FORTSCHRITTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
IN MONOGRAPHIEN · HRSG. VON O. BLUMENTHAL

2

LORENTZ · EINSTEIN · MINKOWSKI

DAS RELATIVITÄTSPRINZIP

B. G. TEUBNER · LEIPZIG · BERLIN

H. Minkowski

FORTSCHRITTE
DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
IN MONOGRAPHIEN
HERAUSGEGEBEN VON OTTO BLUMENTHAL
HEFT 2

H. A. LORENTZ
A. EINSTEIN · H. MINKOWSKI

DAS RELATIVITÄTSPRINZIP

EINE SAMMLUNG VON ABHANDLUNGEN

MIT ANMERKUNGEN VON A. SOMMERFELD
UND VORWORT VON O. BLUMENTHAL

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

H. Minkowski

INHALTSVERZEICHNIS.

Der Interferenzversuch Michelsons.

Von H. A. Lorentz.*)

1. Wie zuerst von Maxwell bemerkt wurde und aus einer sehr einfachen Rechnung folgt, muß sich die Zeit, die ein Lichtstrahl braucht, um zwischen zwei Punkten A und B hin und zurück zu gehen, ändern, sobald diese Punkte, ohne den Äther mit sich fortzuführen, eine gemeinschaftliche Verschiebung erleiden. Die Veränderung ist zwar eine Größe zweiter Ordnung; sie ist jedoch groß genug, um mittelst einer empfindlichen Interferenzmethode nachgewiesen werden zu können.

Der Versuch wurde im Jahre 1881 von Herrn Michelson ausgeführt.**) Sein Apparat, eine Art Interferentialrefraktor, hatte zwei gleich lange, horizontale, zueinander senkrechte Arme P und Q, und von den beiden miteinander interferierenden Lichtbündeln ging das eine längs dem Arme P und das andere längs dem Arme Q hin und zurück. Das ganze Instrument, die Lichtquelle und die Beobachtungsvorrichtung miteinbegriffen, ließ sich um eine vertikale Achse drehen, und es kommen besonders die beiden Lagen in Betracht, bei denen der Arm P oder der Arm Q so gut wie möglich die Richtung der Erdbewegung hatte. Es wurde nun, auf Grund der Fresnelschen Theorie, eine Verschiebung der Interferenzstreifen bei der Rotation aus der einen jener „Hauptlagen" in die andere erwartet.

Von dieser durch die Änderung der Fortpflanzungszeiten bedingten Verschiebung — wir wollen dieselbe der Kürze halber die Maxwellsche Verschiebung nennen — wurde aber keine Spur gefunden, und so meinte Herr Michelson denn schließen zu dürfen, daß der Äther bei der Bewegung der Erde nicht in Ruhe bleibe, eine Folgerung freilich, deren Richtigkeit bald in Frage gestellt wurde. Durch ein Versehen hatte nämlich Herr Michelson die nach der Theorie zu erwartende Veränderung der Phasendifferenzen auf das Doppelte des richtigen Wertes veranschlagt; verbessert man diesen Fehler, so gelangt man zu Verschiebungen, die durch Beobachtungsfehler gerade noch verdeckt werden konnten.

*) Aus: Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern (Leiden 1895) §§ 89—92.

**) Michelson, American Journal of Science (3) 22 (1881) S. 120.

In Gemeinschaft mit Herrn Morley hat dann später Herr Michelson die Untersuchung wieder aufgenommen*), wobei er, zur Erhöhung der Empfindlichkeit, jedes Lichtbündel durch einige Spiegel hin und her reflektieren ließ. Dieser Kunstgriff gewährte denselben Vorteil, als wenn die Arme des früheren Apparates beträchtlich verlängert worden wären. Die Spiegel wurden von einer schweren, auf Quecksilber schwimmenden, und also leicht drehbaren Steinplatte getragen. Im ganzen hatte jetzt jedes Bündel einen Weg von 22 Metern zu durchlaufen, und war nach der Fresnelschen Theorie, beim Übergange von der einen Hauptlage zur anderen, eine Verschiebung von 0,4 der Streifendistanz zu erwarten. Nichtsdestoweniger ergaben sich bei der Rotation nur Verschiebungen von höchstens 0,02 der Streifendistanz; dieselben dürften wohl von Beobachtungsfehlern herrühren.

Darf man nun auf Grund dieses Resultates annehmen, daß der Äther an der Bewegung der Erde teilnehme und also die Stokessche Aberrationstheorie die richtige sei? Die Schwierigkeiten, auf welche diese Theorie bei der Erklärung der Aberration stößt, scheinen mir zu groß zu sein, als daß ich dieser Meinung sein könnte, und nicht vielmehr versuchen sollte, den Widerspruch zwischen der Fresnelschen Theorie und dem Michelsonschen Ergebnis zu beseitigen. In der Tat gelingt das mittelst einer Hypothese, welche ich schon vor einiger Zeit ausgesprochen habe**), und zu der, wie ich später erfahren habe, auch Herr Fitzgerald***) gelangt ist. Worin dieselbe besteht, soll der nächste Paragraph zeigen.

2. Zur Vereinfachung wollen wir annehmen, daß man mit einem Instrumente wie dem bei den ersten Versuchen benutzten arbeite, und daß bei der einen Hauptlage der Arm P genau in die Richtung der Erdbewegung falle. Es sei $\mathfrak{p}$ die Geschwindigkeit dieser Bewegung und L die Länge jedes Armes, mithin $2L$ der Weg der Lichtstrahlen. Nach der Theorie†) bewirkt dann die Translation, daß die Zeit, in der das eine Lichtbündel an P entlang hin und zurück geht, um

$$L \cdot \frac{\mathfrak{p}^2}{V^3}$$

länger ist als die Zeit, in der das andere Bündel seinen Weg vollendet. Eben diese Differenz würde auch bestehen, wenn, ohne daß die Translation einen

*) Michelson and Morley, American Journal of Science (3) 34 (1887) S. 333; Phil. Mag. (5) 24 (1887) S. 449.

**) Lorentz, Zittingsverslagen der Akad. v. Wet. te Amsterdam, 1892—93, S. 74.

***) Wie Herr Fitzgerald mir freundlichst mitteilte, hat er seine Hypothese schon seit längerer Zeit in seinen Vorlesungen behandelt. In der Literatur habe ich dieselbe nur bei Herrn Lodge, in der Abhandlung „Aberration problems" (London Phil. Trans. 184 A (1893) S. 727) erwähnt gefunden.

†) Vgl. Lorentz, Arch. néerl. 21 (1887) S. 168—176.

Einfluß hätte, der Arm P um

$$L \cdot \frac{\mathfrak{p}^2}{2V^2}$$

länger wäre als der Arm Q. Ähnliches gilt von der zweiten Hauptlage.

Wir sehen also, daß die von der Theorie erwarteten Phasendifferenzen auch dadurch entstehen könnten, daß bei der Rotation des Apparates bald der eine, bald der andere Arm die größere Länge hätte. Daraus folgt, daß dieselben durch entgegengesetzte Veränderungen der Dimensionen kompensiert werden können.

Nimmt man an, daß der in der Richtung der Erdbewegung liegende Arm um

$$L \cdot \frac{\mathfrak{p}^2}{2V^2}$$

kürzer sei als der andere, und zugleich die Translation den Einfluß habe, der sich aus der Fresnelschen Theorie ergibt, so ist das Resultat des Michelsonschen Versuches vollständig erklärt.

Man hätte sich sonach vorzustellen, daß die Bewegung eines festen Körpers, etwa eines Messingstabes, oder der bei den späteren Versuchen benutzten Steinplatte, durch den ruhenden Äther hindurch einen Einfluß auf die Dimensionen habe, der, je nach der Orientierung des Körpers in Bezug auf die Richtung der Bewegung, verschieden ist. Würden z. B. die der Bewegungsrichtung parallelen Dimensionen im Verhältnis von 1 zu $1+\delta$ und die zu derselben senkrechten im Verhältnis von 1 zu $1+\varepsilon$ geändert, so müßte

$$\varepsilon - \delta = \frac{\mathfrak{p}^2}{2V^2} \tag{1}$$

sein.

Es bliebe hierbei der Wert einer der Größen δ und ε unbestimmt. Es könnte $\varepsilon = 0$, $\delta = -\frac{\mathfrak{p}^2}{2V^2}$ sein, aber auch $\varepsilon = \frac{\mathfrak{p}^2}{2V^2}$, $\delta = 0$, oder $\varepsilon = \frac{\mathfrak{p}^2}{4V^2}$, und $\delta = -\frac{\mathfrak{p}^2}{4V^2}$.

3. So befremdend die Hypothese auch auf den ersten Blick erscheinen mag, man wird dennoch zugeben müssen, daß sie gar nicht so fern liegt, sobald man annimmt, daß auch die Molekularkräfte, ähnlich wie wir es gegenwärtig von den elektrischen und magnetischen Kräften bestimmt behaupten können, durch den Äther vermittelt werden. Ist dem so, so wird die Translation die Wirkung zwischen zwei Molekülen oder Atomen höchstwahrscheinlich in ähnlicher Weise ändern, wie die Anziehung oder Abstoßung zwischen geladenen Teilchen. Da nun die Gestalt und die Dimensionen eines festen Körpers in letzter Instanz durch die Intensität der Molekularwirkungen bedingt werden, so kann dann auch eine Änderung der Dimensionen nicht ausbleiben.

In theoretischer Hinsicht wäre also nichts gegen die Hypothese einzuwenden. Was die experimentelle Prüfung derselben betrifft, so ist zunächst zu bemerken, daß die in Rede stehenden Verlängerungen und Verkürzungen außerordentlich klein sind. Es ist $\mathfrak{p}^2/V^2 = 10^{-8}$, und somit würde, falls man $\varepsilon = 0$ setzt, die Verkürzung des einen Durchmessers der Erde etwa 6,5 cm betragen. Die Länge eines Meterstabes aber änderte sich, wenn man ihn aus der einen Hauptlage in die andere überführte, um $^1/_{200}$ Mikron. Wollte man so kleine Größen wahrnehmen, so könnte man sich wohl nur von einer Interferenzmethode Erfolg versprechen. Man hätte also mit zwei zueinander senkrechten Stäben zu arbeiten und von zwei miteinander interferierenden Lichtbündeln das eine an dem ersten und das andere an dem zweiten Stabe entlang hin- und hergehen zu lassen. Hierdurch gelangte man aber wieder zu dem Michelsonschen Versuch und würde bei der Rotation gar keine Verschiebung der Streifen wahrnehmen. Umgekehrt wie wir es früher ausdrückten, könnte man jetzt sagen, daß die aus den Längenänderungen hervorgehende Verschiebung durch die Maxwellsche Verschiebung kompensiert werde.

4. Es ist beachtenswert, daß man gerade zu den oben vorausgesetzten Veränderungen der Dimensionen geführt wird, wenn man *erstens*, ohne die Molekularbewegung zu berücksichtigen, annimmt, daß in einem sich selbst überlassenen festen Körper die auf ein beliebiges Molekül wirkenden Kräfte, Anziehungen oder Abstoßungen, einander das Gleichgewicht halten, und *zweitens* — wozu freilich kein Grund vorliegt — auf diese Molekularkräfte das Gesetz anwendet, das wir früher*) für die elektrostatischen Wirkungen abgeleitet haben. Versteht man nämlich jetzt unter S_1 und S_2 nicht, wie an jener Stelle, zwei Systeme geladener Teilchen, sondern zwei Systeme von Molekülen — das zweite ruhend und das erste mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ in der Richtung der x-Achse —, zwischen deren Dimensionen die früher angegebene Beziehung besteht, und nimmt man an, daß in beiden Systemen die x-Komponenten der Kräfte dieselben seien, die y- und z-Komponenten sich aber durch den Faktor $\sqrt{1-\frac{\mathfrak{p}^2}{V^2}}$ voneinander unterscheiden, so ist klar, daß sich die Kräfte in S_1 aufheben werden, sobald dies in S_2 geschieht. Ist demnach S_2 der Gleichgewichtszustand eines ruhenden festen Körpers, so haben in S_1 die Moleküle gerade diejenigen Lagen, in denen sie unter dem Einflusse der Translation verharren können. Die Verschiebung würde diese Lagerung natürlich von selbst herbeiführen und also nach den an der genannten Stelle gegebenen Formeln eine Verkürzung in der Be-

*) Nämlich in § 23 des Buches: Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern.

wegungsrichtung im Verhältnis von 1 zu $\sqrt{1-\frac{\mathfrak{p}^2}{V^2}}$ bewirken. Dieses führt zu den Werten

$$\delta = -\frac{\mathfrak{p}^2}{2V^2}, \quad \varepsilon = 0,$$

was mit (1) übereinstimmt.

In Wirklichkeit befinden sich die Moleküle eines Körpers nicht in Ruhe, sondern es besteht in jedem „Gleichgewichtszustande" eine stationäre Bewegung. Inwiefern dieser Umstand bei der betrachteten Erscheinung von Einfluß ist, möge dahingestellt bleiben; jedenfalls lassen die Versuche der Herren Michelson und Morley wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler einen ziemlich weiten Spielraum für die Werte von δ und ε.

Elektromagnetische Erscheinungen in einem System, das sich mit beliebiger, die des Lichtes nicht erreichender Geschwindigkeit bewegt.

Von H. A. Lorentz.*)

1. Wenn man durch theoretische Betrachtungen den Einfluß zu bestimmen versucht, den eine Translation, wie sie z. B. alle Systeme durch die jährliche Erdbewegung erfahren, auf elektrische und optische Erscheinungen ausüben könnte, so gelangt man in verhältnismäßig einfacher Weise zum Ziel, solange nur solche Größen betrachtet zu werden brauchen, die proportional der ersten Potenz des Verhältnisses der Translationsgeschwindigkeit w zur Lichtgeschwindigkeit c sind. Fälle, in denen Größen von zweiter Ordnung, also von der Ordnung $\frac{w^2}{c^2}$, wahrnehmbar sein könnten, bieten mehr Schwierigkeiten. Das erste Beispiel dieser Art ist Michelsons wohlbekannter Interferenzversuch, dessen negatives Ergebnis Fitzgerald und mich zu dem Schlusse führte, daß die Dimensionen fester Körper sich infolge ihrer Bewegung durch den Äther ein wenig ändern.

Einige weitere Versuche, in denen eine Wirkung zweiter Ordnung gesucht wurde, sind kürzlich veröffentlicht worden. Einmal haben Rayleigh**) und Brace***) untersucht, ob die Erdbewegung einen Körper doppelbrechend macht; man könnte dies zunächst erwarten, wenn man die eben erwähnte Veränderung der Dimensionen annimmt. Beide Physiker kommen jedoch zu einem negativen Ergebnis.

Dann haben sich Trouton und Noble†) bemüht, ein Drehmoment zu entdecken, das auf einen geladenen Kondensator wirkt, dessen Platten einen Winkel mit der Translationsrichtung bilden. Die Elektronentheorie fordert unzweifelhaft die Existenz eines solchen Drehmoments, wenn man sie nicht durch eine neue Hypothese verändert. Um das einzusehen, genügt es, einen

*) Deutsche Übersetzung der in englischer Sprache erschienenen Abhandlung: Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light. (Proceedings Acad. Sc. Amsterdam 6 (1904) S. 809.)

**) Rayleigh, Phil. Mag. (6) 4 (1902) S. 678.

***) Brace, Phil. Mag. (6) 7 (1904) S. 317.

†) Trouton und Noble, London R. Soc. Trans. A 202 (1903) S. 165.

Kondensator mit Äther als Dielektrikum zu betrachten. Es läßt sich zeigen, daß in jedem elektrostatischen mit einer Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ *) bewegten System eine gewisse „elektromagnetische Bewegungsgröße" besteht. Wenn wir diese nach Größe und Richtung durch einen Vektor $\mathfrak{G}$ bezeichnen, so bestimmt sich das erwähnte Drehmoment durch das Vektorprodukt **)

$$(1) \qquad [\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{w}].$$

Wenn nun die z-Achse senkrecht zu den Kondensatorplatten gewählt wird, die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ eine beliebige Richtung hat, und wenn U die in üblicher Weise berechnete Energie des Kondensators ist, dann sind die Komponenten von $\mathfrak{G}$, bis zur 1. Ordnung genau, durch die folgenden Formeln gegeben***):

$$\mathfrak{G}_x = \frac{2\,U}{c^2}\mathfrak{w}_x, \quad \mathfrak{G}_y = \frac{2\,U}{c^2}\mathfrak{w}_y, \quad \mathfrak{G}_z = 0.$$

Setzen wir diese Werte in (1) ein, so erhalten wir für die Komponenten des Drehmoments bis zu Größen zweiter Ordnung genau:

$$\frac{2\,U}{c^2}\mathfrak{w}_y\mathfrak{w}_z, \quad -\frac{2\,U}{c^2}\mathfrak{w}_x\mathfrak{w}_z, \quad 0.$$

Diese Ausdrücke zeigen, daß die Achse des Drehmoments in der Ebene der Platten, senkrecht zur Translation liegt. Wenn α der Winkel zwischen der Geschwindigkeit und der Normalen zu den Platten ist, so wird das Drehmoment $\frac{U}{c^2} w^2 \sin 2\alpha$; es sucht den Kondensator so zu drehen, daß die Platten sich parallel zur Erdbewegung einstellen.

Beim Apparat von Trouton und Noble saß der Kondensator am Balken einer Torsionswage von genügender Empfindlichkeit, um durch ein Drehmoment der erwähnten Größenordnung abgelenkt zu werden. Es konnte aber nichts derartiges beobachtet werden.

2. Die besprochenen Versuche sind nicht der einzige Grund, weshalb eine neue Behandlung der mit der Bewegung der Erde verbundenen Probleme wünschenswert ist. Poincaré†) hat gegen die bisherige Theorie der optischen und elektrischen Erscheinungen bewegter Körper eingewandt, daß zur Erklärung des negativen Ergebnisses Michelsons eine neue Hypothese eingeführt werden mußte, und daß dies jedesmal notwendig werden könne,

*) Ein Vektor wird durch einen deutschen Buchstaben bezeichnet, seine Größe durch den entsprechenden lateinischen.

**) Vgl. meinen Artikel: „Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronentheorie" in der Mathematischen Encyklopädie V 14, § 21a. (Dieser Artikel wird zitiert mit M. E.)

***) M. E. § 56c.

†) Poincaré, Rapports du Congrès de physique de 1900, Paris, 1 S. 22, 23.

wenn neue Tatsachen bekannt würden. Sicherlich haftet diesem Aufstellen von besonderen Hypothesen für jedes neue Versuchsergebnis etwas Künstliches an. Befriedigender wäre es, könnte man mit Hilfe gewisser grundlegender Annahmen zeigen, daß viele elektromagnetische Vorgänge streng, d. h. ohne irgendwelche Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung, unabhängig von der Bewegung des Systems sind. Vor einigen Jahren habe ich schon versucht, eine derartige Theorie*) aufzustellen. Jetzt glaube ich den Gegenstand mit besserem Erfolg behandeln zu können. Die Geschwindigkeit wird nur der einen Beschränkung unterworfen, daß sie kleiner als die des Lichtes sei.

3. Ich gehe aus von den Grundgleichungen der Elektronentheorie.**) Sei $\mathfrak{d}$ die dielektrische Verschiebung im Äther, $\mathfrak{h}$ die magnetische Kraft, ϱ die Volumendichtigkeit der Ladung eines Elektrons, $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit eines Punktes eines solchen Teilchens und $\mathfrak{f}$ die elektrische Kraft, d. h. die auf die Einheitsladung gerechnete Kraft, die der Äther auf ein Volumenelement eines Elektrons ausübt. Wenn wir ein festes Koordinatensystem benutzen, so ist

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathfrak{d} = \varrho, \quad \operatorname{div} \mathfrak{h} = 0, \\ &\operatorname{rot} \mathfrak{h} = \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{d}} + \varrho \mathfrak{v}), \\ &\operatorname{rot} \mathfrak{d} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{h}}, \\ &\quad \mathfrak{f} = \mathfrak{d} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h}]. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Ich nehme nun an, daß das System sich als ganzes in der Richtung der x-Achse mit einer konstanten Geschwindigkeit w bewegt, und bezeichne mit $\mathfrak{u}$ die Geschwindigkeit, die außerdem ein Punkt eines Elektrons haben möge; dann ist

$$\mathfrak{v}_x = w + \mathfrak{u}_x, \quad \mathfrak{v}_y = \mathfrak{u}_y, \quad \mathfrak{v}_z = \mathfrak{u}_z.$$

Wenn gleichzeitig die Gleichungen (2) auf Achsen bezogen werden, die sich mit dem System bewegen, so wird:

$$\operatorname{div} \mathfrak{d} = \varrho, \quad \operatorname{div} \mathfrak{h} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{h}_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{d}_x + \frac{1}{c}\varrho(w + \mathfrak{u}_x),$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{h}_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{d}_y + \frac{1}{c}\varrho \mathfrak{u}_y,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial y} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{d}_z + \frac{1}{c}\varrho \mathfrak{u}_z,$$

---

*) Lorentz, Zittingsverslag Akad. Wet. 7 (1899) S. 507; Amsterdam Proc. 1898—99 S. 427.

**) M. E. § 2.

$$\frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{h}_x,$$
$$\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{h}_y,$$
$$\frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{h}_z,$$

$$\mathfrak{f}_x = \mathfrak{d}_x + \frac{1}{c}(\mathfrak{u}_y\mathfrak{h}_z - \mathfrak{u}_z\mathfrak{h}_y),$$
$$\mathfrak{f}_y = \mathfrak{d}_y - \frac{1}{c}w\mathfrak{h}_z + \frac{1}{c}(\mathfrak{u}_z\mathfrak{h}_x - \mathfrak{u}_x\mathfrak{h}_z),$$
$$\mathfrak{f}_z = \mathfrak{d}_z + \frac{1}{c}w\mathfrak{h}_y + \frac{1}{c}(\mathfrak{u}_x\mathfrak{h}_y - \mathfrak{u}_y\mathfrak{h}_x).$$

4. Wir transformieren diese Formeln durch Einführung neuer Veränderlicher. Wir setzen

$$\frac{c^2}{c^2 - w^2} = k^2 \tag{3}$$

und verstehen unter l eine weitere Zahlengröße, deren Wert später angegeben werden soll. Als unabhängige Veränderliche nehme ich

$$x' = klx, \quad y' = ly, \quad z' = lz, \tag{4}$$

$$t' = \frac{l}{k}t - kl\frac{w}{c^2}x, \tag{5}$$

und definiere zwei neue Vektoren $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{h}'$ durch die Formeln

$$\mathfrak{d}'_x = \frac{1}{l^2}\mathfrak{d}_x, \quad \mathfrak{d}'_y = \frac{k}{l^2}\left(\mathfrak{d}_y - \frac{w}{c}\mathfrak{h}_z\right), \quad \mathfrak{d}'_z = \frac{k}{l^2}\left(\mathfrak{d}_z + \frac{w}{c}\mathfrak{h}_y\right),$$
$$\mathfrak{h}'_x = \frac{1}{l^2}\mathfrak{h}_x, \quad \mathfrak{h}'_y = \frac{k}{l^2}\left(\mathfrak{h}_y + \frac{w}{c}\mathfrak{d}_z\right), \quad \mathfrak{h}'_z = \frac{k}{l^2}\left(\mathfrak{h}_z - \frac{w}{c}\mathfrak{d}_y\right).$$

Dafür können wir wegen (3) auch schreiben:

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{d}_x = l^2\mathfrak{d}'_x, \quad \mathfrak{d}_y = kl^2\left(\mathfrak{d}'_y + \frac{w}{c}\mathfrak{h}'_z\right), \quad \mathfrak{d}_z = kl^2\left(\mathfrak{d}'_z - \frac{w}{c}\mathfrak{h}'_y\right),\\ &\mathfrak{h}_x = l^2\mathfrak{h}'_x, \quad \mathfrak{h}_y = kl^2\left(\mathfrak{h}'_y - \frac{w}{c}\mathfrak{d}'_z\right), \quad \mathfrak{h}_z = kl^2\left(\mathfrak{h}'_z + \frac{w}{c}\mathfrak{d}'_y\right). \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Der Koeffizient l soll eine Funktion von w sein, die für $w = 0$ den Wert 1 annimmt und für kleine Werte von w sich nur um Größen von der zweiten Ordnung von 1 unterscheidet.

Die Veränderliche t' heiße „Ortszeit"; in der Tat wird sie für $k = 1$, $l = 1$ identisch mit dem, was ich früher darunter verstand. Setzen wir schließlich:

$$\frac{1}{kl^3}\varrho = \varrho', \tag{7}$$

$$k^2\mathfrak{u}_x = \mathfrak{u}'_x, \quad k\mathfrak{u}_y = \mathfrak{u}'_y, \quad k\mathfrak{u}_z = \mathfrak{u}'_z, \tag{8}$$

und deuten die letzteren Größen als Komponenten eines neuen Vektors $\mathfrak{u}'$, so nehmen die Gleichungen die folgende Form an:

$$(9)\qquad \begin{cases} \operatorname{div}'\mathfrak{d}' = \left(1 - \frac{w\mathfrak{u}_x'}{c^2}\right)\varrho', \quad \operatorname{div}'\mathfrak{h}' = 0, \\ \operatorname{rot}'\mathfrak{h}' = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{d}'}{\partial t'} + \varrho'\mathfrak{u}'\right), \\ \operatorname{rot}'\mathfrak{d}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{h}'}{\partial t'}, \end{cases}$$

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathfrak{f}_x = l^2\mathfrak{d}_x' + l^2\frac{1}{c}(\mathfrak{u}_y'\mathfrak{h}_z' - \mathfrak{u}_z'\mathfrak{h}_y') + l^2\frac{w}{c^2}(\mathfrak{u}_y'\mathfrak{d}_y' + \mathfrak{u}_z'\mathfrak{d}_z'), \\ \mathfrak{f}_y = \frac{l^2}{k}\mathfrak{d}_y' + \frac{l^2}{k}\frac{1}{c}(\mathfrak{u}_z'\mathfrak{h}_x' - \mathfrak{u}_x'\mathfrak{h}_z') - \frac{l^2}{k}\frac{w}{c^2}\mathfrak{u}_x'\mathfrak{d}_y', \\ \mathfrak{f}_z = \frac{l^2}{k}\mathfrak{d}_z' + \frac{l^2}{k}\frac{1}{c}(\mathfrak{u}_x'\mathfrak{h}_y' - \mathfrak{u}_y'\mathfrak{h}_x') - \frac{l^2}{k}\frac{w}{c^2}\mathfrak{u}_x'\mathfrak{d}_z'. \end{cases}$$

Die Symbole div′ und rot′ in (9) entsprechen div und rot in (2), nur müssen die Differentiationen nach x, y, z durch die entsprechenden nach x', y', z' ersetzt werden.*)

5. Die Gleichungen (9) führen zu dem Schluß, daß die Vektoren $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{h}'$ sich durch ein skalares Potential φ' und ein vektorielles Potential $\mathfrak{a}'$ darstellen lassen.

Diese Potentiale genügen den Gleichungen**)

$$(11)\qquad \Delta'\varphi' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t'^2} = -\varrho',$$

$$(12)\qquad \Delta'\mathfrak{a}' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{a}'}{\partial t'^2} = -\frac{1}{c}\varrho'\mathfrak{u}'.$$

---

*) Man wird bemerken, daß ich in dieser Abhandlung die Transformationsgleichungen der Einsteinschen Relativitätstheorie nicht ganz erreicht habe. Weder die Gleichung (7) noch die Formeln (8) haben die von Einstein angegebene Gestalt, und infolgedessen ist es mir nicht gelungen, das Glied $-\frac{w\mathfrak{u}_x'}{c^2}$ in der ersten Gleichung (9) zum Verschwinden zu bringen und so die Formeln (9) genau auf die für ein ruhendes System geltende Gestalt zu bringen. Mit diesem Umstande hängt das Unbeholfene mancher weiteren Betrachtungen in dieser Arbeit zusammen.

Es ist das Verdienst Einsteins, das Relativitätsprinzip zuerst als allgemeines, streng und genau geltendes Gesetz ausgesprochen zu haben.

Ich füge noch die Bemerkung hinzu, daß Voigt bereits im Jahre 1887 (Göttinger Nachrichten S. 41) in einer Arbeit „Über das Dopplersche Prinzip“ auf Gleichungen von der Form

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

eine Transformation angewandt hat, welche der in den Gleichungen (4) und (5) meiner Arbeit enthaltenen äquivalent ist. (Anmerkung von H. A. Lorentz, 1912.)

**) M. E. §§ 4 und 10.

Die Vektoren $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{h}'$ lassen sich folgendermaßen durch sie ausdrücken:

$$\mathfrak{d}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{a}'}{\partial t'} - \operatorname{grad}'\varphi' + \frac{w}{c}\operatorname{grad}'\mathfrak{a}_x', \tag{13}$$

$$\mathfrak{h}' = \operatorname{rot}'\mathfrak{a}'. \tag{14}$$

Das Symbol Δ' ist eine Abkürzung für $\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}$ und $\operatorname{grad}'\varphi'$ bezeichnet einen Vektor, dessen Komponenten $\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}, \frac{\partial \varphi'}{\partial y'}, \frac{\partial \varphi'}{\partial z'}$ sind; der Ausdruck $\operatorname{grad}'\mathfrak{a}_x'$ hat eine entsprechende Bedeutung.

Um die Lösungen von (11) und (12) in einfacher Form zu erhalten, nehmen wir x', y', z' als Koordinaten eines Punktes P' in einem Raum S' und ordnen diesem Punkte für jeden Wert t' die Werte ϱ', $\mathfrak{u}'$, φ', $\mathfrak{a}'$ zu, die zu dem entsprechenden Punkte $P(x, y, z)$ des elektromagnetischen Systems gehören. Für einen bestimmten Wert t' der vierten unabhängigen Veränderlichen sind die Potentiale φ' und $\mathfrak{a}'$ in dem Punkt P des Systems oder in dem entsprechenden Punkt P' im Raume S' durch die Gleichungen gegeben*):

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi}\int \frac{[\varrho']}{r'}\, dS', \tag{15}$$

$$\mathfrak{a}' = \frac{1}{4\pi c}\int \frac{[\varrho'\mathfrak{u}']}{r'}\, dS'. \tag{16}$$

Hierin ist dS' ein Raumelement in S', r' seine Entfernung von P', und die Klammern bezeichnen die Größe ϱ' und den Vektor $\varrho'\mathfrak{u}'$, so wie sie in dem Element dS' für den Wert $t' - \frac{r'}{c}$ der vierten unabhängigen Veränderlichen erscheinen.

