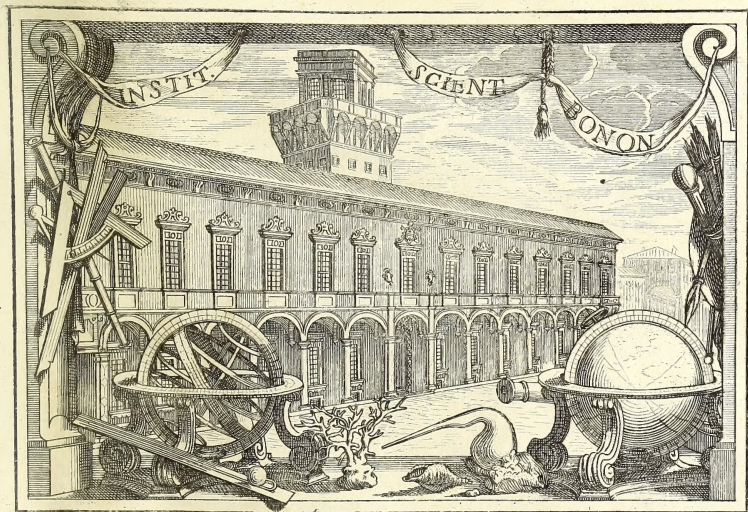




S. 1103. B. 9.

DE BONONIENSI
SCIENTIARUM
ET
ARTIUM
INSTITUTO ATQUE ACADEMIA
COMMENTARII.
TOMI QUINTI PARS ALTERA.



BONONIAE

Typis Lazii a Vulpe Instituti Scientiarum Typographi. MDCCLXVII.
SUPERIORUM PERMISSU.



ACADEMICORUM QUORUMDAM
 OPUSCULA
 V A R I A .

P R Æ F A T I O .

AD primam quinti hujus tomi partem cum præfaret, multos æcensile docuit, qui suam strenue in Instituto navabant operam; in his Jacobum Bartholomæum Beccarium, qui idem fuerat & chymicæ professor, & Instituti Præses. Post non multo decessit etiam Hercules Lellius, qui quamvis careret titulo, re tamen professor videbatur; quippe cujus opera, in quamplurimis Instituti rebus administrandis, excolendisque disciplinis omnibus, tanti fuit, ut professor vix ullus par illi poni possit. Nunc qui duobus hisce successerint, quæque inde mutationes secutæ, dicendum est paucis. Nam qui ipsi fuerint, qua virtute, quo ingenio, in superioribus tomis, inque hoc etiam, satis dictum; tam sæpe utriusque facta est mentio.

Sed sunt nonnulli, qui hujus generis libros festinanter volvunt, & locos, quos sibi minus utiles esse arbitrantur, transiliunt; quos fieri potest, ut quæ vel de Beccario relata sunt, fugerint, vel de Lellio. Horum causa non gravabor ea quasi cursim repetere, quæ commemorata sunt alibi, ac separatim de utroque referre pauca, antequam, quis eis successerit, quæque illorum obitum consecuta sint, dicam.

Beccario primum illustre fuit non tam Academicum Professoremque Instituti esse, quam Academiam ipsam, atque adeo Institutum universum, quod vere dici potest, condi-

disse; nam ut pecuniam alii, auctoritatem, opes ad id contulerint, qui tamen plus studii, laborisque, & scientiæ, quam Beccarius, contulerit, nominare fortasse possumus neminem. Fuit certe ex antiquioribus, iisque, qui hortante praesertim, & in id maxime incumbente Morgagno, simul cum Manfrediis, Victorioque Stancario Academiam, vel antequam Instituto adjungeretur, ad recentiora studia converterunt. Qua re factum deinde est, ut iisdem studiis favere jam plures in hac urbe cæperint; nam plerisque antea minus probabantur. Ea Beccarius adeo cupide complexus est, ut cum esset ad philosophiam publice tradendam constitutus, quamvis natura timidior esset, maximæque prudentiæ loco poneret rumores vereri, tenere se tamen non potuerit, quin omnem physicam, ut tum erat recentiorum opinio, ad mechanica principia revocaret, seque Cartesii & Mallebranchii admiratorem esse profiteretur. Excitatis ad hunc modum civibus haud difficile Senatui fuit, cum Institutum postea conderet, eos habere Professores, qui in rem essent, expectationique responderent.

In Professoribus Beccarius primum numeratus est; eique physiciæ demonstrandæ munus summa omnium voluntate est delatum. Ad id ille adjumenta attulit non vulgaria; nam præter quam quod erat mire industrius, & laboris patiens, geometriam quoque attigerat, medicinæ, quam exercebat, apprime sciens, rei anatomicæ peritissimus, in naturali historia versatus, & chymicæ usque adeo studiosus ac diligens, ut eam deinde visus sit facultatibus aliis omnibus antepone; ac si quid vel latine scribendum esset, vel italice; utraque pariter valebat lingua. Quod si qui mirantur, potuisse unum, eumque non magno admodum natu, tam multa consequi, ii quo magis mirentur, sciant velim, potuisse jam tum illum artificia quoque poetarum scienter exponere, ac de cujusque elegantia judicare rectissime.

Cum physici munere annos aliquot functus esset, placuit Senatui provinciam ei commutare. Physicæ Galeatium præposuit, quo nemo erat, judicio omnium, neque dignior, neque aptior; Beccario commisit, quod ille semper optaverat, rem chymicam. Provinciam hanc retinuit deinde, quoad vixit; nam quamvis, Bazano mortuo, Instituti Præses postea fit factus, par tamen visus est utrique muneri, ut & Professoribus aliis præesset, & esset Professor ipse.

Multa exstant, quæ hujus ingenium doctrinamque testantur; nam quamvis difficile sit, his præsertim temporibus, novi afferre aliquid, ac perdiscere volenti, quæ antea per alios inventa fuerint, tempus vix suppetat addendi quidpiam; multa tamen Beccarius conatus est, neque pauca perfecit; quæ quoniam in commentariis nostris relata sunt fere omnia, satis hic erit proferre nonnulla. De phosphoris, quæ res tum physicos maxime sollicitos habere cæperat, volumen scripsit, plurimosque, qui adhuc ignorabantur, aperuit; eosque in multa genera dispertivit subtilitate tanta, ut appareret, quam esset ordinis cupidus, in eoque dialecticæ arti indulgeret supra modum. Existimabant per id tempus physici plerique omnes, fluida quæque corpora intestino nescio quo motu cieri, eoque esse fluida. Opinionem hanc Beccarius sustulit experimentis luculentissimis. Cum se totum chymicæ tradidisset, ea spectabat maxime, quæ ad victum pertinerent; vixque eo deduci se umquam patiebatur, ubi minimum esset utilitatis.

Jura præsertim, quæ agris dantur, examinavit, ac multa comperit. quæ cognovisse valde erat e re medica. Frumenti principia perquirens, horum unum invenit plane mirabile, minimeque a planta ulla expectandum; ut quod animale naturam testari videtur apertissime. E lacte post magnos labores sales tandem eduxit, quos frustra quæsiverat Boerhavius; ac licet Macquerus sales & ipse quosdam e lacte duxisse dicatur, Beccarius tamen aliud genus invenit. Meteorologicas quoque condidit ephemerides, quo in labore ad quadraginta annos perseveravit, nullum intermittens diem quin pondus aeris, caloris gradus, ventorum mutationes, aliasque cæli inconstantias ad subtilitatem summam notaret; sperabatque, si quotidianum illud studium ad multos annos produceretur, fieri tandem posse, ut in tanta illa tamque multiplici rerum varietate lex quæpiam constans se proderet. In quo apparuit, quam diligenti simul, & quam magno esset animo.

Diem obiit annos natus plus octoginta. Mortuo honor tantus est habitus, quantus, nostra quidem memoria, litteratorum hominum nemini, si ipsum & Molinellium excipias: quo intelligi potest, quam multis carus fuerit. Laudes ejus ornatissima oratione persecutus est Flaminius Scarfellius, orator excellens.

Beccarii obitum hæ mutationes consecuta. Instituti Præses factus est Franciscus Maria Zanottus; is ergo a secretis esse desit, quo in munere ei successit Sebastianus Canterzani, philosophus doctissimus, instructissimus a geometria, italicis latinisque excultus litteris. Res chymica Vincentio Putio commissa est, qui fuerat Beccarii in illo munere adiutor, seque parem muneri ostenderat. Honores hosce tanto studio Senatus decrevit, ut qui obtinuerunt ne petendi quidem tempus habuerint.

Venio ad Lellium. In hoc apparuit, quantum vel sine disciplina ingenium valeat. Ab adolescente armis illis condendis se dederat, quibus plumbeæ glandes accensi pulveris vi exploduntur; in eaque arte, quamvis præceptore uteretur mediocri, per se ipse tamen tam multa excogitavit, vel ad usum, vel ad ornatum, ut jam cum summis in illo artificii genere compararetur. Joannis Petri Zanotti hortatu ad delineandi studium se convertit, in quo statim non æquales modo, sed multos etiam majores natu superavit; primusque ex omnibus persuaderi sibi a Zanotto sivit, iis maxime anatomes studium necessarium esse, qui status hominum, nudorum præsertim, positusque varios exprimere delineando velint; quod studium, jam inde a Carracciorum temporibus intermissum, plane novum, ac risu dignum plerisque videbatur. In hoc studium cum Lellius incumberet, aliosque ad id perducere niteretur, dici non potest, in quantas incurreret offensiones. Hic enimvero intelligi potuit, quam sint interdum rumores contemnendi; nam quod antea omnes irridebant, id postea unius hominis constantia factum est, ut decreto publico, probantibus omnibus, confirmaretur. Exercebat se interim Lellius in depingendis tabulis, statuisque faciendis, quarum aliquot tanta arte perfecit, ut visus sit ad veterum græcorum excellentiam quam proxime accedere.

Neque minus valebat in rebus aliis; videbatur enim natus ad omnia, quæcumque ingenium industriamque requirerent. Itaque & in cudendis numismatis, & in tornandis corporibus, & in vitris elaborandis mira erat dexteritate & scientia. Hic præterire non debeo, quod in nobilissima Benedicti XIV. Pontificis Maximi imagine præstitit; fuit id enim ante oculos civium, magnamque ei laudem comparavit. Tali modo res acta. Benedictus XIV. imaginem suam fieri Romæ jusserat mi-

mirabili illo musæo opere, quo illius urbis artifices usque adeo excellunt, ut superare omnes merito credantur; eamque egregia sane arte perfectam ad Institutum miserat, ut in nobilissima parte ædium poneretur. Accidit in itinere, ut commotis disiectisque lapillis quamplurimis vitium fecerit non mediocre. Bononiam sic corrupta cum pervenisset, dici non potest, quam graviter cives tulerint, labem tantam in tam pulchra imagine infecisse; dolebantque magnificentissimum Benedicti munus, & ornamentum Instituti maximum interiisse; neque spes erat inveniri posse quemquam, qui illam ad pulchritudinem pristinam revocaret, romanorumque artificum imitaretur excellentiam. Adhibitus in consilium Lellius, cum omnia per diligentiam summam consideravisset, spem abjici noluit. Re ipse, ut Senatoribus placuit, suscepta, brevi tempore imaginem sic refecit, ut labes appareret jam nulla; nemoque postea fuit, qui artificum romanorum desideraret industriam. Imago deinde, quæ Pontificis voluntas fuerat, in maxime illustri loco posita.

Erat etiam ad quævis physicorum molimina aptissimus; quo factum est, ut nemo fere in Academia fuerit, quin, si experimentum quodpiam vellet capere, illius opera uteretur. Præsto ipse erat omnibus, neque manum tantum, sed consilium etiam præbebat, docebatque quo quidque modo peragendum esset, & de suo fere semper addebat aliquid. Jam enim illum & librorum optimorum lectio, & doctorum hominum, qui ad ipsum concurrebant, consuetudo doctum fecerant.

Hunc etiam illustris legatio nobilitavit. Asservabantur Romæ lentes quamplurimæ, quas Campanus olim, egregius vitrorum artifex, reliquerat, simulque instrumenta, quibus ille ad lentes suas novo quodam artificio formandas utebatur. Cum hæc Pontifex Maximus vellet cuncta emere, & ad Institutum mittere, legandus eo erat, qui illud quidquid erat lentium instrumentorumque cognosceret, confecta que emptione Bononiam deportaret. Laboris & diligentia res erat, & propter occultos instrumentorum usus, intelligentia non mediocris. Nemo ad id aptior neque Senatui, neque Pontifici visus est, quam Lellius. Is ergo Romam profectus. Ibi cum omnia opinione celerius confecisset, Bononiam rediens lentes pulcherrimas, & instrumenta exquisitissima in Instituti ædes intulit. Ac tum primum officina vitrorum in Instituto exstitit; cujus cu-

stodia, non minus Pontificis, quam Senatus, voluntate, Lellio est credita. Eundem officinæ quoque alteri præesse voluerunt, in qua instrumenta reposita sunt nobilissima, quæ olim Marfilii e Germania advexerat, tornandis mira arte corporibus utilia.

Sed nihil illustrius conclavi illo, quod is in Instituti adibus ad anatomes studium instruxit. Partes humani corporis nescio quas, animi causa, e cera fixerat mirabili prorsus arte. Nemo non opus magnis laudibus extulit. Quare cum Senatui tum Pontifici Maximo injecta voluntas est, ut & partes reliquas eodem opere perfequeretur, eisque conclave proprium in Instituto ornaret ad anatomem demonstrandam. Perfecit omnia egregie Lellius; eique conclave illud traditum; neque creditum est, Professoris ullius in ea quidem facultate opus esse, illo vivo. Sic Lellii opera Anatome in Institutum inducta.

Eo mortuo provincia anatomica Aloysio Galvano Galeatii genero est tradita, eique professoris titulus datus; mandatumque, ut in anatome exponenda ea potissimum declararet, quæ chirurgis utilia esse censentur, & pictoribus. Quare illud tandem effectum est, quo Lellius cogitatione omni ferebatur, ut anatomes studium publice institueretur pictorum causa. Quod haud scimus, an usquam alibi sit factum. Erat autem Galvanus non ad id solum, sed ad omnia, quæcumque anatomem postulant, aptissimus, quippe qui & medicinæ scientia præstabat, & philosophus erat apprime doctus, industrius, disertus, diligens, focero dignus: quæ dixi, ne hominem verissimis, justissimisque fraudarem laudibus. Sed jam ad propositum veniamus, & Academicorum Opuscula, quibus altera hujus tomi pars conficitur, proferamus.

possit, si luxetur, id quod sibi reticendum esse Valsalva duxit, breviter explicare.

Componitur os hyoide ex particulis fere septem, basi videlicet, duobus processibus, cartilagineis appendicibus, si Veslingium sequimur, quem in osse hyoide demonstrando sequi Valsalva ipse consueverat, omnino quatuor. Processus, qui & majora cornua appellantur, cum basi, ad cujus latera siti sunt, cartilaginea substantia connectit. Tum vero junctura huic, tum posteriori processuum extremitati appendix cartilaginea adnascitur utrinque una; hæque osseam naturam, procedente ætate, accipiunt pene omnes, non secus atque illa, quæ basim, ut modo dictum est, processibus necit cartilaginea substantia; sed hæc aliquanto quidem maturius. Posteriores appendices capitula etiam dicuntur, priores minora cornua. In processus, & appendices, & pharyngis basim, fibræ musculum hyopharyngæum novum a Valsalva dictum constituentes inferuntur; præterque tamen in eas, quas priori loco posuimus, appendices.

Non igitur luxari os hyoide poterit, ut humerus, ut digitorum phalanges, ut alia ossa, quorum articulos cavitas excipit, e qua excidunt cum luxantur. Ad ossum pubis, ad cartilaginum nasi, ad coccygis præsertim luxationem nostra hæc accedere propius videtur. Ex aliquot enim particulis constat coccyx, cartilaginea substantia, fere, ut in osse hyoide, simul connexis. Ac tum luxari coccyx a chirurgis dicitur, cum ita torquetur distrahiturque, ut manu opus sit, qua in sedem suam reponatur. Quod cum in os hyoide, ac nominatim in cartilagineas ejus appendices convenire ex observatione quadam Valsalva conjecerit, mirum non est, si ad eandem rem designandam, aut fati similem, eodem vocabulo usus sit.

Sed jam observationem illam expono, uti in supra-memorato legitur Valsalvæ Libro „ Putabat bononiensis Mulier, „ quæ crassiores bolum deglutiverat carnis non bene mansæ, „ multisque imposuerat, se divexari a bolo in faucibus hæren- „ te: quem ut inde deturbaret, varia manuum, & medica- „ mentorum auxilia tentavit; sed incassum. Jamque elapsum „ triduum erat absque eo quod ullum cibum, vel potum assu- „ mere potuisset, cum denique a me opem quaesivit. Ego ve- „ ro omnibus perpensis, cum in aliqua ex appendicibus car- „ tilagineis ossis hyoidis luxationem suspicarer, partem, ut ana- „ tomica indicabat cognitio, ita digitis contrectavi, & illico „ per

„ per unam vel alteram contrectationem omnia in pristinum statum reducta sunt sic, ut immediate absque ullo deglutiendi „ incommodo jusculum fumere, & cibum, Mulier modo desperata potuerit. „ Hactenus Valsalvæ observatio.

Cur autem ex ea conjecturam fecerit luxationis alicujus ex appendicibus ossis hyoidis, & quam recte fecerit, proclive est intelligere. Tanta enim, tamque diuturna faucium molestia, ex qua triduum sublata cibos assumendi facultas esset, intelligi profecto non poterat, nisi si pars faucium aliqua ex iis, quæ degluttoni inserviunt, læsa poneretur, neque pars alia poni commodius posse videbatur, quam quæ nexum cum pharinge haberet ejusmodi, ut hoc præter modum distracto, distrahi illam quoque, ac lædi insigniter oporteret, eo tamen læsionis modo, quem una vel altera contrectatio potis esset plane celeriterque remove. Porro hæc in appendices cartilagineas ossis hyoidis egregie cadere universa quis neget? quas scilicet musculi hyopharingæi major pars pharangi nectat: quibus nimium distractis vitiatisque degluttonem vitari necesse sit: quæ cartilagineam naturam ad eas videlicet subeundas alterationes, quæ luxationem efficiant, quam volumus, longe aptissimam diutius retineant, quam vel ipsa, quæ basim processibus jungunt, cartilaginea ligamenta. Cartilagine enim, quod flexibilitatem habent cum quadam rigiditate conjunctam, suntque præterea quibusdam in locis satis graciles, distrahi se, ac torqueri sinunt; neque rumpuntur tamen; manentque tortæ sic usque eo, atque distractæ, (in quo luxatio illa sita est) dum opposita vis accedat, cui se haud multum difficiles præbent, si retorquere illas conetur, & in priorem statum reducere. Id exemplo suo cartilagine ossis coccygis (ut de aliis fileam) tum in vivo homine, tum in cadavere vehementer pressæ apertum faciunt. Ac frustra quidem in aliis faucium partibus ac noxis, si maxime de adultis sermo sit, conditiones tales, nisi ego admodum fallor, Valsalva quævisisset. Scite igitur, & recte impeditæ in memorata muliere degluttonis causam in luxationem alicujus rejecit ex cartilagineis appendicibus ossis hyoidis.

Non illud hic tamen dissimulavero futuros forte non paucos, qui enumerata fuisse desiderent, quæ ad bolum deprimentum auxilia ante usurpaverit mulier, quam se Valsalvæ curandam tradiderit; neque minus explicatum velint, quo in colli

loco, & quemadmodum fuerint habitæ, quæ salutem pulcherrime, & pene insperato attulerint contrectationes. Nam cum extranea corpora in œsophago ad plures maneant aliquando dies, neque loco se moveant, nisi apto, & fatis profunde demisso organo urgeantur, deturbenturque, nihil esse dicent causæ, quamobrem huic quoque mulieri idem evenisse non suspicemur; contrectationesque illas, si quid profecerint, ad id solum, ut hærentem adhuc in œsophago bolum excuterent tandem, inque ventriculum dejicerent, profecisse.

Atque id etiam avebunt scire, utrum ex eo cibos assumere non potuerit mulier, quod deglutire non posset, an potius quod deglutitos jam, & fauces elapsos, non posset ingerere. Impedita enim deglutitio luxationis, at boli conjecturam sublata ingerendi facultas confirmasset. Sed plane his desideriiis omnibus fatis Valsalvæ ingenuitas facit, & singularis peritia, qui existentis in œsophago boli, si ulla fuissent indicia, nequaquam reticuisset; neque se, perpensis omnibus, de luxatione appendicum ossis hyoidis suspicatum in eo casu fuisse scripsisset. Nunc ad observationem venio, quam habui ipse paucos ante annos, quæque sermoni huic occasionem dedit.

Chirurgus annos agens vigintiquinque, habitu corporis gracilis, cum nescio quid e manibus eripere niteretur robustioris juvenis, manum hic illius collo iniecit, atque in mutua illa concertatione virium ad priorem & dexteram partem vehementer pressit. Nihil postea solidi, nihil liquidi deglutire Chirurgus potuit. Elapsa hora de me auxilium quærit. Perstabat enim ea, quam modo dicebam, deglutiendi difficultas inter summos assiduosque deglutiendi stimulos, atque conatus, etiamsi nihil in os quidquam fumeret ad deglutiendum. Eaque afflictatio sic opprimebat intrepidum ceteroquin hominem, ut jam multo frigidoque sudore perfunderetur, & pulsus exiles fierent, nec diu se vitam, nisi angustiae vis remisisset, omnino trahere posse affirmaret. Haud multum tamen loquendi respirandique turbatam facultatem dixissem. Larynx utique deformata nonnihil atque incomposita visa est. Tumor etiam aliquis hanc inter, & muscolum sternomastoideum dexterum apparuit; ab eoque loco, si tangeretur, dolebat non leviter. Hac videnti mihi, diligenterque animo perpendenti se se objecit, quam supra exposuimus, Valsalvæ observatio, & conjectura. Sed duo faciebant, ut hærerem in consilio capiendo
non

non parum, silentium Valsalvæ videlicet de modo, quo contractationes illas suas executus fuerat; tum vero etiam noxæ differentia plane evidens = si quidem in muliere, de qua Valsalva loquitur, deglutitus bovillæ carnis bolus interiores ossis hyoidis parietes comprimendo in priorem illud partem promoverat: secus in eo casu, qui erat præ manibus, a pressione extrinsecus habita, in posteriorem partem os propulsum fuisse constabat. Hæitationem demum omnem sustulit instituta luxationis ossis coccygis cum hac nostra comparatio.

Quemadmodum enim coccygem in priorem partem, itemque in posteriorem distrahi luxarique ea, quam innuimus, ratione in confesso est, neque aliter in propriam sedem restitui, quam alte immisso in anum digito, promotoque osse versus intestinum rectum, vel in oppositam plagam, prout alterutrius generis luxatio fuerit: sic cogitavi os hyoide modo in priorem, modo in posteriorem partem pro causarum diversitate propelli luxarique ipsum quoque; atque ut similis erat morbi ratio, ita curationem esse debere non ab similem. Itaque ministro ad caput continendam proposito, dexteræ manus indicem alte in fauces demisi dexteram inter tonsillam, & linguæ basim: indicemque simul, & medium digitum sinistræ manus extrinsecus collo transversim admovi eo in loco, qui sedi responderet ossis hyoidis. Indice subinde, quem in fauces immiseram, os hyoide secundum ejus longitudinem in priorem partem promotum flexumque est, pressionem interea illam moderantibus ac dirigentibus extrinsecus appositis collo digitis. Ubi id semel factum fuit, continuo æger aquæ portiunculam ingerere cœpit, & melius esse. Bis iteratum idem ac tertio salutem attulit; ut jam libere, quæcumque vellet, posset ingerere, & composita appareret larynx, & sedata essent omnia.

Jam vero observatio hæc probabiliorem (arbitror) reddit Valsalvæ de ossis hyoidis luxatione opinionem. Præterea luxationis hujusmodi duo esse genera luculenter ostendit. Artificium denique, quo utrumque curetur, aperte docet; quod enim ad unum genus valet, exposito, nihil est facilius, quam in altero quod valeat pervidere.

Sed erit, cui sic curatus morbus luxatio non videatur, sed contorsio muscularis alicujus fibræ, seu aliud quidpiam. Minime hic repetam, quæ ad Valsalvæ conjecturam probandam

superius allata sunt, & nobis æque favent omnia, ne dicam magis. Mihi enim satis fuerit, si minus suafero, quod veram, morbum certe periculo, & molestia plenissimum, tum curationem, quæ huic adhibeatur, expeditam omnino, & facilem in aliquo lumine collocasse.

Hæc postquam scripisssem, atque in Academia anno 1756 exposuisssem, vir mihi in Nosocomio, quod vocant = S. Maria de Vita = se obtulit annos natus duo & quinquaginta, mediocri statura, atque habitu, cujus dexteræ superiorique anterioris colli regionis parti cum manum quis, qua lapidem distringebat, iratus impegisset, tanta pressionem illam, quanta in eo, de quo antea diximus, juvene deglutiendi difficultas consecuta est, anxietas plane non tanta. Nihil difficultate post horas minimum tres remittente Nosocomium petiit. Eadem, quæ juveni, curatio adhibita est, eodemque omnino exitu.

Binæ ergo sunt observationes, quibus illam, quam supra posui, curandi rationem confirmare possim. Non dubito autem fieri eam posse multo probabiliorem, si observationes aliæ, eæque multæ accesserint. Itaque eos, qui chirurgicam facultatem exercent, & dexteritate atque industria satis valent, etiam atque etiam monendos cenfeo, ut si detur occasio, & res patiatur, & ratio sinat, hanc, quam proposui, curationem experiri ne prætermittant. Mihi si non gloriosum, jucundum erit quidem certe, in curanda hominum valetudine successos habuisse quamplurimos. Vos interim meas hæc observationes, quas in uno luxationis genere habui, libenter accipite, ut alias, quas aliis de rebus jam paro, communicare vobiscum, ne dubitem. Quanti eæ faciendæ sint, vestrum erit cognoscere.

OBSERVATIO ALTERA.

De Venefica Æris indole.

CARNES in vasis æreis stanno fere nudatis ex pinguedine tostas adjecto sale, & jam tepefactas sunt qui in magnis, & certissimis venenis ponant; magisque si panis frustra ad vasorum fundum sæpius perfricta, sicque pinguedine illa admodum imbuta, una cum hujusmodi carnibus comedantur. Digna res visa est, de qua experimentum fumeretur, non tam ob illustrium virorum, qui in ea opinione fuerint, auctoritatem, & famam, quam propter non contemnendam, quæ inde (medicam ætiologiam sileo) in forensẽ jurisprudentiam proventura esset, utilitatem. De capite enim fortunisque agitur hominis in judicium vocati, qui sciens volensque cuiquam venenum dederit, quod tale re ipsa sit; non ita, si res pro veneno data innoxia fuerit; quod longe gravius humanas leges in eum statuere æquum erat, qui factò quem, non voluntate solum, necasset. Me autem non pauca inducebant, ut crederem experimentum illud fore sine periculo; ingens in primis eorum numerus, quibus ea causa exitio esse deberet, nec tamen esset, vel in tanta cauponum, coquorum aliorumque ejusmodi hominum negligentia. Columbum itaque s'villo cum adipe, & sale in vasis æreis nunc stanno vix, nunc ne vix quidem munitis, & quorum unum vestigia etiam æruginis præferret aliqua, excòctum, hominibus minimum duodeviginti singulatim edendum dedimus, simulque frustra panis aliquot non exigua, in ebullientem adipem primum conjecta, tum, eo tepefacto, retracta, atque ad vasis fundum semel bis iterumque fricata sic, ut venefico onusta succo, nedum imbuta, videri possent. Jam vero iis, qui certum adeo venenum comessent, quamquam & varia ætate, quod in tanto numero accidere necesse erat, & corporis habitu atque temperie plane dissimili, quid iis, inquam, obvenisse tandem mali putetis? Scilicet omnino nihil. Atqui illud scire convenit fuisse ex his unum aliquem imbecillo stomacho, eundemque ad vomendum satis proclivem; itemque mulieres tres, quarum una dolorem nondum, atque ira-

iracundiam deposuerat abs recenti injuria susceptam; alia colicis hystericeque cruciatibus, quo tempore menses profluere inciperent, nunquam aliquot ab hinc annis non erat obnoxia; tertiam stomachi angor, a cibo præsertim, frequens exercebat, & multus. Idque a regio, quem anno ante sustinuerat, morbo initium duxisse constabat.

Ad hæc nemo unus fuit, qui ad vim veneni præcavendam comprimendamve antidotum ullam sumpserit; nemo pariter unus, cui pro antidoto fuerit obsonia in consimilibus vasis cocta edendi consuetudo. Sollicite percunctantibus non paucos a capto experimento dies, num detrimenti quidquam perceperint, se ab eo sic male actos affirmarunt ad unum omnes, ut animo essent, si occasio ferret, quam paratissimo ad iterandum. Res tota in publicas tabulas relata est. Nolui enim testimonium illud, quod ad fidem faciendam valere apud iudices plurimum debet, in causa de propinato veneno, quæ gravissima sit videlicet, ab iis desiderari.

Neque minus nolui non eam, qualiscumque esset, observationem vobiscum, Sodales vniuersissimi, doctissimique, communicare, atque aliis adungere observationibus, quas notare ac referre in ordinem decrevi ad doctrinam medicam, quantum per me fieri potest, augendam, & locupletandam. Vestrum erit laborem ac studium hoc meum benigno animo excipere. Nihil mihi accidere gratius poterit, quam si illa protulero, quæ vobis grata esse sentiam; præsertim si iudicium vestrum, cui mirum quantum tribuo, accesserit, quo, quæ ipse cogitauero, & mihi fiant, & aliis probabiliora.

OBSERVATIO TERTIA.

De rupto patellæ tendine.

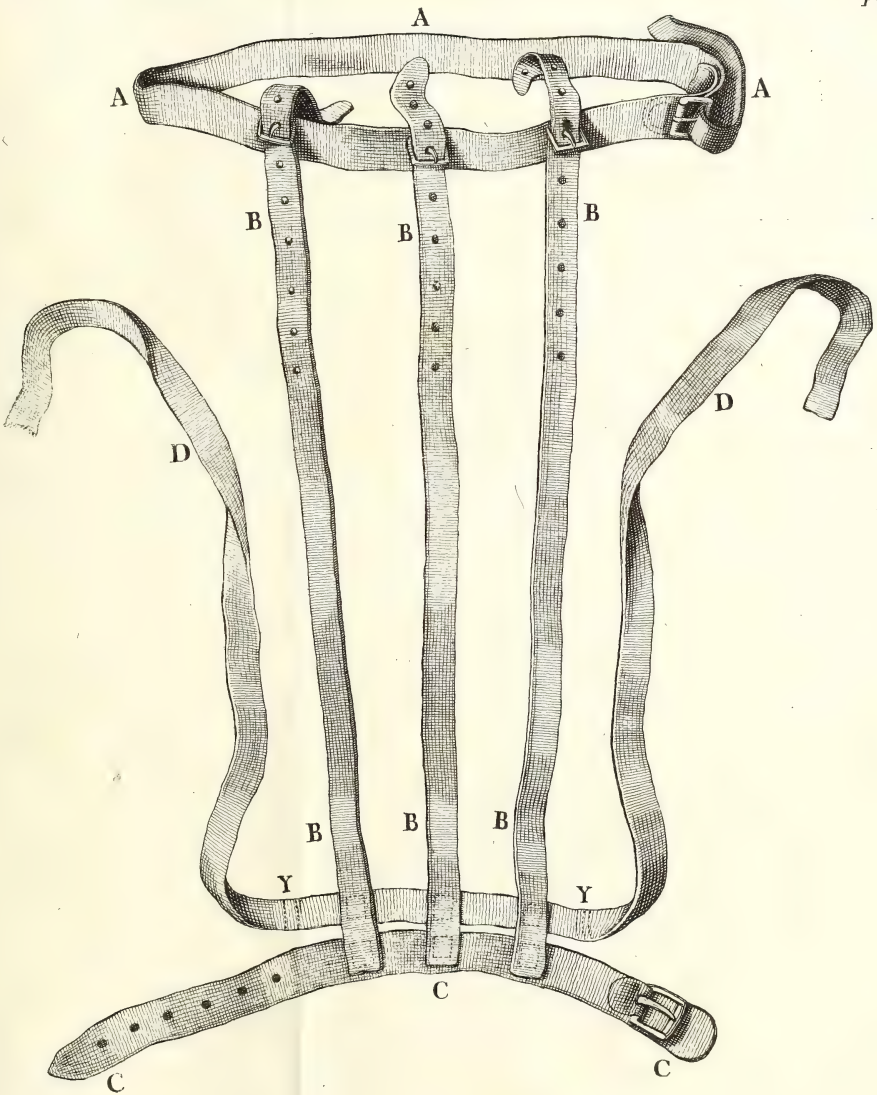
Patellæ tendini transversim aliquando findi cum Achillis tendine, aliisque totius coporis robustissimis tendinibus commune est. De quodam certe memini proceræ staturæ, & maxime lacertoso homine, qui scalam præceps descendens inflexo concidit genu, cum maxime unco enteretur, ne id accideret, in quo cavum proxime infra cutem duos supra patellam transversos digitos deprehensum est, dicti modo tendinis latitudinem æquans, quod diductius percipiebatur flexa tibia, angustius extensa. Primum quæ dolorem, tumoremque coercerent, imposta sunt; tum glutinantia, ac topica. Ea vero semper adhibita deligatio, qua & crus extensum, & extrema dissecti tendinis, quam fieri maxime posset, adducta detinerentur. Tamen ab ea curatione ad duos, & amplius menses producta eatenus non convaluit, ut libere ambulare posset. Quin sæpe, cum id faceret per acclivia præsertim loca, etiam si fulcro uteretur, pronus corruerat.

Nihil hic proficientibus, quæ ad genu continendum efficacia sunt, ne vinctura quidem illa, quæ Muschembroechium Authorem habet, & nonnullis ex orichalco laminis ad latera invicem articulatis componitur; id ex eo fieri in animum induxi, quod hujusmodi artificia tendinis, ac musculorum, a quibus is proficitur, vices rite non implerent. Nam cum ex musculis quatuor, qui in illum tendinem desinunt, tres originem ducant a femore, alter ab osse ilio; tendo autem patellæ inferatur, quæ mobilis ipsa sit, & ligamento prædita, quod summa tibia finitur; sintque cum eæ origines, tum hic finis quædam quasi fixa puncta, quæ musculorum deductione inde tendinis in patellæ, tibiæque motibus actionem obfirment, ac regant, nullum profecto erit vincturæ genus huic casui accommodatum, quod a superiori parte femori, aut ossi ilio, aut certe loco, qui alterutrum suppleat, ab inferiori summæ tibiæ firmiter non alligetur.

Itaque vincturam excogitavi constatam potissimum ex fasciis duabus, quarum altera AA (vide Tab.) ventri,
T. V. P. II. B alte-

altera CCC genu ac tibiæ infra affectum tendinem circumducitur, & munitam utramque fibula. Fascias habenæ BBB neſtunt tres, ex quibus alia interiorem, exteriorem alia, tertia priorem femoris regionem respicit; ſuntque omnes ſtabiliter inferiori faſciæ, ſuperiori autem fibulis, aliove artificio ſic adnexæ, ut remitti pro re nata, intendique poſſint. Ut faſciæ, ſic habenæ molli ex corio ſunt. Quæ vero ad continendas magis, firmandaque habenas paulo arctior faſcia adiecta eſt DD media ejus pars VV conſimili ex corio conſtet, ex zona lino texta vel ſerico extrema DD.

Vinctura homini haud mediocri ſubſidio fuit, neque huic modo, ſed aliis poſtea in ſimilem ambulandi difficultatem implicitis. Eam vero libentius propono, quod locum hunc, vel noviffimi ampliffimique rei chirurgicæ ſcriptores intactum reliquerunt. Neque ſpes abeſt, quin tale artificioſum eos juvet, quibus laxatus is tendo, quacumque demum de cauſa, fuerit. Quid ni illos etiam, in quibus diſrupta patella ipſa nullo modo reduci poteſt?



PAULLI FRISII CLER. REGUL. S. PAULLI.

*De inæqualitatibus motus Terræ, Et Lunæ circa axem
ex Astronomorum hypothesibus.*

I.

De Libratione Lunæ.

L Unam æquali tempore circa Terram, & circa se ipsam volvi manifestum inde est quod eadem fere lunares maculæ toto mense synodico obvertantur Terræ, quodque secluso diurno motu, ob solam vim projectionis, gravitatemque, parallelæ sibi invicem manerent diametri Lunæ omnes, & tota Lunæ superficies revolutionibus singulis conspiceretur. Quod vero non semper maculæ omnino eadem nec sine exiguis librationibus obvertantur Terræ, partim oritur ex motu diurno Terræ ipsius, (libet enim hunc etiam in præsens supponere) partim ex parallelismo lunaris axis, & partim etiam ex quo Luna circa axem angulos, & circa Terram areas describat tempori proportionales. Fit enim ob motum Terræ, ut non omnino eadem Lunæ facies & mane, & vespere videri possit: & ob parallelismum lunaris axis fit, ut pro vario loco nodorum lunaris orbitæ, & latitudine Lunæ varia modo quædam boreales maculæ, modo aliæ meridionales in conspectum prodeant: sicuti ob æquabilem motum Lunæ circa axem, & inæquabilem circa Terram fit, ut pro vario loco Lunæ in sua orbita aliæ maculæ tum ab ortu, tum ab occasu detegantur alternis vicibus. Primam atque alteram librationis speciem detexit Galilæus: tertiam proposuit Ricciolus cum Lunam in circulo excentrico circa Terram moveri voluit, & facie eadem semper ipsius circuli centrum respicere. Newtonus vero cum ellipticas orbitas circularibus substituisset, in literis ad Mercatorem datis, & in Propos. xvii. lib. iiii. animadvertit eandem Lunæ faciem ad superiorem focum ellipseos converti semper, circa quem focum descripti anguli, ut etiam Sethus Wardus invenerat, sunt proportionales

les temporibus quam proxime. Uniuscujusque librationis limites ante omnia calculo definire, & cum astronomicis observationibus conferre oportet.

Sint igitur (*Fig. 1.*) C, & M Terra, & Luna, & sit spectator aliquis in Q, & inde ad Lunæ superficiem ducatur tangens QO: tum si spectator, ob motum diurnum Terræ, ex Q in K transeat, ducatur tangens alia KHX. Erunt O, & H limites lunaris superficiæ e Terra visæ, & librationis diurnæ angulus OMH æqualis erit angulo QXK, adeoque, cum fiet maximus, æquabitur diametrø Terræ e Luna visæ. Est autem apprensus Lunæ diameter 36' 16½'', & veræ diametri Lunæ, & Terræ sunt inter se ut 100:365 circiter, sive ut 20:73. Diurna igitur Lunæ libratio sub Æquatore ad 2½° ascendet, & inde pergendo ad Polos minuetur in simplici ratione cosinus latitudinis, & in latitudine 45° arcus OH fiet circiter 1½°, & sinus versus LO ad radium MO se habebit circiter ut 1:1000. Major erit alia libratio, quæ ex parallelismo lunaris axis, & varia latitudine Lunæ orietur. Si enim spectator aliquis sit in K (*Fig. 2.*) & sint M, N loca maximæ, & minimæ latitudinis, & axis Lunæ sibi utrobique parallelus maneat, ducanturque ex K binæ tangentes KO, KF, atque in loco N ducatur tangens alia oZk, quæ sit tangenti OK parallela; librationis angulus oNF æqualis erit angulo kZK, sive angulo ZKO, vel denique differentia maximæ, & minimæ latitudinis ipsius Lunæ. Quare cum inclinatio lunaris orbitæ ad Eclipticam sit circiter 5° 8½', maxima latitudinis libratio fiet per arcum 10¼° circiter: cuius sinus versus cum sit sexdecim partium millesimarum radii, maculæ extremæ Borealis, sive Australis marginis eo spatium intra Lunam progredi videbuntur, quod ad Lunæ radium se habeat ut 2:125.

Porro si Luna in orbita MNM (*Fig. 3.*) ita revolveretur, ut eandem diametrum AB semper obverteret centro L, quæ erat Ricciolii hypothesi, a perihelio, aut aphelio M ad quadraturas N transeundo, diametrum ipsam AB a radio CN retraheret angulo CNL, qui, posita excentricitate CL partium 0.055 distantia mediæ Lunæ a Terra, est circiter 3½°. At si diameter eadem AB circa Lunæ centrum describat angulos proportionales temporibus, & Luna ellipsim MNM circa Terram in foco C positam describat; ducta in loco N
recta

recta \neq NR, quæ sit parallela diametro AB in loco M, angulus RNB proportionalis erit areae MCN, & ad angulum rectum se habebit ut area MCN ad quartam areae ellipticae partem MLN, & angulus LNB se habebit ad rectum angulum, ut triangulum CNL ad aream MLN, sive ut $\frac{1}{2}$. CL.

LN: $\frac{1}{2}$. $\frac{314}{50}$. LN.LM = 4.50.55:314000 = 11:314. Erit igitur angulus LNB = $\frac{11 \cdot 90^\circ}{314} = 3 \frac{1}{2}^\circ$, & totus angulus CNB, vel, ducta ad vectorem radium CN perpendiculari TN, angulus TNa erit = $6 \frac{1}{2}^\circ$, & summa duorum angulorum hujusmodi in binis quadraturis oppositis, seu totus librationis angulus erit = $12 \frac{1}{2}^\circ$: cujus anguli cosinus cum sit 0.975, spatium, quod orientales, sive occidentales maculae in extremo margine primum sedentes intra Lunæ discum conficiunt, se habebit ad Lunæ radium ut 25:1000, sive ut 1:40.

Neque Grimaldi observationes librationem majorem Lunæ in longum, latumque adjudicant. Minimam enim distantiam centri Tychonis a limbo Lunæ Australi invenit ipse 22, aut 24 earum partium, quarum radius 100 complectebatur, maximam 38, aut 40. Unde cum posito sinu toto 100, sinibus versis 22, 24, & 38, 40 respondeant arcus 47° , $48 \frac{1}{2}^\circ$, & $58 \frac{1}{2}^\circ$, 60° ; maximæ, & minimæ distantiae differentia, seu tota libratio in latum, & quæ observatione, & quæ calculo definitur, convenient inter se invicem, quantum saltem in hujus generis observationibus sufficiat. Minimam pariter distantiam maculae Grimaldæ a limbo orientali Lunæ, & maris crisium a limbo occidentali, 3, aut 4 earundem partium Grimaldusprehendit, maximam vero distantiam semel 14, plerumque 12, aut 11. Quare cum sinibus versis 3, 4, & 11, 12 respondeant arcus 14° , 16° , & 27° , $28 \frac{1}{2}^\circ$; ea Lunæ libratio in longum ex observationibus colligetur, quæ supputatam jam librationis periodicæ, & diurnæ summam non superet. Hevelii, & Bullialdi observationes, quas omnes simul Ricciolus Lib. 3. Astron. Refor. copiose retulit, licet parum cum aliis Grimaldi congruant, quod omnium incertitudini potest tribui, & difficultati notandi maculas, ubi transversim prope limbum videntur, non tamen majorem Lunæ librationem exhibent, quam quæ superius statuta est. Cum enim Grimaldæ maculae, & maris crisium confinia limbo lunari

nari proxima quandoque Hevelio, & Bullialdo visa fuit, maximam tamen distantiam partium $5\frac{1}{2}$ Bullialdus, Hevelius 6 esse censuit.

Galilæus cum non eandem penitus Lunæ faciem obverti Terræ agnovisset, & diurnæ, ac periodicæ librationis, quæ fit in latum, attigisset rationem, & causam physicam, eisdem etiam Grimaldæ maculæ, & maris crisum observationes præoccupavit, quibus diu postmodum Grimaldus, Hevelius, Bullialdus, & Ricciolius incubuerunt. Ita enim observationes suas descripsit Galilæus Dial. I. §. ILX. *Sono nella Luna due macchie particolari, una delle quali, quando la Luna è nel Meridiano, guarda verso Maestro, e l'altra gli è quasi diametralmente opposta; e la prima è visibile anco senza il Telescopio, ma non già l'altra. E' la Maestrale una macchietta ovata, divisa dalle altre grandissime, l'opposta è minore, e parimente separata dalle grandissime, e situata in campo assai chiaro, in amendue queste si osservano molto manifestamente le variazioni già dette, e veggonfi contrariamente l'una dall'altra, ora vicine al limbo del disco Lunare, e ora allontanate, con differenza tale, che l'intervallo tra la maestrale, e la circonferenza del disco è più che il doppio maggiore una volta che l'altra: e quanto all'altra macchia (perchè l'è più vicina alla circonferenza) tal mutazione importa più che il triplo da una volta all'altra. Di qui è manifesto, la Luna, come allettata da virtù magnetica, costantemente riguardare con una sua faccia il globo terrestre, ne da quello divertir mai.* Quibus etiam posterioribus verbis visus est Galilæus Newtoni hypothesim de causa obversionis ejusdem semper hemisphærii Lunæ ad Terram antecessisse.

Newtonus in Propos. xxxviii. Lib. iii. statuit Lunam initio fluidam, attractione Terræ, spheroidis oblongæ formam induisse, cujus maxima diameter producta transfiret per centrum Terræ, & pedibus 186 superaret diametros alias perpendiculares. Propositioni corollarium illud adjecit Newtonus. *Inde autem fit ut eadem semper Lunæ facies in terram obvertatur. In alio enim situ corpus lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium agitantium, essent longe tardissimæ: adeo ut facies illa, quæ terram semper respicere deberet, possit alterum orbis lunaris umbilicum respicere; neque statim abinde*

retrahi, & in terram converti. Newtoni conjecturam Daniel Bernoullius cap. III. de fluxu, & refluxu maris §. v., & vi. longius etiam perduxit. Censuit enim quod si excluso diurno motu major Lunæ axis aliquantulum aberrare inciperet ab ea linea, quæ centra Terræ, & Lunæ jungit, primo quidem vis omnis Terræ nimis parva esset, & profus impar retrahendo axi in locum pristinum. At continuato postmodum motu periodico, contendit lunaris axis, & lineæ centrorum obliquitatem eousque augeri posse, ut vis Terræ retrahendo ad lineam ipsam lunari axi sufficiat. Unde non aliam librationem Lunæ esse voluit Daniel Bernoullius, quam quæ oritur ex varia Lunæ a Terra distantia, & ex varia motus periodici velocitate. Inde etiam illud commodi haberi authores alii observarunt, quod fluidæ partes Lunæ ob Terræ vim enormi æstu agerentur, quo ad pedes 93 assurgerent, & solidas partes obruerent, nisi omnium superficies ad spheroidis oblongæ, & maxima diametro Terram semper respicientis formam initio se composuisset.

At primo cum Lunæ maria non circa disci nobis obversi medium, ubi vis perturbatrix est maxima, sed non longe ab extremo limbo consistant, & sint parvæ extensionis singula, minime communicantia inter se invicem, & pluribus insulis interspersa; ii tanti æstus in Luna haberi nequaquam possent, etiamsi Luna, aut non omnis primitus fuisset fluida, aut eam dumtaxat formam induisset, quam mutua attractio partium, & motus diurni ratio postuleret. Deinde si ob parvitatem virium perturbatricium oscillationes lunaris axis essent longe tardissimæ, non posset ipse ita desecti a parallelismo, ut constanter dirigatur ad alterum focus orbitæ, & Luna eodem tempore circa se ipsam, & circa Terram revolvatur. Qui enim axis alicubi cum radio vectore orbitæ coincidit, secluso diurno motu antea impresso, oscillationibus longe tardissimis non nisi paululum post emensam quadrantem evadet radio vectori perpendicularis, & continuato deinde motu alter ipsius axis vertex centro accedet propius, ac sicut contrario sensu oscillationes, eæque compensabunt se se invicem, ac demum parallelismum axis restituent. Quod si vero oscillationes ex attractione Terræ ortæ majores essent; & lunari axi retrahendo ad vectorem orbitæ radium sufficerent; motus omnis oscillatorius deberet omnino fieri circa axem radio vectori,

ri, & plano lunaris orbitæ perpendicularem: cum tamen diurni motus Lunæ axis inclinetur ad axem Eclipticæ 2° , ad Eclipticæ planum 88° , ad planum lunaris orbitæ $82^\circ 51\frac{1}{2}'$. Itaque hemisphærii lunaris obversi nobis phænomenon ex quantitate motus diurni pendet: motus autem diurni eadem ratio in Luna esse potest, quæ in Terra, & Jove, & Planetis aliis, nimirum ipsa vis projectionis, quæ motus periodici causa est. Sunt quippe inter se nexa, atque affinia phænomena, motus periodicus Planetarum, inclinatio orbium, & diurni, ac periodici motus proportio: & quidem motus periodicus pendet ex quantitate vis impressæ: orbium positio pendet ex directione ejusdem vis: proportio autem velocitatis periodici, & diurni motus pendet ex varia a centro distantia, in qua vis ipsa impressa est, ut ex notissimis Mechanicæ theorematis consequitur.

II.

De Figura Lunæ.

SI homogenea, & fluida esset Luna, ratione diurni motus oblatæ, ratione terrestrium virium oblongæ spheroidis formam acquireret, compositis autem centrifugis partium singularum, & perturbatricibus Terræ viribus ea esset figura Lunæ, quæ gigni posset ellipsi circa minorem axem sic revoluta, ut vertex majoris axis ellipsim aliam describat, & sint bini axes, atque axis tertius, qui binos secat ad rectos angulos, inter se in ratione reciproca virium in verticibus singulis agentium: quod idem in Terra etiam contingeret, si mutux attractioni partium, ac vi centrifugæ vis perturbatrix Lunæ accederet. Hujus theorematis demonstrationem exhibebimus in eo opere, cui modo incumbimus, & quo universam gravitatis theoriam, aut theoriæ saltem elementa præcipua complectemur. Modo ut inveniamus semiaxium lunarium differentiam, & quæ ex motu diurno Lunæ, & quæ ex attractione Terræ ortum duceret, sint a , & r radii mediocres Terræ, & Lunæ, t , & T periodica tempora circa axes, & gravitas sub æquatore Lunæ se habeat ad vim centrifugam ut $g:c$. Quia quantitates materiæ in Terra, & Luna sunt inter se ut $73:1$, quemadmodum inferius ex phænomenis præcessionis æquinoctiorum, & nutationis terrestriis axis eruemus, vis acceleratrix

in

in superficie Lunæ ad vim acceleratricem in superficie Terræ se habebit ut $\frac{r}{r^2} : \frac{73}{a^2}$. Sit gravitas sub æquatore Terræ ad vim centrifugam pariter sub æquatore ut $G : 1$. Quia vis centrifuga sub æquatore Terræ se habet ad vim centrifugam sub æquatore Lunæ ut $\frac{a}{t^2} : \frac{r}{T^2}$; compositis rationibus erit gravitas sub æquatore Lunæ ad vim centrifugam, sive erit $g : c = G . a^3 . T^2 : 73 . r^2 . t^2$. Quod si fiat igitur ut $\frac{1}{G} : \frac{1}{230}$, quæ in homogeneitatis hypothefi est differentia femiaxium Terræ per minorem femiaxem divisa, ita $\frac{c}{g}$ ad quartum, prodibit differentia femiaxium Lunæ homogeneæ = $\frac{73 . r^3 . t^2}{230 . a^3 . T^2}$. Est autem $t = 23^h 56' = 1436'$, $T = 27^d 7^h 43' = 39343'$, & $a : r = 365 : 100 = 73 : 20$. Unde erit eadem differentia = $\frac{1649676800}{189717984402983}$ = $\frac{1}{115009}$, minor certe quam ut observationibus possit detegi.

Cum lunarium femiaxium differentia, ob tarditatem diurni motus, præ differentia femiaxium terrestrium adeo sit parva, vicissim fluxuum altitudo, ob majorem Terræ attrahentis massam, in lunaribus maribus esset major, si aut fluida esset Luna omnis, aut Lunæ solidæ superficies maribus undique operiretur. Demonstratum est enim a Mac-Laurino Lib. 1. §. LXVIII. de fluxionibus quod si gravitas mediocris in superficie alicujus Planetæ vocetur g , & sit V vis, quæ in mediocri a centro distantia, ob actionem Planetæ alterius attrahentis, gravitati in centrum adjicitur, & vis hujusmodi præ tota gravitate sit satis parva; differentia femiaxium sphæroidis oblongæ, cujus figuram actione ipsa, in eadem fluiditatis, & homogeneitatis hypothefi, Planeta indueret, ad semidiametrum medicrem se habebit ut $15V : 4g$. Quare si Lunæ distantia a Terra vocetur R , & sit in superficie Lunæ $V = \frac{73 . r}{R^5}$, & $g = \frac{1}{r^2}$; fiet

differentia lunarium femiaxium = $\frac{15 . 73 . r^3}{4R^3}$, ac denique cum sit $R : a = 60 : 1$, & $a : r = 73 : 20$, adeoque $R : r = 219 : 1$, differentia quæsita evadet = $\frac{1}{38369}$, & semidifferentia = $\frac{1}{76738}$.

Si mediocris telluris femidiameter cum Newtono statuatur pedum Parisiensium 19615800, erit differentia femiaxium sphaeroidis oblongæ, quam Luna fluida, & homogœnea, aut Lunæ maria undique affusa ob attractionem Terræ exhibere possent

$$= \frac{20 \cdot 19615800}{73 \cdot 38369} = 140, \text{ \& differentia femiaxium sphaeroidis oblatæ, quæ ex motu diurno Lunæ ortum duceret, erit} = 46\frac{3}{4}.$$

Newtonus vero differentiam illam dumtaxat consideravit, quæ fluxui, & refluxui nostrorum marium esset analogæ, aliisque calculis institutis deprehendit Lunæ maria ob vim Terræ attolli oportere pedibus 93. Calculorum series hæc est. In Corollario Propof. xxxvi. Lib. III. Newtonus ex proportione vis centrifugæ sub æquatore Terræ ad vim perturbatricem Solis, collegit maria nostra ob vim Solis attolli pede uno, & digitis 11 $\frac{1}{30}$. Deinde in Propof. xxxvii. ex proportione maximorum, minimorumque æstuum post syzigiæ, & quadraturas Solis, & Lunæ, invenit vim Solis ad Lunæ vim se habere ut 1:4, 4815, atque inde eruit maria nostra ob vim Lunæ elevari pedibus 8 $\frac{3}{4}$, & binis viribus conspirantibus usque ad pedes 10 $\frac{1}{2}$, aut etiam 12 $\frac{1}{2}$ elevari posse, si Luna in perigæo sit posita, & æstus ventis spirantibus adjuvetur. Id explicandis marium phœnomenis satis esse censuit Newtonus: in iis enim, quæ ab Oriente in Occidentem late patent, uti in mari Pacifico, & maris Atlantici, & Æthiopici partibus extra Tropicos, aqua attolli solet ad altitudinem pedum 6, 9, 12, & 15. In Corollario autem quinto ejusdem propositionis invenit ipse quantitates materiæ in Terra, & Luna esse inter se ut 39, 788:1, ac denique Propositionem xxxviii. sic protulit. *Si corpus lunare fluidum esset ad instar maris nostri, vis terræ ad fluidum illud in partibus & citimis, & ultimis elevandum esset ad vim Lunæ, qua mare nostrum in partibus & sub Luna, & Lunæ oppositis attollitur ut gravitas acceleratrix Lunæ in terram ad gravitatem acceleratricem terræ in Lunam, & diameter Lunæ ad diametrum terræ conjunctim; idest ut 39, 788:1, & 100:365, sive ut 1081:100. Unde cum mare nostrum vi Lunæ attollatur ad pedes 8 $\frac{3}{4}$, fluidum lunare vi terræ attolli deberet ad pedes 93. Singula singulatim examinare necesse est.*

In primis maria nostra ob vim Solis attolli debere pede uno,

uno, & digitis $11\frac{1}{36}$ demonstratum a Mac Laurino est S. 688. Lib. I. de Fluxionibus. At vero summam vel differentiam duarum virium Solis, & Lunæ ex diversorum ætuum magnitudine perperam æstimari animadvertit Daniel Bernoullius Cap. VI. de fluxu, & refluxu maris. Etenim motus omnes posteriores maris prioribus afficiuntur aliquo modo, augenturque, atque inde fit ut mare pluribus diebus agitatum, turbatumque, altius post syzигias, & quadraturas asurgat, quam ferat virium solarium, & lunarium proportio. Insuper circa oras maris, ubi observationes ætuum sunt habitæ, augetur ætuum magnitudo ex littorum loco, vadorumque incurfibus, ac reflexionibus, majorque fit quam in libero, apertoque mari esse debeat. Unde hoc ipso quod Newtoniana proportio virium altitudinem littoralis ætus exhibeat, pro mari aperto, & libero exhibebit majores ætus, quam vere habeantur. Bernoullius ex intervallo, & duratione ætuum proportionem virium Solis, & Lunæ accurate deduci posse existimavit: proportionem autem mediam constituit 2:5, quæ parum differt ab alia 147:356, quam inferius ex phænomenis præcessionis æquinoctiorum, & nutationis terrestriis axis eruemus. Hoc posito si maria nostra ob vim Solis attollantur pede uno, & digitis $11\frac{1}{36}$, ob vim Lunæ attollentur pedibus $4\frac{2}{3}$ circiter. Quod si altitudo nostrorum fluxuum ob vim Lunæ ad altitudinem fluxuum lunarium ob vim Terræ se habeat in ratione composita gravitatis acceleratricis Terræ in Lunam ad gravitatem acceleratricem Lunæ in Terram, & diametri Terræ ad Lunæ diametrum, sive ut 1:73, & 365:100 conjunctim, adhuc lunarium fluxuum altitudo esset pedum 93, ut Newtonus ipse statuerat.

At vero sine ulla demonstratione a Newtono assumpta est proportio illa fluxuum terrestrium, & lunarium. Ut accurata proportio fluxuum certo innotescat, adeamus ipsum Mac Laurini theorema, quod antea indicatum est. Sint P, & p altitudines illæ, ad quas Lunæ maria ob vim Terræ, & maria nostra ob vim Lunæ elevarentur. Juxta Mac Laurini theorema erit $\frac{P}{r} = \frac{15 \cdot 73 \cdot r^3}{4 R^3}$, & $\frac{p}{a} = \frac{15 a}{R^3} \cdot \frac{4 \cdot 73}{a^2} = \frac{15 a^3}{4 \cdot 73 \cdot R^3}$, adeoque erit $P:p = 73^2 \cdot r^4:a^4$, scilicet in ratione non simplici,

ut Newtonus existimaverat, sed duplicata vis acceleratricis Lunæ in Terram ad vim acceleratricem Terræ in Lunam, & quadruplicata diametri Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim. Si rursus fiat $a : r = 73 : 20$, erit $p : P = 5329 : 16000 = 1 : 30$ circiter: adeoque si mare nostrum vi Lunæ attollatur pedibus $4\frac{2}{3}$, in hypothesi Lunæ maribus undique coopertæ, attollentur maria ipsa ob vim Terræ pedibus 140, prorsus ut supra a nobis statutum est, atque in hypothesi Lunæ totius fluidæ maxima ipsius diameter superaret diametros omnes perpendiculares. Hoc ipso gravius evaderet argumentum, quo Newtonus conjecerat eandem semper Lunæ faciem obverti Terræ oportere. At cum tot sint conjecturæ illius difficultates, & diurnus motus in aliis Planetis pendeat ex sola vi projectionis, quæ motus etiam periodici causa est, ac denique omnis libratio Lunæ pendeat ex varia motus periodici velocitate, & loco nodorum orbitæ circa Terram descriptæ; loco hypotheseos dumtaxat examinabimus, quæ differentiis axium $\frac{x}{115009}$, & $\frac{x}{38369}$, ac binis simul vicissitudines diurni motus Lunæ respondeant.

III.

De Figura Terræ.

SI æquatoris terrestris radius vocetur A, & semiaxis diurni motus B, erit $\frac{B^2}{A}$ radius qui meridianum osculatur in communi æquatoris intersectione, & radius meridianum in polis osculans erit $\frac{A^2}{B}$, erunt scilicet radius ille, semiaxis minor, æquatoris radius, atque alter osculi radius geometricè proportionales. Unde quia radius æquatorem osculans est ipse æquatoris radius, & minimi arcus similes sunt radiis osculatoribus proportionales, erit prior meridianis gradus ad gradum æquatoris ut $B^2 : A^2$, ad ultimum autem gradum in polis ut $B : A^2$, & ob exiguam semiaxium differentiam primus idem gradus se habebit ad differentiam gradus æquatoris, ut semiaxis minor ad duplam differentiam semiaxium, atque ad differentiam postremi, ac polaris gradus se habebit ut idem semiaxis minor ad triplam semiaxium differentiam. Et quia insuper in hypothesi

thesi homogeneitatis est $A : B = 231 : 230$, ut a Clairautio nitide demonstratum est, & primus meridiani gradus cum Bouguerio statui potest hexapedarum 56753, erit ultimus meridiani gradus 57493, & gradus æquatoris 57247, æquatoris ambitus 20608920, radius 3280108, femiaxis minor terræ 3265909, & differentia omnis femiaxium 14199. Denique quia totus æquatoris ambitus secundis 86164 absolvitur, erit spatium uno secundo absolutum pedum 1435, cujus quadratum per diametrum divisum dabit sinum versum ejusdem arcus linearum 7, 537: & si longitudo penduli secundis singulis oscillantis sub æquatore cum Bouguerio statuatur lin. 439, 21, & spatium uno secundo perpendiculari lapsu percursum 2167, 41; erit pondus ad vim centrifugam sub æquatore ut $2167, 41 : 7, 537 = 287\frac{1}{2} : 1$, & tota gravitas ad vim centrifugam se habebit ut $288\frac{1}{2} : 1$.

Porro in Terra spheroidica ab æquatore pergendo ad Poles radii osculatores, & minimi arcus similes augeri debent in duplicata ratione sinuum latitudinis: adeoque posita differentia primi, & postremi gradus hexapedarum 740, erunt gradus alii ut in tabula sequenti.

<i>Meridiani gradus,</i>	<i>Latitudo loci,</i>	<i>Incrementa graduum,</i>	<i>Gradi toti,</i>	<i>Gradi observati,</i>	<i>Differentiæ.</i>
Peruvianus	0	0	56753	56753	
Africanus	33° 18'	223	56976	57037	—61
Italicus	43 1	344	57097	56979	+118
Gallicus prior	43 31	351	57104	57048	+56
Alter Gallicus	49 23	426	57179	57074½	+105
Lapponicus	66 20	621	57374	57422	—48

Pariter si sit ϕa differentia femiaxium Terræ, & sit T sinus latitudinis paralleli alicujus circuli, facile admodum ostendi potest æquatoris gradum ad gradum paralleli se habere ut

$1 : 1 + \frac{\phi a \cdot T^2}{B} \cdot \sqrt{(1 - T^2)}$: unde in latitudine $43^\circ 32'$ prohibet paralleli gradus hexapedarum 41588. Cassinus, & Caillius in Galliis deprehenderunt eundem gradum hexapedarum 41618: atque ea determinatio a Bouguerio Sect. vi. §. XXXI. de figura Terræ plura facta est, quod a determinatione meridiana lineæ non penderet. Ita cum observatus meridiani gra-

gradus in ea latitudine hexapedis 56 minor sit, paralleli gradus 30 hexapedis major erit, quam juxta hypothefim terræ fphæroidicæ, & proportionem terreſtrium axium 230:231 eſſe oporteret.

Bouguerius Sect. 1. §. V. ingenuè faſſus eſt ſe intra limites ſecundorum 3, aut 4 ſuſpectas habere illas obſervationes, quibus fixarum diſtantiã a vertice, & altitudines poli in locis ſingulis determinantur: ſuſpicioniſque ſuæ eam rationem protulit quod repetitæ obſervationes 3'', aut 4'' vere inter ſe differrent. Id etiam ex ſeſtione quinta ipſius Bouguerii manifeſtum eſt ubi fixarum diſtantiæ a vertice iis obſervationibus determinantur, quæ 2'', 3'', & quandoque etiam 4'' differunt inter ſe. Error hujusmodi ſi pro utroque arcus extremo duplicetur, & per tres gradus, quos prope æquatorem Bouguerius dimenſus eſt, distribuatur, unius meridiani gradus menſuram intra 2'' ſuſpectam faciet. Unde cum terreſtres menſuræ hexapedis fere decem pro gradibus ſingulis diſſentirent inter ſe invicem, erroris limites ſtatuit Bouguerius intra 2½'', aut 40 circiter hexapedas. Id ipſum fere ſtatuit Condaminius par. 11. §. XXVI. de tribus prioribus meridiani gradibus. Id vero potiori jure de gradu etiam Lapponico dici debet cum binis obſervationibus diſtantiã parallelorum Tornæ, & Kittis prodierit 57' 26'', 93, & 57' 30'', 42, ac medio arithmetico ſumpto amplitudo arcus 57' 28'', 67 a Maupertuiſio ſtatuta ſit. Ex illa cæleſtis arcus amplitudine, menſurisque aliis terreſtribus, quinque nimirum triangulorum combinationibus inter ſe convenientibus meridiani gradus in latitudine 66° 20' Maupertuiſio prodiiit hexapedarum 57437, 9, & correctis cum Bouguerio refractiõibus 57422. Septem aliæ triangulorum ſeries breviorum gradum exhiberent ſingulæ hexapedis 6½, 17½, 27, 30½, 32½, 36, 51½, ut apud Maupertuiſium, cap. III. de Figura Terræ, videre eſt. Quare medium ex omnibus ſumendo Lapponicus meridiani terreſtris gradus rotundo numero hexapedarum 57400 definiri poſſet.

Alembertius in præfatione par. III. de Mundi ſyſtemate Aſtronomiæ diligentæ limites ſecundorum duorum aſſignavit, ac candide fatendum cenſuit hexapedarum 60 differentiam in gradu integro eam eſſe, quæ exiguis obſervationum aſtronomicarum erroribus poſſit tribui. Ita cum Lapponicus gradus Americano comparatus non niſi hexapedis 48, aut potius 26 dum.

dumtaxat minor prodeat, quam ferat proportio axium 230 : 231, figuram Terræ sub æquatore, & polari circulo satis congruere censendum erit cum sphæroide oblata, in qua semi-axes proportionem illam obtineant. Pariter cum paralleli gradus prope Pirenæos montes hexapedis 30 major sit, & gradus meridiani in eadem latitudine sit minor hexapedis 56, atque Africanus gradus prope Promontorium Bonæ Spei a Caillio observatus hexapedis 61 major sit, quam ferat proportio eadem; quatuor jam meridiani gradus, & paralleli unum habebimus, qui cum figura sphæroidica, eademque axium proportione satis convenient, ubi quidpiam tribuamus errori mensurarum terrestrium, ac cælestium observationum. Si Parisiensis gradus hexapedarum 57183 cum Mauptuisio statui posset, & ipse pariter cum proportione illa mire congrueret: quæ ratio fuit ut in dissertatione de Telluris figura, & magnitudine primum censuerim assignatam jam a Newtono proportionem terrestrium axium observationibus satisfacere. At ultima Parisiensis gradus correctio, & Italicus etiam gradus magis a proportione illa discrepat, quam ut in aliquos observationum diligentissimarum errores differentia omnis hexapedarum 105, & 118 refundi possit.

Ipse autem clarissimus Alembertius non ideo a Telluris sphæroidicæ hypothesei recedendum esse existimavit, aut confingendas alias hypotheses de dissimilitudine meridianorum. Animadvertit enim quod cum axis diurni motus Jovis sit perpendicularis plano orbitæ, meridiani omnes eandem exhibent axium differentiam: quo jam analogiam Jovis habemus pro meridianorum terrestrium similitudine. Deinde ad calcem præfationis conjecturæ loco proposuit num Apennini montis attractio aberrationem aliquam penduli gigneret, qua interjectus arcus cælestis major, & gradus terrestris brevior efficeretur. Neque ad intentum aberratione magna opus est. Nam cum aberratio penduli a perpendiculari prope altissimos Peruvia montes Bouguerio $7\frac{1}{2}''$ prodierit, ubi actionem Apennini montis subduplam fuisse admittamus, eam pariter in Italia mensuram gradus habebimus, quæ cum hypothesei Terræ sphæroidicæ, & Newtoniana proportione axium conveniet. Id ipsum de Parisiensi etiam gradu valere posset, si in urbe maxima, & interjecto telluris tractu major aliqua materiæ densitas, ac copia admitti posset, quæ in utroque arcus extremo

pendulum in adversas partes aliquantulum retraheret. Fortasse aliis terrestrium graduum dimensionibus undique certius figura Terræ innotescet. Interim certum est Terram sub æquatore, ac polari circulo, & in Meridionali Africæ parte, ac prope Pireneos montes in Galliis, a figura spheroidica, & Newtoniana proportione axium non magis recedere, quam ut in errores minimos observationum differentia omnis refundi possit: Romanum vero, & Parisiensem gradum non magis inde recedere quam ferant exigui simul errores observationum, & aliqua terræ exterioris irregularitas.

Corporum pondera, & longitudines pendulorum eodem tempore oscillantium ab æquatore pergendo ad polos augentur quidem in duplicata ratione sinuum latitudinis, five in ratione simplici dimidiorum sinuum versorum latitudinis duplicata, ut in spheroide quavis homogenea augeri debent, magis tamen augentur quam pro eadem terrestrium axium proportione. Et quidem si longitudo penduli secundis singulis oscillantis prope æquatorem, & Lutetiæ cum Bouguerio, atque ad Promontorium Bonæ Spei cum Caillio definiatur, & sint gravitates acceleratrices Parisiis, Londini, & Pelli in Lapponia ut 100000, 100018, 100137, quemadmodum ex Grahami, & Maupertuisii observationibus colligitur, ac denique longitudinum differentia Pelli, & sub æquatore sit lin. 2, 06, differentia aliæ invenientur ut in tabula sequenti.

<i>Locus observationis</i>	<i>Latitudo loci</i>	<i>Dimidii iidem sinus</i>	<i>Proportio sinuum</i>	<i>Longitudo penduli</i>	<i>Differentia.</i>
Sub æquatore	0	0	0	439, 21	0
<i>A portobello</i>	9° 34'	2762	0, 07	439, 30	0, 9
<i>A Petit-Goave</i>	18 27	10015	0, 25	439, 47	0, 26
Ad Promontorium	33 18	30142	0, 74	440, 14	0, 93
Parisiis	48 50	56684	1, 38	440, 67	1, 46
Londini	51 31	61275	1, 50	440, 75	1, 54
Pelli	66 48	84480	2, 06	441, 27	2, 06

Quod si fiat pariter ut dimidius sinus versus duplæ latitudinis 66° 48' ad radium, ita 2, 06 ad quartum, prodibit differentia longitudinis penduli in polis, & æquatore lin. 2, 44, & longitudo ipsa polaris penduli erit lin. 441, 65. Quare cum sit $230:231 = 439, 21:441, 12$, dissensus omnis erit 0, 53, seu fere dimidiæ lineæ: & si in determinanda penduli longi-

gitudine non nisi error octavæ partis lineæ esse possit, ut Cail-
lius contendit in Actis Berolinensibus anni 1754, aliæ quæ-
rendæ erunt hypothefes, in quibus incrementa ponderum cum
Newtoniana proportione axium concilientur.

Et quidem corporum pondera ab æquatore pergendo ad
polos augeri debent in duplicata ratione sinuum latitudinis,
sive homogenea, & sphæroidica sit tellus, sive ex stratis sphæ-
roidicis diversæ densitatis coalescat, sive etiam sit sphæroidica,
& nucleum sphæricum diversæ densitatis in centro habeat: quæ
& demonstrata sunt a Clairautio, & nos novis demonstratio-
nibus in opere jam indicato exornabimus. Homogeneitatis hy-
pothefis cum absoluto incremento ponderum minus accurate
respondeat, hypothefis alia stratorum sphæroidicorum nimis
ad arbitrium confingeretur, & præcessionem æquinoctiorum
majorem justo exhiberet, ut mox videbimus. Newtonus in
Propof. x. Lib. III. censuit communem supremam terram
quasi duplo graviorem esse aqua, & paulo inferius in fodinis
quasi triplo etiam, aut quadruplo, & quintuplo graviorem:
unde verisimile existimavit quantitatem materiæ in terra quin-
tuplo, aut sextuplo majorem esse, quam si tota ex aqua con-
staret. Quod si vero consideremus sub æquatore amplissima,
& magis profunda esse maria, & circa polum arcticum Euro-
pam, Asiam, Americam satis protendi, patebit densitatem
mediam materiæ circa æquatorem redundantis minorem esse
quam si omnis Tellus ex terra solida componeretur. Inveni
autem quod si Tellus sphæroidicam formam habeat, & terre-
stres axes sint inter se ut 230:231, ac materiæ exterioris den-
sitas quinta sui parte minor sit densitate inscriptæ sphæræ,
observationibus simul terrestrium graduum, ut antea vidimus,
& auctæ pendulorum longitudinis satisfaceret.

IV.

De momentis sphæroidum rotantium, & attractarum.

SI circa axem Hh (*Fig. 4.*) revolvatur sphæra aliqua, &
vis acceleratrix puncti A in æquatore positi unitate expri-
matur, & sit XN radius paralleli alicujus circuli, erit vis ac-
celeratrix puncti $N = \frac{XN}{TA}$, & momentum ipsius puncti $\frac{XN^2}{TA}$,

T. V. P. II.

D

&

& momentum peripheriæ radio XN descriptæ = $\frac{p \cdot XN^3}{TA}$, ac denique momentum totius areæ circularis = $\frac{p \cdot XN^4}{4TA}$. Momentum vero segmenti spherici altitudinis Xx erit = $\overline{TN^4 - 2TN^2 \cdot TX^2 + TX^4} \cdot \frac{p \cdot Xx}{4TA}$, momentum segmenti altitudinis $TX = \overline{TN^4 - \frac{2}{3}TN^2 \cdot TX^2 + \frac{1}{5}TX^4} \cdot \frac{p \cdot TX}{4TA}$, momentum hemisphærii = $\frac{2}{15}p \cdot TA^4$, momentum spheræ integræ = $\frac{4}{15}p \cdot TA^4$.

Quod si circa axem Hh revolvatur spheroidis circa polos compressa, & sit æquatoris radius TB , radius paralleli alicujus XM ; momenta circulorum, qui radiis XN , XM in spherâ, & spheroide describentur, inter se erunt ut $XN^4 : XM^4 = TA^4 : TB^4$; quæ ratio cum in sectionibus omnibus perpendicularibus axi sit constans, erit momentum totius spheroidis oblatae circa axem revolutæ = $\frac{4}{15}p \cdot TB^4$. Quare si fiat $TA = a$, $TB = A$, & vis acceleratrix non puncti A , sed puncti B in æquatore spheroidis positi sit = 1, erit momentum spheræ = $\frac{4pa^5}{15A}$, & momentum spheroidis = $\frac{4}{15}pA^3a$.

Si spheroidis eadem compressa non circa axem, sed circa diametrum æquatoris aliquam revolvatur, & proxime accedat ad spheram circumscriptam, rotationis momentum ita invenietur. Ductis planis quibuslibet diametro æquatoris, quæ est axis motus, perpendicularibus dividetur spheroidis in totidem ellipses similes, & spherâ circumscripta in totidem circulos, quorum radii æquales erunt semiaxibus majoribus ellipsium, & ad minores semiaxes se habebunt ut $A : a$. Tum ob affinitatem spheræ, & spheroidis, momentum in singulis ellipsibus æquabitur momento in circulis ejusdem areæ, seu quorum radii ad radios circulorum in circumscripta spherâ similiter sectorum se habeant ut $\sqrt{Aa} : A$. Igitur momenta ellipsium, & circulorum in spheroide, & spherâ circumscripta similiter sectorum inter se erunt ut $A^2 a^2 : A^4 = a^2 : A^2$, quæ ratio cum in sectionibus singulis sit constans, cumque mo-

men-

mentum sphaerae circumscriptae fit $= \frac{4}{15} p A^4$, erit momentum sphaeroidis circa aequatoris diametrum revolutae $= \frac{4}{15} p a^2 A^2$.

Momentum sphaeroidis oblongae, ad inscriptam sphaeram accedentis quam proxime, & circa minorem axem revolutae, eodem modo inveniatur $= \frac{4}{15} p a^3 A$: ductis enim totidem planis minori axi normalibus, momenta sectionum singularum, adeoque etiam momenta sphaeroidis totius, & sphaerae inscriptae inter se erunt ut $A^2 a^2 : a^4 = A^2 : a^2$. Quod si oblonga simul, & oblata sit sphaeroidis, & sit sphaeroidis femiaxis minor $= a$, major $= A$, & tertius femiaxis $= B$, erit momentum totius sphaeroidis ad momentum sphaeroidis oblatae, femiaxis a , & B inscriptae, & circa eundem minorem axem revolutae ut $A^2 . B^2 : B^4 = A^2 : B^2$, & cum momentum sphaeroidis ipsius oblatae fit $= \frac{4}{15} p B^3 a$, erit momentum sphaeroidis totius $= \frac{4}{15} p B A^2 a$, posito quod in distantia B ab axe motus vis acceleratrix fit $= 1$. Quod si denique vis acceleratrix in distantia A ab ipso axe unitate exprimitur, quaesitum totius sphaeroidis momentum evadet $= \frac{4}{15} p B^2 A a$.

Ut inveniantur etiam momenta attractivum virium in sphaeroidem aliquam agentium, sit locus attrahentis Planetae S (*Fig. 5.*) L particula quavis Planetae attracti, T centrum, Qq planum per centrum transiens, & perpendiculare rectae TS , quae duorum Planetarum centra conjungit. Si Planetae attrahentis massa vocetur S , erit vis qua trahetur centrum $T = \frac{S}{ST^2}$, & vis qua trahetur particula L secundum $SL = \frac{S}{SL^2}$, & vis quae in directione rectae ST parallela impendetur $= \frac{S \cdot SF}{SL^3}$, ducta scilicet ex L in ST perpendiculari LF . Si LM praeter ST satis parva censei possit, recta SL proxime aequalis erit rectae $ST - LM$, & negligi poterunt altiores rectae LM potestates, atque erit duarum virium differentia, sive vis absoluta, qua punctum L a plano Qq distrahetur $= S \cdot ST \left(\frac{1}{ST^2} - \frac{1}{ST^2 \cdot LM} \right) = \frac{3S \cdot LM}{ST^3}$, aut si fiat $\frac{3S}{ST^3} = P$, erit vis omnis perturbatrix $= P \cdot LM$.

Sit insuper (Fig. 6.) Pp axis minor sphaeroidis alicujus, $PBpb$ sectio per axem minorem transiens, Qq planum cui recta ST ad perpendicularum insitit, IK sectio quaelibet axi Pp perpendicularis. Si in sectione hac ipsa accipiantur duae quaelibet particulae L, l , ut fit $LX = lX$, erit momentum duarum particularum ad sphaeroidem omnem circa centrum T in contrarias partes rotandam, $P.LM.MT$, & $P.lm.mT$. Agatur per punctum X recta NXn plano Qq parallela, & in planum idem demittatur perpendicularum XY . Erit $LM.MT = LN.MT + NM.MT$, & $lm.mT = ln.mT - mn.mT$, & momentum duarum particularum simul sumptarum ad sphaeroidem rotandam erit $= P.LN.mM - P.MN.MT + mT = 2P.LN.XN - 2P.XY.YT$. Sit finus anguli STB , quo Planeta attrahens declinat ab aequatore Btb , aut finus anguli $pTq = m$, cosinus $= n$. Erit $XY = m.TX$, $TY = n.TX$, $XN = m.LX$, $LN = n.LX$, & fiet momentum idem $= 2mnP.LX^2 - TX^2$.

His positis si proponatur sphaeris compressa, revolutione ellipsaeos $PBpb$ circa axem minorem Pp genita, & fit Ii latitudo annuli, quo sectio sphaeroidis IK sectionem ik sphaerae inscriptae superat, & sphaeris ad sphaeram ipsam proxime accedat, ita ut momentum particularum in l , & i proxime idem censei possit; elementum momenti circularis annuli habebitur momentum particularum singularum per earumdem numerum multiplicando, sive multiplicando $2mnP.Ii.LX^2 - TX^2$ per elementum circularis peripheriae. Est vero summa omnium LX^2 ex sinibus rectis in integro semicirculo confectorum $= \frac{1}{3}p.Xi^3$, si radius ad peripheriam se habeat ut $1:p$, & summa totidem TX^2 , sive productum quadrati TX^2 in semiperipheriam circuli est $= \frac{1}{2}p.Xi.TX^2$. Erit igitur momentum particularum omnium L, l per totum circularem annulum extra sphaeram sphaeroidi inscriptam dispositarum quam proxime $= 2mn.P.Ii.Xi.p.(\frac{1}{3}Xi^3 - \frac{1}{2}TX^2)$, & si fiat $TA = a$, $BA = \phi a$, $TX = x$, adeoque $Ii = \frac{\phi a}{a}.Xi$, & $Xi^2 = a^2 - x^2$, evadet momentum annuli circularis $= mnP.\frac{\phi a}{a}.p(a^2 - x^2)(\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{2}x^2) = mnP.\frac{\phi a}{2a}.p(a^4 - 4a^2x^2 + 3x^4)$, ac momentum hemisphaeroidis $= mnP$.

$$P. \frac{p a^3}{2 a} . p \left(a^3 - \frac{4}{3} a^3 + \frac{3}{5} a^3 \right), \text{ \& sphaeroidis totius momentum}$$

$$= m n P. \frac{p a^3}{a} . \frac{4}{15} p a^3 .$$

Quod si proponatur sphaeroidis oblonga, & fit IHK*h* (Fig. 7.) sectio elliptica axi P*p* perpendicularis in loco X, & fit ellipsis semiaxis major EO, minor RO, qui cum recta D*d*, & plano Q*q* efficiat angulum ROD, ac fit insuper differentia semiaxium E*e* = π, erit ex conicis HO = RO + π . $\frac{LF^2}{RO^2}$, adeoque HL = π . $\frac{LF^2}{RO^2}$. Jam vero si recta L*l* rectam D*d* interfecet in puncto C, & producatur LO in L', vires æqualium particularum in *l*, & L' positarum ad sphaeroidem omnem volvendam æquales erunt. Unde cum etiam numerus particularum in HL, *h*L' idem sit, momentum earundem particularum, sive elementum momenti annuli elliptici, quo sectio sphaeroidis sectionem sphaerae inscriptae superat, æquale erit quantitati 2*m n*. P . π . $\frac{LF^2}{RO^2} . LC^2 - TX^2$ ductæ in elementum peripheriæ circularis: & cum sit LF = $\frac{LC . Oc - CO . Dc}{RO}$, & , neglecto ambiguo termino $\frac{2LC . Oc . CO . Dc}{RO^2}$, qui in duobus quadrantibus DiO, diO contrario signo destruitur, fit LF² = $\frac{LC^2 . Oc^2 + CO^2 . Dc^2}{RO^2}$; elementum ipsius momenti æquabitur elemento circularis peripheriæ ducto in quantitatem 2*m n* P π . $\frac{LC^2 . Oc^2 + CO^2 . Dc^2}{RO^2}$. $LC^2 - TX^2$.

Est autem summa omnium LC⁴ per totam semiperipheriam = $\frac{3}{16} p . RO^4$, summa omnium CO² . LC² = $\frac{1}{16} p . RO^5$, & summa omnium LC² . TX², aut CO² . TX² = $\frac{1}{4} p . RO^5$. TX². Quare si sinus anguli DOR sit = *s*, cosinus = S, erit momentum totius annuli elliptici = *m n* P π *p* ($\frac{3}{8} RO^3 . S^2 + \frac{3}{8} RO^3 . s^2 - \frac{1}{2} RO . TX^2 . (S^2 + s^2)$) = *m n* P π *p* ($\frac{1}{4} RO^3 . S^2 + \frac{3}{8} RO^3 - \frac{1}{2} RO . TX^2$), & si differentia semiaxium totius sphaeroidis

roidis fit $= \phi' a$, & fit propterea $\pi = \frac{\phi' a}{a}$. $RO = \frac{\phi' a}{a}$. Xi , erit
 (Fig 6.) momentum particularum omnium in oblongæ sphæ-
 roidis sectione IK extra sphæram inscriptam redundantium =
 $m n P . \frac{\phi' a}{a} . p \left(\frac{1}{4} a^2 - x^2 \right) . S^2 + \frac{1}{8} \overline{a^2 - x^2}^2 - \frac{1}{2} a^2 x^2 + \frac{1}{2} x^4) =$
 $m n P . \frac{\phi' a}{a} . p \left(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{2} a^2 x^2 + \frac{1}{4} x^4 \right) . S^2 + \frac{1}{8} a^4 - \frac{1}{4} a^2 x^2 + \frac{1}{8} x^4$;
 & momentum hemisphæroidis erit $= m n P . \frac{\phi' a}{a} . p \left(\frac{1}{4} a^5 - \frac{1}{2} a^5 \right.$
 $\left. + \frac{1}{20} a^5 \right) . S^2 = m n P . \frac{\phi' a}{a} . \frac{2}{15} p a^5 S^2$, & sphæroidis totius mo-
 mentum $= m n P . \frac{\phi' a}{a} . \frac{4}{15} p a^5 S^2$.

Quod si oblata simul, & oblonga fit sphæroidis, scilicet si meridianum simul, & æquatorem, sectionemque alteram per polos factam, & meridiani plano normalem habeat ellipticam, & fit sphæroidis semiaxis minor $= a$, major $= a + \phi a + \phi' a$, tertius duobus prioribus normalis $= a + \phi' a$, & sphæroidis accedat proxime ad sphæram, erit momentum omne

$= m n P . \frac{\phi a + \phi' a . S^2}{a} . \frac{4}{15} p a^5$. Ductis enim planis quibuslibet axi minori perpendicularibus, extra circulum in sphæra inscripta sectum, circularis, & ellipticus annulus supererunt, quorum momenta, ob sphærae, & sphæroidis totius affinitatem, eodem modo supputari poterunt, ac singillatim in oblata, & oblonga sphæroide supputarentur. Atque hæc cum formulis a cl. Alembertio traditis §. 352., & 360. de mundi systemate omnino congruunt. Est enim $S^2 = 1 - s^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos . 2 D O R$. Quod si qui attrahitur Planeta majorem semper meridianum Planetæ attrahenti obvertat, qui esset casus Lunæ oblongæ respectu Terræ, & fiat $S = 1$, momentum sphæroidis oblongæ æquale erit momento oblatae alterius sphæroidis iisdem axibus descriptæ. Si vero aspectus omnes Planetæ attracti, attrahentisque sibi invicem succedant, qui esset casus Lunæ ipsius respectu Solis, & pro S^2 substituatur valor medius $\frac{1}{2}$, momentum medium sphæroidis oblongæ momento oblatae sphæroidis dimidium erit.

V.

De compositione motuum rotationis.

SIt planum aliquod $ZHzh$ (*Fig. 8.*) quod binis viribus ita urgeatur, ut earum una circa axem Zz , altera circa axem alterum Hh seorsim rotari possit. Sint angulares celeritates rotationum circa axes ipsos C , & ι , atque ex puncto quocumque M ducantur ML , & MN axibus perpendiculareres. Erit absoluta velocitas puncti M circa axem $Zz = ML \cdot C$, & velocitas circa $Hh = MN \cdot \iota$. Tum si in sectoribus oppositis ZTH , zTh duarum velocitatum directiones contrariae habeantur, quo in loco velocitates duae se mutuo destruent, erit $ML \cdot C = MN \cdot \iota$, sive $\iota : C = ML : MN$, quae ratio $ML : MN$ cum in tota recta MTm fit constans, manifestum est binis viribus simul impressis, in recta aliqua linea destrui motus omnes, eamque ab axibus Zz , Hh rotationum duarum declinare angulis MTZ , MTH , quorum sinus reciproce proportionales sint angularibus velocitatibus singillatim circa axes ipsos conceptis. Scilicet si in recta Tz capiatur recta TX , quae se habeat ad TH ut $C : \iota$, jungaturque HX , ipsique per punctum T , in quo bini axes Hh , Zz se interfecant, ducatur parallela MTm ; velocitates in recta huiusmodi se destruent: erit enim $C : \iota = TX : TH = \sin. THX : \sin. TXH = \sin. MTH : \sin. MTZ = MN : ML$.

Modo accipiatur in eodem plano punctum aliud quodcumque R , & ad HT , MT , ZT ducantur perpendiculara RO , RA , NG , OD , RB , PQ , & ad PQ perpendicularum aliud RV . Erit RO velocitas rotationis puncti R circa axem Hh , & velocitas circa Zz erit $= BR \cdot C = BR \cdot \frac{MN}{ML} = BR \cdot \frac{PO}{PQ} = \frac{BR \cdot PO}{PQ} = \frac{BR \cdot PO}{PQ + PV} = \frac{BR \cdot PO}{PQ} = PO + PV \cdot \frac{MN}{ML}$, & differentia, aut summa duarum velocitatum erit $= RP + PV \cdot \frac{MN}{ML}$.

Est vero ob triangulorum similitudinem $RP = \frac{TM \cdot RA}{TN}$, & $PV = \frac{DT \cdot RP}{TO} = \frac{DT \cdot TM \cdot RA}{TN \cdot TO}$. Insuper ex Trigonometria est $\frac{DT}{TO} = \frac{TN \cdot TL - MN \cdot ML}{TM^2}$. Erit itaque differentia, aut summa

dua-

duarum velocitatum = $\frac{TM.RA}{TN} + \frac{TL.MN.RA}{TM.ML} - \frac{MN^2.RA}{TM.TN}$
 = $\frac{TL.MN + TN.ML}{TM.ML}.RA = \frac{\text{fin. HTZ}}{\text{fin. MTZ}}.RA$, scilicet ob da-
 tos angulos HTZ, MTZ, composita omnis velocitas pro-
 portionalis erit distantiae a recta Mm.

Sit denique punctum aliud quodcumque F extra ipsum planum, quod pariter ita impellatur, ut vi una circa axem Zz, altera circa Hh singillatim impressa rotari possit. Sit FR perpendicularis ex eodem puncto demissa in planum, & FA, FO perpendiculares aliae ductae ad Mm, Hh, & sit insuper Ff (Fig. 9.) circularis arcus, quem punctum ipsum, rotatione circa Hh concepta, singillatim describere inciperet. Velocitas puncti F secundum FK tangentem arcus Ff resolvi poterit in duas alias secundum FR, FE: & cum tota velocitas circa Hh distantia FO exprimat, erit velocitas secundum FR = $\frac{FO.FR}{FK} = RO$, eadem scilicet qua punctum R circa idem centrum O revolveretur: velocitas vero secundum FE erit = FR, directionemque habebit parallelam rectae RO. Pari ratione velocitas puncti F circa axem Zz (Fig. 8.) in duas alias resolvetur, quarum una BR.C æquabit velocitatem puncti R circa axem Zz, altera vero erit FR.C, directionemque habebit parallelam rectae BR. Jam vero velocitates binæ RO, BR.C puncti R circa axes binos Hh, Zz componunt velocitatem $\frac{\text{fin. HTZ}}{\text{fin. MTZ}}.RA$, qua punctum ipsum circa axem tertium Mm moveri pergit. Binæ igitur velocitates puncti F extra planum ZHzh positi, eodem cum plano ipso angulari motu circa axes binos Hh, Zz abrepti, æquivalentur tribus velocitatibus, velocitati scilicet compositae puncti R, atque insuper duabus aliis FR, FR.C, quarum directiones parallelæ sint rectis RO, BR.

Erunt autem velocitates FR, & FR.C inter se ut 1 : C = ML : MN = PQ : PO. At quia, ob angulos PQT, POT rectos, circulus diametro PT descriptus transit per puncta Q, O; anguli etiam PQO, PTO eidem chordae PO insistentes æquales erunt inter se: ductaque adeo recta CA ipsi PQ parallela, ut sint æquales anguli QPO, RCA, similia erunt triangula QPO, RCA. Sunt enim anguli TPO, RPA
 æqua-

æquales, & angulus RAP est rectus, adeoque æquantur inter se anguli CRA, PTO, PQQ . Erit igitur $PQ:PO = RC:CA$, & velocitates ipsæ $FR, FR.C$ erunt rectis RC, CA proportionales. Porro velocitates binæ secundum RO, BR , quæ sint rectis RC, CA proportionales, exprimenturque ipsis $FR, FR.C$, velocitatem aliam secundum RA component, quæ erit $= \frac{OQ}{PQ}.FR = \frac{LN}{ML}.FR$. Binæ igitur puncti F velocitates circa axes binos Hh, Zz , æquivalentur duabus aliis, quarum una $\frac{\text{fin. HTZ}}{\text{fin. MTZ}}.RA$ erit plano $ZHzh$ perpendicularis, altera vero $\frac{LN}{ML}.FR$ erit rectæ RA parallela.

Jam vero, ob angulos MLT, MNT rectos, angulus MTN æqualis erit angulo MLN , qui in circulo diametri MT eidem chordæ MN insitit, æquaturque angulo alterno LNG . Itaque similia erunt triangula rectangula MTN, LNG , eritque $LN = \frac{TM.NG}{NT}$, & velocitas secundum rectam ipsi RA parallelam erit $= \frac{LN.FR}{ML} = \frac{TM.NG.FR}{ML.NT} = \frac{NT.FR}{ML} = \frac{\text{fin. HTZ}.FR}{\text{fin. MTZ}}$. Ducatur igitur (*Fig. 10.*) Fa re-

ctæ RA parallela, quæ sit $= \frac{\text{fin. HTZ}.FR}{\text{fin. MTZ}}$, & producatur RF in r , ut sit $Fr = \frac{\text{fin. HTZ}.RA}{\text{fin. MTZ}}$, compleaturque rectangulum Ff . Composita omnis velocitas puncti F directionem Ff habebit, eritque $= \frac{\text{fin. HTZ}}{\text{fin. MTZ}} \cdot \sqrt{(FR^2 + RA^2)} = \frac{\text{fin. HTZ}.FA}{\text{fin. MTZ}}$, proportionalis scilicet distantie a puncto A ,

& ob $fa:Fa = RA:FR$, & parallelas Fa, RA , erit directione sua rectæ FA perpendicularis. Hoc ipso punctum quodcumque F , & punctorum systema, ac corpus etiam quodcumque binis viribus ut antea impulsus circa axes Zz, Hh ; compositis binis velocitatibus, uno communi anguli motu circa axem MTm rotabitur, qui jaceat in plano axium Zz, Hh , iisque inde declinet angulis, quorum sinus sint reciproce proportionales velocitatibus angularibus, quæ singillatim circa axes ipsos conciperentur.

Ita cum fit $\frac{\text{fin. HTZ}}{\text{fin. MTZ}}$. FA absoluta velocitas puncti F circa axem Mm , & centrum A, ipsam per FA dividendo erit $\frac{\text{fin. HTZ}}{\text{fin. MTZ}}$ angularis velocitas totius compositæ rotationis. Unde cum angularis velocitas circa Hh fit = 1, & circa $Zz = C = \frac{MN}{ML} = \frac{\text{fin. MTH}}{\text{fin. MTZ}}$, velocitates ipsæ angulares circa axes Mm , Hh , Zz inter se erunt ut sinus angulorum HTZ , MTZ , MTH . Bini itaque rotationis motus circa axes binos unicum rotationis motum component circa axem tertium: & vicissim unicus rotationis motus, qui circa axem Mm fiat, resolvi poterit in duos alios circa axes Hh , Zz : atque erit tota rotationis velocitas angularis ad angulares velocitates rotationum resolutarum ut sinus anguli HTZ duorum axium ad sinus angulorum MTZ , MTH , quibus axes ipsi inclinantur cum priore axe Mm . Si angulus HTZ , quo bini axes Hh , Zz se interfecant in puncto T, sit rectus, etiam angulus LMN rectus erit, & $\frac{MN}{ML} = \frac{\text{fin. MTH}}{\text{fin. MTZ}} = C$ erit tangens anguli MTN : in hoc scilicet anguli recti casu tangens deviationis axium Mm , Hh erit quarta proportionalis ad 1, C, & sinum totum.

Compositio igitur, & resolutio motuum non in liberis motibus dumtaxat, verum etiam in motibus rotationis locum habet: scilicet bini rotationis motus simul impressi in rotationem unicam confurgunt, sicuti binæ vires binis lateribus parallelogrammi alicujus expressæ tertiam vim componunt, quæ exprimitur diagonali: & sicuti ex viribus quotcumque unica semper confugit; ita si plures rotationis motus imprimantur circa idem centrum, unica semper rotatio ex omnibus habebitur. Primam hujus theorematis demonstrationem dedimus in Dissertatione de Præcessionem Æquinoctiorum, quæ anno 1759 Luccæ edita est, & demonstratione ipsa præoccupavimus difficultatem omnem, quæ posset hacce in re suboriri: nimirum cum binis motibus, corpori impressis, elisique iis portionibus velocitatum, quæ opponuntur sibi invicem, velocitas in particulis singulis residua sit proportionalis distantia a novo axe, & directione sua rectæ ad axem ductæ perpendicularis; patet sine ulla disgregatione partium, & totius corporis solutione binos rotationis motus simul componi. Novam aliam atque
ele-

elegantem ipsius theorematis demonstrationem exhibuit Clariss. Eques Mozzius in aureo opusculo de momentanea corporum rotatione. Rotationum compositarum theoriam modo exornavimus, ac mox videbimus quam inde facilis solutio pateat pulcherrimorum præcessionis, nutationisque terrestris, & lunaris axis problematum.

VI.

De motu nodorum æquatoris Terræ, ☾ Lunæ.

Positis omnibus ut in priore parte §. IV., si oblata sphaerois revolvatur circa minorem axem, & minimo quocumque tempore dt fit angularis motus ds , adeoque fit $A ds$ arcus a puncto quolibet æquatoris descriptus eodem tempore circa axem, $\frac{A ds}{dt}$ velocitas rotationis in æquatore, & vis acceleratrix $\frac{A ds}{dt^2}$, evadet totum rotationis momentum = $\frac{4}{15} p A^4 a$.

$\frac{ds}{dt^2}$. Tum si eadem sphaerois circa diametrum æquatoris aliquam inclinetur, & juxta secundam partem §. IV. momentum virium perturbatricium fit = $mnP \cdot \frac{\varphi a}{a} \cdot \frac{4}{15} p a^5$; ob sphaeroidis, & sphaeræ affinitatem erunt duo momenta inter se ut angulares velocitates circa axem, & circa æquatoris diametrum conceptæ. Itaque axis compositæ rotationis, juxta §. V., ab axe prioris rotationis deviat angulo, cujus tangens erit

$$= \frac{mnP \cdot \frac{\varphi a}{a} \cdot \frac{4}{15} p a^5}{\frac{4}{15} p A^4 \cdot \frac{A ds}{dt^2}}, \text{ aut quam proxime } = \frac{mnP \cdot \varphi a \cdot dt^2}{A ds}.$$

inde erit si intelligamus solis viribus perturbatricibus circa diametrum æquatoris inclinari posse sphaeroidem, & vim acceleratricem puncti maxime distiti esse = ω . Evadet enim momentum sphaeroidis circa diametrum ipsam nutantis = $\frac{4}{15} p A^2 a^2 \omega$: quod cum æquari debeat momento virium perturbatricium $mnP \cdot \frac{\varphi a}{a} \cdot \frac{4}{15} p a^5$; eruetur $\omega = mnP \varphi a$ quam proxime, & velocitas rotationis conceptæ fiet = $mnP \cdot \varphi a \cdot dt$: qua rursus divisa per velocitatem $\frac{A ds}{dt}$ rotationis alterius circa

axem, tangens deviationis axis totius compositæ rotationis

$$\text{evadet rursus} = \frac{mnP \cdot \phi a \cdot dt^2}{A ds}.$$

Sit modo æquator Planetæ alicujus spheroidici, & circa polos compressi $NA n$ (*Fig. 11.*), & $NC n$ planum orbitæ Planetæ alterius attrahentis S , $N n$ linea nodorum, $AT r$ angulus tempore dt circa centrum descriptus, accipiaturque Ar : Ac ut velocitas diurni motus ad velocitatem rotationis, quæ circa diametrum Zz ob vires perturbatrices conciperetur, sive, manentibus omnibus, quæ supra, ut $A ds : mnP \cdot \phi a \cdot dt^2$. Completo rectangulo $Ac m r$, & per puncta A , T , m traducto plano, erit $N' A m n'$ nova æquatoris positio, & N' , n' nodi post tempus datum, demissisque ex N perpendicularibus NN' , NQ in planum $N'A$, & in lineam syzigiæ AB , atque ex A ducta AG nodorum lineæ perpendiculari, erit $Ar : mr = NQ : NN' = AG : NN'$, sive erit $NN' = \frac{mnP \cdot \phi a \cdot dt^2}{A ds}$. Rursus erit $NN' : NN' = \pi : 1$, si π fit sinus anguli, quem æquator cum plano orbitæ Planetæ attrahentis efficit.

Itaque erit arcus $NN' = \frac{mnP \cdot AG \cdot \phi a \cdot dt^2}{\pi A ds}$, & cum arcus mr , NN' ad oppositas partes jaceant, jacebunt etiam ad oppositas partes arcus Ar , NN' , & nodi N , n regredientur in plano orbitæ Planetæ S , eritque angularis ipsa regressio

$$= \frac{mnP \cdot AG \cdot \phi a \cdot dt^2}{\pi A^2 ds}.$$

Est vero m sinus, & n cosinus anguli, quo Planeta attrahens declinat ab æquatore, atque in triangulo spherico rectangulo ANC est tangens $\frac{\pi}{\sqrt{(1-\pi^2)}}$ anguli ANC , quem planum æquatoris cum plano orbitæ Planetæ attrahentis efficit, ad tangentem $\frac{m}{n}$ arcus AC declinationis ipsius Planetæ ab æquatore, ut sinus totus ad sinum arcus AN , sive ut $A : AG$.

Itaque erit $AG = \frac{m \cdot A \cdot \sqrt{(1-\pi^2)}}{n \pi}$. Rursus in eodem triangulo est sinus anguli ANC ad sinum totum ut sinus arcus AC ad CH sinum arcus CN . Itaque erit $m = \frac{\pi \cdot CH}{A}$, & an-

angularis nodorum motus evadet $= \frac{P \cdot \sqrt{(1-\pi^2)} \cdot CH^2 \cdot \varphi a \cdot dt^2}{A^3 ds}$
 $= \frac{3S \cdot \sqrt{(1-\pi^2)} \cdot CH^2 \cdot \varphi a \cdot dt^2}{ST^3 \cdot A^3 \cdot ds}$. Quod si insuper tempus pe-
 riodicum Planetæ T , aut S ad tempus diurnæ revolutionis se
 habeat ut $t:1$, & sit dz angulus tempusculo dt percursus,
 & g velocitas motus ipsius periodici, erit $ds = t dz$, & dt
 $= \frac{ST \cdot dz}{g}$. Denique vis centripeta $\frac{S}{ST^2}$ proportionalis erit
 velocitati, quæ per finem versum arcus $ST \cdot dz$ tempusculo
 dt cadendo gigneretur: & quia eadem velocitate, quæ motu
 uniformiter accelerato gignitur eodem tempore uniformiter
 continuata duplus finis versus absolvi potest; vis centripeta
 proportionalis erit duplo finis verso, aut duplo quadrato ar-
 cus per diametrum diviso, aut quadrato velocitatis diviso per
 solum radium, scilicet erit $\frac{S}{ST^2} = \frac{g^2}{ST}$. Factis hisce omnibus
 substitutionibus prodibit angularis nodorum motus $=$
 $\frac{3 \sqrt{(1-\pi^2)} \cdot CH^2 \cdot \varphi a \cdot g^2}{A^3 t dz} \cdot \frac{ST^2 \cdot dz^2}{g^2} =$
 $\frac{3 \sqrt{(1-\pi^2)} \cdot CH^2 \cdot \varphi a \cdot dz}{t A^3}$.

Iisdem factis substitutionibus deviatio $\frac{mnP \cdot \varphi a \cdot dt^2}{A ds}$ axis
 compositæ rotationis Mm (*Fig. 12*) ab axe figuræ Hh eva-
 det $= \frac{3 \pi \sqrt{(1-\pi^2)} \cdot CH^2 \cdot \varphi a \cdot dz}{t \cdot A^3 \cdot AG}$: scilicet in terra nostra ro-

tationis axis recedet ab axe figuræ in duplicata ratione distan-
 tiæ Solis aut Lunæ a punctis æquinoctialibus directe, & in
 simplici ascensionis rectæ reciproce, ac luminaribus delatis
 rursus ad puncta æquinoctialia axis uterque congruet. Tota
 tamen deviatio tam parva erit, ut perturbatricium virium ra-
 tione censeri possit rotationis axem ab axe figuræ sensibilibiter
 non recedere. Neque ratione motus circa axem Mm conce-
 pti, & momentis virium centrifugarum a se invicem sensibi-
 liter abduci poterunt bini axes. Etenim vis centrifuga puncti
 P proportionalis erit distantia PO ab axe motus, dirige-
 turque secundum PO , atque ideo in duas vires resolvi pote-
 rit,

rit, quarum una RP perpendicularis erit plano axium, & momentum $RP \cdot OT$ exercebit ad sphaeroidem omnem volvendam circa alium axem in eodem plano jacentem, & axi Mm perpendicularem in puncto T : altera RO parallela erit, & momentum exercebit $RO \cdot OT$ ad sphaeroidem volvendam circa novum axem plano $HZhz$ perpendicularem in puncto T . Patet autem momenta $RP \cdot OT$ in æqualibus distantiiis hinc inde a plano priorum axium æqualia esse, & contraria, ac se invicem destruere.

Quia vero parallelis planis dividitur tota sphaeroidis in ellipses similes ellipsi $HZhz$, si ad æquales a singulorum centris distantias TX , Tx diametro Mm educantur perpendiculara XY , xy , summa momentorum omnium $TX \cdot XY$ major erit summa omnium $Tx \cdot xy$, si sphaeroidis circa polos H , h compressa sit, & novum rotationis motum gignet ex H in M : contra vero erit ex M in H directio novi circularis motus, si sphaeroidis oblonga sit, & summa omnium $TX \cdot XY$ minor sit summa omnium $Tx \cdot xy$. Et quidem in sphaeroide oblata erit $mnP \cdot \frac{\varphi a}{a} \cdot \frac{4}{15} p a^2$ summa momentorum omnium hujusmodi, posito quod m , & n sint sinus, & cosinus anguli HTM , & P sit vis centrifuga puncti alicujus in æquatore maxime a centro distiti. Unde cum vis acceleratrix $\frac{A ds}{dt}$ ad vim centrifugam acceleratricem se habeat ut arcus ad duplum sinum versum, sive ut radius ad arcum ipsum, erit $P = \frac{A ds^2}{dt}$. Quo jam motus omnis circa axem Mm conceptus, & qui circa axem plano $HZhz$ perpendicularem ob inæqualitatem momentorum orietur, novum rotationis motum component circa novum axem, qui jacebit in plano axis illius perpendicularis, & axis alterius Mm , atque ab MT deviat

$$\text{angulo } \frac{mn \cdot \frac{\varphi a}{a} \cdot \frac{4}{15} p a^2 \cdot \frac{A ds^2}{dt^2}}{\frac{4}{15} p A^2 \cdot \frac{a ds}{dt^2}} = mn \cdot \frac{\varphi a}{A} \cdot t dz. \text{ Quare unitatem}$$

pro n scribendo, pro m vero $\frac{3\pi\sqrt{(1-\pi^2)} \cdot CH^2 \cdot \varphi a \cdot dz}{t \cdot A^2 \cdot AG}$, manifestum erit, quo tempore periodicus Planetæ motus angulo infinite parvo dz augetur, deviationem axis novæ rotationis com-

compositæ ab MT esse infinite parvam secundi ordinis: cumque ea deviatio fiat in plano per axem Mm traducto, & ad planum $HZhz$ normali; incrementum distantiae poli M a polo figuræ H erit infinite parvum tertii ordinis.

Cum igitur rotationis axis ab axe figuræ sensibilibiter non recedat, angularis omnis nodorum motus erit summa omnium $\frac{3\sqrt{(1-\pi^2)} \cdot CH^2 \cdot \phi a \cdot dz}{tA^3}$: & quia summa omnium CH^2 dimidia est summæ totidem A^2 , erit motus medius nodorum $\frac{3\sqrt{(1-\pi^2)} \cdot \phi a \cdot dz}{2tA}$, dimidius scilicet motus maximi, qui habetur in quadraturis Planetæ attrahentis, ac nodorum, & æqualis motui vero in octantibus. Cumque inclinatio media Eclipticæ, & æquatoris sit $23^\circ 28\frac{1}{2}'$, adeoque sit $\sqrt{(1-\pi^2)} = 0,9127533$, pro dz scribendo 360° , & $365\frac{1}{4}$ pro t in hypothesi Terræ totius solidæ, atque homogenæ, posito $\frac{\phi a}{A} = \frac{1}{231}$, esset præcessio annua æquinoctiorum ex Sole orta = $21\frac{1}{4}''$: quæ omnia cum iis congruant, quæ clarissimi viri de præcessione æquinoctiorum tradiderant, Alembertius §. 52., & 116, Simptonius Probl. 4. Coroll. 1., & Eulerus §. 41. Eodem modo inveniri poterit æquatoris lunaris motus in plano Eclipticæ, qui ex forma oblatæ, oblongæque spheroidis proficiscitur. Quoniam enim æquator Lunæ duobus circiter gradibus ad Eclipticam inclinatur, erit quam proxime $\sqrt{(1-\pi^2)} = 1$, & quia motus periodicus, & diurnus æquantur inter se, erit etiam $t = 1$. Quare si pro $\frac{\phi a}{A}$ scribatur $\frac{1}{115009}$, erit singulis Lunæ revolutionibus quæsitus nodorum motus, qui ex forma oblatæ spheroidis orietur = $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{115009} \cdot 1296000'' = 16,9''$, & annis singulis = $\frac{365^d 6^h 9'}{27^d 7^h 43'}. 16,9'' = \frac{525969}{39343} \cdot 16,9'' = 226''$. Quod si quæratur motus, qui ex forma oblongæ spheroidis oriri posset, erit momentum virium perturbatricium = $mnP \cdot \frac{\phi^a}{a} \cdot \frac{4}{15} pa^5 S^2$, & tangens deviationis axis = $\frac{mnP \cdot \phi^a \cdot S^2 \cdot dt^2}{Adt}$, & motus medius quæsitus =

$\frac{3^{\sqrt{(1-\pi^2)} \cdot \phi' a \cdot S^2 \cdot d z}}{2 r A}$: & si ob majorem Lunæ diametrum, & faciem fere eandem semper obversam Terræ, scribatur r loco S , spheroidi oblongæ oblata alia substitui poterit, in qua differentia semiaxium fit $\frac{r}{38369}$, & motus medius evadet singulis Lunæ revolutionibus $= \frac{3}{2} \cdot \frac{r}{38369} \cdot 1296000'' = 50, 6' 6''$, & annis singulis $= 676''$.

Porro vis perturbatrix lunaris orbitæ PA (*Fig. 13.*) est ad mediocrem vim, quæ a Sole S exercetur in Terram T ut $PT : ST$, & vis Terræ in Solem est ad vim Lunæ in Terram ut $ST : PT$ directe, & reciproce ut quadratum periodici temporis Terræ circa Solem ad quadratum periodici temporis Lunæ circa Terram: adeoque compositis rationibus, vis perturbatrix lunaris orbitæ PT est ad vim Terræ, qua Luna retinetur in orbe suo, ut quadratum temporis periodici Lunæ ad quadratum periodici temporis Terræ circa Solem, sive ut $1 : 179$ quam proxime. Utraque autem vis se habet ad vim perturbatricem lunaris corporis ut radius lunaris orbitæ PT ad radium Lunæ PR . Quare erit motus nodorum lunaris æquatoris genitus vi Solis ad motum genitum vi terræ ut $1 : 179$. Hæc autem ratio in Luna oblonga rursus minuenda esset in ratione $2 : 1$, quod ob majorem ipsius diametrum constanter obversam Terræ fit semper respectu Terræ $S = 1$, & ob mutatos aspectus omnes ejusdem diametri, & Solis uno mense fynodico quantitas S valores omnes obtineat, & fit $\frac{1}{2}$ valor medius quadrati S^2 . Si binæ igitur in Luna causæ ad nodorum motum conspirent, nimirum forma oblata spheroidis, quæ ex motu diurno Lunæ ortum ducit, & spheroidis oblongæ, quæ ex attractione Terræ proficisci posset, erit motus annuus nodorum vi Terræ genitus $= 902''$, & addendo $\frac{226'' + 338''}{179}$, sive $3''$ circiter ob vim Solis, fiet totus motus annuus nodorum lunaris æquatoris in plano Eclipticæ $= 15' 5''$.

VII.

De æquatione mediæ præcessionis æquinocetiorum .

Sint N, n (*Fig. 14.*) duo puncta, in quibus æquator Terræ $ANBn$ fecat Eclipticam CNn : M, m puncta, in quibus æquator fecat lunarem orbitam DMm : O, o intersectiones lunaris orbitæ, & æquatoris, & denotet N punctum æquinocetii verni, M nodum ascendentem Lunæ. Si Dh, Ag sint perpendiculares ex D , & A ductæ in lineam Oo , & per M ducatur arcus circuli maximi MP plano æquatoris perpendicularis, & vis perturbatrix Solis ad vim perturbatricem Lunæ se habeat ut $1:Q$, erit angularis motus nodorum æquatoris

cum plano lunaris orbitæ = $\frac{3Q \cdot \text{cof. } AOD \cdot Dh^2 \cdot \varphi a \cdot d\varphi}{2 \cdot A^3}$, & arcus ipse, quo nodus O regredietur, erit =

$\frac{3Q \cdot \text{cof. } AOD \cdot Dh^2 \cdot \varphi a \cdot d\varphi}{2 \cdot A^2}$. Erit vero arcus ipse ad arcum,

quem punctum O circa æquatoris radium AT , regrediente nodo, describet, ut sinus totus ad sinum anguli POM , five AOD . Rursus similes arcus, quos puncta æquatoris O , & N circa eundem radium AT describent, proportionales erunt sinibus angulorum OTA, NTA , five perpendicularibus Ag, AG . Denique arcus ita descriptus a puncto N erit ad arcum, quo nodus N regredietur in plano Eclipticæ CNn , ut $\pi:1$. Quare compositis rationibus erit arcus, quo nodus æquatoris N ob Lunæ vim regredietur in plano Eclipticæ =

$\frac{3Q \cdot \text{fin. } AOD \cdot \text{cof. } AOD \cdot Dh^2 \cdot AG \cdot \varphi a \cdot d\varphi}{\pi 1 \cdot Ag \cdot A^2}$: quam quantitatem

per radium A dividendo, & pro Dh^2 substituendo valorem medium $\frac{1}{2} A^2$, fiet motus medius angularis nodorum eclipticæ, & æquatoris vi Lunæ genitus =

$\frac{3Q \cdot \text{fin. } AOD \cdot \text{cof. } AOD \cdot AG \cdot \varphi a \cdot d\varphi}{2\pi 1 \cdot Ag \cdot A}$.

Est vero juxta elementa Trigonometriæ $AG = \text{fin. } AN = \text{fin. } AO \cdot \text{cof. } NO + \text{cof. } AO \cdot \text{fin. } NO$, & posteriore termino omisso, qui per integrum semicirculum ambiguitate signi destruitur, est $AG = \text{fin. } AO \cdot \text{cof. } NO = Ag \cdot \text{cof. } NO$.
T.V.P. II. F Rur-

Rurfus in triangulo sphærico obliquangulo MON , ex sphæricorum doctrina, est $\text{fin. } MON : \text{fin. } OMN = \text{fin. } MN : \text{fin. } NO$, adeoque est $\text{fin. } NO = \frac{\text{fin. } MN \cdot \text{fin. } OMN}{\text{fin. } MON}$, & si cofinus arcus MN vocetur $\pm q$, atque l finus inclinationis lunaris orbitæ ad eclipticam, erit $\text{fin. } NO = \frac{l \cdot \sqrt{(1 - q^2)}}{\text{fin. } AOD}$, & $\text{cof. } NO = \sqrt{(1 - \frac{l^2 + l^2 q^2}{\text{fin. } AOD^2})}$, atque ob exiguam lunaris orbitæ inclinationem ad planum eclipticæ negligendo quadratum finus l , fiet cofinus arcus NO quam proxime æqualis radio, & angularis medius nodorum motus evadet =

$$\frac{3 Q \cdot \text{fin. } AOD \cdot \text{cof. } AOD \cdot \phi a \cdot d \xi}{2 \pi \iota A}$$

Ex ipsa etiam Trigonometria est $\text{fin. } OMP = \text{fin. } NMP$. $\text{cof. } NMO - \text{cof. } NMP \cdot \text{fin. } NMO$, & in triangulo sphærico rectangulo MPN est $\text{fin. } NMP : \text{cof. } MNP = \text{fin. } OMP : \text{cof. } MOP$, adeoque est $\text{cof. } MOP = \text{cof. } AOD = \frac{\text{fin. } OMP \cdot \text{cof. } MNP}{\text{fin. } NMP} = \text{cof. } NMO \cdot \text{cof. } MNP - \frac{\text{fin. } NMO \cdot \text{cof. } MNP \cdot \text{cof. } NMP}{\text{fin. } NMP}$. Denique ex sphæricis est cofinus arcus MN ad finum totum, ut tangens complementi anguli PNM , sive $\frac{\text{cof. } MNP}{\text{fin. } MNP}$, ad tangentem anguli NMP , sive $\frac{\text{fin. } NMP}{\text{cof. } NMP}$, adeoque est $\frac{\text{cof. } NMP}{\text{fin. } NMP} = \text{cof. } MN \cdot \frac{\text{fin. } MNP}{\text{cof. } MNP}$. Erit igitur $\text{cof. } AOD = \text{cof. } NMO \cdot \text{cof. } MNP - \text{fin. } NMO \cdot \text{fin. } MNP \cdot \text{cof. } MN = \sqrt{(1 - \pi^2)} \cdot \sqrt{(1 - l^2)} \mp \pi l q$, & neglecto rursus l^2 , erit $\text{cof. } AOD = \sqrt{(1 - \pi^2)} \mp \pi l q$, & $\text{fin. } AOD = \sqrt{(1 - 1 \mp \pi^2 \pm 2 \pi \sqrt{(1 - \pi^2)} \cdot l q - \pi^2 l^2 q^2)} = \pi \pm l q \cdot \sqrt{(1 - \pi^2)}$, ac denique $\text{fin. } AOD \cdot \text{cof. } AOD = \pi \sqrt{(1 - \pi^2)} \mp \pi^2 l q \pm l q (1 - \pi^2) - \pi l^2 q^2 \sqrt{(1 - \pi^2)} = \pi \sqrt{(1 - \pi^2)} \pm l q \cdot (1 - 2 \pi^2)$, & medius angularis nodorum motus evadet =

$$\frac{3 Q \cdot (\pi \sqrt{(1 - \pi^2)} \pm l q \cdot (1 - 2 \pi^2)) \cdot \phi a \cdot d \xi}{2 \pi \iota A}$$

Formulae modo inventae pars prior $\frac{3 Q \cdot \sqrt{(1 - \pi^2)} \cdot \phi a \cdot d \xi}{2 \iota A}$

exprimet præcessionem æquinoctiorum, quæ media erit pro loco quolibet nodi ascendentis lunaris orbitæ: scilicet æqualis erit præcessioni veræ in octantibus nodorum, & dimidia præcessionis maximæ in quadraturis. Pergendo autem ab O ad D summa motuum omnium verorum præcessionis erit ut summa omnium Dh^2 , sive ut DT ducta in segmentum circulare DhO : & summa motuum omnium mediocrium erit ut summa omnium $\frac{1}{2}DT^2$, sive ut DT ducta in sectorem circula-rem $DT O$: & duorum motuum differentia erit ad motum totalem verum ut triangulum DTh ad segmentum DhO , ad motum autem totalem medium ut DTh ad $DT O$. Quare in octantibus, cum sit $Dh = hT$, differentia eadem evadet maxima, & ad totalem motum medium se habebit ut $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{16}p$, sive ut dupla diameter ad peripheriam: quæ pariter ratio est æquationis medii nodorum motus ex Sole orti. Pars

vero altera superioris formulæ $\frac{\pm 3 Q \cdot l q \cdot (1 - 2\pi^2) \cdot \phi a \cdot d z}{2\pi^2 A}$ exprimet præcessionis mediæ æquationem, quæ ex Lunæ viribus pendebit, & vario loco nodi ascendentis lunaris orbitæ. Scilicet in regressu nodi ascendentis ab æstivo ad hyemale solstitium præcessionis motus augebitur in ratione quantitatis q , sive in ratione cosinus distantiæ nodi ascendentis ab Æquinoctio. Nodo autem ipso ab hyemali solstitio ad æstivum redeunte verus præcessionis motus minuetur iisdem gradibus, quibus antea augebatur.

Maxima differentia medii, & veri motus nodorum terrestris æquatoris habebitur nodo ascendente lunaris orbitæ in punctis æquinoctialibus constituto, posito scilicet $q = \pm 1$, atque erit maxima eadem differentia =

$$\frac{\pm 3 Q \cdot l \cdot (1 - 2\pi^2) \cdot \phi a \cdot d z}{2\pi^2 A}, \text{ \& medius præcessionis motus ad differentiam ipsam se habebit ut } \pi \cdot \sqrt{(1 - \pi^2)} : \pm l \cdot (1 - 2\pi^2) \\ = \frac{\pi \cdot \sqrt{(1 - \pi^2)}}{1 - 2\pi^2} : l. \text{ Est vero } 1 - 2\pi^2 = 2(1 - \pi^2) - 1,$$

qui est cosinus duplæ inclinationis eclipticæ, & æquatoris, atque est $\pi \sqrt{(1 - \pi^2)}$ dimidium sinus ejusdem duplæ inclinationis, adeoque est $\frac{\pi \cdot \sqrt{(1 - \pi^2)}}{1 - 2\pi^2}$ dimidia duplæ inclinatio-

nis tangens. Itaque tangens duplæ inclinationis eclipticæ, & æquatoris erit ad finum duplæ inclinationis eclipticæ, & orbitæ lunaris, ut præcessio æquinoctiorum annua mediocris vi Lunæ genita ad differentiam præcessionis mediocris, & maximæ, aut minimæ: quod elegans theorema cum aliis pluribus a clariss. Walmesley inventum est in Transactionibus Philosophicis.

Dum autem nodus ascendens lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus regredietur per datum quemcumque arcum MN, erit summa motuum omnium mediocrium ad totam præcessionis æquationem ut summa omnium $\pi \sqrt{(1 - \pi^2)}$ ad summam totidem $\pm l q \cdot (1 - 2\pi^2) = \pi \sqrt{(1 - \pi^2)}$
 $\frac{\cdot S d q}{\sqrt{(1 - q^2)}} : \pm l \cdot (1 - 2\pi^2) \frac{\cdot S q d q}{\sqrt{(1 - q^2)}} = \pi \sqrt{(1 - \pi^2)}$.
 MN : $l \cdot (1 - 2\pi^2)$. sive MN : tota nimirum præcessionis æquatio augebitur in simplici ratione sinus distantiae nodi ascendens lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus, & nodo ad puncta solstitialia transeunte æquatio ipsa fiet maxima, & præcessioni addenda erit in signis meridionalibus, in borealibus vero subtrahenda, ut etiam ferunt theoremata, & tabulæ a Simpsonio traditæ in scholio, & corollariis Problematis septimi. In transitu nodi ascendens a punctis æquinoctialibus ad solstitialia cum fiat $MN = \frac{1}{4} p A$, & sin. MN = A, erit tota præcessio media ad maximam differentiam mediæ, & veræ præcessionis ut $\pi \sqrt{(1 - \pi^2)} \cdot \frac{1}{4} p : \pm (1 - 2\pi^2) \cdot l = 1 :$
 $\frac{\pm (1 - 2\pi^2) \cdot l}{\pi \cdot \sqrt{(1 - \pi^2)} \cdot \frac{1}{4} p}$.

Quare si motus medius nodi ascendens lunaris orbitæ ad motum medium præcessionis æquinoctiorum vi Lunæ genitum se habeat ut $n : m$, quo tempore nodus ascendens absolvet arcum 90° , erit motus medius præcessionis $= \frac{m}{n - m} \cdot 90^\circ$, & mediæ, ac veræ præcessionis differentia erit =
 $\frac{\pm (1 - 2\pi^2) \cdot m l \cdot 90^\circ}{\pi \cdot (n - m) \sqrt{(1 - \pi^2)} \cdot \frac{1}{4} p}$: & cum sit $\frac{2\pi \sqrt{(1 - \pi^2)}}{1 - 2\pi^2}$ tangens inclinationis duplæ eclipticæ, & æquatoris, & $2l$ duplex sinus inclinationis lunaris orbitæ ad eclipticam, erit motus idem medius præcessionis $\frac{m}{n - m} \cdot 90^\circ$ ad præcessionis æquationem ha-

bitam

bitam in transitu nodi ascendenti a punctis æquinoctialibus ad solstitialia in ratione composita quadrantis $\frac{1}{4} p$ ad radium, & tangentis inclinationis duplæ eclipticæ, & æquatoris ad duplum sinum inclinationis lunaris orbitæ ad eclipticam. In-

super cum sit $\frac{90^\circ}{\frac{1}{4} p} = \frac{20000 \cdot 90^\circ}{31415} = 57^\circ 17' 51''$, erit eadem differ-

ferentia mediæ, ac veræ præcessionis =

$$\frac{\pm (1 - 2\pi^2) \cdot ml \cdot 57^\circ 17' 51''}{\pi(n - m) \vee (1 - \pi^2)}$$

VIII.

De nutatione terrestris axis.

NUtatio terrestris axis, & variatio inclinationis axis ipsius ad Eclipticam, alia est quæ in transitu Solis, aut Lunæ ab uno ad aliud æquinoctium absolvitur, alia quæ respondet revolutioni nodi ascendenti lunaris orbitæ. Ut a prima exordiamur sit angularis motus nodorum Eclipticæ, & æquatoris, sive regressio punctorum æquinoctialium = dy , arcus NN' (*Fig. 11.*) quo regrediuntur nodi = $A dy$, & arcus NN'' , quo punctum nodi prioris N supra planum eclipticæ elevabitur = $A\pi dy$. Dum hac ipsa prioris nodi elevatione æquator CN in CN' abibit, arcus Pp (*Fig. 15.*), quem polus telluris P circa lineam AB , & secundum Tz describet, erit = $\frac{Aa\pi dy}{NQ} = \frac{Aa\pi dy}{AG}$. Resolvatur hic motus in duos alios secundum TQ perpendicularem, & Qz parallelam nodorum lineæ Nn , sive in $\frac{TQ \cdot a\pi dy}{AG}$, & $\frac{Qz \cdot a\pi dy}{AG}$. Ob æquales angulos QTz , GTA , erit $AG = Qz$, $TG = TQ$, & fiet prior motus = $\frac{TG \cdot a\pi dy}{AG}$, alter vero = $a\pi dy$. Itaque polus ipse binos motus præferet, quorum unus parallele ad rectam TQ , & circa lineam nodorum Nn absolvetur, inclinationemque eclipticæ, & æquatoris variabit angulo $\frac{TG \cdot \pi dy}{AG}$: alter vero, qui parallelus erit rectæ Qz , efficiet ut polus circa axem Eclipticæ TH nodorum lineæ perpendicularem describat angulum $\frac{a\pi dy}{HP} = dy$, æqualem scilicet angulari nodorum

rum

rum eorundem motui: atque erit angularis motus nodorum ad variationem inclinationis eclipticæ, & æquatoris ut dy :

$$\frac{TG \cdot \pi dy}{AG} = AG : \pi \cdot TG.$$

Si negligatur motus, qui solam inclinationem afficit, & qui una semirevolutione Solis, aut Lunæ circa Terram restituitur, ducaturque planum PTM, quod sit eclipticæ, & lineæ nodorum Nn perpendicularare; manifestum est motis nodis, & per totam æquatoris peripheriam decurrentibus, planum ipsum, ac totam terram circa axem eclipticæ revolvi oportere. Ita ex omnibus æquatoris terrestres nutationibus circa omnes diametros AB conceptis, unicus motus exfurget, qui nodos dumtaxat retrahet, & circa axem eclipticæ absolvetur: atque axis rotationis terræ circa axem eclipticæ duas conicas superficies sibi invicem in centro obversas designabit, & poli terræ circa polos eclipticæ duos circulos. Quia vero nodorum motus æquabilis non est, iidem circuli a polo terræ inæquabiliter describentur, & maxima poli velocitas habebitur in quadraturis Solis, aut Lunæ, & nodorum: universim autem velocitas proportionalis erit quadrato distantia Solis, aut Lunæ a punctis æquinoctialibus. Denique hic motus circa axem eclipticæ contra ordinem signorum, sive ab oriente in occidentem cum fiat; Stellæ fixæ, atque alia cælestia corpora ab occidente in orientem progredi videbuntur, & retrocedentibus semper nodis, Stellarum longitudo, quæ a prima interfectione eclipticæ, & æquatoris supputatur, semper augebitur, & incrementum annum longitudinis annuo nodorum motui æquale erit.

Porro in triangulo spherico ANC (*Fig. II.*) est colinus ANC ad sinum totum ut co-tangens arcus CN, sive $\frac{TH}{CH}$, ad co-tangentem arcus AN, sive $\frac{TG}{AG}$. Quare erit $\frac{TG}{AG} = \frac{TH}{\sqrt{(1-\pi^2)} \cdot CH}$, & angularis nodorum motus ad variationem inclinationis eclipticæ, & æquatoris se habebit ut $\sqrt{(1-\pi^2)} \cdot CH : \pi \cdot TH$: scilicet erit tangens $\frac{CH}{TH}$ distantia ab æquinoctiis ad tangentem $\frac{\pi}{\sqrt{(1-\pi^2)}}$ obliquitatis eclipticæ, ut præcessio horaria æquinoctiorum ad variationem ho

horariam inclinationis. Ipsa autem variatio horaria erit = $\frac{3\pi \cdot CH \cdot TH \cdot \varphi a \cdot d z}{r \cdot A^3}$; scilicet dum Planeta attrahens in syzigiis

aut quadraturis cum nodorum linea reperietur, nulla erit variatio, & in octantibus erit maxima, atque in transitu a syzigiis nodorum ad primam quadraturam augebitur inclinatio, ac deinde imminuetur iisdem gradibus, quibus antea creverat, & singulis semirevolutionibus restituetur in gradum pristinum. In octantibus cum sit $CH = TH$, & verus præcessionis motus æquetur medio, erit motus ipse præcessionis ad motum maximum variatæ inclinationis habitum eodem tempore ut $\sqrt{(1 - \pi^2)} : \pi$. In transitu autem Planetæ attrahentis a syzigiis nodorum ad quadraturas erit tota variatio inclinationis ad summam variationum totidem maximarum ut summa omnium $TH \cdot CH$ ad summam totidem $\frac{1}{2} A^2$, sive ut $\frac{1}{2} A^3 : \frac{1}{2} p A^3$, vel ut dupla diameter ad peripheriam.

Denique tota præcessio æquinoctiorum habita in ipso transitu a syzigiis nodorum ad quadraturas erit ad variationem totam inclinationis eclipticæ, & æquatoris in ratione composita $\sqrt{(1 - \pi^2)} : \pi$, & $p : 4$, sive erit tota eadem variatio = $\frac{6\pi \cdot \varphi a \cdot 90^\circ}{p t A}$, nimirum quarta proportionalis ad $\frac{1}{4} p$, $\frac{3 \sqrt{(1 - \pi^2)} \cdot \varphi a \cdot 90^\circ}{2 t A}$, & $\frac{\pi}{\sqrt{(1 - \pi^2)}}$: quod aliud clarissimi

Walmesley theorema est. Substitutis suo loco numeris in hypothesi terræ totius solidæ, & homogeneæ, ac posito $\frac{\varphi a}{A} = \frac{1}{231}$, & $\pi = \frac{2}{3}$, fiet circiter $1\frac{1}{2}''$ tota variatio inclinationis æquatoris terrestris ad eclipticam, quæ habebitur transeunte Sole a punctis æquinoctialibus ad solstitialia. Pariter cum Lunæ æquator duobus fere gradibus inclinetur ad planum eclipticæ, ut dictum est, & sit $226''$ annuus nodorum motus, qui ex vi Terræ, & ex forma oblata Lunæ oriretur, posito $\sqrt{(1 - \pi^2)} = 9993908$, & $\pi = 348995$, fiet $\frac{348995 \cdot 226''}{9993908}$, aut fere $8''$ variatio annua inclinationis lunaris æquatoris, si in eadem hypothesi nodorum linea in octantibus semper esset cum linea, quæ centra Terræ, & Lunæ conjungit: in toto autem transitu nodorum a quadraturis ad syzigiis cum terra,

sum-

summa variationum omnium huiusmodi minuenda erit in ratione peripheriæ ad duplam diametrum.

Ut inveniatur nutatio alia terrestris axis, quæ pendet ex Lunæ vi, atque ex loco nodi ascendentis lunaris orbitæ retinendum est quod initio superioris paragraphi invenimus, esse

scilicet $\frac{3 Q. \text{ cof. A O D. } D h^2 \cdot \varphi a \cdot d z}{r A^2}$ arcum, quo nodus æquato-

ris terrestris O (*Fig. 14.*) cum plano lunaris orbitæ in plano ipso D O o regreditur, eundemque arcum se habere ad arcum alium, quem punctum O circa æquatoris radium AT, regrediente nodo, describet, ut sinus totus ad sinum anguli

A O D. His enim positis erit $\frac{3 Q. \text{ fin. A O D. cof. A O D. } D h^2 \cdot \varphi a \cdot d z}{r A^2}$

arcus, & $\frac{3 Q. \text{ fin. A O D. cof. A O D. } D h^2 \cdot \varphi a \cdot d z}{r A^2 \cdot A g}$ angulus quem

nodus O, adeoque etiam polus, & axis terræ circa lineam AT describet. Eodem igitur modo, quo antea, resolutio poli terrestris motu, (*Fig. 15.*) erit angulus quem axis terræ describet circa lineam N n nodorum æquatoris terrestris, & eclipticæ, quoque eclipticæ obliquitas variabitur =

$\frac{3 Q. \text{ fin. A O D. cof. A O D. } D h^2 \cdot T G \cdot \varphi a \cdot d z}{r A^3 \cdot A g}$. Est vero TG = Ag.

fin. NO — $\frac{T g \cdot \text{ cof. NO}}{T h}$, atque ex sphericis est $\frac{T g}{A g} = \frac{T h}{D h \cdot \text{ cof. A O D}}$. Itaque erit variatio eadem inclinationis axis terrestris ad eclipticam =

$\frac{3 Q. \text{ fin. A O D.}}{r A^3} \cdot (\text{ cof. A O D. } D h^2 \cdot \text{ fin. NO} - D h \cdot T h \cdot \text{ cof. NO}) \cdot \varphi a \cdot d z$, & si pro $D h^2$ substituat

valor medius $\frac{1}{2} A^2$, & $\frac{2 A^2}{p}$ pro $D h \cdot T h$ fiet variatio eadem media = $\frac{3 Q. \text{ fin. A O D.}}{r A} \cdot (\frac{1}{2} \text{ cof. A O D. } \text{ fin. NO} - \frac{2 \cdot \text{ cof. NO}}{p}) \cdot \varphi a \cdot d z$.

Hæc formula complectetur rursus duas partes, quarum altera — $\frac{3 Q. \text{ fin. A O D. } 2 \text{ cof. NO} \cdot \varphi a \cdot d z}{r p A}$ singulis Lunæ semire-

volutionibus contrario signo destruetur, & quia juxta paragraphum antecedentem cosinus NO est proxime æqualis radio, &

& est fin. AOD = $\pi \pm lq \sqrt{(1 - \pi^2)}$, expressio ipsa in hanc aliam vertetur $\frac{-6Q \cdot \phi a \cdot d z}{i p A} \cdot (\pi \pm lq \sqrt{(1 - \pi^2)})$: adeoque

præcessio media æquinoctiorum eo tempore habita, quo Luna a punctis æquinoctialibus transibit ad solstitialia, erit ad variationem mediam inclinationis ut $p \sqrt{(1 - \pi^2)} : 4\pi$. Prior vero formulæ ejusdem pars $\frac{3Q \cdot \text{fin. AOD} \cdot \text{cos. AOD} \cdot \text{fin. NO} \cdot \phi a \cdot d z}{2 i A}$

pendebit ex loco nodi ascendantis lunaris orbitæ, & si pro fin. NO scribatur $\frac{l \cdot \sqrt{(1 - q^2)}}{\text{fin. AOD}}$, & $\sqrt{(1 - \pi^2)} \pm \pi lq$ pro cos. AOD, negligaturque posterior terminus, qui una nodorum semirevolutione ambiguitate signi destruitur, fiet

$\frac{3Q \cdot l \cdot \sqrt{(1 - \pi^2)} \cdot \sqrt{(1 - q^2)} \cdot \phi a \cdot d z}{2 i A}$ variatio inclinationis axis terrestris ad eclipticam, scilicet erit ipsa proportionalis distantia nodi ascendantis a punctis æquinoctialibus.

Jam vero in regressu nodi ascendantis a punctis solstitialibus ad æquinoctialia est summa omnium $\sqrt{(1 - q^2)} = S \cdot \sqrt{(1 - q^2)} \cdot \frac{d q}{\sqrt{(1 - q^2)}}$ = $\pm q$. Itaque in regressu nodi

ascendentis lunaris orbitæ a solstitio æstivo ad æquinoctium vernum augebitur eclipticæ obliquitas, & fiet maxima nodo ipso ad æquinoctii punctum delato: tum nodo regrediente ad solstitium hyemale obliquitas eclipticæ restituetur in statum pristinum. In regressu nodi ascendantis a solstitio hyemali ad æquinoctium autumnale fiet minima eclipticæ obliquitas, ac postmodum ad obliquitatem mediam rursus redibit. Dato autem quocumque tempore erit tota variatio inclinationis ad differentiam mediæ, & maximæ obliquitatis ut $\pm q : 1$, sive ut cosinus distantia nodi ab æquinoctio ad sinum totum.

Denique valor medius quantitatis $\sqrt{(1 - q^2)}$ est = $\frac{\pm 1}{\frac{1}{2} p}$. Quare in regressu nodi ascendantis a punctis æquino-

ctialibus ad solstitialia erit media obliquitatis variatio = $\frac{\pm 6Q \cdot l \cdot \sqrt{(1 - \pi^2)} \cdot \phi a \cdot d z}{p i A}$, & anno integro =

$\frac{\pm 6Q \cdot l \cdot \sqrt{(1 - \pi^2)} \cdot \phi a \cdot 360^\circ}{p i A}$, & quia revolutio nodorum lu-

naris orbitæ absolvitur 18 annis, & 7 mensibus, erit quarta

parte ipsius revolutionis tota obliquitatis variatio =

$$\frac{\pm 3 Q . l . \sqrt{(1 - \pi^2)} . \varphi a . 18 \frac{7}{12} . 360^\circ}{p t A}$$
, & maximæ, ac minimæ
 obliquitatis eclipticæ differentia, quæ habebitur nodo ascen-
 dente in punctis æquinoctii verni, & autumnalis constituto,
 erit =
$$\frac{3 Q . l . \sqrt{(1 - \pi^2)} . \varphi a . 18 \frac{7}{12} . 360^\circ}{p t A}$$
, five, retentis etiam l^2 ,
 accuratius erit =
$$\frac{3 Q . l . \sqrt{(1 - l^2)} \sqrt{(1 - \pi^2)} . \varphi a . 18 \frac{7}{12} . 360^\circ}{p t A}$$
.

Pariter binis formulis præcessionis æquinoctiorum, & nutationis terrestris axis collatis inter se invicem, erit motus præcessionis ex Luna ortæ ad motum medium nutationis ut $1 : \frac{4l}{p}$, five accuratius ut $1 : \frac{4l}{p} . \sqrt{(1 - l^2)}$. Quare si motus medius nodorum lunaris orbitæ ad motum medium præcessionis æquinoctiorum vi Lunæ genitum ut supra se habeat sicuti $n : m$, & quo tempore nodus ascendens per arcum 90° regreditur fit motus medius præcessionis = $\frac{m}{n - m} . 90^\circ$, erit tota nutatio terrestris axis eodem tempore vi Lunæ genita = $\frac{\pm m}{n - m} . l . \sqrt{(1 - l^2)} . \frac{90^\circ}{\frac{4}{3} p} = \frac{\pm m}{n - m} . l . \sqrt{(1 - l^2)} . 57^\circ 17' 51''$, & fiet maximæ, ac minimæ obliquitatis eclipticæ differentia = $\frac{2m}{n - m} . l . \sqrt{(1 - l^2)} . 57^\circ 17' 51''$.

IX.

De inæqualitatibus axis Terræ.

EX hisce formulis præcessionis æquinoctiorum, & nutationis terrestris axis facile eruitur proportio virium, quæ a Sole, & Luna exercentur in Terram nostram, & quibus datis definiri possunt inæqualitates omnes terrestris axis, quæ ex Sole, & Luna ortum ducunt. Cum enim sit tota præcessio annua æquinoctiorum, quæ ex viribus conjunctis oritur, $50, 3''$, & nutatio terrestris axis, quæ oritur ex vi Lunæ, sit $19''$, ut peculiaribus litteris ex Anglia datis Bradlejum ex ferie observationum diligentissimarum collegisse accepi, erit

$$\frac{3(1+Q) \cdot \sqrt{(1-\pi^2)} \cdot \phi a \cdot 360^{\circ}}{2tA} :$$

$$\frac{3Q \cdot l \cdot \sqrt{(1-l^2)} \cdot \sqrt{(1-\pi^2)} \cdot \phi a \cdot 18 \frac{7}{12} \cdot 360^{\circ}}{ptA} = 50, 3'' : 19'', \&$$

inde eruetur $1+Q:Q = l \cdot \sqrt{(1-l^2)} \cdot 18 \frac{7}{12} \cdot 503 : p \cdot 95$,
 atque in locum specierum substitutis iterum numeris erit
 $1+Q:Q = 503:356$, & $1:Q = 147:356 = 1:2, 422$.
 Et quia vires perturbatrices sunt ut densitates, & cubi dia-
 metrorum apparentium conjunctim, per Coroll. 14. Propos. 66.
 Princip. Mathem. Newtoni; densitas Solis ad densitatem Lu-
 næ se habebit ut $1:2, 422$, & cubus diametri Lunæ ad cu-
 bum diametri Solis, sive (diametros apparentes mediocres
 Solis, & Lunæ statuendo cum eodem Newtono $32' 12''$, &
 $36' 16\frac{1}{2}''$) ut $1:2, 422$, & $52861038777:57691436544$ con-
 junctim, sive denique ut $1:2, 643$.

Est vero densitas Terræ ad densitatem Solis ut $4:1$, per
 Coroll. 3. Propos. 8. Lib. 3. Princip., quæ ratio, ut Newto-
 nus ipse animadvertit, non pendet a parallaxi Solis, sed a
 parallaxi Lunæ dumtaxat, semidiametro apparenti mediocri
 Solis, ratione distantiarum Terræ, & Veneris a Sole, & ra-
 tione temporum periodicorum Veneris, & Lunæ: adeoque
 in qualibet parallaxis Solis hypothefi recte definita est. Itaque
 densitas Terræ ad densitatem Lunæ se habebit ut $4:2, 643$.
 Rursus vera Lunæ diameter est ad veram diametrum Terræ
 ut $100:365$. Quantitas igitur materiæ in Terra ad quantita-
 tem materiæ in Luna se habebit ut $4:2, 643$, & $48627125:$
 1000000 conjunctim, sive ut $1945085:26430$, vel denique
 ut $73:1$, quemadmodum initio a nobis assumptum fuit. In
 hac ratione si dividatur distantia Terræ a Luna, prodibit di-
 stantia Terræ a centro gravitatis, circa quod cum Luna simul
 revolvitur. Et si fiat ut $22000:\frac{60}{74}$ ita sinus totus ad quartum,
 erit $3, 5$ sinus anguli maximæ aberrationis Terræ ab eodem
 centro, adeoque Terra in prima quadratura $7''$ circiter gravi-
 tatis centrum antecedit, & totidem subsequetur in altera qua-
 dratura Lunæ, & differentia omnis ne ad quartam quidem
 minuti unius partem ascendet.

Quia vero tota æquinoctiorum præcessio, quæ ex conjun-
 ctis viribus Solis, ac Lunæ oritur, est annis singulis $= 50,$

3'', atque est insuper $1 + Q : Q = 503 : 356$; erit $35'' 36'''$ præcessio media annua, quæ ex Luna, & $14'' 42'''$ præcessio media, quæ ex Sole annis singulis ortum ducet. At in hypothefi Terræ totius solidæ, atque homogeneæ, posito $\frac{p^a}{A} = \frac{1}{231}$, prodit annua præcessio ex Sole orta = $21\frac{1}{4}''$, ut in §. VI. dictum est. Vis igitur, quæ a Sole in exteriorem Terram vere exercetur, & quæ ad motum punctorum æquinoctialium impenditur, exæquat duas tertias partes vis omnis, quæ in hypothefi Terræ totius solidæ similiter exerceretur. Et quidem si intelligamus tertiam partem materiæ, quæ in exteriori terra extra inscriptam spheram redundat, fluidam esse, patebit hujus phænomeni ratio physica. Cum enim fluida viribus quibuscumque impulsa, & agitata pressioem suam versus quamcumque partem æqualiter in solida corpora exercent; ex attractione fluidarum partium nullus totius massæ terrestris motus oriri poterit, ut recte ab Alembertio notatum est §. 82 de præcessione æquinoctiorum. Si terra ex stratis spheroidicis, & ad centrum densioribus componeretur, differentia ponderum absolutorum in polis, & æquatore, major quidem esset quam in hypothefi terræ homogeneæ; sed major etiam prodiret æquinoctiorum præcessio, ad quam strata singula conducerent, & exterioris terræ pars plusquam tertia admittenda esset fluida, quod affusorum marium considerationi minus consentaneum videtur esse. Idcirco cum ex omnibus hypothefibus eam quæreremus, quæ esset simplicior, & phænomenis omnibus satisfaceret, primo statuimus terrestres axes esse inter se ut 230 : 231, & aliquam rationis hujus disensionem a quibusdam graduum mensuris in irregularitates exterioris terræ rejecimus: deinde omnem terram, quæ extra inscriptam spheram redundat, quinta sui parte rariorem esse intelleximus ut pendulorum experimenta explicarentur: ac denique materiæ ejusdem circa æquatorem redundantis tertiam fere partem fluidam esse censuimus, ut præcessione æquinoctiorum, & nutationis terrestri axis observationibus simul omnibus satisfaceret.

Quia præcessio æquinoctiorum eo tempore habita, quo Sol tendit ab æquinoctiis ad solstitia, est ad variationem totam inclinationis eclipticæ, & æquatoris ex Sole ortam ut $\sqrt{(1 - \pi^2)} \cdot p : 4\pi$, positis omnibus, quæ supra, fiet variatio eadem unius secundi circiter. Variatio autem, quæ

Luna ab æquatore ad Tropicos transeunte habebitur, ne ad sextam quidem ascendet unius secundi partem. Denique præcessio media vi Lunæ genita, quo tempore nodus ascendens lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus transibit ad solstitia, seu quarta parte unius nodi revolutionis, erit circiter $166''$: unde cum motus medius punctorum æquinoctialium ad æquationem motus ipsius medii, juxta §. VII., se habeat ut $\pi \sqrt{(1 - \pi^2)} . p : 4 (1 - 2\pi^2) . l$, fiet $18''$ circiter æquatio maxima præcessionis, quæ toti præcessioni mediæ addenda erit dum nodus ascendens ab æquinoctio verno regredietur ad solstitium hyemale, detrahenda vero dum ab autumnali æquinoctio regredietur nodus ad solstitium æstivum. Quod si fiat ut sinus totus ad sinum distantiae nodi ascendentis lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus, ita $18''$ ad quartum, habebitur æquatio, quæ dato nodi ascendentis loco toti præcessioni mediæ addenda erit, aut detrahenda. Differentia omnis maximæ, & minimæ præcessionis, sive angulorum a polo terræ circa polum eclipticæ una nodi ascendentis revolutione ob Lunæ vim descriptorum erit $36''$: & si fiat demum ut sinus totus ad sinum inclinationis axium Terræ, & Eclipticæ, ita $36''$ ad quartum, evadet $14''$ angulus ille, quem axis Terræ in plano coluri æquinoctiorum circa centrum eodem tempore absolvet.

Hinc eruetur facile æquatio, quæ annis singulis præcessioni mediæ æquinoctiorum addenda aut detrahenda erit. Cum enim regressus annuus nodi ascendentis sit $19^\circ 21'$ circiter, si nodi ipsius a punctis æquinoctialibus distantia, dimidio anno quovis proposito, vocetur π , adeoque ineunte anno sit $\pi - 9^\circ 40'$, & anno labente $\pi + 9^\circ 40'$, fiet tota anni illius æquatio $= 18''$. $(\sin. \pi + 9^\circ 40' - \sin. \pi - 9^\circ 40') = 18'' . 2 \cos. \pi . \sin. 9^\circ 40' = 36'' . \sqrt{(1 - q^2)} . \sin. 9^\circ 40' = 6'' . \sqrt{(1 - q^2)}$ circiter. Annuæ igitur, & mediocris præcessionis æquatio proportionalis erit cosinui distantiae nodi ascendentis lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus, & regrediente nodo ab æstivo solstitio ad hyemale præcessionem eandem mediam augebit, totamque præcessionem annuam efficiet maximam nodo ascendente ad æquinoctium vernum delato. In semirevolutione nodi altera contrarium accidet, & annua præcessio minima habebitur nodo ascendente in puncto æquinoctii autumnalis con-

stituto. Hoc theoremate tabulam præcessionis totius pro anno quovis proposito exhibuit Eulerus ad calcem suæ dissertationis. Ex. gr. quoniam initio Novembris mensis anno 1759 nodus ascendens Lunæ ad prima Cancræ puncta pervenit, anno illo media æquinoctiorum præcessio præcessioni veræ æqualis cenferi potuit. Et quoniam nodus ipse medio fere anno 1764 ad æquinoctium vernum transit, eo anno maxima præcessionis quantitas habita est, quæ rursus in mediam recidet initio anni 1769, & circa finem anni 1773 evadet minima. Et quidem præcessio maxima anni 1764 statui debet $56''$, & $44''$ præcessio minima anni 1773. Annis 1762, & 1766 vera præcessio statuenda est $55''$, & $53''$ annis 1761, & 1767.

Angulus vero quo axis terræ in plano coluri solstitiorum nutabit, erit $19''$, & axis verus hinc inde ab axe medio aberrabit angulo $9\frac{1}{2}''$. Quod si fiat ut sinus totus ad cosinum distantia nodi ascendens lunaræ orbitæ a punctis æquinoctialibus, ita hæc dimidia nutatio, sive dimidia variatio inclinationis eclipticæ, & æquatoris ad differentiam inter variationem dimidiam, & variationem habitam dato tempore; habebitur tota nutatio, quæ dato nodi ascendens loco respondebit. Sic si nodus lunæ uno signo distet a punctis solstitialibus, erit nutatio $8''$, si vero distet uno signo, atque insuper 10° , 15° , 25° , 30° erit $7''$, $6''$, $5''$, $4''$ circiter. Atque ita nutationis motus ellipsi exhiberi poterit, cujus centrum sit medius poli locus, major axis sit $19''$ circuli unius maximi, axis minor $14''$, & ille quidem in plano coluri solstitiorum jaceat, hic vero in plano coluri æquinoctiorum: & motus omnis poli terrestris fatis accurate exhiberi poterit ellipseos ejusdem centro circa polum eclipticæ revoluto ea cum velocitate, quæ ad velocitatem maximam se habeat ut summa duorum quadratorum ex sinibus distantia Solis, & Lunæ a punctis æquinoctialibus in respectivas perturbatrices vires ductorum, ad quadratum sinus totius ductum in summam duarum virium. Aberrationis axis, inclinationisque eclipticæ ad æquatorem variatio, quæ luminaribus ab æquatore ad tropicos transeuntibus habebitur, nimis exigua erit, quemadmodum antea vidimus, quam ut motus poli terrestris eadem ellipsi exhibitus sensibilibiter immutetur.

X

De inæqualitatibus axis Lunæ.

SI eodem modo definiri posset proportio virium, quæ vere in Lunam agunt, & quæ in hypothefi Lunæ totius solidæ, homogeneæ, & spheroidicæ exercerentur, inæqualitates diurni motus accurate in Luna etiam innotescerent. At cum marium superficies non nisi quintam, aut sextam occupet disci lunaris partem, cum maria versus marginem sint omnia, parvæ extensionis singula, insulis interspersa, divisa a se invicem, adeoque lacuum potius speciem referant, & magna in super sui parte ex materia solida, & ad lucem reflectendam minus idonea potius quam fluida, & pellucida verosimilius componi debeant; verus lunaris æquatoris motus ab eo parum recedet, qui a nobis antea in hypothefi Lunæ totius solidæ, & homogeneæ inventus est. Sola enim Lunæ homogeneæ hypothefis a nobis assumi potest ne in hypothefibus aliis confingendis nimis arbitrio concedatur, ut recte ab Aembertio notatum est §. 346. de Mundi systemate. In hypothefi autem Lunæ homogeneæ, & circa polos compressæ, posita differentia semiaxium $\frac{x}{115009}$, ut fert motus diurni ratio, juxta §. VI., erit motus medius nodorum æquatoris lunaris cum plano eclipticæ annis singulis pro aspectu quolibet terræ, & nodorum = $226'' = 3\frac{3}{4}'$, & motus medius pro quolibet aspectu Solis, & nodorum erit = $1\frac{1}{2}''$.

Et quidem motus ex Sole ortus vere erit medius singulis Lunæ revolutionibus cum Sol obtineat aspectus omnes cum nodis lunaris æquatoris. At vero ob eandem Lunæ faciem obversam Terræ motus $226''$ non erit medius nisi pro toto eo tempore, quo linea nodorum a syzigiis cum Terra transibit ad quadraturas, quod tempus erit annorum $\frac{60^{\circ}}{227\frac{1}{2}''}$, sive 1424. Si linea nodorum perpendicularis sit rectæ, quæ a centro Terræ ad centrum Lunæ ducitur, motus verus nodorum medii erit duplus, scilicet annis singulis = $7\frac{1}{2}'$. In iisdem etiam hypothefibus maxima variatio annua inclinationis lunaris æquatoris, juxta §. VIII., esset = $8''$, & annis 1424, sive in transitu toto nodorum a quadraturis ad syzigias cum terra sum-

summa variationum omnium inclinationis effiet ad summam variationum totidem maximarum ut 20000:31415, sive effiet omnis variatio circiter 2° : quo demum Lunæ æquatorum cum plano eclipticæ congruere oporteret. Hoc ipso autem quod inclinatio utriusque plani minuatur, minuetur etiam variatio inclinationis, quæ dato quocumque tempore proportionalis est tangenti $\frac{\pi}{\sqrt{(1-\pi^2)}}$: atque erit vera inclinationis varia-

tio ad 2° ut summa tangentium omnium inclinationis ad summam tangentium totidem maximarum, seu proxime ut 1:2. Quare æquatoris Lunæ ad eclipticam inclinatio uno circiter gradu variari poterit ob vim Terræ in toto nodorum transitu a quadraturis ad syzigiis cum Terra, & in reditu ad quadraturas restituetur in gradum pristinum.

Formula insuper $\frac{\pm(1-2\pi^2) \cdot m \cdot 57^\circ 17' 51''}{\pi \cdot (n-m) \sqrt{(1-\pi^2)}}$, quam §. VII.

tradidimus, & quæ mediæ æquinoctiorum præcessionis æquationem exprimit, ad Lunam transferri poterit, si π designet finum inclinationis æquatoris lunaris ad planum eclipticæ, & n ad m se habeat ut motus medius nodorum lunaris orbitæ ad motum medium æquatoris lunaris vi Terræ genitum. Est autem motus medius annuus nodorum lunaris æquatoris = $\frac{3}{2} \cdot \sqrt{(1-\pi^2)} \cdot \frac{\phi^a}{A} \cdot \frac{525969}{39343} \cdot 360^\circ$. Quare si hæc quantitas in numeratore superioris formulæ scribatur loco m , fiet tota medii motus æquatio pro eo tempore, quo nodus ascendens lunaris orbitæ a syzigiis nodorum lunaris æquatoris tendet ad quadraturas, fiet inquam = $\pm \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1-2\pi^2}{\pi}\right) \cdot l \cdot \frac{\phi^a}{A} \cdot \frac{360^\circ}{n-m}$. $57^\circ 17' 51''$: quæ formula cum alia convenit, quam clarissimus Alembertius tradiderat §. 345 par. 2 de Mundi systemate, & §. 12 de Libratione Lunæ.

Fiat modo $\frac{\phi^a}{A} = \frac{1}{115009}$, $m = 226''$, & cum sit annis

singulis $n = 19^\circ 21' = 69560''$, erit $n-m = 69434''$. Rursus cum inclinatio media lunaris orbitæ ad eclipticam sit $5^\circ 8\frac{1}{2}'$, erit $l = 0,0896186$, & cum inclinatio lunaris æquatoris sit circiter 2° , erit $\pi = 0,0348995$, & $1-2\pi^2$ cosinus dupli anguli 88° , seu cosinus anguli 86° erit = $0,997564$, & nu-

me-

meris omnibus in antecedente formula substitutis prior pars æquationis medii motus nodorum lunaris æquatoris ob sphaeroidis oblatæ formam evadet = 1720''. Quod si altera æquationis pars requiratur, quæ pendere potest ex forma oblongæ sphaeroidis, & fiat $\frac{p^2}{A} = \frac{I}{38369}$, $m = 676''$, & $n - m = 68984$, prodibit ipsa = 5177''. Ita erit tota æquatio 6897'', addendoque ut supra $\frac{1720'' + 2588''}{179}$, sive 24'' circiter ob vim Solis, erit æquatio = 6921'' = 1° 55' 21''. Neglecta vero hac altera æquationis parte, & prioris dumtaxat ratione habita, addendoque $\frac{I}{179}$ ob vim Solis, censeri poterit vera æquatio = 1729'' = 28' 49'', & in transitu nodorum lunaris orbitæ a syzigiis nodorum lunaris æquatoris ad quadraturam unam, motui medio addenda erit æquatio, in transitu vero a syzigiis ad quadraturam alteram subtrahenda.

Pariter si in formula $\frac{\pm m}{n - m} \cdot l \cdot \sqrt{(1 - l^2)}$. 57° 17' 51'', quæ nutationem axis terrestris ex vi perturbatrice Lunæ ortam definit, ut §. VIII. dictum est, fiat $m = 226''$, $n - m = 69434''$, $l = 0,0896186$, $\sqrt{(1 - l^2)} = 0,9959761$, prodibit circiter 1' pro nutatione illa lunaris axis, quæ ex vi perturbatrice Terræ in oblatam Lunam exercita ortum ducet. Altera vero nutationis pars, quæ ex forma oblongæ sphaeroidis pendere posset, evaderet 3' circiter. His quantitibus æquator, & axis Lunæ modo accedet ad planum, & axem eclipticæ, modo recedet, & differentia omnis inclinationis erit circiter 8', & solius primæ æquationis ratione habita, dumtaxat 2'.

Falsum est igitur, quod Cassinus in Actis Regiæ Parisiensis Academiæ anni 1721 pro definiendo apparenti macularum lunarium loco, apparentique libratione Lunæ explicanda, principii loco assumpserat, Lunæ polos circa polos Eclipticæ ad 2½° distantiam binos circulos describere eodem tempore, eodemque ordine, quo revolutio nodorum lunaris orbitæ, atque axis orbitæ ipsius circa axem eclipticæ absolvitur. Ut enim a clarissimo Alembertio §. 372 de Mundi systemate adnotatum est, revolutionis diurnæ axis, in hypothese Lunæ sphaericæ sibi semper parallelus maneret, & in
T. V. P. II. H hy-

hypothesi Lunæ spheroidicæ non alias vicissitudines subire potest quam quæ inæqualitatibus perturbatricium virium respondent, & quæ longe minores sunt, quam ut poli nutatio per arcum quinque graduum habeatur. Falsum est etiam nodos lunaris æquatoris, ac totius orbitæ eodem angulari motu affici: est enim annua regressio nodorum orbitæ $19^{\circ} 21'$, & motus medius annuus lunaris æquatoris $3\frac{3}{4}'$, ac tota medii motus æquatio $28' 48''$. Hæc adhuc differui & motum terræ, & cælestium corporum attractiones, & alia id genus mathematicorum cogitata & hypotheses subductis calculis explicare, & cum phænomenis cælestibus conferre volui.

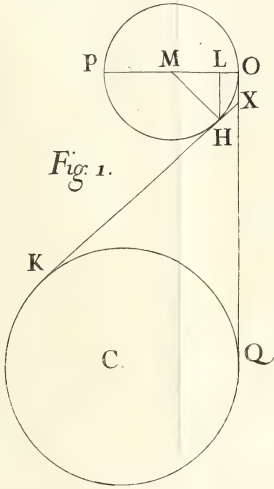


Fig. 1.

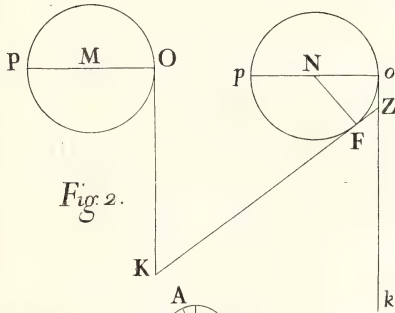


Fig. 2.

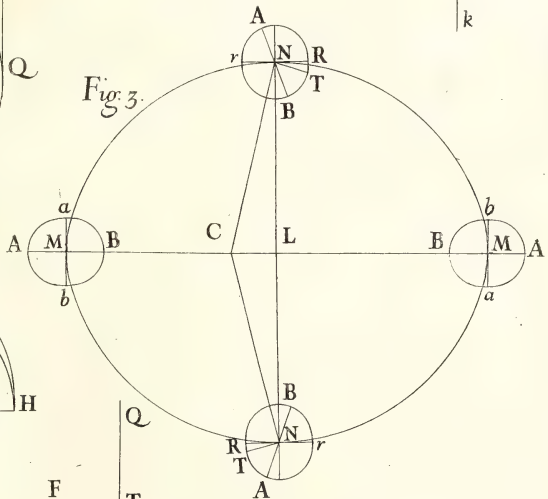


Fig. 3.

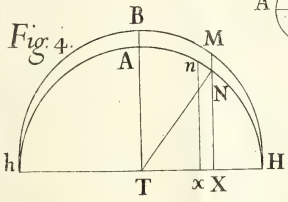


Fig. 4.

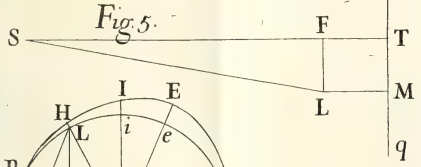


Fig. 5.

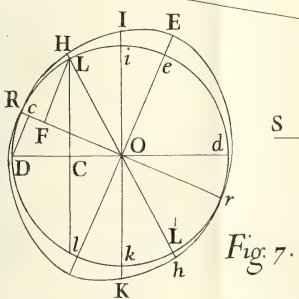


Fig. 7.

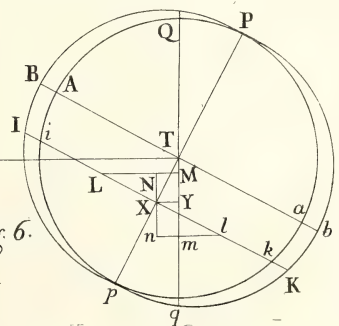
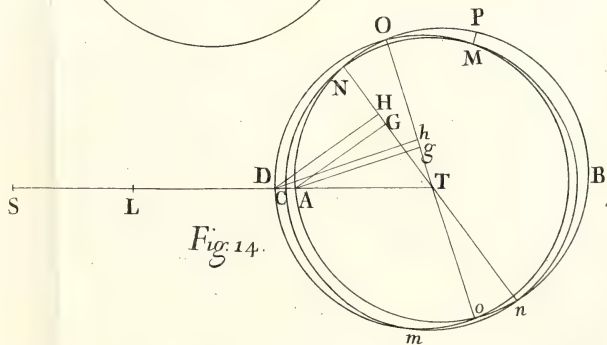
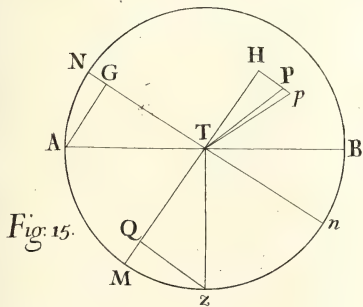
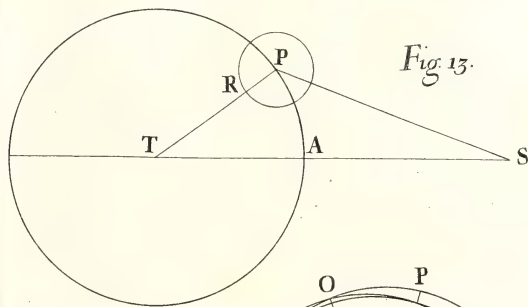
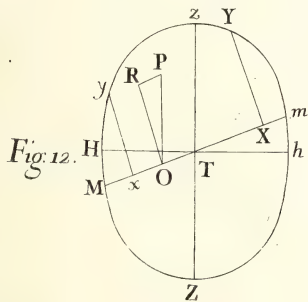
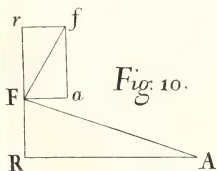
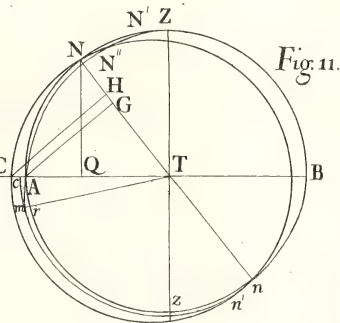
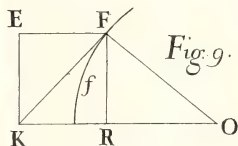
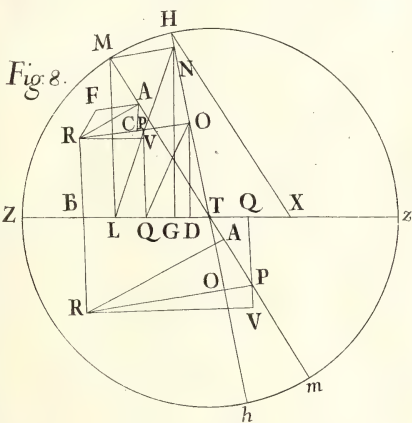


Fig. 6.



JOANNIS BAPTISTÆ A COVOLO.

De Metamorphosi duorum ossium pedis in quadrupedibus aliquot .

ESt animantium corpus innumeris constructum partibus, supra quam dici possit subtilissimo opere contextis, tantaque sapientia dispositis & per accommodata vincula inter se colligatis, ut earum quæque cæteris omnibus communiter & famuletur & indigeat. Cum autem memoratarum partium pleræque inter se plurimum differant non modo quoad variam, & fibrarum, & vasorum, & aliorum componentium dispositionem, verum etiam ob diversum duritiei, & mollitudinis, & flexibilitatis gradum, ex eo fit ut insignes dum vivimus multiplicesque vices patiantur univæ animantis partes, propter varias earum vires, & potentias, & resistentias, quibus invicem agunt. Quarum quidem virium potentiarumque actio quamquam jugis sit & perpetua, major tamen sit oportet a prima fœtus formatione ad animalis ortum, & multo major ab ortu ad summum usque corporis incrementum.

