



HARVARD UNIVERSITY.



LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOOLOGY.

11704

to exchange

November 20, 1906.

11704

DENKSCHRIFTEN
DER
KAISERLICHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

ZWANZIGSTER BAND.



MIT VIII KARTEN UND XIV TAFELN.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.



DENKSCHRIFTEN

DER

KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

ZWANZIGSTER BAND.



WIEN.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

1862.

09/14/88
2nd ed. ntd

INHALT.

Erste Abtheilung.

Abhandlungen von Mitgliedern der Akademie.

| | <u>Seite</u> |
|--|--------------|
| <i>Kreil:</i> Magnetische und geographische Ortsbestimmungen im südöstlichen Europa und einigen Küstenpunkten Asiens. (Mit VIII Karten.) | 1 |
| <i>Hyrtl:</i> Über Wirbelsynostosen und Wirbelsuturen bei Fischen. (Mit III Tafeln.) . . . | 95 |

Zweite Abtheilung.

Abhandlungen von Nicht-Mitgliedern.

| | |
|--|-----|
| <i>Margo:</i> Neue Untersuchungen über die Entwicklung, das Wachsthum, die Neubildung und den feineren Bau der Muskelfasern. (Mit V Tafeln.) | 1 |
| <i>Luschka:</i> Die Museulatur am Boden des weiblichen Beckens. (Mit IV Tafeln.) | 75 |
| <i>Winckler:</i> Allgemeine Transformation der bestimmten Doppel-Integrale | 97 |
| <i>Luschka:</i> Die Venen des menschlichen Halses. (Mit II Tafeln.) | 199 |
| <i>Strauch:</i> Über das umgekehrte Problem der Brennlilien | 227 |



VERZEICHNISS

DER

MITGLIEDER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

(AM ENDE DECEMBER DES JAHRES 1861.)

—xx—

Ehrenmitglieder der Gesamt-Akademie.

Ernennung vom 1. Februar 1848.

Erzherzog **Franz Karl**.
Erzherzog **Ludwig**.
Graf **Münc-Bellinghansen**, Joachim Eduard.
Freiherr von **Pillersdorff**, Franz.

Ernennung vom 12. November 1856.

Erzherzog **Ferdinand Maximilian**.
Freiherr von **Bach**, Alexander.

Ernennung vom 17. November 1860.

Graf **Thun-Hohenstein**, Leo.

Ernennung vom 13. Juni 1861.

Erzherzog **Rainer**.

Mitglieder der philosophisch-historischen Classe.

Im Inlande.

Wirkliche Mitglieder.

(Nach dem Liter. gerichtet.)

Ernennung vom 14. Mai 1847.

| | |
|--|---|
| Grillparzer , Franz Wien. | Wolf , Ferdinand, der Zeit Seeretär der philosophisch-historischen Classe . . . Wien. |
| Arnth , Joseph Ritter von Wien. | Palacky , Franz Prag. |
| Mügel , Karl Freiherr von d. Z. in Brüssel. | |

| | |
|--|--|
| Stülz , Jodok St. Florian. | Müneh-Bellinghausen , Eligius Freih. v. Wien. |
| Jäger , Albert Wien. | Auer , Alois Ritter von Welsbach . . Wien. |
| Cittadella-Vigodarzere , Andreas Graf v. . Padua. | |

Ernennung vom 1. Februar 1848.

| | |
|---|--|
| Bergmann , Joseph Wien. | Karajan , Th. G. von, d. Z. Vice-Präsident der Akademie und Präsident der philos.-historischen Classe . Wien. |
| Pfizmaier , August Wien. | |

Ernennung vom 26. Juni 1848.

Diemer, Joseph Wien.

Ernennung vom 19. Juni 1849.

Springer, Johann Wien.

Ernennung vom 28. Juli 1851.

| | |
|---|--|
| Seidl , Johann Gabriel Wien. | Meiller , Andreas von Wien. |
| Birk , Ernst Wien. | Miklosich , Franz Wien. |

Ernennung vom 24. Juli 1852.

Prokesh-Osten, Anton Freiherr von d. Z. in Constantiuopel.

Ernennung vom 2. Juli 1853.

| | |
|--|---|
| Kandler , Peter Triest. | Phillips , Georg Wien. |
|--|---|

Ernennung vom 5. August 1854.

| | |
|---|---|
| Cicogna , Emanuel Venedig. | Bonitz , Hermann Wien. |
|---|---|

Ernennung vom 12. November 1856.

Aschbach, Joseph Wien.

Ernennung vom 4. September 1857.

Boller, Anton Wien.

Ernennung vom 26. August 1858.

Feil, Joseph Wien.

Ernennung vom 17. November 1860.

Pfeiffer, Franz Wien.

Correspondirende Mitglieder.

Bestätigung vom 1. Februar 1848.

| | |
|---|---|
| Blumberger , Friedrich . . . Göttweig (Österreich u. d. E.). | Keiblinger , Ignaz Melk. |
| Gar , Thomas Trient. | Toldy , Franz Pest. |
| Goldenthal , Jakob Wien. | Wolny , Gregor Raygern. |
| Karadschitsch , Wuk-Stephanowitsch . . Wien. | |

Bestätigung vom 26. Juni 1848.

| | |
|--|---|
| Bauernfeld , Eduard Edler von Wien. | Schuller , Johann Karl Hermannstadt. |
| Reméle , Johann Nep. Wien. | |

Bestätigung vom 19. Juni 1849.

| | | |
|---|--|---|
| Czoernig , Karl Freiherr v. Czernhausen. Wien. | | Ilye-Glunek , Anton Ritter von Wien. |
|---|--|---|

Bestätigung vom 28. Juli 1851.

| | | |
|--|--|--|
| Beidtel , Ignaz Olmütz. | | Pritz , Franz Linz. |
| Edlaner , Franz Wien. | | Schlechta-Wssehrd , Ottokar Freih. v. . . Constantinopel. |
| Gaisberger , Joseph Linz. | | Wocel , Johann Erasmus Prag. |
| Höfler , Constantin Prag. | | |

Bestätigung vom 2. Juli 1853.

| |
|--|
| Günther , Anton Wien. |
|--|

Bestätigung vom 5. August 1854.

| |
|---|
| Kink , Rudolph Triest. |
|---|

Bestätigung vom 26. August 1858.

| | | |
|---|--|---|
| Arneht , Alfred Ritter von Wien. | | Fiedler , Joseph Wien. |
|---|--|---|

Bestätigung vom 26. Jänner 1860.

| |
|--|
| Vahlen , Johann Wien. |
|--|

Bestätigung vom 17. November 1860.

| | | |
|---|--|-------------------------------------|
| Eitelberger v. Edelberg , Rudolf Wien. | | Lott , Franz Wien. |
| Fieker , Julius Innsbruck. | | |

Bestätigung vom 13. Juni 1861.

| | | |
|--|--|---|
| Gindely , Anton Prag. | | Lorenz , Ottokar Wien. |
|--|--|---|

Im Auslande.

Ehrenmitglieder.

Ernennung vom 1. Februar 1848.

| | | |
|--|--|--|
| Grimm , Jakob Ludwig Berlin. | | Pertz , Georg Heinrich Berlin. |
| Guizot , Franz Peter Wilhelm Paris. | | Reinaud , Jos. Toussaint Paris. |

Ernennung vom 19. Juni 1849.

| |
|--|
| Rau , Karl Heinrich Heidelberg. |
|--|

Ernennung vom 18. October 1855.

| |
|--|
| Boeckh , August Berlin. |
|--|

Ernennung vom 17. November 1860.

| |
|---------------------------------------|
| Bopp , Franz Berlin. |
|---------------------------------------|

Ernennung vom 13. Juni 1861.

| |
|---|
| Diez , Friedrich Bonn. |
|---|

Correspondirende Mitglieder.

Bestätigung vom 1. Februar 1848.

| | | |
|--|--|--|
| Böhmer , Johann Friedrich Frankfurt a. M. | | Maelen , Philipp van der Brüssel. |
| Cibrario , Giovanni Antonio Luigi Nobile. Turin. | | Michel , Francisque Bordeaux. |
| Flügel , Gustav Lebrecht Dresden. | | Mohl , Julius von Paris. |
| Haupt , Moriz Berlin. | | |

Bestätigung vom 26. Juni 1848.

| | |
|--|--|
| Bland , Nahaniel London. | Uhland , Ludwig Tübingen. |
| Gervinus , Georg Gottfried Heidelberg. | Wilkinson , John Gardener London. |
| Stälin , Christoph Friedrich Stuttgart. | |

Bestätigung vom 19. Juni 1849.

| | |
|--|---|
| Brandis , August Bonn. | Kerekhove , Joseph Vicomte de Malines. |
| Gachard , Ludwig Prosper Brüssel. | Kopp , Euty chius Luzern. |
| Gerhard , Eduard Berlin. | Ritter , Heinrich Göttingen. |

Bestätigung vom 28. Juli 1851.

Lanz, Karl Cannstadt.

Bestätigung vom 24. Juli 1852.

Gayangos, Paseual de Madrid.

Bestätigung vom 2. Juli 1853.

Mone, Franz Joseph Karlsruhe.

Bestätigung vom 5. August 1854.

| | |
|---|---|
| Rossi , Francesco Mailand. | Voigt , Johannes Königsberg. |
|---|---|

Bestätigung vom 18. October 1855.

| | |
|---|--|
| Du-Ménil Édéléstand Paris. | Wattenbach , Wilhelm Breslau. |
|---|--|

Bestätigung vom 12. November 1856.

Schleicher, August Jena.

Bestätigung vom 4. September 1857.

Lange, Ludwig Giessen.

Ernannt als w. M. am 26. Jänner 1860.

Weinhold, Karl Kiel.

Mitglieder der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe.

Im Inlande.

Wirkliche Mitglieder.

Nach dem Alter geordnet.

Ernennung vom 14. Mai 1847.

| | |
|--|---|
| Santini , Johann Padua. | Kreil , Karl Wien. |
| Zippe , Franz Wien. | Unger , Franz Wien. |
| Stampfer , Simon Wien. | Schrötter , Anton, d. Z. General-Secretär und Secretär der mathematisch- naturwissenschaftlichen Classe. . . . Wien. |
| Baumgartner , Andreas Freiherr v. d. Z. Präsident der Akademie Wien. | Redtenbacher , Joseph Wien. |
| Haidinger , Wilhelm Wien. | Hyrtl , Joseph Wien. |
| Ettingshausen , Andreas Ritter v. Wien. | |

Ernennung vom 1. Februar 1848.

| | |
|---|---|
| Koller , Marian Wien. | Fenzl , Eduard Wien. |
| Burg , Adam Ritter von Wien. | Reuss , August Emanuel Prag. |

Ernenning vom 26. Juni 1848.

Fitzinger, Leopold Wien.

Ernenning vom 17. Juli 1848.

| | |
|--|--|
| Boué , Ami Wien. | Škoda , Joseph Wien. |
| Diesing , Karl Wien. | Rochleder , Friedrich Prag. |
| Rokitansky , Karl Wien. | |

Ernenning vom 19. Juni 1849.

| | |
|---|---------------------------------------|
| Petzval , Joseph Wien. | Brücke , Ernst Wien. |
|---|---------------------------------------|

Ernenning vom 2. Juli 1853.

Littrow, Karl von Wien.

Ernenning vom 4. September 1857.

| | |
|--|--------------------------------------|
| Gottlieb , Johann Graz. | Ludwig , Karl Wien. |
|--|--------------------------------------|

Ernenning vom 17. November 1860.

| | |
|---|---|
| Parkyné , Johann Prag. | Hauer , Franz Ritter von Wien. |
| Kner , Rudolph Wien. | |

Ernenning vom 13. Juni 1861.

Stein, Friedrich Prag.**Correspondirende Mitglieder.**

Bestätigung vom 1. Februar 1848.

| | |
|--|---|
| Hanslab , Franz Ritter von . . . d. Z. in Prag. | Redtenbacher , Ludwig Wien. |
| Hessler , Ferdinand Wien. | Russegger , Joseph Ritter von Sehemnitz. |
| Kunzek , August Wien. | Schott , Heinrich Schönbrunn. |

Bestätigung vom 26. Juni 1848.

| | |
|--|--|
| Balling , Karl Prag. | Moth , Franz Wien. |
| Freyer , Heinrich Triest. | Reichenbach , Karl Freiherr von Wien. |
| Gintl , Wilhelm Wien. | Reissek , Siegfried Wien. |
| Löwe , Alexander Wien. | Wertheim , Theodor Graz. |

Bestätigung vom 19. Juni 1849.

| | |
|---------------------------------------|--|
| Fritsch , Karl Wien. | Weisse , Maximilian Krakau. |
| Wedl , Karl Wien. | |

Bestätigung vom 2. Juli 1853.

| | |
|--|--|
| Ettingshausen , Constantin Ritter von . . . Wien. | Reslnber , Augustin Kremsmünster. |
|--|--|

Bestätigung vom 4. September 1857.

| | |
|---|--------------------------------------|
| Hornstein , Karl Wien. | Langer , Karl Wien. |
|---|--------------------------------------|

Bestätigung vom 17. November 1860.

| | |
|--|---|
| Czermak , Johann Prag. | Stefan , Joseph Wien. |
| Blasiwetz , Heinrich Innsbruck. | Suess , Eduard Wien. |
| Hörnes , Moriz Wien. | Wüllerstorff-Urbair , Bernhard Freih. v. Triest. |

Bestätigung vom 13. Juni 1861.

| | |
|--|--|
| Kotschy , Theodor Wien. | Winkler , Anton Graz. |
| Peters , Karl Wien. | |

Im Auslande.

Ehrenmitglieder.

Ernennung vom 1. Februar 1848.

| | | |
|---|--|---|
| Faraday, Michael London. | | Hiebig, Justus Freiherr von München. |
|---|--|---|

Ernennung vom 19. Juni 1849.

| |
|---|
| Herschel, Sir John London. |
|---|

Ernennung vom 2. Juli 1853.

| |
|--|
| Dumas, Jean Baptiste Paris. |
|--|

Ernennung vom 18. October 1855.

| |
|--|
| Struve, Friedrich G. W. von St. Petersburg. |
|--|

Ernennung vom 26. Jänner 1860.

| | | |
|---------------------------------------|--|---|
| Mohl, Hugo Tübingen. | | Nemann, Franz E. Königsberg. |
|---------------------------------------|--|---|

Ernennung vom 17. November 1860.

| |
|---|
| Biot, Jean Baptiste Paris. |
|---|

Correspondirende Mitglieder.

Ernannt als w. M. am 14. Mai 1847.

| |
|--|
| Carlini, Franz Mailand. |
|--|

Bestätigung vom 1. Februar 1848.

| | | |
|---|--|---|
| Bunsen, Robert Wilhelm Heidelberg. | | Quetelet, Lambert Adolphe Jacques Brüssel. |
| Élie de Beaumont, Léonce Paris. | | Rose, Heinrich Berlin. |
| Eneke, Johann Franz Berlin. | | Steinheil, Karl August München. |
| Martius, Karl Friedrich Philipp von München. | | Tschudi, Johann Jakob von d. Z. Jakobshof bei Wr. - Neustadt. |
| Meyer, Hermann von Frankfurt a. M. | | Weber, Ernst Leipzig. |
| Mitscherlich, Eilard Berlin. | | Weber, Wilhelm Eduard Göttingen. |
| Panizza, Bartholomäus Ritter von Pavia. | | Wöhler, Friedrich Göttingen. |
| Poggendorff, Johann Christian Berlin. | | |

Bestätigung vom 26. Juni 1848.

| | | |
|---|--|--|
| Agassiz, Louis Boston. | | Mädler, Johann Heinrich Dorpat. |
| Bischoff, Theodor Ludwig Wilhelm München | | Milne Edwards, Henry Paris. |
| Dove, Heinrich Wilhelm Berlin. | | Owen, Richard London. |
| Ehrenberg, Christian Gottfried Berlin. | | Schleiden, Matthias Jakob Jena. |
| Grunert, Johann August Greifswald. | | |

Bestätigung vom 19. Juni 1849.

| |
|---|
| Barraude, Joachim Paris. |
|---|

Bestätigung vom 28. Juli 1851.

| | | |
|---|--|---|
| Argelander, Friedrich Wilh. August Bonn. | | Brewster, Sir David Edinburgh. |
| Baer, Karl Ernst von St. Petersburg. | | Du Bois-Reymond, Emil Heinrich Berlin. |

Bestätigung vom 26. Jänner 1860.

| | | |
|--|--|--|
| Helmholtz, Heinrich Heidelberg. | | Plücker, Julius Bonn. |
|--|--|--|

VERÄNDERUNGEN IM PERSONALSTANDE DER AKADEMIE SEIT IHRER GRÜNDUNG.

Mit Tode abgegangen.

Ehrenmitglieder der Gesamtakademie:

Kübeck von Kütbau, Karl Friedrich Freiherr v., 11. September 1855.
Inzaghi, Karl Graf von, 17. Mai 1856.
Metternich, Fürst Clemens, 11. Juni 1859.
Kolowrat-Liebsteinsky, Graf Franz Anton, 21. April 1861.

Philosophisch-historische Classe.

Im Inlande.

Wirkliche Mitglieder:

| | |
|--|---|
| <p>Wenrich, Georg, 15. Mai 1847. Pyrker, Franz Ladislaus von Felső-Eör, 2. Dec. 1847. Muchar, Albert von, 6. Juni 1849. Fenchtersleben, Ernst Freiherr v., 3. September 1849. Grauert, Wilhelm, 10. Jänner 1852. Litta, Pompeo, 17. August 1852. Kudler, Joseph Ritter von, 6. Februar 1853. Exner, Franz, 21. Juni 1853.</p> | <p>Labns, Johann, 6. October 1853. Teleky, Joseph Graf v., 15. Februar 1855. Kemény, Joseph Graf von, 12. September 1855. Hammer-Purgstall, Joseph Freiherr von, 23. Nov. 1856. Weber, Beda, 28. Februar 1858. Chmel, Joseph, 28. November 1858. Ankershofen, Gottlieb Freiherr von, 6. März 1860. Schafarik, Paul, 26. Juni 1861.</p> |
|--|---|

Correspondirende Mitglieder:

| | |
|--|---|
| <p>Spaun, Anton Ritter von, 26. Juni 1849. Kiesewetter, Raphael Edler von, 1. Jänner 1850. Frast, Johann von, 30. Jänner 1850. Fischer, Maximilian, 26. December 1851. Schlager, Johann, 18. Mai 1852. Jaszay, Paul von, 29. December 1852.</p> | <p>Filz, Michael, 19. Februar 1854. Zappert, Georg, 22. November 1859. Firnhaber, Friedrich, 19. September 1860. Hanka, Wenzel, 12. Jänner 1861. Wartinger, Joseph, 15. Juni 1861.</p> |
|--|---|

Im Auslande.

Ehrenmitglieder:

| | |
|---|---|
| <p>Hermann, Johann Gottfried, 31. December 1848. Mai, Angelo, 8. September 1854.</p> | <p>Ritter, Karl, 28. September 1859. Wilson, Horaz Haymann, 8. Mai 1860.</p> |
|---|---|

Correspondirende Mitglieder:

| | |
|--|---|
| <p>Letronne, Anton Johann, 14. December 1848. Orelli, Johann Kaspar von, 6. Jänner 1849. Burnouf, Eugène, 28. Mai 1852.</p> | <p>Schmeller, Andreas, 27. Juli 1852. Baranda, Sainz de, 27. August 1853. Steuzel, Gustav, 2. Jänner 1854.</p> |
|--|---|

Raoul-Rochette, Desiré, 6. Juli 1854.
Creuzer, Friedrich Georg, 16. Februar 1858.
Thiersch, Friedrich von, 25. Februar 1860.

Dahlmann, Friedrich Christoph, 5. December 1860.
Fallmerayer, Jakob Philipp, 26. April 1861.
Gfrörer, August Friedrich, 10. Juli 1861.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe.

Im Inlande.

Wirkliche Mitglieder:

Balbi, Adrian Edler von, 13. März 1848.
Ruseoui, Maurus, 27. März 1849.
Presl, Johann Swatopluk, 7. April 1849.
Doppler, Christian, 17. März 1853.
Prechtl, Johann Ritter von, 28. October 1854.

Partsch, Paul, 3. October 1856.
Heekel, Jakob, 1. März 1857.
Leydolt, Franz, 10. Juni 1859.
Kollar, Vincenz, 30. Mai 1860.

Correspondirende Mitglieder:

Corda, August Joseph, im Jahre 1849.
Presl, Karl, 2. October 1852.
Petrina, Franz, 27. Juni 1855.

Salomon, Joseph, 2. Juli 1856.
Hruschauer, Franz, 21. Juni 1858.

Im Auslande.

Ehrenmitglieder:

Berzelius, Johann Jakob Freiherr von, 7. August 1848.
Bach, Leopold von, 4. März 1853.
Gauss, Karl Friedrich, 23. Februar 1855.

Müller, Johannes, 28. April 1858.
Brown, Robert, 10. Juni 1858.
Humboldt, Alexander von, 6. Mai 1859.

Correspondirende Mitglieder:

Jacobi, Karl Gustav Jakob, 18. Februar 1851.
Fuchs, Wilhelm, 28. Jänner 1853.
Fuss, Paul Heinrich von, 24. Jänner 1855.
Gmelin, Leopold, 13. April 1855.
Fuchs, Johann Nepomuk von, 5. März 1856.

Hansmann, J. F. Ludwig, 26. December 1859.
Bordoni, Anton, 26. März 1860.
Belli, Joseph, 1. Juni 1860.
Wertheim, Wilhelm, 20. Jänner 1861.

Ausgetreten sind die wirklichen Mitglieder:

Endlicher, Stephan, am 11. März 1848.

Dessewffy, Emil Graf, am 9. März 1849.

Erste Abtheilung.

Abhandlungen von Mitgliedern der Akademie.

Mit 8 Karten und 3 Tafeln.

MAGNETISCHE UND GEOGRAPHISCHE
ORTSBESTIMMUNGEN IM SÜDÖSTLICHEN EUROPA
UND EINIGEN KÜSTENPUNKTEN ASIENS.

VON

KARL KREIL,

WIRKLICHEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MIT VIII KARTEN.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 21. JUNI 1859.

Die Beobachtungen, welche bisher ausgeführt worden sind um die Abhängigkeit der Äusserungen der magnetischen Erdkraft von dem geographischen Orte darzustellen, haben gezeigt, dass diese Abhängigkeit nicht so einfachen Gesetzen unterliege als man früher vermuthete, sondern dass die Beschaffenheit der Erdrinde darauf einen grossen Einfluss ausübe. Denn ausserdem dass manche Punkte, an denen sich magnetische Mineralien in grösseren Massen angehäuft finden, örtliche Störungen hervorbringen, deren Wirkung sich manchmal auf kurze, manchmal aber auf bedeutende Entfernung erstreckt, sieht man, dass diese Abhängigkeit in Gebirgsgegenden eine andere ist, als in der Ebene. So ändert sich im Gebiete der österreichischen Monarchie die magnetische Declination und die Intensität in den Gegenden der Alpen in ganz anderer Weise als in Böhmen und an den Ufern des adriatischen Golfes oder in den Ebenen Ungarns; die Curven gleicher Inclination liegen sich unter dem 40. — 45. Breitengrad viel näher als vom 45. — 50.

Schon daraus wird ersichtlich, dass man, wenigstens auf dem Festlande, aus Bestimmungen, die an weit entlegenen Orten über die magnetischen Elemente gemacht worden sind, nicht schliessen kann auf die Werthe, die ihnen in den Zwischenstationen zukommen, und dass die Annahmen über dieselben eben so gut Dichtung als Wahrheit sein können.

Hiezu kommt noch die grosse Veränderlichkeit dieser Elemente der Zeit nach, welche noch viel zu wenig erforscht ist, um sagen zu können, bis zu welcher örtlichen Entfernung die säculäre Änderung als gleich oder nahezu gleich angesehen werden dürfe.

Wir sind also noch weit davon entfernt, hinreichendes Materiale zu besitzen, um den magnetischen Zustand eines grösseren Stückes unseres Planeten, z. B. nur Europa's, so zu erkennen, wie es tiefere wissenschaftliche Forschungen und praktische Zwecke erheischen, oder auch nur um verlässliche magnetische Karten davon zu entwerfen. Da in manchen Ländern dieses Erdtheils die Felder der Wissenschaft überhaupt noch brach liegen, in anderen gerade dieser Zweig in auffallender Weise vernachlässigt wird, so genügt es nicht, den Acker vor der eigenen Thür zu bestellen, man muss sich auch manche Übergriffe in fremdes Gebiet erlauben.

Diese Gründe bewogen mich, den Plan zu einer Reise auszuarbeiten, die den südöstlichen Theil von Europa umfassen, und die Erforschung der magnetischen Verhältnisse bezwecken sollte. Er wurde dem hohen Ministerium für Cultus und Unterricht mitgetheilt, welches, einverständlich mit dem hohen Handelsministerium, denselben zu genehmigen gerulhte, und mir dessen Ausführung im Verlaufe des Sommers 1858 auftrug, zu deren Erleichterung auch die Gesellschaften der Donau-Dampfschiffahrt und des österreichischen Lloyd kräftigst beitrugen. Die hohe k. k. Central-Seebehörde drückte den Wunsch aus, dass bei dieser Gelegenheit mehrere Punkte an den Küsten des schwarzen Meeres bestimmt würden, und das hohe k. k. Marine-Obercommando stellte zu diesem Zwecke S. M. Dampfer Taurus zur Verfügung, welcher mich Ende September in Konstantinopel aufnahm.

Es liegt mir die angenehme Pflicht ob, den genannten hohen Stellen und Gesellschaften für die mächtige Unterstützung meines Antrages den tiefsten Dank und die Überzeugung auszusprechen, dass jedem Unternehmen, das der Wissenschaft einen Fortschritt verspricht, dort stets die wärmste Aufnahme und Förderung zu Theil werden wird.

Die Reise begann am 18. Mai und dauerte bis 7. November, von welcher Zeit ein halber Monat, vom 20. Juni bis 6. Juli, zur Bereisung der im südlichen Ungarn und in Siebenbürgen gelegenen meteorologischen Stationen verwendet wurde. Die Beobachtungsorte waren

in Serbien: Belgrad, Poschega, Alexinatz;

in der Wallachei: Kalafat und Bukarest;

in der Moldau: Galatz;

in dem übrigen Gebiete

der europäischen Türkei: Sulina, Konstantinopel, Ortaköj, Bujuk Liman, Burgasz, Cap Kalakri, die Schlangeninsel;

in der asiatischen Türkei: Trapezunt, Sinope, Cap Indje;

in Russland: Odessa, Cap Takli, Cap Chersones.

In dem ursprünglich ausgearbeiteten Plane war auch die Bereisung von Bosnien begriffen, allein die mittlerweile dort ausgebrochenen Unruhen machten sie unausführbar. Auch hoffte ich in dem Gebiete jenseits des Balkans einige Stationen, wie Adrianopel, Philippopel, Sofia und Uskup, einlegen und über Griechenland nach Triest zurückkehren zu können. Aber der von der k. k. Central-Seebehörde ausgedrückte Wunsch, der Bereisung der Küsten des schwarzen Meeres eine grössere Ausdehnung zu geben als ich früher beabsichtigte, ein Wunsch, der, wie man im Verlaufe dieser Abhandlung sehen wird, sowohl in wissenschaftlicher als praktischer Beziehung vollkommen gegründet war, nahm so viele Zeit in Anspruch, dass von der Landreise und der Rückkehr über Griechenland abgegangen werden musste.

Die Instrumente zur Ausführung der Beobachtungen waren grösstentheils dieselben, welche zu den früheren Reisen verwendet worden sind, nämlich:

- ein Taschen-Chronometer, Nr. 7988, von Dent;
- ein Box-Chronometer, Nr. 140, von Tiede;
- ein Patent-Sextant, Nr. 41, von Pistor;
- ein Universal-Instrument, ausgeführt von Herrn Starke im k. k. polytechnischen Institute in Wien, mit $5\frac{1}{2}$ zölligem Azimuthal-, $4\frac{1}{2}$ zölligem Höhenkreise;
- ein magnetischer Theodolit von Lamont, derselbe welcher schon zur Bereisung des adriatischen Golfes gedient hatte;
- ein Inclinatorium von Repsold mit zwei Nadeln, die von dem Mechaniker Gruber in Wien hiezu gemacht worden waren;
- ein Gefäss-Barometer von Fortin;
- ein Metall-Barometer von Bourdon et Richard.

Die Vergleichung des magnetischen Theodoliten von Lamont (II) mit demjenigen (I), an welchem in Wien die Beobachtungen ausgeführt werden, zeigt einen Unterschied, welcher nicht übersehen werden darf, wenn man die Reisebeobachtungen an die hiesigen anschliessen will. Da er mit zwei Magneten versehen ist, welche auch einen constanten Unterschied zeigen, so wurden in der folgenden Tafel dieser und die Verschiedenheit zwischen den Theodoliten I und II zusammengestellt. Weil an dem Theodoliten I keine strengen gleichzeitigen Beobachtungen ausgeführt werden konnten, ohne einen zweiten Beobachter zu Hilfe zu rufen, bei welchem die Personalgleichung ins Spiel gekommen wäre, so zog man es vor, den Theodoliten II mit dem Variations-Apparate zu vergleichen, an welchem eine solche ganz unmerklich wird, und für welchen die Reductions-Coëfficienten stets aus den Beobachtungen mit I gefunden werden.

TAFEL I.

Unterschied zwischen Theodoliten I und II.

| Zeit | Theodolit II Mittel beider Magnete | Differenz der Magnete 1—2. | Variat. App. in Wien | Variat. App. — Theod. II. |
|--------------------------------------|--|-------------------------------|-------------------------|------------------------------|
| 1854. 23. November 23 ^h 7 | 2·00635 | + 0·0063 | 2·00481 | — 0·00154 |
| „ 24. „ 23 ^h 6 | 2·00825 | + 0·0021 | 2·00494 | — 0·00331 |
| 1855. 13. Februar 1 ^h 3 | 2·00650 | + 0·0030 | 2·00497 | — 0·00153 |
| „ 16. „ 1 ^h 3 | 2·00735 | + 0·0043 | 2·00764 | + 0·00029 |
| „ 14. April 1 ^h 3 | 2·00420 | + 0·0060 | 2·00599 | + 0·00179 |
| „ 14. Mai 1 ^h 5 | 2·00865 | + 0·0033 | 2·00783 | — 0·00082 |
| „ 14. Juni 22 ^h 8 | 2·00625 | + 0·0037 | 2·00212 | — 0·00383 |
| 1856. 18. October 1 ^h 3 | 2·01420 | + 0·0030 | 2·00703 | — 0·00717 |
| 1858. 20. April 21 ^h 9 | 2·01675 | + 0·0031 | 2·01201 | — 0·00474 |
| „ 12. Mai 22 ^h 3 | 2·01900 | + 0·0026 | 2·01079 | — 0·00821 |
| „ 17. November 22 ^h 8 | 2·01900 | + 0·0008 | 2·01025 | — 0·00875 |
| „ 11. December 22 ^h 5 | 2·01360 | + 0·0036 | 2·01179 | — 0·00181 |

Die letzte Spalte dieser Tafel lehrt, dass der Unterschied zwischen beiden Instrumenten sich fast immer in demselben Sinne bemerklich macht, und in den ersten Jahren klein ist, in den letzten aber grösser und sehr veränderlich wird, was bei der starken Abnützung des

Theodoliten II, besonders während der letzten Reise wohl nicht unerwartet ist, aber das Anbringen einer Correction so erschwert, dass es vielleicht eben so gut ist, es zu unterlassen.

Die zwei von Gruber gearbeiteten, mit 5 und 6 bezeichneten Inclinations-Nadeln sind nach dem Muster der Repsold'schen ausgeführt, aber besser ausgeglichen, so dass sie in den vier verschiedenen Bogen mehr übereinstimmende Ablesungen geben als jene. Bezeichnet man den Unterschied der zwei Ablesungen bei Kreis Ost durch O , jenen bei Kreis West durch W , so hat man im Mittel aus 20 Ablesungen die in der folgenden Tafel zusammengestellten Zahlen.

TAFEL II.

Vergleichsbeobachtungen mit den Inclinationsnadeln.

| Nadel | O | W | Inclination in Wien |
|-------|-------|--------|------------------------|
| 1 | 6° 0' | 5° 21' | 64° 6'6 |
| 2 | 1 2 | 1 5 | 64 11·3 |
| 3 | 4 3 | 4 12 | 64 2·9 |
| 4 | 13 41 | 13 37 | 64 22·2 |
| 5 | 0 34 | 0 33 | 63 56·3 |
| 6 | 0 20 | 0 19 | 64 1·9 |

Die letzte Spalte enthält das Resultat der Vergleichsbeobachtungen, welche in Wien mit allen Nadeln angestellt worden sind. Nach diesen ist das

Mittel aus den 4 Nadeln von Repsold 64° 10'75

„ „ „ 2 „ „ Gruber 63 59·10

Es ist wahrscheinlich, dass die weniger ausgeglichene Nadel 4 die Inclination zu gross angibt. Lässt man ihre Angabe weg, so ist aus den übrigen dreien

das Mittel 64° 6'93

Unterschied Repsold-Gruber = +7'83

Zieht man auch die Nadel 4 in Berechnung, so wird

der Unterschied R—G = +11'65

welche Grössen dienen um die auf der Reise gefundenen Werthe der Inclination mit den in Wien von den Repsold'schen Nadeln gegebenen zu vergleichen.

An manchen Stationen, wo das Inclinatorium von Repsold nicht mitgenommen wurde, diente der magnetische Theodolit, der mit einer Vorrichtung, dieses Element durch Induction zu bestimmen, versehen ist, zu demselben Zwecke. Ist nämlich

$2D'$ die Summe der von den Eisenstäben bewirkten Ablenkungen der Nadel zu beiden Seiten des magnetischen Meridians,

ω und σ die Grösse um welche der die Stäbe tragende Ring bei östlicher Ablenkung der Nadel im Osten und Süden zu hoch steht,

ω' und σ' dieselben Grössen bei westlicher Ablenkung,

t die während der Beobachtung abgelesene Temperatur nach Réaumur,

so ist die verbesserte Ablenkung

$$D = D' + 1'75 (\omega' - \omega) + 2'06 (\sigma + \sigma') + 0'924 (10^\circ - t).$$

Wurde neben der Ablenkung D auch die Inclination I beobachtet, und hat man an einem zweiten Orte die mit denselben Constanten corrigirte Ablenkung ϕ gefunden, so ist dort die Inclination gegeben durch die Formel

$$\text{tg. Incl.} = \frac{\text{tg } I}{\sin D} \sin \phi.$$

Die Inductionskraft der Eisenstäbe erlangt erst nach Jahren einen unveränderlichen Werth und bis dahin ist natürlich auch jener der Constante $\frac{\text{tg } I}{\sin D}$, die zur Berechnung der Inclination dient, veränderlich. Die Werthe derselben für Wien ersieht man aus der folgenden Tafel.

TAFEL III.

Constanten des Inductions Inclinatoriums.

| Zeit | D | I | Constante |
|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|
| 1851. 27. Mai | 18° 53' 3 | 64° 17' 2 | 6·4149 |
| „ 21. November | 18 23·2 | 64 16·5 | 6·5890 |
| 1855. 19. Juli | 17 58·4 | 61 11·5 | 6·7161 |
| „ 17. November | 17 56·6 | 61 12·0 | 6·7117 |
| 1856. 18. October | 17 41·6 | 64 15·5 | 6·8212 |
| 1857. 17. Juni | 17 31·2 | 64 9·6 | 6·8397 |
| „ 17. September | 17 28·1 | 61 11·8 | 6·8902 |
| 1858. 17. April | 17 27·0 | 64 9·9 | 6·8875 |
| „ 12. Mai | 17 27·8 | 64 9·8 | 6·8820 |
| „ 11. December | 17 32·1 | 64 8·1 | 6·8412 |

Es scheint, dass die Inductionskraft der diesem Apparate beigegebenen Eisenstäbe erst jetzt constant geworden ist, denn die kleinen seit dem Jahre 1857 ersichtlichen Schwankungen können äusseren Einflüssen und Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden. Für die früheren Jahre wurde die Constante meistens vor und nach der Reise bestimmt, und während derselben der Zeit proportional angenommen.

Auf der Reise des vergangenen Sommers (1858) aber wurde sie an mehreren Stationen, wo die Inclination auch mit dem Inclinatorium von Repsold gemessen worden war, gesucht, und das Ergebniss dieser Bestimmungen zur Berechnung der Inclination an jenen Orten angewendet, an welchen man sich bloß des Inductionsverfahrens bedient hatte.

Die Längen wurden an Stationen, wo sich Telegraphenämter befanden und die Correspondenz mit Wien nicht unterbrochen war, durch telegraphische Zeichen bestimmt, wie dies bereits vor zehn Jahren bei Gelegenheit der Bereisung der österreichischen Monarchie behufs magnetischer Beobachtungen von mir ausgeführt worden ist¹⁾. Die k. k. Direction der Staats-telegraphen hatte sich zu diesem Zwecke mit den Telegraphenämtern Serbiens und der Donaufürstenthümer ins Einvernehmen gesetzt, und die dortigen Beamten leisteten die bereitwilligste Hilfe. Nach einer mit Herrn Director von Littrow, der mit Herrn Hornstein die von der

¹⁾ Sitzungsberichte I. Bd., Sitzung vom 30. Nov. 1848.

Station gegebenen Zeichen in Wien beobachtete, getroffenen Verabredung wurde ein oder zwei Tage früher von der Station die Nachricht mitgetheilt, zu welcher Zeit man dort bereit sei die Zeichen zu geben und zu empfangen, und die Ankunft dieser Nachricht von Wien aus bestätigt. Zu dieser festgesetzten Zeit wurde ein Vorzeichen gegeben, um anzuzeigen, dass alles in Bereitschaft sei, und unmittelbar darauf, nach einer oder einer halben Minute erfolgte die erste Zeichenreihe, die aus sechs einzelnen Schlägen bestand, deren jeder von den folgenden um zehn Zeitsecunden abstand. Sie wurde abwechselnd in entgegengesetzter Richtung (nämlich von Wien gegeben und in der Station beobachtet, oder umgekehrt), so oft wiederholt, als man es für nöthig hielt ein sicheres Ergebniss zu erlangen.

Nach mehreren, an verschiedenen Stationen angestellten Versuchen ist die Zeitfrist, welche der elektrische Strom nöthig hat, um entlegene Orte zu erreichen, selbst wenn er mehrere Translatoren durchgehen muss, verschwindend klein, und es wurde z. B. diese Frist für die Entfernung von Bukarest und wieder zurück zu 2 bis 4 Zehntel einer Zeitsecunde gefunden, worin noch die Verzögerung durch die Auffassung des Zeichens, die Rückgabe nach dessen Ankunft und die Personalgleichung einzurechnen sind.

Die Längen der übrigen Stationen mussten durch die Chronometer bestimmt werden, deren Gang aber bei den verschiedenartigen Transportmitteln keineswegs so gleichförmig war, um ganz verlässliche Resultate zu geben. Es wird daher, um ein Urtheil über den Werth dieser Bestimmungen fällen zu können, am besten sein, den Gang der beiden Chronometer vor und während der Reise anzugeben. Es muss hiebei bemerkt werden, dass der Chronometer Dent zu den Beobachtungen diente, daher sehr oft der Sonnenhitze ausgesetzt, und überhaupt viel weniger geschont wurde als Tiede.

Täglicher Gang der Chronometer vor der Reise.

| | | | | | |
|----------------------------|-------------|------------------------|--------------|-----------------------|-----------------|
| Vom 30. März bis 12. April | Gang Dent's | = + 3 ⁷ 23, | Gang Tiede's | = + 2 ⁷ 23 | zurückbleibend. |
| " 12. April " 22. " | " " " | = + 3 ⁰ 05, | " " " | = + 2 ³ 33 | " |
| " 22. " " 29. " | " " " | = + 2 ⁸ 89, | " " " | = + 2 ⁷ 77 | " |
| " 29. " " 6. Mai | " " " | = + 2 ⁸ 85, | " " " | = + 3 ⁰ 06 | " |
| " 6. Mai " 14. " | " " " | = + 2 ⁰ 05, | " " " | = + 3 ⁰ 05 | " |

Gang der Chronometer während der Reise.

In der folgenden Tafel gibt die dritte Spalte ($D—T$) den Stand Tiede's gegen Dent aus einer Vergleichung beider Chronometer, die um 9 Uhr Abends gemacht oder auf diese Zeit zurückgeführt wurde. Die vierte Spalte $d(D—T)$ gibt die Unterschiede zweier auf einander folgender Zahlen der vorherigen Spalte, also den relativen Gang Tiede's gegen Dent. Die nebenstehenden eingeklammerten Zahlen deuten an, dass die beigesetzte Zahl für mehrere Tage gelte, wenn nämlich keine Vergleichung der Uhren vorgenommen wurde. Die fünfte Spalte enthält den aus den Beobachtungen der Sonnenhöhen abgeleiteten Gang Dent's. Die Beobachtungstage, aus denen derselbe gefunden wurde, sind in der Spalte angegeben. Er gilt für die ganze Periode des Mittels, dem er beigesetzt ist, und dient auch zur Auffindung des Ganges Tiede's, indem man das Mittel der vorhergehenden Spalte hinzu addirt.

TAFEL IV.

Gang der Chronometer während der Reise.

| Ort | Tag | $D-T$ | $d(D-T)$ | Gang Dent's aus den Beobachtungen | Gang Tiede's | Anmerkungen. |
|--------------------------|---------|------------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|-------------------|--|
| Mohaes | Mai 20 | +10 ¹ 26 ⁷ 4 | | | | Dent eingestellt. |
| Semlin | " 21 | 10 29·0 | +2 ⁷ 6 | | | |
| Belgrad | " 25 | 25 16·2 | | | | |
| " | " 26 | 25 18·7 | 2·5 | | | |
| " | " 27 | 25 21·4 | 2·7 | | | |
| " | " 28 | 25 23·4 | 2·0 | | | |
| Kragujevaz | " 29 | 25 25·1 | 1·7 | | | |
| Despotovitza | " 30 | 25 26·2 | 1·1 | | | |
| Poshega | " 31 | 25 29·0 | 2·8 | | | |
| " | Juni 1 | 25 31·3 | 2·3 | | | |
| " | " 2 | 25 32·5 | 1·2 | | | |
| Karauavaz | " 3 | 25 36·0 | 3·5 | | | |
| Krushevaz | " 4 | 25 36·2 | 0·2 | | | |
| Alexinatz | " 5 | 25 39·7 | 3·5 | | | |
| " | " 6 | 25 42·6 | 2·9 | | | |
| " | " 7 | 25 46·8 | 4·2 | | | |
| Paratschin | " 8 | 25 48·7 | 1·9 | | | |
| Svilainaz | " 9 | 25 54·0 | 5·3 | | | |
| Semendria | " 10 | 25 55·0 | 1·0 | | | |
| Semlin | " 14 | 26 3·0 | 2·0 ⁽¹⁾ | v. 25. Mai u. 12., 13., 14. Juni | | Vom 11. bis 14. Juni wurden die Chronometer zwar im Gange erhalten, aber nicht verglichen. Der Gang vom 14. gilt daher auch für die drei vorhergehenden Tage, so wie der Gang vom 16. auch für den 15. gilt. |
| Mittel | | | 2·35 | 2 ⁷ 72 | 5 ⁷ 07 | |
| Kalafat | Juli 16 | +26 ¹ 5 ⁷ 7 | +1 ⁷ 4 ⁽²⁾ | | | Die Uhren standen vom 19. Juni bis 7. Juli. Am 9. Dent eingestellt. Die Uhren standen vom 13. bis 16. Juli, da sie im Dampfschiffahrts - Magazine waren. |
| " | " 17 | 26 7·0 | 1·3 | | | |
| " | " 18 | 26 7·5 | 0·5 | vom 16. und 19. Juni | | |
| " | " 19 | 26 8·8 | 1·3 | | | |
| Mittel | | | 1·22 | 3 ⁷ 39 | 1 ⁷ 61 | |
| Giurgewo | Juli 7 | + 0 ¹ 16 ⁷ 7 | | | | Die Uhren standen vom 13. bis 16. Juli, da sie im Dampfschiffahrts - Magazine waren. |
| Bukarest | " 8 | + 0 19·6 | -2 ⁷ 9 | | | |
| " | " 9 | - 0 5·7 | | | | |
| " | " 10 | - 0 4·8 | +0·9 | | | |
| " | " 11 | - 0 4·8 | 0·0 | | | |
| Giurgewo | " 13 | - 0 6·2 | -1·5 | vom 9. und 11. Juli | | |
| Mittel | | | +1·32 | 5 ⁷ 05 | 6 ⁷ 37 | |
| Galatz | Juli 16 | + 0 ¹ 2 ⁷ 6 | | | | Am 22. Dent eingestellt. |
| " | " 17 | 0 6·8 | +1 ⁷ 2 | | | |
| " | " 18 | 0 11·7 | 1·9 | vom 17. und 20. Juli | | |
| " | " 19 | 0 15·4 | 3·7 | | | |
| Mittel | | | 1·27 | 3 ⁷ 67 | 7 ⁷ 94 | |
| Tultscha | Juli 22 | 0 ¹ 4 ⁷ 5 | | | | Am 22. Dent eingestellt. |
| Sulina | " 23 | 0 7·3 | +2 ⁷ 8 | | | |
| " | " 24 | 0 12·2 | 4·9 | | | |
| Meer | " 25 | 0 16·1 | 3·9 | | | |
| " | " 26 | 0 20·4 | 1·3 | | | |
| Konstantinopel | " 27 | 0 25·8 | 5·4 | | | |
| " | " 28 | 0 29·4 | 3·3 | | | |
| " | " 29 | 0 34·4 | 5·3 | | | |
| " | " 30 | 0 40·3 | 5·9 | | | |

| Ort | Tag | $D - T$ | $d(D - T)$ | Gang Dent's aus den Beobachtungen | Gang Tiede's | Anmerkungen. |
|---------------------------|----------|------------------------------------|--------------------|--------------------------------------|-----------------|--------------|
| Ortaköj | Juli 31 | + 0 ¹ 44 ⁵ 5 | + 4 ⁷ 2 | | | |
| " | Aug. 1 | 0 49 ⁰ | 4 ⁵ | | | |
| " | " 2 | 0 54 ² | 5 ² | | | |
| Konstantinopel | " 3 | 0 58 ⁰ | 3 ⁸ | | | |
| Meer | " 5 | 1 4 ⁷ | 3 ⁴ (2) | vom 1. und 3. August | | |
| Mittel | | | 4 ²⁶ | 2 ¹² | 6 ³⁸ | |
| Meer | Aug. 6 | + 1 ¹ 13 ⁸ 8 | + 9 ¹ | | | |
| " | " 7 | 1 21 ¹ | 7 ³ | | | |
| Trapezunt | Aug. 8 | + 1 ¹ 24 ⁵ 5 | + 3 ¹ | | | |
| " | " 9 | 1 27 ¹ | 2 ⁶ | | | |
| " | " 10 | 1 28 ⁶ | 1 ⁵ | | | |
| " | " 11 | 1 31 ¹ | 2 ⁵ | | | |
| " | " 12 | 1 34 ¹ | 3 ⁰ | | | |
| " | " 13 | 1 36 ¹ | 2 ⁰ | | | |
| " | " 14 | 1 38 ¹ | 2 ⁰ | vom 10., 11., 12. u. 14. Aug. | | |
| Mittel | | | 2 ⁴³ | 1 ⁸² | 7 ²⁵ | |
| Trapezunt | Aug. 15 | + 1 ¹ 41 ⁶ 6 | + 3 ⁵ | | | |
| " | " 16 | 1 45 ⁴ | 3 ⁸ | | | |
| " | " 17 | 1 48 ⁶ | 3 ² | | | |
| " | " 18 | 1 52 ⁷ | 4 ¹ | | | |
| " | " 19 | 1 55 ⁹ | 3 ² | | | |
| " | " 20 | 2 0 ⁰ | 4 ¹ | | | |
| " | " 21 | 2 4 ⁵ | 4 ⁵ | | | |
| " | " 22 | 2 8 ⁶ | 4 ¹ | | | |
| " | " 23 | 2 13 ² | 4 ⁶ | | | |
| Meer | " 25 | 2 20 ⁹ | 3 ⁸ (2) | vom 19., 22. und 24. Aug. | | |
| Mittel | | | 3 ⁸⁸ | 2 ⁶⁶ | 6 ⁵⁴ | |
| Meer | Aug. 26 | + 2 ¹ 51 ³ 3 | + 30 ¹ | | | |
| Konstantinopel | Aug. 28 | + 2 ¹ 18 ⁸ 8 | | | | |
| " | " 29 | 2 25 ⁶ | + 6 ⁸ 8 | | | |
| " | " 30 | 2 32 ² | 6 ⁶ | | | |
| " | " 31 | 2 38 ⁰ | 5 ⁸ | | | |
| " | Sept. 1 | 2 44 ⁰ | 6 ⁰ | vom 31. Aug. u. 1. Sept. | | |
| Mittel | | | 6 ³⁰ | + 0 ⁸⁵ | 7 ¹⁵ | |
| Meer | Sept. 3 | + 2 ¹ 58 ⁹ 9 | | | | |
| Sinope | " 4 | 3 10 ¹ | + 11 ² | | | |
| " | " 5 | 3 17 ⁵ | 7 ⁴ | | | |
| Karalschaklessi | " 6 | 3 22 ⁷ | 5 ² | | | |
| Sinope | " 7 | - 1 21 ⁰ | | | | |
| " | " 8 | - 1 11 ⁵ | 9 ⁵ | | | |
| Meer | " 9 | - 0 59 ² | 12 ³ | | | |
| " | " 10 | - 0 52 ³ | 6 ⁹ | | | |
| Konstantinopel | " 11 | - 0 42 ⁷ | 9 ⁶ | vom 6. und 9. Sept. | | |
| Mittel | | | 8 ⁸⁷ | - 0 ⁵⁴ | 8 ³³ | |
| Konstantinopel | Sept. 12 | - 0 ¹ 32 ⁴ 4 | + 10 ³ | | | |
| " | " 13 | - 0 23 ⁰ | 9 ⁴ | | | |
| " | " 14 | - 0 15 ⁰ | 8 ⁰ | | | |
| " | " 15 | - 0 7 ⁵ | 7 ⁵ | | | |
| " | " 16 | + 0 0 ⁷ | 8 ² | | | |

Am 27. wegen Sturm nicht verglichen.

Am 2. wegen Sturm nicht verglichen.

Auf der Reise von Sinope nach Cap Indje und zurück wurden die Chronometer zu Pferde fortgebracht und von einem verlässlichen Diener in horizontaler Richtung gehalten. Der Ritt dauerte am 6. von Sinope nach Karalschaklessi 1 $\frac{1}{2}$, am 7. von da zum Cap und zurück nach Sinope 7 Stunden.

| Ort | Tag | $D-T$ | $d(D-T)$ | Gang Dent's aus den Beobachtungen | Gang Tiede's | Anmerkungen. |
|------------------------|-----------|------------------------|------------------------|--------------------------------------|--------------------|--|
| Konstantinopel | Sept. 17 | + 0' 8 ⁿ 9 | + 8 ⁿ 2 | | 8 ⁿ 33 | |
| " | " 18 | 0 18·0 | 9·1 | | | |
| " | " 19 | 0 27·2 | 9·2 | | | |
| " | " 20 | 0 36·3 | 9·1 | | | |
| " | " 21 | 0 46·3 | 10·0 | | | |
| " | " 22 | 0 55·5 | 9·2 | | | |
| " | " 23 | 1 5·0 | 9·5 | | | |
| " | " 24 | 1 14·3 | 9·3 | | | |
| " | " 25 | 1 24·5 | 10·2 | | | |
| " | " 26 | 1 33·7 | 9·2 | vom 14. und 25. September | | |
| Mittel | | | 9·09 | 0 ⁿ 33 | 8 ⁿ 76 | |
| Böjuk Liman | Sept. 27 | + 1' 47 ⁿ 2 | + 13 ⁿ 5 | | | |
| Burgas | " 29 | 2 6·3 | 9·5(2) | | | Am 28. wegen hoher See nicht verglichen |
| " | " 30 | 2 15·7 | 9·4 | | | |
| Varna | Octob. 1 | 2 24·7 | 9·0 | | | |
| Meer | " 2 | 2 33·3 | 8·6 | | | |
| Sulina | " 3 | 2 40·5 | 7·2 | | | |
| Galatz | " 4 | 2 51·8 | 11·3 | | | |
| " | " 5 | 3 2·1 | 10·3 | | | |
| Tultscha | " 6 | 3 15·6 | 13·5 | | | |
| Sulina | " 7 | 3 29·0 | 13·4 | | | |
| " | " 8 | 3 42·9 | 13·9 | | | |
| Schlangeninsel | " 9 | 3 56·7 | 13·8 | 22., 25., 27. und 28. Sept. | | |
| Mittel | | | 10·99 | - 1 ⁿ 10 | 9 ⁿ 89 | |
| Odessa | Octob. 11 | + 4' 18 ⁿ 9 | + 11 ⁿ 1(2) | | | |
| " | " 12 | 1 28·5 | 9·6 | | | |
| " | " 13 | 4 36·8 | 8·3 | | | |
| " | " 14 | 4 46·5 | 9·7 | | | |
| Meer | " 15 | 1 59·0 | 12·5 | | | |
| " | " 16 | 5 11·4 | 12·4 | | | |
| Feodosia | " 17 | 5 21·3 | 9·9 | | | |
| Cap Takli | " 18 | 5 32·7 | 11·4 | | | |
| " | " 19 | 5 41·4 | 11·7 | | | |
| Meer | " 20 | 5 56·3 | 11·9 | | | |
| Sewastopel | " 21 | 6 8·2 | 11·9 | | | |
| Mittel | | | 10·96 | - 1 ⁿ 20 | 9 ⁿ 76 | |
| Sewastopel | Octob. 22 | + 6' 23 ⁿ 1 | + 11 ⁿ 9 | | | |
| Chersones | " 23 | 6 39·1 | 16·0 | | | |
| Meer | " 24 | 6 51·3 | 12·2 | | | |
| Sulina | " 25 | 7 7·0 | 15·7 | | | |
| Tultscha | " 26 | 7 18·0 | 11·0 | | | |
| Galatz | " 27 | 7 31·8 | 13·8 | | | |
| " | " 28 | 7 42·8 | 11·0 | | | |
| Mittel | | | 13·5 | - 1 ⁿ 20 | 12 ⁿ 30 | |

Gang der Chronometer nach der Reise.

| | Gang Dent's | Gang Tiede's |
|-------------------|------------------------|---------------------|
| 8. — 12. November | == - 1 ⁿ 30 | + 4 ⁿ 83 |
| 12. — 15. " | == - 1·95 | + 4·74 |
| 15. — 19. " | == - 2·82 | - 3·93 |
| 19. — 21. " | == - 2·12 | + 4·20 |

Aus dieser Tafel ist ersichtlich, dass die Chronometer, oder wenigstens einer von ihnen, ihren Gang während der Fahrt auf dem Meere bedeutend änderten, denn die Zahlen der vierten Spalte am 6. und 7. so wie am 26. und 28. August sind so abweichend, dass diese Unregelmässigkeit keiner anderen Ursache zugeschrieben werden kann. Der grösste Sprung jedoch findet sich vom 6. auf den 7. September in den beiden Tagen, an welchen die Chronometer zu Pferde fortgebracht wurden. Sie waren beide in demselben Kistchen verschlossen, und die mit Dent vor und nach dem Ritze gemachten Beobachtungen gaben Gänge, die sich ganz gut an einander anschliessen, so dass jener Sprung nicht ihm sondern Tiede zur Last fällt.

Um die Zeitbestimmungen, welche vom 1. — 3. August in Ortaköj am Bosphorus gemacht wurden, an jene anschliessen zu können, die ich am 31. August und 1. September im Gebäude der österreichischen Internuntiat in Pera ausführte, nahm ich an, dass Ortaköj 1500 Wiener Klafter östlich vom Meridian von Pera liegt, und dass bei der Breite von 41° der Längengrad 43183 Toisen beträgt. Unter dieser Voraussetzung müsste an den positiven Fehler in Ortaköj, welcher am 2. August = $24' 24''.67$ war, die negative Correction $- 8''.1$ angebracht werden. Es ist demnach dieser Fehler in Konstantinopel

$$\begin{array}{l} \text{am 2. August} = 24' 16''.57 \\ \text{„ 31.5 „} = 25' 55''.44, \end{array}$$

daher in der Zwischenzeit der tägliche Gang

$$\frac{98''87}{29.5} = 3''35.$$

Wenn man aber in dieser Zwischenzeit vom 2. August bis 1. September jene Tage ausschliesst, an denen die Chronometer zur See waren, und nur den aus den Beobachtungen gefundenen Gang berücksichtigt, so findet man aus der vorhergehenden Tafel

| | |
|---|-------|
| vom 2. bis 3. August für 1 Tag den Gang | 2''12 |
| „ 5. „ 14. „ „ 6 Tage „ „ | 28'92 |
| „ 15. „ 23. „ „ 8 „ „ „ | 21'28 |
| „ 28. „ 31.5 „ „ 3.5 „ „ „ | 2'98 |
| Summe . 18.5 Tage | 75'30 |

also der tägliche Gang

$$= 2''99$$

Es scheint demnach der Gang des Chronometers Dent durch die Seefahrt verzögert worden zu sein, was jedoch für die in diesen Zeitraum fallende Längenbestimmung von Trapezunt, wenn man hiezu sowohl die Hin- als Rückfahrt benützt, von geringem Belange ist, da sich der Einfluss dieser Änderung des Ganges in beiden Fahrten grösstentheils aufheben wird.

Ein ähnliches Resultat gibt Tiede, dessen Fehler man aus obiger Tafel leicht findet. Er ist

$$\begin{array}{l} \text{am 2. August} = + 25' 8''.82 \\ \text{„ 31.5 „} = + 28' 34''.19 \end{array}$$

woraus der tägliche Gang

$$\frac{215''37}{29.5} = 7''30$$

folgt.

Die Tage ohne Seefahrt geben aber

| | |
|---|--------|
| vom 2. bis 3. August für 1 Tag den Gang | 6·38 |
| „ 8. „ 14. „ „ 6 Tage „ „ | 43·50 |
| „ 15. „ 23. „ „ 8 „ „ „ | 52·32 |
| „ 28. „ 31·5 „ „ 3·5 „ „ „ | 25·02 |
| also für . 18·5 Tage | 127·22 |

daher der Gang

$$\frac{127\cdot22}{18\cdot5} = 6^{\text{r}}88$$

ebenfalls kleiner als der aus allen Tagen bestimmte Gang.

Zu den Höhenbestimmungen diente das Barometer Fortin, das vor der Abreise einen Fehler von $+ 0^{\text{r}}20$ Par. Linien gegen das Normal-Instrument der Centralanstalt zeigte. Leider wurde es bei der Rückreise in Orsova gebrochen, daher eine Vergleichung nach der Reise nicht mehr möglich war. Durch gleichzeitige Beobachtungen mit zwei anderen Instrumenten, nämlich mit einem Heberbarometer von Kapeller im Besitze des Herrn Pfarrers Binder, der mich bis Konstantinopel begleitete, und eines Gefässbarometers nach Fortin, das Herrn Dr. Verrolot in Konstantinopel gehört, überzeugte ich mich aber, dass der früher bestimmte Fehler keine bedeutende Änderung erlitten haben konnte.

Das Bourdon'sche Metallbarometer wurde häufig mit Fortin verglichen, und vergrößerte seinen Fehler fortwährend, wie man aus folgender Vergleichung erschen kann.

TAFEL V.

Vergleichungen zwischen dem Barometer Fortin (*F*) und dem Metallbarometer (*M*).

| Zeit | <i>F</i> - <i>M</i> Par. Linien | Temp. Réaumur | Anzahl der Ver- gleichungen |
|---------------------------|------------------------------------|---------------------|-----------------------------------|
| 24. Mai | - 1 ^r 68 | + 15 ^o 8 | 1 |
| 26. und 27. Mai | - 1·92 | 17·4 | 5 |
| 28. „ 29. „ | - 2·40 | 9·9 | 6 |
| 30. Mai bis 2. Juni . . . | - 2·15 | 12·5 | 12 |
| 2. Juni „ 17. „ | - 1·92 | 17·7 | 21 |
| 18. „ „ 20. Juli | - 2·43 | 19·8 | 10 |
| 21. „ „ 22. „ | - 2·16 | 18·5 | 5 |
| 3. bis 12. August | - 2·98 | 22·5 | 11 |
| 13. und 14. „ | - 3·22 | 22·1 | 6 |
| 14. bis 16. „ | - 3·61 | 21·3 | 10 |
| 17. „ 20. „ | - 3·97 | 20·1 | 9 ¹⁾ |
| 20. „ 23. „ | + 0·11 | 20·4 | 8 |
| 24. August | - 0·34 | 18·7 | 2 |
| 13. bis 19. September | - 0·68 | 18·5 | 5 |
| 19. „ 26. „ | - 1·06 | 17·1 | 10 |
| 29. October | - 1·57 | 15·2 | 2 |
| 15. bis 21. November . | - 2·36 | + 1·7 | 4 |

Das Metallbarometer wurde benützt bei kurzen Ausflügen von wenigen Stunden, wo es vor und nach denselben mit Fortin verglichen wurde, und bei den an der Meeresküste angeordneten Beobachtungen, um die gemessenen Sonnenhöhen wegen Refraction verbessern zu können. Während der Seefahrt vom 27. September bis 27. October wurde keine Vergleichung

¹⁾ Am 20. wurde das Metallbarometer nach Fortin corrigirt.

angestellt, weil Fortin in der Cabine des Capitäns aufgehangen war, und das Quecksilber selbst bei ruhiger See und wenn das Schiff vor Anker lag, so sehr schwankte, dass man nicht einstellen konnte.

Die Witterung war während des grössten Theiles der Reise den Beobachtungen günstig, nur im Anfange mussten manche wegen trüben Himmel und Regen unterbleiben, daher damals der Uhrfehler nicht aus correspondirenden, sondern aus einfachen mit dem Universale gemessenen Sonnenhöhen gefunden wurde, wesswegen auch die Längenbestimmungen in den ersten drei Stationen weniger sicher sind als in den folgenden. Vorzüglich muss die ungemein gleichmässige und ruhige Witterung vom Ende September bis zum 25. October, so lange nämlich die Seefahrt auf dem schwarzen Meere dauerte, als ein überaus günstiger Ausnahmefall betrachtet werden, welchem, so wie der geschickten und vorsichtigen Führung des Commandanten, Herrn Linien-Schiffs lieutenant Karl Kern die glückliche Beendigung dieser Reise vorzugsweise zu verdanken ist.

I. Belgrad.

In Belgrad wurde vor und nach Bereisung von Serbien beobachtet. Vor der Bereisung war der Aufstellungsort im Garten des Herrn Professor Jackschitsch, der denselben so wie auch das Gartenhaus mit der grössten Gefälligkeit für diese Beobachtungen öffnete. Er liegt ungefähr 1000 Klafter gegen SW. von dem Palais des Fürsten und 40 Klafter südlich von der an der Strasse nach Topschider befindlichen Brücke. Die Beobachtungen vom 24. bis 26. Mai wurden hier ausgeführt. Nach der Bereisung wurden die Zeitbestimmungen im Hofe des Gasthauses zur „Krone“ gemacht. Beide Punkte liegen nahe genug unter demselben Meridian, um die gefundenen Uhrfehler ohne weitere Reduction mit einander vergleichen zu können.

Aus einer Reihe von Sonnenhöhen fand man

| | |
|--|--|
| am 25. Mai um 20 ^h 50' Uhrzeit den Fehler Dent's | = + 1' 35 ^o 6 |
| „ „ Tiede's | = + 26 50.6 |
| am 12. Juni um 19 ^h 53' Uhrzeit den Fehler Dent's | = + 2 21.6 |
| „ 13. „ „ 20 52 „ „ „ | = + 2 25.1 |
| „ 14. „ „ 20 23 „ „ „ | = + 2 34.9 |
| Mittel am 13. Juni um 20 ^h 23' | Fehler Dent's = + 2' 27 ^o 2 |

Tiede war an diesen Tagen nicht mit Dent verglichen worden.

Am 13. Juni wurden zur Bestimmung der Längendifferenz mit Wien vier Reihen telegraphischer Zeichen gegeben, von denen die Mittel der Zeiten folgende sind:

| | | |
|---|--|----------------------|
| 1. Reihe in Wien gegeben um | 19 ^h 22' 8 ^o 84 | mittlere Wiener Zeit |
| „ Belgrad beobachtet um | 19 38' 19.67 | „ Belgrader Zeit |
| Längenunterschied um | 16 10.83 | |
| 2. Reihe in Belgrad gegeben um | 19 ^h 10' 57 ^o 12 | |
| „ Wien beobachtet um | 19 24 46.36 | |
| Längenunterschied | 16 10.76 | |
| 3. Reihe in Wien gegeben um | 19 ^h 26' 58 ^o 85 | |
| „ Belgrad beobachtet um | 19 43 9.72 | |
| Längenunterschied | 16 10.87 | |
| 4. Reihe in Belgrad gegeben um | 19 ^h 17' 52 ^o 13 | |
| „ Wien beobachtet um | 19 31 11.38 | |
| Längenunterschied | 16 10.75 | |
| Mittel aus den in Wien gegebenen Reihen | = 16' 10 ^o 85 | |
| „ „ „ „ Belgrad „ „ | = 16 10.75 | |

Gesamtmittel des Längenunterschiedes = $16' 10'' 80 = 4^\circ 2' 42''$
 Länge von Wien = 34 2 39
 Länge von Belgrad = 38 5 21 von Ferro ¹⁾.

Diese Länge gilt für das Gasthaus zur Krone, wo die Zeitbestimmungen gemacht wurden, und sehr nahe auch für den Garten des Prof. Jackschitsch.

Signale, welche von Belgrad aus gegeben, und von Wien unmittelbar nach ihrem Eintreffen nach Belgrad zurückgegeben wurden, langten hier nach einem Intervalle von 0·1 bis 0·2 Zeitsecunden an. In Wien wurde das Zeitintervall für die von dort aus gegebenen und von Belgrad zurückgelangten Zeichen auf 0·3 bis 0·4 Zeitsecunden geschätzt.

Die Breite des Gartens wurde aus einer am 24. Mai gemessenen Reihe von Mittagshöhen der Sonne gleich

$$44^\circ 47' 47''$$

gefunden.

Die Seehöhe wurde an mehreren Punkten in und um Belgrad barometrisch bestimmt, und folgende Werthe erhalten:

| | |
|---|----------------------------|
| Gartenhaus des Herrn Prof. Jackschitsch | 45 Toisen aus 4 Ablesungen |
| Gasthaus zur „Krone“ 1. Stock | 60 „ „ 9 „ |
| Eingang der Hauptkirche | 63 „ „ 1 „ |
| Höchstes Zimmer des Licealgebäudes | 66 „ „ 1 „ |
| Acht Fuss über dem mittleren Spiegel der Save | 43 „ „ 1 „ |
| Anhöhe auf dem Fusswege nach Topschider | 78 „ „ 1 „ |
| Eingang in's Pfarhaus zu Topschider | 46 „ „ 1 „ |

Als Mire zur Declinations-Bestimmung wurde der Knauf der Kathedrale gewählt, und das Azimuth desselben

am 24. Mai $193^\circ 31' 3$
 „ 25. „ $193 32 \cdot 8$

also

im Mittel $193 32 \cdot 0$

gefunden.

Für die magnetische Abweichung ergaben sich folgende Werthe:

| | |
|---|------------------|
| Am 24. Mai um $4^h 36'$ mittlere Zeit von Belgrad | $10^\circ 14' 3$ |
| „ 25. „ „ $22 52$ „ „ „ „ ²⁾ | $10 9 \cdot 3$ |
| „ 25. „ „ $5 52$ „ „ „ „ | $10 10 \cdot 3$ |
| Mittel | $10^\circ 11' 3$ |

In Wien wurden an diesen Tagen folgende Abweichungen gefunden:

| | am 24. Mai | am 25. Mai |
|--------------------|-------------------|-------------------|
| $14^h 6$ | $12^\circ 23' 05$ | $12^\circ 20' 15$ |
| $18 6$ | $12 28 \cdot 89$ | $12 21 \cdot 66$ |
| $22 6$ | $12 28 \cdot 11$ | $12 25 \cdot 25$ |
| $2 6$ | $12 34 \cdot 64$ | $12 33 \cdot 41$ |
| $6 6$ | $12 29 \cdot 14$ | $12 27 \cdot 26$ |
| $10 6$ | $12 28 \cdot 12$ | $12 26 \cdot 85$ |
| Mittel | $12^\circ 28' 66$ | $12^\circ 25' 76$ |

¹⁾ Die Zeiten der Ankunft der von Belgrad gegebenen Zeichen wurden in Wien von zwei Beobachtern, den Herren Director von Littrow und Professor Hornstein an derselben Uhr angemerkt. Es ergab sich

die Längendifferenz nach Littrow = $16' 10'' 65$
 „ „ „ Hornstein = $16 10 \cdot 85$

²⁾ Die Tage sind bürgerlich gezählt, die Stunden laufen von 0^h (Mittag) bis 24^h ; es bedeutet demnach 25. Mai 22^h die zehnte Vormittagsstunde des bürgerlichen 25. Mai, Stunden, deren Zahlen kleiner sind als 12, sind Nachmittagsstunden.

Die Intensität der horizontalen Componente wurde gefunden:

| | | |
|---|---------|--------------|
| Am 25. Mai um 19 ^h 14' mittlere Zeit von Belgrad | 2·2114 | mit Magnet I |
| „ 25. „ „ 19 14 „ „ „ „ | 2·2087 | „ „ II |
| „ 26. „ „ 19 13 „ „ „ „ | 2·2074 | „ „ I |
| „ 26. „ „ 19 20 „ „ „ „ | 2·2095 | „ „ II |
| Mittel | 2·20925 | |

Intensität in Wien.

| | am 25. Mai | am 26. Mai |
|----------------------------|------------|------------|
| 14 ^h 3' | 2·00987 | 2·01038 |
| 18 3 | 2·00961 | 2·00982 |
| 22 3 | 2·00859 | 2·00916 |
| 2 3 | 2·00902 | 2·00987 |
| 6 3 | 2·00993 | 2·01031 |
| 10 3 | 2·01028 | 2·00984 |
| Mittel | 2·00955 | 2·00997 |

Für die Inclination erhielt man folgende Werthe:

| | | |
|--|-----------|-------------|
| Am 24. Mai um 6 ^h 32' mittlere Zeit von Belgrad | 60° 42' 9 | mit Nadel 5 |
| „ 24. „ „ 7 22 „ „ „ „ | 60 41·7 | „ „ 6 |
| Mittel | 60° 42' 3 | |

Das Inductions-Inclinatorium von Lamont gab die corrigirte Ablenkung

$$\psi = 14^{\circ} 59' 3$$

und hiermit die Constante

$$C' = \frac{\tan \text{Incl.}}{\sin \psi} = 6 \cdot 8917$$

Den Werth der Gesamtkraft des Erdmagnetismus erhielt man aus den Mitteln der Horizontalkraft und der Inclination gleich

$$4 \cdot 5151$$

Auf der Reise zwischen Belgrad und der nächsten Station Poschega wurden folgende Höhen barometrisch gemessen:

| | |
|--|--|
| 28. Mai, Ripagn | Sechöhe = 99 Toisen 1 Ablesung ¹⁾ |
| „ „ Treschnia | „ = 130 „ 2 „ |
| „ „ Koratschiza | „ = 117 „ 2 „ |
| 29. „ Belosawze | „ = 75 „ 1 „ |
| „ „ Topola | „ = 125 „ 2 „ |
| „ „ Kragujevaz | „ = 84 „ 3 „ |
| 30. „ Wratschewsehniza | „ = 164 „ 1 „ |
| „ „ Despotowiza | „ = 163 „ 2 „ |
| 31. „ Brtschane | „ = 115 „ 1 „ |
| „ „ Tschatschak | „ = 110 „ 3 „ |
| „ „ Höchster Punkt der Strasse zwischen Tschatschak u. Poschega | „ = 313 „ 1 „ |

II. Poschega.

Aufstellungsort: Wiese des Gastwirthes und Bürgermeisters neben dem Marktplatze. Der Uhrfehler wurde aus einfachen Sonnenhöhen zweimal bestimmt und gefunden:

| |
|--|
| am 1. Juni um 20 ^h 21' Uhrzeit Fehler Denit's = + 0' 57 2 |
| „ 2. „ „ 19 32 „ „ „ = + 0 19·1 |
| „ 1. „ „ 7 58 „ Mittel = + 0' 12 7 15 |

Für dieselbe Zeit war der Fehler Tiede's aus der Vergleichung

$$= + 25' 43 7 35$$

¹⁾ Die Sechhöhen gelten, wenn nicht das Gegentheil bemerkt wird, immer für das Erdgeschoss.

Da Poshega keine Telegraphenstation ist, so konnte die Längendifferenz mit Wien nur aus dem Gange der Chronometer abgeleitet werden. Ist F der Uhrfehler, J der tägliche Gang nach der vorhergehenden Tafel, dt die Zeitdifferenz zwischen den Zeitbestimmungen an beiden Stationen, so hat man für

$$\text{Dent } J = 2^{\circ} 72', \text{ für Tiede } J = 5^{\circ} 07',$$

ferner

| | Dent | Tiede |
|--|--|-------------------------|
| in Belgrad 25. Mai 20 ^h 50' | F = + 1' 35 ^s 6 | + 26' 50 ^s 6 |
| „ Poshega 1. Juni 7 58 | F = + 0 12 ^s 1 | + 25 43 ^s 3 |
| $dt = 7 \cdot 5$ Tage | Unterschied = + 1' 23 ^s 5 | + 1' 7 ^s 3 |
| | Jdt = + 20 ^s 4 | + 38 ^s 0 |
| | Längenunterschied = + 1' 43 ^s 9 | + 1' 45 ^s 3 |

Demnach ist im Mittel

| | |
|--|-----------------------|
| Poshega westlich von Belgrad um 1' 44 ^s 6 = 0° 26' 9" | |
| Länge von Belgrad | = 38 5 21 |
| „ „ Poshega | = 37 39 12 von Ferro. |

Die Breite wurde am 2. Juni gemessen und gleich

$$43^{\circ} 52' 13''$$

gefunden.

Die Seehöhe ergab sich aus 9 Ablesungen des Barometers

$$149 \text{ Toisen.}$$

Auf einem Ausfluge nach Uschitza fand man mittelst des Metallbarometers, das vor und nach demselben mit Fortin verglichen worden war,

| | |
|---|-----------------------|
| Seehöhe von Sewojna, höchster Punkt der Strasse | 311 Toisen 1 Ablesung |
| „ „ Uschitza, Kreisamt, Erdgeschoss | 200 „ 1 „ |

Die magnetische Abweichung wurde bestimmt

| | |
|--|----------------------|
| am 1. Juni um 22 ^h 6' mittlere Zeit von Poshega | 10° 43' 7 |
| „ 2. „ „ 20 49 „ „ „ „ | 10 40 ^s 4 |
| „ 2. „ „ 4 31 „ „ „ „ | 10 49 ^s 8 |
| | Mittel . 10° 44' 6 |

In Wien war an diesen Tagen die Abweichung

| | am 1. Juni | am 2. Juni |
|---------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| um 14 ^h 6' | 12° 23' 80 | 12° 25' 53 |
| „ 18 6 | 12 21 ^s 31 | 12 21 ^s 37 |
| „ 22 6 | 12 21 ^s 35 | 12 23 ^s 56 |
| „ 2 6 | 12 29 ^s 48 | 12 36 ^s 23 |
| „ 6 6 | 12 22 ^s 62 | 12 25 ^s 70 |
| „ 10 6 | 12 23 ^s 34 | 12 24 ^s 69 |
| Mittel | 12° 23' 65 | 12° 24' 51 |

Die Intensität der horizontalen Componente wurde gefunden:

| | |
|---|------------------------------|
| am 2. Juni um 21 ^h 58' mittlere Zeit von Poshega | 2 ^s 2400 Magnet I |
| „ 2. „ „ 21 57 „ „ „ „ | 2 ^s 2456 „ II |
| „ 2. „ „ 5 14 „ „ „ „ | 2 ^s 2459 „ I |
| „ 2. „ „ 5 19 „ „ „ „ | 2 ^s 2390 „ II |
| | Mittel . 2 ^s 2426 |

Intensität in Wien am 2. Juni.

| | | |
|-----------------------|-----------|----------------|
| um 14 ^h 3' | | 2·01106 |
| „ 18 3 | | 2·01122 |
| „ 22 3 | | 2·00967 |
| „ 2 3 | | 2·01026 |
| „ 6 3 | | 2·01164 |
| „ 10 3 | | 2·01136 |
| Mittel | | <u>2·01087</u> |

Zur Bestimmung der Inclination wurde das Inductions-Inclinorium benützt, da das Repsold'sche Inclinations-Instrument in Belgrad zurückgeblieben war. Es gab die corrigirte Ablenkung

$$\phi = 14^{\circ} 29' 95''$$

Hiermit und mit der Constante

$$C = 6 \cdot 9281 \text{ } ^1)$$

fand man die Inclination nach der Formel

$$C \sin \phi = \tan I$$

$$I = 60^{\circ} 2' 3''$$

Hieraus und aus dem Mittel der Horizontalkraft ergab sich die Gesamtkraft:

$$4 \cdot 4904$$

Auf der Reise von Poschega nach Alexinatz wurde die Seehöhe von folgenden Orten gefunden:

| | | | |
|---|----------------------|---|---------|
| 3. Juni, Überfuhr über die Morawa | Seehöhe = 128 Toisen | 1 | Ablsung |
| 4. „ Karanovaz | „ = 85 | „ | 1 |
| „ „ Trstenik | „ = 80 | „ | 1 |
| 5. „ Kruschewaz (1. Stock) | „ = 82 | „ | 2 |
| „ „ Deligrad | „ = 86 | „ | 2 |

III. Alexinatz.

Aufstellungsort: Nordöstliches Eck des Quarantaine-Gartens.

Die veränderliche Witterung erlaubte den Uhrfehler nur einmal aus einfachen Sonnenhöhen zu bestimmen. Man fand

$$\text{am 6. Juni um } 20^{\text{h}} 58' \text{ Uhrzeit den Fehler Dent's} = + 6' 51'' 1$$

Die am 7. Juni gegebenen telegraphischen Zeichen führten zu folgendem Längenunterschiede zwischen Wien und Alexinatz:

| | | |
|---------------------------------|----------------------------|----------------------|
| 1. Reihe in Wien gegeben um | 21 ^h 4' 37'' 41 | mittlere Wiener Zeit |
| „ Alexinatz beobachtet um | 21 25 30 65 | „ Alexinatz-Zeit |
| 2. Reihe „ Alexinatz gegeben um | 21 27 8 85 | |
| „ Wien beobachtet um | 21 6 15 88 | |
| 3. Reihe „ Wien gegeben um | 21 16 47 45 | |
| „ Alexinatz beobachtet um | 21 37 40 55 | |
| 4. Reihe „ Alexinatz gegeben um | 21 45 18 88 | |
| „ Wien beobachtet um | 21 24 25 95 | |
| 5. Reihe „ Wien gegeben um | 21 27 57 46 | |
| „ Alexinatz beobachtet um | 21 48 50 59 | |

¹⁾ Diese Constante wurde auf der Reise an mehreren Orten bestimmt, nämlich

| | | |
|-----------------------|--------|-----------------|
| in Belgrad | 6·8917 | Mittel = 6·9281 |
| „ Kalafat | 6·9600 | |
| „ Ortaköj | 6·8472 | |
| „ Trapezunt | 6·9759 | |
| „ Sinope | 6·9656 | |

| | | |
|----------|---------------------------|--|
| 6. Reihe | in Alexinatz gegeben um | 21 ^h 50' 18 ^s 89 |
| | „ Wien beobachtet um | 21 29 25 87 |
| 7. Reihe | „ Wien gegeben um | 21 33 7 47 |
| | „ Alexinatz beobachtet um | 21 54 0 50 |

| | | |
|--------------|-----------------------------|--------------------------|
| Die 1. Reihe | gibt die Längenunterschiede | = 20' 53 ^s 21 |
| „ 2. „ | „ „ | = 20 52 97 |
| „ 3. „ | „ „ | = 20 53 10 |
| „ 4. „ | „ „ | = 20 52 95 |
| „ 5. „ | „ „ | = 20 53 13 |
| „ 6. „ | „ „ | = 20 53 02 |
| „ 7. „ | „ „ | = 20 53 03 |

| | | |
|---|-------------|--------------------------|
| Mittel aus den in Wien gegebenen Reihen | | = 20' 53 ^s 12 |
| „ „ „ Alexinatz „ | „ | = 20 52 97 ¹⁾ |

| | |
|--------------------------|---------------------------------------|
| Mittel: Alexinatz — Wien | = 20' 53 ^s 06 = 5° 13' 16" |
| Länge von Wien | = 34 2 39 |
| „ „ Alexinatz | = 39 15 55 von Ferro. |

Die Breite dieser Station konnte der Witterung wegen nicht bestimmt werden.
Die Seehöhe wurde aus 4 Ablesungen des Barometers gleich

86 Toisen

gefunden.

Die magnetische Abweichung war

| | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------|-------------|-------------|
| am 6. Juni um 22 ^h 51' | mittlere Zeit von Alexinatz | | 10° 26' 1 |
| „ 7. „ „ 5 40 | „ „ | „ | 10 19 5 |
| | | Mittel | . 10° 22' 8 |

Declination in Wien.

| | am 6. Juni | am 7. Juni |
|--------------------|------------|------------|
| 11 ^h 6' | 12° 21' 33 | 12° 18 69 |
| 18 6 | 12 20 96 | 12 19 32 |
| 22 6 | 12 26 27 | 12 23 28 |
| 2 6 | 12 32 43 | 12 28 87 |
| 6 6 | 12 29 96 | 12 25 51 |
| 10 6 | 12 26 46 | 12 21 31 |
| Mittel | 12° 26' 69 | 12° 22' 83 |

Die Intensität der horizontalen Componente wurde gefunden

| | | | |
|--------------------------------|-----------------------------|-------------|-----------------|
| am 6. Juni 23 ^h 19' | mittlere Zeit von Alexinatz | | 2 2681 Magnet I |
| „ 6. „ 23 47 | „ „ „ „ | „ | 2 2662 „ II |
| | | Mittel | . 2 26715 |

Intensität in Wien am 6. Juni.

| | | |
|-----------------------|-------------|---------|
| um 14 ^h 3' | | 2 01061 |
| „ 18 3 | „ | 2 01018 |
| „ 22 3 | „ | 2 00907 |
| „ 2 3 | „ | 2 00899 |
| „ 6 3 | „ | 2 00971 |
| „ 10 3 | „ | 2 01101 |
| Mittel | | 2 00938 |

¹⁾ In Wien wurden die von Alexinatz ankommenden Zeichen von den Herren Director von Litrow und Professor Hornstein beobachtet; aus den Beobachtungen

| | | |
|------------|--------------------------|--------------------------|
| des ersten | wird die Längendifferenz | = 20 52 ^s 9,5 |
| „ zweiten | „ „ | = 20 53 01 |

Das Inductions-Inclinorium gab die corrigirte Ablenkung

$$\phi = 11^{\circ} 13'7''$$

woraus mit der früher erwähnten Constante die Inclination

$$= 59^{\circ} 34'6''$$

gefunden wird.

Die Gesamtmkraft wird

$$4.4771.$$

Auf der Reise von Alexinatz nach Belgrad wurde die Seehöhe folgender Orte bestimmt:

| | | | | | |
|-------------|-------------------------|----------------------|---|-----------|-----------------------------|
| Am 8. Juni. | Raschagn | Seehöhe = 125 Toisen | 1 | Ableseung | |
| " " | " Paratschin | " = 65 | " | 1 | " |
| " 9. " | " Mostanitz | " = 49 | " | 1 | " |
| " " | " Medvegja | " = 71 | " | 1 | " |
| " " | " Svilainaz | " = 49 | " | 1 | " (während eines Gewitters) |
| " 10. " | " Oreoviza | " = 38 | " | 1 | " |
| " " | " Poscharewaz | " = 33 | " | 1 | " |
| " " | " Semendria | " = 36 | " | 1 | " |
| " 11. " | " Grotzka | " = 39 | " | 1 | " |
| " " | " Boletsch | " = 60 | " | 1 | " |

IV. Kalafat.

Aufstellung am ersten Tage (16. Juni) auf der Anhöhe neben dem Landungsplatz der Dampfschiffe: an den folgenden Tagen 80 Schritte weiter gegen Ost.

Der Uhrfehler Dent's wurde gefunden

am 16. Juni um 20^h 0' Uhrzeit = + 12' 36^s.0 aus einfachen Sonnenhöhen mit dem Universale;

" 19. " " 23 48 " = + 12 46.59 " corresp. " " dem Sextanten.

Er ist also

am 17. Juni um 9^h 50' = + 12' 41^s.3, für Tiede = + 38' 48^s.3

und der tägliche Gang

für Dent . . . J = $\frac{10.59}{3.16} = 3.39$

für Tiede . . . J = 4.61

Zur Berechnung des Längenunterschiedes wird es am besten sein, das Mittel aus diesem und dem vorhergehenden Gange anzunehmen, also

für Dent . . . J = + 3^s.05

für Tiede . . . J = + 4.84

| | | <u>Dent</u> | <u>Tiede</u> |
|--|-----------|-----------------------------|--------------------------|
| In Alexinatz war am 6. Juni um 20 ^h 58' | | F = + 6' 51 ^s .1 | + 32' 32 ^s .2 |
| " Kalafat " " 17. " " 9 50 | | F = + 12 41.3 | + 38 48.3 |
| $dt = 11.16$ Tage, daher | | J. dt = 35.0 | 55.5 |
| Längenunterschied = | | 5' 15 ^s .0 | 5' 20 ^s .6 |
| Mittel = | | 5 17.8 | 1 ^o 19' 27" |
| Länge von Alexinatz | | = 39 ^o 15' 55" | |
| " " Kalafat | | = 40 35 22 von Ferro. | |

Die Breite wurde in Kalafat zweimal bestimmt und gefunden

am 6. Juni = 44^o 0' 6" } Mittel = 44^o 0' 25"
 " 7. " = 44 0 43 }

Die Seehöhe ergab sich für den 1. Stock des Gasthauses aus 11 Ableseungen des Barometers

Die magnetische Declination wurde gefunden

| | |
|--|----------|
| am 16. Juni um 22 ^h 16' mittl. Zeit von Kalafat | 9° 10' 4 |
| „ 17. „ „ 20 13 „ „ „ „ | 9 7·1 |
| „ 18. „ „ 20 14 „ „ „ „ | 9 10·4 |
| Mittel | 9° 9' 3 |

Declination in Wien.

| | 16. Juni | 17. Juni | 18. Juni |
|---------------------------------|------------|------------|------------|
| um 14 ^h 6' | 12° 24' 70 | 12° 21' 88 | 12° 24' 55 |
| „ 18 6 | 12 21·45 | 12 21·42 | 12 16·61 |
| „ 22 6 | 12 25·71 | 12 20·70 | 12 21·31 |
| „ 2 6 | 12 31·25 | 12 28·56 | 12 28·72 |
| „ 6 6 | 12 27·06 | 12 24·36 | 12 23·94 |
| „ 10 6 | 12 23·75 | 12 21·29 | 12 22·92 |
| Mittel | 12° 25' 65 | 12° 23' 03 | 12° 23' 01 |

Die Intensität der horizontalen Componente war

| | |
|--|---------------------|
| am 17. Juni um 21 ^h 18' mittl. Zeit von Kalafat | 2·2593 mit Magnet I |
| „ „ „ „ 21 16 „ „ „ „ | 2·2554 „ „ II |
| „ 18. „ „ 21 20 „ „ „ „ | 2·2593 „ „ I |
| „ „ „ „ 21 19 „ „ „ „ | 2·2531 „ „ II |
| Mittel | 2 2568 |

Intensität in Wien.

| | am 17. Juni | am 18. Juni |
|------------------------------|-------------|-------------|
| 14 ^h 3' | 2·01177 | 2·01123 |
| 18 3 | 2·01110 | 2·01096 |
| 22 3 | 2·00968 | 2·00994 |
| 2 3 | 2·00937 | 2·00935 |
| 6 3 | 2·01079 | 2·01063 |
| 10 3 | 2·01110 | 2·01099 |
| Mittel | 2·01063 | 2·01052 |

Die mit Repsold's Inclinorium und Gruber's Nadeln gefundene Inclination ist:

| | |
|--|-----------------------|
| Am 19. Juni um 21 ^h 20' | 59° 17' 2 mit Nadel 5 |
| „ „ „ „ 22 10 | 59 49·4 „ „ 6 |
| Mittel | 59° 48' 3 |

Hieraus geht die Gesamtkraft hervor:

$$4·1871$$

Nach den Beobachtungen in Kalafat erfolgte die Bereisung der meteorologischen Stationen im südlichen Ungarn und Siebenbürgen, nämlich in Szegedin, Hermannstadt, Mediasch, Schässburg und Kronstadt.

V. Bukarest.

Aufstellung: Cruce de piatra, im Garten des Herrn Dr. Barasch, wo sich das neu errichtete Kinderspital befindet, ungefähr 900 Klafter östlich von der Metropolitan-Kirche.

Der Uhrfehler Dent's ergab sich aus den correspondirenden Sonnenhöhen, die mit dem Sextanten genommen wurden,

| | |
|---|------------|
| am 9. Juli um 23 ^h 58' Uhrzeit | + 6' 47' 6 |
| „ 10. „ „ „ „ | + 6 53·1 |
| „ 11. „ „ „ „ | + 6 57·7 |
| Mittel = | + 6' 52' 8 |

und der tägliche Gang aus den Beobachtungen des 9. und 11. Juli

$$J = + 5' 05$$

Von den telegraphischen Zeichen zur Längenbestimmung am 9. Juli wurde die

| | | | |
|----------|------------------------|----------------------------|----------------------|
| 1. Reihe | in Wien gegeben um | 19 ^h 15' 46" 30 | mittl. Zeit von Wien |
| " | Bukarest beobachtet um | 19 54 42·07 | " " " Bukarest |
| 2. Reihe | " Bukarest gegeben um | 19 58 41·78 | " " " Bukarest |
| " | Wien beobachtet um | 19 19 46·03 | " " " Wien |
| 3. Reihe | " Wien gegeben um | 19 21 16·31 | " " " Wien |
| " | Bukarest beobachtet um | 20 0 12·01 | " " " Bukarest |
| 4. Reihe | " Bukarest gegeben um | 20 1 41·78 | " " " Bukarest |
| " | Wien beobachtet um | 19 22 46·10 | " " " Wien |

Die 1. Reihe gibt den Längenunterschied = 38' 55" 77

" 2. " " " " " = 38 55·75

" 3. " " " " " = 38 55·70

" 4. " " " " " = 38 55·68

Mittel aus den von Wien gegebenen Reihen = 38' 55" 735

" " " " Bukarest " " = 38 55·715

Das Gesamtmittel ist = 38' 55" 72 = 9° 43' 56

Länge von Wien = 34 2 39

Länge von Bukarest = 43 46 35 von Ferro ¹⁾

Die von Bukarest nach Wien und von dort unmittelbar zurückgegebenen Signale langten hier nach einem abgeschätzten Intervall von 0·2 Zeitsecunden an. In Wien wurde dieses Intervall für die dort gegebenen und zurückgelangten Signale auf 0·4 bis 0·45 Zeitsecunden geschätzt.

Die Breite des Beobachtungspunktes in Bukarest wurde aus den mit dem Universale angestellten beobachteten Mittagshöhen der Sonne gefunden

$$\left. \begin{array}{l} \text{am 8. Juli} = 44^{\circ} 26' 27'' \\ \text{" 10. " } = 44 26 11 \end{array} \right\} \text{Mittel} = 44^{\circ} 26' 19''$$

Die Seehöhe ergab sich aus 10 Ablesungen am Barometer Fortin

45 Toisen

Für die magnetische Declination fand man die Werthe:

| | | |
|----------------------------------|------------------------------------|----------|
| am 8. Juli um 5 ^h 21' | mittl. Zeit von Bukarest | 8° 1' 0 |
| " 9. " " 18 9 | " " " " | 7 53·9 |
| " 10. " " 19 30 | " " " " | 7 51·3 |
| | Mittel | 7° 55' 4 |

In Wien war die Declination

| | am 8. Juli | am 9. Juli | am 10. Juli |
|-----------------------|------------|------------|-------------|
| um 14 ^h 6' | 12° 22' 63 | 12° 23' 75 | 12° 21' 19 |
| " 18 6 | 12 21·71 | 12 21·62 | 12 18·15 |
| " 22 6 | 12 22·09 | 12 31·27 | 12 24·22 |
| " 2 6 | 12 32·41 | 12 35·25 | 12 35·88 |
| " 6 6 | 12 26·52 | 12 27·64 | 12 27·67 |
| " 10 6 | 12 25·10 | 12 21·93 | 12 28·08 |
| Mittel | 12° 25' 08 | 12° 27' 41 | 12° 25' 86 |

Die Intensität der horizontalen Componente wurde bestimmt:

| | | |
|----------------------------------|------------------------------------|---------------------|
| am 9. Juli um 6 ^h 31' | mittl. Zeit von Bukarest | 2·2663 mit Magnet I |
| " " " " 6 28 | " " " " | 2·2610 " " II |
| " 11. " " 18 24 | " " " " | 2·2636 " " I |
| " " " " 18 26 | " " " " | 2·2613 " " II |
| | Mittel | 2·2638 |

¹⁾ Nach den beiden Beobachtern in Wien fand man den Längenunterschied aus den von Bukarest ankommenden Zeichen

nach Littrow = 38' 55" 55

" Hornstein = 38 55·88

Intensität in Wien

| | am 9. Juli | am 11. Juli |
|-----------------------|------------|-------------|
| um 14 ^h 3' | 2·01013 | 2·00936 |
| „ 18 3 | 2·00961 | 2·00923 |
| „ 22 3 | 2·00908 | 2·00795 |
| „ 2 3 | 2·00924 | 2·00842 |
| „ 6 3 | 2·00972 | 2·00917 |
| „ 10 3 | 2·00997 | 2·00980 |
| Mittel | 2·00962 | 2·00899 |

Die Inclination wurde zweimal mit dem Inductions-Inclinorium gemessen, und gefunden

| | |
|--|-----------|
| am 10. Juli 18 ^h 46' mittl. Zeit von Bukarest | 59° 29' 9 |
| „ 12 „ 19 2 „ „ „ „ | 59 50 0 |
| Mittel | 59° 39' 9 |

Hieraus folgt die Gesamtkraft gleich

$$4 \cdot 1814$$

Auf der Reise nach Galatz wurde die Seehöhe von Giurgewo aus 5 Ableisungen am Barometer Fortin

$$= 33 \text{ Toisen}$$

gefunden.

VI. Galatz.

Aufstellungsort: Garten des Gasthauses Hôtel de Moldavie, genannt Ventura, in der Gasse Domianska, ungefähr 100 Toisen westlich von der Kathedrale.

Der Uhrfehler Dent's wurde in Galatz dreimal aus correspondirenden Sonnenhöhen mit dem Sextanten bestimmt, und gefunden

| | |
|--|--------------------------------|
| am 17. Juli um 23 ^h 46' Uhrzeit | + 19' 30 ^s 3 |
| „ 19. „ „ „ | + 19 36 2 |
| „ 20. „ „ „ | + 19 41 3 |
| „ 19. „ „ 15 ^h 16 | Mittel + 19' 35 ^s 9 |

Die Beobachtungen am 17. und 19. Juli geben den täglichen Gang

$$J = + 3^s 67$$

Für Tiede hat man für dieselbe Zeit den Fehler

$$+ 19' 48^s 6 \text{ und } J = + 7^s 94$$

Von den telegraphischen Zeichen zur Längenbestimmung am 18. Juli wurde

| | | | |
|----------|----------------------|---------------------------------------|----------------------|
| 1. Reihe | in Wien gegeben um | 19 ^h 12' 3 ^s 44 | mittl. Zeit von Wien |
| „ | Galatz beobachtet um | 20 58 43 65 | „ „ „ Galatz |
| 2. Reihe | „ Galatz gegeben um | 20 4 57 67 | „ „ „ Galatz |
| „ | Wien beobachtet um | 19 18 17 45 | „ „ „ Wien |
| 3. Reihe | „ Wien gegeben um | 19 23 13 47 | „ „ „ Wien |
| „ | Galatz beobachtet um | 20 9 53 75 | „ „ „ Galatz |
| 4. Reihe | „ Galatz gegeben um | 20 11 37 69 | „ „ „ Galatz |
| „ | Wien beobachtet um | 19 24 57 50 | „ „ „ Wien |

Die 1. Reihe gibt den Längenunterschied = 46' 40^s 21

„ 2. „ „ „ „ = 46 40 22

„ 3. „ „ „ „ = 46 40 28

„ 4. „ „ „ „ = 46 40 19

Das Mittel ist = 46' 40^s 22 = 11° 10' 3'

Länge von Wien = 31 2 39

„ „ Galatz = 45 42 12 von Ferro¹⁾

¹⁾ In Wien beobachtete diesmal nur Herr Hornstein.

