangentes expedite computandi: idque sine consuetis subsidiis ex multiplicatione arcuum, aliisque huc pertinentibus theorematis.

Problema 3.

§. 20. Inuenire canonem generalem, ad sinus et cosinus angulorum quorumcunque inueniendos idoneum.

Solutio.

Formulae, quas hic pro sinibus et cosinibus exhibuimus, si euoluantur, recidunt ad formulas iam pridem notas; scilicet posito arcu circuli $= s$, fit

sin. A

$\text{sin. A} \cdot s = s - \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{s^7}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 7} + \text{etc.}$

$\text{cos. A} \cdot s = 1 - \frac{s^2}{1 \cdot 2} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{s^6}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6} + \text{etc.}$

posito sinu toto $= 1$. Quodsi ergo ponatur q pro arcu 90 graduum, sumaturque arcus propositus $s = \frac{m}{n} q$, fiet

$\text{sin. A} \cdot \frac{m}{n} q = \frac{m}{n} \cdot q - \frac{m^3}{n^3} \cdot \frac{q^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m^5}{n^5} \cdot \frac{q^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{etc.}$

$\text{cos. A} \cdot \frac{m}{n} q = 1 - \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{q^2}{1 \cdot 2} + \frac{m^4}{n^4} \cdot \frac{q^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{etc.}$

Cum igitur sit $q = \frac{\pi}{2}$ erit

$q = 1,57079632679489661923132169 16$

Hoc vero valore loco potestatum ipsius q computato ac substituto, obtinebuntur formulae numericae, quibus tam sinus quam cosinus arcus $\frac{m}{n} q$ exprimentur. Quoniam vero tantum pro arcubus 45° minoribus sinus et cosinus desiderantur erit $\frac{m}{n} < \frac{1}{2}$, et hanc ob rem series datae maxime conuergent. Supputaui ego autem singulos harum serierum terminos a solo q pendentes in fractionibus decimalibus ad 28. figuras, quas, vt alios calculo tam taediosos liberem, hic appono.

Erit igitur sinus arcus $\frac{m}{n}$ 90 graduum $=$

$+ \frac{m}{n} \cdot 1,5707963267948966192313216916$

$- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0,6459640975062462536557565636$

$+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0,0796926262461670451205055487$

$- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0,0046817541353186881006854633$

$+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0,0001604411847873598218726605$

$- \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0,0000035988432352120853404580$

$+ \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0,0000000569217292196792681170$

$- \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0,0000000006688035109811467225$

$+\frac{m^{17}}{n^{17}}$, 0, 000000000000606693573110619 50
$-\frac{m^{19}}{n^{19}}$. 0, 000000000000004377065467313 70
$+\frac{m^{21}}{n^{21}}$. 0, 000000000000000025714228928 55
$-\frac{m^{23}}{n^{23}}$. 0, 000000000000000000125389954 03
$+\frac{m^{25}}{n^{25}}$. 0, 000000000000000000000515645 50
$-\frac{m^{27}}{n^{27}}$. 0, 000000000000000000000000181 239
$+\frac{m^{29}}{n^{29}}$. 0, 000000000000000000000000000 549
$-\frac{m^{31}}{n^{31}}$. 0, 000000000000000000000000000 01

Atque fimili modo erit cofinus arcus $\frac{m}{n}$ 90 grad. =

$+$ 1, 000000000000000000000000000 00
$-\frac{m^{2}}{n^{2}}$. 1, 233700550136169827354311374 5
$+\frac{m^{4}}{n^{4}}$. 0, 253669507901048013636563365 9
$-\frac{m^{6}}{n^{6}}$. 0, 020863480763352960873051636 4
$+\frac{m^{8}}{n^{8}}$. 0, 000919260274839426580241715 8
$-\frac{m^{10}}{n^{10}}$. 0, 000025202042373060605481052 6
$+\frac{m^{12}}{n^{12}}$. 0, 000000471087477881817150366 5
$-\frac{m^{14}}{n^{14}}$. 0, 000000006386603083791852240 8
$+\frac{m^{16}}{n^{16}}$. 0, 000000000065659631149794723 0
$-\frac{m^{18}}{n^{18}}$. 0, 000000000000052944002007346 20
$+\frac{m^{20}}{n^{20}}$. 0, 000000000000003437739179098 1
$-\frac{m^{22}}{n^{22}}$. 0, 000000000000000018359916521 2
$+\frac{m^{24}}{n^{24}}$. 0, 000000000000000000082067532 7
$-\frac{m^{26}}{n^{26}}$. 0, 000000000000000000000311528 5
$+\frac{m^{28}}{n^{28}}$. 0, 000000000000000000000000101 65
$-\frac{m^{30}}{n^{30}}$, 0, 000000000000000000000000000 26

Quo-

Quocunque igitur angulo propofito, eius ratio ad 90° eft primum quaerenda, quae fit vt m ad n, qua inuenta, fi in his formulis fiat fubftitutio debito modo, reperietur tam finus quam cofinus anguli propofiti.

Q. E. I.

§. 21. Quodfi igitur ponatur $\frac{m}{n} = 1$, prior formula dare debebit finum totum $= 1$, quod vt appareat calculum fubiiciamus.

$$
\begin{array}{l}
+ 1,570796326794896619231321691 6 \\
- 0,645964097506246253655756563 6 \\
\hline
+ 0,924832229288650365575565128 0 \\
+ 0,079692626246167045120505548 7 \\
\hline
+ 1,004524855534817410696070676 7 \\
- 46817541353186881006854633 \\
\hline
+ 0,999843101399498722595385213 4 \\
+ 16044118478735982187266 05 \\
\hline
+ 1,000003542584286082417257873 9 \\
- 35988432352120853404580 \\
\hline
+ 0,999999943741050870331917415 9 \\
+ 56921729219679268117 0 \\
\hline
+ 1,000000000662780090011185532 9 \\
- 66880351098114672 25 \\
\hline
+ 0,999999999993976579030038810 4 \\
+ 60669357311061950 \\
\hline
+ 1,000000000000043514761143005 4 \\
- 4377065467313 70 \\
\hline
\end{array}
$$

+

```
+ 0,999999999999999744106471868 4
+                          2571422892855
-----------------------------------------
+ 1,00000000000000000124876115 39
-                          12538995403
-----------------------------------------
+ 0,99999999999999999999486161 36
+                          51564550
-----------------------------------------
+ 1,00000000000000000000001806 86
-                          181239
-----------------------------------------
+ 0,999999999999999999999999 9447
                                549
-----------------------------------------
+ 0,999999999999999999999999 9996
```

vnde intelligitur errorem tantum 5 vnitatum in vltimis figuris esse commissum, qui ob totuplices additiones et subtractionés euitari omnino non potuit.

§. 22. Exemplum hoc adieci, vt appareat in computo harum formularum errorem a me non esse commissum, easque ideo tuto adhiberi posse. Quod idem vt clarius perspiciatur, calculum etiam cosinus anguli 90° hic apponam, qui debet esse = 0.

```
+ 1,0000000000000000000000000000
- 1,2337005501361698273543113745
-----------------------------------------
- 0,2337005501361698273543113745
+   253669507901048013636563365 9
-----------------------------------------
+     199689577648781862822519914
-     208634807633529608730516364
-----------------------------------------
```

$$
\begin{array}{rr}
- & 894522998474774590799 6450 \\
+ & 919260274839426580241 7158 \\
\hline
+ & 2473727636465198944207 08 \\
- & 2520204237306060548105 26 \\
\hline
- & 4647660084080100389818 \\
+ & 4710874778818171503665 \\
\hline
+ & 6321469473201111 3847 \\
- & 6386603083791852 2408 \\
\hline
- & 6513361059074085 61 \\
+ & 6565963114979472 30 \\
\hline
+ & 5260205590538669 \\
- & 5294400200734620 \\
\hline
- & 341940101959 51 \\
+ & 343773917909 81 \\
\hline
+ & 18278159503 0 \\
- & 18359916521 2 \\
\hline
- & 817570182 \\
+ & 820675327 \\
\hline
+ & 3105145 \\
- & 3115285 \\
\hline
- & 10140 \\
+ & 10165 \\
\hline
+ & 25 \\
- & 26 \\
\hline
- & 1
\end{array}
$$

Qui conſenſus cum veritate tantus eſt, vt de veritate datarum formularum dubitare amplius non liceat.

§. 23. Quaeramus ſpeciminis loco ſinum et coſinum anguli g graduum, qui caſus eſt facilis ob valorem $\frac{m}{n} = \frac{1}{10}$. Ac primo quidem pro ſinu erunt termini affirmatiui

0, 157079632679489661923132169 1
7969262624616704502050
160441184787359 8
56921729

+ 0, 1570804296059125647840629069

Termini vero negatiui ſunt.

0, 000645964097506246253655756 5
46817541353186881 00
359884323521
6688

− 0, 000645964565681695773957587 4
+ 0, 1570804296059125647840629069

0, 1564344650402308690101053195 = ſin. 9°

Pro coſinu autem ſunt termini affirmatiui

1, 000000000000000000000000000 0
2536695079010480136365 63
91926027483942658
4710874778
65

+ 1, 000025366959982708020845406 5

Termini vero negatiui

0,

$$
\begin{array}{r}
0,0123370055013616982735431137 \\
2086348076335296087 30 \\
25202042373060 \\
638660 \\
\hline
-\ 0,012337\ 2636484449818308051587 \\
+\ 1,0000253669599827080208454065 \\
\hline
0,9876883405951377261900402478 = \text{cos. } 9^\circ
\end{array}
$$

Hoc autem exemplum, etsi in suo genere est facillimum, ramen abunde declarat vtilitatem formularum datarum, atque compendium, quod illae calculo alias operosissimo afferunt.

§. 24. Labor autem istius computi multo fiet minor, si sinus et cosinus non ad tot figuras in fractionibus decimalibus desiderentur. Ponamus igitur sinum totum seu radium esse

10000000000

atque pro hoc radio erit

$$
\begin{array}{rl}
\text{sin. A. } \frac{m}{n}\, 90^\circ = & + \frac{m}{n} \,.\, 15707963267,94 \\
& - \frac{m^3}{n^3} \quad 6459640975,06 \\
& + \frac{m^5}{n^5} \,..\, 796926162,46 \\
& - \frac{m^7}{n^7} \,...\, 46817541,35 \\
& + \frac{m^9}{n^9} \,....\, 1604411,84 \\
& - \frac{m^{11}}{n^{11}} \,.....\, 35988,43 \\
& + \frac{m^{13}}{n^{13}} \,.....\, 569,21 \\
& - \frac{m^{15}}{n^{15}} \,.....\, 6,68 \\
& + \frac{m^{17}}{n^{17}} \,.....\, ,06
\end{array}
$$

Atque pari modo erit

$$\begin{aligned}
\text{cos. A. } \tfrac{m}{n}\, 90^\circ = &+ 10000000000,00 \\
&- \tfrac{m^2}{n^2}\, 12337005501,36 \\
&+ \tfrac{m^4}{n^4} \,.\, 2536695079,01 \\
&- \tfrac{m^6}{n^6} \,..\, 208634807,63 \\
&+ \tfrac{m^8}{n^8} \,...\, 9192602,74 \\
&- \tfrac{m^{10}}{n^{10}} \,...\, 252020,42 \\
&+ \tfrac{m^{12}}{n^{12}} \,.....\, 4710,87 \\
&- \tfrac{m^{14}}{n^{14}} \,.....\, 63,86 \\
&+ \tfrac{m^{16}}{n^{16}} \,.....\, ,65
\end{aligned}$$

vbi partes centesimas adiecimus, vt de vltimis figuris penitus certi esse queamus.

Problema 4.

§. 25. Inuenire canonem generalem pro inueniendis tangentibus et cotangentibus omnium angulorum.

Solutio.

Quod primum ad tangentes attinet, ponatur angulus rectus seu $90^\circ = q$, propositusque sit angulus $\frac{m}{n} q$ graduum seu $\frac{m}{n}\, 90^\circ$, erit posito sinu toto $= 1$, tang. A. $\frac{m}{n}\, 90^\circ$ $= \frac{2m}{nq} \left(\frac{n^2}{n^2 - m^2} + \frac{n^2}{9n^2 - m^2} + \frac{n^2}{25n^2 - m^2} + \text{etc.} \right)$

$$\begin{aligned}
\text{tang. A. } \tfrac{m}{n}\, 90^\circ = &\tfrac{2m}{nq} \left(1 + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{7^2} + \text{etc.} \right) \\
&+ \tfrac{2m^3}{n^3 q} \left(1 + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{5^4} + \tfrac{1}{7^4} + \text{etc.} \right) \\
&+ \tfrac{2m^5}{n^5 q} \left(1 + \tfrac{1}{3^6} + \tfrac{1}{5^6} + \tfrac{1}{7^6} + \text{etc.} \right) \\
&+ \tfrac{2m^7}{n^7 q} \left(1 + \tfrac{1}{3^8} + \tfrac{1}{5^8} + \tfrac{1}{7^8} + \text{etc.} \right) \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Quodsi

Quodſi autem termini primi harum ſerierum ſeorſim capiantur, vt reliqui eo magis conuergant erit

$$\text{tang. A.}\ \frac{m}{n}\,90^\circ = + \frac{2mn}{(nn-mm)q}$$
$$+ \frac{2m}{nq}\left(\tfrac{1}{3}2 + \tfrac{1}{5}2 + \tfrac{1}{7}2 + \text{etc.}\right.$$
$$+ \frac{2m^3}{3n^3}\left(\tfrac{1}{3}4 + \tfrac{1}{5}4 + \tfrac{1}{7}4 + \text{etc.}\right.$$
$$+ \frac{2m^5}{n^5 q}\left(\tfrac{1}{3}6 + \tfrac{1}{5}6 + \tfrac{1}{7}6 + \text{etc.}\right.$$
$$+ \frac{2m^7}{n^7 q}\left(\tfrac{1}{3}8 + \tfrac{1}{5}8 + \tfrac{1}{7}8 + \text{etc.}\right.$$
$$\text{etc.}$$

Eſt vero $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2}q = 0,3183098861837 9$ hincque $\frac{2}{q} = 1,2732395447351 6$. Quare ſi ſummae iſtarum ſerierum quae proxime habentur, per hunc valorem multiplicentur prodibit

$$\text{tang. A.}\ \frac{m}{n}\,90^\circ = + \frac{m}{n-m} \,.\, 0,636619772367 5$$
$$+ \frac{m}{n+m} \,.\, 0,636619772367 5$$
$$+ \frac{m}{n} \,.\, 0,297556782059 7$$
$$+ \frac{m^3}{n^3} \,.\, 0,018688650277 3$$
$$+ \frac{m^5}{n^5} \,.\, 0,001842475203 4$$
$$+ \frac{m^7}{n^7} \,.\, 0,000197580071 4$$
$$+ \frac{m^9}{n^9} \,.\, 0,000021697724 5$$
$$+ \frac{m^{11}}{n^{11}} \,.\, 0,000002401137 0$$
$$+ \frac{m^{13}}{n^{13}} \,.\, 0,000000266413 2$$
$$+ \frac{m^{15}}{n^{15}} \,.\, 0,000000029586 4$$
$$+ \frac{m^{17}}{n^{17}} \,.\, 0,000000003286 7$$
$$+ \frac{m^{19}}{n^{19}} \,.\, 0,000000000365 1$$
$$+ \frac{m^{21}}{n^{21}} \,.\, 0,000000000040 5$$
$$+ \frac{m^{23}}{n^{23}} \,.\, 0,000000000004 5$$
$$+ \frac{m^{25}}{n^{25}} \,.\, 0,000000000000 0$$

 cuius

cuius formulae ope tangentes in fractionibus decimalibus ad 12. figuras facile computari poterunt posito sinu toto $= 1$.

Quod secundo ad cotangentes attinet, erit iisdem positis

$$\text{cotang. A} \cdot \frac{m}{n}\, 90^\circ = \frac{n}{mq} - \frac{m}{2nq}\left(\frac{4n^2}{4n^2-m^2} + \frac{4n^2}{16n^2-m^2} + \frac{4n^2}{36n^2-m^2} + \frac{4n^2}{64n^2-m^2} + \text{etc.}\right)$$

seu

$$\begin{aligned}\text{cot. A} \cdot \frac{m}{n}\, 90^\circ = \frac{n}{mq} &- \frac{m}{2nq}\left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \text{etc.}\right)\\ &- \frac{m^3}{8n^3q}\left(1 + \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{9^2} + \tfrac{1}{16^2} + \text{etc.}\right)\\ &- \frac{m^5}{32n^5q}\left(1 + \tfrac{1}{4^3} + \tfrac{1}{9^3} + \tfrac{1}{16^3} + \text{etc.}\right)\\ &- \frac{m^7}{128n^7q}\left(1 + \tfrac{1}{4^4} + \tfrac{1}{9^4} + \tfrac{1}{16^4} + \text{etc.}\right)\\ &\qquad\qquad \text{etc.}\end{aligned}$$

Additis autem terminis primis erit

$$\begin{aligned}\text{cot. A} \cdot \frac{m}{n}\, 90^\circ = \frac{n}{mq} &- \frac{m}{2n-m} \cdot \frac{1}{2q} - \frac{m}{2n+m} \cdot \frac{1}{2q}\\ &- \frac{2m}{nq} \cdot \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \text{etc.}\right)\\ &- \frac{2m^3}{n^3q} \cdot \tfrac{1}{4^2}\left(\tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{9^2} + \tfrac{1}{16^2} + \tfrac{1}{25^2} + \text{etc.}\right)\\ &- \frac{2m^5}{n^5q} \cdot \tfrac{1}{4^3}\left(\tfrac{1}{4^3} + \tfrac{1}{9^3} + \tfrac{1}{16^3} + \tfrac{1}{25^3} + \text{etc.}\right)\\ &\qquad\qquad \text{etc.}\end{aligned}$$

At tam serierum loco summis substituendis, quam loco q valore debito, obtinebitur

$$\begin{aligned}\text{cot. A} \cdot \frac{m}{n}\, q = &+ \frac{n}{m} \cdot 0,6366197723675\\ &- \frac{m}{2n-m} \cdot 0,3183098861837\\ &- \frac{m}{2n+m} \cdot 0,3183098861837\\ &- \frac{m}{n} \cdot 0,2052888894145\\ &- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0,0065510747882\\ &- \frac{m^5}{n^5} \cdot 0,0003450292554\\ &- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0,0000202791060\\ &- \frac{m^9}{n^9} \cdot 0,0000012366527\end{aligned}$$

$$-\frac{m^{11}}{n^{11}} \,.\, 0,000000764959$$
$$-\frac{m^{13}}{n^{13}} \,.\, 0,000000047597$$
$$-\frac{m^{15}}{n^{15}} \,.\, 0,000000002969$$
$$-\frac{m^{17}}{n^{17}} \,.\, 0,000000000186$$
$$-\frac{m^{19}}{n^{19}} \,.\, 0,000000000011$$

Huiusque formulae ope cotangentes angulorum omnium 90. gradibus minorum expedite reperiri poterunt.

Q. E. I.

§. 26. Quanquam ex datis anguli ſinu et coſinu eiusdem tangens et cotangens inueniri poſſunt, tamen diuiſio, quae adhiberi debet, plerumque nimis moleſta eſſe ſolet. Quamobrem formulas hic datas multo aptiores eſſe merito arbitramur ad tangentes et cotangentes quorumuis angulorum inueniendas. Vt autem veritas harum regularum perſpiciatur, eiusmodi exempla tangentium et cotangentium euoluamus, quae per ſe ſint cognita. Quaeratur itaque tangens anguli ſemirecti ſeu 45°, quam conſtat eſſe aequalem ſinui toti ſeu 1. Erit igitur $m = 1$ et $n = 2$: vnde termini prodibunt ſequentes addendi:

```
0,6366197723675
0,2122065907891
  148778391029 8
    23360812847
      5757773501
       15435943
         423784
          11724
            325
              9
-----------------
1,0000000000000
```

vti

vbi in additione vltimae columnae tres vnitates ſunt adiectae, quippe quae proditurae fuiſſe cenſendae ſunt ex ſequentibus columnis, ſi affuiſſent. Ceterum ex formula manifeſtum eſt tangentem anguli recti fore infinitam ob $n-m=0$. Pro cotangente ſumamus exemplum anguli recti, cuius cotangens eſt $=0$. Cum igitur expreſſio noſtra cotangentis omnes terminos praeter primum habeat negatiuos addamus terminos negatiuos ſeorſim, qui ob $m=n=1$ ita ſe habebunt.

```
0,3183098861837
0,1061032953946
0,2052888894145
      655107478 82
       3450292554
        202791060
         12366527
           764959
            47597
             2969
              186
               11
-----------------
0,6366197723675
```

Terminus autem affirmatiuus, a quo haec ſumma auferri debet eſt

0,6366197723675

ita vt cotangens anguli recti actu reperiatur $=0$.

§. 27. Etſi autem haec, quae de inuentione ſinuum et tangentium attulimus ex ſeriebus meis nuper expoſitis conſequuntur, tamen eaedem hae formulae ex aliis iam dudum cognitis ſeriebus deduci potuiſſent. His igitur relictis

lictis grogredior ad ea, quae huic methodo ſummandi ſeries ſunt propria, atque modum docebo facilem inueniendi logarithmos ſinuum, et tangentium quorumcunque angulorum; qui eo magis eſt notatu dignus, quod logarithmos ſiue ſinuum ſiue tangentium praebeat, ſine praeuia ipſorum ſinuum ac tangentium cognitione. Cum autem logarithmi ſint duplices, vel naturales ſeu hyperbolici, vel decadici, in quibus logarithmus 10 ponitur $= 1$, vtriusque generis logarithmos hic inuenire docebo.

Problema. 5.

§. 28. Definire logarithmum tam naturalem quam conſuetum ſiue ſinus ſiue coſinus anguli cuiuscunque propoſiti.

Solutio.

Ex paragr. 19. capiatur pro logarithmo ſinus inueniendo expreſſio haec

$$\text{ſin. A. } \frac{m}{n} q = \frac{m}{n} q \cdot \frac{4n^2 - m^2}{4n^2} \cdot \frac{16n^2 - m^2}{16n^2} \cdot \frac{36n^2 - m^2}{36n^2} \cdot \text{etc.}$$

quae in logarithmos conuerſa ſtatim dat

$$l \text{ ſin. A. } \frac{m}{n} q = l \frac{m}{n} + \left(1 - \frac{m^2}{4n^2}\right) + l\left(1 - \frac{m^2}{16n^2}\right) + \text{etc.}$$

Quaeratur primo logarithmus naturalis ſinus anguli $\frac{m}{n} q$ ſeu $\frac{m}{n} 90^\circ$, eritque logarithmis per ſeries expreſſis

$$\begin{aligned} l \text{ ſin. A. } \frac{m}{n} q = l q &+ l \frac{m}{n} \\ &- \frac{m^2}{4n^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}\right) \\ &- \frac{m^4}{2 \cdot 4^2 n^4}\left(1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \text{etc.}\right) \\ &- \frac{m^6}{3 \cdot 4^3 n^6}\left(1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \text{etc.}\right) \\ &- \frac{m^8}{4 \cdot 4^4 n^8}\left(1 + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \text{etc.}\right) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

ſiue l ſin. A $\frac{m}{n}\,q = l\,q - l\,\frac{n}{m} - l\,\frac{4n^2}{4n^2-m^2}$

$$- \frac{m^2}{1.4n^2}\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{m^4}{2.4^2n^4}\left(\tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{9^2} + \tfrac{1}{16^2} + \tfrac{1}{25^2} + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{m^6}{3.4^3.6}\left(\tfrac{1}{4^3} + \tfrac{1}{9^3} + \tfrac{1}{16^3} + \tfrac{1}{25^3} + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{m^8}{4.4^4n^8}\left(\tfrac{1}{4^4} + \tfrac{1}{9^4} + \tfrac{1}{16^4} + \tfrac{1}{25^4} + \text{etc.}\right)$$

etc.

Quodſi nunc loco harum ſerierum ſummae proximae ſubſtituantur, eaeque per coefficientes numericas multiplicentur prodibit l ſin. A $\frac{m}{n}\,90^\circ =$

$$l\,q - 2\,l\,2 - 3\,l\,n + l\,m + l(2n-m) + l(2n+m)$$

$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,161233516712056609118103 79$$

$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,00257260105347206848487511$$

$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,00009032844783567260267978$$

$$- \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,00000398179316205501892449$$

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,00000019425295465196979631$$

$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,00000001001328748812045486$$

$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,00000000053404135618987888$$

$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,00000000002914859658937808$$

$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,00000000000161797979778706$$

$$- \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,00000000000009097690905311$$

$$- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,00000000000000516827545 87$$

$$- \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,00000000000000029607707 78$$

$$- \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0,00000000000000000170813$$

$$- \frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0,00000000000000000009913$$

$$- \frac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0,00000000000000000000578$$

$$- \frac{m^{32}}{n^{32}} \cdot 0,00000000000000000000034$$

qui

qui termini poſtemi etſi non eousque ſint continuati ac priores, tamen poteſtate vlterius porriguntur niſi ſit $\frac{m}{n} = 1$. Dat autem haec forma logarithmum hyperbolicum ſinus anguli $\frac{m}{n}\,90^\circ$, poſito ſinu toto $= 1$ eiusque logarithmo $= 0$. Debent autem pro hoc negotio etiam numerorum $2, n, m, 2n - m$ et $2n + m$ logarithmi hyperbolici accipi, itemque ipſius q, quem ſupra indicauimus. Hac vero ipſa methodo poterit lq accuratius exhiberi. Quodſi enim ponatur $m = 1$ et $n = 2$ erit $l\,\text{ſin.A.}\,45' = l\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}l2$: ſerierum vero ſummae additae conficient vt ſequitur.

```
0,040308379178014152279525 95
        160787565842066780304 69
          141138199743238441687
            155538795392774176 7
              18970015102731425
                2444650265654 41
                  325952976190 1
                    44477228683
                      617210311
                        8676234
                         123221
                           1765
                             25
-----------------------------------
0,040470593871911038344655 27
```

qui valor ponatur tantisper $= \alpha$ eritque $lq = \alpha + 5l2 - \frac{1}{2}l2 - l3 - l5$ eſt vero

$$\tfrac{9}{2}\,l\,2 = 3,\,11916231251975389237754454$$
$$l\,3 = 1,\,09861228866810969139524526$$
$$l\,5 = 1,\,60943791243410037460075935$$
$$\tfrac{9}{3}\,l\,2 - l\,15 = 0,\,41111211141754382638153993$$
$$\alpha = 0,\,04047059387191103834465527$$
$$lq = 0,\,45158270528945486472619520$$
$$l\,2 = 0,\,69314718055994530941723212$$
$$l\,2\,q = 1,\,14472988584940017414342732$$

qui eſt valor pro logarithmo hyperbolico ipſius π, quem ſupra minus accurate §. 18. definiuimus. Quare ſi iſte valor loco lq ſubſtituatur, facili negotio logarithmi hyperbolici ſinuum quorumuis angulorum reperiri poterunt, vbi hoc tantum eſt monendum, numerorum 2, m, n, $2n-m$ et $2n+m$ logarithmos quoque hyperbolicos ſumi debere; qui vel facile computantur vel paſſim computati reperiuntur. Ex logarithmis autem hyperbolicis inueniuntur logarithmi communes, ſi illi multipliceutur per

$$0,\,43429448193251 82$$

Fiat igitur haec multiplicatio, et tum addatur 10, eo quod in tabulis ordinariis logarithmus ſinus totius poni ſolet $= 10$, quo facto erit

$$\begin{aligned}
\text{log. ſin. A. } \tfrac{m}{n}\,90^\circ = {} & l(2n+m) + l(1n-m) + lm - 3\,ln \\
& + 9,\,59405988570218017 \\
& - \tfrac{m^2}{n^2}\,.\;\; 0,\,07002282660590191 \\
& - \tfrac{m^4}{n^4}\,.\;\; 0,\,00111726644166184 \\
& - \tfrac{m^6}{n^6}\,.\;\; 0,\,00003922914645391 \\
& - \tfrac{m^8}{n^8}\,.\;\; 0,\,00000172927079836 \\
& - \tfrac{m^{10}}{n^{10}}\,.\;\; 0,\,00000008436298629 \\
& - \tfrac{m^{12}}{n^{12}}\,.\;\; 0,\,00000000434871550
\end{aligned}$$

$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}.\ 0,00000000023193121$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}.\ 0,00000000001265907$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}.\ 0,00000000000070268$$
$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}.\ 0,00000000000003951$$
$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}.\ 0,00000000000000224$$
$$-\frac{m^{24}}{n^{24}}.\ 0,00000000000000013$$

Huius igitur expreſſionis ope logarithmi ſinuum ad duodecim atque etiam plures figuras computari poterunt: ſi quidem $\frac{m}{n}$ ſit $< \frac{1}{2}$ quibus caſibus termini duplo pauciores ſufficiunt.

Pergamus ergo ad logarithmos coſinuum definiendos, id quod commodiſſime fiet ex aequatione coſ. A. $\frac{m}{n}\,q = \frac{n^2-m^2}{n^2}\cdot\frac{9n^2-m^2}{9n^2}\cdot\frac{25n^2-m^2}{25n^2}$. etc.

ex qua fit

$$l\,\text{coſ. A.}\ \frac{m}{n}\,90^\circ = l\,\frac{n^2-m^2}{n^2}$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\text{etc.}\right)$$
$$-\frac{m^4}{2n^4}\cdot\left(\frac{1}{9^2}+\frac{1}{25^2}+\frac{1}{49^2}+\text{etc.}\right)$$
$$-\frac{m^6}{3n^6}\cdot\left(\frac{1}{9^3}+\frac{1}{25^3}+\frac{1}{49^3}+\text{etc.}\right)$$
$$-\frac{m^8}{4n^8}\cdot\left(\frac{1}{9^4}+\frac{1}{25^4}+\frac{1}{49^4}+\text{etc.}\right)$$
etc.

ſeu ſummis proxime ſumendis erit

$$l\,\text{coſ. A.}\ \frac{m}{n}\,90^\circ = l(n-m)+l(n+m)-2\,ln$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\cdot 0,23370055013616982735$$
$$-\frac{m^4}{n^4}\cdot 0,00733901580209602727$$
$$-\frac{m^6}{n^6}\cdot 0,00048235888031404063$$
$$-\frac{m^8}{n^8}\cdot 0,00003879475632402982$$
$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0,00000340827260896510$$

$$-\frac{m^{12}}{n^{12}} \,.\, 0,0000003143080971 8659$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}} \,.\, 0,0000000298915027 4450$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}} \,.\, 0,0000000029046446 7239$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}} \,.\, 0,0000000002868263 9518$$
$$-\frac{m^{20}}{n^{20}} \,.\, 0,0000000000286807 6974$$
$$-\frac{m^{22}}{n^{22}} \,.\, 0,0000000000028969 7956$$
$$-\frac{m^{24}}{n^{24}} \,.\, 0,0000000000002950 6024$$
$$-\frac{m^{26}}{n^{26}} \,.\, 0,0000000000000302 6249$$
$$-\frac{m^{28}}{n^{28}} \,.\, 0,0000000000000031 2232$$
$$-\frac{m^{30}}{n^{30}} \,.\, 0,0000000000000003 2379$$
$$-\frac{m^{32}}{n^{32}} \,.\, 0,0000000000000000 3373$$
$$-\frac{m^{34}}{n^{34}} \,.\, 0,0000000000000000 0352$$
$$-\frac{m^{36}}{n^{36}} \,.\, 0,0000000000000000 0037$$
$$-\frac{m^{38}}{n^{38}} \,.\, 0,0000000000000000 0004$$

Hoc modo igitur reperitur logarithmus hyperbolicus cosinus cuiusque anguli, existente logarithmo sinus totius $= 0$. At logarithmus ordinarius obtinebitur, si iste logarithmus multiplicetur per

$$0,4342944819032518 2$$

atque ad eum addatur 10. logarithmus scilicet sinus totius in tabulis receptus: erit igitur

$$\text{log. cos. A} \,.\, \frac{m}{n}\, 90^\circ = 10,0000000000000000$$
$$-2\,ln + l(n-m) + l(n+m)$$
$$-\frac{m^2}{n^2} \,.\, 0,1014948593418 92$$
$$-\frac{m^4}{n^4} \,.\, 0,0031872940654 51$$
$$-\frac{m^6}{n^6} \,.\, 0,0002094858000 17$$
$$-\frac{m^8}{n^8} \,.\, 0,0000168483485 97$$

$$-\frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,0000001480193986$$
$$-\frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,0000000136502272$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,0000000012981715$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,0000000001261471$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,0000000000124567$$
$$-\frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,0000000000012456$$
$$-\frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,0000000000001258$$
$$-\frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,0000000000000128$$
$$-\frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0,0000000000000013$$
$$-\frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0,0000000000000001$$

Hinc igitur inuenientur logarithmi vulgares cosinuum quorumcunque angulorum, idque ad 14 figuras in fractionibus decimalibus.

Q E I.

§. 29. Ex datis logarithmis sinuum et cosinuum inveniuntur primo statim logarithmi secantium et cosecantium. Deinde cum tangentis logarithmus prodeat, si ab aggregato logarithmorum sinus totius et sinus anguli dati subtrahatur logarithmus cosinus, erit pro logarithmis hyperbolicis posito logarithmo sinus totius $= 0$;

$$l \text{ tang. A} \cdot \frac{m}{n} 90^\circ = l\,\frac{2n+m}{n+m} + l\,\frac{2n-m}{n-m} - l\,\frac{n}{m}$$
$$-0,9347116558304 35$$
$$+\frac{m^2}{n^2} \cdot 0,0724670334241 03$$
$$+\frac{m^4}{n^4} \cdot 0,0047664147486 23$$
$$+\frac{m^6}{n^6} \cdot 0,0003920304324 78$$
$$+\frac{m^8}{n^8} \cdot 0,0000348129631 62$$

+

$$+ \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,0000032140196 54$$
$$+ \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,000000304294809$$
$$+ \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,00000002935746 1$$
$$+ \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,000000002875496$$
$$+ \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,000000000285208$$
$$+ \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,00000000002858 9$$
$$+ \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,000000000002891$$
$$+ \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,00000000000029 4$$
$$+ \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0,000000000000030$$
$$+ \frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0,000000000000003$$

Huius expreſſionis autem negatiuum dabit cotangentis anguli $\frac{m}{n}$ 90° logarithmum hyperbolicum. Haecque expreſſio magnam afferet vtilitatem in Hydrographia, in quam ab Halleio logarithmi tangentium ſunt introducti.

§. 30 Simili modo logarithmi vulgares tangentium hinc inuenientur, erit ſcilicet

$$\text{log. tang. A. } \frac{m}{n} 90^\circ = l \frac{2n+m}{n+m} + l \frac{2n-m}{n-m} - l \frac{n}{m}$$
$$+ 9,594059885702190$$
$$+ \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,031472032735990$$
$$+ \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,002070027623789$$
$$+ \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,000170256653563$$
$$+ \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,000015119077799$$
$$+ \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,000001395831000$$
$$+ \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,000000132153556$$
$$+ \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,00000001274978 3$$
$$+ \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,000000001248812$$

+

$$+\frac{m^{18}}{n^{18}} \,.\, 0,000000000123864$$
$$+\frac{m^{20}}{n^{20}} \,.\, 0,000000000012416$$
$$+\frac{m^{22}}{n^{22}} \,.\, 0,000000000001256$$
$$+\frac{m^{24}}{n^{24}} \,.\, 0,000000000000128$$
$$+\frac{m^{26}}{n^{26}} \,.\, 0,000000000000013$$
$$+\frac{m^{28}}{n^{28}} \,.\, 0,000000000000001$$

Quodſi hinc quaeratur logarithmus tangentis anguli 45. graduum erit $n = 2$ et $m = 1$, fietque ſumma ſeriei

$$\begin{array}{r}
0,0078680081839977 \\
1293767264868 \\
26602602119 \\
590588976 \\
13631162 \\
322640 \\
7782 \\
191 \\
4 \\
\hline
0,0080001056257721
\end{array}$$

logarithmi vero numerorum naturalium ſunt

$$\begin{array}{rl}
l\,5 = & 0,6989700043360188 \\
-l\,2 = & 0,3010299956639811 \\
\hline
 & 0,3979400086720377 \\
\text{addatur} & 9,5940598857021902 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9,9919998943742279 \\ \text{itemque, } 0,0080001056257721 \\ \hline 10,0000000000000000 \end{array}$$

qui est logarithmus tangentis anguli 45. grad.

§. 32. Quodsi quis igitur voluerit tabulas sinuum et tangentium eorumque logarithmorum computare ad duodecim figuras in fractionibus decimalibus, dum tabulae vsu receptae eas tantum ad septem figuras exhibent; is sequentibus regulis vti poterit. Propositus scilicet sit angulus $\frac{m}{n}$ 90. graduum erit.

$$\begin{array}{lll}
\text{sin. A. } \frac{m}{n}\,90^\circ = & + \frac{m}{n} & .\ 1,5707963267949 \\
& - \frac{m^3}{n^3} & .\ 0,6459640975062 \\
& + \frac{m^5}{n^5} & .\ 0,0796926262461 \\
& - \frac{m^7}{n^7} & .\ 0,0046817541353 \\
& + \frac{m^9}{n^9} & .\ 0,0001604411848 \\
& - \frac{m^{11}}{n^{11}} & .\ 0,0000035988432 \\
& + \frac{m^{13}}{n^{13}} & .\ 0,0000000569217 \\
& - \frac{m^{15}}{n^{15}} & .\ 0,0000000006688 \\
& + \frac{m^{17}}{n^{17}} & .\ 0,0000000000061
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{cos. A. } \frac{m}{n}\,90^\circ = & + & 1,0000000000000 \\
& - \frac{m^2}{n^2} & .\ 1,2337005501361 \\
& + \frac{m^4}{n^4} & .\ 0,2536695079010 \\
& - \frac{m^6}{n^6} & .\ 0,0208634807633 \\
& + \frac{m^8}{n^8} & .\ 0,0009192602748 \\
& - \frac{m^{10}}{n^{10}} & .\ 0,0000252020424
\end{array}$$

+

$$+\frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,0000004710875$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,0000000063866$$
$$+\frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,0000000000656$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,0000000000005$$

$$\text{tang. A. } \frac{m}{n}\, 90^\circ = \frac{m}{n-m} \cdot 0,6366197723675$$
$$+\frac{m}{n+m} \cdot 0,6366197723675$$
$$+\frac{m}{n} \cdot 0,2975567820597$$
$$+\frac{m^3}{n^3} \cdot 0,0186886502773$$
$$+\frac{m^5}{n^5} \cdot 0,0018424752034$$
$$+\frac{m^7}{n^7} \cdot 0,0001975800714$$
$$+\frac{m^9}{n^9} \cdot 0,0000216977245$$
$$+\frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0,0000024011370$$
$$+\frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0,0000002664132$$
$$+\frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0,0000000295864$$
$$+\frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0,0000000032867$$
$$+\frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0,0000000003651$$
$$+\frac{m^{21}}{n^{21}} \cdot 0,0000000000405$$
$$+\frac{m^{23}}{n^{23}} \cdot 0,0000000000045$$
$$+\frac{m^{25}}{n^{25}} \cdot 0,0000000000005$$

$$\text{cot. A. } \frac{m}{n}\, 90^\circ = \frac{n}{m} \cdot 0,6366197723075$$
$$-\frac{m}{2m-n} \cdot 0,3183098861837$$
$$-\frac{m}{2n+m} \cdot 0,3183098861837$$
$$-\frac{m}{n} \cdot 0,2052888894145$$
$$-\frac{m^3}{n^3} \cdot 0,0065510747882$$

$$- \frac{m^5}{n^5} \cdot 0,0003450292554$$
$$- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0,0000202791060$$
$$- \frac{m^9}{n^9} \cdot 0,0000012366527$$
$$- \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0,0000000764959$$
$$- \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0,0000000047597$$
$$- \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0,0000000002969$$
$$- \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0,0000000000185$$
$$- \frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0,0000000000011$$

---

log. sin. A. $\frac{m}{n}$ 90° $= l(2n+m) + l(2n-m) + lm - 3\,ln$

$$+ 9,5940598857021$$
$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,0700228266059$$
$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,0011172664416$$
$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,0000392291464$$
$$- \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,0000017292708$$
$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,0000000843629$$
$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,0000000043487$$
$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,0000000002319$$
$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,0000000000126$$
$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,0000000000007$$

---

log. cos. A. $\frac{m}{n}$ 90° $= 10,00000000S0000$

$$+ l(n+m) + l(n-m) - 2ln$$

$$-\frac{m^2}{n^2} \,.\, 0,1014948593419$$
$$-\frac{m^4}{n^4} \,.\, 0,0031872940654$$
$$-\frac{m^6}{n^6} \,.\, 0,0002094858000$$
$$-\frac{m^8}{n^8} \,.\, 0,0000168483486$$
$$-\frac{m^{10}}{n^{10}} \,.\, 0,0000014801940$$
$$-\frac{m^{12}}{n^{12}} \,.\, 0,0000001365023$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}} \,.\, 0,0000000129817$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}} \,.\, 0,0000000012614$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}} \,.\, 0,0000000001245$$
$$-\frac{m^{20}}{n^{20}} \,.\, 0,0000000000126$$
$$-\frac{m^{22}}{n^{22}} \,.\, 0,0000000000013$$

$$\text{log. tang. A}\,\frac{m}{n}\,90^\circ = l\,\frac{2n+m}{n+m} + l\,\frac{2n-m}{n-m} - l\,\frac{n}{m}$$
$$+ 9,5940598857022$$
$$+\frac{m^2}{n^2} \,.\, 0,0314720327359$$
$$+\frac{m^4}{n^4} \,.\, 0,0020700276238$$
$$+\frac{m^6}{n^6} \,.\, 0,0001702566535$$
$$+\frac{m^8}{n^8} \,.\, 0,0000151190778$$
$$+\frac{m^{10}}{n^{10}} \,.\, 0,0000013958310$$
$$+\frac{m^{12}}{n^{12}} \,.\, 0,0000001321535$$
$$+\frac{m^{14}}{n^{14}} \,.\, 0,0000000127498$$
$$+\frac{m^{16}}{n^{16}} \,.\, 0,0000000012488$$
$$+\frac{m^{18}}{n^{18}} \,.\, 0,0000000001238$$
$$+\frac{m^{20}}{n^{20}} \,.\, 0,0000000000124$$

$$+ \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,000000000000012$$
$$+ \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,0000000000000001$$

Quodſi hic logerithmus a 20. ſubtrahatur, prodibit logarithmus cotangentis eiusdem anguli $\frac{m}{n}$ 90°. Simili autem modo logarithmus coſinus a 20. ſubtractus relinquet logarithmum ſecantis, atque logarithmus ſinus a 20. ſubtractus logarithmum coſecantis.