Statt (15) und (16) können wir auch unter Berücksichtigung von (4) und (7) schreiben:

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi}\int \frac{[\varrho]}{r'}\, dS, \tag{17}$$

$$\mathfrak{a}' = \frac{1}{4\pi c}\int \frac{[\varrho\mathfrak{u}']}{r'}\, dS. \tag{18}$$

Dabei sind die Integrationen über das elektromagnetische System selbst zu erstrecken. Es ist wohl zu beachten, daß in diesen Gleichungen r' nicht die Entfernung zwischen dem Element dS und dem Punkt (x, y, z) bedeutet, für den die Berechnung ausgeführt werden soll. Ist das Element durch den Punkt (x_1, y_1, z_1) charakterisiert, so müssen wir setzen

$$r' = l\sqrt{k^2(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}.$$

*) M. E. §§ 5 und 10.

Wenn wir φ' und $\mathfrak{a}'$ für den Zeitpunkt bestimmen wollen, für den die Ortszeit in P gleich t' ist, so müssen wir ϱ und $\varrho\mathfrak{u}'$ den Wert geben, den sie im Element dS bei der Ortszeit $t' - \frac{r'}{c}$ des Elementes besitzen.

6. Es genügt für unseren Zweck zwei Sonderfälle zu betrachten, zunächst den eines elektrostatischen Systemes, d. h. eines Systemes, in dem die Translation von der Geschwindigkeit w die einzige Bewegung ist. In diesem Falle wird $\mathfrak{u}' = 0$, und folglich wegen (12) $\mathfrak{a}' = 0$. Ferner ist φ' von t' unabhängig, sodaß sich die Gleichungen (11), (13) und (14) vereinfachen zu

$$(19) \qquad \begin{cases} \Delta'\varphi' = -\varrho', \\ \mathfrak{d}' = -\operatorname{grad}'\varphi', \quad \mathfrak{h}' = 0. \end{cases}$$

Nachdem wir durch diese Gleichungen den Vektor $\mathfrak{d}'$ bestimmt haben, kennen wir auch die elektrische Kraft, die auf Elektronen des Systems wirkt. Wegen $\mathfrak{u}' = 0$ nehmen die Gleichungen (10) für sie die Gestalt an

$$(20) \qquad \mathfrak{f}_x = l^2\mathfrak{d}_x', \quad \mathfrak{f}_y = \frac{l^2}{k}\mathfrak{d}_y', \quad \mathfrak{f}_z = \frac{l^2}{k}\mathfrak{d}_z'.$$

Das Ergebnis läßt sich in einfache Form bringen, wenn wir das bewegte System Σ, um das es sich handelt, mit einem ruhenden System Σ' vergleichen. Dieses soll aus Σ dadurch hervorgehen, daß wir die Strecken in der Richtung der x-Achse mit kl und die Strecken in der Richtung der y- und z-Achse mit l multiplizieren. Wir wählen für diese Deformation passend das Symbol (kl, l, l). In diesem neuen System, das sich in dem obenerwähnten Raume S' befinden möge, geben wir der Dichte den durch (7) bestimmten Wert ϱ', sodaß die Ladungen entsprechender Volumenelemente und entsprechender Elektronen in Σ und Σ' gleich sind. Wir erhalten dann die auf die Elektronen des bewegten Systems Σ wirkenden Kräfte, wenn wir zunächst die entsprechenden Kräfte in Σ' bestimmen und dann ihre Komponenten in der x-Richtung mit l^2 und die dazu senkrechten Komponenten mit $\frac{l^2}{k}$ multiplizieren. Wir drücken dies passend durch die Gleichung aus

$$(21) \qquad \mathfrak{F}(\Sigma) = \left(l^2, \frac{l^2}{k}, \frac{l^2}{k}\right)\mathfrak{F}(\Sigma').$$

Man bemerke außerdem, daß mit Hilfe des aus (19) berechneten Wertes $\mathfrak{d}'$ sich die elektromagnetische Bewegungsgröße im bewegten System, oder vielmehr ihre Komponente in der Bewegungsrichtung, leicht ausdrücken läßt. In der Tat zeigt die Gleichung

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{c}\int[\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{h}]\,dS,$$

daß

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{c}\int(\mathfrak{d}_y\mathfrak{h}_z - \mathfrak{d}_z\mathfrak{h}_y)\,dS.$$

Folglich wegen (6), da $\mathfrak{h}' = 0$:

$$(22)\qquad \mathfrak{G}_x = \frac{k^2 l^4 w}{c^2}\int(\mathfrak{d}_y'^2 + \mathfrak{d}_z'^2)\,dS = \frac{klw}{c^2}\int(\mathfrak{d}_y'^2 + \mathfrak{d}_z'^2)\,dS'.$$

7. Beim zweiten Sonderfall betrachten wir ein Teilchen mit einem elektrischen Moment, also einen kleinen Raum S mit der Gesamtladung $\int \varrho\, dS = 0$, aber solcher Dichteverteilung, daß die Integrale $\int \varrho x\, dS$, $\int \varrho y\, dS$, $\int \varrho z\, dS$ von Null verschiedene Werte haben.

Es seien x, y, z die Koordinaten in bezug auf einen festen Punkt A des Teilchens — er heiße der Mittelpunkt —, und das elektrische Moment sei definiert als ein Vektor $\mathfrak{p}$ mit den Komponenten

$$(23)\qquad \mathfrak{p}_x = \int \varrho x\, dS,\quad \mathfrak{p}_y = \int \varrho y\, dS,\quad \mathfrak{p}_z = \int \varrho z\, dS.$$

Dann ist

$$(24)\qquad \frac{d\mathfrak{p}_x}{dt} = \int \varrho\, \mathfrak{u}_x\, dS,\quad \frac{d\mathfrak{p}_y}{dt} = \int \varrho\, \mathfrak{u}_y\, dS,\quad \frac{d\mathfrak{p}_z}{dt} = \int \varrho\, \mathfrak{u}_z\, dS.$$

Werden x, y, z als unendlich klein betrachtet, so werden natürlich auch $\mathfrak{u}_x$, $\mathfrak{u}_y$, $\mathfrak{u}_z$ unendlich klein. Wir vernachlässigen Quadrate und Produkte dieser sechs Größen.

Wir benutzen nun die Gleichung (17) zur Bestimmung des skalaren Potentiales φ' für einen äußeren Punkt $P(x, y, z)$ in endlicher Entfernung von dem polarisierten Teilchen, für den Augenblick, in dem die Ortszeit dieses Punktes einen bestimmten Wert t' hat. Dabei geben wir dem Symbol $[\varrho]$, das sich in (17) auf den Zeitpunkt bezieht, für den die Ortszeit in dS gleich $t' - \frac{r'}{c}$ ist, eine etwas andere Bedeutung. Wir bezeichnen mit r_0' den Wert von r' für den Mittelpunkt A und verstehen dann unter $[\varrho]$ den Wert der Dichte am Punkte (x, y, z) zu derjenigen Zeit t_0, bei der die Ortszeit von A gleich $t' - \frac{r_0'}{c}$ ist.

Man erkennt aus (5), daß dieser Zeitpunkt früher ist als derjenige, auf den sich der Zähler in (17) bezieht, und zwar um

$$k^2 \frac{w}{c^2} x + \frac{k}{l}\,\frac{r_0' - r'}{c} = k^2 \frac{w}{c^2} x + \frac{k}{l}\,\frac{1}{c}\left(x\frac{\partial r'}{\partial x} + y\frac{\partial r'}{\partial y} + z\frac{\partial r'}{\partial z}\right)$$

Zeiteinheiten. In diesem letzten Ausdruck können wir für die Differentialquotienten ihre Werte im Punkte A einsetzen.

In (17) haben wir nun $[\varrho]$ durch

$$(25)\qquad [\varrho] + k^2 \frac{w}{c^2} x \left[\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right] + \frac{k}{l}\,\frac{1}{c}\left(x\frac{\partial r'}{\partial x} + y\frac{\partial r'}{\partial y} + z\frac{\partial r'}{\partial z}\right)\left[\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right]$$

zu ersetzen, dabei bezieht sich $\left[\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right]$ wieder auf die Zeit t_0. Wenn nun der Wert t', für den die Berechnungen ausgeführt werden sollen, gewählt ist, wird diese Zeit t_0 eine Funktion der Koordinaten x, y, z des Aufpunktes P sein. Der Wert $[\varrho]$ hängt infolgedessen von diesen Koordinaten ab, und man sieht leicht, daß

$$\frac{\partial[\varrho]}{\partial x} = -\frac{k}{l}\frac{1}{c}\frac{\partial r'}{\partial x}\left[\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right], \text{ usw.}$$

Deshalb wird (25) gleich

$$[\varrho] + k^2\frac{w}{c^2}x\left[\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right] - \left(x\frac{\partial[\varrho]}{\partial x} + y\frac{\partial[\varrho]}{\partial y} + z\frac{\partial[\varrho]}{\partial z}\right).$$

Ferner muß, wenn wir weiterhin mit r' die oben r_0' genannte Größe bezeichnen, der Faktor $\frac{1}{r'}$ durch

$$\frac{1}{r'} - x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right) - y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r'}\right) - z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r'}\right)$$

ersetzt werden, sodaß schließlich im Integral (17) das Element dS mit

$$\frac{[\varrho]}{r'} + k^2\frac{w}{c^2}\frac{x}{r'}\left[\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\frac{x[\varrho]}{r'} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{y[\varrho]}{r'} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{z[\varrho]}{r'}$$

multipliziert wird.

Das ist einfacher als die ursprüngliche Form, weil weder r' noch die Zeit, für welche die eingeklammerten Größen genommen werden müssen, von x, y, z abhängen. Benutzen wir (23) und bedenken, daß $\int \varrho\, dS = 0$, so erhalten wir

$$\varphi' = k^2\frac{w}{4\pi c^2 r'}\left[\frac{\partial \mathfrak{p}_x}{\partial t}\right] - \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{[\mathfrak{p}_x]}{r'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{[\mathfrak{p}_y]}{r'} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{[\mathfrak{p}_z]}{r'}\right\}.$$

In dieser Gleichung sind alle eingeklammerten Größen für denjenigen Augenblick zu nehmen, für den die Ortszeit des Mittelpunktes des Teilchens gleich $t' - \frac{r'}{c}$ ist.

Wir schließen diese Erwägungen mit der Einführung eines neuen Vektors $\mathfrak{p}'$, dessen Komponenten

(26) $$\mathfrak{p}_x' = kl\mathfrak{p}_x, \quad \mathfrak{p}_y' = l\mathfrak{p}_y, \quad \mathfrak{p}_z' = l\mathfrak{p}_z$$

sind. Gleichzeitig gehen wir zu x', y', z', t' als unabhängigen Veränderlichen über. Das Schlußergebnis ist

$$\varphi' = \frac{w}{4\pi c^2 r'}\frac{\partial[\mathfrak{p}_x']}{\partial t'} - \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\frac{[\mathfrak{p}_x']}{r'} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{[\mathfrak{p}_y']}{r'} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{[\mathfrak{p}_z']}{r'}\right\}.$$

Die Transformation der Gleichung (18) für das Vektorpotential ist weniger schwierig, weil es den unendlich kleinen Vektor $\mathfrak{u}'$ enthält. Unter Berücksichtigung von (8), (24), (26) und (5) findet man

$$\mathfrak{a}' = \frac{1}{4\pi c r'}\frac{\partial[\mathfrak{p}']}{\partial t'}.$$

Das von dem polarisierten Teilchen hervorgerufene Feld ist nun völlig bestimmt. Die Gleichung (13) führt auf

$$(27) \qquad \mathfrak{d}' = -\frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\frac{[\mathfrak{p}]}{r'} + \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{grad}'\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\frac{[\mathfrak{p}'_x]}{r'} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{[\mathfrak{p}'_y]}{r'} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{[\mathfrak{p}'_z]}{r'}\right\},$$

und der Vektor $\mathfrak{h}'$ ist durch (14) gegeben. Wir können ferner die Gleichungen (20) statt der ursprünglichen Gleichungen (10) anwenden, wenn wir die Kräfte betrachten wollen, die von dem polarisierten Teilchen auf ein ähnliches, in einiger Entfernung gelegenes ausgeübt werden. In der Tat können beim zweiten Teilchen, wie beim ersten, die Geschwindigkeiten $\mathfrak{u}$ als unendlich klein gelten.

Man bemerke, daß die Gleichungen für ein ruhendes System in den gegebenen Formeln enthalten sind. Für ein solches System werden die Größen mit Akzenten identisch mit den entsprechenden ohne Akzente; außerdem werden k und l gleich 1. Die Komponenten von (27) sind gleichzeitig die der elektrischen Kraft, die das eine polarisierte Teilchen auf ein anderes ausübt.

8. Bis dahin haben wir nur die Fundamentalgleichungen ohne neue Annahmen benutzt. Ich nehme jetzt an, *daß die Elektronen, die ich im Ruhezustand als Kugeln vom Radius R ansehe, ihre Dimensionen unter dem Einfluß einer Translation ändern, und zwar sollen die Dimensionen in der Bewegungsrichtung kl mal und die in den dazu senkrechten Richtungen l mal kleiner werden.*

Bei dieser Deformation, die durch $\left(\frac{1}{kl}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$ bezeichnet werden möge, soll jedes Volumenelement seine Ladung behalten.

Unsere Annahme läuft darauf hinaus, daß in einem elektrostatischen System Σ, das sich mit einer Geschwindigkeit w bewegt, alle Elektronen sich zu Ellipsoiden abflachen, deren kleine Achsen in der Bewegungsrichtung liegen. Wenn wir nun, um den Satz des § 6 anwenden zu können, das System der Deformation (kl, l, l) unterwerfen, haben wir wieder Kugelelektronen vom Radius R. Wenn wir ferner die relative Lage der Elektronenmittelpunkte in Σ durch die Deformation (kl, l, l) ändern und in die so erhaltenen Punkte die Mittelpunkte ruhender kugelförmiger Elektronen legen, so erhalten wir ein System, das mit dem in § 6 besprochenen erdachten System Σ' identisch ist. Die Kräfte in diesem System und die in Σ stehen in der Beziehung zueinander, die durch (21) vermittelt wird.

Zweitens nehme ich an, *daß die Kräfte zwischen ungeladenen Teilchen, ebenso wie die Kräfte zwischen ungeladenen Teilchen und Elektronen, durch eine Translation in genau derselben Weise wie die elektrischen Kräfte in einem elektrostatischen System beeinflußt werden.*

Mit anderen Worten: Wie auch die Natur der Teilchen eines ponderabelen Körpers sei, immer sollen — vorausgesetzt, daß sich die Teilchen nicht gegeneinander bewegen — die in einem ruhenden System Σ' und einem bewegten Σ wirkenden Kräfte durch die Beziehung (21) miteinander verbunden sein, wenn, hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Teilchen, Σ' aus Σ durch die Deformation (kl, l, l) und also Σ aus Σ' durch die Deformation $\left(\frac{1}{kl}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$ erhalten wird.

Daher muß, wenn für ein Teilchen in Σ' die resultierende Kraft verschwindet, das gleiche auch für das entsprechende Teilchen in Σ der Fall sein. Wir vernachlässigen die Wirkungen der Molekularbewegung und nehmen an, daß sich an jedem Teilchen eines festen Körpers die Anziehungen und Abstoßungen, die von der Umgebung auf das Teilchen ausgeübt werden, im Gleichgewicht befinden. Machen wir außerdem noch die Annahme, daß nur *eine* Gleichgewichtskonfiguration möglich ist, so können wir schließen, daß das System Σ' *von selbst* in das System Σ übergeht, wenn man ihm die Geschwindigkeit w erteilt. Mit anderen Worten, die Translation *bewirkt* die Deformation $\left(\frac{1}{kl}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$.

Der Fall der Molekularbewegung wird in § 12 betrachtet.

Man sieht leicht, daß die früher in Verbindung mit Michelsons Versuch gemachte Hypothese in der jetzt ausgesprochenen enthalten ist. Jedoch ist die gegenwärtige Hypothese allgemeiner, weil die einzige Beschränkung der Bewegung die ist, daß ihre Geschwindigkeit kleiner als die des Lichtes sein soll.

9. Wir sind jetzt in der Lage, die elektromagnetische Bewegungsgröße eines einzigen Elektrons zu berechnen. Der Einfachheit halber nehme ich die Ladung e als gleichmäßig über die Oberfläche verteilt an, solange das Elektron in Ruhe ist. Dann besteht eine Verteilung derselben Art im System Σ', mit dem wir es in dem letzten Integral von (22) zu tun haben. Folglich wird

$$\int (\mathfrak{d}_y'^2 + \mathfrak{d}_z'^2)\, dS' = \frac{2}{3}\int \mathfrak{d}'^2 dS' = \frac{e^2}{6\pi}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{6\pi R}$$

und

$$\mathfrak{G}_x = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} klw.$$

Man muß beachten, daß das Produkt kl eine Funktion von w ist und daß aus Symmetriegründen der Vektor $\mathfrak{G}$ die Translationsrichtung hat. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{w}$ die Geschwindigkeit dieser Bewegung, so haben wir allgemein die Vektorgleichung

$$\mathfrak{G} = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} kl\mathfrak{w}. \tag{28}$$

Nun zieht jede Veränderung in der Bewegung eines Systems eine entsprechende Änderung in der elektromagnetischen Bewegungsgröße nach sich und erfordert deshalb eine gewisse Kraft, die der Größe und Richtung nach durch

$$\mathfrak{F} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} \tag{29}$$

gegeben ist.

Die Gleichung (28) läßt sich streng nur auf den Fall einer gleichförmigen geradlinigen Translation anwenden. Wegen dieses Umstandes wird die Theorie rasch wechselnder Bewegungen eines Elektrons sehr schwierig — obgleich (29) immer gilt —, und zwar um so mehr, als die Hypothese in § 8 die Forderung einschließt, daß Größe und Richtung der Deformation sich fortwährend ändern. Es ist sogar kaum wahrscheinlich, daß die Form des Elektrons sich allein aus der Geschwindigkeit im betrachteten Augenblick bestimmt.

Trotzdem erhalten wir bei Annahme hinreichend langsamer Geschwindigkeitsänderung eine genügende Näherung, indem wir (28) für jeden Augenblick benutzen. Die Anwendung von (29) auf eine solche *quasi-stationäre* Translation, wie sie Abraham*) genannt hat, ist sehr einfach. Sei $\mathfrak{j}_1$ in einem bestimmten Augenblick die Beschleunigung in der Bahnrichtung und $\mathfrak{j}_2$ die dazu senkrechte Beschleunigung. Dann besteht die Kraft $\mathfrak{F}$ aus zwei Komponenten, welche die Richtung dieser Beschleunigungen haben und durch

$$\mathfrak{F}_1 = m_1 \mathfrak{j}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}_2 = m_2 \mathfrak{j}_2$$

gegeben sind, wenn

$$m_1 = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} \frac{d(klw)}{dw} \quad \text{und} \quad m_2 = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} kl. \tag{30}$$

Folglich verhält sich das Elektron bei Vorgängen, bei welchen eine Beschleunigung in der Bewegungsrichtung auftritt, als ob es die Masse m_1 hätte, bei Beschleunigung in einer zur Bewegung senkrechten Richtung, als ob es die Masse m_2 besäße. Diese Größen m_1 und m_2 werden deshalb passend die „longitudinale" und „transversale" elektromagnetische Masse genannt. Ich nehme an, *daß außerdem keine „wirkliche" oder „materielle" Masse besteht.*

Da k und l sich von der Einheit um Größen der Ordnung $\frac{w^2}{c^2}$ unterscheiden, finden wir für kleine Geschwindigkeiten

$$m_1 = m_2 = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}.$$

Das ist die Masse, mit der man zu rechnen hat, wenn in einem System ohne Translation die Elektronen kleine Schwingungen ausführen. Wenn dagegen ein Körper, der sich mit der Geschwindigkeit w in der x-Richtung fortbewegt, Sitz derartiger Elektronenschwingungen ist, müssen wir mit der durch

*) Abraham, Ann. Phys. 10 (1903) S. 105.

(30) gegebenen Masse m_1 rechnen, sobald wir die Schwingungen parallel zur x-Achse betrachten; dagegen kommt für Schwingungen parallel zu OY oder OZ die Masse m_2 in Betracht.

Also kurz

$$(31) \qquad m(\Sigma) = \left(\frac{d(klw)}{dw}, kl, kl\right) m(\Sigma'),$$

wenn das Zeichen Σ das bewegte, das Zeichen Σ' das ruhende System anzeigt.

10. Wir können jetzt dazu übergehen, den Einfluß der Erdbewegung auf optische Erscheinungen in einem System durchsichtiger Körper zu untersuchen. Hierbei richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die veränderlichen elektrischen Momente in den Teilchen oder „Atomen" des Systems. Wir können auf diese Momente das in § 7 Gesagte anwenden. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß in jedem Teilchen die Ladung in einer gewissen Anzahl getrennter Elektronen konzentriert ist. Ferner sollen die „elastischen" Kräfte, die an einem dieser Elektronen angreifen und zusammen mit den elektrischen Kräften seine Bewegung bestimmen, ihren Ausgangspunkt innerhalb der Begrenzung *desselben* Atomes haben.

Ich werde zeigen, daß man jedem in einem ruhenden System möglichen Bewegungszustand einen entsprechenden, gleichfalls möglichen Bewegungszustand in dem mit Translation begabten System zuordnen kann, wobei die Art der Zuordnung sich in folgender Weise charakterisieren läßt.

a) Seien A_1', A_2', A_3', usw. die Mittelpunkte der Teilchen im System Σ' ohne Translation. Wir vernachlässigen Molekularbewegungen und nehmen diese Punkte als ruhend an. Das Punktsystem A_1, A_2, A_3, usw., das von den Mittelpunkten der Teilchen im bewegten System Σ gebildet wird, erhält man aus A_1', A_2', A_3', usw. mit Hilfe einer Deformation $\left(\frac{1}{kl}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$. Entsprechend dem in § 8 Gesagten nehmen die Mittelpunkte von selbst diese Lagen A_1', A_2', A_3', usw. ein, wenn sie ursprünglich, vor der Translation, die Lagen A_1, A_2, A_3, usw. hatten.

Wir können uns vorstellen, daß jeder Punkt P' im Raume des Systems Σ' durch die erwähnte Deformation in einen bestimmten Punkt P von Σ übergeführt wird. Für zwei entsprechende Punkte P' und P definieren wir entsprechende Zeitpunkte; der erste soll zu P', der zweite zu P gehören. Wir setzen nämlich fest, daß die wahre Zeit im ersten Zeitpunkt gleich der aus (5) für den Punkt P bestimmten Ortszeit im zweiten Zeitpunkt sein soll. Unter entsprechenden Zeiten für zwei entsprechende *Teilchen* verstehen wir sich entsprechende Zeiten für die *Mittelpunkte* A' und A dieser Teilchen.

b) Was den inneren Zustand der Atome betrifft, so nehmen wir an, daß die Konfiguration eines Teilchens A in Σ zu einer gewissen Zeit mit Hilfe der Deformation $\left(\frac{1}{kl}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$ aus der Konfiguration des entsprechenden Teilchens in Σ' für den entsprechenden Zeitpunkt erhalten werde. Soweit diese Annahme sich auf die Form der Elektronen selbst bezieht, ist sie in der ersten Hypothese von § 8 enthalten.

Wenn wir von einem tatsächlich bestehenden Zustand im System Σ' ausgehen, haben wir offenbar durch die Festsetzungen a) und b) einen Zustand des bewegten Systems Σ vollständig bestimmt. Doch bleibt die Frage offen, ob dieser Zustand auch ein möglicher ist.

Um das zu entscheiden, bemerken wir zunächst, daß die elektrischen Momente, die nach unserer Annahme im bewegten System auftreten und die wir mit $\mathfrak{p}$ bezeichnen wollen, bestimmte Funktionen der Koordinaten x, y, z der Mittelpunkte A der Teilchen (oder, wie wir sagen wollen, der Koordinaten der Teilchen) und der Zeit t sind. Die Gleichungen, welche die Beziehungen zwischen $\mathfrak{p}$ einerseits und x, y, z, t andererseits ausdrücken, können durch andere Gleichungen ersetzt werden, die den aus (26) bestimmten Vektor $\mathfrak{p}'$ und die durch (4) und (5) definierten Größen x', y', z', t' enthalten.

Wenn nun in einem Teilchen A des bewegten Systems, dessen Koordinaten x, y, z sind, zur Zeit t oder zur Ortszeit t' ein elektrisches Moment $\mathfrak{p}$ besteht, so wird nach den Annahmen a) und b) in dem anderen System in einem Teilchen mit den Koordinaten x', y', z' und zur wahren Zeit t' ein Moment bestehen, das gerade durch den durch (26) bestimmten Vektor $\mathfrak{p}'$ vorgestellt wird. Man sieht in dieser Weise, daß die Gleichungen zwischen $\mathfrak{p}', x', y', z', t'$ für beide Systeme dieselben sind, mit dem einzigen Unterschied, daß für das System Σ' ohne Translation diese Zeichen das Moment, die Koordinaten und die wahre Zeit bedeuten, während sie für das bewegte System eine andere Bedeutung haben. Denn hier sind $\mathfrak{p}', x', y', z', t'$ mit dem Moment $\mathfrak{p}$, den Koordinaten x, y, z und der allgemeinen Zeit t durch die Beziehungen (26), (4) und (5) verbunden.

Es ist bereits gesagt, daß Gleichung (27) auf beide Systeme Anwendung findet. Der Vektor $\mathfrak{d}'$ ist folglich in Σ' und Σ der gleiche unter der Voraussetzung, daß wir immer entsprechende Stellen und Zeiten vergleichen. Doch hat der Vektor nicht in beiden Fällen dieselbe Bedeutung. In Σ' stellt er die elektrische Kraft dar, in Σ hängt er mit dieser Kraft durch (20) zusammen. Wir können deshalb schließen, daß die in Σ und Σ' auf entsprechende Teilchen zu entsprechenden Zeiten wirkenden elektrischen Kräfte miteinander durch (21) verknüpft sind. Ziehen wir unsere Annahme b) in Verbindung mit der zweiten Hypothese von § 8 heran, so gilt die gleiche Beziehung zwischen den „elastischen“ Kräften. Die Gleichung (21) kann folglich auch als Ausdruck der Beziehung zwischen den an entsprechenden Elektronen zu entsprechenden Zeiten wirkenden Gesamtkräften angesehen werden.

Offenbar ist nun der im bewegten System vorausgesetzte Zustand dann wirklich möglich, wenn in Σ und Σ' die Produkte der Masse m und der Beschleunigung eines Elektrons zueinander in derselben Beziehung stehen, wie die Kräfte, d. h. wenn

$$(32) \qquad m\mathfrak{j}(\Sigma) = \left(l^2, \frac{l^2}{k}, \frac{l^2}{k}\right) m\mathfrak{j}(\Sigma').$$

Nun gilt für die Beschleunigungen

$$(33) \qquad \mathfrak{j}(\Sigma) = \left(\frac{l}{k^3}, \frac{l}{k^2}, \frac{l}{k^2}\right) \mathfrak{j}(\Sigma'),$$

was sich aus (4) und (5) ableiten läßt. Verbinden wir dieses Ergebnis mit (32), so erhalten wir für die Massen

$$m(\Sigma) = (k^3 l, kl, kl) m(\Sigma').$$

Ein Vergleich mit (31) zeigt, daß für beliebige Werte von l diese Bedingung immer befriedigt ist hinsichtlich der Massen, mit welchen wir bei den zu der Translationsrichtung senkrechten Schwingungen zu rechnen haben. Wir haben also l nur der einzigen Bedingung zu unterwerfen:

$$\frac{d(klw)}{dw} = k^3 l.$$

Wegen (3) ist aber

$$\frac{d(kw)}{dw} = k^3,$$

sodaß

$$\frac{dl}{dw} = 0, \quad l = \text{konst.}$$

Der Wert der Konstanten muß 1 sein, weil wir schon wissen, daß für $w = 0$ $l = 1$ wird.

Wir werden also zu der Annahme geführt, *daß der Einfluß einer Translation auf Größe und Gestalt (eines einzelnen Elektrons und eines ponderablen Körpers als Ganzen) auf die Dimensionen in der Bewegungsrichtung beschränkt bleibt, und zwar werden diese k-mal kleiner als im Ruhezustand.* Nehmen wir diese Hypothese zu den bereits gemachten hinzu, so sind wir sicher, daß zwei Zustände möglich sind, der eine im bewegten System, der andere im gleichen ruhenden System, die sich in der früher gekennzeichneten Weise entsprechen. Übrigens ist dieses Entsprechen nicht auf die elektrischen Momente der Teilchen beschränkt. In entsprechenden Punkten, die entweder im Äther zwischen den Teilchen oder in dem die ponderablen Körper umgebenden Äther liegen, finden wir für entsprechende Zeiten denselben Vektor $\mathfrak{d}'$ und, wie man leicht zeigt, denselben Vektor $\mathfrak{h}'$. Zusammenfassend können wir sagen: Wenn in dem System ohne Translation ein Bewegungszustand auftritt, für den an einem bestimmten Orte die Komponenten von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ gewisse Funktionen der Zeit sind, dann kann im gleichen System, nachdem es in Bewegung gesetzt (und folglich deformiert) ist, ein Bewegungszustand auftreten, bei dem an dem entsprechenden Orte die Komponenten von $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{h}'$ dieselben Funktionen der Ortszeit sind.

Nur ein Punkt fordert noch genauere Erwägung. Da die Werte der Massen m_1 und m_2 aus der Theorie der quasi-stationären Bewegung abgeleitet sind, so erhebt sich die Frage, ob wir mit ihnen bei den schnellen Schwingungen des Lichtes rechnen dürfen. Nun findet man bei genauerer Betrachtung, daß die Bewegung eines Elektrons als quasi-stationär behandelt werden kann, wenn sie sich nur um wenig ändert während der Zeit, in der sich eine Lichtwelle um eine Strecke von der Länge des Durchmessers fortbewegt. Das trifft bei optischen Erscheinungen zu, weil der Durchmesser im Vergleich zur Wellenlänge außerordentlich klein ist.