Die Breite wurde in Galatz zweimal mit dem Universale bestimmt und gefunden

$$\left. \begin{array}{l} \text{am 17. Juli . . . } 45^{\circ} 26' 44'' \\ \text{„ 19. „ . . . } 45 \quad 26 \quad 59 \end{array} \right\} \text{Mittel} = 45^{\circ} 26' 52''$$

Die Seehöhe im ersten Stocke des auf der Anhöhe gelegenen Gasthofes war aus 7 Ablesungen am Barometer Fortin

$$= 19 \text{ Toisen}$$

Für die magnetische Declination ergaben sich die Werthe:

| | |
|---|----------|
| Am 17. Juli um 23 ^h 29' mittl. Zeit von Galatz | 6° 29' 2 |
| „ 19. „ „ 23 21 „ „ „ | 6 37 9 |
| „ 20. „ „ 20 30 „ „ „ | 6 35 3 |
| Mittel | 6° 34' 1 |

Declination in Wien.

| | am 17. Juli | 18. Juli | 19. Juli |
|---------------------------------|-------------|------------|------------|
| um 11 ^h 6' | 12° 27' 18 | 12° 24' 67 | 12° 27' 18 |
| „ 18 6 | 12 24 37 | 12 22 48 | 12 24 40 |
| „ 22 6 | 12 26 31 | 12 25 58 | 12 29 84 |
| „ 2 6 | 12 31 06 | 12 32 26 | 12 36 67 |
| „ 6 6 | 12 28 58 | 12 29 75 | 12 27 31 |
| „ 10 6 | 12 27 87 | 12 28 92 | 12 29 27 |
| Mittel | 12° 28' 06 | 12° 27' 28 | 12° 29 11 |

Die Intensität der horizontalen Componente wurde bestimmt

| | | | |
|--|--------|------------|----|
| am 17. Juli um 4 ^h 15' mittl. Zeit von Galatz | 2·2169 | mit Magnet | I |
| „ 17. „ „ 4 42 „ „ „ | 2·2150 | „ „ | II |
| „ 19. „ „ 19 5 „ „ „ | 2·2208 | „ „ | I |
| „ 19. „ „ 19 4 „ „ „ | 2·2151 | „ „ | II |
| Mittel | 2·2169 | | |

Intensität in Wien

| | am 17. Juli | am 19. Juli |
|---------------------------------|-------------|-------------|
| um 14 ^h 3' | 2·01016 | 2·01028 |
| „ 18 3 | 2·01039 | 2·01031 |
| „ 22 3 | 2·00908 | 2·00907 |
| „ 2 3 | 2·01021 | 2·00935 |
| „ 6 3 | 2·01001 | 2·00926 |
| „ 10 3 | 2·01053 | 2·01026 |
| Mittel | 2·01007 | 2·00976 |

Das Inductions-Inclinorium gab die Inclination

$$60^{\circ} 56' 9$$

Daraus findet man für die Gesamtkraft den Werth

$$4·5655$$

Herr Jerinich, welcher sich in Galatz mit meteorologischen Beobachtungen beschäftigt, theilte mir über das dort stattfindende Gefrieren und Aufthauen der Donau folgende Aufzeichnungen mit

| | | | |
|---------------|-------------------------|--|----------|
| In Jahre 1837 | war die Donau gefroren, | vom 7. bis 28. Februar, also durch | 21 Tage. |
| „ 1837—1838 | „ „ „ „ | „ 29. December bis 3. März, also durch | 65 „ |
| „ 1838—1839 | „ „ „ „ | „ 21. „ „ 13. „ „ „ | 80 „ |
| „ 1840 | „ „ „ „ | „ 12. Jänner bis 2. Februar, „ „ | 21 „ |
| „ 1840—1841 | „ „ „ „ | „ 17. December bis 21. März, „ „ | 94 „ |
| „ 1841—1842 | „ „ „ „ | „ 26. „ „ 9. „ „ „ | 71 „ |
| „ 1842—1843 | „ „ „ nicht gefroren. | | |
| „ 1844 | „ „ „ gefroren, | „ 12. Jänner bis 27. Februar, „ „ | 45 „ |
| „ 1844—1845 | „ „ „ „ | „ 28. December bis 23. Jänner, „ „ | 25 „ |

| Im Jahre 1845—1846 war die Donau nicht gefroren. | | | | | | | | | |
|--|-----------|-----|---|-----------------|-----|--------------------------------------|-------|----|-------|
| " " | 1847 | " " | " | gefroren. | vom | 15. Jänner bis 13. Febr., also durch | . . . | 28 | Tage. |
| " " | 1848 | " " | " | " | " | 2. " " 1. März. | " " | 58 | " |
| " " | 1849 | " " | " | " | " | 1. " " 22. Februar. | " " | 52 | " |
| " " | 1850 | " " | " | " | " | 5. " " 4. März. | " " | 58 | " |
| " " | 1851 | " " | " | " | " | 1. bis 25. Februar. | " " | 24 | " |
| " " | 1851—1852 | " " | " | nicht gefroren. | | | | | |
| " " | 1852—1853 | " " | " | " | | | | | |
| " " | 1853—1854 | " " | " | " | | | | | |
| " " | 1855 | " " | " | gefroren. | " | 29. Jänner bis 15. Februar.) | | | |
| | | | | | und | 18. bis 26. Februar. | " " | 25 | " |
| " " | 1855—1856 | " " | " | " | " | 16. Decemb. bis 27. Jänner. | " " | 42 | " |
| " " | 1857 | " " | " | " | " | 14. Februar bis 6. März. | " " | 20 | " |
| " " | 1858 | " " | " | " | " | 15. Jänner bis 15. März. | " " | 69 | " |

Auf der Reise von Galatz nach Sulina wurde von Tultscha aus ein Ausflug in die Dobrutseha gemacht. Der bereiste Theil derselben ist hügelig und fruchtbar, wenn gleich, wenigstens in dieser Jahreszeit, wasserarm. Hat man bei Tultscha die erste Hügelreihe, die bei Hirsowa anfängt, längs der Donau fortläuft, und unter Galatz mit den fünf Hügeln (Besch-Tepe) endet, überschritten, so breitet sich in derselben Richtung eine zweite Hügelreihe aus, dann verflacht sich das Land in eine weite Ebene, die bei Kataloi beginnt, und über welche man gegen Süden durch zwei Stunden fährt. Nun erscheint zur Rechten ein einzeln stehender Berg, Denisch Tepe, am Fusse mit Getreidefeldern, in der Höhe mit Wäldern bedeckt, zur Linken eine Hügelreihe mit zu Tage stehenden Kalkfelsen. Nach einer Fahrt von ungefähr vier Stunden von Tultscha gelangt man zu einem See, der wahrscheinlich mit dem südöstlich davon liegenden grossen See Ramsin in Verbindung ist, und sich bis zu einer Bergkette erstreckt, die man südlich von Babadagh erblickt, und die von Westen nach Osten zu streichen und sich zwischen dem genannten kleinen See und dem grossen Ramsin hineinzuschieben scheint. Sie bricht bei Jenisarai ziemlich schroff mit einem Vorgebirge ab, auf dem noch Ruinen eines Schlosses sind. Der kleinere See hat von der bereisten Seite keinen sichtbaren Zufluss ausser einigen Stümpfen. Das Wasser soll süß sein. Von Babadagh ist er etwa eine Viertelstunde gegen Osten entfernt. Dieser Ort wurde nach einer fünfständigen Fahrt erreicht. Er liegt in einem freundlichen Thale, das mit Weinbergen umgeben, aber ebenfalls wasserlos ist.

Am folgenden Tage überstiegen wir eine sanfte Anhöhe gegen Westen, und kamen bald in eine waldige Gegend, deren Baumwuchs allmählich dichter wurde, und reiche Vegetation mit häufigen Schlingpflanzen zeigte. Man gelangt, immer die westliche Richtung einhaltend, zu zwei Ortschaften, Colonien von Deutschen und Russen, nämlich nach einer $3\frac{1}{2}$ ständigen Fahrt (von Babadagh an gerechnet) nach Czukarow und nach einer $5\frac{1}{2}$ ständigen Fahrt nach Atmadschir. Von hier führt die Strasse nach Nord und Nordost über Nalban und Kataloi in ungefähr fünf Fahrstunden nach Tultscha.

Das Gestein besteht in diesen Gegenden meist aus Kalk- und Sandstein; der Felsen von Tultscha ist aus Thonschiefer und Conglomerat zusammengesetzt. Es ist dort von der Donau-regulirungs-Commission ein Steinbruch eröffnet worden, von welchem die Steine auf einer kurzen Eisenbahn an die Donau und von da nach Sulina zum Bau der Dämme gebracht werden.

Man sieht auf diesem Wege viele Heerden, die den Mokanen (Schafhirten aus Siebenbürgen) gehören.

Es fällt auf, dass in diesen Gegenden manche unserer gewöhnlichsten Vögel, z. B. Lerchen, Sperlinge, gänzlich zu fehlen scheinen, dafür sind Elstern, Krähen, Hühner- und Lämmergeyer desto zahlreicher.

Die Höhen, welche auf diesem Ausfluge barometrisch gemessen wurden, sind folgende:

| | | | |
|--|-----------|---|-----------|
| Seehöhe des Gipfels des Felsens bei Tultscha | 19 Toisen | 1 | Ableseung |
| Höchster Punkt der Strasse über die erste Anhöhe auf dem Weg nach Babadagh | 70 | 1 | " |
| " " " " " zweite Anhöhe auf demselben Wege | 118 | 1 | " |
| Brunnen beim Wirthshause in der Ebene von Kataloi eine Viertelstunde östlich vom Dorfe | 12 | 1 | " |
| Babadagh | 26 | 2 | " |
| Thal gegen Czucarow | 42 | 1 | " |
| Czucarow | 66 | 1 | " |
| Atmadschir | 106 | 1 | " |
| Anhöhe vor dem Dorfe Nalbau | 54 | 1 | " |

VII. Sulina.

In Sulina wurde zweimal beobachtet, auf der Hiureise nach Konstantinopel am 23. und 24. Juli und während der Reise im schwarzen Meere am 8. October. Die Aufstellung der Instrumente war jedesmal am linken Donauufer 1480 Toisen westlich und 420 Toisen nördlich vom Leuchthurm.

Der Uhrfehler Dent's wurde durch correspondirende Sonnenhöhen mit dem Sextanten gefunden,

$$\text{am 23. Juli um } 11^h 39' \text{ Uhrzeit} \dots + 27' 5^s 9$$

Dent blieb stehen während des Ausfluges in die Dobrutscha, konnte daher zur Bestimmung der Längendifferenz zwischen Galatz und Sulina nicht benützt werden. Nach Tiede findet man

$$\begin{aligned} \text{am 19. 157 Juli } F &= + 19' 48^s 6 \\ \text{„ 23. 485 „ } F &= + 27' 12^s 1 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{am 19. 157 Juli } F &= + 19' 48^s 6 \\ \text{„ 23. 485 „ } F &= + 27' 12^s 1 \end{aligned}} \right\} J = + 7^s 94;$$

also

$$J. dt = 34^s 4$$

daher den

$$\begin{aligned} \text{Längenunterschied} &= 6' 49^s 1 = 1^\circ 42' 16'' \\ \text{Länge von Galatz} &\dots\dots\dots = 45 \quad 42 \quad 42 \\ \text{„ „ Sulina} &\dots\dots\dots = 17 \quad 21 \quad 58 \text{ von Ferro.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Am 8. 47. October war in Sulina der Fehler Dent's} &= + 28' 13^s 6, \text{ Fehler Tiede's} = + 31' 50^s 9 \\ \text{„ 2. 48. „ „ „ Kalakri „ „ „} &= + 23' 31^s 0, \text{ „ „ „} = + 26' 3^s 9 \\ J &= - 1^s 10 \qquad \qquad \qquad J = + 9^s 89 \end{aligned}$$

daher

$$\begin{aligned} \text{am 8. 17. October in Kalakri der Fehler Dent's} &= + 23' 27^s 1, \text{ Fehler Tiede's} = + 27' 3^s 4 \\ \text{Längenunterschied} &= + 4' 16^s 2 \qquad \qquad \qquad + 4' 17^s 8 \\ \text{Mittel} &\dots\dots\dots 4' 17^s 0 = + 1^\circ 11' 45'' \\ \text{Länge von Kalakri} &\dots\dots\dots = + 46 \quad 8 \quad 31 \\ \text{„ „ Sulina} &\dots\dots\dots = + 17 \quad 20 \quad 16 \end{aligned}$$

Die Verschiedenheit der beiden Längenbestimmungen von Sulina kann ausser der Unsicherheit des Ganges der Chronometer während der Seefahrt auch in einem Fehler der Länge von Pera, welche der letzten Berechnung von Sulina zu Grunde gelegt wurde, ihre Ursache haben. Die Länge des Leuchthurmes ist um 2' 11'' im Bogen grösser als die des Beobachtungsplatzes.

Die Breite wurde gefunden

$$\begin{aligned} \text{am 24. Juli mit dem Universale} &= 45^\circ 8' 36'' \\ \text{„ 8. Octob. „ „ Sextanten} &= 45 \quad 8 \quad 43 \\ \text{Mittel} &= 45^\circ 8' 39'' \end{aligned}$$

Die magnetische Declination war

| | |
|---|-------------------|
| am 8. October um 22 ^h 48' mittlere Zeit von Sulina | 6° 11' 9 |
| " " " " 1 22 " " " " " " " " " " " " " " | 6 14 8 |
| | Mittel . 6° 13' 3 |

Declination in Wien am 8. October.

| | |
|---------------------------------|-----------------------------------|
| um 18 ^h 6' | 12° 29' 69 |
| " 22 6 | 12 29 76 |
| " 2 6 | 12 35 37 |
| " 6 6 | 12 26 25 |
| " 10 6 | 12 27 88 |
| | Mittel . 12° 29' 61 ¹⁾ |

Die Intensität der horizontalen Componente wurde gefunden

| | |
|--|---------------------|
| am 8. October um 23 ^h 59' | 2 2683 mit Magnet I |
| " " " " 23 56 | 2 2612 " II |
| | Mittel . 2 2647 |

Intensität in Wien am 8. October.

| | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| um 18 ^h 3' | 2 01022 |
| " 22 3 | 2 00873 |
| " 2 3 | 2 00968 |
| " 6 3 | 2 00990 |
| " 10 3 | 2 00890 |
| | Mittel . 2 00953 ¹⁾ |

VIII. Ortaköj (bei Konstantinopel).

Da in Konstantinopel selbst ein geeigneter Beobachtungsplatz nicht anzufinden war, so wurden durch die gültige Vermittlung Seiner Excellenz des Herrn Internuntius Freiherrn von Prokesch-Osten und durch die Gefälligkeit des Herrn Sester, Hofgärtners seiner Majestät des Sultans, die Beobachtungen in Ortaköj gemacht, und die Instrumente in Herrn Sester's Garten aufgestellt. Man kann Ortaköj ungefähr 2 Bogenminuten östlich und 3' nördlich von Pera annehmen, es liegt auf einer der am Bosphorus hinziehenden Anhöhen. Nach Angabe Herrn Sester's ist der Beobachtungsort 240 Toisen gegen Nord-Nord-Ost von der Moschee Medschidje in Tschirakan Serai entfernt, und liegt 34 Toisen über dem Meere.

Der Uhrfehler Dent's wurde dreimal aus correspondirenden Sonnenhöhen mittelst des Sextanten bestimmt und gefunden

| | |
|---|-------------------------|
| am 1. August um 23 ^h 41' Uhrzeit | + 21' 22 ^s 7 |
| " 2. " " " " " " " " " " " " " " | + 24 21 3 |
| " 3. " " " " " " " " " " " " " " | + 24 27 0 |
| " 2. " " " 23 ^h 41' " Mittel | + 21' 24 ^s 7 |
| | J = + 2 ^s 12 |

Für Tiede ist gleichzeitig der Fehler 25' 16^s 9

$$J = + 6 38$$

Die Breite von Ortaköj wurde am 3. August mit dem Universale bestimmt und gefunden

$$41^{\circ} 4' 13''$$

1) Da in Wien mit September die Nachtbeobachtungen um 14^h aufhörten, so wurden, um auch die aus fünf Stunden abgeleiteten Mittel mit den sechsständigen vergleichbar zu machen, erstere bei der Declination um 0' 15 verkleinert, bei der Intensität um 0 00004 vergrößert, welche Zahlen gefunden wurden, indem man aus Monaten September, October, November und December 1857 die fünfständigen und sechsständigen Mittel berechnete und unter einander verglich.

Die magnetische Declination war

| | |
|---|---------------------------------------|
| am 1. August um 21 ^h 48' mittl. Zeit von Ortaköj | 6' 33 ^s 7 |
| .. 2. 18 42 | 6 33·4 |
| .. 3. 22 12 | 6 34·6 |
| | Mittel 6' 33 ^s 9 |

Declination in Wien.

| | am 1. August | 2. August | 3. August |
|---------------------------------|----------------------------|-----------|-----------|
| um 14 ^h 6' | 12° 30'11 | 12° 28'56 | 12° 31'22 |
| .. 18 6 | 12 25·21 | 12 23·21 | 12 26·44 |
| .. 22 6 | 12 25·46 | 12 26·43 | 12 29·45 |
| .. 2 6 | 12 33·47 | 12 34·13 | 12 34·52 |
| .. 6 6 | 12 29·16 | 12 28·90 | 12 26·80 |
| .. 10 6 | 12 27·03 | 12 27·16 | 12 25·88 |
| | Mittel 12° 28'41 | 12° 28'07 | 12° 29'05 |

Die Intensität der horizontalen Componente wurde folgendermassen gefunden

| | | |
|--|-------------------------|----------|
| am 1. August um 4 ^h 16' mittl. Zeit von Ortaköj | 2·4671 | Magnet I |
| | 2·4620 | .. II |
| .. 2. 4 23 | 2·4632 | .. I |
| 4 22 | 2·4584 | .. II |
| | Mittel 2·4627 | |

Intensität in Wien

| | am 1. August | 2. August |
|---------------------------------|--------------------------|-----------|
| um 14 ^h 3' | 2·00798 | 2·09854 |
| .. 18 3 | 2·00796 | 2·00805 |
| .. 22 3 | 2·00685 | 2·00703 |
| .. 2 3 | 2·00718 | 2·00767 |
| .. 6 3 | 2·00866 | 2·00903 |
| .. 10 3 | 2·00876 | 2·00906 |
| | Mittel 2·00790 | 2·00823 |

Für die Inclination gab das Inclinatorium von Repsold folgende Werthe:

| | | |
|---|--------------------------|---------|
| am 3. August um 18 ^h 52' mittl. Zeit von Ortaköj | Inclination = 55°42'9 | Nadel 5 |
| .. 5 20 0 | = 55 44·2 | .. 6 |
| | Mittel = 55°43'6 | |

Hieraus folgt für die Gesamtkraft der Werth

$$4·3731$$

IX. Trapezunt.

In Trapezunt hatte der k. k. Consul Baron Baum die Gefälligkeit mir ein Zimmer seiner Wohnung einzuräumen, und die Ausführung der Beobachtungen im Consulatsgarten zu gestatten.

Ein durch das Ausbleiben des Dampfes verursachter längerer Aufenthalt gestattete eine öftere Bestimmung des Uhrfehlers Dent's in dieser Station. Er wurde aus correspondirenden Sonnenhöhen gefunden.

| | |
|--|--------------------------------------|
| am 10. August um 22 ^h 58' Uhrzeit | + 1 ^h 7 36 ^s 8 |
| .. 11. 22 57 | + 1 7 42·4 |
| .. 12. 22 57 | + 1 7 45·8 |
| .. 14. 22 56 | + 1 7 56·1 |
| .. 19. 22 55 | + 1 8 14·0 |
| .. 22. 22 51 | + 1 8 20·8 |
| .. 24. 22 54 | + 1 8 24·9 |

Die aus diesen Beobachtungen abgeleitete Längenbestimmung wird mit den nach der Rückkehr in Konstantinopel gemachten Zeitbestimmungen gegeben werden.

Die Breite wurde in Trapezunt dreimal mit dem Universale bestimmt, nämlich:

| | |
|------------------------|-------------------|
| am 9. August | 41° 1' 24" |
| .. 11. | 41 1 8 |
| .. 19. | 41 1 19 |
| Mittel | <u>41° 1' 17"</u> |

Die Höhe des Beobachtungsortes über dem Meere kann nach den Angaben des mit Fortin verglichenen Metallbarometers angenommen werden zu

12·1 Toisen.

Die magnetische Declination wurde gefunden

| | |
|--|------------------|
| am 11. August um 18 ^h 53' mittl. Zeit von Trapezunt | 2° 1' 3 |
| .. 12. .. " 18 25 .. " .. " .. " | 1 48·7 |
| .. 14. .. " 18 56 .. " .. " .. " | 1 52·7 |
| .. 11. .. " 1 20 .. " .. " .. " | 2 7·9 |
| .. 15. .. " 19 6 .. " .. " .. " | 1 54·5 |
| .. 15. .. " 1 12 .. " .. " .. " | 2 8·5 |
| Mittel | <u>1° 58' 9"</u> |

Declination in Wien

| | am 11. August | 12. August | 11. August | 15. August |
|---------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| um 14 ^h 6' | <u>12° 27' 30</u> | <u>12° 24' 22</u> | <u>12° 26' 69</u> | <u>12° 27' 00</u> |
| .. 18 6 | 12 22·38 | 12 20·34 | 12 21·53 | 12 26·27 |
| .. 22 6 | 12 24·88 | 12 27·31 | 12 29·42 | 12 30·01 |
| .. 2 6 | 12 33·70 | 12 33·83 | 12 33·37 | 12 35·97 |
| .. 6 6 | 12 29·13 | 12 26·86 | 12 28·87 | 12 28·29 |
| .. 10 6 | <u>12 27·24</u> | <u>12 26·78</u> | <u>12 26·72</u> | <u>12 28·34</u> |
| Mittel | <u>12° 27' 44</u> | <u>12° 26' 56</u> | <u>12° 28' 27</u> | <u>12° 29' 31</u> |

Für die Intensität der horizontalen Componente ergeben sich die Werthe:

| | | | |
|--|---------------|--------|----|
| am 10. August um 21 ^h 25' mittl. Zeit von Trapezunt | 2·5369 | Magnet | I |
| .. " .. " 21 22 .. " .. " .. " | 2·5319 | .. | II |
| .. 11. .. " 21 56 .. " .. " .. " | 2·5337 | .. | I |
| .. " .. " 21 51 .. " .. " .. " | 2·5295 | .. | II |
| Mittel | <u>2·5330</u> | | |

Intensität in Wien

| | am 10. August | 11. August |
|---------------------------------|----------------|----------------|
| um 14 ^h 3' | <u>2·01088</u> | <u>2·01008</u> |
| .. 18 3 | 2·01043 | 2·01020 |
| .. 22 3 | 2·00963 | 2·00840 |
| .. 2 3 | 2·00922 | 2·00912 |
| .. 6 3 | 2·00991 | 2·00993 |
| .. 10 3 | <u>2·01085</u> | <u>2·01008</u> |
| Mittel | <u>2·01015</u> | <u>2·00969</u> |

Die Inclination fand sich mit Repsold's Inclinatorium

| | | | |
|---|------------------|-------|---|
| am 12. August um 22 ^h 0' mittl. Zeit von Trapezunt | 55° 31' 9 | Nadel | 5 |
| .. " .. " 22 42 .. " .. " .. " | 55 37·6 | .. | 6 |
| Mittel | <u>55° 36' 2</u> | | |

Daraus folgt für die Gesamtkraft der Werth

1·4839

Bei Gelegenheit eines Spazierrittes in der Umgebung von Trapezunt wurde mit dem Metallbarometer die Höhe des Mytrios-Hügels (Boss-Tepe) über dem Meere gemessen und gefunden.

135·0 Toisen

Konstantinopel.

Nach der Rückkehr von Trapezunt wurden in Pera im Hofe des Palastes der k. k. Internuntiaturs correspondirende Sonnenhöhen gemessen, um den Gang der Uhren zu untersuchen. Man fand

| | |
|--|----------------------------------|
| am 31. August um 23 ^h 34' Uhrzeit den Fehler Dent's | + 25' 55 ^s ·01 |
| „ 1. Sept. „ „ „ „ „ „ | + 25' 55 ^s ·86 |
| „ 31. Aug. „ 11 31 „ „ „ „ Mittel | + 25' 55 ^s ·44 |
| „ | ↓ + 0 ^s ·85 |

Um auch die Beobachtungen in Ortakij zu Längenbestimmungen von Trapezunt benützen zu können, wurde der dort gefundene Uhrfehler Dent's um 8^s·1 vermindert. Man hat demnach

| | | |
|--|--------------------------|---------------------------|
| | Dent | Tiede |
| in Pera am 2 ^o 487. August den Fehler | + 24' 16 ^s ·6 | + 25' 9 ^s ·7 |
| „ „ „ 31 ^o 982. „ „ „ | + 25' 55' 4 | + 28' 34' 0 ¹⁾ |

Da, wie man aus der S. 26 gegebenen Tafel sieht, der Gang Dent's sich in Trapezunt merklich änderte, so wird es am besten sein, auch den dortigen Fehler für zwei Perioden zu rechnen, und das Mittel aus den Bestimmungen am 10., 11., 12. und 14. August für die Hinfahrt, das Mittel aus denen am 19., 22. und 24. August für die Rückfahrt zu benützen. Man hat demnach

| | | |
|---|------|--|
| | Dent | Tiede |
| in Trapezunt am 12 ^o 206. August den Fehler + 1 ^h 7' 45 ^s ·3 | | + 1 ^h 9' 17 ^s ·4 |
| „ „ „ 22 ^o 121. „ „ „ + 1 8 19·9 | | + 1 10 25· |

Der Gang der Uhren ist für die Hinfahrt

| | | |
|--------------------------------|----------------------|----------------------|
| | Dent | Tiede |
| am 2. August in Pera | + 2 ^s ·12 | + 6 ^s ·38 |
| „ 12. „ „ Trapezunt | + 4·82 | + 7·25 |
| Mittel | + 3 ^s ·47 | + 6 ^s ·82 |

und für die Rückfahrt

| | | |
|---|------|----------------------|
| | Dent | Tiede |
| am 22. August in Trapezunt + 2 ^s ·66 | | + 6 ^s ·51 |
| „ 1. September in Pera . + 0 ^s ·85 | | + 7·15 |
| Mittel + 1 ^s ·76 | | + 6 ^s ·85 |

Man hat demnach den gleichzeitigen Fehler der Uhren für die Hinfahrt

| | | |
|--|--------------------------|--------------------------|
| | Dent | Tiede |
| am 12 ^o 206. August in Pera | + 24' 50 ^s ·3 | + 26' 16 ^s ·0 |
| „ „ „ „ Trapezunt + 67' 45·3 | | + 69' 17·4 |
| Längenunterschied | 42' 55 ^s ·0 | 43' 1 ^s ·4 |

¹⁾ Es wurde dreimal versucht, die Länge von Konstantinopel telegraphisch zu bestimmen, aber stets waren die Linien unterbrochen oder andere Hindernisse vorhanden. Die Länge aller folgenden Stationen wurde auf den Beobachtungsort in Pera bezogen, welcher sehr nahe unter dem Meridian der Sophien-Moschee liegt, daher dessen Länge von Ferro = 16° 38' 50" angenommen werden kann.

Für die Rückfahrt sind die gleichzeitigen Fehler

| | Dent | Tiede |
|---|--------------------------|--------------------------|
| am 31 ^{er} 9 ^{ten} 2. August in Trapezunt | + 68' 37 ^{er} 3 | + 71' 33 ^{er} 0 |
| „ Pera | + 25 55 ^{er} 4 | + 28 34 ^{er} 0 |
| Längenunterschied | 42' 41' 9 | 42' 59 ^{er} 0 |

und im Mittel aus Hin- und Rückfahrt

$$42' 48^{er} 5 \quad 43' 0^{er} 2$$

Der Unterschied zwischen den Ergebnissen beider Uhren ist ohne Zweifel der Verschiedenheit des Einflusses zuzuschreiben, welchen die manchmal stürmische Witterung während der Seefahrt auf ihren Gang ausgeübt hat. Da aber auch, wie man aus S. 26 sieht, während des Landaufenthaltes Dent seinen Gang merklich änderte, was bei Tiede weniger der Fall war, so wurde den Angaben Tiede's ein doppeltes Gewicht beigelegt, und man kann im Mittel die Länge von Trapezunt gegen Pera annehmen

$$42' 56^{er} 4 = 10^\circ 44' 6''$$

Länge von Pera . . . = 46 38 50

„ „ Trapezunt = 57 22 56 von Ferro.

Die Breite von Pera wurde aus den am 19. September gemessenen Mittagshöhen der Sonne gleich

$$41^\circ 1' 7''$$

gefunden.

X. Sinope.

Aufstellungsort: Garten bei der Wohnung des Herrn k. k. Consular-Agenten Mantovani, welcher, da ein Gasthaus nicht vorhanden ist, so gefällig war, mir ein Zimmer seiner Wohnung abzutreten.

Aus correspondirenden Sonnenhöhen wurden folgende Uhrfehler Dent's gefunden

| | |
|--|---------------------------|
| am 6. September um 23 ^{er} 8' Uhrzeit | + 50' 35 ^{er} 06 |
| „ 9. „ „ 23 7 „ | + 50 33 ^{er} 45 |
| und „ 7 ^{er} 96 „ Mittel | + 50' 34 ^{er} 25 |
| | J = - 0 ^{er} 54 |

Nach der Rückkehr wurden in Pera wieder einige Zeitbestimmungen gemacht, daher die Länge von Sinope dort gegeben werden wird.

Die Breite von Sinope fand man aus den Beobachtungen am 9. September

$$42^\circ 1' 51''$$

Die Höhe über dem Meere ist nur wenige Toisen, daher sie nicht gemessen wurde.

Die magnetische Declination wurde bestimmt

| | |
|--|------------------------------|
| am 4. September um 3 ^{er} 13' | 4° 36' 6 |
| „ 5. „ „ 4 46 | 4 37 ^{er} 8 |
| „ 6. „ „ 21 3 | 4 39 ^{er} 0 |
| „ 8. „ „ 23 4 | 4 38 ^{er} 0 |
| „ 9. „ „ 22 0 | 4 39 ^{er} 9 |
| „ 9. „ „ 4 37 | 4 37 ^{er} 0 |
| | Mittel 4° 37 ^{er} 9 |

| Declination in Wien | | | | | |
|-----------------------|-------------|------------|------------|------------|------------|
| | am 4. Sept. | 5. Sept. | 6. Sept. | 8. Sept. | 9. Sept. |
| um 18 ^h 6' | 12° 26' 46 | 12° 25' 27 | 12° 25' 44 | 12° 24' 13 | 12° 27' 99 |
| " 22 6 | 12 29·00 | 12 27·37 | 12 28·99 | 12 32·05 | 12 27·83 |
| " 2 6 | 12 33·52 | 12 32·38 | 12 32·49 | 12 35·76 | 12 31·89 |
| " 6 6 | 12 29·86 | 12 29·76 | 12 29·82 | 12 27·69 | 12 28·34 |
| " 10 6 | 12 28·84 | 12 29·19 | 12 28·51 | 12 28·18 | 12 26·19 |
| Mittel. | 12° 29' 39 | 12° 28' 64 | 12° 28' 90 | 12° 29' 41 | 12° 28' 30 |

Für die Intensität der horizontalen Componente erhielt man folgende Werthe:

| | | |
|---------------------------------------|--------|----------|
| am 5. September um 2 ^h 55' | 2·4204 | Magnet I |
| " " " " 2 52 | 2·4110 | " II |
| " 6. " " 19 53 | 2·4231 | " I |
| " " " " 19 52 | 2·4058 | " II |
| " 9. " " 2 22 | 2·4152 | " I |
| " " " " 2 19 | 2·4086 | " II |
| Mittel . . . | 2·4140 | |

| Intensität in Wien | | | |
|-----------------------|-------------|----------|----------|
| | am 5. Sept. | 6. Sept. | 9. Sept. |
| um 18 ^h 3' | 2·00945 | 2·00975 | 2·00997 |
| " 22 3 | 2·00861 | 2·00908 | 2·00821 |
| " 2 3 | 2·00985 | 2·00987 | 2·00881 |
| " 6 3 | 2·00987 | 2·01003 | 2·00956 |
| " 10 3 | 2·01002 | 2·01021 | 2·00969 |
| Mittel. | 2·00960 | 2·00983 | 2·00929 |

Die Inclination wurde gefunden mit Repsold's Inclinorium

| | |
|--------------------------------------|-----------|
| am 5. September um 5 ^h 2' | 57° 4' 25 |
| " " " " 5 50 | 57 6·62 |
| " 8. " " 4 45 | 57 12·75 |
| " " " " 5 18 | 57 15·00 |

Die Beobachtungen am 8. September wurden wegen eines drohenden Gewitters in grosser Eile ausgeführt. Sie hatten eigentlich nur den Zweck sich zu versichern, dass bei den Able- sungen am 5. nicht ein grober Lesefehler eingetreten sei, worüber der auffallend grosse Werth der aus ihnen hervorgehenden Inclination allerdings einen Zweifel gestatten konnte. Bei der Berechnung des Mittels kann ihnen demnach nur das halbe Gewicht gegeben werden, und man hat daher

$$\text{Mittel } 57^{\circ} 8' 25$$

Hiemit wird die Gesamtkraft:

$$4\cdot4488$$

Schon auf der Reise von Trapezunt, die ich mit dem Lloydampfer Trebisonda, Capitän Benisch machte, hatte ich erfahren, dass in der Nähe von Sinope gegen das Vorgebirge Indje ein Punkt sei, wo die Magnetnadel so abweichende Stellungen annehmen soll, dass man die vielen an diesem Orte vorgefallenen Unglücksfälle nur dieser Ursache zuschreiben wollte. Desswegen benützte ich, als ich nach meiner Rückkehr von Trapezunt in Konstantinopel erfahren hatte, dass der erwartete Marine-Dampfer Taurus noch nicht eingetroffen sei, sogleich den nächsten wieder nach Trapezunt abgehenden Dampfer um in Sinope zu landen und dort die magnetischen Bestimmungen auszuführen. Ihre eben mitgetheilten Ergebnisse beweisen, dass wenigstens in Sinope in der Declination keine so bedeutende Störungsursache ersichtlich sei, um eine für den Seemann bemerkliche oder gar gefährliche Ablenkung des Compasses

hervorzubringen. Nicht stärker äussert sie sich in der Inclination, die um einen halben Grad grösser ist, als sie nach dem wahrscheinlichen Lauf der Isoclinen sein sollte. Die vorherrschende Formation an diesen Küsten ist Trachyt, der wahrscheinlich an mehreren Stellen magnetische Massen enthält. Wirklich theilte mir Herr Ritter, Director der Brücken- und Wasserbauten in Konstantinopel, mit, dass die Ingenieure bei Besichtigung der in jenen Gegenden vorhandenen Wälder bei Elek in der Nähe von Bojabad ungefähr 20 geographische Meilen süd-südöstlich von Sinope sich in einer Gegend befanden, wo die Boussolen so abweichende Stellungen einnahmen, dass sie nicht mehr zu gebrauchen waren ¹⁾.

Es war mir daher sehr erwünscht, dass ich, ehe der Dampfer von Trapezunt ankam, um nach Konstantinopel zurückzukehren, noch über einen Tag zu verfügen hatte, an welchem ich die Beobachtungen auf dem Cap selbst ausführen wollte.

XI. Cap Indje.

Leider war die Witterung an diesem Tage so ungünstig, dass keine Sonnebeobachtungen gemacht, also auch die Declination nicht bestimmt werden konnte. Die während eines heftigen Sturmes ausgeführten Beobachtungen über horizontale Intensität und Inclination gaben den Werth der ersteren

| | | | |
|---------------------------------------|-----------|-------------------|--------------|
| am 7. September um 22 ^h 6' | | 2.4069 | mit Magnet I |
| „ „ „ „ 22 5 | | 2.3951 | „ „ II |
| | | <u> </u> | |
| | | Mittel | . 2.4001 |

Intensität in Wien

| | | | |
|-----------------------|-----------|-------------------|-------------|
| | | | am 7. Sept. |
| um 18 ^h 3' | | 2.01007 | |
| „ 22 3 | | 2.00891 | |
| „ 2 3 | | 2.00998 | |
| „ 6 3 | | 2.01085 | |
| „ 10 3 | | 2.01060 | |
| | | <u> </u> | |
| | | Mittel | . 2.01015 |

und den Werth der Inclination mit dem Inductions-Inclinorium:

$$57^{\circ} 11'5$$

woraus der Werth für die Gesamtkraft folgt:

$$4.4358$$

¹⁾ Das „Nautical Magazin“ enthält hierüber Folgendes:

A curious fact has just been discovered in the Black Sea, that is interesting to navigation and science. On the 13th of March (1858) the Austrian steamer *Trebisonda* grounded on a sand bank East of Cape Injeh, about a mile and a half from Sinope. Thanks to the assistance of the Ottoman Admiral, who is stationed at that place, she was got off after considerable difficulty, and continued her voyage. The Captain of her however observed, that in leaving the point of which he was on shore his compass, which had shown a considerable amount of deviation, resumed its proper indication, — and he at once concluded from this, that his compass had led him astray.

He communicated the circumstance to the Minister of Marine at Constantinople, who sent an account of his statement to the authorities at Sinope.

Some days afterwards the same effect on the compass was observed on board the Ottoman steamer *Astrologer* and by the French ship *Henri IV*. The Commander-in-Chief at the Arsenal then ordered a Turkish brig to make same experiments in reference to the subject, from which it appeared that a deviation of the compass was found to take place in the ships along the coast within a range of thirty miles, of which Cape Injeh is the centre. On investigating the cause of this effect on the compass a large mass of ferruginous rock was discovered, which has proved to be very valuable, commencing in a calcareous mass about three and a half miles from Sinope.

The Turkish officers in their report entirely attribute the deviation of the Compass, so nearly fatal to the *Trebisonda*, to the presence of this magnetic mass, which until the present time has been entirely unknown.

Die Beobachtungen lieferten demnach an beiden Stationen, sowohl in Sinope als hier, Anzeichen von Einflüssen, welche die Magnetnadeln von ihrer natürlichen Richtung ablenken. Wenn man nämlich die Declination, welche bei Konstantinopel in Ortaköj gefunden wurde, mit jener von Trapezunt vergleicht, welche Stationen nahe unter demselben Breitengrad liegen, so sieht man, dass die Declination in jenen Gegenden um $25'7''$ für einen Längengrad abnimmt; sie sollte demgemäss in Sinope sein $3^{\circ} 56'4''$
während sie aus wiederholten Beobachtungen gefunden wurde $4^{\circ} 37'9''$
also zu gross um $41'5''$

Für die Inclination gibt die Vergleichung der Beobachtungen vom Cap Takli am Eingange in das Azow'sche Meer und von Trapezunt eine Abnahme von sehr nahe einem Grade für jeden Breitengrad, sie sollte demnach in Sinope sein $56^{\circ} 48'$
die Beobachtungen gaben aber $57^{\circ} 20'$
also ebenfalls zu gross um $32'$

Eine zu grosse Declination deutet aber an, dass die störende Masse, wenn sie auf den Nordpol der Nadel anziehend wirkt, gegen Westen, eine zu grosse Inclination, dass sie gegen Norden gelegen sei, es würden also die Beobachtungen in diesem Falle die Störungsquelle in nordwestlicher Richtung, also in der Richtung des Cap Indje und darüber hinaus verlegen.

Da ferner die Intensität der Kraft des Erdmagnetismus in der Richtung von Osten nach Westen sich wenig ändert, von Norden nach Süden abnimmt, so sollte sie in Sinope, das um 1 Grad nördlicher liegt als Trapezunt, grösser sein; man fand sie aber in Trapezunt gleich 4.513 , in Sinope 4.480 , in dem noch nördlicher gelegenen Cap 4.467 . Sie wird daher durch die örtliche Störung offenbar geschwächt.

Übrigens muss noch bemerkt werden, dass nach den Angaben des Cap. Benisch die Sandbank, auf welcher die Trebisonda strandete und wo die Declination viele Grade von dem Werthe verschieden war, der ihr eigentlich zukommen sollte, nur $1\frac{1}{2}$ Seemeilen von Sinope in der Richtung gegen das Cap hin, also zwischen diesem und Sinope liegt, und dass bei der grossen Abweichung, die in den Anzeigen des Compasses eintrat, dieser Punkt dem Hauptstörungsknoten sehr nahe sein musste. Hiemit stimmen aber die Beobachtungen unter der Voraussetzung einer bloss anziehenden Kraft der Störungsquelle in so ferne nicht überein, als an beiden Stationen die Inclination wenig verschieden gefunden wurde, nämlich

| | |
|---------------------|------------------|
| in Sinope | $57^{\circ} 20'$ |
| am Cap | $57^{\circ} 26'$ |

also an beiden Orten zu gross war, oder den nach unten gekehrten Pol der Nadel (ihren Nordpol) an dem einen Orte anzog, an dem anderen abstiess, was nur durch eine Polarität der störenden Masse, die ihren Südpol nach Südost, ihren Nordpol nach Nordwest gekehrt hat, erklärt werden kann, in welchem Falle sich auch die Vergrösserung der Declination in Sinope daraus ergibt.

Es ist sehr wahrscheinlich und mit der vorherrschenden Formation jener Gegenden keineswegs in Widerspruch, dass die Störungsursache eine weitere Ausdehnung nach verschiedenen Richtungen hin besitze, aber an manchen Punkten, vielleicht durch grössere Annäherung an die Oberfläche der Erde, sich kräftiger äussere, wie dies nach dem Gesagten bei Elek und auf der Sandbank, wo die Trebisonda strandete, der Fall war.

Dies erinnert an eine bei Bellagio am Como-See aufgefundenene Stelle, wo der zu Tage stehende mit Magnet-Eisenstein eingesprengte Serpentin den Nadeln der Boussolen ebenfalls die verschiedensten Richtungen gibt und sie ganz unbrauchbar macht ¹⁾).

Solche Fälle bieten allerdings ein auch in praktischer Beziehung wichtiges Feld für Untersuchungen dar, in das aber für jetzt um so weniger eingedrungen werden konnte, weil die Zeit und Vorbereitung dazu mangelte und alle übrigen Reisezwecke darüber hätten aufgegeben werden müssen. Da die fast unbewohnte Küste in der Nähe des Cap's ohnehin nur an wenigen Punkten von grösseren Schiffen berührt wird, so genügt es vor der Hand zu wissen, dass und in welcher Gegend ein solcher Punkt vorhanden ist, wo die Magnetnadeln nicht das gewöhnliche Vertrauen verdienen, denn es wird leicht jede Gefahr vermieden, wenn man in gehöriger, in diesem Falle gewiss nicht bedeutender Entfernung daran vorüberfährt.

Die vorgerückte Jahreszeit, bei welcher die Bereisung der Küsten des schwarzen Meeres immer bedenklicher zu werden pflegt, nöthigte mich zur unverzüglichen Rückkehr nach Konstantinopel.

Jedoch verzögerte sich die Ankunft des Dampfers „Taurus“ noch mehrere Tage, so dass ich eine Reihe von Zeitbestimmungen machen konnte, um daraus den Längenunterschied von Sinope genauer zu finden. Die correspondirenden Sonnenhöhen gaben den Fehler Dent's

| | | |
|---|-----------|--------------------------|
| am 14. September um 23 ^h 30' | | + 25' 48 ^s 03 |
| „ 18. „ „ 23 28 | | + 25 51 18 |
| „ 19. „ „ 23 28 | | + 25 49 14 |
| „ 22. „ „ 23 27 | | + 25 47 88 |
| „ 25. „ „ 23 26 | | + 25 44 51 |
| „ 20 08. „ Mittel | | + 25' 48 ^s 15 |
| und aus dem 14. und 25. September | | J = - 0 ^s 32 |
| aus dem 19. und 25. aber wird | | J = - 0 77. |

Die Breite des Beobachtungsortes (Palast der k. k. Internuntiaturs in Pera) wurde am 19. September aus den Mittagshöhen der Sonne gefunden

$$41^{\circ} 1' 7''.$$

Die Längenbestimmung von Sinope muss wegen des grossen Sprunges, den Tiede in seinem Gange bei Gelegenheit der Landreise nach Cap Indje machte, für jedes Chronometer besonders gerechnet werden. Man findet

| | | |
|--|----------------------------|-------------------------|
| am 31 98. August in Pera . . . Fehler Dent's | = + 25' 55 ^s 4, | J = + 0 ^s 85 |
| „ 7 96. September in Sinope „ „ | = + 50 34 25, | J = - 0 54 |
| „ 20 08. „ „ Pera „ „ | = + 25 48 15, | J = - 0 32. |

Es werden demnach die gleichzeitigen Uhrfehler, wenn man für die Hinfahrt $\Delta = + 0^{\text{s}} 15$ und für die Rückfahrt $J = - 0^{\text{s}} 43$ annimmt,

| | |
|---|---|
| am 7 96. September in Pera | + 25' 56 ^s 5 |
| „ „ „ Sinope | + 50 34 25 |
| | Längenunterschied = 24 37 75 aus der Hinreise. |
| am 20 08 September in Sinope | + 50 29 0 |
| „ „ „ Pera | + 25 48 15 |
| | Längenunterschied = 24 40 85 aus der Rückreise. |
| Im Mittel ist daher der Längenunterschied | = 24 39 3. |

¹⁾ Siehe Ortsbestimmungen im österr. Kaiserstaate, I Bd., S. 110.

Nach Tiede findet man mit $\Delta = +7^{\circ}15'$ für die Hinreise

am 6.46. September den Fehler in Sinope = $+53'55''$
 und gleichzeitig „ „ „ Pera = $+29'13''$

Für die Rückreise mit $\Delta = +8^{\circ}55'$ ist

am 9.46. September der Fehler in Sinope = $+49'29''$
 und gleichzeitig „ „ „ Pera = $+24'46''$

demnach

der Längenunterschied = $24'41''$ für die Hinreise
 „ „ „ = $24'42''$ „ „ Rückreise
 Mittel = $24'42''$
 nach Dent „ = $24'39''$
 Mittel = $24'40''$ = $6^{\circ}10'12''$
 Länge von Pera = $46'38''$
 „ „ Sinope = $52'49''$ von Ferro.

Der Taurus langte am 22. September in Konstantinopel an, und am Morgen des 27. lichtete er die Anker um die Bereisung der West- und Nordküste des schwarzen Meeres zu beginnen. Die erste Beobachtungsstation war

XII. Böjuk Liman

am europäischen Ufer des Bosphorus, nahe bei dessen Mündung in das schwarze Meer. Die Instrumente wurden ungefähr eine Seemeile südlich vom Leuchtturme aufgestellt.

Die correspondirenden Sonnenhöhen gaben

am 27. September um $23^{\circ}25'$ für Dent den Fehler . . . $+26'9''$
 „ 28. „ „ „ „ „ „ „ . . . $+26'8''$
 also „ 27.98. „ im Mittel $+26'8''$
 $\Delta = 0'10''$

Da in Konstantinopel vom 22. bis 25. September $\Delta = -1'12''$ ist, so kann für den Beginn dieser Seereise

für Dent $\Delta = -1'10''$, für Tiede $\Delta = +8'76''$

genommen werden; hiemit findet man, da für Tiede aus der Vergleichung

am 20.08. September der Fehler $+26'17''$
 „ 27.98. „ „ „ „ „ „ „ $+27'56''$

ist, die gleichzeitigen Fehler:

| | Dent | Tiede |
|---------------------------------------|--------------------------|-----------|
| am 27.98. September in Pera | $25'39''$ | $27'26''$ |
| „ „ „ „ Böjuk Liman | $26'8''$ | $27'56''$ |
| Längenunterschied | $+0'29''$ | $+0'30''$ |
| Mittel | $+0'29''55 = +7'23''$ | |
| Länge von Pera | $=46^{\circ}38'50''$ | |
| „ „ Böjuk Liman | $=46'46'13''$ von Ferro. | |

Die Breite wurde aus den Mittagshöhen der Sonne gefunden

am 27. September $41^{\circ}10'46''$
 „ 28. „ $41'10'58''$
 Mittel $41^{\circ}10'52''$

Für die magnetische Declination erhielt man die Werthe:

| | |
|---|-----------------|
| am 27. September um 23 ^h 19' mittl. Zeit von Böjuk Liman . . . | 6° 34' 0 |
| " 28. " " 23 0 " " " " " " . . . | 6 29·3 |
| | Mittel 6° 31' 6 |

Declination in Wien

| | am 27. Sept. | 28. Sept. |
|---------------------------------|--------------|------------|
| um 18 ^h 6' | 12° 29' 25 | 12° 27' 25 |
| " 22 6 | 12 31·48 | 12 26·52 |
| " 2 6 | 12 39·21 | 12 38·93 |
| " 6 6 | 12 33·37 | 12 32·24 |
| " 10 6 | 12 31·05 | 12 29·77 |
| Mittel. | 12° 32' 72 | 12° 30' 79 |

Die Intensität der horizontalen Componente war

| | | |
|--|---------------|----------|
| am 27. Sept. um 1 ^h 14' mittl. Zeit von Böjuk Liman . . . | 2·4906 | Magnet 1 |
| " " " " 1 16 " " " " " " . . . | 2·4782 | " 11 |
| | Mittel 2·4844 | |

Intensität in Wien

| | am 27. Sept. |
|---------------------------------|--------------|
| um 18 ^h 3' | 2·00956 |
| " 22 3 | 2·00879 |
| " 2 3 | 2·00965 |
| " 6 3 | 2·00959 |
| " 10 3 | 2·00993 |
| Mittel | 2·00954 |

Für die Inclination ergaben sich mit Repsold's Inclinorium die Werthe:

| | | |
|--|--------------------|---------|
| am 27. September um 2 ^h 57' mittl. Zeit von Böjuk Liman . . . | 55° 36' 5 | Nadel 5 |
| " " " " 3 50 " " " " " " . . . | 55 42·6 | |
| " 28. " " 1 0 " " " " " " . . . | 55 35·7 | |
| " " " " 1 47 " " " " " " . . . | 55 31·8 | |
| | Mittel . 55° 36' 6 | |

Hieraus folgt der Werth der Totalkraft:

$$4·3931.$$

XIII. Burgasz.

Da die Ankunft in Burgasz am 29. September zu spät erfolgte, um correspondirende Sonnenhöhen zu nehmen, und am 30. Nachmittags der Himmel sich trübte, so konnte der Uhrfehler Dent's nur aus den vormittägigen Sonnenhöhen berechnet werden. Man fand

| | |
|---|------------|
| am 30. September um 20 ^h 11' Uhrzeit den Fehler Dent's | + 19' 33·9 |
| für dieselbe Zeit ist der Fehler Tiede's | + 21 44·6 |

daher die gleichzeitigen Fehler, wenn man die gleichen Werthe von \perp wie in der vorigen Station beibehält

| | Dent | Tiede |
|--|----------------|------------|
| am 30.35. September in Böjuk Liman | + 26' 5' 9 | 28' 17' 5 |
| " " " " Burgasz | + 19 33·9 | 21 44·6 |
| Längenunterschied — | 6' 32' 0 | — 6' 32' 9 |
| Mittel | — 6' 32' 5 = — | 1° 38' 7'' |
| Länge von Böjuk Liman | = 46 46 13 | |
| " " Burgasz | = 45 8 6 | von Ferro. |

Die Breite wurde aus den Mittagshöhen der Sonne am 30. September gefunden:

$$42^{\circ} 32' 13$$

Für die magnetische Declination fand man die Werthe:

| | |
|--|----------|
| am 29. September um 2 ^h 27' mittl. Zeit von Burgasz | 6° 44' 4 |
| „ 30. „ „ 21 1 „ „ „ „ | 6 59·9 |
| „ 30. „ „ 0 52 „ „ „ „ | 7 12·7 |
| Mittel | 6° 59' 0 |

Declination in Wien

| | am 29. Sept. | 30. Sept. |
|---------------------------------|--------------|------------|
| um 18 ^h 6' | 12° 25' 56 | 12° 29' 02 |
| „ 22 6 | 12 25·95 | 12 29·90 |
| „ 2 6 | 12 36·88 | 12 42·56 |
| „ 6 6 | 12 32·31 | 12 35·67 |
| „ 10 6 | 12 29·81 | 12 30·40 |
| Mittel 12° 29' 95 | | 12° 33' 36 |

Die Intensität der horizontalen Componente war:

| | |
|--|--------|
| am 29. September um 4 ^h 37' mittl. Zeit von Burgasz | 2·3652 |
| „ „ „ „ 4 32 „ „ „ „ | 2·3665 |
| „ 30. „ „ 1 30 „ „ „ „ | 2·3634 |
| „ „ „ „ 1 33 „ „ „ „ | 2·3675 |
| Mittel | 2·3656 |

Intensität in Wien

| | am 29. Sept. | 30. Sept. |
|---------------------------------|--------------|-----------|
| um 18 ^h 3' | 2·00987 | 2·01058 |
| „ 22 3 | 2·00913 | 2·00898 |
| „ 2 3 | 2·00941 | 2·00968 |
| „ 6 3 | 2·00958 | 2·01007 |
| „ 10 3 | 2·01021 | 2·00982 |
| Mittel | 2·00968 | 2·00987. |

Für die Inclination erhielt man die Werthe:

| | | |
|--|-----------|---------|
| am 30. September um 2 ^h 40' mittl. Zeit von Burgasz | 56° 48' 1 | Nadel 5 |
| „ „ „ „ 23 35 „ „ „ „ | 56 55·9 | „ 6 |
| Mittel 56° 52' 0 | | |

Es ergibt sich demnach der Werth der Gesamtkraft

$$4·3279.$$

XIV. Cap Kalakri.

Da dieses Cap als einer der Hauptrichtungspunkte bei den Fahrten von Konstantinopel nach Sulina angesehen wird, so verweilte man dort einen Tag um es zu bestimmen. Weil es zu schroff abfällt, um in dessen unmittelbarer Nähe die Instrumente aufstellen zu können, so wurde ungefähr eine Viertelstunde nordwestlich davon ein Aufstellungspunkt gewählt.

Der aus correspondirenden Sonnenhöhen bestimmte Fehler Dent's war

| | |
|--|-------------|
| am 2. October um 23 ^h 25' Uhrzeit | + 23' 34" 0 |
| für Tiede ist um dieselbe Zeit der Fehler | + 26 3·9 |

Die Tafel IV lässt vermuthen, dass Tiede seinen Gang von Konstantinopel bis hierher nicht viel verändert habe, daher auch für diese Station noch dieselben Werthe von \angle angenommen wurden. Jedoch legte man bei der Längenbestimmung den mit grösserer Sicherheit bestimmten Uhrfehler von Böjuk Liman statt jenem von Burgasz zu Grunde.

Es ergaben sich daher für den 2. October die gleichzeitigen Fehler

| | Dent | Tiede |
|--------------------------------------|-------------------------------------|--|
| in Böjuk Liman | + 26' 3 ⁵ / ₅ | + 28' 36 ¹ / ₁ |
| in Kalakri | + 23 34 ⁰ / ₀ | + 26 3 ⁹ / ₉ |
| Längenunterschied | — 2' 29 ⁵ / ₅ | — 2' 32 ² / ₂ |
| Mittel | — 2 30 ⁸ / ₈ | = — 37' 42 ^{''} / _{''} |
| Länge von Böjuk Liman | | = 46 46 13 |
| " " " Cap Kalakri | | = 46 8 31. |

Die am 2. October gemessenen Mittagshöhen der Sonne gaben die geographische Breite

$$43^{\circ} 22' 52''.$$

Die magnetische Declination wurde gefunden

| | |
|--|---|
| am 2. October um 19 ^h 55' mittl. Zeit von Kalakri | 6 ^o 40' 2 |
| " " " " 22 5 " " " " | 6 43 ⁵ / ₅ |
| " " " " 1 12 " " " " | 6 43 ⁷ / ₇ |
| Mittel | 6 ^o 42 ¹ / ₅ |

Declination in Wien

| | am 2. October |
|--|---|
| um 18 ^h 6' | 12 ^o 28 ¹ / ₇₅ |
| " 22 6 | 12 25 ⁵⁰ / ₅₀ |
| " 2 6 | 12 37 ¹⁶ / ₁₆ |
| " 6 6 | 12 31 ²⁵ / ₂₅ |
| " 10 6 | 12 25 ⁷⁰ / ₇₀ |
| Mittel 12 ^o 29 ¹ / ₄₂ | |

Nach der Bestimmung dieser Station musste nach Galatz gereist werden, um das Gesundheitspatent vom russischen Consul bestätigen zu lassen, da sonst der Eintritt in die russischen Häfen nicht gestattet worden wäre. Dies verzögerte die Beobachtungen an der folgenden Station um einige Tage.

XV. Schlangeninsel.

Diese Felseninsel, von ungefähr einer Seemeile im Umfange, welche von einigen türkischen Soldaten zur Erhaltung des Leuchtfeuers bewohnt wird, hat nur auf der Nordostseite einen Zugang, von allen übrigen Seiten stürzen die Felsen steil ab, und bieten senkrechte zerklüftete Wände von 60 bis 100 Fuss Höhe dar. Die Instrumente wurden am ersten Tage den 9. October auf einem an ihrem südwestlichen Ende aus der See hervorragenden patten Felsstück aufgestellt, am zweiten Tage aber auf der Insel selbst ungefähr 320 Schritte nordwestlich vom Leuchtturme.

Die correspondirenden Beobachtungen am 10. October geben den Fehler Dent's

| | | |
|--|------------------------------------|---------------------------------------|
| um 23 ^h 17' mittl. Ortszeit | 30' 20 ⁷ / ₇ | J = — 1 ¹⁰ / ₁₀ |
| und durch Vergleich jenen Tiede's | 34 21 ⁰ / ₀ | |

Rechnet man den Gang Tiede's, der sich vom 4. bis 6. October merklich geändert hat, aus den Vergleichen vom 6. bis 11., so wird für ihn

$$= + 11⁷⁰/₇₀$$

Nach dem am 8. October um 23^h 19' in Sulina gefundenen Fehler

| | |
|--------------------|-----------------------|
| für Dent | 28' 13 ^s 6 |
| „ Tiede | 31 50·9 |

werden die gleichzeitigen Fehler am 10.47. October

| | |
|------------------------------|-----------------------|
| in Sulina für Dent | 28' 11 ^s 4 |
| „ „ Tiede | 32 14·3 |

daher der Längenunterschied zwischen Sulina und der Schlangeninsel

| |
|---|
| nach Dent + 2' 9 ^s 3, nach Tiede = + 2' 9 ^s 7 |
| Mittel = + 2' 9 ^s 5 = 32' 23'' |
| Länge von Sulina = 47° 20' 16 |
| Länge der Schlangeninsel . . = 47 52 39 |

Die Breite wurde aus den mittägigen Sonnenhöhen am 10. October gefunden

$$45^{\circ} 14' 27''$$

Die Höhe des Leuchtfeuers über der See kann nach den Angaben des Metallbarometers zu

$$319 \text{ Par. Fuss}$$

angenommen werden.

Die magnetische Declination fand man

| | |
|---|----------|
| am 9. October um 3 ^h 37' mittl. Ortszeit | 5° 52' 1 |
| „ 10. „ „ 22 44 „ „ | 5 45·2 |
| Mittel | 5° 48' 7 |

Declination in Wien

| | am 9. October | 10. October |
|---------------------------------|---------------|-------------|
| um 18 ^h 6' | 12° 32' 78 | 12° 31' 30 |
| „ 22 6 | 12 32·64 | 12 26·76 |
| „ 2 6 | 12 38·15 | 12 35·76 |
| „ 6 6 | 12 26·60 | 12 31·98 |
| „ 10 6 | 12 26·49 | 12 28·24 |
| Mittel | 12° 31' 38 | 12° 30' 66 |

Die Intensität der horizontalen Componente war

| | |
|---|---------------------|
| am 9. October um 4 ^h 42' mittl. Ortszeit | 2·2844 mit Magnet I |
| „ „ „ 4 39 „ „ | 2·2697 „ „ II |
| „ 10. „ „ 0 6 „ „ | 2·2772 „ „ I |
| „ „ „ 0 3 „ „ | 2·2717 „ „ II |
| Mittel | 2·2757 |

Intensität in Wien

| | am 9. October | 10. October |
|---------------------------------|---------------|-------------|
| um 18 ^h 3' | 2·01062 | 2·00930 |
| „ 22 3 | 2·00885 | 2·00779 |
| „ 2 3 | 2·00907 | 2·00893 |
| „ 6 3 | 2·00917 | 2·00954 |
| „ 10 3 | 2·01000 | 2·00883 |
| Mittel | 2·00958 | 2·00888 |

Die Inclination fand man mit Repsold's Inclinorium am 10. October

| |
|----------------------|
| 60° 9' 2 mit Nadel 5 |
| 60 3·5 „ „ 6 |
| Mittel 60° 6' 4 |

Hieraus ergab sich der Werth der Gesamtkraft:

$$4 \cdot 5661^1).$$

XVI. Odessa.

Der Aufstellungsort für die Instrumente war ein freier Platz auf der Anhöhe vor dem Hause der Herren Wucetiez, westlich vom Palais Woronzoff, ungefähr 500 Schritte südlich von dem Hafen für einheimische Schiffe.

Die correspondirenden Beobachtungen wurden am 13. October durch Wolken vereitelt; am folgenden Tage

$$\begin{aligned} \text{am 14. October um } 23^h 14' \text{ Uhrzeit war der Fehler Dent's} &= + 32' 26'' \cdot 3 \\ \text{„ „ Tiede's} &= + 37' 8'' \cdot 9 \end{aligned}$$

Mit den Werthen

$$J = - 1'' 20 \text{ für Dent und } J = + 9'' 76 \text{ für Tiede}$$

werden die gleichzeitigen Fehler

| | Dent | Tiede |
|---|------------------------|-------------|
| am 14. 17. October auf der Schlangeninsel . . . | + 30' 15'' 9 | + 35' 3'' 0 |
| in Odessa | + 32' 26'' 3 | + 37' 8'' 9 |
| Längenunterschied | + 2' 10'' 4 | + 2' 5'' 9 |
| Mittel | + 2' 8'' 2 = + 32' 3'' | |
| Länge der Schlangeninsel | = 47° 52' 39 | |
| „ von Odessa | = 48 24 42 | |

Die Breite wurde zweimal bestimmt, nämlich

$$\begin{aligned} \text{am 12. October} &46^\circ 28' 49'' \\ \text{und „ 14. „} &46 28 54 \\ \text{Mittel} &46^\circ 28' 51'' \cdot 5 \end{aligned}$$

Für die magnetische Declination bekam man folgende Werthe

| | |
|--|----------|
| am 13. October um 21 ^h 17' mittl. Zeit von Odessa | 7° 30' 0 |
| „ 14. „ „ 22 26 „ „ „ „ | 7 34 7 |
| „ 14. „ „ 1 25 „ „ „ „ | 7 37 9 |
| Mittel | 7° 34' 2 |

1) Über die geologische Beschaffenheit dieser wenig bekannten Insel gibt Capt. Spratt, Commandant der Medina von der kön. grossbritannischen Marine folgende Aufklärung:

Sous le rapport géologique, cette ile est très-remarquable aussi; elle ne ressemble aucunement aux formations des côtes voisines, de la Dobrutcha ou de la Bessarabie; sa constitution indique clairement qu'elle n'a jamais fait partie de ces côtes, et qu'elle n'a pas plus été créée par les alluvions du Danube.

La nature de ses roches prouverait, au contraire, qu'elle est de la même formation, que les montagnes, qui s'étendent au SO. de la Mer Noire, en Bulgarie etc.

Elle paraît donc être un pic avancé du groupe de roches schisteuses, de la partie septentrionale de la Dobrutcha, près de Besh-Tépé et de Toulteha; en effet la roche de l'île est d'une nature siliceuse et disposé par stratifications; elle contient des grands cristaux de quartz, et passe sur quelques endroits au jaspe rouge.

Des bandes étroites, de schiste friable, séparent ces couches, épaisses de 20 pieds à-peu-près, comme on peut s'en apercevoir par leur inclinaison de 10 à 20 degrés vers l'Est, la hauteur de l'île au-dessus du niveau des eaux n'est toute-fois que de 130 pieds.

Les observations, que je viens de faire sur la nature géologique de l'île prouvent, qu'elle ne ressemble en rien aux terrains plats et bas de la Bessarabie, comme je l'ai entendu dire souvent; en effet les côtes de l'intérieur des terres ne s'élèvent pas de plus de 10 pieds au-dessus de la mer, et sont formées d'une marne terreuse, qui recouvre le steppe, generalement unie; c'est du moins ee que j'ai pu observer du grand mât de la Medina, mouillée dans ces parages.

Declination in Wien

| | am 13. October | 14. October |
|-----------------------------|----------------|-------------|
| am 18 ^h 6' . . . | 12° 30' 08 | 12° 26' 18 |
| „ 22 6 . . . | 12 33·40 | 12 28·12 |
| „ 2 6 . . . | 12 39·33 | 12 34·89 |
| „ 6 6 . . . | 12 30·66 | 12 30·54 |
| „ 10 6 . . . | 12 31·53 | 12 29·04 |
| Mittel | 12° 32' 85 | 12° 29' 60 |

Dieser Werth ist auffallend gross; denn da hier, wie man sich aus den vorher gegebenen Bestimmungen leicht überzeugen kann, die Isogonen den Meridianen nahezu parallel laufen, so sollte Odessa eine kleinere Declination haben als die Schlangeninsel, und hat statt dessen eine um zwei Grade grössere. Von einer örtlichen Störung war kein Anzeichen vorhanden, eben so wenig von einem groben Versehen bei der Beobachtung. Als Azimuthalpunkt diente der Knauf einer fernen Kirche, dessen Abstand vom Meridian bei dreimaliger Messung folgende Werthe gab:

| | |
|---------------------|--------------------------------|
| 13. October Azimuth | = 146° 15' 0 von Süd gemessen. |
| 14. „ „ | = 146 14·8 |
| 14. „ „ | = 146 16·5 |

Diese Bestimmung ist hinlänglich genau, und demnach die Vermuthung begründet, dass sich in der Nähe des Beobachtungsortes oder in den Umgebungen von Odessa ein Störungspunkt befinde, welcher die Magnetnadel aus ihrer natürlichen Lage entfernt ¹⁾).

¹⁾ Als bei der Bearbeitung dieser Beobachtungen sich das Vorhandensein einer so mächtigen Störungsquelle unzweifelhaft herausstellte, schrieb ich an Herrn Dr. Becker, Director des Liceums Richelieu in Odessa, und ersuchte, mir nach genauer Nachforschung in der Umgebung meines Beobachtungsortes gefälligst angeben zu wollen, ob sich nicht irgendwo eine Anhäufung von Eisenmassen vorfinde, welche die abweichenden Bestimmungen hervorgebracht haben könnte. Mit der freundlichsten Bereitwilligkeit wurde diesem Ansuchen entsprochen, und ich erlaube mir hier die entsprechende Stelle aus Dr. Becker's Briefe mitzutheilen.

„Mir fiel es nicht ein, daran zu denken, dass Ihnen meine Localkenntniss zu Statten kommen würde, um so weniger, als das viel tiefer liegende Ufer mit den an demselben befindlichen Baulichkeiten und Vorräthen auf Ihre Beobachtungen keinen Einfluss ausüben zu können schien. Dem ist aber, wie sich jetzt herausstellt, nicht so, denn da der Boden, auf welchem Sie Ihre Beobachtungen anstellten, keine Masse magnetischer Formation in sich schliessen wird, sondern vielmehr die sich hier überall vorfindende Bildung von Muschelkalkstein aufweist, so muss für die Sie befremdenden Resultate der Magnetnadel ein anderer Grund aufgefunden werden. Unbekannt mit der Empfindlichkeit der von Ihnen gebrauchten Magnetnadel, weiss ich nicht, ob die Nähe des Pontika-Flufens, in welchem mehrere eiserne Dampfboote, Anker, Ketten u. dgl. liegen, auf Ihre Beobachtungen irgend einen Einfluss haben können. Einen solchen müsste man eher den Eisenvorräthen zuschreiben, welche sich zu beiden Seiten des Beobachtungsortes am Ufer vorfinden. Sie werden nämlich besser als ich, der Laie, beurtheilen können, ob die in zwei Gussfabriken sich damals befindlichen Eisenmassen, ungeachtet der viel tieferen Lage und einer Entfernung von hundert Schritten, auf Ihre Magnetnadel einzuwirken im Stande waren, nur so viel steht fest, dass sich am Ufer die Eisengiesserei und Gusseisenfabrik des Herrn Falcke befindet, und dass in letzterer nicht unbedeutende, aus Sewastopol hergebrachte Vorräthe von altem Eisen damals aufgespeichert waren. So unwahrscheinlich es mir nun ist, dass jene Eisenmassen in so bedeutender Entfernung und in einem ganz verschiedenem Niveau den auf der Höhe angestellten Beobachtungen Eintrag thun konnten, so weiss ich doch nicht, was ich zur natürlichen Erklärung der Ihnen auffallenden Resultate noch anführen soll. Möge das von mir Angegebene Ihnen ausreichen!“

Nach den von mir gesammelten Erfahrungen kann ich auch nicht glauben, dass Eisenmassen, wenn sie auch bedeutend sind, in so grosser Entfernung die Magnetnadel um mehrere Grade ablenken können, und will zum Beweise nur Ein Beispiel anführen. In Wien wurde in einer Entfernung von 200 Schritten vom magnetischen Observatorium in den Jahren 1857 und 1858 die Wertheim-Wiese'sche Fabrik für feuerfeste Eisencassen gebaut und eingerichtet, in welcher sich zeitweilig ein Eisenvorrath von mehreren hundert Centnern vorfindet. Die im Observatorium täglich angestellten Declinationsbeobachtungen weisen dem davon hervorgebrachten Einflusse, wenn er überhaupt merklich ist, jedenfalls nur einen Werth von wenigen Minuten, nicht von Graden an, wie in Odessa bemerkt wurde.

Die Intensität der horizontalen Componente fand man

| | | |
|---|----------------|---------------|
| am 12. October um 0 ^h 48' mittl. Zeit von Odessa . . . | 2·2699 | mit Magnet I |
| „ „ „ „ 0 43 „ „ „ „ . . . | 2·2697 | „ „ II |
| „ 14. „ „ 23 48 . . . | 2·2692 | „ „ I |
| „ „ „ „ 23 46 . . . | 2·2669 | „ „ II |
| | <u>Mittel.</u> | <u>2·2689</u> |

Intensität in Wien

| | am 12. Octob. | 14. Octob. |
|-----------------------------|----------------|----------------|
| um 18 ^h 3' . . . | 2·01033 | 2·00947 |
| „ 22 3 . . . | 2·00890 | 2·00842 |
| „ 2 3 . . . | 2·01023 | 2·00917 |
| „ 6 3 . . . | 2·01083 | 2·00875 |
| „ 10 3 . . . | 2·01052 | 2·00993 |
| Mittel . . . | <u>2·01020</u> | <u>2·00919</u> |

Die Inclination hatte folgende Werthe:

| | | |
|--|------------------|-------------|
| am 13. October 22 ^h 49' . . . | 61° 29' 5 | mit Nadel 5 |
| „ „ „ 23 30 . . . | 61 38·9 | „ „ 6 |
| Mittel . . . | <u>61° 34' 2</u> | |

Für die Gesamtkraft fand man den Werth

$$4·7658$$

Auch diese Elemente sind von dem regelmässigen Laufe der magnetischen Curven so abweichend, dass das Vorhandensein eines Störungspunktes keinem Zweifel mehr unterliegt. Die Isodynamen der Horizontalkraft befolgen hier im Allgemeinen nahezu dieselbe Richtung wie in dem westlicheren Theil von Europa. Die Isodyname 2·10 (vom Jahre 1850) läuft von Istrien nach Fünfkirchen und Szegedin und macht mit den Parallelkreisen einen Winkel von 15 Graden ¹⁾. Die Beobachtungen von Alexinatz, Kalafat, Bukarest und Sulina weisen der Isodyname von 2·26 eine Richtung an, in welcher sie mit den Parallelen den Winkel von 21 Graden einschliesst. Wollte man aber aus den Beobachtungen auf der Schlangeninsel und in Odessa den Lauf dieser Curve verzeichnen, so würde sie mit dem Parallel einen Winkel von 71 Graden machen. Weniger wird die Inclination von dieser Störung getroffen; denn die von Belgrad nach Galatz streichende Isocline von 61 Graden würde südlich von Odessa vorbeigehen, für welchen letzten Ort die Beobachtungen auch wirklich eine grössere Inclination geben.

Es scheint also der Störungspunkt nicht im magnetischen Meridian zu liegen, sondern in einer südwest-nordöstlichen Richtung von Odessa.

XVII. Cap Takli.

Der Aufstellungsplatz war am Strande, nördlich vom Leuchthurme, ungefähr 1 Seemeile nordwestlich vom Cap.

Der Uhrfehler Dent's wurde gefunden

| | |
|---|------------------------|
| am 19. October um 22 ^h 50' Uhrzeit . . . | - 55' 6 ^h 7 |
| jener Tiede's „ „ „ . . . | + 60 46·2 |

Mit den Werthen $J = - 1^{\circ}20$ für Dent und $J = + 9^{\circ}76$ für Tiede gaben die Beobachtungen von Odessa für dieselbe Zeit

| | |
|-------------------------|-------------------------|
| den Fehler Dent's . . . | + 32' 20 ^h 3 |
| „ „ Tiede's . . . | + 37 57·5 |

¹⁾ Siehe Denkschriften der math.-naturw. Classe, X. Bd.

Denkschriften der mathem.-naturw. Cl. XX. Bd.

Daraus folgt

| | Dent | Tiede |
|-----------------------------|-----------|--------------|
| Längenunterschied | +22'46".4 | + 22'48".7 |
| Mittel | +22 47.55 | = 5° 41' 53" |
| Länge von Odessa | | = 48 24 42 |
| " " Takli | | = 54 6 35 |

Die Breite wurde gefunden

$$45^{\circ} 6' 26''$$

Die magnetische Declination war

| | |
|---|----------|
| am 19. October um 22 ^h 32' mittl. Ortszeit | 3° 16'7" |
| " 19. " " 3 23 " " | 3 15.9 |
| Mittel | 3° 16.3 |

Declination in Wien

| | am 19. Octob. |
|---------------------------------|---------------|
| um 18 ^h 6' | 12° 28'89" |
| " 22 6 | 12 31.78 |
| " 2 6 | 12 34.86 |
| " 6 6 | 12 30.38 |
| " 10 6 | 12 18.17 |
| Mittel | 12° 28'67" |

Für die Intensität der Horizontalkraft fand man die Werthe

| | |
|--|-----------------|
| am 19. October 23 ^h 13' mittlere Ortszeit | 2.3199 Magnet 1 |
| " 19. " 23 3 " " | 2.3131 " 11 |
| Mittel | 2.3165 |

Intensität in Wien

| | am 19. Octob. |
|---------------------------------|---------------|
| um 18 ^h 3' | 2.00899 |
| " 22 3 | 2.00786 |
| " 2 3 | 2.00814 |
| " 6 3 | 2.00874 |
| " 10 3 | 2.00799 |
| Mittel | 2.00838 |

Die Inclination war

| | | |
|--|-----------|---------|
| am 19. October 1 ^h 2' mittl. Ortszeit | 59° 37'9" | Nadel 5 |
| " 19. " 2 2 " " | 59 41.0 | " 6 |
| Mittel | 59° 39.5" | |

daher die Gesamtkraft

$$4.5858.$$

XVIII. Cap Chersones.

Der Aufstellungsplatz war ungefähr eine Seemeile östlich vom Leuchthurm, eine halbe Seemeile südlich vom Cap.

Die correspondirenden Sonnenhöhen gaben den Fehler Dent's

| | |
|--|--------------|
| am 24. October um 23 ^h 2' Uhrzeit | + 42' 39".05 |
| den Fehler Tiede's " " | + 49 25.3 |

Mit den Werthen $\angle = - 1^{\circ}20'$ für Dent und $\angle = + 12^{\circ}30'$ für Tiede wird der gleichzeitige Uhrfehler in Takli

| | |
|--------------------|------------|
| für Dent | + 55' 0".7 |
| " Tiede | + 61 17.8 |

Daher der Längenunterschied

| | |
|---------------------------|--------------------------|
| nach Dent | 12' 21' 65 |
| „ Tiede | 12 22' 5 |
| | <hr/> |
| Mittel . | 12' 22' 1 = — 3° 5' 31'' |
| Länge von Takli | = 54 6 35 |
| „ „ Chersones | = 51 1 4 |

Die Breite wurde gefunden

$$44^{\circ} 34' 21''.$$

Die magnetische Declination war

| | |
|---|---------|
| am 24. October um 21 ^h 28' mittlere Ortszeit | 5° 2' 7 |
| „ „ „ „ 1 4 „ „ „ „ | 5 11' 1 |
| | <hr/> |
| Mittel . | 5° 6' 9 |

Declination in Wien am 24. October

| | |
|---------------------------------|------------|
| um 18 ^h 6' | 12° 26' 16 |
| „ 22 6 | 12 26' 05 |
| „ 2 6 | 12 33' 30 |
| „ 6 6 | 12 28' 01 |
| „ 10 6 | 12 26' 37 |
| | <hr/> |
| Mittel . | 12° 27' 83 |

Für die Intensität der horizontalen Componente fand man

| | |
|---|---------------------|
| am 24. October um 22 ^h 23' mittlere Ortszeit | 2·2955 mit Magnet I |
| „ „ „ „ 22 18 „ „ „ „ | 2·2902 „ „ II |
| | <hr/> |
| Mittel . | 2·2928 |

Intensität in Wien am 24. October

| | |
|---------------------------------|---------|
| um 18 ^h 3' | 2·01105 |
| „ 22 3 | 2·00933 |
| „ 2 3 | 2·01072 |
| „ 6 3 | 2·01090 |
| „ 10 3 | 2·01156 |
| | <hr/> |
| Mittel . | 2·01075 |

Für die Inclination gab Repsold's Inclinorium

| | |
|---|-------------------|
| am 24. October um 23 ^h 47' | 59° 11' 2 Nadel 5 |
| „ „ „ „ 0 47 | 59 16' 1 „ 6 |
| | <hr/> |
| Mittel . | 59° 13' 6 |

Daraus ergibt sich der Werth der Gesamtkraft

$$4·4814$$

Mit dieser Station waren die Reisebeobachtungen beendet. Am 25. October Abends erreichte der „Taurus“ die Barre von Sulina, die am 26. überschritten wurde. In Galatz bestieg ich den Dampfer „Sophie“, der mich bis ans eiserne Thor brachte.

Die fortwährend regnerische und stürmische Witterung, die am 29. eingetreten war, und die ununterbrochene Fahrt auf den Donau-Dampfern machte jede Beobachtung während der Rückreise unthunlich.

Bei den Änderungen, die in allen Elementen der magnetischen Erdkraft mehr oder minder rasch von einem Jahre zum andern vor sich gehen, ist es von Wichtigkeit die Mittel zu besitzen, irgend eine gegebene Beobachtung auf eine bestimmte Epoche zurückführen zu können, um für diese den magnetischen Zustand unseres Planeten zu kennen. Hiezu sind regelmässig fortgesetzte Beobachtungen an demselben Orte und Wiederholung derselben an verschiedenen Punkten erforderlich, um zu sehen, in welchem Sinne und in welcher Grösse diese Änderungen eintreten, und ob dies in allen Orten gleichmässig oder in verschiedener Weise stattfindet.

Aus diesem Grunde werden nicht nur fortlaufende Beobachtungen an vielen Orten, z. B. in Oesterreich in Wien, Prag und Kremsmünster ausgeführt, sondern es wurde auch die Gelegenheit benützt, bei Bereisung der meteorologischen Stationen an manchen derselben, wo die magnetischen Elemente schon früher bestimmt worden waren, diese Bestimmung zu wiederholen, um sich von den seither eingetretenen Änderungen zu überzeugen. Es dürfte daher nicht unnütz sein die Ergebnisse dieser Bestimmungen hier mitzuthemen. Sie wurden sämmtlich mit dem S. 3 erwähnten Theodoliten von Lamont ausgeführt, der auch zur Bestimmung der Inclination diene.

Magnetische Beobachtungen auf der Bereisung

im Jahre 1855.

I. Ischl.

Die Instrumente wurden im Garten der Villa Kinsky aufgestellt.

Geographische Breite

47° 42' 34"

Magnetische Declination

| | |
|---|-------------------------|
| am 29. Juli um 1 ^h 0' mittl. Ortzeit | Declination = 14° 25' 5 |
| .. 30. .. " 22 14 .. " | " = 14 9·0 |
| .. 30. .. " 5 0 .. " | " = 14 9·0 |
| | Mittel . = 14° 14' 5 |

Declination in Wien

| | am 29. Juli | am 30. Juli |
|---------------------------------|-------------|-------------|
| um 14 ^h 6' | 12° 46' 53 | 12° 46' 78 |
| .. 18 6 | 12 41·05 | 12 45·16 |
| .. 22 6 | 12 52·28 | 12 48·11 |
| .. 2 6 | 12 54·42 | 12 54·36 |
| .. 6 6 | 12 47·99 | 12 48·39 |
| .. 10 6 | 12 48·60 | 12 49·23 |
| Mittel | 12° 48' 48 | 12° 48' 67 |

Intensität der horizontalen Componente

| | |
|--|---------------------|
| am 30. Juli um 4 ^h 10' mittl. Ortzeit | 2·0115 mit Magnet 1 |
| .. " .. " 4 8 .. " | 2·0071 .. " 11 |
| | Mittel . 2·0093 |

am 10. und 11. October 1846 um 22^h war die Intensität . 1·9595
daher die jährliche Zunahme 0·00566

Intensität in Wien

| | |
|-----------------------|----------------------|
| | am 30. Juli |
| um 14 ^h 3' | 2·00562 |
| „ 18 3 | 2·00592 |
| „ 22 3 | 2·00286 |
| „ 2 3 | 2·00572 |
| „ 6 3 | 2·00760 |
| „ 10 3 | 2·00699 |
| | Mittel . . . 2·00578 |

Inclination

am 30. Juli fand man 64° 2'1
 am 10. und 11. October 1846 war sie 64 33·9
 daher die jährliche Abnahme = 3·2.

II. Wildbad Gastein.

Die Instrumente waren im Garten des Herrn Dr. Proell am rechten Ufer der Ache ober dem Vicariats-Hause aufgestellt.

Geographische Breite

= 47° 7'21

Das Azimuth der Thurmuh von Hofgastein wurde vom Beobachtungspunkte aus

= 158° 58'

von Süd über West gezählt gefunden

Magnetische Declination:

| | |
|---|-------------------------|
| Am 3. August um 21 ^h 51' mittlere Ortszeit | Decl. = 14° 16'2 |
| „ 3. „ „ 6 55 „ „ | = 14 12·6 |
| „ 4. „ „ 19 26 „ „ | = 14 10·4 |
| „ 4. „ „ 22 28 „ „ | = 14 15·1 |
| | Mittel . . . = 14° 13'6 |

Declination in Wien

| | | |
|--------------------|--------------------|------------|
| | am 3. Aug. | am 4. Aug. |
| 14 ^h 6' | 12° 50'65 | 12° 46·25 |
| 18 6 | 12 43·96 | 12 45·42 |
| 22 6 | 12 47·50 | 12 48·33 |
| 2 6 | 12 54·39 | 12 56·26 |
| 6 6 | 12 50·08 | 12 52·11 |
| 10 6 | 12 49·82 | 12 50·23 |
| | Mittel . 12° 49'40 | 12° 49'77 |

Intensität der horizontalen Componente

| | |
|--|------------------|
| am 3. August um 22 ^h 57' mitl. Ortszeit | 2·0310 Magnet I |
| „ 3. „ „ 22 56 „ „ | 2·0287 „ II |
| | Mittel . 2·02985 |

am 28. und 29. Juni 1846 um 23^h war sie 1·99805¹⁾

daher die jährliche Zunahme 0·00350.

Intensität in Wien am 3. August

| | |
|-----------------------|--------------------|
| um 14 ^h 3' | 2·00696 |
| „ 18 3 | 2·00709 |
| „ 22 3 | 2·00463 |
| „ 2 3 | 2·00756 |
| „ 6 3 | 2·00886 |
| „ 10 3 | 2·00783 |
| | Mittel . . 2·00715 |

¹⁾ Im Jahre 1846 wurden die Beobachtungen in dem eine halbe Meile gegen Nord-Nordwest vom Wildbade entfernten Hofgastein gemacht.

Inclination

| | |
|--|--------------------|
| am 3. August um 5 ^h 37' mittlere Ortszeit | 63° 53' 2 |
| „ 4. „ „ 23 28 „ „ | 63 37·1 |
| | Mittel . 63° 45' 1 |

am 28. Juni 1856 wurde gefunden 64 7·0
daher die jährliche Abnahme 2·4.

III. Klagenfurt.

Die Instrumente wurden an demselben Orte, wie im Jahre 1847 aufgestellt, nämlich im Garten des Herrn Baron Herbert.

Magnetische Declination

| | |
|--|-----------------------|
| am 18. August um 23 ^h 29' | 13° 56' 8 |
| „ 19. „ „ 20 51 | 13 53·1 |
| | Mittel . . 13° 54' 95 |

am 8. und 9. Juni 1847 fand man 14 48·2
daher die jährliche Abnahme 6·5.

Declination in Wien

| | am 18. Aug. | am 19. Aug. |
|------------------------------|---------------------|-------------|
| 14 ^h 6' | 12° 51' 24 | 12° 50' 08 |
| 18 6 | 12 48·26 | 12 48·83 |
| 22 6 | 12 52·12 | 12 53·71 |
| 2 6 | 12 56·72 | 12 58·87 |
| 6 6 | 12 51·74 | 12 52·41 |
| 10 6 | 12 50·59 | 12 52·18 |
| | Mittel . 12° 51' 78 | 12° 52' 68 |

Intensität der horizontalen Componente

| | |
|--|---------------------|
| am 19. August um 22 ^h 16' | 2·0605 mit Magnet I |
| „ 19. „ „ 22 16 | 2·0592 „ „ II |
| | Mittel . . 2·05985 |

am 8. und 9. Juni 1847 war sie 2·0339
daher die jährliche Zunahme 0·00316.

Intensität in Wien

| | am 19. Aug. |
|------------------------------|----------------------|
| 11 ^h 3' | 2·00602 |
| 18 3 | 2·00547 |
| 22 3 | 2·00406 |
| 2 3 | 2·00418 |
| 6 3 | 2·00335 |
| 10 3 | 2·00510 |
| | Mittel . . . 2·00475 |

Inclination

| | |
|---|-----------|
| am 18. August um 1 ^h 21' | 63° 15' 5 |
| „ 8. Juni 1847 von 0 ^h 29' bis 4 ^h 24' wurde gefunden | 63 30·2 |

daher die jährliche Abnahme 1·8.

IV. Agordo.

| | |
|-------------------------------|---------------------|
| Geographische Länge | = 29° 13' v. Ferro. |
| „ Breite | = 46 16 47''. |

Diese Station wurde in früheren Jahren nicht besucht.

Die Instrumente waren im Garten beim Palazzo Manzoni aufgestellt.

Magnetische Declination

| | |
|--|----------------------|
| Am 1. September um 5 ^h 41', mittl. Ortszeit | 15° 2' 8 |
| „ 2. „ „ 20 46 „ „ | 14 52·3 |
| „ 3. „ „ 22 23 „ „ | 14 55·6 |
| | Mittel . . 14° 56' 9 |

Declination in Wien

| | am 1. Sept. | 2. Sept. | 3. Sept. |
|---------------------------------|---------------------|------------|------------|
| um 14 ^h 6' | 12° 47' 46 | 12° 46' 93 | 12° 50' 83 |
| „ 18 6 | 12 47·87 | 12 48·14 | 12 49·37 |
| „ 22 6 | 12 51·88 | 12 53·11 | 12 53·14 |
| „ 2 6 | 12 56·12 | 12 57·50 | 12 57·31 |
| „ 6 6 | 12 52·44 | 12 52·87 | 12 49·93 |
| „ 10 6 | 12 50·32 | 12 50·51 | 12 49·22 |
| | Mittel . 12° 51' 01 | 12° 51' 51 | 12° 51' 63 |

Intensität der horizontalen Componente

| | | |
|---|------------------|----------|
| am 2. September um 22 ^h 7' mittlere Ortszeit | 2·0547 | Magnet I |
| „ 2. „ „ 22 5 „ „ | 2·0530 | „ II |
| | Mittel . 2·05385 | |

Intensität in Wien

| | am 2. Sept. |
|---------------------------------|--------------------|
| um 14 ^h 3' | 2·00663 |
| „ 18 3 | 2·00621 |
| „ 22 3 | 2·00504 |
| „ 2 3 | 2·00638 |
| „ 6 3 | 2·00736 |
| „ 10 3 | 2·00806 |
| | Mittel . . 2·00661 |

Inclination

| | |
|--|------------|
| am 3. September um 23 ^h 12' | 63° 12' 8. |
|--|------------|

V. Botzen.

Die Instrumente waren in einem Garten in der Nähe des eben im Bau begriffenen Bahnhofes aufgestellt.

Geographische Breite = 46° 29' 30''

Magnetische Declination

| | |
|---|---------------------|
| am 16. September um 23 ^h 37' mittlere Ortszeit | 15° 28' 4 |
| „ 16. „ „ 0 22 „ „ | 15 26·1 |
| „ 17. „ „ 20 3 „ „ | 15 21·9 |
| „ 18 „ „ 20 19 „ „ | 15 18·6 |
| | Mittel . 15° 23' 75 |

Declination in Wien

| | 16. Sept. | 17. Sept. | 18. Sept. |
|---------------------------------|---------------------|------------|------------|
| um 14 ^h 6' | 12° 53' 28 | 12° 53' 16 | 12° 51' 63 |
| „ 18 6 | 12 53·59 | 12 51·50 | 12 51·78 |
| „ 22 6 | 12 58·01 | 12 59·65 | 12 56·32 |
| „ 2 6 | 13 0·86 | 12 59·09 | 12 57·43 |
| „ 6 6 | 12 51·55 | 12 55·23 | 12 54·16 |
| „ 10 6 | 12 53·92 | 12 50·65 | 12 52·69 |
| | Mittel . 12° 55' 20 | 12° 51' 88 | 12° 51' 00 |

Intensität der horizontalen Componente:

| | |
|---|---------------------|
| am 17. September um 23 ^h 22' | 2·0225 mit Magnet I |
| " 17. " " 23 18 | 2·0228 " II |
| Mittel | 2·02265 |

am 13. und 14. Juli 1846 war sie 2·0057
 daher die jährliche Zunahme 0·0184.

Intensität in Wien

| | |
|--------------------|--------------|
| | am 17. Sept. |
| 14 ^h 3' | 2·00620 |
| 18 3 | 2·00700 |
| 22 3 | 2·00465 |
| 2 3 | 2·00647 |
| 6 3 | 2·00657 |
| 10 3 | 2·00637 |
| Mittel | 2·00621 |

Inclination

| | |
|---|-----------|
| am 17. September um 22 ^h 18' | 63° 42'·4 |
| " 18. " " 20 57 | 63 41·4 |
| Mittel | 63° 41'·9 |

am 13. Juni 1846 war sie 63 55·1
 daher die jährliche Abnahme 1·4.

Die durch die Beobachtungen dieser Reise gefundenen secularen Änderungen geben daher für die Declination aus den Beobachtungen der Station Klagenfurt in den Jahren 1847 und 1855 die jährliche Abnahme = 6'·5 ¹⁾).

Für die beiden übrigen Elemente hat man im Mittel aus den vier Stationen Ischl. Gastein, Klagenfurt und Botzen für den 9jährigen Zeitraum 1846—1855.

| | |
|---|---------|
| die jährliche Zunahme der horizontalen Intensität | 0·00324 |
| " " Abnahme der Inclination | 2'·2 |

Magnetische Beobachtungen auf der Bereisung

im Jahre 1856.

I. Ödenburg.

Die Instrumente wurden im Garten unseres meteorologischen Beobachters, des Herrn Müllermeisters Greilinger, etwa 300 Schritte nördlich vom Wiener Thore aufgestellt.

Das Azimuth des Knaufes des Stadthurmes vom Beobachtungsorte aus war, von Süden über West gezählt

$$= 327^{\circ} 42' 5$$

Magnetische Declination

| | |
|-----------------------------------|-----------|
| am 11. Juli um 6 ^h 13' | 12° 31'·9 |
| " 12. " " 23 7 | 12 34·1 |
| Mittel | 12° 33'·0 |

am 7. bis 9. August war sie 13 20·0
 daher die jährliche Abnahme 9·6.

¹⁾ Die übrigen Stationen, welche in diesem Jahre besucht wurden, konnten für diesen Zweck nicht benützt werden, da, wie bereits bei mehreren Gelegenheiten angeführt worden ist, die Declinations-Bestimmungen des Jahres 1846 unsicher sind durch das Nachlassen einer Schraube am Apparate, das erst gegen Ende der Reise bemerkt wurde, und welches eine zu grosse Drehung des Fadens verursachte.

Declination in Wien

| | am 11. Juli | am 12. Juli |
|-----------------------------|-------------|-------------|
| um 14 ^h 6' . . . | 12° 44' 16 | 12° 46' 27 |
| „ 18 6 . . . | 12 43·17 | 12 44·15 |
| „ 22 6 . . . | 12 45·25 | 12 46·33 |
| „ 2 6 . . . | 12 50·48 | 12 49·86 |
| „ 6 6 . . . | 12 46·05 | 12 45·78 |
| „ 10 6 . . . | 12 46·19 | 12 44·11 |
| Mittel . | 12° 45' 88 | 12° 46' 08 |

II. Brünn.

Der Aufstellungsplatz war der botanische Garten neben dem Museum zwischen der Domkirche und der Kapuzinerkirche.

Magnetische Declination

| | |
|--|-----------|
| am 31. Juli um 22 ^h 27' mittl. Ortszeit | 12° 59' 2 |
| „ 1. Aug. „ 22 2 „ „ | 13 1·2 |
| „ 2. „ „ 21 52 „ „ | 12 55·1 |
| „ 3. „ „ 21 55 „ „ | 12 57·4 |
| Mittel . . . | 12° 58' 2 |

am 5. und 6. Mai 1848 war sie 14 5·9
daher die jährliche Abnahme 8·1.

Declination in Wien

| | am 31. Juli | 1. August | 2. August | 3. August |
|-----------------------------|-------------|------------|------------|------------|
| um 14 ^h 6' . . . | 12° 41' 77 | 12° 43' 19 | 12° 44' 97 | 12° 43' 46 |
| „ 18 6 . . . | 12 41·17 | 12 40·41 | 12 42·40 | 12 40·39 |
| „ 22 6 . . . | 12 43·57 | 12 46·14 | 12 47·00 | 12 46·42 |
| „ 2 6 . . . | 12 53·16 | 12 50·68 | 12 51·59 | 12 54·15 |
| „ 6 6 . . . | 12 43·79 | 12 45·98 | 12 46·90 | 12 47·37 |
| „ 10 6 . . . | 12 45·12 | 12 46·79 | 12 46·30 | 12 43·50 |
| Mittel . | 12° 44' 76 | 12° 45' 53 | 12° 48' 19 | 12° 45' 88 |

Intensität der horizontalen Componente

| | |
|---|-----------------|
| am 30. Juli um 6 ^h 30' mittl. Ortszeit | 1·9463 Magnet I |
| „ „ „ 6 29 „ „ | 1·9421 „ II |
| „ 31. „ „ 0 14 „ „ | 1·9477 „ I |
| „ „ „ 0 13 „ „ | 1·9441 „ II |
| Mittel . | 1·94505 |

am 4., 5. und 6. Mai 1848 war sie 1·9256
daher die jährliche Zunahme 0·00242.