CLAS

CLASSIS SECVNDA.

CONTINENS

PHYSICA.

DE
VI VENAE AQVEAE CONTRA PLANVM INCVRRENTIS
EXPERIMENTA,

AVCTORE

Georg. Wolffg. Krafft.

Misit ad Academiam nostram ante aliquod tempus Tab. IV. Dissertationem eruditissimam Clar. Daniel Bernoulli, cui titulus est: *De legibus quibusdam Mechanicis, quas natura constanter affectat, nondum descriptis, earumque vsu Hydrodynamico pro determinanda vi venae aqueae contra planum incurrentis*; in qua calculo elegantissimo, et ex fundamentis ab intima motus natura petitis, profundo sane ingenio determinat vim, seu impetum, quem vena aquea ex vase repleto prosiliens, et in planum aliquod oppositum incurrens, contra hoc planum exserit. Cumque theoriam exinde formatam Experimento ibidem exposito confirmasset: iussus ab Ill. Academiae Praeside sui ego, vt idem repeterem, et quae deprehenderem Academiae exponerem. Feci ergo huius Theoriae periculum summa qua potui diligentia et exactitudine. Ante vero quam enarrare possim, quid per Experimenta mea edoctus fuerim,

rim, haud abs re fore puto breuiter repetere ea, in quibus ingeniosissima Theoria Bernoulliana consistit. Pro determinanda vi venae aqueae in planum incurrentis prima Experimenta facta esse dicit in Academia Scientiarum Parisiensi, anno 1669, teste Duhammelio in Historia huius Academiae; post haec secuta esse multa alia; statuisse autem omnes Physicos ex his Experimentis, praedictam vim venae aqueae, mox ante foramen ab asserculo aliquo exceptae, aequalem esse ponderi cylindri aquei, cuius basis sit foramen per quod aqua exsilit, altitudo autem ea, quae est aquae totius supra foramen extantis. Ita iuxta hanc Hypothesin esset vis, quam aqua per GM exsiliens in planum asserculum OP exserit, aequalis ponderi cylindri aquei, cuius basis est area foraminis GM, et altitudo GA. Asserit porro, Hypothesi huic Experimenta nunquam ex asse respondisse, cuius dissensus inter Experimenta et Ratiocinia duplicem affert causam. Primo enim putant huius sententiae Patroni celeritatem aquae per GM exsilientis eam esse, quam graue aliquod libere per AG delapsum acquirere posset; quo ipso inducti sunt, vt cylindrum aqueum altitudinis AG assumerent. Sed notum hodie est, hoc non verum esse nisi foramen GM statuatur infinite paruum; in foramine autem finitae magnitudinis iactum venae aqueae exeuntis istum gradum celeritatis nunquam attingere. Secundo statuitur in hac opinione, amplitudinem venae exeuntis eandem esse quae est foraminis per quod effluit, aut vtriusque eandem esse Diametrum; sed cognitum hodie est, venam aqueam per foramen e vase erumpentem contrahi sensibiliter cum e foramine exiit; quam *venae contractionem* Newtonus primus

Tab. IV. fig. 1.

mus obſeruauit. Remidium itaque his duobus incommodis allaturus Clar. Bernoulli ſtatuit, celeritatem aquae per GM exſilientis non aſſumendam eſſe eam, quae debetur altitudini aquae ſupra foramen GA, ſed pro quolibet caſu Experimentis inquirendum eſſe in celeritatem realem, quam aqua effluens actu ipſo habet, quod per Mechanicae regulas ſemper fieri poteſt. Deinde amplitudinem venae aſſumendam eſſe non eam, quae aequalis ſit amplitudini venae contractae; aut vero euitandam eſſe hanc contractionem, quod fit, ſi aqua non per ſolum foramen GM, ſed per tubulum YE foramini GM inſertum effluit.

His praemiſſis appellat *cylindrum aqueum correctum* eum, cuius baſis eſt amplitudo venae contractae, niſi ſcil. haec contractio venae, immiſſo foramini tubulo, impediatur; et cuius altitudo eſt ea, quae debetur celeritati reali et actuali quam vena aquea mox poſt effluxum ſuum habet, et quae in quolibet caſu peculiari Experimento determinanda eſt; tandem vero ſtatuit, vim venae aqueae per tubulum YE in planum OP incurrentis aequalem eſſe duplo ponderi huius cylindri aquei correcti.

Vt igitur in hanc Theoriam Experimentis inquirerem, aſſumſi vas ligneum ABCD quadratum, cuius latus AB eſt $\frac{15}{12}$ pedis Londinenſis, et altitudo 2. pedum. Huic vaſi inſerui tubulum YE ex orichalco conſectum, interne bene politum, vt aqua eo liberius effluere poſſet. Deinde in parte anteriori vaſis adaptaui vectem STV e ligno quercino confectum, ſub angulo recto inflexum, et circa hypomochlium H liberrime mobilem; huius vectis brachio HS inſerui annulum I, ex quo dependebat lanx K

ponduſculis oneranda, et quae ope annuli I facillime hinc et inde moueri ſupra brachium poterat. In parte inferiori vero huius vectis affixus erat orbiculus OP rotundus et quercinus, tubulo YE directe oppoſitus, in quem vena incurreret; totus vero hic vectis inflexus nullo pondere in I oneratus perfectum aequilibrium ſeruabat. Vaſi ligneo AD inferne adiuncta eſt ciſta etiam lignea NR, in cuius fundo NQ amplitudo NL iactus liberi, quem vena aquea ſibi relicta efficeret, obſeruari potuit. Tandem vero ſemper curaui, vt fundus hic NQ in quouis Experimento eſſet perfecte horizontalis, et vectis inflexus non niſi ſolo orbiculo OP oneratus, eſſet in exactiſſimo aequilibrio, dum nempe ſemper effeci, vt brachium TV eſſet perpendiculo proxime applicato parallelum. His ita praeparatis cepi

EXPERIMENTVM I.

Die 2. Iunii 1736. vbi primum obſeruaui, quam amplitudinem vena aquea libere, remoto nempe vecte, effluens efficeret, et inueni in ſcala Geometrica accuratiſſime confecta diſtantiam ZL = 4542 partium talium, qualium 2000 quamproxime efficiunt pedem Londinenſem, qua menſura in ſequentibus conſtanter vtar; demiſſa nempe a fine tubuli Y perpendiculari YZ in fundum ciſtae adiunctae; ipſa vero haec perpendicularis XZ, cuius initium e medio tubuli ſumſi, erat = 2017 part. Pro amplitudine autem iactus liberi aſſumſi diſtantiam ZL, quoniam vena XL in X incipit parabolam iactus ſui deſcribere. Pondus lancis cum annulo et filamentis ſimul erat 829 Granorum talium, qualium 7680 efficiunt libram Hollandicam, pondus vero K lanci adhuc impoſitum erat

erat 700 Gran. ita vt pondus totum, aequilibrium cum vi venae aqueae erumpentis producens fuerit 1549 Gran. porro inueni H I = 2010 part. T X, cuius initium a recta per mediam brachium S T transeunte sumsi, = 2218 part. Denique vt pondus aquae, qua vas repletum erat, deprehenderem, impleui eadem aqua cylindrum, cuius diameter est 675 part. altitudo autem 685, cuius voluminis aquei pondus, detracto pondere vasis, deprehendi 13111 Gran. Diameter G M erat 89 part. Igitur pro altitudine celeritate effluxus liberi debita notum est, quod haec altitudo, supponendo semitam venae ita erumpentis esse parabolicam, sit $= \frac{ZL^2}{4XZ}$, ex quo sequitur, altitudinem celeritati actuali, qua aqua per foramen X erumpebat, debitam fuisse = 2557 part. Erat autem altitudo ipsa aquae supra foramen in vase A G = 3738, vnde apparet, quod alias cognitum est, quod celeritas actualis aquae erumpentis plane non respondeat altitudini aquae supra lumen. Quoniam nunc indagari debet pondus cylindri aquei correcti, hoc est, cylindri aquei, cuius basis est area G M, ob euitatam per tubulum venae aqueae contractionem, et altitudo = 2557 part. Sit hunc in finem vas, cuius aqua repleti pondus examinaui, $\alpha\beta\gamma\delta$, atque erunt pondera, aquae in hoc vase contentae, et aquae cylindro correcto comprehensae, inter se vti volumina horum cylindrorum, ob densitatem aquae vtrobique eandem, hoc est, vti $\beta\gamma^2.\alpha\beta$ ad GM^2 2557. Ex qua analogia inuenitur pondus cylindri aquei correcti = 850 $\frac{2}{3}$ Gran. et huius duplum = 1701 $\frac{1}{3}$ Gr. quae est ex Theoria vis venae aqueae contra orbiculum O P incurrentis. At vero datum in K pondus tolale, quod P vocabo, sustinet in statu

Tab. IV. fig. 2.

Tab. IV. fig. 1.

ſtatu aequilibrii impetum in X factum aequalem $\frac{HI}{TX} \times P$, vnde ex obſeruatione colligitur hic impetus $= 1403\frac{2}{3}$ Gr. ex quo ſequitur, Theoriam excedere pondus in Experimento obſeruatum $297\frac{1}{3}$ Granis; quodſi autem ſequamur Theoriam reiectam, ea pro pondere praebet 1243 Gr. quare haec deficit a pondere in Experimento obſervato 160 Granis. Fuit etiam in hoc Experimento prominentia tubi extra vas maius, nempe G Y = 218 part atque diſtantia orbiculi O P ab extremo tubuli Y = 135 part.

EXPERIMENTVM II.

Inſtitutum fuit die 3. Iunii, atque in eo vas maius, leniter aquam ſemper affundendo, conſtanter plenum fuit ſeruatum, tubus vero E Y vtrinque breuior factus eſt. Tum inueni diſtantiam Z L = 4608 part. Y Z = 2058, pondus totale in I appenſum 1549 Gran. H I = 2095, G M = 89; pondus vero aquae cylindrico vaſe $\alpha\beta\gamma\delta$ contentae retinui quale illud heri repereram. Ex his itaque fit altitudo debita celeritati aquae in X exſilientis = 2579 part. pondus cylindri aquei correcti = 860 Gran. et huius duplum = 1720 Gran. Colligitur vero ex obſeruatione impetus in orbiculum realiter factus = 1463 Gran. vnde Theoria rurſus pondus in Experimento obſeruatum excedit 257 Granis.

EXPERIMENTVM III.

Feci die 5. Iunii vaſe maiori conſtanter pleno ſervato, tubi vero prominentiam G Y plane abſcindi curaui, retinuique ſolam G E. Atque tum inueni diſtantiam N L = 4755 part. M N e medio foraminis G M ſumtam = 2053, pondus totale in I appenſum = 1549 Gran.

H I =

HI = 2127; GM = 86, pondus aquae, cylindrico vase alio contentae, cuius diameter est = 453, altitudo = 744, deprehendi = 6191 Gran. ex quibus oritur altitudo debita celeritati aquae in GM exsilientis = 2753 part. Pondus cylindri aquei correcti = 825½ Gran. et huius duplum 1651 Gran. Colligitur autem ex obseruatione impetus in orbiculum realiter factus = 1486 Gran. vnde Theoria denuo pondus ab Experimento indicatum excedit 165 Granis.

EXPERIMENTVM IV.

Institui die 18. Iunii praesente et iuuante Clar. Eulero nostro; et, maiori vase rursus constanter pleno seruato per continuam lenem affusionem aquae, inuenimus distantiam NL = 4557 part. MN = 2044 part. pondus totale in I appensum = 1609 Gran. HI = 1928 part. GM = 88 part. TX = 2213, pondus aquae cylindricae, cuius diameter = 686, et altitudo = 442, erat 8477 Gran. Ex quibus emergit altitudo debita celeritati aquae in GM exsilientis = 2539 part. pondus cylindri aquei correcti = 801 Gran. et huius duplum = 1602 Gran. Colligitur autem ex obseruatione actualis impetus in orbiculum factus = 1401 Gran. vnde Theoria adhuc pondus ab Experientia indicatum excedit 201 Granis.

EXPERIMENTVM V.

Sumtum fuit die 2. Februarii 1737, et repetitum die 7. Febr. praesente Ill. Praeside et plerisque Membris Academiae. Inuenta autem fuit distantia NL = 4469, MN = 2015, pondus totale in I appensum = 1549 Gran.

Gran HI = 1983, GM = 86, TX = 2188, pondus aquae cylindricae, cuius diameter 128, altitudo 278, erat 190 Gran. Ex quibus emergit altitudo debita celeritati aquae in GM exsilientis = 2478 part., pondus cylindri aquei correcti = 764 Gran. et huius duplum = 1528 Gran. Colligitur autem ex obseruatione actualis impetus in orbiculum OP factus = 1403 Gr. vnde rursus Theoria pondus ab experientia indicatum excedit 125 Granis.

EXPERIMENTVM VI.

Sumtum est ab ipso Clar- Bernoulli, et in laudatissima ipsius Dissertatione descriptum, cuius circumstantias ad meam Figuram referam. Erant itaque ZL = 900 part. quarum 400 faciunt pedem Parisinum; YZ = 900 part. pondus in I appensum dicit fuisse paulo maius quam 1020 Gran. sumam ergo 1021 Gran. Erat autem in vecte ipsi adhibito HI = TX; et GM = 19 part. pondus aquae cylindricae, cuius diameter 92 et altitudo 131 part, erat 122 Drachmar. vel 7320 Gran. Ex his emergit altitudo debita celeritati aquae libere exsilientis = 225 part. pondus cylindri aquei correcti = 536 Gr. huius duplum = 1072. Obseruatio vero ipsa dedit impetum aquae in orbiculum = 1021 Gr. hinc Theoria etiam tum pondus ab experientia indicatum excessit 51 Granis.

DE

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE 1738. INSTITVTAE

A

Georgio Wolffg. Krafft.

§. 1.

Durante hoc anno 1738. obseruatae fuerunt a me altitudines Barometri singulis mensibus maximae et minimae sequentes:

		maxima	minima	diff.
1738.	Ianuarius	30. 22	28. 55	1. 67
	Februarius	30. 67	28. 26	2. 41
	Martius	29. 90	28. 99	0. 91
	Aprilis	30. 15	29. 20	0. 95
	Maius	29. 98	29. 31	0. 67
	Iunius	29. 78	29. 38	0. 40
	Iulius	30. 04	29. 22	0. 82
	Augustus	30. 02	29. 15	0. 87
	September	30. 21	29. 38	0. 83
	October	30. 78	28. 90	1. 88
	Nouember	30. 74	28. 90	1. 84
	December	30. 27	28. 75	1. 52

vbi quidem rursus, numeri ante punctum positi denotant partes duodecimas pedis Londinensis, hoc est, pollices Londinenses; numeri autem post punctum positi significant horum pollicum partes centesimas, vti in praecedentium annorum obseruationibus factum est.

§. 2. Apparet ex his altitudinibus Barometri, earum maximam hoc anno fuiſſe die 31. Octobris, in perfecta ſerenitate aliquot dierum, ſpirante facili Euro, cum frigore mediocri; quia vero haec altitudo maxima illam quae praecedente anno 1737 obſeruata fuit, nempe 30. 95, non excedit: haec adhucdum maxima omnium hic loci obſeruatarum manet. Minima autem Barometri altitudo hoc anno fuit 28. 26, quae extitit die 23. Febr. coelo nubilo aliquot dierum, variante vento, vt plurimum tamen flante Auſtro, frigore adhuc mediocri, et multa cadente niue. Quae igitur minima altitudo huius anni, cum antea inuentam, nempe 28. 18 ſuperet: manet adhuc idem ſpatium variationum Barometricarum praecedente anno ſtabilitum, nempe 2. 77. Atque id quoque, quod in praecedentibus obſeruationibus Barometricis iam obſeruaui, etiam hoc anno confirmatur; variationes nempe menſtruas in primis et vltimis anni menſibus eſſe maiores, minores autem in mediis. Quam ipſam obſeruationem ſtabilitam quoque deprehendo ex altitudinibus Barometricis Telone Martio (Toulon) in Gallia obſeruatis, atque a Rev. P. Du Chatelard ad Clariſſ. De l'Isle miſſis.

§. 3. Sequentem adhuc annotationem, quamuis magni momenti non ſit, tamen non puto plane contemnendam. Ex ſubitaneo lapſu vel aſcenſu mercurii in Barometro ventos oriri notum eſt; cum hoc indicio ſit ſublatum eſſe aëris noſtri cum vicinis regionibus aequilibrium. Sin itaque aër omnino quietus hac ratione commouendus, et ventus excitandus ſit, plerumque integri diei tempus, et plus aliquando, requiritur, antequam toti maſſae aëreae

motus

motus in plagam aliquam conſpirans communicetur, prout ex ſequentibus obſeruationibus pateſcit, in quibus ſignificat ventos N Boream, O Eurum, S Auſtrum, W Zephyrum, adſcriptique numeri exprimunt vim venti, 1 paruum, 2 ſenſibilem, 3 fortem, 4 furentem.

				Barom.	Ventus	
I.	1737 Decembr.	30	10 pm	30. 22	NW	2
		31	8 am	27	0	0
			1 pm	27	0	0
	1738 Ianuarii	1	8 am	14	0	0
			10 pm	00	0	0
		2	8 am	29. 80	0	0
			1 pm	65	SW	1
			11 pm	30	SW	4
II.	1738 Ianuarii	25	10 pm	34	NW	3
		26	8 am	56	0	0
			10 pm	12	0	0
		27	8 am	22	0	0
			10 pm	17	0	0
		28	8 am	07	W	3
			11 pm	10	W	3
III.	1738 Octobris	2	12 mer	30. 38	NO	2
			10 pm	35	0	0
		3	8 am	33	0	0
			9 pm	23	0	0
		4	2 pm	08	0	0
			11 pm	29. 99	SO	2
		5	3 pm	60	SO	2

§. 4. Multis obſeruationibus mihi conſtat, accidere quam ſaepiſſime vt oriente circa veſperam Luna nebulae et nubes, totum ante diem obſuſcantes, diſpellantur, reddaturque aër perfecte ſerenus, quod praecipue factum eſt diebus ſeptembris 11. 12. 13. 14 et 15. anni 1738. Cuius quidem phaenomeni cauſam in mutua actione Lunae et Terrae poſitam eſſe exiſtimo. Cum enim extra omne dubium conſtitutum ſit, Lunae actionem ſiue attractionem in Terras redundantem aeſtus marinos excitare, hoc eſt, aquas ad ſe quaſi rapere atque altius extollere: multo facilius eadem haec actio tenues nebulas in ſummo aëre circumuolitantes afficiet, atque eas altius attollendo rarefaciet, penitusque diſpellet; ita vt probabile ſit, extimam Atmoſphaerae ſuperficiem ab actione Lunae hic attolli, illic deprimi, atque ſic aeſtus marinos quodammodo imitari.

§. 5. Auroras Boreales hoc anno obſeruaui ſequentes:

1738. Februarii 1. in perfecta ſerenitate viſa fuit Lux Borea, ſed humilis tantum, flante Borea.

Auguſti 8. in perfecta quoque ſerenitate viſa eſt aurora Borealis, ſed debilis, nullo ſpirante vento.

24. poſt pluuias, et frequentes coruſcationes verſus SO, apparuit tenuis Lux Borea, nullo flante vento, quam inſecuta eſt poſtero die ſerenitas.

Septembris 8. in perfecta ſerenitate viſa fuit Lux Borea debilis, ſpirante Auſtro.

Octobris

1738. Octobris 1. in perfecta ſerenitate aliquot dierum, flante Borea, apparuit Lux Borea, quam ſequebatur congelatio vniuerſalis.

Nouembris 21. poſt pluuias et nubes circa horam 10. p. m. coelum ſerenum redditum fuit, atque viſa Lux Borea, redeuntibus poſtea nubibus et pluuiis.

25. Aurora Borealis obſeruata fuit nubibus permixta, quam nix ſequebatur.

§. 6. Prima congelatio facta eſt hoc anno, in ſerenitate aliquot dierum, d. 2. Octobris, quae per aliquot dies ſubſtitit flante fortiter Euro-Borea. Contigit ergo haec prima congelatio ipſo die Nouilunii tum celebrati, quo die ſimul erat ☌☉♂, praecedente Aurora Boreali. Inſequente hanc primam congelationem die, nempe d. 3 Octobris obſeruatae ſunt horis matutinis ingens nebula, et pruina vniuerſalis. Cum enim per aliquot dies praecedentes perfecta fuiſſet ſerenitas, aërque ita grauis, vt Barometrum ad 30. 38 tandem eleuauerit, factum eſt, vt die 3. Octobris ſubito illud deprimeretur, atque ſic exhalationes praecedentium dierum calore e terra niue libera excitatae, delaberentur, et terris frigidis adſperſae congelarentur.

§. 7. Ope Thermometri mercurialis, quod in praecedentibus deſcriptum fuit, atque ſemper ita locato, vt ab aëre libero quidem afficeretur, ſed a ventis et Sole tutum eſſet, obſeruaui hoc anno maximum calorem fuiſſe d. 22. Iulii, quo die h. 2. p. m. Thermometrum oſtendebat gradum $112\frac{4}{10}$, qui reſpondet Thermometri Fahrenheitiani gradui 77. Mutantur enim gradus Thermometri Delisliani in Fahrenheitianos, ſi illi gradus ſubſtituantur

pro *m* in hac formula, $212 - \frac{6m}{5}$, quia illius gradus 0 et 150 respondent huius gradibus 212 et 32. In sequente die 25 Iulii idem fere calor rediit, nempe graduum $112\frac{5}{15}$, quo die Thermometrum libero soli expositum hora $2\frac{1}{2}$ p.m. monstrauit tandem gradum 91, vel Fahrenheitianum 103, quo etiam die grauis tempestas cum imbre vehementi ingruit. Maximum vero frigus obtinuit die 1 Decembris, ostendente Thermometro in ipso meridie gradum $176\frac{5}{15}$, qui congruit cum Fahrenheitiano $0\frac{1}{5}$, flante mediocri Euro, in serenitate aliquot dierum.

§. 8. Tonitrua hoc anno audita fuerunt diebus sequentibus, Maii 30, cum pluuia et vehementi Zephyro hora 8 p. m. Iunii 5 sine pluuia; 19 cum imbre subito et breui, 21 sub iisdem circumstantiis, 26 orta est grauis tempestas, cum imbre vehementi et vento fortissimo ex plaga Zephyro-Australi. Iulii 15 cum pluuia, 17 cum pluuia breui, redeuntibus tonitruis circa vesperam, 19 cum imbre vehementi, 21. 22. 23. aëre semper nubilo et pluuio, 25 oriebatur grauis tempestas et imber vehemens, flante fortissimo Borea-Zephyro per horae spatium, 27 toto tempore antemeridiano, cum forti pluuia, 30 inter pluuias. Augusti 10 cum forti pluuia, praecedente er redeunte serenitate, 19. 22 cum pluuiis, 24 insequente Aurora Boreali. Septembris 5 post pluuiam; quibus adiungo, primas hirundines mihi visas fuisse d. 4 Maii.

§. 9. Pluuias et Niues aestimatione tantum perpendens inuenio in hoc anno dies 61 integros pro pluuiosis et niuosis esse habendos, atque mensium habita ratione

Ianua-

Ianuarium niuium fuiſſe feraciſſimum. Fluuii noſtri Neuae tumores experti ſumus Ianuarii 9, quo die flante fortiſſimo Auſtro-Zephyro inundatio magna extitit, quae coepit hora matutina ſexta, 24. Iunii 15. Septembis 2.

§. 10. Procellas experti ſumus diebus ſequentibus, Ianuarii 2. 8. 9 cum inundatione, 17. 18. Martii 27. Iunii 15 cum egreſſu fluuii, 26 cum graui tempeſtate, Septembris 2.

§. 11. Reliqua, quae referri huc debent, comprehendam ſequentibus. Februarii 17 hora 11 p. m. Halo Lunaris obſeruatus fuit breui tempore durans, cum coelum per multos antea dies ſerenus, nec niſi nebulis quolibet fere mane obortis turbatum, nubibus obduci inciperet, cadente Barometro, et tandem biduo poſt inſecuta niue copioſa. Aprilis 27 hora 4 p. m. viſa fuit Iris duplex poſt ſubitas pluuias cadente Barometro obortas. Octobris 30, in perfecta ſerenitate, obſeruati fuerunt vapores e fluuio aſcendentes ita copioſi, vt nebulae inſtar aquae ſoli inſiderent, toto die durantes, circa meridiem autem tenuiores redditae; quod idem quoque accidit Nouembris 1. Reliquae nebulae terram occupantes hoc anno fuerunt Ianuarii 24. 31. Februarii 7. 9. 13. 14. 16. 17. Martii 9. 12. 22. Aprilis 3. 4. 7. 10. 20. Iunii 28. Iulii 11. 13. 14. 21. Auguſti 15. 17. 21. 22. Septembris 12. 15. 24. 26. 27. Octobris 3. 7. 21. Nouembris 9. 16 18. Decembris 4. 7. 22. De ventis quoque id adhuc obſervandum eſt, accidiſſe huius anni die 13 Nouembris, quod ſilentibus iis per plures dies, hoc die circa horam 8. a. m. coeperit ſpirare Auſtro-Zephyrus ſatis fortis, remittens vero aliquid de vi ſua circa horam 1. p. m. pluuiis et

niuibus

niuibus interea mixtim cadentibus; hora autem 8. p. m. ſubito mutatus is eſt in Boream fortem et increſcentem, qui, ceſſante omni pluuia et regelatione, niuem copioſam attulit, dum toto die Barometrum caderet, poſtero vero die aſcenderet iterum, cum frigore mediocri ſed increſcente. Illud denique praeterire non poſſum, quamuis praefiſcine id dictum velim, accidiſſe a menſis Nouembris die 17 vsque ad 24, vt continua regelatio regnaret; ſed cum die 24 celebrata fuiſſet ☌☉☍, ſubito mutatum eſſe aërem, vt frigus eo ipſo die auctum fuerit, et die 26 vsque ad gradum 15 Thermometri Fahrenheitiani peruenerit.

§. 12. Referam nunc annotationes quosdam ad rem Meteorologicam forſan non inutiles, qnos e Diario ſimilium obſeruationum a Clariſſ. Gmelino in itinere verſus Kamtſchatkam verſante ſummo ſtudio factas, et ab Academia mecum communicatas deprompſi. Fertilior enim in hoc ſtudii genere ſemper eſt ſeges ea, quae alienis ipſa ſe adauget herbis; et falcem in propriam et peregrinam ſimul immittit meſſem; quippe quae compilatio horrea Meteorologiae ſola ditat. Factae ſunt obſeruationes, quas in vſum nunc meum vertam, in Kirengenſi munimento, ad confluentem fluuiorum Kirengae et Lenae ſito, ab Octobris 1. 1737 ad 28 Febr. 1738. Latitudo huius munimenti ex recentiſſimis Mappis Geographicis deſumta inuenitur $57^{\circ}\frac{1}{2}$, et diſtantia inter illud et Petropolin reperitur milliarium Germanicorum iuxta Homannum 525, iuxta Stralenbergium $577\frac{1}{2}$, iuxta Kirilouium vero $637\frac{1}{2}$, quorum aſſumam medium 580 dictorum milliarium, quae in parallelo 60 graduum efficiunt quam proxime differentiam

tiam miridianorum Petropolitani et Kirengenſis 5^h $9'$. Quibus praemonitis ſequentia deduxi ex iſtis obſeruationibus Corollaria.

§. 13. Primo quidem Kirengae altitudo maxima Barometri in hoc quadrimeſtri tempore fuit partium milleſimarum pedis Regii Pariſienſis 2770 Decembris 10, 1737, coelo ſereno per aliquot dies. Minima autem fuit Decembris 26, 1737, et Februarii 14, 1738, nempe 2627 dictarum partium, coelo nuoſo, et flante Zephyro cum vi ſumma, vtraque vice. Harum altitudinum differentia, ſiue variatio Barometri quadrimeſtris, ergo ibi fuit 143 partium earundem. Hic vero loci obſeruata fuit eodem durante tempore variatio Barometri $2\frac{69}{155}$ pollicum duodecimalium pedis Londinenſis, qui coincidunt cum 224 partibus milleſimis huius pedis, quae, poſita ratione inter pedem Pariſinum et Londinenſem vti 16 ad 15, efficiunt 210 partes milleſ. pedis Pariſini. Itaque in hoc ſpatio quadrimeſtri variatio Barometri Petropolitana maior fuit quam Kirengenſis.

§. 14. Secundo maximum frigus Kirengae obſeruatum fuit die 9 Ianuarii 1738, notante Thermometro Deliſliano gradum 275, qui congruit cum Fahrenheitiano — 118, ſiue 118 infra 0; quod frigus ſane ingens fuit; cum omni adhibito artificio, ope nimirum ſpiritus nitri adeo frigefacti vt gelari inciperet, Fahrenheitianum Thermometrum non potuerit magis deprimi quam ad gradum 40 infra 0, vel ad gradum 210 noſtri Thermometri, vti apparet ex *Elementis Chemiae Boerhauianis pag.* 162 *Tomi I.*

§. 15. Tertium eſt, quod in eodem Thermometro Kirengenſi prorſus inexſpectatum accidit, mutatio nempe adeo ſubita, vt aſcenſus mercurii oculis diſtingui potuerit. Nam Nouembris 27, 1737, erat illud Thermometrum tempore matutino in gradu 218, tempore meridiano in gradu 270, qua obſeruatione vix conſignata cum denuo accurreret Clar. Gmelinus ad Inſtrumentum, iam illud notabat 265, et continuo ipſo praeſente et adſtante altius aſcendit, donec poſt effluxum ſemihorii oſtenderet 195, et veſperi hora 11 monſtraret 176. Eodem hoc tempore ventorum mutatio ſequens obſeruata fuit. Die Novembris 25 deſinebat ſpirare Boreas, diebus 26 et 27 nullus erat ventus; d. 28 vero hora 4 matutina flare coepit Auſter cum vi ſumma, ſecutae ſunt eodem die niues minutae humidae, cadente Barometro, incaluitque aër poſt aliquot dies vſque ad gradum 163. Idem hoc phaenomenon accidit quoque 1737 Decembris 11, vt nempe Thermometrum circa horam 3 p. m. tempore 13 minutorum primorum a gradu 252 ſubito et continuo motu aſcenderit ad gradum 210, hoc eſt per 42 gradus. Venti eodem quo antea modo ſe habuerunt. Erat enim diebus 9^{b}, 10, et 11, nullus ventus, die vero 12 primo mane exoriebatur vehementiſſimus Zephyrus, Barometro cadente, et inſequente tempeſtate calida aliquot dierum vſque ad gradum 168.

§. 16. Huius quidem vtriusque inconſueti phaenomeni cauſa ex eo mihi deriuanda eſſe videtur, quod in vtroque caſu vehementes et ſubiti venti exorti fuerint. Cum enim durante primo aſcenſu, hoc eſt, Nouembris 27 hora 11 p. m. nullus ventus ſpiraret, et deinde poſt me-

diam

diam noctem insequentem procellosus Auster insurgeret: concludere licet, hunc ventum e terris versus Austrum sitis egressum iam tum initium sumsisse cum praecipiti ascensu Thermometrum variatum fuit, atque primum quidem aëri Kirengensi vicinorumque regionum magnam vim vaporum humidorum et calidorum infudisse, qua is subito incalescebat; hac itaque vaporum accumulatione aëri permixda Thermometrum multo citius affectum fuisse, quam motus ipse aëri Kirengensi potuerit imprimi, vt et is omnis eadem directione et celeritate, quam incurrens aër, tandem latus fuerit, quod post 5 circiter horas demum factum est. Idem de altero casu iudicium ferri poterit, quo aliquot post phaenomenon horis vehemens Zephyrus exoriebatur. Cum enim eo, et multis praecedentibus diebus constans regelatio Petropoli, et sine dubio etiam in locis Kirengam inter et Petropolin iacentibus sentiretur: etiam hoc casu fieri potuit, vt excitatus in loco occidentaliori ventus subitus aërem Kirengensem maxima humidorum et calidorum humorum copia inundauerit, atque ea ascensum subitum Thermometrorum prius effecerit, quam violentus is motus toti aëris Kirengensis massae conciliaretur.

§. 17. Quarto vt aliquid etiam de ratione directionis ventorum in tanta distantia 580 milliarium Germanicorum innotescat, apponam eorum aliquot exempla:

		Kirenge		Petropoli
Octobris	10 —	W 4	—	W 4
	14 —	W 4	—	0 0
	20 —	W 4	—	0 0
	24 —	W 4	—	W 3

Nouembris	18	—	W 4	—	S	1
	20	—	W 4	—	S	3
Decembris	19	—	W 4	—	O	2
	23	—	W 4	—	O	2
	24	—	W 4	—	O	2
	26	—	W 4	—	O	0

Ex his deduci poteſt, probabile eſſe dari quandoque Zephyrum, qui ex hac regione noſtra vſque ad Kirengam, et multo longius, continuo tractu feratur, adeoque milliaria forſan 600 aut 700 peruagetur, quod ex Octobris 10, 24, apparet. Illud enim praetereo, quod in tanto locorum interuallo diuerſi et directione et impetu venti exiſtere poſſint, quippe quod in locis etiam multo minus diſtantibus ſaepiſſime obſeruatum fuit.

§. 18. Quinto, quod phaenomenum die 5 Decembris 1737 apud nos conſpicuum in Diario Meteorologico praecedentis anni retuli, rubedo nimirum coeli inconſueta, et multorum ſpectatorum animos terrens, de qua etiam in Nouis publicis mentio facta eſt, viſam eam fuiſſe aliquibus in locis ſimul cum globo igneo in aëre diſrupto: eius iam cauſa vera, quae eo tempore in ſuſpicionem tantum veniebat, nunc nobis conſtat. Cum enim rubedo haec fortiſſime appareret apud nos circa horam 10 nocturnam, hoc eſt, in tempore Kirengenſi die 6 Decembris circa horam 3 matutinam, (§. 12.) refert Clariſſ. Gmelinus die 6 Decembris hora circiter 1 poſt mediam noctem ibi viſam fuiſſe magnam Auroram Borealem, rubro colore ludentem, et radiis fere in ipſum Zenith elevatis; teſtatur vero ſimul, *plagam occidentalem*, *licet nullis radiis*, directis ſcilicet, reflexi enim non impediebantur,

tur, *aut arcu lucido conspicua fuerit, luce tamen nescio quadam* inconsueta oculos feriisse. Similis rubedo visa fuit hic Decembris 22; sed Kirengense coelum nubibus obtectum fuit, adeoque eandem causam, vti etiam hic factum est, nebulis abscondidit. Similis rubedo coeli, orta ex eadem hac causa, obseruata fuit Vpsaliae, anno 1726 d. 8. Octobris, st. v. memorante Clariss. *Er. Burman* in Actis Literariis Sueciae ad annum 1727 p. 256.

§. 19. Sexto denique nescio annon nimis sim audax, si ex comparatione Obseruationum Kirengensium et Petropolitanorum aliquid de ventorum celeritate statuere velim. Anno 1737 d. 10 Octobris mane hora 8 notatum apud me reperio Zephyrum cum violentia 3, cum praecedens vespera a ventis plane quieta fuisset. Ponam itaque ventum hunc apud nos coepisse hora 6 a. m. coepit ergo in tempore Kirengensi $11^b\ 9'$ a. m. sed diserte notatum est a Clar. Gmelino, incepisse ibi furere Zephyrum violentia magna $8'\ 30'$ p. m. cum antea ventus modicus esset ex plaga Cephyro-Australi. Sin ergo ponam eundem ventum nostri aëris continuo motu illuc delatum esse, sequitur absoluta esse ab eo 580 milliaria Germ. tempore $9^b\ 21'$: Efficiunt autem haec 580 milliaria Werstas 4060, hoc est pedes Londinenses 14210000; ergo stante hypothesi nostra idem ventus fortissimus spatio vnius minuti secundi absoluit 422 pedes Londinenses, quod spatium eidem tempori debitum communiter non nisi 50 pedum Authores statuunt.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE ANNI 1739.

AVCTORE

Georgio Wolffg. Krafft.

§. 1.

Currente hoc anno 1739 obſeruatae fuerunt a me altitudines Barometri ſingulis menſibus, maximae et minimae, ſequentes, in quibus numeri ante punctum poſiti denotant partes duodecimas, ſiue pollices, pedis Londinenſis, numeri autem poſt punctum poſiti denotant horum pollicum partes centeſimas, quam diuiſionem in praecedentibus quoque adhibui obſeruationibus

1739	Ianuarius	— 30 . 01	— 28 . 48	— 1 . 53
	Februarius	— 29 . 88	— 28 . 60	— 1 . 28
	Martius	— 30 . 13	— 28 . 68	— 1 . 45
	Aprilis	— 30 . 09	— 29 . 05	— 1 . 04
	Maius	— 30 . 12	— 29 . 18	— 0 . 94
	Iunius	— 29 . 80	— 29 . 08	— 0 . 72
	Iulius	— 29 . 80	— 29 . 31	— 0 . 49
	Auguſtus	— 29 . 87	— 29 . 30	— 0 . 57
	September	— 30 . 21	— 29 . 05	— 1 . 16
	October	— 30 . 24	— 29 . 45	— 0 . 79
	Nouember	— 30 . 08	— 28 . 77	— 1 . 31
	December	— 30 . 36	— 29 . 23	— 1 . 13

§. 2.

§. 2. Apparet ex his altitudinibus Barometri earum maximam hoc anno fuiſſe 30. 36, quae obſeruata fuit die 7 Decembris in perfecta ſerenitate aliquot dierum, ſpirante leni Auſtro-Euro, cum frigore ſummo; quia vero haec altitudo maxima illam quae anno 1737 obſeruata fuit, nempe 30. 95, non excedit; haec adhuc dum maxima omnium hic loci obſeruatarum manet. Minima autem Barometri altitudo hoc anno fuit 28. 48, quae extitit die 6 Ianuarii, coelo nubilo aliquot dierum, flante adhuc leui Auſtro-Euro, frigore mediocri. Quae igitur minima altitudo huius anni cum in praecedentibus annis inuentam, nempe 28. 18, ſuperet: manet adhuc idem ſpatium variationum Barometricarum, antea ſtabilitum, nempe 2. 77: ſuntque adhuc variationes menſtruae in primis et vltimis anni menſibus maiores, minores autem in mediis.

§. 3. Auroras Boreales hoc anno obſeruaui ſequentes.

1739 Ianuarii 19 in perfecta Serenitate aderant veſtigia lucis Borealis aëre tranquillo, quam nubes tenues ſecutae ſunt.

21 in aliqua ſerenitate iterum aderant veſtigia tantum lucis Borealis, aëre tranquillo, quam iterum nubes ſecutae fuerunt.

Febr. 16 in aliqua ſerenitate aderat lux Borea, trabe rubra vna, et quibusdam aliis albis conſpicua, ſubſequente perfecta ſerenitate.

1739

1739 Febr. 25 in perfecta ſerenitate, poſt niuem turbulentam conſpiciebatur lux Borea, arcu pallido, ſed virgis et faculis praedita, flante violento Borea-Zephyro et continuata ſerenitate.

28 iterum in perfecta ſerenitate apparuit lux Borea debilis, flante vehementi Borea-Zephyro, et manente ſerenitate.

Martii 1 erat lux Borea, virgis inordinatis ludens, in perfecta ſerenitate, flante Zephyro ſequente niue copioſa.

2 in perfecta ſerenitate, veſperi oborta, apparuit lux Borea debilis, inſequente niue.

3 denuo aderat lux Borea debilis, in perfecta ſerenitate, flante Auſtro, inſequente nebula inſigni.

4 adhuc apparuit lux Borea debilis, in perfecta ſerenitate, flante forti Auſtro, et inſequente niue turbulenta.