11. Man sieht leicht, daß die vorgetragene Theorie eine große Zahl von Tatsachen erklärt.

Betrachten wir zunächst ein System ohne Translation, für das in einigen Teilen ständig $\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{d} = 0$, $\mathfrak{h} = 0$ ist. Dann haben wir im entsprechenden Zustand des bewegten Systems in entsprechenden Teilen (oder, wie wir sagen können, in den gleichen Teilen des deformierten Systems) $\mathfrak{p}' = 0$, $\mathfrak{d}' = 0$, $\mathfrak{h}' = 0$. Da diese Gleichungen $\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{d} = 0$, $\mathfrak{h} = 0$ nach sich ziehen, wie man aus (26) und (6) erkennt, bleiben offenbar alle Teile, die dunkel waren, als das System ruhte, auch dunkel, nachdem es bewegt wurde. Es ist deshalb unmöglich, einen Einfluß der Erdbewegung auf irgend welche optischen, mit einer terrestrischen Lichtquelle gemachten Versuche zu entdecken, bei welchen es sich um die Beobachtung der geometrischen Verteilung von Licht und Dunkelheit handelt. Viele Interferenz- und Beugungsversuche gehören hierher.

Wenn zweitens in zwei Punkten eines Systems Lichtstrahlen von gleichem Polarisationszustande sich in der gleichen Richtung fortpflanzen, so läßt sich zeigen, daß das Verhältnis zwischen den Amplituden in diesen Punkten durch eine Translation nicht geändert wird. Diese Bemerkung findet auf solche Versuche Anwendung, bei denen die Intensitäten in benachbarten Teilen des Gesichtsfeldes verglichen werden.

Die eben gemachten Schlüsse bestätigen frühere Ergebnisse, die aber durch Überlegungen erhalten waren, bei denen Größen zweiter Ordnung vernachlässigt wurden. Sie enthalten auch eine Erklärung von Michelsons negativem Ergebnis, und zwar allgemeiner als die früher gegebene und der Form nach etwas von ihr verschieden. Sie zeigen ferner, warum Rayleigh und Brace keine Anzeichen einer durch die Erdbewegung hervorgerufenen Doppelbrechung beobachten konnten.

Das negative Resultat der Versuche von Trouton und Noble wird sofort klar, wenn wir die Hypothesen des § 8 heranziehen. Aus ihnen und aus unserer letzten Annahme (§ 10) läßt sich schließen, daß die Translation nichts anderes bewirkt als eine Kontraktion des ganzen Systems der Elektronen und der anderen Teilchen, aus denen sich der geladene Kondensator, der Balken und der Faden der Drehwage zusammensetzen. Eine solche Kontraktion gibt aber keinen Anlaß zu einer merkbaren Richtungsänderung.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß ich diese Theorie mit allem Vorbehalt gebe. Obgleich sie nach meiner Meinung allen gut verbürgten Tatsachen gerecht wird, führt sie zu einigen Folgerungen, die sich noch nicht durch den Versuch stützen lassen. Z. B. folgt aus der Theorie, daß das Ergebnis des Michelson-Versuches negativ bleiben muß, wenn man die interferierenden Lichtstrahlen durch einen ponderablen durchsichtigen Körper hindurchgehen läßt.

Von vornherein kann man von unserer Hypothese über die Kontraktion der Elektronen weder sagen, daß sie plausibel noch daß sie unzulässig ist. Was wir über die Natur der Elektronen wissen, ist sehr wenig, und das einzige Mittel, um vorwärts zu kommen, besteht darin, solche Hypothesen zu prüfen, wie ich sie hier gemacht habe. Natürlich ergeben sich Schwierigkeiten, z. B. sobald wir die Rotation der Elektronen betrachten. Vielleicht werden wir annehmen müssen, daß bei Erscheinungen, bei denen im ruhenden System kugelförmige Elektronen um einen Durchmesser rotieren, die einzelnen Punkte der Elektronen im bewegten System elliptische Bahnen beschreiben, die in der § 10 angegebenen Weise den Kreisbahnen des Ruhefalles entsprechen.

12. Wir müssen noch einige Worte über die Molekularbewegung sagen. Wir können uns denken, daß auch Körper, bei denen sie einen merklichen oder gar überwiegenden Einfluß hat, denselben Deformationen unterworfen sind, wie die Systeme mit konstanter relativer Lage der Teilchen, von denen wir bisher gesprochen haben. In der Tat können wir uns in zwei Molekularsystemen Σ' und Σ, von denen nur das zweite eine Translation hat, einander derart entsprechende Molekularbewegungen denken, daß, wenn ein Teilchen in Σ' eine bestimmte Lage zu einer bestimmten Zeit hat, ein Teilchen in Σ zur entsprechenden Zeit die entsprechende Lage annimmt. Stellen wir uns dies vor, so können wir die Beziehung (33) zwischen den Beschleunigungen in allen den Fällen benutzen, für welche die Geschwindigkeit der Molekularbewegung sehr klein im Verhältnis zu w ist. In diesen Fällen können die Molekularkräfte durch die relative Lage als bestimmt gelten, unabhängig von den Geschwindigkeiten der Molekularbewegung. Wenn wir uns endlich diese Kräfte auf so kleine Entfernungen beschränkt denken, daß für aufeinander wirkende Teilchen die Differenz der Ortszeiten vernachlässigt werden kann, so bildet ein Teilchen zusammen mit denen, die in seinem Anziehungs- oder Abstoßungsbereich liegen, ein System, das die oft erwähnte Deformation

erleidet. Wegen der zweiten Hypothese des § 8 können wir deshalb Gleichung (21) auf die an dem Teilchen angreifende resultierende Molekularkraft anwenden. Folglich wird die richtige Beziehung zwischen den Kräften und den Beschleunigungen in beiden Fällen bestehen, wenn wir annehmen, *daß die Massen aller Teilchen durch eine Translation in demselben Grade beeinflußt werden wie die elektromagnetischen Massen der Elektronen.*

13. Die Werte (30), die ich für die longitudinale und transversale Masse eines Elektrons als Funktionen der Geschwindigkeit gefunden habe, stimmen nicht mit den früher von Abraham erhaltenen überein. Der Grund ist allein darin zu suchen, daß in Abrahams Theorie die Elektronen als Kugeln von unveränderlichen Dimensionen behandelt werden. Nun sind Abrahams Ergebnisse, was die transversale Masse angeht, in bemerkenswerter Weise durch Kaufmanns Messungen der Ablenkung von Radiumstrahlen im elektrischen und magnetischen Felde bestätigt worden. Wenn ich nicht einen sehr ernsten Einwand gegen meine Theorie bestehen lassen will, muß ich zeigen können, daß diese Messungen mit meinen Werten nicht weniger gut als mit den Abrahamschen übereinstimmen.

Ich bespreche zunächst zwei Meßreihen, die Kaufmann*) im Jahre 1902 veröffentlicht hat. Aus jeder Reihe hat er zwei Größen η und ζ, die „reduzierten" elektrischen und magnetischen Abweichungen abgeleitet, die mit dem Verhältnis $\beta = \frac{w}{c}$ wie folgt zusammenhängen:

$$\beta = k_1 \frac{\zeta}{\eta}, \quad \psi(\beta) = \frac{\eta}{k_2 \zeta^2}. \tag{34}$$

Die Funktion $\psi(\beta)$ hat einen solchen Wert, daß die transversale Masse gleich

$$m_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{e^2}{6\pi c^2 R} \psi(\beta) \tag{35}$$

wird; k_1 und k_2 sind für jede Reihe Konstante.

Aus der zweiten Gleichung (30) geht hervor, daß meine Theorie auch zu einer Gleichung der Form (35) führt; es muß nur Abrahams Funktion $\psi(\beta)$ durch

$$\tfrac{4}{3} k = \tfrac{4}{3} (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

ersetzt werden.

Meine Theorie verlangt also, daß nach Einsetzung dieses Wertes für $\psi(\beta)$ in (34) diese Gleichungen noch gelten. Natürlich dürfen wir, um eine gute Übereinstimmung zu erhalten, k_1 und k_2 andere Werte erteilen als Kaufmann; ferner dürfen wir für jede Messung einen geeigneten Wert der Geschwindigkeit w oder des Verhältnisses β annehmen. Schreiben wir für die neuen Werte sk_1, $\frac{3}{4} k_2'$ und β', so können wir (34) in der Form ansetzen

*) Kaufmann, Phys. Zeitschr. 4 (1902) S. 55.

(36) $$\beta' = s k_1 \frac{\zeta}{\eta}$$
und
(37) $$(1-\beta'^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\eta}{k_2' \zeta^2}.$$

Um seine Gleichungen zu prüfen, wählte Kaufmann einen solchen Wert für k_1, daß, wenn er damit β und k_2 aus (34) berechnete, die für die letztere Zahl gefundenen Werte in jeder Reihe möglichst genau konstant blieben. Diese Konstanz war der Beweis für genügende Übereinstimmung.

Ich habe ein ähnliches Verfahren angewandt, wobei ich mich einiger der von Kaufmann berechneten Zahlen bedienen konnte. Ich habe für jede Messung den Wert des Ausdrucks

(38) $$k_2' = (1-\beta'^2)^{\frac{1}{2}} \psi(\beta) k_2$$

berechnet, den man erhält, wenn man (37) mit der zweiten Gleichung (34) kombiniert. Die Werte für $\psi(\beta)$ und k_2 sind den Kaufmannschen Tabellen entnommen, und für β' habe ich den von ihm gefundenen Wert β mit s multipliziert genommen. Den Koeffizienten s wählte ich dabei in der Weise, daß für die Größe (38) eine gute Konstanz erzielt wurde. Die Ergebnisse finden sich in den folgenden Tabellen, die den Tabellen III und IV in Kaufmanns Arbeit entsprechen.

III. $s = 0{,}933$.

β	$\psi(\beta)$	k_2	β'	k_2'
0,851	2,147	1,721	0,794	2,246
0,766	1,86	1,736	0,715	2,258
0,727	1,78	1,725	0,678	2,256
0,6615	1,66	1,727	0,617	2,256
0,6075	1,595	1,655	0,567	2,175

IV. $s = 0{,}954$.

β	$\psi(\beta)$	k_2	β'	k_2'
0,963	3,23	8,12	0,919	10,36
0,949	2,86	7,99	0,905	9,70
0,933	2,73	7,46	0,890	9,28
0,883	2,31	8,32	0,842	10,36
0,860	2,195	8,09	0,820	10,15
0,830	2,06	8,18	0,792	10,23
0,801	1,96	8,13	0,764	10,28
0,777	1,89	8,04	0,741	10,20
0,752	1,83	8,02	0,717	10,22
0,732	1,785	7,97	0,698	10,18

Wie man sieht, ist die Konstanz von k_2' nicht weniger befriedigend als die von k_2, umsomehr als in jedem Fall s nur aus zwei Messungen bestimmt worden ist. Der Koeffizient ist so gewählt worden, daß für die zwei Beobachtungen, die in Tabelle III an erster und vorletzter Stelle und in Tabelle IV an erster und letzter Stelle stehen, die Werte von k_2' denen von k_2 proportional werden.

Ich betrachte jetzt zwei einer späteren Veröffentlichung Kaufmanns*) entnommene Meßreihen, die von Runge**) nach der Methode der kleinsten Quadrate durchgerechnet worden sind. Dabei sind die Koeffizienten k_1 und k_2 so bestimmt worden, daß die für jedes beobachtete ζ aus Kaufmanns Gleichungen (34) berechneten Werte von η möglichst gut mit den beobachteten Werten von η übereinstimmen.

Ich habe aus derselben Bedingung und gleichfalls nach der Methode der kleinsten Quadrate die Koeffizienten a und b der Gleichung

$$\eta^2 = a\zeta^2 + b\zeta^4$$

bestimmt, die aus meinen Gleichungen (36) und (37) abgeleitet werden kann. Wenn ich a und b kenne, finde ich β für jede Messung mit Hilfe der Beziehung

$$\beta = \sqrt{a}\,\frac{\zeta}{\eta}\,.$$

Für zwei Platten, auf denen Kaufmann die elektrische und magnetische Ablenkung gemessen hat, sind die Ergebnisse die folgenden, wobei die Abweichungen in Zentimetern angegeben sind.

Platte Nr. 15. $a = 0{,}06489$, $b = 0{,}3039$.

ζ	η					β	
	beobachtet	berechnet von R.	Diff.	berechnet von L.	Diff.	berechnet von R.	berechnet von L.
0,1495	0,0388	0,0404	— 16	0,0400	— 12	0,987	0,951
0,199	0,0548	0,0550	— 2	0,0552	— 4	0,964	0,918
0,2475	0,0716	0,0710	+ 6	0,0715	+ 1	0,930	0,881
0,296	0,0896	0,0887	+ 9	0,0895	+ 1	0,889	0,842
0,3435	0,1080	0,1081	— 1	0,1090	— 10	0,847	0,808
0,391	0,1290	0,1297	— 7	0,1305	— 15	0,804	0,763
0,437	0,1524	0,1527	— 3	0,1532	— 8	0,763	0,727
0,4825	0,1788	0,1777	+ 11	0,1777	+ 11	0,724	0,692
0,5265	0,2033	0,2039	— 6	0,2033	0	0,688	0,660

*) Kaufmann, Gött. Nachr., Math.-phys. Klasse 1903 S. 90.
**) Runge, ebendort S. 326.

Platte Nr. 19. $a = 0{,}05867$, $b = 0{,}2591$.

ζ	η					β	
	beobachtet	berechnet von R.	Diff.	berechnet von L.	Diff.	berechnet von R.	berechnet von L.
0,1495	0,0404	0,0388	+ 16	0,0379	+ 25	0,990	0,954
0,199	0,0529	0,0527	+ 2	0,0522	+ 7	0,969	0,923
0,247	0,0678	0,0675	+ 3	0,0674	+ 4	0,939	0,888
0,296	0,0834	0,0842	— 8	0,0844	— 10	0,902	0,849
0,3435	0,1019	0,1022	— 3	0,1026	— 7	0,862	0,811
0,391	0,1219	0,1222	— 3	0,1226	— 7	0,822	0,773
0,437	0,1429	0,1434	— 5	0,1437	— 8	0,782	0,736
0,4825	0,1660	0,1665	— 5	0,1664	— 4	0,744	0,702
0,5265	0,1916	0,1906	+ 10	0,1902	+ 14	0,709	0,671

Ich habe keine Zeit gefunden, die übrigen Tabellen in Kaufmanns Arbeit durchzurechnen. Da sie, ebenso wie die Tabelle für Platte 15, mit einer ziemlich großen negativen Differenz zwischen den aus den Beobachtungen abgeleiteten und den von Runge berechneten Werten η anfangen, können wir eine genügende Übereinstimmung mit meinen Formeln erwarten.

Zur Elektrodynamik bewegter Körper.

Von A. EINSTEIN.*)

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

Beispiele ähnlicher Art, sowie die mißlungenen Versuche, eine Bewegung der Erde relativ zum „Lichtmedium" zu konstatieren, führen zu der Vermutung, daß dem Begriffe der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen, sondern daß vielmehr für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten, wie dies für die Größen erster Ordnung**) bereits erwiesen ist. Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden „Prinzip der Relativität" genannt werden wird) zur Voraussetzung erheben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unverträgliche Voraussetzung einführen, daß sich das Licht im leeren Raume stets mit einer bestimmten, vom Bewegungszustande des emittierenden Körpers unabhängigen Geschwindigkeit V fortpflanze. Diese beiden Voraussetzungen genügen, um zu einer einfachen und widerspruchsfreien Elektrodynamik bewegter Körper zu gelangen unter Zugrundelegung der Maxwellschen Theorie für ruhende Körper. Die

*) Abgedruckt aus Ann. d. Phys. 17 (1905).

**) Die im Vorhergehenden abgedruckte Arbeit von H. A. Lorentz war dem Verfasser noch nicht bekannt.

Einführung eines „Lichtäthers" wird sich insofern als überflüssig erweisen, als nach der zu entwickelnden Auffassung weder ein mit besonderen Eigenschaften ausgestatteter „absolut ruhender Raum" eingeführt, noch einem Punkte des leeren Raumes, in welchem elektromagnetische Prozesse stattfinden, ein Geschwindigkeitsvektor zugeordnet wird.

Die zu entwickelnde Theorie stützt sich — wie jede andere Elektrodynamik — auf die Kinematik des starren Körpers, da die Aussagen einer jeden Theorie Beziehungen zwischen starren Körpern (Koordinatensystemen), Uhren und elektromagnetischen Prozessen betreffen. Die nicht genügende Berücksichtigung dieses Umstandes ist die Wurzel der Schwierigkeiten, mit denen die Elektrodynamik bewegter Körper gegenwärtig zu kämpfen hat.

I. Kinematischer Teil.

§ 1.

Definition der Gleichzeitigkeit.

Es liege ein Koordinatensystem vor, in welchem die Newtonschen mechanischen Gleichungen gelten.*) Wir nennen dies Koordinatensystem zur sprachlichen Unterscheidung von später einzuführenden Koordinatensystemen und zur Präzisierung der Vorstellung das „ruhende System".

Ruht ein materieller Punkt relativ zu diesem Koordinatensystem, so kann seine Lage relativ zu letzterem durch starre Maßstäbe unter Benutzung der Methoden der euklidischen Geometrie bestimmt und in kartesischen Koordinaten ausgedrückt werden.

Wollen wir die *Bewegung* eines materiellen Punktes beschreiben, so geben wir die Werte seiner Koordinaten in Funktion der Zeit. Es ist nun wohl im Auge zu behalten, daß eine derartige mathematische Beschreibung erst dann einen physikalischen Sinn hat, wenn man sich vorher darüber klar geworden ist, was hier unter „Zeit" verstanden wird. Wir haben zu berücksichtigen, daß alle unsere Urteile, in welchen die Zeit eine Rolle spielt, immer Urteile über *gleichzeitige Ereignisse* sind. Wenn ich z. B. sage: „Jener Zug kommt hier um 7 Uhr an," so heißt dies etwa: „Das Zeigen des kleinen Zeigers meiner Uhr auf 7 und das Ankommen des Zuges sind gleichzeitige Ereignisse.**)

Es könnte scheinen, daß alle die Definition der „Zeit" betreffenden Schwierigkeiten dadurch überwunden werden könnten, daß ich an Stelle der

*) Gemeint ist: „in erster Annäherung gelten".

**) Die Ungenauigkeit, welche in dem Begriffe der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse an (annähernd) demselben Orte steckt und gleichfalls durch eine Abstraktion überbrückt werden muß, soll hier nicht erörtert werden.

„Zeit“ die „Stellung des kleinen Zeigers meiner Uhr“ setze. Eine solche Definition genügt in der Tat, wenn es sich darum handelt, eine Zeit zu definieren ausschließlich für den Ort, an welchem sich die Uhr eben befindet; die Definition genügt aber nicht mehr, sobald es sich darum handelt, an verschiedenen Orten stattfindende Ereignisreihen miteinander zeitlich zu verknüpfen, oder — was auf dasselbe hinausläuft — Ereignisse zeitlich zu werten, welche in von der Uhr entfernten Orten stattfinden.

Wir könnten uns allerdings damit begnügen, die Ereignisse dadurch zeitlich zu werten, daß ein samt der Uhr im Koordinatenursprung befindlicher Beobachter jedem von einem zu wertenden Ereignis Zeugnis gebenden, durch den leeren Raum zu ihm gelangenden Lichtzeichen die entsprechende Uhrzeigerstellung zuordnet. Eine solche Zuordnung bringt aber den Übelstand mit sich, daß sie vom Standpunkte des mit der Uhr versehenen Beobachters nicht unabhängig ist, wie wir durch die Erfahrung wissen. Zu einer weit praktischeren Festsetzung gelangen wir durch folgende Betrachtung.

Befindet sich im Punkte A des Raumes eine Uhr, so kann ein in A befindlicher Beobachter die Ereignisse in der unmittelbaren Umgebung von A zeitlich werten durch Aufsuchen der mit diesen Ereignissen gleichzeitigen Uhrzeigerstellungen. Befindet sich auch im Punkte B des Raumes eine Uhr — wir wollen hinzufügen, „eine Uhr von genau derselben Beschaffenheit wie die in A befindliche“ — so ist auch eine zeitliche Wertung der Ereignisse in der unmittelbaren Umgebung von B durch einen in B befindlichen Beobachter möglich. Es ist aber ohne weitere Festsetzung nicht möglich, ein Ereignis in A mit einem Ereignis in B zeitlich zu vergleichen; wir haben bisher nur eine „A-Zeit“ und eine „B-Zeit“, aber keine für A und B gemeinsame „Zeit“ definiert. Die letztere Zeit kann nun definiert werden, indem man *durch Definition* festsetzt, daß die „Zeit“, welche das Licht braucht, um von A nach B zu gelangen, gleich ist der „Zeit“, welche es braucht, um von B nach A zu gelangen. Es gehe nämlich ein Lichtstrahl zur „A-Zeit“ t_A von A nach B ab, werde zur „B-Zeit“ t_B in B gegen A zu reflektiert und gelange zur „A-Zeit“ t'_A nach A zurück. Die beiden Uhren laufen definitionsgemäß synchron, wenn

$$t_B - t_A = t'_A - t_B .$$

Wir nehmen an, daß diese Definition des Synchronismus in widerspruchsfreier Weise möglich sei, und zwar für beliebig viele Punkte, daß also allgemein die Beziehungen gelten:

1. Wenn die Uhr in B synchron mit der Uhr in A läuft, so läuft die Uhr in A synchron mit der Uhr in B.

2. Wenn die Uhr in A sowohl mit der Uhr in B als auch mit der Uhr in C synchron läuft, so laufen auch die Uhren in B und C synchron relativ zueinander.

Wir haben so unter Zuhilfenahme gewisser (gedachter) physikalischer Erfahrungen festgelegt, was unter synchron laufenden, an verschiedenen Orten befindlichen, ruhenden Uhren zu verstehen ist und damit offenbar eine Definition von „gleichzeitig" und „Zeit" gewonnen. Die „Zeit" eines Ereignisses ist die mit dem Ereignis gleichzeitige Angabe einer am Orte des Ereignisses befindlichen, ruhenden Uhr, welche mit einer bestimmten, ruhenden Uhr, und zwar für alle Zeitbestimmungen mit der nämlichen Uhr, synchron läuft.

Wir setzen noch der Erfahrung gemäß fest, daß die Größe

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

eine universelle Konstante (die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume) sei.

Wesentlich ist, daß wir die Zeit mittels im ruhenden System ruhender Uhren definiert haben; wir nennen die eben definierte Zeit wegen dieser Zugehörigkeit zum ruhenden System „die Zeit des ruhenden Systems".

§ 2.

Über die Relativität von Längen und Zeiten.

Die folgenden Überlegungen stützen sich auf das Relativitätsprinzip und auf das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, welche beiden Prinzipien wir folgendermaßen definieren.

1. Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden.

2. Jeder Lichtstrahl bewegt sich im „ruhenden" Koordinatensystem mit der bestimmten Geschwindigkeit V, unabhängig davon, ob dieser Lichtstrahl von einem ruhenden oder bewegten Körper emittiert ist. Hierbei ist

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Lichtweg}}{\text{Zeitdauer}},$$

wobei „Zeitdauer" im Sinne der Definition des § 1 aufzufassen ist.

Es sei ein ruhender starrer Stab gegeben; derselbe besitze, mit einem ebenfalls ruhenden Maßstab gemessen, die Länge l. Wir denken uns nun die Stabachse in die X-Achse des ruhenden Koordinatensystems gelegt und dem Stabe hierauf eine gleichförmige Paralleltranslationsbewegung (Geschwindigkeit v) längs der X-Achse im Sinne der wachsenden x erteilt. Wir fragen nun nach der Länge des *bewegten* Stabes, welche wir uns durch folgende zwei Operationen ermittelt denken:

a) Der Beobachter bewegt sich samt dem vorher genannten Maßstabe mit dem auszumessenden Stabe und mißt direkt durch Anlegen des Maßstabes die Länge des Stabes, ebenso, wie wenn sich auszumessender Stab, Beobachter und Maßstab in Ruhe befänden.

b) Der Beobachter ermittelt mittels im ruhenden Systeme aufgestellter, gemäß § 1 synchroner, ruhender Uhren, in welchen Punkten des ruhenden Systems sich Anfang und Ende des auszumessenden Stabes zu einer bestimmten Zeit t befinden. Die Entfernung dieser beiden Punkte, gemessen mit dem schon benutzten, in diesem Falle ruhenden Maßstabe ist ebenfalls eine Länge, welche man als „Länge des Stabes" bezeichnen kann.

Nach dem Relativitätsprinzip muß die bei der Operation a) zu findende Länge, welche wir „die Länge des Stabes im bewegten System" nennen wollen, gleich der Länge l des ruhenden Stabes sein.

Die bei der Operation b) zu findende Länge, welche wir „die Länge des (bewegten) Stabes im ruhenden System" nennen wollen, werden wir unter Zugrundelegung unserer beiden Prinzipien bestimmen und finden, daß sie von l verschieden ist.

Die allgemein gebrauchte Kinematik nimmt stillschweigend an, daß die durch die beiden erwähnten Operationen bestimmten Längen einander genau gleich seien, oder mit anderen Worten, daß ein bewegter starrer Körper in der Zeitepoche t in geometrischer Beziehung vollständig durch *denselben* Körper, wenn er in bestimmter Lage *ruht*, ersetzbar sei.

Wir denken uns ferner an den beiden Stabenden (A und B) Uhren angebracht, welche mit den Uhren des ruhenden Systems synchron sind, d. h. deren Angaben jeweilen der „Zeit des ruhenden Systems" an den Orten, an welchen sie sich gerade befinden, entsprechen; diese Uhren sind also „synchron im ruhenden System".

Wir denken uns ferner, daß sich bei jeder Uhr ein mit ihr bewegter Beobachter befinde, und daß diese Beobachter auf die beiden Uhren das im § 1 aufgestellte Kriterium für den sychronen Gang zweier Uhren anwenden. Zur Zeit*) t_A gehe ein Lichtstrahl von A aus, werde zur Zeit t_B in B reflektiert und gelange zur Zeit t'_A nach A zurück. Unter Berücksichtigung des Prinzips von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit finden wir:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v}$$

und

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v},$$

wobei r_{AB} die Länge des bewegten Stabes — im ruhenden System gemessen — bedeutet. Mit dem bewegten Stabe bewegte Beobachter würden also die

*) „Zeit" bedeutet hier „Zeit des ruhenden Systems" und zugleich „Zeigerstellung der bewegten Uhr, welche sich an dem Orte, von dem die Rede ist, befindet".

beiden Uhren nicht synchron gehend finden, während im ruhenden System befindliche Beobachter die Uhren als synchron laufend erklären würden.

Wir sehen also, daß wir dem Begriffe der Gleichzeitigkeit keine *absolute* Bedeutung beimessen dürfen, sondern daß zwei Ereignisse, welche, von einem Koordinatensystem aus betrachtet, gleichzeitig sind, von einem relativ zu diesem System bewegten System aus betrachtet, nicht mehr als gleichzeitige Ereignisse aufzufassen sind.

§ 3.

Theorie der Koordinaten- und Zeittransformation von dem ruhenden auf ein relativ zu diesem in gleichförmiger Translationsbewegung befindliches System.

Seien im „ruhenden" Raume zwei Koordinatensysteme, d.h. zwei Systeme von je drei von einem Punkte ausgehenden, aufeinander senkrechten starren materiellen Linien gegeben. Die X-Achsen beider Systeme mögen zusammenfallen, ihre Y- und Z-Achsen bezüglich parallel sein. Jedem Systeme sei ein starrer Maßstab und eine Anzahl Uhren beigegeben, und es seien beide Maßstäbe sowie alle Uhren beider Systeme einander genau gleich.

Es werde nun dem Anfangspunkte des einen der beiden Systeme (k) eine (konstante) Geschwindigkeit v in Richtung der wachsenden x des anderen, ruhenden Systems (K) erteilt, welche sich auch den Koordinatenachsen, dem betreffenden Maßstabe sowie den Uhren mitteilen möge. Jeder Zeit t des ruhenden Systems K entspricht dann eine bestimmte Lage der Achsen des bewegten Systems und wir sind aus Symmetriegründen befugt anzunehmen, daß die Bewegung von k so beschaffen sein kann, daß die Achsen des bewegten Systems zur Zeit t (es ist mit „t" immer eine Zeit des ruhenden Systems bezeichnet) den Achsen des ruhenden Systems parallel seien.

Wir denken uns nun den Raum sowohl vom ruhenden System K aus mittels des ruhenden Maßstabes als auch vom bewegten System k mittels des mit ihm bewegten Maßstabes ausgemessen und so die Koordinaten x, y, z bez. ξ, η, ζ ermittelt. Es werde ferner mittels der im ruhenden System befindlichen ruhenden Uhren durch Lichtsignale in der in § 1 angegebenen Weise die Zeit t des ruhenden Systems für alle Punkte des letzteren bestimmt, in denen sich Uhren befinden; ebenso werde die Zeit τ des bewegten Systems für alle Punkte des bewegten Systems, in welchen sich relativ zu letzterem ruhende Uhren befinden, bestimmt durch Anwendung der in § 1 genannten Methode der Lichtsignale zwischen den Punkten, in denen sich die letzteren Uhren befinden.

Zu jedem Wertsystem x, y, z, t, welches Ort und Zeit eines Ereignisses im ruhenden System vollkommen bestimmt, gehört ein jenes Ereignis relativ zum System k festlegendes Wertsystem ξ, η, ζ, τ, und es ist nun die Aufgabe zu lösen, das diese Größen verknüpfende Gleichungssystem zu finden.

Zunächst ist klar, daß die Gleichungen *linear* sein müssen wegen der Homogenitätseigenschaften, welche wir Raum und Zeit beilegen.

Setzen wir $x' = x - vt$, so ist klar, daß einem im System k ruhenden Punkte ein bestimmtes, von der Zeit unabhängiges Wertsystem x', y, z zukommt. Wir bestimmen zuerst τ als Funktion von x', y, z und t. Zu diesem Zwecke haben wir in Gleichungen auszudrücken, daß τ nichts anderes ist als der Inbegriff der Angaben von im System k ruhenden Uhren, welche nach der im § 1 gegebenen Regel synchron gemacht worden sind.