Intensität in Wien

| | am 30. Juli | 31. Juli |
|---------------------------------|-------------|----------|
| um 14 ^h 3' | 2·01082 | 2·01130 |
| „ 18 3 | 2·01067 | 2·01121 |
| „ 22 3 | 2·00991 | 2·01028 |
| „ 2 3 | 2·00991 | 2·00985 |
| „ 6 3 | 2·01046 | 2·01039 |
| „ 10 3 | 2·01133 | 2·01137 |
| Mittel . | 2·01052 | 2·01073 |

| Inclination | |
|---|---------|
| am 1. August um 23 ^h | 65° 6'8 |
| „ 2. „ „ 0 | 64 58·8 |
| „ 3. „ „ 22 ^h 45' | 65 14·4 |
| Mittel . | 65° 6'7 |

am 5. Mai 1848 war sie 65 7·7
daher die jährliche Abnahme 0·1.

III. Senftenberg.

Die Beobachtungen wurden im Observatorium des Herrn Baron von Senftenberg mit den dortigen Instrumenten, einem magnetischen Theodoliten von Lamont und einem Inclinatorium von Robison mit einer Nadel von Repsold ausgeführt, welche aber nicht mehr in gutem Zustande waren. Auch ist der Mangel einer Mire hinderlich.

Magnetische Declination

| | |
|--|----------|
| am 8. August um 2 ^h 30' mittl. Ortszeit | 12° 29'7 |
| „ 9. „ „ 21 0 „ „ | 12 15·2 |
| Mittel . | 12° 22'5 |

am 18. und 20. October 1848 war sie 13 36·4
daher die jährliche Abnahme 9·5.

Declination in Wien.

| | am 8. August | 9. August |
|---------------------------------|--------------|-----------|
| um 14 ^h 6' | 12° 45'54 | 12° 46'20 |
| „ 18 6 | 12 40·15 | 12 42·98 |
| „ 22 6 | 12 43·87 | 12 45·45 |
| „ 2 6 | 12 48·59 | 12 52·01 |
| „ 6 6 | 12 44·10 | 12 44·66 |
| „ 10 6 | 12 44·37 | 12 44·22 |
| Mittel . | 12° 44'44 | 12° 45'93 |

Intensität der horizontalen Componente:

| | |
|--|---------------------|
| am 7. August um 3 ^h 19' mittlere Ortszeit | 1·9049 mit Magnet I |
| „ 8. „ „ 3 52 „ „ | 1·9100 „ „ I |
| Mittel . | 1·90745 |

am 18. und 20. October 1848 war sie 1·8939
daher die jährliche Zunahme 0·00174.

Intensität in Wien

| | am 7. August | 8. August |
|---------------------------------|--------------|-----------|
| um 14 ^h 3' | 2·00859 | 2·00874 |
| „ 18 3 | 2·00866 | 2·00845 |
| „ 22 3 | 2·00759 | 2·00777 |
| „ 2 3 | 2·00803 | 2·00812 |
| „ 6 3 | 2·00888 | 2·00844 |
| „ 10 3 | 2·00899 | 2·00909 |
| Mittel . | 2·00846 | 2·00843 |

Inclination

| | |
|--|-----------|
| am 6. August um 0 ^h 30' | 65° 47'35 |
|--|-----------|

am 19. October 1848 war sie 65 50·3
daher die jährliche Abnahme 0·4.

IV. Prag.

Die Beobachtungen wurden in dem dortigen magnetischen Observatorium auf dem Hradschin mit meinem Reisetheodoliten ausgeführt.

Declination

| | |
|--|---------------------|
| am 16. August um 21 ^h 48' mittl. Ortszeit | 13° 46' 9 |
| „ 17. „ „ 21 38 „ „ | 13 43·4 |
| | Mittel . 13° 45' 15 |

Vom 7. bis 12. April 1848 war sie 14 58·8
daher die jährliche Abnahme 8·9.

Declination in Wien

| | am 16. Aug. | 17. Aug. |
|---------------------------------|---------------------|------------|
| um 14 ^h 6' | 12° 41' 73 | 12° 43' 51 |
| „ 18 6 | 12 41·19 | 12 40·24 |
| „ 22 6 | 12 45·69 | 12 41·74 |
| „ 2 6 | 12 50·01 | 12 50·32 |
| „ 6 6 | 12 44·59 | 12 43·14 |
| „ 10 6 | 12 43·58 | 12 43·24 |
| | Mittel . 12° 44' 46 | 12° 43' 70 |

Intensität der horizontalen Componente

| | |
|--|------------------|
| am 16. August um 21 ^h 52' mittl. Ortszeit | 1·9112 Magnet I |
| „ „ „ „ „ „ | 1·9090 „ II |
| „ 17. „ „ 21 44 „ „ | 1·9090 „ I |
| „ „ „ „ „ „ | 1·9059 „ II |
| | Mittel . 1·90877 |

Vom 4. bis 11. April 1848 war sie 1·88124
daher die jährliche Zunahme 0·00332.

Intensität in Wien

| | am 16. Aug. | 17. Aug. |
|---------------------------------|------------------|----------|
| um 14 ^h 3' | 2·00978 | 2·00967 |
| „ 18 3 | 2·00974 | 2·00946 |
| „ 22 3 | 2·00936 | 2·00826 |
| „ 2 3 | 2·00824 | 2·00884 |
| „ 6 3 | 2·00893 | 2·00979 |
| „ 10 3 | 2·00973 | 2·00957 |
| | Mittel . 2·00930 | 2·00927 |

Inclination

| | |
|--|--------------------------|
| am 16. August um 23 ^h 18' mittl. Ortszeit | 65° 52' 1 |
| „ 17. „ „ 23 0 „ „ | 65 51·9 |
| | Mittel 65° 52' 0 |

Vom 3. bis 6. April 1848 war sie 66 1·8
daher die jährliche Abnahme 1·2.

V. Bodenbach.

Die Instrumente waren in der Forstbaumschule des Herrn Forstmeisters Seidl aufgestellt, ungefähr 300 Schritte südlich vom Balnhofe.

Declination

| | |
|--|------------------|
| am 25. August um $4^h 41'$ mittlere Ortszeit | $13^\circ 57' 5$ |
| „ 26. „ „ $21 19$ „ „ | $14 3 \cdot 2$ |
| Mittel | $14^\circ 0' 35$ |

Im Jahre 1845·75 war sie $15 31 \cdot 3$
daher die jährliche Abnahme $8 \cdot 4$.

Declination in Wien

| | am 25. Aug. | 26. Aug. |
|------------------------|-------------------|-------------------|
| um $14^h 6'$ | $12^\circ 44' 79$ | $12^\circ 44' 97$ |
| „ $18 6$ | $12 44 \cdot 85$ | $12 43 \cdot 36$ |
| „ $22 6$ | $12 49 \cdot 65$ | $12 48 \cdot 69$ |
| „ $2 6$ | $12 47 \cdot 82$ | $12 51 \cdot 43$ |
| „ $6 6$ | $12 44 \cdot 60$ | $12 45 \cdot 00$ |
| „ $10 6$ | $12 45 \cdot 17$ | $12 45 \cdot 51$ |
| Mittel | $12^\circ 46' 15$ | $12^\circ 46' 19$ |

Intensität der horizontalen Componente

| | | |
|--|-----------------|--------------|
| am 25. August um $5^h 45'$ mittlere Ortszeit | $1 \cdot 8760$ | mit Magnet I |
| „ 25. „ „ $5 43$ „ „ | $1 \cdot 8771$ | „ „ II |
| „ 26. „ „ $0 0$ „ „ | $1 \cdot 8823$ | „ „ I |
| „ 26. „ „ $23 58$ „ „ | $1 \cdot 8779$ | „ „ II |
| Mittel | $1 \cdot 87832$ | |

Im Jahre 1845·75 war sie $1 \cdot 84356$
daher die jährliche Zunahme $0 \cdot 00319$.

Intensität in Wien

| | am 25. Aug. | 26. Aug. |
|------------------------|-----------------|-----------------|
| um $14^h 3'$ | $2 \cdot 00836$ | $2 \cdot 00830$ |
| „ $18 3$ | $2 \cdot 00797$ | $2 \cdot 00785$ |
| „ $22 3$ | $2 \cdot 00697$ | $2 \cdot 00749$ |
| „ $2 3$ | $2 \cdot 00753$ | $2 \cdot 00832$ |
| „ $6 3$ | $2 \cdot 00757$ | $2 \cdot 00817$ |
| „ $10 3$ | $2 \cdot 00855$ | $2 \cdot 00815$ |
| Mittel | $2 \cdot 00782$ | $2 \cdot 00805$ |

Inclination

| | |
|---------------------------------------|-------------------|
| am 26. August um $20^h 50'$ | $66^\circ 26' 4$ |
| „ 26. „ „ $0 4$ | $66 20 \cdot 1$ |
| Mittel | $66^\circ 23' 25$ |

Im Jahre 1845·75 war sie $66 36 \cdot 2$
daher die jährliche Abnahme $1 \cdot 2$.

Nach den Beobachtungen dieses Jahres ist im Mittel aus allen Stationen, wenn man den Beobachtungen in Prag ein doppeltes Gewicht beilegt, die jährliche Abnahme der Declination

$8' 9$.

Die jährliche Zunahme der horizontalen Intensität

$0 \cdot 00267$.

Die jährliche Abnahme der Inclination

$0' 7$.

Magnetische Beobachtungen auf der Bereisung

im Jahre 1857.

I. Ofen.

Die Instrumente waren aufgestellt im Garten des Herrn Dr. Freureis in der Vorstadt Landstrasse in einer Entfernung von 110 Klafter gegen Nordwest vom Thurm der Franciscanerkerche.

Declination

| | |
|--|-------------------|
| am 25. Juli um 23 ^h 22' mittlere Ortszeit | 11° 26' 1 |
| „ 26. „ „ 22 54 „ „ | 11 30·2 |
| <u>Mittel</u> | <u>11° 28' 15</u> |

am 8. und 15. Juni 1848 war sie 12 26·65
daher die jährliche Abnahme 6·4.

Declination in Wien.

| | am 25. Juli | 26. Juli |
|-------------------------|-------------------|-------------------|
| um 14' 6' | 12° 32' 02 | 12° 28' 35 |
| „ 18 6 | 12 29·34 | 12 29·87 |
| „ 22 6 | 12 33·59 | 12 37·63 |
| „ 2 6 | 12 42·66 | 12 43·89 |
| „ 6 6 | 12 38·48 | 12 39·21 |
| „ 10 6 | 12 32·95 | 12 34·20 |
| <u>Mittel</u> | <u>12° 34' 84</u> | <u>12° 35' 52</u> |

Intensität der horizontalen Componente

| | |
|--|----------------------|
| am 26. Juli um 19 ^h 55' mittlere Ortszeit | 2·0561 mit Magnet I |
| „ 27. „ „ 19 31 „ „ | <u>2·0523 „ „ II</u> |
| <u>Mittel</u> | <u>2·05420</u> |

am 9. Juni 1848 war sie 2·0359
daher die jährliche Zunahme 0·00199.

Intensität in Wien

| | am 26. Juli | 27. Juli |
|---------------------------------|----------------|----------------|
| um 14 ^h 3' | 2·00965 | 2·00943 |
| „ 18 3 | 2·00911 | 2·00946 |
| „ 22 3 | 2·00730 | 2·00912 |
| „ 2 3 | 2·00852 | 2·00834 |
| „ 6 3 | 2·00851 | 2·00859 |
| „ 10 3 | 2·00916 | 2·00904 |
| <u>Mittel</u> | <u>2·00871</u> | <u>2·00900</u> |

Inclination ¹⁾

am 26. Juli um 20^h 51' mittlere Ortszeit 63° 23' 4

am 8. Juni 1848 fand man

63° 19' 8

Aus diesen beiden Bestimmungen würde sich eine jährliche Zunahme der Inclination von 0' 4 ergeben, die aber wahrscheinlich ihren Grund in der Unsicherheit der Bestimmungen, vielleicht in der Verschiedenheit der Aufstellungsorte hat.

¹⁾ Als Constante zur Berechnung der mit dem Inductions-Inclinorium in diesem Jahre ausgeführten Messungen wurde das Mittel der Ergebnisse der in Wien am 18. October 1856, am 17. Juni und 17. September 1857 und am 17. April 1858 gemachten Bestimmungen angewendet, welches Mittel = 6·8604 ist. (S. S. 5.)

II. Kaschau.

Die Instrumente befanden sich im ehemals Graf Sztárai'schen Garten, vom Ärar zur Erbauung des Landesgerichts-Gebäudes angekauft, 320 Klafter westlich von der Domkirche.

Declination

| | |
|--|--------------------|
| am 3. August um 6 ^h 16' mittlere Ortszeit | 10° 7' 05 |
| „ 4. „ „ 20 32 „ „ „ | 10 3 80 |
| | Mittel . 10° 5' 42 |

am 17. und 18. Juli 1848 war sie 11 18·7
daher die jährliche Abnahme 8·1.

Declination in Wien

| | am 3. August | 4. August |
|---------------------------------|---------------------|------------|
| um 14 ^h 6' | 12° 34' 64 | 12° 33' 89 |
| „ 18 6 | 12 31·81 | 12 31·89 |
| „ 22 6 | 12 35·58 | 12 36·85 |
| „ 2 6 | 12 42·13 | 12 43·66 |
| „ 6 6 | 12 38·51 | 12 38·76 |
| „ 10 6 | 12 36·54 | 12 37·30 |
| | Mittel . 12° 36' 54 | 12° 37' 06 |

Intensität der horizontalen Componente

| | |
|--|---------------------|
| am 4. August um 0 ^h 41' mittlere Ortszeit | 2·0259 mit Magnet I |
| „ 4. „ „ 0 44 „ „ „ | 2·0224 „ II |
| | Mittel . 2·02415 |

am 17. und 18. Juli 1848 war sie 2·0035
daher die jährliche Zunahme 0·00226.

Intensität in Wien

| | am 4. Aug. |
|---------------------------------|------------------|
| um 14 ^h 3' | 2·01164 |
| „ 18 3 | 2·01164 |
| „ 22 3 | 2·01070 |
| „ 2 3 | 2·01098 |
| „ 6 3 | 2·01129 |
| „ 10 3 | 2·01163 |
| | Mittel . 2·01131 |

Inclination

am 4. August um 22^h 17' mittlere Ortszeit 64° 5' 3

am 17. Juli 1848 wurde gefunden 64 11·2
daher die jährliche Abnahme 0·7.

III. Lemberg.

Die Instrumente wurden im botanischen Garten aufgestellt, auf einem Hügel, welcher nahezu südlich von dem Domthurme liegt.

Declination

| | |
|---|--------------------|
| am 23. August um 21 ^h 2' mittlere Ortszeit | 8° 16' 7 |
| „ 24. „ „ 3 13 „ „ „ | 8 17·1 |
| | Mittel . 8° 16' 90 |

am 27. und 28. Juli 1850 war sie 9 7·8
daher die jährliche Abnahme 7·3.

Declination in Wien

| | am 23. Aug. | 24. Aug. |
|-----------------------|-------------------|-------------------|
| um 14 ^h 6' | 12° 32' 78 | 12° 33' 43 |
| .. 18 6 | 12 32·16 | 12 32·92 |
| .. 22 6 | 12 39·65 | 12 40·17 |
| .. 2 6 | 12 47·83 | 12 46·02 |
| .. 6 6 | 12 36·90 | 12 38·67 |
| .. 10 6 | 12 36·48 | 12 39·17 |
| Mittel . | <u>12° 37' 63</u> | <u>12° 38' 40</u> |

Intensität der horizontalen Componente

| | |
|-------------------------------------|---------------------|
| am 23. August um 23 ^h 6' | 2·0100 mit Magnet I |
| 23 4 | 2·0062 II |
| Mittel . | <u>2 00810</u> |

am 27. und 28. Juli 1850 war sie 1·98837
 daher die jährliche Zunahme 0·00282

Intensität in Wien am 23. August

| | |
|-----------------------|----------------|
| um 14 ^h 3' | 2·01237 |
| .. 18 3 | 2·01220 |
| .. 22 3 | 2·01149 |
| .. 2 3 | 2·01159 |
| .. 6 3 | 2·01180 |
| .. 10 3 | 2·01202 |
| Mittel . | <u>2·01191</u> |

Inclination

am 23. August um 2^h 31' 61° 18' 2

am 27. Juli 1850 war sie 64 41·6
 daher die jährliche Abnahme 3·3.

IV. Krakau.

Hier wurde zu den Beobachtungen der magnetische Theodolit von Lamont verwendet, welcher sich an der dortigen Sternwarte befindet, die Aufstellung war am südlichen Ende des botanischen Gartens.

Die Declination mit dem von Hrn. Director Weiss e gegebenen Azimuth der Mire war

am 30. August um 0^h 4' mittlere Ortszeit 10° 52' 9

am 10. und 11. October 1848 war sie 11 48·1
 daher die jährliche Abnahme 6·2.

Declination in Wien am 30. August

| | |
|-----------------------|-------------------|
| um 14 ^h 6' | 12° 37' 37 |
| .. 18 6 | 12 34·58 |
| .. 22 6 | 12 37·76 |
| .. 2 6 | 12 43·47 |
| .. 6 6 | 12 41·45 |
| .. 10 6 | 12 38·42 |
| Mittel . | <u>12° 38' 81</u> |

Intensität der horizontalen Componente

| | | |
|--------------------------------------|----------------|----------|
| am 30. August um 22 ^h 47' | 1·9589 | Magnet A |
| „ 30. „ „ 22 47 | 1·9612 | „ B |
| | <u>1·96005</u> | Mittel |

am 10. und 11. October 1848 war sie 1·9312
daher die jährliche Zunahme 0·00323.

Intensität in Wien am 30. August

| | |
|-----------------------|----------------|
| um 14 ^h 3' | 2·01226 |
| „ 18 3 | 2·01215 |
| „ 22 3 | 2·01150 |
| „ 2 3 | 2·01172 |
| „ 6 3 | 2·01152 |
| „ 10 3 | 2·01183 |
| | <u>2·01183</u> |
| | Mittel |

Da die Constante für das Inductions-Inclinorium nicht bestimmt, und die Inductions-kraft der Eisenstäbe wahrscheinlich noch veränderlich war, so konnte die Inclination nicht gemessen werden.

V. Teschen.

Der Aufstellungsort der Instrumente war der Garten des Celesta'schen Convictes.
Declination

| | |
|--|-------------------|
| am 2. September um 22 ^h 39' | 11° 32' 6 |
| „ 3. „ „ 21 40 | 11 32·65 |
| | <u>11° 32' 62</u> |
| | Mittel |

am 15. und 16. Mai 1848 war sie 12 52·3
daher die jährliche Abnahme 8·6.

Declination in Wien

| | am 2. Sept. | 3. Sept. |
|-----------------------|-------------------|-------------------|
| um 14 ^h 6' | 12° 28' 60 | 12° 30' 44 |
| „ 18 6 | 12 30·92 | 12 30·55 |
| „ 22 6 | 12 36·94 | 12 35·01 |
| „ 2 6 | 12 37·74 | 12 39·70 |
| „ 6 6 | 12 34·55 | 12 33·14 |
| „ 10 6 | 12 31·69 | 12 29·79 |
| | <u>12° 33' 41</u> | <u>12° 33' 10</u> |
| | Mittel | |

Intensität der horizontalen Componente

| | | |
|---|----------------|----------|
| am 3. September um 23 ^h 6' mittl. Ortszeit | 1·9646 | Magnet I |
| „ „ „ „ 22 55 „ „ | 4·9675 | „ II |
| | <u>1·96605</u> | Mittel |

am 15. und 16. Mai 1848 war sie 1·94231
daher die jährliche Zunahme 0·00255.

Intensität in Wien am 3. September

| | |
|-----------------------|----------------|
| um 14 ^h 3' | 2·01265 |
| „ 18 3 | 2·01274 |
| „ 22 3 | 2·01163 |
| „ 2 3 | 2·01270 |
| „ 6 3 | 2·01282 |
| „ 10 3 | 2·01291 |
| | <u>2·01257</u> |
| | Mittel |

Inclination

| | | |
|---------------------------------------|---|-----------|
| | am 3. September um 0 ^h 19' | 64° 54' 3 |
| am 15. Mai 1848 war sie | | 64 59·9 |
| daher die jährliche Abnahme | | 0·6. |

Die Beobachtungen dieses Jahres geben demnach im Mittel aus allen Beobachtungen

| | |
|---|---------|
| die jährliche Abnahme der Declination | 7' 3 |
| „ „ Zunahme der horizontalen Intensität | 0·00257 |
| „ „ Abnahme der Inclination, wenn man Ofen unberücksichtigt lässt | 1' 5 |

Nimmt man aber alle drei Jahrgänge zusammen, so findet man für die Periode, welche die Bereisungen umfassen, die jährliche Änderung

| | | |
|---------------------------------------|---------|------------|
| der Declination | 7' 96 | abnehmend, |
| der horizontalen Intensität | 0·00290 | zunehmend, |
| der Inclination | 1' 5 | abnehmend. |

Vergleicht man diese Änderungen mit denen, welche die Beobachtungen in Wien geben, so findet man sie nahe genug übereinstimmend, wenn man bedenkt, dass Reisebeobachtungen überhaupt nur auf einen geringeren Grad von Genauigkeit Anspruch machen dürfen, dass die Apparate nicht dieselben waren, und dass namentlich die Inclination auf den Reisen der letzten drei Jahre durch ein Verfahren bestimmt wurde, das ganz verschieden ist von dem, welches man in Wien anzuwenden pflegt. Die auf der Durchreise in Wien im Mai 1847 ausgeführten Messungen¹⁾, verglichen mit den Jahresmitteln von 1857, geben nämlich

| | |
|---|---------|
| die jährliche Abnahme der Declination | 7' 55 |
| „ „ Zunahme der horizontalen Intensität | 0·00311 |
| „ „ Abnahme der Inclination | 1' 10. |

Zusammenstellung und Ergebnisse der magnetischen Bestimmungen.

Die bis jetzt im österreichischen Kaiserstaate und den südöstlich davon gelegenen Ländern ausgeführten magnetischen Bestimmungen umfassen einen Zeitraum von 15 Jahren, nämlich von 1843 bis 1858, sind daher wegen der secularen Änderungen, denen die Kraft unterworfen ist, nicht unter einander vergleichbar, wenn sie nicht auf eine und dieselbe Zeit zurückgeführt werden. Um diese Reduction bewerkstelligen zu können, wurden in allen Veröffentlichungen der Reisebeobachtungen stets auch die Grössen beigelegt, die sich aus den gleichzeitigen Ableseungen an den Variations-Apparaten in Prag oder in Wien ergaben, und welche durch die an diesen beiden Orten angestellten absoluten Bestimmungen auch in solche umgesetzt wurden. Eben so findet man, wenn verschiedene Apparate angewendet worden sind, stets die Vergleichsbeobachtungen beigelegt, wodurch die Ergebnisse des einen denen des anderen angeschlossen werden können, und wenn die Unterschiede merklich sind, ist von ihnen Rechnung getragen worden.

Da die Epoche 1850·0 sehr nahe in der Mitte des erwähnten Zeitraumes liegt, so schien es am zweckmässigsten alle Bestimmungen darauf zurückzuführen. Zwar waren damals die

¹⁾ Magnetische und geographische Ortsbestimmungen im österreichischen Kaiserstaate, 2. Jahrgang, S. 30.

regelmässigen Beobachtungen in Wien noch nicht im Gange, allein die ununterbrochene zwanzigjährige Beobachtungsreihe in Prag und die siebenjährige in Wien gestatten eine Bestimmung der Unterschiede in Declination und horizontaler Intensität an beiden Beobachtungsorten, mit welcher man aus den für Prag gültigen Werthen von 1850·0 leicht jene für Wien ableiten kann.

Für die Declination wurde schon bei früherer Gelegenheit ¹⁾ der Werth im Jahre 1850·0 in Prag gleich

$$14^{\circ} 36'38$$

festgestellt. Die zu denselben Stunden, nämlich um 6^h und 10^h Morgens, um 2^h und 10^h Abends, an beiden Orten in Wien und Prag veranstalteten Ablesungen geben aber in den Jahresmitteln die Declination in Prag grösser als in Wien

| | <u>18^h</u> | <u>22^h</u> | <u>2^h</u> | <u>10^h</u> | <u>Mittel</u> |
|---------------------------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|---------------|
| für 1855 um den Unterschied | 1° 4'45 | 1° 4'90 | 1° 4'20 | 1° 4'05 | 1° 4'40 |
| „ 1856 „ „ „ | 1 2'05 | 1 2'51 | 1 2'04 | 1 2'00 | 1 2'15 |
| „ 1857 „ „ „ | 1 1'20 | 1 1'79 | 1 0'99 | 1 1'30 | 1 1'32 |

woraus das Gesamtmittel

$$= 1^{\circ} 2'62$$

folgt, so dass man die Declination in Wien für 1850·0 annehmen kann

$$13^{\circ} 33'76.$$

Mit diesen beiden Normalwerthen wurden sämtliche Declinations-Bestimmungen auf den Reisen mittelst der beigefügten Declinationen in Prag oder Wien auf die Epoche 1850·0 reducirt, indem man den Unterschied zwischen dem Mittel der beigefügten Declinationen und dem entsprechenden Normalwerthe als Reduction zu der beobachteten Declination mit Rücksicht auf die Zeichen hinzugab.

Dies Verfahren setzt voraus, dass die secularé Änderung der Declination im Umfange des Beobachtungsgebietes sehr nahe dieselbe sei, eine Voraussetzung, welche schon durch eine frühere Untersuchung als erlaubt erwiesen (s. Denkschriften I. Bd., S. 33), und durch die in den Jahren 1855, 1856 und 1857 an vielen Orten wiederholten Bestimmungen neuerdings bestätigt wurde. Wenn übrigens die eben angeführten Vergleichen der Jahresmittel von Wien und Prag nicht so genau stimmen, als man erwarten könnte, so sind daran gewiss die ungünstigen Verhältnisse Schuld, unter denen die Beobachtungen ausgeführt werden, da in Wien die Apparate in den engen Räumen eines Privathauses untergebracht werden mussten, in Prag aber die grosse Entlegenheit des magnetischen Observatoriums für die absoluten Bestimmungen eine häufigere und regelmässige Vergleichung mit den Variations-Instrumenten nicht gestattet. Die fast regelmässige Abnahme der oben angeführten Unterschiede an beiden Stationen würde übrigens eher auf eine der Magnetkraft selbst angehörige Ursache dieser Verschiedenheit hindeuten, worüber jedoch nur länger fortgesetzte Vergleichungen entscheiden können.

Für die Inclination findet man im VI. Bd., S. 8 der Prager Beobachtungen

$$\text{Inclin.} = 66^{\circ} 2'25 \text{ für } 1845\cdot7$$

¹⁾ Magnetische und geographische Ortsbestimmungen an den Küsten des adriatischen Golfes. Denkschriften X. Bd., S. 40.

und im IV. Bd. der Ortsbestimmungen S. 10

$$\text{Inclin.} = 65^{\circ} 51'04 \text{ für } 1850\cdot5,$$

demnach die jährliche Abnahme

$$J' = 2'34.$$

Die Wiener Beobachtungen der sieben Monate Juni bis December 1852 aber geben

$$\text{Inclin.} = 64^{\circ} 20'14 \text{ für } 1852\cdot8,$$

die sieben Monate Jänner bis Mai, November und December 1858 aber geben

$$\text{Inclin.} = 64^{\circ} 5'78 \text{ für } 1858\cdot4.$$

also die jährliche Abnahme

$$J' = 2'56.$$

Es wurde daher für die bis 1850 ausgeführten Bestimmungen der Werth von J , für die späteren der Werth von J' zur Reduction verwendet, und diese, da correspondirende Beobachtungen in Wien und Prag nur in wenigen Jahren vorhanden waren, aus dem Zeitunterschiede zwischen der Beobachtung und der Normalepoche 1850·0 gerechnet.

Der Werth der horizontalen Intensität für 1850·0 in Prag wurde ebenfalls aus der früher erwähnten Abhandlung (Denkschr. X. Bd. S. 41) entnommen, und ist

$$1\cdot88858.$$

Die Vergleichung der gleichzeitigen Prager und Wiener Beobachtungen gab den Unterschied

$$0\cdot10326,$$

woraus für Wien zu Anfang des Jahres 1850 der Werth

$$1\cdot99484$$

folgt. Die Jahresmittel der in Wien in der Mitte eines jeden Monates ausgeführten absoluten Bestimmungen geben aber von 1852 bis 1857 die jährliche Zunahme der horizontalen Intensität

$$0\cdot00306$$

und damit findet man für 1850·0 den Werth

$$1\cdot98710$$

um 0·00474 kleiner als der frühere. Ich habe zur Reduction der Reisebeobachtungen das Mittel beider, also die horizontale Intensität in Wien zur Epoche 1850·0

$$1\cdot98947$$

angenommen, und sie so durchgeführt, wie dies oben bei der Declination erwähnt worden ist. Für die Jahrgänge 1846, 1847, 1848 wurden die Beobachtungszahlen, also die in der 6., 8. und 10. Spalte der folgenden Tafel enthaltenen Zahlen aus der Abhandlung „Über den Einfluss der Alpen“ (Denkschr. Bd. I) entlehnt, da sie dort schon von den Instrumental-Correctionen befreit sind. Nur wurde im Jahre 1846, wo, wie bereits oben erwähnt (S. 48 Note), der Faden, an dem die Declinationsnadel hing, eine sehr starke Drehung erlangte, bei den Stationen 1 bis 15 und 17 die Declination um 47', bei den Stationen 16, 23, 24, 26, 29, 35,

37, 54 um 53', bei den Stationen 20 und 21 um 45', bei den Stationen 45, 50, 57 um 40', bei 44 um 51', bei 52 um 50' vergrössert, welche Correctionen durch die an manchen Orten bei späteren Reisen wiederholten, oben weitläufiger mitgetheilten Beobachtungen ermittelt worden waren.

Von den auf der Reise im Jahre 1850 gemachten Declinations-Bestimmungen wurden nur jene benützt, welche mit Apparat II ausgeführt worden sind.

An Orten, welche wiederholt besucht wurden, ist die Gesamtkraft aus dem Mittel der einzelnen Bestimmungen gerechnet. Diese weichen unter sich oft bedeutend ab, was sicher nicht allein Folge der Beobachtungsfehler oder einer Mangelhaftigkeit der Instrumente, sondern auch der Verschiedenheit der Aufstellungsorte ist, welche oft einen grösseren Einfluss ausüben, als man vermuthet. So z. B. wurde in Wien die Intensität der horizontalen Componente an zwei von dem magnetischen Observatorium entfernten Punkten gesucht und sehr verschieden gefunden, nämlich im botanischen Garten an dem Orte, wo im Jahre 1847 mit den Reise-Instrumenten beobachtet worden war, und es ergab sich am 23. Juli 1852 die horizontale Intensität 2·00180 während sie am Vortage im Observatorium mit demselben Apparate 1·99615 war, also ein Unterschied von 0·00565 um welchen dieser Werth im botanischen Garten grösser als im Observatorium gefunden wurde.

Am 1. Juli 1853 wurden auf dem Reisenberg (Cobenzl) bei Wien Beobachtungen angestellt, welche den Werth der horizontalen Intensität

1·99430

geben. Im Observatorium wurde

| | |
|---------------------------------------|------------------------|
| am 21. und 22. Juni 2·00170 |) Mittel . . . 2·00162 |
| „ 21. „ 22. Juli 2·00155 | |

gefunden.

Es ist daher auf dem Reisenberg die Intensität um 0·00732 kleiner als im Observatorium, so dass zwischen dem botanischen Garten und dem Reisenberge, zwei ungefähr $1\frac{1}{4}$ deutsche Meilen in südöstlicher Richtung von einander entfernten Punkten, ein Unterschied von

0·01297

besteht, während er nach ihrer Entfernung kaum 0·0030 erreichen sollte. Etwas Ähnliches wird man wohl auch für die beiden übrigen Elemente finden und man darf sich daher nicht wundern, wenn zwei an derselben Station, aber an verschiedenen Punkten, Zeiten und Instrumenten erhaltene Bestimmungen nicht scharf übereinstimmen.

Nach diesen Bemerkungen wird es nicht schwer sein, die Zahlen der folgenden Tafel zu verstehen.

TAFEL VI.

Verzeichniss sämmtlicher Beobachtungsstationen und der in ihnen gefundenen magnetischen Grössen.

| Nr. | Ort | Länge von Ferro | Breite | Zeit der Beobacht. | Declination | | Inclination | | Horizontal-Intensität | | Gesamt- kraft 1850-0 |
|-----|---------------------------------|--------------------|---------|-----------------------|-------------|----------|-------------|---------|-----------------------|--------|----------------------------|
| | | | | | beobachtet | 1850-0 | beobachtet | 1850-0 | beobachtet | 1850-0 | |
| 1 | Isola bella..... | 26° 12' | 45° 53' | 1846·7 | 18° 4'7 | 17° 27'0 | 63° 52'8 | 63° 45' | 2·0011 | 2·0005 | 4·523 |
| 2 | Como..... | 26 44 | 45 48 | 1846·7 | 17 24·0 | 16 46·5 | 63 47·5 | 63 40 | 2·0119 | 2·0103 | 4·532 |
| 3 | Pavia..... | 26 50 | 45 11 | 1846·7 | 17 44·7 | 17 6·6 | 63 15·6 | 63 8 | 2·0155 | 2·0438 | 4·522 |
| 4 | Mailand..... | 26 51 | 45 28 | 1846·7 | 17 46·8 | 17 13·4 | 63 15·4 | 63 8 | 2·0375 | 2·0366 | 4·507 |
| 5 | Bregenz..... | 27 21 | 47 30 | 1846·8 | 17 8·1 | 16 26·0 | 64 56·1 | 64 49 | 1·9468 | 1·9479 | 4·578 |
| 6 | Bludenz..... | 27 29 | 47 9 | 1846·8 | 17 0·3 | 16 28·0 | 64 37·2 | 64 30 | 1·9658 | 1·9647 | 4·564 |
| 7 | Sondrio..... | 27 32 | 46 10 | 1846·7 | 16 45·0 | 16 8·5 | 63 57·3 | 63 50 | 1·9981 | 1·9986 | 4·532 |
| 8 | Cremona..... | 27 41 | 45 8 | 1846·7 | 16 56·5 | 16 19·8 | 63 3·8 | 62 56 | 2 0569 | 2·0581 | 4·523 |
| 9 | Brescia..... | 27 51 | 45 32 | 1846·7 | 16 54·3 | 16 21·9 | 63 17·2 | 63 10 | 2·0412 | 2·0414 | 4·522 |
| 10 | S. Christoph ¹⁾ | 27 52 | 47 8 | 1846·8 | — | — | 64 23·2 | 64 16 | 1·9651 | 1·9654 | 4·527 |
| 11 | Bormio..... | 28 2 | 46 30 | 1846·7 | 16 53·2 | 16 16·7 | 64 3·4 | 63 56 | 1·9904 | 1·9898 | 4·528 |
| 12 | S. Maria ²⁾ | 28 4 | 46 31 | 1846·7 | 16 46·2 | 16 8·7 | 61 4·6 | 63 57 | 1·9963 | 1·9953 | 4·543 |
| 13 | Stilfserjoch ³⁾ | — | — | 1846·7 | — | — | 61 5·2 | 63 58 | 1·9939 | 1·9934 | 4·542 |
| 14 | Mals..... | 28 10 | 46 41 | 1846·7 | 16 42·6 | 16 5·4 | 64 8·3 | 64 1 | 1·9878 | 1·9891 | 4·540 |
| 15 | Landeck..... | 28 11 | 47 8 | 1846·7 | 16 49·0 | 16 10·3 | 64 29·1 | 64 22 | 1·9711 | 1·9743 | 4·564 |
| 16 | Imst..... | 28 20 | 47 14 | 1846·8 | 16 45·3 | 16 7·5 | 64 30·9 | 64 23 | 1·9619 | 1·9620 | 4·538 |
| 17 | Mantua..... | 28 27 | 45 9 | 1846·6 | 16 16·1 | 15 42·9 | 63 3·0 | 62 55 | 2·0609 | 2·0619 | 4·529 |
| 18 | Riva..... | 28 30 | 45 53 | 1846·6 | — | — | 63 24·2 | 63 16 | 2·0375 | 2·0380 | 4·530 |
| 19 | Verona..... | 28 37 | 45 26 | 1846·6 | 16 26·8 | 15 45·7 | 63 16·7 | 63 9 | 2·0529 | 2·0531 | — |
| | "..... | — | — | 1847·7 | 16 2·9 | 15 31·9 | 63 7·0 | 63 2 | 2·0500 | 2·0583 | 4·543 |
| 20 | Trient..... | 28 46 | 46 4 | 1846·7 | 16 30·7 | 15 57·2 | 63 25·7 | 63 18 | 2·0235 | 2·0251 | 4·507 |
| 21 | Meran..... | 28 48 | 46 40 | 1846·6 | 16 41·0 | 16 6·8 | 64 1·5 | 63 51 | 1·9919 | 1·9963 | 4·538 |
| 22 | Botzen..... | 29 2 | 46 30 | 1846·6 | — | — | 63 55·1 | 63 47 | 2·0057 | 2·0079 | — |
| | "..... | — | — | 1855·8 | 15 23·7 | 16 2·8 | 63 41·9 | 63 57 | 2·0226 | 2·0059 | 4·536 |
| 23 | Innsbruek..... | 29 3 | 47 16 | 1846·8 | 16 29·3 | 15 50·8 | 61 21·9 | 64 15 | 1·9699 | 1·9737 | 4·543 |
| 24 | Brenner ⁴⁾ | 29 5 | 47 0 | 1846·8 | 16 27·5 | 15 50·2 | 61 5·8 | 63 58 | 1·9863 | 1·9885 | 4·531 |
| 25 | Vicenza..... | 29 13 | 45 32 | 1847·7 | 16 2·5 | 15 38·1 | 63 7·6 | 63 2 | 2·0573 | 2·0654 | 4·555 |
| 26 | Rattenberg..... | 29 17 | 47 27 | 1846·8 | 16 9·1 | 15 35·6 | 64 30·3 | 64 23 | 1·9678 | 1·9737 | 4·565 |
| 27 | Rovigo..... | 29 26 | 45 4 | 1847·7 | 15 27·5 | 15 1·5 | 62 43·8 | 62 39 | 2·0767 | 2·0883 | 4·545 |
| 28 | Padua..... | 29 32 | 45 24 | 1847·7 | 15 35·3 | 15 9·8 | 62 58·2 | 62 53 | 2·0663 | 2·0737 | 4·551 |
| 29 | Brunneken..... | 29 34 | 46 48 | 1846·6 | 16 24·0 | 15 41·7 | 63 58·7 | 63 54 | 1·9980 | 2·0018 | 4·542 |
| 30 | Agordo..... | 29 43 | 46 17 | 1855·8 | 14 56·9 | 15 39·3 | 63 12·8 | 63 28 | 2·0538 | 2·0367 | 4·559 |
| 31 | Belluno..... | 29 53 | 46 8 | 1847·7 | 14 57·3 | 14 35·4 | 63 21·0 | 63 19 | 2·0370 | 2·0479 | 4·560 |
| 32 | Conegliano..... | 29 58 | 45 53 | 1847·7 | 15 42·3 | 15 14·8 | 63 12·7 | 63 6 | 2·0185 | 2·0580 | 4·549 |
| 33 | Venedig..... | 29 59 | 45 26 | 1847·7 | 15 28·2 | 15 3·0 | 62 56·3 | 62 51 | 2·0627 | 2·0732 | — |
| | "..... | — | — | 1851·6 | 14 34·2 | 15 6·0 | 62 33·5 | 62 15 | 2·0893 | 2·0783 | 4·541 |
| 34 | Franzensbad..... | 30 0 | 50 7 | 1850·8 | — | — | 66 11·3 | 66 13 | 1·8713 | 1·8746 | 4·648 |
| 35 | St. Johann..... | 30 ⁸ 5 | 47 32 | 1846·8 | 15 49·1 | 15 15·3 | 64 31·9 | 64 21 | 1 9677 | 1·9726 | 4·565 |
| 36 | Plan..... | 30 21 | 49 52 | 1850·8 | 15 28·9 | 15 33·3 | 65 52·1 | 65 54 | 1·8869 | 1·8883 | 4·624 |
| 37 | Lienz..... | 30 24 | 46 50 | 1846·6 | 15 56·8 | 15 20·1 | 63 56·7 | 63 49 | 2·0019 | 2·0096 | 4·554 |
| 38 | Karlsbad..... | 30 33 | 50 13 | 1850·8 | 15 31·8 | 15 35·8 | 66 8·1 | 66 10 | 1·8757 | 1·8771 | 4·645 |
| 39 | Salzburg ⁵⁾ | 30 39 | 47 48 | 1846·8 | — | — | 64 40·0 | 64 33 | 1·9519 | 1·9629 | — |
| | " ⁶⁾ | — | — | 1851·7 | 15 12·1 | 15 16·6 | 64 35·4 | 64 40 | 1·9683 | 1·9665 | 4·582 |
| 40 | Böckstein ⁷⁾ | 30 42 | 47 0 | 1846·6 | — | — | 63 54·6 | 63 16 | 2·0000 | 2·0012 | 4·531 |
| 41 | Hofgastein..... | 30 45 | 47 10 | 1846·5 | — | — | 64 7·0 | 63 39 | 1·9980 | 2·0041 | 4·569 |
| 42 | Badgastein..... | 30 45 | 47 7 | 1855·7 | 14 13·6 | 14 57·8 | 63 45·1 | 63 59 | 2·0298 | 2·0122 | 4·587 |
| 43 | Gamskarkogel ⁸⁾ | — | — | 1846·5 | — | — | 63 54·9 | 63 47 | 1·9958 | 2·0003 | 4·528 |
| 44 | Golling..... | 30 47 | 47 35 | 1846·8 | 15 30·9 | 15 0·1 | 64 32·2 | 64 25 | 1·9778 | 1·9801 | 4·576 |
| 45 | Altheim..... | 30 51 | 48 15 | 1846·8 | 15 24·3 | 14 52·5 | 61 51·8 | 64 41 | 1·9438 | 1·9489 | 4·559 |
| 46 | Chiesch..... | 30 55 | 50 6 | 1844·6 | 16 3·9 | 15 24·4 | 66 3·7 | 65 51 | 1·8653 | 1·8802 | 4·606 |
| 47 | Udine..... | 30 55 | 46 4 | 1847·6 | — | — | 63 11·2 | 63 6 | 2·0188 | 2·0587 | 4·550 |
| 48 | Klattan..... | 31 2 | 49 21 | 1844·6 | 15 59·5 | 15 22·6 | 65 26·1 | 65 14 | 1·8923 | 1·9068 | 4·551 |
| 49 | Pilsen..... | 31 3 | 49 45 | 1844·6 | — | — | 65 45·3 | 65 33 | 1·8782 | 1·8965 | 4·582 |
| 50 | Scherding..... | 31 4 | 48 27 | 1846·8 | 15 23·1 | 14 51·7 | 64 51·2 | 64 44 | 1·9429 | 1·9439 | 4·554 |

¹⁾ 905 Toisen Seehöhe. ²⁾ 1269 Toisen Seehöhe. ³⁾ Bei S. Maria 1143 Toisen Seehöhe. ⁴⁾ 693 Toisen Seehöhe. ⁵⁾ Im botanischen Garten, vielleicht zu nahe an Gebäuden. ⁶⁾ Im Aigl-Hof, bei St. Johannes-Spital. ⁷⁾ 976 Toisen Seehöhe. ⁸⁾ Bei Badgastein 1218 Toisen Seehöhe.

| Nr. | Ort | Länge von Ferro | Breite | Zeit der Beobacht. | Declination | | Inclination | | Horizontal-Intensität | | Gesamt- kraft 1850-0 |
|-----|----------------------------------|--------------------|---------|-----------------------|-------------|----------|-------------|---------|-----------------------|--------|----------------------------|
| | | | | | beobachtet | 1850-0 | beobachtet | 1850-0 | beobachtet | 1850-0 | |
| 51 | Komotau | 31° 5' | 50° 27' | 1844·6 | 15° 47'1 | 15° 13'8 | 66° 22'8 | 66° 10' | 1·8443 | 1·8599 | 4·603 |
| 52 | Radstadt | 31 8 | 47 23 | 1846·5 | 15 28·5 | 14 52·0 | 64 19·1 | 64 11 | 1·9929 | 1·9980 | 4·588 |
| 53 | Ancona | 31 10 | 43 37 | 1854·8 | 13 39·5 | 11 15·7 | 60 53·4 | 61 6 | 2·1821 | 2·1709 | 4·492 |
| 54 | Gmünd | 31 10 | 46 54 | 1846·6 | 15 45·3 | 15 6·4 | 63 50·9 | 63 43 | 2·0121 | 2·0163 | 4·553 |
| 55 | St. Georgen | 31 11 | 47 55 | 1851·7 | 14 56·9 | 15 6·6 | 64 35·7 | 64 40 | 1·9692 | 1·9686 | 4·601 |
| 56 | Ischl | 31 14 | 47 43 | 1846·8 | — | — | 64 34·3 | 64 27 | 1·9595 | 1·9629 | — |
| | | — | — | 1855·7 | 14 14·5 | 14 59·7 | 64 2·1 | 64 17 | 2·0093 | 1·9930 | 4·546 |
| 57 | Vöcklabruck | 31 16 | 48 1 | 1846·8 | 15 13·9 | 14 41·5 | 64 45·1 | 64 38 | 1·9557 | 1·9594 | 4·584 |
| 58 | Parenzo | 31 16 | 45 14 | 1854·6 | 14 15·2 | 14 45·7 | — | — | — | — | — |
| 59 | Görz | 31 18 | 45 56 | 1847·7 | 14 24·3 | 13 58·5 | 63 2·4 | 62 57 | 2·0592 | 2·0687 | 4·549 |
| 60 | Bleiberg | 31 22 | 46 36 | 1847·5 | 15 4·2 | 14 37·5 | 63 30·7 | 63 25 | 2·0342 | 2·0430 | 4·565 |
| 61 | Dobruca b. Bleibg. 1) | — | — | 1847·5 | — | — | 63 32·0 | 63 26 | 2·0240 | 2·0316 | 4·543 |
| 62 | Kreith " " 2) | — | — | 1847·5 | — | — | 63 29·5 | 63 24 | 2·0266 | 2·0346 | 4·544 |
| 63 | Triest | 31 25 | 45 39 | 1847·7 | 14 46·5 | 14 21·9 | 62 45·5 | 62 40 | 2·0752 | 2·0850 | — |
| | | — | — | 1854·5 | 14 3·0 | 11 41·8 | 62 56·1 | 62 48 | 2·0903 | 2·0770 | 4·542 |
| 64 | Teplitz | 31 27 | 50 39 | 1845·8 | 15 29·2 | 14 59·5 | 66 34·7 | 66 25 | 1·8444 | 1·8575 | 4·643 |
| 65 | Schönaub. Teplitz. | — | — | 1844·6 | — | — | 66 33·5 | 66 21 | 1·8381 | 1·8543 | 4·622 |
| 66 | Pola 3) | 31 30 | 44 52 | 1847·8 | 14 30·5 | 14 7·5 | 62 18·8 | 62 14 | 2·1069 | 2·1173 | — |
| | | — | — | 1854·6 | 13 53·0 | 14 24·6 | — | — | 2·1189 | 2·1081 | 4·545 |
| 67 | Kremsmünster | 31 48 | 48 3 | 1846·5 | 15 8·5 | 14 22·6 | 64 45·8 | 64 38 | 1·9559 | 1·9599 | — |
| | | — | — | 1846·8 | 15 4·5 | 14 28·4 | — | — | 1·9533 | 1·9554 | — |
| | | — | — | 1851·8 | 14 36·2 | 14 44·6 | 64 41·6 | 64 46 | 1·9575 | 1·9618 | 4·584 |
| 68 | Pisek | 31 49 | 49 19 | 1844·6 | 15 17·9 | 14 53·2 | 65 21·9 | 65 9 | 1·9013 | 1·9156 | 4·558 |
| 69 | Bodenbach | 31 52 | 50 46 | 1844·6 | 15 32·6 | 14 55·1 | 66 39·3 | 66 27 | 1·8406 | 1·8551 | — |
| | | — | — | 1845·8 | 15 31·3 | 15 1·6 | 66 36·2 | 66 27 | 1·8435 | 1·8569 | — |
| | | — | — | 1856·7 | 14 0·3 | 14 47·8 | 66 23·2 | 66 41 | 1·8783 | 1·8599 | 4·664 |
| 70 | Adelsberg | 31 54 | 45 46 | 1847·6 | 14 15·8 | 13 49·6 | 62 49·5 | 62 44 | 2·0711 | 2·0813 | 4·543 |
| 71 | Grotte b. Adelsberg | — | — | 1847·6 | — | — | 62 54·0 | 62 49 | 2·0716 | 2·0802 | 4·553 |
| 72 | Lietzen | 31 55 | 47 34 | 1846·5 | — | — | 64 16·8 | 64 9 | 1·9901 | 1·9917 | — |
| | | — | — | 1851·7 | 14 30·4 | 14 35·1 | 64 5·6 | 64 10 | 1·9994 | 1·9971 | 4·582 |
| 73 | Linz | 31 56 | 48 18 | 1846·8 | — | — | 64 45·6 | 64 38 | 1·9579 | 1·9601 | — |
| | | — | — | 1851·8 | 14 40·1 | 14 42·5 | 64 41·8 | 64 46 | 1·9593 | 1·9622 | 4·589 |
| 74 | Klagenfurt | 31 58 | 46 37 | 1847·5 | 14 48·2 | 14 20·0 | 63 30·2 | 63 24 | 2·0339 | 2·0135 | — |
| | | — | — | 1855·7 | 13 54·9 | 14 36·5 | 63 15·5 | 63 30 | 2·0598 | 2·0446 | 4·573 |
| 75 | St. Lambrecht | 31 58 | 47 4 | 1847·5 | 14 58·6 | 14 32·5 | 63 54·3 | 63 49 | 2·0098 | 2·0197 | 4·577 |
| 76 | Prag 5) | 32 6 | 50 5 | 1856·7 | 13 45·1 | 11 34·8 | 65 52·0 | 66 10 | 1·9088 | 1·8890 | 4·675 |
| 77 | Fiume | 32 7 | 45 19 | 1847·8 | 14 46·9 | 11 20·3 | 62 30·6 | 62 25 | 2·0926 | 2·1025 | — |
| | | — | — | 1854·6 | 13 45·8 | 14 22·3 | 62 12·2 | 62 24 | 2·1099 | 2·0978 | 4·534 |
| 78 | Budweis | 32 8 | 49 0 | 1843·7 | — | — | 65 15·7 | 65 1 | 1·9369 | 1·9408 | — |
| | | — | — | 1850·8 | — | — | 65 4·8 | 65 7 | 1·9335 | 1·9384 | 4·601 |
| 79 | Admont | 32 8 | 47 35 | 1847·5 | 14 39·1 | 14 13·1 | 64 6·2 | 64 0 | 1·9958 | 2·0046 | 4·573 |
| 80 | Lussin piccolo | 32 8 | 44 32 | 1854·6 | 13 36·5 | 11 13·1 | 61 10·9 | 61 53 | 2·1328 | 2·1212 | 4·501 |
| 81 | Laibach | 32 10 | 46 3 | 1847·6 | 14 22·8 | 13 58·5 | 62 58·9 | 62 54 | 2·0623 | 2·0707 | 4·546 |
| 82 | Leipa | 32 12 | 50 41 | 1844·5 | — | — | 66 30·5 | 66 18 | 1·8478 | 1·8627 | 4·637 |
| 83 | Steinberg | 32 20 | 48 35 | 1843·6 | — | — | 65 6·2 | 64 51 | 1·9411 | 1·9458 | 4·578 |
| 84 | Silberberg | 32 23 | 48 38 | 1843·6 | — | — | 64 59·7 | 64 45 | 1·9415 | 1·9459 | 4·562 |
| 85 | Kallwang | 32 25 | 47 27 | 1847·5 | 14 27·7 | 14 0·0 | 63 55·2 | 63 49 | 2·0023 | 2·0110 | 4·558 |
| 86 | Gratzen | 32 27 | 48 48 | 1843·6 | 14 59·2 | 14 22·0 | 65 10·0 | 64 55 | 1·9289 | 1·9340 | 4·562 |
| 87 | Eisenerz | 32 33 | 47 32 | 1847·4 | 14 30·0 | 14 8·6 | 64 0·9 | 63 55 | 2·0005 | 2·0086 | 4·568 |
| 88 | Polsterberg bei Eisen- erz 6) | — | — | 1847·5 | — | — | 64 1·2 | 63 56 | 2·0007 | 2·0063 | 4·566 |
| 89 | Erzberg bei Eisen- erz 7) | — | — | 1847·5 | — | — | 64 5·5 | 64 0 | 1·9958 | 2·0017 | 4·566 |
| 90 | St. Paul | 32 34 | 46 43 | 1847·5 | 14 18·6 | 13 56·4 | 63 27·2 | 63 21 | 2·0359 | 2·0454 | 4·560 |
| 91 | Neuhaus | 32 39 | 49 8 | 1843·6 | 15 3·6 | 14 25·9 | 65 20·3 | 65 6 | 1·9231 | 1·9272 | 4·577 |
| 92 | Reichenberg | 32 41 | 50 46 | 1844·5 | — | — | 66 35·6 | 66 23 | 1·8189 | 1·8629 | 4·638 |
| | | — | — | 1845·8 | 15 15·3 | 14 46·7 | 66 25·5 | 66 16 | 1·8196 | 1·8619 | — |
| 93 | Neustadt | 32 52 | 45 48 | 1847·6 | 13 42·8 | 13 18·6 | 62 41·4 | 62 39 | 2·0763 | 2·0759 | 4·549 |
| 94 | Abenz | 32 54 | 47 32 | 1847·5 | 14 14·3 | 13 51·7 | 64 0·1 | 63 54 | 1·9997 | 2·0081 | 4·564 |
| 95 | Zara | 32 55 | 44 7 | 1847·8 | 13 57·8 | 13 33·3 | 61 58·5 | 61 53 | 2·1423 | 2·1531 | — |
| | | — | — | 1854·7 | 13 41·3 | 11 12·8 | — | — | 2·1669 | 2·1566 | 4·572 |

1) 1108 T. Seehöhe. 2) Schacht 110 T. unter der Thalsohle. 3) Garten des Gasthauses zur Arena. 4) Felsen S. Pietro für die astronomischen Bestimmungen; die magnetischen auf dem Abhänge des Hügel, auf dem das Fort Zara gebaut ist. 5) Beobachtungen mit den Reissinstrumenten. Die Normalwerthe f. 1850-0, nämlich Hor.-Int. = 18886, Incl. = 65°22'2", gehen d. Gesamtkraft = 4620. 6) 972 T. Seehöhe. 7) Im St. Michael-Stollen 10 Perc. hängig.

| Nr. | Ort | Länge von Ferro | Breite | Zeit der Beobacht. | Declination | | | Inclination | | Horizontal-Intensität | | Gesamtkraft 1850-0 |
|-----|-------------------------|--------------------|---------|-----------------------|-------------|-----------|------------|-------------|------------|-----------------------|-------|-----------------------|
| | | | | | beobachtet | 1850-0 | beobachtet | 1850-0 | beobachtet | 1850-0 | | |
| 96 | Bruck | 32° 57' | 47° 25' | 1847-5 | 14° 13'8" | 13° 51'5" | 63° 56'8" | 63° 51' | 2-0069 | 2-0158 | 4-574 | |
| 97 | Seelau | 32 57 | 49 32 | 1843-6 | 14 46-9 | 14 12-2 | 65 38-6 | 65 21 | 1-9060 | 1-9106 | 4-590 | |
| 98 | Cilli | 32 58 | 46 14 | 1847-6 | 14 3-7 | 13 40-9 | 62 58-7 | 62 53 | 2-0688 | 2-0775 | 4-558 | |
| 99 | Melk | 33 1 | 48 14 | 1846-5 | — | — | — | — | 1-9652 | 1-9710 | — | |
| | " | — | — | 1847-4 | 14 19-8 | 13 56-6 | 64 41-5 | 64 35 | 1-9672 | 1-9724 | 4-596 | |
| 100 | Časlau | 33 2 | 49 57 | 1813-6 | 14 46-6 | 14 4-7 | 65 45-4 | 65 31 | 1-8972 | 1-9036 | 4-593 | |
| 101 | Ottočaz | 33 4 | 44 51 | 1851-6 | 13 56-2 | 13 59-0 | 61 53-3 | 61 57 | 2-1235 | 2-1230 | 4-515 | |
| 102 | Chlumetz | 33 7 | 50 9 | 1845-8 | 14 43-7 | 14 11-6 | 65 54-7 | 65 45 | 1-8845 | 1-8971 | 4-619 | |
| | " | — | — | 1848-4 | 14 21-6 | 14 1-8 | 65 53-2 | 65 49 | — | — | 4-567 | |
| 103 | Gratz | 33 8 | 47 4 | 1847-6 | 14 12-0 | 13 49-2 | 63 35-3 | 63 30 | 2-0291 | 2-0380 | — | |
| 104 | Karlstadt | 33 15 | 45 29 | 1851-6 | 13 42-0 | 13 47-5 | 62 19-5 | 62 21 | 2-1011 | 2-0999 | 4-533 | |
| 105 | Hohenelbe | 33 16 | 50 37 | 1844-6 | — | — | 66 24-5 | 66 12 | 1-8571 | 1-8722 | — | |
| | " | — | — | 1845-8 | 14 46-7 | 14 16-2 | 66 19-0 | 66 9 | 1-8589 | 1-8722 | 4-635 | |
| 106 | Iglau | 33 18 | 49 25 | 1848-4 | 14 12-9 | 13 56-3 | 65 20-1 | 65 17 | 1-9220 | 1-9322 | 4-621 | |
| 107 | Horn | 33 19 | 48 40 | 1850-8 | 13 34-4 | 13 39-9 | 64 10-4 | 64 42 | 1-9614 | 1-9609 | 4-588 | |
| 108 | Marburg | 33 21 | 46 35 | 1847-6 | 13 51-1 | 13 27-8 | 63 18-3 | 63 13 | 2-0414 | 2-0529 | 4-556 | |
| 109 | Mali Hallan | 33 23 | 44 22 | 1847-8 | — | — | 61 38-1 | 61 33 | 2-1375 | 2-1509 | 4-515 | |
| 110 | Schottwien | 33 32 | 47 39 | 1847-4 | 14 16-4 | 13 53-1 | 64 1-4 | 63 55 | 1-9986 | 2-0090 | 4-569 | |
| 111 | Gleichenberg | 33 37 | 46 52 | 1847-6 | 13 45-8 | 13 21-3 | 63 33-0 | 63 28 | 2-0368 | 2-0453 | 4-579 | |
| 112 | Sabenico | 33 39 | 43 41 | 1847-8 | 14 0-8 | 13 37-1 | 61 2-6 | 60 58 | 2-1674 | 2-1793 | 4-490 | |
| 113 | Agram | 33 39 | 45 49 | 1847-8 | 13 51-3 | 13 31-0 | 62 30-4 | 62 25 | 2-0877 | 2-0975 | — | |
| | " | — | — | 1851-6 | 13 36-8 | 13 42-7 | 62 30-8 | 62 35 | 2-0941 | 2-0915 | 4-536 | |
| 114 | Znain | 33 45 | 48 51 | 1848-4 | 13 51-9 | 13 35-2 | 64 51-1 | 64 48 | 1-9557 | 1-9636 | 4-612 | |
| 115 | Nachod | 33 48 | 50 25 | 1844-5 | — | — | 66 2-7 | 65 50 | 1-8702 | 1-8761 | 4-583 | |
| 116 | Lissa | 33 51 | 43 5 | 1854-7 | 12 32-0 | 13 8-4 | 59 31-9 | 59 41 | 2-2517 | 2-2420 | 4-448 | |
| 117 | Kwasnei | 33 55 | 50 12 | 1844-5 | — | — | 65 49-3 | 65 37 | 1-8817 | 1-8958 | 4-592 | |
| 118 | Reichenau | 33 56 | 50 11 | 1841-5 | 14 26-6 | 13 50-3 | 65 50-2 | 65 38 | 1-8832 | 1-8983 | 4-601 | |
| 119 | Stein am Anger | 33 56 | 47 12 | 1847-8 | — | — | 63 55-7 | 63 51 | 2-0221 | 2-0319 | 4-617 | |
| 120 | Petrina | 33 58 | 45 26 | 1851-6 | 13 19-0 | 13 25-6 | 62 13-2 | 62 17 | 2-1055 | 2-1034 | 4-522 | |
| 121 | Warasdin | 33 58 | 46 8 | 1847-8 | — | — | 62 56-6 | 62 49 | 2-0709 | 2-0813 | 4-556 | |
| 122 | Leitomischl | 33 59 | 49 53 | 1843-6 | 14 17-6 | 13 33-9 | 65 15-7 | 65 31 | 1-9086 | 1-9127 | 4-615 | |
| 123 | Wien 1) | 34 2 | 48 13 | 1847-4 | 13 53-7 | 13 31-1 | 64 22-9 | 61 17 | 1-9737 | 1-9878 | 4-581 | |
| 124 | Senftenberg | 34 7 | 50 5 | 1843-5 | 14 22-2 | 13 35-2 | 65 53-0 | 65 38 | 1-8953 | 1-8983 | — | |
| | " | — | — | 1847-8 | 13 59-7 | 13 35-7 | 65 48-7 | 65 41 | 1-8961 | 1-9062 | — | |
| | " 2) | — | — | 1848-8 | 13 36-4 | 13 23-6 | 65 50-3 | 65 47 | 1-8939 | 1-9081 | 4-630 | |
| 125 | Spalau | 34 7 | 43 31 | 1847-8 | 13 41-3 | 13 22-2 | 60 53-6 | 60 48 | 2-1822 | 2-1911 | — | |
| | " | — | — | 1854-7 | 13 3-6 | 13 31-7 | 60 26-1 | 60 38 | 2-2030 | 2-1940 | 4-482 | |
| 126 | Lesina | 31 7 | 43 11 | 1854-7 | 12 41-5 | 13 17-9 | — | — | 2-2372 | 2-2260 | — | |
| 127 | Ödenburg | 34 15 | 47 41 | 1851-7 | 13 20-0 | 13 26-0 | 63 57-5 | 64 2 | 2-0156 | 2-0138 | 4-599 | |
| | " | — | — | 1856-7 | 12 33-0 | 13 20-8 | — | — | — | — | — | |
| 128 | Brünn | 34 17 | 49 11 | 1848-4 | 11 5-9 | 13 50-4 | 65 7-7 | 65 4 | 1-9256 | 1-9309 | — | |
| | " | — | — | 1856-7 | 12 58-2 | 13 45-9 | 65 6-7 | 65 25 | 1-9450 | 1-9239 | 4-604 | |
| 129 | Molfetta | 34 21 | 41 13 | 1851-8 | 12 28-9 | 12 50-6 | 57 52-9 | 58 5 | 2-3286 | 2-3171 | 4-383 | |
| 130 | Bellovar | 34 32 | 45 53 | 1851-7 | 13 3-9 | 13 11-3 | 62 31-5 | 62 36 | 2-0939 | 2-0938 | 4-550 | |
| 131 | Lagosta | 34 32 | 42 47 | 1854-7 | 12 26-1 | 12 58-3 | — | — | — | — | — | |
| 132 | Lundenburg | 34 34 | 48 45 | 1850-8 | 13 7-0 | 13 11-3 | 64 40-7 | 64 43 | 1-9744 | 1-9742 | 4-620 | |
| 133 | Pressburg | 34 46 | 48 9 | 1848-5 | 13 37-1 | 13 22-3 | 61 3-2 | 61 0 | 1-9955 | 2-0071 | 4-579 | |
| 134 | Curzola | 34 48 | 42 59 | 1851-7 | 12 24-4 | 12 58-1 | 59 42-9 | 59 55 | 2-2145 | 2-2325 | 4-454 | |
| 135 | Ormuütz | 31 55 | 49 36 | 1848-4 | 13 20-4 | 13 5-6 | 65 22-3 | 65 19 | 1-9221 | 1-9327 | 4-628 | |
| 136 | Neugradisca | 35 6 | 45 11 | 1851-6 | 12 46-1 | 12 54-5 | 61 51-5 | 61 56 | 2-1255 | 2-1257 | 4-548 | |
| 137 | Troppan | 35 33 | 49 56 | 1848-4 | 13 0-5 | 12 46-2 | 65 24-9 | 65 21 | 1-9211 | 1-9352 | 4-640 | |
| 138 | Brindisi | 35 40 | 40 39 | 1851-8 | 11 50-7 | 12 16-2 | 57 9-1 | 57 21 | 2-3702 | 2-3603 | 4-375 | |
| 139 | Treuttschün | 35 43 | 48 52 | 1848-5 | — | — | 61 52-4 | 61 49 | 1-9655 | 1-9777 | 4-648 | |
| 140 | Gravosa | 35 45 | 42 40 | 1851-7 | 11 50-1 | 12 26-4 | 59 8-9 | 59 21 | 2-2663 | 2-2569 | 4-427 | |
| 141 | Ragusa | 35 47 | 42 38 | 1847-8 | 12 35-6 | 12 17-8 | 59 35-0 | 59 30 | 2-2523 | 2-2623 | 4-457 | |
| 142 | Kenese | 35 48 | 47 2 | 1851-7 | 12 31-0 | 12 40-0 | 63 19-1 | 63 21 | 2-0575 | 2-0563 | 4-592 | |
| 143 | Neu-Szöny bei Komorn | 35 52 | 47 45 | 1848-5 | 12 46-3 | 12 29-8 | 63 43-9 | 63 40 | 2-0202 | 2-0326 | 4-582 | |
| 144 | Fünfkirchen | 35 55 | 46 1 | 1851-6 | 12 31-1 | 12 36-0 | 62 21-2 | 62 28 | 2-1014 | 2-1001 | 4-543 | |
| 145 | Megline | 36 14 | 42 27 | 1851-7 | 11 54-2 | 12 31-2 | 58 52-3 | 59 1 | 2-2823 | 2-2738 | 4-423 | |

1) Mit den Reisinstrumenten. Mit dem Normalwerthe der horizontalen Intensität wird die Gesamtkraft = 1-585. 2) Die Beobachtungen von 1856 sind zu unsicher, um hier aufgenommen zu werden.

| Nr. | Ort | Länge von Ferro | Breite | Zeit der Beobacht. | Declination | | Inclination | | Horizontal-Intensität | | Gesamt- kraft 1850-0 |
|-----|-------------------|--------------------|---------|-----------------------|-------------|----------|-------------|---------|-----------------------|--------|----------------------------|
| | | | | | beobachtet | 1850-0 | beobachtet | 1850-0 | beobachtet | 1850-0 | |
| 146 | Teschen..... | 36° 17' | 49° 45' | 1848-5 | 12° 52'3 | 12° 31'8 | 64° 59'9 | 61° 56' | 1-9423 | 1-9513 | — |
| | "..... | — | — | 1857-8 | 11 32-6 | 12 33-1 | 64 51-0 | 65 11 | 1-9660 | 1-9429 | 4-622 |
| 147 | Esseg..... | 36 22 | 45 32 | 1851-5 | 12 12-1 | 12 17-5 | 61 56-6 | 62 0 | 2-1230 | 2-1222 | 4-520 |
| 148 | Cattaro..... | 36 26 | 42 25 | 1847-8 | 12 26-2 | 12 3-2 | 59 28-6 | 59 24 | 2-2686 | 2-2792 | 4-477 |
| 149 | Tolna..... | 36 29 | 46 25 | 1851-7 | 12 22-6 | 12 31-5 | 62 42-2 | 62 47 | 2-0898 | 2-0887 | 4-567 |
| 150 | Schemnitz..... | 36 35 | 48 27 | 1848-6 | 12 42-6 | 12 20-0 | 64 7-0 | 61 4 | 2-0028 | 2-0148 | 4-607 |
| 151 | Ofen..... | 36 43 | 47 29 | 1848-5 | 12 26-6 | 12 18-6 | 63 19-8 | 63 16 | 2-0359 | 2-0463 | — |
| | "..... | — | — | 1857-7 | 11 28-1 | 12 26-7 | 63 23-4 | 63 43 | 2-0542 | 2-0348 | 4-573 |
| 152 | Cettigne..... | 36 39 | 42 21 | 1847-8 | — | — | 59 10-9 | 59 6 | 2-2669 | 2-2792 | 4-438 |
| 153 | Autivari..... | 36 19 | 42 6 | 1854-8 | 11 33-0 | 12 13-3 | 58 23-5 | 58 36 | 2-2999 | 2-2903 | 4-396 |
| 154 | Durazzo..... | 37 8 | 41 19 | 1854-8 | 11 20-3 | 11 55-9 | 57 19-5 | 58 2 | 2-3427 | 2-3318 | 4-404 |
| 155 | Valona..... | 37 10 | 40 29 | 1854-8 | 11 19-9 | 11 50-6 | 56 52-5 | 57 5 | 2-3873 | 2-3781 | 4-376 |
| 156 | Szt. Miklos..... | 37 20 | 49 4 | 1848-6 | 12 9-1 | 11 51-9 | 64 37-8 | 64 35 | 1-9740 | 1-9861 | 4-627 |
| 157 | Losonez..... | 37 22 | 48 19 | 1848-6 | 11 51-3 | 11 32-1 | 61 10-5 | 64 7 | 2-0054 | 2-0166 | 4-620 |
| 158 | Corfu..... | 37 35 | 39 38 | 1851-8 | 11 7-8 | 11 43-4 | 55 38-0 | 55 51 | 2-4314 | 2-4208 | 4-321 |
| | "..... | — | — | 1857-7 | 10 48-3 | 11 41-1 | 55 41-7 | 56 2 | 2-4413 | 2-4190 | — |
| 159 | Carlowitz..... | 37 37 | 45 11 | 1851-5 | 11 1-0 | 11 3-6 | 61 10-1 | 61 11 | 2-1968 | 2-1974 | 4-566 |
| 160 | Krakau..... | 37 37 | 50 4 | 1848-8 | 11 48-1 | 11 31-6 | 65 27-0 | 65 24 | 1-9312 | 1-9427 | — |
| | "..... | — | — | 1850-6 | 11 32-6 | 11 28-6 | 65 18-6 | 65 20 | 1-9385 | 1-9379 | — |
| | "..... | — | — | 1857-7 | 10 52-9 | 11 47-9 | — | — | 1-9600 | 1-9377 | 4-653 |
| 161 | Poschega..... | 37 39 | 43 52 | 1858-5 | 10 44-6 | 11 54-3 | 60 13-9 | 60 36 | 2-2426 | 2-2212 | 4-525 |
| 162 | Wieliczka..... | 37 41 | 49 59 | 1848-8 | 12 2-9 | 11 41-7 | 65 15-9 | 65 13 | 1-9467 | 1-9578 | 4-670 |
| 163 | Bergw.b.Wieliczka | — | — | 1848-8 | — | — | 65 18-7 | 65 16 | 1-9365 | 1-9490 | 4-659 |
| 164 | Szegedin..... | 37 48 | 46 15 | 1851-4 | 11 16-5 | 11 20-2 | 62 20-7 | 62 24 | 2-1055 | 2-1049 | 4-543 |
| 165 | Szolnok..... | 37 55 | 47 10 | 1850-8 | 11 38-8 | 11 42-6 | 63 8-1 | 63 10 | 2-0681 | 2-0718 | 4-590 |
| 166 | Erlau..... | 38 3 | 47 53 | 1848-6 | 12 7-8 | 11 47-6 | 63 31-5 | 63 31 | 2-0398 | 2-0537 | 4-605 |
| 167 | Sendin..... | 38 4 | 41 50 | 1851-5 | 11 20-7 | 11 26-5 | 61 9-5 | 61 13 | 2-1690 | 2-1598 | 4-486 |
| 168 | Belgrad..... | 38 5 | 44 48 | 1858-5 | 10 11-3 | 11 17-9 | 60 53-9 | 61 16 | 2-2092 | 2-1889 | 4-553 |
| 169 | Kesmark..... | 38 9 | 49 8 | 1848-6 | 11 45-1 | 11 24-9 | 61 43-1 | 64 40 | 1-9716 | 1-9891 | 4-649 |
| 170 | Sandee..... | 38 14 | 49 34 | 1850-6 | 11 34-4 | 11 33-2 | 61 14-5 | 64 46 | 1-9690 | 1-9697 | 4-620 |
| 171 | Leutschau..... | 38 19 | 49 1 | 1848-6 | 11 37-3 | 11 18-8 | 64 32-5 | 64 30 | 1-9855 | 1-9977 | 4-640 |
| 172 | *Zaite..... | 38 35 | 37 48 | 1857-7 | 10 23-0 | 11 19-5 | 53 29-8 | 53 50 | 2-5380 | 2-5157 | 4-263 |
| 173 | Tarnow..... | 38 41 | 50 1 | 1848-8 | 11 28-0 | 11 12-2 | 65 26-3 | 65 24 | 1-9447 | 1-9570 | 4-701 |
| 174 | Temesvar..... | 38 52 | 45 45 | 1851-4 | 10 44-1 | 10 50-0 | 61 37-3 | 61 41 | 2-1375 | 2-1336 | 4-498 |
| 175 | Kaschau..... | 38 59 | 48 41 | 1848-6 | 11 18-7 | 11 1-5 | 61 11-2 | 64 8 | 2-0035 | 2-0160 | — |
| | "..... | — | — | 1857-7 | 10 5-4 | 11 2-4 | 61 5-3 | 61 25 | 2-0241 | 2-0023 | 4-627 |
| 176 | Arad..... | 38 59 | 46 14 | 1851-4 | 10 48-9 | 10 54-8 | 61 56-7 | 62 0 | 2-4198 | 2-4178 | 4-511 |
| 177 | Weiskirchen..... | 39 5 | 44 54 | 1851-5 | 11 1-2 | 11 2-4 | 61 4-0 | 61 8 | 2-1790 | 2-1753 | 4-506 |
| 178 | Tokai..... | 39 8 | 48 7 | 1850-8 | 10 16-4 | 10 47-7 | 63 17-5 | 63 20 | 2-0526 | 2-0564 | 4-581 |
| 179 | Aleximatz..... | 39 16 | 43 31 | 1858-5 | 10 22-8 | 11 31-8 | 59 16-2 | 60 8 | 2-2674 | 2-2472 | 4-513 |
| 180 | Debrezin..... | 39 21 | 47 32 | 1850-7 | 10 39-5 | 10 43-7 | 63 9-9 | 63 12 | 2-0636 | 2-0661 | 4-582 |
| 181 | Krosno..... | 39 27 | 49 11 | 1850-7 | 10 57-5 | 11 1-1 | 64 41-3 | 64 46 | 1-9680 | 1-9693 | 4-620 |
| 182 | Grosswarden..... | 39 39 | 47 4 | 1850-8 | 10 56-8 | 10 51-3 | 62 45-3 | 62 47 | 2-0828 | 2-0844 | 4-558 |
| 183 | Rzeszow..... | 39 40 | 50 3 | 1848-8 | 10 37-6 | 10 23-5 | 65 6-0 | 65 3 | 1-9567 | 1-9705 | 4-671 |
| 184 | Nisko..... | 39 49 | 50 34 | 1848-8 | 10 25-0 | 10 7-5 | 65 18-8 | 65 16 | 1-9360 | 1-9490 | 4-658 |
| 185 | Karansches..... | 39 52 | 45 21 | 1851-5 | 10 15-9 | 10 25-3 | 61 2-4 | 61 6 | 2-1637 | 2-1622 | 4-474 |
| 186 | Sanok..... | 39 53 | 49 33 | 1850-6 | 10 13-0 | 10 16-8 | 64 40-7 | 64 12 | 1-9812 | 1-9818 | 4-637 |
| 187 | Ungvar..... | 40 2 | 48 37 | 1848-6 | 10 15-1 | 10 23-7 | 63 50-2 | 63 17 | 2-0235 | 2-0362 | 4-609 |
| 188 | Orsova..... | 40 1 | 44 42 | 1851-5 | 10 39-9 | 10 31-9 | 60 43-5 | 60 47 | 2-1976 | 2-1938 | 4-494 |
| 189 | Mohadia..... | 40 5 | 44 53 | 1851-5 | 10 35-6 | 10 36-5 | 60 36-4 | 60 10 | 2-1868 | 2-1810 | 4-458 |
| 190 | Dobra..... | 40 13 | 45 51 | 1851-5 | 10 8-1 | 10 11-6 | 61 30-3 | 61 34 | 2-1527 | 2-1478 | 4-511 |
| 191 | Munkacs..... | 40 27 | 48 26 | 1848-7 | 10 30-8 | 10 16-6 | 63 42-5 | 63 40 | 2-0250 | 2-0376 | 4-593 |
| 192 | Przemisl..... | 40 29 | 49 47 | 1848-8 | 9 52-0 | 9 36-6 | 64 52-2 | 64 19 | 1-9745 | 1-9888 | 4-674 |
| 193 | Kalafat..... | 40 35 | 44 0 | 1858-5 | 9 9-3 | 10 19-2 | 59 59-9 | 60 22 | 2-2568 | 2-2357 | 4-522 |
| 194 | Szatmar..... | 40 36 | 47 47 | 1848-7 | 10 34-8 | 10 11-3 | 63 20-8 | 63 18 | 2-0533 | 2-0664 | 4-599 |
| 195 | *Cserigo..... | 40 42 | 36 7 | 1857-7 | 9 32-1 | 10 29-1 | 51 11-3 | 51 34 | 2-6374 | 2-6152 | 1-207 |
| 196 | Veretzko..... | 40 48 | 48 46 | 1850-7 | 9 41-2 | 9 47-4 | 63 53-6 | 63 55 | 2-0248 | 2-0240 | 4-603 |
| 197 | *Rombah..... | 40 52 | 32 23 | 1857-8 | 9 29-0 | 10 27-0 | 46 3-6 | 46 24 | 2-8272 | 2-8047 | 4-067 |
| 198 | Sandor..... | 40 53 | 49 34 | 1850-7 | 9 24-8 | 9 28-2 | 64 29-8 | 64 32 | 1-9923 | 1-9923 | 4-633 |
| 199 | Skole..... | 41 14 | 49 1 | 1850-7 | 9 28-2 | 9 31-3 | 64 3-4 | 64 5 | 2-0254 | 2-0242 | 4-631 |
| 200 | Nagy-Bánya..... | 41 18 | 47 39 | 1848-7 | 10 11-4 | 9 51-3 | 62 54-6 | 62 52 | 2-0879 | 2-1000 | 4-605 |

| Nr. | Ort | Länge von Ferro | Breite | Zeit der Beobacht. | Declination | | Inclination | | Horizontal-Intensität | | Gesamt- kraft 1850-0 |
|-----|---------------------------|--------------------|---------|-----------------------|-------------|---------|-------------|--------|-----------------------|--------|----------------------------|
| | | | | | beobachtet | 1850-0 | beobachtet | 1850-0 | beobachtet | 1850-0 | |
| 201 | Rawa-Ruska | 41° 19' | 50° 17' | 1850·7 | 9° 14'4 | 9° 19'1 | 65° 6'1 | 65° 8' | 1·9553 | 1·9552 | 4·650 |
| 202 | Karlsburg | 41 19 | 46 4 | 1848·7 | 9 54·5 | 9 42·4 | 61 40·0 | 61 37 | 2·1560 | 2·1688 | 4·562 |
| 203 | Klausenburg | 41 20 | 46 45 | 1848·7 | 10 9·8 | 9 54·4 | 62 23·6 | 62 21 | 2·1049 | 2·1188 | 4·566 |
| 204 | Stry | 41 33 | 49 15 | 1848·8 | 9 33·3 | 9 24·1 | 64 15·0 | 64 12 | 2·0087 | 2·0235 | 4·651 |
| 205 | Lemberg | 41 42 | 49 50 | 1850·7 | 9 7·8 | 9 9·4 | 64 41·6 | 64 43 | 1·9884 | 1·9890 | — |
| | " | — | — | 1857·7 | 8 16·9 | 9 12·7 | 64 18·2 | 64 38 | 2·0081 | 1·9857 | 4·646 |
| 206 | Dolina | 41 44 | 48 58 | 1850·7 | 9 4·3 | 9 5·5 | 63 59·9 | 64 2 | 2·0261 | 2·0267 | 4·629 |
| 207 | Hermannstadt | 41 53 | 45 47 | 1848·7 | 9 49·4 | 9 32·6 | 61 20·4 | 61 17 | 2·1708 | 2·1846 | 4·547 |
| 208 | Bistriz | 42 13 | 47 7 | 1848·7 | 10 2·1 | 9 49·8 | 62 36·6 | 62 34 | 2·1008 | 2·1143 | 4·589 |
| 209 | Maros-Vásárhely | 42 18 | 46 32 | 1848·7 | 10 29·7 | 10 11·5 | 62 18·1 | 62 15 | 2·1223 | 2·1358 | 4·587 |
| 210 | Stanislaw | 42 25 | 48 55 | 1850·7 | 8 58·9 | 9 4·5 | 63 53·0 | 63 55 | 2·0328 | 2·0333 | 4·624 |
| 211 | Schässburg | 42 32 | 46 13 | 1848·7 | 10 24·5 | 10 10·3 | 61 46·5 | 61 43 | 2·1513 | 2·1658 | 4·571 |
| 212 | Fogaros | 42 43 | 45 50 | 1848·7 | 9 59·8 | 9 41·3 | 61 22·7 | 61 20 | 2·1635 | 2·1778 | 4·540 |
| 213 | Kolomea | 42 45 | 48 31 | 1850·7 | 9 0·4 | 9 2·6 | 63 27·3 | 63 29 | 2·0528 | 2·0522 | 4·596 |
| 214 | Brody | 42 51 | 50 5 | 1850·7 | 9 3·6 | 9 3·0 | 61 42·3 | 64 44 | 1·9934 | 1·9943 | 4·672 |
| 215 | *Candia | 42 51 | 35 19 | 1857·7 | 8 44·2 | 9 41·0 | 49 54·0 | 50 14 | 2·6932 | 2·6711 | 4·176 |
| 216 | Jakobeny | 43 3 | 47 26 | 1848·8 | 9 7·7 | 8 49·6 | 62 37·5 | 62 35 | 2·0980 | 2·1118 | 4·586 |
| 217 | Tarnopol | 43 17 | 49 33 | 1850·7 | 9 15·8 | 9 17·2 | 64 21·7 | 64 23 | 2·0100 | 2·0097 | 4·648 |
| 218 | Czortkow | 43 30 | 49 1 | 1850·7 | 8 47·2 | 8 49·9 | 63 31·4 | 63 33 | 2·0526 | 2·0534 | 4·610 |
| 219 | Czernowitz | 43 41 | 48 17 | 1848·8 | 9 35·7 | 9 25·5 | 63 23·5 | 63 21 | 2·0631 | 2·0766 | 4·630 |
| 220 | Bukarest | 43 46 | 44 26 | 1858·6 | 7 55·4 | 9 3·1 | 59 51·5 | 60 14 | 2·2638 | 2·2440 | 4·520 |
| 221 | Suczawa | 43 59 | 47 38 | 1848·8 | 9 5·6 | 8 50·4 | 62 46·9 | 62 44 | 2·0889 | 2·1032 | 4·591 |
| 222 | Burgasz | 45 8 | 42 32 | 1858·8 | 6 59·0 | 8 1·2 | 57 3·6 | 57 26 | 2·3670 | 2·3467 | 4·360 |
| 223 | Galatz | 45 43 | 45 27 | 1858·6 | 6 34·1 | 7 39·8 | 61 8·5 | 61 31 | 2·2169 | 2·1965 | 4·606 |
| 224 | *Rhodus | 45 57 | 36 26 | 1857·7 | 7 30·4 | 8 27·0 | 50 50·3 | 51 10 | 2·6631 | 2·6408 | 4·211 |
| 225 | Cap Kalakri | 46 9 | 43 23 | 1858·8 | 6 42·5 | 7 46·9 | — | — | — | — | — |
| 226 | Ortaköj | 46 41 | 41 4 | 1858·8 | 6 33·9 | 7 39·2 | 55 55·2 | 56 18 | 2·4627 | 2·4441 | 4·405 |
| 227 | Böjuk Liman | 46 46 | 41 11 | 1858·8 | 6 31·6 | 7 33·6 | 55 48·2 | 56 11 | 2·4841 | 2·4644 | 4·428 |
| 228 | Sulina | 47 22 | 45 9 | 1858·8 | 6 13·3 | 7 17·5 | — | — | 2·2647 | 2·2447 | — |
| 229 | *Alexandria | 47 34 | 31 11 | 1857·8 | 7 10·1 | 8 11·7 | 43 19·4 | 43 40 | 2·9340 | 2·9084 | 4·021 |
| 230 | Schlangeninsel | 47 53 | 45 14 | 1858·8 | 5 48·7 | 6 51·5 | 60 18·0 | 60 41 | 2·2757 | 2·2660 | 4·628 |
| 231 | Odessa | 48 25 | 46 29 | 1858·8 | 7 34·2 | 8 36·8 | 61 45·8 | 62 9 | 2·2689 | 2·2487 | 4·814 |
| 232 | *Adalia | 48 25 | 36 52 | 1857·7 | 6 20·4 | 7 16·0 | 51 31·7 | 51 52 | 2·6366 | 2·6142 | 4·234 |
| 233 | *Limassol | 50 46 | 34 40 | 1857·7 | 6 2·9 | 6 58·2 | 47 59·2 | 48 19 | 2·7899 | 2·7674 | 4·161 |
| 234 | Cap Chersones | 51 1 | 44 34 | 1858·8 | 5 6·9 | 6 12·9 | 59 25·2 | 59 48 | 2·2928 | 2·2716 | 4·516 |
| 235 | *Jaffa | 52 28 | 32 3 | 1857·7 | 5 17·5 | 6 18·7 | 44 11·9 | 44 35 | 2·9181 | 2·8958 | 4·066 |
| 236 | Cap Indje | 52 30 | 42 8 | 1858·8 | — | — | 57 26·1 | 57 49 | 2·4001 | 2·3795 | 4·467 |
| 237 | Sinope | 52 49 | 42 2 | 1858·7 | 4 37·9 | 5 42·8 | 57 19·8 | 57 42 | 2·4110 | 2·3939 | 4·480 |
| 238 | *Beirut | 53 13 | 33 52 | 1857·8 | 5 19·0 | 6 19·6 | 46 42·0 | 47 2 | 2·8499 | 2·8275 | 4·149 |
| 239 | *Latakia | 53 30 | 35 31 | 1857·8 | 4 59·3 | 5 54·6 | 48 42·9 | 49 3 | 2·7756 | 2·7534 | 4·201 |
| 240 | Cap Takli | 54 7 | 45 6 | 1858·8 | 3 16·3 | 4 21·4 | 59 51·1 | 60 14 | 2·3165 | 2·2976 | 4·628 |
| 241 | Trapezunt | 57 23 | 41 1 | 1858·7 | 1 58·9 | 3 4·9 | 55 47·8 | 56 10 | 2·5330 | 2·5126 | 4·513 |

Die mit Sternchen bezeichneten Bestimmungen rühren von Dr. Schaub her und sind in einer Abhandlung veröffentlicht, welche den Titel führt: „Magnetische Beobachtungen im östlichen Theile des Mittelmeeres auf Befehl seiner k. k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Ferdinand Max. Obercommandanten der k. k. Marine, ausgeführt im Jahre 1857 von Dr. F. Schaub, Director der k. k. Marine-Sternwarte. Triest, Buchdruckerei des österreichischen Lloyd 1858.“ Da sie eine solche werthvolle Ausdehnung der magnetischen Curven gestatten, so erlaubte ich mir sie hier einzureihen.

Die auf der Reise im J. 1858 bestimmten Werthe der Inclination wurden nach S. 4 um 11'6 vergrößert, um sie mit der in Wien durch die 4 Nadeln von Repsold angegebenen Inclination in Übereinstimmung zu bringen. Nimmt man die Angaben der mehr ausgeglichenen Nadeln von Gruber als die richtigeren an, so hat man alle Werthe dieser Tafel mit Ausnahme der von Dr. Schaub gefundenen um die genannte Grösse zu verkleinern.

Die Declination an den 4 Stationen Belluno, Görz, Adelsberg und Neustadt¹⁾ wurde nicht berücksichtigt, da sie demselben Fehler unterworfen zu sein scheint, wie die des Jahres 1856, nämlich einer unbemerkt eingetretenen Drehung des Fadens, welche an dem damals benützten Apparate nicht genau bestimmt werden konnte, sondern durch ein eingehängtes Torsions-Gewicht nur von Zeit zu Zeit weggebracht wurde.

Von früheren Declinationsbestimmungen in diesen Gegenden führe ich jene an, welche vom russischen Capitän Manganari gemacht worden sind¹⁾, welcher im Jahre 1838 eine Karte des schwarzen Meeres veröffentlichte. Unter der Annahme, dass die Declinations-Messungen zwei Jahre vor der Herausgabe der Karte angestellt wurden, ergibt sich folgende Abnahme der Declination aus diesen und meinen Beobachtungen:

| | Decl. nach Manganari | Jährl. Abnahme |
|--|----------------------|----------------|
| Ausgang des Bosphorus | 9° 30' | 8'1 |
| Vor dem Golf Burgasz | 9 15 | 6·8 |
| Odessa | 9 45 | 6·5 |
| Cap Chersones | 7 15 | 6·4 |
| Eingang der Meerenge bei Kertsch | 7 0 | 11·2 |
| Trapezunt | 5 15 | 9·8 |
| Sinope | 7 0 | 7·0 |
| Mittel | | 7'4 |

Die geringe Übereinstimmung dieser Zahlen mag ausser den wahrscheinlich minder genauen Instrumenten und dem Einflusse örtlicher Störungen von der Verschiedenheit der Zeiten herrühren, an welchen die Beobachtungen ausgeführt worden sind.

Immerhin verdient bemerkt zu werden, dass auch Manganari den Unterschied der Declination zwischen Burgasz und Odessa auf 30' angiebt, um welche sie in dem obschon östlich gelegenen Odessa grösser ist als in Burgasz. Nach meinen Bestimmungen ist dieser Unterschied in demselben Sinne 35'.

Das Mittel der Declinationsabnahme stimmt fast genau mit der Abnahme, welche die Beobachtungen von Kremsmünster vom Jahre 1836 geben, wenn man die Wiener Beobachtungen des Jahres 1858 auf diesen Beobachtungsort zurückführt. Man findet nämlich:

| | |
|--|---------|
| Declination in Kremsmünster von 1. Mai bis 1. October 1836 | 16° 34' |
| " " " im November 1858 | 13 38 |
| Jährliche Abnahme | 7'5 |

In einer neuerlich erschienenen englischen Seekarte des schwarzen Meeres²⁾ werden folgende Werthe der Declination angegeben:

| |
|--|
| bei 30° Länge von Grenwich (47° 40' von Ferro) und 42° Breite Declination = 6° 50' W |
| " 31 " " " (38 40 " ") " 45 " " = 6 |
| " 36 " " " (53 40 " ") " 44 " " = 3 50 W |
| " 39 " " " (56 40 " ") " 42 " " = 2 35. |

Bei der Bearbeitung des durch die obige Tafel dargebotenen Stoffes sind die magnetischen Grössen: Declination, Inclination, Horizontal- und Gesamtkraft einzeln zu betrachten.

A. Declination.

Die Abnahme der Declination von Westen nach Osten befolgt kein ganz einfaches Gesetz, wie schon aus den früher besprochenen Beobachtungen in Sinope, Cap Indje, Odessa und Como hervorgeht. Die Zahlen der Tafel VI verrathen aber noch manche andere Unregel-

¹⁾ Hydrographie de la mer noire et de la mer d'Azow par E. Taitbout de Marigny.

²⁾ The Euxine or Black Sea, from the Russian Survey of 1836 (Variations from observations in 1855. the decrease is about 6' annually), London, published according to Act of Parliament at the Hydrographic Office of the Admiralty. Sept. 20th 1853. — Additions to 1856. Sold by J. D. Potter, Agent for the Admiralty Charts, 31. Poultry at H. King Street, Tower Hill.

mässigkeit; denn es wird keinem, der sie einer genaueren Einsicht würdigt, entgehen, dass die Beobachtungsorte in Böhmen und in der lombardischen Ebene bei derselben Entfernung in Länge und gleicher Breite eine viel grössere Declinationsänderung anzeigen als die Alpenstationen, dass diese Änderung zwischen zwei an den entgegengesetzten Ufern des adriatischen Golfes liegenden Punkten auffallend klein wird, und manche Orte Siebenbürgens und des östlichen Galiziens sich nur mit Zwang dem allgemeinen Gesetze fügen, viele kleinerer Unregelmässigkeiten nicht zu gedenken, von denen künftige Bestimmungen lehren werden, wie viel davon auf Rechnung mangelhafter Beobachtung oder ungünstiger Aufstellungsorte komme, wie viel aber der Beschaffenheit der Erdrinde in der näheren Umgebung zuzuschreiben sei. Dieser Punkt bietet eine der anziehendsten Seiten der magnetischen Beobachtungen dar, und wird in Verbindung mit geologischen Forschungen in der Folge ohne Zweifel auch seine praktische Verwendung finden.

Um aber die erwähnten Einflüsse zu einer klaren Anschauung zu bringen, muss man zunächst Vergleichen anstellen, und diese nach irgend einer Norm, z. B. nach der geographischen Lage ordnen, woraus die Abhängigkeit der magnetischen Änderung von dieser Lage, oder eigentlich von der ihr entsprechenden Form und Beschaffenheit der Erdoberfläche erkannt werden wird. Eine solche Zusammenstellung gibt die folgende Tafel, in welcher die Declinations-Änderung für einen Längengrad (Δ) zwischen je zwei Beobachtungsorten in Gruppen oder Zonen geordnet ist, von denen jede Zone Orte von nahezu gleicher geographischer Breite enthält, und sich über die ganze Länge des Beobachtungsgebietes erstreckt. Die Gruppen sind nach der geographischen Breite an einander gereiht, und die verglichenen Stationen in jeder einzelnen nach der Länge geordnet. Am Ende sind noch die Mittel sämtlicher demselben Breitengrade zukommender Werthe von Δ und ihre Anzahl beigefügt. Die Numerirung der Vergleichspaare wurde der leichteren Anführung wegen vorgenommen.

TAFEL VII.

