

DH
323.5
P48
1921
Moll.

I-Petersen
~~594.301~~

DAS QUOTIENTENGESETZ

EINE BIOLOGISCH-STATISTISCHE
UNTERSUCHUNG

VON

CHR. PETERSEN

APR 14 1921
253814

KOPENHAGEN
BIANCO LUNOS BUCHDRUCKEREI
1921



Bitte von mir anfragen

DAS QUOTIENTENGESETZ

EINE BIOLOGISCH-STATISTISCHE
UNTERSUCHUNG

VON

CHR. PETERSEN
'''



KOPENHAGEN
BIANCO LUNOS BUCHDRUCKEREI
1921

THE HISTORY OF THE

REIGN OF
HIS MOST EXCELLENT
MAYESTY KING CHARLES THE FIRST

BY
JAMES HALL

1650

Vorwort.

WÄHREND meiner Schulzeit wurde beim Unterricht in der Mathematik fortwährend hervorgehoben, dass der Bevölkerungszuwachs in einer grossen Stadt oder in einem Lande nicht durch einfache Verzinsung, sondern durch zusammengesetzte Verzinsung berechnet werden sollte. Eine nähere Begründung davon erhielten wir nicht, wir nahmen es auf Treu und Glauben.

Und oftmals habe ich später meinen Schülern gegenüber selbst das nämliche wiederholt; ab und zu ist jedoch bei mir der Gedanke wachgeworden, ob diese Behauptung auch berechtigt sei; ein solcher Gedanke verschwand jedoch ebenso schnell wieder und kehrte erst zurück, wenn wir wieder zu demselben Pensum kamen. So ging es weiter, bis ich vor ein paar Jahren die Untersuchung der Frage in Angriff nahm und nun zufälligerweise bemerkte, dass das Gesetz von Zinseszinsen in polaren Koordinaten durch eine logarithmische Spirale dargestellt wird. Es war mir klar, dass dieses Bild nichts mit den tatsächlichen Verhältnissen zu schaffen hat, davon abgesehen dass es die Variation des Ausdrucks repräsentiert, und dennoch zeigte es sich in einem einzelnen Falle, dass die Spirale der stattfindenden Wachstumsbildung analog sei, nämlich bei der kleinen Süsswasserschnecke *Neritina fluviatilis*. Gleichzeitig hatte ich Gelegenheit, einige zweizeilige Gerstenähren mit einseitiger

Entwicklung zu beobachten, welche schöne Spiralen bildete, ungefähr wie die nicht sehr entwickelten Blütenstände von *Borrago officinalis*. Dieser Fall konnte von einem mathematischen Gesichtspunkt aus betrachtet werden, und dies führte zu der logarithmischen Spirale. Damit waren die Gedanken wachgerufen, die in dieser Arbeit weiter entwickelt worden sind.

BEOBACHTUNGEN UND MESSUNGEN.

Die Schneckenschale.

Die schalentragenden Mollusken verfahren im wesentlichen alle bei der Bildung der Schale in derselben Weise; doch bildet eine einzelne Familie eine Ausnahme.

Die Schale wird hauptsächlich von dem Mantelrand des Tieres gebaut, der, wie MOYNIER DE VILLEPOIX gezeigt hat, nach vornehin mit einer Rinne, der Mantelrinne, versehen ist, deren innerer Teil ein Epithel mit zylindrischen Zellen trägt; daraus wird eine organische Masse ausgeschieden, die eine äussere Bekleidung der Schale bildet und daher Periostracum genannt wird. Hinter dem Mantelrand liegt ein schmales Feld, dessen Zellen den Kalk ausscheiden, der die erste Unterschicht am Periostracum bildet. Hinter dem Feld liegen wieder Farb- und Kalkzellen für das fernere Wachstum und die Farbenzeichnung der Schale.

Betrachtet man eine solche Schale während des Wachstums etwas genauer, sieht man, Textfigg. 1, 2, dass das Wachstum stufenweise vorschreitet, und dass sich während desselben an der Schale eine sehr grosse Reihe von

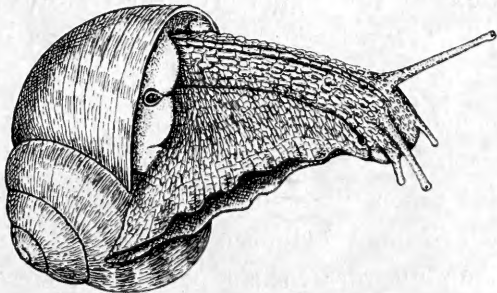


Fig. 1. (Nach C. M. Steenberg).

dicht aufeinander folgenden Zuwachsrändern absetzen, die oft so unmerkbar sind, dass sie sich erst bei Vergrößerung zu erkennen geben. Gleichzeitig mit dem Wachstum des Tieres wird längs der inneren Seite des Saumes der Columellarmuskel hervorzunehmen, indem er durch eine stärkere Entwicklung an der Vorderseite als an der Rückseite seinen

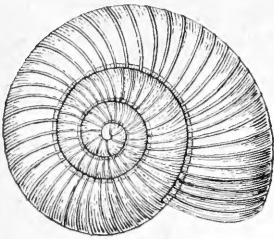


Fig. 2. (Nach C. M. Steenberg)

Anheftungspunkt an die Schale verschiebt. Indem das Tier hervorzunehmen, macht es zugleich eine Drehung um die Schalenachse, und dadurch entsteht nun der oft überaus schöne Spiralbau, der namentlich am Saume hervortritt, aber auch in der Skulptur und Farbbezeichnung der Schale einen Ausdruck findet. In vielen Fällen sind die Windungen des Saumes so regelmässig, dass sie parallel verlaufen; gegen die Mündung hin kann aber recht plötzlich eine Herabbeugung entstehen, wie sie sich bei unseren Helixarten zeigt. Bei zylindrischen Familien ist das Verhältnis dagegen etwas abweichend, indem die Windungen an der Spitze der Schale fast winkelrecht zur Schalenachse sind, gegen die Mündung hin aber mit derselben immer kleinere Winkel bilden. Das Tier muss sich daher während des Wachstums immer mehr längs der Achse richten.

Betrachtet man eine solche Schale wie die der *Terebra dimidiata*, Taf. 2 Fig. 6, sieht man, dass die Spindel schwach nach aussen gebogen ist, aber es finden sich oft Individuen, bei denen die Spindel vollkommen kegelförmig ist, und bei denen die Windungen sogar bei Messung ganz bis an die Mündung der Schale parallel sind. Ein solches Tier wird daher während seines Wachstums die Kon-

formität bewahren. Man bemerkt zugleich die Zeichnung der Schale, an der die weissen Linien stets wiederkehren, aber mit gleichmässig wachsender Entfernung voneinander. Dies zeigt, dass das Tier die Farbe periodisch ausscheidet und mit der Farbenlegung zwischen den Perioden ganz aufhört, ohne dass dies sich am Wachstum der Schale zu erkennen gibt. Bei allen Terebra-Arten findet sich zugleich eine oder mehrere Versenkungen, die dem Saume parallel verlaufen und von einem regelmässigen Relief begleitet werden.

Während die glatten Formen selten einen bestimmten Rand aufweisen, an dem das Tier längere Zeit hindurch den Zuwachs aufgegeben hat, verhält es sich ganz entgegengesetzt bei Familien wie *Cassis*, *Triton*, *Murex* u. s. w. So zeigt Taf. 2 Fig. 1 eine *Ranella nodulosa*, die bei jeder halben Umdrehung die Schale mit einem dicken Rand versieht. Es entsteht dadurch ein periodischer Anbau, der durch eine Drehung von 180° bemessen wird. Etwas anders sieht es aus bei *Ranella granifera*, Taf. 2 Fig. 2; hier beträgt die Periode gleichfalls 180° , aber die Mundränder legen sich wie Leisten, die praktisch betrachtet parallel sind, und deren Endpunkte an den Schenkeln eines Winkels liegen.

Bei der Familie *Murex* ist dieses Verhältnis noch stärker ausgesprägt und weist eine Reihe verschiedener Perioden auf, von denen unsere Figuren Taf. 1 Figg. 1, 3, 6 beispielsweise 45° , 60° und 120° anführen.

Wie verläuft ein solches Wachstum?

Wenn das Tier nach einer Wachstumsstockung mit dem voll entwickelten Rande weiterbauen soll, wird das Periostracum innerhalb des Randes angebracht, und die Schale wird darauf ganz in derselben Weise gebildet wie bei

unseren Helixarten. Während des Wachstums löst das Tier die Stacheln und sonstige Unebenheiten auf, die den Weiterbau verhindern, und wenn die Schale um soviel vermehrt worden ist, wie einer Periode entspricht, stockt das Wachstum, indem sich eine Falte bildet. Der Mantel, der bisher längs des Schalenrandes geruht hat, wird mit einzelnen von seinen Teilen in Richtungen hervorgeschoben, winkerecht zur Schalenfläche, jedoch oft zugleich von zurückgebogenem Charakter, und dadurch entstehen die Stacheln, die wie die Schale an einem Periostracum angebracht werden. Nach und nach wird die rundartige Hohlheit der Stacheln nebst der Falte mit Kalk gefüllt, bei einigen Arten teilweise, bei anderen vollständig, und damit ist die Periode abgeschlossen.

Form und Skulptur der Schale entstehen daher in etwas verschiedener Weise: die Form durch eine normale Führung des Mantels, durch die die Grösse des Tieres bestimmt wird, und die Skulptur durch ein Strecken oder Zusammenfallen, das für die ausgestreckte oder zusammengefaltene Grösse des Tieres massgebend ist. Letztere bestimmt selbstverständlich auch die Grösse des Tieres, darf aber nicht mit ersterer zusammengestellt werden, da man dadurch denselben Fehler begehen würde, wie wenn man die Höhe eines Menschen einmal, wenn er auf dem Fussblatt, ein anderes Mal, wenn er auf den Zehen steht, messen würde.

Wir sehen aus diesen Beispielen, wie überall im Konchylienreiche, dass die Tiere in Perioden wachsen, die durch konstante Winkeldrehung um die Schalenachse gekennzeichnet werden, während die Entfernungen zwischen den Zuwachsrändern harmonisch wachsen.

Oft tritt diese Periodizität mit grosser Regelmässigkeit auf; sie kann aber doch bei Familien mit dicht aufeinander

folgenden Zuwachsrändern einige Abweichung aufweisen, das Tier bewahrt aber doch immer ein Bedürfnis, wieder in die Periode hineinzufallen.

Es ist somit notwendig, für das Studium die regelmäßigen Tiere zu benutzen, da anzunehmen ist, dass sie sich unter dem geringsten fremden Einfluss entwickelten und daher das zuverlässigste Bild von dem tatsächlichen Wachstum des Tieres darbieten.

Da die Spindel der Schale, d. h. der Teil, der sich von ihrer Spitze bis an die letzte Windung erstreckt, ein vorzügliches Bild vom Wachstum darbietet, wollen wir diese etwas genauer untersuchen und wählen dazu durch die Bank eine Reihe von Conusarten. Erst muss jedoch angeführt werden, dass die Unveränderlichkeit des Spindelbaues, welche die Klassiker gefunden zu haben meinten, und die als unabänderliche Forderung bei der Bestimmung der Arten aufgestellt wurde, keineswegs statthat, ja dass grosse Mengen von Arten verschwinden und in die Kategorie der Varianten verwiesen werden, allmählich wie diese Verhältnisse den Konchyliologen klar werden.

Bei Conus finden sich alle Spindelformen: ebene, kegelförmige, konkave und konvexe, ferner solche, die entstehen, wenn diese reinen Formen ineinander eingreifen und Kombinationen bilden. Diese Zusammenstellungen sind selten das Kennzeichen einer bestimmten Art oder Unterfamilie, sondern treten mit mehr oder minder ausgesprochenem Charakter bei Varianten auf, und zwar meist bei solchen, die von der Hauptlokalität der Art abgekommen sind; so bei Conus und Cypraea aus dem Mittelmeere, die im Laufe der Zeiten längs der Westküste von Afrika gewandert sind, verglichen mit ostamerikanischen und westindischen Varianten, die in einer unbegreiflichen Weise über den Atlan-

tischen Ozean gelangt sind, oder bei der eigentümlichen japanischen Abart von *Cypraea spurca*, die mit einem ihrer Charaktere auf das Mittelmeer, mit anderen aber auf Madagaskar und die westindischen Inseln hinweist, u. s. f.

Wie verschieden die Spindel sich gestalten kann, davon erhält man eine Vorstellung, wenn man die Figuren von *C. acuminatus* Taf. 2 Figg. 3, 4, 5 und *C. anemone* Taf. 1 Figg. 2, 4 betrachtet. Fragt man nun, wie lokale Verhältnisse einen solchen Einfluss auf die Form der Spindel und der Schale im allgemeinen erhalten können, so bietet sich uns darüber kein Anhalt dar, da bisher niemand mit Erfolg in dieses Mysterium einzudringen gesucht hat; es scheint doch, als ob die Ursachen, die — sozusagen — das Tier zum Umschlagen veranlassen, nicht in der Richtung von aussen nach innen hin, sondern in der entgegengesetzten Richtung zu suchen sind, denn die Eigentümlichkeiten des Umschlages weisen stets von der betreffenden Art nach Eigenschaften hin, die bei nahestehenden Arten oder Untergruppen vorherrschen, wie er auch ab und zu an der Hauptlokalität selbst vorkommt. Neue Lokalitäten erhalten somit einen mehr passiven Einfluss, indem sie den Umschlag festhalten, wenn er stattgefunden hat. Dies setzt eine sehr weitreichende Empfänglichkeit bei diesen Tieren voraus, in Verbindung mit einer grossen Variabilität; alles deutet aber darauf hin, dass eine solche vorhanden ist.

Ein einzelnes Beispiel veranschaulicht diese Verhältnisse; in Taf. 1 Fig. 7 ist *C. nocturnus* eine typische Art der Unterfamilie *Conus*, während die Abart *C. Deburghiae*, Taf. 1 Fig. 5, Charaktere aufweist, die sich an die Unterfamilie *Stephanoconus* anschliessen; dass es dasselbe Tier ist, geht aus Zwischengliedern hervor, die fast unmerkliche Übergänge bilden.

Wie gezeigt wurde, kann die Spindel der Conusarten eben sein; dies gehört aber zu den Ausnahmen, und wir befinden uns der einen Äusserlichkeit gegenüber, andererseits wird sie nie so hoch, dass sie $\frac{1}{3}$ der ganzen Schalenlänge übertrifft; wünscht man das entgegengesetzte Verhältnis zu finden, muss man daher andere Familien betrachten wie *Triton*, *Cerithium*, *Terebra* oder *Turritella* u. s. w., bei denen die letzte Windung oft nur $\frac{1}{7}$ oder weniger von der Schale ausmacht. Es sind somit solche Schalen, die sich in vorzüglichem Grade für metrische Untersuchungen eignen.

Es könnte als natürlich erscheinen, dass das Wachstum des Tieres und der Schale im gleichen Schritt verläuft, so dass kleine Zuwüchse des Tieres von entsprechenden Vermehrungen der Schale begleitet werden. In vielen Fällen bestätigt dies sich, wie früher angeführt, aber nicht in der Periode, in der das Wachstum ein sehr starkes ist, wie im Mai und Juni bei unseren Helixarten. Im Gegenteil deuten verschiedene Verhältnisse darauf, dass das Tier eine Zeit lang stark wächst, so dass es fast die Schale anfüllt, während gleichzeitig der Columellarmuskel seine Anheftestelle verschiebt, und man kann nun, je nachdem man die Schale oder das Tier als Ausgangspunkt betrachtet, davon reden, dass das Tier sich in der Schale vorschiebt, oder dass diese vom Tiere zurückgeschoben wird; dies scheint allerdings ein Spiel mit Worten zu sein, bekommt aber im Folgenden eine reale Bedeutung. Wenn dieses Wachstum des Tieres abgeschlossen ist, kann im Laufe kurzer Zeit ein sehr bedeutender Teil an die Schale angebaut werden, wie unsere Helixarten wieder zeigen, indem in wenig Tagen über $\frac{1}{2}$ Windung gebildet werden kann, die dafür aber papierdünn und durchsichtig ist. Es ist natür-

lich, dass bei dem Wachstum des Tieres und dem Weiterbau der Schale ein so bedeutender Verbrauch stattfindet, dass eine Teilung eintreten muss.

Während der Bildung der Schale wird der kohlen saure Kalk nebst dem Konchyolin stossweise ausgegossen und nicht als ebenmässige und ununterbrochene Aussickerung. Diese Ausgiessungen müssen doch recht unmittelbar aufeinander folgen, da die Schalenanatomie zeigt, dass sich gar auf einem Bruchteil von einem Millimeter viele Lagen finden. Ferner zeigt das Studium des Inneren der Schale — namentlich solcher Arten, bei denen der Mantelrand gleichzeitig am Periostracum und an der Schalenkante Kalk ablagert, d. h. Familien, die stets rundrandig sind — ein so regelmässiges Wechseln von durchsichtigen und kalkartigen Lagen, dass die Regelmässigkeit einen rhythmischen Charakter annimmt, ungefähr wie man es sieht, wo eine Kristallisation in einem kolloiden Häutchen entsteht.

Diese Verhältnisse treten besonders hervor bei den *Nerita*-Arten, namentlich *Nerita polita*, lassen sich aber mehr oder minder bei allen Mollusken nachweisen und leiten somit den Gedanken darauf hin, dass die Entwicklung des Wachstums sowie die Absonderung des Schalenmaterials in ausgesprochener Periodizität von statten geht.

Während der Mantel — wie früher erwähnt — während des allgemeinen Wachstums der Schale eine bestimmte Stellung längs des Randes der Schale einnimmt und daher unter diesen Verhältnissen annehmbar seine normale Grösse hat, ist es bekannt, dass die Tiere imstande sind, den Mantel sogar recht bedeutend auszustrecken, oft in dem Masse, dass die ganze Schale überdeckt wird, wie bei den *Cypraea*-Arten. Diese Ausstreckung ist selbstverständlich

grösser, wenn das Tier erwachsen ist, als wenn es noch jung ist, und die Murexgruppe zeigt uns durch ihre Stacheln und Ausläufer, dass sie regelmässig und gleichmässig wächst. Die Konformität der Schale bei solchen Familien erhält daher eine rhythmische Unterbrechung am Zuwachsrande, während sie bei Familien wie *Terebra* aufrechterhalten wird.

Die Falte, die bei Murex entsteht, wenn die Randbildung stattfinden soll, ist parallel mit dem Schalenrand, es gibt aber viele Familien, bei denen die Falte senkrecht zum Schalenrand ist, weshalb der Mantel notwendigerweise gefaltet werden muss, und es entsteht dann, wie bei Puppä, eine Verengerung der Schale gegen die Mündung hin. Die Schale erhält dadurch die Form, die der Familie ihren Namen verliehen hat. Geschieht die Verengerung allmählich während des Zuwachses, wird die Schale, wie die Clausilien zeigen, spindelförmig werden. Man kann daher nicht aus einer solchen Schale schliessen, dass das Tier an Wachstum abnimmt, sondern dass eine neue Führung des Mantels die Ursache zur Verengerung der Schale ist. Dies zeigt, dass man die Form der Schale nur mit grosser Vorsicht als Ausdruck eines Wachstums betrachten darf.

Der Schneckendeckel.

Wenn die Schnecke sich in die Schale hineinzieht, ist sie gegen äussere Angriffe und drohende Gefahr geschützt; nur längs der Schalenmündung bietet sich eine Schwäche dar. Man findet daher die Mündung oft in der Weise gebaut, dass sozusagen auf diese Blösse Rücksicht genommen ist, indem einige Familien das Schalenwachstum abschlies-

sen, indem sie die Mündung bis auf eine schmale Spalte verengern, wie die Cypraeafamilie, während andere den rundartigen Charakter bewahren, die Mündung aber mit Wülsten und Falten ausstatten; oft sind die Schalenwindungen sehr zahlreich und verhältnismässig schmal wie bei Conus und Planorben, so dass das Tier sich sehr tief in die Schale hineinziehen und dort ein sicheres Versteck finden kann. Ist die Mündung dagegen offen, richtet sich die Natur in anderer Weise ein. So findet man *Chiton*, *Fissurella*, *Patella* und vielfältige andere Familien an Felsen und Steinen sitzen, an die sie sich bei der geringsten Berührung festsaugen; die Schale und die Unterschicht bilden dann ein Ganzes, durch das das Tier ganz abgeschlossen wird. Allgemein ist es jedoch, dass die Meeresmollusken mit Deckeln von derselben oder von ähnlicher Substanz versehen sind wie die der Schale.

Der Deckel sitzt an der oberen Seite des hinteren Teils des Fusses und bietet zwei verschiedene Typen dar: der eine davon, patelliform, wächst, indem Material längs der ganzen Kante abgelagert wird, wodurch die Schale aus konzentrischen Ringen aufgebaut wird, die kreisförmig oder teilweise elliptisch sind; der andere, cochleiform, bei dem nur längs des Randes Material abgelagert wird; dadurch entsteht eine spiralförmige und oft vollständig ebene Schicht. Letztere Form, die sich bei mehreren unserer Land- und Salzwasserschnecken findet, ist von besonderem Interesse für unsere Untersuchungen, weshalb wir sie etwas näher betrachten wollen, sowohl in betreff ihrer Entwicklung wie ihres Vorkommens. Das Studium wird uns zeigen, wie die Natur in überraschend einfacher Weise eine Spirale von bestimmtem Charakter herstellt. Die Schale wird, wie im vorigen Abschnitt angeführt, aus dem Mantelrand des Tieres

gebildet; wie aber der Deckel entsteht, darüber hat man sich viele Jahre hindurch gestritten und die Meinungen ausgetauscht. Einige Naturforscher meinten, dass der Deckel aus denselben Teilen gebaut wird wie die Schale selbst, andere, dass die Bildung von gewissen Teilen des Fussepithels herrührt. Unter diesen Verhältnissen schrieb FRÉDÉRIC HAUSSAY seine Dissertation: *Recherches sur l'opercule etc.* 1884, in der er seine Ansicht klarlegte und zu dem Resultat kam: Der Deckel wird aus einem besonderen Epithel längs des Randes gebildet. Durch diese Auffassung scheint das Studium nunmehr befriedigt zu sein, und der eigentümliche Bau des Deckels lässt sich auch tatsächlich nur auf diesem Hintergrund erklären; zu leugnen ist jedoch nicht, dass uns noch eine eingehende histologische Prüfung fehlt, die sich mit MOYNIER DE VILLEPOIX' Untersuchungen über die Bildung der Schale messen könnte.

Der innerste Teil des Deckels, Nucleus, der im embryonalen Stadium gebildet wird, hat oft keine Windungen, aber Spuren eines konzentrischen Baues, die darauf hindeuten, dass das ganze Epithel längs des Randes während dieser ersten Entwicklung wirksam war; darauf geht der Bau in eine Spiralenbildung über und setzt sich darin fort; aber das Umgekehrte kann auch stattfinden, wie ich es bei *Bithynia tentaculata* beobachtet habe, und was nicht bekannt zu sein scheint, da es sehr schwer ist, die Sache am erwachsenen Tier zu verfolgen, bei dem der Nucleus mit Kalk bedeckt ist. Diese Verhältnisse müssen jedoch näher untersucht und die Aufmerksamkeit darauf hingeleitet werden, dass möglicherweise beide Fälle vorkommen können. Der Gedanke bleibt vorläufig an 4 histologischen Typen haften; patelli-patelliform, patelli-cochleiform, cochlei-cochleiform und cochlei-patelliform.

Untersucht man eine Reihe cochleiformer Deckel, wird man finden, dass sie alle durch dieselbe Bauweise entstanden sind, davon unabhängig, ob die Schalenmündung OA , Fig. 3, eine Gerade, buchtig oder, wie bei Turbo, bogenförmig, ist; nur auf einem Gebiete besteht einiger Un-

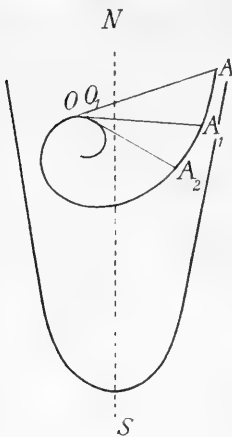


Fig. 3.

terschied, indem mehreren Familien der oft spindelförmige Dorn fehlt, den man z. B. bei *Nerita* und *Neritina* findet, und der hier den Deckel noch mehr an der Muskulatur befestigt. Doch derselbe hat nichts mit der Bauweise zu tun.

Die Aufklärung, die man in der Weise aus dem Studium der isolierten Schale gewinnt, muss jedoch in grösstem Masse durch Studien an lebenden Tieren vertieft werden, da erst Kenntnisse der Lageverhältnisse und Stellung uns in den Stand setzen, die Sache voll-

ständig erwägen zu können. Ich habe daher *Neritina fluviatilis* untersucht, die einen vorzüglichen Stoff für die Forschung abgibt, sowohl wegen des übersichtlichen Schalenbaues als durch ihr Vorkommen, und weil sie so leicht zu haben ist.

Sich auf die Figuren (Fig. 3) stützend, wird man finden:

1. Der Deckel wird von den Sektoren OAA_1 , $O_1A_1A_2$ u. s. w. aufgebaut, die so dicht aufeinander folgen, dass sie nur durch Lupe oder Mikroskop voneinander zu unterscheiden sind; an einzelnen Stellen tritt aber die Markierung deutlicher hervor und ist ohne Hilfsmittel ersichtlich; solche Teile geben die jährliche oder eine sonstige grössere Wachstumsperiode an.
2. Die Richtung AO ist fortwährend dieselbe, da sie mit

der Achse des Fusses NS einen konstanten Winkel bildet, sei das Tier nun jung oder alt, sei es Frühjahr, Mittsommer oder Herbst; daraus folgt aber, dass die Schale sich während des Wachstums in derselben Richtung drehen muss wie die Zeiger einer Uhr, oder dass die Schale still liegt und das Tier sich in entgegengesetzter Richtung um sie dreht. Beide Auffassungen lassen sich mit demselben Recht verfechten; da aber der Deckel im Verhältnis zum Tiere klein ist, redet man von der Drehung des Deckels.

Wir sind nun imstande, von dem Wachstum und der Bildung des Deckels ein zusammenhängendes Bild zu geben.

Die Unterseite des Deckels ist an die Endfläche eines kräftig gebauten Muskels festgewachsen, der in derselben Weise wie der Columellarmuskel — hier — längs der Spirale hervorwächst, in der Weise, dass das Epithel, welches den Kalk ausscheidet, wenn der Muskel sich von O_1 nach O bewegt, von der Länge O_1A_1 bis auf OA wachsen wird u. s. f., das heisst, dass die Spirale durch eine Drehung und eine entsprechende Erweiterung der Mündung entsteht.