Vom Anfangspunkt des Systems k aus werde ein Lichtstrahl zur Zeit τ_0 längs der X-Achse nach x' gesandt und von dort zur Zeit τ_1 nach dem Koordinatenursprung reflektiert, wo er zur Zeit τ_2 anlange; so muß dann sein:

$$\tfrac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1$$

oder, indem man die Argumente der Funktion τ beifügt und das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im ruhenden Systeme anwendet:

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t) + \tau\left(0,0,0\left\{t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v}\right\}\right)\right] = \tau\left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{V-v}\right).$$

Hieraus folgt, wenn man x' unendlich klein wählt:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v}\frac{\partial\tau}{\partial t},$$

oder

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0.$$

Es ist zu bemerken, daß wir statt des Koordinatenursprunges jeden anderen Punkt als Ausgangspunkt des Lichtstrahles hätten wählen können und es gilt deshalb die eben erhaltene Gleichung für alle Werte von x', y, z.

Eine analoge Überlegung — auf die H- und Z-Achse angewandt — liefert, wenn man beachtet, daß sich das Licht längs dieser Achsen vom ruhenden System aus betrachtet stets mit der Geschwindigkeit $\sqrt{V^2 - v^2}$ fortpflanzt:

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial z} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, da τ eine *lineare* Funktion ist:

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}\, x'\right),$$

wobei a eine vorläufig unbekannte Funktion $\varphi(v)$ ist und der Kürze halber angenommen ist, daß im Anfangspunkte von k für $\tau = 0$ $t = 0$ sei.

Mit Hilfe dieses Resultates ist es leicht, die Größen ξ, η, ζ zu ermitteln, indem man durch Gleichungen ausdrückt, daß sich das Licht (wie das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in Verbindung mit dem Relativitätsprinzip verlangt) auch im bewegten System gemessen mit der Geschwindigkeit V fortpflanzt. Für einen zur Zeit $\tau = 0$ in Richtung der wachsenden ξ ausgesandten Lichtstrahl gilt:

$$\xi = V\tau,$$

oder

$$\xi = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}\,x'\right).$$

Nun bewegt sich aber der Lichtstrahl relativ zum Anfangspunkt von k im ruhenden System gemessen mit der Geschwindigkeit $V - v$, so daß gilt:

$$\frac{x'}{V - v} = t.$$

Setzen wir diesen Wert von t in die Gleichung für ξ ein, so erhalten wir:

$$\xi = a\,\frac{V^2}{V^2 - v^2}\,x'.$$

Auf analoge Weise finden wir durch Betrachtung von längs den beiden anderen Achsen bewegten Lichtstrahlen:

$$\eta = V\tau = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}\,x'\right),$$

wobei

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t; \quad x' = 0;$$

also

$$\eta = a\,\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}\,y$$

und

$$\zeta = a\,\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}\,z.$$

Setzen wir für x' seinen Wert ein, so erhalten wir:

$$\tau = \varphi(v)\beta\left(t - \frac{v}{V^2}\,x\right),$$

$$\xi = \varphi(v)\,\beta\,(x - vt),$$

$$\eta = \varphi(v)\,y,$$

$$\zeta = \varphi(v)\,z,$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

und φ eine vorläufig unbekannte Funktion von v ist. Macht man über die Anfangslage des bewegten Systems und über den Nullpunkt von τ keinerlei

Voraussetzung, so ist auf den rechten Seiten dieser Gleichungen je eine additive Konstante zuzufügen.

Wir haben nun zu beweisen, daß jeder Lichtstrahl sich, im bewegten System gemessen, mit der Geschwindigkeit V fortpflanzt, falls dies, wie wir angenommen haben, im ruhenden System der Fall ist; denn wir haben den Beweis dafür noch nicht geliefert, daß das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit mit dem Relativitätsprinzip vereinbar sei.

Zur Zeit $t = \tau = 0$ werde von dem zu dieser Zeit gemeinsamen Koordinatenursprung beider Systeme aus eine Kugelwelle ausgesandt, welche sich im System K mit der Geschwindigkeit V ausbreitet. Ist (x, y, z) ein eben von dieser Welle ergriffener Punkt, so ist also

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2.$$

Diese Gleichung transformieren wir mit Hilfe unserer Transformationsgleichungen und erhalten nach einfacher Rechnung:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2.$$

Die betrachtete Welle ist also auch im bewegten System betrachtet eine Kugelwelle von der Ausbreitungsgeschwindigkeit V. Hiermit ist gezeigt, daß unsere beiden Grundprinzipien miteinander vereinbar sind.*)

In den entwickelten Transformationsgleichungen tritt noch eine unbekannte Funktion φ von v auf, welche wir nun bestimmen wollen.

Wir führen zu diesem Zwecke noch ein drittes Koordinatensystem K' ein, welches relativ zum System k derart in Parallelltranslationsbewegung parallel zur Ξ-Achse begriffen sei, daß sich dessen Koordinatenursprung mit der Geschwindigkeit $-v$ auf der Ξ-Achse bewege. Zur Zeit $t = 0$ mögen alle drei Koordinatenanfangspunkte zusammenfallen und es sei für $t = x = y = z = 0$ die Zeit t' des Systems K' gleich Null. Wir nennen x', y', z' die Koordinaten, im System K' gemessen, und erhalten durch zweimalige Anwendung unserer Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned}
t' &= \varphi(-v)\beta(-v)\left\{\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right\} &&= \varphi(v)\varphi(-v)t, \\
x' &= \varphi(-v)\beta(-v)\{\xi + v\tau\} &&= \varphi(v)\varphi(-v)x, \\
y' &= \varphi(-v)\eta &&= \varphi(v)\varphi(-v)y, \\
z' &= \varphi(-v)\zeta &&= \varphi(v)\varphi(-v)z.
\end{aligned}$$

*) Die Gleichungen der Lorentz-Transformation sind einfacher direkt aus der Bedingung abzuleiten, daß vermöge jener Gleichungen die Beziehung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - V^2\tau^2 = 0,$$

die andere

$$x^2 + y^2 + z^2 - V^2 t^2 = 0$$

zur Folge haben soll.

Da die Beziehungen zwischen x', y', z' und x, y, z die Zeit t nicht enthalten, so ruhen die Systeme K und K' gegeneinander, und es ist klar, daß die Transformation von K auf K' die identische Transformation sein muß. Es ist also:

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1.$$

Wir fragen nun nach der Bedeutung von $\varphi(v)$. Wir fassen das Stück der H-Achse des Systems k ins Auge, das zwischen $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ und $\xi = 0$, $\eta = l$, $\zeta = 0$ gelegen ist. Dieses Stück der H-Achse ist ein relativ zum System K mit der Geschwindigkeit v senkrecht zu seiner Achse bewegter Stab, dessen Enden in K die Koordinaten besitzen:

$$x_1 = vt, \quad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}, \quad z_1 = 0$$

und

$$x_2 = vt, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0.$$

Die Länge des Stabes, in K gemessen, ist also $l/\varphi(v)$; damit ist die Bedeutung der Funktion φ gegeben. Aus Symmetriegründen ist nun einleuchtend, daß die im ruhenden System gemessene Länge eines bestimmten Stabes, welcher senkrecht zu seiner Achse bewegt ist, nur von der Geschwindigkeit, nicht aber von der Richtung und dem Sinne der Bewegung abhängig sein kann. Es ändert sich also die im ruhenden System gemessene Länge des bewegten Stabes nicht, wenn v mit $-v$ vertauscht wird. Hieraus folgt:

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)},$$

oder

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

Aus dieser und der vorhin gefundenen Relation folgt, daß $\varphi(v) = 1$ sein muß, so daß die gefundenen Transformationsgleichungen übergehen in:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$
$$\xi = \beta(x - vt),$$
$$\eta = y,$$
$$\zeta = z,$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

§ 4.

Physikalische Bedeutung der erhaltenen Gleichungen, bewegte starre Körper und bewegte Uhren betreffend.

Wir betrachten eine starre Kugel*) vom Radius R, welche relativ zum bewegten System k ruht, und deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung von k liegt. Die Gleichung der Oberfläche dieser relativ zum System K mit der Geschwindigkeit v bewegten Kugel ist:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2.$$

Die Gleichung dieser Oberfläche ist in x, y, z ausgedrückt zur Zeit $t = 0$:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2.$$

Ein starrer Körper, welcher in ruhendem Zustande ausgemessen die Gestalt einer Kugel hat, hat also in bewegtem Zustande — vom ruhenden System aus betrachtet — die Gestalt eines Rotationsellipsoides mit den Achsen

$$R\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2},\ R,\ R.$$

Während also die Y- und Z-Dimension der Kugel (also auch jedes starren Körpers von beliebiger Gestalt) durch die Bewegung nicht modifiziert erscheinen, erscheint die X-Dimension im Verhältnis $1:\sqrt{1-(v/V)^2}$ verkürzt, also um so stärker, je größer v ist. Für $v = V$ schrumpfen alle bewegten Objekte — vom „ruhenden" System aus betrachtet — in flächenhafte Gebilde zusammen. Für Überlichtgeschwindigkeiten werden unsere Überlegungen sinnlos; wir werden übrigens in den folgenden Betrachtungen finden, daß die Lichtgeschwindigkeit in unserer Theorie physikalisch die Rolle unendlich großer Geschwindigkeit spielt.

Es ist klar, daß die gleichen Resultate von im „ruhenden" System ruhenden Körpern gelten, welche von einem gleichförmig bewegten System aus betrachtet werden. —

Wir denken uns ferner eine der Uhren, welche relativ zum ruhendem System ruhend die Zeit t, relativ zum bewegten System ruhend die Zeit τ anzugeben befähigt sind, im Koordinatenursprung von k gelegen und so gerichtet, daß sie die Zeit τ angibt. Wie schnell geht diese Uhr, vom ruhenden System aus betrachtet?

Zwischen den Größen x, t und τ, welche sich auf den Ort dieser Uhr beziehen, gelten offenbar die Gleichungen:

---

*) Das heißt einen Körper, welcher ruhend untersucht Kugelgestalt besitzt.

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)$$

und

$$x = vt.$$

Es ist also

$$\tau = t\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1 - \sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)t,$$

woraus folgt, daß die Angabe der Uhr (im ruhenden System betrachtet) pro Sekunde um $(1 - \sqrt{1-(v/V)^2})$ Sek. oder — bis auf Größen vierter und höherer Ordnung — um $\frac{1}{2}(v/V)^2$ Sek. zurückbleibt.

Hieraus ergibt sich folgende eigentümliche Konsequenz. Sind in den Punkten A und B von K ruhende, im ruhenden System betrachtet, synchron gehende Uhren vorhanden, und bewegt man die Uhr in A mit der Geschwindigkeit v auf der Verbindungslinie nach B, so gehen nach Ankunft dieser Uhr in B die beiden Uhren nicht mehr synchron, sondern die von A nach B bewegte Uhr geht gegenüber der von Anfang an in B befindlichen um $\frac{1}{2}tv^2/V^2$ Sek. (bis auf Größen vierter und höherer Ordnung) nach, wenn t die Zeit ist, welche die Uhr von A nach B braucht.

Man sieht sofort, daß dies Resultat auch dann noch gilt, wenn die Uhr in einer beliebigen polygonalen Linie sich von A nach B bewegt, und zwar auch dann, wenn die Punkte A und B zusammenfallen.

Nimmt man an, daß das für eine polygonale Linie bewiesene Resultat auch für eine stetig gekrümmte Kurve gelte, so erhält man den Satz: Befinden sich in A zwei synchron gehende Uhren und bewegt man die eine derselben auf einer geschlossenen Kurve mit konstanter Geschwindigkeit, bis sie wieder nach A zurückkommt, was t Sek. dauern möge, so geht die letztere Uhr bei ihrer Ankunft in A gegenüber der unbewegt gebliebenen um $\frac{1}{2}t(v/V)^2$ Sek. nach. Man schließt daraus, daß eine am Erdäquator befindliche Unruhuhr*) um einen sehr kleinen Betrag langsamer laufen muß als eine genau gleich beschaffene, sonst gleichen Bedingungen unterworfene, an einem Erdpole befindliche Uhr.

§ 5.

Additionstheorem der Geschwindigkeiten.

In dem längs der X-Achse des Systems K mit der Geschwindigkeit v bewegten System k bewege sich ein Punkt gemäß den Gleichungen:

$$\xi = w_\xi \tau, \qquad \eta = w_\eta \tau, \qquad \zeta = 0,$$

wobei w_ξ und w_η Konstanten bedeuten.

*) Im Gegensatz zu „Pendeluhr", welche — physikalisch betrachtet — ein System ist, zu welchem der Erdkörper gehört; dies mußte ausgeschlossen werden.

Gesucht ist die Bewegung des Punktes relativ zum System K. Führt man in die Bewegungsgleichungen des Punktes mit Hilfe der in § 3 entwickelten Transformationsgleichungen die Größen x, y, z, t ein, so erhält man:

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}}\, t,$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}}\, w_\eta t,$$

$$z = 0.$$

Das Gesetz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten gilt also nach unserer Theorie nur in erster Annäherung. Wir setzen:

$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

$$w^2 = w_\xi^2 + w_\eta^2$$

und

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{w_y}{w_x}\right); \quad \frac{w_\eta}{w_\xi}$$

α ist dann als der Winkel zwischen den Geschwindigkeiten v und w anzusehen. Nach einfacher Rechnung ergibt sich:

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw\cos\alpha) - \left(\frac{vw\sin\alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{vw\cos\alpha}{V^2}}.$$

Es ist bemerkenswert, daß v und w in symmetrischer Weise in den Ausdruck für die resultierende Geschwindigkeit eingehen. Hat auch w die Richtung der X-Achse (Ξ-Achse), so erhalten wir:

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß aus der Zusammensetzung zweier Geschwindigkeiten, welche kleiner sind als V, stets eine Geschwindigkeit kleiner als V resultiert. Setzt man nämlich $v = V - \varkappa$, $w = V - \lambda$, wobei $\varkappa$ und λ positiv und kleiner als V seien, so ist:

$$U = V \frac{2V - \varkappa - \lambda}{2V - \varkappa - \lambda + \frac{\varkappa\lambda}{V}} < V.$$

Es folgt ferner, daß die Lichtgeschwindigkeit V durch Zusammensetzung mit einer „Unterlichtgeschwindigkeit" nicht geändert werden kann. Man erhält für diesen Fall:

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V.$$

Wir hätten die Formel für U für den Fall, daß v und w gleiche Richtung besitzen, auch durch Zusammensetzen zweier Transformationen gemäß § 3 erhalten können. Führen wir neben den in § 3 figurierenden Systemen K und k noch ein drittes, zu k in Parallelbewegung begriffenes Koordinatensystem k' ein, dessen Anfangspunkt sich auf der Ξ-Achse mit der Geschwindigkeit w bewegt, so erhalten wir zwischen den Größen x, y, z, t und den entsprechenden Größen von k' Gleichungen, welche sich von den in § 3 gefundenen nur dadurch unterscheiden, daß an Stelle von „v" die Größe

$$\frac{v + w}{1 + \frac{v w}{V^2}}$$

tritt; man sieht daraus, daß solche Paralleltransformationen — wie dies sein muß — eine Gruppe bilden.

Wir haben nun die für uns notwendigen Sätze der unseren zwei Prinzipien entsprechenden Kinematik hergeleitet und gehen dazu über, deren Anwendung in der Elektrodynamik zu zeigen.

II. Elektrodynamischer Teil.

§ 6.

Transformation der Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum. Über die Natur der bei Bewegung in einem Magnetfeld auftretenden elektromotorischen Kräfte.

Die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum mögen gültig sein für das ruhende System K, so daß gelten möge:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, & \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, & \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, & \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},
\end{aligned}$$

wobei (X, Y, Z) den Vektor der elektrischen, (L, M, N) den der magnetischen Kraft bedeutet.

Wenden wir auf diese Gleichungen die in § 3 entwickelte Transformation an, indem wir die elektromagnetischen Vorgänge auf das dort eingeführte, mit der Geschwindigkeit v bewegte Koordinatensystem beziehen, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V} Y\right)}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V} Z\right)}{\partial \zeta},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V} N\right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V} Y\right)}{\partial \xi},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V} M\right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V} Z\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V} N\right)}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V} M\right)}{\partial \eta},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V} Z\right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V} M\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V} Y\right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V} N\right)}{\partial \xi},
\end{aligned}$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Das Relativitätsprinzip fordert nun, daß die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum auch im System k gelten, wenn sie im System K gelten, d. h. daß für die im bewegten System k durch ihre ponderomotorischen Wirkungen auf elektrische bez. magnetische Massen definierten Vektoren der elektrischen und magnetischen Kraft $((X', Y', Z')$ und $(L', M', N'))$ des bewegten Systems k die Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V}\frac{\partial X'}{\partial \tau} &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, & \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial Y'}{\partial \tau} &= \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, & \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial Z'}{\partial \tau} &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, & \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau} &= \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}.
\end{aligned}$$

Offenbar müssen nun die beiden für das System k gefundenen Gleichungssysteme genau dasselbe ausdrücken, da beide Gleichungssysteme den Maxwell-Hertzschen Gleichungen für das System K äquivalent sind. Da die Gleichungen beider Systeme ferner bis auf die die Vektoren darstellenden Symbole übereinstimmen, so folgt, daß die in den Gleichungssystemen an entsprechenden Stellen auftretenden Funktionen bis auf einen für alle Funktionen des einen Gleichungssystems gemeinsamen, von ξ, η, ζ und τ unabhängigen, eventuell von v abhängigen Faktor $\psi(v)$ übereinstimmen müssen. Es gelten also die Beziehungen:

$$\begin{aligned} X' &= \psi(v)X, & L' &= \psi(v)L, \\ Y' &= \psi(v)\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right), & M' &= \psi(v)\beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right), \\ Z' &= \psi(v)\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right), & N' &= \psi(v)\beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right). \end{aligned}$$

Bildet man nun die Umkehrung dieses Gleichungssystems, erstens durch Auflösen der soeben erhaltenen Gleichungen, zweitens durch Anwendung der Gleichungen auf die inverse Transformation (von k auf K), welche durch die Geschwindigkeit $-v$ charakterisiert ist, so folgt, indem man berücksichtigt, daß die beiden so erhaltenen Gleichungssysteme identisch sein müssen:

$$\varphi(v) \cdot \varphi(-v) = 1.$$

Ferner folgt aus Symmetriegründen*)

$$\varphi(v) = \varphi(-v);$$

es ist also

$$\varphi(v) = 1,$$

und unsere Gleichungen nehmen die Form an:

$$\begin{aligned} X' &= X, & L' &= L, \\ Y' &= \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right), & M' &= \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right), \\ Z' &= \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right), & N' &= \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right). \end{aligned}$$

Zur Interpretation dieser Gleichungen bemerken wir folgendes. Es liegt eine punktförmige Elektrizitätsmenge vor, welche im ruhenden System K gemessen von der Größe „eins" sei, d. h. im ruhenden System ruhend auf eine gleiche Elektrizitätsmenge im Abstand 1 cm die Kraft 1 Dyn ausübe. Nach dem Relativitätsprinzip ist diese elektrische Masse auch im bewegten System gemessen von der Größe „eins". Ruht diese Elektrizitätsmenge relativ zum ruhenden System, so ist definitionsgemäß der Vektor (X, Y, Z) gleich der auf sie wirkenden Kraft. Ruht die Elektrizitätsmenge gegenüber dem bewegten System (wenigstens in dem betreffenden Augenblick), so ist die auf sie wirkende, in dem bewegten System gemessene Kraft gleich dem Vektor

*) Ist z. B. $X = Y = Z = L = M = 0$ und $N \neq 0$, so ist aus Symmetriegründen klar, daß bei Zeichenwechsel von v ohne Änderung des numerischen Wertes auch Y' sein Vorzeichen ändern muß, ohne seinen numerischen Wert zu ändern.

(X', Y', Z'). Die ersten drei der obigen Gleichungen lassen sich mithin auf folgende zwei Weisen in Worte kleiden:

1. Ist ein punktförmiger elektrischer Einheitspol in einem elektromagnetischen Felde bewegt, so wirkt auf ihn außer der elektrischen Kraft eine „elektromotorische Kraft“, welche unter Vernachlässigung von mit der zweiten und höheren Potenzen von v/V multiplizierten Gliedern gleich ist dem mit der Lichtgeschwindigkeit dividierten Vektorprodukt der Bewegungsgeschwindigkeit des Einheitspoles und der magnetischen Kraft. (Alte Ausdrucksweise.)

2. Ist ein punktförmiger elektrischer Einheitspol in einem elektromagnetischen Felde bewegt, so ist die auf ihn wirkende Kraft gleich der an dem Orte des Einheitspoles vorhandenen elektrischen Kraft, welche man durch Transformation des Feldes auf ein relativ zum elektrischen Einheitspol ruhendes Koordinatensystem erhält. (Neue Ausdrucksweise.)

Analoges gilt über die „magnetomotorischen Kräfte“. Man sieht, daß in der entwickelten Theorie die elektromotorische Kraft nur die Rolle eines Hilfsbegriffes spielt, welcher seine Einführung dem Umstande verdankt, daß die elektrischen und magnetischen Kräfte keine von dem Bewegungszustande des Koordinatensystems unabhängige Existenz besitzen.

Es ist ferner klar, daß die in der Einleitung angeführte Asymmetrie bei der Betrachtung der durch Relativbewegung eines Magneten und eines Leiters erzeugten Ströme verschwindet. Auch werden die Fragen nach dem ‚Sitz“ der elektrodynamischen elektromotorischen Kräfte (Unipolarmaschinen) gegenstandslos.

§ 7.

Theorie des Doppelerschen Prinzips und der Aberration.

Im Systeme K befinde sich sehr ferne vom Koordinatenursprung eine Quelle elektrodynamischer Wellen, welche in einem den Koordinatenursprung enthaltenden Raumteil mit genügender Annährung durch die Gleichungen dargestellt seien:

$$\begin{array}{ll} X = X_0 \sin \Phi, & L = L_0 \sin \Phi, \\ Y = Y_0 \sin \Phi, & M = M_0 \sin \Phi, \qquad \Phi = \omega\left(t - \frac{ax + by + cz}{V}\right). \\ Z = Z_0 \sin \Phi, & N = N_0 \sin \Phi, \end{array}$$

Hierbei sind (X_0, Y_0, Z_0) und (L_0, M_0, N_0) die Vektoren, welche die Amplitude des Wellenzuges bestimmen, a, b, c die Richtungskosinus der Wellennormalen. Wir fragen nach der Beschaffenheit dieser Wellen, wenn dieselben von einem in dem bewegten System k ruhenden Beobachter untersucht werden.

Durch Anwendung der in § 6 gefundenen Transformationsgleichungen für die elektrischen und magnetischen Kräfte und der in § 3 gefundenen

Transformationsgleichungen für die Koordinaten und die Zeit erhalten wir unmittelbar:

$$\begin{aligned} X' &= X_0 \sin \Phi', & L' &= L_0 \sin \Phi', \\ Y' &= \beta\left(Y_0 - \frac{v}{V} N_0\right) \sin \Phi', & M' &= \beta\left(M_0 + \frac{v}{V} Z_0\right) \sin \Phi', \\ Z' &= \beta\left(Z_0 + \frac{v}{V} M_0\right) \sin \Phi', & N' &= \beta\left(N_0 - \frac{v}{V} Y_0\right) \sin \Phi', \end{aligned}$$

$$\Phi' = \omega'\left(\tau - \frac{a'\xi + b'\eta + c'\zeta}{V}\right),$$

wobei

$$\omega' = \omega\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right),$$

$$a' = \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - a\frac{v}{V}},$$

$$b' = \frac{b}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)},$$

$$c' = \frac{c}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)}$$

gesetzt ist.

Aus der Gleichung für ω' folgt: Ist ein Beobachter relativ zu einer unendlich fernen Lichtquelle von der Frequenz ν mit der Geschwindigkeit v derart bewegt, daß die Verbindungslinie „Lichtquelle—Beobachter“ mit der auf ein relativ zur Lichtquelle ruhendes Koordinatensystem bezogenen Geschwindigkeit des Beobachters den Winkel φ bildet, so ist die von dem Beobachter wahrgenommene Frequenz ν' des Lichtes durch die Gleichung gegeben:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos\varphi \frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Dies ist das Doppelersche Prinzip für beliebige Geschwindigkeiten. Für $\varphi = 0$ nimmt die Gleichung die übersichtliche Form an:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Man sieht, daß — im Gegensatz zu der üblichen Auffassung — für $v = -\infty$, $\nu = \infty$ ist.

Nennt man φ' den Winkel zwischen Wellennormale (Strahlrichtung) im bewegten System und der Verbindungslinie „Lichtquelle—Beobachter“, so nimmt die Gleichung für a' die Form an:

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}.$$

Diese Gleichung drückt das Aberrationsgesetz in seiner allgemeinsten Form aus. Ist $\varphi = \pi/2$, so nimmt die Gleichung die einfache Gestalt an:

$$\cos\varphi' = -\frac{v}{V}.$$

Wir haben nun noch die Amplitude der Wellen, wie dieselbe im bewegten System erscheint, zu suchen. Nennt man A bez. A' die Amplitude der elektrischen oder magnetischen Kraft im ruhenden bez. im bewegten System gemessen, so erhält man:

$$A'^2 = A^2 \frac{\left(1 - \frac{v}{V}\cos\varphi\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

welche Gleichung für $\varphi = 0$ in die einfachere übergeht:

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}.$$

Es folgt aus den entwickelten Gleichungen, daß für einen Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit V einer Lichtquelle näherte, diese Lichtquelle unendlich intensiv erscheinen müßte.

§ 8.

Transformation der Energie der Lichtstrahlen. Theorie des auf vollkommene Spiegel ausgeübten Strahlungsdruckes.

Da $A^2/8\pi$ gleich der Lichtenergie pro Volumeneinheit ist, so haben wir nach dem Relativitätsprinzip $A'^2/8\pi$ als die Lichtenergie im bewegten System zu betrachten. Es wäre daher A'^2/A^2 das Verhältnis der „bewegt gemessenen“ und „ruhend gemessenen“ Energie eines bestimmten Lichtkomplexes, wenn das Volumen eines Lichtkomplexes in K gemessen und in k gemessen das gleiche wäre. Dies ist jedoch nicht der Fall. Sind a, b, c die Richtungskosinus der Wellennormalen des Lichtes im ruhenden System, so wandert durch die Oberflächenelemente der mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Kugelfläche

$$(x - Vat)^2 + (y - Vbt)^2 + (z - Vct)^2 = R^2$$

keine Energie hindurch; wir können daher sagen, daß diese Fläche dauernd denselben Lichtkomplex umschließt. Wir fragen nach der Energiemenge, welche diese Fläche im System k betrachtet umschließt, d. h. nach der Energie des Lichtkomplexes relativ zum System k.

Die Kugelfläche ist — im bewegten System betrachtet — eine Ellipsoidfläche, welche zur Zeit $\tau = 0$ die Gleichung besitzt:

$$\left(\beta \xi - a \beta \frac{v}{V} \xi\right)^2 + \left(\eta - b \beta \frac{v}{V} \xi\right)^2 + \left(\zeta - c \beta \frac{v}{V} \xi\right)^2 = R^2.$$

Nennt man S das Volumen der Kugel, S' dasjenige dieses Ellipsoides, so ist, wie eine einfache Rechnung zeigt:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}.$$

Nennt man also E die im ruhenden System gemessene, E' die im bewegten System gemessene Lichtenergie, welche von der betrachteten Fläche umschlossen wird, so erhält man:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{A'^2}{8\pi} S'}{\frac{A^2}{8\pi} S} = \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

welche Formel für $\varphi = 0$ in die einfachere übergeht:

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Es ist bemerkenswert, daß die Energie und die Frequenz eines Lichtkomplexes sich nach demselben Gesetze mit dem Bewegungszustande des Beobachters ändern.

Es sei nun die Koordinatenebene $\xi = 0$ eine vollkommen spiegelnde Fläche, an welcher die im letzten Paragraph betrachteten ebenen Wellen reflektiert werden. Wir fragen nach dem auf die spiegelnde Fläche ausgeübten Lichtdruck und nach der Richtung, Frequenz und Intensität des Lichtes nach der Reflexion.

Das einfallende Licht sei durch die Größen A, $\cos \varphi$, ν (auf das System K bezogen) definiert. Von k aus betrachtet sind die entsprechenden Größen:

$$A' = A \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi},$$

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Für das reflektierte Licht erhalten wir, wenn wir den Vorgang auf das System k beziehen:

$$A'' = A',$$
$$\cos\varphi'' = -\cos\varphi',$$
$$\nu'' = \nu'.$$

Endlich erhält man durch Rücktransformieren aufs ruhende System K für das reflektierte Licht:

$$A''' = A'' \frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = A \frac{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\cos\varphi''' = \frac{\cos\varphi'' + \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''} = -\frac{\left(1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2\right)\cos\varphi - 2\frac{v}{V}}{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\nu''' = \nu'' \frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = \nu \frac{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2}.$$

Die auf die Flächeneinheit des Spiegels pro Zeiteinheit auftreffende (im ruhenden System gemessene) Energie ist offenbar $A^2/8\pi(V\cos\varphi - v)$. Die von der Flächeneinheit des Spiegels in der Zeiteinheit sich entfernende Energie ist $A'''^2/8\pi(-V\cos\varphi''' + v)$. Die Differenz dieser beiden Ausdrücke ist nach dem Energieprinzip die vom Lichtdrucke in der Zeiteinheit geleistete Arbeit. Setzt man die letztere gleich dem Produkt $P \cdot v$, wobei P der Lichtdruck ist, so erhält man:

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi} \frac{\left(\cos\varphi - \frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

In erster Annäherung erhält man in Übereinstimmung mit der Erfahrung und mit anderen Theorien

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\cos^2\varphi.$$

Nach der hier benutzten Methode können alle Probleme der Optik bewegter Körper gelöst werden. Das Wesentliche ist, daß die elektrische und magnetische Kraft des Lichtes, welches durch einen bewegten Körper beeinflußt wird, auf ein relativ zu dem Körper ruhendes Koordinatensystem transformiert werden. Dadurch wird jedes Problem der Optik bewegter Körper auf eine Reihe von Problemen der Optik ruhender Körper zurückgeführt.

§ 9.