Änderung der Declination für 1 Längengrad (Δ).(Die geographische Länge entspricht der Mitte zwischen beiden Stationen aus denen Δ gerechnet ist.)

| Nr. | Geographische | | Vergleich - Stationen | Δ | Mittel | Anzahl der Beobachtungen |
|-----|---------------|-------|----------------------------------|----------|--------|--------------------------|
| | Breite | Länge | | | | |
| 1 | 51° — 50° | 32°6 | Bodenbach — Hohenelbe | 27.9 | 31.4 | 6 |
| 2 | | 40.5 | Nisko — Rawa Rusca | 32.3 | | |
| 3 | | 32.3 | Karlsbad — Senftenberg | 31.5 | | |
| 4 | | 35.9 | Senftenberg — Krakau | 33.0 | | |
| 5 | | 38.6 | Krakau — Rzeszow | 35.4 | | |
| 6 | | 41.3 | Rzeszow — Brody | 25.1 | | |
| 7 | 50 — 49 | 35.1 | Leitomischl — Teschen | 26.1 | 31.0 | 10 |
| 8 | | 37.7 | Teschen — Krosno | 29.2 | | |
| 9 | | 40.6 | Krosno — Lemberg | 49.0 | | |
| 10 | | 33.0 | Klattau — Olmütz | 35.1 | | |
| 11 | | 36.6 | Olmütz — Sandee | 28.9 | | |
| 12 | | 40.8 | Sandee — Tarnopol | 26.9 | | |
| 13 | | 33.5 | Neuhaus — Brünn | 23.1 | | |
| 14 | | 36.2 | Brünn — Kesmark | 37.2 | | |
| 15 | | 39.7 | Kesmark — Skole | 36.7 | | |
| 16 | | 42.4 | Skole — Czortkow | 18.2 | | |
| 17 | 49 — 48 | 33.5 | Gratzen — Lundenburg | 33.6 | 30.1 | 7 |
| 18 | | 36.8 | Lundenburg — Kaschau | 28.1 | | |
| 19 | | 40.9 | Kaschau — Kolomea | 31.4 | | |
| 20 | | 32.9 | Kremsmünster — Wien | 26.3 | | |
| 21 | | 35.7 | Wien — Losonez | 33.8 | | |
| 22 | | 38.9 | Losonez — Munkacz | 25.0 | | |
| 23 | | 42.1 | Munkacz — Kolomea | 32.2 | | |

| Nr. | Geographische | | Vergleich - Stationen | J | Mittel | Anzahl der Beobachtungen | | | |
|-----|---------------|----------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|--------|--------------------------|------|------|----|
| | Breite | Länge | | | | | | | |
| 24 | 48° — 47° | 32° 1 | Vöklabruock — Mölk | 25·7 | 28·1 | 17 | | | |
| 25 | | 34·4 | Mölk — Neu-Szöny | 30·5 | | | | | |
| 26 | | 38·2 | Neu-Szöny — Szathmar | 29·3 | | | | | |
| 27 | | 42·1 | Szathmar — Suezawa | 23·8 | | | | | |
| 28 | | 32·1 | Salzburg — Schottwien | 28·8 | | | | | |
| 29 | | 35·1 | Schottwien — Ofen | 28·3 | | | | | |
| 30 | | 38·0 | Ofen — Debreczin | 38·0 | | | | | |
| 31 | | 41·2 | Debreczin — Jakobeny | 30·8 | | | | | |
| 32 | | 29·6 | Bregenz — Lietzen | 24·3 | | | | | |
| 33 | | 33·1 | Lietzen — Ödenburg | 31·2 | | | | | |
| 34 | | 36·1 | Ödenburg — Szolnok | 27·2 | | | | | |
| 35 | | 40·1 | Szolnok — Bistritz | 26·2 | | | | | |
| 36 | | 29·1 | Bludenz — Gastein | 27·3 | | | | | |
| 37 | | 31·9 | Gastein — Gratz | 28·6 | | | | | |
| 38 | | 34·5 | Gratz — Kenese | 25·5 | | | | | |
| 39 | | 37·7 | Kenese — Grosswardein | 27·8 | | | | | |
| 40 | | 40·9 | Grosswardein — Bistritz | 24·8 | | | | | |
| 41 | | 47 — 46 | 30·4 | Mals — Klagenfurt | | | 24·6 | 27·2 | 10 |
| 42 | | | 34·2 | Klagenfurt — Tolna | | | 26·9 | | |
| 43 | | | 38·9 | Tolna — Klansenburg | | | 32·4 | | |
| 44 | | | 30·2 | Botzen — Bleiberg | | | 37·1 | | |
| 45 | | | 33·6 | Bleiberg — Fünfkirchen | | | 26·7 | | |
| 46 | | | 37·5 | Fünfkirchen — Arad | | | 32·6 | | |
| 47 | | | 40·6 | Arad — Maros-Vásárhely | | | 13·1 | | |
| 48 | | | 30·5 | Trient — Laibach | | | 35·1 | | |
| 49 | | | 35·0 | Laibach — Szegedin | | | 28·3 | | |
| 50 | | | 40·2 | Szegedin — Schüsssburg | | | 14·9 | | |
| 51 | | 46 — 45 | 28·1 | Isola bella — Conegliano | | | 34·8 | 28·9 | 21 |
| 52 | | | 31·8 | Conegliano — Agram | | | 28·1 | | |
| 53 | | | 36·5 | Agram — Temesvar | | | 30·9 | | |
| 54 | | | 40·4 | Temesvar — Fogaros | | | 25·8 | | |
| 55 | | | 28·1 | Mailand — Venedig | | | 41·6 | | |
| 56 | | | 31·6 | Venedig — Karlsstadt | | | 23·4 | | |
| 57 | | | 34·8 | Karlsstadt — Esseg | | | 29·0 | | |
| 58 | | | 39·5 | Esseg — Fogaros | | | 21·8 | | |
| 59 | | | 29·6 | Brescia — Triest | | | 30·8 | | |
| 60 | | | 32·7 | Triest — Petrinia | | | 26·0 | | |
| 61 | | | 36·9 | Petrinia — Karansebes | | | 30·6 | | |
| 62 | | | 42·8 | Karansebes — Galatz | | | 28·3 | | |
| 63 | | | 48·4 | Galatz — Cap Chersones | | | 16·4 | | |
| 64 | 52·6 | | Cap Chersones — Cap Takli | 36·0 | | | | | |
| 65 | 28·2 | Pavia — Padua | 43·3 | | | | | | |
| 66 | 30·8 | Padua — Fiunne | 18·7 | | | | | | |
| 67 | 33·6 | Fiunne — Neu-Gradisca | 28·9 | | | | | | |
| 68 | 37·6 | Neu-Gradisca — Mehadia | 27·6 | | | | | | |
| 69 | 29·5 | Cremona — Parenzo | 26·1 | | | | | | |
| 70 | 32·2 | Parenzo — Ottocaz | 25·9 | | | | | | |
| 71 | 36·1 | Ottocaz — Weisskirchen | 29·4 | | | | | | |
| 72 | 45 — 41 | 31·8 | Pola — Scutli=Belgrad | 26·3 | 26·6 | 7 | | | |
| 73 | | 39·1 | Scutli=Belgrad — Orsowa | 23·7 | | | | | |
| 74 | | 41·9 | Orsowa — Bukarest | 21·8 | | | | | |
| 75 | | 35·3 | Zara — Poschega | 25·2 | | | | | |
| 76 | 39·1 | Poschega — Kalafat | 32·8 | | | | | | |
| 77 | 11 — 43 | 32·6 | Ancona — Spalato | 15·7 | | | | | |
| 78 | | 36·7 | Spalato — Alexinatz | 22·6 | | | | | |
| 79 | 13 — 42 | 41·0 | Antivari — Burgasz | 30·4 | | | | | |
| 80 | 12 — 41 | 35·7 | Molfetta — Durazzo | 19·5 | 25·0 | 4 | | | |
| 81 | | 41·9 | Durazzo — Ortaköj | 26·9 | | | | | |
| 82 | | 49·7 | Ortaköj — Sinope | 19·1 | | | | | |
| 83 | | 55·1 | Sinope — Trapezunt | 31·6 | | | | | |
| 84 | 11 — 10 | 36·1 | Brindissi — Valona | 17·1 | | | | | |
| 85 | 37 — 36 | 13·3 | Cerigo — Rhodus | 23·2 | | | | | |
| 86 | | 47·2 | Rhodus — Adalia | 28·8 | | | | | |
| 87 | 36 — 35 | 48·2 | Caudia — Latakia | 21·2 | | | | | |
| 88 | 33 — 32 | 46·7 | Bombah — Jaffa | 21·4 | | | | | |

Diese Tafel zeigt in den Mittelwerthen von Δ die Abnahme der Declinations-Änderung mit der Breite, wenigstens vom 51. bis 41., und wahrscheinlich bis zum 32. Breitengrade, wovon nur die Zonen zwischen dem 45. und 46. eine Ausnahme machen. Eine nähere Ansicht der in diesen Zonen befindlichen Werthe von Δ lehrt aber, dass die Ausnahme nur von den westlichen, d. h. von den in der lombardisch-venezianischen Ebene liegenden Stationen herrühre, von welchen schon früher Erwähnung geschah.

Aus der vorbergehenden Tafel kann man jedoch noch keine klare Einsicht gewinnen, in welcher Weise die Declinations-Änderung mit der geographischen Länge zu- oder abnehme. Für diesen Zweck muss man noch eine Umgestaltung vornehmen, die darin besteht, dass man jene Vergleichspaare, von welchen das Mittel ihrer geographischen Längen zwischen denselben Meridianen liegt, in ein Mittel vereinige, oder mit anderen Worten, dass man Zonen entwerfe, welche den Meridianen parallel laufen, so wie die früheren Zonen den Breitenkreisen parallel gestellt waren. Die folgende kleine Tafel enthält diese Mittel und in der ersten Spalte die Nummern der Vergleichspaare, welche aus der vorbergehenden Tafel entnommen und zu dem nebenstehenden Mittel der Δ zusammengegeben worden sind; in der zweiten Spalte findet man die Länge des Mittels der Zonen. So z. B. enthält die erste Zone die Vergleichspaare aller Breitenkreise, für welche das Mittel der Längen der beiden verglichenen Stationen zwischen den Meridianen von 28° und 30° liegt. Diese Längenmittel geben den Durchschnitt $28^{\circ}9$, die Breitenmittel den Durchschnitt $46^{\circ}1$, die Werthe der Δ den Durchschnitt $32^{\circ}6$.

TAFEL VIII.

Änderung der Declination nach der geographischen Länge.

| Nr. der Vergleichspaare | Mittel der | | |
|--|---------------|---------------|---------------|
| | Längen | Breiten | Δ |
| 51, 65, 55, 36, 69, 32, 59 | $28^{\circ}9$ | $46^{\circ}1$ | $32^{\circ}6$ |
| 41, 41, 48, 66, 56, 52 | $30^{\circ}9$ | $46^{\circ}0$ | $27^{\circ}8$ |
| 24, 28, 3, 1, 77, 60, 20, 10, 33, 13, 17, 45, 67 | $32^{\circ}9$ | $47^{\circ}7$ | $27^{\circ}9$ |
| 42, 25, 38, 57, 72, 49, 7, 29, 75, 21, 80, 4 | $35^{\circ}0$ | $47^{\circ}5$ | $27^{\circ}7$ |
| 34, 71, 11, 84, 53, 11, 78, 18, 61, 16, 68, 8, 39 | $36^{\circ}8$ | $46^{\circ}5$ | $28^{\circ}4$ |
| 31, 26, 5, 22, 43, 73, 76, 58, 15 | $38^{\circ}9$ | $47^{\circ}2$ | $30^{\circ}9$ |
| 35, 50, 54, 2, 9, 47, 12, 19, 40, 79, 31, 6, 74, 81 | $40^{\circ}9$ | $47^{\circ}0$ | $27^{\circ}3$ |
| 23, 27, 16, 62, 85 | $42^{\circ}5$ | $45^{\circ}5$ | $25^{\circ}1$ |

Die in dieser Tafel enthaltenen Werthe von Δ in der ersten oder westlichsten und in der fünften und sechsten Zone sind bedeutend grösser als die übrigen. Es sind dies jene Zonen, welche die italienische und ungarische Ebene durchschneiden, daher die in diesen Ebenen liegenden Stationen bei der Bestimmung des Mittelwerthes von Δ den Ausschlag geben. Die zweite, dritte und vierte Zone umfassen das Alpengebiet, die siebente und achte das Gebiet der östlichen Karpathen, woraus ersichtlich wird, dass wenigstens in dem Umfange dieses

Beobachtungsnetzes die Declinationsabnahme von West gegen Ost in den Ebenen grösser ist als in Gebirgsgegenden.

Wenn man aber die Zahlen der Tafel VII genauer ansieht, so bemerkt man bald bei einigen derselben so grosse Abweichungen vom Mittel, dass man nicht umbin kann, das Dasein umfangreicher Störungsquellen zu vermuthen. Denn so wie z. B. die Stationen in der lombardisch-venetianischen Ebene eine sehr grosse Declinations-Änderung anzeigen, so wird sie zwischen Orten, die an entgegengesetzten Ufern des adriatischen Golfes liegen, auffallend klein, wovon die Nummern 66 (Padua — Fiume), 77 (Ancona — Spalato), 80 (Molfetta — Durazzo), 84 (Brindisi — Valona) den überzeugenden Beweis liefern. Von dieser merkwürdigen Erscheinung konnte bisher kein Grund aufgefunden werden, und es ist daher, bis weitere, namentlich geologische Forschungen den Gegenstand mehr aufklären werden, nichts besseres zu thun als sich umzusehen, ob nicht in einem anderen Theile des Beobachtungsgebietes etwas Ähnliches erseheine.

Man erinnert sich hiebei sogleich der auf S. 31 dieser Abhandlung angegebenen Störungsursache in Sinope, und wirklich zeigen die Nummern 82 und 83 der vorstehenden Tafel ganz abweichende Werthe von \mathcal{J} , nämlich

$$\begin{array}{ll} \text{von Ortaköj nach Sinope} & \mathcal{J} = 19^{\cdot}1 \\ \text{„ Sinope „ Trapezunt} & \mathcal{J} = 34^{\cdot}6. \end{array}$$

Etwas Ähnliches findet man aus den Nummern 63 und 64, nämlich

$$\begin{array}{ll} \text{von Galatz nach Cap Chersones} & \mathcal{J} = 16^{\cdot}4 \\ \text{„ Cap Chersones nach Cap Takli} & \mathcal{J} = 36^{\cdot}0, \end{array}$$

eine Unregelmässigkeit, die aus einer in demselben Sinne aber mit grösserer Intensität wirkenden Störungsursache hervorzugehen scheint.

Wenn man die Richtung von Sinope nach Cap Chersones weiter verfolgt, so führt sie in die Gegend von Odessa, an welcher Station eine so bedeutende Abweichung in den magnetischen Bestimmungen gefunden wurde, dass man, unsicher ob man nicht eine unglückliche Wahl des Aufstellungsortes getroffen habe, die Ergebnisse gar nicht in obige Tafel aufnahm. Die am Cap Chersones gemachte Erfahrung ladet aber doch dazu ein, auch diese Station in Betracht zu ziehen, und man findet für die Änderung

$$\begin{array}{ll} \text{von Klausenburg nach Odessa} & \mathcal{J} = 10^{\cdot}9 \\ \text{„ Odessa nach Takli} & \mathcal{J} = 44^{\cdot}8 \end{array}$$

also die Störung in demselben Sinne, aber noch stärker als an den beiden übrigen Stationen, während auf der Schlangeninsel kaum eine Spur mehr davon übrig ist, denn man erhält hier

$$\begin{array}{ll} \text{aus Galatz und Schlangeninsel} & \mathcal{J} = 22^{\cdot}3 \\ \text{„ Schlangeninsel und Cap Takli} & \mathcal{J} = 24^{\cdot}1. \end{array}$$

Die Wirkung dieser Störungsquelle, die sich vom südlichen bis zum nördlichen Ufer des schwarzen Meeres erstreckt, ist übrigens der früher angeführten im adriatischen Golfe dem Sinne nach entgegengesetzt, denn sie verkleinert die Änderung der Declination nach Westen hin, vergrössert sie nach Osten hin; im nördlichen Italien wird diese Änderung an den westlichen Stationen vergrössert, an den östlichen verkleinert. Im westlichen Theile des schwarzen Meeres wird also die Nordspitze der Nadel gegen Westen, an der Westküste des adriatischen gegen Osten abgelenkt.

Es ist nicht schwer aus den Zahlen der Tafel VII noch eine dritte Störungsquelle zu erkennen, die in dem Gebirgszuge der östlichen Karpathen ihren Sitz hat, denn die abwei-

chenden Werthe von J , die aus den Vergleichspaaren 9, 15 und 16, 46 und 47, 49 und 50 hervorgehen, können wohl kaum anderswo ihren Grund finden. Da in diesen Gegenden eine grössere Anzahl von Beobachtungen ausgeführt worden ist als in dem Gebiete der beiden früheren Störungsquellen, so kann die Erscheinung hier auch genauer verfolgt werden, und man findet alle Stationen, die für diesen Zweck verwendbar waren, in der folgenden Tafel zusammengestellt, in welcher L das Mittel der Längen beider verglichenen Orte, M das aus Tafel VII genommene Mittel der J bedeuten, daher in der letzten mit $J - M$ überschriebenen Spalte das Zeichen $+$ andeutet, dass die östlich gelegene Vergleichstation eine zu kleine Declination habe, also die Nordspitze der Nadel gegen Osten abgelenkt werde.

TAFEL IX.

Störung in den Karpathen.

| Vergleich - Stationen | L | Breite | J | $J - M$ |
|---|------|-----------|-------|---------|
| Rzeszow — Rawa Ruska | 40°6 | 51° — 50° | 39'0 | + 7'6 |
| Rawa Ruska — Brody | 42'1 | 51 — 50 | 10'5 | —20'9 |
| Krosno — Lemberg | 40'5 | 50 — 49 | 49'1 | +18'1 |
| Lemberg — Tarnopol | 42'5 | 50 — 49 | — 3'9 | —34'9 |
| Tarnow — Przemysl | 39'5 | 50 — 49 | 53'1 | +22'1 |
| Przemysl — Tarnopol | 41'9 | 50 — 49 | 6'9 | —21'1 |
| Kesmark — Skole | 39'7 | 49 | 36'7 | + 5'7 |
| Skole — Czortkow | 42'4 | 49 | 18'2 | —12'8 |
| Leutschau — Dolina | 40'0 | 49 | 38'9 | + 8'4 |
| Dolina — Czortkow | 42'6 | 49 | 8'9 | —21'6 |
| Kaschau — Veretzke | 39'9 | 49 — 48 | 41'0 | +10'9 |
| Veretzke — Stanislaw | 41'6 | 49 — 48 | 26'5 | — 3'6 |
| Stanislaw — Czortkow | 43'0 | 49 | 44'0 | 16'1 |
| Kaschau — Munkacz | 39'9 | 49 — 48 | 41'0 | +10'9 |
| Veretzke — Kolomea | 41'8 | 49 — 48 | 23'0 | — 7'1 |
| Kaschau — Munkacz | 39'7 | 49 — 48 | 30'9 | + 6'8 |
| Munkacz — Czernowitz | 42'1 | 49 — 48 | 15'5 | —11'6 |
| Tokai — Szatmar | 39'9 | 48 | 24'8 | — 4'3 |
| Szatmar — Suczawa | 42'3 | 48 — 47 | 33'9 | + 4'8 |
| Debreczin — Nagy-Bánya | 40'3 | 48 — 47 | 26'8 | — 1'3 |
| Nagy-Bánya — Jakobeny | 42'2 | 48 — 47 | 35'2 | + 7'1 |
| Szolnok — Grosswardein | 38'8 | 48 — 47 | 27'9 | — 0'2 |
| Grosswardein — Bistritz | 40'9 | 48 — 47 | 20'3 | — 7'8 |
| Bistritz — Suczawa | 43'1 | 48 — 47 | 40'5 | +12'4 |
| Szegedin — Klausenburg | 39'6 | 47 — 46 | 24'3 | — 2'9 |
| Klausenburg — Maros-Vásárhely | 41'8 | 47 — 46 | —17'6 | —44'8 |
| Arad — Karlsburg | 40'2 | 47 — 46 | 31'1 | + 3'9 |
| Karlsburg — Schässburg | 41'9 | 47 — 46 | —22'7 | —49'9 |
| Temesvar — Dobra | 39'5 | 46 — 45 | 26'2 | — 2'7 |
| Dobra — Fogaros | 41'5 | 46 — 45 | 13'3 | —15'6 |
| Posehega — Kalafat | 39'1 | 44 — 43 | 30'9 | + 4'3 |
| Kalafat — Bukarest | 41'3 | 45 — 44 | 23'9 | — 2'7 |

Diese Störung zeigt sich deutlich in den Zahlen der letzten Spalte und in dem Wechsel ihrer Zeichen, welche anzeigen, dass die Magnetnadel in der westlichsten Vergleichstation

einer jeden Gruppe stets eine zu kleine, in der östlichsten stets eine zu grosse Declination angibt, oder mit ihrer Nordspitze östlich von der Störungsursache gegen Ost, westlich davon gegen Westen abgelenkt wird. Sie erstreckt sich zwischen dem 40. und 41. Längengrade von der nördlichen Grenze Galiziens bis in die Breite von Czernowitz, also vom 52. bis 48. Breitengrade. Von dort bis zum 47. Breitengrade, also in der Gegend der Marmarosch leidet sie eine Unterbrechung, kömmt aber weiter südlich, im östlichen Theile von Siebenbürgen wieder zum Vorscheine, wie die Gruppen Szegedin — Klausenburg — Maros-Vásárhely, Arad — Karlsburg — Schässburg und Temesvar — Dobra — Fogaros deutlich zeigen. An der Donau scheint sie zu enden, denn die südlich davon gelegene Gruppe enthält kaum mehr eine Spur davon.

Es hat daher diese Störungsquelle eine nord-südliche Richtung und ihre Ausdehnung, so weit sie bis jetzt bekannt ist, beträgt fünf Breitengrade.

Es dürften sich aus den Zahlen der Tafel VII noch mehrere andere Störungsknoten mit Wahrscheinlichkeit ergeben, allein sie werden bei Gelegenheit der Verzeichnung der magnetischen Curven ohnehin ersichtlich werden. Für jetzt mag es genügen einige der auffallendsten Beispiele hervorgehoben zu haben.

Bei dem Vorhandensein der mächtigen Störungen, von denen die Beobachtungen bereits Anzeichen geliefert haben, wird zwar der Lauf der magnetischen Linien kein regelmässiger sein, sondern es werden viele Ausbiegungen nach Osten und Westen vorkommen, welche den wahren, von diesen örtlichen Umständen unabhängigen Gang derselben, wie er bei Verzeichnungen auf umfassenderen Karten gewünscht wird, entstellen und verdecken. Indessen wenn man auch hier nach Mittelwerthen vorgeht, so werden diese Unregelmässigkeiten verschwinden, und es wird die Tafel VII so wie das Verfahren, nach welchem sie verfertigt wurde, die Mittel gewähren um die Curven so zu verzeichnen, dass die Störungen in ihnen gar nicht oder nur im Allgemeinen ausgesprochen sind.

Es wird daher am besten sein für den Anfangs- und Endpunkt jeder Isogone aus den zunächst liegenden Beobachtungsorten, wo deren eine hinreichende Anzahl vorhanden ist, Gruppen zu bilden, für jeden Ort dieser Gruppen aus seiner Declination für 1850·0 und dem entsprechenden Werthe von Δ aus der Tafel VII den Ort der Isogone zu suchen, und das Mittel derselben als ihren Endpunkt anzusehen. Da die Isogonen in unseren Gegenden mit den Meridianen nur kleine Winkel machen, so kann man das Mittel der Breiten aller Orte, die eine Gruppe bilden, als die Breite des Endpunktes der Curve ansehen, und es wird sich nur um die Länge dieses Punktes (λ) handeln. Ist L die geographische Länge des Beobachtungsortes, D dessen Declination im Jahre 1850·0, Δ die Änderung derselben in einem Längengrade, so hat man die Länge des im Parallel des Beobachtungsortes liegenden Punktes der Isogone von 16°

$$\lambda = L + \frac{(D - 16^\circ)}{\Delta}$$

wo man den letzten Theil noch mit 60 multipliciren muss um ihn in Minuten auszudrücken.

Nach diesem Verfahren wurde der nördliche Endpunkt der Isogone von 16° aus den Orten Plan, Karlsbad, Chiesch und Komotau bestimmt. Man hat z. B. für Plan

$$L = 30^\circ 21', D - 16^\circ = -26'7$$

und aus Tafel VII

$$\Delta = 31'4 \text{ oder } \frac{60}{\Delta} = 1'9$$

daher

$$\lambda = L - 51' = 29^\circ 30';$$

eben so findet man

| | |
|------------------------|--------------------------|
| für Karlsbad | $\lambda = 29^\circ 47'$ |
| „ Chiesch | $\lambda = 29 \quad 47$ |
| „ Komotau | $\lambda = 29 \quad 37$ |
| Mittel | $= 29^\circ 40'$ |

welches die Länge des nördlichen Endpunktes der Isogone ist; seine Breite findet man

$$B = 50^\circ 9'.$$

Zur Bestimmung des südlichen Endpunktes wurden die Orte Cremona, Brescia, Mantua und Verona gewählt und der Werth von λ aus den Vergleichspaaren 51, 55 und 65 der Tafel VII bestimmt. Man fand im Mittel

$$\lambda' = 28^\circ 10', \quad B' = 45^\circ 19'.$$

Betrachtet man die Verbindungslinie dieser beiden Punkte als den Bogen eines grössten Kreises, so ergibt sich, dass er mit den ihn durchschneidenden Meridianen den Winkel

$$\varphi = + 17^\circ 16'$$

macht, wobei das Zeichen $+$ bedeutet, dass das südliche Ende gegen Westen vom Meridian abweicht.

Die folgende Tafel enthält die Endpunkte der aus den vorstehenden Beobachtungen bestimmten Isogonen, sammt den Winkeln, die sie mit den Meridianen bilden. Bei grösserer Ausdehnung über das mittelländische Meer wurden die Curven in mehrere Stücke getheilt.

TAFEL X.

Anfangs- und Endpunkte der Isogonen

im Jahre 1850-0.

| Isogone | Bestimmungsorte | λ | B | φ |
|---------|--|-----------|--------|-----------|
| 16° | Anfang Plan, Karlsbad, Chiesch, Komotau | 29° 40' | 50° 9' | + 17° 16' |
| | Ende Cremona, Brescia, Mantua, Verona | 28 10 | 45 19 | |
| 15 | Anfang Komotau, Teplitz, Bodenbach, Prag | 31 30 | 50 29 | + 19 15 |
| | Ende Vicenza, Rovigo, Padua, Venedig | 29 53 | 45 22 | |
| 14 | Anfang Chlumetz, Hohenelbe, Reichenau, Senftenberg | 33 41 | 50 15 | + 9 6 |
| | Ende Fiume, Lussin piccolo, Zara, Sebenico | 32 45 | 44 25 | |
| 13 | Anfang Leitomischl, Olmütz, Troppau | 35 8 | 49 48 | + 5 13 |
| | Ende Lissa, Spalato, Lesina, Lagosta, Curzola | 34 28 | 43 7 | |
| 12 | Anfang Teschen, Krakau, Wieliczka, Sandec | 37 12 | 49 50 | + 0 55 |
| | Ende Megline, Cattaro, Antivari, Durazzo | 37 1 | 42 4 | |
| | Anfang Teschen, Krakau, Wieliczka, Sandec | 37 12 | 49 50 | |
| | Ende Corfu | 36 58 | 39 38 | |
| 11 | Anfang Tarnow, Krosno, Rzeszow, Nisko | 38 48 | 50 5 | - 2 43 |
| | Ende Semlin, Belgrad, Weisskirchen, Orsowa, Mehadia | 39 3 | 44 49 | |
| | Anfang Semlin, Belgrad, Weisskirchen, Orsowa, Mehadia | 39 3 | 41 49 | |
| | Ende Zante | 39 18 | 37 48 | |
| 10 | Anfang Rzeszow, Nisko, Sanok, Przemysl | 40 9 | 49 59 | - 13 18 |
| | Ende Orsowa, Mehadia, Kalafat, Karlsburg, Hermannstadt | 41 20 | 45 5 | |
| | Anfang Kalafat | 41 20 | 45 5 | |
| | Ende Cerigo, Candia | 41 58 | 35 43 | |
| | Anfang Cerigo, Candia | 41 58 | 35 43 | |
| | Ende Bombah | 41 51 | 32 23 | |
| | Anfang | 41 51 | 32 23 | |
| | Ende | 41 51 | 32 23 | |

| Isogone | Bestimmungsorte | λ | B | φ |
|---------|---|-----------|---------|-----------|
| 9° | Anfang . . . Rawa-Ruska, Lemberg, Brody, Tarnopol | 42° 39' | 49° 56' | — 11° 57' |
| | Ende Bukarest | 43 53 | 44 26 | |
| | Anfang . . . Bukarest | 43 53 | 44 26 | — 6 15 |
| | Ende Rhodus | 44 41 | 36 26 | |
| 8 | Anfang . . . Galatz | 45 1 | 45 27 | — 12 27 |
| | Ende Ortaköj | 45 59 | 41 4 | |
| | Anfang . . . Ortaköj | 45 59 | 41 4 | — 11 12 |
| | Ende Rhodus | 46 54 | 36 26 | |
| | Anfang . . . Rhodus | 46 54 | 36 26 | — 7 47 |
| | Ende Alexandria | 47 37 | 31 11 | |
| 7 | Anfang . . . Sulina, Schlangeninsel | 47 47 | 45 11 | — 8 14 |
| | Ende Adalia | 48 59 | 36 52 | |
| 6 | Anfang . . . Cap Chersones | 51 31 | 44 34 | — 11 10 |
| | Ende Sinope | 52 1 | 42 2 | |
| | Anfang . . . Sinope | 52 1 | 42 2 | — 7 27 |
| | Ende Jaffa | 53 19 | 32 3 | |
| 4 | Anfang . . . Cap Takli | 54 56 | 45 6 | — 6 4 |
| | Ende Trapezunt | 55 22 | 41 1 | |

Diese Tafel lehrt, dass die Isogonen in dem hier betrachteten Beobachtungsgebiete, in so ferne man nur ihre Endpunkte im Auge hat, einander nicht parallel laufen, sondern in ihrer Neigung gegen die Meridiane eine von West gegen Ost ziemlich regelmässig fortschreitende Änderung erleiden. Während nämlich der von den Isogonen und Meridianen eingeschlossene Winkel im westlichen Theile ein positives Zeichen hat, also die Isogonen gegen Süden westlich vom Meridiane abweichen, und beinahe die Richtung Nord-Nord-Ost gegen Süd-Süd-West erreichen, liegen sie im östlichen Theile mit ihrem Südde gegen Osten.

In dem südlichen Theile des Beobachtungsgebietes vom 44. Breitengrade an, kehren die östlichen Isogonen sich wieder mehr gegen Westen, wie die mit der Breite abnehmenden negativen Werthe von φ bei den Isogonen von 10°, 8° und 6° beweisen.

Die Isogone von 12° läuft durch 10 Breitengrade dem Meridian beinahe ganz parallel trennt also das System der westlich ausweichenden von dem der östlich ausweichenden. Sie liegt bei dem 37. Längengrade, und es scheint, dass dieser durch längere Zeit die Grenzlinie zwischen beiden Systemen sein wird; denn im Jahre 1854 war nach Tafel VI die Declination in Corfu 11° 7' 8", im Jahre 1857 war sie 10° 48' 3", nahm also in dieser Zeit um 19' 5" ab. In Krakau war die Abnahme während dieser Jahre sehr nahe die gleiche. Wenn aber die Abnahme an beiden fast unter demselben Meridian und von der genannten Isogone wenig entfernt liegenden Orten gleich ist, so kann sich ihre Neigung gegen den Meridian nicht ändern. Spätere Beobachtungen werden die Frage, ob die Isogonen sich parallel mit sich selbst verrücken, schärfer beleuchten.

In den beifolgenden Karten I und II sind diese Isogonen durch die ausgezogenen geraden Linien angezeigt, während die punktirten Linien jene Curven darstellen, welche die einzelnen Stationen, oder wenn mehrere derselben unter nahezu gleicher Breite vorhanden waren, ihre Mittel ergeben haben.

Diese letzteren geben Andeutung von noch mehreren anderen Störungsquellen geringerer Ausdehnung, welche Gegenstand specieller Untersuchungen sein müssen. An ihrem Dasein

kann im Allgemeinen um so weniger gezweifelt werden, als, wie mir scheint, durch das Vorhergehende das Bestehen viel mächtigerer Einflüsse gezeigt worden ist, und in manchen Fällen auch die Ursachen derselben angegeben werden konnten. Hiemit soll keineswegs behauptet werden, dass nicht einige Unregelmässigkeiten im Laufe dieser Curven durch Beobachtungsfehler oder eine unglückliche Wahl des Aufstellungsortes hervorgebracht sein dürften.

Diese Fehlerquellen werden aber wohl kaum die Erscheinung zu erklären im Stande sein, dass nicht einzelne Stationen, sondern mehrere auf einander folgende derselben so grosse Abweichungen in demselben Sinne hervorbringen, dass es unmöglich ist, sie in einer wenn auch noch so gewundenen Curve zu vereinen, sondern dass man sie in zwei Zweigen derselben darstellen muss. Dies ist, wie natürlich, am meisten der Fall in der Nähe der früher erwähnten grossen Störungsgebiete, wie z. B. am westlichen Ufer des adriatischen Golfes, wo alle Isogonen eine Richtung von Nordost nach Südwest annehmen, während die dalmatinischen Stationen Curven geben, die sich längs der Gebirge dieser Küsten hinziehen, also von Nordwest gegen Südost gerichtet sind. Nur die vom Festlande mehr entfernten, wie Pola, Lissa, Lagosta nähern sich schon den westlichen Küstenstationen. Wenn man diese drei Orte und Ancona wählt, um den Endpunkt der Isogone von 14° zu bestimmen, so erhält man dafür

$$\lambda = 31^\circ 57', B = 43^\circ 25', \varphi = 11^\circ 37',$$

nach welchem die mehr westliche geradlinige Isogone von 14° in der Karte II eingetragen wurde.

Man ersieht hieraus, dass der Lauf der Isogonen aus den Endpunkten nicht vollkommen verlässlich ist, selbst wenn er aus entfernten Gruppen gerechnet wird, da eine derselben oder auch beide sich in Störungsgebieten befinden können. Offenbar liegt zum Beispiele die aus den Endpunkten gerechnete Isogone von 15° viel mehr gegen Westen, als es geschehen würde, wenn man ihre Lage aus sämmtlichen Beobachtungsorten bestimmt hätte.

Dies war einer der Gründe, die mich veranlassten die Curven auch aus den Mittelstationen zu rechnen und darzustellen. Aus diesen werden überdies spätere Beobachter leicht erkennen, welche ihrer Ausbiegungen Folgen von Beobachtungsfehlern, oder unglücklich gewählten Aufstellungsorten, und welche von wirklichen Störungsursachen hervorgebracht sind, wenn, wie kaum gezweifelt werden kann, letztere in der Erde ihren Sitz haben, daher ihren Ort nicht ändern.

Auch in der Isogone von 10° findet man bei Fogaros, Schässburg und Maros-Vásárhely einen eigenen weit nach Osten ausbiegenden Zweig.

Die Störung in den östlichen Karpathen ist in der Karte II durch Pfeile dargestellt, welche die Richtung der Magnetnadel angeben, die sie an beiden Seiten der von Norden nach Süden laufenden Störungsquelle annimmt. Zu dieser Darstellung wurde die Tafel IX benützt, und dem Pfeile die Richtung Nordost — Südwest gegeben, wenn die Zahlen der letzten Spalte dieser Tafel das Zeichen + hatten. Man sieht, dass die Störung an der Grenze zwischen Ungarn, Galizien und Siebenbürgen unterbrochen ist, dass sich also dort die Störungsquelle entweder mehr von der Oberfläche der Erde entfernt, oder durch einen zweiten Einfluss unwirksam gemacht wird.

So sehr aber die graphische Darstellung die Auffassung und Übersicht erleichtert, so ist sie doch in diesem Falle darin mangelhaft, dass Orte von nahezu gleicher Breite nicht einzeln, sondern nur in Mittel vereinigt in die Curve eingetragen werden konnten, obschon sie oft sehr abweichende Lagen der Isogonen, also selbst wieder Anzeichen von Störungen

geliefert hatten. Um auch diese berücksichtigen zu können, ohne die Reduction auf die Curve neuerdings vornehmen zu müssen, wurden sie in der folgenden Tafel zusammengestellt, welche unter der Überschrift λ die geographischen Längen der Punkte der Isogonen enthält, die aus den Beobachtungen der nebenstehenden Station gefunden wurden. Da die Breite eines jeden Curvenpunktes gleich ist der Breite der Station, zu welcher er gehört, so ist dadurch der geographische Ort des Punktes gegeben. Stationen, die beim Entwurfe der Curve in ein Mittel zusammen genommen worden sind, wurden durch Seitenklammern bezeichnet.

TAFEL XI.

Länge der Isogonen aus den einzelnen Beobachtungsorten

im Jahre 1850.

| Station | λ | Station | λ | Station | λ | Station | λ |
|---------------------------------|-----------|-------------------------------|-----------|-----------------------------------|-----------|----------------------------------|-----------|
| Isogone 16°. | | Isogone 15° | | Isogone 13°. | | Isogone 11°. | |
| Karlsbad | 29° 57' | Lienz | 31° 4' | Pressburg | 35° 33 | Szegedin | 38° 22' |
| Plan | 29 41 | Bleiberg | 30 37 | Ödenburg | 35 6 | Arad | 38 49 |
| Bregenz | 28 26 | Conegliano | 30 28 | Kenese | 35 2 | Temesvár | 38 32 |
| Rattenberg | 28 18 | Venedig | 30 8 | Gleichenberg | 34 26 | Weisskirchen | 39 10 |
| Innsbruck | 28 40 | Padua | 29 52 | Marburg | 34 25 | Mehadia | 39 18 |
| Imst | 28 39 | Rovigo | 29 29 | Tolna | 35 21 | Semlin | 38 57 |
| Bludenz | 28 39 | Isogone 14°. | | Fünfkirchen | 35 2 | Belgrad | 38 41 |
| Landeck | 28 37 | Hohenelbe | 33 44 | Bellovár | 34 56 | Orsowa | 39 14 |
| Brenner | 28 41 | Reichenau | 33 39 | Petrinia | 34 52 | Zante | 39 14 |
| Mals | 28 23 | Chlumetz | 33 21 | Neu-Gradiska | 34 56 | Isogone 10°. | |
| Meran | 29 5 | Senftenberg | 33 17 | Spalato | 35 1 | Nisko | 40 3 |
| S. Maria | 28 26 | Czaslau | 33 10 | Lesina | 34 41 | Rzeszow | 40 22 |
| Botzen | 29 9 | Leitomischl | 33 13 | Lissa | 34 7 | Przemysl ⁶⁾ | 39 45 |
| Bormio | 28 41 | Seelau | 33 18 | Curzola | 34 44 | Sanok | 40 23 |
| Agordo | 28 51 | Iglau | 33 12 | Lagosta | 34 29 | Skole | 40 22 |
| Sondrio ¹⁾ | 27 53 | Brünn ⁴⁾ | 33 47 | Megline | 35 19 | Veretzke | 40 26 |
| Trient | 28 39 | Neuhaus | 33 24 | Molfetta | 34 3 | Ungvár | 40 44 |
| Vicenza | 28 44 | Znaim | 32 49 | Isogone 12°. | | Munkacz | 40 57 |
| Brescia | 28 20 | Gratzen | 33 5 | Krakau | 36 49 | Szatmar | 40 56 |
| Mailand | 28 29 | Horn | 32 39 | Wieliczka | 37 13 | Nagy-Bánya | 41 1 |
| Verona | 28 9 | Melk | 32 53 | Sandec | 37 20 | Bistritz | 41 47 |
| Pavia | 28 18 | Wien | 32 57 | Szt. Miklós | 37 4 | Klausenburg | 41 6 |
| Mantua | 28 4 | Schottwien | 33 15 | Scheunitz | 37 15 | Maros-Vásárhely | 42 46 |
| Cremona ²⁾ | 28 7 | Admont | 32 41 | Losonez | 36 26 | Schüssburg | 42 58 |
| Isogone 15°. | | Aflenz | 32 33 | Erlau | 37 38 | Karlsburg | 40 25 |
| Reichenberg | 32 24 | Eisenerz | 32 55 | Neu-Szöny | 36 52 | Dobra | 40 49 |
| Bodenbach | 31 42 | Kallwang | 32 25 | Ofen | 37 28 | Fogaros | 41 56 |
| Teplitz | 31 26 | Bruck | 32 36 | Szolnok | 37 20 | Hermannstadt | 40 45 |
| Komotau | 31 33 | Gratz | 32 41 | Esseg | 36 57 | Karansebes | 40 55 |
| Chiesch | 31 44 | S. Paul | 32 25 | Poschega | 37 28 | Kalafat | 41 23 |
| Prag | 31 19 | Klagenfurt | 33 9 | Alexinatz ⁵⁾ | 38 20 | Cerigo | 41 55 |
| Klattau | 31 47 | Cilli | 32 10 | Gravosa | 36 38 | Candia | 42 4 |
| Pisek | 31 34 | Laibach | 32 6 | Ragusa | 36 23 | Bombah | 41 59 |
| Scherding | 30 47 | Agram | 32 47 | Cattaro | 36 32 | Isogone 9°. | |
| Linz | 31 11 | Triest | 32 45 | Antivari | 37 16 | Rawa Ruska | 41 55 |
| Altheim | 30 36 | Karlstadt | 32 44 | Durazzo | 37 0 | Brody | 42 57 |
| Kremsmünster | 30 52 | Fiume | 32 50 | Brindisi | 36 12 | Lemberg | 42 3 |
| Vöcklabruck | 30 39 | Parenzo | 32 47 | Valona | 36 51 | Tarnopol | 43 50 |
| S. Georgen | 31 24 | Pola | 32 2 | Corfu | 37 2 | Sambor | 41 47 |
| Salzburg | 31 12 | Ottočaz | 33 2 | Isogone 11°. | | Stry | 42 19 |
| Ischl | 31 14 | Lussin piccolo | 32 34 | Tarnow | 38 59 | Czortkow | 43 11 |
| Golling | 30 47 | Zara | 32 41 | Krasno | 39 29 | Dolina | 41 54 |
| Lietzen | 31 5 | Sebenico | 32 53 | Kesmark | 38 51 | Stanislau | 42 34 |
| S. Johann | 30 36 | Ancona | 31 41 | Leutschau | 38 51 | Kolomea | 42 50 |
| Rad-tadt | 30 52 | Isogone 10°. | | Kaschau | 39 2 | Czernowitz | 41 37 |
| Gastein | 30 41 | Troppau | 35 8 | Tokaj | 38 43 | Suczawa | 43 35 |
| S. Lambrecht | 31 3 | Teschen | 35 24 | Debreczin | 38 52 | Jakobeny | 42 42 |
| Gmünd ³⁾ | 31 23 | Olmütz | 35 5 | Grosswardein | 39 29 | Bukarest | 43 54 |
| | | Lundenburg | 34 59 | | | | |

¹⁾ Sondrio wurde als zu abweichend bei der Verzeichnung der Curve nicht berücksichtigt. ²⁾ Como wurde wegen der S. 33 erwähnten örtlichen Störung nicht in die Tafel aufgenommen. ³⁾ Gmünd wurde nicht berücksichtigt. ⁴⁾ Wenn man Brünn in die Zeichnung aufnimmt, so erhält man die in der Curve angezeigte starke Ausbiegung gegen Osten. ⁵⁾ Alexinatz, wo die Beobachtungen wegen schlechter Witterung unsicher sind, wurde nicht berücksichtigt.

⁶⁾ Przemysl wurde nicht berücksichtigt.

Aus den Zahlen dieser Tafel sieht man, dass die Curven noch viel zahlreichere und grössere Ausbiegungen gezeigt haben würden, hätte man nicht die abweichendsten Stationen ausgelassen, und statt der einzelnen oft die Mittel mehrerer zur Zeichnung benützt, wodurch besonders in der durch das Störungsgebiet der Karpathen laufenden Isogone 9° manche der ärgsten Gegensätze sich ausglich.

Ausserhalb des österreichischen Kaiserstaates sind die Beobachtungsorte zu weit von einander entfernt, um die Isogonen anders als durch grösste Kreise darstellen zu können.

Wenn man nach Angabe der Tafel VII die Änderung der Declination im schwarzen Meere zu 26 Minuten für 1 Längengrad annimmt, so würde für die Lage der Linie ohne Abweichung im Jahre 1858 folgen:

| | |
|---|----------------|
| aus den Bestimmungen von Tackli die geographische Länge | $61^\circ 39'$ |
| „ „ „ „ Trapezunt „ „ | $61 58$ |

Sie liegt also noch ungefähr einen Längengrad östlich von Kars, das sie etwa in 5 bis 6 Jahren erreichen dürfte.

B. Inclination.

Wenn man zuerst wieder die Änderungen, denen dieses Element innerhalb der Grenzen des Beobachtungsgebietes unterworfen ist, im Allgemeinen erkennen will, so hat man nur die folgende Tafel zu betrachten, welche der Tafel X nachgebildet ist, und die geographische Lage der Endpunkte der Isoclinen enthält, so wie die Gruppen der Beobachtungsorte, aus denen sie gefunden wurden, und die Winkel (φ), welche die zwischen ihnen als Bogen grösster Kreise gelegten Curven mit den Breitenkreisen bilden. Diese Winkel haben das Zeichen +, wenn die östlichen Endpunkte gegen Norden von dem Breitenkreise des westlichen Anfangspunktes liegen. Die letzte Spalte unter der Überschrift *D* gibt die Entfernungen je zwei nächster Isoclinen. Da diese gegen Ende der Tafel nicht mehr von Grad zu Grad sondern aus Mangel an Beobachtungsstationen von zwei zu zwei Graden gerechnet sind, so hat man die Werthe von *D* zu halbiren, wenn sie dieselbe Bedeutung haben sollen wie die vorhergehenden.

TAFEL XII.

Anfangs- und Endpunkte der Isoclinen

im Jahre 1850*0.

| Isocline | Bestimmungsorte | Länge | Breite | φ | <i>D</i> |
|----------|---|----------------|---------------|-----------------|----------|
| 66° | Anfang Franzensbad, Plan, Karlsbad, Chiesch | $30^\circ 27'$ | $50^\circ 2'$ | + $7^\circ 55'$ | 1° 19' |
| | Ende Chlumetz, Hohenelbe, Nachod, Senftenberg | 33 31 | 50 29 | | |
| 65 | Anfang Pisek, Budweis, Steinberg, Gratzen | 32 11 | 48 56 | + 8 15 | 1 39 |
| | Ende Rzeszow, Nisko, Rawa-Ruska, Lemberg, Brody | 11 4 | 50 15 | | |
| 64 | Anfang Mals, Meran, Bozen, Innsbruck | 28 46 | 46 46 | + 9 43 | 1 14 |
| | Ende Skole, Stry, Dolina, Stanislaw | 41 44 | 48 58 | | |
| 63 | Anfang Pavia, Mailand, Cremona, Brescia | 27 18 | 45 12 | + 9 52 | 1 18 |
| | Ende Nagy-Bánya, Kolomea, Czernowitz, Suezawa | 42 56 | 47 53 | | |
| 62 | Anfang Pola, Fiume, Lussin piccolo, Ottočaz | 32 12 | 44 44 | + 9 19 | |
| | Ende Maros-Vásárhely, Schässburg | 42 25 | 46 24 | | |
| | Anfang Maros-Vásárhely, Schässburg | 42 25 | 46 24 | - 5 12 | |
| | Ende Galatz | 45 43 | 46 6 | | |
| | Anfang Galatz | 45 43 | 46 6 | + 3 53 | 1 13 |
| | Ende Odessa | 48 25 | 46 17 | | |

| Isocline | Bestimmungsorte | Länge | Breite | φ | D |
|--|--|---------|---------|---------------------|---------------------|
| 61° | Anfang . . . Aneona | 31° 10' | 43° 29' | + 6° 18' | 0° 39' |
| | Ende Sebenico, Spalato | 33 53 | 43 47 | | |
| | Anfang Sebenico, Spalato | 33 53 | 43 47 | | |
| | Ende Hermannstadt, Fogaros | 42 18 | 45 24 | | |
| | Anfang Hermannstadt, Fogaros | 42 18 | 45 24 | | |
| Ende Schlangeninsel | 47 53 | 45 39 | + 2 34 | | |
| 60 | Anfang Lissa, Curzola | 34 20 | 43 12 | + 6 11 | |
| | Ende Bukarest | 43 46 | 44 13 | + 4 13 | |
| | Anfang Bukarest | 43 46 | 44 13 | + 4 13 | |
| | Ende Cap Chersones | 51 1 | 44 45 | +10 22 | |
| | Anfang Cap Chersones | 51 1 | 44 45 | +10 22 | |
| Ende Cap Takli | 54 7 | 45 19 | | 1 8 | |
| 59 | Anfang Gravosa, Ragusa, Megline, Cattaro, Cettigne | 36 12 | 42 15 | + 6 14 | |
| | Ende Cap Chersones | 51 1 | 43 51 | | 0 55 |
| 58 | Anfang Molfetta | 34 21 | 41 9 | + 5 49 | |
| | Ende Antivari, Durazzo | 36 58 | 41 25 | +11 14 | |
| | Anfang Antivari, Durazzo | 36 58 | 41 25 | +11 14 | |
| | Ende Burgasz | 45 8 | 43 2 | - 5 35 | |
| | Anfang Burgasz | 45 8 | 43 2 | - 5 35 | |
| Ende Cap Indje, Sinope | 52 40 | 42 18 | | 1 1 | |
| 57 | Anfang Brindisi | 35 40 | 40 21 | + 2 33 | |
| | Ende Valona | 37 10 | 40 25 | +12 19 | |
| | Anfang Valona | 37 10 | 40 25 | +12 19 | |
| Ende Burgasz | 45 8 | 42 9 | | 0 49 | |
| 56 | Anfang Corfu | 37 35 | 39 41 | + 7 44 | |
| | Ende Ortaköj, Bujuk-Liman | 46 43 | 40 55 | - 5 37 | |
| | Anfang Ortaköj, Bujuk-Liman | 46 43 | 40 55 | - 5 37 | |
| | Ende Cap Indje, Sinope | 52 40 | 40 20 | + 6 27 | |
| | Anfang Cap Indje, Sinope | 52 40 | 40 20 | + 6 27 | |
| Ende Trapezunt | 57 23 | 40 52 | | $\frac{1}{2}(1 52)$ | |
| 54 | Anfang Zante | 38 35 | 37 56 | + 5 14 | |
| | Ende (Für das Ende ist keine Station vorhanden.) | | | (interpolirt) | $\frac{1}{2}(1 32)$ |
| 52 | Anfang Cerigo | 40 42 | 36 36 | + 2 44 | |
| | Ende Adalia | 48 25 | 36 58 | + 3 21 | $\frac{1}{2}(1 37)$ |
| 50 | Anfang Candia | 42 51 | 35 5 | + 3 21 | |
| | Ende Rhodus | 45 57 | 35 16 | + 9 3 | |
| | Anfang Rhodus | 45 57 | 35 16 | + 9 3 | |
| | Ende Latakia | 53 30 | 36 28 | | $\frac{1}{2}(1 12)$ |
| 48 | Anfang Limassol | 50 46 | 34 21 | + 2 27 | |
| | Ende Latakia | 53 30 | 34 28 | | $\frac{1}{2}(1 37)$ |
| 46 | Anfang Bombah | 40 52 | 32 0 | + 3 54 | |
| | Ende Beiruth | 53 13 | 32 50 | | $\frac{1}{2}(1 29)$ |
| 44 | Anfang Alexandria | 47 34 | 31 31 | - 0 35 | |
| | Ende Jaffa | 52 28 | 31 28 | | |

Um die Werthe von D zu finden, suchte man zuerst aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke zwischen dem Anfangspunkte der ersten Isocline, dem Breitenkreise desselben und dem durch den Anfang der zweiten Isocline gelegten Meridian die Breite desjenigen Punktes wo dieser Meridian die erste Isocline durchschneidet, wodurch man die Breitendifferenz zwischen diesem Punkte und dem Anfang der zweiten Isocline hatte. Legte man durch den letzten Punkt einen auf die erste Isocline senkrechten Bogen, so entstand ein anderes sphärisches Dreieck, welches den Werth von D gab, so nahe als man ihn hier zu wissen nöthig hat. Diese

Werthe beziehen sich also auf den Anfang der Curven. Die Änderung ihrer gegenseitigen Entfernung in ihrem weiteren Laufe erkennt man aus den Werthen der Winkel φ in obiger Tafel, oder aus den Zeichnungen der Karte IV.

Betrachtet man nun die Zahlen der Tafel genauer, so sieht man zuerst in den Werthen von φ eine grosse Unregelmässigkeit. Um den Grund derselben leichter aufzufinden, wurden die Curven von grösserer Ausdehnung in mehrere Theile zerlegt, daher die Isoclinen von 62° , 61° , 60° u. a. in der Tafel in zwei oder drei Stücken, erscheinen. Diese Zerlegung wurde vorzugsweise in jenen Gegenden vorgenommen, wo die Curve durch eines der aufgefundenen Störungsgebiete läuft und nach demselben ihren Lauf noch fortsetzt. Es wurde hiedurch die Einwirkung der Störung auf die Inclination klar gemacht.

Man sieht nämlich, dass jener Theil der Isocline von 62° , welcher zwischen dem adriatischen Golf und dem südlichen Siebenbürgen liegt, eine Richtung hat, die dem Laufe der höher liegenden Curven von 63° und 64° nahezu parallel ist. Von Siebenbürgen bis Galatz hingegen senkt sich die Curve so rasch nach abwärts, dass der Werth von φ negativ wird, d. h., dass sie eine gegen den Breitenkreis südliche Richtung verfolgt, welche sie aber gegen Odessa hin wieder mit einer etwas nördlicheren vertauscht. Ähnliches zeigt auch die Isocline von 61° , von welcher der Theil zwischen dem östlichen Ufer des adriatischen Golfes und Siebenbürgen eine nördliche Richtung von $10\frac{1}{2}$ Graden einhält, die aber von da bis zur Schlangeninsel auf $2\frac{1}{2}$ Grad herabsinkt. Die Vermuthung, dass die Isoclinen von 64° bis 61° in ihrem westlichen Theile die nördliche Richtung vorzüglich durch die Störungsquelle in den östlichen Karpathen erlangen, wird auch durch das Stück der Isocline von 66° bestätigt, welches noch in unser Beobachtungsgebiet fällt, und nur böhmische Stationen enthält, also jener Quelle ferne liegt. Sie hat eine um 2° südlichere Richtung als die Isocline von 63° .

Der stark gegen Norden gekehrte Lauf der Curven zwischen der Ostküste des adriatischen Golfes und der Westküste des schwarzen Meeres, nämlich Isocline 58° , Antivari-Durazzo und Burgasz, Isocline 57° Volona und Burgass, Isocline 56° Corfu und Ortaköj-Böjuk-Liman, scheint anzudeuten, dass auch die Küstengegenden dieses Meeres in das Gebiet der Karpathenstörung gehören, welche demnach sich noch weiter gegen Südosten bis zum 41. Breitengrade erstrecken würde.

Wenn nach diesen Andeutungen die Störungsquelle in den Karpathen auf die Inclination die Wirkung hervorbringt, dass sie die Isoclinen nach Norden verrückt oder die Inclination verkleinert, so hat jene welche sich von Nordwest gegen Südost durch die Mitte des schwarzen Meeres zieht, einen entgegengesetzten Einfluss, indem sie eine solche Verrückung nach Süden erzeugt. Dies zeigt sich schon bei der Isocline von 60° , welche von Bukarest nach Cap Chersones mit dem Breitenkreise den kleinen Winkel von 4° macht, der aber von da nach Cap Takli auf 10° sich erhöht. Noch schärfer spricht sich die Wirkung in den Curven von 58° und 56° aus, von denen die erste in der Gegend von Burgasz ihre Richtung von $+ 11^\circ 14'$ bis $- 5^\circ 35'$ also um fast 17° ändert, die zweite aber vom Bosphorus an (bei Ortaköj und Böjuk-Liman) ebenfalls um 13° gegen Süden herabsinkt, von Sinope nach Trapezunt aber sich wieder um 12° erhebt. In dem südlichen Theile des Beobachtungsgebietes konnten aus Mangel an Stationen von manchen Curven nur kurze Stücke gegeben werden. Von der Isocline 50 wurde nur der erste Theil gezeichnet, da die Curve von Rhodus nach Latakia, wahrscheinlich wegen einer örtlichen Störung, zu sehr gegen Norden hinansteigt.

Die Verschiedenheit der Wirkungen verschiedener Störungsquellen auf die Magnetnadel, von der schon früher (S. 70) Erwähnung geschah, kann nicht überraschen, wenn man sich nach einigen im Vorigen angeführten Erfahrungen vorstellt, dass sie in grossen magnetischen Massen ihren Sitz haben, welche sich in der Nähe der Erdoberfläche befinden, und die nach ihrer Erstreckung und nach der Vertheilung ihres Magnetismus die Äusserungen der erdmagnetischen Kraft in der verschiedensten Weise abzuändern im Stande sein mögen.

Die letzte Spalte der Tafel lehrt, dass die Entfernung der Isoclinen mit der Breite rasch abnimmt, denn sie beträgt in der Breite von 35° kaum mehr die Hälfte von jener, die unter 48. bis 50. Breitengrad gefunden wird.

Um dort, wo die Beobachtungsstationen dichter gedrängt sind, den Lauf der Isoclinen seiner ganzen Länge nach kennen zu lernen, wurden sie auch aus den zwischen den Endpunkten liegenden Orten gesucht und es entstanden auf diese Weise die in der Karte IV eingetragenen punktirten Linien. Sie liefern den Beweis, dass kürzere Stücke der magnetischen Curven nicht geeignet sind um darauf Schlüsse über den allgemeinen Lauf derselben zu gründen.

Die folgende Tafel enthält in der mit β überschriebenen Spalte die geographischen Breiten der Isoclinen, wie sie sich aus den nebenstehenden Beobachtungs-Stationen ergeben. Die zu einem Mittel vereinigten Orte von nahezu gleicher Länge wurden durch Seitenklammern bezeichnet. B ist der Reductionsfactor, welcher mit dem Überschuss der Inclination von 1850 über den Werth der Isocline (oder umgekehrt) multiplicirt, ein Product gab, welches zu der geographischen Breite des Beobachtungsortes hinzugegeben wurde, um den Werth von β zu erhalten.

TAFEL XIII.

Breiten der Isoclinen aus den einzelnen Beobachtungsorten

im Jahre 1850.0.

| Station | β | Station | β | Station | β | Station | β |
|---|----------------|--|----------------|--|---------------|--|----------------|
| Isocline 63° $B = 1.3.$ | | Isocline 65° $B = 1.47.$ | | Isocline 65° $B = 1.47.$ | | Isocline 64° $B = 1.46.$ | |
| Pilsen..... | $50^\circ 21'$ | Bregenz..... | $47^\circ 46'$ | Lundenburg..... | $49^\circ 9'$ | Isola bella..... | $16^\circ 15'$ |
| Komotau..... | $50 14$ | Bludenz..... | $47 51$ | Olmütz..... | $49 9$ | Sondrio..... | $46 25$ |
| Teplitz-Schönau... | $50 8$ | Salzburg..... | $48 22$ | Troppau..... | $49 27$ | S. Christoph..... | $46 44$ |
| Bodenbach..... | $50 3$ | Altheim..... | $48 38$ | Trentschin ²⁾ | $49 8$ | Bornio..... | $46 36$ |
| Prag..... | $50 16$ | Klattau..... | $49 4$ | Teschen..... | $49 38$ | S. Maria..... | $46 35$ |
| Leipa..... | $50 17$ | Scherding..... | $48 49$ | Szt. Miklós..... | $49 39$ | Stilfserjoch..... | $46 34$ |
| Reichenberg..... | $50 19$ | St. Georgen..... | $48 25$ | Krakau..... | $49 32$ | Landek..... | $46 36$ |
| Czaslau..... | $50 36$ | Vöcklabruck..... | $48 33$ | Wieliczka..... | $49 41$ | Imst..... | $46 40$ |
| Chlumetz..... | $50 26$ | Kremsmünster..... | $48 30$ | Bergwerk..... | $49 37$ | Brenner..... | $47 3$ |
| Hohenelbe..... | $50 24$ | Linz..... | $48 46$ | Kesmark..... | $49 36$ | Rattenberg..... | $46 54$ |
| Nachod..... | $50 38$ | Neubaus..... | $48 59$ | Sandee..... | $49 51$ | Brunnecken..... | $47 1$ |
| Kwasnei..... | $50 43$ | Seelau..... | $48 58$ | Leutschau..... | $49 43$ | S. Johann..... | $46 57$ |
| Reichenau..... | $50 43$ | Melk..... | $48 19$ | Tarnow ³⁾ | $49 27$ | Lienz..... | $47 6$ |
| Leitomischl..... | $50 32$ | Iglau..... | $49 0$ | Krosno..... | $50 5$ | Böckstein..... | $17 20$ |
| Senftenberg..... | $50 28$ | Horn..... | $49 5$ | Sanok..... | $49 58$ | Hofgastein..... | $47 11$ |
| | | Znaim..... | $49 6$ | Przemysl..... | $50 1$ | Badgastein..... | $47 8$ |
| | | Brünn ¹⁾ | $48 51$ | Sambor..... | $50 1$ | Gamskarkogel..... | $47 26$ |

¹⁾ Wenn man Brünn berücksichtigt, so erhält die Curve die in der Zeichnung angezeigte Ausbiegung nach Süden. ²⁾ bis ³⁾ Die mit diesen Nummern bezeichneten Stationen wurden in der Zeichnung nicht berücksichtigt. Dies wäre auch bei Carlowitz der Fall gewesen, wenn es nicht in Verbindung mit Pöschega ein annehmbares Ergebniss geliefert hätte.

| Station | β | Station | β | Station | β | Station | β |
|---|---------|---|---------|---|---------|---|---------|
| Isocline 64° <i>B = 1·46.</i> | | Isocline 64° <i>B = 1·46.</i> | | Isocline 63° <i>B = 1·30.</i> | | Isocline 62° <i>B = 1·25.</i> | |
| Golling 4) | 46° 58' | Munkacz | 48° 55' | Adelsberg | 46° 7' | Zara 7) | 44° 16' |
| Radstadt | 47 7 | Veretzke | 48 53 | „ Grotte | 46 2 | Karlstadt | 44 59 |
| Gmünd | 47 19 | Tarnopol | 49 0 | Klagenfurt | 46 1 | Mali Hallan | 44 56 |
| Ischl | 47 11 | Czortkow | 49 39 | Laibach | 46 11 | Petrinia | 44 5 |
| Lietzen | 47 19 | | | St. Paul | 46 15 | Neu-Gradisca | 44 19 |
| St. Lambrecht | 47 20 | | | Neustadt | 46 16 | Fünfkirchen | 45 29 |
| Admont | 47 35 | Isocline 63° <i>B = 1·30.</i> | | Cilli | 46 23 | Esseg | 45 32 |
| Kallwang | 47 43 | Mantua | 45 16 | Marburg | 46 18 | Szegedin | 45 45 |
| Eisenerz | 47 39 | Riva | 45 32 | Agram | 46 29 | Temesvár | 46 9 |
| Polsterberg | 47 38 | Verona | 45 19 | Gleichenberg | 46 15 | Arad | 46 11 |
| Erzberg | 47 32 | Trient | 45 40 | Warasdin | 46 24 | Dobra | 46 26 |
| Afenz | 47 41 | Vicenza | 45 29 | Bellovár | 46 25 | Karlsburg | 46 33 |
| Bruck | 47 38 | Rovigo | 45 32 | Keneše | 46 30 | Klausenburg | 46 19 |
| Gratz | 47 49 | Padua | 45 33 | Tolna | 46 44 | | |
| Schottwien | 47 46 | Agordo | 45 40 | Ofen | 46 49 | Isocline 61° <i>B = 1·04</i> | |
| Stein am Anger 5) | 47 25 | Belluno | 45 43 | Szolnok | 46 57 | Carlowitz | 44 57 |
| Wien | 47 48 | Conegliano | 45 45 | Tokai 6) | 47 40 | Posehega | 44 16 |
| Ödenburg | 47 38 | Venedig | 45 42 | Debreezin | 47 16 | Semlin | 44 37 |
| Pressburg | 48 9 | Udine | 45 56 | Grosswardein | 47 21 | Belgrad | 44 32 |
| Neu-Szöny | 48 15 | Görz | 46 0 | Szathmar | 47 23 | Weisskirchen | 44 46 |
| Schemnitz | 48 21 | Bleiberg | 46 3 | Bistritz | 47 42 | Karansebes | 45 18 |
| Losonez | 48 9 | Dobraez | 46 1 | Jakobeny | 47 59 | Orsowa | 44 55 |
| Erlau | 48 36 | Kreith | 46 4 | | | Mehadia | 45 13 |
| Kaschau | 48 18 | Triest | 46 0 | | | | |
| Unghvár | 48 56 | | | | | | |

C. Horizontale Intensität.

Dieses Element zeigt, wie bekannt, eine Änderung, die jener der Inclination, die mit ihr in engster Abhängigkeit steht, ähnlich, aber in so ferne entgegengesetzt ist, als jene wächst, wenn die horizontale Intensität abnimmt. Die Untersuchung hierüber kann also ganz in derselben Weise wie die vorige durchgeführt werden, und daher bedarf die folgende Tafel, welche der entsprechenden bei der Inclination (Tafel XII) nachgebildet ist, keiner weiteren Erklärung, als die Bemerkung, dass die Werthe von *D* den Abstand der Isodynamen angeben, welche um 0·1 von einander entfernt sind, also den Abstand der Isodyname 1·90 von der Isodyname 2·00, dann dieser von der Isodyname 2·10 u. s. f.

TAFEL XIV.

Anfangs- und Endpunkte der Isodynamen

im Jahre 1850·0.

| Isodyname | Bestimmungsorte | | Länge | Breite | γ | <i>D</i> |
|-----------|------------------|--|---------|---------|----------|----------|
| 1·90 | Anfang | Franzensbad, Plan, Karlsbad, Chiesch | 30° 27' | 49° 36' | +12° 10' | 2° 36' |
| | Ende | Rzeszow, Nisko, Przemysl, Rawa-Ruska | 40 19 | 51 43 | | |
| 1·95 | Anfang | Bregenz, Bludenz | 27 25 | 47 29 | +12 54 | |
| | Ende | Krosno, Nisko, Rawa-Ruska | 40 12 | 50 23 | | |
| 2·00 | Anfang | Isola bella, Pavia, Mailand, Sondrio | 26 51 | 46 9 | +15 1 | |
| | Ende | Lemberg, Stanislaw, Brody, Tarnopol | 42 34 | 49 41 | | |

| Isodyname | Bestimmungsorte | Länge | Breite | ζ | D |
|-----------|--|---------|---------|---------|--------|
| 2·05 | Anfang . . . Pavia, Cremona, Brescia, Mantua | 27° 42' | 45° 19' | +13° 0' | 1° 57' |
| | Ende . . . Kolomea, Czortkow | 43 8 | 48 50 | | |
| 2·10 | Anfang . . . Cremona, Mantua, Rovigo, Padua | 28 46 | 44 36 | +12 21 | |
| | Ende . . . Jakobeny, Czortkow, Czernowitz, Suczawa | 43 53 | 47 18 | | |
| 2·15 | Anfang . . . Ancona, Lussin piccolo, Zara | 32 4 | 44 10 | +12 48 | 2 23 |
| | Ende . . . Karlsburg, Maros-Vásárhely | 41 48 | 46 22 | | |
| 2·20 | Anfang . . . Sebenico, Spalato | 33 53 | 43 5 | +12 3 | |
| | Ende . . . Hermannstadt, Fogaros, Bukarest | 42 47 | 45 10 | | |
| | Anfang . . . Hermannstadt, Fogaros, Bukarest | 42 17 | 45 10 | + 3 54 | |
| | Ende . . . Galatz | 45 43 | 45 22 | | |
| | Anfang . . . Galatz | 45 43 | 45 22 | +41 4 | 1 48 |
| | Ende . . . Odessa | 48 25 | 48 13 | | |
| 2·30 | Anfang . . . Molfetta | 31 21 | 41 33 | + 9 52 | |
| | Ende . . . Megline, Cattaro, Cettigne, Antivari, Durazzo | 36 39 | 41 57 | | |
| | Anfang . . . Megline, Cattaro, Cettigne, Antivari, Durazzo | 36 59 | 41 57 | +11 2 | |
| | Ende . . . Kalafat | 40 35 | 42 43 | | |
| | Anfang . . . Kalafat | 40 35 | 42 43 | + 8 58 | |
| | Ende . . . Burgasz | 45 8 | 43 26 | | |
| | Anfang . . . Burgasz | 45 8 | 43 26 | +22 7 | |
| | Ende . . . Schlangeninsel | 47 53 | 44 33 | | |
| | Anfang . . . Schlangeninsel | 47 53 | 44 33 | - 9 58 | |
| | Ende . . . Cap Chersones | 51 1 | 44 0 | | |
| | Anfang . . . Cap Chersones | 51 1 | 44 0 | +18 43 | |
| | Ende . . . Cap Takli | 51 7 | 45 3 | | |
| 2·40 | Anfang . . . Valona, Corfu | 34 22 | 40 2 | +13 7 | 2 0 |
| | Ende . . . Ortaköj, Böjuk Liman | 46 43 | 42 12 | | |
| | Anfang . . . Ortaköj, Böjuk-Liman | 46 43 | 42 12 | - 3 42 | |
| | Ende . . . Cap Indje, Sinope | 52 40 | 41 49 | | |
| | Anfang . . . Cap Indje, Sinope | 52 40 | 41 49 | +17 18 | 2 9 |
| | Ende . . . Trapezunt | 57 23 | 43 17 | | |
| 2·50 | Anfang . . . Zante | 38 35 | 38 7 | + 9 44 | 2 2 |
| | Ende . . . Trapezunt | 57 23 | 41 17 | | |
| 2·60 | Anfang . . . Cerigo | 40 12 | 36 25 | + 9 20 | |
| | Ende . . . Rhodus | 45 47 | 37 15 | | |
| | Anfang . . . Rhodus | 45 47 | 37 15 | - 2 11 | 2 0 |
| | Ende . . . Adalia | 48 25 | 37 9 | | |
| 2·70 | Anfang . . . Candia | 42 51 | 34 44 | + 9 7 | |
| | Ende . . . Limassol | 50 46 | 36 0 | | |
| | Anfang . . . Limassol | 50 46 | 36 0 | +12 3 | 1 55 |
| | Ende . . . Latakia | 53 30 | 36 35 | | |
| 2·80 | Anfang . . . Bombah | 40 52 | 32 29 | + 7 22 | 1 59 |
| | Ende . . . Beirut | 53 13 | 34 24 | | |
| 2·90 | Anfang . . . Alexandria | 17 34 | 31 24 | + 7 11 | |
| | Ende . . . Jaffa | 52 28 | 31 58 | | |

Wenn man die Ergebnisse dieser Tafel, nämlich die Werthe des Winkels ζ genauer betrachtet, so sieht man, dass sie in den höher liegenden Isodynamen, von 1·9 bis 2·2, wo ihre Endpunkte nur bis in das Störungsgebiet der östlichen Karpathen gelangen, ziemlich constant sind, anfangs etwas zu-, dann abnehmen, aber dass die Winkel ζ die Grenze zwischen 12° und 13° nicht überschreiten, bis die Curven im südlichen Siebenbürgen über dieses Gebiet hinausreichen und nach Galatz und Odessa vordringen. Dies geschieht in der Isodyname 2·20,

und man sieht hier in der letzten Station die grössten Schwankungen des Winkels φ eintreten. Die Karte V zeigt dies durch die Erhebung der Curve 2·2, wenn Odessa zum Endpunkte gewählt wird.

Genau dasselbe tritt, wie der Anblick der Tafel XII lehrt, bei der Inclination ein, deren Curven dem Winkel φ auch anfangs ziemlich constante, nur unbedeutend zuerst wachsende, dann abnehmende Werthe zuweisen, bis sie in der Strecke von Siebenbürgen bis Galatz und Odessa unverkennbare Zeichen von mächtigen Störungsursachen erkennen lassen.

Das nämliche ist der Fall bei dem Zuge beider Curven-Systeme in der Nähe des zweiten grossen Störungsknotens von Burgasz oder dem Bosphorus nach Sinope und Trapezunt, und die Übereinstimmung würde ohne Zweifel noch vollständiger geworden sein, hätte man beiderlei Curven dieselben Anfangs- und Endpunkte anweisen können, was jedoch bei den grösseren Werthen von φ im Systeme der Isodynamen verglichen mit denen der Isoclinen nicht thunlich war. Nichts desto weniger scheint mir auch so der Beweis vollständig hergestellt zu sein, dass bei der Verschiedenheit der Instrumente, welche zur Messung dieser beiden magnetischen Grössen dienten, die in ihrem Gange sich zeigenden Unregelmässigkeiten nicht Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden können, sondern ihr Grund anderswo zu suchen sei.

Der Lauf der Isodynamen, wie er aus den einzelnen zwischen den Endpunkten liegenden Beobachtungsstationen hervorgeht, ist in folgender Tafel enthalten, deren Einrichtung aus dem Vorhergehenden deutlich ist.

TAFEL XV.

Breiten der Isodynamen aus den einzelnen Beobachtungsstationen

im Jahre 1850·0.

| Station | β | Station | β | Station | β | Station | β |
|-----------------------|---------|-------------------------|---------|------------------------|---------|-------------------------|---------|
| Isodyname 1·90 | | Isodyname 1·95 | | Isodyname 1·95 | | Isodyname 2·00 | |
| <i>B = 1·50.</i> | | <i>B = 1·50.</i> | | <i>B = 1·50.</i> | | <i>B = 1·20.</i> | |
| Klattau | 49° 34' | St. Christoph | 17° 30' | Znaim | 19° 13' | Mals | 46° 28' |
| Pilsen | 49 40 | Inst | 17 32 | Brünn | 18 37 | Landeck | 46 37 |
| Komotau | 49 27 | Rattenberg | 48 3 | Olmütz | 49 11 | Meran | 46 33 |
| Teplitz | 49 33 | St. Johann | 48 6 | Troppau | 49 34 | Botzen | 46 38 |
| Pisek | 49 43 | Salzburg | 48 10 | Teschén | 49 41 | Innsbruck | 46 45 |
| Bodenbach | 49 39 | Altheim | 48 11 | Krakau | 49 49 | Brenner | 46 46 |
| Prag | 49 49 | Scherding | 48 18 | Wieliczka | 50 11 | Brunnecken | 46 50 |
| Leipa | 49 46 | St. Georgen | 48 23 | „ Bergwerk | 49 58 | Lienz | 47 1 |
| Reichenberg | 49 19 | Vöcklabruck | 48 15 | Sandee | 50 4 | Böckstein | 47 5 |
| Seelau | 49 48 | Kremsmünster | 48 17 | Tarnow | 50 11 | Hofgastein | 47 15 |
| Czaslau | 50 2 | Linz | 48 35 | Rzeszow | 50 34 | Badgastein | 47 22 |
| Chlumetz | 50 5 | Budweis | 48 45 | | | Gamskarkogel | 47 7 |
| Hohenelbe | 49 55 | Steinberg | 48 29 | | | Gölling | 47 11 |
| Nachod | 49 49 | Silberberg | 48 32 | Isodyname 2·00 | | Radstadt | 47 21 |
| Kwasnei | 50 6 | Gratzen | 48 24 | <i>B = 1·20.</i> | | Gmünd | 47 14 |
| Reichenau | 50 8 | Neuhaus | 48 34 | Bornio | 46 18 | Ischl | 47 17 |
| Leitomischl | 50 12 | Melk | 48 47 | S. Maria | 46 25 | Lietzen | 47 27 |
| Senftenberg | 50 11 | Iglau | 48 58 | Stilfserjoch | 46 21 | St. Lambrecht | 47 28 |
| | | Horn | 48 56 | | | Admont | 47 41 |

| Station | β | Station | β | Station | β | Station | β |
|--|---------|--|---------|--|---------|--|---------|
| Isodynamie 2·00 <i>B = 1·20.</i> | | Isodynamie 2·05 <i>B = 1·25.</i> | | Isodynamie 2·05 <i>B = 1·25.</i> | | Isodynamie 2·15 <i>B = 1·50.</i> | |
| Kallwang | 47° 40' | Mailand | 45° 11' | Munkaez | 48° 11' | Mali Hallan | 44° 23' |
| Eisenerz | 47 42 | Riva | 45 38 | Szathmar | 48 7 | Neu-Gradisea | 44 38 |
| Polsterberg | 47 39 | Verona | 45 33 | Dolina | 48 29 | Semlin | 45 5 |
| Erzberg | 47 35 | Trient | 45 34 | Stanislaw | 48 34 | Temesvár | 45 21 |
| Afenz | 47 42 | Vicenza | 45 52 | Isodynamie 2·10 <i>B = 1·30.</i> | | Weisskirchen | 45 32 |
| Bruek | 47 44 | Agordo | 46 0 | Venedig | 44 54 | Karansebes | 45 42 |
| Schottwien | 47 50 | Belluno | 46 6 | Triest | 45 14 | Dobra | 45 51 |
| Wien | 48 1 | Conegliano | 46 3 | Pola | 45 9 | Karlsburg | 46 32 |
| Ödenburg | 47 58 | Udine | 46 15 | Adelsberg | 45 21 | Maros-Vásárhely | 46 11 |
| Lundenburg | 48 14 | Görz | 46 20 | Grotte | 45 19 | Schässburg | 46 37 |
| Pressburg | 48 18 | Bleiberg | 46 27 | Fiume | 45 19 | | |
| Trentschin | 48 26 | Dobraez | 46 14 | Lussin piccolo | 45 0 | | |
| Schemnitz | 48 45 | Kreith | 46 16 | Neustadt | 45 16 | Isodynamie 2·20 <i>B = 1·50.</i> | |
| Szt. Miklós | 48 47 | Klagenfurt | 46 29 | Cilli | 45 44 | Lissa | 44 8 |
| Losonez | 48 39 | Lai bach | 46 29 | Ottočaz | 45 22 | Lesina | 43 50 |
| Kesmark | 48 55 | St. Paul | 46 38 | Karlstadt | 45 29 | Curzola | 43 47 |
| Leutsehau | 48 59 | Gratz | 46 49 | Agram | 45 42 | Carlowitz | 45 7 |
| Kaschau | 48 52 | Marburg | 46 39 | Petriua | 45 30 | Poschega | 44 24 |
| Sauok | 49 11 | Gleichenberg | 46 46 | Warasdin | 45 43 | Belgrad | 44 32 |
| Przemysl | 49 34 | Stein am Anger | 46 53 | Bellovár | 45 45 | Alexinatz | 44 44 |
| Veretzke | 49 15 | Keneše | 47 10 | Fünfkirchen | 46 4 | Orsowa | 44 34 |
| Sambor | 49 21 | Neu-Szöny | 47 22 | Esseg | 46 1 | Mehadia | 44 29 |
| Skole | 49 30 | Ofen | 47 17 | Szegedin | 46 21 | Kalafat | 44 54 |
| Rawa-Ruska | 49 23 | Szolnok | 47 37 | Arad | 46 35 | | |
| Stry | 49 43 | Erlau | 47 58 | Grosswardein | 46 43 | | |
| | | Tokai | 48 15 | Nagy-Bánya | 47 39 | | |
| | | Debreczin | 47 52 | Klausenburg | 47 10 | | |
| | | Unghvár | 48 20 | Bistritz | 47 26 | | |

Brünn und Tokai konnten, wie man aus der Zeichnung sieht, nur mittelst grosser Windungen in die Curve gebracht werden, so auch Karlsburg, Maros-Vásárhely und Schässburg; Lissa, Lesina und Carlowitz aber wurden gar nicht berücksichtigt. Es sind dies zum Theil solche Stationen, welche in den schon früher besprochenen Störungsgebieten des adriatischen Golfes und der südöstlichen Karpathen liegen, zum Theil aber solche, von denen man glauben sollte, dass sie von der Wirksamkeit jener Störungsquellen nicht mehr erreicht werden, wenn sich nicht selbe viel weiter erstrecken, als man nach den aufgefundenen Thatsachen zu schliessen berechtigt ist, und vielleicht sich nicht stetig, sondern nur in Unterbrechungen äussern, wovon auch die Beobachtungen in den Karpathen ein Beispiel geliefert haben (S. 72). Man könnte freilich auch glauben, dass in diesen Stationen, nämlich in Brünn, Tokai und Carlowitz, die Aufstellung eine ungünstige war (denn da die Unregelmässigkeiten sich in allen drei Elementen zeigen, so kann man sie nicht gut als Folgen von Fehlern der Beobachtungen annehmen, weil diese zu wiederholten Malen und an ganz verschiedenen Apparaten ausgeführt wurden). Allein auch gegen die erste Annahme spricht der Umstand, dass die Elemente in Brünn zweimal zu verschiedenen Zeiten, an verschiedenen Punkten und jedesmal mit anderen Instrumenten bestimmt wurden, und beide Bestimmungen so abweichende Werthe lieferten. Es ist zu hoffen, dass man, wenigstens in dieser Station, der Wahrheit bald auf den Grund kommen werde.

D. Intensität der Gesamtkraft.

In derselben Weise wie mit den früher behandelten Elementen wurde auch mit der Intensität der Gesamtkraft verfahren, daher die folgenden beiden Tafeln einer andern Erklärung nicht bedürfen, als über die Bezeichnung der Winkel φ , welche positiv sind, wenn der Endpunkt der Isodynamen südlich liegt von dem Breitenkreise, der durch ihren Anfangspunkt geht, und dass die Zahlen unter D die Entfernungen der östlichen Anfangspunkte jener zwei Isodynamen sind, zwischen welchen der Werth von D gesetzt ist.

TAFEL XVI.

Anfangs- und Endpunkte der Isodynamen der Gesamtkraft

im Jahre 1850.

| Isodyname | Bestimmungsorte | Länge | Breite | φ | D |
|-----------|---|---------|---------|-----------|--------|
| 4·66 | Anfang . . . Bodenbach | 31° 52' | 50° 39' | + 5° 41' | 0° 22' |
| | Ende . . . Rzeszow, Nisko, Przemyśl, Brody | 39 26 | 49 54 | | |
| 4·64 | Anfang . . . Franzensbad, Karlsbad, Teplitz, Leipa | 31 3 | 50 22 | + 5 32 | 0 32 |
| | Ende . . . Rawa-Ruska, Stry, Lemberg, Tarnopol, Czernowitz | 12 18 | 49 17 | | |
| 4·62 | Anfang . . . Plan, Prag, Chlumetz, Iglau, Znaim | 32 27 | 49 42 | + 4 41 | 0 38 |
| | Ende . . . Kaschau, Krosno, Dolina, Stanislaw, Czortkow | 41 13 | 48 59 | | |
| | Anfang . . . Kaschau, Krosno, Dolina, Stanislaw, Czortkow | 44 13 | 48 59 | + 31 23 | 0 38 |
| | Ende . . . Schlangeninsel | 47 53 | 44 56 | | |
| | Anfang . . . Schlangeninsel | 47 53 | 44 56 | + 1 14 | 0 38 |
| | Ende . . . Cap Takli | 54 7 | 44 48 | | |
| 4·60 | Anfang . . . Chiesch, Komotau, S. Georgen, Budweis | 31 20 | 49 14 | + 5 28 | 1 22 |
| | Ende . . . Veretzke, Nagy-Bánya, Kolomea, Suczawa | 42 12 | 48 12 | | |
| | Anfang . . . Chiesch, Komotau, S. Georgen, Budweis | 31 20 | 49 14 | +15 54 | 1 22 |
| | Ende . . . Galatz | 45 43 | 45 11 | | |
| 4·58 | Anfang . . . Bregenz, Salzburg, Badgastein, Golling, Pilsen | 30 7 | 47 53 | + 5 18 | 1 10 |
| | Ende . . . Debreezin, Bistritz, Maros-Vásárhely, Schässburg, Jakobeny | 41 53 | 46 48 | | |
| 4·56 | Anfang . . . Bludenz, Landek, Botzen, Rattenberg, Agordo | 28 44 | 46 51 | + 4 3 | 0 25 |
| | Ende . . . Warasdin, Bellovár, Tolna, Belgrad, Grosswardein, Karlsburg, Klausenburg | 37 57 | 46 12 | | |
| 4·54 | Anfang . . . Sondrio, S. Maria, Stilsferjoch, Mals, Imst, Riva, Verona, Meran | 28 16 | 46 28 | + 3 13 | 0 57 |
| | Ende . . . Agrau, Fünfkirchen, Szegedin, Hermannstadt, Fogarosch | 38 24 | 15 54 | | |
| 4·52 | Anfang . . . Pavia, Cremona, Brescia, S. Christoph, Bormio, Mantua | 27 47 | 45 32 | + 2 19 | 0 51 |
| | Ende . . . Neu-Gradisea, Esseg, Poschega, Arad, Dobra, Kalafat, Bukarest | 38 57 | 45 5 | | |
| | Anfang . . . Neu-Gradisea, Esseg, Poschega, Arad, Dobra, Kalafat, Bukarest | 38 57 | 45 5 | + 1 40 | 0 51 |
| | Ende . . . Cap Chersones | 51 1 | 44 44 | | |
| | Anfang . . . Neu-Gradisea, Esseg, Poschega, Arad, Dobra, Kalafat, Bukarest | 38 57 | 45 5 | +11 23 | 0 51 |
| | Ende . . . Trapezunt | 57 23 | 41 18 | | |
| 4·50 | Anfang . . . Mailand, Trient, Ancona, Lussin piccolo, Sebenico, Spalato | 31 7 | 44 33 | - 1 34 | 2 2 |
| | Ende . . . Semlin, Temesvár, Weisskirehen, Alexinat, Orsowa | 39 4 | 44 46 | | |
| | Anfang . . . Semlin, Temesvár, Weisskirehen, Alexinat, Orsowa | 39 4 | 44 46 | +12 58 | 2 2 |
| | Ende . . . Sinope | 52 49 | 41 38 | | |
| 4·45 | Anfang . . . Lissa, Curzola, Gravosa, Ragusa, Cattaro, Cettigne | 35 33 | 42 38 | -23 51 | 1 1 |
| | Ende . . . Karansebes, Mehadia | 39 58 | 44 35 | | |
| | Anfang . . . Lissa, Curzola, Gravosa, Ragusa, Cattaro, Cettigne | 35 33 | 42 38 | + 2 31 | 1 1 |
| | Ende . . . Cap Indje | 52 30 | 41 54 | | |

| Isodyname | Bestimmungsorte | Länge | Breite | φ | D |
|-----------|---|------------------|------------------|-----------|--------|
| 4·40 | Anfang . . . Molfetta Brindisi, Megline, Antivari, Durazzo, Valona Ende Ortaköj, Böjuk-Liman | 36° 14' 46 43 | 41° 35' 40 38 | + 5° 12' | 2° 39' |
| 4·30 | Anfang . . . Corfu, Zante Ende (Fehlen die Beobachtungen.) | 38 5 | 38 57 | | |
| 4·20 | Anfang . . . Cerigo, Candia, Rhodus Ende Adalia, Limassol, Latakia | 43 10 50 54 | 36 0 35 43 | + 2 6 | 2 42 |
| 4·10 | Anfang . . . Bombah, Alexandria Ende Jaffa, Beirut | 44 13 52 50 | 33 16 32 45 | + 3 27 | |

Aus den in dieser Tafel enthaltenen Werthen von φ ersieht man, dass die Isodynamen der Gesamtkraft innerhalb der Grenzen des österreichischen Kaiserstaates eine nahezu parallele Richtung einhalten, indem sie in ihrem Laufe nach Osten sich etwas gegen Süden wenden, und mit den durch ihre Anfangspunkte gelegten Breitenkreisen Winkel einschliessen, die kleiner sind als 6 Grade. Diese Winkel scheinen gegen Süden noch mehr abzunehmen, und gehen dann auch wohl in eine nördliche Richtung über. Dies ist insbesondere der Fall mit der am südlichsten gelegenen Curve, der Isodyname 4·45, welche von den unteren dalmatinischen Stationen nach Karansebes und Mehadia geht, und eine nördliche Richtung unter einem Winkel von fast 24 Graden annimmt, wovon jedoch die Ursache später vor Augen treten wird.

Im südöstlichen Theile von Europa ausserhalb Österreich und den Stationen am Ufer des schwarzen Meeres deuten auch diese Curven auf sehr starke Störungsursachen hin, wie es sich schon im vorhinein erwarten liess, da sie von den zwei früher betrachteten Elementen, Inclination und horizontale Intensität abhängen. Es zeigt sich dies bei den in mehrere Stücke getheilten Curven, wie bei den Isodynamen von 4·62, 4·60, 4·52, 4·50, wenn man die diesen Stücken entsprechenden Werthe des Winkels φ betrachtet. Von den ersten dieser Curven wurden in der Karte VII zur besseren Veranschaulichung die einzelnen Stücke durch punktirte Linien angezeigt. Dies ist auch die Ursache der Verschiedenheit des Laufes der Curven in den Karten VII und VIII. In der ersten laufen sie ziemlich parallel, und nur ihr Abstand ist sehr ungleich; in der letzten hingegen treten mehrere Durchkreuzungen ein.

Im mittelländischen Meere und an den Küsten von Afrika scheint nach den wenigen vorhandenen Bestimmungen ihre Richtung wieder mit jener innerhalb der Grenzen Österreichs übereinzustimmen.

Für den Endpunkt der Curve 4·30 hätte höchstens Burgasz verwendet werden können, das aber als zu abweichend ausgeschlossen wurde.

Die folgende Tafel enthält die aus den einzelnen Stationen gerechneten Breiten (β) der Isodyname. Die Reductions-Factoren B , welche die frühere Bedeutung haben (s. S. 80) wurden hier sowohl für den Anfang (B_A) als für das Ende (B_E) gerechnet, da sie, wie man sieht, oft merklich von einander verschieden sind. Zu den Orten des ersten Absatzes gehört B_A , zu denen der zweiten B_E .

TAFEL XVII.

Breiten der Isodynamen der Gesamtkraft aus den einzelnen Beobachtungsstationen

für 1850·0.

| Station | β | Station | β | Station | β | Station | β |
|---|---------|--|---------|---|---------|---|---------|
| Isodynamen 4·66 $B_A = B_E = 1·7.$ | | Isodynamen 4·62. $B_A = 1·9, B_E = 2·2.$ | | Isodynamen 4·58 $B_A = 3·7, B_E = 3·5.$ | | Isodynamen 4·56 $B_A = 2·0, B_E = 2·1.$ | |
| Bodenbach | 50° 39' | Kaschau | 48° 26' | Klagenfurt | 47° 3' | Eisenerz | 17° 15' |
| Krakau | 50 17 | Krosno | 49 11 | St. Lambrecht | 17 9 | Polsterberg | 17 19 |
| Wieliczka | 49 40 | Dolina | 48 38 | Admont | 48 1 | Erzberg | 47 19 |
| „ Bergwerk | 50 1 | Stanislaw | 48 46 | Steinberg | 48 42 | St. Paul | 16 43 |
| Rzeszow | 49 42 | Czortkow | 49 23 | Neuhaus | 19 19 | Athenz | 17 24 |
| Nisko | 50 38 | Schlangeninsel | 41 56 | Zara | 41 37 | Cilli | 16 18 |
| Przemysl | 49 21 | Cap Takli | 41 48 | Bruck | 47 47 | Gratz | 16 49 |
| Brody | 49 42 | | | Horn | 18 10 | Marburg | 16 43 |
| Isodynamen 4·64 $B_A = 1·7, B_E = 1·9.$ | | Isodynamen 4·60 $B_A = 2·9, B_E = 2·7.$ | | Gleichenberg | 46 56 | Schottwien | 17 20 |
| Franzensbad | 49 52 | Chiesch | 49 49 | Nachod | 50 15 | Warasdin | 46 16 |
| Karlsbad | 50 5 | Komotau | 50 18 | Wien | 17 56 | Bollovár | 46 14 |
| Teplitz | 50 16 | St. Georgen | 47 52 | Pressburg | 48 13 | Tolna | 46 10 |
| Leipa | 50 46 | Budweis | 48 57 | Neu-Szöny | 47 38 | Belgrad | 45 3 |
| Reichenberg | 50 43 | Seclau | 50 1 | Ofen | 17 53 | Grosswardein | 47 8 |
| Hohenelbe | 50 45 | Melk | 18 26 | Szolnok | 46 35 | Karlsburg | 46 0 |
| Senftenberg | 50 22 | Czaslau | 50 17 | Tokai | 48 3 | Klausenburg | 46 32 |
| Troppan | 49 56 | Kwasnei | 50 35 | Debreczin | 47 25 | Isodynamen 4·54 $B_A = 1·7, B_E = 1·6.$ | |
| Trentschin | 48 38 | Reichenau | 50 8 | Bistritz | 46 36 | Sondrio | 46 34 |
| | | Ödenburg | 47 14 | Maros-Vásárhely | 16 8 | S. Maria | 46 26 |
| Kesmark | 48 51 | | | Schüssburg | 16 44 | Stilfserjoch | 46 28 |
| Leutschau | 49 1 | Brünn | 49 0 | Jakobeny | 17 5 | Mals | 46 41 |
| Sandec | 49 39 | Kenesc | 47 24 | Isodynamen 4·56 $B_A = 2·0, B_E = 2·1.$ | | Imst | 47 17 |
| Sambor | 49 44 | Schemnitz | 48 8 | Bludenz | 17 1 | Riva | 46 10 |
| Skole | 49 18 | Szolnok | 47 37 | Landeck | 47 0 | Verona | 45 21 |
| Rawa-Ruska | 49 58 | Erlau | 47 40 | Botzen | 46 38 | Meran | 46 43 |
| Stry | 48 54 | Unghvár | 48 13 | Vicenza | 45 42 | Innsbruck | 47 11 |
| Lemberg | 49 39 | Munkacs | 48 45 | Rattenberg | 47 17 | Brenner | 47 15 |
| Tarnopol | 49 18 | Szatmar | 47 50 | Padua | 45 36 | Rovigo | 44 56 |
| Czernowitz | 48 36 | Veretzke | 18 38 | Agordo | 16 17 | Brunneeken | 46 45 |
| | | Nagy-Bánya | 47 26 | Belluno | 46 8 | Conegliano | 45 38 |
| Isodynamen 4·62 $B_A = 1·9, B_E = 2·2.$ | | Kolomea | 48 42 | St. Johann | 47 22 | Venedig | 45 24 |
| Plan | 49 44 | Suczawa | 48 2 | Lienz | 47 2 | Böckstein | 46 53 |
| Prag | 50 5 | Galatz | 45 11 | Hofgastein | 16 52 | Isehl | 47 33 |
| Chlumetz | 50 11 | Isodynamen 4·58 $B_A = 3·7, B_E = 3·5.$ | | Altheim | 48 17 | Görz | 45 41 |
| Iglau | 49 23 | Bregenz | 17 37 | Udine | 16 24 | Dobracz | 16 31 |
| Znaim | 49 6 | Salzburg | 47 41 | Klattau | 49 42 | Kreith | 46 30 |
| Stein am Anger | 47 18 | Badgastein | 16 41 | Selherding | 18 39 | Pola | 44 44 |
| Leitomischl | 50 2 | Golling | 47 50 | Gmünd | 17 8 | Adelsberg | 45 41 |
| Lundenburg | 48 15 | Pilsen | 49 38 | Bleiberg | 46 26 | Finne | 45 29 |
| Olmütz | 49 21 | Radstadt | 46 53 | Pisek | 49 23 | Laibach | 45 53 |
| Teschen | 49 41 | Vöcklabruck | 17 46 | Adelsberger Grotte | 16 0 | Agram | 45 45 |
| Szt. Miklós | 48 19 | Kremsmünster | 47 48 | Silberberg | 48 31 | Fünfkirchen | 45 59 |
| Losonez | 48 19 | Lietzen | 47 27 | Kallwang | 17 31 | Szegedin | 16 10 |
| Sandec | 49 34 | Linz | 47 45 | Gratzen | 48 44 | Hermannstadt | 45 36 |
| | | | | | | Fogaros | 45 50 |

| Station | β | Station | β | Station | β | Station | β |
|---|---------|---|---------|---|---------|--|---------|
| Isodynamie 4·52 $B_A = 2.8, B_E = 2.5.$ | | Isodynamie 4·50 $B_A = 1.1, B_E = 0.8.$ | | Isodynamie 4·45 $B_A = 2.1, B_E = 2.1.$ | | Isodynamie 4·30 $B_A = B_E = 1.7.$ | |
| Pavia | 45° 5' | Mailand | 45° 20' | Gravosa | 43° 8' | Corfu | 39° 2' |
| Cremona..... | 45 0 | Trient | 45 56 | Ragusa | 42 23 | Zante | 38 51 |
| Brescia..... | 45 26 | Ancona | 43 48 | Cattaro..... | 41 28 | Burgasz | 40 50 |
| S. Christoph..... | 46 48 | Lussin piccolo..... | 44 31 | Cettigne | 42 49 | | |
| Bormio | 46 8 | Sebenico | 43 53 | Karansebes..... | 44 34 | Isodynamie 4·20 | |
| Mantua | 44 44 | Spalato | 43 49 | Mehadia..... | 44 36 | $B_A = B_E = 1.6.$ | |
| Gamskarkogel | 46 44 | | | Cap Indje..... | 41 54 | | |
| Neustadt | 45 51 | Semlin | 45 3 | | | Cerigo..... | 35 56 |
| Ottočaz..... | 45 5 | Temesvár..... | 45 47 | | | Candia | 35 57 |
| Mali Hallan..... | 44 37 | Weisskirchen..... | 44 49 | Isodynamie 4·40 | | Rhodus | 36 8 |
| Petrinia | 45 20 | Alexinatz | 43 23 | $B_A = 1.8, B_E = 1.8.$ | | Adalia..... | 35 58 |
| | | Orsowa | 44 47 | | | Limassol... .. | 35 42 |
| Neu-Gradisea..... | 45 19 | Sinope | 41 38 | | | Latakia..... | 35 29 |
| Esseg | 45 32 | | | Molfetta | 41 44 | | |
| Posehega | 43 39 | Isodynamie 4·45 | | Brindisi | 41 24 | Isodynamie 4·10 | |
| Arad | 46 31 | $B_A = 2.1, B_E = 2.1.$ | | Megline | 41 46 | $B_A = A_E = 1.6.$ | |
| Dobra | 46 17 | | | Antivari | 42 13 | | |
| Kalafat | 43 54 | | | Durazzo | 41 12 | Bombah | 33 16 |
| Bukarest..... | 44 26 | Lissa..... | 43 9 | Valona | 41 12 | Alexandria | 33 17 |
| Cap Chersones..... | 44 44 | Curzola..... | 42 51 | Ortaköj..... | 40 55 | Jaffa | 32 57 |
| Trapezunt..... | 41 18 | | | Böjuk-Liman..... | 40 21 | Beirut | 32 34 |

Die Zahlen dieser Tafel zeigen, auch wenn sie derselben Curve angehören, eine so bedeutende und sprungweise fortschreitende Verschiedenheit, dass man nicht daran denken konnte, die Isodynamen aus den Angaben der einzelnen Stationen in derselben Weise graphisch zu versinnlichen, wie es bei den übrigen Elementen versucht wurde. Es würden verworrene sich mannigfach durchkreuzende Linien entstanden sein, die wenig Aufschluss gewährt hätten. Betrachtet man diese Zahlen genauer, so sieht man leicht, dass sie sich dort, wo die Beobachtungsstationen dichter liegen, also innerhalb der Grenzen des Kaiserstaates, nach gewissen Gebieten abtheilen lassen. dass z. B. sämmtliche Orte Böhmens sehr grosse Werthe von β geben, dass also dort die Isodynamen weit gegen Norden hinaufsteigen, oder mit anderen Worten, dass der Magnetismus dort viel schwächer ist, als in den nächsten Bezirken von Mähren und Schlesien. Gegen Österreich und das nördliche Steiermark hin wächst er noch mehr, und gelangt endlich zu seinem höchsten Werthe in den Ebenen Ungarns. Dies zeigt die Tafel am deutlichsten in jenen Curven, welche Orte aus diesen verschiedenen Gebieten umfassen, wie die Isodynamen von 4·64, 4·62 und 4·60. In der letzten erreichen alle böhmischen Stationen einen Werth von β , der über 50° oder nicht viel weniger beträgt, die mährischen und österreichischen geben durchschnittlich 48°, die ungarischen 47° bis 48°, in Galizien wächst dieser Werth wieder, oder die Curven steigen gegen Norden, ohne jedoch die Höhe wie in Böhmen zu erreichen, daher die aus den Endpunkten gerechneten Curven der Taf. XVI nach Osten hin sich abwärts senken müssen. Auch in den südlicheren Gegenden hängen die Werthe von der Breite ab, und es geben z. B. in der Isodynamie von 4·52 die am südlichst gelegenen Orte immer die kleinsten Werthe von β , woraus sich der steigende Gang der Curve 4·45 von selbst erklärt.