Unsere Untersuchungen schreiten nun weiter, indem wir fragen: nach welchem Gesetz gehen das Wachstum längs OA und die Drehung um den Muskel vonstatten? Es zeigt sich, dass die Beantwortung der ersten Frage die der zweiten mit sich führt, und dass diese Beantwortung, die sich leicht an dem Deckel dartun lässt, in noch höherem Grade an der Schale durch die konstanten Winkelverhältnisse des Mundrandes markiert wird, wie dies früher erwähnt worden ist.

Die graphische Methode.

Bei vielen Lebewesen, Pflanzen sowie Tieren, hat das Wachstum einen solchen Charakter, dass eine Reihe von Tatsachen übrigbleiben, aus denen man nicht nur auf das Alter des Individuums schliessen, sondern oft auch die Geschichte der Entwicklung in grossen Zügen ablesen kann. Diese Tatsachen nennen wir graphische Elemente; wir finden sie bei gewissen Familien und Arten in Hülle und Fülle, bei anderen in vereinzelt Zügen, und sie treten oft in so verschiedenen Phasen auf, dass man sie verwechselt oder übersieht. Somit ist eine methodische Forschung erforderlich, und eine solche suchen wir durch die graphische Methode zu fördern.

Die Elemente unserer Methode finden wir also in der Natur, wo wir sie durch Beobachtungen aufzuspüren haben, und es ist dann die Aufgabe der graphischen Methode, aus den Lageverhältnissen der Elemente auf ihren inneren Zusammenhang zu schliessen.

Das nähere Verständnis wird aus einigen Beispielen aus verschiedenen Gebieten erhellen.

Steht man vor einer grossen, wohlgestalteten Buche, erhält man den Eindruck eines langen, in Ruhe und mit den Umgebungen harmonisch übereinstimmend verlaufenen Lebens. Der Baum sagt uns nichts von den Stürmen, die über seinen Gipfel dahinfuhren, nichts von den heissen Sommern, deren Dürre sein Leben hemmte, auch nichts von den Zeiten, wo Insekten sein Laub verheerten. Er steht da als ein Ausdruck von dem, was er ist, und sagt nichts davon, wie er es wurde. Und dennoch erzählt er uns vielleicht, ob sein Leben in einem geschlossenen Bestande, von Nachbarn eingeengt, verlaufen ist, oder ob er seine Krone hat frei entfalten und seine Zweige frei hat

aussenden können. Erst wenn er durch die Axt gefallen ist und die Säge ihren Schnitt durch seinen Stamm gelegt hat, verrät die innere Struktur uns die Geschichte des Baumes. Die Buche gibt uns durch ihre äussere Gestalt nur eine geringe Vorstellung von ihrem Lebenslauf.

Was die Buche verhüllt, teilt die Fichte offen mit. Nicht selten wechseln die Entfernungen zwischen den Absätzen, von dem Wurzelende gleichmässig zunehmend, nach oben hin mit so grosser Regelmässigkeit, dass wir ein Bild von grosser harmonischer Wirkung erhalten. Der Baum offenbart also nicht nur sein Alter, sondern auch die Art und Weise seines Wachstums und macht unter solchen Verhältnissen den Eindruck einer ungestörten Laufbahn.

Sehr oft wird aber dieses friedliche Gesamtbild dadurch gestört, dass eine Entfernung zwischen den Absätzen plötzlich zu gross oder zu klein ist und von störenden Ursachen erzählt, die vielleicht vor vielen Jahren das Wachstum prägten. Danach verläuft es wieder ruhig, und die Entfernungen treten wieder in gleichmässiger Fortsetzung auf, bis sie aufs neue von fremden Einflüssen gestört werden.

Solange man das einzelne Individuum für sich betrachtet, ist man im allgemeinen ausserstande, die Natur der Ursache anzugeben. Erst wenn man die ganze Anpflanzung ins Auge fasst, treten die Unregelmässigkeiten hervor, oft als allgemeine, nicht selten als individuelle Unregelmässigkeiten, und die Zeitläufte entrollen sich unserem Blick als gute und schlechte Wachstumsperioden, als Jahre, in denen Insekten und Pilze sich über den Wald hermachten, ohne doch alles abzufressen.

Die Fichte gibt uns also eine graphische Vorstellung ihrer Wachstumsweise.

Gehen wir von den Bäumen zu den krautartigen Pflan-

zen über, so treten die graphischen Verhältnisse wieder hervor, bald durch den Blütenstand wie bei den Rauhbüchsen, bald durch die gegenseitige Stellung der Scheibenblumen bei den Korbblütlern u. s. w.

Was wir bei den Pflanzen finden, spiegelt sich auch im Tierreich wider. — Das Alter der zahmen Kuh lässt sich an den Ringen der Hörner ablesen, und eine eingreifende Störung während des Wachstums des Tieres hat oft eine unregelmässige Bildung der Ringe zur Folge.

Das getafelte Haushuhn weist an seinen Federn ein sehr regelmässiges Wechseln von dunklen Zeichnungen auf, welche dartun, dass das Farbpigment während des Wachstums der Federn periodisch gebildet wird. Fehlt eine Zeichnung, oder hat sie einen abweichenden Charakter, so schliesst man auf einen störenden Einfluss. Die Feder gibt uns also eine graphische Darstellung von gewissen Verhältnissen des Tieres.

Auch das Studium der Schuppen der Fische führt uns auf das graphische Gebiet hinein, indem die Wachstumsränder Alter und andere Verhältnisse offenbaren.

Zuletzt, aber nicht zum wenigsten, nimmt die Schale der Weichtiere unsere Aufmerksamkeit in Anspruch, in unserem Falle die der Schnecke, die uns die schönste graphische Darstellung, die sich in der Natur findet, darbietet; bevor wir aber weiter gehen, wollen wir doch diese graphischen Elemente etwas näher besprechen und namentlich ihren Wert als Grundlage für wissenschaftliche Schlussfolgerungen untersuchen.

Die Botanik hat das Gesetz, dass die Bäume mit senkrechtem Stamm wachsen, und die Berechtigung dieses Gesetzes wird aufrechterhalten, auch wenn man Individuen trifft, deren Stamm schräge ist, indem man dann irgend

eine Ursache der Abweichung einschaltet. Das Gesetz ist somit kein Ausdruck des Absoluten, sondern des Allgemein-vorkommenden.

Wenn wir hier z. B. von gleich grossen Winkeln zwischen den Ästen desselben Baumes sprechen, so ist damit nicht gemeint, dass die Grade sich gleichmässig beziffern sollen, was aus dem einfachen Grunde unmöglich ist, dass der Winkel nicht zwischen 2 Linien gemessen wird; wir sind zufriedengestellt, wenn eine Deckung ergibt, dass es sich stets um eine kleine Abweichung handelt, die geneigt ist, über und unter eine gewisse mittlere Lage zu schwanken. Ist aber eine Deckung unmöglich, wie bei den Schalen der Mollusken, so ist eine andere Beurteilung anzuwenden, deren Wert nicht geringer ist, und eine solche hat man an der gegenseitigen Lage der Winkel.

Das Auge vermag nur mit grober Annäherung die Gleichgrossigkeit zweier Winkel zu entscheiden, die in beliebiger Lage zueinander auf ein Stück Papier gezeichnet werden; haben aber die Winkel gemeinsamen Scheitelpunkt und den einen Schenkel gemein, d. h. dass der Schenkel die Halbierungslinie des doppelten Winkels ist, so ändert sich die Sache bedeutend.

Dazu kommt noch eine Korrektion von graphischer Natur, die wir später besprechen werden, und die uns in den Stand setzt, sogar die Zahlengrösse des Winkels abzuschätzen. Können die Winkel nicht in der Weise angebracht werden, dass der Vergleich erleichtert wird, darf man sie nicht als graphische Elemente anwenden.

Auch den Parallelismus zweier Linien entscheidet das Auge mit guter Annäherung, da Versuche dartun, dass eine Drehung der einen Linie von Divergenz zur Konvergenz oder umgekehrt sofort erkennbar ist. Im ganzen genommen

hat das Auge eine gewisse Neigung, leichter eine Verschiedenheit als eine Gleichheit zu entdecken, man muss sich aber erinnern, dass die Grenzen der Verschiedenheiten eben die Gleichheit bestimmen.

Wir haben die beiden Begriffe genannt, Winkelgleichgrossigkeit und Parallelismus, die die Grundlage unserer weiteren Studien bilden werden, und wir wollen nun mittels einiger Figuren einige Schlüsse ziehen.

Den ersten gestalten wir folgendermassen: Wenn eine Reihe von linearen, graphischen Elementen $AB, A_1B_1, A_2B_2 \dots$ parallel und wie in der Figur (Fig. 4) gezeigt

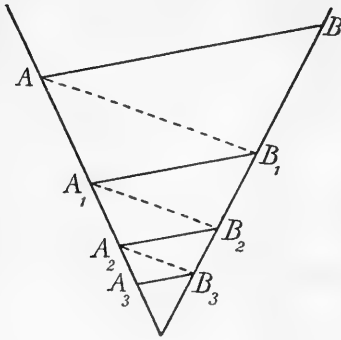


Fig. 4.

gelegenen sind, bilden sie eine Quotientenreihe, wenn $AB_1, A_1B_2, A_2B_3 \dots$ parallel sind.

Wenden wir diesen Satz auf Tafel 2 Fig. 6 an, hat man, da die Windungen des Saumes parallel sind, welche Seite auch dem Beobachter zugewendet ist, dass die Windungen und die Stücke, die von

jedem beliebigen Erzeuger abgeschnitten werden, Quotientenreihen bilden. Wird der Satz auf die Figg. 1, 2 Taf. 2 angewendet, sieht man zugleich, dass die Mundränder eine Quotientenreihe bilden.

Oft liegt eine Reihe von Punkten A, B, C, \dots an dem Saume einer kegelförmigen Schale — die Punkte können Farbflücke oder die Kante von Wachstumsrändern sein — in einer solchen Weise, dass $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD \dots$, wo O die Spitze der Schale bezeichnet; dann ist aber $\triangle AOB \sim \triangle BOC \sim \triangle COD \dots$, da die Windungen konstant ansteigen.

Wenn der Scheitelwinkel des Kegels wie an den Deckeln gegen 180° hin wächst, ist das Polygon $ABCD \dots$ ein logarithmisches Polygon, das wiederum in eine logarithmische Spirale übergeht, wenn A, B, C, D, \dots konsekutiv sind. Dadurch erhalten wir unseren ersten Hauptsatz:

Der Saum des Deckels bildet eine logarithmische Spirale, und der Saum einer kegelförmigen Schale wird senkrecht zur Achse als logarithmische Spirale auf eine Ebene projiziert.

Wenn eine Reihe aufeinander folgender Mundränder wie Taf. 1 Figg. 1, 3, 6 gezeigt gelegen sind, müssen sie, wie früher erwähnt, durch gleich grosse Drehungen um die Schalenachse entstehen.

Die Gleichgrossigkeit der Winkel wird dadurch dargestellt, dass ein Mundrand den Winkel zwischen den vorhergehenden und den nachfolgenden Mundrändern halbiert. Auch übereinander gelegene Mundränder entstehen durch gleichgrosse Drehungen und bieten somit eine Korrektur der erstgenannten Winkel dar. Aus dieser Gleichgrossigkeit folgt aber:

Wenn Mundränder, die einander gegenüber gelegen sind, auf eine Ebene, winkelrecht zur Schalenachse, projiziert werden, werden die entsprechenden Punkte Winkelspitzen eines logarithmischen Polygons abgeben, das, wie in Taf. 2 Fig. 1, auf eine Gerade reduziert wird.

Das Gesamtergebnis in betreff kegelförmiger Schalen ist somit:

Wenn eine Molluske nebst der Schale wächst, wird der Saum jeder Periode, d. h. jeder konstanten Winkeldrehung, Vergrösserungen annehmen, die eine Quotientenreihe bilden.

In meinen Untersuchungen über die Charakterzeichnungen von *Conus* hat es sich gezeigt, dass diese höchst interessante graphische Elemente bilden, welche zu einer Reihe von Schlussfolgerungen über die »Wanderung« der Farbzellen Veranlassung geben. Hier soll nur kurz Folgendes angeführt werden:

Wenn eine Linie AB , Fig. 5, sich gleichmässig gegen O , senkrecht zu ihrer Richtung, hin bewegt und die beiden

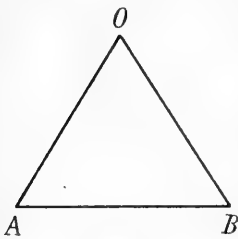


Fig. 5.

Punkte also bzw. AO und BO beschreiben, müssen sie sich mit der gleichen Geschwindigkeit gegeneinander bewegen, wenn das Dreieck ein gleichschenkliges ist; ist das Dreieck ungleichseitig, so sind die Geschwindigkeiten verschieden. Wenn die Wege von A und B parallel sind, bewegen beide sich in derselben Richtung und mit gleich grossen Geschwindigkeiten.

Nun weisen die Schalen sehr oft solche dreieckigen Figuren auf, die mit einer Genauigkeit gezeichnet sind, die dem Vermögen eines mit Zirkel und Lineal arbeitenden Zeichners entspricht. Ferner ist $\angle O$ fast gleich gross bei demselben Individuum, während er von Individuum zu Individuum schwankt. So wiesen 2 *Olivae porphyriae* Winkel von 45° und 60° auf, die, wenn wir die Geschwindigkeit von AB gegen O hin als Einheit wählen, für A und B längs AB die Geschwindigkeiten

$$\sqrt{2} \div 1 = 0,414 \quad \text{und} \quad \frac{1}{3} \sqrt{3} = 0,577$$

ergeben.

Das Endergebnis ist somit, dass die »Wanderung« der Farbzellen längs des Mantelrandes des Tieres dem Wachstum der Schale proportional ist und sich im Verhältnis dazu bestimmen lässt.

Kehren wir wieder zu unseren Erwägungen zurück. Wenn die graphischen Elemente sich in einer weniger regelmässigen Folge gruppieren, wie in Fig. 6 gezeigt, so ist man ausserstande, die Lage zu weiteren Schlussfolgerungen zu benutzen. Die Fälle sind jedoch nicht ganz zu übergehen, sondern man hat zu untersuchen, ob man nicht einer Variation mit ihren Ausläufern gegenüber steht. Man muss eine grosse Menge von Individuen untersuchen, die sich unter gleichartigen Verhältnissen entwickelt haben und somit

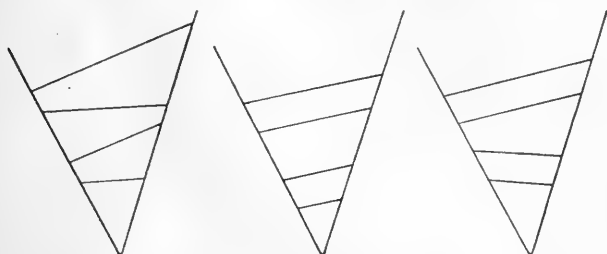


Fig. 6.

in beschränkter Örtlichkeit aufzusuchen sind. Die Force der graphischen Methode liegt hier wiederum darin, dass sie einen Überblick über ein Material und einen — vielleicht vorläufigen — Begriff von dessen Brauchbarkeit und Wert darbietet.

Die Unregelmässigkeit, welche die erste Skizze in Fig. 6 aufweist, kann individuell und somit ein Ausschlag einer Zufälligkeit sein, es finden sich aber Familien, deren Charaktere konstant sind, indem der Saum gekräuselt oder wellenförmig ist. Wo eine solche Wellengestaltung eine grössere Ausdehnung von Welle zu Welle hat, wird das Ansteigen des Saumes eine rhythmische auf- und abwärtsgehende Richtung haben, so dass der Parallelismus nur für jede zweite Windung gilt, wie dies deutlich bei der

Tritonfamilie hervortritt. Aber auch in solchen Fällen wahrt die Schale durch die Lage der Mundränder und die Gleichgrossigkeit des Drehungswinkels ihr konformes Wachstum mit ausgesprochener Proportionalität des Baues, d. h. sie stellt eine Quotientenreihe dar, die sich nur nicht durch die Windungsbreiten längs eines Erzeugers an der Schalenfläche, sondern längs der periodischen Schwingungen des Saumes, z. B. von Mundrand zu Mundrand, darstellen lässt.

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass die graphische Methode mit der Abschätzung nahe verwandt ist, welche sich da ergibt, wo die Statistik mit graphischen Darstellungen arbeitet, nur mit dem wesentlichen Unterschied, dass man in ersterem Falle die Elemente in ihrer gegenseitigen Lage in der Natur findet, während der Statistiker selbst seine Beobachtungen zu ordnen und zu einem Bild zusammenzustellen hat, das übersichtlich und bequem zu handhaben ist. Je mehr die Statistik auf Darstellungen abzielt, die mit der Natur übereinstimmen, je gleicher werden ihre Untersuchungen denen der graphischen Methode.

Es liegt somit nahe, der Statistik ihre graphische Darstellung zu entlehnen, wo es bequem ist, und sich nicht davon abschrecken zu lassen, dass unsere Elemente sehr oft durch fremden Einfluss aus ihrer eigentlichen Lage herausgebracht sein können.

Wir wollen also das Zerstreute sammeln — am liebsten in Übereinstimmung mit der Natur — und zu einem Gesamtbild in graphischer Gestalt aufbauen. Wo dies nicht tunlich ist, weil die Elemente verwischt, zerstreut oder ganz verschwunden sind, werden wir durch Zählen und Messen in die metrische Methode hineingeleitet.

Die metrische Methode.

Wir haben bereits früher mittels der graphischen Methode aussprechen können, dass die Windungsbreiten an kegelförmigen Schalen eine Quotientenreihe bilden. Es erhebt sich daher naturgemäss die Frage, ob man bei diesem Resultate stehen bleiben oder die Quotientenreihe in Zahlen auszudrücken suchen soll. Wenn die Untersuchung auf eine Feststellung der Existenz der Quotientenreihe abzielt, wird die graphische Methode vorzuziehen sein, da sie in geringerem Masse die zufälligen Variationen hervorhebt, die stets entstehen müssen, wo Lebewesen durch die Umgebungen beeinflusst werden. Andererseits ist es von grosser Bedeutung, die Variation der Quotienten von Individuum zu Individuum zu verfolgen, und wir sind dann auf eine Anstellung von Messungen verwiesen; dann geben die Zahlen — in der rechten Weise behandelt — eine Kritik der graphischen Methode ab.

Diese interessanten Verhältnisse werden durch einige Beispiele näher aufgeklärt.

Drei von den Fidschiinseln stammende Terebra-Arten von demselben Typus wie Taf. 2 Fig. 6 wurden gemessen und ergaben:

I	Quot.	II	Quot.	III	Quot.
12,6	1,26	14,8	1,23	15,5	1,24
10,0	1,25	12,0	1,23	12,5	1,25
8,0	1,23	9,75	1,25	10,0	1,25
6,5	1,27	7,75	1,25	8,0	1,27
5,1	1,24	6,2	1,24	6,3	1,21
4,1	—	5,0	—	5,2	—

Die Windungsbreiten sind in Millimetern angegeben und längs eines Erzeugers gemessen.

Diese Zahlen zeigen, dass sämtliche drei Schalen mit einer grösseren Genauigkeit, als zu erwarten war, längs Quotientenreihen verlaufen. Bestimmt man sodann die Hauptwerte der Zahlen, indem man Mittel, Variationskoeffizienten und Standard berechnet, so erhält man:

	M.	δ	v
I	1,250	0,014	1,1
II	1,240	0,010	0,8
III	1,245	0,018	1,5

Daraus geht hervor, dass die 3 Quotientenreihen gleich sind, wie auch dass die Stabilität, mit der die Tiere ihre Schale bilden, praktisch gesprochen, dieselbe ist.

Versuche, welche durchgeführt wurden, um geometrisch die Variation zu entdecken, welche die Zahlen ausdrücken, führten zu wertlosen Resultaten, indem Einstellungen unter dem Mikroskop zeigen, dass die Windungen parallel sind, wo man Abweichungen zu erwarten hatte, und umgekehrt divergieren, wo die Quotienten gleich gross sind. Man arbeitet also mit einem Gemisch von objektiven und subjektiven Abweichungen.

An einer grossen *Terebra maculata*, etwa 15,5 cm, wurden 3 Erzeuger gezeichnet, und längs derselben wurden die Windungsbreiten gemessen, was zu folgendem Resultat führte:

mm	Quot.	mm	Quot.	mm	Quot.
25	1,25	23	1,31	24,5	1,32
20	1,33	17,5	1,31	18,5	1,32
15	1,25	13,3	1,36	14	1,30
12	1,33	9,75	1,34	10,75	1,34
9	—	7,25	—	8	—

Die Windungsbreiten bilden also eine Quotientenreihe, deren mittlerer Quotient 1,31 mit einem Variationskoeffizienten von 2,5 ist, während die Quotienten längs eines jeden Erzeugers für sich die entsprechenden Grössen 3,1, 1,4 und 1,1 haben. Die 3 letzteren Zahlen zeigen, dass die Stabilität des Tieres, an einem beliebigen Erzeuger gemessen, nicht die gleiche ist; indessen sieht man sofort an erwachsenen Tieren, dass die letzte Windung und mitunter auch Teile der vorletzten Windung nicht den übrigen Windungen parallel sind, sondern nach oben hin gedrängt werden, so dass die Windungsbreiten an der Schalenmündung etwas kleiner werden, als wenn der Parallelismus ungestört wäre. Dies wirkt wiederum leicht auf den Quotienten ein, der geneigt sein wird abzunehmen, aber nur in ziemlich geringem Grade. Eine Messung an mehreren Exemplaren führt zu einer Reihe von Quotienten, die nicht immer ein so regelmässiges Bild abgeben, wie in unserem Beispiel, indem die Quotienten von der Schalenspitze an gegen die Mündung hin geneigt sind zu wachsen und dieses Wachstum mit der Bogenförmigkeit der Schale in Verbindung steht. Auf eine Untersuchung dieser Verhältnisse, zu der ein sehr grosses Material erforderlich ist, werden wir späterhin in einem besonderen Kapitel zurückkommen. Der Quotient bei der *Terebra maculata* ist durchgehends grösser als bei der vorhergehenden Art, deren Typus sich in geometrischer Beziehung stark dem des Kegels nähert.

Um nicht bei unseren eigenen Messungen und Versuchen stehen zu bleiben, werden wir von anderswoher Material heranziehen.

Ein Beispiel aus MOSLEY's grundlegender Abhandlung in den Philosophical Transactions 1838 zeigt Folgendes:

Turbo duplicatus.

Inches	Quot.	Quotientenreihe
1,31	1,15	1,31
1,12	1,19	1,1098
0,94	1,18	0,94018
0,80	1,19	0,79651
0,67	1,18	0,67476
0,57	1,19	0,57164
0,48	1,17	0,48427
0,41	—	0,41026

MOSLEY benutzt nun, indem er sieht, dass die Zahlen der ersten Kolumne sehr annäherungsweise eine Quotientenreihe bilden, die erste und die letzte Zahl der Kolumne in Verbindung mit der Summe sämtlicher Zahlen zur Aufstellung einer math. Quotientenreihe, deren Quotient durch $q = (s - a_n) : (s - a) = 1,1804$ bestimmt wird. So ergibt sich also die dritte Kolumne, deren viele Dezimalen überflüssig und sogar nur teilweise richtig sind.

Die Überschriften über den zwei Säulen, die wir der Vollständigkeit halber wiedergeben wollen, lauten: »Widths of successive whorls measured in inches and parts of an inch«, und »Terms of a geometrical progression, whose first term is the width of the widest whorl and whose common ratio is 1,1804«.

Die Koeffizienten sind hier, in Übereinstimmung mit unseren früheren Beispielen, hinzugefügt und finden sich nicht bei MOSLEY.

Die Kolumnen 2 und 3 ergeben sich also aus Kolumne 1, die die Beobachtungen und somit das Gemeinsame enthält; aber die daraus hergeleiteten Resultate bilden die Grundlage für verschiedene Gesichtspunkte. Die Kolumne mit den Quotienten zeigt, wie diese hin und her schwanken und

gibt uns somit eine Vorstellung von der Variation und deren Weite, die wiederum auf den Urheber der Schale, das Tier, hinweisen; aber MOSLEY'S Quotientenreihe bezeichnet mit ihren konstanten Quotienten das Stillstehende und somit Abgeschlossene. In seinem Innersten bezeichnet dies wiederum, dass MOSLEY'S Gedanke sich zwar mit physiologischen Verhältnissen der Schale befasst, diese sind aber in einem mathematischen System gebunden, bei dem die Mathematik das Wesentliche ist. Bei uns verhält es sich umgekehrt.

Zwei Jahre nachdem MOSLEY seine Untersuchungen mitgeteilt hatte, veröffentlichte C. F. NAUMANN in Poggendorffs Ann. der Physik und Chemie, Band 40, den Anfang seiner Messungen, aus denen wir beispielsweise Folgendes anführen:

Turritella multisulcata.

Gemessen	Berechnet	Quot.
33	33,0	1,37
24	24,7	1,33
18	18,5	1,33
13,5	13,8	1,29
10,5	10,4	—

Turritella terebellata.

Gemessen	Berechnet	Quot.
93	93,0	1,16
80	79,7	1,16
69	68,3	1,15
60	58,5	1,18
51	50,1	1,19
42	42,9	—

NAUMANN'S Quotienten sind bzw. $\frac{4}{3}$ und $\frac{7}{6}$, während die mittleren Werte der Quotienten 1,33 und 1,17 betragen, d. h. zwei Werte, die nur wenig von den NAUMANN'Schen Konvergenten abweichen. Die berechneten Reihen sind hier nach demselben Verfahren bestimmt worden wie bei MOSLEY, sollten aber mittels einer Ausgleichungsmethode hergestellt werden, die jeder Messung das gleiche Gewicht verleiht.

Ein drittes Beispiel aus derselben Quelle ist:

Cerithium rudum.

Gemessen	Berechnet	Quot.
43	43,0	1,23
35	34,4	1,25
28	27,5	1,27
22	22,0	—

NAUMANN'S Quotient ist $\frac{5}{4}$. Der mittlere Wert der Quotienten 1,25.

Wie in dem vorigen Falle wurde die 3. Kolumne hinzugefügt, damit man die Schwankung der Quotienten verfolgen könnte. Wir treffen hier wieder die empirische Reihe mit einer berechneten Quotientenreihe verglichen. Statt aber deren Quotienten mit genauem Werte oder wie bei MOSLEY durch Dezimalen anzugeben, zieht NAUMANN es vor, Konvergenten zu benutzen, die durch ihre kleinen Zahlen eine leichtere Berechnung der Quotientenreihe abgeben. Wir sehen doch — wie oben gezeigt — dass die Abweichungen sehr gering sind, da der mittlere Wert der Quotienten dasselbe Resultat ergibt.