Transformation der Maxwell-Hertzschen Gleichungen mit Berücksichtigung der Konvektionsströme.

Wir gehen aus von den Gleichungen:

$$\frac{1}{V}\left\{u_x\varrho+\frac{\partial X}{\partial t}\right\}=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z},\quad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_y\varrho+\frac{\partial Y}{\partial t}\right\}=\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x},\quad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_z\varrho+\frac{\partial Z}{\partial t}\right\}=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y},\quad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x},$$

wobei:

$$\varrho=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}.$$

die 4π-fache Dichte der Elektrizität und (u_x, u_y, u_z) den Geschwindigkeitsvektor der Elektrizität bedeutet. Denkt man sich die elektrischen Massen unveränderlich an kleine, starre Körper (Ionen, Elektronen) gebunden, so sind diese Gleichungen die elektromagnetische Grundlage der Lorentzschen Elektrodynamik und Optik bewegter Körper.

Transformiert man diese Gleichungen, welche im System K gelten mögen, mit Hilfe der Transformationsgleichungen von § 3 und § 6 auf das System k, so erhält man die Gleichungen:

$$\frac{1}{V}\left\{u_\xi\varrho'+\frac{\partial X'}{\partial \tau}\right\}=\frac{\partial N'}{\partial \eta}-\frac{\partial M'}{\partial \zeta},\quad \frac{\partial L'}{\partial \tau}=\frac{\partial Y'}{\partial \zeta}-\frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\eta\varrho'+\frac{\partial Y'}{\partial \tau}\right\}=\frac{\partial L'}{\partial \zeta}-\frac{\partial N'}{\partial \xi},\quad \frac{\partial M'}{\partial \tau}=\frac{\partial Z'}{\partial \xi}-\frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\zeta\varrho'+\frac{\partial Z'}{\partial \tau}\right\}=\frac{\partial M'}{\partial \xi}-\frac{\partial L'}{\partial \eta},\quad \frac{\partial N'}{\partial \tau}=\frac{\partial X'}{\partial \eta}-\frac{\partial Y'}{\partial \xi},$$

wobei

$$\frac{u_x-v}{1-\frac{u_x v}{V^2}}=u_\xi,$$

$$\frac{u_y}{\beta\left(1-\frac{u_x v}{V^2}\right)}=u_\eta,\qquad \varrho'=\frac{\partial X'}{\partial \xi}+\frac{\partial Y'}{\partial \eta}+\frac{\partial Z'}{\partial \zeta}=\beta\left(1-\frac{v u_x}{V^2}\right)\varrho.$$

$$\frac{u_z}{\beta\left(1-\frac{u_x v}{V^2}\right)}=u_\zeta.$$

Da — wie aus dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten (§ 5) folgt — der Vektor (u_ξ, u_η, u_ζ) nichts anderes ist als die Geschwindigkeit der elektrischen Massen im System k gemessen, so ist damit gezeigt, daß unter Zugrundelegung unserer kinematischen Prinzipien die elektrodynamische Grundlage der Lorentzschen Theorie der Elektrodynamik bewegter Körper dem Relativitätsprinzip entspricht.

Es möge noch kurz bemerkt werden, daß aus den entwickelten Gleichungen leicht der folgende wichtige Satz gefolgert werden kann: Bewegt sich ein elektrisch geladener Körper beliebig im Raume und ändert sich hierbei seine Ladung nicht, von einem mit dem Körper bewegten Koordinatensystem aus betrachtet, so bleibt seine Ladung auch — von dem „ruhenden" System K aus betrachtet — konstant.

§ 10.

Dynamik des (langsam beschleunigten) Elektrons.

In einem elektromagnetischen Felde bewege sich ein punktförmiges, mit einer elektrischen Ladung ε versehenes Teilchen (im folgenden „Elektron" genannt), über dessen Bewegungsgesetz wir nur folgendes annehmen:

Ruht das Elektron in einer bestimmten Epoche, so erfolgt in dem nächsten Zeitteilchen die Bewegung des Elektrons nach den Gleichungen

$$\mu \frac{d^2 x}{d t^2} = \varepsilon X$$

$$\mu \frac{d^2 y}{d t^2} = \varepsilon Y$$

$$\mu \frac{d^2 z}{d t^2} = \varepsilon Z,$$

wobei x, y, z die Koordinaten des Elektrons, μ die Masse des Elektrons bedeutet, sofern dasselbe langsam bewegt ist.

Es besitze nun zweitens das Elektron in einer gewissen Zeitepoche die Geschwindigkeit v. Wir suchen das Gesetz, nach welchem sich das Elektron im unmittelbar darauf folgenden Zeitteilchen bewegt.

Ohne die Allgemeinheit der Betrachtung zu beeinflussen, können und wollen wir annehmen, daß das Elektron in dem Momente, wo wir es ins Auge fassen, sich im Koordinatenursprung befinde und sich längs der X-Achse des Systems K mit der Geschwindigkeit v bewege. Es ist dann einleuchtend, daß das Elektron im genannten Momente ($t = 0$) relativ zu einem längs der X-Achse mit der konstanten Geschwindigkeit v parallel bewegten Koordinatensystem k ruht.

Aus der oben gemachten Voraussetzung in Verbindung mit dem Relativitätsprinzip ist klar, daß sich das Elektron in der unmittelbar folgenden Zeit (für kleine Werte von t) vom System k aus betrachtet nach den Gleichungen bewegt:

$$\mu \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = \varepsilon X',$$

$$\mu \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} = \varepsilon Y',$$

$$\mu \frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} = \varepsilon Z',$$

wobei die Zeichen ξ, η, ζ, τ, X', Y', Z' sich auf das System k beziehen. Setzen wir noch fest, daß für $t = x = y = z = 0$ $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$ sein soll, so gelten die Transformationsgleichungen der §§ 3 und 6, so daß gilt:

$$\begin{array}{ll} \tau = \beta \left(t - \frac{v}{V^2} x\right), & \\ \xi = \beta(x - vt), & X' = X, \\ \eta = y, & Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V} N\right), \\ \zeta = z, & Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V} M\right). \end{array}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen transformieren wir die obigen Bewegungsgleichungen vom System k auf das System K und erhalten:

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{1}{\beta^3} X, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{1}{\beta} \left(Y - \frac{v}{V} N\right), \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{1}{\beta} \left(Z + \frac{v}{V} M\right). \end{aligned} \right.$$

Wir fragen nun in Anlehnung an die übliche Betrachtungsweise nach der „longitudinalen“ und „transversalen“ Masse des bewegten Elektrons. Wir schreiben die Gleichungen (A) in der Form

$$\mu \beta^3 \frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon X = \varepsilon X',$$

$$\mu \beta^2 \frac{d^2 y}{dt^2} = \varepsilon \beta \left(Y - \frac{v}{V} N\right) = \varepsilon Y',$$

$$\mu \beta^2 \frac{d^2 z}{dt^2} = \varepsilon \beta \left(Z + \frac{v}{V} M\right) = \varepsilon Z'$$

und bemerken zunächst, daß $\varepsilon X'$, $\varepsilon Y'$, $\varepsilon Z'$ die Komponenten der auf das Elektron wirkenden ponderomotorischen Kraft sind, und zwar in einem in diesem Moment mit dem Elektron mit gleicher Geschwindigkeit wie dieses bewegten System betrachtet. (Diese Kraft könnte beispielsweise mit einer im letzten System ruhenden Federwage gemessen werden.) Wenn wir nun diese Kraft schlechtweg „die auf das Elektron wirkende Kraft“ nennen*) und die Gleichung

$$\text{Massenzahl} \times \text{Beschleunigungszahl} = \text{Kraftzahl}$$

aufrechterhalten, und wenn wir ferner festsetzen, daß die Beschleunigungen im ruhenden System K gemessen werden sollen, so erhalten wir aus obigen Gleichungen:

$$\text{Longitudinale Masse} = \frac{\mu}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^3},$$

$$\text{Transversale Masse} = \frac{\mu}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

Natürlich würde man bei anderer Definition der Kraft und der Beschleunigung andere Zahlen für die Massen erhalten; man ersieht daraus, daß man bei der Vergleichung verschiedener Theorien der Bewegung des Elektrons sehr vorsichtig verfahren muß.

Wir bemerken, daß diese Resultate über die Masse auch für die ponderabeln materiellen Punkte gilt; denn ein ponderabler materieller Punkt kann durch Zufügen einer *beliebig kleinen* elektrischen Ladung zu einem Elektron (in unserem Sinne) gemacht werden.

Wir bestimmen die kinetische Energie des Elektrons. Bewegt sich ein Elektron vom Koordinatenursprung des Systems K aus mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 beständig auf der X-Achse unter der Wirkung einer elektrostatischen Kraft X, so ist klar, daß die dem elektrostatischen Felde entzogene Energie den Wert $\int \varepsilon X dx$ hat. Da das Elektron langsam beschleunigt sein soll und infolgedessen keine Energie in Form von Strahlung abgeben möge, so muß die dem elektrostatischen Felde entzogene Energie gleich der Bewegungsenergie W des Elektrons gesetzt werden. Man erhält daher, indem man beachtet, daß während des ganzen betrachteten Bewegungsvorganges die erste der Gleichungen (A) gilt:

$$W = \int \varepsilon X dx = \int_0^v \beta^3 v dv = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

W wird also für $v = V$ unendlich groß. Überlichtgeschwindigkeiten haben — wie bei unseren früheren Resultaten — keine Existenzmöglichkeit.

Auch dieser Ausdruck für die kinetische Energie muß dem oben angeführten Argument zufolge ebenso für ponderable Massen gelten.

---

*) Die hier gegebene Definition der Kraft ist nicht vorteilhaft, wie zuerst von M. Planck dargetan wurde. Es ist vielmehr zweckmäßig, die Kraft so zu definieren, daß der Impulssatz und der Energiesatz die einfachste Form annehmen.

Wir wollen nun die aus dem Gleichungssystem (A) resultierenden, dem Experimente zugänglichen Eigenschaften der Bewegung des Elektrons aufzählen.

1. Aus der zweiten Gleichung des Systems (A) folgt, daß eine elektrische Kraft Y und eine magnetische Kraft N dann gleich stark ablenkend wirken auf ein mit der Geschwindigkeit v bewegtes Elektron, wenn $Y = N \cdot v/V$. Man ersieht also, daß die Ermittelung der Geschwindigkeit des Elektrons aus dem Verhältnis der magnetischen Ablenkbarkeit A_m und der elektrischen Ablenkbarkeit A_e nach unserer Theorie für beliebige Geschwindigkeiten möglich ist durch Anwendung des Gesetzes:

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}.$$

Diese Beziehung ist der Prüfung durch das Experiment zugänglich, da die Geschwindigkeit des Elektrons auch direkt, z. B. mittels rasch oszillierender elektrischer und magnetischer Felder, gemessen werden kann.

2. Aus der Ableitung für die kinetische Energie des Elektrons folgt, daß zwischen der durchlaufenen Potentialdifferenz und der erlangten Geschwindigkeit v des Elektrons die Beziehung gelten muß:

$$P = \int X dx = \frac{\mu}{\varepsilon} V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

3. Wir berechnen den Krümmungsradius R der Bahn, wenn eine senkrecht zur Geschwindigkeit des Elektrons wirkende magnetische Kraft N (als einzige ablenkende Kraft) vorhanden ist. Aus der zweiten der Gleichungen (A) erhalten wir:

$$-\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{v}{V} N \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

oder

$$R = V^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \cdot \frac{1}{N}.$$

Diese drei Beziehungen sind ein vollständiger Ausdruck für die Gesetze nach denen sich gemäß vorliegender Theorie das Elektron bewegen muß.

Zum Schlusse bemerke ich, daß mir beim Arbeiten an dem hier behandelten Probleme mein Freund und Kollege M. Besso treu zur Seite stand und daß ich demselben manche wertvolle Anregung verdanke.

Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?

Von A. Einstein.*)

Die Resultate der vorstehenden Untersuchung führen zu einer sehr interessanten Folgerung, die hier abgeleitet werden soll.

Ich legte dort die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum nebst dem Maxwellschen Ausdruck für die elektromagnetische Energie des Raumes zugrunde und außerdem das Prinzip:

Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Parallel-Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden (Relativitätsprinzip).

Gestützt auf diese Grundlagen**) leitete ich unter anderem das nachfolgende Resultat ab (l. c. § 8):

Ein System von ebenen Lichtwellen besitze, auf das Koordinatensystem (x, y, z) bezogen, die Energie l; die Strahlrichtung (Wellennormale) bilde den Winkel φ mit der x-Achse des Systems. Führt man ein neues, gegen das System (x, y, z) in gleichförmiger Paralleltranslation begriffenes Koordinatensystem (ξ, η, ζ) ein, dessen Ursprung sich mit der Geschwindigkeit v längs der x-Achse bewegt, so besitzt die genannte Lichtmenge — im System (ξ, η, ζ) gemessen — die Energie:

$$l^* = l \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

wobei V die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Von diesem Resultat machen wir im folgenden Gebrauch.

Es befinde sich nun im System (x, y, z) ein ruhender Körper, dessen Energie — auf das System (x, y, z) bezogen — E_0 sei. Relativ zu dem wie oben mit der Geschwindigkeit v bewegten System (ξ, η, ζ) sei die Energie des Körpers H_0.

---

*) Abgedruckt aus Ann. d. Phys. 17 (1905).

**) Das dort benutzte Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist natürlich in den Maxwellschen Gleichungen enthalten.

Dieser Körper sende in einer mit der x-Achse den Winkel φ bildenden Richtung ebene Lichtwellen von der Energie $L/2$ (relativ zu (x, y, z) gemessen) und gleichzeitig eine gleich große Lichtmenge nach der entgegengesetzten Richtung. Hierbei bleibt der Körper in Ruhe in bezug auf das System (x, y, z). Für diesen Vorgang muß das Energieprinzip gelten und zwar (nach dem Prinzip der Relativität) in bezug auf beide Koordinatensysteme. Nennen wir E_1 bez. H_1 die Energie des Körpers nach der Lichtaussendung, relativ zum System (x, y, z) bez. (ξ, η, ζ) gemessen, so erhalten wir mit Benutzung der oben angegebenen Relation:

$$E_0 = E_1 + \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right],$$

$$H_0 = H_1 + \left[\frac{L}{2}\frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} + \frac{L}{2}\frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}\right] = H_1 + \frac{L}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Durch Subtraktion erhält man aus diesen Gleichungen:

$$(H_0 - E_0) - (H_1 - E_1) = L\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1\right\}.$$

Die beiden in diesem Ausdruck auftretenden Differenzen von der Form $H-E$ haben einfache physikalische Bedeutungen. H und E sind Energiewerte desselben Körpers, bezogen auf zwei relativ zueinander bewegte Koordinatensysteme, wobei der Körper in dem einen System (System (x, y, z)) ruht. Es ist also klar, daß die Differenz $H - E$ sich von der kinetischen Energie K des Körpers in bezug auf das andere System (System (ξ, η, ζ)) nur durch eine additive Konstante C unterscheiden kann, welche von der Wahl der willkürlichen additiven Konstanten der Energien H und E abhängt. Wir können also setzen:

$$H_0 - E_0 = K_0 + C,$$
$$H_1 - E_1 = K_1 + C,$$

da C sich während der Lichtaussendung nicht ändert. Wir erhalten also:

$$K_0 - K_1 = L\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1\right\}.$$

Die kinetische Energie des Körpers in bezug auf (ξ, η, ζ) nimmt infolge der Lichtaussendung ab, und zwar um einen von den Qualitäten des Körpers unabhängigen Betrag. Die Differenz $K_0 - K_1$ hängt ferner von der Geschwindigkeit ebenso ab wie die kinetische Energie des Elektrons (l. c. § 10).

Unter Vernachlässigung von Größen vierter und höherer Ordnung können wir setzen:

$$K_0 - K_1 = \frac{L}{V^2} \frac{v^2}{2}.$$

Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar:

Gibt ein Körper die Energie L in Form von Strahlung ab, so verkleinert sich seine Masse um L/V^2. Hierbei ist es offenbar unwesentlich, daß die dem Körper entzogene Energie gerade in Energie der Strahlung übergeht, so daß wir zu der allgemeineren Folgerung geführt werden:

Die Masse eines Körpers ist ein Maß für dessen Energieinhalt; ändert sich die Energie um L, so ändert sich die Masse in demselben Sinne um $L/9 \cdot 10^{20}$, wenn die Energie in Erg und die Masse in Grammen gemessen wird.

Es ist nicht ausgeschlossen, daß bei Körpern, deren Energieinhalt in hohem Maße veränderlich ist (z. B. bei den Radiumsalzen), eine Prüfung der Theorie gelingen wird.

Wenn die Theorie den Tatsachen entspricht, so überträgt die Strahlung Trägheit zwischen den emittierenden und absorbierenden Körpern.

Raum und Zeit.

Von H. Minkowski.*)

M. H.! Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischem Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.

I.

Ich möchte zunächst ausführen, wie man von der gegenwärtig angenommenen Mechanik wohl durch eine rein mathematische Überlegung zu veränderten Ideen über Raum und Zeit kommen könnte. Die Gleichungen der Newtonschen Mechanik zeigen eine zweifache Invarianz. Einmal bleibt ihre Form erhalten, wenn man das zugrunde gelegte räumliche Koordinatensystem einer beliebigen *Lagenveränderung* unterwirft, zweitens, wenn man es in seinem Bewegungszustande verändert, nämlich ihm irgendeine *gleichförmige Translation* aufprägt; auch spielt der Nullpunkt der Zeit keine Rolle. Man ist gewohnt, die Axiome der Geometrie als erledigt anzusehen, wenn man sich reif für die Axiome der Mechanik fühlt, und deshalb werden jene zwei Invarianzen wohl selten in einem Atemzuge genannt. Jede von ihnen bedeutet eine gewisse Gruppe von Transformationen in sich für die Differentialgleichungen der Mechanik. Die Existenz der ersteren Gruppe sieht man als einen fundamentalen Charakter des Raumes an. Die zweite Gruppe straft man am liebsten mit Verachtung, um leichten Sinnes darüber hinwegzukommen, daß man von den physikalischen Erscheinungen her niemals entscheiden kann, ob der als ruhend vorausgesetzte Raum sich nicht am Ende in einer gleichförmigen Translation befindet. So führen jene zwei Gruppen ein völlig getrenntes Dasein nebeneinander. Ihr gänzlich heterogener Charakter mag davon abgeschreckt haben, sie zu komponieren. Aber gerade die komponierte volle Gruppe als Ganzes gibt uns zu denken auf.

Wir wollen uns die Verhältnisse graphisch zu veranschaulichen suchen. Es seien x, y, z rechtwinklige Koordinaten für den Raum, und t bezeichne

*) Vortrag, gehalten auf der 80. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte zu Cöln am 21. September 1908.

die Zeit. Gegenstand unserer Wahrnehmung sind immer nur Orte und Zeiten verbunden. Es hat niemand einen Ort anders bemerkt als zu einer Zeit, eine Zeit anders als an einem Orte. Ich respektiere aber noch das Dogma, daß Raum und Zeit je eine unabhängige Bedeutung haben. Ich will einen Raumpunkt zu einem Zeitpunkt, d. i. ein Wertsystem x, y, z, t einen *Weltpunkt* nennen. Die Mannigfaltigkeit aller denkbaren Wertsysteme x, y, z, t soll die *Welt* heißen. Ich könnte mit kühner Kreide vier Weltachsen auf die Tafel werfen. Schon *eine* gezeichnete Achse besteht aus lauter schwingenden Molekülen und macht zudem die Reise der Erde im All mit, gibt also bereits genug zu abstrahieren auf; die mit der Anzahl 4 verbundene etwas größere Abstraktion tut dem Mathematiker nicht wehe. Um nirgends eine gähnende Leere zu lassen, wollen wir uns vorstellen, daß aller Orten und zu jeder Zeit etwas Wahrnehmbares vorhanden ist. Um nicht Materie oder Elektrizität zu sagen, will ich für dieses Etwas das Wort Substanz brauchen. Wir richten unsere Aufmerksamkeit auf den im Weltpunkt x, y, z, t vorhandenen substantiellen Punkt und stellen uns vor, wir sind imstande, diesen substantiellen Punkt zu jeder anderen Zeit wiederzuerkennen. Einem Zeitelement dt mögen die Änderungen dx, dy, dz der Raumkoordinaten dieses substantiellen Punktes entsprechen. Wir erhalten alsdann als Bild sozusagen für den ewigen Lebenslauf des substantiellen Punktes eine Kurve in der Welt, eine *Weltlinie*, deren Punkte sich eindeutig auf den Parameter t von $-\infty$ bis $+\infty$ beziehen lassen. Die ganze Welt erscheint aufgelöst in solche Weltlinien, und ich möchte sogleich vorwegnehmen, daß meiner Meinung nach die physikalischen Gesetze ihren vollkommensten Ausdruck als Wechselbeziehungen unter diesen Weltlinien finden dürften.

Durch die Begriffe Raum und Zeit fallen die x, y, z-Mannigfaltigkeit $t = 0$ und ihre zwei Seiten $t > 0$ und $t < 0$ auseinander. Halten wir der Einfachheit wegen den Nullpunkt von Raum und Zeit fest, so bedeutet die zuerst genannte Gruppe der Mechanik, daß wir die x, y, z-Achsen in $t = 0$ einer beliebigen Drehung um den Nullpunkt unterwerfen dürfen, entsprechend den homogenen linearen Transformationen des Ausdrucks

$$x^2 + y^2 + z^2$$

in sich. Die zweite Gruppe aber bedeutet, daß wir, ebenfalls ohne den Ausdruck der mechanischen Gesetze zu verändern,

$$x, y, z, t \quad \text{durch} \quad x - \alpha t,\ y - \beta t,\ z - \gamma t,\ t$$

mit irgendwelchen Konstanten α, β, γ ersetzen dürfen. Der Zeitachse kann hiernach eine völlig beliebige Richtung nach der oberen halben Welt $t > 0$ gegeben werden. Was hat nun die Forderung der Orthogonalität im Raume mit dieser völligen Freiheit der Zeitachse nach oben hin zu tun?

Die Verbindung herzustellen, nehmen wir einen positiven Parameter c und betrachten das Gebilde

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1.$$

Es besteht aus zwei durch $t = 0$ getrennten Schalen nach Analogie eines zweischaligen Hyperboloids. Wir betrachten die Schale im Gebiete $t > 0$, und wir fassen jetzt diejenigen homogenen linearen Transformationen von x, y, z, t in vier neue Variable x', y', z', t' auf, wobei der Ausdruck dieser Schale in den neuen Variablen entsprechend wird. Zu diesen Transformationen gehören offenbar die Drehungen des Raumes um den Nullpunkt. Ein volles Verständnis der übrigen jener Transformationen erhalten wir hernach bereits, wenn wir eine solche unter ihnen ins Auge fassen, bei der y und z ungeändert bleiben. Wir zeichnen (Fig. 1) den Durchschnitt jener Schale mit der Ebene der x- und der t-Achse, den oberen Ast der Hyperbel $c^2t^2 - x^2 = 1$, mit seinen Asymptoten. Ferner werde ein beliebiger Radiusvektor OA' dieses Hyperbelastes vom Nullpunkte O aus eingetragen, die Tangente in A' an die Hyperbel bis zum Schnitte B' mit der Asymptote rechts gelegt, $OA'B'$ zum Parallelogramm $OA'B'C'$ vervollständigt, endlich für das spätere noch $B'C'$ bis zum Schnitt D' mit der x-Achse durchgeführt. Nehmen wir nun OC' und OA' als Achsen für Parallelkoordinaten x', t' mit den Maßstäben $OC' = 1$, $OA' = 1/c$, so erlangt jener Hyperbelast wieder den Ausdruck $c^2t'^2 - x'^2 = 1$, $t' > 0$, und der Übergang von x, y, z, t zu x', y, z, t' ist eine der fraglichen Transformationen. Wir nehmen nun zu den charakterisierten Transformationen noch die beliebigen Verschiebungen des Raum- und Zeit-Nullpunktes hinzu und konstituieren damit eine offenbar noch von dem Parameter c abhängige Gruppe von Transformationen, die ich mit G_c bezeichne.

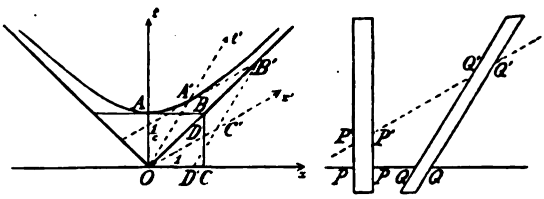

Fig. 1.

Lassen wir jetzt c ins Unendliche wachsen, also $1/c$ nach Null konvergieren, so leuchtet an der beschriebenen Figur ein, daß der Hyperbelast sich immer mehr der x-Achse anschmiegt, der Asymptotenwinkel sich zu einem gestreckten verbreitert, jene spezielle Transformation in der Grenze sich in eine solche verwandelt, wobei die t'-Achse eine beliebige Richtung nach oben haben kann und x' immer genauer sich an x annähert. Mit Rücksicht hierauf ist klar, daß aus der Gruppe G_c in der Grenze für $c = \infty$, also als Gruppe G_∞, eben jene zu der Newtonschen Mechanik gehörige volle Gruppe wird. Bei dieser Sachlage, und da G_c mathematisch verständlicher ist als G_∞, hätte wohl ein Mathematiker in freier Phantasie auf den Gedanken verfallen können, daß am Ende die Naturerscheinungen tatsächlich eine Invarianz nicht bei der Gruppe G_∞, sondern vielmehr bei einer Gruppe G_c mit bestimmtem endlichen, nur in den gewöhnlichen Maßeinheiten *äußerst großen c* besitzen. Eine solche Ahnung wäre ein außerordentlicher Triumph der reinen Mathematik gewesen. Nun, da die Mathematik hier nur mehr Treppenwitz bekundet, bleibt ihr doch die Genugtuung, daß sie dank ihren glücklichen Antecedentien mit ihren in freier Fernsicht geschärften Sinnen die tiefgreifenden Konsequenzen einer solchen Ummodelung unserer Naturauffassung auf der Stelle zu erfassen vermag.

Ich will sogleich bemerken, um welchen Wert für c es sich schließlich handeln wird. Für c wird die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume* eintreten. Um weder vom Raum noch von Leere zu sprechen, können wir diese Größe wieder als das Verhältnis der elektromagnetischen und der elektrostatischen Einheit der Elektrizitätsmenge kennzeichnen.

Das Bestehen der Invarianz der Naturgesetze für die bezügliche Gruppe G_c würde nun so zu fassen sein:

Man kann aus der Gesamtheit der Naturerscheinungen durch sukzessiv gesteigerte Approximationen immer genauer ein Bezugsystem x, y, z und t, Raum und Zeit, ableiten, mittels dessen diese Erscheinungen sich dann nach bestimmten Gesetzen darstellen. Dieses Bezugsystem ist dabei aber durch die Erscheinungen keineswegs eindeutig festgelegt. *Man kann das Bezugsystem noch entsprechend den Transformationen der genannten Gruppe G_c beliebig verändern, ohne daß der Ausdruck der Naturgesetze sich dabei verändert.*

Z. B. kann man der beschriebenen Figur entsprechend auch t' Zeit benennen, muß dann aber im Zusammenhange damit notwendig den Raum durch die Mannigfaltigkeit der drei Parameter x', y, z definieren, wobei nun die physikalischen Gesetze mittels x', y, z, t' sich genau ebenso ausdrücken würden, wie mittels x, y, z, t. Hiernach würden wir dann in der Welt nicht mehr *den* Raum, sondern unendlich viele Räume haben, analog wie es im dreidimensionalen Raume unendlich viele Ebenen gibt. Die dreidimensionale Geometrie wird ein Kapitel der vierdimensionalen Physik. Sie erkennen, weshalb ich am Eingange sagte, Raum und Zeit sollen zu Schatten herabsinken und nur eine Welt an sich bestehen.

II.

Nun ist die Frage, welche Umstände zwingen uns die veränderte Auffassung von Raum und Zeit auf, widerspricht sie tatsächlich niemals den Erscheinungen, endlich gewährt sie Vorteile für die Beschreibung der Erscheinungen?

Bevor wir hierauf eingehen, sei eine wichtige Bemerkung vorangestellt. Haben wir Raum und Zeit irgendwie individualisiert, so entspricht einem ruhenden substantiellen Punkte als Weltlinie eine zur t-Achse parallele Gerade, einem gleichförmig bewegten substantiellen Punkte eine gegen die t-Achse geneigte Gerade, einem ungleichförmig bewegten substantiellen Punkte eine irgendwie gekrümmte Weltlinie. Fassen wir in einem beliebigen Weltpunkte x, y, z, t die dort durchlaufende Weltlinie auf, und finden wir sie dort parallel mit irgendeinem Radiusvektor OA' der vorhin genannten hyperboloidischen Schale, so können wir OA' als neue Zeitachse einführen, und bei den damit gegebenen neuen Begriffen von Raum und Zeit erscheint die Substanz in dem betreffenden Weltpunkte als ruhend. Wir wollen nun dieses fundamentale Axiom einführen:

Die in einem beliebigen Weltpunkte vorhandene Substanz kann stets bei geeigneter Festsetzung von Raum und Zeit als ruhend aufgefaßt werden.

Das Axiom bedeutet, daß in jedem Weltpunkte stets der Ausdruck

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

positiv ausfällt oder, was damit gleichbedeutend ist, daß jede Geschwindigkeit v stets kleiner als c ausfällt. Es würde danach für alle substantiellen Geschwindigkeiten c als obere Grenze bestehen und hierin eben die tiefere Bedeutung der Größe c liegen. In dieser anderen Fassung hat das Axiom beim ersten Eindruck etwas Mißfälliges. Es ist aber zu bedenken, daß nun eine modifizierte Mechanik Platz greifen wird, in der die Quadratwurzel aus jener Differentialverbindung zweiten Grades eingeht, so daß Fälle mit Überlichtgeschwindigkeit nur mehr eine Rolle spielen werden, etwa wie in der Geometrie Figuren mit imaginären Koordinaten.