Cæterum inter vicissitudines, quæ ex aliarum in alias actione singulis partibus accidunt, eæ facile præcipuam merentur considerationem, quas subeunt ossa; hæc enim cæterarum partium durissima cum sint, propriamque tam belle in sceletis retineant formam, ossa cum ossibus comparare non difficulter possumus, eorumque pro varia ætate mutationes diligentiori examine perscrutari. Et sane in infantibus recens natis maturoque tempore editis tenella ossa simplicem, ut ita dicam, sui incrementi gradum attigerunt; nam quæ ad illorum artus pertinent, figuram habent fere teretem, cætera vero corpusculi ossa vix aliquam scabritiem inæqualitatemque præferunt: sed pro eo ut corpus magnitudine, & robore sensim augetur, atque suis partibus magis in dies magisque ad vitæ munera utitur, ossa paullatim mutantur, duriora fiunt,

novamque omnino assumunt formam fulcis, futuris, tuberibus ultro citroque exasperatam, ossaque ipsa cum nonnullis ossibus coalescunt. Atque hæc quidem varietates ossium, & progressus jam ab excellentissimis Anatomicis fuerunt sin minus omnia, certe pleraque animadversa literisque consignata.

Verum singularem illam vicem, quam in bobus, & ovibus, & aliquot aliis quadrupedum speciebus subit os, quod Galli *le canon* vocant, quodque, ni fallor, ossibus nostri metatarsi, & metacarpi, five ejus locum, five figuram spectes, respondet, nemo ante Clarissimum Foucherousium, quod sciam, observavit. Resque est profecto digna, quæ peculiariter animadvertatur.

Itaque observavit Clar. Foucherousius in eorum animalium foetibus os modo indicatum sub prima formationis tempora ex duobus distinctissimis veruntamen se se tangentibus ossibus suo singulis periosteo obvolutis constare: tum paucis post hebdomadis hæc bina ossa simul concrefcere, ut tandem nascentibus vitulis & agnis unicum sit os, illudque in duas cavitates septo satis conspicuo divisum. Afferitque offescere hujus ossis epiphyfes in ipso utero, atque ita cum ossibus conjungi, ut in natis integræ amplius separari non possint. Septum deinceps, quod nominavimus, magis magisque attenuari animadvertit, & brevi reticulatum fieri; denique penitus deleri, ut cum animal ad ultimum incrementi gradum pervenerit, nihil quidquam in ejus ossis cavitate relinquatur, quod tantæ commutationis indicium esse possit, si excipiatul fulcus profundus, qui in externa ossis facie secundum longitudinem remanet, unionis quam diximus vestigium.

Atque hæc fere sunt, quæ Foucherousius in eum sermonem contulit, quem nuperrime ad celebrem hanc Academiam misit, cujus ad calcem addit, dissimulare se non posse, quam sibi gratum fuisset intelligere, cui bono voluerit natura, ut ex duobus unum os efficeretur, quave id ratione eveniat; fatetur enim obscurum id sibi plane esse, & præsertim quomodo septum, quod ante memoravimus, primum gracilescat, postea penitus obliteretur.

Cum autem gratum pariter tibi, Clar. Præses, vobisque, Academici spectatissimi, futurum senserim, si quis in eandem rem inquireret, Foucherousii observationes quascumque potui iteravi, & rem ipsam mechanicè meliori quo possèm modo ag-

aggressus sum explicare . Atque vos rogo ut primum hunc meum vestra causa susceptum levem quidem , sed mihi certe jucundum laborem , tanquam aliquam mei in vos grati animi significationem excipere velitis , qui me summo celeberrimæ vestræ Societatis honore exornastis .

Meis igitur observationibus agnos persecutus sum , sed eos non nisi ab illo tempore , quo in lucem eduntur , ad illam usque ætatem , quæ summum ipsis affert incrementum . Fœtus in promptu non habui , neque in angustissimo septem dierum spatio in natis ipsis singulos ætatis gradus nisi intercisa ferie comparare mihi potui . Id tamen rei , quam quærimus , nihil quidquam officit , uti mox intelligetis . Quo vero major meis observationibus fides haberetur , ipsas quas feci præparationes huc attuli .

Quarum duæ , quæ litera A designantur (*vide Fig. A*) , referunt bina ossa decerpta ex agno duodecim horas nato , ac nondum , nec lacte quidem , pasto . Atque hic quidem apparent ossa duo primigenia , quæ summa primum diligentia postea nullo negotio diduxi . Ex quo profecto intelligitis illud verum non esse , quod intra matris alvum eadem duo ossa in unum coalescant os septo partitum , sed adhuc distincta permanere quamvis contactu arctissimo conjuncta . Retiendum tamen non est , periosteon , qua parte se tangunt ossa , tenuissimum esse , quemadmodum ipsorum quoque ossium parietes ibi loci , præsertim in medio , nonnihil tenuiores apparere .

Officulum litera B (*Fig. B*) signatum ad agnum pertinebat nescio quot dies natum sed certe paucos . Id pariter non sine anatomica industria fere totum in duo diducere mihi contigit , quamvis laminarum , quæ septum constituunt , portio unius alteri in diductione adhæserit . Post id tempus laminarum (*Fig. C*) coalitus , & tenuitas usque adeo major fit ut non secus ac talci foliolum transpareant , & quacumque adhibita diligentia & arte separari non amplius possint ; quin etiam brevi incipit septum foraminulis refertum apparere ut cribri speciem referat , idque in media tantummodo ossis parte , ut videre est in præparatione , quam litera C (*Fig. D*) insignivi . Foraminula hæc magis magisque deinceps ampla fiunt , ut in subtilissima tandem abeant filamenta . Cum autem agnus jam aries factus est , non sine admiratione vidi ego restare utique adhuc in ejus ossibus septum , in media tamen ossis

offis parte deficiens, sed non omnino, conspicuum enim eo loci vestigium semper superest, hinc scilicet ossea spina, illic tantula prominentia. Observate præparationem litera D (*Fig. E*) signatam. Atque hæc ad interiora offis pertinent.

Quod ad exteriora spectat, si de pede anteriori loquamur, in postica parte conspicitur sulcus ab offis medio ad superiora fat profundus; in antica vero, quæ tota convexa est, observatur offium conjunctionis vestigium, idque minimum, & tantum versus offis ipsius extrema. Sed in pede posteriori formam fere quadratam refert os, binique in eo occurrunt fulci alter anterior, posterior alter, uterque superficie tenus leviter insculptus. In agni tamen recens nati officulis nullum fulcum offendi, sed levem tantum lineam utrinque insculptam: ut propterea mihi videantur fulci illi a circumpositis partibus deinceps eo modo conformari, quo in cranio ab arteriis fulci conformantur.

Quod vero ad epiphysium coalitum attinet, eas nullo labore in his omnibus omnino, quæ in examen revocavi, agnorum offibus integras disjunxi periosteo tantum antea diligenter separato, imo idem effeci vel in ipsis arietum offibus, quamquam non sine aliqua vi: veluti in præparationibus litera E (*Fig. FFF*) designatis conspicitur.

Post has observationes, quæ non parum ab iis distant, quas Clar. Foucherius Academiæ proposuit, non abs re alienum esse mihi videtur, si vobiscum communicavero, me in istorum offium examine ne minimum quidem periostei indicium os inter & epiphysim potuisse unquam cognoscere.

Agite nunc, conjecturas, quas feci dum phænomenon hocce attente persequer, benigne excipite.

Et primum quidem animadverto bina hæc ossa, de quorum conjunctione quæstio est, in utero materno, & extra partem inter se habere magnitudinem & figuram; atque ea parte, qua se respiciunt, in planam desinere superficiem. Quod vero offium reliquum est ad cylindricam figuram quam proxime accedit, exceptis extremitatibus, quæ ut in cæteris hujusmodi offibus nonnihil crassescunt. Eorum offium unum externum est, internum alterum, inter se parallela, & secundum longitudinem se mutuo tangunt. Utriusque offis caput cum offibus committitur nostro & carpo, & tarso respondentibus: in basi vero adjunctas habent epiphyses unumquodque suam,

suam, quæ sibi pariter adherent, & utraque in trochleæ speciem pulcherrime terminatur. Per has autem trochleas utrumque os cum ossibus, ut opinor, phalangium articulo firmatur. Quam ob rem naturaliter sic posita sunt hæc ossa, ut a posterioribus ad anteriora oblique descendant. Per mediam vero eorum partem anteriorem aliquot validissimi tendines excurrunt, multoque plures per posteriorem, suis singuli vaginis inclusi multa cellulari tela obductis. Hi tendines tendinibus respondent musculorum, qui in nobis digitos flectunt, atque extendunt. Omnia autem hæc in hisce bestiis etiam recens natis, pelle satis firma & robusta circumambiuntur.

Vix solis lumina exorti visunt agni, adhuc maternæ alvi humoribus madentes jam pedibus innituntur, ambulant, matrem norunt & quocumque sequuntur; vel lactentes sub matre gestiunt, & hinc illinc læta pabula perfultant, nec motibus parcunt; multo aliter ac nobis hominibus accidit, qui mollissimo corpore atque infirmo nascimur, primamque vitam trahimus omnium rerum inscii vagitus lugubres inter & somnum.

Jam vero his præmissis facile crediderim intus in utero illa officula pati nihil aliud, nisi ut contigua cum sint & parallela, & instar argillæ mollia, alterum alteri se accommodent quo primum tempore evolvuntur, unde binæ illæ, quas supra memoravimus, planæ superficies exoriantur, atque ex eo fortasse parietes ad eam partem aliquantulum subtiliores evadant.

Nunc autem quis non videt agno vix nixibus ex alvo matris egresso, ex tot ejus motibus & saltationibus ossa, de quibus agimus, validam compressionem perferre, ejusque compressionis effectum fere totum in illam ossium superficiem cadere, qua se mutuo tangunt? Tum enim præter totius corporis pondus, quod iisdem ossibus incumbit oblique positus, intumescunt muscoli & tenditur fortiter pellis, qua sic tensa, & maxima tendinum, quos memoravimus, potentia insuper addita, satis jam virium esse intelligitis, ex quibus utrumque os valide fortiterque confringatur, atque aliud contra aliud strictim adigatur, adeo ut ex diuturna compressione modo majori, modo minori, jam os cum osse ita coalescat ut ex duobus unum os fiat.

Quia etiam illa compressione, de qua loquimur, necesse est

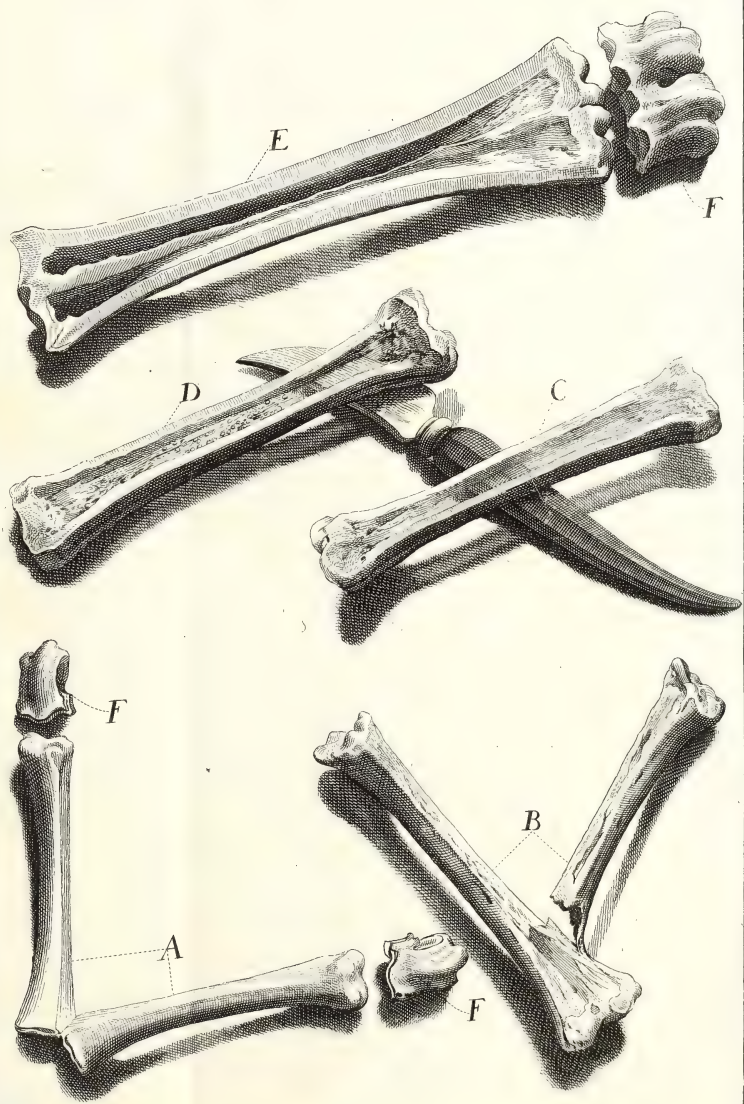
est ut vascula sanguifera, quæ per medias eorum ossium fibras excurrunt, materiam iisdem afferentia, ex qua incrementum & duritiem accipiant, strictim veluti in torculari agantur, sicque interjecto septo maxima parte sin minus omnes deficiant succi unde nutriantur. Quam ob rem veluti si rivuli ramulus intercipiatur, aqua labitur copiosior per alios, & si arteria circumligetur, fluit sanguis uberius per vicinas arteriolas, easque sensim dilatat, ita cum compressio labi sinat in septum per ejus vasa parum aut nihil humoris; hic humor sibi viam facit per arteriolas, quæ per reliquum ossis disseminantur.

Nunc dum mecum reputo quanta celeritate ossa omnia in hisce animantibus augentur & indurescunt, dumque animum adverto ossibus, de quibus agimus, copiosius alimentum suppeditari, mihi videor rationem jam intelligere cur septum parum, aut nihil altum deinceps valde extenuetur in dies magis magisque, interim dum reliquæ ossis partes plurimum adulescunt; quæ sane interea dum adulescunt, & secundum omnes dimensiones crescendo cavum, quod comprehendunt, amplificanc, non ne consequi videtur ut septum adeo simul extenuatum distrahant, ita quidem ut ejus fibræ utrisque obliquitæ medullis disiungantur, atque in retis speciem conformentur; quod rete magis deinde ab eadem causa rarefactum tandem in media ossis parte fere totum obliteretur? Ratio enim cur integrum servetur adhuc septum ad utrasque ossis extremitates etiam in ariete, si quid judico, profecto inde peti potest quod spongiosa in ea parte sit ossis substantia, atque ideo ibi loci quam diximus compressio, & quæ ab ipsa sequuntur, cum iis, quæ in medio ossis fiunt, nequaquam comparanda.

Atque ut hæc, quæ hæctenus conjectura profecutus sum, magis comprobarem, præsto jam essent ex ipso humano corpore exempla desumpta, & quidem plura; sed nonnulla tantum in medium afferam.

Quod enim corporis partes, quæ in contactu sunt, & premuntur, in unum concrevant, ostendit pericardium, quod diaphragmati semper adhærens, ita nexu indissolubili cum eo cohæret, ut pars a parte non amplius distingui possit aut separari.

Quod vero ad ipsamet ossa pertinet, quis mihi præter contactum & pressionem, probabiliorem dederit rationem, qua-





quare epiphyfes ; quando offeæ factæ sunt , offibus coalescant ? Quæ sane res in rusticis omnibusque iis , qui vitam vivunt laboriosam , citissime fieri observatur ; contra in sequiori sexu examinatisque viris tardissime , & non raro nunquam .

Quod autem ex ossis distractione eius interna pars cellulosa fiat & reticularis , ex eo intelligi potest , quod in bajulis , inque iis , qui maximis nixibus victum quæritant , tanta sit muscoli sternomastoidei potentia trahens , ut processus mammillares magis in illis excrefcant , atque intus in plures cellulas abeant , quam in fœminis , & minus exercitatis .

Quod si forte ex me quærat aliquis , quid factum fuerit duabus illis periostei laminis , quæ inter utrumque os torquebantur ; Clariss. Anatomicorum sequens sententiam , respondebo , periosteon non secus ac simplex membrana omnia ossa & cartilaginee immediate circumambire , ad eum modum quo pleura , & peritoneon circumambiunt viscera pectoris , & imi ventris , & quo dissimiles quæque corporis partes discernuntur ab tela cellulari , cum non nisi ex hac ipsa tela plus minusve conspiciantur membranae constare videantur . Quamvis enim periosteon filis tenuioribus , & subtiliori opere contextum appareat , id fortasse lavi ossium superficiei , cui aptatur , & perpetuæ ossium resistentiæ , & muscutorum tendinumque pressioni debetur . Opinor igitur duas periostei portiones constructas inter septi laminas incredibilem in modum extenuari debere , ita ut ab fibrarum septi disunctione ipsæ quoque disurgantur , atque in telam cellulotam abeant primigeniam , quæ cum cellulosa cavi commisceatur .

Hæc habui quæ super Clar. Foucheroussii observationibus pro viribus animadversa , & cogitata gravissimo iudicio vestro subjicerem . Quod autem voluerit natura ut ex duobus ossa , de quibus sermo fuit , in unum concreverent , aut fallor , aut „ dicere non est qui possit , neque eam rationem reddere dictis . „

SEBASTIANI CANTERZANI.

De attractione sphaerae .

I. **D**E attractione sphaerae acturus haec scilicet primum pono. Vis, qua unumquodque corpus attrahit, coalescit ex illis viribus, quibus attrahunt particulae ejus omnes minimae. Unaquaeque vero particula minima tanto majori vi attrahit, quanto & major est ejus massa, & minus est quadratum distantiae, quae inter ipsam & id, quod ipsa trahit, intercedit. Haec cum ita sint, dico, sphaeram, si homogenea tota sit, punctum extra ipsam positum sic ad se trahere, uti illud ad se traheret particula quaedam minima in sphaerae centro posita, eandem habens massam ac sphaera ipsa. Id multi analytice demonstrarunt; synthetice, quod sciam, nemo. Ut id ipse, si possem, praestarem, hortatus est Franciscus Maria Zanottus; cujus viri causa quid non fecerim? Demonstrationem nunc meam, qualiscumque est, hortante id etiam Zanotto, vobiscum, Sodales optimi, communicabo, atque initium hinc ducam.

II. Sit MO (*Fig. 1.*) arcus circuli, cujus centrum A , sinus MF . Sagitta FO intelligatur divisa in partes minimas, easque facilitatis causa aequales; sintque e divisionum punctis $p, q, t, \&c.$ ductae perpendiculares ad FO lineae $pm, qn, tr, \&c.$, quae abscindunt arcus minimos, velut mn, nr . Revolvente se arcu MO circa radium immobilem AO , dum ipse segmentum sphaericae superficiae describet, arcus illi $mn, nr, \&c.$ totidem zonulas designabunt, quibus illud segmentum constatur. Ejus propterea attractio harum zonularum attractione constabit.

Attrahant itaque haec zonulae punctum in centro A constitutum. Si massam quidem, & distantiam tantummodo spectemus, par erit in omnibus attractio; sunt enim omnes inter se aequales, ut quae proportionales sunt lineolis $pq, qt, \&c.$, &

& æque a centro A distant. Hanc attractionem, quæ omnino massa, & distantia æstimatur, absolutam vocabimus. Quod si consideremus etiam obliquitatem, quam singulæ zonulæ habent ad punctum A , vimque absolutam cujusque ex notis mechanicæ principiis in duas resolvamus, quarum una agat directione ad AO perpendiculari, altera directione ipsi AO parallela, facile quidem apparet, prima illa vi punctum A nihil commoveri, quippe quod æque circumundique trahitur in contrarias partes; solamque relinqui alteram, qua, si punctum A liberum esset, ab unaquaque zonula tractum secundum directionem axis AO versus O moveretur. Hanc igitur liceat deinceps appellare attractionem respectivam. Constat autem esse attractionem absolutam cujusque zonulæ mn tanto majorem attractione hac respectiva, quanto radius Am , sive AO major est linea Ap , seu quanto major est circumferentia, cujus radius AO , circumferentia, cujus radius Ap . Ex quo sequitur, attractionem absolutam segmenti ex revolutione arcus MO geniti ad ejusdem attractionem respectivam, qua scilicet movet punctum A , eam proportionem habere, quam habet circumferentia, cujus radius AO , toties sumpta, quot sunt partes minimæ pq , qt , &c. sagittæ FO , ad congeriem circumferentiarum, quarum radii sint Ap , Aq , At , &c.; idest quam habet segmentum ipsum ad circumferentiam, cujus radius sit ipse sinus MF : constat enim e geometria, segmentum ex revolutione arcus MO æquari circumferentiæ, cujus radius AO , in sagittam FO ductæ; congeriem vero circumferentiarum, quarum radii Ap , Aq , At &c., seu zonam circumferentiis concentricis OM , FH contentam, circulo, cujus radius MF , æqualem esse.

III. Sit nunc semicirculus BMD (*Fig. 2.*), in cujus diametro producta accipiatur punctum quodvis A , ac centro A describatur arcus circuli occurrens diametro BD in O , & semicirculo BMD in M . Ab O erigatur ad BD perpendicularis recta OR æqualis sinui arcus OM : tum tota figura circa axem AD immotum revolvi intelligatur. Semicirculus quidem BMD sphaeram describet, arcus OM segmentum sphaericæ superficiei, ac recta OR circulum. Sit hic circulus ejusdem materiæ, & crassitiei, ac segmentum, ejusque massa tota in punctum O coacta concipiatur. Erit attractio absoluta segmenti ad attractionem massæ in punctum O coactæ (in qua nullum sane discrimen est vis absolutæ, & vis respectivæ) ut segmentum ipsum est ad

circulum; pares enim sunt distantia a puncto A. Sed ut segmentum ad circulum illum, ita est etiam (art. II.) vis absoluta segmenti ad ejusdem vim respectivam. Ergo erit attractio respectiva segmenti aequalis attractioni massae in puncto O collectae. Quare cum praeterea eadem sit utriusque attractionis directio; agit enim etiam attractio respectiva segmenti secundum directionem axis AO (art. II.); idcirco trahitur punctum A perinde a segmento revolutione arcus OM genito, ac a massa circuli, cujus radius OR, in punctum O coacta.

Atque haec quidem valent, quamcumque distantiarum rationem sequatur attractio particularum, modo sit massae proportionalis. Nullam enim adhuc opus fuit distantiarum legem statuere.

IV. Ponamus ergo nunc legem illam, quam in theoremate ab initio (art. I.) finximus. Atque e semicirculo BMD centro C excitetur ad BD perpendicularis CT, quam fecet in T recta AR puncta A & R jungens. Quoniam lineis AC, AO proportionales sunt lineae CT, OR, circuli ab lineis hisce CT, OR in figurae revolutione descripti eandem proportionem habebunt, quam quadrata linearum AC, AO. Qui propterea si ejusdem fuerint materiae, & crassitiei, & suam quisque massam in proprium centrum coactam habuerit, pari ambo vi punctum A attrahent. Cum enim massae sint quadratis distantiarum proportionales, attractiones, quae directam massarum, & reciprocam quadratorum distantiarum rationem sequuntur, aequales sint necesse est. Atqui massa circuli, cujus radius OR, in punctum O coacta, perinde trahit punctum A, ac segmentum ex revolutione arcus MO genitum (art. III.). Ergo etiam massa circuli, cujus radius CT, coacta in centrum C.

V. Itaque centro A per omnia diametri BD puncta descripti intelligantur totidem arcus, velut OM, inter diametrum BD, & semicirculum BMD intercepti; ac ab unoquoque puncto diametri O ducta sit ad diametrum ipsam perpendicularis OR aequalis sinui respondentis arcus OM. Tum junctis punctis A, & R recta AR, quae fecet in T lineam CT e centro C ad diametrum BD perpendicularem, per T sit diametro ipsi parallela linea TE, occurrens rectae OR in E. Hac sane constructione prodibit curva quaedam linea BFED seriem punctorum E praefereens; cumque sit linea OE lineae CT aequalis, patet (art. IV.) ejus curvae circa axem AD revolutione solidum oriri, in quo circularis sectio ab unaquaque lineae OE descripta, si in

centrum sphaerae C cogatur, ad se quidem trahit punctum A eadem prorsus vi, ac directione, qua idem punctum A trahitur re ipsa a segmento sphaericae superficiei, quod respondentis arcus OM revolutione describitur, modo illa circularis sectio, & hoc segmentum ejusdem materiae, & crassitiei fuerint.

Quamobrem cum tot sint circulares sectiones in solido revolutione curvae BFED genito, quot sunt segmenta sphaericae superficiei in sphaera revolutione semicirculi BMD genita, idcirco facile constat, solidum illud ita quidem esse comparatum, ut tota ejus massa in centrum sphaerae C adacta perinde ad se trahat punctum A, ac ipsa sphaera a semicirculo BMD orta.

VI. Restat ergo, ut demonstremus, solidum illud sphaerae ipsi aequale esse: id quod conficiemus ad hunc modum. Sit BFED (Fig. 3.) curva, quae solidum gignit. Sit BMD semicirculus, qui gignit sphaeram, a qua trahi ponimus punctum A in producta diametro BD constitutum. Sit C centrum semicirculi, a quo discedat linea CT ad diametrum BD perpendicularis. Sumatur in hac perpendiculari punctum quodvis T, per quod ducatur recta TE diametro parallela occurrens semicirculo in I, & K, curvae vero in F, & E. A punctis F, & E demittantur perpendiculares ad diametrum lineae FH, EO; ac centro A, radiis AH, AO describantur arcus circuli HN, OM semicirculo BMD occurrentes in N, & M. Denique ducatur ab A ad M recta AM. Transibit AM etiam per N. Etenim ductis per N, & M rectis NQ, MR diametro BD parallelis, & occurrentibus lineis FH, EO in Q, & R, erunt quidem HQ, OR aequales sinibus arcuum HN, OM. Quare e natura curvae BFED erit (art.V.) OR:CT::AO:AC; similiterque CT:HQ::AC:AH; ex quo OR:HQ::AO:AH. Ergo sinus arcuum OM, HN radiis proportionales sunt. Ergo arcus illi similes, qui cum sint concentrici, lineis intercipientur eisdem. Ergo linea AM per N transit. Est igitur linea NM lineae HO aequalis; ideoque etiam lineae FE.

Sit nunc e centro C linea CS perpendicularis ad NM, & ab N linea NL perpendicularis ad BD. Erit AN:NL, seu AH:HQ::AC:CS. E curvae autem BFED natura est AH:HQ::AC:CT. Ergo CS, CT aequales; ideoque aequales etiam chordae NM, IK. Ergo lineae FE, cui modo ostendimus aequalem esse NM, aequalis est etiam IK.

Itaque ea est curvae BFED proprietas, ut ductis chordis duabus, una FE in curva, altera IK in semicirculo, axi BD parallelis,

lis, & in eadem ab eo distantia, numquam non sint illæ inter se æquales. Quamobrem revolventibus sese circa communem axem BD tum semicirculo BMD , tum curva $BFED$, etiam singulæ superficies cylindricæ, quas describent chordæ axi parallelæ in curva, æquales erunt singulis cylindricis superficiebus æque ab axe distitis, quas describent chordæ axi parallelæ in semicirculo. Ut propterea congeries quoque utrarumque superficierum æquales esse debeant; ideoque etiam solida ipsa, quæ illis superficiebus conflantur. Est ergo solidum revolutione curvæ $BFED$ genitum æquale spheræ genitæ revolutione semicirculi BMD .

VII. Cum ergo supra (art. V.) ostensum sit, punctum A a massa solidi curva $BFED$ geniti, si ea in centrum spheræ C cogatur, perinde trahi, ac reipsa trahitur a spherâ ipsa revolutione semicirculi BMD genita, cumque ejus solidi massa æqualis sit massæ spheræ, modo ambo solida homogenea ponantur, & ejusdem sint materiæ, jam illud tandem concludere licet, quod demonstrandum erat, scilicet spheram, si homogenea quidem tota sit, punctum extra ipsam positum sic ad se trahere, uti illud ad se traheret particula quædam minima in spheræ centro posita, eandem habens massam ac spherâ ipsa.

Neque minus valet hæc ratio in spheris homogeneis plenis, quam in cavis, modo sit superficies intima extimæ concentrica. Quin etiam idem potest ad ipsas tandem sphericas superficies transferri, in quibus maxime auctores, qui theorema hocce explicarunt, demonstrationes inire suas consueverunt. Ex eo autem facile intelligitur, non in homogeneis tantum spheris valere theorema, sed ad heterogeneas quoque pertinere, modo, si resolvantur in concentrica strata, sit horum unumquodque sibimet ipsi homogeneum. Sed de his, atque aliis, si qua sunt, quæ a theoremate jam demonstrato sponte quasi manant, non est cur hic diutius moremur: sunt vero etiam a proposito nostro, cui fati jam fecisse videmur, aliena.

Fig. 1.

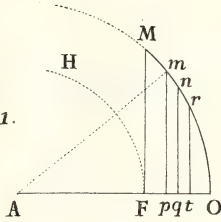


Fig. 2.

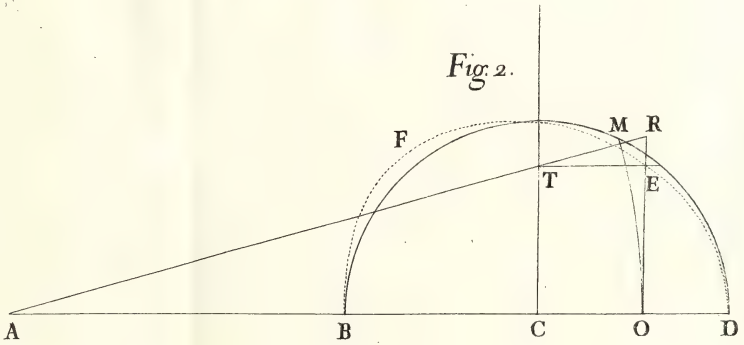
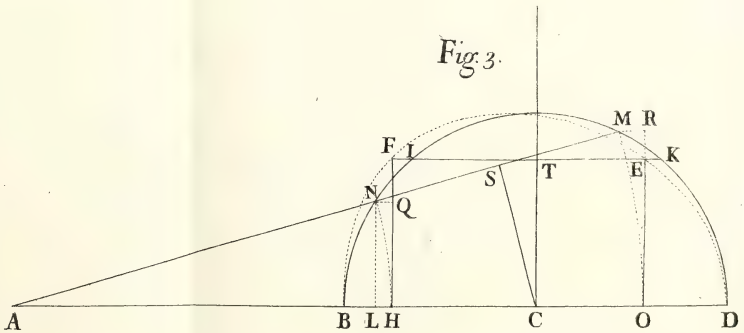


Fig. 3.





GREGORII CASALII.

*De Machinula quadam ad projectilium theorias per
experimenta probandas.*

MAchinula quædam meo iudicio satis expedita, qua projectilium theoriæ probari possint, mihi vix quæsitâ sua quasi sponte se obtulit. Non committam, Sodales, ut non de ea vobiscum agam. Eandem postea ad pulverem pyrium transfuli. Sed de hoc alias. Nunc illam, qualis sit, explicaturus exordium hinc capiam.

Nemo profecto vestrum est, qui ignoret corpus per quamvis directionem projectum, quoniam & vi projectionis, quæ motum uniformem, & vi gravitatis, quæ uniformiter acceleratum gignit, simul obtemperat, parabolam describere. Quod sic tamen ostendunt Mechanici, ut nonnulla contemnant, quæ recenserem, nisi in tali conventu, qualis hic vester est, verba facerem. Quæ illi contemnunt, contemnam ego quoque.

Clarissimus Gravesandus in suis Physicæ Elementis, ut id ipsum experimento ostenderet, machinam invenit perelegantem. Duas illas mitto, quas deinde proposuit ad Motum Fluidorum accedens. Harum prima aliquantum, plus etiam secunda, ad corporum projectiones demonstrandas valerent utique; sed altera valde est composita, utraque vero ad experimenta adhibetur in fluidis faciendâ, in quibus resistentiæ nimium turbant, ut ipse animadvertit Auctor in paragraphis 1590, 1591, 1606. Qua de causâ ego illam tantum considerabo, quam ille tantum consideravit, de projectilibus agens.

Enimvero hujus machinæ ope efficit ille, ut globulus & vi projectionis, & vi gravitatis actus transeat per quorundam anulorum centra, quæ sub unam eandemque parabolam disponuntur. Absque his anulis, diversaque omnino methodo etiam utitur machina: ejus basi basim, ut lubet, superimponit alteram, atque alteram deinceps, quarum ea, supra quam nulla est, projectum globulum tandem excipit: basium autem longitudines
sunt

sunt in ratione subduplicata distantiarum cujuscumque ex ipsis basibus a puncto projectionis, quod ob machinæ constructionem verticem parabolæ designat. Tantam hæc machina inter Philosophos celebritatem obtinuit, ut ingeniosissimus Defagulerius eam in suo Physicæ experimentalis cursu describere non omiserit. Desiderandum fortasse erat Defagulerium eam descripsisse diligentius. Si Pezenasii versioni fidendum est, ponit Defagulerius lineam casus, scilicet lineam illam horizonti perpendiculari, per quam cadens corpus datam, qua projiciatur, velocitatem nanciscitur; ponit, inquam, hanc lineam casus = 6; deinde duplam lineam, idest lineam = 12, ordinatam statuit, non abscissæ = 6, ut par erat, sed abscissæ = 9. Quis hoc contingere posse intelligat? Si e tertia ad primam elementorum Physicæ Gravesandii editionem convertamur, in qua ad exprimendas hujus machinæ partes, Auctor numeris copiosius usus est, continuo patebit, non id, quod ex proportionibus Defagulerii colligitur, sed ordinatam duplam esse abscissæ, quotiescumque abscissa lineæ casus est æqualis.

Cæterum Defagulerium mittens, quem maxime veneror, quemque sane arbitror inter solertissimos experimentatores longe excelluisse, ego quidem dico machinam Gravesandianam commodum attulisse, ut parabolam quamdam, quoddam videlicet projectilis iter, cognosceremus, non eam vero detexisse parabolas omnes, ideoque omnes vias, quas percurrere potest projectile. Per eam determinat Gravesandus unam tantum lineam casus, consequenterque eandem velocitatis projectionem semper admittit. Insuper non alia utitur directione projectionis, nisi ea, quæ horizonti est parallela. Quocirca satis utilem futuram esse existimaverim machinam, qua corpus jaci possit variis & numero infinitis velocitatibus, & secundum directiones omnes possibiles. Ad hanc igitur machinam animum intendi; quæ, ni fallor, præter quam quod infinitum parabolarum numerum repræsentat, quas projectum corpus ob directiones varias, variasque velocitates describit; facili etiam negotio & theoremata quamplurima demonstrat, & problematum pene omnium solutionem docet, quæ, nedum a Gravesando ipso, & Defagulerio in supra citatis Libris proponuntur, verum & a Bellidoro in Novo Mathematicarum Scientiarum Cursu ad Belli usum, & a Joanne Keillio in Introductione ad Veram Physicam, & ut de aliis fileam, a Sodalibus nostris celeberrimis
Chri-

Christiano Wolfio, & Petro Musschenbroekio; ab horum primo in Mechanica, a secundo in Physicæ specimine. Machina Gravesandiana, si quid iudico, tanta universalitate non gaudet. Hoc autem ejus perfectioni non officit, est enim in suo genere perfectissima: neque obstat, quin illa, quam sum descripturus, etsi alteram universalitate sua exsuperet, quamplurimis imperfectionibus sit obnoxia.

Putabam ego quoque, Sodales sapientissimi, nullam esse tutiorem methodum cujusdam certæ velocitatis excitandæ in corpore, quod projici debeat, quam casum ita longum, ut possit corpus ex gravitatis impulsibus determinatam velocitatis summam colligere. In quo sane Gravesandum, & Desagulierium sequor. In illo autem non sequor, quod cum corpus in eorum machina per datum circuli aut alterius curvæ arcum cadat, unum tantum casum tentant; mihi placet multos experiri.

Ac ne illud quidem placet, quod projectilis directionem certam habent. Quippe quia in eorum machina corpus per curvam, uti dictum est, decidens, per tangentem curvæ tandem effugit, quæ utique tangens horizonti est parallela. Sic corpori in projectione horizontali quid accidat experiuntur; in aliis non experiuntur.

Visum igitur est mihi, haud difficile esse directiones quaslibet projectili concedere, auxilio tantum unius ex communioribus Physicorum propositionibus; hujus nempe: si corpus motum in planum incurrat, ex quo elasticitatis vi regredi debeat, angulus incidentiæ æqualis est angulo reflexionis. Theoremate hoc posito, quod abunde demonstrarunt mathematici, philosophis consentientibus, videntur hæc duo ad quascumque projectili parabolas assignandas sufficere, primum si fieri possit, ut corpus a data quavis altitudine decidat, deinde si in planum decidat, quod varie inclinari pro libitu possit. Quædam experimenta institui antequam curarem, ut machina diligenter conficeretur. Opus nempe erat antea cognoscere an tanti essent experimenta, ut accuratam machinam mererentur.

Petronius Matteuccius mathematicus clarissimus, & Thomas Marinus ingeniosissimus mechanicus, solertissimi ambo, opera & consilio mea experimenta adjuvarunt. Hæc autem experimenta fuere. Parvum planum marmoreum cum horizonte inclinavimus ad angulum $22^{\circ} + 30'$. Cadens enim corpus supra

planum sic inclinatum, ex ipso reflectitur efficiens cum linea verticali angulum 45° . Sit (*Fig. I.*) OR horizon: sit PI planum marmoreum: sit AC linea casus, sive linea verticalis: sit CX linea reflexionis. Angulus ACX est, quem esse 45° ostendimus. Ex puncto C plani PI extollatur linea CM ad ipsum planum perpendicularis. Dico angulos PCA, & ICX esse æquales, quoniam æquales esse debent angulus incidentiæ, & angulus reflexionis. Sunt proinde æquales anguli ACM, & MCX, duorum angulorum æqualium complementa: ideoque angulus ACX duplus est anguli ACM. Sed ex suppositione, & ex constructione $OCA = PCM = 90^\circ$. Dempta igitur tum ab angulo OCA, cum ab angulo PCM communi portione PCA, residua OCP, & ACM erunt æqualia. Et posito angulo $OCP = 22^\circ + 30'$, erit $ACM = 22^\circ + 30'$, & $ACX = 45^\circ$. Directio projectionis sub angulo $= 45^\circ$, sicuti jam vidit Tartalea primus, primusque demonstravit Galileus, maximam jactuum amplitudinem præbet; quocirca hanc directionem elegimus, ut experimenta veritates, quas ex ipsis quærebamus, clarius patefacerent.

Marmoreo autem plano sic disposito, equino suspensus fuit crine eburneus globus ita ut adusto crine globus caderet supra planum. Dein paratum fuit argillæ stratum satis crassum. Superior hujus superficies erat horizonti parallela, istiusque superficiæ altitudo supra horizontem ea ipsa erat circiter, ad quam extollebatur illud plani marmorei punctum, quod globus cadendo impulisset. Hoc argillæ stratum, foveolis a globo impressis, immo distantis inter cujusque foveolæ centrum, & punctum reflexionis globi, debebat nos docere amplitudines parabolæ, quas reflexus globus descripturus fuisset.

Omnibus hac ratione paratis, sivismus globum cadere a pedis unius londinensis altitudine, deinde a duorum, & trium deinceps, & quatuor, & quinque, & sex pedum.

Equidem celebris Galilei theorema, quo projectilium scientia nititur omnino tota, illud est, ut probe scitis, in quo monstrat Auctor, amplitudines parabolæ sub diversis angulis descriptarum sequi rationem sinuum angulorum duplo majorum illis, quos efficit linea directionis projectilis sive cum horizonte, sive cum linea verticali. Ex hoc theoremate non modo colligitur maximam amplitudinem haberi posita projectionis inclinatione ad 45° ; sed colligitur adhuc hanc maximam amplitudinem,

cum

cum ea in horizonte notetur, duplam esse lineæ casus. Quomodo hoc brevissime, elegantissimeque demonstratur, videndum est in primo corollario citati operis Joannis Keillii.

In nostris ergo experimentis videbamus observaturi nos esse primam amplitudinem æqualem duobus pedibus, secundam quadruplam, sicque cæteras ordinate crescentes juxta seriem numerorum parium. Itaque revera accidisset, si obstacula, quæ a Physicis prætermittuntur, natura ipsa prætermitteret. Album, quod vobis exhibeo, quid futurum esset, quidque fuerit, fatis declarat. In hoc indicant numeri partes decimales pollicis londinensis. In prima albi columna notantur casus. In secunda amplitudines veræ, quæ sublatis obstaculis inventæ essent. In tertia amplitudines, quas experimenta ipsa exhibuerunt. In quarta resistentiæ medii; sive differentiæ inter amplitudines veras, & amplitudines observatas, quæ utique differentiæ cum præcipue a medii resistentiis pendeant, pro ipsis resistentiis sumi possunt. In quinta resistentiæ, quæ esse deberent, posita earum prima = 82, sicuti ostenderat experientia: has vero resistentias deduximus ex velocitatis quadrato, ut monet Newtonus in scholio quartæ propositionis secundi libri Principiorum Mathematicorum Philosophiæ Naturalis: quod equidem commodissimum nobis fuit, nam hæc de causa resistentiæ sequuntur rationem casuum. In sexta differentiæ inter resistentias observatas, & resistentias deductas. In septima summæ resistentiarum deductarum, & amplitudinum, quas observavimus.

Minime dubitandum est, nisi intercessissent obstacula, numeros tertiæ columnæ futuros fuisse duplos numerorum primæ, ut eorum sunt dupli, qui apparent in secunda. Sed medii resistentia maximum est obstaculum, nec eam licet Physico in experimentis omittere. Quod si resistentias hæc considerare velimus, cum tamen sit earum prima = 82, cætera futuræ videntur, non quæ ponuntur in quarta, sed quæ in columna quinta notantur. Si resistentiam, ut docet columna quarta, experimenta aliquanto majorem nobis repræsentarunt, tribuendum hoc est vel cuidam errori, quem forsitan inconsiderate experiundo commisi, vel cuidam anomaliam instrumentorum, quamvis utique simplicissima hæc essent, quibus uti placuit: possunt hæc omnia velocitatem projectilis minuere, ut ipsa aeris resistentia. Quod si resistentiæ in experimentis observatæ æquales essent resistentiis calculo deductis, & idcirco numeri quartæ columnæ numeros æquarent quintæ,

numeri sextæ evanescerent omnino, numerique septimæ numeris secundæ æquales fierent. Attamen si differentia notetur, quæ intra 1440, & 1275 partes decimales intercedit, quæ maxima est inter numerum secundæ columnæ, & numerum columnæ septimæ illi respondentem, clare patet totum effectum, quem præstitit sive experimentatoris negligentia, sive instrumentorum defectus, fuisse diminutionem pedis unius, & quatuor pollicum cum femisse in amplitudine, quæ absque ulla diminutione se se ad duodecim pedes extendisset. Profecto haud video, quomodo clarius experientia alloqui nos possit, dum eam interrogantes, eam cogimus nobis respondere tot impedimentis obstrictam.

Videtur jam, Sodales ornatissimi, postquam periculum feceram de variis casibus, ac varias in projectile velocitates induxeram, me etiam potuisse diversas concedere projectili directiones, marmoreum planum ad diversos angulos inclinando. Verum arbitratus sum ab inclinatione, qua usi sumus, quæque maximam affert amplitudinem, satis colligi, quidquid eveniret de cæteris, quippe quia & eadem regulæ in omnibus directionibus valent, & eadem obstacula.

Porro experimenta hucusque per nos facta videbantur pauca. Attamen satis fuerunt mihi, ne vobiscum omnino filerem de excogitata machinula, cujus ope, non modica spes mihi erat, ut ipsa experimenta feliciter capi possent. Quam cum describo, in primis, quæso, animum diligenter attendite ad ejus exiguitatem, quæ sane neque admodum altos casus, neque amplitudines admodum longas haberi permittit. Exiguitas hæc est quædam ipsius machinæ elegantia. Hoc vero partim videtur opponi, partim favere sententiæ Gravensandianæ; quoniam Philosophus summus in describenda illa projectilium machina, de qua supra egimus, sic ait in paragrapho 210 primæ editionis jam citatæ; „ nec minori globo, aut machina, quam quæ hic „ describitur, majori utendum: quo enim corpora sunt minora, & motus celeriores, eo etiam magis, servata proportione, motus per aeris resistentiam retardatur. „ Machina hæc autem, Sodales, quam vobis propono, ipsa sui exiguitate motus velocitatem non admittit nisi modicam. Nam cum casus per eam brevissimi sint, parvæ erunt projectilis velocitates, ideoque resistentiæ adhuc parvæ. Quæ si rationem quadratorum velocitatum sequantur, quem fugiet machinæ exiguitatis utilitas?

Sed ad machinam ipsam deveniamus. Sit (*Fig. ult.*) paral-

le-

lelepipedium ligneum satis robustum, ita longum, ut indicare possit amplitudinem pedum londinensium duorum cum semisse, latum quatuor vel quinque, vel sex pollices, profundum quantum sufficiat ad ejus firmitatem. Sit ad alteram longitudinis extremitatem vanum quoddam portionem cylindri sive marmorei sive eburnei recipiens. Ut hæc cylindri portio determinetur, & methodus innotescat, qua vanum ipsam capiens quibusdam numeris, seu gradibus exornetur, fingamus (*Fig. 2.*) OR planum superius esse parallelepipedum, & circulum BEF esse maximam sectionem globi, quo in experimentis utemur. OR tangat circulum BEF in E. Ex C centro circuli ducatur linea CD secans OR ad angulos rectos. Sumatur in ipsa CD pro libitu punctum D, & facto radio CD describatur portio circuli PDI, quæ erit basis portionis cylindri, quam quærimus. Deinde ab ipso centro C ducatur radius CG, qui cum radio CD efficiat angulum = 45° . Ad circuli portionem IDP addatur portio PH, quæ simul cum portione PG portionem GH comprehendat quadragintaquinque circuli gradibus constantem, quos gradus in ipsa GH notari oportet. Pro libitu, ut dictum est, sumere possumus punctum D. Attamen præstandum est, ut punctum hocce satis distet a puncto C, quod si non esset, chorda PI nimis angusta nonnihil experimentis officeret; verum ne a puncto C tantum distrahatur punctum D, ut parallelepipedum robor multo minus fiat, eo præcipue in loco, quem corpus cadens impellit, dum maxima velocitate, scilicet vi maxima est præditum. Sed machinulæ imaginem persequamur, (*Fig. ult.*) sicque hæc animadversiones suamet natura se prodent. Est igitur in altera parallelepipedum extremitate vanum excavatum, atque octava parte circuli instructum in suos gradus divisa, quorum postremus supra superficiem parallelepipedum superiorem extollitur ad altitudinem semidiametri globi, qui in ipsam cadet. Vanum, & cylindri portio congruunt, hæcque ab ipso continetur. Perpendiculariter a primo alterum parallelepipedum infurgit, ex cujus vertice parallelepipedum oritur tertium, quod cum secundo angulum efficit rectum, primo autem est parallelum. Ab hoc parallelepipedo tertio sustinetur subtilissimi fili, vel crinis ope globus, vel marmoreus, vel eburneus, cujus diameter semissimæ pollicis æquat. Secundi parallelepipedum altitudo permittit casum usque ad pedem unum, & tres pollices longum. Cochleæ quinque machinæ adduntur. Harum una sese in tertium paral-

rallelepipedum, & filum, & cum filo globum, qua opus fit, movens, sic centrum gravitatis ipsius globi dirigit, ut cadat supra majorem profunditatem vani in primo parallelepipedo excavati. Cochleæ tres hoc primum parallelepipedum confodiunt, ipsumque ad positionem horizontalem aptant. Cochlea vero quinta e media convexitate portionis cylindri se prodat, & per rimam transiens, quæ in curva superficie vani invenitur, tandem a cochlea fœmina excipitur: sicque planum superius portionis cylindri in ea cum horizonte inclinatione, quæ libet, detinendum. Tum in primo, cum in secundo parallelepipedo divisiones notantur, ut & casus determinantur, & amplitudines.

Postquam de machina est dictum, dicendum esset de ejus usu, nisi de hoc multa colligi possent ab experimentis, quæ sine ipsa, utcumque instituimus; ipsa adhibita multo, ut clare patet, commodius. Nempe una hac machina & velocitas corpori tribui quævis potest, mutata, ut lubet, casus altitudine, & directio quævis, marmorea scilicet, vel eburnea superficie, unde reflecti corpus debet, per octavam peripheriæ partem conversa. Quæ antequam latius explico, quædam non inutilia consideranda sunt.

Certissimum est (*Fig. 3.*), cylindri portionem PDI , seu QKL , cum intra recipiens vanum volvatur, se se jugiter convertere circa punctum C centrum gravitatis globi, semperque ab hoc puncto æqualiter distare, ideoque punctum vel marmoræ, vel eburnæ superficiæ, in quod globus per AC cadens incurrit, idem erit perpetuo, & perpetuo globus hoc punctum offendet, quando ejus centrum gravitatis ad eundem situm perveniat. Globus igitur reflectitur, cum ipsius centrum gravitatis a superiori superficie primi parallelepipedi distat ipsius globi radio. Ab eadem postea superficie æqualiter distat, cum globus extremum punctum descriptæ parabolæ attigit. Sic commodum erit amplitudines parabolæ ex parallelepipedo divisionibus dimetiri. In experimentis, quæ absque hac machina capta fuerent, centrum gravitatis globi non satis diligenter expendebatur. Hac etiam de causâ machinæ constructionem desideravimus.

Verum quomodo in hac inclinandum sit planum mobile, sive superior portionis cylindri superficies, ad quamdam projectionis directionem obtinendam, dicatur. Hujus problematis solutione illud etiam ostendetur, conversionem plani mobilis per octa-

octavam circumferentiæ partem sufficere; ut omnes habeantur possibiles projectionis directiones, quæ intra verticalem, & horizontalem continentur. Attamen quod dicendum est in præsentî solutione parum differt ab iis, quæ loquens de plano marmoreo in institutis experimentis adhibito jam dixi. Differt tamen aliquanto; & idcirco videtur non prætermittendum. Tunc de una inclinatione egimus; nunc de omnibus.

Jaciendum sit igitur (*Fig. 3.*) corpus per directionem quamlibet CX , quæ efficiat cum verticali CA quemdam angulum ACX . Dico convertendum fore planum mobile per tot circumferentiæ gradus, quot comprehenduntur a semisse anguli ACX , seu BCX . Arcus XB anguli BCX quantitatem referens dividatur bifariam in M . Per puncta M , & C ducatur linea MC , quæ protracta sit usque ad superficiem convexam portionis cylindri in K . Pariter linea AC protrahatur usque in D , & linea XC usque in V . Evidens est directionem QL , quæ tangit circulum in puncto T communi lineæ MK , & ipsi MK est perpendicularis, directionem esse plani reflectentis. Hoc posito denominetur numerus graduum $BX = VD = n$. Erit $BM = KD = \frac{n}{2}$. Per suppositionem vero, atque per constructionem jam habemus $DP = KQ$; & $DG = KE = 45^\circ$. Igitur subtrahendo ab utraque parte eandem quantitatem, dicendum erit $DG - KG = KE - KG$; idest $DK = GE$; seu $GE = \frac{n}{2}$. En ergo demonstratum & planum conversum esse per graduum numerum duplo minorem numero graduum anguli ACX , & conversionem per gradus 45 sufficere plano, ut ex eo reflectatur corpus per directiones quaslibet, quæ a verticali usque ad horizontalem dari possunt. Enimvero sumatur ipsa horizontalis directio, quæ inter omnes majorem cum verticali constituit angulum. Tunc angulus $ACX = 90^\circ$; cujus semiffis $= 45^\circ$: scilicet octavam partem circumferentiæ æquat.

Hæc est, Sodales optimi, machinula, quæ, quamvis simplicissima, attamen infinito sive velocitatum sive directionum numero, numerum parabolæ infinitum sub oculos ponit. Immo parabolas etiam alias proderet numero, si volumus, infinitas. Superior (*Fig. ult.*) parallelepipedum, ex quo amplitudines cognoscimus, superficies nunc horizonti parallela, ad horizontem inclinari posset quocumque angulo etiam obtuso.

Quo-

Quocirca (*Fig. 3.*) datum esset quæri directionem quamdam CX , quæ efficeret cum verticali angulum $ACX > 90^\circ$, quo in casu semper valebit $GE = \frac{z}{2}$.

Animadvertite, quæso, Sodales doctissimi, an verum sit, ut ipse arbitror, machinulam hanc, non modo ostendere parabolicam semper esse viam, quam tenet projectile; sed ipsam adhuc valere, directione projectionis jugiter versa, ad ostendendum maximum Galilei theorema, de quo supra mentionem fecimus, idest, amplitudines parabolæ sub diversis angulis descriptarum sequi rationem sinuum angulorum duplo majorum illis, quos efficit linea directionis sive cum horizonte, sive cum linea verticali; eandemque ad demonstrandum pariter valere, si casuum linea mutetur, theorema utilissimum, quod exponit Gravensandus in paragrapho 550 Elementorum Physicæ, videlicet, amplitudines, manente eadem directione, esse ut altitudines, ex quibus corpora cadendo velocitates, quibus projiciuntur, acquirere possunt: quod idem est ac dicere, amplitudines esse ut quadrata celeritatum. Verum non omnia describam, quæ hujus machinulæ ope vel confirmantur, vel inveniuntur. Theoremata hæc duo, alterum Galilei, alterum Gravensandi, commemoravi, quoniam horum demonstratio nil aliud petit, nisi ut Physici oculus ad parallelepipedum amplitudinum convertatur. Quo quid facilius?

Hactenus machinulam novam experimentis commendare studui. Vestrum erit illam benigne excipere, atque emendare, si opus erit.

	1	2	3	4	5	6	7
Experi- menta.	Casus.	Ampli- tudes ve- rae.	Ampli- tudes in experi- mentis ob- servatae.	Resistentiae in experi- mentis ob- servatae.	Resistentiae quae est in posita pri- ma 82.	Differen- tiae inter resistentias observatas, & resistentias dedu- ctas.	Summae resistentiarum dedu- ctarum, & amplitudinum, quae observatae fuerunt.
I	120	240	158	82			
II	240	480	135	165	164	1	479
III	360	720	428	292	246	46	674
IV	480	960	558	402	328	74	886
V	600	1200	670	530	410	120	1080
VI	720	1440	783	657	492	165	1275

Fig. 1.

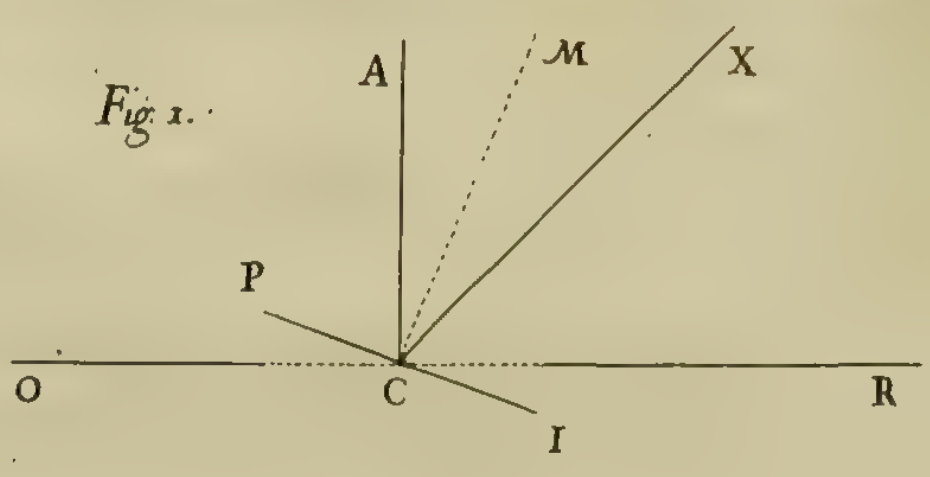
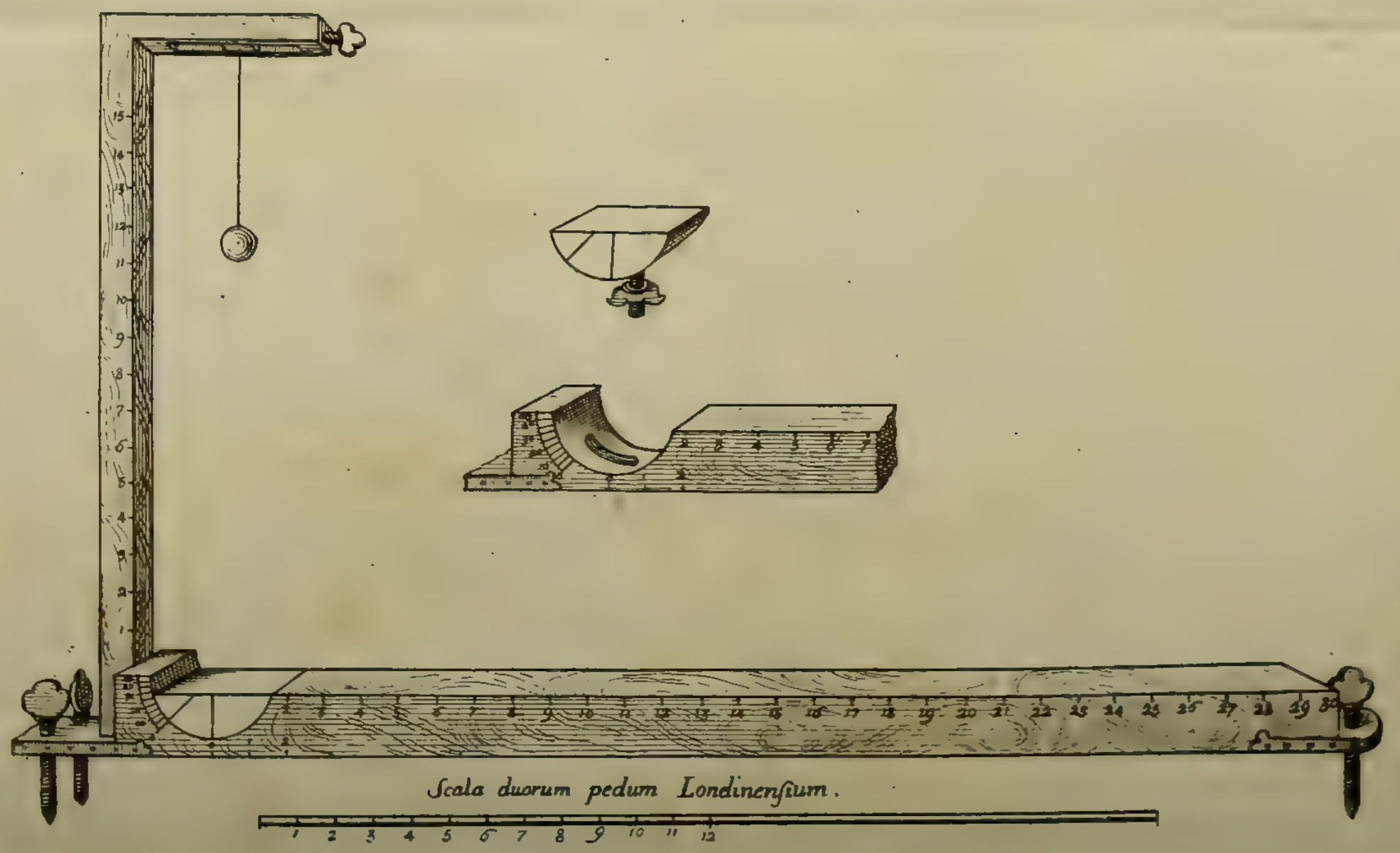
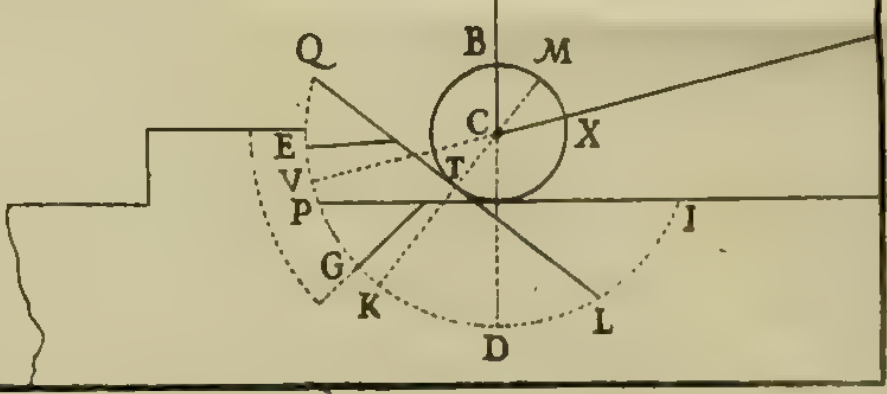
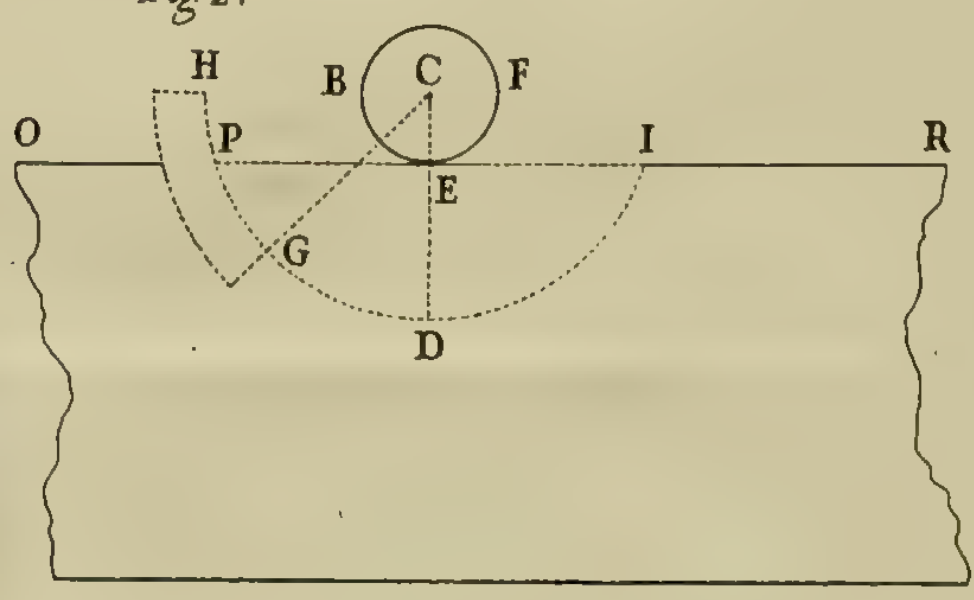


Fig. 3.

A

Fig. 2.





CAJETANI TACCONII.

De Rachitide.

QUUM in Cadaverum Sectionibus, observationes, meditationesque nostræ, multæ, ac frequentes, quæ in danda opera Medicæ, Chirurgicæque Arti occurrunt, nil aliud agere videantur, quam ut eliciant, atque aliquid expriment, quod aut verum sit, aut ad illud proxime accedat; arrepta occasione tum ab illis rebus in cujusdam Mulieris Cadavere visis, & observatis, tum ab aliis, quæ antea actis temporibus vidimus in ossibus Puerorum, qui Cyri, Cyphori, Lordi, Scholiostii appellantur, feбри postea lenta, Marasmo, similibusque morbis interemptorum, tum a sententiis pene inter se dissentientibus celeberrimorum Medicorum Mayowii, scilicet, Avers, Boerhawii, Heisteri, Dolzi ac ceterorum, qui de rachitide verba fecerunt, arrepta, inquam, occasione ab hisce causis, aliquid etiam nos de eadem adnotare volumus, quod si parum emolumenti rachitico morbo tactis erit; Medicis vero, Anatomicis, Chirurgicæque arti addictis incitamento fortasse esse poterunt ad meliora, & utiliora (ut optamus) proferenda, & in medium producenda: ac ut statim ad rem veniamus, seriem, causarumque ordinem in visis, & distæ mulieris cadavere observatis primo tenebimus, deinde ad cætera explicanda descendemus.

Fœmina ergo quædam habitus corporis gracilis, temperamenti ad pituitosum accedentis, circa tertium suæ ætatis annum tam in anteriori, quam in posteriori thoracis parte incurvescere cæpit. Forma curvaturæ sterni, & dorsi, thoracem latum, brevemque, ac totam staturam pusillam reddidit, humerorum, & brachiorum ossa, spinæ, & costarum sensim inflecti cæperunt, & circa septimum annum, omnibus signis veræ rachitidis, debilitate, videlicet, ignavia, mollitie, torpore in partibus infra caput, ad recte progrediendum diffi-

cultate, infimi ventris crassitie, ceterisque apparentibus, usque ad secundum supra quadragesimum annum vitam angoribus, & molestiis plenam traduxit, septimoque Idus Decembris Anni 1754 mortua est.

Cadaver secuimus, & quum ejus infimum ventrem tactu durum, summeque crassum antea cognoverimus, morbique causam ibi quoque magis quam in aliis sui corporis partibus suas vires exercuisse putaverimus, ad idem explorandum, observandumque animus, manusque convertimus, & adaperto abdomine admirati sumus molem quamdam ad album colorem accedentem, superficie nonnihil scabra donatam, quæ ferme totam hanc cavitatem replebat, occupabatque. Hæc ab omento non operiebatur, & aliquam solummodo intestinorum tenuium partem circa pelvim utrimque in conspectum venire conspeximus.

Corpus hocce, quod nomine magni tumoris tunc appellare placuit, majori ex parte formam abdominis consequebatur, supernaque sui parte thoracem ingrediebatur, & intra concavam posteriorem, gibbamque ejus sedem jampridem forte paratam, intrudebatur, exacteque eandem replebat.

Diaphragmatis pars anterior, quæ altior, posterior autem longe declivior esse debet, modo circa costas spurias, & lumborum vertebrae laxior extiterat, & quamquam vis tumoris sursum prementis contra ejus aponevrosim, quæ centrum dicti diaphragmatis conficit, (ut tunc censuimus) exerceri videbatur, tamen tumor producebatur ubi minorem invenerat resistantiam, nempe in dictam concavam spinæ, & costarum partem, & figuram non declivem, sed fere verticalem diaphragmati inurebat.

Non minoris forte momenti tunc putanda fuit vis tumoris prementis supra, & contra viscera omnia imi ventris, dum patuit, intestina, ventriculum, lienem, illi locum dare debuisse, & in thoracis cavitatem se se recipere, & quod rarum visum fuit, hepar in eodem thorace usque ad claviculas protendi.

Hic tumor a tenui subtilissima membrana, a regione lumborum prope vertebrae ejusdem nominis profecta, vestiebatur, quæ in vicinia renis sinistri crassior, molliorque evadebat, varicosis vasis valde referta. Prima facie hic tumor naturæ scirrhosæ videbatur, & ratione nonnullorum sulcorum, sive majoris quatuor inæqualitatum externe quoque apparentium tactu

inæqualium (nam aliæ duræ, ac renitentes, aliæ ferme molles manu contrectabantur) tumor ex quatuor tumoribus coagmentatus dici poterat.

Ut de natura tumoris, qui primus in conspectum venerat, & vertebris lumborum (ubi exoriri videbatur) majori ex parte innitebatur, & postea de cæteris edoceremur, fere in media ejus parte, quæ magis prominebat, & antea umbilicum respiciebat, cultro illum aperire tentavimus, sed incassum, nam quacumque vi adhibita, illum secare, aut dividere haud quaquam potuimus, quapropter nobis abunde innouit, ipsum hic loci naturam osseam nactum fuisse: hinc ferra adhibita, in crucis formam hunc secavimus, & rotundam veluti offendimus cavitatem, cavitati capitis humani ferme similem, quæ sicuti illa a cranio, ita hæc ab ossea indicatâ substantia vestiebatur. Hæc ossea pars in sui superficie, crassitiem unius digiti transversæ æquabat, dum vero versus basim protendebatur, sensim, sensimque crassior evadebat, ut mox dicemus.

Cavitas istius tumoris materia liquida, viscosa, fermeque oleaginea, coloris saturi, quantitate unius libræ cum dimidia repleta erat: in fundo autem idest supra ejus basim similiter osseam reperiebantur quædam protuberantiæ; sive tumores ad naturam scirrhosam accedentes, quorum longitudo, & altitudo erat duarum circiter unciarum, itemque operiebantur sicuti & tota dictæ ossæ substantiæ interna superficies a tenui membrana, quæ habito inquam respectu ad substantiam osseam, internum periostium dici poterat.

Basis igitur ossea, crassitiem unius digiti cum dimidio æquabat; semidiameter autem inferior istius tumoris, sive dictæ ossæ cavitatis, crassitiem semidigiti. Natura istius ossificationis erat spongiosa, & sursum versus diaphragma longitudinem decem unciarum cum dimidia producebatur, & sumpto principio a basi dicti tumoris totum ejus semidiametrum occupabat, & ascendendo in alio magno tumore, formam retusæ pyramidis æmulando, immergebatur, quapropter si ejus longitudo erat, ut dictum est, unciarum decem cum dimidia, circa ejus basim, ossea substantia verticalis erat septem unciarum cum dimidia; dum vero sursum producebatur sensim subtilior factus in naturam scirrhosam desinebat; attentaque ejus origine, tumorem mesenterii dici quoque posse credidimus.

Hic tumor parte sui inferiore cum tumore altero in hypocondrio dextero locato conjungebatur. Hic autem externa facie similis alteri credebatur, scirrhus enim erat, & faccatus, uti ajunt, tum humoris libras duas, & unciam semis intus fervebat: ventriculi, hepatisque sedem occupabat; corticisque istius crassities duorum digitorum transversorum erat.

Tertius tumor naturæ scirrhosæ, altero in mole minor erat; reni sinistro autem ita uniebatur, ut ren ipse, tamquam gemma in annulo, in eodem recondideretur. Hic ren, altero minor duplo erat, ac ex ejus forti cum tumore adhæsione, complicationeque, dum omnem tumoris molem ex abdomine extrahere volumus, etiam ille cum aliqua ureteris, & vasorum uteri præparantium parte, quamvis invito, eductus fuit.

Ultimus, scilicet quartus tumor, in thorace pene totus consistebat, & superiorem magni tumoris partem efficiebat; hic tumor valde latus, & crassus ad rotundam figuram, præsertim in extrema superiori sui parte, accedebat, naturamque scirrhosam imitabatur, ac, ut dictum est, intra posteriorem thoracis gibbam sedem se intrudebat. Ab osseo tumore exordium habebat, ibique squamulas nonnullas osseas variæ figuræ, in sui superficie positas, gerebat, quæ dum in dicto thorace tumor producebatur, obliterabantur.

Omnis tumor necessario vim maximam exercebat supra intestina, quæ sursum versus diaphragma contracta, valdeque pressa observabantur. Intestinum autem colon a dicto pendere summe complanatum, costis spuiis hinc inde, vertebrique lumborum innitebatur, intestinumque similiter relictum in propria sede compressum erat. Vestigia denique nonnulla omenti si a ventriculi fundo non deprompissimus, forte in ejus existentia deliberanda judicium dubium mansisset.

A carie vertebrarum, & costarum, atque a cæteris pravis rachitidis affectibus recensendis ac in istius Fœminæ Cadavere visis, observatisque modo abstinemus, dumtaxat adnotantes quod diameter totius tumoris ex quatuor descriptis conflatum erat unciarum triginta quatuor, ejus altitudo unciarum viginti quatuor; & qui dextrorsum reperiebatur, quemque inferiorem abdominis partem occupare diximus, erat unciarum sexdecim cum dimidia; longitudo autem ossei tumoris unciarum decem cum dimidia. Lance ponderatus totus, triginta duas libras pendebat; attentaque sede, e qua discedebat, tumorem, inquam, mesenterii dici posse arbitrati sumus.

Hæc

Hæc autem singula exactissime circumspeximus cum aliis in re medica, & anatomica versatis, unaque cum docto Viro Bartholomæo Riverio, (cujus solertiam, industriam, atque peritiam satis superque, ut par est, verbis commendare non valemus) denique anatomicorum more, rogavimus D. Carolum Pifari in arte delineandi, ac pingendi bene versatum, ut descriptum hunc tumorem ad rem, veritatemque figura & lineamentis suis traduceret, quumque humanissime (ut solet) nobis tunc obsequutus fuerit, dicti tumoris graphydem oculis omnium exhibemus.

Historia ergo morbi, sectioneque Cadaveris lustrata, atque completa, ad internam rachitidis causam perquirendam accessimus, & plerosque consultavimus Doctores Medicos, qui de hoc morbo scripserunt: nostras observationes, meditationesque, hac super re, cum illis contulimus; tandem cum Clarissimo Boerhawio rationabilius nobis visum fuit, eandem repeti posse a prava dyathesi in sanguine, humoribusque sensim introducta, nempe e Cacochimia inertis, mucosa, frigida, vappida, a latente forte labe venerea permixta cum laxa partium firmarum fabrica, quæ peculiari ratione ossa proximius ad male afficienda determinat. = Placuit quoque nobis una cum illo prælaudato Viro asserere, chilum satis elaboratum, & materiam solidis partibus compingendis destinatum, utpote Accessentem mutari debere in Alchalescentem, quatenus hæc apprehendit veluti elementa terrestria, & compagem illam formât, quæ aqua solvi nequit, & ad humores coercendos apta redditur. Hanc doctrinam ab eodem confirmatam fuisse novimus, dum ait, se a Ruifchio accepisse; ossa in alchalicis liquoribus ad tempus detenta, solida, duraque manere, in accidis vero mollescere, & flexibilitatem contrahere, quia vis hæc mutandi accessentiam in alchalescentiam tunc deficit, & sic ossa, cartilagine, ligamenta laxa, & debilia, ut in rachiticis, fieri necesse sit.

Hac igitur admissa sententia, animadvertimus primo ossa consideranda esse, dum mollia, ac tenerissima sunt, ut in recen-ter natis, dein quum ad aliquem soliditatis gradum accedunt, ut in pueris, ac demum dum ad hunc omnino pervenere, ut in adultis, ac senibus. Secundo adnotavimus, succum nutritium, qui in progressu hominum ætate ad eorum ossa nutrienda destinatur, minime canaliculos (ut plerique putant)

a fibrillis osseis efformatos, ossa perenni cursu ingredi, ac veluti circulo quodam per eosdem fluere: tertio demum ultro confessi sumus, nos quoddam glandulosum corpus nusquam invenisse (ut aliqui asserunt) quod ad ossa puerorum, & adultorum hominum nutrienda apprime faciat.

Hicce in gratiam nutritionis ossium generatim descriptis, ne quis credat, nos in Rachiticis præsertim hoc nutritionis opus nimis fidentius, vel glandulis, vel arteriis, vel folis membranarum tribuere velle (quamvis frequentius id in Fraxino, Castaneis, Moris, & quibusdam aliis adultis arboribus accidere observemus) nam primis ætatis temporibus, aliquam forte partem nutritiam per canaliculos a fibrillis osseis efformatos, ac per porositates in iisdem ossibus insculptas, ossa forte ingredi arbitramur, nam si ferra dentata fecentur, hic illic apparent puncta rubra a sanguine venientia: non modica unctuosâ materia visitur: tenerrima respective sunt; tenuissimi arteriolarum, venarumque rami perspicui, & manifesti apparent, ac tandem scimus, ossa rubedine tingi mutuata a radice arida rubiæ in pullis, gallis, suibusque, ut Samuel Sharpus Britannus, nosterque præclara, & abundanti doctrina, atque optimarum artium studiis eruditus, & excultus Præceptor noster Matthæus Bazzani, D. Behmer anno 1752, & anno 1757, D. Albertus de Haller, studio, diligentia, & ope, D. Detlef anatomici professoris sui, alique forte demonstrarunt; hæc, inquam, non ignoramus, sicque & glandulis, & vasis arteriosis, nerveisque, multoque magis perioestio negotium hocce primis præsertim ætatis temporibus tribuimus; at sequentibus, in quibus & ob idoneam particularum elementarium formam, & ob aeris vim exterius prementem, arctissimeque particulas ossium vincientem, forteque etiam ob alias causas colligantem, ossa durissima fiunt, nutrimentum peculiare, & peculiari modo ossa idem recipere contendimus.

Porro quam nec sensuum fides sine ratione, neque rationes sine sensibus ferme sint perquirendæ, ad id asserendum nos movent puncta illa sanguinea supra indigitata, quæ in dies magna ex parte evanescent; multa ossium humiditas, & unctuositas, quæ ramificationibus una cum plerisque arteriolarum e conspectu auferuntur: laminæ ossæ, e quibus majori ex parte coagmentantur, quæ ad se se invicem approximant, & durissima ossa efficiunt. Hæc præsertim ea sunt, quæ

nutritionis & conservationis, inquam, opus in ossibus peculiari ratione perfici ostendunt, dum scilicet ad perfectum soliditatis terminum perveniunt; & quamvis poruli, canaliculi, ramificationes aliquæ arteriolarum remaneant, quæ sanguinem ad ossa vehant (ut ex sulcis, fistulisque etiam in ossibus rachiticorum insculptis fit notum) tamen quum id ad alios usus factum sit, ut a nobis fusius disputatum est annis proxime elapsis, dum de ossium fractorum unione, & coalescentia verba fecimus, modo ea repetere non vacat, nam Galenus quoque lib. 5. methodi scriptum reliquit, fracta ossa non per unionem, sed per Callum, quem Greci *Poron* appellant, ceu gluten cohære, atque conjungi; lapidemque cum lapide, testam cum testa numquam coire.

Quum vero hæc agerentur, & meditationes, observationesque nostræ omnes circum Rachiticorum ossa, & eorum morbos essent conversæ, ad aures nostras rumor quidam pervenit, plerisque nempe in re medica, & anatomica exercitatos, sed fortasse ab nimis antiquorum Medicorum sententia præoccupatos, nostræ sententiæ minime assentiri, ideoque, ut ad veritatem aliquam, hac in re, cognoscendam traducerentur, ab incepto Rachitidis sermone aliquantulum discedere debuimus: & manus adiutrices statim porrexit sectio Cadaveris cujusdam hominis, (cui sectioni dicti homines increduli convenerunt) annorum quinquaginta, qui febre maligna in nostro Sanctæ Mariæ de Morte Nosocomio vita decessit: Vir iste quatuor transactis mensibus, fracturam passus fuerat in ossibus tibiæ dexteræ: diffractio ossium, quatuor digitis transversis supra talum sita, effecerat, ut pars inferior tibiæ diffractæ verius finem musculorum gastrocnemiorum non recta, sed quasi triangulari linea, duobus digitis transversis sursum elongaretur; pars autem reliqui superioris ossis exterius integumenta communia nonnihil elevaret: necessariis interea adhibitis præsiidiis, quinquaginta octo transactis diebus bene se habebat homo, subalarium fulcrorum auxilio primis sequentibus diebus, dein sine illis, libere incedebat. Transacto postea uno mense, & octo diebus a dicta febre correptus fuit, & vigesima prima die mortuus est.

Secuimus Cadaver, & detractis integumentis, musculisque ossa antea fracta obtegentibus, statim offendimus corpus naturæ ossæ nonnihil spongiosæ, quod supponebatur cuidam

anteriori vacuitati tempore, quo os tibiæ fractum fuerat, relicta, quam repleverat, partemque ossis istius superiorem cum inferiori colligabat: ossa hæc apposita substantia extendebatur quoque in parte postica, sursumque producebatur usque ad finem cujusdam productæ inæqualis rimulæ. In abraddendo, medio cultro, maxima cum diligentia hoc osseo adnato corpore, clare patuit, istud efformari a fibris revera ossis non valde duris, quæ circellum inæqualis figuræ per omnem diffractionis locum se extendentem, omnesque scilicet ossis diffusi partes operientem, qui tibiam satis ad incedendum aptam, firmamque reddebat.

At quum viderimus partem ossis diffracti superiorem nonnihil in dextera sui parte fulciri a relicta inferiori ossis parte, tunc animo invisendi num hoc in loco fœdus (ut ita dicamus) cum illo iniisset, idque præsertim ob illos Viros, qui de hac re suaderi debebant, hanc quoque ossis partem lustravimus, abundeque innotuit nedum hanc stricte adglutinatam alteri superiori ossis parti, sed diffractam, ita ut nulla vi adhibita, nudis quoque oculis patuit, capita horum ossium divisa esse: quapropter nemini locus fuit asserendi per canaliculos, aut porositates a fibrillis ossis efformatas, substantiam ossificam ad ossium fractorum unionem in adultis hominibus inducendam comparatam esse. Tophus autem, de quo est sermo, tempore dicti morbi ad eam duritiem forte, ad quam pervenisset, si æger alio veniente tempore vixisset, non pervenerat, & relicta vacuitates, ac foraminula observata replevisset, magisque compactam, duramque naturam ossis (ut in aliis animalium, & hominum ossibus, quæ apud nos asservantur) aquisivisset.

Tanti interea fuit hæc observatio, ut illi, qui succum ossificum, ut dictum est, ingredi canaliculos, & porositates ossium, (ut etiam semper in quibusdam insitionibus arborum sequi) putabant, sententiam suam mutarint, nosque periossium tamquam subjectum ossificæ conglutinationis in ossium fracturis, & præsertim hominum adulatorum forte adstruxisse intelleximus. Noveramus enim cur hortorum cultores *Inoculatione*, sive, ut ajunt, *Emplastatione*, insitionis loco interdum utantur, nam tunc scalpro nudato nonnihil arboris cortice, inter diducta vulneris labia, corticem alium gemma instructum reponunt, efficiuntque ut convenient & mutua veluti

lati coeundi cupiditate faciliq̄ue corticum amplexu coalescant; noveramus item in aliis infitionibus, ramum aliqua gemma instructum, & arbori alicui insertum, magis a cortice nutritionem, augmentumque recipere, quam ab humoribus a dicta arbore mutuatis; nam si locus infitionis tandem non operiatur a dicto cortice, ramus insertus reficcatur; similiter in amputationibus artuum humanorum, ut vulnus inflictum sanitati perfectæ restituitur, ab integumentis (ut omnibus satis constat) operiri debet.

Sed ad Rachitidem redeamus, ac ut quid in illis hoc morbo laborantibus observavimus exponamus: vidimus enim primo, ossa fere semper incurvari, ubi majores arteriæ in illis implantantur: secundo diametrum illarum latiore in ossum ingressu, illamque statim constringi, & ad medullium partetque internas, medullamque, præsertim in ossibus majoribus, transferri: tertio cellulas, & foramina ea scilicet in parte, quæ sensim, sensimque fit concava, & circum dictas arterias sparsa, eorumque viciniam superficiem sanguine, in pueris præsertim, conspurcatam: quarto hæc cellulas periostio carere: istudque ubi manifestari incipit ulcusculis affectum: quinto demum, partem ossis convexam nihil dempta convexitate, a naturali ossium compage diversam apparere.

Attentis postea hisce observationibus, facile manufacti fuimus ad explicanda symptomata, quæ in rachiticis manifestari solent; animadvertimus enim sanguinem mucosum, inquam, inertibus, frigidis, vapidisque partibus inquinatum tantum valere, ut ex ejus tardo motu, quem acquirit in ossum teneriorum ingressu, ibi exundare posse, & parietes illarum arteriarum male afficere; circulo in vicinis periostii arterioli impedimento alicui esse, & ex mora cellulas, cariem, & dicta parva foraminula producere.

Nec aliter, ut credimus, res se habere potest, si attendatur natura ossium in pueris, periostii, ac tendinosorum staminum temperies, modusque quo partes istæ ossibus adglutinantur: notum enim est primis ætatis temporibus, ossa ad glutinis liquati naturam accedere: periostium vero rei lentæ, & viscosæ non adeo firmiter adhærere: crescente autem ætate, quum gluten illud induretur, & ossium moleculæ ad se se magis accedant, periostium quoque magis iisdem ossibus simul uniri; nonnullos musculorum tendines ossibus immediate inferi, ac periostium recta perforare; istudque supra ossa

expandi, ut magis expandi non possit, idque magis ubi firmior, & planior est eorundem ossium superficies; ac demum pleraque musculorum filamenta in una ossis parte continvata conspici, in altera eorundem ossium porulos, more fibrillarum perioestii, ingredi: quum, inquam, ut anatomes docet, hæc medicis, anatomicisque sunt nota, colligitur a labe inflictæ ossibus ubi arteriæ majores ea ingrediuntur, ibi ossa debilitari debere, nam ceteræ vires musculorum, tendinum, perioestii impares redduntur ad impediendam ossium flexionem, crassitiam in articulis genuum, & corporum, aliosque morbos, qui in rachitide manifestantur, morbumque hunc abunde suas vires exercuisse ostendunt.

De indicatis postea cellulis, quæ pro occulta carie accipi possunt, deque nonnullis aliis morbis cum Rachitide conjunctis, & ab indicata causa venientibus verba quoque fecerunt Medici plerique celebres, atque inter hosce Theophilus Bonetus Anat. Pract. lib. 2. sec. 12. ubi de Gibbositate, observatione 2. dum ait, se vidisse in Cadavere cujusdem Adolescentis a pueris gibbi, qui mortuus fuit suæ ætatis anno 16. septimam, octavam, & nonam vertebra dorsi carie exesæ: item Jo: Zacharia Platnerius (ut in Actis Eruditorum mense Decembri Anni 1751. pag. 571. num. 209.) dicit, Pueros, Adulesque gibberosos observasse, in quibus vertebrarum corpora corrupta erant, & carie exesa; quin immo pag. 576. de Infante quinque annorum loquens, veram gibbositatem se vidisse ait, in qua plurima vertebrarum corpora carie exesa erant: Hieronymus Mercurialis: Marcus Aurelius Severinus, aliique docent, innasci tubercula non pulmonibus aliisque in locis, sed vertebrarum ligamentis, quorum causa gibbositates quoque fiant.

Neque incommodis istis perferendis obstant majores arteriæ, in quibus sanguinis cursus ad ossa non intercipitur, nam reliqui arteriolarum rami illis vicini, nedum tenuissimum albidum rorem ad ossa nutrienda (ut imaginati sunt aliqui Medici) asservant, & exaratis pravis affectibus, subjiciuntur: & si aliqua ossium accretio fiat (gracilia enim semper inveniuntur) hæc forte repeti poterit tum a particulis ossis ante morbum in ossibus existentibus, quæ explicantur, tum a descriptis Tendonibus, partibusque ossibus adglutinatæ, quæ, quum majori earum parte sanæ sint, & mole sua crescant, istæ

istâ conferre aliquâ ratione possunt acretioni alicui, distensionî, elongationique istorum ossium.

At quum præsertim circa majorum ossium capita, & medietatem foramina a primordiis in illis insculpta, nerveas ramificationes, arterias, periostiumque admittant, quæ ad medullium, medullamque feruntur, itemque per eadem foramina (ut præsertim in mandibulâ inferioris interna facie, ubi foramina sunt majora, observari potest) venæ sociæ foras exeant, quum, inquam, res ita sit, attentis quoque arteriarum illarum diametro, & natura sanguinis per eas percurrentis, facile intelligitur venosi quoque sanguinis regressum debilitari, & ejus exundationi, morbisque indicatis apprime favere.

Pravi item effectus, qui Rachitidem comitantur, id ipsum confirmare videntur; nam in istius morbi initio debilis, vel nullus est dolor, nullus tumor in ossibus, quæ postea incurvantur, apparet, nulla rubedo, & inflammatio, partesque istâ solum circa articulationes (quum forte sint molles, & spongiosæ), materiam ossificam illac delatam facilius retinere possunt, & quo ad cæteras ossium partes crassescere, quod postea pro signo dicti morbi a medicis accipitur. Ex quibus omnibus colligitur lente causam hanc agere, naturamque suam ostendere; non sic vero in progressu, nam vires acquirat, & adjuvantibus cursu, dispositione, ingressu arteriarum, regressuque venarum, indicata caries augetur, febricula, aliique morbi enascuntur, & incurvatio ossium manifestatur; nam a carie sequuta resistentia, inquam, & æquilibrium perditur; hinc si a carie vertebræ dorsi sint male affectæ, gibbositas extrorsum apparet; si costæ sursum eleventur, & præsertim inferiores aliquæ, tunc ex superioribus, ratione ipsiusmet spinæ, deorsum comprimuntur versus sternum, & gibbositatem antrorsum efficiunt; si autem processus spinati ex. g. quartæ, & quintæ vertebræ dorsi nonnihil exterius prominere incipiant, costæ illis unitæ posterius trahuntur, elevanturque, interius vero reliqua suarum elongatione deprimuntur, ac denique contractiones, doloresque tum in sterno, tum in partibus pectoris sentientibus inurunt; muscoli respirationi intervinientes constringuntur, vim non mediocrem, distensionemque in nervis exercent, ac tandem ligamenta, tendinesque relaxantur, ac ita debilitantur, ut ossa interdum e sua sede nonnihil dimoveantur.

Condilli interea vertebrarum exterius porriguntur, nec (ut censent aliqui anatomici) ratione musculorum longissimorum dorsi, quia eorum tendines solum in processus transversales vertebrarum, & aliquot costarum implantantur: nec ratione semispinatorum, nam isti in processibus spinosis primarum vertebrarum dorsi terminantur. Igitur in adducto morbo diætæ Mulieris, in qua gibbositas manifestabatur circa quartam, & quintam dorsi vertebram, externe ossa elevari, interiorius autem deprimi necesse fuit, nam costæ illis vertebrae respondentes exterius erant acuminatæ, interiorius autem summe depressæ, & causam hanc vertebrae dorsi in earum scilicet parte interna primo male affectis fidentius tribuere posse credidimus.

Sed quum pars quo mollior, validiores quoque motus, impressiones, mutationesque recipere possit, nil mirum si infantes magis quam juvenes, adulti, ac senes rachitidis morbo teneantur. Ossa enim dum magis solidescere incipiunt, ipsa causa, quæ rachitidem facit in pueris, si adhuc in sanguine, ac humoribus sit, alios forte morbos gignere poterit, non vero tam facile incurvationes, ossiumque prominentias, cariem, gibbositates, & symptomata supra recensita producit; hinc doctissimus Hippocrates ex Asthmate, & Pleuritide interdum gibberosos fieri dixit; & Galenus tertio de Locis, & secundo de causis Pulsus cap. II. incusat plenitudinem, & densitatem, spasmos quoque, & siccitatem, squalores, frigus immodicum, tuberculos, inæqualem temperiem, & similia.

Si igitur pro varia hominum ætate, variis quoque modis a morbis male affici possint eorundem corporis partes, (sicque sensitivitas, & irritabilitas partium, de quibus tantum hisce temporibus disputatur hac ratione major, vel minor, vel nulla concipi possit) nos in antedictorum confirmationem, & præsertim illarum rerum, quas retulimus, ubi de ossium natura, modo, ac tempore vario, in quo sunt consideranda, ac perpendenda, sicque de eorum nutritione, causaque, qua adaugefcunt, studiosi, addimus, partes ossium in pueris aliqua de causa denudatas, a fibrillis periostii, vicinisque muscularibus operiri, non sic vero in adultis, ac senibus, nam id a natura molliori in illis: ab contracta ariditate in istis, denegataque nutritione accidere posse censemus. Ossa enim puerorum humore nutritio sunt imbuta: causa qua

augefcunt, quemadmodum forte ut in feminibus, & ovis viget, ac a mufculis, partibusque, quibus veltiuntur, adjuvatur: eorum offium pori funt latiores, materia unctuofo, qua abundat, & a qua obliniuntur (ut etiam notat celeberrimus Heifterus) ab ariditate, fragilitate, imbecillitateque eadem defendit, ab iisdem exsudat, & fibrillarum strata tendinofo, & mufcularia hinc inde, ac circum offa denudata claviculis veluti fuis tamquam manibus apprehendunt, & ideo fupra partes offium denudatas, fe fe extendunt; in Adultis vero, in quibus offa fumme reficcata funt, unctuofo materia minor eft quantitate, & vetus illa nutritionis cauffa deeft, quocirca defquamatio neceffario eft expectanda.

Quum, attentis inquam variis, diverfisque hominum ætatibus, varia item fit offium natura, & eorum compages, atque id maxima ex parte oftendat, cur puerorum offa facilius a dicta rachitidis cauffa vitientur, tamen cum ad offium adultorum defquamationem fermo nofter traductus fit, atque pateat, partes medullæ propiores oleo medullari magis obliniri, quam illas, quæ eorundem offium fuperficiem externam efformant, modo addimus, fagacem, providamque naturam fortaffe hac de cauffa perioftio ea exterius obvellaffe, ftructuramque iftius talem reddidiffe, ut neceffitate expoftulante, eorum offium fractorum cohæfioni præfto effet.

Et revera fi in adultis hominibus offium, aliqua de cauffa, denudatorum, defquamatio confequitur, circumpofitæ perioftii, & mufculares fibræ fupra minus reficcatas, & offi denudati fubtus politas fe fe intrudunt, illique parti offis fuperextenduntur, hinc fenfim mole fua crefcunt, & reficcata offis denudati fquamulam partemque ideft eorum offium fupernam, frequentius nulla vi adhibita, nulloque alio remedio, elevant, ac tandem foras expellunt, jucundoque fpectaculo, jam omnem offis partem fubtus politam, operuiiffe luculenter exhibent.

De medullaris olei utilitate præ ceteris fidem facit illa laminarum offearum defquamatio, quæ a terebra pyramidali obtinetur, nam materia illa nonnihil rubra, faturi nempe coloris, & oleaginea, quæ per foramina exacte offibus inflicta, affurgit, & cum vicinis perioftio circumpofitis mufcularibus fibris, integumentifque confociatur, ac interdum tantivalet, ut defquamatio impediatur; quod etiam adnotavit

D. Bel-

D. Bellost in suo Opere inscripto *le Chirurgien d'Hôpital* cap. 12. p. 85., & os antea denudatum brevi opertum a fibris carnis, nerveis, ac tendinosi conspiciatur.

Verum quum vitia quadam interdum esse possint, vel in ovo, vel in utero matris, vel in femine patris, vel in humoribus eorundem puerorum, quæ primis ætatis annis ossibus inuri possint, & sic spinas ventosas, ita dictas, teredines, exostosin, aliosque morbos procreent, tamen si causa illa solummodo interna lenta, mucosa, frigida, vapidaque cum latente forte labe venerea commixta attendatur, illico patet, cur languor in artubus persentiat, vita sedentaria, & quæta in istius morbi cursu a rachiticis ametur: cur eorum ossa durissima evadant, cur partes in quibus arteriæ implantantur minus nutriantur, cur non omnia ossa, omnesque eorum partes male afficiantur, ac demum cur materia illa, quæ facessere deberet in ossa, per totum corpus circumeundo, ubi aliquam invenerit partium similitudinem, ibi deponi possit (ut forte in descripto mulieris tumore factum conspeximus) partibusque illis adaptetur, & ossificationes formet.

Et revera si oculos conjiciamus in dictorum puerorum cranium, istud particulas ossæas ubertim admittit, & hac ratione citius quam par est in majorem molem adaugetur, atque interdum aliis in ossium locis prominentiæ, tophi, & nodositates enascuntur, non dissimili forte ratione ac in partibus fibrosis, carunculæ, dum filamenta nervea, carneaque ita male afficiuntur, ut succus nutritius earundem extra earum cavum foras transudet, exeatque.

Cranii ergo firmitas, & magnitudo, partibus subtus illud positis, augmentum, dilatationem, & firmamentum concedit; cerebro, & cerebello ferme ut in ætate proVectiori, famulatur, impedimento esse potest, ne major pars spirituum animalium deperdatur; tonum arteriis, vasisque omnis generis in meningibus, ac intra cerebrum sparsis conciliat; hinc facies fit plenior, & floridior, ingenium præ ætate plus solito felicius; laboris, exercitiique, impetu quodam mentis, & voluntatis studio, quæ in causa sunt, ut magis ad cognitionem intelligentiamque convertantur, aliosque ejusdem ætatis pueros antecire videantur. Verum enim vero, quum hæc diu perdurare non possint, quia (ut in plerisque aliis morbis) principiorum ametria pervertatur, fluidæ partes, vel congruam

gruam cum solidis comparationem deperdant, parvulos meatus obstruant, uno verbo (ut ajunt) in actu causa illa magis ponatur, tunc symptomata recensita, & ab omnibus medicis usque adhuc observata, & descripta enascuntur, & jure merito a Doctissimo Sydenamio pag. 713., & a D. Burnet sec. prima lib. 15. pag. 660., lacerae ægritudines appellantur, quæ nisi intra quartum, vel quintum ætatis annum tollantur, rachitici aut infirma, atque ægra valetudine totæ suæ vitæ tempore torquentur, aut in mortem prolabuntur.

Si exaratae rationes alicujus incitamenti nobis fuerunt, ut quæ usque adhuc exposuimus, notaremus, majus quidem incitamentum ad id faciendum addiderunt sententiæ ambiguae, ac ferme inter se dissentientes plerorumque Medicorum, qui de hoc morbo scripserunt; acceperamus scilicet, Glissonium, cui subscribitur Heisterus, appendice sua de rachitide recursum fecisse (ut causam rachitidis explicaret) ad inæqualem distributionem succi nutritii ossibus solummodo competentis: Mayowium ad inæqualem similiter succi nutritii distributionem, minorem tamen musculis, majorem autem ossibus, concessam: Dolæum ad virtutem spirituum animalium, majorem in una ossium parte, minorem vero in altera: alios medicos ad obstructions, vel in nervis, vel in glandulis, vel in spinali medulla: aliquos ad differentiam quamdam intercedentem inter ossium substantiam, & eorum formationem: alios ad alias causas, quas si singulas numerare, ac referre vellemus, nimis longum esset enarrare. At quum nulla mentio a dictis optimis medicis fiat de morbis a nobis visis, & observatis, ossibus rachiticorum obvientibus, ut (nisi fallimur) par est, & necessitas postulare videbatur, dubitavimus, eisdem occasionem non habuisse ossa rachiticorum observandi, & examinandi; etiam in opinione nostra saltem ab laudato expertissimo Viro Clopton Awers confirmati fuimus, qui de se ipso in sua *Osteologia* ingenue fatetur, se nunquam occasionem hanc habuisse.

Si quæ usque adhuc de Rachitide diximus, alicui forte pauca videri possent, pauca etiam de remediis ad illam impediendam, tollendamque comparatis: hinc cauteria, enemata mercuriales purgationes, exsiccantia quædam, ab doctoribus medicis descripta, & præ cæteris radix filicis florida, osmunda regalis dicta; flores salis amoniaci cum vitriolo cipri calcinato

inato commixtis: Ens Veneris appellati, aliaque hujus census ut pote materiam pravam supra descriptam corrigunt, ac eliminant, in illis examinandis, & referendis non immoramur, nam D. Lemerii in suo tractatu universalis de Aromatibus pag. 252., osmundæ regalis radici vim aperitivam, incisivam, & vulnerariam, quod apprime concordat cum experimento a nobis instituto, quatenus a libra una dictæ osmundæ regalis aridæ, & per retortam destillationi expositæ, eduximus uncias tres cum dimidia phlegmatis cum paucis spiritu; drachmas tres olei foetidi, & quinque cineris, e qua extraximus grana quadraginta falis: itemque dictus auctor in suo Cursu Chimico pag. 362. Enti Veneris, vim aperitivam, attenuantem, ac diaphoreticam habere docet, quin immo toties laudatus Boheraawe arbitratur, bonos effectus polliceri ab isto remedio in iis morbis, qui a nimia debilitate staminum solidorum pendent, ut etiam multo antea adnotaverat celeberrimus Helmontius.

In adversa vero opinione nos sumus cum illis, qui emollientia remedia partibus concavis ossium rachiticorum, & corroborantia convexis apponunt, nam pars concava a recensitis incommodis, & præcipue ab occulta carie debilitata, corroborantia: convexa vero, ut pote durior facta, emollientia exigere videtur; idem de frictionibus, palis, vectibus, machinamentis, & ferramentis dici posse credidimus, nam si ad æqualiter ossa in eorum figura, vel retinenda, vel restituenda inventa, & comparata sunt, hæc parti concavæ magis, quam convexæ apponenda videntur, ea ratione qua Agricolæ palos, vectesque arboribus junioribus parti inclinatæ, vel quæ inclinari incipit, apponunt, minime vero oppositæ.

Si ergo & a morbo gravi, mortiferoque dictæ mulieris, & ab indicatis causis, occasionem arripimus ad hæc scribenda, tamen quam ad finem pervenimus, ultro confiteri debuimus, nonnullorum symptomatum, quæ eandem morbi causam forte respiciunt, sive ab eadem necessario pendere videntur, adhuc formam eorum, speciemque perspectam nos cernere non potuisse: ideoque studio, ac solertia illorum, qui medicarum, chirurgicarum, atque anatomicarum artium sunt amantissimi, eandem causam, & reliqua e tenebris in lucem vocare modo committimus.

De Rachitide tandem quamvis nonnulla addere in animo esset attentis præsertim iis, quæ anno 1758. D. Hallerius, ubi de ossium formatione, publici juris fecit, tamen quum alio tunc evocati fuerimus, ad medicinam scilicet præstantam variis hominibus a Cane vere rabido demorsis: (agebatur enim de morbo, ut omnes sciunt, cujus symptomata heu nimium truculentiora satis manifesta, remedia vero ad debellandam, ac profligandam luem usque in hunc diem, vel nulla, vel saltem valde dubia) hinc attentis iis, quæ dietim acciderunt, ea item notavimus, & quum utilitatis non modicæ id esse arbitrati fuimus, quæ tunc scriptioni mandavimus, aliis tempore, & loco ad facultatis medicæ decus, & incrementum, nostræ Academix notum faciemus.

EXPLICATIO FIGURARUM.

FIG. I.

- A. Magni Tumoris facies externa.
 B C D. Minores Tumores.
 E. Pars superior, quæ Thoracem ingrediebatur.
 F. Alter Tumor in Hypochondrio dextero locatus.
 G. Alter Tumor mole minor Reni sinistro cœnitus.
 H. Ultimus Tumor in Thorace pene totus inclusus, &
 ab osseo Tumore exortus.
 h h h. Squamulæ osseæ.

FIG. II.

- A. Magnus Tumor.
 B C D. Minores Tumores.
 E. Ren succenturiatus.
 F. Uteri vasa aliqua.
 G. Ureteris portio.

FIG. III.

- A. Facies externa magni Tumoris in crucis formam adaptæ.
 B. Superna pars Tumoris, quæ Thoracem ingrediebatur.
 b b b. Ossea substantia.
 C. Cavitas cavitati capitis humani ferme similis.
 D. Tumores ad naturam scirrhosam accedentes supra basim
 magni Tumoris locati.
 E. Ossea substantia verticalis.

FIG. IV.

- A A. Ossea substantia.
 B. Membrana, sive portio Mesenterii.
 C. Tumores ad naturam scirrhosam accedentes.
 D. Membrana interna, quæ Periostium æmulabatur.
 E. Unus ex cæteris Tumoribus.

Fig. 1.

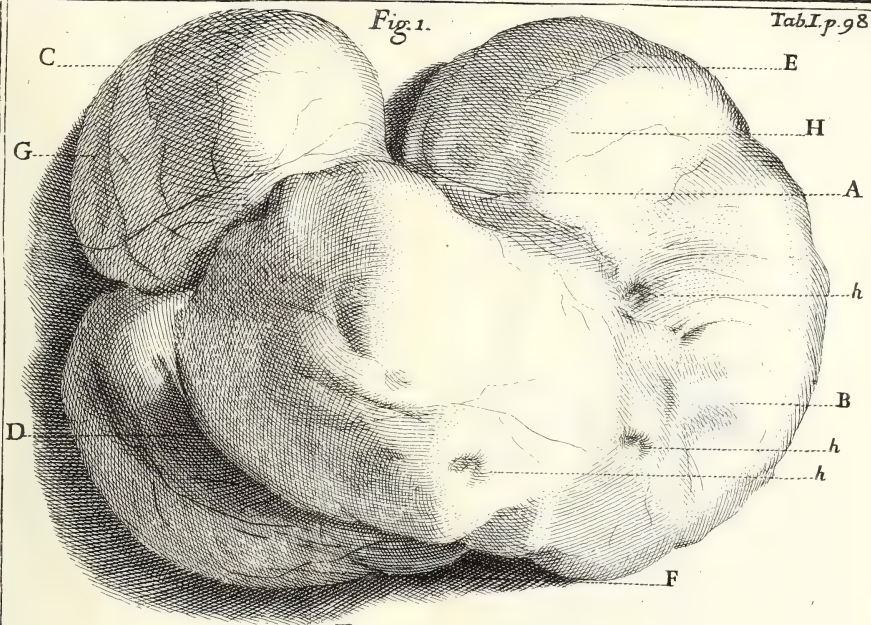


Fig. 2.

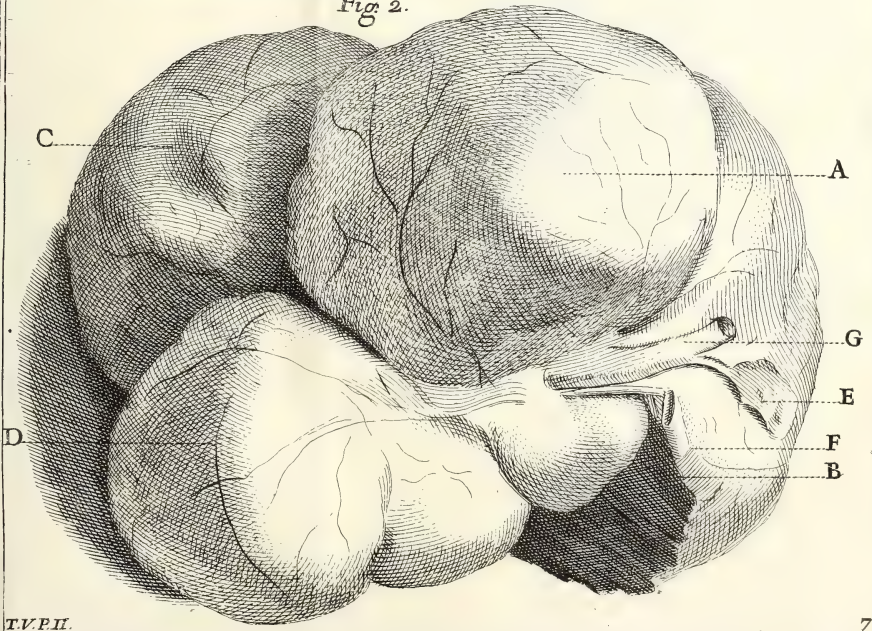


Fig. 3.

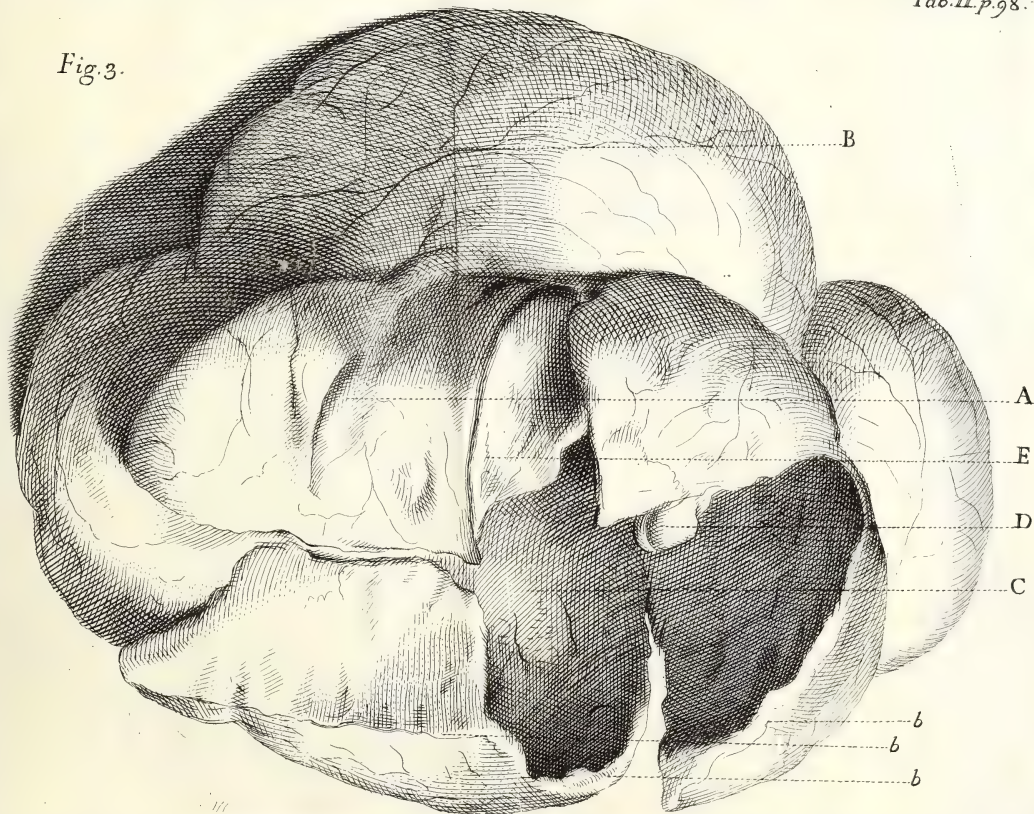
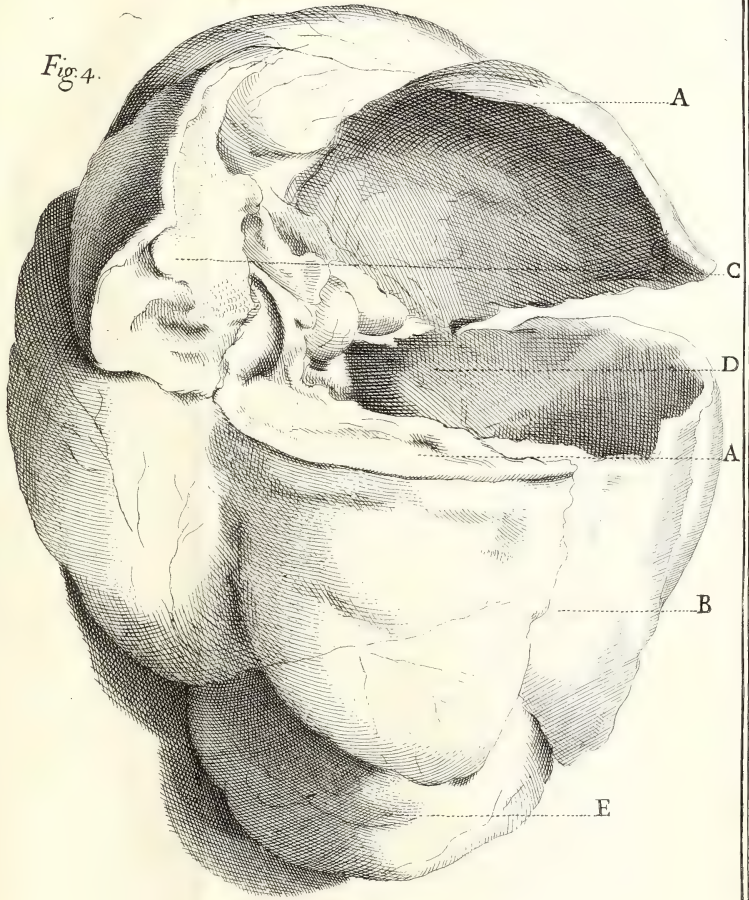


Fig. 4.



JOANNIS BACIALLII.

De Fluminibus in Mare influentibus.

Quid fluminibus in mare influentibus accidere soleat; in quam illa inclinent scilicet partem, quam arena, & cæno muniant, quamve prætereant, jure optimo, ac merito hydrostatici exquirunt: maxime enim ad illos attinet probe ista dignoscere, ut ex iis fluminis ostium, & ostii ipsius situm, formam, ac magnitudinem constituent, quibus totius fluminæ aquæ mensuram, & copiam assequantur, in primisque illam tanti faciendam superioris alvei declivitatem.

At in definiendis viis, legibusque, quibus flumina in mare recipiantur, non una eademque videtur hydrostaticorum sententia; quod enim ad Hadriaticum spectat, de quo nostri multa in hanc rem observavere, Geminianus quidem Montanarius existimavit, flumina Æmiliæ in mare influentia ostia sua ad sinistram constanter, perpetuoque obvertere, Dominicus Gulielmus contra ad dexteram.

Magna equidem inter utramque opinionem dissensio, ac repugnantia apparet, ac tanta, ut in quaestione facti nulla infanabilius oriri possit. Neque enim alterutrius autoritas, ac fama, quæ par certe in utrisque est, ac gravissima, nos movere potest, ut unam potius, quam alteram sententiam sequamur. Nam et si alicui videri posset, ut audivimus, Montanarium Gulielmino anteferendum esse, magistrum scilicet discipulo, norunt tamen cæteri omnes, Gulielminum hydrostaticis omnibus magistrum fuisse, neque Montanarium hæc de fluminibus excogitasse, & invenisse, dum Gulielminus in ejus disciplina erat, neque huic postea, quantum constat, communicasse: nempe invenit, dum jam esset in Patavina Universitate, non amplius in Bononiensi, Magister, neque in Bononiensibus fluviis invenit, sed in Venetis, & in privatos

gravissimi illius Senatus usus, Gulielmino absente, triginta annos nato, atque in scientiis adeo provecto, ut nedum a Montanarii schola jam diu abesset, sed ipse suam aliis aperiret.

Magistri igitur auctoritas hic nihil evincit, ubi magistri officium non evincitur. At enim, inventum illud suum Montanarius Gulielmino familiariter, & amice communicavit, licet postea omnes videant aut non didicisse, aut oblitum fuisse. Equidem non liquet quemquam alium de eo privatim monuisse, præter Cardinalem Basadonnam literis ad eum datis triennio ante quam Montanarius supremum diem obiret; atque id ipsum ignoraretur, nisi eæ literæ post annos triginta, & amplius, anno scilicet 1715., e tenebris in publicam lucem emerissent, Montanario ipso itemque Gulielmino jam mortuo.

Sed demus, quod cæteroquin non constat, una etiam monuisse Gulielminum. Homini certe acerrimi ingenii, neque deterioris judicii communicavit, & ei, quem Montanarius ipse negare solebat, præclariore, aut promptiore ingenio novisse quemquam. Si igitur Gulielminus Montanarii sententiam perspectam habens ab ea tamen nihilominus insigniter adeo recessit, quis id faciendi causas satis probabiles habuisse doctum hominem, & eruditum non existimabit? Quod ipsum de Montanario existimandum esset, si illum Gulielminus antevertisset. Neque enim alterutrum adeo immemorem, ac socordem effingere licet, ut quæ alter ab altero hac super re accepisset, observationem deinde in fluminibus recensens, voluerit, ea, oculis ipsis repugnantibus, in contrariam partem detorquere. Nam quæstio facti est, & hujusmodi, ut non præstantiam ingenii, neque minutam in observando subtilitatem, sed nudam oculorum aciem eamque etiam satis mediocrem, quippe in experimento vulgari, ac communi, requirit, quo fit, ut observator majorem fidem inveniat, cum sciens quid antea de eadem re detectum, & animadversum sit, prioribus observationibus nihilominus non acquiescit, & novam denunciat.

Res igitur eo adducta esset, ut Montanarii, vel Gulielmini in observando negligentiam inculcaremus, aut fidem; quod cum in nobilissimos observatores hujusce Universitatis Professores sine matura causæ disquisitione intentare nefas sit,

rem facturum me esse existimavi utriusque doctoris famæ accommodatam, si eam de fluminibus mare intransibilibus, quæ videtur esse inter eorum opiniones, repugnantiam tollerem, aut certe minuerem, quod facere in præsentia admittam.

Ac primo quidem duplex esse potest exitus fluminum in mare consideratio. Sicuti enim hæc solidis, & fluidis partibus componuntur, ita qui de eorum natura scripserant, nunc in solidis, nunc in fluidis partibus fluminum affectiones sunt persecuti: illas quidem in alvei, riparum, fundique conformatione, stabilitate, dispositione, ac situ, has vero in aquarum motu, viribus, copia, & directione: quod cum in universo flumine quaesitum ab illis, & explicatum sit, tum in extrema, atque ultima illius parte, quæ fluminis ostium dicitur, potissima certe, si quæ alia, non erat omittendum, si maxime quædam naturæ constantia, & perpetuitas agendi, ut accidit, in ea observaretur.

Porro dum Montanarius in suo illo de cursu maris Adriatici scripto, primus statuit, flumina, cum mare subeunt, ad eorum sinistram torqueri, respexisse sane videtur ad extremam illam fluminis partem, terra, & arena compactam, qua hiant in mare: Nam totus in eo est, ut illius partis fabricam constitutionemque describat, causasque adferat, ob quas tanta ibi arenarum aggestio invehatur ad dexteram fluminis partem, quæ ibi assurgens flumen ex ea parte impediatur, detorqueaturque in sinistram, ad quam propterea illius fauces obvertat. Id ex illius verbis, ut mihi quidem videtur, fatis aperte colligitur. = Ma qui s' offervi (inquit ille) che = quello scanno mentre a poco a poco si forma sulla destra = del fiume va servendo di riva, o riparo da quella parte = destra, onde le acque di esso fiume, che sulla parte sinistra = non hanno riva alcuna, che a guisa d' alveo le contenga, = in quel sito facilmente piegano il corso verso la sinistra, = dal che nasce, che tanto più cresce lo scanno de' sabbioni = sulla destra, e la punta che fanno maggiormente va = avanzandosi verso la sinistra predetta; quindi ne siegue, = che il fiume tanto più piegando quivi solo forma la sua = foce, dove da un lato i sabbioni stessi, e dall' altro la riva = del mare gli servono di sponda al suo corso, ed ecco mani- = festa la ragione, perchè per tutto l'Adriatico, ov'è tal cor- = rente del mare da sinistra a destra, i fiumi, che vi scari-

= cano, voltano la foce verso la sinistra, e mettono i fabi-
= bioni sulla destra.

Montanarius itaque fluminum affectiones in maris litore contemplatus, in quam partem ibi alveorum extrema, quæ veluti finem fluminibus videntur imponere, obvertantur, definivit: quod illi fatis fuit ad rem, quam quærebat, & ad laudem sibi ex hoc invento comparandam.

Verum scire licet flumina, ubi ad maris litus deveniunt, non ibi statim deperire, nec sicuti nomen, ita cursum, quem habent, prorsus amittere. Licet enim alveo omni, qui eorum aquas contineat, quantum quidem apparet, in litore spolientur, tamen se intra marinas aquas colligunt, ac servant, & vim omnem, quæ illis in litore restat, conando, propellendo, penetrando, uno verbo in eas excurrendo infumunt.

Hujus sane rei habemus argumenta certa, & pervulgata, ut Varennius, (*lib. 1. c. 13. prop. 10.*) & Furnierius (*Hydrof. lib. 9. c. 9.*) testantur. Nautæ enim istorum fluminum excursioniones longe etiam a litore in mari perferunt, & illorum aquas a marina probe discernunt pondere, sapore, colore etiam ipso, iisque tamquam ducibus portum, aut litus, quamvis non videant, tutissime capiunt: quæ quidem omnia cum in minoribus quoque fluminibus, & in litore, & ad quandam ab eo distantiam manifesto observentur, in majoribus tamen, multo longius ab ipso, ad quinque, scilicet, ad duodecim, & in insignioribus ad quadraginta miliaria, & amplius: nempe in his tanta vis erumpendi, & intercurrendi excellit, ut marinam aquam disjiciant, & alio repellant; quod Poetæ ipsi noverunt; Statius enim Nilum primo veris tempore affluentem, seque in mare exonerantem, mirifice describit his versibus:

Scindit fontis opes, septemque patentibus oris

In mare fert hyemes: penitus cessere fugatæ

Nereides, dulcique timent occurrere ponto.

Neque ista fluminum virtus succrescente, aut assuante mari restringitur. De magnis, ac furentibus quisque, ut arbitror, conjiciet: de exilibus, & pacatis, de quibus dubitari posset, ego observavi. Cum enim ad oram Hadriatici maris olim venissem, ubi flumen Padusæ mare subit, unaque esset celeberrimus Vir Eustachius Manfredius, restitare, ac resillire

in

in ipso ostio flumen lenissimum visum est mihi, & a mari, quod tunc manifestissime succrescebat, repelli, ac respui: qua de re ut sine errore judicare possem, apposite me admonuit humanissimus ille Vir ut Ostio fluminis justæ molis, ac ponderis lignum injicerem; cumque injecissem, in aqua subsedit, ut solent quæ innatant, aliqua sui parte demersum, tum e fluminis ostio veluti navicula primævam fluminis semitam tenens leviter in mare decessit: quo facile tunc intellexi flumen sub maris superficie latitans ad ligni partem demersam allidere, lignumque rapere eadem via, quam flumen ante maris æstum sequebatur.

Itaque si id fluminibus mare subeuntibus in universum accidit, ut a litore non præcidantur, sed longius etiam ab ipso vigeant, & excurrant, jure quæri potest, quam in extremo illo cursu directionem sint habitura.

Porro flumen in Hadriaticum primo ingrediens cum necesse sit in adversantis maris cursum a sinistra in dexteram venientem incurrere, sit quædam virium, illinc maris, hinc fluminis, colluctatio, quæ licet in flumine magna quandoque, & ferox a principio, tamen cum perseverare nequeat sine assidua virium jactura, sensim flumen de via languere, tum a maris cursu retundi, & deflecti, tandem eadem via convolvi, & rapi, quam mare sequitur, a sinistra nimirum in dexteram.

Cum igitur flumina, quæ in Hadriaticum mare influunt, suæ illi perpetuæ excursioni tandem obsequi cogantur a sinistra in dexteram, idem quoque erit finis illorum de quibus agimus, Galliæ togatæ, seu Æmiliæ, & cæterorum ejusdem maris, quorum cursum non in litore intercidi, sed ultra illud patere Montanarius ipse agnoscit: illud igitur fiet, quod Guilielminus dixerat, ut illic ad dexteram torqueantur.

Neque huic sententiæ, quæ cæteroquin verum fluminum finem, & terminum constituit, Montanarius ipse repugnat. Quamvis enim statuisset flumina in litore ad eorum sinistram converti, tamen aliquantum ab eo egressa facile cognovit de via deflectere, & ad dexteram redire, ut aperte innuit his verbis (*pag. 92.*): = Il fiume lascia bensì (in litore) l'acqua morta sulla destra (ubi scilicet cumulum arenæ sibi efformat, = qui flumen in sinistram urget) ma non impedisce, che = il mare dalla sinistra non corra fino a lui, ove giunto lo = di-

= divertisce dal primo corso (igitur in dexteram) e lo conduce seco verso l'alto mare.

Atque ita mihi quidem videtur aperiri, atque explicari posse sententia de istis fluminibus a Gulielmino tradita Coroll. 7., propos. 4., cap. 8. nobilissimi illius libri de Fluminum Natura: quæ sic explicata, ut arbitror, non reprobabitur; fit enim cum Montanarii sententia consentiens, aut saltem non repugnans. Res enim in promptu est. Gulielminus flumina ad dexteram rapi existimavit in mari: Montanarius ad sinistram in litore. Locus igitur quæstionem dirimit.

Ac ne hujusmodi explicatio arbitrato meo conficta esse videatur, enitar ostendere eandem ex Gulielmini scriptis, & præceptis omnem colligi, & cum ipsis apte consentire.

Porro in Coroll. illo suo de fluminibus Æmiliæ in mare dextrorsum influentibus, quid tantum accidat, exponit, nihil tunc aperte demonstrat: demonstratio enim, ut in omnibus fere Corollariis fit, eruitur ex præcedentibus; præcedentia autem, quibus Corollarium illud innititur, sunt hujusmodi. Flumen, quod in aliud influat, ita se huic obvertere, ut & cursu, & alvei sui extremo cursui fluminis, a quo recipitur, obsecundet.

At id probat, ac statuit, dummodo tamen duæ veluti conditiones accedant. Altera quidem est, ut flumen, quod recipit, insignius sit vi, & cursu fluminis, quod recipitur. Altera ut flumen, quod recipitur, alveo consistet non inexpugnabili, qui scilicet ab alio comminui possit, & erodi.

Jam vero flumina, quæ intrant in mare, multo velociora sunt quam mare, in quod impingunt. Licet enim mare ob eum cursum, de quo loquitur Montanarius, ad certam semper, ac definitam plagam deducatur, magnique cujusdam fluminis naturam, & formam induat, tamen tarde adeo, & languide fluit, ut saltem in Hadriatico, de quo loquimur, non amplius quam quatuor milliaria ad summum conficiat quolibet die, teste Montanario ipso: quod igitur flumen, qui annis in Hadriaticum influet, a quo cursus maris insigniter non vincatur, maxime autem in litore, e quo erumpit? Cum itaque flumen, quod e litore ingreditur in Hadriaticum, maris viribus prævaleat, conditio, quam sibi Gulielminus proposuit, ibi locum non habet, ergo nec Corollarium, cui illam affixit.

At ubi amnis, vel flumen litus prætergressum, in obstantia maris vada occurrit, & quem sæpe memoravimus cursum ex adverso trajicit, sensim, ut supra etiam indicavimus, retundi, viribus debilitari, languere necesse est: mari interea latius a litore excurrente pugnamque adveniendi firmiter redintegrante: quo fit ut ad eam tandem virium tenuitatem flumen deveniat, quam posuit Gulielminus, ut maris cursui obsequatur. Ea igitur conditio non in litore quærenda est, sed remotius ab ipso, ibique illius dictum valet de fluminibus Æmiliæ, & fidem facit etiam de cæteris.

Neque minus altera conditio, quam sibi Gulielminus statuit, propositæ explicationi favere videtur. Si enim alveum fluminis ingredientis ex facili materia, quæ aquarum vi exedi possit, constare voluit, ut flumini recipienti obsequatur, equidem alveum talis naturæ in Hadriatici litore non reperias, cum Montanarius statuerit omnia flumina, quæ hiant in illud, munitionibus adeo ad dextrum eorum latus augeri, & continua arenarum aggestione compleri, & renovari, ut non modo frustra in eam partem flumen conetur, sed etiam hujusmodi impedimentis in oppositam, idest in sinistram depellatur.

Ob eam igitur causam a Montanario notatam, ob quam flumina Æmiliæ in litore sinistrorsum torquentur, ob eandem ipsam eis non licebit legem a Gulielmino in eo Corollario constitutam sequi in litore; nec ille ibi voluit ut uteremur, dum acute præsensit attendendam esse alvei conditionem, quæ in eo loco, uti vidimus, talis est ut impediatur.

Atque ubi impedit, egregie animadvertit, flumen nihilominus in eam partem maxime adniti, & cursu suo propendere. Quod cum ab nemine, quod sciam, usque adhuc observatione aliqua fuerit confirmatum, unam assero, quam ad eam rem probandam plurimum facere existimo.

Cum præstantissimi Viri Eustachius Manfredius, & Bernardinus Zendrinus ad fauces Bedefis, & Utentis, fluminum Ravennæ, ubi ea unitim devolvuntur in mare, observassent prælongum, & altum arenarum tumulum, qui veluti scammum quoddam, sic enim appellant, ad dexteram ostii fluminis supra litus efferebatur, & altius in mare longiusque protendebatur, quam illud quod ad sinistram affurgebat (omnino ut Montanarius in aliis Hadriatici fluminibus observaverat) alti-

tudinem aquæ in communi eorum fluminum ostio secus litus posito dimensi sunt tribus in locis: ad sinistram latus ostii, in quod se fluminis alveus cæteroquin flectebat, eam invenerunt pedis unius, & unciarum sex: in medio ipsius pedum duorum, & uncia unius; pedum item duorum, & uncia unius ad dexterum latus, ut in diario observationum a prædictis Viris factarum in illis fluminibus recensetur. Igitur ostii illius fundus sic dispositus, ac distributus erat, ut sublimior ad sinistram, profundior esset in medio, & ad dexteram: ergo ex hac parte flumen validius aquam urgebat, quam ex altera, ut Galielminus præsentit, fundum enim ibi plus effoderat, & in profundiorē depresserat altitudinem: quod si idem contingat in aliis fluminibus, haud scio quid istud tandem sit flumina in mare ingredi ad sinistram cum eorum aquæ, quibus flumina potissimum existunt, copiosius, & vividius e dextera ripa, vix etiam e litore egressæ, prorumpant. Quod dum dico nihil detrahi Montanario volo, ejus enim observatio potissimum alveos fluminum spectat, non fluentium aquarum vim, qua per eos exonerantur: ac si quod ille observavit, perpetuum, & constans sit, venustatem certe habet, & momentum.

Quamquam, ne quid dissimulem, Montanarii observatio non ab omnibus omnino assensum extorquet. Ipse certe in aliquibus solum Hadriatici fluminibus, Venetis præsertim, eam notavit. Polenus autem gravissimus sane Philosophus, & rerum Venetarum gnarus de ea observatione ambigere in universum videtur. Zendrinii observationes ad Padi, & Amonis fauces dissentiunt. Quid si idem quæreretur in aliis maribus, Neapolitano, Etrusco, & aliis, in quibus nihilominus Montanarius sperat idem contingere quod in Hadriatico? Benedicti Castellii observationes partim adversantur, partim favent. Lancisii itidem de faucibus Tyberis. Omnino hanc fluminum ostiorum in litore obversionem vel ad sinistram, vel ad dexteram alii tribuunt ventis, alii maris æstibus, & fluentis, alii aliis causis: addi possent etiam litora ipsa, quæ huc, illucque in mare exporrecta, flumina nunc a dextris, nunc a sinistris a ventis protegunt, & ad se alliciunt, stagna etiam, & vada parant, in quæ libentius efferantur.

At enim: ignoscendum Montanario, si in quibusdam locis ob peculiare quædam causas nec lex ab eo lata valet,
nec

nec observatio: Valeat ut plurimum. Ita sit. At idem etiam potiori jure concedatur Gulielmino, cujus doctrina de fluminibus confluentibus in univcrsum valet etiam, uti vidimus, ad Mare Hadriaticum traducta. Quod si eam quis ex Montanarii observationibus in maris litore putet locum non habere, nobis quidem videtur Gulielminus ex iis, quæ posuit, litus excepisse.

JOHANNIS ANTONII ANDREÆ CASTELVETRI.

*De proprietate numerorum divisibilium
per 11, 111, 1111, 1.... Etc.*

IN quarto Tomo Commentariorum Academiae Bononiensis Instituti Scientiarum & Artium egi de quadam proprietate numerorum numeri 9 multiplicium, ac demonstravi, non esse unice numero 9 adscribendam, sed aliis omnibus numerorum 99, 999, 9999, 9.... multiplicibus, certa quadam naturali lege consideratis, esse tribuendam. Quod tunc praestiti occasione cujusdam theorematis a doctissimo P. Frederico S. Vitali e Soc. Jesu in Historia Litteraria Italiae demonstrati. Nunc breviter dicendum censui de generali proprietate numerorum multiplicium numeri 11, de qua in quodam opusculo *della letteratura oltramontana* egit doctissime R. P. G. H. Soc. Jesu. Hanc proprietatem vir doctissimus deduxit a quadam serie geometrica pro numerorum divisione ab ipso tradita, ac fatetur a nemine, quantum ipse sciat, fuisse unquam observatam. Ego proprietatem suppono, ac directe demonstro. Ceterum de hac proprietate prius ego egi in quodam libello usque ab anno 1749 Bononiae edito, in quo ea tantum scripseram, quae praxi consulebant, ac proprietatem eandem ad quosvis numeros numerorum 11, 111, 1111, 1... multiplices accommodaveram. Quod de hac re meditatus sum, ad Vos, doctissimi Academici, defero, ac judicio vestro subijcio; ac rogo, ut, cum levissima re a gravissimis meditationibus confidentius Vos abducam, vestra humanitate mihi parcatis.

*Generalis proprietas numerorum per 1, II, III, IIII, I....
divisibilem .*

I. **C**ujuscumque numeri notæ arithmeticæ omnes in summam redigantur; hujus aggregati notæ, si pluribus constet, & ipsæ colligantur, & sic deinceps usque dum aggregatum sit unius tantum notæ. Hæc erit unitas, vel multiplex simplex unitatis. Hoc evidens est, nec indiget demonstratione.

Cujuscumque numeri divisibilis per II notæ arithmeticæ, initio dextrorsum sumpto a prima pro unitatibus alternatim colligantur, ac reliquæ similiter pro decadibus. Aggregati notæ, si plures sint quam duæ similiter alternatim colligantur, ac sic deinceps usquedum in aggregato duæ tantum obtineantur notæ. Hæ vel numerum II, vel hujus numeri multiplicem simplicem exhibent.

Cujuscumque numeri divisibilis per III notæ, initio dextrorsum sumpto a prima pro unitatibus, tum a secunda pro decadibus, tum a tertia pro centenariis, alternatim aggregantur. Aggregati notæ si plures sint quam tres, similiter alternatim eodem ordine colligantur, & sic semper donec in aggregato tres tantum habeantur notæ. Hæ vel numerum III, vel hujus multiplicem simplicem exhibent.

Cujuscumque numeri per IIII divisibilis notæ, initio dextrorsum ducto a prima pro unitatibus, a secunda pro decadibus, a tertia pro centenariis, tum a quarta pro millenariis, alternatim in summam redigantur. Aggregati notæ, si plures sunt quam quatuor, similiter colligantur, ac sic deinceps donec in aggregato quatuor tantum supersint notæ. Hæ vel numerum IIII, vel hujus numeri multiplicem exhibent.

Sic in infinitum progreditur hæc proprietas pro numeris I.... divisibilibus, si processu, ut supra, versentur.

2. Quod ut demonstrarem assumo numerum.... IIIIIIII, quem in suas resolvo partes in hunc modum:

Pro divisore II

I. I
IO. IO
100. I
1000. IO
10000. I
100000. IO
1000000. I
10000000. IO
...
... IIIIIII

Pro divisore III

I. I
IO. IO
100. 100
1000. I
10000. IO
100000. 100
1000000. I
10000000. IO
...
... IIIIIII

Pro divisore IIII

I. I
IO. IO
100. 100
1000. 1000
10000. I
100000. IO
1000000. 100
10000000. 1000
...
... IIIIIII

& observo, quod si hæ per II dividantur, pro residuis haberi semper vel I, vel IO; I pro prima dextrorsum parte, IO pro secunda, & sic deinceps. Quod si partes hæ dividantur per III, pro residuis haberi semper vel I, vel IO, vel 100; & si per IIII haberi vel I, vel IO, vel 100, vel 1000, & sic deinceps semper eodem ordine, ac progressu pro quibuscumque divisoribus I....

3. Ex hac observatione colligitur, quod si numeri dividendi, ac per divisores II, III, IIII &c. divisibiles notis arithmetiis simplicibus, & cujuscumque valoris consent, tunc ex divisione partium eorundem residuum esse præcise valoris notæ sinistra; cum hic valor, ex observatione jam facta, colligi debeat multiplex unitatis; & hinc fluit notas arithmeticas cujuscumque numeri per II, vel III, vel IIII &c. divisibilis, colligendas esse, initio dextrorsum sumpto, iis respective alternationibus, quas supra descripsimus, ut hic apparet pro divisoribus II, III, IIII, si numerus sit *hgfedcba*

<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>b</i> o	<i>b</i> o	<i>b</i> o
<i>c</i>	<i>c</i> oo	<i>c</i> oo
<i>d</i> o	<i>d</i>	<i>d</i> ooo
<i>e</i>	<i>e</i> o	<i>e</i>
<i>f</i> o	<i>f</i> oo	<i>f</i> o
<i>g</i>	<i>g</i>	<i>g</i> oo
<i>h</i> o	<i>h</i> o	<i>h</i> ooo

cum autem numeri dividendi ex hypothese multiplices sint suorum respective divisorum, necesse est, ut tandem residuum sit vel ipse divisor, vel multiplex simplex divisoris. Q. E. D.

4. Pro

4. Pro colligendis numeri dividendi notis, fecentur hi numeri, initio semper dextrorsum sumpto, in binarios pro divisore II, in ternarios pro divisore III, in quaternarios pro divisore IIII &c., & numeri sectionum respective aggregentur, & sic semper in novo aggregato, usquedum obtineantur aggregatorum notæ vel duæ, vel tres, vel quatuor &c. respective. Res eadem est, & praxis commodior.

Quod si numerum quemcumque habeamus per II, vel per III, vel per IIII dividendum, & in eo praxim expositam instituamus, ac tandem eveniat, ut residuum non adæquet divisores, vel divisorum multiplices simplices, numerus ille non erit multiplex sui divisoris. Quod autem remanet, ablato majori multiplici simplici divisoris, residuum erit divisionis. Pro exemplo sint numeri 78365430, 83976426643, 93297809286 dividendi, primus per II, secundus per III, tertius per IIII. Fiat

<i>pro primo</i>	<i>pro secundo</i>	<i>pro tertio</i>
30	643	9286
54	426	9780
36	976	932
78	83	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	I 9998
I 98	2 128	I
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
I	2	9999
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	
99	130	
	III	
	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	
	19	

Cum primi & tertii residuum sit multiplex simplex divisorum suorum, eorundem divisorum erunt & ipsi numeri multiplices. Cum autem secundi residuum 130 non adæquet divisorem suum, nec multiplex sit divisoris, si ab eo detrahatur in hoc casu divisor III, remanet 19 residuum divisionis.

5. Ab eodem principio praxis facilissima fuit eruendi divisionis quotum, & hæc ad oculum se offert, si singulas partes numeri assumpti IIIII... dividamus. En divisionis typus per divisores II, III, IIII.

	Pro divisore II	Pro divisore III	Pro divisore IIII
I =	I	I	I
IO =	IO	IO	IO
I00 =	9. I	IO0	IO0
I000 =	90. IO	9. I	I000
I0000 =	909. I	90. IO	9. I
I00000 =	9090. IO	900. IO0	90. IO
I000000 =	90909. I	9009. I	900. IO0
I0000000 =	909090. IO	90090. IO	9000. IO00
I00000000 =	9090909. I	900900. IO0	90009. I
I000000000 =	90909090. IO	9009009. I	900090. IO
I0000000000 =	909090909. I	90090090. IO	9000900. IO0

Si ergo per ea, quæ diximus n. 2, initio ducto a tertia dextrorsum nota pro divisore II, alternatim colligantur numeri dividendi notæ, & aggregatum ducatur in 9, habebimus primam dextrorsum quoti notam; quod si similiter ordinatim pro reliquis dividendi notis efficiamus, omnes quoti notas reperiemus. Non alio modo pro divisoribus aliis III, IIII &c. praxis instituenda est, si tantum in colligendis numeri dividendi notis dextrorsum incipiamus a quarta dividendi nota pro divisore III, a quinta pro divisore IIII &c., & iis utamur alternationibus, quæ prædictis divisoribus conveniunt, ut superius notavimus.

6. Numerorum proprietates subinde nobis se produnt, si operationes arithmeticas generaliter instituamus. Etenim numerorum notæ generaliter designatæ relationes, quas inter se habent, in vestibulo veluti exhibent, & proprietates clare ostendunt. Jamdudum cum in divisiones numerorum inquirerem, aliæ numerorum per II, III, IIII &c. dividendorum proprietates non inelegantes se mihi obtulerunt, quas novas puto, ac a nemine observatas. Progressum inquisitionis hic exponere non inutile existimo, ac per eum rem clare ostendere, quem, ne vobis molestus sim, breviter ac cursim aggredior.

7. Sit pars numeri dividendi 10000.... Eam divido per $10 + 1$, tum per $100 + 10 + 1$, tum per $1000 + 100 + 10 + 1$ &c. Divisio per $10 + 1$ præbet quotum $1 - 1 \ 1 - 1 \ 1 - 1 \ 1 - 1$ &c. cum residuo ∓ 1 . Si ergo numerus dividendus sit *lihgfedcba*, erunt omnes quoti partes cum residuis extensæ, quemadmodum ostendunt hæ duæ formulæ, quarum secunda est prioris inversa.

\dot{i}	\ddot{i}	\dot{b}	\dot{g}	\dot{f}	e	\dot{d}	e	\dot{b}	a
\dot{i}	$-l$	l	$-l$	l	$-l$	l	$-l$	$l.$	$-l$
	\dot{i}	$-i$	i	$-i$	i	$-i$	i	$-i.$	i
		b	$-b$	b	$-b$	b	$-b$	$b.$	$-b$
			g	$-g$	g	$-g$	g	$-g.$	g
				f	$-f$	f	$-f$	$f.$	$-f$
					e	$-e$	e	$-e.$	e
						d	$-d$	$d.$	$-d$
							e	$-e.$	e
								$b.$	$-b$
									e
									$-b$
									e

\dot{i}	\ddot{i}	\dot{b}	\dot{g}	\dot{f}	e	\dot{d}	e	\dot{b}	a
\dot{i}	\dot{i}	b	g	f	e	d	e	$b.$	a
	$-l$	$-i$	$-b$	$-g$	$-f$	$-e$	$-d$	$-c.$	$-b$
		l	i	b	g	f	e	$d.$	c
			$-l$	$-i$	$-b$	$-g$	$-f$	$-e.$	$-d$
				l	i	b	g	$f.$	e
					$-l$	$-i$	$-b$	$-g.$	$-f$
						l	i	$b.$	g
							$-l$	$-i.$	$-b$
								$l.$	i
									$-l$

8. Divisio numeri $nmlihgfedcba$ per $100 + 10 + 1 = 111$ præbet has duas formulas, quarum secunda est prioris inversa.

\dot{n}	m	l	\dot{i}	b	g	\dot{f}	e	d	\dot{c}	b	a
n	$-n$	o	n	$-n$	o	n	$-n$	o	$n.$	$-n$	$-n$
	m	$-m$	o	m	$-m$	o	m	$-m$	$o.$	m	o
		l	$-l$	o	l	$-l$	o	l	$-l.$	o	l
			i	$-i$	o	i	$-i$	o	$i.$	$-i$	$-i$
				b	$-b$	o	b	$-b$	$o.$	b	o
					g	$-g$	o	g	$-g.$	o	g
						f	$-f$	o	$f.$	$-f$	$-f$
							e	$-e$	$o.$	e	o
								d	$-d.$	o	d
									$e.$	$-e$	$-e$
										b	o
											a

\dot{n}	m	l	\dot{i}	\dot{b}	g	\dot{f}	e	d	\dot{e}	b	a		
n	m	l	i	b	g	f	e	d	c	b	a		
$-n$	$-m$	$-l$	$-i$	$-b$	$-g$	$-f$	$-e$	$-d$	$-c$	$-b$	$-a$		
			n	m	l	i	b	g	f	e	d		
				$-n$	$-m$	$-l$	$-i$	$-b$	$-g$	$-f$	$-e$	$-d$	
						n	m	l	i	b	g		
							$-n$	$-m$	$-l$	$-i$	$-b$	$-g$	
									n	m	l	i	
										$-n$	$-m$	$-l$	$-i$

9. Eiusdem numeri $nmlih$ &c. divisio per 1000 + 100 + 10 + 1 = 1111 has exhibet formulas.

\dot{n}	m	l	i	\dot{b}	g	f	e	\dot{d}	e	b	a	
n	$-n$	o	o	n	$-n$	o	o	n	$-n$	$-n$	$-n$	
	m	$-m$	o	o	m	$-m$	o	o	m	o	o	
			i	$-l$	o	o	l	$-l$	o	l	o	
				i	$-i$	o	o	i	$-i$	o	o	i
					b	$-b$	o	o	b	$-b$	$-b$	$-b$
						g	$-g$	o	o	g	o	o
							f	$-f$	o	o	f	o
								e	$-e$	o	o	e
									d	$-d$	$-d$	$-d$
										c	o	o
											b	o
												a

\dot{n}	m	l	i	\dot{b}	g	f	e	\dot{d}	e	b	a
n	m	l	i	b	g	f	e	d	c	b	a
$-n$	$-m$	$-l$	$-i$	$-b$	$-g$	$-f$	$-e$	$-d$	$-d$	$-d$	$-d$
				n	m	l	i	b	g	f	e
					$-n$	$-m$	$-l$	$-i$	$-b$	$-b$	$-b$
								n	m	l	i
									$-n$	$-n$	$-n$

Ex his formulis manifestus est reliquarum progressus pro divisoribus 1111... in infinitum.

10. Ex nuda harum formularum inspectione oculis se subjicit elegans horum numerorum proprietas. Secemus numeri dividendi notas in sectiones, initio dextrorsum sumpto, quarum quaelibet tot contineat notas, quot habet divisor; una sui nota diminutus; ac sectiones omnes una dividendi nota intermiscantur. Proprietas hæc est: numeros divisorum II,

III, IIII &c. fore multiplices, si sectionum notæ colligan-
tur, & ab aggregato tollatur notarum interjacentium summa
ducta in divisorem nota una diminutum. Residuum erit vel 0,
vel multiplex positivus, vel negativus divisoris. Quod si nu-
merus dividendus non sit multiplex divisoris, quod residuum
est, si sit negativum, a proximo majori multiplici divisoris
auferatur, pro assequendo vero divisionis residuo. Sint pro
exemplo numeri 73486529466, 321490128211, primus divi-
dendus per III, secundus per IIII.

66		211	
29	4+5+4.11=143	012	3+9+8.111=2220
86		214	
73		437	
254		-2220	
-143		-1783	
111		2222	
		439	

Primus multiplex est divisoris III, secundus non item
divisoris IIII.

Hanc proprietatem pro numeris per II divisibilibus eruit
ex sua serie doctissimus Pater G. H. Non autem illam enuncia-
vit, ut ab ea transitum fieri posset ad numeros per III,
IIII &c. divisibiles.

Quoto assequendo superfedeo, cum ex formulis lex adeo
clara sit, ut satis ipsa per se loquatur, & doceat nos.

II. Ad aliam, ut puto, novam proprietatem horum nu-
merorum transitum facio. Hanc ex transformatione superio-
rum formularum eruo. Primam partem quoti prioris formu-
læ num. 7 1-1 1-1 1-1 1-1 1-1 1-1 divido in has duas partes
101010101.0, 10101010.1, & hanc posteriorem demo a
priori, & oritur residuum 1-1 10-1 1-1 10-1 1-1 10-1 1-1 10-1
1-1. II-1

1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1-1	10-1	1-1	10-1	1-1	10-1	1-1	10-1	1-1	10-1	1-1	11-1

quod si fiat de aliis ejusdem formulæ partibus oriuntur hæ duæ
aliæ formulæ, quarum secunda prioris est inversa.

<i>l</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>g</i>	<i>f</i>	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
<i>l</i> -I	IO- <i>l</i>	<i>i</i> -I	IO- <i>l</i>	<i>l</i> -I	IO- <i>l</i>	<i>l</i> -I	IO- <i>l</i>	<i>l</i> -I	. II- <i>l</i>
	<i>i</i> -I	IO- <i>i</i>	<i>i</i> -I	IO- <i>i</i>	<i>i</i> -I	IO- <i>i</i>	<i>i</i> -I	IO- <i>i</i>	. <i>i</i>
		<i>h</i> -I	IO- <i>h</i>	<i>h</i> -I	IO- <i>h</i>	<i>h</i> -I	IO- <i>h</i>	<i>h</i> -I	. II- <i>h</i>
			<i>g</i> -I	IO- <i>g</i>	<i>g</i> -I	IO- <i>g</i>	<i>g</i> -I	IO- <i>g</i>	. <i>g</i>
				<i>f</i> -I	IO- <i>f</i>	<i>f</i> -I	IO- <i>f</i>	<i>f</i> -I	. II- <i>f</i>
					<i>e</i> -I	IO- <i>e</i>	<i>e</i> -I	IO- <i>e</i>	. <i>e</i>
						<i>d</i> -I	IO- <i>d</i>	<i>d</i> -I	. II- <i>d</i>
							<i>c</i> -I	IO- <i>c</i>	. <i>c</i>
								<i>b</i> -I	. II- <i>b</i>
									. <i>a</i>

<i>l</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>g</i>	<i>f</i>	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
<i>l</i> -I	<i>i</i> -I	<i>h</i> -I	<i>g</i> -I	<i>f</i> -I	<i>e</i> -I	<i>d</i> -I	<i>c</i> -I	<i>b</i> -I	. <i>a</i>
	IO- <i>l</i>	IO- <i>i</i>	IO- <i>h</i>	IO- <i>g</i>	IO- <i>f</i>	IO- <i>e</i>	IO- <i>d</i>	IO- <i>c</i>	. II- <i>b</i>
		<i>l</i> -I	<i>i</i> -I	<i>h</i> -I	<i>g</i> -I	<i>f</i> -I	<i>e</i> -I	<i>d</i> -I	. <i>c</i>
			IO- <i>l</i>	IO- <i>i</i>	IO- <i>h</i>	IO- <i>g</i>	IO- <i>f</i>	IO- <i>e</i>	. II- <i>d</i>
				<i>l</i> -I	<i>i</i> -I	<i>h</i> -I	<i>g</i> -I	<i>f</i> -I	. <i>e</i>
					IO- <i>l</i>	IO- <i>i</i>	IO- <i>h</i>	IO- <i>g</i>	. II- <i>f</i>
						<i>l</i> -I	<i>i</i> -I	<i>h</i> -I	. <i>g</i>
							IO- <i>l</i>	IO- <i>i</i>	. II- <i>h</i>
								<i>l</i> -I	. <i>i</i>
									. II- <i>l</i>

Formulae autem numeri 8 novam hanc induunt formam .

<i>n</i>	<i>m</i>	<i>l</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>g</i>	<i>f</i>	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
<i>n</i> -I	IO- <i>n</i>	o	<i>n</i> -I	IO- <i>n</i>	o	<i>n</i> -I	IO- <i>n</i>	o	<i>n</i> -I	. IO- <i>n</i>	II- <i>n</i>
	<i>m</i> -I	IO- <i>m</i>	o	<i>m</i> -I	IO- <i>m</i>	o	<i>m</i> -I	IO- <i>m</i>	o	. <i>m</i>	o
		<i>l</i> -I	IO- <i>l</i>	o	<i>l</i> -I	IO- <i>l</i>	o	<i>l</i> -I	IO- <i>l</i>	. o	<i>l</i>
			<i>i</i> -I	IO- <i>i</i>	o	<i>i</i> -I	IO- <i>i</i>	o	<i>i</i> -I	. IO- <i>i</i>	II- <i>i</i>
				<i>h</i> -I	IO- <i>h</i>	o	<i>h</i> -I	IO- <i>h</i>	o	. <i>h</i>	o
					<i>g</i> -I	IO- <i>g</i>	o	<i>g</i> -I	IO- <i>g</i>	. o	<i>g</i>
						<i>f</i> -I	IO- <i>f</i>	o	<i>f</i> -I	. IO- <i>f</i>	II- <i>f</i>
							<i>e</i> -I	IO- <i>e</i>	o	. <i>e</i>	o
								<i>d</i> -I	IO- <i>d</i>	. o	<i>d</i>
									<i>c</i> -I	. IO- <i>c</i>	II- <i>c</i>
										<i>b</i>	<i>e</i>
											. <i>a</i>

<i>n</i>	<i>m</i>	<i>l</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>g</i>	<i>f</i>	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
<i>n</i> -I	<i>m</i> -I	<i>l</i> -I	<i>i</i> -I	<i>h</i> -I	<i>g</i> -I	<i>f</i> -I	<i>e</i> -I	<i>d</i> -I	<i>c</i> -I	. <i>b</i>	<i>a</i>
	IO- <i>n</i>	IO- <i>m</i>	IO- <i>l</i>	IO- <i>i</i>	IO- <i>h</i>	IO- <i>g</i>	IO- <i>f</i>	IO- <i>e</i>	IO- <i>d</i>	. IO- <i>c</i>	II- <i>c</i>
			<i>n</i> -I	<i>m</i> -I	<i>l</i> -I	<i>i</i> -I	<i>h</i> -I	<i>g</i> -I	<i>f</i> -I	. <i>e</i>	<i>d</i>
				IO- <i>n</i>	IO- <i>m</i>	IO- <i>l</i>	IO- <i>i</i>	IO- <i>h</i>	IO- <i>g</i>	. IO- <i>f</i>	II- <i>f</i>
						<i>n</i> -I	<i>m</i> -I	<i>l</i> -I	<i>i</i> -I	. <i>h</i>	<i>g</i>
							IO- <i>n</i>	IO- <i>m</i>	IO- <i>l</i>	. IO- <i>i</i>	II- <i>i</i>
									<i>n</i> -I	. <i>m</i>	<i>l</i>
										IO- <i>n</i>	II- <i>n</i>

Simi-

Similiter illæ numeri 9 in has trasformantur .

<i>n</i>	<i>m</i>	<i>l</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>g</i>	<i>f</i>	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
<i>n</i> -1	10- <i>n</i>	0	0	<i>n</i> -1	10- <i>n</i>	0	0	<i>n</i> -1	10- <i>n</i>	10- <i>n</i>	11- <i>n</i>
	<i>m</i> -1	10- <i>m</i>	0	0	<i>m</i> -1	10- <i>m</i>	0	0	<i>m</i>	0	0
		<i>l</i> -1	10- <i>l</i>	0	0	<i>l</i> -1	10- <i>l</i>	0	0	<i>l</i>	0
			<i>i</i> -1	10- <i>i</i>	0	0	<i>i</i> -1	10- <i>i</i>	0	0	<i>i</i>
				<i>h</i> -1	10- <i>h</i>	0	0	<i>h</i> -1	10- <i>h</i>	10- <i>h</i>	11- <i>h</i>
					<i>g</i> -1	10- <i>g</i>	0	0	<i>g</i>	0	0
						<i>f</i> -1	10- <i>f</i>	0	0	<i>f</i>	0
							<i>e</i> -1	10- <i>e</i>	0	0	<i>e</i>
								<i>d</i> -1	10- <i>d</i>	10- <i>d</i>	11- <i>d</i>
									<i>c</i>	0	0
										<i>b</i>	0
											<i>a</i>

<i>n</i>	<i>m</i>	<i>l</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>g</i>	<i>f</i>	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
<i>n</i> -1	<i>m</i> -1	<i>l</i> -1	<i>i</i> -1	<i>h</i> -1	<i>g</i> -1	<i>f</i> -1	<i>e</i> -1	<i>d</i> -1	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
	10- <i>n</i>	10- <i>m</i>	10- <i>l</i>	10- <i>i</i>	10- <i>h</i>	10- <i>g</i>	10- <i>f</i>	10- <i>e</i>	10- <i>d</i>	10- <i>d</i>	11- <i>d</i>
				<i>n</i> -1	<i>m</i> -1	<i>l</i> -1	<i>i</i> -1	<i>h</i> -1	<i>g</i>	<i>f</i>	<i>e</i>
				10- <i>n</i>	10- <i>m</i>	10- <i>l</i>	10- <i>i</i>	10- <i>h</i>	10- <i>h</i>	10- <i>h</i>	11- <i>h</i>
							<i>n</i> -1	<i>m</i>	<i>l</i>	<i>i</i>	
								10- <i>n</i>	10- <i>n</i>	11- <i>n</i>	

Ex his formulis apparet aliarum formularum progressus pro divisoribus 11111, 111111 &c. Ab his ergo alia proprietas numerorum, de quibus agimus, fuit, illos scilicet omnes esse divisorum 11, 111, 1111 &c. multiplices, si, sectis numerorum dividendorum notis, ut num. 10 tradidimus, sectionum notæ aggregentur, & aggregato addantur primo differentiæ a numero 11 singularum notarum sectiones distinguendum, ac ulterius decuplum differentiarum earundem notarum a numero 10 ductum in divisorem duabus notis imminutum. Hoc aggregatum adæquat vel divisorem, vel multiplex est divisoris. Quod si aggregatum hoc multiplex non sit divisoris, vel residuum erit divisionis, vel fiet, si ab eo proxime major multiplex divisoris auferatur. Hæc proprietas exemplis est illustranda.

Sit numerus 8743603 per 11 dividendus .

Aggregatum ex notis sectionum =	21
Notæ singulæ sectionibus interceptæ ab 11 ablata, & in divisorem duobus notis imminutum, qui propterea hic omnino deficit, ductæ efficiunt =	23
Decuplum differentiarum earundem notarum a numero 10 hic deficit	—
Aggregatum ergo erit =	44
quod	

quod cum multiplex sit divisoris, multiplex ejusdem quoque erit numerus propositus.

Sit numerus 58157236452 per 111 dividendus.
 Sectionum notæ in summam collectæ = 203
 Differentiæ omnes singularum notarum inter sectiones
 jacentium a numero $11 = 26$
 Decuplum differentiarum earumdem notarum a nume-
 ro 10 in divisorem duobus notis imminutum, nempe
 in $1 = 230$
 Erit ergo aggregatum = 459
 a quo si subducas 444 multiplex divisoris, remanet 444
 15 verum divisionis residuum. Numerus ergo propositus non
 est multiplex divisoris.

Sit numerus 487424586 per 1111 dividendus.
 Aggregatum ex notis sectionum = 1332
 Differentiæ omnes a numero 11 singularum notarum
 sectiones distinguendum = 10
 Decuplum differentiarum earumdem notarum a nume-
 ro 10 , nempe 80 in divisorem duobus notis imminu-
 tum, seu in $11 = 880$
 Erit ergo aggregatum = 2222
 quod cum multiplex sit divisoris, ejusdem quoque multiplex
 erit numerus propositus.

Sit demum numerus 7504288276237764 dividendus per
 1111111 .
 Aggregatum ex notis sectionum = 666666
 Omnes differentiæ a numero 11 notarum inter se-
 ctiones jacentium = 16
 Decuplum earumdem differentiarum a numero 10
 nempe 140 in 11111 ductum = 1555540
 Erit ergo aggregatum = 222222
 quod cum multiplex sit divisoris, ejusdem quoque multiplex
 erit propositus numerus.

Ab his, ac superioribus formulis inferri posset generalis
 proprietas numerorum per 11 , 111 , 1111 &c. divisibilium
 primo loco demonstrata, ut unusquisque facile perspiciet.

12. Quod de numeris numerorum 11 , 111 , 1111 &c.
 mul-

multiplicibus demonstravimus generalissime convenire, ac applicari posse quibuscumque numeris numerorum mm , mmm , $mmmm$ &c. multiplicibus ex iis, quæ supra tradidimus, demonstrari potest, siue m sit numerus simplex, siue compositus. Etenim numerus quivis numerorum mm , mmm , $mmmm$ &c. multiplex, etiam multiplex est respective numerorum II , III , $IIII$ &c., ac insuper numeri m ; ac propterea eidem proprietates supra enunciatas convenire manifestum est. Pro exemplo sit numerus 128367393 multiplex numeri $28083 = III . m = III . 253$. Erit ergo

<i>Per num. 4</i>	<i>Per num. 10</i>	<i>Per num. 11</i>
393	93	93
367	67	67
128	28	28
<hr style="width: 50%; margin: 0;"/>	<hr style="width: 50%; margin: 0;"/>	<hr style="width: 50%; margin: 0;"/>
888	188	188
	-77	26
	<hr style="width: 50%; margin: 0;"/>	<hr style="width: 50%; margin: 0;"/>
	III	230
		<hr style="width: 50%; margin: 0;"/>
		444

Nimis longus essem, si alias aliorum plurimorum numerorum proprietates perelegantes perfequi vellem. Unusquisque ulterius progredi potest, si vacuum ipsi sit, ac placeat in his minutissimis rebus temporis otium oblectare. Reperiendis per superiores divisores quantitatum quotis superfedi, cum res hæc adeo ex formulis in aperto sit, ut nulla opera dignoscatur; & satis habui, si quæ exposui unica ex formularum demonstratione demonstrarem &c.

HIERONYMI SALADINI MONACHI
CÆLESTINI.

Methodus Bernoulliana de reducendis quadraturis transcendentibus ad longitudinem curvarum algebraicarum, a quibus inutilis sæpe redditur, imaginariis quantitatibus liberatur, atque ejusdem reductionis innumeræ alie vice indignantur.

§. I. **U**Tilitatem summam pro construendis formulis differentialibus capi ex indeterminatarum separatione unicuique vel leviter in sublimioris analyseos doctrina versato compertum est; siquidem redactis formulis ad unicam variabilem in promptu est methodus exhibendi earum constructionem supposita curvarum algebraicarum vel quadratura, vel rectificatione; quarum prior cum sit magis obvia præ altera, quippe quia formula quæcumque differentialis unicam variabilem continens ad exprimendum elementum spatii curvilinei absque ullo artificio reducitur, idcirco factum fuit, ut analystæ fere omnes, parum solliciti de altera, in priorem methodum perficiendam diligentiam omnem posuerint. Verum enim vero methodus construendi formulas differentiales unicam variabilem continentes per curvarum algebraicarum rectificationem, quamquam exigat industriam, & sagacitatem pro reducenda formula ad expressionem elementi arcus curvæ algebraicæ, cujus nota sit descriptio; nihilominus, tali reductione peracta, cum nullo negotio curvarum rectificatio habeatur, filum nempe ipsis curvis circumvolvendo, quod non evenit de quadraturis, quæ praxim longe difficiliorem requirunt; ideo viri in rebus algebraicis eximii hanc methodum haud negligendam, quin potius summo studio excolendam optarunt, potissimum rati, quod multa ad analysim infinitesimorum spectantia essent ex hoc lucem, & perfectionem acceptura; quapropter solutionem problematis celeberrimi desiderarunt, quo proponitur reducere formulam differen-

ferentialem unicam variabilem continentem, ad aliam formulam, quæ exprimat arcum elementarem curvæ algebraicæ.

§. 2. Primus omnium, (quantum mihi constat) qui Mathematicis tale problema enodandum proposuit, fuit clarissimus Jacobus Hermannus in Actis Eruditorum Lipsiæ anno 1719; de quo problemate sententiam suam aperit clarissimus Nicolaus Bernoulli Johannis filius in Actis Eruditorum sequentis anni: = Accedo, *inquit*, ad Problema Hermannianum, quo petuntur = curvæ algebraicæ A, quarum indefinita rectificatio depen- = deat a quadratura cujuscumque alterius curvæ B algebrai- = cæ, quæ tamen habeant tot, quot libuerit arcus particula- = res absolute rectificabiles, & independenter a quadratura, = a qua ipsarum rectificatio dependet. Quod si clarissimus = Proponens intelligat per curvam B, quamlibet datam al- = gebraicam . . . fatemur libenter solutionem problematis non = esse in nostra potestate . . . Judicamus ab illo multum præ- = stari, qui vel partem tantum hujus problematis solveret, = docendo scilicet modum inveniendi curvam algebraicam A, = a cujus rectificatione indefinita dependeat quadratura inde- = finita curvæ algebraicæ datæ B . . . hujus solutio ingentem = haberet utilitatem in constructionibus problematum, quæ = post separationem indeterminatarum ad quadraturas redacta = sunt. Quæ verba induxerunt clar. Hermannum ad propositi problematis solutionem exhibendam in Actis Lipsienisibus mensis Aprilis anno 1723, quæ tamen parum arridet Johanni Bernoullio, utpote quia videtur difficilis, & ad usum parum accommodata. = Recurrere enim, *ait ipse*, ad evolutarum naturam, atque auxilium petere ab inclinatione linearum ad se = invicem, mihi videtur via indirecta, & parum naturalis, = per quam in operosum adducimur calculum, ut fieri solet, = si mere analytica cum geometricis præter necessitatem com- = miscemus: damnat certe Newtonus in Elem. Alg. pag. 282, = & 315 tamquam insigne peccatum contra bonam metho- = dum consuetudinem illam geometrarum unum cum altero = confundentium. Ex quo factum est, ut vir ingeniosissimus de alia via magis plana, atque ad usum magis accommodata excogitaverit:

§. 3. Leonhardus Eulerus analysta nostri temporis facile princeps Tom. 5 Comm. Academ. Scientiarum Imperialis Petropolitanae agens de Curvis rectificabilibus algebraicis, & de
T. V. P. II.

Trajectoriis reciprocis algebraicis viam indicat idipsum præstandi, atque simul inveniendi omnes curvas algebraicas possibiles problemati inservientes; at formulæ super omnem credibilitatem prolixæ, & ab usu valde remotæ, nec non difficultates sese a quantitibus imaginariis extricandi me induxerunt ad hanc methodum relinquendam, atque ad bernoullianam amplectendam utpote præ cæteris elegantior, & magis expedita; nihilominus, cum & ipsa a quantitibus imaginariis inutilis sæpe reddatur, & ejus extensio intra quosdam limites restringatur; hinc rem haud spernendam me facturum esse confido, si eam ab hisce defectibus valeam liberare; ad quod præstandum novam demonstrationem adducam Theorematis Bernoulliani de reducendis formulis differentialibus unicam variabilem continentibus ad rectificationem curvarum algebraicarum, quod ita a cl. Auctore expositum est, in Actis Lipsiensibus anno 1724.

§. 4. Designante p quantitatem datam utcumque per x & constantes, si describatur curva coordinatarum $\frac{dx}{dp} \cdot \sqrt{1 - pp^2} = y$, & $\frac{dx}{dp} \cdot p - p^3 - x = u$; arcus hujus curvæ erit $\frac{dx}{dp} \cdot \sqrt{1 - pp - f p dx} = \int \sqrt{du^2 + dy^2}$.

§. 5. Ad hoc Theorema demonstrandum pono $dx = s dp$, tum invenio coordinatarum elementa, quæ sunt, facta substitutione quantitatis s pro $\frac{dx}{dp}$, $ds \cdot \sqrt{1 - pp^2} - 3s p dp \cdot \sqrt{1 - pp^2} = dy$, & $ds \cdot p - p^3 + s dp - 3s p^2 dp - dx = du$. In his pro $s dp$ scribo dx , ut perveniant coordinatarum elementa $ds \cdot \sqrt{1 - pp^2} - 3p dx \cdot \sqrt{1 - pp^2} = dy$; & $ds \cdot p - p^3 - 3p^2 dx = du$; Horum quadrata sunt $ds^2 \cdot \sqrt{1 - pp^2} - 6p ds dx \cdot \sqrt{1 - pp^2} + 9pp^2 dx^2 \cdot \sqrt{1 - pp^2} = dy^2$, & $ds^2 \cdot p - p^3 - 6p ds dx \cdot p^2 - p^4 + 9p^4 dx^2 = du^2$; Accipiantur horum quadratorum summa $ds^2 \cdot \sqrt{1 - pp^2} - 6 ds dx p \cdot \sqrt{1 - pp^2} + 9p^2 dx^2 = dy^2 + du^2$; Hujus radix quadrata, quæ est elementum arcus, erit $ds \cdot \sqrt{1 - pp - 3p dx} = \sqrt{dy^2 + du^2}$; Huic addo & demonstrem quantitatem differentialem $s D \sqrt{1 - pp}$, ut fiat $ds \cdot \sqrt{1 - pp} + s D$

$1 - pp + 2spdp - 3pdx = \sqrt{dy^2 + du^2}$, & pro $2sdp$ scribo $2dx$ ut fit ds . $1 - pp + sD 1 - pp - pdx = \sqrt{dy^2 + du^2}$, æqualis scilicet elemento arcus; ergo integrando fiet, vocato curvæ arcu $= L = \int \sqrt{dy^2 + du^2}$, $s. 1 - pp - \int pdx = L$: quod erat demonstrandum.

§. 6. Advertendum est in hoc calculo liberum esse coordinatas assumptas accipere vel negative, vel positive, quia idem quadratum resultat, quum earum elementa ad secundam potestatem elata simul conjunguntur, ut habeatur $dy^2 + du^2$; similiter dum radix extrahitur incertum est utrum elementum $\sqrt{du^2 + dy^2} = dL$ debeat affici signo $+$ an signo $-$, quod dicendum est etiam de arcu L facta integratione; quapropter in singulis casibus opportunum erit præfigere arcui L signum ambiguum, tum determinare utrum $+$ an $-$ sit accipiendum. Advertendum est etiam ad constantem addendam, vel deducendam si opus fuerit, quæ omnia cum aliis integrandi modis sunt communia.

§. 7. Ut innotescat quomodo auxilio hujus Theorematis quantitates differentiales unicam variabilem continentes reducantur ad rectificationem curvarum algebraicarum abs re non erit nonnulla exempla proponere. Formula reducenda fit dx .

$\frac{\sqrt{xx - aa}}{x}$; hæc in Theoremate comparetur cum pdx , ex hac

comparatione fiet $p = \frac{\sqrt{xx - aa}}{x}$, & $pp = \frac{xx - aa}{xx}$, & $2pdp$

$= \frac{2aadx}{x^3}$, & $dp = \frac{aadx}{xx\sqrt{xx - aa}}$, & $s = \frac{dx}{dp} = \frac{xx\sqrt{xx + aa}}{aa}$,

& $1 - pp = 1 + \frac{aa - xx}{xx} = \frac{aa}{xx}$; adeoque $s. 1 - pp =$

$\sqrt{xx - aa}$; ergo arcus curvæ $= L = s. 1 - pp - \int pdx$ erit

æqualis $\sqrt{xx - aa} - \int dx \cdot \frac{\sqrt{xx - aa}}{x}$; coordinata vero facta

substitutione erunt $s. 1 - pp^2 = \frac{a}{x} \sqrt{xx - aa} = y$, &

$s. p - p^3 - x = -\frac{aa}{x} = u$, ex quibus elicitur $yy = \frac{aa}{xx} \cdot \frac{xx - aa}{x}$,

& $xx = \frac{a^4}{u^2}$ adeoque $yy = aa - uu$; quæ æquatio est ad circulum. Ergo si ex quantitate algebraica $\sqrt{xx - aa}$ subtrahatur

tur arcus circuli cujus radius est a obtinebitur constructio formulæ $\int dx \cdot \frac{\sqrt{xx-aa}}{x}$.