18 apparuit lux Borea nubibus permixta, Ratisbonae quoque viſa, teſtantibus novis publicis, flante admodum tenui Euro.

30 in perfecta ſerenitate, flante forti Borea, apparuit lux Borea, confuſis virgis in Zenith aſcendentibus.

Aprilis 20 in ſerenitate fere integra, flante tenui Auſtro, conſpiciebatur lux Borea, in toto Horizonte, praeter eas plagas quas crepuſculum occupat, virgis aſcendentibus manifeſta.

1739

1739 Augusti 17 in perfecta serenitate, spirante nullo vento, apparuit lux Borea fortis, quam nubes et pluuiae insequebantur.

20 iterum in perfecta serenitate aderat lux Borea humilis.

26 in multa serenitate aderant vestigia Lucis Borealis.

29 Vestigia Lucis Borealis in serenitate perfecta.

Sept. 12 in perfecta serenitate comparuit lux Borea, multis virgis oblongis, et prope Zenith polum formantibus, conspicua.

16 vestigia Lucis Borealis, insequente pruina et leui glacie.

17 lux Borea mediocris.

Dec. 22 flante forti Borea Zephyro, inter nubes visa est lux Borea, antecedentibus praecedente die coruscationibus versus Austro-Zephyrum, et insequente niue.

23 lux Borea in perfecta serenitate.

§. 4. Prima congelatio facta est hoc anno d. 6 Octobris, coelo nubilo, nullo vento spirante. Contigit ergo haec prima congelatio die plenilunium insequente, et in quo simul erat ☐ ☉ ♄.

§. 5. Maximum frigus huius anni incidit in d. 7 Decembris, monstrante Thermometro meo in libero aëre hora 10 nocturna 188 gradus, sive $13\frac{3}{5}$ gradus frigoris Thermometro Fahrenheitiano, in perfecta serenitate aliquot dierum, flante leui Austro-Euro. Praeterea quoque

d. 5 Februarii frigus ita intensum regnabat, vt spiritus vini Gallicus ordinarius, per noctem libero aëri expositus, crusta forti glaciali obduceretur, infra quam crustam reliquum spiritus quasi coagulatum erat, instar cerae mollis.

§ 6. Tonitrua hoc anno audita fuerunt diebus sequentibus: Aprillis 26 die nouilunii, cum pluuia subita et breui, flante tenui Austro-Zephyro. Maii 7 cum pluuia forti. Iunii 23 cum imbre subito et forti, flante leui Zephyro. Iunii 27 sine pluuia et vento. Iunii 29 cum pluuia forti. Iunii 30 pluente adhuc coelo. Iulii 13 cum breui pluuia, Augusti 1 cum pluuia modica, Augusti 25 cum imbre longo. Decembris 21 coruscationes solae versus Austro-Zephyrum animaduersae sunt, flante forti Zephyro, in sequente simul altero die luce Borea. Primas quoque hirundines, vt etiam hoc adiiciam, vidi Aprilis 30, aëre existente perfecte sereno, et ad gradus 46 Thermometri Fahrenheitiani calente

§. 7. Pluuias et Niues aestimatione tantum perpendens, inuenio, in hoc anno dies 45 integros pro pluuiosis et niuosis esse habendos, atque mensium habita ratione Iunium pluuiarum fuisse feracissimum. Fluuii nostri Neuae tumores experti sumus Iulii 10 flante vehementi Austro-Zephyro et Octobris 26 flante leniter eodem vento.

§. 8. Ventos vehementes experti sumus diebus sequentibus: Ianuarii 5. 25. 26. 27. 31. Febr. 1. 2. 13. 14. 16. 18. 22. 23. 24. 25. 26. 28. Martii 5. 6. 10. 12. 15. 19. 30. Aprilis 16. 17. 18. 19. 22. 27. Maii 2. 3. 8. 14. 19. 22. 26. 27. 28. Iunii 4. 14.. Iulii 5. 10. 14. 15. 28. Augusti 9. 11. 20. 22. 23. Sepsembris 13. 30. Octobris 1. 8. 9. 11. 14. 27. 28. 29. Nouembris

15.

15. 16. 17. 23. 24. 25. Decembris 2. 10. 11. 12. 19. 21. 22. 24. Procellas autem Februarii 14. Martii 6. Aprilis 17. 18. 19. Maii 28. Iulii 14. Octobris 11.

§. 9. Cum Iulii 24 huius anni esset Eclipsis solis visibilis apud nos fere totalis, 11 nimirum digitorum, durante illa attendi quoque ad Thermometrum et Barometrum atque sensibilem in vtroque mutationem deprehendi, quam sequenti laterculo ob oculos ponam:

Iulii 24.	1ʰ	0′ p. m.	— 123, 0 —	29. 69		
	5	6	— — — 122, 0 —	70	Initium	
		55	— — — 122, 0 —	70		
	6	10	— — — 122, 8 —	70		
		14	— — — 123, 0 —	70	Med.	
		20	— — — 122, 7 —	70		
		30	— — — 122, 8 —	70		
		50	— — — 123, 0 —	68		
	7.	17	— — — 123, 0 —	68	Finis	
		30	— — — 124, 0 —	68		
	10	25	— — — 125, 9 —	70		

coelum toto hoc die, post Eclipsin quoque, erat perfecte serenum, flante tenui Zephyro. Apparet itaque ex his numeris, calorem aëris incrementum cepisse a meridie ad horam 5, qua incipiebat solis deliquium; quo properante versus medium descendit Thermometrum successiue vno gradu; versus finem deinde vergente Eclipsi, ierum ascendit, et denique restituta luce rursus descendit a frigore vespertino; vnde certum est, aërem ab Eclipsi hac frigus aliquod contraxisse, respondens $1\frac{1}{2}$ gradui Thermometri Fahrenheitiani. Quod idem primo obseruatum

fuit ab Academia Scientiarum Parisiensi, in Eclipsi solari anno 1666 Iulii 2, postea in Eclipsi solis totali, cum mora, anno 1706, Maii 12, a Clar. I. H. Hoffmanno, testantibus Miscellaneis Berolinensibus, editis 1710, p. 227 et denique a Clar. Delisle, Iuniori, in Commentar. Acad. Scient. Paris. ad annum 1715. Apparet quoque, Barometrum circa finem Eclipseos per $\frac{1}{50}$ pollicis Londinensis duodecimalis descendisse, et postea ad pristinam altitudinem ascendisse. Caeterum circa medium huius Eclipsis Lens caustica diametri 6 poll. phases Eclipseos accuratissime in chartam proiecit, sed luce ita debili, vt imaginem sui chartae etiam nigrae non inureret; et lucis in aëre decrementum parum sensibile fuit etiam in maxima obscuritate solis.

§. 10. Haud incongruum fore puto, si hoc loco mentionem quoque faciam Instrumenti alicuius noui, Meteorognosiae inseruientis, cuius ope sciri possit, quemnam thermometri gradum frigus maximum attigerit in loco aliquo qui obseruatore quotidiano destitutus sit. Relinquatur enim tale Instrumentum ex gr in Noua-Sembla, saxo vel arbori affixum, a nautis in autumno hanc regionem deserentibus, poterit ope eius ab iisdem, futura aestate redeuntibus, cognosci, quemnam gradum frigus elapsae hyemis praeteritae maximum attigerit. Adhibeo autem huic scopo formam Thermometri vulgaris Drebbeliani, sed ita formati, vt in tubulo, in quo liquor ascendit et descendit, ad latus vnum efficiantur plura foraminula parua, in
Tab IV. Fig. 3. sacculos vitreos prominentes, et deorsum inclinatos *a*, *b*, *c*, *d*, etc. hiantia, quales tubi, vt experientia didici, haud adeo difficulter ab artificibus peritis conflari possunt. Si enim in

in frigore aliquo vehementi liquor ascendat vsque ad *b*, implebuntur eo omnes sacculi vsque ad *b*, et impleti manebunt, etiamsi postea cessante gelu liquor iterum descendat; sin postea oriatur vehementius frigus; pari modo replebitur sacculus *a*, praeter praecedentes, vt ita is, qui supremus inter repletos, finita hyeme, deprehendatur, indicium satis accuratum de intensitate frigoris in tali loco maximi praebere possit, etsi, quod diffitendum non est, hoc Instrumentum expositum quoque sit vitio Thermometri Drebbeliani ordinario, pressioni nempe atmosphaericae. Si denique timendum sit ne liquor ordinarius, his Thermometris adhiberi solitus, congeletur, in eius locum poterimus mercurium substituere. (*)

(*) Instrumentum modo descriptum excogitaui Ao. 1740. cum in *Academia Scientiarum Petropolitana* adhuc versarer, eiusdemque aliquod exemplum confici curaui, quod inter instrumenta Physica eiusdem Academiae asseruatur, *Camera F. Diuis. VII. No.* 43; inscius plane idem tale thermometrum propositum fuisse ab *Ill. Ioh. Bernoullio*, iam anno 1698. in Epistola ad G. G. *Leibnitium* sub titulo Thermometri *calorem praeteritum indicantis*, cuius descriptionem legi in *Virorum celeberr. Leibnitii et Ioh. Bernoulli Commercio Philosophico et Mathematico*, *Tomo I. pag.* 373. quod insigne opus editum est demum anno hoc 1745. Qua igitur innocentia mihi hoc inuentum attribui primum: simili nunc, candore illud Illustri huic suo Auctori meliora edoctus, lubentissime totum assero, nihilque ex hac laude mihi decerptum cupio; excelsa tanti viri in res Physicas atque Mathematicas, merita, ex hac etiam parte, impense veneratus. Scripsi Tubingae d. 12. Iul. 1745.

SCHEDIASMA DE VENTORVM

OBSERVATIONE QVOTIDIANA, PER INTEGRVM AMPLISSIMVM IMPERIVM RVSSICVM, INSTITVENDA, CVM MAXIMO SCIENTIAE METEOROLOGICAE EMOLVMENTO.

AVCTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Tab. IV. Nondum elapſum eſt ſeculum, ex quo celebris ille Guerikius, obſeruata caſu quodam mercurii in tubo Toricelliano inconſtanti altitudine, anſam praebuit Barometrorum obſeruationi quotidie inſtituendae. Eſt enim is primus qui detexit hanc altitudinem mercurii in tubo Toricelliano ſuſtentati, et libero aëri expoſiti, indies mutari, et conſequenter per hanc altitudinis ſuae mutationem indicare, quod variis temporibus et diebus vario etiam pondere integra aëris atmoſphaera premat telluris ſuperficiem. Quam primum itaque elegans hoc inuentum orbi erudito innotuit, factum eſt, vt quam plurimi his obſeruationibus quotidie cum cura inſtituendis ſolicite incubuerint, ita vt earum catalogus hodie in ingentem cumulum accreuerit, et quotidie adhuc maiora capiat incrementa.

§. 2. Circa idem fere tempus ad maiorem etiam perfectionis gradum euecta fuerunt Thermometra. Haec, vti notum eſt, a Cornelio Drebbelio, Batauo, primum inuenta, ſed multis naeuis adhuc laborantia, ab Academicis

micis Florentinis emendata fuerunt. Quoniam itaque et in his libero aëri expositis mutatio insignis singulis diebus obseruata fuit: accessit priori Barometrorum obseruationi etiam horum Thermometrorum inspectio quotidiana, quae effecit, vt hodie non minori Thermometricarum quam Barometricarum obseruationum numero gaudeamus, in variis terrae locis institutarum.

§. 3. Praetereo reliqua Instrumenta, quae ad aëris nostri atmosphaerici varias et mutabiles qualitates deprehendendas successu temporis excogitata fuerunt; qualia sunt Hygrometra, quae aëris humiditati aut siccitati; Manometra, quae eiusdem aëris densitati vel grauitati specificae, quam quouis tempore tenet, cognoscendis inseruiunt; quorsum pertinent quoque Hyetometra, quibus pluuiarum cadentium quantitas, Anemometra, quibus ventorum spirantium vis et vehementia, aestimari et mensurari solent; quoniam ea partim ob ipsorum imperfectionem, partim etiam ob difficilem elaborationem, neglecta fere hucusque fuerunt, et rariores cum iis institutae obseruationes occurrunt.

§. 4 Haec Instrumenta, cum quodlibet eorum seorsim ad scientiae Meteorologicae emendationem inuentum fuerit, atque palam sit, ea omnia coniuncta huic eidem scientiae propagandae esse quam aptissima, si et omni adhibita circumspectione construantur, et deinde cum dexteritate ad vsus suos vocentur; vt adeo vere dici queat, nos ad Meteorologiae principia stabilia ponenda Instrumentis idoneis non destitui; haec, inquam, Instrumenta quid vtilitatis huic scientiae attulerint, si quis quaerat, responderi certe possunt sequentia.

§. 5.

§. 5. Barometrorum vſus 1. inſeruit ad cognoſcendum illud pondus atmoſphaericum, quo quauis hora et die pars aliqua ſuperficiei terreſtris premitur; 2. praeuideri poteſt, ex eorum lapſu aut aſcenſu ſubito, exoriturum eſſe ventum aliquem vehementem, ſed quis aut qualis ille futurus ſit, profunde ignoratur; 3. ſi altiorem teneat in ſe mercurium ſuſpenſum, quam ordinarie fieri ſolet, ſerenitatem conſpicimus vtplurimum, ſed praedicere eam vix poſſumus; 4. ſcimus etiam variationes eius maiores eſſe in locis ſeptentrionalibus quam verſus meridiem ſitis; 5. ope eius montium altitudines metiri vt cunque didicimus; ſi vero alii praeterea quidam harum machinarum vſus ſunt, illi certe, aeque vt hi iam allegati, ita comparati ſunt, vt tempeſtatum et mutationum aëris in poſterum futurarum ne minima quidem exinde hauriri poſſit ſuſpicio. Quod idem cum et magis adhuc de Thermometro, et reliquis Inſtrumentis Meteorognoſiae inſeruientibus, affirmari debeat: apertum aſt, detectas quidem eſſe ope horum Inſtrumentorum veritates phyſicae cognitioni aëris perutiles, neque eas parui momenti habendas, ſed nec adhucdum ita comparatas eſſe, vt Theoriae alicui praeſpiciendarum tempeſtatum et mutationum aëris vtiles eſſe poſſint; ſic vt omnis vtilitas in iis iam fere ſit exhauſta, omnisque ex iis, quem praebere poſſunt, ſuccus iam videatur expreſſus, vtque hinc vtraeque obſeruationes, et Barometricae et Thermometricae, incipiant hodie inter eruditos aliquantum vileſcere.

§. 6. Quodſi in cauſas inquiramus, quare factum ſit hucusque, vt ope horum Inſtrumentorum, nullo fere amplius defectu laborantium, nondum tamen illud aſſecuti ſimus,

quod

quod ſolicite ſemper quaeſitum fuit, praedictionem ſcilicet tempeſtatum et mutationum aëris: eas non tam in harum tempeſtatum mira et inconſtanti varietate, quam in methodo has obſeruandi, quaerendas eſſe mihi videtur. Aeque enim multiplex et varia ſideribus cunctis, eorumque motibus ineſt inconſtantia, quam tamen feliciter hodie ad certas et conſtantes leges reuocarunt Aſtronomi; cuius euentus, qui illuſtris exempli loco in hoc noſtro negotio eſſe poteſt, nullas alias reperio rationes, quam quod 1. ſiderum obſeruationes ab antiquiſſimis temporibus ad noſtram aetatem peruenerunt; 2. cura maxima habetur in Inſtrumentis ad has obſeruationes Aſtronomicas inſtituendas exactiſſime elaborandis; 3. Regum et ſummorum Imperantium et iuſſus et clementia huic Scientiae prouehendae fere nunquam deſuerunt; 4. Omnium obſeruatorum Aſtronomicorum in toto terrarum orbe eſt quidam quaſi mutuus nexus; quo deuincti inter ſe magnam quandam ſocietatem conſtituere videntur, quae in vno eodemque ſcopo obtinendo coniunctim laborat. Ad horum mediorum primum quidem recens aetas ſcientiae meteorologicae, et eius quaſi iuuentus, hodie nos non admittit; in ſecundo deſiderari quid poſſe, quod fundamentis ſaltim Meteorognoſiae ponendis magis fauere poſſit, vix video; tertium vero et quartum nulla aetate atque in nulla regione ſperari atque exſpectari confidentius poteſt, quam in hac noſtra, qua munificentia Auguſtae Imperatricis noſtrae, atque iuſſibus etiam et exhortationibus Eius ad ſublimia et hactenus incognita quaeuis inueſtiganda non inuitamur tantum indulgentiſſime, ſed quoque excitamur.

§. 7. Quod itaque maximum in Meteorognoſia adhuc

ſupereſt, et votis tot Virorum hodie perſpicaciſſimorum expetitum atqne peroptatum iamdiu fuit: id Imperio Ruſſico, eiusque Dominatrici Potentiſſimae relictum eſſe videtur, fauentibus huic negotio et Auguſtae munificentia, et Imperii huius mirum extenſi amplitudine. Cum igitur tempeſtates omnes, aut aëris et coeli temperies, ſint vel Statae, vel Vagae, quarum illae innuunt generales mutationes aëris quae telluri noſtrae accidunt ob varium Solis erga nos ſitum, vti dum apud nos generaliter menſibus Decembris, Ianuarii et Februarii frigore et niue omnia conſtringuntur et teguntur; menſibus autem aeſtiuis calor redit; hae vero ſignificant intenſitates, harum mutationum generalium, modo minores, quibus accidit, vt ex. gr. vna hyeme ſaeuius frigus regnet, quam altera; vna aeſtate remiſſior calor ſentiatur, aut pluuiae copioſiores cadant quam altera: atque apud omnes ſcientiae naturalis authores in confeſſo ſit, praecipuam, et fere vnicam, harum tempeſtatum vagarum cauſam poſitam eſſe in Ventis inque horum vehementia et qualitatibus reliquis; neſcio quid ad Meteorognoſiae ſcientiam ſtabiliendam conducere magis poſſit, quam in ampliſſimo aliquo regno, quale eſt Ruſſicum, inſtituta ex animo deliberato, et per annorum aliquam ſeriem continuata, Ventorum Obſeruatio, vel potius Hiſtoria.

§. 8. Proponam itaque methodum, cuius ope obſeruationes hae ventorum inſtitui poſſunt, ita vt vtilitas, quae exinde quaeritur; actu ipſo obtineatur, et tempore quidem, vt ſperare audeo, non nimis diuturno, ſed quinque aut ſex tantummodo annorum. Seligo igitur ad hoc opus Vrbes duodecim totius Ruſſiae ſequentes: 1. Riga, 2. Peters-

2. Perersburg, 3. Moſcau, 4. Caſan, 5. Aſtrachan, 6. Tobolski, 7. Kiof, 8. Archangel, 9. Iakutskoi, 10. Selinginskoi, 11. Wergolinskoi, 12. Nouogrod; atque has quidem eum in finem, vt primo Zephyrus et Eurus obſeruari poſſint in tribus Terrae parallelis, perque tractus longiſſimos, nempe in parallelo 50 graduum in Kiof et Selinginskoi, per ſpatium 617 milliarium Germanicorum; in parallelo 58 graduum in Riga, Petersburg, Nouogrod, Moſcau, Caſan, Tobolski, Wergolenskoi, per ſpatium 673 milliar. Germ. denique in parallelo 64 graduum in Archangel et Iakutskoi. per ſpatium 390 milliar. Germ. ſecundo, vt Auſter et Aquilo obſeruari queant per vrbes Aſtrachan, Caſan, Moſcau, Archangel, per interuallum 270 milliar. Germ. Sunt igitur hae Vrbes allegatae commodiſſimae, vt mihi quidem videtur, in quibus et Obſeruatores conſtitui, et Inſtrumenta mox indicanda locari, oportet.

§. 9. In qualibet deinde harum vrbium obſeruationibus inſtituendis accommodanda erit talis aliqua domus, quae et altiſſima reliquarum ſit, et recens adhuc aedificata, et ſatis firma, ne metus adeſſe poſſit, fore vt aliquot annorum ſpatio corruat, vel linea meridiana, ibidem ducenda, ſenſibili aliquo angulo mutetur; quae et ſimul in loco aliquo totius vrbis editiſſimo ſita ſit, liberum horizontem habeat, ita vt venti ſine vllo impedimento ad eam ex omni plaga affluere poſſint, et cuius altitudo ſupra proximum fluuium ſciatur. Quam ob cauſam, ſi quaedam harum vrbium nominatarum montibus cinctae ſint, neceſſe erit ipſas omittere in hoc negotio, atque eius loco eligere pagum aliquem proxime ſitum, in quo

domus conditionibus modo dictis praedita inueniri possit. In hac domo ita inuenta si obseruator simul habitare possit, commodissimum id erit: sin autem fieri hoc nequeat, aedicula propria ipsi prope hanc domum denuo aedificari debet.

§. 10. Domus inuenta iam ad instituendas obseruationes adaptanda erit; quod breui tempore, sine multis sumptibus, a quouis fabro lignario, fieri potest; si, destructa tecti aliqua parte, in eius locum planities lignea substituatur, ex duris lignis, bene et diu ante siccatis, et dupliciter sibi impositis, atque firmiter coagmentatis inter se; quae planities spatium non maius quam 9 pedum quadratorum, quale est mensae alicuius quadratae mediocris, vt occupet, necesse est. Ipsum hoc tabulatum et horizontaliter poni, et cum cura laeuigari debet in parte superiori; et prope illud scala admota sit, per quam commode et sine periculo adscendere ad hanc planitiem obseruator possit quouis tempore.

§. 11. Quoniam itaque ventorum praecipue cura haberi debet in his Obseruatoriis hucusque descriptis, atque omnis fere horum obseruatio restringitur ad eorum Directionem et Vehementiam: dicam primo, qua ratione, meo quidem iudicio, obseruari debeat directio ventorum, vt scopo intento ea sufficere possit. In tabulato igitur antea memorato describenda primum erit linea meridiana, et circa hanc diuisio horizontis in 16 plagas accurate adornanda, distinctisque lineis rectis depingenda. Puto enim, cum aliis ventorum obseruatoribus, his 16 plagis obseruationes has ea omni exactitudine absolui posse, quae hic requiri potest.

§. 12.

§. 12. Abſoluta diuiſione horizontis in plagas, adſcriptisque earum nominibus ordinario modo, erigatur in centro harum diuiſionum ſtylus ferreus, altitudinis vnius pedis, verticaliter poſitus, et in apice cuſpide acuta, politaque, inſtructus, cui vexillum imponi poſſit ſequenti modo elaborandum. Fiat ex quatuor virgis ligneis, aridis, et probe exſiccatis, vt machinula pondus exiguum habeat, rectangulum ABCD, cui dein ex vtraque parte charta agglutinanda erit; poteritque eſſe longitudo AB $1\frac{1}{2}$ pedis, latitudo AD 1 pedis; huic rectangulo affigantur ſupra et infra duo brachia orichalcina BE et CG, quorum illud BE in parua diſtantia a B, et in medio ſui, teneat capitellum F, quale acubus magneticis tribui ſolet, conice excauatum, et optime politum, imo in vſu ipſo plumbagine adhuc inducendum, vt ad modum acus magneticae ſtylo prius memorato impoſitum quam maxime volubile exiſtat, alterum brachium inferius CG in medio ſui habeat annulum H, qui interiorem ſuperficiem, vbi nempe ſtylum prius indicatum circumdare debet, habeat politiſſimam, plumbagine etiam in vſu illinendam, cui fini quoque ſtyli pars ea, quae huic annulo inſeritur, pari cura poliri debet; idem vero hoc brachium CG continuetur in linea recta vsque ad K, vt HK ſit longitudinis circiter 2 pedum, ſed in loco aliquo intermedio I habeat pondus plumbeum affixum, quod paruum quidem erit, ſed efficiet tamen vt vexillo hoc cuſpidi prius memoratae in F impoſito, et ſtylo per annulum H tranſeunte, partes machinalae vtrinque axi aut ſtylo F H adiacentes in exacto ſint aequilibrio, ita vt nullum adſit impedimentum, quo minus etiam leuiſſime ſpirans Tab. IV. fig. 4.

ventus vexillo huic ſuam directionem imprimat; quam directionem cum cuſpis HK indicare debeat, curandum maxime eſt, vt recta haec HK exactiſſime in directum iaceat cum plano CDAB. Vtrumque vero hoc brachium connectitur virga orichalcina transuerſa EG, ad maiorem toti vexillo firmitatem conciliandam. Quotiescunque igitur obſeruatio venti capienda eſt, imponatur hoc vexillum cuſpidi ſtyli in meridiana fixi, extra hunc vſum in loco ſicco cuſtodiendum, ne ſtyli acies nimis cito, continua affrictione, atteratur et obtuſa fiat; atque ſic directio venti accurate, et ad hoc negotium aptiſſime, poterit determinari.

§. 13. Requirunt vero haec omnia curam et cognitionem haud vulgarem; quare conſilium meum eſt, vt primum apud nos Petroburgi in tecto domus alicuius, in ſcopum hunc ſelectae, ope fabri cuiusdam lignarii ordinarii et communis, ſub inſpectione Academiae Scientiarum, et tale tabulatum quale in §. 10. memoraui, conſtruatur, et omnia reliqua quae indicaui in eo efficiantur. Hoc enim obtento, quoniam omnes inexpectatae circumſtantiae praeuideri nequeunt, facile erit defectus corrigere; atque praeterea talis faber hoc exercitio optime diſcet, quae ad ſimilia in vrbibus reliquis obſeruatoria aedificanda obſeruanda ſint; vt praeteream, hoc poſtea obſeruatorium illud ipſum futurum eſſe, quocum Petropoli obſeruationes correſpondentes inſtitui debent. Sed praeparationibus his Petropoli abſolutis neceſſarium erit eundem fabrum lignarium vna cum Academicorum aliquo in omnes vrbes allegatas mittere, vt ſub huius attentione et juſſu ille ſimilia obſeruatoria, vbicunque conſultum id viſum fuerit conſtruat

et

et aedificet; atque simul post aedificatum obseruatorium Academicus obseruatorem futurum instruat et exerceat in obseruationibus, et hac et reliquis, probe et exacte instituendis.

§. 14. Quoniam vero Expetimentis hucusque institutis, et obseruationibus captis, satis innotuit, ventos non omnes horizontali motu progredi, sed eos quandoque ex loco sublimiori deorsum, vel ex loco profundiori sursum, ferri; quod phaenomenon ventorum vocabo eorundem inclinationem; hinc necesse est, vt obseruatori ventorum ad manus sit aliud instrumentum, quod vti prius Directorium vocari vtest, inclinatorii nomine appellabo. Hoc instrumentum aeque facile ac reliqua sequenti modo construitur. Agglutinetur parallelogrammo ligneo ABCD, eiusdem magnitudinis cum praecedente vexillo, vtrinque charta, atque hoc vexillum horizontale ABCD liberrime mobile sit circa axem BC, qui incumbat duobus fulcris BH et CI; circa medium axis E exeat virga ferrea tenuis EF, eius longitudinis, vt ipsa in F cuspidata, aequilibrium seruet cum ABCD. Pondus aliud virgae EF, quam quod ipsa tenet, annectendum esse non suadeo, ne ventus in illud quoque irruat, et obseruationes turbet. Hoc instrumento vento exposito, et in situm horizontalem redacto ope perpendiculi GK, quod pedum alterutri annexum sit, si adiunctus sit ipsi ad latus arcus circularis LM, qui 150 circiter gradus comprehendat, obseruari poterit commode venti inclinatio, ex notatis gradibus, qui in modo dicto arcu numerari poterunt, atque annotari, an directio venti sursum vel deorsum inclinata fuerit. Vt ne vero inclinatio ventorum ab ipso tecto, in quo obseruatorium aedificatum est, mutetur: iubet necessitas, vt tabulata

Tab. IV. fig. 5.

bulata in §. 10. descripta, paulo altius supra tectum ipsum attollantur.

§. 15. Cum praeterea etiam multiplici experientia constet, ventos in superiori aëris regione regnantes habere directionem diversam ab ea, quae in ventis inferioribus observatur: necesse erit, vt observator ventorum ex nubium, si quae adsint, ductu de ventis his superioribus adstimatione iudicet, et quamnam plagam sequantur annotet. Ex nullo enim alio indicio horum ventorum superiorum directio capi potest.

§. 16. Quod ad alterum pertinet, nempe ad vim et violentiam ventorum, ea dependet a celeritate aëris moti, et cognoscitur distincte, si sciatur quotnam pedes ventus aliquis in tempore vnius minuti secundi absoluat horizontaliter. Hoc observari potest facillime et simplicissime ope sequentis instrumenti, quod Anemometrum vocatur. Observetur enim ad quamnam altitudinem in annexo quadrante DE a vi venti attollatur asserculus ABCD, circa axem AB perfecte mobilis, et cuius pondus antea examinatum fuit, atque gradus observatae altitudinis annotentur in Diario; poterit deinde ex his observatis calculo deduci, quamnam ea tempestate celeritatem ventus habuerit.

Tab. IV. fig. 6.

§. 17. Sunt hae hucusque expositae qualitates ventorum tales, ad quas praecipue respici solet, et de quibus sperare licet, eas legitime et recte observatas leges periodicas ventorum tandem proditurus esse. Quoniam vero et aliae adhuc ventorum affectiones sunt, non inutiles, et eadem opera cum praecedentibus observandae: poterit observator tenere Thermometrum, vt eius ope de calore

calore aut frigore venti iudicare liceat. Hic neceſſe quidem eſſet, vt Thermometrum vento ipſi quauis vice exponeretur, et gradus huius calori et frigori reſpondens annotaretur: ſed quoniam hoc nonnunquam lucente ſole fieri deberet, cuius calor obſeruationem de calore venti irritam redderet, conſultius eſt, vt Thermometrum fixum in loco aliquo ſuſpenſum maneat, qui aëri libero et ventis peruius ſit, ſed ab omni ſole tutus, quod facile fieri poteſt; atque ſic certum ſemper indicium haberi poterit de calore aut frigore per quemcunque ventum aduecto, et cum illo aëre, qui Thermometro circumfluus eſt, ſtatim communicato.

§. 18. Cum deinde certum ſit, magnam inter aëris agitationes et Barometri mutationes dari connexionem: neceſſarium quoque erit Barometri rationem tenere, atque eius gradum in quauis ventorum obſeruatione annotare; cuius Barometri locus fixus ibidem eſſe poteſt, vbi Thermometrum aſſeruatur.

§. 19. Vt denique etiam ſciatur, quamnam humiditatis aut ſiccitatis mutationem ventus quisque produxerit: adhibenda erunt Hygrometra, et eorum in eodem cum Barometro et Thermometro loco poſitorum obſeruationes ſolicite etiam faciendae.

§. 20. De obſeruatore tandem ipſo hoc adhuc monendum eſt, requiri omnino, vt is inſtrumentorum ſuorum cognitionem et conſtructionem probe teneat, quo eodem mutationes, atque exinde hauriendas obſeruationes, recte inſtituere poſſit. Hinc antequam talis aliquis obſeruatorio ſuo admoueatur, neceſſario antea exercendus erit a perito quodam in omnibus et ſingulis expoſitarum obſeruationum faciendis, donec methodum haec omnia perſequendi accurate didicerit.

DISSERTATIO
DE
MACHINIS SIMPLICIBVS.

AVCTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Tabula V. In Mechanicis generaliter vocatur *Potentia* omne id, quod, cuicunque obiecto applicatum, motum in illo producere, aut vero si motus iam adfuerit, eum immutare et alterare valet. Ex actione igitur Potentiarum in obiectum aliquod oritur aut *Motus*, cum nempe vna potentiarum applicatarum reliquas superat; aut vero *Aequilibrium* siue *Quies*, cum nulla potentiarum applicatarum reliquas vincere potest, sed cuiuslibet actio ab actionibus reliquarum impeditur. De illo, Motu scilicet, agitur in *Mechanica* stricte sic dicta; de hoc vero, Aequilibrio nempe aut Quiete tractatur in *Statica* vel *Geostatica*, quemadmodum quibusdam hanc scientiam, ad distinguendam eam ab *Hydrostatica*, vocare placuit. Mallem vero dici, Staticam agere de aequilibrio potentiarum, quam de quiete simpliciter. Quies enim potius dicitur de obiecto motu carente ob hanc rationem, quia nulla plane potentia in illud agit; obiecta autem in Statica tanquam a potentiis, quanquam impeditis inter se, affecta considerantur, quae potentiarum inter se impeditio vocatur Aequilibrium. Obiectis itaque in Statica consideratis potius

tius conuenit aequilibrium quam quies ; quamuis hanc diſtinctionem non adeo magni momenti eſſe lubens confitear.

§. 2. Praecipuam Staticae tractationem abſoluunt *Machinae* ſic dictae *ſimplices*, vel *Potentiae Mechanicae*, quae in conſtructionem machinarum compoſitarum omnium ingrediuntur, ita vt harum quaſi Elementa dici poſſint. Quamuis autem hae machinae ſimplices, humanam quippe audaciam mire iuuantes, iam ab antiquis temporibus fuerint admodum excultae, et recentiori hac aetate vſu quotidiano praecipue enitescant : duo tamen ſunt, quae deſideranda in iis, meo quidem iudicio, videri poſſunt.

§. 3. Primum eſt, quod diuiſio et enumeratio earum ab antiquis tradita hucusque retineatur, neglecta tamen ea ratione, qua a priori, ſolo ratiocinio, inueniri potuiſſent ; vnde fit vt tenebris neſcio quibusdam obſundantur, neque enumeratio earum perfecta, demonſtrationibus ex Statica petitis, hucusque inſtitui poſſit, vti Geometria ex gr. elegantiſſime hoc praeſtat circa quinque corpora regularia. Statuit quidem Vitruuius Architect. libro X. cap. 1. homines antiquiſſimos a motu planetarum, praecipue Solis et Lunae, qui in oculos eorum incurrit, occaſionem arripuiſſe, machinas inueniendi, arrepta nimirum exinde idea motus circularis, cuius virtuti Ariſtoteles omnem Staticae facultatem attribuit. Sed nimis remota et difficilis haec cauſa eſt ; et potius credi debet ſola experientia fortuita adiutos primos homines, quod praecipue circa vectem vulgarem contingere potuit, in cognitionem machinarum ſenſim ſenſimque veniſſe, atque tum hanc doctrinam vtilitati et commoditati generis humani mirum in modum fauentem ſubinde vlterius excoluiſſe.

§. 4. Alterum, quod machinarum ſimplicium tractationi adhuc deeſſe video, eſt particularis atque exacta deſcriptio regularum Cunei, qui pro vltima harum machinarum ordinarie habetur, et cuius naturam alii in Vecte, alii in plano inclinato quaerunt, diuerſiſſimasque exinde rationes potentiae ad onus, vel reſiſtentiam ſuperandam, in ſtatu aequilibrii eius, protrahunt. Cauſa huius confuſionis nulla alia videtur eſſe, quam quod ab Authoribus, qui de eo ſcripſerunt, non primum in abſtracto, ad ſimilitudinem vectis, conſideratus, et deinde demum, legitima cautione adhibita, ad findenda ligna, et alias corporum circumſtantias, applicatus fuerit; ita vt elegans et ſimpliciſſima haec machina, in ſolas mercenariorum et baiulorum manus quaſi detruſa, neſcio quo mucore obducta et contemptu neglecta iaceat. His duobus deſideratis itaque praeſenti ſcripto lucis quantum potero affundere conabor.

§. 5. In potentiarum, obiecto cuidam applicatarum, aequilibrio, quotiescunque accidit vt potentia vnica minor cum altera vnica maiore aequilibrium ſeruet, vocatur illud obiectum *Machina*, et quidem *Machina ſimplex*, ſi obiectum illud ſit vnicum. Potentiarum vero huic machinae applicatarum minor more conſueto votatur *Vis*, maior autem *Onus*. Vitruuius l. c. definit machinam, quod ſit collectio materiae bene iunctae, cuius ope grauiſſima onera leuari poſſunt; ſed, optime notante Perralto in notis Verſioni eius Gallicae ſubiunctis, materiae cuiuscunque conſideratio exulare debet ex conſideratione machinarum, praecipue ſimplicium. Obiecta igitur, quibus potentiae noſtrae debent applicari, exuta ſint oportet ab omni materia;

teria; extenſa tamen plerumque debent eſſe, vt in diuerſis eorum locis potentias queant recipere. Erunt igitur extenſa omni materia deſtituta, hoc eſt, quantitates Geometricae, lineae nempe ſuperficies et corpora Geometrica, non excluſo etiam puncto.

§. 6. His obiectis Geometricis applicari poteſt potentia vel vna; quae vero cum motum neceſſario directioni ſuae conuenientem producat, Machinae inueniendae, quippe quae aequilibrium requirit, inutilis plane erit. Poſſunt porro adhiberi potentiae duae; ſed de his notum eſt ex Staticis, quod aequilibrium gignere non poſſint, niſi ſint in directum contrariae et aequales. Ceſſat igitur in his illa machinarum proprietas, qua requiritur, vt vna potentiarum applicatarum ſit altera minor; neque igitur ex duabus potentiis Machinae inuentio ſperari poteſt. Poſſunt vlterius adhiberi potentiae tres, de quibus notum eſt ex Staticis, eas, quamuis inaequales, ita temperari et accommodari tamen poſſe, vt ſub diuerſa magnitudine et intenſione earum aequilibrium nihilominus ſeruent. Itaque trium potentiarum conſideratio machinae inueniendae poterit inſeruire. Poſſunt inſuper plures quam tres potentiae obiectis applicari; ſed iterum notum eſt ex Staticis quod, pluribus potentiis in eodem plano eidem obiecto applicatis, ſubſtitui poſſit ſemper vnica duabus quibusuis aequiualens; poterit itaque applicatio plurium potentiarum ſemper reduci ad illum caſum, quo earum tres tantum adſunt, vt itaque huic ſoli caſui potentiarum trium debeamus inſiſtere, et videre, quid machinarum exinde ſequatur.

§. 7. Cum vero naturaliter impossibile sit, vt in quocunque obiecto, duabus potentiis inaequalibus applicatis, maior minorem non vincat et secum abripiat, sed aequilibrium efficiat: hoc tamen in machinis requiratur, et actu ipso etiam fiat; necesse est, vt aliquid causae hic subsit, cur hoc fiat. Inuenitur autem facili opera duplex huius rei, quae tamen vnice admirationem nostram circa machinas excitat, causa. Prima est *Destructio* partialium quarundam virium in potentiis applicatis, cum Statica nos doceat, duas vires contrarie nitentes se inuicem quasi destruere et tollere. Altera vocari potest *Absorptio*, cum nempe potentiarum trium adhibitarum aliqua aut ex toto, aut ex parte, ab obiecto firmissimo quasi absorbetur, et in hoc transit, ita tamen, vt propter huius obiecti vim inertiae motum in eo excitare localem non possit. Quae duae causae, cum in occulto adsint machinis, et latenter agant, omne id constituunt, quod inexpertos in admirationem rapit. Quomodo vero vtraque haec causarum allegatarum agat, distinctius patebit ex sequentibus.

§. 8. His praemissis solui poterit sequens problema Staticum, *inuenire omnes machinas simplices possibiles*. Requiritur enim tantum, vt tres potentiae sese aequilibrantes applicatae considerentur primum puncto, dein successiue lineae, superficiei, et corpori, Geometrico sensu intellectis; quo facto opera detur, vt aliqua harum potentiarum, aut partes quaedam earum, in selectum ad hunc finem obiectum occulte agant, vel per *Destructionem*, vel per *Absorptionem*; habebitur hoc modo machina, quam obiectum ad hunc finem selectum sistet; eaque simplex, si obiectum selectum fuerit vnicum tantum.

§. 9.

§. 9. Circa potentias quidem corpori Geometrico applicatas notandum eſt, iis, niſi in eodem ſint plano, aequiualentem, hoc eſt vnicam et ſolam quae omnem plane motum a potentiis impreſſum impediat et ſiſtat, dari non poſſe, quod in Staticis demonſtratur. Tribus igitur potentiis tali corpori applicatis, quae non in eodem plano ſint, nullum aequilibrium poteſt, obtineri, itaque nec machina exinde inueniri. Niſi enim omnes tres potentiae fuerint in eodem plano, corpus tamdiu modo huc modo illuc iuxta directionem potentiae fortioris ſemper rotabitur, donec eae veniant in vnum idemque planum. Si vero potentiae dictae ſint in eodem plano, idem eſt, ac ſi ſuperficiei vnicae lateribus applicatae eſſent; ex quo fit, vt tria tantum habeamus obiectorum genera quae machinis ſimplicibus producendis ſunt apta, punctum nempe, *lineam* et *ſuperficiem*. Sed excludi quoque debet punctum, vtpote quod extenſione omni, quae in machina tamen neceſſario requiritur, plane caret.