Wie wichtig es ist, die einzelnen Quotienten aus den gemessenen Grössen zu berechnen, geht aus dem Beispiel von *Cerithium rudum* hervor. NAUMANN fasst nämlich, ohne näheren Nachweis, die Zahlen der ersten Kolumne als einen Ausdruck der Glieder einer Quotientenreihe auf, und der Vergleich mit der berechneten Reihe ist ebenso gut wie in allen übrigen Untersuchungen, die NAUMANN ausgeführt hat; aber nichtsdestoweniger muss die Methode mit grosser Vorsicht benutzt werden, indem zugleich zu verlangen ist, dass die einzelnen Quotienten ohne zu grosse

Schwünge hin und herschwingen; aber in diesem Falle weisen die Quotienten gerade ein ebenmässiges Steigen auf. Es fragt sich daher: Gehören die gemessenen Werte zu einer Quotientenreihe oder zu einer Reihe mit wachsenden Quotienten? Es mag eine individuelle Eigentümlichkeit der Schale sein, aber ebenso gut ein Ausdruck von etwas Allgemeinem. Die Messungen sind daher an einem grossen Material durchzuführen, so dass das individuelle Moment verschwindet.

In unseren Beispielen schwankt der Artsquotient von 1,17 zu 1,33. Wie weit er ansteigen kann, werden nur grosse Versuchsreihen über viele Gattungen und Familien aufklären können; dagegen muss er der Sachlage gemäss stets über dem Zahlenwerte 1 gelegen sein. Wir führen hier noch ein Beispiel an, in welchem der mittlere Quotient 1,42 ist.

Ein schönes Exemplar von *Pyramidea niloticus* — kegelförmig, Höhe etwa 8 cm, Scheitelwinkel etwa 60° — wurde in folgender Weise gemessen. Durch die Schale wurde längs 2 diametraler Erzeuger ein Sägeschnitt gelegt; die Fläche wurde poliert, was das Messen in hohem Grade erleichtert. Die Windungsbreiten ergaben folgende Zahlen:

cm	Quot.
28,5	1,42
20	1,43
14	1,40
10	1,43
7	—

Der mittlere Quotient beträgt 1,42. Bestimmen wir den Quotienten der Vergleichsreihe, so bekommen wir $\frac{145}{102} = (\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{10}{7}, \frac{27}{19}, \frac{145}{102})$. Wählt man die dritte

Konvergente, wie NAUMANN es getan haben würde, erhält man den Quotienten 1,40, der dem Mittel ferner liegt als die 5. Konvergente $\frac{27}{19} = 1,42$; in letzterem Falle wird aber der Quotient nicht mehr durch kleine einfache Zahlen ausgedrückt. Der Gedanke, dass die Quotienten eine gewisse Regel befolgen sollten, wo sich kleine Zahlen geltend machen, wie dieses in der Kristallographie statt hat und in dem Parametergesetz einen Ausdruck findet, ist daher abzulehnen.

Indem wir mit den Beispielen fortsetzen, wollen wir doch einen Typus aufsuchen, der sich von den bisher besprochenen unterscheidet, und bei dem die Windungsbreiten zwar Quotientenreihen bilden, sich aber in 2 Teile, je mit einem Quotienten, teilen. Zur Veranschaulichung wählen wir 3 erwachsene Exemplare von *Terebra hastata* von St. Thomas, etwa 3 cm gross. Die Messungen ergaben:

mm	Quot.	mm	Quot.	mm	Quot.
3,791	1,12	3,890	1,10	4,059	1,20
3,377	1,15	3,512	1,12	3,360	1,10
2,940	1,41	2,950	1,39	3,066	1,40
2,080	1,41	2,112	1,50	2,184	1,45
1,428	1,48	1,400	1,35	1,500	1,38
0,965	—	1,038	—	1,088	—

Von den 6 Windungen bilden die 3 der Schalenmündung am nächsten liegenden Quotientenreihen mit den Quotienten 1,13, 1,11 und 1,15, während die folgenden eine recht bedeutende Abweichung davon aufweisen, indem die Mittel bzw. 1,43, 1,41 und 1,41 betragen. Wir müssen daher als erste Annahme aufstellen, dass die Tiere von einem bestimmten Zeitpunkt an, der in der dem Wachstum zwischen

der dritt- und viertletzten Windung entsprechenden Periode liegt, ihren Entwicklungsquotienten wechseln. Dies kann aber nicht richtig sein, da das Wachstum längs des Saumes und das Wachstum längs des Schalenerzeugers dem Aussehen der Schale gemäss proportional sein müssen. Jene Annahme ist also hinfällig, und es muss eine andere Erklärung aufgestellt werden, die aber auch auf der Hand liegt. Solange das Tier sich in einem Wachstumsstadium befindet, das vor der drittletzten Windung liegt, sind die Windungen fortwährend parallel und zeigen also, dass die Mantelführung konstant ist; darauf werden die Windungen aber divergent, und der Quotient ändert sich. Eine Abänderung der Mantelführung in Verbindung mit einer kleinen Drehung der umliegenden Partie ist also die Erklärung.

Die bisher betrachteten Tiere sind alle im Meere zu Hause und tragen Schalen, die entweder kegelförmig oder gleichmässig nach aussen hin gebogen sind. Diese beiden Formen sind für das Meer typisch, und alle anderen Formen lassen sich direkt dazu rechnen; wenn wir eine neue Form finden wollen, müssen wir daher die Landtiere heranziehen, und wir besitzen eben in einer einheimischen Form, nämlich der *Clausilia laminata*, eine ausgesprägte Vertreterin, die durch ihre spindelförmige Schale und eine Erzeugerkurve mit Wendetangente bedeutend von den Terebraformen abweicht, wenn letztere auch in seltenen Fällen in ihrer Form eine Clausiliatendenz aufweisen können. Die Messungen sind längs des Erzeugers gelegt, der über die Mitte der Mündung verläuft, indem die erste Windungsbreite am Munde nicht mitgerechnet ist, da ihr der Saum als innere Begrenzung fehlt. Diese Messungen ergaben:

mm	Quot.	mm	Quot.	mm	Quot.
2,305	1,35	2,417	1,35	2,306	1,36
1,707	1,32	1,781	1,39	1,692	1,34
1,293	1,19	1,280	1,26	1,257	1,23
1,081	1,20	1,014	1,23	1,021	1,18
0,898	—	0,819	—	0,864	—

Die Windungsbreiten bilden wie bei *Terebra hastata* zwei Quotientenreihen, eine mit den mittleren Quotienten 1,34, 1,37 und 1,35, eine andere mit 1,19, 1,24 und 1,20, aber mit dem Unterschied, dass die Quotientenreihe mit den grössten Quotienten der Mündung zunächst liegt.

Ein anderer Typus derselben Art wird durch folgende 3 Individuen vertreten:

mm	Quot.	mm	Quot.	mm	Quot.
2,415	1,43	2,509	1,45	2,491	1,42
1,686	1,36	1,724	1,33	1,752	1,31
1,239	1,21	1,299	1,29	1,332	1,23
1,017	1,22	1,003	1,20	1,078	1,26
0,832	—	0,834	—	0,856	—

Die oberste Quotientenreihe ist hier unterbrochen; man bemerkt aber bei den beiden ersten Quotienten eine Eigentümlichkeit, indem die mittlere Zahl in allen drei Fällen als dieselbe Zahl, nämlich 1,39, 1,39 und 1,36, betrachtet werden muss; dies ist kein Zufall, sondern tritt bei den Messungen fortwährend hervor.

Der dritte Typus ähnelt dem zuletzt behandelten, davon abgesehen, dass der erste Quotient kleiner ist als der zweite. Das folgende Beispiel veranschaulicht das Verhältnis.

mm	Quot.	mm	Quot.	mm	Quot.
2,417	1,35	2,363	1,34	2,430	1,35
1,781	1,39	1,751	1,42	1,788	1,38
1,280	1,26	1,227	1,29	1,290	1,29
1,014	1,23	0,951	1,23	0,999	1,23
0,819	—	0,774	—	0,810	—

Die mittleren Quotienten der beiden ersten Reihen sind wie oben bzw. 1,37, 1,38 und 1,36, d. h. gleichwertig. Im übrigen sieht man, dass die beiden ersten Quotienten sich einander so stark nähern, dass die oberste Quotientenreihe im Begriff ist, sich zu bilden.

Bei einigen Individuen können die Quotientenreihen zusammenschmelzen, indem die Quotienten gleichmässig ineinander übergehen. Die Form der Schale geht dann in die Kegelform über. Es gehört zu den Seltenheiten, Tiere zu finden, bei denen keine Quotienten gleich sind; in dem Falle hat die Schale etwas Abnormes aufzuweisen.

Eine statistische Untersuchung.

Das bisher betrachtete Material bietet den Vorteil dar, dass jedes einzelne Individuum durch konstante Quotienten oder solche Quotienten, die auf eine Neigung zur Konstanz hinweisen, gekennzeichnet ist. In vielen Fällen liegt die Sache indessen anders, und zwar oft so, dass eine vorläufige Untersuchung den Gedanken an konstante und invariable Grössen fast zunichte macht, indem die individuellen Variationen ohne irgendwelchen inneren Zusammenhang erscheinen; aber auch in solchen Fällen wird eine sorgfältige Nachforschung dartun, dass die Variationen geneigt sind, innerhalb gewisser Grenzen zu verlaufen, die

dann aus der Untersuchung selbst hervorgehen und bestimmt werden müssen. Um womöglich fremde Ursachen zu eliminieren, suchen wir unser Material unter gleichartigen Verhältnissen auf, d. h. in gleicher Entwicklung und unter günstigen örtlichen Bedingungen. Wir erreichen dadurch, von einer Reihe äusserer Faktoren absehen zu können, von denen man entweder weiss oder vermuten muss, dass sie den Individuen ihr Gepräge mitteilen. Wenn das Material in der Weise gewählt worden ist, wird es die Aufgabe der Untersuchung sein, ferner gewisse Elemente zu eliminieren, die die Grundzüge zu verhüllen drohen; dies ist aber nur möglich durch Studien an den regelmässigsten Individuen, d. h. solchen Individuen, bei denen die graphischen Elemente durch einen übersichtlichen Charakter hervortreten. In den weniger günstigen Fällen müssen wir die individuellen Variationen zu eliminieren suchen, indem wir mehrere — oft viele — Individuen zu einem Durchschnittsindividuum zusammenstellen und sie darauf vergleichen, wie dieses in den folgenden Übersichten getan worden ist. Wie viel einzelne Individuen — ohne Auslese — erforderlich sind, um ein brauchbares durchschnittliches Individuum herzustellen, ist höchst verschieden nach der Art des Materials und ist, je nachdem die Untersuchung vorschreitet, durch Versuche festzustellen, die meistens eine grosse Arbeit erfordern.

Zu dem Ende wollen wir eine Standard-Untersuchung anstellen über irgendeine Art, welche so einigermaßen gute Bedingungen für eine Messung darbietet, und deren gleichmässige Wachstumsentwicklung sich bestimmen lässt; das heisst jedoch nicht, dass die Tiere sich in demselben Alter, sondern in denselben Wachstumsstadien befinden sollen. Unsere Wahl wird dadurch eine so beschränkte, dass unsere Meeresformen teilweise ausgeschlossen sind und von den

Landformen nur wenig Arten übrig bleiben; von diesen wählen wir *Clausilia laminata*, die in unseren Buchenwäldern allgemein verbreitet ist.

Clausilia laminata Montagu.

Die Tiere wurden Dienstag den $11/6$ 1916 gesammelt. Der Tag zuvor war milde gewesen, mit Sonnenschein und wechselndem Gewölk; in der Nacht hatte es anhaltend geregnet, so dass die Stämme im Walde teilweise nass waren.

Die Einsammlung fand statt unmittelbar südlich von der Eisenbahnbrücke über Mølleaaen bei Springforbi (etwa 14 km nördlich von Kopenhagen), westlich von der Eisenbahnlinie in der sumpfigen Gegend, die dadurch entstanden ist, dass der Bahnkörper einen Teil von dem Flösslein abschneidet. Die Tiere waren im Laufe der Nacht an den Buchenstämmen herangekrochen, wo sie in so grosser Menge zu finden waren, dass zwei Sammler im Laufe einer Stunde 1000 Tiere sammeln konnten. Der Bestand war aus halbhundertjährigen Buchen mit riesenhaften Inseraten zusammengesetzt. Die Tiere fanden sich namentlich an der geschützten Seite der Stämme, aber nicht an den alten Bäumen, wo das Wasser nicht hatte durchdringen können. Bei der grossen Menge von Tieren, die man sonst selten so zahlreich findet, müssen die Lokalitätsverhältnisse überaus günstig gewesen sein. Das Terrain neigt sich gegen Südosten und ist vor allen Winden geschützt. Ferner weist der Ort eine grosse Feuchtigkeit auf, da der Sumpf den Sonnenstrahlen sehr ausgesetzt ist und die Dünste von dem dichten Laub zurückgehalten werden.

Es wurden solche Individuen gewählt, bei denen der zuletzt gebildete Teil des Mundrandes: der Mundrand

zwischen lamella supra und lamella infra, wohl entwickelt war. Ein Wägen der Tiere ergab nämlich, dass Tiere, denen dieses Stück fehlte, ein Gewicht von etwa 0,100 g hatten, was bedeutend weniger ist als das minimale Gewicht vollentwickelter Tiere, nämlich 0,110 g.

Im übrigen waren die einjährigen Individuen etwas erodiert, wodurch das Gewicht etwas abnimmt, was aber dadurch wettgemacht wird, dass die Schale inwendig ein wenig mehr mit Kalk belegt ist. Der Gewichtsunterschied zwischen jungen und alten Tieren war nicht an der zweiten Dezimalstelle zu erkennen.

Nach der Einsammlung wurden die Tiere in einem Glasbehälter aufbewahrt, bei ähnlicher Nahrung und Feuchtigkeit wie unter natürlichen Verhältnissen, worauf sie an den folgenden Tagen gewogen wurden, jedoch stets so, dass sie 24 Stunden vor der Wägung nichts zu fressen bekamen, so dass man einigermaßen damit rechnen konnte, dass die Exkremente abgegeben waren. Der dadurch entstehende Gewichtsunterschied erwies sich doch später als so klein, dass er die Resultate nicht merkbar beeinflusste. Die Tiere wurden darauf in Spiritus aufbewahrt und später getrocknet.

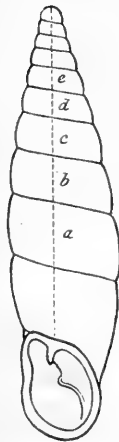


Fig. 7.

Es wurden darauf in den folgenden Jahren etwa 30,000 Messungen an den Schalen ausgeführt, wobei diese in wagerechter Lage, die Mündung nach oben, angebracht wurden. Das Mikrometer wurde so eingestellt, dass das Fadenzentrum einen Erzeuger durch die Mitte der Mündung bis an die Schalenspitze verfolgte, eine Einstellung, die selbstverständlich durch Augenmass und eine Vergrößerung von etwa 20 zu bewerkstelligen ist. Die Windungsbreiten *a*, *b*, *c*, ...

wurden durch Subtraktion der gemessenen Grössen berechnet. Wie die Fig. 7 zeigt, ist die der Mündung zunächst liegende Windung ausgeschaltet, da sie schwer zu messen ist.

Während der Messungen sind ab und zu Proben ange stellt worden, um den Wert der gefundenen Zahlen zu korrigieren, indem eine beliebige Schale 10mal nacheinander gemessen wurde. Eine solche Probe hatte durchgehends folgendes Aussehen:

<i>a.</i> mm	<i>b.</i> mm	<i>c.</i> mm
2,394	1,855	1,348
2,395	1,840	1,367
2,388	1,840	1,362
2,375	1,856	1,357
2,378	1,833	1,364
2,398	1,839	1,364
2,389	1,832	1,352
2,392	1,843	1,362
2,387	1,832	1,360
2,397	1,840	1,347

Die Mittel sind bzw. 2,389 mm, 1,841 mm und 1,358 mm und mit den respektiven Maximalabweichungen von 0,014 mm, 0,015 mm und 0,011 mm. Wenn die Messungen mit derselben Genauigkeit durchgeführt werden, was keine Schwierigkeiten darbietet, wird der Fehler also höchstens 0,015 mm, d. h. 0,8 % betragen, was hier nur in einem einzelnen Falle erreicht wurde.

Dagegen lassen Länge und Breite der Schale sich nur mit einer Genauigkeit von 0,1 mm bestimmen.

Windungszahlen und Schalenform.

Die Anzahl der Windungen schwankt zwischen 10 und 11, jedoch so dass die erstere Zahl die vorherrschende ist, indem das Material etwa 58 % nahezu 10 ergab; zu be-

merken ist jedoch, dass es unmöglich ist, die erste Windung bei der Schalenspitze mit Genauigkeit zu bestimmen, da dies erfordert, dass die Tangente am Anfangspunkt der Spirale angegeben werden kann; dies ist aber im allgemeinen nicht tunlich, und ein verhältnismässig kleiner Fehler der Tangentenstellung bewirkt eine recht bedeutende Abweichung. A priori würde man geneigt sein, den langen Individuen die grössere Windungszahl beizulegen, den kurzen die kleinere; aber auch in dieser Beziehung weist unser Material ein anderes Resultat auf, indem die langen Individuen ebenso oft 10 wie 11 Windungen haben, die sehr kurzen aber 11 Windungen haben können. In keinem Falle wurden weniger als 10 Windungen beobachtet, in einem einzelnen Falle bei einem langen Exemplar etwas über 11.

Die Form der Schale wird im allgemeinen als spindelförmig angegeben, wobei an einen Umdrehungskörper gedacht wird, der an der Mitte am breitesten und gegen beide Enden hin zugespitzt ist. Eine nähere Untersuchung zeigt, dass die Spitze der Schale, die von den Embryonalwindungen gebildet wird, oft einen ein wenig grösseren Durchmesser hat als die folgende Partie, so dass ein kleiner Vorsprung entsteht; danach nimmt die Schale gleichmässig an Breite zu und hat häufig eine vollständige Kegelform oder weicht durch eine geringe Beugung nach innen gegen die breiteste Partie der Schale hin ein wenig davon ab. Die Erzeugerkurve erhält dadurch eine Wendetangente. Gegen die Mündung hin verengert sich die Schale wieder, aber in bedeutend geringerem Grade, wie die Figur dies zeigt.

Schalenlänge und Schalenbreite.

Indem wir nun zur Messung der Länge der Schale übergehen, zeigt es sich, dass die kleinste 13,74 mm und die grösste 18,25 mm lang sind, während die übrigen sich nach folgendem Schema verteilen.

mm	13,8	14,0	14,2	14,4	14,6	14,8	15,0	15,2	15,4	15,6	15,8	16,0
p:	1	1	5	12	22	30	56	96	121	131	136	122
a:	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
a ² :	121	100	81	64	49	36	25	16	9	4	1	0

mm	16,2	16,4	16,6	16,8	17,0	17,2	17,4	17,6	17,8	18,0	18,2
p:	89	72	42	22	21	8	4	2	2	1	2
a:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a ² :	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121

Man bemerkt, dass die grösste Anzahl sich um 15,6 mm und 15,8 mm gruppiert mit stark fallender Tendenz nach beiden Seiten hin. Schön übersichtbar kann das Verhältnis leicht in bildlicher Form dargestellt werden, indem man auf einem Stück quadriertem Papier mit gleich grossen Zwischenräumen Abstände absetzt, welche die Schalenlänge angeben, und in jedem Punkt Längen errichtet, die der entsprechenden Individuenzahl proportional sind. Zieht man darauf freier Hand eine Linie durch die entstandenen Punkte mit einer gewissen angemessenen Ründung, erhält man eine Figur, die an einen Flitzbogen gemahnt. Zeichnet man gleichfalls nach Augenmass die Symmetrielinie der Figur, so ist es einleuchtend, dass je mehr die Schalenzahlen sich um letztere sammeln, die Variabilität des betrachteten Materials um so viel kleiner ist. Das geht durch die Betrachtung aus der Figur hervor; wünscht man aber, mit anderen Varianten Vergleiche anzustellen, muss man Zahlen und Rechnung benutzen. In der Weise wurde man veranlasst, gewisse Grundzahlen für eine solche biologische

Sammlung oder Variantengruppe aufzustellen, nämlich mittlere Zahlen, Standard und Variationskoeffizienten. Die Berechnungen dieser Zahlen geschehen am leichtesten mittels der angeführten Formeln¹ und ergeben: $\Sigma pa = -1231$, $M = 15,753$ mm, $\Sigma pa^2 = 10993$, $\delta = 0,616$ mm und $v = 3,91$. Da der Variationskoeffizient 3,91 beträgt, sieht man, dass die Variation klein ist, ein Resultat, das gegen den Eindruck zu streiten scheint, den man im allgemeinen durch die Betrachtung einer Handvoll solcher Tiere erhält, denn so scheint die Variation ziemlich gross zu sein; das muss aber daran liegen, dass das Auge einen Unterschied mit grösserer Energie festhält oder ergreift als eine Ähnlichkeit. Eine Beurteilung nach Augenmass gibt uns eine Vorstellung von der Variationsweite im Verhältnis zur Länge eines mittelgrossen Individuums, die sich ja annäherungsweise durch $4,4 \cdot 100 : 15,75 = 27,9$ ausdrücken lässt, d. h. 7mal so gross ist wie das obige Resultat. Die Variation oder die Stabilität lässt sich nur durch eine Rechnung, nicht durch eine Abschätzung bestimmen.

In ähnlicher Weise erhält man für die Breite der Schale folgende Verteilung:

mm	3,80	3,85	3,90	3,95	4,00	4,05	4,10	4,15	4,20	4,25	4,30	4,35	4,40	4,45	4,50	4,55	4,60
p:	1	16	20	49	103	144	166	181	130	98	40	26	20	2	2	2	
a:	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
a ² :	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	

$\Sigma pa = 530$, $M = 4,152$ mm, $\Sigma pa^2 = 5734$, $\delta = 0,116$ mm und $v = 2,81$.

Vergleicht man nun die Breite und die Länge, so sieht man, dass die Variation verschieden ist und annäherungsweise durch das Verhältnis 3 : 4 bestimmt wird.

¹ W. JOHANNSEN. Elemente der exakten Erblchkeitslehre. Jena. 1913.

Dieses interessante Resultat lässt sich biologisch daraus erklären, dass das Tier — von seiner Länge unabhängig — eine grössere Möglichkeit hat, die Schalenlänge durch eine verhältnismässig geringe Änderung der Körperstellung als durch eine Einwirkung auf die Schalenbreite zu verändern. Dies merkt man an einem mehr oder minder plötzlichen Steigen oder Fallen der Spirale des Saumes, wodurch der Parallelismus der Windungen gestört wird, und was wiederum auf die Windungsbreiten einwirkt.

Bei kurzen und langen Exemplaren von *Clausilia bidentata* treten diese Tatsachen stark hervor.

Sucht man den Quotienten, der das Verhältnis zwischen Schalenbreite und Schalenlänge ausdrückt, erhält man bei Benutzung der gefundenen mittleren Werte

$$4,15 : 15,75 = 0,26.$$

Diese Grösse wollen wir speziell in betreff ihrer Variation näher untersuchen, uns jedoch erst fragen, wie sich die Hauptzahlen beim Übergang von 1000 Individuen auf die Hälfte davon verändern. Zur Beantwortung dieser Frage wurde das gesamte Material in 10 verschiedenen Weisen in Portionen von 500 Individuen gruppiert. Die gewonnenen Resultate ergaben nur eine geringe Abweichung von dem gefundenen Resultat; der grösste Unterschied war:

Schalenlänge: 500 Ind. $M = 15,748$ mm, $\delta = 0,610$ mm, und $v = 3,87$.

Schalenbreite: 500 Ind. $M = 4,149$ mm, $\delta = 0,115$ mm, $v = 2,77$.

Diese Werte sind praktisch gesprochen ebenso gut wie die der grösseren Sammlung.

Da eine Reihe von Versuchen zeigt, dass das Variationsgebiet des Verhältnisses zwischen Breite und Länge ein

enges ist, beschränken wir uns hier auf die Anführung der Lage von 200 Ind.:

Verhältnis:	0,23	0,24	0,25	0,26	0,27	0,28
Individuenzahl:	2	7	34	69	60	3

Dies ergibt $M = 0,263$, $\delta = 0,011$ und $v = 4,21$.

Daraus geht hervor, dass die mittlere Zahl dieselbe ist wie oben, und ferner, dass 80 % der Individuen innerhalb einer Abweichung von 5 % von der mittleren Zahl liegen. Wir können dies biologisch ausdrücken. Betrachtet man nämlich 2 Klassen von Varianten, z. B. die 0,26 und 0,25 entsprechenden, so wird man keinen wesentlichen Unterschied finden; ein solcher tritt erst hervor, wenn 0,24 und 0,28 neben 0,26 gelegt werden; kommt dazu noch, dass die Konformität der Schalen durch Augenmass bestimmt werden muss; so ergibt sich, dass die Schalen sich in Konformität um den mittleren Typus mit 80 % innerhalb einer Abweichung von 5 % schliessen, d. h. dass die Stabilität der Form sehr gross ist. Dieses Resultat wird nicht geändert dadurch, dass die Mündung bei einigen Individuen mehr oder minder schmal sein kann; denn diese Tendenz hat keinen Einfluss auf die Zahlenwerte.

Windungsbreite.

Wir sehen, dass die Schalen sich im voll entwickelten Zustand um die mittlere Länge 15,75 mm gruppieren mit einem Variationskoeffizienten 3,91; wie die Tiere durch die verschiedenen Wachstumsstadien zu diesem Resultate gelangen, wissen wir dagegen nicht; es wird daher natürlich sein, die Länge und den Variationskoeffizienten zu einem anderen Zeitpunkt im Leben des Tieres als gerade in dem

erwachsenen Stadium zu untersuchen; hier stossen wir aber auf eine scheinbare Schwierigkeit, indem die Praxis zeigt, dass Messungen der Schalenlänge in solchen Stadien nicht durchführbar sind; indessen ist die Windungsbreite aber zu jeder Zeit gerade ein guter Ausdruck der Wachstumsweise, weshalb wir sie unseren Untersuchungen zugrunde legen können. Es liegt also die bestimmte Aufgabe vor, die Variation der Windungsbreiten zu erforschen.