§. 8. Ut arcum, quo indigemus, recte determinemus, inveniamus lineam æqualem x : ex puncto B (Fig. 1.) agatur tangens circuli BE, & ducatur secans CDE; erit CE = x , quia CF:CD::CB:CE, seu $u = \frac{aa}{x}$: $a::a:CE = x$, & BE = $\sqrt{xx-aa}$: ergo BD erit arcus ille, qui crescit crescente x . Hujus autem arcus differentia erit $\frac{a^2 dx}{x\sqrt{xx-aa}}$; sumo differentiam $\sqrt{xx-aa}$, quæ est quantitas conjungenda cum arcu ad inveniendam integrationem propositæ formulæ; ea autem erit $\frac{x dx}{\sqrt{x^2-aa}}$, ex qua differentia arcus est detrahenda, ut proveniat formula proposita; quare habebimus $\int dx \frac{\sqrt{xx-aa}}{x} = \sqrt{xx-aa} - \text{BD}$, scilicet differentiæ arcus & tangentis.

§. 9. Ope hujus Theorematis Bernoulliani reducitur ad rectificationem curvæ algebraicæ formula logarithmica $\frac{a dx}{x}$; nam, facta collatione cum formula $p dx$, provenit $p = \frac{a}{x}$, $dp = \frac{-a dx}{x^2}$, & $s = \frac{dx}{dp} = \frac{-xx}{a}$. Præterea $1 - pp = \frac{xx-aa}{xx}$, & $s \cdot 1 - pp = \frac{-1}{a} \cdot \frac{xx-aa}{x}$. Coordinatæ curvæ, cujus arcus sumendus est, inveniuntur $\frac{\sqrt{xx-aa}^{\frac{3}{2}}}{ax}$, & $\frac{-2xx+aa}{x}$, sive $\frac{xx-aa^{\frac{3}{2}}}{ax}$, & $\frac{2xx-aa}{x}$. Ergo ex theoremate erit $\frac{-1}{a} \cdot \frac{xx-aa}{x} + L = \int \frac{a dx}{x}$.

§. 10. Ut definiam quoddam signum sumere oporteat, accipio duarum coordinatarum differentias, elevo ad quadratum, & simul duo quadrata conjungo, & invenio $\frac{4x^4 + 4a^2x^2 + a^4}{a^2x^2} \cdot d\mathcal{N}^2 = dL^2$, extracta radice $\frac{2x^2 + a^2}{ax} \cdot dx = dL$, differentio $-\frac{1}{a} \cdot \frac{xx-a^2}{x}$, ut habeam $-\frac{2x dx}{a}$, quam addo

addo superiori, ex quo provenit formula proposita. Ergo vera formula est $-\frac{1}{a} \cdot x x - a a + L = \int \frac{a dx}{x}$, in qua ita accipitur L, ut crescat crescente x ; etenim si $dL = \frac{2x^2 + a^2}{ax}$.

dx non accipiatur positiva, tunc conjuncta cum $-\frac{2x dx}{a}$ differentia scilicet quantitatis algebraicæ $-\frac{1}{a} \cdot x x - a a$, non restitueret formulam $\frac{a dx}{x}$: æquatio nostræ curvæ non nisi prolixo calculo potest elici; verum parum solliciti esse debemus de hac difficultate, dummodo facile sit describere curvas cum

coordinatis x & $y = \frac{xx - aa^2}{ax}$, atque x & $u = \frac{2xx - aa}{x}$ ex quibus, ut constat ex elementis algebraicis, habetur curvæ adhibendæ descriptio.

§. 11. Exemplum tertium construat formulam

$\frac{-a^m dx}{a^{2m} + x^{2m}}$, facta collatione cum theorematis formula canonica invenio $p = \frac{-a^m}{a^{2m} + x^{2m}}$, & $-pp = \frac{x^{2m}}{a^{2m} + x^{2m}}$, $dp =$

$\frac{m a^m x^{2m-1} dx}{a^{2m} + x^{2m}}$. Præterea $s = \frac{dx}{dp} = \frac{\frac{a^{2m} + x^{2m}}{m a^m x^{2m-1}}}{1}$, $s \cdot -pp =$

$x \cdot \frac{a^{2m} + x^{2m}}{m a^m}$. Coordinatæ ejus curvæ, cujus arcus formulam integrat, inveniuntur esse $\frac{x^{m+1}}{m a^m} = y$, & $\frac{m+1}{m} x = u$. Hujus curvæ arcus, qui crescit crescente x , vocetur L; calculus ipse

docebit formulam hoc modo scribendam esse $\int \frac{-a^m dx}{a^{2m} + x^{2m}} = x \cdot \frac{a^{2m} + x^{2m}}{m a^m} - L$. Si curvam quæras, quam inventæ coordinatæ sufficiunt, eleva ad potestatem $m+1$ ordinatam $\frac{m+1}{m}$

$x = u$, ut fiat $x^{m+1} = \frac{m^{m+1}}{m+1} \cdot u^{m+1}$, & facta substitu-

tio-

tionem in ordinata $\frac{x^{m+1}}{m a^m} = y$ erit $a^m y = \frac{m^m}{m+1} \cdot u^{m+1}$; quæ æquatio est ad infinitas parabolas, & hyperbolas.

§. 12. Quamquam Theorema propositum maxima gaudeat utilitate, inutile tamen a quantitatibus imaginariis aliquando redditur, quum scilicet est $pp > 1$; tunc enim ordinata $s \cdot \sqrt[3]{pp - 1}$ evadit imaginaria. Ut huic incommodo remedium tutum afferam, sequentem methodum adhibeo demonstrando nimirum, quod subditur, theorema. Posita

$dx = s dp$ describatur curva coordinatarum $s \cdot \sqrt[3]{pp - 1} = y$, & $s \cdot p^3 - p + x = u$; ajo fore $\sqrt{du^2 - dy^2} = s \cdot \sqrt[3]{pp - 1} + \int p dx$.

§. 13. Hoc Theorema demonstro eodem modo ac Bernoullianum demonstravi. Sumantur enim coordinatarum elementa $ds \cdot \sqrt[3]{pp - 1} + 3s p dp \cdot \sqrt[3]{pp - 1} = dy$, $ds \cdot p^3 - p + 3s p p dp - s dp + dx = du$. In his substituo dx pro $s dp$, ut evadant $ds \cdot \sqrt[3]{pp - 1} + 3p dx \cdot \sqrt[3]{pp - 1} = dy$, $ds \cdot p^3 - p + 3p p dx = du$. Elevo ad secundam potestatem $\sqrt[3]{pp - 1}$. $ds \cdot \sqrt[3]{pp - 1} + 3p dx = dy^2$, $pp \cdot ds \cdot \sqrt[3]{pp - 1} + 3p dx = du^2$. Quoniam semper est $pp > pp - 1$, liquet fore semper $du^2 > dy^2$; quadratum primum detrahe a secundo, ut habeas $ds \cdot \sqrt[3]{pp - 1} + 3p dx = du^2 - dy^2$, & extracta radice quadrata $ds \cdot \sqrt[3]{pp - 1} + 3p dx = \sqrt{du^2 - dy^2}$. In prima æquationis parte addatur, & dematur $s \cdot D \cdot \sqrt[3]{pp - 1}$, ut sit $ds \cdot \sqrt[3]{pp - 1} + s \cdot D \cdot \sqrt[3]{pp - 1} - 2s p dp + 3p dx = \sqrt{du^2 - dy^2}$; pro $s dp$ substitue dx , & invenies $ds \cdot \sqrt[3]{pp - 1} + s \cdot D \cdot \sqrt[3]{pp - 1} + p dx = \sqrt{du^2 - dy^2}$, & facta integratione $s \cdot \sqrt[3]{pp - 1} + \int p dx = \int \sqrt{du^2 - dy^2}$. Q. E. D.

§. 14. Hoc primum invento, advoco Theorema Bernoullianum ad inveniendam integrationem formulæ $\sqrt{du^2 - dy^2}$ per rectificationem curvæ algebraicæ. Ut hoc fiat, pono $dy = q du$,
ut

ut formula evadat $du \cdot \sqrt{1-qq}$, in qua est $qq < 1$, quia $du^2 > dy^2$. Ergo quæ in Theoremate Bernoulliano est p , nunc fit $= \sqrt{1-qq}$. Ergo $qq = 1-pp$, quæ positiva est, nam ponitur esse $pp > 1$, quæ vero in Theoremate Bernoulliano est x hic est u ; quæ vero ibi est s , hic vocetur $= z$; quare in eas formulas introductis his valoribus habebis $du = -\frac{zq dq}{\sqrt{1-qq}}$ pro $dx = s dp$; & pro coordinatis curvarum habebis zq^3 , $zq^2 \cdot \sqrt{1-qq} - u$, & demum pro arcu curvæ habebis $L = zq^2 - \int du \sqrt{1-qq}$, sive $zq^2 - L = \int du \sqrt{1-qq}$; $= \int \sqrt{du^2 - dy^2}$, quod numero superiori demonstravi æquale $s \cdot pp - 1 + \int p dx$; ergo $zq^2 - L = s \cdot pp - 1 + \int p dx$, sive $\int p dx = zq^2 - s \cdot pp - 1 - L$, quæ in hypothefi $pp > 1$ imaginaria nulla turbare possunt. Hoc modo patefactum est sine dubitatione quamlibet formulam differentialem per rectificationem curvæ algebraicæ construi posse.

§. 15. Hæc omnia oportet exemplis illustrare. Sit primo construenda formula $\frac{-dx \sqrt{x}}{\sqrt{x-a}}$; Theoremate Bernoulliano uti non licet, quia posita $\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x-a}} = p$, fieret $1-pp = \frac{-a}{x-a}$ quantitas negativa; nam x accipi semper debet major a alioquin formula proposita esset imaginaria. Quare confugiendum est ad nostram methodum; erit itaque $pp - 1 = \frac{a}{x-a}$, & $dp = \frac{adx}{2 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{x-a}^{\frac{3}{2}}}$, & $s = \frac{dx}{dp} = \frac{2x^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{x-a}^{\frac{3}{2}}}{a}$. Ergo $s \cdot pp - 1 = 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-a}$. Preterea coordinatæ curvæ adhibendæ inveniuntur esse $2\sqrt{ax} = y$, $-x = u$, sive $x = u$. Ergo ex Theoremate nostro habebimus $2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-a} + \int \frac{-dx \sqrt{x}}{\sqrt{x-a}} = \int \sqrt{du^2 - dy^2}$. Huic radici calculus indicabit signum $+$ esse apponendum.

§. 16. Jam vero per ea, quæ dicta sunt numero 14, construamus formulam $\sqrt{du^2 - dy^2}$ rectificato arcu curvæ algebraicæ.

braicæ: quoniam $u = x$, & $y = 2\sqrt{ax}$, & sumptis differentiis $du = dx$, $dy = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, formula in sequentem transmutabitur, nempe $dx\sqrt{1 - \frac{a}{x}} = \frac{dx\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}}$; ergo $q = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, & $1 - qq = \frac{x-a}{x}$. Ergo $D\sqrt{1-qq} = \frac{a dx}{2x^2 \cdot x-a^{\frac{3}{2}}}$, & $z = \frac{du}{D\sqrt{1-qq}} = \frac{2x^{\frac{3}{2}} \cdot x-a^{\frac{3}{2}}}{a}$; quantitas curvæ jungenda = zq^2 erit æqualis $2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-a}$. Coordinatæ curvæ inveniuntur $2\sqrt{a} \cdot \sqrt{x-a}$, $x-2a$. Descripta hac curva ejus arcus, qui ita accipiendus est, ut crescat crescente x , vocetur = L substitutis congruis speciebus in formula $zq^2 - L = \int \sqrt{du^2 - dy^2}$ erit $2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-a} - L = \int \sqrt{du^2 - dy^2}$. Quare hoc valore substituto in formula numeri 15 erit $2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-a} + \int \frac{-dx\sqrt{x}}{\sqrt{x-a}} = 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-a} - L$, sive $\int \frac{-dx\sqrt{x}}{\sqrt{x-a}} = -L$, sive $\int \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{x-a}} = L$, quæ ostendit formulam integrari per solum arcum curvæ algebraicæ sine ulla additione quantitatis algebraicæ.

§. 17. Determino modo curvam. Primam ordinatam voco = m , secundam = n . Erit ergo $4a \cdot \frac{x-a}{x} = mm$, & $x-a = n+a$; adeoque (Fig. 2.) $4a \cdot \frac{n+a}{n+a} = mm$, quæ est ad parabolam apollonianam. Parametro = $4a$ describatur parabola AFC, cujus abscissæ = $AE = a+n$, in qua secta $AI = a$, erit $IE = n$, & ordinatæ $EF = m$. Produc EA in D, donec $AD = a$, erunt $DE = n+2a = x$; quare existentibus $DE = x$ erit $AF = \int \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{x-a}}$.

§. 18. Reassumo pro secundo exemplo formulam logarithmicam $\frac{a dx}{x}$ numeri 9, quæ per Bernoullianum Theorema ad integrationem perducere non potest, quando est $x < a$; nam in hoc casu $1 - pp = \frac{xx - aa}{xx}$ esset quantitas negativa, adeoque

que $s. \sqrt{1 - pp^2} = y$ effeſt ordinata imaginaria; recursus igitur habendus erit ad nostrum Theorema, in quo habetur $pp - 1 = \frac{aa - xx}{xx}$ quantitas positiva, & $dp = \frac{-adx}{xx}$, $s = \frac{dx}{dp} = \frac{-xx}{a}$, & $s. \sqrt{pp - 1} = \frac{xx - aa}{a}$; coordinata vero nostrae curvae erunt $s. \sqrt{pp - 1}^{\frac{3}{2}} = \frac{aa - xx^{\frac{3}{2}}}{-ax} = y$, $s. p^3 - p + x = \frac{2xx - aa}{x} = u$; & $s. \sqrt{pp - 1} + \int \frac{adx}{x} = \sqrt{du^2 - dy^2}$ erit $\frac{xx - aa}{x} + \int \frac{adx}{x}$. Quantitati radicali signum affirmativum praeponeſe debes, quippe quia sumptis coordinatarum y, u differentiis, invenies $dy = dx \cdot \frac{2xx + aa}{axx} \cdot \frac{aa - xx^{\frac{3}{2}}}{a}$, & $du = \frac{2xx + aa}{xx} dx$, atque existente $q = \frac{dy}{du}$, facta substitutione habebis $q = \frac{aa - xx^{\frac{3}{2}}}{a}$, & $1 - qq = \frac{xx}{aa}$, $\sqrt{1 - qq} = \frac{x}{a}$, atque $du \sqrt{1 - qq} = \sqrt{du^2 - dy^2} = \frac{2xx + aa}{ax} dx$, quod est differentiale quantitatis $\frac{xx - aa}{a} + \int \frac{adx}{x}$.

§. 19. Ut pervenias ad optatam constructionem calculum ulterius promoveas oportet, inveniſſendo nempe $D \sqrt{1 - qq} = \frac{dx}{a}$, & $z = \frac{du}{D \sqrt{1 - qq}} = \frac{2ax^2 + a^3}{x^2}$, $zqq = \frac{2ax^2 + a^3}{xx}$. $\frac{aa - xxx}{aa}$ quantitatem algebraicam arcui curvae quaesitae conjungendam; ex quo fit $\int \frac{adx}{x} = zqq - s. \sqrt{pp - 1} + L = \frac{3xx + aa}{axx} \cdot \frac{aa - xxx}{aa} + L$; coordinata vero curvae adhibendae sunt $zq^3 = \frac{2ax^2 + a^3}{x^2} \cdot \frac{aa - xxx^{\frac{3}{2}}}{a^3}$, & $zqq \sqrt{1 - qq} - u = \frac{2a^4 - 2x^4 - a^2x^2}{a^2x}$. Quantitati L signum $+$ affiximus; nam sumptis coordinatarum differentiis $2a^4 + aaxx + 6x^4$. $\frac{dxa \sqrt{aa - xxx}}{-a^3x^3}$, & $2a^4 + aaxx + 6x^4 \cdot \frac{axdx}{-a^3x^2}$, & ad qua-

dratum elevatis, atque in unam summam collectis; extractaque inde radice quadrata exurgit $\frac{2a^4 + a^2x^2 + 6x^4}{ax^3}$. $d\pi$ æquale $\frac{adx}{x} - D \frac{3x^2 + a^2}{ax^2} \cdot \frac{aa - \pi\pi}{aa}$; quod indicat signum radicis esse positive accipiendum.

§. 20. Exemplum tertium doceat reducere ad rectificatio-
nem curvæ algebraicæ formulam differentialem $d\pi \frac{\sqrt{aa+xx}}{a}$; facta collatione cum formula generali $p d\pi$ habebis $p = \frac{\sqrt{aa+xx}}{a}$, adeoque $pp = \frac{aa+xx}{aa}$, & $1 - pp = \frac{-xx}{aa}$ quan-
titem negativam, & per consequens ordinatam $s. 1 - pp^2 = y$ imaginariam; methodo Bernoulliana, tamquam inutili seposita, adhibe nostram, pro qua invenies $pp - 1 = \frac{xx}{aa}$ quantitatem positivam, & cum sit $dp = \frac{x dx}{a\sqrt{aa+xx}}$, atque inde $s = \frac{dx}{dp} = \frac{a\sqrt{aa+xx}}{x}$, reperies $s. pp - 1 = \frac{x}{a} \sqrt{aa+xx}$ quantitatem algebraicam $\int \sqrt{du^2 - dy^2}$ jungendam; erit itaque $\frac{x}{a} \cdot \sqrt{aa+xx} + \int \frac{dx\sqrt{aa+xx}}{a} = \int \sqrt{du^2 - dy^2}$, ut nostrum præcipit Theorema; coordinatæ vero curvæ adhibendæ erunt $s. pp - 1^{\frac{3}{2}} = \frac{xx}{aa} \cdot \sqrt{aa+xx} = y$, & $s. p^3 - p + x = \frac{x^3 + 2a^2x}{a^2} = u$. Si desideras rationem, qua $\int \sqrt{du^2 - dy^2}$ affirmativam accepimus, sume differentialem coordinatarum y , u ; scilicet $\frac{x dx}{aa} \cdot \frac{3xx + 2aa}{\sqrt{aa+xx}} = dy$, & $\frac{3x^2 + 2a^2}{a^2} dx = du$, ex quo erues $q = \frac{dy}{du} = \frac{x}{\sqrt{aa+xx}}$, $qq = \frac{xx}{aa+xx}$, & $1 - qq = \frac{aa}{aa+xx}$, atque $\sqrt{1 - qq} = \frac{a}{\sqrt{aa+xx}}$, cum itaque sit $du \sqrt{1 - qq} = \sqrt{du^2 - dy^2}$, ex nostro Theoremate, erit debita substitutione peracta $\sqrt{du^2 - dy^2} = \frac{3x^2 + 2a^2}{a\sqrt{aa+xx}} d\pi = D \frac{x}{a} \sqrt{a^2}$

$\sqrt{a^2 + xx} + \frac{dx\sqrt{a^2 + x^2}}{a}$ quod demonstrat $\sqrt{du^2 - dy^2}$ positive sumendam esse.

§. 21. Remanet modo pro integratione perficienda construere $\sqrt{du^2 - dy^2}$ per integrationem curvæ algebraicæ; ad hunc finem inveno, ut nostrum Theorema postulat,

$$D \sqrt{1 - qq} = \frac{-ax dx}{aa + xx^{\frac{3}{2}}}, \text{ ut eliciam } z = \frac{du}{D \sqrt{1 - qq}} =$$

$$\frac{3x^2 + 2a^2 \cdot \frac{aa + xx^{\frac{3}{2}}}{-a^3 x}}{aa + xx^{\frac{3}{2}}} dx, \text{ \& } zqq = \frac{-x}{a^3} \cdot \frac{aa + xx^{\frac{3}{2}}}{3x^2 + 2a^2}.$$

$aa + xx^{\frac{3}{2}}$ quantitatem nempe algebraicam arcui quæsitæ curvæ conjungendam, cujus coordinatas reperies $zq^3 = \frac{-x^2}{a^3}$. $3x^2 + 2a^2$, & $zqq \sqrt{1 - qq} - u = -\frac{4x}{aa} \cdot \frac{x^2 + a^2}{a^2}$. Ergo

ex Theoremate numeri 14 erit $\int \frac{dx \sqrt{aa + xx}}{a} = zqq - 1$:

$$pp - 1 + L = -\frac{x}{a^3} \cdot \frac{3xx + 2a^2}{aa + xx^{\frac{3}{2}}} - \frac{x}{a}.$$

$$\sqrt{aa + xx} + L = -\frac{3x}{a^3} \cdot \frac{xx + aa^{\frac{3}{2}}}{xx + aa^{\frac{3}{2}}} + L \text{ vocato scilicet}$$

arcu curvæ = L, cui apponitur signum + calculo indicante;

nam sumptis coordinatarum differentiis $\frac{-4dx}{a^3} \cdot \frac{3x^3 + a^2x}{3x^2 + a^2}$,

& $-\frac{4dx}{a^3} \cdot \frac{3x^2a + a^3}{3x^2 + a^2}$, & ad quadratum elevatis, atque

in unam summam collectis, extractaque radice quadrata fit

$$\frac{4dx}{a^3} \cdot \sqrt{\frac{3x^3 + a^2x^2}{3x^2 + a^2} + \frac{3x^2a + a^3}{3x^2 + a^2}} = \frac{dx \sqrt{aa + xx}}{a} +$$

$$D \frac{3x}{a^3} \cdot \frac{xx + aa^{\frac{3}{2}}}{xx + aa^{\frac{3}{2}}} = \frac{4dx}{a^3} \cdot \sqrt{\frac{3xx + aa^2}{3xx + aa^2} \cdot \frac{aa + xx}{aa + xx}}.$$

§. 22. Pro ultimo exemplo assumo construendam per re-

ctificationem curvæ algebraicæ formulam $\frac{a^m dx}{a^{2m} - x^{2m}^{\frac{1}{2}}}$ ex qua

provenit $1 - pp = \frac{-x^{2m}}{a^{2m} - x^{2m}}$ quantitas negativa, & ordinata

$s. 1 - pp^2$ imaginaria; adeoque methodus Bernoulliana inutilis redditur; factò igitur recurſu ad noſtram, erit $pp - 1 = \frac{x^{2m}}{a^{2m} - x^{2m}}$ poſitiva, & $dp = \frac{m a^m x^{2m-1}}{a^{2m} - x^{2m}} dx$, ex quo eritur $s = \frac{dx}{dp} = \frac{a^{2m} - x^{2m}}{m a^m x^{2m-1}}$, & $s \cdot pp - 1 = \mathcal{X} \cdot \frac{a^{2m} - x^{2m}}{m a^m}$, quantitas algebraica jungenda; coordinatæ curvæ adhibendæ ſunt $s \cdot pp - 1^2 = \frac{x^{m+1}}{m a^m} = y$, $s \cdot p^3 - p + \mathcal{X} = \frac{m+1}{m} \cdot \mathcal{X} = u$. Ergo per noſtrum Theorema erit $\mathcal{X} \cdot \frac{a^{2m} - x^{2m}}{m a^m} + \int \frac{a^m dx}{a^{2m} - x^{2m}} = \int \sqrt{du^2 - dy^2}$. Calculus docet ſignum poſitivum quantitati $\int \sqrt{du^2 - dy^2}$ eſſe præſigendum; quandoquidem ſumptis coordinatarum y, u differentiis reſultat $\frac{m+1}{m a^m} x^m dx = dy$, & $\frac{m+1}{m} dx = du$. Ergo $\frac{dy}{du} = \frac{x^m}{a^m} = q$, & $1 - qq = \frac{a^{2m} - x^{2m}}{a^{2m}}$, ejuſque radix $= \sqrt{1 - qq} = \frac{a^{2m} - x^{2m}}{a^m}$. Quoniam vero ex Theoremate noſtro habetur $\sqrt{du^2 - dy^2} = du \sqrt{1 - qq}$, erit igitur $\sqrt{du^2 - dy^2} = \frac{m+1}{m a^m} dx \sqrt{a^{2m} - x^{2m}} = D \mathcal{X} \cdot \frac{a^{2m} - x^{2m}}{m a^m} + \frac{a^m dx}{a^{2m} - x^{2m}}$, quod argumento eſt $\sqrt{du^2 - dy^2}$ ſignum affirmativum eſſe præponendum.

§. 23. Præterea erit $D \sqrt{1 - qq} = \frac{-m x^{2m-1} dx}{a^m \cdot a^{2m} - x^{2m}}$, atque inde $z = \frac{du}{\sqrt{1 - qq}} = \frac{m+1}{-m^2 x^{2m-1}} \cdot a^m \cdot \frac{a^{2m} - x^{2m}}{a^{2m} - x^{2m}}$, adeoque quantitas algebraica arcui conjungenda $= z q q = \frac{m+1}{-m^2 a^m} \mathcal{X}$. $\sqrt{a^{2m} - x^{2m}}$; coordinatæ vero ſunt $z q^3 = \frac{m+1}{-m^2 a^{2m}} \cdot x^{m+1}$.

 \sqrt{u}

$$\sqrt{a^{2m} - x^{2m}}, \text{ \& } zqq \sqrt{1 - qq} - u = \frac{m+1}{-m^2 a^{2m}}.$$

$$\frac{a^{2m} x - x^{2m+1} + m a^{2m} x}{a^{2m} x - x^{2m+1} + m a^{2m} x}; \text{ tandem erit } \int \frac{a^m dx}{a^{2m} - x^{2m} \frac{1}{2}} =$$

$$zqq - s. pp - 1 + L = \frac{m+1}{-m^2 a^m} \cdot x \sqrt{a^{2m} - x^{2m}} \\ - x \sqrt{a^{2m} - x^{2m}} + L = \frac{2m+1}{-m a^m} x \cdot a^{2m} - x^{2m} \frac{1}{2} + L; \text{ arci L}$$

apponitur signum +, nam acceptis coordinatarum differentii

$$- dx \frac{m+1}{m^2 a^{2m}} \cdot \frac{m+1 \cdot a^{2m} x^m - 2m-1 \cdot x^{2m}}{a^{2m} - x^{2m} \frac{1}{2}}, \text{ \& } - dx \frac{m+1}{m^2 a^{2m}}.$$

$m+1 \cdot a^{2m} - 2m-1 \cdot x^{2m}$, & ad quadratum elevatis, atque in unam summam collectis, ex qua extracta radice qua-

drata provenit $\frac{m+1}{m^2 a^m} \cdot \frac{m+1 \cdot a^{2m} - 2m-1 \cdot x^{2m}}{a^{2m} - x^{2m} \frac{1}{2}} dx$, cui addito

$$D - \frac{2m+1}{m^2 a^m} \cdot x \cdot a^{2m} - x^{2m} \frac{1}{2} \text{ restituitur formula } \frac{a^m dx}{a^{2m} - x^{2m} \frac{1}{2}}.$$

§. 24. Quamquam Theorema Bernoullianum, aut ipsum per se se, aut conjunctum cum artificio a nobis addito, patefaciat nullam esse formulam differentialem unicam variabilem continentem, quæ construi non possit rectificato arcu curvæ algebraicæ; tamen quia calculus sæpe evadit maxime implexus, sæpe deducit ad curvas altiores, quam par est, utile esse judicavi aliquot Theoremata Bernoulliano similia proponere, & simul methodum indicare, qua alia infinita nullo negotio construi possint.

§. 25. Sit curva algebraica, cujus coordinatæ sint $u = sP$, $y = sQ + m x$. P, Q sunt quantitates variables determinandæ per p, & constantes, p data supponitur utcumque per x, & constantes, atque $s = \frac{dx}{dp}$, m est coefficientis constans determinandus ex arbitratu. Sumantur coordinatarum differentia nempe $s dP + P ds$, $Q ds + s dQ + m dx$. Ponatur $dP = M dp$, $dQ = N dp$, factaqua substitutione elementa coordinatarum erunt $P ds + M s dp$, $Q ds + N s dp + m dx$; sed est

est $s dp = dx$; ergo $P ds + M dx$, $Q ds + \overline{N + m} dx$ erunt coordinatarum elementa; horum quadrata sunt $P^2 ds^2 + 2 PM ds dx + M^2 dx^2$, & $Q^2 ds^2 + 2 Q \cdot \overline{N + m} ds dx + \overline{N + m}^2 dx^2$, quorum quadratorum summa hæc proveniet $\overline{P^2 + Q^2} \cdot ds^2 + \overline{PM + Q \cdot \overline{N + m}} \cdot 2 ds dx + \overline{M^2 + \overline{N + m}^2} \cdot dx^2$; radix quadrata hujus summæ = $\sqrt{du^2 + dy^2}$ est elementum arcus curvæ algebraicæ. Ut autem ex hac summa radix quadrata actu extrahi possit, oporteret ut $\sqrt{PP + QQ} \cdot \sqrt{M^2 + \overline{N + m}^2} = PM + Q \cdot \overline{N + m}$; & quadrando $\overline{PP + QQ} \cdot M^2 + \overline{PP + QQ} \cdot \overline{N + m}^2 = P^2 M^2 + 2 PM Q \cdot \overline{N + m} + Q Q \cdot \overline{N + m}^2$; ergo $Q Q M^2 - 2 PM Q \cdot \overline{N + m} + P P \cdot \overline{N + m}^2 = 0$; Quoniam autem quantitas hæc est quadratum completum, extrahatur ejus radix, ut sit $QM - P \cdot \overline{N + m} = 0$, seu $\frac{N}{Q} + \frac{m}{Q} = \frac{M}{P}$, & substitutis valoribus M & N erit $\frac{dQ}{Q} + \frac{m dp}{Q} = \frac{dp}{P}$. Si ita determines Q per p , ut sit $\frac{m dp}{Q}$ differentiale logarithmicum, palam est, integrata superiore æquatione, factoque transitu a logarithmis ad numeros, inveniri P datam algebraice per p ; datis vero algebraice P , Q per p invenientur etiam M & N .

§. 26. Hoc modo perfecta determinatione speciei Q , & vocato curvæ arcu = L , extrahatur quantitatis inventæ radix quadrata $ds \sqrt{PP + QQ} + dx \sqrt{M^2 + \overline{N + m}^2} = dL$; addatur $s D \sqrt{P^2 + Q^2}$, & dematur æquale $\frac{dx D \sqrt{P^2 + Q^2}}{dp}$ ut fiat $ds \sqrt{P^2 + Q^2} + s D \sqrt{P^2 + Q^2} - \frac{dx}{dp} D \sqrt{P^2 + Q^2} + dx \sqrt{M^2 + \overline{N + m}^2} = dL$, quæ integrata exhibet $s \sqrt{P^2 + Q^2} - \int dx \cdot \frac{D \sqrt{P^2 + Q^2}}{dp} - \sqrt{M^2 + \overline{N + m}^2} = L$. Ex hac, & superioribus formulis quamplurima Theoremata Bernoulliana similia proficiuntur.

§. 27. Sit primo $Q = p$, erit in formula logarithmica numeri superioris $m + 1$. $\frac{dp}{p} = \frac{dP}{P}$, & integrando $m + 1$. $lp = lP$, factoque transitu a logarithmis ad numeros, ponendo causa facilius calculi protonumerum vel subtangentem $= 1$, erit $P = p^{m+1}$. Ergo $M = \frac{dP}{dp} = \overline{m+1} \cdot p^m$, & $N = \frac{dQ}{dp} = 1$, $\sqrt{P^2 + Q^2} = p \sqrt{p^{2m} + 1}$, & $\frac{D\sqrt{PP+QQ}}{dp} = \sqrt{p^{2m} + 1} + \frac{m p^{2m}}{\sqrt{p^{2m} + 1}} = \frac{m+1 \cdot p^{2m} + 1}{\sqrt{p^{2m} + 1}}$, & $\sqrt{M^2 + N + m^2} = \overline{m+1} \sqrt{p^{2m} + 1}$. Itaque hisce substitutis oritur.

§. 28. Theorema: $sp \sqrt{p^{2m} + 1} + \int \frac{m dx}{\sqrt{p^{2m} + 1}} = L$, existente L arcu ejus curvæ, cujus coordinatæ sunt $s \cdot p^{m+1}$, $sp + mx$.

§. 29. Reducenda sit per hoc Theorema ad rectificatorem curvæ algebraicæ formula $\frac{m a^m dx}{x^{2m} + a^{2m} \frac{1}{2}}$. Facta comparatione

ne cum $\frac{m dx}{\sqrt{p^{2m} + 1}}$ invenies $p = \frac{x}{a}$: ergo $dp = \frac{dx}{a}$, & $s = \frac{dx}{dp} = a$. Itaque fiet $\frac{x \sqrt{x^{2m} + a^{2m}}}{a^m} - \int \frac{m a^m dx}{\sqrt{x^{2m} + a^{2m}}} = L$.

Coordinatæ vero curvæ, cujus arcus L accipiendus est, inveniuntur $\frac{x^{m+1}}{a^m} = u$, $m + 1 \cdot x = y$, ex quibus habetur facili negotio æquatio curvæ $y^{m+1} = \overline{m+1} \cdot a^m u$, quæ est ad infinitas parabolas si $m + 1$ sit positiva, ad infinitas hyperbolas si $m + 1$ sit negativa. Propositæ autem formulæ reductio ad arcum curvæ algebraicæ ferme nihil distat ab ea, quam deduximus ex Theoremate Bernoulliano numero undecimo.

§. 30. Si poneres $Q = p - p^3$, & $m = -1$ fieret $\frac{dQ}{Q} + \frac{m dp}{Q} = \frac{-3 p dp}{1 - p^2} = \frac{dP}{P}$; ergo integrando $\frac{3}{2} l 1 - p^2 = l P$, &

& transeundo ad numeros $\overline{1 - p p^2}^{\frac{2}{2}} = P$. Præterea $dQ = dp - 3p^2 dp$, $dP = -3p dp$. $\overline{1 - p p^2}^{\frac{2}{2}}$; ergo $N = \frac{dQ}{dP} = 1 - 3p^2$, $M = \frac{dP}{dP} = -3p$. $\overline{1 - p p^2}^{\frac{2}{2}}$. Infuper $\sqrt{P^2 + Q^2} = 1 - p^2$, & $\frac{D\sqrt{P^2 + Q^2}}{dP} = -2p$; fimiliter $\sqrt{M^2 + N - 1} = -3p$: His positis nascitur.

§. 31. Theorema s. $\overline{1 - p p} - \int p dx = L$, existente L arcu ejus curvæ, cujus coordinatæ sunt s. $\overline{1 - p p^{\frac{3}{2}}}$, s. $\overline{p - p^3} - x$; quod idipsum est Bernoullianum Theorema de quo supra.

§. 32. Novum Theorema constitues, si ponas $Q = p p - \frac{m m}{4}$, ex quo habetur $dQ = 2p dp$. Ergo $\frac{dQ}{Q} + \frac{m dp}{Q} = \frac{2p dp}{p p - \frac{m m}{4}} + \frac{m dp}{p p - \frac{m m}{4}} = \frac{2 dp}{p - \frac{m}{2}} = \frac{dP}{P}$; ergo integrando $\int P = 2 \int p - \frac{m}{2}$, & $P = p - \frac{m}{2}$; ex his eruitur $N = \frac{dQ}{dP} = 2p$, $M = \frac{dP}{dP} = 2p - m$. Itaque $\sqrt{PP + QQ} =$

$$\sqrt{\overline{p - \frac{m}{2}}^4 + \overline{p p - \frac{m m}{4}}^2} = \overline{p - \frac{m}{2}} \sqrt{\overline{p - \frac{m}{2}}^2 + \overline{p + \frac{m}{2}}^2} = \overline{p - \frac{m}{2}} \sqrt{2p p + \frac{m m}{2}}. \text{ Ex quibus invenies } \frac{D\sqrt{P^2 + Q^2}}{dP} =$$

$$\sqrt{M^2 + N + m^2} = \frac{-m \cdot p + \frac{m}{2}}{\sqrt{2p p + \frac{m m}{2}}}. \text{ Ergo proveniet.}$$

§. 33. Theorema s. $\overline{p - \frac{m}{2}} \cdot \sqrt{2p p + \frac{m m}{2}} - \int \frac{-m dx \cdot p + \frac{m}{2}}{\sqrt{2p p + \frac{m m}{2}}} = L$. existente L arcu curvæ, cujus coordinatæ sunt s. $\overline{p - \frac{m}{2}}$, s. $\overline{p p - \frac{m m}{4}} + m x$.

§. 34. Si effiet $p = \frac{x}{a}$ haberemus $\int \frac{m dx \cdot x + \frac{m^2 a^2}{2}}{\sqrt{2xx + \frac{m^2 a^2}{2}}} = L -$

$$\frac{x - \frac{m^2 a^2}{2}}{a} \sqrt{2xx + \frac{m^2 a^2}{2}} . \text{ Coordinatæ autem curvæ, cujus arcus}$$

est L sunt $\frac{x - \frac{m^2 a^2}{2}}{a} = u, \frac{xx - \frac{m^2 a^2}{4}}{a} + mx = y$; ergo $x - \frac{m^2 a^2}{2}$

$= \sqrt{au}$, & $x + \frac{m^2 a^2}{2} = \sqrt{ay + \frac{m^2 a^2}{2}}$. Ergo detracta prima

a secunda æquatione habetur $ma = \sqrt{ay + \frac{m^2 a^2}{2}} - \sqrt{au}$,

feu $m\sqrt{a} + \sqrt{u} = \sqrt{y + \frac{m^2 a^2}{2}}$, quæ liberata a radicalibus

fiet $4m^2 au = y - u - \frac{m^2 a^2}{2}$, quam constat esse ad parabo-

lam. Igitur proposita formula dependet a rectificatione pa-
rabolæ.

§. 35. Postremum Theorema propono faciendo $Q = \frac{pp+1}{p}$; ergo $\frac{dQ}{Q} + \frac{mpdp}{pp+1} = \frac{dP}{P}$, & integrando $lQ + \frac{m}{2}$.

$lpp+1 = lP$, & facto transitu ad numeros $\frac{m}{pp+1^{\frac{m}{2}}}$.

$Q = P$, & substituto valore Q , erit $\frac{pp+1^{\frac{m}{2}}}{p} = P$. Ex

quibus facto opportuno calculo colliges $M = \frac{dP}{dp} = \frac{pp+1^{\frac{m}{2}}}{p^2}$.

$m+1 \cdot pp-1$, & $N = \frac{dQ}{dp} = \frac{p^2-1}{p^2}$. Præterea $\sqrt{PP+QQ}$

$= \frac{pp+1}{p} \sqrt{pp+1^m + 1}$, & $D \sqrt{PP+QQ} =$

$\frac{m+1 \cdot pp-1 \cdot pp+1^m + pp-1}{pp \sqrt{pp+1^m + 1}} \cdot dp$. Insuper $\sqrt{M^2 + N + m^2}$

$$= \frac{\sqrt{\frac{pp+1}{p} \cdot \frac{m+1}{p} \cdot \frac{pp-1}{p} + \frac{m+1}{p} \cdot \frac{pp-1}{p}}}{p^2} =$$

$$\frac{m+1 \cdot pp-1 \cdot p^2+1 + m+1 \cdot pp-1}{pp \sqrt{\frac{pp+1}{p} \cdot \frac{m+1}{p} + 1}}. \text{ Quapropter nascitur hoc:}$$

§. 36. Theorema: $s. \frac{pp+1}{p} \sqrt{\frac{p^{2m}+1}{p} + 1} - \int \frac{-m dx}{\sqrt{\frac{p^2+1}{p} + 1}} = L$, existente L arcu curvæ, cujus coordi-

natæ sunt $\frac{s \cdot pp+1}{p} \frac{m+1}{2}$, & $s. \frac{pp+1}{p} + m x$.

§. 37. Eadem methodo determinans Q , ut $\frac{m dp}{Q}$ fit quantitas differentialis logarithmica alia Theoremata poteris invenire Bernoulliana similia, quæ ad construendas formulas per curvarum rectificationem ingentem præbebunt utilitatem.

Fig. 1.

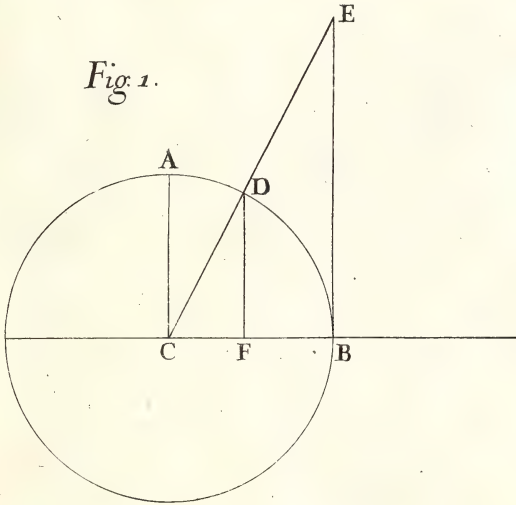
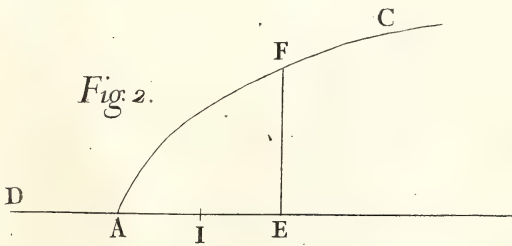


Fig. 2.





GUSMANI GALEATII.

*Historice duce mirabiles calculorum in ureteribus
existentium.*

QUamquam calculorum in renibus existentium historiae frequentes, & copiosae admodum sint, & symptomata, quae ab iisdem in corpore excitantur, adeo manifesta, ut Medici signa, & indicia quaedam, quibus huiusmodi morbi a ceteris distinguantur, asserere non dubitent, casus tamen plurimi adsunt, a quibus aperte docemur, vel calculorum in renibus existentiam per effectus suos satis cognosci non posse, vel, licet cognoscatur, de effectibus tamen, qui aut in renibus, aut in aliis abdominis partibus per ipsos produci queunt, certum aliquod iudicium proferendum non esse. Id certe, si non aliunde, ab assidua Cadaverum sectione manifeste dignoscitur; in his enim saepe reperiuntur ea, quae nec morbi, nec symptomatum, quae per ipsum excitantur, diligens, & attentata observatio satis ostendere valuit; ut propterea Medici cautiores esse debeant in curandis huiusmodi morbis, aut in eorum eventibus praenunciandis, cum iuxta causarum varietatem diversi admodum, & incerti esse queant. Praedicti asserti veritatem comprobare videntur, tum ea, quae de alterata renum structura alias vobis attuli, tum quae de peculiaribus renalium calculorum effectibus in praesenti vobis exponam. Sicuti enim in primis nephriticis dolores, & alia plura symptomata, quae calculorum in renibus existentiam indicare videbantur, a sola vitiata renum compage ortum suum habuisse compertum est, ita in secundis tumores, & abscessus, qui a renalibus calculis nunquam oriri posse credebantur, ab iisdem revera productos esse ostendam.

Sexagenarius itaque Homo temperamento sanguineobilioso, & pinguiore corporis habitu praeditus, cum anteaetis suae virilitatis annis nephriticis doloribus modo ad dextrum, modo ad sinistrum dorfi latus frequenter obnoxius fuerit, quibus

post variæ magnitudinis calculos, non sine diuturnis cruciatus, emittere solebat, postquam inquietam, & laboribus de-
ditam in sedentariam, & quietam vitam mutare cœpit, atque
a vino, cui admodum indulgere solebat, aliquantulum absti-
nere, loco ipsius aquam, ex rosarum sylvestrium fructuum
decoctu paratam, sæpe bibens, quindecim, aut sexdecim an-
te ejus obitum annis; nullum amplius calculum, sed tenuia
tantum arenæ granula per urinam ejecit, licet adhuc nephri-
ticis doloribus interdum adeo acutis corripere, ut ad eos
minuendos ad repetitas sanguinis missiones, ad balnea emol-
lientia, & ad efficaciora alia remedia sæpe recurrere opor-
teret: dolores enim sic interdum protrahebantur, ut & febres
acutæ, & urinarum suppressio, & pejora alia symptomata
supervenirent, quæ Medicis inflammationis metum interdum
incutere videbantur. Imo si alius quipiam morbus Ægrum
invaderet, nempe febris aliqua lenta, & intermittens (hujus-
modi enim febribus fere quotannis obnoxius erat) raro ab ipsis
liberari solebat, quin ad renes dolorem aliquem persentiret,
præsertim vero ad sinistrum, in quo, etiam dum bene vale-
bat, obtusiore quodam dolore plerumque afficiebatur, qui in
violentioribus motibus adeo exasperabatur, ut ultimis suæ æta-
tis annis equitare amplius non posset; hinc non præter ratio-
nem suspicatum fuit in sinistro rene calculum aliquem crassio-
rem latitare, qui, uretheris principium obturando, impedi-
mento esset, ne in nephriticis insultibus calculi alii minores
per urinam, ut solebat, expellerentur.

Circa ætatis finem notabiliori quadam febre, ex illarum
tamen genere, a quibus antea affici solebat, vexari cœpit,
quæ initio tertianæ duplicis intermittentis Typum servabat,
quæ periodi ut plurimum ad occasum Solis quotidie manife-
stabantur; eoque ordine, ut alternatim unus altero major
esset; omnes vero non ita primis diebus graves erant, quin
e lecto furgere, & libere incedere aliquantisper posset; sed
post octo, aut decem dies molestiores, & graviores facti sunt,
ut in febris augmento, calorem urentem in cute, gravedinem
summam in capite, lassitudinem in musculis, sitim non mo-
dicam, inquietudines, & vigiliis plurimas Æger quotidie
pateretur, quibus allevandis non semel sanguinem mittere
oportuit. A repetitis sanguinis missionibus, a recto vitæ, &
victus regimine, & a leniorum purgantium, aliorumque ai-

terantium remediorum usu febriles paroxisimi minores facti fuerunt, & mitiora etiam symptomata eisdem comitabantur; sed memorati periodi, qui alternis diebus exacerbabantur, nunquam omnino auferri potuerunt, ideoque, elapsis 20 circiter diebus a primo febris accessu, opportunum duximus ad peruvianum corticem, qui in similibus casibus magno ipsi fuerat levamento, iterum recurrere, exhibitoque ad plures dies hujusmodi cortice, tota fere evanuit febris, nihilo ipsius remanente, quam aliqua membrorum lassitudine, molesto capitis ligamine, & gravi lumborum dolore horis praesertim, quæ antea febris exacerbari consueverat; imo, evanescentibus febrilibus paroxisimis, dolor hic lumborum praesertim ad sinistrum latus sensibilior factus est. Urinæ autem, quæ in februm principio paucæ admodum, & rubræ esse solebant, post peruvianum corticis, & largiorum potionum usum, copiosiores, & albidiores factæ fuerunt, turbidæ tamen valde, & confusæ apparebant, & solum post longiorem in vitris moram claritatem aliquam acquirebant; deposita scilicet ad fundum vasis densiore, & instar puris albicante quadam materia, cujus partes non simul unitæ, & conglutinatæ apparebant, sed ad leviores vasorum concussionem divulsæ, & in tot veluti parvula filamenta divisæ. A majore, aut minore hujusmodi materiae copia majus, aut minus Ægri levamentum pendere videbatur; decreascentibus semper, aut remittentibus febrili calore, lumborum dolore, & quibuscumque aliis symptomatibus, quæ ipsum vexare solebant, quotiescumque major prædictæ materiae quantitas in urinis reperiebatur; imo si hæc omnino deficeret, atque urinæ iterum fierent rubicundæ, non multo post recurrere observabantur febriles paroxisimi, & sinistri lateris dolores, quibus minuendis opus fuit mensem etiam post primum morbum, sanguinis missionem aliquoties repetere.

Quamvis autem urinarum copia, & materiae purulentæ quantitas, quam cum illis emittebat, ad allevandas febres, & symptomata, quæ ipsas comitabantur, multum tribuerit, hæc tamen nunquam eum liberare valuerunt a tenso, atque interdum punctorio sinistri lateris dolore, propter quem difficulter admodum in eo decumbere poterat, neque a plethoricis aliis similibus doloribus, qui a dista parte ad inguen, atque etiam ad urinariæ vesicæ regionem extendi solebant,

ure-

uretheris directionem quodammodo servantes. Quin immo, postquam hujusmodi urinæ apparuerunt, extabescere, & viribus debilitari cœpit Æger, atque unius, & ultra, mensis spatio, in quo urinæ diætæ perdurarunt, adeo crevit macies, ut vix in corporis ambitu vestigium ullum esset illius pinguedinis, quæ antea in eo valde abundare solebat; & crescente macie augebantur etiam in eo dolores dorsi, aliarumque partium cum ipso connexarum, propter quos incommode in lecto decumbere poterat; præsertim ab ortu solis usque ad mediam noctem, quibus horis a parvis quibusdam internis rigoribus, qui illum in primis vexabant, a carniū calore, qui postea sequebatur, & a majori aliqua pulsus frequentia inditium non obscurum habebatur lentioris, & periodicæ cujusdam febris adhuc perdurantis.

Medicis hæc omnia observantibus non levis suspicio orta est, sinistri saltem renis substantiam paulatim dissolvi, ideoque dorsalem tabem, quæ remediis curari non posset, jam jam imminere timentes, modo lactis usu, modo ranarum jusculo, chinæ dulcis, & falsæ radicibus alterato, modo viperatis remediis, modo denique simplicibus absorbentibus, & dulcificantibus, cum vulnerariis, & corroborantibus conjunctis, hujusmodi morbi progressum impedire curarunt; sed ab his omnibus hiemalibus, & vernis mensibus usurpatis, nihil aliud, quam præcipitii prolatio, obtineri potuit. Enim vero circa veris initium minui cœperunt urinæ, & paulo post materia illa albicans, ac purulenta, quæ in ipsis innata solebat, omnino evanuit; & quanquam a tali urinarum imminutione, & puris cessatione sperari posse videbatur, inchoatam solidarum partium dissolutionem aliquantulum retardari, in reliquis tamen nullum fere solamen invenit Æger; immo, præter memorata incommoda, dolorem quendam puncturium, & molestum ad pubis regionem, & ad sinistrum hipogastrium persentire cœpit, cui minuendo parum, vel nihil juvare potuerunt unctiones, & balnea, quæ assidue usurpari solebant.

Non multo post ultimi hujusce doloris adventum observatum est, prædictas partes paulatim elevari, atque in iis parvos, & inæquales tumores, duros tamen, & veluti strumosos, apparere, quorum ad tactum nullo, aut vix sensibili dolore afficiebatur Æger. Judicantes autem quod, si ad ma-
turi-

turitatem ducerentur tumores isti, & si aliqua ex iis materia educeretur, non parvum solamen perciperet in incommodis aliis, quæ ipsum cruciabant, opportunum duximus, post unctiones inutiliter peractas, emplastra emollientia, & resolutiva iisdem apponere, quæ ad plures dies applicita nihil, aut parum admodum juvarunt ad eos resolvendos, aut emolliendos, solumque ex ipsis obtineri potuit, ut illa tumorum pars, quæ magis superficialis, & cutanea videbatur, quæque sinistro inguini propior erat, aliquanto mollior, & acuminata evaderet, ita ut apta fieret, quod Lanceola perforaretur. Minima tamen puris quantitas, una cum aliquibus sanguinis guttis, ex aperto foramine exiit, remanente reliqua tumoris mole, quæ, quatuor circiter transversos digitos lata, ad longitudinem fere unius palmi versus pubem extendebatur, omnino turgida, & dura. Intra foramen introducta turunda apertum ejusdem ope illud servare curavimus; sed non multo post, ob doloris acutiem, ipsam extrahere oportuit, ut quietem, & somnum ob dolorem amissos recuperare posset. Extracta tamen turunda purulentus aliquis ichor adhuc e vulnere exibat, qui, apposito cerato ex gummis confecto, ita abunde in dies effluere cœpit, ut linteis, aut fasciis, quibus obtegebatur, totus absorberi non posset. Fecit autem hujusmodi ichoris exitus, ut non multos post dies tumor omnis evanesceret, apparente tantum in hypogastrio sinistro parvo illo foramine, quod, ablata turunda, ibidem remanserat.

Verum, dissipatis tumoribus, prædictæ materiæ e foramine exitus adhuc perduravit, eaque copia, ut plurima lintea parti assidue apposita ad illam colligendam, aut coercendam non sufficerent.

Mensem circiter post hunc copiosorem materiæ effluxum valde melius se habere cœpit Æger, evanescente omnino febrili illo calore, qui nocturnis præsertim horis ipsum agitare solebat, & imminutis etiam sinistri lateris, & pubis doloribus. Nutririque, & quiescere melius potuit, ita ut, crescentibus viribus, e lecto surgeret, & aliquantulum ambularet; erectus tamen incedere, & sinistrum femur extendere non valebat, sed supra ipsum, & sinistrum femur extendere non valebat, sed supra ipsum, dum moveretur, valde curvari cogebatur. Spectabilis hæc morbi in melius mutatio adeo illius animum erexit, ut non solum magnam diei partem lecto abstinere, sed etiam urbanum aerem in ruralem mutare se posse

posse crediderit; præsertim cum, antequam ægrotaret, ruri diutius vivere consueverit. Illuc igitur translatus quotidie magis convalescere cœpit, pristinas vires, & naturalem suam pinguedinem paulatim recuperans; ita ut, si non pedibus, aut equo, curru saltem iter ingredi, & domesticis rebus, in quibus assidue occupari solebat, facile iterum incumbere posset. Obstabat autem, ne pedibus libere adhuc incederet, materiæ e memorato foramine jugiter effluentis exitus, & copia; hinc timens, ne copiosior ejusdem materiæ effluxus, & ipsa ulceris existentia, unicum essent impedimentum, propter quod salutem, & vires omnino acquirere non posset, æstatis initio iterum Bononiam rediit consulturus Medicos, num remedium aliquod esset, quo, foramine clauso, prædictæ materiæ exitus plane sisteretur. Explorato igitur attente a Medicis ulcere, inventum est, illud esse sinuosâ fistulæ speciem, ad quam sanandam, atque claudendam via alia non foret, quam major apertio, & dilatatio sinus: dilatato enim, & expurgato sinu, absumptisque callosis, si quæ essent, omnibus illius partibus, facilius esse putabant ipsum prorsus occludere. Æger tamen cum neque vellet, neque tunc posset talem curationem admittere, ad rus denuo se contulit, ibique constitit usque ad augusti finem absque ulla notabili mutatione, quamvis, stimulante fame, magis adhuc, quam ante descriptum morbum, cibo, & potui indulgeret, nihil de recta, aut prava eorum qualitate, & quantitate sollicitus.

Verum circa Septembris initium lentiore iterum febre correptus utrinque ad lumborum regionem dolere cœpit, atque universali quadam molestia, & lassitudine conqueri; hinc lectum primum petere, deinde in Urbem transferri, & Medicorum opem rursus quærere coactus fuit. Vix in Urbem translato dextri lateris dolor, una cum feбри, adeo crevit, ut & sanguinem mittere, & dulcium amygdalarum olei usum sæpe illi præscribere opus fuerit. Exterius quoque unctiones, & emollientia balnea assidue adhibita fuerunt; sed hæc omnia nullum, aut modicum levamen eidem attulerunt; imo nephriticis doloribus adjunctus est vomitus, urinarum diminutio, & rubedo; nulla ciborum appetentia, & assidua fere ad somnum propensio, quæ symptomata, in toto supra descripti morbi decursu, parum, aut nihil ipsum vexaverant. Triginta & ultra dies in hoc statu perduravit Æger, donec crescente

fe-

febri, urinis fere omnino cessantibus, & decrefcentibus notabiliter viribus, fomno in lethargum mutato, circa Octobris dimidium, appoplexia correptus, mortem obijt.

Sequenti die Cadaveris feftio intituta fuit, & relicto capite, in quo licet præcipuam mortis caufam exiftere putaremus, nihil tamen in eo reperiri poffe credebamus, quod ab infimi ventris morbo productum non foret, ad hunc ipfum ventrem obfervationes, & diligentias omnes noftras potiffime contulimus; neglecto etiam thorace, in quo nihil fpectabile inventum fuit præter parvam fanguinis copiam in posteriore pulmonum parte ftagnantem. Aperto igitur abdomine, id quod oculis noftris primo fe fe obtulit obfervandum, fuerunt inteftina, quæ licet, non minus ac mefenterium, & tota cutis, pinguedine multum obfita forent, in tenui tamen eorum parte livida admodum, & atra flavedine tinfta apparebant. Venter autem, & inteftina craffa confidentia, & colore vix a naturali ftatu diftabant, & naturalis quoque erat hepatis, & pancreatis fubftantia; non fic vero lienis, qui flacidior admodum, & quafi tabidus videbatur. Sed quæ magis a nobis perveftiganda, & perferutanda effe putavimus, fuerunt organa urinaria, ut pote in quibus præcipuam defcriptorum omnium fymptomatum fedem fitam effe iudicavimus. Sejunctis itaque, & ablatis ex abdominis cavo vifceribus omnibus, præter renes, & veficam urinariam, ad renes ipfos oculos convertimus. Erat ergo ren dexter, qui fupra lumbos præaltero multum eminebat, tumidus admodum, & levi aliqua inflammatione correptus: proveniebat autem intumefcentia hæc ab urina non folum intra pelvim, fed in canaliculis etiam, & in tota renis fubftantia ftagnante: ftagnabat vero urina ipfa in rene propter calculum ureteris cavum occludentem; invenimus enim, ad diftantiam duorum circiter tranfverforum digitorum a pelvi, infignem calculum ex plurium minimorum calculorum congerie conflatum; ureteris vero partem illam, quæ inter calculum, & renem exiftebat, ab urina in ipfa ftagnante ita diftentam, ut minimi digiti craffitudinem æquaret.

A dextro rene ad finiftrum tranfitum fecimus, ipfumque omnino vitiofum invenimus; tota enim ejus corticalis, & medullaris fubftantia in denfiozem, & craffiozem, albidiozemque membranam tendineæ fere confidentiæ mutata videbatur;

hæcque parvum quemdam sacculum efformabat purulento humore, & pluribus arenæ granulis plenum. Manibus autem hunc sacculum contrectantes non sine admiratione vidimus, ex fistuloso illo foramine in sinistro hypogastrio adhuc aperto, per quod novem & ultra mensium spatio saniosa materia assidue effluerat, aliquam hujusmodi materiæ portionem subsultim exire. Hinc rei novitate commoti illico oculos ad vesicam urinariam observandam convertimus, apertoque ejusdem cavo in ea sinistri ureteris portione, quæ intra vesicæ membranas ingreditur, prope vesicam ipsam crassiorem quemdam calculum forma, & magnitudine amygdalam fere æquantem inhærescere vidimus, eodemque ex uretere in vesicam cujuscumque materiæ transitum omnino impediri; ureteris vero partem illam, quæ supra calculum existebat, ad trium circiter digitorum transversorum longitudinem restrictam admodum, & fere occlusam observavimus; hæc autem pars, dum eam ab involvente peritonæo separare voluimus, facile disrupta, & disjuncta fuit a reliqua superiore ureteris portione, quæ supra muscolum psoas ad sinistrum renem ascendebat. Portio ista substantiæ admodum densæ, & fere tendinæ apparuit, atque non multum dissimilis ab illa, quam in rene ipso adesse diximus. Eo in loco, ubi prædictæ duæ ureteris portiones disruptæ, & disjunctæ fuerant, emanare cœperunt nonnullæ saniosæ cujusdam materiæ guttulæ, quibus attente exploratis, materiam hanc ejusdem naturæ esse vidimus, ac illa, quæ integro adhuc uretere, dum sinister ren manibus premebatur, ex memorato hypogastrii foramine exilibat. Hinc ab hujusmodi eventu edocti, & ab eo quod, introducto intra foramen ipsum recurvo quodam ferreo stylo, illum intra membranas sinistram pelvis partem investientes usque ad prædictam ureteris rupturam facile ducebamus, aperte cognovimus, renis sanie, quam Æger dum vixerat ad aliquot annos per urinam jugiter emittere solitus fuerat, inferiore ureteris parte a prædicto calculo occlusa, viam sibi inter peritonæi membranas ad sinistram hypogastrii regionem fecisse, ibique inter peritonæum, & inferiores abdominis musculos depositam, tumores in prædicta regione descriptos efformasse; quibus perforatis, & apertis, referatoque hujusmodi perforationis ope stagnantis intra eos materiæ exitu, semita quædam facta est, per quam, tanquam per sinuosam fistulam, facile

exibat urinosa sinistri renis sanies, quæ, impediente calculo, intra vesicam ingredi amplius non poterat. Hoc itaque cognito manifeste perspeximus, externam illam partis lationem, quam, tanquam morbosam, & summopere nocuam, curare tentabamus, viam quamdam fuisse, per quam vitam Ægro, salutemque ad novem & ultra menses natura servaverat; hinc, si obstructo dextri renis uretere ab altero calculo urinæ exitus alia ex parte impeditus non fuisset, novo hoc & insueto tramite, per quem puris exitum natura ipsa paraverat, aperto manente, omnino verendum non esset, quin vitam Æger incolumem ad aliquot etiam annos producere non potuisset.

Non ita porro incolumem, & longam vitam perducere potuit nobilis quidam Vir, cui, obstructo uretere a crassiore calculo eo in loco, ubi vesicam ingreditur, urinæ, & puris intra ipsam introitus impeditus omnino fuit. Laboraverat hic ad plures annos nephriticis doloribus acutissimis, quibus plerumque alicujus calculi expulsio sequebatur; eoque tempore, quo calculi extrudebantur, vix quidquam sanguinis per urinam ejici visum est; sed decem circiter annos ante ejus obitum, quamquam nephriticis doloribus adhuc sæpe vexaretur, nullum tamen calculum emittere amplius potuit, bene vero sanguinis multum, qui ut plurimum cum urina, vel etiam solus effundebatur tunc, cum vel pedibus, vel etiam rheda longum aliquod iter ingressus fuerit, vel cum diureticum quodpiam remedium assumpserit; propterea ab omni violentiori motu, & a fortioribus quibuscumque remediis abstinere oportebat, atque solis emollientibus, paregoricis, & corroborantibus uti, vel ad dolores in eo sedandos, vel ad sanguinis effusiones impediendas, aut sistendas. Cessarunt tamen ultimis duobus annis prædictæ sanguinis effusiones, & nephritici etiam dolores admodum imminuti fuerunt, remanente tantum ad sinistri renis regionem obtusioris cujusdam doloris sensu, præsertim dum aliquantulum defatigaretur. Pro sanguine autem jugiter emittere cœpit magnam saniosam materiæ copiam urinæ mixtam, quæ, dum in fundis vasorum subsidebat, verum, purumque pus esse noscebatur. Toto eo tempore, quo hujusmodi materia per urinam effluxit, vitam satis quietam, & incolumem duxit Æger; sed cessato, nescio quo casu, ejusdem effluxu, clarioreque reddita urina ipsa, paulatim tabescere cœpit, & lenta quadam febricula laborare, ita

ut lectum petere, & medicam opem exposcere coactus fuerit. Febris in dies adeo crevit, & sinistri lateris dolor, ut vix in lecto quiescere, & somnum, aut cibum capere amplius posset, irritis etiam vomendi conatibus saepe agitato. Nihil repetita sanguinis missio, nihil emollientia, & paregorica remedia una cum febrifugis assidue usurpata prodesse visa sunt, sed crescentibus omnibus, & deficientibus quotidie viribus, postquam triginta, & ultra dies inter dolores, & angustias laboriosam vitam protraxerit, de repente lathali syncope correptus, magnam saniosi feri copiam per vomitum ejiciens, illico expiravit.

Subitanæ, & inexpectatæ mortis eventum admirati, occultam adhuc illius causam in ipso cadavere inquirere necessarium duximus. Hinc die altera cadaveris sectio instituta fuit, & aperto abdomine, in quo tantum primariam, & constantem descripti morbi sedem existere putabamus, statim se se obtulit ad sinistrum dorsi latus insignis quidam membranaceus sacculus contento intra se humore admodum turgidus, non in sola naturali renis regione restrictus, sed supra vertebrae, & anterieus expansus, quem etsi a situ, & a vasorum conjunctione renem esse cognovimus, naturalem tamen renis molem sexies saltem superare vidimus; eratque ejus figura, & magnitudo potius urinariæ vesicæ, dum lotio turget, quam reni similis; ex inferiore autem, & interiore ejus parte prodibat amplus quidam, & pellucidus canalis, humore quoque turgidus, qui deorsum usque ad urinariam vesicam extensus, prope ipsam terminari videbatur. Hic pariter, quamvis neque forma, neque crassitudine ureteri similis videretur (erat enim pollice crassior, & ex parietibus ita tenuibus conflatus, ut humor in eo contentus exterius appareret) a directione tamen, & a partium connexionione ureterem illum esse cognovimus. Hinc aperto sacculo, & canali isto, effluere vidimus magnam saniosi feri copiam, quam oculorum judicio aliquot librarum pondus æquare credidimus; sacculi vero parietes ab incluso intus humore probe expurgati omnino membranacei videbantur, ut nihil renalis substantiæ amplius appareret, quam externus cortex in crassiore, & densiorem, albidiorumque membranam mutatus; membrana tamen hæc vasculis plurimis, & nonnullis fortasse glandulis adhuc scatebat, quibus & lotium, & pus, unde sacculum hunc turgere diximus, assidue separaban-

bantur, quæque dum ureteris in vesicam aditus adhuc liber erat, quotidie excernebantur: obstructo enim uretere a supramemorato calculo in ejus extrema parte in hærente, & lotium, & pus in rene stagnasse oportuit, renisque, & ureteris substantiam labefactari adhuc magis, & distendi, sic ut ad illam, quam descripsimus, substantiam, & molem mutati, & adacti fuerint. Erat autem calculus in uretere contentus admodum durus, & asper, atque amygdalæ magnitudinem superans in tres processus, sive cuspides extendebatur, quorum longiore, & acutiore eam ureteris partem, quæ intra urinariæ vesicæ membranas ingreditur, exacte occludebat.

Ex allatis itaque historiis quanquam facile cognoscitur id quod ab initio dicebam, calculorum videlicet in renibus existentium effectus adeo interdum perniciosos esse, ut nec eos curare, nec ipsorum exitum prævidere sæpe Medici valeant, aliqua tamen ex iis inferri posse videntur, quæ si non ad morbi curationem, ad diagnosim saltem, & rationabilem morbi prognosim statuendam admodum conferant. Primo scilicet calculorum in renibus existentiam modo a nephriticis doloribus, modo a sanguine per urinam erumpente, modo ab utrisque posse deduci; ultimum autem ex his calculi in renibus latitantis certum quodammodo inditium esse; deinde a calculis ipsis, si crassiores adeo sint, ut ureteres, aut urinariam vesicam ingredi nequeant, ita renum structuram plerumque labefactari, ut non amplius sanguinis ex disruptis ipsorum sanguiferis vasis, sed sanies, vel pus, una cum urina, ex mutata ipsorum substantia separetur; sanies vero hæc, aut pus, si libere possit in vesicam ingredi, & cum lotio emitti, Ægros vitam adhuc incolumem ad aliquod tempus protrahere posse, cessantibus etiam doloribus illis acutioribus, quibus ante puris adventum vexari solebant. Quod si, obstructis ureteribus, aut vesicæ aditu a calculo in ipsis remanente, puris exitus impediatur, morbi finem, & mortem tunc citissime sequi, nisi tamen per insuetam aliquam, & reconditam viam puris e corpore exitum natura tentaverit; ut in prima historia vidimus, in qua Ægri mors ad aliquot menses protracta fuit ob mirabilem illum ductum, per quem a disrupto uretere intra peritonæi membranas ad hypogastrium sinistrum saniosa materia eversa fuit. Ultimo tandem in iis, in quibus, vel ex constanti aliquo ad renes dolore, vel ex fan-

fanguine, aut pure per urinam exeunte certi quodammodo esse possumus de calculo quopiam in renibus latitante, vel sola emollientia, & paregorica, vel vulneraria, & corroborantia, nunquam vero diuretica, aut stimulantia remedia aliquantulum prodesse nobis visum esse; ut experientia quodammodo edocti simus, in hisce casibus de dolore sedando, vel de sanguinis, aut puris copia minuenda, aut corrigenda; non vero de calculorum exitu promovendo Medicos sollicitos esse debere.

JACOBI BLANCANI.

Iter per montana quædam agri bononiensis loca.

P A R S P R I M A .

ERunt fortasse vestrum nonnulli, Sodales doctissimi, qui hoc argumenti genus inutile, & ab Instituto, atque Academiæ consuetudine alienum reputent, simplicem enim, & fere nudam locorum eorum descriptionem exhibet, e quibus fossilia eruuntur, quæ descriptiones vix ullius emolumenti esse nonnullis videntur, nisi observationibus, inventisque auctæ, & adornatæ; cæterum si observationes, inventaque hujusmodi in pretio sunt apud doctos, atque ad naturæ scrutatorem pertinere maxime censentur, non video quo minus ad eundem pertineat locorum designatio, & cognitio, ubi quæque genera inveniri facile, & observari possint, ne vagari temere, & nimium temporis, & laboris sine fructu cogatur consumere. Itaque non abs re nostra facturum me existimo, si, quod jamdiu suscepi, montana bononiensis ditionis loca, in quibus vel plurimum suarum opum, & quasi portentorum condidit, vel maxime lusit natura, accuratius describendo persequar.

Ac primum quidem descripto superioribus annis Landæ rivo, & locis conterminis, Vezzani montis situm designabimus, insignioraque fossilia ibi reperta enumerabimus, demum finitimorum locorum narrationem brevi commentatione complebimus.

Vezanus mons cæteris pœne omnibus, qui Labinii, & Samodiæ fluminum ambitu continentur, est eminentior, isque plures diversos colles demittit, e quibus qui orientem solem, & meridiem spectant, ad Landæ usque, & Saxi rivos producuntur, qui vero occidentem solem respiciunt, castro terminantur, quod Olivetum dicimus, & Samodiæ adiacet; ultima demum collium series inter septentriones, & orientem solem porrigitur, & ad Labinium flumen sistit.

Ita

Ita autem situs est Vezzanus mons, ut homo a vertice late prospiciat amplissimam, fertilissimamque planitiem omnem, quam ab antiquis possessoribus Longobardiam nuncupamus, Ferrariensem quoque universam ditionem, & Venetæ provinciæ partem non exiguam.

Variis porro terrarum stratis constat: inferior, & media pars arenaria terra flavi coloris: tergum ad meridiem calcario lapide, ubi testaceorum omnis ferme generis fragmina, & exuvia extant, e quibus nihil aliud observatu dignum mihi reperire contigit, nisi quoddam fimbriatæ porcellanæ undique striatæ fragmen, conchæ scilicet illius, quam vulgus veneream nuncupat.

Ipfius montis apex totus argilla constat, plurimis foliiffimi ejusdem generis lapidis fragminibus commixta, & fortasse olim totus erat montis vertex compactissimus, sed cum vi caloris, & frigoris lapis disrumperetur, atque in pollinem reductus esset, coloni aratro tellurem scindentes durissimum lapidem in feracem agum converterunt, neque aliud temporibus nostris primavæ compactissimæ materiei superest, nisi illius vestigium aliquod molliori telluri intermixtum; qua de re nemo miretur volo, sicut enim non pauca corpora ex mollioribus, aliorum corporum solidiorum permixtione firmissima effecta sunt, ita densa alia, & vaide dura, pluviarum illapsu, frigoris quoque, & caloris vi contracta quodammodo, atque adeo attrita, dissoluta sunt, & mollia effecta.

Candidissimæ deinceps terræ levissimæ, & tenuissimo constantis polline portiones quam plurimas, gossipii floccorum instar, in hoc monte vidimus. Terram huic similem ii, qui naturali historiæ dant operam *Agaricum minerale* appellant, desumpta denominatione a similitudine, quæ agaricum inter vegetabile, & terram hanc intercedit. Buffonius agaricum minerale efformari putat, dum stillantes aquæ, e superiori montium parte decurrentes, per horizontales lapideorum stratorum juncturas fluunt, ubi forte calcariam terram offendunt, eamque imbibunt, hanc deinceps sensim deponentes in lapideis glebis, quas præterfluunt, squameam illam albidam, levem, spongiosamque materiem relinquunt, quam agaricum dicimus.

In eodem monte multæ occurrunt lapideæ coagulationes ejusdem ferme generis ac geodes lapides. Exterior earum species

cies varia est, diversasque figuras exhibet. Plerumque tuberibus similes sunt, hiantesque, uti fere ii quos diabolicos panes Cefalpinus appellat; ipsorum multi lapideam duritiem contraxere prope testacea quæ dixi, eorundemque testaceorum formæ in iis adhuc impressæ extant. Materies, qua constant, ut plurimum tenuis est cretæ instar; in nonnullos istorum lapidum incidi, qui arena subtili, mixtaque talchi squamis coagmentantur; in alios quoque, qui tuberum speciem quidem habent, ut superiores, sed iis ferrea materia immixta colorem immutat; referunt enim albicantem, subflavum quoque, aut fuscum colorem. Interiores eorum cavitates papillis quibusdam extuberant, & margaceo luteo polline non prorsus obducuntur.

Horum lapidum similes memorantur a Cl. Targionio in suis per Etruscam provinciam itineribus, tomis præsertim primo, & quinto; ab Aldrovando in Musæo metallico, eos appellante *lapides margam continentes*, aliosque etiam *lapides renales sardicos* a Sardinia insula, in qua potissimum occurrunt; a Cefalpino, a Cl. Bertrando denique in suo, quem edidit tribus ab hinc annis, libro de montium, & collium usu, qui eos vocat *lapides cavos*, *lapides prægnantes*.

Immanium quoque ossium fragmenta in hoc, quem dixi, monte invenimus, de quibus multa dicenda essent, sed præterquam quod de aliis plura diximus, multa dicere vetat eorundem ossium contractio, & scissio. Vetat terra, quæ ex omni fere parte ea obtegit, obducitque, quam ob causam cujus generis ossa ea fuerint minime assequi possumus. Si conjecturis fidere tantisper licet omoplatam fuisse suspicabimur unum scilicet ex duobus illis ossibus, quæ utrimque a cervice ad scapulas tendunt, quæque a latinis scopula operta nuncupantur, neque terrestris alicujus animantis esse, sed marini cujuscumque cetacei, cum nullum terrestre animal tam grande, atque amplum os, quod nos noverimus, habeat, habeant vero nonnullæ belluæ ex eo marinorum genere, quod cetaceum appellamus.

Scio equidem diversam esse authorum hac de re opinionem, alii enim marinis belluis, elephantis alii, & cæteris maximis ex quadrupedum genere animalibus, Gigantibus etiam alii immania hujusmodi ossium fragmenta diversis in locis reperta tribuunt, sed nisi in immensum auctam velimus elephan-

ti, & multo plus hominis staturam, tam grande os nullo modo iis aptari potest.

At de his ossibus, & de monte Vezzano fatiſ. Dicamus pauca de collibus, & rivis inde enaſcentibus. Et primum quidem de rivo *Martignone* foſſilium conchyliorum teſtarum feraciſſimo.

Rivus iſte, quod ante innui, initium ducit a monte Vezzano, cujus aquas deinceps uberiores reddit influens rivulus alter a calanchis prati albini decidens, aliis denique aquis, teſtaceiſque quamplurimis finitimorum collium *Faie* locupletatur, longoque inter ipſos colles ſpatio emenſo, viam *di Creſpellano* trajiciens, in Samodiam fluit prope ſplendidiffimas *Caprariae* patritiae familiae aedes, vulgo *le Budrie*, nuncupatas.

In hoc rivo maxima teſtarum conchyliorum copia exſtat, quas ex adiacentibus collium ripis delabentes aquae in eundem rivum deferunt, qui colles, cum topho majori ex parte conſtent, materie ſcilicet minus apta ad diutius corpora illa ſervanda, propterea fit, quod ipſorum pleraque diſrupta, & attrita decidunt.

Ibi tamen dentales, purpurae reſtiroſtrae, mucronatae, & umbonatae, trochites, turbines, buccinula, cochleae, conchaeque diverſae, madreporae quoque, & cariophylli paſſim occurrunt, e quibus plurimi tum e rivi alveo, tum e ripis adiacentibus integri extrahuntur.

Cochleas etiam depreſſas alias, alias umbilicatas, quamplurimas reperimus, quas nec loci, nec temporis edacitas, vel minimum laeſit, itaque nativum colorem perbelle exhibent, albidae enim aliae ſunt, ex rufo, ſeu nigro, undatim, & denſe lineatae, aliquando ex citrino nigro, & pullo colore radiatae, aliae punctis ruſis denſiſſime aſperſae, & circumſcriptae, aliae lineis ex livido fulvidis, inflexis, interruptis, radiatae, & ſignatae.

Concharum quoque cordiformium aequilaterarum teſtas quamplurimas diſruptas in hujus fluenti fundo conſpeximus, quae cum opinionem, ſpemque haud dubiam induxiſſent, fore, ut aliquam integram in finitimis rupibus inveniremus, in cauſa fuerunt ut diem totum impenderemus huc illuc errantes, haud fruſtra tamen, nam ex multis in marga deliteſcentibus, (in qua ut plurimum in calcem redactae conchyliorum teſtae, cum in apertum aerem prodeunt, diſſolvuntur,) obti-

obtigit tandem, ut unam extraheremus, quam, ut integra fervaretur, artificiali glutine firmatam, nullaque ex parte laefactam cl. Bassio concessimus.

Conchas etiam minores, easque plerumque fossiles ab impetu aquarum ad rivi fundum hiemali praesertim tempore deportatas ex arenis legimus, quas singillatim recensere, & in propria genera dispertire longum foret, vobisque omnibus, Sodales doctissimi, procul dubio molestum.

Conchas, quas dixi, perquirenti, ossis frustum occurrit coloris subfusci, friabile, & ferme putridum, cujus spongiosam materiem salium fortasse nexu coherentem humidæ tempestatibus vis disgregaverat, nam in loco ab humido aere remoto collocatum, non multo tempore ad naturalem pristinam soliditatem rediit.

Aliud tandem osseum fragmen quod oculis vestris, Sodales ornatissimi, subjeci, in hoc rivo invenit Antonius Mazzonus Civis noster, cujus diligentia in fossilibus inquirendis, eruendisque, multum me debere fateor, praesertim cum omnium, quæ invenit (præclara sane, & nobilia) participem me esse voluerit. Exterior hujus fragminis forma cogit nos, ut dicamus ad animal quodpiam marinum pertinuisse, portionemque costæ fuisse, interior vero structura osseam esse hujus materiem certos nos facit.

Affinis huic fluento, ipsique per duo fere passuum millia parallelus, in idem defluit rivus, quem vocant *delle Meroviglie*, mirabilia enim naturæ artificis opera pratereuntium oculis exhibet. Arenarios scilicet lapides eteromorphos animalium atque vegetabilium simulacra impressa, vel figura, vel typo ostendentes, qui lapides ex arenarum, quibus toti componuntur adiacentes colles, fortuita conglutinatione poma, pepones, armeniaca, persica, aliaque innumerabilia propemodum non modo fructuum, sed & membrorum veluti monstra referunt.

Lapidum istorum sapissime meminit Aldrovandus in libro quarto Musæi metallici, ipsorumque figuras buxo incisas protulit.

Anonimus quoque, qui datis ad Academiam nostram literis suam descripsit iter per montosam bononiensis agri partem, rivum hunc memorat, lapidesque in eo contentos, ut videre licet in primo Tomo Commentariorum Academiae.

Quod vero attinet ad alios colles, qui a monte Vezzano ad solis ortum protenduntur, in iis nihil, quod peculiari memoria dignum existimem, occurrit præter ingentem ostreorum, quibus eximii adhærent balani, copiam, quæ conspicitur prope ædem S. Laurentii in colle.

In collibus vero planitie, qua solem orientem respicit, finitimis, immensæ quædam lapillorum congeries reperiuntur, vi cujusdam petrosi durissimi glutinis compactorum, quæ congeries loco ipsi *di Zolla Predosa* nomen dederunt, immo via omnis undequaque lapillis istis temporum fortasse vi ex ipsis congeriebus avulsis referta est.

Reliquum est ad omnem istorum collium historiam faciendam, ut aliquid etiam de iis dicamus, qui in Samodiam desinunt, nam ab iis describendis supersedeo, qui Landæ rivis circumscribuntur, de quibus fati multa dixi superioribus annis.

Colles hi omnes ut plurimum arenario flavo lapide constant, & testaceis abundant, quæ frequentiora occurrunt prope vetus dirutum castrum superioribus sæculis nobile, atque a patriis historicis sæpissime memoratum, quod Oliveti dicunt.

Locus autem vulgo *li Monticelli*, cui castrum ipsum, & ædes D. Paulo sacra imminet, duobus arenariis fratis constat, quorum primum flavum est, alterum autem glauci coloris; scissura autem collis a corruentibus aquis effecta jucundissima visu est, quod immensam exhibeat conchyliorum cujusque generis simul conglobatorum copiam, e quibus quæ prorsus in arena flava sepulta sunt, nativi coloris speciem quamdam adhuc retinent, ea vero, quæ ex arena prodeunt, amisso nativo colore albida apparent. Testæ porro, quæ in arena glauca delitescunt, quovis colore destituuntur, quæ res haud obscure indicat terram hanc acidum continere, a quo exterior istorum corporum superficies labefactetur.

Importunus sane essem si singulas testaceorum, quæ ibi reperiuntur, species enumerare vellem, tantum glycymerides conchas majores, & minores, cordiformes æquilateras quoque, pinnas, mitulos, elegantissimos varii generis turbinites, purpuram denique recensere singularis omnino structuræ, & eximie, cui speciem certam assignare auctorum ope, quos ego quidem noverim, qui de conchyliorum testis copiose, ac diligenter differuerunt, difficile valde est, cum nullam ipsi similem in tabulis, in quibus delineantur, afferant.

Hanc

Hanc vero, quam dixi, purpuram in curvirostrarum genere collocarem, eamque sic appellarem. = Purpura curvirostra, trigona, striata, papillosa, rugosa, ore elyptico angustiore, labio fimbriato. = Eiusdem icona (Tab. I. num. 1.) apponimus.

Postquam collis scissuram diligenter inspeximus, oppositam eiusdem collis partem occidenti soli adversam, ac Samodiæ adiacentem perlustravimus. Pectines ibi, conchas pectiniformes, ostrea mole & varietate insignia, turbines, trochites, cochleas conoideas, dentales denique, quos Gualterius tubulos marinos regulariter intortos, arcuatim incurvatos, & versus unam extremitatem acuminatos appellat, non paucos legimus, quibus omnibus fossilibus conchyliorum testis balani adhærent nativi coloris speciem aliquam retinentes.

In aliis porro rivis Oliveti castro conterminis, qui dicuntur *di Stiore*, & *de Botti* frequentissimus occurrit lapis, quem Litheosphorum vocant. Marchasitæ etiam quamplurimæ, speculares lapides, gypsi frustra non pauca, quæ omnia vobis diligentissime enarravit sodalis noster Hiacynthus Voglius Medicus, & Philosophus præstantissimus.

In Galanchis vero Caitilionii, quæ dicuntur etiam S. Benedicti, echinos, spatagos, nerites elegantioris formæ, lapidifactorum lignorum fragmina non pauca, lapides, quos Aldrovandus mathematicis figuris instructos nominat, Lithanthraces denique inveni, eiusdem propemodum naturæ, ac alii omnes fere, qui non modo in Italia nostra, verum etiam in longinquis regionibus occurrunt.

Lithanthrax iste bituminosis partibus coagmentatus haud ægre accenditur, flammam emittit subobscuram, odorem exhalat gravem, & capiti noxium, subflavum cinerem relinquit. In hoc cinere magnete admoto portionem ferruminosam comperi, ipsius enim cineris particulæ nonnullæ magneti haud procul posito adhæserunt, quod quidem experimentum eorum opinioni favere videtur, qui putant in omnibus lapideis concretionibus aliquam ferri portionem inesse. Quod si ea apud nos eiusdem lithanthracis copia esset, quæ apud externos occurrit, non leve emolumentum ad fundenda metalla, & ad docimasticam deduceremus. Neque vero nostris tantummodo temporibus lithanthracem colles nostri protulerunt, nam Aldrovandus ætate sua etiam in bononiensi agro extitisse affirmat,

mat, merito igitur conijcimus nativum quodammodo esse nobis, & ab vetustis usque temporibus efformatum.

In iis, quas dixi, calanchis aquæ fons limpidissimus exfurgit, quam aquam indigenæ ærosam appellant. Exfurgit autem manifesto ex fundo fossæ, ex quo limum attollit, bullæque non pauca, ejecti aeris argumenta, efformantur. Deinceps ubi præter fluit, cursus sui vestigia veluti, ocræ non paucam rubei coloris relinquit.

Si quando vero aliqua ipsius portio stagnat, tela quædam illi innatat, quam si non eodem loco inspexeris, non eundem etiam in ea colorem intueberis, diversos enim Iridis instar exhibet.

Aquæ sapor insuavis palato est. Hæc in vitream phialam oblongam cylindraceam, in breve, atque angustum collum desinentem infusa, ut tertia phialæ pars vacua relinqueretur, ac manu apprehensa phiala, & pollice ad os fortiter appresso vehementer agitata est; agitatione spumescere cœpit, ac sublato digito flatus cum tenui impetu, & sibilo erupit.

Si modicam olei tartari portionem in eam infundas, nonnihil opaca fit, si guttas aliquot spiritus vitrioli illi admisceas, alba illius portio præceps corrui, varios in fundo vasis grumos efformans, totaque aqua fermentans bullas aeris non paucas ad superficiem extollit, mox limpidissima efficitur.

Hanc phænomenorum multitudinem, & varietatem oleo tartari potissimum tribuo, nam si spiritum sulphuris, & vitrioli tantum infundas, minima apparebit aquæ commotio, & varietas.

Sapor, quem rudes ipsi indigenæ nonnihil æris continere fatentur, nos in suspicionem valde probabilem adducit, æris nonnihil in conterminis fonti isti locis inesse, per quæ defluentes aquæ eum saporem obtineant: id diligentius deinceps inquiram.

Utinam dum eas aquas vitrea phiala contentas agitavi, majorem crepitum edidissent; comperissem tum (quod ex præstantissimo Beccario didici) principio elastico eas pollere, quo quidem principio aquæ præditæ si quæ sunt, eæ medicinalibus usibus aptissimæ videntur.

JACOBI BLANCANI.

Iter per montana quædam agri bononiensis loca.

P A R S A L T E R A .

Superiore anno postquam Vezzani montis, ejusque collium, & rivorum historiam complevi, vobis, sodales doctissimi, significavi fore, ut per Samodiæ flumen iter susciperem ejus alveum, & rivos perlustraturus, ut quidquid aut jucundi; aut utilis perciperem vobis exponerem; quod cum facere nunc aggrediar, ita procedet oratio, ut primum fluminis originem, alveique excursus designet, deinde quæ animadversione digna in eo contigit reperire, tandem qui rivi, & a quibus collibus in amnem influant, e quibus maxime ostracodermata, fossiliaque alia quam plurima eruuntur. De his ea referam, quæ oculis ipse accurate inspexi, præter fluminis originem, quam auditu ab aliis accipere oportuit, cum enim copiosi imbres superiore autumno vetassent, ne, uti optaveram, propius fluminis fontes accederem, ejus initium ab indigenis cultioribus quærere, & cognoscere coactus sum.

Ac primum quidem Samodiæ amnis ex altissimis montis Turturis jugis in septemtriones decedit, amœnissimam vallem, quam circumstant amplissima castaneta, præterfluens, paulatimque excrefcens major efficitur ex cornu dicto *la Ghiara della Chiesa nuova*, alias *Rivo de' Bignami*, quod ex vallibus procedit vulgo *le Lame de' Baraldi*, & amni jungitur prope ipsam ecclesiam novam, a qua denominationem desumit, quæ ecclesia mille, & quingentos passus circiter distat a notissimo loco, quem Incolæ *Mercato di Savigno* appellant. Cornu aliud a Monteumbrario exortum, cui nomen dedere veteres *Volgolo*, o *Rio Maggiore*, majorum nostrorum clade insigne, nunc autem *Ghiara di Seravalle* dicitur, in occidentem excurrit, donec in orientem solem vergit, unde etiam haud multo emenso spatio, in septemtriones deflectit: de monte corona
cum

cum descenderit, rivis augetur, tum illo maximo aquas Montis umbratii recipiente, qui vulgo dicitur *La Ghiara di Ciano*, tum aliis etiam, qui e finitimis collibus, & rupibus emanant, tandem ad notissimum Montembellium cum Samodia conjungitur: quæ per fragosos montis turturis saltus, per aliorum quoque collium anfractus præceps delabens, vetusta Bazani arce, & oppido post se relictis per maximam agri bononiensis planitiem, qua viam Æmiliam, & S. Joannis in Persiceto interfecat, quatuor, & viginti milliariis emensis, prope sacram ædem vulgo Bagneti, quæ duo circiter passuum millia a nova urbe Cento distat, in flumen Rhenum influit.

In hujus amnis alveo parum, aut nihil occurrit peculiaris mentione dignum, nam quod attinet ad ostracodermata, immensa faxorum vis ab aquarum impetu deorsum præceps hiemali præsertim tempore circumacta, elegantiora corpora conterit, quæ a finitimis rivis, & rupibus in alveum ipsum demittuntur; quod autem ad siliceos lapides, in eo præsertim cornu vulgo *la Ghiara di Serravalle* occurrunt diversi generis frustra non pauca, quæ si levigentur, achatum chalcedoniorumque diversas species perbelle exhibent; in hoc enim lapidum genere sua quoque agro Bononiensi debetur laus, qui si uberrimas ipsorum fodinas non habet, aut si eas nondum deteximus, quod celsiora montium juga minus diligenter scrutati sumus, quamplurima tamen eorum fragmina in suis fluminibus, & rivis conservat, quorum specimina lavigata, & in capsulas redacta asservabantur penes amplissimum virum Comitum Julium Sigitium Blanchettum Gambalongam tribus ab hinc annis maximo Reipublicæ damno vita functum. Ipsius potissimum consilio, & industria achates, & chalcedonii eximii, & compactissimi, jaspidium quoque quædam quasi species e nostris lapidibus Mediolani affabre expolitis eductæ sunt, quorum nonnullas huc in medium attuli, non tam rerum pulchritudinis, & elegantix demonstrandæ causâ, quam grati animi mei in munificentissimum virum significandi, qui ejus generis multa mihi liberalissime largitus est. Quamquam hujusmodi plurima ex nostro agro antea collegerat Valerius *Dal Buono*, honestus civis, & Sacerdos, & in elegantem ferriem tribuerat; quædam etiam repperat Petrus Gratiolus e nobilissima Barnabitarum familia sacris literis apprime exultus, & omni literarum genere florentissimus, quæ Comiti Blanchet-

chetto communicavit, eique postea ulterius progredienti provinciam hanc omnem dimittendam censuit.

In ipso quoque Samodia flumine frustum ligneum lapidifacrum septem ab hinc annis contigit reperire, quod conspectu vestro dignum censui, Sodales ornatissimi, quia minus frequentia sunt in agro Bononiensi lithoxyla, tum quia quæ maximam contraxerint duritiem ubique locorum rara sunt, & insignia: eximium hoc frustum in siliceam materiem pene totum conversum est; color fuscus, ac lineis albidis frusti longitudini perpendicularibus, & invicem parallelis majori ex parte distinctus: pondus maximum: major longitudo semipedem parisiensem, & digitos tres non excedit, latitudo digitos quinque ac lineas undecim. Fibrarum quoque nunc etiam quædam quasi vestigia apparent, quarum crassitudo quintam ferme lineæ parisiensis partem adæquat, neque accurate omnes in longum extenduntur, sed quædam in nodum inflectuntur; earum aliquæ oculo præsertim microscopio instructo ad tubi formam cavæ apparent, tenera illa ac molli materie, quæ intra ligneas fibras continetur, quæque alteram alteri conjungit, in siliceum gluten commutata. De la Hire, qui palmeos binos truncos similiter lapidifacros Regiæ Parisiensi Academiæ obtulit, ut in ipsius commentariis anni millesimi sexcentissimi nonagesimi secundi, probabilem adfert hujusmodi petrificationis, ac conformationis rationem. Observat nempe quod cum corpora longa, mollia, & insigni mole prædita exsiccantur, exterior pars durendo quoddam quasi vacuum circumfese relinquit, pars vero interior, quæ mollior est, (dum & ipsa deinceps exsiccatur, donec omni amisso fluido solida effecta sit) a centro ad peripheriam sensim accedendo, exteriori, quam diximus, parti tandem adhæret; itaque interius vacuum efficit, quod tubi formam perhibet: ex hoc porro naturæ artificio contingit, quod pleræque molliorum plantarum fibræ tubulorum instar perforantur, sicque credibile est frusti hujus fibras, quæ alias arboris truncum constituebant, sic cavatas, & evacuatæ fuisse, dum in substantiam lapideam immutarentur, quæ deinceps substantia partim subnigro, partim subalbido quodam siliceo succo fibras plerasque replevit. Dubitabunt fortasse quidam de ipsa frusti nostri origine, neque ad credendum adducentur ipsum aliquando fuisse lignum. Scio equidem discordes esse de hujusmodi fossilibus opiniones, quidam

T. V. P. II. X enim

enim putant corpora hujus generis, quæ lapidefacta dicuntur, numquam revera fuisse talia, sed tantummodo lapides, filices, ac stalactites, quæ dum se in montium visceribus conformarent, corporum illorum, quæ repræsentant, formam fortuita partium conglutinatione obtinuerint; alii vero existimant aquas, ac tenuissima quædam lapidescentia principia adeste, quæ cum certa quædam corpora penetraverint, in lapidem convertant. Similitudo maxima, quæ inter nativum lignum, & nostrum hoc fossile intercedit, non leve addit huic opinioni robur. De la Hire huic sententiæ in superius memoratis commentariis ipse quoque favet, plerique etiam recentiores; veterum plurimi adversantur.

Lignum aliud lapidefactum frustum, coloris fusci, eximii ponderis, atque tartareo albescente quodam quasi velamine hic illic obductum, in Samodiæ alveo inventum est. Statim ac illud observavi, mihi ipsi in animum induxi id esse lithanthracis fragmentum lapidefactum, sciebam enim lithanthraces lapidefactos in natura existere, qui scilicet materie lapidea adeo sunt saturati, ut lapides genuinos, si nigricantem colorem excipias, quem servant semper, referant. Clarissimi Josephi Montii eruditissimos sermones de lignis fossilibus perlegeram, in quibus quædam de ipsis adnotantur. Cl. Passerii Sodalis nostri meique amantissimi historia fossilium agri Pisaurensis tunc erat præ manibus, qui carbones fossiles enumerando lapidefactos quoque memorat; sed cum & ipsi igne admoto flammam concipiant, gravemque illum bituminosumque odorem emittant, noster vero igni omnino contumax sit, nullumque odorem effundat, quam maxime dubitavi ne aliud quidpiam esset, ac credideram. Desiderabam ipsum in acidis liquoribus experiri, sed cum molis esset minus aptæ ad experimenta hæc subeunda, cum vellem malleoli ope frustula quædam ab ipso avellere, bifariam disruptum est: potui tunc internam quoque lapidis structuram commode observare, quæ lignea intus etiam apparet, & coloris nigricantis, eique admiscetur micantes quædam particule in crystallinam figuram concretæ. Fibrarum conspicuarum processus bis interfecantur, ac interrumpuntur, eandemque interfecationem Cl. Passerius quoque observavit in frusto ligni sic lapidefacto, ut chalcedonii lapidis duritiem æquaret, cujus rei hanc adfert rationem, putat nempe ligna extraneo humore saturata, propriam invertere

tere naturam, nitente autem humore ligni meatus penetrare, eosque dilatante, fibræ fortasse decurtantur, indeque disrumpuntur; in nostro ligno quidem apparent disruptiones hæc perspicuæ fibrarum processum interrumpentes, quæ utrum a superius allata causa derivent, nec ne, peritioribus diudicandum relinquo. Frustula quædam, quod jam animo infederat, hujus ligni, in nitri spiritum injeci, & illæsa omnino permanserunt, nullamque in ipso perturbationem excitarunt. Dubitavi tunc lignum hoc ad ea spectare posse, quæ amiantina seu asbestina appellantur, qua propter institutam a Montio methodum in hoc ligno examinando sequutus sum: ipsius frustula scilicet in aquam, quam saponariorum magistram dicunt, conieci, in eaque præter spem nullam alterationem sunt passa, cum, si ex animo experimentum cessisset, in ea adeo mollia, & flexibilia reddenda forent, ut non male verum referrent amiantum: cum vero diu multa de hoc ligno animo perpendissem, ad primævam opinionem me denuo contuli, ratus lithanthracis frustum esse, cujus bituminosa substantia omnis evanuerit, dum lapidea a fortioribus acidis illæsa materies idem penetraret, & non modo nullam in igne concipere flammam, neque odorem emittere, sed nec prunis tentatum ustionem ullam, aut calcinationem passum esse, ut non immerito ad apyrorum lapidum genus referendum duxerim.

Sed postquam de filicibus, & de lignis lapidifactis in Samodiæ amne repertis superius dixi: aliquid nunc dico de quodam mirabilis formæ lapide fungi prateoli formam belle adeo referente, ut naturalem prateolum, ne dicam esse, imitari omnino certe videatur, agrestis enim puella dum æstivo tempore in quodam Samodiæ gurgite pannos lavaret, ipsum conspicuum in gurgitis fundo admirata, me illuc errantem ad se vocavit, prateolumque lapideum, quoddam quasi naturæ portentum obtulit; denominatio ipsa lapidi repente a rude puella assignata, eximiam ipsius prateolum referentis formam confirmat. Lapidis hæc est forma (*Tab. I. Fig. 2.*) Umbella pediculo non æque insistit, ab uno enim latere flectitur pediculi extremitati propius accedens, eumque magis obtegens, ab alio latere ab ipsa recedit, & minus obtegit, qua extremitati pediculi proximior est, in altitudinem surgit linearum decem parisiensium, qua ab ipsa distat, linearum octo. Ipsi autem latitudo est digiti unius. Pediculus recte surgit umbellæ

plano fere perpendicularis, ipsius longitudo, qua maxime patet, digitum unum, & lineam unam, qua minime, lineas novem æquat, crassitudinemque habet linearum sex. Color per totum subflavus. Materies, qua constat, calcaria est omnis, frustulum enim in nitri spiritum coniectum brevi solutum est. De calcario lapide huic simili non multis ab hinc annis Cl. Comes, & Senator Gregorius Casalius Sodalitatis noster scripsit ad Marchionem Maffejum æternæ memoriæ Virum sermonem italica lingua elegantissimum, lapidemque boletitem calcarium ob boleti formam, quam exacte referebat, nominare non dubitavit; de calcariis, de arenariis, de durioribus etiam lapidibus ibi mentionem facit; ubi, & quando eum contigerit reperire narrat, cumque ex ipsius scripto cognovissem lapides hosce pene similem inventi fortunam habuisse, simillimam porro a natura obtinuisse formam, fungos enim utrique referunt; sic putavi meum hunc lapidem non omnino hic præmittendum fuisse, quem in lapidum figuratorum censum pono, eumque appello lapidem calcarium fungum prateolum referentem. Qui plura de huiusmodi lapidibus cognoscere cupit, adeat disertissimam Casalii epistolam superius memoratam, ejusque epitomen in Volumine tertio Commentariorum nostræ Academiæ, ubi abunde non modo, verum etiam utiliter jucundeque suum explebit desiderium.

Postquam autem Samodiæ alveos, resque peculiari animadversione dignas in iis repertas enumeravi, de rivis etiam, qui in eandem influunt, nonnulla dicere aggredior; horum autem alii in Samodiam ipsam desinunt, alii in ipsius cornua; de illis primum, de his autem dicemus postea. Ac primum quidem Montemgeorgium ejusque conterminas rupes omitto, in quibus præter vulgatas conchyliorum testas tum lapidefactas, tum fossiles, nihil est studio, & admiratione dignum. De rivo etiam vulgo *della Lezza* breviter dico; ex præruptissimis cacuminibus oritur Landæ, & Venerano finitimis, ab oriente sole ad occiduum in Samodiam defluit prope moletrinam, quam dicunt *di Giacone*. Ibi caryophyllos eximiæ molis, madreporarum quoque, bucardiarum, buccinorum aliorumque elegantiorum testaceorum fragmina nonnulla inspexi, quæ vel loci natura magna ex parte consumpsit, vel inferius circumacta disrupta sunt, & attrita. Si quis inspecto rivo per prærupta circumquaque cacumina ejus initium adire velit,

præ-

præterquamquod amœnissimum natura locum, amplissimamque vallem late prospiciet, veram quoque assequetur Landæ, vicinorumque rivorum originem, atque ex brevi illa demissiorum collium disruptorum structura lumina fortasse non pauca obtinebit ad maximam altiorum montium compagem cognoscendam; ochras quoque partim rubri, partim flavi coloris, aquis quam plurimis hinc inde, e rivi lateribus scatentibus, immixtas observavimus, quarum frequentia in omnibus ferme rivis, & color in causa fuit, cur eas pyritum particulis tantummodo ditatas negligereamus. Rivo huic affines sunt duo alii, quorum primus dicitur *di S. Andrea*, alius *de' Soavi*.

Rivus S. Andreae montis Tozzi aquas egerit in Samodiam. Præter fossilia, quæ superius dixi, nihil aliud notandum in ipso occurrit. In monte Tozzo, qui arenaria flava terra totus coagmentatur, balani sunt frequentiores, nullique adherentes bali, arena vero ipsa quamplurima corpuscula fossilia continet, & præsertim cornua ammonis similia omnino illis, quæ prope viam inveniuntur ad ædem B. Virginis *del Monte* ducentem, de quibus, & de arena ipsa, qua immiscentur, plurimis ab hinc annis egregie disseruit Cl. Beccarius. In omnibus autem arenis flavis bononiensis agri, in nonnullis etiam glaucis, sive cinereis, quas adhuc observare licuit, ammonis cornua testulasque alias diversi generis perspeximus. De rivo S. Andreae satis, superque diximus; ad rivum *de' Soavi* sermonem converto. A præruptissimis Montis Sanpetri rupibus orientem solem, & Boream spectantibus delabitur, montis Tozzi nemora ipsi adhærent, paucoque viæ spatio emenso in Samodiam influit. Prope rivum marmora ruderata, quæ & lapides Florentini dici solent, effodiuntur, in quibus nempe arbores, castella, & vel ipsæ geometricæ figuræ depictæ apparent, quæ fortasse tenuissimis metallicis, seu subtilis alterius cujusdam heterogeneæ materiei venis per marmoris superficiem substantiamque vario modo serpentibus effinguntur. Hujus rivi exortum si spectes, aptissimum esse rerum naturalium amatoribus locum facile judicabis, in quo majorem illam, qua pollent, elegantiorum corporum sitim abunde expleant; caveant vero ne sua ipsos fallat opinio, dumque sedulam admovent manum aptissimis etiam instructam ferris, spe facile cadant posse integra ostracodermata ab iniqua illa substantia, eruere, in qua penitus immerfa sunt, non quod ipsi nimium adhæ-

adhæreant, sed quia tam fragilem naturam in ipsa acquirunt, ut ne unum quidem ex tam multis corporibus integre extrahatur. Desiderandum quidem esset, ut facilius extraherentur, tanto enim majore præstantia prædita sunt, quanto minus ager hic noster hujusmodi fossilibus abundat. Nam alias recensita ut omittam, in eodem rivo occurrunt buccina majora, & minora Gualterii, strombi canaliculati, rostrati, & auriti, aure admodum crassa Gualterii Tabula quinquagesima tertia. B. C. turbines elegantiores, cochleæ trochiformes argentei coloris, atque cassidiformes, purpuræ rectirostræ aliæ, aliæ curvirostræ, cochleæ longæ pyriformes vulgares, aliaque hujus generis corpora, lapides etiam sic ludente natura conformati, ut anguibus assimilentur alii, alii variorum corporum imagines referant, iisque non modo forma, verum etiam materie similes, qui in rivo *delle Maraviglie* inveniuntur.

Rivo *de' Soavi* peracto, de iis nunc dicendi locus esset, quos *delle Vallocchie*, *de' Botti*, *di Marastello*, alias *di Castione*, & *di Stiore* vulgus nuncupat, sed cum de quibusdam superioribus annis abunde verba fecerim, quidam nihil habeant, quod studium excitet, omnes libens omitto, rivosque illos enumerare aggredior, qui in id Samodiæ cornu influunt, quod *Volgolo*, seu *Ghiara di Serravalle* nominant. Antequam autem id facio, rivum *della Sega* brevissime memoro, qui ab occidente sole ad orientem labitur, ac Samodiæ jungitur. In ipso interdum calcariarum crystallorum in mirificam formam concretarum insignes congeries reperiuntur, oblonga quoque plumbea frustula, ac in ejus conterminis campis lapides octogoni, ac tabulæ quadratæ ad lateritia opera, seu ad pavimenta sternenda inservientes. Vetus quoddam amplum ædificium ibi fuisse fama est, cujus reliquiæ passim deteguntur, plumbique portiones in rivum frequentes probabilius ab iisdem derivasse videntur.

Ad rivos *nella Ghiara di Seravalle* delabentes me confesso. Primus occurrit rivus *de' Camicelli*, qui a jugis *Tiolæ*, & *Majolæ* originem ducit, & deorsum labitur solem occiduum, & septemtriones versus. Fossilia quamplurima in finitimis ipsis rupibus, & fundo occurrunt, inter quæ caryophylla eximie molis, madreporarum insignia fragmenta, strombi, conchæ pectiniformes, cassidiformes, & corallinæ, spondyli, lithoxyla quoque peculiari mentione digna arbitrantur, lapideus etiam

etiam conchæ cordiformis, vulgo bucardiæ nucleus eximia molis in fundo rivi repertus est anno millesimo septingentesimo quinquagesimo secundo. Elegantiorē cochleam ex innumeris disruptarum testarum fragminibus delegimus, cujus figuram delineatam assero (*Tab. I. Fig. 3.*), quam cum Gualterio Tabula sexagesimaquinta littera I. describo *cochleam depressam, lævem, labio crasso, sive pulvinate, auricula tortili*: neritam quoque seu cochleam breviorē non proportionatam, oris perimetro a plano horizontali interrupto, minutissime striatam, ac tenuiter dentatam ibi invenimus, quam expressam habetis eadem Tabula (*Fig. 4.*). In hoc verò potissimum rivo, ut, & in eo, quem Landæ nominant, præ cæteris abundant sedimenta illa, in quibus minima existunt crustacea, & testacea, de quibus paucis ab hinc diebus vobiscum ornatissime disseruit Sodalis noster Ferdinandus Bassius Physicus, & Botanicus nobilis, & spectandus. Ipsorum ego quoque seriem jamdiu inceptam complere, collectasque in omnibus ferme rivis, quos lustravi, opes simul conjungere, ac in sua quæque genera dispertiri aggressus sum, ut abundantior, si fieri potest, & perfectior bononiensis hæc nostra concharum fossilium minus notarum historia aliquando prodeat.

Proximus huic rivo est alius, quem dicunt *di Merlino*, a domo enim sic appellata derivat, atque inter finitimos Zapolini, ac Majolæ montes ad septemtriones fluit, ac *nella Ghiara di Serravalle* definit: ibi præter superius enumerata fossilia, conchæ coralloides, lithanthraces, lapidefactum ossis cetacei fragmentum, lapides quoque peculiaris structuræ in cylindri formam concreti, ac per omnem longitudinis tractum perforati existunt: peculiaris hujus conformationis causam derivandam fortasse puto ab ordine a natura adhibito in hujus generis concretionibus; cum enim fluida lapidea materies sic coadunata evaporatur, atque exsiccat, exteriores particule dum contrahuntur, interiores ipsis adhærentes sensim attrahunt a centro ad peripheriam, portionemque spatii, quod occupabant, inanem relinquendo, vacuum illud efformant, quod in hujusmodi lapidibus conspicitur, quos propterea inter quasdam ætium species, seu lapidum cavorum referendos esse puto.

Rivo Merlini adjacet rivus alter, quem nuncupant fundamentorum, ac finitimorum camporum, collium *del Casone*
 aquas

aquas in pluries recensitam Volgolum, five *Ghiara di Serravalle* egerit. Rupes omnes ipsi conterminæ flava plerumque, ac cærulea arena constant, in quibus vulgaria, ac communia fossilia delitescunt. Notandum tantummodo est prope ipsum rivum foveam quamdam ab aqua excavatam esse, in qua quamplurima ostracodermata conservantur, lapideis congeriebus adhærentia, quæ nativum ipsum colorem nunc quoque referunt, præ cæteris fragmina quædam turbinum observare, ac divellere licuit, quorum specimen (*Tab. II. Fig. 1.*) vobis Sodales clarissimi exhibeo, quosque Gualterius = *Turbines apertos canaliculatos oblique incurvatos, rugis per longitudinem dispositis in unaquaque spira unitos* = nuncupat. Omnis quoque Zapolini via infinitis propemodum congeriebus interrumpitur, quæ præter alia trochiformes cochleas friatas argenteum colorem adhuc præferentes continet, quarum figuram observare licet (*Tab. II. Fig. 2.*); varii etiam fontes ab ipsius ripis scatent, quorum aquæ tartaream materiem abunde deponunt, & in diversa grumos eximiæ molis conglutinant. Cantajæ via sic dicta, quia ad Cantajæ domum ducit, atque in Merlini rivum desinit, fossilibus cochlitibus pene omnis est referta: cassidæ, turbines, strombi, neritarum multiplices species passim occurrunt. Ibi tamen fossilem cochleam elegantissimam ex marinarum aurium genere legimus, cujus figuram offero (*Tab. II. Fig. 3.*), quam cum Gualterio Tabula sexagesima nona littera F. describo *aurem magis depressam, ore magis expanso, minutissime striatam, ac nullis foraminibus distinctam.*

Ad conficiendam Samodiæ historiam nunc dicendum esset de rivis, qui ab occiduo sole, ad orientem excurrunt, & in Volgulum alias *Ghiara di Serravalle* desinunt, sed cum nimis fortasse multa dixerim, brevitatis gratia, eos nunc libenter omitto, & in proximum annum refero, quorum descriptionem minori vobis tædio futuram confido, quod & jucundiora afferat, fortassis etiam utiliora.

Fig. 1.

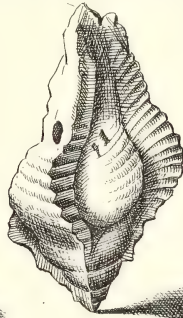
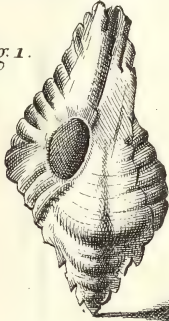


Fig. 2.

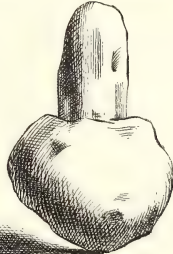


Fig. 3.



Fig. 4.





Fig. 1.

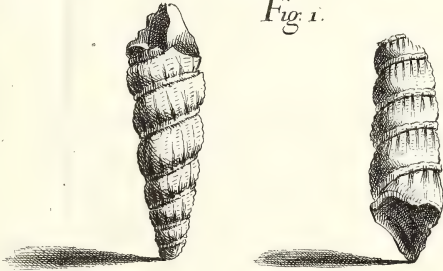


Fig. 2.

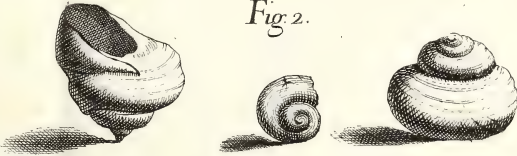
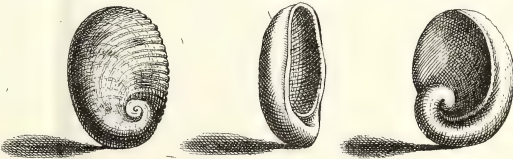


Fig. 3.





GREGORII CASALII.

De quorundam vitrorum fracturis Sermo alter, quo diluuntur objecta nonnulla, quæ clarissimus Joannes Baptista Scarella protulerat adversus Sermonem primum de eodem argumento conscriptum.

SEx circiter ab hinc annis, Sodales doctissimi, nonnullæ quorundam vitrorum fracturæ se se mihi observandæ exhibuerunt, quæ cum novæ mihi viderentur, statim ad vos confugi, easque vobis narravi, aliquot de illis animadversiones proponens, quas a vobis emendari desiderabam. Fracturas hæcæ & vos ipsi novas esse judicavistis: quo circa vobis placuit eas continuo prodire. Re vera illico prodierunt in Tomo tertio nostrorum Commentariorum, cui sermo, quem de illis hic habueram, fuit insitus. Properatione, qua hoc prodiit opusculum, properatio illa non minor fuit, qua compositum: de quo fidem faciunt, & observationum tempus in opusculo ipso adnotatum, & tempus quo opusculum Commentarii obtulerunt. Verum quomodocumque res se habeat, opusculum factum est juris publici. Quapropter clarissimus Pater Joannes Baptista Scarella in Tomo tertio *Physicæ Generalis Methodo Mathematica tractatæ*, ubi examen instituit de *Causa diffractionis ampullarum Bononiensium*, arbitratus est, & libere sermonem meum, & jure suo oppugnare se posse. Hoc, Sodales humanissimi, me ad vitrorum fracturas iterum vocat. Gaudeo, vobiscum hic aliquantulum expendere, an quæ jam dixeram, illas mererentur doctissimi Viri objectiones. Ceterum maxime cupio, eum ipsum scire, me ejus objectiones tanti facere, quanti debeo, idest plurimi; ac si quando sermo hic secundus ad ejus manus deveniat, neque ei, uti verendum est, satisfaciat, eum enixe rogo, ne ipse recuset mihi iterum objicere, ut me iterum doceat.

Describebam primum in sermone illo meo fracturas, quæ in quibusdam vasculis vitreis, ut a vitrariis dici solet, recoctis deteguntur, postquam aliquo tempore vascula hæc

lapillos quosdam continuerunt: quæque vascula essent, quique lapilli, explicabam, nulla eorum circumstantia prætermissa, quæ scitu digna videretur. Deinde aliquot notabam de vi, qua fracturæ ipsæ conficiebantur, atque de causâ, quæ eas producebat. Illis, quæ, ut ita dicam, spectant ad primam partem, non multum se opponit Scarella; gravius se opponit illis, quæ spectant ad secundam. Sicque ego res primas breviter rursus attingam, in secundis vero aliquanto diutius hærebo.

Et vero ad differendum de istis fracturis regrediens, non modice possem earum numerum amplificare. Usus sum ad fracturas multas obtinendas, & lapidibus alias per me adhibitis, quos mihi jam proposuit, & exhibuit, uti videre est in primo sermone, celeberrimus Sodalis noster Cajetanus Montius, atque nonnullis aliis a dignissimo Academiæ Præsidente Ferdinando Bassio postea suppeditatis. De lapidum speciebus nihil novi adungere possem: videlicet nunquam accidit fracturas haberi per alios lapides præter adamantem, achatem, crystallumque montanam. Quod cum assero, minime tamen dissimulandum est, lapides quamvis bene multi ad experimentum adducti fuerint, lapides haud paucos adhuc esse pertentandos. Aliquam autem varietatem præbuerunt vitra: nam non tantum vascula, de quibus dixeram, sed & vitra alia nonnulla sunt eorundem lapidum ope pari modo disrupta. Hæc nova experimenta prætermittam, ut citius me ad clarissimum Scarellam convertam, multo enim plus valent apud me Scarellæ objectiones, quam mea experimenta.

Considerat laudatus Auctor sub numero 18 paragraphi 250. constructionem, quam meorum vitrorum exposueram, & notat, si ea talis vere esset, ut describeretur, videri posse ingeniosissimum systema, quod ipse ad explicandam ampullarum Bononiensium fracturam amplectitur, nonnihil infirmari. Quapropter suadere contendit, etiamsi non possit systema suum meis vitris aptari, non idcirco desperandum omnino fore, quin vitra ad systema accommodentur: sicque numero 19 postquam explicavit communem methodum, qua vitra & elaborantur, & committuntur hypocaufto, & ab ipso auferuntur, ita dicit: *Jam vero facile potest accidere, ut ad loca camera minus calida, aut etiam alio prius deferantur, quam opus est.* Et paullo post addit. *Deinde etsi omnia quanta maxima diligentia observentur, non potest non fieri, quin prius frigescant*
par-

partes in superficie aeri expositæ; quam interiores ab eodem plus diffitæ. Quibus respondens primum, humanissimum precor Scarellam, ut meam animadvertat ingenuitatem, atque desiderium, quo afficior, ad ejus præcepta, prout fieri mihi potest, accedendi. Sciat igitur Scarella, ut primæ ejus considerationi inservirem, me ipsum pluries fornacem adiisse, atque loca omnia diligenter visisse, per quæ vitra mea transierunt a primo temporis momento, quo a statu fusionis ablata conformabantur in vascula, usque ad momentum illud extremum, quo jam frigefacta inter completa, & perfecta opera reponebantur; ulterius me multis, & longis quæstionibus seniores, peritioresque artifices subjecisse, qui mihi utique affirmarunt vitra ista gradatim trajecisse a calore maximo, quo candentia apparebant, ad temperatum, dein paullatim ad statum illum, qui frigus audit. Verum ut de secunda Scarellæ consideratione aliquid dicam, sit revera, quod *prius frigescant partes in superficie aeri expositæ, quam interiores ab eodem plus diffitæ.* At cur igitur ob eandem rationem iisdem fracturis minime sunt obnoxia vitra alia omnia concava, quorum internæ partes, atque externæ assignari possunt. Nihilominus quamdam temperaturæ speciem meis vasculis non nego, quoniam illis eam inesse judicat Scarella. Concedatur ergo vascula aliquantisper temperata esse, vel hoc accidat, si placeat Scarellæ, propter qualitatem vitri, quo componuntur, parum apti fortasse ad se se constipandum, vel propter aliam causam, quam ipse cæteris verisimiliorem existimet. Immo non taceam de simplicissimo phœnomeno, quod mihi se obtulit iterum dum experimenta nonnulla conficiebantur; experimenta ipsa loco suo exhibebo, satis nunc sit ex illis tantum sumere, ut phœnomenon innotescat: ex hoc enim phœnomeno colligi videtur quemdam in meis vasculis temperaturæ gradum apparere. Nemo est, qui ignoret crepitum subitanæ, & multiplicem fracturam ampullarum bononiensium, si in illas aliquod per os demittatur corpusculum, quod eas tantillum vulnerare potis sit. Notum pariter est, ampullas, si candentes fiant, deinde gradatim frigescant, neque amplius idoneas esse ad crepitum, neque ad fracturam. Ampullæ ob methodum, qua eas condunt Artifices, gignuntur, ut ita dicam, temperatæ. Si autem candescunt iterum, & postea calorem paullatim amittunt, temperaturam simul amittunt. Verum en

phœnomenon, quod nunc observandum contigit. Ampullis duabus bononiensibus calefactis, multo majori caloris gradu una quam altera, nulla tamen earum tam vehementer, ut candesceret; calore exinde sublato sensim, & extincto; in eas scilicet omnino frige factas quædam filicis frustula demissa fuerunt. Tunc sane fractura prodiit nulla. Seposita fuerunt ampulla; duos autem post dies inventæ sunt disruptæ, non tamen methodo iis consueta, verum illa, qua vascula disrumpuntur: aderat enim in ampulla, quæ majorem sustinuerat calorem, videlicet in ejus fundo, una tantum scissura; & in illa, quæ sustinuerat minorem, præter scissuram similem, ex una hujus parte scissura altera extollebatur, duos cum ipsa angulos rectos efficiens; in parte vero opposita aliquanto altius vulnus transversum inspiciebatur. Fracturas has dico similes esse illis, quæ in vasculis fiunt, quoniam tum illæ cum istæ paucissimis rimis componuntur, & efformari pariter videntur a secantibus quibusdam planis: neque alias differunt, nisi quantum præcipiunt essentia, & necessitas veritatum geometricarum; nam cum ampullarum fundus sphericus sit, & vasculorum forma sit cylindrica, observabantur revera in sectionibus ampullarum portiones circuli, veluti recognita jam fuerant in sectionibus vasculorum portiones elliptis. Ad hæc addam periculum factum etiam fuisse de alia bononiensi ampulla, quæ parietibus multo crassis circumscribebatur, & cujus figura prope fundum cylindrica potius videbatur, quam spherica. Postquam ampulla ad vicenas horas carbonibus candentibus superposita fuerat, atque deinde sensim frige facta, immisum in illam est filicis frustulum. Duo circiter post minuta ampulla est disrupta, fracturamque ostendit minime circularem, sed ellipticam; idest vasculorum fracturis omnino similem. Si igitur ampullas hæc censeere possumus, de quo nec dubitandum est, aliquanto temperaturam amisisse; videtur ob fracturarum analogiam credi posse mea vascula fuisse aliquanto, non autem prius, temperata. Hoc tantum est, quod clarissimo Scarella concedendum esse arbitror, quodque concedo libentissime. Ceterum sinet ipse ut spero, me nihilominus affirmare, multam intercedere discrepantiam inter constitutionem vitri meorum vasculorum, & constitutionem vitri, sive ampullarum bononiensium, sive omnium aliorum vitreorum operum, quæ temperata esse judicantur. Quod si

non esset, cur & vascula ipsa non dirumperentur, vel per multis, & sine lege scissuris, ut bononiensibus ampullis communiter accidit, vel minutissimis frustulis, ut in Montanariensis vermibus, & guttis anglis observamus?

Verum enimvero satis de vasculorum constitutione dictum est: dicamus quædam de fracturarum ratione. Hanc in altero sermone considerans, cum expenderim, primo loco, quæ sit lapidum vis in frangendis vasculis, atque secundo, an causæ concurrant aliæ ad has præbendas fracturas, & cum de utroque nonnullas proferre conjecturas mihi permiserim, Scarella ad id se opposuit, de quo secundo locutus fueram. Utinam id fecisset etiam ad id, quod primo dixeram? Correctiones Philosophi tam magni, quæ mihi semper carissimæ erunt, fuissent tunc mihi etiam necessariæ. At cum non placuerit Scarellæ me de hoc etiam corrigere, neque ei, neque cæteris displiceat, si me ipse corrigam. Quo in faciundo brevissimus esse contendam. Nihil enim facilius. Nemo est, qui gaudeat longa oratione reprehendi.

Excogitaveram, formula quadam exprimi posse quantitatem vis, quam exercent lapides in hisce fracturis. Formulam autem hanc dicebam me potius supponere, quam statuere. Melius sane erat, eam ne supponi quidem. Siquæ supponenda erat aliqua, mihi videtur hoc fieri debuisse tali pacto. Credo nempe, quod pariter antea credebam, quodque tunc argumentis satis firmis, ni fallor, probavi, concedendum esse lapidum actionem tanto majorem haberi, quanto majores sunt & eorum durities, & gravitas, & angulorum acuties, quibus vitrum urgent: quosque angulos jam ego tangentes appellaveram, magis proprie ferientes appellavissim. Consideranda ulterius esset directio, qua anguli vitrum impellunt, sed hanc, commodi ergo, eamdem semper esse fingemus, ut ea absque errore in hoc virium calculo omitti possit: quam autem fictionem cæterum agnosco, & multo licentiosam esse, & multo longe a veritate aberrare. Vis interea, qua suo munere funguntur lapides in his disruptionibus, respondere debet vitri resistentiæ, quæ est superanda: & ideo quanto major est resistentia vitri superata, tanto majorem esse vim superantem arbitrabitur: & quoniam resistentia ista tum majore tempore vincitur, tum minore, fateri etiam debemus, tanto majorem vim esse, quanto minus est tempus, idest quanto major est

velocitas, qua vincitur resistentia; itaque vis respondebit non soli resistentiæ, sed & resistentiæ, & simul velocitati, qua resistentia vi obtemperat, & cedit. Quæ omnia si concedantur, mihi videtur, denominatis: vi frangente = v , gravitate lapidum = g , eorum duritiæ = d , acutie angulorum ferientium = a , resistentia vitri = r , tempore = t ; mihi videtur, inquam, dici posse $v = gad$, & $gad = \frac{r}{t}$. Ex quo statim apparet, si vel una, vel plures ex primi membri secundæ æquationis quantitibus fiant = o , tunc nullum obtineri effectum nisi tempore infinito: supponatur enim $d = o$; habebitur $ga \times o = \frac{r}{t}$, & idcirco $t = \frac{r}{ga \times o} = \frac{r}{o}$.

Si vero resistentia ipsa fiat = o , aliquod pariter oportebit ex tribus vis elementis fieri = o , sicque vim ipsam evadere = o : supponatur ergo $r = o$, en $gad = \frac{o}{t}$, quod idem est ac dicere $gad = o$. Demum si fiat tempus = o , vis erit infinita: sit revera $t = o$, & tunc erit $gad = \frac{r}{o}$.

Hæc, Sodales doctissimi, substitui cupio illis, quæ jam dixeram de vi fracturarum, quas in vasculis, quibus continebantur, lapides producebant. Quod si correctiones hæc meas credatis forsan errores esse novos, & ego illico vobiscum credam. Vos tantum rogo, ut notetis utique, cum usque adhuc locutus sim de hac vi, eamque formulis subjicere quæsierim, me nihil aliud intellexisse præter eam, quam in his fracturis lapides ipsi contra vitri resistentiam adhibent, hanc enim consideravi veluti causam fracturarum præcipuam, qua scilicet posita effectus ipse consequenter obtineatur. Cæterum primo illo sermone proponere ausus fui alias concurrere causas, quas nec tunc nec modo placuit mihi a formula comprehendere. Etenim asserui, potius *ut dubium . . . quam ut systema*, aerem externum se se immittendo in exigua vulnera a lapidibus facta, aliquid præstare. Sed etiam si aer summopere juvaret ad istas obtinendas fracturas, sicuti tunc esset causa superveniens, & per accidens, ita ipsum arbitrabar nullum habere locum in formula, qua nihil aliud exprimendum erat, præter lapidis nisum, & vitri. Atque idem dicendum esset de quacumque alia causa, quæ posset ad istas fracturas concurrere: quemadmodum si, exempli gratia, vulnerato a lapide vitro, in vitro ipso

ipso excitaretur elasticum quoddam principium: quæ causa, quoniam a statu vis mortuæ ad statum vis vivæ tunc transiret, sane & ipsa dicenda esset causa superveniens.

Atque regrediendo ad causam illam supervenientem, quam induxeram potius *ut dubium . . . quam ut systema*, idest ad externi aeris ingressum per parvum ex lapide vulnus adaperitum, suspicio hæc mea est, cum qua clarissimus Scarella dimicandum sumit, & experientias promit, quæ, ut ipse sub numero 12 citati paragraphi 250 judicat, *hanc sententiam plane falsitatis convincunt*. Hæc ipsa sunt Scarellæ verba, in quibus si humani hominis benignitas non omnino fortasse reluceat, hoc accidit forsân, quod ad has disputationes magis facit Philosophi severitas. At vero Philosophia sit, quantum velit, rigida, atque aspera, minime certe erit de Scarellæ urbanitate, atque humanitate dubitandum.

Verum ut accurate Scarellæ referamus objectionem, notandum est antea, me ostendisse desiderium quoddam perducendi meum dubium etiam *ad bononienses ampullas, ad guttas anglas, ad vermes montanarianos*. At præcise de bononiensibus ampullis loquendo ipse mihi se se opponit. Et maxima difficultas, ob quam Scarella meam opinionem oppugnat, & veluti falsam condemnat, ex multis experientiis ducitur, quas affirmat ipse probare *phialas in excipulo machinæ pneumaticæ exanthlato omni aere, tum qui intra phialas est, tum qui eas circumfluit, nihilominus dissilire perinde ac si experimentum in aere caperetur*. Satis demonstrat, ut arbitror, clarissimus Scarella se se adhuc mihi opponere propter guttas anglas, quæ pariter franguntur *in excipulo machinæ pneumaticæ exanthlato . . . aere*; & quodammodo objectionem extendere etiam ad mea vascula, quippe qui, sicuti dictum est supra, libenter credit ipsa non multum ab ampullis bononiensibus discrepare. Ingeniosus, uti est, Philosophus systema sibi comparavit, quo pari modo explicare confusus est, & ampullarum fracturas, & guttarum, & vasculorum. De vermibus montanarianis nihil meminit: hi Scarellæ fortasse guttis anglis nimium similes videbantur.

Nunc, Sodales sapientissimi, paullatim declarabo quid sentiam de harum fracturarum causis, quo in faciendo, Scarellæ objectionem, pro viribus quidem meis, tollere curabo. Et dico primum, postquam objerit tempus, quod non

bre-

breve est, si mea vitra considerentur, brevissimum est autem, aut ampullas, aut guttas, aut vermes considerando, postquam, inquam, abierit tempus, quo vis lapilli five cadentis, five prementis, vel vis alia, quæcumque sit, cum resistantia vitri pugnavit, & vitrum aliquantisper finditur, utique videtur vis nova gigni, quæ magis magisque celerem, atque præcipitem fracturam reddit. Quod quamvis non tantum appareat in meis vitris, apparet maxime in ampullis, in guttis, in vermibus. Et si experientia ostendat vim hanc excitari etiam *in excipulo machinæ pneumaticæ exanthlato aere*, concedere non dubitabo in vitro ipso principium delitescere vis cujusdam fracturæ adjuvantis. Quod si ex hoc argumentetur Scarella me ad ejus opinionem accessurum esse, eum rogo ut malit animadvertere me meam sequi opinionem, quam antiquitus proposui. Non ipsi displiceat veterem sermonem meum iterum legere, & prope finem inveniet, me non tantum aeris externi ingressui tribuere, ut non sim contentus huic causæ alias adhuc adjungere: sic enim illic dico; *Nec nego idcirco in ampullas bononienses diffringendas, in guttas, in vermes, alias præter hanc concurrere causas. Statuo potius & hanc concurrere cum aliis*. Quam ob rem non satis intelligo, cur Scarella aeris ingressum opinionem Casalii appellaverit, non alteram: nisi hoc ipse fecerit, ut occasionem quamdam captaret differendi mecum, sicque me in doctissimum ejus librum introducendi, ob quem honorem vere summum ipsius liberalitati gratias habeo quam maximas.

Verum ut clarius explicem, abditam hanc causam, quam admittendam esse censeo, quæque valde differt ab illa, quam Scarella posuit, hac methodo procedam. Vitrum substantiam esse multo elasticam, minime dubitandum est. Celebris Thomas Hobbesius *in Capite V. Problematum Physicorum, in quo tractat de duro, & de molli*, præter quam quod a cæteris doctissimis rationibus, & observationibus summam vitri elasticitatem deducit, ejus etiam existentia argumentum colligit multo ingeniosum a continuo, & familiari phænomeno; mirabili scilicet reflectendi facultate, qua specula vel levissimas objectorum imagines remittunt. Neque amplius credo demonstrationem elasticitatis vitri desiderandam esse post id, quod divinus docuit Newtonus *in scholio ad calcem legum motus adiuncto*. Ibi exponit Auctor, ut probe scitis, doctissima experi-
men-

essentialem ejus proprietatem juncti, continue eliduntur. Itaque vis tota hujus mirabilis elastri contineatur oportet in genere virium mortuarum, nisi nova aliqua supervenerit causa, per quam reviviscat. Atque ex hoc sequi debet, cum frigidior sit locus, in quo ponitur vitrum e fornace vix sublatum, majorem esse, & constipationem ejus externam, & internam dilatationem. At locus hic tam frigidus esse potest, ut in ipso vitrum illico dissiliat: elasticitas enim se in vim mortuam non convertit, nisi vim æqualem inveniat, quæ ei opponitur: & tanta excitari potest elasticitas, ut pellatur, & frangatur, & quaquaversus diffundatur vitrum, antequam frigescente obdurescat. Sic contra, animadvertendo, quicumque sit locus, in quo frigescat vitrum, intra aliquid medium semper ipsam frigescere, & medium hoc considerando dico, eum rarius fuerit medium, & ideo ad se se calefaciendum promptius, vitrum in eo contentum difficilius dissilire, minusque externas ejus partes constipari, & minus distrahi internas. Quocirca dissimiles habebuntur temperaturæ in vitro, vel ipsum immergendo in solum aerem aliquantulum a fornace distantem, quod bononiensibus ampullis evenit, vel in oleum, vel in liquefactam ceram, vel in aquam, uti videre est in experimentis a doctissimis viris Francisco Redio, & Geminiano Montanario institutis de guttis & de vermibus, & in memorata ejusdem Montanarii Epistola descriptis. Hinc etiam colligere oportet, mea vitra, quæ a fornacis igne ad calorem hypocausti transferunt, quod idem est ac dicere vitra, quæ fuerunt immersa in medium, & calidum, & rarum, debuisse consequenter affici temperatura, si quæ est, minima. In elasticitate igitur externarum partium valde contractarum, & internarum maxime distractarum constitui potest, ni fallor, principium intrinsicum illius propensionis, quam habet temperatum vitrum ad se se dirumpendum: quapropter sufficit causa vel levissima, quæ in internas ejus partes agat ob distractionem gracilissimas, easque tantillum perturbet, ut internæ simul, ac externæ, sublato æquilibrio, vim suam explicent, eamque aliæ vicissim contra alias exerceant, & partes a partibus dividantur, & amoveantur. Sicque totum, quod ex illis compositum erat, resolvatur, & pereat. Ad hanc amplectendam sententiam addit mihi animam maximorum Philosophorum exemplum, quippe qui, etsi nonnihil differant in appli-

cationis methodo, uniformes tamen in hoc sunt, quod elasticitati vitri per temperaturam extra statum naturalis tensionis positi causam crepitus ejus, & promptæ diffractionis tribuunt. Videatur id, quod a celebri Geminiano Montanario notatum fuit in *paragraphis XXIII., & XXIV. alterius de istis vitris epistolæ Ferdinando II. Magno Etruriæ Duci directæ.* Sapientissimus Thomas Hobbesius in *supracitato Dialogo*, postquam subtilem, atque doctam opinionem proposuit de dispositione partium guttarum anglarum, affirmat guttas hasce dirumpi, & dissilire (istis præcise verbis utitur Auctor) in *particulas innumerabiles, velut arcus fragilis, & nimium tensus rupto nervo.* Samuel Clarkius Philosophus vere summus in *annotatione ad paragraphum 52 capitis 22 partis I. Physicæ Jacobi Rouaultii* sic ait; *Quoniam vitrum est corpus vi resiliendi præditum, probabile est lacrimam hanc vitream ea ratione confringi, qua arcus chalybeus subito remissus nonnunquam dissilit.* Et puto etiam opinionem doctissime, atque elegantissime a Sodali nostro Jacobo Belgrado in *Acroasi de Phialis Vitreis* propositam, & a Sodali altero Ludovico Blancono in *prima ex suis Epistolis Physicis* tam studiose declaratam, & illustratam non multum ab opinione mea discrepare.

Sed plusquam satis dictum fuit, ut intelligat Scarella me negaturum minime esse in temperato vitro principium intrinsecum, e quo adhuc pendeat impetuosa, & præceps ejus fractura, & consequenter me esse concessurum vel in *excipulo machinæ pneumaticæ exanthlato.... aere* vitrum temperatum violenter diffringi. Verum ex hoc non tam libenter argumentabor negandum omnino esse, aliquid in hoc phænomeno ab ingressu aeris suppeditari. De qua antiqua mea dubitatione antequam quasdam novas rationes exhibeam, precor dignissimum Scarellam, ut animadvertat Philosophos magni nominis non deesse, qui aeris externi ingressui fracturas istas crediderint: immo crediderunt majori audacia, quam ego: nam ipsi non suspicati fuere causam hanc *concurrere cum aliis, sed statuerunt ab hac sola effectum absolute deduci.* Petrus Polinierius in *experimentis Physicis* interim dum explicationem experimenti XVII. exponit, quod nimirum in gutta angla versatur, sic ait, *quando frangatur extremitas.... guttæ, vel quando aliter in ea fit apertio quædam, materia subtilior aere, quem spiramus, & densior materia, quæ in ipsa includitur,...*

ipsam copiose & vehementer per factam apertionem ingreditur; quoniam ad ingrediendum pellitur ab illa, quæ eam circumdat. Et paullo post considerans Auctor guttam dirumpi in vacuo machinæ pneumaticæ, & etiam frangi vel immerfam in aqua, vel in quodam alio fluido, addit hoc; quia aer iste subtilis, qui exanthlari nequit, quique inter fluida illabitur, impetu ingreditur in has guttas. Jacobus Roaultius in articulo 52 capituli 22 ex parte I. suæ Physicæ hæc promit de gutta, quæ referam verbis celeberrimi Clarkii, qui Physicam Roaultii, quam doctissimis notis ornavit, latine reddidit; cum fastigiatus illius apex abrumpitur . . . reteguntur ampliorum meatuum introitus; qua cum crassiores materiæ subtilis partes irruant, indeque ad omnem superficiem per meatus in formam conii fastigiatos summa celeritate ferantur; vitri partes disiciantur quaquaversum, & in tenuissimum pulverem comminuantur necesse est. Et sane colligitur ex articulo 36 ejusdem capituli, & ex articulo 11 antecedentis Auctorem, cum dicat ingressum partium crassiorum materiæ subtilis, nihil aliud intelligere præter aeris ingressum. Celeberrimus Clarkius ad hanc crepitis, & diffractionis vitri causam elasticitatem adjunxit ipsius vitri. Ita Clarkius, non Roaultius, cui satis esse videbatur aeris ingressus. Neque fileam de Patre Antonio Maria Copelloto jam clarissimo Professore in Mediolanensi Sancti Alexandri Universitate. Hic in doctissimis thesibus, quas publice ejus Discipuli anno 1759 propugnabant, loquens primum de guttis, deinde de ampullis magis magisque meum dubium de aeris ingressu auxit, cum in hoc ille veram ponens phænomeni causam, istam exprimere dedignatus non fuerit per ipsa mea verba, ab antiquo meo sermone fideliter translata: quod pignus non unicum fuit amicitix, qua me prosequitur vir doctus, & humanus. Mentionem adhuc facere deberem de Patre Joanne Maria a Turre, quippe qui in paragraphis 1082, & 1083 sui Operis, cui titulus inscribitur *Scientia Naturæ*, nisi aeris ingressum admittat, veluti solam causam explosionis guttarum, & ampullarum, ipsum admittit saltem, veluti primam, & præcipuam.

Sed post exempla tam illustria, & auctoritates tam graves tamen a Scarella non postulo, nisi eum finire causam istam concurrere cum aliis. Et primum, quamvis concedam in vacuo machinæ pneumaticæ haberi explosionem sive guttæ, sive ampullæ, mihi dicat clarissimus oppugnator, an ab hoc satis

fatis tute deduci possit aerem in phœnomeno nihil præstare. Vacuum machinæ pneumaticæ non existimatur esse vacuum absolutum, sed vacuum relativum, in quo & est aer, & est in eo sensibilibiter, uti ostendit ascensus hydrargiri in barometro machinæ juncto; & in eo est aer densior illo, qui latere potest in interstitiis vitri, quod ardorem fornacis jam sustinuit: nisi forsan dicamus, vim ignis solvisse, & destruxisse omnem aerem, quem silex, & magis etiam sal alcali in vitri mixturam induxerunt, & ideo vitri interstitia omni aere quantumvis tenui, & insensibili carere. Animadvertatur ergo, cum intra vacuum machinæ pneumaticæ apertio fiat in vitro, quæ nonnulla detegat interstitia, an desit aer, qui in interstitia percurrat, atque fracturam adjuvet, & crepitum. Nec deerit saltem, sicuti Polinierius notavit, *aer iste subtilis, qui exanthlari nequit.*

Videtur igitur ab experimentis institutis in excipulo machinæ pneumaticæ non satis colligi posse exclusio opinionis de aeris ingressu. At displicerēt ne multum Scarellæ, si quis adesset affirmans ab iisdem experimentis contrarium potius deduci? Queratur Scarella de doctissimo Mariotto, qui in suo *Specimine de aeris Natura* se se perducit ad examen guttæ anglæ, cujus diffractionem, & crepitum argumentatur, & a tremore partium ob earum elasticitatem, & ab ipsarum partium nexu admodum parvo, & ab irruptione aeris in interstitia. Quod Auctor probare contendit, narrans deinde experimenta nonnulla, quorum quartum ostendit guttas dirumpi etiam in machina facta vacuo; *quo in casu*, ait Auctor, *cum nisi duæ hujus effectus causæ agant, idest parvus nexus partium, & tremor ob earum elasticitatem, vitri fragmina ad exiguas vix distantias funduntur.* Ita doctissimus Philosophus utitur vacuo, non ad excludendum aeris ingressum, sed ad ipsum demonstrandum.

Neque præterire debeo, Sodales sapientissimi, maximo me affectum fuisse desiderio hujus videndi experimenti, verum spem omnem auferebat haud satis ampla recipientium capacitas. Attamen, ut aliquam saltem differentiam in phœnomeno cognoscerem, cum aer esset aliquo modo vel attenuatus, vel quadam alia materia implicatus, in mentem mihi venit frangere guttas nonnullas immerfas in aqua. Scio utique notatum esse a clarissimo Saverieno, sæpe in hac experientia, dum diffilit gutta in aqua immerfa, vas vitreum simul dissilire aquam continens. Imo relatum fuit paucos ante menses dignissimo

Sodali nostro Petronio Matteuccio a docto Viro e Societate Jesu proxime observatam fuisse Brixia hanc duplicem simultaneam fracturam, quæ insuper, ut referebatur, strepitum edebat similem explosioni illius parvæ bombardæ, quæ pistolla audit; atque experientiam ipsam illic jam considerari uti phœnomenon constans. Nihilominus placuit mihi experimentis operam dare; quod agens Socium habui supralaudatum Matteuccium. Nulla interea sensibilis differentia apparuit, vel disrupta fuisset gutta in vase vitreo aqua vacuo, vel in ipso vase aqua pleno, præter fragorem aliquanto majorem in primo casu, quam in secundo. Cæterum nec Matteuccio, nec mihi unquam se prodidit fractura vasorum vitreorum, quæ & aquam, & dissilientem guttam continebant, etsi de horum speciebus bene multis periculum fecimus, mutantibus pluries, & vitri substantiam, & parietum densitatem, & vasorum figuram, & magnitudinem, & frangentes guttas modo apicem extra aquam extollentes, modo aqua omnino immerfas. Placuit nobis etiam, præter guttas anglas, frangi intra aquam ampullas bononienfes. Nec tamen in hoc altero experimentorum genere vasa aquam capientia disrumpebantur. Ampullæ vero fractura videbatur tardius fieri. Fragor vix sensibilis. Ampulla una rimas dedit ita eleganter dispositas, ut videretur fuisse in ejus fundo flos venustissimus delineatus. Sed ad differentiam fracturarum redeundo, sive guttarum, sive etiam ampullarum, quæ a diminuta aeris actione expectabatur, sane video me eam forte potuisse majori spe investigare, si aqua distillata usus fuisset, eamque etiam expurgavissem ope machinæ pneumaticæ, prout possibile esset, ab omnibus aeris reliquiis, & dirupissem aut guttam, aut ampullam posita hac eadem aqua in vacuo: sed alias forsitan occasio mihi erit ad hoc confugiendum experimentum, sique usque adhuc quæsitam differentiam inspicere ipse nequivi, satis superque erit celebrem Mariottum eam per fracturam guttæ in vacuo machinæ pneumaticæ cognovisse.

At vero etiamsi nulla prorsus differentia prodiret, etiamsi nihil tribuere vellemus, vel residuo aeris in recipiente remanentis, vel aeri aquæ mixto, plura alia, ut credo, superessent argumenta, ut demonstraretur in illis saltem effectibus, qui intra liberum aerem accidunt, causæ eorum partem ipsum aerem esse. Nisi leges & Hydraulicæ, & Aerometricæ

variant, neque aer proprietates suas amittat, minime dubitandum est, quin ipse superficies corporum, ideoque etiam vitrorum, circumdans, easque premens, si in rimam quamdam incurrat, neque ex ea fluidum aliud saltem æque premens ipsi opponatur, ingrediatur illico in diffusum corpus, (quid est enim, quod se se illi satis opponat?) & majori ingrediatur impetu, cum vel major erit ejus pressio, vel minor pressio fluidi interni, quod ei opponitur; & minori impetu, cum aut pressio ejus sit minor, aut pressio fluidi oppositi major. Ex hoc principio veluti consequentiæ deveniunt experimenta a doctissimo Sodali nostro Jacobo Belgrado instituta in sphaerulis vitreis aere extenuatissimo plenis; quæ, cum in eas aeris externi ingressus permittatur, magno strepitu diffiliunt. Hæc aliaque elegantissima experimenta Auctor in prima ex suis epistolis *de Rebus Physicis*, & *de Monumentis antiquis* describit. Sed ut idem applicemus principium ad temperata vitra, remanet tantum expendere, an in temperatis vitris hæc inveniuntur interstitia, vel vacua, vel materiæ exilissimæ referta. Quæ interstitia, etsi a temperaturarum vitrorum constructione, nempe ab interna eorum raritate facile deducenda essent, hæc gaudeo ab ipsa experientia ostendi. Quoniam fortasse prolixus jam fui magis, quam par erat, phænomena atque experimenta quamplurima prætermittam de aliis substantiis, quæ ope ignis temperaturam contrahunt: quæque saltem valerent, ut demonstrationes ab analogia. Atque hæc debeo Collegæ nostro Herculi Lellio Viro de multis rebus perito, de his autem peritissimo. Sed veniam statim ad experimenta nonnulla, quæ in temperato vitro ipse suscepi. De bononiensibus ampullis periculum eodem modo facere aggressus sum, quo Montanarius in citata epistola Ferdinando II. de guttibus anglis se fecisse affirmavit. Sex nempe bononienses ampullas sumpsi, atque diligenter examinavi, primum quod uniuscujusque esset pondus in aere, deinde quod esset in aqua, sicque a ponderum decremento cognovi, quantum esset pondus voluminis aquæ æqualis volumini vitri cujusque ampullæ. Postea supra carbones candentes unamquamque ampullam imponens, ut candesceret & ipsa, & sinens ut, carbonibus paulatim se se extinguentibus, ipsa quoque paulatim frigeret, conatus sum ab unaquaque ampulla temperaturam auferre. Dein pondus iterum exploravi cujusque ampullæ tum in aere,

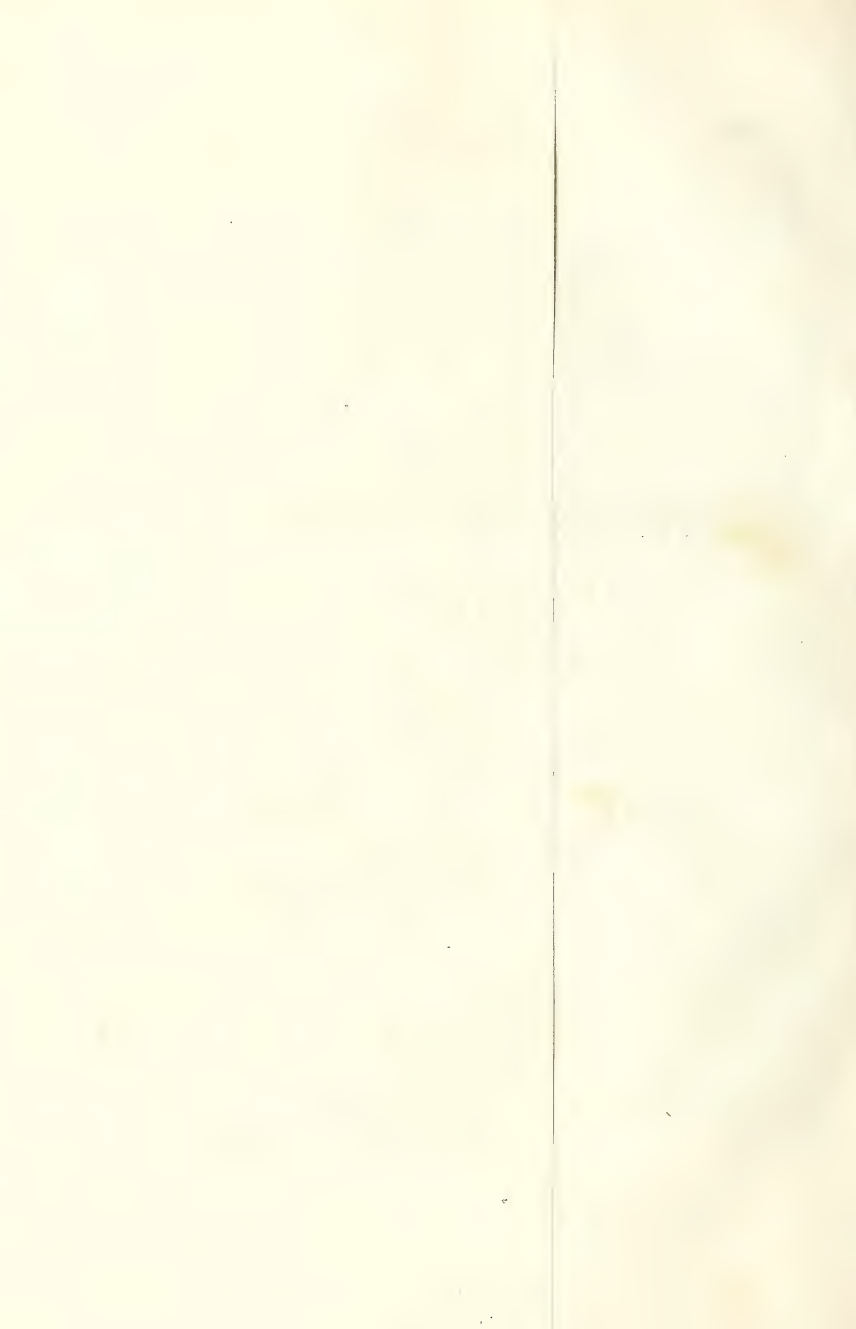
cum

eum in aqua, ex quo intelligens ego, quod pondus esset voluminis aquæ aequalis volumini vitri cuiusque ampullæ temperatura sublata, satis perspicue observavi, pondus aquæ notabiliter diminutum esse, ideoque diminutum notabiliter esse volumen vitri, sicque auctam esse specificam vitri gravitatem, & consequenter densitatem ipsius. Densitas autem acquisita amissam raritatem demonstrat: idest patefacit, jam fuisse in temperato vitro poros, quorum vel numerus magnus erat, vel magna amplitudo, quod idem est ac dicere, sive una ratione, sive altera fuisse in vitro interstitia. Potius quam unam post aliam experientias de istis sex ampullis narrarem, placuit mihi, ut brevis in uno saltem loco viderer, has omnes committere tabulæ, quam nunc vobis exhibeo, quamque cupio huic meo sermoni adjungi. Gratus animus & obsequium, quibus afficere obstringor clarissimos Sodales nostros Lauram Bassiam, & Josephum Verattum ejus Conjugem præterire non sinunt me absque eorum directione, & auxilio nullum ex hisce experimentis confecisse. Imo cum tantum in his fuerit Sodalium opus, cumque videatur, ut ita dicam, Montanarius hæc suggestisse, habeantur ista, si placeat, non ut mea, sed ut experimenta ab ipsis Montanario, & Bassia, & Veratto, a tribus scilicet perillustribus sane Philosophis, instituta.

In his autem experimentis nonnulla breviter animadvertenda sunt. Primum: cum Montanarius in guttarum experimentis variis temporibus confectis expendisset gravitatem specificam aquæ, intra quam guttas librabat, ne parvæ adhuc differentiæ negligenterentur; ego quidem volui in experimentis ampullarum altitudines thermometri, & barometri notare, quæ indicium præbere poterant de quadam differentia ponderis tum aeris, cum aquæ, & ideo ponderis corporum, quæ vel in aere, vel in aqua ponderabantur. Secundum: Montanarius non invenit conspersionem guttarum semper fieri proportionem constanti. In ampullarum experimentis visa est conspersione variabilior. Varietas aliqua tribui potest differentiis vitrorum qualitatibus, & ampullarum figuris: varietatem autem magnam censendum est oriri a methodo, qua ampullæ temperatura orbata sunt, atque a quodam forsan eventu minime observato, qui methodum ipsam magis perturbaverit; auferebatur enim, ut dictum est supra, temperatura ope carbonum candentium, qui sensim extinguebantur, neque dubitan-

Tabula exhibens instituta in bononiensibus ampullis experimenta.

Ampulla.	Ampullæ in naturali earum statu explorabantur.						Ampullæ explorabantur temperatura sublata.						
	Pondus Ampullæ in aere.	Pondus Ampullæ in aqua.	Differentia ponderum: seu pondus voluminis aquæ æqualis volumini ampullæ.	Pondus voluminis vitri æqualis volumini aquæ, cujus pondus grana 1000.	Thermometrum Reomurianum.	Barometrum.	Pondus Ampullæ in aere.	Pondus Ampullæ in aqua.	Differentia ponderum: seu pondus voluminis aquæ æqualis volumini ampullæ.	Pondus voluminis vitri æqualis volumini aquæ, cujus pondus grana 1000.	Thermometrum Reomurianum.	Barometrum.	
	Grana.	Grana.	Grana.	Grana.	Gradus supra congelationem.	Dig. Lin.	Grana.	Grana.	Grana.	Grana.	Gradus supra congelationem.	Dig. Lin.	
I.	2286	1382 + $\frac{5}{10}$	903 + $\frac{5}{10}$	2532 + $\frac{9}{10}$	19	27 . 5							Vitrum supra carbones candentes fufum est.
II.	2216	1339	877	2525 + $\frac{6}{10}$	19	27 . 5	2217	1356	861	2574 + $\frac{9}{10}$	pene 20	27 . 5	Ampulla multum ignem sustinuit. Sublata temperatura immissum in ampullam silicis frustulum nihil præstitit. Binos post dies inventa est in ampullæ fundo rima semicircularis.
III.	1890	1144	742	2547 + $\frac{8}{10}$	pene 20	27 . 5	1889	1149	740	2552 + $\frac{7}{10}$	pene 20	27 . 5	Ampulla hæc minorem ignem concepit. Reliqua ut supra, præterquam quod rima alia perpendiculariter extollebatur ex uno latere rimæ semicircularis: atque parva etiam rima horizontalis in opposita parte apparebat.
IV.	1915 + $\frac{5}{10}$	1160	755 + $\frac{3}{10}$	2535 + $\frac{4}{10}$	20	27 . 5 + $\frac{3}{2}$	1920	1163	757	2536 + $\frac{2}{10}$	non observatum.	non observatum.	Factum fuit, ut ampulla candesceret, atque in eodem statu media hora remaneret: sub cuius temporis sine rima apparuit partem imam colli amplectens, ipsumque tandem a reliquo ampullæ corpore divisit. Frigefacta ampulla, immittitur in eam filix: sed frustra.
V.	2233	1351	882	2531 + $\frac{7}{10}$	18 + $\frac{3}{2}$	27 .	2288	1360	868	2566 + $\frac{8}{10}$	17	27 . 5	Sustinuit ampulla ignem viginti horis. In frigefactam ampullam immisus filix nihil prodit.
VI.	1830	1107	723	2531 + $\frac{6}{10}$	18 + $\frac{3}{2}$	27 .	1830 + $\frac{5}{10}$	1114	316 + $\frac{5}{10}$	2783 + $\frac{5}{10}$	17	27 . 5	Ampullæ figura pene cylindracea erat; parietes ejus multo crassiores. Sustinuit ampulla ignem viginti horis. Ampulla frigefacta, inque eam immisso filice, nihil observatum est. Verum post duo minuta rimam ellipticam ampulla dedit.



tandum est, quin fornacis hypocaustum tutiorem methodum suppeditasset. Fornax vero experimentorum tempore filebat.

Postquam demonstratum est, in vitris interstitia latere, & in temperatis vel majora, vel majori numero, sicque ratio quædam assignata, qua minus inconsideratum videatur meum dubium de aeris ingressu, licebit ne duo tantum petere? Et sane precor æquissimum Scarellam ne hæc etiam nuncupet opiniones, quæ ego ne dubia quidem appellare audeo.

Postulo primo loco, num aer, cujus copia multo major, ut probant celebres observationes, & doctrinæ Halesii, in vegetabilibus hæret, quam in lapideis, si tamen aer post ardorem fusionis in substantia vitri servetur, possit esse causa, ob quam vitra viridia fragiliora vitris albis appareant. Cum enim major quantitas salis alcali, minorque silicis ad hæc componenda adhibeantur, quam ad illa, vidèri potest majorem quantitatem aeris colligi in interstitiis vitrorum alborum, & ideo interstitia minus vacua esse, & magis resistentia: in interstitiis vitrorum viridum contra.

Peto ulterius, si quidem vera sit observatio, quam nisi judicarem notissimam, & familiarem, experientiæ multæ præmanibus mihi essent ab humanitate supralaudati Herculis Lellii exhibitæ, ut eam abunde confirmarem: idest si verum sit vitra, in quibus adest rima quædam, ut plurimum hieme omnino dividi, & dirumpi, peto, inquam, utrum una ex causis hujus extremæ distractionis, & complementi, ut sic dicam, fracturæ censerî possit aer, qui hiemali tempore densior fit, & idcirco majorem exercet gravitationem, proindeque majori vi se se in vitrorum rimas immittit.

At finem tandem habeat sermo nimis longus, & forsan inutilis. Timeo, Sodales doctissimi, si quando, nunc certe me multo vos tædio affecisse. Et pariter timeo me molestum futurum esse clarissimo Scarellæ, si ejus benignitas eum ipsum suadeat, ut sermonem hunc legere non dedignetur. Quod si accidat, Virum clarissimum rogo, ut postremo animadvertat, me de systemate, quod ipse approbat, nec verbum quidem fecisse: clarum autem est, cum existimem systema alterum tuendum esse, quamdam fortasse difficultatem mihi non deficere contra suum. Verum numquam loqui suscepissem, ut objicerem tanto Viro: fati-superque mihi erit, si quis credat sermonem hunc me aliquo modo ab ejus strenuis objectionibus defendisse.

VINCENTII RICCATI.

De Æquivalentia Potentiarum per principia metaphysica demonstrata.

EPISTOLA

VINCENTIUS RICCATUS DOMINICO PAVERI SOC. JESU
S. P. D.

CUR novas mihi, mi Dominice, molestias creas? Dixi tibi coram non semel, ac iterum, sed centies, ac milies, me ignorare, utrum leges mechanicæ necessariæ sint, an contingentes solum, & congruæ. Jamdium me nosse, meamque facilitatem, propter quam identidem in non paucorum reprehensionem incurro. Quæ scio, profero non invitus; quæ autem nescio, æque non invitus, me nescire, palam confiteor. Cur nunc datis litteris de eadem re pergis interrogare? scilicet ut quod ore tenuis dixi me nescire, illud quoque profitear litteris datis? Mehercule nihil pudet. Non flagito abs te, inquis, quæ nam ex duabus opinionibus vera sit, quod, te nescire, concedo; sed cuinam animum geras propensiores, quod non negabis, te scire. Si in proferendis opinionibus meis difficilis videor, sin minus laudem, saltem veniam me mereri existimo. Nam in illis quoque me lapsum esse expertus sum, quæ certo scire putabam: quanto facilius erit errare a veritate in illis, quæ in opinione versantur. Verum ne mihi succenseas, quod minaris: non sine magna errandi formidine ajo, me in eam opinionem libentius ferri, quæ leges mechanicas ita necessarias statuit, ut aliis substitutis maxima oriretur in natura rerum confusio. Quamquam temeritatis meæ me jam pœnitet; tamen ne profus temere videar loqui, quibus rationum momentis adducar, diligenter exponam.

Leges mechanicæ, quæ hactenus detectæ sunt, vel ad motum pertineant, vel ad æquilibrium, plerumque probari non possunt, nisi initium ducamus a principio, quod experientia suppeditat. Experimenta adhibentur tuta illa quidem, & ab omni dubitatione sejuncta; sed evidentiam creant solum physicam,

ficam, quæ rem offendit ita esse, non autem necessario esse. Atamen inter tot leges a mechanicis receptas, quas nulla alia ratione probare scimus, una existit, quam solis adhibitis principiis metaphysicis, summaque evidentia præditis, demonstramus, quamque proinde necessariam esse audacter pronunciamus. Lex ista docet, duabus potentiis uni eidemque puncto applicatis, quas per latera parallelogrammi exprimimus, eam æquivalere, quæ a diagonali repræsentatur. Inventum hoc, quod facio plurimi, acceptum referimus Danieli Bernoullio viro ingeniosissimo, & editum legitur in *Academiæ Petropolitanz Tomo primo*. Illud tamen ægre ferebam, aliquot propositiones, quæ a Bernoullio probantur, calculum includere longam, atque difficilem. Quare in eo posui operam, ut eandem facilius demonstrarem, atque elegantius. Res omnis ex sententia cessit. Itaque ut hoc genus demonstrationis cognoscatur magis, quando me coegisti, sine ut seriem demonstrationis exponam integram: quod præstans a Bernoulliana methodo ne latum quidem unguem recedam, sed tantum demonstrationibus facilitatem maximam conciliabo: immo omnia expediam per solam geometriam linearem, neque unquam species analyticas advocabo, hoc solum contentus ut bis, aut ter indicem in scholiis appositis, quo pacto propositio facilius per analysim demonstraretur. Jam ad rem propositam accedens hæc axiomatica præmitto.

Axioma primum. Potentia æquivalens duabus potentiis uni puncto applicatis, & ad quemcumque angulum concurrentibus, æqualis est, & contraria illi, quæ eandem in æquilibrio sustineret.

Axioma alterum. Potentia æquivalens duabus conspirantibus, seu eadem directione præditis, earum summam exæquat.

Axioma tertium. Potentia æquipollens duabus, quæ prorsus contrariæ sint, harum differentia æqualis est. Quare duarum potentiarum, quæ æquales sint, & contrariæ, æquivalens nulla est.

Axioma quartum. Directio potentia æquivalentis duabus æqualibus uni puncto applicatis angulum quemcumque, quem ipsæ faciunt, dividit bifariam.

Axioma quintum. Par potentiarum in puncto concurrentium habeat æquipollentem, quæ dividat angulum ab ipsis enectum: manifestum est, par aliud potentiarum proportio-

nalium eundem angulum efficientium habere æquipollentem proportionalem, quæ angulum similiter dividit.

Axioma sextum. Potentiæ æquivalentes pro æquivalentibus semper substitui possunt.

Axioma septimum. Si potentiis æquivalentibus æquivalentes addas, vel demas, omnes vel residuæ erunt æquivalentes.

Axioma octavum. Si angulum, quem duæ potentiæ æquales concurrentes faciunt, minuas, & facias acutiorem, crescet potentia æquipollens, si angulum augeas, potentia æquivalens minuetur.

Axioma nonum. Tres potentiæ æquales, quæ faciant inter se angulos æquales grad. 120, quiescunt in æquilibrio, quia nulla est potior ratio, cur una reliquis prævaleat. Applicatæ sint puncto P (*Fig. 1.*) potentiæ æquales PA, PB, PD, ita ut anguli APB, APD, BPD sint omnes graduum 120, idest æquent partem tertiam rectorum quatuor: quum paria sint omnia, necessario in æquilibrio se sustinebunt.

Corollarium primum. Ex axiomate primo colligitur, potentiam æquivalentem duabus PA, PB esse PC æqualem, & contrariam PD, quæ dividet angulum APB bifariam, & quæ cuilibet ex duabus PA, PB æqualis erit.

Corollarium secundum. Jungantur AC, BC. Quoniam angulus APC grad. 60 est angulus trianguli æquilateri, & PA, PC æquales sunt, PAC erit triangulum æquilaterum; idem dicatur de triangulo PBC: igitur figura quadrilatera PACB est parallelogrammum, immo rhombus, a cujus diagonali PC exprimitur potentia æquivalens duabus PA, PB.

Corollarium tertium. Agatur altera diameter AB, quæ secabit PC bifariam, & ad angulos rectos in puncto E: igitur duabus PA, PB æquivalet potentia 2. PE: quæ PE normalis est rectæ AB.

Theorema primum. Duabus potentiis æqualibus concurrentibus ad angulum rectum æquivalet ea, quæ exprimitur per diametrum quadrati, cujus ipsæ sunt latera.

Demonstratio. Si potentiæ æquales PA, PB (*Fig. 2.*) coeant in angulo recto, completo quadrato PACB, ductaque diagonali PC, hæc erit potentia eisdem æquivalens. Quoniam ex ax. quarto potentia æquivalens duabus PA, PB bifariam debet secare angulum APB ejus directio super diametrum cadat, necesse est. Quod si eidem æqualis non est, erit vel

major vel minor. Sit primo potentia æquivalens PK major PC . Ducatur AB secans diametrum PC in E bifariam, & ad angulos rectos. Constat PE esse tertiam proportionalem post PC , PA , seu PB : ergo quum PK supponatur major PC tertia proportionalis post PK , PA , seu PB erit minor PE . Sit PF , ductaque MN per punctum P normali diametro PC , abscinde PM , PN æquales PF . Quoniam duabus potentiis PA , PB supponitur æquivalere PK dividens angulum rectum bifariam, ex axiom. quinto duabus potentiis proportionalibus PM , PF æquivalerebit proportionalis PA ; similiter duabus PN , PF , æquipollebit PB . Igitur ex axiom. sexto substitutis æquivalentibus, quatuor potentiis PM , PN , PF , PF æquivalerebit PK : sed primæ duæ æquales sunt & contrariæ, & propterea æquivalentem habent nullam; duæ reliquæ sunt æquales & conspirantes, & habent pro æquivalente $2PF$: ergo $2PF$ æquivalet PK ; ergo quoniam conspirantes sunt, $2PF$ æquat PK : sed hoc est absurdum, quia quam PF sit minor PE , erit $2PF$ minor PC , qua major posita est PK : igitur potentia æquivalens PA , PB non potest esse major PC . Eodem prorsus ratiocinio probabo non posse esse minorem. Ergo eadem æqualis est. Q. E. D.

Corollarium. Quoniam PE est dimidium PC , constat potentiam $2PE$ æquivalere potentiis PA , PB .

Scholium primum. Analysis propositionem facilius ostendit. Nam vocata $=x$ æquipollente duabus PA , PB , quas voco $=a$, inveni tertiam proportionalem post x , a , quæ $=\frac{a^2}{x}$. Huic seca æqualem PM , PN , PF . Eodem modo probabitur quatuor potentias PM , PN , $2PF$ æquipollere x : ergo cum primæ duæ æquales sint, & contrariæ, fiet $2PF$ æquivalens x : ergo, quoniam sunt conspirantes, $2PF = x$, seu $\frac{2a^2}{x} = x$, seu $x = a\sqrt{2}$, hoc est AC diametro quadrati.

Scholium alterum. Producta CP ita ut $PD = PC$, manifestum est per axioma primum tres potentias PD , PB , PA quiescere in æquilibrio: igitur producta AP , ut $PO = PA$, constat $PO = PB$ esse æquivalentem duabus PD , PB , quæ sunt ut $\sqrt{2} : 1$, & angulum continent tribus semirectis æqualem: igitur in hac hypothefi æquivalens erit æqualis potentia minori PB , & cum eadem efficiet angulum rectum. Junge

DO, BO. Perſpicuum eſt, figuram DPBO eſſe parallelogrammum. Nam in duobus triangulis DPO, CPA duo latera duobus lateribus ſingula ſingulis æqualia ſunt, atque hæc continent angulos ad verticem: igitur triangula ſunt æqualia quoad omnia: ergo DO æqualis, & parallela AC; ſed hæc æqualis, & parallela PB: ergo DO æqualis, & parallela PB: ergo PD, BO æquales, & parallelae, & DPBO parallelogrammum. Vides in hoc caſu æquivalentem eſſe diagonalem parallelogrammi, cujus potentia ſunt latera. Hoc idem in aliis caſibus deinceps poſſem demonſtrare. Sed quum ſeries demonſtrationis his non indigeat, ſemel adnotare ſufficiet.