§. 10. Applicemus ergo nunc tres potentias primum lineae rectae AB. Harum potentiarum duae ſint expreſſae per AH et BK, quae duae rectae et intenſitatem et directionem potentiarum deſignent. Notum eſt ex ſtaticis, ſi producantur HA et KB vsque dum ſe ſecuerint in D, factisque DE = HA, et DG = BK, Diagonalem DF parallelogrammi DEFG repraeſentare directionem et magnitudinem tertiae cuiusdam potentiae CI, quae actionibus priorum duarum AH et BK ſola aequipollet; vt itaque, hac tertia in directione CD applicata, linea recta AB futura ſit in aequilibrio. Erit autem demiſſis ex puncto C perpendicularibus CL et CM in Tab. V. fig. 1.

conti-

continuatas directiones AD et BD, positoque sinu toto = 1, in Triangulo ALC analogia 1 : AC = sin. HAC : LC, vnde LC = AC. sin. HAC. Deinde Triangulo BMC dabitur proportio 1 : BC = sin. KBC : CM, vnde CM = BC. sin. KBC. His positis erit BK : AH = DG : DE = EF : DE = sin. EDF : sin. EFD = sin. EDF : sin. FDG = $\frac{LC}{DC}$: $\frac{CM}{DC}$ = LC : CM = AC. sin. HAC : BC. sin. KBC. Ex quo fundamento leuissimo negotio prodit machina simplex *Vectis* dicta. Nam si alterutram trium harum potentiarum in suppositum aliquod obstaculum immobile per Absorptionem transire concipias: habebis totidem Vectis species. Tres potentiae AH, BK, et CI, sunt in aequilibrio, si nempe CI agat iuxta directionem CD; vel duabus praecedentibus aequipollet in omnibus vnica CI; si ergo haec vnica impeditur; etiam duae priores impediuntur, hoc est, aequilibrium seruant. Impeditur vero aequipollens CI subiecto fulcro firmissimo, quod Hypomochlium dicitur; ergo habebitur hinc Vectis species quae *Heterodromus* dicitur, et in quo generaliter est Vis BK ad Onus AH = AH. sin. AHC : BK. sin. CBK. si vero abscondatur vel absorbeatur extremarum potentiarum alterutra, ex. gr. AH, notum est ex staticis, esse pro aequilibrio BK : CI = AC. sin. ACI : AB. sin. ABK; ex quo fit Vectis secunda species, quae *Homodromus* vocatur. Duae hae species Vectis Heterodromi et Homodromi vi minori onus maius in aequilibrio tenent, quae Energia ex eo solo proficiscitur, quod potentiarum vna hypomochlii ope absorbeatur quasi, et abscondatur, quam facultatis in hac machina causam apud solum de la Hire, Traité de Mecanique pag. 38. observatam inueni. In vecte Homodromo concipi etiam potest,

vim

vim medium locum inter onus et fulcrum occupare, quam tertiam Vectis speciem aliqui appellant; at vero cum sic dispositus vim onere maiorem requirat: e machinarum simplicium numero excludi debet haec tertia species, vnde factum quoque est, vt nullo peculiari nomine insigniatur, quamuis vtiliter in quibusdam casibus, vbi virium copia adest, ad celeritatem augendam adhiberi possit.

§. 11. Inuento sic semel Vecte, ingenio veterum debemus eiusdem varias emendationes. Cum enim hoc praecipuo incommodo Vectis laboret, quod desinat habere energiam, quam primum ex situ horizontali verticalem nactus est: medelam huic malo attulerunt inueniendo *Trochleam*, quae nihil aliud est, nisi *Vectis* heterodromus aequalium brachiorum *perpetuus*, ex qua sola quidem nihil virium lucramur, si centrum eius immobile sit; si vero mobile fuerit, aut aliquot trochleae inter se coniungantur, multum eae vires augent, et reuocantur ad Vectem compositum. Obtenta sic trochlea facile fuit inuenire *Axem in peritrochio*; nam cum Trochlea simplex vectis sit aequalium brachiorum, qui vim oneri requirit aequalem: cogitatum fuit de Trochlea inaequalium brachiorum, quorum breuiori onus, longiori autem vis applicari posset, ex quo ortus fuit Axis in peritrochio, qui nihil aliud est quam Vectis perpetuus inaequalium brachiorum.

§. 12. Applicemus nunc tres potentias superficiebus Geometricis, et quidem earum simplicissimae, nempe Triangulo. Possunt hic occurrere varii casus. Aut enim potentiae omnes applicatae erunt vni lateri; aut duae earum tantum vni lateri, tertia alteri lateri; aut vero singulis lateribus applicatae erunt singulae potentiae. Primum si

acciderit: necesse est, vt omnes tres potentiae applicatae sint vni eidemque puncto; quod si non fiat, Vectis redibit. Quae potentiae igitur, si vni puncto sint applicatae, poterunt earum duae componi in vnam, quam
Fig. 2. repraesentabo per rectam EF, quae sola duarum aliarum non expressarum sit aequiualens. Resoluatur haec EF in duas EG et EH, quarum illa sit perpendicularis in latus Trianguli AB, et haec cum latere AB coincidat: euidens est, si Triangulum fiirmum sit et immobile potentiarum aliquam partem, nempe EG absorberi a firmitate obstaculi huius immobilis, et consequenter ad producendum aequilibrium inter tres has potentias requiri vnicam quae sit expressa per EL, et aequalis ipsi EH, hoc est minor quam EF. Non minus autem patet quoque, si in continuata GE capiatur EI minor quam EG, atque ex EL exque hac EI componatur noua EK: fore vt etiam haec EK aequilibrium seruet cum duabus EF, sed non eo compendio quod ante fuit, cum iam EK sit maior quam EL, neque latus AB omne id quod fieri potest absorbeat. Vocatis igitur $EF = p$, et $EK = q$, erit in triangulo rectangulo EHF, sinus totus (1): EF (p) = cos. HEF : HE vnde $HE = p$ cos. HEF; eodem modo eruitur in triangulo rectangulo ELK, sinus totus (1) : EK (q) = cos. KEL : EL vnde $EL = q$. Cos. KEL; cum itaque pro Onere, dabitur analogia V : O = cos. HEF: cos. EH et EL sint inter se aequales; ponendum erit p. Cos. HEF = q. Cos. KEL, vel si q accipiatur pro Vi, et p requiratur, vt ad aequilibrium efficiendum solae KEL; vel demissa perpendiculari AD in latus BC, erit $V : O = \frac{BD}{AB}$: cos. KEL = BD : AB. cos. KEL, si AD ducta accipiatur pro linea horizon-

rizontali, et EF ad hanc perpendicularis, vt directionem grauis naturaliter cadentis exprimat. Apparet igitur ex hac applicatione trium potentiarum oriri machinam ſimplicem, quae *Planum inclinatum* ordinarie vocatur, vnde ſimul patet, planum hoc inclinatum optimo iure machinis ſimplicibus adnumerari. Energiam vero ſuam accipit ab abſorptione, dum pars aliqua ponderis abſoluti, nempe E G, intra planum abſorbetur ab eius firmitate.

§. 13. Cum machinae ſimplices maxime ad eleuanda onera ingentia in vſum vocentur: ſine dubio prima praxis cum plano inclinato inſtituta docuit, hypothenuſam eius longitudinem talem requirere, quae vel difficulter vel plane non dari poſſit, ſi onus ad mediocrem altitudinem ſit eleuandum. Huic incommodo medelam attulit ingenium primaeuorum, dum tale planum cylindro circumuolutum imaginati ſunt, ex quo planum inclinatum idem aliam formam accipit, et *Cochlea* vocatur; idem enim praeſtant ſulci ſpirales, quibus cochleae ordinariae exarantur, quod efficeret planum inclinatum cylindro circumuolutum, ſed illud commodi lucramur in cochlea, quod et multo minus ſpatium occupet, et facilius parari poſſit. Cum itaque Cochlea nitatur eodem fundamento quo planum inclinatum, et ex §. 12 facile intelligatur, Vectis et plani inclinati naturas nimis eſſe diuerſas, quam vt vnam ex altera deriuare liceat: patet recte aſſertum eſſe a *Dechales*, mundi Mathem. Mechan. lib. 1. p. 397, Cochleam ad Vectem reuocari non poſſe.

§. 14. Si caſuum enumeratorum contingat ſecundus, vt nempe duae potentiae vrgeant vnum latus, et tertia ſola alterum: poterit duarum in vnum latus directarum actio componi in vnam ſolam potentiam, vt ita vnicui-

que horum duorum laterum vna ſola vis ſit applicata. Quo facto, cum tertia potentia abſit quae his duabus aequilibrium inſerre poſſit: nihil aderit, quod triangulum hoc modo a potentiis ſolicitatum vel a motu progreſſiuo, vel a motu rotatorio, liberet; quare hoc caſu impoſſibile erit obtinere machinam ſimplicem.

§. 15. In caſu autem tertio, qui nempe ſingulis lateribus ſingulas applicatas exhibet potentias, ſint duobus
Fig. 3. lateribus CA et CB applicatae potentiae qualescunque FG et DE, quae reſoluantur in binas FH et FI, nec non DM et DN, quarum FH et DN ſint in ipſis lateribus Trianguli; FI autem et DM ſint ad haec perpendiculares. Euidens eſt, duas potentias FH et DN nullum effectum edituras eſſe in ipſum triangulum; ipſas vero FI et DM hoc perpendiculariter ad latera eſſe ſolicitaturas. Reſoluantur hae denuo in binas FK, FL, et DP, DO, quarum FK et DP ſint verticales, FL et DO autem horizontales. Niſi iam horizontales FL et DO ſint in eadem horizontali, atque inter ſe aequales, vt vna alteram per *Deſtructionem* tollat: non poterit triangulum vel a motu progreſſiuo, vel a motu rotatorio liberari, ſin itaque punctum F et D concipiantur in eadem horizontali, poteſt recta FD conſiderari vt Vectis, cuius extremis potentiae FK et DP applicatae ſunt; his tertia, in aequilibrio ipſas ſeruans, applicari deberet in earum centro, vel hypomochlio, ſi fuerint inaequales; quod cum caſus infinite multos pariat: ſimpliciſſimum erit, potentias FK et DP conſiderare aequales, ortas ex aequalibus FG et DE, in eadem horizontali, et ſub iisdem angulis AFG et BDE triangulo aequicruro ACB, cuius baſis AB horizontalis

quo-

quoque ſit, applicatis. Quo facto Machina ſimplex oritur, quae Cuneus dicitur, cuius ratio ex natura Vectis deducenda erit, cuius iam machinae ſimplicis leges erunt inueſtigandae.

§. 16. In his itaque circumſtantiis ſimpliciſſimis ſoli- Fig. 4.
citetur triangulum aequicrurum ABC, et cuius latus AB horizontale ſit, a duabus potentiis aequalibus FG et DE, in eadem horizontali FD, et ſub iisdem angulis ad latera applicatis, eaeque reſoluantur in ſuas collaterales eo modo, vti paulo ante dictum fuit; quo facto duae potentiae FL et DO ſibi mutuo directe occurrentes et aequales ſeſe deſtruent, atque triangulum ABC a ſolis FK et DP, itidem aequalibus ſurſum vrgebitur verticaliter, quibus nunc tertia in medio ipſius AB opponenda venit ad ſeruandum aequilibrium. Sit haec tertia potentia RQ, cuius quantitas et relatio ad ipſas DP et FK ita definietur. Poſitis $DE = FG = p$, et ſinu toto $= 1$, erit in triangulo EMD, ſinus totus $(1) : ED\ (p) =$ ſinus $EDN : DM$, vnde $DM = p.$ ſin. EDN. Porro in triangulo MDP erit ſinus totus $(1) : MD\ (p.\ \text{ſin. } EDN) =$ ſin. $DMP\ (\frac{BR}{CB}) : DP$, hinc $DP = \frac{p \cdot BR \cdot \text{ſin} \cdot EDN}{CB}$. Triangulum itaque ſurſum agitur, ob $FK = DP$, a potentia quae aequalis eſt $\frac{2p \cdot BR \cdot \text{ſin} \cdot EDN}{CB}$, cui potentia tertia RQ etiam aequari debet. Sin itaque vires DE et FG ſimul agentes vocentur Onus, hoc eſt $O = 2p$, et vis RQ ſit vis, hoc eſt $V = RQ$, habebitur haec aequatio, $V.\ CB = O.\ BR.$ ſin. EDN, aut haec proportio, efficaciam Cunei declarans $V : O = BR.$ ſin. $EDN : CB$. Vnde patet, in Cuneo vim requiri onere minorem; ipſumque energiam ſuam accipere

ex eo, quia duae potentiae partiales DO et FL ſeſe mutuo deſtruunt, et in firmitatem ipſius redundant; ipſum denique dependere a natura Vectis.

§. 17. Cum itaque appareat, angulum EDN, hoc eſt directionem potentiae DE ad latus, in computum et calculum efficaciae ingredi: patet ſimul, non vnam et ſolam huius machinae rationem quae vim inter et onus obtinet, dari poſſe, vti communiter ab Authoribus hoc fit, qui et ob id ipſum in diuerſas ſententias abeunt. Conſiderata igitur memorata hac directione, ponam primo coincidere ipſam DE cum latere trianguli CB; atque ſic erit ſin. EDN $= 0$, emergetque proportio ſequens, V : O $= 0$: CB, hoc eſt, vis nulla adeſſe debet ad aequilibrium obtinendum, quod per ſe patet. Secundo ponam, efficere DE angulum rectum cum latere CB, qui caſus obtinet, cum ligna huius machinae ope diffindenda veniunt; huius enim partes, ſeparatae iam aliquantum, iuxta arcum circuli, hoc eſt, in directione ad vtrumque latus CA et CB perpendiculari, cuneum vrgebunt, et ſeſe reſtituere conabuntur; atque erit iam ſin. EDN $= 1$, quare hoc caſu obtinebit proportio V : O $=$ BR : CB. Tertio ponam, potentiam DE habere directionem in cuneum horizontalem, quo facto erit ſin. EDN $=$ ſin. FDB $=$ ſin. FDC $=$ ſin. ABC $= \frac{RC}{CB}$, et dabitur proportio V : O $=$ BR. RC : CB^2.

§. 18. Cum itaque laborauerint Authores vt Cuneum ad Vectem reuocent, de quo vid. Dechales in Mundo Math. Mechanices lib. 1. p. 397. patet ex allegatis, Cuneum eſſe quidem Vectem, ſed non talem qualem conſiderauit Ariſtoteles, qui ſtatuit; poſito corpore diffringendo ST VX,

VX, et cuneo intruſo ACB, idem praeſtare cuneum, quod efficeret Vectis duplex A*a*C et B*b*C, primi generis quilibet, quorum hypomoclia ſint *a* et *b*, vires applicatae in A et B, onera vero vtrinque in C; eſſet enim hoc modo V : O = C*a* : *a*A, quod inuentae proportioni repugnat. Neque etiam verum attigit Guido Vbaldus, qui ſtatuit adeſſe duos Vectes ſecundi generis, quorum commune hypomochlium ſit C, vires applicatae in A et B, onera autem in *a* et *b*; nam iuxta haec placita eſſet V : O = *a*C : AC, quod iterum rationi inuentae contrarium eſt. Sed cuneus eſt Vectis primi generis FLD, cuius hypomochlium eſt in medio, et onera vtrinque in D et F ſunt applicata. Eſt autem huius Vectis haec natura, vt, manente ſemper eadem ratione inter Vim et Onus, brachia eius continuo fiant longiora, ſi cuneus percuſſione intrudatur; quo ipſo haec machina ſimplex corporibus diuellendis quam maxime eſt accommodata.

§. 19. Requireret nunc ordo huius tractationis vt conſiderarentur etiam tres potentiae figuris Geometricis multi lateris applicatae. Sed hac inquiſitione vlteriori opus non eſt, partim quia machinarum non niſi ſimplicium perfectam enumerationem inſtituere mihi propoſui, ad quas proinde non niſi figura etiam ſimpliciſſima, qualis Triangulum eſt, requiritur; partim vero etiam, ſi qua machina ad ſimplices proxime accedens ex figura multilatera, et potentiarum ad eam applicatione, ſperari poſſet, ea commode Cuneo accenſeretur. Prodeunt itaque Machinae ſimplices non niſi duae, *Vectis* ſcilicet, et *Planum Inclinatum*, ex eo deducuntur *Trochlea*, *Axis in peritrochio*, et *Cuneus*; ex hoc vero deriuatur *Cochlea*.

SPE-

SPECIMEN EMENDATIORIS THEORIAE ORDINVM ARCHITECTONICORVM

AVCTORE
Georgio Wolffg. Krafft.

§. 1.

Quamuis negari nequeat, ineſſe receptis atque ab antiquiſſimis temporibus ad nos perductis *Ordinibus Architectonicis* talem venuſtatem, et eiusmodi decus, quod diſtincte quidem vix exprimi poſſit, ſed in quo animus tamen ſpectatoris intelligentis plane acquieſcat, et placida quadam voluptate perfundatur; ita quidem, vt *Sturmius* putauerit *Doricum* et *Corinthium* Ordines ab ipſo Deo immediate fuiſſe hominibus reuelatos, cum eorum elegantia vires humanas plane ſuperare videatur, et reliqui Ordines non ſint niſi ad eorum imitationem expreſſi; *Vilalpandus* quoque conſuerit, *Capitula* columnis Templi Salomonis impoſita ab artifice *Hiram* Phoenicio, diuino inſtinctu, prout e ſacris conſtat, ad hoc aedificium exſtruendum praedito, originem deinceps dediſſe *Capitulo* Corinthio, cum vtriusque nationis huius mutuum iam eo tempore floruerit commercium: certum tamen eſt, Theoriam horum *Ordinum* ita tenebris adhuc eſſe inuolutam, vt, fatentibus ipſis celeberrimis Architectis, vix dici queat in quo character eſſentialis vnius cuiusque *Ordinis* conſiſtat, et quidnam illud ſit, quod quemlibet a reliquis omnibus diſtinguat.

§. 2.

§. 2. Hoc aſſertum vt eo magis fiat manifeſtum, conſideremus Definitiones quae in Architectorum ſcriptis *Ordinibus* tribuuntur. Audies hic *Dauillerium* dicentem, *Ordinem architectonicum confuſioni opponi, atque eſſe connexionem plurium membrorum iuxta regulas artis elaboratam eum in finem vt totum exinde reſultans aſpectui appareat iucundum.* Cum autem regulae generales, quarum iuſſu membra archetectonica connecti debent, non prohibeant, vt infinitis fere modis ea inter ſe combinentur: videtur certe ex hac Definitione inferri poſſe, infinite multos etiam dari diuerſos *Ordines*; cui vero illationi Authores reliqui plane refragantur, dum in quinario eorum numero fere omnes acquieſcunt, de ſexto Sturmiano adhuc ſub iudice lis eſt, de pluribus autem excogitandis omnes deſperant. Idem obiicere licet alteri huic Definitioni, *Ordo eſt ornatus architectonicus, conſtans Stylobata, Columna, et Trabeatione*; nihil enim ex ea deduci poteſt vnde vnam compoſitionem harum trium partium eſſentialium ab altera quadam earundem combinatione diſtinguere liceat. Melius mea opinione characterem intrinſecum *Ordinis architectonici* expreſſit *Perraltus* in praeclara illa traductione *Vitruuii*, in nota 1. Praefationi Libri IV. adiecta, vbi talem *Ordinem* ita definit, vt is ſit; *Regula proportionem columnarum exhibens, characteremque columnae, et figuras membrorum eam ingredientium, exprimens*; neque quicquam in hac Definitione deſiderari poſſet, ſi has regulas, earumque fundamenta ſtabilia, et characteres cuiusque columnae, diſtinctius tradidiſſet; quod vnicum adhuc ſcientificae huius negotii doctrinae deeſſe videtur.

§. 3. Quodſi deinde notas characteriſticas *Ordinum* ab Auctoribus allegatas ſpecialius perluſtremus, deprehendimus, in *Tuſcano* capitulum et volutis et cymatio carere, Zophorum vel nudum eſſe, vel antepagmentis tantum ornari debere; in *Dorico* capitulum volutis itidem carere, ſed cymatia admittere, Zophorum vero triglyphis et guttis diſtingui; in *Ionico* volutas adeſſe octo, ſed folia abeſſe; in *Corinthio* volutas ſedecim cum tribus foliorum ſeriebus comparere, in *Romano* denique octo tantum volutas et duas foliorum ſeries conſpici. In his autem, ſi vel maxime differentia ſpecifica columnarum in eiusmodi extrinſecis et accidentibus tantum quaeri poſſit, iterum ita variant Auctores, vt fere nulli eorum cum alio conſtet. Ita ex. gr. quidam in Ordine *Tuſcano* cymatium admittunt; Ordinis *Dorici* inueniuntur columnae, antiquitus conſtructae, ſed triglyphis et metopis deſtitutae, teſte *Dauillerio* pag. 15. Ordini *Ionico* quidam *del Duca* Italus vnam foliorum ſeriem addidit; *Romano* Franciſc. *Borromini* ſedecim volutas tribuit. Ita porro, cum *Tuſcanus* ſimpliciſſimus omnium debeat eſſe, nec niſi aedificiis rudioribus tribui, videmus tamen eundem admoueri interdum palatiis cultiſſimis et ſplendidiſſimis. Quae omnia abunde docent, intrinſecum *Ordinis* alicuius characterem in eiusmodi circumſtantiis peregrinis quaerendum minime eſſe.

§. 4. Ad haec accedunt quoque ſequentia adhuc, quod nempe neque in proportionibus partium eſſentialium inter celeberrimos Architectos conueniat. Ita ex. gr. *Palladius* omnium Ordinum ſtylobatis aſſignat partem quartam altitudinis columnae, quintam vero trabeationi; *Vignolus* vero,

vero, aliter ſentiens, conſtanter tribuit columnae partem tertiam ſtylobatae, quartam trabeationi. *Vitruuius* lib. IV. cap. 7. *Tuſcanae* columnae altitudini ſeptem aſſignat modulos, *Serlius* vero eidem non plures concedit quam ſex. In Gallia quidam nouo ſe *Ordine* Architecturam ditaſſe cenſuit, cum integrum ſcapum foliis veſtiret, loco volutarum ab antiquis receptarum gallos gallinaceos poneret, atque vbique liliorum folia interſpergeret. Fatentur denique omnes, Ordinem *Romanum* non eſſe niſi compoſitum ex *Ionico* et *Corinthio*, ex qua ratione etiam ſub titulum *Compoſiti* venit; et ſextus Ordo a *Sturmio* excogitatus honorem ſibi ex hoc ſolo tueri conatur, quod *Ionici* ſit aemulus, eodem modo, quo *Doricus Tuſcanum*, *Corinthius Romanum* aliquantum refert. Ita igitur animus inter varias Architectorum ſententias fluctuans modo huc modo illuc agitur, neque quicquam inuenit in quo acquieſcere et verum tenere poſſit.

§. 5. Haec omnia ſolicite perpendens incidi tandem in eam ſententiam, vt putem duos ſtatuendos eſſe *Ordinum architectonicorum* quorumcunque characteres eſſentiales, quorum ope quam diſtinctiſſime illi inter ſe ſeparari, atque omnis confuſio euitari poſſit. Horum characterum vnum ſtatuo *Hiſtoricum*, *Externum*, auctoritate ſola gentium ſtabilitum et introductum, ad quem ſolum Architecti hucusque reſpexerunt, alterum vero mox memorandum plane deſeruerunt. Huc refero ex. gr. columnas *Caryatides* dictas, *Volutas* et *folia acanthina*, cum *cauliculis*, *Strias* ſcapis induci ſolitas, et alia quaedam, quorum origo hiſtorica ex Architectorum libris abunde conſtat, et quae tamen, etiamſi peregrina in hoc negotio

ſint, omnino tamen excludi non debent, ſed nec vnice ad conſtituendum criterium operum tam nobilium concurrere. Pro altero horum characterum aſſumo *Philoſophicum*, *Internum*, ex natura intima humanae mentis petitum, qui in proportionibus et earum perceptione, ſenſibus haurienda, conſiſtit. In quam rem egregie loquitur *Vignolus*, curioſus antiquitatum architectonicarum ſcrutator, affirmans, ſe obſeruaſſe, quod in columnis antiquitus conſtructis ex membris etiam minimis maxima omnia liceat dimetiri, hoc eſt, quod membra minima et maxima omnia inter ſe facile, ope proportionis comparari poſſint. Quod igitur Architecti, cognitionis philoſophicae, plerumque ignari confuſae tantum perceptionis ope pulchrum deprehenderunt: id ope Matheſeos rectificandum et confirmandum, ſed ſimul ſuis limitibus circumſcribendum eſt, eo plane modo, quo in Muſica citius harmoniae quaedam auditui gratae inuentae, quam earum rationes in proportionibus deliteſcentes a *Pythagora* primum detectae fuerunt, et noſtra aetate extra omne dubium poſitae tenentur.

§ 6. Eſt enim omnino etiam Architectura bene conſtituta quaedam quaſi Muſica, et palatium decore ſuo ſe commendans nihil aliud quam cantio, aut congeries harmoniarum oculo ſpectatoris intelligentis ſeſe ſimul ſiſtentium, veluti in cantione auribus accommodata illae ſe ſucceſſiue monſtrant. Natura mentis humanae ita comparata eſt, vt proportionibus facile percipiendis maxime delectetur; quae ſi a ſola ratione detegi debeant, neque alium effectum quam in animum hominis et eius facultatem rationalem edant, non placent niſi in his rebus exercitatis, et harum proportionum gnaris; cuius rei exemplum

emplum apertissimum habere possumus in serie aliqua numerorum certas leges tenente et chartae inscripta, quae certe legis huius ignarum non afficit, sed gnarum voluptate perfundit. Si vero proportiones, numeris primum expressae tantum, deinde aut motu aliquo magis nitescant, vt cum *Keplero* loquar, aut vero simultaneitate rerum corporearum in ista proportione existentium perdurescant, atque sic per organa mentis sensitiua animo illabantur: tum vero etiam proportionum inscientibus placent; prout illud quotidie obseruare licet in hominibus rudi ingenio praeditis, in quibus aliquae saltim harmoniae musicae laetitiam excitant. In quo quidem genere Architectura Musicae adhuc multum praeferenda videtur, cum illius opera non soli delectationi sed etiam vsui maxime necessario destinata sint, et longo tempore perdurent; huius vero effectus, etiamsi variis vicibus repeti possint, cito tamen transeant, neque aeque diuturnum vt illa animo alimentum praebeant.

§. 7. Incipiam autem a characterum modo indicatorum altero, qui in proportione partium columnae consistit, atque verum criterium nobis pandit, quo *Ordines architectonici* inter se possunt distingui. Suppono igitur, proportiones partium in quacunque columna ita comparatas esse debere, vt primo facile possint visu percipi quod generale omnium Architectorum praeceptum est; deinde secundo, vt in quolibet Ordine imperium teneat determinatus tantum, non vero quilibet promiscuus proportionum numerus. Cum igitur ex Arithmeticis notum sit, numerum quemlibet compositum posse resolui in determinatum numerum suorum factorum simplicium et primorum, atque hos primos numeros deinde omnifariam inter se com-

binatos varias ſiſtere proportiones; conſtitui me cum tentare, quid ex numeris ſimpliciſſime compoſitis, atque eorum ita combinatis diuiſoribus primis, in *Ordines architectonicos* influere poſſit.

§. 8. Sequor autem in his fere methodum Clariſſimi *Euleri* noſtri, qui in Egregio Opere, quod nuperrime ſub titulo: *Tentamen nouae Theoriae Muſicae*, publice prodiit, ſonos omnes, qui in cognitis hucusque Generibus Muſicis recepti fuerunt, ex aſſumto quodam numero compoſito, et eius factoribus ſimplicibus, ingenioſiſſime eruit; atque ex. gr. ex numeri compoſiti 3^2, eiusque diuiſoribus 1, 3, 9, Genus Muſicum a Mercurio quondam inuentum et Tetrachordo expreſſum; ex numeri compoſiti 3^5, 5^2, eiusque diuiſoribus ſimplicibus Genus Muſicum Diatonico Chromaticum hodie vſitatum, ad amuſſim deducit. Quemadmodum ergo ibi numerus compoſitus aſſumtus *Exponens Generis Muſici* ex eo prodeuntis vocatur: ita hic ego ſimilem numerum compoſitum aſſumam, quem Ordinis architectonici ex eo deriuati *Canonem* appellabo.

§. 9. Cum igitur in qualibet columna quatuor partes principales veniant conſiderandae, nimirum 1. Modulus, 2. Stylobata, 3. Columna, et 4. Trabeatio: ſelegi tales numeros compoſitos, qui primo ſint maxime ſimplices quia ſimplicitas in hoc negotio maxime placet, et deinde qui non in plures quam quatuor diuiſores poſſint diſcerpi, vt nempe proportiones inde eruendae ex vno aliquo *Canone* deriuentur, atque vt ſimul hoc Canone proportionum in aliqua columna adhibendarum numerus exhauriatur, neque aliqua ſuperſit aut deficiat. Vti ex. gr. ſi capiatur numerus

merus compoſitus 2, 3, conſtans ex duobus numeris primis: habet is diuiſores ſequentes, 1, 2, 3, et 6, vnde non plures erui poſſunt proportiones quam ſequentes quinque, terminis omnibus inter ſe comparatis, nempe 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3, 1 : 6, et 2 : 3. Id circo diuiſorum quemlibet aſſigno partium columnae principali alicui, et deinde proportionem partium nullam aliam aſſumo quam talem, quae ex omniſaria diuiſorum facta combinatione eruitur. Ipſum vero numerum compoſitum, ex quo omnia haec deriuantur, voco *Canonem Ordinis Architectonici*; ex quo ſolo Ordines hos inter ſe diſtinguo, et in quo ſolo character eſſentialis Ordinum conſiſtere videtur.

§. 10. Vt vero hoc inſtitutum generalius perſequar, aſſumo numerum compoſitum $m \times n$ ortum ex multiplicatione duorum numerorum primorum m et n, inter quos ſit n maior quam m. Reſoluetur hic numerus compoſitus in diuiſores ſequentes, 1, m, n, mn, atque exinde eruentur proportiones non plures quam ſequentes quinque, nimirum $1 : 1$, $1 : m$, $1 : n$, $1 : mn$, $m : n$; Vt deinceps diuiſorum quilibet ſuam ſibi conuenientem partem columnae principalem nanciſcatur: aſſumo 1 pro modulo columnae, m pro trabeationis, n pro ſtylobatae, mn vero pro columnae longitudine, quoniam ex regulis generalibus patet, trabeationis altitudinem minorem debere eſſe ſtylobatae altitudine, et columnae altitudinem vtramque priorum vt ſuperet, neceſſe quoque eſſe. Si vero quis ordinem hunc, et hanc aſſignationem malit inuerſam, inter ſtylobatam nempe et trabeationem, mihi perinde erit; in vtroque enim caſu id efficitur, vt partes principales

columnae

columnae nullam aliam inter ſe teneant proportionem, quam eas quae ex *Canone Ordinis* eruuntur.

§. 11. Iam vero etiam id requiro, vt partes columnae *ſecundariae* nullam aliam inter ſe ſeruent proportionem, quam quae ex generali *Canone Ordinis* eruuntur. Partes autem columnae *ſecundariae* comprehenduntur vel ſub ſtylobata, quae ſunt *baſis ſtylobatae*, *truncus*, et *coronis ſtylobatae*; vel ſub columna ſpecialius ſic dicta, quae ſunt *baſis columnae*, *ſcapus*, et *capitulum*; aut vero ſub trabeatione, quorſum referuntur *epiſtylium*, *zophorus*, et *coronix*. Harum partium ſecundariarum triga quaelibet nullam aliam tenere debet proportionem, quam quae ex Canone deriuatur. Leui itaque adhibito calculo analytico eruuntur altitudines partium ſecundariarum columnae totius, ſub *Canone Ordinis* $m \times n$ contentae, hunc in modum:

Stylobata $AD = n$.

baſis ſtylobatae $AB = \frac{mn}{1+m+n}$.

truncus $BC = \frac{n^2}{1+m+n}$.

coronis ſtylobatae $CD = \frac{n}{1+m+n}$.

Columna $DG = mn$.

baſis columnae $DE = \frac{mn}{2+mn}$.

ſcapus $EF = \frac{m^2n^2}{2+mn}$.

capitulum $FG = \frac{mn}{2+mn}$.

Trabeatio $GK = m$.

epiſtylium $GH = \frac{m}{m+2}$.

zophorus $HI = \frac{m}{m+2}$.

coronix $IK = \frac{m^2}{m+2}$.

§. 12. Quae igitur altitudines partium ſecundariarum ſi alicui columnae tribuantur, efficietur, vt et partes principales

cipales omnes inter se quomodocunque combinatae nullam aliam producant proportionem quam *Canone Ordinis* comprehensam, et partes secundariae, quae sub eadem principali continentur, etiam inter se quomodocunque combinatae ad earundem proportionum numerum restringatur. Ita ex. gr. *scapus* ad *capitulum* tenebit rationem $\frac{m^2n^2}{1+mn} : \frac{mn}{2+mn} = mn : 1$, quae sub Canone continetur; atque sic de caeteris partibus. Efficit denique quaelibet triga partium secundariarum simul sumta altitudinem suae partis principalis, vti ex. gr. $AB + BC + CD = AD = \frac{mn+n^2+n}{1+m+n} = \frac{(1+m+n)n}{1+m+n} = n$, atque sic pariter in caeteris.

§. 13. Hoc vnicum exinde nascitur incommodum, quod partes diuersarum trigarum secundariae proportionem inter se nanciscantur aliquando inconcinnam; veluti si comparetur basis stylobatae A B cum epistylio G H, eruetur proportio $\frac{mn}{1+m+n} : \frac{m}{m+2}$ vel $n.\ m + 2 : 1 + m +$. Sed vt taceam proportionem hanc in casibus specialibus aliquando fieri posse concinnam, et *Canoni Ordinis* conuenientem, considerandum est, impossibile hoc requisitum esse, nisi regulis Generalibus Architectonicis contrariari velimus; atque insuper easdam regulas id poscere, vt partes secundariae sub diuersis trigis comprehensae data opera a se inuicem discernantur; quarum legum iussu stabilitum quoque est, vt ne diuersarum trigarum partes finitimae, veluti *coronis stylobatae* et *basis columnae apophygi* inter se iungantur, atque sic caueatur, ne in vnum coalitae hae partes credantur, quae diuersae esse debent. Cuius quidem rei, si prolixus esse vellem, quamplurima exempla similia in Musicis quotidie vsitatissima allegare liceret.

§. 14. Quod autem iam de partibus columnae principalibus monui §. 10. nolle me insistere earum altitudini quam iis hic tribuo: id etiam de partibus secundariis intellectum volo. Potest ex. gr. basis stylobatae esse maior eiusdem coronide, potest esse minor; potest aequalis esse epistylio zophorus, potet esse inaequalis; sunt enim hae circumstantiae accidentales tantum, neque ad rei essentiam pertinent. Sed id solum obseruari debet, vt ne alia ex mutatione facta exsurgat proportio, quam quae intra limites Canonis continetur, qui solus diuersitatem Ordinibus inducit. Neque etiam id ita strictim interpretandum esse velim, vt columna sine stylobata esse nequeat. Notum enim est, *Vitruuium* fere nullis, et hodiernos *Tuscanis* rarissime, stylobatam concedere. Quae vero cum nonnunquam necessario requiratur, non potest non partibus principalibus accenseri, atque, si alicubi deficiat, non tamen extra reliquarum proportionum *Canoni* debitarum limites extrauagari licet.

§. 15. His ita generaliter iam pertractatis nihil amplius restat, quam vt loco numerorum generalium m et n substituamus successiue alios atque alios determinatos, videamusque quales ex quolibet Canone Ordinis columnarum figurae et proportiones proditurae sint. Sit igitur primus Canon hic 2×3, hoc est $m = 2$, $n = 3$, erunt eius diuisores $1, 2, 3, 6$, atque eruentur exinde rationes sequentes, $1:1$, $1:2$, $1:3$, $1:6$, $2:3$, erunt itaque:

Stylobata $AD = 3$ modulis.

basis stylobatae $AB = 1$.

truncus $BC = 1\frac{1}{2}$.

coronis stylobatae $= \frac{1}{2}$.

Columna

Columna DG = 6.
basis columnae DE = $\frac{3}{4}$.
scapus EF = $4\frac{1}{2}$.
capitulum FG = $\frac{3}{4}$.
Trabeatio GK = 2.
epistylium GH = $\frac{1}{2}$.
zophorus HI = $\frac{1}{2}$.
coronix IK = 1.
quibus ita delineatis exsurgit columna *Ordinis Primi*, Canonis 2×3, cuius formam repraesentat Figura 5.

§. 16. Assumatur secundus Canon hic 2×5, in quo nunc est $m = 2$, $n = 5$, erunt diuisores hi 1, 2, 5, 10, atque eruentur rationes sequentes 1:1, 1:2, 1:5, 1:10, 2:5, quae partim eaedem sunt cum rationibus Canonis praecedentis, partim vero ab iis discrepant. Deducetur ex his
Stylobata AD = 5.
basis stylobatae AB = $1\frac{1}{2}$.
truncus BC = $3\frac{1}{2}$.
coronis CD = $\frac{5}{8}$.
Columna DG = 10.
basis DE = $\frac{5}{8}$.
Scapus EF = $8\frac{1}{2}$.
capitulum FG = $\frac{5}{8}$.
Trabeatio GK = 2.
epistylium GH = $\frac{1}{2}$.
zophorus HI = $\frac{1}{2}$.
coronix IK = 1.
quibus ita delineatis exsurgit columna Ordinis secundi, Canonis 2×5, cuius formam exhibet Figura 6.

§. 17. Assumatur tertius Canon hic 2×7, in quo est $m = 2$, $n = 7$, erunt diuisores hi 1, 2, 7, 14, atque eruentur rationes sequentes 1 : 1, 1 : 2, 1 : 7, 1 : 14, 2 : 7, in quibus nouae iterum sunt in nullo praecedentium Canonum occurrentes. Deducetur ex his,

Stylobata $AD = 7$.
basis $AB = 1\frac{3}{7}$.
truncus $BC = 4\frac{9}{10}$.
coronis $CD = \frac{7}{15}$.
Columna $DG = 14$.
basis $DE = \frac{7}{8}$.
scapus $EF = 12\frac{1}{4}$.
capitulum $FG = \frac{7}{8}$.
Trabeatio $GK = 2$,
epistylium $GH = \frac{1}{2}$.
zophorus $HI = \frac{1}{2}$.
coronix $IK = 1$.

quibus ita delineatis exsurgit columna Ordinis Tertii, Canonis 2×7, cuius formam exhibet Figura 7. Sed vlterius iam hoc modo, vbi nempe vnus factorum numeri compositi est 2, progredi non licet, ob hanc rationem: cum longitudo totius columnae generaliter prodeat $= n + mn + m$, esset, si assumeretur Canon 2×11, eius columnae longitudo $= 11 + 2 = 35$ modulis; sed vetant Architecti in altitudine columnae 30 modulos excedere, imo praestantissimi eorum infra hunc numerum subsistunt; quare hanc Canonum formam vlterius extendere non licebit.

§. 18. Supponamus igitur aliam Canonis formam, nempe hanc 3×5, in quo est $m = 3$, $n = 5$, erunt diuisores hic, 1, 3, 5, 15, atque eruentur rationes sequen-

quentes, 1 : 1, 1 : 3, 1 : 5, 1 : 15, 3 : 5. in quibus denuo nouae ſunt, et in praecedentibus abſentes. Deducetur ergo ex his:

Stylobata A D = 5.
baſis A B = $1\frac{2}{3}$.
truncus B C = $2\frac{7}{9}$.
coronis C D = $\frac{5}{9}$.
Columna D G = 15.
baſis D E = $\frac{15}{17}$.
ſcapus E F = $13\frac{4}{17}$.
capitulum F G = $\frac{15}{17}$.
Trabeatio G K = 3.
epiſtylium G H = $\frac{5}{3}$.
zophorus H I = $\frac{3}{3}$.
coronix I K = $1\frac{4}{5}$.

quibus ita delineatis exſurgit columna Ordinis Quarti, Canonis 3×5, cuius formam Figura 8. ſiſtit. Tab. V.

§. 19. Aſſumatur quintus Canon hic 3×7, in quo eſt $m = 3$, $n = 7$, erunt diuiſores hi, 1, 3, 7, 21, atque eruentur rationes ſequentes, 1 : 1, 1 : 3, 1 : 7, 1 : 21, 3 : 7; deducetur ex his:

Stylobata AD = 7.
baſis AB = $1\frac{10}{33}$.
truncus BC = $4\frac{5}{11}$.
coronis CD = $\frac{7}{11}$.
Columna DG = 21.
baſis DE = $\frac{21}{23}$.
ſcapus EF = $19\frac{4}{23}$.
capitulum FG = $\frac{21}{23}$,

Trabeatio GK = 3.
epiſtylium GH = $\frac{5}{5}$.
zophorus HI = $\frac{3}{5}$.
coronis IK = $1\frac{4}{5}$.

quibus ita delineatis exſurgit columna Ordinis Quinti, Canonis 3 × 7, cuius forma repraeſentatur Figura 9. Sed hic denuo ſubſiſtendum eſt, cum et huius Canonis columna altitudine ſua iam habeat 31 modulos, quod tolerari adhuc poteſt; ſed ſi aſſumeretur Canon 3 × 11, prodiret longitudo columnae iam 47 modulorum, et plurium adhuc ſi aſſumerentur Canones altiores, vti 5 × 7, 5 × 11, etc.

Tab. V.