Der *Anstoß* und wahre Beweggrund *für die Annahme der Gruppe* G_c nun kam daher, daß die Differentialgleichung für die Fortpflanzung von Lichtwellen im leeren Raume jene Gruppe G_c besitzt.*) Andererseits hat der Begriff starrer Körper nur in einer Mechanik mit der Gruppe G_∞ einen Sinn. Hat man nun eine Optik mit G_c, und gäbe es andererseits starre Körper, so ist leicht abzusehen, daß durch die zwei zu G_c und zu G_∞ gehörigen hyperboloidischen Schalen *eine* t-Richtung ausgezeichnet sein würde, und das würde weiter die Konsequenz haben, daß man an geeigneten starren optischen Instrumenten im Laboratorium einen Wechsel der Erscheinungen bei verschiedener Orientierung gegen die Fortschreitungsrichtung der Erde müßte wahrnehmen können. Alle auf dieses Ziel gerichteten Bemühungen, insbesondere ein berühmter Interferenzversuch von Michelson, hatten jedoch ein negatives Ergebnis. Um eine Erklärung hierfür zu gewinnen, bildete H. A. Lorentz eine Hypothese, deren Erfolg eben in der Invarianz der Optik für die Gruppe G_c liegt. Nach Lorentz soll jeder Körper, der eine Bewegung

*) Eine wesentliche Anwendung dieser Tatsache findet sich bereits bei W. Voigt, Göttinger Nachr. 1887 S. 41.

besitzt, in Richtung der Bewegung eine Verkürzung erfahren haben und zwar bei einer Geschwindigkeit v im Verhältnisse

$$1:\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Diese Hypothese klingt äußerst phantastisch. Denn die Kontraktion ist nicht etwa als Folge von Widerständen im Äther zu denken, sondern rein als Geschenk von oben, als Begleitumstand des Umstandes der Bewegung.

Ich will nun an unserer Figur zeigen, daß die Lorentzsche Hypothese völlig äquivalent ist mit der neuen Auffassung von Raum und Zeit, wodurch sie viel verständlicher wird. Abstrahieren wir der Einfachheit wegen von y und z und denken uns eine räumlich eindimensionale Welt, so sind ein wie die t-Achse aufrechter und ein gegen die t-Achse geneigter Parallelstreifen (s. Fig. 1) Bilder für den Verlauf eines ruhenden, bezüglich eines gleichförmig bewegten Körpers, der jedesmal eine konstante räumliche Ausdehnung behält. Ist OA' parallel dem zweiten Streifen, so können wir t' als Zeit und x' als Raumkoordinate einführen, und es erscheint dann der zweite Körper als ruhend, der erste als gleichförmig bewegt. Wir nehmen nun an, daß der erste Körper als ruhend aufgefaßt die Länge l hat, d. h. der Querschnitt PP des ersten Streifens auf der x-Achse $= l \cdot OC$ ist, wo OC den Einheitsmaßstab auf der x-Achse bedeutet, und daß andererseits der zweite Körper *als ruhend aufgefaßt* die gleiche Länge l hat; letzteres heißt dann, daß der *parallel der x'-Achse* gemessene Querschnitt des zweiten Streifens $Q'Q' = l \cdot OC'$ ist. Wir haben nunmehr in diesen zwei Körpern Bilder von zwei *gleichen* Lorentzschen Elektronen, einem ruhenden und einem gleichförmig bewegten. Halten wir aber an den ursprünglichen Koordinaten x, t fest, so ist als Ausdehnung des zweiten Elektrons der Querschnitt QQ seines zugehörigen Streifens *parallel der x-Achse* anzugeben. Nun ist offenbar, da $Q'Q' = l \cdot OC'$ ist, $QQ = l \cdot OD'$. Eine leichte Rechnung ergibt, wenn dx/dt für den zweiten Streifen $= v$ ist, $OD' = OC \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, also auch $PP : QQ = 1 : \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Dies ist aber der Sinn der Lorentzschen Hypothese von der Kontraktion der Elektronen bei Bewegung. Fassen wir andererseits das zweite Elektron als ruhend auf, adoptieren also das Bezugsystem x', t', so ist als Länge des ersten der Querschnitt $P'P'$ seines Streifens parallel OC' zu bezeichnen, und wir würden in genau dem nämlichen Verhältnisse das erste Elektron gegen das zweite verkürzt finden; denn es ist in der Figur

$$P'P' : Q'Q' = OD : OC' = OD' : OC = QQ : PP.$$

Lorentz nannte die Verbindung t' von x und t *Ortszeit* des gleichförmig bewegten Elektrons und verwandte eine physikalische Konstruktion dieses Begriffs zum besseren Verständnis der Kontraktionshypothese. Jedoch scharf erkannt zu haben, daß die Zeit des einen Elektrons ebenso gut wie die des anderen ist, d. h. daß t und t' gleich zu behandeln sind, ist erst das Verdienst von A. Einstein.*) Damit war nun zunächst die Zeit als ein durch die Erscheinungen eindeutig festgelegter Begriff abgesetzt. An dem Begriffe des Raumes rüttelten weder Einstein noch Lorentz, vielleicht deshalb nicht, weil bei der genannten speziellen Transformation, wo die x', t'-Ebene sich mit der x, t-Ebene deckt, eine Deutung möglich ist, als sei die x-Achse des Raumes in ihrer Lage erhalten geblieben. Über den Begriff des Raumes in entsprechender Weise hinwegzuschreiten, ist auch wohl nur als Verwegenheit mathematischer Kultur einzutaxieren. Nach diesem zum wahren Verständnis der Gruppe G_c jedoch unerläßlichen weiteren Schritt aber scheint mir das Wort *Relativitätspostulat* für die Forderung einer Invarianz bei der Gruppe G_c sehr matt. Indem der Sinn des Postulats wird, daß durch die Erscheinungen nur die in Raum und Zeit vierdimensionale Welt gegeben ist, aber die Projektion in Raum und in Zeit noch mit einer gewissen Freiheit vorgenommen werden kann, möchte ich dieser Behauptung eher den Namen *Postulat der absoluten Welt* (oder kurz Weltpostulat) geben.

III.

Durch das Weltpostulat wird eine gleichartige Behandlung der vier Bestimmungsstücke x, y, z, t möglich. Dadurch gewinnen, wie ich jetzt ausführen will, die Formen, unter denen die physikalischen Gesetze sich abspielen, an Verständlichkeit. Vor allem erlangt der Begriff der *Beschleunigung* ein scharf hervortretendes Gepräge.

Ich werde mich einer geometrischen Ausdrucksweise bedienen, die sich sofort darbietet, indem man im Tripel x, y, z stillschweigend von z abstrahiert. Einen beliebigen Weltpunkt O denke ich zum Raum-Zeit-Nullpunkt gemacht. Der *Kegel*

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

mit O als Spitze (Fig. 2) besteht aus zwei Teilen, einem mit Werten $t < 0$,

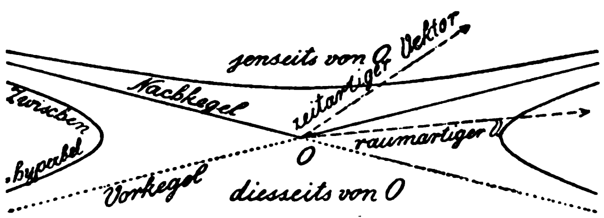

Fig. 2.

einem anderen mit Werten $t > 0$. Der erste, der *Vorkegel von O*, besteht, sagen wir, aus allen Weltpunkten, die „Licht nach O senden", der zweite, der *Nachkegel von O*, aus allen Weltpunkten, die „Licht von O empfangen". Das vom Vorkegel allein begrenzte Gebiet mag *diesseits von O*, das vom Nach-

*) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17 (1905) S. 891; Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik 4 (1907) S. 411.

kegel allein begrenzte *jenseits von* O heißen. Jenseits O fällt die schon betrachtete hyperboloidische Schale

$$F = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1, \quad t > 0.$$

Das Gebiet *zwischen den Kegeln* wird erfüllt von den einschaligen hyperboloidischen Gebilden

$$-F = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = k^2$$

zu allen konstanten positiven Werten k^2. Wichtig sind für uns die Hyperbeln mit O als Mittelpunkt, die auf den letzteren Gebilden liegen. Die einzelnen Äste dieser Hyperbeln mögen kurz die *Zwischenhyperbeln zum Zentrum* O heißen. Ein solcher Hyperbelast würde, als Weltlinie eines substantiellen Punktes gedacht, eine Bewegung repräsentieren, die für $t = -\infty$ und $t = +\infty$ asymptotisch auf die Lichtgeschwindigkeit c ansteigt.

Nennen wir in Analogie zum Vektorbegriff im Raume jetzt eine gerichtete Strecke in der Mannigfaltigkeit der x, y, z, t einen *Vektor*, so haben wir zu unterscheiden zwischen den *zeitartigen* Vektoren mit Richtungen von O nach der Schale $+F = 1$, $t > 0$ und den *raumartigen* Vektoren mit Richtungen von O nach $-F = 1$. Die Zeitachse kann jedem Vektor der ersten Art parallel laufen. Ein jeder Weltpunkt zwischen Vorkegel und Nachkegel von O kann durch das Bezugsystem als *gleichzeitig* mit O, aber ebensogut auch als *früher* als O oder als *später* als O eingerichtet werden. Jeder Weltpunkt diesseits O ist notwendig stets früher, jeder Weltpunkt jenseits O notwendig stets später als O. Dem Grenzübergang zu $c = \infty$ würde ein völliges Zusammenklappen des keilförmigen Einschnittes zwischen den Kegeln in die ebene Mannigfaltigkeit $t = 0$ entsprechen. In den gezeichneten Figuren ist dieser Einschnitt absichtlich mit verschiedener Breite angelegt.

Einen beliebigen Vektor, wie von O nach x, y, z, t, zerlegen wir in die vier *Komponenten* x, y, z, t. Sind die Richtungen zweier Vektoren beziehungsweise die eines Radiusvektors OR von O an eine der Flächen $\mp F = 1$ und dazu einer Tangente RS im Punkte R der betreffenden Fläche, so sollen die Vektoren *normal* zueinander heißen. Danach ist

$$c^2tt_1 - xx_1 - yy_1 - zz_1 = 0$$

die Bedingung dafür, daß die Vektoren mit den Komponenten x, y, z, t und x_1, y_1, z_1, t_1 normal zueinander sind.

Für die *Beträge* von Vektoren der verschiedenen Richtungen sollen die *Einheitsmaßstäbe* dadurch fixiert sein, daß einem raumartigen Vektor von O nach $-F = 1$ stets der Betrag 1, einem zeitartigen Vektor von O nach $+F = 1$, $t > 0$ stets der Betrag $1/c$ zugeschrieben wird.

Denken wir uns nun in einem Weltpunkte $P(x, y, z, t)$ die dort durchlaufende Weltlinie eines substantiellen Punktes, so entspricht danach dem zeitartigen Vektorelement dx, dy, dz, dt im Fortgang der Linie der Betrag

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}.$$

Das Integral $\int d\tau = \tau$ dieses Betrages, auf der Weltlinie von irgendeinem fixierten Ausgangspunkte P_0 bis zu dem variablen Endpunkte P geführt, nennen wir die *Eigenzeit* des substantiellen Punktes in P. Auf der Weltlinie betrachten wir x, y, z, t, d. s. die Komponenten des Vektors OP, als Funktionen der Eigenzeit τ, bezeichnen deren erste Differentialquotienten nach τ mit $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$, deren zweite Differentialquotienten nach τ mit $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$ und nennen die zugehörigen Vektoren, die Ableitung des Vektors OP nach τ den *Bewegungsvektor in* P und die Ableitung dieses Bewegungsvektors nach τ den *Beschleunigungsvektor in* P. Dabei gilt

$$c^2\dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 = c^2,$$

$$c^2\dot{t}\ddot{t} - \dot{x}\ddot{x} - \dot{y}\ddot{y} - \dot{z}\ddot{z} = 0,$$

d. h. der Bewegungsvektor ist der zeitartige Vektor in Richtung der Weltlinie in P vom Betrage 1, und der Beschleunigungsvektor in P ist normal zum Bewegungsvektor in P, also jedenfalls ein raumartiger Vektor.

Nun gibt es, wie man leicht einsieht, einen bestimmten Hyperbelast, der mit der Weltlinie in P drei unendlich benachbarte Punkte gemein hat und dessen Asymptoten Erzeugende eines Vorkegels und eines Nachkegels sind (s. unten Fig. 3). Dieser Hyperbelast heiße die *Krümmungshyperbel* in P. Ist M das Zentrum dieser Hyperbel, so handelt es sich also hier um eine Zwischenhyperbel zum Zentrum M. Es sei ϱ der Betrag des Vektors MP, *so erkennen wir den Beschleunigungsvektor in P als den Vektor in Richtung MP vom Betrage c^2/ϱ.*

Sind $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$ sämtlich Null, so reduziert sich die Krümmungshyperbel auf die in P die Weltlinie berührende Gerade, und es ist $\varrho = \infty$ zu setzen.

IV.

Um darzutun, daß die Annahme der Gruppe G_c für die physikalischen Gesetze nirgends zu einem Widerspruche führt, ist es unumgänglich, eine Revision der gesamten Physik auf Grund der Voraussetzung dieser Gruppe vorzunehmen. Diese Revision ist bereits in einem gewissen Umfange erfolgreich geleistet für Fragen der Thermodynamik und Wärmestrahlung*), für die elektromagnetischen Vorgänge, endlich für die Mechanik unter Aufrechterhaltung des Massenbegriffes.**)

---

*) M. Planck, Zur Dynamik bewegter Systeme, Berliner Ber. 1907 S. 542 (auch Ann. d. Phys. 26 (1908) S. 1).

**) H. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern, Göttinger Nachr. 1908 S. 53.

Für letzteres Gebiet ist vor allem die Frage aufzuwerfen: Wenn eine Kraft mit den Komponenten X, Y, Z nach den Raumachsen in einem Weltpunkte $P(x, y, z, t)$ angreift, wo der Bewegungsvektor $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$ ist, als welche Kraft ist diese Kraft bei einer beliebigen Änderung des Bezugsystemes aufzufassen? Nun existieren gewisse erprobte Ansätze über die ponderomotorische Kraft im elektromagnetischen Felde in den Fällen, wo die Gruppe G_c unzweifelhaft zuzulassen ist. Diese Ansätze führen zu der einfachen Regel: *Bei Änderung des Bezugsystemes ist die vorausgesetzte Kraft derart als Kraft in den neuen Raumkoordinaten anzusetzen, daß dabei der zugehörige Vektor mit den Komponenten*

$$\dot{t}X,\ \dot{t}Y,\ \dot{t}Z,\ \dot{t}T,$$

wo

$$T = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{x}}{\dot{t}}X + \frac{\dot{y}}{\dot{t}}Y + \frac{\dot{z}}{\dot{t}}Z\right)$$

die durch c^2 dividierte Arbeitsleistung der Kraft im Weltpunkte ist, sich unverändert erhält. Dieser Vektor ist stets normal zum Bewegungsvektor in P. Ein solcher, zu einer Kraft in P gehörender Kraftvektor soll ein *bewegender Kraftvektor in P* heißen.

Nun werde die durch P laufende Weltlinie von einem substantiellen Punkte mit konstanter *mechanischer Masse m* beschrieben. Das m-fache des Bewegungsvektors in P heiße der *Impulsvektor in P*, das m-fache des Beschleunigungsvektors in P der *Kraftvektor der Bewegung in P*. Nach diesen Definitionen lautet das Gesetz dafür, wie die Bewegung eines Massenpunktes bei gegebenem bewegenden Kraftvektor statthat:*)

Der Kraftvektor der Bewegung ist gleich dem bewegenden Kraftvektor.

Diese Aussage faßt vier Gleichungen für die Komponenten nach den vier Achsen zusammen, wobei die vierte, weil von vornherein beide genannten Vektoren normal zum Bewegungsvektor sind, sich als eine Folge der drei ersten ansehen läßt. Nach der obigen Bedeutung von T stellt die vierte zweifellos den Energiesatz dar. Als *kinetische Energie* des Massenpunktes ist daher das *c^2-fache der Komponente des Impulsvektors nach der t-Achse* zu definieren. Der Ausdruck hierfür ist

$$mc^2\frac{dt}{d\tau} = mc^2 \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

d. i. nach Abzug der additiven Konstante mc^2 der Ausdruck $\frac{1}{2}mv^2$ der Newtonschen Mechanik bis auf Größen von der Ordnung $1/c^2$. Sehr anschaulich erscheint hierbei die *Abhängigkeit der Energie vom Bezugsysteme.* Da nun aber die t-Achse in die Richtung jedes zeitartigen Vektors gelegt werden

*) H. Minkowski, a. a. O. p. 107. — Vgl. auch M. Planck, Verh. d. Physik. Ges. 4 (1906) S. 136.

kann, so enthält andererseits der Energiesatz, für jedes mögliche Bezugsystem gebildet, bereits das ganze System der Bewegungsgleichungen. Diese Tatsache behält bei dem erörterten Grenzübergang zu $c = \infty$ ihre Bedeutung auch für den axiomatischen Aufbau der Newtonschen Mechanik und ist in solchem Sinne bereits von Herrn I. R. Schütz*) wahrgenommen worden.

Man kann von vornherein das Verhältnis von Längeneinheit und Zeiteinheit derart festlegen, daß die natürliche Geschwindigkeitsschranke $c = 1$ wird. Führt man dann noch $\sqrt{-1} \cdot t = s$ an Stelle von t ein, so wird der quadratische Differentialausdruck

$$d\tau^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - ds^2,$$

also völlig symmetrisch in x, y, z, s, und diese Symmetrie überträgt sich auf ein jedes Gesetz, das dem Weltpostulate nicht widerspricht. Man kann danach das Wesen dieses Postulates mathematisch sehr prägnant in die mystische Formel kleiden:

$$3.10^5 \text{ km} = \sqrt{-1} \text{ sek.}$$

V.

Die durch das Weltpostulat geschaffenen Vorteile werden vielleicht durch nichts so schlagend belegt wie durch Angabe der von einer *beliebig bewegten punktförmigen Ladung* nach der Maxwell-Lorentzschen Theorie ausgehenden Wirkungen. Denken wir uns die Weltlinie eines solchen punktförmigen Elektrons mit der Ladung e und führen auf ihr die Eigenzeit τ ein von irgendeinem Anfangspunkte aus. Um das vom Elektron in einem beliebigen Weltpunkte P_1 veranlaßte Feld zu haben, konstruieren wir den zu P_1 gehörigen Vorkegel (Fig. 4). Dieser trifft die unbegrenzte Weltlinie des Elektrons, weil deren Richtungen überall die von zeitartigen Vektoren sind, offenbar in einem einzigen Punkte P. Wir legen in P an die Weltlinie die Tangente und konstruieren durch P_1 die Normale P_1Q auf diese Tangente. Der Betrag von P_1Q sei r. Als der Betrag von PQ ist dann gemäß der Definition eines Vorkegels r/c zu rechnen. *Nun stellt der Vektor in Richtung PQ vom Betrage e/r in seinen Komponenten nach den x-, y-, z-Achsen*

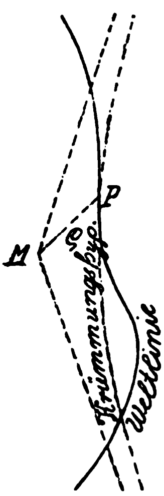

Fig. 3.

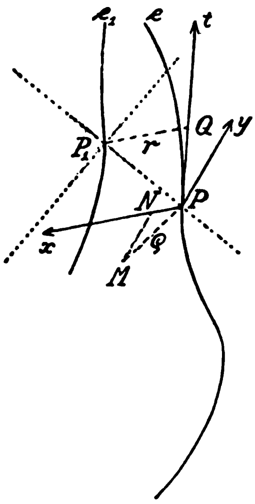

Fig. 4.

*) I. R. Schütz, Das Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie, Göttinger Nachr. 1897 S. 110.

das mit c multiplizierte Vektorpotential, in der Komponente nach der t-Achse das skalare Potential des von e erregten Feldes für den Weltpunkt P_1 vor. Hierin liegen die von A. Liénard und von E. Wiechert aufgestellten Elementargesetze.*)

Bei der Beschreibung des vom Elektron hervorgerufenen Feldes selbst tritt sodann hervor, daß die Scheidung des Feldes in elektrische und magnetische Kraft eine relative ist mit Rücksicht auf die zugrunde gelegte Zeitachse; am übersichtlichsten sind beide Kräfte zusammen zu beschreiben in einer gewissen, wenn auch nicht völligen Analogie zu einer Kraftschraube der Mechanik.

Ich will jetzt die *von einer beliebig bewegten punktförmigen Ladung auf eine andere beliebig bewegte punktförmige Ladung ausgeübte ponderomotorische Wirkung* beschreiben. Denken wir uns durch den Weltpunkt P_1 die Weltlinie eines zweiten punktförmigen Elektrons von der Ladung e_1 führend. Wir bestimmen P, Q, r wie vorhin, konstruieren sodann (Fig. 4) den Mittelpunkt M der Krümmungshyperbel in P, endlich die Normale MN von M aus auf eine durch P parallel zu QP_1 gedachte Gerade. Wir legen nun, mit P als Anfangspunkt, ein Bezugsystem folgendermaßen fest, die t-Achse in die Richtung PQ, die x-Achse in die Richtung QP_1, die y-Achse in die Richtung MN, womit schließlich auch die Richtung der z-Achse als normal zu den t-, x-, y-Achsen bestimmt ist. Der Beschleunigungsvektor in P sei $\ddot x, \ddot y, \ddot z, \ddot t$, der Bewegungsvektor in P_1 sei $\dot x_1, \dot y_1, \dot z_1, \dot t_1$. *Jetzt lautet der von dem ersten beliebig bewegten Elektron e auf das zweite beliebig bewegte Elektron e_1 in P_1 ausgeübte bewegende Kraftvektor:*

$$-ee_1\left(\dot t_1 - \frac{\dot x_1}{c}\right)\mathfrak{K},$$

wobei für die Komponenten $\mathfrak{K}_x, \mathfrak{K}_y, \mathfrak{K}_z, \mathfrak{K}_t$ des Vektors $\mathfrak{K}$ die drei Relationen bestehen:

$$c\mathfrak{K}_t - \mathfrak{K}_x = \frac{1}{r^2}, \qquad \mathfrak{K}_y = \frac{\ddot y}{c^2 r}, \qquad \mathfrak{K}_z = 0$$

und viertens dieser Vektor $\mathfrak{K}$ normal zum Bewegungsvektor in P_1 ist und durch diesen Umstand allein in Abhängigkeit von dem letzteren Bewegungsvektor steht.

Vergleicht man mit dieser Aussage die bisherigen Formulierungen**) des nämlichen Elementargesetzes über die ponderomotorische Wirkung bewegter punktförmiger Ladungen aufeinander, so wird man nicht umhin können zuzugeben, daß die hier in Betracht kommenden Verhältnisse ihr inneres Wesen

*) A. Liénard, Champ électrique et magnétique produit par une charge concentrée en un point et animée d'un mouvement quelconque, L'Éclairage électrique 16 (1898) S. 5, 53, 106; E. Wiechert, Elektrodynamische Elementargesetze, Arch. néerl. (2) 5 (1900) S. 549.

**) K. Schwarzschild, Göttinger Nachr. 1903 S. 132; H. A. Lorentz, Enzykl. d. math. Wissensch. V, Art. 14, S. 199.

voller Einfachheit erst in vier Dimensionen enthüllen, auf einen von vornherein aufgezwungenen dreidimensionalen Raum aber nur eine sehr verwickelte Projektion werfen.

In der dem Weltpostulate gemäß reformierten Mechanik fallen die Disharmonien, die zwischen der Newtonschen Mechanik und der modernen Elektrodynamik gestört haben, von selbst aus. Ich will noch die Stellung des Newtonschen Attraktionsgesetzes zu diesem Postulate berühren. Ich will annehmen, wenn zwei Massenpunkte m, m_1 ihre Weltlinien beschreiben werde von m auf m_1 ein bewegender Kraftvektor ausgeübt genau von dem soeben im Falle von Elektronen angegebenen Ausdruck, nur daß statt $-ee_1$ jetzt $+mm_1$ treten soll. Wir betrachten nun speziell den Fall, daß der Beschleunigungsvektor von m konstant Null ist, wobei wir dann t so einführen mögen, daß m als ruhend aufzufassen ist, und es erfolge die Bewegung von m_1 allein mit jenem von m herrührenden bewegenden Kraftvektor. Modifizieren wir nun diesen angegebenen Vektor zunächst durch Hinzusetzen des Faktors $\dot{t}^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, der bis auf Größen von der Ordnung $1/c^2$ auf 1 hinauskommt, so zeigt sich*), daß für die Orte x_1, y_1, z_1 von m_1 und ihren zeitlichen Verlauf genau wieder die Keplerschen Gesetze hervorgehen würden, nur daß dabei an Stelle der Zeiten t_1 die Eigenzeiten τ_1 von m_1 eintreten würden. Auf Grund dieser einfachen Bemerkung läßt sich dann einsehen, daß das vorgeschlagene Anziehungsgesetz verknüpft mit der neuen Mechanik nicht weniger gut geeignet ist die astronomischen Beobachtungen zu erklären als das Newtonsche Anziehungsgesetz verknüpft mit der Newtonschen Mechanik.

Auch die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in ponderablen Körpern fügen sich durchaus dem Weltpostulate. Sogar die von Lorentz gelehrte Ableitung dieser Gleichungen auf Grund von Vorstellungen der Elektronentheorie braucht zu dem Ende keineswegs verlassen zu werden, wie ich anderwärts zeigen werde.

Die ausnahmslose Gültigkeit des Weltpostulates ist, so möchte ich glauben, der wahre Kern eines elektromagnetischen Weltbildes, der von Lorentz getroffen, von Einstein weiter herausgeschält, nachgerade vollends am Tage liegt. Bei der Fortbildung der mathematischen Konsequenzen werden genug Hinweise auf experimentelle Verifikationen des Postulates sich einfinden, um auch diejenigen, denen ein Aufgeben altgewohnter Anschauungen unsympathisch oder schmerzlich ist, durch den Gedanken an eine prästabilierte Harmonie zwischen der reinen Mathematik und der Physik auszusöhnen.

---

*) H. Minkowski, a. a. O. S. 110.

Anmerkungen.

Von A. Sommerfeld.

Es ist selbstverständlich, daß bei der Neuherausgabe von Minkowskis Raum und Zeit kein Wort des Textes verändert werden durfte. Ich habe mich auch gescheut, durch Hinweise auf die hier folgenden Anmerkungen den Genuß des Lesers zu stören. Diese Anmerkungen selbst sind keineswegs wesentlich; sie bezwecken nichts anderes, als kleine formal-mathematische Schwierigkeiten aus dem Wege zu räumen, die dem Eindringen in die großen Gedanken Minkowskis im Wege stehen könnten. Auf die an Minkowski anschließende Literatur ist nur soweit hingewiesen, als sie in unmittelbarer Beziehung zu dem Gegenstande dieses Vortrages steht. Sachlich ist von dem, was Minkowski hier sagt, heute, vier Jahre nach seinem Tode, vom physikalischen Standpunkte aus meiner Meinung nach kein Wort zurückzunehmen und kaum etwas hinzuzufügen; wie man sich erkenntnis-theoretisch zu Minkowskis Auffassung des Raum-Zeit-Problems stellen will, ist eine andere Frage, aber wie mir scheint eine Frage, die den physikalischen Sachverhalt nicht wesentlich berührt. Den nächsten großen Fortschritt in der Relativitätstheorie erwarten wir von der Einordnung der Gravitation; bis hierüber die Ansichten geklärt sind, läßt sich nicht übersehen, ob wesentliche Änderungen an den Anschauungen Minkowskis nötig sein werden.

1) S. 60 Z. 13 v. u. „Andererseits hat der Begriff starrer Körper nur in der Mechanik mit der Gruppe G_∞ einen Sinn". Dieser Satz ist in einer Diskussion, die ein Jahr nach Minkowskis Tode im Anschluß an eine Arbeit seines Schülers M. Born entstand, in weitestem Umfange bestätigt worden. M. Born hatte (Ann. d. Phys. 30 (1909) S. 1) als relativ-starren Körper einen solchen definiert, von dem jedes Volumelement auch bei beschleunigten Bewegungen die zu seiner Geschwindigkeit gehörige Lorentz-Kontraktion erfährt. Ehrenfest zeigte (Phys. Zeitschr. 10 (1909) S. 918), daß ein solcher Körper nicht in Rotation versetzt werden kann, Herglotz (Ann. d. Phys. 31 (1910) S. 393) und F. Nöther (Ann. d. Phys. 31 (1910) S. 919), daß er nur drei Grade der Bewegungsfreiheit hat. Es wurde auch versucht, einen relativ-starren Körper von sechs oder neun Freiheitsgraden zu definieren. Demgegenüber äußerte Planck (Phys. Zeitschr. 11 (1910) S. 294) die Ansicht, daß die Relativitätstheorie nur mit mehr oder minder elastischen Körpern operieren könne, und Laue bewies (Phys. Zeitschr. 12 (1911) S. 48) mit den Methoden Minkowskis, im Anschluß an die Fig. 2 dieses Vortrages, daß in der Relativitätstheorie jeder feste Körper unendlich viele Freiheitsgrade haben müsse. Schließlich hat Herglotz (Ann. d. Phys. 36 (1911) S. 453) eine relativistische Elastizitätstheorie entwickelt, nach welcher elastische Spannungen immer dann auftreten, wenn der Körper sich nicht relativ-starr im Bornschen Sinne bewegt. Der relativstarre Körper spielt also in dieser Elastizitätstheorie dieselbe Rolle wie der gewöhnliche starre Körper in der gewöhnlichen Elastizitätstheorie.

2) Zu S. 61 Z. 12 v. u. „Eine leichte Rechnung ergibt ... $OD' = OC\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$". Es sei in Fig. 1 $\alpha = \sphericalangle A'OA$, $\beta = \sphericalangle B'OA' = \sphericalangle C'OB'$, wobei die Gleichheit der beiden letzten Winkel aus der harmonischen Lage der Asymptoten gegen die neuen Koordinatenachsen (konjugierte Durchmesser der Hyperbel) folgt. Wegen $\alpha + \beta = \pi/4$ ist

$$\sin 2\beta = \cos 2\alpha .$$

Der Sinussatz ergibt im Dreieck $OD'C'$:

$$\frac{OD'}{OC'} = \frac{\sin 2\beta}{\cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$$

oder, da $OC' = OA'$:

$$OD' = OA' \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = OA' \cos\alpha\,(1 - \operatorname{tg}^2\alpha) . \tag{1}$$

Sind x, t die Koordinaten des Punktes A' im x, t-System, also $x \cdot OA$ bez. $ct \cdot OC = ct \cdot OA$ die entsprechenden Abstände von den Koordinatenachsen, so hat man

$$(2) \qquad x \cdot OA = \sin\alpha \cdot OA', \quad ct \cdot OA = \cos\alpha \cdot OA', \quad \frac{x}{ct} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{c}.$$

Setzt man diese Werte von x und ct in die Hyperbelgleichung ein, so findet man:

$$(3) \qquad OA'^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = OA^2, \quad OA' = \frac{OA}{\cos\alpha\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha}};$$

also wegen (1) und (2)

$$(4) \qquad OD' = OA\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = OA\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Dies ist wegen $OA = OC$ die zu beweisende Formel.