Lemma geometricum. Sit rhombus quicumque (Fig. 3.) PACB, cujus diametri PC, AB & bifariam, & normaliter ſe interſecant in E. Dividantur bifariam quatuor anguli APE, BPE, ACE, BCE, & formetur novus rhombus PFCG. Ex puncto F age FI parallelam AP, & FM parallelam EP: demum ex M duc MN parallelam AB, quæ ſecet diametrum in O. His effectis aſſe primum quadrilaterum PMFI eſſe rhombum ſimilem rhombo PFCG: deinde omnes PM, PI, PN, quæ ſunt æquales, eſſe tertias proportionales poſt CP, PF aut PG: poſtremo $PO + PI = PE$.

Demonſtratio. Angulus IFP æqualis eſt alterno MPF; ſed hic ex conſtructione æquat IPF: ergo $IFP = IPF$: ergo $IP = IF$: ſed figura IPMF eſt parallelogrammum: quum habeat igitur latera omnia æqualia, erit rhombus, qui ſine dubio ſimilis eſt rhombo PFCG, quum æquales ſint anguli MPI, FPG quippe qui ejuſdem FPE dupli. Quod erat primum demonſtrandum. Rhomborum ſimilitudo dat $CP : PF = PG$, ut hæc: $PM = PI = PN$. Quod erat alterum. Quoniam tam PI, quam OE eſt æqualis MF, erit $PI = EO$: ergo detracta OI remanet $PO = IE$: ergo addita PI eſt $PO + PI = PE$. Quod erat tertium.

Theorema ſecundum. Si duæ potentia æquales PA, PB habeant æquivalentem 2PE (hæc PE dividet AB æqualiter, & ad angulos rectos) duabus potentiis PF, PG dividendibus angulos bifariam, ut in lemmate præmiſſo, eadem 2PE æquivaleret.

Demonſtratio. Rhombi perficiantur ut antea. Si 2PE, aut PC non æquivaleret potentiis PF, PG, æquivalens erit aut major, aut minor. Sit primo major, eamque ſac PK,
fa-

factaque semmatis preparatione, sic ratiocinium instituo. Quoniam $PM = PI = PN$ est tertia proportionalis post PC , & $PF = PG$, tertia proportionalis post PK , & $PF = PG$ erit minor $PM = PI = PN$. Atqui PK ponitur æquivalere PF , PG : ergo PF æquivalere duabus minoribus quam PM , PI , & PG æquipollere duabus minoribus quam PN , PI ex axiom. quinto. Igitur PK æquivaleret quatuor minoribus quam PM , PN , & PI bis sumpta. Quoniam vero PA , PB æquivaleret $2PE$, duabus minoribus quam PM , PN æquivaleret minor quam $2PO$: igitur quum potentia conspirantes sint, duæ potentia minores quam $2PO$, $2PI$ debent non solum æquivalere, sed esse æquales PK : sed $PO + PI = PE$: ergo potentia minor $2PE$, seu PC æquabit PK , quæ supposita est major PC . Quod est absurdum. Eodem discursu probabo potentiam æquivalentem duabus PF , PG non esse minorem PC : ergo erit æqualis.

Scholium. Non longo analyseos circuitu theorema hoc demonstratur. Sit $PA = a$, $PF = b$, $PE = c$, æquivalens duabus PF , PG sit x . Pono PM , PI , PN tertias proportionales post x , b , ut sint $= \frac{bb}{x}$. Fiat $PA : PE :: PM : PO$ five analytice $a : c :: \frac{bb}{x} : PO = \frac{cbb}{ax}$. Igitur æquivalens $x =$

$\frac{abb}{x} + \frac{cbb}{ax}$, five $xx = \frac{abb \cdot a + c}{a}$. Ut cogitarum numerus minuatur, fac advertas, ex angulo APE diviso bifariam, oriri hanc analogiam $AP + PE : PE :: AE : FE$, aut analytice $a + c : c :: \sqrt{aa - cc} : \sqrt{bb - cc}$: ergo quadrando $\frac{a + c}{c} : c :: aa - cc : bb - cc$, & permutando, ac primos terminos dividendo per $a + c$, $a + c : a - c :: cc : bb - cc$, & componendo $a + c : 2a :: cc : bb$: ergo $\frac{a + c}{a} = \frac{2cc}{bb}$. Itaque facta substitutione habeo $xx = 4cc$, seu $x = 2c$. Q. E. D.

Theorema tertium. Duæ potentia æquales facientes angulum, denotante r angulo recto, qui continetur in alterutra ex seriebus r , $\frac{1}{2}r$, $\frac{1}{4}r$, $\frac{1}{8}r$, $\frac{1}{16}r$ &c. usque in infinitum $\frac{1}{2}r$, $\frac{1}{4}r$, $\frac{1}{8}r$, $\frac{1}{16}r$ &c. usque in infinitum habent pro æquipollente eam, quæ exprimitur per diametrum parallelogrammi, aut rhombi, cujus ipsa sunt latera.

Hu-

Hujusce theorematis demonstratio continetur in superiore: Nam si APB sit angulus rectus, potentiaæ æquales PA , PB æquivalent $2PE$. Facta divisione angulorum APE , BPE nascuntur duæ potentiaæ terminatæ ad eandem AB , quæ faciunt angulum $= \frac{1}{2}r$, quibus est æquivalens $2PE$. Similiter si novi anguli dividantur, orientur potentiaæ æquales, quibus $2PE$ æquivaleret: sed in ista divisione potentiaæ nascentes successive angulos facient, qui in prima serie continentur: ergo potentiaæ hos angulos facientes terminatæ ad eandem AB habent semper pro æquivalente $2PE$: sed $2PE$ æqualis est diametro parallelogrammi, seu rhombi, cujus ipsæ sunt latera: ergo duabus potentiaæ æqualibus facientibus angulos primæ seriei æquivalet potentia expressa per diametrum parallelogrammi, cujus ipsæ sunt latera.

Si primum assumas potentias duas facientes angulum $= \frac{4}{3}r$, idem demonstrabis de potentia concurrentibus in angulis secundæ seriei.

Theorema quartum. Sint duo potentiarum æqualium paria, primum (*Fig. 4.*) PA , PB , alterum PF , PG terminata ad eandem lineam AB ; utriusque autem paris æquipollens sit $2PE$, a qua bifariam earum angulus dividitur; si anguli APF , BPG contineantur in alterutra ex seriebus theorematis superioris, ajo, divisio hisce angulis bifariam, potentia PH , PK æquivalere $2PE$.

Demonstratio. Producantur PF , PG in M , N , donec PM , PN æquent PA , PB . Jungantur AM , BN , & PH , PK producantur in O , Q , & ab his AM , BN bifariam, & normaliter dividantur. Agantur OQ , MN , quæ erunt parallelæ AB , & æqualiter secabuntur a PE producta in R , S . Quum anguli APM , BPN in seriebus superioribus contineantur, potentia duabus PA , PM æquivalet $2PO$; item potentia PB , PN æquivalet $2PQ$: igitur potentia $2PO$, $2PQ$ æquivalent quatuor PA , PB , PM , PN , sed primis duabus ex hypothese æquivalet $2PE$, duabus reliquis æquivalet $2PS$, quia quum supponamus potentia PF , PG æquivalere $2PE$, necesse est, ut duabus PM , PN proportionaliter æquivalet $2PS$: igitur potentia $2PO$, $2PQ$ sunt æquivalentes $2PE$, $2PS$, sive potentia PO , PQ æquivalent PE , PS , quarum utpote conspirantium summa capienda est:

atqui, quando ES bifariam in R divisa est, $PE + PS = 2PR$: ergo duabus potentiis æqualibus PO, PQ æquivaleret 2PR: igitur proportionaliter duabus potentiis PH, PK æquivaleret 2PE. Q. E. D.

Scholium. Supposui angulos APM, BPN contineri in alterutra ex seriebus superioris propositionis ea nimirum de causa, ut liceret deducere, duabus potentiis PA, PM æquivalere 2PO; & PB, PN æquivalere 2PQ. Caterum dummodo hæc æquivalentia subsistat, non deficiet vis demonstrationis, tametsi diversi sint anguli APM, BPN.

Theorema quintum. Si non minus potentiæ PH, PK, quam potentiæ PF, PG æquipolleant 2PE, & anguli HPF, KPG in prædictis seriebus contineantur, ductis PA, PB, quæ faciant angulos APH, BPK æquales HPF, KPG, aje potentiis PA, PB æquivalere eandem 2PE.

Demonstratio. Fiat eadem præparatio, quæ facta est in antecedente. Quoniam anguli HPF, KPG in superioribus seriebus continentur, etiam eorum dupli APF, BPG in iisdem seriebus includentur: ergo potentiæ PA, PM æquivalentem habebunt 2PO; similiter PB, PN æquivalentem habebunt 2PQ: igitur additis æquivalentibus quatuor PA, PB, PM, PN æquivalent 2PO, 2PQ: atqui quam PF, PG ponantur æquivalere 2PE, PM, PN æquivalent 2PS; & quum PH, PK æquivalent 2PE, etiam PO, PQ æquivalent 2PR: ergo PA, PB, 2PS æquivalent 4PR, atqui quando ES est divisa bifariam in R, est $4PR = 2PE + 2PS$: ergo PA, PB, 2PS æquivalent 2PE, 2PS, & deductis utrobique 2PS, quæ certe æquivalentes sunt, duæ PA, PB æquivalent 2PE. Q. E. D.

Scholium. Si potentiis PA, PM æquivalent 2PO; & potentiis PB, PN æquivalent 2PQ, vis demonstrationis integra manet, licet anguli APM, BPN superiores series non constituent.

Theorema sextum. Duarum potentiarum æqualium potentia æquivalens exprimitur per duplam perpendicularem cadentem in basim, quotiescumque angulus, quem efficiunt, componi possit vel per additionem, vel per deductionem ex angulis unius ex seriebus antea positis.

Demonstratio in superioribus propositionibus continetur. Nam sint potentiæ æquales PA, PB facientes angulum aut re-

ctum, aut æqualem quatuor tertiis partibus recti, qui a normali PE dividatur bifariam, tum anguli APE, BPE bifariam dividantur, tum novi anguli omnes iterum dividantur bifariam, atque ita in infinitum, omnia potentiarum paria habebunt pro æquipollente $2PE$. Similiter si anguli iterentur, tum novi dividantur bifariam, atque iterentur, atque ita deinceps, obtinebimus semper potentiarum æqualium paria, quibus eadem erit æquipollens $2PE$. Atqui ista omnia potentiarum paria coibunt in angulum, qui aut continebitur in altera ex duabus seriebus, aut efformabitur additis subductisque ferierum angulis: igitur potentiaæ duæ æquales, quæ concurrant in angulum, qui per additionem, aut subtractionem formetur ex angulis alterutrius feriei, habent pro æquipollente eam, quæ exprimitur a duplici perpendiculari in earum basim cadente. Q. E. D.

Lemma. Quicumque angulus constitui potest medius inter duos angulos, qui efformentur ab angulo recto, vel ab ejus partibus decrefcentibus in raticne subdupla, ita ut differentia cosinum dimidii horum angulorum, & dati dimidii, qui medius est, minor sit quacumque data. Idem efficere possum adhibendo angulum æquantem quatuor tertias partes unius recti, ejusque partes decrefcentes in ratione subdupla.

Lemma hoc passim ab aliis demonstratum invenies, & jamdiu cognitum est.

Theorema septimum. Duæ potentiaæ æquales PO, (Fig. 5.) PQ, quicumque sit angulus OPQ, habent pro æquivalente $2PR$, quæ æqualiter, & ad angulos rectos partitur OQ.

- *Demonstratio.* Si æquivalens duabus PO, PQ non est æqualis $2PR$, sit vel major, vel minor quantitate $2K$. Constituatür angulus OPQ inter duos APB, MPN, qui præditi sint conditionibus expositis in superiore lemme, ita ut differentia cosinum angulorum APR, OPR, item OPR, MPR sit minor K, sumpta PO pro sinu toto. Centro P intervallo PO describantur arcus circuli AM, BN, secantes lineas ductas in punctis A, M, B, N. Jungantur AB, MN, quæ productam PR secent in E, S. Si dicas æquivalentem duabus potentiis PO, PQ superare $2PR$ per $2K$, adverte æquivalentem duarum PM, PN æquare $2PS$, sive $2PR + 2RS$, sed RS minor est quam K: ergo æquivalens potentiarum PO, PQ major erit æquivalente duabus PM, PN: quod est contra axioma octa-

octavum. Si velis æquivalentem duabus PO , PQ deficere a $2PR$ per $2K$, adverte æquivalentem duabus PA , PB esse $2PE$, sive $2PR$ dempta $2RE$: sed RE minor est, quam K : ergo æquivalens duabus PO , PQ minor erit, quam æquivalens duabus PA , PB , quod eidem axiomati opponitur. Igitur potentiarum æqualium PO , PQ æquivalens est $2PR$. Q. E. D.

Corollarium. Potentiæ æquales itaque PF , PG , (*Fig. 3.*) quemcumque angulum faciant, habent pro æquivalente $2PE$, quæ cadet normaliter in FG . Quod si claudas parallelogrammum, & rhombum $FPGC$, & ducas diametrum PC ; hæc, quando æqualis est $2PE$, exprimet æquivalentem potentiarum æqualium PF , PG .

Theorema octavum. Æquivalens duabus potentiis concurrentibus in angulo recto æqualis est diametro rectanguli, cuius ipsæ sunt latera, quæcumque sit æquivalentis directio.

Demonstratio. Potentiæ applicatæ puncto P (*Fig. 6.*) ad angulos rectos sint PA , PB . Claudatur rectangulum $PACB$, ductaque diagonali PC sint ei perpendiculares AD , BE . Notum est PD esse tertiam proportionalem post PC , PA ; & PE tertiam proportionalem post PC , PB . His positis sit PK æquivalens duabus PA , PB , quæcumque sit ejus directio: ajo PK æquare PC . Si enim non æquat, erit vel major, vel minor. Sit primo major. Fiat ut $PK:PA::PA:PF$; item $PK:PB::PB:PI$: erunt PF , PI minores PD , PE , quando PK major supponitur quam PC . Tum ducta MN perpendiculari PK fiat ut $PK:PA::PB:PM = PN$. Quoniam tres PF , PM , PA ; item tres PN , PI , PB sunt proportionales tribus PA , PB , PK , & PA , PB dividunt angulos rectos FPM , NPI , perinde ac FK fecat angulum rectum AFB , si PK æquivalet duabus PA , PB ; PA æquivalet duabus PF , PM ; & PB duabus PN , PI : igitur PK æquivalet quatuor PF , PM , PN , PI : sed PM , PN sunt æquales, & contrariæ: ergo PK æquivalet duabus PF , PI . Quum autem tres istæ potentiæ sint conspirantes, debet PK æquare $PF + PI$: atqui $PF + PI$ est minor $FD + PE$, seu diametro PC : ergo PK minor PC : quod est absurdum, quum supposita fuerit major. Eodem ratiocinio probabo PK non esse minorem PC : igitur erit æqualis. Q. E. D.

Scholium. Analysis rem perficit nullo negotio. Sit enim

$PA = a$, $PB = b$, $PK = x$, erit $PF = \frac{aa}{x}$, & $PI = \frac{bb}{x}$: ergo
 $\frac{aa}{x} + \frac{bb}{x} = x$, seu $x = \sqrt{aa + bb}$, sed etiam $PC =$
 $\sqrt{aa + bb}$: ergo $x = PK = PC$. Q. E. D.

Theorema nonum. Æquivalens duarum potentiarum, quæ concurrant ad angulum rectum, quæque exprimentur per latera rectanguli, non solum quantitate æquat rectanguli diametrum, sed etiam positione cum eadem coincidit.

Demonstratio. Sint duæ potentix (Fig. 7.) PA , PB rectum angulum efficientes; claudatur rectangulum: ajo, æquivalentem esse PC . Si non, æquivalens sit PK , quæ ex superiore debet æquare PC . Addantur duæ potentix PD , FB æquales prioribus, sed prima contraria PA , secunda conspirans cum PB . Claufo parallelogrammo agatur diameter PE . Si duarum potentiarum PA , PB æquivalens est PK , duarum PD , PB æquivalens erit PH faciens angulum $HPB = KPB$. Erit autem $PK = PH$, quia æquant diametros rectangulorum æqualium. Juncta KH producat PB in F . Potentix PA , FD , & $2FB$ æquivalent duabus PK , PH : atqui PA , FD sunt æquales & contrariæ: ergo $2PB$ æquivalet PK , PH , sed istis æquivalet $2PE$: ergo $2PB$ æquivalet $2PE$: quæ quum sint in eadem directione æquales erunt: ergo $PB = PE$: quod est absurdum: nam quum $PK = PC$, est PE major PB . Si diceres æquivalentes PH , PK secare angulos AFC , DPE , idem absurdum oriretur, deberet enim PE esse minor PB : igitur æquivalentes aliæ esse non possunt, quam PC , PE . Q. E. D.

Theorema decimum. Duarum potentiarum (Fig. 8.) in quocumque angulo concurrentium æquivalens exprimitur a diametro parallelogrammi, cujus ipsæ sunt latera.

Demonstratio. Potentix duæ sint PA , PB . Claudatur parallelogrammum, diameter PC sufficit potentiam eisdem æquipollentem. Ducantur normales diametro AD , BE , & MPN , parallelæ AM , BN . Potentix PA ex superiore æquivalent PM , PD ; potentix PB æquivalent PN , PE : ergo potentiis PA , PB æquivalent quatuor PM , PN , PD , PE : sed primæ ex his æquales sunt, & contrariæ: ergo potentiis PA , PB æquivalent PD , PE : sed $PD + PE = PC$: ergo potentiis PA , PB æquivalet PC . Q. E. D.

Scholium. Si AD (Fig. 9.) caderet extra parallelogrammum,

Fig. 1.

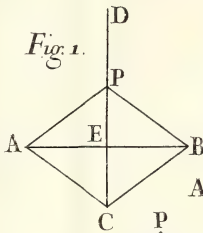


Fig. 2.

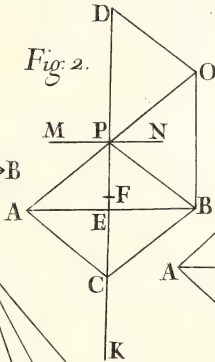


Fig. 3.

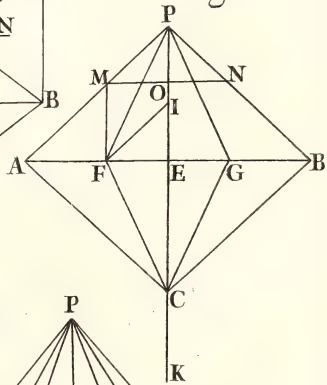


Fig. 4.

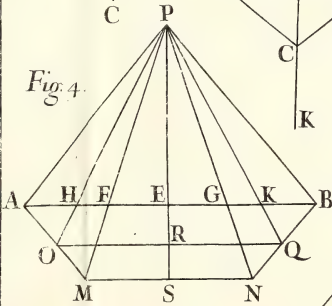


Fig. 5.

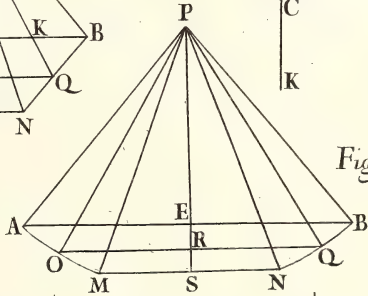


Fig. 6.

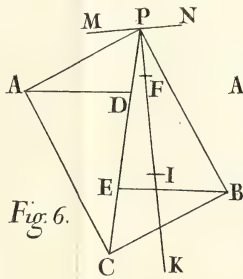


Fig. 7.

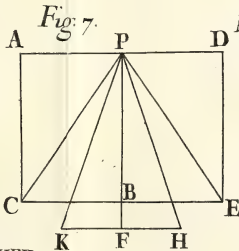


Fig. 8.

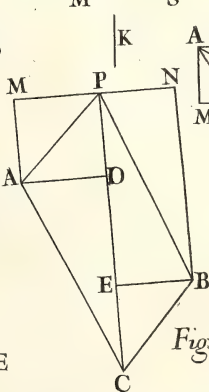
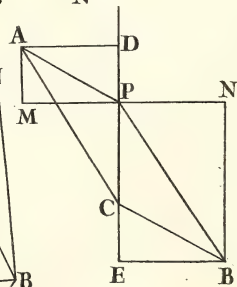


Fig. 9.





num, potentia PD prædita esset directione contraria, ac propterea deducenda esset ex PE. Facta autem deductione reliqua esset, ut supra, diameter PC.

Ex paucis quibusdam principiis habes legem æquivalentiæ potentiarum ita geometricè demonstratam, ut hæc mutari non possit, quin principia posita deficiant, & corruant: quod si accideret, nullus in natura ordo, sed maxima esset perturbatio. Quamobrem nihil hæsitans pronuncio, non contingentem esse, sed necessariam legem, quæ docet, potentiam expressam per diametrum parallelogrammi æquivalere iis, quæ exprimentur per latera. Immo quidquid ex lege hac geometrica methodo deducitur, æquo jure necessarium pronuncio.

Si alias quoque leges mechanicas liceret mihi simili demonstratione munire, sublata esset omnis controversia, easque necessarias esse sciremus. Sed deficiente demonstratione, res adhuc in dubitatione versatur. Attamen quando inventum est, unam ex his arctissime conjungi cum principiis certissimis, quæ vera sunt necessario; vero simile videtur, alias quoque a similibus principiis dependere. At connexionem hanc legum mechanicarum cum principiis summa evidentia præditis, nemo unquam vidit? Non inficior; sed hoc fortasse mentis humanæ imbecillitati est tribuendum. Lex æquipollentiæ potentiarum finè dubio conjuncta erat cum principiis certissimis: tametsi hoc ante Bernoullium nemo intellexerit.

Accedit, quod lex æquivalentiæ potentiarum ita late patet, ut nulla sit mechanicæ pars, quæ ejus auxilio non egeat. Præterea lex hæc ex aliis legibus clarissime demonstratur; quod præstitit Eulerus Vir doctissimus, qui eandem deduxit ex legibus motuum productorum a potentiis continuo applicatis. Momenta hujusmodi me ad unam partem aliquantum impellunt. Verumtamen illud repeto, si excipias legem æquipollentiæ potentiarum, dubitandum esse, utrum aliæ sint necessariæ nec ne. Si opinio illa, quam cogente te ingratis protuli, cum falsitate conjuncta est, non magis mihi molestum esse debet, quam tibi, qui eam repetitis ad satietatem interrogationibus postulasti. Quare rogo te etiam, atque etiam, ut ea solum, quæ scio, in posterum a me exigas. Vale.

Idibus Decembris 1759.

VINCENTII RICCATI SOC. JESU.

EPISTOLÆ TRÆS

Quibus utilitas calculi sinuum, & cosinum in infinitefimorum analysi demonstratur.

VINCENTIUS RICCATUS VIRGILIO CAVINÆ
S. P. D.

GAudeo sane, perutiles tibi videri formulas spectantes ad sinus, & cosinus arcuum, aut analogorum logarithmorum ductorum in numerum n , quas exhibui Tom. pr. Opusc. 4. parte secunda, earumque demonstrationes tibi plurimum placuisse. Quare quum n est numerus rationalis vel integer vel fractus, vel positivus vel negativus, nihil habes, quod desideres. At demonstrationem a me requiris, si n sit numerus irrationalis, quam scripsi exhiberi posse per calculum infinitefimalem. Morem tibi gero, sed vereor, ut, postquam legeris, minoris ducas.

Præmitto hoc lemma. Vocato sinu toto $= r$, arcu aut logarithmo analogo $= \phi$, valet æquatio $\frac{C.\phi.dS.\phi - S.\phi.dC.\phi}{r} = d\phi$, quæ eodem modo vera est cum in arcubus tum in logarithmis, cum in sinibus, & cosinibus circularibus tum in hyperbolicis. Demonstratur autem inspectis figuris hoc modo.

In hyperbola sector (*Fig. 1.*) CAF = triang. CDF — semifeg. ADF, sive $\frac{r\phi}{2} = \frac{Cb.\phi.Cb.\phi}{2} - SSh.\phi.dCh.\phi$, & sumptis differentiis $rd\phi = Ch.\phi.dSh.\phi - Sh.\phi.dCh.\phi$ Q. E. D.

In circulo autem sector (*Fig. 2.*) CAF = triang. CDF + semifeg. ADF, sive $\frac{r\phi}{2} = \frac{Cc.\phi.Sc.\phi}{2} + S - Sc.\phi.dCc.\phi$. Apponitur signum —, quia crescente sectore decrefcit cosinus, ejusque differentia est negativa; ergo sumptis differentiis fit $rd\phi = Cc.\phi.dSc.\phi - Sc.\phi.dCc.\phi$. Q. E. D.

Ex

Ex his aliud lemma deduco, quod hisce formulis continetur $dSh.\phi = \frac{d\phi.Cb.\phi}{r}$, $dCh.\phi = \frac{d\phi.Sh.\phi}{r}$

$$dSc.\phi = \frac{d\phi.Cc.\phi}{r}, dCc.\phi = -\frac{d\phi.Sc.\phi}{r}.$$

In hyperbola constat $\overline{Ch.\phi^2} = r^2 + \overline{Sh.\phi^2}$; ergo sumptis differentiis $Ch.\phi.dCh.\phi = Sh.\phi.dSh.\phi$, sive $dCh.\phi = \frac{Sh.\phi.dSh.\phi}{Cb.\phi}$, $dSh.\phi = \frac{Cb.\phi.dCb.\phi}{Sh.\phi}$. Qui valores in superiore substituti præbent formulas duas $Ch.\phi.dSh.\phi - \frac{Sh.\phi^2}{Cb.\phi}$

$$dSh.\phi = rd\phi, \frac{Cb.\phi^2}{Sh.\phi}.dCh.\phi - Sh.\phi.dCh.\phi = rd\phi;$$

atqui $Ch.\phi^2 - Sh.\phi^2 = r^2$; ergo facta substitutione, expurgatisque formulis $dSh.\phi = \frac{d\phi.Cb.\phi}{r}$, $dCh.\phi = \frac{d\phi.Sh.\phi}{r}$.

Simili ratiocinio utens in circulo, adhibita æquatione ipsi propria $Cc.\phi^2 = r^2 - Sc.\phi^2$ perveniam ad formulas $dSc.\phi = \frac{d\phi.Cc.\phi}{r}$, $dCc.\phi = \frac{-d\phi.Sc.\phi}{r}$. Quæ formulæ ex ipsa inspectione figuræ deducuntur. Nam triangulum infinitesimum Fef est simile FDC; igitur

$$\left. \begin{array}{l} CF:CD::Ff:fe, \quad CF:DF::Ff:Fe \\ r:Cc.\phi::d\phi:dSc.\phi, \quad r:Sc.\phi::d\phi:dCc.\phi \end{array} \right\} \text{ex quibus superiores formulæ itatim prodeunt.}$$

His demonstratis ad rem accedo propius. Quisque videt identicas esse, ac proinde æquales hujusmodi formulas

$$\frac{Sh.\phi + Cb.\phi}{Cb.\phi + Sh.\phi} = \frac{Sh.n\phi + Cb.n\phi}{Cb.n\phi + Sh.n\phi};$$

denominatores enim iidem sunt cum numeratoribus. Multiplicetur utraq;ue per $nd\phi$, & fiet

$$n. \frac{d\phi.Sh.\phi + d\phi.Cb.\phi}{Cb.\phi + Sh.\phi} = \frac{nd\phi.Sh.n\phi + nd\phi.Cb.n\phi}{Cb.n\phi + Sh.n\phi};$$

atqui ex probatis $d\phi Sh.\phi = rdCh.\phi$, $nd\phi.Sh.n\phi = rdCh.n\phi$
 $d\phi.Cb.\phi = rdSh.\phi$, $nd\phi.Cb.n\phi = rdSh.n\phi$;

ergo factis substitutionibus proveniet

$$n. \frac{rdCb.\phi + rdSh.\phi}{Cb.\phi + Sh.\phi} = \frac{rdCb.n\phi + rdSh.n\phi}{Cb.n\phi + Sh.n\phi}.$$

Utraque expressio est logarithmica. Posita systematis subtangente = r , fiat integratio, hac servata conditione, ut quom ϕ , & $Sh.\phi = 0$, sit $Ch.\phi = r$. Habebitur $n \int \overline{Ch.\phi + Sh.\phi}$

= $\overline{Ch.n\phi} + \overline{Sh.n\phi} + \overline{n-1}lr$. Si effet protonumerus = r , ut logarithmi acciperentur in systemate hyperbolico, superflua foret additio constantis $\overline{n-1}lr$. Sed malo uti quocumque systemate, ut appareat, demonstrationem a peculiari systemate non dependere. Facto transitu a logarithmis ad numeros proveniet $\frac{\overline{Cb.\phi + Sh.\phi}^n}{r^{n-1}} = \overline{Ch.n\phi} + \overline{Sh.n\phi}$.

Assumpta prima identica formula $\frac{Sh.\phi - Cb.\phi}{Cb.\phi - Sb.\phi} = \frac{Sh.n\phi - Cb.n\phi}{Cb.n\phi - Sb.n\phi}$ eodem ratiocinio probabis $\frac{\overline{Cb.\phi - Sb.\phi}^n}{r^{n-1}} = \overline{Ch.n\phi} - \overline{Sh.n\phi}$.

Progredior ad sinus, & cosinus circulares. Valet aequatio, in qua divisores iidem sunt ac numeratores

$\frac{\sqrt{-1}.Sc.\phi + Cc.\phi}{Cc.\phi + \sqrt{-1}.Sc.\phi} = \frac{\sqrt{-1}.Sc.n\phi + Cc.n\phi}{Cc.n\phi + \sqrt{-1}.Sc.n\phi}$. Utraque aequatio-

nis pars multiplicetur per $\sqrt{-1}$, ut nascatur

$\frac{-Sc.\phi + \sqrt{-1}.Cc.\phi}{Cc.\phi + \sqrt{-1}.Sc.\phi} = \frac{-Sc.n\phi + \sqrt{-1}.Cc.n\phi}{Cc.n\phi + \sqrt{-1}.Sc.n\phi}$. Multiplicetur

utraque per $nd\phi$, & fiet $n \cdot \frac{-d\phi Sc.\phi + d\phi.\sqrt{-1}.Cc.\phi}{Cc.\phi + \sqrt{-1}.Sc.\phi} =$

$\frac{-nd\phi Sc.n\phi + nd\phi\sqrt{-1}.Cc.n\phi}{Cc.n\phi + \sqrt{-1}.Sc.n\phi}$; sed

$\left. \begin{array}{l} -d\phi Sc.\phi = rdCc.\phi, \quad -nd\phi Sc.n\phi = rdCc.n\phi \\ d\phi Cc.\phi = rdSc.\phi, \quad nd\phi Cc.n\phi = rdSc.n\phi \end{array} \right\} \text{Factis}$
itaque substitutionibus oritur

$n \cdot \frac{rdCc.\phi + r\sqrt{-1}.dSc.\phi}{Cc.\phi + \sqrt{-1}.Sc.\phi} = \frac{rdCc.n\phi + r\sqrt{-1}.dSc.n\phi}{Cc.n\phi + \sqrt{-1}.Sc.n\phi}$.

Accepta systematis subtangente = r , fiat integratio per logarithmos, servata conditione, ut evadat $Cc.\phi = r$, quam ϕ ,

& $Sc.\phi$ nullefcunt, $n \int \frac{Cc.\phi + \sqrt{-1}.Sc.\phi}{Cc.\phi + \sqrt{-1}.Sc.\phi} =$

$\int \frac{Cc.n\phi + \sqrt{-1}.Sc.n\phi}{Cc.n\phi + \sqrt{-1}.Sc.n\phi} + \overline{n-1}lr$, & facto transitu ad

numeros $\frac{\overline{Cc.\phi + \sqrt{-1}.Sc.\phi}^n}{r^{n-1}} = \overline{Cc.n\phi} + \sqrt{-1}.\overline{Sc.n\phi}$.

Si formulam identicam ponas esse $\frac{\sqrt{-1} \cdot Sc.\phi - Cc.\phi}{Cc.\phi - \sqrt{-1} Sc.\phi} =$
 $\frac{\sqrt{-1} \cdot Sc.n\phi - Cc.n\phi}{Cc.n\phi - \sqrt{-1} Sc.n\phi}$, idem ratiocinium instituens invenies
 $\frac{Cc.\phi - \sqrt{-1} Sc.\phi}{r^{n-1}} = Cc.n\phi - \sqrt{-1} Sc.n\phi$.

Ex his propter ambiguitatem signorum orientur formulæ quatuor

$$Ch.n\phi = \frac{Cb.\phi + Sb.\phi^n + Cb.\phi - Sb.\phi^n}{2r^{n-1}}$$

$$Sh.n\phi = \frac{Cb.\phi + Sb.\phi^n - (Cb.\phi - Sb.\phi^n)}{2r^{n-1}}$$

$$Cc.n\phi = \frac{Cc.\phi + \sqrt{-1} Sc.\phi^n + Cc.\phi - \sqrt{-1} Sc.\phi^n}{2r^{n-1}}$$

$$Sc.n\phi = \frac{Cc.\phi + \sqrt{-1} Sc.\phi^n - (Cc.\phi - \sqrt{-1} Sc.\phi^n)}{2r^{n-1} \sqrt{-1}}. \text{ Hæ au}^n$$

tem sunt illæ ipsæ, quas jamdiu probatas exhibui, quoties n esset numerus rationalis. Demonstratio autem hæc eas esse veras pariter ostendit, tametsi n sit numerus irrationalis, ac furdus. De hæc tu judica. Mihi satis est tuæ morem gefisse voluntati. Vale.

Ex Coll. S. Lucie tertio Kal. Sextilis 1760.

VINCENTIUS RICCATUS VIRGILIO CAVINÆ

S. P. D.

ET si ex superioribus litteris ingens tibi videri debeat utilitas earum formularum, quæ altero in lemmate continentur; tamen multo utiliores cognosces, postquam ostendero, obtineri per eas integrationem plurium formularum, quæ quantitates hyperbolicas, & circulares involvunt. Formulæ in superioribus litteris demonstratæ sunt hujusmodi

$$dSh.\varphi = \frac{d\varphi Ch.\varphi}{r}, \quad dCh.\varphi = \frac{d\varphi Sh.\varphi}{r}$$

$$dSc.\varphi = \frac{d\varphi Cc.\varphi}{r}, \quad dCc.\varphi = \frac{-d\varphi Sc.\varphi}{r}, \quad \text{quibus addere po-$$

tes duas notissimas $r = \overline{Ch.\varphi^2 - Sh.\varphi^2}$, $r^2 = \overline{Cc.\varphi^2 + Sc.\varphi^2}$.

His suppositis demonstro quatuor theoremata, quæ sequuntur

$$mS\overline{Ch.\varphi^m} d\varphi = \overline{m-1} r^2 S\overline{Ch.\varphi^{m-2}} d\varphi + r\overline{Ch.\varphi^{m-1}} Sh.\varphi$$

$$mS\overline{Sh.\varphi^m} d\varphi = -(\overline{m-1} r^2 S\overline{Sh.\varphi^{m-2}} d\varphi + r\overline{Sh.\varphi^{m-1}} Ch.\varphi$$

$$mS\overline{Cc.\varphi^m} d\varphi = \overline{m-1} r^2 S\overline{Cc.\varphi^{m-2}} d\varphi + r\overline{Cc.\varphi^{m-1}} Sc.\varphi$$

$$mS\overline{Sc.\varphi^m} d\varphi = \overline{m-1} r^2 S\overline{Sc.\varphi^{m-2}} d\varphi - r\overline{Sc.\varphi^{m-1}} Cc.\varphi$$

Omnium demonstrationes eadem methodo perficiuntur.

Quoad primum. Manifestum est

$$D.\overline{Ch.\varphi^{m-1}} Sh.\varphi = \overline{m-1} \overline{Ch.\varphi^{m-2}} Sh.\varphi. dCh.\varphi +$$

$\overline{Ch.\varphi^{m-1}} dSh.\varphi$. Substitue in hac pro $dCh.\varphi$, $dSh.\varphi$ eorum valores, & invenies

$$D.\overline{Ch.\varphi^{m-1}} Sh.\varphi = \overline{m-1} \overline{Ch.\varphi^{m-2}} Sh.\varphi^2. d\varphi + \overline{Ch.\varphi^m}$$

$.d\varphi$. Pro $\overline{Sh.\varphi^2}$ substitue $\overline{Ch.\varphi^2 - r^2}$, ut habeas

$$rD\overline{Ch.\varphi^{m-1}} Sh.\varphi = \overline{m-1} \overline{Ch.\varphi^m} d\varphi - (\overline{m-1} r^2 \overline{Ch.\varphi^{m-2}} d\varphi; \\ + \overline{Ch.\varphi^m} d\varphi$$

igitur

$$m\overline{Ch.\varphi^m} d\varphi = \overline{m-1} r^2 \overline{Ch.\varphi^{m-2}} d\varphi + rD.\overline{Ch.\varphi^{m-1}} Sh.\varphi,$$

sive integrando

$$mS\overline{Ch.\varphi^m} d\varphi = \overline{m-1} r^2 S\overline{Ch.\varphi^{m-2}} d\varphi + r\overline{Ch.\varphi^{m-1}} Sh.\varphi.$$

Q. E. D.

Alte-

Alterum ostenditur per formulam

$$D \overline{Sh.\varphi}^{m-1} Ch.\varphi = \overline{m-1} \overline{Sh.\varphi}^{m-2} Ch.\varphi dSh.\varphi + \overline{Sh.\varphi}^{m-1} dCh.\varphi, \text{ quia factis ut antea substitutionibus pervenimus ad formulam}$$

$$r D \overline{Sh.\varphi}^{m-1} Ch.\varphi = \overline{m-1} r^2 \overline{Sh.\varphi}^{m-2} d\varphi + \overline{m-1} \overline{Sh.\varphi}^m d\varphi + \overline{Sh.\varphi}^m d\varphi;$$

ergo translatis terminis, factaque integratione

$$m S \overline{Sh.\varphi}^m d\varphi = - (\overline{m-1} r^2 S \overline{Sh.\varphi}^{m-2} d\varphi + r \overline{Sh.\varphi}^{m-1} Ch.\varphi .$$

Q. E. D.

Similem methodum applica reliquis duabus formulis, quæ quantitates circulares complectuntur. Nam

$$D . \overline{Cc.\varphi}^{m-1} Sc.\varphi = \overline{m-1} . \overline{Cc.\varphi}^{m-2} Sc.\varphi . dCc.\varphi + \overline{Cc.\varphi}^{m-1} dSc.\varphi . \text{ Pro } dCc.\varphi, dSc.\varphi \text{ valores substitue, ut habeas}$$

$$D . \overline{Cc.\varphi}^{m-1} Sc.\varphi = - (\overline{m-1} \overline{Cc.\varphi}^{m-2} Sc.\varphi^2 . d\varphi + \overline{Cc.\varphi}^m dSc.\varphi . \text{ Pro } \overline{Sc.\varphi}^2 \text{ scribe } r^2 - \overline{Cc.\varphi}^2, \text{ ut facta multiplicatione per } r \text{ proveniat}$$

$$r D \overline{Cc.\varphi}^{m-1} Sc.\varphi = - (\overline{m-1} r^2 \overline{Cc.\varphi}^{m-2} d\varphi + \overline{m-1} \overline{Cc.\varphi}^m d\varphi + \overline{Cc.\varphi}^m d\varphi ;$$

ergo transpositis terminis, peractaque integratione

$$m S \overline{Cc.\varphi}^m d\varphi = \overline{m-1} r^2 S \overline{Cc.\varphi}^{m-2} d\varphi + r \overline{Cc.\varphi}^{m-1} Sc.\varphi .$$

Q. E. D.

Ultimum theorema eadem ratione ostenditur. Etenim ex formula

$$D . \overline{Sc.\varphi}^{m-1} Cc.\varphi = \overline{m-1} \overline{Sc.\varphi}^{m-2} Cc.\varphi . dSc.\varphi + \overline{Sc.\varphi}^{m-1} dCc.\varphi \text{ invenies}$$

$$m S \overline{Sc.\varphi}^{m-1} d\varphi = \overline{m-1} . r^2 S \overline{Sc.\varphi}^{m-2} d\varphi - r \overline{Sc.\varphi}^{m-1} Cc.\varphi .$$

Q. E. D.

Ex quatuor, quæ demonstravi theoremata, aliquot primum corollaria maxime simplicia deducamus. Si supponas $m = 0$, invenies

$$\left. \begin{aligned} r S \frac{d\varphi}{Cb.\varphi^2} &= \frac{Sh.\varphi}{Cb.\varphi}, & - r S \frac{d\varphi}{Sb.\varphi^2} &= \frac{Cb.\varphi}{Sb.\varphi} \\ r S \frac{d\varphi}{Cc.\varphi^2} &= \frac{Sc.\varphi}{Cc.\varphi}, & - r S \frac{d\varphi}{Sc.\varphi^2} &= \frac{Sc.\varphi}{Cc.\varphi} \end{aligned} \right\} \text{ ex quibus constat}$$

$Cc\ 2$ $d\varphi$

$d\phi$ divisum per quadratum sinus, aut cosinus integrabile esse, vel quantitates hyperbolicæ sint, vel circulares.

Si $m = 1$, habebimus

$$\left. \begin{aligned} SCh.\phi.d\phi &= rSh.\phi, & SSh.\phi.d\phi &= rCh.\phi \\ SCc.\phi.d\phi &= rSc.\phi, & SSc.\phi.d\phi &= rCc.\phi \end{aligned} \right\} \text{quæ formulæ illæ ipsæ sunt, quas supposuimus.}$$

Demum si $m = 2$, nanciscemur

$$2S\overline{Ch.\phi^2}d\phi = r^2\phi + rCh.\phi.Sh.\phi, \quad 2S\overline{Sh.\phi^2}d\phi = -r^2\phi + rSh.\phi.Cc.\phi$$

$$2S\overline{Cc.\phi^2}d\phi = r^2\phi + rCc.\phi.Sc.\phi, \quad 2S\overline{Sc.\phi^2}d\phi = r^2\phi - rSc.\phi.Cc.\phi.$$
 Quare differentia logarithmi analogi ϕ in quadratum sinus vel cosinus dependet a quadratura hyperbolæ, & differentia arcus circularis multiplicata per quadratum sinus vel cosinus dependet a quadratura circuli.

Inter has formulas non invenies quatuor maxime simplices, nempe $\frac{d\phi}{Cb.\phi}$, $\frac{d\phi}{Sb.\phi}$, $\frac{d\phi}{Cc.\phi}$, $\frac{d\phi}{Sc.\phi}$. Nam si supponeres $m = -1$, istæ quidem prodirent in primo termino, sed conjungerentur cum quatuor altioribus $\frac{d\phi}{Cb.\phi^3}$, $\frac{d\phi}{Sb.\phi^3}$, $\frac{d\phi}{Cc.\phi^3}$, $\frac{d\phi}{Sc.\phi^3}$; quod ostendit, has ab illis dependere. Ut autem nostrorum theorematum usus amplior efficiatur, necesse est prorsus, ut per aliam methodum harum formularum integratio inveniatur.

Ordiamur a prima, in qua pro $d\phi$ substituamus ejus valorem, ut fiat $\frac{rd\phi}{Cb.\phi} = \frac{r^2 dSb\phi}{Cb.\phi^2} = \frac{r^2 dSh.\phi}{r^2 + Sb.\phi^2}$. Hujus formulæ integratio exhibetur a sectore circulari diviso per $\frac{r}{2}$, seu ab arcu circulari, cujus tangens = $Sh.\phi$. Quare radio $KH = r$ (Fig. I., 3.) descripto circulo HML , ductaque tangente, in eaque secta $HI = DF = Sh.\phi$, agatur KMI , erit $S\frac{rd\phi}{Cb.\phi} = \frac{2 \cdot HKM}{r} = HM$. Formula itaque $\frac{d\phi}{Cb.\phi}$ dependet a quadratura circuli.

Applicantes eandem methodum formulæ secundæ nanciscemur.

cificemur $\frac{r d\phi}{Sb.\phi} = \frac{r^2 dCb.\phi}{Sb.\phi^2} = \frac{r^2 dCb\phi}{Cb.\phi^2 - r^2}$, quæ dependet ab

hyperbolæ quadratura; atque hoc modo obtinetur. Semiaxibus KH, KL = r (Fig. 1.4.) describatur hyperbola æquilatera HM. Ex puncto L parallela rectæ KH agatur LO, quæ quamquam non tangit hyperbolam, tamen, ut servetur circuli analogia, cotangens vocari solet. In hac abscindatur LO = CD = Ch.φ, & agatur KMO; erit S $\frac{r d\phi}{Sb.\phi} = \frac{2 \cdot KHM}{r}$. Superfluum est advertere, hyperbolam HM, per quam formula integratur, eandem esse cum hyperbola AF, in qua sumuntur sinus, & cosinus.

Reliquæ duæ formulæ continentes quantitates circulares eadem methodo tractentur. Fiet itaque $\frac{r d\phi}{Cc.\phi} = \frac{r^2 dSc.\phi}{Cc.\phi^2} = \frac{r^2 dSo.\phi}{r^2 - Sc.\phi^2}$, quæ pariter ab hyperbolæ quadratura dependet.

Descripta eadem hyperbola, (Fig. 2.4.) duc tangentem hyperbolæ HI, in qua abscinde HI = DF = Sc.φ. Duc KIM; erit S $\frac{r d\phi}{Cc.\phi} = \frac{2 \cdot KHM}{r}$.

Simili pacto $\frac{r d\phi}{Sc.\phi} = \frac{-r^2 dCc.\phi}{Sc.\phi^2} = \frac{-r^2 dCc.\phi}{r^2 - Cc.\phi^2}$, quæ pariter hyperbolæ poscit quadraturam. In eadem hyperbolæ tangente seca HI = CD = Cc.φ; habebimus S $\frac{-r d\phi}{Sc.\phi} = \frac{2 \cdot KHM}{r}$.

His patefactis ajo primum, si m fit numerus affirmativus, & impar, formulas omnes $S \overline{Ch.\phi}^m d\phi$, $S \overline{Sh.\phi}^m d\phi$, $S \overline{Cc.\phi}^m d\phi$, $S \overline{Sc.\phi}^m d\phi$ algebraicam integrationem recipere. Etenim hæ ex theoremate dependent a similibus formulis, in quibus exponens est = m - 2; istæ ab illis, quibus est exponens m - 4; atque ita deinceps, donec deveniamus ad formulas habentes unitatem in exponente; atqui istæ ultimæ ex dictis algebraicam integrationem recipiunt: ergo & primæ proposiæ.

Ut

Ut indoles ferici, quæ ex hac methodo provenit, melius cognoscatur, satis erit unam ex prædictis formulis evolvere; series enim in omnibus eodem passu procedit. Hanc feligo

$S \overline{Cc. \varphi}^m d\varphi$. Habemus

$$S \overline{Cc. \varphi}^m d\varphi = \frac{r}{m} \overline{Cc. \varphi}^{m-1} S c. \varphi + \frac{m-1}{m} r^2 S \overline{Cc. \varphi}^{m-2} d\varphi;$$

atqui

$$S \overline{Cc. \varphi}^{m-2} d\varphi = \frac{r}{m-2} \overline{Cc. \varphi}^{m-3} S c. \varphi + \frac{m-3}{m-2} r^2 S \overline{Cc. \varphi}^{m-4} d\varphi; \text{ ergo}$$

$$S \overline{Cc. \varphi}^m d\varphi = \frac{r}{m} \overline{Cc. \varphi}^{m-1} S c. \varphi + \frac{m-1}{m \cdot m-2} \overline{Cc. \varphi}^{m-3} S c. \varphi + \frac{m-1 \cdot m-3}{m \cdot m-2} r^3 S \overline{Cc. \varphi}^{m+4} d\varphi; \text{ atqui}$$

$$S \overline{Cc. \varphi}^{m-4} d\varphi = \frac{r}{m-4} \overline{Cc. \varphi}^{m-5} S c. \varphi + \frac{m-5}{m-4} r^2 S \overline{Cc. \varphi}^{m-6} d\varphi; \text{ ergo}$$

$$S \overline{Cc. \varphi}^m d\varphi = \frac{r}{m} \overline{Cc. \varphi}^{m-1} S c. \varphi + \frac{m-1}{m \cdot m-2} r^3 \overline{Cc. \varphi}^{m-3} S c. \varphi + \frac{m-1 \cdot m-3}{m \cdot m-2 \cdot m-4} r^5 \overline{Cc. \varphi}^{m-5} S c. \varphi + \frac{m-1 \cdot m-3 \cdot m-5}{m \cdot m-2 \cdot m-4} r^6$$

$S \overline{Cc. \varphi}^{m-6} d\varphi$. Atque ita progrediens invenies feriem, in qua omnes termini multiplicantur per $S c. \varphi$, exponentes autem $C c. \varphi$ procedunt per feriem $m-1$, $m-3$, $m-5$, $m-7$ &c. usque ad 0, in quo tamquam in ultimo termino fistes. Coefficientes vero terminorum sunt $\frac{1}{m}$, $\frac{m-1}{m \cdot m-2}$,

$\frac{m-1 \cdot m-3}{m \cdot m-2 \cdot m-4}$, $\frac{m-1 \cdot m-3 \cdot m-5}{m \cdot m-2 \cdot m-4 \cdot m-6}$ &c. Supple autem dimensiones per potestates sinus totius = r .

Si m sit numerus positivus, & par, duæ primæ formulæ pendebunt ab hyperbolæ quadratura, duæ ultimæ a quadratura circuli. Nam factò eodem progressu tandem pervenimus ad formulam $S d\varphi$, quæ in primis dat duplum sectorem hyperbolicum, in aliis duplum sectorem circularem divisum per sinum totum.

Si evolvas eandem formulam $S \overline{Cc. \varphi}^m d\varphi$, invenies eam-

eamdem feriem, in cujus ultimo termino $Cc.\phi$ exponens = 1. Huic addendus est terminus $r^m \phi$, qui habet coefficientis

$$\text{idem, ac ultimus terminus feriei, scilicet } \frac{m-1 \cdot m-3 \cdot \dots \cdot 3}{m \cdot m-2 \cdot m-4 \cdot \dots \cdot 2}.$$

Si summatoria debeat nullefcere nullefcente arcu ϕ , ejusque finu, completa est, neque ei ulla addenda est constans. Quare si fiat $Cc.\phi = 0$, & $Sc.\phi = r$, proveniet $S Cc.\phi^m d\phi$

$$= \frac{m-1 \cdot m-3 \cdot \dots \cdot 3}{m \cdot m-2 \cdot m-4 \cdot \dots \cdot 2} r^m \phi. \text{ Est autem } \phi \text{ vel quadrans, vel tres quadrantes, vel quinque, ut omnibus notum est.}$$

Ut facilius tractem casus, in quibus m est numerus negativus, paullulum transmutandæ sunt formulæ. Quomodo hoc faciendum sit, aperiam dumtaxat in prima; reliquarum enim ratio eadem est. Muta signum speciei m , ut ex negativa fiat positiva. Oritur

$$-m S \frac{d\phi}{Cb.\phi^m} = -\overline{m-1} \cdot r^2 S \frac{d\phi}{Cb.\phi^{m+2}} + \frac{rSh.\phi}{Cb.\phi^{m+1}}.$$

Transfer opportune terminos

$$\overline{m+1} \cdot r^2 S \frac{d\phi}{Cb.\phi^{m+2}} = m S \frac{d\phi}{Cb.\phi^m} + \frac{rSh.\phi}{Cb.\phi^{m+1}}. \text{ Pone}$$

$m+2 = n$, ut fiat

$$\overline{n-1} \cdot r^2 S \frac{d\phi}{Cb.\phi^n} = \overline{n-2} S \frac{d\phi}{Cb.\phi^{n-2}} + \frac{rSh.\phi}{Cb.\phi^{n-1}}. \text{ Simili}$$

modo alia provenient

$$\overline{n-1} r^2 S \frac{d\phi}{Sb.\phi^n} = -(\overline{n-2} S \frac{d\phi}{Sb.\phi^{n-2}} - \frac{rCb.\phi}{Sb.\phi^{n-1}})$$

$$\overline{n-1} r^2 S \frac{d\phi}{Cc.\phi^n} = \overline{n-2} S \frac{d\phi}{Cc.\phi^{n-2}} + \frac{rSc.\phi}{Cc.\phi^{n-1}}$$

$$\overline{n-1} r^2 S \frac{d\phi}{Sc.\phi^n} = \overline{n-2} S \frac{d\phi}{Sc.\phi^{n-2}} - \frac{rCc.\phi}{Sc.\phi^{n-1}}.$$

Si n est par, manifestum est, formulas omnes

$$S \frac{d\phi}{Cb.\phi^n}, S \frac{d\phi}{Sb.\phi^n}, S \frac{d\phi}{Cc.\phi^n}, S \frac{d\phi}{Sc.\phi^n} \text{ algebraica integratio-$$

ne gaudere. Namque theoremata inventa demonstrant, formulas istas dependere a similibus formulis, in quibus divisoris exponens = $n-2$, istæ ab aliis exponentis = $n-4$, atque

atque ita deinceps, donec in divisoribus reliquis sit exponens $= 2$; sed supra vidimus, formulas in divisore affectas exponente $= 2$ integrabiles esse; ergo & propositæ integrabiles sunt.

Si n sit impar, simili ratiocinio ostendam, formulas dependere a sequentibus $\frac{d\phi}{Cb.\phi}$, $\frac{d\phi}{Sb.\phi}$, $\frac{d\phi}{Cc.\phi}$, $\frac{d\phi}{Sc.\phi}$; sed prima ex his ad suimet integrationem postulat quadraturam circuli, reliquæ quadraturam hyperbolæ, ut supra probavi: ergo prima ex propositis dependet a quadratura circuli, reliquæ tres ab hyperbolæ quadratura.

Quoniam hæc, quæ tibi scripsi, calculum finuum & cofinuum non minus circularium, quam hyperbolicorum mirifice illustrent, & utiliore reddunt, non injucunda tibi fore confido. Vale.

Ex Col. S. Lucie Nonis Novembris 1761.

ADDITAMENTUM.

SECUNDÆ, quam ad te mihi, epistolæ hæc ut addas rogo. Doctissimus Eulerus duas formulas $\frac{d\phi}{Cc.\phi}$, $\frac{d\phi}{Sc.\phi}$ per logarithmos integrat; nam, si voces quadrantem $= \omega$, integrationem ita exponit $S \frac{rd\phi}{Cc.\phi} = ITc. \frac{\omega + \phi}{2}$, $S \frac{rd\phi}{Sc.\phi} = ITc. \frac{\phi}{2}$. Elegantissimæ istæ solutiones cum nostris apprime cohærent, dummodo memineris, Eulerum uti logarithmis hyperbolicis, in quibus scilicet tam protonumerus, quam subtangens $= r$. Quoniam vero utile est exprimere integrationes per logarithmos, non solum hæc duas formulas, sed etiam $\frac{d\phi}{Sb.\phi}$ ad logarithmos perducere juvabit. Quam ob rem necesse est præmittere aliquot facillima theoremata, per quæ demonstratio omnis perficitur.

Ac primum data HI (*Fig. 4.*) determinandus sit numerus logarithmi analogi $\frac{2KH M}{r}$. Sumpta HG = KH = r, ducatur, & producatu r KG, quæ erit assymptotum hyperbolæ. Ex puncto M ducatur MQ normalis assymptoto; erit KQ

$l r \cdot \frac{\sqrt{Cb \cdot \phi + r}}{\sqrt{Cb \cdot \phi - r}}$ sumpto logarithmo hyperbolico.

Antequam formulas continentes quantitates circulares expedio, in mentem revoco theorematum quatuor, quæ demonstrata suppono in trigonometricis: nempe

$$r + Cc \cdot \phi = \frac{rSc \cdot \phi}{Tc \cdot \frac{\phi}{2}}, \quad r + Sc \cdot \phi = \frac{Cc \cdot \phi}{r} \cdot Tc \cdot \frac{\omega + \phi}{2}$$

$$r - Cc \cdot \phi = \frac{Sc \cdot \phi \cdot Tc \cdot \frac{\phi}{2}}{r}, \quad r - Sc \cdot \phi = \frac{rCc \cdot \phi}{Tc \cdot \frac{\omega + \phi}{2}}: \text{ergo}$$

$$\frac{r + Cc \cdot \phi}{r - Cc \cdot \phi} = \frac{r^2}{Tc \cdot \frac{\phi}{2}}, \quad \frac{r + Sc \cdot \phi}{r - Sc \cdot \phi} = \frac{Tc \cdot \frac{\omega + \phi}{2}}{r^2}.$$

Demonstravi $S \frac{rd\phi}{Cc \cdot \phi} = \frac{2 \cdot \text{KHM}}{r}$, existente tangente HI

$$= Sc \cdot \phi: \text{ergo } S \frac{rd\phi}{Cc \cdot \phi} = l \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{r + Sc \cdot \phi}}{\sqrt{r - Sc \cdot \phi}} = l \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot Tc \cdot \frac{\omega + \phi}{2}.$$

Hi logarithmi in analogorum systemate accipiendi sunt. Ut ad hyperbolicos transeamus, satis est numeros multiplicare per $\sqrt{2}$, & habebimus

$$S \frac{rd\phi}{Cc \cdot \phi} = l r \cdot \frac{\sqrt{r + Sc \cdot \phi}}{\sqrt{r - Sc \cdot \phi}} = l Tc \cdot \frac{\omega + \phi}{2}.$$

Similiter $S \frac{-rd\phi}{Sc \cdot \phi} = \frac{2 \cdot \text{KHM}}{r}$, existente HI = $Cc \cdot \phi$: ergo

$$S \frac{-rd\phi}{Sc \cdot \phi} = l \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{r + Cc \cdot \phi}}{\sqrt{r - Cc \cdot \phi}} = l \frac{r^2}{\sqrt{2} \cdot Tc \cdot \frac{\phi}{2}}: \text{igitur}$$

$$S \frac{rd\phi}{Sc \cdot \phi} = l \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{r - Cc \cdot \phi}}{\sqrt{r + Cc \cdot \phi}} = l \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot Tc \cdot \frac{\phi}{2}. \text{ Hi sunt loga-}$$

rithmi analogi, quorum numeros si multiplices per $\sqrt{2}$, obtinebis integrationem per logarithmos hyperbolicos, nimirum

$$S \frac{rd\phi}{Sc \cdot \phi} = l r \cdot \frac{\sqrt{r - Cc \cdot \phi}}{\sqrt{r + Cc \cdot \phi}} = l Tc \cdot \frac{\phi}{2}. \text{ Hæc ostendunt, quantum}$$

mæ formulæ cum Eulerianis conveniant. Vale.

Ex Coll. S. Lucæ postridie Idus Septembris 1763.

VINCENTIUS RICCATUS VIRGILIO CAVINÆ

S. P. D.

EAs formulas differentiales, in quibus differentia logarithmi analogi, five arcus circularis multiplicatur vel dividitur aut per solum finum, aut per solum cosinum elatum ad quamlibet integram potestatem, ita a me pertractatas arbitraris, ut nihil deesse videatur. Verum quum sæpenumero accidat, ut in eandem formulam tum finus, tum cosinus ingrediatur, judicas, non esse omittendam methodum, qua facile integrationem consequamur, ne theoria hæc admodum incompleta relinquatur. Postulatio tua effecit, ut ea, quæ olim tibi scripseram, in mentem revocarem, atque inspicerem, utrum methodus ad difficiliora, quæ petis, traduci posset. Res ex voto cessit, Ut autem hac de re certioorem te faciam, tertiam epistolam scribo, qua tuis petitionibus plenissime satisfacio.

In eadem prorsus methodo insistens præmitto hæc theoremata

$$\frac{m+n}{S} \frac{Sh.\varphi^{n-1} Ch.\varphi^{m+1}}{S Sh.\varphi^{n-1} Ch.\varphi^{m-1}} d\varphi = r \frac{Sh.\varphi^n Ch.\varphi^m}{S} + m r^2.$$

$$\frac{m+n}{S} \frac{Ch.\varphi^{m-1} Sh.\varphi^{n+1}}{S Ch.\varphi^{m-1} Sh.\varphi^{n-1}} d\varphi = r \frac{Ch.\varphi^m Sh.\varphi^n}{S} - n r^2.$$

$$\frac{m+n}{S} \frac{Sc.\varphi^{n-1} Cc.\varphi^{m+1}}{S Sc.\varphi^{n-1} Cc.\varphi^{m-1}} d\varphi = r \frac{Sc.\varphi^n Cc.\varphi^m}{S} + m r^2.$$

$$\frac{m+n}{S} \frac{Cc.\varphi^{m-1} Sc.\varphi^{n+1}}{S Cc.\varphi^{m-1} Sc.\varphi^{n-1}} d\varphi = -r \frac{Cc.\varphi^m Sc.\varphi^n}{S} + n r^2.$$

Prima duo theoremata demonstrabis, si quantitatis

$Ch.\varphi^m Sh.\varphi^n$ differentiam accipias hoc modo

$$D.Ch.\varphi^m Sh.\varphi^n = m Sh.\varphi^n Ch.\varphi^{m-1} dCh.\varphi + n Ch.\varphi^m Sh.\varphi^{n-1} dSh.\varphi. \text{ Pro } dCh.\varphi, dSh.\varphi \text{ eorum valores substitue, ut habeas}$$

$$r D Sh.\varphi^m Sh.\varphi^n = m Sh.\varphi^{n+1} Ch.\varphi^{m-1} d\varphi + n Ch.\varphi^m Sh.\varphi^{n-1} d\varphi. \text{ In hac si pro } Sh.\varphi^{n+1} \text{ ponas } Sh.\varphi^{m-1} Ch.$$

$\overline{Ch.\varphi^2 - r^2}$, & opportune transferas terminos, orietur primum theorema; si vero pro $\overline{Ch.\varphi^{m+1}}$ scribas

$\overline{Ch.\varphi^{m-1} . r^2 + Sh.\varphi^2}$ orietur secundum theorema.

Simili modo reliqua duo theoremata demonstrabis. Nam

$\overline{D Cc.\varphi^m Sc.\varphi^n} = m \overline{Sc.\varphi^n Cc.\varphi^{m-1}} d Cc.\varphi + n \overline{Cc.\varphi^m Sc.\varphi^{n-1}} d\varphi$. Pone $d Cc.\varphi = \frac{-d\varphi Sc.\varphi}{r}$, $d Sc.\varphi = \frac{d\varphi Cc.\varphi}{r}$,

ut orietur

$r \overline{D Cc.\varphi^m Sc.\varphi^n} = -m \overline{Sc.\varphi^{n+1} Cc.\varphi^{m-1}} d\varphi + n \overline{Cc.\varphi^{m+1} Sc.\varphi^{n-1}} d\varphi$.

Si pro $\overline{Sc.\varphi^{n+1}}$ substituas $\overline{Sc.\varphi^{n-1} . r^2 - Sc.\varphi^2}$, factis congruis substitutionibus tertium theorema sese offeret;

si vero pro $\overline{Cc.\varphi^{m+1}}$ scribas $\overline{Cc.\varphi^{m-1} . r^2 - Sc.\varphi^n}$, quartum theorema apparebit.

Si existente n numero integro vel positivo, vel negativo, sit m numerus integer affirmativus, in quantitibus hyperbolicis utere theoremate primo, in circularibus tertio.

Namque si m sit impar, & $m+1$ par, formula $\overline{Sc.\varphi^{n-1}}$.

$\overline{Cc.\varphi^{m+1}} d\varphi$ dependet a $\overline{Sc.\varphi^{n-1} C\varphi^{m-1}} d\varphi$; hæc a $\overline{Sc.\varphi^{n-1}}$.

$\overline{C\varphi^{m-1}} d\varphi$; atque ita deinceps, donec $C\varphi$ exponens = 0:

ergo proposita integratio dependebit ab integratione $\overline{Sc.\varphi^{n-1}} d\varphi$, quæ in superioribus litteris tradita est.

Si vero esset m par, & $m+1$ impar, methodus producenda est, donec deveniamus ad terminum, in quo $C\varphi$ habeat exponentem = 1; ergo proposita formula ab hac dependebit $\overline{Sc.\varphi^{n-1} C.\varphi} d\varphi$, sed $C\varphi . d\varphi = r dSc\varphi$; ergo ultima

formula fiet $r \overline{Sc.\varphi^{n-1}} dSc\varphi$, quæ semper integrabilis est, excepto casu, in quo $n=0$, quia in hoc dependet a logarithmis.

Si existente m numero integro vel positivo, vel negativo, sit n integer & affirmativus, adhibe pro quantitibus hyperbolicis theorema secundum, quantum pro circularibus.

Si n sit impar, & $n+1$ par, demonstrabis propositam de-

pendere a $\overline{C\phi^{m-n}} d\phi$, de qua in litteris superioribus dictum est fatis. Si vero n sit par, & $n + 1$ impar, propositam reduces ad $\overline{C\phi^{m-n}} S\phi \cdot d\phi$: atqui $S\phi \cdot d\phi = \pm r dC\phi$; signum \pm valet in hyperbolicis, — in circularibus; ergo reductio fit ad formulam $\pm r \overline{C\phi^{m-n}} dC\phi$, quæ algebraice integrabilis est excepto casu $m = 0$. Si tam m , quam n esset numerus integer, & affirmativus, duplex formula duplicem modum præberet perveniendi ad integrationem.

Quod si m, n uterque esset negativus, ad integrationem opus erit aliquantulum invertere theoremata proposita. Methodum ostendam in primo theoremate. Mutentur signa speciebus m, n , ut ex negativis fiant positivæ, & oriatur

$$\overline{m-n} S \frac{d\phi}{Sb \cdot \phi^{n+1} Cb \phi^{m-1}} = \frac{r}{Sb \cdot \phi^n Cb \phi^n} - m r^2.$$

$$S \frac{d\phi}{Sb \cdot \phi^{n+1} Cb \cdot \phi^{m+1}}; \text{ ergo opportune translatis terminis}$$

$$m r^2 S \frac{d\phi}{Sb \cdot \phi^{n+1} Cb \cdot \phi^{m+1}} = \frac{r}{Sb \cdot \phi^n Cb \cdot \phi^m} + \overline{m+n}.$$

$$S \frac{d\phi}{Sb \cdot \phi^{n+1} Cb \cdot \phi^{m-1}}. \text{ Simili ratione in sequentia convertes reliqua theoremata inventa}$$

$$n r^2 S \frac{d\phi}{Cb \cdot \phi^{m+1} Sb \cdot \phi^{n+1}} = \frac{-r}{Cb \cdot \phi^m Sb \cdot \phi^n} - \overline{m+n}.$$

$$S \frac{d\phi}{Cb \cdot \phi^{m+1} Sb \cdot \phi^{n-1}}$$

$$m r^2 S \frac{d\phi}{Sc \cdot \phi^{n+1} Cc \cdot \phi^{m+1}} = \frac{r}{Sc \cdot \phi^n Cc \cdot \phi^m} + \overline{m+n}.$$

$$S \frac{d\phi}{Sc \cdot \phi^{n+1} Cc \cdot \phi^{m-1}}$$

$$n r^2 S \frac{d\phi}{Sc \cdot \phi^{m+1} Cc \cdot \phi^{n+1}} = \frac{-r}{Cc \cdot \phi^m Sc \cdot \phi^n} + \overline{m+n}.$$

$$S \frac{d\phi}{Cc \cdot \phi^{m+1} Sc \cdot \phi^{n-1}}$$

Quatuor hæc theoremata adhibenda sunt eo prorsus modo, quo superiora. Nam m existente integro, & affirmativo, primum & tertium theorema in usum est traducendum. Si m sit impar, & $m + 1$ par, formula, in qua cosinus exponens $= m + 1$, dependet ab ea, in qua exponens $= m - 1$; hæc ab ea, cujus exponens $= m - 3$, atque ita deinceps. Hunc progressum produc, donec exponens $= 0$. Quo facto summatoria propositæ formulæ dependebit ab ea, in qua $d\phi$ dividitur per solum sinum elatum ad potestatem $n + 1$, de qua actum est fatis.

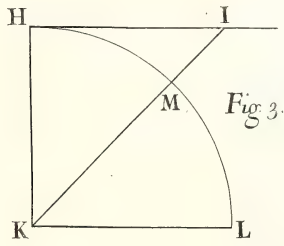
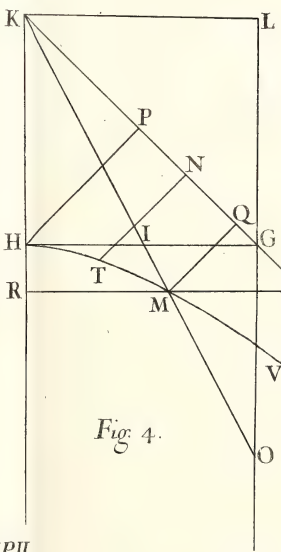
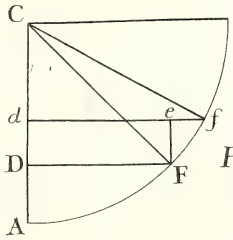
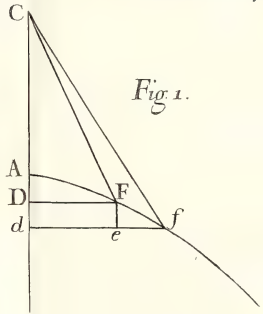
Si m sit par, & $m + 1$ impar, res est difficilior. Etenim eo tantum produci potest calculus, donec cosinus exponens $= 1$. Si enim ulterius produceretur, ut hic exponens fieret $= -1$, prodirent coefficientes $= 0$, qui dum transeunt in divisores, reddunt quantitates infinitas, & integrationem inutilem.

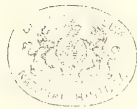
Eodem modo usurpanda sunt theoremata secundum, & quartum, si n sit integer affirmativus. Nam si n sit impar, & $n + 1$ par, per eundem progressum devenies ad formulam, in qua sinus exponens $= 0$, & habetur $d\phi$ divisa per cosinus potestatem $m + 1$, cujus integrationem superior epistola exhibet.

Si n sit par, & $n + 1$ impar, devenies ad formulam, in qua cosinus exponens $= 1$. Inutile est ulterius progredi propter divisores $= 0$.

Si alteruter ex numeris m , n sit impar, constat quomodo integranda sit formula; sed si uterque par sit, nondum res confecta est. In hoc casu per primum aut tertium theorema deveni ad formulas $\frac{d\phi}{Sb.\phi^{n+1}Cb.\phi}$, $\frac{d\phi}{Sc.\phi^{n+1}Cc.\phi}$. Deinde has ipsas formulas per theorema secundum aut quartum reduc ad sequentes $\frac{d\phi}{Sb.\phi Cb.\phi}$, $\frac{d\phi}{Sc.\phi Cc.\phi}$. Quapropter quicumque has duas noverit integrare, & propositam integrabit.

Quæro primum integrationem formulæ $\frac{r^2 d\phi}{Sb.\phi Cb.\phi}$. Pro r^2 substituo quantitatem æqualem $\overline{Cb.\phi^2} - \overline{Sh.\phi^2}$, ut fiat $r^2 d\phi$





$$\frac{r^2 d\phi}{Sb.\phi Cb.\phi} = \frac{d\phi Cb.\phi^2 - d\phi Sb.\phi^2}{Sb.\phi Cb.\phi} = \frac{d\phi Cb.\phi}{Sb.\phi} - \frac{d\phi Sb.\phi}{Cb.\phi} : \text{sed}$$

$$d\phi Ch.\phi = rdSh.\phi, dSh.\phi = rdCh.\phi : \text{ergo}$$

$$\frac{r^2 d\phi}{Sb.\phi Cb.\phi} = \frac{rdSb.\phi}{Sb.\phi} - \frac{rdCb.\phi}{Cb.\phi}, \text{ \& integrando, facta loga-}$$

rithmici systematis subtangente = r , fiet $r^2 S \frac{d\phi}{Sb.\phi Cb.\phi} =$
 $lSh.\phi - lCb.\phi$, quam si divides per r^2 , habebis

$$S \frac{d\phi}{Sb.\phi Cb.\phi} = \frac{lSb.\phi - lCb.\phi}{r^2} .$$

Venio ad aliam $\frac{d\phi}{Sc.\phi Cc.\phi}$, in qua pro r^2 substitue
 $Cc.\phi^2 + Sc.\phi^2$, ut obtineas

$$\frac{r^2 d\phi}{Sc.\phi Cc.\phi} = \frac{d\phi Cc.\phi^2 + d\phi Sc.\phi^2}{Sc.\phi Cc.\phi} = \frac{d\phi Cc.\phi}{Sc.\phi} + \frac{d\phi Sc.\phi}{Cc.\phi} : \text{sed}$$

$$d\phi Cc.\phi = rdSc.\phi, d\phi Sc.\phi = -rdCc.\phi ; \text{ ergo}$$

$$\frac{r^2 d\phi}{Sc.\phi Cc.\phi} = \frac{rdSc.\phi}{Sc.\phi} - \frac{rdCc.\phi}{Cc.\phi}, \text{ factaque ut antea integratio-}$$

ne, & divisione per r^2 , $S \frac{d\phi}{Sc.\phi Cc.\phi} = \frac{lSc.\phi - lCc.\phi}{r^2} .$

Quæ a me in hisce littèris exposita sunt, tibi referenda esse cenſeo; namque ad ea fortasse non advertissem, nisi tuis me petitionibus excitasses. Itaque hac de causa inventa ista, qualiacumque sint, gratiora tibi esse debent. Vale.

Bononiæ quinto Kal. Martii 1764.

GUSMANI GALEATII.

De cortice peruviano.

Mirabilis corticis peruviani vis in intermittentibus febris, aliisque periodicis morbis curandis adeo nostris hisce temporibus explorata, perspectaque est, ut eam ulterioribus observationibus confirmare non amplius opus esse videatur; verumtamen cum in medicina facienda multa sæpe occurrant, quæ aperte nos doceant, nullum remedium genus ita clarum, perspicuumque esse, quin novis semper observationibus illustrari valeat, atque in hujusmodi remedium non secus ac in aliorum administratione cautiones quasdam servandas esse, quæ nisi opportune serventur, remedium ipsum omnino inutile, vel summe nocuum evadere potest, ideo operæ pretium me facturum putavi, si observationibus, & cautionibus illis, quæ ab Auctoribus afferuntur, non nullas alias adjungerem, quæ ab Auctoribus ipsis vel nequam, vel obscure admodum propositæ sunt.

Inter cæteros, qui de præclara prædicti corticis vi, & efficacia in intermittentibus febris loquuti sunt, nullus sane, meo judicio, rem hanc melius attigisse videtur, quam clarissimus Torti, qui non solum eximiam hujusmodi febrifugi præstantiam rationibus, & observationibus multis declaravit, verum etiam dilucide nobis ostendit, quibus in febris unicum, & singulare remedium sit, in quibus innocuum quidem, sed non omnino necessarium, in quibus denique inutile, immo etiam nocuum existat. Verum cum in hujusmodi remedio administrando quædam mihi occurrerint observanda, quæ allatam a prædicto Auctore de Peruviano Cortice doctrinam vel magis illustrant, vel non nisi circumspæctionibus multis amplectendam esse ostendunt, opportunum duxi ea vobis afferre, quæ in ipsa Torti doctrina approbanda, aut excipienda esse cognovi.

Et

Et primum quidem divisio illa, quam Tortus assignat, perniciosarum febrium in duas supremas Classes, quarum prima septem species, altera unicam tantum comprehendit, et si multas ex insignioribus exprimat, non omnes tamen ita includit, quin primis septem speciebus alia adjungi queat, quæ ex peculiari quodam symptomate eam comitante, asthmatico nempe insultu, asthmatica dici potest. Tortus ipse in iis, quas ex Mercato transtulit, perniciosarum intermittentium speciebus aliquam hujusce symptomatis mentionem fecit, & Historiam affert fatis mirabilem, a Corghio, Mantuano Medico, sibi communicatam, febris cujusdam modo intermittentis, modo continuæ aspectu recurrentis, cum asthmatico insultu semper conjunctæ, quæ peruviani corticis usu pluries repetito curata fuit; sed cum in perniciosis illis, quas ipsi vidisse contigit, raro, & fere nunquam symptoma istud observaverit, ipsum, tanquam aliquid accidentale, cum febribus conjungi aliquando posse concedit, sed non ideo tamen ad peculiarem aliquam febris speciem constituendam sufficere asserit. Ego vero cum, non secus ac reliquas a Torto descriptas, hanc quoque non semel observaverim, cum symptoma, quod ipsi adjungitur, æque periculosum, & lethale sit, ac lethargus, syncope, diarrhœa, & reliqua symptomata, quæ cæteris perniciosis febribus ab ipso recensitis adjungi solent; cum denique, non minus ac illæ, peruviani corticis usui facile cedat, ideo, eadem ratione, qua ipsas, inter perniciosarum intermittentium febrium classem asthmaticam quoque ponendam esse judico.

Assertum hoc meum summopere confirmant duo insigniores casus, qui elapsis annis mihi se obtulerunt observandi. Laborabat enim febre continua periodica, & acutiore Homo quidam septuagenarius temperamenti sanguineo-biliosi, habitus vero corporis fatis robusti, & obesi, largiori vini potui indulgere solitus, qui eo ipso tempore, quo febre correptus fuit, maxima spirandi difficultate, cum aliquo stertore, & tussi ita vexari cœpit, ut, ægre admodum jacens, plerumque in lecto sedere cogeretur. Pulsus erat durus, & frequens, lingua arida, vox ob pectoris angustiam languida, & rauca, tussis vero irrita, & sine ullo fere excreatu. Bis, aut ter sanguis extractus fuit, sed nullo fere cum levamine, quamvis enim, horis præsertim matutinis, febris, nec non etiam spi-

T. V. P. II. E e ran-

randi difficultas, & stertor aliquantulum remittere viderentur, quod primis diebus peractis sanguinis missionibus tribui solebat: (eius enim crassamentum durum, nigrum, & compactum cum aliqua crusta plerumque apparuit, ferum vero turbidum, & paucum) horis tamen pomeridianis symptomata omnia, una cum febre, augebantur, neque ulla per sputum materię in pulmonibus murmurantis excretio haberi poterat; urinę quoque pauca, turbida, & rubra, sudor nullus. Circa septimam insignior aliqua febris, & symptomatum remissio horis diecis apparere cœpit, sed post meridiem omnia magis exacerbabantur, persentiente etiam agro in principio exacerbationis ad artuum extremitates leviolem quemdam frigoris sensum. Spectabilior hæc periodorum distinctio, quę observari cœperat, me duxit in suspicionem, fermentum aliquod in hoc morbo latitare simile illi, quod in intermittentibus febribus perniciosis lethalium symptomatum causa esse solet, unde de ipso, peruviani corticis usu, expugnando cogitavi. Tres itaque corticis drachmę in aqua violarum infusi in febris remissione propinatae sunt prima die, totidemque etiam iisdem horis altera die: mirum dictu, vix secundam chinę chinę dosim assumpserat æger, cum non solum febris, & asthmatica affectio remittere cœpit, verum etiam copiosa materię cujusdam cattarrhalis, sanguineę, & biliosę per sputum excretio haberi, ut quod neque oleosis, neque emollientibus, neque attenuantibus ullis remediis obtineri potuit, sola corticis exhibitione facile assequeremur; unde profecuto ulterius ejusdem usu, & imminuta remedii dosi, donec ad drachmam, & semidrachmam contraheretur, postquam tres circiter chinę chinę uncias assumpserat, cessato tandem heterogenę materię sputo, eademque in concoctam, & mere cattarralem mutata, auctis admodum urinis, æger perfecte convaluit, nullis remanentibus prioris orthopnœ, & febris indicis, neque ulterius eo anno, vel sequenti recidivam passus est; cumque tertio anno iterum periodica febre, instar tertianę duplicis acutioris recurrente, absque ullo tamen asthmatico insultu correptus fuerit, post largas sanguinis missiones ter factas, solo peruviani corticis usu ad pristinam salutem restitutus fuit.

Non dissimilis fuit exitus mulieris cujusdam quadragenarię, ruri commorari solitę, quę cum a tertiana simplici, æstivo tempore eam aggressa, prædicti corticis exhibitione liberata

fatis

fatis superque fuerit, neglecto postmodum ulteriori ejusdem usu, atque ad consueta sua munia, & laboriosæ vitæ genus regressa, circa autumnum contumaci tussi, & spirandi difficultate correpta adeo fuit, ut vel in lecto sedere, vel in uno tantum latere decumbere cogeretur. Febris quoque continua, & lenta accessit, quæ una cum tussi, & spirandi difficultate, noctu exacerbabatur, & sputum, quod ægre aliquantulum, sed abunde excernebat, crassum, & quasi puri simile apparebat. Sanguinis missio, emollientia, expectorantia, & edulcorantia plurima remedia administrata fuerant, sed omnia incassum, accedente etiam prædictis symptomatibus aliqua virium prostratione, & corporis macie, ut Medicus, qui eam curaverat, de phthisi jam jam inchoata suspicionem non levem habuerit. Mulieri huic, meo consilio, peruvianus cortex exhibitus fuit ad duarum drachmarum quantitatem singulo mane horis a febris exacerbatione remotioribus, non neglectis tamen remediis iis, quæ possent sputi excretionem faciliorem reddere. Vix unam corticis unciam assumpserat, cum spirandi difficultas imminuta fuit, ita ut supina, & in utroque latere facile decumbere posset: febris quoque, & tussis valde minor facta, immo catarrhalis materiæ puri similis copia, & qualitas admodum mutata fuit, ut tandem, omnibus semper in melius conversis, post unam, vel alteram hebdomadam salutem, & robur, prædicti corticis usu ad aliquot dies etiam protracto, recuperaverit.

Non minori facilitate, qua asthmaticam, lethargicam quoque febrem chinæ chinæ ope sanatam vidi; nam Sacerdoti cuidam fere octogenario, qui insultu quodam, apoplexiæ simili, repente correptus, sanguinis missione, aliisque remediis, quæ apoplecticis convenire solent, primo curatus, integrum diem sine sensu, & motu, cum febre, & stertore permansit; altera vero die, quasi a somno expergefactus, pristino sensu, & motu recuperato, sine febre, aliove gravi incommodo, vitam ad horas plusquam viginti perduxit. Postquam adventu novæ febris iisdem symptomatibus comitatæ certi facti fuimus, ipsum tertiana simplici lethargica perniciose affectum esse, corticis unciam sequenti die a paroxysmo libero administravimus, eundemque non solum ab apoplectico, quem timebamus, insultu postridie immunem non sine admiratione vidimus, verum etiam tam modica febre detentum, ut de integra sanitate,

quam postmodum, continuato remedii usu, optime fuit consequutus, certam quodammodo spem, in ipso primo peruviani corticis effectu, afferre potuerimus.

Eventum plane similem habuit convulsiva quædam, & spasmodica affectio, cum febre, & sopore conjuncta, quæ in juvenem annorum circiter triginta improvise impetu invasit. Hic enim vix a tertiana febre, ex genere fortasse depurativarum, peruviani corticis usu liber evaserat, & ab icterica, quæ post febrem sequuta fuit, affectione aliorum remediorum ope sanatus vix fuerat, valetudinarius adhuc, cum consuetis suæ artis, & vitæ muniis se tradere cœperit, loquela, & sensu repente destitutus apparuit: oculi clausi, facies livida, lingua arida, membraque omnia vel immota, vel spasmodicis motibus agitata cernebantur, & nisi clamores, & ejulatus, quos interdum emittebat, pulsusque, qui vehemens, frequens, & vibratus apparebat, virium robor adhuc in eo consistere indicassent, jam jam morti proximus dictus esset. Viginti, & ultra horas in hoc statu permansit, neque sanguinis missione, nec cucurbitulis, nec violentis frictionibus, neque ullo alio artis præsidio, vel incitamento commoveri, aut expergesieri potuit; donec sponte sua, quiescentibus omnibus, vox rediit, oculos aperuit, & potum, quem vel respuere, vel, si violenter in os intrusum, per os evomere solebat, placide assumpsit. Horas non amplius sex duravit hæc quies, ægro tamen non omnino adhuc a febre libero, cum post meridiem, aucta denuo febre, omnia prædicta symptomata resurrexerunt, nihil juvantibus adjumentis illis, quæ ad eum excitandum iterum administrabantur. A vesicantibus ipsis coxis applicitis, licet afflicto commotis, nullo doloris sensu affici videbatur, & quamvis a violentioribus prædictis convulsionibus interdum percussus, quasi e lecto surgere tentans, violentum aliquem motum, & vocem ederet, plerumque tamen supinus, aphonus, & immotus in lecto jacebat. Hujusmodi febris tanto symptomatum numero stipata nos duxit ad suspicandum, eam ex intermittentium lethargicarum genere esse, ideoque summopere perniciosam, immo etiam lethalem, nisi prompta peruviani corticis exhibitione funestus ejusdem exitus impediretur. Hunc igitur ægro quam citissime propinavimus, cumque nihil aliud assumeret, quam potionem quandam cordialem, quam etiam vomitu aliquando ejiciebat, in hanc ipsam

ipsam injecimus semiunciam corticis in subtilissimum pulverem redacti. Hujusmodi potionis haustus identidem offerebantur, & quanquam, his per vomitum magnam partem rejectis, vix prædictæ dosi dimidium primis horis recipere, aut retinere potuerit, in progressu tamen, diminuto febris, & symptomatum impetu, aliam similem dosim haud difficulter assumpsit, & intra stomachum retinuit. Post assumptam utramque chinæ dosim non solum illam, quam diximus, antecedentis diei sex circiter horarum quietem habuit, sed horis etiam sequentibus, aucta solum aliquantulum febre, nullum ex prædictis symptomatibus eam comitarunt. Resumpsit itaque iterum corticem, & quanquam postridie horis illis, in quibus febris, & ejusdem descripta symptomata magis urgere solebant, aphonus aliquantulum factus fuerit, in progressu tamen, repetito pluries corticis usu, & vocem, & sensum, & motum, & reliqua, quæ integram, & perfectam in eo salutem ante primæ intermittens febris adventum constituere solebant, iterum feliciter est consequutus.

Non ita porro sollicitus, & promptus fuit corticis effectus in febribus aliis perniciosis, quas solo ejusdem usu facile sanari posse Torti observationes nos docent; nam in cholericis, & dysentericis pluribus chinam chinam simpliciter administratam, neque febres tollere, neque fluxus sistere non semel observavi, ita ut ad aliud quodpiam remedium, quod cum ea uniretur, tunc quidem confugere opus habuerim, quo pluries exhibitio febris tandem, una cum pernicioso symptomate eam comitante, haud difficulter ablata fuit. Exempla duo afferam, unum in robustiore quodam sene dysenterico fluxu, & periodica lentiore febre ad plures hebdomadas afflicto; alterum in grandæva muliere, quæ postquam pluries in tertianam modo simplicem, modo duplicem, sed intermittenter reciderit, atque ab ea peruviani corticis usu libera evaserit, vomitu tandem, & paulo post diarrhœa contumaci una cum febre correpta fuit. Primus sanguinis missionibus, & diluentibus, ac detergentibus primo, deinde corroborantibus pluribus, sed nullo fere cum levamine curatus fuit, postmodum, cum ex notabili quadam febris remissione horis præsertim matutinis observata, & ex modico rigoris sensu, in ipso exacerbationis initio agrum interdum divexante, dubium aliquod oriretur, ne febris ex specie illarum intermittentium esset,

esset, quæ cholericæ nuncupantur, peruviani corticis usu tentandam esse putavi; præsertim cum certus ab ipso ægro factus fuerim ab hoc remedii genere alias in tertiana usurpato adeo alvum obstrictum fuisse, ut clysteribus illum ciere oportuerit. Ad duarum drachmarum pondus præscriptus fuit cortex, eodemque in tali dosi ad plures dies assumpto, a febre quidem aliquantulum, a dyfenterico vero fluxu nihil ægrum levare vidi, immo statim post chinam assumptam dejectiones crebriores, & copiosiores fieri. Imminuta itaque chinæ dosi, scrupulum unum cascarillæ pulveris eidem adjunxi, non neglectis etiam aliis quibusdam corroborantibus ante chinæ usum adhibitis; ut diascordio, pulvere nucis moscatæ torrefacto, & similibus. Vix septem, aut octo dies chinam chinam cum cascarilla conjunctam assumpserat æger, cum, ablata febre, dejectiones etiam rariores, & minus fluidæ apparuerunt, nec ullo sanguine tinctæ; tandemque, appetitu, & viribus restitutis, circa quadragesimum a prima morbi invasionem diem omnino convaluit.

Mulieri autem, quam secundo loco innui, eandem cascarillæ dosim cum chinæ chinæ drachma, tres vel quatuor dies ab ipso morbi initio, exhibere cœpi, non neglectis tamen remediis aliis cordialibus, & corroborantibus, quæ ad vires restaurandas opportuniora duxi; cumque ea primis diebus alvum terve, quaterve deponere, & febris singulis diebus post meridiem constanter recurrere soleret, in progressu, post assumptum remedium, ablata febre, dejectiones imminutæ admodum fuerunt, & circa vigesimam omnino ad naturalem consistentiam, & copiam restitutæ: stomachi quoque, & virium languor omnino ablatus, ut quæ in ipso principio morbi, vomitu tentata, cibos vix assumere valebat, & vix in lecto moveri, cessato cholerico fluxu, & cibos appetere, & e lecto assurgere facile posset; immo, aucta etiam urinarum copia, & moderata quadam sudoris excretionem, bonam adeo valetudinem adeptam est, ut recidivam, cui sæpius obnoxiam diximus, non amplius passa fuerit. Ex his itaque intelligere facile possumus, quantæ utilitatis sit in dyfentericis, & cholericis febribus unio cascarillæ cum peruviano cortice; tali enim conjunctione non solum perniciofa symptomatica excretionis qualitas, & copia corrigitur, verum etiam febrifuga corticis vis augetur quodammodo, & ad scopum dirigitur; ita ut in
subje.

subjectis quoque iis, in quibus sollicitæ nimis, & copiosæ alvi excretiones impediunt, ne ad debitum tempus cortex in ventriculo, & in intestinis detineatur, ideoque febrile fermentum non satis per ipsum corrigatur, addita cascarillæ vi, & dejectiones moderentur, & febris promptius, & facilius auferatur. Hoc pluribus exemplis confirmare possem, sed præferim uno, quod elapso anno mihi observare contigit in adolescente quodam equite, qui tertiana duplici intermittente laborabat; in eo enim, cum immodicæ alvi excretiones, & uberissimi sudores, qui singulis diebus post assumptum corticem succedere observabantur, impedimento essent, ne febris abigeretur; ideoque plures chinæ chinæ uncias, modo in minore, modo in majore dosi, viginti, & ultra dierum spatio incassum assumpserit; post unionem cascarillæ cum cortice, & excretiones duas, illico moderari, & febriles paroxysmos breviores fieri, & tandem, aucta urinarum copia, & virium robore, post trigessimam diem febrem omnino fugari vidimus.

— Non igitur in universum constare videtur clarissimi Torti opinio, chinam chinam scilicet simpliciter sumptam effectum suum feliciter præstare, quam si cum alio quopiam remedio confocietur; nam, præter ea, quæ ego modo attuli, Albertinus quoque, in Commentariis nostræ scientiarum Academiæ aperte nos docet, in febribus, quæ a suppressa aliqua habituali evacuatione originem habent, ad crîsim statim ciendam opportunum esse, ut chinæ chinæ adjungantur modo purgantia, modo diuretica, modo diaphoretica; remque fere semper sibi bene cessisse; si, vel in suppressis prædictis habitualibus evacuationibus, vel in febribus, quibus antecedunt, aut subsequuntur aliquæ viscerum obstructions, chinam ipsam cum purgante aliquo remedio conjungeret. Doleus vero, & Mangetus vel cum alkalicis tam fixis, quam volatilibus, vel cum salibus mediis, puta cum sale ammoniaco mixtam præbent. Possunt enim remedia ista dispositionem illam tollere, quæ in sanguine est, propter quam perniciosæ febres modo colliquativæ, modo coagulativæ a Torto ipso dicuntur. Dispositio enim hæc cum causa esse possit multorum symptomatum, quæ cum febribus conjunguntur, nisi a china tollatur, oportet ut aliis remediis auferatur; cæterum neque symptomata, neque febres ipsæ omnino curari poterunt. Ego id quoque in re medica exercenda sæpius observavi, ideoque non solum

lum caſcarillam, ſed & opium, & ſales diſtos; & alia plurima remedia cum peruviano cortice conjungere opus habui, prout humores vel liſtere, vel ſolvere, vel compeſcere, vel movere oportebat, neque exinde febrifugam corticis vim imminutam, aut mutatam vidi, immo ægros ad vitam, & ſalutem promptius, & melius perductos quandoque fuiſſe cognovi.

Contigit præterea mihi id sæpe experi, quod ab obſervationibus Torti aliquantulum differt, videlicet chinam chinam ad duas, & ultra, uncias, ea, quam ipſe docet, methodo adminiſtratam, nullum effectum præſtitiffe in febribus etiam, quæ tum ex natura ſua, tum ex ſymptomatibus, quæ eas comitabantur, vere intermittentes, pernicioſæ, & corruptivæ dici poterant: in his enim ſi chinæ uſus aliquantulum relinqueretur, pernicioſæ magis, & acutiores reddebantur, ita ut eam iterum, & ſolicite exhibere oporteret, atque ſaltem ad dimidiam unciam ſingulo die, vel horas aliquot ante paroxyſmum, vel in ejuſdem declinatione; unde ad quinque, ſex, & ultra unciarum quantitatem devenire opus fuerit, ut febrilis fermenti vis infringeretur; immo in nobili quodam Viro pingui admodum, & eryſipilaceis fluxionibus ad crura pluries ſubiecto, integram corticis libram ſpatio circiter quadraginta dierum impendere neceſſe fuit, ut a febre omnino liber evaderet. Laborabat enim hic febre continua periodica horis præſertim matutinis remittente, plerumque poſt largos ſudores, quæ ſi, detracto cortice, tantillum in libertate poneretur, vehemens, & ferox fieri obſervabatur, cortice vero depreſſa mitiſcebat admodum, & leniebatur, donec cortice ipſo perfecte ſubacta, poſt copioſas urinas, omnino tandem ceſſavit. Hanc autem majoris chinæ chinæ copiæ exhibendæ neceſſitatem obſervavi præſertim in hemitriteo, in tertiana duplici continua ſubintrante, & in iis etiam, quæ ſubcontinæ a Torto dicuntur. Ex adverſo in iis, quæ primo ſub aſpectu continuarum, deinde poſt aliquot dies, præmiſſis præſertim ſanguinis miſſionibus, aliis que minorantibus, & attemperantibus medicamentis, vere intermittentes, ſed acutiores, & pernicioſæ fiunt, in his, inquam, intermittentibus veluti ſecundariis, quarum prælaudatum Torti mentionem nullam feciſſe vidi, corticis effectum promptiorem eſſe obſervavi, eaſdemque, non minus ac intermittentes pri-

primarias ab ipso Torto descriptas, & superius recensitas, moderatæ illi, quam statuit, duarum unciarum mensuræ facile cedere. Cedunt autem febres omnes, quæ characterem habeant illum, per quem a peruviano cortice sanari posse diximus, vel cortex ipse eo, quem Tortus proponit, modo exhibeatur, vel si Mortoni, aut Scydenhamii methodo administretur; confert tamen sapissime primam illam dosim, quam agris acutioribus febribus detentis præscribimus, paulo ampliorem esse, quam reliquæ, quæ successive postmodum exhibentur. Hæc omnia possem pluribus exemplis confirmare; nisi diuturnitas temporis, qua vos, Sodales ornatissimi, in levioribus hisce Historiolis detinui me tandem moneat humanissima patientia vestra non amplius esse abundandum.

HYACINTHI FABRI.

De humano quodam Monstro.

SI quid est in Physiologicis rebus adhuc perobscurum, & cui lux tamen aliqua summa cum utilitate conjuncta ut affulgeat, & desiderandum, & enitendum sit, illud profecto rerum genus est, quæ Monitorum rationes, & causas attinent. Quemadmodum enim ars obstetricia tanti apud humanum genus interett, quanti in nascentibus fœtibus membrorum integritas, incolumitas, ac vita facienda est; sic profecto nihil magis cordi nobis esse debet, quam ut eas causas internoscamus, ex quarum cognitione ea avertere possimus, quæ vitare quoquomodo valeant nascentes fœtus. Hinc plura, & multa quidem cum laude, summi viri hac de re meditati, in lucem prodiderunt, adeo ut nihil supra a me expectandum videretur. Verum, cum Monstrum quoddam singulare casu mihi fortuna obtulerit considerandum, cujus vix unum, aut alterum apud scriptores, quos pervolutaverim, exemplum reperi; idcirco, ut in hoc genere exemplorum copia augeatur, illud describere hoc spectabili loco constitui, & quæ de ipso cogitaverim exponere.

Itaque, quod intuemini Monstri genus spurio complexu susceptum, Villica quædam, bene vicens, robusta Puella, non obscuro prorsus hujus nostræ Diœcesis loco, felici partu anno 1748 enixa est. Cum nobis oblatum fuit, erat illud plane mortuum. At vivum tamen in lucem prodiiisse, non levia nobis ex sacris mysteriis suppetunt argumenta. Et si vero clam, & quasi furtim, nobis ab eo fuisset homine exhibitum, quo ad Forum Criminale deferbatur, commodum tamen accidit, ut ejusdem formam, structuram, & habitum explorarem diligenter, juberemque, ut ab industri Pictore, ne ejus memoria interiret, diligentissime effingeretur. Effictam imaginem, præstantissimi Academici, præ oculis habetis. Quæ autem observando compererim, quidque philosophando conjecerim, paucis excipite.

Prin-

Principio autem, ut nobiliorem partem aggrediamur, ingentem in capite omnium fere cranii ossium compressionem admirati sumus. Os frontis, ossa parietalia, & partim etiam temporalia, atque occipitis, quæ cartilaginea verius dixisses, ita supra cranii basim appressa vidimus, ut omni ferme naturali interna cavitate deleta, superficiem extrinsecus plano-concavam exhiberent. Vestiebantur tamen communibus de more integumentis, adeo ut ne ipsi quidem capilli deessent, licet valde rari, simul implexi, & quadam quasi crista cranium obducentes. Pulsatilis fontis nullum erat vestigium, sed quidpiam dumtaxat eo loci prominebat, quod digito tentatum, formam sellæ equinæ referre quodammodo visum est. Hæc porro ossa, sive, ut monui, potius cartilaginee tenues maxime & flexiles, frontalibus quidem foveis ac temporalibus, ut dictum est, adhærebant, at non ita tamen, ut cavitati occipitali plane incumbent, sed oblique potius versus centrum baseos cranii declinantes, exiguam cavitatem completerentur, in qua molle aliquid tactu experti, quod cerebelli portionem aliquam fuisse coniecimus. Volebamus equidem conjecturam nostram cartilaginee elevando, quantum nobis res concedebat, visu quoque confirmare; sed illæ inferiori cranii basi arcte adeo conjungebantur, ut frustra omnino separationem tentaverimus. Quædam alia præterea prominentiæ prostabant, sed in illis, utcumque deorsum versus cristam ossis etmoidis comprimerentur, nihil persensimus. Illud tamen notatu dignum hoc loco videtur, nimirum os frontale ita incubuisse glabræ superficiem interioris laminæ, qua orbitarum utriusque oculi superior pars constituitur, ut bulbi oculorum valde tumentes, horrentesque foras erumpere cogerentur. Palpebrarum cellularis plurimum erat madida; cornea valde lucida, & quasi vitrificata; vasis atro-rubeis reticulatis referta videbatur albuginea; vix observabatur pupilla; nec demum, propter nimiam humorum confusionem detegi nudo oculo potuit, qualis esset crystallini humoris, iridis, multoque minus ciliaris ligamenti conditio & habitus. Patebat os, tumida erant labia, lingua item, quæ tertia sui parte extra os patulum producebatur: muscoli colli, mobilisque maxillæ, contracti erant, a quorum contractione collum ipsum perbreve, contractumque fiebat; colli autem contractioni notabilis etiam dorsus ipsius incurvatio & gibbositas accedebat; tamen cellu-

ris, qua magnum pectorale tegitur, crasso turgebat humore, qui naturaliter in collum prorepens, ac maxillares glandulas tumefactis, ad parotides usque recta protendebatur; tum vero in binos veluti tractus divisus, quibus auriculæ æquo & ipsæ ampliores, & turgidæ comprehendebantur, ad occipitalem usque regionem serpens, extendebatur. Quæ quidem omnia a nobis diligentissime, sicuti sunt exposita, ita & observata fuerunt.

Quod si vero Anatomico uti cultro, quemadmodum erat maxime in votis, licuisset, procul dubio etiam turgidi, ob fluidorum copiam; carotidum trunci apparuissent. Cum enim eiusmodi arteriarum officium sit multiplici, qua gaudent ramificatione, non modo ad oculorum orbitas & bulbos, sed ad utrumque præsertim cerebri hemisphærium, messoriam falcem, corpus callosum, & cætera ut prætermittam, ad anfractus varios cerebri, pro majori parte sanguinem advehere; profecto cum hujus visceris defectu non possent illæ in has partes libere exonerari, oportebat, ut plus aquo repletæ turgescerent. Hæc quidem simplex conjectura nostra est, nullis, quod fateor, observationibus innixa: sed cum in expositis circumstantiis physica ratione fulciri, & cum rei veritate consentire mihi videretur, eandem vobis proferre non sum veritus. Et revera novum forsan quisquam arbitrabitur in illo rerum statu, in quo causæ adessent impediendis humorum circulationibus aptæ, vasa, quæ a natura vehendo sanguini destinantur, aut dilatata, aut obstructa, aut distracta ob plenitudinem observata fuisse? Nonne ex Wieuffenio novimus in quibusdam fœtibus materno adhuc utero conclusis, propter ovalis foraminis clausuram, qua sanguinis expeditior via in iisdem a provida natura statuta, ad pulmones impeditur, visum fuisse tumefactum dextrum pulmonis lobum, dextrumque dilatatum cordis ventriculum, tumidum pulmonalis arteriæ truncum, ejusdemque vasa distracta, ipsam denique totam pulmonis substantiam viscida stasi affectam? Cur itaque his, aliisque experimentis edoctus, conjicere non poteram & affirmare, ob impeditum in fœtu nostro, defectu cerebri, liberum humorum cursum, carotidum vasa obstructa, turgida, & plane distracta esse debuisse? Quinimo si ulterius progredi conjectando liceat, quis ambigat œdema illud ipsum, quod in cellulari magni pectoralis adnotavimus a copiosis humoribus in mediastino, aut etiam in pulmone stagnantibus esse

repetendum? Quumque cellularis ubique sub cute jaceat; & explicetur, non dubitaverim ab universali ejusdem œdemate, universam totius corporis turgescientiam derivasse. Caterum conjecturas istas nostras, etsi maxime verisimiles reputem, perspicacissimo tamen judicio vestro subjectas esse volo. Tanti enim arbitror æstimari oportere, quanti vos ipsi faciendas esse existimabitis.

Hactenus nihil ferme præter nudam rei historiam sum persecutus. Reliquum modo est, Academici amplissimi, ut ea in examen revocem, quæ recensitos monstruosos effectus facile producerint.

Non illud tamen operæ pretium existimo, ut in antecessum, omnia monstrorum affectionum genera recenseam, quæ sive animantibus, sive vegetabilibus, sive etiam mineralibus, & faxis accidere solent; quarum, ut probe nostis, non una, sed multiplex causa potest esse, & origo; neque enim id, aut temporis, aut loci, aut instituti nostri ratio patitur. Ad rem potius.

Omnia Monstrorum genera ad duplicem classem revoco; alia nimirum quæ morbosa; alia quæ connaturalia placet appellare. Morbosa voco, in quibus viscera quædam præter naturam conjuncta invicem aut divisa; mole aucta vel diminuta; aut figura denique, situ, aut consistentia sic permutata, ut omni organicæ texturæ ordine perturbato, naturalibus vitæ muneribus obeundis omnino inepta, vel saltem infirma fiat. Connaturalia vero illa in quibus, non vitium aliquod in vitali œconomia videtur contigisse, sed nova potius ac miræ partium organizatio, vel insueta transpositio, quæ vitæ officiis, non minus atque consueta earundem dispositio, apta invenitur, & accommodata.

In priorem classem ea omnia refero, quæcumque a causis minus remotis, minusque reconditis dependent, quæque ab Hippocrate, libro de Genitura, uteri vitio præsertim attribuuntur; non secus atque monstruosi plantarum morbi a vitiatæ nutritionum vasis non raro originem trahunt. Ejusmodi sunt membrorum mutilationes, distorsiones, gibbositates, tumores, labiorum aut palati diffisiones, compressiones cranii, hydrocephala, aliaque id genus multa. Ad classem alteram illa revoco, quæ a remotioribus causis, magisque abditis, & obscuris oriuntur, nec nisi conjecturarum ope divinandis. Cu-

jus.

jusmodi sunt, partium earumdem multiplicitas; ordinis inversio in alicujus partis locatione, præsertim vero visceris alicujus vitæ officii a natura comparati; insitiones denique membrorum variæ; utriusque sexus conjunctiones, & his similia.

His præmissis, cum manifestum sit, fœtum, de quo differimus, non in hac, sed in priore illa monstrorum classe contineri; mihi in primis rationes, & causæ monstrorum ad illud genus pertinentes inquirendæ sunt. De quibus, ut statim dicam, non me fugit, præstantissimi Academici, a plerisque vividam præsertim matrum imaginationem in subsidium advocari: celebrem sane quæstionem, & summam, quam mihi hoc loco ingredi non est animus. Illud tamen videtur generatim posse constitui, nempe, quamvis forte in aliis fetibus eam causam obtinere posse quispiam ostenderet, in nostro tamen monstro minime postulari. Enim vero quis ad obscuram adeo, & implexam rationem confugiet, ubi causas proximas, & patentes in promptu habere sibi videatur? Atqui mihi videor proximas, & patentes monstrorum, quale insigne est nostrum, causas in matribus videre, quin obscura earumdem imaginandi vis expetenda sit. Has vero, ut clarius proponam, animadverto, alias dici posse matribus internas, externas alias. Internas, tum affectiones illas, principiaque morbosa intelligo, quæ aut in fluidis inesse possunt, aut in vitiata forma & structura solidorum, & præsertim uteri ipsius, in quo ejusmodi vitia sæpe sunt observata; tum etiam violentiores animi affectus, contractiones spasmodicas, histericas convulsiones, quibus mulieres aliquando afficiuntur, aliasque similes. Ad externas pertinere omnes illæ creduntur, quæ extrinsecus vim habere, & agere in fœtum possunt utero conclusum, inter quas recenseri maxime solent immoderatæ vestium, & cujuscumque muliebris indumenti constrictiones, quæ ventris dilatationi obistere valeant; vectiones inconcinnae, incongruæ corporis positiones, violenti motus, percussiones & cætera ejusmodi, a quibus, & potissime a priore illa, cum nequeat uterus pro necessitate dilatari libere & extendi, consequens est, ut in ipso male locati partus contrahantur, contorqueantur, nec sine aliqua offensione jactentur, atque adeo, ut magnus advertit Hippocrates, nonnulla sæpe integrante parte imperfecte oriantur.

Jam vero, priores illas, & præsertim vitiatam uteri stru-
ctu-

cturam, ad foetuum deformationes valere plurimum posse, jam pridem docuit laudatus Hippocrates, cum ad calcem libri de Genitura, ut monui, perspicuis verbis scripserit: *Quum in utero juxta locum, in quo mutilatus est fetus, angustia fuerit, necesse est corpus, quod in angustia movetur, mutilari juxta illum locum.* Hinc miror equidem, in tantam fuisse admirationem raptum expertum Chirurgum Gallum, de quo locutus est Dominus Juvet in opusculo inserto Tom. 4 *Journal des Journaux* pag. 109 edito Bononiæ 1761 propter foetum illum a se obstetricia arte extractum, quem superiori dexteri brachii extremitate, absque ullo scapulae signo, nec non partibus continentibus pectoris, & abdominis carere observavit; ita, ut dexterum latus, a medio sterno ad dorsi vertebrae, uno peritonæo velaretur. Siquidem, tum ex Hippocratis monitu, cum ex relatis ab ipso opusculi scriptore, jure existimare licet, earum partium, atque communium integumentorum defectum, ex causa materno utero infixâ provenisse, quæ obstiterit, ne partes illæ, atque integumenta, debitæ nutritionis defectu, naturalem accretionem, structuram, firmitatemque obtinerent.

Rem præter cætera, quæ penes alios scriptores videri possunt, hæc quinque foetuum successive ex eadem Fœmina natorum historia, satis confirmare videtur. Nempe quædam Mulier, quam in se pluries Medico-chirurgica arte curaturus adhibuit, quinque foetus successive, ac debito tempore edidit, quorum singuli sensibilem in dorso deformitatem paullatim contrahere visi sunt, si postremum quidem exceperis, qui cum matrem parturam magno in vitæ discrimine, tum ob gravem uteri hæmorrhagiam, cum ob secundinam in utero relictam constitisset, ossa tantum sterni altiora, quam par esset, prætulit. Etenim, quis non videat constantem hanc in foetibus ad simile vitium contrahendum dispositionem, non aliunde, quam ab interno uteri vitio derivari potuisse? Nam effectuum similium similes causæ. Adde vero ipsum uteri vitium ex circumstantiis manifeste probari. Siquidem hæc mulier adhuc puella cum esset, & infirmæ semper valetudinis visa est, & æquo tardius menses subire cœpit, & perpetuis cum doloribus subibat. Nupta autem cum fuisset, in gestationibus suis, & præsertim in secunda, de dolore sæpe ad regionem uteri sinistram conquerebatur, & maxime cum dextrum in latus incumberet. Denique, cum ad prædictam hæ-

mor-

morrhagiam avertendam relictam in utero secundinam felici plane exitu educerem, quandam in utero ipso duritiem satis sensibilem, manu ipsa mea, percepi, apud quam, placenta minus parieti adhæsisse visa est, quam versus uteri fundum, cui arte infigebatur. Itaque, quemadmodum vitiatum idcirco fuisse mulieris uterum non dubitavi; sic nec dubitaverim unquam cum magno Hippocrate asserere, plures fœtuum deformationes internis uteri causis esse attribuendas.

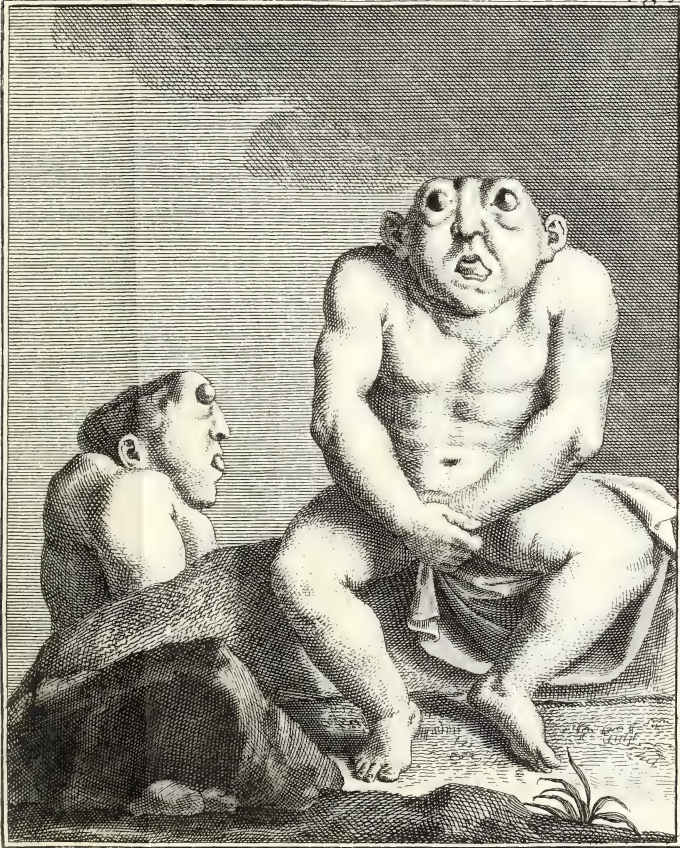
At vero, non ideo tamen puteris velim, Academici præstantissimi, me a causis istis internis monstruosi fœtus nostri vitia repetere: hæc ad summi tantum Magistri sententiam tuendam, atque internarum causarum actionem, quam superius constitui, ostendendam proposui.

Cæterum in externis tantum causis me proxime rationes habere putaverim, quæ probabilius expositi fœtus deformitates iudicio meo effecerint. Et certe ponamus prægnantis animum, violentiori quadam passione affici, ex qua profecto validissima in solidis, maximeque in nerveis fibris, quæ ad uterum deducuntur, contractio oriatur necesse est. Tum vero gravis accedat violentaque matris compressio uterum ipsum, in quo immaturus adhuc fœtus hospitatur, valde constringens, ac præter naturam coangustans; quis non videat, quanta ab his tenerimus infelix Partus incommoda pati debeat ad naturalem ejusdem structuram vitandam aptissima, atque eo maxime tempore, quo molliora eidem sunt membra, & organa teneriora? Probe nostis, quanta cum facilitate tenellæ partes ob summam componentium fibrarum flexibilitatem, ac mollitiem cuicumque impressioni cedere, succussionibus, nempe, impulsibus, aliisque hujus generis externis agentibus viribus debeant; ac proinde facile imaginando conjicere, quanti hæc omnia valeant ad eadem organa deformanda, atque a naturali ordine & structura deducenda, & deturbanda. Atqui, si tanta est harum causarum vis, quis ibit inficias, siquidem in nostro fœtu obtinuerint, in eodem maxime valuisse? Obtinuerunt autem. Memoria repetite quæso, me de fœtu verba facere ab adolescente Puella spurie concepto, cui propterea, nec patratæ criminis pudor deesse poterat, nec gravis, ne forte detegeretur, metus, nec propterea ex metu summæ animi anxietates; nullas quoque prætermittere artes debuit, quibus male susceptum fructum celaret: quare, quot, quæso, constrictionibus urgere se, quot

quot compressionibus, quibusnam aliis artificiis uti, ne a ventris intumescencia misera proderetur? Has profecto consuetas esse incautarum virginum artes novimus. Porro quis nostrum divinare poterit, quo corporis positu in hisce circumstantiis fuerit misella intempestiva Proles? An non suspicari liceat, insignem cranii compressionem a quodam valido renisu provenisse, quem foetus in utero sit passus, praesertim ab ultimis vertebrae ossi sacro cohaerentibus, aut ab ossibus innominatis, quibus fortuito vertice suo incubuerit, facile repetendo? Ipse quidem verisimilimum arbitror, mihiq; videor suadere monstrosam adeo cranii appressionem hac, vel simili ratione contigisse.

Opinionem hanc meam, ut mittam caetera, alter foetus luculentissime confirmat, quem magno hydrocephalo affectum mense Octobri superioris anni Obstetricia arte, summo cum labore extraxi. Etenim in ejus dorso spina, inter sextam, & septimam vertebrae, gangranosam quandam affectionem observavi, quae in media sui parte satis sensibili foramine hiare videbatur. Quod cum curiosus digito, stiloque tentarem, deprehendi eas vertebrae versus thoracis cavitatem notabiliter incurvatas, & ab invicem sejunctas, & ita quidem, ut humorem quemdam albo colore donatum in extremis suis distincte eructarent, medullae spinali fere simillimum. Jam vero, cum de eventus causa inquirerem, monuit me Puerpera se, inter sextum & septimum gestationis mensem, casu, nescio quo, ictum in regione abdominis supra praegnantem uterum excepisse. Porro, quis dubitaverit hanc fuisse ejus gangraenae principem causam? Quamvis enim foetum dorsum, non quidem anteriori parti materni abdominis, sed posteriori potius naturaliter obvertatur; attamen, cum non raro etiam contingat diversis modis praeternaturalibus in utero foetus hospitari; facile intelligimus, opportunam ad ictum in dorso excipiendum positionem potuisse foetum nostrum obtinere. Praesertim quod non levia mihi, tum ex gravi post ictum incommoda matris, tum ex praeternaturali ejusdem foetus exitu, illud idem asserendi suppetunt argumenta. Secundum pedes enim, primum, ac dorso superius obverso exire visus est. Hinc porro, etsi acutissimus Verdiere, aliique constituunt, eo praesertim tempore monstrosas fieri in foetibus deformitates, quo dimidius solet gestationis cursus, aut paullo ante desiniri; patet nihilominus etiam aliquanto tardius contingere posse, quo quidem non parum superius dicta de foetu nostro confirmantur.

Unum adhuc superest, ut nempe de cerebri defectu pauca dicamus. Notum est, si contingat liberum impediri & naturalem sanguinis cursum ad eas partes, quibus nutriendis, & augendis destinatur, has nutritionis debitæ defectu, aut consumi, præcipue si nondum firmitatem adeptæ sint, aut flaccescere, deformari, aut non raro etiam penitus evanescere. Constitui autem superius arterias carotides probabiliter in nostro fœtu compressas fuisse; cumque non possent, fluxu suo, resistentias superiores vincere, ut sanguinem in cerebro derivarent, cogi debuisse, ut in suo exitu incurvarentur, atque obstruerentur; idque tanto magis, quanto, cum in eo casu videretur sublata in membranis ob nimiam distractionem oscillandi vis, ac proinde sistolis tempore retardatus sanguinis motus, oportebat, ut viscus illud & necessariæ nutritionis defectu, & memoratæ compressionis vi paulatim absumeretur, atque deficeret. Quod si, ut puto, quadam cerebelli portio, & quidpiam in foveis temporalibus remanserit, hæc ex eo derivanda sunt, primum, quod cum occipitis compressio, quemadmodum observavimus, non ex integro facta fuerit, oportuit, ut in relicta cavitate, ea illius visceris pars superesset, quæ eadem posset naturaliter contineri. Quod si quærat, unde in tot compressionibus, ac tanta arteriarum obstructione ali, atque enutrirî potuerit; dicam, alimenta aliqua optime potuisse a nonnullis posterioris internæ carotidis, aut cervicalis arteriæ ramificationibus muruari, quæ quum non tam comprimerentur, quam cæteræ, sufficientem sanguinis copiam eidem potuerunt impertiri. Id quod ex superius memoratæ fœtus ejusdem, utcumque exigua vita potest confirmari. Cum enim nihil aliud præter hanc cerebelli portionem potuerit aptius inservire, necesse est, ut eadem ad vitæ functiones fuerit sufficienter alita, atque enutrita. Id ipsum dic de materia in temporalibus relicta, quæ in foveis illis fere integris extare debuit, & a quibusdam tenuioribus internis ramificationibus facile nutrirî poterat. Quare plurimum erraverit, qui sibi suadeat vitium capitis adeo informis potuisse a naturali materni ovi indole proficisci, quod, vel eo fuerit affectum vitio, vel illud in propria evolutione contraxerit; natura namque in propriis operationibus semper recta, sibi que semper similis & constans est; neque quidquam, nisi quod perfectum sit, ipsa molitur: quo circa ut monstroso phænomeni æqua reddatur ratio, non ad immediatas ac naturales, sed ad mediatas ac materiales causas confugiendum videtur; præsertim cum hæc planior magisque naturalis sit ratio,





neque adeo obscura, tenebrisque involuta. Accedit postremo livorem illum, cæterasque affectiones, quibus observavimus fœtus ipsius dorsum affectum fuisse, adhuc clarius demonstrare, evidentiusque conficere, eundem in materno utero plurimum pertulisse; ut propterea a perpeffis incommodis, tamquam a proximis & veris causis monstrosam sui formam contraxisse videatur. Atque hæc sunt, sapientissimi Academici, quibus expositi monstrosi fœtus deformitates explicari probabilius posse opinatus sum. Probe conspiciatis, hæc non nisi conjecturalia esse argumenta; sed tamen non infirmis eadem rationibus fulciri, ac roborari. Poteram equidem pluribus aliorum monstrorum in totum, aut ex parte nostro non dissimilium exemplis rem illustrare, quæ facile aut in Academiarum Actis legi possunt, vel apud Licetum, Skenchium, Mangetum, Bartholinum, Scultetum, Pareum, Stalpartium Vander Wiel, Blondellium, Valisnerium, Morgagnium, Winslowium aliosque, præsertim vero penes Jobum a Mekreen clarissimum Anglum, qui in suis observationibus Medico-chirurgicis Monstrum protulit a nostro fœtu, quem in conspectu habetis, non nisi sexu diversum: verum consulto omittenda existimaui, ne vos in notissimis narrationibus detinendo, potius quam voluptate, tædio ac molestia afficerem. Liceat tantum mihi coronidis loco, hæc quasi corollaria ad praxim fortasse non importuna colligere.

Primum est, ejusmodi informes effectus, potius quam maternæ phantasiæ viribus, mechanicis & accidentariis causis generatim esse attribuendos. Alterum cum constat, plurimum per externa incommoda matres propriis fœtibus nocere posse, impensius monendas esse, ut extrinsecas quascumque impressiones diligenter caveant, & ab iis omnibus abstineant, quæ uterum vel contrahere, vel urgere, vel quovis modo possit ejusdem itatum naturalem perturbare. Tertium denique, ubi contingat prodire fœtum orbaturum cerebro aut in totum, aut etiam secundum aliquam partem tantum, utcumque vivus egrediatur, non diu fore victurum, siquidem in cerebro, aut notabiliter vitiato, aut manco & imperfecto, tanta peragi nequit animalium spirituum secretio, quanta ad nervos omnes plene ac perenniter irradiandos, & ad organa omnia functionibus naturalibus, vitalibus, & animalibus obeundis a natura destinata, in perpetuo motu ad vitam prorsus necessario agenda & conservanda exigitur, & postulatur.

EUSTACHII ZANOTTI.

*De supputandis æquationibus in orbitis
planetarum.*

Planetarum motus ea lege temperantur in orbitis ellipticis, ut cuique notum est, quæ in eo continetur, ut area descriptæ sint temporibus proportionales. Quæstio igitur de inveniendis planetæ loco quadraturam circuli involvit, agitur enim de ellipsis area dividenda juxta quemlibet numerum, aut juxta quamlibet rationem, ductis radiis ab altero foco. Hoc autem parum negotii fecisset in iis, quæ ad praxim deducuntur, in quibus utcumque astronomicam exactitudinem assequamur, geometricam morari nihil est necesse. Verum alia sunt, quæ valde implicitam reddunt problematis solutionem, ac propterea quamvis astronomos non deterruerit problematis difficultas, deterruit certe labor supputationis. Plures methodi excogitatæ fuerunt a recentioribus astronomis, qui in id præsertim studium omne ac diligentiam contulerunt, ut calculum expeditum redderent. Nunc eam propono, quæ cum simplicissimis principiis innitatur, facile ab iis etiam percipietur, qui parum in geometria versati sunt. Quod si comoda, & expedita alicui videbitur, is æquationes pro quovis anomalie puncto, constituta orbitæ excentricitate, & axe ellipsis, assequetur in hunc modum.

Antequam methodum explicio de theoria excentrici nonnulla præmittam. Scio equidem hanc theoriam nunc omnium astronomorum consensu rejectam esse; ea tamen utar propterea quod viam aperit ad æquationes expedite subducendas in theoria, quam Keplerus primum proposuit, quæque deinceps a Newtono sic nobilitata est, & mechanicis rationibus comprobata, ut astronomi omnes nostræ ætatis non modo planetas, sed etiam satellites, & cometas huic parere existiment.

Fingamus nobis planetam moveri per orbitam circularem (*Fig. 1.*) existente sole in puncto S a centro orbitæ distito
linea

linea CS, quæ propterea excentricitas appellabitur; ductaque diametro AR erit A aphelium, R perihelium. Planeta ea lege moveatur, ut area APS sit ubique temporis proportionalis, quæ ratio motus longe differt ab ea, quam veteres sequebantur; sed hoc parum refert, non enim veterem illam excentrici theoriam illustrandam suscipimus, novam potius exornamus, quam calculi nostri ratio postulat. Fingamus præterea circa punctum C lineam CM motu æquabili circumvolvi, & revolutionem conficere eo temporis spatio, quo planeta orbitam prætergreditur. His ita constitutis erit ubique area AMC area APS æqualis, ac ducto radio PC, demptaque communi area APC relinquetur triangulum PCS æquale sectori PCM.

Hæc omnia si calculo trigonometrico persequi volumus, expedita erit supputatio. A puncto S demittatur perpendicularis SH supra PC, & sumpto quovis angulo PCA in triangulo rectangulo CSH, cujus hypotenusa data est, supputetur SH, quæ necessario æqualis existit arcui PM ob triangula æqualia PCS, PCM. Supputetur præterea angulus CPS in triangulo CPS, in quo datae sunt PC, & CS, & angulus ab his comprehensus, qui supplementum est anguli assumpti PCA. Cum autem supponamus constitutam esse proportionem inter radium & peripheriam circuli, inventam $SH = PM$ per numerum graduum, & eorum partium sexagesimalium exprimeamus, ex quo dignoscemus angulum PCM. Addito angulo PCM angulo PCA conficietur anomalia media, quod si idem angulus PCM addatur angulo CPS conficietur æquatio seu prosthaphæresis anomaliæ mediæ respondens ACM.

Hæc sane methodus indirecta est, non enim licet quamlibet anomaliæ mediæ ponere, & inde æquationem illi respondentem calculo subducere, sed ea anomalia mediæ habetur, quæ prodit ex assumpto angulo PCA. Quoniam vero æquationes in duobus proximis orbitæ punctis nihil ad sensum differunt, quoties quæstio fuerit de inveniendâ æquatione, quæ datæ anomaliæ mediæ respondeat, ea accurate elicietur, si duo puncta inquirantur satis proxima, quæ datam anomaliæ comprehendant; quæ ratio calculi in astronomica praxi frequentissima est. Veniamus nunc ad ellipsim.

Moveatur planeta per ellipsim AQR (Fig. 2.) existente sole in altero foco S. Fingamus nobis alium planetam moveri per circulum APR, cujus diameter sit eadem ac major axis

axis ellipsis AR . Hi duo planetæ revolutionem conficiant eodem tempore, atque una moveri incipiant a puncto A . Velocitatis lex ea sit, quam postulant areæ temporibus proportionales. His ita positis dico utrumque planetam perpetuo reperiri in eadem recta ad axem normali; exem. gratia si locus planetæ revolventis in circulo fuerit P , ducta ordinata PD alterius planetæ locus cadet in Q . Demonstratum habent geometræ segmentum circuli APD se habere ad segmentum ellipsis AQD , uti se habet ordinata PD ad ordinatam QD , idest in ratione axis majoris ad minorem ellipsis; atqui eadem est ratio triangulorum PDS , QDS ; ergo, si utrumque segmentum adjacenti triangulo addatur, fient areæ APS , AQS , quæ eandem rationem sequentur; verum circulus, & ellipsis sunt in eadem ratione axium; igitur area APS erit ad circulum, quemadmodum area AQS ad ellipsim, ac propterea existente altero planeta in P non poterit quin alter planeta reperiat in Q . Quod erat demonstrandum.

Sint itaque supputandæ æquationes in orbita elliptica juxta legem arearum temporibus proportionalium. Primum in excentrico inveniatur quæsitæ anomalia media, & æquatio illi respondens, ex quo dabitur etiam anomalia vera. Deinceps ex anomalia vera planetæ revolventis in circulo colligetur anomalia vera planetæ revolventis in ellipsi instituta hac proportionem, videlicet ut PD ad QD , seu ut axis major ellipsis ad axem minorem, sic tangens anguli PSA ad tangentem anguli QSA , qui anomalam veram exhibet in ellipsi. Fiat demum differentia inter anomalam veram & mediam, ex quo prodibit æquatio, seu prostaphæresis. Hujusmodi æquationes in primo anomaliæ quadrante majores reperiuntur quam in circulo, minores vero in secundo quadrante ut cuique vel figuram inspicienti satis manifestum fiet.

Cum ipse vellem explicatam methodum experiri ad æquationes solis subducendas me converti, quod sane exequi non poteram, nisi prius excentricitatem orbitæ statuerem, in qua astronomi omnes non conveniunt. Celeberrimus Eustachius Manfredius in eo libro, qui inscribitur *De Gnomone Meridiano Bononiensi*, non modo novam pro investiganda orbitæ excentricitate methodum proposuit; verum etiam ex pluribus observationibus in eodem gnomone habitis excentricitatem definivit 1681 earum partium, qualium semiaxis ponitur 100000.

Hanc

Hanc itaque eligere volui, tum quod nullus dubitandi locus relinquitur, quin recte constituta fuerit, tum propter jucundissimam tanti viri, meique præceptoris recordationem. Elementis calculi sic constitutis, & posita ratione semidiametri ad gradum unum ut 100000 ad 1745½ eas solis æquationes inveni, quas subjecta tabula exhibet.

Cassinianæ solis æquationes, quæ accuratissimæ habentur, parum ab his differunt. In mediis elongationibus, ubi æquatio maxima est, differentia non excedit scrupula viginti; in aliis elongationibus differentia adhuc minor existit. Æquationes nostræ a prædictis ubique deficiunt, quia scilicet excentricitas a Cassino ponitur paullo major. Si comparatio instituaturs cum æquationibus Hallei, major dissensus reperitur. Verum ipse Hallejus fatetur solares tabulas emendandas esse, atque orbitæ excentricitatem imminuendam, ex quo illi æquationes justo majores prodierunt. Nostræ æquationes accurate conveniunt cum iis, quas Nicolaus de la Caille tradidit in suis tabulis solaribus, sæpius enim differentia nulla est, & quoties dissensus aliquis reperitur, is nusquam minuta secunda quatuor excedit; quod sane supputationum errorculis potius adscribendum arbitror, quam excentricitatum differentia, quæ adeo perexigua est, ut pro nulla haberi possit. Ad hoc illud etiam accedit, quod si dissensus ab excentricitate proficisceretur, constans ordo & perpetuus in eo appareret. Æquationes, ut in subjecta tabula conscriptæ extant, singulis anomaliam mediæ gradibus respondent, quibus positis, si datus fuerit apogei locus, nec non epocha mediarum longitudinum, ac motus medii solis, longitudo vera pro quovis dato tempore elici poterit. Hæc omnia Manfredius persecutus est in eo libro, quem supra indiximus. Unum deerat nempe ut ex elementis, quæ diligentissimis observationibus stabilivit, æquationum tabula extrueretur; quod ne imposterus desit, proposita methodo diligenter curavimus.

Tabula æquationum centri Solis.

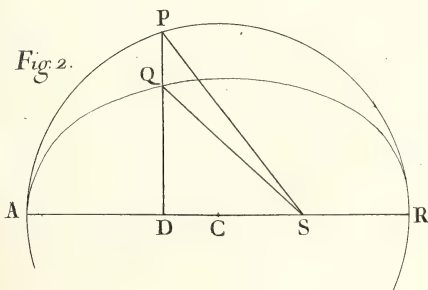
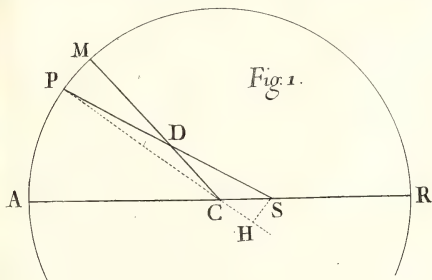
Anomalia media.

Subtrahe.

	0	I	II	III	IV	V	
0	0 0 0	0 56 44	I 39 1.	I 55 32	I 41 9	0 58 50	30
1	0 1 59	0 58 27	I 40 2	I 55 33	I 40 8	0 57 3	29
2	0 3 58	I 0 9	I 41 1	I 55 32	I 39 5	0 55 15	28
3	0 5 56	I 1 50	I 41 58	I 55 30	I 38 1	0 53 26	27
4	0 7 55	I 3 30	I 42 53	I 55 26	I 36 55	0 51 37	26
5	0 9 53	I 5 9	I 43 47	I 55 20	I 35 48	0 49 47	25
6	0 11 51	I 6 46	I 44 39	I 55 11	I 34 39	0 47 55	24
7	0 13 49	I 8 22	I 45 30	I 55 0	I 33 28	0 46 2	23
8	0 15 47	I 9 57	I 46 18	I 54 47	I 32 15	0 44 8	22
9	0 17 45	I 11 31	I 47 4	I 54 31	I 31 0	0 42 13	21
10	0 19 42	I 13 4	I 47 48	I 54 13	I 29 43	0 40 17	20
11	0 21 39	I 14 36	I 48 30	I 53 53	I 28 24	0 38 20	19
12	0 23 35	I 16 7	I 49 11	I 53 31	I 27 4	0 36 23	18
13	0 25 30	I 17 36	I 49 50	I 53 7	I 25 42	0 34 26	17
14	0 27 25	I 19 4	I 50 26	I 52 41	I 24 19	0 32 28	16
15	0 29 19	I 20 30	I 51 0	I 52 13	I 22 54	0 30 30	15
16	31 13	I 21 55	I 51 32	I 51 43	I 21 27	0 28 32	14
17	33 7	I 23 18	I 52 2	I 51 10	I 19 59	0 26 33	13
18	0 35 0	I 24 40	I 52 31	I 50 35	I 18 30	0 24 33	12
19	0 36 53	I 26 0	I 52 58	I 49 58	I 17 0	0 22 32	11
20	0 38 45	I 27 19	I 53 22	I 49 20	I 15 28	0 20 30	10
21	0 40 36	I 28 36	I 53 44	I 48 40	I 13 55	0 18 28	9
22	0 42 27	I 29 52	I 54 4	I 47 58	I 12 20	0 16 26	8
23	0 44 17	I 31 6	I 54 22	I 47 14	I 10 43	0 14 23	7
24	0 46 6	I 32 19	I 54 38	I 46 28	I 9 5	0 12 20	6
25	0 48 54	I 33 30	I 54 52	I 45 39	I 7 26	0 10 17	5
26	0 49 42	I 34 40	I 55 4	I 44 48	I 5 45	0 8 14	4
27	0 51 29	I 35 48	I 55 15	I 43 50	I 4 3	0 6 10	3
28	0 53 15	I 36 54	I 55 23	I 43 3	I 2 20	0 4 7	2
29	0 55 0	I 37 58	I 55 29	I 42 7	I 0 36	0 2 4	1
30	0 56 44	I 39 1.	I 55 32	I 41 9	0 58 50	0. 0 0.	0
	XI	X	IX	VIII	VII	VI	

Adde

SE-





SEBASTIANI CANTERZANI

A D

HIERONYMUM SALADINUM

Monachum Cælestinum Lucensem in Bononiensi Univerſitate
publicum matheſeos Profeſſorem, Inſtituti Socium.

EPISTOLA

*Qua Eufthachii Zanotti obſervatio Veneris Solem traji-
cientis, ab omni erroris ſuſpicionem liberatur.*

QUæris nempe, Saladine optime, quid nobis de iis vi-
ſum ſit, quæ Pingreus, aſtronomus longe præſtans,
in noviffimo Parilienſis Academiæ Commentario ob-
ſervationi illi objicit, qua tribus ante annis
Eufthachius Zanottus Venerem cum Sole congregientem perfe-
cutus eſt. Qui poſſim tibi non obſequi? Ea ergo ad te ſcri-
bam, quæ & a Zanotto ipſo audivi, & calculis, illo hortan-
te, ſubdixi ipſe; quibus facile intelliges, nec juſtam eſſe il-
lam Pingrei reprehentionem, nec ſatis aſtronomo dignam. Ce-
terum qua diligentia in his rebus Zanottus ſit, qua ſolertia,
& omnes norunt, & in illo ipſo, quem ſupra dixi, Com-
mentario declarat ſatis Caillius, qui inſtar eſt omnium. Sed
jam ad rem venio.

Veneris, ut ſcis, e Sole egreſſum ſex diverſis tubis ob-
ſervavimus. Zanottus ſingularum obſervationum tempora no-
tavit, quo & eorum discrimina ex diverſa tuborum vi appa-
rerent, & daretur optioni locus, ſi qui vellet obſervationem
noſtram in comparationem adhibere. Quis vero non miretur,
Pingreum, quali Zanotti liberalitate abuſum, ad eam ſtatim
ſe obſervationem contuliſſe, quæ tubo habita fuit pedes longo
non amplius duos ſupra dimidium, quam compararet cum
ſua, quæ habita fuerat tubo longo ad pedes uſque decem &
octo? Quæ enim erat in ſex illis obſervationibus minus ad eam
comparationem accommodata, quæ Solis parallaxi deducendæ
ſervire deberet, in qua nemo aſtronomus non ante omnia,
quantum fieri poſſet, tuborum æqualitatem requiſiſſet?

Sed neque minus illud mirandum videtur, quod offende-
T. V. P. II. H h rit

rit Pingreum anticipatio temporis eodem tubo definiti; ut statim affirmarit, pluribus opus non esse, quo appareat, quam observatio non sit accurata. Quis enim non illam facile a tanta ejus tubi brevitate repetat? nonne etiam satellitum in umbram Jovis immersiones citius tubis non ita longis videre solemus, quam longissimis?

Nunc autem sic habeto, in sex illis observationibus eam nobis anteferri ceteris, atque optimam haberi, & declarari, quæ tubo habita fuit pedum 22. Et sane memineris etiamnum, Zanotto, jam tum cum totum observationis contextum in dissertationem contulit, & in lucem edidit, multa ad Veneris theoriam pertinentia calculis pluribus deducendi, & parallaxis effectum eleganti, maximeque apta, a se tum primum excogitata, methodo perquirenti, nullos alios numeros usui fuisse, nisi quos observatio illa præbuerat. Fuit enim meliori telescopio instituta ab observatore perspicacissimo, exercitatissimoque; quam præterea confirmavit observator alius longe diligens. Nunc vero, quando Gallorum etiam observationes vulgatæ sunt, eo accedit, quod eandem confirmare quoque videtur Veneris mora in limbo solis. Ostendunt enim calculi, eam moram breviorē videri oportuisse Bononiæ, quam Parisiis, minutis secundis paulo amplius sex. Quare cum nemini ex iis, qui Parisiis, aut prope observarunt, sit visa minor, quam $18'. 12''$, non levi id quidem argumento est, observationem illam, in qua visa fuit $18'. 9''$, valde fuisse accuratam.

Quod si Pingreus, dimissa observatione, quæ tubo breviori habita fuit, alia usus, cujus tempus vix ab eo distat, quod notatum fuit tubo illo pedum 22, parallaxim Solis adhuc deducit grandiorē, neque cum ea satis consentientem, quæ ex plerisque aliis observationibus sequitur, quas cum sua ad Rodriquetium habita comparat; videat, ne id non nostræ quidem observationi, sed iis, quæ suis ipse calculis supponit, dandum sit. Atque hic iisdem fere defensionibus possem observationem nostram tueri, quibus tuetur ipse suam. Sed quid verbis opus est? Jam enim vitium in longitudinum differentia, quam Pingreus usurpat, inhærere, satis declarant Zanotti calculi.

Bononia sane, si Dominici Cassini tabulas consulas, orientior est, quam Lutetia, horariis minutis 36, & scrupulis secundis 30. Verum illud discrimen jam inde ab anno 1715
justo

justo majus a Manfredio censebatur, qui in tabulis, quas suæ in ephemerides introductioni adjunxit, eoque primum anno vulgavit, illud ad 36 minuta prima ipsa contraxit. Sed non multo post capit dubitare, an detrahi adhuc deberent aliquot minuta secunda; veluti ex primo tomo commentariorum nostræ Academiæ cognoscere poteris, qua parte geographica, & astronomica explicantur. Enimvero si ex tabula, quam Maximilianus Hellius in suas singulorum annorum ephemerides inserit, quam sane pro summa subtilissimi Astronomi solertia non nisi ex accuratissimis observationibus petitam putabis; si, inquam, ex ea tabula longitudes Bononiæ & Parisiorum quæras, eas invenies, quarum differentia major non sit minutis primis 35, & scrupulis secundis 55. At Pingreus eam adhibet differentiam, quæ traditur in ephemeride, quam inscribere solebant *La connoissance des temps*: nempe eam ponit 36'. 5". Quamquam in appendice, quam deinde suo sermone, cum jam sub prælo esset, addidit, illam paululum minuit, eique sufficit, quam Caillius statuerat 36'. 3". Qua facta imminutione, parallaxim Solis deducit, etli etiam paulo grandiozem, tamen ab ea minus distitam, quæ ex aliarum observationum comparatione fere conficitur. Vult ergo adhuc ad septem, vel octo scrupula secunda erratum esse, vel in observatione nostra, vel in sua longitudinum differentia: videturque in nos humanior quidem in appendice esse, quam in sermone fuerat, quando quidquid minus commode responderet, omnino observationi nostræ vitio vertebat.

Quod autem dissidii causa in longitudinum differentia insideret, in id eo proclivius jam initio inclinabat Zanottus, quod cum de observatione non posset suspicionem habere, tum vero etiam in ea semper opinione fuerat, ut minor ponenda esset, quam 36'. 0". Sed occasio fecit, ut in eam vellet diligentius inquirere. Et cum in promptu non haberet eas satellitum Jovis eclipses, quibus comparandis methodus adhiberi posset, quam Hellius in ephemeride ad annum 1764 proponit, ad Lunæ defectiones se convertit. Itaque ex omnibus Lunæ defectionibus Parisiis, Bononiæque juxta observatis, illas selegit, quæ totales cum fuerint, promptiores propterea supra Lunæ faciem umbræ progressus habuere: atque in his earum tantum macularum rationem habuit, quæ & majores sunt, & magis conspicuæ, & longius a limbo distitæ: denique singularum

comparavit non immerfiones folum, fed etiam emerfiones: Quæ omnia cauta cum fuerint, Hellius auctor eft, tuque profecto intelligis, magnam fpem afferre, ut quod ex hujusmodi comparationibus colligitur, vix a veritate abfit. Collegit autem Zanottus eam meridianorum diftantiam, quæ minutis primis 35, & fecundis omnino 49 continetur.

Sed quo res eadem pluribus modis inveftigata certius conficeretur, voluit præterea Mercurii cum Sole congressus comparare. Quod quidem phænomeni genus, modo observationibus correctio propter parallaxim adhibeatur, eft ad rem, quæ queritur, opportuniffimum; præfertim fi interiores planetæ & Solis contactus ufurpentur. Quin etiam, ne aut diverfa tuborum ratio, aut varia oculorum vis, quibus fit, ut ii contactus citius, feriusve notentur, quidquam turbarent, conftituit iis tantum uti velle Mercurii congressibus, in quibus ambo interiores contactus fuerint obfervati: fic enim quidquid vitii afferre poteft tuborum, oculorumque varietas, quia in utrumque contactum cadit, contrariosque effectus parit, facta compensatione, medium, quem vocant, planetæ tranfitum profus non afficit. Quamobrem phænomeni opportunitas tanta eft, ut minus jam dolendum fit, quod in uno tantum Mercurii congressu potuerit Zanottus periculum facere. Is contigit anno 1736. Bononiæ obfervavit Euftachius Manfredius, Zanottus, aliique; eftque tota obfervatio defcripta in commentariorum noftre Academiæ tertia parte tomi fecundi: Parifis Maraldus, & Caffinus Dominici nepos; quibus accedit Jacobus Caffinus, qui obfervationem ad Clermontium habuit: hique fuas obfervationes in acta Academiæ Parifienfis ad annum 1736 retulerunt.

Cum ergo uterque contactus Bononiæ pluribus tubis fuerit definitus, fumfit Zanottus ea tempora, quæ jam tum Manfredio ante alia placuerant, quæque tubus præbuerat pedes 22 longus: idque eo libentius, quod fi alia aliis tubis definita fumiffet, meridianorum diftantiam collegiffet adhuc minore. Comparationem deinde inivit cum tribus fingulatim Gallorum obfervationibus; ficque phænomeni inopiam quafi comparationum copia compensavit. Et quoniam nec ita longum eft, nec ab inquisitionis, in qua verfamur, subtilitate alienum, ipfam totius calculi rationem subjiciam: fi illud quidem ante monuero, in obfervationibus ad terræ centrum traducendis pofitam a Zanotto fuiſſe Solis parallaxim 10"; eademque uno ſerupulo aucta,

aucta, imminutave non variari longitudinum differentiam nisi quatuor scrupuli partibus decimis; ut intelligas, hanc longitudinis investigandæ viam admodum esse certam.

Observatio Bononiæ habita tubo pedum 22.

<i>In ingressu</i>		<i>In egressu</i>	
h. 22. 11'. 12" cont. inter. observatus.	h. o. 50'. 50" cont. inter. observatus.	h. o. 50'. 50" cont. inter. observatus.	h. o. 50'. 50" cont. inter. observatus.
21 effectus parallaxis.	1. 18. 7 effectus parallaxis.	1. 18. 7 effectus parallaxis.	1. 18. 7 effectus parallaxis.
h. 22. 11. 33 idem cont. e terræ centro.	h. o. 49. 31, 3 idem cont. e terræ centro.	h. o. 49. 31, 3 idem cont. e terræ centro.	h. o. 49. 31, 3 idem cont. e terræ centro.
Medius ☿ transitus e terræ centro visus h. 23. 30'. 32", 1.			

Quamquam tempora utriusque contactus tubo pedum 11 notata non parum ab his, quæ modo retuli, sint diversa, ex iis tamen medius Mercurii transitus e centro terræ visus prodit h. 23. 30'. 31", 1: unico scilicet scrupulo secundo ante eum, qui ex temporibus elicitur hic notatis. Ex qua etiam consensione major longitudinum differentiæ, quæ hac via invenitur, auctoritas accedit.

Observatio Parisiis a Maraldo habita tubo pedum 16.

<i>In ingressu</i>		<i>In egressu</i>	
h. 21. 35'. 15" cont. inter. observatus.	h. o. 15'. 5" cont. inter. observatus.	h. o. 15'. 5" cont. inter. observatus.	h. o. 15'. 5" cont. inter. observatus.
17, 4 effectus parallaxis.	1. 23. 7 effectus parallaxis.	1. 23. 7 effectus parallaxis.	1. 23. 7 effectus parallaxis.
h. 21. 35. 32. 4 idem cont. e terræ centro.	h. o. 13. 41, 3 idem cont. e terræ centro.	h. o. 13. 41, 3 idem cont. e terræ centro.	h. o. 13. 41, 3 idem cont. e terræ centro.
Medius ☿ transitus e terræ centro visus h. 22. 54'. 36", 8.			

Observatio Parisiis a Cassino Dominici nepote habita tubo ped. 14.

<i>In ingressu</i>		<i>In egressu</i>	
h. 21. 35'. 10" cont. inter. observatus.	h. o. 15'. 18" cont. inter. observatus.	h. o. 15'. 18" cont. inter. observatus.	h. o. 15'. 18" cont. inter. observatus.
17. 4 effectus parallaxis.	1. 23. 7 effectus parallaxis.	1. 23. 7 effectus parallaxis.	1. 23. 7 effectus parallaxis.
h. 21. 35. 27. 4 idem cont. e terræ centro.	h. o. 13. 54, 3 idem cont. e terræ centro.	h. o. 13. 54, 3 idem cont. e terræ centro.	h. o. 13. 54, 3 idem cont. e terræ centro.
Medius ☿ transitus e terræ centro visus h. 22. 54'. 40", 8.			

Observatio ad Clermontium a Jac. Cassino habita tubo ped. 14.

Hujus observationis numeri, non quales ad Clermontium notati fuere, describuntur, sed quales eos esse oportuisset sub regii observatorii meridiano. In traducendis autem temporibus ab uno meridiano ad alterum, propter exiguam locorum distantiam, nulla discriminis inter parallaxes in uno atque in altero loco ratio habita est.

<i>In ingressu</i>		<i>In egressu</i>	
h. 21. 35'. 21", 5 cont. inter. observatus.	h. o. 15'. 5", 5 cont. inter. observatus.	h. o. 15'. 5", 5 cont. inter. observatus.	h. o. 15'. 5", 5 cont. inter. observatus.
17. 4 effectus parallaxis.	1. 23. 7 effectus parallaxis.	1. 23. 7 effectus parallaxis.	1. 23. 7 effectus parallaxis.
h. 21. 35. 38. 9 idem cont. e terræ centro.	h. o. 13. 41. 8 idem cont. e terræ centro.	h. o. 13. 41. 8 idem cont. e terræ centro.	h. o. 13. 41. 8 idem cont. e terræ centro.
Medius ☿ transitus e terræ centro visus h. 22. 54'. 40", 3.			

Nunc

Hac igitur usus methodo, posita Solis parallaxi $10''$, calculum subdixi, quo differentiam temporum, in qua contactum planetarum Parisiis, & Bononiæ observatum, atque ad terræ centrum traductum, cadere oportuit, comperirem. In eo autem calculo præter meridianorum distantiam, quam posui $35'. 53''$, & latitudinem loci, in quo observatio nostra habita est, quam e Manfredii, & Zanotti observationibus posui $44. 29'. 52''$, non autem, uti Pingreus, $44. 29'. 36''$ (est enim $44. 29'. 36''$ latitudo Gnomonis in Divi Petronii) præter hæc, inquam, nulla alia elementa mutavi: nam ad Solis, Venerisque longitudes, & ad latitudes Veneris quod attinet, usus sum ipsa tabula, quam Pingreus suum in sermonem inseruit. Volui enim, ut quidquid discriminis intercederet ea inter, quæ ex meis calculis consequerentur, & ea, quæ collegit Pingreus ex suis, totum meridianorum distantia, quam ipse sumserat, esset tribuendum.

Cum ergo invenerim, planetarum contactum citius Parisiis, quam Bononiæ, videri oportuisse $28''$, 48 ; ex Pingrei autem tabula, quæ observationum comparationes continet, appareat citius eundem videri oportuisse Parisiis, quam ad Rodriguetium $4'. 33''$, 56 ; collegi temporum discrimen Bononiam inter & Rodriguetium esse debuisse $4'. 5''$, 08 . At eum ponit Pingreus visum esse Parisiis ad horam $20. 28'. 26''$ (Landii enim observatione utitur): Bononiæ autem visus est ad horam $21. 4'. 58''$, quæ hora, ad parisiensem meridianum deducta, fit $20. 29'. 5''$. Sequitur ergo, ut visus fuerit citius Parisiis, quam Bononiæ $39''$. Ex eadem vero, quam modo dixi, tabula constat, illum visum fuisse citius Landio Parisiis, quam Pingreo ad Rodriguetium $4'. 57''$. Igitur discrimen temporum bononiensem inter, & rodriguetiensem observationem fuit $4'. 18''$.

His comparatis elementis, atque analogia instituta, sequitur, parallaxim Solis ponendam fuisse, non $10''$, sed $10''$, 53 . Atque hanc postulat nostræ cum rodriguetiensi observatione comparatio. Institutis porro analogiis, quas docet Pingreus, ubi suæ comparationum tabulæ rationem explicat, inveni, Solis parallaxim, quam postulat comparatio observationis nostræ cum Ulyssiponensi, esse $10''$, 70 ; quam denique postulat ejusdem comparatio cum illa, quæ ad Caput Bonæ Spei est habita, esse $8''$, 31 .

Jam vero parallaxis $10''$, 53 non solum a ceteris, quæ
ex

ex aliarum cum rodriguetiensi observationum comparatione deducuntur, non discrepat, sed media etiam fere est inter sex, quas in appendicem suo sermoni adjunctam confert Pingreus, & esse valde inter se consentientes animadvertit. Media autem plane fieret, si quatuor centesimæ detraherentur: quæ sane detrahi facile possent, modo longitudinum differentia, quod non sine probabili ratione ex iis, quæ supra dixi, fieri posset, uno scrupulo secundo minueretur. Quæ cum ita sint, vides jam, adeo non fuisse observationem bononientem non accuratam, ut nullum majus in eâ summæ accuracionis argumentum desiderari possit.

Denique quod ad parallaxim $10''$, 70 attinet, quæ ex comparatione nostræ cum ulyssiponensi observatione oritur, quoniam, ipso auctore Pingreo, nondum satis perspecta esse creditur Ulyssiponis longitudo, de ea nihil affirmare interim possumus. At quod ad illam spectat $8''$, 31 , quæ ex comparatione profluit cum observatione ad Caput Bonæ Spei a Massoni habita, non abs re esse videtur, quod animadverti, eam mediam esse non solum inter illas, quas ex decem & septem reliquis comparationibus Pingrei tabula exhibet (est autem media ipsa $8''$, 36), sed maxime inter duas $8''$, 10 , & $8''$, 50 , quas Landius sub finem ejus libri tradit, quem nuper de Venere anno 1769 Solem trajectura conscripsit: quarum primam aliquot ante annis collegit Wargentinus, cum observationes permultas, quæ alias ad Caput Bonæ Spei habitæ fuerant, ad respondentes aliis in locis habitas referret; alteram collegit Londinensis Astronomus Shortus ex quamplurimis a se diligentissime institutis calculis. Quocirca sentis profecto, observationem a Zannotto ita commode constitutam esse, ut sive Pingrei observationi fidendum sit, sive Massoni, utrique respondeat, & præterea Wargentini etiam, & Shorti calculis commendetur. Utra autem, an Pingrei, an Massoni observatio potior habenda sit, non ausim quærere. Landius quidem de Massoni solertia, diligentiaque negat posse dubitari.

Hæc habebam, mi Saladine, quæ de Pingrei accusatione ad te scriberem. Quibus exponendis si forte plus, quam opus erat, indulsi, nostræ amicitia dabis. Vale, meque, ut facis, ama. Bononiæ X. Kal. Nov. M C C L X I V.

JOANNIS BRUNELLI.

De Pororoca .

E P I S T O L A .

JOANNES BRUNELLUS EUSTACHIO ZANOTTO
S. P. D.

JAmdiu hoc mecum reputavi, Zanotte ornatissime, earum rerum, quæ in mundo accidunt, nullam posse contemni ab iis, qui in naturæ contemplatione versari cupiunt. Cum vero aliquid novum, aut insolens apparet, cujus causam investigare oporteat, omnes periclitandas esse vires ingenii arbitror, diligenterque etiam cavendum, ne, si quid forte negligatur, quamvis leve sit, atque exiguum, ea, quæ aut intelligi, aut explicari nequeunt, consulto videantur fuisse prætermissa. Quapropter brevi quidem, sed tamen accurate, ut potero, rem tibi exponere constitui magnam in primis atque admirandam, cujus rei a te, qui ingenio & doctrina excellis, tum etiam a nostræ civitatis philosophis, causam aliquam audire velim. Quod si nonnulla etiam hic leges ex meo sensu deprompta, scito non in ea me opinione esse, ut videar mihi lucem aliquam in tantis tenebris attulisse. Ingenium solummodo experiri volui, & num quid dicere possem, quod probabile videretur, tentavi. Sed jam rem ipsam cognosce, eoque libentius, quod eam nemo adhuc, quod sciam, tractandam sumpsit. Urbs est in america meridionali a præterlabente flumine *Parà* dicta, quæ ab æquatore austrum versus gradum unum distat cum dimidio fere; ab oceano vero, quem respicit inter orientalem plagam, & borealem, quinquaginta miliaria & amplius. Flumen, quod urbem alluit in ora sitam meridionali, multarum aquarum concursum potius dixerim, quæ undique per amnes, & minora flumina delatæ huc confluent oceanum ingressuræ. At Amazonum fluminis ora extrema, quæ in eundem intrat oceanum, longo ab urbe distat intervallo innumeris prope insulis consperso, quarum una, quam Indi *Marayo* vocant, gyro ad quingenta fere miliaria produ-
T. V. P. II. I i cto

cto continetur. Atque hinc facile colliges quam vehementer illi errent, qui *Para* urbem in ora fluminis Amazonum meridionali sitam esse affirmant. Verum de hoc nonnullorum geographorum errato alias dicam, cum de flumine ipso Amazonum sermonem instituere otium mihi fuerit. Inter minora illa flumina, quæ, ut paulo ante dixi, aquas ad *Para* urbem deferunt, unum est, quod *Guama* dicitur americana voce. In eo inter ceteras insula quædam est parvi quidem circuitus, sed celeberrima, & accolis omnibus notissima; ab ipsa urbe distans milliaria quadragintaquinque circiter, jacensque in medio flumine ducentos fere passus lato. Ibi, ut in ceteris fluminibus accidit, quæ oceano propiora sunt, bini quotidie maris accessus, ac recessus fiunt, modo Luna a Syzygiis non longe absit. Proximo enim, altero, ac tertio post novilunium, aut plenilunium die, quo tempore ætus contingunt longe omnium maximi, paulo supra eam insulam, quam nuper commemoravi, tanta vis ac moles exuberantium aquarum subito, ac tam celeriter erumpit, ut tempore quam brevissimo retro acti omnes eo usque se attollant, quo reliquis ante aut post diebus sex, septemve horarum spatium conscendunt. Hanc subitam, concitatissimamque aquarum eruptionem *pororocam* Indi appellant. Quo vocabulo satis apto & velocitatem aquæ, & navigantium metum, & fortasse etiam periculum exprimunt. Eam vero insulam, unde *pororoca* initium sumit, *pororocæ* insulam vocant. Vix autem horrendus fragor exaudiri incipit, cum terni, aut quaterni fluctus albentes spuma, sibi que incumbentes ab ea insula præcipiti impetu ruunt, ac sursum circumque effusi per immane spatium late campos inundant. Tunc vero abripiunt secum magna vi & arborum truncos, & animalium cadavera, & cymbas, & ingentia fæxa, & quidquid in medio cursu deprehendunt. Ubi vero flumen angustiore alveum tenet, vel in minores amnes discerpitur, tantus est impetus *pororocæ*, atque vis tanta, ut aquæ plane furere videantur. Sic *pororoca* sursum per amnes, quos invenit, fertur; donec, viribus paulatim amissis, tandem in quietem redigitur, ac penitus evanescit, a quibus jam summam ubique altitudinem obtinentibus. Quamquam *pororoca* altero die longe debilior est, & impetus habet multo minores; tertio vero die vix metuenda. Verum instante *pororocæ* tempore, præsertim maximæ, quæ statim conjunctionem ipsam, vel oppositionem

con-

consequitur; quisquis in eo fluminis tractu navigat, qui supra insulam *pororocæ* situs est, diligenter cavere debet, ne a *pororoca* improvise deprehendatur; secus actum de se judicet. Et sane quosdam audivi misere sic perisse; & hominem sum allocutus, qui dum in illa fluminis parte navigaret, & jam *pororocæ* fragorem satis longinquum, ut sibi videbatur, audiret; mihi retulit, se proceriorem arborem una cum fociis conscendere vix potuisse, cum jam cymbam infra se positam incredibili velocitate a fluctibus rapi videret, ac tandem demergi. Quamvis autem *pororocæ* vires omnes atque impetus in superiores fluminis partes, ut supra dixi, ferantur, nolim tamen credas, ortum versus, in iis præsertim locis, quæ ab insula *pororocæ* non multum distant, nullos aquarum sibi occurrentium perturbatos motus contingere. Fieri enim non potest, ut ab ea insula tanta vis, tantaque moles aquarum ad satis magnam altitudinem subito erumpat, quin pars aliqua pondere suo in contrariam fluminis partem deorsum cadat. Aquis igitur tum ab oceano, tum a *pororoca* ex adverbo concurrentibus, motus aquarum satis vehementes fieri debent, ut navigantibus & metum, & etiam periculum afferre possint; donec aquæ omnes ubique per illum etiam fluminis tractum ad virium æqualitatem veluti componantur. *Pororocæ* autem omnium maximæ sunt, quæ post æquinoctia, luna Syzygias de more prætergressa, contingunt. Etenim aquæ tunc temporis & majori copia foras erumpunt; & vires quoquoeversum exercent multo validiores magisque metuendas. Hactenus *pororocam* illam exposui, quam in *Guama* flumine, in quo bis iter facere mihi contigit, incolæ fere omnes propter urbis viciniam & videre facile, & observare possunt. Sed aliis in locis ab urbe remotioribus aliæ quoque fiunt *pororocæ* temporibus fere iisdem; quarum illa longe omnium maxima, & præ omnibus summe metuenda, quæ in ipso fere ostio fluminis Amazonum prope illud promontorium, quod appellant *Cap du Nort* maximis viribus, & ingenti supra modum celeritate prorumpit. Ibi Condaminus, dum in *Cajennam* insulam navigaret, Indorum negligentia, ut ipse testatur, pene interiit. Nunc vero, Zanotte ornatissime, antequam tibi de hujusce phænomeni causa quid cogitaverim exponere incipio; hoc unum scire te velim, satis multa ab illius loci incolis proferri ad rem obscurissimam, difficillimamque expla-

nandam, quæ mihi potius irridenda videntur, quam digna, ut ad examen revocentur. Putant nonnulli, *pororocam* oriri statim ac propter maris æstum aquæ fursum aguntur majore impetu, quam flumen in oceanum delabi solet. Verum si hoc ita contingeret, ubique terrarum, pelago æstu intumescente, flumina suam haberent *pororocam*, quæ bis in singulis dies ab omnibus facile observaretur. Præterea cur nulla unquam conspicitur *pororoca* infra *Para* urbem, scilicet in illo fluminis tractu, in quo tot aliorum fluminum, minorumque amnium undique confluentes aquæ marinis aquis occurrunt viribus multo majoribus? Cur vero in illo ipso *Guama* flumine, ubi æstus maris fere semper admodum lente procedit, paulo supra illam insulam, quam toties commemoravi, *pororoca* subito erumpit viribus tantis, tamque immani celeritate? Id autem cur semper accidit postquam Luna Syzygias prætergressa fuit? Alia multa prætermitto, quæ ab homunculis rerum ignaris excogitata sunt. Nolo enim tibi stomachum, & nauseam movere. Venio igitur ad illa, quæ ipse, re diligenter expensa, ad obscurissimi phænomeni causam investigandam dici aliquo modo posse censeo; quæque licet difficultatibus involvantur non contemnendis, aliquo modo tamen mihi visa sunt esse probabilia. Atque illud in primis tamquam certum, ac veluti observationi consentaneum firmissime tenendum est, *pororocam* ipsam ita cum æstu marino conjungi, ut ab illo plane pendere videatur; quod ex illis, quæ supra dixi, abunde patet. Atque hoc modo æstus ipse marinus horrendæ illius aquarum eruptionis causa facile fuerit. Verum qui hoc ita sicce dixerit, nihil omnino explicet; & rem difficilè valde, atque obscuram intactam prorsus, uti erat, relinquat. Ratio igitur in medium afferri debet, qua marini æstus, qui semper post Lunæ ac Solis conjunctionem vel oppositionem per dies aliquot cæteris omnibus multo majores observantur, efficere possint, ut tanta vis, ac moles aquarum foras erumpat illo in loco, unde *pororoca* initium fumit. Quomodo igitur id fieri possit, paucis dicam in hunc modum. Paulo supra insulam *pororocæ* apertum os ac satis amplum occulti canalis esse censeo, ac subter terras cæcis meatibus in mare exeuntis non longe ab littore. Et sane quosdam esse hujusmodi subterraneos canales, quibus latentes aquæ ad loca etiam longe distita deducuntur, certissima res est;

est; atque is ignorare solum potuerit, qui nihil prorsus audiverit. Per hunc igitur canalem puto, tantam illam aquarum copiam, atque vim, quibus *pororoca* efficitur, a mari ad illam usque insulam propria gravitate ferri; ac tandem foras erumpere, ita tamen, ut non recta sursum emittantur, sed obliquo itinere propter canalis ductum, contra vim fluminis ingenti cum celeritate ascendant. Idque fieri censendum est statim ac tumor ille maximi maris æstus supra canalis hiatus, qua parte canalis ipse in mare desinit, totus incumbit. His enim positis cum paulo post Syzygias marinæ aquæ illum tumorem efficiant cæteris omnibus multo majorem; fortassis fieri poterit, ut eadem aquæ longe quoque majorem supra eundem canalis hiatus habeant altitudinem, quam quæ prope insulam *pororocæ* in flumine continentur; quæ sane tunc temporis depressissimæ ad mare feruntur. Igitur marinæ aquæ canalem ingressæ, per eundem proprio ac naturali pondere ad illam usque insulam ferri debent magna velocitate, magnoque impetu, fluidorum legibus sic postulantibus; donec aquæ omnes, & quæ in flumine sunt, & quæ a mari per canalem decidunt, altitudinem obtineant prorsus æqualem. Id vero quam brevi temporis spatio fieri necesse sit, omnes facile intelligent, qui fluidorum naturam, atque leges perspèctas habeant. Cæteris autem diebus, cum scilicet Luna a Syzygiis longe abest, quoniam tumor ille ad tantam non attollitur altitudinem; cur non dicamus, aquis, quæ super utrumque canalis hiatus incumbunt, eandem prorsus tunc esse altitudinem, ut, quemadmodum in siphonibus accidit, eadem utrimque prementium virium magnitudo sit? Nulla igitur his diebus erit *pororoca*; cum satis magna, & concitatissima, quæque brevissimo tempore absolvatur, semper esse debeat, quoties Luna vel Soli conjungitur, vel illi opponitur. Facile etiam intelliges, cur existente Luna in Syzygiis æquinoctiorum tempore, *pororocæ* prodeant multo majores. Tunc enim marini æstus contingunt longe omnium maximi; atque idcirco tumor ille ad maximam quoque assurgit altitudinem; quo fit, ut aquæ maris in canalem irruant majori vi; atque etiam in flumine foras erumpant impetu, ac velocitate, & copia longe majore. Tandem cum canalis ille subterraneus in mare desinat non longe a littore, satis commode explicare posse mihi videor, cur *pororoca* eodem semper tem-

po-

pore prorumpat, quo aquæ a mari per flumina sursum extruduntur. Neque enim tumor ille maris supra canalís hiatum totus incumbet, nisi prius aquæ ad littora sensim appellent, seque in flumina quoquoersum immittant. Habes jam, Zanotte ornatissime, meam de *pororoca* sententiam, vel potius conjecturam quamdam; quæ si minus placuerit, non ægre feram; neque, mihi crede, irascar. Quin immo ea tibi referam, quibus conjectura hæc qualiscumque mea labefactari potest. Quid enim ab eo diffimulandum est, qui veritatem potius, quam ingenii laudem quærit? Ac primum recedente mari, atque in semetipsum redeunte vortex satis amplius ad insulam *pororocæ* gigni deberet ob præcipitem aquarum lapsum in subterraneos ductus. Nullus autem, quod sciam, vortex observatur toto illo temporis intervallo, quo aquæ fluminis oceanum versus fluere conspiciuntur. An vero iis in locis ad oceanum usque per id tempus eandem aquæ altitudinem tenent? Si enim ita esset, nullus vortex spectari posset. Verum si id affirmem, ex veritate loqui nolim. Satis enim observatione didici æstu deservescente, aquarum superficiem, quo propius a mari abest, eo esse depressiorem. Verum quod sequitur difficultatem affert longe majorem. In ipso *Para* urbis conspectu toto eo tempore, quo aquæ in mare delabuntur, vortex periculosus admodum, in amplissimumque gyrum quoquoersum extensus conspicitur, quem ipse aliquoties trajeci non sine metu. Et sane cum e nigro flumine ad urbem redirem, memini cymbam, qua vehebar, cum vix oram vorticis attigisset, paulatim deflexisse a cursu, ac tandem magna vi in orbem abreptam fuisse. A quo periculo vix una cum sociis per fummos remigum conatus evasi. Multos autem periisse audivi in illo vortice, quorum cadavera nusquam apparuerunt. Sic cymbæ quoque absorptæ sunt satis multæ, quas nemo umquam iterum videre potuit. Magnæ autem, proceræque arbores, quod frequenter accidit, statim ac in centro vorticis veluti sistuntur, primum erigunt se se, deinde sub aquis magna vi sic demerguntur, ut nullibi postea conspiciantur. Verumtamen pelago æstu intumescente, tantus hic vortex nullus apparet, ac penitus evanescit. Qui tamen utrum de illorum genere sit, quos vivos appellant, tute affirmare non possum; sed nec facile negaverim; illa enim, quæ modo attuli, suspicionem pariunt non contem-

temnendam; & quasi demonstrant, ab aquis hunc vorticem sic efformari per occultum canalem decidentibus. Quod si ita esse dixerimus, cur nulla prorsus hoc in loco fuerit *pororoca* mari æstu turgescente, quemadmodum & in *Guama* flumine contingit, & aliis etiam in locis? Fortassis canalis ille, si quis est, in mare non definit; sed alio fertur, atque ad remotissima loca. Verum qui hoc dixerit, mihi quoque dicat, & plane, si potest, explicet, cur vortex ille non semper appareat; sed tunc solum, cum aquæ ad mare redeunt. Igitur si vortex ille ab aquis per occultum canalem ad mare usque protensum labentibus ortum ducit; & tamen nullæ per eundem canalem regrediuntur deinceps, forasque umquam erumpunt, quæ *pororocam* efficiant; conjectura sane, quam supra ad *pororocam* ipsam explicandam in medium attuli, plane concidit, ac nulla prorsus est. Atque hæc, Zanotte ornatissime, dissimulare ipse non debui, qui cum veram admirandi phœnomeni causam ignorare me fatear, eam tamen scire vehementissime cupio. Hæc de *pororoca* habui, quæ ad te scriberem. Quæ si Academicis nostris legenda curaveris, & mihi gratum facies, & me tibi magis magisque obstrictum habebis. Etenim existimo magnos illos viros, ob rei novitatem, hæc libenter audituros. Quod si pro summo ingenio, quo pollent, causam aliquam investigabunt, quæ ad rem pertinere videatur, de ea statim fac me certiolem. Vale.