Allein auch in diesem Punkte darf man den einzelnen Stationen nicht zu viel Vertrauen schenken, und um eine deutlichere und begründetere Ansicht über die Vertheilung der mag-

netischen Kraft innerhalb der Ausdehnung des durchforschten Gebietes zu erlangen, wurde dasselbe in Strecken von einem Breitengrade und zwei bis drei Längengraden abgetheilt, und die aus Tafel VI genommenen Werthe der Gesamtkraft an allen in einer solchen Strecke liegenden Orten zu einem Mittel vereinigt. Auf diese Weise entstand die folgende Tafel, in welcher die erste Horizontalreihe die Mittel aller Orte enthält, welche zwischen dem 50. und 51. Breitengrade liegen, und zwar in Abtheilungen, von denen die erste, die zwischen dem 30. bis 32. Längengrad liegenden Orte: Franzensbad, Carlsbad, Chiesch, Komotau, Teplitz, Schönau, Bodenbach enthält, die zweite jene unterm 32. und 33. Längengrad liegenden u. s. f. Die mit n bezeichneten Zahlen sind die Anzahl der Stationen, welche zum Mittel verwendet wurden.

TAFEL XVIII.

Übersicht der Intensität der Gesamtkraft

im Jahre 1850.

| Breite | Länge 27° bis 29° | | Länge 30° und 31° | | Länge 32° und 33° | | Länge 34° und 35° | | Länge 36° und 37° | | Länge 38° und 39° | | Länge 40° und 41° | | Länge 42° und 43° | | Mittel |
|------------------------|-------------------|-----|-------------------|-----|-------------------|-----|-------------------|-----|-------------------|-----|-------------------|-----|-------------------|-----|-------------------|-----|--------|
| | Intensit. | n | Intensit. | n | Intensit. | n | Intensit. | n | Intensit. | n | Intensit. | n | Intensit. | n | Intensit. | n | |
| 50° | — | — | 4·631 | 7 | 4·612 | 9 | 4·651 | — | 4·653 | 1 | 4·677 | 3 | 4·650 | 1 | 4·672 | 1 | 4·649 |
| 49 | — | — | 4·579 | 4 | 4·599 | 6 | 4·621 | 3 | 4·641 | 1 | 4·633 | 5 | 4·647 | 5 | 4·629 | 2 | 4·622 |
| 48 | — | — | 4·574 | 5 | 4·583 | 6 | 4·608 | 4 | 4·614 | 2 | 4·601 | 2 | 4·608 | 4 | 4·617 | 3 | 4·601 |
| 47 | 4·554 | 8 | 4·570 | 12 | 4·572 | 10 | 4·591 | 3 | 4·582 | 2 | 4·582 | 3 | 4·602 | 2 | 4·589 | 3 | 4·584 |
| 46 | 4·541 | 11 | 4·555 | 7 | 4·559 | 6 | 4·543 | 1 | 4·555 | 2 | 4·511 | 1 | 4·561 | 2 | 4·579 | 2 | 4·552 |
| 44° und 45 | 1)4·534 | 14 | 4·545 | 4 | 4·526 | 6 | 4·531 | 2 | 4·543 | 2 | 4·503 | 4 | 4·506 | 5 | 4·530 | 2 | 4·527 |
| Mittel von 50° bis 48° | — | — | 4·595 | 16 | 4·598 | 21 | 4·628 | 7 | 4·637 | 7 | 4·638 | 10 | 4·635 | 10 | 4·639 | 6 | 4·589 |
| „ „ 47 „ 44 | 4·542 | 33 | 4·557 | 23 | 4·552 | 22 | 4·556 | 6 | 4·560 | 6 | 4·532 | 8 | 4·557 | 9 | 4·566 | 7 | |

Diese Tafel, besonders die aus ihr gezogenen Mittel gewähren eine klarere Ansicht der Änderung der magnetischen Intensität. Die einzelnen Spalten mussten in zwei Theile getrennt werden, weil die Zahlen der höheren Breiten offenbar einen anderen ost-westlichen Gang der Intensität anzeigen, als die tieferen. Es umfasst daher das erste Mittel die Breitengrade von 50 bis 48, das zweite jene von 47 bis 44. Um auch die Längengrade 34 und 35, unter denen sich in der Breite von 50 Grad keine Station findet, in die Rechnung einbeziehen zu können, wurde nach Angabe der übrigen 6 Spalten angenommen, dass die Intensität vom 50. auf den 49. Breitengrad um 0·027 abnehme, daher die Zahl 4·651 statt der fehlenden gesetzt.

Die Mittel von 50° bis 48° Breite zeigen, dass die Intensität bis zu Ende des 33. Längengrades, also innerhalb des Bereiches von Böhmen, viel schwächer ist als in dem unter gleicher Breite mehr östlich gelegenen Gebiete, denn schon bis zum 34. und 35. Längengrade nimmt sie um 0·030 zu, und wird weiter östlich noch um 0·01 gesteigert. Vom 37. bis 43. Längengrade aber ist sie im Mittel nur kleinen Änderungen unterworfen, wenn gleich die einzelnen Stationen, wie man in der vorigen Tafel gesehen hat, den Einfluss der in jener Gegend befindlichen Störungsquelle noch deutlich anzeigen. Diese Zunahme zwischen dem 33. und 34. Längengrade ist nicht allmählich, sondern, wie man sieht, plötzlich, was auf eine

1) Von den 14 Stationen, welche für dieses Mittel verwendet wurden, liegen die vier ersten, nämlich Isola bella, Como, Pavia und Mailand unter dem 26. Längengrad. Ihr Mittel ist 4·521.

Ursache hinzudeuten scheint, die nicht in grosser Entfernung, also wenn man sie in der Erde annehmen will, nicht in bedeutender Tiefe, sondern nahe zu Tage zu suchen und in scharfe Grenzen eingeschlossen ist.

Einen ganz anderen Gang zeigen die Mittel vom 47. bis 44. Breitengrade. In der westlichen Strecke von dem 27. bis 31. Längengrade deuten sie eine Zunahme der Kraft an, und hiemit stimmt auch das Mittel 4·574 unter dem 48. Breiten- und 30. 31. Längengrade überein, das aus folgenden österreichischen Stationen besteht:

| | | |
|------------------------|------------------|--------------------|
| Altheim | Länge = 30° 51', | Intensität = 4·559 |
| Scherding | " = 31 4, | " = 4·554 |
| Vöcklabruck | " = 31 16, | " = 4·584 |
| Kremsmünster | " = 31 48, | " = 4·584 |
| Linz | " = 31 4, | " = 4·589 |

Auch hier zeigen die beiden westlichen Stationen eine auffallend kleine Intensität an im Vergleiche mit den drei östlichen.

Die folgenden Zahlen dieser Mittelreihe, nämlich jene vom 31. bis 38. Längengrade unterliegen nur kleinen Änderungen, aber von da bis zum 40. Längengrade erscheint die Kraft viel schwächer. Geht man auf die Einzelzahlen der Tafel XVII zurück, so sieht man, dass die Stationen zwischen dem 46. bis 44. Breiten- und 38. und 39. Längengrade, also die Stationen

| | |
|----------------------|--------------------|
| Arad | Intensität = 4·511 |
| Semlin | " = 4·486 |
| Belgrad | " = 4·553 |
| Temesvár | " = 4·498 |
| Karansebes | " = 4·474 |

darin Schuld sind. Ob sich hier ebenfalls eine Störungsquelle vorfinde, wie die unregelmässigen Zahlen anzudeuten scheinen, müssen zahlreichere Bestimmungen darthun. Ist sie vorhanden, so würde sie sich gewiss auch über Carlowitz erstrecken, das wegen seiner abweichenden Ergebnisse fast von allen früheren Untersuchungen ausgeschlossen werden musste.

Die Mittel der letzten Spalte enthalten den Gang der Intensität der magnetischen Kraft von Norden gegen Süden. Sie wurden aus den 7 vorhergehenden Spalten gerechnet, da in der ersten zwischen dem 50. und 48. Breitengrade keine Stationen vorkommen. Die Änderung beträgt vom 50. bis 44. und 45. Breitengrad 0·122, oder den 0·026. Theil der mittleren Kraft im Jahre 1850·0, und scheint in den höheren und tieferen Breiten rascher vor sich zu gehen als in den mittleren.

Die Tafel XVIII gewährt auch die Mittel zur Beantwortung einer anderen mehrfach angeregten Frage, ob nämlich die Intensität der magnetischen Kraft mit der Höhe in merklicher Weise abnehme oder nicht¹⁾. Es wurde nämlich während der Bereisung des westlichen Theiles des Kaiserstaates an sieben erhöhten Punkten beobachtet, deren Höhenunterschied über der Meeresfläche zwischen 690 und 1450 Toisen beträgt. Wenn nun mittelst der vorigen Tafel die Werthe für die Intensität des Erdmagnetismus, welche in den nächst gelegenen tieferen Stationen gefunden wurden, auf den geographischen Ort des Höhenpunktes zurückgeführt werden, so ergibt sich daraus eine Vergleichung, aus welcher die Änderung, welche die Kraft mit der Höhe erleidet, abgenommen werden kann. Die folgende Tafel enthält diese

¹⁾ Man sehe hierüber: Prof. K o ř i s t k a's Aufsatz „Über den Einfluss der Höhe und geognostischen Beschaffenheit des Bodens auf den Erdmagnetismus“ in den Berichten über die Mittheilungen von Freunden der Naturwissenschaften in Wien, VI. Bd., S. 139.

Orte und die daraus abgeleiteten Resultate. Die darin aufgeführten Werthe der Intensität sind schon auf den geographischen Ort des Höhenpunktes zurückgeführt. In der letzten Spalte bedeutet das Zeichen —, dass die Magnetkraft in der Höhe schwächer ist als in den tiefer gelegenen Stationen.

TAFEL XIX.

Änderung der Intensität nach der Höhe.

| O r t | Höhe | Intensität | Intensitäts-Unterschied |
|--|------------|------------|---|
| St. Christoph auf dem Arlberge | 905 Toisen | 4·527 | Arlberg = 4·527 |
| Bludenz | 288 " | 4·567 | Stationen = 4·564 |
| Landeck | 406 " | 4·562 | Intensitäts-Unterschied . . = -0·037 |
| | | | Höhenunterschied = 3350 P. F. |
| S. Maria | 1269 " | 4·543 | |
| Stilfserjoch (Ferdinandhöhe) | 1443 " | 4·542 | S. Maria u. Ferdinand-Höhe . = 4·542 |
| Sondrio | 162 " | 4·544 | Stationen = 4·538 |
| Bormio | 684 " | 4·528 | Intensitäts-Unterschied . . = +0·004 |
| Mals | 540 " | 4·535 | Höhenunterschied = 6140 P. F. |
| Meran | 159 " | 4·530 | |
| Botzen | 122 " | 4·551 | |
| Brenner | 693 " | 4·531 | Brenner = 4·531 |
| Innsbruck | 278 " | 4·537 | Stationen = 4·545 |
| Rattenberg | 252 " | 4·552 | Intensitäts-Unterschied . . = -0·014 |
| Brunnecken | 415 " | 4·545 | Höhenunterschied = 2270 P. F. |
| Böckstein | 976 " | 4·534 | Böckstein = 4·534 |
| Salzburg | 221 " | 4·563 | Stationen = 4·569 |
| Hofgastein | 450 " | 4·565 | Intensitäts-Unterschied . . = -0·035 |
| Badgastein | 508 " | 4·585 | Höhenunterschied = 3740 P. F. |
| Golling | 230 " | 4·562 | |
| Gamskarkogel bei Gastein | 1248 " | 4·528 | Gamskarkogel = 4·528 |
| Salzburg | 221 " | 4·566 | Stationen = 4·572 |
| Hofgastein | 450 " | 4·568 | Intensitäts-Unterschied . . = -0·044 |
| Badgastein | 508 " | 4·588 | Höhenunterschied = 5380 P. F. |
| Golling | 230 " | 4·565 | |
| Dobracz bei Bleiberg | 1108 " | 4·543 | Dobracz = 4·543 |
| Görz | 37 " | 4·566 | Stationen = 4·558 |
| Bleiberg | 458 " | 4·565 | Intensitäts-Unterschied . . = -0·015 |
| Kreith | 305 " | 4·544 | Höhenunterschied = 5050 P. F. |
| Polsterberg bei Eisenerz | 972 " | 4·566 | Polsterberg = 4·566 |
| Eisenerz | 348 " | 4·568 | Stationen = 4·563 |
| Erzberg | 477 " | 4·566 | Intensitäts-Unterschied . . = +0·003 |
| Kallwang | 370 " | 4·556 | Höhenunterschied = 3440 P. F. |

Unter den sieben Höhenpunkten, welche in dieser Tafel in Betracht gezogen werden, zeigen fünf eine sehr merkliche Abnahme der Kraft mit der Höhe an, bei zweien findet sich zwar eine Zunahme, aber so klein, dass sie jedenfalls weit innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegt. Es ist daher sehr wahrscheinlich, dass die magnetische Kraft mit der Höhe abnehme, und dass die Abnahme selbst schon in dem Bereiche unserer Gebirge merklich sei. Im vorliegenden Falle würde sie, wenn man allen Bestimmungen gleiches Gewicht beilegt, für eine Höhe von 1000 Toisen

$$0\cdot00028$$

oder ungefähr den $\frac{6}{100000}$ Theil der Kraft betragen, wie sie im Jahre 1850·0 unterm 45. Breiten- und 33. Längengrade gefunden wurde.

Da alle Elemente des Erdmagnetismus veränderlich sind, und sowohl an demselben Orte mit der Zeit, als zur selben Zeit von einem Orte zum andern eine zu- oder abnehmende Änderung erfahren, so scheint es zweckmässig, die einzigen Grössen, welche mehr als alle anderen auf Unveränderlichkeit Anspruch machen dürften, besonders hervorzuheben. Es sind dies die Unterschiede zwischen den Werthen, welche jedem Elemente gleichzeitig an verschiedenen Orten zukommen, deren Betrachtung vielleicht im Verlauf der Zeit über die Art und Weise Aufschluss geben wird, in welcher jene Veränderungen vor sich gehen.

Aus dieser Ursache wurden die genannten Unterschiede zwischen Wien und den in der Tafel VI enthaltenen Stationen in der folgenden Tafel zusammengestellt, welche zur leichteren Auffindung derselben alphabetisch geordnet, aber in der zweiten Spalte mit den Nummern der Tafel VI versehen ist, wodurch der gleichzeitige Gebrauch beider Tafeln erleichtert wird.

Als Vergleichpunkt wurden die Normalwerthe für Wien vom Jahre 1850·0, wie sie auf Seite 63 angegeben sind, gewählt, und wenn an manchen Orten mehrere Bestimmungen desselben Elementes vorgenommen und in Tafel VI eingetragen wurden, so hat man zur Anfertigung der Tafel XX die Mittel derselben benützt.

TAFEL XX.

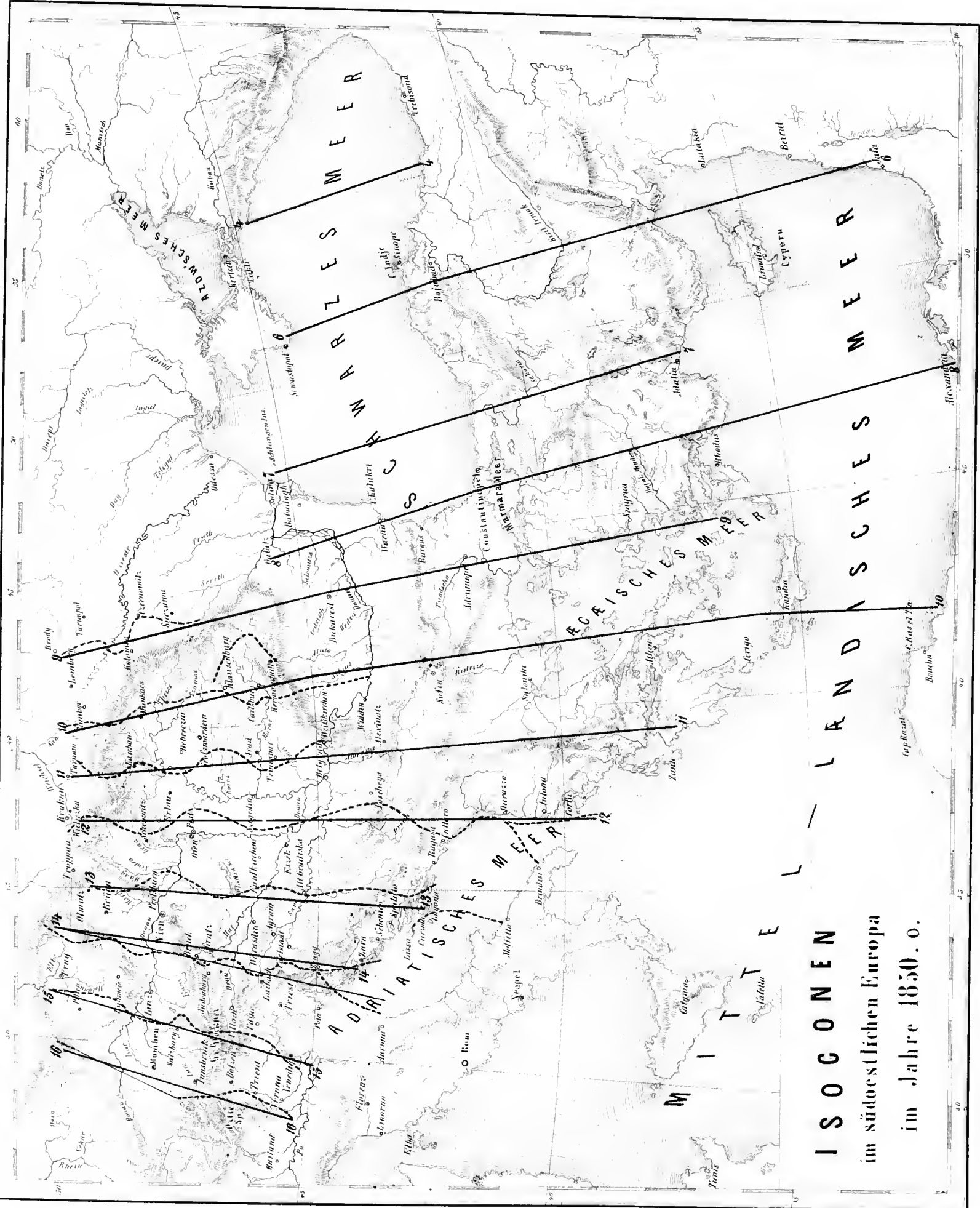
Unterschiede zwischen den in Wien und an anderen Orten bestimmten magnetischen Grössen

im Jahre 1850'0.

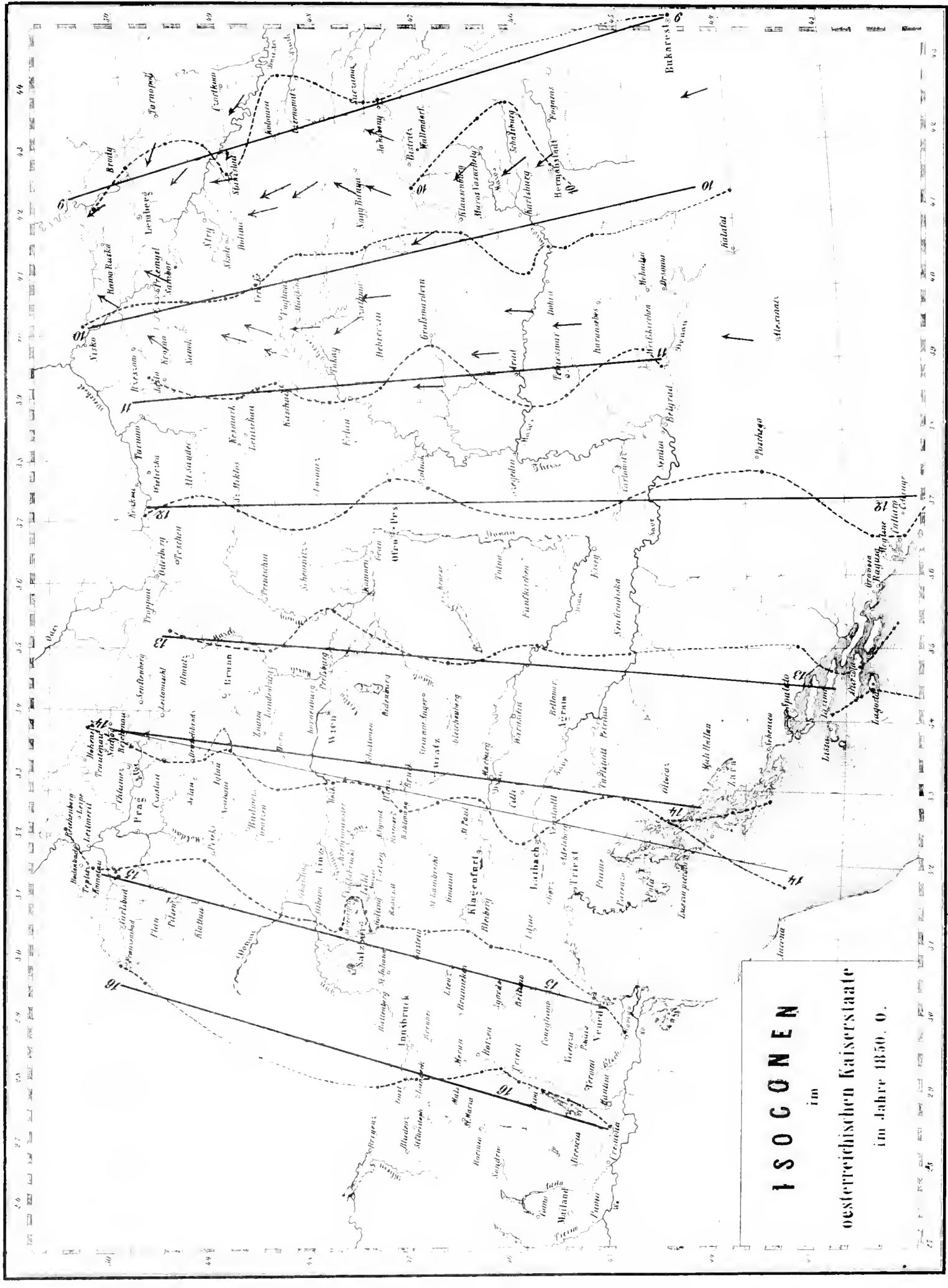
(Das Zeichen + bedeutet, dass Wien grösser ist als der verglichene Ort.)

| Ort | Nr. der Tafel VI | Unterschied in | | | | Ort | Nr. der Tafel VI | Unterschied in | | | |
|------------------------|------------------|----------------|-------------|-----------|-------------|----------------------------------|------------------|----------------|-------------|-----------|-------------|
| | | Declination | Inclination | Hor.-Int. | Gesamtkraft | | | Declination | Inclination | Hor.-Int. | Gesamtkraft |
| Adalia | 232 | +6° 17' 8" | +12° 25' | -0.6247 | +0.351 | Fiume | 77 | -0° 17' 5" | +1° 53' | -0.1107 | +0.051 |
| Adelsberg | 70 | — | +1 33 | -0.0918 | +0.042 | Fogaros | 212 | +3 52.5 | +2 57 | -0.1883 | +0.045 |
| Adelsberg Grotte | 71 | — | +1 28 | -0.0907 | +0.032 | Franzensbad ... | 34 | — | -1 56 | +0.1149 | -0.063 |
| Admont | 79 | -0 39 3 | +0 17 | -0.0151 | +0.012 | Fünfkirchen.... | 144 | +0 57.8 | +1 49 | -0.1106 | +0.042 |
| Aflenz | 94 | -0 17.9 | +0 23 | -0.0186 | +0.021 | Galatz | 223 | +5 54.0 | +2 46 | -0.2076 | -0.021 |
| Agordo | 30 | -2 5.5 | +0 49 | -0.0472 | +0.026 | Gamskarkogel .. | 43 | — | +0 30 | -0.0108 | +0.057 |
| Agram | 113 | -0 3.0 | +1 47 | -0.1050 | +0.049 | Gastein (Bad) .. | 42 | -1 24.0 | +0 18 | -0.0227 | -0.002 |
| Alexandria | 229 | +5 22.1 | +20 37 | -0.9189 | +0.564 | St. Georgen.... | 55 | -1 32.8 | -0 23 | +0.0209 | -0.016 |
| Alexinatz | 179 | +2 2.0 | +4 9 | -0.2577 | +0.072 | Gleichenberg... Gmünd..... | 111 | +0 12.5 | +0 49 | -0.0558 | +0.006 |
| Altheim | 45 | -1 18.7 | -0 27 | +0.0406 | +0.026 | Gölling..... | 54 | -1 32.6 | +0 35 | -0.0268 | +0.032 |
| Ancona | 53 | -0 41.9 | +3 11 | -0.1814 | +0.093 | Golling..... | 44 | -1 26.3 | -0 8 | +0.0094 | +0.009 |
| Antivari..... | 153 | +1 20.5 | +5 41 | -0.3008 | +0.189 | Görz..... | 59 | — | +1 20 | -0.0792 | +0.036 |
| Arad..... | 176 | +2 39.0 | +2 17 | -0.1283 | +0.074 | Gratz..... | 103 | -0 15.4 | -0 47 | -0.0485 | +0.018 |
| Beirut | 238 | +7 14.2 | +17 15 | -0.8380 | +0.436 | Gratzen..... | 86 | -0 48.2 | -0 38 | +0.0555 | +0.023 |
| Belgrad | 168 | +2 15.9 | +3 1 | -0.1994 | +0.032 | Gravosa..... | 140 | +1 7.4 | +4 56 | +0.2674 | +0.158 |
| Bellovár..... | 130 | +0 22.5 | +1 41 | -0.1043 | +0.035 | Groswarden... Hermannstadt .. | 182 | +2 39.5 | +1 30 | -0.0949 | +0.027 |
| Belluno | 31 | — | +0 58 | -0.0584 | +0.025 | Hofgastein..... | 207 | +4 1.2 | +3 0 | -0.1951 | +0.038 |
| Bistritz | 208 | +3 44.0 | +1 13 | -0.1248 | +0.004 | Hohenebel..... | 41 | — | +0 18 | -0.0146 | +0.016 |
| Bleiberg | 60 | -1 3.7 | +0 52 | -0.0535 | +0.020 | Hohenelbe..... | 105 | -0 42.4 | -1 53 | +0.1173 | -0.050 |
| Bludenz | 6 | -2 54.2 | -0 13 | +0.0248 | +0.021 | Horn..... | 107 | -0 6.1 | -0 25 | +0.0286 | -0.003 |
| Bodenbach | 69 | -1 21.0 | -2 15 | +0.1322 | +0.079 | Jaffa..... | 235 | +7 15.1 | +19 42 | -0.9063 | +0.519 |
| Böckstein | 40 | — | +0 31 | -0.0147 | +0.051 | Jakobeny..... | 216 | +4 41.2 | +1 42 | -0.1223 | -0.001 |
| Böjuk-Liman .. | 227 | +6 0.2 | +8 6 | -0.4749 | +0.157 | Iglau | 106 | -0 22.5 | -1 0 | +0.0573 | -0.036 |
| Bombah | 197 | +3 6.8 | +17 53 | -0.8152 | +0.518 | Imst..... | 16 | -2 33.7 | -0 6 | +0.0275 | +0.047 |
| Bornio..... | 11 | -2 42.9 | +0 21 | -0.0003 | +0.057 | Indje Cap..... | 236 | — | +6 28 | +0.3900 | +0.118 |
| Botzen | 22 | -2 29.0 | +0 25 | -0.0174 | +0.029 | lunsbruck..... | 23 | -2 17.0 | +0 2 | +0.0158 | +0.042 |
| Bregenz | 5 | -2 52.2 | -0 32 | +0.0416 | +0.007 | St. Johann..... | 35 | -1 41.5 | -0 7 | +0.0169 | +0.020 |
| Brenner | 24 | -2 16.4 | +0 19 | +0.0010 | +0.054 | Ischl..... | 56 | -1 25.9 | -0 5 | +0.0115 | +0.039 |
| Brescia | 9 | -2 48.1 | +1 7 | -0.0519 | +0.063 | Isola bella..... | 1 | -3 53.2 | +0 32 | -0.0110 | +0.062 |
| Brindisi | 138 | +1 17.6 | +6 56 | -0.3708 | +0.210 | Kalafat..... | 193 | +3 14.6 | +3 55 | -0.2462 | +0.063 |
| Brody..... | 214 | +4 30.8 | -0 27 | -0.0048 | +0.087 | Kalaki Cap.... | 225 | +5 46.9 | — | — | — |
| Bruck..... | 96 | -0 17.7 | +0 26 | -0.0263 | +0.011 | Kallwang..... | 85 | -0 26.2 | +0 28 | -0.0215 | +0.027 |
| Brünn | 128 | -0 14.3 | -0 58 | +0.0621 | -0.019 | Karansebes.... | 185 | +3 8.5 | +3 11 | -0.1727 | +0.111 |
| Brunnecken.... | 29 | -2 7.9 | +0 26 | -0.0123 | +0.043 | Karlsbad..... | 38 | -2 2.0 | -1 53 | +0.1124 | -0.060 |
| Budweis..... | 78 | — | +0 47 | +0.0499 | -0.016 | Karlsburg..... | 202 | +3 51.4 | +2 40 | -0.1793 | +0.023 |
| Bukarest..... | 220 | +4 30.7 | +4 3 | -0.2545 | +0.065 | Karlstadt..... | 104 | -0 13.7 | +1 53 | -0.1104 | +0.052 |
| Burgasz..... | 222 | +5 32.6 | +6 51 | -0.3558 | +0.228 | Kaschau..... | 175 | +2 31.8 | 0 0 | -0.0196 | -0.042 |
| Candia..... | 215 | +3 52.8 | +14 3 | -0.6816 | +0.409 | Kenesehe..... | 142 | +0 53.8 | +0 53 | -0.0668 | -0.007 |
| Carlowitz..... | 159 | +2 30.2 | +3 3 | -0.2079 | +0.019 | Kesmark..... | 169 | +2 8.9 | -0 23 | +0.0001 | -0.064 |
| Cattaro | 148 | +1 30.6 | +4 53 | -0.2791 | +0.108 | Klagenfurt.... | 74 | -0 54.4 | +0 50 | -0.0545 | +0.012 |
| Cerigo..... | 195 | +3 4.7 | +12 43 | -0.6257 | +0.378 | Klattau..... | 48 | -1 48.8 | -0 57 | +0.0827 | +0.034 |
| Cettigne..... | 152 | — | +5 11 | -0.2897 | +0.147 | Klausenburg... Kolomea..... | 203 | +3 39.4 | +1 56 | -0.1293 | +0.019 |
| Chersones Cap. | 234 | +7 20.9 | +4 29 | -0.2821 | +0.069 | Komotan..... | 213 | +4 31.2 | +0 48 | -0.0627 | -0.011 |
| Chiesch..... | 46 | -1 50.6 | -1 34 | +0.1093 | -0.021 | Krakau..... | 51 | -1 40.0 | -1 53 | +0.1296 | -0.018 |
| Chlumetz..... | 102 | -0 34.4 | -1 30 | +0.0924 | -0.034 | Kreith..... | 160 | +1 57.8 | -1 5 | +0.0502 | -0.068 |
| St. Christoph .. | 10 | — | +0 1 | +0.0241 | +0.058 | Kremsmünster.. | 62 | — | +0 53 | -0.0451 | +0.041 |
| Cilli..... | 98 | -0 7.1 | +1 24 | -0.0880 | +0.027 | Krosno..... | 67 | -0 58.1 | -0 25 | +0.0305 | +0.001 |
| Como..... | 2 | -3 12.7 | +0 37 | -0.0208 | +0.053 | Kwasnei..... | 181 | +2 32.4 | -0 29 | +0.0202 | -0.035 |
| Conegliano.... | 32 | -1 41.0 | +1 11 | -0.0685 | +0.036 | Lagosta..... | 117 | — | -1 20 | +0.0937 | -0.007 |
| Corfu..... | 158 | +1 50.1 | +8 20 | -0.4304 | +0.264 | Laibach..... | 131 | +0 35.5 | — | — | — |
| Cremona..... | 8 | -2 46.0 | +1 21 | -0.0686 | +0.062 | St. Lambrecht.. | 81 | -0 24.7 | +1 23 | -0.0812 | +0.039 |
| Curzola..... | 134 | +0 35.7 | +4 22 | -0.2430 | +0.131 | Landeck..... | 75 | -0 58.7 | +0 28 | -0.0302 | +0.008 |
| Czaslau..... | 100 | -0 30.9 | -1 14 | +0.0859 | -0.008 | Latakia..... | 15 | -2 36.5 | -0 5 | +0.0152 | +0.021 |
| Czernowitz.... | 219 | +4 8.3 | +0 56 | -0.0871 | -0.015 | Leipa..... | 239 | +7 39.2 | +15 14 | -0.7639 | +0.384 |
| Czortkow..... | 218 | +4 43.9 | +0 44 | -0.0639 | -0.025 | Leitomischl... Lemberg..... | 82 | — | -2 1 | +0.1268 | -0.052 |
| Debreczin..... | 180 | +2 50.1 | +1 5 | -0.0766 | +0.003 | Lesina..... | 122 | -0 0.1 | -1 14 | +0.0768 | -0.030 |
| Dobra..... | 190 | +3 19.2 | +2 43 | -0.1583 | +0.074 | Lentschau..... | 205 | +4 22.8 | -0 23 | +0.0021 | -0.061 |
| Dobracz..... | 61 | — | +0 51 | -0.0421 | +0.042 | Lienz..... | 126 | +0 15.9 | — | -0.2365 | — |
| Dolina..... | 206 | +4 28.3 | +0 15 | -0.0372 | -0.044 | Lietzen..... | 171 | +2 15.0 | -0 13 | -0.0082 | -0.055 |
| Durazzo..... | 154 | +1 37.9 | +6 15 | -0.3423 | +0.181 | Limassol..... | 37 | -1 46.3 | +0 28 | -0.0201 | +0.031 |
| Eisenerz..... | 87 | -0 34.8 | +0 22 | -0.0191 | +0.017 | Linz..... | 72 | -1 1.3 | +0 7 | -0.0049 | +0.003 |
| Erlau..... | 166 | +1 46.2 | +0 46 | -0.0642 | -0.020 | Lissa..... | 233 | +6 35.6 | +15 58 | -0.7779 | +0.424 |
| Erzberg..... | 89 | — | +0 17 | -0.0122 | +0.019 | — | 73 | -1 8.7 | -0 25 | +0.0283 | -0.004 |
| Essog..... | 147 | +1 16.3 | +2 17 | -0.1327 | +0.065 | — | 116 | +0 25.4 | +4 33 | -0.2525 | +0.137 |

| Ort | Nr. der Tafel VI | Unterschied in | | | | Ort | Nr. der Tafel VI | Unterschied in | | | |
|------------------|------------------------|----------------|-------------|-------------|-------------|------------------|------------------------|----------------|-------------|-------------|-------------|
| | | Declination | Inclination | Hor. - Int. | Gesamtkraft | | | Declination | Inclination | Hor. - Int. | Gesamtkraft |
| Losonez..... | 157 | +2° 1' 17" | + 0° 10' | -0.0271 | -0.035 | Sambor..... | 198 | +4° 5' 16" | - 0° 15' | -0.0028 | -0.048 |
| Lundenburg... | 132 | +0 22.5 | - 0 26 | +0.0153 | -0.035 | Sandec..... | 170 | +2 0.6 | - 0 29 | +0.0198 | -0.035 |
| Lussin piccolo.. | 80 | -0 39.3 | + 2 24 | -0.1317 | +0.084 | Sanok..... | 186 | +3 17.0 | - 0 25 | +0.0077 | -0.052 |
| Mailand..... | 4 | -3 39.6 | + 1 9 | -0.0471 | +0.078 | Schässburg.... | 211 | +3 23.5 | + 2 34 | -0.1763 | +0.014 |
| Mals Hallan.... | 109 | — | + 2 44 | -0.1614 | +0.070 | Schemnitz..... | 150 | +1 13.8 | + 0 13 | -0.0253 | -0.022 |
| Mals..... | 14 | -2 31.6 | + 0 16 | +0.0004 | +0.045 | Scherding..... | 50 | -1 17.9 | - 0 27 | +0.0456 | +0.031 |
| Mantua..... | 17 | -2 9.1 | + 1 22 | -0.0724 | +0.056 | Schlangeninsel. | 230 | +6 42.3 | + 3 36 | -0.2765 | -0.043 |
| Marburg..... | 108 | +0 6.0 | + 1 4 | -0.0634 | +0.029 | Schönau b. Tepl. | 65 | — | - 2 4 | +0.1352 | -0.037 |
| S. Maria..... | 12 | -2 34.9 | + 0 20 | -0.0058 | +0.042 | Schottwien.... | 110 | -0 19.3 | + 0 22 | +0.0195 | +0.016 |
| Maros-Vásárhely | 209 | +3 22.3 | + 2 2 | -0.1463 | -0.002 | Sebenico..... | 112 | -0 3.3 | + 3 19 | -0.1898 | +0.095 |
| Megline..... | 145 | +1 2.6 | + 5 13 | -0.2843 | +0.162 | Seelau..... | 97 | -0 38.4 | - 1 7 | +0.0789 | -0.005 |
| Mehadia..... | 189 | +2 57.3 | + 3 37 | -0.1945 | +0.127 | Semlin..... | 167 | +2 7.3 | + 3 4 | -0.1703 | +0.099 |
| Melk..... | 99 | -0 22.8 | - 0 18 | +0.0178 | -0.011 | Senftenberg.... | 124 | +0 2.3 | - 1 26 | +0.0853 | -0.045 |
| Meran..... | 21 | -2 33.0 | + 0 23 | -0.0068 | +0.047 | Silberberg.... | 84 | — | - 0 28 | +0.0436 | +0.023 |
| Szt. Miklós.... | 156 | +1 41.9 | - 0 18 | +0.0034 | -0.042 | Sinope..... | 237 | +7 51.0 | + 6 35 | -0.4044 | +0.105 |
| Molfetta..... | 129 | +0 43.2 | + 6 12 | -0.3276 | +0.202 | Skole..... | 199 | +4 2.5 | + 0 12 | -0.0347 | -0.046 |
| Munkacz..... | 191 | +3 17.2 | + 0 37 | -0.0481 | -0.008 | Sondrio..... | 7 | -2 34.7 | + 0 27 | -0.0091 | +0.053 |
| Nachod..... | 115 | — | - 1 33 | +0.1134 | +0.002 | Spalato..... | 125 | +0 5.3 | + 3 34 | -0.2030 | +0.103 |
| Nagy-Bánya... | 200 | +3 42.5 | + 1 25 | -0.1105 | -0.020 | Stanislaus.... | 210 | +4 29.3 | + 0 22 | -0.0438 | -0.039 |
| Neu-Gradisca.. | 136 | +0 39.3 | + 2 21 | -0.1362 | +0.067 | Stein am Anger | 119 | — | + 0 26 | -0.0454 | -0.032 |
| Neuhaus..... | 91 | -0 52.1 | - 0 49 | +0.0623 | +0.008 | Steinberg..... | 83 | — | - 0 34 | +0.0437 | +0.007 |
| Neustadtl..... | 93 | — | + 1 38 | -0.0864 | +0.066 | Stilfserjoch.... | 13 | — | + 0 19 | -0.0039 | +0.043 |
| Neu-Szőny.... | 143 | +1 4.0 | + 0 37 | -0.0431 | +0.003 | Stry..... | 204 | +4 9.7 | + 0 5 | -0.0340 | -0.066 |
| Nisko..... | 184 | +3 26.3 | - 0 59 | +0.0405 | -0.073 | Suczawa..... | 221 | +4 43.4 | + 1 33 | -0.1137 | -0.006 |
| Odessa..... | 231 | +4 57.0 | + 2 8 | -0.2592 | -0.229 | Sulina..... | 228 | +6 16.3 | — | -0.2552 | — |
| Ödenburg..... | 127 | +0 10.4 | + 0 15 | -0.0243 | -0.014 | Szathmar..... | 194 | +3 22.5 | + 0 59 | -0.0769 | -0.014 |
| Ofen..... | 151 | +1 11.2 | + 0 47 | -0.0510 | +0.012 | Szegedin..... | 164 | +2 13.6 | + 1 53 | -0.1154 | +0.042 |
| Olmütz..... | 135 | +0 28.2 | - 1 2 | +0.0368 | -0.043 | Szolnok..... | 165 | +1 51.2 | + 1 7 | -0.0823 | -0.005 |
| Orsowa..... | 188 | +2 58.9 | + 3 30 | -0.2043 | +0.091 | Takli Cap..... | 240 | +9 12.4 | + 4 3 | -0.3081 | -0.043 |
| Ortaköj..... | 226 | +5 54.6 | + 7 59 | -0.4546 | +0.180 | Tarnopol..... | 217 | +4 16.6 | - 0 6 | -0.0202 | -0.063 |
| Ortočaz..... | 101 | -0 25.2 | + 2 20 | -0.1335 | +0.070 | Tarnow..... | 173 | +2 21.6 | - 1 7 | +0.0325 | -0.116 |
| Padua..... | 28 | -1 36.0 | + 1 24 | -0.0862 | +0.031 | Temesvár..... | 174 | +2 43.8 | + 2 36 | -0.1441 | +0.087 |
| Parenzo..... | 58 | -1 11.9 | — | — | — | Teplitz..... | 64 | -1 25.7 | - 2 8 | +0.1320 | -0.058 |
| St. Paul..... | 90 | -0 22.6 | + 0 56 | -0.0559 | +0.025 | Teschchen..... | 146 | +0 59.8 | - 0 48 | +0.0424 | -0.037 |
| Pavia..... | 3 | -3 32.8 | + 1 9 | -0.0543 | +0.063 | Tokai..... | 178 | +2 46.1 | + 0 57 | -0.0666 | +0.004 |
| Petrinia..... | 120 | +0 8.2 | + 2 0 | -0.1139 | +0.063 | Tolna..... | 149 | +1 2.3 | + 1 30 | -0.0992 | +0.008 |
| Pilsen..... | 49 | — | - 1 16 | +0.0930 | +0.003 | Trapezunt.... | 241 | +10 28.9 | + 8 7 | -0.5231 | +0.072 |
| Pisek..... | 68 | -1 19.4 | - 0 52 | +0.0739 | +0.027 | Trentschin.... | 139 | — | - 0 32 | +0.0118 | -0.063 |
| Plan..... | 36 | -1 59.5 | - 1 37 | +0.1012 | -0.039 | Trient..... | 20 | -2 23.4 | + 0 59 | -0.0356 | +0.078 |
| Pola..... | 66 | -0 42.2 | + 2 3 | -0.1232 | +0.040 | Triest..... | 63 | -0 58.1 | + 1 33 | -0.0915 | +0.043 |
| Polsterberg.... | 88 | — | + 0 21 | -0.0168 | +0.019 | Troppau..... | 137 | +0 47.6 | - 1 4 | +0.0543 | -0.055 |
| Poschega..... | 161 | +1 39.5 | + 3 41 | -0.2317 | +0.060 | Udine..... | 47 | — | + 1 11 | -0.0692 | +0.035 |
| Prag..... | 76 | -1 2.6 | - 1 53 | +0.1033 | -0.035 | Unghvár..... | 187 | +3 10.1 | + 0 30 | -0.0467 | -0.024 |
| Pressburg..... | 133 | +0 11.5 | + 0 17 | -0.0176 | +0.006 | Valona..... | 155 | +1 43.2 | + 7 12 | -0.3886 | +0.209 |
| Przemysl..... | 192 | +3 57.2 | - 0 32 | +0.0007 | -0.089 | Venedig..... | 33 | -1 30.7 | + 1 29 | -0.0863 | +0.044 |
| Radstadt..... | 52 | -1 18.2 | + 0 6 | -0.0085 | -0.003 | Veretzke..... | 196 | +3 46.4 | + 0 22 | -0.0345 | -0.018 |
| Ragusa..... | 141 | +1 16.0 | + 4 47 | -0.2728 | +0.128 | Verona..... | 19 | -2 5.0 | + 1 11 | -0.0663 | +0.042 |
| Rattenberg.... | 26 | -2 1.8 | - 0 6 | +0.0158 | +0.020 | Vicenza..... | 25 | -2 4.3 | + 1 15 | -0.0759 | +0.030 |
| Rawa Ruska.... | 201 | +4 14.7 | - 0 51 | +0.0343 | -0.065 | Vöcklabruck.... | 57 | -1 7.7 | - 0 21 | +0.0301 | +0.001 |
| Reichenau..... | 118 | -0 16.5 | - 1 21 | -0.0912 | -0.016 | Warasdin..... | 121 | — | + 1 28 | -0.0918 | +0.029 |
| Reichenberg.... | 92 | -1 12.9 | - 2 3 | +0.1271 | -0.053 | Weiskirchen.. | 177 | +2 31.4 | + 3 9 | -0.1858 | +0.079 |
| Rhodus..... | 224 | +5 6.8 | +13 7 | -0.6513 | +0.374 | Wieliczka..... | 162 | +1 49.1 | - 0 56 | +0.0317 | -0.085 |
| Riva..... | 18 | — | + 1 1 | -0.0485 | +0.055 | „ Bergwerk | 163 | — | - 0 59 | +0.0405 | -0.074 |
| Rovigo..... | 27 | -1 27.7 | + 1 38 | -0.0988 | +0.040 | Zante..... | 172 | +2 14.3 | +10 27 | -0.5262 | +0.322 |
| Rzeszow..... | 183 | +3 10.3 | - 0 46 | +0.0190 | -0.086 | Zara..... | 95 | -0 19.2 | + 2 24 | -0.1653 | +0.013 |
| Salzburg..... | 39 | -1 42.8 | - 0 30 | +0.0248 | +0.003 | Znaim..... | 114 | -0 1.4 | - 0 31 | +0.0259 | -0.027 |

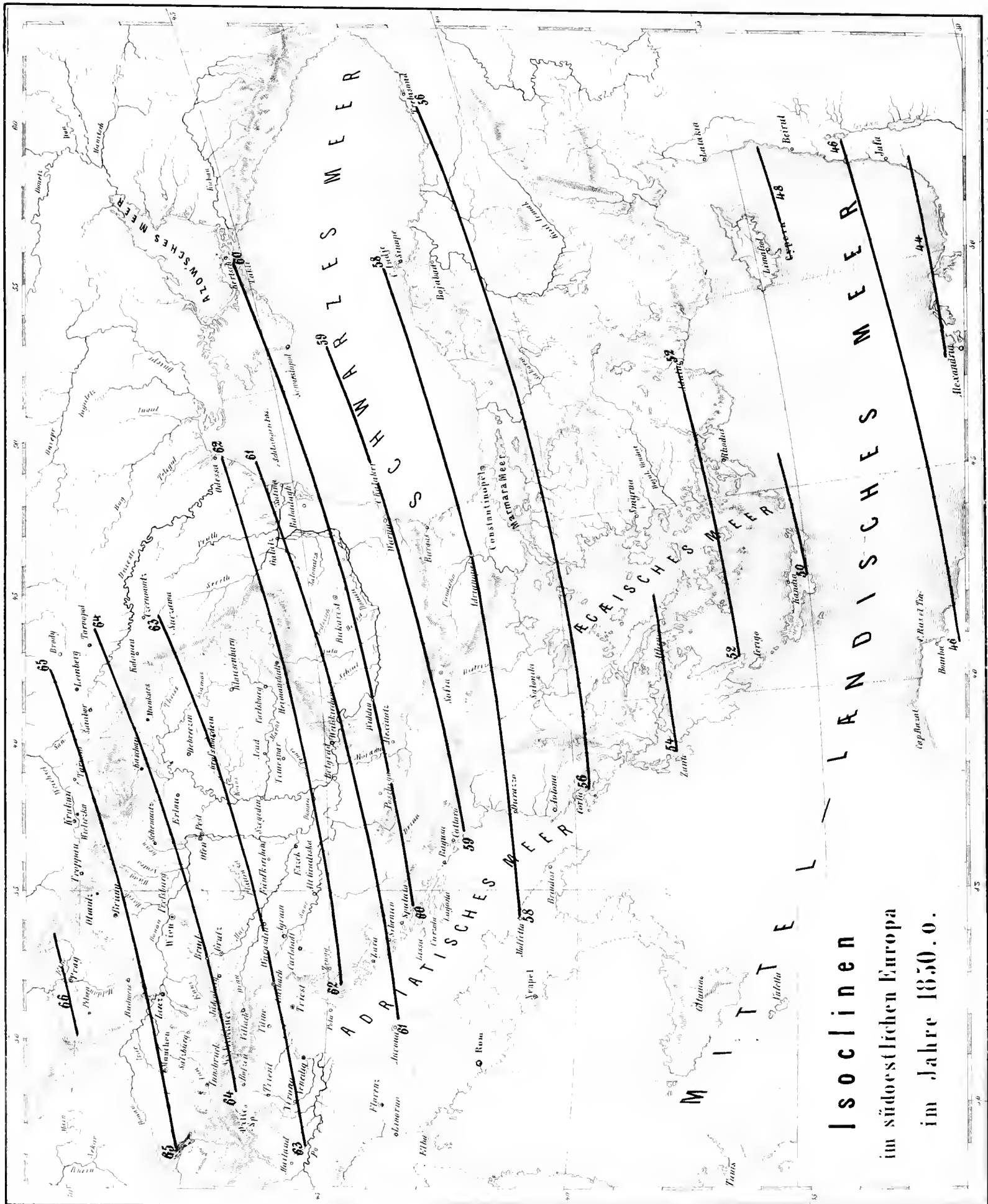


ISOCONEN
 im südöstlichen Europa
 im Jahre 1850. o.

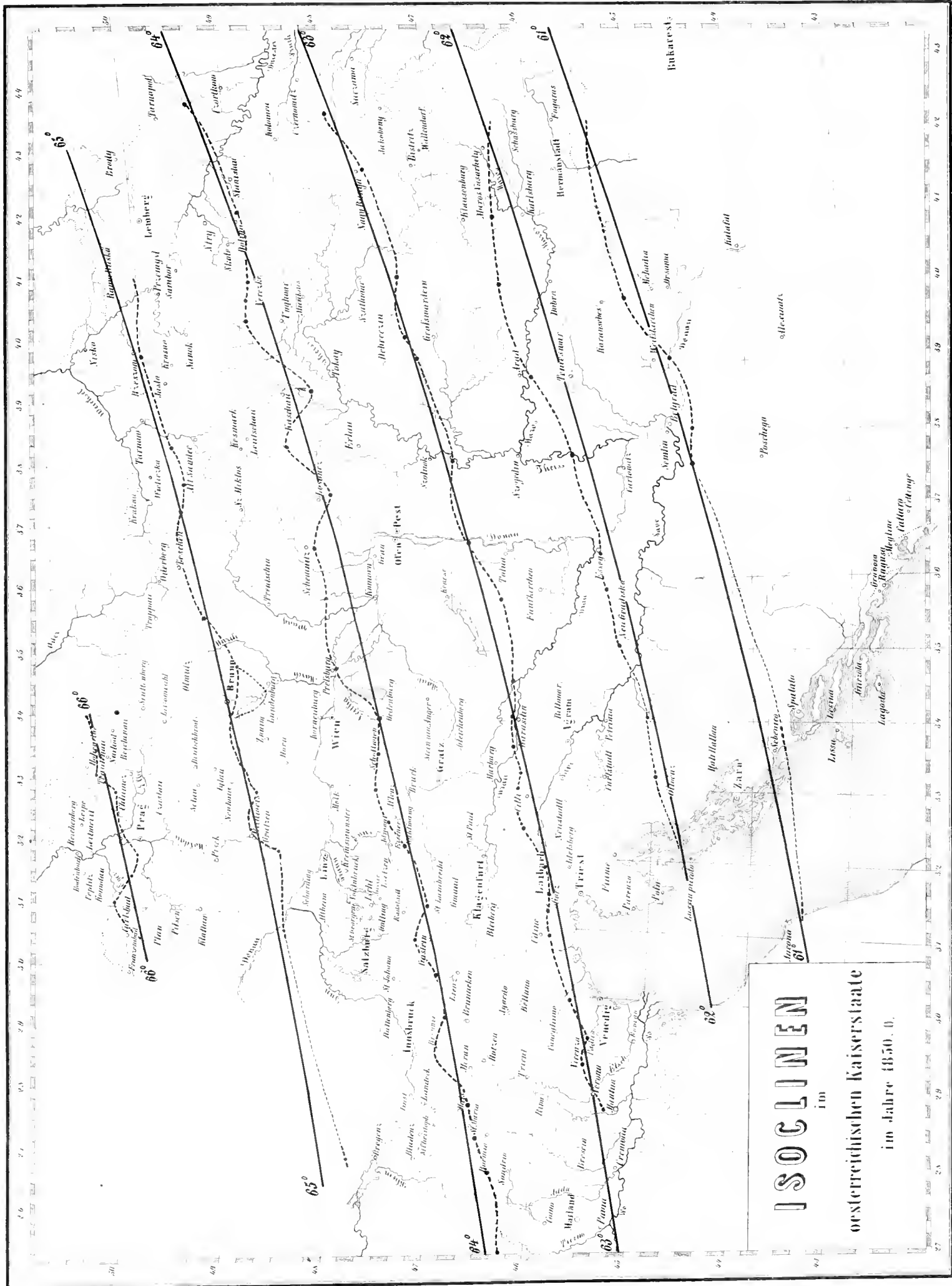


ISOGONEN
im
oesterreichischen Kaiserstaate
im Jahre 1850. 0.

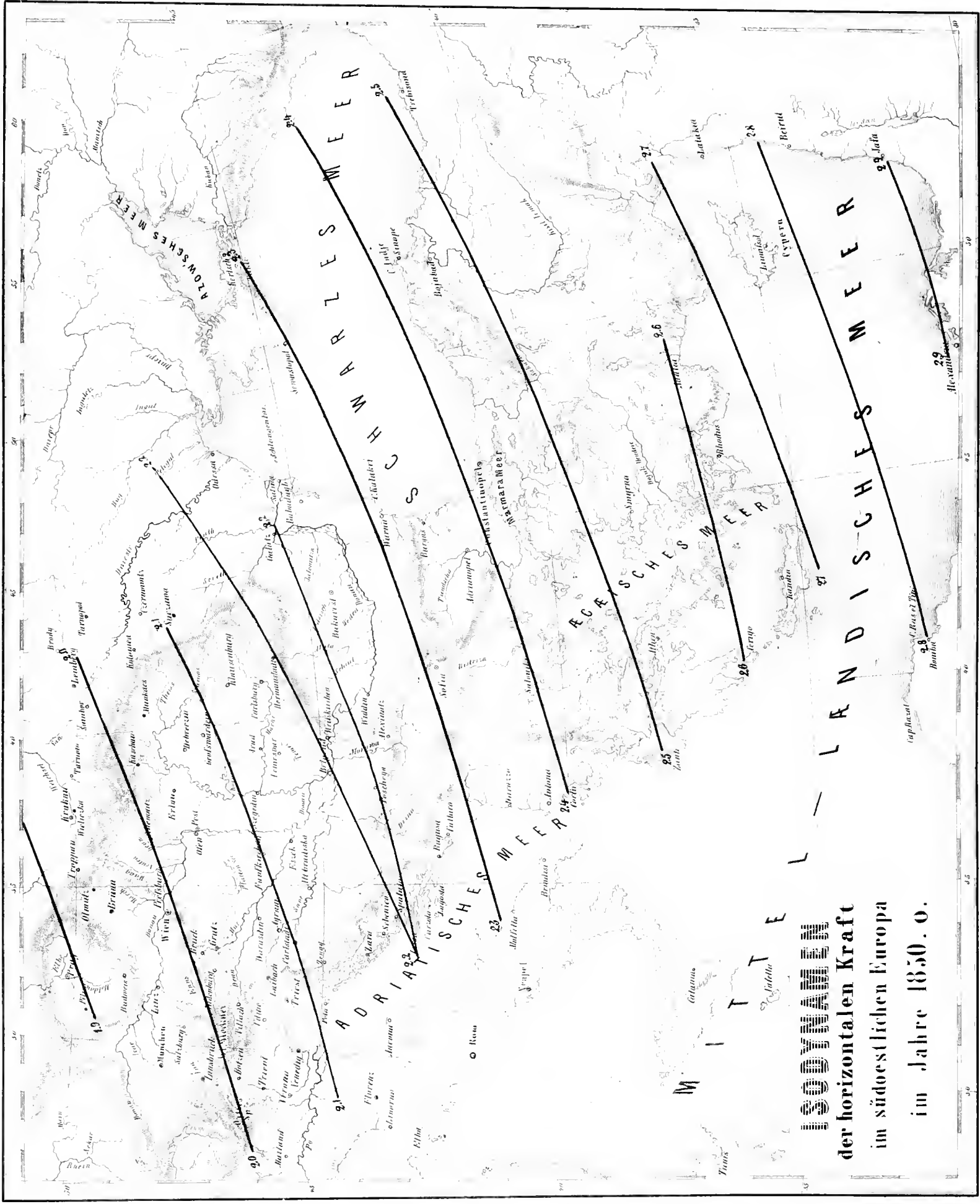




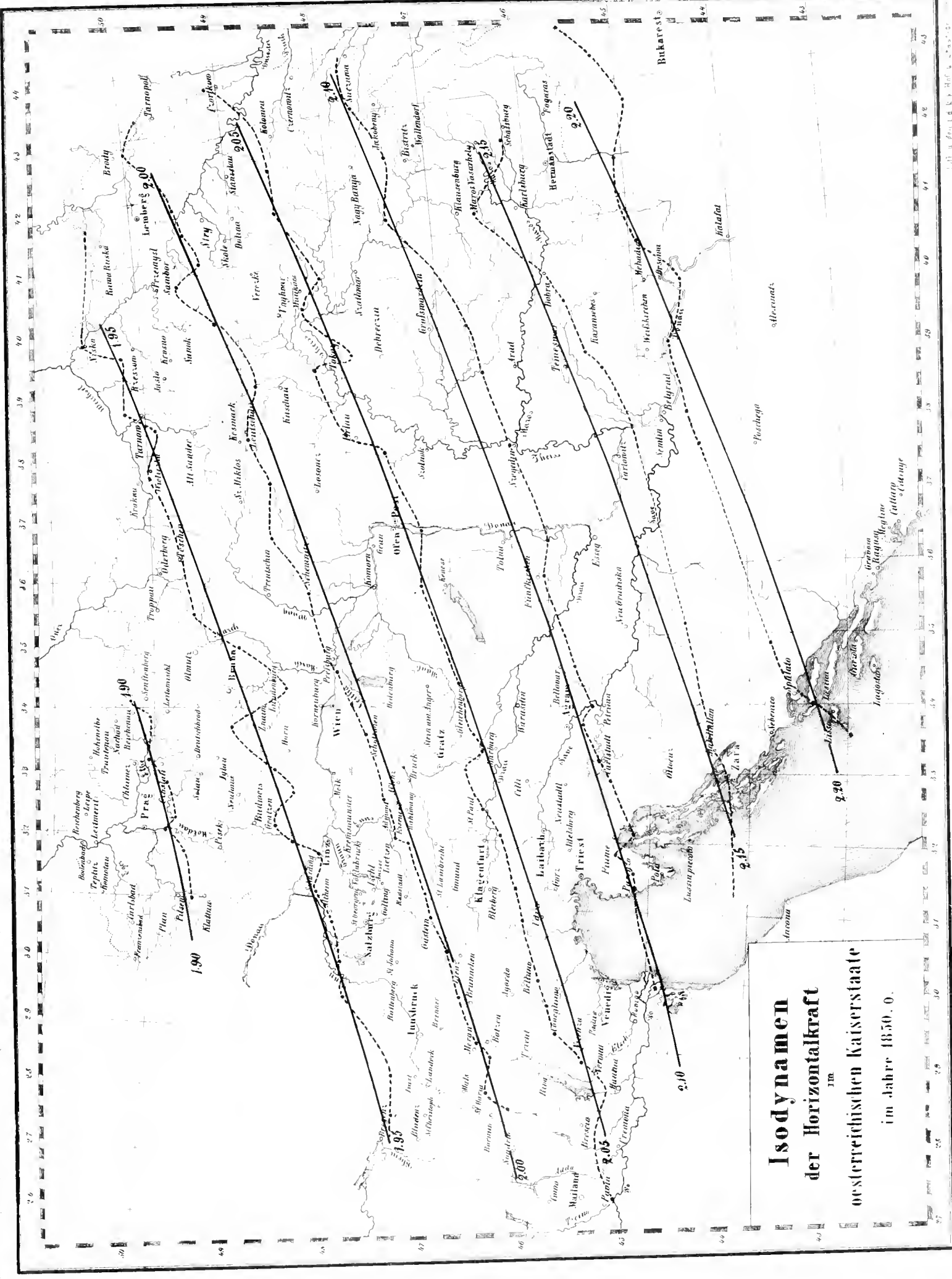
Isoclinen
 im südöstlichen Europa
 im Jahre 1850.0.



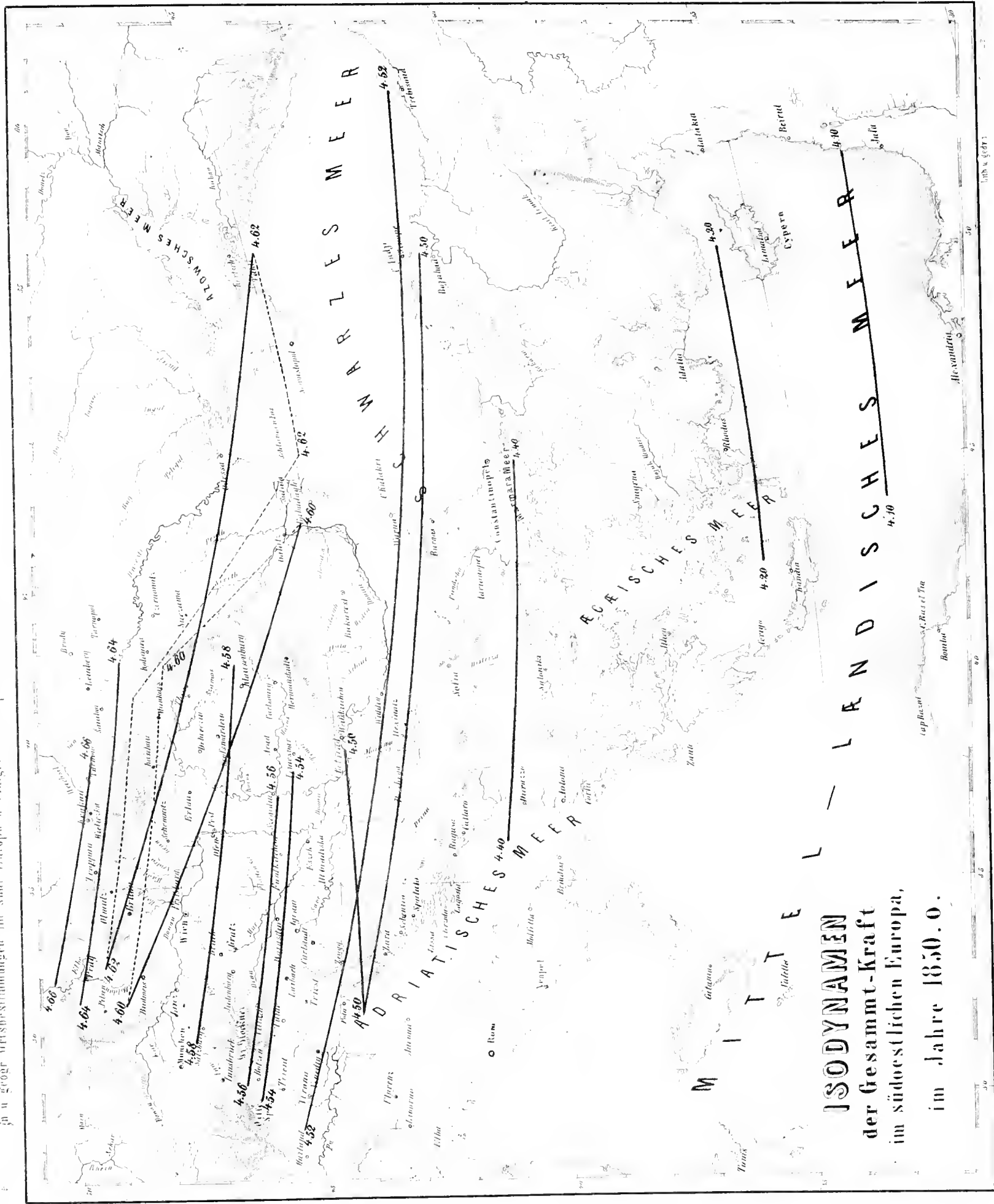
ISOCLINEN
 im
österreichischen Kaiserstaate
 im Jahre 1850. 0.



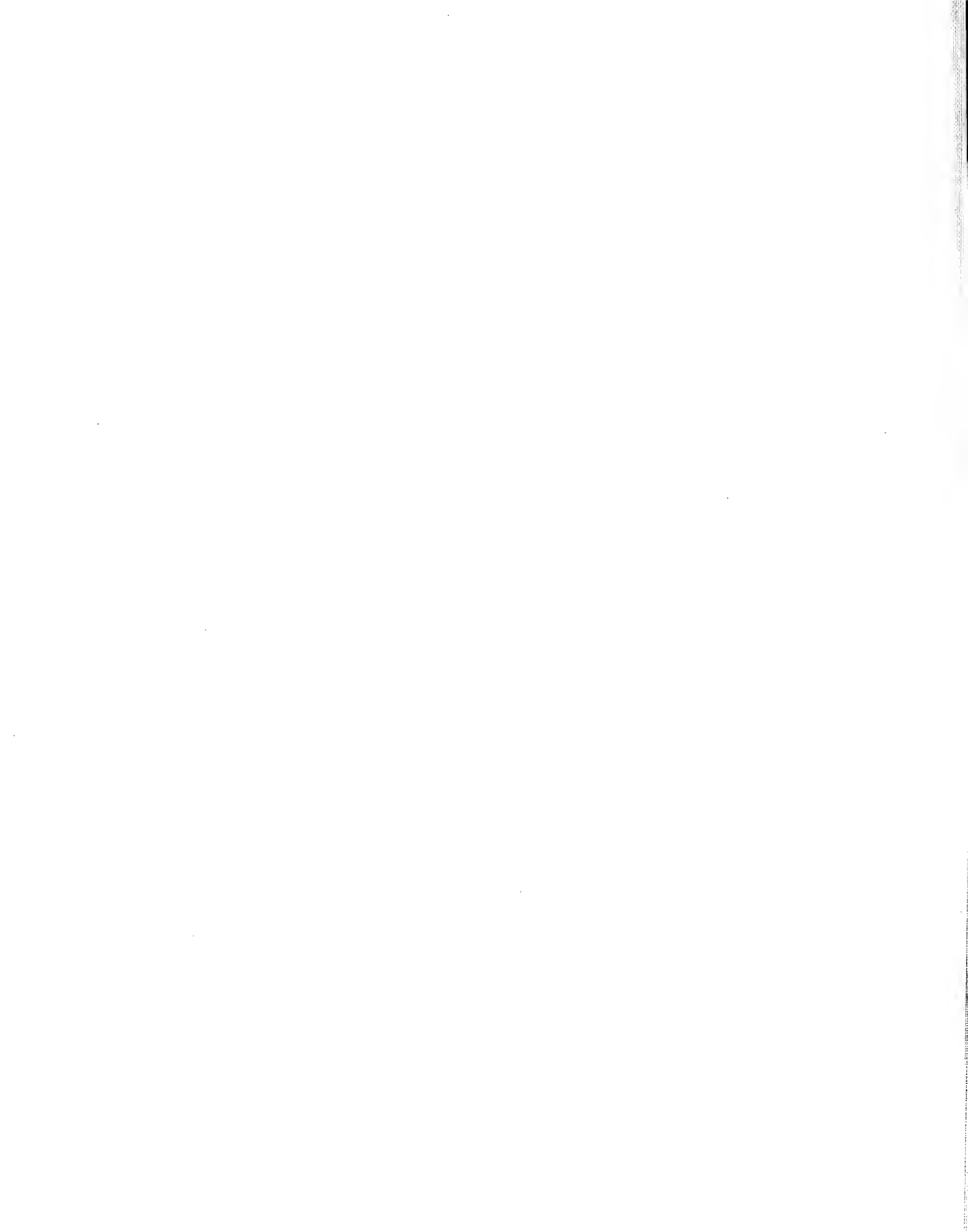
ISODYNAMEN
 der horizontalen Kraft
 im südöstlichen Europa
 im Jahre 1850. 0.

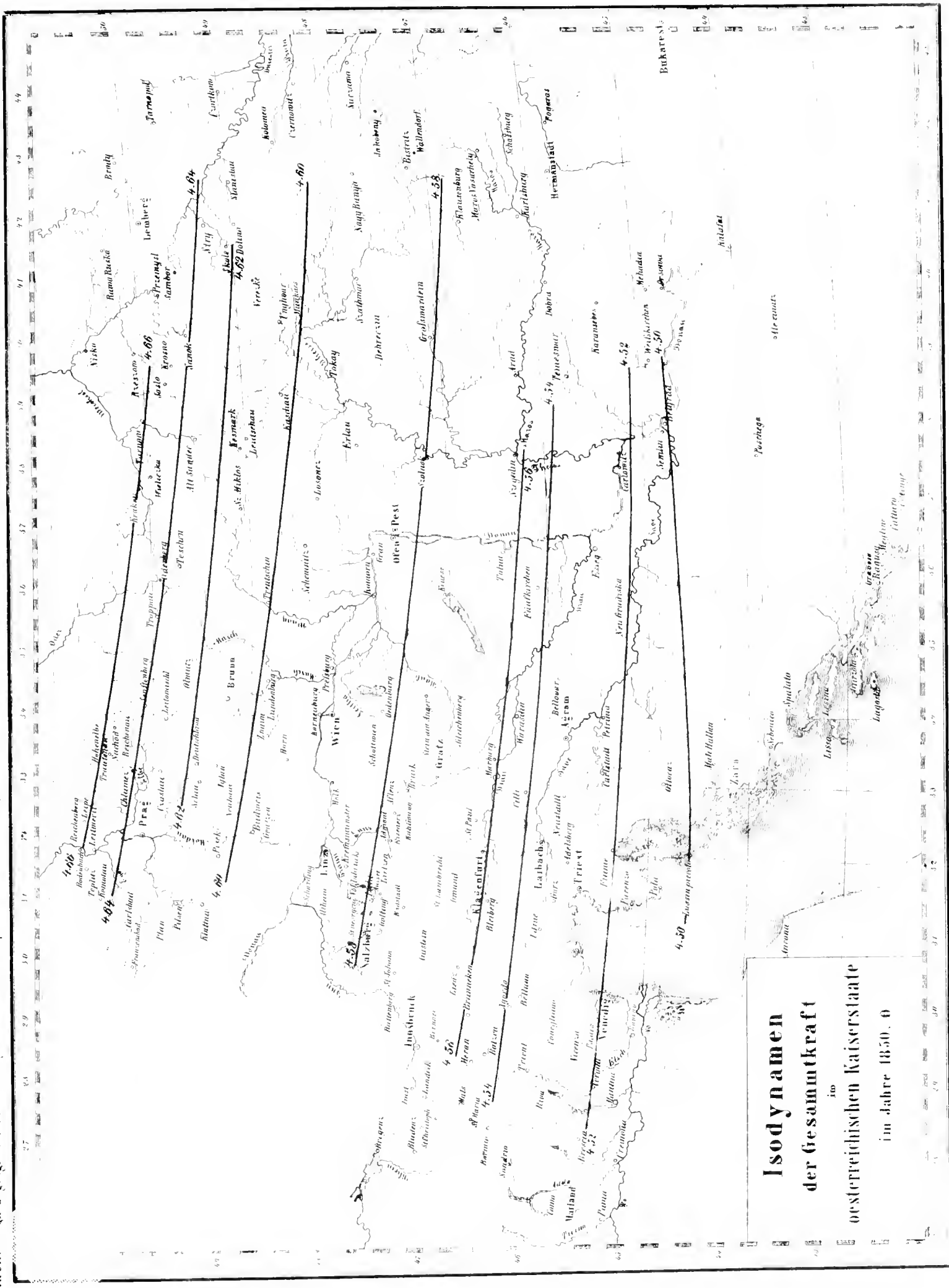


Isodynomen
 der **Horizontalkraft**
 im
oesterreichischen Kaiserstaate
 im Jahre 1850. 0.



ISODYNAMEN
 der Gesamt-Kraft
 im südöstlichen Europa,
 im Jahre 1850.0.





Isodynomen
 der Gesamtkraft
 im
 oesterreichischen Kaiserstaate
 im Jahre 1850. 0

ÜBER

WIRBELSYNOSTOSEN UND WIRBELSUTUREN

BEI FISCHEN.

VON

Professor HYRTL.

(Mit 3 Tafeln.)

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 19. MÄRZ 1860.

Es war kaum zu vermuthen, dass in einer Thierclassen, in welcher ein hoher Grad von Beweglichkeit der Wirbelsäule eine nothwendige Bedingung der Locomotion abgibt, Verschmelzungen der Wirbel so häufig auftreten, wie dieses bei den Fischen der Fall ist, ja in einer Familie dieser Classen selbst Verbindungen der Wirbel durch Näthe in grösseren Strecken normgemäss jede Beweglichkeit ausschliessen.

Ausser den Verwachsungen der vordersten Wirbel bei den Siluroiden und einigen Cyprinoiden, und ausser dem mit Verschmelzung begleiteten Eingehen der äussersten Schwanzwirbel bei einzelnen Gattungen fast aller Fischfamilien mit zweilappiger Schwanzflosse, kommen an der Wirbelsäule der Fische noch besondere Verwachsungsformen einzelner oder mehrerer Wirbel vor, welche theils mit Verkümmern der selben einhergehen, theils ohne diese auftreten. Letztere sind Ereignisse einer Altersmetamorphose, wie sie auf Tab. I, Fig. 2 von *Clarothes Heuglini* dargestellt ist. Erstere datiren als primitive Entwicklungsanomalien, höchst wahrscheinlich aus dem Fötalleben. Ein Beispiel dieser Art lieferten uns schon bei früherer Gelegenheit die *Mormyri*. Ich bemerkte von *Mormyrus dorsalis*¹⁾, dass sein zwölftletzter Wirbel länger als seine vorderen und hinteren Nachbarn ist, und zwei obere und untere Dornen trägt. Er ist ein Verschmelzungswirbel.

¹⁾ Anatomische Mittheilungen über *Mormyrus* und *Gymnarchus*. Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften, XII. Band, Seite 19 des Separatdruckes.

An einem zweiten mittlerweile acquirirten Exemplare von *Mormyrus dorsalis* fehlt diese Verschmelzung, und sein zwölftletzter Wirbel ist an Länge den übrigen gleich, mit einfachem oberen und unteren Dorn.

Die Durchsicht meiner sehr reichen Privatsammlung von Fischskeleten lieferte neue Beispiele solcher Verwachsungen in bedeutender Anzahl, und gestattete, da mehrfache Exemplare einer Art in verschiedenen Altersperioden mir zu Gebote stehen, ein Urtheil über constantes oder unconstantes Vorkommen, über primitiven oder secundären Ursprung derselben.

Die Veranlassung der angeborenen oder primitiven Synostose scheint ein Zurückbleiben der Entwicklung der Wirbelkörper zu sein. Werden diese durch unbekanntere Bedingungen in ihrer Ausbildung so gehemmt, dass ihre Länge nur die Hälfte, ein Drittel oder Viertel einer gewöhnlichen Wirbellänge beträgt, so würde, wenn keine Synostose einträte, in dem diesen verkümmerten Wirbeln angehörigen Segment der Wirbelsäule eine grössere Anzahl von Gelenken auftreten, seine Beweglichkeit somit grösser und seine Festigkeit kleiner sein, als an gleichlangen Stücken der übrigen Wirbelsäule. Entsteht aber aus den verkümmerten Wirbeln durch Synostose ein Verschmelzungswirbel, welcher nie länger gesehen wird, als $1\frac{1}{2}$ gewöhnliche Wirbel zusammen, und kommt überdies die Synostose an solchen Stellen der Wirbelsäule vor, welche Flossen tragen, und deshalb einer grösseren Festigkeit benöthigen, so wird die Synostose für die Festigkeit der Wirbelsäule weit weniger Nachtheil bringen, als mit Getrenntbleiben der verkümmerten Wirbel gegeben sein würde.

I. *Polypterus Bichir*.

Erdl erwähnt am Schlusse seiner Abhandlung über das Skelet des *Gymnarchus niloticus*¹⁾, einer bei *Polypterus* vorkommenden Verwachsung einzelner Wirbel. An zwei Exemplaren dieser Gattung war bei dem einen der zwölfte, dreizehnte und vierzehnte, bei dem anderen nur der zwölfte und dreizehnte Wirbel verwachsen. Der dadurch gebildete gemeinschaftliche Wirbelkörper war nur um die Hälfte länger, als der nächstfolgende einfache. Die *Processus spinosi* desselben waren schmaler, mehr an einander gedrängt; die *Processus transversi* an ihrer inneren Hälfte mit einander verwachsen, an der äusseren frei. Obgleich Agassiz und J. Müller dieses Umstandes nicht erwähnen, vermuthete Erdl dennoch, dass die bemerkte Verwachsung etwas Constantes sei, wogegen jedoch, wie ich glaube, schon die an zwei Exemplaren beobachtete Verschiedenheit sprechen muss.

Alles hier Mitzutheilende deutet auf Zufälligkeit dieses Vorkommens hin.

Ich habe sieben *Polypterus*-Skelete (6 *Polypterus Bichir* und 1 *Polypterus Endlicheri*) vor mir, und finde die Synostose nur an zweien. An dem jüngeren Exemplare kommt sie am 34. und 35. Bauchwirbel, an dem älteren zwischen dem 30. und 31. Bauchwirbel vor.

Der verschmolzene Wirbel des älteren Exemplares ist nur um etwas länger als seine nächst vorderen und hinteren Nachbarn. Er hat wie alle übrigen Wirbel nur eine einfache Grube an der Seitenfläche seines Körpers, allein seine doppelten Quer- und Dornfortsätze bezeugen seine Geltung für zwei. Von den Dornfortsätzen geht der vordere in der Mitte, der hintere am hinteren Ende der oberen abgerundeten Kante des Wirbelbogens ab²⁾. Beide

¹⁾ Beschreibung des Skelets von *Gymnarchus niloticus*, nebst Vergleichung mit Skeleten formverwandter Fische. in den Abhandlungen der math.-physik. Classe der Münchener Akademie. 5. Bd., 1. Abthlg. pag. 247.

²⁾ Tab. 1, Fig. 1, lit. bb.

unterscheiden sich in nichts von den Dornen einfacher Wirbel. Nur der vordere verbindet sich mit einem Flossenträger. Die beiden Querfortsätze dagegen¹⁾ haben einen gemeinschaftlichen Ursprung am unteren Rande der Seitenfläche des Wirbelkörpers. Der hintere hält die Mitte dieses Randes, und besitzt die allen Querfortsätzen zukommende Richtung nach aussen. Der vordere dagegen divergirt mit dem hinteren, und richtet sich ein wenig nach vorn. — An dem jüngeren Exemplare divergiren beide Fortsätze von einander, und gehen von der Mitte des unteren Randes der seitlichen Wirbelfläche aus. Es fällt zugleich auf, dass die Querfortsätze der nächst vorderen und hinteren Wirbel, die ersteren die Richtung des vorderen, die letzteren die Richtung des hinteren Querfortsatzes des verwachsenen Wirbels annehmen.

Über die Bedeutung dieser Verwachsung als zufällige Anomalie kann dem Gesagten zufolge kein Zweifel sein. Bemerkenswerth ist, dass selbst die Wirbelzahl bei einzelnen Individuen von *Polypterus Bichir* verschieden ist. An dem jüngsten Exemplare betrug sie 63, — an dem älteren, mit Wirbelsynostose behafteten, 65, — an den übrigen, ohne Verwachsung 66, — bei *Polypterus Endlicheri* nur 56. Die Synostose ist so vollkommen, dass auch nicht die geringste Spur einer Duplicität am Wirbelkörper zu sehen ist. Ein senkrechter Durchschnitt der verwachsenen Wirbel liess kein Überbleibsel einer Intervertebralhöhle erkennen. Sie datirt also entweder aus den frühesten Lebensperioden des Thieres, oder ist schon in der ersten Entwicklung der Wirbelsäule gegeben, und die beiden betreffenden Wirbel waren niemals getrennt.

An einem der nicht mit Wirbelsynostose behafteten Exemplare war der 25. Wirbel kürzer als der 24. und 26. Er hatte keinen oberen Dornfortsatz. Dieser war auf den 26. Wirbel gepflanzt, welcher zwei Dornfortsätze von gleicher Länge und Stärke hatte.

II. *Amia calva*.

Auf das Vorkommen von Wirbelsynostosen bei *Amia* hat Stannius zuerst aufmerksam gemacht²⁾, und das stellenweise Verschmelzen der bei dieser Gattung an der Schwanzwirbelsäule auftretenden Schaltwirbel mit den eigentlichen Wirbeln angegeben. Es heisst an jenem Orte: „Merkwürdig ist der Umstand, dass an einigen Stellen der Schaltwirbel mit dem genuine Wirbel zu einem Stücke verschmolzen ist; z. B. zwischen dem elften und zwölften Schwanzwirbelkörper findet sich kein Schaltstück, aber der elfte Wirbelkörper ist sehr lang, und trägt in seiner hinteren Hälfte die die Schwanzwirbel charakterisirenden Knorpelapophysen; der einundzwanzigste ist wieder sehr lang, und verhält sich in seiner vorderen Hälfte wie ein Schaltwirbel.“ Stannius hielt diese Verschmelzung eines genuine Wirbels mit dem zugehörigen Schaltwirbel nicht für constant.

Ich habe fünf Skelete von *Amia* verglichen und finde:

1. dass die Schaltwirbel bei *Amia ocellicauda* und *Amia calva* hinter dem 5., 6. oder 7. Caudalwirbel beginnen.
2. Dass bei einem Exemplar von *Amia calva*, an welchem die Schaltwirbel hinter dem sechsten Caudalwirbel beginnen, der siebente keinen Schaltwirbel besitzt.

¹⁾ Tab. I, Fig. 1, lit. aa.

²⁾ Handbuch der Zoologie, 2. Aufl. 1. Heft, pag. 21.

3. Dass bei *Amia ocellicauda* alle Schwanzwirbel vom fünften bis zum einundzwanzigsten mit Schaltwirbeln ausgestattet sind; vom einundzwanzigsten an bis zum letzten (32.) die Schaltwirbel fehlen; sonach auch keine Synostose zwischen geminen und Schaltwirbeln vorkommt. Alle Wirbelkörper nehmen desshalb an Länge in einem gleichförmig fortschreitenden Verhältnisse ab.

4. Bei einem halbgewachsenen Exemplare von *Amia calva*, bei welchem die Einschaltung accessorischer Wirbelkörper am siebenten Schwanzwirbel begann, hören die Schaltwirbel mit jenem des zwanzigsten auf. Der 21. Wirbel ist etwas länger als der 20., aber nicht auffallend. Er trägt zwei obere Dornen, was nicht der Fall sein könnte, wenn er mit seinem Schaltwirbel verwachsen genommen wird. Der 24. Wirbel ist wieder etwas länger als sein Vormann, und trägt einen oberen so wie zwei untere Dornen, was gleichfalls gegen eine Verwachsung mit einem zugehörigen Schaltwirbel spricht.

5. An einem vollkommen ausgebildeten sehr alten Exemplare von 24 Zoll Länge, bei welchem die Schaltwirbel hinter dem sechsten begannen, ist der 20. Wirbel des Schwanzes etwas länger als der nächst vordere, mit einfachem oberen und unteren Dorn. Er kann immerhin als mit seinem zugehörigen Schaltwirbel verwachsen angesehen werden. Der 21. Wirbel besitzt einen getrennten Schaltwirbel; der 22. keinen. Der 23. Wirbel ist doppelt so lang als seine Vorfahrer, trägt jedoch zwei obere Dornen zur Gänze, einen unteren Dorn ganz, und einen zweiten nur zur Hälfte, indem die andere Hälfte vom nächstfolgenden Wirbel getragen wird, welcher keinen oberen Dorn besitzt. Die elf folgenden Schwanzwirbel haben sämmtlich untere Dornen, und nur die zwei ersten von ihnen auch obere.

6. Bei dem 26 Zoll langen Exemplare, an welchem die Schaltwirbel am fünften Schwanzwirbel beginnen, hat der 21. keinen Schaltwirbel. Der 22. ist länger als der nächst frühere, hat zwei obere und einen unteren Dorn¹⁾. Der 23. hat gewöhnliche Länge; keine oberen, aber einen starken unteren Dorn, welcher zugleich vom 24. Wirbel getragen wird. Der 25. hat wieder keinen oberen aber einen dicken unteren Dorn, und die folgenden neun Wirbel besitzen sämmtlich untere, aber nur die drei ersteren ihre oberen Dornen. Die Wirbelsynostosen bei *Amia* sind also weder constant, noch wo sie auftreten, auf dieselben Wirbel angewiesen. Ein verticaler Durchschnitt der verschmolzenen Wirbel lässt keinen Überrest eines *Carum intervertebrale* erkennen. Die Verschmelzung ist somit eine primitive.

III. *Thynnus vulgaris*.

Ein ähnlicher Fall unconstanter Wirbelsynostose ereignet sich beim Thunfisch.

Ich besitze die Skelete zweier gleichgrosser, dritthalb Schuh langer Thunfische, welche ich der gefälligen Güte des Herrn Dr. Jakovčić in Porto-re bei Fiume verdanke. Der 26. und 27. Wirbel des einen Exemplares sind verwachsen, jene des zweiten frei. Der verwachsene Wirbel ist nur um die Hälfte länger, als die nächsten Nachbarn.

Alle Attribute der übrigen Wirbel finden sich doppelt an ihm, und eine in der Mitte seiner Seitenfläche senkrecht sich erhebende Firste markirt scharf den Ort der Verschmelzung. Auch hier findet es sich, dass der vordere seiner beiden oberen Dornfortsätze die mehr

¹⁾ Tab. II, Fig. 3.

senkrechte Richtung der nächst vor ihm stehenden Dornen annimmt, — der hintere die mehr nach hinten geneigte der folgenden¹⁾). Auch bei *Thynnus* fehlt im Inneren des verschmolzenen Wirbels der intervertebrale Hohlkegel. Eben so variiert bei diesen beiden Exemplaren derselben Art die Gesamtzahl der Wirbel. Sie beträgt an jenem, wo Verwachsung vorkommt 38, an dem anderen 41.

Bei *Thynnus Pelamis*, *Thynnus alabonga*, *Thynnus vernalis*, *Thynnus canagarta* und *Thynnus brachypterus* fehlt die Verschmelzung, so wie bei allen übrigen Gattungen der Scomberoiden, mit Ausnahme zweier. Diese sind:

1. *Stromateus griseus*.

Bei dieser Art finde ich den zweiten und dritten, so wie den achten und neunten Bauchwirbel verwachsen. Die ersten beiden bilden einen Wirbel, welcher nicht merklich grösser als ein gewöhnlicher ist, aber zwei Dornfortsätze und zwei Rippenpaare trägt. Der achte und neunte Wirbel besitzen zwar getrennte Körper, aber ihre Dornfortsätze sind zu einem einzigen Dorn von doppelter Breite verwachsen.

Einen besonderen osteologischen Charakter dieses Genus will ich hier noch erwähnen. Der erste Flossenträger der Afterflosse ist durch seine Länge ausgezeichnet. Er ragt nicht wie die übrigen, und wie es bei allen Fischen der Fall ist, zwischen die unteren Dornen der Schwanzwirbel hinein, mit welchen er in der Regel parallel ist, sondern steigt schief nach hinten und oben empor. Er ist auch nicht einfach, wie es alle Flossenträger sind, sondern besteht aus zwei gleichlaufenden Stäben, welche die unteren Dornen der vorderen Schwanzwirbel zwischen sich fassen, und mit ihnen verwachsen. Bei *Stromateus fiatola* stecken fünf untere Schwanzwirbeldornen in dieser Klemme²⁾, — bei *Stromateus griseus* nur 4, — bei *Stromateus stellatus* ebenfalls 4, — bei *Stromateus cryptosus* nur zwei, aber der untere Dorn des dritten Schwanzwirbels spaltet sich in zwei Schenkel, deren vorderer den schief aufsteigenden Flossenträger begegnet, und mit ihm verwächst. — Bei *Stromateus niger* fehlt diese Einrichtung, womit diese Art wahrscheinlich in ein anderes Genus zu verweisen ist. *Seserivus stromatoides* besitzt dieselbe Klemme, welche aber nur drei untere Schwanzwirbeldornen einfasst.

2. *Rhynchobdella ocellata*.

Der 17. und 18. Wirbel sind durch Synostose so verschmolzen, dass der Verschmelzungswirbel nur um ein wenig länger als jeder andere³⁾ ist. Er hat zwei Querfortsätze von Grösse und Richtung der übrigen. Dornfortsätze besitzt er drei. Die zwei vorderen sind mit einander und mit den vor ihnen stehenden parallel. Der hintere divergirt von ihnen, und seinem Beispiele folgen alle, die nach ihm kommen. Die zwei vorderen Dornfortsätze sind ohne Flossenträger. Der erste Träger der Rückenflosse stützt sich auf den hinteren Dornfortsatz⁴⁾.

Die Verwachsungsstelle ist deutlich abzusehen. Sie ist nicht senkrecht wie die regulären Wirbelfugen, sondern schief nach hinten und oben laufend, so dass die Seitenfläche des

¹⁾ Tab. III, Fig. 4, lit. a.

²⁾ Tab. III, Fig. 3.

³⁾ Tab. I, Fig. 4.

⁴⁾ Tab. I, Fig. 4, lit. a.

Wirbels aus zwei sich zu einem Viereck ergänzenden Dreiecken besteht. — Es ist nicht zu sagen, ob die Verwachsung eine Norm ist, da ich von *Stromateus griseus* und *Rhynchobdella ocellata* nur ein einzelnes Exemplar besitze.

IV. *Butirinus*, *Heterotis*, *Chirocentrus*, *Alausa*.

Unter den Clupeiden findet sich nur bei einer Gattung eine höchst wahrscheinlich constante Verschmelzung von Wirbelkörpern. Dass der vorletzte Caudalwirbel bei den meisten Gattungen zwei untere Dornfortsätze besitzt, kann nicht für eine Verschmelzung zweier Wirbel angesehen werden, da der Körper dieses vorletzten Wirbels in Form und Dimension einem gewöhnlichen einfachen Wirbelkörper gleicht. Bei *Butirinus macrocephalus* C. V. kommt die erwähnenswerthe Eigenthümlichkeit vor, dass die oberen und unteren Bogenschenkel und Dornfortsätze der sieben letzten Wirbel so breit werden, dass sie in gegenseitigen Contact gerathen, und zu einer gerieften Platte verwachsen, an welcher keine Spaltöffnungen vorkommen, wie später bei einem ähnlichen Falle von *Diodon* angegeben wird. Nur die Stelle, welche dem Interstitium des letzten und vorletzten unteren Dornes entspricht, zeigt eine kleine runde Öffnung, durch welche ein Verbindungscanal des rechten und linken *Sinus caudalis* zieht. Dieses Vorkommen scheint constant zu sein, indem drei vollkommen ausgewachsene Exemplare in dem genannten Verhalten ihrer Schwanzwirbel übereinstimmen.

Unconstant dagegen ist die Synostose des dritten, vierten und fünften Caudalwirbels (von hinten gerechnet) bei *Heterotis Ehrenbergii*. Der verschmolzene Wirbel besitzt nur zwei obere Dornen, aber drei untere. Seine Länge ist um die Hälfte kürzer als die vereinigte Länge der drei nächst vorhergehenden Wirbel. Der Beweis seiner Entstehung durch Verschmelzung dreier Wirbel liegt in dem Vorkommen dreier senkrechter Reihen von Gruben an seiner Seitenfläche, während jeder unverwachsene Wirbel nur Eine solche Reihe besitzt, und zweitens, dass an gleichgrossen Exemplaren ohne Verwachsung der drei genannten Caudalwirbel, die Gesamtzahl der Wirbel 67 beträgt, an jenem mit Wirbelverwachsung dagegen nur 64.

Eine sehr auffallende Art von theilweiser Verwachsung der Wirbel sehe ich bei *Chirocentrus dentex* (C. V.¹⁾). Der 48. bis 53. Wirbel nämlich gehen mit ihren unteren Bogenschenkeln eine auffallend unregelmässige Verwachsung in folgender Weise ein. Die unteren Bogenschenkel des 48. Wirbels verschmelzen zwar wie alle übrigen, als sollte aus ihnen ein einfacher unterer Dorn hervorgehen. Aber gleich jenseits der Verwachsungsstelle trennen sie sich wieder. Der rechte endigt frei, als ein vier Linien langer, senkrecht nach abwärts gerichteter, dünner Stachel; der linke neigt sich dem unteren Dorn des 49. Wirbels zu, verwächst mit seiner Basis, um sich gleich wieder von ihm zu trennen, und von nun an den unteren Dorn des 48. Wirbels darzustellen, der sich mit dem ihm zukommenden Flossenträger verbindet. Der 49. Wirbel zeigt ausser der erwähnten Verwachsung seines unteren Dornes mit dem linkseitigen Bogenschenkel des vorhergehenden Wirbels nichts Abweichendes. Am 50. Wirbel bleiben die unteren Bogenschenkel gänzlich getrennt. Der rechte legt sich vor den linkseitigen, und kreuzt sich vollkommen mit ihm, so dass seine freie Spitze nach links herübersieht. Der linke untere Bogenschenkel dagegen verwächst mit dem

¹⁾ Tab. II. Fig. 2.

rechtseitigen Bogenschenkel des 51. Wirbels, und beide zusammen bilden den unteren Dorn des 50. Wirbels. Der 52. Wirbel hat keinen rechtseitigen Bogenschenkel. Der linkseitige verwächst in sehr kurzer Strecke mit dem rechtseitigen des 53. Wirbels. Beide trennen sich bald wieder. Letzterer verkümmert; ersterer bildet den unteren Dorn des 52. Wirbels. Da nun der 53. Wirbel seinen rechten Bogenschenkel zum 52. Wirbel treten liess, so wird nur sein linkseitiger erübrigen zur Erzeugung des unteren Dornes des 53. Wirbels, und es kann dieser Wirbel daher keinen Nervenbogen und keinen Gefässbogen besitzen. Auch bei *Alausa finta* treffe ich den 26. und 27. verwachsen. Der Verschmelzungswirbel ist nicht länger als ein gewöhnlicher, trägt aber zwei obere und nur einen einfachen unteren Dorn. Von den unteren Bogenschenkeln des 23. Wirbels ist der rechte so nach vorne abgewichen, dass er mit dem unteren Dorn des Verschmelzungswirbels sich zusammenlöthet. Das betreffende Exemplar stammt aus dem Po. An einer zweiten und dritten *Alausa* aus dem Nil fehlt die Synostose.