Wie man nicht auf dem Wege der Schlussfolgerungen entscheiden kann, ob die Variation der Höhe grösser ist bei Männern als bei Frauen, kann man auch in diesem Falle a priori nichts von dem Verlauf der Variation eine Reihe von Jahren hindurch aussagen, ohne zu riskieren, in Irrtümer zu verfallen.

Wir stellen daher unser Material auf und befragen es.

Windungsbreite a:

mm:	2,00	2,05	2,10	2,15	2,20	2,25	2,30	2,35	2,40	2,45	2,50	2,55	2,60	2,65	2,70	2,75
Anzahl:	3	0	9	17	39	70	110	82	80	45	29	9	6	0	1	

$$M_a = 2,3579 \text{ mm, } \delta = 0,1046 \text{ mm und } v = 4,43$$

Windungsbreite b:

mm:	1,40	1,45	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00	2,05
Anzahl:	1	7	15	25	56	95	114	76	59	32	11	7	2	

$$M_b = 1,7248 \text{ mm, } \delta = 0,1008 \text{ mm und } v = 5,84.$$

Windungsbreite c:

mm:	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50	1,55	1,60	1,65
Anzahl:	1	11	42	78	126	127	72	30	11	1	0	1	

$$M_c = 1,2968 \text{ mm, } \delta = 0,0774 \text{ mm und } v = 5,96$$

Windungsbreite d:

mm:	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
Anzahl:	14	51	120	167	109	27	10	2	

$$M_d = 1,0187 \text{ mm, } \delta = 0,0625 \text{ mm und } v = 6,13$$

Windungsbreite e:

mm: 0,65 0,70 0,75 0,80 0,85 0,90 0,95 1,00 1,05

Anzahl: 6 42 116 187 108 32 7 2

$M_e = 0,8233$ mm, $\delta = 0,0578$ mm und $v = 7,02$

Windungsbreite f:

mm: 0,55 0,60 0,65 0,70 0,75 0,80 0,85 0,90

Anzahl: 7 43 84 43 16 6 1

$M_f = 0,685$ mm, $\delta = 0,0545$ mm und $v = 7,95$

Windungsbreite g:

mm: 0,45 0,50 0,55 0,60 0,65 0,70 0,75

Anzahl: 4 48 102 35 9 2

$M_g = 0,5757$ mm, $\delta = 0,0433$ mm und $v = 7,52$

Die Zahlen wirken überzeugend und zeigen:

1. Die Variation der Windungsbreite nimmt gegen die Schalenmündung hin ab.
2. Die Variation der Schalenlänge schliesst sich natürlich der Variationsreihe der Windungsbreiten an.
3. Die Variation für g ist geringer als die für f .

In den Fällen, wo es möglich war, die folgende Windung h zu messen, zeigte es sich, dass deren Variation kleiner war als die von g . Daraus lässt sich Folgendes herleiten:

Die *Clausilia laminata* wächst mit abnehmender Variation, wenn die beiden ersten Windungen nach den embryonalen Windungen gebildet worden sind. Es scheint also, dass die äusseren Einflüsse die Tiere während des Wachstums mit abnehmender Intensität prägen, d. h. dass die Tiere allmählich einen grösseren Widerstand gegen die zufälligen Ursachen zu leisten vermögen.

Wir gehen demnächst zu einer Betrachtung der mittleren Zahlen der Windungsbreiten über, um so mehr als wiederholte Untersuchungen gezeigt haben, dass sie sehr fest liegen; sie müssen daher als Grundelemente für eine Nachforschung eines Gesetzes benutzt werden können. Es fragt sich hier wie überall bei wissenschaftlichen Untersuchungen darum, welche Regelmässigkeit die Zahlen vertreten. Der graphischen Methode eingedenk, liegt es nahe, die Quotienten zu bilden; das sich ergebende Bild spricht aber eher von Verwirrung als von Ordnung. Nichtsdestoweniger können die Werte der Quotienten nicht unberücksichtigt gelassen werden, da sie recht oft regelmässige Ausschläge ergeben, welche uns gesetzmässige Verhältnisse ahnen lassen. Die Quotienten müssen daher als eine Art Grundlage, wenn auch nur als eine vorläufige, aufrechterhalten werden. Auf verschiedenen Wegen, die wir betreten und wieder verlassen haben, durch Betrachtungen, die wir akzeptiert und wieder verworfen haben, um sie wieder zu akzeptieren, hat es sich gezeigt, dass die sekundären Quotienten eine Lösung ergeben, was aus dem Folgenden erhellt:

	M_a	M_b	M_c	M_d	M_e	M_f	M_g
Mittel in mm:	2,3579	1,7248	1,2968	1,0187	0,8233	0,6850	0,5757
Prim. Quotient:	1,361	1,330	1,273	1,237	1,202	1,190	
Sekund. Quotient:		1,046	1,045	1,029	1,029	1,010	

Setzt diese Regelmässigkeit sich fort, muss 1,010 sich in der sekundären Reihe wiederholen, und dann wird in der primären Reihe 1,178 auf 1,190 folgen, was eine rückwärtsgehende Rechnung leicht zeigen wird. Es ist daher von äusserster Wichtigkeit, durch Messung den 1,178 entsprechenden Quotienten zu bestimmen.

Bei den meisten Clausilien aus der erwähnten Lokalität hat die Windungsbreite h einen embryonalen Charakter,

d. h. ist geschwollen und schräge liegend. Solche Individuen eignen sich nicht zur Messung. Nach sorgfältiger Durchmusterung und erneuter Messung waren jedoch gegen 25 % der grössten Individuen anwendbar, und so erhielten wir die unten verzeichneten 200 Individuen.

Windungsbreite g :

mm:	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75
Anzahl:	13	85	81	18	3	

$$M_g = 0,603 \text{ mm, } \delta = 0,0401 \text{ mm und } \nu = 6,65$$

Windungsbreite h :

mm:	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
Anzahl:	5	70	103	18	4	

$$M_h = 0,512 \text{ mm, } \delta = 0,0369 \text{ mm und } \nu = 7,20$$

Daraus erhält man $M_g : M_h = 1,178$, d. h. genau den berechneten Wert. Wir müssen also mit unseren Untersuchungen den rechten Weg betreten haben, was auch unsere Nachmessungen und Stichproben bestätigen.

Die mittleren Zahlen bilden also 3 Gruppen, die ineinander übergreifen ungefähr wie die Gelenke einer Kette. Von jeder Gruppe gilt, dass die sekundären Quotienten konstant sind, nämlich 1,046, 1,029 und 1,010. Die Gruppen sind $a, b, c, d; c, d, e, f; e, f, g, h$.

Nach diesem interessanten Resultat wird man, ohne das geringste von den Lebensverhältnissen der Tiere zu wissen, fragen, ob sich ihr Dasein nicht durch 3 Wachstumsperioden bewegt, und es scheint nun natürlich, darauf zu verweisen, dass die Entwicklung des Tieres eben in 3 Sommern vonstatten geht, während es, wenn der Herbst kommt, in die Winterruhe eintritt. Die Übergänge sind also zwischen c und d und e und f zu suchen. Wenn sich an den Schalen dieser Tiere Wachstumsränder fänden, würde

es sicherlich ein leichtes sein, das statistische Resultat biologisch nachzuweisen; man hat hier aber gar keinen Anhalt, da die Windungen ohne sichtbare Unterbrechung nacheinander folgen. Die Untersuchungen sind daher in die Lokalitäten zu verlegen, und zwar zu so späten Zeiten des Jahres, wo das Wachstum annehmbar aufgehört hat, und zugleich zu einer so frühen Periode des Frühjahres, dass die Tiere eben im Begriff sind, aus der Winterruhe herauszutreten. Es begegnen uns da zwei verschiedene Bilder. Im Herbst: sehr variierende junge Exemplare; im Frühjahr: eine weit geringere Variation mit Tendenz gegen 1- und 2-jährige Typen, die gegen die statistischen Resultate hin konvergieren.

Die Möglichkeit, dem Winter zu widerstehen, wird daher im wesentlichen nur durch eine bestimmte Entwicklung gewonnen; ist diese nicht erreicht, sterben die Tiere.

Da die Tiere, wie früher gezeigt, zwischen 10 und 11 Windungen haben und die ersten Windungen zu den embryonalen Stadien gehören, zeigen die statistischen Resultate, dass die Windungszahl der Zeit proportional ist, d. h. dasselbe Resultat, das wir bei den mundrandbildenden Mollusken vermuteten.

Der Windungsquotient.

Eine Aufzählung ergibt, dass in unserem Material über 90 % der Individuen drei aufeinander folgende Windungen besitzen, die entweder eine Quotientenreihe bilden oder nur unwesentlich von einer solchen abweichen. Diese Anzahl liegt jedoch zerstreut, betrifft aber meist die Windungen, die sich der Schalenspitze zunächst befinden und an solchen

Stellen liegen, wo die Kegelform vorherrscht. An den Windungen a , b und c beträgt die Häufigkeit ungefähr 20 %; in vielen Fällen treten in 2 oder mehreren Gruppen gleich grosse Quotienten auf. Diese individuelle Variation würde man ausserstande sein zu verstehen, wenn die Lage der mittleren Zahlen im vorigen Abschnitt nicht klargelegt worden wäre; denn dadurch wurde ein mittlerer Typus geschaffen, um den die Individuen — sozusagen — schwanken. Wir wollen uns hiernach mit dem Studium dieser Schwankungen beschäftigen.

Quotient $a : b$.

Quotient:	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50	1,55	1,60
Anzahl:	3	11	51	127	150	100	41	12	5	

$M = 1,3714$, $\delta = 0,0681$ und $v = 4,97$

Quotient $b : c$.

Quotient:	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50	1,55	1,60
Anzahl:	1	11	36	107	162	110	53	17	2	1	

$M = 1,3314$, $\delta = 0,0667$ und $v = 5,01$

Quotient $c : d$.

Quotient:	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50
Anzahl:	11	52	129	143	106	41	11	7	

$M = 1,2733$, $\delta = 0,0677$ und $v = 5,32$

Quotient $d : e$.

Quotient:	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45
Anzahl:	8	39	89	156	115	60	20	10	

$M = 1,2395$, $\delta = 0,0698$ und $v = 5,62$

Quotient $e : f$.

Quotient:	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45
Anzahl:	3	11	30	35	59	30	24	5	3	

$M = 1,2163$, $\delta = 0,0802$ und $v = 6,59$

Quotient $f : g$.

Quotient:	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40
Anzahl:	8	22	30	52	42	29	11	6	

$M = 1,1897$, $\delta = 0,0811$ und $v = 6,82$

Unsere Zahlen zeigen zuerst, dass die Variation der Quotienten gegen die Schalenmündung hin am kleinsten ist und gegen die Spitze hin zunimmt; dieses Resultat entspricht demjenigen, das wir bei den Windungsbreiten fanden, lässt sich aber nicht daraus ableiten. Interessanter ist es jedoch, die mittleren Quotienten zu betrachten, die sich den Quotienten des mittleren Typus genau anschliessen. Eine Übersicht ergibt:

Mittlerer Typenquotient	Mittlerer Quotient
1,361	1,371
1,330	1,331
1,273	1,273
1,237	1,239
1,202	1,216
1,190	1,190

Diese Eigenschaft der gefundenen Zahlen, die sich mathematisch durch $n \cdot (M_a : M_b) = \Sigma (a : b)$ ausdrücken lässt, habe ich fortwährend durch Zahlen aus biologischen Messungen bestätigt gefunden, d. h. wo sich zusammengehörende Zahlen ergeben, wie a und b , b und c , z. B. die Höhe des Menschen in Gemeinschaft mit der entsprechenden Brustweite u. s. w. In Worten lässt sich diese Eigenschaft folgendermassen ausdrücken: Das Verhältnis zwischen den mittleren Zahlen zweier biologisch zusammengehörenden Variantengruppen konvergiert gegen die mittlere Zahl der individuellen Quotienten bei einer zunehmenden Anzahl von Individuen.

Wie früher gezeigt wurde, dass die Hauptzahlen sich bei einer Verdopplung der Individuenanzahl nicht merkbar

verändern, so zeigt das Folgende, dass dasselbe von den Quotienten gilt. Nehmen wir 1000 Individuen, so haben wir nämlich:

Quotient a : b, $M = 1,369$, $\delta = 0,0665$ und $\nu = 4,86$

Quotient b : c, $M = 1,331$, $\delta = 0,0663$ und $\nu = 4,98$

Schalengewicht.

Da es unmöglich ist, die Tiere wie bei *Helix* und anderen Familien aus der Schale herauszunehmen, wurden die Schalen, wie erwähnt, mit dem lebenden Tiere gewogen. Dies führte zu folgenden Verteilungen:

mg:	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180
Anzahl:	8	22	28	49	81	91	68	60	43	24	14	4	5	3	

$M = 139,251$ mg, $\delta = 12,301$ mg und $\nu = 8,83$

mg:	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190
Anzahl:	2	1	9	20	38	46	69	73	76	62	34	28	23	10	4	2	2	2	1

$M = 139,980$ mg, $\delta = 13,705$ mg und $\nu = 9,78$

Sammeln wir alle Individuen, werden die Resultate zwischen den gefundenen Grössen liegen und sich folgendermassen verteilen:

mg:	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190
Anzahl:	2	1	17	42	66	95	150	164	144	122	77	52	37	14	9	5	2	2	1

$M = 139,58$ mg, $\delta = 13,025$ mg und $\nu = 9,33$

Es tritt sofort hervor, dass der Variationsquotient bedeutend grösser ist als in den bisher betrachteten Untersuchungen. Dies liegt indessen nicht an der Schale selbst, denn das Gewicht von getrockneten Individuen hat in Verbindung mit dem halben Gewicht einen kleineren Variationskoeffizienten. Es ist das grosse Vermögen der Mollusken, Wasser aufzunehmen, das sich auch bei dieser Art geltend macht.

Wie wir früher das Verhältnis zwischen Schalenlänge und Schalenbreite untersuchten, um die Konformität nachzuweisen, so wird es auch von Interesse sein, das Verhältnis zwischen dem Gewicht und der Länge der Schale zu studieren. Da es sich aber gezeigt hat, dass die erhaltenen Zahlenwerte fast konstant sind, wurden nur wenige Hunderte Individuen untersucht. Die folgenden 10 Individuen geben uns eine Vorstellung von diesem Verhältnis.

mg	mm	$\sqrt[3]{P}:L$
50	14,4	0,25
53	15,1	0,25
56	15,2	0,25
56	15,2	0,25
56	15,4	0,25
58	15,5	0,25
61	16,4	0,24
63	16,0	0,24
67	16,0	0,25
69	16,1	0,25

Betrachten wir dagegen die Verteilung von 100 Individuen, so erhalten wir:

Ponderalindex:	0,23	0,24	0,25	0,26	0,27
Anzahl:	2	20	47	21	10
$M = 0,2517, \delta = 0,0092$ und $v = 3,6$					

Man sieht also, dass der Ponderalindex sehr stabil ist, und dass etwa 90 % sich um die mittlere Zahl 0,25 gruppieren mit einer Abweichung von 4 %, d. h. dass man sich einer konstanten Grösse nähert.

Unsere statistischen Untersuchungen, die meines Wissens die eingehendsten sind, die bisher auf ein biologisches

Material angewandt worden sind, lassen sich kurz in folgende Sätze zusammenfassen:

Wenn die *Clausilia laminata* sich ihre drei Wachstumsjahre hindurch entwickelt, wird der Variationskoeffizient fortwährend abnehmen, und der mittlere Typus befolgt ein Gesetz, nach dem die sekundären Quotienten innerhalb jeder Wachstumsperiode konstant sind. Die Individuen schwanken um dieses Gesetz und sind sehr geneigt, in dem ersten Wachstumsjahre die sekundären Quotienten zu zwingen, den Wert 1 anzunehmen.

Nur ausnahmsweise trifft man Individuen, bei denen nicht drei oder vier Windungen eine Quotientenreihe bilden.

Da unsere Untersuchungen eine bestimmte Lokalität und einen bestimmten Zeitraum betreffen, müssen die Resultate, um allgemein gültig zu sein, sich auch an einem Material aus anderen Lokalitäten bestätigen. Eine Reihe vorläufig angestellter Prüfungen zeigt, dass das Gesetz Stich hält, dass aber die sekundären Quotienten etwas variieren. Diese Variation, die interessante Streiflichter über manche biologische Verhältnisse werfen kann, muss näher untersucht werden. Besonders interessant wird es sein, biologische und anthropologische Probleme zu vergleichen; was die einen verhüllen, mögen die anderen möglicherweise enthüllen.

Der Mensch.

Die angeführten Beispiele bieten uns ein deutliches Bild dar von dem individuellen Wachstum bei einer Reihe von Schnecken und zeigen, dass das Wachstumsverhältnis von Periode zu Periode sich in Zahlen ausdrücken lässt,

die einen gesetzmässigen Charakter aufweisen. Es liegt daher nahe, dieses Verfahren auch auf einem weiteren Gebiete anzuwenden, und wir wählen dazu den Menschen selbst, wohl wissend, dass die Aufgabe in der Weise durch mannigfache äussere und innere Wirkungen erschwert wird, Wirkungen, deren voller Verlauf und Wirkungsweise uns oft unbekannt sind und nur eine gewisse schwankende Tendenz gegen eine Periode hin ahnen lassen, die wir nicht ausfindig zu machen oder klarzulegen vermögen. Mit der Hoffnung aber, die uns bisher keine Enttäuschungen unüberwindbarer Art bereitet hat, wollen wir annehmen, dass die individuellen Schwankungen, die das Individuum weder zu fördern noch zu hemmen vermag, sich durch eine Betrachtung von Durchschnittsindividuen entweder teilweise oder ganz beseitigen lassen. Wie gross die Anzahl ist, die zur Bildung eines solchen Individuums erforderlich ist, wissen wir nicht, und die Feststellung dieser Anzahl gestaltet sich daher zu einer an und für sich bedeutenden Aufgabe, die sich nur durch sehr grosse Versuchsreihen lösen lässt. Eins ist jedoch sicher, nämlich dass wir über weit grössere Materialiensammlungen verfügen müssen als bei den Untersuchungen über die Schnecken, denn zwei bedeutende Momente, das soziale und das hygienische, verändern fortwährend so vieles im Laufe der Entwicklung.

Das Wachstum des Menschen verläuft wahrscheinlich in Perioden, in ähnlicher Weise wie das der Mollusken; wir kennen diese Perioden aber nicht oder auch nur mangelhaft, da die graphischen Elemente verwischt werden; und namentlich wissen wir nicht, ob man sie im grossen ganzen als der Zeit proportional ansetzen kann, ohne den Untersuchungen dadurch Zwang anzutun.

Am natürlichsten wäre es, die Generationen von der

Wiege bis zum Grab zu verfolgen und mit gewissen Zwischenräumen Untersuchungen anzustellen, die sich in Zahlen darstellen lassen; man würde dann ein Material erhalten, das uns in den Stand setzen könnte, die Entwicklung zu verfolgen. So ist es in der Weise gelungen, die Tendenz der Individuen nachzuweisen, graphische Fehlergesetze zu befolgen, ohne dass man die Ursache dazu angeben kann; auf diesem Wege kam man auch zu Macauleys Ponderalindex, aber mehr weiss man fast auch nicht.

Leider muss man sofort die Ansprüche herabsetzen, denn ein solches Material würde sich kaum in seiner vollen Ausdehnung, wohl aber in Perioden während des Wachstums beschaffen lassen, nämlich z. B. wo die Öffentlichkeit durch Schulpflicht und Wehrpflicht zu Hilfe kommt, und hier haben denn auch die Anthropologen und Hygieniker eingesetzt.

Professor POUL HERTZ hat ein Material behandelt, das das anthropologische Komité durch Messungen und Wägungen von Kindern in 2 städtischen Schulen in Kopenhagen zuwegegebracht hat; die eine Schule war eine »Bezahlungsschule«, die andere eine »Freischule«; in betreff der interessanten Resultate und Schlussfolgerungen des Verfassers verweisen wir auf die Abhandlung selbst¹ und wollen hier nur dieselben Zahlen in einer anderen Weise zur Aufklärung unserer Untersuchungen benutzen.

Die Auslese unter den Kindern wurde in dem Bewusstsein getroffen, dass die Kinder von zwei solchen Schulen aus Familien kommen, die in sozialer und hygienischer Beziehung unter sehr verschiedenen Verhältnissen leben. Wir wünschen jedoch diesen Unterschied zu tilgen

¹ Københavnske Kommuneskolebørns Vækstforhold. Meddelelser om Danmarks Anthropologi 1. Bind. København 1911.

und sammeln daher die Kinder zu einer Gruppe, wodurch wir eine grössere Individuenzahl und daher eine bessere Ausgleichung erhalten.

Das durchschnittliche Höhenmass der Knaben aus den beiden Schulen war danach:

Jahre	Anzahl	Höhe in cm	Quotient
13	108	144,34	1,027
12	123	140,48	1,031
11	168	136,22	1,039
10	181	131,10	1,040
9	182	126,00	1,036
8	188	121,63	1,039
7	152	116,97	1,030
6	65	113,52	—

Es fragt sich nun, ob die Zahlen der letzten Kolumne als gleich gross aufgefasst werden können, so dass man sagen kann, dass die Höhenzahlen eine Quotientenreihe bilden. Die Tabelle zeigt, dass das Maximum und das Minimum der Quotienten nur um 0,005 und 0,008 oder 0,5% und 0,8% von der mittleren Zahl 1,035 abweichen; es muss aber hinzugefügt werden, dass die dritte Dezimale kaum zuverlässig ist und höchstens als eine Richtungsgrösse betrachtet werden kann, so dass 3 von den Quotienten zu 1,03 und die übrigen zu 1,04 werden.

Die Höhengsäule ergibt in dem Falle eine Reihe, die uns eine ausgezeichnete Vorstellung von einer Quotientenreihe aus der Natur darbietet.

Könnte man z. B. die 7jährigen Kinder durch die Jahre bis zum Alter von 14 Jahren verfolgen, würde die Quotientenreihe wahrscheinlich noch deutlicher hervortreten.

Die entsprechenden Untersuchungen über Mädchen ergaben:

Alter	Anzahl	Höhe in cm	Quotient
14	9	150,28	1,012
13	119	148,50	1,046
12	173	141,88	1,036
11	171	137,00	1,039
10	134	131,75	1,036
9	170	127,12	1,044
8	181	121,67	1,047
7	174	116,13	1,031
6	67	112,56	—

Indem wir die Zahlen der 14jährigen der geringen Individuenanzahl wegen als unbrauchbar ausschalten, erhalten wir als maximale und minimale Abweichung von der mittleren Zahl 1,040 die Grössen 0,009 und 0,001 oder 0,9% und 0,1% mit dem Variationskoeffizienten 0,53.

Die beiden Resultate sind einander in hohem Grade ähnlich, aber der Wachstumsquotient und der Variationskoeffizient bei den Knaben ist etwas kleiner als bei den Mädchen. Auch in diesem Falle tritt die Quotientenreihe deutlich hervor.

Wir bestimmen nun den Quotienten, der uns dasselbe Resultat ergibt, das sämtliche Quotienten ergeben würden, wenn ein beliebiges Längenmass vom Alter von 6 Jahren bis zum Alter von 13 Jahren geführt wird. Wir erhalten ihn, wenn wir aus dem Produkt der Quotienten die siebente Wurzel ziehen.

Das gesamte Resultat des vorliegenden Materials ist: Die Knaben wachsen vom 6.—13. Jahr mit dem Quotienten 1,034 oder 3,4% p. a.

Die Mädchen wachsen vom 6.—13. Jahr mit dem Quotienten 1,039 oder 3,9⁰/₀ p. a.

Wie wir nun gesehen haben, dass die Höhen eine Tendenz haben, Quotientenreihen zu befolgen, wollen wir auch die Durchschnittsgewichte untersuchen, die in betreff der Knaben Folgendes ergeben.

Alter	Anzahl	Gewicht kg	Quotient	Ponder.	Quotient
13	108	36,23	1,086	0,229	1,000
12	123	33,34	1,089	0,229	0,996
11	168	30,60	1,089	0,230	0,991
10	181	28,07	1,095	0,232	0,991
9	182	25,62	1,092	0,234	0,996
8	188	23,45	1,085	0,235	0,987
7	152	21,61	1,056	0,238	0,988
6	65	20,46	—	0,241	—

Hier zeigt sich wie in dem vorigen Falle eine grössere Abweichung, wo die Individuenanzahl klein ist; schalten wir den Quotienten 1,056 aus, weisen die übrigen eine sehr geringe Variation auf. Wir sehen also, dass das Gewicht eine Quotientenreihe bildet mit noch kleinerem Variationskoeffizienten als früher, nämlich 0,31.

Namentlich wird man bemerken, dass die Quotienten bei der grössten Anzahl von Individuen weniger voneinander abweichen, als wo die Anzahlen kleiner werden, was darauf deutet, dass ein grosses Material einen geringen Unterschied ergeben würde.

Es fällt natürlich, dass die Ponderalindices eine Quotientenreihe in den Intervallen bilden, wo Gewicht und Höhe eine solche Reihe befolgen; dagegen braucht das Umgekehrte nicht stattzufinden. Werden die Quotienten in der angegebenen Weise gebildet und erinnert man sich,

dass der Maximalfehler der Division etwa 0,002 beträgt, so wird die Quotientenreihe deutlich hervortreten.

Weiter als bis zum 13. Jahre geben diese Untersuchungen keinen Aufschluss. Wir können die mittlere Zahl des Ponderalindex daher nicht während der späteren Jahre verfolgen; da es sich aber gezeigt hat, dass sie innerhalb einer gegebenen Variantensammlung schwankt, wird es nahe liegen, eine solche Veränderlichkeit zu studieren und mit unseren obigen Untersuchungen zu vergleichen.

Dr. SØREN HANSEN hat in einer Abhandlung über Körpergewicht und Körperhöhe an etwa 20 000 Wehrpflichtigen im Alter von 21—22 Jahren eine umfangreiche Reihe von Messungen angestellt. Das Ergebnis davon ist

Höhe	Gewicht	$\sqrt{P} : H$	$\sqrt[3]{P} : H$
180 cm	68,37 kg	0,0459	0,0229 ¹
175 -	64,77 -	0,0459	0,0229
170 -	61,16 -	0,0460	0,0232
165 -	58,02 -	0,0462	0,0235
160 -	54,70 -	0,0462	0,0237
155 -	51,43 -	0,0463	0,0240
150 -	(50,60) -	(0,0474)	(0,0247)

Er gruppiert die Varianten in Höhenklassen nach den natürlichen Grenzen 150 cm, 155 cm usw.; es hätten aber ebensogut andere äquidistante Grössen gewählt werden können.