Ferner ist in dem rechtwinkligen Dreieck OCD:

$$OD = \frac{OC}{\cos\alpha} = \frac{OA}{\cos\alpha}.$$

Gl. (3) kann daher auch so geschrieben werden:

$$OA' = \frac{OD}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha}} \quad \text{oder} \quad \frac{OD}{OA'} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Dies liefert zusammen mit (4) die Proportion

$$OD : OA' = OD' : OA,$$

welche wegen $OA' = OC'$ und $OA = OC$ mit der S. 61 Z. 4 v. u. benutzten

$$OD : OC' = OD' : OC$$

identisch ist.

3) S. 63 Z. 18 v. o. „Ein jeder Weltpunkt zwischen Vorkegel und Nachkegel von O kann durch das Bezugssystem als gleichzeitig mit O, aber ebensogut auch als früher als O oder später als O eingerichtet werden“. Hierauf führt M. Laue den Beweis des Einsteinschen Satzes zurück (Phys. Zeitschr. 12 (1911) S. 48): In der Relativitätstheorie kann kein Vorgang kausaler Verknüpfung mit Überlichtgeschwindigkeit fortgepflanzt werden („Signalgeschwindigkeit $\leq c$“). Angenommen ein Ereignis O verursache ein anderes Ereignis P und angenommen der Weltpunkt P liege im Zwischengebiete von O. In diesem Falle würde die Wirkung von O nach P mit Überlichtgeschwindigkeit übertragen worden sein, relativ zu dem betrachteten Bezugssystem x, t, in dem natürlich die Wirkung P als später wie die Ursache O angenommen werde, $t_p > 0$. Nun kann man aber nach dem vorangestellten Zitat das Bezugssystem abändern, sodaß P früher als O zu liegen kommt, d. h. man kann ein System x', t' auf unendlich viele Arten so wählen, daß $t'_p < 0$ wird. Das ist unverträglich mit der Vorstellung der Kausalität; also muß P entweder „jenseits von O“ oder auf dem Nachkegel von O liegen, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines von O aus zu betätigenden Signals, welches im Weltpunkte P ein zweites Ereignis zur Folge haben soll, muß notwendig $\leq c$ sein. (Natürlich kann man auch in der Relativitätstheorie Vorgänge definieren, z. B. geometrisch in sehr einfacher Art, die mit Überlichtgeschwindigkeit fortschreiten; solche Vorgänge können aber niemals als Signale dienen, d. h. es ist unmöglich, sie nach Willkür einzuleiten und mit ihnen an einem entfernten Ort z. B. ein Relais in Gang zu setzen. So kann es z. B. optische Medien geben, in denen die „Lichtgeschwindigkeit“ $> c$ ist. Dabei ist aber unter Lichtgeschwindigkeit verstanden die Fortpflanzung der Phasen in einem unendlichen periodischen Wellenzug. Zum Signa-

lisieren kann diese niemals dienen. Dagegen pflanzt sich der Kopf einer Welle unter allen Umständen und bei beliebiger Beschaffenheit des optischen Mediums mit der Geschwindigkeit c fort; vgl. z. B. A. Sommerfeld, Festschrift Heinrich Weber (Leipzig (Teubner) 1912) S. 338.)

4) S. 64 Z. 2 v. o. Wie Minkowski gelegentlich zu mir bemerkte, ist das Element der Eigenzeit $d\tau$ kein vollständiges Differential. Verbindet man also zwei Weltpunkte O und P durch zwei verschiedene Weltlinien 1 und 2, so ist

$$\int_1 d\tau \neq \int_2 d\tau .$$

Verläuft 1 parallel der t-Achse, sodaß der erste Übergang im zu Grunde gelegten Bezugssystem die Ruhe bedeutet, so ist ersichtlich

$$\int_1 d\tau = t, \quad \int_2 d\tau < t .$$

Hierauf beruht das von Einstein hervorgehobene Nachgehen der bewegten Uhr gegen die ruhende. Dieser Aussage liegt, wie Einstein hervorgehoben hat, die (unbeweisbare) Annahme zu Grunde, daß die bewegte Uhr tatsächlich die Eigenzeit anzeigt, d. h. jeweils diejenige Zeit gibt, die dem stationär gedachten, augenblicklichen Geschwindigkeitszustand entspricht. Die bewegte Uhr muß natürlich, damit sie mit der ruhenden im Weltpunkte P verglichen werden kann, beschleunigt (mit Geschwindigkeits- oder Richtungsänderungen) bewegt worden sein. Das Nachgehen der bewegten Uhr zeigt also nicht eigentlich „Bewegung", sondern „beschleunigte Bewegung" an. Ein Widerspruch gegen das Relativitätsprinzip selbst liegt daher nicht vor.

5) S. 64 Z. 20 v. o. Die Bezeichnung Krümmungshyperbel ist dem elementaren Begriff des Krümmungskreises genau nachgebildet. Die Analogie wird zur analytischen Identität, wenn man statt der reellen Zeitkoordinate t die imaginäre $l = ict$ benutzt, also das c-fache der von Minkowski S. 66 benutzten Koordinate s. Nach S. 62 hat eine Zwischenhyperbel in der x, t-Ebene die Gleichung

$$x^2 - c^2 t^2 = \varrho^2 \quad (\text{mit } k = \varrho),$$

also in der x, l-Ebene

$$x^2 + l^2 = \varrho^2 .$$

Sie kann daher in Parameterdarstellung geschrieben werden, wenn φ einen reinimaginären Winkel bedeutet:

$$x = \varrho \cos\varphi, \qquad l = \varrho \sin\varphi .$$

Man kann hiernach die Hyperbelbewegung, wie ich Ann. d. Phys. 33 S. 649, § 8 vorschlug, auch als „zyklische Bewegung" bezeichnen, wodurch ihre Haupteigenschaften (Mitführung des Feldes, Auftreten einer Art Zentrifugalkraft) besonders deutlich gekennzeichnet werden. Für die Hyperbelbewegung ist

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-dl^2 - dx^2} = \frac{\varrho}{c}\,|d\varphi|,$$

also

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau} = -ic\sin\varphi, \qquad \dot{l} = \frac{dl}{d\tau} = +ic\cos\varphi$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{d\tau} = \frac{c^2}{\varrho}\cos\varphi, \qquad \ddot{l} = \frac{d\dot{l}}{d\tau} = \frac{c^2}{\varrho}\sin\varphi .$$

Der Betrag des Beschleunigungsvektors bei der Hyperbelbewegung ist daher c^2/ϱ. Da eine beliebig vorgegebene Weltlinie von der Krümmungshyperbel dreipunktig berührt wird, hat jene mit der Hyperbelbewegung den Beschleunigungsvektor und deren Betrag c^2/ϱ gemein, wie S. 64 Z. 10 v. u. angegeben.

Der Mittelpunkt M der zyklischen Bewegung $x^2 + l^2 = \varrho^2$ ist ersichtlich der Punkt $x = 0$, $l = 0$, und es haben alle Punkte der Hyperbel von diesem Mittelpunkte den konstanten „Abstand" ϱ, d. h. einen konstanten Betrag des Radiusvektors. ϱ bedeutet daher die in Fig. 8 eingezeichnete Strecke MP.

6) S. 65 Z. 11 v. o. Daß man die Kraft X, Y, Z, um sie zu einem „Kraftvektor" zu ergänzen, mit $\dot{t} = dt/d\tau$ zu multiplizieren hat, erkennt man so: Nach Minkowski ist der Impulsvektor (S. 65 Z. 20 v. o.) definiert durch

$$m\dot{x},\; m\dot{y},\; m\dot{z},\; m\dot{t}.$$

m bedeutet die „konstante mechanische Masse" oder, wie Minkowski an anderer Stelle noch deutlicher sagt, die „Ruhmasse". Hält man an dem Newtonschen Bewegungsgesetze fest (zeitliche Änderung des Impulses gleich Kraft), so hat man zu setzen

$$\frac{d}{dt} m\dot{x} = X, \quad \frac{d}{dt} m\dot{y} = Y, \quad \frac{d}{dt} m\dot{z} = Z.$$

Multiplikation mit $\dot{t}$ macht die linken Seiten zu Vektorkomponenten im Sinne Minkowskis. Daher sind auch $\dot{t}X$, $\dot{t}Y$, $\dot{t}Z$ die drei ersten Komponenten des „Kraftvektors". Die vierte Komponente T folgt dann eindeutig aus der Forderung, daß der Kraftvektor zum Bewegungsvektor normal sein soll. Die Minkowskischen Gleichungen für die Mechanik des Massenpunktes lauten daher (bei konstanter Ruhmasse):

$$m\ddot{x} = \dot{t}X, \quad m\ddot{y} = \dot{t}Y, \quad m\ddot{z} = \dot{t}Z, \quad m\ddot{t} = \dot{t}T.$$

Übrigens läßt sich die Annahme von der Konstanz der Ruhmasse nur aufrecht halten, wenn der Energieinhalt des Körpers bei der Bewegung nicht geändert wird (wenn diese in der Bezeichnung von Planck „adiabatisch und isochorisch" erfolgt).

7) S. 66 und 67. Das Charakteristische an den hier angegebenen Konstruktionen ist ihre völlige Unabhängigkeit von einem speziellen Bezugssystem. Sie geben, wie es Minkowski S. 57 postuliert, „Wechselbeziehungen unter den Weltlinien" (oder Weltpunkten) als „vollkommensten Ausdruck der physikalischen Gesetze". Auf die Koordinatenachsen $xyzt$ wird z. B. S. 66 unten bei dem elektrodynamischen Potential („Viererpotential") erst dann Bezug genommen, wenn dasselbe (in konventioneller Weise) in einen skalaren und Vektorteil zerlegt werden soll, welchen Teilen aber vom relativistischen Standpunkte aus keine selbständige, invariante Bedeutung zukommt.

Als Kommentar zu Minkowski habe ich (Ann. d. Phys. 33 (1910) S. 649, § 7) eine invariante analytische Darstellung für das Viererpotential und für die ponderomotorische Wirkung zwischen zwei Elektronen aus den Maxwellschen Gleichungen nach den Minkowskischen Methoden abgeleitet, welche die in Rede stehenden Konstruktionen Minkowskis umschreiben. Da eine genaue Begründung derselben hier zu weit führen würde, sei auf jene Darstellung oder auf die entsprechenden Ausführungen bei M. Laue (Das Relativitätsprinzip (Braunschweig (Vieweg) 1913) § 19) hingewiesen.

8) S. 67 Z. 5 v. o. Die invariante Darstellung des elektromagnetischen Feldes als „Vektor zweiter Art" (wofür ich die, wie es scheint, sich einbürgernde Bezeichnung „Sechservektor" vorgeschlagen habe), bildet einen besonders bedeutsamen Teil der Minkowskischen Auffassung der Elektrodynamik. Während Minkowskis Ideen in dem Begriff des Vektors erster Art („Vierervektor") teilweise schon von Poincaré (Rend. Circ. Mat. Palermo 21 (1906)) vorweggenommen waren, ist die Einführung des Sechservektors bei Minkowski neu und wesentlich. Ebenso wie der Sechservektor hängt die Kraftschraube der Mechanik (Inbegriff einer Einzelkraft und eines Kräftepaares) von 6

unabhängigen Parametern ab; ebenso wie bei dem elektromagnetischen Felde „die Scheidung in elektrische und magnetische Kraft eine relative ist", läßt sich bekanntlich bei der Kraftschraube die Zerlegung in Einzelkraft und Kräftepaar in sehr mannigfacher Weise bewerkstelligen.

9) S. 68 Abs. 1. Minkowskis relativistische Form des Newtonschen Gesetzes subsumiert sich für den besonderen, im Text hervorgehobenen Fall verschwindender Beschleunigung unter die allgemeinere Form, die Poincaré (in der soeben zitierten Arbeit) vorgeschlagen hat; sie geht andererseits in der Berücksichtigung der Beschleunigung über diese hinaus. Wie aus Minkowskis oder Poincarés Formulierung des Gravitationsgesetzes hervorgeht, ist es (auf mannigfache Art) möglich, das Newtonsche Gesetz mit der Relativitätstheorie zu versöhnen. Dieses Gesetz wird dabei als Punktgesetz, die Gravitation also gewissermaßen als Fernwirkung aufgefaßt. Die Schwierigkeiten, die in letzter Zeit von Einstein und Abraham hervorgehoben worden sind, treten erst dann auf, wenn man — was vom heutigen Standpunkte allerdings unabweislich erscheint — die Gravitation als Feldwirkung auffassen will und nach dem Verbleib der Gravitationsenergie im Felde fragt, und wenn man überdies das Postulat hinzufügt, daß träge und schwere Masse genau gleich sein sollen. Indem Mie (Ann. d. Phys. 40 (1913) S. 1) dieses letzte Postulat fallen läßt und nur verlangt, daß schwere und träge Masse praktisch gleich sein sollen, d. h. innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Beobachtungen, gelingt es ihm, eine Feldtheorie der Gravitation zu entwickeln, die sich vollständig in den Rahmen der Relativitätstheorie einfügt. Wir haben also hier einen wohldurchdachten Ausweg aus den Schwierigkeiten, die das Gravitationsproblem — als Feldwirkung aufgefaßt — der Relativitätstheorie zu bieten scheint, und sehen uns keineswegs veranlaßt, das Relativitätsprinzip mit Abraham als widerlegt anzusehen. Dies zur Begründung der in der Einleitung zu diesen Anmerkungen ausgesprochenen Ansicht, daß Minkowskis Raum-Zeit-Anschauung auch heute noch unerschüttert dasteht.

S. 68 Abs. 2. Die „Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern" sind von Minkowski in den Göttinger Nachrichten 1907 entwickelt. Es war ihm nicht mehr vergönnt, die „Ableitung dieser Gleichungen auf Grund von Vorstellungen der Elektronentheorie" zu Ende zu führen. Seine diesbezüglichen Ansätze sind von M. Born ausgearbeitet worden und bilden zusammen mit den „Grundgleichungen" den ersten Band dieser Sammlung von Monographien (Leipzig 1910).

Das Relativitätsprinzip und seine Anwendung auf einige besondere physikalische Erscheinungen.

Von H. A. Lorentz.*)

Das Einsteinsche Relativitätsprinzip hier in Göttingen zu besprechen, wo Minkowski gewirkt hat, erscheint mir eine besonders willkommene Aufgabe.

Man kann die Bedeutung dieses Prinzips von verschiedenen Gesichtspunkten beleuchten. Von der mathematischen Seite der Frage, die durch Minkowski eine so glänzende Darstellung gefunden hat und von Abraham, Sommerfeld u. a. weiter ausgebaut worden ist, soll hier nicht die Rede sein. Vielmehr sollen nach einigen erkenntnistheoretischen Betrachtungen über die Begriffe von Raum und Zeit diejenigen physikalischen Erscheinungen erörtert werden, die zu einer experimentellen Prüfung des Prinzips beitragen könnten.

Das Relativitätsprinzip behauptet folgendes: Wenn eine physikalische Erscheinung im Bezugssystem x, y, z, t durch gewisse Gleichungen beschrieben wird, so wird es auch eine Erscheinung geben, die sich in einem andern Bezugssystem x', y', z', t' durch dieselben Gleichungen beschreiben läßt. Dabei hängen beide Bezugssysteme durch Beziehungen zusammen, in denen die Lichtgeschwindigkeit c vorkommt und die ausdrücken, daß das eine System sich relativ zum andern mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt.

Befindet sich der Beobachter A in dem ersten, B in dem zweiten Bezugssystem, und verfügt jeder über Maßstäbe und Uhren, die in *seinem* System ruhen, so wird A die Werte von x, y, z, t, B aber die Werte von x', y', z', t' messen, wobei zu bemerken ist, daß A und B sich auch desselben Maßstabes und derselben Uhr bedienen können. Wir müssen annehmen, daß, wenn Maßstab und Uhr von dem ersten Beobachter irgendwie dem zweiten in die Hände gespielt werden, sie dabei von selbst die richtige Länge bezw. den richtigen Gang annehmen, derart, daß B aus seinen Messungen die Werte von x', y', z', t' herausbekommt. Beide werden nun für die Lichtgeschwindigkeit den gleichen Wert finden und überhaupt die gleichen Beobachtungen machen können.

*) Aus: Alte und neue Fragen der Physik; Vorträge, gehalten in Göttingen vom 24.—29. Okt. 1910, ausgearbeitet von M. Born (Phys. Zeitschr. 11 (1910)).

Gesetzt, es gäbe einen Äther; dann wäre unter allen Systemen x, y, z, t eines dadurch ausgezeichnet, daß die Koordinatenachsen sowie die Uhr im Äther ruhen. Verbindet man hiermit die Vorstellung (die ich nur ungern aufgeben würde), daß Raum und Zeit etwas völlig Verschiedenes seien und daß es eine „wahre Zeit“ gebe (die Gleichzeitigkeit würde dann unabhängig vom Orte bestehen, entsprechend dem Umstande, daß uns die Vorstellung unendlich großer Geschwindigkeiten möglich ist), so sieht man leicht, daß diese wahre Zeit eben von Uhren, die im Äther ruhen, angezeigt werden müßte. Wenn nun das Relativitätsprinzip in der Natur allgemeine Gültigkeit hätte, so würde man allerdings nicht in der Lage sein, festzustellen, ob das gerade benutzte Bezugssystem jenes ausgezeichnete ist. Man kommt also dann zu denselben Resultaten, wie wenn man im Anschluß an Einstein und Minkowski die Existenz des Äthers und der wahren Zeit leugnet und alle Bezugssysteme als gleichwertig ansieht. Welcher der beiden Denkweisen man sich anschließen mag, bleibt wohl dem einzelnen überlassen.

Um die physikalische Seite der Frage zu diskutieren, müssen wir zunächst die Transformationsformeln aufstellen, wobei wir uns auf eine spezielle Form beschränken, in der sie schon im Jahre 1887 von Voigt bei Erörterungen über das Dopplersche Prinzip benutzt worden sind, nämlich:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = az - bct, \quad t' = at - \frac{b}{c} z;$$

dabei erfüllen die Konstanten $a > 0$, b die Relation

$$a^2 - b^2 = 1,$$

welche die Identität

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

zur Folge hat. Der Ursprung des Systems x', y', z' bewegt sich gegen das System x, y, z in der z-Richtung mit der Geschwindigkeit $\frac{b}{a} c$, die immer kleiner als c ist. Überhaupt muß jede Geschwindigkeit kleiner als c angenommen werden.

Sämtliche Zustandsgrößen irgendeiner Erscheinung, in dem einen bez. dem andern System gemessen, hängen durch gewisse Transformationsformeln zusammen. Diese lauten z. B. für die Geschwindigkeit eines Punktes

$$\mathfrak{v}_x' = \frac{\mathfrak{v}_x}{\omega}, \qquad \mathfrak{v}_y' = \frac{\mathfrak{v}_y}{\omega}, \qquad \mathfrak{v}_z' = \frac{a\mathfrak{v}_z - bc}{\omega},$$

wobei

$$\omega = a - \frac{b\mathfrak{v}_z}{c}$$

ist.

Wir betrachten weiter ein System von Punkten, deren Geschwindigkeit eine stetige Funktion der Koordinaten ist. Es sei dS ein den Punkt $P(x, y, z)$ umgebendes Raumelement zur Zeit t; diesem Werte t und den Koordinaten von P entspricht nach den Transformationsgleichungen ein Zeitpunkt t' in dem andern Bezugssystem, und jeder Punkt, der zur Zeit t in dS liegt, hat für diesen festgesetzten Wert von t' bestimmte x', y', z'. Die Punkte x', y', z' erfüllen ein Raumelement dS', welches mit dS so zusammenhängt:

$$dS' = \frac{dS}{\omega}.$$

Denken wir uns mit den Punkten ein Agens (Materie, Elektrizität etc.) verbunden, und nehmen wir an, daß der Beobachter B Anlaß habe, mit jedem Punkte dieselbe Menge des Agens zu verbinden wie der Beobachter A, so müssen sich offenbar die Raumdichten umgekehrt verhalten wie die Volumelemente, d. h.

$$\varrho' = \omega\varrho.$$

Alle diese Beziehungen sind reziprok, d. h. man kann die gestrichenen und ungestrichenen Buchstaben vertauschen, wenn man gleichzeitig b durch $-b$ ersetzt.

Die Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes behalten bei der Transformation ihre Gestalt, wenn man folgende Größen einführt*):

$$\mathfrak{d}_x' = a\mathfrak{d}_x - b\mathfrak{h}_y, \quad \mathfrak{d}_y' = a\mathfrak{d}_y + b\mathfrak{h}_x, \quad \mathfrak{d}_z' = \mathfrak{d}_z,$$
$$\mathfrak{h}_x' = a\mathfrak{h}_x + b\mathfrak{d}_y, \quad \mathfrak{h}_y' = a\mathfrak{h}_y - b\mathfrak{d}_x, \quad \mathfrak{h}_z' = \mathfrak{h}_z;$$

zwischen diesen, der transformierten Raumdichte ϱ' und der transformierten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ gelten also im System x', y', z', t' die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathfrak{d}' &= \varrho', \\
\operatorname{div} \mathfrak{h}' &= 0, \\
\operatorname{rot} \mathfrak{h}' &= \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{d}}' + \varrho'\mathfrak{v}'), \\
\operatorname{rot} \mathfrak{d}' &= -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{h}}'.
\end{aligned}$$

Soweit genügen die Feldgleichungen der Elektronentheorie dem Relativitätsprinzip; es wird sich aber noch darum handeln, die Bewegungsgleichungen der Elektronen selbst mit dem Prinzip in Einklang zu bringen.

Wir werden, etwas allgemeiner, die Bewegung eines beliebigen materiellen Punktes betrachten. Hierbei ist die Einführung des Begriffs „Eigenzeit", einer schönen Erfindung Minkowskis, von Nutzen. Danach gehört jedem Punkte gewissermaßen eine eigene Zeit zu, die vom gewählten Bezugssystem unabhängig ist; ihr Differential wird definiert durch die Gleichung:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}\, dt.$$

*) Vgl., was die Bezeichnungen betrifft, Mathematische Encyklopädie V 14.

Die mit Hilfe der Eigenzeit τ gebildeten Ausdrücke

$$\frac{d}{d\tau}\frac{dx}{d\tau}, \quad \frac{d}{d\tau}\frac{dy}{d\tau}, \quad \frac{d}{d\tau}\frac{dz}{d\tau},$$

lineare homogene Funktionen der gewöhnlichen Beschleunigungskomponenten, bezeichnen wir als Komponenten der „Minkowskischen Beschleunigung“. Wir beschreiben die Bewegung eines Punktes durch die Gleichungen:

$$m\frac{d}{d\tau}\frac{dx}{d\tau} = \mathfrak{K}_x, \quad \text{usw.},$$

wo m eine Konstante ist, die wir die „Minkowskische Masse“ nennen. Den Vektor $\mathfrak{K}$ bezeichnen wir als „Minkowskische Kraft“.

Es lassen sich dann leicht die Transformationsformeln für diese Beschleunigung und Kraft ableiten; m lassen wir ungeändert. So hat man

$$\mathfrak{K}_x' = \mathfrak{K}_x, \quad \mathfrak{K}_y' = \mathfrak{K}_y, \quad \mathfrak{K}_z' = a\mathfrak{K}_z - \frac{b}{c}(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{K}).$$

Das Wesentliche ist nun folgendes. Das Relativitätsprinzip erfordert, daß, wenn bei einer wirklichen Erscheinung die Minkowskischen Kräfte in bestimmter Weise von den Koordinaten, Geschwindigkeiten usw. im einen Bezugssystem abhängen, die transformierten Minkowskischen Kräfte im andern Bezugssystem in derselben Weise von den transformierten Koordinaten, Geschwindigkeiten usw. abhängen. Das ist eine besondere Eigenschaft, die *alle* Kräfte der Natur haben müssen, wenn das Relativitätsprinzip gelten soll. Setzen wir das voraus, so kann man die auf bewegte Körper wirkenden Kräfte berechnen, wenn man sie für den Fall der Ruhe kennt. Bewegt sich z. B. ein Elektron von der Ladung e, so denken wir uns ein Bezugssystem, in dem es momentan ruht. Dann wirkt auf das Elektron in diesem System die Minkowskische Kraft

$$\mathfrak{K} = e\mathfrak{d};$$

hieraus folgt durch Anwendung der Transformationsgleichungen für $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{d}$, daß die in einem beliebigen Koordinatensystem auf das mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegte Elektron wirkende Minkowskische Kraft

$$\mathfrak{K} = e\frac{\mathfrak{d} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{h}]}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}$$

beträgt. Diese Formel stimmt mit dem gewöhnlichen Ansatz der Elektronentheorie nicht überein infolge des Auftretens des Nenners. Der Unterschied rührt daher, daß man gewöhnlich nicht mit unserer Minkowskischen, sondern mit der „Newtonschen Kraft“ $\mathfrak{F}$ operiert, und wir sehen, daß für ein Elektron diese beiden Kräfte folgendermaßen zusammenhängen:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{K}\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}.$$

Man wird annehmen, daß diese Beziehung für beliebige materielle Punkte gilt.

Somit kann man die Bewegungserscheinungen auf zwei verschiedene Weisen behandeln, entweder mit der Minkowskischen oder mit der Newtonschen Kraft. Im letzteren Falle lauten die Bewegungsgleichungen

$$\mathfrak{F} = m_1 \mathfrak{j}_1 + m_2 \mathfrak{j}_2 ,$$

und hier bedeuten $\mathfrak{j}_1$ die gewöhnliche Beschleunigung in der Richtung der Bewegung, $\mathfrak{j}_2$ die gewöhnliche Normalbeschleunigung, und man nennt die Faktoren

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{\left(1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}\right)^3}},$$

$$m_2 = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}$$

die „longitudinale“ und „transversale Masse“.

Genau so wie die Minkowskischen Kräfte, müssen auch die in der Natur vorkommenden Newtonschen Kräfte bestimmten Bedingungen genügen, wenn das Relativitätsprinzip erfüllt sein soll. Das ist z. B. der Fall, wenn, unabhängig von der Bewegung, auf eine Fläche ein Normaldruck von der konstanten Größe p pro Flächeneinheit wirkt; im transformierten System wirkt dann auf das entsprechende bewegte Flächenelement ein normaler Druck von der gleichen Größe.

Da wir die Invarianz der Feldgleichungen bereits erkannt haben, läuft die Frage, ob die Bewegungen in einem Elektronensystem dem Relativitätsprinzip entsprechen, lediglich auf eine experimentelle Prüfung der Formeln für die longitudinale und transversale Masse m_1, m_2 heraus; obgleich die Versuche von Bucherer und Hupka diese Formeln zu bestätigen scheinen, ist man zu einer definitiven Entscheidung noch nicht gekommen.

Bezüglich der Masse des Elektrons ist noch zu bedenken, daß diese elektromagnetischer Natur ist; sie wird also von der Verteilung der Ladungen innerhalb des Elektrons abhängen. Die Formeln für die Masse können daher nur dann richtig sein, wenn die Ladungsverteilung und damit auch die Gestalt des Elektrons in bestimmter Weise mit der Geschwindigkeit veränderlich sind. Man muß annehmen, daß infolge einer Translation ein Elektron, das ruhend eine Kugel ist, ein in der Bewegungsrichtung abgeplattetes Ellipsoid wird; der Betrag der Abplattung ist

$$\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}.$$

Nehmen wir an, daß Gestalt und Größe des Elektrons durch innere Kräfte reguliert werden, so müssen diese, um mit dem Relativitätsprinzip verträglich zu sein, derartige Eigenschaften haben, daß sich jene Abplattung bei der Bewegung von selbst einstellt. Hierzu hat Poincaré folgende Hypothese gemacht. Das Elektron ist eine geladene ausdehnbare Haut, und den elektrischen Abstoßungen der einzelnen Punkte widersetzt sich eine innere Normalspannung von unveränderlicher Größe. In der Tat genügen nach obigem solche Normalspannungen dem Relativitätsprinzip.

In derselben Weise müssen alle innerhalb der ponderablen Materie wirksamen Molekularkräfte, ebenso die auf die Elektronen wirkenden quasi-elastischen und Widerstandskräfte, bestimmten Bedingungen genügen, um mit dem Relativitätsprinzip im Einklang zu sein. Dann wird jeder bewegte Körper für einen mitbewegten Beobachter unverändert sein, für einen ruhenden aber eine Veränderung der Dimensionen erfahren, die eben eine Folge der durch jene Bedingungen geforderten Änderung der Molekularkräfte ist. Hieraus ergibt sich auch von selbst jene Verkürzung der Körper, welche schon früher erdacht wurde zur Erklärung des negativen Ausfalls des Michelsonschen Interferenzversuches und aller ähnlichen Versuche, die einen Einfluß der Erdbewegung auf optische Erscheinungen feststellen sollten.

Was den starren Körper anlangt, mit dem sich Born, Herglotz, F. Noether, Levi-Cività beschäftigt haben, so werden die bei der Betrachtung der Rotationen auftretenden Schwierigkeiten wohl dadurch zu heben sein, daß man die Starrheit der Wirksamkeit besonders intensiver Molekularkräfte zuschreibt.