V. *Catla Buchanani*.

Unter den Cyprinen bietet *Catla* einen sehr ausgezeichneten hierher gehörigen Fall dar. Ausser der Verschmelzung des ersten und zweiten Wirbels, welche in dieser Familie so oft beobachtet wird, dass sie fast zur Regel gehört, sind der 9., 10., 11. und 12. Wirbel zu einem einfachen Wirbel verwachsen, welcher nur die doppelte Länge eines freien Wirbels besitzt¹⁾. Die Schönheit und Seltenheit des einzigen Skeletes dieser Gattung in meiner Sammlung erlaubten mir nicht es zu opfern, um einen Durchschnitt, der Wirbelsäule zur Constairung des Vorkommens oder Fehlens eines intervertebralen Doppelkegelraumes vorzunehmen. Vier Gruben an der Seitenfläche seines Körpers, vier Dornfortsätze, und eben so viele Rippen bestimmen die Zahl der verwachsenen Wirbel. Äusserliche Trennungsspur ist, wie bei *Polypterus* und *Thynnus*, keine zu sehen. Die vier Dornfortsätze differiren in keiner Hinsicht von den übrigen. Nur stehen sie, wie begreiflich, einander näher. Dasselbe gilt von den vier Rippen, von welchen die dritte viel zarter und schlanker als die übrigen ist, und sich so an die zweite anschmiegt, dass sie anfangs in eine Furche der letzteren zu liegen kommt. Erst im weiteren Verlaufe trennen sie sich von einander.

Der 6. und 7. Schwanzwirbel (von hinten gezählt) sind gleichfalls durch Synostose verschmolzen. Der durch sie gebildete einfache Wirbel hat etwas mehr als die Länge eines isolirten, besitzt zwei obere, zwei untere Dornen, und vier seitliche, zu zweien über einander stehende Gruben am Körper²⁾, während alle übrigen deren nur zwei haben. Da ich nur ein Exemplar dieser Species besitze, kann ich nicht bestimmen, ob die Anomalie eine zufällige ist.

VI. *Catostomus Suerii*.

An einem riesigen Exemplare dieser Art finde ich eine partielle Synostose zwischen dem siebenten und achten hinteren Schwanzwirbel. Die Verschmelzung betrifft nur zwei Drittheile der Wirbelperipherie. Das obere Drittel besitzt noch die Fuge. Beide Wirbel

¹⁾ Tab. III, Fig. 1.

²⁾ Tab. III, Fig. 2.

haben einzeln die Grösse der übrigen. Der Intervertebralraum existirt in der bekannten Form eines gallertgefüllten Doppelconus, obwohl mit vergleichungsweise verkleinerten Dimensionen. Dass es sich hier um eine Altersmetamorphose handelt, welche bis zum vollständigen Coalitus sich entwickeln kann, lehrt ein zweites jüngerer Exemplar, an welchem keine Verwachsung vorkommt. — Der vorletzte Schwanzwirbel, obwohl nicht länger als der drittletzte, trägt bei beiden Exemplaren zwei obere Dornen, von denen der vordere schwächer als der hintere ist. Der einfache untere Dorn ist, wie der doppelte untere Dorn des letzten Schwanzwirbels, nicht durch Synostose, sondern durch Synchondrose am Wirbelkörper befestigt. Bei *Catostomus elongatus* verhalten sich die beiden letzten Schwanzwirbel, wie bei *C. Suerii*.

VII. Hydrocyon, Mormyrus, Gymnarchus.

Das einzige Exemplar meiner Sammlung von *Hydrocyon Forskalii* gehört einem jungen Thiere an. Der zwanzigste Wirbel ist nur halb so lang wie sein Vorder- und Hintermann. Verwächst er mit dem einen oder dem anderen im späteren Alter, so erklärt es sich, warum der synostosirte Wirbel kürzer als zwei reguläre sein muss. Ich vermute dass dieses Zurückbleiben der Entwicklung eines Wirbels seiner späteren Coalescenz mit anstossenden Wirbeln zu Grunde liegt. Immer sind es flossentragende Wirbel, niemals flossenlose, welche der Synostose unterliegen. Der in seiner Ausbildung zurückgebliebene Wirbel, oder eine Gruppe derselben, erlangt nur durch Verschmelzung die einem flossentragenden Wirbel nöthige Stärke.

Ich bemerke hier zugleich als Nachtrag zu dem, was Eingangs dieser Abhandlung über *Mormyrus dorsalis* gesagt wurde, dass an einem sehr jungen, spannlangen Exemplare von *Mormyrus anguillaris* der 15. und 16. Wirbel synostosirt sind, während an einem alten, zwei Schuh langen, die Synostose fehlt. Ein *Mormyrus oxyrhynchus* besitzt am zwölftetzten Wirbel zwei obere und untere Dornen, ohne scheinbare Verlängerung seines Körpers. An einem anderen Individuum dieser Art fehlt die Abweichung, und an einem dritten betrifft sie den 21. Wirbel. Auch ein völlig ausgewachsenes Skelet von *Mormyrus Bane* ist frei von Wirbelsynostosen, während ein kleines, nur spannlanges, den 13. und 14. Wirbel verwachsen zeigt. An *Mormyrus zambecensis* Pet. ist der 17. und 18. Wirbel verwachsen, und der 19. besitzt keinen oberen Dorn.

Gymnarchus niloticus.

Bei *Gymnarchus niloticus* sind die Körper des 47., 48. und 49. Wirbels (3., 4. und 5. Schwanzwirbel) unter einander zu einem einzigen Wirbel verwachsen¹⁾. Die oberen und unteren Bogenschenkel, welche bei diesem Geschlechte in tiefe Gruben der Wirbelkörper durch Knorpel eingelassen sind, erscheinen am Verwachsungswirbel durch Synostose befestigt. Der durch Verschmelzung dreier Wirbel entstandene einfache Wirbel besitzt drei obere und zwei untere Bogen, und seine Länge ist geringer, als jene der zwei zunächst vor und hinter ihm gelegenen Wirbelkörper. Die Basalstücke der oberen und unteren Wirbelbogen sind gleichfalls unter einander verwachsen. Von den drei verwachsenen Wirbeln erscheint der mittlere am meisten eingegangen. Das ihm entsprechende Feld der Seitengegend

¹⁾ Tab. II. Fig. 1.

des verwachsenen Wirbels ist nur eine Linie breit. Ihm gehört der zweite untere Dorn an. Der dritte verwachsene Wirbel hat keinen unteren Dorn. Jeder obere Dorn steht mit zwei Flossenträgern in Verbindung. Weder obere noch untere Bogenschenkel haben an Stärke verloren. Das beschriebene Exemplar ist eines der grössten dieser Art. Es misst 4 Fuss 3 Zoll. An drei anderen, von welchen das grösste 3 Fuss 10 Zoll Länge hat, fehlt die Synostose.

VIII. *Clarias Hasselquistii*.

Ausser der von *Clarotes* bei früherer Gelegenheit¹⁾ angeführten Verwachsung²⁾ des 17. und 18. Schwanzwirbels, kommt auf zurückbleibende Wirbelentwicklung basirte Synostose bei den Siluroiden nur an einem jüngeren und einem älteren Exemplare von *Clarias Hasselquistii* vor. Es findet sich an ersterem der 29., 30. und 31. Wirbel verwachsen³⁾. Ja es folgt hinter dem einunddreissigsten Wirbel, und mit ihm verwachsen, noch eine Knochen-scheibe ohne obere und untere Dornen, welche wie ein verknöchertes Zwischenwirbelband aussieht, es aber gewiss nicht ist, da unmittelbar hinter ihr das Gelenk mit dem nächstfolgenden Wirbel liegt. Die vier Wirbel zusammen haben nicht die Länge zweier gewöhnlicher, und tragen drei obere, jedoch nur zwei untere Dornen. Die oberen sind graciler als die gewöhnlichen, und stehen einander sehr nahe. Die unteren haben gewöhnliche Stärke und Stellung. — Der 38. und 39. Wirbel verschmelzen gleichfalls mit Verlust an Grösse⁴⁾. Es wird durch sie die ungleiche Zahl der oberen und unteren Dornen am vorderen Verwachsungswirbel ausgeglichen, da der durch sie gebildete einfache Wirbel einen oberen, aber zwei untere Dornen trägt, welche zarter und schlanker als ihre Nachbarn sind, und näher zusammenstehen als diese. An einem zweiten älteren Exemplare ist der 20., 21. und 22. Wirbel zu einem einfachen Wirbel verschmolzen, welcher drei obere und drei untere Dornen besitzt. Die beiden vorderen unteren Dornfortsätze legen sich bald aneinander, und verwachsen zu einem doppelt so dicken.

Weder bei *Clarias Lazera* noch bei *Clarias Nieuhovii* kommt Ähnliches vor. Eine Synostose als Altersfolge zeigt *Platystoma truncatum*. Dieser sonderbare Fisch, dessen Wirbelsäule nur aus Schwanzwirbeln besteht, da der Atlas schon den Charakter eines Caudalwirbels durch Zusammenschluss seiner breiten unteren Bogenschenkel besitzt, zeigt vollkommene Ankylose zwischen fünften und sechsten Wirbel. Bei der Länge der Wirbelsäule, und der Menge ihrer gleichartigen Stücke, wird die Verwachsung zweier keinen besonderen Nachtheil bringen, um so weniger, wenn die Verwachsung an den Bauchwirbeln auftritt, welche an Bewegungen der ganzen Wirbelsäule nur einen sehr untergeordneten Antheil haben können.

Die Verwachsung der drei letzten Caudalwirbel an einem sehr alten Exemplare von *Loricaria plecostoma* fehlt bei zwei jüngeren.

IX. *Zoarces viviparus*.

Sehr zahlreiche Wirbelverwachsungen, durch unvollkommene Entwicklung derselben veranlasst, habe ich an einem Exemplare von *Zoarces viviparus* vor mir⁵⁾. Der 63. bis

¹⁾ Anatomische Untersuchung des *Clarotes Heuglinii*, im XVI. Bande der Denkschriften der kais. Akad.

²⁾ Tab. I, Fig. 2.

³⁾ Tab. I, Fig. 3. lit. a.

⁴⁾ Tab. I, Fig. 3. lit. b.

⁵⁾ Tab. I, Fig. 5.

66. Wirbel, der 67. und 68., der 70. und 71., der 74. und 75., der 82. und 83., der 86. und 87. sind mit einer mehr als die Hälfte ihrer Länge betragenden Verkürzung mit einander verschmolzen. Hinter dem 87. Wirbel wird die Gestalt der Wirbelkörper so unregelmässig, dass ihre Zahl kaum anzugeben ist. Die Länge des von ihnen gebildeten Endstückes der Wirbelsäule mit dem vor ihm gelegenen, gleichlangen Wirbelsäulensegmente vergleichend, dürfte ihre Zahl 10 bis 12 betragen. Die oberen Dornfortsätze correspondiren nicht mehr mit den unteren. Einige dieser Wirbel haben zwei obere und keine unteren Dornen, andere einen unteren aber keinen oberen. Der obere Dorn des 63. Wirbels lässt seine beiden Bogenschenkel sich nicht an einander legen. Der rechte Schenkel stellt sich vor den linken. Schaltwirbel ohne obere und untere Dornen von scheibenförmiger Gestalt kommen am hinteren Ende der Wirbelsäule etlichemal vor. Die zwei unteren Dornen des 67. und 68. verwachsenen Wirbels verschmelzen gleichfalls zu einem doppelt breiten *Processus spinosus inferior*. Der 10. Wirbel ist ebenfalls ein sehr kurzer scheibenförmiger Schaltwirbel ohne oberen Dorn. Die Richtung der oberen und unteren Dornfortsätze der verwachsenen Wirbel weicht von dem Parallelismus der übrigen durch grössere oder geringere Vor- oder Rückwärtsneigung so sehr ab, dass das hintere Wirbelsäulende auf den ersten Blick so erscheint, als ob es nicht zu der übrigen Wirbelsäule gehörte. An einem zweiten Exemplare derselben Art ist Alles regelmässig, bis auf Synostose mit Verkümmern des 65., 66. und 67. Wirbels, welche zusammen einen kurzen, mit drei oberen und drei unteren Dornen ausgestatteten Wirbel erzeugen. An einem dritten sind alle Wirbel normal. Bei *Zoarces labrosus* (3 Exemplare) und *Anarhichus lupus* (2 Exemplare) findet keine Abweichung in der gleichartigen Zusammensetzung der Wirbelsäule statt, wie dem auch gegen meine Erwartung an den polyspondylen Wirbelsäulen der Bandfische (*Trachypterus iris*, *Trichiurus lepturus* und *Trichiurus Haumela*, *Cepola rubescens*) und der Aale, deren Cuvier'sche Genera ich vollzählig besitze, nirgends die Harmonie der Wirbel gestört erscheint. Nur an einem Genus der letzteren Familie, *Ophisternon bengalense*, sehe ich Verwachsungen vorkommen, und zwar in mehrfacher Art. Der 34. Wirbel ist zwar nicht länger als die übrigen, hat aber zwei Dornfortsätze von gleicher Länge. Der hintere ist etwas dünner. Der 66. Wirbel ist gleichfalls doppelt bedornt, der vordere Dorn schwächer als der hintere. Der 96. bis 99. Wirbel sind verschmolzen, mit drei oberen und vier unteren Dornen. Ebenso der 104., 105. und 106. Wirbel mit drei oberen und zwei unteren Dornen. Der 107. und 108. bilden einen Wirbel von doppelter Länge mit zwei oberen und zwei unteren Dornfortsätzen. Vom 108. bis zum letzten Wirbel (dem 123.) kommen keine Verschmelzungen mehr vor. — Ein meiner Sammlung eben erst zugewachsenes Exemplar von *Gymnotus electricus* verdient seiner zahlreichen Wirbelsynostosen wegen eine ausführlichere Erwähnung.

X. *Gymnotus electricus*.

Die in Form und Stellung ihrer Fortsätze unregelmässigste, und mit den meisten Synostosen ausgestattete Wirbelsäule, ist jene von *Gymnotus electricus*. Ich zähle an einem sehr grossen, 4 Schuh langen Skelete meiner Sammlung 261 Wirbel. Ob diese Wirbelzahl mit der an jüngeren und kleineren Exemplaren zu findenden übereinstimmt, dürfte kaum anzunehmen sein, da insbesondere die letzten Schwanzwirbel durch Verwachsung und durch Verkümmern ihrer Form so undeutlich werden, dass es sehr schwer abzusehen ist, wie vielen

jugendlichen Wirbeln ein verwachsener und verkrüppelter Wirbel äquivalent. Während an allen Fischskeleten sonst die oberen und unteren Bogenschenkel, und die durch ihre Verwachsung gebildeten Dornen, eine grosse Regelmässigkeit in ihrer Stellung, und streckenweise einen genau eingehaltenen, streckenweise einen nach bestimmtem Gesetze abnehmenden Parallelismus zeigen, sind die Wirbel des *Gymnotus* durch Unähnlichkeit und Unparallelismus ihrer Fortsätze wahrhaft ausgezeichnet. Gabelig gespaltene obere Dornfortsätze (die unteren fehlen in der ganzen Wirbelsäulenlänge) mit hinter einander stehenden, breiten oder schmalen, stumpfen oder spitzigen, langen oder kurzen Gabelenden finden sich an vielen Stellen zwischen den einfachen Dornen. Hie und da steht der rechte Bogenschenkel hinter dem linken, oder umgekehrt, ohne sich zu verbinden, oder es trägt ein Wirbel auf der einen Seite zwei, auf der anderen nur einen Bogenschenkel. Der überzählige Bogenschenkel der einen Seite kann als solcher unverschmolzen bleiben, oder sich dem nächst vorderen oder hinteren Dorn zuneigen, oder, obwohl selten, mit ihm verwachsen. Die unteren Bogenschenkel kommen von beiden Seiten in nichts mehr überein, als in ihrer Unsymmetrie, differenten Richtung, und variablen Anzahl. Einfach, gabelförmig gespalten, doppelt oder zweiwurzelig mit langer schlitzförmiger, runder oder ovaler Öffnung, selbst fehlend auf der einen Seite, nach aussen oder innen verbogen, geknickt, oder wie um ihre Axe gedreht, bieten die oberen und unteren Bogenschenkel so zahllose Variationen ihrer anatomischen Eigenschaften dar, dass nur das Auge den Gesamteindruck einer zur Regel erhobenen Unregelmässigkeit aufnehmen, eine Beschreibung dagegen kaum zur Veranschaulichung des Bildes etwas beitragen kann. Doch von diesen Unregelmässigkeiten ist hier nicht die Rede. Es handelt sich um Synostosen der Wirbel. Vom 183. Wirbel angefangen beginnen die Verschmelzungen. Die erste betrifft den 183. bis 185. Wirbel¹⁾. Die Verwachsung hat die Länge der Wirbelkörper nicht beeinträchtigt, und erstreckt sich zugleich auf die unteren Bogenelemente des 183. und 184. Wirbels. Die zweite Synostose betrifft den 229. und 230. Wirbel²⁾. Der Verwachsungswirbel hat nur die Länge eines einfachen, aber doppelte Seitengruben, mit doppelten oberen und unteren Bogenhälften. Die dritte Synostose befällt den 242. und 243. Wirbel. Auch sie geht mit Verkümmern der Wirbellänge einher. Der verwachsene Wirbelkörper ist nur um ein wenig länger als ein einfacher. Der 252. und 253. sind eben so verschmolzen, und was die hinter dem 253. Wirbel kommenden letzten Schwanzwirbel betrifft, so haben ihre stellenweise vorhandenen Verwachsungen zu solcher Unkenntlichkeit ihrer Form geführt³⁾, dass selbst die Bestimmung der Anzahl der verwachsenen Wirbel nur als eine beiläufige gelten kann. Die verschmolzenen Schwanzwirbel des *Gymnotus* erinnern zugleich an ein ähnliches Verhalten bei *Proteus* und *Siren*.

XI. *Gadus morrhua*.

Der auffallendste hieher gehörige Fall von Synostose der Wirbel mit Verkürzung derselben betrifft ein 3 Schuh 3 Zoll langes Individuum von *Gadus morrhua*. Fünf Wirbel, der 27. bis 31. sind verschmolzen⁴⁾. Der Verwachsungswirbel hat eine Länge von 1 Zoll 3 Linien.

¹⁾ Tab. II, Fig. 5, lit. a.

²⁾ Tab. II, Fig. 6, lit. b.

³⁾ Tab. II, Fig. 7.

⁴⁾ Tab. I, Fig. 6.

Der nächst vordere und nächst hintere Wirbel haben die Länge eines halben Zolles. Fünf obere und fünf untere Dornen¹⁾ des verschmolzenen Wirbels weichen in so ferne von der Richtung der übrigen Dornfortsätze ab, als der erste obere Dorn ein wenig nach vorn geneigt ist, die übrigen vier sich mehr nach hinten richten, wie alle nach ihm kommenden oberen Dornen. Die Gesamtzahl der Wirbel beträgt 52, wenn der Verwachsungswirbel für 5 gezählt wird, und dass er so gezählt werden muss, beweist ein zweites gleich grosses Exemplar von *Morrhua*, an welchem die Synostose fehlt, und die Wirbelzahl gleichfalls 52 beträgt. Die Verschmelzungsstellen der fünf Wirbel sind als stark aufgeworfene, scharfkantige Riffe bemerkbar, welche sich von den oberen zu den unteren Dornen herabziehen. Die fünf oberen Dornen unseres Wirbels gehören dem Vordertheile der dritten Rückenflosse, die fünf unteren dem Vordertheile der zweiten Afterflosse an.

Kein anderer Gadoid, und ich besitze die Gattungen dieser Familie vollzählig, zeigt eine Verschmelzung einzelner Wirbel. Als die Abhandlung schon druckfertig war, erhielt ich das Skelet eines ausgewachsenen *Gadus callarias*, an welchem der 13., 14., 15. und 16. Schwanzwirbel (von hinten gezählt) durch Synostose verschmolzen waren. Der 14. und 15. waren so verkümmert, dass die Körper beider zusammen nur den dritten Theil der Länge eines gewöhnlichen Wirbelkörpers hatten, während der 13. und 16. einem solchen nicht viel nachgaben. Der aus dem 14. und 15. Wirbel entstandene Verschmelzungswirbel hatte 2 obere, aber nur einen unteren Dorn. Der 13. Wirbel besass keinen unteren, der 16. keinen oberen Dorn.

XII. Ostracion und Diodon.

Wenn Verschmelzung der Wirbel bei irgend einer Fischfamilie von vornherein zu erwarten stand, so konnte diese wohl keine andere sein, als die *Ostracidae*²⁾. Ihre mit grossen, harten, mosaikartig zusammengefüigten Tafeln besetzte Haut bildet einen jeder Beweglichkeit entbehrenden Panzer, welcher die Biegsamkeit der Wirbelsäule zwecklos macht, und nur die beweglichen Flossen aus sich herausragen lässt. Die der Wirbelsäule durch diesen Panzer aufgedrungene Unbeweglichkeit, führt jedoch nicht an allen Wirbelgelenken zur Synostose. Diese betrifft nur die Caudalwirbel, und auch diese nur vollkommen bei sehr alten Exemplaren. Die sieben Stammwirbel sind unter sich und der erste auch mit dem Hinterhauptbein auf eine andere, jede Beweglichkeit ausschliessende Weise verbunden. Die Körper der Wirbel stossen zwar mit den bekannten kegelhohlen Flächen aneinander, und die Wirbelsäule erscheint bei unterer Ansicht durch die den Wirbelfugen entsprechenden Querlinien getheilt. Bei seitlicher Ansicht dagegen erscheinen diese Linien nicht mehr gerade, sondern beginnen sich von unten nach oben zu allmählich so zu schlängeln, und hierauf im scharfen Zickzack zu knicken, dass sie die Form von Näthen annehmen. Dieses ist besonders zwischen den oberen Bogenschenkeln der Fall, welche so breit sind als der Wirbelkörper lang ist, und deshalb zu einem, nicht durch Zwischenbogenspalten durchbrochenen Canal zusammenschliessen, dessen einzelne Segmente, der erwähnten Einzackung wegen, gegen einander nicht beweglich sind, und somit auch die Wirbelkörper, von denen sie ausgehen, in absoluter Ruhe halten.

¹⁾ Tab. I. Fig. 6. lit. aa und bb.

²⁾ Tab. II. Fig. 1.

Die Schärfe der Nathzaeken ist bei verschiedenen Arten verschieden. Am schönsten finde ich die Nath bei dem grossen *Ostracion triqueter* L. entwickelt. *Ostracion quadricornis* und *Ostracion trigonus* zeigen sie nur zwischen den oberen Bogenschenkeln; *Ostracion turrites* auch zwischen den Körpern der Wirbel bis zur unteren Fläche derselben herab, wo sie bei allen Arten ausnahmslos eine einfache Querlinie bildet, wie bei den übrigen Fischen. An sehr kleinen Exemplaren von *Ostracion stictonotus* ist die Nath zwischen den Bogenschenkeln schon deutlich zu erkennen.

Was die Caudalwirbel anbelangt, so tritt ihre Synostose erst mit fortschreitendem Alter ein. Alle Ostracionten besitzen fünf Schwanzwirbel. Die Verwachsung befällt den ersten Caudalwirbel zuerst. Sie tritt aber nicht zwischen dem Körper desselben und jenem des letzten Stammwirbels ein, sondern betrifft die zu einem sehr breiten oberen Dorn vereinigten oberen Bogenschenkel beider. Das Exemplar von *Ostracion triqueter*, an welchem ich diese Verwachsung vor mir habe, misst über 1 Schuh an Länge. An den übrigen kleineren Kofferfischen meiner Sammlung wird die Synostose an der bezeichneten Stelle entweder durch eine Nath ersetzt, oder stellt, wie an den jüngsten und kleinsten, eine knorpelige Fuge dar. Die unteren Bogenschenkel der zwei ersten Caudalwirbel, welche an das Stützgerüste der Afterflosse stossen, sind bei *Ostracion triqueter* und allen übrigen unverschmolzen. — Bei keinem *Balistes* finde ich verschmolzene Wirbel; eben so wenig bei *Orthogoriscus*.

Unter den Gymnodonten fehlt sie bei allen, selbst den ältesten Tetrodonarten. Bei *Diodon filamentosus* Heck. dagegen, von 1 Schuh 3 Zoll Länge, finde ich die oberen und unteren Dornfortsätze der die Rücken- und Afterflosse tragenden Wirbel zu einer breiten Knochenplatte verschmolzen. Die obere Platte erscheint durch zwei schmale Längsspalten durchbrochen, als Überreste von Interspinalräumen. Die untere Platte besitzt deren drei.

XIII. Falsche Wirbel-Synostosen.

Von den in vorstehenden Einzelheiten geschilderten wahren Wirbelsynostosen, sind die falschen oder scheinbaren wohl zu unterscheiden. Sie kommen in zweifacher Weise vor:

1. Wenn ein Wirbel ungewöhnlich lang erscheint, mag er wohl den Eindruck machen, als sei er aus mehreren durch frühzeitige Verschmelzung hervorgegangen. Hieher gehören:

a) Der vorderste Wirbel mehrerer echter Siluroiden. Da ein solcher Wirbel Dorn- und Querfortsätze trägt, deren Breite mit der Länge des Wirbels übereinstimmt, so ist um so leichter möglich, die in den breiten Dorn- und Querfortsätzen bis auf verschiedene Tiefen eindringenden Spalten, als den permanent gebliebenen Ausdruck einer früher vorhanden gewesenen Trennung anzusehen. Wenn ja eine solche Trennung wirklich vorhanden war, so konnte sie nur den ersten Entwicklungsperioden der Wirbelsäule angehört haben. An den kleinsten Exemplaren von *Silurus glanis*, kaum spannläng, ist von einem Hervorgehen des ersten Wirbels aus einer Reihe mehrerer verschmelzender Wirbel nichts zu sehen. Eben so wenig bei den kleinsten Pimeloden und Synodonten, von welchen letzteren ich eine ziemliche Menge mit einer Körperlänge von nur anderthalb Zoll im Magen des *Clarotes Heuglini* getroffen habe.

b) Die ausserordentlich verlängerten vier vordersten Wirbel von *Fistularia serrata*, *Fistularia tabaccaria*, *Aulostoma chinense*, und die im Verhältniss zur kleineren Körperlänge noch auffallender in die Länge gestreckten sämtlichen Rumpfwirbel von *Amphisila scutata*. Was

Owen von der Verwachsung der vier vorderen Wirbel der Fistularien unter einander anführt¹⁾, habe ich an meinen Exemplaren nicht bestätigt finden können. Die Wirbel fielen beim Macciren auseinander.

2. Zuweilen stemmen sich die Fortsätze nachbarlicher Wirbel, wenn sie breit oder dick genug sind, unter gegenseitiger Berührung, so an einander, dass sie bei oberflächlicher Betrachtung eine Verwachsung eingegangen zu haben scheinen. Hieher gehören die mächtigen unteren Dornen der ersten Caudalwirbel der grossen *Pleuronectidae*, deren Zusammenstemmen ein so inniges ist, dass man die betreffenden Wirbel ein *Os sacrum* bilden liess. Bei den meisten Gattungen der *Squamipennes*, insbesondere bei *Psettus* und *Zanclus*, ist die scheinbare Verschmelzung der ersten unteren Schwanzwirbeldornen noch auffallender, lässt sich jedoch durch siedendes Wasser, wie man es beim Skeletiren der Fische so oft anwenden muss, leicht und schnell heben. Eben so scheinbar ist die Synostose der unteren breiten Schwanzwirbeldornen bei den *Scomberoidei* mit seitlich stark comprimirtem Körper, wie *Equula*, *Leioglossus*, *Vomer*, *Zeus* und *Mene*. Was man von der Verschmelzung oberer und unterer Dornen an der Schwanzwirbelsäule der Loricarien und Hypostomen anführte, ist gleichfalls eine leicht zu entschuldigende Täuschung gewesen.

ANHANG.

Seit die vorliegende Abhandlung bei der kaiserlichen Akademie eingereicht wurde (im März 1860), hat meine Sammlung von Fischskeleten durch einige neue Acquisitionen aus Nordamerika und aus dem mittelländischen Meere einen reichen Zuwachs erhalten. Unter den neuen Präparaten befinden sich zwei Fälle von Wirbelsynostosen aus Familien, von welchen im Vorhergehenden keine Erwähnung geschah. Ich füge sie desshalb nachträglich bei.

Der erste Fall betrifft einen Percoiden mit doppelter Rückenflosse: *Labrax lineatus*. Der neunte und zehnte Wirbel sind so mit einander verwachsen, dass der durch sie gebildete Verschmelzungswirbel den unverwachsenen an Länge nicht überlegen ist. Er besitzt zwei obere Dornen, und zwei Paar untere Bogenschenkel. Jeder der letzteren trägt eine Rippe. Der Verschmelzungswirbel zählt noch zu den Bauchwirbeln. Erst der dreizehnte Wirbel beginnt die Reihe der Caudalwirbel. Der zweite obere Dornfortsatz des Verschmelzungswirbels, und das zweite Paar seiner unteren Bogenschenkel fallen durch ihre schiefe Richtung auf. Eine stark aufgeworfene, senkrechte Leiste bezeichnet die Verwachsungsstelle der beiden Wirbel zu Einem.

Da während der Ausarbeitung des Skeletes die Wirbelsynostose frühzeitig genug bemerkt wurde, liess sich über das Verhalten der Rückenmarksnerven Auskunft erhalten, und feststellen, dass der Verschmelzungswirbel nur Einem Paare Rückenmarksnerven entspricht. — Die Gesamtzahl der Wirbel beträgt 24; — bei *Labrax mucronatus* dagegen 32.

Der zweite Fall gehört dem Genus *Crenilabrus* aus der Familie der Labroiden an. Bei *Crenilabrus melanocercus* Risso sind der 10., 11., 12. und 13. Wirbel zu einem einzigen ver-

¹⁾ Lectures on the Comparative Anatomy of the Vertebrate Animals. Part I, Fishes, pag. 64.

schmolzen, welcher nur um ein Viertel länger als seine Vor- und Hintermäner ist. Er trägt vier obere Dornen und vier untere Bogenschenkelpaare. Er ist ein Bauchwirbel, da die Schwanzwirbel erst mit dem 15. beginnen. Drei senkrechte Juga an der Seitenfläche des synostotischen Wirbels entsprechen den Verschmelzungsstellen der vier abortiven Wirbel. Die vier oberen Dornfortsätze weichen in so fern von der Richtung der übrigen ab, als der vorderste schief nach vorn, der hinterste schief nach hinten aufsteigt, die beiden mittleren aber vertical stehen. Die Dornfortsätze sind an ihrer Basis und die oberen Bogenschenkel in ihrer ganzen Länge so mit einander verwachsen, dass kein Platz für den Austritt eines *Nervus spinalis* offen bleibt, und der Verschmelzungswirbel somit nur Einem Rückenmarks-Nervenpaar entspricht, welches vor dem ersten oberen Bogenschenkel hervortrat.

Eine zweite Wirbelsynostose fand sich an demselben Exemplare zwischen dem 17. und 18. Schwanzwirbel, deren jeder nur die halbe Länge eines gewöhnlichen Wirbels besitzt, deren obere und untere Dornen aber den übrigen weder an Stärke noch an Länge nachstehen.

Der Fall ist um so beachtenswerther, als eine mehrfache Wirbelsynostose bei einem Fische von so kurzer Leibeslänge, wie *Crenilabrus*, noch nicht beobachtet wurde¹⁾, und ich deshalb geneigt war, die Synostosen als ein Vorrecht der Fische mit langgestrecktem Körper zu betrachten.

ERKLÄRUNG DER ABBILDUNGEN.

Tab. I.

Fig. 1. Der verwachsene 30. und 31. Wirbel von *Polypterus Bichir* mit seinen nächsten Nachbarn.

- aa, seine beiden Querfortsätze;
- bb, seine beiden Dornfortsätze;
- c, Flossenträger auf dem vorderen Dornfortsatz;
- d, eine Fahne der Rückenflosse;
- e, Rückenschilder.

Fig. 2. Der 17. und 18. verwachsene Schwanzwirbel (von hinten gezählt) von *Claroetes Heuglinii* mit seinen Nachbarn.

Fig. 3. Ein Stück aus der Mitte der Wirbelsäule von *Clarias Hasselquistii*.

- a, vier verschmolzene Wirbel mit drei oberen und zwei unteren Dornen.
- b, zwei verschmolzene Wirbel mit einem oberen und zwei unteren Dornen.

Fig. 4. Der verwachsene 17. und 18. Wirbel von *Rhynchobdella ocellata*, mit dem vorderen und hinteren anstossenden Wirbel, und mit seinen drei oberen und zwei unteren Dornen.

- a, die drei ersten Träger der Rückenflosse.

Fig. 5. Ein Stück aus dem hinteren Ende der Wirbelsäule von *Zoarces labrosus*, mit mehrfach wiederkehrenden Wirbelsynostosen und sehr unregelmässiger Vertheilung der oberen und unteren Dornfortsätze.

Fig. 6. Die Verschmelzung des 27. bis 31. Wirbels von *Gadus morhua*, mit zwei vorderen und einem hinteren anstossenden Wirbel.

- aa, obere Dornfortsätze;
- bb, untere Dornfortsätze. Die erhabenen Riffe, welche sich von a zu b erstrecken, bezeichnen die Verschmelzungsstellen der einzelnen Wirbelkörper.

Tab. II.

Fig. 1. Hinteres Ende der Wirbelsäule von *Ostracion triquetrum*. Die drei letzten Bauchwirbel durch Nath verbunden.

- a, verwachsene Caudalwirbel;

¹⁾ Die *Squamipennes*, *Maenidae* und *Sparoidei*, deren Gattungen ich vollständig besitze, weisen keinen einzigen Fall von Wirbelsynostose auf. Eben so wenig die *Cutapraeti*, *Mugiloidi*, *Pediculati*, *Chromidae* und *Pleuronectidae*. — Knorpelfische wurden nicht untersucht, da ihre Cadres in meiner Sammlung nicht vollständig aufgestellt sind.

- b*, untere Bogenschenkel derselben, welche ein *Suspensorium* für die Afterflosse bilden, zu welchem die Flossenträger *c* in horizontaler Richtung von vorn nach hinten herantreten. Letztere sind an ihren vorderen Enden frei.
- Fig. 2. Der 47. bis 53. Wirbel von *Chirocentrus dentex*, mit der unregelmässigen Verwachsung der unteren Bogenschenkel vom 48. Wirbel angefangen.
- Fig. 3. Schwanzende von *Amia calva*.
a, 21. Schwanzwirbel ohne Schaltwirbel;
b, synostotischer Wirbel mit zwei oberen Dornen und einem unteren.
- Fig. 4. Wirbelsynostose von *Gymnarchus niloticus*.
a, der 46. Wirbel;
b, der 50. Wirbel; — beide frei;
c, der aus dem 47., 48. und 49. Wirbel gebildete Verschmelzungswirbel.
- Fig. 5., 6. und 7. Wirbelverwachsungen von *Gymnotus electricus*.
- Fig. 5. *a*, Verschmelzung des 183. bis 185. Wirbels.
- Fig. 6. *b*, dieselbe des 229. und 230. Wirbels.
- Fig. 7. Unregelmässige Synostosirung der letzten Schwanzwirbel.

Tab. III.

- Fig. 1. Ein Stück Wirbelsäule von *Catla Buchanani*. Die vier Wirbel, deren Dornfortsätze durch die Klammer *a* umfasst werden, sind verwachsen, und an Länge derart verkümmert, dass die Länge des Verwachsungswirbels nur jener zweier freien Wirbel gleicht.
- Fig. 2. Eine Gruppe Schwanzwirbel von *Catla Buchanani*. Der sechste und siebente Schwanzwirbel (von rückwärts gezählt), deren untere Dornen mit der Klammer *a* eingefasst sind, erscheinen zu einem einfachen Wirbel verschmolzen, dessen Länge kaum merklich grösser als die eines freien Wirbels ist.
- Fig. 3. Skelet von *Stromateus fiatola*.
a, ist die durch den gespaltenen ersten Schwanzflossenträger gebildete Klemme, welche die unteren Dornfortsätze der fünf ersten Schwanzwirbel zangenartig einschliesst.
- Fig. 4. Ein Segment der Wirbelsäule von *Scomber thynnus*. Der 26. und 27. Wirbel, deren obere Dornfortsätze die Klammer zeigt, sind durch Synostose verschmolzen.

Fig. 1.

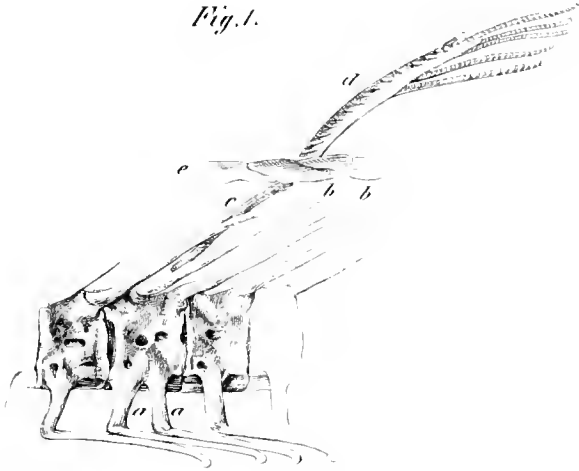


Fig. 2.



Fig. 6.

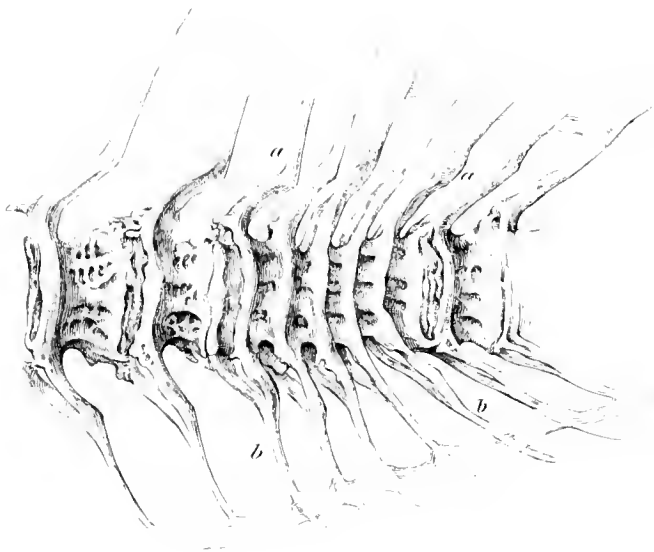


Fig. 3.

" a b

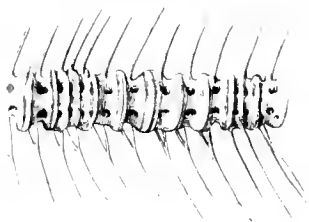


Fig. 4.



Fig. 5.



-1- 1734410 10 1010101010

Fig. 1.



Fig. 5.



Fig. 2.

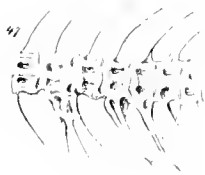


Fig. 4.



Fig. 3.

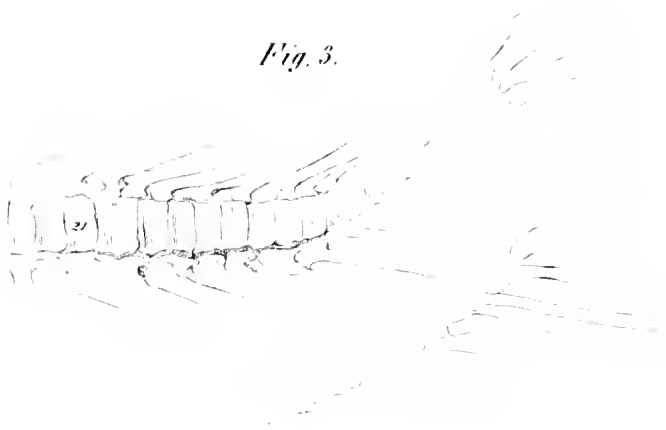


Fig. 6.

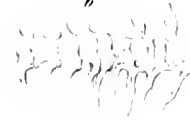


Fig. 7.

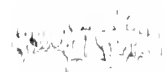


Fig. 1.

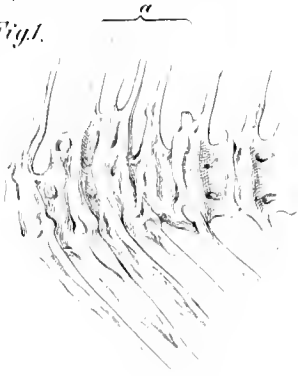


Fig. 2.

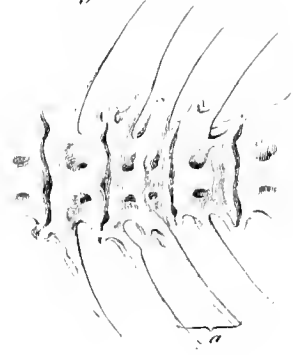


Fig. 3.

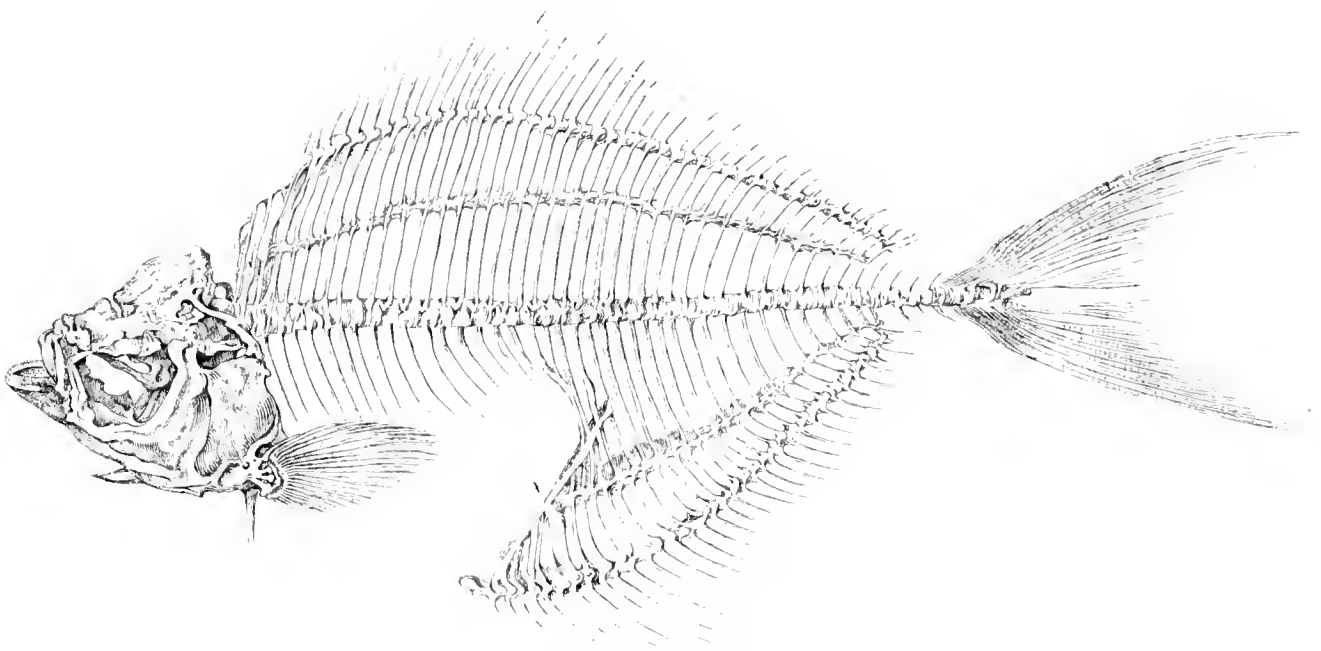
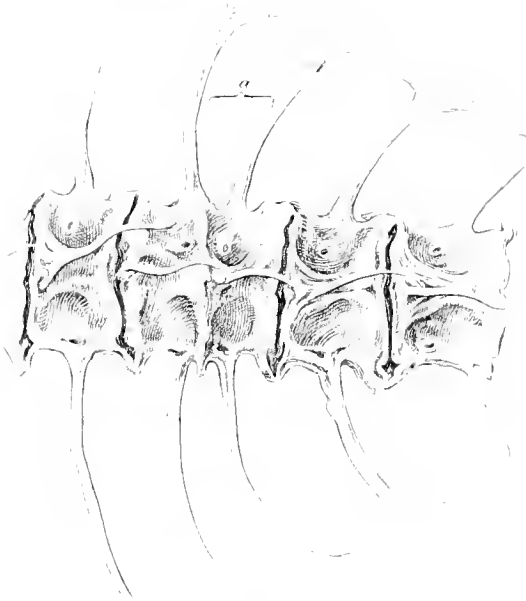


Fig. 4.



11122 24/10/1861

Zweite Abtheilung.

Abhandlungen von Nicht-Mitgliedern der Akademie.

Mit 11 Tafeln.

NEUE UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

DIE ENTWICKELUNG, DAS WACHSTHUM, DIE NEUBILDUNG

UND

DEN FEINEREN BAU DER MUSKELFASERN.

ANGESTELLT VON

DR. THEODOR MARGO,

ORD. PROFESSOR DER PHYSIOLOGIE, ALLO. PATHOLOGIE UND PHARMAKOLOGIE IN CLAUSENBURG

MIT V TAFELN.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 17. MÄRZ 1859.

EINLEITUNG.

Zur definitiven Entscheidung des noch immer herrschenden Streites über den feineren Bau der Muskelfasern ist wohl die Frage über ihre Entwicklung eine der wichtigsten. Die bis jetzt über diesen Theil der Histogenese von den Histologen gemachten Beobachtungen sind zu einer klaren Vorstellung des Entwicklungsganges der Muskelfaser unzureichend.

Bekanntlich hat sich in neuester Zeit hinsichtlich der feineren Structur der Muskelfasern die von Bowman¹⁾ ursprünglich aufgestellte, von E. Brücke²⁾ modificirte Ansicht Bahn gebrochen. Es wäre daher von hohem Interesse zu ermitteln, ob diese Theorie auch mit der Genese der Muskelfasern übereinstimme.

Für die Entwicklung der Muskelfasern beginnt eigentlich die genauere histologische Untersuchung mit Schwann³⁾ und Valentin⁴⁾, deren Ansichten bislang noch als die herrschenden betrachtet wurden. Beide nahmen an, dass die animalen Muskelfasern durch Ver-

¹⁾ Muscles and Muscular Action, in Todd's Cyclopaedia of Anatomy; and On the minute structure and movements of voluntary muscles, in Philosoph. Transactions. 1840, II; 1841, I.

²⁾ Untersuchungen über den Bau der Muskelfasern mit Hilfe des polarisirten Lichtes, mit II Tafeln, aus dem XV. Bde. der Denkschriften der mathem.-naturw. Classe der kais. Akademie der Wissenschaften.

³⁾ Mikroskopische Untersuchungen über die Übereinstimmung in der Structur und dem Wachsthum der Thiere und Pflanzen. S. 156 ff., S. 169. Taf. III, Fig. 13, Taf. IV, Fig. 1, 2, 3, 4, 5.

⁴⁾ Historiae evolutionis systematis muscularis prolusio. Wratislaviae 1832. — Seine Entwicklungsgeschichte, S. 166 und Müller's Archiv 1840, S. 198.

schmelzung rundlicher, nachher etwas in die Länge gezogener, reihenweis geordneter Zellen entstehen, doch was die weitere Bildung der contractilen Substanz, so wie des Sarcolemma anbelangt, weichen ihre Meinungen darin von einander ab, dass Schwann die Bildung der Fibrillen innerhalb, Valentin aber ausserhalb der aus verschmolzenen Zellen entstandenen Muskelröhre verlegt und dass Ersterer das Sarcolemma als die Summe der Zellenmembranen, Letzterer als eine neue um die Muskelfibrillen erzeugte Bildung betrachtet.

Schon durch diese erste Divergenz der Ansichten ward das Lager der Histologen in zwei Theile gespalten.

Pappenheim¹⁾, Reichert²⁾, Günther³⁾, Kölliker⁴⁾, Gerlach⁵⁾, Krammer⁶⁾ sind der Ansicht Schwann's mehr oder weniger beigetreten. Andere wieder, mit Henle⁷⁾ an der Spitze, schlossen sich Valentin's Entwicklungsweise an, indem sie die Fibrillen für eine secundäre Ablagerung über einen aus an einander gereihten Zellen bestehenden Cylinder, und die Scheide des Primitivbündels für eine aus verschmolzenen abgeplatteten Zellen gebildete Membran halten.

Während so zwischen den Ansichten Schwann's und Valentin's die Histologen bis in die neueste Zeit schwankten, tauchten allmählich über diese Frage auch andere, ganz entgegengesetzte Meinungen auf.

Prevost und Lebert⁸⁾ waren die ersten, welche die Entwicklung der Muskelfasern des Frosches aus einfachen, nach beiden Seiten sich verlängernden Zellen beschrieben haben; diese Zellen sollen Anfangs oval, dann Cylindern mit abgerundeten Enden ähnlich sein und in ihrem Innern reihenweis geordnete Kügelchen enthalten.

Bald darauf liess Remak⁹⁾ die Bündel der gestreiften wie der glatten Muskeln durch Verlängerung je einer Kernzelle entstehen, deren Kerne sich selbständig vermehren, die Scheide oder das Sarcolemma erklärte er zugleich für ein Product späterer Bildung.

Diesem von Remak angegebenen vereinfachten Entwicklungsmodus widersprachen jedoch die von Reichert¹⁰⁾ und Holst¹¹⁾ gemachten Beobachtungen, denen zufolge nicht die Muskelfasern, sondern die Fibrillen selbst ursprünglich jede aus einer einzigen Zelle hervorgehen sollten; die Fibrillen sollen dann zu Bündeln, die kleinern Bündel zu grösseren zusammenreten und die äussere Scheide zuletzt gebildet werden.

Die späteren Untersuchungen in diesem Gebiete der Histogenese dienten zumeist blos zur Bestätigung der einen oder der anderen der hier angeführten Ansichten.

1) Zur Kenntniss der Verdauung im gesunden und kranken Zustande. Breslau 1839, S. 111.

2) Entwicklungsleben im Wirbelthierreiche. Berlin 1840, S. 241.

3) Lehrbuch der allgemeinen Physiologie. Leipzig. S. 369. — Canstatt's Jahrb. für 1845, S. 72.

4) Annales des sciences naturelles. 1846. Note sur le développement des tissus chez les batraciens, pag. 93. — Canstatt's Jahrb. für 1846, S. 70. — Mikroskopische Anatomie, Bd. II, 1. Hälfte, S. 252—259.

5) Handbuch der allgemeinen und speciellen Gewebelehre des menschlichen Körpers. Mainz 1848. S. 100 ff., und Canstatt's Jahrb. für 1848, S. 42.

6) Bemerkungen über das Zellenleben in der Entwicklung des Froscheies, in Müller's Archiv 1848, S. 60 und Canstatt's Jahrb. für 1848, S. 42.

7) Allgemeine Anatomie. Leipzig 1841, S. 602.

8) Annales des sc. nat. 3^{ème} Série. 1844. Avril, Mai, Octobre. — Mémoire sur la formation des organes de la circulation et du sang dans les batraciens, und in Canstatt's Jahrb. für 1844, Bd. I, S. 21.

9) Über die Entwicklung der Muskelprimitivbündel, in Froriep's Neue Notizen, 1845, Nr. 768.

10) Müller's Archiv 1847, Jahresbericht, S. 17.

11) De structura muscutorum in genere et annulorum musculis in specie observationes microsc. c. tab. — Dissertatio inaug. Dorpat 1816. — Auch in Canstatt's Jahrb. für 1847, Bd. I, S. 56—57.

So stimmen die Erfahrungen von Günzburg¹⁾, Robin²⁾ und Haeckel³⁾ grossentheils für die von Schwann aufgestellte Theorie.

Leydig's⁴⁾ Beobachtungen zufolge soll eine Gruppe von Muskelzellen seitlich mit ihren Rändern verschmolzen einen sogenannten Primitivbündel herstellen, das Sarcolemma aber soll nichts Anderes sein als homogene Bindesubstanz, welche eine Gruppe von Muskelcylindern oder den sogenannten Primitivbündel einschliesst.

Die neueren Untersuchungen Lebert's⁵⁾ endlich, so wie Remak's⁶⁾ und in neuester Zeit auch Kölliker's⁷⁾ scheinen den von Remak und Lebert früher schon beschriebenen Bildungsmodus zu bestätigen.

Diese Verschiedenheit der Ansichten über einen und denselben Gegenstand liefert freilich einen nicht sehr starken Beleg für die Sicherheit unserer sinnlichen Wahrnehmungen und deren richtige Deutung, findet jedoch in der Schwierigkeit des Beobachteten einigermassen ihre Erklärung.

Nur in Betreff der verästelten Muskelbündel des Herzens stimmen fast die Meisten darin überein, dass die mit drei bis vier Fortsätzen versehenen Muskelzellen mit einander verwachsen und so wahre Muskelfasernetze bilden sollen.

Über die Bedeutung der willkürlichen quergestreiften Muskelfaser schwankte man jedoch bisher zwischen folgenden Möglichkeiten. Erstens: die Muskelfaser ist Resultat einer Verschmelzung von Zellen oder Zellenmembranen: zweitens: sie ist einer einfachen ungewein verlängerten Kernzelle äquivalent.

Im ersteren Falle dachte man sich das Verschmelzen der Zellen mit einander nach einer einfachen Längsreihe, oder man stellte sich die Bildung der Muskelfaser durch seitliches Verschmelzen mehrerer Zellen vor. Bei den Einen so wie bei den Anderen herrschen dann noch manche Unterschiede bezüglich der Entstehungsweise des Sarcolemma, der Fibrillensubstanz, der Natur der Kerne innerhalb der Bildungszellen.

Den Einen ist das Sarcolemma identisch mit der Summe der verschmolzenen Zellenmembranen und die sogenannte Fibrillensubstanz blos metamorphosirter Inhalt der primitiven Muskelröhre [Schwann, Günther, Kölliker, Gerlach, Krammer⁸⁾, Bendz⁹⁾], den Anderen aber ist sowohl das Eine als das Andere ein secundäres Umlagerungsgebilde, um eine ursprünglich verschmolzene Zellenreihe [Valentin, Henle¹⁰⁾]. Günzburg¹¹⁾ betrachtet die Fibrillen nicht für metamorphosirten Inhalt der Muskelröhre, sondern für umgewandelte Kernsubstanz. Robin¹²⁾ nimmt zwar eine Verschmelzung der Zellen nach der Längsreihe an, spricht jedoch nicht von Zellen nach dem Schwann'schen Typus, sondern nur von kernhaltigen Körperchen (*corps myoplastiques*).

1) Untersuchungen S. 1 und Canstatt's Jahreshb. für 1854, Bd. I, S. 52.

2) Mémoire sur la naissance et le développement des éléments musculaires de la vie animale et du coeur. Gazette médicale 1855, Nr. 25, pag. 387, und Canstatt's Jahreshb. für 1855, Bd. I, S. 38.

3) Über die Gewebe des Flusskrebses, in Müller's Archiv 1857, S. 486.

4) Lehrbuch der Histologie des Menschen und der Thiere, 1857, S. 16, 47.

5) Annales des sc. nat. 1849, Juin, pag. 349, pl. XI—XIII und Canstatt's Jahreshb. für 1849, Bd. I, S. 40.

6) Über den Bau des Herzens, in Müller's Archiv 1850, S. 76, 88, Canstatt's Jahreshb. für 1850, Bd. I, S. 41.

7) Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie, Bd. IX: Entwicklung der quergestreiften Muskelfasern des Menschen aus einfachen Zellen, S. 139 und Entwicklung der Muskelfasern der Batrachier, S. 141 ff. — Canstatt's Jahreshb. für 1857, S. 36.

8) A. a. O.

9) Handbog i den almindelige Anatomie. Kjöbenhavn, pag. 381 ff. und Canstatt's Jahreshb. für 1847, Bd. I, S. 56.

10) 11) 12) A. a. O.

Nicht minder weichen die Beobachtungen jener Autoren von einander ab, welche eine seitliche Verschmelzung von Zellen annehmen. Nach Reichert und Holst¹⁾ wäre das Fibrillenbündel Product dieser seitlichen Verschmelzung und jede Fibrille entspräche somit einer ungemein verlängerten Zelle; nach Leydig²⁾ aber, der die Existenz der Fibrillen schlechtweg läugnet, wäre es der embryonale Muskelbündel, der den seitlich verschmelzenden Zellen — Primitivcy lindern — sein Dasein zu verdanken hätte, nachdem er sich weiterhin verlängernd, endlich in seine Fleischpartikelchen differenzierte.

So differiren auch die Ansichten derjenigen, welche die quergestreifte Muskelfaser für eine einfache durch Vermehrung der Kerne verlängerte Zelle halten, darin, dass die Einen [Remak, Kölliker³⁾] die Bildungselemente derselben als wirkliche Zellen nach dem bekannten Schwann'schen Typus betrachten, die Anderen [Prevost und Lebert⁴⁾] dieselben nicht für wirkliche Zellen, sondern bloß für kernhaltige oder auch kernlose feste Körperchen (myogenen Körper) anerkennen wollen.

Bei einer so grossen Divergenz der Ansichten ist wohl nicht so leicht, der einen oder anderen Theorie sich ohne Weiteres anzuschliessen und sich mit der bisherigen Deutung des Beobachteten zufrieden zu stellen, wiewohl jede der Angaben gewisse Beobachtungen für sich anzuführen vermag.

Dies mögen wohl die Gründe gewesen sein, die mich bewogen hatten einige den Ausgeburten der Phantasie nicht unähnliche Theorien, wie die von Barry und Baumgärtner, hier gänzlich mit Stillschweigen zu übergehen.

Es wäre daher wohl jetzt mehr als je an der Zeit, die vielen divergirenden Meinungen in diesem Gebiete der Histogenese einmal einer strengen Controle zu unterziehen und genau zu ermitteln was sie des Wahren, Bleibenden, und was sie des Vergänglichen, Irrthümlichen enthalten.

Die Muskellehre hat überdies auch ihre *pia desideria*, die jedem wahren Freunde der Natur gewiss am Herzen liegen.

Bekanntlich nennen wir musculös ein jedes Gewebe, das die Fähigkeit besitzt auf Reize im Molecularbewegungen zu gerathen und sich zu verkürzen, dabei aber aus gewissen morphologischen Einheiten, den gestreiften Muskelfasern oder den musculösen Faserzellen zusammengesetzt ist. Leider aber kennen wir bereits manche Gewebe, denen die erstere Eigenschaft — die Contractilität nämlich — mit vollem Rechte zukommt, wiewohl die bis jetzt bekannten histologischen Elemente der musculösen Gebilde auf sie durchaus nicht anwendbar sind.

Auf ein solches Gewebe, das bei vielen wirbellosen Thieren an die Stelle der Muskeln tritt, hat zuerst Dujardin⁵⁾ die Aufmerksamkeit der Histologen gelenkt und es „Sarcode“ genannt.

Auch ist bei Räderthierchen und Tartigraden die contractile Substanz nach Doyère's⁶⁾ Untersuchungen vollkommen homogen, weich, ohne Spur weiterer Organisation, ganz der Sarcode ähnlich.

1) 2) 3) 4) A. a. O.

5) Histoire naturelle des Infusoires. Paris 1841, pag. 35 ff.

6) Annales des sciences naturelles. 2. Série. Vol. XIV, 1840; Vol. XVII, 1842; Vol. XVIII, 1842.

Ferner haben die genauen Untersuchungen Stein's¹⁾ und besonders Czermak's²⁾ längst erwiesen, dass die Construction und der Mechanismus des contractilen Stiels der Vorticellinen ein ganz anderer sei, als der von den Physiologen bekannte Bau der übrigen Muskeln, wie wohl ihn bereits O. Schmidt³⁾ und Lachmann⁴⁾ in Anbetracht seiner Function „Stielmuskel, Schnellmuskel“, und das mit vollem Recht nannten. Es wäre zu erwarten, dass Theile oder Gewebe von gleicher functioneller Eigenschaft auch physikalisch, chemisch und morphologisch mit einander übereinstimmten. Doeh ist es Niemandem noch gelungen den Bau des Vorticellenstieles mit den bekannten morphologischen Einheiten der übrigen Muskel vollkommen in Einklang zu bringen.

Nicht minder abweichend und höchst interessant ist die Structur der Muskeln bei *Oxyuris ornata*, welche neuerer Zeit von G. Walther⁵⁾ genauer beschrieben und abgebildet wurde.

Es sei mir gestattet hier noch als letztes Beispiel auf die von Fick⁶⁾ beschriebenen eigenthümlichen Structurverhältnisse der contractilen Wandung des Samenleiters hinzuweisen. Dieser Forscher fand nämlich in der Wandung des *Vas deferens* beim Hunde — und beziehungsweise Menschen — überhaupt keine präformirten morphologischen Muskeleinheiten, nichts was den gestreiften Muskelfasern oder den musculösen Faserzellen nur im geringsten ähnlich wäre. Die im hohen Grade contractilen Elemente bestanden blos aus einem Fasergewebe, das ein continuirliches Geflecht bald sich spaltender, bald wieder sich vereinigender Gewebsbälkchen bildete. Diese Dissonanz lässt sich freilich durch die bisherigen mikroskopischen Beobachtungen nicht ausgleichen, am wenigsten aber dürfte sie meines Erachtens aufgelöst werden durch die willkürliche Annahme desselben Autors, dass das fragliche Gewebe ein „elastisches Fasergewebe“ sei, welches unter gewissen Verhältnissen Contractilitätsphänomene zeigen kann. Viel richtiger scheint es mir vielmehr das besagte Fasergewebe, so wie alle ähnlichen contractilen Gewebe einstweilen für musculös anzunehmen und den Beweis für die morphologische Übereinstimmung derselben mit den bekannten musculösen Geweben höherer Thiere von späteren Untersuchungen zu erwarten.

Auf dem Wege der Entwicklungsgeschichte wäre es vielleicht möglich zu einem für die verschiedenen contractilen Elemente gemeinschaftlichen Ausgangspunkte zu gelangen, und so einmal eine natürliche Classification sämmtlicher contractilen Gewebe zu begründen.

So vielen Schwierigkeiten und Widersprüchen — die vielleicht zum grossen Theil nur scheinbar sein könnten — gegenüber, wäre es daher von höchster Wichtigkeit, erstens: den wahren Bildungsmodus der musculösen Gebilde auf das genaueste zu constatiren; sodann zu ermitteln, ob die Bildung von Muskelfasern nur an die embryonale Periode des Thieres gebunden ist, oder ob nicht etwa eine Neubildung von Muskelfasern während des Wachstums eines Individuums oder auch später unter gewissen Verhältnissen stattfindet, und im Bejahungsfalle die Art und Weise dieser Neubildung zu erforschen. Aus den Resultaten dieser Beobachtungen dürften endlich manche Schlussfolgerungen zur Beleuchtung und Ergänzung unserer bisherigen Kenntniss über den Bau der Muskelfasern gezogen werden.

1) Die Infusionsthierehen auf ihre Entwicklungsgeschichte untersucht, 1854, S. 78 ff.

2) Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie, IV. Bd. S. 438.

3) Handbuch der vergleichenden Anatomie, Jena 1852, S. 147.

4) Über die Organisation der Infusorien etc. Müller's Archiv, 1856, S. 382.

5) Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie, VIII. Bd. S. 174 ff. Taf. V, Fig. 7—12.

6) Müller's Archiv, 1856, S. 486 ff.

Zur Beantwortung dieser Fragen habe ich nun vorigen Sommer und Herbst (1858) diese Arbeit unternommen, die Untersuchungen wurden zum grössten Theile im physiologischen Institute der k. k. Wiener Hochschule angestellt, manches aber, was hier nicht zum Abschluss gebracht werden konnte, wurde im darauf folgenden Winter in Pesth fortgesetzt und zu Ende gebracht.

Bei dieser Gelegenheit fühle ich mich zugleich dem ausgezeichneten Leiter der Wiener physiologischen Anstalt Herrn Professor E. Brücke als treuem und erfahrenem Wegweiser auf dieser schwierigen Bahn, zum innigsten Danke verpflichtet.

Auch kann ich nicht umhin, den Herren Professoren Langer und Wedl in Wien meinen wärmsten Dank auszusprechen für die Bereitwilligkeit, mit welcher sie mir im regen wissenschaftlichen Eifer schätzenswerthe Materialien überlassen haben und mir mit ihren werthvollen Rathschlägen freundschaftlichst entgegengekommen sind.

Noch muss ich dankbar bekennen, dass ich durch die Güte des Herrn k. Rathes und Prof. an der Pesther Universität S. Schordann in Stand gesetzt wurde zu meinen Untersuchungen mich eines ausgezeichneten englischen Mikroskopes von Powell et Lealand zu bedienen, das in Hinsicht der Klarheit und Schärfe der Bilder, so wie der grossen penetrirenden und resolvirenden Kraft das Höchste leistet.

Die Messungen der untersuchten Gegenstände wurden theils mit dem englischen Mikroskope, und einem Oberhäuser'schen sehr genauen Mikrometer, theils aber vermittelst eines Nachet'schen Ocularmikrometers angestellt, welches sammt dem dazu gehörigen Instrumente dem physiologischen Institute zu Wien gehört und mir durch Herrn Professor E. Brücke zur Verfügung bereitwilligst gestellt wurde.

Die beigegebenen Abbildungen sind sämmtlich nach der Natur gezeichnet und nichts weniger als schematisch, da selbe die in meinen Präparaten mit dem englischen Mikroskope sichtbaren Bilder möglichst treu darstellen.

Die Zeichnungen sind von der geübten Hand meiner jüngeren und unbefangenen Freunde, der Doctoranden der Medicin C. Heitzmann und G. Kurtz ausgeführt, denen ich hiemit meinen besten Dank sage.

Ich werde vorliegende Arbeit in drei Abschnitten vortragen. Der erste Abschnitt umfasst die Resultate meiner Beobachtungen über die Entwicklung der Muskelfasern; der zweite begreift die von mir gemachten Untersuchungen über das Wachsthum und die Neubildung der Muskelemente; im dritten Abschnitt endlich werde ich mich mit dem feineren Bau der Muskelfasern beschäftigen.

Pesth, im März 1859.

Der Verfasser.

I. ABSCHNITT.

Über die Entwicklung der Muskelfasern.

Unter den Wirbelthieren, welche ich zu dieser Untersuchung benutzte, muss ich die Larven und Jungen von Fröschen (*Rana temporaria* und *esculenta*) und Kröten (*Bufo cinereus*) mit Vorzug und in erster Reihe nennen, doch ergaben sich zu diesem Zwecke auch Junge von *Perca fluviatilis*, *Scyllium catulus*, *Torpedo marmorata*, Hühnerembryonen und junge Sperlinge, so wie Embryonen der Wanderratte (*Mus decumanus*), des Schweines, des Rindes, des Pferdes und des Menschen als sehr treffliche Untersuchungsobjecte. Zwischen den wirbellosen Thieren lieferten mir junge Flusskrebse (*Astacus fluviatilis*), dann Puppen von *Saturnia piri*, Larven von *Dermestes lardarius* und Junge von *Blatta orientalis* die dankbarsten Objecte.

Hinsichtlich der Untersuchungsmethoden glaube ich nicht unerwähnt lassen zu müssen, dass ich, wo es nur thunlich war, möglichst lebensfrische Thiere benutzte; dieselben wurden zu diesem Zwecke in starkem Weingeist ertränkt, und nachdem sie darin einige Tage gelegen hatten, der Präparation und Untersuchung unterworfen.

Diese Methode ergab sich unter allen den bekannten als die allerzweckmässigste, wiewohl ich nicht unterliess namentlich zur Gewinnung anderer Gesichtspunkte auch die von Billroth bekannt gemachte und von Meissner¹⁾ für die Untersuchung museulöser Faserzellen angerathene verdünnte Holzessigsäure, so wie Kölliker's²⁾ Anrathen zufolge die Maceration in dil. Chromsäure gelegentlich in Anwendung zu bringen. Auch erwies sich die Maceration in Alkohol am zweckmässigsten, weil sie fürs Erste die Querstreifen an Muskelementen überall am deutlichsten zur Erscheinung bringt, dann die Isolirung der Muskelemente in hohem Grade erleichtert, ohne deshalb nachtheilige Veränderungen an denselben, wie das Aufquellen, Verdunkeln und Zerbröckeln bei der Präparation zu erzeugen.

Zur Aufbewahrung der Präparate wurde theils diluirter Weingeist, theils diluirte wässrige Lösung von doppelt chromsauren Kali, der etwas Glycerin beigegeben ward, benutzt, welche Flüssigkeiten sich auch in der Folge mir als die vortheilhaftesten erwiesen haben. Viele Präparate habe ich zwar auch in anderen Conservierungsmitteln, wie sie von verschiedenen Forschern zur Aufbewahrung und Untersuchung der Muskelfasern angepriesen werden, aufzubewahren versucht, doch machte ich die Erfahrung, dass die Vortheile, die sie

¹⁾ Zeitschrift für rationelle Medicin von Henle und Pfeufer. 1858. II. Bd., 3. Heft, S. 317.

²⁾ Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie, IX. Bd., I. Hft., S. 141.

gewähren, viel geringer sind als die Nachteile, welche sie mit sich bringen und woran endlich nach längerer Zeit auch die schönsten Präparate verderben. So machte Holzessig, Creosot, Sublimatauflösung, Goadby'sche Flüssigkeit die Präparate allmählich dunkler und weniger deutlich, Chromsäure, arsenige Säure, Glycerin, so wie Terpentinöl und Damarlack zu licht und durchscheinend. Diluirtes doppelt chromsaures Kali mit etwas Glycerin, oder auch ohne Glycerin, so wie diluirter Weingeist entsprachen dem Zwecke vollkommen, so dass ich Jedem, der sich mit diesen so zarten Objecten beschäftigt, diese Methode als die vortheilhafteste empfehlen kann.

Die von Prof. Schultze in Rostock zuerst zur Isolation der Pflanzenzellen entdeckte und von Budge¹⁾ zur Isolirung der Muskelemente empfohlene Mischung von chlorsaurem Kali und Salpetersäure habe ich ebenfalls versucht; doch fand ich, dass sie die zarten Elemente der Embryonen zu stark angreift und dadurch leicht ein völliges Zerfallen der histologischen embryonalen Muskelemente in ihre *sarcous elements* bewirkt.

A. Bildung der quergestreiften Muskelfasern bei den Batrachiern.

1. Bildung der contractilen Substanz.

Um die Entwicklung der Muskelfasern kennen zu lernen, sind wohl die Batrachier unter allen Thieren die entsprechendsten Objecte. Die leichte Isolirbarkeit ihrer Muskelemente, die Grösse derselben, so wie die geringere Menge des umgebenden embryonalen Bindegewebes sind Eigenschaften, die sie zu diesem Zwecke besonders geeignet machen. Da ich die Untersuchung im Sommer und Herbste angestellt hatte, so musste ich mich in Ermangelung sehr junger Froschembryonen mit Frosch- und Krötenlarven, so wie mit jungen, höchstens 25 Millim. langen Fröschen begnügen.

Bringt man ein Stückchen von einem Rückenmuskel auf eine Glasplatte und untersucht es nach vorhergegangener Isolirung der Muskelfasern mittelst der Präparirnadeln mit dem Mikroskope bei einer 200- bis 360maliger Vergrösserung, so begegnet man neben schon fertigen oder im Wachsthum begriffenen Muskelfasern höchst auffallenden Gebilden, die, wie ich mich später überzeugte, bei der Bildung der Muskelfasern eine höchst wichtige Rolle spielen. Oft erscheinen sie im Blastem zwischen den fertigen Muskelfasern eingelagert; man findet sie jedoch ziemlich häufig auch innerhalb der Sarcolemmaschläuche, zwischen dem Sarcolemma und der contractilen Substanz der Muskelfasern (Taf. I, Fig. 1, 7), mitunter füllen sie einen ganzen Sarcolemmaschlauch vollkommen aus (Taf. I, Fig. 6 e).

Es sind dies rundliche, rundlich-ovale oder cylindrische mit abgerundeten Enden versehene Körperchen von 0·0117 bis 0·0147 Millim. Länge und 0·0058 bis 0·0088 Millim. Breite. Die meisten zeigen deutliche Querstreifen, stark marquirte Contouren, grosse Lichtbrechungskraft und bergen häufig in ihrem Innern ein oder zwei lichte runde Bläschen von 0·0028 bis 0·0035 Millim. Manche liegen isolirt im Blastem, entweder gerade oder sanft gekrümmt, bohnenförmig oder halbmondförmig zusammengerollt, andere wieder zu zweien, dreien und mehrere neben einander vom Sarcolemmaschlauch eingeschlossen, rundliche oder länglich-ovale Knäuel oder Inseln innerhalb des Schlauches bildend; in welchem Falle sie sich häufig zum Theil gegenseitig decken oder mit ihren concaven Rändern einander zuge-

¹⁾ Archiv für physiologische Heilkunde, Neue Folge, II. Bd., 1858, 1. Hft. S. 72.

kehrt sind. Die Länge solcher Knäuel beträgt 0·0205 Millim., die Breite 0·0147 Millim. im Mittel (Taf. I, Fig. 4 *d* — Fig. 7 *b, b, b*). Ähnlichen einzelnen oder auch gruppenweise beisammenliegenden Körperchen begegnet man oft längs der fertigen und im Wachstum noch begriffenen Muskelfasern (Taf. I, Fig. 9 *e, e, e, e*), so wie auch an den Übergangsstellen der Muskelfasern in die Sehne (Taf. I, Fig. 10 *b* und Taf. II, Fig. 11 *a*). Die grösseren dieser Körperchen hatten stets eine sehr deutliche Querstreifung, die kleineren manchmal nur eine Andeutung derselben; manche schienen blos einen homogenen stark lichtbrechenden Inhalt zu enthalten, in welchem dann ausser dem lichten runden Kernbläschen einige zerstreute Molecularkörnchen wahrgenommen werden konnten.

Was die charakteristische Querstreifung dieser Körperchen anbelangt, so scheint diese aus parallelen, durch die ganze Dicke derselben gehenden Querzonen oder Querschichten erzeugt, von denen die eine aus stärker, die andere aus schwächer lichtbrechender Substanz besteht. Diese beiden Arten von Querzonen wechseln der Länge nach mit einander ab und stehen zur Längsaxe des Körperchens unter einem geraden Winkel. Der Abstand je zweier stärker lichtbrechender Zonen beträgt ungefähr 0·0014 bis 0·0016 Millim. Die Zahl dieser Querzonen ist bei den verschiedenen Körperchen, je nach der Länge derselben, verschieden; bei den grösseren konnte ich bei 525maliger Vergrösserung 7 bis 10 solcher stark lichtbrechender Querzonen mit grösster Deutlichkeit abzählen, so dass auf einen Raum von 0·0058 Millim. gewöhnlich vier stark lichtbrechende Zonen zu liegen kamen.

Schon bei einer 525maligen Vergrösserung (Ocular I. und Objectiv von $\frac{1}{12}$ Zoll Focaldistanz) konnte man bei vielen von diesen gestreiften Körperchen in jeder stärker lichtbrechenden Querzone feine mit der Längsaxe derselben gleichlaufende und zu der Querzone senkrechte Linien bemerken, wodurch jede stark lichtbrechende Schichte in eine Anzahl symmetrisch neben einander liegender kleiner Partikelchen von stark lichtbrechender Eigenschaft getheilt schien. Diese Linien stimmen offenbar mit jenen vollkommen überein, welche in neuester Zeit Rollet¹⁾ und E. Brücke²⁾ als Trennungslinien zwischen den einzelnen *Sarcous elements* der quergestreiften Muskelfaser näher beschrieben haben.

Von der Richtigkeit dieses Verhaltens konnte ich mich überdies bei 936maliger Vergrösserung (Objectiv $\frac{1}{12}$ Zoll Focaldistanz, Ocular II.) noch genauer überzeugen. Man unterscheidet dann ganz deutlich zwei optisch und physikalisch verschiedene Substanzen, aus welchen der Inhalt dieser Körperchen besteht, nämlich eine homogene, weniger lichtbrechende, fast farblose Grundsubstanz, in welcher kleine runde stark lichtbrechende, gelbliche Körnchen symmetrisch in Querreihen neben einander gelagert wahrgenommen werden. Die Körnchen, die nichts anderes als die sogenannten *Sarcous elements* oder Fleischkörnchen sein können, messen ohngefähr 0·0005 bis 0·0007 Millim. (Taf. I, Fig. 3, *A, B*).

Prof. Brücke hatte ferner die Güte mit Hilfe des polarisirten Lichts an diesen Körperchen auch die doppelt lichtbrechende Eigenschaft zu constatiren, was um so mehr für ihre musculöse Natur sprechen dürfte.

Das Verhalten dieser quergestreiften Körperchen zu den verschiedenen Reagentien war ein ähnliches, wie das der fertigen quergestreiften Muskelfasern. Wurde etwas dil. Essig-

1) Untersuchungen zur näheren Kenntniss des Baues der quergestreiften Muskelfaser, mit I Tafel; in den Sitzungsberichten der mathem.-naturw. Classe der kais. Akademie der Wissenschaften, Bd. XXIV, S. 291.

2) Untersuchungen über den Bau der Muskelfaser mit Hilfe des polarisirten Lichts, mit II Tafeln. Aus dem XV. Bande der Denkschriften der math.-naturw. Classe der kais. Akademie der Wissenschaften.

säure hinzugesetzt, so erschien die Querstreifung anfangs deutlicher, bald aber wurde ihr Inhalt blasser, so dass die vorher ovalen oder länglichen Körperchen durch Quellung und theilweise Lösung ihres Inhaltes an Grösse zunahmten und eine mehr rundliche Gestalt bekamen. Die meisten wurden durch Essigsäure anfangs nur in der Mitte durchsichtiger, so dass an der Peripherie derselben eine dünne Lage von lichtbrechender Substanz noch übrig blieb und in der Mitte, oder gegen das eine Ende zu, ein deutlicher bläschenartiger Kern zum Vorschein kam. In dieser Gestalt gaben sie sich dem Beobachter als kernhaltige Zellen zu erkennen (Taf. I. Fig. 2). In caustischen Alcalien löst sich ihr Inhalt ebenfalls allmählich und theilweise auf, die Querstreifen werden noch lange nachher gesehen, wiewohl weniger marquirt und viel zarter, die Inhaltsmasse quillt bedeutend auf, um das Doppelte, ja Dreifache und es erscheint endlich in ihrem Innern eine homogene sarcodeartige Masse, in welcher ein oder mehrere stark lichtbrechende Bläschen eingelagert sind. In Salpetersäure werden sie gelb, ja braungefärbt und schrumpfen ein wenig ein. Chromsäure und besonders doppelt chromsaures Kali färbt dieselben merklich gelb und zwar so, dass, zumal bei starken Vergrößerungen, bloß die *Sarcous elements* gelb oder grünlichgelb gefärbt erscheinen, während die homogene Grundsubstanz, in welcher jene eingelagert sind, farblos bleibt. Auf Schwefelsäure werden dieselben körnig, dann mehr homogen und quellen endlich stark auf. Arsenige Säure bewirkt, dass sie lichter und blasser werden, die Querstreifen zarter und weniger marquirt. In Schwefeläther werden sie ebenfalls lichter, lösen sich jedoch darin nicht auf.

Die hier beschriebenen optischen, physikalischen und chemischen Eigenschaften dieser Körperchen, so wie ihr constantes Vorkommen und der Ort, wo sie gewöhnlich gefunden werden, berechtigen mich zu der Annahme, dass dieselben eigenthümliche musculöse Gebilde sind.

Um jedoch diese Thatsache gehörig verwerthen zu können, ist noch die Frage zu beantworten, ob die Körperchen in fortschreitender, oder aber in der rückschreitenden Metamorphose begriffen sind. Ich muss gestehen, dass ich anfangs geneigt war selbe für eine Art verkümmelter Muskelfasern zu halten, besonders als ich sie auch im Schwanz der Froschlarven fand. Doch überzeugte ich mich bald, dass sie nie am hintersten Ende, wohl aber häufig an den vorderen seitlichen Theilen des Schwanzes vorkommen, wo bekanntlich bei wachsenden Froschlarven eine stetige Dickenzunahme auch dann beobachtet wird, wenn in Folge weiterer Metamorphosen der Froschlarve die Länge des Schwanzes bereits in der Abnahme begriffen ist. Da aber diese Dickenzunahme ohne eine Bildung von neuen Gewebseinheiten kaum denkbar wäre, so spricht diese Erscheinung offenbar gegen die Vermuthung als wären diese Körperchen etwa verkümmerte oder im Rückschreiten begriffene Muskelfasern. Überdies charakterisirt sich die Involution der Muskelfasern auf eine ganz andere Weise, durch fettige Entartung ihres Inhaltes, oder wohl auch durch Pigmentbildung, wovon ich an jenen Stellen keine Spur je fand.

Zu diesen Gründen bin ich in der Lage noch die anzuführen, dass fragliche Körperchen zumeist am Rücken längs der Wirbelsäule, in der Schultergegend, an den Extremitäten, dann in der Gegend des *M. mylohyoides*, so wie in der Zunge der noch sehr kleinen jungen Frösche vorkommen, Stellen, wo ein rascheres lebhafteres Wachstum der Muskeln während dieser Periode schon a priori anzunehmen ist. Überdies habe ich späterhin auch an andern annoch in der Entwicklung und im Wachstum begriffenen Thieren ähnliche Körperchen entdeckt, deren Beschreibung weiter unten folgen wird.

Es bleibt somit keine andere Annahme möglich, als die besagten eigenthümlichen Gebilde unzweifelhaft für musculös und in fortschreitender Metamorphose zu wirklichen quergestreiften Muskelfasern zu halten.

Die hier beschriebenen quergestreiften Körperchen sind somit nichts Anderes als Muskelelemente in mittlerer Entwicklungsstufe, welche bei der Untersuchung der Muskeln an Froschlarven und Froschjungen dem aufmerksamen Beobachter zunächst auffallen.

Es fragt sich nun, welches ist ihre frühere und welches ihre spätere Entwicklungsstufe, woher kommen sie und wohin gehen sie. Mit einem Wort es handelt sich hier um nichts anderes als um den ganzen Verlauf des Bildungsvorganges einer quergestreiften Muskelfaser.

Ich will daher die früheren sowohl, als auch die späteren Entwicklungsphasen dieser Muskelelemente hier näher beschreiben.

Ausser diesen gestreiften Körperchen, welche ich aus weiter unten zu erscheidenden Gründen, „Sarcoplasten“ nennen will, sieht man in der Nähe derselben, so wie zwischen den übrigen Muskelfasern häufig noch andere Körperchen, die mehr oder weniger rund, und in einem homogenen, fein granulirten Blastem (homogene Bindesubstanz) eingelagert sind. Ihre Grösse ist verschieden; die kleinsten messen 0·0083 Millim. bis 0·0110 Millim. im Durchmesser, haben eine runde Gestalt und enthalten einen einfachen oder in Theilung begriffenen Kern nebst Nucleolus. Die Zellmembran umschliesst überdies einen homogenen, feinkörnigen flüssigen Inhalt. Daneben befinden sich oft grössere Zellen von 0·0136 Millim. bis 0·0150 Millim., meist mit zwei deutlichen lichten Kernbläschen, welche ihrer Lage nach zu urtheilen, offenbar durch Theilung entstanden sein mussten, und im Mittel 0·0025 Millim. gross sind. Der Inhalt dieser grösseren Zellen erscheint mehr körnig, so dass im homogenen Inhalt stark lichtbrechende runde Körnchen eingebettet wahrzunehmen sind, welche durch doppelt chromsaures Kali merklich grünlichgelb gefärbt werden. Man findet ähnliche Zellen, die bereits 0·0166 Millim. gross sind und drei junge Kerne enthalten, wovon jeder ein stark glänzendes kleineres Bläschen (Nucleolus) in seinem Innern einschliesst. Die Kerne dieser Zellen sind auch der Grösse ihrer Zellen entsprechend grösser, im Mittel wohl bis 0·0050 Millim. gross (Taf. I, Fig. 1, *B, a, b, c*; Fig. 4 *b*; Fig. 5 *a, a, a*).

Diese Zellen scheinen durch Endogenese in rascher Vermehrung begriffen zu sein; denn man findet nicht selten zwischen diesen kleineren und grösseren Zellen mit einfachem und mehrfachem Kern, auch solche, die theils rund, theils ellipsoidisch gestaltet, 0·0222 Millim. bis 0·0280 Millim. gross sind und innerhalb einer gemeinschaftlichen Mutterzellenmembran eine Brut von zwei bis fünf, ja sogar acht Tochterzellen enthalten (Taf. I, Fig. 4 *c, c, c*; Fig. 5 *c, c*).

Dass nun diese Zellen es sind, welche als frühere Entwicklungsstufen der oben beschriebenen Sarcoplasten betrachtet werden müssen, dafür glaube ich mehrere Gründe anführen zu können. Erstens finden sich diese Zellen in der Nähe der fertigen oder in der Entwicklung begriffenen Muskelfasern, meist in dem sie umgebenden Blastem, oder den Muskelfasern anliegend. Anderntheils können sie weder Anlagen oder Bildungszellen von Gefässen, noch von Nerven sein, da diese sich auf ganz andere Weise bilden. Es bleibt uns also nichts anderes übrig, als dieselben für die ersten Anlagen der Muskelfasern zu halten. Die Wahrscheinlichkeit dieser Annahme wird aber zur vollen Gewissheit durch den eigenthümlichen Verlauf der Metamorphose dieser Zellen, den ich so glücklich war durch directe Beobachtung zu bestätigen, und der über ihre nächsten Beziehungen zu den Sarcoplasten keinen Zweifel aufkommen lässt.

Betrachtet man nämlich die grösseren dieser Zellen bei 360- oder 525maliger Vergrößerung, so bemerkt man auf der inneren Wand derselben eine das Licht stark brechende, durch doppelt chromsaurer Kali gelblich gefärbte Substanz von verschiedener Dicke abgelagert, welche in den meisten grösseren Zellen deutliche Querstreifung zeigt. Diese Ablagerung scheint nicht gleichförmig um die ganze Wandung herum sich zu erstrecken, sondern erscheint meist grösser auf der einen Hälfte oder auf zwei Drittel der Wandung. Nicht selten gelang es mir alle diese Übergänge an ein und demselben Präparate zu beobachten, so dass ich mit einem Blick sowohl die kleinen runden kernhaltigen Zellen, wie auch die grösseren Mutterzellen mit ihrer jungen Zellenbrut und an ihren Wandungen die quergestreifte lichtbrechende Substanz deutlich übersehen konnte.

Was die Querstreifen dieser Zellen anlangt, so scheinen diese auch hier, wie bei schon entwickelten Sarcoplasten und Muskelfasern durch zwei verschiedene Substanzen erzeugt, welche senkrecht zur Peripherie der meist ellipsoidischen Zellen und parallel neben einander verlaufen. Auch lassen sich an einzelnen in der stärker lichtbrechenden Schichte die durch parallele feine Strichelchen oder Zwischenräume abgesonderten *Sarcous elements* wahrnehmen, die nach Zusatz von doppelt chromsaurer Kali auffallend grünlichgelb gefärbt werden, während die übrige Substanz, in welcher sie eingebettet und durch welche sie von einander getrennt sind, farblos bleibt (Taf. I, Fig. 5).

Ich glaube somit bis jetzt folgende Thatsachen über die Entwicklung der quergestreiften Muskelfaser der Batrachier gewonnen zu haben: In dem structurlosen, gallertigen, homogenen Blastem bilden sich zunächst kleine runde Zellen, ob direct aus indifferenten Embryonalzellen, oder um präformirte Kerne, welche das Product von Embryonalzellen sind, konnte mit Bestimmtheit nicht erwiesen werden; die Gegenwart von freien Kernen zwischen den Zellen scheint einigermassen für das Letztere zu sprechen. Die kernhaltigen Bildungszellen vermehren sich durch Theilung der Kerne und durch Endogenese. Ihr Inhalt scheint allmählich eine eigenthümliche Metamorphose durchzugehen, wobei auf der inneren Fläche der Zellwand sich die contractile Substanz abgelagert. Diese erscheint anfangs homogen, sarcodartig, später aber differenziren sich in der homogenen Substanz die einzelnen *Sarcous elements*, welche durch ihre regelmässige Lagerung die Ursache der Querstreifung sind. Auf diese Weise scheinen somit die von mir genannten Sarcoplasten zu entstehen. Durch Essigsäure kann bei noch jungen Sarcoplasten die Zellmembran nachgewiesen werden, später aber scheint diese mit dem contractilen Inhalte fest und innig zu verschmelzen.

Hierin finden nun jene Bilder leicht ihre Erklärung, welche auf Taf. I, Fig. 4 *d*; Fig. 7 *b*; Fig. 9 *e* und Taf. II, Fig. 11 *a* zu sehen sind, und die ich bei Froschlärven und Froschjungen unzähligemal zu beobachten die Gelegenheit hatte: es sind nämlich die aus ihren Mutterzellenmembranen frei gewordenen zu Sarcoplasten bereits umgewandelten Tochterzellen.

Bevor wir die weiteren Schicksale der Sarcoplasten bis zur Constituirung der quergestreiften Muskelfaser verfolgen, glaube ich früher an die Mittheilung einiger Beobachtungen gehen zu müssen, die zum richtigen Verständniss der weiteren Veränderungen beitragen dürften.

Nicht selten habe ich bei günstig ausgefallenen Präparaten die Sarcoplasten in Verbindung mit eigenthümlichen Fäden gesehen. Dies geschah zumeist damals, wenn dieselben in grösseren Zwischenräumen von einander gelagert erschienen. Die Fasern hatten einen

gestreckten oder gewundenen Verlauf im Blastem, oder innerhalb des Sarcolemmaschlauches, und es fehlten auch solche Bilder nicht, wo die Fasern in ihrem Verlauf von einem Sarcoplasten zum andern verfolgt werden konnten (Taf. II. Fig. 11). Sie schienen den feinsten elastischen Fasern sehr ähnlich und hatten einen Durchmesser von 0·0005 Millim. bis 0·0010 Millim. Die Fasern anastomosirten überdies manchmal durch schief verlaufende feine Seitenäste mit einander. Auch liessen sich dieselben hie und da von dem umliegenden Blastem oder dem Sarcolemma vollkommen isoliren, so dass dadurch die Vermuthung, als wären sie erzeugt durch den optischen Ausdruck von Faltungen des Sarcolemmaschlauches oder einer homogenen Binde substanz, jeden Anhaltspunkt verliert. Für ihre wirkliche Existenz spricht übrigens noch der Umstand, dass dieselben auch bei anderen Thieren vorkommen, wie dies aus den weiteren Untersuchungen sich erweisen wird.

Einmal sah ich eine solche Faser unterhalb der äussersten Spitze einer embryonalen Muskelfaser aus derselben hervortreten und mit einem zwischen den Fasern des Sehnenbündels eingelagerten Sarcoplasten eine Verbindung eingehen.

Ich behalte mir vor, weiter unten auf diesen interessanten Gegenstand wieder zurückzukommen und musste hier bloss mit dem einfachen Ergebnisse dieser Beobachtung vorgehen, um das Verständniss des weiteren Entwicklungsganges der Muskelfasern zu erleichtern.

Kehren wir nun zu den Sarcoplasten zurück, deren eigenthümliche Entstehungsweise aus endogen sich vermehrenden Bildungszellen ich oben durch directe Beobachtung bereits erwiesen habe.

Untersucht man an jungen Froschlarven oder kleinen Froschjungen die Muskeln des Rückens, der Schultergegend, der Extremitäten oder den *M. mylohyoides*, an welchen Stellen wegen des rascheren Wachstums des Körpers oder der Athmungsapparate zwischen den schon fertigen Muskelfasern einzelne noch in der Bildung begriffene zu finden sind, so begegnet man nicht selten Bildern, die sich den früheren leicht anreihen lassen und offenbar höhere Entwicklungsstufen der oben beschriebenen embryonalen Muskelemente darstellen.

Wurde das Präparat so schonend als möglich verfertigt, so blieben die Sarcoplasten mehr in ihrer natürlichen Lage. Man sieht dann häufig membranöse Schläuche, deren Wandung structurlos oder feinfaserig und hie und da mit kleinen ovalen, blassen Kernen versehen ist. Innerhalb dieser Schläuche, die nichts Anderes sind als Sarcolemmaschläuche, gewahrt man oft Sarcoplasten in dem verschiedensten Grade ihrer Entwicklung, entweder mehr isolirt, oder in kleinen Gruppen zusammengerollt, oder mehr oder weniger gestreckt und dicht neben und hinter einander, den Sarcolemmaschlauch ausfüllend. Es gelingt nicht selten zwischen den schon fertigen Muskelfasern, ähnlichen mit Sarcoplasten ausgefüllten Sarcolemmaschläuchen zu begegnen, so dass abwechselnd zwischen je ein oder zwei fertigen Muskelfasern ein Sarcolemmaschlauch der ganzen Länge nach verläuft, dessen Inhalt noch aus getrennten und mit einander noch nicht verschmolzenen Sarcoplasten besteht (Taf. I. Fig. 6).

Häufig sieht man auch Capillargefässe mit ihren Blutzellen noch als Inhalt in der Nähe dieser Schläuche verlaufen, doch unterscheiden sich diese leicht von den Letzteren dadurch, dass ihr Verlauf nie ein so gestreckter ist wie der der Sarcolemmaschläuche. Die Capillaren winden sich oft längs der Muskelfasern hindurch, indem sie häufig über und unter den Sarcolemmaschläuchen laufen; dann ist ihr Durchmesser um Vieles geringer und ihr Inhalt aus einfachen Reihen von Blutzellen bestehend, an denen die ovalen Kerne sehr deutlich

wahrzunehmen sind. Die Sarcolemmaschläuche hingegen verlaufen gerade, ihr Durchmesser ist grösser und ihr Inhalt wird von den Sarcoplasten gebildet, deren Grösse, Lagerung und die charakteristische Querstreifung nebst starker Lichtbrechungskraft dieselben zwischen allen anderen Gewebselementen leicht erkennbar macht.

Hat man mittelst der Nadeln die einzelnen Elemente mehr isolirt, so reissen oft die Schläuche ein, und es lassen sich dann die einzelnen Sarcoplasten, indem man sie in der umgebenden Flüssigkeit zum Rollen bringt, genauer beobachten.

Man sieht dann einzelne Sarcoplasten verlängert, an einem Ende in zwei bis drei Fortsätze ausgewachsen, die an ihrer Spitze eine kleine, wie von einem leichten Bläschen erzeugte Erhabenheit tragen (Taf. I, Fig. 3, *A* 1, *a*, *b*; Fig. 3, *B* 2, *a*). Manche zeigen an ihren beiden Enden ein solches Bläschen. Nicht selten liegen zwei Bläschen dicht neben einander als wären sie durch Abschnürung aus einem Mutterbläschen entstanden (Taf. I, Fig. 3, *A* 2, *b*; *B* 1, *a*).

Die Theilung dieser Kern- oder Keimbläschen scheint bei den Sarcoplasten in dieser Periode nicht selten vorzukommen und steht mit der Bildung von Fortsätzen höchst wahrscheinlich in ursächlicher Beziehung, in welchem Falle diese auf eine Art Knospung zurückgeführt werden dürfte.

Nicht selten begegnet man Sarcoplasten, aus denen an einem Ende zwei oder drei dünnere Fortsätze, wie die Finger der Hand hervorgewachsen sind (Taf. I, Fig. 3, *A* 2, *B* 2). Häufig findet man aber auch solche Bilder, die der Verschmelzung von zwei oder mehreren Sarcoplasten ihr Dasein zu verdanken scheinen (Taf. I, Fig. 8).