Dieser Höhenverteilung mit dazu gehörenden mittleren Gewichten entspricht eine Reihe von Ponderalindices, die in überraschend einfacher Weise mit denjenigen korrespon-

¹ Es ist illogisch, H in Zentimetern auszudrücken, wenn P in Kilogramm angegeben ist; H muss in Dezimetern ausgedrückt werden, wobei sämtliche Indices mit 10 multipliziert werden.

dieren, die wir bei den Knaben fanden. Die 12- und 13-jährigen Knaben weisen dieselben Indices auf wie die beiden grössten Masse der Wehrpflichtigen, und darauf wachsen die Reihen gleichmässig und einheitlich, so einheitlich, dass eine graphische Darstellung dieselbe Kurve ergibt. Bei solchen Übereinstimmungen hält man unwillkürlich inne und fragt: Sind es vielleicht die beobachteten Materialiensammlungen, die durch einen speziellen und zufälligen Charakter trügen, oder hat die Sache eine allgemeine Bedeutung? Die Beantwortung bleibt der Zukunft überlassen; hier soll nur auf die Eigentümlichkeit hingewiesen werden. Eins ist indessen sicher, dass die Untersuchungen an Schnecken Resultate derselben Art aufweisen. Es scheint also, dass eine Sammlung von Varianten mit der mittleren Zahl durch gleichgrosse Wachstumsperioden dieselben Grundgesetze befolgt, wie die Variantenklassen innerhalb der Sammlung selbst.

Der Baum.

Der Wald vertritt heutzutage eine Mischung von Natur und Kultur. Durch Konkurrenz ruft der Forstwirt mittels Aufforstungs- und Durchforstungsmethoden die Eigenschaften hervor, die seinem Zweck entsprechen; die Individuen geraten aber dabei in eine einseitige Entwicklung, deren wesentliche Kennzeichen ein kräftiger und wohlentwickelter Stamm mit früh absterbenden unteren Ästen bildet. So steht der Baum als ein Kulturerzeugnis mit einer Abänderung seiner ursprünglichen Physiognomie da, und nur wo der Wald aufhört, wo Licht und Sonne hinzukommen, nehmen die Randbäume teilweise die typische Gestalt an. Aber nicht nur die äussere Kontur, die Silhouette

des Baumes, die sich als graphisches Element bestimmen lässt, verschiebt sich; dasselbe gilt auch von anderen Verhältnissen; so büssen die Abstände zwischen den Kränzen die eigentümliche rhythmische Abwechslung ein, die das natürliche Wachstum im allgemeinen bei der Fichte darbietet.

Wenn die Individuen nun auch einander gegenüber nachgeben und durch den bestehenden Kampf geprägt werden, wird die Summe der entstandenen Variationen sich doch innerhalb gewisser gesetzmässiger Grenzen halten.

Dies ist an einem umfangreichen Material ersichtlich.

1892 veröffentlichten A. OPPERMANN und C. V. PRYTZ das grosse Material¹, das unter ihrer Leitung aus einer Aufnahme der Fichtenbestände in den verschiedenen Gegenden des Landes hervorgegangen war.

Unter anderem zeigen die Messungen der Dicke der Stämme in diesem Standardwerk, dass die Individuenzahlen überall Flitzbogenkurven beschreiben, die sich bald zu schönen, regelmässigen Figuren, bald zu künstlicheren Polygonen, je nach der Individuenanzahl, gestalten. Besonders interessant sind die aus dem gegebenen Arbeitsplan hervorgegangenen Resultate; es heisst:

»Sämtliche Bäume werden kreuzweise 1,3 m über der Erde gekluppt; wo es erforderlich ist, wird die Messhöhe für jeden Baum für sich bestimmt. Sie werden in 5 Gruppen gebucht: *a* der bleibende Bestand, *b* gesunde oder nur wenig kranke Durchforstungshölzer, *c* sehr kranke oder ausgegangene Durchforstungshölzer, sämtlich Fichten usw.«; Ein willkürlich gewähltes Beispiel, wie S. 250, ergibt:

¹ Undersøgelser over Rodgranens Vækst i Danmark. Kjøbenhavn 1892.

Probefläche 3.

D.	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	cm
S_a			5	12	26	55	44	55	52	38	34	15	8	2	1	1	Individuenzahl
S_b		5	15	33	28	18	13	9	1	2							—
S_c	4	14	17	13	6	5	9										—

woraus hervorgeht, dass S_a , S_b und S_c je für sich Flitzbogenkurven beschreiben, je mit seinem besonderen Gipfel, wenn die Durchmesser längs einer gemeinsamen Achse abgesetzt werden. Daraus folgt, dass die gemeinsame Kurve entweder schief oder mehrgipfelig ist, möglicherweise mit verwischter Tendenz. In wie hohem Grade S_b und S_c zu den mindermässigen oder kranken Individuen gehören, besagt das Tabellenwerk nicht; S_b darf aber jedenfalls als teilweise gesund aufgefasst werden. Um einigermaßen sicher zu sein, habe ich in Rudeskov und Geelskov (Nordostseeland) einige Probemessungen angestellt, die meine Ansicht bestätigten. Daraus muss aber folgen, dass die Fichtenkultur während ihres Wachstums bei der gegenseitigen Konkurrenz Gruppen bildet.

Dass derartige »minderlässige« Individuen schnell die Widerstandsfähigkeit einbüßen und von Flechten, Pilzen und Insekten angegriffen werden, ist einleuchtend; es ist aber namentlich die Konkurrenz und nicht etwa Krankheit, die sie im Kampf ums Dasein unterliegen macht. Dagegen hat S_c sich wegen Kränklichkeit von S_b ausgesondert; doch mag sich hier auch ein anderes Moment geltend machen, wenn nämlich die Aussonderung stossweise vonstatten geht, indem ein kräftiges oder schlechtes Wachstumsjahr mehr Nachzügler ergibt als ein normales Jahr, denn dann mag S_c zu einem früheren Zeitpunkt, S_b zu einem späteren ausgesondert worden sein.

Da die Gruppe S_a durch denjenigen gebildet worden

ist, der die Durchforstung leitete, ist zu erwarten, dass sich eine gewisse Zufälligkeit geltend gemacht hat, was sich dann teilweise an den Kurven nachweisen lässt; so ist an derselben Seite Probefläche 5 mit einer Gruppe durchforstet, während man in anderen Fällen eher geneigt ist, S_b als zum Haupttypus gehörend zu betrachten. Im ganzen genommen, weist das grosse Material einen so vielseitigen und abwechselnden Charakter auf, dass seine Brauchbarkeit weit über das rein forstliche Gebiet hinaus reicht.

Wir sehen also, dass die Fichten während ihres Wachstums geneigt sind, Flitzbogenkurven zu beschreiben.

Im Sommer 1917 hatte ich reichliche Gelegenheit, grössere Fichten, die in Geelskov gefällt wurden, zu messen. Namentlich mass ich die Abstände zwischen den Astkränzen und untersuchte deren Variation. Die Aufgabe wurde indessen nicht zu meiner Zufriedenheit gelöst, da eine unerwartete Schwierigkeit eintrat und bewirkte, dass die Zusammengehörigkeit zwischen den Massen von Baum zu Baum, die mir notwendig schien, unerreichbar war. Wenn die Fichte über $\frac{1}{2}$ Jahrhundert alt war, zeigte es sich nämlich — jedenfalls an dieser Örtlichkeit — dass die Kränze nicht mehr mit der Regelmässigkeit und der Folgeordnung markiert werden, die sonst den Baum in jüngeren Jahren auszeichnen, ja oft verteilen sich die Äste in den Kränzen in der Weise, dass es unmöglich ist, anzugeben, zu welchem sie gerechnet werden sollen, und dass die Kranzzahl ganz verwischt wird. Der Gipfel sieht nicht mehr aus wie der eines Etagenbaums. Dadurch ist gegeben, dass man nicht mit Sicherheit das Alter eines beliebigen Absatzes weiter

unten am Stamm angeben kann, denn von dem Wurzelende aus wird gleichfalls die Möglichkeit verwischt. Da aber der Bau des Zapfens mit den ausgeprägten Spiralbildungen wie auch die Blattstellung an den jungen Trieben, wo das Häutchen eben abgeworfen ist, stets auf eine Regelmässigkeit derselben Art hindeutet, wie wir sie im Vorhergehenden betrachtet haben, versuchte ich, die gegenseitige Abhängigkeit an demselben Baum klarzulegen, indem ich Quotienten der Kranzabstände bildete. Dann kann man oft, wenn man sich an die Teile hält, die um das 40. Jahr liegen, Quotienten erhalten, die recht konstant bleiben; aber hie und da muss man Sprünge erwarten, wo die Abstände kleiner werden; der folgende ist dann oft verhältnismässig lang, gewissermassen einer Abbalanzierung wegen. Im ganzen hat man den Eindruck, dass der Baum während seines Wachstums allerdings eine gewisse Hauptlinie verfolgt, aber mit variirender Tendenz, die in Zahlen übersetzt eine grössere Unruhe aufweisen würde als bei den Schnecken.

Dies ist selbstverständlich, denn dem Baum fehlt die Freizügigkeit, welche bewirkt, dass er nicht wie der Mensch und das Tier den schädlichen Wirkungen aus dem Wege gehen kann; er muss an Ort und Stelle bleiben und die Folgen auf sich nehmen, und dazu kommt noch, dass eben der Gipfeltrieb, der das Längenwachstum bedingt, durch seine Stellung besonders empfänglich ist¹. Am schlimmsten scheint doch die gegenseitige Konkurrenz auf die Regelmässigkeit zu wirken; denn bei Bäumen in Gärten, auf Kirchhöfen und in Parks kommen nie so grosse Variationen vor wie im Walde.

Jedoch ist die Fichte kein »typischer mathematischer

¹ JOHANNES HELMS: Iagttagelser over Rødgranen og Ædelgranens ydre Form. Kopenhagen 1914.

Baum«, da die sekundären Triebe viel zu oft die Absätze in Unordnung bringen; weit vorteilhafter wird es sein, die Tanne zu studieren, und zwar an Orten, wo sie sich frei entwickelt, denn hier kann sie schöne Reihen von gleich grossen Quotienten aufweisen. Noch besser ist es, die Äste zu untersuchen, denn es scheint, als ob sie regelmässiger und unter ruhigeren Verhältnissen wachsen und gewissermassen die grossen Variationen vermeiden, welche die Stämme prägen können.

Betrachten wir ein einzelnes Exemplar unter vielen. Eine ungefähr halbhundertjährige Tanne wies eine etwas schwierige Laufbahn auf. Wenigstens 3mal war der Gipfeltrieb zerstört worden, und der Stamm nebst Kränzen war daher nicht gut abgesetzt; die Äste boten aber nichts Nennenswertes dar, und wenn nicht vor wenigen Jahren eine Aufastung stattgefunden hätte, würden die Zweige fast die Erde erreicht haben; nun ragten die untersten in Manneshöhe frei zu den Seiten hinaus in einer Stellung zwischen S- und Kandelaberform; dadurch wird aber die Unterseite dem Einfluss des Lichtes ausgesetzt, und die schlafenden Augen zwischen den Ästen zweiter Ordnung waren daher an dieser Seite zur Entwicklung gekommen und hatten eine kräftige Epinastie hervorgerufen, die vom Inneren des Stammes herauswuchs und sich allmählich gegen die Spitze der Zweige hin verlor.

Die Messungen an diesen Zweigen werden durch die folgende Tabelle veranschaulicht:

I.

Abst. in cm:	28,5	26,5	24,3	19,3	20,5	19,5	19,5	19,3	19,0	16,0	18,5	16,8	15,8
Quot.:		1,1	1,1	1,2	0,9	1,1	1,0	1,0	1,0	1,2	0,9	1,1	1,1

II.

Abst. in cm:	32,5	30,0	21,0	22,0	20,3	18,5	18,0	18,2	16,5	19,0	17,3	17,5	18,0	16,6	16,0
Quot.:		1,1	1,4	1,0	1,1	1,1	1,0	1,0	1,1	0,9	1,1	1,0	1,1	1,1	1,0

Man sieht, dass die Quotienten schwanken, aber mit einer einzelnen Ausnahme nicht mehr, als dass die Abstände als Glieder einer Quotientenreihe betrachtet werden können. Am interessantesten ist es jedoch, die Variationen zu beobachten, die von dem Gange des Wachstums eine ausgezeichnete Vorstellung geben und dasselbe in weit höherem Grade kennzeichnen als das Mass der Abstände.

Bei Betrachtungen dieser Art entrollt sich unserem Blick ein mathematisches Bild vom Wachstum der Fichte, das sich in grossen Zügen folgendermassen gestaltet: Der Stamm wächst und setzt seine Kränze ab, die sich, falls fremder Einfluss ausgeschlossen werden kann, übereinander in Abständen erheben, die eine Quotientenreihe bilden; gleichzeitig entwickeln sich die Äste, und die mittleren Längen der Kränze bilden eine zweite Quotientenreihe, d. h. dass die Bäume nach oben hin und vom Stamm nach aussen hin nach demselben Gesetz, und nur mit verschiedenem Wachstumsfaktor wachsen. Diesem arithmetischen Bild schliesst sich ein anderes an, ein geometrisches, das durch die Silhouette des Baumes oder, wie wir hier sagen, die Kuppelung ausgedrückt wird. Es ist unmittelbar ersichtlich, lässt sich aber noch weiter durch eine Photographieplatte bestimmen.

Wie sieht denn eine solche Fichte in der Natur aus?

WARMING sagt in seinem Buch »Skovene«: »Es finden sich in der Literatur viele andere Wachstumsformen der Fichte, die von der bekannten typischen, gewöhnlichen Form abweichen, mit in freiem Zustand kegelförmigen, spitzen Gipfeln, deren Äste erster Ordnung sich wagerecht erstrecken oder etwas nach unten beugen, so dass sie mitunter mit ihren Spitzen die Erde erreichen, und deren Äste zweiter Ordnung in 2 Seitenreihen stehen, wagerecht

oder ein wenig nach unten gebeugt (Fig. 49). In dem nördlichsten Schweden und Norwegen ist der Gipfel sehr oft hoch und dünn, zylinderförmig«.

Ja eben! — Hinzugefügt muss aber noch werden, dass man recht oft, gleichfalls in freiem Zustand, eine Form trifft, die ziemlich spitz ist, die sich aber dann nach unten hin gegen den Stamm, die Hohlheit nach aussen gekehrt, hinein beugt, und bei der die unteren Astringungen nur wenig von den oberen divergieren. Diese Form hat ein ursprünglicheres Wachstumsgepräge, weil die Schwere einen geringeren Einfluss auf die Gestalt ausübt. Dies tritt oft deutlich hervor, wenn man an dem Warmingschen Typus die untersten Zweige emporhebt, so dass sie den obersten parallel werden, oder sich dieses nur im Gedanken vorstellt, denn dann erhält der Baum die nach innen gebogene Tendenz, indem die ausgerichteten Äste die Kegelfläche brechen und von derselben aus hervorragten.

Die Kuppelung, die durch Aststellung, Astwinkel und Quotientenverhältnis als Haupteigenschaften bestimmt und durch eine Reihe von weniger wesentlichen Faktoren ausgeglichen und ausgefüllt wird, ist selbstverständlich nicht charakteristisch für die Nadelhölzer allein. Es sei, dass der Baum in Grün gekleidet ist oder kahl dasteht, so wird der interessierte Beobachter ihn auch von weitem an der Form kennen können. Die Kuppelung ist daher etwas typisch Charakterverleihendes, und an fast allen Abbildungen in dem Werk »Skovene« tritt dies so stark hervor, dass die Wahl keine zufällige sein kann. Das Werk ist also unter vielem anderen eine Veranschaulichung der Kuppelung.

In der geometrischen Form des Baums birgt sich ein Gesetz, das sich kaum in Worten ausdrücken lässt, das

aber stets in einer Bildersammlung hervortreten wird, die von demjenigen aufgenommen worden ist, der für die Natur den rechten Blick hat, denn dieses Gesetz wirkt auf den Naturkenner ungefähr in derselben Weise wie die Charakterzüge und deren Zusammenspiel bei unseren Rasantieren auf den Kenner. Dies Gesetz bezeichnen wir in seiner bildlichen Gestalt als Warmings Kuppelung und werden es im Folgenden durch die algebraische Form noch weiter aufklären.

Halten wir jedoch einen Augenblick inne, um eine kleine Arbeit näher zu untersuchen, die anscheinend von unseren Betrachtungen ganz verschieden ist, in der Tat aber dieselben Gedanken und Ideen in Diensten einer anderen Sache enthält. Unter seinen Bemühungen, die absolute Formzahl von Baumstämmen zu bestimmen, verfiel der deutsche Forstmann HANS RINI¹ darauf, die Form der Baumstämme zu untersuchen und stellte an der Hand einer Reihe von Messungen die Gleichung

$$y^2 = \left(\frac{x}{x'}\right)^{\frac{2}{m}} \cdot y'^2$$

als Ausdruck der Erzeugerkurve auf, indem man sich die Abszissenachse durch die Achse des Stammes und den Anfangspunkt des Gipfels des Baumes gelegt denkt. x' und y' sind zwei zusammengehörende Koordinaten. Die absolute Formzahl, welche das Verhältnis zwischen dem Raumgehalt des Stammes und dem Raumgehalt eines Zylinders mit derselben Grundfläche und Höhe wie der Stamm darstellt, lässt sich dann durch $m : (m + 2)$ ausdrücken.

Inwiefern diese Grösse forstlichen Zwecken entspricht, kann ich nicht entscheiden; es sind gegen sie u. a. zwei

¹ HANS RINI¹: Über Baumform und Bestandesmasse. 1873.

Einwände erhoben worden, die aber nicht die Verwendbarkeit der Formeln auf unseren Gebieten verhindern werden. Wenn die Kurve am liebsten Wendepunkte haben sollte, damit die Form, die durch die Ausläufer am Wurzelende entsteht, in Betracht kommen kann, muss man sich erinnern, dass die Ausläufer im allgemeinen durch ein späteres Wachstum gebildet werden und höchst verschiedene Charaktere aufweisen, je nach der Grösse des Gipfels und der Stellung des Baumes zu Wind und Wetter. Ferner sieht man leicht, dass 2 Stämme von derselben Länge und mit demselben Exponenten in den Gleichungen der Erzeugerkurve dieselbe absolute Formzahl erhalten müssen. Dazu bemerkt aber OPPERMANN¹:

» und daher vom Waldwirt gleich vollhölzig genannt werden; ein Handwerker wird sie aber nicht als ganz ebenbürtig betrachten, da er auf ihr verschiedenes Formverhältnis Rücksicht nimmt«.

Was hier als Einwand gegen die Formel gilt, befürwortet deren Anwendbarkeit bei unseren Untersuchungen.

Statt der obigen Gleichung benutzen wir den Ausdruck

$$y^2 = px^m,$$

der denselben mathematischen Charakter hat.

Diese Gleichung hat eine Eigenschaft, die sich physiologisch auslegen lässt. Dies hat RINIKER übersehen, und es ist später von niemand hervorgehoben worden.

Lässt man nämlich x eine Quotientenreihe durchlaufen,

$$x = a, aq, aq^2, aq^3, \dots aq^{n-1} \text{ gibt}$$

$$y = k, kq^{\frac{m}{2}}, kq^{\frac{2m}{2}}, kq^{\frac{3m}{2}}, \dots kq^{\frac{(n-1)m}{2}}, \text{ wo } k = \sqrt{p \cdot a^n};$$

¹ A. OPPERMANN: Forelæsninger over Skovbrugslære, Træmaalings og Tilvækstlære. København 1900.

werden die entsprechenden y -Werte eine ähnliche Reihe bilden. Denn in der letzten Reihe ist der Quotient $q^{\frac{n}{2}}$ und also von dem Parameter unabhängig; man sieht also, dass der Stamm des Baumes nach demselben Gesetz in die Länge und Breite wächst, und dies geschieht unabhängig von dem zufälligen p -Wert zu einem gegebenen Zeitpunkt.

Vergleicht man dies Resultat mit unseren Untersuchungen, so ist es klar, dass RINIKER durch Messungen am Stamm des Baumes zu demselben Resultat gekommen ist wie wir durch unsere Untersuchungen des Wachstumsverhältnisses bei Schnecken und beim Menschen in Verbindung mit Studien über die äussere Form des Baumes.

Dies ist ein interessantes Zusammentreffen, kein Zufall; denn im Innersten des Baumstamms, sowie in seinen einzelnen Teilen muss sich die Eigentümlichkeit des Wachstums abspiegeln, wenn auch äussere Faktoren verwischender Neigung hinzukommen.

RINIKERS Zweck tritt noch deutlicher hervor, wenn wir unseren oben angeführten Resultaten ein mathematisches Gewand angeben.

Lassen wir in einem rechtwinkligen System die Stammachse Abszissenachse und den Gipfel Ausgangspunkt sein, haben wir:

$$x = aq^{n-1} \text{ und } y = bq_1^{n-1},$$

wo a und b zwei zusammengehörende Werte bezeichnen. Durch Elimination von n und Einführung von einfachen Konstanten bekommen wir

$$y^2 = px^n.$$

Wenn $q = 1$ ist, wird die sich ergebende Kurve keine

Parabel sein, sondern eine exponentielle Linie, ein Verhältnis, das sehr oft durch Messungen an regelmässigen Stämmen bestätigt wird. Es mag hier nur ein Beispiel aus einem Aufsatz von PAUL JACCARD, De l'accroissement en épaisseur des arbres¹, angeführt werden. Es heisst in dieser interessanten Abhandlung: »Le cas concret envisagé est celui d'un grand épicéa de haute futaie de la forêt d'Opplingen, canton de Bern, dont on connaît les diamètres mesurés de deux en deux mètres entre 11 et 23 mètres au-dessus du sol«.

Die Messung zeigt:

Hauteur au-dessus du sol	Demi-diamètres mesurés	Quotients
23 m	19,0 cm	1,08
21 -	20,7 -	1,08
19 -	22,5 -	1,04
17 -	23,4 -	1,04
15 -	24,5 -	1,06
13 -	26,2 -	1,04
11 -	27,4 -	—

Lassen wir die Achse des Stammes die Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems sein, und bringen wir die Halbdiameter als Ordinaten an, kann man die gemessenen Zahlenwerte mit den Werten vergleichen, die sich ergeben, wenn man eine Gerade oder eine kubische Parabel durch die Endpunkte der ersten und letzten Ordinate legt, wie dies in der zitierten Abhandlung dargestellt ist. Man gewinnt dadurch ein Annäherungsergebnis, wo die beiden Ordinaten in zu hohem Grade das Resultat beeinflussen. Wünscht man eine eingehendere Untersuchung, muss daher die

¹ Bulletin de la société vaudoise des sciences naturelles. Lausanne.

Methode der kleinsten Quadrate angewandt werden, doch dies ist ganz zu vermeiden, wenn wir wie bei unseren früheren Untersuchungen die Quotienten bilden, wie in der dritten Kolumne dargestellt. Hieraus geht nun hervor, dass der Erzeuger des Stammes an dem gemessenen Stück eine exponentielle Linie ist.

Wir besitzen jetzt das Material, um unsere Untersuchungen in Worten darlegen zu können, indem die Warmingsche Kuppelung der bildliche Ausdruck ist, der durch Rinikers Formel mathematisch beleuchtet wird und sich also aus dem Quotientengesetz herleiten lässt.

Oft sind diese beiden Begriffe so identisch, wie unsere Messungen es ergeben können, mitunter kann sich der Unterschied ergeben, den die Schwere durch ihren Einfluss auf die unteren Äste bewirkt, wodurch eine Abründung eintritt.

Unsere Resultate und Betrachtungen sind aus Untersuchungen an Etagenbäumen hervorgegangen, die Kuppelung weist aber überall im Pflanzenreiche denselben Charakter auf; man muss also mit einigem Recht annehmen können, dass das Wachstum bei allen Bäumen, Sträuchern und Kräutern dasselbe Gesetz befolgt, nämlich — wie wir gezeigt haben — das Quotientengesetz.

Diese Auffassung des Wachstums wird in hohem Grade durch die Eigentümlichkeiten des Gewimmels von Spiralbildungen unterstützt, das sich in verschiedenen Wachstumsstadien im Leben vieler Pflanzen bildet.

AUSGESTALTUNG UND ANWENDUNG DES WACHSTUMSGESETZES

Die logarithmische Spirale.

Das Studium der graphischen Elemente, mittels der graphischen Methode und Messungen durchgeführt, hat, wie besprochen, zu der Annahme geführt, dass das Wachstum einer bestimmten Regelmässigkeit unterliegt.

Der lebenden Natur mit ihren mannigfachen Neigungen zu Nuanzierungen, Abweichungen und Verschleierungen gegenüber, muss man jedoch mit einer Generalisierung von Messungen sehr vorsichtig sein, um so viel mehr, als ihnen oft Beobachtungsfehler anhaften, deren man nicht Herr werden kann. Andererseits hat sich kein anderer Weg als fahrbar erwiesen.

Es fragt sich daher fortwährend: Was ist es für eine Spirale, in der sich die Schneckenschale dreht, und auf welchem allgemein physiologischen Wege ist sie erklärbar?

Am leichtesten wäre es, die Spirale als etwas Zufälliges zu betrachten, das sich nicht in die stringente Form der Mathematik einfügen lässt. Leben bleibt Leben. Es muss frei schwingen können; aber wir wissen, dass diese Ausschwünge gewisse Grenzen nie überschreiten, und das Tier vermag sie weder zu fördern, noch zu hemmen. Es sind somit keine individuellen, sondern tiefer liegende Ursachen, die sich in der Form der Schale abspiegeln.

Es wird Jahr für Jahr, je nachdem die Versuche vor-

schreiten, immer mehr festgestellt, dass das Wachstum der Organismen gewissermassen dieselben Gesetze befolgt, die uns aus der Beobachtungslehre bekannt sind, und die dort in der typischen Fehlerkurve ihren bildlichen Ausdruck erhalten haben. Es liegt daher nahe, zu fragen, ob sich nicht etwa bei den Organismen ein gemeinsamer Grundzug nachweisen liesse, der sich bei den Schnecken in der Form der Schale zu erkennen gäbe.

»Es ist nämlich das Vorrecht des Lebenden, die aufgenommenen Einflüsse zu verwahren und im geheimen fortzupflanzen, und daher sind die wirksamen Ursachen auf diesem Gebiete in der gesamten Vorzeit aufzusuchen«, heisst es bei dem verstorbenen Prof. THIELE. Ja, dann ständen wir da wie die Ochsen am Berge. Jahrtausende zurück, das ist ein weiter Weg.