§. 20. Mirum in hac Theoria accidit, quod non plures eruantur quam quinque Columnarum Ordines, quot nempe ad hunc vsque diem ſunt ab omnibus Architectis recepti. Stante ergo hac Hypotheſi, quod *Ordo Architectonicus* ſit congeries partium columnae, eam inter ſe rationem tenentium, quae ex numero e duobus primis compoſito erui poſſunt, neque alias praeterea includat; patet, plures quam quinque Ordines inuentu impoſſibiles eſſe, niſi in generales regulas Architecturae velimus impingere. Caeterum de *Ecphoris* partium in his delineationibus non adeo ſolicitus fui; poſſunt enim illae haud difficulter eodem modo inter ſe aptari, vt nullas niſi *Canonicas* aſpectui offerant proportiones.

§. 21. Ex altitudinibus et firmitatibus harum columnarum facile apparet, primam nimis paruam et humilem eſſe; ſecundam congruere cum *Tuſcano*; tertiam cum *Ionico*; quartam cum *Dorico*, et quintam cum Romano et

Corinthio, quod ex inſtituta comparatione inter menſuras meas, et illas quae in *Traité d'Architecture par Seb. le Clerc*, ſingulis Ordinibus tribuuntur, ſatis accurate colligere licet; quare vt iis accedant etiam *characteres Hiſtorici externi*, quaelibet earum ornamentis ad ipſam pertinentibus facile adhuc poterit adaugeri, quo facto deinde vtroque charactere praeditae apparebunt, quem in iis requiri oſtenſum eſt. Haec vero pro *ſpecimine* tantum *emendatioris Theoriae Ordinum Architectonicorum* hac vice ſufficiant.

DE

DE FVNGO INSOLITAE MAGNITVDINIS OBSERVATIO.

AVCTORE
Ioanne Ammano.

Anno praeterito, nempe 1739 mihi ex Ingria allata fuit fungi ſpecies, quae inferna capituli ſuperficie loco lamellarum tubulos obtinet. Erat hic fungus tam inſolitae et vaſtae magnitudinis, vt illum delineare et breuiter ſequentibus deſcribere operae pretium duxerim.

Pileus diametro pedem, craſſitie tres pollices aequabat eratque vtrinque conuexus, magis tamen ſuperficie ſuperna, quam inferna. Pediculus longitudine dimidii pedis, colore praeditus fuit dilute luteo et hinc inde albente, craſſitie prope baſin vbi craſſior erat, quam parte ea, qua capitulo inſerebatur, facile tres pollices ſuperans. Materies pediculi alba et leuis erat atque ſpongioſa. Pilei duplex fuit, ſuperior intus alba, extus luteo fuſca, illi ex qua pediculus conſtabat, ſimilis; inferior vero fiſtuloſa ex meris tubulis albentibus compoſita erat. Pertinet ergo ad fungorum eſculentorum genus, quod Clar. Michelius ſub Suilli titulo inſtituit. Repertus fuit autumno in villa Comitis Goloffkin.

DE-

DESCRIPTIO ET ICON NOVAE BERMVDIANAE SPECIEI.

AVCTORE

Ioanne Amman.

Inter res naturales plures, quas R. R. P. P. Societatis Iesu Pekino Sinensis Imperii Capite ad Academiam Petropolitanam ante aliquot annos miserunt, semina etiam erant globosa et aterrima YEN TSCHI titulo insignita. Haec terrae calore equini stercoris tepenti Iunio mense in horto Academico commisi. Breui temporis spatio exinde enascebantur plantae Iridum iunioribus admodum similes, quae fictilibus inditae et in hybernacula positae hyemem quamuis longam et rigidam facile tolerabant.

Sequenti autem anno primo Vere e radicibus harum plantarum, quae Iridum adinstar carnosae, oblongae et repentes sunt, quam plurimas fibras longas, crassas, luteas emittentes, duo tres, aut plures oriebantur caules bipedales plus minus, prope radicem calami olorini crassitie, nec compressi, nec alati, vt in aliis huius generis speciebus fieri solet, sed teretes fere, laeues, pallide virentes, octo nouem aut decem geniculis distincti ad incerta prorsus interualla.

Singulis hisce geniculis folia adnascebantur Iridis hortensis, latifoliae C. Bauhini valde similia, dilute viridia, lata basi caulium genicula amplexantia, arcuata, in medio sesqunciam praeter propter lata, in tenuissimum mucronem terminata, secundum longitudinem striata, glabra, consistentiae satis firmae. Folia, quae circa medium caulis crescebant, iis quae prope radicem et caulium summitates nascebantur, multo erant maiora.

E ſuperiorum foliorum ſinubus temporis progreſſu ramuli emittebantur folioſi itidem et geniculati, teretes et glabri, in alios minores diuaricati, e quorum geniculis tandem et ex accretorum foliolorum alis pediculi ſurgebant vnciales plus minus, tenues, e viridi flaueſcentes, tres quatuor aut plures, quorum ſinguli in cacumine embryonem gerebant triquetrum, oblongum, ſplendentem, dilute viridem. His autem innaſcebantur flores ſatis ampli, hexapetali, interdiu expanſi, noctu clauſi. Florum petala ſingula ſemunciam circiter longa erant, trientem pollicis praeter propter lata, vtrinque anguſtata, e flauo rubentia, intus maculis plurimis coccineis, elegantiſſimis inſignita, prope baſin, interna ſcilicet eorum ſuperficie, ad medium vſque parum ſulcata, in quibus ſulcis liquor mellei ſaporis continebatur. Petala haec durabilia non erant, ſed ſpatio vnius aut alterius diei flacceſcebant, contorquebantur, et embryonis ſummitati ſpirae in modum contorta eidem ad maturitatem vſque inhaerebant.

Embryonum porro ſingulorum ſummitatibus innaſcebatur piſtillum vnciam circiter longum, prope baſin valde tenue et teres, extremum verſus ampliatum, triquetrum, coloris dilute rubentis, apice in ſex ſegmenta, tria ſcilicet exteriora et maiora, atque in interiora minora, oblonga, pallida et piloſa fiſſum.

E tribus autem petalorum interiorum vnguibus, quae exterioribus ſubinde paullo maiora ſunt, ſtamina oriebantur in ſingulis petalis ſolitaria, piſtillo dimidio fere breviora, dilute itidem rubentia, apicibus praedita trientem vnciae longis, dimidiam circiter lineam latis, ſubtiliſſimo luteo puluere aſperſis.

Embryo

Embryo floribus marcescentibus excrescebat in fructum obtuse trigonum, glabrum, pallide virescentem, extremitatem versus ampliatum, in tria loculamenta diuisum et per maturitatem trifariam dehiscentem. In singulis hisce loculamentis baccae continebantur plures, sphaericae, Coriandri seminis magnitudine, aterrimae, splendentes, axi affixae: pulpae autem medium occupabat semen durum, sphaericum itidem, coloris fusci. Hiscente per maturitatem fructu baccae axi medio satis firmiter adhaerescentes exiguam uvam quodammodo et aspectu pulchram repraesentabant.

Iulio mense in horto Academico florere incipiebant supra descriptae plantae et per integrum Augustum flores magna copia proferebant, versus finem autem Septembris et Octobri mense fructus maturabant.

Increscente hyeme folia et caules moriuntur. Radices, quae perennes sunt, in hybernaculis modice calidis seruari et parum sed sepius irrigari debent.

Florum petalis et fructu nostra haec planta cum Bermudianae speciebus a Celeberrimo Tournefortio in Institutionibus rei herbariae recensitis conuenit, differt staminibus a prima Eius specie et ab alia illa exiliori Virginiana, quas ambas, accuratissime, vt solet, Celeberr. Dillenius in horto Elthamensi descripsit et delineauit, in quibus staminum apices pistillo appressi sunt, secus ac in nostra planta, quae stamina obtinet libere fluctuantia: differt seminibus pulpa obductis; fructus membranis per maturitatem penitus reflexis, seminibus interim non deciduis; pistilli summitate in sex segmenta diuisa. Differt denique ab Ixiae genere a Clariss. Linnaeo in Corollario generum plantarum instituto petalis florum vt plurimum inaequalibus; pistillo staminibus duplo fere longiori, eiusdem stig-

mate in ſex ſegmenta diſſecto; ſeminibus non ſaepius, vt ſcribit, ſolitariis, ſed pluribus ſemper in ſingulis fructus loculamentis. Verum ſi omnes has minutias ad conſtituenda genera adhibere velimus, tot erunt genera, quot ſunt plantarum ſpecies.

Retuli elegantem hanc plantam ad Bermudianae genus a Tournefortio primo definitum et a Dillenio confirmatum, poſtea vero a Linnaeo ſub alio, Siſyrinchii nempe titulo in generibus ſuis plantarum deſcriptum, quia petalorum numero, calyce vel embryone ceu futuri fructus rudimento cum eo conuenit. Reliquae differentiae ſpeciem non genus determinant.

Haec igitur Bermudianae ſpecies, vt clarius ab aliis diſtinguatur, ſequenti nomine inſigniri poteſt:

BERMVDIANA RADICE CARNOSA, FLORIBVS MACVLATIS, SEMINIBVS PVLPA OBDVCTIS;

His enim notis a reliquis ſpeciebus, de quibus bonae et perfectae deſcriptiones apud rei herbariae ſcriptores extant facillime, vel ſolo nomine diſtinguitur

Explicatio Tabulae.

Fig. 1. Plantam repraeſentat integram, radice excepta.
Fig. 2. Radicem plantae iunioris, quae nondum flores protulit.
Fig. 3. Floris magnitudinem naturalem. Lit. a piſtillum eius.
Fig. 4. Fructum nondum prorſus maturum cum reſiduis floris petalis ſpirae in modum contortis.
Fig. 5. Fructum maturum dehiſcentem.
Fig. 6. Baccas demonſtrat. Quae lit. a inſignita eſt, in China creuit; quae lit. b. Petropoli nata eſt e ſeminibus ex China miſſis.
Fig. 7. Semen repraeſentat.

CLASSIS

CLASSIS TERTIA
CONTINENS
HISTORICA.

DE VESTRITIO SPVRINNA LYRICO ET EIVS FRAGMENTIS.

AVCTORE
T. S. Bayero.

OPVS POSTVMVM.

Caspar Barthius Vestritii Spurinnae fragmenta, vt erant in MS. Martispurgensi, inter venaticos scriptores et post aliquanto in Aduersariis edidit. Cum *Vesprucii ad Martium* inscriberentur, e Plinio, Martiale ipsisque fragmentis ostendit, illum Vestritium Spurinnam fuisse, hunc Marium. Vestritii Romae familia equestris, quod quidem Thomas Reynesius in titulo Vrbinate sibi visus est reperisse: (1)

VESITIO. DEXTRO. E
QVIT. ROMAN. PATRON.
MVNICIPI. ET. PLEBIS
OMNIBVS. HONORIB.
PERFVNCT.

Nimirum Reynesius pro VESITIO reponit VESTRITIO. Equidem non video, quid id sit, quod non etiam Vesitios equites Romae fuisse patitur Reynesius. In alio titulo apud Ianum Gruterum: (2)

DIS. MANIBVS
T. VESTRITIO
HYGINO. ET.
VESTRITIAE
CONIVGI
CARISSIMAE. FECIT
RHAMNVS. LIBERT.

Vt

(1) Exstat hic titulus etiam in Corpore Inscriptionum Gruteriano, postremae edit. p. 392. 1. (2) p. 957. 5.

Vt huic Veſtritio cognomen fuit Hygini, ita iſti noſtro, Spurinnae, qui generis ſui memoriam tum belli tum pacis artibus inſignitam reliquit. Natus mihi videtur A. C. XIII. dicam commodius poſtea, cur ita ſentiam. Tota illius adoleſcentia et pars maxima virilis aetatis in foediſſima tempora C. Caeſaris, Tib. Claudii et Claudii Neronis incidit. Summum fere in amicitia locum apud M. Saluium Othonem ante principatum tenuit: hunc nihil ita commendauit Neroni, quam morum ad omnem turpitudinem congruentia, elegantiam ipſi interpretabantur. Quare dubium non eſt aut obſcurum, Spurinnam iis moribus inſeruiiſſe, quibus et Otho delectatus eſt et Nero Caeſar. Coniectus deinde eſt in turbas reipublicae et Othonis Vitelliique contentiones de principatu. M. Saluius Otho aere alieno ingenti ad nouandum aliquid motus, militibus corruptis et Sulpitio Galba Imp. ſublato, principatum inuaſit. At A. Vitellius Germanicis legionibus ſuffultus ipſe imperare malebat, quam Othoni ſubiici. In Dalmatia et Pannonia exercitus Othoni dicto audientes erant: his contra Vitellium mouentibus alia ab Vrbe manus, quinque praetoriae cohortes et equitum vexilla cum legione prima duobusque millibus gladiatorum profecta ſunt ad Padum. Rectores his copiis vrbanis dati Annius Gallus et Veſtritius Spurinna: ita Cornelius Tacitus tradit (1) et iis quidem verbis, vt haud multo maior ad imperandum auctoritas Annio tributa fuiſſe videatur, quam Spurinnae. Cum deinde dubio Marte inter Othonem atque Vitellium in Liguribus eſſet concurſum, Caecina Alienus Vitellianis cum copiis

(1) Hiſt. l. II. c. 11.

copiis Cispadanam prouinciam intrauit, in qua Spurinna cum exercitu erat. Hic cernens Caecinae resisti non posse, se suosque intra Placentiae moenia recepit. Ibi constituit hostium vim repellere, si oppugnaretur: egredi et conserere manum cum hoste non e re est visum. Miles in diuersa tendebat, eam non prouidentiam ducis ratus, nihil temere statuentis, sed segnitiem. Tumultu militari coactus Vestritius ducere, sub noctem castra posuit ad Padum, eoque obsequio mitigatos suorum animos docendo monendoque tractare coepit, donec in potestate habuit, vt se in vrbem reduci paterentur. At Caecina vbi sensit Spurinnam rem certamini non committere, Placentiam obsidet. Primum atque iterum a munimentis repulsus, multis suorum desideratis, obsidionem soluit, Cremonam petit. Quo cognito Spurinna Annium Gallum de consiliis hostium certiorem fecit: is cum prima legione Placentiam venit, secutusque Caecinam parum abfuit, quin seditionibus militaribus agitatum opprimeret. Post non ita multo Otho Imp. superuenit: vocatus in castra Vestritius cum praesidio quod Placentiae habebat: erat enim constitutum Imperatori, ducibus nequidquam aduersantibus de summa rei praelio decernere. Pugnatum haud procul Bedriaco: Othoniani victi. Tamen militum fides victum non destituit: ipse casuum dubia metuens manus sibi intulit: ita partes in potestatem victoris concesserunt. Cum deinde Fl. Vespasianus ex Oriente aduentaret, auersis omnium ab A. Vitellio animis, non modo qui antea Othoni studuerant, sed Caecina quoque, qui magnas res pro Vitellio gesserat, ad nouum Imperatorem defecerunt.

Laeta reipublicae tempora ſub Veſpaſianis principibus: tanto infeſtiora claris viris Domitiano Imp. Obiit interim Spurinna variis perfunctus officiis, geſſit magiſtratus, prouincias rexit, (1) deinde etiam exercitibus Germanicis praefuit, Bructerum regem vi et armis induxit in regnum, et ferociſſimam gentem terrore nominis Romani perdomuit: quas ob res geſtas Spurinnae ſtatua triumphalis auctore Principe a Senatu eſt decreta. (2) Sunt, qui hanc expeditionem Traiani temporibus inſerunt: at Ioannes Iacobus Maſcouius, vir ſumma doctrina, graui argumento Neruae Imp. vindicauit. Cui ſententiae confirmandae tametſi quaedam etiam a nobis produci poſſe ſentio, tamen cum alia e contrario obſtare videntur, ampliandum potius duco. Magis apparet, Plinium ad Caluiſium de Spurinnae moribus ſcripſiſſe (4) eo anno, quo conſulatum adiit, tamen ante Septembrem menſem, quo menſe A. C. 100. a Traiano eſt ſuffectus Plinius. Eius enim anni epiſtolas liber tertius continet. Agebat tum in otio Spurinna, annum ſeptimum et ſeptuageſimum exceſſerat, aurium oculorumque vigore integro, agili viuidoque corpore. Ex quo poteſt confici, A. C. XXIII. natum. Quemadmodum otium collocauerit, Plinius venuſtiſſime more ſuo pinxit. Inter cetera ait: *ſcribebat, et quidem vtraque lingua, lyrica doctiſſime.* Habuit in matrimonio Cottiam, e qua Cottium filium nomine materni aui ſuſcepit. Is deceſſit, cum pater bello Germanico diſtineretur: adoleſcens, non tam ſtatua ob virtutem publice poſita nobilis, raro iis

(1) Plinius Epiſt. l. III. 1. (2) ib l. II. ep. 7. (3) In Hiſtoria Germanica p. 142. (4) l. III. ep. 1.

[illegible] (1) Ad quc quam quod praeconem haec sua scripserit, non ita certautem Marium Vestritius ad Marium Celsum puto. Is Galbad[illegible] : tamen ercitus sollicitauit. (2) Transgressus deinde ad Othonem cum Annio Gallo, Vestritio Spurinna, et Suetonio Paullino res contra Caecinam gessit. Ante praelium ad Bedriacum Marius Celsus Cos. cum ceteris ducibus sensit, summam rei in vnius diei certamen non oportere committi. A praelio A. Vitellio Imp. conciliatus in magistratu permansit, quamquam et dignitati eius insidiabatur Caecilius Simplex et vitae. (3) Si Barthium audias, hic quoque Spurinnae Marius quieti se dedit et voluptati, quae ex otio liberari ab ambitione seiuncto capi potest. Nam ad eum hoc Martialis epigramma trahit: (4)

Mari, quietae cultor et comes vitae,
Quo ciue prisca gloriatur Atina,
Has tibi gemellas, barbari decus luci,
Commendo pinus ilicesque Fauni.

Sin Martialis epigramma consideres, non Marium Celsum consularem, sed hominem obscurum dicit Atinatem secum rusticantem, nec dignum satis Vestritii amicitia. Contra ea opinor, Martialem alio epigrammate (5) vellicare Marium Celsum, tamquam ob pristinam dignitatem a multis cultum clientibus vt hominem nobilem, at fortuna tenui, aut modicis in opibus, quae tum iam paupertas Romae censebatur, et vt partium victarum ducem.

(1) l. II. 7. l. III. 10. (2) Tacitus Hist. l. I. c. 31. l. II. c. 23. (3) Tacitus l. II. c. 60. (4) l. X. 92. (5) l. X. qui liber editus est Traiano Imp. epigr. 92.

Nec vocat ad coenam Marius, nec munera mittit,
Nec ſpondet, nec ſterilem quae curet amicum,
Turba tamen non deeſt uae ſunt tibi, Roma, togae.

VESTRITII SPVRINNAE FRAGMENTA EX EMENDATIONE NOSTRA.

ODE PRIMA.

Dulces Veſtritii iocos,
Seras Socraticae relliquias domus,
Ne laudes nimium, Mari:
Contemnit placitas nobilibus viris,
Soli qui ſapientiae,
Poſt florem, tepidum nec ſtabilem gradum
Aetatis, ſenium dicat
Mentis compoſitae, qualis ab arduis
Ad ſe verſa laboribus,
Quos non dat patriae, ſepoſuit ſibi
Annos, orba lucro graui,
Cum non ambitio tegmine candida
Illudat grauidae ſpei.
Nos ſero pelagus vicimus inuium,
Quidquid viximus, interiit.
Aetas quem decies ſeptima diuidit,
An leues memoret iocos,
Atque aptos citharae conciliet modos,
Surdis auriculis ſtrepens?
Quisquis decrepiti corporis eſt, reus

Sat

Sat sese eloquii probat,
Si seruet placidi iura silentii,
Si praemium otii.
Hoc cani grauitas verticis abstitit,
Non vt sponte sua fugax:
Sed multi numeris carminis *

Desunt reliqua.

ODE SECVNDA.

Faue, sancta deûm fata,
Nullis, pauperies, numinibus minor,
Tecum si sapias tibi,
Vitae, magnificis hospes honoribus,
Absoluens numerum tuae.

Desunt aliqua.

In te laetitiae, sordida cum quies
Lautis nuda tumultibus,
Ambit se patria fertilis in domo.

Desunt quaedam.

Nullis vendita plausibus,
Contemtrix queruli magno animo fori,
Nil non sola potens, vbi
Furtiuis procerum supplicijs procul,
Regnas in proprio sinu.
Felix, quem teneris mater ab vnguibus
Et regina rapis simul.
Non illum tumidis fascibus arduum
Versat nobilitas mala
Curarum, facilem fluctibus, vt suis

Orbum sideribus rotet.
Illum splendida nox et decor improbe
Caecus praecipitant **

Cetera desunt.

ODE TERTIA.

Postquam fixa solo semel,
Spernit fluctiuagos ancora nauitas
In saeuum pelagus sequi,
Quam vitat grauido perniciem mari,
In sicco reperit sinu:
Haerentem tumidis littore dentibus
Aerugo propria exedit.
Ni desidia sancta quies leuet,
Turbas dum populi fugis,
Priuatis quaties fata tumultibus,
In te ludere peruicax.
Noctes et vigilans somnia si furor
Tortis non librat anguibus,
At presso gracilis cura manet pede.

ODE QVARTA.

Deest principium.

Ingrati nebulae desidii caput
Circumstant tepidum: sors nimia in probos
Incestis facilis annuit ausibus.
Sta contra assiduo pede.
Multum turba tenax * *fidei* *
Vltra fata furit, non docilis fugae
Desider ** *praemio.*

Vestri-

Veſtritii] In MS. Martispurgenſi: Incipit Veſprucius Spurinna de contemtu ſeculi ad Martium. De Veſprutio ſiue potius Veſtritio ſatis diximus. Barthius has odas pingue quiddam et minime eruditum ſonare iudicauit: at ille, vt de Pane dicebat caprarius, ἐνίγε πικρὸς ᾧ ὁι ἀεὶ δειμεῖα χολὰ ποτὶ ῥινὶ κάθηται. Primum in titulo aliquid barbari deprehendere ſibi eſt viſus, cum *ſeculum* more maiorum noſtrorum, ſanctorum hominum, dicatur, *quod viuimus aeui*; addit aſtute: *votis coeleſtia anhelantes*; ſed nihil ad rem. *Seculum* aetate Veſtritii dixere, vt *aeuum* et αἰῶνα. Late patuit iſtarum vis vocum; nam *aeuum*, vt Cenſorinus de die natali c. 16. *tempus immenſum ſine origine et fine*, vt Varro de lingua Latina p. 46. ed. Scal. *aetas omnium annorum*. Tamen etiam arctiſſimo ſpatio, vitae decurſum dixere *aeuum*. Lucretius l. II. v. 16.

quantisque periclis
Degitur hoc aeui quodcumque eſt?

Sic αἰῶνα Homerus Odyſſ. E. 151.

ὧδέ πο᾽ὄσσε
Δακρυόφιν τέρσοντο, κατείβετο δε γλυκὺς αἰὼν.

Loca ſunt in eo alia paene infinita. Euſtathius ad iſtum locum interpretatur τὴν ζωὴν, ἡ φθίναι τοῖς μακροῖς θρήνοις, ſic ſcholia minora quoque. Solon apud Herodotum l. I. c. 32. τελευτήσαντα καλῶς τὸν αἰῶνα. Ita *ſeculum* non modo centum annorum aeuitatem dicebant, ſed etiam ſuam quisque aetatem et ſuorum aequalium. Cicero in Paradoxis: *ego etiam in huius ſeculi errore verſor*, et alibi, *inſolentia huius ſeculi*. Poſt id coeptum eſt dici non, vt oratorem delectauit, *hoc ſeculum*, ſed dumtaxat, *ſeculum*.

Plinius

Plinius ad hunc ipſum Spurinnam l. V. ep. 17. *faueo ſeculo, ne ſit ſterile et effoetum*, et ad Cornelium Tacitum l. VII. ep. 33. *Diuus Nerua non mihi ſolum, ſed etiam ſeculo gratulatus eſt, cui exemplum ſimile antiquis contigiſſet.* Tacitus ipſe Hiſt. l. II. c. 37. Paullinum *non ſperaſſe corruptiſſimo ſeculo tantam vulgi moderationem.* In numis frequens: SECVLVM FRVGIFERVM. SECVLVM FOECVNDVM.

Igitur de *ſeculo*, Barthii accuſatio nihili eſt: at totum iſthuc *de contemtu ſeculi*, non item vetuſtatem et Veſtritium ſapit; eſt igitur totum hoc librarii chriſtiani.

Seras Socraticae] Domus Socratica Horatio l. I. Ode XXIX. 14. philoſophia Socratis et diſciplina:

Cum tu coëmtos vndique nobiles
Libros Panaetl, Socraticam et domum,
Mutare loricis Iberis,
Pollicitus meliora, tendis.

At Veſtritius non philoſophiam reſpicit, verum Socratis feſtiuam in dicendo cauillationem, quam et domus eius, omnes Socraticae ſiholae philoſophi conſectati ſunt, cum tola eius μαιευτικῇ, nemo tamen excellentius Platone. Erant ioci liberales, digni philoſophiae grauitate. Poſt id credo certi homines ſpurcitiem omnem leuandae cauſſa inuidiae Socraticos iocos dixere. Ita εὐτραπελιαν Ariſtotelis aetate Graeci dicebant vitae genus plenum officiis, gratia, comitate, verbis quodam ſale conditis, oris corporisque motu ad omnem honeſtatem et humanitatem compoſito. At M. Tullii temporibus, vt ſolent virtutum et honeſtarum

neſtarum rerum nomina turpiculis praetexi, adeo nihil caſti et decori ἐν εὐτραπελίᾳ et in *vrbanitate* eſſe videbatur, vt Volumnius et Papirius Paetus vel ea cauſſa εὐτράπελοι haberentur, quod eſſent ſpurciſſimi, Paetus adeo, vt eum Cicero reprimeret l. IX. ep. 22. *amo verecundiam.* Et iterum eximius orator, *ſeruo et ſeruabo Platonis verecundiam.* Adi l. VII. ep. 32. Octauius Minucii Felicis c. 28. *apud vos tota impudicitia vocatur vrbanitas.* Paullus Apoſtolus ad Epheſ. V. 4. ἀισχρότης ἢ μωρολογία ἢ εὐτραπελία, quo loco εὐτραπελια, vt tum in ore vulgi erat, vtrumque comprehendit et ἀισχρότητα et μωρολογίαν, cui opponit εὐχαριςίαν ſiue *comitatem*, qualem c. IV. v. 29. deſcripſit, λόγον ἀγαθὸν πρὸς οἰκοδομὴν τῆς χρείας, ἵνα δῷ χάριν τοῖς ἀκούσι. Veſtritius, vt eius mores in Othonis Neronisque contubernio fuiſſe comperimus, obſcoeni oris foetores *Socraticae domus reliquias* dixit, *ſeras* vero, cum tempus perpetui aeui inde a Socrate metiretur, a quo eſſent quaſi ductae.

contemnit placitas] *reliquias placitas*, quae placuere et placent. Virgilius Aen. IV. 38. *placitone etiam pugnabis amori?* In Ciri: *et placitum paucis auſa eſt adſcendere collem.*

nobilibus viris] In MS ** *bilibus*: ergo Barthius *mobilibus*: malo *nobilibus*, vt dicat *nobiles* philoſophos Socraticae domus, eo modo quo Horatius *nobiles libros Panaetii.* Etiam apud Rutilium Numantianum Barthius ſcribi maluit,

Factus et Alcides mobilitate deus,

Almelouenius *ferocitate.* Nihil opus eſt his tumultibus, bene habet *nobilitate.* Paullo poſt is ipſe Rutilius:

Nobilis ad ſummas gloria venit opes.

De hac nobilitate Herculis conſidera Pindarum in Nemeis, Ode A, et Tzetzen ad Lycophronem v. 33. 39.

Soli] Eſt, vt vides, a *ſolo*, quod non notarem, niſi Barthius a *ſole* maluiſſet.

Poſt florem] Ego ita diſtinxi, quae ac Barthio confuſa erant. *Tepidum*, quo ſenſu praetextatum eſt Horatio, Ode IV. 19.

quo calet iuuentus
Nunc omnis: et mox virgines tepebunt.

Etiam *adoleſcentes tepidos* dixere Romani, propter aetatem laſciuiae obnoxiam: *non ſtabilem gradum*, procliuem in vitia. Et *florem* Veſtritius, vt *ver* Catullus ad Manlium:

Tempore quo primum veſtis mihi tradita pura eſt,
Iucundum cum aetas florida ver ageret,
Multa ſatis luſi.

Inſtabili et tepido gradui adoleſcentiae *ſenium mentis compoſitae* opponitur. Seneca ep. II. *primum argumentum compoſitae mentis exiſtimo, poſſe conſiſtere et ſecum morari: iſta lectio multorum auctorum habet aliquid vagum et inſtabile.* Anicius Boethius initio Conſolationis philoſophicae: *Qui cecidit, ſtabili non erat ille gradu* Id l. I. metro IV.

Quisquis compoſito ſerenus aeuo
Fatum ſub pedibus dedit ſuperbum.

ab arduis] *mens ab arduis laboribus ad ſe verſa*, quod otium erat honeſtum atque liberale rei publicae muneribus defuncto. Salluſtius principio Catilinariae hiſtoriae: *vbi animus ex multis miſeriis atque periculis requieuit, et mihi reliquam aetatem a re publica procul habendam decreui.*

dat patriae] Sine dubio ſic, cum in MS. eſſet, *det pa* ** *orba*

orba lucro] lucro ait mentem carere, quod moleſtiam et faſtidium contineat. Terentius in Heautont. A. IV. Sc. *tul.* V. v. 25. *nae ille haud ſcit, paullum lucri quantum in ei damni apportet.*

Credi *ion ambitio*] Erat in MS. ** *ambitio tegmine cas*, qua quis aetate non vltra honores ambiat, vt apud Virgilium Tityrus: *candidior poſtquam tondenti barba cadebat.* Malim vero nunc *ambitionem tegmine candidam.* Reſpicit non modo candidatos priſcos, ſed etiam ambitionis ſpeciem externam, laetam illam quidem, at cum interiori moleſtia coniunctam: candidam, ſplendentem et laetam, vt Catullus *candidos ſoles.* Ambitio illudit *grauidae ſpei.* Gravida, quod ſpes alia naſcatur ex alia, et ſubinde nos recreet: habet enim ψεύδεα θ' ἁιμυλίους τε λόγους in pectore: tandem ſaepe atque multum ab ambitione atque ſpe illuſus animus, rebus quas ſperauerat partis, neque expletus tamen, iſthuc Aiacis Sophoclei ingemiſcit, ἰώ μοι γέλωτος, οἷον ὑβρίσθην ἄρα.

pelagus] Res dicit geſtas et munera rei publicae plena procellis et periculis, vt alia in re Horatius Ode V. 1.

me tabula ſacer
Votiua paries indicat humida
Suſpendiſſe potenti
Veſtimenta maris deo.

Archilochus apud Cedrenum p. 792. ſenectuti ait συμφέρειν τὴν ἀπραγμοσύνην.

quidquid viximus] Prudentius venuſte in principio:

Per quinquennia iam decem,
Ni fallor, fuimus:

Inſtat terminus, et diem
Vicinum ſenio iam deus applicat.

Et poſt paullo:

Cum iam quidquid id eſt, mors aboleuerit. aetas

Aetas quem decies ſeptima diuidit] Decies ſeptima os et annos septuagesimo decurrens ita me in dies ſundam mei partem decerptura ſit. *Diuidit*, vt apud Martialem l. X. 10.

Diuiſit noſtras purpura veſtra togas.

Malo enim *diuiſit* quam Gruterianum *dimiſit*, quod Ms. Berolinenſe quoque habet. Tua, inquit, purpura noſtras togas exuit, et nemine in partem admiſſo, rapuit ſola omnes. Id eo dicit, quod Paullus homo nobilis, potens et locuples humillima quaeque officia ita accurate obiret, vt nulli quidquam concederet.

an leues] Etiam Horatius Carm. l. 1. Ode XV. v. 35. in choriambico trimetro choreum poſuit:

Poſt certas hiemes vret Achaicus
Ignis Iliacas domos.

Tibullus l. 1. El. 1. v. 85.

Iam ſubrepet iners aetas, nec amare decebit,
Dicere nec cano blanditias capite.

Olympius Nemeſianus Ecl. 1. 9.

Hos annos canamque meam, mihi care, ſenectam
Tu iuuenis carusque deis in carmina cogis?
Viximus et calamis verſus cantauimus olim,
Dum ſecure hilares aetas ludebat amores:
Nunc album caput, et Veneres tepuere ſub annis.

Surdis auriculis] meis, quae iam obriguere ad voluptates.

Quis-

Quisquis decrepiti] Haec ita restitui, cum esset e Ms. editum a Barthio:

Quisquis decrepiti corporis est reus,
Sat sese eloquii probat.
Si ser placidi iura silentii.*

eloquii, vt apud Tullium, *Milo reus praeclari facti.* Locus est traiectio: *senex, cum reus est eloquentiae, sat sese probat*, siue, *se purgat et aliis satisfacit.* Ceterum vt ait Horatius l. III. Ode II. 25.

Est et fideli tuta silentio
Merces.

Quem versum seu Augustus Horatio siue Horatius Augusto Caesari debuit: est enim apud Plutarchum in Apophthegmatis Augusti ad Athenodorum: ἔστι δὲ σιγῆς ἀκίνδυνον γέρας. Euripides in Oreste v. 639.

ἔστι δ' ἡ σιγὴ λόγου
Κρείσσων γένοιτ' ἂν. ἔστι δ' ἡ σιγῆς λόγος.

Tacitus de Afro oratore Annal. l. IV. c. 52. *prosperiore eloquentiae quam morum fama fuit: nisi quod aetas extrema multum etiam eloquentiae demsit, dum fessa mente retinet silentii impatientiam.*

Si patrocinium otii.] Censeo ἀπὸ κοινοῦ, *seruet.*

hoc] ab hoc vitae genere mea senectus, non tamen sponte sua abstitit. Ceteris mederi non possum.

Faue] Verbum solemne multum gratiae hoc loco habet. Tibullus *Phoebe faue*, Naso *Vesta faue*, Virgilius *Lucina faue.* Iambus vt in illo Catulli carmine seculari:

Dianae sumus in fide
Puellae et pueri integri.

Sancta deûm fata] Graecorum imitatione θεογενὴς, διογενὴς diis genita, quod et ipsi pauperes essent dii, praesertim, vt cauillatur Aristophanes in Pluto v. 540. Iupiter. Aelianus apud Eustathium in Periegeten v. 45. aras paupertati dedicatas commemorat, sicuti apud [illegible] thenaeum Callisthenes tradit, Lacedaemone famis si[illegible] lacrum iuxta solium Apollinis consecratum fuisse. [illegible]t hi vt pestem colebant, ita et paupertatem et fa[illegible]em, ne noceret. Spurinna vt Socratica e domo t[illegible]nquam beneficium deorum immortalium respicit, erat enim tota domus illa araneis plena. Aristophanes in Nubibus v. 101. μεριμνοφροντιστὰς, ὠχριῶντας, ἀνυποδήτους vocat Socraticos, et vbique illuuiem sordesque familiae obiicit. Deinde Socratis exemplo philosophi in commendanda paupertate multi fuere, vt sunt in ea quaedam vitae commoda, nisi si esurias et plores, quod non pauperis est sed mendici. Theocritus in Αλιεῦσι,

Α πενία, Διόφαντε, μόνα τὰς τέχνας ἐγείρει,
Αυτὰ τω μόχθοιο διδάσκαλος.
Paupertas, Diophante, sola artes excitat,
Ipsa miseri magistra.

tecum si sapias tibi] Si tuis contenta bonis a cupiditatibus abstineas. Aristophanes in Pluto v. 551.

πλωχεῦ μὲν γὰρ βίος, ζῆν ἐστι μηδὲν ἔχοντα
τεῦ δὲ πένητος, ζῆν φειδόμενον καὶ τοῖς ἔργοις προσέχοντα
περιγίγνεσθαι δ'αὐτῷ μηδὲν, μὴ μόνοι μηδ'ἐπιλείπειν.
Mendici vita est, nihil habentem viuere,
At pauperis vita, viuere parce et rebus suis vacare,
Nihil vt supersit ipsi, nihil vero etiam vt desit.

Vitae

Vitae magnificis hospes honoribus absoluens numerum tuae] In MS. *Vlta*, inde Barthius, *Vltra*. Hoc quidem nihil est. Scripsisse puto Spurinnam, vt nos edidimus,

Magnificis hospes honoribus,

vitam peragens alienus ab honoribus et ambitione.

Lautis nuda] In MS. *vnda*. Recordare *lautos tumultus* in domo Euclionis apud Plautum in Aulularia.

ambit se patria fertilis in domo] MS. *patriae*. Se ipsam sordida ob paupertatem quies ambit et amplectitur, se contenta est ipsa, vt apud illum Horatianum colonum, qui paterna rura colebat Epodon II.

Beatus ille, qui procul negotiis,
Vt prisca gens mortalium,
Paterna rura bubus exercet suis,
Solutus omni foenore.

nullis vendita plausibus] Sic Barthius, cum esset in MS. *vendibilis*. Corrumpi se non sinit a populi assentationibus. Euclio Plautinus: *nemini credo, qui large blandust diues pauperi.*

contemtrix queruli magno animo fori] In MS. *magnanima*. Si te isthuc *magnanima* metri caussa offendit, lege *magno animo*. At Boëthius tamen etiam tribrachyn recepit, de Consolatione philosophica l. IIII. metro III. v. 14.

Flere dum parat, vlulat.

Sed hoc perquam insolens.

furtiuis] clandestinis procerum cruciatibus, quippe qui cum suis cupiditatibus, et cum aliorum inuidia, criminationibus, occultis insidiis, mille incommodis aliis conflictantur.

mater]

mater] quem paupertas inopi in domo natum ſibi vindicauit, proprium tota vita, quem inſtituit et formauit ſibi, μόνη ἀγαθῶν ἁπάντων ἅπα αἰτία, vt Comicus ait.

regina] vt Comicus in Pluto δέσποινα. Quem paupertas veluti mater et ſimul regina ſuo ſub imperio tenet. Regina et domina, amantium voces.

non illum tumidis faſcibus] Barthius e MS. *illum* ** *faſcibus*. ſublimem magiſtratibus et muneribus rei publicae.

nobilitas] *nobilitas curarum*, nobiles curae, magiſtratuum curae. Et *facilem fluctibus*, expoſitum fluctibus, periculis. Eſt enim *facilis* Maroni, tractabilis, mobilis.

ſuis orbum ſideribus] Ductum a nauigantibus, qui noctu cynoſuram ſuam reſpiciebant. Sidera paupertatis dicit ſapientiam, temperantiam, modeſtiam, humanarum rerum contemtum, quibus qui orbatus ſit, in eum quid ſibi fortuna non permittit?

Splendida nox] Honores coniuncti cum obſcuris periculis. *Decor improbe caecus.* iidem honores in quibus inſidiae tectae non ſentiuntur. Seneca in Octauia v. 878.

bene paupertas
Humili tecto contenta latet;
Quatiunt altas ſaepe procellae
Aut euertit fortuna domos.

Hanc cantilenam Seneca perpetuo nobis inſuſurrat.

poſtquam] Eum dicit, qui relictis et magiſtratibus et honoribus otio ſe tradit, ſed minime liberali.

in

in ſuo reperit] *reperit* ſine dubio, in MS *in ſuo repetit*: at ſi cui choreus non placet, legat *ſicco*, quod etiam ſenſus poſtulat.

tumidis littore dentibus] Barthius e MS. *tumidis dentibus*. Etiam Virgilius *dentes* atque *morſus* ancorae attribuit.

ni te] niſi te ſancta quies, philoſophiae ſtudium ab deſidia leuet.

noctes et vigilans] In MS:

*Nos * vigilans ſomnis furor*
Tortis liberat anguibus.

Si, inquit, vigilans furor noctes et ſomnia non librat tortis anguibus, ſi ſacinorum conſcientia noctes et ſomnia non ſuis exagitat terroribus, tamen minor aliqua cura inerti ſemper moleſta erit. *Preſſo pede* vt Horatius l. I. Ode XXVII.

et cubito remanete preſſo.

circumſtant] *nebulae ingrati deſidii circumſtant*. Erat in MS. *circumſtans*.

DE HYPERBOREIS.