Es gelang mir ferner die Bildung der quergestreiften Muskelfaser durch Verschmelzung der Sarcoplasten zu einer mehr weniger continuirlichen Muskelsubstanz durch directe Beobachtung zu constatiren.

Eine solche embryonale in der Bildung begriffene Muskelfaser ist in Fig. 7 gegeben. Das zarte durchsichtige Sarcolemma (*a*), das zum Theil durch die Präparation gerissen ist, hüllt noch den zugehörigen contractilen Inhalt ein. Dieser besteht theils aus getrennten, theils aus mehr minder verschmolzenen Sarcoplasten. Auf einer Seite bemerkt man unter dem Sarcolemma theils zu Gruppen (*b*, *b*, *b*), theils seitlich neben und hinter einander gelagerte Sarcoplasten (*c*, *c*); auf der anderen Seite liegen Bündelchen von zum Theil mit einander verschmolzenen Sarcoplasten (*d*). Manche derselben befinden sich in der Knospenbildung, und alle zeigten bei genauer Einstellung des Mikroskops eine deutliche Querstreifung mit parallelen Querzonen von abwechselnd stärker und schwächer lichtbrechender Substanz, und in der ersteren die glänzenden *Sarcous elements*.

So wie hier die einzelnen Sarcoplasten von der einen Seite des Sarcolemma zur andern in verschiedenem Verschmelzungszustande begriffen waren, eben so konnte man anderen embryonalen Muskelfasern eine Verschiedenheit in den Elementen ihres Inhaltes der Länge nach beobachten. An der äussersten Spitze der Muskelfasern lagen innerhalb des Sarcolemma die jüngsten Sarcoplasten theils einzeln, theils gruppenweise und durch kleine Zwischenräume von einander gesondert. Der übrige Theil des Inhaltes bestand aus mehr continuirlicher Muskelsubstanz, an welcher die Grenzlinien der seitlich nach Art der Faserzellen sich berührenden und mit einander verschmolzenen Sarcoplasten als dunkle, nicht correspondirende Längslinien noch wahrzunehmen waren (Taf. I, Fig. 8, 10).

Der Verschmelzungsprocess der Sarcoplasten fängt aber bisweilen an beiden Seiten oder längs der ganzen Peripherie der embryonalen Muskelfaser an und schreitet dann allmäh-

lich gegen die Mitte oder die Axe derselben fort, bis endlich der ganze contractile Inhalt des Sarcocolemma in eine mehr minder continuirliche Masse verschmolzen ist. In diesem Falle sieht man längs der Axe der Muskelfaser einen Hohlraum verlaufen, der von stark lichtbrechenden, oft quergestreiften, noch getrennten Sarcoplasten ausgefüllt ist, während der periphere Theil derselben aus bereits verschmolzenen Sarcoplasten zu bestehen scheint.

Es scheint kaum zu bezweifeln, dass die hier beschriebenen Bilder die weiteren Übergangstufen der Sarcoplasten bis zur Bildung einer quergestreiften Muskelfaser — oder wichtiger des contractilen Inhaltes derselben — darstellen und gestützt auf zahlreiche Beobachtungen, kann ich mir diesen Übergang auf folgende Weise vorstellen.

Innerhalb des Sarcocolemma, oder umgeben von einer structurlosen, kernhaltigen, feinfaserigen Bindesubstanz, dem werdenden Sarcocolemma, entstehen zunächst auf die schon oben gegebene Weise Sarcoplasten, diese lagern sich seitlich neben und hinter einander nach Art der Faserzellen und verschmelzen allmählich in eine continuirliche contractile Substanz. Diese Verschmelzung geschieht nicht auf einmal in der ganzen Dicke oder Länge eines Sarcocolemmaschlauches, sondern beginnt gewöhnlich an einer Seite und schreitet dann allmählich gegen die andere hin, oder sie fängt längs der ganzen Peripherie an und schreitet gegen die Axe zu.

Fassen wir nun sämtliche auf die Entstehung und Umwandlung der Sarcoplasten sich beziehenden Thatsachen zusammen, so sehen wir zunächst kleine runde oder ovale kernhaltige eigenthümliche Zellen in einem homogenen gallertigen Blastem entstehen; diese Zellen vermehren sich durch Theilung der Kerne und Endogenese und unterscheiden sich von allen anderen Gewebseinheiten dadurch, dass ihr Inhalt sich allmählich in contractile Substanz umwandelt, die anfangs homogen oder fein granulirt, sarcocolemmaartig ist, bald aber sich in zweierlei Substanzen von verschiedener, optischer, chemischer und physikalischer Eigenschaft sondert, nämlich in die nach Brücke¹⁾ einfach lichtbrechende oder isotrope Substanz und in die anisotropen oder doppelt lichtbrechenden *Sarcocolemma elements* oder Fleischkörnchen, wobei die Differenzirung stets längs der inneren Zellenwand beginnt und allmählich gegen die Mitte der Bildungszelle fortschreitet, bis der ganze Zellenraum mit der differenzirten contractilen Substanz ausgefüllt ist und die Zellmembran allmählich verschwindet. Die auf solche Weise gebildeten Sarcoplasten lagern sich seitlich neben und hinter einander und verschmelzen endlich zu einer continuirlichen Muskelsubstanz, dem Inhalte des Sarcocolemma.

2. Bildung des Sarcocolemma.

Die bisher vorgelegten Untersuchungen beziehen sich blos auf den activen Theil der Muskelfaser, nämlich auf den contractilen Inhalt des Sarcocolemma, dessen eigenthümliche von mir zuerst in allen seinen Entwicklungsphasen erwiesene Entstehungsweise ich eben beschrieben habe, und zwar zunächst nur für die quergestreifte Muskelfaser der Batrachier. Aus den weiteren Untersuchungen, die ich in der Folge über denselben Gegenstand an Säugethieren, Menschen- und Vogelembryonen, Fischen, Crustaceen und Insecten ange stellt hatte, und die weiter unten folgen werden, lässt sich schliessen, dass die oben beschriebene Bildungsweise eine für die meisten Thierclassen allgemein giltige ist.

¹⁾ A. a. O.

Ich habe die contractile Substanz als das Product von Zellen geschildert und die Bildung des quergestreiften Inhaltes des Sarcolemma als einen eigenthümlichen Verschmelzungsprocess der Sarcoplasten beschrieben. Aus dieser Bildungsweise, die ich auf unzählige That-sachen glaube gestützt zu haben, folgt jedoch von selbst, dass das Sarcolemma als Zellenmembran durchaus nicht betrachtet werden darf. Das Sarcolemma ist keine Zellenmembran und ist auch nicht aus Zellen entstanden.

Folgende Beobachtungen bestätigen die Wahrheit dieser Aussage.

Untersucht man die embryonalen Muskelemente im frühesten Stadium, so bemerkt man in Bildung begriffene Sarcoplasten in einem homogenen mit kleinen durchsichtigen matt contourirten Kernen reichlich versehenen gallertigen Blastem oder Protoplasma eingebettet. Dieses Blastem, das nichts Anderes als embryonale Bindesubstanz ist, hüllt auch die in Gruppen, so wie die neben einander liegenden Sarcoplasten ein (Fig. 1 *a*; Fig. 4 *a*; Fig. 6 *d*; Fig. 7 *a*), und sie erscheint dann häufig als eine faltige, mit Kernen versehene Membran, an deren inneren Fläche die Sarcoplasten liegen. Zwischen den Sarcoplasten, wie auch an der inneren Fläche des Sarcolemma, sieht man häufig ganz feine Fasern gestreckt oder sich schlängelnd verlaufen. Die Sarcoplasten als Träger der contractilen Substanz sind durch ihre charakteristischen Eigenschaften vom Sarcolemma und den ihm zugehörigen Kernen und Fasern deutlich zu unterscheiden.

Die an der inneren oder auch äusseren Wand des Sarcolemmaschlauches sichtbaren Kerne sind gewöhnlich kleine rundlich ovale Bläschen, mit einer in dil. Essigsäure unlöslichen Membran und klarem von Essigsäure an der Peripherie körnig werdenden Inhalte. Dieselben sind matt contourirt und schliessen meist ein oder mehrere, kleinere homogene Kügelchen ein. Diesen ganz ähnliche Kerne finden sich an den embryonalen Sehnen, wo dieselben in einer anfangs homogenen, später fibrillären Grundsubstanz eingebettet erscheinen.

Nicht selten fand ich zwischen den Faserzügen des Sehnenbündels vollständig ausgebildete Sarcoplasten einzeln oder gruppenweise liegen (Taf. I, Fig. 10 *b*; Taf. II, Fig. 11 *a, b*). Überdies sieht man auch die Sehnensubstanz häufig direct in das Sarcolemma übergehen.

Diese That-sachen im Vereine mit der von mir erwiesenen Bildungsweise der contractilen Substanz sind, wie mir scheint schlagend genug und sprechen offenbar gegen die gewöhnliche Annahme der Entstehung des Sarcolemma aus verschmolzenen Zellenmembranen oder überhaupt aus einer Zellenmembran.

Es bleiben somit nur zwei Möglichkeiten für die Bildung des Sarcolemma; entweder entsteht dasselbe durch eine Art Verdichtung aus der homogenen oder fibrillären Bindesubstanz in Gestalt eines elastischen Begrenzungshäutchens, oder das Sarcolemma ist ein Ausscheidungsproduct der mit einander verschmelzenden Sarcoplasten.

Da das Sarcolemma in vielen Fällen vor der contractilen Substanz entsteht, und bei embryonalen Muskelfasern, wie ich mich bei starker Vergrösserung überzeugte, ausser den bekannten Kernen auch feine Fasern führt, die manchmal mit den Sarcoplasten in Verbindung treten, so kann auch die Entstehung desselben keineswegs dem directen Einfluss der Sarcoplasten zugeschrieben werden. — Doch liegt wohl darin keine zwingender Grund letzteren bei der Bildung des Sarcolemma jedweden Einfluss abzusprechen. Möglich, dass sie blos modificirend auf die chemische Constitution der sie einhüllenden Bindesubstanz einwirken.

Alle meine Beobachtungen hingegen zwingen mich anzunehmen, dass bei der Consolidierung des Sarcolemma die oft in Theilung begriffenen Kerne desselben die Hauptrolle spielen.

Demnach wäre zwischen der contractilen Substanz und dem elastischen Umhüllungsgebilde — dem Sarcolemma — nicht nur ein physiologischer, physikalischer und chemischer, sondern auch ein bedeutender genetischer Unterschied erwiesen.

B. Bildung der Muskelfasern bei Vögeln.

Unter den Vögeln hatte ich blos die Gelegenheit an Hühnerembryonen und jungen Sperlingen die Bildung von quergestreiften Muskelfasern näher zu untersuchen. Die Resultate derselben stimmen mit denen der Batrachier im Ganzen überein.

Um sich davon zu überzeugen wähle man wenigstens 6 bis 7 Tage alte Hühnerembryonen; bei viel jüngeren wird man nie im Stande sein, so instructive Bilder zu erhalten, denn in diesem Falle findet man an den Stellen, welche später von den Sarcoplasten eingenommen werden, nur lang gestreckte, parallel neben einander liegende, längsgestreifte, mehr minder abgeplattete blasse Bänder oder Bündel von gestreifter Bindesubstanz, die sich durch Vermehrung ihrer ovalen mattecontourirten Kerne zu verlängern scheinen.

Es ist dies nichts Anderes als die Bildung des Sarcolemma, welches hier stets vor der contractilen Substanz zu entstehen scheint.

Längs dieser Bündel und Fasern entstehen allmählich kleine runde oder längliche zellenartige Körper mit deutlichem Kerne und lichtigem Nucleolus, deren Inhalt anfangs homogen oder fein granulirt, später quergestreift und stark lichtbrechend erscheint. Es sind dies wohl nichts Anderes als Sarcoplasten.

Manchmal sah ich dieselben im Innern eines durchsichtigen Schlauches neben einander gelagert, so dass letzterer dadurch an solchen Stellen weiter, an anderen mit Sarcoplasten nicht ausgefüllten hingegen strang- oder bandförmig collabirt und faltig aussah. Mehrere der Sarcoplasten fand ich auch hier mit feinen Fasern in Verbindung.

Die Länge der Sarcoplasten bei Hühnerembryonen betrug 0.0125 bis 0.0136 Millim., die Breite 0.0055 bis 0.0110 Millim. — Doch fanden sich auch Körper von 0.0333 Millim. Länge, die aber offenbar aus mehreren einfachen Sarcoplasten zusammengesetzt schienen.

Die auffallendsten Bilder boten sich an den Muskelfasern des *M. pectoralis* und *abdominalis* von jungen Sperlingen dar. Die Sarcoplasten lassen sich auch hier als runde oder cylindrische, ovale, das Licht stark brechende Körperchen erkennen, deren Grösse und Inhalt verschieden ist nach ihrem verschiedenen Entwicklungszustande. Die kleineren, rundlich-ovalen mit noch meist homogenem Inhalte waren im Mittel 0.0120 Millim. gross (Taf. II, Fig. 13 *a*), die grösseren cylindrischen, spindelförmigen mit deutlichen Querstreifen versehenen messen gewöhnlich im Mittel 0.0142 Millim. in der Länge, und 0.0088 Millim. in der Breite (Fig. 13 *b*, *b*). Jeder Sarcoplast schien überdies noch im Innern ein lichtiges Bläschen von ziemlich constanter Grösse von 0.0035 Millim. zu bergen (Fig. 13 *c*, *c*).

Ausser diesen einzeln oder in Reihen neben einander vorkommenden finden sich dieselben hie und da auch gruppenweise gelagert, so dass jede Gruppe aus mehreren mit ihren Rändern sich deckenden, zusammengekrümmten Cylindern besteht. Die Gruppen sind rund oder oval, von 0.0320 bis 0.0640 Millim. und 0.0170 bis 0.0380 Millim. Breite.

Alle diese länglichen, cylindrischen und spindelförmigen Körperchen zeigen eine ganz deutliche Querstreifung, erzeugt wie bei den übrigen Muskelfasern durch zweierlei Substanzen, einer stärker und einer minder lichtbrechenden, welche abwechselnd hinter einander und unter einem rechten Winkel zur Längsaxe derselben gelagert sind. Bei manchen ist die quergestreifte Substanz bloß auf einer Seite zu sehen, gegen die andere hin scheint der Inhalt noch homogen (Fig. 13 *f*).

Ausser ihrem optischen und physikalischen Charakter, stimmen diese Körperchen auch hinsichtlich ihrer chemischen Eigenschaften vollkommen mit den schon oben beschriebenen Sarcoplasten der Batrachier überein.

Es scheint somit bei Vögeln eben so wie bei Batrachiern ein gleicher Bildungsmodus für die animalen Muskelfasern zu herrschen.

C. Bildung der Muskelfasern bei Säugethieren.

Die Untersuchungen, die ich an Embryonen von Wanderratten (*Mus decumanus*), an Rinds- und Schweinsembryonen, so wie an einem Pferdembryo und an Kaninchen angestellt, führten mich der Hauptsache nach zu denselben Resultaten.

Taf. II, Fig. 14 gibt die Abbildung von Muskelelementen, wie ich sie im *M. pectoralis* eines 42 Millim. langen Embryos von *Mus decumanus* fand. Man sieht in einem feinfaserigen Blastem die Sarcoplasten in verschiedenem Entwicklungszustande und von verschiedener Grösse. Die Länge derselben schwankt zwischen 0·0083 und 0·0277 Millim., die Breite zwischen 0·0045 und 0·0083 Millim. Die frühesten Entwicklungszustände sind durch rundlich-ovale, kernhaltige Zellen mit homogenem Inhalte repräsentirt (*a, a*); bei anderen ist der Inhalt bereits zum Theil und längs der inneren Zellenwand differenzirt und quergestreift (*c, c, c*). Manche liegen in kleinen rundlichen Gruppen beisammen wie frei gewordene Tochterzellen und zeigen bei genauer Einstellung deutliche Querstreifung (*b*). Einige liegen einzeln, andere mehr in dichten Reihen beisammen zwischen den feinen Fasern des Sarcoplemma, und zeigen meist an einem Ende im Innern ein kleines rundes lichtiges Bläschen. — Auch fehlten in den Präparaten solche Bilder nicht, wo mehrere Sarcoplasten zu einer grösseren Masse verschmolzen waren.

Auch bei diesen Thieren läßt die stark lichtbrechende Kraft der Sarcoplasten, so wie die Querstreifung, welche deutlich wahrzunehmen ist und die chemischen Eigenschaften derselben über ihre muskulöse Natur und Bedeutung durchaus keinen Zweifel zu. Die Querstreifung scheint durch parallele senkrecht zur Längsaxe derselben verlaufende abwechselnd stark und schwach lichtbrechende Querschichten oder Plättchen erzeugt; in den ersteren kann man überdies mit starken Vergrösserungen die reihenweise neben einander gelagerten Fleischkörnchen oder *Sarcous elements* wahrnehmen.

Fasern, welche den feinen elastischen Fasern sehr ähnlich sind und im Durchschnitte 0·00092 Millim. messen, verlaufen theils gestreckt, theils geschlängelt in demselben homogenen Blastem, in welchem die Sarcoplasten eingebettet erscheinen (Fig. 14 *f*). Manche dieser Fasern, über deren muthmassliche Bedeutung ich den Leser auf den III. Abschnitt dieser Abhandlung verweise, scheinen auch direct mit den Sarcoplasten in Verbindung zu treten.

Bei Kaninchenembryonen betrug die Länge der Sarcoplasten, welche den Rückenmuskeln entnommen wurden, im Mittel 0·0122 Millim. und die Breite 0·0038 Millim.

Bei einem 9 Centimeter langen Schweinsembryo fand ich ebenfalls die Hals- und Nackenmuskeln aus noch immer nicht vollständig mit einander verschmolzenen Sarcoplasten bestehend. Diese hatten eine Länge von 0·0113 bis 0·0136 Millim. und eine Breite von 0·0025 bis 0·0048 Millim.

Höchst interessant waren die Querschnitte, die ich mir vom *M. Gastrocnemius* desselben Schweinembryos verfertigte. Auf Taf. V, Fig. 35 ist ein solcher Querschnitt dargestellt, und zwar *A* bei 360maliger und *B* bei 525maliger Vergrößerung.

Man sieht die secundären Muskelbündel vom Perimysium umgeben und die einzelnen Durchschnitte der Muskelprimitivbündel von verschiedenem Durchmesser. Die Einen (*c*) sind viel dünner und betragen 0·0029 bis 0·0058 Millim., die Anderen (*b*) sind grösser und messen 0·0060 bis 0·0110 Millim. im Durchmesser. Zwischen diesen grösseren und kleineren Durchschnitten ist noch ein anderer Unterschied bemerkbar. Manche werden von der contractilen Substanz ganz ausgefüllt, andere wieder zeigen diese nur längs der Peripherie, wo sie in Form eines Fleischringes eine centrale Lücke begrenzt, in welcher sich noch homogenes Blastem befindet.

Wendet man stärkere Vergrößerungen an, so erscheint die ringförmig längs der Peripherie verlaufende contractile Substanz aus noch kleineren rundlichen, getrennten Contouren zusammengesetzt (*B, g, g*), die offenbar nichts Anderes sein können als Sarcoplastendurchschnitte, von denen noch manche (*k, k*) nur längs der Wandung einen bereits in *Sarcous elements* differenzirten, in der Mitte aber noch immer homogenen Inhalt zeigen.

Diese breiteren embryonalen Muskelfasern befinden sich somit auf jener Bildungsstufe, wo längs der inneren Wand des Sarcolemma die Sarcoplasten sich zwar gebildet, jedoch mit einander zu einer continuirlichen Muskelsubstanz noch immer nicht verschmolzen sind, während längs der Axe derselben sich die Sarcoplasten aus dem Blastem noch nicht gebildet hatten.

Die breiteren Muskelfasern scheinen somit hier eben so wie die Muskelfasern der Batrachier aus mehreren seitlich und mit ihren Spitzen vorschmolzenen Sarcoplastenreihen hervorzugehen, während die 2—3mal dünneren, deren Durchmesser der Breite eines reifen Sarcoplasten ziemlich gleichkommt, wahrscheinlich aus nur einer Reihe von Sarcoplasten gebildet werden.

Dafür sprechen auch meine an den Hals- und Hautmuskeln eines 5—6 monatlichen Pferdembryos gemachten Beobachtungen. Nicht selten begegnete ich hier ausser den zerstreut im Blastem liegenden Sarcoplasten auch solchen Muskelfasern, die aus einer Reihe von theils schon verschmolzenen, theils aber noch getrennten Sarcoplasten zusammengesetzt waren. Die Sarcoplasten berühren sich jedoch nicht nach dem bekannten Schwann'schen Typus, sondern stets nach Art der musculösen Faserzellen, so dass die Spitzen je zweier benachbarter Sarcoplasten sich schief und gleichsam dachziegelförmig über einander legen und so mit einander verschmelzen.

D. Bildung der Muskelfasern bei Menschenembryonen.

An zwei Weingeistexemplaren, von denen das eine 6 Centimeter, das andere 8 Centimeter lang war, bot sich mir die Gelegenheit dar den gleichen Bildungsmodus der quergestreiften animalen Muskelfasern auch an Menschenembryonen zu constatiren. Taf. II, Fig. 15 zeigt

die Abbildung mehrerer in der Entwicklung begriffenen Muskelemente vom *M. pectoralis* eines 6 Centimeter langen Menschenembryos. Man sieht in einem homogenen Blastem zarte, membranöse bandartige Schläuche (*d, d*) mit matt contourirten Kernen (*f, f*) und feinen Fasern, die auf der inneren Fläche derselben verlaufen. Diese Schläuche stimmen übrigens mit den bei Batrachiern beobachteten und von mir oben bereits beschriebenen Sarcolemmaschläuchen vollkommen überein, deren Entwicklung somit aus homogenem kernhaltigen Blastem oder aus sogenannter Binde substanz keinem Zweifel zu unterliegen scheint. Innerhalb dieser Schläuche findet man im Blastem eingelagerte Sarcoplasten auf verschiedener Entwicklungsstufe. Einige derselben sind noch zellenartig mit homogenem oder bereits längs der Zellenwand differenzirten, stark lichtbrechenden, quergestreiften Inhalt; diese sind meist rundlich oder oval (*a, a, a, a*). Andere mehr entwickelte, sind Cylindern oder Spindeln ähnlich und ganz quergestreift (*b, b*). Die Querstreifung wird auch hier durch kleine in der homogenen Substanz des Sarcoplasten regelmässig neben einander gelagerte, stark lichtbrechende Fleischkörnchen — *Sarcous elements* — erzeugt, wie sich Jedermann bei 525maliger Vergrösserung leicht überzeugen kann. An manchen Stellen liegen die Sarcoplasten mehr vereinzelt, an anderen hingegen dicht beisammen und mitunter in Verschmelzung begriffen. Neben solchen mit jungen Sarcoplasten versehenen Sarcolemmaschläuchen finden sich häufig auch mehr entwickelte Muskelfasern, welche aus einem Bündel von verlängerten und zum Theil mit einander schon verschmolzenen Sarcoplasten bestehen (*c*).

Was die Grösse der Sarcoplasten bei menschlichen Embryonen anbelangt, so habe ich dieselben im Ganzen viel schmaler, wiewohl manchmal von bedeutender Länge gefunden. Ihre Länge beträgt nämlich 0·0111 bis 0·0222 Millim., und die Breite 0·0035 bis 0·0058 Millim. — Das leichte Kernbläschen, das auch hier an den meisten wahrzunehmen ist, hat eine mehr constante Grösse von 0·0025 bis 0·0032 Millim. Auch in Betreff ihrer chemischen Eigenschaften stimmen sie mit den übrigen Sarcoplasten überein.

E. Bildung der Muskelfasern bei Fischen.

Von Fischen habe ich mehrere Junge von *Scyllium catulus*, dann eine junge *Torpedo marmorata* und eine Anzahl von 20 — 25 Millim. langen Exemplaren von *Perca fluviatilis* untersucht. Letztere wurden lebend eingefangen und lieferten, in Alkohol ertränkt, sehr treffliche Untersuchungsobjecte. Bei Allen habe ich die bereits geschilderte Entwicklungsweise der quergestreiften Muskelfasern gefunden, nur dass die Sarcolemmaschläuche und Fasern im Verlaufe der Sarcoplasten nicht so deutlich und häufig wie bei Fröschen und anderen Wirbeltieren nachgewiesen werden konnten. Doch begegnete ich auch hier, wiewohl seltener, leeren und halberfüllten, zwischen den übrigen Muskelfasern liegenden Sarcolemmaschläuchen. Taf. II, Fig. 17 zeigt die Abbildung einiger embryonaler Muskelfasern, welche den Rückenmuskeln einer jungen 25 Millim. langen *Perca fluviatilis* entnommen sind. Man sieht erstens mit Kernen und Fasern versehene Sarcolemmaschläuche (*a, a*), und innerhalb des einen derselben zwei dicht neben einander liegende Sarcoplasten (*e*), die vermöge ihrer Lage wahrscheinlich aus einer Mutterzelle entstanden sein mochten. Ausserdem bemerkt man neben fertigen Muskelfasern, die (wie *d*) aus einer gleichförmig quergestreiften Substanz bestehen, auch solche, die längs der Axe einen Strang von dicht neben einander gelagerten Sarcoplasten enthalten und deren peripherische Wand von continuirlicher contractiler Substanz gebildet wird (*b*). Bei vielen von diesen Muskelfasern erstreckt sich der mit Sarcoplasten ausgefüllte

Hohlraum nicht durch die ganze Länge derselben, so dass diese dadurch an solchen Stellen wie bauchig ercheinen; einige waren ihrer ganzen Länge nach mit dicht an einander gelagerten Sarcoplasten gefüllt, wo dann häufig die Muskelfaser gegen das eine Ende hin in eine continuirliche quergestreifte Masse spitzig auslief. Die Sarcoplasten (*c*) sah ich in den verschiedensten Entwicklungszuständen, theils als kleine rundliche, kernhaltige Zellen mit homogenem, aber bereits stark lichtbrechendem Inhalt, 0·0055 bis 0·0083 Millim. im Durchmesser, theils als mehr längliche, cylindrische oder spindelförmige Körperchen mit theilweise oder auch vollkommen differenzirtem Inhalt. An diesen konnten bereits die Querstreifen bei 525maliger Vergrößerung ganz deutlich und zwar entweder längs der Zellenwand allein, oder durch die ganze Dicke derselben wahrgenommen werden. Die quergestreiften länglichen Sarcoplasten hatten eine Länge von 0·0136 Millim. und darüber, und eine Breite von 0·0055 bis 0·0083 Millim. Die Grösse der Kernbläschen betrug 0·0025 bis 0·0032 Millim.

Bei zufällig durch die Präparation entzweigerissenen Muskelfasern konnte ich die herausgefallenen Sarcoplasten in jeder Beziehung genau studiren. In solchen Fällen überzeugte ich mich, dass viele zu drei bis fünf und mehreren gruppenweise noch beisammen liegen, wie dies bereits bei Fröschen geschildert wurde (vgl. Taf. I, Fig. 4, 5). Es sind dies, wie es scheint, freigewordene Gruppen von Tochterzellen, und deuten wahrscheinlich auf eine Vermehrung derselben durch Endogenese hin.

Ich glaube noch hinzufügen zu müssen, dass ähnliche Sarcoplasten auch zwischen den schon fertigen und im Wachstume begriffenen Muskelfasern zu sehen waren, und dass sich dieselben gegen Reagentien mit den Sarcoplasten der Frösche, und überhaupt mit der Muskelsubstanz ganz analog verhielten.

F. Bildung der quergestreiften Muskelfasern bei Articulaten.

Nachdem ich mich von der Existenz eigenthümlicher embryonaler Muskelelemente — der sogenannten Sarcoplasten — und von ihrer hohen Bedeutung in Bezug auf Genese der quergestreiften Muskelfaser bei Batrachiern, Fischen, Vögeln, Säugern und Menschen überzeugt hatte, konnte ich mit vieler Wahrscheinlichkeit annehmen, dass auch bei wirbellosen Thieren, namentlich bei Articulaten für die quergestreifte Muskelfaser derselbe Bildungsmodus herrschen müsse. Und in der That, ich war so glücklich als weiteren Beleg für die Allgemeinheit der von mir geschilderten Bildungsweise auch hier dieselben Ergebnisse zu gewinnen.

Insbesondere hatte ich Gelegenheit die Bildung von Muskelfasern an Puppen von *Saturnia piri*, Jungen von *Blatta orientalis* und *Astacus fluvialis* genauer zu beobachten.

Ich gebe in Fig. 18 (Taf. II) die Abbildung der Muskelelemente, welche ich im Thorax der Puppe von *Saturnia piri* fand. *A* zeigt die erste Anlage der Muskelfaser, wie man sie längs der Tracheen dieser Thiere, die auch zum Theile noch in der Entwicklung begriffen waren, sehen kann. In einer homogenen Bindesubstanz, die an der Oberfläche zu einem elastischen Häutchen bereits consolidirt schien (*a*), sieht man eingelagerte, theils vereinzelt, theils in grösseren Gruppen beisammen liegende Sarcoplasten (*b, b, b*). Manche von diesen sind rundlich, oval, mit homogenem oder zum Theil schon differenzirtem contractilen Inhalt, andere mehr in die Länge gezogen, spindelförmig, an einem oder an beiden Enden zugespitzt. Die letzteren zeigen Querstreifen, wiewohl nicht so deutlich wie bei den übrigen

Thieren, was darin seine Erklärung findet, dass die im homogenen Zelleninhalte abgelagerten stark lichtbrechenden Fleischkörnchen oder *Sarcous elements* nicht so zahlreich und daher in grösseren Abständen von einander sich befinden. Ein kleines liches Kernbläschen ist bei Allen sichtbar.

Bei *B* sieht man die weiter fortgeschrittene Bildung der Muskelfaser. Auf einer Seite bemerkt man noch in der Entwicklung begriffene Sarcoplasten innerhalb des Sarcolemma, auf der anderen mehrere ausgewachsene und mit einander verschmelzende Sarcoplasten (*c, d*).

Oft begegnete ich bei der Untersuchung dieser Elemente zweien oder mehreren solchen spindelförmigen oder cylindrischen Körperchen, die seitlich mit einander zusammenhingen, während an einem Ende die Spitzen derselben gabelförmig aus einander gingen.

Die rundlichen Sarcoplasten waren 0·0088 bis 0·0117 Millim. gross, ihr Kernbläschen 0·0040 bis 0·0048 Millim. Die spindelförmigen, mehr ausgebildeten quergestreiften Sarcoplasten variirten in ihrer Länge von 0·027 bis 0·050 Millim. und in der Breite von 0·0029 bis 0·0088 Millim. Das Verhalten derselben gegen Reagentien war ein ähnliches, wie das der Muskelsubstanz überhaupt.

Zu ähnlichen Resultaten haben mich auch die Untersuchungen an Jungen von *Blatta orientalis* geführt.

Was die Untersuchungen an jungen Flusskrebse (*Astacus fluviatilis*) anlangt, so muss ich bemerken, dass ich bei diesen im Stande war die Genese der Muskelfaser von der ersten Anlage der contractilen Substanz bis zur fertigen quergestreiften Muskelfaser Schritt für Schritt zu verfolgen, so dass ich nicht umhin kann die genannten Thiere als zu diesem Zwecke sehr geeignet Jedermann zu empfehlen.

Die Muskelfasern des Flusskrebse sind bekanntlich alle quergestreift, so dass zwischen den Muskelfasern der Extremitäten, des Schwanzes und des Darmcanals nur in Bezug auf die Dicke derselben, auf die Grösse und Gestalt der *Sarcous elements* und ihrer Abstände von einander, so wie auf das mehr oder weniger entwickelte Sarcolemma ein Unterschied besteht, der aber nicht wesentlich zu sein scheint, wie wir weiter unten sehen werden.

Ich habe zu diesen Untersuchungen eine grosse Anzahl junger Krebse benützt, deren Länge zwischen 38 und 60 Millim. variirte. Präparirt man ein Stückchen vom Schwanzstrecker, oder von den Scherenmuskeln, oder auch von dem 2 Millim. dicken Muskel, der vom Schwanze aus im Innern des Thoraxraumes verläuft, und untersucht es in Weingeist oder diluirter Auflösung von doppelt chromsaurem Kali mit dem Mikroskope bei einer 360maligen Vergrösserung, so begegnet man neben den schon entwickelten Muskelfasern häufig solchen Muskelementen, die mit unseren mehrfach erwähnten Sarcoplasten vollkommen übereinstimmen. Man findet sie oft in den verschiedensten Entwicklungsstadien. Die Formen, die zur Erklärung dieser Stadien dienen mögen, reduciren sich auf folgende:

1. Als die jüngsten Formen können Zellen betrachtet werden von rundlich ovaler Gestalt, mit einem oder zwei Kernbläschen und homogenem gelblichen oder zum Theil schon differenzirten quergestreiften Inhalt (Taf. III, Fig. 23). Diese liegen theils einzeln, theils in kleineren und grösseren Haufen beisammen. Die grösseren dieser Zellen enthalten oft, Mutterzellen ähnlich, eine Gruppe von kleineren Zellen in ihrem Innern. Man sieht die Querstreifung anfangs nur längs der inneren Zellenwand erzeugt durch eine stark lichtbrechende Substanz, welche sich allmählich aus dem homogenen Inhalte der Zelle auf die innere Fläche der Zellenmembran abzulagern scheint. Diese quergestreifte stark lichtbrechende Schicht

an der Peripherie ist an den grösseren Zellen bei 360 bis 525maliger Vergrösserung sichtbar.

2. Vollkommen ausgebildete, durch ihre ganze Dicke deutlich quergestreifte, gelbliche, stark lichtbrechende Sarcoplasten. Diese sind von länglicher, meist spindelförmiger Gestalt und bergen in ihrem Inneren häufig ein lichtiges rundes Bläschen. Man findet diese selten isolirt, sondern meist zu zweien, dreien und mehreren mit einander zusammenhängend und zum Theil verschmolzen (Taf. III, Fig. 24, A, B).

3. Aus mehreren neben und hinter einander gelagerten ausgewachsenen Sarcoplasten zusammengesetzte Massen von contractiler Substanz (Fig. 25). Solche findet man häufig innerhalb des Sarcolemma bei in der Entwicklung begriffenen Muskelfasern des Schwanzstreckers. An einem Ende haben sie oft das Aussehen einer continuirlichen Muskelfaser, gegen das andere Ende hin bestehen sie aus zum Theile deutlich contourirten, zum Theil mit einander verschmolzenen Sarcoplasten (*b*), so dass die Begrenzungslinien der mit einander verschmelzenden Sarcoplasten als dunkle, sich nicht correspondirende Längslinien erscheinen (*c, c*). An der äussersten Spitze derselben sieht man noch ganz getrennte deutlich contourirte junge Sarcoplasten (*a*).

Was die Grösse der Sarcoplasten anbelangt, so schwanken die Dimensionen derselben bedeutend. Die jüngsten Bildungszellen haben eine Länge von 0·0130 bis 0·0166 Millim. und eine Breite von 0·0083 bis 0·0111 Millim. Die mehr ausgebildeten Sarcoplasten waren schon 0·0222 bis 0·0550 Millim. lang und in der Mitte 0·0111 bis 0·0222 Millim. breit, wiewohl es auch grössere gab, deren Länge bis 0·0620 Millim. und darüber betrug, doch schienen diese in den meisten Fällen aus zwei oder mehreren einfachen Sarcoplasten zusammengesetzt, wofür die Gegenwart von dunklen Längslinien an der Oberfläche, die ich nur für Grenzlinien zwischen den einzelnen Theilen halten kann, sprechen dürfte. Das Kernbläschen hat eine mehr constante Grösse von 0·0025 bis 0·0055 Millim., ist aber bei grösseren Sarcoplasten ohne Reagentien nicht immer sichtbar.

Mit starken Vergrösserungen konnte man an den Sarcoplasten meist 16—17 stark lichtbrechende Querzonen zählen, deren mittlere Abstände von einander ohngefähr 0·0030 Millim. betragen mochten.

Auf welche Art nun durch gegenseitige Verschmelzung von Sarcoplasten eine continuirliche quergestreifte Muskelfaser zu Stande kommt, ist aus Fig. 26 und 27 ersichtlich, wenn man diese mit den früheren Entwicklungsstadien vergleicht. — Fig. 26 stellt die contractile Substanz aus zwei grösseren spindelförmigen Stücken zusammengesetzt dar, die an einer Stelle eine Anastomose zeigen, indem sie durch eine Verbindungsbrücke ineinanderfliessen. Die längs der Oberfläche eines jeden Stückes sichtbaren dunklen Linien scheinen jene Stellen noch anzudeuten, wo die einfachen Sarcoplasten bereits zu einer continuirlichen Masse verschmolzen sind. Gegen das Ende derselben hin stehen die Spitzen einzelner Sarcoplasten fingerförmig noch aus einander.

In Fig. 27 sieht man zwei grössere Stücke bereits ihrer ganzen Länge nach mit einander verschmolzen, so dass nur die Grenzen zwischen denselben als dunkle Längslinien noch sichtbar sind.

Das Verhalten der Sarcoplasten zu Reagentien, so wie ihre nähere Beziehung zum Sarcolemma anlangend, habe ich hier dieselben Ergebnisse gefunden, wie sie bereits bei den verschiedenen Wirbelthierclassen näher geschildert wurden. Das Sarcolemma stellt nämlich

anfangs ein homogenes Blastem dar, worin die Sarcoplasten eingebettet sind, bald aber erscheint dieses in Gestalt eines membranösen Schlauches, längs dessen innerer Wand die Sarcoplasten in grösseren oder kleineren Abständen theils isolirt, theils in Gruppen verlaufen. Das Sarcolemma scheint in dieser Periode nicht ganz structurlos, indem ausser kleinen Körnchen und Kernen auch deutliche Fasern oder Fäden auf der inneren Fläche desselben wahrgenommen werden. Diese verlaufen theils gestreckt, theils wellig oder sanft spiralig, hie und da entstehen auch Netze durch Theilungen und Anastomosen (Fig. 26 *c*; Fig. 27 *b*). Nicht selten lässt sich ein solcher Faden von einem Sarcoplasten zum andern verfolgen, mit denen er in directe Verbindung zu treten scheint (Fig. 27 *c*).

Demselben Entwicklungsmodus folgen auch die Muskelfasern des Darmcanals. Es gelingt hier nicht schwer sämtliche Entwicklungsstufen mit grösster Klarheit zur Anschauung zu bringen.

1. Zunächst findet man rundliche oder ovale Zellen in einem homogenen feinkörnigen Blastem eingelagert, die im Durchschnitt 0.0136 Millim. gross sind und nebst einem Kern von 0.0055 Millim. und Nucleolus, einen homogenen sehr feinkörnigen Inhalt einschliessen, der durch doppelt chromsaurer Kali schwach gelblich gefärbt wird (Taf. III, Fig. 19 *b, b, b*; Fig. 21 *a, b*). Manche von diesen Zellen, besonders die grösseren haben zwei Kerne, die wahrscheinlich durch Theilung entstanden sein mochten. Die Zellen liegen theils einzeln, theils in Reihen neben einander gruppiert.

2. Neben den Vorigen in demselben Blastem sieht man auch andere in der Umwandlung zu Sarcoplasten begriffene längliche, an einem oder an beiden Enden verschmälerte Zellen, von 0.0160 bis 0.0222 Millim. Länge und 0.0136 Millim. Breite (Fig. 19 *c*; Fig. 20 *b*; Fig. 21 *c*), mit einem oder zwei leichten Kernbläschen. Sie unterscheiden sich von den Vorigen zumeist dadurch, dass auf der inneren Fläche der Zellenwand bereits eine stark lichtbrechende gelbliche Schicht von contractiler Substanz abgelagert ist, in der man die Querstreifung schon angedeutet, oder stellenweis ganz deutlich bemerken kann. Bei starken Vergrösserungen (525mal) überzeugt man sich von der Existenz der Fleischkörnchen, welche bereits aus dem homogenen Inhalte differenzirt und regelmässig neben einander längs der Zellenwand gelagert die Querstreifung erzeugen.

3. Spindelförmige, oft in parallelen Reihen neben den unter 1. und 2. geschilderten Zellen gruppierte Körperchen von 0.0277 bis 0.0380 Millim. Länge und 0.0160 Millim. Breite mit deutlichen Querstreifen und starker Lichtbrechungskraft. Bei vielen von diesen Körperchen, die nichts Anderes sind als vollkommen ausgebildete Sarcoplasten, nimmt man die reihenweise in homogener Grundsubstanz gelagerten Fleischkörnchen oder *Sarcous elements* ganz deutlich wahr, was um so leichter geschieht, da dieselben durch doppelt chromsaurer Kali stark gefärbt erscheinen, während die Grundsubstanz farblos bleibt. Die Sarcoplasten sind übrigens theils einfach (Fig. 19 *d, f*; Fig. 21 *d*), theils an einem Ende mit 2—3 und mehr Fortsätzen oder Ausläufern versehen (Fig. 19 *h*; Fig. 21 *e, f*).

Alle diese verschiedenen embryonalen Muskelemente lassen sich leicht und ohne besonderen Zwang in eine ganze Entwicklungsreihe an einander reihen. Eine solche Entwicklungsreihe stellt die Fig. 21 dar, und zwar aus der Darmwand eines 50 Millim. langen Flusskrebse. Man sieht hier nicht nur die verschiedenen Entwicklungsstufen der Sarcoplasten (*a, b, c, d, e, f*), sondern auch ihre weitere Verschmelzung unter einander, indem sie sich nicht nur mit ihren seitlichen Rändern, sondern auch mit ihren Spitzen gleichsam dachziegelförmig

aneinander lagern (*g*). — In Fig. 22 sind ähnliche wiewohl mehr ausgewachsene Sarcoplasten aus der Darmwand eines älteren, 60 Millim. langen Flusskrebse abgebildet, wo dieselben durch Bindesubstanz, in welcher feine Fasern verlaufen und die die Stelle des Sarcolemma zu vertreten scheint, mit einander verbunden werden.

Durch das weitere Auswachsen der zackenförmigen Ausläufer der Sarcoplasten und ihre Verschmelzung unter einander scheinen die baumförmig ramificirten, oder netzförmig anastomosirenden Muskelfasern hervorzugehen. — Fig. 28, Taf. IV gibt die Abbildung einer ramificirten quergestreiften Muskelfaser aus dem Dünndarm eines 60 Millim. langen Flusskrebse.

G. Bildung der Herzmuskelfasern und der glatten Muskeln der Wirbelthiere.

Die Bildung der Herzmuskelfasern unterscheidet sich nicht wesentlich von dem allgemeinen Bildungsmodus der Muskelemente.

Ich habe die hieher bezüglichen Untersuchungen zumeist an Hühnerembryonen und Froschlarven angestellt.

Bei Hühnerembryonen fand ich am zweiten bis dritten Tage der Bebrütung das Herz bestehend aus Zellen von verschiedener Grösse und Bedeutung. Viele von diesen fielen mir durch ihre grössere Lichtbrechungskraft besonders auf; sie waren von rundlicher, ovaler oder spindelförmiger Gestalt, mit einem oder zwei in Theilung begriffenen ovalen Kernbläschen und einem anfangs homogenen Inhalt, in welchem später längs der Zellenwand kleine stark lichtbrechende Körnchen erscheinen¹⁾. Bei älteren Hühnerembryonen (5 bis 6 Tage alten) findet man häufig ähnliche Zellen mit vollkommen differenzirtem Inhalt, von denen viele bereits mit Fortsätzen versehen sind, und mit einander zu verschmelzen anfangen. Aus der Verschmelzung dieser mit Fortsätzen versehenen Spindelzellen, die nichts anderes sind als Sarcoplasten, gehen endlich die netzförmig anastomosirenden Muskelfasern hervor, wie sie im Herzfleische so zahlreich vorkommen. Die Bildungszellen der Sarcoplasten liegen anfangs in demselben körnigen Blastem oder Protoplasma eingebettet, in welchem neben mattecontourirten Kernen auch die Anlagen von Blutzellen und Nerven sich befinden. Aus dem Blastem mit Kernen entwickeln sich die verschiedenen Gewebe der Bindesubstanz, wohin auch das Perimysium und Sarcolemma gehört. Letzteres entwickelt sich jedoch hier nie in so hohem Grade wie bei animalen Muskelfasern, nämlich zu einem selbstständigen membranösen Schlauche.

Zu denselben Resultaten führten mich auch die Untersuchungen, die ich an jungen Froschlarven angestellt hatte.

Im Nachstehenden will ich noch die Genese der glatten Muskeln zum Gegenstand einer näheren Erörterung wählen. Den Untersuchungen Kölliker's²⁾, Leydig's³⁾ und Remak's⁴⁾ zufolge nimmt man fast allgemein an, dass dieselben aus Zellen entstehen, die ursprünglich rundlich oder oval, später spindelförmig sind und deren Inhalt sich allmählich

1) Die Bildung der *Sarcous elements* innerhalb der spindelförmigen Zellen des Herzens bei Embryonen hat übrigens, wie ich von Prof. E. Brücke vernommen habe, schon vor vier Jahren im Wiener physiologischen Institute Dr. Purcell O'Leary (jetzt Professor in Cork) an verschiedenen Thieren beobachtet, bis jetzt aber, so viel mir bekannt ist, die Resultate seiner Beobachtungen nicht veröffentlicht.

2) Mikroskopische Anatomie, II. Bd., 2. Hälfte, S. 203.

3) Lehrbuch der Histologie des Menschen etc. 1857, S. 46.

4) Müller's Archiv 1850, S. 86.

in contractile Substanz umwandelt mit zurückgebliebenem linearem Kern. Die auf solche Weise ausgewachsenen Muskelzellen legen sich an einander und vereinigen sich mittelst Bindesubstanz zu glatten Streifen der Muskelfasern, deren Elemente — musculöse Faserzellen — später nur durch Reagentien [NO_3 und HCl von 20%. Reichert¹⁾, Paulsen²⁾] isolirt nachgewiesen werden können.

Mit diesem Entwicklungsmodus der glatten Muskelfasern stimmen jedoch die von Kilian³⁾ und Mazonn⁴⁾ gemachten Beobachtungen nicht sehr überein. Ersterer hat sich besonders mit der Untersuchung der Genese dieser Elemente im schwangern Uterus beschäftigt und glaubt dass dieselben bereits membranlos entstehen, indem in einem Plasma stäbchenförmige Kerne in gewissen Abständen sich entwickeln, das Plasma dann in rhombische Stücke als Emballage um die Kerne zerfalle und sich so zu sogenannten Faserzellen consolidate. Mazonn hält sogar die Faserzellen für Kunstproducte und die stäbchenförmigen Kerne derselben für eine Täuschung, welche durch stellenweises Auseinanderweichen zweier Fasern und dadurch entstandene längliche Lücken veranlasst werden soll.

Funke⁵⁾ nimmt runde oder längliche Zellen an mit deutlichen Wandungen, aus welchen die Elemente der Muskelhaut entstehen sollen.

Bei so abweichenden Ansichten über die Entwicklung dieser Elemente glaube ich durch folgende Beobachtungen, die ich am Darne und der Harnblasenwand junger Schweins-embryonen machte, Einiges zur Schlichtung dieses streitigen Gegenstandes beitragen zu können.

Untersucht man an 8—10 Centimeter langen Schweins-embryonen die Faserschicht des Darmrohres oder der Harnblasenwand, nachdem die Thiere in Alkohol ersäuft und die zu untersuchenden Theile einige Tage lang in diluirtem doppelt chromsaurem Kali oder Holzessig macerirt wurden, so bemerkt man eingelagert in einem faserigen Blastem Körperchen von verschiedener Grösse und Gestalt, die ein eigenthümliches Aussehen darbieten. Es sind dies rundliche, ovale, längliche, an einem oder an beiden Enden zugespitzte, spindelförmige, mitunter rhombische Körperchen. Die kleinsten, mehr rundlichen haben gewöhnlich einen Durchmesser von 0.0055 Millim., die grösseren sind 0.0063 bis 0.0277 Millim. lang und 0.0035 bis 0.0083 Millim. breit. Die meisten, namentlich die kleineren, enthalten ein deutliches rundliches Bläschen im Innern, das eine ziemlich constante Grösse hat von 0.0025 bis 0.0038 Millim. Aus der Gegenwart dieses Kernbläschens glaube ich mich berechtigt dieselben für Zellen zu halten, wiewohl die Zellmembran nur durch Reagentien nachgewiesen werden kann. Ihr Inhalt scheint homogen, zum Theile körnig, stark lichtbrechend; doch unterscheiden sich dieselben von Fettzellen theils durch ihre geringeren Dimensionen, theils durch die vorherrschende Spindelform, ihre Unlöslichkeit in Schwefeläther, ihren gelben Farbenton, und häufig durch eine stärker lichtbrechende Substanz, welche an der Oberfläche lichtere Flecken und wellige Linien erzeugt. Die Körperchen liegen entweder isolirt oder gruppenweise nebeneinander, zwischen den wellig oder spiralig verlaufenden Fasern der Bindesubstanz (Taf. II, Fig. 16 *b, c, d*). Die kleineren, rundlichen findet man nicht selten in kleinen Haufen beisammen und haben das Aussehen von freigewordenen Tochterzellen; die grösseren, spindel-

1) Müller's Archiv 1849.

2) *Observationes microchemicae*. 1849.

3) Die Structur des Uterus bei Thieren, in Henle und Pfeufer's Zeitschrift, Bd. VIII, S. 53 ff. und Bd. IX, S. 1 ff.

4) Müller's Archiv 1854, S. 25.

5) Lehrbuch der Physiologie. 1855, S. 517.

förmigen liegen meist neben und hinter einander in kleinen kurzen Bündelehen, die Zwischenräume zwischen den elastischen Fasern der Bindesubstanz ausfüllend. Isolirt man die Elemente mittelst der Präparirnadeln mehr von einander, so bemerkt man nicht selten einzelne mit Fasern in Verbindung, und es scheint dann als wenn die Faser sich an das eine Ende des spindelförmigen Körperchens inseriren würde.

Bei 525maliger Vergrößerung sieht man längs der Peripherie der Zelle eine stark lichtbrechende Schicht abgelagert, in welcher man bereits sehr kleine glänzende, gelbliche Körnchen unterscheidet. Manchmal ist diese lichtbrechende Schicht auf der einen Seite stärker als auf der anderen. Bei solchen Zellen, wo die lichtbrechende Substanz nur eine oberflächliche, der Zellenwand anliegende Schicht bildet, ist der innere Raum derselben rings um das Kernbläschen lichter und durchsichtiger. Ausserdem begegnet man noch solchen Zellen (häufiger bei reiferen Embryonen), wo der innere Raum durch die stark lichtbrechende differenzirte Substanz fast ganz ausgefüllt wird, bis auf eine schmale spaltähnliche Lücke, die an der Stelle des geschwundenen Kernes zurückbleibt.

Nicht alle spindelförmige Zellen jedoch zeigen diese spaltähnlichen Lücken, die meisten von ihnen lassen einen wirklichen Kern in ihrem Innern erkennen. Dieser ist bei Embryonen und jüngeren Thieren meist bläschenartig und von rundlich-ovaler Gestalt, bei erwachsenen und älteren Thieren aber häufig linear, stäbchenförmig. Durch Essigsäure zerfällt derselbe bisweilen, wahrscheinlich durch eine Art chemischer Zersetzung des Inhaltes, in einen Haufen kleiner runder Körnchen.

Die weiteren Veränderungen dieser spindelförmigen Zellen, mit ihrem eigenthümlich veränderten Inhalte bestehen nun darin, dass, nachdem die Zellmembran allmählich mit dem Inhalte innig verwächst, dieselben neben und hinter einander liegend mittelst Bindesubstanz zu einem Bande sich vereinen, dessen Elemente in der Regel nicht so vollkommen wie bei quergestreiften Muskelfasern zu einem Ganzen verschmelzen.

Aus Allem diesem ist ersichtlich, dass die Genese der glatten Muskelfasern sich im Wesentlichen von der der übrigen Muskelfasern durchaus nicht unterscheidet. Die sogenannten contractilen Faserzellen sind ja ihrer genetischen Bedeutung nach nichts anderes als Sarcoplasten, mit dem jedenfalls nicht wesentlichen Unterschiede, dass die *Sarcous elements* kleiner oder nicht in so grosser Anzahl und gewöhnlich nicht so regelmässig neben einander in der homogenen Grundsubstanz gelagert sind, als dies bei Sarcoplasten der animalen Muskelfasern zu sehen ist. Doch findet man auch bei den Sarcoplasten der glatten Muskeln nicht selten Querstreifen, hervorgerufen durch regelmässige Lagerung der *Sarcous elements*, die aber nur durch starke Vergrößerungen (525 bis 936malige) als deutlich contourirte Körnchen nachgewiesen werden können (Taf. IV, Fig. 34). Wo diese nicht sichtbar sind, da scheinen die doppelt lichtbrechenden Molekeln in der einfach lichtbrechenden Grundsubstanz nicht zu Gruppen vereint, sondern gleichförmig in derselben zerstreut, wie dies E. Brücke¹⁾ mit vielem Scharfsinn ganz richtig geschlossen hat.

1) Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften. XV. Bd.

Rückblick auf die voranstehenden Untersuchungen

mit Berücksichtigung der Beobachtungsergebnisse anderer Autoren.

Es sei mir gestattet auf die voranstehenden Untersuchungen noch einen Rückblick zu werfen mit gehöriger Berücksichtigung der Beobachtungsergebnisse anderer Autoren.

Zunächst glaube ich der Beobachtungen Lebert's, Remak's und Kölliker's erwähnen zu müssen.

Lebert¹⁾ beschreibt von verschiedenen Wirbelthierembryonen eigenthümliche cylindrische, parallelrandige, unregelmässige, mit abgerundeten Spitzen versehene Körperchen (*corps myogeniques*), welche im Innern häufig blasse Kügelchen (*globules*, Kerne) und viele Molecularkörnchen enthalten. Aus diesen sollen, nach seiner Annahme, die Muskelfasern durch einfache Verlängerung derselben hervorgehen. Doch gibt derselbe keine Auskunft über das erste Entstehen dieser Körperchen, noch scheint derselbe in so früher Periode irgend eine Spur von Querstreifen an ihnen beobachtet zu haben. Auch sind die von ihm angegebenen Dimensionen seiner cylindrischen Körperchen bei Batrachiern (0.12 Millim. in der Länge, 0.025 Millim. in der Breite) so abweichend (8—10mal grösser) von der durch mich bei denselben Thieren gefundenen Grösse (0.0117 bis 0.0147 Millim. für die Länge und 0.0058 bis 0.0088 Millim. für die Breite), dass ich vermuthete, Lebert habe nicht die ersten Anlagen der Muskelemente beobachtet. Auch sollen nach ihm die Querstreifen erst gegen das Ende des Embryonallebens auftreten.

Remak²⁾ stimmt in seiner Ansicht über die Entwicklungsweise der Muskelprimitivbündel mit Lebert ziemlich überein. Seinen Untersuchungen zufolge sollen diese nicht durch Verschmelzung, sondern durch Verlängerung von Dotterzellen, in welchen sich die Zahl der Kerne vermehrt, entstehen. Doch gesteht derselbe, dass er durch directe Beobachtung nicht ermitteln konnte, ob die mit zwei bis vier Kernen versehenen Dotterzellen der Verschmelzung von einkernigen Zellen, oder der Verlängerung der letzteren mit Vervielfältigung ihrer Kerne das Dasein verdanken. Auch hat derselbe über das Verhalten des Sarcolemma zur contractilen Substanz keine directen Beobachtungen gemacht.

In neuester Zeit fand sich endlich auch Kölliker bewogen, nachdem er diesen Gegenstand an Krötenlarven, Jungen von *Rana temporaria*, sowie bei einem zweimonatlichen menschlichen Embryo studirt hatte, sich Lebert und namentlich Remak in Allem anzuschliessen. Kölliker³⁾ sagt, er habe nichts gefunden, was für eine Verschmelzung embryonaler Fasern oder Zellen sprechen würde, Alles hingegen spreche dafür, dass die ursprünglichen Zellen durch Längen- und Dickenzunahme zu dem werden, was sie später sind, woraus

¹⁾ Recherches sur la formation de muscles dans les animaux vertébrés et sur la structure de la fibre musculaire en general, dans les diverses Classes d'animaux. Annales des sc. nat. Tome XI, Juin 1849, Pl. XII, Fig. 23, 24.

²⁾ Über die Entwicklung der Muskelprimitivbündel, in Forstner's Neue Notizen 1845, Nr. 768.

³⁾ Zeitschrift für wissensch. Zoologie, IX. Bd., I. Hft., S. 141 ff.

er schliessen zu müssen glaubt, dass die quergestreiften Muskelfasern den Werth einfacher ungelagerter muskulöser Faserzellen haben.

Es hat sich bereits eine Stimme erhoben, die diesen ausgezeichneten Forscher hier vor Übereilung warnen zu müssen glaubte [Berlin¹⁾].

Wie es aus meinen detaillirten Untersuchungen ersichtlich ist, habe ich diesem Gegenstande meine volle Aufmerksamkeit gewidmet und nicht nur an Froschjungen, sondern an fast allen mit quergestreiften Muskelfasern versehenen Thieren zahlreiche vergleichende Beobachtungen gemacht, deren Ergebnisse der neuesten Ansicht Kölliker's nichts weniger als günstig zu sein scheinen.

Ich war so glücklich die Bildung von Muskelementen in ihrer frühesten Entwicklungsperiode zu beobachten, und fand als erste Anlage derselben eigenthümliche Zellen, welche durch Theilung der Kerne und Endogenese sich vermehrten, und in denen sehr früh schon eine eigenthümliche Differenzirung des Inhalts einzutreten scheint, so dass dieser allmählich in zwei physikalisch, optisch und chemisch verschiedene Substanzen, die doppelt lichtbrechenden geformten Fleischkörnchen oder *Sarcous elements* und die homogene Grundsubstanz zerfällt. Ich fand diese differenzirte contractile Substanz anfangs an der inneren Zellenwand abgelagert, bis allmählich das Innere der Zelle durch dieselbe ganz ausgefüllt wird. Auf diese Weise sah ich die von mir genannten Sarcoplasten entstehen, quergestreifte cylindrische oder spindelförmige, einfache oder mit Fortsätzen und meist mit einem leichten Bläschen versehene Körperchen, deren Grösse bei verschiedenen Thieren verschieden ist.

Was die Entstehung und weitere Metamorphosen der Sarcoplasten anlangt, so glaube ich durch meine Beobachtungen sowohl ihr allgemeines Vorkommen als ihre wahre Bedeutung bei den meisten Thieren nachgewiesen zu haben. Man hat zwar früher schon bei der Entwicklung von Muskelfasern Zellen, sogenannte Muskelzellen, beobachtet, jedoch ihre Bedeutung, so wie den ganzen Verlauf des Fleischbildungsprocesses nicht richtig erfasst. Aus den Sarcoplasten sah ich nie Fibrillen entstehen, noch Röhren, noch weniger verlängern sich diese je zu einer Muskelfaser, sondern sie gehen in bestimmter Richtung und nach gewissen Gesetzen eine eigenthümliche Metamorphose ein, wodurch sie sich von allen anderen histologischen Elementen unterscheiden.

Die Sarcoplasten sind die Bildungsstätten der Fleischsubstanz, d. i. der *Sarcous elements* oder Fleischkörnchen und ihrer einzelnen doppeltbrechenden Bestandtheile, der von Brücke²⁾ genannten Disdiaklasten, und der contractile Inhalt des Sarcolemma geht aus der Verschmelzung solcher Sarcoplasten hervor. Man wird mich daher entschuldigen, wenn ich diese ihrer wichtigen physiologischen Bedeutung wegen „Sarcoplasten“ (Fleischbildner) genannt habe.

Die ersten Anlagen der Sarcoplasten habe ich bereits oben als Zellen beschrieben, die in einem homogenen Blastem neben zahlreichen Kernen eingelagert sich befinden. Diese Kerne und das Blastem scheinen das Product der Embryonalzellen zu sein.

Der Inhalt jener Zellen, aus welchen sich die Sarcoplasten heranbilden, scheint anfangs ganz homogen und durchsichtig, doch unterscheidet er sich bald von dem Inhalte anderer

1) Über die quergestreifte Muskelfaser. in Archiv für die holländ. Beiträge zur Natur- und Heilkunde von Donders und Berlin. Bd. I, Heft 5, S. 461. Utrecht.

2) Denkschriften der k. Akademie der Wissenschaften, XV. Bd.

Zellen, namentlich von den übrigen eiweissartigen Substanzen durch eine grössere lichtbrechende Kraft, von Fett aber dadurch, dass er weniger lichtbrechend als dieser und in Äther unlöslich ist. Ausser diesem der Sarcode ähnlichem Inhalte lässt sich gleich anfangs in jeder Zelle ein bläschenartiger Kern wahrnehmen, der in seinem Innern häufig ein oder zwei glänzende Bläschen (*Nucleoli*) birgt. Die weitere Metamorphose dieser Zellen besteht nun darin, dass sich in dem Inhalte, und zwar zunächst an der einen Wandseite, oder längs der ganzen inneren Zellenwand sehr kleine, selbst mit den stärksten Vergrösserungen nur in Form von Pünktchen, stark lichtbrechende glänzende Körperchen ablagern; diese scheinen anfangs längs der Zellenwand gleichmässig in dem sonst homogenen Inhalte vertheilt, bald aber erscheinen sie regelmässig gruppirt in Gestalt von *Sarcous elements*, durch kleine Zwischenräume von weniger lichtbrechender Substanz von einander getrennt, wodurch an solchen Stellen deutliche Querstreifen sichtbar werden. Diese eigenthümliche Differenzirung des Inhalts schreitet allmählich gegen die Mitte oder die andere Seite der Zelle fort, bis der ganze Inhalt sich in zwei physikalisch, optisch und chemisch verschiedene Substanzen sondert, nämlich in die *Sarcous elements* (Fleischkörnchen oder Fleischprismen) und die homogene Grundsubstanz, in welcher die ersteren durch regelmässige Lagerung die Querstreifung bedingen. Was die weiteren Veränderungen der Kerne der Sarcoplasten anbelangt, so können diese im Laufe der Zeit verschiedene Metamorphosen erleiden. In manchen Fällen scheinen sie allmählich zu schwinden, so dass dann auch an fertigen Muskelfasern im Innern meist keine Spur von Kernen zu finden ist. — Bei den Batrachiern und Fischen hingegen, dann im Herzfleische und im weissen Fleische der Hühnerbrust lassen sich auch an vollkommen gebildeten Muskelfasern im Innern wahre bläschenartige Kerne erkennen. In den glatten Muskeln endlich scheinen die Kerne zwar manchmal zu schwinden, in der Regel jedoch persistiren dieselben, verlieren aber im Laufe der Zeit allmählich ihre Bläschenatur, werden häufig linear, stäbchenförmig und mehr homogen.

Durch Essigsäure quellen die jüngeren Sarcoplasten auf, der Inhalt wird lichter, die Querstreifung anfangs deutlicher und es erscheinen bald in einer homogenen flüssigen zähen Masse kleine rundliche oder prismatische Körperchen (*Sarcous elements*), die gelblich und nach Einwirkung von doppelt chromsaurem Kali grünlichgelb gefärbt sind. Später bilden sich, wahrscheinlich durch Endosmose, im Inhalte kleine, rundliche, oft mit einander verschmelzende Vaeuolen, die Ränder der Sarcoplasten bekommen Einkerbungen und es bleibt endlich eine durch unregelmässige Hohlräume zerklüftete Masse zurück, in der sich jedoch noch immer die optisch verschiedenen Substanzen theilweise erkennen lassen. Bei mehr entwickelten Sarcoplasten behalten die gelblichen stark lichtbrechenden Körnchen auch nach dem Aufquellen durch Wasser oder Essigsäure mehr weniger ihre regelmässige Lagerung; später scheinen sie ihre Gleichgewichtslage zu verlieren, wodurch in der contractilen Masse wellenförmig oder spiralig gekrümmte stark lichtbrechende Linien hervorgerufen werden. Letztere stellen in solchem Falle oft ein unregelmässiges Gewirr von wellig und spiralig verlaufenden Fäden dar, welche Erscheinung wohl darin ihre Erklärung findet, dass die in einer Richtung mehr zusammenhängenden lichtbrechenden *Sarcous elements* durch das Aufquellen und Eindringen von Wasser oder Essigsäure aus ihrer ursprünglichen Gleichgewichtslage gebracht, seitlich verschoben werden.

Aus Allem diesem glaube ich somit schliessen zu dürfen, dass der Inhalt noch junger Sarcoplasten eine der Sarcode ähnliche Substanz sei, deren Eigenschaften uns durch

Dujardin¹⁾ und Ecker²⁾ einigermassen bekannt geworden sind und von der Ersterer (in seinem Werke: Infusoires, Paris 1841, S. 38) sagt: „*qu'elle forme le passage à la chair proprement dite, ou qu'elle est destinée à le devenir elle-même*“.

Es ist daher sehr wahrscheinlich, dass auch bei höheren Thieren eine ähnliche Substanz, welche den niedersten Grad der Fleischsubstanz repräsentirt, als Inhalt eigenthümlicher Zellen vorkommt, die dann allmählich sich in zwei physikalisch, chemisch und optisch differente Theile sondert. Dieser Zelleninhalt bleibt somit bei niederen Thieren während des ganzen Lebens homogen oder nur zum Theile differenzirt, so wie wir ihn bei den jüngsten Sarcoplasten höherer Thiere nur als erste Anlage der quergestreiften Muskelsubstanz gefunden haben, die dann in gewissen Muskeln, denen eine lebhaftere Thätigkeit zugedacht wurde, die höchste Stufe der Differenzirung erreicht, während an anderen Stellen desselben Thieres letztere während des ganzen Lebens unvollständig bleiben kann.

Was die Frage betrifft, ob die Sarcoplasten für wirkliche Zellen zu halten sind, so glaube ich diese dahin beantworten zu müssen, dass an denselben in der frühesten Periode wohl deutlich eine Zellmembran wahrzunehmen sei; im weiteren Verlaufe der Metamorphose wird es jedoch äusserst schwer, sich von der Existenz einer wirklichen Zellmembran zu überzeugen. Bei reifen, in Verschmelzung bereits begriffenen Sarcoplasten habe ich nur durch Reagentien und Wasser hie und da einen lichter Saum um den gequollenen Inhalt gesehen, was jedoch zur Constatirung einer wirklichen Zellmembran kaum genügend ist. Es ist daher sehr wahrscheinlich, dass die Zellmembran und der contractile Inhalt in Eins sich vereinigen und innig mit einander verwachsen. Möglich, dass die Sarcoplasten dadurch eben die Eigenschaft gewinnen leichter mit einander zu verschmelzen, besonders da, wie ich mich überzeugte, die Substanz der Sarcoplasten im frischen Zustande untersucht eine weiche, gelatinöse Masse bildet.

Die Bildung der quergestreiften Muskelfaser anlangend, geschieht diese durch Verschmelzung von mehreren Sarcoplasten, nicht aber durch einfache Verlängerung einer Zelle. In dieser Hinsicht stehen also meine Beobachtungen mit Lebert's, Remak's und Kölliker's Ansicht im Widerspruch. Auch kann ich nicht unerwähnt lassen, dass die Grösse meiner bei *Rana temporaria* gefundenen Sarcoplasten wenigstens viermal geringer ist, als die von Kölliker angegebene Grösse seiner bei demselben Thiere beobachteten Bildungszellen der Muskelfasern.

Ebenso stimmen meine Beobachtungen nicht überein mit der von Schwann³⁾, Valentin⁴⁾ und früher auch von Kölliker⁵⁾ angenommenen Bildungsweise. Die quergestreifte Muskelfaser geht zwar aus der Verschmelzung von Sarcoplasten hervor, aber diese Verschmelzung unterscheidet sich von der durch Schwann angegebenen darin: 1. dass nicht die homogenen Bildungszellen, sondern die bereits metamorphosirten Zellen oder Sarcoplasten mit einander verschmelzen; 2. dass diese Verschmel-

1) Annales de sc. nat. 1835, pag. 367; 1838, pag. 247. — Infusoires, Paris 1841, pag. 35 ff.

2) Zur Lehre vom Bau und Leben der contractilen Substanz der niedersten Thiere, in Zeitschrift für wissensch. Zoologie. I. Bd., S. 218 ff.

3) Mikroskopische Untersuchungen über die Übereinstimmung etc. Berlin 1839, S. 156 ff.

4) Historiae evolutionis syst. muscularis prolusio. Wratislaviae 1832. — Entwicklungsgeschichte, S. 166. — Müller's Archiv, 1840, S. 198.

5) Annales des sc. nat. 1846, pag. 93. — Mikroskopische Anatomie, Bd. II. 1. Hälfte, S. 252 ff.

zung sowohl in einfachen wie in mehrfachen Reihen geschehen kann, jedoch nie nach dem Schwann'schen Typus, sondern so, dass die Sarcoplasten sich schief mit ihren Spitzen nach Art der musculösen Faserzellen übereinander legen; 3. dass die ursprünglichen Zellenmembranen mit dem differenzirten contractilen Inhalte der Sarcoplasten verschmelzen und somit auch zur Bildung des Sarcolemma nichts beitragen, dieses vielmehr aus dem umgebenden Blastem durch eine Art Verdichtung entsteht; 4. endlich, dass durch die Metamorphose und Verschmelzung der Sarcoplasten nicht Fibrillen entstehen, sondern eine continuirliche quergestreifte Masse — zusammengesetzt aus zwei physikalisch, chemisch und optisch verschiedenen Substanzen, der einfach lichtbrechenden Grundsubstanz und den darin eingebetteten Fleischkörnchen oder *Sarcous elements* — gebildet wird.

Reichert¹⁾ und Holst²⁾ lassen jede Fibrille aus je einer Zelle hervorgehen, welche sich allmählich verlängern soll, und mehrere solche zu Fibrillen verlängerte Zellen sollen ihrer Annahme zufolge ein Muskelprimitivbündel bilden. Aus dem Voranstehenden ist ersichtlich, dass die Sarcoplasten vor ihrer Verschmelzung schon Querstreifung zeigen, und dass aus ihrer Verschmelzung nicht ein Bündel von Fibrillen entsteht, sondern eine continuirliche contractile Substanz. Dieses selbst glaube ich nicht einfach aus Bindesubstanz bestehend, sondern aus einer elastischen mit Kernen und häufig auch mit Fasern versehenen Membran, die in Gestalt eines Schlauches um die Sarcoplasten sich verdichtet.

Auch die Ansicht Leydig's³⁾ kann mich nicht völlig befriedigen. Seine sogenannten Primitivecylinder oder ursprünglich umgewandelte Muskelzellen sollen nämlich nur seitlich mit ihren Rändern verschmelzen und so ein Muskelprimitivbündel herstellen. Meinen Beobachtungen zufolge verschmelzen die bereits differenzirten quergestreiften Sarcoplasten nicht allein mit ihren seitlichen Rändern, sondern auch indem sie sich mit ihren Spitzen gegenseitig berühren, nach Art der contractilen Faserzellen.

Was die ramificirten und netzförmig verwachsenen Muskelfasern anlangt, so entstehen erstere durch Auswachsen der Fortsätze von Sarcoplasten, letztere aber durch das Verwachsen mehrerer mit Fortsätzen versehener Sarcoplasten mit einander.

Meine Untersuchungen liefern endlich eine weitere Stütze dafür, dass zwischen den quergestreiften und glatten Muskelfasern in genetischer Hinsicht kein wesentlicher Unterschied besteht. Beide Arten von Muskelfasern entstehen aus Sarcoplasten, die bestimmten Gesetzen folgen. Die einzigen Unterschiede, die aber nicht von Belang sind, dürften folgende sein:

1. Dass bei der Bildung der glatten Muskelfasern die Sarcoplasten nicht so innig mit einander verschmelzen, wie bei den quergestreiften Muskelfasern. Es dürfen jedoch auch in dieser Beziehung zwischen Beiden nicht so scharfe Grenzen gezogen werden; denn ich überzeugte mich von der Thatsache, dass manche

1) Müller's Archiv 1847. Jahresbericht S. 17.

2) De structura musculorum in genere et annulorum musculis in specie observationes microscopicae c. tab. Dissertatio inauguralis. Dorpat 1846. Auch Canstatt's Jahresbericht f. 1847, Bd. 1, S. 56 ff.

3) Lehrbuch der Histologie des Menschen und der Thiere, 1857, S. 46 ff.

glatte Muskelfasern aus vollkommener Verschmelzung der Sarcoplasten hervorgehen, so wie es andererseits quergestreifte Muskelfasern gibt, an deren Oberfläche die Grenzlinien zwischen den einzelnen nicht vollständig mit einander verschmolzenen Sarcoplasten als dunkle mit einander nicht correspondirende Längsstreifen wahrgenommen werden.

2. Ein weiterer Unterschied wäre der geringere Grad der Differenzirung des Inhalts bei den Sarcoplasten der glatten Muskelfasern. Doch scheint auch dieser Unterschied nicht allgemein, seitdem bei vielen musculösen Faserzellen durch G. Meissner¹⁾ die Gegenwart von Querstreifen constatirt wurde, und, wie sich aus meinen Untersuchungen ergibt, diese durch dieselbe Ursache, wie bei animalen Muskelfasern erzeugt werden. Andererseits wurden bereits durch Leydig²⁾ und Kölliker³⁾ in neuerer Zeit quergestreifte Faserzellen, namentlich bei wirbellosen Thieren beobachtet.

3. Dass gewöhnlich bei glatten Muskelfasern die Bindesubstanz sich nicht zu einem wahren Sarcolemmaschlauch consolidirt.

Schliesslich erlaube ich mir noch einige Beobachtungsergebnisse anderer Autoren hier folgen zu lassen, welche zur weiteren Stütze unserer Ansicht dienen sollen und darin zugleich ihre Erklärung finden dürften.

1. Reichert⁴⁾ erwähnt eines Epithels, das aus grossen, rundlich-polygonalen, kernhaltigen, einen gelblichkörnigen Inhalt enthaltenden Zellen besteht und ein paar grössere im Thoraxraum der Decapoden verlaufende Muskeln überzieht. Schon Haeckel⁵⁾ hat seinen Zweifel über die rechte Epithelialnatur dieser Zellen geäussert und stellte zugleich die Vermuthung auf, dass es vielleicht contractile Zellen sein dürften. Ich fand diese Zellen als oberflächliche Schicht genannter Muskeln vorzüglich bei jungen im Wachsthum begriffenen Decapoden (*Astacus fluv.*), wiewohl ich später bei ganz kleinen 38 — 50 Millim. langen Exemplaren ähnliche Zellen häufig auch an anderen Stellen, zwischen den Muskelfasern und innerhalb des Sarcolemma, so wie bei reproducirten Scherenmuskeln erwachsener Individuen angetroffen. Diese Zellen, über deren musculöse Natur kein Zweifel sein kann, sind wohl nichts anderes als die von mir geschilderten Sarcoplasten, deren Gegenwart entweder einen embryonalen Zustand der Muskelfaser oder eine Neubildung von contractiler Substanz andeutet.

2. T. v. Hessling⁶⁾ verdanken wir eine treffliche und sehr genaue Beschreibung der von dem Entdecker sogenannter Purkinje'schen Fäden an der inneren Wand der Herzkammern unter dem Endocardium, namentlich bei Wiederkäuern. Was ihre Bedeutung anbelangt, so hat schon Kölliker⁷⁾ dieselben für musculös gehalten und als solide einfache Zellen geschildert, deren Inhalt in eine quergestreifte Masse umgewandelt ist, die entweder die ganze Zelle erfüllt oder nur an der Membran derselben eine dünne Schicht bildet und an denen er sogar Contractionserscheinungen bemerkt zu haben glaubt. T. v. Hessling

1) Über das Verhalten der musculösen Faserzellen im contrahirten Zustande, in Zeitschrift für rationelle Medicin von Henle und Pfeufer, 1858, II. Bd., 3. Hft. S. 316 ff. Taf. V.

2) Lehrbuch der Histologie, S. 47.

3) Untersuchungen zur vergleichenden Gewebelehre. — Würzburger Berichte, 1857, S. 111.

4) Vergleichende Beobachtungen über das Bindegewebe, Dorpat 1845, S. 77.

5) Über die Gewebe des Flusskrebse, in Müller's Archiv 1857, S. 542.

6) Histologische Mittheilungen, in Zeitschr. für wissensch. Zoologie, V. Bd., S. 189 ff.

7) Handbuch der Gewebelehre, 1852, S. 67. — Mikroskop. Anatomie, II. Bd., 2. Hälfte, S. 194.

hält sie für neben einander liegende Stücke getrennter Muskelsubstanz, deren Vorkommen zu constant ist um sie für pathologisch halten zu können.

Ich habe diese höchst interessanten Gebilde neuerdings einer Untersuchung unterworfen, nachdem sie mich an die bei Fröschen und anderen Thieren entdeckten Sarcoplasten unwillkürlich erinnerten, und muss offen gestehen, dass ich der oben erwähnten ausgezeichneten Beschreibung von T. v. Hessling kaum etwas Wesentliches zufügen könnte. Bezüglich ihrer Entstehungsweise und Bedeutung glaube ich jedoch bemerken zu müssen, dass ich dieselben für Sarcoplasten deuten möchte und zwar aus folgenden Gründen: *a)* Dieselben findet man nicht nur unter dem Endocard, sondern wie dies v. Hessling ebenfalls beobachtet hat, auch in der übrigen Substanz der Herzkammern zwischen den fertigen Muskelfasern, so wie nicht selten in den oberflächlichsten Schichten unter dem Pericard; *b)* die Zellen stimmen in allen ihren Eigenschaften mit den bei Embryonen und im Wachsthum begriffenen Thieren von mir gefundenen Sarcoplasten vollkommen überein; *c)* die in Theilung nicht selten begriffenen Kerne derselben scheinen eine Vermehrung zu bedingen; *d)* ihre Lagerung scheint eine ähnliche zu sein, wie die der Sarcoplasten, so dass durch den Verschmelzungsprocess endlich wahre quergestreifte Muskelfasern entstehen können; *e)* zwischen den aus noch getrennten Zellen bestehenden Strängen finden sich endlich nicht selten auch solche, die für eine weitere Entwicklungsstufe angesehen werden dürften, indem sie aus deutlich noch erkennbaren, zum Theil mit einander verschmolzenen Sarcoplasten zusammengesetzt erscheinen, und wie auch v. Hessling angibt, in quergestreifte Muskelfasern mit Andeutung der früheren Zellenlage direct übergehen.

3. Stannius¹⁾ gibt uns eine Beschreibung von den Muskelementen des Herzens von *Petromyzon fluviatilis*, welche zum grossen Theil auf die von uns geschilderten Sarcoplasten passt. Diese sollen nämlich aus Cylindern bestehen, welche sich vielfach, theils dichotomisch verästeln, theils durch Absendung sehr feiner Zweige. Oft fand er mehrere Cylinder von einem grösseren plattenförmig verbreiteten Körper ausgehen.

4. So beschreibt auch Schiff²⁾ die äussere Schicht der Herzkammer und der Aorta von *Chiton piceus*, bestehend aus grossen 4—7fach über einander geschichteten kernhaltigen Kugeln von 0.003''—0.008'' Durchmesser. Und weiter unten³⁾ gibt er eine genaue Beschreibung von dem eigenthümlichen Verhalten der histologischen Elemente des die Zungenknorpel von aussen einhüllenden Spannmuskels. Er fand nämlich die Bündelchen desselben an ihren Rändern von grossen, etwas platt gedrückten Zellen mit fast centralem Kern besetzt. Eine besondere Zellenhülle konnte er an ihnen nicht erkennen, aber ihre Structur gleicht in jeder Beziehung so sehr dem Inhalte der Muskelfasern, dass derselbe sie anfangs für Muskelmassen hielt, die durch Risse der Röhrenhülle an den Seiten bruchartig ausgetreten waren, drückte er jedoch mit dem Deckgläschen, so lösten sich die Zellen ab und schwammen frei umher. Ganz richtig deutet Schiff diese Zellen als muskelartige Gebilde und parallelisirt dieselben mit jenen Zellen, aus denen die erwähnten Purkinje'schen Fäden bestehen. Er vermuthet auch, dass es vielleicht Ersatzzellen seien, aus welchen sich in Muskeln, denen eine energische Thätigkeit zukommt, später neue Muskelfasern für alte zu Grunde gehende ausbilden.

¹⁾ Über den Bau der Muskeln von *Petromyzon fluviatilis*, Götting. Nachr. Nr. 17 und Caustatt's Jahrb. für 1852, S. 39.

²⁾ Beiträge zur Anatomie von *Chiton piceus*, Zeitschr. für wissensch. Zoologie, IX. Bd., S. 19 ff.

³⁾ A. a. O. S. 34 ff.

Die Deutung dieser und ähnlicher Zellengebilde dürfte nach der von mir nachgewiesenen Bildungsweise der Muskelsubstanz keine sehr schwierige sein. Mangel an Querstreifen kann nicht massgebend sein, da diese auch bei Sarcoplasten in frühester Periode fehlt.

5. Sehr interessant sind die histologischen Verhältnisse der Muskeln von *Oxyuris ornata*, deren nähere Kenntniss wir besonders G. Walther¹⁾ verdanken. Derselbe schildert²⁾ die Muskeln der noch jungen Thiere als schlauchartige Gebilde an derselben Stelle, an welcher sich später die Körpermuskeln vorfinden. Ihre äussere Membran — das Sarcolemma — direct vom Corium entspringend, zeigt eine deutliche Längsstreifung, was auch, wie es scheint, dafür spricht, dass dieses nicht structurlos sei. Ihr Inhalt scheint aus grossen hellglänzenden, das Licht stark brechenden kernhaltigen Zellen zu bestehen. Walther hält zwar diese zellenartigen Gebilde, weil die Zellmembranen nicht zu demonstiren waren, für Sarcodemassen, oder Sarcodetropfen, doch scheint es mir viel wahrscheinlicher sie ursprünglich als Zellen zu betrachten, deren Membranen allmählich mit dem Inhalte verwachsen, während diese zusammenschmelzend den contractilen Inhalt des Sarcolemmaschlauches bilden. Zu diesem Schlusse zwingt uns einigermassen auch die Gegenwart des Kerns, der, wie Verfasser selbst gesteht, nie fehlen soll, so wie andererseits die Analogie mit den von mir bei den meisten Thieren entdeckten Sarcoplasten, bei denen ich die Entwicklung aus Zellen durch directe Beobachtungen ausser allem Zweifel gesetzt zu haben glaube. Die Abbildung, welche Verfasser auf Taf. V, Fig. 8 gibt, erinnert lebhaft an die von Sarcolemmaschläuchen umhüllten Sarcoplasten der Frösche und Crustaceen, mit alleiniger Ausnahme der Querstreifung. Die contractile Substanz entsteht bei diesem Thiere, wie es scheint, auf dieselbe Weise, wie die der höheren Thiere, aus Sarcoplasten, nur dass ihr Inhalt durch weitere Differenzirung nicht zu höherer Entwicklung gelangt und daher auch keine Querstreifung zeigt. Die Differenzirung des Inhalts scheint jedoch bis zu einem gewissen Grade bei älteren Thieren wirklich einzutreten: denn es bilden sich demselben Beobachter zufolge im contractilen Inhalte älterer Thiere horizontale Querplättchen oder Scheiben, welche dichtgedrängt hinter einander liegen und oft in einander übergehen, wodurch sie eine dem quergestreiften Muskelinhalt höherer Thiere ähnliche Beschaffenheit gewinnen.

6. Rokitansky sagt in seinem „Lehrbuch der pathologischen Anatomie“ (3. Aufl. I. Bd., S. 76) „Lebert³⁾ und Bardeleben⁴⁾ wollen im Innern der Muskelprimitivbündel Canceroidzellen, letzterer auch Fetzellen beobachtet haben“. — Gestützt auf meine Beobachtungen über Entwicklung und Neubildung der Muskelsubstanz, glaube ich mich berechtigt, über die Deutung ähnlicher Zellen im Innern der Muskelsubstanz meinen Zweifel auszusprechen und die Frage zu stellen, ob die angeblichen Canceroid- und Fetzellen nicht etwa Sarcoplasten waren, deren Inhalt — wie gewöhnlich bei jungen Sarcoplasten — noch homogen gewesen, oder deren Querstreifung, wenn auch gegenwärtig, nicht wahrgenommen wurde.

7. Eben so dürften vielleicht jene mit Zellen gefüllte Schläuche zwischen den Muskelfasern der Frösche, die Kölliker⁵⁾ in neuester Zeit beobachtet und abgebildet hat, die er

¹⁾ Beiträge zur Anatomie und Physiologie von *Oxyuris ornata*. Zeitschr. für wissensch. Zoologie, VIII. Bd., S. 163 ff.

²⁾ A. a. O. S. 176.

³⁾ Physiologie pathologique ou Recherches etc. Paris 1845.

⁴⁾ A. Vidal's Lehrbuch der Chirurgie. Deutsch bearbeitet. Berlin 1852.

⁵⁾ Einige Bemerkungen über die Endigungen der Hautnerven und den Bau der Muskeln. Zeitschr. für wiss. Zool. VIII. Bd., S. 315. Anmerkung. Taf. XIV. Fig. 9.

aber für pathologisch metamorphosirte Muskelfasern zu halten geneigt ist, nichts anderes sein als in der Entwicklung begriffene Muskelfasern, so wie die in Schläuchen des Sarcolemma vorgefundenen Zellen nichts anderes als junge Sarcoplasten, denen sie sehr ähnlich sind (vgl. Taf. I, Fig. 1, 4, 5 dieser Abhandlung). Diese Vermuthung gewinnt überdies einen noch grösseren Grad von Wahrscheinlichkeit durch Kölliker's eigene Aussage, dass er dieselben nicht nur bei einzelnen, sondern bei jedem von ihm untersuchten Frosehe in diesen oder jenen Muskeln beobachtet habe, was auch mehr für eine physiologische als für eine pathologische Metamorphose zu sprechen scheint.

Etwas diesem Ähnliches wurde bereits vor Jahren in den Muskeln der Ratten und Mäuse von Miescher¹⁾, v. Siebold²⁾, Bischoff und Kölliker³⁾ beobachtet. Es waren dies Schläuche, die bei mikroskopischer Untersuchung — wie Kölliker sagt — als hohle Primitivbündel sich ergaben und ganz mit elliptischen, leichtgebogenen, bohnen- oder nierenförmigen Körperchen von 0·004''' bis 0·005''' Länge und 0·0019''' Breite erfüllt waren. Die in Schläuche umgewandelten Stellen der Bündel hatten Wandungen von 0·009''' bis 0·01''' Dicke mit Querstreifen und gingen an ihren Enden in ganz normale Bündel über. Kölliker hält diese Körperchen innerhalb der Muskelfaser für Entozooneier: v. Siebold fühlt sich geneigt dieselben den schimmelartigen Entophyten beizuzählen: Miescher endlich lässt es zweifelhaft, ob die genannten Schläuche ein eigenthümlicher Krankheitszustand der Muskelprimitivbündel oder eigenthümliche parasitische Bildungen vegetabilischer oder thierischer Natur seien. Ich erlaube mir jedoch über diese bisher räthselhaften Schläuche meine Meinung vermuthungsweise dahin auszusprechen, dass dieselben in der progressiven Metamorphose befindliche Muskelfasern sein möchten. Denn für's Erste habe ich bei jungen Wanderratten, so wie 42 Millim. langen Rattenembryonen nicht nur an den Bauchmuskeln und am *M. pectoralis*, sondern auch an anderen Stellen zwischen den schon entwickelten Muskelfasern ähnliche cylindrische, leicht gekrümmte, stark lichtbrechende Körperchen, theils in Schläuchen, theils zwischen den elastischen Faserzügen der Bindesubstanz eingelagert gefunden, und von denen die meisten durch ihre deutliche Querstreifung, so wie durch ihre übrigen optischen und chemischen Eigenschaften ihre musculöse Natur verriethen. Ich habe diese bereits oben näher beschrieben und eine Abbildung von denselben geliefert (Taf. II, Fig. 14). Überdies erinnert mich die von v. Siebold mitgetheilte Abbildung Miescher's sehr an die bereits geschilderten mit Sarcoplasten erfüllten Sarcolemmaschläuche der Frösche, Fische und anderer Thiere.

8. Nicht minder lassen sich die von Virchow⁴⁾ beobachteten Formen pathologisch neugebildeter quergestreifter Muskelelemente mit der von mir beschriebenen Entwicklungsweise, ohne der Sache irgend einen Zwang anzuthun, vollkommen in Einklang bringen. Die von ihm abgebildeten Formen, ihre Querstreifung, die lichten glänzenden Kerne, das dachziegelförmige Übereinanderliegen derselben und theilweise Verschmelzen mit einander nach Art der contractilen Faserzellen, treffen mit meinen Resultaten, wie ich glaube, ganz überein.

9. Von diesem, durch die voranstehenden Beobachtungen gewonnenen Gesichtspunkte aus dürften endlich auch die von Rollet im Pferdefleisch gefundenen, von Biesiadecki

1) Bericht über die Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel. V. Bd., 1813, S. 198.

2) Jahresbericht in Müller's Archiv 1843, S. 63. — Zeitschrift für wissensch. Zoologie, V. Bd., S. 199, Taf. X, Fig. 10, 11.

3) Mikroskop, Anatomie, II. Bd., 1. Hälfte, S. 260 ff.

4) Archiv für pathol. Anat. und Physiologie von Virchow, 1854, S. 126 ff. Taf. II, Fig. 4, 5.

und Herzig¹⁾ bekannt gemachten Formen der quergestreiften Muskelfasern leicht erklärt werden. So namentlich die beim Pferde gefundenen Muskelfasern mit dünnen, kurzen, hakenförmig gekrümmten, oder dickern, gerade verlaufenden, spitzendigenden Fortsätzen, von denen die kleinern wie Anhängsel der Muskelfaser erscheinen (a. a. O. Taf. II, Fig. 5 und 12); dann jene Form, wo zwei aus der dichotomischen Theilung hervorgegangene Äste durch eine Brücke anastomosiren (Taf. III, Fig. 7), und wo die Enden der Muskelfaser durch seichte Einschnitte gekerbt, oder in mehrere kegelförmige Spitzen gespalten ist (Taf. I, Fig. 2; Taf. II, Fig. 11). Alle diese Formen dürften darin ihre Erklärung finden, dass die Sarcoplasten in manchen Fällen nicht so innig mit einander verschmelzen, dass daraus eine continuirliche Muskelsubstanz entsteht, sondern dass sie durch seichte Einschnitte oder Einkerbungen auch fernerhin theilweise gesondert bleiben. Auch können längs der fertigen Muskelfaser einzelne neugebildete Sarcoplasten seitlich an dieselbe sich anlegen und theilweise mit ihr verschmelzen zur Entstehung der in Fig. 5 und 12 (a. a. O.) abgebildeten Muskelfasern Gelegenheit geben, oder auch beiderseits mit zwei Ästen einer dichotomisch getheilten Muskelfaser verschmelzen und eine Verbindungsbrücke zwischen denselben zu Stande bringen.

¹⁾ Die verschiedenen Formen der quergestreiften Muskelfasern. Mit 3 Tafeln. Wien 1858. Aus dem XXXIII. Bde. des Jahrganges 1858 der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe der kais. Akademie der Wissenschaften besonders abgedruckt.

II. ABSCHNITT.

Über das Wachsthum und die Neubildung der Muskelfasern.

A. Das Wachsthum der Muskelfasern.

Bisher habe ich dem Entwicklungsgange der Muskelfaser gefolgt, wie er sich von der ersten Anlage bis zur Bildung der embryonalen Muskelfaser aus meinen zahlreichen Untersuchungen ergeben hat. Sehen wir nun, welchen weiteren physiologischen Veränderungen dieselben durch die normalen Bedingungen der Ernährung entgegen gehen.

Thatsache ist es, dass die Muskeln, einmal entwickelt, wie jedes andere Gewebe, an Volum und Masse zunehmen. Diese Zunahme bezieht sich freilich nicht allein auf die Muskelfasern, sondern auch auf die übrigen heterogenen Formbestandtheile des Muskels: Gefäße, Nerven und Perimysium. Da ich mir jedoch die Muskelfasern allein zum Ziele meiner gegenwärtigen Arbeit gesteckt habe, so werde ich die übrigen histologischen Elemente der Muskeln hier nicht weiter berücksichtigen und mich blos mit dem Wachsthum der Muskelfasern beschäftigen.

Zum Ausgangspunkte dieser Forschung soll mir die embryonale, aus ihren ersten Anlagen herangebildete Muskelfaser nebst ihren sehnigen Ausläufern dienen. Sie kann in der Folge durch Wachsthum sowohl nach ihrer Länge, als nach der Breite und Dicke zunehmen.

Was zunächst das Längenwachsthum der Muskelfasern betrifft, so habe ich hierüber an den Repräsentanten der verschiedenen Thierclassen directe Beobachtungen gemacht, welche ich hier vorlegen werde.

Untersucht man im Wachsthum begriffene Muskelfasern an jenen Stellen, wo sie in ihre Sehnenstränge oder Aponeurosen auslaufen, so findet man die Enden derselben entweder merklich zugespitzt, oder mehr stumpf und etwas abgerundet, je nachdem sie Theile eines cylindrischen, kegelförmig zugespitzten oder eines flachen Muskels bilden. Oft sieht man die Enden der Muskelfaser durch seichte oder tiefere Einschnitte in mehrere Zacken getheilt; es sind dies nichts Anderes, als die mit der einen Spitze zwischen die Sehnenfasern hineinragenden Sarcoplasten, während sie mit der anderen bereits unter einander verschmolzen sind. Häufig bemerkt man an solchen Übergangsstellen Körperchen, die eine verschiedene Bedeutung haben. Die einen dieser Körperchen haben das Aussehen von kleinen länglich-ovalen, mattecontourirten Bläschen, welche nach Zugabe von Essigsäure körnig werden, und mit Kernen des embryonalen Bindegewebes und der Sehnensubstanz

identisch zu sein scheinen. Ausser diesen nicht selten in Theilung begriffenen Kernen fallen an diesen Stellen noch andere Körperchen auf mit stark lichtbrechender Oberfläche, scharfen Contouren, gelblicher Farbe, die durch ihre verschiedene Grösse, Lagerung, so wie durch ihre chemischen Eigenschaften und weitem Metamorphosen ihre musculöse Natur verrathen. Es sind dies die von mir geschilderten Sarcoplasten auf verschiedener Entwicklungsstufe, theils von rundlicher Gestalt mit mehr weniger homogenem Inhalt, theils cyli drisch und spindel-förmig, mit deutlichen Querstreifen versehen. Bei im Wachsthum begriffenen Froschlarven begegnet man nicht selten solchen Muskelfasern, wo an der Übergangsstelle die Sarcoplasten theils isolirt (Taf. I, Fig. 10 *b, b*), theils gruppenweise zwischen den Sehnenfasern beisammen liegen (Taf. IV, Fig. 33 *c*). Auch in grösseren Abständen von einander finden sich häufig Sarcoplasten zwischen den Sehnenfasern, wie aus einer Mutterzelle frei gewordene Gruppen von Tochterzellen, zusammengehäuft (Taf. II, Fig. 11 *a, a, a*).

Aus den hier aufgezählten Beobachtungen lässt sich nun nichts Anderes schliessen, als dass die Muskelfaser, indem sich an ihren Enden neue Sarcoplasten bilden und allmählich mit einander und mit der übrigen Muskelsubstanz verschmelzen, an Länge zunehmen müsse; während sich jedoch auf solche Weise die contractile Muskelsubstanz an beiden Enden der Muskelfaser vermehrt, scheint auch das Sarcolemma sich durch Vervielfältigung der Kerne und Verdichtung der die Sarcoplasten umgebenden nächsten Schicht von Bindesubstanz zu verlängern.

Es muss somit bei der Längenzunahme einer Muskelfaser die Verlängerung des Sarcolemma von der Vermehrung des contractilen Inhalts genau unterschieden werden. Das Sarcolemma verlängert sich durch die Vervielfältigung seiner Kerne und Verdichtung der Bindesubstanz zu einer elastischen Membran; die contractile Substanz aber vermehrt sich an den Enden der wachsenden Muskelfaser durch die Bildung neuer Sarcoplasten.