Indessen hat die Natur uns selbst eigentümlicherweise die Mittel zum Lüften des Schleiers in die Hände gespielt. Bei vielen Pflanzen bilden nämlich die Frucht- und Blütenstände spiralförmige Figuren, und bei anomalen Individuen zeigen sich sehr oft plötzlich Spiralen, von denen bei entsprechenden normalen Individuen keine Spur vorhanden ist. Derartiges habe ich oft bei unseren Getreidearten beobachtet, sowohl beim Roggen als bei der Gerste, namentlich der zweizeiligen, wo die Ähre sich spiralförmig beugt, wenn die Körner sich an der einen Seite nicht entwickeln; es gibt hier zwei bestimmte Verhältnisse, die einen Anhalt darbieten und sich definieren lassen. Einerseits die Wahrung eines bestimmten Winkels, andererseits eine kräftige Neigung, bei Wachstumsabnahme die Konformität zu behaupten.

Diese Beobachtung in Verbindung mit einer Reihe von Verhältnissen, die in dieselbe Richtung deuten und im Vorhergehenden dargelegt wurden, haben mich zur Auf-

stellung einer Hypothese geführt, die sich als in hohem Grade fruchtbar erwiesen hat. Da der Weg durch Quotientenreihen und deren Abbildung führt, habe ich die Untersuchungen und deren Ergebnisse unter den gemeinsamen Begriff, das Quotientengesetz, zusammengefasst.

Fangen wir mit einem Beispiel an. Werden in einer Bank 100 Mark angelegt zu $4\frac{0}{10}$ p. a., die dazugeschlagen und verzinst werden, kann man durch eine Berechnung Jahr für Jahr eine Tabelle aufstellen, welche die Grösse des angesammelten Kapitals zu Ende eines jeden Jahres angibt.

Eine solche Tabelle würde für 8 Jahre folgendermassen aussehen:

Zeit	Mark	Quotient
1	104,00	1,040
2	108,16	1,039
3	112,49	1,040
4	116,99	1,040
5	121,67	1,039
6	126,49	1,040
7	131,55	1,039
8	136,81	—

wo der Quotient nicht ganz konstant ist, da zu ganzen Pfennigen abgeründet worden ist.

Statt der Tabelle hat man bekanntlich den allgemeinen arithmetischen Ausdruck

$$x = k(1 + r)^t, \quad (1)$$

der für alle reellen Werte von t gilt.

Stellen wir die Funktion graphisch dar mit x als Ordinate und t als Abszisse in einem rechtwinkligen System,

erhalten wir eine Kurve, welche von der Ordinatenachse die Strecke k abschneidet, die Hohlheit gegen die positive Richtung der x -Achse kehrt und sich asymptotisch der negativen Richtung der t -Achse nähert.

Eine andere Abbildung, die die Natur anweist, entsteht folgendermassen: Man setzt an einer Geraden nacheinander ab

$$AB = k (1 + r)^0$$

$$BC = k (1 + r)^1$$

$$CD = k (1 + r)^2$$

⋮

Ferner wird von A aus nach der entgegengesetzten Seite hin $OA = \frac{k}{r}$ abgesetzt, wodurch der Anfangspunkt der Quotientenreihe bestimmt wird. Dadurch bildet sich eine neue Quotientenreihe mit denselben Quotienten wie in der gegebenen, nämlich

$$OA = \frac{k}{r} (1 + r)^0$$

$$OB = \frac{k}{r} (1 + r)^1$$

$$OC = \frac{k}{r} (1 + r)^2$$

⋮

Benutzt man statt eines rechtwinkligen Systems ein Polarsystem mit dem Radiusvektor x und dem Winkel t , erhält man eine Kurve, deren Gleichung

$$x = ke^{t(1+r)} \quad (2)$$

ist, wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Die Kurve nennen wir eine logarithmische Spirale,

und es lässt sich beweisen, dass der Winkel μ zwischen Radiusvektor und Tangente konstant ist und durch

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{1}{l(1+r)}$$

bestimmt wird.

Wir sehen also, dass das Geld sich nach einem bestimmten Gesetze mehrt, das sich in verschiedener Weise abbilden lässt und das Ergebnis des menschlichen Willens ist; ob ein solches Gesetz aber auch für die Organismen, darunter den Menschen, oder für Gesellschaften von Organismen Geltung hat, das wissen wir nicht.

Meines Erachtens kann der Mensch keine Gesetze in der Natur auffinden und nachweisen sowie auch keine Erscheinung in der Natur klarlegen, es sei denn, dass die Existenz im Allerinnersten auf entsprechender Regelmässigkeit beruht; wir können von keinen anderen Sinnen bei den Tieren reden als von denen, mit welchen wir selbst ausgestattet sind. Das wäre nur in den Tag hinein reden. Wenn z. B. der Mathematiker eine Proportionalität oder dgl. formuliert, gibt er nur seinen allgemeinen Beobachtungen ein Gewand an, das er, falls er will, dass man ihn versteht, fortwährend durch Beispiele aus dem täglichen Leben ersetzen muss.

Da ist es aber natürlich, zu fragen, ob wir nicht — bewusst oder unbewusst — in der Natur Elemente von dem Gesetz angetroffen haben, nach dem wir bei der Mehrung des Geldes rechneten.

In einer Gemeinschaft, deren soziale und hygienische Verhältnisse sich einigermaßen regelmässig gestalten, mit natürlichem Zuwachs und Abgang durch Geburten und Todesfälle und ohne gewaltsame Begebenheiten, wird die

Volksmenge meist in derselben Weise zunehmen wie das Geld, nur mit der durch das Leben bedingten Unruhe.

Mannigfach ist dies untersucht worden, und wenn die Beobachtungen mit dem Masstab in der Hand sich auch nicht immer auf ein Haar danach fügen wollten, deuten die Resultate doch stets in bestimmter Richtung, und zwar immer auf das Quotientengesetz hin, nicht derart, dass dieses denselben Wachstumsquotienten das ganze Leben des Organismus hindurch angeben sollte, aber immerhin durch grosse Perioden desselben. Wie beim Kind in den ersten Lebensjahren ein verhältnismässig grösserer Aufbau als Abbau von Stoff stattfindet, so kommt einmal die Zeit, wo das Entgegengesetzte der Fall ist, aber zwischen diesen beiden Grenzen, dem Aufgang und dem Untergang des Lebens, scheint die Entwicklung dem Quotientengesetz gemäss dahinzugleiten, mit geringeren Ausschwüngen, wo die äusseren Beeinflussungen gleichmässig sind, z. B. auf dem Grund des Meeres.

Wie es sich mit den Individuen einer Gemeinschaft verhält, muss es sich auch mit den Zellen des lebenden Gewebes verhalten. Hier muss der Zustand beim Hinzukommen und Abgang von Zellen ein analoger sein. Dann sind wir aber genötigt, unsere Hypothese aufzustellen:

Wenn ein lebendes Gewebe, das wir uns linear vorstellen können, Nahrung empfängt und durch keine fremden Ursachen gestört wird, wird es sich dem Quotientengesetz gemäss entwickeln,

$$x = k(1 + r)^t,$$

wo k den Anfangswert, t die Zeit und $1 + r$ eine gewisse Konstante innerhalb der Wachstumsperiode bezeichnen.

Von der Hypothese ausgehend und uns unsere Untersuchung S. 16 vor Augen haltend, formulieren wir nun

folgende Aufgabe, die auf eine Abbildung von Quotientenreihen abzielt:

Bestimme eine ebene Kurve OO_1MAA_1 so, dass die Tangente in O , OA , durch Drehung in die Stellung O_1A_1

$$O_1A_1 = OA \cdot (1+r)^t \text{ und } MA_1 = MA \cdot (1+r)^t$$

ergibt. M ist ein fester Punkt an der Kurve und t

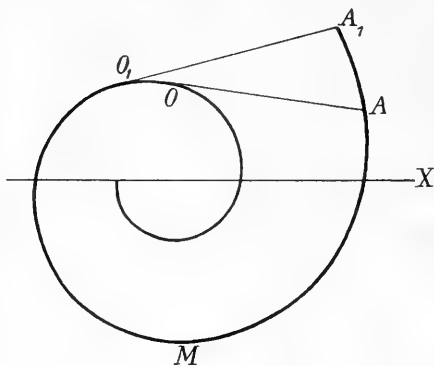


Fig. 8.

eine variable Grösse, die bei einer entsprechenden Drehung der Tangente sehr klein ist.

1. Wenn OA , Fig. 8, in der Anfangsstellung k_0 und der entsprechende Bogen MA s_0 ist, hat man

$$OA = k = k_0 (1+r)^t$$

und

$$MA = s = s_0 (1+r)^t,$$

was

$$\frac{OA}{MA} = \frac{k}{s} = \frac{k_0}{s_0}$$

ergibt; das heisst konstant.

2. Wenn (Fig. 9) OA durch Drehung um O in die konsekutive Stellung OA_1 versetzt und der Bogen AP mit O als Zentrum gezeichnet wird, erhält man ein elementares Dreieck APA_1 , das

$$AA_1 = s_0 (1+r)^t + dt - s = l (1+r) s \cdot dt$$

$$A_1P = k_0 (1+r)^t + dt - k = l (1+r) k \cdot dt$$

$$AP = l (1+r) \cdot \sqrt{s^2 - k^2} \cdot dt$$

und $d\varphi = l (1+r) \sqrt{\left(\frac{s_0}{k_0}\right)^2 - 1} \cdot dt$

ergibt, wo $d\varphi$ Winkel AOA_1 ist.

Ferner ergibt das elementare Dreieck

$$\cos A_1 = \frac{A_1 P}{A_1 A} = \frac{k}{s} = \frac{k_0}{s_0}.$$

Man sieht also, dass die Tangente, mit der Kurve in Punkt A fortwährend denselben Winkel bildet.

3. Der letzte Ausdruck in 2. zeigt, dass der Drehungswinkel mit t proportional ist, da eine Integration:

$$\varphi = l(1+r) \sqrt{\left(\frac{s_0}{k_0}\right)^2 - 1} \cdot t$$

ergibt.

4. Daraus kann man schliessen, dass das Bogenelement AA_1 als zu einer logarithmischen Spirale mit dem Pol in O gehörend betrachtet werden kann. Bei fortgesetzter Drehung entstehen neue Rotationszentren mit den entsprechenden Bogenelementen.

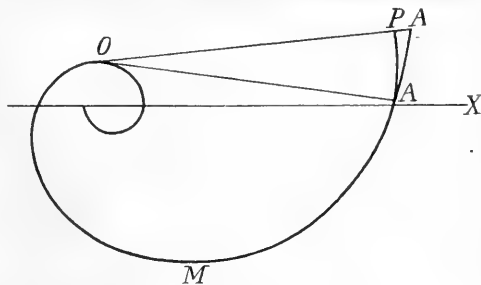


Fig. 9.

Statt der Geraden OPA ist OPA_1 , zu lesen.

5. Wenn die augenblicklichen Rotationszentren zusammenfallen, muss die gesuchte Kurve eine logarithmische Spirale werden. Dieser Fall tritt bei den sog. paucispiralen Familien ein, z. B. *Neritina fluviatilis*, die in unseren Seen auf Steinen am Ufer lebt.

6. Die Gleichungen in 2. ergeben:

$$\frac{AA_1}{d\varphi} = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{s}{\sqrt{\left(\frac{s_0}{k_0}\right)^2 - 1}} = cs = \varrho,$$

woraus folgt:

$$s = s_0 e^{c\varphi}, \quad k = k_0 e^{c\varphi} \quad \text{und} \quad \varrho = cs.$$

Diese Gleichungen enthüllen interessante Eigenschaften der gesuchten Kurve und können zu derselben führen, aber eine geometrische Untersuchung ist vorzuziehen, da sie einen reicheren Ertrag abgibt.

7. Dreht man OA in die konsekutive Stellung OA_1 und diese wiederum in die neue Stellung O_1A_2 usw. mit gleich grossen Drehungen, werden die sich ergebenden Dreiecke gleichwinkelig sein, so dass

$$AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$$

eine Quotientenreihe mit konstantem Winkel zwischen den Elementen bildet.

Eine um einen solchen polygonalen Umkreis umschriebene Kurve ist, wie man dartun kann, eine logarithmische Spirale.

8. Denken wir uns ein lebendes Gewebe $OACB$ im Wachstum begriffen, indem es längs OA und OB , den Koordinatenachsen eines rechtwinkligen Systems, befestigt ist, wird C , die vierte Winkelspitze des Rechtecks, nach der Zeit t die Koordinaten

$$a(1+r)^t \text{ und } b(1+r)^t$$

haben, wo a und b die Anfangswerte bezeichnen,

Man sieht daraus, dass C sich an der Geraden

$$y = \frac{b}{a}x$$

bewegen wird, und dass OC demselben Gesetz gemäss wächst wie Abszisse und Ordinate, da

$$OC = \sqrt{a^2 + b^2} (1+r)^t.$$

Lässt man daher die Kontur des Gewebes längs ACB durch eine beliebige Kurve vertreten sein, wird diese während des Wachstums fortwährend ihrer ursprünglichen Stellung konform sein.

9. Wird ein bewegliches, polares Koordinatensystem

auf der XY -Ebene des vorigen Falles so angebracht, dass die Polachse in ihrer Anfangslage längs OC fällt, und lässt man dieses System in der Zeit t gleichmässig einen Winkel kt beschreiben, wird C darin eine Kurve beschreiben, die durch

$$OC = \sqrt{a^2 + b^2} (1 + r)^t \text{ und } \theta = kt$$

bestimmt ist. Durch Elimination von t erhalten wir dann:

$$OC = \sqrt{a^2 + b^2} e^{\frac{l(1+r)}{k} \theta}$$

d. h. eine logarithmische Spirale.

Da diese Lösung aufs genaueste mit der Genese des Schneckendeckels S. 16 übereinstimmt, verleiht sie unserer Hypothese eine gewaltige Identität.

Jeder Punkt der Kontur wird in derselben Weise eine entsprechende Spirale beschreiben, wodurch die oft überaus schöne Skulptur entsteht, die wir bei so vielen Schnecken, namentlich aus dem Meere kennen.

Man sieht zugleich, dass der mathematische Charakter der Spirale unabhängig ist von der Kontur des Gewebes, die nur auf die Schalenmündung Einfluss ausübt.

10. Wenn man in (1)

$$OA = k = k_0 f(t)$$

und

$$MA = s = s_0 f(t)$$

setzt, hat man

$$\cos. A_1 = \frac{A_1 P}{A_1 A} = \frac{k}{s} = \frac{k_0}{s_0},$$

während der Drehungswinkel durch

$$d\varphi = \sqrt{\left(\frac{s_0}{k_0}\right)^2 - 1} \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot dt$$

bestimmt wird.

Nun haben sowohl die graphische Methode als die Messung gezeigt, dass Schalen mit bleibenden Mundrändern

gleich grosse Drehungen von Rand zu Rand erfordern, und infolgedessen muss

$$f'(t) : f(t) = \text{konst. oder } f(t) = c(1+r)^t$$

sein. Das heisst, dass unsere Hypothese in der betrachteten Form die einzige mögliche ist, wenn der Drehungswinkel konstant sein soll.

Wir wollen nun das Problem wiederaufnehmen, das zu Ende von 7. hervorgezogen wurde, und formulieren unsere neue Aufgabe:

Bestimme die Kurve, die durch die Winkelspitzen einer polygonalen Figur $ABCD \dots$ gelegt werden kann, in der die aufeinander folgenden Seiten eine Quotientenreihe bilden und der Polygonwinkel konstant ist.

Lassen wir $AB, BC, CD \dots$ die Quotientenreihe

$$a, aq, aq^2, \dots, q < 1$$

bilden, während der auswendige Winkel φ ist.

Die Linien $AB, BC, CD \dots$ bilden eine Figur, die eine polygonale Spirale genannt werden könnte, und die sich einem Pol nähern wird, wenn die Anzahl der Seiten fortwährend zunimmt, indem die Länge des Polygons sich $\frac{a}{1-q}$ nähert.

Hilfssatz 1.

Zeichnen wir über AB und BC als Sehnen zwei den Winkel φ enthaltende Kreise, so ist unmittelbar ersichtlich, dass AB und BC zu Tangenten in B werden, und dass die Kreise ausser B einen Schnittpunkt O erhalten.

Hilfssatz 2.

Die Dreiecke AOB und BOC sind gleichwinklig, was aus einer Betrachtung der Figur leicht hervorgeht; somit bilden aber AO, BO und CO drei aufeinander folgende

Glieder einer Quotientenreihe mit dem Quotienten q , nämlich
 b, bq, bq^2 .

Hilfssatz 3.

Zeichnen wir OD , wird $\triangle COD$ dem $\triangle BOD$ gleichwinklig, da $\angle OCD = \angle OBD$ und

$$\frac{OB}{BC} = \frac{OC}{CD} = \frac{b}{a} \text{ u.s.f.}$$

Hilfssatz 4.

O hat dann die Eigenschaft, dass man von dort aus die Seiten der polygonalen Spirale unter dem Winkel φ sieht; daraus geht aber zugleich hervor, dass O der Pol ist.

Hilfssatz 5.

Legen wir eine logarithmische Spirale durch A und B mit O als Pol, wird dieser bestimmt durch

$$\frac{OA}{OB} = e^{-m\varphi} = \frac{1}{q},$$

was

$$m = \frac{lq}{\varphi}$$

ergibt. Es sei OA die Polachse, so bekommen wir die Gleichung

$$r = OA \cdot e^{\frac{lq\theta}{\varphi}}$$

Setzen wir in dieser Gleichung nach und nach θ gleich $0, \varphi, 2\varphi, \dots$, so haben wir $r_0 = b, r_1 = kb, r_2 = kb^2, \dots$

Diese Hilfssätze zeigen, dass man durch die Winkelspitzen des polygonalen Umkreises eine logarithmische Spirale legen kann.

Es ist indes möglich, dass durch die Winkelspitzen andere Kurven gezeichnet werden können, solange a, φ und q beliebige, voneinander unabhängige Grössen sind; setzen wir aber

$$a = r_0 \cdot d\varphi, \varphi = d\varphi \text{ und } q = e^{-m \cdot d\varphi},$$

werden die Seiten des Polygons Bogenelemente, und die logarithmische Spirale ist dann die einzige Kurve, die durch die Winkelspitzen gehen kann. Wir erhalten die Gleichung

$$r = r_0 e^{-m\theta}.$$

Nachdem wir die gestellte Aufgabe gelöst haben und dadurch zu einer Kenntnis gelangt sind, auf die wir uns im Folgenden stützen können, ist es angebracht, die logarithmische Spirale einer näheren Prüfung zu unterwerfen, teils um die gefundenen Ausdrücke zu verifizieren, teils um Eigenschaften hervorzuheben, die gewöhnlich nicht angeführt werden.

1. Die gewöhnliche Gleichung einer logarithmischen Spirale ist bekanntlich

$$r = ae^{m\theta},$$

wo a Radiusvektor bei $\theta = 0$ ist.

Legt man die Polachse so, dass $\theta = 0$ $r = 1$ ergibt, hat man, ohne dass die Gleichung ihren allgemeinen Charakter verliert,

$$r = e^{m\theta}.$$

Von dieser Kurve gilt, dass sie die einzige ist, deren Radiusvektor zum Berührungspunkt mit der Tangente einen konstanten Winkel bildet.

Wir ziehen von Punkt A an der Spirale eine Tangente, die die nächste Windung in B schneidet, und es seien die Winkel, welche die Radiusvektoren OA und OB mit der Polachse bilden, θ und θ_0 . Man erhält dann aus $\triangle OAB$

$$\operatorname{tg} A = \frac{OB \sin (\theta - \theta_0 - 2\pi)}{OA - OB \cos (\theta - \theta_0 - 2\pi)}$$

und

$$\frac{AB}{\sin (\theta - \theta_0 - 2\pi)} = \frac{OB}{\sin A}.$$

Wird

$$\operatorname{tg} A = \frac{1}{m}, \quad OA = e^{m\theta} \quad \text{und} \quad OB = e^{m(\theta_0 + 2\pi)}$$

darin eingesetzt, haben wir

$$\cos(\theta - \theta_0 - 2\pi) + m \sin(\theta - \theta_0 - 2\pi) = e^{m(\theta - \theta_0 - 2\pi)} \quad (\text{a})$$

$$AB = \frac{1}{\sin A} \cdot \frac{\sin(\theta - \theta_0 - 2\pi)}{e^{m(\theta - \theta_0 - 2\pi)}} \cdot e^{m\theta} \quad (\text{b})$$

Die Gleichung (a) lässt sich annäherungsweise lösen, falls der Zahlenwert von m gegeben ist. Ihre grösste Wurzel ist Null; die übrigen sind negativ. Wird θ eliminiert, haben wir

$$AB = \text{konst. } e^{m\theta}.$$

Das heisst, dass das Verhältnis zwischen dem Radiusvektor zum Berührungspunkt und der Tangentenstrecke konstant ist, was aber wiederum ergibt: Alle in der angegebenen Weise auf einer logarithmischen Spirale gezeichneten Dreiecke sind gleichwinklig.

2. Lassen wir AB den Winkel φ beschreiben, so haben wir:

$$AB = c \cdot e^{m\theta} \quad \text{und} \quad A_1B_1 = c \cdot e^{m(\theta + \varphi)},$$

woraus folgt

$$A_1B_1 = AB \cdot e^{m\varphi} \quad \text{und} \quad OB_1 = OB \cdot e^{m\varphi}.$$

Von diesen beiden Gleichungen ist die erste der gestellten Bedingung

$$O_1A_1 = OA \cdot (1 + r)^t = OA \cdot e^{t(1+r)}$$

analog.

3. Da die Länge der Spirale vom Pol bis $\theta = 0$ $\frac{1}{m} \sqrt{1 + m^2}$ ist und

$$AB = MB - MA = \frac{1}{m} \sqrt{1 + m^2} (e^{m\varphi} - 1) \cdot e^{m\theta}$$

ist, sieht man, dass die andere Bedingung, $MA_1 = MA(1 + r)^t$, nur statthaben kann, wenn der Punkt M im Pol der

Spirale liegt, ein Verhältnis, das beim Studium der Schneckenschale eine grosse Rolle spielt.

4. In ähnlicher Weise sieht man leicht, dass der Krümmungsradius der Bogenlänge, vom Pol aus gerechnet, proportional ist. Man hat nämlich

$$\rho = \sqrt{1 + m^2} \cdot r = ms.$$

5. Wenn $\triangle OAB$ rechtwinklig wird, ist AB winkelrecht auf die Tangente in B , und somit wird die Spirale ihre eigene Abwicklerin¹. Die Gleichung (a) ergibt dann:

$$m = e^{\frac{3m\pi}{2}} = 0,008946^m,$$

woraus folgt

$$m = 0,27 \text{ und } \angle A = 74,9^\circ.$$

6. Die Konstante m lässt sich in verschiedenen Weisen bestimmen. Wenn der Tangentenwinkel gegeben ist, haben wir:

$$\operatorname{tg} A = \frac{1}{m}.$$

Ist dagegen der Abstand von Windung zu Windung bekannt, am Radiusvektor gemessen, ist das Verhältnis zwischen zwei aufeinander folgenden Stücken fortwährend $e^{2\pi m}$. Nehmen wir dagegen die Verhältnisse zwischen zwei entsprechenden Stücken, je an seiner Seite des Pols, so haben wir $e^{\pi m}$.

7. Wenn umgekehrt die Windungen einer Spirale einen Radiusvektor in $A, B, C, D \dots$ schneiden und $AB, BC, CD \dots$ eine Quotientenreihe bilden, werden auch, wie oben gezeigt, OA, OB, OC, \dots eine solche Reihe bilden. Da dies bei jeder Lage des Radiusvektors gelten soll, kann man durch gleich grosse Drehungen bis zu konsekutiven $OA_1 B_1 C_1 \dots$ und dann bis zu folgenden $OA_2 B_2 C_2 \dots$ drehen; das ergibt:

$$\angle OA_1 A = \angle OA_2 A_1 \dots$$

¹ Das heisst, dass jede Lage der Tangente $O_1 A_1 = \sphericalcap OO_1 + OA_1$ ergibt.

Das heisst: die Kurve ist eine logarithmische Spirale.

8. Wenn wir an einer logarithmischen Spirale nacheinander die Punkte A, B, C, D, \dots absetzen, so dass die Bögen AB, BC, CD, \dots von O aus unter einem konstanten Winkel gesehen werden, und verlängern wir dann die Radiusvektoren um die Strecken AA_1, BB_1, CC_1, \dots , indem

$$AA_1 = k \cdot OA \text{ und } BB_1 = k \cdot OB,$$

werden die Punkte A_1, B_1, C_1, \dots an der logarithmischen Spirale

$$r = (k + 1) e^{m\theta}$$

liegen. Bei Rektifikation der gegebenen Spirale wird $OABC, \dots$ an einer Geraden, die zur Abszissenachse gewählt wird, zu liegen kommen. Die Linien AA_1, BB_1, CC_1, \dots werden parallel, und die Punkte A_1, B_1, C_1, \dots werden an einer Geraden liegen mit der Gleichung:

$$y = \frac{km \sin \mu}{\sqrt{1 + m^2 + km \cos \mu}} \cdot k,$$

indem $\mu = \angle A_1AO$. In der Konchyliologie kann man immer den Fall $\mu = 90^\circ$ betrachten, der

$$y = \frac{km}{\sqrt{1 + m^2}} \cdot x$$

ergibt.

9. Ein besonders interessanter Fall tritt ein, wenn man $AA_1 = a, BB_1 = aq_1, CC_1 = aq_1^2, \dots$ setzt. Man erhält dann zur Bestimmung des geometrischen Orts von A_1, B_1, C_1, \dots nach der Retifikation

$$s_0 q_1^t = x + aq_1^t \cos \mu$$

und

$$y = aq_1^t \sin \mu,$$

wo

$$OA = s_0 \text{ und } q_1 = \frac{BC}{AB}.$$

Wird t eliminiert, und werden neue Konstanten eingeführt, erhalten wir nach der Umschreibung die Gleichung

$$x + y \cot \mu = py^n.$$

Dieser Ausdruck enthält den vorhergehenden bei $n = 1$. Im allgemeinen kann man auch $\mu = 90$ setzen, so dass man erhält:

$$x = py^n.$$

Bei den Mollusken spielt diese Gleichung meines Erachtens nur eine geringere Rolle, bei den Pflanzen aber eine fundamentale, und es wird sich sicherlich herausstellen, dass sie gemeinsame Grundzüge des Pflanzenwachstums birgt.