Schließlich wollen wir uns der *Gravitation* zuwenden. Das Relativitätsprinzip erfordert eine Abänderung des Newtonschen Gesetzes, vor allem eine Fortpflanzung der Wirkung mit Lichtgeschwindigkeit. Die Möglichkeit einer endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwerkraft ist schon von Laplace diskutiert worden, der sich als Ursache der Schwerkraft ein gegen die Sonne strömendes Fluidum dachte, das die Planeten gegen die Sonne drückt. Er fand, daß die Geschwindigkeit c dieses Fluidums wenigstens 100 Millionen mal größer als die des Lichtes angenommen werden müsse, damit die Rechnung mit den astronomischen Beobachtungen im Einklang bleibt. Die Notwendigkeit eines so großen Wertes von c rührt daher, daß in seinen Endformeln die Größe $\frac{v}{c}$ in der ersten Potenz auftritt, wo v die Planetengeschwindigkeit ist. Soll nun aber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der Schwerkraft den Wert der Lichtgeschwindigkeit haben, wie es das Relativitätsprinzip fordert, so kann ein Widerspruch mit den Beobachtungen nur dann vermieden werden, wenn in dem Ausdruck für das modifizierte Gravitationsgesetz nur Größen zweiter (und höherer) Ordnung in $\frac{v}{c}$ auftreten.

Beschränkt man sich auf Größen zweiter Ordnung, so läßt sich leicht auf Grund einer naheliegenden elektronentheoretischen Analogie eine Bedingung angeben, die das abgeänderte Gesetz in eindeutiger Weise festlegt.

Betrachtet man nämlich die Kraft, die auf ein mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegtes Elektron wirkt,

$$e\left(\mathfrak{d} + \frac{1}{c}\,[\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{h}]\right),$$

so hängen die Vektoren $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ noch von den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}'$ der das Feld erzeugenden Elektronen ab; in dem Vektorprodukt $[\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{h}]$ kommen daher wohl die Produkte der Form $\mathfrak{v}\mathfrak{v}'$ vor, nicht aber das Quadrat $\mathfrak{v}^2$ der Geschwindigkeit des betrachteten Elektrons. Nehmen wir entsprechend an, daß im Ausdruck der auf den Punkt 1 wirkenden Anziehung, ausgeübt von Punkt 2, das Quadrat der Geschwindigkeit des Punktes 1, $\mathfrak{v}_1^2$, nicht auftritt, so muß in einem Bezugssystem, in dem der Punkt 2 ruht ($\mathfrak{v}_2 = 0$), jede Geschwindigkeit überhaupt herausfallen; das Gesetz wird sich daher in diesem System auf das gewöhnliche Newtonsche reduzieren. Geht man jetzt durch Transformation zu einem beliebigen Koordinatensystem über, so findet man, daß sich die auf den Punkt 1 wirkende Kraft aus zwei Teilen zusammensetzt, erstens einer Anziehung in Richtung der Verbindungslinie vom Betrage

$$R + \frac{1}{c^2}\left\{\frac{1}{2}\,\mathfrak{v}_2^2 R + \frac{1}{2}\,\mathfrak{v}_{2r}^2\left(r\,\frac{dR}{dr} - R\right) - (\mathfrak{v}_1\cdot\mathfrak{v}_2)\,R\right\},$$

zweitens einer Kraft in der Richtung $\mathfrak{v}_2$ vom Betrage

$$\frac{1}{c^2}\,\mathfrak{v}_{1r} R\,\mathfrak{v}_2;$$

hier bedeutet r die Entfernung zwischen zwei gleichzeitigen Lagen beider Punkte, $\mathfrak{v}_r$ die Komponente von $\mathfrak{v}$ nach der von 1 nach 2 gezogenen Verbindungslinie und R diejenige Funktion von r, welche im Falle der Ruhe das Anziehungsgesetz darstellt ($R = \frac{k}{r^2}$ bei der Newtonschen Attraktion, $R = kr$ bei quasi-elastischen Kräften). Zu beachten ist, daß hier unter „Kraft“ immer die „Newtonsche Kraft“ zu verstehen ist, nicht die „Minkowskische“. Übrigens hat Minkowski für das Gesetz der Schwerkraft einen etwas anderen Ausdruck angegeben. Bei Poincaré findet sich sowohl dieser als auch der oben hingeschriebene.

Es ist zu beachten, daß bei diesen Gesetzen der Schwerkraft das Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung nicht erfüllt ist.

Es sollen nun die Störungen erörtert werden, welche durch jene Zusatzglieder zweiter Ordnung entstehen können. Es gibt da neben vielen kurzperiodischen Störungen, die keine Bedeutung haben, eine säkulare Bewegung des Perihels der Planeten. De Sitter berechnet diese für den Merkur zu 6,69″ pro Jahrhundert.*) Nun kennt man seit Laplace eine Perihelanomalie des Merkurs vom Betrage 44″ pro Jahrhundert; wenn diese auch das rich-

*) Dies war eine erste Annäherung. Bei einer neuen Berechnung hat de Sitter den Wert 7,15″ gefunden (Monthly Notices of R. A. Sc. 71 (1911) S. 405).

tige Vorzeichen hat, ist sie doch viel zu groß, um durch jene Zusatzglieder erklärt werden zu können. Vielmehr wird sie von Seeliger auf eine Störung durch den Träger des Zodiakallichtes zurückgeführt, dessen Masse man in plausibler Weise geeignet bestimmen kann. Hieraus kann also keine Entscheidung gewonnen werden, so lange nicht die Genauigkeit der astronomischen Messungen wesentlich gesteigert wird. Bei einer absoluten Genauigkeit wäre auch der Unterschied der „Eigenzeit" der Erde von der Zeit des Sonnensystems zu berücksichtigen.

Eine andere Methode, die Gültigkeit des abgeänderten Gravitationsgesetzes zu prüfen, kann man auf ein Verfahren gründen, das Maxwell zur Entscheidung darüber vorgeschlagen hat, ob das Sonnensystem sich durch den Äther hindurchbewegt. Ist dieses der Fall, so müßten die *Verfinsterungen der Trabanten des Jupiters*, je nach der Stellung dieses Planeten zur Erde, Verfrühungen oder Verspätungen erleiden.

Denn beträgt die Entfernung Jupiter—Erde a und die Geschwindigkeitskomponente des Sonnensystems im Äther in Richtung der Verbindungslinie Jupiter—Erde v, so wird die Zeit $\frac{a}{c}$, die das Licht im Falle der Ruhe zum Durchlaufen der Strecke a brauchen würde, verwandelt in $\frac{a}{c \pm v}$; es kommt also durch die Bewegung eine Verfrühung oder Verspätung zustande, die bis auf Glieder zweiter Ordnung $\frac{av}{c^2}$ beträgt und die je nach dem Werte der Geschwindigkeitskomponente v, welche ja von der Stellung der beiden Planeten abhängt, verschiedene Werte annimmt. Nun ist klar, daß eine solche Abhängigkeit der Erscheinungen von der Bewegung durch den Äther dem Relativitätsprinzip widerspricht.

Um diesen Widerspruch aufzuklären, wollen wir uns die Sachlage schematisch vereinfachen. Wir denken uns, daß die Sonne S eine Masse habe, die im Verhältnis zu der des Planeten unendlich groß sei. Die Geschwindigkeit des Sonnensystems falle in die z-Achse, die wir durch die Sonne gehen lassen. Die Schnittpunkte der Bahn des Planeten mit der z-Achse bezeichnen wir als oberen bezw. unteren Durchgang A bezw. B (Fig. 5).

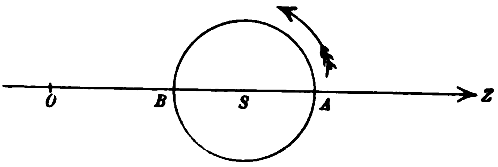

Fig. 5.

Den Beobachter verlegen wir auf die Sonne. Bei jedem Durchgange des Planeten durch die z-Achse möge ein Lichtsignal zur Sonne hineilen. Die Umlaufszeit sei T. Wenn die Sonne ruht, wird bei der als kreisförmig vorausgesetzten Bewegung die Zeit zwischen oberem und unterem Durchgange $\frac{1}{2}T$ betragen; desgleichen auch die Zeit zwischen dem Eintreffen der beiden Lichtsignale. Bewegt sich dagegen die Sonne in der z-Richtung, so muß das Lichtsignal vom oberen Durchgange eine Verfrühung um $\frac{av}{c^2}$, das vom unteren Durchgange eine Verspätung vom selben Betrage erleiden; falls die gleichförmige Umlaufsbewegung (wie Maxwell als selbstverständlich vorausgesetzt) ungestört erhalten bleibt, würde das Zeitintervall zwischen dem Eintreffen der Lichtsignale zweier aufeinanderfolgender Durchgänge abwechselnd um $\frac{2av}{c^2}$ vergrößert und verkleinert erscheinen. Die hierbei vorausgesetzte Erhaltung der gleichförmigen Kreisbewegung bei einer Translation im Äther ist aber nach dem Relativitätsprinzip unmöglich. Beschreiben wir nämlich den Vorgang in einem Koordinatensystem, das an der Bewegung nicht teilnimmt, so wird das modifizierte Gravitationsgesetz anzuwenden sein, und dieses ergibt eine Ungleichförmigkeit der Planetenbewegung, infolge deren die Verschiedenheit der Zeitintervalle zwischen dem Eintreffen der Lichtsignale gerade aufgehoben wird.

Es kann daher die Feststellung, ob eine Verfrühung oder Verspätung der Verfinsterungen wirklich eintritt, zur Entscheidung für oder gegen das Relativitätsprinzip benutzt werden. Allerdings sind die numerischen Verhältnisse wieder recht ungünstig. So schätzt Herr Burton, dem 330 photometrische Beobachtungen zur Verfügung stehen, die an der Harvard-Sternwarte über die Verfinsterungen des 1. Jupitersatelliten angestellt worden sind, den wahrscheinlichen Fehler des schließlichen Resultats für v auf 50 km/sec; andrerseits hat man Sterngeschwindigkeiten von 70 km/sec beobachtet und die Geschwindigkeit des Sonnensystems gegen den Fixsternhimmel wird auf 20 km/sec geschätzt. Durch Burtons Berechnungen wird also das Relativitätsprinzip schwerlich gestützt, höchstens zu Fall gebracht werden können, nämlich wenn sich schließlich z. B. ein 100 km/sec übersteigender Wert ergäbe.

Lassen wir es dahin gestellt, ob die neue Mechanik durch astronomische Beobachtungen eine Bestätigung erfahren wird oder nicht. Doch wollen wir es nicht unterlassen, noch einige ihrer Grundformeln kennen zu lernen.

Definiert man die *Arbeit* als das skalare Produkt aus „Newtonscher Kraft" und Verschiebung, so ergeben die Bewegungsgleichungen das *Energieprinzip* in der gewöhnlichen Form, daß die pro Zeiteinheit geleistete Arbeit gleich der Zunahme der Energie ε ist:

$$\mathfrak{F}_x \frac{dx}{dt} + \mathfrak{F}_y \frac{dy}{dt} + \mathfrak{F}_z \frac{dz}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Dabei hat die *Energie* den Ausdruck:

$$\varepsilon = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right);$$

das stimmt für kleine Geschwindigkeiten mit dem Wert der kinetischen Energie der gewöhnlichen Mechanik

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m \mathfrak{v}^2$$

überein.

Ferner kann man aus den Bewegungsgleichungen das *Hamiltonsche Prinzip*

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta A)\, dt = 0$$

ableiten; hier ist δA die Arbeit der „Newtonschen Kraft" bei einer virtuellen Verrückung und L die *Lagrangesche Funktion*, die folgendermaßen lautet:

$$L = - mc^2 \left(\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}} - 1 \right).$$

Aus dem Hamiltonschen Prinzip kann man umgekehrt wieder die Bewegungsgleichungen gewinnen. Die Größen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$$

werden als *Komponenten der Bewegungsgröße* zu bezeichnen sein.

Alle diese Formeln kann man an den elektromagnetischen Bewegungsgesetzen eines Elektrons verifizieren; man hat dann für die „Minkowskische Masse" m den Wert

$$m = \frac{e^2}{6 \pi R c^2}$$

zu setzen und zu der elektrischen und der magnetischen Energie die Energie jener inneren Spannungen hinzuzufügen, welche, wie wir sahen, die Form des Elektrons bestimmen. So kann man aus dem allgemeinen Prinzip der kleinsten Wirkung für beliebige elektromagnetische Systeme, welches in dem ersten Vortrage besprochen wurde*), durch Spezialisierung auf ein Elektron das eben angegebene Hamiltonsche Prinzip für einen materiellen Punkt gewinnen, doch muß wieder die Arbeit jener inneren Spannungen berücksichtigt werden.

Wir gehen jetzt dazu über, die *Gleichungen des elektromagnetischen Feldes für ponderable Körper* zu betrachten. Diese sind rein phänomenologisch von Minkowski aufgestellt worden, dann ist von M. Born und Ph. Frank gezeigt worden, daß sie sich auch aus den Vorstellungen der Elektronentheorie herleiten lassen; auch ich selbst habe auf letzterem Wege die Gleichungen in einer formal etwas abweichenden Gestalt erhalten.

Um Beziehungen zwischen beobachtbaren Größen zu bekommen, muß man durch Bildung von Mittelwerten über große Mengen von Elektronen die Einzelheiten der von ihnen herrührenden Erscheinungen verwischen.

---

*) Phys. Zeitschr. 11 (1910) S. 1235.

Man wird so auf folgende Gleichungen geführt (die mit denen der gewöhnlichen Maxwellschen Theorie gleichlauten):

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho_l,$$
$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0,$$
$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c}(\mathfrak{C} + \dot{\mathfrak{D}}),$$
$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}}.$$

Hierin ist $\mathfrak{D}$ die dielektrische Verschiebung, $\mathfrak{B}$ die magnetische Induktion, $\mathfrak{H}$ die magnetische Kraft, $\mathfrak{E}$ die elektrische Kraft, $\mathfrak{C}$ der elektrische Strom, ϱ_l die Dichte der beobachtbaren elektrischen Ladungen. Deutet man die Mittelwertbildung durch Überstreichen an, so ist z. B.

$$\mathfrak{E} = \overline{\mathfrak{d}}, \qquad \mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{h}},$$

wo $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{h}$ die frühere Bedeutung haben; ferner ist

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{P},$$
$$\mathfrak{H} = \mathfrak{B} - \mathfrak{M} - \frac{1}{c}[\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{w}],$$

wo $\mathfrak{P}$ das elektrische Moment, $\mathfrak{M}$ die Magnetisierung pro Volumeinheit und $\mathfrak{w}$ die Geschwindigkeit der Materie bedeuten. Bei der Ableitung dieser Formeln sondert man die Elektronen in drei Arten. Die erste Art, die Polarisationselektronen, erzeugen durch ihre Verschiebung das elektrische Moment $\mathfrak{P}$; die zweite Art, die Magnetisierungselektronen, erzeugen durch ihre Umläufe das magnetische Moment $\mathfrak{M}$; die dritte Art, die Leitungselektronen, bewegen sich frei in der Materie und erzeugen die beobachtbare Ladungsdichte ϱ_l und den Strom $\mathfrak{C}$. Letzterer ist noch in zwei Teile zu trennen; denn ist $\mathfrak{u}$ die Relativgeschwindigkeit der Elektronen gegen die Materie, so ist die gesamte Geschwindigkeit der Elektronen $\mathfrak{v} = \mathfrak{w} + \mathfrak{u}$, also der von ihnen transportierte Strom

$$\mathfrak{C} = \overline{\varrho\mathfrak{v}} = \overline{\varrho}\mathfrak{w} + \overline{\varrho\mathfrak{u}};$$

$\overline{\varrho}$ ist die beobachtbare Ladung ϱ_l, $\overline{\varrho}\mathfrak{w}$ der Konvektionsstrom, $\overline{\varrho\mathfrak{u}}$ der eigentliche Leitungsstrom $\mathfrak{C}_l$.

Für alle diese Größen existieren Transformationsformeln, von denen einige angegeben werden mögen:

$$\mathfrak{C}_x' = \mathfrak{C}_x, \quad \mathfrak{C}_y' = \mathfrak{C}_y, \quad \mathfrak{C}_z' = a\mathfrak{C}_z - bc\varrho_l, \quad \varrho_l' = a\varrho_l - \frac{b}{c}\mathfrak{C}_z,$$
$$\mathfrak{P}_x' = a\mathfrak{P}_x - \frac{b}{c}(\mathfrak{w}_z\mathfrak{P}_x - \mathfrak{w}_x\mathfrak{P}_z) + b\mathfrak{M}_y,$$
$$\mathfrak{P}_y' = a\mathfrak{P}_y - \frac{b}{c}(\mathfrak{w}_z\mathfrak{P}_y - \mathfrak{w}_y\mathfrak{P}_z) - b\mathfrak{M}_x,$$
$$\mathfrak{P}_z' = \mathfrak{P}_z.$$

Ferner sind folgende Hilfsvektoren von Nutzen:

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{D}], \qquad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{E}],$$

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{B}], \qquad \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{H}].$$

Die angegebenen Feldgleichungen müssen jetzt noch ergänzt werden durch Aufstellung der Beziehungen, die zwischen den Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ bestehen. Man kann diese Relationen auf zwei Weisen gewinnen.

Die erste phänomenologische Methode verfährt so: Man betrachtet einen beliebig bewegten Punkt der Materie und führt ein Bezugssystem ein, in dem dieser ruht; dann wird, falls das den Punkt umgebende Volumelement in dem Ruhesystem isotrop ist, z. B. zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ die für ruhende Körper zutreffende Gleichung gelten

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E},$$

oder auch

$$\mathfrak{D}_1 = \varepsilon\mathfrak{E}_1,$$

weil die Hilfsvektoren $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{E}_1$ für $\mathfrak{w} = 0$ mit $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ identisch sind. Nun transformieren sich aber $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{E}_1$ in gleicher Weise, und daraus folgt, daß auch im ursprünglichen Bezugssystem die Gleichung

$$\mathfrak{D}_1 = \varepsilon\mathfrak{E}_1$$

gültig bleibt. Entsprechend ist

$$\mathfrak{B}_1 = \mu\mathfrak{H}_1.$$

Was den Leitungsstrom betrifft, so bemerken wir nur, daß er von $\mathfrak{E}_1$ abhängt.

Die zweite Methode geht auf die Mechanik der Elektronen zurück. Ebenso wie sich für ruhende Körper die Gleichung $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$ als Folge der Annahme quasi-elastischer Kräfte erweist, die die Elektronen in ihre Ruhelagen zurückziehen, wird man bei bewegten Körpern die Gleichung $\mathfrak{D}_1 = \varepsilon\mathfrak{E}_1$ erhalten, wenn man den quasi-elastischen Kräften diejenigen Eigenschaften zuschreibt, die das Relativitätsprinzip verlangt. Letzteres wird erfüllt sein, wenn man für diese Kräfte den Ausdruck des verallgemeinerten Attraktionsgesetzes ansetzt, wobei R proportional r genommen werden muß.

Ähnliches gilt von der Erklärung des Leitungswiderstandes. Eine befriedigende elektronentheoretische Erklärung der magnetischen Eigenschaften der Körper ist zurzeit nicht vorhanden.

Zum Abschluß soll die Bedeutung der vorstehenden Gleichungen an drei bemerkenswerten Fällen erläutert werden.

Die *erste Bemerkung* knüpft an die Gleichung

$$\varrho_l' = a\varrho_l - \frac{b}{c}\,\mathfrak{E}_s$$

an. Zufolge dieser kann ϱ_l' verschwinden, ohne daß $\varrho_l = 0$ zu sein braucht, wenn nur ein Strom $\mathfrak{C}$ vorhanden ist; d. h. ein Beobachter A wird den Körper für geladen erklären, den ein relativ zu ihm bewegter B für ungeladen halten muß. Man kann das verstehen, wenn man beachtet, daß in jedem Körper gleich viele positive und negative Elektronen vorhanden sind, die sich bei ungeladenen Körpern kompensieren. Bewegt sich der Körper mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$, so werden, wenn ein Leitungsstrom vorhanden ist, beide Elektronenarten verschiedene Gesamtgeschwindigkeiten erhalten, also wird für beide Arten auch die Größe $\omega = a - b\frac{\mathfrak{v}_z}{c}$ verschiedene Werte haben. Berechnet nun ein mit dem Körper bewegter Beobachter B den Mittelwert der Ladungsdichte $\overline{\varrho'} = \overline{\omega\varrho}$ für beide Arten von Elektronen, so kann er die Summe Null erhalten, auch wenn sich für einen Beobachter A, in dessen Bezugssystem der Körper sich bewegt, die Mittelwerte $\bar{\varrho}$ der positiven und negativen Elektronen nicht kompensieren.

Dieser Umstand ruft eine Reminiszenz an eine alte Frage hervor. Um das Jahr 1880 gab es unter den Physikern eine große Diskussion über das *Clausiussche Grundgesetz* der Elektrodynamik. Man wollte damals einen Widerspruch dieses Gesetzes mit den Beobachtungen herleiten, indem man schloß, daß nach dem Gesetze ein auf der Erde befindlicher stromdurchflossener Leiter auf eine mitbewegte Ladung e infolge der Erdbewegung eine Wirkung ausüben müßte, die man hätte auffinden können. Daß das Gesetz tatsächlich diese Wirkung nicht fordert, hat Budde bemerkt; es rührt das daher, daß der Strom durch die Erdbewegung auch auf sich selbst wirkt und eine „Kompensationsladung" auf dem durchflossenen Leiter hervorruft, die jene erste Wirkung genau aufhebt. Zu ähnlichen Schlüssen führt die Elektronentheorie und ich finde für die Dichte der Kompensationsladung, wenn die Geschwindigkeit die Richtung der z-Achse hat,

$$\frac{1}{c^2}\,\mathfrak{w}_z\mathfrak{C}_z;$$

diese muß ein an der Bewegung der Erde nicht teilnehmender Beobachter A als vorhanden annehmen, während sie für einen mitbewegten Beobachter B nicht besteht. Der angegebene Wert stimmt genau mit der aus dem Relativitätsprinzip abgeleiteten Formel überein; denn ist $\varrho_l' = 0$, so findet man aus dieser Formel

$$\varrho_l = \frac{b}{ac}\,\mathfrak{C}_z,$$

und da $\mathfrak{w}_z = \frac{bc}{a}$ nach dem im Vorhergehenden (S. 75) Gesagten die Geschwindigkeit der beiden Bezugssysteme gegeneinander ist, so findet man in der Tat

$$\varrho_l = \frac{1}{c^2}\,\mathfrak{w}_z\mathfrak{C}_z.$$

Die *zweite Bemerkung* geht von den Transformationsgleichungen für das elektrische Moment $\mathfrak{P}$ (S. 84) aus, welche dadurch, daß in ihnen die Magnetisierung $\mathfrak{M}$ vorkommt, die Unmöglichkeit erkennen lassen, scharf zwischen Polarisations- und Magnetisierungselektronen zu unterscheiden. Vielmehr kann in einem magnetisierten Körper ($\mathfrak{M} \neq 0$), von einem Bezugssystem aus beurteilt, $\mathfrak{P} = 0$ sein, während in einem andern Bezugssystem $\mathfrak{P}'$ von Null verschieden ist. Es soll das nun auf einen speziellen Fall angewendet werden, wobei wir uns auf Größen 1. Ordnung beschränken. Der betrachtete Körper (etwa ein Stahlmagnet) enthalte nur Leitungselektronen und solche, die, wenn der Körper ruht, ein $\mathfrak{M}$, aber kein $\mathfrak{P}$ hervorbringen; er habe die Gestalt einer unendlich ausgedehnten ebenen Platte, begrenzt von zwei Ebenen a, b; die Mittelebene machen wir zur yz-Ebene (Fig. 6). Wenn er ruht, möge in der y-Richtung eine konstante Magnetisierung $\mathfrak{M}_y$ bestehen, während $\mathfrak{P} = 0$ ist. Bekommt der Körper in der z-Richtung die Geschwindigkeit v, so wird ein an der Bewegung nicht teilnehmender Beobachter die elektrische Polarisation

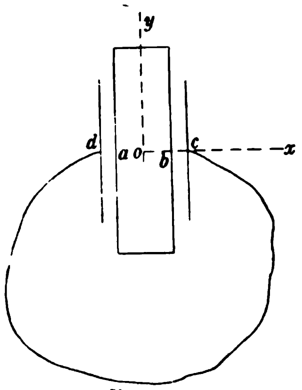

Fig. 6.

$$\mathfrak{P}_x = -\frac{v}{c}\,\mathfrak{M}_y$$

wahrnehmen. Jetzt denken wir uns zu beiden Seiten des Körpers zwei Konduktoren c, d, welche mit ihm zusammen zwei gleiche Kondensatoren bilden, und diese mögen durch einen Draht (von c nach d) kurzgeschlossen sein. Bei der Bewegung werden auf c nud d Ladungen entstehen, die sich so berechnen lassen. Da offenbar ein Strom in der x-Richtung unmöglich ist, ist $\mathfrak{E}_{1x} = 0$ oder $\mathfrak{E}_x = \frac{v}{c}\,\mathfrak{B}_y$. Da der Vorgang stationär ist, wird $\dot{\mathfrak{B}} = 0$; dann folgt aus $\operatorname{rot}\mathfrak{E} = 0$ die Existenz eines Potentials φ. Ist $\varDelta$ die Dicke der Platte, so hat man

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{v}{c}\,\varDelta\,\mathfrak{B}_y.$$

Aus der Symmetrie der Anordnung folgt offenbar

$$\varphi_d - \varphi_a = \varphi_b - \varphi_c,$$

und weil die Platten c, d kurzgeschlossen sind, muß

$$\varphi_d = \varphi_c$$

sein; daraus ergibt sich

$$\varphi_d - \varphi_a = -\frac{v}{2c}\,\varDelta\,\mathfrak{B}_y.$$

Ist γ die Kapazität eines der beiden Kondensatoren, so wird die Ladung der Platte d gleich

$$-\frac{v}{2c}\,\gamma\,\varDelta\,\mathfrak{B}_y,$$

und c bekommt den entgegengesetzt gleichen Betrag.

Jetzt vergleichen wir diesen Vorgang mit dem umgekehrten Fall, daß der Magnet *ab* ruht und die Platten *c, d* sich mit der entgegengesetzten Geschwindigkeit bewegen. Dann müßte nach dem Relativitätsprinzip alles ganz ebenso sein, wie im ersten Falle. In der Tat findet man sofort aus dem gewöhnlichen Induktionsgesetz genau den oben angegebenen Betrag der Ladung auf der Platte *d*. Aber es muß jetzt diese Ladung auf *d* eine entgegengesetzt gleiche auf der Ebene *a* des ruhenden Magneten influenzieren, und Entsprechendes muß für *b* und *c* gelten. Da ein Strom nicht fließen kann ($\mathfrak{C} = 0$), müssen in beiden Fällen, ob der Magnet sich bewegt und die Platten ruhen, oder umgekehrt, dieselben Ladungen auf dem Magneten bestehen. Wir haben uns also zu überlegen, wie es kommt, daß in dem zuerst behandelten Falle auf der Ebene *a* des bewegten Magneten die entgegengesetzte Ladung wie auf der Platte *d* auftritt; es wird dies nur möglich durch jene bei der Bewegung entstehende Polarisation $\mathfrak{P}_x = -\frac{v}{c}\mathfrak{M}_y$. Denn man hat

$$\mathfrak{D}_x = \mathfrak{E}_x + \mathfrak{P}_x = \frac{v}{c}\mathfrak{B}_y - \frac{v}{c}\mathfrak{M}_y;$$

da hier $\mathfrak{P}$ in der Geschwindigkeit von der ersten Ordnung, also das Glied $[\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{w}]$ zu vernachlässigen ist, wird

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{M} = \mathfrak{H},$$

$\mathfrak{H}$ aber ist Null, weil die Platte unendlich ausgedehnt angenommen wird. Daraus folgt

$$\mathfrak{D}_x = 0,$$

in der bewegten Platte findet keine dielektrische Verschiebung statt, also entspricht die Ladung auf *a* der auf *d*, wie es das Relativitätsprinzip verlangt.

Die *letzte Bemerkung* betrifft wiederum den Umstand, daß nach dem Relativitätsprinzip die Bewegung der Erde einen Einfluß auf die elektromagnetischen Vorgänge nicht haben kann. Es ist aber von Liénard auf eine Erscheinung aufmerksam gemacht worden, wo ein solcher Einfluß, und zwar zu einem Betrage 1. Ordnung, zu erwarten sein soll; auch Poincaré hat diesen Fall in seinem Buche Electricité et Optique diskutiert. Es handelt sich um die ponderomotorische Kraft auf einen Leiter. Um diese zu bestimmen, wird man für die auf die Leitungselektronen wirkende Kraft pro Einheit der Ladung den naheliegenden Ansatz machen:

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{B}];$$

dann ergibt sich die durch die Erdbewegung hervorgerufene Kraft auf den Leiter in Richtung der Bewegung vom Betrage

$$\frac{1}{c^2}(\mathfrak{C}_l\cdot\mathfrak{E})\mathfrak{w}_s;$$

da $(\mathfrak{C}_l \cdot \mathfrak{E})$ die vom Leitungsstrom $\mathfrak{C}_l$ entwickelte Wärme ist, ist dieser Ausdruck leicht numerisch zu berechnen (wobei sich freilich ein der Beobachtung unzugänglicher Wert ergibt).

Fragt man sich nun, wie dieses dem Relativitätsprinzip widersprechende Resultat zustande kommen kann, so sieht man, daß man in Wirklichkeit nicht die Kraft berechnet hat, welche auf die Materie des Leiters wirkt, sondern die, welche die im Innern des Leiters beweglichen Elektronen angreift. Letztere Kraft muß erst durch Kräfte, die uns im einzelnen unbekannt sind, auf die Materie übertragen werden, und das geschieht nur dann ohne Änderung der Größe, wenn für die Kräfte zwischen Materie und Elektronen Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung besteht. Für bewegte Körper ist aber in diesem Fall nach dem Relativitätsprinzip die Wirkung nicht gleich der Gegenwirkung, und dieser Umstand kompensiert gerade genau jene Liénardsche Kraft.

Zusammenfassend kann man sagen, daß wenig Aussicht besteht, das Relativitätsprinzip experimentell zu bestätigen; es kommen außer einigen astronomischen Beobachtungen nur die Messungen der Masse der Elektronen in Betracht. Doch darf man nicht vergessen, daß der negative Ausfall verschiedener Versuche, wie des Michelsonschen Interferenzversuches und der Experimente zur Feststellung einer durch die Erdbewegung hervorgerufenen Doppelbrechung, nur durch das Relativitätsprinzip erklärt werden konnte.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.