AVCTORE

T. S. Bayero.

Nulla res Hyperboreos per omnem Graeciam ita celebres fecit, quam quod sacra ab iis in Delum mitterentur. Eas fuisse frugum primitias triticeis mergitibus inuolutas Herodotus tradidit. (1) Virgines Hyperboreae pertulere. Antiquissimarum nomina Delii ediderunt apud Herodotum, Αργιν̃ε ἠ Ὦπιν *Argin et Opin*, quae mox post Apollinem et Dianam natos in Delo fuerint, Ilithyiae ob felices matrum Hyperborearum partus diuinam rem ex voto factnrae: vita vero defunctae, et prope Artemisium (hoc est, ad vulturnum seu orientem hibernum insulae, vbi simulacrum Dianae erat, quod Αρτεμίσιον ιδίως dicebant Delii, vt Hyperides in oratione Deliaca testatur apud Harpocrationem) igitur prope Artemisium sepultae, quotannis solemni Deliorum carmine ludisque cultae sunt. A Deliis hymnos eos accepere Iones et insulani. Erat autem praeterea haec cultus ratio, vt, postquam sacrificauerant, cinerem spargerent ex ara super loculis Hyperborearum virginum. Hymnos primus Olen Lycius composuit. (2) Paullo post Argin et Opin in Delum venerunt ab Hyperboreis *Hyperoche* et *Laodice*. (3) In earum comitatu fuerunt quinque viri, qui deducerent. Verum etiam illae in Delo defunctae et in Artemisio,

(1) l. IV. c. 35. (2) Herodotus l. c. (3) Herodotus l. IV. c. 33. 35.

miſio compoſitae ſunt: (1) nec viri redierunt ad ſuos, qui quid virginibus factum ſit, nunciarent. In Hyperoches et Laodices memoriam pueri Delii et puellae tondebantur: et pueri quidem crines cum certa herba permiſtos conſecrabant, puellae vero Deliae ante nuptias ponebant crines, et fuſo circumuolutos ſuper Hyperborearum monumento dedicabant. Callimachi hymnus in Delum *Vpin*, *Hecaërgen* et *Loxo* nuncupat. *Vpis* eſt Herodoti *Opis*, et *Hecaërge* eſt *Argis*; ſequitur *Loxo* Callimachi eſſe Herodoti *Laodicen*, haud difficili vocabulorum corruptela. Pauſaniae, cum haec attingit, neſcio quid accidit; aut lapſus aliquis memoriae eruditiſſimum ſcriptorem, aut ingens librariorum incuria nos fefellit. Apponam totum locum ex Eliacis prioribus. Herculem ait, (2) ſtirpem oleaſtri ab Hyperboreis deportaſſe ad Graecos: εἶναι δὲ ἀνθρώπους, οἱ ὑπὲρ τὸν ἄνεμον οἰκοῦσι τὸν βορέαν, πρῶτος μὲν ἐν ὕμνῳ τῷ ἐς Αχαΐαν ἐποίησεν Ωλὴν ὁ Λύκιος. ἀφικέσθαι τὴν Αχαΐαν ἐς Δῆλον ἐκ τῶν ὑπερβορέων τούτων. ἔπειτα ᾠδὴν Μελάνωπος Κυμαῖος ἐς Ωπιν καὶ Εκαέργην ᾖσεν ὡς ἐκ τῶν ὑπερβορέων καὶ αὕται πρότερον ἐς τὴν Αχαΐαν ἀφίκοντο καὶ ἐς Δῆλον. Venit mihi aliquando in mentem, locum Pauſaniae ita emendandum eſſe: κομισθῆναι δ'ἐκ τῆς ὑπερβορέων γῆς τὸν κότινόν φασιν ὑπὸ τοῦ Ηρακλέους ἐς Ελληνας. εἶναι δ'ἀνθρώπους, οἱ ὑπὲρ τὸν ἄνεμον οἰκοῦσι τὸν βορέαν. πρῶτος μὲν ἐν ὕμνῳ τῷ ἐς Αργιν ἐποίησεν Ωλὴν ὁ Λύκιος, ἀφικέσθαι τὴν Αργιν ἐς Δῆλον ἐκ τῶν ὑπερβορέων τούτων. ἔπειτα ᾠδὴν Μελάνωπος Κυμαῖος ἐς Ωπιν καὶ Εκαέργην

(1) Praeter Herodotum Clemens Alexandrinus in paraenetico p. 29. (2) p. 392.

καέργην ᾖσεν, ὡς ἐκ τῶν ὑπερβορέων καὶ αὗται προ-
λεγον ἐς τὴν Ἀχαΐαν ἀφικοντο καὶ ἐς Δῆλον. (1) *Fe-
runt stirpem oleastri ex Hyperboreis allatam fuisse ab Her-
cule ad Graecos: esse autem eos homines, qui vltra bo-
ream ventum colunt: primus Olen Lycius, in hymno,
quem in Argin cecinit, auctor est, Argin in Delum ve-
nisse ab his Hyperboreis. Post eum Melanopus Cumaeus
carmen fecit in Opin et Haecaërgen, quod ex his Hy-
perboreis etiam ipsae primum quidem in Achaiam, tum
vero etiam in Delum venerint.* Apud eundem Pausaniam
Βοιὼ ἐπιχωρία γυνὴ *Boea mulier Phocica* auctor est, (2)
cum alios Hyperboreos, tum Olenem Delphis oraculum
Apollinis condidisse: Olenem vero primum et vaticinatum
et ἑξάμετρον genus commentum:

Ενθα

(1) Liceat mihi, quod Deli et corrupti in Pausania loci mentio in memoriam reuocat, apponere bona cum venia lectorum. Stephanus Byzantius: Ολυμπίειον τόπος ἐν Δήλῳ, ὃν κτίσαντες Αθηναῖοι χρήμασιν Αδριανῷ Νέας Αθήνας Αδριανὰς ἐκάλεσαν, ὡς Φλέγων ἐν Ολυμπιάδων πεντεκαιδεκάτῳ. τὸ εθνικὸν Ολυμπιεὺς ἢ Ολύμπιος, ὡς Βυζάντιος. In epistola de Theophrasti Delii praesidis monumento p. 59. sic forte emendari Stephanum posse suspicatus sum: Ολυμπιεῖον τόπος ἐν Δήλῳ, ὃν ἔκτισαν Αθηναῖοι χρήμασιν Αδριανῷ (ὃ τῇ εἰς ἑαυτοὺς εὐνοίᾳ χρώμενοι, μηδίδα τῆς πόλεως) Νέας Αθήνας Αδριανὰς ἐκάλεσαν. Tandem subiunxi: *verum ne sic quidem Stephanum scripsisse credo, ac ἐν Δήλῳ potius irrepsisse, et expungendum esse.* Sic tum quasi pro imperio dictabam, vt animus hariolabatur. Vatem me fuisse non pessimum vidi, postquam Phlegontis Olympionica exstare sensi in Scaligeriana Ισοριῶν συναγωγῇ e codice

Ενθα τοι ἔυμνησον χρησνήριον ἐκτελέσαντο
Παῖδες ὑπερβορέων Παγασὸς ϗ δῖος Αγυιεύς.
Ibi (inquit Boeo) *celebre oraculum tibi, Phoebe, condiderunt:*
Filii Hyperboreorum Pagasus et diuinus Agyieus.

Enumeratis deinde aliis Hyperboreis, ita desinit carmen:

Ωλὴν θ', ὃς γένετο πρῶτος Φοίβοιο προφάτας,
Πρῶτος δ'ἀρχαίων ἐπέων τεκτήνατ' ἀοιδάν.
Et Olen, qui primus fuit Phoebi vates,
Primusque vetera carmina instituit scribere.

Ex his intelligo, antiquissimam fuisse Hyperboreorum in Apollinem Delium et Dianam religionem; ipsa autem nomina virginum Hyperborearum argumento sunt, Graecas fuisse, quae a septemtrione venerunt sacra feren-

Parisiensi regio. Nam ad Olymp. 227. Αδριανὸς τότε Ολυμπιεῖον τὸ εν ταῖς Αθηναῖς, ἐν ᾧ ϗ αὐτὸς ἴδρυται, ἐξεπόιησε, ϗ δράκοντα ἐς αὐτὸ Ινδίας κομιθέντα ἀνέθηκε. Nihil de Delo Recte Stephanus *decimo quinto libro.* Holstenius: *scribe* πεντεκαιδεκάτη, *vt referatur non ad librum, sed ad Olympiadem.* Immo Phlegon in libros diuiserat totum opus chronicum. Cetera quoque in Stephano turbauit, vt puto, Hermolaus CPlitanus, non modo hoc ἐν Δήλῳ. Nam τὸ ἐθνικὸν Ολυμπιεὺς κ. τ. λ. totum hoc, inquam, nihil ad Ολυμπιεῖον, sed ad Ολύμπια, quod antecedit, vbi nunc in Stephano τὸ ἐθνικὸν omissum est. Miror Holstenium istum errorem non obseruasse, aut Thomam Pinedum: hos enim ad manus habeo. De Ryckio viderint alii. Veteres sane errores in Stephano, quibus Perusinus codex nullam medelam attulit. (2) p. 809.

tes Apollini. Scholiasta Callimachi (1) et Seruius censent, ab earum vna Dianam nuncupatam fuisse Ουπιν. Crediderim potius, Dianam παρὰ τὴν ὄπιν dictam, ex quo Ionice Ουπις, Dorice Ωπις. Erat Diana etiam Nemesis, quae in consecratione templi Herodis Attici nomen ΡΑΜΝΟΥΣΙΑΣ ΟΥΠΙΣgerit. Neque enim dubito, Argin seu Hecaergen a Dianae venationibus nomen habuisse. Hyperoche a cursu solis et lunae dicta, quae Apollinis et Dianae numina erant. Quis deinde Απόλλωνα τὸν Λόξιον ab obliquo cursu Solis, aut Αγυιέα a viarum vrbanarum custodia ignorat? Inde Loxo et Agyeus ille. Hanc Apollinis religionem contemplanti mihi in mentem venit, Hyperboreos Graecos fuisse eos, qui sedem sibi in Thracia tractuque omni ad Pontum Euxinum atque Adriatici maris septemtrionem quaesiuere inde a Troiano bello. Tales fuisse reperio Hyllos in Liburnia, vt notum est e Dionysio Periegete, de quibus Scymnus Chius ex Eratosthene et Timaeo. Liburnis, inquit, finitimi sunt Bulini.

Εξῆς δὲ μεγάλη χερσόνησος Υλλικὴ,
Πόλεις δ' ἐν αὐτῇ φασι πέντε ϗ δέκα
Υλλυς κατοικεῖν, ὄνλας Ελληνας γένη.
Τὸν Ηρακλέυς γὰρ Υλλον οἰκιςὴν λαβεῖν,
Εκβαρβαρωθῆναι δὲ τύλυς τῷ χρόνῳ
Τοῖς ἤθεσιν ἰςορεῦσι τοῖς τῶν πλησίον.

Post

(1) in Dianam v. 204.

Post haec magna est Chersonnesus Hyllica,
Vrbes autem in ea dicunt quindecim
Hyllos incolere, qui ab stirpe sint Graeci;
Nam Herculis filium Hyllum conditorem habuisse,
Barbaros autem factos esse paullatim
Narrant, e moribus vicinarum gentium.

Apollonii Rhodii Scholiasta (1) Eustathius ad Dionysium atque Stephanus Byzantius ab Hyllo Herculis filio deductam fuisse coloniam produnt. Is est Herculis ex Deianira filius, vt Apollodorus ceterique eum γενεαλογοῦσι. Iam tota vita eius, vt ob res Peloponnesiacas ab eo gestas nota est, ab hac deductae fama coloniae abhorrere videtur: nihilo minus Hylli sunt antiquissimi iis in regionibus, quae Thracibus ab occasu vicinae sunt. Ab ortu et ad Pontum nihil dicam de Hylaea regione ad Borysthenem, quoniam id nomen quidem Graecum, non autem quod sciam, incolas Graecos habuit. Itaque Laurentius Begerus (2) frustra se torquet in numo inscripto ΥΛΑΙΥ (ο ante Υ tam paruum reperitur in numis, vt oculos clarissimi antiquarii in hoc nomine facile fugere potuerit) atque eum numum neque referre audet ad hos Hylaeos, neque iisdem adimere. Nihil sane ad Hylaeos illos, immo neque ad istos in Liguria, (est enim eorum ἐθνικὸν ὑλλῆς) at verius ad Hylaeos in Locris. Stephanus: ἔστι καὶ πόλις Λοκρῶν τῶν Ὀζολῶν, ἧς τὸ ἐθνικὸν Υλαῖος. Id igitur Begero accidit in hoc numo, quod Goltio et Nonio in numo ΑΓΑΘΥΡΣΩΝ, qui non his Scythicis Agathyrsis, sed Siculis tributen-

(1) Ad Argonauticorum l. IV. v. 515. (2) l. I. p. 468. Thes. Brand.

tribuendus fuit, quamquam Siculae vrbis ἐθνικὸν Αγαθυρσᾶος tantummodo exſtat. At Callipides noti ex Herodoto, qui illa aetate iam ita deſciuerant a Graecis moribus, vt Ελληνες Σκύθαι dicerentur. Iisdem temporibus Geloni antea Graeci Budinis Scythis permiſti, eorum etiam linguam, parum aberat, quin et mores omnes adſciuerant, vt alias oſtendi ex Herodoto. Geloni longe ante Megaricas Heracleotarum colonias, longe ante Mileſias ingreſſi terras Thracum et Getarum traiectoque Iſtro Budinis permiſti ſunt. Panticapaeum ipſo in ore Maeotidis ſitum Mileſiorum colonia fuit Plinio (1) et Strabone (2) teſtibus. Euſtathius ad Dionyſium Periegeten, (3) κτίσμα παιδὸς Αιήτου. Si is fuit Aeetes Solis filius, qui Ephyraeae imperauit, inde profectus eſt in Colchidem, pater Medeae et tot fabularum, fuit filius eius haud ita multo iunior Hercule. Stephanus Byzantius: Παντικάπαιον ὠικίσθη παρὰ Αιήτου παιδὸς, λαβόντος τὸν τόπον παρὰ Αγαήθου τοῦ Σκυθῶν βασιλέως. Nugae: quis enim Colchicis fabulis tantum tribuet? tamen fama videtur vetus, Panticapaeum iam ante Mileſios colonos Graecam vrbem fuiſſe. Mileſii autem eodem tempore Olbiam et Iſtrum vrbem condiderunt Plinio et Strabone teſtibus. Olbiam, quae et Boryſthenes, (auctorem habemus Herodotum) perperam Pomponius Mela et Iornandes et Geographus Rauennas vrbes diuerſas fuiſſe tradunt. Teſte Herodoto ciues ſe malebant Olbitas vocari, Boryſthenitarum enim nomen Scythis vicinis ad Boryſthenem relinquebant. Tamen Herodotus ipſe Olbitas etiam Boryſthenitas appellauit, et

(1) l. IV. c. 12. (2) p. 358. (3) v. 311.

et Bion ille Olbita haud aliter quam Borysthenita a Diogene Laertio, Athenaeo, Hesychio Milesio, ceteris nuncupatur. Quare Graecis notius semper hoc nomen fuit, adeo vt alterius memoria etiam apud ipsos Olbitas intermortuum sit, cum Dio Chrysostomus ipsa in vrbe haud aliter ciues diceret quam Borysthenitas. Ab Olbia est *Olbiopolis*, Plinii et geographi Rauennatis *Olbiapolis* et *Oliuapolis*. (1) Situm vrbis Strabo (2) ducentis a Borysthene stadiis definiuit. Herodotus, Stephanus, Dio Chrysostomus, Scymnus Chius, incertus auctor peripli Pontici intra Borysthenem et Hypanim fluuios. Scilicet eo in loco, vbi fluuii exonerantur, magis tamen ad Hypanim. Quare in Herodoto ὑπὸ τῷ Ὑπάνι sine dubio emendari debet ἐπὶ τῷ Ὑπάνι. Nam Dio Chrysostomus disertissime omnium scribit, (3) vrbem a Borysthene nomen accepisse ob magnitudinem et pulcritudinem fluminis, sitam vero esse ad Hypanim supra Hippolai promontorium, quod rostri naualis ad modum excurrat in stagnum, quod ducentorum amplitudine stadiorum a promontorio ad mare est, neque minorem esse eo loco fluminum latitudinem. Fuit autem Milesiorum colonia teste Strabone, Stephano, et quem ante alios dicere conueniebat, Herodoto. Hinc Miletopolis Plinio. Claudius Ptolemaeus ad occidentem hibernum Olbiae ponit μητρόπολιν, nescio quam. Credo μιλητόπολιν in animo habuisse, et censuisse vrbem esse diuersam ab Olbia. Video idem existimasse Ioannem Harduinum. Eusebius Olbiam conditam ponit Olymp. XXXI. anno 2. qui est A. P. I. 4059. Retinuere Olbitae linguam et

(1) p. 267. 354. ed. Porch. (2) p. 151. (3) p. 144.

Hyperboreis ſacris habet, cum ſeu Homerus ſeu ille ὁ πρῶτος τὰ Ομήρυ ῥαψῳδήσας Cynaethus, ſeu quisquis ille caecus ſenex e Chio quae adhuc exſtant, cecinit, iſthuc ipſum non praeteriiſſet, quod quotannis fieri in Delo cognoſcere poterat. At Thucydides auctor eſt, Delum maxime frequentatam fuiſſe, quoad Ionum fuit, non item poſtea. *Poſtea* cum dicit, tempora ea putat, cum a Polycrate Samio et Delus et Cyclades ceterae occupatae ſunt. Mox in Epigonis Homeri et Heſiodo et illo Olene Lycio memoria Hyperboreorum inſtaurata eſt. (1) Nempe quod tum altius ad boream mergites Apollini transmittere per populos vicinos inciperent. Accipiebant autem haec ſacra Delii a Teneis, Tenei a Caryſtiis, Caryſtii a ceteris Euboeis, Euboei a Meliaco ſinu et inde a Dodonaeis, Dodonaei a populis ad Adriam: inde iam fama erat a Scythis ſacra perferri, Hyperboreis tradentibus. Ex quo itinere niſi Hyllos, certe Gelonos deprehendes Apollinis cultores.

Sed haec etiam ſacra deſierunt ante Herodoti aetatem: Graeci tamen tum maxime quaerebant ſuos illos Hyperboreos. Atque cum Υπερβόρειος ſignificet gentem, quae incolit τὰ ὑπάρκλια κλίματα, vt Plutarchi ſenſu vtar, ſicut et Strabo explicat, (2) tum vero illi vsque et vsque ſub ſeptemtrione Hyperboreos illos quaeſiuere, donec

Hyperboreae clauſtrum glaciale ſub vrſae

atque vltra anni ſolisque vias ſibi viſi ſunt peruenisse. Alii Υπερβορέυς tamquam ὑπερβαίνοντας ὅρον, *ſeculi humani terminum egredientes* dici, cenſuere apud Feſtum: et hoc iacto ab etymologia fundamento tam lubrico infinitas fabulas

(1) Herodotus l. IV. c. 32. (2) p. 586.

bulas de longaeuitate eorum conſuerunt, quales exſtabant apud Pindarum, Simonidem, Megaſthenem. Martianus Capella p. 141. *Poſt (Riphaeos) montes trans aquilonem Hyperborei, apud quos mundi axis continua motione torquetur, gens moribus, prolixitate vitae, deorum cultu, aëris clementia, ſemeſtri die, ſine etiam habitationis humanae praedicanda.* Alii ὑπὲρ Βορέαν interpretati ſunt, tamquam boreas ventus illo populo ſit citerior. Pindarus in Olympionicis (1)

ἰδὲ κακείναν χθόνα
πνοιᾶς ὄπιθεν Βορέα
ψυχρᾶς,
en illorum terram vltra flatum boreae frigidi.

Seu vt Seruius: *ſupra quos boreas flat.* Macrobius vera falſis miſcens: (2) *locorum*, inquit, *ſuper Scythiam omnium incolas vetuſtas Hyperboreos vocauit, quaſi originem boreae introrſum recedendo tranſiſſent, adeo aeterna paene premuntur pruina, vt non facile explicetur, quanta ſit illic frigidae nimietatis iniuria.* Iſthuc cum Herodotus iam ante ſe iactari videret, ab adſenſu ſe ſuſtinuit, idque ea cauſſa cenſuit abſurdum eſſe, quod Hypernotios quoque eſſe oporteat, ſi in hunc modum ſint Hyperborei. Ob hanc cauſſam Eratoſthenes (3) Herodoto σοφίσματος calumniam impingit, cum aeque probabile ſit, Hypernotios eſſe, vt ex eo, abſurdum alterum eſſe, minime intelligamus. Sed Olen ille Lycius et priſci Delii nihil aliud dicebant, quam vltra Thraciam, quae Graecis eſt ſub ſeptemtrione, homines Graecos genere fuiſſe, qui Apollinem ſumma religione colerent, et

(1) Ode III. v. 55. (2) p. 147. (3) apud Strabonem p. 57. 58.

inter Istrum Borysthenem et Volgam obtinentibus. Milesios deduxisse Strabo (1) confirmat. Idcirco Stephanus Byzantius: Απολλωνίαν τῶν Ιώνων vocat. Ioannes Harduinus in numis vrbium: *est altera quidem* Απολλωνία τῶν Ιώνων *in Thracia eodem auctore Stephano: Ioniam tamen dictam esse aliquam Thraciae regionem fidenter negamus.* Tamquam id dixerit Stephanus, aut tamquam isthuc, quod dicit, non modo ad sublestae fidei, sed ad νοθείας quoque maculam geographo inurendam idoneum sit. Quis non videt Stephanum saltem Ionum coloniam dicere. Est sane numus ΑΠΟΛΛΩΝΙΕΩΝ ΕΝ ΙΩΝΙΑ, non tamen ex eo numo finxit Stephanus ΑΠΟΛΛΩΝΙΑΝ ΤΩΝ ΙΩΝΩΝ. *Ionum* dicitur, vt diuersa esset ab *Apollonia*, eadem in Thracia *ad Strymonem.* Sunt denique aliae vrbes ad Pontum magno numero partem a Milesiis conditae, partem ab Heracleotis.

Ab his Graecis iuxta mare Adriaticum, aut ab Gelonis, ceterisque ad Pontum legationes istas Hyperboreas venisse puto. Non est contemnendum, quod Scholiasta Pindari ad Pythionicorum odam quartam annotauit: Βορέους ἐκάλουν οἱ Ελληνες τοὺς τὴν Θράκην οἰκοῦντας, διὰ τὰ τοῦ βορέου πνεύματα. *Boreos Graeci vocarunt Thraciae incolas ob ventum boreum.* Atque idcirco raptum Orithyae (illa Erechthei filia, Pandionis neptis fuit) ita interpretatur, quod non vtique aquilo ventus, ἀλλ' ἀνήρ τις τῶν ἐν Θράκῃ ἐνοίκων eam secum abduxerit, vt ille quoque περὶ ἀπίστων siue Heraclitus siue Heraclides. Itaque fortassis Hyperborei, *qui vltra Thracas*, vt Constantinus Porphyrogenneta (2) ἢ ἔθνη πολλά τε ἢ μέγιστα μέχρι

(1) p. 370. (2) de administr. imperio p. 78. ed Band.

μέχρι τοῦ Δανουβίου ἐν τοῖς Ὑπερβορέιος τόποις καταῳκισμένα, *gentes multae et maximae ad Danubium vsque in Hyperboreis regionibus degentes.* Hippocrates libro de aëre aquis et locis, cum de Scythia: (1) κεῖται γὰρ ὑπ' αὐλαῖς ἄρκτοις καὶ τοῖς ὄρεσι τοῖς Ριπαιοισιν, ὅθεν ὁ βορέης πνέει, *sita est sub ipsis vrsis et montibus Riphaeis, vnde boreas flat.* Quare vetustissimi mortales in Graecia, cum vix vltra Ponti littora et vltra Danubii ripam venerant, inde iam boreae regnum ordiri credebant, et interiora colentes aut etiam sub ipso borea Graecos suos Hyperboreos dixerunt. Huc accedit, quod caeremonias Hyperborearum mulierum in Delo apud Paeonas et Thracias mulieres sua quoque aetate obseruari Herodotus animaduertit. (2) Neque enim sine stipula triticea sacra Dianae faciebant, siue id a Graecis acceperint mulieribus, seu Graecae a Threissis. Postquam virgines ab Delo ad Hyperboreos non sunt reuersae, non ausi sunt ab eo tempore filias tanto discrimini committere, itaque sacra sua ad vicinas gentes misere, vt adeo intelligi possit, super Thracia hos Hyperboreos coluisse. Id ostendam postea ex Herodoto: nam mihi adhuc aliud in mentem venit, quod hoc loco obseruem. Vetustissimam eam caeremoniam Hyperboreorum fuisse, vt virgines filias mitterent in Delum, vel ex eo adparet, quod scriptores commemorant, tempora vicina partui Apollinis et Dianae fuisse. Postea plane desiisse videtur illa religio apud Hyperboreos, cum se magis miscuissent barbaris populis. Nam hymnus in Apollinem, quem Homero Thucydides attribuit, Cynaetho Chio autem Eustathius in Homerum, et Scholiasta Pindari in Nemeis, nihil de his

(1) c. 45. (2) l. IV. c. 33.

mores metropoleos. Immo de vultu quoque cuiusdam Callistrati Borysthenitae Dio, πολὺ Ιωνικὸν τῆ ἐιδῆς habuisse dixit. Amor masculus isthic vt apud Milesios: colebant etiam Achillem in heroibus omnibus maxime, et Homerum in poëtis. Homerum enim Iones sibi vindicabant, quod fama esset, teste Eusebio, Homerum in migratione Ionica fuisse. Achillis autem sepulcrum apud se esse Borysthenitae gloriati sunt, et alia eius herois monumenta in suo solo conseruarunt. Descitum tamen est in colonia et a Graeci puritate sermonis et ab habitu, quem a Melanchlaenis acceperunt. Mercatura cum alia, tum salis fuit. (1) Vrbs calamitates multas perpessa, ad extremum a Getis occupata et aequata solo est. Neque enim cum Dio eam cerneret, satis ampla pro veteri gloria fuit et male in primis aedificata. Turres tantum e vetustis monumentis antiquae amplitudinis testes in circumiacentis agri ruinis sunt conspectae. Vna res saluti fuit euerso oppido, quod barbari cernerent, se mercaturis Graecis aegre carere, vt necesse esset Graecorum frequentiam hominum in agro permitti. Dixi supra, iisdem temporibus Istrum vrbem Plinii, et Rauennatis Istriopolin, Arriani Istriam conditam fuisse ad Pontum. Ioannes Harduinus numos Septimii Seueri et Alexandri Seueri adfert ΙΣΤΡΙΗΝΩΝ inscriptos: Goltius vnum ΙΣΤΡΙΗΩΝ inscriptum signatumque duobus capitibus, quorum vnum ad septemtrionem, alterum ad meridiem versum videtur. Laurentius Begerus eodem in numo legit ΙΣΤΡΙΗΑ. Nos in hoc numo argenteo, quem Buxbaumius CPli attulit, nunc vir amplissimus Iosephus Nicolaus Delislius collega noster cum ceteris

(1) Omnia ex Dione p. 437.

teris possidet, diserte legimus .. ΣΤΡΙΑ .. vt sit ΙΣΤΡΙΑΝΩΝ. Stephanus Byzantius : Ισρος ἐν τῷ πόντῳ. Ἀρριανὸς δ' Ισριαν αὐτήν φησι. τὸ ἐθνικὸν Ισριανὸς. Sic sane Arrianus in periplo Ponti Euxini (1) et fragmentum peripli alterius (2) Ισριανῶν λιμὴν. Begeri iudicio duo inuersa capita situm vrbis significant, vt testudo Peloponnesi, τρίσκελον Siciliae : inuersa autem sunt, quod Istrus in confiniis Europae Asiaeque, quas dirimat Ister, sita duas orbis terrarum regiones respiceret, vt Ianus bifrons sua tempora. Metuo ne coniectura magis sit ingeniosa, quam vera. An potius eo hoc pertinet, quod vrbs duas in diuersas partes esset scissa muro per medium oppidum ducto, vt Emporiis in Hispania fuisse T. Liuius (3) testatur? In auersa phocaenam magis dixerim, quam cum Begero delphinum. Pertinet sane ad piscaturam diuitem et in flumine et in mari. Percussus enim numus videtur paullo post Alexandri Macedonis aetatem, cum Graecae coloniae opibus maxime florerent. Milesii etiam ad Pontum condiderunt Apolloniam, circiter Olymp. XLII. Sic Scymnus Chius ἐν περιηγήσει (4)

Μεθ' ἣν πόλις σύνορος ἡ Απολλωνία
Τάυ]ην δε πρότερον ἔτεσι πεν]ήκον]ά πυ
Κτιζυσι τῆς Κύρυ βασιλείας τὴν πόλιν
Εις τὺς τόπυς ἐλθόν]ες ὁι Μιλήσιοι.

Finitima, inquit, *postea est Apollonia : eam annis admodum quinquaginta ante Cyrum regem Milesii in haec loca profecti, vrbem condidere.* Quinquaginta annis ante Cyrum regem est circiter Olymp. XLII. Scythis iam regiones

 inter

(1) p. 21. (2) p. 9. (3) l. XXXIV. 9. (4) v. 729.

et in Delum mitterent sacra. Sine certo gentis nomine frustra quaesiti sunt septemtrionales illi seu hyperborei. Scythae autem, cum quis de Hyperboreis quaereret, non aliter interpretabantur, quam gentes ad septemtrionem sitas, Melanchlaenos puta Androphagos: vltra enim ad septemtrionem nullos se populos nosse ferebant. Issedones autem Ponticis percunctantibus primum Arimaspas et Aegipodas ad boream colere narrabant, vltra eos gentem quidem ignotam, attamen septemtrionalem quemcunque populum. Hic protinus Graeci (in quibus est Herodotus) Hyperboreos posuere vltra Verchoturios montes seu vltra Riphaeos, vt habet quoque Hellanicus Milesius Herodoto superior. (1) Ex Herodoto aut a magistro suo Hellanico hausit Damastes Sigeensis Herodoti aequalis, qui vnum hoc adiecit, hos montes ὑπερβορέους καθήκειν ἐς τὴν ἔλεραν θάλασσαν, *Hyperboreos pertingere vsque ad extremum mare.* Itaque Sibiria est, quae commodum a Daurico vocabulo *Sibir* (nam ita et Persis سبير) nomen accepit: nam *Sibir* est *septemtrio.* Hi vtique non sunt illi Delio deuoti Hyperborei. Nulla tanta vanitas mihi in mentem veniat: attamen sunt Hyperborei Herodoti. Pausanias quidem (2) in ea sententia fuit, a qua abhorremus. Nam magnifice se gerit et viam ostendit, qua mergites triticei missi fuerint in Graeciam. Ad Arimaspas et Issedonas et Scythas et Sinopen, et Graecis iam perserentibus ad Prasienses in Apollinis templum in agro Attico, hinc Delum. Iter ex Herodoto confictum fortassis non a Pausania, sed a poetis ante eum, qui nihil pensi habebant, quantum quidque verum esset, modo populo placerent, quas fecissent fabulas. Hero-

(1) apud Clementem Alexandrinum p. 305. (2) p. 17.

Herodoti aetate fama erat, vt ſupra dixi, ſacra Hyperborea a mari Adriatico miſſa fuiſſe. Protarchus apud Stephanum, homo, vt puto, Bargyliates, τὰς Ἄλπεις Ῥίπεια ὄρη προσηγορεῦσθαι, καὶ τὰς ὑπὸ τὰ Ἄλπαια ὄρη καλοικοῦντας πάντας Ὑπερβορέας ὀνομάζεσθαι. Pindarus vero quaſi veſtigia fugientium ab Hadriatrico ſinu ad interiorem ſeptemtrionem odoratus, ſedem Hyperboreorum ad Iſtri fontes conſtituit in Olympionicis; (1) cautus tamen prouidusque futuri, pone ſe veſtigia viae eius deterſit in Pythionicis: (2)

ναυσὶ δ' οὔτε πεζὸς ἰὼν
εὕροις ἂν ἐς Ὑπερβορέων ἀγῶνα θαυμαστὸν ὁδόν.

non nauibus non pedeſtri itinere ad Hyperboreos penetrare datum eſt. Heraclides Ponticus vicinus temporibus captae a Gallis Romae, vt habet Plutarchus in Camillo, is, inquam, Heracleota, cuius vitam ſcripſit Diogenes Laertius, gentes, quae Romam ceperunt, ab Hyperboreis profectas tradit. Cimbros dicit, qui vtique a ſeptemtrione venerunt.

Cum tam longe et in incerta regione ſiti eſſent Hyperborei a veteri fama viſi ſunt mereri poëtis, vt fabularum feraces eſſent. Ne dicam quae de Apolline et Perſeo et Hercule inter eos commorantibus Pindarus cecinit, ne, quae de felicitate populi, de iuſtitia, de vita longa et cetera in modum Platonicae reipublicae aut lunaris a poetis ſinguntur, vt recte viderit Clemens Alexandrinus (3) τὸς τῶν Ὑπερβορέων καὶ Ἀριμασπίων πόλεις καὶ Ἠλύσια πεδία δικαίων πολιτεύματα γεγονέναι,

(1) l. c. (2) Ode X. (3) p. 543.

nominem de templo Apollinis et luco, de pomis aureis et hortis Hesperidum. Lucianus saltem in Philopseude inspiciatur, quam ridiculas praestigias Hyperborei hominis impune comméntus sit. Nec sibi, ne faceret, interdictum putauit, et exstitere exempla, quae imitaretur.

Ex his colligi potest, quomodo nos gerere oporteat, cum viri magno et excellenti ingenio omnem operam in eo consumunt, vt quaecumque de Hyperboreis in omni antiquitate commemorantur, ea ad Scandinauiam applicent. In illis suis tesquis regnant et auguria capiunt. Olaus Verelius in notis ad Heruarae fabulam contendit: Hyperboreos aut nusquam gentium aut in Scandinauia vel certe in extremis regionibus ad glacialem oceanum sedes suas habuisse. Cum enim, inquit, ipsi Scandiani veteres septemtrionalem hanc plagam semper appellauerint *Nordurhalfo heimsins* et *Nordurland* et se ipsos *Nordmenn*, istius nominis significationem fama ad se delatam vocabulo Hyperboreorum expressere Graeci. Immo alia via incessit Olaus Rudbequius in Atlantica, et αὐτὸ τοῦτο τὸ Ὑπερβόρειον non Graecum, sed Scandinauicum sonare edixit. Esse enim *Hyperboreos* quasi *Yferborne*, *illustri loco natos*. Atque tum ille vero omnia vndique ex vetustis monumentis congerit et in hac arce sua dedicat. Non inuideo Scandinauis Hyperboreorum nomen homo Prutenus, qui memini eos in patria mea sub borea respici. At pati non potest Thormodus Torfaeus (1) Noruagis suis id eripi nomen, quod maiori iure vindicare possint, tamquam totius Scandinauiae Hyperborei. Cetera quae aduersus Rudbequium disputat, non minus sunt docta, quam ingeniosa.

(1) Hist. Noru. T. I. p. 7. seq.

geniosa. Etiam hic vetus est error in Scandinauia, natus ab intemperanti eruditione, vt Hyperboreos se esse arbitrantes Abarim philosophum suum fuisse praedicarint. In historia Hialmari regis Biarmlandiae atque Thulemarkiae, quam secundum Ioannem Peringskioldum Georgius Hickesius edidit, (1) haec leguntur ex Peringskioldi interpretatione: *ex Graecia aduenerunt Abaris et Samolis* (*Abor ok Samolis*) *cum pluribus eximiis viris, qui mox grati acceptique sunt: inclutus ea tempestate erat Hialmarus rex.* Abarin fabulam putat et respuit Herodotus. Alii eum Hyperboreis inserunt, (ex quo auctor Hialmarianae historiae Scandinauis vindicauit) et Olympiad. III. inscribunt. Ολυμπιάδων ἀναγραφή, quam Phlegonti Tralliano et vetustioribus Eratostheni atque Aristoteli tribuo Ολ. Γ. ά. Ἄβαρις ἐξ Ὑπερβορέων πρεσβευτὴς εἰς τὴν Ἑλλάδα ἦλθε. Sic etiam Hippostratus tradidit apud Harpocrationem; (2) alii apud eundem καὶ τὴν εἰκοστὴν καὶ πρώτην Ολυμπιάδα. Pindarus καὶ Κροῖσον τὸν Λυδῶν βασιλέα, itaque sane ante Olymp. LVIII. Eusebius Hieronymo fere concinit, qui Olymp. LIV. 2. *Abaris de Scythia venit in Graeciam*, hoc est, ex eius rationibus annum vnum ante Croesum regem. Quorum si quis verum cognouit in tam obscura re, aequalis Zamolxis esse non potuit Abaris. Nam Zamolxin consentiunt fere omnes Pythagorae famulum fuisse. (3) At Abaris aetas secundum hos auctores incidit aut annos ducentos ante Pythagoram natum, aut annos CXXIV. aut denique in

 annum

(1) Thesauri linguarum Septentr. T. II. p. 128. (2) p. 5.
(3) Strabo p. 337.

annum ſextum Pythagorae, ſecundum Henr. Doduelli rationes in exercitatione de aetate Pythagorae, cum nondum natus eſſet Zamolxis. Euſebius aliis auctoribus Olymp. LXXXII. 4. *Abaris Hyperboreanus hariolus agnoſcitur.* Hoc ſolum congruit Zamolxis aetati. Sed quis in tanta varietate aliquid veri ſtatuet, cum iam ſua aetate Herodotus Abarim exploſerit?

OBSER-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE IN SPECVLA ACADEM. IMPER. SCIENTIAR. AB ANNO MDCCXXXIX – MDCCXLV.

Iosepho Nicolao Delilio cum sociis institutae.

St. n.	temp. ver.	Anno 1739.
Ianuarii 5	7^h 7′ 34″	Tertius satelles euanescens, intrauit in vmbram admodum exiguus; nebula autem in ipso momento introitus superueniens, illum aeque ac reliquos satellites oculis subduxit; hinc dubium oritur, annon immersio totalis dimidia minuti primi parte tardius acciderit. Obseruatio tubo reflectente 5. pedum instituta.
5	9 10 55	Ioue e nebula emergente tertius satelles eodem tubo ex vmbra emersus conspiciebatur. Ceterum nondum tanto lumine, quo fulgere alias solet, gaudebat; hinc emersionem primam saltim ante minutum primum accidisse coniicio.
22	6 3 15	Emersio 1. Coelo admodum sereno obseruata eo em fere momento tubo 15. pedum Campaniano, et tubo reflectente 5. pedum.

n. st.	temp. ver.				Anno 1739.
Febr.	10	5h	4′	3″	Emersio 3. Tubo reflectente, crepusculum autem admodum sensibile, obseruationem quarta minuti primi parte circiter dubiam reddit.
	17	7	17	10	Immersio 3. Tubo reflectente } tempore
		9	8	27	Emersio 3. Tubo reflectente } sereno
	18	6	38	11	Emersio 2. Tubo reflectente, tempore sereno.
	21	8	12	40	Emersio 1. Tubo reflectente, tempore sereno.
	25	9	20		Secundus satelles nondum apparuit, etsi per tubum reflectentem emersio iam ante 22. minuta, secundum calculum obseruanda fuisset. Ceterum aëris constitutio diutius obseruationibus inuigilare non permisit.
Iulii	30	13	18	29	Immersio 1. Tubo reflectente, quae forte nonnulla minuta secunda serius accidit, prouti e circumstantiis temporis conieci.
August.	25	12	58	30	Immersio 2. Tubo 15. pedum Campaniano.
			58	35	Dubitatum fuit annon idem satelles adhuc eodem tubo appareat.
			59	15	Eadem Immersio tubo reflectente, obseruata fuit.
	31	9	57	36	Immersio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
Septemb.	1	15	36	10	Immersio 2. Tubo reflectente coelo sereno et tranquillo.

Im-

n. ſt.	temp. ver.				Anno 1739.
Septemb. 7	11h	54′	18″		Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
		54	37		Eadem tubo reflectente coelo ſereno.
23	10	16	5		Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
		16	25		Eadem tubo reflectente coelo claro et ſereno.
30	12	11	27		Immerſio 1. Tubo reflectente. Nebula in inſtanti ſuperueniens ſatellitem oculis eripuit, qui iam ſatis diminutus erat, ex quo colligo, immerſionem totalem aliquot minutis ſecundis ſerius accidiſſe.
Octobr. 14	16	3	54		Immerſio 1. Tubo reflectente coelo ſudo.
16	10	32	48		Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
		33	0		Dubitatum fuit annon adhuc appareat.
		33	17		Eadem Immerſio tubo reflectente, coelo ſereno.
23	12	28	45		Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
		28	47		Eadem Tubo reflectente 5. pedum obſeruata.
Nouemb. 1	8	50	28		Immerſio 1. Tubo 15. pedum coelo nonnihil nebuloſo.
9	12	18	42		Immerſio 3. Tubo reflectente.
Decemb. 1	13	0	12		Emerſio 1. Eodem tubo.

Eadem

n. ſt.	temp. ver.	Anno 1739.
Decemb. 1.	13ʰ 0′ 55″	Eadem immerſio tubo 15. pedum Campaniano obſeruata. Coelum equidem ſerenum erat, nimia autem ſatellitis et Iouis vicinia, obſeruationis certitudini quodammodo impedimento eſſe potuit.
3	7 28 2	Emerſio 1. Tubo reflectente.
	28 25	Eadem tubo 15. pedum Campaniano propinquitas Iouis et ſatellitis, obſeruationem tamen quodammodo incertam reddere potuit.
17	9 12 5	Emerſio 2. Tubo reflectente, coelo ſereno.
	11 10 13	Emerſio 1. Tubo reflectente, coelo ſereno.
19	5 38 27	Emerſio 1. Tubo reflectente, coelo ſereno.

ſt. n.	temp. ver.	Anno 1740.
Ianuar. 27	7ʰ 53′ 13″	Immerſio 3. Tubo reflectente, coelo ſereno.
	9 55 0	Satelles iam emerſus magnitudine conſueta conſpiciebatur.
Februar. 3	5 51 47	Primus ſatelles ex vmbra emerſus apparere incipit tubo reflectente. Nebula autem forte emerſionem aliquanto tardius conſpiciendam praebuit.