EUSTACHII ZANOTTI.

De angulo positionis, Et ejus usu in determinanda Telluris figura.

A Quovis puncto superficiei terrestris si objecta circumposita ad horizontem referantur, anguli, quos lineæ visuales cum linea meridiana comprehendunt, idoneis instrumentis comparati ad chartas topographicas perficiendas maxime conferunt. Die 10 mensis Maji Anni 1753 interea dum ipse, & focius Mateuccius diversas Solis altitudines prosequeremur, quibus instrumenta in meridiano sita expendere solemus, animadvertimus eam esse Solis declinationem, per quam occasus fieri deberet prope illud horizontis punctum, qua celsissima mutinensis turris prominet, & a bononiensi observatorio prospecta in altitudinem minorum circiter quinque affurgit. Ingruente occasu Solis telescopia eo direximus, ac tandem e regione turris Solem conspeximus, cumque turris fastigium in apicem desinat, notavimus ex horologio tempus, quo apex in discum Solis se immittere, & tempus, quo ab eo egredi visus est. Ex hac mora longitudo chordæ deducitur intra Solem apparenter descriptæ, & cum data sit Solis diameter, constabit etiam de chordæ distantia a centro. Addita hac distantia complemento declinationis Solis, vel ab eo subducta, pro ut chorda descripta meridionalis fuerit, vel borealis, conficitur arcus horarii circuli, qui a polo usque ad verticalem circulum per apicem turris transeuntem protenditur. Elicui præterea punctum temporis medium inter ingressum, & egressum, quos observationeprehendimus. Hoc tempus a meridie numeratum, & in arcum circuli conversum anguli mensuram exhibet, quem circulus horarius efficit cum meridiano. Quod si præterea nobis considerandum proponamus arcum meridiani, nempe complementum altitudinis poli, quod satis liquet ex pluribus observationibus Bononiæ habitis, conficietur triangulum sphericum,

cum, in quo cognoscuntur duo crura, & angulus ab his comprehensus, unde resultabit angulus verticalis circuli cum meridiano absque eo quod refractiones, & parallaxes huic determinationi quidpiam officiant. Antequam ad ea me conferam, quæ trigonometricis rationibus consequutus sum, non erit præter rem monere, quo pacto declinationem solis comparaverim pro eo tempore, quo observatio habita est; nam quamvis per aliquot præcedentes, & subsequentes dies meridianæ solis altitudines captæ fuerint, quibus conficitur meridiana solis declinatio, cum tamen inæqualis sit motus solis in declinationem, dubitari semper poterit, quin declinatio, quæ pro quovis intermedio tempore deducitur, aliquibus secundis scrupulis a vero aberret, si ab ordine dumtaxat, quo declinationes meridianæ procedere videntur, distributio fiat. Quamobrem in hac re satius esse duxi, si tabulis Nicolai de la Caille uterer, quæ omnium consensu accuratissimæ habentur. Ex his itaque tabulis non modo eam solis longitudinem subduxi, quæ observationis tempori responderet, sed illas etiam, quæ soli convenirent utroque meridie observationi proximo. Inventis solis longitudinibus, & comparata eclipticæ obliquitate, tandem ad solis declinationes devenit, quarum ordinem sequutus sum, ut ex observatis declinationibus meridianis eam colligerem, quæ observationis tempori responderet. Hæc investigatio eo spectabat, ut accurate determinaretur arcus circuli horarii, & quoniam cetera, quæ in proposito triangulo supputationi trigonometricæ inservire debent, satis perspecta sunt, concludemus angulum circuli verticalis cum meridiano eum esse, qui ex calculo prodiit videlicet gr. 63. 42. 51.

Cognito angulo positionis quoties in charta topographica descriptus fuerit meridianus bononiensis, & notatum fuerit punctum, ubi Bononiam sitam volumus, statim apparebit quoniam spectet linea, quam urbs mutinensis tenet.

Longitudo, ac latitudo Mutinæ non eadem ponitur ab astronomis, qui insigniorum urbium catalogos evulgarunt. Manfredius in catalogo, quem alteri ephemeridum tomo adjunxit, differentiam latitudinum inter Bononiam & Mutinam exhibet min. 8. 35''; Cassinus vero min. tantum 4 —, qui dissensus in positione urbis non est parvi faciendus; nam locata urbe in eo puncto, quod illi Manfredius assignat, illinc abducenda erit, si Cassinum audimus, & versus æquatorem promo-

venda milliaria circiter quatuor. Certo nunc stabilire nequimus, cui potius in hac re deferendum sit an Cassino, an Manfredio, usquedum aliæ mensuræ capiantur; nam quamvis latitudo Bononiæ satis perspecta sit, & angulus positionis recte constitutus fuerit, si tertium elementum non accedat, veluti differentia longitudinum, numquam dabitur quæsitam latitudinem tuto decernere. Deficiente hoc tertio elemento inquisivi ex duobus jam præcognitis quænam prodiret differentia longitudinum posita primum latitudine Cassiniana, & deinceps posita latitudine, quam Manfredius amplexus est. Ex altera mihi prodiiit longitudinum differentia min. 11. 15'', ex altera vero min. 23. 29'', quæ quoniam itinerariis mensuris sat accurate respondet, a quibus altera longissime aberrat, non sine ratione concludemus latitudinem, quam Manfredius ponit, latitudini Cassinianæ anteponendam esse.

Quoniam res eo deducta erat, ut ab angulo positionis de emendandis summorum virorum catalogis ageretur, easdem observationes iterum instituere decrevi, quibus de mensura prædicti anguli certius constaret; sed alia ex aliis impedimento fuerunt ne res perficeretur; sæpe id frustra tentavimus sole inter vapores oblitescente antequam horizontem assequeretur. Die prima augusti anni superioris 1763 Mateuccio, & Canterzano obtigit turris fastigium intra solis discum intueri, cumque chorda apparenter ab apice descripta ad meridiem spectaret, & sol in dies vergeret ad æquatorem, non erat dubitandum quin postero die idem objectum iterum in disco solis esset appariturum. Spes non fefellit, ac tertia vice eadem observatio peracta est. Ex his deinceps angulum positionis calculo subduxi ea methodo, quam superius declaravi. Angulus, qui resultat ex observatione habita die 2 Augusti, compertus est gr. 63. 42. 49 ab eo nihil ferme discrepans, quem nobis exhibet observatio prima, diei scilicet 10 Maji, etenim differentia non excedit min. sec. 2. At observatio diei 1. Augusti angulum positionis efficit majorem uno minuto primo, & secundis circiter decem. Quod autem observationes omnes aque diligenter peractæ fuerant, non satis intelligebam quid causæ esset, cur unus angulus ab aliis duobus tantumdem dissentiret. Dum hæc animo pervolverem animadverti die prima Augusti chordam in sole exaratam parum a centro abfuisse, quare si vel minimum in longitudine chordæ erratum sit, in distantiam

tiam a centro, quæ inde deducitur, error invadet non contemnendus. Contra vero accidit in chordis a centro remotioribus, quas si eadem quantitate a vero aberrare fingimus, error distantia fiet perexiguus. Hæc igitur potissima causa est, cur duæ observationes consentiant inter se tertia dissentiente. Itaque auctor sum iis, qui angulum positionis hac methodo metiri voluerint, ut dierum observationes præferant, quibus objectum chordam describat a centro satis distitam; quæ cautio si habeatur, recte constituetur angulus positionis, de quo observationes nostræ fidem faciunt.

Quoniam positionis angulus tali pacto comparatus tantam certitudinem præferret, quantam vix ab usitatis instrumentis expectare licet, voluntas incessit explorandi, an inservire aliquo modo posset ad illustrandam celeberrimam, si qua alia est, quæstionem de figura telluris, de qua graduum mensuræ hæctenus perquisitæ novas inter philosophos dissensiones commoverunt; atque ut eos omittam, quibus non placet forma regularis, sunt nonnulli qui terrestrem globum sibi repræsentant, tamquam si ortus esset ex rotatione ellipsis circa axem minorem, cujus rei indicium erit si graduum incrementa ab æquatore ad polos eam fere proportionem sequantur, quam habent sinuum latitudinum quadrata. Alii vero cum Bougherio observatas graduum longitudes scrupulosius examini subjicientes proportionem plane diversam se invenisse putant, & curvam rotari volunt, in qua graduum incrementa sint in ratione quadruplicata eorumdem sinuum. Itaque, ut ad propositum revertar, considerabam triangula, quæ certis analogiis a geometria depromptis resolvuntur, haberi tamquam sphericæ, qua figura posita valent utique analogiæ, qua nihil valerent, si triangula in spheroidica superficie descripta forent.

Atque ut hoc ad tellurem transferamus, imaginemur triangulum, quod contineatur a duobus meridianis, qui a plano verticali secantur in duobus punctis. Quoties datum fuerit complementum latitudinis unius puncti, & angulus, quem meridiani comprehendunt, idest differentia longitudinis, & præterea datus sit angulus, quem planum verticale efficit cum alterutro meridiano, ex hisce tribus jam cognitiss colligere licet complementum latitudinis alterius loci, dummodo proportiones inter latera, & angulos eæ sint, quæ sphericis triangulis conveniunt; verum si proposita triangula in alia qualibet super-

ficie curva descripta fuerint, adhibita eadem supputatione in errorem nos labi oportebit, ac propterea latitudinis complementum, quod calculo eruitur, cum eo convenire non poterit, quod immediatis observationibus definietur. Hæc sane verissima sunt, si geometrica subtilitate spectentur; restat inquirendum an differentia in hoc brevissimo telluris tractu, quem ad examen nunc revocamus, sit adeo exigua, ut possit in errorum ambiguitate, quos nemo observando cavere potest, prorsus delitescere.

Repræsentet ellipsis PMp meridianum bononiensem, & locus, ubi angulus positionis dimensus fuit, habeatur in M . Ibi linea verticalis designabitur ducta ad ellipsim normali MQ , quæ axem telluris secet in Q . Equidem observatori, qui diversatur in M , perinde erit, ac si tellus spherica esset habens centrum in Q , ubi normalis incurrit in axem. Concipiamus in superficie telluris alteram ellipsim descriptam esse per polos P, p , & per objectum ab observatore in M prospectum, quæ propterea meridianus objecti appellabitur. Fingamus præterea hanc ellipsim una cum objecto revolvi circa axem Pp , donec congruat cum meridiano PMp , & sit objecti locus in H . Per H ducatur normalis, quæ alteri occurrat in puncto E , ac propterea tum ME tum HE haberi poterunt pro radiis evolutæ punctorum M , & H , quæ parum distita sunt. Jungantur duo puncta H, Q linea HQ . Enim vero si tellus spherica esset habens centrum in Q , qualem sibi fingit observator in M , latitudinum differentia æqualis foret angulo MQH ; & revera si ponimus differentiam longitudinum inter duo loca M , & H accuratissimis observationibus constitutam esse, & si data sit latitudo puncti M , & angulus positionis, quem supra innuimus, ab hisce tribus elementis latitudinem loci H trigonometricis rationibus supputantes a figura spherica nihil recedentes tandem deveniemus ad angulum MQH ; at si immediatis observationibus latitudinum differentiam investigabimus observando scilicet tum in M , tum in H altitudinem meridianam ejusdem sideris prope verticem transeuntis, resultabit angulus MEH . Cum autem in ellipsi relata ad axem minorem radius evolutæ brevior sit normali, latitudinum differentia minor in spherâ existet, quam in spheroide compressa ad polos, contra vero major erit, si spherâ comparetur cum spheroide oblonga. Nunc videamus quantum alter angulus ab altero differat.

Jam,

Jam, ut scitis, plures ab astronomis graduum mensuræ comparatæ fuerunt, quæ si invicem conferantur, ea fere axium proportio deducitur, quam Newtonus præferat adhibita vi centrifuga ab Hugenio prius excogitata, & posita gravitatis lege, quæ a mutua corporum attractione pendet. Et revera gradus Laponiæ cum gradu Peruviano comparatus eam axium proportionem exigit, quam habent numeri 224:225, cui proportioni non repugnat gradus a Nicolao de la Caille dimensus prope Caput Bonæ-spei, & gradus ipse Picardi, donec correctio fiat, quæ a stellarum anomaliis proficiscitur. Statuta axium proportione normalis linea MQ , & radius evolutæ ME sic exprimetur. Fiat semiaxis $Pp = 1$, & denominetur sinus anguli MQP idest sinus complementi latitudinis loci $M = 5$ existente radio $= 1$; & dimidium parametri $= p$.

$$\text{Hinc prodit normalis } MQ = \frac{p}{1 + p - 1:55^{\frac{1}{2}}}, \text{ \& radius evolu-}$$

$$\text{tæ } ME = \frac{p}{1 + p - 1:55^{\frac{1}{2}}}.$$

Cum autem MQ , NQ nihil ad sensum differant, erit sinus anguli MEH ad sinum anguli MQH ut $MQ:ME$. Substitutis deinceps valoribus quantitatum, quæ in propositis formulis continentur, & admissa latitudinum differentia inter Bononiam & Mutinam, quam Manfredius in suo catalogo exhibet, percipiemus tandem angulos MEH , MQH differre duobus tantum secundis scrupulis, quæ differentia adeo perexigua est, ut solertissimum quemque observatorem fugere possit, & despondendum animis sit indagationem tali pacto susceptam absolutum iri. Atque illud in primis spem nostram minuit, quod longitudinum investigatio, a qua calculus pendet, fallaciis, ut omnes norunt, non contemnendis obnoxia sit. Nam si satellitum observationes in auxilium vocentur, facile est in errorem labi supra minuta secunda quinque aut sex temporis, quæ in arcum circuli conversa errorem facient unius minuti primi cum semisse. Equidem minus peccari poterit differentiam longitudinis inquirendo ea ratione, qua olim Picardum usum fuisse accepimus, ut differentiam longitudinis nosceret inter Uranoburgum & Haphniam. Methodus in eo consistit, ut duo observatores e duobus locis subitam quamdam flammæ extinctionem referant ad transitum ejusdem stellæ

per

per meridianum, ex quo statim intelligunt quantum duo loca in longitudine differant; omnino tamen in duobus minutis secundis tum ex horologii visione, tum ex observatorum cunctatione hærare possumus, quo fieret ut arcus circuli a vero diffideret minutis secundis triginta.

Quamvis proposita methodus ad illustrandam quæstionem de figura telluris parum accommodata videatur, attamen non erit inutile hæc vobiscum differuisse, quæ viam aperient ad differentiam longitudinis tutiori, quam antea, ratione determinandam, in qua omnis difficultas posita est, cui postea si accesserint mensuræ geodeticæ, atque omnia recte comparata fuerint, ex duplici mensura arcus meridiano perpendicularis resultabit linea ad ellipsim normalis, quæ inter elementa recensetur, a quibus pendet determinatio figuræ telluris. Jam, ut supra diximus, latitudo Bononiæ satis perspecta est, ac præterea nullus dubitandi locus relinquitur, quin angulus positionis recte constitutus fuerit, quare ut tria cognita habeantur in triangulo spherico, quibus supputetur angulus, quem duo meridiani comprehendunt, differentiam latitudinum inquiremus, quam profecto ex observationibus stellarum prope verticem transeuntium subtiliter admodum assequemur. Sed antequam ex hisce elementis ad calculum progrediamur, notare oportet differentiam latitudinum, quam immediatis observationibus definivimus, eam esse, quæ spheroidæ figuræ convenit, quare ne supputatio in errorem nos adducat, eadem differentia erit prius ad figuram sphericam redigenda. In proposito schemate cum datus sit ex observatione angulus $M\hat{E}H$, inveniendus erit angulus $M\hat{Q}H$, quo deinceps utemur, ut differentiam longitudinis trigonometrico calculo assequamur; & quamvis in investigatione anguli $M\hat{Q}H$ axium proportio, de qua quæstio est, tamquam explorata habeatur, sufficiet tamen si ea, quam ponimus, a vero longissime non aberret.

Juvabit nunc quærere quantum arcus longitudinis augeatur vel minuatur propter errores, quos solertissimus quisque observator cavere nequit. Ceteris elementis nihil immutatis fixi angulum positionis gr. 63. 42, ac deinceps uno minuto majorem; omnino tamen discrimen prodiit prorsus contemnendum; ex quo manifestum est prædictum arcum ab angulo positionis nihil detrimenti capere posse, nisi si turpissime observatores labantur. Eadem ratione experiri volui quid efficeret

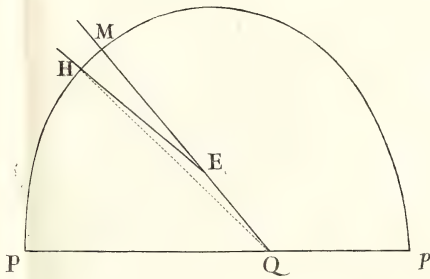
ret error ex differentia latitudinum. Errorem fixi secundorum non amplius trium. Quoties enim instrumenta exquisita adhibeantur, intra eum limitem errores cohibere licet, si Maupertusio fides habenda est. In hac suppositione longitudinis arcus a vero descisceret min. sec. 8. cum semisse. Itaque ex his, quæ hæctenus exposita fuerunt, concludendum videtur nullam aliam rationem capeffendæ differentia longitudinis inter duo loca usque adhuc adhibitam fuisse, quæ majorem subtilitatem præferat; quod si geodeticæ operationes accesserint mensura arcus meridiano perpendicularis absolutissima fiet.

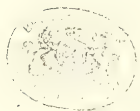
Quoties agitur de metiendo arcu in superficie telluris, in illud maxime contendunt astronomi, ut tractus quo fieri potest longior ad examen revocetur, tunc enim errores, in quos facile rapimur in captanda longitudinum differentia, uti supra dictum est, per longius intervallum distributi determinationi minus nocent. Cum autem difficile sit aliud objectum invenire, & magis distans, & satis conspicuum, quod solem vel occidentem, vel orientem intercipiat, mensuris jam exactis aliæ adjungi possent in hunc modum.

Inquiratur locus, qui sit ad occidentem turre mutinensis, & cujus latitudo parum differat a latitudine bononiensis Observatorii, quæ porro differentia exquisitis instrumentis comparanda est. Iis diebus, quibus sol pone turrim oriri conspicietur, definiatur angulus positionis. Cognito angulo, & ceteris elementis jam constitutis differentia longitudinis eruatur inter turrim & locum observationis, quo pacto differentiam longitudinis inter eum locum, & Bononiense observatorium tuto assequemur. Et quoniam in latitudinum differentia errorem tantum licet supponere min. sec. 3., nullum majus discrimen in differentia longitudinis timendum erit quam sec. $8\frac{1}{2}$. Quamobrem linea meridiano bononiensi perpendicularis, quæ in Longobardiam longe protenditur, quæque unum fere gradum complectitur, aptior reddetur ad quantitates quasdam tuto stabiliendas, a quibus figura telluris repetenda est.

Hæc commentus sum quod noverim angulum positionis methodo proposita subtiliter admodum præfiniri, quod cum ita sit, idem angulus ad alias quæstiones resolvendas traduci poterit. Non desuerunt astronomi, qui suspicati sint positionem meridianæ lineæ nequaquam constantem esse, ex quo angulum positionis ejusdem objecti tractu temporis variari oportet.

oportebit. Nullum hac super re iudicium in præfens haberi potest, desiderantur enim veteres observationes, quas cum nostris comparemus; attamen contenti erimus si experimenta posteris reliquerimus, quæ a majoribus non accepimus; non enim de astronomia bene mereri existimabimus eos dumtaxat, qui res perfecerint, sed eos etiam, qui inchoaverint. Plura quoque de refractionibus horizontalibus dicenda occurrerent, quarum vicissitudines nondum exploratæ sunt; sed nimius sum si singula persequi velim, quæ in alium sermonem rejiciam. Hæc tamen notare volui, ut quisque intelligat quam multa a simplicissima observatione consequantur, idque nobis obtigisse, quod sæpius accidere solet, ut experimenta, quæ aliud agentes, & quasi per jocum suscepimus, visa sint postmodum ad nobilissimas quæstiones resolvendas accommodata.





ROGERII JOSEPHI BOSCOVICH
SOC. JESU.

De unione colorum aliorum post alios per binas Substantias, ac unione multo majore per tres.

I. **S**ub finem anni 1763 transmisi ad Academiam Dissertationem, quæ impressa est in prima parte hujusce Tomi, in cujus Dissertationis fine promiseram uberio- rem fecundissimi argumenti pertractationem edendam fusiore opusculo, illud adjiciens, *ubi per tempus licuerit*. Id quidem adhuc nequaquam licuit. Primo enim a Summo Romano Pontifice missus ad invisendas cum Eminentissimo Cardinali Bonaccursio Pontinas paludes, tum ab Amplissimo Mediolanensi Senatu evocatus ad Mathesim docendam publice in antiquissima, & celeberrima Ticinensi Academia, vacationum vero tempore adhibitus & Mediolani ad inquirendum in vastissimam illam Principis templi molem, de cujus fastigio supremo agebatur, an scilicet oneri complementi nondum extracti ferendo par esset, & Arimini ad invisendum portum illum jam fere obstructum, & opportuna proponenda remedia, de quibus omnibus argumentis scribendum mihi fuit, & quidem admodum fuscè, præter quotidianas alias curas quamplurimas, ingentem in primis epistolarum vim, quarum plurimæ de argumentis ad Mathesim pertinentibus, & nonnullæ de hoc ipso argumento, ex quibus excerpta multa cum illa ipsa Dissertatione Germanice reddita nunc eduntur a Scherffero Nostro Viennæ, nihil sane ocii sum nactus ad liberandam fidem, & ea omnia, quæ mihi animo proposueram, evolvenda. Accessit etiam inusitata sane Cæli inclementia, quæ iis ipsis temporibus, quibus observationum ordinatam seriem instituire potuissim, & instrumenta quidem idonea paraveram, sole obducto per menses integros plures, sæpe inchoatum opus abruptit.

2. Cum idcirco ejusmodi tractatio in aliud mihi tempus differenda sit, quod ignoro, an unquam sim habiturus, proponam hic ea tantummodo, quæ ope mei vitrometri observare mihi licuit, pertinentia ad unionem colorum non omnium simul, sed aliorum post alios per duas substantias, & quæ inde deducuntur, vel cum eo relationem habent, potissimum de objectivo ad conjungendos multo magis heterogeneos radios componendo per tres lentes, sive per duas continentes aquam inclusam.

§. I.

De unione colorum non omnium simul, sed aliorum post alios per binas substantias heterogeneas ex experimentis.

3. **D**E unione filorum radii habentium diversos colores egi in Dissertatione nominata §. IV., ubi num. 87. hæc habentur. *Supereff monendum illud circa hanc hujus erroris correctionem: scilicet in omnibus radiorum heterogeneorum binariis in ingressu in eadem bina media ex aere sit eadem ratio $\frac{dM}{dm}$ (nimirum ratio qualitatum distractivarum); correcto errore pertinente ad bina radiorum genera, corrigi errorem pertinentem ad omnia reliqua: secus, si in aliis sit alia. Id patet ex ipsa formula, in qua res omnis reducitur ad valorem ejus fractionis. An res ita se habeat, inquirendum est per experimenta methodis, de quibus infra. Ex observationibus huc usque institutis videtur res ita se habere, si minus accurate, saltem proxime. In ea formula valor M est ratio sinus incidentiæ ad sinum anguli refracti pro vitro altero pro uno quopiam radio, dM differentia binorum ejusmodi valorum pertinentium ad binos radios heterogeneos, m , & dm eadem pro altero vitro.*

4. Porro rationem dM ad dm pertinentem ad omnia colorum binaria in iisdem binis substantiis eandem esse, supposuerunt omnes, quos quidem ego huc usque videre potui, qui hoc argumentum pertractarunt Geometræ, qui idcirco ubi formulas proposuerunt pro corrigendo errore diversæ refrangibilitatis, assumpto M, & m pertinente ad radios medios, ac $\frac{dM}{dm}$ pertinente ad radios rubeos, & violaceos, corrigendum susceperunt errorem inductum a diversâ refrangibilitate ejus unius binarii, tanquam si eo correcto, corrigeretur simul error
reli-

reliquorum omnium, & iis binis conjunctis conjungerentur simul reliqui omnes, quod quidem ita se habere nonnulli etiam diferte affirmarunt.

5. Affirmavit quidem Clairautius in dissertatione inserta Commentariis Acad. Paris. ad annum 1757, se pluribus institutis experimentis nunquam potuisse omnes prorsus colores simul accurate conjungere, & ejus phœnomeni causam eam esse suspicatus est, quod ratio decurtationis sinus pro diversis coloribus in aliis vitris alia esset respectu ejusdem colorum binarii; verum is etiam binario tantum unico formulas suas applicavit; & D' Alembertus in tertio Opusculorum suorum tomo, in quo idem argumentum pertractavit uberrime, licet innuat, incertum esse, an valor hic $\frac{dM}{dm}$ pro omnibus colorum binariis sit prorsus idem, adhuc tamen eum valorem ubique adhibuit ut omnibus colorum binariis generalem, persecutus errorum multo minorum correctionem, & nihil sollicitus de eo, qui oriri debet ex ejus ipsius valoris discrimine in binariis diversis: usque adeo ea opinio infederat animis, valorem ipsum in omnibus vel accurate eundem esse, vel saltem quamproxime, adeoque conjunctis binis quibusque coloribus, reliquos vel accurate, vel saltem quamproxime simul conjungi, quod ipse etiam in superius memorato loco affirmaveram.

6. Plures ego quidem jam tum observationes institueram pluribus methodis, cum dissertationem ipsam conscripsi, sed nullum adhuc instrumentum habueram, quo in eam rem fatis certo possem inquirere: illud, quod ibidem fuse, ac diligenter descripsi, jam ab Opifice acceperam, sed nullas adhuc fatis accuratas observationes ejus ope institueram, quibus paullo post institutis, quæ ad eam rem pertinent, evidentissime comperi, & pluribus tam nobilitate, quam doctrina præstantissimis viris ostendi tam Romæ superiore anno ante, quam ad paludes Pontinas discederem, quam Mediolani, & Papiæ, quos inter ipse Eboracensis Dux, Regis Angliæ frater, Physicarum rerum & amantissimus, & peritissimus ad ea spectanda phœnomena meum hoc Mediolanensis Collegii angustum cubiculum, in quo hæc ineunte anno 1765 scribere incipio, adire non est dedignatus, & ibidem, immoderati ætus incommodo superato, versari diutissime. Proponam primo, quid ejus instrumenti ope viderim, & quomodo eorundem confirmatio-

nem habuerim per observationes aliis methodis institutas, tum quid inde deducatur pertinens ad variam illam qualitatum diffractivarum rationem, & impedimentum unionis colorum omnium per bina vitra, diligenter exponam; ac demum ostendam etiam, quanto major, & fere perfecta unio haberi possit per tria genera mediorum diaphanorum.

7. Primo quidem direxi radium solis ope speculi aptati machinulæ expressæ in fig. 10. ejusdem dissertationis per rectam ad sensum horizontalem a foramine fenestræ ad oppositum parietem: tum ipsi foramini applicavi vitrometrum expressum in fig. 25. ita, ut latus immobile fenestrella vitrea munitum respiceret foramen ipsum: cujus quidem lateris positionem perpendicularem ipsi radio facile obtinebam ita movendo per cochleas subjectum planum, ut radii pars reflexa a prima superficie ejusdem vitri rediret ad foramen ipsum, licet prorsus accurata ejusmodi positione opus non esset. Transmisso per utramque fenestram radio, vidi ipsum abire ad eundem in pariete locum, ad quem abibat sublato repente instrumento, vel abierat ante, ubi meum heliostatæ genus adhiberem expressum in dissertationis fig. 22. Atque id quidem indicio fuit, vitreas laminas satis accurate parallelis planis terminari, quæ nimirum a sua directione radium nequaquam removerent, nec idcirco futuris observationibus impedimento essent.

8. Aqua in instrumentum infusa, adduxi ope cochleæ latus mobile ad eam positionem, quæ fenestræ utriusque parallelismum oculo exhiberet: eam deinde positionem prorsus accuratam acquisivi movendo antrorsum retrorsum latus ipsum, donec obtinerem locum in pariete radii per aquam inclusam transmissi eundem itidem, qui esset locus ejusdem radii directi: cum vero in eo casu is radius ne in latus quidem deorqueretur a positione directa, illud comperi, axem machinulæ rite collocatum, in recta nimirum parallela lateri immobili, sine qua conditione latus mobile ad accuratum parallelismum cum immobili adduci non posset per motum circa eundem axem. Notabam autem locum indicis in arcu circularis fasciæ, a quo nimirum rectificatio instrumenti pendet, cum ab eo numerari debeant arcus metientes angulos, quos latus mobile cum immobili continet, sive adducatur ad fixum, sive ab eodem abducatur, qui sunt aquei prismatis anguli obversi sursum versum in primo casu, & deorsum versum in secundo.

9. Adducto mobili latere radius descendit, & imago Solis apparuit ex inferiore parte violaceo, ac indico, & cæruleo colore tincta, e superiore rubeo, aureo, ac flavo, in medio alba, uti in exigua fit prismatum exigui anguli refractione: radio enim ita detorto in partem angulo refringenti contrariam, ut illis coloribus maxime, his minime detortis, ii omnium maxime a sede naturali discedant, hi omnium minime, fit series quædam continua circularium coloratarum Solis imaginum, quarum magnitudo illud efficit, ut in extremis tantummodo colorati spectri marginibus colores appareant puri, in remotiore a loco naturali violaceus, in propiore rubeus, tum ab illo pergendo ad medium spectrum, occurrat primo violaceus, & indicus conjuncti, tum etiam cæruleus, mox & viridis, ac alii post alios ita, ut in medio habeatur albedo ex omnibus simul composita, a rubeo vero pergendo itidem ad medium habeantur primo quidem bina genera, rubeus nimirum, & aureus, tum tria, adiecto & flavo, donec eodem pacto per mixtionem eorum, qui accedunt alii post alios, ad eandem albedinem deveniatur.

10. Abducto latere a positione parallelismi elevabatur imago Solis eodem pacto a binis extremis marginibus in colores inducta, sed ordine inverso positis, angulo nimirum aquei prismatis jam deorsum versus directo, ut nimirum violaceus in summo emerit vertice colorati spectri, rubeus in imo omnium maxime ad naturalem locum accederet.

11. Traducto latere mobili lento motu continuo hinc, & inde a parallelismi positione ita, ut per illam transfret, spectabatur in pariete Solis radius lento itidem motu continuo descendens, ac ascendens ita, ut ubi per sedem naturalem transfret ipsius Solis imago, appareret ibidem rotunda, & prorsus alba sine ullo ullius coloris vestigio. In quovis ejusmodi transitu invertebatur colorum ordo ita, ut rubeus, qui, imagine infra naturalem sedem descendente, eminebat, omnium altissimus, idem, eadem supra ipsam evecta, omnium infimum teneret locum, violaceo ita cum velocitate omnium maxima traducto. Inversio autem ipsa fiebat semper per conjunctionem omnium accuratam, quæ ita simul habebatur in omnibus, ut extremis conjunctis, omnes etiam simul intermedii conjungerentur.

12. Deducto latere mobili ad parallelismum immittebam

in

in aquam prisma exiguum ex flint ita, ut ipsius angulus refringens sursum versum spectaret. Plerumque autem applicabam prismatis latus ad planum fenestræ vitræ lateris immobilis, quo pacto obtinebantur bini anguli refringentes, alter ejusdem vitri positione sursum directa, alter contraria directione deorsum obversus aquæ contentæ inter alterum ejus vitrei prismatis latus, & vitrum fenestræ lateris mobilis applicatum, qui quidem anguli æquales omnino evadebant: eo autem prismatis latere non ita applicato oriebantur bini aquei anguli hinc, & inde a vitreo prismate, quorum summa ipsius prismatis angulo æquabatur, uti facile eruitur ex num. 196 dissertationis.

13. Eo prismate adjecto, imago in pariete statim descendit. Mansisset utique, si vitrum habuisset eandem qualitatem refractivam, quam aqua. Vitri angulus sursum obversus imaginem deprimebat, angulus aquæ contraria positione situs eundem elevabat: cum æquales essent, si viribus etiam æqualibus pollerent materiæ, ex quibus constabant, æquales effectus se invicem destruxissent: sed cum vitri refractiva vis esset major, illud omnino consequi debuit, ut descensus ab ipso inductus ascensum actioni aquæ debitum superaret. Eadem autem imago apparuit coloratis marginibus ita, uti pars infima violaceum, summa rubeum haberet colorem, illo, uti par erat, a sede naturali recedente omnium maxime, hoc omnium maxime ad ipsum accedente.

14. Huc usque omnia evenere juxta consuetas refractionum leges a Newtono traditas, & ante recentissima hæc compta notissimas: in iis, quæ consequentur, occurret primo Dollondianum inventum, Newtoni inventis contrarium, tum illud, quod proposueram, quod quidem ipsi Dollondianorum telescopiorum theoriæ ita obstat, ut ne ea quidem perfici omnino possint, ac omnem nimirum diversæ refrangibilitatis errorem corrigere.

15. Abducto latere mobili ita, ut angulus aqueus cresceret, capit elevari spectrum coloribus in utroque margine manentibus cum eodem ordine, sed minus dilatatis, donec devenit ad locum imaginis directæ ita, ut margo superior spectri imbutus colore rubeo occuparet accurate locum superioris marginis imaginis directæ, qui summoto spectro facile obtinebatur, & designabatur applicato margine chartæ albæ in ejus

locum, ad quem instrumento statim restituto, ne motus Solaris imaginis posset esse sensibilis (ubi nimirum heliostatam non adhiberem, quo adhibito, imago manet immota, nec ulla festinatione est opus) spectrum adducebatur per cochleam latus mobile promoventem. In eo statu quandoque notabatur angulus prismatis, tum is adhuc augebatur ascendente spectro, donec imus ipsius margo violaceus congrueret cum loco imi marginis directæ, ac eo itidem notato angulo, tum aucto, elevabatur spectrum supra locum ipsum directæ imaginis, in quo adhuc iidem colores, licet semper minus dilatati aspiciantur, eodemque ordine ita, ut rubeus in summo jam omnium maxime distaret a loco naturali, violaceus in imo ad ipsum omnium maxime accederet.

16. Hoc quidem pacto imago Solis refracta motu continuo transiit per locum imaginis directæ sine conjunctione illa colorum, quæ in albedinem defineret, uti per ipsam albedinem transferat in casu folius aquæ, & sine ulla conjunctione colorum quorumvis, sine inversione spectri: in spectro ipso elevato supra naturalem sedem color rubeus majorem est visus refractionem habere, quam violaceus, non quod in singulis refractionibus majorem habuerit, sed quod licet refractione ab aqua inducta plusquam correxerit refractionem inductam a vitro; adhuc tamen nondum correxerit differentiam refractionum violacei, & rubei, adeoque violaceus adhuc rubeo depresso remanserit. Verum adhuc id ipsum opponitur iis, quæ a Newtono videntur diferte tradita, & quæ Dollondus invenit falsa.

17. Instrumento adhuc magis aperto, perpetuo magis ascendit spectrum, & interea color rubeus in summo margine ita sensim attenuatus est, ut demum evanuerit, ac in vertice jam cepit eminere aureus, tum flavus, violaceo adhuc tenente infimum locum: paullo post successit in parte summa flavo viridis, tum vero in imo violaceus in purpureum abire cepit viridaceum colorem illum, qui oritur ex mixtione rubei cum violaceo, quando ii soli e spectro assumpti conjunguntur, qui quidem evasit admodum satur, ubi procedente instrumenti motu pulcherrimus in opposito margine viridis apparebat. Ibidem excepit viridem cæruleus, & indicus, rubeo in inferiore ora jam libero, & puro, ac demum violaceus quoque emerfit in summo, facta inversione spectri, qua rubeus esset loco naturali
pro-

proximus, tum aureus, & flavus, ac remotissimus omnium violaceus discederet.

18. Inversio spectri eo pacto facta est sine transitu per albedinem, coloribus non simul omnibus conjunctis, sed aliis post alios ita, ut non nisi bini coirent alii post alios. Colorata fimbria semper apparuit cum minima dilatatione tum, cum purissimus in alto appareret viridis, & vividissimus in imo purpureus circa medium nimirum inversionis, sed adhuc erat tum etiam admodum sensibilis, nec vero illud ipsum minimum satis accurate definiri poterat, cum ab uno colore ad alium, & a postremo ad albedinem transitus fieret sensim per insensibiles gradus, non repente, & quodam veluti saltu abrupto, nec, eandem ob causam, nisi paullo crassiore quodam oculorum judicio poterant illi ipsi limites determinari, in quibus alter alteri in supremo margine succedebat.

19. Porro eam ipsam successionem superpositionis, seu congruentiæ diversorum colorum observavi semper, quotiescumque vitra utcumque diversa intra ipsum vitrometrum collocavi, flint, strass, vitrorum communium plura genera, quin etiam crystallos montanas plures, in quibus tamen quid discriminis notatu maxime dignum invenerim, dicam inferius; immo etiam ubi diversa vitra inter se compararem per angulum vitreum variabilem; quamquam multo magis notabilis, & lenta, ac evidentissima successio semper apparuit, ubi intra vitrometrum immittebam flint, vel strass, & eo evidentior, ac lentior, quo angulus refringens esset major, qui tamen, ubi plus æquo esset magnus, ante ad maximam instrumenti aperturam deveniebatur, quam tota inversio desineret. Verum ante ipsum phænomenum adjectis schematis explicabo, quam clarissime poterò, tum quæ inde consecutaria deducantur, evolvam.

20. Verum ne res complicatior evadat, adhibebo colores tres tantummodo, ut rubeum, ac violaceum extremos, & viridem medium, quos in fig. 1. designabo litteris R, W, V, quæ autem dicentur de ipsis, intelligenda erunt de aliis ternis quibuscumque.

21. In fig. 1. refert B imaginem naturalem albam, in qua omnes colorati circuli conjuncti exhibent colorem album, quæ quidem imago remanet æque commixta, & alba, ubi radius transit per instrumenti fenestras vitreis laminis tenuibus munitas æque crassis in positione laterum, & si latera sint parallela,

isela, etiam infusa aqua. Adducto latere instrumenti ita, ut habeatur angulus aqueus refringens sursum obversus, descendit imago in locum A, sed rubeus circulus (circulos nominabo, & eosdem expressi in schemate, licet ob obliquum incursum in parietem circuli singuli abeant in ellipses nonnihil oblongas) minimam omnium refractionem passus minime omnium descendit, tum viridis infra ipsum, ac violaceus omnium maxime deprimitur. In medio ex omnium commixtione efformatur albedo, solus rubeus in supremo margine apparet purus, violaceus solus purus in imo, viridis nusquam purus, nisi circa lateralem marginem per spatium fere prorsus insensibile.

22. Abducto latere mobili, & accedente ad parallelismum, ascendit spectrum marginibus eodem ordine coloratis, donec in ipso parallelismo uniantur simul omnes in B: continuato motu, & angulo aqueo in contrariam partem obverso, ascendit spectrum in C, ubi circulis inverso ordine positus violaceus tenet marginem summum, rubeus imum, viridi posito in medio. In utraque positione violaceus omnium maxime refractus, omnium maxime a naturali sua sede recedit; quam ob causam per parallelismum transeundo refractionibus omnibus correctis, invertitur spectrum transeundo per albedinem efformatam a conjunctione simultanea colorum omnium.

23. Series imaginum *a, b, c, d, e, f, g* in eadem fig. I. exhibet inversionem spectri longe alia ratione peractam, ubi prisma ex flint immissum est in aquam. Imago naturalis, quæ ante immissum prisma, lateribus instrumenti existentibus parallelis, erat alba e regione B, immisso prismate, statim descendit ad locum *a*, ubi ut in A color rubeus omnium maxime eminet, violaceus omnium maxime deprimitur.

24. Aperto magis instrumento, auctoque idcirco angulo aqueo, ascendit spectrum, & transit per locum naturalem in *b*, sed ibi colores suos non amittit. Prius animadvertitur adveniens ad locum marginis summi naturalis margo summus rubeus, tum ad locum marginis naturalis margo imus violaceus, quod indicat ad locum naturalem advenire prius circulum rubeum, tum viridem, ac demum violaceum.

25. Crescente adhuc angulo aqueo ascendit imago supra locum naturalem in *c* manente adhuc eodem colorum ordine, ubi jam rubeus magis distat a loco naturali, quam violaceus.

laceus, magis nimirum, quam ille, a sua naturali directione detortus, tamquam si majorem refractionem passus esset, quam violaceus, quamquam & in aqua is quidem majorem refractionem sit passus, & in vitro, cujus refractionem in eo statu aqua plusquam correxit, elevato utroque colore plusquam eos vitrum deprimat, sed nondum correxit differentiam refractionum inductam ab ipso vitro, ut idcirco licet violaceus plus deprimatur a vitro, & plus elevetur ab aqua, quam rubeus; adhuc tamen excessus elevationis supra depressionem in violaceo sit minor, quam in rubeo; quo quidem pacto præcipuum doctrinæ Newtonianæ fundamentum maneat, situm in majore violacei refrangibilitate, quam rubei, licet ex combinatione binarum contrariarum refractionum relinquatur major recessus a directione naturali in colore rubeo, quam in violaceo: quamquam hoc ipsum phænomenum cum priore imaginis *b* partem aliquam Newtonianæ doctrinæ evertit, ut innui num. 16., & de quo fortasse aliquid inferius.

26. Inversio spectri per ulteriorem aperturam fit abeundo ab imagine *c* per *d*, *e*, *f* ad *g*. Primum nimirum in *d* jungitur rubeus cum viridi, violaceo adhuc depresso infra utrumque: tum ipse rubeus unitur in *e* cum violaceo, eminente viridi jam puro, & orto ex illorum commixtione in parte ima purpureo violaceo: deinde in *e* rubeus in fundo jam habetur purus, violaceo, & viridi prorsus permixtis, ac demum in *f* colores ordine contrario dispositi spectrum exhibent prorsus inversum, ut in C.

27. Re ipsa antequam extremus rubeus uniatur in *d* cum extremo violaceo, post illam positionem *c* unitur cum singulis aliis rubeis, singulis aureis, flavis &c., aliis post alios; & ubi in *e* rubeus unitur cum viridi, vel in *f* cum eodem viridi violaceus, non eminet in summo vertice color ex iis compositus, sed simplex aliquis ex aureis in primo casu, ex indicis in secundo: verum ex iis tribus, quos solos consideravimus, diu singuli extremos tenent margines, tum alii post alios ita conjunguntur, ut primum binarium conjungatur in parte superiore, secundum in inferiore, tertium iterum in superiore.

28. Consideratis simul omnibus, in summo vertice semper eminet unicus purissimus ita, ut ad partem summam deveniant alii post alios singuli ex tot rubeis, aureis, flavis &c.:

in

in parte autem ima videtur haberi semper solus violaceus postremus, donec ad ipsum rubeus primus adveniat, tum post binarium unicum extremi violacei cum extremo rubeo in ipso fundo videtur haberi unicus ipse rubeus cæteris binariis conjunctis inter utrumque marginem; licet ob summam extremorum simplicium debilitatem aliquandiu in fundo appareat purpureus ille vinaceus ortus ex conjunctione margini proxima reliquorum violaceorum cum reliquis rubeis.

29. Ut rem totam mihi animo sistam, concipio in fig. 2. tria fila sub litteris *m*, *n*, *p*, quorum partes sint tinctæ omnibus primigeniis coloribus. In filo *m* ii habent ordinem, quem habet spectrum ante inversionem in fig. 1. in A, vel *c*: in filo *p* jam habetur ordo colorum spectri inversi idem, qui in fig. 1. in C, vel *g*. Si filum contrahatur totum ita, ut sine ulla flexione partes ejus omnes veluti compenetratæ per arctissimum spatium simul transeant; tum ex parte opposita explicentur, & extendantur; id filum exhibebit transitum per albedinem B figuræ 1. in inversione spectri. Sed si plicetur, ut in *n*, coarctatis quidem spatiis, sed non simul conjunctis; exhibebitur series phœnomenorum a spectro *c* figuræ 1. ad *g*. Dum extremum punctum intervalli R descendit infra summum verticem, eminebunt omnium intervallorum puncta singula alia post alia: manebit autem in fundo extremum punctum intervalli W, donec jungatur cum extremo intervalli R; tum ipso ascendente intra spectrum, hoc ejus vices excipiet: circa illam conjunctionem margo ille imus aliquandiu vinaceum habebit colorem saturum, ante quem diutissime violaceus purus a rubeis omnibus fatis remotus, post ipsum purus rubeus a violaceis omnibus liber apparebit. Dum autem funiculus ita plicatus invertitur, simul itidem contrahitur plurimum, uti ex meis observationibus videor deducere ita, ut in media positione *n* multo minus spatii ejus partes occupent, quam in *m*, & *p*, licet non penitus compenetrarentur.

30. Hujusmodi successivam colorum superpositionem observavi in pluribus prismatis ex flint, ex strafs Viennensi, ex compositionibus similibus ipsi strafs alibi factis, in quibus omnibus hæc inversio spectri facta est cum mora majore, vel minore pro diversa vitrorum natura, & pro diversis angulis ejusdem vitri, ac in iis id semper accidit supra locum naturalem, uti exhibet figura 1. Eandem autem moram inversio-

nis sine transitu per albedinem observavi etiam in pluribus generibus vitrorum communium, ut etiam in crown Anglicano, sed in iis semper inversio spectri capit ante adventum ipsius ad locum naturalem, ac desinit post ita, ut in ipso loco naturali nec unio haberetur colorum omnium, nec ibidem in summo spectro extaret utervis ex extremis, sed aliquis ex intermediis. Inversio semper est facta eodem ordine, nimirum obtinente summum spectri verticem post rubeum colore aureo, tum flavo, viridi, cæruleo, ac demum violaceo, & semper cum purissimus, & pulcherrimus viridis emereret, vividissimus itidem, sed admodum tenuis, habebatur in fundo purpureus ille vinaceus, qui oritur e rubeo, & violaceo conjunctis.

31. Adhibui etiam prismatula ex crystallo montana tum ita secta, juxta præclarissimum nuperrimum inventum summi viri Taurinensis Professoris Beccariæ, ut unica, tum ita, ut duplex haberetur refractione. In iis semper immisso prisma in vitrometrum parallelis superficiebus terminatum, imago descendit, & colores erant semper vividi, & lati tam in unica imagine, quam in binis, licet superioris imaginis margo inferior, & inferioris superior conjuncti cum vivido imaginis alterius lumine (neque enim altera imago distabat ab altera per totam imaginis amplitudinem ob exiguos prismatum adhibitorum angulos, & diametrum apparentem imaginis solaris sine heliostata nimis amplam, cum eo non satis contractam) multo minus distincti, & aliquando fere penitus confusi appaerent. Aperto vitrometro ascendit spectrum, & eodem ordine facta est inversio tota multo ante, quam ad locum naturalem deveniretur, dum in vitro communi ea accidit circa locum naturalem, & in flint, ac strais supra ipsum, quod quidem maxime notatu est dignum, & magno futurum usui.

32. Circa inversionem, & potissimum in media ipsa inversione spectri binæ imagines crystallo montanæ habuerunt semper margines admodum distinctos, collecta nimirum ibidem in ipso margine in admodum tenue spatium omni ea colorum vi, quæ in solitaria refractione ipsius crystallo, si ea sit aliquanto major, ut & distantia binarum imaginum satis notabilis evadat, per refractionis differentiam diffunditur, & gradatim desinit sine certo, ac vivido limite potissimum ex parte violacea, ex qua coloratum spectrum longissima serie paullatim desinit in umbram cæcam.

33. Hæc quidem acciderunt, ubi vitra comparata sunt cum aqua. Comparando prisma rectilineum ex flint cum mixtilineo expresso in fig. 23. dissertationis, de quo in eadem num. 192., ex vitro communi Bohemico, inversio spectri facta itidem est transeundo per colorem viridem, sed eo prismatis genere imago evadit admodum confusa ob dilatationem ortam ex curvatura ipsius superficiei, quæ imaginem etiam per rotundum foraminulum transmissam deformat plurimum, nisi foraminulum ipsum perfecte rotundum sit, & politissimum habeat marginem, quod quidem in rectilineis prismatis non accidit, in quibus per quadratum etiam, & asperi marginis exiguum foramen transmissa imago Solis satis rotunda apparet, & distincta, cujus phœnomeni ratio facile redditur. Ubi eo prismate mixtilineo sum usus, res mihi minus male successit adhibito amplo foramine terminato per rectilineum latus satis longum, quo pacto rectilineum lucis ad parietem transmissæ marginem obtinebam, & utcumque distinctum, in quo colorum illa successio, & potissimum in inversione ipsorum colorum transitus ex altera parte per viridem, ex altera per vinaceum purpureum satis evidentè observabantur.

34. Posteaquam mihi innotuit Patris Abat celeberrimi Massiliensis Optici ex Minorum Observantium familia inventum præclarissimum prismatis vitrei habentis angulum mutabilem, constat enim binis partibus altera plano-concava, altera plano-convexa congruente convexitate cum concavitate ita, ut dum altera superficies per alteram excurrit, planarum superficierum altera jam magis inclinatur ad alteram, jam minus, curavi plura ejusmodi prismata composita, quæ imaginem exhibent nitidissimam, & distinctam, & quotiescumque compararem diversa vitra inter se, vidi semper inversionem spectri factam ita, ut alii colores post alios remaneret soli in altero extremo, & semper ubi in eodem apparebat pulcherrimus viridis, in altero extremo habebatur purpureus ille vinaceus vividissimus; sed ipsa inversio cæteris paribus absolvebatur citius, & colores erant minus ampli, quam ubi flint, vel strass conferebantur cum aqua. Etiam ubi applicabam ad foraminulum tria prismata Dollondiana, quæ in Anglia coemeram, quorum bina sunt e crown, & unum e flint, adhibentur autem juxta num. 13. dissertationis ad uniendos colores, qui quidem per ea transparenter evanescunt; in radio ita ad parietem trans-

miso

missio apparuit semper in altero margine color viridis; in altero vinaceus ipse purpureus.

35. Adhibui etiam vitrometrum cum heliostata meo, de quo paullo ante mentio est facta, qua methodo multo expeditior est observatio: nam eo rite disposito radius Solis ad certum parietis locum dirigitur ita, ut imago Solis occupet semper eandem positionem, a cujus marginibus distantia spectri accipiuntur multo accuratiores, impedito interea omni motu & imaginis, & spectri. Imago ipsa minor, & solam partem aliquam exhibens solaris disci colores minus permixtos habet, quo pacto etiam in crystallo montana binæ imagines vel penitus a se invicem separantur, vel obtinentur minus permixtæ. Verum imago ipsa directa evadit languidior, & minus distincta. Videri autem potest ibidem timendum etiam aliquid e majore effectu diffractionis in lumine transeunte prope duplicis foraminuli margines, quæ, nescio, an etiam esse possit causa tenuis umbræ cujusdam, quam in imagine directa observavi plerumque circa ipsius medium. Nescio itidem, an inde etiam oriri potuerit discrimen aliquod angulorum, sub quibus iidem colores appellebant ad verticem spectri eodem prismatico immisso in vitrometrum, & eodem modo ejus lateri applicatum, quod patebit in specimine exiguo plurium observationum, quod hic inferius exhibebo, quam quidem rem observabo diligentius, & mutatis pluribus circumstantiis, ubi per Solem licuerit, qui a tribus mensibus jam fere perpetuo, ubicumque interea sum commoratus, delituit.

36. Illud demum hic monendum omnino est, licet evidentissime deprehendatur in omnibus hisce observationibus successio in appulsu colorum ad spectri marginem, & colores ipsi alii post alios purissimi, ac nitidissimi appareant; adhuc tamen ipsum limitem inter binarum specierum colores non nisi admodum crassa æstimatione deprehendi posse: ita enim rubeus sensim degenerat in aureum, ac flavum parum admodum discrepantes a se invicem, ita hic in viridem, viridis in cæruleum, ac indicum, & violaceus ipse, qui iis succedit, ita initio insensibilis est, ut diu hæreat, opus sit ante, quam quis se determinet ad existimandum, mutationem ab altero ad alterum jam esse factam. Id quidem etiam Newtono accidit in dividendo spectro ad eruendam illam suam analogiam colorum cum sono, qui non ita de limitibus certus, & suos, & ami-

corum oculos ad eam rem sapius adhibuit. Id ipsum semper expertus sum etiam ipse & per me spectrum aspiciens, & plures simul amicos adhibens. Alii novum colorem jam ortum in illo summo vertice arbitrabantur, dum alii adhuc veterem agnoscerent, ac si idem vitrometri continua diductioe quemdam colorem suboriri censeret, observato, & scripto angulo vitrometri, tum eodem contracto ad observationem iterandam; ejusdem oculi judicio plures observationes factæ habebant sæpe discrimen 20, 30, & quandoque etiam 40 minutorum in exhibendo angulo vitrometri debito limiti inter proximos ejusmodi colores. Quamobrem plures accepi ejusmodi observationes, & inter ipsas medium arithmeticum de more. Sed adhuc ante, quam per longam dierum serenorum seriem earum ingentem numerum cum pluribus combinationibus instituere mihi liceat, nonnisi speciminis loco hic exhibebo determinationes nonnullas, ex quibus tamen evidentissime patebunt plura, quæ magno usui esse debent in Optica, & quæ iis propositis persequemur.

§. 2.

Specimen observationum, earum in primis, quæ pertinent ad successivam colorum congruentiam cum mora in inversione spectri.

37. **P**risma, quod in Anglia acceperam, ex flint immisi in vitrometrum, rite ante explorato & ipsius vitrometri parallelismo ad habendum certum numerationis initium, & prismatis angulo. Hujus anguli chordæ methodo in dissertatione exposita num. 186 ad radium 500 obvenerunt iteratis observationibus 102, 103, 101 $\frac{1}{2}$, 102, 101, quorum medium 101. 9 exhibet angulum 23°. 31'. Parallelismus vitrometri accuratissime obvenit in eodem semper loco; nam is sine ulla dubitatione definitur intra unum, vel alterum minutum. Latus prismatis erat applicatum lateri primo vitrometri excipienti radios ad perpendicularum prope foraminulum fenestræ sine heliostata. Obvenerunt autem hujusmodi observationes, e quibus angulus aquei prismatis facile invenitur additis simul angulo vitrometri, & angulo prismatis juxta num. dissertationis 196.

Angulus prismatis e flint 23°. 31'	Angulus vitrometri:
Correcta refractione rubei primi — — —	25°. 1'.
Correcta refractione violacei postremi — — —	25. 48.
Rubeus desit in vertice — — — —	38. 30.
Cœpit ibidem viridis — — — — —	41. 4.
Desit viridis — — — — —	43. 47.

38. Post viridem apparuit cæruleus, sed ad violaceum deveniri non potuit, cum vitrometrum satis aperiri non potuerit: patet autem, quanti colores adhuc fuerint, ubi imago colorata appulit ad locum naturalem, cum oportuerit ab accessu rubei ad locum naturalem adhuc aperire vitrometrum per 47', ut ad locum suum violaceus adveniret. Spectri inversio facta est tanto supra locum naturalem, ut rubeus in summo vertice esse non desierit, nisi post alios gradus $13\frac{1}{2}$ apertura vitrometri ab ejus appulsu ad locum naturalem. Toto intermedio tempore rubeus erat omnium maxime a loco naturali remotus, nimirum ab actione conjuncta vitri, & aquæ maximam omnium refractionem est passus: facta autem est inversio tam lente, ut a postremi rubei descensu infra aureum ad descensum postremi viridis intercesserint plures, quam quinque gradus apertura. Quanto plures essent, si posset observari, quando primus rubeus incipiat descendere infra contiguos rubeos, quod immediate observari non potest, & si haberetur non solum apertura vitrometri usque ad primi violacei ascensum, sed usque ad postremi incipientis emergere supra sibi proximos, quod itidem observationem effugit.

39. Cum illo prismate tota inversio videri non potuerit deveniendo ad violaceum, selecta sunt prismata minoris anguli, ut nimirum ipsa inversio citius fieret ob refractionem minorem, & quidem adhibita sunt ex flint, ex vitro Bohemico communi, & ex crystallo montana ita secta, ut duplicem haberet refractionem. Eodem autem pacto singulorum latera applicata sunt primo lateri vitrometri, & radius admissus directione ad sensum perpendiculari ipsi sine heliofata. Diligenter determinati eorum anguli per plures observationes, ut in superiore prismate est præstitum, ac inventi sunt ii, qui ipsis hic adscribuntur. Omissa hic est accuratior determinatio adventus ad locum naturalem in prioribus binis: ea in primo accidit circa apertura vitrometri graduum 12, in secundo circa 10. In tertio accurate est notatus appulsus limbi superioris.

rioris imaginis utriusque ad locum naturalem, qui exiit pro imagine superiore aperto vitrometro ad $8^{\circ}.51'$, pro inferiore ad $9^{\circ}.25'$.

Apertura vitrometri pro

Flint $15^{\circ}.32'$. Bohem. $15^{\circ}.40'$. Cryst. $13^{\circ}.6'$.

Rubeus desit in vertice - 19.50 . — — 8.27 — — 3.55 .

Capit ibidem viridis — 21.0 . — — 8.40 — — 4.27 .

Desit viridis — — — 23.42 . — — 9.11

Capit apparere violaceus 25.52 . — — 11.15 — — 6.2 .

40. Inversio facta est hic etiam in flint post transitum per locum naturalem, in communi Bohemico capit ante, & desit post eum appulsum, in crystallo est absoluta tota ante appulsum. In hac in utraque imagine iidem apparebant simul colores in summo, licet ii in margine superiore imaginis inferioris essent admodum diluti, commixti nimirum cum albo lumine imaginis primæ, per quam is margo traducebatur. In tota fere inversione margines colorati in crystallo extiterunt tenuissimi, & distinctissimi, qui in reliquis binis erant adhuc satis ampli, licet multo arctiores, quam ante inversionem uspiam, & multo magis arcti, quam ubi prismata seorsum adhibebantur singula: in iis maxime arcta videbatur colorata falx utriusque marginis, ubi viridis medius eminebat in summo, quo casu in omnibus habebatur in fundo vividissimus, & pulcherrimus ille vinaceus purpureus. Limitem inter aureum, & flavum, inter cæruleum, & indicum nunquam determinavi ob nimis exiguum eorum colorum discrimen, quod limitem in hac perquisitione sensibus subtrahit.

41. Dimensus sum & diametrum imaginis naturalis, & distantiam a se invicem binarum imaginum a crystallo transmissarum per vitrometrum ad locum naturalem. Diameter erat particularum 85, qualium distantia vitrometri a pariete 8360, quæ quidem diameter erat eadem in utraque e binis imaginibus a crystallo transmissis: distantia autem imaginum a se invicem erat partium 13 tam inter supremos, quam inter infimos margines, utraque autem apparebat pari lumine radiis pariter inter utramque divisis. Illæ particulæ 85 in illa distantia demptis 6, quæ erat amplitudo foraminuli, exhibent diametrum apparentem Solis $32'.40''$, qualis tum esse debuit, & distantia particularum 13 exhibet distantiam imaginum $5'.0''$.

42. Ut eorum prismatum qualitates refractivas seorsum

eruerem, singula applicavi immediate ad foraminulum ita, ut radius in ipsas superficies applicatas ingrederetur ad sensum perpendicularis: tum vero evadebat distantia horizontalis prismatis a linea verticali, per quam spectrum ascendit, particularum 8555, notabatur autem in pariete per tenuem lineolam tam limbus superior quam inferior spectri, & statim remoto prisma notabantur itidem bini limbi imaginis naturalis. In crystallo montana assumpti sunt limbi imaginis superioris, & limbus inferior inferioris. Aderat in pariete linea horizontalis respondens foraminulo, & linea verticalis, ambæ divisæ in bifcentenas ex illis particulis. Hinc facile deinde assumi poterunt limborum distantia a recta horizontali, acceptis circino distantibus a proxima divisione: porro alter imaginis naturalis limbus erat depressus infra horizontalem ipsam, qui notatur signo negativo præposito. Pro singulis prismatis bini ejusmodi numeri hic inveniuntur pertinentes ad imaginem naturalem, & bini pro spectro, qui in crystallo pertinent ad imaginem naturalem; sed in ea habetur tertius pertinens ad inferiorem marginem inferioris imaginis.

	Distantiæ a linea horizontali pro		
Imaginis directæ	Flint 15°. 32', Bohem. 15°. 40', Cryst. 13°. 6'		
Limbus inferior	— 69	— 36	— 41
Limbus superior	+ 16	+ 47	+ 45
Spectri			
Limbus infimus			1104
Limbus inferior	1342	1284	1124
Limbus superior	1498	1421	1238.

43. Ex hisce numeris erui facile possunt qualitates refractivæ earum substantiarum, & quidem erui possent etiam distractivæ rubei a violaceo; sed & exigui anguli nimis exiguam refractionum differentiam pariunt, in qua errores exigui observationis ipsius ingentem in consecutaria errorem inducunt, & violacei limes æstimari, meo quidem judicio, satis accurate vel ægre potest, vel potius omnino non potest, usque adeo protenditur sensim extenuatus usque ad umbram. Majore fortasse etiam obscuritate indigeret ejusmodi observatio, ut nigro panno obductis parietibus, licet ego quidem satis omne aliud lumen a conclavi removerim præter illud, quod ab ipso prismate, & ab internis machinulæ partibus reflectebatur irregulariter.

44. Eodem prismatico e flint observationes alio die institui easdem illas, quæ pertinent ad inversionem imaginis cum hoc solo discrimine, quod ejus latus non applicavi lateri ipsius vitrometri, sed basim collocavi supra illius basim, relictis ita binis prismatis aqueis, altero inter primum vitrometri latus, & faciem prismatis æqualem dimidio ipsius prismatis angulo, alterum inter prisma, & latus vitrometri mobile: tum obtinui sequentes numeros acceptos de more medios inter plures observationes, quæ mihi, & amico mecum æstimanti eo die obvenirent minus discordes, ut sæpe intra quatuor, vel quinque minuta conspirarent. Erant autem hujusmodi

Angulus prismatis e flint	15°. 32'	Angulus vitrometri	
Rubeus desit in vertice	— — — — —	19°. 2'	
Capit ibidem viridis	— — — — —	20. 4.	
Desit viridis	— — — — —	22. 42.	
Capit violaceus	— — — — —	26. II.	

45. Alio autem die adhibui heliostatam meam, quem ita collocavi inter foraminulum, & parietem, ut imaginis pars per ipsius foraminulum secundo transmissa tangeret superiore suo limbo rectam horizontalem, sinistro verticalem, distaret autem vitrometri punctum, e quo radius egrediebatur, ab illa rectarum intersectione particulis 5000. Ita collocato heliostata, & imagine, quæ per fenestræ foraminulum transmittebatur, ita directæ speculo identidem inclinato per machinulæ axes, ut foraminulum ipsius semper comprehenderet intra se; imago transmissa per hoc secundum foraminulum, sive directæ, & naturalis, sive refractæ, & in colores inducta nullum unquam habuit motum inter observandum, quod si ea æque vivida, ac distincta esset, commodissimum sane accideret. En numeros eo pertinentes.

	Distantia	partium
Foraminuli fenestræ ab intersect. linear. in pariete		8557.
Vitrometri ab eadem		5000.
Diameter foraminuli fenestræ		6.
Diameter foraminuli heliostatæ		II.
Diameter imaginis directæ eo transmissæ		35.

46. Parallelismus vitrometri, a cujus observatione semper exordior, ne, si quem motum habuerit machinula me incio, in errorem inducar, semper eodem mihi rediit sine ullo discrimine ne unius quidem minuti: inveni semper indicem adve-

nire 55' ante initium divisionis, quæ minuta 55 semper a gradibus inter observandum notatis detraxi ad habendos angulos vitrometri, quos hic exhibeo, & supra exhibui.

47. Vitrometri latus fixum distabat nonnihil a foramine heliostatæ, ut imago a prima vitri primi superficie reflexa, directe ad sensum rediens ad ipsum foramen, indicaret radii ingressum ad sensum perpendicularem primæ superficiei. Ac primo quidem observationes institui cum aqua sola ad habendam ejus qualitatem refractivam, & notavi altitudines supra horizontalem lineam utriusque limbi spectri ascendentis ad latus lineæ verticalis

Angulus vitrometri	Limbus infer. rub.	Limbus super. viol.
28°. 0'	921.	987.
32. 0	1126.	1206.
34. 0	1217.	1307.

48. Illæ altitudines circino pluribus vicibus assumptæ a divisione lineæ verticalis proxima, ex parte coloris rubei marginis imi, ex qua margo ipse est multo magis terminatus, atque distinctus, congruebant intra unam particulam, ex parte violacea intra paucissimas, adhibito ferme eodem semper oculi iudicio, sed violaceorum tenuissimorum, & qui jam satis discerni non poterant, videbantur adhuc multo longius protendi.

49. Reducto iterum vitrometro ad parallelismum, immisita sunt in aquam bina prismata superiora ex flint, & communi Bohemico alterum post alterum applicando latus prismatis ad latus immobile vitrometri, ut radius in ipsum prisma ingrederetur ad perpendiculum indicatum a congruentia imaginis a prima superficie reflexæ: spectro descendente ad latus lineæ verticalis in pariete notatæ sunt depressiones utriusque marginis ipsius infra lineam horizontalem, tum aperto instrumento appulsus ad locum naturalem in flint, & in utroque series angulorum inversionis spectri, quæ in secundo capit ante appulsus ad locum naturalem, & desit post ipsum. Differentiæ maximæ inter plures determinationes angulorum aperto, & clauso vitrometro usque ad judicatam coloris mutationem in summo spectro fuerunt pro flint in fine rubei minorum 4, in initio viridis usque ad 40, ubi idcirco ad eliciendum medium sunt adhibitæ plures, in fine rubei 21, in initio violacei 11: pro vitro communi, ubi citius res peragi-

agitur, obvenerunt differentia minores: en observationes ipsas.

Depressiones infra lineam horizontalem existente ut supra

Distantia vitrometri ab interfectione linearum - - - 5000.

Pro imag. directa: pro Flint $15^{\circ}.32'$: pro Bohem. $15^{\circ}.40'$.

Limbi super. rubei	0.	339.	251.
Limbi infer. violacei	35.	393.	292.

	Anguli vitrometri	
	Flint	Bohem.
Rubeus ad locum naturalem	$11^{\circ}.22'$.	
Violaceus ad locum naturalem	11.49 .	
Rubeus desit in vertice	17.41 .	$7^{\circ}.15'$.
Capit viridis	19.36 .	8.23 .
Desit viridis	21.49 .	9.56 . ad loc. natur.
Capit violaceus	26.3 .	13.45 .

50. Videbimus jam sequentibus paragraphis, quid ex hisce observationibus, & potissimum ex illa mora inversionis spectri deducatur. Alias observationes aliis methodis institutas, saltem aliquot (earum habeo ingentem numerum) exhibebo fortasse inferius.

§. 3.

Animadversiones nonnullæ in propositas observationes.

51. **S**ub ipsum finem paragraphi 1. illud monui, me expectare serenorum dierum seriem ad habendum ingentem observationum numerum, quæ admodum necessaria sunt ad efformandum certum aliquod, & stabile iudicium in re tam lubrica, atque difficili, ubi æstimatione quadam incerta, & crassa est opus, cum alii colores in alios ita sensim degenerent, ut circa limites diu hærendum sit. Tres observationes occurrunt superiore paragrapho institutæ eodem prismatico immisso in idem vitrometrum, quæ inter se non satis accurate conveniunt, prima numero 39, secunda numero 42, tertia numero 49. Hoc tantum inter ipsas habetur discrimen, quod in prima, & tertia observatione latus prismatis erat applicatum lateri vitrometri, adeoque habebatur unicum aquæ prismæ ad latus vitrei, in secunda erant duo prismata aquea hinc, & inde a vitreo: at prima discrepabat a tertia in eo, quod

in illa habebatur radius transmissus per unicūm foraminulum in tertia per duo, adhibito nimirum meo helioſtata. Præterea cum diverſis diebus inſtitutæ ſint obſervationes, & in conclavi habente caminum in hyeme, aeris conſtitutio potuit eſſe nonnihil diverſa, & in aqua itidem, uti ſuperius indicavi, fortæſſe diſcrimen aliquod extitit.

52. Ut viderem, an in tranſitu per foramen helioſtata ex diffractione habita fuerit inflexio aliqua radiorum ad imaginem directam tendentium verſus ejus margines, contuli inter ſe magnitudines foraminum, & imaginis naturalis, ubi ſimul obtinui, quam partem diametri ſolaris tranſmiſerit helioſtata. Elementa calculi habentur num. 45.

53. Sit enim in fig. 3., ut in 22 diſſertationis CD foramen fenestræ AB, IK foramen helioſtata EF, NO imago in pariete LM efformata a radiis DIN, CKO ſe interſecantibus in T. Ducta ex C recta parallela DN, quæ occurrat in V, & X rectis EF, LM, erunt IV, NX æquales DC, & angulus NTO, qui exprimit partem diametri apparentis comprehenſam ab imagine NO, æqualis angulo OCX. Erit autem CK.CO::KV.OX, & ob angulum CXO proxime rectum radius ad ſinum anguli OCX, ut CO ad OX. Nimirum habebuntur bina theoremata, quæ rem perficiunt. Primo. *Ut diſtantiã fenestræ ab helioſtata ad diſtantiã ejusdem a pariete, ita ſumma diametrorum foraminum helioſtata, & fenestræ ad ſummam diametrorum imaginis, & foraminis fenestræ, qua ſecunda diametro detracta a ſumma inventa, invenietur diameter imaginis.* Secundo. *Ut diſtantiã fenestræ a pariete ad ſummam diametrorum imaginis, & foraminis fenestræ, ita radius ad ſinum partis diametri apparentis Solis incluſæ in imagine.*

54. Adhibitis numeris, qui habentur num. 45., habebitur in primo theoremate $8557 - 5000 = 3557$ ad 8557 ita $11 + 6 = 17$ ad quartum, qui provenit 41. Demendo ab eo diametrum foraminis fenestræ = 6, relinquuntur 35 pro diametro imaginis, quæ eſt ipſa obſervata diameter. Quamobrem radii ad marginem imaginis pertinentes non ſunt intorti per diffractionem in ſecundo foramine, licet tenuis umbra, quæ plerumque apparet circa medium foramen juxta num. 35., videatur debere ortum ducere ab aliqua ſaltem exigua inflexione radiorum tranſeuntium per medium. Radii nimirum per dif-

diffractionem aliquanto plus intorti jam in tanta distantia sensum effugiunt. Ex secundo autem theoremate erit, ut 8557 ad $35 + 6 = 41$, ita radius 100000 ad 478 sinum $16'.27''$, quæ erit pars diametri apparentis Solis comprehensa ab imagine, nimirum paullo plus, quam dimidia ea diameter.

55. Quoniam radii, qui tendunt ad margines imaginis directæ, nullam flexionem patiuntur in transitu per secundum foramen, videtur inde consequi illud, eos radios transeundo per vitrum, & aquam debere eodem modo dissolvi, quo ubi adveniunt sine heliostata immediate a primo foraminulo, & discrimen, quod habetur inter observationem primam, ac tertiam, aliunde repetendum esse. Discrimen aliquod inter primam, & secundam haberi potuit ex diversa applicatione prismatis: discrimen inter omnes tres, sed admodum exiguum fortasse oriri potuit a discrimine in constitutione aeris, & in aqua, si forte non ex eodem puteo est hausta. Verum id vel totum, vel pene totum videtur debere tribui inclinationi nonnihil diversæ radii ingredientis, & diverso diversis diebus oculorum iudicio in incertis limitibus. Prima causa non habetur in casu heliostate, quam ob rem videtur præferenda observatio, quæ sit ejus ope: verum in imagine per ipsum transmissa illud omnino accidit, quod vis luminis est minor, uti experienti patebit, cujus quidem & ratio facile redditur. Hinc videtur fieri debuisse, ut in ejus usu rubeus, qui est vividissimus, desierit in vertice apparere citius, & violaceus, qui est languidissimus, cæperit apparere serius: nam exigua mutatio anguli incidentiæ in ingressu videtur exiguum discrimen afferre posse in angulo, qui faciat eundem effectum in ordine ad colorem in vertice apparentem. Sed longior observationum series variatis circumstantiis rem ipsam determinabit multo certius.

56. Quidquid autem sit de hoc non ita magno discrimine inter observationes, in iis omnibus illud deprehenditur, conjunctionem colorum omnium nunquam haberi in hisce substantiis, nunquam album prodire radium, sed colores uniri alios post alios, sicuti exposuimus paragrapho primo, & quidem satis longo intervallo anguli variabilis durare inversionem spectri. Videbimus autem inferius quomodo inde inferatur rationem qualitatum distractivarum, sive $\frac{dM}{dm}$ in aliis

colo-

colorum binariis esse longe aliam respectu substantiarum refringentium earumdem; unde fiat, ut telescopia duplicis objectivi non possint devenire ad illam perfectionem, quæ in iis sperabatur, nisi forte inveniantur substantiæ, in quibus ea ratio sit eadem pro omnibus binariis. Inde autem deducemus itidem, relationem colorum ad divisionem monochordi, quam Newtonus sibi visus est invenisse, non habere locum generaliter in natura, quæ fortasse nuspian est accurata, & quo pacto per plures heterogeneas substantias, sive per objectivum triplex multo major sperari possit telescopiorum perfectio.

57. Interea comparando inter se observationes numeri 39, & initium num. 40, patet illud, inversionem spectri factam esse in flint post appulsum ad locum naturalem, in vitro communi circa ipsum appulsum, in crystallo ante ipsum. Inde facile colligitur, rationem qualitatis distractivæ ad refractivam esse majorem in flint, quam in aqua, fere æqualem in vitro communi, minorem in crystallo. Quando enim imago devenit ad locum naturalem, fit æqualis refractio aquæ, & prismatis immissi: quando ea est supra locum naturalem, refractio aquæ est major, ea enim efficit refractionem sursum: quando ea est infra, refractio aquæ est minor: est autem distractio æqualis in utraque substantia ibi, ubi fit inversio spectri, quæ nimirum ibi conjunctis coloribus fit nulla, altera alteram corrigente. Quare ubi hæc correctio accidit supra, ut in flint, eadem quantitas distractionis convenit minori refractioni vitri, quam aquæ; ubi circa locum naturalem, ut in vitro communi, eidem; ubi infra, ut in crystallo, majori: adeoque pari refractione prima substantia plus distrahit, quam aqua, secunda fere æque, tertia minus. Et id quidem accidet in reliquis omnibus refractionibus exiguis, in quibus rationes decurtationis sinuum sunt quam proxime ut decurtationes angulorum; nam in angulis satis magnis, qui ad satis magnas refractiones requiruntur, possunt decurtationes sinuum esse æquales absque eo, quod decurtationes angulorum æquales sint, in quo casu æqualitas distractionis non erit conjuncta cum æqualitate refractionis, licet in minoribus angulis earumdem substantiarum eæ æquales sint, qua de re fortasse nonnihil infra.

58. Inde autem eruitur primo illud, immisso in aquam vi-

vitrometri prismatico quovis, & invento loco inversionis spectri, statim constare, an id substantiæ genus sit aptum ad efformanda objectiva vitra colores conjungentia una cum vitro communi. Si inversio spectri fiat circa naturalem situm imaginis; non erit idoneum id genus substantiæ, sed referendum erit ad vitra communia. Non poterit per ipsum conjunctum cum vitro communi corrigi differentia refractionis, nisi ipsa refractione corrigatur, adeoque non poterit effici ex ipsis objectivum, quod radios ad axem detorqueat, & imaginem objecti efformet in foco, nec vero detorqueat inæqualiter, separando idcirco radios, & exhibendo seriem focorum oblongam cum aliqua confusione imaginis non colligentis in unico puncto omnes radios heterogeneos egressos ex unico objecti puncto. Si autem inversio fiat multo supra, vel multo infra, erit quidem idoneum, verum cum hoc discrimine, quod in primo casu ex ea substantia debeat fieri lens concava, ex vitro communi convexa, & in secundo ex ea substantia lens convexa, & e vitro communi concava: nam ut radii ab objectivo efformato ex illis lentibus conjunctis colligantur ad efformandam imaginem, debeat prevalere refractione introrsum, quæ fit a lente convexa, refractione extrorsum, quæ fit a concava, & si tanto fit major, & distractio illi respondens sit æqualis distractioni respondenti refractioni minori lentis concavæ cum toto residuo excessus alterius refractionis supra alteram, distractiones contrariæ æquales erunt, & se corrigent.

59. Ex substantiæ, quæ cum vitro communi conjunctæ possunt relicta refractione conjungere binos colores, possunt utique idem præstare ob eandem rationem etiam cum aqua, verum cum ipsa oportebit uti binis lentibus ex illa alia substantia, inter quas aqua inclusa sit, vel addere e vitro quovis laminam tenuem æqualis curvaturæ ex utraque parte, quæ contineat aquam adjacentem alteri lenti, quæ lamina curvaturam debeat habere illam ipsam, quæ debetur lenti aqueæ in externa sua superficie: nam aqua per se ipsam non potest ullam habere propriam figuram.

60. Multo autem magis apta erit combinatio materiæ invertentis spectrum supra cum materia invertente infra locum naturalem, quam utriuslibet cum vitro communi; quia quo majus est discrimen in ratione qualitatis distractivæ ad refractivam, eo minor cavitas requiretur in lente concava, & eo

minus ipsa producet distantiam foci lentis convexæ, quæ idcirco eo minorem numerum graduum suæ sphaeræ debet habere pari telescopii longitudine, quod quidem errores ortos a sphaericitate minores reddet. Fieri autem debet lens concava e priore, convexa e posteriore materia.

61. Si e binis substantiis altera multo serius, altera vero multo citius spectrum invertat; id etiam indicio esse potest, eas binas conjungi posse, nisi discrimen proveniat a majore vi refractiva alterius, vel etiam majore angulo: nam uti patet etiam ex ipsis observationibus num. 37, & 39, prisma prioris ex eodem fiat multo serius invertit spectrum, quam posterioris. Oportet nimirum, ut in altera substantia ratio qualitatis distractivæ ad refractivam sit multo major, quam in altera, quod ope vitrometri determinari potest, an accadat, comparando cum aqua tam qualitates refractivas, quam distractivas, sed ea omnia per formulas multo accuratius præstantur, de quibus applicatis ad ipsum vitrometrum agemus in sequenti paragrapho.

62. Hic illud adnotabo præterea, ex eo genere observationum statim etiam agnosci, an data quæpiam substantia sit aptior, an magis inepta, quam vitrum commune ad communia telescopia perficienda per unicum objectivum simplex, & ad oculares non compositas, uti etiam in hoc telescopiorum novorum genere simplices adhiberi adhuc solent. Quæ substantiæ spectrum invertunt supra locum naturalem imaginis, eæ ad solitaria objectiva sunt magis ineptæ; quæ infra, sunt aptiores, atque id eo magis, quo qualitatem refractivam majorem habuerint, quia pari refractione illæ magis, hæ minus colores distrahunt, & major refractiva vis minorem curvaturam requirit ad eandem foci distantiam. Inde vero patet crystallos montanas aptissimas esse ad objectiva simplicia, & ad oculares, cum multo minorem habeant distractionem pari refractione. Habent autem vim refractivam majorem, quam vitrum commune, quod facile deducitur ex observatione numeri 42, & potest facile erui etiam comparando qualitates refractivas per vitrometrum, uti patebit itidem in sequenti paragrapho per formulas sinuum, ac tangentium accuratas. Verum illud diligenter cavendum in adhibenda ejusmodi crystallo, ut ex prismate terminato binis pyramidibus, in quod ejusmodi crystallos conformatur a Natura, exsecetur lamina per-

perpendicularis axi ipsius prismatis, in qua positione juxta egregium Beccariæ inventum refractionis est unica. In aliis positionibus refractionis duplex turbat distinctionem imaginis.

63. Si quis interea vellet rationes a veris non ita remotas considerando angulos adhibitos in illis observationibus, ut proportionales finibus, habet in dissertatione num. 168, & 170 hæc theoremata. *Si per bina prismata habentia angulos exiguos positos ordine contrario ita transeat radius, ut correctæ refractione prodeat cum eadem directione, cum qua advenit; erunt qualitates refractivæ expressæ per $m - 1$, $M - 1$ in ratione reciproca angulorum refringentium, & viceversa: tum si per bina ejusmodi prismata ita transeant bini radii heterogenei delati simul directione eadem communi, ut exeant itidem directione communi, correctæ refractionum differentia; erunt qualitates distractivæ expressæ per dm , dM in ratione reciproca angulorum, & viceversa.*

64. Ex num. 39 angulus crystallo erat $13^{\circ}.6' = 786'$, angulus vitrometri in extinctione refractionis pro imagine superiore $8^{\circ}.51' = 526'$, pro inferiore $9^{\circ}.25' = 565'$, nimirum angulus aquæ, qui per num. 37 æquatur summæ angulorum vitrometri, & prismatis immixti, erit pro superiore $21^{\circ}.57' = 1317'$, pro inferiore $23^{\circ}.31' = 1411'$. Quare pro priore imagine ponendo m pro aqua, M pro crystallo, erit $\frac{M-1}{m-1} = \frac{1317}{786} = 1.68$, & pro posteriore $= \frac{1411}{786} = 1.79$, quorum medium 1.73 . Ibidem autem in unione colorum, sive correctione distractionis assumendo medium inter finem rubei, & initium violacei, habetur pro angulo vitrometri $4^{\circ}.58' = 298'$, adeoque pro angulo aquæ $18^{\circ}.4' = 1084'$. Quare $\frac{dM}{dm} = \frac{1084}{298} = 3.64$ ratio multo minor prioribus.

65. Ex num. 49 angulus vitri communis Bohemici fuit $15^{\circ}.40' = 940'$, angulus vitrometri in extinctione refractionis $9^{\circ}.56' = 596'$, adeoque angulus aquæ $25^{\circ}.36' = 1536'$, & proinde $\frac{M-1}{m-1} = \frac{1536}{940} = 1.63$. Assumendo autem pro extinctione distractionis medium inter initium, & finem viridis $9^{\circ}.9' = 549'$, angulus aquæ $24^{\circ}.49' = 1489'$, & proinde $\frac{dM}{dm} = \frac{1489}{549} = 2.71$, qui valor est priori proximus.

66. Ex eodem numero 49 angulus flint fuit $15^{\circ}.32' = 932'$, angulus vitrometri in extinctione refractionis pro rubeo $11^{\circ}.22'$, pro violaceo $11^{\circ}.49'$, adeoque pro radiis mediis $11^{\circ}.35'$. Hinc angulus aquæ $27^{\circ}.7' = 1627'$, & $\frac{M-1}{m-1} = \frac{1627}{932} = 1.74$. Pro extinctione colorum assumendo medium inter initium, & finem viridis, habebitur angulus vitrometri $20'.42'$, adeoque angulus aquæ $36^{\circ}.14' = 2174'$. Hinc $\frac{dM}{dm} = \frac{2174}{932} = 2.33$ tanto major priore.

67. Hinc obtinentur sequentes valores pro aqua & crystallo: vitro communi: flint

$\frac{M-1}{m-1}$	1.79	1.63	1.74
$\frac{dM}{dm}$	1.38	1.58	2.33

Ex iis vero collatis reliquis binis substantiis cum flint habebantur eæ rationes dividendo numeros pertinentes ad flint per numeros pertinentes ad ipsas, & posito M pro flint, m pro ipsis, erit pro flint, &

	crystallo:	vitro communi
$\frac{M-1}{m-1}$	0.97	1.07
$\frac{dM}{dm}$	1.64	1.39

68. Ex ejusmodi formulis patet, quam idoneæ sint combinationes utriusque substantiæ cum flint; nam juxta num. 83 dissertationis, successus pendet ab inæqualitate fractionum $\frac{M-1}{dM}$, $\frac{m-1}{dm}$, sive etiam $\frac{M-1}{m-1}$, $\frac{dM}{dm}$, quæ si essent æquales, abiret focus objectivi compositi in infinitum. Verum anguli hic adhibiti multo sunt majores, quam ut assumi possint sinibus proportionales. In dissertatione exhibitæ sunt formulæ pro binis prismatis; ubi radius egrediatur cum eadem inclinatione, cum qua est ingressus, quo casu habetur refractione minima: hic proponemus formulas pro casu, in quo radius ingrediatur in primum e binis prismatis contiguis ad angulos rectos, quod in plerisque e superioribus observationibus accidit, & facile præstari potest ope vitrometri, uti diximus. Possêt ea theoria deduci e generaliore cujuscumque inclinationis radii, & cujuscumque inclinationis prismatis ad prisma, fed

sed mihi quidem præplacet illud, simpliciores casus, qui soli usui esse possunt (expertus enim novi, illas alias inclinationes non nisi fatis crassa æstimatione obtineri posse, & usum quadrantum minorum nihil accurati exhibere, majorum habere ad eam rem applicationem difficillimam) per se evolvere simpliciore methodo; quam ingenti molimine generales formulas inquirere usui non futuras, ut ex iis longo ambitu deducantur ea, ad quæ tanto majore compendio devenitur directo itinere.

§. 4.

De refractionibus radii ingredientis ad perpendicularum in primum e binis prismatis conjunctis cum applicatione ad successivam colorum unionem.

69. **T**heoriam prismaticam applicatam ad casum minimæ refractionis, & ad angulos exiguos evolvi in dissertatione §. 6. a num. 142. Hic agam de casu, qui occurrit in usu vitrometri exposito superioribus paragraphis, in quo applicatur latus prismatis vitrei ad latus immobile vitrometri, & radius ingrediatur directione perpendiculari ad ipsum latus, quam, ut sæpius exposui, indicat reflexio rediens ad ipsum foramen.

70. Ingrediatur in fig. 4. radius DE ad angulos rectos in latus AB anguli refringentis ABC, ut aquæ, vel vitri aere circumdati, per quod transcurret irrefractus, & incurret in latus BC alicubi in F, ac pro continuatione itineris per FG, recedet a perpendicularo HFI per rectam FK. Erit angulus incidentiæ HFE æqualis angulo refringenti B, cum uterque sit complementum ejusdem EFB, ille ob rectum HFB, hic ob rectum BEF. Angulus KFI erit angulus refractus compositus e binis, quorum primus IFG = HFD = B, secundus ipsa refractione GFK.

71. Fiat angulus refringens $B = b$, angulus GFK = r , eritque e numero superiore angulus refractus IFK = $b + r$. Si autem sit $m : 1$ ratio sinus incidentiæ ad sinum anguli refracti in ingressu ex aere in substantiam anguli B, erit ea ratio in egressu $1 : m$ ex notissimis Dioptricæ principiis, adeoque erit $1 : m :: \sin. b : \sin. b + r$.

In-

Inde habebuntur pro eo casu

$$m \sin. b = \sin. \overline{b+r} \quad m = \frac{\sin. \overline{b+r}}{\sin. b}.$$

72. Hæ formulæ inservient pro vitrometro continente solam aquam, ubi si AMNC sit vitrometrum, erit B is, quem exhibet ipsam vitrometrum, & quem in observationibus superioris paragraphi appellavimus angulum vitrometri. Per eas usum habebunt observationes numeri 44: eadem autem habebunt locum etiam in observationibus numeri 42 habitis per prismata vitrea applicata eodem modo ad foraminulum. Facile enim e distantia foraminuli, & prismatis a pariete, ac loco radii directi, & refracti in ipso pariete eruuntur refractiones r ope tangentium, quorum valorum r etiam in sequentibus usus occurret.

73. Sint jam in fig. 5. bini anguli refringentes BAC, ACL ordine inverso positi cum latere communi AC, uti accidit in vitrometro AMNL, ubi angulus A est prismatis vitrei applicati lateri fixo AM, ACL angulus aqueus æqualis juxta num. 37. summæ binorum internorum, & oppositorum, quorum alter BAC prismatis vitrei, & alter B vitrometri. Incurrat radius DE perpendiculariter in latus AB, per quod transibit irrefractus, & incurret in F in latus AC, ubi a recto itinere FQG deflectet ad FOK recedendo a perpendicularo IFH: sed in appulsu ad LC in O iterum, relicto recto tramite OK, recedet a perpendicularo HOP per rectam OR. Sit H concursus mutuus binorum perpendicularorum IF, PO, & S, Q concursus rectarum OH, OR cum DG.

74. Patet, angulum POR fore æqualem simul binis OQS, OSQ, quorum primus æquatur GQR, nimirum refractioni totali radii pro directione DQG habentis directionem OQS, secundus, cum sit complementum ad duos rectos anguli ESO æquatur angulo B, qui ob angulos in quadrilineo BESO rectos ad E, & O, est itidem complementum ad duos rectos ipsius ESO. Quare si retento valore b pro angulo aquæ, qui est secundus refringens, dicatur a angulus prismatis immissi primi refringentis, angulus vero vitrometri B, qui est $a - b$, fiat $= c$, & angulus POR postremo refractus $= y$, erit $y = c + r = a - b + r$.

75. Primus angulus incidentiæ DFI prorsus ut num. 70, erit

erit æqualis angulo refringenti $A = a$. Primus angulus refractus erit HFO , qui dicatur x , ratio finis incidentiæ ad finem anguli refracti in transitu ex aere ad substantiam primi anguli sit $M : 1$, ad substantiam secundi $m : 1$, & erit in transitu a prima ad secundam $m : M$. Quare erit $m : M :: \sin. a : \sin. x$, adeoque $\sin. x = \frac{M}{m} \sin. a$.

76. Secundus angulus incidentiæ erit HOF . Is cum $HFO = x$ est complementum ad duos rectos tertii anguli H , cujus itidem complementum ad duos rectos est $FCO = b$ ob angulos in quadrilineo $HFCO$ rectos ad F , & O . Quare is erit $b - x$; angulus autem secundus refractus est $POR = y$. Quare erit $1 : m :: \sin. \overline{b - x} : \sin. y$; adeoque $\sin. y = m \sin. \overline{b - x}$.

77. En igitur denominationes, & formulas fundamentales omnium, quæ nobis hic occurrent invenienda, vel demonstranda.

Angulus primus refringens prismatis immissi	— — — — —	a
Angulus secundus aquæ	— — — — —	b
Angulus vitrometri	— — — — —	$c = b - a$
Refractio	— — — — —	r
Angulus primus refractus	— — — — —	x
Angulus secundus refractus	— — — — —	y

Formulae fundamentales

$$y = c + r = b - a + r \quad \sin. x = \frac{M}{m} \sin. a \quad \sin. y = m \sin. \overline{b - x}$$

78. Ex hisce formulis facile deducitur formula numeri 71. Si nimirum aqua sit sola; tum erit $a = 0$, adeoque $c = b$, $y = b + r$, & ex secunda formula $a = 0$, ac ex tertia $\sin. b + r = m \sin. b$, ut ibidem. Deducitur autem etiam admodum facile solutio plurium problematum, quorum præcipua hic perstringam. Verum in eorum solutione utar pluribus theorematis, quæ sunt prorsus elementaria, & vel pertinent ad trigonometriam, vel ad methodum differentialem. Hujusmodi sunt, quæ sequuntur.

79. In quovis angulo z existente radio $= 1$, erit $\cos. z^2 = 1 - \sin. z^2$ ac $\frac{\sin. z}{\cos. z} = \tan. z$. In quibusvis binis u , & z erit $\sin. u \pm z = \sin. u \cos. z \pm \cos. u \sin. z$. Patent e trigonometria vulgari.

80. In quovis angulo z erit $d \sin. z = \cos. z dz$: patet e num. 160 dissertationis.

81. In binis quantitibus u, z quibusvis est $d(uz) = z du + u dz$, & $d\left(\frac{u}{z}\right) = \frac{z du - u dz}{z^2}$. Patet ex num. 30 dissertationis.

82. Quærat jam primo angulus b , qui corrigat refractionem, dato a , & datis qualitibus refractivis expressis juxta num. 63 per $M - 1, m - 1$, adeoque datis M, m .

83. Ex prima formula fundamentali, facto $r = 0$, erit $y = c = b - a$, & ex tertia $\sin. b - a = m \sin. b - x$, five (num. 79) $\sin. b \cos. a - \cos. b \sin. a = m \sin. b \cos. x - m \cos. b \sin. x$, adeoque $m \sin. b \cos. x - \sin. b \cos. a = m \cos. b \sin. x - \cos. b \sin. a$, quod ob $m \sin. x = M \sin. a$ per formulam secundam, fiet $= M \cos. b \sin. a - \cos. b \sin. a = (M - 1) \cos. b \sin. a$. Erit igitur $\frac{\sin. b}{\cos. b}$, five (num. 79) $\text{tang. } b = \frac{(M - 1) \sin. a}{m \cos. x - \cos. a}$.

84. Si anguli sint exigui, evadunt tangentes, & sinus proxime æquales arcibus exprimentibus angulos, & cosinus radio $= 1$, adeoque $b = \frac{M - 1}{m - 1} \times a$, five $\frac{M - 1}{m - 1} = \frac{b}{a}$, qualitates refractivæ reciprocae angulorum, uti etiam num. 63 habuimus.

85. Ex formula numeri 83 etiam ex majoribus angulis datis a , & b , ac altero e valoribus M, m inveniri facile potest alter ex ipsis, quod quidem usui esse potest pro observationibus numeri 49, ubi si semel inventus fuerit valor m pro aqua, per solos angulos in appulsu imaginis ad locum naturalem habetur valor M pro substantiis prismatum immisso- rum in aquam. Verum idem valor M ex angulis, & m inveniri potest per observationem quamcumque unicam, in qua præterea notetur refractione, quod fiet per problema sequens.

86. Quærat secundo valor M ex datis m , & a, b, r in unica observatione quacumque.

87. Erit ex tertia formula fundamentali $\sin. b - x = \frac{x}{m}$ $\sin. y$, five ex prima $= \frac{x}{m} \sin. b - a + r$. Datis m, a, b, r ,

dabi-

dabitur $b - x$, & dato b , habebitur x , ac ejus ope ex formula 2 habebitur $M = \frac{\sin. a}{m \sin. x}$.

88. Quærat^r tertio per binas observationes factas prismate immisso, ac notatis angulis vitrometri, & refractionibus uterque valor M , m simul. Valor a , & x manet in utraque observatione idem nihil mutatus a maiore vel minore apertura vitrometri. Valores b , r , y primæ observationis sint b' , r' , y' in secunda.

89. Pro inveni^{en}do M , multiplicatis in secunda, & tertia formula fundamentali primis membris inter se, & secundis inter se, fiet $\sin. x \sin. y = M \sin. a \sin. \overline{b - x} = M \sin. a \sin. b \cos. x - M \sin. a \cos. b \sin. x$. Quare transponendo, & dividendo $\frac{\cos. x}{\sin. x} \times M \sin. a = \frac{M \sin. a \cos. b + \sin. y}{\sin. b}$, qui valor cum debeat esse $= \frac{M \sin. a \cos. b' + \sin. y'}{\sin. b'}$, erit multiplicando, & transponendo, $\sin. b \sin. y' - \sin. b' \sin. y = M \sin. a (\sin. b' \cos. b - \cos. b' \sin. b) = M \sin. a \sin. \overline{b' - b}$ (num. 79), adeoque $M = \frac{\sin. b \sin. y' - \sin. b' \sin. y}{\sin. a \sin. \overline{b' - b}}$, ubi $y = b - a + r$, $y' = b' - a + r'$.

90. Pro inveni^{en}do m ex invento M sic licet progredi. Ex tertia formula fundamentali est $\sin. y = m \sin. b \cos. x - m \cos. b \sin. x$, sive cum ex secunda sit $m \sin. x = M \sin. a$, erit $\sin. y = m \sin. b \cos. x - M \cos. b \sin. a$, adeoque $(\sin. y + M \cos. b \sin. a)^2 = m^2 \sin. b^2 \cos. x^2$, sive (num. 79) $= m^2 \sin. b^2 - m^2 \sin. b^2 \sin. x^2 = m^2 \sin. b^2 - M^2 \sin. a^2 \sin. b^2$, nimirum $m^2 = \frac{(\sin. y + M \cos. b \sin. a)^2 + M^2 \sin. a^2 \sin. b^2}{\sin. b^2}$, ubi licet assumere vel valores b , $y = b - a + r$, vel b' , $y' = b' - a + r'$.

91. Hoc pacto per duas observationes vitrometro factas potest haberi sine ulla alia observatione valor M , & m pro illo radiorum genere, pro quo notata sint loca imaginis directæ, & refractæ in pariete ad eruendas refractiones, & notati anguli vitrometri. Verum hi valores multo facilius inveniuntur seorsum singuli per singulas observationes pro singulis substantiis factas, adhibendo formulam numeri 71, vel semel invento m pro quodam aquæ genere per unicam observationem methodo adhuc admodum simplici eruitur M per num. 79.

92. Quærat^{ur} quarto, quæ sit futura differentia refractionum binorum radiorum heterogeneorum simul ingredientium ad perpendicularum in primum prisma, posito quod pro primo radio valores sint M in primo, m in secundo angulo refringente, & pro secundo radio $M + dM$, $m + dm$, sint autem dM , dm quantitates admodum exiguæ respectu M , m .

93. In tribus formulis fundamentalibus erit constans a , b , c , reliqua omnia habenda erunt pro variabilibus, quorum variationes pendebunt ab ipsis dM , dm , & inveniri poterunt juxta regulas differentiales, valor autem quæsitus erit dr , qui erit ex prima formula $= dy$.

94. Porro ex num. 80 in secunda formula $\text{cof. } x dx = \text{fin. } a \times \frac{m dM - M dm}{m^2}$, vel posito $\frac{m}{M}$ $\text{fin. } x$ pro $\text{fin. } a$, erit $m dx = \frac{m}{M} \times \frac{\text{fin. } x}{\text{cof. } x} \times \frac{m dM - M dm}{m}$, sive (num. 79) $= \text{tang. } x \left(\frac{m dM}{M} - dm \right)$.

95. In tertia formula ex eodem num. 79 erit $\text{cof. } y dy = dm \text{ fin. } \overline{b-x} - m \text{ cof. } \overline{b-x} dx = \text{cof. } \overline{b-x} \left(dm \times \frac{\text{fin. } \overline{b-x}}{\text{cof. } \overline{b-x}} \times dx - m dx \right) = \text{cof. } \overline{b-x} \left(\text{tang. } \overline{b-x} dm - \text{tang. } x \left(\frac{m dM}{M} - dm \right) \right) = dm \text{ cof. } \overline{b-x} \left(\text{tang. } \overline{b-x} - \text{tang. } x \left(\frac{m}{M} \times \frac{dM}{dm} - 1 \right) \right)$.

96. Quare demum valor quæsitus $dr = dy = \frac{dm \text{ cof. } \overline{b-x}}{\text{cof. } y} \left(\text{tang. } \overline{b-x} - \text{tang. } x \left(\frac{m}{M} \times \frac{dM}{dm} - 1 \right) \right)$.

97. Ibi datis angulis a , b , & valoribus M , m , dM , dm , dabuntur per formulas fundamentales etiam valores x , y , adeoque & hic valor quæsitus dr , quo valore utemur hic ad plures alias perquisitiones.

98. Quærat^{ur} quinto ratio qualitatum distractivarum $\frac{dM}{dm}$, data ratione pertinente ad refractivas $\frac{M}{m}$, & angulo, in quo bini colores uniantur. In eo casu differentia refractionum dr evanescit, adeoque fit ejus valor $= 0$, quo diviso per dm

$\frac{d m \operatorname{cof.} \overline{b-x}}{\operatorname{cof.} y}$, erit tang. $\overline{b-x} - \operatorname{tang.} x \left(\frac{m}{M} \times \frac{dM}{dm} - 1 \right) = 0$,
 five $\frac{dM}{dm} = \frac{M}{m} \left(\frac{\operatorname{tang.} \overline{b-x}}{\operatorname{tang.} x} + 1 \right)$. Porro dato a datur x ex
 formula $\sin. x = \frac{M}{m} \sin. a$.

99. Si anguli sint exigui, evadit $\frac{\operatorname{tang.} \overline{b-x}}{\operatorname{tang.} x} + 1 = \frac{b-x}{x}$
 $+ 1 = \frac{b}{x}$, & fit $x = \frac{M}{m} \times a$, adeoque $\frac{dM}{dm} = \frac{b}{a}$, five cum
 M pertineat ad a , & m ad b , qualitates distractivæ in ratio-
 ne reciproca angulorum refringentium, uti alia methodo in-
 venimus in dissertatione juxta num. 63 pro angulis exiguis.
 In iis non est necessarium aliunde nosse rationem valorum
 M, m , quæ requiritur in superiore formula pro angulis ma-
 joribus. Ea tamen est adhuc admodum simplex, cum valor x
 admodum facile inveniatur per logarithmos ex a , & $\frac{M}{m}$, tum
 etiam $\frac{M}{m} \times \frac{\operatorname{tang.} \overline{b-x}}{\operatorname{tang.} x}$ itidem admodum expedite. Porro calcu-
 lus paullo accuratior evadet, si pro M, & m pertinentibus
 ad alterum colorem adhibeatur valor medius $M + \frac{1}{2} dM$,
 & $m + \frac{1}{2} dm$, sed si differentia ista sint satis exigua, parum
 admodum mutabunt valores quæsitos.

100. Quæraturo sexto angulus secundus b , in quo colores
 unientur, datis angulo primo a , & valoribus $\frac{M}{m}$, $\frac{dM}{dm}$. Ex
 eadem superiore formula $\frac{dM}{dm} = \frac{M}{m} \left(\frac{\operatorname{tang.} \overline{b-x}}{\operatorname{tang.} x} + 1 \right)$ erit tang.
 $\overline{b-x} = \left(\frac{m}{M} \times \frac{dM}{dm} - 1 \right) \operatorname{tang.} x$, ubi invento x , admodum
 facile inveniatur b . Multo autem facilius in angulis exiguis,
 in quibus fiet $b = \frac{a dM}{dm}$.

101. Cum vero & formularum, quas invenimus, & pro-
 blematum, quæ solvimus, plures admodum notabiles usus oc-
 curant, evolvemus eorum præcipuos seorsum singulos se-
 quentibus paragrahis.

§. 5.

De unione colorum extra casum refractionis correctæ etiam, ubi ratio qualitatis distractivæ ad refractivam sit eadem in utraque substantia refringente .

102. **N**ewtonus videtur omnino hunc casum manifesto exclusisse, & sane perperam, ut ex hoc paragrafo patebit.

103. Si anguli sint exigui, & fuerit $\frac{dM}{dm} = \frac{M-1}{m-1}$, sive, quod eodem redit, $\frac{dM}{M-1} = \frac{dm}{m-1}$, debebunt quidem colores uniri in ipso appulsu ad locum naturalem, nimirum distractio debebit corrigi ibi, ubi corrigitur refractionis, videlicet refractionis utriusque e coloribus, ad quos pertinent differentia dM , dm , debebit simul destrui: nam e numero 99 in unione colorum est $\frac{dM}{dm} = \frac{b}{a}$, & ex num. 84 in correctione refractionis $\frac{dM}{dm} = \frac{b}{a}$, adeoque idem angulus b conjunctus cum a utrumque simul præstat.

104. At si anguli non sint exigui id nequaquam accidet nisi in unico casu, quem evolvemus, sed alius erit angulus b , qui primum effectum præstet, alius, qui secundum, etiam in casu, in quo $\frac{dM}{dm} = \frac{M-1}{m-1}$. Nam per num. 100 posito $\frac{M-1}{m-1}$ pro $\frac{dM}{dm}$, erit tang. $b-x = \left(\frac{m}{M} \times \frac{M-1}{m-1} - 1 \right) \text{tang. } x$, & per num. 83 est tang. $b = \frac{(M-1) \sin. a}{m \cos. x - \cos. a}$.

105. Exhibebunt quidem hæ formulæ eundem valorem b pro casu, in quo sit $M = m$, sive qualitas refractiva utriusque substantiæ eadem, in quo quidem casu ex utraque æquatione eruetur $b = a$. Nam in prima æquatione fit $\frac{m}{M} \times \frac{M-1}{m-1} - 1 = 1 - 1 = 0$, adeoque etiam $b - x = 0$, $b = x$, & ob sin. $x = \frac{M}{m} \sin. a = \sin. a$, fit $x = a$, adeoque $b = a$. In secunda vero ob $x = a$, fiet tang. $b = \frac{(M-1) \sin. a}{(m-1) \cos. a} = \frac{\sin. a}{\cos. a}$, (sive num. 79) = tang. a , adeoque $b = a$. Nimirum anguli re-

frin-

fringentes ex eadem materia ordine contrario positi simul corrigunt & refractionem, & diffractioem: nam inducunt binas oppositas superficies parallelas.

105. At positis aliis valoribus quibuscumque inæqualibus pro M , & m , valores b in iis æquationibus diversi sane obvenient, & eo magis diversi, quo illa ratio magis distabit ab æqualitate, & quo major primus angulus accipietur, quod quidem ex ipsis formulis deduci posset, sed multo facilius patebit ponenti numeros quosvis inæquales pro M , & m .

107. Si ponantur numeri passim ab Opticis propositi pro vitro, & aqua, erit $M = 1. \frac{1}{2}$, $m = 1. \frac{1}{3}$, $\frac{M}{m} = \frac{9}{8}$, $\frac{M-1}{m-1} = \frac{3}{2}$. Hinc factò angulo vitri $a = 30^\circ$, ex formula $\sin. x = \frac{M}{m} \sin. a$, invenitur $x = 34^\circ. 14'$; adeoque ex formula prima $\text{tang. } b - x = \left(\frac{m}{M} \times \frac{M-1}{m-1} - 1 \right) \text{tang. } x$ erit $b - x = 12^\circ. 47'$, & $b = 47^\circ. 1'$: at ex formula secunda $\text{tang. } b = \frac{(M-1) \sin. a}{m \cos. x - \cos. a}$ fit $b = 45^\circ. 39'$, qui quidem angulus a priore differt per $22'$, & corrigit in ea hypothesi ille diffractioem, hic refractionem. In eo exemplo inventum quidem est discrimen, sed exiguum; at aucto angulo a crescet plurimum. Nam eo factò $= 60$ invenitur b ex prima formula $= 85^\circ. 15'$, ex secunda $= 114^\circ. 43'$ discriminè $29^\circ. 28'$ immani sane.

108. Newtono imposuit fortasse illud, quod in ea perquisitione angulum vitri adhibuit non ita magnum, ne angulus aquæ plus æquo excreveret, & in angulo non ita magno parum admodum differt angulus corrigens diffractioem ab angulo emittente radium cum ea directione, cum qua advenit. Et hoc quidem pertinet ad illum errorem Newtoni, quem Clingesterna deprehendit juxta num. 10 dissertationis, & cujus erroris generalem is admodum elegantem exhibuit geometricam demonstrationem, quæ hic numerica pro singularibus casibus deducta est, sed æque ipsius Newtoni generalem affirmationem evertens, quæ illud requirit, ut si fit $\frac{dM}{dm} = \frac{M-1}{m-1}$, sive $\frac{dm}{m-1} = \frac{dM}{M-1}$, quantitas eadem in binis substantiis, debeant colores uniri ibi, ubi refraçtio corrigitur.

S. 6.

De diversa in diversis substantiis proportione, quam servant differentiaë valorum experimentium rationem sinuum demonstrata a successiva inversione ipsius spectri, quæ evertit Newtonianam analogiam luminis cum sono.

109. **S**I in omnibus substantiis proportio, quam servant differentiaë valorum experimentium rationem sinuum pro diversis coloribus, esset eadem, quod quidem requirit Newtoniana analogia luminis cum sono, deberet dM pertinens ad duos colores ad dM pertinentem ad alios duos habere eandem rationem in omnibus substantiis, adeoque eandem, quam dm pertinens ad illos, ad dm pertinentem ad hos. Quare valor $\frac{dM}{dm}$ esset in omnibus colorum binariis idem. An id ita se habeat videbimus hic ope formularum paragraphi 4.

110. Ex formula numeri 100, in qua tang. $\overline{b-x} = \left(\frac{m}{M} \times \frac{dM}{dm} - 1\right) \text{ tang. } x$, illud facile eruitur, si valor $\frac{dM}{dm}$ sit idem in omnibus colorum binariis, unionem omnium colorum debere fieri simul in angulo ad sensum eodem. Si enim valores M , m conveniant radiis rubeis, & dM , dm sint differentiaë pertinentes ad alium colorem quemvis, dummodo $\frac{dM}{dm}$ sit ratio eadem pro omnibus, erit itidem pro omnibus dato primo angulo a idem etiam totus valor $\left(\frac{m}{M} \times \frac{dM}{dm} - 1\right) \text{ tang. } x$, cum nimirum debeat esse idem valor x hic adhibitus pertinens ad ipsos rubeos ob $\sin. x = \frac{M}{m} \sin. a$. Quare & valor $\overline{b-x}$ erit idem, & \overline{b} idem in omnibus. Solum haberi poterit discrimen per quam exiguum ortum ex quantitibus ordinis inferioris ad dM , dm in applicatione methodi differentialis ad eas quantitates non infinitesimas reipsa, sed satis exiguas, quod tamen perquam exiguum esse debet.

111. Cum igitur in vitrometro conjunctio diversorum colorum non sit habita in eadem apertura instrumenti, vel parum admodum diversa, sed in angulis per multos gradus a se invicem differentibus; evidens est, rationem $\frac{dM}{dm}$ pro diver-

versis binariis esse satis diversam. Quamobrem tota illa analogia divisionis spectri cum monochordo, qua Newtonus sonorum armoniam traduxit ad colores, omnino debet corrui. Si enim ea proportio haberet locum accurate in una aliqua substantia, ut in viro communi, in quo ipse dimensiones suas cepit, eo ipso non posset eum habere in aliis, quæ per moram lentam exhibent inversionem spectri; adeoque ea non potest esse generalis quædam natura lex, sed in aliqua particulari substantia possunt ad eam phænomena accedere casu quodam. Cum vero is quidem sit unus e præcipuis fructibus, quos mihi exhibuerunt observationes meo vitrometro peractæ, lubet in eo adhuc magis declarando immorari nonnihil.

112. Et quidem exordièdo ab angulis exiguis, in quibus res etiam line Geometria, & calculo in oculos incurrit; concipiamus bina prismata e binis vitrorum generibus, ut in num. 14 dissertationis, quorum primum commune pro singulis gradibus refractionis exiguæ inductæ in colorem rubeum addat minuta 2 pro violaceo, alterum, ut flint, addat. 3. Si exiguus angulus e primo inducat refractionem pro rubeo graduum 6; idem pro violaceo inducet $6^{\circ} 12'$; si autem angulus e secundo inducat pro rubeo refractionem contrariam $= 4^{\circ}$, inducet pro violaceo $4^{\circ} 12'$, adeoque remanebunt pro utroque accurate 2° . Sit jam quidam color in medio situs, qui Newtono pro vitris communibus, quibus est usus in ejusmodi perquisitionibus, est viridis ad cæruleum vergens, cui primus ille refringens angulus idcirco addet minutum 1, & inducet in ipsum refractionem $6^{\circ} 6'$. Si idem eodem pacto esset in medio respectu secundæ substantiæ, haberet a secundo angulo contrariam refractionem $4^{\circ} 6'$. Quare etiam pro ipso remaneret refractione accurate 2° . Egredieretur igitur is etiam color simul cum rubeo, & violaceo, atque ab iisdem iis angulis simul unirentur, quod quidem valet pro omnibus utcumque distantibus a rubeo, quorum differentia si in utraque substantia ad differentiam violacei, & rubei haberet rationem eandem, utique unitis hisce duobus unirentur & illi; nam e differentiis proportionalibus, ubi una evanescit, reliquæ simul omnes evanescant necesse est. Cum igitur ex observatione constet colores non uniri simul omnes, sed composito purpureo vinaceo e rubeo, & violaceo conjunctis eminere viridem, atque alios post alios conjungi longa serie in spectri inversione,

ne, oportet ii non eundem teneant locum respectivum in iis substantiis, & divisio, quæ differentias valoris m , sive ferem valorum dm exhibeat, in aliis sit alia, nec ita parum diversa.

113. Nec vero hoc in exiguis tantummodo refringentibus angulis evenire debet, sed etiam quamproxime in satis magnis, cum nimirum res pendeat a differentia refractionis rubei, & violacei, quæ exigua est etiam, ubi tota refractionis est satis magna. Ingrediatur in fig. 6. radius DC in superficiem refringentem ACB, in qua, uti accidit in observationibus numeri 42, & 47 radius recedat a perpendiculari, & pro continuatione itineris per CE abeant radii extremi per rectas CF, CH, quavis ex intermediis per CG, & quadrans circuli habentis centrum in C, ac radium quemcumque, occurrat iis directionibus in E, F, G, H, superficiem refringenti in B, rectæ ipsi perpendiculari in N, ducanturque perpendiculares ad CN sinus EI, FK, GL, HM, tum ad EI perpendiculares FO, GP, HQ, quarum postrema occurrat rectæ FK in q , media autem in p .

114. Angulus incidentiæ communis habebit pro mensura arcum NE, anguli refracti habebunt arcus NF, NG, NH, refractiones habebunt arcus EF, EG, EH, sinus incidentiæ erit EI, sinus angulorum refractorum erunt FK, GL, HM, productiones sinuum EO, EP, EQ, quæ si arcus EFGH fuerit ita exiguus, ut curvatura ipsius negligi possit, erunt proxime proportionales refractionibus EF, EG, EH: sed si is fuerit aliquanto major ita, ut curvatura sit sensibilis, ea proportio locum non habebit. Adhuc tamen etiam ubi tota refractionis EH fuerit ingens, differentia refractionis FH erit exigua, adeoque differentiarum refractionum FG, FH erunt quamproxime in eadem ratione rectarum Fp , Fq , sive ut differentiarum productionum OP, OQ, nimirum ut differentia dm valoris m respondens binario CF, CG ad dm respondentem binario CF, CH. Cum enim sit $IE.KF::1.m$, erit $m = \frac{KF}{IE}$, adeoque illi duo valores dm , ut $\frac{OP}{IE}$ ad $\frac{OQ}{IE}$, sive ut OP ad OQ. Hinc si bini valores dm , sive OP, OQ in binis substantiis fuerint ad se invicem in eadem ratione; etiam arcus FG, FH erunt in ratione eadem quam proxime: nimirum si P fuerit in media recta OQ in utraque substantia, erit

erit ad sensum etiam *G* in medio arcu *FH*, & in magnis etiam refractionibus redibit idem argumentum, quo usi sumus num. 112.

115. Porro idem eruitur etiam e formula numeri 71, ubi habetur $m = \frac{\text{fin. } \overline{b+r}}{\text{fin. } \overline{b}}$, adeoque per num. 80 est $dm = \frac{\text{cof. } \overline{b+r}}{\text{fin. } \overline{b}} \times dr$, existente differentia refractionis *dr* in ratione *dm* ob *b* constantem, & constantem itidem refractionem *r* primi coloris, quicumque alius cum ipso componatur. Sunt enim ex differentia refractionum *dr* ipsi arcus *FG*, *FH*.

116. Si radii *CF*, *CG*, *CH* excipiantur plano ad sensum perpendiculari mediae directioni eorundem in *R*, *S*, *T*, aequivalebit ea recta ad sensum arcui diviso in eadem ratione, in qua est *FGH*, & erunt etiam *RS*, *RT* ad sensum ut *FG*, *FH*, sive ut bini illi valores *dm*. Hinc si in spectro ita excepto notentur limites colorum; partes spectri ita divisi respondentis radiis datorum generum exhibebunt valores *dm* pertinentes ad omnia binaria diversorum generum quorumcumque. Si *dM* in una substantia ad *dm* in alia substantia pro quovis eodem binario habuerit rationem eandem; etiam *dM* unius binarii ad *dM* alterius in priore erit, ut *dm* illius ad *dm* hujus in posteriore: adeoque spectrum utriusque substantiae erit divisum per colorum eorundem limites proportionally. Si autem illa ratio $\frac{dM}{dm}$ non fuerit eadem in quovis binario colorum in utraque substantia, manifesto consequitur, non debere divisionem spectri in utraque servare proportionem eandem. Quare si in altera ea divisio sit eadem, quae in monochordo, uti Newtonus affirmat se invenisse in eo vitro, quo est usus; in altera non erit eadem, ubi illa ratio eadem non sit.

117. Cum igitur ex observationibus vitrometro habitis, quibus habetur conjunctio diversorum binariorum colorum facta per angulos admodum diversos, deducatur, rationem $\frac{dM}{dm}$ pro iisdem binariis non esse eandem in binis substantiis; manifesto deducitur illud, quod num. 111 diximus, non posse esse generalem relationem illam colorum in spectro cum tonis mulicis in monochordo, sed casu fortuito in aliqua sub-

stantia habeat locum, quin illum habeat in ulla alia colore omnes simul non colligente, ubi cum eadem rite conjungatur.

118. Facile deducitur ex iis, quæ diximus, posse in ipsam rationem valorum $\frac{dM}{dm}$ pro diversis colorum binariis inquiri per divisionem spectri; si enim in una substantia dicatur dM pro uno binario, dM' pro alio, & in altera pro iisdem dm , dm' , habeatur ex divisione spectri $\frac{dM}{dM'}$, & $\frac{dm}{dm'}$: dicatur primus valor a , secundus b : erit $dM = a dM'$, $dm = b dm'$, adeoque $\frac{dM}{dm} = \frac{a}{b} \times \frac{dM'}{dm'}$. Quare $\frac{dM}{dm} \cdot \frac{dM'}{dm'} :: a \cdot b$.

119. Et quidem id ipsum habet locum non solum ubi, ut in superiore figura, radius recedit a perpendicularo, sed etiam ubi accedit ad ipsum, in quo res accidit paullo aliter. Eam casum exprimit figura 7. Radius delatus per DCE accedit ad perpendicularum distractus per CF, CG, CH. Decurtatio sinus EO ad differentiam OP, vel OQ non est ut $m - 1$ ad m . Est enim $m \cdot 1 :: IE \cdot KF$, adeoque $m = \frac{IE}{KF}$, & inde $m - 1 = \frac{IE - KF}{KF} = \frac{EO}{KF}$: pro binario autem CF, CG erit $dm = \frac{IE}{KF} - \frac{IE}{LG} = \frac{IE(LG - KF)}{KF \times LG} = \frac{IE \times FP}{KF \times LG} = \frac{OP}{m LG}$, & $OP = m dm \times LG$. Quare decurtatio sinus EO ad differentiam OP, ut $(m - 1) KF$ ad $m dm \times LG$, vel habitis KF, LG pro æqualibus, ut $m - 1$ ad $m dm$, & non ut $m - 1$ ad dm . Adhuc tamen etiam ubi esset quamproxime OP ad OQ ut dm primi binarii CF, CG ad dm' secundi CF, CH, quia esset $OP = m dm \times LG$, & $OQ = m dm' \times MH$, ubi valor m est idem, valores LG, MH proxime æquales, & remanet OP ad OQ, ut primum dm ad secundum, in qua ipsa ratione remanet proxime FG ad FH, & RS ad RT. Verum hic casus immediate observari non potest, nam radius si ingrediatur in prisma aqueum, vel vitreum, debet inde etiam egredi, ut abeat ad distantiam, in qua colores sint factis remoti, ut mensuræ possint rite capi.

120. Notandum autem hic occurrit illud, etiam ubi radii accedant ad perpendicularum, differentiam decurtationis sinus fore ad decurtationem totalem ut dm ad $m - 1$, si radii di-

ver-

verforum colorum habeant diversos angulos incidentiæ, & angulum communem refractum. Si nimirum in fig. 6. rubeus, & violaceus adveniant directionibus CF, CH, & ambo refringantur per CE; erit differentia decurtationis sinus OQ ad decurtationem pro rubeo EO, ut dm ad $m - 1$. quam rationem Newtonus censuit generaliter in omnibus substantiis esse, ut 1 ad 27. In hoc solo sensu accipienda est decurtatio sinus, quam nominavi in dissertatione num. 6, & sequentibus, nimirum pro casu, quo sinus anguli refracti sit idem pro utroque radio ita, ut is possit assumi pro unitate, quo casu sinus anguli incidentiæ exprimet valorem m pro rubeo, $m + dm$ pro violaceo. In casu recessus a perpendicularo erit productio ponenda pro decurtatione, ratio vero dm ad $m - 1$ exprimit productionem in recessu, decurtationem in accessu, existente communi in primo casu angulo incidentiæ, in secundo angulo refracto.

121. Redeundo ad divisionem spectri, ubi prisma adhibetur in positione minimæ refractionis, ibi etiam ex formulis in dissertatione propositis distantia, quas habent in spectro a se invicem diversa colorum binaria, sunt ut valores dm ad

$$\text{cof.} \frac{c+r}{2} \times dr$$

ipsa pertinentes. Formula numeri 160 est $dm = \frac{\text{cof.} \frac{c+r}{2} \times dr}{2 \sin. \frac{1}{2} c}$, ubi c est angulus prismatis, r refractionis primi coloris, $r + dr$ refractionis secundi. Si cum eodem illo primo ut cum rubeo componantur colores diversi ad habenda varia binaria, erit

commune $\frac{\text{cof.} \frac{c+r}{2}}{2 \sin. \frac{1}{2} c}$, & remanebunt differentia refractionum

dr , ut valores dm : ipsis autem differentiis refractionum sunt proportionales quamproxime distantia colorum in spectro, ubi radius refractus in satis magna distantia excipitur plano perpendiculari medio ductui ipsius radii. Tum enim habita pro unico puncto illa exigua parte superficiæ prismatis, ex qua omnes radii egrediuntur, ipsam referet in fig. 7. punctum C, recta CE referet directionem radii incurrentis, EF, EG, EH refractiones, FG, FH differentias refractionum pertinentes ad duo binaria, quibus cum sint proxime proportionales RS, RT distantia eorum colorum in spectro; erunt itidem eadem distantia proportionales ipsis dm .

122. Hinc Newtonus rationem ipsam diversorum dm pertinentium ad initium rubei collatum cum limitibus colorum primigeniorum exquisivit per distantias eorundem limitum in spectro, quam invenit expressam sequentibus numeris ab initio rubei ad initium aurei, flavi, viridis, cærulei, indici, violacei, ac ad finem ipsius violacei $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$, 1 , exprimente nimirum unitate differentiam dm pertinentem ad initium rubei, & finem violacei, quam ipsam differentiam statuit pro omnibus substantiis esse $\frac{1}{27}$ valoris $m - 1$ pertinentis ad rubeum, reliquis vero intermediis habentibus elegantem analogiam cum divisione monochordi. Illa quidem numerorum progressio non est arithmetica, quod nihil aliud indicat, nisi distantias limitum eorundem, sive amplitudines colorum in spectro non esse inventas inter se æquales: nec sane video quid faciat ad rem consideratio discriminis ejus seriei a progressionem arithmetica, quod vidi propositum in hac perquisitione inter causas errorum, qui remaneant incorrecti in theoria duplicis objectivi.

123. Porro in assumendis ex divisione spectri valoribus progressionis exprimentis differentias dm , non habentur valores penitus accurati, ne in casu quidem unicæ refractionis figuræ 6., in qua quidem facile est etiam determinare quantitatem erroris. Si enim ducatur chorda FH , quæ occurrat radio CG in X , & rectæ PG productæ in V , radius autem CG producat in Y , erit RS ad RT ut FX ad FH , & OP ad OQ ut FV ad FH . Prima ratio est distantiarum in spectro, secunda valorum dm , adeoque error consistit in lineola XV , quæ est secundi ordinis; nam est ad XG quamproxime ut GL ad LC ob similia triangula XGV , GCL , in quibus anguli ad G sunt alter complementum alterius, angulus ad L rectus accurate, ad X quamproxime; & est XG ad XH , ut XF ad XY . Tantillus error jure negligendus est, ubi a minus accurata distinctione limitum multo majores errores inducantur.

124. Rationem dm ad $m - 1$ in aliis substantiis esse multo majorem, in aliis minorem, id quidem invenit Dollondus; relativam positionem in spectro non esse eandem, adeoque analogiam illam cum monochordo non esse proprietatem in-

innatam coloribus, id ex hisce meis observationibus evidenter deducitur, uti ostendimus, & id ipsum invenisset utique is ipse, si divisiones spectri in multis substantiis satis accurate determinasset, sed re ipsa admodum difficile est observationes ejusmodi satis accurate instituire ob admodum incertos limites colorum, quorum alii in alios desinunt sensim *par nuance*, non saltu quodam abrupto.

125. Inde fit, ut discrimen rationum, quas habent valores dm pertinentes ad diversa colorum binaria in diversis substantiis, admodum difficile sit definire ex ejusmodi determinatione limitum in spectro. Ostendam quo pacto in id liceat inquirere ope formularum, quas proposui paragrapho 4, & problematum, quæ ibi soluta sunt, postea quam ostendero, quomodo datis rationibus diversorum dm , sive positionibus colorum in spectro inveniri possit, qui color debeat remanere solus in eo extremo imaginis solaris, in quo etiam in inversione spectri unius perseverat.

126. Interea tamen notabo illud, triplicem hoc in genere haberi Newtoni errorem. Primum theoriæ, quo censuit, si ratio dm ad $m - 1$ sit constans in omnibus substantiis, debere conjunctionem binorum colorum per eas substantias semper fieri ibi, ubi imago Solis ad locum naturalem redit, egressis radiis cum directione, cum qua ingressi sunt, sive debere corrigi simul & distractionem, & refractionem: eum errorem primus, quod sciam, notavit Klingettierna, & de eo egimus numero 102. Secundus error facti consistit in eo, quod censuerit in omnibus substantiis rationem valoris dm respondentis primo rubeo, & postremo violaceo ad $m - 1$ rubei primi esse eandem, nimirum 1 ad 27, ex quo errore conjuncto cum primo desperandum censuit de ulteriore perfectione telescopii dioptrici, & eum errorem deprehendit Dollondus per experimenta instituta in flint, & crown, quibus conjunctis multo perfectiora telescopia construxit, & de eo egimus in dissertatione num. 11, ubi nomen decurtationis intelligi debet juxta num. 120 hujus. Tertius error itidem facti in eo est situs, quod censuerit valores dm pertinentes ad diversa colorum binaria in diversis substantiis esse constanter in eadem ratione illa inducente illam determinatam divisionem spectri per colorum limites, de quo errore hic egimus, quem observationes meo vitrometro institutæ, & superius hic traditæ

ditæ in clarissima, ni fallor, luce collocarunt, qui illud efficit, ut telescopia duplicis objectivi eam habere perfectionem non possint, quam ii sperarunt huc usque, qui de eo argumento egerunt, quos ego viderim, & cujus remedium a triplici objectivo repetendum censeo, ut infra videbimus.

127. Caterum in hisce tanti viri in argumento, in quo tamdiu, tam diligenter versatus est, in quo tam multa tot sæculis ante ipsum incognita tanta sagacitate reperit, tanta diligentia explicavit, tot replicatis lapsibus miseram humanæ mentis conditionem licet agnoscere, erroribus in tanto etiam tam claro lumine semper obnoxiam.

§. 7.

De determinatione colorum, qui simul uniri debeant, & coloris, qui debeat extare solus in altero extremo spectri, datis angulis, & datis qualitatibus refractivis binarum substantiarum pertinentibus ad omnes colores.

128. **V**idimus paragrapho 1, & 2 colores uniri alios post alios, & alios post alios eminere singulos in summo spectro in ipsa etiam inversione ipsius, & in paragrapho superiore vidimus id indicare diversam in binis substantiis, quæ ibi adhibentur, seriem valorum dm , sive diversam seriem numerorum exprimentium distantias, quas habent ad se invicem limites colorum, sine quo discrimine ante inversionem spectri semper emereret rubeus, tum succederet unio colorum omnium simul cum albedine, ac demum post inversionem ab illo unico angulo peractam emereret violaceus. Videndum nunc, quo pacto data pro utraque substantia qualitate refractiva omnium colorum, sive datis pro utraque valoribus m , M , & valoribus omnibus $m + dm$, $M + dM$, determinari possit, qui colores a datis quibusvis angulis refringentibus earumdem uniri debeant, quibus determinatis, determinatur, ubi debeat incipere inversio spectri, quo ordine peragi, ubi desinere.

129. Assumpta pro unitate quavis recta habebuntur rectæ exprimentes m , & M , ac datas quasvis dm , dM . Exprimat in fig. 8. recta AB differentiam dm respondentem colori rubeo, & violaceo in altera substantia, & BC ipsi perpendiculari-

cularis dM respondentem alteri, ac detur in utraque divisio respondens singulis coloribus intermediis ita, ut AD sit valor dm respondens rubeo, & cuiusdam alteri colori, ut initio viridis, ac Bd valor dM respondens iisdem in secunda, quæ divisiones juxta num. 116 expriment divisionem spectri factam per positionem colorum eorundem in ipso spectro pertinentem ad eas binas substantias. Ductis perpetuo rectis DE , dE parallelis ipsis BC , BA , earum concursus E erit ad lineam quamdam continuam, quæ dabitur, data relatione positionis omnium punctorum D in recta AB , & omnium d respondentium eidem colori in recta DC . Ea autem linea continua exprimet relationem omnium valorum dm pertinentium ad quodvis binarium colorum in prima substantia ad valores respondentes in secunda per suas abscissas AD , & ordinatas DE æquales rectis Bd , quæ respondent in secunda substantia rectis AD substantiæ primæ.

130. Si dm , dM pertinentes ad colorem rubeum, & quemcumque alium essent in iis binis substantiis in eadem constanti ratione, in qua sunt dm , dM pertinentes ad rubeum, & violaceum; linea AEC congrueret cum recta AC ; esset enim semper $AD.DE :: AB.BC$, adeoque quivis angulus $DAE = BAC$, & quodvis punctum E semper esset in recta AC . Sed si ea ratio fuerit pro diversis colorum binariis diversa, sive diversa ratio divisionis rectarum AB , BC per colores eosdem; erit E ad curvam quamdam, quæ dabitur, data relatione abscissarum ad ordinatas.

131. Quoniam num. 97 differentia refractionis dr binorum colorum, ad quos pertinent dm , dM , est $= \frac{dm \operatorname{cof.} \overline{b-x}}{\operatorname{cof.} y}$ ($\operatorname{tang.} \overline{b-x} - \operatorname{tang.} x \left(\frac{m}{M} \times \frac{dM}{dm} - 1 \right)$), assumendo primum rubeum pro primo ex iis duobus coloribus, & dividendo per $\frac{m}{M} \times \frac{\operatorname{cof.} \overline{b-x} \operatorname{tang.} x}{\operatorname{cof.} y}$ quantitatem, quæ pertinebit ad primum colorem rubeum solum, adeoque erit constans utcumque mutatis dm , dM , erit ea differentia ut $dm \left(\frac{\operatorname{tang.} \overline{b-x}}{\operatorname{tang.} x} \times \frac{M}{m} - \frac{dM}{dm} + \frac{M}{m} \right) = \frac{M dm}{m} \left(\frac{\operatorname{tang.} \overline{b-x}}{\operatorname{tang.} x} + 1 \right) - dM$. Fiat $\frac{M}{m}$ ($\operatorname{tang.}$

$\left(\frac{\text{tang. } b - x}{\text{tang. } x} + 1 \right) = P$, eritque ipsa refractionis differentia ut $P dm - dM$, ubi quantitas P facile invenitur, datis m , M , angulo b , & angulo a , ex quo per secundam formulam numeri 77 fundamentalem $\sin. x = \frac{M}{m} \sin. a$ invenitur x , adeoque & $b - x$, & admodum facile totus valor P .

132. Capiatur jam in BC , si opus est, producta recta BF , quæ sit ad AB , ut hic valor P ad unitatem, sive quæ sit $= AB \times P$, ducaturque AF , quæ occurrat ordinatæ DE productæ, si opus est, in Q , & recta EQ intercepta inter curvam AEC , & rectam AF exprimet differentiam illam refractionum pertinentium ad primum colorem rubeum, ad quem pertinent m , M , & colorem D , ad quem pertinent differentiæ dm , dM . Erit enim $1.P :: AB.BF :: AD = dm$. $DQ = P dm$; cumque sit $DE = dM$, erit $EQ = P dm - dM$, ut oportebat.

133. Hinc si ulla chorda HI sit parallela ipsi AF , ducanturque ordinatæ HL , IL ; patet in iis angulis a , b , qui exhibuerunt inventum valorem P , debere uniri colores KL . Si enim ex ipsæ ordinatæ incurrant in rectam AF in R , S , erunt HR , IS æquales, adeoque æquales differentiæ refractionis eorum colorum a refractione primi rubei, & proinde ipsi æqualem habebunt refractionem, & conjungentur in spectro.

134. In eo casu oportebit etiam, habeatur aliqua tangens NM parallela ipsi AF , ad quam deveniret positio chordæ HI motu parallelo translata versus suum arcum, donec ipsa evanescat, abeuntibus punctis H , I simul in aliquod extremum punctum M antequam ea directio arcum ipsum relinquat. Ducta inde ordinata MO , facile patet, colorem O fore solum in extremo spectro, qui omnium maximam versus eandem partem habebit differentiam refractionis a rubeo. Patet enim MP fore maximam omnium parallelarum EQ interceptarum inter arcum, & rectam AP , cum quævis QE producta usque ad tangentem MN debeat evadere æqualis ipsi PM .

135. Si chorda HI digressa a contactu M retro regrediatu motu parallelo, determinabit suis extremis punctis H , I omnia binaria omnium colorum D , L unitorum ab iis angulis, qui colores semper uniti habebuntur, donec alterum ex-

tremum adveniat ad A, vel C. Si adveniat ad utrumque simul, quod accidet, si punctum F cadat in C; tum in altero spectri extremo unientur primus rubeus, & postremus violaceus: si adveniat prius I ad C, quam H ad A, quod accidet, ubi BF fuerit major, quam BC; tum violaceo B conjuncto cum colore K, rubeus primus A extabit solus in altero spectri extremo. Si adveniat prius ad A, quam ad C, quod accidet, ubi BF fuerit minor, quam BC, vel valoris negativi; tum extremus violaceus erit in altero spectri extremo solus, & primus rubeus A erit conjunctus cum aliquo alio, si ipsa recta AF occurrat iterum eidem curvæ alicubi, quo casu congruente H cum A abibit & I in ipsam, ac determinabit colorem L unitum cum primo rubeo, vel si ipsa AF nusquam iterum eidem curvæ occurrerit; in altero extremo spectri erit solus rubeus existente eo solo violaceo in altero.

136. Ut autem ductu quodam continuo incurrat in oculos series omnis phænomenorum, quæ debent accidere, dum paulatim motu itidem continuo crescit angulus b secundæ substantiæ, ut aquæ in vitrometro, manente angulo a primæ; notetur, exprimi per AB valorem dm pertinentem ad secundam anguli variabilis, per BC valorem dM pertinentem ad primam, ac considerentur duo casus: in primo curva AMC jaceat a chorda AC versus AB, ut in fig. 8., & 9., in secundo ad partes oppositas, ut in fig. 10., ut nimirum $\frac{OM}{AO}$ valor $\frac{dM}{dm}$ pertinens ad primum rubeum, & quempiam alium ex intermediis sit minor in primo casu, major in secundo, quam $\frac{BC}{BA}$ valor pertinens ad primum rubeum, & postremum violaceum.

137. Si ducantur in fig. 9., & 10. AD, CE, quæ curvam tangant in A, & C, ac ipsi EC fiat parallela AG; erit, ut facile patet, BD in priore quidem minor, quam BC, & BG major, in posteriore vero illa major, hæc minor.

Quoniam autem est $AB.BF::1.P = \frac{M}{m} \left(\frac{\text{tang. } b-x}{\text{tang. } x} + 1 \right)$; facile patet mutationes omnes valoris P pendere a mutatione valoris b : manent enim M, m pertinentes ad primum rubeum in vitro, & in aqua, manet angulus vitri a , adeoque

T. V. P. II. Rr & x

& x ob formulam $\sin. x = \frac{M}{m} \sin. a$. Si concipiatur $b = 0$, quod accideret applicato latere mobili vitrometri lateri prismatis vitrei ita, ut nulla aqua interjaceret; fiet $\frac{\text{tang. } b - x}{\text{tang. } x} = \frac{\text{tang. } -x}{\text{tang. } x} = -1$, adeoque $P = \frac{M}{m} (-1 + 1) = 0$, & $BF = 0$. Orto b , & perpetuo crescente, crescet perpetuo valor P , & cum ipso recta BF .

138. Quare dum vitrometro aperto, angulus variabilis perpetuo crescit; initio quidem nulli colores erunt conjuncti, donec punctum F appellat ad punctum D in fig. 9., G in fig. 10., & ejusmodi conjunctiones habebuntur, dum F excurrit per rectam DG in primo casu, GD in secundo, incipiente inversione spectri in altero e punctis D, G , & desinente in altero.

139. Nam in primo casu figuræ 9. in appulsu F ad D evadit AF tangens curvæ in A , tum eam secat alicubi in I determinans per ordinatam IL colores L interea conjungendos cum primo rubeo A , & habetur inter A , & I aliqua tangens NM ipsi parallela determinans per ordinatam MO colorem O interea extantem solum in summo spectro, id autem ita, ut puncta I, M exeant ex A , & punctum I quidem peragrata tota curva appellat ad C , appellente F ad ipsum C . Progresso F in F' ultra C , jam AF nusquam iterum occurrit curvæ, adeoque nusquam habetur I , sed M progreditur per M' , donec abeat in C in ipso appulsu F' ad G , occurrente interea recta ex C parallela $F'A$ curvæ alicubi in H , & per ordinatam HK determinante colores K conjunctos alios post alios cum postremo violaceo B .

140. Hinc in eo casu facta inversione per incrementum anguli variabilis incipit conjunctio primi rubei, primo quidem cum tota serie rubeorum, tum cum reliquis omnibus coloribus, usque ad postremum violaceum, ac interea incipiunt eminere soli in summo spectro omnes rubei, tum aurei, ac flavi, & reliqui omnes alii post alios. Remanet autem in imo spectro violaceus, donec ad ipsum adveniat primus rubeus, appellentibus F , & I ad C , & conjunctus cum ipso efficiat vinaceum purpureum: deinde rubeus incipit jam ab omnibus liber esse solus in ipso fundo, violaceo etiam postre-

stremo ascendente supra ipsum. Incipit inversio spectri in appulsu puncti F ad D, & desinit in appulsu F' ad G ita, ut dum ipsum F percurrit G C, sit in imo violaceus postremus, dum F' percurrit C D, sit ibi primus rubeus.

141. Patet autem e contrario in hoc casu, si initio angulus variabilis aquæ sit ita magnus, ut BF evadat major, quam BG, tum perpetuo decrescat, spectrum a positione contraria, in qua violaceus erit in summo, rubeus in imo, debere inverti per eisdem gradus ordine contrario, ita nimirum, ut violaceus postremus incipiat descendere infra precedentes, & uniatur cum omnibus intermediis, donec deveniat ad rubeum primum, puncto F' appellente ad C, tum infra ipsum descendat, ipso primo rubeo post unionem cum eodem postremo violaceo ibi factam unito deinde cum omnibus intermediis, donec emergat omnium altissimus, ut idcirco in imo spectro sit semper rubeus primus, dum F' percurrit G C, tum semper violaceus postremus, dum F percurrit C D; in summo vero spectro violaceus primo dispereat, & ipsi succedant indicus, cæruleus, viridis, ac reliqui ordine eodem retrogrado.

142. At in secundo casu figura 10. omnia succedent ordine prorsus contrario: si inversio fiat augendo angulum variabilem, ea incipiet a violaceo postremo se plicante supra sibi proximos, remanentibus in imo spectro, non in summo solis indico cæruleo viridi &c., donec deveniatur ad rubeum primum: si autem ea fiat minuendo angulum; inversio ipsa incipiet a primo rubeo, remanentibus itidem in imo spectro solis aureo, flavo, viridi &c, donec deveniatur ad violaceum. Colores extremi puri cum intermedia mixtione purpurei erunt in primo casu in imo spectro, & colores intermedii puri in summo, at in secundo casu illi in summo, hi in imo.

143. Nam ibi recta AG parallela tangenti EC cadente intra angulum BAC, dum crescit angulus variabilis incipiet inversio in appulsu F ad G ab egressu punctorum M, H ex C, donec in appulsu F ad C abeat H in A, ac exoriatur I ex eodem C, & percurrat itidem totum arcum CA pergente M motu continuo per M, donec adveniat ad A, & inversio nem absolvat.

144. In utraque figura singula puncta M, I, H percurrunt

runt totam curvam, dum inversio fit, sed M quidem durat toto tempore inversionis, puncta vero I, H orta eodem loco, quo M , duplo citius singula absolvunt motum suum orto altero, dum alterum occidit.

145. Facile autem demonstratur hoc aliud theorema, eum colorem extare solum in altero extremo, qui si conferatur cum sibi infinite proximo, & appellentur dm, dM differentiarum valorum m, M pertinentium ad ipsos, fit $\frac{dM}{dm} = \frac{M}{m} \left(\frac{\text{tang. } b-x}{\text{tang. } x} + 1 \right)$. Si enim in fig. 8. ducatur ex H recta HT parallela axi AB , usque ad IL , & puncta H, I accedant ad M , donec in ipsam recidant, evanescente chorda HI ; erunt semper HT, TI , ut AB ad BF , ut 1 ad $\frac{M}{m} \left(\frac{\text{tang. } b-x}{\text{tang. } x} + 1 \right)$, quæ postremo evadent differentiarum valorum M, m pertinentium ad colores K, L desinentes in O , adeoque erit ibi $dm : dM :: 1 : \frac{M}{m} \left(\frac{\text{tang. } b-x}{\text{tang. } x} + 1 \right)$. Id autem congruit cum formula inventa num. 100 pro solutione ejusdem problematis.

146. Hinc autem patet, inversionis limites haberi, ubi valores fractionis $\frac{dM}{dm}$, quarum altera pertineat ad primos rubeos inter se collatos, altera ad postremos violaceos, exhiberint binos angulos b in formula $\frac{dM}{dm} = \frac{M}{m} \left(\frac{\text{tang. } b-x}{\text{tang. } x} + 1 \right)$, intra quos limites continebuntur omnes anguli intermedii b , respondententes omnibus intermediis valoribus ejus fractionis.

147. Si linea AMC non habeat curvaturam continuam versus eandem partem, sed se retro reflectat, & iterum alibi tangat, vel fecet rectam AC ; singuli appulsus exhibebunt singulos alios colores simul conjungendos cum primo rubeo, & postremo violaceo, & si curvatura sit ejusmodi, ut recta quæpiam quæcumque ipsi curvæ possit occurrere in pluribus punctis; puncta ejusmodi determinabunt colores totidem uniendo simul, ubi recta AF evaserit parallela illi rectæ.

148. Quod si ea curva abiret in rectam AC ; patet, utramque tangentem AD, CE , & rectam AG posteriori parallelam, abituras simul in rectam AC , in quam abibunt simul omnia puncta curvæ ipsius, adeoque inversionem spectri debere fieri ad sensum per conjunctionem omnium colorum simul
ibi,

ibi, ubi habebitur superior æquatio, pertinentibus singulis dm , dM ad primum rubeum, & postremum violaceum, adeoque in eo casu simul ad reliqua binaria omnia, juxta num. 110.

149. Superiore numero diximus, unionem omnium colorum in eo casu debere haberi simul ad sensum; nam id quidem nequaquam ita se haberet semper accurate; cum numero 129 pro dm , dM assumptæ sint quantitates non infinitefimæ, sed finitæ, nimirum differentiæ pertinentes ad primum rubeum, & postremum violaceum, exiguæ quidem, sed non infinite parvæ, & iis aptatæ sint methodi infinitefimales, quæ in ejusmodi applicatione admittunt errores, sed eo minores respectu ipsarum dm , dM , quo eæ fuerint minores respectu M , m . Idcirco ad habendam unionem successivam colorum, & colorem extantem solum in altero extremo spectri, differentia ipsa refractionis dr numero 92, ex qua omnes inferentes determinationes sunt ortæ, non est accepta $= 0$, quod dedisset solam unionem coloris rubei cum illo alio colore, ad quem pertineret $m + dm$, & $M + dM$, sed considerata est, ut quædam finita quantitas. Potuissent dm , & dM abscissa, & ordinata curvæ adhibitæ appellari x , & y , & per calculum consuetum ope differentiarum dx , & dy ex natura ejus curvæ, quæri colores infinite proximi, & contactus, ut & retenta denominatione dm , dM pro x , & y , potuissent per solam formularum considerationem haberi ea omnia, quæ tradidimus huc usque; sed mihi quidem videtur multo aptior consideratio curvæ cum omnibus mutationibus tangentium, & secantium ad ea ipsis non mentis tantummodo, sed frontis oculis sitenda evidentissime, & cum intuitionem quadam contemplanda.

150. Hisce fusius expositis, demum hic adnotabo primo illud: cum in omnibus substantiis in ipso §. 2. adhibitis crystallo montana, vitro communi Bohemico, flint, aucto aquæ angulo inversio spectri caperit a rubeo se deorsum plicante versus violaceum ita, ut colores singuli puri extiterint alii post alios in summo spectro ii, qui rubeum consequuntur, aureus, flavus, viridis, ac reliqui usque ad violaceum ipsum, debere juxta num. 140 haberi casum primum, curva AMC ingressa triangulum BAC , in quo casu ratio $\frac{dM}{dm}$ est major
in

in coloribus extremis, quam in rubeo conjuncto cum quovis medio; unde & illud consequitur ex num. 121 quemvis determinatum ex coloribus intermediis, ut initium, vel finem viridis, accedere propius ad rubeum in spectro earum substantiarum, quam in spectro æquali aquæ.

151. Deinde illud: si anguli sint exigui valorem P fore multo simpliciore, nimirum $= \frac{b}{a}$; nam per num. 99 est $\frac{b}{a} = \frac{M}{m} \left(\frac{\text{tang. } b-x}{\text{tang. } x} + x \right)$, qui est valor P num. 131. Calculus ita evaderet multo simplicior, sed quo minor est angulus, eo citius invertitur spectrum, & eo majorem in consecutaria errorem inducit observationis error.

152. Demum addam & illud, omnem hanc theoriam æque transferri ad observationes peractas ope binorum prismatum separatorum, quorum alterum habeat angulum fixum, alterum mobilem, quod etiam in prismatico vitreo præstari potest juxta num. 34, ut bina vitra immediate comparentur ad se invicem, per quorum prismatum utrumvis radius transeat cum refractione minima omnium, quas in eo habere po-

test. In singulis per num. 121 est $dm = \frac{\text{cof. } \frac{c+r}{2}}{2 \text{ fin. } \frac{1}{2} c} \times dr$, adeoque si ex litteræ retineantur pro substantia anguli variabilis, & majusculæ pro altera, erit tota differentia refractionis ex utroque prismate simul $dr - dR = \frac{2 \text{ fin. } \frac{1}{2} c}{\text{cof. } \frac{c+r}{2}} \times dm - \frac{2 \text{ fin. } \frac{1}{2} C}{\text{cof. } \frac{C+R}{2}} \times dM = \frac{2 \text{ fin. } \frac{1}{2} C}{\text{cof. } \frac{C+R}{2}} \left(\frac{\text{cof. } \frac{C+R}{2}}{\text{cof. } \frac{c+r}{2}} \times \frac{\text{fin. } \frac{1}{2} c}{\text{fin. } \frac{1}{2} C} \times dm - dM \right)$, adeo-

que eadem methodo numeri 131 ea differentia, ut valor hac parenthesi inclusus, ac $P = \frac{\text{cof. } \frac{C+R}{2}}{\text{cof. } \frac{c+r}{2}} \times \frac{\text{fin. } \frac{1}{2} c}{\text{fin. } \frac{1}{2} C}$, ubi C, c sunt anguli prismatum, R, r refractiones eruendæ ex immediata observatione, vel ex formula $m = \frac{\text{fin. } \frac{c+r}{2}}{\text{fin. } \frac{1}{2} c}$, ex datis m, M, C, c.

S. 8.

De Methodo determinandi proxime curvam exhibentem omnes rationes $\frac{dM}{dm}$ qualitatum diffractivarum ex aliquot observationibus angulorum, in quibus dati colores extant soli in inversione spectri.

153. **H**Æc perquisitio est inversa ejus, quam superiore S. habuimus. Ibi ex data relatione in fig. 8. reftarum AD, DE experimentium valores dm , dM , quæ determinat curvam AMC inquisivimus in inversionem spectri, determinando, qui color debeat extare solus in altero extremo ipsius spectri in dato angulo prismatis variabilis, combinando cum angulo constanti prismatis alterius. Hic e contrario datis aliquot observationibus ejus anguli cum colore, quem is relinquit solum in eo extremo, inquiritur in ipsam curvam, quæ exhibeat rationem valorum eorundem.

154. Ea perquisitio est præcipuus omnis hujusce tractationis fructus, & in eo sitam esse arbitror maximam utilitatem methodi adhibentis angulam variabilem unius substantiæ cum constanti alterius, cuius nimirum ope licebit procedere ad unionem colorum plurium per totidem lentes ex totidem substantiis elaboratas. Valores dm , dM possunt investigari immediate saltem pro colorum limitibus juxta num. 118 per ipsam determinationem divisionis spectri factæ per eosdem limites in utraque substantia, sed cum ii limites ipsi sint admodum incerti juxta num. 124, admodum difficile est eos valores ita accurate definire, ut inevitabilis observationis error in discrimine divisionis haud ita magno perquisitionem omnem penitus non evertat.

155. Multo magis idoneam censeo methodum, quam hic exponam, & multo minus perniciosos esse errorculos, qui hic etiam committuntur ob incertos limites colorum eminentium in summo spectro, dum id invertitur; licet in hac methodo debeat assumi ut cognita positio colorum in spectro ipso alterius e binis substantiis, qua assumpta docebimus, quo pacto invenire liceat, si minus accurate, saltem quamproxime positionem in spectro alterius, ubi si quid erratum fuerit in assumenda priore illa positione ex immediatis dimen-

mentionibus spectri, id nihil ad sensum influat in rationem $\frac{dM}{dm}$, inducto simili errore in alterum etiam ex iis, quod queritur ex altero non ita bene assumpto.

156. Methodus autem ejusmodi perquisitionis hæc esse potest. Sint in fig. 11. ABC puncta eadem, quæ in præcedentibus, ac pertineant in substantia anguli variabilis, ut in aqua O, O', O' &c. ad limites colorum eos, quibus extantibus solis in altero spectri extremo notati sint anguli ipsi. Si concipiatur tangens MN occurrens axi AB in N, eique parallela AF; dabitur ex observatione ratio AB ad BF, quæ per num.

131 est, ut 1 ad $\frac{M}{m} \left(\frac{\text{tang. } b-x}{\text{tang. } x} + 1 \right)$, qui valor facile invenitur juxta num. eundem 131, adeoque dabitur ratio subtangentis NO ad ordinatam OM, sive directio tangentis.

157. Quare problema huc reducetur. Datis pluribus abscissis AO, AO' &c. invenire curvam, quæ egressa ex A, ordinatis OM, OM' &c. occurrat in angulis datis alicubi in M, M' &c. Quod si etiam detur ratio AB ad BC ex conjunctione coloris rubei primi cum postremo violaceo, quam exhibere videtur angulus inducens vividissimum purpureum ortum in altero extremo ex unione plurimorum rubeorum cum pluribus violaceis; nam primum rubeum, & extremum violaceum discernere seorsum singulos, dum alter ibi succedit alteri, tenuitas non finit; accedet inde nova determinatio curvæ, ut nimirum debeat desinere in datum punctum C.

158. Ejusmodi determinatio fieri poterit eadem methodo, quæ adhiberi solet pro interpolationibus. Fiat quævis abscissa AO = x, & ordinata AM = y, & ex iis, quæ demonstrata sunt num. 145, quæ congruunt cum notissima methodo adhibendi calculum differentialem pro inveniendis tangentibus curvarum, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{OM}{ON} = \frac{BF}{BA} = P = \frac{M}{m} \left(\frac{\text{tang. } b-x}{\text{tang. } x} + 1 \right)$, qui valor dabitur pro singulis ordinatis.

159. Fiat jam æquatio ad curvam $y = Ax + Bx^2 + Cx^3$ &c. assumendo tot terminos, quot habentur ordinatæ secantes curvam in iis datis angulis. In ea æquatione posito $x = 0$, erit $y = 0$, adeoque curva ipsa transibit per A. Differentiando autem habebitur $dy = A dx + 2Bx dx + 3Cx^2 dx$ &c., adeoque $A + 2Bx + 3Cx^2$ &c. = $\frac{dy}{dx}$. Sint AO = q,

AO'

$AO = q'$ &c., & valores P , respondentēs ordinatis OM , $O'M$ &c. sint p, p' &c., quibus erunt æquales valores $\frac{dy}{dx}$ pertinentes ad ipsas, adeoque habebuntur sequentes æquationes.

$$A + 2q B + 3q^2 C \text{ \&c.} = p$$

$$A + 2q' B + 3q'^2 C \text{ \&c.} = p'$$

$$A + 2q'' B + 3q''^2 C \text{ \&c.} = p''$$

160. Ex iis inveniuntur A, B, C &c. prorsus eodem pacto, quo ubi quæritur curva, quæ transeat per data puncta, inveniuntur valores iidem ex datis totidem x , & y , nimirum per totidem æquationes primi gradus, quot sunt ipsæ A, B, C : iis autem inventis habebitur æquatio ad curvam quæsitam.

161. Si detur postrema ordinata BC , & ea fiat $= u$, ac $AB = t$, accedet superioribus æquationibus æquatio formæ parum diversæ $tA + t^2 B + t^3 C \text{ \&c.} = u$, & numerus terminorum erit augendus unitate, ut æquetur numero æquationum, per quas determinandi sunt ipsorum coefficientes. Si ea postrema ordinata non detur, inventa æquatione ad curvam per solas ordinatas occurrentes ipsi in datis angulis, inveniatur ex ipsa æquatione $u = At + Bt^2 + Ct^3 \text{ \&c.}$

162. Ex eadem inveniatur quævis alia ordinata y respondens cuivis abscissæ x , & cum illa exprimat dM substantiæ anguli constantis, hæc dm substantiæ anguli variabilis pro primo rubeo combinato cum colore, ad quem pertinet extremum punctum ejus abscissæ, habebitur valor $\frac{dM}{dm}$ respondens binario cuivis continenti primum rubeum cum illo colore alio quovis.

163. Si pro divisione spectri AB respondentis angulo variabili assumeretur ut data divisio spectri BC respondentis angulo constanti; satis esset assumere pro x rectas CD , pro y DM , & omnia eodem modo procederent facta tantummodo $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{p}$. Tum enim esset $\frac{dy}{dx} = \frac{ON}{OM} = \frac{AB}{BF} = \frac{1}{p}$. Facto $\frac{1}{p} = p$, & $CD = q$, redirent omnia, quæ supra.

164. Ubi adhibetur vitrometrum, posset paullo diligentius inquiri semel in divisionem spectri exhibiti a satis magno angulo primatis aquei, & adhiberi pro divisione rectæ AB juxta primam methodum, vel posset accipi pro satis proxime

determinata divisio, quam pro vitro communi Newtonus proposuit juxta num. 122, & ejus ope adhibita secunda methode erui divisio spectri aquei, cum quo reliqua spectra deinde componerentur.

165. Hoc pacto satis proxime obtineretur discrimen rationis $\frac{dM}{dm}$ pertinentis ad primum rubeum, & postremum violaceum a ratione pertinente ad ipsum primum rubeum, & colorem medium quempiam, ut initium, vel finem viridis. Si ea discrimina pro omnibus colorum binariis essent non ita exigua in omnibus plurium substantiarum binariis, nullum ex iis binariis substantiarum posset unire colores plures quam duos ope duplicis objectivi; possent tamen adhiberi plures lentes conjunctæ e singulis substantiis singulæ ad eam rem præstandam, de qua re agemus sequenti paragrapho. Substantia ad eam rem idoneæ omnino esse debent vitrum commune, flint, & aqua; cum adhibitis binis ex iis quibusque juxta § 2. inversio spectri facta sit per moram notabilem, non simul transeundo per colorem album.

§. 9.

De unione plurium colorum per objectivum compositum e pluribus lentibus.

166. **I**N dissertatione §. 4. proposuimus formulam pro correctione erroris orti a diversa refrangibilitate radiorum methode Dollondiana per duplex objectivum, quæ quidem uniret omnes colores simul; si valor $\frac{dM}{dm}$ in iis substantiis esset idem pro omnibus colorum binariis, qui cum pro aliis sit alius; satis patet eam non conjungere, nisi illud binarium solum, cujus valor $\frac{dM}{dm}$ adhibetur. Verum si plures adhibeantur lentes ex pluribus substantiis, poterunt uniri colores totidem, quot lentes adhibebuntur.

167. Si radii sphericitatum pro prima lente sint a, b , pro secunda a', b' , pro tertia a'', b'' &c., & ubique juxta num. 55. dissertationis $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$, distantia foci omnium lentium

tium

tium simul R, rationes autem finium pro primo e radiis generum uniendorum sint M, M', M'' &c., ac pro colore primo, & secundo fit $\frac{dm}{dm} = h' \frac{dm'}{dm} = h''$ &c., pro primo, & tertio sint k', k'' &c., pro primo, & quarto l', l'' &c., erit per num. 58 ipsius dissertationis $\frac{1}{R} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} + \frac{m''-1}{f''} + \frac{m'''-1}{f'''} &c. + \frac{1}{p}$; adeoque ad conservandam eandem foci communis distantiam in iis tribus coloribus debebunt haberi æquationes $\frac{dm}{f} + \frac{dm'}{f'} + \frac{dm''}{f''} + \frac{dm'''}{f'''} &c. = 0$ tam ubi per ipsas dm, dm', dm'', dm''' exprimantur differentiæ debitæ colori primo, & secundo, quam primo & tertio, primo, & quarto &c., nimirum $\frac{dm}{f} + \frac{b'dm}{f'} + \frac{b''dm}{f''} + \frac{b'''dm}{f'''} &c. = 0$; $\frac{dm}{f} + \frac{k'dm}{f'} + \frac{k''dm}{f''} + \frac{k'''dm}{f'''} = 0$; $\frac{dm}{f} + \frac{l'dm}{f'} + \frac{l''dm}{f''} + \frac{l'''dm}{f'''} &c. = 0$, sive $\frac{1}{f} + \frac{b'}{f'} + \frac{b''}{f''} + \frac{b'''}{f'''} &c. = 0$; $\frac{1}{f} + \frac{k'}{f'} + \frac{k''}{f''} + \frac{k'''}{f'''} &c. = 0$; $\frac{1}{f} + \frac{l'}{f'} + \frac{l''}{f''} + \frac{l'''}{f'''} &c. = 0$.

168. Satis patet, ope earum æquationum valores omnes f', f'', f''' &c. reduci posse ad f , sive factò $f=1$, inveniri omnes ipsorum valores, relicta indeterminata ratione a ad b in quovis valore $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ pro corrigendo errore figuræ sphæricæ, & pro aliis usibus, quæ relationes ita determinandæ, vel ad arbitrium assumendæ erunt totidem, quot sunt f . In dissertatione, in qua binas lentes conjunctas consideravimus, usi sumus altera ex iis ad corrigendum errorem figuræ sphæricæ pro radiis mediis, altera ad dandam lentibus ipsis formam commodiorem. Quo vero plures sunt lentes, eo ad plura officia eadem indeterminations poterunt adhiberi.

169. Illud autem hic etiam oportebit cavere, quod ibidem cavimus, ne nimirum sphæricitatum radii proveniant aut imaginarii, aut nimis exigui, & ne ejusmodi sint relationes valorum $m-1$ ad dm , ut focus communis radorum parallelorum in immensum recedat, quo casu formulæ nulli utui esse possunt.

170. Ommissa generali hac consideratione persequemur sy-

ſtema ſimpliciſſimum lentium trium, quæ conjungant colores extremos ambos cum medio quopiam, ut cum altero extremo viridis, vel illo ipſo, qui in una e ſubſtantiis erit quamproxime in medio ſpectro: tum enim unio debet fieri ejuſmodi, ut reliquorum diſtantia ab ipſis ſenſum omnem effugiat; cum enim unitis binis extremis per majoris etiam anguli priſmata jam craſſitudine ſpectri plurimum imminuta, medii parum admodum exſtent; unitis tribus, diſtantia reliquorum tanto minor effecta, videtur non debere ſub ſenſu cadere. Habebitur illud diſcrimen inter unionem trium, ac duorum, quod inter oſculum, ac contactum in Geometria. Si binæ interſectiones circuli cum curva coeant, contactum efficiunt: concursus trium exhibet oſculum, in quo arcus curvæ infiniteſimus in infinitum magis accedit ad circuli arcum, quam in puro contactu, uti jam olim demonſtravi in mea diſſertatione de circulis oſculatoribus.

171. Accedit, quod in ſyſtemate ejuſmodi trium lentium poterit adhiberi aqua incluſa binis lentibus vitreis, cum e tribus indeterminationibus, quæ remanent in relationibus trium a ad b , poſſint aſſumi binæ pro efficiendo $b = a'$, & $b' = a''$, relicta tertia pro correctione erroris figuræ ſphæricæ, quo pacto quatuor tantum ſuperficies, ſive binæ lentes erunt elaborandæ incluſa aqua inter ipſas annulo incluſas ingenti ſane compendio; dummodo numeri ad vitra adhibenda pertinentes exhibeant ea, quæ num. 169 neceſſaria eſſe monuimus.

172. In eodem ſyſtemate habebuntur ex num. 159 æquationes binæ $\frac{x}{f} + \frac{b}{f} + \frac{b''}{f''} = 0$, $\frac{x}{f} + \frac{k}{f'} + \frac{k''}{f''} = 0$, adeoque $\frac{b}{f} + \frac{b''}{f''} = \frac{k}{f'} + \frac{k''}{f''}$, & hinc $\frac{x}{f''} = -\frac{b-k}{b''-k''} \times \frac{x}{f'}$, vel $\frac{x}{f''} = -\frac{b''-k''}{b''-k''} \times \frac{x}{f'}$. Subſtitutis hiſce valoribus in prima æquatione fiet $\frac{x}{f} + (b + b'' \times \frac{k-k'}{b''-k''}) \frac{x}{f'} = 0$, ſive $\frac{x}{f} = -\frac{b'b'' - b'k'' + b''k' - b'k}{b''-k''} \times \frac{x}{f'} = \frac{b'k'' - b''k'}{b''-k''} \times \frac{x}{f'} = -\frac{b'k'' - b''k'}{b''-k''} \times \frac{x}{f'}$. Quare habebuntur $\frac{x}{f'} = \frac{b''-k''}{b'k'' - b''k'} \times \frac{x}{f}$; $\frac{x}{f''} = -\frac{b''-k''}{b'k'' - b''k'} \times \frac{x}{f}$.

173. Ex formula ſunt admodum elegantes, & ſane ſimpli-

plices, ut etiam est admodum elegans ratio $f'.f'' : h' - k' . h'' - k''$, ubi f' , & f'' sunt juxta num. 82 dissertationis dimidia radiorum sphericitatis lentium isosceliarum æquivalentium lenti secundæ, & tertiæ; cum facto $a = b$ fit ibi $\frac{1}{f} = \frac{2}{a}$, adeoque $f = \frac{1}{2} a$.

174. Possit inquiri in hæc relationes valorum f, f', f'' etiam quærendo relationes trium angulorum e tribus substantiis, quæ uniri debent ad efformandum objectivum uniens colores extremos cum medio, ope duorum prismatum anguli variabilis, qui tres anguli si essent exigui, essent ut valores $\frac{1}{f}, \frac{1}{f'}, \frac{1}{f''}$, lentes enim ubi a radio permeantur, æquivalent prismatis habentibus angulos æquales iis, quos ibi continent tangentes arcuum transeuntium per axem, & ii anguli in quibusvis exiguis datis distantis ab axe sunt in ratione reciproca radiorum curvaturæ: in majoribus autem angulis adhibita theoria aliquanto sublimiore, eodem deveniri posset. Quin idem obtineri posset per theoriam adhuc complicatorem comparando singula prismata e tribus substantiis adhibendis habentia angulos constantes cum aliis binis e binis aliis substantiis habentibus angulos variabiles, quod multo commodius esset; nam prismatula cum angulo constante facile fiunt, cum variabili multo sane difficilius. Verum si anguli sint exigui, colores difficilius sub sensum cadunt; si majores, theoria est multo complicatior, quamobrem eam perquisitionem hic omittam, alibi aliquando fortasse, ubi liceat per orium, & valetudinem evoluturus.

175. Determinata relatione trium valorum f ad se invicem, facile patet, quid præstandum sit, ut corrigatur solus error diversæ refrangibilitatis pro iis tribus coloribus, assumendo nimirum ad arbitrium tres relationes a ad b , quo pacto lentes etiam isosceliæ adhiberi possent, quarum radii sint in eadem ratione valorum f . Communis autem distantia foci R habebitur per formulam $\frac{1}{R} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} + \frac{m''-1}{f''} + \frac{1}{p}$, & positis pro $\frac{1}{f'}, \frac{1}{f''}$ suis valoribus erit $\frac{1}{R} = \frac{1}{f} (m-1 + \frac{(m'-1)(h''-k'') + (m''-1)(h'-k')}{h'k'' - h''k'}) + \frac{1}{p}$, in quo

quo valore coëfficiens primæ partis inclusus parenthesi debet non esse = 0, ut formula usui esse possit.

176. Si aqua debeat includi inter binas lentes, oportebit, sit $b = a'$, & $b' = a''$, & adhuc remanebit una indeterminatio pro corrigendo errore figuræ sphericæ radiorum mediorum. Hinc ob $\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}$, erit $\frac{1}{f'} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a''}$; cumque ob $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ fit $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{f}$, posito $f = 1$, erit $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1$, & $\frac{1}{f'} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a''} - 1$: cum vero sit etiam $\frac{1}{f''} = \frac{1}{a''} - \frac{1}{b''}$, positis pro $\frac{1}{f'}$, & $\frac{1}{f''}$ suis valoribus ex num. 172, fient $\frac{1}{a} - \frac{1}{a''} - 1 = \frac{b'' - k''}{b'k'' - b''k'}$, & $\frac{1}{a''} - \frac{1}{b''} = -\frac{b' - k'}{b'k' - b''k''}$, sive $\frac{1}{a''} = \frac{1}{a} - \frac{b'' - k''}{b'k'' - b''k'} - 1$, $\frac{1}{b''} = \frac{1}{a''} + \frac{b' - k'}{b'k' - b''k''} = \frac{1}{a} + \frac{(b' - k') - (b'' - k'')}{b'k' - b''k''} - 1$.

177. Eo pacto assumpto f pro unitate, ad quam omnes valores reducantur, habebuntur per a omnes valores reliquorum radiorum b, a', b', a'', b'' , qui nimirum positi ordine suo cum valoribus f', f'' erutis ex num. 172 erunt.