Ohne mich hier auf metrische Verhältnisse einzulassen, wähle ich zum Schluss ein Beispiel durch die Bank, um das Verfahren zu veranschaulichen. Der Deckel einer Schnecke wurde in der in 6 angegebenen Weise gemessen und ergab:

Mass	Quot.
9 : 3,5	2,57
14 : 5,5	2,55
11 : 4,3	2,55

Daraus ergibt sich der mittlere Wert 2,56. Also ist $e^{2m\pi} = 2,56$, was $m = 0,14$ ergibt. Eine Korrektion ergibt

Mass	Quot.
14,25 : 9,50	1,50
12,75 : 8,25	1,55

Daraus erhalten wir den mittleren Wert 1,53. Also ist $e^{7m} = 1,53$, was $m = 0,13$ ergibt.

Die Gleichung des Deckels der Spirale ist dann:

$$r = e^{0,135 \theta}.$$

Die physiologische Spirale.

Wir sahen bei der Untersuchung der Deckel, dass die gebildete Kurve eine logarithmische Spirale darstellt. Betrachten wir nun den Saum bei einer beliebigen schalentragenden Form, muss diese in derselben Weise wie die Spirale des Deckels vorwärts wachsen; und da ferner alle Gattungen, die mehrere Mundränder ablegen, zeigen, dass die Ränder durch konstante Drehungen um die Achse der Schale nacheinander folgen, und da diese Drehungen Wachstumsperioden bezeichnen, muss man an der Bestimmung festhalten, dass der Drehungswinkel der Zeit proportional sein soll.

Bei diesen Annahmen, die in der Ebene durchaus bestätigt worden sind, ist man im Stande, das Problem einer mathematischen Analyse im Raum zu unterwerfen.

Legen wir (Fig. 10) ein Koordinatensystem in der Weise, dass die Schalenachse zur Z-Achse eines rechtwinkligen Systems gemacht wird, während die Spitze den Anfangspunkt abgibt, werden zwei Erzeuger, deren Ebenen den Winkel $d\theta$ bilden, den Saum, d. h. die physiologische Spirale, in A und B schneiden. Durch A wird ein Kreis gelegt, der den Erzeuger

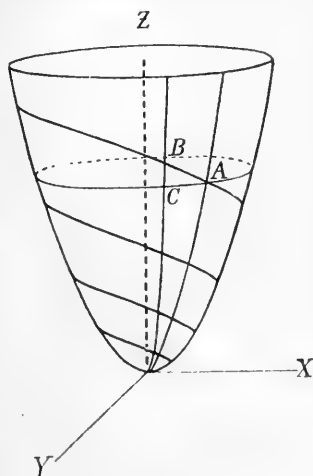


Fig. 10.

durch B in C schneidet; dadurch entsteht aber ein elementares Dreieck ABC , das

$$AB = ds = rsdt \text{ und } d\theta = cdt$$

ergibt. Aus diesen beiden Gleichungen erhält man $\frac{ds}{s} = \frac{r}{c} d\theta$, was durch Integration

$$s = s_0 e^{\frac{r}{c}\theta} \quad (1)$$

ergibt. Die Konstante ist nun in der Weise bestimmt, dass $\theta = 0$ $s = s_0$ ergibt.

Die vom mathematischen Charakter der Umdrehungsfläche unabhängige Gleichung (1) zeigt, was selbstverständlich auch aus der Definition hervorgeht, dass die Stücke der Spirale eine Quotientenreihe bilden, wenn der Winkel eine Differenzenreihe durchläuft. Ferner nähert die Spirale sich asymptotisch dem Anfangspunkt, wenn θ durch negative Werte abnimmt.

Fügen wir zu Gleichung (1) die der Umdrehungsfläche

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = \varphi(z),$$

wird die Spirale bestimmt, und wir bezeichnen diese, unabhängig von der Form von $\varphi(z)$, als physiologische Spirale, weil sie allein durch die Wachstumsweise des Tieres bestimmt wird. Wenn die Umdrehungsfläche zu einer Ebene wird, wird die physiologische Spirale logarithmisch werden.

Unabhängig von der Umdrehungsfläche haben wir ferner

$$\frac{\rho d\theta}{ds} = \frac{c}{r} \cdot \frac{\rho}{s}$$

was zeigt, dass Sinus vom Winkel zwischen Erzeuger und Spirale mit ρ direkt und mit s umgekehrt proportional und bei

$$\rho = ks = ks_0 e^{\frac{r}{c}\theta}$$

konstant ist, d. h. wenn die physiologische Spirale wie eine logarithmische Spirale projiziert wird.

Dies bewirkt wiederum, dass

$$\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = \frac{ds^2 - (\varrho^2 d\theta^2 + dq^2)}{ds^2} = 1 - k^2 - \left(\frac{ck}{r}\right)^2$$

oder

$$\frac{dz}{ds} = \frac{k dz}{dq} = \text{konst.}$$

was durch Integration

$$z = Kq$$

ergibt. Wenn umgekehrt gegeben ist, dass $\frac{dz}{ds} = \alpha$ ist, wo α eine konstante Grösse bezeichnet, wird

$$z = \alpha s = \alpha s_0 e^{\frac{r}{c}\theta}.$$

Wird θ zwischen dieser Gleichung und der Gleichung

$$\frac{(1 - \alpha^2)}{\alpha^2} dz^2 = \varrho^2 d\theta^2 + dq^2$$

eliminiert, haben wir

$$dq = \frac{+c}{-r} \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{\varrho}{z}\right)^2} dz,$$

wo

$$a = \frac{r}{c} \sqrt{\frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2}}.$$

Benutzen wir die Substitution $\frac{\varrho}{z} = \frac{2av}{1+v^2}$, wird das Wurzelzeichen verschwinden und die Variablen sich gleichzeitig isolieren lassen; die Integration ergibt dann eine Gleichung, die wie gewöhnlich eine arbiträre Konstante enthält.

Von diesem System von Kurven wollen wir diejenige benutzen, die durch (0,0) geht, aber eine solche lässt sich für keinen konstanten Wert der arbiträren Konstante bestimmen. Indessen enthält das System noch eine Lösung. Lässt man nämlich die arbiträre Konstante kontinuierlich variieren, wird das System eine Enveloppe erhalten, die sich in der vorgelegten Differenzialgleichung als eine sin-

gulgäre Lösung ergeben muss, aber diese Lösung ist direkt ersichtlich ohne Rechnung, wenn man setzt

$$\varrho = \text{konst. } z.$$

Die Konstante wird darauf durch Einsetzung bestimmt; so erhalten wir

$$\varrho = \frac{r}{\alpha} \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{r^2+c^2}} \cdot z.$$

Dies zeigt, dass die Umdrehungsfläche ein Kegel ist.

Fassen wir diese Resultate zusammen, so haben wir: Wenn der Winkel zwischen der physiologischen Spirale und dem Erzeuger der Umdrehungsfläche konstant ist, wird auch der Winkel der Spirale mit der Achse der Umdrehungsfläche konstant sein, und die Umdrehungsfläche ist dann ein Kegel. Daraus folgt wiederum, dass die Strecken, welche die physiologische Spirale von einem willkürlichen Erzeuger an einem Umdrehungskegel abschneidet, eine Quotientenreihe bilden.

Ferner muss eine physiologische Spirale mit konstantem Anstieg an einem Umdrehungskegel liegen und daher als logarithmische Spirale projiziert werden.

Liegt eine physiologische Spirale auf einer Umdrehungsfläche, und wird sie als logarithmische Spirale projiziert, muss ihr Anstieg konstant sein, und das Vorhergehende zeigt dann, dass die Fläche eine Kegelfläche ist.

Bedenkt man nun, dass viele artreiche Gattungen eben Verhältnisse aufweisen, die aufs genaueste mit diesen Resultaten übereinstimmen, so sieht man, dass unsere Hypothese sich mit immer grösserer Wahrscheinlichkeit zur Gewissheit heranarbeitet.

Ein besonderes Interesse hat es, ob die Erzeugerkurve andere Formen als die einer Geraden haben kann, wenn die physiologische Spirale an dem Erzeuger Strecken abschneiden soll, welche eine Quotientenreihe bilden.

Untersuchen wir dieses Verhältnis, indem wir zuerst folgenden Hilfssatz betrachten:

Eine Funktion zu bestimmen, deren Werte eine Quotientenreihe bilden, wenn die unabhängige Variable eine Differenzenreihe durchläuft.

Wir setzen $y = f(x)$ und müssen dann für x , $x + h$ und $x + 2h$

$$f(x) : f(x + h) = f(x + h) : f(x + 2h)$$

haben. Setzen wir nun voraus, dass die gesuchte Funktion sich in Reihen entwickeln lässt, so haben wir:

$$f(x) \cdot \left(f(x) + \frac{2h}{1} f'(x) + \dots \right) = \left(f(x) + \frac{h}{1} f'(x) \dots \right)^2.$$

Diese Gleichung ist eine Identität, die für alle Werte von h gilt; dies muss aber bewirken, dass die Koeffizienten derselben Potenz von h gleich gross sein müssen. Es entsteht dadurch ein System von Gleichungen, das sich umschreiben lässt in

$$f(x) : f'(x) = f'(x) : f''(x) = f''(x) : f'''(x) \dots$$

d. h., dass die gesuchte Funktion und ihre sukzessiven Differentialquotienten eine Quotientenreihe bilden.

Eine notwendige Bedingung ist es dann, dass

$$f(x) : f'(x) = f'(x) : f''(x)$$

oder

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^2.$$

Wird y als unabhängige Variable eingeführt, und setzen wir $\frac{dy}{dx} = p$, so haben wir

$$y \frac{dp}{dy} = p,$$

was ergibt

$$p = my.$$

Daraus folgt wiederum:

$$y = ke^{mx},$$

wo k und m arbiträre Konstanten sind.

Da die gefundene Funktion auch die übrigen Bedingungen erfüllt, ist die Aufgabe vollständig gelöst.

Wir kehren nun zu unserer Aufgabe zurück und benutzen die Figur, welche ergibt

$$BC = dl = \sqrt{ds^2 - \varrho^2 d\theta^2} = \sqrt{\left(\frac{s_0 r}{c}\right)^2 e^{2\frac{r}{c}\theta} - \varrho^2} \cdot d\theta.$$

Soll BC eine Quotientenreihe bilden, wenn θ eine Differenzenreihe bildet, muss die Quadratwurzel infolge des Hilfsatzes in die Form $ke^{m\theta}$ umgeschrieben werden können, aber dies verlangt, dass

$$\varrho = k_1 \cdot e^{\frac{r}{c}\theta}$$

also eine logarithmische Spirale, aber dadurch wird dann

$$dl = \sqrt{dz^2 + d\varrho^2} = \sqrt{\left(\frac{s_0 r}{c}\right)^2 - k_1^2 \cdot e^{2\frac{r}{c}\theta}} d\theta,$$

woraus folgt

$$dz^2 + d\varrho^2 = \left(\left(\frac{s_0}{k_1}\right)^2 - \left(\frac{c}{r}\right)^2 \right) d\varrho^2,$$

was durch Integration

$$z = K\varrho$$

ergibt, d. h., dass nur der Kegel unsere Forderung befriedigt, ein Resultat, das bei aller Konchyliometrie eine sehr bedeutende Rolle spielt.

Physiologisch wäre die Aufgabe hiermit teilweise erschöpft, sie lässt sich aber durch eine Betrachtung der Gleichung der Erzeugerkurve noch weiter behandeln, wodurch wir eine Kenntnis gewinnen, die für die Metrik von Bedeutung ist.

Betrachten wir einige einfache Fälle.

1) $\varphi(z) = z^2 \operatorname{tg}^2 v$. Die Umdrehungsfläche ist ein Kegel; die physiologische Spirale wird daher durch die Gleichungen

$$\varrho = z \operatorname{tg} v, \quad s = s_0 e^{\frac{r}{c} \theta}$$

bestimmt.

Wird z eliminiert, erhalten wir die Projektion der Spirale, in der xy -Ebene durch die Differentialgleichung in polaren Koordinaten dargestellt wird, nämlich:

$$d\varrho = \frac{c \sin v}{r} \sqrt{\left(\frac{s_0 r}{c}\right)^2 - \left(\frac{\varrho}{e \frac{r}{c} \theta}\right)^2} \cdot de \frac{r}{c}.$$

Die Lösung dieser Gleichung fällt aber mit der obigen Gleichung zusammen, welche zeigte, dass die gesuchte Kurve bei keinem konstanten Wert der arbiträren Konstante bestimmt werden konnte. Wir sind daher darauf angewiesen, die Lösung in dem singulären Integral zu suchen, d. h.

$$\varrho = r s_0 \sin v \sqrt{c^2 \sin^2 v + r^2 \cdot e^{\frac{r}{c} \theta}}.$$

Man erhält also folgendes Resultat: Wenn die physiologische Spirale auf einer Kegelfläche liegt, wird sie als logarithmische Spirale projiziert, was wiederum bewirkt, dass der Anstieg konstant ist, und dass die Strecken, die an einem beliebigen Erzeuger abgeschnitten werden, eine Quotientenreihe bilden. Wird also eine kegelförmige Schale gemessen, wird, wie wir gesehen haben, die Quotientenreihe entstehen, oft mit grosser Regelmäs-

sigkeit, selten mit grösseren Abweichungen, je nachdem r und c während des Wachstums des Tieres mehr oder minder konstant sind.

2) $\varphi(z) = 2Rz - z^2$. Die Umdrehungsfläche ist eine Kugel. Durch Projektion erhalten wir

$$d\varrho = \frac{1}{R} \sqrt{(R^2 - \varrho^2) \left(\left(\frac{rs_0}{c} \right)^2 e^{\frac{2r}{c}\theta} - \varrho^2 \right)} \cdot d\theta,$$

welche Gleichung nur bei kleinen Werten von ϱ für uns von Interesse ist und dann

$$d\varrho = \sqrt{\left(\frac{rs_0}{c} \right)^2 e^{\frac{2r}{c}\theta} - \varrho^2} \cdot d\theta$$

ergibt. Durch Integration erhalten wir hieraus

$$\varrho = \frac{rs_0}{\sqrt{c^2 + r^2}} e^{\frac{r}{c}\theta},$$

was zeigt, dass die physiologische Spirale sich wie eine logarithmische Spirale in der Umgebung eines Kugelpunkts verhält.

Dieser Fall tritt besonders schön hervor bei zylinderförmigen Gattungen, wo die ersten Windungen eine kleine Schale bilden, deren Form sich einem Kugelsegment nähert.

3) $\varphi(z) = pz^m$. Die Projektion wird durch die Gleichung

$$d\varrho = \sqrt{\left(\left(\frac{s_0 r}{c} \right)^2 e^{\frac{2r}{c}\theta} - \varrho^2 \right) : \left(1 + \frac{4}{m^2} \frac{\varrho^{\frac{4}{m^2} - 2}}{p^{\frac{2}{m}}} \right)} \cdot d\theta$$

bestimmt und die Neigung der Spirale mit der z -Achse durch

$$\frac{dz}{ds} = \frac{c}{rs_0 e^{\frac{r}{c}\theta}} \cdot \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d\varrho}{d\theta} = \frac{2c}{mrs_0 \sqrt{p} e^{\frac{r}{c}\theta}} \cdot \varrho^{\frac{2}{m} - 1} \cdot \frac{d\varrho}{d\theta}.$$

Diese Gleichungen sind so zusammengesetzt, dass sie sich nicht integrieren und auch nicht zur Quadratur bringen lassen.

$m < 2$. Die Umdrehungsfläche ist in erweitertem Sinne eine Paraboloid; da der Anfangspunkt ein Kugelpunkt ist, wird die Projektion bei kleinen Werten von q sich einer logarithmischen Spirale nähern.

Bei kleinen Werten von m wird die Paraboloid sich einem Zylinder nähern, und die Gleichung lässt sich dann annäherungsweise als

$$q^{m-1} \cdot dq = \frac{m \sqrt{p}}{2} \sqrt{\left(\frac{rs_0}{c}\right)^2 e^{2\frac{r}{c}\theta} - q^2} \cdot d\theta$$

schreiben, aber dadurch wird

$$\frac{dz}{ds} = \frac{c}{rs_0} \sqrt{\left(\frac{rs_0}{c}\right)^2 - \left(\frac{q}{\frac{r}{e^{\frac{r}{c}\theta}}}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{r}\right)^2 \left(\frac{q}{s}\right)^2}.$$

Da q im Verhältnis zu s langsam wächst, muss die Quadratwurzel bei wachsendem z wachsen, aber dadurch erhält man folgendes interessante Resultat, das für Pupa und ähnliche Familien mit zylindrischer Schale gilt: wenn die physiologische Spirale sich an einer Paraboloid hinanwindet, die sich der zylindrischen Form nähert, muss ihr Anstieg fortwährend zunehmen.

$m = 2$. Die Umdrehungsfläche ist ein Kegel und die Projektion eine logarithmische Spirale.

$m > 2$. Die Umdrehungsfläche ist eine Neiloid mit der Spitze im Anfangspunkt. Bei grossen Werten von q wird der Nenner unter dem Wurzelzeichen sich 1 nähern, und die Differentialgleichung erhält dann dieselbe Form wie unter 1), und demzufolge nähert die Projektion sich einer logarithmischen Spirale. Ist q dagegen klein, d. h. in der Umgebung der Spitze der Fläche, wird die Gleichung durch

$$d\varrho = \frac{mr_s_0}{2c} \cdot \sqrt{p} \cdot \varrho^{1-\frac{2}{m}} \cdot \frac{r}{c} e^{\frac{r}{c}\theta} \cdot d\theta$$

ersetzt werden können, was

$$\varrho = (ps_0)^{\frac{m}{2}} \cdot e^{\frac{mr}{2c}\theta}$$

ergibt, indem $\theta = -\infty$ $\varrho = 0$ entspricht. Man sieht daraus, dass die Spitze der Neiloide wirkt, als ob die physiologische Spirale sich mit geringem Anstieg an einem Kegel hinanschlingelte.

Man erhält daher als Gesamtergebnis, solange $m > 2$, dass die physiologische Spirale als eine Spirale projiziert wird, die wir nicht näher kennen, die aber in der Umgebung des Anfangspunkts und bei grossen Werten des Radiusvektors den Charakter einer logarithmischen Spirale annimmt. Der unbekannt Teil der Spirale erstreckt sich über eine grössere oder geringere Strecke, wird aber bei grossen Werten von m verschwinden, wie dies sich bei vielen Conusarten, wie *C. generalis*, *C. thalassiacus*, *C. nobilis* usw. schön zu erkennen gibt, wo die Spindel sich konkav über eine fast ebene Fläche erhebt. In anderen Fällen, wie bei *C. floridanus*, *C. delessertianus*, *C. traversianus* usw., hat die unbekannte Strecke keine Bedeutung für die Conchyliometrie, da die Schale zuvor abgeschlossen und die Projektion somit nur durch die Spindel bestimmt wird.

$m = 0$. Die Umdrehungsfläche ist ein Zylinder mit der z -Achse als Umdrehungsachse. Die Projektion ist ein Kreis mit p als Radius und gibt uns daher keine Vorstellung von der Spirale. Indessen wird die Verbindung zwischen z und θ durch

$$dz = \sqrt{\left(\frac{rs_0}{c}\right)^2 e^{\frac{2r}{c}\theta} - p^2} \cdot d\theta$$

bestimmt, welche Gleichung zeigt, dass die Strecken, welche

die Spirale an einem Erzeuger abschneidet, wenn p klein ist, sich einer Quotientenreihe nähern werden. Da die Fläche nicht durch den Anfangspunkt abgeschlossen wird und sich dort wie in den vorigen Fällen schliesst, kann θ nicht alle Werte annehmen, sondern erreicht das Minimum bei

$$s = s_0 e^{\frac{r}{c}\theta} = \frac{cp}{r}.$$

Ferner ist

$$\frac{pd\theta}{ds} = \frac{pc}{rs} = \frac{pc}{rs_0} \cdot e^{-\frac{r}{c}\theta},$$

d. h., dass die physiologische Spirale bei wachsendem θ immer kleinere Winkel mit der Achse bildet und bei $\theta = 90^\circ$ beginnt.

Wir haben hier wieder mit Verhältnissen zu tun, die von Pupa und anderen zylindrischen Familien bestätigt werden.

Wir haben gesehen, dass die physiologische Spirale in eine logarithmische übergehen kann in dem Falle, dass die Fläche, auf der die Spirale ruht, in eine Ebene reduziert wird; man kann indessen einen anderen Grenzfall antreffen, der eintritt, wenn $c = \theta$; dadurch wird θ konstant, und die physiologische Spirale liegt dann in einer Ebene und tritt als Erzeugerkurve auf. Dieser Fall wird eleganterweise von den Familien Patella, Fissurella und Dentalium veranschaulicht, bei denen die Erzeugerkurve bald krumm, bald geradlinig ist. In dem letzteren Falle weist sie doch grosse Neigung auf, von Individuum zu Individuum in eine krumme Linie oder vielmehr in Teile davon umzuschlagen, so dass die Gerade in diesem Falle als Grenzstellung aufgefasst werden muss.

Die Gleichung $s = s_0 e^{\frac{r}{c}\theta}$ hat unter diesen Verhältnissen keinen Sinn und muss durch

$$ds = rsdt \text{ oder } s = s_0 e^{r(t-t_0)}$$

ersetzt werden, wodurch das Wachstum angegeben wird, wenn r konstant ist.

Es ist wahrscheinlich, dass die Form der Dentalier ein Teil einer logarithmischen Spirale ist und daher einen speziellen Fall der physiologischen Spirale darstellt; wenn diese Annahme richtig ist, müssen die Erzeugerkurven bei Patella und Fissurella auch Teile von logarithmischen Spiralen sein. Jedenfalls findet man oft bei den erwähnten Tieren Wachstumsringe, die mit guter Annäherung auf das Quotientengesetz hinweisen. Da ferner die konforme Entwicklung der Tiere sich recht konstant erhält, haben wir direkt mit logarithmischen Spiralen zu tun, d. h., dass unser Wachstumsprinzip auch hier seinen allgemeinen Charakter dartut.

Man möchte sich versucht fühlen, eine mathematische Untersuchung dieser interessanten Fälle anzustellen, wird aber leider sofort durch die sich dabei ergebenden Komplikationen zurückgehalten. Glücklicherweise ist es auch nicht notwendig, da eine direkte Betrachtung der Schalen mit Benutzung der graphischen Methode uns den Weg angibt.

Wie früher dargetan wurde, leitet die Erfahrung dazu, dass die Umdrehungsfläche, auf der der Saum, d. h. die physiologische Spirale, ruht, drei Hauptformen haben kann, die den Formen entsprechen, die in 3) behandelt wurden. Es fragt sich danach, ob die Gleichung

$$\varphi(z) = \varrho^2 = pz^m$$

nur eine willkürliche Annahme ist, oder ob sie in den Wachstumsverhältnissen selbst Wurzel fasst.

Dazu ist Folgendes zu bemerken:

Wenn das Tier hervorwächst und dabei das Quotientengesetz befolgt, muss das Wachstum längs der Achse der Schale und winkelrecht darauf nach demselben Gesetz vonstatten gehen, aber dann hat man in Anbetracht unseres Quotientengesetzes

$$z = z_0 (1 + r)^t \text{ und } \varrho = \varrho_0 (1 + r_1)^t.$$

Wird t zwischen diesen Gleichungen eliminiert, hat man

$$l \frac{z}{z_0} : l(1 + r) = l \frac{\varrho}{\varrho_0} : l(1 + r_1),$$

was durch Umschreibung und Einführung von neuen Konstanten

$$\varrho^2 = pz^m \tag{2}$$

ergibt; dies ist aber gerade dieselbe Form, die wir betrachtet haben. Man kann daher im allgemeinen behaupten, dass die Form der ganzen Spindel oder von Teilen derselben sich durch die obengenannte Gleichung bestimmen lässt — mitunter vielleicht annäherungsweise.

Eine nähere Untersuchung von Gleichung (2) zeigt, dass der mathematische Charakter der Kurve von z_0 und ϱ_0 unabhängig ist und allein durch die Grösse

$$2l(1 + r_1) : l(1 + r)$$

bestimmt wird. Daraus lassen sich aber folgende physiologische Resultate herleiten:

Gastropoden, deren Spindel konvex ist, haben eine grössere Wachstumskonstante längs der Achse der Schale als winkelrecht darauf, indem $r > r_1$.

Gastropoden, deren Spindel kegelförmig ist, haben dieselbe Wachstumskonstante längs der

Achse der Schale und winkelrecht darauf, indem $r = r_1$.

Gastropoden, deren Spindel konkav ist, haben eine kleinere Wachstumskonstante längs der Achse der Schale als winkelrecht darauf, indem $r < r_1$.

Da diese Resultate sich an den Schalen nachweisen lassen, sehen wir wiederum, dass unsere Hypothese kräftig auf die tatsächlichen Verhältnisse hinweist.

Wir erhalten dadurch die Mittel, die Variationen von Spindelformen zu verstehen, die sich oft bei derselben Art finden, und die ein Wachstum recht verschiedener Natur aufweisen. So sind in den Figg. 3, 4, 5 Taf. 2 von *C. acuminatus* Spindel und Schalenform so verschieden, dass man geneigt sein möchte, die Individuen als zu verschiedenen Arten gehörig zu betrachten, und dieser Eindruck vermindert sich nicht, wenn man Exemplare von *C. mediterraneus* vergleicht.

Wenn die Spindel zu Anfang konvex ist und darauf eine konkave Form annimmt, wird die Erzeugerkurve eine Wendetangente erhalten, und dies geschieht ganz einfach dadurch, dass die Wachstumskonstante des Tieres längs der Schalenachse sich in der Weise verändert, dass sie zu Anfang grösser ist als die auf die Achse winkelrechte und späterhin wechselt. Dieses Verhältniss tritt recht deutlich hervor bei *C. nussatella* und *C. punctatus*.

Diese Beispiele zeigen, dass das Quotientengesetz keinen Beitrag leistet zur Artbestimmung, was auch an dem allgemeinen Charakter desselben liegt.

Der allgemeine Charakter des Gesetzes.

Die Konchyliometrie, d. h. die Lehre, die sich mit dem Messen von Konchylien beschäftigt, um dadurch von der mathematischen Form der Schale eine Vorstellung zu gewinnen, hat nichts oder nur sehr wenig mit dem Wachstum des Tieres zu schaffen; denn wenn es auch gelingen sollte, den mathematischen Charakter vollständig zu bestimmen, so wäre dadurch doch nichts erreicht in betreff unserer Kenntnis der Wachstumsweise des Tieres, zudem die Schale durch Änderung der Stellung des Mantels, wie früher erwähnt, neue Formen annehmen kann.