Emerſio

ſt. n.	temp. ver.	Anno 1740.
Febr. 12	6^h 5′ 39″	Emerſio 2. Tubo 15. pedum Campaniano, dubia, per aliquot minuta ſecunda, ob nebulam tenuem exortam.
Martii 4	8 2 20	Emerſio 1. aeſtimata. Satelles dimidia minuti primi parte ſerius ſe conſpiciendum praebuit; tubus nimirum reflectens, obſeruationi inſeruiens e loco mouendus erat.

Finis obſeruationum, ante iter in Sibiriam ſusceptum, inſtitutarum.

Obſeruationes Satellitum Iouis Petropoli inſtitutae, poſtquam e Sibiria redux eſſem.

ſt. n.	temp. ver.	Anno 1741.
Ianuar. 25	13^h 16′ 6″	Emerſio 2. Tubo reflectente, aliquot minutis ſecundis circiter incerta.
27	12 45 5	Emerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
	45 18	Tubo reflectente 7. pedum, non melioris notae.
Februar. 8	4 57 13	Quartus ſatelles in vmbram intrans, adhuc debili apparet lumine tubo reflectente 5 et 7 pedum.
	58 0	Certe vtroque Tubo non amplius conſpicuus.
10	6 34 24	Emerſio 3. Tubo reflectente 5. pedum.

ſt. n.	temp. ver.	Anno 1741.
Februar. 10	0° 34′ 26″	Eadem Emerſio Tubo reflectente 7. pedum.
	16 37 49	Emerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum admodum incerta, quoniam ſatellites non bene conſpiciendae erant, ob Iouis exiguam admodum altitudinem.
14	5 31 35	Emerſio 1. Tubo reflectente 7. pedum. Prima Emerſio quinque minutis ſecundis citius accidere potuit.
17	10 35 15	Emerſio 3. Tubis reflectentibus 5. et 7. pedum, ſi aliquot minuta ſecunda excipias, certa.
19	10 30 20	Emerſio 2. Tubo reflectente 5. et 7. pedum. Iupiter e nubibus emergebat, ſatelles autem admodum debilis erat, ita, vt obſeruatio non ſatis certa ſit cenſenda.
Mart. 25	6 48 50	Emerſio 3. Tubo reflectente 5. pedum, certa, ſi aliquot minuta ſecunda exceperis, ob claritatem diei et viciniam ſatellitis.
30	11 18 17	Immerſio totalis 4. ſatellitis, tubo reflectente 5. pedum, admodum difficilis obſeruatu, ob motum nimis lentum huius ſatellitis. Immerſio haec 10. minutis ſecundis citius tubo reflectente maiori 7. pedum obſeruata fuit, qui Iouem et ſatellites non aeque diſtinctos, ac alter exhibebat.

Emer-

ſt. n.		temp. ver.	Anno 1741.
Mart.	30	11ʰ 40′ 10″	Emerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano. Hic ſatelles aliquot minutis ſecundis ſaltim ſerius per tubos reflectentes 5. et 7. pedum apparuit.
		13 11 45	Emerſio 2. Tubo reflectente 5. pedum et tubo 15. pedum Campaniano. Vicinia huius et primi ſatellitis, emerſionem hanc quinque vel ſex minutis ſecundis ſerius conſpiciendam praebuerunt.
April.	8	8 6 50	Emerſio 1. Tubo reflectente quinque pedum.
		11 43 24	Immerſio totalis 3. ſat. tubo 15. pedum Campaniano.
		43 46	Tubo reflectente quinque pedum.
	15	10 3 29	Emerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
	16	9 15 30	Emerſio 4. Tubo reflectente 7. pedum.
	24	10 30 14	Emerſio 2. Tubo reflectente 5. pedum.
		30 28	Eadem obſeruata tubo 15. pedum Campaniano.
Aug.	29	14 33 0	Immerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum, dubia.
Sept.	21	14 50 46	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
		50 50	Eadem tubo reflectente 5. pedum.
	28	16 46 27	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
		46 46	Eadem obſeruata per tubum reflectentem 5. pedum.

st. n.		temp. ver.			Anno 1741.
Octobr.	4	15h	29′	18″	Immersio 3. Tubo 5. pedum reflectente, dubia.
Nov.	13	17	10	30	Immersio 1. Tubo reflectente. Nubes rariores obseruationi impedimento esse potuerunt.
	20	19	3	50	Immersio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
			4	3	Eadem obseruata tubo 5. pedum.
	29	15	23	0	Immersio 1. Tubo 15. pedum Campaniano et reflectente: dubia, ob nubem ipso momento immersionis superuenientem.
Decemb.	8	11	42	13	Immersio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
			42	27	Eadem tubo reflectente 5. pedum.
	15	10	42	22	Emersio 3. tubo reflectente 5. pedum.
			42	35	Eadem emersio obseruata tubo 15. pedum Campaniano. Satelles Ioui nimis erat vicinus vt de tempore sat certi esse haud possimus.
		13	32	4	Immersio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
			32	10	Eadem tubo reflectente 5. pedum.
	24	9	50	5	Immersio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
			50	20	Eadem tubo reflectente.

Immersio

ſt. n.		temp. ver.			Anno 1742.
Ianuar.	8	17h	42′	20″	Immerſio 2. Tubo 15. pedum Campaniano.
			42	26	Eadem Tubo reflectente 5. pedum.
	19	9	29	42	Immerſio 2. Tubo 15. pedum Campaniano.
			29	57	Eadem tubo reflectente 5. pedum.
	26	12	0		Immerſio 2. Tubo reflectente 5. pedum, difficilis obſeruatu propter Iovem oppoſitioni cum ſole admodum propinquum.
Febr.	15	14	8	13	Emerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
	20	11	57	16	Emerſio 2. Tubo 15. pedum Campaniano.
	27	14	34	0	Emerſio 2. Tubo 15. pedum Campaniano.
	28	15	59	32	Emerſio 4. Tubo reflectente 5. pedum.
Mart.	10	14	25	30	Emerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
	12	8	54	5	Emerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
			54	21	Eadem emerſio. Tubo 15. pedum Campaniano.
	17	16	22	28	Emerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
	18	10	40	0	Immerſio 3. Tubo 15. pedum Campaniano.
			40	25	Eadem immerſio. Tubo reflectente 5. pedum.
		14	15	35	Emerſio 3. Tubo reflectente 5. pedum.
	24	11	49	22	Emerſio 2. Tubo reflectente 5. pedum.

st. n.		temp. ver.			Anno 1742.
Mart.	24	11^h	49	43	Eadem emersio. Tubo 15. pedum Campaniano.
	25	14	41	0	Immersio 3. Tubo 15. pedum Campaniano, si 10. l. 12. minuta secunda excipias, certa.
	26	12	48	0	Emersio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
			48	20	Eadem tubo 15. pedum Campaniano.
	28	7	17	45	Emersio primi. Tubo reflectente 5. pedum, nimia claritas diei obseruationi obesse potuit.
April.	4	9	14	45	Emersio 1. Tubo 15 pedum Campaniano
	18	9	7	56	Emersio 2. Tubo reflectente 5. pedum, hinc emersio forte 15. vel 20. minuta secunda citius accidere potuit.
		13	7	56	Emersio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
	23	10	23	8	Emersio 3. Tubo reflectente 5. pedum.
Maii	20	9	47	33	Emersio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
	23	10	25	35	Emersio 4. Tubo reflectente 5. pedum.
Octobr.	30	18	9	52	Immersio 2. Tubo reflectente 5. pedum.
Decembr.	1	13	42	27	Emersio 3. Tubo reflectente 5. pedum.
	15	18	3	1	Immersio 3. Tubo reflectente 5. pedum.

st. n.		temp. ver.			Anno 1743.
Ianuar.	26	14^h	37′	36″	Immersio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
	27	13	34	15	Immersio 2. Tubo reflectente 5. pedum.
		7	33	56	Immersio 3. Tubo reflectente 5. pedum.
Febr.	11	12	52	54	Immersio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
Mart.	11	7	46	30	Emersio 2. Nouo tubo reflectente 5. pedum.

Ioue

st. n.	temp. ver.				Anno 1743.
Mart.	25	13^h	2′	23″	Ioue a nebula liberato ſecundus ſatelles ex vmbra emerſus conſpiciebatur, tubo nouo reflectente 5. pedum.
	29	15	41	43	Emerſio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
	31	10	10	3	Emerſio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
			10	4	Eadem emerſio tubo veteri reflectente 5. pedum obſeruata.
April.	6	11	0	46	Immerſio 4. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
			0	57	Eadem immerſio tubo veteri reflectente 5 pedum.
		14	56	56	Emerſio 4. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
	9	12	53	14	Ioue e nube emerſo 3. ſatelles iam ex vmbra exiuerat, nondum autem magnitudine conſueta gaudebat. Tubus ad obſeruationem adhibitus fuit reflectens 5. pedum vetus.
	12	7	32	22	Emerſio 2. Nouo tubo reflectente 5. pedum.
	16	8	32	51	Emerſio 1. Nouo tubo reflectente 5. pedum.
		13	34	23	Immerſio 3. Nouo tubo reflectente 5. pedum.
	23	8	56	55	Emerſio 4. Nouo tubo reflectente 5. pedum.
		10	29	4	Emerſio 1. Nouo tubo reflectente 5. pedum.

Eadem

st. n.		temp. ver.	Anno 1743.
April.	23	10^h 29′ 10″	Eadem obseruata. Tubo veteri reflectente 5. pedum.
Maii	7	14 22 40	Emersio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum. Iupiter admodum profundus erat.
	9	8 49 12	Emersio 1. Tubo nouo reflectente. Crepusculum magnum.
	22	9 35 30	Immersio 3. dub. Tubo nouo reflectente 5 .pedum.
		12 48 43	Emersio 3. Tubo maiori Gregoriano valde bono.
		48 49	Emersio 3. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
Iun.	12	11 3 54	Immersio 4. Tubo nouo reflectente 5. pedum 1. Crepusculum magnum.
Nov.	28	19 23 8	Immersio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
Dec.	7	15 41 9	Immersio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.

st. n.		temp. ver.	Anno 1744.
Febr.	4	11^h 2′ 10″	Emersio 3. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
	7	13 50 17	Immersio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
Mart.	17	12 22 19	Immersio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
	18	8 12 7	Immersio 3. Tubo nouo reflectente 5. pedum. Iupiter erat profundus.

Im-

ſt. n.		temp. ver.	Anno 1744.
Mart.	18	9^h 3′ 22″	Immerſio 2. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
April.	18	11 17 17	Emerſio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
	19	11 13 48	Emerſio 2. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
		14 2	Eadem emerſio. Tubo Campaniano 15. pedum.
April.	25	13 13 58	Emerſio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
		14 9	Eadem obſeruata tubo Campaniano 15. pedum.
	26	13 50 41	Emerſio 2. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
	30	10 44 10	Emerſio 3. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
Maii.	11	11 33 50	Emerſio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
		34 0	Eadem emerſio. Tubo 15. pedum Campaniano.
	21	10 49 27	Emerſio 2. Tubo 15. pedum Campaniano.

ſt. n.		temp. ver.	Anno 1745.
Mart.	1	15^h 58′ 8″	Immerſio 2. Tubo reflectente 5. pedum.
	4	12 50 5	Fmerſio 3. Tubo reflectente. Coelo ſatis ſereno, Iupiter non bene terminatus, neque ſatis eleuatus ab Horizonte conſpiciebatur.

ſt. n.		temp. ver.	Anno 1745.
Mart.	4	16h 53′ 29″	Immerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
	11	14 58 57	Immerſio 3. Tubo reflectente 5. pedum; dubia ob vapores, quibus coelum repletum erat.
Maii.	7	12 22 20	Emerſio 1. Tubo reflectente Gregoriano 5 pedum, difficilis ob nimiam Iouis et ſatellitis viciniam.
	14	14 19 50	Emerſio 1. Tubo reflectente 7. pedum. Haec obſeruatio non ſatis certa ad minutum primum vsque, propter nimium crepuſculum et Iouem admodum profundum.
	15	9 27 48	Emerſio 2. Tubo reflectente 5. pedum. Crepusculum nimium obſtitit exactitudini obſeruationis, cuius incertitudo ad plurima minuta ſecunda ſe extendit.
	29	10 51 50	Immerſio 3. aeſtimata, quoniam ante minutum primum nube tectus fuiſſet, cum iam admodum diminutus apparuiſſet per tubum reflectentem 5. pedum
		12 36 25	Emerſio 3. tubo reflectente 5. pedum.
Iun.	23	11 33 19	Emerſio 2. tubo reflectente 5. pedum. Incerta ad minutum primum vsque, ob nimium crepuſculum et nebulam craſſam, quae reliquos vix conſpicienda praebebat ſatellites Accedebat quod Iupiter non admodum eleuatus eſſet.

OCCVL-

OCCVLTATIO PALILICII A LVNA

d. $\frac{\text{21. Septembr.}}{\text{2. Octobr.}}$ 1738.

PETROPOLI OBSERVATA

a

G. Heinsio.

Occultationes quarundam stellarum ex Hyadibus a luna, circa ipsum eius ortum videndi spes erat, quam vero densissima ad horizontem nebula frustrata est. Luna non nisi longum tempus post ortum suum in conspectum venit, et tunc quoque tam crassis inuoluta vaporibus, vt Palilicium in vicinia eius extans, per tubos quoque maiores videri non posset. Palilicium tandem conspicitur, luna 10. gradus supra horizontem eleuata. Tubo astronomico 15. ped. lunam deinceps diligenter contemplatus sum, an duplicem stellam, a Bayero θ designatam in vicinia lunae cernere possem, 9^h. $12'$. tempore vero stellam 2 ad θ ad limbum lunae obscurum iam emersam vidi, altera 1 ad ϑ tunc temporis non apparuit. Notato priori momento et tubo iterum ad lunam directo, altera quoque stella 1 ad ϑ, 9^h. $13\frac{1}{4}'$. in conspectum venit. An circa hoc momentum 1 ad θ reuera emerserit, asserere non audeo; nebulae enim crassiores subinde interuenientes obseruationem hanc dubiam reddunt. Interim momentum posterius, a vero emersionis momento non admodum discrepare debet, cum stellae confinio lucis et vmbrae disci lunaris valde vicinae existerent, sic vt colligerem istas, praesertim 1 ad θ, limbo lunae obscurae admodum propinquas fuisse. Conversо nunc tum lunae, tum Palili-

cii adſpectu, per tubum quadrantis portatilis, radii 2. pedum, loca lunae ad Palilicium iuxta methodum infra commemorandam determinaui ſequentia.

Ordo obſerv	Momenta obſeruationum Temporis veri	Differentiae aſcenſ. rectae centri ☽. et Palilicii in temp. primi mobilis.	Differentiae declinationum centri ☽. et Palilicii in part. circuli maximi.	Altitudo limbi ☽. inferioris (apparenter ſuperioris in tubo aſtron.) neque parallaxi, neque refractione correcta.
1.	10ʰ. 0′. 40″	4′. 42″½	27′. 0″.	15°. 33′½
2	— 24. 24	3. 52¾	23. 53.	18. 28.
3	— 33. 0	3. 35.	22. 43.	19. 31¼
4	— 59. 13	2. 49½	18. 53	— — —
5	11. 14. 42	2. 17.	17. 33	24. 36½
6	— 25. 58	1. 58½	15. 45	25. 57½
7	— 31. 43	1. 46.	15. 24	26. 39½
8	— 37. 43	1. 37¼	14. 11	— — —
9	— 45. 52	1. 22	13. 22	28. 18
10	12. 6. 36	0. 45½	10. 52	— — —
11.	8. 21	Immerſio Palilicii ad limbum lunae lucidum, tum per tubum Newton. 5. ped. tum per tub. aſtron. 15. ped.		
12.	— 38. 32	Coniunctio viſa centri lunae et Palilicii. Diſtantia centrorum minima deducta eſt 7′. 44″. part. circuli maximi, qua centrum lunae auſtralius erat Palilicio.		

13.

13	13. 8. 43.	Emerſio Palilicii ad limbum lunae obſcurum per tubum quadrantis portatilis, radii 2. pedum.			
		′ ″			° ′ ″
14.	– 18. 51.	1. 18¾	2′. 51″	– –	′
15.	– 27. 43.	1. 32.	1. 54	38°.	57⅛
16.	– 35. 39.	1. 45½	1. 6	39.	39½
17.	– 45. 5.	2. 0	0. 3	40.	27
18.	– 54. 13.	2. 14¼	1. 13	41.	8½
19.	14. 14. 59.	2. 48¼	3. 29	42.	37½
20.	15. 50. 55.	5. 15½	13. 10	46.	0. 40″.

Vltima haec obſeruatio ipſum momentum culminationis centri lunae reſpicit, et altitudo notata eſt, altitudo meridiana limbi inferioris lunae.

Ex obſeruata per Cl. De L'Isle centri lunae culminatione d. 3. Octobr. deducitur interuallum temporis inter vtrumque lunae per meridianum tranſitum d. 2. et 3. Octobr. 24^h. $46'$. $56\frac{1}{2}''$ temporis veri; huic autem interuallo ex obſeruationibus reſpondet mutatio declinationis lunae interea facta 1°. 53′. 50″. prouti e ſuperficie terrae viſa eſt. Declinatio eſt borealis creſcens.

Cum in tranſitu lunae per meridianum d. 2. et 3. Octobr. linea cuſpidum diſci lunaris ſitum verticalem haberet, vtriusque limbi tum ſuperioris, tum inferioris altitudinem meridianam obſeruare licuit; vnde deducta eſt diameter lunae apparens in Culminatione eius d. 2. Octobr. 29′ 54″; d. 3. Octobr. 30′. 15″; vtraque ad altitudinem lunae meridianam iſtis diebus referenda.

Loca centri lunae ad Palilicium iuxta eandem methodum determinata ſunt, quam in diſſert: de tranſitu lunae

per Hyades d. 2. Ianuar. 1738. ſt. n. expoſui. Scilicet tubum quadrantis portatilis radii 2. pedum, in cuius foco quatuor fila ad angulos ſemirectos ſe decuſſantia extabant, ita verſus lunam direxi, vt filum, quod horizontale vocare ſolet, ſitum horizontalem exactum nanciſceretur, et vt tum luna, tum Palilicium, immoto quadrante, commode tria fila traiicere poſſent. Notaui deinceps momenta temporis, quibus tum limbus lunae lucidus, tum Palilicium ad tria eiusmodi fila, quaecunque fuerint, appulerunt. Hac obſeruatione peracta altitudinem, quam perpendiculum in limbo quadrantis notabat, deſignaui. Hoc modo ex appulſibus limbi lunaris et Palilicii ad tria fila, iuxta methodum citatam cognoui differentias aſcenſionum rectarum et declinationum centri lunae et Palilicii, prout iſtae in obſeruatione ponuntur, nec non diametrum lunae apparentem, quam habito diuerſarum lunae altitudinum ſuper horizonte reſpectu, optime conuenientem deprehendi cum diametro quae in culminatione lunae per altitudines meridianas vtriusque limbi, ſuperioris et inferioris, eruta eſt. Tandem ex datis momento obſeruationis et tempore appulſus limbi inferioris lunae ad filum horizontale, nec non ex data altitudine, ad quam quadrans in obſeruatione repoſitus fuit, innotuit ad momentum obſervationis altitudo limbi inferioris lunae ſuper horizonte, prout in obſeruatione adſcripta eſt.

Figura 1. declarat poſitiones centri lunae ad Palilicium eiusque diurnum, et numeri ibi adſcripti conſpirant cum numeris, quibus ordo obſeruationum ſupra indicatur. Figura autem accommodata eſt apparentiae tubi aſtronomici, vt reuera ſupra meridies, infra ſeptentrio, ad dextram

dextram ortus, ad ſiniſtram occaſus ſubintelligi debeant. Ab obſeruatione 1. vsque ad 16. centrum lunae a Palilicio declinauit auſtrum verſus; ab obſeruatione 17. vſque ad 20. verſus boream. Centrum lunae ab obſeruatione 1. vſque ad coniunctionem viſam cum Palilicio in Aſcenſione recta hoc occidentalius fuit, poſt coniunctionem vero orientalius. Ceterum circumſtantias omnes ſupra notaui, quibus ad cognitionem parallaxeos aſcenſionis rectae et altitudinis lunae ex data eius poſitione ad Palilicium in culminatione d. 2. Octobr. et data quauis alia obſeruatione loci lunae ad Palilicium peruenire licet. Notandum autem eſt, tres quatuorue priores obſeruationes loci lunae ad Palilicium propter lunae viciniam ad horizontem et vapores, obſeruationem ſubinde turbantes mihi paulisper dubias eſſe.

Phaenomena quaedam in Occultationibus ſtellarum a luna obuia, et a me quoque tum in praeſenti, tum in obſeruatione tranſitus lunae per Hyades d. 2. Ianuar. 1738. notata, ſilentio praeterire nequeo; quae vero antequam recenſeam, ſequentia praemittenda duco.

Quando Iouem per tubos maiores contemplamur, diſtincta quidem diſci eius datur repraeſentatio; interim tamen non omne lumen ad limbum diſci ſtatim ceſſat, ſed ſpatium adhuc extat circa diſcum Iouis luminoſum, cuius lumen inaequalis eſt intenſitatis, et recedendo a limbo Iouis continuo decreſcit, donec in notabili a Ioue diſtantia cum coeruleo coeli colore penitus confundatur. Phaenomeni huius ratio haec videtur. Referat charta fig. 2. retinam oculi, in qua obiecta depinguntur, quando iſta videmus. Sit *amb* imago diſci Iouis in retina. Lumen

in

in hoc ſpatio *amb* retinae conciliat motum vibratorium, cui ſenſatio intenſitatis luminis reſpondet; et haec eo maior eſt, quo fortior eſt iſte motus. Hic retinae motus intra ſpatium *amb*, in quo repraeſentatio fit, contineri nequit, ſed ad partes retinae adiacentes propagatur, et recedendo a ſpatio repraeſentationis *amb* continuo decreſcit, donec euaneſcat. Deſcripti ſint circa diſcum Iouis *amb*, circuli *cd*, *ef*, *gh*, *ik* etc. diſco concentrici ad exigua interualla, hunc in finem, vt in iſtorum peripheriis diverſos gradus motus a ſpatio repraeſentationis *amb* propagati diſtinguere poſſimus. Hoc pacto motus, qui eſt in ſpatio *amb* propagabitur eiusdem fere intenſitatis per zonam inter peripherias *cd*, *ab* contentam; quae proinde zona aeque luminoſa apparebit, ac diſcus Iouis *amb*, hoc eſt, propter luminis intenſitatem diſcus Iouis maior apparet, ac reuera eſt; videtur ſcilicet ſub magnitudine circuli *cnd*, cum diſcus tantummodo magnitudinem *amb* habeat. In zona inter peripherias *ef*, *cd* poſita minor, datur gradus motus retinae, vnde et ſenſatio luminis, quae huic motui reſpondet, minor erit, hoc eſt circa diſcum Iouis ſub circulo *cnd* apparentem, videbimus lumen circumfuſum, minoris tamen intenſitatis, quam in diſco ipſo et ab hoc probe diſtinguendum. In ſequenti zona inter peripherias *gh*, *ef*, adhuc minor dabitur retinae motus lumen quoque minoris intenſitatis ibi animaduertetur; et ſic porro per gradus continuo minuetur motus retinae et minor quoque luminis ſenſatio erit, donec haec alicubi ceſſet.

Si circulus *amb* ſumatur pro diſco lunae, dicta etiam de luna valebunt; eius diſcus maior apparebit propter inten-

intenſitatem luminis, ac reuera eſt, et circa iſtum corona lucida dabitur, quae tamen propter fortius lunae lumen ad maius ſpatium ſe extendet, quam in Ioue. Sit in S. ſtella, quae ad lunam pro immota habitam iuxta directionem SF feratur. Ponamus in peripheria *i k* definere coronam lunae luminoſam. Igitur ſi ſtella eſt in S, imago eius depingitur in ſpatio retinae, in quo nullus datur motus a lumine lunae effectus, vnde ſtella ſolito lumine fulgebit, et certam quandam, licet valde paruam, coronam circa ſe formabit, vt ante de Ioue vidimus. Quando ſtella peruenit ad K, offendit ſpatium retinae, in quo motus aliquis a lumine lunae datur. Sentimus ergo non integrum motum, quem lumen ſtellae efficere poteſt, ſed tantum exceſſum eius ſuper motum quem iam retina in K habet. Stella ergo in K lumine decreſcere videtur, et eius corona lucida contrahitur. Quando ſtella ad *h* pertingit, quia motus retinae in *h* fortior eſt, quam in K; exceſſus motus, quem lumen ſtellae retinae imprimere valet, ſuper motum retinae in *h*, minor erit ac antea; vnde et ſtellae adhuc minor erit claritas, eiusque corona magis minuetur. Et ſic porro ſtella accedendo ad limbum lunae continuo lumine decreſcet. Si intenſitas luminis ſtellae ita comparata ſit, vt ſolitarie motum tantum in retina efficere valeat, qui aequalis ſit motui in *f* a lumine lunae producto; tunc quando ſtella peruenit ad *f*, diſparebit, cum exceſſus motus a ſtella producti ſuper motum retinae in K hic euaneſcat. Hinc ratio manifeſta eſt, cur ſtellae 4^{tae}, 5^{tae}, 6^{tae} etc. magnitudinis, dum ad limbum lunae lucidum accedunt, in notabili ab eo diſtantia iam diſpareant, antequam diſcum lunae ſubeunt. Econtrario

quoque patet, cur eaedem ſtellae poſt emerſionem non niſi in notabili a limbo lunae lucido diſtantia, veluti in *e* appareant, quia in propiori diſtantia veluti in *c* motus retinae fortior eſt, quam iſte, quem lumen ſtellae retinae imprimere valet. Inde phaenomena, quae de emerſione duplicis ſtellae θ in tranſitu lunae per Hyades d. 2. Ianuar. 1738. notaui, facile intelliguntur.

Si lumen ſtellae S ita comparatum ſit, vt ſi ſolum agat, motum retinae conciliare valeat, qui maior ſit quovis motu in *k*, *h*, *f*, *d* etc. a lumine lunae producto; manifeſtum eſt, ſtellam tranſeundo *k*, *h*, *f*, *d* continua quidem decrementa ſuae lucis pati, diſparere tamen non poſſe antequam diſcum ipſum *amb* ſubeat. Stella igitur, quando peruenit ad *d*, tangere videbitur limbum lunae falſum *cnd*, in tranſitu vero per ſpatiolum *db* ſtella in diſco lunae perſiſtere videbitur, donec ſubeundo diſcum lunae penitus in *b*, diſpareat. Scilicet per hyp: fortior eſt motus a lumine ſtellae productus motu retinae in *b d* a lumine lunae effecto, vnde exceſſus iſtius ſuper hoc datur poſitiuus. In hoc ergo caſu lumen falſum, quod diſcum lunae producit in *cnd*, ex praeſentia ſtellae diſtinguere valemus a limbo lunae vero *amb*. Phaenomenum hoc obuium eſt in occultationibus fixarum primae magnitudis a luna, et in praeſenti quoque obſeruatione ſe conſpiciendum praebuit.

Palilicium in acceſſu ad lunam per tubum 15. pedum primo tangere vidi limbum lunae falſum *cnd* in *d*; deinceps vero Palilicium intra ſpatium *db* ſe recepit, et tranſeundo hoc ſpatium $1\frac{1}{2}$ ſecunda temporis inſumſit, antequam ad limbum verum *amb* in *b* diſpareret. Sic Palilicium in diſco lunae ad *b d* apparuit et diſculum optime

optime terminatum exhibuit paululum lucidiorem, quam ſpatium erat intra peripherias *cnb*, *amb*, contentum, hoc eſt lumen lunare ipſum. Diameter Palilicii apparens exacte repleuit ſpatium *bd* ſeu interuallum peripheriarum *cnb*, *amb*, et in hoc ſitu deinceps ſtella in inſtanti quaſi diſparuit. Simile phaenomenum ſeſe exhibuit in emerſione Palilicii d. 2. Ianuar. 1738.

Ex obſeruatione praeſenti tum augmentum diſci lunaris propter luminis intenſitatem, tum Diameter Palilicii apparens, facile determinari poſſunt. Sint *amb* diſcus lunae pro immoto habitus, *cnd* limbus eius propter luminis effectum auctus, *dc* ſemita, in qua ſtella lunam traiiciat, CD diſtantia centrorum minima, C*b* vel C*f* ſemidiameter diſci veri, C*d* ſemidiameter diſci aucti, adeoque *fd* ipſius augmentum. Ad tempus immerſionis Palilicii eſt C*b* = 14′. 54″, = 894″, C*d* = 7′. 44″, = 464″; et exinde D*b* = 12′. 44″ = 764″. Tempus ſemimorae occultationis ſeu tempus per D*b* fuit 30′. 13″. temporis horologii, quo nondum correcto in obſeruatione vſus ſum. Palilicium ſpatium *db* traiecit in 1½″, vnde facta analogia 30′. 13″, 764″ = 1½″; quaeſitum, habebuntur pro ſpatio *db* 38, ſcrupula tertia circuli maximi. Iam Triangula C*d*D, *dbf*, ſeu, propter *bd* admodum exiguam, triangula CD*b*, *dbf* inter ſe ſunt ſimilia; vnde C*b* : D*b* = *bd* ; *fd*; quare *fd* inuenitur 32‴, ſeu. ½″ cuius ergo magnitudinis eſt augmentum ſemidiametri lunaris ex effectu luminis, vel etiam diameter Palilicii, ſiquidem vi obſeruationis diſculus Palilicii exacte repleuit ſpatium inter limbum lunae verum et falſum comprehenſum. Fig. 3.

Caſſini in Commentar. Acad. reg. Scient. Pariſ. 1717. p. 333. ed. Batav. ex comparatione Sirii cum diſco Iovis per tubum 34. ped. diametrum apparentem Sirii aeſtimauit 5,″ adeoque multo maiorem diametro Palilicii, quae in praecedentibus $\frac{1}{2}$″ inuenta eſt. Etſi autem concedere poſſim, diſcum Sirii reuera maiorem eſſe Palilicio; ex circumſtantiis tamen obſeruationis Caſſinianae colligo, diametrum Sirii apparentem nimis magnam, non ex defectu obſeruationis, ſed propter luminis intenſitatem, aeſtimatam fuiſſe. Diſculus ſcilicet eiusmodi fixae ex eadem cauſa auctus videtur, ex qua diſci Iouis et lunae, vi praecedentium, nobis maiores apparent. Augmentum hoc in fixis ſenſibilius eſſe debet, quam in Ioue et luna. Imago iſtarum in retina oculi ſpatium occupat fere infinite paruum, quod vt ſenſibile nobis fiat, ſpeciem finitae magnitudinis, licet valde paruae, referre debet. Intenſitas luminis fixae, quod punctum retinae ferit, motum eius per ſenſibile ſpatium propagare valet. Hoc modo fixae multo maiores apparere debent, ac apparerent, ſi dictus luminis effectus ceſſaret. Idem *Caſſini* Commentar. Acad. Reg. Scient. 1720. p. 182, ed. Bat. eleganti obſeruatione hoc confirmat, vbi ex occultatione duplicis ſtellae γ in virgine a luna deducit, diametrum ſtellae tertiae magnitudinis, non obſtante lunae vicinia, 30. vicibus maiorem vera apparuiſſe propter luminis ſui intenſitatem. Exinde colligere licet, quod cum *Caſſini* in determinatione diametri Sirii, hunc ſolitarium, accedente nullo lumine alieno, per tubum contemplatus ſit, iſte nimis magnus ipſi apparere debuerit; vt adeo diameter Sirii multo minor 5″ cenſenda ſit. Econtrario in praeſenti determinatione

tione diametri apparentis Palilicii propius ad magnitudinem eius veram peruenisse videor cum effectus intensitatis luminis Palilicii in contactu disci lunaris, propter lumen huius intensum, admodum diminutus fuerit. Interim diametrum Palilicii obseruata adhuc minorem esse posse non nego, imo ea, que hactenus exposui, hoc suadent. Magis quoque conuenit haec obseruatio cum aestimationibus diametrorum apparentium in fixis ab *Hugenio* et *Keillio* institutis. Prior in Cosmetheor. p. 137. diametrum apparentem Sirii 4.''' concludit ex hypothesi, quod Sirius aequalis sit Soli et a nobis 27664 vicibus plus distat, quam Sol a terra. Posterior in Lectionibus astronomicis Lect. 4, dum *Ricciolum* refellit, diametrum Sirii 18.'' statuentem, euincit, istam $\frac{3}{20}$ vnius secundi vix esse maiorem.

Caeterum haec de augmento magnitudinum apparentium in syderibus ex intensitate luminis doctrina, ad plura alia phaenomena sese extendit, qualia sunt, auctior repraesentatio phaseos lunae corniculatae prae reliquo disco eius obscuro, diminutio disci lunaris in Eclipsi Solis, diminutio discorum Veneris et Mercurii in transitu per Solem; et alia.

OBSERVATIO
TRANSITVS LVNAE AD PALILICIVM d. $\frac{4}{15}$ Martii 1739. PETROPOLI HABITA
a
G. Heinsio.

Quo maior vtilitas ex obseruationibus occultationum stellarum a luna in Astronomiam et Geographiam redundat; eo auidius obseruatores istam occasionem arripere solent, qua et frequens et diuturna occultationum obseruatio conceditur. Eiusmodi occasionem praebent fixae, quibus sequentes competunt conditiones 1) vt claritate sint conspicuae, ne tamen intensum lunae obseruationibus istarum officiat; 2) vt sibi inuicem admodum sint vicinae, quo discus lunae amplus plures earum exiguo temporis intervallo tegere possit; 3) vt habeant latitudinem satis notabilem ad 5. circiter gradus assurgentem; haec enim conditio efficit, vt luna stellas istas, nisi circa limites versetur, oculis eripere non valeat. Hoc autem casu, licet nodi orbitae lunaris velociter regrediantur, positio orbitae ad fixas circa limites sitas diu commoda pro effectu occultationum conseruatur, sic vt per duos tresue annos frequentes dentur eiusmodi fixarum a luna Eclipses. Conditiones iam memoratae optime conueniunt Hyadibus; vnde etiam factum est, vt cum annis praecedentibus limes orbitae lunaris austrinus ad istas haereret, frequentes illarum a luna occultationes contigerent, quarum aliquas in Obseruatorio imperiali obseruatas Academiae iam exhibui. Licet autem nunc lunae nodi eiusmodi positionem respectu Hyadum nacti sint, vt luna istas amplius quidem tegere non

non possit, sed ad distantiam non adeo magnam eas transeat; eiusmodi tamen transitus obseruare aeque conuenit ac occultationes ipsas, cum eundem praestent vsum. Hanc etiam ob causam Transitus lunae ad Palilicium d. 15. Mart. 1739. st. n. obseruationem praetermittere nolui, quam coelo fauente iisdem instrumentis et eadem methodo, prout in praecedentium occultationum descriptionibus exposui, peractam, sequentem in modum exhibeo.

Ordo obseruat.	Tempus verum.	
1.	$4^h. 35' 53''$.	Culminauit centrum lunae, cuius altitudo meridiana ope sextantis muralis deprehensa est $64°. 1'. 0''$. Haec altitudo neque refractione neque parallaxi liberata intelligi debet. Ex culminatione Palilicii paulo post obseruata cognoscitur differentia ascensionum rectarum centri lunae et Palilicii $4'. 56\frac{1}{2}''$ temp. primi mobilis; differentia autem declinationum centri lunae et Palilicii $1'. 35''$. circuli maximi, qua centrum lunae australius fuit Palilicio.

Post solis occasum, cum distinctus et lunae et Palilicii concederetur adspectus, per tubum quadrantis portatilis radii 2. pedum, loca lunae ad Palilicium per reticulum

culum istius tubi obseruaui iuxta eam methodum, quam in differt. de transitu lunae per Hyades d. 2. Ianuar. 1738. st. n. exposui, et hactenus in eiusmodi obseruationibus semper secutus sum. Hac methodo deprehensa est diameter lunae 30′. 20″. circuli maximi, obseruationibus, ex quibus determinata est, optime inter se consentientibus. Haec lunae diameter referri debet ad momenta obseruationum sequentium, ex quibus et ipsa diameter et differentiae ascensionum rectarum ac declinationum centri lunae et Palilicii innotuerunt. Erat autem

	Differentia Ascensionum rectarum centri lunae et Palilicii in tempore primi mobilis, qua centrum lunae occidentalius fuit Palilicio.	Differentia Declinationum centri lunae et Palilicii in partibus circuli maximi, qua centrum lunae borealius fuit Palilicio.
2.	6ʰ 28′. 21″.	1′. 57¾″	9′. 34″.
3.	6. 44. 15.	1. 31⅔	11. 2.
4.	6. 56. 59.	1. 11¾	11. 55.
5.	7. 9. 1.	0. 51⅔	13. 13.
6.	7. 31. 40.		

Coniunctio visa centri lunae et Palilicii ex comparatione obseruationum praecedentium deducta. Distan-

Diſtantia centrorum minima ex definita centri lunae ſemita colligitur 15′. 38″. qua centrum lunae borealius extitit Palilicio.

7. 7. 34. 2. Palilicium coniungitur cum cuſpide phaſeos lunae inferiori, ſeu in linea recta ponitur cum vtraque phaſeos cuſpide. Coniunctionem hanc obſeruaui per tubum aſtronomicum 15. pedum, cuius ope tam exacte obſeruatio ſucceſſit, vt de momento coniunctionis ad ſecundum temporis certus eſſem, vnde eiusmodi obſeruationem aeque aptam cenſeo ad differentias meridianorum determinandas, ac ſi ſtella a luna occultata fuiſſet. Per eundem tubum aeſtimaui diſtantiam Palilicii a proxima cuſpide lunae in coniunctione, comparando iſtam cum macula lunari, quae a *Ricciolo* St. Theophilus vocatur, eamque aequalem $1\frac{1}{4}$ diametri huius maculae deprehendi. Ex cognita maculae huius ad diametrum lunae ratione, diſtantiam iſtam determinaui in partibus circuli maximi, eamque exactiſſime conuenientem inueni cum eadem diſtantia ex poſitione

ſemitae lunaris reſpectu lunae et ſtellae definita, aequali ſcilicet 31″. circuli maximi.

Figura adiecta oſtendit poſitiones centri lunae ad Palilicium ſitu inuerſo, in quo per tubum aſtronomicum obſervatae ſunt; numeri autem adſcripti indicant loca centri lunae in ſemita viſa ad ea temporis momenta, quae in recenſione obſeruationum iisdem reſpectiue numeris inſigniuntur.

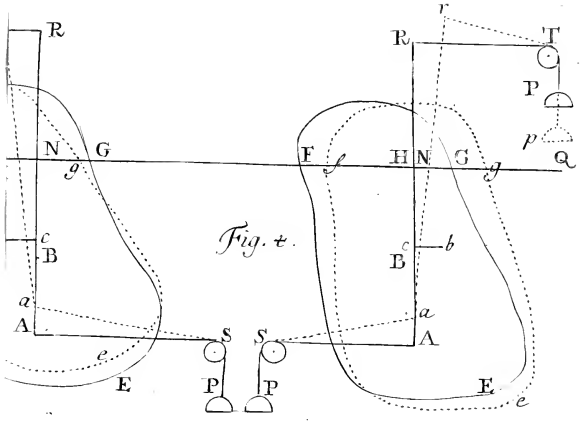


Fig. 4.

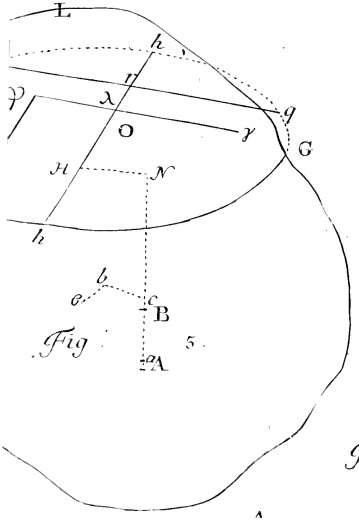


Fig. 5.

Fig. 6.