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= \frac{1}{a} = \frac{1}{a} - 1 \\ \frac{1}{b'} &= \frac{1}{a'} = \frac{1}{a} - \frac{b' - k'}{b'k' - b''k''} - 1 \\ \frac{1}{b''} &= \frac{1}{a} + \frac{(b' - k') - (b'' - k'')}{b'k' - b''k''} \\ \frac{1}{f} &= 1 \\ \frac{1}{f'} &= \frac{b'' - k''}{b'k'' - b''k'} \\ \frac{1}{f''} &= \frac{b' - k'}{b'k' - b''k''} \end{aligned}$$

178. Relinquetur igitur determinandus solus valor a , quo definito relate ad illam unitatem assumptam, reliqui omnes determinabuntur. Is autem determinabitur factò = 0 errore figuræ sphericæ, cujus expressio eruitur facile ex formulis nume-

meri 55 differtationis, ubi si dicatur ζ , quod ibi est σ , error nimirum pertinens ad secundam lentem, & componatur eodem modo error ζ'' pertinens ad tertiam, dicatur autem p , ut ibi distantia puncti, ad quod convergunt radii ante ingressum in primam lentem, p' distantia r foci radiorum primæ lentis, p'' foci primæ, & secundæ conjunctarum, erunt

$$\zeta = \frac{m-1}{m} \left(\frac{m^3}{f^3} - \frac{2m^2+m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2f} + \frac{3m^2+m}{pf^2} - \frac{4m+4}{apf} + \frac{3m+2}{p^2f} \right) \frac{1}{2} e^2$$

$$\zeta' = \frac{m'-1}{m'} \left(\frac{m'^3}{f'^3} - \frac{2m'^2+m'}{a'f'^2} + \frac{m'+2}{a'^2f'} + \frac{3m'^2+m'}{p'f'^2} - \frac{4m'+4}{a'p'f'} + \frac{3m'+2}{p'^2f'} \right) \frac{1}{2} e^2$$

$$\zeta'' = \frac{m''-1}{m''} \left(\frac{m''^3}{f''^3} - \frac{2m''^2+m''}{a''f''^2} + \frac{m''+2}{a''^2f''} + \frac{3m''^2+m''}{p''f''^2} - \frac{4m''+4}{a''p''f''} + \frac{3m''+2}{p''^2f''} \right) \frac{1}{2} e^2.$$

179. Error figuræ sphaericæ ibi erit $R^2 (\zeta + \zeta' + \zeta'')$ pro $R^2 (\zeta + \sigma)$: quare oportebit facere $\zeta + \zeta' + \zeta'' = 0$. Aequatio dividetur per $\frac{1}{2} e^2$, & pro telescopiis, in quibus radii ad objectivum adveniunt paralleli, factò p infinito, omittentur postremi tres termini valoris ζ ; poterit autem in singulis valoribus ζ , ζ' , ζ'' divisor m , m' , m'' transferri intra parenthesis, ut in differtatione num. 94, utut relicto extra parenthesis $m-1$ pro factore communi singulorum ζ , qua translatione calculus numericus evadet paullo facilior, & adhuc facilior divisione instituta per $m'-1$, quo pacto valor ζ'' erit liber a coefficiente communi, & priores bini habebunt pro coefficientibus $\frac{m-1}{m'-1}$, & $\frac{m'-1}{m''-1}$. Valores $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{f'}$, $\frac{1}{f''}$ dabuntur in numeris ex positione $f=1$, & ex numero 177, valores $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p'}$ dabuntur itidem; erit enim primus $= \frac{m-1}{f}$, secundus $\frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'}$, adeoque remanebunt soli valores $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{a''}$, quorum postremi cum ex num. 177 habeant formam

nam $\frac{x}{a} + t$ existente t numero ibi dato, substitutis his valoribus pro $\frac{x}{a}$, $\frac{x}{a'}$, & eorum quadratis pro $\frac{x}{a^2}$, $\frac{x}{a'^2}$, habebitur demum æquatio data per numeros, ac $\frac{x}{a}$, $\frac{x}{a^2}$, quæ idcirco erit secundi gradus.

180. In ea æquatione termini essent 15, sed cum singulæ substitutiones pro valoribus $\frac{x}{a^2}$, $\frac{x}{a'^2}$ addant binos terminos, & singulæ pro $\frac{x}{a}$, $\frac{x}{a'}$ singulos; fient 21: erunt autem pro primo termino æquationis $\frac{x}{a^2}$ termini colligendi tres, pro secundo $\frac{x}{a}$ quatuor, quorum duo ex substitutione: pro postremo autem termini numerici 11, quorum duo ex substitutione pro $\frac{x}{a^2}$, $\frac{x}{a'^2}$, quatuor ex $\frac{x}{a}$, $\frac{x}{a'}$. Invenio in ea æquatione $\frac{x}{a}$, inveniuntur ex formulis numeri 177 reliqui tres valores $\frac{x}{b} = \frac{x}{a}$, $\frac{x}{b'} = \frac{x}{a'}$, $\frac{x}{b''}$ unde habebuntur quatuor radii binarum lentium vitrearum a , b , a'' , b'' includentium aquam in numeris, quorum unitas f . Eruto autem in iisdem unitatibus per formulas numeri 177 etiam valore distantie foci communis R , quam pro tribus lentibus, & pro radiis parallelis exhibet æquatio numeri 175, nimirum $\frac{1}{R} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} + \frac{m''-1}{f''}$; reducentur illi quatuor radii ad numeros, quorum unitas sit R , quæ est longitudo telescopii, dempto ocularium systemate, dividendo numeros prius inventos per numerum inventum pro R , adeoque inveniuntur quæsitæ radii relati ad eam ipsam telescopii longitudinem.

181. Si in ea æquatione valor a evadat imaginarius; poterit facile inveniri ejus valor ejusmodi, ut exhibeat errorem minimum; nam æquatio reducta habebit hanc formam $\frac{1}{a^2} + \frac{p}{a} + q = 0$, datis per numeros p , & q , cujus primum membrum erit ipse valor erroris figuræ sphaericæ divisus per constantem $\frac{1}{2} R^3 e^2$, vel simul etiam per $m'' - 1$. Differentiando
iptum

ipsum membrum, habito a pro variabili, fiet $-\frac{2da}{a^3} - \frac{pda}{a^2}$
 $= 0$; unde habetur $\frac{x}{a} = -\frac{1}{2}p$, ex quo valore inventis reli-
 quis b , a'' , b'' , R , ut supra, habebitur systema exhibens er-
 rorem minimum. Is autem error ipse habebitur ponendo hunc
 valorem a in formula $\frac{x}{a^2} + \frac{p}{a} + q$, & ipsam ducendo in $\frac{1}{2}$
 $R^2 e^2$, vel simul etiam in $m'' - 1$, ex qua substitutione ha-
 betur valor $R^2 (q - \frac{1}{4}p^2)^{\frac{1}{2}} e^2$, vel is ductus in $m'' - 1$.

Scholium generale.

182. **H**OC pacto habentur omnia, quæ pertinent ad syste-
 ma trium lentium compositarum e tribus substan-
 tiis habentibus diversas rationes qualitatum distractivarum ad
 refractivas, & diversam rationem divisionis spectri, sive di-
 versam rationem qualitatum distractivarum pertinentium ad
 diversa colorum binaria, quæ ratio si esset eadem in binis
 substantiis pro binariis omnibus; sufficerent binæ lentes ex iis
 binis substantiis ad conjungendos ad sensum in punctum uni-
 cum radios omnes provenientes ab unico objecti puncto. Ubi
 ea ratio est diversa in omnibus tribus habentibus itidem satis
 magnum discrimen rationis qualitatum distractivarum ad re-
 fractivas, obtinebitur idem quamproxime per lentes tres unitis
 coloribus extremis cum uno medio.

183. Hanc methodum videtur indicare Natura ipsa, quæ
 in oculo constituit tres diversas refringentes substantias, quam-
 quam in eo quidem videtur Natura ipsa longe majorem per-
 fectionem quævisse; nam & curvatura humoris crystallini
 plurimum differre solet a circulari, & ipsa lens humoris cry-
 stallini constat stratis diversis superinductis, quæ sunt diversæ
 densitatis, uti constat potissimum in humore crystallino piscium
 ingentium, in quibus discrimen densitatis diversorum strato-
 rum multo facilius per observationem determinatur. Fortasse
 singula strata destinata sunt ad habendas ejusmodi qualitates
 refractivas, & distractivas, & ejusmodi figuras, ut si perfecta
 habeatur oculi conformatio, quamplurimi colores uniri possint,
 vel etiam omnes, si continuus sit mutationis progressus in
 T. V. P. II. T t den-

densitate, & natura materiæ humorem crystallinum componentis; unde fit, ut formulæ pertinentes ad errores diversæ refrangibilitatis, & figuræ sphericæ non possint applicari ad distinctionem imaginis in oculo, præterquam quod vel nulli, vel rarissimi sunt oculi, ut & cætera membra omnia, & poma, & frondes, & crysalli, & omne salium genus, ac reliqua omnia Naturæ opera, in quibus perfecta, quam affectant, figura observetur.

184. Si adhibeantur tria vitrorum genera, oportebit elaborare lentes tres, in quibus tamen binæ indeterminaciones supererunt ad commodiorem formam seligendam. Sunt, qui commendent ut simpliciolem casum, in quo superficies quæpiam assumatur plana, factò infinito ejus radio. Verum apud vitrorum artifices satis constat, planam superficiem multo difficilius efformari satis exactam, quam sphericam. Congruentia superficierum contiguarum est multo magis opportuna; nam ea minuit partem luminis amissi per reflexiones. In quovis ingressu in lentem, & egressu semper reflectitur pars luminis eo major, quo majus est discrimen mediorum, quæ superficies dirimit. Si lentes distent utcumque exiguo intervallo, habebitur duplex reflexio in egressu e vitro in aerem, & ingressu ex aere in vitrum, quibus succedit in contiguis unica multo debilior orta in transitu e vitro in vitrum. Præter partem luminis amissam per eas reflexiones pro imagine in foco radiorum transeuntium sine ulla reflexione habetur incommodum luminis spurii advenientis ad imaginem ipsam objecti post aliquot refractiones conjunctas cum binis reflexionibus. In tribus lentibus habentibus sex superficies, si nullæ congruant, habentur 15 binaria, quæ singula lumen transmittunt ad imaginem, & singula focos habent, pro quibus inveniendis habeo formulas admodum expeditas. Si aliquis ex iis focus foco principali radiorum directorum sit proximus, imaginem turbat lumine spurio perfusam in objectis admodum lucidis non ita tenui. Si superficies lentis intermediæ congruant cum adjacentibus, superficies reflectentes erunt quatuor, & binaria ipsarum tantummodo sex.

185. Hinc etiam ex hisce capitibus multo melius est aquam includere binis lentibus, quod requirit formationem superficierum tantummodo quatuor, & minuit jacturam luminis in foco principali, ac ejus perturbationem a lumine bis reflexo.

186. Theoria omnis ejusmodi objectivi eformati per ejusmodi lentem triplicem hic est fuse exposita. Primo quidem ex observationibus vitrometro habitis, quæ fuse referuntur paragrapho 1, & 2, & ex aliis indicatis, quæ sunt habitæ ope prismatis vitrei habentis angulum variabilem, ostenditur ejus necessitas ad majorem telecopiorum perfectionem; cum inde appareat, unitis per lentem duplicem radiis extremis, medios simul cum ipsis non conjungi. Pluribus circa observationes propositas adnotatis in §. 3., exposita est in §. 4. theoria radii transeuntis per duo prismata contigua, in quorum primum incidat ad perpendicularum. Ejus ope deducta sunt plura consuetaria phænomeni observati pertinentia ad unionem colorum, & exposita omnis ratio inversionis successivæ spectri ex diversa in diversis substantiis ratione differentiæ valorum experimentium rationem sinuum pertinentium ad diversa colorum binaria, sive appellata m ratione sinus incidentiæ coloris minus refrangibilis ex aere in quampiam substantiam, $m + dm$ eadem ratione in colore magis refrangibili, M , & $M + dM$ pro alia substantia, ex diversa ratione valorum dm , dM pertinentium ad diversa binaria, ut eorum, qui pertinent ad rubeum, & viridem, ac eorum qui pertinent ad rubeum, & violacæum; unde deducta est diversa in diversis substantiis ratio divisionis spectri, & triplex Newtoni error expositus.

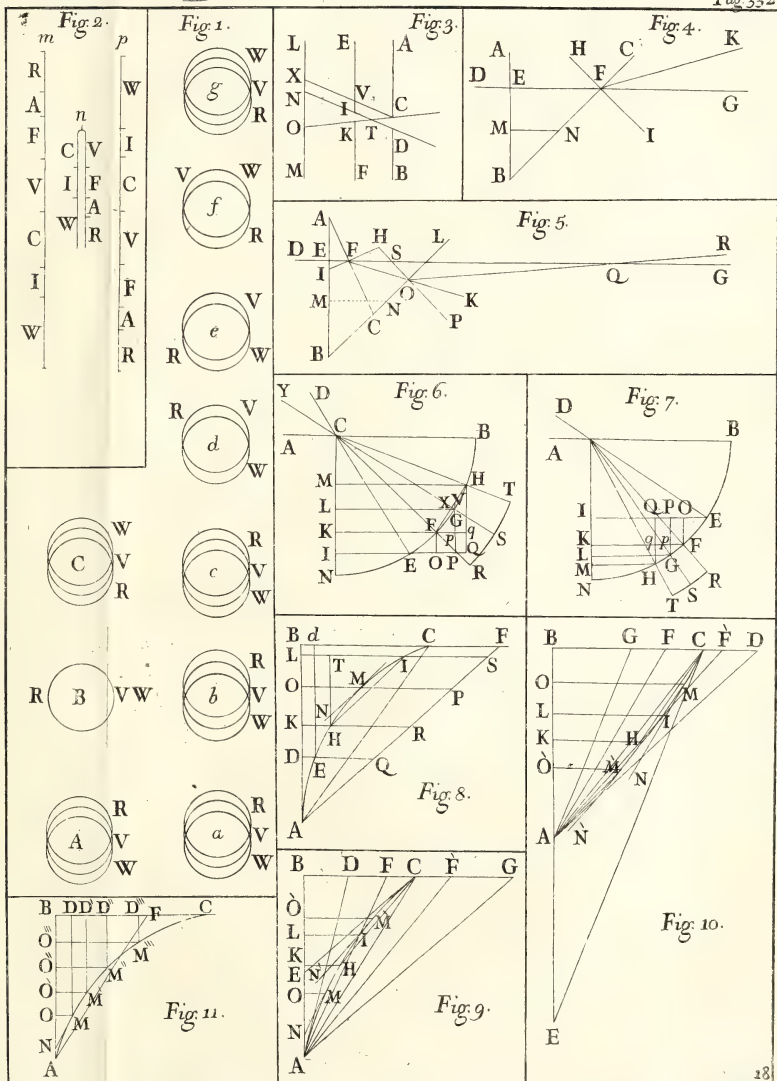
187. In ea perquisitione occurrit §. 7. usus curvæ experimentis omnes ejusmodi rationes, exhibentibus abscissis omnes valores dm pertinentes ad omnia binaria primi rubei combinati cum quovis alio, & ordinatis omnes dM ipsis respondententes, ac §. 8. exhibita est ratio determinandi proxime curvam ipsam ex aliquot observationibus habitis vitrometro, vel angulo variabili prismatis vitrei, adeoque rationes ipsas valorum dm , dM respondentium binis colorum radiis, nimirum rubeo combinato cum violaceo, & cum quopiam intermedio, ut viridi, quod est elementum omnino necessarium pro determinatione systematis trium lentium, quæ ipsæ rationes quo pacto ex divisione spectri immediate observata utcumque deduci possint, indicatum est §. 6.

188. Demum §. 9. delati sumus ad unionem plurium colorum quotcumque ope totidem lentium, sed indicata tantummodo solutione generali diligenter evolvimus id, quod pertinet ad lentes tres, potissimum ad eas, in quibus superficies

lentiæ mediæ congruunt singulæ cum singulis extremarum. Denominaciones pertinentes ad illam rationem differentiarum habentur num. 167: formulæ, quæ proveniunt ex conditione unionis trium colorum in earum functionibus datis per ipsarum radios sphericitatis, habentur num. 172: valorem foci communis ejusmodi lentium exhibet numerus 175: formularum reductionem ad 4 radios profluentem ex congruentia superficierum intermediarum habet 176, cum expressione radiorum reliquorum per radium solius primæ superficiei, quorum indiculus habetur numero 177.

189. Inde num. 178 proponitur æquatio secundi gradus orta ex correctione figuræ sphericæ, cujus æquationis forma consideratur num. 179. Ex ea æquatione eruto valore primi radii, eruuntur per præcedentes formulas reliqui, & distantia foci communis, adeoque systema totum quatuor superficierum relatum ad distantiam foci communis. Quod si forte ea æquatio exhibeat valores imaginarios, ostenditur num. 180, quo pacto iidem radii inveniri possint ita, ut omnium minimum retineant sphericæ figuræ errorem.

190. Hæc omnia ad theoriam pertinent: superesset applicatio numerorum ad formulas, qui desumi poterant ex ipsis observationibus, quas proposuimus, quem laborem suscepissim utique, si per tempus, & valetudinem licuisset. Tot curis obrutus, quarum aliquas in exordio hujusce dissertationis exposui, vix, ut liquet ex num. 6, capi in hac ipsa dissertatione digerere in primo ipso hujusce anni exordio Mediolani argumentum, quod jamdiu animo conceperam, & cujus specimen quoddam tenue, quod pertinet ad successivam inversionem spectri observatam per vitrometrum, ejusque causam, ac ad formulas trium lentium initio superioris anni perscripseram ad Clairautium, ut Regiæ Scientiarum Academiæ communicaretur, tum vero & ad Scherfferum nostrum Viennam, a quo id ipsum, cum aliis nonnullis, ut in hujus ipsius dissertationis exordio innui, jam Germanice est editum. Demum Mortono, qui Regiæ Societati est a secretis innueram, & successivam inversionem spectri, & diversam in diversis substantiis rationem divisionis spectri inde erutam, quæ omnino everteret analogiam cum Newtoniana divisione monochordi, ut ea meo nomine cum Regiâ Societate Londinensi communicaret. Vix inter Papiensis scholæ turbas mille aliis



aliis impedimentis interturbatus persequi utcumque potui, absoluturus utique in hisce vacationibus bacchanalium, per quas iterum regredi Mediolanum oportuit ad alia etiam simul curanda, nisi in ipso fere primo adventu correptus morbo sane importuno deberem decumbere. Quam ob causam urgente impressionis tempore ægre in ipso lecto huc congesti præcipua ex iis, quæ jamdiu, ut aiebam, in animo habueram jam digesta.

JOANNIS BRUNELLI:

De Mannioca.

A D

FERDINANDUM BASSIUM.

EPISTOLA.

Quoniam, Ferdinande Bassi dilectissime, totus in naturalium rerum contemplatione versaris; quo studio & magnam tibi laudem comparas, & naturalem ipsam historiam inventis illustrare soles non contemnendis; mihi visum est, non omnino ingratum tibi fore, si quid ego ad te scriberem, quod ad tua studia aliquo modo pertineret; & simul jucundum esset, ac scitu dignum. Quapropter mihi ipse proposui de planta quadam, quæ in magnis multisque Americæ regionibus colitur, quæque a Brasiliæ populis *Maniiba*, seu *Maniiva* dicitur, verba facere; ac præcipuos tibi hujusce plantæ usus brevi sermone exponere. Hujusmodi plantam Botanici descripserunt præstantissimi, quos inter Guglielmus Piso, ac Georgius Marcgravius mihi vehementer placent. Et Piso quidem novem plantæ species enumerat. Sed fieri potest, ut & multo plures sint; & ipse Vir clarissimus unam eandemque speciem distinctis diversarum nationum nominibus appellaverit. Etenim etiam Americani, pro varia locorum inter se ac regionum distantia, aliis atque aliis linguis utuntur, quamquam unum quoddam sit loquendi genus, ab antiqua scilicet ac jam deleta *Topinambá* gente derivatum, iis omnibus fere gentibus commune. Summus quoque Vir Linnaeus (a) in libro, quem scripsit, de plantarum generibus, *Maniivæ* florem describit, quamquam sub alio nomine. Turnefortius (b)

ve-

(a) *Genera plantarum*. Parisiis 1743. gen. 867.

Jatropha. Atque sub hoc genere species septem enumerat, in quibus ea, quæ quintum tenet locum, eadem est ac illa de qua in præfens agimus; vocaturque ab ipso Cel. Linnaeo Jatropha (Manihot) foliis palmatis: lobis lanceolatis integerrimis lævibus.

Caroli Linnaei species plantarum. Holmiæ 1763. p. 1429.

(b) *Institutiones rei herbariæ*. Parisiis 1700. pag. 658. tab. 438.

vero hujusce plantæ floris ac fructus; sed Plukenetius (a), & Sloanus (b) integræ plantæ iconem etiam apponunt. Incipiam igitur a plantæ cultura, quæ diligentiam non parvam, certumque laborem requirit.

Americani instituto præparatoque plantario, feminibus missis, quibus uti nolunt, virides ramos vegetosque, tamquam nova germina, ex adultis *Maniivæ* plantis amputant, ac foliis nudant. Ramos ad certam longitudinem redactos, duorum scilicet pedum, vel eo minus, in terram figunt, ita tamen ut quæ in planta rami cujusque pars erat inferior, eundem etiam sub terra situm retineat. Neque vero singulos in unaquaque fovea ramos disponunt, sed ternos quaternosve; atque ita inter se positos, ut in ima foveæ quarte parvis inter se distent intervallis, repletisque terra foveis, tumulum etiam superstruunt, ut scilicet ramorum summa capita vix e terra prodire videantur. Binas vero, quæ sibi proxime sunt, foveas trium saltem pedum a se mutuo removent intervallo. Oportet autem plane contritam esse terram, ac probe solutam. Nam si duriores grandioresque glebæ ramos circumstant, hi ægrius ac parcius radices agent. Id etiam agricolæ diligenter cavent, ne dum instant, vel decidunt majores pluvix, plantationem instituant. Irritus enim eorum labor esset, ramis omnibus, vel certe plerisque ingenti humoris copia putrescentibus. Sæpe autem ac sapius post ramorum satius evellendæ sunt herbæ, stirpesque variæ & multæ, quæ cum mira celeritate adolescant, succos, & vim fere omnem ex terra eliciunt. Rami singuli, qui paucos post dies in totidem plantas mutantur, tres, quatuor, aut etiam quinque, vel sex radices emittunt, si terra pinguis atque optima fuerit; contra vero binas tantum, easque minores ferunt, si sterilis atque arenosa. Radicibus, quibus *Mandiocæ*, seu *Manniocæ* nomen tributum est, non eadem est vel magnitudo, vel figura. Nam aliæ sunt majores, aliæ minimæ; nonnullæ rotundæ fere procreantur; multæ etiam in longitudinem extenduntur; quæ longitudo in maximis radicibus semipedem crassis duos interdum pedes adæquat & amplius. Pleræque tamen radices eam
for-

(a) *Almagestum* p. 241. l. 205. f. 1.

(b) *Ricinus minor, viticis obtuso folio, caule verrucoso, flore pentapetalo albido, ex cujus radice tuberosa, succo venenato turgida, Americani panem conficiunt.* Sloanus *Cat. plant. Jamaicæ* 41. *Hist.* 1. p. 130. l. 85.

fortiri figuram solent, quæ facile definiri non possit. Corticis etiam color pro varia radicum specie varius est; subniger scilicet, albus, violaceus, & fere flavus. Pulpa similiter in quibusdam radicibus satis eleganti ac pulcro nitet candore; in aliis vero, ut in ovo vitellus, colore tingitur plane flavo. Ex his farinæ genus optimum conficitur. Verum radices omnes, quacunque in terra gignantur, nisi unius fere anni spatii justam magnitudinem attingere, perfectamque, ut ajunt, maturitatem consequi non possunt. Quamquam Indi, si forte egeant, ac fame premantur, radices quantum etiam post mensem e terra eruere non dubitant. His tamen radicibus, cum parvæ sint, immites adhuc & crudæ, vix boni aliquid comparare sibi posse videntur. Terræ autem nigræ ac pingues, in quibus præsertim densior aliqua silva excisa fuerit, atque igne cremata, mirum in modum alunt, feruntque *Maniivæ* plantam, quæ ad procerioris hominis staturam interdum assurgit. Sed in quovis terræ genere, ut ut sterilis ea fuerit, in arenis etiam fluminum, dum certis locis, certisque temporibus latissime patent, crescit nutriturque hujusmodi planta; quamquam minores tandem, deterioresque radices prodire debeant. Dixi, ut potui, de *Maniivæ* plantæ cultura. Nunc, Bassi ornatissime, ejusdem plantæ usus præcipuos paucis aperiam.

Ac sane in primis mirum videri debet, plantam mortifero veneno refertam, dum viridis est, & succo plena, incredibili hominum multitudini pro pane sufficere. Americani enim, ut multi etiam in Africa populi, ex hujusce plantæ radicibus diversa farinarum genera, aliaque multa ad pulmentum & cibum conficiunt; quemadmodum nos etiam ex tot frumentorum generibus tam multa ac varia nobis vitæ subsidia comparare consuevimus. Verum pauca quædam instrumenta enumeranda tibi prius, describendaque sunt, quibus Americani ad hanc rem uti solent.

Quoniam Indi, præsertim barbari ferro carent, radulam quamdam, quam *ibpocè* vocant, ad radices in minuta frusta solvendas sibi parant in hunc modum. Minutos undique filiceos lapides acutosque legunt, quos, si opus fuerit, durissimo saxo frangunt, & in minores partiuntur lapillos æquales omnes, quam fieri potest, inter se, omnesque similiter angulatos. Hos lapillos in tabula lignea figunt ad perpendicularum,

angulis sursum acutis; atque ita disponunt, ut lapillorum bases se se mutuo fere contingant, & simul totidem veluti lineas rectas constituent. Tum vero liquefacta pice super imposita, ac demum frige facta, lapilli ad tabulam quam arctissime adhærescunt, neque facile inde possunt evelli. His tamen radulis Indi, qui farinam sibi comparare solent ad paucos dies, sæpius utuntur, quam Europæi. Hi enim cum magnam sæpe farinæ copiam conficere debeant, ad radices celerius frangendas ligneam rotam adhibent erectam latiori gyro contentam; cujus rotæ oram extimam in latitudinem nonnihil expansam undique ferro cingunt in folium attenuato, ubique aspero, crebrisque foraminibus pertuso. Radices enim ad rotam, dum summa celeritate in orbem agitur, manu admotæ in exilia citissime frustra resolvuntur.

Aliud etiam instrumentum nacti sunt Americani, quo succum ex fractis jam resolutisque radicibus expellunt. Ex molli arundine, *varumà* appellant, qua storeas, aliaque id genus permulta conficere solent, corticem detrahunt, quem minutatim in longum secant. Ex cortice hujusmodi sic præparato longiorem, ac mediocri crassitudinis cylindrum, quem *tipiti* appellant, in ima parte probe clausum, in superiore vero apertum ita contextunt, ut hinc inde tractus, in contraria facillime diduci possit, interiore totius cylindri capacitatem imminuta. Hac enim ratione fit, ut dum cylindrus suspensus manet totus minutissimis radicum fragmentis repletus, si ex inferiori ejusdem cylindri parte pondus appendatur validius, fragmenta undique comprimantur, ac succus omnis effluat ipse per se. Europæi tamen, qui festinantius agunt, torcularibus, vel aliis id genus machinamentis frequentius uti solent.

Eodem cortice subtilius dissecto diversa quoque Indi construunt quadratæ formæ ut plurimum incernicula, quibus *urupèma* nomen est. Hisce incerniculis radicum fragmenta contusa jam, & succi fere expertia attritu quodammodo attenuant, ac simul purgant.

Ut vero fractas jam resolutasque radices, quoties necesse fuerit, contundere possint; ex arboris durissimo trunco sibi mortarium parant americana voce *inuà* dictum.

Testas denique diversæ fingunt magnitudinis, planas æqualesque, ac formæ rotundæ, in quibus farinas, & quidquid ex *Manniocæ* radicibus conficiunt, ad ignem torrent. Testa

quælibet, cujuscumque fuerit magnitudinis, *jayunâ* nomen habet.

Sed jam videamus quid Americæ incolæ ex *Manniocæ* radicibus efficiant, atque usus tandem earumdem radicum principaliores, in Brasilia præsertim, explicemus. Initium faciam a farina, quam Siccam vocant, quæque conficitur in hunc modum. Ope cultri radices primum cortice exuunt, & aqua ad sordes detergendas abluunt; deinde radula, sive rota, quam supra descripsi, in minutissima frusta dissolvunt. Cylindro autem supra commemorato, vel torculari adhibito succum exprimunt; tum fragmenta in mortario contundunt, statimque ad reliquum extrahendum humorem in cylindrum rursus immittunt iterum contusuri. Quod sane illi præsertim, qui diligentiores esse volunt, toties iterare solent, donec succus omnis effluerit, ac simul longe minora evaserint *Manniocæ* fragmenta. Atque id quidem semper ita fieri debet, quod hic semel monuisse sufficiat, quoties aliquid confici ex *Manniocæ* radicibus necesse fuerit. Frusta deinde omnis fere humoris expertia, & incerniculo selecta super testam expandunt subjecto igne calentem, summa diligentia caventes, ne vel ignis vehementior sit, vel frusta nimis diu super testam immota maneat. Quapropter & ignis vim, si opus fuerit, temperant; & frusta ipsa infornibulo aliquo agitant, perpetuoque motu per totam testæ latitudinem circumducunt, donec omnia æque siccata fuerint fragmenta; & probe tosta. Hoc modo farina sicca conficitur, frustis in minuta fere grana, flavescentia nonnihil, abeuntibus. Hujusmodi farina & optime nutrit; & ad multos menses, vel ultra annum servari solet, si quam fieri potest diligentissime, humiditas omnis arceatur. Servatur autem in corbibus, quibus *ursacanga*, vel etiam *panacû* nomen est, quosque Indi texunt ex vimine *timbò* dicto, sive ex illis arundinibus per totam longitudinem sectis, quibus *varumâ* nomen supra tribuimus. Eosdem Indi corbes foliis ex certo quodam palmarum genere, *ubin* scilicet, durioribus intus undique circum vestiunt. Farina, quam modo descripsimus, *uî Sicca* ab Indis appellari solet.

Farinam vero, quam ex aqua dicunt Europæi, Indi vero *uî Catû*, quæque gratissimi saporis est, si recens fuerit, ac rite confecta, hoc modo sibi parant Americani. *Manniocæ* radices sex septemve dierum spatio sub aqua detinent, donec

cortex omnis digitis detrahi possit labore fere nullo. Atque hic diligentius observant, ne radices in aqua nimis diu maneant. Corrumpi enim facile possunt, ac fæde putrescere. Spoliatas cortice radices, quia mollissimæ sunt, in frustra statim resolvunt. Succum deinde omnem eo, quem supra diximus, modo extrahunt; ac tandem frustra eadem incerniculo per attritum attenuata, durioribus ac ligneis quasi filis per medias radices excurrentibus rejectis, in testa, ut supra diximus, ad ignem torrent. Farinæ hujusmodi grana grandiora nonnihil prodire solent, thuris granis simillima, sed flavi ut plurimum coloris. Europæi fere omnes, qui in America degunt, quemadmodum & Indi, hanc farinam plurimi faciunt, atque in deliciis habent; eamque, dum recens est, nullaque adhuc humiditate vitata, triticeo pani facile anteponunt. Verum servari diu non potest, ut farina illa, quam siccam supra vocavimus.

Nonnulli farinam siccam ad ignem vehementius tostam; farina etiam, quam ex aqua diximus, interdum modice adjecta, in mortario magna vi usque eo contundunt dum in minutissima grana, vel si mavis in pulverem flavi fere coloris resolvatur. Hujusmodi farina, calido jure superfuso, gratissimi saporis est, atque optimum præbet alimentum.

Quoniam nullis Indi, dum comedunt, instrumentis uti solent, manu collectam farinam in apertum os mira jaciunt dexteritate, ut nullum ferme granum in terram decidat. Quos ego interdum imitari cum vellem, atque Americanus videri; facilius, mihi crede, ac multo sæpius quam os, utrosque invitum implevi oculos, universis qui aderant ridentibus.

Aliam quoque farinam, quam rectius hoc nomine appellaveris, ex *Mannioca* eliciunt Americani. Radices eodem plane modo præparant, ac si farina ex aqua esset conficienda. Verum fragmenta super testam ratione longe diversa ad ignem torrent. In primis enim diligenter curant, ut ex igne subjecto calor longe remissior sit, ac sibi semper æqualis; fragmenta deinde validissimo perpetuoque attritu super eandem testam comminuunt, ne in grana siccentur. Hoc modo illud efficiunt, ut fragmenta omnia in tenuissimam subtilissimamque farinam resolvantur albi coloris, nostraque ex tritico farinæ per quam simillimam. Ex hac farina, quæ *carimà* dicitur, panes conficiuntur, aliaque latis permulta; quæ tamen si ad paucos

dies ferventur, edi ab homine quantumvis esuriente vix comode possunt.

Venio jam, Bassi ornatissime, ad illum, qui in *Mannio-cæ* radicibus latet, tenuissimum subtilissimumque cremorem, quique ab Indis *tapioca* vocatur. Hujusmodi cremor *Mannio-cæ* radicum præcipua sane pars est, ac multo melior; sine quo cætera omnia, quæ ex illis radicibus conficiuntur, nullius fere saporis essent, atque alimentum præbere vix possent. Verum hoc modo e radicibus Indi *tapiocam* separare solent. Radicum fragmenta minutissima utraque manu collecta totis viribus sæpius atterunt comprimuntque, succum, qui interea decidit, aliquo vase colligentes; cremor enim una cum succo foras elicitur. Duarum horarum circiter spatio cremor sive *tapioca* lactei coloris pulcherrimi in fundo vasis totus subsidet. In quo vase sub aqua, noxio prius humore rejecto, ad plures dies, decem scilicet vel amplius, fervari *tapioca* potest, si bis tamen quotidie nova semper aqua superfundatur.

Tapioca si probe siccata fuerit digitisque contrita in subtilissimam resolvitur farinam pulcherrimo candore nitentem. Hinc amyllum, & gummi, & pulvis ille muliebrum præsertim capitum ornamentum præcipuum. Jura etiam ex hac farina fieri solent longe saluberrima; atque in primis pectore laborantibus mirum in modum utilia.

Farina vero, quæ vulgo *tapiocæ* farina dicitur, quæque ad longissimum etiam tempus integra servatur, hoc modo fieri solet. Super testam Indi *tapiocam* adhuc recentem ac mollem, atque in frustra solutam ad ignem torrent, donec in grana albi coloris ac paulo majora frustra ipsa siccantur. Huiusmodi grana dum calida sunt, si digitis contrectentur, mollia quasi ex cera essent sentiuntur; quæ tamen evanescente calore durissima statim evadunt. Hujusce farinæ usus patet latissime; sed illis præsertim, qui pectore laborant, sæpe magnum afferre solet adjumentum.

Ex *tapioca* in ebullientem aquam immissa usitatissima portio fit, ac celeberrima elegantissimo hoc nomine *tacacá* insignita. Vix dici potest quam avide Brasiliæ incolæ fere omnes, quemadmodum & Europæi in regionibus illis degentes, portionem hanc appetant, hauriantque. Sed parum admodum *tapioca* in aqua ebullire debet, ne in gluten abeat; ac simul perpetuo motu cienda est, ne in globos efformetur. Jura deinde

de infunduntur diversi generis cum succo *Manniocæ* jam cocto, & contuso pipere; hic enim fit potio multo suavior. Verum illi omnes, qui primum hauriunt, ex summa quæ statim oritur nausea propter tenacitatem levitatemque nonnullam, ad vomitum impelli solent. Sumitur hæc potio dum adhuc tepescit; nutritque mirum in modum, ac famem sedat.

Ex eadem etiam *tapioca* genus quoddam placentarum fit, quibus *bejù sicca* nomen est. Hujusmodi placentæ super teitam ignis calore siccata, si adhuc calidæ ac butyro conspersæ comedantur, optimo sane gratissimoque sapore palatum efficiunt.

Placentæ vero illæ majores vilioresque, quas Indi *bejù* appellant, ex *Manniocæ* frustis ut plurimum fieri solent, succo prius extracto; ex quibus frustis farina sicca conficitur. Verum hujusmodi placentæ statim extincto calore insipida fere evadunt; hærentesque palato difficile admodum glutiri possunt.

Ex istis Indi placentis, sed latioribus multo crassioribusque, potionem eliciunt longe potentissimam generosissimamque, ingrati tamen austerique saporis, quæ *bejù*, *azzù*, *cauin*, vel etiam *bejù azzù* appellatur; eamque sibi comparant in hunc modum. Placentas stratis latioribus foliis ita disponunt, ut aliæ aliis incumbentes erectum fere cylindrum componant. Paucis post diebus ejusdem cylindri superficies extima tota mucescit, roseoque tingitur colore atris flavisque maculis hinc inde consperso. Placentas tunc Indi calore jam perfusas, dulcesque palato, distrahunt; efficiuntque ut singulæ, quæ late patent, mucidæ fiant eodem modo. Quod statim ac vident contigisse, placentas omnes manibus in frustra discerpunt, frustra ipsa in calidissimam aquam projicientes. Omnia deinde eo usque totis viribus miscent, donec placentarum frustra in pulvem evaserint; subtilissimoque incerniculo liquorem omnem separant, quem disposita ante fictilia recipiunt. In hisce fictilibus fermentatur liquor, ebullitque ad sex vel octo dies; eamque vim concipit interdum, ut vasa etiam dirumpat. Verum ultra quintum & decimum diem hic liquor servari potest, modo in vase immotus omnino quietusque maneat. Nam si aliquid de vase sumptum fuerit; reliquus, ne acefeat, liquor totus statim ebibendus est. Quod sane Indi numquam inviti recusare solent. Hanc Indi, præsertim barbari, potionem sumunt ad ebrietatem usque, quoties tripudia, solemnior-

resque saltationes horribili cum cantu, ut solent, simul celebrant.

Eodem fere modo, rarissime tamen, ex placenta illa, quam *bejù sicca* supra vocavimus, Indi potionem quoque aliam eliciunt, quæ multo potentius multoque celerius ebrietatem gignit. Hujusmodi liquores Europæi nonnulli artificio illo, quo Chemicus utuntur, multo subtiliores reddunt suavioresque; atque ad varios usus in promptu semper habent, magnique faciunt.

Sed & *Manivæ* plantæ folia in cibum, quasi olera, sæpius ab Indis præparari solent. Folia nimirum in mortario contundunt; atque in aqua ad ignem coquant una cum carniis, aut piscium frustis, pinguedine etiam adjecta cum *Manniocæ* succo, pipere, & balsamento. Hunc ego cibum, quem *mannizzova* dicunt, contemnere haud potui, quamquam barbarorum esse videatur. Etenim cum octo ab hinc annis fluminis Amazonum oras perlustrarem, accidit, ut, multorum dierum longo confecto itinere, seditiosi milites fugam arriperent, & incolarum ingenti cum metu & damno, omnia quacumque transirent hostium in morem depopularentur. Quo factum fuit ut cum cibaria jam defecissent, ex proximis etiam provinciis commeatu prohiberemur.

De *Manniocæ* denique succo, quem Indi *tucupî* vel *mannicuera* appellant, aliquid etiam dicendum superest. Succus iste sulphurei coloris e radicibus expressus, & crudus dulcis esse solet gratique saporis; perniciosissimum tamen venenum continet potentissimumque. Animalia enim universa, ex quacumque fuerint specie, quæ hunc succum biberint majore copia, quam oporteat, promptam ac paratam sibi mortem habent. Primum enim turgere corpus vehementer, & contremiscere incipit, mox vertigines subsequuntur, deinde frigus in extremis artubus, tandem mors. Ac sane plures ex Indis puerulos e matrum cura elapsos memini extinctos ita fuisse, quod crudum hauserint observante nemine *Manniocæ* succum. Sues tamen, ac cervi, atque aliæ satis multæ minores bestię si radices, quas avidissime appetunt, comederint cortice adhuc involutas; nullo, quod observatum fuerit, afficiuntur incommodo. Infecta etiam quamplurima, atque innumerabilium formicarum præfertim agmina integras *manivæ* plantationes magno cum agrorum damno sæpe de-

devastant, nec tamen pereunt. Verum homines neque succum, dum adhuc crudus est, neque de radicibus quidquam, nec folia ipsa, dum viridia sunt, atque ignem nesciunt, fumere possunt sine certissimo mortis periculo.

Interdum tamen contingit, ut bestię majores robustioresque, quemadmodum sunt equi, ac boves, atque alia id genus animalia, a proximo eripiantur interitu, si parva admodum hausta venenati succi potione, statim nullaque mora interposita aliquo remedio juventur. In palpitantis videlicet jacentisque animalis os ad vomitum usque oleum Indi profandunt; ac simul vehementiorem ignem circumponunt usque dum totum animalis corpus in sudorem resolvitur. Sæpius tamen hujusmodi etiam animalia emoriuntur, quamquam omnis diligentia & cura impensa fuerit.

Quamvis autem *Manniocæ* succus tam mortiferum in se venenum contineat; ad ignem tamen si coctus fuerit, nullo pacto nocet, usumque habet amplissimum. In cibis enim fere omnibus hunc succum plerique Brasilię incolę adhibere solent, eodemque nomine, *tucupì* videlicet, appellant.

Eundem *Manniocæ* succum diutius fervefactum, atroque colore perfusum, non raro Indi *tapioca* modice adjecta in solidum ac durum corpus compingunt. Id est, quod vocant *tucupì pisciùna*; atque ad cibos condiendos in longum tempus conservant. Condimentum sane est barbarorum epulis dignissimum.

Atque hæc, Bassi ornatissime, illa fere sunt, quę de *mannivã* planta, seu potius de præcipuis apud Brasilię populos *Manniocæ* ulibus, ad te scribere constitui. Quorum sane maximam ipse partem vidi, atque non solum in *Parã* urbis vicinia, sed aliis etiam in locis ab illa urbe remotissimis diligentius observavi. Multa tamen consulto prætereunda duxi, ne dum placere tibi studebam, molestiam etiam afferrem. Ex his vero, quę in hunc sermonem congesti, facile ipse per te videre poteris, quid Scriptores alii de his rebus agentes minus recte dixerint. Nolo enim hunc locum attingere. Tu, qui libris abundas, non enim diligentię, ut bibliothecam domesticam tibi instrueres, non labori, non sumptui pepercisti, isque es, tantumque & rerum naturalium usu & memoria vales, ut ullo vix libro indigeas, de his omnibus, quę ad te perscripsi, judicium feres. Mihi quidem in factis ipsis nar-

ran-

randis fidem; cujus mihi ipse testis sum, non defuisse existimabis. Ceterum si quid forte opinione lapsus fuero, & ignoscas, & corriges; elegantiam autem non postulabis ab homine prope jam Americano. Quid frater, aliique mei agunt, qui item & tui sunt? Ut valent? Cui studio se dant? In Academia nostra quid rerum geritur? Aveo ex te cognoscere. Zunottum utrumque, Franciscum, & Eustachium, quorum memoriam nulla mihi umquam delebit oblivio, saluere jubebis meo nomine plurimum. Dispeream, nisi unam vel horum collocutiunculam, vel tuam, non dicam, Americæ, sed universo terrarum orbi anteponam. Tu etiam atque etiam vale, meque, ut facis, ama.

GREGORII CASALII.

De vi pulveris pyrii per machinas dimetienda.

A Pulveris pyrii examine, atque a peruestigatione machinæ alicujus, quæ pulveris vim satis exacte dimetiretur, ad projecta corpora generatim expendenda elapso anno perductus fui, & ad machinam quamdam inveniendam, quæ eorum leges commode ostenderet; nunc quasi per eandem regrediens viam, a projectilium natura ad naturam pulveris redeo, atque ab ipsa projectilibus inserviente machina moneri quasi videor, qua pertractandus sit machina pulvis pyrius, quaque vis ejus exquirenda. Quamquam non illud vobis, Sodales doctissimi, persuadeatis, velim, me, si quam vobis machinam commendavero, eam quasi perfectam habere, atque in experimentis faciendis ab omni vel minimi erroris suspicione liberam. Neque illud volo, ut conjecturas vos meas pro demonstrationibus habeatis, nam neque illæ pro demonstrationibus a me habentur, & ipse facile sentio, me provinciam inire difficultatis plenissimam.

Clarissimus Fontenellius in Regalis Academiæ Scientiarum Parisiensis historia sub anno 1720 de pulveris pyrii examine loquens, sic ait; „ hanc ob causam excogitata fuere instru-
 „ menta quamplurima, quæ in hoc peccant omnia, quod sunt
 „ instrumenta; videlicet machinæ, quæ quamvis paucis ex
 „ partibus componantur, earum tamen operationes inevitabi-
 „ libus sunt varietatibus obnoxia. „ Quapropter Fontenellius valde postmodum celebrat Reslonii methodum, qua pulveres absque machinis explorantur; exploratio enim fit in modica pulveris portione, quæ supra chartam accenditur. Minime dubitandum est, quin hoc simplicissimum experimentum per maculam, qua chartam pingit, quodammodo patefaciat, quæ pulveris sit perfectio; quoniam si charta vix obumbretur, pulvis optimus esse dicitur: si aliquanto plus charta inficiatur, non

T. V. P. II. X x opti-

optimus esse: si demum charta exardescit; esse & malus; & improbabilis. Hæc omnia Reffonio, & Fontenellio facile concedam. Verum placeret ipsos regulas in medium promere, quibus dimetienda sit nigrities macularum ab uno, atque ab altero pulvere in subjecta charta impressarum, ut proportio vis unius pulveris ad alterius pulveris vim determinetur. Usque eo dum regulæ hæc desiderantur, Pyrotechnicos non desinam ad machinas revocare, ex quibus etsi non omnia præcise discimus, per eas fit saltem ut non omnia omnino ignoremus. Machinæ, nec inficior, in hoc peccant, quod sunt machinæ; attamen si machinæ nullæ essent, quæ esset Physica? Physica absque experimentis subsistere recusat, experimenta absque machinis. Et quamvis anomalix bene multæ machinas, proindeque experimenta afficiant, confidit tamen Physica scientiam se esse præ ceteris utilissimam.

Et sane, licet multi faciendi sit Fontenellii, atque Reffonii auctoritas, quot & quam variis semper instrumentis pulveris pyrius fuit pertentatus, & pertentatur adhuc, ut ejus vis patefiat? Machina utuntur nonnulli, (*Fig. I.*) quam insidet tubulus verticalis parvam pulveris portionem capiens, qui, cum accenditur, suprapositum elevat operculum: operculum autem jungitur circumferentiæ rotæ cujusdam mobilis circa suam axem, quapropter operculi elatio efficit, ut rota se se nonnihil convertat: rotæ circumferentia est dentibus instructa, qui interim dum simul cum ipsa circumvolvuntur, elastrum comprimunt, quod paullatim rotæ motum destruens, ipsam tandem quiescentem reddit. Dentium numerus sive major, sive minor, qui elastri resistentiam superavere, vel majorem, vel minorem pulveris vim indicat. Machinam hanc doctissimus Sodalis noster Christianus Volfius in capite primo Pyrotechniæ commemorat. Hanc proponit Surireus e Sancto Remigio, aliam insuper addens huic multo similem, in titulo decimo tertiæ partis animadversionum in tormenta bellica. De hac, deque alia ei simili agit Blondus in articulo de Instrumentis ad explorandos pulveres idonei, quem legimus in quinto volumine operis celeberrimi, quod Encyclopædia audit. Hanc explicat Frezierus in capite quarto primæ partis Tractationis ignium artificialium. Hujus descriptionem exhibet Saverienus in primo volumine Dictionarii Universalis rerum mathematicarum atque physicarum. Cæterum Saverienus ipse satis declarat, se
non

non omnino in hujus machinæ perfectione acquiescere, cum dicat, „ dentium numerum, qui elastrum vincant, minime esse de- „ terminatum, ut pulvis optimus judicetur: & vix per hanc „ machinam pulverem unum aliquid valere cognosci posse, „ si alio cum pulvere comparatur. „ Ad hoc incommodum illud etiam accedit, quod & a Surireo e Sancto Remigio, & a Freziero opportune animadvertitur, videlicet, „ instrumen- „ tum hocce obnoxium esse & rubigini, & tempestatum im- „ pressionibus; & ipsum posse, cum de eadem pulveris quan- „ titate periculum fiat, varios variis temporibus vis gradus „ indicare, perinde ut vel magis vel minus sit sive nitidum, „ sive calefactum, sive illinitum. „ Hæc utique mihi esse vi- dentur obstacula, quæ physicum vel animosissimum terreant.

In secundo volumine Imaginum, & Descriptionum Machinarum, quas Regalis Parisiensis Academia probavit, una est ad vim pulveris expendendam ab Mejo inventa. Machinam hanc (*Fig. 2.*) efficit tubus quadratus in duo brachia contortus ad imas bases simul communicantia: brachium unum verticale insistit, & supra clauditur, aliud vero & supra adaptum est, & est obliquum. Tubus aqua impletur, sed tali pacto, ut brachium verticale non impleatur ad summum. In partem enim inanem, & supra clausam verticalis brachii vult Auctor, ut introducatur ope cochleæ quædam pulveris portio, & vult quidem, cochleam scilicet vehementer calefaciens, ut pulvis, quem ipsa fert, accendatur. Pulvis enim accensus, qui cum aere externo communicare prohibetur, quique se se expandere contendit, urget & vim adhibet suam contra subjectam aquam, quæ idcirco e tubo expulsa, per summam partem obliqui brachii, quæ tantum aperta est, effugit. Sic comparato volumine pulveris, qui in flammam abiit, cum aquæ volumine, quæ de tubo elapsa est, Auctor arbitratur in hac proportione se & pulveris ex inflammatione expansionem, & proinde vim invenisse. Ego vero aliquantum dubitarem, ne aqua, quæ foras ejicitur, pulveris majorem, quam quæ est, expansionem persuaderet. Pulvis utique se se expandens motum aquæ communicat: verum cum pulveris expansio sistatur, motus aquæ communicatus non illico extinguitur. Adde insuper, varios pulveres forsan eadem dilatazione gaudere, dilatati autem velocitate non eadem, sicque vi pollere varia: quocirca videtur, etiamsi aquæ e tubo egressæ, volumina pro-

portionalia essent pulverum expansionibus, non ex hoc tamen colligendum esse inter ipsa aquæ volumina & pulverum vires certam intercedere proportionalitatem. Alia supersunt, quæ meas in hanc machinam dubitationes augent: sed ad machinas alias transeamus, nam nullam nos quidem reprehendere volumus, sed multas proponere, ut liberum cuique sit probare, quam velit. Unum tantum de illa Mejana dixisse sufficiat, videlicet Volfium, Saverienum, Blondum, Surireum e Sancto Remigio, cum tot machinas descripserint, de hac tamen ne vix quidem meminisse. Videtur ergo ne his quidem clarissimis sane viris machina satisfecisse. Cæterum Freziero placuit, qui ejus & meminit diligenter, & eam verbis extollit.

Alteram quoque Freziers describit, cujus inventus Sebastianio Truchetio, homini ex Carmelitarum familia ingeniosissimo, tribuitur. Componitur machina ad hunc modum. Ex basi quadam horizontali (*Fig. 3.*) tubulus verticalis exsurgit. Supra basim eandem columnarum ad instar duo eriguntur cylindri. Parallelepipedum supra summas columnarum superficies jacet, & machinæ, ut ita dicam, epistylum efformat. Cylindrus plumbeus, cui perpendicularis insistit lamina ferrea ex utraque parte denticulata, sic instruitur ut possit, tum supra tubulum quiescere, cum inter columnas columnis ipsis parallelus, assurgendo moveri. Lateralibus ansis plumbeus cylindrus columnis committitur. Lamina denticulata cum extollatur, transit & per rimam, quæ medium epistylî tenet, & inter vectes duos, quorum hypomoclia supra epistylum & columnas firmantur. Pulvere pyrio impleatur tubulus, ipsiusque orificium cylindrus plumbeus tegat. Statim ac pulvis accenditur, ejus vis sic urget suprapositum cylindrum, junctamque laminam, ut cylindrus inter columnas, lamina & inter columnas, & inter vectes efferatur. Vectes autem, quæ eorum est dentibus conveniendi ratio, laminam exsurgere sinunt, descendere non sinunt. Dentium numerus supra vectes elatorum ascensum cylindri plumbei ostendit, & idcirco quæ pulveris pyrii sit vis ostendere posse videtur. De hac machina Blondus etiam & Surireus e Sancto Remigio locuti sunt. Machinam, quam in rerum militarium Institutum nostrum supellectile servamus, ejusdem esse naturæ haud inficiar. Discrimen omne, quod notatu dignum inter eas intercedit, in hoc consistit: nimirum in Truchetii machina sursum pellæ cylindrus plum-

plumbeus sustinens laminam dupliciter denticulatam, cujus ascensui nullum præter massæ gravitatem opponitur obstaculum: in nostra vero machina lamina horizontalis extollis, cui lamina perpendicularis insistit una ex parte dentibus munita, quæ cum furgat, superanda ei est vis elastri, quod jugiter se se inter ejus dentes configit. Quo vel adfit plumbi pondus in machina una, vel pressio elastri in altera, semper fit, ut cum vi quadam constanti pulveri pyrio sit dimicandum. Hoc in causa est, ut me nihil a veritate aberrare censeam, si unam eandemque judicem utriusque machinæ esse naturam. Machinam aliam proponit Volfius, quam pariter ad harum naturam referri arbitror. Hæc præ cæteris simplicissima esse videtur: utinam ne esset minus tuta quam ceteræ. Sed ut ad machinam Truchetii, & ad illam, quæ in Instituto est, revertar, sciendum est, Pyrotechnicos, cum ipsi istarum ope de pulveribus variis periculum fecerint, desideravisse variorum pulverum vires proportionales esse numeris dentium, qui supra elastrum extollebantur in Instituto nostri machina, aut supra vectes in illa, quam Truchetius invenit. Hoc autem falsum esse judicarunt; visus enim est illis, major dentium numerus ascendisse, quam opus esset.

Interea Galli, rerum bellicarum omnium, ideoque & pulveris pyrii valde studiosi, animadvertentes qua dubitatione Pyrotechnici sive sui, sive exteri ejus vim dimetirentur, arbitrati fuerunt ex quadam globi projectione perfectum pulverem dignosci posse. Utuntur ipsi mortario, cujus diameter septem pollices, & tres lineæ parisiensis quadrantes æquat: in hoc mortario, quod semper inclinatum esse debet ad horizontem angulo 45, posito globo pondere librarum sexaginta, & in ejus camera tribus pulveris unciis, si amplitudo jactus obtineatur aqualis hexapedis quinquaginta, pulvis gaudere creditur convenienti perfectione, atque vi. Ex quibus principiis, & per quas deductiones ad hoc stabiliendum theorema devenierint Galli, silent: censere possumus theorema ortum esse ab observationibus atque experimentis. Quæ autem præcise sit, tum forma, cum magnitudo, sive mortarii, sive ejus basis satis colligitur ab imagine, quam præbet Surireus e Sancto Remigio in titulo decimo secundæ partis Operis, cujus supra memini. Multi sunt Auctores, qui de hoc loquuntur mortario, sed præ cæteris valeat Saverienus, qui animadversione qua-

quadam ejus constructionem multo & faciliorem, & minus sumptuosam reddere contendit.

Cum igitur Pyrotechnicorum industria per tot instrumenta transferit, ut, quæ esset tum quantitas absoluta, tum quantitas relativa virium pulverum diverforum, tandem perspiceretur, cumque industria hæc tanta terminum quemdam fixum designaverit, videlicet tribus unciis dati pulveris, qui melioris esse notæ existimatur, amplitudinem projectionis massæ librarum sexaginta ad quinquaginta hexapedas extendi; mihi videtur Pyrotechnicorum industria omnia nobis omnino detexisse, quibus opus erat, ut virium proportio quorumlibet pulverum, & vis peculiaris cujusque cognosceretur. Et primum cum mortario, de quo jamdudum mentionem fecimus, vel alio quocumque uti placeat, dico, data eadem semper mortarii inclinatione, (neque dubito quin inclinationibus omnibus inclinatio 45 graduum longe præstet) & semper data eadem pulveris mensura, semperque eodem projiciendo corpore, nil facilius videri, quam proportionem determinare virium pulverum, qui experimento committuntur. Gravefandus in Physicæ Elementis paragrapho 550 ostendit illud, „ amplitudines projectionum, manente eadem directione, „ sunt ut altitudines, ex quibus copora cadendo, velocitates, „ quibus projiciuntur, acquirere possunt: sunt ergo amplitudines ut quadrata celeritatum ., Quocirca si vis nihil aliud sit, nisi massa per velocitatem multiplicata, & massam nostris in projectionibus eandem jugiter esse supponamus, concludere, ut plane nostis, oportebit variorum pulverum vires rationem radicum quadratarum amplitudinum sequi. Atque assumendas esse puto vires juxta proportionem velocitatum, non juxta earum quadratorum proportionem, quoniam amplitudines varias varia projectilia absolvunt temporibus, quæ sunt proportionalia radicibus earumdem amplitudinum quadratis. Sit (Fig. 4.) AM amplitudo corporis projecti, quod, ommissa gravitate, per solam projectionem eodem tempore spatium $A1$ percurrisset. Fiat dupla corporis velocitas, & tunc amplitudo, ut demonstravit Gravefandus, erit quadrupla. Spatium itidem, quod eodem tempore corpus percurrisset per solam projectionem, esset $A4$ quadruplum spatii $A1$, sicuti ex parallelis $M1$, $P4$ deducitur. Sed cum doceant Mechanici velocitatem æqualem esse spatio per tempus diviso, ex quo

colligitur tempus æquare spatium divisum per velocitatem; tempus igitur primæ projectionis erit $= \frac{1}{2} = 1$, secundæ vero erit $= \frac{4}{2} = 2$. Qua de causa ut vim projectilis determinemus, non tota sumenda nobis erit projectionis amplitudo; per tempus enim dividenda est, quod eam conficiens projectile consumpsit, quodque radicis quadratæ amplitudinis proportionem sequitur; itaque, ut dicebam, stabiliendum erit pulverum vires in propositis experimentis futuras esse proportionales radicibus amplitudinum quadratis.

Est ergo quodlibet mortarium instrumentum satis idoneum ad pulveres explorandos. Caterum experimenta, quæ mortario capiuntur, nimium spatium, nimiumque laborem requirunt; quid quod & sumptum nimium? Quapropter, etsi Pyrotechnici valde assueverint hæc omnia sustinere incommoda, assuescent, credo, multo libentius tanta animi indulgentia non indigere. Id nunc me hortatur, ut pyrotechnicos vocem ad machinam similem illi, quam in opusculo meo: de machinula quadam ad projectilium theorias per experimenta probandas: exposui. Illa projectilium machina ex ea naturæ lege deducta erat, quæ præcipit tum, cum corpus in planum incidens elasticitatis vi reflectitur, angulum incidentiæ æqualem esse angulo reflexionis. Cadat (*Fig. 5.*) corpus per AC perpendiculararem horizonti OR, & reflectetur per eandem lineam CA. Si volumus ipsum reflecti per lineam CX, quæ cum perpendiculari angulum ACX datum efficiat, opponatur corporis casui AC planum PI efficiens cum horizonte angulum $OCP = \frac{ACX}{2}$. Quod sic ostenditur. Sit linea CM perpendicularis plano PI. PCA = ICX, quorum unus incidentiæ est angulus, alter reflexionis. ACM = MCX, quippe angulorum æqualium complementa. OCA = PCM, quoniam recti: quorum ex utroque si dematur angulus PCA, tunc erit $OCP = ACM = \frac{ACX}{2}$. Nec minus theorema hoc valet, si (*Fig. 6.*) determinato puncto C reflectente in quovis plano horizontali OR, linea reflexionis CX sub eodem plano horizontali cadat. Semper enim demonstrabitur angulum OCB $= \frac{ACX}{2}$. Et quemadmodum linea incidentiæ AC constituit lineam reflexionis CX; ita si linea XC ut incidentiæ linea fu-

fumeretur, lineam CA reflexionis ipsa constitueret. Quamobrem si non amplius considerando corporis casum AC, consideremus potius (Fig. 7.) ejus ascensum XC, lineam reflexionis quamcumque inveniemus, juxta regulas datas planum mobile PI ad horizontalem planum inclinantes, cum & in hoc casu æque theorema subsistat, & pari modo demonstretur. Quæ tum dixi de corporis casu, nos machinam physicam docuerunt; quæ nunc dicam de ascensu, docebunt pyrotechnicam.

Sit igitur (Fig. 8.) tubulus verticalis potens modicam continere pulveris portionem. Sit globus ferreus diametrum habens majorem, quam quæ est tubulo, ita ut globus a tubuli ore sustineri queat: juvat autem in globo centrum figuræ centrumque gravitatis coire. Sit planum marmoreum robusto machinamento affixum, atque horizonti inclinatum, quod pellat globus ex pulveris tubuli accensione elatus, ut reflectatur, & quamdam projectionem obtineat, & parabolam describat. Sit demum tabula horizontalis, quæ si protraheretur planum marmoreum versus, tangens fieret globi impactio momento: hanc autem tabulam terra mollis tegat, ut & cadentem globum excipiat, & descriptæ parabolæ amplitudinem designet.

Machina hæc est, si quid judico, simplicissima, quam ex projectilium legibus non inutiliter colligi posse arbitratus sum. Juvat corpore uti reflexo ad quamlibet projectionis directionem expendendam, quia cum e pulvere pyrio corpori communicanda sit vis, necesse est pulverem hunc pyrium positum esse in recipiente verticali, cui & commode semper aptari potest, & semper eodem modo, neque nimis, ut probe aptetur, agitandus est, neque ne agitetur, comprimendus. Juvat copore uti ex materia multo gravi, & volumine non admodum exiguo, quia cum ex data quadam vi motrice tanto minor velocitas prodeat, quanto major est massa, quæ moveri debet, ita, si magna sit massa, quæ parabolam describat, parabolæ describentur parvæ, parvæque habebuntur amplitudines, ex quarum radicibus quadratis, uti dictum est, pulverum vires erunt mensurandæ.

Verum quia accidere haud difficile potest, ut ob maximam pulverum efficaciam, facto etiam parvo lineæ projectionis, & lineæ verticalis angulo, non tamen parva sit parabolæ am-

amplitudo, & idcirco tabula horizontalis requiratur longissima; in mentem venit tabulæ horizontali perpendicularem tabulam substituere. Hac autem (*Fig. 9.*) in tabula, quam æque ac aliam, rectam suppono terra molli, ut projecti globi impressiones recipiat, & patefaciat, en qua methodo dimetiendæ sint pulverum vires. Notetur in tabula altitudo impressionis, quam in ipsam faceret projectile, nisi obtemperandum ei esset legibus gravitatis. Considerentur impressiones, quas revera globus facit percitus atque jactus cum ab uno pulvere tum ab alteris. Mensuretur pro unoquoque pulvere altitudinis differentia, quæ intercedit inter impressionem, quæ absque gravitate fieret, & impressionem, quæ projectione gravitateque simul agentibus fit. Dico, vires variorum pulverum sequi proportionem radicum quadratarum reciprocam harum differentiarum. Enimvero (*Fig. 4.*) suppositis, A projectionis initio, M I tabula verticali, I loco impressionis, cui gravitas nihil prætare, M impressionis loco, quam projectile ob datam quamdam vim utique facit, B alius impressionis loco, quam ob vim aliam deinde faciet, certissimum profecto, est vim primam se habere ad secundam ut \sqrt{IB} ad \sqrt{IM} . Clara & brevis de hoc est demonstratio: dum prima vis urget corpus motu uniformi per spatium AI, gravitas ipsum trahit motu uniformiter accelerato per spatium IM; dum vis secunda urgebit corpus motu uniformi per idem spatium AI, gravitas motu uniformiter accelerato ipsum trahet per spatium IB; spatia autem percurta motu uniformiter accelerato sunt ut temporum quadrata; igitur tempus primæ vis est ad tempus secundæ ut \sqrt{IM} ad \sqrt{IB} ; sed vim exprimit spatium divisum per tempus; ergo vis primæ projectionis erit ad vim projectionis secundæ ut $\frac{AI}{\sqrt{IM}}$ ad $\frac{AI}{\sqrt{IB}}$: quod idem est ac dicere ut \sqrt{IB} ad \sqrt{IM} .

Jam videtis, Sodales doctissimi, quam facile sit (*Fig. 8. 9.*) vel hac perpendiculari tabula, vel altera horizontali virium proportionem cognoscere variorum pulverum, dummodo in partes æquales dividatur sive perpendicularis altitudo unius, sive longitudo horizontalis alterius, cum longitudo horizontalis proportionem virium ostendat ope proportionis directæ radicum quadratarum amplitudinum, ostendatque altitudo perpendicularis

T. V. P. II. Y y ris

ris proportionem virium ope proportionis reciprocae radicum quadratarum descensuum perpendicularium corporis relatorum ad unam eandemque portionem lineae directionis projectionis.

Si machina hæc aliquid valere credatur, operæ pretium erit duo animadvertere. Quod ad primum attinet, si tabula utamur horizontali, optimum erit directionem projectionis quærere, quæ cum linea verticali efficiat angulum 45° , nisi obstet vel nimia pulverum vis, vel tabulæ longitudo nimis parva. Habebitur hic angulus 45° , factò juxta regulas jam traditas angulo $OC P = \frac{90^\circ + 45^\circ}{2} = 67^\circ + 30'$. Sin autem tabula utamur perpendiculari, desiderandum est lineam directionis projectionis ad verticalem accedere, ita ut angulus e duabus hisce lineis confectus parvo graduum numero constet. Sic enim in tabula horizontali majores habebuntur amplitudines, in tabula vero perpendiculari majores descensus.

Quod considerandum secundo loco est, respicit (*Fig. 9.*) tabulam tantum perpendicularem. Posita QO linea reflexæ directionis projectionis, determinanda est horizontalis distantia QX , quæ intercedit inter centrum globi momento reflexionis & tabulam, atque altitudo tabulæ OX ab hac linea horizontali usque ad ejus tabulæ cum linea directionis projectionis concursum. Atqui data distantia dat altitudinem: dataque altitudo dat distantiam: nam OXQ triangulum est rectangulum, cujus duo latera QX , OX repræsentant sinus duorum angulorum, quorum unusquisque alterius est complementum.

Verum de hac machina satis sit dictum. Projectilium leges me hanc promere hortabantur; attamen (quis crederet?) leges ipsæ nunc monent, ut fileam. Res ita se habuit. Postquam animadverti nulla fortasse meliori methodo æstimari posse pulverum vires, quam si eas per projectilia expenderemus, quo tandem ad hujus machinæ inventionem deductus fui, en hoc mihi perpendendum se se obtulit, videlicet machinam aliam, & ipsam quoque simplicissimam, jam inventam fuisse, qua Pyrotechnici & persequi possent pulverum vires, & eas projectionum legibus subjicere. Machina Pyrotechnicis multo ab hinc tempore præ manibus erat: Pyrotechnici autem non satis advertabant, illam projectilium leges continere: sic interim dum ipsa utebantur, quis esset ejus usus minus intelligebant.

Ma-

Machina hæc est, (*Fig. 3.*) quam Truchetius tradidit. In hac pulvis accensus perpendiculariter extollit cylindrum plumbeum & suprapositam laminam. Sed inter corporis projectiones consideranda adhuc est projectio perpendicularis. Hæc quoque projectio parabolam describet, cujus si parameter ad axem quærat, parameter hæc invenietur = 0. Parameter = 0 dabit ordinatas = 0, quo fit ut parabola in lineam rectam convertatur. Hanc ob causam in projectionibus verticalibus ab radicibus quadratis amplitudinum, quæ nullæ sunt, neque distinguere possumus vires, neque dimetiri; eas autem colligere licebit ex radicibus quadratis altitudinum. Quod illa demonstrant, quæ loquitur Gravesandus docens invenire cujuscunque projectionis altitudinem, & brevius etiam demonstrare possunt, quæ ab immortalis Galileo de gravium ascensu atque descensu dicta fuere. Statuo igitur, machinam Truchetii de pulvere pyrio periculum facere projectione verticali, hujusque vim dimetiendam esse a radice quadrata numeri dentium laminæ, qui post & laminæ, & subjecti cylindri ascensum ab vectibus ferreis sustinentur. Quomodo hæc, Sodales sapientissimi, attribui possint & machinæ, quæ in Instituto nostro est, facile intelligitis. Si ergo vel machina Truchetii, vel alia ei similis satis superque præstabat, ut vis pulveris cognosceretur, incassum videri fortasse poterat, me novam adjicere. Sed affinitas, quæ & novam hanc pyrotechnicam machinam, & veterem illam physicam, de qua alias differueram, simul jungit, suadebat, ut ita dicam, ne, cum de una dixissem, de altera filerem.

Hæc sunt, quæ mihi communicanda vobiscum erant de methodo dimetiendarum pulverum virium; neque tamen multum ad rem facere arbitror, si obijciatur, machinas, quas vel antiquas commendo, vel novas propono, ut maxime ostendere posse, qui pulvis plus valeat, quique minus. Etenim machinæ hæc, proportionem virium ostendunt variorum pulverum, qui comparantur; ergo ut, præter virium proportionem, sive, quod idem est, præter relativas pulverum vires, vis quoque absoluta cujusque pulveris innotescat, quod secundo loco querendum supererat, explorare tantum sufficit, machina, qua uti volumus, pulverem, cujus vis absoluta sit nota; veluti pulverem illum, tres cujus uncix ex Gallorum mortario ad quadragintaquinque gradus inclinato globum sexaginta libras ferri continentem ad quinquaginta hexapedarum distantiam projicit.

Ad quam cognitam pulveris vim cum per machinam, qua experiundo utimur, vires aliorum pulverum incognitæ referantur, tunc cognitæ fient omnes, suamque unaquæque quantitatem absolutam patefaciet, sicque etiam quæcumque monebit quando, & quanto sive excedat, sive deficiat, ut probe inserviat vel gerendis bellis, vel ignibus comparandis festivis, vel venationibus capiendis, vel cæteris, si qui sunt, usibus præstandis.

Quoniam vero non solummodo experiri interest æqualia variorum pulverum volumina, ut eorum virium proportio, deindeque vis cujusque absoluta perspiciatur, expedit varia etiam comparare ejusdem pulveris volumina, quippe quia crescentibus voluminibus crescunt utique vires, nec tamen utraque augeatur juxta proportionem ordinatam, cum magis augeantur vires quam volumina, uti colligitur ex primo articulo secundæ partis doctissimi operis, cui ab Auctore Belidoro titulus inscribitur *Ballitarius Gallus*, instituenda esse arbitror experimenta, tubulo tantum, qui continet pulverem, mutato, videlicet tubulo altero ei substituto, cujus capacitas capacitate sublato tanto vel major, vel minor sit, quanto vel majus, vel minus volumen est pulveris, quem experiri volumus. Credo machinam, quam proposuimus, si cum tabula perpendiculari adhibeatur, præ cæteris ad hæc præstanda experimenta idoneam esse. Si ab experimentis de eodem variorum pulverum volumine captis, data absoluta vis quantitate unius pulverum speciei, quantitates absoluta virium omnium aliarum specierum eruantur, mihi sane videntur, ab experimentis, quæ de variis ejusdem pulveris voluminibus suscipiantur, eadem methodo determinari posse vires omnium voluminum pulveris cujusque alterius generis, dummodo vis alicujus voluminis ipsius pulveris nota sit.

Tandem aliquando, doctissimi humanissimique Sodales, desinam, ad pulverum pyriorum examen, magni procul dubio momenti rem, & machinas, & experimenta vobis proponere. Quæ adhuc proposui ea vos emendabitis, ac tum demum mihi satis probabuntur.

Fig. 1.

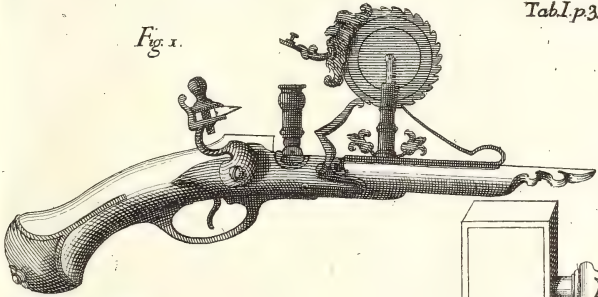


Fig. 2.

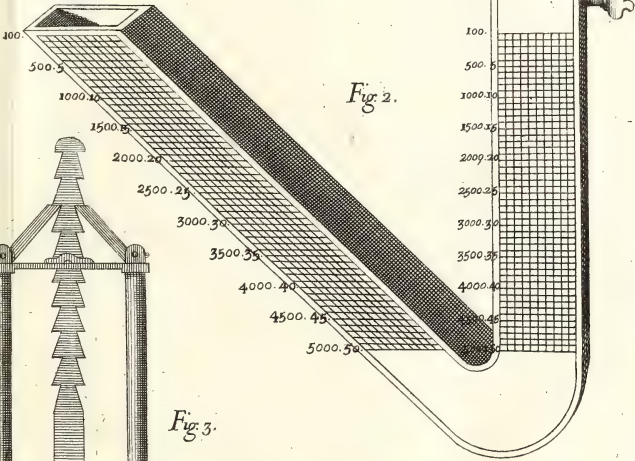
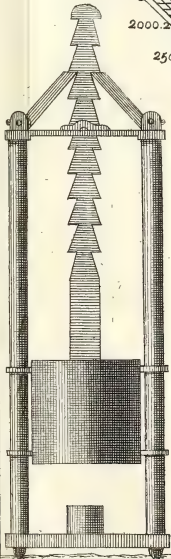
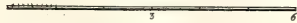


Fig. 3.



Scala semijotis Pedis Londinensis
Figuris primæ, et terciæ inseruiens.



Scala sex Pedum Londinensium
Figuræ secunde inseruiens.

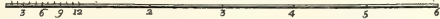




Fig. 4.

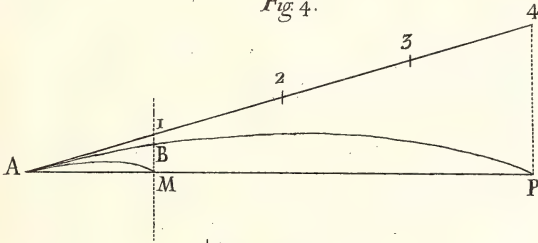


Fig. 5.

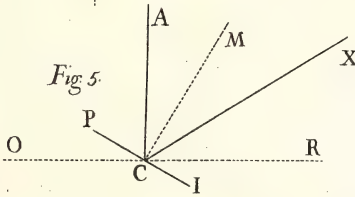


Fig. 6.

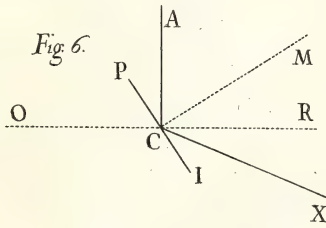


Fig. 7.

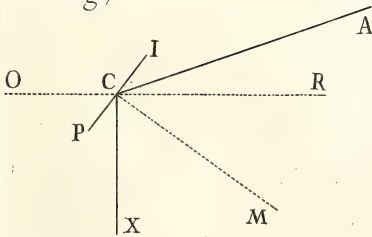




Fig. 8.

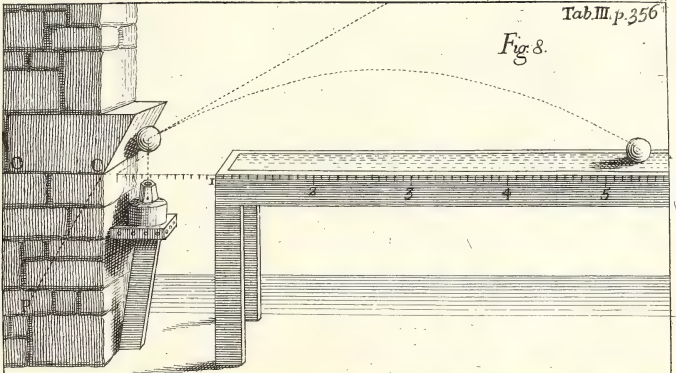
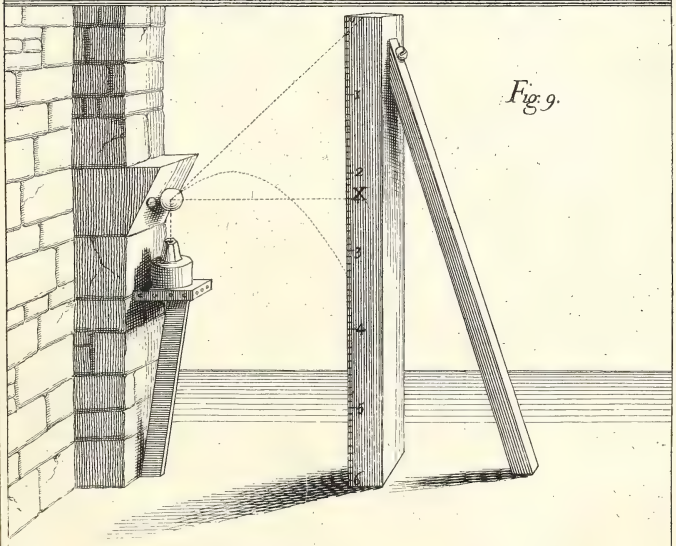


Fig. 9.



GREGORII CASALII.

De ictu pulveris pyrii.

Sicuti invenire methodum expedit, qua cujusvis datæ vis quantitatem dimetiamur, ita pro nihilo non est reputandum inquirere, in quo vis ipsa consistat, undeque proveniat. Quapropter, Sodales doctissimi, quoniam mihi elapso anno per vos concessum fuit quasdam hic promere animadversiones in machinas, quibus quantitas vis pulveris pyrii exploratur, finite æquo animo, nunc precor, me nonnullas addere conjecturas de hujusce vis principio atque natura. Pudebat, me, quanta esset vis hæc, quæsisse; unde esset, omnino ignorare.

Quod primo loco statuendum arbitror, hoc est, videlicet pulveris vim æstimandam esse ex illo ictu, qui imperitur vel globo ferreo, vel cuilibet alteri corpori, ut sive globus, sive corpus quodcumque velocitatem quamdam concipiat, qua obstacula, contra quæ dirigitur, impellat. Neque sane dubitandum est, quin in hoc toto actionum commercio accurate serventur leges communicationum motuum. De quo nec verbum quidem fecissem, nisi quædam supputatio a celebri Mariotto in suo de aeris natura specimine allata, aliquantulum infirmare videretur hanc ipsam suppositionem. Non sunt tanti hominis, quantus Mariottus est, difficultates prætereundæ. Has ergo primum tollere aggrediar.

Accedens Mariottus ad explicandas dilatationem & condensationem aeris, ostendere contendit corporum dilatationem non constitui a disjunctione particularum corpora componentium. Sententiæ suæ demonstrationem colligere confidit a pulveris pyrii accensione. Supponit ipse pulveris 20 libras contineri in cubiculo, cujus parietes satis crassi robustique sint, fornix vero 34 lapidibus constet, quorum uniuscujusque pondus 500 libras æquet. Accendatur pulvis, & vis ejus ita ur-
gebit

gebit contra fornicis lapides, ut eorum aliqui ad altitudinem usque extollantur 20 pedibus parisiensibus majorem. Postquam Auctor hoc enarravit experimentum, probare nititur, partes pulveris inflammati, quæ impellunt lapides, ipsis tribuere tantam elevationem vi earum ictus non posse. Auctoris argumentum sequenti calculo innititur. Quoniam libræ 20 accensi pulveris actionem quaquaversus exercent suam, pars tantum pulveris sexta, idest uncia 54, actionem hanc contra fornicem exercebit. Sed fornicis lapides cum 54 sint, pulveris uncia quemcumque lapidem urgebit, & idcirco massa uncia urgebit massam 500 librarum, seu massam unciarum 8000. Velocitas pulveris fumitur ab Auctore æqualis velocitati globi tormentarii, qui extolli potest ad altitudinem pedum 3000, quod idem est ac pollicum 36000, sive linearum 432000. Quibus positis, juxta percussione leges si velocitas uncia pulveris, quæ uncias 8000 lapidis impellit, exprimitur per gradus 8001, pulvis suo ictu unum tantum velocitatis gradum lapidi communicabit. Cum autem gravium ascensus sequantur proportionem directam quadratorum velocitatum, oportere videtur lapidem non plus exurgere quam ad altitudinem $\frac{1}{148}$ lineæ; sic enim se habet 64016001 quadratum 8000 ad 1 quadratum 1, ut 432000 lineæ ad lineæ $\frac{1}{148}$. Porro ascensus hic esset insensibilis, quod experientia repugnat. Tali pacto argumentatur doctissimus Mariottus corporum dilatationem a partium eorum separatione omnino differre. Quod utrum verum sit, & ex suppositionibus atque theoriis Auctoris satis deducatur, ipsi videant Phyci; nam quemadmodum meum nunc non videtur esse hoc negare, sic nequaquam volo ad hoc concedendum obstringi.

Mihi tantummodo examinandum propono, an vere probet Auctor partes pulveris inflammati, quæ lapides impellunt, non tantam vi ictus posse gignere lapidum elevationem. Opponit Mariottus calculum ingeniosissimum, sed valde vereor, ne calculus oppositiones sustinere non valeat, quæ in ipsum convertuntur. Arbitratus est Mariottus sextam unice partem pulveris accensi contra fornicem agere, de quo quis posset cum ipso tam facile consentire? Sed hoc omisso, est ne juxta leges percussione & communicationis motus ponere velocitatem

tem pulveris æqualem velocitati globi ferrei, qui a pulvere jactus est? Cur Mariottus, quoniam ipse judicat leges hæc aliud diversum concludere ab illo, quod per suum experimentum concluditur, cur, inquam, non animadvertit & massam pulveris, quæ motum communicat, & globi massam, cui motus communicatur? Si pulvis totus computaretur, qui ad jaciendum globum in tormentum immittitur, pulveris massa se haberet ad massam globi ut 1 ad 3. Verum si placuit Mariotto in suo experimento considerare pulverem secundum proportionem illius partis superficiei ejusdem pulveris, quæ respicit lapides dimovendos, idest ei placuit considerare $\frac{1}{2}$ pulveris, sumenda pariter erat ex cylindro pulveris, qui in tormento accenditur, quique accensus emittit globum, portio ea tantum, quæ esset ad totum ut circulus maximus globi ad integram superficiem cylindricam pulveris, quæ est circiter proportio 1 ad 7; igitur massa pulveris sic se haberet ad massam globi, uti $\frac{1}{3} \times \frac{1}{7}$ ad 1: seu uti $\frac{1}{21}$ ad 1. Quod cum verum esset, supponenda erat a Mariotto 22 vicibus major pulveris velocitas. Immo cenfeo Mariottum eam supponere debuisse multo majorem: nam si accensio pulveris fit, sicuti vel ipse concedit, ad instar spheræ, multæ pulveris partes, quæ globum impulissent, agentes juxta directionem axis tormenti, non amplius pellent nimis divergentes factæ, multæque aliæ, quæ ipsam aliqua obliquitate impulissent, pellent obliquitate majore, vel per directiones ipsum tangentes effugient, & ideo aliæ minorem ei communicabunt velocitatem, aliæ nullam. Ex his considerationibus, atque ex multis aliis, quas colligere datum est, effectus omnes diligenter persequendo, quos pulvis producit, interim dum ex tormento projicit globum, arbitror dilucide apparere longe majorem esse pulveris velocitatem velocitate globi a pulvere jacti.

Addite, precor, considerationem alteram, quam miror fuisse a Mariotto prætermisam. Intererat animadvertere velocitatem 20 librarum pulveris valde differre a velocitate massæ pulveris æqualis $\frac{1}{3}$ ponderis globi, nisi globi pondus 60 libras æquaret. Doctissimus Belidorus in secunda parte Operis, cui titulus est Ballistarius Gallus, ostendit tempora accensionum pulveris sequi proportionem multo minorem proportione $\frac{1}{3}$ massarum, quæ accenduntur. Quod probat, si pondus globi
a Ma-

a Mariotto suppositi minus sit 60 libris, libras 20, quæ in cubiculo accensæ fuerint, debuisse juxta proportionem magis magisque ad se se inflammandas properare, ac proinde majorem concipere velocitatem, quam minor illa pulveris quantitas in tormento inclusa concipiat. Nec ab re sit adjicere, diversam figuram massarum pulveris, diversamque methodum qua ipsæ accenduntur, præstare posse, ut pulvis vel citius, vel tardius incendatur, & idcirco ut sit pulvis seu majore, seu minore velocitate donatus; & sane massæ pulveris, quæ in tormento continetur, (etiam si massæ figuram mittamus, quæ secundum multorum sententiam non omnino probabilis censenda est) accensionem, quæ tam longe a centro principium sumit, minime sperandum est accensionibus aliis festinatione antecellere.

Vestrum jam sit, Sodales sapientissimi, judicare quantum valeat Mariotti calculus ad separandam ab idea vis pulveris ideam ictus, quo vis hæc percutiat sive globum, sive lapidem, sive aliud quidpiam, cui se se communicet. Minime vero arbitror, quoniam calculum Mariotti sustulisse videor, me demonstravisse hujusmodi ictus existentiam. Cæterum nescio, cur supponi nequeat pulverem impertiri ictum objectis resistentibus, usque partem sui motus communicare; in quo ictu omnes profecto servantur leges communicationum motuum, habito, ut par sit, respectu massarum, & figurarum, & graduum vel duritiei, vel elasticitatis corporum, quæ sive per actionem sive per reactionem in conflictum veniant; neque dubitandum est, quin sicuti massa pulveris, momento temporis omnino accensa, esset elastrum, cui facultas se se expandendi concederetur, sic massa pulveris, quæ flammam paulatim concipiat, elastrum sit, quod & lentius expandatur, & regulis magis compositis. Attamen mihi non est opus demonstrare hunc ictum, dum vis pulveris globo communicatur, satis enim est me posse ictum supponere vi jam communicata, & hanc vim considerare, non quatenus globo sensim communicabatur, sed quatenus communicata plane est, & globum insidet, & ex partibus omnibus, quæ communicatæ antea fuerunt quasi summa unica componitur. Hoc pariter usurpant Physici, dum corporis velocitatem indicant, dicendo, tantam eam esse, quantam acquireret corpus si a quadam altitudine caderet, quod idem est ac dicere, si corpus caderet per

per quoddam tempus; extremo casus momento quantitatem inspiciunt motus communicati, nec amplius eorum interest recordari motum successive communicatum esse. Ac simili methodo utuntur expedientes motum, qui corpori ab elastrorum serie communicatus fuit, quoniam considerantes corporis motum, cum is factus jam est æquabilis, ita motum considerant, ut si communicatus fuisset per ictum aliquem. Enimvero ad pulverem regrediendo, placet in medium vocare auctoritatem clarissimi Delagulerii, qui de hac re eodem modo judicavit. Cum ipse loquatur de actionis & reactionis æqualitate in annotatione nona quintæ lectionis Physicæ experimentalis, problema exponit, quod ipse ingenue fatetur se ab amico accepisse. Quæritur in problemate vis globi tormentarii pondere 24 librarum. Problematis solutionem ob actionis & reactionis æqualitatem colligit Auctor ex inventione vis, quam pulvis exercet contra tormentum, interim dum tormento expellit globum. Suppositis ab Auctore, globi pondere = 24, idest 24 libris, & globi velocitate = 640, quoniam creditur globum 640 pedes londinenses minuto secundo percurrere, his, inquam, suppositis, ait Auctor pulverem ob momentorum æqualitatem dare ictum tormento vi = 15360. At cum hujusce expressio- nis diligentia non ei omnino satisfaciatur, conatur ipse videre cui ponderi, numero librarum exprimendo, æqualis sit hæc vis; qua de causa animæ tormenti supposita longitudine = 12 pedibus londinensibus, & supposito pulverem, cum flammam concipiens se se dilatat, pellere globum velocitate uniformiter accelerata, quæ æquabilis tunc demum fit, cum globus e tormento exiit, comperit tandem Auctor auxilio calculi multo elegantissimi hanc vim æqualem esse ponderi 12800 librarum. Quare si, quamvis animadversum fuerit hanc vim communicari tempore assignabili accensionis & expansionis pulveris, placet tamen Delagulerio, pulverem dare ictum tormento, non video quid prohibeat quo minus supponam ipse pulverem globo ictum jam dedisse.

Consideretur igitur vis pulveris, cum fuerit globo communicata, veluti ictus, quo globus percussus fuit; consideretur vis hæc, ut ictus, cum pulvis commendetur machinis illis, quæ hanc ipsam vim dimetiuntur, quod maxime utile erit Ballistariis, quorum supputationes commodiores reddet, eorum vero theoriarum, & deductionum certitudinem minime infir-

mabit. Attamen concedatur mihi paulisper hanc vim liberius fumere, & ejus communicatione omiffa, me aliquibus confiderationibus naturam ejus, & ultima actionis fuæ principia, atque originem perfequi.

Amplitudo nominis immortalis Nevtoni fic omnem orbem comprehendit, ut nemo fortaffe ignoret quod ille dicit in decima ex quaestionibus, quæ in fine Opticæ positæ funt; videlicet „ Pulvis tormentarius, quum ignem concipit, abit „ in fumum flammantem. Carbo nimirum, & sulphur ignem „ concipiunt facillime, nitrumque accendunt; nitricque spiritus „ inde in vaporem rarefactus, proruit cum explosione; simili „ liter ac aquæ vapor ex æolipila. Sulphur quoque, ut est „ volatile, convertit se itidem in vaporem; id quod explosio- „ nem illam adauget „ & aliquanto post Auctor maximus addit. „ Explosio itaque pulveris tormentarii oritur ex celeri „ ac violenta actione, qua tota permixtio subito, & vehe- „ menter calefacta rarefit utique, vel convertit se in fumum „ five vaporem: qui denique vapor actionis istius violentia „ eodem tempore candefactus, flammæ nimirum speciem ex- „ hibet. „ Hactenus Nevtonus. Clarissimus Sodalis noster Francisus Vandellus in Opusculo, quod tomo quarto Commentatorum nostræ Academiæ adjungitur, vim pulveris & ipse deducit præcipue a vapore, in quem resolvitur aquosus humor, qui in nitro continetur. Hujus sententia videtur mihi non maxime a sententia Nevtoni discrepare. Incredibile obsequium est, quo summum afficio Nevtonum: ad Vandellum autem me trahit præter observantiam, consuetudo atque benevolentia antiquissima: tamen sum ego ab utriusque opinione aberraturus. Fore utique spero ut amicus libenter mihi ignoscat, qui sane gaudebit sententiam suam cum Nevtoni potius sententia componi quam cum mea.

Neque ingenio tamen meo opinionem, quam sequor, tribui volo. Hanc enim secuti sunt parvo cum discrimine Boyleus, Delahireus, Joannes Bernullius, Belidorus, alique non pauci; sed hujusmodi opinio minus tuta videri cœpit, postquam sententia magni Nevtoni pervulgata fuit. Jam intelligitis, Sodales, me vim pulveris tribuere elasticitati aeris, qui in ipso continetur, quique ex ipso inflammationis causa erumpit, & expanditur. Hanc sane opinionem cum semper multo probabilem judicaviffem, & cum tandem statuiffem Academiæ

exponere argumenta, quæ illam mihi persuaferant, ac de ea egissem sæpius cum Sodalibus nostris doctissimis Francisco Maria Zannotto, Petronio Matteuccio, Laura Bassia Veratta, Josepho Veratto, Bartholomæo Beccario, ecce tibi e typis Augustæ Taurinorum volumen primum Commentariorum privata quidem Societatis, sed cum publicis & regis comparandæ. Quo in volumine sermones exstant duo eruditissimi, elegantissimique Equitis Salutii, qui nostram hanc opinionem valde sustinent atque confirmant. Non sum arbitratus, Sodales optimi, hanc ob causam impediri me, quominus ipse adhuc loquar pro hac sententia. Quin immo libentius id facio, postquam experimenta & argumentationes eruditissimi Salutii eo me adduxerunt, ut mihi jam sententia ipsa & clarior videatur, & verior.

Si vim pulveris explicans a Newtono recedo, & a quocumque eam statuente in vapore quodam, ad hoc faciendum Newtonus ipse me invitat ex tertio libro Principiorum Mathematicorum Philosophiæ Naturalis, cum in prima philosophandi regula doceat „Causas . . . non plures admitti debere, „ quam quæ & veræ sint & . . . phœnomenis explicandis „ sufficiant. „

Sufficere aeris elasticitatem ad explicanda, quæ a pulvere suppeditantur, phœnomena, res mihi videtur satis superque perspicua. Dilatationes summæ, summæque constipationes, quas aer sustinere potis est, aeri inesse elaterium tam magnum ostendunt, ut sane ab ipso pulveris elaterium dependere possit. Innumerabiles prope sunt experientiæ, atque observationes Mariotti, Boylei, Halleii, quæ de hac mirabili aeris elasticitate fidem faciunt. Inter Mariotti experimenta, duo præcipue sunt, quæ in supra citato Auctoris Opere legimus, quæque, si quid iudico, non modicum probant elasticitatis sive aeris, sive pulveris analogiam. Experimenta referam: nam quamvis Mariotti calculum recusavi, experimenta recipio: difficultates bene multæ me a calculo amovebant, ab experimentis amovit nulla.

Animadvertendum est primo pulverem ob accensionem sic expandi, ut spatium acquirat, quod se habet ad spatium, quod non accensus occupabat, alias uti 4000 ad 1, alias uti ad ipsam unitatem numerus etiam multo major, qui ascendit non raro ad 5000 usque, & ulterius. Dissensio, quæ inter

Auctores intercedit sicut & inter Ballistarios in hac stabilienda spatiorum proportione, oritur forsân a circumstantiis & anomalis pulverum variis, qui experimentis committuntur, & ab experiendi methodis non eisdem.

Enimvero si admittatur in pulvere dilatatio = 4000, adest utique Mariotti experientia, quæ videtur nos monere hanc esse ipsius aeris dilatationem. Quærens Mariottus usquequo aeris dilatatio extendatur in aqua, quæ multam partem cujusdam vasis implet, immergit collum phialæ vitreæ inversæ aqua omnino plenæ. Ponitur deinde vas sub recipiens machinæ pneumaticæ, e quo cum paulatim aer extrahatur, quædam aeris bullulæ ad fundum sursum prospicientem phialæ affurgunt, & parvum aeris volumen componunt. Extracto tandem omni aere, prout fieri potest, a recipiente, aer in phiala vehementer expansus invenitur, nec non tanta ei remanet elasticitas, ut aquam vasis sustineat, quæ circum phialam elata est. Aere autem in recipientem restituto, aer in phiala contrahitur. Mariottus spatia aeris phialæ studiose dimetitur, & observat spatium, quod occupat aer hic dilatationi subtractus, esse = $\frac{1}{4000}$ spatii quod expansus occupabat. Ecce igitur aerem dilatationem illam promere, quam nonnulli se in pulvere inspexisse affirmarunt. Quod si aer in statu dilatationis circumstantem sustinebat aquam, se adhuc elasticum esse, uti dictum est, demonstrabat, atque idcirco ostendebat, & ei commodam esse dilatationem = 4000, & possibilem ei dilatationem esse majorem. Quod præterea cognoscitur ex hoc, videlicet, aerem, qui tantum se se dilatavit, dilatatum & ipsum jam fuisse, cum demum aer idem egeat aqua iterum ascendente in phialam, ut æquilibrium instituat cum aere recipientis, quod idem est ac dicere cum naturali aere atmosphæræ. Hoc porro sufficere potest ad analogiam inter pulveris dilatationem & dilatationem aeris ostendendam, non tantum illis, qui pulveri tribuunt dilatationem = 4000, sed illis etiam, qui majorem concedunt.

Attamen istorum gratia opportunius erit ad alteram experientiam confugere. Acutissimus Mariottus postquam agnovit aerem cum aqua misceri, inque ipsa dissolvi, agnoscere etiam se putat, quæ dilatatio aeri concedenda sit, cum is in aqua hæserit. Quocirca aquæ guttam sic pertractat & angit,

ut

ut aerem extrahat, qui in ipsa continebatur, quique a vasculo quodam vitreo excipitur, quod aere se impleri ostendit, se se exhauriens fluido alio, quo refertum erat. Qua se gerat industria ingeniosissimus Auctor in hac experientia, longum esset describere, neque tamen est necessarium. Illud potius animadvertatur, quod vel ipse Auctor observavit. Deprehendit nempe, quamvis calor cujusdam gradus ex aqua aerem eliciat, quo paulatim vasculum vitreum, uti notatum est, impleat, calorem tamen majorem educere ex aqua materiam quamdam fulminantem, quæ strepitu vasculum ingreditur, & ex eo fluidum pene omne, quod aderat, ejiciendo, maximam capacitatis ejus partem momento temporis occupat, deindeque statim veluti in nihilum redigitur, neque ad sensum auget aeris quantitatem, quæ minoris caloris ope in vasculum jam præcurrerat. Argumentatur Auctor hanc esse materiam, quæ potis sit dilatari magis quam aer, minime dilatetur autem calore mediocri; & addit insuper esse forsitan aliquid huic materiæ simile, quod absconditur vel in sale tartari, vel in nitro, & salia hæc reddit fulminantia.

Verum en quod, Sodales humanissimi, ex hac experientia mihi videor colligere posse, & ad pulveris theoriam traducere. Primo loco existimo duas istas materias, quarum ex aqua crepitans una, altera placida egrediuntur, nil aliud esse præter aerem; nempe vero earumdem differentiam in hoc sitam esse, quod materia una minori vi cum aqua jungatur, altera autem vi majori. Deindeque libenter assentio materiam illam, quæ difficilius ab aquæ vinculis liberatur, ipsam esse, ob quam sal tartari, & nitrum fulminationes explodunt; quamvis non improbable esset in nitro utramque adesse materiam, propter illum, quem clarissimus Vandellus noster observavit, humorem aqueum, qui abunde in nitro continetur. Atamen nitrum considerantes, quod basis est pulveris, materiam illam, quæ aquæ vel maxime adhæret, præsertim expendamus. Quod ut fiat, placet duo adnotare. Sit primum. Cum elastrum aperimus, directionem quamdam intelligere oportet qua aperimus; cum autem hæc materia, vel ipsa e nitro, vel e pulvere educatur, se se expandit, intelligatur oportet materiam & distrahi, & dirigi quaquaversus, dilatatio elastri communis, quod aperitur, dicatur volo dilatatio linearis: dilatatio hujus materiæ solida dilatatio, aut dilatatio corporea.

Secundum. Materia hæc, cum se se explicat, & dilatat, non utique sistit statim ac ad naturalem aeris densitatem pervenit, sed antequam in hoc statu demum quiescat, ob conceptam vim multo magis expanditur. Quam legem etsi cæteris elastris quis negaret, experimenta doctissimorum Philosophorum atque observatorum diligentium satis docent & confirmant naturam elastro huic imposuisse. His ita constitutis videatur jam, quæ esse debeat hujus elastri dilatatio, ut dignoscatur quantum pulveris dilatationibus assimiletur.

Dico igitur, haberi spatium majoris dilatationis istius elastri, multiplicando per se ipsum numerum, qui exprimit elastri densitatem in statu compressionis, supposita densitate naturali = 1. Quod, ut clarior sim, exemplo explicabo. Sit elastri constipati densitas 64 vicibus major densitate naturali: dico spatium maximæ dilatationis esse ad spatium constipationis, ut $64 \times 64 = 4096$ ad 1. Quod, audite, precor, quomodo mihi probari videatur. Sumantur, ut similes, figuræ, quæ circumscribunt elastrum sive constipatum, sive in naturali statu, sive in maxima distractione, immo ob majus commodum sumantur ut spheræ. Sit ergo, sequendo exemplum propositum, densitas constipata ad densitatem naturalem, ut 64 ad 1; erunt quoque per primam definitionem primi libri Principiorum Mathematicorum summi Nevtoni eorum spatia in ratione reciproca, idest uti 1 ad 64. Et ideo si 01 (vide tab.) sit diameter densitatis constipatæ, erit 04 diameter densitatis naturalis; sunt enim $1 = \sqrt[3]{1}$, $4 = \sqrt[3]{64}$. Nunc autem notandum est, quod ipse incomparabilis Nevtonus in propositione XXIII secundi libri demonstravit, videlicet; „Si fluidi ex „ particulis se mutuo fugientibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciproce proportionales distantiiis centrorum suorum.„ Aer interea, qui profecto elastrum componit, quod nunc expendimus, si experientias, & theorias amplectamur, quas Mariottus exhibet in citati sui operis principio, fluidum est, de quo affirmandum quod „densitas sit ut compressio.„ Ergo si in statu naturali aeris particulæ se se repellebant ita ut una ab altera distaret intervallo 04, in statu constipationis particulæ eadem, quæ non amplius distant nisi longitudine $\frac{04}{4} = 01$, se se repellent, uti monet Nevtonus, vi aucta juxta proportionem

reciprocam distantia; idest vi, qua tendet particula una ab altera recedere spatio 4 vicibus majori primo seu distantia $04 \times 4 = 016$. Proinde si fiat cubus lineæ 01, & cubus lineæ 016, idest cubi & 1 & 16, habebitur ex proportione istorum cuborum, nempe 1 & 4096, proportio spatii materiae constipatae ad spatium ejusdem materiae maxime expansa. En tandem maximam dilatationem expressam per numerum 4096, quod idem scilicet evenisset, si numerus 64 per se ipsum fuisset multiplicatus, Revera cum 1, 4, 16 sint in proportionalitate geometrica continua, sequitur $16 \times 1 = 4 \times 4$, sive $16 = 4^2$; & ideo cubus numeri 16 idem erit ac cubus secundæ potestatis numeri 4; sed cubus quadrati idem est ac quadratum cubi, igitur pro cubo numeri 16, qui cubus æqualis jam visus est cubo secundæ potestatis numeri 4, sumi poterit quadratum cubi numeri 4, idest quadratum numeri 64; qui numerus cum exprimat spatium naturale supposito constipationis spatio = 1, exprimit etiam densitatem materiae constipatae supposita densitate naturali = 1. Atque ut hoc majori videatur brevitate, fiat $04 = n$, & idcirco $016 = n^2$: dico $n^3 \times n^3 = n^2 \times n^2 \times n^2 = n^6$.

Jamprehendite, Sodales sapientissimi, quamvis supposuerim, ut quodam uterer exemplo, densitatem constipatam = 64, attamen demonstrationem esse universalem, eodemque modo subsistere, quisquis sit numerus, qui hanc exprimat densitatem. Verum non inficior, me arbitrio quodam numerum hunc elegisse. Electionis hæc fuit ratio. Juxta experimentum a doctissimo Joanne Bernullio institutum, & ab ipso in paragrapho XXII Dissertationis de Effervescentia & Fermentatione nobis relatum, e granulo uno pulveris inflammati aer tantus exit, ut spatium occupet, quod continere potest pulveris granula 50. Interstitia granulorum 50 in hoc spatio clausorum tertiam ejusdem spatii partem comprehendent, si granula sint prorsus rotunda, & sic in spatio accommodata, ut imæ superiorum granulorum partes tangant partes summas granulorum inferiorum; si vero hæc desint conditiones, (& plane desunt ambæ) interstitia comprehendent, ni fallor, minus quam quartam partem ipsius spatii: quod etsi aliquo modo demonstrari posset quod ad granulorum collocationes, multo minus sane demonstraretur quod ad eorum figuras, quarum

in-

infinita irregularitas vix finit confugere ad rudes observationes, & ad deductiones minime rigidas. Si ergo interstitia occuparent $\frac{1}{4}$ spatii, exprimendum esset spatium non per numerum granulorum 50, quæ continet, sed per numerum, ad quem ita se haberet numerus 50, ut $\frac{1}{4}$ ad 1; qui numerus esset $66 + \frac{1}{2}$. Immo quia interstitia minus occupant, quam $\frac{1}{4}$, elegi numerum 64, qui insuper cum esset cubus, & faciliorem calculum, & commodiorem demonstrationem suppeditabat. At vero, quoniam demonstratio universalis est, assumi quidem potest numerus $66 + \frac{1}{2}$ ad exprimendam constipationem, & tunc erit maxima dilatatio = $4444 + \frac{1}{2}$. Et si tamen supponi placeat interstitia occupare $\frac{1}{3}$, exprimatur constipatio per numerum 75, & tunc habebimus maximam dilatationem = 5625. Quæ maximæ dilatationes nimirum tales sunt, quales se observavisse monent Amontonius, Belidorus, Vandellus, caterique Auctores celeberrimi.

Neque jam dissimulo duas necessarias esse suppositiones, ut recte affirmetur dilatationes has maximas esse veras; nempe supponere oportet cum Belidoro „pulverem inflammatum nil „aliud esse præter aerem summopere rarefactum; „ & cum Mariotto „condensationem aeris augeri juxta proportionem, „quæ ipsum comprimunt. „ Si vero suppositiones hæc duæ aliquam patiantur exceptionem, satis mihi erit in argumento, in quo tam difficile est exacte cognoscere verum, me ad verum aliquantulum accedere voluisse.

Postquam expensum fuit utrum in pulvere aer „phœno- „menis explicandis sufficiat, „ reliquum esset exquirere an in pulvere hujus causæ præsentia realiter subsistat, ut legi Newtoni, & Philosophiæ perfecte obediatur. Sed ego quidem puto Hauksbejum, Hallefium, Bernallium, Salutium, & alios hoc ita demonstravisse, ut spem ademerint prope omnem demonstrationi quidpiam adjungendi. Attamen si liceat paucissima quædam & parvi admodum momenti addere doctrinis atque inventis excellentibus, & numero, ut ita dicam, infinitis, brevissimas simplicissimasque experientias memorabo, quas mihi placuit instituire. Philosophi hi summi aerem e pulvere extraxerunt, solventes nitrum in partes, quæ ipsum constituunt, essentielles. Arbitrabar ego rem aliquanto ulterius procedere potuisse, si extraheretur aer vix solvendo nitrum in partes ejus

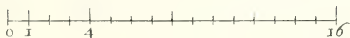
integrales. Etsi non amplius fas esset demonstrare in pulvere veritatem existentiae aeris, videbatur tamen non injucunda prorsus fore methodus, qua demonstraretur facilius.

Soluta igitur fuerunt in 140 caratis aquae putealis carata $23 + \frac{3}{8}$ nitri. Aqua nitrata in vase vitreo contenta, atque in alio vase vitreo contenta aqua alia, cujus pondus pariter 140 carata aequabat, positae fuerunt sub recipiente machinae pneumaticae. Et observato atmosphaerae pondere respondente altitudini barometricae pollicum parisiensium $28 + \frac{1}{12}$; extractus fuit paulatim a recipiente tantus aer, ut machinae hydrargyrum ad pollices $26 + \frac{6}{12}$ ascenderet. Interea ex utraque aqua prodibat aer, sed aeris quantitas, quae ex nitrata aqua educebatur, longe maxima apparebat. Aer deinde recipienti conceditur, deindeque paulo post a recipiente exhauritur ascendente hydrargyro usque ad altitudinem pollicum $26 + \frac{7}{12}$. Ex aqua nitrata ingens quantitas bullularum aeris surgit, ex non nitrata aqua bullulae vix aliquae rarissimae. Altera quoque die eadem repetita fuit experientia. Pondus atmosphaerae respondebat altitudini barometricae pollicum $27 + \frac{7}{12}$. A recipiente extractus fuit aer usque ad hydrargyri ascensionem pollicum $26 + \frac{9}{12}$. Observationes eadem prorsus fuerunt, nisi quod phaenomenon quoddam in conspectum venit non inelegans videlicet ex summa nitratae aquae superficie exhibant frequentes materiae subtilissimae jactus, quae a $\frac{3}{4}$ pollicis altitudine decedens levissimam venustissimamque pluviam representabat.

Quamvis experientiae istae satis probarent, aerem educi e nitro ob ejus in aqua solutionem, nihilominus inspicere hoc ipsum placuit auxilio syncerioris experientiae. Quam ecce. Pro aqua puteali usus sum aqua nuper distillata. Respondebat atmosphaerae pondus altitudini barometricae pollicum $27 + \frac{3}{12}$. Coeptus est exhauriri aer recipientis. Jam apparebat per aquam nitratam perenne aeris, ut ita dicam, flumen sursum decurrens, ex non nitrata aqua nihil habebatur, hydrargyro ad altitudinem 12 pollicum elato. Cum hydrargyrum ad altitudinem ascendisset pollicum 23, aqua non nitrata bullulas aeris

dedit paucissimas, post quas omnino nullas etiam in majori aeris recipientis rarefactione. Aer vero tantus a recipiente demptus fuit, ut hydrargyrum extolleretur ad pollices $26 + \frac{4}{12}$: in qua rerum conditione nihil turbabatur flumen aeris per nitratam aquam exurgens, immo factum erat & copiosius, & vehementius. Haud silendum est de alia hujus experimenti circumstantia. Aderat nempe sub recipiente præter vasâ duo aquam distillatam sive nitratam, sive non nitratam capientia, vas tertium, quod aquam putealem minime nitratam continebat. Præbuit hæc aqua consuetas aeris bullulas, quarum tamen numerus longe minor erat numero bullularum ab aqua, quæ nitrum solverat, profluentium, quamvis aqua ista fuisset distillata.

Experimenta hæc igitur ostendebant, opus non esse solutione compositi, sed simplicem sufficere solutionem continui, ut aer ex nitro habeatur permultus. Hisce tamen experienciis alia est adjuncta, quæ majorem in nitro ad aerem suppeditandum facilitatem & alacritatem esse declarat: per hanc enim experientiam nitrum neque solutionem compositi, neque solutionem continui patitur; itaque cum magnam aeris quantitatem exhibeat, dicendum esse videtur, aerem hunc quadam affinitate devinctum sive nitro adhærere, sive in poris ejus majoribus abscondi. Experientiam narro. Pondere atmosphære adnotato, quod respondebat altitudini barometricæ pollicum $27 + \frac{6}{12}$; positum est sub recipiens machinæ pneumaticæ vas vitreum continens oleum tartari pondere duplo majori, quam pondus fuerit aquæ antea adhibitæ. Extractus est aer a recipiente, nec dedit oleum bullulas, præter rarissimas & exilissimas, atque in summa aeris recipientis rarefactione. Aer recipienti redditus est: deinde in oleum caratis $23 + \frac{3}{8}$ nitri infusus, iterum a recipiente aer extrahebatur: quod vix inchoatum erat, quando cœpit per oleum exurgere bullularum supra flumen, quod statim factum est copiosissimum, & cœpit supra oleum spumam bene altam extollere, quæ spuma, quodque flumen jugiter augebantur interim dum recipientis aer exhauriebatur: exhaustus autem fuit usque ad hydrargyri elevationem pollicum $26 + \frac{9}{12}$. Experientia alias alio tartari oleo tentata est;



$$n^3 \times n^3 = n^2 \times n^2 \times n^2 = n^6$$

$$n=4 \qquad n^6 = 4096$$

$$n = \sqrt[3]{66 + \frac{2}{3}} \qquad n^6 = 4444 + \frac{4}{9}$$

$$n = \sqrt[3]{75} \qquad n^6 = 5625$$

est; sed cum periculum tunc fieret in vacuo de oleo tantum, idest de oleo absque nitro, oleum hocce non modicam aeris quantitatem dedit, quo ostendebat se esse male saturum. Oleo, quantum possibile fuit, expurgato, tandem committitur nitrum. Oleum denuo sub recipiens est positum, e quo extracto aere en per oleam excurrere bullularum flumen longe copiosissimum. Postquam experientiam aliam de oleo tartari satis felicem retuli, secundam minus tutam præterirem, nisi hæc utique me alliceret ob phænomenon, quod hanc ornavit, non alteram. Intra bullulas aeris e nitro educti, quæ flumen sæpe descriptum componebant, jactus pulcherrimi identidem extollebantur bullularum aeris longe majorum: quod verisimiliter repetendum erat ab humido male saturo in oleo contento, cuius humidi ope partes nitri nonnullæ solvebantur: in ipsis enim experientiis per aquam captis, si, antequam nitrata aqua vacui periculo subiceretur, aliquæ nitri portiones vel minimæ solvendæ supererant, posita sub recipiente aqua, exhaustoque recipientis aere, solvebantur interdum, jactusque omnino similes edebant.

Neque ego, Sodales sapientissimi, observationes multas, & multas conjecturas narrabo, quæ de paucissimo experientiarum numero ortæ sunt. Sufficit mihi, me ex his omnibus collegisse summam esse aeris quantitatem, qui nitrum comitatur, non tantum se se insinuans in ejus partes essentielles, sed & partibus integralibus se miscens, & in majoribus poris jacens, & ad externos parietes adhærens. Narrare hoc potius gaudebo, videlicet, me debere has postremas de oleo tartari experientias monitis atque documentis celeberrimi Beccarii, simulque fatebor tantum esse, quod tum in his tum in primis experientiis debeo & consilio, & operæ doctissimorum humanissimorumque Sodalium Lauræ Bassiæ, & Josephi Veratti ejus Conjugis, ut mihi videar ipsis omnia omnino debere.

JOANNIS BAPTISTÆ MARTINI

EX ORDINE MINORUM CONVENTUALIUM.

De usu progressionis geometricæ in Musica.

QUOD omnes partes, quibus mundi universitas conflatur, non solum aliæ ad alias, sed etiam ad universam rerum naturam relatæ, perfectam quamdam, certamque rationem servant; ac præterea earum unaquæque (ne illa quidem vitali aura, qua communiter cum bestiis vescimur, excepta) suam constanter naturam usque eo retineat, dum admirabilia fœdera inter elementa, quibus coalescit, a sapientissimo rerum omnium Opifice posita substantialiter non solvantur; ea fuit doctissimi Platonis præclarissima sententia, quam a Pythagoreis, qui ante floruerant, acceperat. Quæ profecto sententia probari cuique vel maxime debet, ut quæ & iis, quæ sacris libris traduntur, inprimis consentanea est, & infinitam Creatoris Sapientiam summopere commendat. Verum quod hæc partium conjunctio, hocque (sic enim vocare possumus) universale vinculum, quo res omnes mirabili quodam modo nectuntur, plane detegi, atque in aperto poni possit, & reapse dici debeat ad normam alicujus *geometricæ progressionis* temperatum, id mihi quidem, si quid judico, nec certum videtur, nec omnino ab erroris suspitione vacuum. Nam ut cetera mittam, si in *sonis* dumtaxat consistamus, ad eosque generale illud placitum applicare velimus, jam illico apparet, in intervallis ab ea progressionem deductis non illa omnia contineri, quibus merito, & cum laude his temporibus utimur, atque ante usi sunt majores nostri; ut propterea non ad *singulare*, & *simplex principium*, sed ad *distinctum*, & *divisum*, & *diversum*, & *multiplex* amplissimus musicæ apparatus sit revocandus. Quam quidem rem cum demonstravero, gratum mihi erit, quod, quantum in me erat, desiderio, & expectationi plurimum doctorum hominum satisfecero,

cero, qui me sæpe alias ea de re percontati sunt meam sententiam sciscitantes.

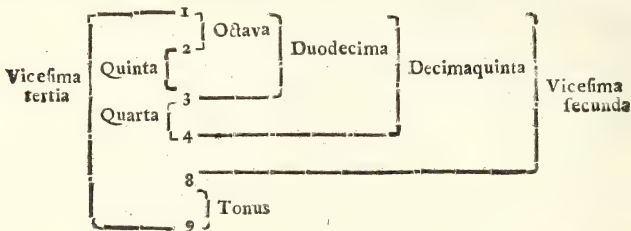
Series quantitatum, quæ se mutuo æqualiter continent, a mathematicis *progressio geometrica* dicitur: eaque *ascendens*, si termini sint deinceps alii aliis majores; *descendens*, si contra accidat. Tam vero hæc, quam illa *finitæ*, vel *indefinitæ* nomen sibi adsciscit, pro eo ut limitem terminorum numero ponimus aliquem, vel nullum. Pro vario autem modo, quo unus terminus alterum continet, varia, eaque valde diversa oriuntur hujusmodi *progressionis* genera; dicitur enim exempli causa *subdupla*, cum secundus terminus, qui *consequens* appellari solet, duplus est primi, qui dici consuevit *antecedens*; *subtripla* vero, cum is est tertia pars illius; atque ita porro. Quod si primus terminus, sive *antecedens* duplus sit secundi, seu *consequentis*, dicitur absolute *dupla*; similiterque, si triplus, *tripla*; sicque deinceps. Denique non solum quatenus unus terminus alterum contineat, aut in altero contineatur arbitrium profus est, modo in eadem serie eadem ubique ratio servetur, sed etiam a quo maxime termino *progressio* initium ducat, qui *terminus radicalis* dicitur.

Jam vero duas sibi finxit Plato lineas, in quarum communi vertice constitutum esset unitatis signum; eoque accepto tamquam *ascendentis finitæ progressionis subduplæ* initio, exterius atque ad sinistram intuentis signa adiecit numerorum 2. 4. 8, ita quidem ut iis ex æquo, & pari ductu dispositis postremum 8 extremo unius lineæ responderet: similiterque fecit ad dexteram *progressione usus ascendente, finita, subtripla* appositis videlicet signis numerorum 3. 9. 27 præter jam ante constitutum unitatis signum tamquam *radicalem terminum*, seu *principium numerorum*; quo factum est, ut secundæ lineæ extremo responderet 27. Hocque peractò, fatis

I	
2	3
4	9
8	27

se expressisse judicavit *rationes*, seu *proportiones*, quibus *harmonictæ consonantiæ* continerentur tam *simplices*, sive *primitivæ*, quam *compositæ*, seu *duplicatæ*, *triplicatæ*, &c. Enimvero si in *serie*
sub-

subdupla unitas referatur ad 2, *diapason*, seu *octava* se prodit; sin ad 4, *bis-diapason*, seu *duplex octava*, quæ est *decimaquinta*; si denique ad 8, *tris-diapason* resultat, sive *octava triplex*, aut *vicepsimasecunda*. In altera porro serie unitas ipsa si referatur ad 3, exhibet *diapason-diapente*, sive *duodecimam*; *tris-diapason-tonum* vero, sive *vicepsimamtertiam*, si referatur ad 9. Quod si numeri unius *seriei* cum numeris conferantur alterius, tria alia obtinentur *intervalla*, quæ spatia vocamus ab uno sono ad alium: hic autem, & deinceps numerum *majorem* ad *minorem* semper comparabimus; idque commodius erit; sic enim fractiones facilius declinabimus. Itaque 3 ad 2 comparantes, *diapente*, seu *quintam* consequimur; 4 autem ad 3, *diatessaron*, seu *quartam*; 9 denique ad 8, purum *tonum*.

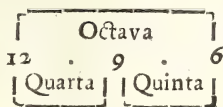


De numero 27 hic speciatim non dicemus; fuit enim hic numerus aliis usibus a Græcis destinatus.

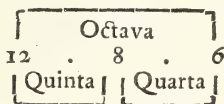
Quo autem *intervalla* inveniret componentia ea, quæ modo retulimus, fuisse Plato octavam, quippe in qua *intervalla* omnia simplicia contineri debent, eamque duobus modis divisit, *arithmetice* scilicet, & *harmonice*, ut mox ostendam.

Progressio arithmetica est series numerorum, qui æqualiter se mutuo deinceps superant. Ita numerus 3 unitate superat numerum 2, eum vero unitate pariter superat numerus 4; ex quo numeri 2. 3. 4 *arithmeticam progressionem* formant. Etiam in hoc *progressionum* genere *radicalis terminus* pro voluntate constitui potest, itemque quantitas, qua unus terminus alium superet. Nunc *multiplicans* tres *quartæ*, & *quintæ* terminos, nempe 4, 3, 2, per medium 3 obtinuit rursus Plato eandem *arithmeticam seriem* expressam numeris 12. 9. 6. Quæ series ei *intervalla* præbuit, quæ ipsas *primarias consonantias* præferebant;

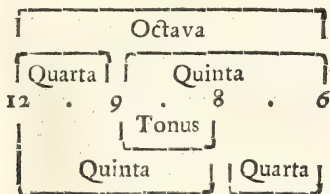
runt, *quartam*, *quintam*, *octavam*; etenim $3:2 = 9:6$, & $4:3 = 12:9$, & $2:1 = 12:6$.



Progressio harmonica est series trium numerorum, quorum hæc est ratio, ut differentia inter primum & secundum se habeat ad differentiam inter secundum & tertium, uti se habet primus ad tertium. Hujusmodi sunt numeri 12. 8. 6; est enim $4:2 = 12:6$, ubi 2 est differentia, quæ inter 8 & 6 intercedit, & 4 differentia, quæ intercedit inter 12 & 8. Ab hac quoque serie deduxit Plato primitiva illa, quæ diximus, *intervalla*.



Attamen deerat adhuc illustri Philosopho in utrisque *series*, nempe *arithmetica*, atque *harmonica*, insignis illa communis mensura cujusque *speciei diatonici generis*, quæ *tonus* dicitur; quam ut ab eisdem aliquo modo eliceret, opus ei fuit illas veluti simul conjungere, & arbitrariam quamdam numerorum in eis expressorum *seriem* ordinare.



Atque, quod ego quidem sciam, Græci, ut generatim loquar, ulterius expositas *progressiones* non protraxere: fuisset enim

enim id iis fortasse inutile, & certe supervacaneum, quippe quibus *progressiones* illæ etiam limitibus, quos descripsimus, coercitæ jam optatum finem attulerant, deductionem scilicet *toni*, atque eorum præcipue *intervallorum*, quæ *perfectas consonantias* præferrent tam *simplices*, quam *compositas*; namque has postea *dividentes*, simulque, aut cum aliis *intervallis* a divisione *ortis componentes*, modo etiam *subtractione*, ubi opus esset, utentes, brevi suum illud celebre *musicum systema* mirum in modum auxerunt.

Sed ad *diatessaron*, seu *quartam* (quæ cum ex quatuor constet *sonis*, five *chordis*, græce *tetrachordon* etiam dicitur) imprimis animum attentissime converterunt, ea maxime utentes, ut *intervalla*, quæ in successiva *diapason*, seu *octavæ* propagatione media sunt, eruerent: nam quamquam possent etiam ad eam rem *diapente*, seu *quintam* adhibere cum eadem *quarta* conjunctam, tamen solam *diatessaron* usurpantibus via se se aperuit minus difficilis, atque adeo expeditior: est enim apud Græcos *diatessaron* inter *primitivas consonantias* minima, eademque bis separatim in serie iterata statim integram *octavam* exhibet.

Cujus assertionis veritas ut manifesta appareat, præmittenda sunt, quæ sequuntur. *Tonum* cum dicimus, ordinarium commune *intervallum* hic intelligimus, quod unum inter & alterum *gradum* five *sonum* in ipsa naturali sonorum serie intercedit. Quilibet *tonus* intelligi debet divisus in plures inter se æquales partes humano auditui in quibusdam circumstantiis sensibiles, quarum unaquæque *comma* nuncupatur, eaque, quæ divisi *intervalli* ultima est, prope jam est, quin etiam omnino est ipsissimus proximus gradus, quem cum is, qui voce, aut musico aliquo instrumento canit, non assequitur, nostras aures molestia afficit, quippe quia quod *intervallum consonans* fuisset, fit *dissonum*. Non omnis *tonus* ejusdem est magnitudinis; alius enim est *major* in proportione *sesquioctava* 9 : 8; alius *minor* in proportione *sesquinona* 10 : 9. Similiterque *comma* est aliud *majus* in proportione 531441 : 524288, aliud vero *minus* in proportione 81 : 80. Propterea *tonus* non semper eodem partium numero componitur; nam pro eo ut *tonus* est vel *major*, vel *minor*, & constat *commatis majoribus*, vel *minoribus*, varius sit oportet partium numerus. Utraque hæc divisio non nisi progressu temporis inducta fuit apud
Græ-

Græcos. Græci itaque *quartam* in duos *tonos majores* divisērunt, atque illam præterea partem, quæ reliqua est, seu in eum præterea numerum *commatum*, quæ ad ejus complementum requiruntur. Hic *commatum* numerus appellatus fuit *hemitonium*, seu *Limma*, quamquam non sit, & non possit esse dimidia pars *toni*, sed ab ea aliquantum distet, ut propterea *hemitonii minoris* nomen sibi adsciverit, idque eandem ob causam, propter quam *hemitonium majus*, & græco vocabulo *Apotome* vocata fuerat pars illa, quæ remanet in *tono demto Limmate*; hæc enim dimidia *toni* parte major est. At id non impedit, quominus *quartam* alio etiam modo dividerent, nimirum in unum *tonum majorem*, in unum *minorem*, atque in unum *majus hemitonium*; sed hujusmodi partitio interdum, & solum iis temporibus, quæ nostris propiora sunt, usu venit: contra prior illa plerumque, & temporibus remotissimis semper usurpata fuit.

Sed divisiones, quas memoravimus, locum sibi vindicaverunt tantum in *genere diatonico*, quod ita dicitur, quia ex tonis constat, & est robustum, & grave. At in *genere chromatico*, idest suavi, & molli, tributa fuit *quarta* in duo *hemitonia* successiva, atque in *trihemitonium* ex uno *tono* & *hemitonio* compositum, quod dicitur *tertia minor incomposita*. Similiterque in *genere enharmonico* (quod sic vocarunt quasi *difficile*, & *eruditum*, sicque *genus etiam doctorum* dixere) fuit divisa *quarta* in duo successiva *diesis*, sive in duo quasi *dimidia hemitonia*, quæ etiam *toni quartas partes* nuncuparunt, atque in duos *tonos* simul junctos *incompositos*, quod intervallum *ditonium*, seu *tertia major* dicitur.

Porro *quartæ* divisionem, quam primam attulimus in *genere diatonico*, sumserunt, tamquam eam, quæ commodior esset, atque illam quidem imprimis, in qua *hemitonium* primo staret loco a gravi ad acutum progrediendo (nam *hemitonium* interdum secundo quoque loco positum fuit, aliquando etiam tertio, sicque *species diatessaron* plures fecerunt); tum successivam *octavæ* propagationem sic ordinarunt. In ipso initio *hemitonium* posuere, postea *tonos duos*, atque ita primam *quartam* absolverunt: dein *intervallum* apposuerunt, quod *tonum diazeuticum*, seu *tonum disfunctionis* appellarunt (eo enim modo *octava quartis* duabus componebatur separatis, ac disunctis, ut supra innuimus): denique tria illa priora, quæ dixi-

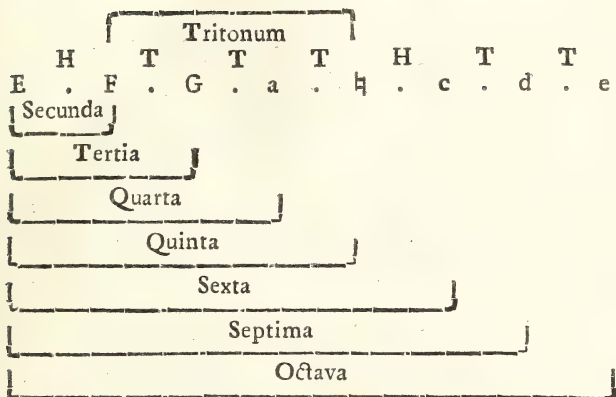
T. V. P. II. Bbb mus,

mus, *intervalla* iterantes, alteram *quartam* a prima per *tonum disjunctam* formarunt, sicque *octavam* compleverunt. Idque in sequenti tabula apparebit, in qua descripsimus etiam *rationes*, seu *proportioniones* inter unum gradum & alterum: qua de re animadvertendum est $384 : 192 = 2 : 1$, seu, quod eodem recidit, numeros 384, & 192 *intervallum* exprimere, quod *diapason*, sive *octava* vocatur.

Octava

	Hem.	Ton.	T	T	H	T	T							
E	$\frac{256}{243}$	F	$\frac{9}{8}$	G	$\frac{9}{8}$	a	$\frac{9}{8}$	h	$\frac{256}{243}$	c	$\frac{9}{8}$	d	$\frac{9}{8}$	e
384	:	$364\frac{1}{2}$:	324	:	288	:	256	:	243	:	216	:	192
	Quarta				Tonus				Quarta					
Disiunctionis.														

Intervallum, quod est in primo gradu inter E, & F, cujus primus terminus E est per se *relativus*, ut qui in *octava* basis est reliquorum omnium ad eum relatorum, ac propterea *fundamentalis* etiam dicitur; *intervallum*, inquam, quod est inter primum terminum E, & eum, qui proxime sequitur F, *secunda* dicitur: illud, quod est inter primum, & tertium, dicitur *tertia*; & sic deinceps ad ultteriores terminos pergens, eosque ad *fundamentalem* referens, habebis *quartam*, *quintam*, *sextam*, *septimam*, & tandem *octavam*; uti conspicitur in tabula, quæ sequitur, in qua præterea *intervallum* quoddam designatur valde spectabile tam apud veteres, quam apud recentiores, quod *tritonum* dicitur; ex tribus enim conficitur integris *tonis*.



Toto octavæ intervallo jam in sua media per Græcos diviso, ad unumquodque ex his mediis in duas species tribuendum se contulerunt, eadem per *diminutionem*, aut per *incrementum* alterantes. Hinc si in locum *limmatis*, quod etiam *secunda minor* dicitur, sufficiatur *tonus*, obtinebitur *intervallum* quoddam magis extensum, quod *secunda major* vocatur; si in locum duorum *intervallorum*, quorum unum est *hemitonium*, alterum *tonus* (quemadmodum requiritur, ut compleatur *trihemitonium*, sive *tertia minor*) substituantur duo integri *toni*, inveniatur *ditonum*, seu *tertia major*: si ad *limma* ipsius *diatessaron*, seu *quartæ*, quam ante exposuimus, *apotome* adjungatur, proveniet *diatessaron falsa*, seu *quarta alterata*, quæ vulgo *quarta major* dicitur, quæque, ut clarum per se est, ad *tritonum* revocatur: sin ipsi *diapente*, seu *quintæ*, quæ ex tribus constat *majoribus tonis*, & *limmate*, dematur *apotome*, sive *hemitonium majus*, vertetur ea in *quintam deficientem*, seu *semi-diapente*, aut *quintam*, quam *falsam* nominant. *Hexachordon*, quod *sexta* est, *majus* erit, si *quarta*, & *tertia majori* componatur; *minus* autem, si *tertia* fuerit *minor*; eademque ratione fiet, ut *tertia* ipsa modo *major*, modo *minor* ad *quintam* adjuncta efficiat modo *heptachordon majus*, seu *septimam majorem*, modo *heptachordon minus*, seu *septimam minorem*.

Non omnia, quæ adhuc recensuimus, *intervalla* eodem modo contulerunt Græci in unum tantum genus, at in duas veluti classes tribuerunt, quarum una est eorum, quæ *consona* sunt, altera eorum, quæ sunt *dissona*. Ad primam retulerunt tam *primitiva*, *quartam*, *quintam*, *octavam*, quam *replicata*, *undecimam*, *duodecimam*, *decimamquintam*, atque *triplicata*, *decimamoctavam*, *decimamnonam*, *viceſimamſecundam*. Ad alteram vero reliqua omnia, nempe *comma*; *hemitonium*, ſive *ſecundam minorem*; *tonum*, ſive *ſecundam majorem*; *tertiam minorem*, & *majorem*; *quartam alteratam*, ſive *tritonum*; *quintam deficientem*, ſeu *faſſam*; *ſextas*, & *ſeptimas* tam *minores*, quam *majores*.

Integer, abſolutuſque horum *intervallorum* apparatus, atque unumquodque eorum poteſt commode deduci ab inchoata duplici *progreſſione geometrica*, quam Plato propoſuit, modo eam ulterius protrahere velimus. Quam deductionem quis ſciat, niſi Deus, an aliquis forte Græcus Muſicus proprii, aut publici commodi cauſa tentaverit, atque etiam obtinuerit? Neque enim eorum, quæ doctiſſima illa natio ad commune emolumentum excogitavit, & in lucem protulit, aliud novimus, niſi id, quod paucis, iisdemque manciſ, & imperfectiſ monumentiſ continetur, quæ ad nos uſque pervenerunt. Binæ ſequentes tabulæ propoſitam rem demonſtrabunt; quarum quæ prima eſt, & trianguli quaſi ſpeciẽ præſert, ob oculos ponit duplicẽ *geometricam progreſſionẽ* protractam, *ſubduplam* ſcilicet ad legentiſ finiſtram, *ſubtriplam* vero ad dexteram: altera autem illa, quæ ante memoravimus, *intervalla* ex ordine deſcribit, alia quidem poſt alia pro ut nobiſ ſe ſe offerunt in binis illiſ *progreſſionibꝯ*.

A	
I	
B. 2. 3. X	
C. 4	
D. 8	9. Y
E. 16	
F. 32	27. Z
G. 64	81. aa
H. 128	
I. 256	243. bb
K. 512	729. cc
L. 1024	
M. 2048	2187. dd
N. 4096	
O. 8192	
P. 16384	6561. ee
Q. 32768	19683. ff
R. 65536	59049. gg
S. 131072	
T. 262144	177147. hh
V. 524288	531441. ii

- B: A. 2: 1. Octava.
X: A. 3: 1. Duodecima.
X: B. 3: 2. Quinta.
C: A. 4: 1. Decimaquinta.
C: X. 4: 3. Quarta.
D: A. 8: 1. Vicesimasecunda,
Y: A. 9: 1. Vicefimatercia.
D X. 8: 3. Undecima.
Y: D. 9: 8. Tonus.
E: X. 16: 3. Decimaoctava.
E: Y. 16: 9. Septima minor.
Z: E. 27: 16. Sexta major.
F: Z. 32: 27. Tertia minor.
G: aa. 81: 64. Tertia major.
H: aa. 128: 81. Sexta minor.
bb: H. 243: 128. Septima major.
I: bb. 256: 243. Limma, seu hemitonium minus.
cc: K. 729: 512. Quarta alterata, seu Tritonum.

dd: M. 2187: 2048. Apotome, seu hemitonium majus:
 L: cc. 1024: 729. Semi-diapente, seu quinta deficiens.
 ii: V. 531441: 524288. Comma.

At si qui forte inferre vellet, omnia, quæ a Græcis usurpata sunt, *intervalla* ex duabus *progressionibus*, *subdupla*, & *subtripla* repeti posse, ego sane non possem statim concedere. Etenim dabo quidem, *intervalla* omnia inde deduci, quæ soli *speciei* inserviunt, quæ *diatono-diatonica* dicitur, quæque prima est, ut quæ nobiscum nata, sicque omnium in *diatonico genere* antiquissima: at vero *genus* hoc ipsum *diatonicum* nonne habet *species* alias septem, quarum *intervalla*, si *consona* excipias, profecto a duabus propositis *seriebus* non deducuntur? Sed non huc solum spectat, quidquid musicus apparatus in hac re offendit, uti mox demonstrabo. Etiam *chromaticum genus* octo complectitur *species*, & quinque *genus enharmonicum*, quæ omnes ad *species diatonici generis* adjunctæ constituunt omnino *species* viginti & unam, quarum viginti *progressivo* illo *systemate* non comprehenduntur. Octo has *species*, quas modo aperio, quasque, nomine ab earum auctoribus ducto, placet vocare *systemata*, invexerunt, ut molestam uniformitatem declinarent, aut minuerent, avideque varietatem sequerentur, quam homines usque adeo requirunt in rebus omnibus: hocque convenerunt communi consensu, ut in iis perpetui, ac immutati manerent primus, & ultimus divisæ *quartæ* terminus ita ut solum variarent plus minusve sive per incrementum, sive per diminutionem terminos intermedios, contrahendo, aut producendo *intervalla*: ex quo eorum *substantiale* discrimen ortum est: cum enim de *quantitate* agitur, quod in ea omnino nititur, si ea mutetur, non potest non mutari.

Tabula, quam subjicio, omnes in aperto ponit *species quartæ* vario modo pro variis uniuscujusque *generis systematibus* divisæ; atque suam cujusque *gradus proportionem*, & *intervallorum* quantitatem profert.

Genus Diatonicum.

Prima species	
<i>Diatonico-Diatonum</i>	$\frac{256}{243} \times \frac{9}{8} \times \frac{9}{8} = \frac{4}{3}$
vetus, juxta Eratosthenem, & Ptolemaum.	256 : 243 : 216 : 192.
Secunda species	
<i>Diatonicum Architæ</i>	$\frac{28}{27} \times \frac{8}{7} \times \frac{9}{8} = \frac{4}{3}$
& Tonicum Ptolemai.	256 : 246 $\frac{6}{7}$: 216 : 192.
Tertia species	
<i>Diatonicum molle</i>	6 -+ 9 -+ 15 = 30
Aristoxeni.	256 : 243 $\frac{2}{3}$: 224 : 192.
Quarta species	
<i>Diatonicum intensum</i>	6 -+ 12 -+ 12 = 30
Aristoxeni.	256 : 243 $\frac{2}{3}$: 217 $\frac{2}{3}$: 192.
Quinta species	
<i>Diatonicum</i>	$\frac{16}{15} \times \frac{10}{9} \times \frac{9}{8} = \frac{4}{3}$
Didymi.	256 : 240 : 216 : 192.
Sexta species	
<i>Diatonicum molle</i>	$\frac{21}{20} \times \frac{10}{9} \times \frac{8}{7} = \frac{4}{3}$
Ptolemai.	256 : 243 $\frac{17}{21}$: 219 $\frac{9}{21}$: 192.
Septima species	
<i>Diatonicum intensum</i>	$\frac{16}{15} \times \frac{9}{8} \times \frac{10}{9} = \frac{4}{3}$
Ptolemai.	256 : 240 : 213 $\frac{2}{3}$: 192.
Octava species	
<i>Diatonicum æquabile</i>	$\frac{12}{11} \times \frac{11}{10} \times \frac{10}{9} = \frac{4}{3}$
Ptolemai.	256 : 234 $\frac{2}{3}$: 213 $\frac{2}{3}$: 192.

Genus Chromaticum.

Prima species	
<i>Chromaticum</i>	$\frac{28}{27} \times \frac{243}{224} \times \frac{32}{27} = \frac{4}{3}$
Archita.	$256 : 246\frac{6}{7} : 227\frac{135}{243} : 192.$
Secunda species	
<i>Chromaticum molle</i>	$4 - + 4 - + 22 = 30$
Aristoxeni.	$256 : 243\frac{1}{3} : 230\frac{2}{3} : 192.$
Tertia species	
<i>Chromaticum sesquialterum</i>	$4\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} + 21 = 30$
Aristoxeni.	$256 : 246\frac{2}{3} : 236\frac{2}{3} : 192.$
Quarta species	
<i>Chromaticum tonicum</i>	$6 - + 6 - + 18 = 30$
Aristoxeni.	$256 : 243\frac{1}{3} : 230\frac{2}{3} : 192.$
Quinta species	
<i>Chromaticum</i>	$\frac{20}{19} \times \frac{19}{18} \times \frac{6}{5} = \frac{4}{3}$
Eratosthenis.	$256 : 243\frac{1}{3} : 230\frac{2}{3} : 192.$
Sexta species	
<i>Chromaticum</i>	$\frac{16}{15} \times \frac{25}{24} \times \frac{6}{5} = \frac{4}{3}$
Didymi.	$256 : 240 : 230\frac{2}{3} : 192.$
Septima species	
<i>Chromaticum molle</i>	$\frac{28}{27} \times \frac{15}{14} \times \frac{6}{5} = \frac{4}{3}$
Ptolemæi.	$256 : 246\frac{6}{7} : 230\frac{2}{3} : 192.$
Octava species	
<i>Chromaticum intensum</i>	$\frac{22}{21} \times \frac{12}{11} \times \frac{7}{6} = \frac{4}{3}$
Ptolemæi.	$256 : 244\frac{4}{11} : 224 : 192.$

Genus Enharmonicum.

Prima species	
<i>Enharmonicum</i>	$\frac{28}{27} \times \frac{36}{35} \times \frac{5}{4} = \frac{4}{3}$
Architæ.	$256 : 246\frac{6}{7} : 240 : 192.$
Secunda species	
<i>Enharmonicum</i>	$3 - + 3 - + 24 = 30$
Aristoxeni.	$256 : 249\frac{2}{3} : 243\frac{2}{3} : 192.$
Tertia species	
<i>Enharmonicum</i>	$\frac{40}{39} \times \frac{39}{38} \times \frac{19}{15} = \frac{4}{3}$
Eratosthenis.	$256 : 249\frac{2}{3} : 243\frac{2}{3} : 192.$
Quarta species	
<i>Enharmonicum</i>	$\frac{32}{31} \times \frac{31}{30} \times \frac{5}{4} = \frac{4}{3}$
Didymi.	$256 : 248 : 240 : 192.$
Quinta species	
<i>Enharmonicum</i>	$\frac{46}{45} \times \frac{24}{23} \times \frac{5}{4} = \frac{4}{3}$
Ptolemæi.	$256 : 250\frac{10}{23} : 240 : 192.$

Jam vero hoc mihi fumo, ut unusquisque concedat, & quidem jure, si in *geometricis progressionibus subdupla, ac subtripla* non inveniatur, aut inveniri non possit alteruter, aut uterque terminus ejus *intervalli*, quod quæritur, non posse tale *intervallum* ab eisdem *seriebus* deduci. Atque hic, quo res clarior fit, *intervallorum terminos* in duas quasi species tribuo, alteram eorum, qui omnino sunt integri, alteram eorum, qui integri quidem sunt, sed *fractionem* adjunctam habent. Qui ad primam speciem referuntur, divisi semel, & iterum, & multoties per binarium, aut per ternarium, suas partes exhibent vel perfecte integras, vel cum aliqua fractione conjunctas. Si hoc, has partes ad secundam terminorum speciem revoco: si illud, vel ad aliquem *radicalem terminum* in alterutra *progressione* contentum divisione tandem devenio; vel non: si hoc; ergo *terminus* in iis *seriebus* locum non habet,

T. V. P. II. Ccc bet,

bet, nec habere potest. Quod si ipse sit *numerus integer*, at non iis seriebus contentus, aut saltem talis, ut ad eas per *radicales progressionis terminos* reduci queat, uti innuimus, erit idcirco ab eisdem exclusus; atque multo vero magis, quotiescumque conjunctus sit cum *fractione* aliqua, aut in *fractiones* resolvatur. Quod autem hujus indolis termini in musico apparatus occurrant plurimi, hoc meum nunc est demonstrare, ut scilicet inde concludatur, Græcorum *intervalla* e propositis seriebus frustra expectari omnia.

Sumamus primo numeros ex ordine productos ex *radicalibus omnium generum, specierumque terminis*. In *genere diatonico systema* Architæ habet terminum $246\frac{6}{7}$; *molle systema* Aristoxeni habet $243\frac{3}{5}$; ejusdemque *intensum* habet $217\frac{3}{5}$; *molle* autem Ptolemæi $243\frac{17}{21}$, & $219\frac{9}{21}$; ejusdemque *intensum*, & *æquabile* $213\frac{3}{5}$, & $234\frac{3}{5}$. In *chromatico* vero Architæ *systemate* occurrunt termini $246\frac{6}{7}$, $227\frac{135}{243}$: in *mollis*, atque in *tonico* tum Aristoxeni, tum Eratosthenis, ac Didymi occurrit terminus $230\frac{3}{5}$; in *sesquialtero* Aristoxeni termini $246\frac{3}{5}$, $236\frac{3}{5}$; in *mollis*, atque in *intenso* Ptolemæi $230\frac{3}{5}$, & $244\frac{4}{11}$. Habet denique *enharmonicum* Aristoxeni, & Eratosthenis terminum $249\frac{3}{5}$, Ptolemæi vero terminum $250\frac{10}{23}$. Atque hæc quidem, aliaque intervalla, quod quisque facile cognoscere potest, sic sunt, ut vel alteruter, vel uterque terminus *fractum numerum* habeat adjunctum. Sed ad integros omnino terminos veniamus.

In *genere diatonico-diatono* veteri terminus 216 per 2 divisus exhibet numerum 108, qui divisus per 2 exhibet 54; hic autem 27; at 27 per 2 divisus ad numerum deducit cum *fracto* conjunctum, nempe $13\frac{1}{2}$, ut propterea appareat, terminum 216 in *subdupla progressionem* locum habere non posse. Idem vero terminus 216 per 3 divisus præbet 72, qui rursus divisus per 3 præbet 24, hincque 8, is denique numerum $2\frac{2}{3}$, ut constet illum terminum 216 ne in *subtriplo* quidem *progressione* contineri. Atque eodem in *genere* terminus 192 per 2 iterum iterumque divisus tandem profert $1\frac{1}{2}$, divisus autem per 3, profert $21\frac{1}{3}$, qui numeri in neutra *progressione* occurrunt. Jam vero in *genere diatonico molli* Aristoxeni,

xeni, atque in *chromatico intenso* Ptolemæi terminus 224 divisus per 2 dat 112, isque numerus 112 dat 56, & 56 dat 28, & 28 dat 14, & 14 dat 7, qui numerus in *subdupla progressionem* locum non habet; nam divisus per 2 exhibet $3\frac{1}{2}$. Sed ne divisus quidem per 3 potest ille numerus 224 ad *progressionem subtriplam* referri, ut qui statim numerum cum *fractione* offert $74\frac{2}{3}$. Porro si terminum 240 in *genere diatonico, chromatico, & enharmonico* Didymi, atque in *enharmonico* Architæ ex æquo partiamur, prodit ejus pars *aliquota* 120, quam rursum si ex æquo partiamur, prodit 60, tum 30, tum denique 15, unde oritur $7\frac{1}{2}$. Quod si in tres æquas partes eundem terminum 240 tribuamus, obtinebimus 80, a quo numero per 3 divisio prodit $26\frac{2}{3}$, qui æque ac $7\frac{1}{2}$ in duabus illis *progressionibus* non invenitur. In *enharmonico* denique Didymi *genere* terminus 248 per 2 divisus dat numerum 124, isque numerum 62, is porro numerum 31, qui exhibet $15\frac{1}{2}$: divisus autem ille terminus 248 per 3 statim profert $82\frac{2}{3}$.

Quod si ipsos sumamus *radicales terminos* hac illac in tribus *generibus*, eorumque speciebus sparsos, mirum in quantos incidemus, qui per *radicales* illarum *progressionum* terminos divisi ad earum neutram, impediens fractionibus, referri nequeunt. Ne nimius sim, eos statim ob oculos hic pono, suntque 5. 7. 10. 11. 14. 15. 19. 20. 21. 22. 23. 28. 30. 31. 35. 38. 39. 40. 45. 46. 224. Illud ergo concedatur certum esse, Græcos *intervallis* usos per eos terminos expressis, ut non possent in *progressione geometrica* sive *subdupla*, sive *subtripla* locum habere, quæ propterea *intervalla* ex illis *progressionibus* deduci non poterant; quod erat demonstrandum.

Verum quidem est, ex *intervallis*, quæ apud Græcos usuvenerunt, nostris temporibus tria tantum superesse, quæ primitivis *consonantiis*, *quartæ*, *quintæ*, & *octavæ*, earumque *replicatis* respondent: at erit ne, qui inferre idcirco velit, intervalla, quibus recentiores utuntur, deduci ab illis *progressionibus* utique posse? Id potius statuatur, nihilo minus, immo eo magis impossibile esse, ut hæc nostra *intervalla* ad illas *progressiones* referantur, quo major est istorum numerus præ numero veterum. *Tertiæ*, & *sextæ* erant apud Græcos *dissonæ*, uti ostendimus: at nunc nobis opus sunt, modo sint *consonantes*; sicque nostrum musicum apparatus magna *intervallo-*rum ab iis profectorum copia augeat. Cum itaque *tertiæ*,

& *sexta* nostræ, atque Græcorum discrepent, efficiuntur similes, si Græcis unum *nostrum comma*, & nonnumquam etiam eo minus addatur, aut dematur: quæ additio, imminutioque *temperamentum* dicitur. At ideone fieri dicamus, ut hujusmodi *intervallorum* termini illis *progressionibus* circumscribantur? Sufficiat animum advertere ad *nostrum comma*, & quantum ipsum sit considerare, aut quanta sit tantula ejus pars, quæ addenda, vel demenda est; atque statim apparebit, rem multo aliter evenire.

Opus habet *recentior musica* sua *septima* tum *majori*, tum *minori*, quarum termini sunt 15:8, & 9:5. *Quinta falsa* indiget, & *quarta majori*: illius autem *proportio* est 64:45, atque hujus, in terminis quidem primis, 45:32. *Nostrum hemitonium minus* terminos habet 25:24; *medium* 135:128; *majus* 16:15; *maximum* 27:25; *diæsis autem enharmonicum recentiorum* 128:125; *comma* denique suam *proportionem* terminis definit 81:80. Longum esset singulos hos numeros examini subicere: quare sufficiat dixisse (idque tuto), utrumque quidem, aut certe alterutrum terminum eorum *intervallorum* in propositas *progressiones* conferri, salvis earum legibus, nullo modo posse.

Intervalla, quæ ad *Ala mi re fundamentale* referuntur, si *octavam* ex æquo in tot *hemitonia* tributam accipiamus, sunt duodecim, ut in sequenti tabula videre est.

Sumo unicum *intervallum* ab F ad G, quod *majori tono* continetur. Est hoc *intervallum* in quinque minora divisum, quorum terminos si in examen adducamus, duos tantum *radicales* in datis *progressionibus* inveniemus; reliquis enim iterum ac sæpius per 2, aut per 3 divisus, denique comperimus eorum partes cum *fractione* aliqua conjunctas esse. Terminus 25920 sub septimam divisionem per 2 exhibet $202\frac{2}{3}$, sub quintam autem per 3 dat $106\frac{2}{3}$: terminus 24884 sub tertiam per 2 exhibet numerum $3110\frac{2}{3}$, sub ipsam primam per 3 numerum $8294\frac{2}{3}$: terminus 24576 sub decimam quartam divisionem per 2 tandem profert numerum $1\frac{2}{3}$, sub secundam per 3 numerum $2730\frac{2}{3}$: terminus 24300 sub tertiam per 2 numerum $3037\frac{2}{3}$, sub sextam per 3 numerum $33\frac{2}{3}$: terminus 23328 sub sextam per 2 numerum $364\frac{2}{3}$, sub septimam per 3 numerum $10\frac{2}{3}$: denique terminus 23040 sub decimam per 2 numerum $22\frac{2}{3}$, sub tertiam per 3 numerum $853\frac{2}{3}$.

Sin autem ipsos acceperimus *radicales* earum proportionum *terminos*, qui præter eos, quos jam ante enumeravimus, sunt 25. 80. 2025, eosque iterum iterumque per 2, aut per 3 dividerimus, prodibunt pariter eorum partes *fractionibus* adjunctæ. Atque hic animadvertendum est, si in locum ipsius *Ala mi re* sumatur tamquam *fundamentale* alterum $\&A$, omnia ferme *intervalla* mutari, idemque contingere, quicumque terminus ab hisce, quos diximus, diversus adhibeatur tamquam primus; nullo autem modo umquam sperandum esse, ut res melius cedat. Quod cum ita sit, ponatur jam, si fas est, *recentiora musica intervalla* ab *subdupla*, & *subtripla geometrica progressionem* omnia deduci non posse.

At si aliæ adjungerentur *progressiones*, velut *subquintupla*? Res scilicet eodem semper recidet, idque præcipue propter *fractos numeros*, qui integris admiscentur, dum per divisionem ad *radicales terminos* contendimus. Præterquamquod etiamsi *fractos* non curemus, *subquintuplae progressionis* additione non omnes consequimur *radicales terminos*: adhuc enim desiderantur & 6, & 10, & alii complures: omninoque fieri facile potest, ut *intervallum* aliquod occurrat, hujusmodi, ut per quemcumque numerum dividantur ejus termini, horum unus tantum, & non alius ad illas *series* reducatur. Quod cum accidat, patet tale *intervallum* non posse ab iis *series* repeti. Uno denique isto modo fieri posse putarem, ut neglectis *fractionibus*,

ctis, omnia tuto *intervalla* tam *antiquorum*, quam *recentiorum* ab *geometricis progressionibus* obtinerentur, quæ eorum quidem terminos in se continerent: si nimirum omnes quotquot fingi possunt, *geometricæ series* acciperentur; vel si unusquisque cujusvis *intervalli terminus* tamquam *radicalis* in aliqua serie fumeretur. Quæ sane res non ita facile concedenda esset, utpote quæ eodem recideret atque sequens propositio: datis omnibus numeris integris possibilibus, statui possunt omnes *proportiones*, quæ inter ipsos inveniri queunt. Ecquis sit, cui non hæc hypothesis inopportuna videatur? Nos certe neque tantam *progressionum* multitudinem adoptabimus, neque eam hypothesim, quæ *fractos* non considerat: etenim qui asserat, omnia *recentioris musicæ intervalla* duci posse a *subdupla*, & *subtripla*, & si velis etiam a *subquintupla progressionem*, nequit porro in inductione, qua assertionem probare nititur, ab hypothesi ex parte recedere, atque mutare, aut invertere pro voluntate *progressiones*. Quod fecisse quidam videntur non sine aliqua eorum præceptorum offensione, quibus recte differendi ratio continetur: id enim earum *progressionum* identitas postulat, ut & termini iidem maneant, & eadem eorum inter se relatio.

Ecqua tandem erit tutissima ratio, quam sequi possimus, si quando quantitatem *intervallorum*, quibus *recentior* musica continetur, definire velimus, quæque ipsa per se sufficiat, a qua nihil propterea absit, ut ea sit, quæ merito normæ, & regulæ nomen sibi vindicare queat? Scilicet ipsa est *intervallorum divisio*, & *subtractio*, & *compositio*; a quibus quidem semper in promptu est, ut cum semel tamquam totius rei *basim*, & *fundamentum* illud *intervallum* posuerimus, quod *octavam* vocamus, completam absolutamque musicam supellestem derivemus.

Divisio ad octavam, ad *quintam*, & ad *tertiam majorem* contrahitur, quæ quidem consonantiæ sic exprimuntur 1:2, 2:3, & 4:5. Fac duplices *numeros* exprimentes *octavam*, habebisque 2, & 4, inter quos medius arithmeticus est 3. Facta serie 2.3.4, præsto tibi erit *quinta* in numeris 2, & 3, atque *quarta* in numeris 3, & 4. Duplicans extrema *quintæ*, habes 4, & 6, inter quos *numeros* si medium arithmeticum constituas 5, habebis in numeris 4, & 5 *tertiam majorem*, atque in 5, & 6 *tertiam minorem*. Duplicans denique

4, & 5 (*tertiæ majoris terminos*) efficiens numeros 8, & 10, quos inter si medium arithmeticum 9 colloces, extrema *majoris toni* obtinebis in numeris 8, & 9, *toni vero minoris* in numeris 9, & 10.

Subtractione utimur, dum minus *intervallum* a majore auferimus. Excessus autem hujus supra illud (qui *differentia* dicitur) *intervalla* exhibet, quæ sequuntur. Excessus *tertiæ ma-*

majoris supra *minorem hemitonium* minus affert $\frac{6 \times 5}{25 : 24}$. Excessus *tertiæ minoris* supra *tonum majorem hemitonium majus* præbet

$\frac{9 \times 8}{48 : 45}$. Eademque ratione excessus *hemitonii majoris* supra

minus profert *dieſis enharmonicum* recentiorum $\frac{25 \times 24}{384 : 375}$. Ex-

cessus *toni majoris* supra *minorem* gignit *comma recentiorum* $\frac{10 \times 9}{81 : 80}$. Ejusdemque *majoris toni* supra *hemitonium minus* ex-

cessus producit *hemitonium maximum* $\frac{25 \times 24}{216 : 200}$. Ac denique ex-

cessus *hemitonii maximi* supra *dieſis enharmonicum* suppeditat *hemitonium medium* $\frac{128 \times 125}{3375 : 3200}$; atque *dieſis enharmonici* su-

pra *comma* exhibet *comma minus* $\frac{129 \times 125}{10240 : 10125}$.

Neque superioribus operationibus minus fecunda intervallis est ea, quæ *rationum compositio* vocatur. Etenim si *tertiam majorem*, & *tonum majorem* simul componas, existet tibi

quarta major $\frac{5 : 4}{45 : 32}$; sin *quarta: n consonam*, & *hemitonium ma-*

jus quinta deficiens $\frac{4 : 3}{64 : 45}$, quæ *falsa* etiam dicitur. Compositio

tis

tis autem simul duobus tonis majoribus, & uno minore, tritonum habebis $18 \frac{81:64}{10:9}$, quod ad quartam majorem revocatur.

Porro ex quarta, & tertia minori simul compositis sexta minor

resultat $3 \frac{4:3}{6:5}$; ex quarta vero, & tertia majori sexta major

$4 \frac{5:4}{20:12}$; atque ex quinta, & tertia minori septima minor $2 \frac{3:2}{18:10}$

ac denique ex quinta, & tertia majori septima major $\frac{5:4}{15:8}$.

Igitur satis fidenter concludere posse mihi videor, omnia simplicia intervalla recentioris musicae ex tribus expositis operationibus deduci. Conclusio hæc jure ab ea, quam executi sumus, inductione sequitur, si modo animadvertatur eo, quem proposuimus, apparatu singula illa intervalla contineri. Quod ad reliqua attinet, quæ sunt supra octavam, scilicet composita, seu duplicata, triplicata &c., clarum, apertumque est, ex hujus & eorum, quæ ipsam subsequuntur, acutiorum intervallorum compositione methodo, quam paulo ante servavimus (quod idem & ad duplicem octavam, & ad quodcumque aliud majus intervallum transferendum est) totum integrumque musicum apparatus constitui posse, neque ullum esse in hac re modum.

Quæ omnia cum ita sint, jam constat principium a nobis propositum ad formandam feriem cujuscumque intervalli recentioris musicae certum, constantissimumque esse, quippe quod in arithmetiis certissimis operationibus nititur. Idemque est porro universale; ab eo siquidem tota absolutaque deducitur musica supellex, quin opus sit quidquam vel tantillum mutare. Est præterea commodum, & expeditum; sola enim aut divisione, aut subtractione, aut compositione totus eruitur musicus recentiorum apparatus. At non simplex est, sed multiplex: quid tum porro? neque vero amittet idcirco opportunitates tantas, quas habet præ tribus geometricis progressionibus, subdupla, subtripla, subquintupla; quarum quidem syste-

ma haberi nequit *universale*; pleraque enim & *veterum*, & *recentiorum intervalla* ab eo duci nequeunt, nisi *imperfecte*, quod eodem redit, ac si dicas ullo prorsus modo; ejusdemque præterea usus cum labore, & molestia conjunctus est; nam qui eo uti velit, ut accurata *intervalla* obtineat, modo addere, modo demere debet unum *comma* recentiorum, non numquam autem ab hoc ipso auferre, aut cum eo componere minorem aliquam particulam; quod quidem eo tandem redit, ut modo opus sit *compositione*, modo *subtractione*, quæ sunt ejus principii, quod nos statuimus, quasi partes.

Ergo hoc denique tamquam certum constituendum est, quippe quod, ut mihi quidem videtur, evidenter demonstratum est, non simplex illud (si modo ita appellare liceat, & tale revera ipsam sit) principiam, quod ad tres *geometricas progressionés*, *subduplam*, *subtriplam*, & *subquintuplam* simul junctas refertur; sed *distinctum* istud, & *divisum*, & *diversum*, & *multiplex* (sic enim nominavimus), quod refertur ad tres, quas diximus, *operationes*, *divisionem* scilicet, *subtractionem*, & *compositionem*, veram esse, universalem, & facilem omnium sive *veteris*, sive *nostræ musicæ intervallorum* originem; si una quidem excipiatur, quam supposuimus, *basis*, sive *fundamentum*, nempe *octava*, quemadmodum paulo ante innuimus.

Quamquam forte aliud etiam statui posset *systema*, quod interim neque aperio, neque profero, nec quale sit judicare volo, cum ejus vis, ac pretium a solutione pendeat sequentis problematis: *unica methodo seriem constituere ex diversis proportionibus compositam, quæ quinque genera participant, scilicet multiplex, superparticulare, superpartiens, multiplex-superparticulare, & multiplex-superpartiens*. Quam propositionem, cum fatis intelligam ad mathematicam provinciam pertinere, libentissime quidem, & merito iis doctissimis viris relinquo considerandam, qui in mathematicis disciplinis tutissime, & summa cum laude versantur.

JOSEPHI BENVENUTI.

De Lucensium Thermarum atmosphæra.

Perspectum vobis est, Sodales clarissimi, hominum temperiem pro cæli varietate variam esse, variam sanitatem ac vitam, mores etiam & morbos pro regionum varietate differre; Medicum idcirco maxime decere loci, quem inhabitat, naturam, atmosphære qualitates & alterationes, foli & aquarum indolem, exquisitè scrutari, ut in morborum curatione methodum climati respondentem inveniat, ægrisque mortalibus opituletur. Idipsum Veteres agnovere, Hippocratem sequuti, qui aeris constitutiones, ac medicaminum vires multis in regionibus exploravit, variaque itinera discendi causa suscepit. Talibus ego exemplis excitatus, e re futurum existimavi de Lucensium Thermarum atmosphæra aliqua scribere, tractanda suscepturus, quæ nemo antea pertractavit.

Corfensæ pagus, qui Lucensium Thermarum nomine venit, quindecim milliarium intervallo septentrionem versus ab urbe Luca distinctus, sub longitudine graduum viginti & octo, ac minorum quinquaginta, latitudine vero graduum quadraginta quatuor, in colle situs est. Tribus ex partibus a montibus, quibus circumcingitur, satis distans, septentrionem versus cum illo conjungitur, qui *Contronis* nuncupatur. Vallis & planities hac eadem ex parte jugo subest, nobilibus adibus ornata, prope quam *Limæ* flumen rapido motu excurrit, quod cum torrente altero *Camalionis* vocato, clivi radices ab occasu alluente, binorum ad milliarium distantiam, meridiem versus, in *Auferim* illabitur.

Corfensæ collis altitudinem metiri exoptans, Scheuchzeri methodo usus sum in Anglicanis transactionibus descripta, utpote quæ a celebri Auctore trigonometrica præstantior declaratur. Bina igitur, cum ampla tubi cavitate, tum hydrægyri altitudine perfecte convenientia barometra, unum in collis

cacumine, alterum in imo locavi, hac adhibita cautione, ut eodem adamussim tempore dum ego unum inspicerem, alterum Amicus observaret. Compertum inde habuimus hydrargyrum in barometro, quod in monticuli apice positum erat, ad parisinos pollices viginti septem, lineasque undecim ascendisse; ad clivi radicem, pollices viginti octo, lineas duas, cum quarta parte decimali, indicasse. Trium igitur linearum, cum quarta decimali disparitas fuit: singula autem linea cum ex laudato Scheuchzero unum, & septuaginta parisinos pedes indicet; patet hinc altitudinem Corfenæ collis bis centis triginta sex circiter pedibus æqualem esse. Ut vero ejusdem celsitatem supra mare, (quod recta, duodecimo circiter lapide a Lucensibus thermis distat) exploratam haberem; iisdem instrumentis, iisdemque cautionibus, tam in pago nostro, quam prope maritimum Viaregii littus, sereno utrobique cælo, eodemque spirante vento, tentamen iteratum est, ex quo facile cognovi, Corfenæ vallem quingentis quadraginta circiter pedibus supra Viaregii oras extolli.

Satis ex hinc patet, Academici sapientes, Lucensium thermarum aerem tenuem, levem, nitidum ac purum esse, nimia tamen subtilitate haud ita præditum, ut cum eo, quem in Alpibus inspiramus, æquiparari queat. Ejus tenuitas demonstratione non indiget, quo enim magis atmosphærae altitudo crescit, eo levior ac tenuior evadit; sin vero decrescat, ponderosior & crassior fit. Corfenæ autem in pago, haud mediocrem atmosphærae altitudinem barometrum ostendisse animadvertimus. Prout autem aer magis vel minus ponderat, corpora inde diversimode afficiuntur; compertum enim vobis est, humani corporis partem quadrato parisino pedi æqualem, ita ab atmosphæra comprimi, veluti si a triginta duorum circiter pedum cubicorum aquæ pondere premeretur; cubicum autem aquæ pedem, septuaginta tres fere gallicas libras pondo æquare; spatium hinc quadrati pedis in humani corporis superficie, trecentum triginta sex supra bis mille libras sustinere. Etenim $73 \times 32 = 2336$. Quot ergo quadratis pedibus humanum corpus contabit, toties descriptum pondus sustinebit. Mediocris Viri statura, quindecim pedum statuitur; in hoc igitur aeris pressio triginta quinque millibus, & quadraginta libris æqualis erit, cum $2336 \times 15 = 35040$. Quamquam humanum corpus, ut satis constat, diversimode premitur juxta

varias mercurii altitudines in barometro, unde nil mirum, si atmosphæræ variationibus tam notabiles, in hypocondriacis præcipue, commotiones excitentur. At de atmosphæræ gravitate satis. Cæteras qualitates examinabo.

Purum tunc dicimus aerem, cum adventitiis infalubribus corpusculis, animata ea sint, vel inanimata, scaterere haud deprehendimus. Noster profecto nullimode infici potest, cum a solo & aquis nullum infectum halitum promanare timendum sit. Nulla hic stagnantium aquarum fœditas, nullus hic specus, nullæ cavernæ; nulla ex vegetabilibus, animantibus, aut mineralibus prava miasmata; nullæ ex fatentibus artibus exhalationes promanant; quin potius incolæ atmosphæram fragrantium florum, & salubrium herbarum effluviis odoratam hauriunt, quæ spiritus recreat, blandam sanguini temperiem conciliat, hilaris mentis, vegetique corporis procreatrix. Solum ipsum non pingue, sed fabulosum, minus agrorum votis respondens, crassis oleosisque halitibus nequiquam nocet. Accedunt & saluberrimi thermalium aquarum vapores, haud sulphurei, vel bituminosi, sed neutro sale, martiali itidem ochra scatentes, humano corpori amicissimi, ut edito haud ita pridem scripto demonstravi.

Roris etiam analysis de saluberrima soli nostri natura certiore me fecit. Ex Boethaavio etenim, & Arbuthnossio didiceram substantiis illis rorem imbui, quibus humus, unde oritur, abundat, ejus propterea analysim pro potiori methodo habendam fore, qua soli quovis in loco indoles referetur. Ne tædeat rogo, Sodales, si quæ hac de re tentamina institui, vobiscum conferam.

Super pratam Villensibus thermis proximum, nocturno æstivoque tempore, alba strophiola subtilissimæ texturæ expansa reliqui, suspensa tamen, ac siccis baculis filo alligata, ut satis ab illis, ac subjectis herbis distarent, ne forsan ab earum contactu diversam ros indueret naturam; antequam vero sol surgeret, rorem expressi, sal ab evaporatione illi non ab simile relinquentem, quod a thermalibus aquis extrahitur, ex tenuibus scilicet, albidisque crystallis, ad prismaticam figuram proxime accedentibus, conflatum. Magna vero me tenuit admiratio, cum ad tercentum circiter passuum ab ipsis thermis distantiam in Corsenæ planitie, periculum ea plane methodo iterassem; rorem etenim obtinui inodorum, insipidum, fluidi-

diffimum, nec falis miculam ab evaporatione relinquentem; Curiositate motus, pluries experimentum repetebam, chemicis periculis quamplurimis in usum vocatis; compertum tandem habui rorem prope thermas ejusdem semper naturæ decidere, quod ab aquarum vaporibus fieri autumabam: alibi non ita: quem enim in planitie collegi, alias insipidum, interdum salino sapore præditum, neutro sale plus minus saturatum, deprehendi. Cujus rei causa ab effluviis mutabili natura fortasse pendebat, quæ continuo in atmosphæram eversa, sali acido primigenio uniuntur; magis vero alcalica ealia sublevantur, cum ab æstivo sole arefacta tellus vapores emittit, eis propemodum similes, qui ex calcinatis lapidibus, vel coctis lateribus promanant. Rusticos tunc, delicatulas præsertim fœmellas, interdum vidi pedum rubore ac pruritu vexatas, postquam super solum rore madidum discalceatæ ambulassent.

Vitrea septem vascula, quæ æqualem roris dosim sub diverso cœlo collectum recipiebant, bene clausa, solaribus valde fervidis radiis exposui, quemque paludosis ex locis collegeram, septima die corruptum, ac vermibus inquinatum vidi. In duobus insuper vasculis, quæ rorem saluberrimis in regionibus delapsum continebant, vermiculos duodecima die, nudis oculis, conspexi. Quem autem ros cætera vascula excipiebant, tardius putrefactus est, neque infecta exhibuit, utut in superficie viridescens materies, musco perquam similis, adparuisset. Fœtidus erat ros in singulis vasculis, ille vero magis, in quo vermes oborti sunt.

Ad aeris itidem puritatem libera ventorum perflatio conducit; de his propterea, cardinalibus nempe, obiter verba faciam. Ventus ab oriente spirans, vernali & æstiva tempestate, siccom apud nos ac serenum cælum ut plurimum sequitur; hiemali vero tempore, frigus, nivesque producit. Auster, seu meridionalis, calidus & humidus, facile pluvias infert; si vero non inferat, sensibilem secum humiditatem vehit humano corpori noxiam. Raro Corfenæ cælum australibus hisce ventis perflatur, ut ex adjuncta meteorologica tabula colligitur. Occidentalis seu Zephyrus, plerumque quidem siccus, sæpius in pago nostro æstivo tempore spirare solet. Aquilonaris siccus & frigidus, hiemali tempestate facile, vehementerque perflando, ingentem in atmosphæra commotionem excitat.