Zum Beispiel kann eine Schale, die sich wie eine logarithmische Spirale windet, eine Unzahl von Wachstumsweisen gestatten, indem der Zuwachs zur Schalenmündung sich jedem Gesetze mit Ausnahme des der Konformität entziehen kann. Aus dem Umstande, dass die Stockwerke eines Hauses einander gleich sind, kann man nicht ohne Zuhilfenahme von neuen Voraussetzungen schliessen, dass der Bau eines jeden Stockwerks gleich lange Zeit beansprucht hat. Ebenso verhält es sich mit der Schale. Die Frage lässt sich nur durch Studien in der Natur beantworten, wo man das Leben und die Entwicklung der Tiere durch häufige und anhaltende Beobachtungen verfolgen kann. Die Arbeitsweise des biologischen Statistikers ist somit eine ganz andere als die des Metrikers. Der Biologe muss den Verlauf des Wachstums beobachten und die graphischen Elemente der Schale als Stützen benutzen; gelingt es sodann für das Wachstum Gesetze aufzustellen, so ist die Probe davon, dass das Wachstumsgesetz uns in den Stand setzt, eine Schale zu konstruieren, die im wesentlichen der natürlichen Schale entspricht. Das genügt aber nicht. Das Gesetz muss vom

Studium der Schnecken auf andere Teile der Biologie übertragen werden können. Derartige Forschungen sind meines Wissens bisher noch von niemand durchgeführt worden und sind somit neu in der Wissenschaft.

In der Weise bildet die Konchyliometrie ein Hilfsmittel für den Biologen, an dem er seine Beobachtungen kontrolliert, aber keine selbständige Wissenschaft. So ist es erklärlich, dass Männer wie MOSLEY, NAUMANN und GRABOW, denen die biologische Einsicht fehlte, sich zu keinem Nutzen an mathematischen Spekulationen abarbeiteten.

Das Quotientengesetz

$$x = k(1 + r)^t$$

ergibt nur für jeden t -Wert einen entsprechenden x -Wert; dies drückt aber so wenig wie die algebraische Verbindung den vollen Charakter des Gesetzes sichtbar aus; dieser gibt sich erst zu erkennen, wenn man zu jeder beliebigen Zeit nach demjenigen Wachstum, dx , fragt, das x erhält, wenn t ein kleines Wachstum, dt , erhält. Man hat dann

$$dx = k(1 + r)^{t+dt} - k(1 + r)^t = \text{konst. } xdt \quad (1)$$

was unseren Gleichungen Seite 82 Aufg. 2 entspricht.

Dies lässt sich in folgender Weise ausdrücken: Wenn eine Zellensammlung bei fortwährender Zufuhr von Nahrung wächst, wird die Grössenzunahme der Sammlung von einem gewissen Zeitpunkt an bis zu einem anderen Zeitpunkt kurz darauf der Grösse zu dem ersteren Zeitpunkt und der angewandten Zeit direkt proportional sein.

Die Entwicklung scheint also die einfachste funktionelle Verbindung zu befolgen, welche die Mathematik aufstellen kann; hier ist es aber nicht der Mathematiker, der anscheinend einen Triumph feiert; von ihm widerhallt nur als

Echo die Antwort, die aus der Werkstatt der Natur zu ihm gelangte.

Der allgemeine Charakter eines Gesetzes ist eins, die allgemeine Gültigkeit etwas anderes.

Die Gültigkeit innerhalb einer Art, einer Familie oder eines anderen Gebietes bezeichnet eine der Zukunft gehörende Aufgabe; hier ist sie durch Beispiele, oft in grosser Ausdehnung, angegeben.

Der Charakter des Gesetzes ist ein vielgestaltiger, indem dasselbe sich oft in so verschiedenen Gestalten offenbart, dass es schwer fällt, es zu erkennen, geschweige denn darzutun, dass die Fragmente Teile eines einfachen Ganzen sind. Bald zeigt es sich in deutlichen Zügen an den graphischen Elementen einzelner Individuen, bald müssen die Messungen uns den Weg weisen; meist kommen jedoch fremde Wirkungen hinzu und verschleiern uns den tatsächlichen Charakter. Die Variationen der Individuen müssen wir dann durch die Betrachtungen mittlerer Zahlen auszugleichen suchen.

Untersuchen wir die Sache näher und betrachten wir die Forscher, die zu verschiedenen Zeiten und auf verschiedenen Wegen durch ihre Beobachtungen und Studien über diese Verhältnisse Licht verbreitet haben.

Als der junge RÉAUMUR vor über 200 Jahren seine Abhandlung über die Morphologie der Schneckenschale in den *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* 1709 veröffentlichte, beschäftigte er sich zwar hauptsächlich mit dem Wachstum als einer Juxtaposition des darunter liegenden Mantels des Tieres, aber an mehreren Stellen, wie in der Anlage überhaupt, tritt seine mathematische Intelligenz und Schule hervor, oft nur momentan, aber immer wohl entwickelt, um geometrische Verhältnisse

aufzuklären, die in einem gegebenen Augenblick seine Aufmerksamkeit in Anspruch genommen haben; so treffen wir S. 378 folgende Periode:

». . . au reste le nombre de ces tours augmente considérablement la grandeur de la coquille des Limaçons, et un tour plus ou moins fait une grande différence; car le diamètre de chaque tour de spirale, ou sa plus grande largeur, est à peu près double de celui qui la précède, et la moitié de celui qui la suit. . . .«

Hier hat RÉAUMUR die Form der Schale zahlenmässig ausgedrückt. Seine Gedanken sind so einfach und die Formulierung so natürlich, dass man sich unwillkürlich fragt, ob geometrische Kenntnisse überhaupt dazu vonnöten sind. Meines Erachtens ist darauf mit Nein zu antworten; aber daraus ergibt sich, dass Gedanken dieser Art ab und zu in der Geschichte des Menschengeschlechts sich an die Oberfläche müssen herangearbeitet haben können. Doch damit hat man nicht das Wachstum des Tieres erkannt. Das Resultat ist ein konchylometrisches.

Gegen die Mitte des achtzehnten Jahrhunderts nahm die politische Arithmetik die Frage in Angriff, wieviel Zeit die Verdopplung der Bevölkerung in einer grösseren Stadt oder einem sonstigen Gebiete in Anspruch nimmt. Die Resultate mussten selbstverständlich in verschiedenen Städten und in verschiedenen Ländern verschieden sein. Man war hier auf ein Quotientenwachstum hingewiesen worden. Die richtige Gestaltung dieses Gedankens scheint aber erst stattgefunden zu haben, als MALTHUS: *An essay on the principle of population . . .* herausgab, in welchem Werke er feststellte:

»Wir sagen also zuversichtlich, dass, wenn keine Hemnisse eintreten, die Bevölkerung alle fünfundzwanzig

Jahre sich verdoppelt, dass sie in geometrischer Proportion zunimmt¹.

Das Quotientengesetz ist hier mit grosser Deutlichkeit ausgesprochen, und da vielfache Resultate bestätigt haben, dass dasselbe nicht nur eine theoretische Forderung ist, sondern in hohem Grade mit den tatsächlichen Verhältnissen übereinstimmt, lässt es sich kaum hinwegklären.

Mit MOSLEY'S Untersuchungen in den *Philosophical Transactions* 1838 betrat die Konchyliometrie eine biologische Spur.

Wir wollen diese Verhältnisse kurz nachweisen und die Momente hervorzuziehen suchen, die uns am bedeutendsten erscheinen, umsomehr als bisher niemand hierfür den rechten Blick gehabt zu haben scheint. MOSLEY'S Untersuchungen lassen sich in drei bestimmt voneinander getrennte Teile teilen.

Auf den ersten 8 Seiten seiner Abhandlung interessiert er sich ausschliesslich für die Metrik. Nach einer Erklärung des Aussehens des Deckels und nach Messungen an diesem und Schalen kommt er zu den Quotientenreihen und schliesst von diesen auf die logarithmische Spirale. Dies ist ganz natürlich, denn MOSLEY musste dies durch Betrachtungen derselben Art, wie er sie bei der graphischen Methode geltend gemacht hatte, voraussehen können.

Das folgende Blatt S. 359—360 ist einer Erörterung des Wachstums des Tieres gewidmet, allerdings in einer unklaren und überreichen Form mit Wiederholungen, die störend wirken. Es geht deutlich daraus hervor, dass MOSLEY die Gedanken, die ausgesprochen werden wollten, nicht gestalten konnte. Er arbeitete intuitiv und konnte die Glieder der Schlussfolgerungsreihe nicht ordnen.

¹ Deutsche Ausgabe 1807 durch Dr. HEGEWISCH.

Das Resultat ist in zusammengedrängter Form:

»The separate probability of each of the two suppositions, »that the physical energies of the Mollusk, as developed in its growth in a given increment of time, are proportional to its whole then existing growth, and that its age is always proportional to the whole angle which, in the construction of the shell, it has then described round its axis«, is greatly increased by the necessary relation which is here shown to obtain between them; a relation by reason of which either supposition being made, the other becomes a conclusion«.

Vor den beiden hier erwähnten Voraussetzungen hatte MOSLEY gefunden, dass die Deckel logarithmische Spiralen bildeten.

Es ist notwendig, dies im voraus zu bemerken.

Versuchen wir nun MOSLEY'S Gedanken zu analysieren, indem wir von einer diskoiden Schale ausgehen, deren Spirale sich durch

$$r = ae^{m\theta} \quad (1)$$

ausdrücken lässt. Durch Differentiation erhalten wir

$$dr = ame^{m\theta} d\theta = mrd\theta.$$

Die Energiemenge, die während des Wachstums von r bis $r + dr$ längs des Radiusvektors abgesetzt wird, ist

$$\text{Energie} = kdr = kmrd\theta. \quad (2)$$

Dies ist aber gerade die erste Mosley'sche Voraussetzung.

Die andere ist

$$\theta = k_1 t. \quad (3)$$

Wir stellen uns nun auf MOSLEY'S Standpunkt und gehen von den beiden Voraussetzungen (2) und (3) aus. Diese sind erstens vollständig unabhängig voneinander. Vergleichen wir (2) und (3) mit (1), so sehen wir, dass (2) überflüssig ist, was (3) dagegen nie sein kann. Daraus geht

aber hervor, dass der Schluss von MOSLEY'S Auffassung irrtümlich ist.

Was nicht ersichtlich ist, ist, dass (2) und (3)

$$dr = crdt$$

ergeben, woraus durch Summation

$$r = k_2 e^{ct},$$

d. h. das Quotientengesetz folgt, und diese Gleichung ist, wie früher gezeigt wurde, hinreichend, um das Wachstum, das der Schale sowie das des Tieres, anzugeben. Zu der Voraussetzung (2) fügt Mosley folgende interessante Randbemerkung: »May not this law of the growth of a Mollusk have its analogy in other forms of animal life, and perhaps in vegetable life?«

Eben diese Ahnung hatte ich viele Jahre hindurch; sie ist aber, wie im Vorwort gezeigt, auf anderem Wege zu mir gekommen. Es ist auch diese Ahnung, die in unseren Untersuchungen zu einem Grundprinzip geworden ist, und die als erste Annäherung beim Wachstum der Organismen den Sieg davonzutragen zu sollen scheint.

Hiermit ist MOSLEY'S Bedeutung als Forscher festgestellt.

Der übrige Teil der Abhandlung, in dem er eine Bestimmung der Oberfläche, des Raumgehalts, des Schwerpunkts u. s. w. der Schale durchzuführen sucht, ist ohne Bedeutung für die Wachstumsverhältnisse und kann höchstens als eine mathematische Kuriosität betrachtet werden.

Bevor wir England verlassen, wollen wir noch darauf aufmerksam machen, dass MOSLEY'S Auffassung vom Wachstum der Schnecke in der Tat mit MALTHUS' Betrachtung des Bevölkerungswachstums zusammenfällt; die Zeit war aber noch nicht reif für eine Vergleichung derartiger Betrachtungen.

Zwei Jahre später veröffentlichte der Geolog CARL FRIEDRICH NAUMANN seine Messungen von Schalen in den *Annalen der Physik und Chemie* 1840. Er kam unabhängig von MOSLEY zu dem Resultat, dass der Saum an kegelförmigen Schalen sich als logarithmische Spirale auf eine Ebene winkelrecht auf die Schalenachse projizieren lässt.

Bei fortgesetzten Messungen und Untersuchungen an Ammoniten fand NAUMANN Abweichungen von der logarithmischen Spirale, und da er gesehen hatte, dass der innere Teil der Schale oft kreisförmig war, erweiterte er in Übereinstimmung damit die Gleichung zu

$$r = ae^{m\theta} + r_1.$$

Die dazu gehörende Kurve wurde als Konchospirale bezeichnet.

Diese Hypothese bietet einige sehr schwache Seiten dar, da sie auf keinem Prinzip fusst, und ihr bedeutendster Nachteil ist denn auch sehr in die Augen springend, indem sie dem Anspruch an Konformität nicht gerecht wird, die in dem Leben der Mollusken nicht zu bestreiten ist.

Ferner liegt es auf der Hand, dass Messungen, welche der einen Kurve annäherungsweise genügen müssen, auch der anderen genügen, so dass tatsächlich die Mittel fehlen, sie zu unterscheiden. Dieses Verhältnis hat Dr. A. H. GRABOW in seiner Dissertation von 1872 aufgeklärt.

Die Frage von dem Wachstum der Ammoniten lässt sich nur durch ein Verfahren beantworten, wie wir es bei *Cl. laminata* befolgten. Hier stösst man aber auf eine unüberwindbare Schwierigkeit, denn selbst wenn es gelingt, alle Schiffe genau zu legen — was selbstverständlich unmöglich ist — so wäre man doch ausserstande, die zusammengehörenden Windungsbreiten von Schale zu Schale

zu erhalten, da der Durchmesser, an dem gemessen wird, sich nicht in seiner Lage bestimmen lässt und eine kleine Drehung bedeutende Fehler einführen würde. Diese Schwierigkeit verschwindet bei den Clausilien, wo der Erzeuger durch den »Zahn« bestimmt wird.

Im *Philosophical Magazine and Journal of Science* 1878 Vol. 6 verhält BLAKE sich zweifelnd zu NAUMANN's erweiterter Formel, und zwar mit folgender Motivierung: »By such a modification he hoped to bring the measurements of actual shells more into harmony with calculation. The errors of observation, however, are always greater than this change would correct — if founded on fact, which is doubtful; and all practical advantage is lost by the complication of the equations«.

NAUMANN war indessen gestorben; nun veröffentlichte GRABOW eine neue Arbeit: »Über die Spiralen der Konchylien mit besonderer Bezugnahme auf die Naumannsche Konchospirale«. Er zeigt erst, dass die verschiedenen mathematischen Formeln, die NAUMANN angeführt hatte, sich auf die Konchospiralen allein beziehen lassen, und nach neuen Messungen schliesst er seine Abhandlung mit folgendem Satze:

»Hiernach ist in dem mittleren Teil des Ammoniten offenbar eine Spirale ausgebildet, welche von einer logarithmischen Spirale sehr wenig abweicht, doch aber noch zu den Konchospiralen der ersten Art gezählt werden muss, wenn auch der Radius des asymptotischen Kreises dieser Spirale sehr klein ausfallen muss«.

Damit scheinen NAUMANN's und GRABOW's Resultate sich denen von MOSLEY und BLAKE so weit zu nähern, dass die Unübereinstimmungen auf dem Wege der Fehlerquellen zu erklären sein müssen.

An C. F. NAUMANN und A. H. GRABOW hatte Deutschland seine bedeutendsten Konchylometriker.

Wie bei unserer Behandlung der Form des Baumes gezeigt, stellte HANS RINKER

$$y^2 = px^m$$

als Erzeugerkurve von Baumstämmen auf. Es sieht a priori eigentümlich aus, dass dieser Ausdruck sich aus demselben Gesetz wie

$$r = ae^{m\theta}$$

verstehen und herleiten lässt.

Indessen wurde dies früher dargetan, so dass wir uns jetzt auf die Tatsache beziehen können, dass das Quotientengesetz die Grundlage der Wachstumsweisen bildet, denen man im Laufe der beiden letzten Jahrhunderte einen gesetzmässigen Charakter zugesprochen hat.

Das erweiterte Quotientengesetz.

Da wir uns mit *Cl. laminata* beschäftigten, fanden wir das mittlere Zahlengesetz, dass die sekundären Quotienten sich in drei Gruppen gruppieren. Es liegt nun nahe, einige der regelmässigen Schalen zur Messung auszuwählen. Davon geben die folgenden 10 Schalen uns einen guten Überblick.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>a : b</i>	<i>b : c</i>	<i>c : d</i>	<i>d : e</i>	<i>q</i> ₁	<i>q</i> ₂	<i>q</i> ₃
2,401	1,704	1,243	0,949	0,770	1,40	1,37	1,31	1,23	1,03	1,05	1,06
2,312	1,692	1,286	1,029	0,877	1,36	1,31	1,24	1,17	1,04	1,06	1,06
2,478	1,716	1,274	1,007	0,841	1,44	1,34	1,26	1,19	1,07	1,07	1,06
2,508	1,858	1,386	1,058	0,826	1,35	1,34	1,31	1,28	1,01	1,02	1,02
2,372	1,718	1,290	0,992	0,782	1,38	1,33	1,30	1,27	1,03	1,02	1,02
2,448	1,762	1,320	1,011	0,823	1,39	1,33	1,30	1,23	1,04	1,02	1,05
2,536	1,837	1,382	1,085	0,882	1,38	1,33	1,28	1,23	1,03	1,03	1,04
2,466	1,805	1,324	0,987	0,778	1,36	1,36	1,34	1,27	1,00	1,02	1,05
2,154	1,655	1,265	0,977	0,754	1,30	1,30	1,29	1,29	1,00	1,01	1,00
2,430	1,700	1,261	1,009	0,848	1,42	1,34	1,25	1,19	1,06	1,07	1,05

Die Tabelle zeigt, dass die sekundären Quotienten eines jeden Individuums konstant sind, aber von Individuum zu Individuum etwas schwanken. Je mehr der Wert sich 1 nähert, umso mehr nähert die Windungsbreite sich einer Quotientenreihe; entfernen die sekundären Quotienten sich aber von 1, so hält diese Betrachtung nicht Stich.

Es fragt sich nun, welches Gesetz dem Wachstum entspricht. Darüber habe ich eine mathematische Betrachtung angestellt in der Abhandlung: *Une loi fondamentale de l'accroissement des organismes*, 1919, werde hier aber ein anderes Verfahren anführen, zu dem ich durch das Schalenstudium geleitet worden bin.

Die Gleichung (1) S. 108 lässt sich nämlich zu

$$dx = k(a + t) x dt$$

erweitern. Eine Summation ergibt

$$x = \text{konst.} (1 + r)^{qet + t^2}$$

Hieraus folgt, dass das gesamte Wachstumsgesetz sich ausdrücken lässt durch

$$x = e^{p + qt + rt^2},$$

wo p , q und r Konstanten und t die Zeit oder eine Periode bezeichnen.

Diese Verbindung bedingt nämlich, dass die sekundären Quotienten konstant werden, wenn t gleich grosse Werte durchläuft.

Setzen wir $r = 0$, so erhalten wir unseren ersten Fall.

Das Resultat unserer gesamten Untersuchungen lässt sich nun einfach und klar ausdrücken:

Es scheint, dass die Organismen nach dem Quotientengesetz wachsen, einige das ganze Leben hindurch, andere durch grössere oder kleinere Perioden.

Da diese Arbeit sich in ihrem ganzen Gedankengang und ihrer Darstellung von früheren Arbeiten auf diesem Gebiete unterscheidet, liegt kein Grund vor, Aufsätze und Abhandlungen ausser den an entsprechenden Orten bereits genannten anzuführen. In höherem Grade ist es mir aber eine liebe Pflicht, Folgendes hervorzuheben: Die Vorarbeiten, die fast ein Jahr beanspruchten, bevor ich weiterkommen konnte, wurden mit gütiger Genehmigung von Schuldirektor Frl. INGRID JESPERSEN im Laboratorium ihres Gymnasiums ausgeführt.

Die weiteren Messungen wurden sodann in den folgenden Jahren im physikalischen Laboratorium der polytechnischen Lehranstalt ausgeführt, wo mir mit grösster Bereitwilligkeit und grösstem Entgegenkommen seitens der Herren Professor KR. PRYTZ und Dozent Dr. phil. H. M. HANSEN bei der Aufstellung und Wahl sowie bei der Bedienung der meinem Zwecke geeignetsten Apparate eine ausgedehnte Hilfe geleistet wurde.

Durch Herrn Professor ADOLF JENSEN wurden mir die konchyliologischen Sammlungen des zoologischen Museums zur Verfügung gestellt, wodurch ich Gelegenheit erhielt, meine bisher nur auf meinem eigenen Material und meinen Studien in der Natur beruhenden Kenntnisse zu erweitern.

Die Kenntnis einer Reihe von Aufsätzen in Zeitschriften und sonstiger Fachliteratur verdanke ich Herrn Professor HARALD WESTERGAARD, dem verstorbenen Professor V. A. POULSEN und Herrn Inspektor Dr. phil. TH. MORTENSEN.

Meine vieljährigen Freunde Magister C. M. STEENBERG und Fräulein EMELY CHRISTENSEN haben je für sich durch vielseitigen Einfluss für mich eine grosse Bedeutung gehabt, nicht zum wenigstens durch das Interesse, das sie dem

Werden meiner Arbeit entgegengebracht haben. Schliesslich ist mir noch bei der Niederschrift, dem Protokollieren und der Berechnung von vielen Seiten Hilfe geleistet worden.

Allen genannten und ungenannten spreche ich meinen innigsten Dank aus.

Tafel 1.

Fig. 1, 3 und 6. *Murex inflatus* Lam., *Murex bicolor* Val. und *Murex endivia* Lam. Die aufeinander folgenden Stellungen der Mundränder entstehen durch Drehungen von bzw. $\frac{1}{3} \cdot 360^\circ = 120^\circ$, $\frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ$ und $\frac{1}{8} \cdot 360^\circ = 45^\circ$.

Fig. 2 und 4. *Conus anemone* Lam. Die Schalenform ist, wie gezeigt, sehr verschieden; bei ersterer sind die graphischen Elemente vorherrschend; bei letzterer sind sie verwischt.

Fig. 5 und 7. Letztere ist *Conus nocturnus* Hw., erstere die Varietät *Conus Deburghiae* Sow., welche das Quotientengesetz mit grosser Regelmässigkeit befolgt. Man bemerke die regelmässige Lage der Knoten an der Spindel.

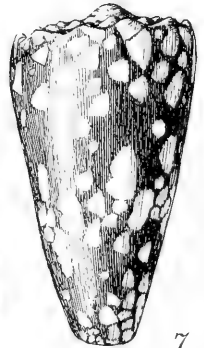
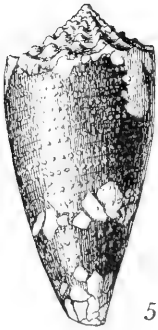
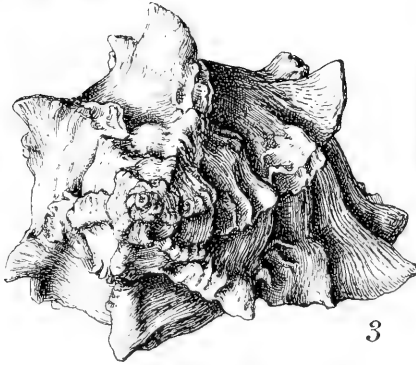
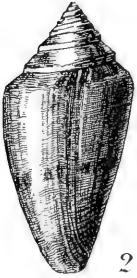
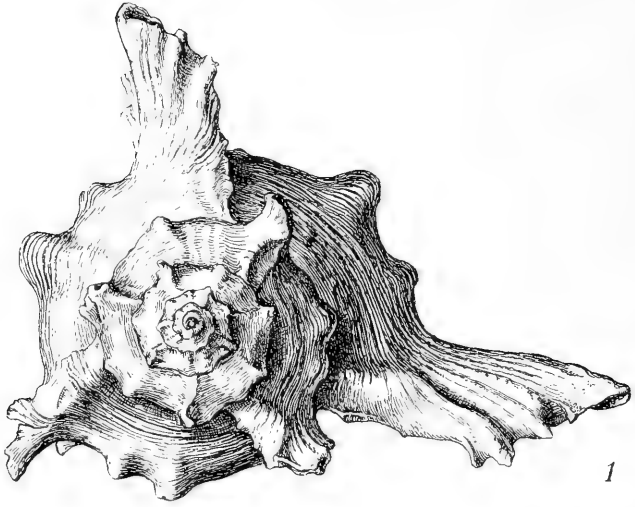
Tafel 2.

Fig. 1 und 2. *Ranella granifera* Lam. und *Ranella leucostoma* Lam. Die Mundränder der ersteren bilden eine Erzeugerleiste an der Schale, an der letzteren parallele Leisten wie an der Textfig. 4.

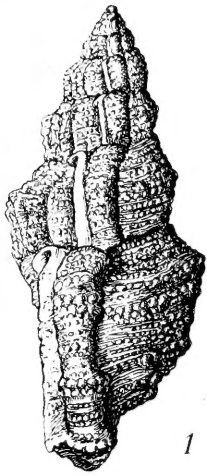
Fig. 3, 4 und 5. *Conus acuminatus* Hw., verschiedene Spindeltypen darstellend.

Fig. 6. *Terebra dimidiata* L. Die Windungen des Saumes sind parallel, und die weissen Zeichnungen folgen mit einer einzelnen Ausnahme regelmässig aufeinander. Die Spirale am weitesten nach rechts ist eine Skulpturlinie.

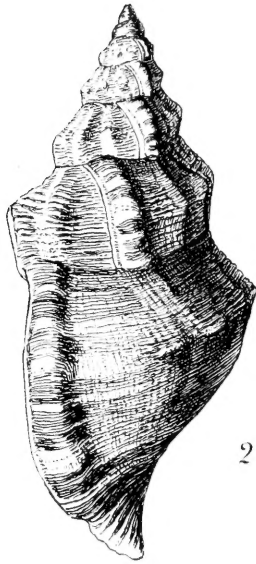
TAFEL I.



TAFEL II.



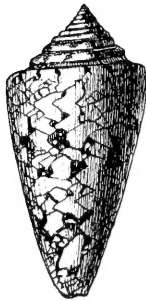
1



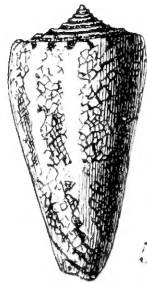
2



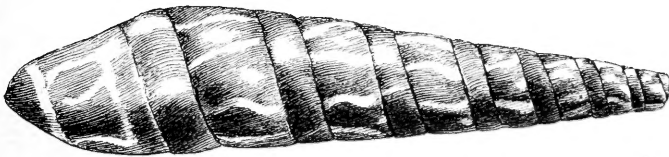
3



4



5



6