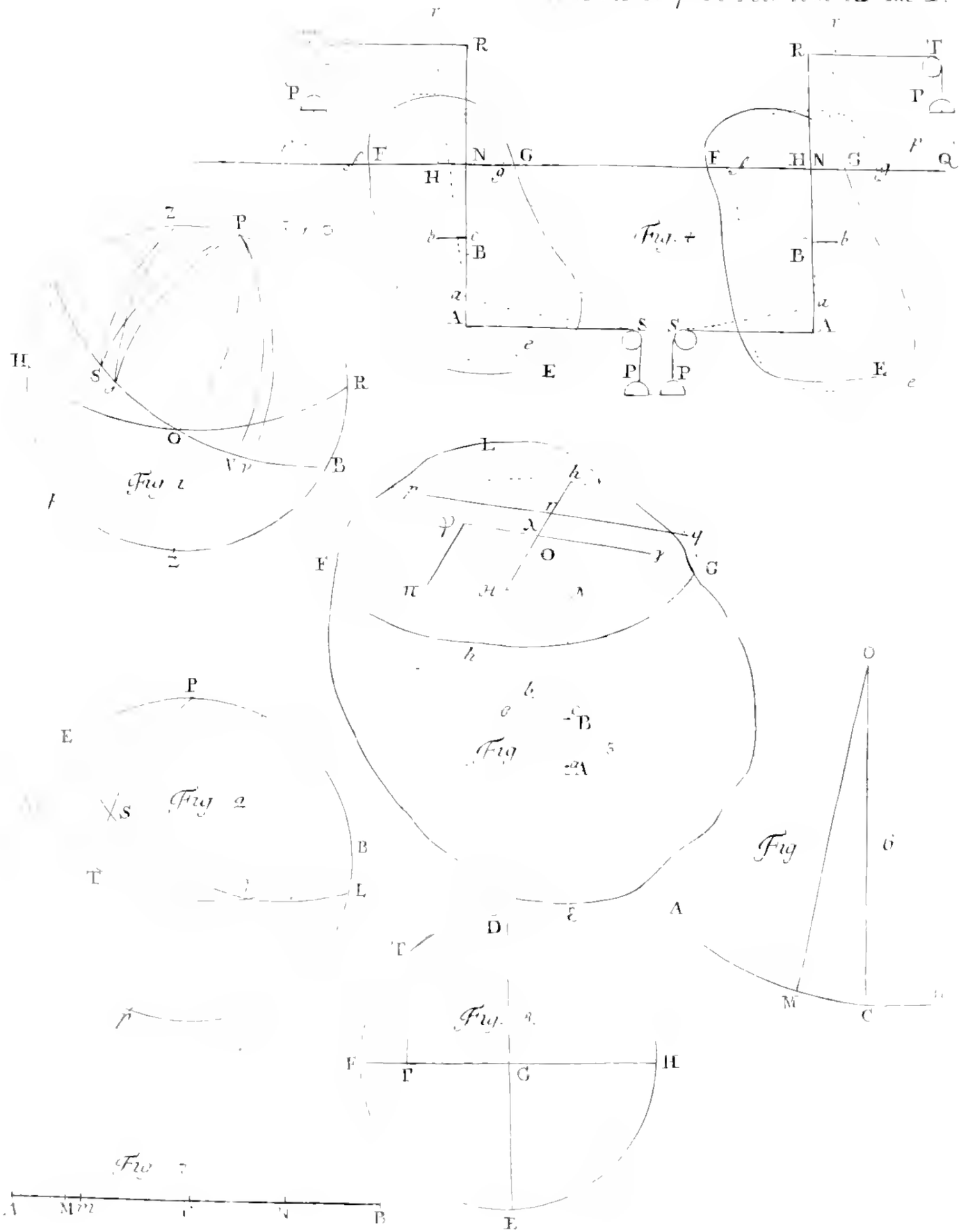


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7

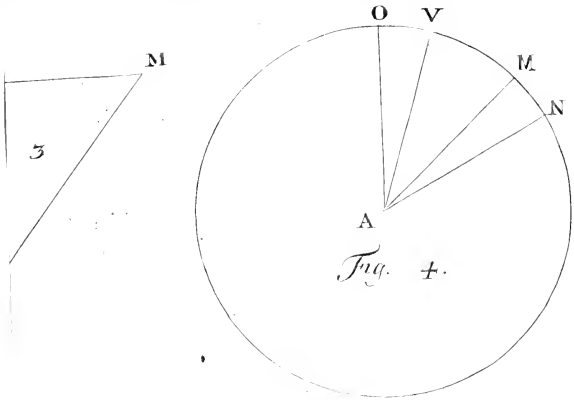


Fig. 4.

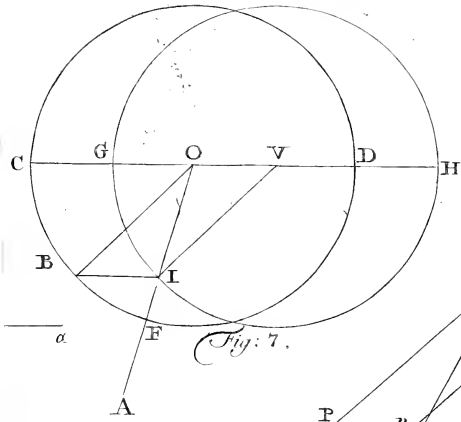


Fig: 7.

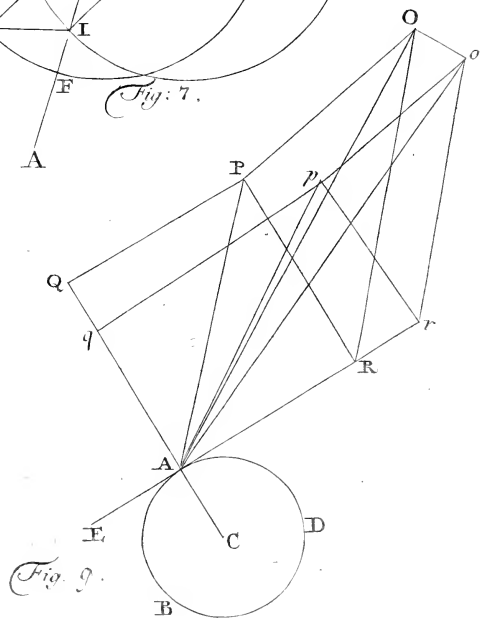


Fig. 9.

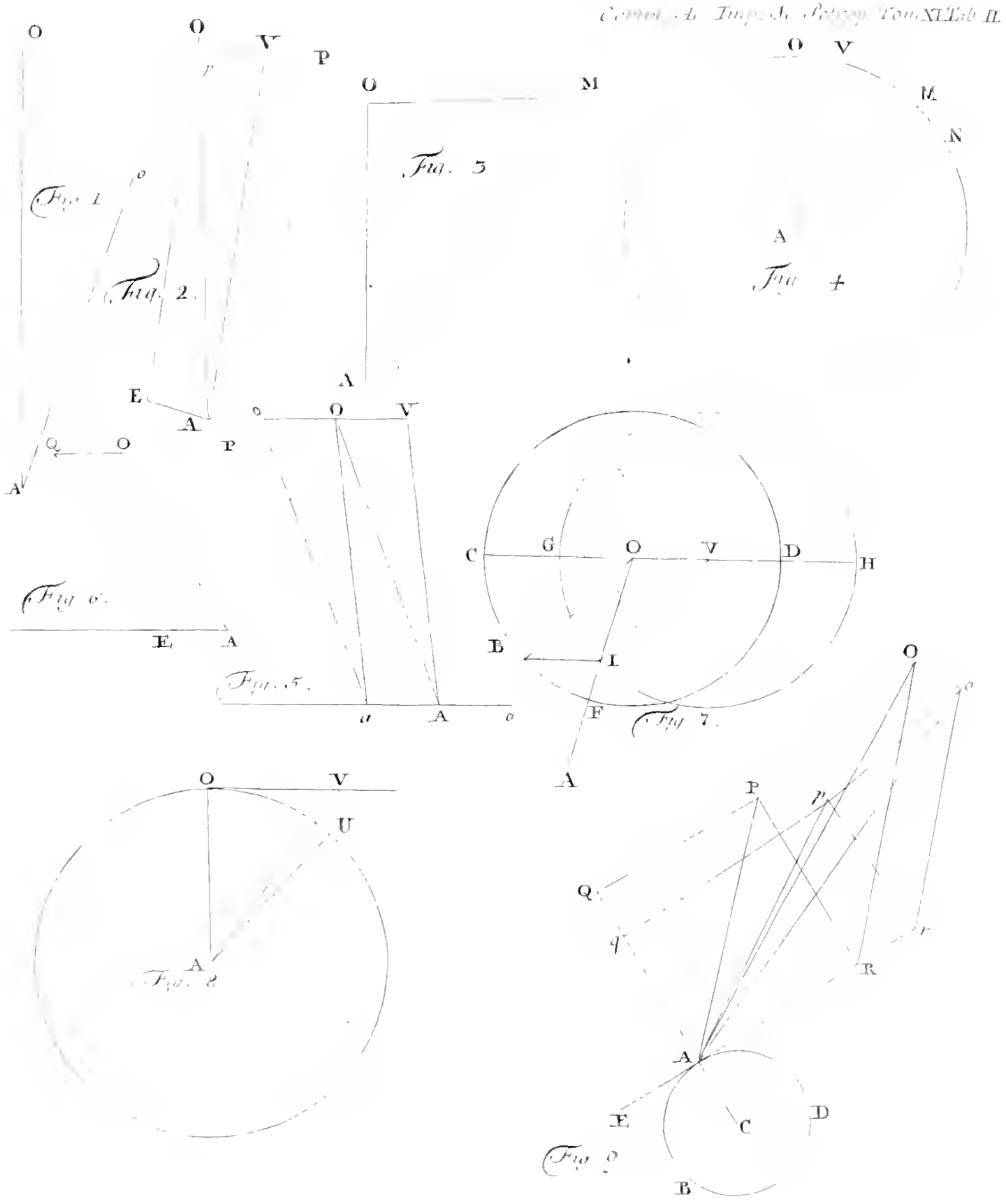


Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8
Fig. 9

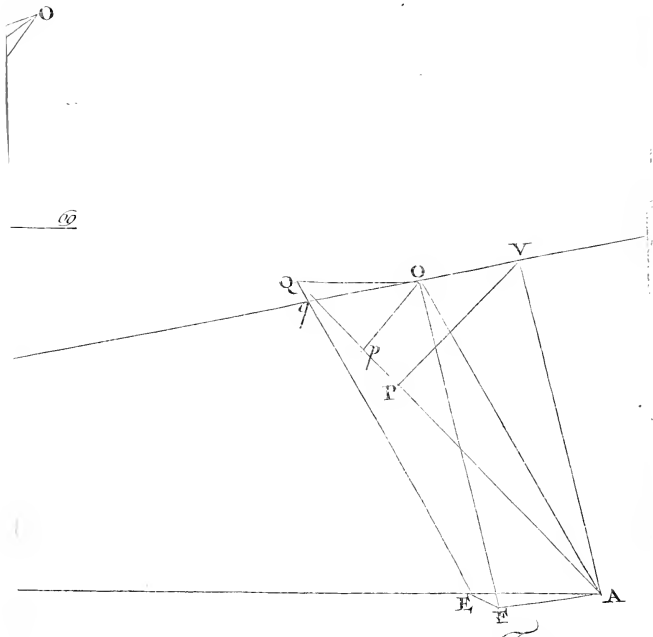


Fig: 2.

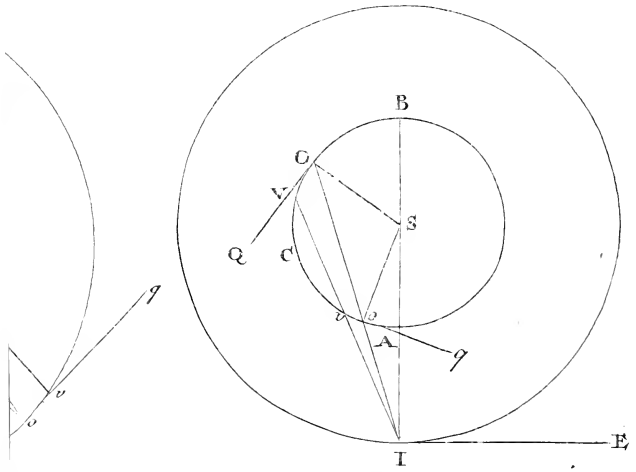


Fig. 4.

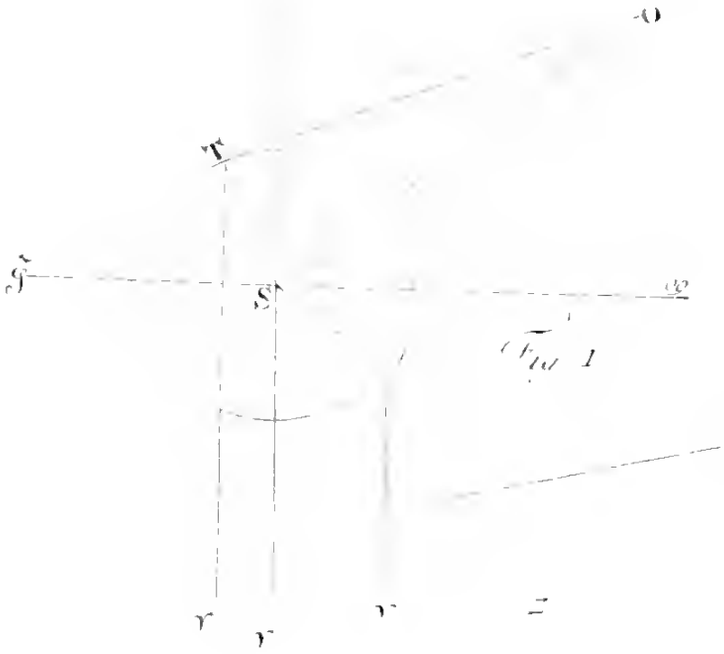


Fig. 1

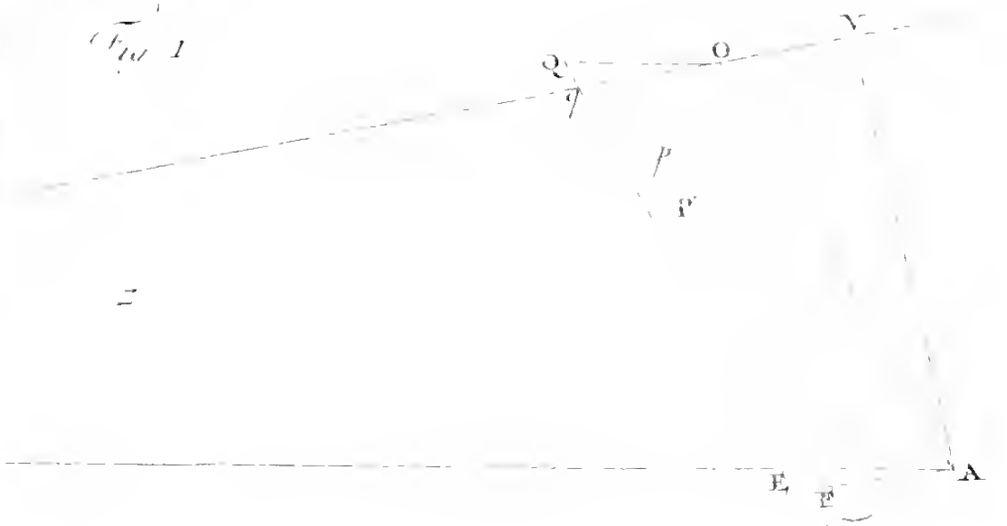


Fig. 2

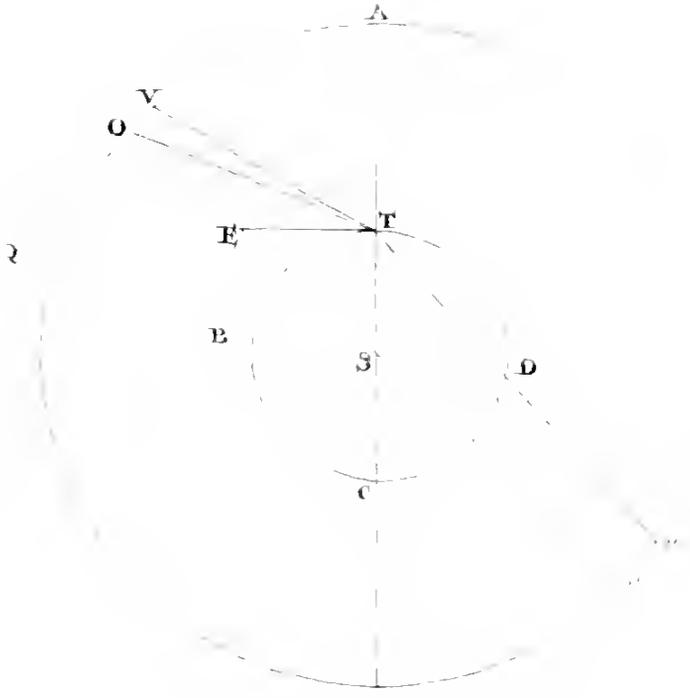


Fig. 3.

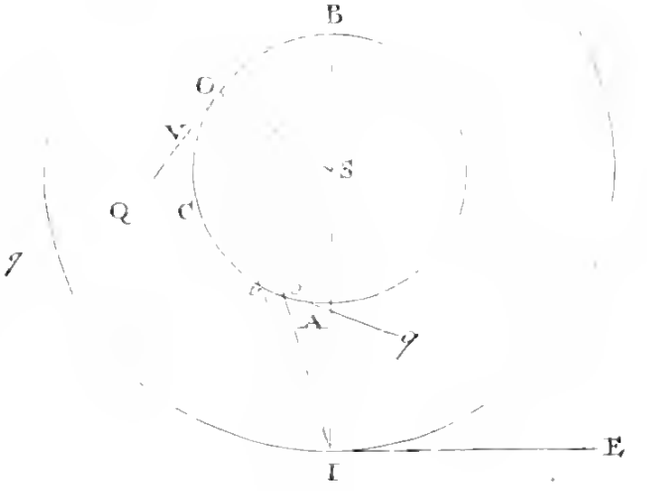
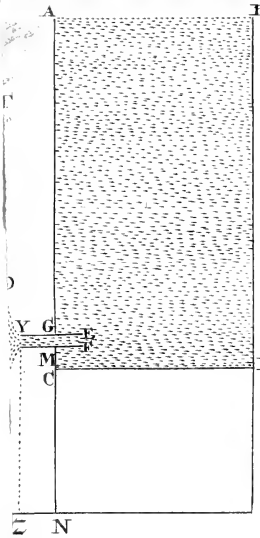


Fig. 4.



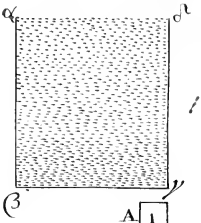


Fig. 2.

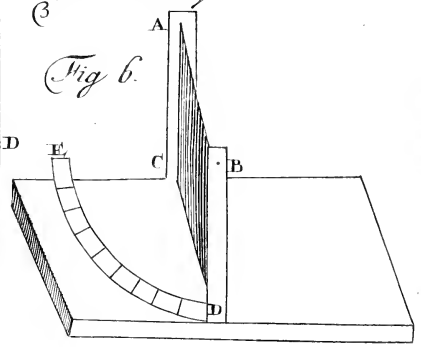


Fig 6.

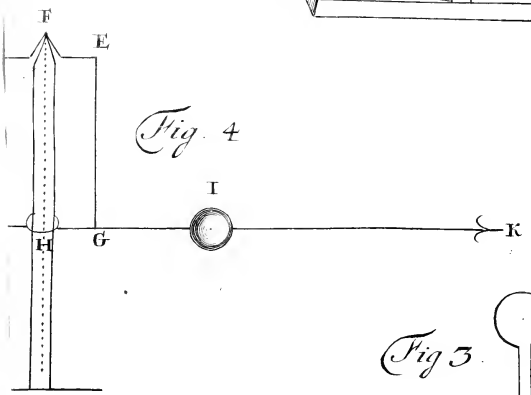


Fig. 4

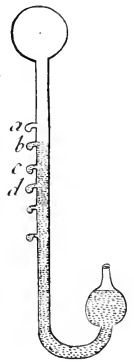


Fig 3.

5.

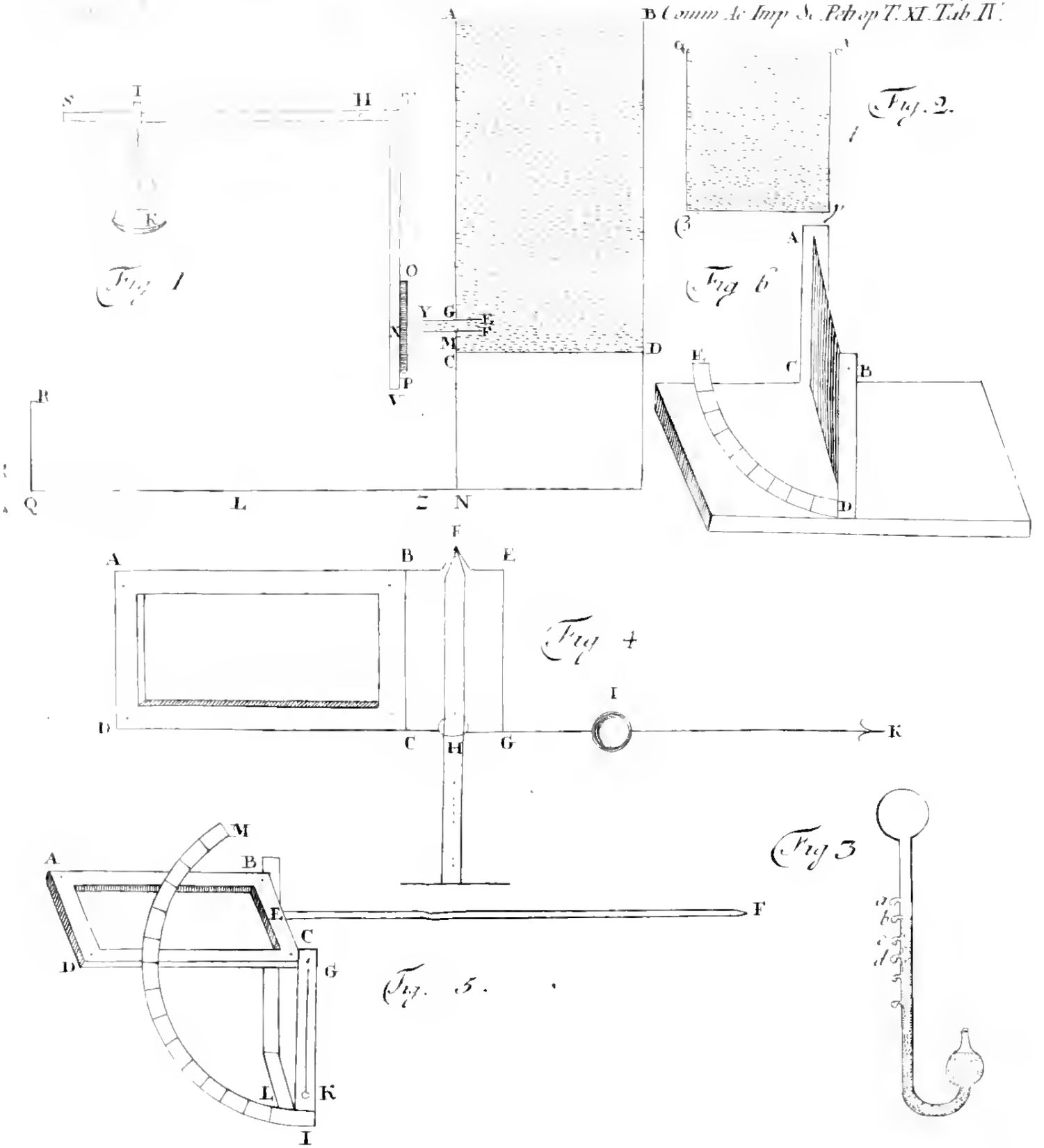


Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 6
Fig. 4
Fig. 3
Fig. 5.

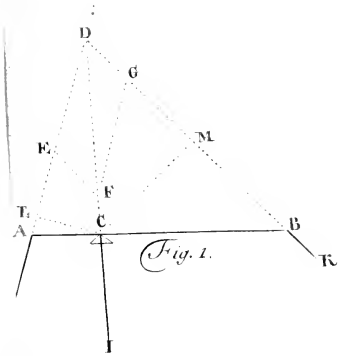


Fig. 1.

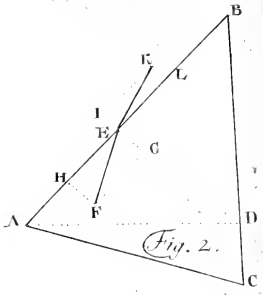


Fig. 2.

Fig. 9.
Romanus & Corinthius.

Fig. 7.
Ionicus.

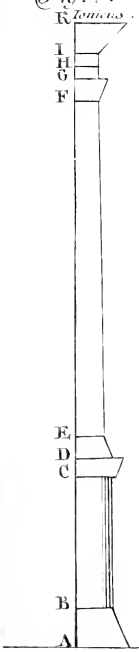
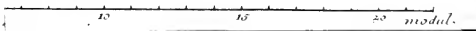


Fig. 8.
Doricus.



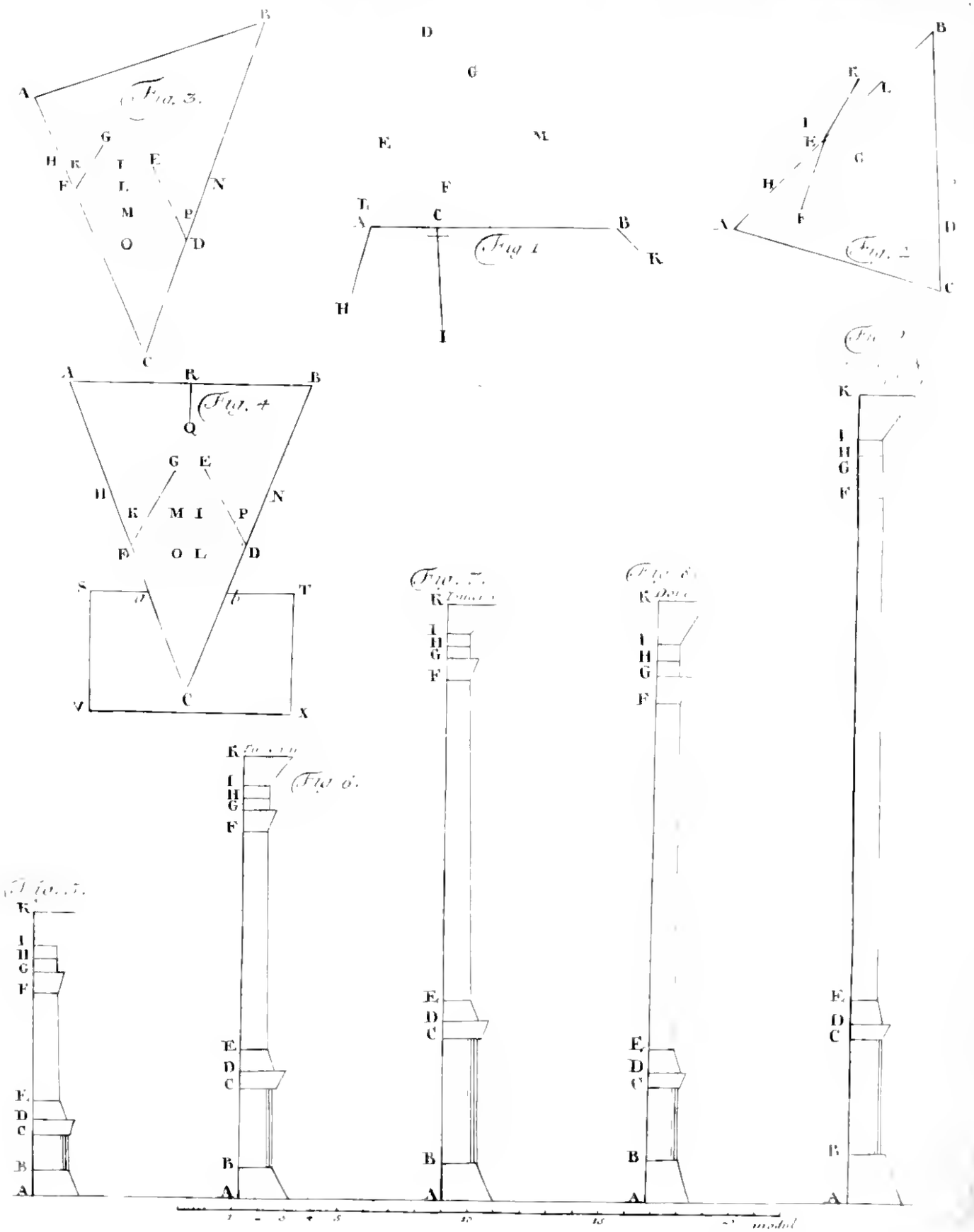
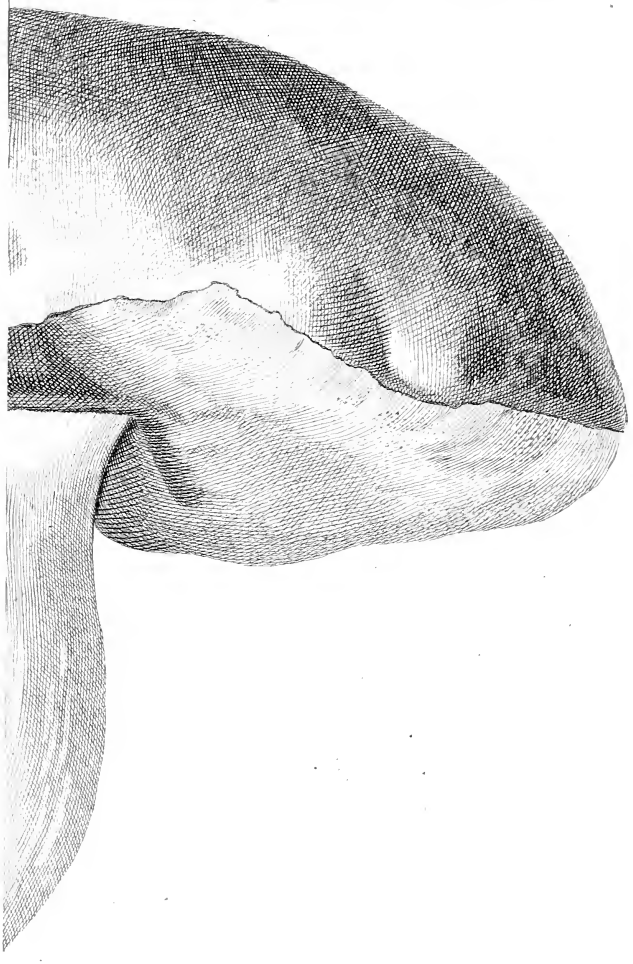
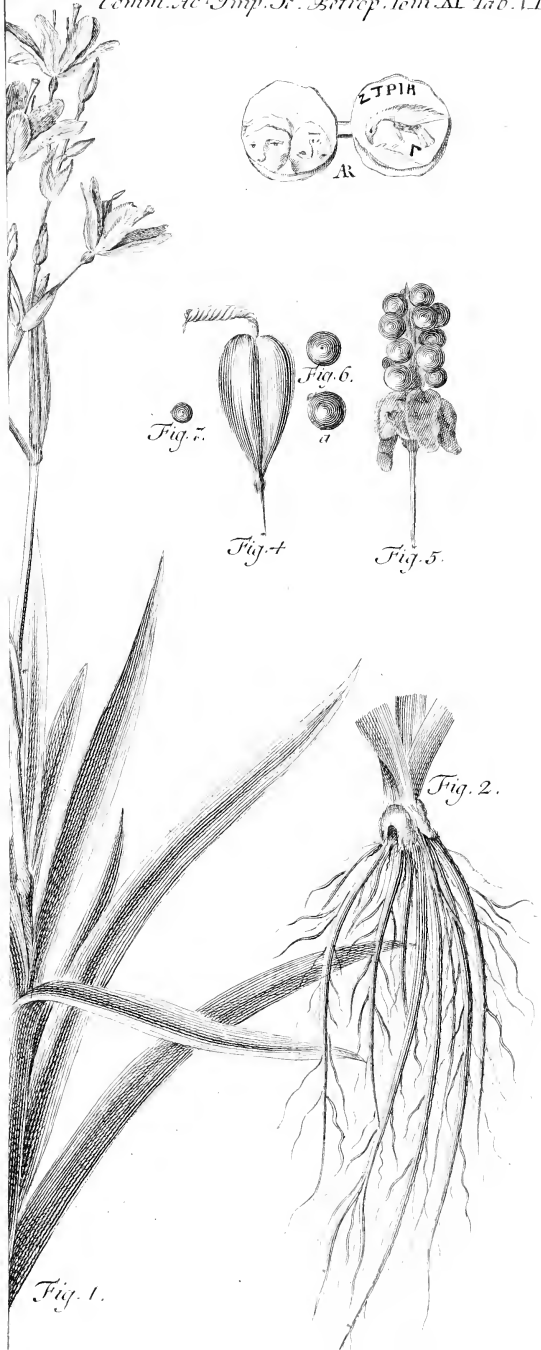


Fig. 3.
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8
Fig. 9
modul




ΖΤΡΙΗ
ΑΚ
Fig. 6.
a
Fig. 7.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 2.
Fig. 1.

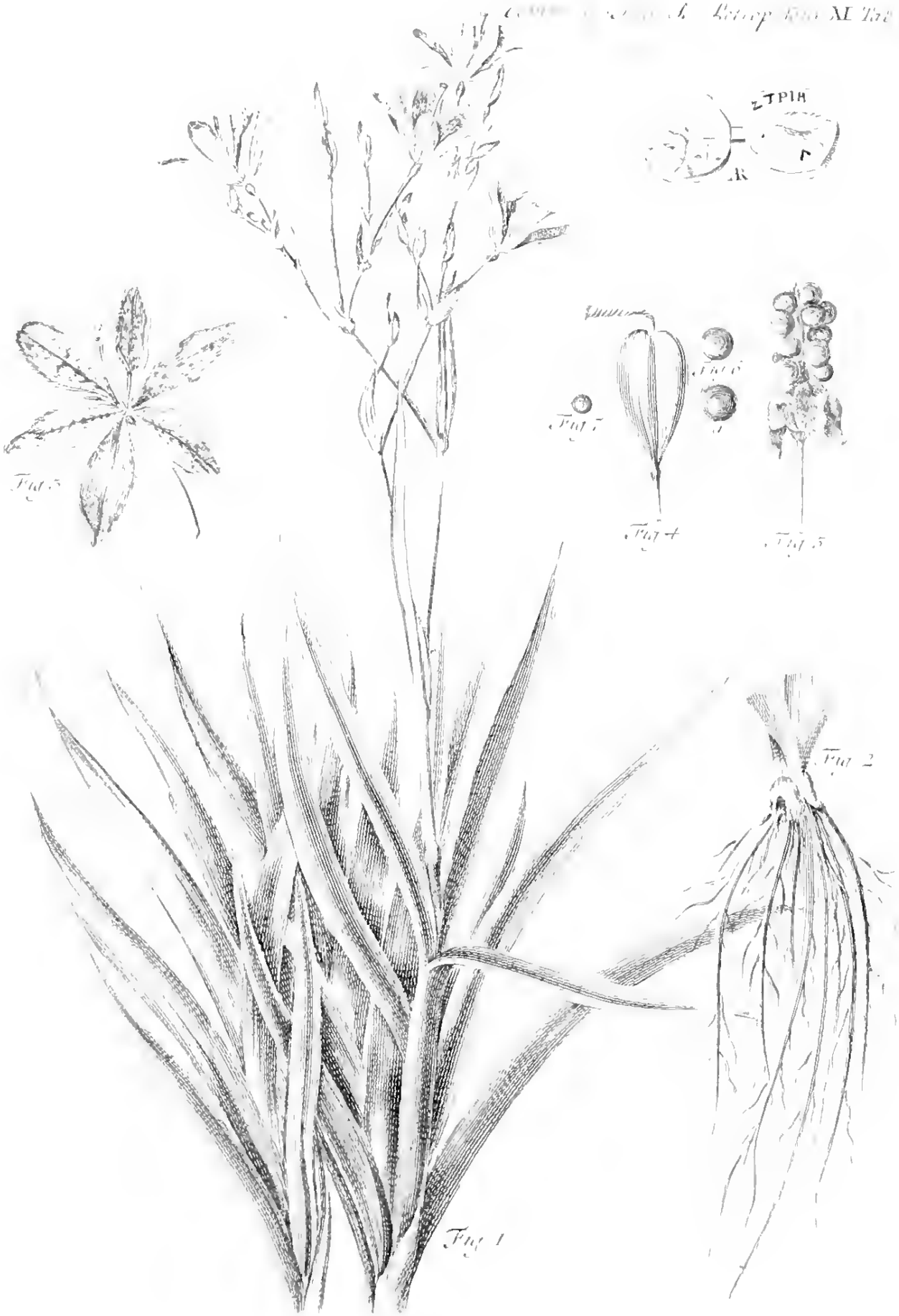


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7

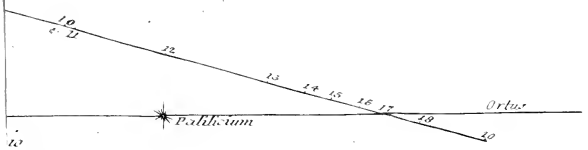

10
12
13
14
15
16
17
18
19
20
Orius
Palilicium

Fig. 3.

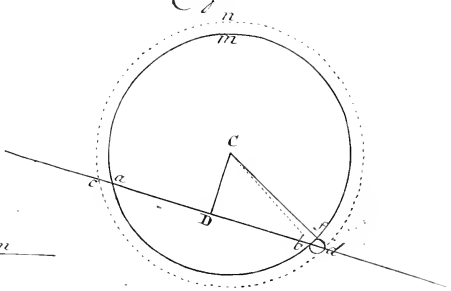
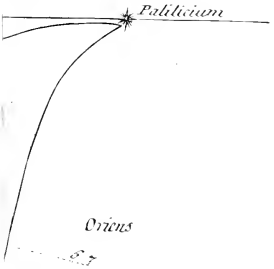

n
m
C
e
a
D
d

Fig. 4.


Palilicium
Orius

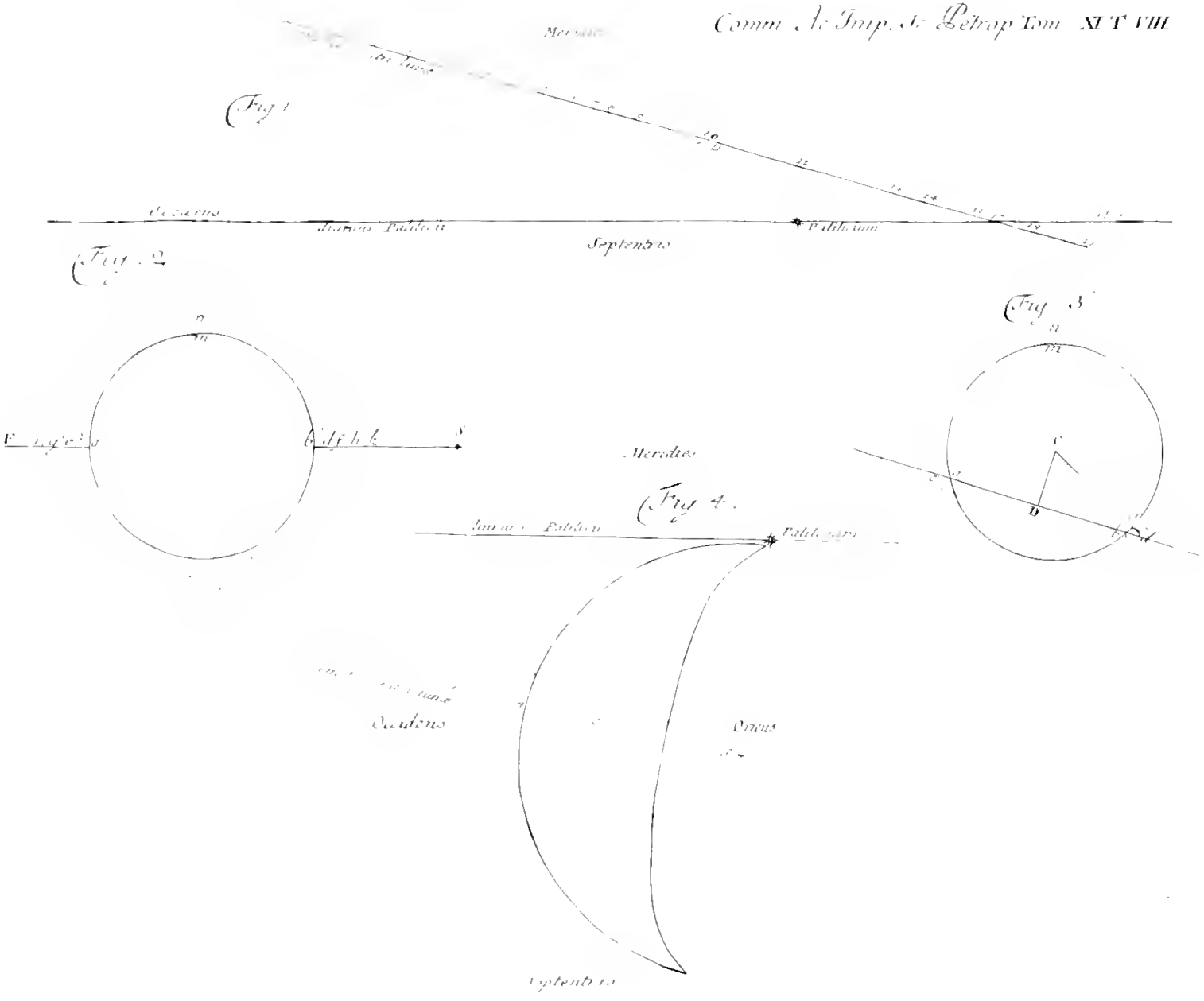


Fig. 1
Oceanus
Septentrio
Fig. 2
Fig. 3
Meridies
Fig. 4.
Occidens
Ortus
Septentrio