Aer igitur roster ventorum impulsu agitatus infici nequit, ut stagnanti contingeret; nec aliunde a ventis, malignis halitibus onustis inquinabitur, quod nulla extent suspecta loca, quæ duodecim fere milliarium intervallo a Lucensibus thermis non absint: tamen si vero cominus existerent, interjectis præcipue montibus, minime nocitura forent, ut rationibus & exemplo demonstrarunt Varenius (a), & Lancisius (b). Rapidus insuper binorum fluminum motus, quæ ad Collis ima excurrere diximus, atmosphæræ agitationi plurimum conducit.

Insalubris quoque fit aer, nisi a solaribus radiis satis calefiat, æque vero si nimio æstu incalescat. Clarissimus Halleyus caloris a sole provenientis quantitatem in Anglicanis transactionibus (c) determinavit; neque tamen ego celebris viri methodum imitatus fui, ut Corsenæ cæli calorem deprehenderem; thermometro potius tentamina institui, quibus compertum habui, Lucensium thermarum incolas æstivo temperato calore frui, neque aspero nimis frigore hiemali tempestate vexari.

Sunt qui humiditate nimia Corsenæ cælum scaterere crediderint, quod ibi aliquando aura ferotina decidat. An vero ex ejus defluxu benigna aeris temperies labefactari queat, judicabitis vos, doctissimi Sodales, qui optime intelligitis a relabentibus hisce vaporibus neque saluberrima loca immunia esse; docuit enim Boerhaavius tellurem a solaribus radiis calefactam, millies diutius, quam aer, calorem retinere; ex ejusdem hinc superficie vapores exhalare pergunt a solis æstu commoti, etiam aere frigescente ab ejus occasu; non igitur atmosphæræ culpa, sed a sole potius magis minusve terram irradiante, major vel minor auræ ferotinæ copia repetenda erit. In regionibus porro saluberrimo aere ditatis, uberior contingit vaporum defluxus, eo præsertim tempore, quo solis radii, magis ad perpendicularem lineam accedentes, diutius terram percutiunt. Soli & atmosphæræ qualitates aura ferotina sequitur, ibique noxiam experimur, ubi illa sunt infecta.

Aquosis effluviis Corsenæ cælum minime abundare, præter hygrometrum, vulgares experientiæ confirmant. Alkalica fixa salia parum aeri exposita madescunt; vestes in scriniis diutius clausis repositæ, mucosæ non fiunt, nec lintea humida;

li-

(a) *G. ograph. gen. pag. m. 249.*(b) *De Silv. Cister. Consil. num. 5.*(c) *An. 1693.*

ligna albicanti mucore haud obducuntur; charta etiam & libri omnino ficci fervantur; neque vasa stannea maculis quibusdam vix delendis inquinantur, sicuti udis in locis contingere observamus. Vapores insuper in montium nostrorum cacumine minime condensantur, ut in alpebus evenire animadvertimus.

Salubre omnino ac temperatum Lucensium thermarum cælum, præter jam dicta, demonstrant insectorum quorundam absentia; aquarum bonitas, tam hydrostatica lance, quam chemicis tentaminibus explorata; solum aromaticis plantis redundans; optimus incolarum color, qui suavibus moribus, acricque ingenio præditi sunt; vernaculi morbi per se nulli, eorundemque incolarum longavitas, quæ interdum ad nonagesimum annum protrahitur.

Quoad meteora, nihil de his peculiare animadverti, quod eodem plane modo in reliquis Etruriæ locis haud adpareat. Satis de ventis & aura ferotina dixi. Tonitrua hieme præsertim audiuntur, eaque non levia. Lumen boreale haud infrequens est. Pluvia sæpius, procella rarius oritur, tunc vero australi vento perflante. Quotannis fere utut aqua in glaciem coeat, nivæque cadant, citius tamen quam in Urbe liquefcunt.

Meteorologicam hic tabulam adjeci, ut omnino res ipsa postulat; quæ vero ad ejus explicationem attinent breviter attingam. Hydrargyri in barometro media altitudo Corsenæ in valle, ubi domus mea sita est, pollices parisienses viginti septem lineasque octo adæquat. Thermometrum hydrargyro repletum, ad Bülfingeri mentem constructum, scalam, sive graduum numerationem juxta Reaumurii methodum conjunctam habet. Hygrometrum cæteris præstantius, ex cannabina chorda valde retorta confeci. Eam in calido furno reliqui, donec ita exsiccata foret, ut facile, si extenderem, disrumpetur. Tunc vitreo tubo inferui, cujus in superiori parte, acicula transversim per chordam adacta, spongiam aqua madidam introduxi, quæ guttatim eam humectaret, donec plumbeum stylum, inferiori chordæ parti extra tubum productæ alligatum, haud ultro se contraheret, ac in gyrum verteret, sed spongia semota extenderetur. Compertum sic habui chordæ variationes intra pollicum trium, linearumque novem spatium, contigisse, hinc in quadraginta partes, sive gradus divisi. Hygrometrum sic satis mobile, faciliusque comparabile obtinui,

nui, eo siquidem magis, si chordam sæpius renovarem; temporis enim decursu, sensibiliter minus moveri animadverti.

Pluviæ quantitatem ut detegerem, cylindrico vase figulino, vitrea interius crusta obducto usus sum, aperto aeri exposito, cujus diameter gallicum pedem, quatuorque pollices æquabat. Cessante pluvia, pondus delapsæ aquæ, potius quam mensuram, in meteorologica tabula adnotabam.

Ventorum directionem anemoscopium supra excelsam Parochialis Ecclesiæ sacram turrim positum, ostendebat. Horum autem vis sensuum auxilio statuta est. Ventorum columna numeris vacua, tranquillum aerem indicat; quæ vero numero unitatem designante notata est, placidam atmospheræ agitationem: quæ secundo numero mediam; quæ tertio maximam ostendit.

Barometrum, Thermometrum, & Hygrometrum, in Xysto, qui occidentem respicit, locata sunt. Quotidie vero meridianis horis eorum variationes observabam; observationes vero ab ineunte mense Majo Anni 1762 usque ad exitum Aprilis Anni 1763 perduxi.

Hæc habui quæ differerem, Sodales clarissimi, neutiquam ejusmodi, ut vestræ, & hujus loci dignitati respondeant. Dixi quæ potui, non quidem ut volui, sed quantum intellectus tenuitas permisit.

S E Q U I T U R
M E T E O R O L O G I C A T A B U L A
I N Q U A

*Lucensium Thermarum atmospheræ variationes
quotidie per annum adnotatæ sunt.*

JANUARIUS.

Dies	Barometrum	Thermometrum	Hygrometrum	Ventus	Tempeſtas	Pluvia
	Poll. lin.	Grad. part.	Grad. part.	direct. vis		
I.	27. 10.	5. calor.	20.	5. W. 2.	ſubnubila	per hunc mentem delapia, libras triginta, & uncias quinque pondere aquavit.
II.	27. 11.	3 $\frac{2}{3}$.	21 $\frac{1}{2}$.	W. 1.	ſubferena	
III.	27. 10.	3.	21.	W.	ferena	
IV.	27. 8.	4 $\frac{1}{2}$.	22 $\frac{2}{3}$.	5. W. 1.	nubila pluvia	
V.	27. 8.	5.	23.	5. W. 2.	ſubnub. ſubfer.	
VI.	27. 10.	4 $\frac{2}{3}$.	20 $\frac{2}{3}$.	W.	ferena	
VII.	27. 11.	4 $\frac{1}{2}$.	19.	W. 1.	ſubnub. ſubfer.	
VIII.	28. 1.	4.	25 $\frac{2}{3}$.	W.	ferena	
IX.	28. 1.	5.	22 $\frac{1}{2}$.	5. W. 2.	ſubferena	
X.	28. 3.	5.	25.	5. W. 1.	ſubferena	
XI.	28. 5.	4 $\frac{1}{3}$.	22.	E. 1.	ferena	
XII.	28. 4.	4.	19 $\frac{2}{3}$.	E. 1.	ferena	
XIII.	28. 6.	3 $\frac{1}{2}$.	19.	E. 1.	ſubferena	
XIV.	28. 8.	3.	17 $\frac{1}{2}$.	N. E. 2.	ferena	
XV.	28. 2.	2.	15.	N. 3.	ferena ſubnub.	
XVI.	27. 11.	5 $\frac{1}{3}$.	17.	S. 1.	nubila ferena	
XVII.	27. 7.	8.	21 $\frac{1}{2}$.	S. E.	nubila	
XVIII.	27. 7.	7.	21.	S. E. 3.	pluvia nubila	
XIX.	27. 5.	4 $\frac{1}{2}$.	24 $\frac{2}{3}$.	S. 2.	pluvia	
XX.	27. 8.	4.	26.	S. W. 1.	ſubnubila	
XXI.	27. 10.	3 $\frac{2}{3}$.	23 $\frac{1}{2}$.	W. 1.	ſubferena	
XXII.	27. 8.	3.	22.	W. 1.	ferena	
XXIII.	27. 9.	2 $\frac{2}{3}$.	17.	W. 1.	ferena ſubfer.	
XXIV.	27. 9.	1.	15 $\frac{1}{2}$.	W. 1.	ferena	
XXV.	27. 11.	0.	15.	N. W. 1.	ferena	
XXVI.	28.	1. frigor.	14 $\frac{2}{3}$.	N. W. 2.	ſubnub.	
XXVII.	28. 2.	1 $\frac{1}{2}$.	16.	W. 2.	ferena	
XXVIII.	28. 3.	1 $\frac{1}{2}$.	13 $\frac{2}{3}$.	N. 3.	ferena	
XXIX.	28. 3.	2 $\frac{1}{3}$.	17.	N. 3.	ſubferena	
XXX.	28. 4.	1.	18.	N. W.	ſubnubila	
XXXI.	28. 2.	0.	14 $\frac{1}{2}$.	N. E. 2.	nix pluv. ſubn.	

FEBRUARIUS.

Dies	Barometrum	Thermometrum	Hygrometrum	Ventus	Tempeſtas	Pluvia
I.	Poll. lin. 28. 6.	Grad. part. $1\frac{1}{2}$. calor.	Grad. part. $16\frac{1}{3}$.	direct. vis N. W. I.	ſubferena nubila	per hunc menſem delapia, ſexdecim libras, & uncias tres pondo aquavit.
II.	28. 4.	0.	16.	W. 3.	ſubnub. ferena	
III.	28. I.	0.	16.	W. 2.	ſubferena	
IV.	28. I.	I. calor.	$14\frac{1}{2}$.	W.	ſubnubila	
V.	28.	3.	$15\frac{1}{2}$.	S. W. I.	nubila	
VI.	28.	3.	17.	N. W. 3.	ſubnub. ferena	
VII.	27. 10.	3.	18.	W.	ſubferena	
VIII.	28. 7.	$3\frac{1}{2}$.	$18\frac{2}{3}$.	S. W. 2.	nubila	
IX.	28. 5.	5.	19.	N. W. I.	ferena nubila	
X.	28. I.	4.	$16\frac{1}{2}$.	S. W. 2.	nubila	
XI.	27. 10.	5.	$20\frac{1}{2}$.	S. W. 2.	ſubnub. ſubfer.	
XII.	27. 8.	5.	$20\frac{1}{2}$.	S. W. 2.	nubila ſubfer.	
XIII.	27. 10.	$6\frac{1}{2}$.	23.	S. W. 2.	nubila pluvia	
XIV.	27. 5.	$8\frac{1}{2}$.	26.	S. E.	pluvia	
XV.	27. 6.	6.	$27\frac{1}{2}$.	S. W. I.	nubila pluvia	
XVI.	27. II.	$3\frac{1}{3}$.	26.	N. W. I.	ſubferena	
XVII.	28. 2.	3.	$22\frac{1}{3}$.	N. 2.	ferena	
XVIII.	28.	3.	18.	N. 3.	ferena	
XIX.	28.	3.	$16\frac{1}{2}$.	N. 2.	ferena	
XX.	28. I.	4.	16.	N. W. I.	ferena	
XXI.	27. II.	6.	$16\frac{1}{2}$.	W. I.	ſubferena	
XXII.	27. 9.	6.	18.	S. W.	nubila	
XXIII.	27. 4.	6.	22.	S. W.	nubila ſubfer.	
XXIV.	27. 7.	6.	$20\frac{2}{3}$.	S. 2.	ſubnubila	
XXV.	27. 7.	$6\frac{1}{2}$.	$22\frac{1}{2}$.	S. I.	ſubferena	
XXVI.	27. 10.	6.	24.	S.	ſubnub. ferena	
XXVII.	27. 8.	7.	24.	S. W. 2.	ſubferena	
XXVIII.						

M A R T I U S .

Dies	Barometrum	Thermometrum	Hygrometrum	Ventus	Tempeſtas	Pluvia
	Poll. lin.	Grad. part.	Grad. part.	direct. vis		
I.	27. 11.	7.	24.	S. I.	fubferena	per hunc menſem delapſa , libras viginti & octo , ſeptemque uncias pondo æquavit .
II.	27. 7.	8½.	26½.	S. E.	nubila pluvia	
III.	27. 5.	9.	26⅔.	S. E.	pluvia	
IV.	27. 8.	7½.	26⅔.	S.	nubila	
V.	27. 10.	8¾.	25.	E. 2.	fubferena	
VI.	27. 11.	9⅓.	23.	E.	ferena	
VII.	27. 11.	9¾.	21½.	E.	fubferena	
VIII.	28.	8¾.	19.	E. 2.	fubferena	
IX.	27. 10.	6.	19.	N. W. I.	nubila ferena	
X.	27. 8.	6.	16½.	N. W. I.	ferena	
XI.	27. 7.	4½.	18.	E. 3.	nubila pluvia	
XII.	27. 7.	4.	16.	N. E. 2.	nubila pluvia	
XIII.	27. 9.	3.	18⅓.	E.	nebula pluvia	
XIV.	27. 7.	5.	19.	S. 2.	fubnubila	
XV.	27. 6.	8.	22½.	S. E.	nubila	
XVI.	27. I.	9½.	25⅓.	S. E. 3.	nubila pluvia	
XVII.	26. 10.	11.	28.	S. E. 3.	nubila pluvia	
XVIII.	27. 2.	11½.	29.	S. W. 2.	fubferena	
XIX.	27. 7.	9.	28.	W.	ferena	
XX.	27. 10.	6½.	24½.	W.	fubnubila	
XXI.	27. 11.	7.	21⅔.	W.	ferena fubfer.	
XXII.	27. 9.	8½.	20.	S. W. 2.	fubferena	
XXIII.	27. 8.	8½.	20.	S.	nebula nubila	
XXIV.	27. 9.	8.	18½.	N. W.	fubferena	
XXV.	27. 11.	8½.	17⅔.	N. W. I.	ferena	
XXVI.	27. 11.	9.	17.	N. W.	fubferena	
XXVII.	27. 11.	8.	17.	N. E.	ferena	
XXVIII.	28. I.	7½.	16⅓.	E. I.	fubferena	
XXIX.	28. 3.	9.	16⅓.	E.	ferena	
XXX.	28. I.	8.	15.	N. 2.	ferena	
XXXI.	28. I.	8.	15.	N. 3.	ferena	

A P R I L I S.

Dies	Barometrum		Thermometrum		Hygrometrum		Ventus		Tempestas	Pluvia
	Poll. lin.	Grad. part.	Grad. part.	Grad. part.	direct. vis					
I.	28.	3.	9 $\frac{1}{2}$.	15.	W.	I.			subferena	per hunc mensem delapsa, libras trigintaquinque pondi aquavit.
II.	28.	3.	9 $\frac{2}{3}$.	15.	W.	I.			nubila subfer.	
III.	28.	1.	9.	15.	W.	I.			ferena	
IV.	28.	3.	9.	14 $\frac{1}{2}$.	N.				ferena	
V.	28.	5.	9.	14.	N.				ferena	
VI.	28.	2.	11.	14 $\frac{1}{2}$.	S. W.	2.			ferena subnub.	
VII.	28.		12 $\frac{1}{2}$.	16.	S.				nubila subfer.	
VIII.	27.	9.	14.	19.	S.				pluvia, nub.	
IX.	27.	10.	10 $\frac{1}{2}$.	18 $\frac{1}{2}$.	N. W.	2.			subferena	
X.	27.	10.	10.	16 $\frac{2}{3}$.	N. E.	I.			ferena	
XI.	27.	11.	9.	16.	E.				subnub. ferena	
XII.	27.	11.	10 $\frac{1}{2}$.	15 $\frac{2}{3}$.	E.	I.			ferena	
XIII.	27.	11.	10 $\frac{1}{2}$.	15.	E.				ferena	
XIV.	27.	11.	10.	14 $\frac{1}{2}$.	N. E.	I.			ferena subfer.	
XV.	28.	I.	9 $\frac{1}{3}$.	14 $\frac{1}{2}$.	N. E.				ferena subfer.	
XVI.	28.	2.	10 $\frac{2}{3}$.	13 $\frac{2}{3}$.	N. E.	I.			subferena	
XVII.	28.	2.	10.	13.	W.				subferena	
XVIII.	28.		9 $\frac{1}{2}$.	14 $\frac{1}{2}$.	W.				subferena	
XIX.	27.	10.	10.	15 $\frac{2}{3}$.	S. W.	I.			nubila ferena	
XX.	27.	9.	10.	15 $\frac{1}{2}$.	S. W.				nubila subfer.	
XXI.	27.	9.	10.	15.	W.	I.			subferena	
XXII.	27.	10.	10.	15.	W.	I.			ferena	
XXIII.	27.	11.	9 $\frac{2}{3}$.	14.	W.				ferena	
XXIV.	28.	3.	9.	14.	N.				ferena	
XXV.	28.	5.	9.	14.	N.				ferena subfer.	
XXVI.	28.	2.	10 $\frac{1}{3}$.	13 $\frac{1}{3}$.	N. W.	2.			subferena	
XXVII.	28.	2.	10 $\frac{2}{3}$.	13.	W.	I.			ferena	
XXVIII.	28.		10 $\frac{2}{3}$.	13 $\frac{1}{2}$.	S. W.	2.			subferena	
XXIX.	27.	9.	12.	15.	S.				nubila pluvia	
XXX.	27.	6.	12 $\frac{1}{2}$.	18.	S.				pluvia nub.	

M A J U S .

Dies	Barometrum	Thermometrum	Hygrometrum	Ventus	Tempeſtas	Pluvia
	Poll. lin.	Grad. part.	Grad. part.	direct. vis		
I.	27. 10.	10 $\frac{2}{3}$.	17 $\frac{2}{3}$.	E. I.	ferena	per hunc menſem delapſa libras quadraginta duo pondo æquavit.
II.	27. 9.	10 $\frac{2}{3}$.	16 $\frac{2}{3}$.	N. E.	ferena	
III.	27. 7.	9 $\frac{2}{3}$.	16 $\frac{1}{2}$.	N. W. I.	ſubferena	
IV.	27. 6.	10.	16 $\frac{2}{3}$.	W.	nubila ſubfer.	
V.	27. 6.	10.	17.	S. W. 2.	ſubnubila	
VI.	27. 4.	10 $\frac{1}{3}$.	17 $\frac{2}{3}$.	S. W. 2.	ſubnubila	
VII.	27. 5.	12.	18 $\frac{2}{3}$.	S. W. 2.	nebula ſubfer.	
VIII.	27. 5.	12 $\frac{2}{3}$.	18 $\frac{1}{2}$.	W. I.	ferena ſubnub.	
IX.	27. 3.	12.	19.	W. I.	nubila nebula	
X.	27. 3.	12 $\frac{2}{3}$.	20 $\frac{1}{2}$.	S. I.	nubila pluvia	
XI.	27. 5.	13 $\frac{1}{3}$.	23.	S. I.	pluvia ferena	
XII.	27. 4.	12.	23.	W.	ſubferena	
XIII.	27. 4.	11 $\frac{2}{3}$.	23.	S. W. 2.	nubila ſubfer.	
XIV.	27. 6.	12.	21.	W.	ſubfer. ferena	
XV.	27. 7.	12 $\frac{2}{3}$.	18 $\frac{1}{2}$.	N. W. I.	ferena	
XVI.	27. 7.	13.	18 $\frac{2}{3}$.	N. E. 2.	nubila	
XVII.	27. 7.	13 $\frac{1}{3}$.	18.	N. E.	nubila	
XVIII.	27. 7.	12 $\frac{2}{3}$.	17 $\frac{2}{3}$.	E. 2.	pluvia nubila	
XIX.	27. 8.	12 $\frac{2}{3}$.	17 $\frac{1}{3}$.	E. 2.	nubila ſubfer.	
XX.	27. 7.	13 $\frac{2}{3}$.	17.	E. I.	ſubfer. ferena	
XXI.	27. 8.	12 $\frac{1}{2}$.	16 $\frac{2}{3}$.	E. I.	ſubferena	
XXII.	27. 7.	12 $\frac{1}{2}$.	16.	N. W. I.	ſubnub. ſubfer.	
XXIII.	27. 8.	13 $\frac{2}{3}$.	16.	N. W. 2.	ferena ſubnub.	
XXIV.	27. 9.	13 $\frac{1}{2}$.	16.	N. W.	ferena ſubnub.	
XXV.	27. 9.	13 $\frac{2}{3}$.	15 $\frac{1}{2}$.	W. I.	ſubnubila	
XXVI.	27. 9.	13 $\frac{2}{3}$.	16 $\frac{1}{3}$.	W. I.	nubila ſubfer.	
XXVII.	27. 8.	13 $\frac{1}{2}$.	17.	W. I.	ſubferena	
XXVIII.	27. 9.	13.	17 $\frac{1}{2}$.	W. 2.	ſubferena	
XXIX.	27. 7.	13 $\frac{2}{3}$.	17.	W. I.	ſubferena	
XXX.	27. 6.	14 $\frac{1}{2}$.	19.	S. W. 3.	nubila	
XXXI.	27. 5.	14 $\frac{2}{3}$.	21.	S. 2.	nubila	

J U N I U S.

Dies	Barometrum	Thermometrum	Hygrometrum	Ventus	Tempeftas	Pluvia
	Poll. lin.	Grad. part.	Grad. part.	direct. vis		
I.	27. 8.	15 $\frac{1}{2}$.	19 $\frac{1}{2}$.	S. W. 2.	subfer. subnub.	per hunc mentem delapfa, libras viginftres, & uncias novem pondo aquavit.
II.	27. 7.	16.	19.	W. 1.	ferena	
III.	27. 7.	16.	17.	W. 1.	ferena	
IV.	27. 7.	16 $\frac{2}{3}$.	14.	E.	subnubila	
V.	27. 6.	16.	15 $\frac{1}{2}$.	E. 1.	nubila	
VI.	27. 7.	15.	15 $\frac{1}{2}$.	N. E. 1.	subferena	
VII.	27. 8.	14 $\frac{2}{3}$.	15.	N. E. 2.	subnub. nubila	
VIII.	27. 8.	16 $\frac{2}{3}$.	15.	E.	subferena	
IX.	27. 7.	16.	16.	E. 2.	ferena	
X.	27. 5.	17.	16 $\frac{1}{2}$.	S.	ferena subnub.	
XI.	27. 6.	16 $\frac{2}{3}$.	16 $\frac{2}{3}$.	S.	subnub. nubila	
XII.	27. 8.	14.	17 $\frac{1}{2}$.	E.	pluvia	
XIII.	27. 10.	15 $\frac{2}{3}$.	17 $\frac{1}{2}$.	E. 1.	subnub. subfer.	
XIV.	27. 8.	14 $\frac{1}{2}$.	18.	S. 1.	pluvia nub.	
XV.	27. 8.	14 $\frac{2}{3}$.	17 $\frac{1}{2}$.	E. 1.	pluvia subnub.	
XVI.	27. 8.	14.	17.	E.	ferena	
XVII.	27. 11.	14 $\frac{2}{3}$.	15 $\frac{2}{3}$.	N. E. 2.	ferena	
XVIII.	28.	14 $\frac{1}{2}$.	14.	N. E. 2.	ferena	
XIX.	28.	15 $\frac{2}{3}$.	13 $\frac{2}{3}$.	E.	subferena	
XX.	28.	16 $\frac{1}{2}$.	13.	N. W. 2.	nubila	
XXI.	27. 11.	18.	13 $\frac{1}{3}$.	N. W. 2.	nubila nebula	
XXII.	27. 9.	17 $\frac{1}{2}$.	15.	S. W. 1.	nebula pluvia	
XXIII.	27. 10.	17 $\frac{1}{2}$.	17 $\frac{1}{3}$.	S. W. 1.	nub. subferena	
XXIV.	27. 9.	17.	16 $\frac{1}{2}$.	S. W. 1.	nubila pluvia	
XXV.	27. 9.	16 $\frac{1}{2}$.	16.	W.	subferena	
XXVI.	27. 8.	17 $\frac{1}{2}$.	16.	S. W. 2.	nubila	
XXVII.	27. 10.	18.	16.	W.	nubila	
XXVIII.	28.	18 $\frac{2}{3}$.	15 $\frac{1}{2}$.	N. W. 2.	ferena	
XXIX.	28. 2.	18 $\frac{1}{2}$.	15.	N. W. 1.	subferena	
XXX.	28.	18 $\frac{1}{2}$.	15 $\frac{1}{3}$.	S. W. 2.	subnubila	

JULIUS.

Dies	Barometrum	Thermometrum	Hygrometrum	Ventus	Tempeſtas	Pluvia
	Poll. lin.	Grad. part.	Grad. part.	direct. vis		
I.	27. II.	18 $\frac{1}{2}$.	15 $\frac{1}{3}$.	S. W. 2.	ſubſerena	per hunc menſem delapſa, libras ſeptemdecim pondò aquavit.
II.	27. II.	18 $\frac{1}{2}$.	15.	S. W. 2.	ſubſerena	
III.	28.	18 $\frac{1}{2}$.	15.	W. 1.	ſubnub. ſubſer.	
IV.	28. I.	19.	15.	W. 2.	ſerena	
V.	28. I.	19.	14.	W. 2.	ſerena	
VI.	28. 2.	19 $\frac{1}{3}$.	14.	N. W. 1.	ſerena	
VII.	28. 3.	19.	13 $\frac{1}{2}$.	N. E. 2.	ſubſerena	
VIII.	28. 2.	18 $\frac{1}{3}$.	12 $\frac{1}{2}$.	N. E. 2.	ſubnub. ſerena	
IX.	28. I.	19.	12.	E. 1.	ſubnub. ſubſer.	
X.	28. I.	19.	12.	E. 1.	ſubnub. ſubſer.	
XI.	28. 2.	19.	12.	N.	ſerena	
XII.	28. 2.	19 $\frac{1}{2}$.	12.	N.	ſerena	
XIII.	28. 2.	20 $\frac{1}{2}$.	12.	N. W. 1.	ſubſerena	
XIV.	28. 2.	21.	12 $\frac{1}{2}$.	N. E.	ſubſerena	
XV.	28. 2.	21.	12 $\frac{1}{2}$.	N. E.	ſerena	
XVI.	28. I.	19 $\frac{1}{2}$.	14.	E.	nubila pluvia	
XVII.	27. 9.	19 $\frac{1}{2}$.	14 $\frac{1}{2}$.	S. E. 2.	pluvia ſubſer.	
XVIII.	27. 10.	20.	16.	S. E.	nubila ſubſer.	
XIX.	27. 8.	21.	16.	S. W.	ſubſerena	
XX.	27. 8.	21.	15 $\frac{1}{2}$.	E.	ſerena	
XXI.	27. 10.	21 $\frac{1}{2}$.	14.	E. 1.	ſerena	
XXII.	28. I.	22.	13 $\frac{1}{2}$.	N. E. 2.	ſerena	
XXIII.	28. 2.	22.	13 $\frac{1}{2}$.	N. E.	ſerena	
XXIV.	28.	21 $\frac{1}{2}$.	14.	S.	nubila pluvia	
XXV.	28.	20.	14 $\frac{1}{2}$.	S.	nubila	
XXVI.	28.	19 $\frac{1}{2}$.	14 $\frac{1}{2}$.	S. W. 1.	pluvia ſubſer.	
XXVII.	28. 2.	19 $\frac{1}{2}$.	14 $\frac{1}{2}$.	W.	ſubnub. nebula	
XXVIII.	28. I.	19.	14.	W.	nubila ſubnub.	
XXIX.	27. 10.	20.	15 $\frac{1}{2}$.	S. E. 1.	pluvia ſubſer.	
XXX.	27. 6.	20.	16.	S.	pluvia nubila	
XXXI.	27. 6.	20 $\frac{1}{2}$.	18 $\frac{1}{3}$.	S. E. 2.	pluvia nubila	

AUGUSTUS.

Dies	Barometrum	Thermometrum	Hygrometrum	Ventus	Tempeſtas	Pluvia
	Poll. lin.	Grad. part.	Grad. part.	direct. vis		
I.	27. 7.	20 $\frac{5}{2}$.	18.	N. W.	ferena	per hunc meſem delapſa, libras viginti duo, & uncias oſto pondo æquavit.
II.	27. 7.	21.	16.	W. I.	ferena	
III.	27. 7.	21 $\frac{1}{3}$.	15.	W. I.	ferena	
IV.	27. 8.	22.	13 $\frac{1}{2}$.	W.	ferena	
V.	27. 8.	21.	13.	N. E. 2.	ſubnubila	
VI.	27. 7.	20 $\frac{5}{2}$.	14 $\frac{1}{2}$.	N. E. I.	ſubferena	
VII.	27. 8.	20 $\frac{1}{2}$.	13.	E.	ferena ſubnub.	
VIII.	27. 8.	20 $\frac{1}{2}$.	13.	E.	ſubferena	
IX.	27. 8.	20.	15 $\frac{2}{3}$.	E.	nubila	
X.	27. 6.	20.	17.	S. E.	ſubnubila	
XI.	27. 5.	21 $\frac{1}{2}$.	17.	S. W.	ferena	
XII.	27. 8.	21.	15.	N.	ferena	
XIII.	27. 9.	21.	15.	N.	ferena	
XIV.	27. 10.	21.	13 $\frac{1}{2}$.	N.	ſubferena	
XV.	27. 11.	20 $\frac{1}{2}$.	13 $\frac{1}{2}$.	N. W.	nubila ferena	
XVI.	28. 1.	20.	14.	W. I.	nubila ſubfer.	
XVII.	28. 1.	19.	14.	W. E. I.	pluvia	
XVIII.	28. 2.	18 $\frac{2}{3}$.	15 $\frac{2}{3}$.	N. E.	nubila pluvia	
XIX.	28. 1.	18 $\frac{1}{2}$.	15.	N. W.	ſubnubila	
XX.	28. 1.	19.	15.	N. W.	ferena	
XXI.	27. 11.	18 $\frac{1}{2}$.	13 $\frac{2}{3}$.	W.	ſubferena	
XXII.	27. 10.	19 $\frac{2}{3}$.	15.	W.	ſubnubila	
XXIII.	27. 10.	19 $\frac{2}{3}$.	15 $\frac{1}{2}$.	S. W. I.	ſubnubila	
XXIV.	27. 10.	21.	16.	S. W. I.	ſubnubila	
XXV.	27. 10.	20.	16.	S. W. I.	pluvia nubila	
XXVI.	27. 10.	20.	16.	N. W.	nubila pluvia	
XXVII.	27. 11.	20.	15 $\frac{1}{2}$.	E.	ferena	
XXVIII.	28.	21 $\frac{1}{3}$.	15 $\frac{1}{2}$.	E.	ſubnubila	
XXIX.	28.	20 $\frac{1}{2}$.	15.	E.	ferena	
XXX.	28.	20.	15 $\frac{1}{2}$.	W.	ſubfer. ferena	
XXXI.	28. 2.	20 $\frac{2}{3}$.	15.	N. W.	ſubnub. ſubfer.	

SEPTEMBER.

Dies	Barometrum	Thermometrum	Hygrometrum	Ventus	Tempestatas	Pluvia
	Poll. lin.	Grad. part.	Grad. part.	direct. vis		
I.	28.	19 $\frac{2}{3}$.	14 $\frac{1}{2}$.	N. E. 1.	nubila	
II.	27. 10.	18.	15.	N. E. 2.	nubila pluvia	
III.	27. 8.	16 $\frac{1}{2}$.	15.	E.	nubila pluvia	
IV.	27. 8.	17.	15 $\frac{1}{2}$.	E.	subserena	
V.	27. 8.	17.	15.	N.	subserena	
VI.	27. 8.	18.	15.	N.	subnub. serena	
VII.	27. 8.	18.	16 $\frac{1}{2}$.	S. W. 2.	serena	
VIII.	27. 7.	18 $\frac{1}{2}$.	17.	S. W. 2.	serena	
IX.	27. 7.	19.	17.	W.	subserena	
X.	27. 8.	17 $\frac{1}{2}$.	17 $\frac{1}{2}$.	S. W. 2.	subserena	
XI.	27. 6.	18.	17 $\frac{1}{2}$.	S.	nubila subser.	
XII.	27. 4.	17 $\frac{2}{3}$.	19.	S.	nubila sub ser.	
XIII.	27. 5.	17 $\frac{2}{3}$.	19.	W. 1.	subserena	
XIV.	27. 8.	18.	18 $\frac{1}{2}$.	N. W.	serena	
XV.	27. 8.	17 $\frac{2}{3}$.	18.	N. W.	subserena	
XVI.	27. 7.	17.	17 $\frac{1}{2}$.	N. E. 1.	nubila subser.	
XVII.	27. 8.	16 $\frac{1}{3}$.	17 $\frac{1}{2}$.	N. W.	nubila nebula	
XVIII.	27. 8.	16 $\frac{1}{2}$.	18.	N. E.	nubila nebula	
XIX.	27. 7.	16.	18.	S. W. 1.	nubila pluvia	
XX.	27. 7.	16.	19 $\frac{1}{2}$.	S. W.	subnubila	
XXI.	27. 9.	17.	19 $\frac{1}{2}$.	W. 2.	subserena	
XXII.	27. 10.	17.	19.	W. 2.	serena	
XXIII.	27. 11.	17 $\frac{1}{2}$.	18 $\frac{2}{3}$.	W. 1.	serena	
XXIV.	28. 1.	16.	18.	N. W.	subnubila	
XXV.	28.	14 $\frac{1}{2}$.	16 $\frac{1}{2}$.	S. W. 2.	subnubila	
XXVI.	27. 11.	15.	16 $\frac{1}{2}$.	S. W. 1.	nubila subser.	
XXVII.	27. 9.	16.	16 $\frac{1}{2}$.	S.	pluvia nubila	
XXVIII.	27. 9.	15 $\frac{1}{2}$.	18.	W. 1.	subserena	
XXIX.	27. 11.	14 $\frac{1}{3}$.	17 $\frac{1}{3}$.	W. 1.	serena	
XXX.	28.	15.	16 $\frac{1}{2}$.	W. 1.	subserena	

per hunc mensem delapsa, libras viginti pondus equavit.

OCTOBER.

Dies	Barometrum	Thermometrum	Hygrometrum	Ventus	Tempeſtas	Pluvia
	Poll. lin.	Grad. part.	Grad. part.	direct. vis		
I.	27. II.	16.	16.	N. E. 2.	ferena	
II.	27. II.	16.	16.	N. E. 2.	ferena	
III.	27. IO.	15.	14 $\frac{2}{3}$.	W. I.	ſubnub. ferena	
IV.	27. 9.	13 $\frac{2}{3}$.	14.	N.	ſubferena	
V.	27. 9.	12.	15.	W.	ſubferena	
VI.	27. 7.	12 $\frac{2}{3}$.	16 $\frac{2}{3}$.	S.	nubila	
VII.	27. 5.	12 $\frac{2}{3}$.	16 $\frac{2}{3}$.	S.	nebula nubila	
VIII.	27. 2.	14.	19.	S. E. 2.	nubila ſubnub.	
IX.	27. 4.	12 $\frac{2}{3}$.	19 $\frac{2}{3}$.	E.	ſubferena	
X.	27. 3.	12.	19.	E.	ſubferena	
XI.	27. 3.	13 $\frac{2}{3}$.	19 $\frac{2}{3}$.	S.	nubila pluvia	
XII.	27. 2.	14.	20 $\frac{2}{3}$.	S.	ſubferena	
XIII.	27.	15.	23 $\frac{2}{3}$.	S. E. 3.	pluvia	
XIV.	26. IO.	14 $\frac{2}{3}$.	27.	S. E. 3.	pluvia	
XV.	26. II.	14 $\frac{2}{3}$.	27.	S. I.	pluvia	
XVI.	27. 4.	14.	28 $\frac{2}{3}$.	S. E. 2.	pluvia nubila	
XVII.	27. 5.	13 $\frac{2}{3}$.	28.	E.	nubila ſubnub.	
XVIII.	27. 8.	12 $\frac{2}{3}$.	27 $\frac{2}{3}$.	E.	nubila pluvia	
XIX.	27. 6.	12 $\frac{2}{3}$.	27.	E.	ſubnub. pluvia	
XX.	27. 2.	12.	28.	S.	pluvia	
XXI.	27. 4.	12.	27 $\frac{2}{3}$.	S. W. 3.	pluvia ſubfer.	
XXII.	27. 4.	12.	27 $\frac{2}{3}$.	S. W. 3.	ſubfer. ſubnub.	
XXIII.	27. 7.	11 $\frac{2}{3}$.	26 $\frac{2}{3}$.	W.	nubila pluvia	
XXIV.	27. 6.	10 $\frac{2}{3}$.	25 $\frac{2}{3}$.	N. W.	nebula ſubfer.	
XXV.	27. 6.	11.	24.	N. W.	pluvia	
XXVI.	27. 8.	10 $\frac{2}{3}$.	24 $\frac{2}{3}$.	N. E.	nubila pluvia	
XXVII.	27. IO.	10.	24 $\frac{2}{3}$.	E.	ſubnub. ſubfer.	
XXVIII.	27. 8.	12.	27.	S.	ſubferena	
XXIX.	27. 9.	11.	27.	E.	nubila nebula	
XXX.	27. 6.	13.	28.	S. E. I.	nubila pluvia	
XXXI.	27. 8.	11 $\frac{2}{3}$.	27.	E.	ſubnub. ſubfer.	

per hunc menſem delapſa, libras centum viginti duo pondo æquavit.

NOVEMBER.

Dies	Barometrum	Thermometrum	Hygrometrum	Ventus	Tempeſtas	Pluvia
	Poll. lin.	Grad. part.	Grad. part.	direct. vis		
I.	27. 9.	10 $\frac{1}{2}$.	25 $\frac{1}{3}$.	E.	ferena	per hunc menſem deſcripta libras triginta duo, & uncias quinque pondo æquavit.
II.	27. II.	II.	22 $\frac{1}{2}$.	N. E. 2.	ſubferena	
III.	27. II.	II.	20 $\frac{2}{3}$.	W. I.	ſubferena	
IV.	27. IO.	10 $\frac{2}{3}$.	17 $\frac{1}{2}$.	N. I.	nubila ſubfer.	
V.	27. II.	10 $\frac{2}{3}$.	20.	S. W. 2.	ſubnubila	
VI.	28.	II.	20.	W.	nebula ferena	
VII.	28.	9 $\frac{1}{2}$.	18 $\frac{1}{3}$.	W.	nebula ferena	
VIII.	28. I.	7 $\frac{2}{3}$.	18.	N.	ſubnubila	
IX.	28. 1.	8.	16 $\frac{2}{3}$.	E. I.	ſubferena	
X.	28. 2.	8.	16.	N. E. I.	ferena	
XI.	27. II.	8.	16.	S. W. 2.	ferena	
XII.	27. IO.	7 $\frac{2}{3}$.	16.	S. W. 2.	ſubnubila	
XIII.	27. 8.	9.	16 $\frac{1}{2}$.	S. W.	nubila pluvia	
XIV.	27. 5.	9.	18.	S.	nubila	
XV.	27. 3.	10 $\frac{1}{3}$.	18 $\frac{1}{3}$.	S.	pluvia ſubfer.	
XVI.	27. 3.	10 $\frac{1}{2}$.	19 $\frac{1}{2}$.	S. W. 2.	ſubferena	
XVII.	27. 6.	9 $\frac{1}{2}$.	19.	W.	ferena	
XVIII.	27. 8.	9.	17 $\frac{1}{3}$.	N.	ferena	
XIX.	27. II.	7 $\frac{2}{3}$.	16 $\frac{1}{3}$.	N.	ferena	
XX.	28. 2.	7.	15.	N. I.	ferena	
XXI.	28. 3.	7.	15.	N. E.	ſubferena	
XXII.	28. 5.	6 $\frac{1}{3}$.	15.	N. E.	ferena ſubnub.	
XXIII.	28. 5.	6.	14.	N. E.	ſubnubila	
XXIV.	28. 2.	6.	14 $\frac{1}{2}$.	N. W. I.	ſubnubila	
XXV.	28. 2.	5 $\frac{2}{3}$.	14 $\frac{1}{2}$.	W.	ferena nubila	
XXVI.	28.	5.	15.	S. W. 2.	pluvia ſubnub.	
XXVII.	28.	5.	17 $\frac{1}{2}$.	E. I.	pluvia ſubfer.	
XXVIII.	28. I.	5 $\frac{2}{3}$.	17.	E. I.	ferena	
XXIX.	28. 3.	7.	16.	W.	ferena	
XXX.	28. 2.	6 $\frac{1}{3}$.	16 $\frac{1}{2}$.	N. W.	ſubferena	

DECEMBER.

Dies	Barometrum	Thermometrum	Hygrometrum	Ventus	Tempeſtas	Pluvia
	Poll. lin.	Grad. part.	Grad. part.	direct. vis		
I.	28. I.	6.	16.	N. E. 2.	ferena	per hunc menſem duodecim libras, & uncias novem pondo æquavit.
II.	28.	6.	16 $\frac{1}{2}$.	N. W. 2.	ferena	
III.	27. 10.	7 $\frac{2}{3}$.	19.	E.	ſubnubila	
IV.	27. 10.	7 $\frac{1}{2}$.	19.	E.	ſubferena	
V.	27. 9.	6.	19 $\frac{1}{2}$.	E. 2.	ſubnubila	
VI.	27. 10.	4.	19.	E.	ſubferena	
VII.	27. 8.	1 $\frac{1}{2}$.	19.	E. I.	nubila nix	
VIII.	27. 8.	I. frigori.	17 $\frac{1}{2}$.	N. E. I.	nub. nix ſubfer.	
IX.	27. 9.	I. calor.	18.	E.	ſubferena nub.	
X.	27. II.	3 $\frac{1}{2}$.	17.	N. W. 2.	ferena ſubfer.	
XI.	28. I.	3 $\frac{1}{2}$.	16 $\frac{1}{3}$.	N. W. I.	ferena	
XII.	28. 3.	3.	15 $\frac{2}{3}$.	N. E.	nebula ferena	
XIII.	28. 6.	3.	15.	W.	ſubferena	
XIV.	28. 4.	3.	17.	S. W. 2.	ſubferena	
XV.	28. 4.	4 $\frac{1}{2}$.	18 $\frac{1}{3}$.	S. W. 2.	ſubferena	
XVI.	27. II.	4 $\frac{1}{2}$.	18 $\frac{2}{3}$.	S.	nubila pluvia	
XVII.	27. 9.	4 $\frac{1}{2}$.	23.	S.	nebula pluvia	
XVIII.	27. 9.	4.	23.	W. I.	ferena	
XIX.	27. II.	3.	19 $\frac{1}{2}$.	W.	ferena	
XX.	28. I.	1 $\frac{1}{2}$.	17.	W. 2.	ferena	
XXI.	28. I.	0.	16 $\frac{2}{3}$.	N. W. 2.	ferena	
XXII.	28. 2.	0 $\frac{1}{2}$.	16 $\frac{1}{3}$.	N. W.	ſubnubila	
XXIII.	28. 3.	0.	16 $\frac{2}{3}$.	N.	ſubferena	
XXIV.	28. 5.	0.	15 $\frac{1}{2}$.	E.	ſubnubila	
XXV.	28. 5.	0.	14 $\frac{1}{2}$.	E. I.	ferena	
XXVI.	28. 5.	I. calor.	14.	E.	ſubnubila	
XXVII.	28. 3.	I. frigori.	14.	N. E.	ferena	
XXVIII.	28.	0 $\frac{1}{2}$. frig.	13 $\frac{1}{2}$.	N.	ferena	
XXIX.	27. II.	2. calor.	14 $\frac{1}{2}$.	N. 2.	ferena	
XXX.	27. 10.	2 $\frac{1}{2}$.	16 $\frac{1}{2}$.	N. 3.	ferena	
XXXI.	27. 9.	3 $\frac{1}{3}$.	17 $\frac{1}{2}$.	N. W. I.	ſubnubila	

VINCENTII RICCATI SOC. JESU.

*Addicamentum ad Opusculum de termino generali
Serierum recurrentium cum appendice,
quod editum est in hujus tomi
parte prima.*

Methodus, quam in opusculo pluribus verbis explicavi, me docuit, qua ratione inveniendi essent termini generales serierum recurrentium cum appendice. Verum quem postea terminos generales inventos diligenter inspicerem, cognovi, eos esse admodum similes terminis generalibus serierum recurrentium vulgarium gradus superioris, quotiescumque unitas est radix illius æquationis, cujus resolutio necessaria est ad terminum generalem inveniendum. Quapropter suspicatus sum, series recurrentes cum appendice esse series recurrentes vulgares gradus superioris: quod si antea animadvertissem multo facilius ex regulis traditis in meo commentario invenissem earum terminos generales.

Quod suspicatus sum, id verum esse deprehendi; imo facillime deteguntur quantitates, per quas multiplicandi sunt termini antecedentes ad subsequenter inveniendum. Nam efforma æquationem, in qua primus terminus sit x elatus ad potestatem, quam indicat gradus seriei recurrentis cum appendice: coefficientes aliorum terminorum sint quantitates, negative tamen sumptæ, quæ antecedentes terminos debent multiplicare, facto initio ab ultimo. Formulam hanc multiplica per $x - 1$, & nova formula exorietur, cujus coefficientes, mutatis signis, si multiplicent terminos antecedentes, formabunt seriem, quæ eadem erit ac recurrens cum appendice.

Regulam hanc, quæ praxim facillimam præbet, explicabo, illam gradatim demonstrans in seriebus cujuscumque gradus. Itaque sit series recurrens primi gradus, cujus primus terminus = a , appendix = z , quantitas multiplicans terminum antecedentem = t , nimirum a, b, c, d, e, f &c. Ma-
ni-

nifestum est, fore $b = ta + z$, $c = tb + z$, $d = tc + z$ &c. Multiplica formulam $x - t$ per $x - 1$, ut habeas $xx - tx + t$.

Acceptis duobus primis terminis a , b efforma seriem recurrentem secundi gradus multiplicando duos antecedentes, facto initio ab ultimo, per $t + 1$, $-t$. Tertius terminus seriei proveniet $tb + b - ta$; sed $b = ta + z$; ergo tertius terminus invenietur $= tb + z = c$. Similiter quartus terminus nascetur $= tc + c - tb$; ergo substituto valore c fiet $= tc + z = d$: atque ita de reliquis. Constat itaque seriem recurrentem cum appendice gradus primi esse eandem ac seriem recurrentem vulgarem gradus secundi formatam eo modo, quo supra docui.

Transeo ad series recurrentes cum appendice secundi gradus. Primi duo termini sint a , b ; quantitates per quas duo termini antecedentes multiplicandi sunt, facto initio ab ultimo, sint t , s . Series, quæ hoc modo formatur, sit a , b , c , d , e , f &c. Habebimus $c = tb + sa + z$, $d = tc + sb + z$, $e = td + sc + z$; atque ita deinceps. Efforma æquationem $xx - tx - s = 0$, quam multiplica per $x - 1$, ut proveniat $x^3 - tx^2 - sx + s = 0$. Jam vero acceptis tri-

bus primis terminis a , b , c confice seriem recurrentem tertii gradus, multiplicando tres terminos antecedentes, incipiendo ab ultimo, per $t + 1$, $s - t$, $-s$. Quartus terminus erit $= tc + c + sb - tb - sa$; atqui supponitur $c = tb + sa + z$; ergo retento tc , & pro c hoc valore substituto, fiet $= tc + sb + z$, qui est idem ac quartus terminus d seriei superioris. Eodem modo quintus terminus fiet $= td + d + sc - tc - sb$, qui substituto valore invento d evadet $= td + sc + z$, qui est quintus terminus e seriei superioris. Eadem methodo identitas reliquorum terminorum demonstrabitur. Quapropter series recurrens cum appendice secundi gradus eadem est ac series recurrens tertii gradus confecta perinde, ac antea traditum est.

Simili ratione series recurrens cum appendice tertii gradus demonstratur convenire cum serie recurrente quarti gradus. Sit series recurrens cum appendice a , b , c , d , e , f , g &c. Appendix sit $= z$; tres multiplicatores terminorum antecedentium, facto initio ab ultimo, sint t , s , r . Habebimus $d = tc + sb + ra + z$, $e = td + sc + rb + z$, $f = te +$

$sd + rc + z$ &c. Multiplica formulam $x^3 - tx^2 - sx - r = 0$ per $x - 1$, ut fiat $x^4 - tx^3 - sx^2 - rx + r = 0$. Tum

$$- x^3 + tx^2 + sx$$

sumptis quatuor terminis primis a, b, c, d efforma seriem recurrentem multiplicando quatuor terminos antecedentes, facto initio ab ultimo, per $t + 1, s - t, r - s, -r$. Quintus terminus erit $td + sc + rb - ra$; sed $d = tc + sb + ra + z$;
 $+ d - tc - sb$

ergo retento td , & hoc valore pro d substituto, fiet quintus terminus $= td + sc + rb + z$, qui convenit cum quinto termino e seriei superioris. Quod de reliquis omnibus similiter demonstrabitur. Progressus iste satis superque ostendit, series recurrentes cum appendice nihil aliud esse, quam series recurrentes vulgares gradus superioris.

Serierum, in quibus hactenus versati sumus, nova proprietates aperienda est, ut earum usus magis magisque pateat, & natura cognoscatur. Ajo itaque, series recurrentes cujuscumque gradus, quotiescumque aequatio, quæ resolvitur ad earum terminos generales inveniendos, habet pro radice unitatem, obtinere pro differentiis primis seriem recurrentem gradus inferioris. Quare quum series istæ coincidunt cum seriebus recurrentibus cum appendice gradus inferioris, palam fit, differentias primas seriei recurrentis cum appendice præbere seriem recurrentem ejusdem gradus.

Gradatim procedens incipiam a seriebus recurrentibus secundi gradus. Sit aequatio $xx - tx + t = 0$, cujus una ra-

$$- x$$

dix $= 1$. Sumptis ad libitum primis duobus terminis a, b , formetur series multiplicando duos terminos antecedentes per $t + 1, -t$, facto initio ab ultimo. Hæc ita exponatur a, b, c, d, e, f &c. Constat $c = tb + b - ta, d = tc + c - tb, e = td + d - tc$ &c. Differentiarum series erit hujusmodi $a - b, b - c, c - d, d - e, e - f$ &c. In secundo termino pro c ejus valorem substitue, & fiet $ta - tb$; ergo secundus terminus est æqualis primo multiplicato per t . Similiter in tertio substitue valorem d , & habebis $tb - tc$; igitur tertius terminus est æqualis secundo multiplicato per t ; atque ita de reliquis. Constat itaque, differentiarum seriem esse recurrentem primi gradus, in qua quilibet terminus multiplicatus per t dat subsequenter.

Eadem methodo res conficitur in serie tertii gradus. Sit æquatio $x^3 - tx^2 - sx + s = 0$, quæ habet pro radice uni-

$$-x^3 + tx$$

tatem. Sumptis primis terminis ad libitum a, b, c formetur series multiplicando tres terminos antecedentes, incipiendo ab ultimo, per $t + 1, s - t, -s$. Sit autem a, b, c, d, e, f, g &c. Patet $d = tc + sb - sa, e = td + sc - sb$ &c. Su-

$$+ c - tb \qquad + d - tc$$

mantur differentiæ, & nascetur series $a - b, b - c, c - d, d - e, e - f, f - g$ &c. In tertio termino pro d substitue ejus valorem, & inuenies $tb - tc + sa - sb$, qui resultat, si secundus terminus ducatur in t , primus in s . Eodem modo posito in quarto termino valore e , inuenies $tc - td + sb - sc$, quæ quantitas nascitur multiplicato tertio termino per t , secundo per s ; atque ita deinceps. Quare series differentiarum est recurrens secundi gradus.

Si series sit gradus quarti assumatur æquatio

$x^4 - tx^3 - sx^2 - rx + r = 0$, quæ componitur ex duabus

$$-x^3 + tx^2 + sx$$

$x^3 - tx^2 - sx - r = 0, x - 1 = 0$. Acceptis quatuor primis terminis a, b, c, d conficiatur series multiplicando quatuor terminos antecedentes, incipiendo ab ultimo, per $t + 1, s - t, r - s, -r$. Series hæc ita exponatur a, b, c, d, e, f, g, h &c. Constat fore $e = td + sc + rb - ra, f =$

$$+ d - tc - sb$$

$te + sd + rc - rb$, atque ita deinceps. Series differentia-

$$+ e - td - sc$$

rum exurget $a - b, b - c, c - d, d - e, e - f, f - g$ &c. In quarto termino pro e pone ejus valorem, & habebis

$tc - sb + ra$, quæ quantitas item resultat, si tertius ter-

$$-td - sc - rb$$

minus ducatur in t , secundus in s , primus in r . Eodem modo in quinto termino si valorem f substituas, inuenies quantitatem, quæ nascitur multiplicato quarto termino per t , secundo per s , primo per r , atque ita deinceps. Itaque constat, differentiarum seriem esse recurrentem quarti gradus. Ex hoc progressu jure optimo colligimus, seriem recurrentem, si unitas sit radix æquationis resolvendæ, ut detegatur terminus generalis, exhibere differentias, quæ constituunt seriem recurrentem gradus inferioris. Quocirca series recurrentes cum ap-
pen-

pendice habebunt differentias, quæ coalescunt in seriem recurrentem ejusdem gradus.

Si ea æquatio, quam resolvi oportet ad inveniendum terminum generalem seriei recurrentis, habeat unam radicem æqualem unitati, differentia primæ constituunt seriem recurrentem gradus inferioris. Quod si non tantum una, sed duplex unitas sit radix æquationis illius, non solum differentia primæ coalescent in seriem uno gradu inferiorem; sed etiam differentia secundæ constituent seriem duobus gradibus inferiorum. Ratio per se se est evidens. Nam si unitas est duplex radix æquationis resolvendæ pro serie data, relinquitur unitas tamquam radix æquationis resolvendæ ad inveniendum terminum generalem seriei primarum differentiarum; ergo hæc habebit differentias primas, quæ erunt differentia secundæ seriei datæ, componentes seriem recurrentem uno gradu minorem seriei primarum differentiarum; ergo series secundarum differentiarum erit duobus gradibus inferior serie data. Pariter si in eadem æquatione tres radices æquales sint unitati, differentia tertiæ coalescent in seriem recurrentem tribus gradibus inferiorum serie data, atque ita deinceps.

Verumtamen generatim series recurrentes habent differentias primas, quæ coalescunt in seriem recurrentem ejusdem gradus. Sit series recurrens a, b, c, d, e, f, g &c. Series primarum differentiarum erit $a - b, b - c, c - d, d - e, e - f, f - g$ &c. Sit primo series recurrens primi gradus, & t sit multiplicator termini antecedentis. Fiet $b = ta, c = tb, d = tc$ &c. In secundo termino seriei differentiarum substitue valores c, b , & inuenies $ta - tb$, quæ quantitas est primus terminus ductus in t . Similiter tertius substitutis valoribus fit $tb - tc$, qui terminus oritur ex secundo termino multiplicato per t , atque ita deinceps; ergo etiam series differentiarum est series recurrens gradus primi.

Sit deinde series recurrens gradus alterius, & quantitates, quæ debent multiplicare terminos antecedentes sint t, s , facto initio ab ultimo. Habebimus $c = tb + sa, d = tc + sb, e = td + sc$ &c. In tertio termino primarum differentiarum pro c, d substitue valores supra positos, & fiet $tb + sa,$
 $-tc - sb$

quæ quantitas exurgit, si secundus terminus ducatur in t , primus in s . Similiter si in quarto pro d, e valores substitui-

tuas, reperies $tc + sb$, qui habetur multiplicato tertio ter-
 $-td - sc$
 mino per t , secundo per s , atque ita de reliquis. Igitur
 compertum est, seriem differentiarum esse recurrentem ejusdem
 gradus secundi.

Idem dicas velim de serie recurrente tertii gradus: nam
 positis multiplicatoribus t, s, r , habemus $d = tc + sb + ra$,
 $e = td + sc + rb$ &c. In quarto differentiarum termino col-
 loca valores d, e , & resultabit $tc + sb + ra$, quæ quan-
 $-td - sc - rb$

titas nascitur, si ducas tertium terminum in t , secundum in
 s , primum in r ; atque ita deinceps. Quæ quum ita sint pro-
 gressus satis superque manifestat, seriem recurrentem habere
 differentias, quæ pariter componunt seriem recurrentem ejus-
 dem gradus.

VINCENTII RICCATI SOC. JESU.

De corpore projecto, cui præter potentiam servantem rationem reciprocam duplicatam distantiarum a centro, applicatæ sunt aliæ potentie duæ, quarum una dirigitur ad idem centrum, altera est huic perpendicularis.

EGREGIO GEOMETRÆ CLAIRAUT

VINCENTIUS RICCATUS S. P. D.

NON multos ante dies accepi transmissum Parma libellum tuum, in quo tu, Vir doctissime, difficilem abditamque Lunæ theoriam perficere contendis. Nihil mihi hoc munere carius extitit, pro quo etiam atque etiam gratias tibi ago maximas. Statim ac absolvi epistolam geometricam, in qua tum eram occupatus, libellum tuum incepti legere ea animi voluptate, qua reliqua tua opera semper legi, a quibus plurimum me didicisse profiteor. Quod hæctenus legi, ostendit summum perfectumque geometram, quem scientia, artificium, industria vel maxime commendat. Uteris ea methodo, quam primus omnium in aliis perquisitionibus mechanicis usurpasti, quamque deinceps amplificavit doctissimus Allembertus in sua Dynamica. Quandoquidem in hujusmodi quæstionum genere alia methodo uti consuesco, quam pluribus verbis explicavi in opusculo edito in quarto tomo Academiæ Bononiensis, & cujus novum specimen exhibeo in tomo quinto, qui modo imprimitur, solvens problema non expertus difficultatis; in mentem mihi venit, inter meam tuamque methodum instituire non injucundam comparisonem, per quam cognovi, utramque ad eadem omnino confectaria perducere. Ut autem tibi fidem faciam, me opus tuum legere perattente, statui, ad te mittere comparisonem institutam; quod tibi non injucundum fore confido. Qua methodo aggrederer ipse quæstionem a te propositam, paucis accipe.

Mo-

Mobile A projiciatur per directionem AC, (*Fig.*) velocitate = V; ipsique applicentur potentiae duae, prima quae tendat ad focum F, altera sit primae perpendicularis: quaeritur aequatio curvae AD a mobile descriptae. Ducantur AB, FB, prima normalis, secunda parallela directioni AC. Vocetur AF = b, AB = Q, FB = P. Agatur quaecumque ordinata FD = y, cum qua infinitesimum angulum faciat Fd. Potentia, quae dirigitur ad focum F, sit DH = f, quae huic est perpendicularis sit DK = g. Notetur punctum m, ubi DK secat Fd. Quum Fd m sit angulus rectus, minima recta dm erit differentia FD, atque adeo = dy; vocetur Dm = dx. Normalis curvae sit DG, cui ex punctis F, H, K ducantur perpendiculares FG, HI, KO. Sit DG = q, FG = p. Radius osculi vocetur = R. Suppono id, quod alias demonstravi, nimirum $R = \frac{y dy}{dq}$, $q = \frac{y dx}{ds}$, $p = \frac{y dy}{ds}$. Species ds denotat minimum curvae arcum Dd. Vocata = u velocitate in D, principium, quod ego principium actionum nominare soleo, mihi sufficit aequationem primam.

I. $-f dy + g dx = m u du$. Ad inveniendam secundam, quae innititur in proprietate vis centrifugae, animadvertite, esse
 FD : DH :: DG : DI DF : DK :: FG : DO

$$y : f :: q : DI = \frac{fq}{y}, \quad y : g :: p : DO = \frac{gp}{y}.$$

Ex his orietur secunda aequatio $\frac{fq}{y} + \frac{gp}{y} = \frac{m u^2}{R}$. Substituere valorem R, ut habeas $\frac{fq dy}{dq} + \frac{gp dy}{dq} = m u^2$. Arceantur p, q, eorum valoribus substitutis, & resultabit aequatio.

$$\text{II. } \frac{fy dx dy}{dq ds} + \frac{gy dy^2}{dq ds} = m u^2.$$

Aequationes istae duae, a quibus solutionis facio principium, vel maxime differunt ab illis duabus, ad quas tua te methodus ducit. Nihilominus tamen minus aliae ab aliis non difficili calculo deducuntur; quod ita ostendo. Voco elementum temporis = dt; notum est, fore $u = \frac{ds}{dt}$, acceptisque differentiis, sumpto tamquam constante dt, quae tua suppositio est, erit $du = \frac{dds}{dt}$. Si in meis aequationibus valores hosce substituas, inuenies aequationes duas.

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } & -fdt^2 dy + gdt^2 dx = mdsdds \\ \text{II. } & fdt^2 dx + gdt^2 dy = \frac{m ds^3 dq}{y dy} \end{aligned} \right\} \text{Prima multiplicetur}$$

per dx , altera per dy ; tum utriusque æquationis accipitur

$$\text{summa, ut oriatur } gdt^2 \cdot \overline{dx^2 + dy^2} = m dx ds dds + \frac{m ds^3 dq}{y}$$

$$\text{five } gdt^2 = \frac{m dx dds}{ds} + \frac{m ds dq}{y}; \text{ sed } dq = \frac{dy dx}{ds} + \frac{y ddx}{ds} - \frac{y dx dds}{ds^2}; \text{ ergo facta substitutione proveniet formula } gdt^2 =$$

$$\frac{m dx dds}{ds} + \frac{m dy dx}{y} + m ddx - \frac{m dx dds}{ds} = \frac{m dy dx}{y} + m ddx.$$

Abscinde $FR = r$, atque hoc radio describe minimum arcum

$Rr = d\phi$; habebis $y:r :: dx:d\phi$; ergo $dx = \frac{y d\phi}{r}$, & $ddx =$

$$= \frac{dr d\phi}{r} + \frac{y dd\phi}{r}. \text{ Quare facta substitutione nascetur } gdt^2 =$$

$$\frac{m d\phi dy}{r} + \frac{m d\phi dy}{r} + \frac{m y dd\phi}{r} = \frac{2m d\phi dy + m y dd\phi}{r}, \text{ quæ ada-}$$

muffim convenit cum prima ex tuis æquationibus.

Si multiples primam ex meis æquationibus per dy , secundam per dx , & alteram ab altera deducas, invenies

$$fdt^2 \cdot \overline{dx^2 + dy^2}, \text{ seu } fdt^2 ds^2 = \frac{m dx ds^3 dq}{y dy} - m dy ds dds.$$

Divide per ds^2 , & substitue valorem dq , ut obtineas fdt^2

$$= \frac{m dx^2}{y} + \frac{m dx ddx}{dy} - \frac{m ds dds}{dy}; \text{ sed } ds dds - dx ddx =$$

$$dy ddy; \text{ ergo } fdt^2 = \frac{m dx^2}{y} - m ddy = \frac{m y d\phi^2}{r} - m ddy,$$

quæ eadem est cum secunda æquatione tua. Quoniam formulæ alia ab aliis tam clare deducuntur, perspicuum est, utramque methodum tutissimam esse, & utriusque principia apprime cum veritate convenire.

Verum tuis formulis non indigeo, quum ex meis mensuram velocitatis, & temporis determinem, & curvæ æquationem inveniam. Ob oculos mihi pono duas meas æquationes, antequam ejecta fuerit species u . & ponens in secunda pro fdy ejus valorem $gdx - muu$, quem prima suspedi-

ditat, nancifcor $\frac{gydx^2 - ydx \cdot mudu + g^2dy^2}{dqds} = mu^2$, five
 $gyds - \frac{ydx}{ds} \cdot mudu = mu^2dq$; atqui $\frac{ydx}{ds} = dq$; ergo
 $gyds = mu^2dq + mqudu$, & facta multiplicatione per q ,
 $gqyds = mu^2qddq + mq^2udu$, & integrando $2Sgqyds =$
 $mu^2q^2 - mV^2Q^2$. Summatoria ita accepta est, ut evanescat
 in puncto projectionis. Ultima æquatio præbet

$$u = \frac{\sqrt{mV^2Q^2 + 2Sgqyds}}{q\sqrt{m}}. \text{ Hinc}$$

$$dt = \frac{ds}{u} = \frac{qds\sqrt{m}}{\sqrt{mV^2Q^2 + 2Sgqyds}}; \text{ atqui } qds = ydx = \frac{y^2d\phi}{r};$$

$$\text{igitur } u = \frac{\sqrt{mV^2Q^2 + 2S\frac{gy^3d\phi}{r}} \cdot \sqrt{r^2dy^2 + y^2d\phi^2}}{y^2d\phi\sqrt{m}}, \text{ \&}$$

$$dt = \frac{y^2d\phi\sqrt{m}}{r\sqrt{mV^2Q^2 + 2S\frac{gy^3d\phi}{r}}}, \text{ quæ formula exquisite cum ea}$$

cohæret, quam tu, Vir doctissime, in secundi problematis principio per methodum artificiorum plenissimam deduxisti.

Ut ad curvæ æquationem perveniam, in meam æquationem secundam introduco valorem velocitatis, ut oriatur

$$\frac{fydx dy + g^2dy^2}{dqds} = \frac{mV^2Q^2 + 2Sgqyds}{q^2}; \text{ sed } ydx = qds;$$

$$\text{ergo } \frac{fqdy}{dq} - \frac{mV^2Q^2}{q^2} = \frac{-gydy^2}{dqds} + \frac{2Sgqyds}{q^2}; \text{ \& facta}$$

$$\text{multiplicatione per } \frac{-dq}{q}, \text{ provenit } -fdy + \frac{mV^2Q^2dq}{q^3} =$$

$$\frac{gydy^2}{qds} - \frac{2dqSgqyds}{q^3}. \text{ Quum autem } qds = ydx = \frac{y^2d\phi}{r},$$

$$\text{oriatur æquatio } -fdy + \frac{mV^2Q^2dq}{q^3} = \frac{rgdy^2}{yd\phi} - \frac{2dqS\frac{gy^3d\phi}{r}}{q^3},$$

& translatis opportune terminis

$$mV^2 Q^2 + 2S \frac{gy^3 d\phi}{r} \cdot \frac{dq}{q^3} = f dy + \frac{rgdy^2}{y d\phi} ; \text{ five } \frac{dq}{q^3} = \frac{f dy + \frac{rgdy^2}{y d\phi}}{mV^2 Q^2 + 2S \frac{gy^3 d\phi}{r}} .$$

Supponamus $f = \frac{Fb^2}{y^2} + z$, ut F fit po-

tentia in puncto projectionis, quæ servat rationem reciprocam duplicatam distantiarum . Præterea supponamus, ab hac potentia F produci velocitatem projectionis $= V$ per spatium $= L$, ut fit $mV^2 = 2FL$, & æquatio novam formam induat

$$\frac{dq}{q^3} = \frac{\frac{Fb^2 dy}{y^2} + z dy + \frac{rgdy^2}{y d\phi}}{2FLQ^2 + 2S \frac{gy^3 d\phi}{r}} .$$

Quandoquidem $\frac{dq}{q^3}$ est algebraice integrabilis, statim occurrit methodus distribuendi æquationem hoc pacto $\frac{dq}{q^3} =$

$$\frac{b^2}{2LQ^2} \cdot \frac{dy}{y^2} + \frac{z dy + \frac{rgdy^2}{y d\phi} - \frac{b^2 dy}{LQ^2 y^2} S \frac{gy^3 d\phi}{r}}{2FLQ^2 + 2S \frac{gy^3 d\phi}{r}} .$$

Hæc si integre-

tur, exhibet $-M \frac{x}{2q^2} = \frac{-b^2}{2LQ^2 y} +$

$$S \frac{z dy + \frac{rgdy^2}{y d\phi} - \frac{b^2 dy}{LQ^2 y^2} S \frac{gy^3 d\phi}{r}}{2FLQ^2 + 2S \frac{gy^3 d\phi}{r}} .$$

Ad determinandam additam

constantem M , opus est advertere fieri $q = Q$, si $y = b$; unde erit $M = \frac{L-b}{2LQ^2}$: verum ita oportet accipere summatoriam,

ut in puncto projectionis evanescat . Hanc autem summatoriam deinceps vocabimus $= H$. Itaque habemus $\frac{L-b}{LQ^2} + \frac{b^2}{LQ^2 y} - \frac{x}{q^2}$

$$= 2H, \text{ five } \frac{L-b}{LQ^2} + \frac{b^2}{LQ^2 y} - \left(\frac{r^2 dy^2 + y^2 d\phi^2}{y^4 d\phi^2} \right) = 2H, \text{ substi-}$$

tuto scilicet valore q . Ultima æquatio in hunc modum scri-

batur, $\frac{L-b}{LQ^2} + \frac{b^2}{LQ^2y} - \frac{x}{y^2} \cdot d\phi^2 - \frac{r^2 d\phi^2}{y^2} = 2Hd\phi^2$, five

$$d\phi^2 - \frac{r^2 d\phi^2}{\frac{L-b}{LQ^2}y^2 + \frac{b^2}{LQ^2} - y^2} = \frac{2Hd\phi^2}{\frac{L-b}{LQ^2} + \frac{b^2}{LQ^2y} - \frac{x}{y^2}}. \text{ Prima}$$

pars hujus æquationis est resolvable in duos factores reales. Effecta hac resolutione, & dividendo per alterum ex factori-

$$\text{bus orietur } d\phi + \frac{r dy}{y \sqrt{\frac{L-b}{LQ^2}y^2 + \frac{b^2}{LQ^2} \cdot y - x}} = \frac{2Hd\phi^2}{y \sqrt{\frac{L-b}{LQ^2}y^2 + \frac{b^2}{LQ^2} \cdot y - x}}$$

$$\frac{L-b}{LQ^2} + \frac{b^2}{LQ^2y} - \frac{x}{y^2} \cdot d\phi - \frac{r dy}{y \sqrt{\frac{L-b}{LQ^2}y^2 + \frac{b^2}{LQ^2} \cdot y - x}}$$

Hujus æquationis pars prima exhibet sectionem conicam, quæ describeretur, si abessent potentia z , g . Hoc tibi clare con-

stabit, si facias $\frac{LQ^2}{L-b} = \frac{n^2 \cdot n+m}{n-m}$, $\frac{LQ^2}{b^2} = \frac{n \cdot n+m}{2m}$, ex qui-

bus remanent determinatæ m , n per datas b , L , Q ; tum

ponas $y = \frac{n \cdot n+m}{m+p}$, ut fit $p = \frac{n \cdot n+m}{y} - m$. Peractis sub-

stitutionibus nascetur æquatio $d\phi - \frac{r dp}{\sqrt{nn-pp}} =$

$\frac{2Hd\phi^2 \cdot n^2 \cdot \overline{n+m^2}}{n^2 - p^2 \cdot d\phi + \frac{r dp}{\sqrt{nn-pp}}}$. Posita $r = n$, luce clarius est,

$\frac{r dp}{\sqrt{rr-pp}}$ esse elementum arcus circularis, cujus sinus = p .

Hunc arcum vocemus = μ : erit igitur $d\phi - d\mu =$

$\frac{2Hd\phi^2 \cdot n^2 \cdot \overline{n+m^2}}{n^2 - p^2 \cdot d\phi + d\mu}$. Ultimus hic terminus fiat = $d\lambda$, & in-

tegreter æquatio; $A + \phi - \mu = \lambda$. Quantitas A est arcus, cujus

cujus sinus = $\frac{n \cdot n + m}{b}$ — m . Facto transitu ad sinus erit

$S c. A + \phi - \mu = S c. \lambda$. Prima pars dat sectionem conicam, secunda correctionem. Si sequimur methodum, quæ primum obvium venit, in hunc modum solvitur tuum primum problema. Veruntamen video, solutionem hanc, & formulam, per quam obtinetur, tum ob substitutiones, quæ adhibitæ sunt, tum ob multiplices arcus, quos includit, exiguam illi, quem tibi proposuisti finem, posse utilitatem afferre.

Tua solutio invenienda est, quæ multo est utilior, atque elegantior: quamobrem novus calculi circuitus tenendus est.

Inquiro primum valorem $\frac{dq}{q^3}$. Quoniam $q = \frac{y^2 d\phi}{\sqrt{r^2 dy^2 + y^2 d\phi^2}}$, sumptis differentiis in hypothesi $d\phi$ constantis, proveniet $dq = \frac{y^3 dy d\phi^3 - r^2 y^2 dy d\phi ddy + 2r^2 y dy^3 d\phi}{r^2 dy^2 + y^2 d\phi^2}^{\frac{3}{2}}$; igitur

$$\frac{dq}{q^3} = \frac{y^3 dy d\phi^3 - r^2 y^2 dy d\phi ddy + 2r^2 y dy^3 d\phi}{y^6 d\phi^3} = \frac{dy}{y^3} - \frac{r^2 dy ddy}{y^4 d\phi^2}$$

+ $\frac{2r^2 dy^3}{y^5 d\phi^2}$. Hoc invento substituo in æquatione $\frac{dq}{q^3} =$

$$\frac{b^2}{2LQ^2} \cdot \frac{dy}{y^2} + \frac{2dy + \frac{rgdy^2}{yd\phi} - \frac{b^2}{LQ^2} \cdot \frac{dy}{y} S \frac{gy^3 d\phi}{r}}{2FLQ^2 + 2S \frac{gy^3 d\phi}{r}} \quad \text{valorem}$$

$\frac{dq}{q^3}$, & transpono terminos, ut habeam $\frac{b^2}{2LQ^2} \cdot \frac{dy}{y^2} - \frac{dy}{y^3} +$

$$\frac{r^2 dy ddy}{y^4 d\phi^2} - \frac{2r^2 dy^3}{y^5 d\phi^2} + \frac{2dy + \frac{rgdy^2}{yd\phi} - \frac{LQ^2}{b^2} \cdot \frac{dy}{y^2} S \frac{gy^3 d\phi}{r}}{2FLQ^2 + 2S \frac{gy^3 d\phi}{r}}$$

= 0. Facta multiplicatione per $\frac{y^2}{dy}$, ita scribatur æquatio

$$\frac{b^2}{2LQ^2} - \frac{x}{y} + \frac{r^2 D \frac{dy}{y^2}}{d\phi^2} + \frac{zy^2 + \frac{rgydy}{d\phi} - \frac{b^2}{LQ^2} S \frac{gy^3 d\phi}{r}}{2FLQ^2 + 2S \frac{gy^3 d\phi}{r}}$$

= 0. Terminus ultimus fiat = $\frac{\Omega}{rr}$, ut simplicior æquatio

$$\text{exurgat } \frac{b^2}{2LQ^2} - \frac{x}{y} + \frac{r^2 D \frac{dy}{y^2}}{d\phi^2} + \frac{\Omega}{r^2} = 0.$$

Possẽ efficere hanc æquationem integrabilem, eam multiplicando per $\frac{dy}{y^2}$; sed hæc præparatio solutionem illam restitueret, de qua supra loquutus sum. Quapropter eam integrabilem reddo per multiplicationem alicujus functionis ϕ . Itaque multiplico per $d\phi$. $Cc.\phi$, pro quo substituo in primo termino $rdSc.\phi$, ut fit

$$\frac{b^2}{2LQ^2} - \frac{x}{y} \cdot rdSc.\phi + \frac{r^2 Cc.\phi}{d\phi} D \frac{dy}{y^2} + \frac{\Omega dSc.\phi}{r} = 0, \text{ quæ, si integretur, præbet}$$

$\frac{b^2}{2LQ^2} - \frac{x}{y} \cdot rSc.\phi + \frac{r^2 dy \cdot Cc\phi}{y^2 d\phi} + \frac{\Omega dSc.\phi}{r} = M$. Ad determinandam constantem M , adverto, si $y=b$, ϕ , & $Sc.\phi=0$, ac $Cc.\phi=r$, fore $dy:d\phi:P:Q$; $d\phi:d\phi::b:r$; ergo $dy:d\phi::bP:rQ$; qui valores substituti dant M

$$= \frac{r^2 P}{bQ}; \text{ igitur } \frac{b^2}{2LQ^2} - \frac{x}{y} \cdot rSc.\phi + \frac{r^2 dy Cc.\phi}{y^2 d\phi} +$$

$S \frac{\Omega dSc.\phi}{r} = \frac{r^2 P}{bQ}$, in qua $S \frac{\Omega dSc.\phi}{r}$ ita accipienda est, ut evanescat in puncto projectionis. Ultima æquatio multiplicetur

$$\text{per } \frac{d\phi}{Cc.\phi^2}, \text{ ut nascatur } \frac{b^2}{2LQ^2} - \frac{x}{y} \cdot \frac{rd\phi Sc.\phi}{Cc.\phi^2} + \frac{r^2 dy}{y^2 Cc.\phi}$$

$$+ \frac{d\phi}{Cc.\phi^2} S \frac{\Omega dSc.\phi}{r} - \frac{r^2 P}{bQ} \cdot \frac{d\phi}{Cc.\phi^2} = 0; \text{ atqui } d\phi Sc.\phi$$

$$= -rdCc.\phi, \text{ \& } \frac{d\phi}{Cc.\phi^2} = \frac{dTc.\phi}{r^2}; \text{ igitur}$$

$$\frac{b^2}{2LQ^2} - \frac{x}{y} = - \frac{r^2 dCc.\varphi}{Cc.\varphi^2} + \frac{r^2 dy}{y^2 Cc.\varphi} + \frac{dTc.\varphi}{r^3} S \Omega dSc.\varphi$$

$$- \frac{PdTc.\varphi}{Q} = 0, \text{ \& peracta integratione } \frac{r^2}{Cc.\varphi} \cdot \frac{b^2}{2LQ^2} - \frac{x}{y} \\ + S \frac{dTc.\varphi \cdot S \Omega dSc.\varphi}{r^3} - \frac{PTc.\varphi}{Q} = M. \text{ Constantis } M \text{ facili}$$

negotio detegitur = $\frac{rb^3 - 2rLQ^2}{2LQb}$. Hinc peractis congruis
transpositionibus oritur $\frac{b^2}{2LQ^2} - \frac{x}{y} = \frac{b^3 - 2LQ^2}{2rLQ^2b} \cdot Cc.\varphi +$

$$\frac{P.Tc.\varphi.Cc.\varphi}{r^2bQ} - \frac{Cc.\varphi S d.Tc.\varphi S \Omega dSc.\varphi}{r^5}; \text{ atqui notissimum}$$

est $\frac{Tc.\varphi.Cc.\varphi}{r} = Sc.\varphi$; igitur $\frac{b^2}{2LQ^2} - \frac{x}{y} = \frac{b^3 - 2LQ^2}{2rLQ^2b}$

$$\therefore Cc.\varphi + \frac{P}{rbQ} \cdot Sc.\varphi - \frac{Cc.\varphi \cdot S dTc.\varphi S \Omega dSc.\varphi}{r^5}, \text{ aut}$$

$$\frac{2LQ^2}{b^2y} = 1 - \frac{2LQP}{rb^3} \cdot Sc.\varphi - \left(\frac{b^3 - 2LQ^2}{rb^3} \cdot Cc.\varphi + \frac{2LQ^2}{b^2} \right.$$

$$\left. Cc.\varphi S \frac{dTc.\varphi S \Omega dSc.\varphi}{r^5} \right). \text{ Quoad constantium determinatio-}$$

nem hoc inter me, & te interest, quod ego ad projectionis punctum statuo arcum $\varphi = 0$; ubi vero tu in problemate tertio ponis arcum $\nu = \alpha$. Verum si hujus discriminis ratio habeatur, omnia exquisite conveniunt.

$$\text{\AE}quatio \frac{2LQ^2}{b^2y} = 1 - \frac{2LPQ}{rb^3} \cdot Sc.\varphi - \left(\frac{b^3 - 2LQ^2}{rb^3} \right.$$

$\cdot Cc.\varphi$ sufficit sectionem conicam, quæ describeretur, nisi existerent potentia z, g . Si angulus projectionis fuerit rectus, habebitur $P = 0, Q = b$, unde æquatio $\frac{2L}{y} = 1 - \left(\frac{b - 2L}{rb} \right.$

$\cdot Cc.\varphi$. In hoc casu radius vector in puncto projectionis est axis sectionis, & vocatis = u ordinatis orthogonalibus, &

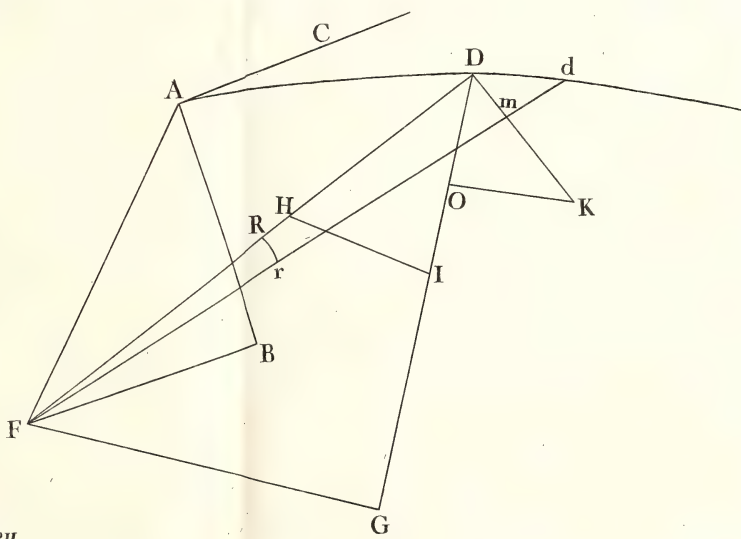
$b - x$

$b - x$ interceptis inter focum ac ordinatas, æquatio hæc proveniet $4 L b^2 x + 4 L L - 4 L b . x^2 = b^2 u^2$. Ad inveniendum axem etiam in casu, ubi angulus projectionis non est rectus, sequens methodus afferet utilitatem. Determinetur ejusmodi arcus $= \varepsilon$, in quo fit $S c . \varepsilon : C c . \varepsilon :: 2 L P Q : b^3 - 2 L Q^2$. Determinetur item ejusmodi quantitas $= n$, quæ efficiat, ut $r n S c . \varepsilon = 2 L P Q$; erit etiam $r n C c . \varepsilon = b^3 - 2 L Q^2$. Igitur æquatio hanc formam induet $\frac{2 L Q^2}{b^2 y} = 1 -$
 $(\frac{n S c . \varepsilon . S c . \varphi + n C c . \varepsilon . C c . \varphi}{r^3})$; atqui constat $S c . \varepsilon . S c . \varphi +$
 $C c . \varepsilon . C c . \varphi = r . C c . \varphi - \varepsilon$; ergo $\frac{2 L Q^2}{b^2 y} = 1 -$
 $\frac{r n C c . \varepsilon - \varphi}{b^3}$. Hæc formula ostendit, rectam facientem angulum $= \varepsilon$ cum radio vectore in puncto projectionis esse sectionis conicæ axem: hujus autem sectionis æquatio erit $4 L Q^2 b^4 x + r^4 n^2 - b^6 . x^2 = b^6 u^2$, vocatis axi ordinatis $= u$, interceptis vero inter focum & ordinatas $= \frac{2 L Q^2 b}{b^3 - r^2 n} - x$.

Formula correctionis, quam ego inveni, omisso $\frac{2 L Q^2}{b^2}$; per quod meum Ω differt a tuo, ad tuam facile reducitur:

Perpicuum est $S d T c . \varphi . S \Omega d S c . \varphi = T c . \varphi . S \Omega d S c . \varphi - S T c . \varphi . \Omega d S c . \varphi$; igitur $C c . \varphi S d T c . \varphi S \Omega d S c . \varphi = C c . \varphi . T c . \varphi S \Omega d S c . \varphi - C c . \varphi . S T c . \varphi . \Omega d S c . \varphi$; sed $C c . \varphi . T c . \varphi = r S c . \varphi$, & $d S c . \varphi = \frac{d \varphi C c . \varphi}{r}$; ergo $C c . \varphi S d T c . \varphi S \Omega d S c . \varphi = S c . \varphi S \Omega d \varphi C c . \varphi - C c . \varphi S \Omega d \varphi S c . \varphi$. Quod erat demonstrandum.

Non alia de causa has nugas tibi, Vir clarissime, scribendas censeo, nisi ut plane cognosceres, meam methodum æque ac tuam ad illas formulas perducere, quæ constituunt basim ejus ratiocinii, quo perficis Lunæ theoriam. Opusculum tuum pergam legere, & nullus dubito, quin inventurus sim





sim mira & recondita in tuis calculis artificia. Sed persequar pedetentim, tum quia materies ubique attentionem exposcit maximam, tum quia diuturnis gravibusque aliis occupationibus distineor, quæ otium relinquunt fatis exiguum. Hoc maxime velim tibi persuadeas, a me fieri plurimi & te, & ingenii tui monumenta. Vale.

Bononiæ in Italia Non. Junii 1765.

VINCENTII RICCATI SOC. JESU.

De quadratura curvarum tradita per summas generales serierum.

VINCENTIUS RICCATUS

JACOBO MARISCOTTO

Præsidi Bononiensis Academiae

S. P. D.

Aliquot ante annos quum in publicam lucem emisi commentarium, in quo novam methodum exhibui accipiendi summas generales serierum, quæ summam generalem non respuunt, quæstisti ex me iterum ac sapius, Jacobe ornatissime, utrum earum curvarum, quæ algebraice quadrari possunt, liceret mihi per summam serierum quadraturam determinare. Ad rem meam maxime pertinebat, interrogationem tuam non profus contemnere, quia eidem satisfaciens videbar meæ methodi fœcunditatem non mediocriter illustrare. Sæpenumero nihil est facilius, quam per summam serierum quadraturam invenire. Verum in aliis casibus permultis tanta se se offert difficultas, quæ inquirentem quemque posset detertere. Rem utramque aperiam exemplo facillimo Parabolæ Apollonianæ.

Sit Parabola Apolloniana AD (*Fig. 1.*), cujus axis sit AF, tangens autem axi normalis sit AB, & quaratur spatium ABD. Vocato parametro = a , AB = x , BD = y , erit æquatio curvæ, ut cuique constat, $xx = ay$. Dividatur abscissa AB in partes infinitesimas æquales Ae, e2e, 2e3e, 3e4e &c., quarum numerus, qui infinitus erit, vocetur = n ; singulæ autem vocentur = q , Patet fore $nq = x$. Agantur ordinatæ ei, 2e2i, 3e3i, 4e4i &c., quæ analitice per q ita exprimentur $\frac{q^2}{a}$, $\frac{4q^2}{a}$, $\frac{9q^2}{a}$, $\frac{16q^2}{a}$ &c.: ergo rectangula ieA, 2i2ee, 3i3e2e, 4i4e3e &c. exprimentur per hanc se.

feriem $\frac{q^3}{a}, \frac{4q^3}{a}, \frac{9q^3}{a}, \frac{16q^3}{a}$ &c., cujus ultimus terminus est $\frac{n^2 q^3}{a}$. Horum autem rectangulorum summam adæquat, ut notissimum est, area parabolica ABD: ergo hæc area est æqualis quantitati $\frac{q^3}{a}$ ductæ in summam seriei
 $1, 4, 9, 16 \dots n^2$.

Series hæc, quæ coalescit ex quadratis numerorum naturalium, est algebraica secundi ordinis, quia ejus differentiæ secundæ constantes sunt, & habet terminum generalem $= n^2$. Quare per methodum in altero commentarii capite traditam, invenies ejus summam $= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2.3}$. Itaque area parabolica ABD $= \frac{q^3}{a} \cdot \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2.3}$. Verum quum n infinita sit, n^2 , & n evanescunt respectu n^3 : ergo spatium parabolicum ABD $= \frac{n^3 q^3}{3a}$: atqui $nq = x$: ergo idem spatium $= \frac{x^3}{3a}$: sed $\frac{x^2}{a} = y$: igitur area ABD $= \frac{xy}{3}$; quod verissimum esse ex aliis methodis constat. Methodus autem hæc, ut probe vides, difficultatem habet nullam.

Verumtamen res fecus se se habebit, & calculus incurret in difficultatem non levem, si parabolam referamus ad axem, ut vocata AB = x , (*Fig 2.*) BD = y sit ejus æquatio $ax = yy$. Namque divisa AB in partes æquales numero infinitas Ae, e2e, 2e3e, 3e4e &c., quarum singulæ = q , ut sit $nq = x$; tum ductis ordinatis ei, 2e2i, 3e3i, 4e4i &c., palam est, has exprimi per terminos sequentis seriei $\sqrt{aq}, \sqrt{2aq}, \sqrt{3aq}, \sqrt{4aq} \dots \sqrt{naq}$. Igitur rectangula ieA, 2i2ee, 3i3e2e, 4i4e3e &c., quorum summa adæquat aream parabolicam ABD, representantur a terminis seriei $q\sqrt{aq}, q\sqrt{2aq}, q\sqrt{3aq}, q\sqrt{4aq} \dots q\sqrt{naq}$: igitur area ABD æqualis est quantitati $q\sqrt{aq}$ multiplicatæ per summam seriei $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4} \dots \sqrt{n}$.

Hic difficultas exoritur maxima. Nam series exposita, cujus terminus generalis = \sqrt{n} caret, summa generali algebraica. Quare videtur, per meam methodum capiendi summas generales ferierum non posse hoc modo obtineri quadraturam spatii parabolici ABD.

Ut me liberem ab hac non contemnenda difficultate, duplicem methodum in usum traduco. Utramque autem exponam eodem adhibito exemplo Parabolæ Apollonianæ. Quod spectat ad primam. Quis me jubet dividere abscissam AB (Fig. 3.) in partes æquales? Ad rem meam satis est, ut dividam in partes infinitesimas. Quare eo modo partibor, ut respondententes ordinatæ ejusmodi valorem induant, qui in terminis seriei expellat irrationalia, & seriem producat præditam summa generali.

In vulgari Parabola voti compos summa sumens spatiosa infinitesima Ae, e2e, 2e3e, 3e4e &c., in ratione numerorum imparium ita, ut, vocato primo Ae = q, sint successive q, 3q, 5q, 7q &c. Agantur ordinatæ ei, 2e2i, 3e3i, 4e4i &c. Ex natura Parabolæ ita per q analytice exprimentur \sqrt{aq} , $2\sqrt{aq}$, $3\sqrt{aq}$, $4\sqrt{aq}$ &c. Quare rectangula ieA, 2i2ee, 3i3e2e, 4i4e3e &c., quæ adæquat area parabolica ABD, repræsentantur ab hac serie $q\sqrt{aq}$, $2.3q.\sqrt{aq}$, $3.5q\sqrt{aq}$, $4.7q\sqrt{aq}$ &c. Ergo area Parabolica ABD invenitur æqualis $q\sqrt{aq}$ ductæ in summam seriei 1. 1, 2. 3, 3. 5, 4. 7 &c.

Series hæc formatur a multiplicatione duarum ferierum 1, 2, 3, 4 &c. 1, 3, 5, 7 &c., quarum prima est numerorum naturalium, & habet terminum generalem = n; altera est numerorum imparium, & habet terminum generalem = 2n - 1: ergo series, a cujus summa dependet Parabolæ quadratura, habebit terminum generalem = 2nn - n. Si hujusce seriei, quæ est algebraica secundi ordinis, ex mei commentarii capite altero, summam quæras, reperies eam esse = $\frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2.3}n$. Hæc autem facta n infinita, evanescentibus duobus ultimis terminis fit = $\frac{2}{3}n^3$. Itaque spatium parabolicum ABD = $\frac{2}{3}n^3 q\sqrt{aq}$.

Verum observandum est, abscissam x in facta hypothesi non æquare nq , sed æquare summam seriei $q, 3q, 5q, 7q$ &c. usque ad terminum n esimum, quæ summa $= n^2q$: ergo $x = n^2q$, & $x\sqrt{x} = n^3q\sqrt{q}$: igitur area parabolica erit $= \frac{2}{3}x\sqrt{ax}$: sed $y = \sqrt{ax}$: ergo eadem area $= \frac{2}{3}xy$. Quod erat inveniendum.

Quod si aveas uti ea serie, quæ oritur ex divisione abscissæ AB (*Fig. 2.*) in partes æquales, cujus terminus generalis $= \sqrt{n}$, alia longe diversa adhibenda est methodus, quæ majorem poscit industriam. Etenim series prædita termino generali $= \sqrt{n}$ caret summa generali algebraica, ut ex meo commentario satis superque constat. Quapropter dabo operam, ut eandem seriem, cui est terminus generalis $= \sqrt{n}$, constituam mediam inter duas series, quæ prædita sint conditionibus duabus: primum ut summam generalem admittant; deinde ut facta n infinita, sumptisque terminis numero infinitis, serierum summæ æquales evadant, licet generatim sint inæquales. Quomodo autem hoc præstare liceat, enitar, ut dilucide exponam.

Adverto quantitatem \sqrt{n} , existente n numero integro, & positivo, mediam esse inter duas hæcce quantitates

$$\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{n-1}{2}$$

$\frac{2}{3} \cdot \frac{n+1}{2} - \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}$, majorem scilicet esse prima, minorem altera. Ut hoc cognoscas satis est, ut duo binomia $n-1$,

$n+1$ ad potestatem $\frac{3}{2}$ methodo newtoniana eleves. Itaque si tres series efformes, quarum prima habeat terminum ge-

neralem $= \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{n-1}{2}$, secunda habeat terminum ge-

neralem $= \sqrt{n}$, tertiæ terminus generalis sit $= \frac{2}{3} \cdot \frac{n+1}{2}$

$- \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}$, singuli termini secundæ seriei medii erunt inter singulos aliarum: ergo etiam summa secundæ seriei erit media inter summas aliarum.

Præterea summa seriei primæ, cui est terminus generalis

$= \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n-1}$, per ea, quæ docui in primo commen-
 tarii capite, est $= \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$; tertiæ vero, cujus terminus genera-
 lis $= \frac{2}{3} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n+1} - \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$, summa est $= \frac{2}{3} \cdot \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n+1} - \frac{2}{3}$: igitur
 inter duas hæc quantitates $\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n+1} - \frac{2}{3}$ media est
 summa seriei, quam gignit terminus generalis $= \sqrt{n}$. Quan-
 titates istæ duæ inæquales sunt, donec n finitus fuerit nume-
 rus, sed factò n infinito evadunt æquales, & utraque $=$
 $\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$: ergo seriei mediæ præditæ termino generali $= \sqrt{n}$, sum-
 ma fiet $= \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$.

Quoniam autem paullo ante inveni, spatium paraboli-
 cum ABD æquale quantitati $q^2 \sqrt{a}$ ductæ in summam seriei
 $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$ &c. \sqrt{n} , erit area ABD $= \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$
 $q^2 \sqrt{a}$; sed $nq = x$: ergo area ABD $= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \sqrt{a} = \frac{2}{3} x \sqrt{ax}$:
 atqui $\sqrt{ax} = y$: ergo area ABD $= \frac{2}{3} xy$.

Ne autem videar sola conica parabola contentus, modum
 hunc quadrandi curvas per summam ferierum altioribus omni-
 bus Parabolis, & Hyperbolis applicabo excepta Hyperbola
 Apolloniana. Verum quando methodus hæc nostra hoc dun-
 taxat postulat, ut accipiantur summæ ferierum posito numero
 terminorum infinito, necesse est, ut ad evitandam calculi
 prolixitatem, atque molestiam doceam modum, quo series
 in infinitum producta facilius colligatur in summam. Loquimur
 hic de illis seriebus, quarum terminus generalis, qui datus
 supponitur, sit functio algebraica integra. Harum ferierum
 summæ, si bene memoria tenes ea, quæ primo, atque altero
 commentarii capite declaravi, in hunc modum inveniri pos-
 sunt. Formetur formula algebraica data per n , quæ species
 numerum indicat terminorum, uno gradu altior, quam sit
 terminus generalis, prædita terminis omnibus excepto ultimo,
 quorum coefficientes determinandi sint in operationis progressu.
 In hac pro n scribatur $n-1$, & quæ exurgit formula a su-
 pe-

periore detrahatur. Facta deductione nova se prodit formula ejusdem gradus, ac terminus generalis, atque cum hoc identica fit oportet. Itaque comparatione rite instituta fit coefficientium determinatio, atque seriei summa detegitur.

Hujusce analyseos progressum opportunum erit exemplo illustrare. Invenienda sit summa generalis seriei, cujus supra mentionem fecimus, & cujus terminus generalis = $2nn - n$. Finge hujus summam esse = $An^3 + Bn^2 + Cn$, quæ formula & caret ultimo termino, & est uno gradu altior, quam terminus generalis. In hac pro n scribe $n - 1$, & novam, quæ exoritur, formulam fac deducas ex supposita, ut sit

$$\begin{array}{r} An^3 + Bn^2 + Cn \\ - An^3 + 3An^2 - 3An + A \\ \quad - Bn^2 + 2Bn - B \\ \quad \quad - Cn + C. \end{array}$$

Facta actuali subductione reliqua est formula

$$\begin{array}{r} 3An^2 - 3An + A \\ + 2Bn - B \\ + C, \end{array}$$

quæ ad determinandos valores coefficientium A, B, C conferenda est cum termino generali: quæ collatio dabit $A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{-1}{2 \cdot 3}$: ergo summa seriei erit = $\frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2 \cdot 3}n$: quemadmodum antea supposita est.

In hoc progressu ex formula summæ supposita, si deducatur ea, quæ oritur ex substitutione $n - 1$ pro n , semper evanescit primus terminus ex contrarietate signorum, & formula descendit ad eum gradum, in quo situs est seriei terminus generalis. In altero termino licet secundus terminus formulæ suppositæ cum suo coefficiente elidatur; tamen reliquus est secundus terminus binomii $n - 1$ elati ad potestatem, & affecti coefficiente primi termini formulæ suppositæ mutato signo. Si autem n fiat infinitus, reliqui termini omnes respectu hujus evanescunt. Quare ad inveniendam summam seriei in infinitum productæ, satis erit terminum hunc, qui residuus est, comparare cum termino primo termini generalis, & determinare coefficientis valorem.

Ita in exemplo adducto facta deductione evanescit terminus An^3 ; in sequenti termino evanescit Bn^2 , & solum

remanet $3An^2$; qua de re coefficientis B ex secundo termino abit. Qui reliquus est $3An^2$ nihil est aliud quam secundus terminus binomii $A \cdot \overline{n-1}^3$ signo mutato. Quare si $3An^2$ conferatur cum $2n^2$, inueniemus $A = \frac{2}{3}$. Igitur summa seriei in infinitum productæ erit $= \frac{2}{3}n^3$, existente n infinita.

Quæ quum ita sint, hæc statuatur regula ad inueniendam summam seriei in infinitum productæ ex dato termino generali. Eleua binomium $n-1$ ad potestatem uno gradu altio-rem, quam sit potestas termini generalis: terminum alterum mutato signo multiplica per indeterminatam A , tum compara cum termini generalis termino primo, & determina- ualorem A . Hanc multiplica per potestatem n uno gradu altio-rem, quam sit potestas termini generalis; & inuenies quaesitam summam seriei in infinitum productæ.

His explicatis redeo in viam. Ex tribus methodis, quas supra applicavi Parabolæ Apollonianæ, ajo, primam infer- uire quadrandis omnibus parabolis, quæ hac æquatione con- tinentur $a^{m-1}y = x^m$, existente m numero integro, & posi- tivo. Sit hæc Parabola AD , cujus abscissa $AB = x$, (*Fig. I.*) ordinata $BD = y$. Diuisa AB in infinitas partes æquales, re- tentisque superioribus denominationibus constat, successivas ordinatas fore

$$\frac{q^m}{a^{m-1}}, \frac{2^m q^m}{a^{m-1}}, \frac{3^m q^m}{a^{m-1}}, \frac{4^m q^m}{a^{m-1}}, \&c. \dots \dots \frac{n^m q^m}{a^{m-1}}.$$

Igitur suc- cessiva rectangula, quorum summa adæquat aream parabol- icam ABD , erunt

$$\frac{q^{m+1}}{a^{m-1}}, \frac{2^m \cdot q^{m+1}}{a^{m-1}}, \frac{3^m q^{m+1}}{a^{m-1}}, \frac{4^m \cdot q^{m+1}}{a^{m-1}} \dots \dots \frac{n^m q^{m+1}}{a^{m-1}} : \text{ergo}$$

area ABD æquabit quantitatem $\frac{q^{m+1}}{a^{m-1}}$ ductam in sequentem seriem $1, 2^m, 3^m, 4^m \dots \dots n^m$.

Itaque si quis hujusce seriei summam inuenit, aream parabolicam obtinebit. Series autem est algebraica ordinis m^{esimi} , cujus scilicet differentia m^{esima} constantes sunt, & habet pro termino generali n^m . Facta n infinita summam ex præce- denti animadversione ita inuenies. Eleua ad potestatem $m+1$ binomium $n-1$, secundus terminus erit mutato signo

$m + 1 . n^m$. Hunc multiplica per A , & compara cum n^m primo, imo unico termino termini generalis, & invenies $A = \frac{m+1}{1}$: ergo summa seriei in infinitum productæ fiet $= \frac{n^{m+1}}{m+1}$: ergo area parabolica ABD = $\frac{n^{m+1} q^{m+1}}{m+1 . a^{m-1}}$: sed $nq = x$: ergo area ABD = $\frac{x^{m+1}}{m+1 . a^{m-1}} = \frac{xy}{m+1}$. Q E I .

Secunda methodus infervit quadrandis omnibus parabolis, quibus est æquatio $a^{m-1} x = y^m$ existente m numero integro, & positivo . Etenim abscissa AB (Fig. 3) non dividatur in partes æquales, sed ita successive crescentes, ut servent inter se eam rationem, quam termini sequentis seriei

1, $2^m - 1$, $3^m - 2^m$, $4^m - 3^m$ $n^m - (n-1)^m$, ita ut vocata prima parte Ae = q , Ae, e2e, 2e3e, 3e4e &c., successive exprimantur per terminos seriei

q , $2^m - 1 . q$, $3^m - 2^m . q$, $4^m - 3^m . q$ $n^m - (n-1)^m . q$.

Manifestum est, abscissas integras Ae, A2e, A3e, A4e &c. fore q , $2^m q$, $3^m q$, $4^m q$ $n^m q$. Quapropter ordinatæ ei, 2e2i, 3e3i, 4e4i &c., invenientur

$\frac{1}{a^{m-1} q^m}$, $\frac{1}{a^{m-1} . 2^m q^m}$, $\frac{1}{a^{m-1} . 3^m q^m}$ $\frac{1}{a^{m-1} n^m q^m}$, five

1. $a^{m-1} q^m$, 2. $a^{m-1} q^m$, 3. $a^{m-1} q^m$ $n . a^{m-1} q^m$.

Itaque rectangula ieA, 2i2ee, 3i3e2e, 4i4e3e &c., quibus area parabolica per adæquationem æquivalet, fient successive æqualia

$q . a^{m-1} q^m$, 2. $2^m - 1 . q . a^{m-1} q^m$, 3. $3^m - 2^m . a^{m-1} q^m$

4. $4^m - 3^m . q . a^{m-1} q^m$ $n . n^m - (n-1)^m . q . a^{m-1} q^m$.

Qui de re area parabolica invenitur æqualis quantitati

$q . a^{m-1} q^m$ ductæ in summam seriei

$$1, 2 \cdot 2^m - 1, 3 \cdot 3^m - 2^m, 4 \cdot 4^m - 3^m \dots n \cdot n^m - (n-1)^m.$$

Series hæc, cujus terminus generalis est =

$n \cdot n^m - (n-1)^m$, quamquam primo aspectu videtur esse gradus $m+1$; tamen quia terminus n^{m+1} ex signorum contrarietate eliditur, est tantum gradus m , & primus terminus ejus termini generalis est $m \cdot n^m$. Ut itaque seriei in infinitum productæ invenias summam, ex superiori animadversione eleva ad potestatem $m+1$ binomium $n-1$, ejusque secundum terminum $(m+1) \cdot n^m$, in quo signum mutatum est, multiplica per A , & confer cum $m \cdot n^m$ primo termino termini generalis, & invenies $A = \frac{n^m}{m+1}$: ergo seriei in infinitum productæ summa = $\frac{m}{m+1} n^{m+1}$: igitur area parabolica ABD = $\frac{m}{m+1} n^{m+1} \cdot q \cdot a^{m-1} q^{\frac{1}{m}}$.

Nemo unus non videt abscissam x æqualem esse quantitati q ductæ in summam seriei

$1, 2^m - 1, 3^m - 2^m, 4^m - 3^m \dots n^m - (n-1)^m$. Hujus autem seriei summa = n^m : ergo $x = n^m q$. Igitur facta substitutione fiet area parabolica ABD = $\frac{m}{m+1} x \cdot a^{m-1} x^{\frac{1}{m}}$: sed

$\frac{1}{a^{m-1} x^{\frac{1}{m}}} = y$: ergo area ABD = $\frac{m}{m+1} x y$. Q. E. I.

Methodus tertia utilis est ad quadrandas Parabolas omnes, & Hyperbolas cujuscumque gradus excepta Hyperbola Apolloniana. Harum curvarum omnium æquatio est $\frac{x^m}{a^{m-1}} = y$, in qua m potest esse quilibet numerus positivus, vel negativus, integer vel fractus. Si m positivus sit, æquatio est ad Parabolas, si m sit negativus, æquatio est ad Hyperbolas, & si $m = -1$, æquatio est ad Hyperbolam Apollonianam. Divisa abscissa AB (Fig. 2, 4) in partes minimas æquales, quarum singulæ sint = q . Respondentes ordinatæ

ei,

ei, 2e2i, 3e3i, 4e4i &c., erunt

$$\frac{q^m}{a^{m-1}}, \frac{2^m q^m}{a^{m-1}}, \frac{3^m q^m}{a^{m-1}}, \frac{4^m q^m}{a^{m-1}} \dots \dots \frac{n^m q^m}{a^{m-1}} : \text{ergo rectangula}$$

ieA, 2i2ee, 3i3e2e, 4i4e3e &c., quorum summa æqualis est area curvilinea, fient

$$\frac{q^{m+1}}{a^{m-1}}, \frac{2^m q^{m+1}}{a^{m-1}}, \frac{3^m q^{m+1}}{a^{m-1}}, \frac{4^m q^{m+1}}{a^{m-1}} \dots \dots \frac{n^m q^{m+1}}{a^{m-1}} : \text{ergo}$$

area curvilinea æquabit quantitatem $\frac{q^{m+1}}{a^{m-1}}$ ductam in summam seriei 1, 2^m, 3^m, 4^m n^m, cujus terminus generalis = n^m. Hujus seriei summa invenienda est pro hypothefi n infinitæ.

Hanc ob rem præmittendum est theorema. Quicumque fit numerus n, dummodo integer, & positivus, quantitas n^m semper media est inter duas quantitates

$$\frac{1}{m+1} n^{m+1} - \frac{1}{m+1} \cdot \overline{n-1}^{m+1}$$

$$\frac{1}{m+1} \overline{n+1}^{m+1} - \frac{1}{m+1} \cdot n^{m+1}$$

Si m fit positiva, n^m semper major est prima ex duabus hisce quantitibus, minor secunda; si vero m fit negativa, minor est prima, major altera.

Ex hoc theoremate constat, omnes terminos seriei, cui est terminus generalis = n^m, medios esse inter respectivos terminos serierum, quarum termini generales sunt

$$\frac{1}{m+1} n^{m+1} - \frac{1}{m+1} \cdot \overline{n-1}^{m+1}$$

$$\frac{1}{m+1} \overline{n+1}^{m+1} - \frac{1}{m+1} n^{m+1} :$$

quod item dicendum est de summis. Atqui constat ex primo capite mei Commentarii, seriei, quæ habet terminum generalem =

$$\frac{1}{m+1} n^{m+1} - \frac{1}{m+1} \cdot \overline{n-1}^{m+1}, \text{ summam esse} = \frac{1}{m+1} n^{m+1}; \text{ seriem autem, quæ prædita est termino generali}$$

$\frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{n+1}^{m+1} - \frac{1}{m+1} n^{m+1}$, habere summam =

$\frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{n+1}^{m+1} - \frac{1}{m+1}$: igitur summa seriei, cujus terminus generalis = n^m , media est inter statutas quantitates

$$\frac{1}{m+1} \cdot n^{m+1}, \quad \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{n+1}^{m+1} - \frac{1}{m+1}.$$

Quæ duæ quantitates, donec n finita est, sunt semper inæquales. Verum si n crescat in infinitum, æquales fiunt, & singulæ evadunt $\frac{1}{m+1} n^{m+1}$: ergo pro hac hypothefi n infinita, series termini generalis n^m habet summam =

$$\frac{1}{m+1} n^{m+1}: \text{ igitur area curvilinea ABD} = \frac{n^{m+1} q^{m+1}}{m+1 \cdot a^{m-1}}:$$

sed $nq = x$: ergo area curvilinea ABD = $\frac{x^{m+1}}{m+1 a^{m-1}}$: sed

$$\frac{x^m}{a^{m-1}} = y: \text{ ergo area curvilinea ABD} = \frac{xy}{m+1}. \text{ Q. E. I.}$$

Quod spectat ad Parabolas, hæc sufficiunt, neque quidquam addendum est. Sed aliqua adnotanda sunt de Hyperbolicis, quæ negotium non leve facere possunt. Æquatio proposita pertinet ad Hyperbolas, si m sit negativa. Si m negativa minor est unitate, nihil mutandum est in calculo, & omnia rite procedunt sicut in Parabolicis. Verum si m negativa unitatem superet, multa adnotatione indigent. In hoc casu mutato signo speciei m , ut ex negativa fiat positiva, termini generales duarum serierum, quæ inventam mediam tenent, sunt hujusmodi

$$\frac{-1}{m-1 \cdot n^{m-1}} + \frac{1}{m-1 \cdot n-1}^{m-1}$$

$$\frac{-1}{m-1 \cdot n+1}^{m-1} + \frac{1}{m+1 \cdot n^{m-1}}$$

Harum vero serierum summa ex methodo commentarii inveniantur

$$\frac{1}{m-1 \cdot o^{m-1}} - \frac{1}{m-1 \cdot n^{m-1}}$$

$$\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m-1 \cdot \frac{n-1}{m-1}}$$

Advertere necesse est, formulas hæc ita esse inæquales; ut etiam si n infinita evadat, inæquales remaneant, quia termini constantes, & independentes ab n inæquales sunt, reliquis præ istis evanescentibus. Qui termini, facta n infinita, ad æqualitatem ultra quemcumque litem accedunt, hi duo sunt $\frac{1}{m-1 \cdot n^{m-1}}$, $\frac{1}{m-1 \cdot n+1}^{m-1}$, qui a constantibus quantitatibus deducuntur. Quare etiam summa seriei, quæ media est, & quæ habet terminum generalem $= \frac{x}{n^m}$, coalescet ex termino constante, a quo deducendus erit terminus variabilis dependens ab n , qui facta n infinita $= \frac{x}{m-1 \cdot n^{m-1}}$. Terminus constans, quicumque sit, vocetur $= B$: ergo summa seriei in infinitum productæ exprimetur a formula $B - \frac{x}{m-1 \cdot n^{m-1}}$.

Itaque area hyperbolica ABD (Fig. 4.) fiet $= \frac{B \cdot a^{m+1}}{q^{m-1}}$
 $= \frac{a^{m+1}}{m-1 \cdot n^{m-1} q^{m-1}}$; sed $nq = x$: ergo eadem area $=$
 $\frac{B \cdot a^{m+1}}{q^{m-1}} - \frac{a^{m+1}}{m-1 \cdot x^{m-1}}$. Atqui facta $x = o$, area hæc debet evanescere: ergo fiet $B = \frac{q^{m-1}}{m-1 \cdot o^{m-1}}$: quo valore substituto habebimus aream ABD $= \frac{a^{m+1}}{m-1 \cdot o^{m-1}} - \frac{a^{m+1}}{m-1 \cdot x^{m-1}}$. Hæc vero formula clarissime indicat aream esse infinitam.

Quod si, posita $AB = a$, velis invenire aream DBFG, quæ evanescat facta $x = a$; tum per eandem methodum determinabis $B = \frac{q^{m-1}}{m-1 \cdot a^{m-1}}$, & facta substitutione obtinebis

$$\text{aream } D B F G = \frac{a^2}{m-1} - \frac{a^{m+1}}{m-1 \cdot x^{m-1}}. \text{ Quum autem sit}$$

$$x^m = \frac{a^{m+1}}{y}, \text{ fiet area } A B D = \frac{a^{m+1}}{m-1 \cdot o^{m-1}} - \frac{x y}{m-1}, \text{ \&}$$

$$D B F G = \frac{a^2}{m-1} - \frac{x y}{m-1}.$$

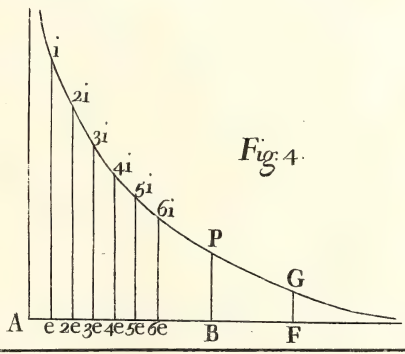
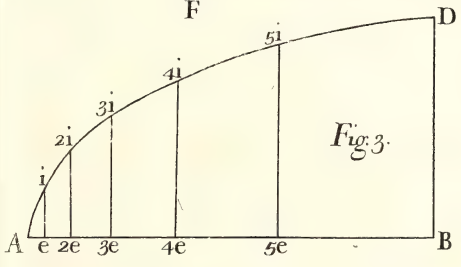
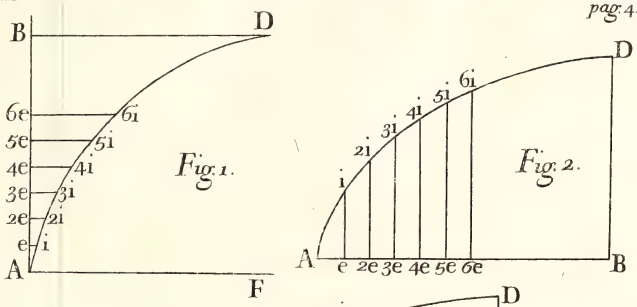
Ex his apparet, regulam supra traditam ad inveniendam summam seriei in infinitum productæ, quoties m est numerus integer, & positivus, eodem pacto valere, etiam si m sit negativus, & fractus. Nempe accipiendus est secundus terminus binomii $n - 1$ elati ad potestatem $m + 1$; tum mutato signo multiplicandus per A , & comparandus cum primo termino termini generalis, ut determinetur valor A : & summa seriei erit $A n^{m+1}$. Quod si contingat, ut summa hæc proveniat negativa, tunc præmittenda ei est quantitas constans, ut supra fecimus.

Superfluum est adnotare, methodum hanc esse omnino inutilem quadrandæ Hyperbolæ Apollonianæ, in qua mutato signo speciei m invenitur $m = 1$.

Attamen hoc silentio præterire non possum, quod, si $m > 1$, summa seriei $1; \frac{1}{2^m}, \frac{1}{3^m}, \frac{1}{4^m} \dots \frac{1}{n^m}$ in infinitum productæ obtinetur quidem, quantum satis est ad inveniendam Hyperbolæ quadraturam, ut patet ex calculo, quia non est necesse, definire valorem indeterminatæ B per quantitates finitas. Verum si absolute seriei summam quæras, frustra præfenti methodo uteris: numquam enim per quantitates finitas licebit tibi indeterminatæ B valorem invenire, cui valori summa quæsitæ æqualis est.

Hanc autem summam seriei in infinitum productæ, si $m = 2$, invenit primum Joannes Bernoullius, post Leonardus Eulerus, atque longe diversam methodum adhibentes demonstrarunt eam dependere a circuli quadratura: quod idem demonstravit Eulerus, si m sit numerus par. Verum si impar sit, multo magis si fractus, nondum constat, quo pacto series etiam in infinitum producta colligatur in summam. Sed hæc ad rem præsentem minime pertinent.

Vides



Vides itaque, Jacobe clarissime, me quadratis omnibus Parabolis, ac Hyperbolis, conica excepta, per summam serierum integrasse formulam generalem $x^m dx$, excepto casu $m = -1$. Quum autem omnes formulæ, quotquot sunt integrabiles, ad hanc redigantur, ut earum summatoria detegatur, palam est, a me per methodum summandi series demonstrata in præsens fuisse principia calculi integralis. Hæc, quæ ut satisfacerem petitioni tuæ, in mentem mihi venerunt, accipe perhumaniter, & cura diligenter valetudinem tuam.

Ex Col. S. Lucie XV. Kal. Februarii 1760.

JOANNIS BAPTISTÆ SCARELLÆ
CLERICI REGUL.

*De Principiis Visionis Directæ, Reflexæ,
& Refractæ.*

1. **C**Larissimus Alembertus in nono Opusculo inscripto *Doutes sur différentes questions d'Optique* operis in duo volumina divisi Parisiis editi anno 1761, inscriptique *Opuscules mathémat.* plura proponit adversus communes optiçæ leges, ex quibus colligit in hac scientia fere nihil etiam num factum fuisse. Ipsiùs autem difficultatum aliæ versantur circa principia visionis directæ, aliæ circa principia reflexæ, aliæ denique circa refractæ. Mihi autem in hoc commentario propositum est hæc eadem principia firmius, quam huc usque factum fuerit, novis tum experimentis atque observationibus, tum inde elicitis rationibus constituere, & ab iis, quæ a clarissimo Viro contra dicta fuerunt, quam accuratissime vindicare. Id, quod jam exequar quatuor capitibus, in quorum primo de principii visionis directæ, in altero de reflexæ, in tertio de refractæ, in quarto demum de aliis visionis reflexæ & refractæ principii disputabo.

CAPUT PRIMUM.

De principii visionis directæ.

2. **L**Audatus Auctor primum hæc differit articulo primo. Præter axem opticum, qui omnes oculi humores in linea recta trajicit, & sine ulla refractione ad feriendum retinæ punctum pervenit, omnes alii radii, qui ex lateribus objecti venientes in oculum oblique incurrunt, sæpius refringuntur, & illa eorum pars, quæ retinam proxime laceffit, non est in eadem linea recta, in qua est illa pars, quæ ab objecto ad corneam pertingit. In qua ergo directione cernitur ob.

objecti punctum? Experientia comprobare videtur id fieri in directione radii ab objecto ad corneam profecti, aut saltem hæc est communis opticæ scriptorum opinio. Sed primo valde est difficile, hoc experimentum ita accurate instituere, ut nullum superfit dubium; eo quod omne punctum extra axem opticum collocatum nos semper relinquît ancipites in definiendo loco, in quo est: quod comprobatur ex difficultate trajiciendi ex. causa anulum, quem oculus in directione axis optici non videat; & ex altera difficultate id præstandi, cum unum tantum oculum in eodem defigimus; quo in eventu punctum in concursu duorum axium minime videtur. Præterquam quod quo medio certi fieri possumus in accurata radii visibilis directione non obrepere errorem aliquorum minutorum aut etiam unius fere gradus? sed etiam dato punctum visibile percipi in directione partis radii inter objectum, & corneam intercepti, res inexplicabilis esse videtur. Non enim hæc portio visionem gignit, sed ea, quæ in fundum oculi incurrit, postquam fuit refracta, ideoque abscedit ab alterius directione. Quomodo & quo principio anima percipit objectum non esse in directione radii, qui proxime gignit sensationem, sed in altera, secundum quam ipsa vere non afficitur? Dicit aliquis objectum videri in directione perpendicularis ductæ ab illo retinæ puncto, in quod radius incidit refractus: quod verisimillimum est, quia cum radius oblique incidit in retinam, hæc ex mechanicæ legibus vere non afficitur nisi secundum perpendicularem. Sed primo cum hæc perpendicularis multum deflectere possit a directione radii incidentis, cum in oculum ingressus est, inde sequeretur visibilia puncta extra opticum axem collocata alibi percipi, quam revera sunt, itaque objecta oculo propiora, de quibus certius judicari potest, visum iri magnitudinis valde discrepantis ab ea, quam revera habent. Deinde quoniam objectum duobus cernitur oculis, perpendicularis, qua de agitur, alia pro alio oculo foret, & fere semper alia in alio plano. Ita visibile punctum extra opticum axem collocatum tunc deberet apparere duplex. Id quod non usuvenit. In easdem difficultates incurreret sententia, quæ poneret objectum videri in ipsamet radii in retinam incidentis directione, & in illam etiam, quod ob allatam rationem objectum intueri debemus potius in directione perpendicularis.

3. Ita Alembertus, qui hæc omnia rationibus diligenter subductis enucleatius explicat, atque confirmat articulis secundo, & tertio. Tum quarto hæc disserit. Secundum quam lineam percipiuntur visibilia objectorum puncta, quæ in axe optico non reperiuntur? Id quod difficillimum est, & quantum fieri potest, subtiliter definire. Veruntamen quoniam experientia docet objecta parvæ extensionis, quæ sub aspectum cadunt, non apparere ad sensum majora, quam re ipsa sunt, consequens est objecti AL (*Fig. 1.*), cujus punctum A videtur per radium irrefractum AZ usque ad retinæ XD punctum Z recta tendentem, punctum L , quod cernitur per refractum LS & VX ad X pervenientem, videri secundum directionem radii LS ab objecto ad corneam QS pertinentem, non autem secundum directionem aut portionis VX ad retinam oblique pervenientis, aut perpendicularis XY , quia per secundam & multo magis per tertiam valde majus apparet, quam re ipsa est, & re ipsa apparet. Qua vero de causa id fiat, negat Auctor se aggressurum explicare.

4. Demum hæc alia scribit: huc usque monstratum est objecta, quæ in optico axe non sunt, non satis ratum habere locum, in quo appareant, atque esse dubium, an hic locus sit accurate in radio, qui ab objecto proficiscitur ut perveniat ad oculum. Nunc vero ajo ipsamet objecta, quæ sunt in optico axe, non semper in eodem videri. Sit enim stella in E (*Fig. 2.*) duo oculi A , & B longissime absint ab eadem, eorumque optici axes sint AE , BE . Hæc stella certe videtur in loco valde propiori ut in ee , cujus distantia ab A , & B sine ulla proportione sit minor distantia ejusdem ab E . Quare oculi viderent duas stellas e , e , & apparet alterius ab altera distantia ee esset fere æqualis AB ; veruntamen experientia docet, eam videri in puncto fere medio ε secundum lineas $A\varepsilon$, $B\varepsilon$ a lineis AE , BE discrepantes. Verum quidem est has lineas parum deflectere ab axibus optici, sed deflectunt tamen; hocque experimentum satis est ad comprobandum objecta eminus posita non videri in optico axe, tametsi oculorum obtutum in illa dirigamus. Ergo universe conficitur nihil esse minus certum hoc optice principio, quod objecta videntur in directione radiorum, quos ad oculum transmittunt.

5. Mitto nunc alias easque gravissimas hujus auctoris difficult.

cultates adversus principia communiter usurpata visionis reflexæ, & refractæ, quas in posterum examinabimus; & fatius nunc arbitror meam exponere sententiam circa principia visionis directæ. Primum itaque statuo imaginationem magnitudinum, figurarum, situum, ac distantiarum, & judicia inde pendentia distingui oportere a visione earundem rerum, & a judiciis, quæ inde proficiscuntur. Visio enim est ex genere sensationum, quæ sunt valde clariores, atque fortiores imaginationibus, in quibus anima easdem quidem res, quæ sensus aliquando perculerunt, sibi repræsentat, sed valde obscurius, atque debilius, eo quod in imaginatione cerebrum concutitur valde minus, quam cum anima sensationibus qualitatum, quæ sensus externos laceffunt, afficitur: exempli causa non video veram solis magnitudinem, sed tantum imaginor eam esse innumeris partibus majorem, quam apparet; lunam autem prope finitorem majorem aspicio, quam cum est in meridiano. Quo constituto quæstionem, quam hic tractamus, versari moneo circa visiones hujusmodi qualitatum. Nec enim ob eas rationes, quas Condillacus in libro inscripto *Traité des sensations* magno acumine protulit, Anglorum sententiam circa visionis principia secutus, revocari potest in dubium hujus distinctionis fundamentum in eo positum, quod eadem sub visus sensum cadere possint. Ut ut enim res se habeat de hisce rationibus, quas alio loco accurate examinamus, quibusque mihi is videtur non aliud voluisse, quam visiones earundem qualitatum non posse nisi adminiculo tactus obtineri, mihi certe sum conscius inter illam perceptionem, qua intelligo lunam esse valde majorem ea magnitudine, quæ mihimetipsi apparet, dum nudis oculis eam aspicio, interque alteram, qua pariter nosco dicta magnitudine majorem, dum oculis telescopio armatis intueor, intercedere valde latum discrimen; primam esse valde debilem, & imaginationis propriam, alteram autem claram, & fortem non minus, quam sint quælibet aliæ sensationes, & ipsamet visiones colorum, quas ad sensum oculorum pertinere neino inficiari potest. Hoc mihi in præfenti satis est ad ea, quæ sum dicturus.

Quo vero faciliorem mihi viam ad eadem muniam, in medium produco vulgare quoddam experimentum, quod toti huic obscurissimo loco magnam afferet lucem, & sub oculos ponet, quemadmodum oculi totum aliquod corpus sua defi-

nitum figura complectantur. Rationes reddidi in Psychologia; cur sensationes etiam, postquam corpus illas excitans ab agendo cessaverit, durent per aliquod tempus, tametsi sensum obscuriores fiant; & tandem omnino evanescant, ac abeant in imaginationes; idque confirmavi experimento carbonis candentis, qui si ante oculos ultro citroque magna velocitate ducatur, apparet continuata, & oblonga ignea semita, & veluti candens vitta, eo quod carbo propter magnam, qua ducitur, velocitatem prius redit ad eum locum, in quo paulo ante sui visionem ad eundem relatam excitaverat, quam commotio in retina, & visio in anima extinguatur. Ita enim fit ut in anima sint eodem tempore simul omnes visiones carbonis, quatenus ad omnia contentæ semitæ puncta refertur, perinde ac si in omnibus hisce punctis totidem carbones æquales continenter exstarent. Quod confirmatur ex eo, quia contingit id ipsum, quod esse debet: nempe in extremo, a quo carbo recessit, colores apparent dilutiores, quam in extremo, in quo est. Clarissimus Hallerus in adnot. ad prælect. Acad. Boerhaviæ adnot. 2. ad §. 541. plures enumerat hac de re tractantes auctores, & inter alios Newtonum, qui quæst. Opt. num. 16. durationem sensationum ad unum minutum definit.

6. Idem auctor statuit eodem tempore nos unum tantum objecti punctum videre, & fortasse cum Scheinero pag. 218. unice videre in fine axis optici, ubi certum est fortissimam, & maxime distinctam imaginem pingi; maxima vero celeritate, qua mobilissimi oculi totum aliquod corpus brevissimo tempore lustrant, fieri, ut magna corpora eodem tempore videamus, eo quod ante oculos a prima corporis particula, in quam obtutum sive axem opticum defigit, ad alias omnes circumquaque pervenit, quam imago primæ particulæ deleatur. Sed præstat afferre integrum auctoris locum, quo hæc, & superiora non parum confirmantur. *Oculus non videt eodem tempore plus quam unum objectum. Hoc quidem multis insigniter paradoxum videbitur, cum verissimum sit, & quilibet in propria visione id sibi demonstrare queat. Sume librum. Totum, inquis, video; sed lege; non potes simul totius pagine lineas legere; verum aliam distincte videbis, aliam confuse: sed neque unam lineam; nam & ibi in una serie alias litteras languide videbis, alias vividius. Adverte animum; unica littera est,*
quam

quam vere vides, quam distinguis, ut accurate legere possis; reliqua omnia vides, sed confuse. Quare videmur nobis multa simul videre, quia oculus mirabili velocitate multa citissime percurrere natus est. Neque enim objecta sensuum continue evanescent, neque prima littera ideo tibi perit, quod ad alteram melius advertis. Hactenus Hallerus, qui rem confirmat exemplo titutionis jam exposito, & altero turbinis rubente macula notati, qui, dum a pueris flagello agitur, ita ut velocissime circumrotetur, totus ruber apparet, concluditque mentem a duratione imaginum & ab oculi velocitate decipi, ut credat eodem tempore simul excitari sensationes, quarum aliæ post alias excitantur.

7. Cæterum ut omnes vitemus difficultates, & ea tantum, quæ certa sunt & explorata, principia statuamus, ad claram atque distinctam alicujus, vel minimæ partis objecti visionem necessarium esse ajo in eandem obtutum defigere. Nam si, cum oculum ex. gr. converto ad longum vocabulum, aciem dirigo in mediam ejusdem litteram ut in *a* vocabuli *aliquantisper*, & immotum oculum, quantum possum, fervare contendo, claram habeo visionem litteræ *a*, duarum vero, quæ hinc inde proximæ sunt, valde minus claram; cæterarum vero longius distantium afficior ita obscura & confusa notione, ut quales sint litteræ prorsus ignorem. Ex quo duo colligo, alterum saltem cum maxima verisimilitudine, alterum autem tamquam omnino certum, ut mihi quidem videtur.

Primum est, verisimillimam videri sententiam, quæ statuit obscuram illam & confusam partium objecti ab ea, in quam axis opticus dirigitur, aliquantisper distantium visionem non pendere ab axe optico, qui in easdem directus antea fuerit, & postea recesserit; propterea quod difficile videtur, ut nobis insciis & invitis oculum in eas dirigamus, & alioquin, si res ita se haberet, valde clariorem earumdem visionem experiremur. Nam experientia constat, cum oculum magna velocitate dirigimus in singulas objecti partes, omnes totumque objectum uti longum vocabulum, non parum claram sui visionem excitare. Cujus communis sententiæ veritatem mihi videor posse colligere ex iis, quæ mihi metipsum usveniunt in tentando celebri experimento Mariotti tom. 2. ipsius operum edit. Hagæ anno 1740. pag. 496. Nam in albo pariete ad altitudinem oculorum pono exiguum nigrum chartæ

circulum, & versus meam dexteram in distantia duorum circiter pedum alterum pariter nigrum, & aliquantum infra hunc tertium rubri coloris. E regione primi circuli me colloco, & clauso lævo oculo in eum aciem dextræ defigo, & nihilominus duos alios obscurius pergo videre. Tum versus finitrum paulatim me retraho in eadem a pariete distantia semper tamen oculum dextrum in primum circulum dirigens: emenso aliquo spatio disparet circuli rubri visio; quod obliquitati radiorum tribuendum non est, quia ut sibi quoque ufavenisse fatetur Mariottus, alia objecta longius posita, ideoque radios magis obliquos in oculum dextrum reflectentia saltem confuse intueor. Tum confito & immoto capite aciem converto versus alterum circulum nigrum, & continuo apparet etiam tertius demissior, & ruber. Quod argumento est objecta remotiora & magis obliqua prius fuisse visa non per axem opticam, qui verius eadem per insensibile tempus directus fuerit, sed aliis radiis obliquis; quia si primum contigisset, multo magis conspici debuisset propior & interpositus circulus ruber, quemadmodum video, cum axem opticum ad secundum circulum tertio impositum converto. Ergo saltem ad veram quam proxime accedit obscuram illam, & confusam visionem partium remotiorum ab illa, in qua axis opticus defigitur, ab aliis radiorum fasciculis oriri.

8. Alterum vero, quod colligo, est claram illam atque distinctam alicujus finiti objecti visionem, qua fit, ut omnes ipsius partes aspiciam clare, & distincte aut æqualiter, aut cum parvo discrimine, pendere a directione axis optici in singulas ipsius partes ea facta celeritate, quæ nec nimis magna sit, ne partes eadem nimis levem impressionem in retina faciant, nec nimis exigua, ne cum ultimarum partium visio excitatur, primarum jam profus cessarit. Nam innumerabilibus experimentis compertum fit nos, cum hujusmodi afficimur visione, perpetuo dirigere obtutum in alias atque alias objecti partes, & ex aliis experimentis, cum obtutum in una ejusdem particula ita defigimus, ut, quantum possumus, contendamus eundem non convertere ad alias, visionem aliarum excitari nimis obscuram atque confusam, & claritate atque distinctione a visione primæ nimis discrepantem. De quo certe non video quemquam posse jure ac merito dubitare.

9. Nec minus certum est non brevi, & mediocri oculorum exercitio opus esse ad oculos certa ratione, & convenienti celeritate pro nutu voluntatis dirigendos. Id ostendunt fere omnes alii voluntarii motus, ad quos certa ratione, facilitate, & velocitate perficiendos diuturnum, & sæpe repetitum musculorum, quibus perficiuntur, exercitium esse necessarium comperimus; & in hoc ipso musculorum oculi negotio præsertim commonstrant exempla cæcorum ab ortu, quos magnam difficultatem, postquam cataractæ depressæ fuerunt, in dirigendis atque conijcendis oculis, quo vellent, expertos fuisse, & non superasse nisi post longum tempus, & continuatum usum ex Chezeldeno narrat Condillacus libro supra citato.

10. Quibus expositis propius accedo ad id, quod mihi maxime propositum est, & ajo, hac celeri oculorum in singulas objecti partes conversione fieri, ut magnitudinem corporum, figuram, situm, distantiam, motum, & quietem videamus. Nam quod attinet ad magnitudinem, eo major idea & repræsentatio corporis, ex. gr. rubro colore tincti, excitatur, quo majus corpus oculis dicta celeritate lustramus. Siquidem primæ visiones durant in anima, dum aliæ continuate gignuntur, nec tamen tota visio fit magis intensa, sive clarior atque distinctior. Ergo major apparere debet, quo corpus est majus ideoque extensionem repræsentare. Etenim qualitates, uti est visio, si augeantur, hoc augmentum esse debet, aut in intensione aut in extensione; id est si ponamus decem partes in superficie rubro colore æqualiter tincta ab oculo percurri, ideoque decem excitari visiones, quæ omnes ob allatam rationem eodem tempore animam afficiunt, secunda conjuncta cum prima, tertia cum prima & secunda, quarta cum omnibus antegressis, animæ apparere debent aut inter se dissimiles, & discrepantes, aut similes. Primum autem nequaquam esse potest, eo quod nullum in superficie discrimen est nec in gradu coloris, nec in genere claritatis. Ergo similes appareant necesse est. Nihilominus decima apparere debet major quam secunda, eo quod in decima afficitur decem similibus, & æqualibus sensationibus, & in secunda solum a duabus. Ergo anima illam experiatur oportet majorem in extensione, in qua sunt plures similes partes, quæque ipsa per se dissimiles non desiderat.

11. Quam ideæ, superficiem aliquam repræsentantis, magni-

gnitudinem esse debere proportionalem angulo, quem faciunt optici axes a singulis duobus contrariis extremis objecti punctis prodeuntes, facile est ex dictis colligere. Nam quo major est extremorum distantia punctorum, ideoque extensionis interposita magnitudo, eo plures visiones gignuntur, & genitæ per aliquod tempus simul durant, & eo major est angulus, ad quem singuli axes optici a singulis punctis objecti prodeuntes concurrunt. Quo vero plures sunt partiales visiones, eo major visio ex iis composita & extensio ab eadem repræsentata esse debet. Ergo quo major est distantia extremorum, ideoque objecti magnitudo, eo major est angulus, quem faciunt axes optici ab extremis profecti.

Scriptores opticae magnitudinem objecti non repetunt ab angulo, quem faciunt axes optici, dum oculus ab uno extremo ad alterum continenter dirigitur, sed a radiis, qui ab eisdem extremis ad oculum tendunt extra pupillæ centrum, eodem tempore ac axis opticus ad hoc centrum contendit. Verum hi radii ab axe optico discrepantes non sunt attendendi in magnitudine corporum definienda. Nam primo hic agimus de magnitudine clare & distincte visu percepta, non de illa, quæ obscure, & confuse percipitur. Jam vero prima a solis axibus opticis oritur & oriri potest, atque ab eorum in oculi fundo impressione. Ergo magnitudo objecti non ex quibuscumque radiis, sed tantum ex opticis axibus pendet. Tum ob rationem Aemberti superius expositam, & ex eo ductam, quod pars radii in retinam incurrens, non parum deflectit a radio, qui ab objecto in retinam ita incurrit, ut in oculi humoribus refringatur, iidem radii sunt inepti singulis objecti punctis in suo, quem revera habent, situ, & distantia repræsentandis, sed in majori intervallo, ideoque objecta majora, quam sunt, repræsentare deberent. Quod cum non accidat, id argumento est veræ corporum magnitudinis repræsentationem axibus opticis acceptam ferri oportere. Tandem ob hanc a perpendiculari deflexionem radius refractus & proxime retinam feriens, non esset ut plurimum in eodem pro duobus oculis plano (n. 2.) atque idcirco duplex objectum repræsentaret. Quod pariter experientiæ adversatur.

Optici autem axes, ut qui nullam refractionem patiuntur, ideoque in retinam ad angulos rectos incurrunt, & ad claram ac distinctam visionem excitandam, & ad veram corpo-

porum magnitudinem, ac situm, eundemque unum, & in eodem plano ab utroque oculo exhibendum accommodati sunt. Quamvis autem non uno eodemque tempore retina ab axibus opticis hac illac se dirigentibus concutiat, nihilominus, quia toto illo brevi tempore, quo oculus singula objecti puncta perlustrat, nervorum commotio durat, ideoque etiam illi respondens in anima visio tamdiu perseverat; inde fit ut sine iis incommodis inexplicabilibusque difficultatibus, in quas incurrit communis opticorum sententia, commoda ejusdem, nempe magnitudinem imaginis in oculi fundo depictæ, & respondentis in anima excitatæ visionis in proportionem anguli, quem faciunt radii ab extremis objecti punctis profecti, & quidem accuratius, & melius quam in eadem habeamus. Ceterum omnibus missis rationibus quisque hoc uno experimento persuadere se potest. Oculis clausis introducatur in instructum cubiculum, quod antea non viderit, & in distantia duorum aut amplius pedum ab uno ex quatuor parietibus e regione collocatus repente aperiat oculos, & recta in objectum parietem dirigat. Is clare videbit ac distincte ea, quæ sunt in pariete, sed in linea recta; alia vero hinc inde, præsertim si non adeo parum distent, ita obscure, & confuse, ut vix dignoscat quid sint, eorumque magnitudinem, figuram, situm, atque distantiam nullo pacto definire possit. Quid ergo magis perspicuum quam claram illam atque distinctam objecti, quod oculis lustramus, visionem acceptam ferri oportere axibus opticis, aut ad summum iis quoque radiis, qui ab axibus ita parum deflectunt, ut quod attinet ad sensum, & ad phænomena sensui representanda pro axibus accipi debeant.

12. Quo motu oculorum tota aliqua superficies brevissimo tempore lustratur, eodem quoque excitatur ejusdem figuræ visio. Nam pro natura, & qualitate figuræ, qua objectum definitur, alia atque alia ratione oculi sunt dirigendi ad singula superficiæ puncta, & similiter alia atque alia ratione, & dispositione puncta retinæ ferienda sunt, & alia atque alia aliterque disposita imago in eadem retina insculpenda est. Pro varia autem dispositione punctorum, quorum alia post alia concutiuntur, & pro varia dispositione imaginis in retina delineatæ, rationi consentaneum est, ut alia quoque & alia aliterque dispositæ extensionis imagines in anima excitentur. Quamvis enim nervorum commotiones tamquam efficientes

causæ vim non habeant excitandarum in anima sensationum; tamen hæ sensationes iisdem ut causis occasionalibus, perinde ac si forent effectrices, respondent. Quamobrem opus est, ut commotiones optici nervi vario ordine factas variæ quoque aliterque affectæ visiones sequantur. Quod profecto idem est, ac visu percipere figuram sive terminos extensæ superficiæ.

13. Venio ad distantias, & ajo esse aliud imaginari duo corpora inter se distare, aliud autem videre eo sensu, quem supra explicavimus (n. 5.). Tunc solum videmus, cum in oculos incurrit aliqua extensio inter duo corpora distantia eodem illo tempore, quo illa intuemur. Quod si aut numquam viderimus interpositam extensionem, aut si ante viderimus, quam corpora cernamus, distantiam quidem imaginari possumus, non autem videre. Siquidem distantia est relatio, quæ tria desiderat, duo corpora, quæ dicuntur distantia, & interpositam extensionem. Quare si anima non videt interjectam extensionem, nullam re ipsa videt distantiam, sed solum imaginatione sibi repræsentare potest tamquam possibilem, quatenus in aliquibus circumstantiis intelligit inter duo corpora, tametsi quieta permaneant, ut inter montem & lunam e monte orientem posse alia corpora interjici. Uno verbo videre distantiam inter duo corpora est idem ac videre totum aliquod corpus, quod constet ex corpore interiecto, & ex corporibus, quæ appellantur disjuncta, quæque sunt quodammodo interjecti corporis termini, sive principium, & finis. Jam vero ad totum aliquod corpus videndum singulæ ipsius partes videantur oportet ea ratione, quam numero antegresso explicavimus. Ergo ad videndam inter duo corpora distantiam necesse est eodem pacto videre interpositam extensionem. Quemadmodum enim totum aliquod corpus clare, & perspicue videri non potest, nisi oculi ad singulas ejusdem partes se convertant, & eadem ea celeritate percurrant, ut visio primarum adhuc in anima perseveret, cum excitatur ultimarum; similiter ut visio distantia excitetur, necesse est corporum distantium, & interceptæ extensionis partes oculis ita cito lustrare, ut omnium partium visiones eodem tempore in anima sint.

14. Cum autem aliquod corpus valde magnum est, quod dictum intellige etiam de magna distantia, duo contingere possunt; primum, ut primorum punctorum, in quæ oculos

conjecimus, visio perseveret quidem, cum excitatur ultimum, sed valde debilitata ideoque obscura, & confusa: secundum ut, quia inter excitationem visionis primorum, & visionis ultimarum nimium tempus interfluit, illorum visio profus evanuerit, & in puram abierit imaginationem, cum anima visionibus horum pulsatur. In primo eventu totum quidem corpus videmus & totam ipsius magnitudinem, sed ipsius alias partes obscure, & confuse, alias clare, & distincte. In altero nequaquam totum corpus videmus, sed eas tantum ipsius partes, quarum visio permanet, alias vero solum imaginamur, freti memoria, quod eas paulo ante viderimus. Cum autem jam observaverimus, videre distantiam duorum corporum eodem revolvi, ac cernere corpus ex interposita extensione, & ex duobus corporibus tamquam terminis compositum; per se patet in maximis distantibus posse illa duo, quæ monuimus, usavenire.

15. Sed antequam ulterius procedam, solvenda est maxima difficultas adversus theoriam magnitudinis corporis visi, quæ magnitudini anguli ab extremis radiis intercepti, sive imaginis in retina delineatæ, proportionem respondeat, a pluribus proposita, & in eo sita, quod duo globi æquales, alter positus in distantia ab oculis decem pedum, alter in distantia viginti, apparent æquales; quod esse nequiret, si apparens objecti magnitudo penderet ab angulo, propterea quod angulus, sub quo videtur globus duplo remotior, est duplo minor angulo, sub quo similiter propior. Condillacus alique auctores, qui Anglorum sententiam sequuntur, ajunt animam incipisse judicare de magnitudine, figura, & distantia objectorum adminiculo tactus; habitum acquisivisse judicandi majora, quæ scit, & videt esse longius disjuncta; magis disjuncta vero, quæ minori luce perfusa videt; & hoc habitu fieri, ut cum scit aliqua corpora esse æqualia, & videt alterum in majori intervallo positum, alterum in minori, tamquam æqualia sibi representet. Quam rationem in *Transact. philos. ad an. 1736.* Desaguleries confirmat hoc experimento. Duos globos eburneos, & æquales ponit, alterum AB (*Fig. 3.*) in distantia 20. pedum ab oculo E, alterum CD in distantia duplo majori 40. Certum est ex opticae regulis, oculum in E aut F videre globum AB, sub duplo majori angulo quam æqualem CD; atque idcirco CD non oportere videri majorem globo

T. V. P. II. M m m
o p,

op, qui e regione globi *AB* videtur sub eodem angulo $\bullet Fp$, ac globus *CD*. Cum autem in cubiculo aperto oculo nudo conspiciuntur duo globi *AB*, *CD*, si revera animum attendimus ad duplo majorem distantiam globi *CD*, judicamus *CD* ejusdem esse, ac *AB* crassitiei, ut reipsa est, quamvis angulus sit duplo minor. Si cum spectator terga vertit, aut cum nihil suspicatur, globus *CD* removetur, & alter *op* diametri minoris in eadem linea e regione *AB* substituitur, spectator denuo conversus ad globos putans adhuc restare globum *CD*, globum *op* imaginatur, & videt esse magnum ut *CD*, eo quod eundem ac prius angulum facit.

16. Ut veram hujus difficultatis solutionem præbeam, adverto corpora æqualia posita in variis distantiiis apparere æqualia, si hæ distantia non sint valde magnæ, ut 10, 20, & 40 pedum; at si non parum magnæ sint, quod corpus est eminus, etiam constanter minus apparet eo, quod cominus, tamen si esse utrumque æquales certo noverimus. Ut mittamus ingentes planetarum distantias, non ne id evidenter apparet in longa porticu, in qua tamen ante viderimus solum esse in eodem plano, & columnas æquali intervallo alias ab aliis abesse, dum illam transcurreremus, tamen ubi ad finem venerimus, conversi solum paulatim affurgere, & fornicem deprimi, columnas ad se vicissim accedere, & porticum in angustum desinere observamus. Hujus rationem discriminis in dicta sententia non invenio, quia non video cur in breviori porticu ob acquisitum habitum judicandi de objectorum magnitudine ex tactu, & ob certam æqualitatis cognitionem possim corrigere errorem, in quem anguli me inducere possint, non autem possim in aliquantum longiori. Nec mihi satisfacit responsio, quam significare videtur Caillius *Leçon Elem. d'optiq.* §. 100; in eo posita, quod habitus acquiritur solum intra confinia ordinaria visionis, & familiaris in vita usus. Nam longam porticum, in qua id experimur, esse intra hujusmodi confinia, videtur perspicuum, cum intra eadem is ponat distantiam 120 pedum, qua non parum minor erit longitudo porticus, in qua dictum Phænomenon observatur. Deinde sive remum in aqua ex parte demersum, sive valde exigua corpora oculis microscopio armatis, sive remota engyscopio, sive proxima telescopio observas, primum vides inflexum, secunda valde majora, tertia multum propiora, quarta e contrario mul-

multum remotiora intueris, nec ullo pacto errorem, cujus es conscius, corrigere potes. Quamobrem alio nos convertamus oportet, si veram hujus differentię rationem cupimus invenire. Quod sic exequor.

17. Qui acutis, & valentibus oculis utuntur, ii satis clare & distincte vident corpora tum in distantia multorum pedum, tum in distantia minori uno pede; pro iis vero, quorum oculi vitiosi sunt, est aliquod clara, & distinctę visionis spatium, tametsi valde minus eo, quod modo significavimus. Quod attinet ad visionem maxime distinctam hæc habet Hallerus loco supracitato adnot. 3. ad §. 539. *Punctum visionis distinctę est finis distantię, in quo objectum poni debet in singulo homine, ut omnium distinctissime perspiciatur. In præbita est a duobus cum dimidio pedibus & ultra ad sesquipedem. S. Yves cap. 9. pag. 48. visus optimus est a semipede paulo supra pedem. Idem in Hugenio, & Volphio §. 408. ad octo pollices fuit, & in D. Portarfelds ad septem l. c. p. 168. In myopibus est a semipede ad usque fere nasi contactum. S. Yves. Aliqua equidem est latitudo hujus puncti visionis distinctę ob mobilitatem lentis crystallinę, sed definita. Porterf. p. 206; idemque limites suę visionis ponit inter sex & octo pollices p. 168. denique hoc punctum in utroque oculo diversum esse solet non sine naturę beneficio. Cum vero ex altera parte clara, & distincta visio inde oriatur, quod radii ab iisdem objecti punctis profecti post refractionem in oculi humoribus in totidem retinę punctis colliguntur, & ex altera radii ab objectis vicinis provenientes citius, quam profecti a remotis coeant, Hallerus aliique pluri scriptores ab eodem citati, tamquam rem certam, & exploratam inde concludunt, musculos oculi a natura comparatos fuisse ad oculos ita mutandos, ut reddantur apti ad radios pro majori vel minori distantia, non quacumque sed definita, tardius aut citius colligendos. Quę mutatio posita est in aliquo ex his, aut in pluribus, ut idem observat. Vel in objectis vicinis globosior fit cornea, & lens crystallina; vel illa, & hæc a retina removentur; vel compressione densiores fiunt humores, nam his omnibus fit, ut radii citius coeant: in remotis autem his contraria succedunt, ut radii tardius jungantur. Sed vis musculorum oculi aut iridis in his omnibus præstandis certis ultro citroque continetur limitibus ita ut in objectis aut nimium proximis, aut nimium distantibus*

non possit oculum ita conformare, ut radii in ipsa retina concurrant, & ita visio satis clara, & distincta efficiatur.

18. Est etiam aliud in oculis discrimen, cum objecta remota, & vicina videmus. In remotis pupilla, per quam radii ingrediuntur, dilatatur, in vicinis confringitur, advertente eodem Hallero post alios Auctores, cujus ratio est posita in vividiori luce, quam proxima ad oculum mittunt, in debiliore, quam remota. De hac mutatione hæc scribit Hallerus in adnot. 9. ad §. 544. *Verum pupillæ mobilitas omnibus consentientibus perfectæ necessitatis est. Nam ad propinqua objecta pupillam angustare necesse est. Tunc enim diminuto numero radiorum imago minor, sed accuratissima fit, perinde uti notum est, proximorum confusas imagines per foramen exiguum conspiciendo corrigi.* Rohaulitus S. c. 35. *vicissim ad remota videnda egemus quam maxima luce, ideoque dilatata pupilla clariorem eorum visum efficimus.* Hactenus Hallerus, qui quamvis internam oculi mutationem ad objecta in variis distantis distincte videnda tamquam omnino necessariam multorum auctoritate scriptorum, & rationibus prope evidentibus ab iisdem allatis confirmasset, tamen observat, Gallos aliquos in contrariam abiisse sententiam, & præsertim Hirium opposuisse notum experimentum, quo per chartam duobus foraminibus exiguis pertusam objectum in puncto distinctæ visionis simplex, extra id punctum duplex videri solet, propterea quod si anima vi polleret oculos in variis distantis mutandi, etiam hic ea vi uteretur, & efficeret, ut in mutata distantia pariter distincta visio foret, ideoque objectum pariter unum appareret: atque ad hoc experimentum respondisse Porterfields animam hunc conatum ad mutandum oculum non edere, quando per angusta foramina videt.

Ceterum allatæ rationes adeo perspicuæ multis esse videntur, ut de hujus sententiæ veritate nulli dubitare possint ob dictum experimentum, quod ad summum in uno tantum eventu animam hac facultate carere conficit, aut ob alia minoris momenti; præsertim cum iisdem alia possis. opponere, & in primis illud ab Hallero memoratum ad §. 539. oculi, qui defatigatur, cum longe distans objectum accurate inspicimus, & anterioris ipsius partis, quæ in majorem convexitatem affurgit, ut videre licet, si oculos inspexeris amici, qui talem edit conatum. Nihilo tamen minus Winslowius in Comm. Acad.

Acad. R. P. ad an. 1721. pag. 414. edit. Amstel. cum ex altera parte observasset musculos globi nullam in hoc negotio symbolam posse conferre, & neminem adhuc monstrasse fibras, quas aliqui in ciliaribus ligamentis commenti sunt, & ex altera iridem cryftallino impositam a suis musculis contrahi in objectis claris, & vicinis, diduci in obscuris, & remotis, verisimile judicat contractionem iridis pellere lentem introrsum aut complanare, & diductionem efficere ut suo se loco reitituet. D. autem le Roy sententiam Hirii ad distinctam objectorum in variis distantis visionem solum varias pupillæ diductiones necessarias existimantis tam acriter a Porterfields impugnata, ut ab omnibus communiter explodi videretur, in Comm. Acad. ad an. 1755. defendere aggressus, primum negat fibras processociliares esse aptas cryftallino exterius promovendo; deinde experimentis in camera optica institutis comprobat, diminutionem foraminis, per quod radii ingrediuntur, satis esse ad eum finem, ut objecta in proportione distantiarum depingantur, habitaque constructionis oculi ratione motum contractionis, & diductionis pupillæ ad oculum variis objectorum remotionibus accommodandum sufficere, quia revera pupilla contrahitur in proportione accessus objectorum ad oculum. Verum præter dilatationem, & constrictionem pupillæ saltem ipsius majorem aut minorem a retina discessum ex modo allato experimento paulo post colligemus.

19. Quibus constitutis primum ajo, si pupilla maneat ejusdem latitudinis, & in eadem a retina distantia, imaginem objecti propioris in fundo oculi sive in retina depictam esse longe majorem imagine ejusdem objecti in majori a pupilla intervallo collocati, quicumque sit humorum oculi situs, & forma. Nam ex iis, quæ supra differuimus, magnitudo imaginis, quæ claram efficit & distinctam visionem, pendet ab iis extremis objecti punctis, a quibus radii prodeuntes per sua quique contraria pupillæ extrema ingrediuntur, seque interfecantes ad contrariæ retinæ puncta contendunt. Quod ut perspicuum fiat, fit oculus $CMNO$ (*Fig. 4*) cornea CO , pupilla DH , objectum AB ; duo puncta, B extremum objecti AB , & D extremum pupillæ contrarium extremo B jungantur recta BD , quæ producatur ad fundum oculi in M : similiter jungantur duo extrema A , & H recta AH , quæ producta tenderet in N punctum aliquod retinæ. Dico imaginem ab
ob.

objecto AB depictam in oculo esse MN . Nam etsi directa pupilla in medium S objecti, radii prodeuntes a punctis A , B irrefracti non transeant usque ad oculi fundum, tamen in sententia superius exposita perinde est ac si hoc pacto transferent. Cum enim oculus totum objectum clare videt, pupilla suam non dirigit axem versus unum tantum objecti punctum, sed continenter in omnia ab A versus B (n. 8.). Unde est perinde ac si considerata pupilla ut quieta, radii extremi BD , AH irrefracti pervenirent ad M , & N propterea quod dum claram sui visionem in punctis N , & M impresserunt, non erant quilibet radii, sed tantum optici axes. Quo constituto a qualitate & situ humorum oculi, & præsertim crystallinæ lentis non pendebit imaginis MN magnitudo, eo quod cum irrefracti transmittant, extrema imaginis puncta M & N , si maneat eadem pupillæ magnitudo, & distantia a retina, æqualiter distabunt, quæcumque sit humorum, & crystallinæ lentis qualitas, & dispositio; pendebit tantum ejusdem claritas, & distinctio, quia ab horum qualitate, situ, & dispositione oritur, ut alii radii prodeuntes ab extremis A & B , & a suis quique radiis perpendiculariter incidentibus, sive axibus opticis declinantes & in oculos oblique ingressi propter refractionem cum suis axibus coeant in ipsismet retinæ punctis M , & N , uti & alii radii inter A , & B in aliis punctis retinæ inter M , & N concurrant, in quo posita est clara, & distincta visio; aut eo perveniant vel antequam coeant, vel posteaquam cojere; in quo obscura, & confusa. Si vero objectum AB ad majorem transferatur distantiam, ut in ab , & latitudo pupillæ DH eadem persistet, quemadmodum & ipsius ab oculi fundo distantia, iisdem, ut antea, constitutis extremi radii aHn , bDm , minorem in oculi fundo retinæ portionem mn interceptient, ideoque imago mn valde minor erit imaginis MN . Quod si latitudo DH pupillæ ratione objecti AB , & ab pro nulla sive pro puncto haberi possit, tunc radii AH , BD se non interfecabunt in puncto d per sensibile spatium distante a pupilla; nec radii aH , bD in simili puncto e , sed omnes in tam parva ab eadem distantia, ut perinde foret ac si se in pupilla interfecarent. Quo in eventu magnitudo imaginis MN objecti AB ad magnitudinem mn objecti æqualis ab proxime foret in ratione directæ angulorum, quos extremi radii interceptiunt, & in inversa distantiarum SP , sP ab eadem pupilla.

20. Quare ut objectum *ab* (*Fig. 4.*) positum in distantia *sP* ex. gr. 20. pedum, æquale objecto *AB* posito in distantia *SP* duplo minori æqualem afficiat retinæ portionem *MN*, & ideo formet æqualem imaginem, necesse est ut vel pupilla latior evadat, vel ab oculi fundo *MN* longius recedat, vel usueniat utrumque. Hoc enim pacto, & non aliter, ob supra allatam rationem fieri potest, ut in objecto remotiori *ab* extremi optici axes *an*, *bm* incidant in puncta *N*, & *M*, ideoque objectum *ab* formet imaginem æqualem imagini ab objecto *AB* æquali sed propiori, formatæ. Primum usuenire in objectis remotioribus supra vidimus (n. 18.), secundum autem colligi potest ex illo experimento; quod in conatu aspiciendi objecta remota oculi turgescunt, & se exporrigunt, hacque ratione magis apti redduntur ad eadem discernenda: in quo ipsam quoque pupillæ cum aliis oculi anterioribus partibus protusionem antrosum, & remotionem a retina mihi videre videor, quia cum id accidit, globus oculi producitur secundum extrema contraria, anterius, in quo est pupilla, & posterius in quo retina, ideoque ipsamet extrema cum suis partibus a se vicissim recedunt.

21. Horum alterutrum aut utrumque esse causam, cur anima videat duo æqualia objecta in diversis collocata distantis, sed tamen mediocribus, tamquam æqualia; propterea quod hæc duo tantum idonea sunt ad æqualiter magnas in extensione impressiones in sensorio visus faciendas; & æqualiter in extensione magnæ impressiones in sensorio factæ solum idoneæ sunt ad æqualiter magnas sensationes visus in anima excitandas. Quod enim idoneæ sint, constat ex iis, quæ supra disseruimus; quod autem ipsæ tantum, nunc ostendo ea distinctione, quam ab initio proposui, quod cum altera hujus phænomeni causa ab aliquibus collocetur in eo, quod anima assuefcit judicare majora, quæ longius distantia, aut minori luce collustrata videt, hoc judicium ipsum per se aptum quidem est ad imaginationem majoris extensionis, non vero ad sensationem ejusdem, qualis est visio, ut pluribus exemplis ibidem declaravi: eatenus vero juvat, quatenus anima in hisce variis objectorum magis distantium circumstantiis paulatim ita assuefcit aut dilatare pupillam, aut a retina remove, aut utrumque præstare. Ex quo intelligitur ratio illius experimenti, quod numero 15. exposuimus. Cum duo globi æquales, *AB*
(*Fig. 3.*)

(Fig. 3.) in distantia 20. pedum ab oculo E, CD in distantia 40. ab oculo F ponuntur, anima in aspiciendo globo remotiori CD suum oculum ita conformat, ut idem CD æqualem ac BA in retina imaginem formet alterutro vel utroque modorum, quos explicavimus. Si dum oculi a globis avertuntur, aliquis nobis infciis, & imprudentibus tollat globum CD in distantia 40. pedum collocatum, & duplo minorem *po* in distantia FP 20. pedum substituatur, credens anima eundem esse globum CD, & in distantia duplo majori situm eundem ac antea conatum exerit in dilatanda pupilla, & removenda a retina, ut ob allatas rationes globus *po* æqualem in F depingat imaginem, & sub eodem angulo appareat ac major AB ratione oculi, cujus pupilla sit augustior, & a retina absit minori intervallo.

At enim in præfenti eventu caret anima illo medio, quo pupillam dilatet, nempe minus vivida luce, quæ ab objecto *op* reflectatur, propterea quod duo globi AB, & *op* sunt ipsa in eadem ab oculo distantia. Id vero est, quod advertente citato scriptore difficilem reddit experimenti successum, adeo ut fateatur se quidem decepisse incautos, sed difficulter potuisse fallere eos, qui ad ingentes distantias clare vident, atque ad certum successum opus esse, ut sic diminuat lux globi propioris *op* quemadmodum postulat major distantia FD. Quamobrem in iis, qui visu non utuntur acuto, in quibus experimentum facilius e voto succedit, præjudicata opinio, quod sit idem ac antea globus CD, & in eadem distantia FD collocatus, eametipsa est causa, quæ determinat animam ad pupillam aperiendam, aut a retina removendam, quantum necesse est ut globus minor *op* sub æquali angulo ac globus major AB appareat, & æqualem in oculi fundo imaginem imprimat.

Ex quibus fit manifestum discrimen inter meam sententiam, & Desagulerii aliorumque, quod alii putant corpora, & eorum distantias sub tali angulo definito in oculum intrare, talemque in ipsius fundo definitam imaginem delineare, sed præjudicatas opiniones a tactus experimentis, quæ cum variis sensationibus lucis conjunguntur, profectas, & habitus inde acquisitos efficere ut anima sub aliis angulis atque distantis, & sub aliis eorum magnitudines atque posituras repræsentantibus imaginibus intueatur: ego vero existimo varias ani-

nae visiones tamquam a causa proxima, pendere a variis in retina factis impressionibus, adeo ut æquales ab æqualibus, dispares a disparibus proficiscantur; sed easdem præjudicatas opiniones, & acquisitos habitus esse causas, cur anima ita conformet oculos, quemadmodum necesse est ad eum finem, ut in oculi fundo depingantur imagines ad eas varias visus sensationes efficiendas accommodatæ.

22. Quæ mea sententia perspicuam continet rationem, cur hæc phænomena contingant in aliquibus determinatis distantiiis, non in majoribus, neque cum vera corporum magnitudo nimis augetur aut minuitur, aut cum corpora a vero situ nimis distorquentur. Siquidem determinata sunt tum maxima, & minima pupillæ ab oculi fundo distantia, quas eadem ope musculorum finitæ virtutis acquirere potest, tum diductio, & contractio ejusdem pupilla, tum varia ceterarum oculi partium dispositio, quas ad augendas aut diminuendas objectorum imagines aliter pro aliis distantiiis multi conformari volunt. Inde fit ut quantumcumque conetur anima, non possit efficere ut vel planetæ nimium remoti, corpuscula exigua microscopio amplificata, magna corpora alio vitro nimis imminuta, uti & intervalla nimium aut contracta, aut producta sub suis quæque veris magnitudinibus appareant, vel corpora longe distantia suis sub figuris, vel corpora partim in aqua demersa partim extantia cum vero partium situ, vel quæ a speculo polyedro multiplicantur, ut unum; tametsi hæc omnia prius jam noverit, qualia sint. Ex quo fit perspicuum in nostra sententia quam optime explicari allatum discrimen, eandemque hoc pacto mirifice confirmari.

23. His innixus principiis in alio meo longiori de optica principiis commentario, qui Deo dante lucem propediem videbit, dirimo celebrem illam de majori lunæ, & solis specie in horizonte, quam in meridiano quætionem, de qua inter se acerrime digladiati sunt cl. viri, cujusque historiam refert Bremundus in adnotationibus ad dictum Desagulerii commentarium; explico rationem, qua fit, ut anima veniat in cognitionem figuræ solidorum, motus, & quietis; & præsertim examino Condillaci systema circa visionem, rationibus, & observationibus a cl. viro allatis satisfacio, & meis solutionibus, iis præsertim, quibus explico phænomena cæcorum ab ortu, meum expositum systema luculenter confirmo. Sed ne

in præfens orationem in loca hæc omnia inducam, hujus commentarii angustiis excludor.

24. Quamobrem his omnibus missis venio ad solutionem difficultatum Alemberti, quas ab initio proposui. Liquet autem in iis multum esse momenti in communi sententia, nullum in mea. Siquidem vel agitur de illa obscura, & confusa visione, quæ fit penicillis radiorum, qui ab uno objecti puncto profecti per commune humorum centrum non transeunt, ideoque omnes refringuntur; vel de clara, & distincta, quæ fit penicillis axium opticorum, qui sine ulla refractione ad retinam usque perveniunt, ea ratione, quam supra exposuimus, in eo posita, quod totum aliquod objectum clare, & distincte non videtur, nisi oculi suos opticos axes ad omnia objecti puncta exiguo tempore dirigant. Si primum, supervacaneum est in iisdem obliquis radiis atque refractis rationem investigare, quomodo fiat, ut appareant tam magna, ut sunt, & in suis veris distantiiis, figuris, & sitibus. Siquidem hisce radiis, Alemberto assentiente, tam obscuram atque confusam horum visionem acquirimus, ut eorum ope radiorum, & visionis ab iisdem excitatæ nihil horum definiri queat. Sin vero agitur de axibus opticis, quorum ope tantummodo claram, & distinctam totius cujusdam objecti visionem acquiri docuimus, jam per se patet primas Alemberti rationes nihil efficere; siquidem totæ in eo positæ sunt, ut propter refractionem pars radii, quæ proxime retinam laceffit, multum deflectat ab ea, quæ a puncto visibili objecti ad corneam tendit. Id quod locum non habet in axibus opticis, qui ab eodem objecti puncto usque ad aliquod retinæ punctum irrefracti transmittunt. Ergo primis Alemberti rationibus nihil efficitur adversus certitudinem principiorum visionis directæ, sed quatenus a nobis constituuntur.

25. Ut vero ad alterius rationis solutionem mihi viam muniam, prius referam facillimum quoddam, & a nemine, quod sciam, etiamnum animadversum experimentum, quod mihi imposterum maximo erit in hac disputatione usui. Est autem hoc; pono calamum in situ perpendiculari ante accensam lucernæ facem in tali situ inter oculos & facem, ut duobus oculis videam facem in duas utrimque partes divisam; capite immoto manens, quod semper in hisce experimentis est observandum, sinistrum, quo utor debiliori, claudio: ni-

hil-

hilominus in eodem situ calamus ratione habita facis, & aliarum lucernæ partium apparet: clauso vero dextro acutiore fax cum aliis remotioribus lucernæ partibus ita ad sinistrum oculum accedit, & a dextro recedit, ut totum calamum videam extra facem versus dexteram non exiguo spatio intercepto, & ad alias dexteræ lucernæ partes intervallo plurium linearum distantes a primis referam. Deinde clauso dextro oculo pono calamum in eo ante facem situ, ut facem in duas utrimque portiones ab eo divisam lævo oculo aspiciam: tum aut utrumque oculum aut solum dextrum valentiorè aperio, & continuo lucernam intueor propiorem dexteræ, & calamum ad alias sinistram versus partes refero. Ex quibus apparet calamum, facem, & lucernam in eodem loco apparere duobus oculis, & dextro valentiori, in alio vero sinistro debiliore, sive calamum, qui est propius objectum, ad unum & eundem locum sinistræ propiorem referri duobus oculis, & dextro valentiori, ad alterum locum dexteræ propiorem solo oculo sinistro infirmiori. Aliis corporibus & in aliis tum ab oculo, tum inter ipsa intervallis sum usus, & semper experimentum ita successit, nisi quod quo calamus est propior faci & remotior ab oculis, intervallum inter facem & calamum oculo sinistro infirmiori visum est eo minus; quo vero calamus est remotior a face & oculis propior, intervallum est eo majus, adeo ut in distantia calami a face duorum pedum ab oculo unius pollicis, oculo sinistro videatur calamus in loco versus dextram plures pollices distanti ab eo versus sinistram, in quo duobus oculis aut dextro valentiori observatur. Multos alios adhibui fere ad quinquaginta omnis ætatis, puerorum, adolescentum, senum, qui prorsus idem sibi usuvenire fassi sunt, cum hoc tamen discrimine, ut qui sinistro valentiore utebantur, plures autem fuerunt, ii duobus oculis & sinistro solo valentiore viderent objectum in eodem loco versus dexteram; solo vero dextro debiliore in altero versus sinistram. Soli vero duo adolescentes, quorum alter ajebat se æqualiter videre utroque oculo, idque mihi confirmabat, eadem, ut videbatur, facilitate legendo librum plures pedes distantem alterutro oculo, alter vero uno valde debiliore utebatur, ut difficulter legeret, hoc aliud sibi usuvenire affirmabant. Calamum in situ perpendiculari ita ponebant ante oculos, ut oculo utroque illum recta referrent ad determinatum quoddam

parietis punctum, clauso dextro, sinistro aperto, ad aliud versus dextram longe distans a primo; sinistro vero clauso, & aperto dextro ad aliud versus sinistram, sed valde parum distans a primo. Eadem experimenta succedunt, si alteruter oculus non claudatur, sed aliquo impediatur interposito corpore. Nam pono calamum ante oculos ita ut illum videam parum extra facem versus sinistram, tum corpus interpono inter calamum, & oculum dextrum, ut eodem dextro minime cernam, sed solum sinistro: tunc calamum video extra facem sed versus dexteram, & quidem non levi intervallo; interpono corpus inter sinistrum oculum, & calamum, tuncque intueor in eodem prorsus loco ac duobus oculis amoto corpore interiecto. Adverto etiam, duobus aliis adolescentibus, qui videbantur eadem facilitate legere in magna distantia, eadem contigisse experimenta ac mihi.

26. Ex his colligitur responsio ad difficultatem Alemberti n. 4. propositam. Duo oculi *A, B* (*Fig. 2.*) non vident sidus *E* in ε puncto medio inter *e*, & *e*, sed fere semper in alterutro ex punctis *e*, prout vel *A*, vel *B*, est valentior, & aliquando ad summum in loco aliquo valde propiori uni puncto, in quorum primo eventu, qui est communis, videmus stellam in fine axis optici oculi firmioris, ut quod attinet ad opticum axem vult communis optidorum opinio; in altero, qui est rarus, videmus in puncto ita parum distanti a fine unius axis optici, ut hæc distantia haberi pro nulla jure, ac merito possit.

27. Ex his etiam experimentis colligi potest vera ratio, cur duobus oculis non duplex, sed unum objectum videamus, quæ in eo posita est, ut utriusque imaginem oculi ad unum referamus locum, in quo altera cum altera veluti compenetrata sit. Nam primo ii, quorum est maxima pars, qui uno debiliore utuntur, eodem non possunt objectum ad suum verum locum referre, eoquod ut id faciant, necesse est distantiam inter objectum, & oculum (n. 13.) observare. Hanc autem videre nequimus, nisi spatium interceptum usque ad objectum oculis paulatim lustremus radiis, qui ab objecto & ab omnibus intercepti spatii partibus in pupillam ingrediuntur. Sed experimenta narrata, & ratio a minori impressione, quam radii faciunt in oculo debiliore, deprompta demonstrant animam non videre objectum in directione radiorum, qui

qui in debiliorem intrant, sed solum in directione eorum, qui contendunt ad fortiorem. Ergo cum utroque oculo intuemur objectum, debiliore ad suum non referimus locum, sed tantum ad locum fortioris. Igitur in hoc primo evento unum tantum objectum visione directa intueri debemus. Alii vero pauci, quorum oculi fere sunt æqualis virtutis, tamen aliqui ex iis objectum accurate non referant ad locum unius oculi, referunt tamen ad unum solummodo locum, eumque valde propiorem loco, in quo illud uno oculo intuentur. Quamobrem etiam in iis est eadem ratio, cur binis oculis unum videant. Arbitror autem, etiam in his esse aliquod inter utriusque oculi vires discrimen, sed valde exiguum & valde minus eo, quod communiter esse solet. Nam ex altera parte certum est experientia duobus oculis objectum clarius apparere, quam uno, sive multum sive parum differentia sit in utriusque virtute: ex altera si ob majorem solis claritatem prorsus disparet ipsamet syderum imago, vel saltem imago lunæ valde obscuratur, multo magis ad præsentiam fortioris disparere potest ipsa imaginis obscurioris oculi debilioris directio, quæ est pura imaginis affectio, vel saltem ita debilitari, ut ad directionem fortioris quam proxime accedat. Atque hæc est recondita ratio, cur anima objectum non videat in directione oculi debilioris, tamen eodem debiliori illud intueatur. Quamobrem si quis foret oculis prorsus æqualiter fortibus, quod est difficillimum, quia æqualitas uno tantum modo esse potest, disparitas infinitis, nullus dubito eum duobus oculis visum ire objectum in loco accurate medio inter locum ad sinistram, in quo solo dextro videret, interque locum ad dexteram, in quo solo sinistro. Sed neminem invenire potui qui sic objecta videret.

Antequam hoc caput concludam, restat gravissima difficultas, quæ in hoc posita est. Bremundius in adnotationibus ad memoratum in superioribus Desagulerii commentarium, qui extat in Transact. Philos. ad an. 1736. refert Gassendum ex majori restrictione pupillæ, quæ fit a vividiori luce solis ac lunæ in meridiano, ex minori, quæ a debiliori eorundem luce in horizonte, rationem repetivisse, cur in meridiano minores appareant ob minorem in oculi fundo depictam imaginem, majores in horizonte propter majorem. Pardium autem prorsus evertisse hanc sententiam, ac liquido monstrasse majori

pupillæ dilatatione non fieri, ut imago major appareat, sed solum ut major transmittatur copia lucis, & objectum dilucidius videatur. Quod confirmatur experimento subobscuri cubiculi, in quo pupilla magis est aperta quam in plena solis luce, & nihilominus objecta æqualis, ac sub dio, magnitudinis conspiciuntur. Hæc autem adversantur iis, quæ in antecessum statuimus.

Ut his satisfacerem me contuli ad experimenta. In folio crassioris, & opacæ chartæ coloris carulei aperui foramen rotundum diametri 13 linearum, atque illud tenens in situ perpendiculari ad altitudinem oculorum adeo ut fenestram laminis vitreis clausam absconderet, ad foraminis partem fenestræ obversam admovi lentem convexam, ad alteram oculo chartam albam subtilem, & transparentem; quo factum est, ut circularis chartæ portio foramini æqualis illuminata sine ulla singularum laminarum, & plumbeorum cujuscumque laminæ extremorum distinctione ex adverso appareret: tum paulatim removi albam chartam, atque observavi portionem illuminatam eo magis crescere, quo plus charta removebatur, & eo fieri magis distinctam, ac eo propius accedere ad rectangularem fenestræ & laminarum figuram, adeo ut in quadam determinata distantia singulæ laminæ cum suis quæque plumbeis extremis distinctæ quantum fieri potest apparerent; quod comperiebam ex eo quia in minori distantia minores & minus distinctæ observabantur, in majori majores quidem sed etiam magis obscuræ & confusæ. Deinde collocavi foramen cum lente ad distantiam a fenestra duplo majorem prima, vidique imaginem fenestræ maxime distinctam esse valde minorem simili imagine in distantia duplo minori. Hæc eadem experimenta tentavi cum alio foramine duplo minoris diametri, id est lin. 6, 1: 2. & similiter successerunt, nisi quod imago maxime distincta est ad distantiam albæ chartæ a foramine & lente valde minorem, quam in primo eventu, eadem imago est valde minor & valde obscurior imagine maxime distincta ejusdem primi eventus; quæ tres differentiæ multo majores observabantur, cum utebar foramine diametri quadruplo minoris, nempe lin. 3, 1: 4.

Ex quibus experimentis non solum a me sed ab aliis etiam summa cum diligentia institutis colligitur, ad eum finem ut aliquod objectum a lente, & foramine remotius æqualem,

ac idem propius, distinctam quantum fieri potest imaginem in papyro depingat, necessarium esse ut foramen sit amplius, & distantia papyri a foramine major sit. Si hæc ad oculum transferantur, mihi videntur omnino satisfacere Pardii difficultatibus, & dissentientes conciliare philosophos, quorum alii volunt majus foramen ad magnitudinem imaginis conferre, alii negant. Siquidem ex allatis experimentis compertum fit, primorum sententiam si universe intelligatur, esse falsam, atque esse veram solum in eo sensu, ut cum foramen est majus, imago maxime distincta in papyro depicta, sit quidem major maxime distincta minoris foraminis imagine, sed illa in majori quoque chartæ a foramine & lente distantia formetur. Cum autem in oculo sint ex altera parte pupillæ, quæ locum habet foraminis, lens crystallina, per quam colliguntur radii per pupillam intrantes, & nervea retina, in qua imagines depinguntur; & ex altera certum sit pupillam contrahi, & dilatari, illud in objectis vicinis & in multa luce, hoc in remotis & in exigua, & ad verum quam proxime accedat esse quoque idoneos musculos, quibus pupilla, & lens a retina plus vel minus removeatur: facile est inde colligere animam talem in movendis oculi musculis conatum exercere, quo imaginem objecti, quantum fieri potest, distinctam consequatur, atque ad id consequendum sic dilatate pupillam, & eam simul cum crystallina lente sic a retina remove, prout est necesse, ut distincta imago in retina formetur; & cum agitur de objecto intra duas discrepantes, sed mediocres distantias collocato, sic variare dilatationem atque recessum, prout necessarium est non solum ad distinctam in retina imaginem depingendam, sed etiam ad circiter æqualem, quo objectum ab iis duobus intervallis conspectum circiter æquale videatur. Quamobrem ex proposita a Pardo difficultate nihil colligitur, quod nostram evertat sententiam de æqualitate imaginum cum objecta æqualia videntur, & disparitate, cum disparia, deque eo, quod dilatatio pupillæ ad imaginis magnitudinem confert.

Quod pertinet ad experimentum subobscuri cubiculi duo respondeo, primum non raro usuvenire, quod ex nostro systemate colligitur. Nam ut vulgari constat experientia, & advertit Caillus in lect. optic. §. 100. Phantasmata noctu & objecta iis, qui itinerantur, proxima, uti domus, & arbores,

val-

valde majora & valde majori, quam sunt, intervallo difuncta, apparent: alterum in tenebris, & in loco debilis lucis magis quidem ipsam per se aperiri pupillam, sed mentis conatu fieri posse, ut ejusdem & crystallinæ lentis a retina distantia minor fiat; quorum primo ita augeri potest imago, & secundo ita diminui, ut æqualis illi, quæ in plena luce, & ideo referens objecta æqualia formetur. Nos enim non negamus judicium mentis aliunde scientis idem objectum esse in diversis intervallis atque in diversa luce ad æqualitatem imaginis multum conferre, sed statuimus id non facere ipsum per se, sed solum ope diversæ dispositionis, quam in oculi partibus inducit, & adminiculo imaginum, quæ inde existunt. Et revera in dicto experimento major solita arborum, & domorum species disparet, & gignitur consueta, si oculos aliquantum intendamus; quo non solius judicii correctionem, ut contrariæ sententiæ contendunt patroni, sed aliam quoque partium oculi dispositionem alii formandæ imagini accommodatam haberi ipsamet oculi inspectio declarat.

CAPUT SECUNDUM.

De principiis visionis reflexæ.

28. **N**unc ingredior in difficilem locum phænomenorum visionis reflexæ. In speculis planis, & in eventu quod objecta videantur radiis ad oculos oblique reflexis, facile est rem definire. Sit enim speculum planum BZ (*Fig. 5.*) duo oculi in G , & in V , objectum R ; ducaturque RO perpendicularis ad speculum; producaturs usque in N , ut sit $ON = OR$. Ex proprietate lucis faciendi angulum reflexionis æqualem angulo incidentiæ facile est monstrare radios RC , RD , RB parum deflectentes, & in valde exiguum speculi portionem BC incidentes, indeque cum parva declinatione reflexos in radios CH , DG , BF , qui in oculum in G collocatum intrent, si in alteram partem producantur, concurrere in N , atque idcirco oculo G representare objectum perinde ac si foret in N ; similiterque radium RP , & proximos reflexos ad oculum in V , & in contrariam partem productos incidere in idem punctum N , & ideo objectum in eodem puncto exhibere, atque idcirco unum, tametsi binis oculis, conspici. Ex quo auctores opticæ colligunt, quod ex-

pe-

perientia confirmatur, objectum & quidem unum ultra speculum videri in catheto incidentiæ, & in eadem ultra speculum distantia, ac est objectum citra speculum.

29. Sed difficile est utrumque explicare in speculis convexis & concavis, de quibus paulo post differam, & quod attinet ad unitatem objecti, etiam in planis, cum homo se ipsum, vel alteram rem, videt per radios ad perpendicularum reflexos. Nam ex his colligitur non exiguum esse debere spatium speculi DP interceptum inter axem opticum DG a speculo reflexum, in cujus directione oculus G videt punctum R in N , & inter axem opticum PV in cujus directione alter oculus V pariter videt punctum R in N . Cum enim distantia GV utriusque oculi non exigua sit ratione habita RQ , quod parum distet a speculo, non exigua esse debet speculi portio DP inter puncta D & P , quæ sint huiusmodi, ut tam angulus incidentiæ RDO sit æqualis angulo reflexionis GDZ , quam angulus RPO æqualis angulo VPZ . Res confirmatur experimentis, quæ quisque instituere potest. Speculum cooperui charta, in qua reliqueram foramen duarum, trium, quatuor & amplius linearum diametri, observavique sapissime objectum uno oculo clauso eadem claritate altero videri; secundo vero clauso & primo aperto interdum nullam ipsius partem apparere interdum vero aliquam tantum. Ergo id plane commonstrat dictam speculi portionem, ex qua radii ad utrumque oculum reflectuntur idonei ad objectum utroque oculo conspiciendum, non exiguam esse oportere. At si res ita foret, cum tam objectum, quam oculi diriguntur per lineam eandem ad speculum perpendiculararem, binæ imagines præsentari deberent. Id quod constanti experienciæ adversatur.

30. Quo huic satisfaciã objecto, nonnulla referam a me instituta experimenta similia iis, quæ feci in visione directa. Ad speculum planum ante oculos positum in eo situ, ut radii a speculo reflexi perpendiculariter, quantum fieri posset, in oculos inciderent, admovi facem accensam inter utrumque oculum ad eorum altitudinem, itaque locavi, ut aperto utroque oculo imaginem facis in speculo viderem aliquantisper extantem ex face versus oculum dextrum, qui adeo valentior est sinistro, ut illo facile legam, hoc difficulter: tum clauso sinistro imago solo dextro conspecta in eodem situ manebat; clauso dextro imago ad alteram partem facis versus sinistram

commeabat, sed obscurior apparebat. Si fax ita collocabatur, ut imago in speculo duobus oculis appareret in directum cum face, quæ aliquanto demissior oculis foret aut altior, vel ab eadem absconderetur, cum erat in eadem oculorum altitudine; clauso sinistro res perinde se habebat ac utroque oculo aperto; clauso vero dextro versus sinistrum imago transibat, duas tresve lineas, & amplius a face discedens. Tum accepi clavem cum manubrio oblongo in anulum ellipticum desinente, itaque posui inter speculum & oculos, ut planum anuli plano speculi foret parallelum, & duobus oculis apertis imaginem manubrii & anuli per ipsummet anulum viderem. Tum clauso sinistro imago in eodem prorsus situ permansit; clauso vero dextro videbam imaginem tum manubrii, tum anuli prorsus versus sinistram, adeo ut imago sex & amplius linearum spatium versus sinistram confecisse videretur. Deinde clauso dextro acutiori clavem ita collocavi, ut sinistro viderem ejusdem imaginem per anulum medium: aperto utroque oculo cernebam imaginem prorsus extantem ex clavi versus dexteram, & in eodem situ apparebat clauso sinistro. Eadem omnino experimenta successerunt quatuor aliis, qui oculo dextro meliore utebantur quam laevo; tribus vero aliis, qui acutius videbant laevo quam dextro, similiter evenerunt, sed ex parte contraria. Ex quibus omnibus experimentis luculenter efficitur imaginem a speculo reflexam duobus oculis videri in eodem loco, in quo videtur solo fortiore; debiliori autem videri in alio situ, qui ad oculi debilioris partem propius accedit. Iisdem vero experimentis a me tentatis nec non ab aliis, quos adhibui, compertum fit objectum duobus oculis clarius videri, quam uno tantum licet fortiori. Ex quo colligitur visionem imaginis aliqua ex parte etiam oculo debiliori acceptam ferri oportere. Ii vero duo adolescentes, qui in visione directa utroque oculo videbant objectum in uno puncto, solo fortiore in altero puncto, sed valde parum distante versus contrarium oculi latus, solo infirmiore in altero versus alteram plagam sed multum distante, similia experiebantur in visione reflexa, adeo ut imago clavis, quæ duobus oculis appareret in medio anuli, uni valentiori appareret aliquanto, sed parum, propior lateri oculi, alteri vero oculo ejusdem lateri ejusdem.

31. Ex his vero apparet quid sit respondendum ad pro-
po-

positam difficultatem. Nam si punctum videndum sit accurate medium inter utrumque oculum, ut punctum in medio naso in eadem recta, quæ centra pupillarum conjungeret, tunc videri debet radiis oblique in speculum incidentibus, & inde ad utrumque oculum reflexis; idemque contingere debet, si punctum sit uni pupillæ propius: facile autem ostendemus, illud ab utroque oculo, ut a fortiori solo, videri debere in illo catheti incidentiæ puncto, quod tantumdem in alteram partem absit a speculo, quantum ex altera idem visibile punctum abest. Sin autem punctum sit in ipsamet pupilla unius oculi, ab hoc videbitur imago radiis perpendiculariter reflexis, nisi sit adeo magnum ut impediatur radios quominus usque ad pupillam reflectantur: sed propter consuetudinem utrumque oculum versus idem punctum dirigendi imago ab altero oculo videbitur radiis oblique reflexis, qui cum radiis perpendiculariter reflexis ultra speculum concurrent in eo puncto, quod a speculo æqualiter ac punctum visibile, absit. Ex quo fiet, ut imago duobus oculis in eodem loco, atque idcirco ut una videatur. Sed in his omnibus eventibus bini oculi propter exposita experimenta videbunt imaginem in directione radiorum, qui ad oculum valentiorum contendunt.

32. Sed veniamus ad specula convexa, & concava. Aembertus enim in commentario supracitato plures proponit difficultates adversus principia visionis reflexæ, cum agitur de hujusmodi speculis. Primo enim art. 5. advertit, antiquiores opticos voluisse objectum videri in concursu reflexi cum catheto incidentiæ, idest cum illa perpendiculari, quæ ad superficiem reflectentem aut convexam, aut concavam ducitur, quemadmodum usuvenit in planis superficiebus. Ad quod primum monet potius statui debuisse objectum videri in puncto concursus radii reflexi cum perpendiculari ad tangentem puncti reflexionis. Cujus hæc potest afferri ratio. Sit speculum convexum QBR (*Fig. 6.*) cujus centrum C , sit objectum in O , & ad quodlibet speculi convexi punctum B ducatur a centro C perpendicularis CBN ; tum erigatur SBE perpendicularis ad radium CB , quæ est tangens speculi in B ; ex objecto O ducatur normalis OE ad tangentem BE , productaque ut fiat $ED = EO$, puncta O & B , D & B jungantur rectis OB , DB , quæ DB producat in M . Ex iis, quæ in reflexione ex speculo plano confecimus, constat angulum inci-

dentia OBE esse æqualem angulo reflexionis MBS , atque ideo radium profectum ab O & incidentem in punctum B reflecti debere per BM , & si oculus statuatur in M , objectum O visum iri in D . Nam valde exigua portio circuli cum recta tangente, & sphaera cum plano pariter tangente congruit. Quare innumerabiles radii profecti ab O , & ab OB parum deflectentes & in exiguam circa punctum B sphaerae portionem incidentes perinde se habebunt ac si in planum inciderent, ideoque ita reflectentur undequaque secundum rectam BM , sed ab ea parum deflectentes ut in contrariam partem producti cum radio MBD , qui tamquam axis opticus ponitur, concurrant in puncto D , tametsi non ita exacte, ut in exacto plano, punctique O imaginem depingant in D , & oculum ad illam ad punctum D referendam determinent. Si accipiat alterum objecti punctum valde proximum b , mutatis literis majoribus in minores objectum O videbitur in d ab oculo posito in m .

33. Adversus antiquorum principium art. 6. monet Tacquetum, tametsi illud asciverit, fateri experientiam in aliquibus eventibus eidem adversari. Nam si objectum ponatur ultra centrum speculi concavi, oculus inter centrum & speculum collocatus illud videt in situ erecto. At si videret in cathetis incidentia, cernere deberet inversum, quia radii ab objecti punctis profecti, & ad rectos angulos in speculum incidentes per centrum transmittunt, atque idcirco se interfecant.

Hoc exploso principio transit articulo 7. ad verisimilius Barrovii, Gregorii, & Newtoni, quod est hujusmodi. Punctum visibile non reflectit unum tantum radium, sed versus superficiem reflectentem aut refringentem plures ejaculatur, quorum certus numerus ingreditur in pupillam, eo quod hæc non est mathematicum punctum, sed certam habet latitudinem. Ita radii oF , of (*Fig. 6.*), qui a visibili puncto o objecti proficiscuntur, quique prius reflectuntur aut refringuntur, quam perveniant ad oculum, & in pupillam NL ingrediantur, sic perveniunt perinde ac si directe proficiscerentur ab H puncto, in quo radii FL , fN concurrerent, si producerentur. Quoniam vero radii FL , fN , ob parvam pupillae latitudinem proximi sunt, punctum concursus H est ad sensum idem, ac si forent infinite proximi, nempe punctum H est illud, in quo FL tangit causticam curvam reflexionis aut

refractionis. Hoc itaque punctum est illud, in quo objectum videtur secundum laudatos scriptores, quorum systema eleganter exposuit multisque illustravit conterraneus meus, mihi-que, dum viveret, conjunctissimus Ramirus Rampinellius Congregationis Montis Oliveti Cl. in gymnasio Ticinensi mathe-
seos professor in suis lectionibus opticis editis Brixiae an. 1760.

34. Qua exposita sententia Alembertus primo advertit ipsum Barrovium in fine suarum lectionum opticarum monere experientiam eidem esse contrariam: quod accidit in eventu, in quo FL, fN (*Fig. 6.*) ob reflexionem aut refractionem ad semetipfos accederent. Tunc enim, si oculus in parva a speculo distantia collocatur directus versus F & f, radii non conjungerentur in H ultra speculum & ante oculos, sed extra speculum, & post caput: inter alia exempla ad id confirmandum afferre exemplum Tacqueti, atque fateri hanc difficultatem sibi videri inexplicabilem. Deinde monet hanc sibi talem non videri, propterea quod ex altera parte visio clara perfici non potest radiis, qui vicissim inclinati ingrediuntur, & ex altera principium pertinere non potest nisi ad radios qui deflectentes in pupillam ingrediuntur, quique soli cum in retina conjungi possint, pariter soli claram, & distinctam puncti, a quo projiciuntur, imaginem depingere queunt.

35. Ex quo colligit his rationibus non infirmari principium Barrovii, sed addit aliis labefactari. Nam hæc scribit art. 9. Positio oculorum esse potest hujusmodi, ut qui radii reflexi, aut refracti in singulos oculos intrant, quique ab eodem puncto proficiscuntur, ii valde discrepent, & inter se angulum valde magnum conficiant. Quare si hos radios inter se concurrere ponamus, necesse foret hunc concursum esse in eodem puncto H (*Fig. 6.*) causticæ pro quolibet radio. Id quod per raro contingit; in aliis omnibus eventibus forent duo puncta H sive duo loca imaginis valde inter se pro quolibet oculo discrepantia, ideoque imago duplicata appareret, quod experimentis adversatur. Ergo imago in puncto H non videtur.

36. Has alias rationes subjungit art. 10., & 11. Si oculi ita sint collocati, ut qui radii in singulos intrant, nunquam concurrant, eo quia singuli cujusque oculi radii aut sunt paralleli, aut in diversis planis reperiuntur, in neutro ex duobus radiis imaginem, visum iri manifestum est. Quod ni ita foret,

ret, aut duplex appareret, aut uno tantum oculo cerneretur, quod falsum est. Inde vero obiter colligitur falsum quoque esse Volpium, qui contendit imaginem videri in puncto concursus radiorum, qui in utrumque oculum ingrediuntur, ubi enim apparebit objectum, cum, quod sapius usuvenit, hoc concursus punctum nusquam est? Quid quod si non folius longitudinis LN (Fig. 6.), sed etiam latitudinis pupillæ ratio habeatur, ut haberi oportere constat, fieri potest, ut radii, qui ad hanc latitudinem pertinent, quam nunc pono esse LN, in puncto colligantur valde diverso, nempe in illo, in quo radius LF incidit in cathetum incidentiæ? quo posito radii plura haberent incidentiæ puncta, inter quæ non posset determinari illud, ad quod potius præ aliis oculis imaginem referre deberet. Præterea oculi ita siti esse possunt, ut pro singulis sint duæ imagines distinctæ, ideoque pro duobus quatuor, & in aliquo situ ad minimum tres habebuntur, una in catheto incidentiæ, aliæ duæ in causticis.

37. Hactenus Alembertus, cui primum assentior falsam esse antiquorum optidorum sententiam, quæ nullo pacto defendi potest ob allatum Tacqueti experimentum, & ob alias rationes, quas, ut breve faciam, omitto. Nec tamen admitti potest alterum principium, quod, ut a nemine observatum, insinuat Alembertus. Nam punctum visibile primo videri debet in directione radii reflexi; deinde in eo radii reflexi, si opus sit producti, puncto, in quo magna radiorum ab aliquo visibili puncto promanantium, & aliquantisper a se vicissim deflectentium concurrunt. Quod hæc duo servantur ratione habita illius puncti, in quo radius reflexus ultra speculum productus, cum perpendiculari ad superficiem planam reflectentem concurrat, idcirco oculus in aliquo radii a superficie speculi reflexi puncto collocatus objectum videt in puncto concursus ejusdem cum perpendiculari. At in speculis convexis, & concavis res non ita se habet. Nam in speculo satis accurato, & continuæ ad speciem curvitatatis, adeo ut nulla discerni queat plana superficies, singulæ hujusmodi planæ superficies innumeris partibus minores sunt plano pupillæ, cujus diameter sub sensu cadit, & illa quoque basi fasciculi radiorum, qui simul cum axe optico in pupillam ingrediuntur, postque varias refractiones in ipsa colliguntur retina ad visibilia corporum puncta alia post alia eo depingenda modo, quem

quem numero 8. accurate exposuimus. Unde qui radii a puncto visibili deflecentes in unam tantum ex hujusmodi superficiebus circa B (*Fig. 6.*) collocatis incurrunt, & ita reflectuntur per BM, ut producti cum OED ad tangentem BE perpendiculari concurrant in eo puncto D, ut sit $DE = OE$; ii pariter innumeris partibus pauciores sunt iis, qui totum dictum fasciculum componunt: alii omnes incidunt in alia innumera circa planum B posita plana, quæ aliter ac B sunt inclinata, & idcirco tangentes habent a tangente BE deflecentes. Quare quod attinet ad sensilem alicujus puncti objecti impressionem in retina faciendam, non sunt attendendi primi, nec illorum concursus, sed est habenda ratio secundorum & puncti, in quo hi omnes majori ex parte conveniunt. Hoc autem punctum est valde remotum ab eo, quod ex concursu radii reflexi cum perpendiculari ad tangentem definimus. Nam in superficie convexa QBR (*Fig. 6.*) duo radii OB, Ob, ita reflectuntur per BM, bm, ut post speculum concurrant in X puncto valde remoto a D. Id quod ex natura curvæ causticæ colligitur, & comprobatur experimentis. Si quidem in axe mei speculi convexi vitrei, quod retro habet superficiem planam stanno, & mercurio obductam, posui facem accensam, duasque observavi imagines alteram æqualem faci, sed obscuriorem, quæque certo reflectitur a plana mercurii, & stanni superficie; alteram minorem sed claram, quæque a convexa vitri regeritur. In removenda face a speculo prima semper longius retro discedebat, ut tanto plus spatii retro discessisse videretur, quanto plus spatii antrosum fax remota fuerat. Sed altera longe aberat a prima, & speculo valde propior observabatur. Hoc autem punctorum concursus utriusque generis intervallum multo magis constabit ex iis experimentis, quæ speculis concavis infra instituemus. Interim hoc unum ajo, quod per se satis est ad id efficiendam, puncta concursus radiorum reflexorum cum perpendicularibus ad tangentes in iisdem punctis semper haberi post concavam superficiem, ut ex se patet. Bernullius autem tom. III. oper. sect. 29. & 30. concursum radiorum, infinite proximorum ex aliquo puncto in superficiem concavam sphericam incidentium, invenit ex parte ejusdem concavæ superficiæ citra speculum; de quo paulo post accuratius; & experimenta, quæ afferam, id comprobabunt.

38. Ex quibus simul conficitur, objectum non videri in concursu radii reflexi cum perpendiculari ad tangentem curvæ in puncto reflexionis, & apparere in eo loco, in quo secundum causticæ naturam radii concurrunt. Nec difficultates Alemberti, & Barrovii hoc systema labefactant. Quod ut doceam, prius exponam aliqua ex iis experimentis, quæ feci in speculis concavis, alia plurima, & magna ex parte nova imposte- rum expositurus. 1. Objecta interposita inter focum, & speculum cavum recta apparent, ut in speculis plano, & convexo; sed majora quam sunt, & eo majora, quo propius ad focum accedunt; qui focus, ut notum est, reperitur in distantia a centro superficiæ concavæ quartæ partis diametri spheræ, ad quam pertinet eadem superficiæ. 2. Collocata vero ultra focum apparent inversa, si oculus quoque longe distet. 3. Sed si objectum a locis, ubi rectum apparet, paulatim retrahatur ad locum, in quo inversum, idem obscuratur primo & confunditur, deinde prorsus evanescit, ut nusquam inveniri queat. 4. Quotiescumque apparet rectum, semper manifeste videtur ultra speculum cavum, quemadmodum usuvenit in plano & convexo; cum autem inversum, citra speculum esse creditur vel saltem in ipsa ejusdem superficiæ. 5. Hæc experimenta cum eodem prorsus successu sapissime tentavi duobus speculis, altero, quod est portio spheræ valde majoris diametri, altero, quod est valde minoris. Illud autem observavi discrimen, quod in valde majoribus a speculo distantibus imago confunditur, obscuratur, evanescit, & renascitur in speculo, quod est portio spheræ majoris diametri, quam in speculo, quod minoris, in quibus tamen illa languidior, & objecto æqualis imago, quam a stannea plana superficiæ supradiximus reflecti, semper recta manebat, dum vividior, & major invertebatur. 6. Prope speculum majoris diametri posui objectum, nempe inter speculum & focum, hujusque imago semper apparuit ultra speculum in situ recto, sive oculus prope speculum foret, sive in quacumque a speculo distantia. 7. Longe a speculo posui objectum & oculo pariter eminus posito objectum apparebat in situ inverso vel citra speculum, vel in ejusdem superficiæ, ut dixi; sed si oculus foret prope speculum inter focum & speculum, objectum visum est rectum, & in eo majori a speculo ultra idem intervallo, quo major est objecti a speculo distantia, quod apparens ultra speculum intervallum

videbatur circiter æquale intervallo objecti a speculo. 8. Unde ut objectum in situ inverso & citra speculum, vel in eisdem superficie videatur, duo necessaria sunt, tum objecti, tum oculi distantia a speculo major distantia foci ab eodem, vel potius puncti concursus radiorum reflexorum, ut infra explicabimus.

39. His positis experimentis sit semicirculus HAL (*Fig. 7.*) cujus diameter HL , centrum C ; ex centro C ducatur radius CA ad quodlibet punctum A curvæ superficiei, cujus radii accipiatur dimidium AV : circa AV tamquam diametrum describatur circulus $ASVZ$; ex puncto A ducatur quælibet recta AB secans circumulum minorem in β . Ex puncto quolibet B tamquam luminoso extra circumulum $ASVZ$ sumpto ad semicirculum HAL ducantur radii infinite proximi BA , Ba cum suis reflexis AM , am ad angulos reflexionis æquales angulis incidentiæ. Dico reflexos AM , am concurrere ex parte concava semicirculi ex. gr. in puncto F : sin autem ex puncto b intra circumulum $ASVZ$ sumpto ducantur radii bA , ba , dico ipsorum ea lege reflexos AM , ad deflectere a se ipsis ex parte concava, & concurrere ex parte convexa, ut in f : tandem si ex puncto B in periphèria sumpto ducantur radii βA , βa , ajo ipsorum reflexos AM , aD esse parallelos, ideoque nulla ex parte concurrere. Quæ omnia colliguntur ex iis, quæ monstrat cl. Hospitalius in *Analyse des Infin. Pet. art. 116*, & 120; ex quorum primo deducitur etiam radios infinite proximos oF , of (*Fig. 6.*) a puncto luminoso o incidentes in speculum convexum QBR ita reflecti, ut FL , fN semper deflectant a se ipsis ex parte convexa, & versus concavam producti ibidem, ut in H , concurrant.

40. Ex qua theoria primo comperta fit ratio, cur, cum objectum est speculo vicinum, ut in b , oculus positus in M d in quacunque vel parva vel magna a speculo distantia semper objectum videat ultra speculum in puncto concursus f radiorum reflexorum AM , ad , qui cum a se invicem deflectentes in oculum ingrediantur, & ob refractiones in retina colligantur, ostendere debent objectum perinde ac si foret in f . 2. Percipitur qua de causa, cum objectum est remotum, ut in B , oculus pariter distans ut in Mm , videat objectum citra speculum, & situ inverso, quia cum radii concurrant in puncto F propiori, quam sit oculus, ideoque post F stant

T. V. P. II. P p p al.

alternent ex. gr. summi in imorum locum, & imi in summorum migrent, oculus objectum videt perinde ac si foret in F citra speculum, & radiis decussatis, ideoque objectum in situ inverso representantibus. 3. Intelligitur etiam, cur in retrahendo objecto, & oculo a speculo, antequam objectum ex recto fiat inversum, perveniatur ad locum, in quo imago prius turbatur atque confunditur, & deinceps deletur, quia cum oculus est nimis prope punctum concursus radorum, radii ab objecto in speculum incidentes, & a speculo ad oculum reflexi, non sunt idonei distinctæ objecti imagini in retina depingendæ. Nam cum oculus est in *eo* prope punctum F, sed inter F & speculum, radii *Ao*, *ae* nimis inclinati in oculum ingrediuntur. Radii autem nimis inclinati in oculum intrantes apti non sunt ad eum finem, ut in oculi fundo concurrant, & quemadmodum ad distinctam imaginem consequendam necessarium est, punctum B in uno retinæ puncto, ut & alia objecti puncta in aliis distinctis punctis depingant. Si quidem oculi humores ita comparati sunt, ut ex radiis ab uno objecti puncto manantibus eos tantum ope refractionis in retina colligant, qui aut a se vicissim deflectunt in objectis vicinis, aut paralleli sunt in remotissimis, aut ad summum inter se parum inclinati sunt, & a parallelis parum differunt. De quo tamen infra enucleatius. Si vero oculus sit quidem prope F, sed ultra ut in *nr*, tunc quia imago objecti depingitur in F, perinde est ac si objectum videndum sit in F. Oculus autem nimis objecto vicinus illud aut non videt, aut videt solum obscure & confuse. Cujus phænomeni hæc altera ratio potest afferri. Cum ex altera parte quantitas ab alio ad alium statum transire non possit, nisi fiat infinite magna aut parva, ut docuimus tom. II. phys. gen. §. 434., & ex altera in accessu ad F imagines augeantur, atque transacto F ex rectis inversæ appareant, necesse est, ut in puncto F in infinitum crescant. Imagines autem in infinitum crescentes ob nimiam lucis dispersionem primum obscurantur, & deinceps dispareant. Sed etiam de hoc alibi accuratius.

41. Sed antequam in explicatione phænomenorum procedam, alia sunt exponenda experimenta, quæ feci. Qua in re primum adverto experimenta speculis rotundis & vitreis instituta id habere incommodi, quod ipsorum effectus non solum oriuntur a duplici reflexione, altera in superficie anterio-

ri rotunda, altera in interiori plana, verum etiam a duplici refractione lucis, dum ab aere in vitrum ingreditur, & pervenit usque ad superficiem metallicam, & dum ab ea repulsa rursus a vitro in aerem transmittit. Quamobrem ut aliquid certius definirem, me converti ad specula metallica, aut alius opacæ materiæ, in quibus certum est esse unam in superficie reflexionem. Sumpsi speculum concavum diametri pol. 4. lin. 4. fere, ex metallo lucidissimum ac politissimum, quali utimur in telescopio catoptrico newtoniano; ex foco, in quo radii solares in ipsum recta incidentes colliguntur, quique est ad distantiam pol. 8. lin. 7. a speculi centro, collegi diametrum spheræ, cujus est portio, utpote dicta distantia quadruplo majorem, esse 34. pol., & 4. lin., idest ped. 2. pol. 10. lin. 4. Ante ipsam in situ ad horizontem perpendiculari locatam posui clavem in distantia a speculo, quæ foret minor dicta 8. pol., & 7. lin. cumque primum post plura tentamina unam tantum eamque claram, & directam imaginem clavis vidissem, tandem sæpius claudendo debiliorem oculum, & aperiendo mihi contigit duas videre inter se parum distantes, & aliqua ex parte confusas, alteram clariorem & versus oculum sinistrum, quam solo dextro fortiore videbam, alteram obscuriorem versus oculum dextrum, & aliquanto altior, quam solo oculo sinistro; adeo ut si clauderem sinistrum, solam primam aspicerem; si dextrum, solam secundam. 2. Si me simul cum clavi collocabam in distantia majori dicta pol. 8. lin. 4. in eo situ, in quo objecta inversa videntur, tunc stans fere in axe cum clavi erecta paulo versus sinistram, duas imagines clavis inversæ videbam in speculo sine ulla difficultate; alteram prope oram sinistram speculi, & versus oculum sinistrum, alteram aliquanto obscuriorem prope oram speculi dextram, & versus oculum dextrum; primam intuebar solo dextro, secundam solo sinistro, adeo ut si clauderem sinistrum, sola prima appareret, si dextrum, sola secunda. Si clavem aliquantum retrahebam versus sinistram, imago visa oculo dextro a sinistra speculi versus medium procedebat, altera visa sinistro se intra speculum versus dexterum latus insinuabat, & abscondebatur, adeo ut imago in medio speculo solo oculo dextro cerneretur, quia si clauderem sinistrum, eam intuebar, si dextrum, nihil prorsus. Idem penitus usuveniebat in imagine visa oculo sinistro, si clavem retrahebam versus

dextram. Si vero cooperiebam speculum versus latus sinistrum, primo disparebat imago illi vicina, quæ oculo dextro conspicitur; si corpus operiens ducebam supra speculum versus latus sive oram dextram, tunc disparebat imago illi respondens, & oculo sinistro visa.

42. Quamvis autem, cum objectum & oculus sunt fere in axe & in eo situ, in quo imago recta videri debet, binæ imagines observari non possint, nisi aliquo artificio aut pressionis oculi sinistri, ope digiti, aut illum claudendo & aperiendo, quæ in visione quoque directa objectum aliquando duplicant, tamen hac altera ratione obtinui, ut binas sine ulla difficultate intuerer. Ad dicti speculi ad horizontem perpendicularis latus dextrum in situ valde obliquo collocavi clavem in distantia 5. aut 6. pollicum, meos oculos valde prope admovi ad speculi latus sinistrum, ibique vidi duas clavis imagines, alteram valde claram prope oram dextri lateris solo oculo dextro, qui eidem lateri propior erat, alteram parum distantem & valde obscuram, laterique, & oculo sinistro propiorem solo oculo sinistro, ut claudendis alternatim oculis comperiebam. Si incipiendo a sinistro latere, & oculo corpus opacum supra speculi superficiem dextram versus oculum ducebam, primum disparebat obscurior oculi sinistri imago, deinde clarior dextri.

43. Si objectum statuebam ad duorum, trium, & amplius pedum distantiam, & oculum ad exiguam, quo in eventu semper objectum vidi in situ recto, numquam videre potui duas objecti imagines, etsi me in situ valde obliquo collocarem. Cujus phænomeni certam perspexi rationem. Nam in quadam speculi obliquitate ita videbam imaginem clavis & corporis etiam latioris solo oculo dextro, ut si clauderem sinistrum, æqualiter eam viderem; si dextrum, non cernerem, imo neque magnam fenestram sex & amplius pedes distantem. Si clauso dextro ita invertiebam speculum ut clavem cernerem atque fenestram, quod consequi non poteram, nisi conversione speculi per arcum plurimum graduum, tunc clauso sinistro & aperto dextro nec clavem nec fenestram videbam. Ex quo apparet illam cavam sphaeræ diametri 34. pol. & 4. lin. portionem diametri pol. 4. lin. 4., qualis erat meum speculum concavum, non fuisse idoneam ad recipiendos ab objecto tam remoto radios, quos servata catoptrica lege aequalitatis inter

angulos incidentiæ, & reflexionis, ad utrumque oculum reflecteret. Unde sequitur, si ingentem sphæræ diametri majoris portionem habeamus, futurum, ut binas objecti quoque remoti imagines intueamur.

44. Ut experimenta instituerem speculis convexis, sumpsit pyxidem ligneam nigram cum operculo rotundo, polito, & lucenti, parum convexo, & diametri pollicum 2. lin. 8; 1: 2. facem accensam posui ad sinistram latus ipsius & oculos ad dextrum ita ut sinister oculus propior foret sinistræ speculi. Continuo vidi unam tantum in speculo imaginem face minorem, sæpius clauso sinistro debiliori, & statim aperto tandem cœpi videre duas faces distantes, alteram clariorem, & oculo sinistro propiorem, alteram languidiorem, & propiorem dextro: clauso sinistro denuo apparebat sola clarior & sinistro propior; rursus aperto sinistro duæ, ut prius, videbantur; clauso dextro disperebat fortior, & ab eo longius distans, & restabat sola languidior, & ipsi propior. Cum aliquando pergerem duas intueri duobus oculis imagines, languidior repente se subducebat; tunc clauso sinistro, & continuo aperto duæ redibant imagines. Illud etiam est dignum, quod animadvertatur, in apertura oculi sinistri initio per breve tempus duas videri imagines, sed mox languidiorem magna celeritate fortio-rem versus accurrere, & cum ea deinde confundi. Si in hisce experimentis instituendis oculos conspiciillis armabam, easdem duas imagines observabam, sed clariores interque se magis disjunctas. Ut observarem a qua speculi parte fieret reflexio radiorum ad singulos oculos, initio capto a latere sinistro, & propiori pariter oculo laevo, ductoque paulatim corpore operiente versus latus & oculum dextrum, primo evanescebat imago oculi sinistri, restabatque dextri, adeo ut dextro clauso nullam viderem: promotio corpore disperebat quoque imago dextri, donec eodem dextrum versus latus adhuc promotio, imago sinistri rursus appareret, & continuata promotione dextri quoque rediret. Ex quo colligitur, radios pertinentes ad oculum sinistram reflecti a parte speculi, quæ sit propior sinistro lateri, & oculo; radios autem ad dextrum regeri a parte speculi, quæ sit remotior a latere sinistro, & oculo dextro propior. Si facem ponebam ad dextrum speculi latus, & oculos ad sinistram, eadem omnia, sed in contrario situ contingebant; quemadmodum & usuveniebant, si pro fa-

ce objectum usurpabam opacum. Quod attinet ad alios, valde paucos offendi, qui has binas imagines viderent. Multi tamen fatebantur, se, cum primum aperirent oculos, brevissimo temporis spatio videre hanc alteram imaginem, quæ magna celeritate ad alteram oculo fortiore conspectam accurrebat; & cum illa confundebatur, ut mihi quoque usu non raro venisse supra notavi.

45. Hac de causa nondum his contentus experimentis rem hujusmodi tot in partes versavi, ut tandem aliquando constantem, eamque ab oculi pressione debilioris minime pendentem, obtinerem duarum visionem imaginum non solum mihi, sed etiam omnibus aliis, iis quoque, qui binas in superiori experimento videre non potuerant. Posui clavem horizonti ad perpendicularum insistentem ad latus sinistrum speculi convexi similiter erecti in situ valde obliquo, ideoque multo magis, quam in præcedenti experimento; me ad latus dextrum in situ pariter valde obliquo collocavi, eumque situm elegi, in quo imaginem speculi utroque oculo viderem, quod colligebam ex eo quia nunc unum, nunc alterum oculum claudendo, semper imaginem clavis intuebar. In eo situ post pauca tentamina majoris aut minoris inclinationis oculorum ad speculum duas imagines clavis, alteram clariorem, & lateri speculi atque oculo sinistro propiorem videbam solum oculo dextro, quia si hunc clauderem, eadem continuo disparebat; alteram obscuram & propiorem oculo & lateri dextro cernebam solo sinistro; id quod simili experimento comprobabam. Quod si clavem huc illuc ducebam, imagines quoque motum clavis sequebantur, semper tamen inter se plus, vel minus distantes. Si speculi superficiem aliquo corpore cooperiebam incipiendo a latere & oculo sinistro, & corpus ducendo versus dextrum, idem usveniebat, quod in superiori experimento, in quo ad binas videndas imagines quadam oculi pressione, quæ præcederet, opus fuit.

46. Plures vero duabus utroque oculo, & unam uno numquam videre potui in hujusmodi speculis concavis aut convexis, quæ ex metallo aut alia materia opaca confecta fuerint. Unde cum Graveffandus §. 3333. Elem. phy. hæc scribat de reflexione ope speculi cavi *si oculus detur in puncto, in quo radii reflexi pertinentes ad diversa curvæ crura sese mutuo intersectant, duplex aut triplex dari potest objecti apparentia, sed*
hoc

hoc contingere non potest, si speculum ex nimium exigua sphaera portione efficiatur; ajo me nescire primum, an haec duas, aut tres imagines ipse viderit, an ex sua causticæ curvæ theoria collegerit videri oportere: deinde si vidit, utrum duobus oculis, an uno tantum, quia si non uno, sed duobus observavit, non efficit ad diversa hujus curvæ puncta, & crura referri radios, qui ab uno objecti puncto profecti ad unum oculum reflectuntur, sed solum eos, qui ad utrumque. Tum an usus fuerit speculis vitreis ex parte postica hydrargiro indutis, an vero metallicis, quia §. 3304. solum postulat dari alterutrum speculorum genus; & aliunde si primis est usus, nihil certi colligi posse supra docuimus, & constat etiam ex hoc experimento. Me & facem collocavi in magna a meo speculo cavo vitreo distantia in axe: vidique duas ante speculum imagines facis inversas, quas certum est reflecti a superficie anteriori cava, & duas retro valde distantes rectas, quas ab interna plana; cujus duplicis rectæ ratio ex eo petenda est, quod antequam radii ab ea reflexi ad duos oculos perveniant, refringantur in exitu a cava superficie, & ob rationes allatas, atque ob experimenta, quæ in lentibus instituta infra narrabuntur, idonei fiunt ad duas distantes imagines in utroque oculo quibusdam in circumstantiis depingendas. Et revera unam tantum in medio rectam aliquando videbam. Meum autem speculum cavum metallicum non esse nimis exiguam sphaeræ portionem ex eo colligo, quod ipse §. 3309 ponit suum speculum habere chordam 15. pol., & sphaeram, cujus est portio, habere radium 35. pol. meum autem habet chordam pol. 4. lin. 4., & sphaera, cujus est portio, habet radium pol. 17. lin. 2.

47. Quibus summa cum diligentia & sexcentis observatis non solum a me, sed etiam a quamplurimis in hisce rebus versatis, qui meis experimentis adfuerunt & præfuerunt, & presertim a Joanne Baptista Suardo Comite ob præclaros de rebus ad mathesim pertinentibus libros in republica literaria celebri; a nobili viro Aloylio Chizzola matheos, & physicæ studiis addictissimo; a Francisco Cagiada docto geometricæ & hydrostaticæ professore, & a duobus eximie indolis adolescentibus Joanne Baptista Guadagni, & Joanne Maria Carminati Cl. R. philosophiæ lectore, utroque in rebus ad physicam atque ad analysim recentiorum pertinentibus apprime versatis;

his

his, inquam, ajo penitus satisfieri præcipuis Alemberti difficultatibus. Re etenim vera, cum radii ad oculum utrumque reflexi ad loca valde inter se distantia concurrunt, experientia docet, contra quam is affirmat, nixus experimentis non ea, quæ necessaria foret, diligentia institutis, duas imagines ejusdem objecti alteram altero oculo videri. Siquidem ex radiis ab eodem objecti puncto prodeuntibus illi, qui ad oculum dextrum contendunt ab alia speculi concavi, aut convexi parte reflecti debent, ab alia qui ad sinistram, ut nempe singuli faciant angulum reflexionis æqualem angulo incidentiæ, quemadmodum facere debent. Rursus in objecto remoto radii concurrunt non ultra speculum concavum, sed citra in duobus punctis aliquantum distantibus, quæ sint oculo propiora quam speculum. Ergo eorum distantia ratione habita tum oculorum, quibus sunt propiora, tum superficiæ speculi, in qua ut plurimum apparent inversæ imagines perinde ac si in ea forent, non exigua debet videri. Mirum igitur non est, si semper duæ videantur, altera oculo dextro, altera sinistro. Cum vero directæ apparent aut in speculo convexo in quacumque oculi & objecti ab eodem distantia, aut in concavo, cum aut objectum est speculo proximum, aut si remotum, tamen oculus prope est, tunc magna objecti, & oculi obliquitate obtinetur ea duarum imaginum distantia, quæ necessaria est, ut altera altero oculo in diversis locis conspiciatur, atque idcirco tamquam binæ repræsententur. Quod si in aliis supra expositis eventibus una tantum apparet, id non pugnat cum Barrovii theoria, propterea quod tres sunt causæ, quæ id postulant, quin aliquid præfata theoria inde capiat detrimenti. Prima est in iis eventibus, in quibus uno tantum oculo imaginem videri observavimus, quod theoriæ consentaneum est, quia propter alterius oculi ab altero non mediocrem distantiam fit, ut radii ab objecto profecti ad unum tantum oculum reflectantur. Et revera cum in speculo concavo adhibetur accensa fax, visibile lumen facis reflexum ad unum tantum oculum ab aliis in me, a me in aliis observatum est. Quare fallitur Alembertus, dum id falsum esse univèrse statuit (n. 36.). In his autem eventibus semper, & ab omnibus una tantum videtur, si speculum sit confectum ex opaca materia.

48. Altera causa est in iis aliis, in quibus imago videri de-

debet utroque oculo in eodem loco, ut concedit ipse Alembertus (n. 35.) utque accidit cum objectum est in axe prope speculum concavum, & oculi quoque prope eundem axem. Quo pariter in eventu semper & ab omnibus una imago videtur, ut pluribus experimentis compertum feci.

49. Tertia vero causa locum habet in iis eventibus, in quibus imagines parum inter ipsas distant, & altera est valde obscurior, quæ oculo debiliori videtur, atque repetitur ab ea doctrina, quam supra tradidimus (n. 27.) videndi objectum duobus oculis in sola directione radiorum, qui ad oculum fortio-rem contendunt. Hanc ob causam a maxima hominum parte hæc binæ imagines non videntur; ab iis vero, quibus apparent, non id statim & sine difficultate obtinetur, sed aliquo artificio est opus, ut pressione oculi vel digito, vel claudendo, & statim aperiendo, qua oculi paulisper ab eo distorquentur situ, quem ob habitum acquisitum affectant, collineandi in idem objecti punctum, & cum obtinetur, persape fit ut solum a principio eas videant, & statim debiliorem ad fortio-rem accedere observent; in quo imaginis debilioris ad fortio-rem accessu mihi videre videor directionem oculi debili-oris ad directionem fortioris accedere, & cum ea confundi, ac misceri ad unius imaginis repræsentationem. Quæ cum ita sint, nemo non videt hanc maximam Alemberti difficultatem a duabus imaginibus repetitam nullo pacto labefactare theoriam Barrovii, nec opticæ principia circa visionem reflexam.

50. Restat una Barrovii difficultas, repetita ex eo, quod cum objectum est citra focum speculi concavi in majori, quam sit focus, a speculo distantia, oculus prope speculum positus videt objectum ultra speculum, tametsi radii ante sive citra speculum colligantur post hominis caput. Ad quam primum adverto repetitis sæpius experimentis mihi compertum factum fuisse, cum oculi prope speculum sunt, satis clare intueri imaginem objecti in situ recto ultra speculum, & in eo majori a speculo distantia, quo objectum longius a speculo abest, ut etiam monui n. 38., cum vero oculos ab eodem removeo, & ad curvam causticam, sive ad locum, in quo radii colliguntur, propius admoveo, rectam objecti imaginem obscuriorem fieri atque etiam majorem, adeo ut in aliqua sensibili sed exigua ab eodem distantia, postquam maxima facta est, omnino evanescat, itaque permaneam etiam in aliqua exigua ultra di-

Etum locum distantia, post quam rursus apparet imago, sed inversa, & initio quidem obscura, & magna, paulatim vero oculos removendo clarior fit, & minor, donec fiat objecto æqualis, & oculos amplius removendo etiam minor. Ex hoc primum colligo adversus Alemberti responfionem (n. 34.) radios a speculo ita reflexos, ut sint inter se inclinati, non esse absolute ineptos visioni excitandæ, sed solum si valde sint inclinati. Qua enim de causa cum objectum ex. gr. est in B (*Fig. 7.*), & oculus propior speculo *Aa*, & remotior a puncto concursus F radorum reflexorum *AM*, *am*, videt objectum, non autem cum est valde prope punctum F, nisi quia, cum radii sunt parum inclinati, adhuc apti sunt, ut post varias refractiones in diversis retinæ punctis colligantur, qui a diversis objecti punctis procedunt, & in iisdem qui ab iisdem, itaque visionem efficiant; cum autem nimis sunt inclinati, non item? Et sane si ad id præstandum apti sunt paralleli, ut in radiis a sole, & a stellis profectis usuvenit, quid ni apti sint ii, qui minimo intervallo absunt a parallelis, quemadmodum sunt radii *AF*, *aF* ob minimum inter ipsos interval- lum *Aa*, & magnum inter punctum concursus F, & puncta *A* & *a*?

Qua vero de causa fiat, ut objectum ultra speculum videatur in dicto intervallo; facile est asserre rationem, cur ultra speculum, difficile autem, cur in dicto intervallo. Primum enim aperte colligitur ex habitu, quem anima acquisivit videndi objecta tamquam ante oculos posita, & in directione axium opticomum, qui ad oculum contendunt. Alterius ratio hæc fortasse est. Ratio cur anima in speculo plano videt objectum ultra speculum in distantia eo majori, quo major est objecti a speculo distantia, non solum in eo posita est, quod radii a singulis objecti punctis profecti in iis ultra speculum colliguntur punctis, quæ n. 28. definivimus, sed etiam in eo quod ita debilitati ad oculum perveniunt, ac si ab iisdem punctis profecti fuissent. Hoc autem secundum in re, qua de agimus, locum habet. Nam quo punctum B longius distat a speculo *Aa*, eo magis fracti radii perveniunt ad oculum inter *Aa* & F collocatum. Ergo hæc potest esse phænomeni ratio. Verum hoc misso, de quo propter quasdam rationes, quas hic silentio prætereo, certum iudicium nunc proferre non ausim, certius in consequentibus prolaturus, addo rationem, cur ocu-

lus positus inter Mm ; & F punctum concursus in nimis parvo ab F intervallo, imaginem objecti B aut non videt, aut valde obscuram intuetur, esse eandem ac rationem, cur aut nullo pacto, aut valde obscure cernit objectum nimis vicinum, quia tunc perinde est ac si objectum B foret in F , ut etiam adverti n. 40; atque ex his omnibus concludo in Barrovii principio faciendam esse exceptionem eventus, in quo imago objecti ante speculum depingitur, sive radii infinite proximi ab objecto profecti, & a speculo reflexi in punctis ante speculum collocatis concurrunt, & oculus in minori, quam sint imago, & puncta concursus, distantia a speculo collocatur.

CAPUT TERTIUM.

De opticae principiis in visione refracta.

51. **Q**Uoniam Alembertus easdem adversus Barrovianum principium rationes in eventu refractionis contorsit, operæ pretium arbitror hic referre experimenta, quæ variis lentibus institui. Accepi quinque lentes, tres convexo convexas, quartam plano convexam, quintam denique concavo convexam. Quatuor primarum, quæ sunt portiones magnæ spheræ, focus radiorum solarium est in sufficienti distantia inter quatuor, & septem pollices, focus ultimæ in valde exigua, eo quod est valde convexa, & concava, & portio valde exiguæ spheræ. Cum eas ante facem accensam ponebam in distantia a face minori, quam esset distantia foci, una tantum apparebat imago facis, & recta, sive oculus poneretur in parva a lente distantia, sive in magna; & dum oculus a lente removebatur; imago numquam confundebatur, nec disperebat, sed semper clare & distincte in situ recto conspiciebatur. Quod valde notandum est; id enim indicat radios a singulis punctis objecti profectos, & lentem transmittentes, post lentem in locis inter oculos, & lentem interpositis a se vicissim deflectere, & si producantur, concurrere ex altera parte, nempe inter objectum, & lentem, & ibidem facis visionem excitare; itaque fieri, ut oculi semper ultra lentem videant facem, ut revera est, habita ratione oculorum, & in situ recto, quia nunquam radii ad oculum decussati perveniunt. Advertendum est etiam, quod una quidem imago semper duobus oculis observatur, cum eo alias observato discrimine, quod

clauso sinistro debiliori imago conspicitur in eodem loco, in quo videtur utroque oculo aperto; clauso autem dextro, in alio, & prope latus lentis sinistrum, & apertum oculum pariter finitrum, sed radiis refractis diversis; quod colligebam ex eo, quia si clauso sinistro ita me collocabam, ut dextro viderem imaginem facis proxime oram lentis sinistram, tunc clauso dextro & aperto sinistro eam amplius non cernerem; & contra si clauso dextro ita me collocabam ut sinistro viderem facem prope oram dextram, clauso sinistro & aperto dextro eandem amplius non intuerer.

52. Tum statui facem in distantia a lente valde majori, quam sit distantia foci ab eadem lente; tunc oculus ex altera parte collocatus in valde minori a lente, quam sit focus radiorum solarium, distantia, videt unam tantum imaginem erectam facis, sed unus tantum oculus, ut dexter, quia clauso dextro, sinistro aperto nihil video, & alium situm eligere debeo, ut aspiciam sinistro: quod cum accidit, si sinistrum claudendo, tunc dextero nihil intueor. Dum oculos paulatim removeo a lente, imago recta mirifice augetur, idque continuatur, donec in aliqua oculi a lente distantia imago confunditur primam, & deinceps evanescit, tuncque tota lens illuminata apparet. Quorum phœnomenorum est eadem ratio, ac similitum speculi concavi, cum objectum ponitur in magna a speculo distantia, & oculus primum in parva, & deinde removetur versus punctum, in quo radii a dato objecti puncto profecti, & a speculo reflexi colliguntur; nam ex natura curvæ causticæ per refractionem colligitur radios infinite proximos a dato objecti puncto manantes & per lentem refractos, si objectum valde distet a lente, ab hac egredi non deflectentes sed inclinatos, & concurrere in puncto aliquo inter oculos & lentem posito, quod magis distet a lente quam focus radiorum solarium, ideoque parallelorum, si objecti distantia finita sit. Oculis longius a lente remotis, imago facis incipit rursus apparere, sed inversa; & si versus medium lentis apparet, unus tantum oculus videt aut dexter, aut sinister pro ratione situs in quo reperiuntur; id quod claudendis alternatim oculis, ut in imagine recta feceram, comperio. Quod si in eo situ me colloco, ut oculo dextro videam inversam imaginem prope sinistram lentis oram, tunc si lens non sit valde exigua, oculo sinistro alteram conspicio inversam imaginem
pro-

prope oram dextram; cujus rei certior fio, quia claudendo dextrum, disparet imago lateris sinistri, claudendo sinistrum, imago dextri. Si lens sit nimis exigua, videtur quidem una tantum imago, sed unoquoque oculo, ut oculis alternatim claudendis comperio, & ad eam videndam alius pro alio oculo mihi situs est deligendus. Imo cum unam tantum observo, versus alterum latus non video quidem facis imaginem, sed internum magnum splendorem veluti facis absconditæ, & per radios solum reflexos ad oculum pervenientis. Id quod etiam in speculo concavo mihi usuevenibat.

53. Ex quibus evidens colligitur solutio difficultatis Alemberti in antecessum propositæ. Nam primo duplex imago revera observatur in iis omnibus eventibus, quos modo notavi; deinde in iis, in quibus una tantum, vel ea videtur utroque oculo, ut colligitur ex alterna ipsorum clausione, quod accidit, cum lens sive utrimque concava aut convexa, aut alius formæ ponitur prope facem; & tunc ratio constat, cur appareat una tantum, jam in superioribus explicata, & in eo posita, quod ex altera parte exiguum est intervallum inter situm, in quo videtur oculo fortiori ut dextro, interque illum in quo sinistro debiliori, & ex altera anima imaginem duobus oculis visam refert ad eundem situm, in quo clariorem observat oculo fortiori, itaque fit ut tamquam unam intueatur: vel ea videtur uno tantum oculo, quemadmodum usuevenit, cum oculus est in parva a lente distantia, & objectum in magna, aut imago inversa in medio lentis conspicitur, tamen si falsum id putet Alembertus (n. 36.), qui in hoc negotio aliorum experimentis, aut fortasse aliquibus a se crassa Minerva institutis nimium fidit; tuncque unius imaginis visio pendet ex eo, quod qui radii profecti a singulis objecti punctis ad singula pariter puncta in oculo depingenda accommodati, per vitrum permeant & refringuntur, ii ad unum tantum oculum contendunt, & aut valde major sphaeræ portio, aut alius ejusdem portionis situs postulatur ad transmittendos similiter aptos radios, qui ad alterum oculum tendant. Quod in ipsomet oculos incurrit; nam his in eventibus non minus in refractione per lentes, quam in reflexione a speculis (n. 43.) cum alii hæc experimenta tentabant, splendorem accensæ facis observabam in unum tantum oculum incidere, cum in aliis, in quibus imago oculo videtur utroque, splendore facis utrum-

que

que pariter oculum illuminari viderem. Quibus cumulatissime fatissit propofitæ ab Alemberto difficultati.

Verumtamen urgeri potest: in eventibus lentis positæ in parva a face distantia, & in quacumque ab oculo, aut positæ in magna a face, & in parva ab oculo, una tantum facis imago observatur. Nihilo tamen minus si principium Barrovii tenet, duplicem imaginem in diversis locis a duobus oculis videri oportere Alemberti ratione conficitur. Quo hanc difficultatis partem luculentius refutarem, suspicatus facis aut forficum, quibus interdum utebar, magnitudinem etiam a lentibus amplificatam causam esse, cur duæ rectæ imagines confundantur, ideoque appareat una, eadem tentavi experimenta subtili acu ad perpendiculum erecta, mihi que contigit, ut duplicem in situ recto clare viderem, alteram clariorem oculo fortiori dextro, alteram debiliorem oculo debiliori sinistro, non quidem semper, & sine ullo conatu, sed certe frequenter, & arte quadam adhibita, ea ferme ratione, qua duplicem vidi in eventu reflexionis a speculo, cum objectum est illi vicinum, & prope axem (n. 41.). Deinde lentem collocavi in parva ab acu distantia, oculos vero in situ aliquantum obliquo, ita ut clauso dextro fortiori acum sinistro viderem prope oram lentis sinistram oculo eidem propiorem; tum aperto etiam dextro duplex apparuit imago, altera versus mediam lentem, altera prope oram sinistram; postea clausi sinistram, & continuo disparuit imago, quæ medium lentis tenebat, eratque lateri, & oculo dextro propior; clausi dextrum, & continuo propior lateri sinistro disparuit. Id quod toties usaveniebat, quoties alternatim clauderem oculos. Cum lente ad planum oculorum obliqua duæ apparebant erectæ imagines acus, plus uno pollice distantes, si lentem ita vertebam, ut fieret a plano oculorum æquidistans, nihilominus duæ restabant imagines, sed minus distantes. Aliis quoque eadem successerunt, sed non omnibus, nec mihi semper: contra quam usavenit, cum distantia lentis ab objecto, & ab oculo est huiusmodi, ut duæ imagines inversæ appareant. Siquidem illæ, & omnibus & semper apparent, ac tantum abest ut aliquo artificio ad eas videndas sit opus, ut nulla ratione fieri queat, quo minus binæ duobus oculis conspiciantur. Verumtamen cum post aliquod tempus acquisivissem lentem magnam diametri pol. 5. & lin 4., cujusque foci distantia foret 13. pol. cum

cum 1 : 2, rationem inveni duplicis imaginis rectæ sine ulla difficultate videndæ. Nam posui forfices ad perpendicularum erectas ad duorum & amplius pedum distantiam, oculos vero ex altera parte ad distantiam uno pede minorem. Quo factum est, ut duplicatam & quidem rectam statim & clare viderem, alteram oculo dextro propiorem lateri dextro lentis, alteram sinistro lateri propiorem oculo sinistro; quæ binæ imagines etiam aliis, quos adhibui, sine difficultate apparuerunt.

Quibus allata in contrarium ratio penitus refutatur, & confirmantur ea, quæ in superioribus de visione reflexa disseruimus, Siquidem ex narratis experimentis colligitur, radios quidem, qui ad singulos oculos post refractionem aut reflexionem contendunt, in diversis pro singulis oculis concurrere punctis, ibique ipsos per se repræsentare debere singulas pro singulis imagines, & re ipsa exhibere; si hæc puncta non parum distantia sint, ut in magna lente vidimus usuvenire; at si hæc parum distantia sint, ut in exiguæ diametri lentibus accidit, ut plurimum imaginem oculi debilioris referri ad locum imaginis oculi fortioris, itaque fieri, ut una appareat; aliquo vero artificio & conatu, quo distorquetur debilior, ne in locum fortioris collineet, obtineri ut duæ duobus in locis distincte videantur.

54. Ita soluta Alemberti difficultate, quæ est refractioni cum reflexione communis, venio ad eas, quas adversus solam refractionem contorquet. Nam articulo 13. hæc scribit: alterum vulgare experimentum favere videtur veterum Geometrarum principio saltem quod attinet ad refractionem in planis superficiebus. Baculus in aquam uno sui extremo oblique demersus, & ex latere observatus, fractus apparet, parsque fracta esse videtur in eodem plano perpendiculari, in quo est pars extans. Quod efficit imaginem videri in catheto. Secundum Barrovii principium pars fracta apparere deberet in alio plano, ac illud est, in quo pars exterior reperitur. Articulo vero 12. cum retulisset experimentum Barrovii, qui in aqua suspendit filum plumbo onustum in parte inferiori, atque ita certior factus est, filum esse perpendicularare tum quod attinet ad partem superiorem extantem ex aqua tum quod ad partem demersam inferiorem; hoc autem perfecto imaginem partis inferioris demersæ, quam radiis refractis videbat, distincte percepit disjunctam ab imagine superioris extantis, quam radiis

diis ab aquæ superficie reflexis; deinde hæc literis consignavit: Hæc partis extantis imago constanter est in perpendiculari. Ergo imago partis demersæ ibi non est. Igitur, concludit Barrovius, objecta refractione visa in perpendiculari non apparent. Legitima est hæc conclusio, si experientia cum vero consentit; sed experientiam adversari ajo Barrovianæ sententiæ. Revera ut duæ imagines distinctæ & separatæ videantur necesse esse utramque non esse in eodem plano perpendiculari, quod per oculum & per objectum transeat. Quod ni ita foret, alteram altera teget, & experientia ut minimum esset valde incerta. Ergo posita eadem accurata & vera, duæ imagines sunt in diversis planis. Sed imago partis reflexione visæ constanter est in plano perpendiculari. Ergo altera nequaquam est in eodem. Igitur secundum hanc experientiam imago objecti refractione visi, non est in plano perpendiculari. Rursus secundum Barrovii principium ibi esse debet. Ergo hoc principium minime verum est. Ceterum hic pono experientiam esse accuratam, quia mihi eamdem comprobaturum maxime incerta visa est, ut vehementer induci me sentiam in eam opinionem, quod aberret a veritate. Cum aqua & filum quieta sunt, duæ imagines permisceri videntur, aut saltem altera ab altera abscondi. Ita fit, ut in hoc eventu experientia nihil efficiat nec pro antiquorum principio, nec pro Barroviano.

Ita Alembertus, qui articulo 14. concludit cum agitur de planis refringentibus superficiebus, a vero antiquorum principium, quod attinet ad sensum, non aberrare; sed se dubitare addit, an cum eodem consentiat in aliis eventibus, & præsertim cum agitur de curvis, & utrum in speculis convexis imago objecti fuerit aliquando visa extra speculum, quemadmodum fieri debere aliquando in obliqua oculorum, & objecti positione ratione habita speculi ostendit, si verum sit antiquorum principium, nunquam autem, si verum sit Barrovianum.

Ut hanc rem extra omne dubium ponerem, sic experimenta repetii. Ex filo suspendi corpus aqua gravius, quod demersi in cyathum aqua plenum, itaut idem corpus primum fundo insideret, tum alterum fili extremum extra aquam posito ita traxi, ut filum in rectam lineam distenderetur, oblique tamen extra aquam exiret, versus septentrionem inclinatum, & in plano meridiano jaceret. Deinde meum oculum

dex-

dextrum in æquatore collocavi, vidique filum extantem se, ubi incipit aqua, dissepescere in duo fila intra aquam deflectentia ab extanti, alterum versus Boream, quorum pars extans inclinatur, suboscuro & valde tenue, quod est imago partis extantis reflexione visæ faciens cum aquæ superficie angulum ad sensum æqualem illi, quem pars extans cum eadem facit; alterum clarius, & crassius versus meridiem, quod est imago partis demersæ refractione visæ. Duo fila intra aquam visa & filum extans, quantum oculis observari potest, non apparent in eodem plano perpendiculari. Quod hisce experimentis confirmari potest.

55. Si filum distentum in eodem plano perpendiculari extremo superiori ducatur usque ad situm perpendicularem, duo fila intra aquam ad se vicissim semper accedunt, & minorem angulum faciunt, donec in situ perpendiculari oculo, qui in æquatore quietus mansit, prorsus dispereat visio fili obscurioris & subtilioris reflexione visi, absorpta a visione clarioris & crassioris refractione conspecti. Tunc autem filum demersum radiis refractis visum non est in eodem plano perpendiculari, sed aliquantum ab eo deflectit in contrariam oculi plagam. Ergo etiam antequam ad situm perpendicularem perveniret, ab eodem plano deflectebat ipsius visio, quia similiter in plano perpendiculari re ipsa reperiebatur. Visio autem fili extantis reflexione visi semper esse debebat in eodem plano perpendiculari, ut colligi potest ex iis, quæ n. 28. differuimus. Si postquam filum pervenit ad situm perpendicularem, in eodem plano perpendiculari ducatur & inclinatur versus meridiem; tunc duo fila intra aquam rursus apparent, sed reflexione visum versus meridiem, refractione versus septentrionem. Si filum in plano inclinato versus oculum ducatur, a septentrione meridiem versus, pars reflexione intra aquam visa declinat a filo extante versus oculum & septentrionem, pars refractione ab eodem deflectit in contrariam oculi plagam, & versus meridiem, & postquam filum pervenit ad illud planum perpendiculare, quod per oculum & per filum transit, pars reflexione visa utpote obscurior, & tenuior, absorbetur a parte crassiori, & clariori refractione conspecta, nec amplius videtur; sed solum apparent filum extans, & filum intra aquam deflectens ab extante in contrariam oculi plagam. Inclinato filo versus meridiem rursus apparent duo

fila intra aquam sola mutatione plagæ septentrionalis & meridionalis. Si filum in plano declinante ab oculo ducatur a septentrione versus meridiem, eadem apparent phœnomena, nisi quod pars reflexione visa declinat ab oculo, pars refractione versus oculum propendet.

Ex quibus colligitur, primo falsum esse experimentum Barrovii; & revera si filum ita sursum traherem, ut corpus appensum ex fundo elevarem, quo in eventu certum est illud aquæ superficiæ insistere ad perpendicularum, duas intra aquam fili portiones, in quocumque loco statueretur oculus, discernere non potuimus nec ego, nec alii, quos ad periculum faciendum adhibui. Unde constat, ex hoc experimento nihil posse colligi contra Barrovianum principium. Secundo colligitur, radios ex filo oblique demerso, post refractionem ad oculum pervenientes, excitare imaginem partis demersæ in alio plano ac illud perpendicularare, in quo sunt pars extans, & partis extantis imago reflexione visa. Quamvis autem in filo ob ipsius tenuitatem, ea deflexio parum sensibilis sit, adeo ut cum filum est perpendicularare, partis demersæ declinatio vix sub sensu cadat, tamen si utamur virga crassiori, & recta, nisi mei oculi & eorum, quos adhibui, differant ab oculis Alemberti, duo manifeste vidimus dimidiam immergendo virgam sive oblique, sive perpendiculariter secundum meridianum oculo fortiori in æquatore collocato, partem demersam breviorē extante, tametsi re ipsa altera alteri foret æqualis, & declinationem ejusdem a plano perpendiculari, in quo est pars extans: quæ duo cum Barrovii principio mirifice congruunt. Hoc igitur experimento potius confirmatur allatum principium.

56. Quod pertinet ad ultimum eorum, quæ ex Alemberto retulimus, putabam me incidisse in experimentum Barrovianæ theoriæ prorsus contrarium. Nam usus speculo convexo simili illius, quod descripsi n. 44., sed diametri valde majoris ad latus ipsius sinistrum oculos valde oblique, & prope speculi superficiem collocavi, & clavem ad dextrum pariter valde oblique & in parva distantia; vidique duas clavis imagines, alteram oculo dextro intra speculum clariorem, & oculo sinistro propiorem; alteram vero sinistro obscuriorem, a prima longe distantem, non intra speculum, sed extra, pollice & amplius recedentem a latere dextro, & antor-

Fig: 1.

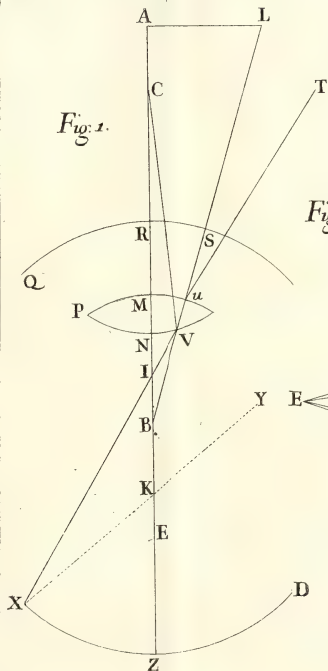


Fig: 3.

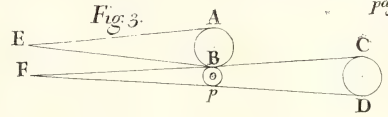


Fig: 9.

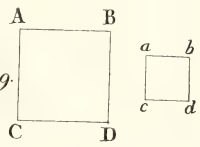


Fig: 8.

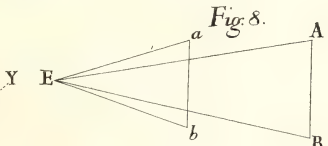


Fig: 4.

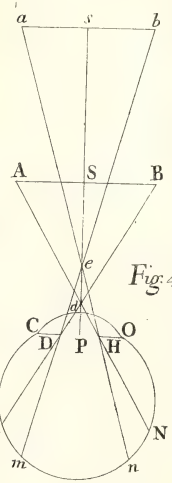


Fig: 6.

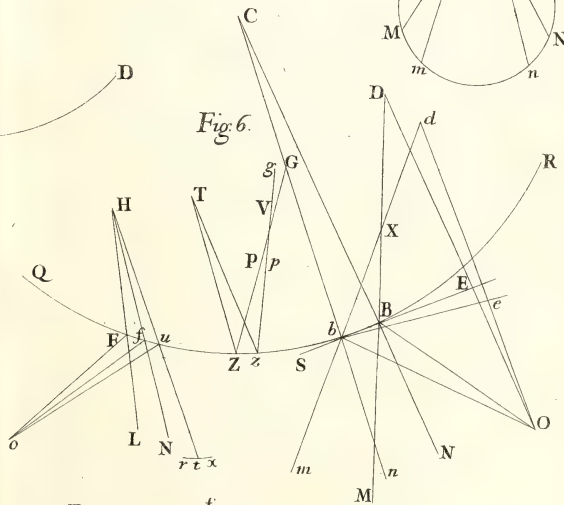


Fig: 2.

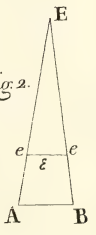


Fig: 5.

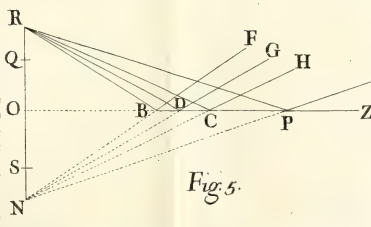
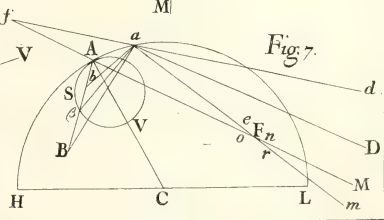


Fig: 7.



trorsum se porrigentem . Verum phœnomeno attentius considerato in cognitionem veni , me ita distortisse oculos , ut duas etiam pyxides , quæ speculi vicem gerebant , viderem , alteram clariorem oculo dextro , alteram obscuriorem sinistro , a prima longius distantem , & antrorsum quoque se projicientem , & intra primam clariorem clavis imaginem , intra vero secundam obscuriorem . Quod non adversatur theoriæ , quæ vult , ut semper intra speculum convexum imago videatur . Et revera cum unum tantum speculum videbam , semper imaginem intra illud conspexi , tametsi me & objectum collocarem in situ valde obliquo , & speculis uterer etiam diametri octo & amplius pollicum .

CAPUT QUARTUM .

*De aliis principiis tum in visione reflexa ,
tum in refracta .*

CApud hoc in sequentem tomum rejicimus , auctore ipso id concedente ; nam & quæ adhuc dicta sunt , intelligi per se satis possunt , & jam veremur , ne voluminis hujus magnitudo plus justo creverit . Qua de causa eodem etiam rejicimus & Francisci Mariæ Zanotti commentariolum de methodis in geometriam invectis , & egregium Hieronymi Saladini sermonem de curvis lineis se mutuo osculantibus , & opuscula alia per multa .

ALOYSII GALVANI.

De Renibus, atque Ureteribus Volatilium.

A Natomica facultati pro munere nostro, & voluntate addicti, sæpe in volatilium sectionibus elaboravimus, ac studium præsertim in renes, atque ureteres contulimus. De his ergo hoc vespere differemus, eorumque historiam conficiemus accuratiorem, ut nobis quidem videtur, quam ab aliis hæctenus fuerit unquam conscripta. Primum de renibus.

Volatilium renes duo sunt oblonga viscera in abdomine contenta, hinc inde a spina dorsi locata, quæ ut quadrupedibus, sic volatilibus data a natura fuerunt, ut urinam fecerent.

Ea sub pulmonibus proxime conspiciuntur, deorsum deinde utrinque a memorata spina feruntur, desinuntque in amplam, atque oblongam illi ossis cavitatem, in qua non quidem toti, ut Harveus, aliique volunt, sed præcipua dumtaxat ex parte reconduntur.

Figuram habent diversam, pro diversa volatilium specie. Nam in aliis renes agni æmulantur, ut Borikius de aquila narrat, in aliis caninam linguam, ut in anate nos vidimus. In plerisque tamen volatilibus, maximeque granivoris, quamvis unum, idemque corpus sint, in tres tamen lobos ab auctoribus dividi solent. At distinguenda est in renibus, meo quidem iudicio, pars anterior, quæ ventrem, & posterior, quæ dorsum respicit. Nam renibus in parte anteriori inspectis, eos non in tres tantum, sed in quatuor lobos dividi clare conspicitur, quorum primus sub pulmonibus locatur, atque amygdalam ruditer refert, apicem habentem inferiora respicientem, basim superiora. Secundus oblongus est, planus, atque ad iliacam usque arteriam pertinens. Tertius omnium minimus, rotundus, adhæret quodammodo secundo, atque basim videtur in iliaca arteria habere. Quartus demum aliis major est,

est, figuraque irregulari. Singulæ vero hæ lobulorum divisiones maxime fiunt e foveis sanguinea vasa excipientibus, in renibus profunde incisís. Iliacæ enim venæ primum lobum a secundo dividunt, arteria autem iliaca quartum a secundo, & tertio.

Quod si renes ex parte posteriori spectentur, in duos dumtaxat lobos sejunguntur, superiorem, & inferiorem; parvum illum, hunc longe majorem. In superiore quatuor profundæ sectiones ad ejus interiorem marginem apparent, quæ a vertebra dorsi eruuntur; totidem, patentioresque sunt a lumbi vertebra in inferiore insculptæ, atque aliæ, sed obscuriores.

Inferior hic, posteriorque lobus ille est, qui latet in magna illi ossis cavitate, alter superius consistit.

Duplici membrana sepiuntur renes, communi una, cellulari, in obesís volatilibus pinguedine repleta, propria altera, tenui, pellucida. Utamque in renibus Struthii Godofredus descripsit; nos vero in omnibus, quæ secimus, volatilibus, quæ multa sane fuerunt, invenimus. Cum nudis oculis, tum lentibus adjutis præterea inspeximus, sed nihil in utrifque peculiare.

Eductis vero membranis diligentius renum superficiem spectavimus. Vidimus autem cerebri superficiem ipsam quodammodo æmulari; nam ut illa, ita & hæc in plures parvos anfractus, lobulosve dividitur, plerosque oblongos, in se convolutos, magnitudine, & forma inæquales. Qui equidem non prominentes, ut in cerebro, sed plani natura sunt.

Renés volatiliùm alií e globulis carneis contextos esse opinantur, ut Harveus, alií glandulosos faciunt, ut Godofredus, atque Vallisnerius, qui glandulas in racemos collectas in Struthio describit. In hujus structuræ disquisitionem maxime in gallinaceis pullis, quippe qui magis præ manibus habentur, opus, laboreque nostris contulimus.

Atque primo venit in mentem experiri, quid fieret renibus maceratis. Sed nihil nobis peculiare ex maceratione innotuit, quamvis eam & ad multum tempus protraheremus, & diversis liquoribus perficeremus, acutissimisque lentibus maceratos renes inspiceremus.

Nudis dumtaxat oculis per aquam fluitantes vidimus tenuissimos excretorios ductus, seu ureterum ramos, quorum descriptionem, cum de excretoriis ductibus sermo erit, afferemus

mus. Aliam propterea inire viam constituimus, atque peculiare; aptissimumque, si quid iudico, injectionis genus experiri.

Devinxi ergo ureteres vivente pullo (id quod in volatilibus acu filo instructo post anum profunde ex una parte ad alteram trajecto, indeque nodulo quidquid intra fili capita reperitur, arctissime devincto haud difficile, & absque ulla sectione obtinetur) ea spe ductus, ut cum vinculo urinæ cohiberetur ex ureteribus effluxus, urina ipsa alba in volatilibus, atque ad concrendum adeo apta, in minimis usque excretoriis ductibus congesta, atque concreta, quæsitam renum structuram patefaceret. Paucis post diebus pullus periit; qui celer interitus in singulis, in quibus deinceps idem periculum cepimus, semper evenit.

Ejus cadavere dissecto alba terrestris materies conspicitur, quæ omnes ferme partes coinquinat, atque membranas potissimum, inter quas præsertim pericardium, quod gypseum evasisse videtur, atque extima hepatis membrana.

Renes vix a naturali magnitudine recedunt, at lobos præferunt alba materie repletos, quam non est dubitandum, urinæ fuisse crassiolem, solidioremque partem.

Renes sic paratos lentibus inspicimus, atque albam materiam cernimus, non in cavo, quod lobuli habeant, contineri, neque intra eorum substantiam effundi, sed propriis vasis coerceri, eisque minimis, atque quamplurimis, quæ albæ lineolæ videntur, per lobulorum superficiem reptantes: quæque eo ordine, propemodum miro, procedunt, ut a furculis, qui lobos ambiunt, emanent, atque super lobos in orbem flexæ eosdem complectantur; ea tamen ratione, ut in nonnullis lobulis in eorum medio inosculetur, in aliis vero circa idem medium veluti definant; porro ex iisdem furculis, sanguineorum vasorum truncos prodire, qui ramos inde sibi propinquis lobulis huc, illucque mittant. Hæc extima, quasi dicam, renum est structura, visu quidem jucundissima.

Intimam autem texturam profecuti, atque renibus tum scalpello diversimode sectis, tum digitis blande apertis, acutisque lentibus inspectis, observavimus lobulos illos, anfractusque, quos exterius conspeximus, intus quoque propagari, nullaque ratione cavos videri, sed intestinorum more in varias circumvolutiones reflexos, atque complicatos totam renum substantiam pervadere, atque una cum sanguineis vasis, nervis, du-

stulifque excretoriis cellularis ope junctis, renes construere. Horum autem lobulorum anfractus, incessus, atque distributio clarius apparet, si digitis, ut diximus, renem apprehensus blande aperiat, quam si cultro fecerit. Cultro enim lobulorum convexa superficie secta, teres ipsorum figura deletur, digitis autem adhibitis servatur.

Sed ad alba vasa, seu ad uriniferos ductus redeamus. Horum alios hac illac internos renum lobos, ut externos, circumambire intuiti fuimus, alios vero alias directiones habere; sed ita inordinati erant, atque obscuri, ut nihil de eorum origine, aut fine licuerit delibare.

At non idcirco omnis spes sublata id posse aliquando degegi, nam cum id latere putarem, quod pellucido humore ductus turgent; non equidem contingere aliquando posse, desperavimus, ut densa illa, albidaque materia per injecta ureteribus vincula, replerentur, atque paterent.

Hinc idem periculum multis aliis in pullis, præsertimque in gallina, macie ferme confecta, aggressi, cernimus memorata alba renum vasa, ex ea parte, qua e lobulorum interstitiis prodibant, in renum substantiam in orbem pariter descendere, atque inde infra lobulos, in unum fasciculum collectos in communem quemdam truncum confluere, qui in alium majorem derivat, hic vero in ureterem. Communes hi trunci plurimi sunt ita ut singulorum lobulorum alba vasa excipiant diametro quidem latiores ad eam partem, in quam alba vasa ingrediuntur, quam ad eam, qua ipsi in majores ramos inferuntur. Hi autem sunt verosimiliter, quos & muneris, & majoris hujus cavitatis ratione pelvis Vallisnerius in Struthio appellavit. Hi quoque, ut diximus, maceratione innotescunt.

En quo tendant excretorii lobulorum canaliculi; sed quæ eorum origo? Utinam hanc observationes nobis aperuissent! sed vix quidquam certi de hac re compertum habuimus.

Id nobis tantum observare licuit, minimos illos ductus, dum ad lobi medium, ut diximus, perveniunt, intimam lobi substantiam inflexos permeare; accedebat etiam, ut lobulis sectis multa alba filamenta in eorum substantia apparerent, ut excretorios ductulos ingredi in lobulos facile intelligas.

Sæpius tamen diversis renum sectionibus institutis vidimus nonnullis in lobis punctum rubrum circa medium, quod sanguinei vasis orifitium esse opinati sumus, a quo innumera pro
dire

dire diceret ex tenuissimis albis jam dictis vasis. Hæc autem modo vix ultra punctum finem habebant, modo ad lobi usque circumferentiam protendebantur, tamquam radii a centro ad peripheriam: in aliis autem rubrum vas juxta lobi longitudinem ducebatur, a quo eadem alba vasa proficisci judicares. Erant quidem eodem ordine distributa. Alba hæc vasa, seu isti excretorii ductuli interdum cum iis continui visi sunt nobis, quos lobi superficiem reptare diximus.

Verum hæc ultiores postulant disquisitiones, maxime in majoribus volatilibus institutas, quæ si idipsum comprobaverint, quas natura in volatilibus paraverit ad urinæ secretionem vias, hæcenus, quod sciam, ignotas, compertum habebimus, atque aliquid inde luminis ipsi urinæ secretioni in quadrupedum renibus poterit forte affulgere. Interim quam cæteri nondum, quod audiverimus unquam, aut legerimus, detexere renum volatilibus structuram, eam sese nostræ industriæ, diligentiaque visendam obtulisse satis nobis est.

Quas vero hæcenus, Sodales optimi, proposuimus vobis observationes pluries, atque in variis pullorum speciebus suscepimus, easque primo una cum solertissimo Bonacursio, mox coram doctissimo Sodali nostro Verratio, ejusque sapientissima Conjuge Laura Bassia, quæ profecto est Academiæ, & civitatis nostræ singulare ornamentum. Id autem monemus, non facile memorata alba vasa apparere, cum propter nimiam urinæ copiam, quæ ea dirumpit, tum propter ejusdem defectum, unde non satis replentur, nec non denique propter nimiam ejus tenuitatem, ob quam vasa, dum pellucet, oculorum aciem effugiant; clarius tamen in volatilibus macilentioribus conspici.

Sed jam ad emulgentia vasa venio, quæ neminem satis diligenter vidimus descripsisse. Hæc diversa directione, diversoque ordine in volatilibus, ac in quadrupedibus ad renes pertinent.

Ipsorum progressus, atque divisiones clarius ut assequeremur, apta materia siphonis ope ea replevimus, atque vidimus primo renum lobulos in superficie eminentes fieri, cum natura, ut audivistis, sint plani, deinde aortam arteriam descendentem, utrinque tenuem ramum ad angulum rectum mittere in primum renum lobum, cui ille prætenues impertit furculos.

Paulo infra alium, diametro longe majorem, qui in secundum lobum inferitur, quique dum ad medium ferme ejusdem lobi pervenit, in duos alios ad acutum angulum dividitur, quorum alter superiores renum partes, alter inferiores percurrit; descendere inde inter renes juxta spinam dorsii, atque, dum versus finem secundi lobi properat, in iliacas abire, quæ renum superficiem oblique transgrediendo extra ventrem promanant, atque in crurales immutantur. In itinere autem, quod super renes faciunt iliacæ, postquam sub ureteribus transierint, alios duos sibi perpendiculares ramos germinare superiorem unum, inferiorem alterum, quorum postremus in tres alios dispergitur, qui pertinet ad ultimum lobum.

Vena autem cava descendens supra aortam quidem fertur, sed non idem iter cum ea ducit, ut in quadrupedibus. Nam ad initium ferme primi lobi eam deserit, atque multo citius, quam aorta, in iliacas dividitur, quæ juxta marginem primi lobi utrinque descendunt, eique tres ut plurimum ramos tribuunt. Dum autem versus lobi apicem perveniunt, in tres abeunt ramos, quorum duo interni ad renes pertinent, atque emulgentes possunt appellari, cum magni sint, & ad renes dumtaxat spectent, alter externus ex abdomine exiens cruralem venam constituit.

Emulgentium unus juxta marginem externum secundi lobi, alter per ejusdem lobi superficiem circa medium excurrit. Hic in rene dextero brevior videtur, dum enim ad iliacam arteriam pervenit, sub eadem transit in renem substantiam. In rene autem sinistro supra iliacam arteriam protenditur, ac bifariam statim divisus in totum postremum lobum distribuitur.

Hic autem intra renem descendit, atque ad ultimi lobi extremitatem dum pervenit, ita flectitur ut in alterum offendant eumque superfundat. Uterque vero ramus diversos furculos, ramosque hic illic in renis substantiam derivat. Sed pro diversitate volatilium emulgentium venarum progressus, directiones, atque divisiones haud parum variant.

Præter emulgentia vasa, nervos quoque volatilium renes recipiant. Sed horum alii, & quidem majores ac copiosiores, eorum substantiam trajiciunt, alii in eadem disperguntur, ut ipsorum finis attingi non possit. Verum ad ureteres.

Sunt ureteres canales membranacei pellucidi, maxime in ea parte, qua renum superficiem pervadunt, in quos, ut in

communes conglomeratarum glandularum ductus plures majores rami urinam exonerant, ex singulis innumeris, minimisque ductulis excretoriis jam dictis acceptam, quam deinde in rectum advehunt intestinum.

Ad extremitatem primi lobi tenues oriuntur, descendunt inde intra renum substantiam latiores sensim facti, usque ad angulum ramorum venæ cavæ, quos diximus emulgentes, ad quem cum pervenerint a rene exeunt, atque recto ferme tramite inter memoratos ramos, renum superficiem transeunt: hanc ureterum partem pro pelvi Godofiedus habuit: e renibus autem egressi reliquum abdominis iter faciunt, atque curvam describentes, in cloacam tandem, seu extremitatem recti intestini influunt, brevi peracta femiarum circa eandem inflexione.

In rectum vero intestinum oblique inferuntur, non aliter, quam ureteres quadrupedum in vesicam. Intestini autem membranæ circa ureterum orificia laxiores sunt, atque ceu valvula ea claudunt, ne inde urina regurgitet, mira naturæ providentia.

Tribus (ut animadvertimus, & quidem fortasse primi) tunicis ureteres constant. Extima rarior est, tenuior, cellularis, atque reliquis abdominis visceribus communis; hanc sequitur crassior alia, compactior, cellularis & ipsa, vasis, inordinatisque tenuissimis filamentis referta. Postrema demum aliis longe crassior ejusdem coloris est, ac muscularis membrana intestinalium.

Hanc atramento maceravimus, tum super vitra expansam, contra liberum, ac patens lumen lentibus sedulo inspicimus. Ac non nulla tenuissima filamenta parallelo ordine disposita juxta ureterum longitudinem producta observavimus, quæ musculares esse fibras coniecimus.

Hanc membranam alia forte excipit ureteris cavum respiciens, sed cum non satis hæc nobis se prodiderit, ideo eam prætermisimus. Interna ureterum superficies sulcos habet invicem parallelos juxta ureterum longitudinem ductos. Transversæ rugæ in ea nullæ observantur, ut in ureteribus quadrupedum. Mucosus quidem non secus, atque in illis oblitur, quo ab urina acrimonia tueatur. Jam vero fibræ musculares cum in ureteribus adesse nobis visæ fuerint, ita suspicari cœpimus aliquo motu ureteres gaudere; rati non sine consilio ureteribus a natura musculares fibras datas fuisse.

Quod

Quod eo facilius arbitramur, quo nos minus latebat a nonnullis auctoribus traditum fuisse motu peristaltico ureteres quadrupedum gaudere, quamvis, ut opinamur, eum nunquam forte conspexerint.

Itaque vivis pullis, abdomine dissecto, leniterque remotis intestinis, oculos in eorum ureteres illico contulimus. Enim vero ureteres peculiari quadam ratione moveri, non sine voluptate, ut fit, cum nobis ea se se offerunt, quæ quarimus, præsertim nova, inspeximus. Hunc motum una cum doctissimis viris, inter quos præstantissimus Sodalis noster Franciscus Bibiena, diligenter spectavimus; vidimus illum ex progressivo, seu peristaltico, & retrogrado, seu antiperistaltico componi; ire scilicet urinam per ureteres ad ani usque confinia, redire mox ab ano renes versus, donec ultro, citroque jactata apertis ureterum osculis in recti intestini cavum urina efflueret. Hujusmodi motus in singulis, quæ secuimus, volatilibus, quæ multa quidem fuere, atque generis diversi, apparuit; non semper tamen, ut verum fateamur, æquabilis omnino, & ordinatus. At fieri potest ut cruciatibus, quibus in hoc periculo animalia vexantur, aereque externo, talia irritamenta nervis, muscularibusque ureterum fibris invehantur, ut motus ille suapte natura ordinatus perturbetur. Quemadmodum fieri etiam potest, ut peristalticus ille dumtaxat juxta naturam sit, antiperistalticus vero violentiis illis debeatur.

Ceterum neque inutilis antiperistalticus, si natura adesset, videretur. Eo enim motu urina in volatilibus, tam ad crescendum proclivis, ut, si vel parum quiescat gypsea, ferme evadat, posset fluxilis servari, quassari veluti, atque fluidarum solidarumque partium miscela perfici. Cui quidem concretioni solers natura adeo prospexit, ut ureteres non in vesicam, qua volatilia destituit, sed immediate in cloacam urinam exonerare voluerit, ut liberrime, & citissime e corpore eliminaretur. Cæterum ureterum motus addito stimulo reviviscit, quo nihil clarius ad musculares eorundem fibras ostendendas.

Sed omnia jam paucis colligamus. Atque primo volatilium renes non ex glandulis in racemos dispositis, aut ex globulis carneis, ut alii arbitrati sunt, coalescere; sed ex oblongis lobulis mire circumvolutis, atque invicem complicatis, potius quidem cum canaliculis, si pervii essent, quam cum folliculis comparandis.

Deinde qui singulos lobulos reptant, permeantque excretorii ductus, eos quamplurimos esse. Hos forte ex sanguineis vasis eiusque verosimiliter arteriosis (ex arteriis enim ductus excretorii procedunt) emanare ratione non videri alienum.

Compertum autem illud est, ductulos hosce excretorios in lobulorum substantia, & multos quidem reperiri, & ex eadem exeuntes ipsorum lobulorum superficiem reptare; sensim deinde in fasciculum infra lobos colligi, atque in ureteris ramos desinere. Unde lobuli eo consilio a natura volatiliū renibus dati viderentur, ut fulcimento, atque adminiculo essent excretoriis ductulis; atque ut plurimi in lobulis, fufius, commodiusve distributi, parvo spatio continerentur. Item volatiliū renes ad conglomeratas glandulas, propter excretorios ductus omnes in unum confluentes, posse referri; ureteres præterea motum habere peristalticum, atque forte etiam antiperistalticum.

Demum quamvis nec unam pelvim habeant, ea ratione constructam, ac renes quadrupedum, neque substantiam, ut illi, in corticalem, & tubularem distinctam, eorum tamen ductus excretorios in fasciculos colligi in ureterum ramis, ut in renibus quadrupedum in fasciculos colliguntur in renalibus papillis, atque quemadmodum papillæ in illis in communem cavum, seu in pelvim, sic in ipsis in communem ureterem urinam deponere, atque propterea cum illis non modo propter usum, qui idem in utrisque est, sed propter aliquam etiam structuræ similitudinem convenire.

An vero observationes hæ nostræ aliquod lumen afferre possint renum quadrupedum corticali substantiæ, aut fabricæ aliarum conglomeratarum glandularum, an ad Ruifchianum systema fulciendum quidquam valeant, vestrum esto, Sodales optimi, iudicium. Nos interim & eas iterum aggredi, & novas iis addere studebimus, atque suscepta de urinæ volatiliū natura pericula profèqui, eaque vobis, favente Deo, proximo anno referre pollicemur.

EXPLICATIO FIGURARUM.

Fig. 1.

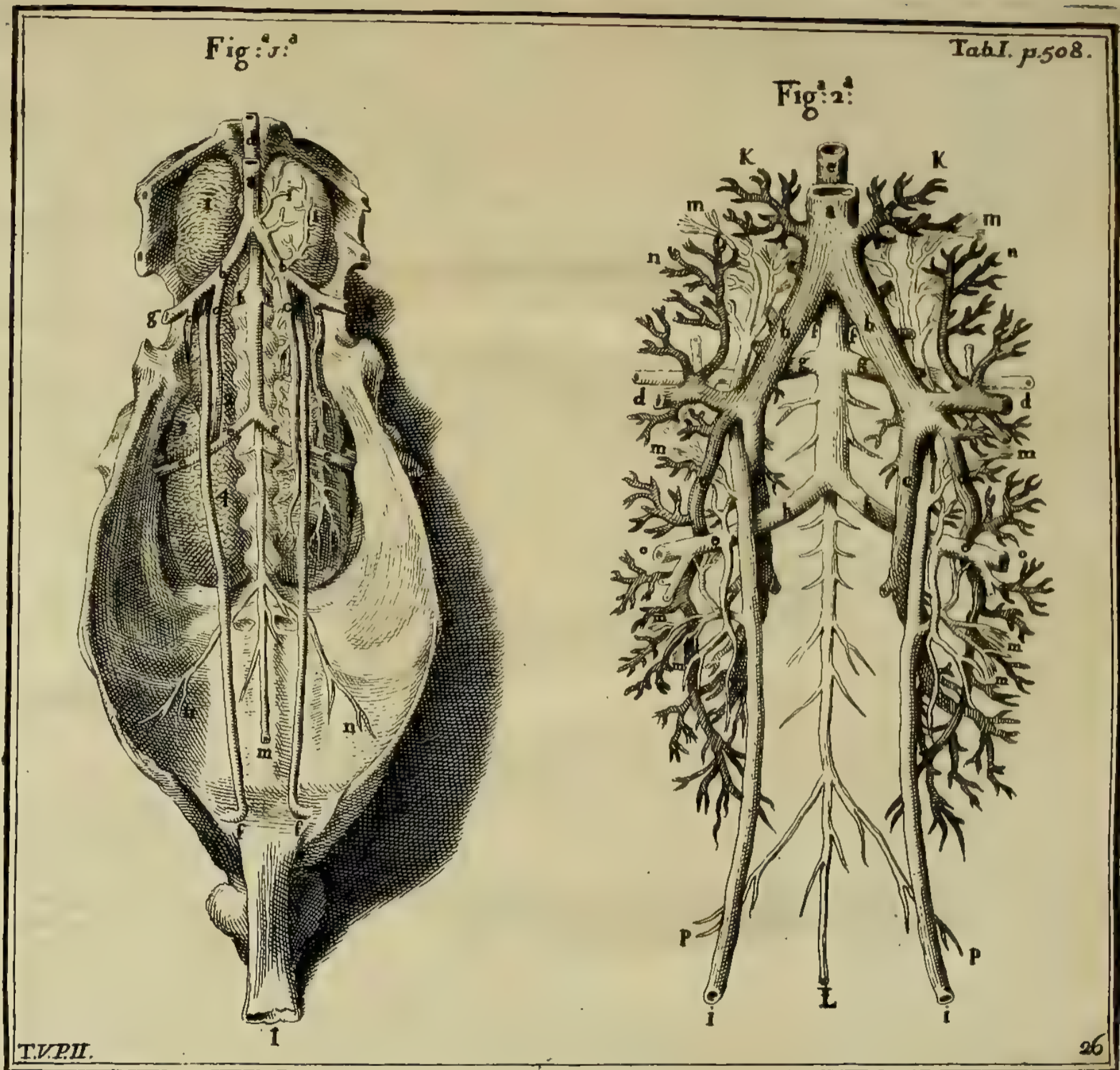
Exhibet renes in situ, ureteres, & vasa emulgentia pulli gallinae
cei: Renis autem sinistri substantia ablata est, ut vasa emulgentia
venosa in situ conspiciantur.

- a. Vena Cava.
- bb. Venæ Iliacæ.
- cc. Quatuor rami venosi emulgentes majores, utrinque duo.
- d. Aorta descendens.
- ee. Arteriæ Iliacæ.
- ff. Ureteres.
- gg. Rami Iliaci venosi dissecti, a quibus venæ crurales oriuntur.
- hh. Duo aortæ rami, qui secundum renum lobum ingressi, aliquot
ramos renum substantiæ impertiuntur.
- ii. Rami venosi emulgentes minores.
- l. Intestinum rectum sectum, supra podicem reflexum, ut urete-
rum insertiones in eodem inspicere queant.
- m. Arteria sacra.
- nn. Ejus rami ad ureteres spectantes.
- 1. Primus Lobus.
- 2. Secundus.
- 3. Tertius.
- 4. Quartus.

Fig. 2.

Exhibet divisionem, atque distributionem cum vasorum emulgen-
tium, tum Ureterum in renibus Galli Gallinaei post injectio-
nem observatam, quæ quamvis eadem in omnibus volatilibus
non sit, ab hac tamen haud longe differt.

- a. Vena Cava descendens, quæ ramum utrinque unum K K lobulo
renum superiori tribuit.
- bb. Venæ Iliacæ, a quibus tres ut plurimum rami discedunt ad supe-
riorem renum lobum pertinentes, qui in hac figura abscissi
sunt, quo ureterum diramatio clarius inspicere queat.
- cc. Duo utrinque emulgentes rami, in quos Iliacæ venæ dividuntur:
hique in inferiores renum lobos distribuuntur.
- dd. Duo alii earumdem venarum rami, qui in crurales venas abeunt.
- e. Aorta descendens.
- ff. Tenuis ejusdem rami dissecti ad superiorem renum lobum spe-
ctantes.
- gg. Rami alii majores, qui secundo renum lobo inseruntur, atque
renum substantiæ furculos aliquot emulgentes tribuunt, postea
extra renes promanant; ii autem furculi delineari in hac figu-
ra non potuerunt, cum sub Iliacis venis lateant.
- hh. Arteriæ Iliacæ.
- ii. Ureteres secti.
- l. Arteria sacra.
- mm. Extrema ramorum ureterum, quæ ipsis ramis latiora sunt, &
in quæ desinunt fasciculi ductulorum uriniferorum:
- nn. Emulgentes rami ex venis dd sursum intra renes reflexi.
- oo. Arteriæ crurales resectæ.
- pp. Propagines arteriæ l ad Ureteres pertinentes.



Indicant superiorem renis lobum dissectum, vitrea lente auctum, prout observatum fuit in pullo, cui dum viveret ureteres fuerunt vinculo devincti.

Fig. 3.

Ostendit ejusdem lobi superficiem, in qua tum lobuli oblongi apparent, intestinorum more convoluti, tum ductuli albi uriniferi eosdem lobulos supercandentes, & amplexantes. Lobuli tamen nonnihil eminentiores in figura delineati sunt, quam re prodierint.

aa. Lobuli oblongi.

bb. Medium lobulorum, in quo uriniferi ductus se se mutuo offendunt, atque partim intra lobi substantiam reflectuntur, partim invicem inosculantur.

Fig. 4.

Visui offert internam substantiam ejusdem lobi dissecti.

aa. Lobi peripheria.

bb. Puncta rubra, e quibus oriri videntur albi ductuli uriniferi ea ratione, qua in figura sunt delineati.

cc. Lineæ rubræ, e quibus similes ductus prodire videntur.

dd. Duo ureteris rami similes infundibuliformibus tubulis renum hominis, & plurimorum animalium quadrupedum, in quos desinunt uriniferorum ductuum fasciculi.

ee. Ureteris rami.

Fig. 5.

Ostendit aggregatum nonnullorum lobulorum ejusdem renis, una cum propriis ductibus uriniferis lobulos reptantibus in fasciculos collectis, atque in ureteris ramos desinentibus.

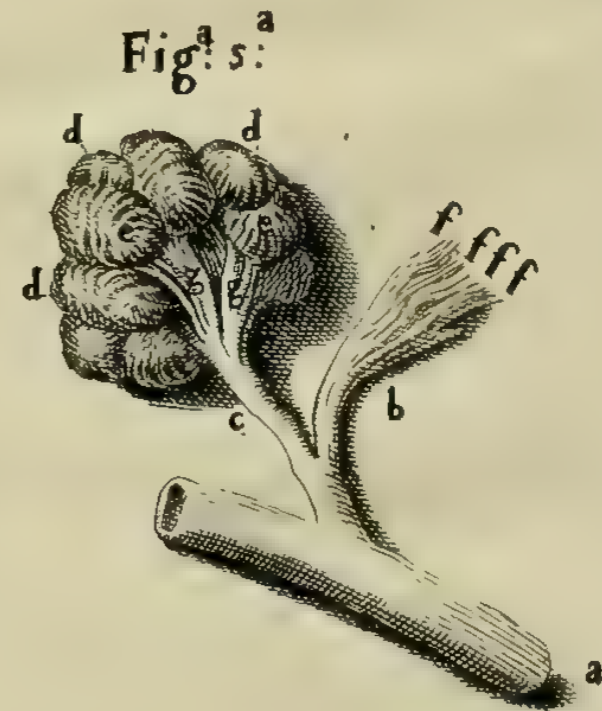
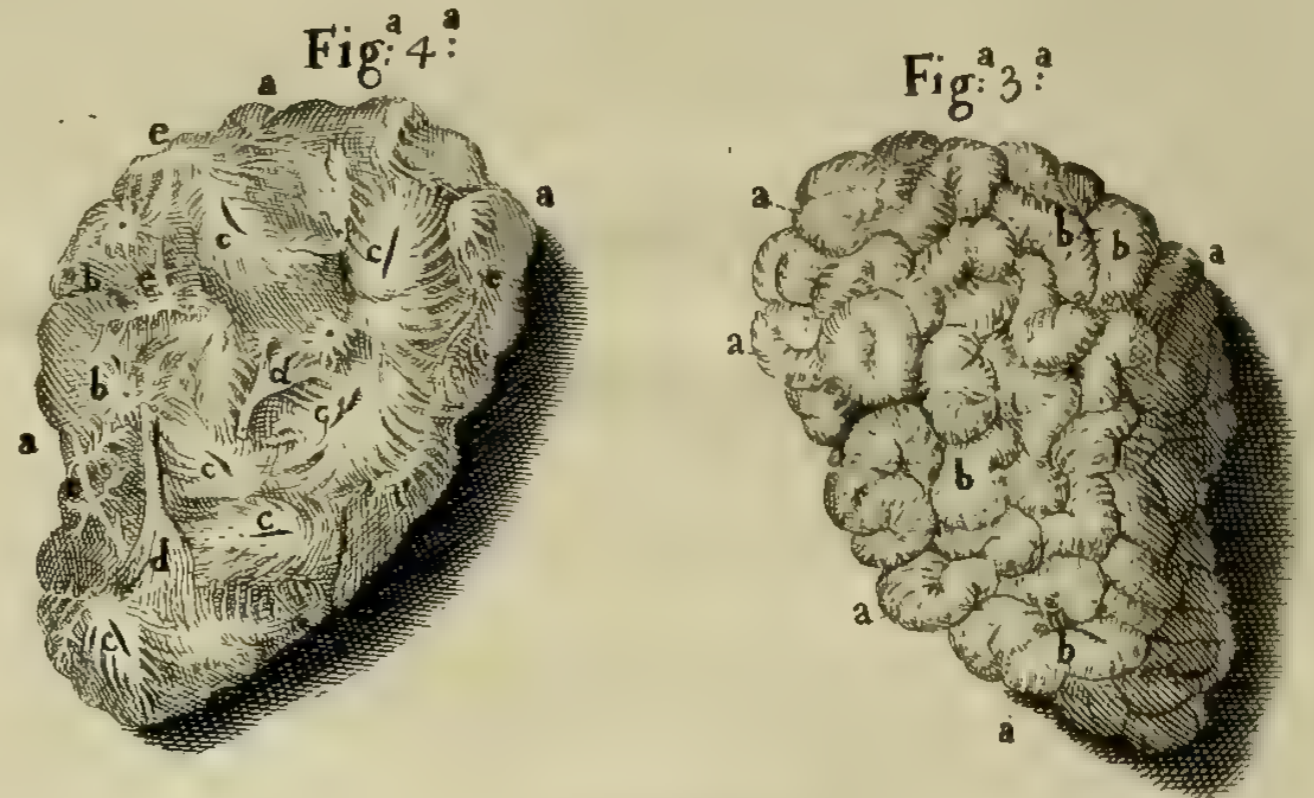
a. Portio ureteris secti.

b. Ejusdem ramus, in cujus extremum latius confluunt uriniferi ductus fff ad varios dissectos lobulos pertinentes.

c. Alter ureteris ramus, qui in duos dividitur gg., in quos colliguntur uriniferi ductuli spectantes ad omnes lobulos, in hac figura delineatos.

ddd. } Lobuli.

eee. }
fff. Uriniferi ductuli ad varios dissectos lobulos pertinentes.





FRANCISCI MARIÆ ZANOTTI.

S E R M O

Observationem novam exhibens, qua Mathematicus longe præstantissimus DE LA LANDE mirabilem quamdam in Saturni motu inæqualitatem demonstrat.

NEquè libentius umquam ad dicendum accessi, Sodales optimi, quam hoc vespere, neque alacrius; non enim dubito, quin mea oratio gratissima vobis futura sit, quæ non mea, sed mathematici erit cujusdam summi, totaque Europa clarissimi, collegæ nostri DE LA LANDE. Is scriptum ad nos misit, vel ad Academiam potius, quo novam quamdam ac prorsus mirabilem in Saturni conversionibus inæqualitatem ostendit. Hanc ille negat per hypothese[m] ullam, ut multas excusserit, explicare se potuisse; ne attractionem quidem ad id sibi valuisse. Clarissimi viri scriptum, ut consuetudini nostræ accommodarem, volui latinum facere. Sententias retinere studui; utinam perspicuitatem quoque, verborumque elegantiam retinere potuissem. Sed nostis, quæ sint interpretationum incommoda. Id ergo vobis, ut fieri per me potuit, latine redditum hoc vespere recitabo. Ceterum si qui ipsum, ut est a Gallo homine missum, legere maluerint, nemini potestas non fiet. Ad rem venio. Vos gallum more nostro loqui putabitis.

Cognitum perspectumque plane est (idque jam inde a Kepleri temporibus) planetas primarios sex circa solem per ellipticos orbes volvi, velocitate unumquemque inæquali, ut quæ major cuique in perihelio est, minor in aphelio. Neque alia in planetæ cujuscvis cursu ad longum deinde tempus cognita est inæqualitas, præter hanc unam, quæ etiam æquatio centri dicitur.

Post deinde cum attractionem communem, qua trahuntur planetæ inter se, anno circiter 1680 Newtonus compere-
rit, magnus minorum quarundam inæqualitatum numerus in
uno-

unoquoque planeta se prodidit, quas inæqualitates jamdudum ipse per calculos definire studui, & observationibus confirmare. (*Mem. de l'Ac. des Sc. 1755. 1756. 1757.*)

Vilus est autem hujusmodi inæqualitates Saturnus maxime ex attractione Jovis recipere. Itaque Academia hæc regia anno 1748 præmium ei posuit, si qui illarum explicationem proferret, & calculum. Atqui nihil eorum, quæ vel per id tempus, vel postea, in hoc argumento prodierunt, satis fuit aut ad Saturni loca errorefque indicandos, aut ad tabulas accuratiores condendas. Mihi, cum explicare ipse hæc vellem, contra accidit, ut aliud quoddam inæqualitatis genus, idque inter omnia, quotquot novimus, insigne maxime, in Saturni motu repererim, quod neque Jovis, neque planetarum aliorum quatuor attractioni tribui omnino non potest.

Ut novæ hujus inæqualitatis modus cognoscatur, seponendæ sunt in primis inæqualitates aliæ duæ. Quod ut exsequar, ante omnia animadverto, inæqualitatem, quam planeta quisque habet in sua orbita, nihil officere, quo minus revolutionis mediæ tempus exactissime constitui possit, si planeta modo in distantis mediis observetur. Id enim si fiat, motus medius, quæque inde ducitur, media revolutio, perinde se habent, ut si inæqualitas plane nulla esset. Ad hunc ergo modum revolutionem Saturni determinare volui.

Neque vero deest methodus determinandæ revolutionis mediæ in Saturno, nulla attrahentis Jovis ratione habita. Quæ methodus eo spectat, ut observatio semel atque iterum inætur in eadem distantia, atque in Saturni positu plane simili. Etenim si in altera observatione idem erit planetarum amborum positus, eadem quoque attractionis ratio erit, eademque sequentur inæqualitates, ut in prima. Sic minime variabit revolutionis tempus. Sicque revolutio media in Saturno se prodet, idest tempus illud, quod Saturnus infumit, ad idem cæli punctum rediens; neque attendendæ erunt inæqualitates, quas aut ellipticus motus affert, aut Jovis attractio.

Jam vero si hoc modo revolutiones mediæ in planetis aliis inquirantur, apparebunt in unoquoque seculo eadem. Sit nobis tellus, ut communis fert hypothesis, planetæ loco. Infumit hæc nunc etiam, ut alias, $365^d 5^b 48' \frac{1}{4}$ in revolutione una absolvenda; neque in eo variatio apparet ulla, si modo recte attendantur inæqualitates illæ, quæ in conversionibus inæ-

Inæqualitates quidem nonnullæ in planetis quibusdam innotuerant, quæ seculares dictæ sunt, quod in singula fere se produnt secula. Keplerus primum, tum qui illum secuti sunt, Maraldus, Cassinus, Hallejus, omnes denique Astronomi, quotcumque Saturni motum observationibus diligentissimis sunt persecuti, compertum habent, retardari illum in seculo quovis, ejusque revolutionem videri jam longiorem, quam antea. Hanc ego rem tractavi alibi fusius; (*Mem. de l'Ac. des Sc. 1757*) at quod nemo ante compererat: ne suspicatus quidem fuerat: id me docuit observatio, revolutionem scilicet Saturni mediam pro variis observationis circumstantiis variare, eamque variationem esse, quam nulla ex attractionibus, quas quidem novimus, possit efficere. Neque vero observationes, quæ id ostendant, e longa seculorum serie petendæ sunt. Illæ factis sunt, quæ abhinc annis 75 sunt habitæ, quæ si cum nostris conferantur, plane demonstrant Saturni revolutiones tota ipsa fere hebdomada inter se differre, nulla ex iis inæqualitatibus, quas adhuc novimus, huc pertinente, observationibusque per id tempus initis, quo illæ mutare nihil possunt. Neque vero inæqualitatem hanc tantam, ut idem iterum dicam, causa ulla efficere potest, ex iis quidem, quas novimus.

<i>Anni</i>	<i>Errores Tabul. Hallei</i>		<i>Anomalia media $\bar{\nu}$</i>	<i>Differentia in- ter longitudi- nes ψ, & $\bar{\nu}$.</i>
	<i>min.</i>	<i>sec.</i>	<i>Sig. grad.</i>	<i>Sig. grad.</i>
1686	— 3.	30	---- 8. 22	---- I. 17
1701	— 8.	30	---- 3. I	--- II. II
1745	— 3.	40	---- 8. 22	---- I. 8
1760	— 21.	30	---- 3. I	--- II. 0

Anno 1686 atque anno 1745 suam Saturnus habuit mediam distantiam, ab Jove distans 45° circiter. Utroque pariter tempore Hallei tabulæ aberrarunt $3\frac{1}{2}$ in defectu. Sic in illo annorum 59 spatio fuit Saturni motus $12^{\text{gr}} 13' 21''$, $\frac{45}{100}$ in annos singulos item, uti ferebant tabulæ, quoniam Saturnus utroque in casu eandem habebat anomaliam ($8. 22^\circ$), idemque

que orbitæ suæ punctum obsidebat. Quam rationem elementalia, ut incerta sint, mutare non possunt; & quoniam configuratio Saturni cum Jove eadem fere fuit (nempe 9^{gr}. circiter) ne unius quidem minuti error ex attractionis, si qua fuit, differentia, metui potest.

E contrario ex anno 1701 ad annum 1760 tabularum error increverat ad minuta 13, quo patet Saturni motum eodem 59 annorum spatio concitatem fuisse 13' unius gradus, unde sequitur revolutiones ejus diebus 6.½ breviores fuisse, quam fuerint ex anno 1686 ad annum 1745.

Neque vero id efficiunt observationes illæ tantum, quæ annis his quatuor sunt habitæ; quas quidem non nisi ut exemplo sint, depromimus; at aliæ etiam omnes, quæcumque vel præcedunt, vel consecuntur, quamvis nec uno in loco, & instrumentis longe diversis sint habitæ. Reditus Saturni omnes ad æquinoctium vernum numquam non mihi celeriores sunt, quam ejusdem reditus ad æquinoctium autumnale; idque per seculum totum. Observationes quoque, quas modo habui in Saturni oppositione, quæ accidit die 27 octobris, eandem ostenderunt accelerationem.

Ac mihi quidem id ita esse persuaderi ab initio non poterat; nam quamvis observationes omnes, quotcumque ex annis 180 duxeram, apprime convenirent, eodemque, vel me nolente, redirent semper, adduci tamen vix poteram, ut rei assentire, cujus rei causam in universa cælesti physica reperirem nullam.

Vicit tandem observationum constantia; estque profecto in Saturno manifesta inæqualitas, quæ ab Jovis aliorumve planetarum quatuor primariorum attractione nequaquam pendet. Cujus inæqualitatis causa longe alia est, in eademque Jovis distantia multo plus valet, multoque plus efficit, quam varietas quæque maxima ex illis, quæ in Saturni positionem cadunt. Causam hanc perquirere non aggrediar. Difficilis sane inventu esse videtur. Quis scit, an generalis ea sit, & constans, an una ex iis, quas casus interdum affert, puta cometæ cujuspiam attractionem? Observationes veterum nihil mihi hac in re luminis attulerunt; quæ in posterum sequentur, an perpetua res sit, ostendent, an variet, & quo modo; ac tum causa sine dubio manifestabitur.

Videtur ergo Saturnus, ut nunc res habet, planeta is esse, quem minime omnium novimus. Nihil credebatur theoriae & calculis repugnare magis, quam Luna; cujus tamen inæqualitates omnes sic jam ex una Solis attractione exprimuntur, ut non nisi unius aut ad summum duorum minorum error sit metuendus. Dicebantur autem inæqualitates Lunæ insignes adeo multaque esse, quod Luna ipsa quamproxime a terra distet. Licet jam contra de Saturno dicere, inæqualitates in eum cadere adeo notabiles, quod is longissime omnium distet a Sole; quippe ignoramus, in remota adeo regione quid accidat. Sic lente incedit Saturnus, ut levi quavis de causa abduci queat. Et sane ob tantam illam distantiam usque adeo extenuatur vis Solis Saturnum in suo orbe continens, ut vinci se facile viribus aliis vel mediocribus patiatur aut sibi modum imponi. Quæ vires in planetis aliis Soli propioribus vix quidquam valeant; planetæ hi quippe magno rapiuntur impetu, impressionesque alias, si quæ forte incidant, quodammodo effugiunt: sic eos suas servare orbitas centralis Solis vis cogit, longe præpotens.

Hactenus, ut interpretari ipse potui, vir ille summus
DE LA LANDE.

PAULLI FRISII CLERIC. REGUL. S. PAULLI

A D

FRANCISCUM MARIAM ZANOTTUM

EPISTOLA

Qua Operis de gravitatis legibus a se edendi formam rationemque describit.

PAULLUS FRISIUS FRANCISCO M. ZANOTTO S.
S. P. D.

Percunctanti tibi iterum, Zanotte suavissime, quid id sit, quod postremis hisce annis elucubravi, quodque brevi in publicam prodibit lucem, longiori epistola volui respondere, ut ampliorem habeas prospectum operis, & qua es in rebus mathematicis eruditione, ac perspicacia, erga me vero amore, & familiaritate, monere possis quid emendari, aut addi debeat. Cum ergo in dissertatione de figura Terræ ab ineunte usque ætate de gravitate corporum capissem agere, & præcipuam hanc partem mixtæ, ut vocant, Mathematicos postmodum excolissem in dissertationibus aliis, quæ a Parisiensi, & Berolinensi Academia præmium retulerunt, quæ a Luccæ editæ sunt, & Commentariis his Bononiensibus insertæ, & cum plura deinde adjunxissem, quæ nec omnino vulgaria, nec inelegantia videbantur; animum subiit integram gravitatis tractationem conscribere, eamque ita a primis Mechanicæ principiiis exordiri, ut unum opus plurium loco esset omnibus, qui solis Geometriæ, atque elementaris calculi, & sectionum conicarum subsidiis ad summum Physicæ cælestis apicem perducirent. Sic enim habui: Galilæi, Hugenii, Torricelli &c. præclara inventa de motu gravium, pendulorum, & projectilium expediri posse paucioribus: Divinum Newtoni opus ab octoginta jam annis editum nonnulla habere, quæ corrigi, plura quæ addi, plura etiam quæ alia methodo, atque ordine, quo perspicua sint, tradi postulent: posterioribus autem inventis Mathematicorum celeberrimorum adhuc aliquam lucem fortasse, & nitorem geometricum affundi posse.

Ope-

Operis ergo titulum posui *De legibus gravitatis libri tres*: divisionem librorum ex ipsa natura gravitatis duxi. Nam & gravia sunt omnia corpora, & gravitant in se invicem omnia, & in omnes omnium particulas. Itaque liber primus inscribitur, *De gravitate omnium corporum*; isque omnia exhibet, quæcumque æquilibrium, & motum gravium cadentium, projectilium, pendulorum, se se invicem percutientium, rotantium circa axem aliquem, & circa centrum se se volventium respiciunt, phænomena scilicet, quæ in corporibus terrestribus, ac cælestibus ex sola gravitate in centrum proficiuntur. Secundus est, *De gravitate omnium particularum*, & phænomena omnia complectitur variationis terrestrium ponderum pro varia ab æquatore, aut a superficie Terræ distantia, figuræ totius terrestris superficiæ, fluxus, & refluxus maris, & atmosphæræ, præcessionis æquinocetiorum, nutationis terrestris axis, & librationis Lunæ. Est demum tertius, *De gravitate in omnia corpora*, atque universim agit de inæqualitatibus motus Lunæ, Planetarumque, ac Satellitum aliorum omnium superiorum, atque inferiorum, ut sunt variationes velocitatis, & inclinationis orbitæ, motus nodorum, & apogæi, æquationes periodici temporis &c. Liber quisque definitiones, observationes, lemmata, ac decem deinde capita, & scholia totidem, ac propositiones quinquagintaquinque complectitur.

Ne autem quidpiam omitteretur, quod ad pleniorē naturæ interpretationem faceret, exordium fuit a notissimis Mechanicæ axiomatis, ut sunt: 1. quod corpus omne sibi relictum aut quiescit, aut æquabiliter movetur per lineam rectam: 2. quod mutatio status corporis proportionalis est vi motrici impressæ: 3. quod mutatio status corporis fit juxta directionem vis motricis: 4. quod in collisione corporum æquales utrobique sunt mutationes status: 5. quod si corpora dura sint, summa, aut differentia quantitatum motus ante, & post ictum est eadem. Ex 1. axioma ad modum corollarii profluunt leges motus æquabilis: ex 2. leges motus accelerati, aut retardati: ex 3. leges compositionis & resolutionis motus ubi angulus directionis virium est rectus: ex 4. primariæ leges resistentiæ fluidorum: ex 5. leges conflictus durorum corporum, atque elasticorum.

Quæ leges hujusmodi excipiunt lemmata. Duodecim partem illam differentialis, atque integralis calculi, seu directæ,

& inversæ fluxionum methodi enucleant, quæ ad naturalium phœnomenorum explicationem conducit maxime. Omisissæ scilicet considerationibus omnibus metaphysicis quantitatum infinite parvarum, & fluentium, ex eo veteri axiomate quod quantitates omnes variables, quæ crescendo, aut decrescendo ad æqualitatem accedunt propius quam pro data qualibet differentia, fiunt ultimo inter se æquales, veterum more colligitur, quæ propositis quantitibus elementa, & quæ elementis propositis quantitates geometricæ respondeant: & lemmatum postremum est, quod si radius ad peripheriam se habeat ut $1 : p$, & circuli radius sit R , & sinus arcus cujuspiam vocetur x summa omnium $x^0 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8$ &c. in toto circulo erit $pR + \frac{1}{2}pR^3 + \frac{3}{8}pR^5 + \frac{5}{16}pR^7 + \frac{35}{128}pR^9$ &c., five $pR + \frac{1}{2}R^2A + \frac{3}{8}R^2B + \frac{5}{8}pR^2C + \frac{7}{8}pR^2D$ &c., si scilicet primus, secundus, tertius &c. seriei terminus sit A, B, C &c.

Capita decem, quæ subsequuntur, hæc sunt: 1. de corporum æquilibrio: 2. de ascensu, & descensu corporum: 3. de motu corporum projectorum: 4. de motu pendulorum: 5. de centro oscillationis, percussionis, & rotationis: 6. de rotationis momento, & velocitate: 7. de compositione motuum projectionis, & rotationis: 8. de corporum vi centripeta: 9. de motu corporum in orbitis circularibus: 10. de motu corporum in sectionibus conicis.

Ut vero cujusque capitis rationem teneas, Zanotte Ornatiissime, percurram brevissime singula. In primis cum resolutio, & compositio motuum ex tertio axiomate colligatur manifestissime ubi angulus directionis virium est rectus, initio prioris capitis ostendi casus alios anguli acuti, obtusique ad casum anguli recti geometricè reduci, atque inde collegi cætera, quæ ad machinarum omnium vim, & rationem, ad æquilibrii leges, & gravitatis cujusque corporis centrum pertinent. Principii ejusdem a Galilæo antea inventi, tum a Newtono ad difficillima quæque traducti Mechanicæ, & Staticæ problemata, peculiarem etiam usum attingi in supputanda resistantia, ac vi fornicum, & resistantiæ totius calculum singillatim explicare volui ut vulgare præjudicium convellerem, quo opinantur nonnulli acutiores fornices sustinendis magnis ponderibus semper aptiores esse. Licet enim pondera superimposita

minus ad fulcri everfionem agant, ipfos tamen acutiores arcus ad tertiam a fulcro partem & circa medium graviori periculo obijcunt, ubi fcilicet arcus & fornices plerumque frangi a Belidoro & Hireo obfervatum eft.

De præcipuis legibus motus gravium cadentium, & afcendentium, folidorum, fluidorumque capite altero acturus, priora feptem Galilæi theoremata de motu accelerato, & duo alia Torricellii de velocitate fluidorum ex apertis vafis profilientium alia ratione breviter demonftravi, iisque nonnulla addidi de proportione quantitatis aquæ ex luminibus quadratis, circularibus, triangularibus dato tempore erumpentis. Addidi etiam peculiarem folutionem problematis, quo fi vas aliquod conftanter plenum communicet cum tubo aliquo, & a latere tubi foramen fiat, inquiritur ad quamnam fupra apertum foramen altitudinem in tubo fluidum poffit affurgere. Denique cum Hydraulica omnis incerta undique, ac vagis hypothefibus implexa fit, nihil omittendum cenfui quod ad prima motus fluidorum, & preffionis principia illuftranda poffet conducere.

Capite tertio poft ea omnia, quæ amplitudinem, altitudinem, & constructionem femitæ parabolicæ, & projectionis velocitatem, ac directionem refpiciunt, ubi projectio ex ipfa fiat horizontali linea, in qua eft fcopus; problema aliud aggreffi volui per partes fingulas, quod Simpfonius, alique plures aliis rationibus folverunt. Data fcilicet amplitudine maxima, quæ dato impetu projectionis, dato videlicet tormento, dataque pulveris pyrii quantitate, in plano horizontali, femirecto directionis angulo attingi poteft, & data infuper horizontali diftantia fcopi, & elevatione ipfius fupra horizontem, ex iis theorematis trigonometricis, quæ pro finu, & cofinu fummx, vel differentia duorum arcuum tradi folent, collegi qua inclinatione tormenti ad fcopum feriendum opus fit, & inverfo etiam problemati, ac problematis omnibus analogis breviter fatisfeci. Et quidem formulæ inde erutæ ad Ballifticæ praxim, & constructionem tabularum Simpfonianis videntur fimpliciores. Nam fi fit amplitudo maxima in plano horizontali A, horizontalis diftantia fcopi B, angulus elevationis fcopi C, tormenti autem x , erit $B \text{ fin. } C = A . \text{ fin. } 2x \mp C \mp A . \text{ fin. } C .$

Quarto autem capite poft emendatum Galilæi principium
de

de velocitate corporum ex uno in aliud inclinatum planum transeuntium, & post expositas leges pendulorum in circulari arcu oscillantium, novam exhibui demonstrationem theorematum elegantissimi ab Hugenio primum propositi, quod scilicet tempus descensus in omnibus cycloidis arcibus semper sit idem, & ad tempus descensus per diametrum circuli genitoris constantem rationem habeat semiperipheriæ circuli ad diametrum. Inde etiam collegi, quibus temporibus elementa quævis æque alta circuli, & cycloidis absolvi possint, atque idem pariter esse ostendi tempus descensus, atque oscillationis in minimis omnibus circuli ejusdem arcibus. Demum geometrice & more veterum aliam exposui non minus elegantem cycloidis proprietatem, quam Joannes Bernoullius primum, ac deinde Jacobus frater, Newtonus, Leibnitius, Hugenius, Hospitalius, Grandius, alique attigerant, & qua fit ut a puncto ad punctum datum per cycloidalem arcum habeatur brevissimus descensus.

Ad determinationem geometricam centri oscillationis, percussionis, & rotationis obscurioribus aliis vivarum virium, aut fictitiæ substitutionis principiis, principia duo per se evidentia substituenda esse censeo: quod scilicet æquales vires æqualibus radiis perpendiculariter in adversas partes applicatæ sint invicem in æquilibrio: quodque eadem vis secundum datæ rectæ directionem agat eodem modo in quovis demum rectæ ipsius puncto applicari intelligatur. Ex principiis iisdem theorema aliud consequitur, quod ad solutionem problematis præcessionis æquinoctiorum, & nutationis terrestris axis conducit maxime, quod scilicet in particulis omnibus circa datum axem rotantibus non motus quantitas, ut Newtonus existimaverat, sed quantitas momentorum, quæ habentur multiplicando inter se massam particulæ uniuscujusque, velocitatem, & distantiam ab axe motus, constantem permaneat.

Ope hujus theorematum facile admodum inveniri posset, qui rotationis motus ex qualibet vi impressa debeat primum exurgere, si datum esset momentum vis, quæ corpori imprimitur, & momentum corporis data angulari velocitate circa axem aliquem revoluti. Quæ duo ut capite sexto enuclearem, quantum ad physicam cælestem sufficit, inveni primum quod esse debeat momentum omne spheroidis oblatae, vel oblongæ, sive oblatae simul, oblongæque, cujus particulæ singulæ urgeantur

tur viribus proportionalibus distantiae a plano per sphaeroidis centrum transeunte: deinde comparavi inter se invicem momenta sphaerae, & sphaeroidis utriusque oblatae, vel oblongae, quae circa figurae axem, vel circa diametrum aequatoris aliquam data velocitate angulari revolvatur.

Iisdem etiam subsidiis capite septimo exponitur, quomodo ex unica vi, cujus directio primum extra gravitatis centrum transferit, duplex simul motus emerferit projectionis, & rotationis, & quibusdam Joannis Bernoullii locis emendatis ostenditur ad quam distantiam a centro Terrae, Lunae, Martis, & Jovis applicanda fuerit vis prior, ut is diurnus, & periodicus motus prodierit, quem ferunt observationes. His additur theorema elegans quod projectionis, & rotationis motus eadem vi simul geniti iidem sint ac si alteruter tantum haberetur, nimirum si aut fixum maneret centrum gravitatis, & solus haberetur motus rotationis, aut vis omnis imprimeretur in centro ipso, & solus projectionis motus exurgeret. Denique post indicatam methodum, qua variationes axis rotationis ob momenta inaequalia centrifugarum virium genitae supputari possunt, additur etiam geometrica demonstratio theorematis, quod si cuicumque corpori binae vires simul imprimantur, quarum una circa axem unum, altera circa axem alterum seorsim rotari possit, corpus circa axem tertium rotabitur, & sinus deviationis axis compositae rotationis a duobus aliis prioribus erunt reciproce proportionales velocitatibus angularibus, quae seorsim circa axes ipsos conciperentur.

Capite octavo ad vis centripetae considerationem fit transitus, & Newtoni, ac Machinii theorema latius ad hunc sensum traducitur: quod si corpus aliquod secundum datam rectam projectum urgeatur viribus quibuscumque tendentibus ad puncta quaelibet ipsius rectae, radiis ad duo quaelibet puncta rectae ejusdem ductis, corpus describet solida proportionalia temporibus, & vicissim si haec solida sint proportionalia temporibus, vires corporis ad eandem rectam dirigentur. Generale etiam principium rectilinei descensus corporum, quod vis acceleratrix ducta in elementum spatii aequetur velocitati ductae in elementum suum, ad curvilineos motus transfertur, atque inde & formula vis centripetae, & nonnulla Newtoni theoremata colliguntur, ut illud est, quod si in casu aliquo aequalium distantiarum velocitates corporum ascenduntium,

aut

aut descendentium æquales sint, eæ erunt etiam in alio quolibet æqualium altitudinum casu æquales.

De motu corporum in orbitis circularibus capite nono cum sit agendum, & cum velocitates ac tempora circularis motus ac corporum recta ascendentium, aut descendentium comparari debeant inter se invicem, ommissis vagis aliis hypothesebus, tres potissimum explicantur, quæ in natura habent locum, gravitatis constantis, & gravitatis crescentis aut in ratione directa simplici, aut in ratione duplicata reciproca distantiarum. Primus est casus corporum prope terrestrem superficiem, alter ad centrum propius accedendo haberetur, tertius vero in corporibus cœlestibus late obtinet. Singuli ita expendi possunt, ut ex lege corporum recta ascendentium, aut descendentium brevissime eruantur theoremata, quæ Newtonus ex lege corporum circa focum sectiones conicas describentium collegerat.

Postremo capite invenies, Zanotte ornatissime, theoremata alia Newtoni, Bernoullii, Moivreæ, Hermanni de motu corporum in iisdem sectionibus; quædam etiam invenies e tuis, ut illud est, quod explicas ad calcem capituli tertii *De viribus centralibus*. Ad hæc autem diverso tramite bini processimus: nam cum tu eo principio cum Newtono usus sis, quod in ellipsi & hyperbola parallelogrammum, circa diametros quaslibet conjugatas descriptum, sit constans, quodque in parabola perpendiculum ex umbilico in tangentem demissum sit medium proportionale inter distantias umbilici a vertice, & a puncto contactus; ipse principio alio cum Hermanno, & Simpsonio uti malui, quod constans sit rectangulum duarum perpendicularium a focus in tangentem demissarum, atque inde simul collegi, quibus legibus corpora in eadem sectione conica, & in circulo ad eandem distantiam descripto, & in diversis conicis sectionibus circa eundem, aut circa diversos focos moveri possint.

His absolutis, quæ ad gravitatem corporum omnium pertinent, ut ad gravitatem omnium particularum expendendam fiat transitus, initio secundi libri habebis ordine expositas physicas omnes, atque astronomicas observationes longitudinis pendulorum eodem tempore oscillantium, graduum meridiani, & parallelorum, fluxus, & refluxus maris, præcessionis æquinocetiorum, nutationis axis, & librationis illius Lunæ, quæ

quæ in longum, ac latum fit. Deinde lemmatis decem reperies expositas proprietates plures sectionum conicarum, quæ cum in elementis Grandii, Hoptalii, aliorumque minime occurrant, sunt tamen ad gravitatis theoriam explanandam maxime necessariæ. Titulos autem decem capitum libri secundi hos leges: 1. *de æquilibrio particularum se se trahentium*: 2. *de attractione corporum spheroidicorum*: 3. *de figura Terræ*: 4. *de legibus terrestrium ponderum*: 5. *de æstu maris, & atmosphæræ*: 6. *de variationibus fluxus, & refluxus*: 7. *de præcessione æquinoctiorum*: 8. *de præcessionis mediæ æquatione*: 9. *de nutatione terrestris axis*: 10. *de libratione Lunæ*.

Primo igitur a celeberrimo Mac-Laurini, & Simpsonii theoremate exordium fuit, quod si singulæ fluidi particulæ se attrahant in ratione duplicata reciproca distantiarum, & revolvantur circa centrum, totum fluidum induet naturam spheroidis alicujus compressæ, cujus minor axis erit ipse axis rotationis: quodque si singulæ particulæ a corpore alio maxime distito attrahantur eadem lege, fluidum induet figuram spheroidis oblongæ, cujus major axis per corpus illud attrahens, transibit, atque erunt in casu utroque bini semiaxes inter se in ratione reciproca virium in extremis punctis agentium. Hunc autem æquilibrii casum ut facilius demonstrarem eo deduxi rem omnem ut ostenderem, quod viribus ut antea agentibus, traducto per centrum plano, neque in plano ipso, neque secundum lineas plano perpendiculares motus aliquis esse possit. Denique, quod a Simpsonio, & Mac-Laurino præstitum non fuerat, binas simul hypotheses composui, atque ostendi, quod si particulæ ut antea se attrahant, attrahanturque a corpore alio, ac volvantur simul circa centrum, fluidum induet figuram spheroidis oblata simul, & oblongæ, quæ scilicet gigni posset si ellipsis circa minorem axem ita vertatur, ut vertex axis majoris ellipsim aliam describat.

Calculum omnem variis rationibus a Newtono, Mac-Laurino, Simpsonio, Bernoullio, Clairautio jam institutum attractionis spherarum, ac spheroidum oblatarum, oblongarumque, proxime ad spheras accedentium, in corpusculum quodlibet extra, aut intra superficiem positum, capitæ secundo simpliciore efficere conatus sum. Ostendi insuper attractiones in polo spheroidis oblongæ, & in æquatore oblata spheroidis iisdem semiaxibus descriptæ, & in superficie spheræ

circumscriptæ exercitas esse quidem in ratione continua, sed non in ea, quam materiæ quantitates in tribus hisce corporibus continuant, quod Newtonus asserere visus est in Propof. 19. lib. 3. Omnino autem est falsum, quod ipse assumpsit in Propof. 38., differentiam semiaxium Lunæ fluidæ, quæ ob attractionem Terræ haberetur, ad differentiam semiaxium Terræ ob vim Lunæ esse in ratione simplici gravitatis acceleratricis Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam, & diametri Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim, cum esse debeat in duplicata ratione virium earumdem acceleratricium, & diametrorum quadruplicata.

Inde ad quæstionem physicam de telluris figura jam licet progredi. Newtonus, Hugenius, & Hermannus inquisiverunt figuram illam quam Terra haberet, si aut canalibus aqua plenis, & ad centrum continuatis constaret, aut tota ejus massa in aquam resoluta foret, aut in primordiis rerum materia fluida & gravi coaluisset, & circa se ipsam cœpisset converti. In qua hypothefi cum facile ex theorematis antecedentibus consequatur figuram Terræ spheroidem oblatam esse, & spheroidis semiaxes esse inter se ut 230:231; videtur tamen hypothefis conficta prorsus, & naturæ phænomenis parum consona. Quod si ex observationibus terrestrium graduum de figura Terræ judicium ferendum sit, paralleli & meridiani gradus prope Pyrenæos montes in Galliis, & Lapponicus etiam, atque Africanus, & Americanus gradus non magis a proportionem illa 230:231 discrepant, quam ut in errores exiguos observationum diligentissimarum differentia omnis refundi possit. Italicus vero, & Parisiensis gradus non magis inde recedunt, quam pro aliqua observationum incertitudine, & texturæ terrestris irregularitate.

Corporum pondera, & longitudines pendulorum eodem tempore oscillantium ab æquatore pergendo ad polos augmentur fere in duplicata ratione sinuum latitudinis, ut in hypothefi quavis spheræ, aut spheroidis homogeneæ, aut ex stratis spheroidicis diversæ densitatis compositæ, aut nucleum sphericum densiorem in centro habentis esse debet: magis tamen augmentur, quam pro eadem terrestrium axium proportione. Cumque hypothefes varias capite quarto expenderem, quibus & proportioni simul, & quantitati crescentium ponderum satisfaceret, ea simplicissima omnium visa est, qua interior nucleus quin-

quinta sui parte densior statueretur materia omni, quæ circa æquatorem Terræ, atque extra inscriptam spheram redundat. Capite autem nono patebit quod si solida omnis materies extra inscriptam spheram redundans exæquaret duas tertias partes materiæ, quæ redundaret similiter in hypothesi Terræ totius solidæ, & ubique ejusdem cum nucleo densitatis, satisfaceret etiam aliis phænomenis nutationis axis, & præcessionis æquinoctiorum. Hujusmodi hypotheses observationibus affusorum marium conformes videri possent, & recedendo a terrestri superficie gravitatem adhuc exhiberent quadratis distantiarum a centro reciproce proportionalem. Hoc dato, si aeris densitas statueretur proportionalis ponderibus comprimentibus, differentia altitudinum supra terrestrem superficiem esset logarithmus rationis imminutæ aeris densitatis, & aliis omnibus altitudinis barometricæ experimentis undique satisfaceret, quantum fert varia ratio densitatum aeris, & mercurii, quæ ob variam caloris vim in instituendis experimentis haberi potest.

Rationem, & causam physicam ætus maris capite quinto explicaturus alium æquilibrii casum evolvi, quo inquiritur figura fluidi quod ad modicam altitudinem circumambiat spheram diversæ densitatis, & cum ipsa simul volvatur circa centrum. Primo autem ex quo totius compositæ vis directio esse debeat in punctis singulis superficiæ fluidi perpendicularis, eduxi breviter easdem formulas differentiæ semiaxium, quas Clarissimi Clairaut, & Alembertius tradiderant, & calculum omnem exposui differentiæ altitudinum maris, & atmospheræ, & exiguæ variationis illius, quæ in barometris ob attractionem Solis, & Lunæ haberi debet. Ostendi deinde quibus gradibus, sive ob impressum diurnum motum, sive ob perturbatrices Solis, & Lunæ vires, maria, & atmospheræ in æquilibrio se se componant, & formulas alias similiter sum affectus, quas Clarissimus Alembertius invenerat in dissertatione de generali ventorum causa. Ex his denique omnibus collegi orientalis venti, qui intra tropicos continue spirat, eas esse leges, indolem, ac phænomena, ut ex calore Solis, & aeris rarefactione potius, quam ex attractricibus Solis, & Lunæ viribus debeat repeti.

De variationibus fluxus, & refluxus acturus capite sexto novam exhibui solutionem geometricam problematum a Daniele Bernoullio propositorum, quibus data distantia Solis, &

Lunæ ab invicem, & proportionem virium inquiritur, quæ maxima fluxus altitudo, & maximi fluxus distantia a Sole, & Luna esse debeat. Atque eo quidem formulas perduximus, ut si Lunæ & Solis vires sint inter se ut 5 : 2, & sit M sinus, & N cosinus ipsorum distantia ab invicem, sinus distantia fluxus maximi a Luna prodierit quam proxime $\frac{1}{49} MN 22 - 8 N^2$:

quæ formula ad supputandas retardationes fluxus & altitudinis variationes commodior visa est. Ab hisce omnibus variationibus, quæ pendent ex varia Solis, & Lunæ distantia ab invicem, ad alias ordine enumerandas progredi volui, quæ pendent ex varia ipsorum distantia a Terra, & declinatione ab æquatore. Attigi etiam quam bene singula theoremata, & attractionis leges cum observationibus marini æstus consentiant.

Solutionem problematis difficillimi præcessionis æquinoctiorum a Newtono primum tentatam, & ab Alembertio primum exhibitam, capite septimo derivavi ex quibusdam prioris libri theorematis. Ostendi scilicet quod accedentibus Solis, & Lunæ viribus alius fiat axis rotationis, alius æquator Terræ, alia interfectio eclipticæ, & æquatoris: & cum, sive ob ipsas vires perturbatrices, sive ob vires centrifugas rotationis axis ab axe figuræ parum admodum recedat, posito quod Sol, & Luna in eodem sint plano eclipticæ, facile inveni quæ annua interfectionis ipsius varietas, & varietatis lex esse debeat. Duplicem insuper Newtonianæ solutionis defectum, quem non adhuc fortasse alii attigerant, indigitavi: 1. quod in communicatione motus corporum simul rotantium, & oscillantium, quantitatem motus, ut in corporibus libere impulsis, manere eandem censuerit Newtonus, non vero eandem quantitatem momentorum: 2. quod eundem esse censuerit motum medium nodorum annuli, & Lunæ alicujus in ipso annuli plano circa Terram diurno motu revolutæ, cum motus nodorum annuli duplo sit major.

Quia vero planum lunaris orbitæ exiguo angulo ad eclipticam inclinatur, aliæ inde inæqualitates oriuntur, & regressionis punctorum æquinoctialium, & inclinationis eclipticæ ad æquatorem, quas singillatim capite octavo, & nono examinavi. Et quidem pars illa utriusque inæqualitatis, quæ singulis nodi ascendens lunaris orbitæ semirevolutionibus revertitur, nutationem axis terrestris exhibet, & æquationem mediæ præ-

præcessionis æquinoctiorum. Æquationis hujus, ac nutationis axis periodum, quantitatem, ac leges omnes cum nitide, ac breviter, quam fieri potuit, exponerem, theorematam nonnulla attigi plane elegantia, quæ mecum cum Pisis esset Clarissimus Walmeslejus humanissime communicavit, quæque ipse deinde publici juris fecit in Transactionibus Philosophicis.

Postremo libri secundi capite librationem Lunæ, sive quæ ex parallelismo lunaris axis, sive quæ ex æquabili motu Lunæ circa axem oritur, cum phœnomenis sic comparavi ut omnibus Galilæi, Grimaldi, Bullialdi, Hevelii macularum observationibus satisfacerem. Easdem etiam nutationis axis, & præcessionis formulas a Terra ad Lunam transtuli ut viderem, quæ librationes aliæ in hypothese Lunæ oblatæ, sive oblongatæ ob attractionem Terræ haberi debeant. Et cum Lunæ olim fluidæ hypothesis penitus coniecta sit, & hypothesis Lunæ oblongatæ recedat insuper a planetarum aliorum analogia, obiter monui ex legibus æquilibræ nonnisi figuram Atmosphæræ Lunæ, & fluidorum Planetas alios circumambientium recte colligi, atque hac occasione data in ultimo libri scholio de Atmosphæræ phœnomenis, eorumque rationibus, ac causis physicis futius differui.

Denique in libro tertio motuæ omnium corporum gravitatis, & inæqualitatum motus cœlestium corporum tractationem ab Astronomicis observationibus similiter exorsus sum, atque ut inæqualitates ipsas distinguerem primo eas attigi, quæ sunt apparentes, & optica dumtaxat, ut aberratio, quæ ex successiva lucis propagatione oritur, & directionis, stationis, ac retrogradationis phœnomena, quæ oriuntur ex motu Terræ: deinde inæqualitates motus enumeravi, quæ habentur in plano orbitæ, ut sunt variationes velocitatis, ellipticitatis, excentricitatis, & apogæi Lunæ, Satellitum, & Planetarum superiorum, inferiorumque: addidi insuper, quæ sint variationes plani ipsius orbitæ, motus videlicet nodorum, & incrementum, aut decrementum inclinationis orbitarum omnium inter se, & ad planum eclipticæ, & æquatoris: ac demum æquationes omnes recensui mediorum motuum, & periodici temporis Planetarum omnium, ac potissimum Terræ, Jovis, ac Saturni.

Inde autem is profluit ordo capitum: 1. de inæqualitatibus opticis Planetarum: 2. de acceleratione Planetarum in orbitis

tis circularibus: 3. de variatione, & evectione Lunæ: 4. de motu apsidum: 5. de motu nodorum Lunæ: 6. de nodis aliorum Planetarum: 7. de variatione inclinationis orbitæ: 8. de æquationibus annuis motuum lunarium: 9. de acceleratione Planetarum in orbitis ellipticis: 10. de æquatione periodici temporis Planetarum.

Et quidem opticæ omnes inæqualitates facile admodum revocari possunt ad calculum. Primo enim sinus apparentis aberrationis Planetæ cujuscumque e Terra visi proportionalis est summæ vel differentiæ productorum velocitatis Planetæ in cosinum parallaxeos, & velocitatis Terræ in cosinum elongationis Planetæ a Sole per distantiam Planetæ, & Terræ divisorum: & facile ex hoc theoremate consequuntur, quæ ad Planetarum directionem, stationem, & retrogradationem pertinent. Deinde ut leges omnes aberrationis lucis in stellis fixis explicentur eo dumtaxat Mechanicæ principio opus est, quod communis motus non turbet apparentes ac relativos motus corporum inter se: ut vero supputentur omnes aberrationes, quæ in singulis Planetis habentur ob ipsam lucem, duobus aliis adhuc theorematis est opus: 1. quod si spectatoris oculus in sectione aliqua conica moveatur, semita apparens fixæ cujuscumque erit circulus, & centrum apparentis motus aut intra, aut extra, aut in ipsa erit peripheria circuli, prout sectio conica erit ellipsis, vel hyperbola, vel parabola: 2. quod celeritas luminis erit ad Planetæ cujusque celeritatem, ut cosinus anguli parallactici ad sinum differentiæ aberrationis Planetæ, & Stellæ fixæ, ad quam Planeta e Terra referri potest.

Ut supputentur aliæ inæqualitates motus cœlestium corporum opus est aliis Geometriæ, atque Algebræ subsidiis. Formulas virium perturbatricium Geometriæ celeberrimi in hanc passim seriem resolvunt $A + B. \cos. z + C. \cos. 2z + D. \cos. 3z$ &c., quæ integratione habita citissime convergit. Utar ipse in sequentibus alia serie $A + B. \cos. z + \overline{C. \cos. z^2} + \overline{D. \cos. z^3}$ &c., & cum non vires ipsæ perturbatrices, sed aut vires dumtaxat mediæ, aut summa omnium virium definienda erit pro singulis revolutionibus, negligendo potentias omnes exponentis cujusque imparis, quæ ambiguis signis in integro semicirculo compensant se se invicem ac destruunt, utar dumtaxat

taxat serie $A + \overline{C. \cos. z^2} + \overline{F. \cos. z^4} + \overline{H. \cos. z^6}$ &c., ut scilicet acceptis summis terminorum omnium, iisdemque per circulem peripheriam divisus sit medius seriei valor $A + C. \frac{1}{2} R^2 + F. \frac{3}{8} R^4 + H. \frac{5}{16} R^6$ &c. Hanc quantitatum mediarum methodum singillatim quibusdam lemmatis explicare volui, quod ex binomii theoremate nullo negotio eruatur series, & satis etiam convergat pro casu quolibet Satellitum Planetarumque, tum superiorum qui ab inferioribus, cum inferiorum, qui a superioribus perturbentur.

His positis capite altero primum dumtaxat seriei terminum supputando inveni, quæ acceleratio Lunæ, & aliorum Satellitum ob vim Solis haberi debeat in transitu a quadraturis ad conjunctionem, vel oppositionem, atque ex data acceleratione Lunæ collegi breviter, quæ esse debeat differentia semiaxium lunaris orbitæ. Deinde alios seriei terminos supputando accelerationem, & retardationem omnem exhibui Planetarum superiorum, & inferiorum, quæ ex attractione mutua oriri potest: & cum in hypothesi motus ad immobile centrum virium relati eandem fere in conjunctionibus Jovis eruissem differentiam longitudinis Saturni, quam alia methodo invenerat Eulerus, Cassini observationes recensui, quibus cum calculus satis convenit. Variationes velocitatis in singulis Satellitibus ex mutua actione ortæ similiter innotescerent si data in singulis esset materiæ quantitas.

Ut variationem Lunæ, & inæqualitates alias hujusmodi definiret Machinius celebri theoremate usus est, quo binos simul motus considerans, uniformem unum, atque alterum proportionalem quadrato sinus distantie a loco dato, statuit area ellipseos, cujus radii sint inter se reciproce in ratione subduplicata motus horarii circa centrum, exhiberi posse uniformem motum, & motum variabilem exhiberi area circuli circumscripti, & summam semiaxium ellipseos ad semiaxium differentiam se habere ut sinus totus ad sinum æquationis maximæ. Ipse motum illum, qui vere augetur in duplicata ratione sinus distantie a loco dato, segmento circuli, & motum medium sectore exhibui, & peripherie ad duplam diametrum inveni eandem rationem esse, quæ motus totius medii in octantibus ad maximam differentiam medii, & veri

motus. Theoremate hujusmodi ad definiendam variationem Lunæ uti cœpi capite tertio, atque illud in Newtoniana solutione problematis reprehendi, quod variationem augendam, & minuendam censuerit in duplicata ratione temporis synodici, cum in ratione simplici tantum augeri, & minui debeat.

Monuit etiam Machinius investigationes omnes variationis excentricitatis, & apogæi inde exordiendas esse, ut datis viribus perturbatricibus quæratur motus accessus, aut recessus corporis a puncto dato, nulla habita ratione angularis motus circa punctum ipsum concepti. Methodum, quam Machinius indicaverat, assequi, & explicare aggressus est Walmeslejus in opusculo de motu Aptidum, & in theoria motuum Lunarum. At cum plura Simpsonius, aliique objecerint Walmeslejo, ut quod vires dumtaxat medias consideraverit, quæ juxta radium vectorem agunt, neglectis aliis, quæ sunt eidem radio perpendiculares, curavi ipse solutionem problematis sic tradere, ut difficultatibus hisce omnibus ultro occurrerem. Deinde ex data velocitate juxta vectorem radium concepta facile ex notis legibus corporum recta ad centrum descendentium collegi rationem temporum revolutionis integræ, & reversionis ad summam apsidem. Atque id insuper pro casu quolibet virium in quavis ratione agentium præstare volui, ut uno simul calculo assequerem qui motus apogæi Lunæ, & Planetarum omnium superiorum, inferiorumque esse debeat.

Inveni igitur quod si in distantia mediocri, quæ exprimitur unitate, vis gravitatis ad vim perturbatricem se habeat ut $1 : \frac{1}{2} P$, & in distantia quavis x vis perturbatrix sit $\frac{1}{2} P \cdot x^m$, erit variatio excentricitatis $\frac{-\frac{1}{2} P \cdot x^{m+2}}{1 - 2 + \frac{1}{2} m \cdot P \cdot x^{m+1}}$, &

quod si orbita accedat proxime ad circulum erit tempus revolutionis corporis ad tempus reversionis ad summam apsidem

proxime ut $1 : 1 + \frac{5}{4} + \frac{1}{4} m \cdot P$. Ex priore formula capite tertio erui æquationes omnes excentricitatis lunaris orbitæ, seu variationem æquationis centri, quam passim evectionem vocant. Capite autem quarto ope formulæ alterius, & motum medium apogæi Lunæ, & motus medii æquationes supputavi, eosdemque fere numeros obtinui, quos Clarissimus Alembertius ex generali solutione problematis trium corporum ingeniosissime

me derivaverat. Addidi etiam qui motus apsidum in Planetis omnibus superioribus, & inferioribus, quique in singulis Satellitibus, sive ob attractionem mutuam, sive ob sphaeroidicam Primariorum figuram haberi debeat.

Capite quinto ostendi Lunæ, aut Solis motum, motum medium a nodo, & motum maximum in quadraturis Lunæ, aut Solis cum nodo ipso esse in progressionem arithmetica, & ob seriem tardius convergentem minus accuratum deprehendi theorema Machinii alterum, quod motus Solis medius a nodo sit medius Geometricè proportionalis inter motum Solis ipsius medium, & motum illum mediocre, quo Sol celerrime recedit a nodo in quadraturis. Series autem, qua motus medius nodorum Lunaris orbitæ exprimitur, ea est, ex qua facile, & annui motus quantitas, & correctiones aliæ colligantur, quæ sive ob inclinationem, & ellipticitatem orbitæ, sive ob accelerationem areæ circa Terram descriptæ addendæ sunt. Falsum est enim, quod asseruerat Newtonus, accelerari insuper ob excentricitatem orbitæ nodorum motum, cum idem profus in orbita elliptica, & in circulo ad distantiam mediam descripto haberi debeat.

Iisdem seriebus, & eadem semper quantitatum mediarum methodo capite sexto nodorum motum in orbitis omnibus Satellitum, ac Primariorum ex mutua actione ortum determinavi, ac deinde capite septimo omnia simul complecti volui, quæ variationes inclinationis lunaris orbitæ, & orbium aliorum omnium ad eclipticam, & eclipticæ ipsius ad æquatorem, variationumque periodum respiciunt. Obliquitatis eclipticæ phænomena præcipua hæc sunt: obliquitatem ipsam tribus fere quadrantibus unius minuti singulis sæculis imminui: variationis huiusmodi duas esse potiores partes, quæ pendent ex Jove, & Venere, atque esse proportionales sinui distantie nodi ascendentis Planetæ utriusque a linea æquinocetiorum: imminutionis totius periodum eandem esse, qua revolutio nodi complectitur, ut nodo a signis Borealibus ad signa Australia transeunte obliquitas eclipticæ contraria ratione augeri debeat: limites denique imminutæ, auctæque obliquitatis intra $1\frac{1}{4}^{\circ}$ contineri.

Tribus capitibus posterioribus habebis, Zanotte Clarissime, æquationes omnes mediorum motuum, quæ pendent ex vario loco Planetarum in orbitis ellipticis, atque ex varia

orbitalium positione inter se. In primis autem invenies theoremata illud, quod septem fere ab hinc annis, ad Eustachium suavissimum fratris tui filium cum scriberem, commemoravi. Scilicet si summa apsis orbitæ superioris ex plaga illa reperitur, in qua inferior Planeta ab aphelio suæ orbitæ ad perihelium proficiscitur, Planeta ipse inferior superioris actione retardabitur in motu suo, & actione inferioris superior accelerabitur: & contra retardabitur superior, & inferior accelerabitur in adversa orbitalium positione, in qua inferior Planeta digressus e plaga summæ apsidis Planetæ superioris ad aphelium orbitæ suæ progreditur: ex quo theoremate phænomenon præcipuum consequitur, positis orbitis ut modo sunt, imminui semper velocitatem projectionis Jovis, & coarctari orbitam, ac periodicum tempus brevius evadere, & contra augeri semper velocitatem, & tempus periodicum Saturni. Singula, cum nondum ordine digesta habeam, minime recensabo. Habebis tamen omnia, Zanotte mi, ut primum in lucem prodibunt. Interim vale, & me, ut facis, amare perge.

Dabam Mediolani X. Kal. Apr. MDCCLXVI.

I N D E X

OPUSCULORUM.

- B** Aciallii Joannis. *De fluminibus in mare influentibus.* 99.
 Benvenuti Josephi. *De Lucensium Thermarum atmospheræ.* 395.
 Blancani Jacobi. *Iter per montana quædam agri bononiensis loca. Pars prima.* 151. *Pars altera.* 159.
 Boscovich Rogerii Josephi. *De unione colorum aliorum post alios per binas substantias, ac unione multo majore per tres.* 265.
 Brunelli Joannis. *De Pororoca.* 249.
 De Mannioca. 334.
 Canterzani Sebastiani. *De attractione spheræ.* 66.
 Epistola, qua Eustachii Zanotti observatio Veneris Solem trajicientis ab omni erroris suspitione liberatur. 241.
 Casalii Gregorii. *De machinula quadam ad projectilium theorias per experimenta probandas.* 71.
 De quorundam vitrorum fracturis sermo alter, quo diluuntur objecta nonnulla, quæ Clarissimus Joannes Baptista Scarella protulerat adversus sermonem primum de eodem argumento conscriptum. 169.
 De vi pulveris pyrii per machinas dimetienda. 345.
 De iclu pulveris pyrii. 357.
 Castelvetri Joannis Antonii. *De proprietate numerorum divisibilium per II, III, IIII, I.... &c.* 108.
 a Covolo Joannis Baptistæ. *De Metamorphosi duorum ossium pedis in quadrupedibus aliquot.* 59.
 Fabri Hyacinthi. *De humano quodam Monstro.* 226.
 Frisii Paulli. *De inæqualitatibus motus terræ & lunæ circa axem ex Astronomorum hypothesibus.* II.
 Epistola, qua operis de gravitatis legibus a se edendi formam rationemque describit. 514.
 Galeatii Gufmani. *Historiæ duæ mirabiles calculorum in ureteribus exsistentium.* 139.

- De cortice peruviano.* 216.
- Galvani Aloyfii. *De renibus, atque ureteribus volatiliū.* 500.
- Martini Joannis Baptistæ. *De usu progressionis geometricæ in musica.* 372.
- Molinellii Petri Paulli. *Observationes aliquot medicæ.* 1.
- Riccati Vincentii. *De æquivalentia potentiarum per principia metaphysica demonstrata.* 186.
- Epistolæ tres, quibus utilitas calculi sinuum & cosinuum in infinitesimorum analysi demonstratur.* 198.
- Additamentum ad opusculum de termino generali serierum recurrentium cum appendice, quod editum est in hujus tomi parte prima.* 415.
- De corpore projecto, cui præter potentiam servantem rationem reciprocā duplicatam distantiarum a centro, applicatæ sunt aliæ potentia duæ, quarum una dirigitur ad idem centrum, altera est huic perpendicularis.* 421.
- De quadraturâ curvarum tradita per summas generales serierum.* 432.
- Saladini Hieronymi. *Methodus Bernulliana de reducendis quadraturis transcendentibus ad longitudinem curvarum algebraicarum, a quibus inutilis sæpe redditur, imaginariis quantitibus liberatur, atque ejusdem reductionis innumera aliæ viæ indigitantur.* 120.
- Scarellæ Joannis Baptistæ. *De principiis visionis directæ, reflexæ, & refractæ.* 446.
- Tacconii Cajetani. *De Rachitide.* 81.
- Zanotti Eustachii. *De supputandis æquationibus in orbitis planetarum.* 236.
- De angulo positionis & ejus usu in determinanda telluris figura.* 256.
- Zanotti Francisci Mariæ. *Sermo observationem novam exhibens, qua Mathematicus longe præstantissimus DE LA LANDE mirabilem quamdam in Saturni motu inæqualitatem demonstrat.* 509.

ERroribus, qui in editionem irrepserunt plures sane quam vellem, spero fore, ut qui animo sunt æquiores, præsertim si quid ipsi umquam ediderunt, facile ignoscant. Non nullos tamen hic emendare volui, ne ignoscentibus inter legendum moram afferant; ii quippe sunt, quos ipse per se corrigere lector quisquam vix possit. Occurrunt autem in opusculis duobus, quæ edere oportuit, cum auctores longe abessent, nos autem exemplaria in manibus haberemus nec satis ubique nitida nec satis emendata. His de erroribus auctores ipsi confecta jam editione me monuerunt.

IN FRISII OPUSCULO.

De inæqualitatibus &c.

<i>pag.</i>	<i>lin.</i>		<i>lege</i>	
20.	10.	perpendiculares.		perpendiculares pedibus 280.
36.	18.	NN''		NN'
39.	13.	9127		9172
40.	5. } 6. }	50, 6' 6"		50, 66"
41.	3.	æquator		ecliptica
54.	21.	solstitialibus.		æquinoctialibus
56.	25.	$\frac{\phi a. 360^\circ}{A \quad n - m}$		$\frac{\phi a. 525969. 360}{A \quad 39343 \quad n - m}$
	30.	$n - m = 694$		$n - m = 694$

IN BOSCOVICHII OPUSCULO.

<i>pag.</i>	<i>lin.</i>		<i>lege</i>	
270.	32.	possint, ac		possint
	39.	spectro		instrumento
271.	8.	marginis		marginis imaginis
272.	40.	positione		positione quacumque
273.	35.	marginis		marginis imi
274.	3.	majorem		minorem
	23.	in <i>e</i>		in <i>f</i>
	24.	in <i>f</i>		in <i>g</i>
	28.	violaceo		viridi
	30.	viridi		violaceo

<i>pag. lin.</i>		<i>lege</i>	
278. 22.	applicatum	applicato	
279. 27.	186 ad radium 500	176 ad radium 250	
282. 8.	sunt	sunt bini	
18.	naturalem	superiorem	
	ea	ea ante ipsos	
284. 1.	55' ante initium	ad 0.55'	
	divisionis		
291. 22.	23°. 31' = 1411'	22°. 31' = 1351'	
24.	1.79....1.73	1.72....1.70	
292. 11.	1.79	1.72	
18.	0.97	1.02	
19.	1.64 1.39	1.69 1.47	
294. 7.	44	47	
30.	OQS	OQR	
36.}	$a - b$	$b - a$	
37.}			
295. 27.	$a = 0$	$x = 0$	
28.	$b + r$	$b + r$	
297. 2.	$\frac{\sin. a}{m \sin. x}$	$\frac{m \sin. x}{\sin. a}$	
34.	79	86	
298. 17.}	$\frac{\sin. b - x}{\cos. b - x} X d x$	$\frac{\sin. b - x}{\cos. b - x}$	
18.}			
300. 15.	$\frac{dM}{dm}$	$\frac{M - 1}{m - 1}$	
306. 16.	ad m	ad $d m$	
18.	: pro	, & EO = (m - 1) KF: pro	
19.	$\frac{OP}{m LG}$	$\frac{m OP}{LG}$	
20.}	$m d m$	$\frac{d m}{m}$	
21.}			
23.	ubi	ibi	
25.	$m d m$	$\frac{d m}{m}$	
309. 17.	unius	unicus	
311. 11.	DC	BC	

pag. lin.

312. 17. HL

318. 8. + x

320. 27. AM

323. 12. = 0

324. 26. 159

28. h' - k'

30. h'' - k'

325. 4. = b

326. 7. $\frac{1}{a} - 1$

325. } litterulis, ubicumque ad dexteram superpositum est,

326. } superpone'

327. 9. $\frac{m^3}{f^2}$

ubique pro ϵ

lege HK

+ 1

OM

&c. = 0

169

h' - k''

h'' - k'

= - b

$\frac{1}{a} - 1$

$\frac{m^3}{f^3}$

p



*Vidit D. Johannes Maria Vidarius Clericus Regularis S. Pauli,
& in Ecclesia Metropolitana Bononiæ Pœnitentiarius pro
Eminentissimo, & Reverendissimo Domino D. Vincentio
Cardinali Malvetio Archiepiscopo Bononiæ, & S. R. I.
Principe.*

Die 25. Junii 1766.

IMPRIMATUR.

*Fr. Josephus Maria Pettoni Vicarius Generalis Sancti Officii
Bononiæ.*