Auf eine ganz ähnliche Weise scheint das Wachsthum der Muskelfaser nach der Breite oder Dicke statt zu finden. Es ist mir gelungen an verschiedenen Thieren im Wachsthum begriffene Muskelfasern zu beobachten. Die meisten zeigten zwischen dem Sarcolemma und dem contractilen quergestreiften Inhalt einzelne oder gruppenweise neben einander liegende Sarcoplasten von verschiedener Grösse und auf verschiedener Entwicklungsstufe, theils mit homogenem, theils quergestreiftem Inhalt. Taf. I, Fig. 1 und 9 stellen solche Muskelfasern dar, erstere von einer 25 Millim. langen Froschlarve, letztere von einem 3 Centim. langen Froschjungen. Durch die allmähliche Verschmelzung der Sarcoplasten mit dem übrigen continuirlichen contractilen Inhalt scheint eine Vergrösserung des Muskelfaserdurchschnittes zu erfolgen. Nicht selten begegnet man solchen Muskelfasern, die bei gleich grossen Abständen der Querstreifen stellenweise verdickt erscheinen, was darin seine Erklärung findet, dass die Sarcoplasten an manchen Stellen sich in grösserer Anzahl entwickeln.

B. Die Neubildung von Muskelfasern.

Es gibt viele Erscheinungen, woraus man schon lange vorher auf das Entstehen neuer Muskelsubstanz zu schliessen berechtigt war. Hieher gehört unter vielen anderen die locale Zunahme gewisser Muskeln. — der Extremitäten, des Arms, des Schenkels, der Waden u. s. w. — durch lange und oft wiederholte Übung und Bewegung, die Hypertrophie einzelner Muskeln, die Verdickung der Herzwände und der Muskelhäute in den Eingeweiden, die Vergrösserung

des Uterus während der Schwangerschaft und andere ähnliche theils physiologische, theils pathologische Erscheinungen.

Zur Erklärung solcher Erscheinungen nahm man gewöhnlich an, dass unter gewissen, eine Blutanhäufung in den Capillaren der Muskelsubstanz erzeugenden Bedingungen (wie Bewegung, Schwangerschaft, Hindernisse in der Fortbewegung des Blutes durch die Darmcontenta, durch Insufficienz der Herzklappen) das in den Zwischenräumen der Gefässe ergossene Plasma, wenn es nicht sehr bedeutend ist, in Muskelgewebe umgewandelt wird, wenn es aber eine abnorme Menge erreicht, wie bei Entzündungen, das Exsudat in solchen Fällen nicht zur Muskelsubstanz, sondern blos zu Bindegewebe wird [Henle¹⁾].

Eine wichtige Frage ist es jedoch die Art und Weise dieser Zunahme der Muskeln genauer zu bestimmen. Ob dieselbe nämlich durch Volumzunahme der schon vorhandenen oder durch Erzeugung und Bildung neuer Muskelfasern in den Zwischenräumen der schon vorhandenen geschieht. Ersteres nahmen die meisten Physiologen an, indem sie Letzteres entweder blos bei exquisiten Graden pathologischer Zunahme der Muskeln zulassen, oder dessen Möglichkeit gänzlich läugnen.

Man kann sich die wahre Zunahme der Muskelsubstanz eines Muskels überhaupt auf dreierlei mögliche Weise denken: entweder findet hiebei nur eine Vergrösserung sämmtlicher den Muskel zusammensetzender Muskelfasern Statt, mit Ausschliessung jeder Neubildung, oder es bilden sich neue Muskelfasern, wodurch der Querschnitt eines Muskels zunehmen würde, oder endlich es kann Beides zugleich zur Vergrösserung eines Muskels beitragen.

Jede der Meinungen scheint ihre Vertreter, wie ihre Gegner zu haben.

Von denjenigen, die über diesen Gegenstand in neuester Zeit geschrieben haben, will ich hier blos G. Viner Ellis, Deiters und J. Budge hervorheben, deren Ansichten aber leider wesentlich von einander abweichen.

G. Viner Ellis²⁾ untersuchte die periodische Zu- und Abnahme der Muskeln des Uterus, und kam dabei zu dem Resultate, dass allerdings während der Schwangerschaft eine Vergrösserung und nachher eine Verkleinerung der einzelnen Muskelfasern, aber keine Neubildung stattfindet. Mir ist diese Arbeit des Verfassers leider nur aus dem kurzen von Virchow in seinem Archive mitgetheilten Auszuge bekannt. Daraus entnehme ich denn, dass zwischen den Fasern des Uterus dennoch eine beträchtliche Quantität von körniger Substanz mit runden oder ovalen Körnchenzellen während der Schwangerschaft abgelagert werde, die jedoch der Verfasser durchaus nicht als Blastem neuer Muskelmasse gelten lassen will. Es fragt sich aber, ob diese zwischen den schon vorhandenen Fasern des Uterus abgelagerten rundlich-ovalen Zellen nicht vielleicht Sarcoplasten sind. So viel mir die Bildung glatter Muskelfasern bekannt ist, stimmen obige vom Verfasser nicht für musculös erklärte Elemente mit den von mir geschilderten Sarcoplasten ziemlich überein, in welchem Falle dann ausser der Grössenzunahme der schon vorhandenen, noch die Bildung neuer Muskelemente anzunehmen wäre.

Deiters³⁾ kam zu demselben Resultate wie Viner Ellis, wiewohl auf einem ganz anderen Wege, nämlich durch zahlreiche, an verschiedenen Wirbelthieren unternommene

¹⁾ Allgemeine Anatomie. Leipzig 1841. S. 604.

²⁾ Über die Natur der unwillkürlichen Muskelfasern. in Proc. of the Royal Society 1856. Vol. VIII. Nr. 22. pag. 212 — und im Auszuge in Virchow's Archiv 1857, XI. Bd., Hft. 3, S. 296.

³⁾ De incremento musculorum observationes anatomico-physiologicae. Dissertatio inauguralis. Bonnae 1856.

Messungen des Durchmessers der Muskelfasern und des Querschnittes der ganzen Muskeln, so wie durch eine Vergleichung derselben in mehreren gleichnamigen Muskeln von Thieren derselben Species und verschiedenen Alters. Hieraus glaubt er nun schliessen zu dürfen, dass das Volumen der Muskelfasern bei jüngeren Thieren kleiner sei und mit dem Alter zunehme, so wie auch, dass das Wachstum des Muskelquerschnittes sich in allen beobachteten Fällen aus dem Dickenwachstum der Muskelfasern hinreichend erklären lasse. Derselbe schliesst sich daher der Ansicht an, dass man zur Erklärung des Dickenwachstums der Muskeln durchaus nicht berechtigt sei eine Neubildung der Muskelfasern anzunehmen.

Ich fühle mich nicht geneigt Deiters's Beobachtungen irgend wie in Zweifel zu ziehen. Wenn wir von dem Ausgangspunkte seiner Beobachtungen, nämlich der Vergleichung eines Durchmessers mit einer Fläche (Durchmesser der Muskelfasern mit dem Querschnitte des Muskels), die unstatthaft ist, gänzlich absehen, und die aus obigen Messungen gewonnenen negativen Zahlenresultate des Verfassers auch für vollgültig halten wollen, so glaube ich, auf die von Anderen und mir selbst gemachten directen Beobachtungen gestützt, ausser der Dickenzunahme der schon vorhandenen Muskelfasern auch eine Neubildung von Muskel-elementen unter gewissen physiologischen wie pathologischen Verhältnissen mit vollem Recht annehmen zu müssen.

Ich erlaube mir hier die Beobachtungen anderer Forscher über die Neubildung von Muskelfasern in Kürze zu erwähnen und dann erst auf die hieher bezüglichen von mir angeestellten Untersuchungen zu übergehen.

Rokitansky¹⁾ hat einen interessanten Fall von regenerirten quergestreiften Muskelfasern beschrieben, und zwar bei einer Hodengeschwulst eines 18jährigen Individuums. Seitdem haben jedoch besonders Weber und Virchow Fälle von regenerirten quergestreiften Muskelfasern beobachtet. Weber's²⁾ Beobachtung zufolge war bei einem Falle von Macroglossie in dem excidirten Zungenstücke deutlich eine Metamorphose des zwischen das Zungengewebe ergossenen Exsudates nicht nur zu Bindegewebe, sondern auch zu quergestreiften Muskelfasern in verschiedener Entwicklungsstufe, nachweisbar.

Auch Virchow³⁾, Billroth⁴⁾, Senftleben⁵⁾ beschreiben ähnliche Fälle und bilden die regenerirten quergestreiften Elemente ab.

Kölliker⁶⁾ hat ferner im schwangeren Uterus des Menschen, Kilian⁷⁾ in dem der Säugethiere, sowohl eine Vergrößerung der schon vorhandenen muskulösen Elemente, als auch eine wahre Neubildung von solchen beobachtet, wodurch es erwiesen ward, dass beide Vorgänge an der Zunahme des Volumens des Uterus gemeinschaftlich sich betheiligen.

Ausser diesen directen Beobachtungen, deren geringe Zahl höchst wahrscheinlich in der Schwierigkeit des zu untersuchenden Gegenstandes, so wie in den bisherigen mangelhaften Erfahrungen über die jüngsten Entwicklungsstadien der quergestreiften Muskelfaser ihre

¹⁾ Zeitschrift der Wiener Ärzte 1849, S. 331.

²⁾ Virchow's Archiv, 1854.

³⁾ Virchow's Archiv, 1854, S. 126 ff., Taf. II Fig. 1—5.

⁴⁾ Virchow's Archiv, VIII. Bd., Taf. XII.

⁵⁾ Virchow's Archiv, XV. Bd., Taf. VI, Fig. 4.

⁶⁾ Mikroskopische Anatomie, II. Bd., 2. Hälfte, S. 418 ff. — Zeitschrift für wiss. Zool. I. Bd.

⁷⁾ Die Structur des Uterus bei Thieren, in Zeitschr. für rationelle Med. Bd. VIII, IX, 1849, 1850.

Erklärung findet, glaube ich noch der durch J. Budge¹⁾ in neuester Zeit bezüglich dieses Gegenstandes gewonnenen Resultate gedenken zu müssen, und dies um so mehr, da dieselben, wiewohl auf indirectem Wege, zur Unterstützung meiner directen Beobachtungen dienen können. Derselbe bediente sich nämlich einer Mischung von chlorsaurem Kali und Salpetersäure, um den Muskel durch Maceration in seine histologischen Bestandtheile behufs einer genauen Zählung derselben zu isoliren. Seine an dem *M. gastrocnemius* von drei jungen und zwei alten Fröschen theils mit dem Mikroskope, theils mit der Loupe gemachten Zählungen der den Muskel zusammensetzenden Fasern, führten zu dem interessanten Resultate, dass bei erwachsenen Fröschen derselbe Muskel eine beträchtlich grössere Anzahl von Fasern enthält als bei jungen, und dass mithin die Ansicht, nach welcher das Wachsthum der Muskeln lediglich auf eine Zunahme des Volumens oder des Querschnittes der schon vorhandenen Muskelfasern, und nicht auf einer Neubildung beruhen soll, eine irrige ist.

Dieser Ausspruch des genannten Forschers würde gewiss an Sicherheit nur gewonnen haben, wenn die Zählungen an einer grösseren Anzahl von Fröschen verschiedenen Alters gemacht worden wären. Immerhin sprechen aber diese Zahlen dafür, dass während des Wachsthumes der Frösche neue Muskelfasern entstehen.

Was nun meine Beobachtungen anlangt, so habe ich an zahlreichen jungen und noch im Wachsthum begriffenen Thieren verschiedener Classen gefunden, dass die Muskeln ihre Zunahme nicht allein der Vergrösserung der schon vorhandenen, sondern auch einer Bildung von neuen Muskelfasern zu verdanken haben.

Namentlich waren es junge Frösche und Kröten, junge Sperlinge, Fische, Säuger und Dekapoden, bei denen ich mich von der Wahrheit dieser Aussage überzeugt hatte. Man findet nämlich bei noch wachsenden Thieren, ausser den oben bereits geschilderten Sarcoplasten unter dem Sarcolemma und an den Enden der schon gebildeten Muskelfasern auch solche, die in den Zwischenräumen der schon fertigen Muskelfasern liegen und zwar theils isolirt, theils gruppenweise beisammen, und in verschiedener Entwicklungsstufe, manche sogar im Begriff zu einer Muskelfaser zu verschmelzen.

Bemerkenswerth ist es noch, dass während ich bei einzelnen Thieren nach stundenlangen vergeblichen Suchen nur hie und da einzelne Sarcoplasten zwischen den übrigen Muskelfasern fand, mich bei anderen Individuen und in gewissen Muskeln die grosse Menge derselben sehr angenehm überraschte. In solchen Fällen gelang es mir nicht selten an einem und demselben Gegenstande sämtliche Entwicklungsstufen der sich neubildenden Muskelfasern zu beobachten. Es ist daher sehr wahrscheinlich, dass die Neubildung während des Wachsthumes bei einem Individuum lebhafter ist als bei dem anderen, und dass sogar bei einem und demselben Individuum in gewissen Muskeln zu gewissen Zeiten eine sehr lebhaftige Neubildung von Muskelementen stattfinden kann.

Die Frage somit, bezüglich der physiologischen und pathologischen Zunahme der Muskeln, dürfte mit grösster Wahrscheinlichkeit derart zu beantworten sein, dass man dieselbe theils der Volumzunahme der schon vorhandenen Muskelfasern, theils aber — in exquisiteren Fällen, wo das Wachsthum mit einer gewissen Intensität und Raschheit auftritt, — einer wirklichen

¹⁾ Bemerkungen über Structur und Wachsthum der quergestreiften Muskelfasern, in Archiv für physiologische Heilkunde 1858, II. Bd., I. Hft., S. 72.

Neubildung von Muskelfasern zuschreiben müsse. Ich glaube daher, dass bei jeder periodischen Zunahme des Wachstums in gewissen Organen, z. B. während der Pubertätszeit, oder bei Fröschen zur Zeit der rascheren Entwicklung der Extremitäten und der Respirationsorgane, dann beim Uterus während der Schwangerschaftsperiode, oder in pathologischen Fällen exquisiteren Grades: Hypertrophie des Herzmuskelfleisches, der Zunge u. s. w. eine wirkliche Neubildung von Muskelementen mit Sicherheit anzunehmen sei.

Eine andere von Budge neuerer Zeit angeregte Frage ist die, ob eine fortdauernde Neubildung von Muskelementen stattfindet, während durch die Thätigkeit der Muskeln die alten resorbirt würden.

Eine solche Art von Stoffwechsel ganzer histologischer Elemente für die Muskeln ist *a priori* schon nicht sehr wahrscheinlich und wird auch von den meisten Physiologen nicht anerkannt, wiewohl H. Karsten¹⁾, gestützt auf verschiedene Beobachtungen, dieselbe, ohne jedoch in den Gegenstand tiefer einzugehen, für wahrscheinlich hält.

Auch Budge²⁾ spricht eine ähnliche Vermuthung aus und glaubt sogar, dass die Kerne des Sarclemma durch Dehiscenz ihres körnigen Inhalts möglicherweise die *Sarcous elements* liefern, in welchem Falle das Sarclemma, — ähnlich einigermaßen der Linsencapsel, die auf ihrer inneren Fläche die Epithelzellen trägt, — als Matrix zu betrachten wäre. Derselbe ist aber nicht in der Lage diese Vermuthung durch directe Beobachtungen irgendwie zu bestätigen.

Meine zahlreichen Beobachtungen geben mir einigermaßen die Berechtigung über diesen Gegenstand meine Meinung dahin auszusprechen, dass zwar eine Neubildung von Muskelementen während des Wachstums der Thiere unzweifelhaft sei, dass aber deshalb eine fortwährende Neubildung an Stelle der durch Thätigkeit verloren gegangenen Muskelfasern doch nicht statuirt werden darf.

Die Kerne des Sarclemma, welche nach Budge durch fortwährende Vermehrung derselben und Dehiscenz die neuen *Sarcous elements* liefern sollten, gehören ihren physikalischen, optischen und chemischen Eigenschaften nach zum nicht contractilen Theile der Muskelfaser, und sind von den Sarcoplasten und der activen contractilen Muskelsubstanz genau zu unterscheiden.

Selbst directe Beobachtungen sogenannter embryonaler Muskelfasern bei Thieren können nur bedingungsweise als Belege für eine solche continuirliche Neubildung von Muskelfasern gebraucht werden. In solchen Fällen müsste vor Allem bestimmt werden, ob die Beobachtung sich nicht auf solche Thiere beziehe, die noch im Wachstum begriffen waren. Eine periodische Neubildung gewisser Muskelpartien während des Wachstums der Thiere findet gewiss Statt: daraus folgt jedoch nicht, dass die Ernährung der Muskeln auf eine fortdauernde Neubildung von Muskelfasern und Resorption der alten beruht. Ich glaube vielmehr annehmen zu müssen, dass der Stoffwechsel einer schon fertigen, lebenden Muskelfaser ein molecularer sei, und sich bloß auf einen Ersatz der durch die Thätigkeit höchst wahrscheinlich verlorengegangener Muskelmoleküle beschränke.

1) Bemerkungen über einige scharfe und brennende Absonderungen verschiedener Raupen, in Müller's Archiv, 1848, S. 375 ff.

2) Archiv für physiologische Heilkunde, 1858, II. Bd., 1. Hft., S. 74.

III. ABSCHNITT.

Über den feineren Bau der Muskelfasern.

Zur Ergänzung der auf histogenetischem Wege gewonnenen Resultate fand ich mich bewogen eine Reihe von Untersuchungen über den feineren Bau der Muskelfasern an erwachsenen Thieren und Menschen anzustellen, in der Hoffnung dadurch zur näheren Kenntniss der Structur und Function dieser interessanten Gewebseinheiten wo möglich etwas beitragen zu können.

A. Über die quergestreifte Muskelfaser.

Es gibt wohl keinen Gegenstand in der Histologie, über den die Meinungen mehr differirten, als über den Bau der quergestreiften Muskelfaser. Vor Allem glaube ich daher auf diese verschiedenen Ansichten einen kritischen Blick werfen zu müssen. Die wichtigsten lassen sich auf folgende Theorien zurückführen.

1. Die Fibrillentheorie.

Diese Theorie, nach welcher die quergestreifte Muskelfaser für ein vom Sarcolemma umschlossenes Bündel von Fibrillen gehalten wird, ist eine unter den Physiologen wohl noch jetzt verbreitete Ansicht. Schon die ältesten Beobachter haben aus dem Zerfallen des todtten Muskelfaserinhaltes nach seiner Länge auf die Existenz von wirklichen Muskelfibrillen im lebenden Muskel geschlossen; aber auch in neuester Zeit sind viele der Histologen noch dieser Ansicht treu geblieben.

Die Anhänger dieser Theorie erklären die Querstreifen auf verschiedene Weise. Diejenigen, welche sich die Fibrillen überall gleichförmig, parallelrandig und cylindrisch vorstellen, betrachten die Querstreifung entweder als Ausdruck einer Faltung des Sarcolemma [R. Wagner, Triveranus¹⁾, Berres²⁾, Turpin³⁾, Ed. Weber⁴⁾, und zum Theile auch O. Funke⁵⁾], oder einer während der Contraction erzeugten Runzelung der sonst glatten

¹⁾ Beiträge II, 1835, S. 71.

²⁾ Mikroskopische Anatomie, 1836.

³⁾ Mandl, Anatom. microsc., 1838.

⁴⁾ Muskelbewegung, in R. Wagner's Handwörterbuch der Physiologie, III. Bd., 2. Abth., S. 3.

⁵⁾ Lehrbuch der Physiologie, Leipzig 1855, S. 515. „Es ist wahrscheinlich,“ sagt er, „dass auch die Hülle quergestreift ist und dass sie sogar primär die Querstreifung zeigt und diese vielleicht in lebenden Muskelfasern nicht einmal existirt.“

Fibrillen [Treviranus¹⁾], oder sie schreiben die Querstreifung der Kräuselung und dem wellenförmigen Verlaufe der Fibrillen zu [Henle²⁾, Reichert³⁾, Holst⁴⁾], oder ihren Zickzackbiegungen [Will⁵⁾].

Der bei weitem grössere Theil hält die Fibrillen für varicos oder gegliedert. Schon Hook⁶⁾ beschreibt sie als perlschnurartige Fäden. Leeuwenhoek⁷⁾ glaubt, dass die *striae carnosae* (Fibrillen) aus aneinandergereihten Kügelchen bestehen, was ihn jedoch nicht abhält, sie manchmal für Runzelungen, ein anderesmal für spiralförmig gewundene Fäden zu erklären. Muys⁸⁾ sah die Fibrillen in der Reihe cylindrisch, bei der Contraction knotig, durch Querfurchen eingeschnürt. Fontana⁹⁾ ist der Meinung, dass die Querstreifen durch auf einander treffende Abtheilungen oder Kügelchen der Fibrillen entstehen. In ähnlicher Weise stellen sich Prevost und Dumas¹⁰⁾, Home und Milne Edwards die Fibrillen vor.

Krause¹¹⁾ ist der erste, welcher ausser den Kügelchen noch eine wasserklare Feuchtigkeit annimmt, welche die Kügelchen in Längsreihen zu Fibrillen zusammenhalten soll. Lauth¹²⁾ und Jordan¹³⁾ sind einer ähnlichen Ansicht. Jacquemin¹⁴⁾ glaubt, dass die ovalen Bläschen, aus welcher die Fibrille zusammengesetzt sein soll, nicht frei, sondern in einem Röhrchen eingeschlossen sind. — Gerber¹⁵⁾ behauptet, dass die Kügelchen in der Ruhe elliptisch, während der Contraction abgeplattet werden, glaubt aber nichtsdestoweniger an wellenförmige Biegungen, so wie an spiralförmige Windungen der Fibrillen.

Schwann¹⁶⁾ beschreibt die Fibrillen als zusammengesetzt aus einer Reihe von dunkleren Kügelchen, welche durch hellere Spatien von einander getrennt werden. Bruns¹⁷⁾ schliesst sich derselben Meinung an und Mayer¹⁸⁾ hält die Kügelchen sowohl der Länge als der Quere nach durch Fäden mit einander verbunden.

Scharpey¹⁹⁾, Carpenter²⁰⁾ und Queckett²¹⁾ betrachten die Fibrille für eine lineare Reihe zusammenhängender kleiner Partikelchen oder Zellen von gleicher Beschaffenheit. Murray Dobie²²⁾ aber für eine Reihe von abwechselnd hellen und dunkeln vierseitigen Körperchen.

1) Vermischte Schriften anatom. und physiol. Inhalts. Göttingen und Bremen 1816 - 1821. 1. Bd., S. 134.

2) Allgemeine Anatomie. Leizig 1811. S. 584.

3) Müller's Archiv. 1847. S. 17.

4) De structura musculorum in genere et annulorum musculis in specie observationes microscop. Dissertat. inauguralis. Dorpat 1846.

5) Müller's Archiv. 1843. S. 353 ff.

6) 1678.

7) Opera omnia s. arcana naturae etc. Lugd. Batav. 1722. T. I. III. IV.

8) Musculorum artificiosa fabrica. Lugd. Batav. 1751.

9) Abhandlung über das Viperngift, das americanische Gift u. s. w. Aus dem Italienischen. Berlin 1787. S. 384.

10) Magendie Journal. III, 1823. S. 303.

11) Handbuch der menschl. Anatomie u. s. w. Hannover 1833. S. 57.

12) L'institut 1834. Nr. 70.

13) Müller's Archiv, 1834. S. 428.

14) Isis, 1835, S. 473.

15) Handbuch der allgemeinen Anatomie des Menschen u. s. w. Bern und Chur 1840. S. 139.

16) Müller's Physiologie, 1837, S. 33.

17) Lehrbuch der allgemeinen Anatomie des Menschen. Braunschweig 1841. S. 306

18) Die Elementarorganisation des Seelenorganes. Bonn 1838. S. 78.

19) Quain's Anatomy. 5. edition. part II. London 1846.

20) Manual of Physiology. London 1846.

21) A practical treatise on the microscope. London 1848.

22) On the minute structure and mode of contraction of voluntary muscular fibre, in Annual of natural history. Febr. 1848.

Wilson¹⁾ glaubt jede Fibrille zusammengesetzt aus zweierlei Zellen, lichten und dunkeln, so angeordnet, dass zwei lichte Zellen zwischen je zwei dunkeln gelagert sind.

Donders²⁾ Beobachtungen zufolge soll die Fibrille aus an einander gereihten Bläschen oder Zellen bestehen, deren jedes ein dem *Sarcous element* entsprechendes kubisches Körperchen enthält.

Kölliker³⁾ hielt Anfangs den contractilen Inhalt des Sarcolemma bloß aus gegliederten, variösen Fibrillen zusammengesetzt, hat aber in neuester Zeit den Fibrillen eine körnige Substanz (interstitielle Körner) beigegeben, welche die Zwischenräume zwischen den Fibrillen ausfüllen soll⁴⁾.

Auch Weleker⁵⁾ nimmt wirklich existirende Fibrillen an, deren Durchschnitte er an Querschnitten der Muskelfasern als Punkte abbildet.

2. Die Spiral- und Ringfasertheorie.

Schon Leeuwenhoek kamen manchmal die Fibrillen wie spiralförmig gewundene Fäden vor, wiewohl sie ihm häufiger wie Reihen von Kügelchen oder Runzelungen erschienen sind. Auch spätere Beobachter haben wohl hie und da ähnliche Erscheinungen gesehen, doch sind besonders Raspail, Mandl, M. Barry und Baumgärtner als die eifrigsten Verfechter dieser Ansicht aufgetreten. Raspail⁶⁾ namentlich hält die Querstreifen für spiralförmige Verdickungen der Zellenwand, und vergleicht dieselben mit den Spiralfasern enthaltenden verlängerten Pflanzenzellen. Mandl⁷⁾ glaubt ebenfalls die Querstreifen durch spiralförmig gewundene Fäden erzeugt. M. Barry⁸⁾ behauptet, die Muskelfaser bestehe in ihren äussersten Elementen aus zwei Schraubenfäden, die sich zur Bildung der Faser mit einander seitlich verflechten und so einen Doppelcylinder mit zwei seitlichen Rimmen darstelle. Nach ihm soll auch das Sarcolemma aus Schraubenfäden entstehen, die aber später in einander verfließen sollen. — Baumgärtner⁹⁾ sieht in den Fibrillen zopfartig verflochtene Fäden.

Skey¹⁰⁾ betrachtet endlich jede Muskelfaser als eine hohle Röhre, um welche die Längsfasern in Bündeln liegen, die wieder durch ringförmige Fäden befestigt sind, wodurch hellere und erhabene Leisten, welche Ursachen der Querstreifung sind, entstehen sollen.

3. Die Scheibentheorie.

W. Bowman¹¹⁾ kann als der erste Begründer dieser Ansicht betrachtet werden. Ihm ist der Inhalt des Sarcolemma eine Substanz, welche die Neigung hat, sowohl nach der

¹⁾ Manuel of Anatomy, 3. edit. S. 16.

²⁾ Onderzoekingen betrekkelijk den bouw van het menschelike hart. Nerdel. Laneett. 3. Ser. 1. Jaarg. S. 556.

³⁾ Mikroskopische Anatomie. II. Bd., 1. Hälfte, S. 200.

⁴⁾ Einige Bemerkungen über die Endigungen der Hautnerven und den Bau der Muskeln, in Zeitschr. für wissensch. Zoologie. Bd. VIII, 3. Hft., S. 316 ff. — Handbuch der Gewebelehre, 3. Aufl., S. 180 ff., Fig. 97.

⁵⁾ Bemerkungen zur Mikrographie, in Zeitschr. für rationelle Med. Bd. VIII, S. 226, Taf. IV, und Canstatt's Jahresb. f. 1857, S. 35.

⁶⁾ Système de chimie organique, 2. edit. Brux. 1839, §. 1569.

⁷⁾ Anatomie microscopique, Paris 1838, p. 14.

⁸⁾ Neue Untersuchungen über die schraubenförmige Beschaffenheit der Elementarfäden der Muskel, nebst Beobachtungen über die muskulöse Natur der Flimmerhärchen, in Müller's Archiv 1850, S. 529 ff., Taf. XVI—XIX.

⁹⁾ Lehrbuch der Physiologie, Stuttgart 1853, S. 43 ff.

¹⁰⁾ Philosophical Transact. 1837, S. 376.

¹¹⁾ On the minute structure and movements of voluntary muscles, in Philosophical Transactions, P. II, 1810; P. I, 1841. — Im Auszuge in Müller's Archiv 1842. — Auch in Physiological Anatomy and Physiology of man, 1845, p. 151.

Länge, als nach der Quere zu zerfallen. Die Fibrillen hält er somit für ein Product des Zerfallens der contractilen Substanz nach der Länge, sowie dieselbe Substanz unter anderen Umständen nach der Quere gespalten in die sogenannten „Fleischscheiben“ (*muscular discs*) zerfällt. Die durch das Zerfallen der Fleischscheiben entstandenen „*Sarcous elements*“ oder „*primitive particles*“ wären daher nach Bowman die eigentlichen Elemente der Fleischsubstanz. Dieser Ansicht zufolge sind also die Fibrillen nichts als linear mit einander zusammenhängende, und die „*discs*“ nichts anderes als flächenhaft neben einander gelagerte cohäerirende *Sarcous elements*.

Auch Remak¹⁾ scheint dieser Ansicht zu sein. Leydig²⁾ modificirte sie bloß dahin, dass er die *Sarcous elements* oder Fleischtheilchen, aus welchen er den contractilen Inhalt des Sarcolemma zusammengesetzt sein lässt, für würfelförmige oder keilförmige Körperchen ansieht und die Querstreifen von den mit halbflüssiger Substanz erfüllten Interstitien herleitet. Seinen späteren Beobachtungen zufolge sollen diese Interstitien ein mit Fluidum erfülltes mit einander communicirendes Lückensystem darstellen, wobei er zugleich die Lücken mit Bindegewebskörperchen vergleicht³⁾.

Aubert⁴⁾ gibt eine ähnliche Beschreibung der Muskeln von Insecten; für die wahren Elemente der Muskelsubstanz hält er kleine würfelförmige oder cylindrische Körperchen, welche sich zu Fibrillen oder Scheiben zusammenlegen.

Weleker⁵⁾, der zwar wirkliche Fibrillen annimmt, sieht die Lücken und Kerne der übrigen Autoren zwischen den Fibrillen als eigenthümliche Muskelkörperchen an, welche er — ähnlich den Bindegewebskörperchen, den Knorpel- und Knochenkörperchen, — mit anastomosirenden Canälen in Verbindung als plasmaführende Gefäße auffassen zu müssen glaubt.

Haeckel⁶⁾ adoptirt hingegen die *Sarcous elements*, und betrachtet die Lücken Leydig's nicht als Zellen oder Zellenrudimente, sondern als wirkliche Lücken oder Spalten zwischen den Fibrillengruppen. Überdies glaubt Letzterer die *Sarcous elements* durch zwei verschiedene Bindemassen mit einander vereinigt, und zwar der Länge nach durch eine in Salzsäure leicht lösliche, in Alkohol und Wasser unlösliche, der Quere nach aber durch eine in Alkohol und Wasser lösliche, durch diluirte Salzsäure unlösliche Substanz.

Munk⁷⁾ betrachtet sowohl das Quer- als Längsbindemittel zwischen den Fleischtheilchen als chemisch identisch und hält diese letzteren für Körperchen von stets gleichbleibender Größe.

Budge⁸⁾, der die Maceration in chlorsaurem Kali und Salpetersäure in Anwendung brachte, schliesst sich ebenfalls der Bowman'schen Ansicht an, und hält somit die *Sarcous elements* für die letzten Formbestandtheile der quergestreiften Muskelfaser.

4. Die optisch-chemische Moleculartheorie.

Die Bowman'sche Ansicht erlitt allmählich durch die neuesten Forschungen wesentliche Modificationen, so dass sie füglich als eine ganz neue Theorie zu betrachten ist. Die

1) Müller's Archiv, 1843, S. 187.

2) Lehrbuch der Histologie des Menschen und der Thiere, 1857, S. 41, und in Müller's Archiv, 1855, S. 50.

3) Über Tastkörperchen und Muskelstructur, in Müller's Archiv, 1856, und in Canstatt's Jahrb. für 1856, S. 28 ff.

4) Zeitschr. für wiss. Zoologie, Bd. IV, 1853, S. 39.

5) Bemerkungen zur Mikrographie, in Zeitschr. f. rationelle Medicin, Bd. VIII, S. 226.

6) Über die Gewebe des Flusskrebses, in Müller's Archiv, 1857, S. 486. — Auch in Canstatt's Jahrb. für 1857, S. 36.

7) Götting. Nachrichten, 1858, Februar.

8) Archiv für physiol. Heilkunde, 11. Bd., 1858, 1. Hft., S. 72.

contractile Substanz besteht dieser Ansicht zufolge aus zwei physicalisch, optisch und chemisch ganz verschiedenen Theilen, von denen der eine geformt, der andere aber homogen ist.

Schon Wharton Jones unterscheidet in dem Inhalte des Sarcolemma eine sogenannte Haupts substanz und eine Zwischensubstanz (*substance intermédiaire*).

Auch Harting¹⁾ spricht von einer hellen Verbindungssubstanz zwischen den *Sarcous elements*, nach deren Auflösung durch Salzsäure, Magensaft und beginnende Fäulniss die Bowman'schen *discs* auftreten sollen, ohne jedoch näheren Aufschluss über die wahre Natur dieser zwei Substanzen zu geben.

A. Rollet²⁾, der uns die Methode lehrte durch Behandlung der Muskelfasern mit verdünnter Salzsäure (1 per 1000, 24 Stunden lang) nach Belieben sowohl mit einander noch zusammenhängende, wie auch ganz isolirte Muskelscheiben oder *discs* zu erhalten, nimmt an, dass die Fibrille aus einer linearen Reihe zweierlei Substanzen von verschiedener optischen und chemischen Eigenschaft besteht, von denen durch Maceration und chemische Agentien die eine dickere und stärker lichtbrechende sich in der Gestalt kleiner prismatischer Stückchen (Fleischprismen, oder *Sarcous elements*) gewinnen lasse, während die andere, dünnere und schwächer lichtbrechende (Zwischensubstanz) vollkommen aufgelöst wird.

E. Brücke's³⁾ Untersuchungen mit Hülfe des polarisirten Lichtes verbreiten ein noch helleres Licht über das Verhältniss dieser zweierlei Substanzen. Er machte nämlich die eben so wichtige als interessante Entdeckung, dass von den zwei Substanzen, deren abwechselnde Lagerung der Muskelfaser das quergestreifte Ansehen verleiht, nur die eine und zwar die stärker lichtbrechende doppeltbrechend ist, die andere aber nicht. Jedes einzelne Fleischprisma oder *Sarcous elements* bricht das Licht doppelt, und ist als ein anisotroper, positiv einaxiger Krystall zu betrachten, dessen Axe der Faserrichtung parallel ist, die Zwischensubstanz aber ist isotrop. Aus der verschiedenen Form und Grösse der *Sarcous elements* an ein und derselben Muskelfaser schliesst ferner Brücke mit seltenem Scharfsinn, dass die *Sarcous elements* nicht selbst feste, doppelt brechende Körper von constanter Grösse und Gestalt sind, sondern dass sie durch Gruppierung kleiner, fester, doppeltbrechender Körperchen von unveränderlicher Grösse und Gestalt gebildet werden, welche er „Disdiaklasten“ (Doppelbrecher) nennt.

Endlich statuirt Berlin⁴⁾ einen flüssigen Inhalt des Sarcolemma, in welchem die Querstreifen durch Querreihen von Körnchen entstehen sollen, die an der Oberfläche liegen. Die von Anderen beschriebenen Formelemente des contractilen Inhalts, wie die Fibrillen, die Schraubenfäden, die Fleischscheiben und die *Sarcous elements* sollen seiner Ansicht nach nichts anderes sein als Producte der verschiedenen Präparationsmethoden oder der Gerinnung nach dem Tode des ursprünglich flüssigen Muskelinhaltes.

Nach Aufzählung dieser verschiedenen Ansichten über den feineren Bau der quergestreiften Muskelfaser, erlaube ich mir zunächst dieselben nach dem Massstabe meiner auf

¹⁾ Het Mikroskoop. IV. 1854. p. 271 ff.

²⁾ Untersuchungen zur näheren Kenntniss des Baues der quergestreiften Muskelfaser, angestellt im physiol. Institute der Wiener Universität, mit I Tafel, in den Sitzb. der mathem.-naturw. Classe der kais. Akademie der Wissenschaften. Bd. XXIV, S. 291.

³⁾ Untersuchungen über den Bau der Muskelfasern mit Hülfe des polarisirten Lichtes. Mit II Tafeln. Aus dem XV. Bde. der Denkschriften der mathem.-naturw. Classe der kais. Akademie der Wissenschaften.

⁴⁾ Über die quergestreifte Muskelfaser, in Archiv für Holland. Beiträge zur Natur- und Heilkunde von Donders und Berlin. Bd. I. Heft 5. Utrecht 1858. S. 417 ff.

diesem Gebiete gemachten Erfahrung einer Kritik zu unterwerfen, worauf ich erst auf die Einzelheiten meiner Beobachtungen übergehen werde.

Was zuerst die Fibrillentheorie anbelangt, so wird wohl Niemandem einfallen, die Fibrillen bei manchen todtstarrten Muskelfasern zu läugnen, doch wird jeder Unbefangene zugeben müssen, dass dieselben eine allgemeine Erscheinung nicht sind. Denn nicht allein gibt es Thiere, ja ganze Thierreihen, bei welchen von einer Fibrillenform in der Muskelsubstanz durchaus keine Rede sein kann, sondern auch bei einem und demselben Thiere kommen oft Muskeln vor, wo keine Spur von Fibrillen vorhanden ist, während sie in anderen Muskeln wahrgenommen werden. Überhaupt aber lassen sich die Fibrillen auf die organischen Muskeln höherer Thiere nicht anwenden. Es ist auch nicht abzusehen, wie bei der gleichen Function¹⁾ aller dieser contractilen Elemente, die Fibrillen bei Letzteren fehlen können. Und wie lassen sich die Beobachtungen Bowman's, Brücke's, Rollet's, Leydig's, Aubert's und Anderer, so wie die von mir gemachten Beobachtungen über die Genese der contractilen Substanz mit der Fibrillentheorie in Einklang bringen? — Wenn die Muskelfaser wirklich aus Elementarfasern oder Fibrillen besteht, warum gelingt durch Maceration in Salzsäure (1 per 1000), so wie durch andere Agentien so leicht die Sonderung derselben in Scheiben, oder in *Sarcous elements*, und warum zerfallen bei vielen Thieren die Muskelfasern auch ohne Reagentien nicht so leicht in Fibrillen, wie in grössern oder kleinern Fleischportionen und *Sarcous elements*. Und endlich, wie lassen sich die merkwürdigen Formen der contractilen Elemente niederer Thiere, der Pteropoden und Heteropoden [Gegenbauer²⁾], der Helminthen [G. Walther³⁾], der Hydern [Leydig⁴⁾], der Scheibenquallen [M. Schultze⁵⁾] u. s. w. durch die Fibrillentheorie erklären? — Auf alle diese Fragen kann uns obige Hypothese keine befriedigende Antwort geben. Aber auch abgesehen hievon, findet diese Theorie in den von Dubois-Reymond entdeckten vitalen Erscheinungen der Muskeln überdies einen sehr gewichtigen Gegner. Das Unbefriedigende dieser Ansicht mögen wohl die meisten Verfechter derselben gefühlt haben.

Wie steht es nun mit der Spiralfasertheorie? Die Gründe, auf welche die Annahme eines solchen Baues der Muskelfaser gestützt wird, scheinen mir noch weniger stichhaltig als die Fibrillentheorie. Fürs Erste ist das Vorkommen solcher Bilder, welche eine Ähnlichkeit mit schraubenförmig gewundenen Fäden haben, äusserst selten, und sie finden ihre Erklärung theils in der Verwechslung derselben mit Bindegewebsfibrillen der Scheide, oder mit Tracheen, wie dies wahrscheinlich bei Raspail's und Mandl's Bildern der Fall sein dürfte, oder in der seitlichen Verschiebung der *Sarcous elements* durch Druck, Maceration und die vorausgegangene Präparationsweise. Dass übrigens manchmal die Muskelfasern wie aus spiralförmig gewundenen Fäden zu bestehen scheinen, ist wohl nicht zu läugnen. Ausgezeichnete Beobachter, wie Henle⁶⁾, Gerber⁷⁾, haben mitunter solche Bilder gesehen, und ich selbst habe in manchen Präparaten von Säugethier- und Vogelmuskeln eine täuschende

1) Helmholtz hat in neuester Zeit erwiesen, dass der zeitliche Verlauf der Zusammenziehung der animalen Muskeln dem der organischen völlig analog sei. (Müller's Archiv 1850.)

2) Zeitschrift für wissenschaftl. Zoologie. Bd. IV, Hft. 3 und 4.

3) Zeitschrift für wissenschaftl. Zoologie. Bd. VIII, S. 163.

4) Lehrbuch der Histologie u. s. w., 1857, S. 136.

5) Über den Bau der Gallertscheibe der Medusen, in Müller's Archiv 1856, S. 311.

6) Allgemeine Anatomie, 1841, S. 584.

7) Allgemeine Anatomie, 1840, S. 139, Taf. IV, Fig. 79.

Ähnlichkeit der Muskelfasern mit Spiralfäden gefunden, doch überzeugte ich mich bald, dass die Erscheinung durch eine der oben angedeuteten Ursachen erzeugt war. Dass aber die Spiralfasern nicht allgemein vorkommen, sondern vielmehr eine sehr seltene, zumeist durch äussere Ursachen hervorgerufene Erscheinung sind, und im Frosehherzen auch nicht so leicht zum Vorschein kommen, wie dies M. Barry¹⁾ behauptet, darüber herrscht wohl heute kein Zweifel mehr. Übrigens hat Barry auch die Flimmerhärechen für doppelte Schraubenfäden angesehen, so dass Bowman²⁾ wohl seine triftigen Gründe hatte, jene satyrische Bemerkung zu machen, „Dr. Barry hätte seiner Abhandlung eben so gut die Aufschrift geben können: Über die schraubenförmige Structur der organischen Welt.“

Die Scheibentheorie Bowman's betreffend, muss ich gestehen, dass dieselbe, so wie sie ursprünglich von ihm aufgestellt wurde, mich eben so wenig befriedigt, wie die vorher erwähnten Ansichten, doch gebührt wohl Bowman das Verdienst, der Erste gewesen zu sein, der den allgemein gehuldigten Glauben an präformirte Fibrillen wankend gemacht und somit eine neue Bahn für die weiteren Untersuchungen der Muskelfaser eröffnet hat. Dass die contractile Substanz nicht allein aus *Sarcous elements* bestehe, haben eben diese neueren Untersuchungen ergeben. Aus dieser Ursache trete ich auch jener Ansicht nicht vollkommen bei, die im Muskelinhalte nur *Sarcous elements* von bestimmter würfel-, keilförmigen oder cylindrischen Gestalt annimmt. (Leydig, Aubert, Budge.)

Was endlich jenes Lückensystem anbelangt, welches Leydig in den Interstitien zwischen den Fleischtheilchen mit Flüssigkeit angefüllt statuirt, und mit welchem er die Wissenschaft zu bereichern glaubte, so haben sich schon Henle, Kölliker, Rollet, Haeckel, Berlin dagegen ausgesprochen. Bloss Weleker hat neuerer Zeit etwas diesem Ähnliches angenommen, indem er in der contractilen Substanz der Muskelfaser sogenannte „Muskelkörperchen“, ähnlich den Bindegewebskörperchen, beschreibt und abbildet. Diese sollen nach ihm mit Ausläufern nach Art der Bindegewebskörperchen, der Knorpel- oder Knochenkörperchen mit einander communiciren und im frischen lebenden Muskel plasmaführende Gefässe darstellend eine serumartige Flüssigkeit führen³⁾. Es ist, wie Henle⁴⁾ ganz richtig bemerkt, kein Grund vorhanden eine Structur, die in der Knochen- und Zahnschubstanz als zweckmässig anerkannt ist, auch innerhalb der Muskelschubstanz voranzusetzen; da die verkalkte thierische Materie starr und unquellbar ist, so bedarf der Nahrungssaft gebahnte Wege, um mit ihr in allen ihren Theilen in Berührung zu kommen; was aber, fragt Henle weiter, soll ein plasmatisches Röhrensystem einem Stoffe, der sich in compacten Massen von der Oberfläche aus mit Flüssigkeit leicht tränken kann. Aber abgesehen vom Principe der Zweckmässigkeit, frage ich, warum kommen diese Lücken oder plasmatischen Gefässe mit den sogenannten Muskelkörperchen nicht an allen Muskelfasern zum Vorschein, sondern so häufig nur an vorher getrockneten oder durch Alkohol entwässerten und dann wieder in Wasser aufgeweichten Schnitten? — Warum entstehen ähnliche gezackte Hohlräume, die mit Canälen zu communiciren scheinen, an fast allen durch Evaporation vertrocknenden Präparaten, oder verändern ihre Gestalt durch Einwirkung von Reagentien: Essigsäure, Salzsäure u. s.w.? —

¹⁾ Müller's Archiv, 1850.

²⁾ Cyclopaedia of Anatomy and Physiology. Art. Muscle, pag. 511.

³⁾ Bemerkungen zur Mikrographie, in Zeitschrift für rat. Medicin. Bd. VIII, S. 226. Taf. IV.

⁴⁾ Zeitschrift für rat. Medicin, 1857. Jahresbericht, S. 37.

Lauter Fragen, auf welche man frei von vorgefasster Meinung leicht die richtige Antwort findet. Was mich betrifft, so habe ich an Querschnitten der Muskelfasern die Hohlräume Leydig's oder die Muskelkörperchen Welker's oft gesehen, aber ich betrachte sie entweder als Kunstproducte und Lücken, — welche theils durch das Eintrocknen, theils aber durch das Auseinanderweichen der anschwellenden und sich umstülpenden Enden der Muskelfaserdurchschnitte entstehen, — oder als Kerne in der contractilen Substanz. Das Eindringen der rothen Tinte in die Spalten oder Hohlräume kann durchaus nicht als Beleg für die Existenz von Muskelkörperchen angeführt werden, denn jede Flüssigkeit wird eben so leicht, wenn nicht leichter noch, in die künstlich erzeugten Zwischenräume und Spalten zwischen der contractilen Substanz eindringen, als in ein wahres mit Wandungen versehenes Zellennetz.

Mithin bleibt nur die optisch-chemische Moleculartheorie als diejenige, welche das verschiedene Verhalten und Aussehen der contractilen Elemente bei verschiedenen Thieren nicht nur am einfachsten zu erklären im Stande ist, sondern auch mit meinen über die Entwicklung und den feinern Bau der Muskelfaser gemachten Beobachtungen vollkommen übereinstimmt, und überdies auch für die Physiologie verwerthbar ist.

Die Resultate meiner Beobachtungen über die Genese der Muskelfasern sprechen entschieden gegen die Präexistenz der Muskelfibrillen. Thatsache ist es dagegen, dass die *Sarcous elements* (Fleischprismen oder Fleischkörnchen) als ein Product der Differenzirung aus dem Inhalte eigenthümlicher Zellen, — der von mir genannten Sarcoplasten — entstehen. An diesen erkennt man ganz deutlich die Querstreifen, erzeugt durch die regelmässige Lagerung der doppeltbrechenden Fleischkörnchen in einem sonst homogenem, einfach lichtbrechenden Inhalte. Von Fasern oder Fibrillen, sowohl geraden, variösen, als spiralig gewundenen ist innerhalb der Sarcoplasten keine Spur vorhanden. Diese Thatsachen wurden nicht nur an Fröschen, Fischen, Vögeln, Säugern und Menschen, sondern auch an Crustaceen und Insecten nachgewiesen. Die Resultate dieser Beobachtungen stimmen sowohl mit Brücke's Theorie als mit Dubois-Reymond's Gesetzen vollkommen überein, wie sich denn auch alle meine Beobachtungen über die Structur der Muskelfasern zur Annahme dieser Theorie vereinen.

a) Über den contractilen Inhalt der quergestreiften Muskelfaser.

Wenn man nach der Eingangs angegebenen Methode quergestreifte Muskelfasern von verschiedenen Thieren untersucht, so bemerkt man innerhalb des Sarcolemma die contractile Substanz aus zweierlei deutlich zu unterscheidenden Bestandtheilen zusammengesetzt, nämlich aus den geformten *Sarcous elements* und der homogenen Grundsubstanz, in welcher erstere eingebettet sind. Die Grundsubstanz ist ganz farblos und wenig lichtbrechend, die *Sarcous elements* hingegen gelblich gefärbt und stark glänzend. Überdies sind die Letzteren, wie Brücke zuerst nachgewiesen hat, doppelt lichtbrechend, während Erstere das Licht nur einfach bricht.

Die Grösse und die Gestalt der *Sarcous elements* ist nicht nur bei verschiedenen Thieren, sondern auch bei ein und demselben Muskel eines Thieres verschieden, ja es können dieselben mitunter innerhalb einer Muskelfaser in dieser Beziehung differiren. Die Gestalt kann eine kugelige, ellipsoidische, cylindrische oder prismatische sein. Aus der Verschiedenheit der Form und Grösse der *Sarcous elements* folgt jedoch von selbst, dass dieselben, wie Brücke

ganz richtig annimmt, nicht selbst feste oder bläschenartige Körperchen von constanter Grösse und Gestalt sein können (was Munk¹⁾ in neuester Zeit irrtümlich behauptet), sondern dass sie nur durch Gruppierung sehr kleiner, fester, doppeltbrechender Körperchen von unveränderlicher Gestalt und Grösse — der sogenannten Disdiaklasten — gebildet werden. Ihre Lagerung in der homogenen Grundsubstanz ist eine derartige, dass sie in gewissen Abständen, die sehr variiren können, sowohl nach der Länge als nach der Quere der Muskelfaser neben und über einander gelagert, durch ihre regelmässige Anordnung die Querstreifung erzeugen.

Von der Richtigkeit dieser Erscheinung überzeugt man sich leicht, wenn man deutlich quergestreifte Muskelfasern bei 525—936maliger Vergrösserung betrachtet.

Auf Taf. IV, Fig. 30 ist eine den Rückenmuskeln eines Froschjungen entnommene Muskelfaser 936 Mal vergrössert ganz naturgetreu abgebildet. Die contractile Substanz (*c*) besteht aus cylindrischen oder ellipsoidischen Fleischkörnchen, die in der homogenen Grundsubstanz regelmässig gelagert erscheinen. Übrigens sind die Reihen der Fleischkörnchen etwas verschoben, und gegen das Ende der Muskelfaser, wo dieselben etwas kleiner sind, bemerkt man diese wie in sehr kleine punktförmige lichte Körperchen zerfallen (wahrscheinlich Disdiaklasten). Die der Länge nach verlaufenden, mit einander nicht correspondirenden dunklen Streifen werden offenbar durch den Lichtreflex erzeugt und sind als die Grenzlinien zwischen den mit einander verschmolzenen Sarcoplasten zu betrachten.

Figur 31 gibt die Abbildung einiger Muskelfaserstücke aus der hinteren Extremität einer Froschlarve, bei 936maliger Vergrösserung. Die kugelrunden Fleischkörnchen erscheinen bei der Längsansicht stets als Querreihen in der stark lichtbrechenden Schicht eingelagert (*a, a*). An einzelnen Stellen bemerkt man aus ihrer Gleichgewichtslage gebrachte Fleischkörnchen (*b, b*), wodurch die Querreihen derselben verschoben oder unterbrochen werden.

Bei veränderter Einstellung des Mikroskoprohres erscheinen immer andere Querreihen von *Sarcous elements* im Focus, wobei dieselben länger oder kürzer werden, je nach der verschieden hohen oder tiefen Einstellung. Senkt man das Mikroskoprohr allmählich von der höchsten bis zur mittleren Einstellung, so nimmt die Länge jeder einzelnen Querreihe zu, in dem Masse aber als man das Mikroskoprohr von der mittleren bis zur tiefsten Einstellung herabsenkt, werden auch die Querreihen wieder kürzer. Daraus lässt sich nun schliessen, dass die *Sarcous elements* oder Fleischkörnchen nicht etwa bloß an der Oberfläche in einfachen Reihen sich befinden, wie dies Berlin in neuester Zeit irrig behauptet²⁾, sondern die ganze Breite des Querschnittes einnehmen. Bei hoher Einstellung des Mikroskopes erscheinen die kleinsten Segmente der doppelt lichtbrechenden Querschichten, in welchen die Fleischkörnchen liegen, als kürzere Querreihen; je mehr das Rohr gesenkt wird, desto grössere Segmente rücken auch in den Focus, so dass bei mittlerer Einstellung die Querreihen das Maximum ihrer Länge erreichen und so dem Durchmesser der Muskelfaser gleich werden; bei noch tieferer Einstellung nimmt die Länge derselben wieder in dem Masse ab, als die unteren kleineren Segmente dadurch in den Focus gelangen. Bei starker Vergrösserung (525 Mal) kann man sich leicht von der Richtigkeit dieser Auffassung überzeugen.

Figur 29 stellt bei 936maliger Vergrösserung Stücke von Muskelfasern dar aus dem Kiefernmuskel eines erwachsenen Flusskrebse. Man sieht dieselbe regelmässige Anordnung

¹⁾ H. Munk, in Gött. Nachr. 1858, Febr.

²⁾ Archiv f. Holland. Beiträge zur Natur- und Heilkunde. Utrecht. Bd. I. Hft. 5, S. 445.

der *Sarcous elements*, nur sind diese viel grösser als die der übrigen Thiere und haben die Gestalt von Cylindern oder Prismen. Bei *b* bemerkt man einzelne Prismen, welche durch die Präparation ihre ursprüngliche Gleichgewichtslage verloren haben.

Die Untersuchung des contractilen Inhaltes an Querschnitten unterliegt manchen Schwierigkeiten, deren vorzüglichste Ursachen ich hier näher angeben werde: 1. als eine der wichtigsten scheint jenes durch E. Brücke¹⁾ entdeckte Verhalten der Fleischprismen zu sein, wonach die senkrecht zur Axe durchschnittenen Fleischprismen, bei denen die Axe in der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes liegt, keinerlei Spuren von doppelter Brechung zeigen, indem diese Axe auch zugleich die optische Axe ist. Dadurch nun, dass die Fleischprismen in Querschnitten ihre eigenthümliche lichtbrechende Eigenschaft, die sie so sehr auszeichnet, verlieren, scheint auch die Unterscheidung derselben von der homogenen einfach lichtbrechenden Grundsubstanz, worin sie eingebettet sind, viel schwieriger; 2. eine weitere Schwierigkeit ergibt sich aus jenen Veränderungen, welche die contractile Substanz theils durch das Eintrocknen, theils aber durch das nachherige Anfeuchten erleiden muss, wodurch Risse, Spalten oder Klüftungen entstehen können, welche durch ihren Lichtreflex und die gezackten Ränder, besonders wenn sie mit einer mit der contractilen Substanz sich nicht mischenden Flüssigkeit erfüllt sind, das täuschende Bild von Bindegewebskörperchen geben; 3. eine weitere Ursache liegt darin, dass viele Schnitte nicht senkrecht zur Axe der Muskelfasern ausfallen, manche derselben auch zu dünn oder zu dick sind, als dass man daraus die wahre Structur der Muskelfaser erkennen könnte; 4. endlich müssen wohl auch alle jene Formen gewürdigt werden, welche durch die mechanischen Eingriffe des Messers entstehen, wodurch namentlich die Fleischprismen leicht aus ihrer regelmässigen Lage gebracht, verschoben, gequetscht oder zerdrückt werden können. Diese dem mechanischen Eingriffe des Messers zuzuschreibenden Wirkungen müssen überdies verschieden sein, je nachdem das Messer die stark oder die schwach lichtbrechende Schicht getroffen hat.

Die hier angegebenen Schwierigkeiten mögen wohl die Ursachen sein, dass bei einem Theile der Histologen in Bezug auf die Deutung der Querschnitte von Muskelfasern eine so grosse Meinungsverschiedenheit herrscht. Diesem Umstande ist es zu verdanken, dass von einigen Forschern histologische Elemente in die Anatomie der Muskelfasern eingeführt wurden, die als solche durchaus nicht existiren. Dem Unbefangenen wird es bei gehöriger Berücksichtigung obiger Momente nicht schwer sein das Richtige zu erfassen.

Hat man eine grosse Anzahl von Muskelquerschnitten, die man sich auf die bekannte Weise bereitet, genau studirt, so kommt man zu der Überzeugung, dass wohl die wenigsten Durchschnitte von Muskelfasern, die in einem und demselben Präparate enthalten sind, den Inhalt des Sarcolemma ganz unversehrt und in der natürlichen Lagerung zeigen. Überdies lassen sich von manchen Thieren viel leichter ganz gelungene Querschnitte gewinnen, als von den anderen. Bei Vögeln gelingen sie leichter als bei den Säugern, und bei diesen überhaupt leichter als bei Fröschen. Zwischen den Insecten kann ich die sehr muskulösen Springfüsse der Heuschrecken als sehr geeignete Objecte zu Querschnitten empfehlen. Die Ursache, warum die Querschnitte von Froschmuskeln eine grössere Anzahl von Kunstproducten zeigen, scheint zum Theil in der geringeren Festigkeit und Dichte des Froschfleisches, zum

¹⁾ Untersuchungen über den Bau der Muskelfasern mit Hilfe des polarisirten Lichtes. Mit II Tafeln. In dem XV. Bde. der Denkschriften der mathem.-naturw. Classe der k. Akademie der Wissenschaften.

Theil in der geringeren Anzahl der *Sarcous elements* im Verhältniss zur Grundsubstanz zu liegen.

An einem ganz gelungenen Querschnitte vom getrockneten Schenkel eines 18tägigen Hühnerembryos, der auf Taf. V, Fig. 36 abgebildet ist, habe ich die einzelnen Muskelfasern bereits vollkommen gebildet gefunden. Bei 360maliger Vergrösserung konnte ich innerhalb des Sarcolemma die kleinen Fleischkörnchen dicht neben einander gelagert wahrnehmen, bei stärkerer Vergrösserung war auch eine geringe Menge homogener Zwischensubstanz zwischen den einzelnen Fleischkörnchen zu unterscheiden. Von Kernen innerhalb der contractilen Substanz oder anderen ähnlichen Gebilden konnte man nicht die geringsten Spuren sehen.

Der in der Figur 35 gegebene Querschnitt aus dem Gastrocnemius eines Schweinsfötus ist in histogenetischer Beziehung sehr instructiv und wurde bereits im I. Abschnitte dieser Abhandlung näher erörtert. Man bemerkt hier vom Sarcolemma rings umschlossene, noch embryonale Muskelfasern; die contractile Substanz besteht aus Sarcoplasten, die, gegen die Peripherie der Muskelfaser gelagert, noch immer mit einander nicht verschmolzen sind. Längs der Axe sind die mit Blastem gefüllten Lücken sichtbar. Einzelne Sarcoplasten (*B, k, k*), zeigen im Querschnitte längs der Peripherie die Fleischkörnchen, während in der Mitte noch homogener Inhalt (in der Zeichnung als dunkle centrale Schattirung) zu bemerken ist. Andere Sarcoplasten enthalten vollkommen differenzirten Inhalt, bestehend aus dicht neben einander gelagerten kleinen Fleischkörnchen von homogener Grundsubstanz umgeben. Die Zwischenräume zwischen den einzelnen, noch getrennten Sarcoplasten erscheinen hie und da als gezacktrandige Lücken, die aber mit Bindegewebskörperchen wohl nicht leicht zu verwechseln sind.

Auf welche Art ähnliche gezackte Lücken zwischen den einzelnen Sarcoplasten bei noch embryonalen Muskelfasern und nach vorausgegangener Austrocknung des Muskels ein mit einander communicirendes Zellennetz täuschend nachahmen können, zeigt Figur 40, die den Querschnitt aus dem Schwanzstrecker eines jungen Flusskrebsses darstellt. Einzelne Muskelfasern (*d, d*) bestehen aus grossentheils verschmolzenen Sarcoplasten mit ziemlich deutlich wahrnehmbaren *Sarcous elements*.

An Querschnitten, die ich mir aus dem getrockneten Hinterschenkel einer erwachsenen Feldheuschrecke (*Acridium stridulum*) bereitete, war in der vom Sarcolemma rings umschlossenen contractilen Masse nichts anderes zu sehen als eine homogene Grundsubstanz und in dieser in regelmässig concentrischen oder wellenförmigen Linien kleine Fleischkörnchen neben einander gelagert (Taf. V, Fig. 39).

Was die Querschnitte von *M. gastrocnemius* des Frosches anlangt, so überzeugte ich mich bald, dass, wenn der Schnitt auch vollkommen senkrecht zur Längsaxe des Muskels geführt wird, die von der polygonalen Umrahmung des Sarcolemma eingefassten Flächen dennoch ein sehr verschiedenes Aussehen darbieten. Als Ursachen dieser Verschiedenheit können folgende Momente in Erwägung gezogen werden. Erstens, ob der Schnitt durch die stark lichtbrechende oder durch die schwach lichtbrechende Schicht gegangen ist; im ersteren Falle werden die Fleischkörnchen durch den mechanischen Eingriff des Messers mehr leiden müssen, als im letzteren; zweitens, ob der Schnitt nicht zu dünn oder zu dick ausgefallen ist und die Muskelsubstanz durch das Trocknen mehr oder weniger verändert wurde, und endlich drittens, ob nicht einige Muskelfasern zwischen den übrigen noch in der Bildung oder im Wachsthum begriffen waren.

Im Folgenden werde ich versuchen alle jene verschiedenen Bilder, die oft an einem Präparate vorkommen, hier etwas genauer zu beschreiben.

1. Die einen zeigen innerhalb des Sarcolemma eine vollkommen durchsichtige homogene Masse. Es sind dies die sehr dünnen, blos die einfach lichtbrechende homogene Zwischensubstanz enthaltenden Querschnitte.

2. Bei Anderen liegen in der vorwiegenden homogenen Masse wenige, wie eingestreute, lichte, runde Körnchen. Diese scheinen dadurch erzeugt, dass das Messer nahe der stark lichtbrechenden Querschicht hindurch ging und dadurch einige lichte Fleischkörnchen auf die Oberfläche des Schnittes zerstreut wurden. Ähnliche Querschnitte haben Leydig veranlasst die Fleischkörnchen irrthümlich für canalartige Räume zwischen der contractilen Substanz auszulegen¹⁾.

3. Andere wieder zeigen innerhalb der polygonalen Umfassung des Sarcolemma eine grosse Anzahl runder lichter Körnchen in der homogenen Masse eingelagert, ohne irgend einer Spur von Spalten oder Lücken und ohne Kerne. Die lichten kleinen Körnchen sind nichts anderes als Fleischkörnchen oder *Sarcous elements*, die in der homogenen Grundsubstanz in mehr minder regelmässig laufenden concentrischen Reihen eingebettet liegen. Diese Querschnitte beziehen sich offenbar auf die doppelt lichtbrechende Querschicht der Muskelfaser und können allein für massgebend zur Beurtheilung der eigenthümlichen inneren Anordnung der Fleischkörnchen in der doppelt lichtbrechenden Schicht betrachtet werden.

4. An vielen Durchschnitten bemerkt man überdies rundlich-ovale bläschenartige Kerne zwischen den *Sarcous elements*, die nach Zusatz von Essigsäure noch mehr zum Vorschein kommen. Es sind dies nichts anderes als die ursprünglich den Sarcoplasten zugehörigen Kerne, welche nach völliger Verschmelzung der Ersteren zu einer continuirlichen Muskelsubstanz, in dieser als kernartige Gebilde zurückbleiben.

5. Ausserdies bemerkt man häufig noch solche Querschnitte, bei welchen innerhalb der mit Fleischkörnchen versehenen contractilen Masse verschiedene durch die Präparationsweise entstandene Kunstproducte vorkommen, deren Gestalt, Aussehen und Bedeutung eine verschiedene sein kann. Einige von diesen haben gezackte unregelmässige Ränder, oder sehen wie spindelförmige, an beiden Enden zugespitzte Körperchen aus, und sind ohne Zweifel nichts anderes als Lücken oder Spalten in der durch das Austrocknen zerklüfteten Muskelsubstanz; sie scheinen manchmal mit einander zu communiciren und können, besonders wenn sie mit Flüssigkeit erfüllt sind, leicht für Bindegewebskörperchen oder sogenannte Muskelkörperchen (Welcker) gehalten werden. Andere von diesen Kunstproducten unterscheiden sich von den ersteren dadurch, dass sie mehr abgerundete, wiewohl nicht ganz regelmässige Contouren und starken Glanz besitzen; diese sind, wie ich mich an unzähligen Präparaten überzeugte, nichts anderes, als einzelne oder mehrere mit einander noch zusammenhängende Fleischkörnchen, die mit dem Messer aus ihrer Lage gebracht und dabei gedrückt oder auch zerquetscht wurden.

6. Waren zwischen den übrigen Muskelfasern einzelne noch in der Bildung begriffene, so können diese an Querschnitten innerhalb des Sarcolemma die rundlichen Contouren der mit einander noch nicht völlig verschmolzenen,

1) Über Tastkörperchen und Muskelstructur, in Müller's Archiv, 1836, S. 157, Taf. V, B. 2.

oder auch ganz getrennten Sarcoplasten darbieten (vergl. Fig. 35 und Fig. 40). Diese könnten ebenfalls, besonders wenn sie vereinzelt vorkommen, leicht als Bindegewebskörperchen angesehen werden. Ähnliche Bilder fanden sich sehr häufig an solchen Präparaten, welche vom *M. gastrocnemius* ganz junger Frösche bereitet wurden.

Auf Taf. V, Fig. 38 ist ein Querschnitt aus dem *M. gastrocnemius* eines erwachsenen Frosches abgebildet bei 360maliger Vergrößerung. Aus diesem Bilde ist ersichtlich, wie verschieden die einzelnen Durchschnitte der Muskelfasern sind. Man sieht darin polygonale vom Sarcolemma begrenzte Flächen, in welchen die contractile Substanz ein verschiedenes Aussehen zeigt. Die Einen (*b*) zeigen die Fleischkörnchen in regelmässiger Anordnung neben einander in der homogenen Grundsubstanz eingelagert; die Reihen derselben liegen fast concentrisch; einige Fleischkörnchen scheinen über dem Niveau der übrigen zu liegen und besitzen einen grösseren Glanz, was sich wohl daraus erklären lässt, dass dieselben ihre Lagerung verändert haben und dadurch ihre optischen Axen nicht mehr in der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes liegen, wie dies bei den übrigen noch der Fall ist. Andere (*c*) lassen ausser den zerstreuten Fleischkörnchen in der contractilen Substanz theils künstlich entstandene Spalten und Risse, theils mit dem Messer zerdrückte Fleischkörnchen, aber auch einige wirkliche Kerne erkennen. Die übrigen Querschnitte (*d*) enthalten meist längliche, an beiden Enden zugespitzte, durch den Lichtreflex dunkel erscheinende Spalten und Risse, die leicht für Bindegewebskörperchen gehalten werden könnten.

In Figur 37 ist der Querschnitt eines getrockneten *M. plantaris* des Menschen, ebenfalls bei 360maliger Vergrößerung dargestellt. Zwei Muskelfaserdurchschnitte (*b, b*) enthalten regelmässig concentrisch neben einander gelagerte runde Fleischkörnchen oder *Sarcous elements*. Andere Durchschnitte (*c, c*) zeigen eine geringere Anzahl von Fleischkörnchen und diese liegen ohne besonderer Ordnung in der homogenen Grundsubstanz zerstreut. An dem Einen sieht man künstlich zerstreute Risse und Spalten, theils am Rande, theils im Innern desselben (*d*). Endlich bemerkt man auch solche Durchschnitte (*f, f*), die nebst regelmässiger Anordnung der meisten Fleischkörnchen, einige mit dem Messer verschobene und zerdrückte enthalten.

Ich glaube somit genügende Belege geliefert zu haben, sowohl gegen die Existenz von Bindegewebskörperchen oder sogenannten Muskelkörperchen, als auch gegen die plasmatischen Canäle innerhalb der contractilen Substanz. Alle jene Bilder, die für Bindegewebskörperchen u. s. w. von Einigen gehalten werden, reduciren sich entweder auf Spalten und Risse in der contractilen Substanz, oder auf zerdrückte *Sarcous elements*, oder endlich auf Sarcoplasten und Kerne derselben.

Aus diesem Grunde kann ich daher weder Leydig noch Kölliker beipflichten. Letzterer hält den contractilen Inhalt des Sarcolemma zusammengesetzt aus Fibrillen und aus den interstitiellen Körnern. Dass erstere nicht existiren ist oben bereits nachgewiesen; was jedoch die interstitiellen Körner betrifft, welche Kölliker (in Zeitschr. für wiss. Zool., Bd. VIII, Taf. XIV, Fig. 3, und Handbuch der Gewebelehre, 3. Aufl., S. 181, Fig. 97) abbildet und die bereits Henle¹⁾ beobachtet hat, so werden wohl erst fernere Untersuchungen entscheiden, ob dieselben wirklich zur contractilen Substanz gehören, oder etwa als Vermittler zwischen der Nerven- und Muskelsubstanz zu deuten sind.

Was die Kerne der Muskelfasern anlangt, so glaube ich die dem Sarcolemma zugehörigen Kerne von jenen genau unterscheiden zu müssen, die im Innern oder an der Oberfläche

¹⁾ Allgemeine Anatomie, Leipzig 1841. S. 585, Taf. IV, Fig. 4 B, a, a.

der contractilen Substanz selbst vorkommen. Bei Menschen, Säugern, zum Theile auch bei Vögeln, konnte ich im Innern der willkürlichen Muskelfasern, selbst nach Zusatz von Essigsäure, nichts wahrnehmen was für einen wirklichen Kern gedeutet werden könnte. An manchen Querschnitten kommen zwar bisweilen den Kernen täuschend ähnliche Bilder vor, die aber durch Essigsäure lichter werden und sich lediglich auf Eins der oben erwähnten Kunstproducte beziehen. Wirkliche Kerne finden sich bei diesen nur an der Oberfläche der contractilen Substanz, welche sich im Querschnitte wie dunklere, längliche, der inneren Fläche des Sarcocolemma anliegende Körperchen ausnehmen.

Kerne innerhalb der contractilen Substanz konnte ich bis jetzt in der Regel nur an den Muskelfasern der Amphibien, der Fische, dann im Brustfleisch der Tauben und Hühner, und im Herzfleisch der Säuger (Mensch, Hund, Schaf) finden, und stimme ich in dieser Beziehung mit Donders, Rollet, Kölliker u. A. ganz überein. Zu empfehlen sind in dieser Hinsicht — nach Rollet's Angabe — Durchschnitte von in Salzwasser gekochten und getrockneten Objecten, die in Glycerin aufbewahrt die Kerne im Innern der Muskelfasern ganz deutlich zeigen.

Diese in der contractilen Substanz eingelagerten Kerne sind meiner Ansicht nach die zurückgebliebenen Kerne der Sarcoplasten, aus deren Verschmelzung eben die Muskelfaser hervorgegangen ist.

Dass aber auch bei Fröschen u. s. w. die Kerne der Sarcoplasten im Laufe der Zeit schwinden können, beweist das schon oben erwähnte, wiewohl seltenere Vorkommen von solchen Muskelfasern, die ganz kernlos sind, und deren Inhalt lediglich aus den in homogener Grundsubstanz eingebetteten *Sarcous elements* zu bestehen scheint.

Endlich muss ich noch jener dunklen Längsstreifen erwähnen, die man häufig längs der Oberfläche der Muskelfasern verlaufen sieht. Ihre Deutung war stets eine sehr unsichere: man hielt sie bald für den Ausdruck von Spaltungen zwischen den Fibrillen (Kölliker, Reichert u. A.) oder für Lücken und Bindegewebskörperchen zwischen den Primitiveylindern (Leydig), bald für blosse Faltungen. Betrachtet man diese Längsstreifen etwas genauer, so überzeugt man sich leicht, dass sie nicht durch die ganze Länge der Muskelfaser in einer continuirlichen Linie verlaufen, sondern unterwegs aufhören, um an nicht correspondirenden Stellen wieder anzufangen. Offenbar spricht dieser Umstand nicht nur gegen die Existenz der Fibrillen, sondern auch gegen die sogenannten Primitiveylinder: denn in beiden Fällen müssten die Linien durch die ganze Länge der Muskelfaser continuirlich verlaufen. Nach dem im I. Abschnitte nachgewiesenen Bildungsmodus der quergestreiften Muskelfaser aus verschmolzenen Sarcoplasten, lassen sich diese dunklen Linien ganz einfach erklären. Vergleicht man die auf Taf. I, Fig. 7, 8, 9, 10, dann Taf. III, Fig. 25, 26, 27 und Taf. IV, Fig. 30 gegebenen Bilder mit einander, so ist es klar, dass die genannten Linien nichts anderes sein können als Grenzlinien zwischen den einzelnen mit einander verwachsenen Sarcoplasten, die oft auch später noch bei ganz gebildeten Muskelfasern sichtbar bleiben.

b) Über die nicht contractilen Bestandtheile der quergestreiften Muskelfaser.

Aus der im I. Abschnitte bereits geschilderten Entwicklungsweise der quergestreiften Muskelfaser hat sich ergeben, dass das Sarcocolemma weder Zellenmembran sei, noch der Verwachsung von Zellenmembranen sein Dasein verdanke, sondern ein durch Verdichtung der embryonalen Bindesubstanz unter Mitwirkung der Kerne erzeugtes elastisches Häutchen darstelle.

Es wurde zugleich nachgewiesen, dass das Sarcolemma in embryonalem Zustande nicht ganz structurlos sei, sondern feine, den elastischen ähnliche Fasern oder Fäden enthalte, welche auf der inneren Fläche desselben verlaufen, und einestheils mit den Kernen, andererseits aber mit den Sarcoplasten in Verbindung zu treten scheinen (vergl. Taf. I, Fig. 6 *c*, Fig. 10; Taf. II, Fig. 11, 12, 14, 15 und 17 *a*; Taf. III, Fig. 26, 27; Taf. IV, Fig. 30).

Ich untersuchte später an ganz gebildeten Muskelfasern das Sarcolemma bei verschiedenen Thieren und mit starken Vergrößerungen, und fand, dass auch hier nicht selten an der inneren Fläche desselben ganz feine Fasern verlaufen, die häufig in Kerne anzuschwellen scheinen (Taf. IV, Fig. 32 *b, b*). Ich überzeugte mich ferner, dass diese Fasern keine Täuschung sind und daher auch keinerlei Faltung oder Runzelung des Sarcolemma zugeschrieben werden können, da ich dieselben manchmal durch die Präparation isolirt frei abstehen sah und häufig auch ihre Contouren deutlich unterscheiden konnte. Kölliker¹⁾, der das Sarcolemma neuerdings bei *Siredon* und *Rana* untersuchte, glaubt ebenfalls, dass dasselbe nicht ganz structurlos sei; er spricht jedoch von einer feinen, dichten Punctirung an der Oberfläche, ohne zu entscheiden, ob diese auf die Gegenwart von Poren zu beziehen sei oder nicht. Aus diesem Grunde glaube ich, dass Kölliker die feinen Fädchen, die sich besonders bei jungen Fröschen und Crustaceen vom Sarcolemma isoliren lassen, übersehen habe.

Was die chemische Constitution anbelangt, so verhält sich in dieser Hinsicht das Sarcolemma ziemlich ähnlich dem elastischen Gewebe; denn beide lösen sich nicht in Alcalien und nicht in der Siedhitze und röthen sich auch durch Zucker und Schwefelsäure nicht, wodurch sie sich von den gewöhnlichen Eiweisskörpern unterscheiden. Den einzigen Unterschied fand Kölliker²⁾ darin, dass während nach Paulsen³⁾ das reine elastische Gewebe durch Salpetersäure und Kali sich orange färbt und in Xanthoproteinsäure übergeht, dies beim Sarcolemma nicht der Fall sein soll. Kölliker stützt jedoch seine Aussage bloß auf die Beobachtung, welche er an dem Sarcolemma des Axolotl gemacht hat.

Wenn ich alle auf histogenetischem Wege gewonnenen Resultate über die Entwicklung der Muskelsubstanz und des Sarcolemma bei Thieren, so wie die Beobachtungen über die Beschaffenheit des Sarcolemma an schon gebildeten Muskelfasern zusammenfasse und hiezu noch die grösste Ähnlichkeit des Sarcolemma mit dem elastischen Gewebe, so wie den directen Übergang desselben in die Sehne (der weiter unten nachgewiesen wird) in Erwägung ziehe, so kann ich die Ansicht Schwann's, Kölliker's und Anderer unmöglich theilen, derzufolge das Sarcolemma als vollkommen structurlos und als die Summe von Zellmembranen, oder als die structurlose Hülle der durch Vermehrung der Kerne verlängerten Muskelzelle gedeutet wird. Ich glaube hier triftigere Gründe angeführt zu haben für die Annahme, dass das Sarcolemma die Bedeutung einer elastischen Binde substanz habe.

Es haben schon Reichert⁴⁾ und Holst⁵⁾, Leydig⁶⁾ und Fick⁷⁾ das Sarcolemma als homogene Binde substanz betrachtet und demnach angenommen, dass der schlauchartig

1) Handbuch der Gewebelehre, 3. Aufl., S. 181.

2) Mikroskopische Anatomie, Bd. II, 1. Hälfte, S. 251.

3) Observationes microchem., Dorpat 1848, p. 24.

4) Beobacht. über das Bindegewebe, S. 77 ff.

5) De structura musculorum in genere etc., Dorpat 1846.

6) Lehrbuch der Histologie des Menschen u. s. w. 1857, S. 138 ff.

7) Müller's Archiv 1856, S. 425 ff.

fortgesetzte Sehnenbündel als Sarcocolemma seine Muskelfaser aufnehmen. Fick nahm sogar bindegewebige Fäden innerhalb der Muskelfaser an, welche sich seiner Ansicht nach zum Theil zwischen den Fibrillen der Muskelfaser hinein erstrecken sollen. Ich muss gestehen, dass ich den elastischen ähnlichen Fäden, wiewohl ich dieselben bei embryonalen Muskelfasern mit Sarcoplasten häufig in Verbindung sah, innerhalb der contractilen Substanz der fertigen Muskelfasern bis jetzt nicht wahrnehmen konnte. Ich glaube daraus schliessen zu können, dass die elastischen Fäden entweder mit der weiteren Entwicklung der Muskelfaser allmählich schwinden, bis auf kleine Überreste, die wohl manchmal längs des Sarcocolemma sichtbar bleiben, oder dass sie auch fernerhin innerhalb der contractilen Substanz vorkommen und nur wegen der grossen lichtbrechenden Eigenschaft der Muskelsubstanz nicht nachzuweisen sind. Welche von diesen zwei Möglichkeiten der Wahrheit näher liegt, werden wohl erst fernere Untersuchungen entscheiden. Doch möchte ich Ersteres für wahrscheinlicher halten, wofür auch eine von Budgete¹⁾ in neuester Zeit gemachte Beobachtung zu sprechen scheint. Er weist nämlich darauf hin, dass er auf der inneren Fläche der durch Maceration in chlor-saurem Kali und Salpetersäure vollkommen entleerten Sarcocolemmaschläuche die Kerne sämtlich mit Fasern in Verbindung gesehen habe, so dass auf der ganzen Fläche der Muskelfaserhülle ein vielfach anastomosirendes Fasernetz mit vielen Kernen sich zeigte.

Dass die Bindesubstanz wirklich in näherem Zusammenhange mit dem Muskelgewebe sei, ist aus meinen Beobachtungen ziemlich ausser Zweifel gesetzt. Mit diesen Beobachtungen scheint übrigens die von Huxley²⁾, Leydig³⁾, Billroth⁴⁾ wahrgenommene Endigungsweise verästelter Muskel- und Nervenfasern in Spindelzellen des Bindegewebes übereinzustimmen. Auch Kölliker⁵⁾ beschreibt in neuester Zeit eine derartige Verbindungsweise, wobei eine kernhaltige in Zerfaserung begriffene Bildungszelle des Bindegewebes bei Jungen von *Rana temporaria* die spitzen Enden zweier Muskelfasern verband. Meissner⁶⁾ erwähnt ebenfalls dass er an den muskulösen Faserzellen der Blasenwand des Kaninchens den von Treitz⁷⁾ angegebenen Übergang in feine elastische Fasern als Sehnen constatiren konnte.

Zieht man alle diese Beobachtungen in Erwägung, und vergleicht sie mit den durch mich gewonnenen Resultaten, so wird man nicht umhin können die Bindesubstanz, namentlich das elastische Gewebe mit dem Gewebe der Muskeln in nächste Beziehung zu bringen. Überall, wo contractile Substanz sich entwickelt, begegnet man mehr minder entwickelten Bündeln von feinen elastischen, wellig oder spiralig verlaufenden Fäden, und die von mir nachgewiesenen Sarcoplasten entwickeln sich in demselben Blastem, in welchem diese Faserzüge verlaufen und sind auch mit einzelnen Fäden derselben in Verbindung. Je mehr sich aber die contractilen Elemente entwickeln und innerhalb des Sarcocolemmaschlauches mit einander verschmelzen, desto schwerer gelingt auch die directe Nachweisung dieses eigenthümlichen Verhaltens der genannten Fäden, bis endlich bei vollkommen entwickelten Muskelfasern nur das elastische Sarcocolemma mit den auf der inneren Fläche desselben verlaufenden Fäden und Kernen wahrgenommen werden kann.

1) Archiv f. physiologische Heilkunde, 1858, II. Bd., I. Heft, S. 74.

2) Henle's Jahresbericht, 1854, S. 51.

3) Lehrbuch der Histologie etc., 1857, S. 56.

4) Müller's Archiv, 1858, S. 159.

5) Zeitschrift für wissensch. Zoologie, IX. Bd., S. 112. — Handbuch der Gewebelehre, 3. Aufl., S. 203, Fig. 112.

6) Zeitschrift für rationelle Medicin, 1858, II. Bd., S. 316.

7) Prager Vierteljahresschrift, 1854, Bd. I, S. 113.

Es sei mir gestattet hier noch einige Bemerkungen über diese eigenthümlichen Fäden und ihre etwaige physiologische Bedeutung folgen zu lassen.

Es wurde oben bereits angedeutet, dass dieselben eine grosse Ähnlichkeit mit feinen elastischen Fasern oder den sogenannten Kernfasern zeigen. Ihr Verlauf ist ein mehr minder wellenförmiger oder spiralgig gewundener; Theilungen und Anastomosen durch Absendung von Seitenästen habe ich bis jetzt seltener beobachtet. In dil. Essigsäure und Kali lösen sich dieselben nicht auf; bemerkenswerth ist jedoch ihre Verbindung mit den Sarcoplasten, welche ich an embryonalen Muskelfasern des Frosches, der Wanderratte und des Flusskrebses ganz deutlich beobachtete (vgl. Taf. II, Fig. 11 *a, c*, Fig. 12, 14; Taf. III, Fig. 26, 27 *c*). Was ihre physiologische Bedeutung anbelangt, so scheinen sie in dieser Beziehung elastischen Sehnenfasern zu entsprechen, so dass ich geneigt wäre ihren Nutzen in der Verbindung und Befestigung der noch getrennten Sarcoplasten zu suchen, wodurch sie zur Stütze der noch zarten Muskel-elemente der Embryonen dienen würden. In diesem Falle könnte das Fehlen derselben bei fertigen Muskelfasern dadurch vielleicht erklärt werden, dass die mit einander verschmolzenen Sarcoplasten dann eines solchen Verbindungs- und Befestigungsmittels nicht mehr bedürfen. Andererseits aber muss ich gestehen, dass mich dieselben Fäden nicht selten auch an die sogenannten Axencylinder der Nervenfasern erinnerten, wiewohl es sonderbar klingt, einen unmittelbaren Connex der letzteren mit den Elementen der contractilen Substanz zu behaupten.

Über die Endigungen der motorischen Nerven reicht zwar unser jetziges Wissen — Dank den Beobachtungen J. Müller's, Brücke's¹⁾, so wie den Untersuchungen R. Wagner's²⁾, Kölliker's³⁾, Doyère's⁴⁾, Quatrefages's⁵⁾, Leydig's, Wedl's, Meissner's⁶⁾ — so weit, dass man Theilungen und freie Enden auf der Oberfläche der Muskelfasern als sehr wahrscheinlich bei allen Thieren annehmen kann. Allein täglich machen wir die Erfahrung, dass unser Wissen in der Histologie noch bei weitem nicht am Ende ist. Schon Doyère hat bei Tardigraden die merkwürdige Verbindung der Nerven mit den Muskeln beschrieben, der zufolge die Nervenfasern sich mit verbreiterten Enden an die Muskelfasern ansetzen sollen. Quatrefages hat bei Eolidia und einigen Rotiferen, so wie bei Amphioxus, Kölliker bei einer Chironomuslarve ganz ähnliche Verhältnisse gesehen. R. Wagner gibt sogar an, dass die letzten Enden der Nervenröhren nach gabelförmiger Theilung blosser werden und unter der Hülle der Muskelfaser verschwinden. Nach Meissner sollen Nervenfasern bei *Mermis albicans* sich dreieckig verbreitern und endlich mit der Basis dieses terminalen Dreiecks an die Muskelfasern anheften, so dass eine vollständige Verschmelzung beider Theile stattfindet.

Wenn man das blasse Aussehen der Endfäden der Muskelerven, ihre einfachen Contouren, die Feinheit ihrer Spitzen, die oft einer Bindegewebsfibrille ähnlich ist, in Erwägung zieht, und hiezu bedenkt, dass Nervenfasern, welche wohl spitzig oder erweitert im Sarcolemma zu enden schienen, in ihrem weiteren Verlaufe theils wegen ihrer Feinheit oder der stark lichtbrechenden Eigenschaft der sie umgebenden contractilen Substanz, theils wegen

¹⁾ J. Müller's Physiologie. 1. Aufl. Bd. I. S. 524.

²⁾ Handwörterbuch der Physiol. Bd. III, S. 381 ff.

³⁾ Mikroskopische Anat. Bd. II. 1. Hälfte. S. 238 ff.

⁴⁾ Annales des sciences nat. 2. sér. Vol. XIV. 1840; Vol. XVII. XVIII. 1842

⁵⁾ Annales des sciences nat. 1843. p. 300 und Pl. II. Fig. XII.

⁶⁾ Zeitschr. f. wissensch. Zool. Bd. V. S. 234. Taf. XII, Fig. 17.

der Unvollkommenheit unserer Instrumente und Untersuchungsmethoden jenseits des Sarcolemma leicht der Beobachtung entgehen könnten, so wäre man fast geneigt, den genannten Fäden des Sarcolemma eine nervöse Natur zuzuschreiben, oder ihnen wenigstens eine vermittelnde Rolle zwischen den Nerven und der contractilen Substanz zu vindiciren.

Vergleicht man den Durchmesser dieser Fasern mit dem der Axencylinder oder der terminalen Endfäden der Nervenröhren, so ergibt sich zwischen beiden keine besondere Differenz. Ich fand die Fasern des Sarcolemma beim Frosche gleich 0·0005 bis 0·0010 Millim., bei *Mus. decumanus* 0·0009 Millim., beim Sperling 0·0012 Millim. und beim Flusskrebse 0·0011 Millim. Nach Dr. Ovsjannikow¹⁾ messen die feinsten (lange nicht die allerfeinsten) Axencylinder 0·0007 Millim.

Die Reactionen der genannten Fasern sind ferner der Art, dass sie dem Binde- und elastischen Gewebe auch nicht ganz eingereiht werden können und dieselben manche Analogie mit den sogenannten Müller'schen Fäden darbieten. Von verdünntem *Kali causticum* werden sie mehr angegriffen als die ersteren und lösen sich in kurzer Zeit in demselben auf. In Äther und Alkohol werden sie nicht verändert, eben so in Chromsäure und Quecksilberchlorid. Hiezu lässt sich noch beifügen, dass sie sich auch nach längerem Kochen in destillirtem Wasser eben so wenig auflösen, wie die Müller'schen Fäden der Retina und ziemlich vergänglich sein müssen, da sie bei länger in Wasser macerirten Muskelfasern kaum mehr zu erkennen sind. Ob dieselben durch Zucker und Schwefelsäure eine rothe Färbung annehmen, konnte ich nicht genau ermitteln. Aber schon diese wenigen Reactionen, in Verbindung mit der Thatsache, dass dieselben bei embryonalen Muskelfasern mit der contractilen Substanz im Connexe stehen, dürften mich wohl entschuldigen die Vermuthung ausgesprochen zu haben, dass die genannten faserigen Elemente vielleicht dem Nervengewebe angehören mögen.

Da dieselben übrigens auch mit dem Sarcolemma in Zusammenhang stehen, so könnte dieser Zusammenhang mit einer Membran von elastischer Natur, so wie ihre Unlöslichkeit in Essigsäure und siedendem Wasser auch als Grund für die gegenheilige Ansicht angeführt werden, wonach dieselben bloß elastischer Natur sein könnten.

Alles dies zusammengekommen, muss ich gestehen, dass ich nicht im Stande bin obige Frage zu entscheiden und es von weiteren Untersuchungen abhängig sein wird, ob es richtiger sei, dieselben als elastische Stützfasern der Muskelelemente, oder als Vermittler zwischen dem Nerven- und Muskelgewebe zu deuten. Mögen andere Forscher auf diesem schwierigen Gebiete den für die Physiologie der contractilen Gewebe so wichtigen Gegenstand ihrer vollen Aufmerksamkeit würdigen und zu sichereren Resultaten gelangen als es mir bis jetzt gelingen konnte.

c) Über die Anheftung der quergestreiften Muskelfasern an die Sehnen.

Es bleibt mir schliesslich nur die Aufgabe noch zu lösen, wie die Verbindung der Muskel- und Sehnelemente zu Stande kommt, da in dieser Beziehung die Ansichten der Histologen nicht wenig von einander differiren. Die Einen nehmen nur eine Apposition an, die Anderen einen directen Übergang beider Elemente in einander. Kölliker²⁾ hält die eine

¹⁾ Kleinere Mittheilungen u. s. w. in Virchow's Archiv, Bd. V, L. u. 2. Hft., 1858, S. 151

²⁾ Mikroskopische Anatomie, II. Bd., 1. Hälfte, S. 218 ff.

und die andere Anheftungsweise für möglich und meint insbesondere, dass in allen jenen Fällen, wo die Richtung der Sehnen- und Muskelfaserung ein und dieselbe ist, ein directer Übergang der Muskelfasern in die Sehne stattfindet, in allen anderen Fällen aber, wo die Muskelfasern schief an Sehnen oder Aponeurosen stossen, erstere mit blindendigen Primitivscheiden an die Sehnenmasse seitlich bloss angeheftet seien. Neuerer Zeit hat Fick¹⁾ eine genauere Untersuchung diesem Gegenstande gewidmet und davon mehrere Abbildungen geliefert, die mich um so mehr interessirten, da die Resultate seiner Untersuchungen im Wesentlichen mit den meinigen übereinstimmen.

Ich habe ebenfalls an allen, sowohl embryonalen, als fertigen Muskelfasern, die ich in grosser Anzahl untersucht hatte, nur eine Art des Ansatzes gefunden. Eine seitliche Verklebung der Muskelelemente, wie sie Kölliker bei schiefem Ansatz beschreibt und in seiner Mikroskopischen Anatomie (Bd. II, 1. Hälfte, S. 219, Fig. 63) abbildet, habe ich nicht gesehen. Auch kann ich Valentin²⁾ nicht beistimmen, dem zufolge die Muskelfaser von den Sehnenfasern stets nur im Umkreise umfasst sein soll.

Tafel II, Fig. 11 stellt zwei embryonale Muskelfasern mit ihren Sehnenbündeln von einem Froschlungen dar. Man sieht die contractilen Bestandtheile der werdenden Muskelfaser oder die sogenannten Sarcoplasten (*a, a, a, b*) zwischen den Sehnenfasern eingelagert und mit diesen in unmittelbarer Verbindung.

Tafel IV, Fig. 33 zeigt den unmittelbaren Übergang des Sarcolemma in die Sehnen-substanz. Die Muskelfasern sind von dem Rücken einer Froschlarve und 360 Mal vergrössert. Man bemerkt an diesem Präparate, wie gegen das Ende der Muskelfaser die grösstentheils schon verschmolzenen Sarcoplasten in die Sehnen-substanz einzeln noch hineinragen und die Fasern der letzteren die Muskelfaser nicht nur im Umkreise umfassen, sondern auch in der Mitte mit einzelnen hervorragenden Zacken in Verbindung treten.

Bei jungen Fröschen und Flusskrebsen begegnet man nicht selten Muskelfasern, deren contractile Substanz den erweiterten Sarcolemmaschlauch nicht vollständig ausfüllt und an denen man sowohl den directen continuirlichen Übergang des Sarcolemma in die Sehne, wie auch das nähere Verhältniss der Sehnenfasern zur contractilen Substanz leicht nachweisen kann. Figur 30 zeigt eine solche Muskelfaser von einem Froschlungen. Der weite Sarcolemmaschlauch (*a*) geht unmittelbar in die Sehne über und zwischen dem Sarcolemma und dem contractilen Inhalte (*c*) bemerkt man überdies eine einfache Faser (*d*), die nach kurzem Verlauf in die Sehne übergeht.

Tafel III, Fig. 26 und 27 zeigen bei einem jungen Flusskrebse dasselbe Verhältniss zwischen dem contractilen und dem nicht contractilen Theile der Muskelfaser.

Fasst man nun Alles über das Sarcolemma und die Anheftung der Muskelfasern an die Sehnen zusammen, so ergibt sich Folgendes:

1. Das Sarcolemma bildet einen direct in die Sehne übergehenden Schlauch, in welchem die contractile Substanz enthalten ist.
2. Zwischen dem Sarcolemma und dem contractilen Inhalte verlaufen feine Fäden eigenthümlicher Art, die sich bis in die Sehne verfolgen lassen, und zwar nicht nur bei Wirbelthieren, sondern auch bei Articulaten.

¹⁾ Über die Anheftung der Muskelfasern an die Sehnen, in Müller's Archiv 1856, S. 425 ff., Taf. XVII B.

²⁾ Artikel „Gewebe“ in Wagner's Handwörterbuch der Physiologie, Bd. I, S. 714.

3. Es treten überdies noch innere Sehnenfäden mit dem Ende der Muskelfaser in Verbindung: es ist aber höchst wahrscheinlich, dass dieselben bei ganz gebildeten Muskelfasern in das Innere nicht hineindringen.

B. Über die glatten Muskelfasern.

Es wurde bereits im I. Abschnitte auf histogenetischem Wege erwiesen, dass die glatten Muskelfasern sich im Wesentlichen von den quergestreiften nicht unterscheiden und dass die Elemente der Ersteren, — die musculösen Faserzellen, — ihrer Bedeutung nach nichts anderes sind als Sarcoplasten. Bei quergestreiften Muskelfasern sind in der Regel die Sarcoplasten zu einem Ganzen verschmolzen und in einer besonderen elastischen membranösen Scheide — Sarcolemma — enthalten, während dieselben bei glatten Muskelfasern nur mittelst Binde- substanz zu einem Bande vereinigt werden. Dass übrigens auch in dieser Beziehung zwischen beiden Arten von Muskelfasern nicht ganz scharfe Grenzen existiren, habe ich schon oben angegeben. Ein weiterer Unterschied wäre der geringere Grad der Differenzirung des Inhaltes, der aber auch nicht auf alle musculöse Faserzellen anwendbar ist, seitdem bei vielen derselben in neuester Zeit wirkliche Querstreifen entdeckt worden sind.

Übrigens gibt schon Lauth¹⁾ an, er habe am menschlichen Uterus Muskelbündel gesehen, welche, denen des Herzens ähnlich, mit deutlichen Längsstreifen, aber auch wiewohl mit selteneren wellenförmigen Querstreifen versehen waren. Andeutungen von Querstreifen scheinen auch andere Autoren hie und da bemerkt zu haben. Allgemein aber wurde die Oberfläche der glatten Muskelemente als ganz glatt und homogen angesehen.

G. Viner Ellis²⁾ spricht von einem gefleckten (*dotted*) Aussehen der unwillkürlichen Muskelfasern, das den Querstreifen der willkürlichen entsprechen soll und vermuthet zugleich, dass das gefleckte Aussehen derselben durch eine in der Anordnung verschiedene Zusammensetzung aus Inhaltspartikeln (*Sarcous elements*) erzeugt werde.

G. Meissner³⁾ war der erste, der an den musculösen Faserzellen einiger Säugethiere im contrahirten Zustande deutliche Querstreifen beobachtet und abgebildet hat. Nur in Betreff der Ursache der Querstreifung scheint derselbe nicht ganz im Klaren, indem er geneigt ist diese einer Faltung oder Runzelung der Oberfläche zuzuschreiben.

Um mich daher von diesem höchst interessanten Verhalten der glatten Muskelemente genau zu überzeugen und wo möglich auch die wahre Ursache der Querstreifung zu erforschen, habe ich diesen Gegenstand einer sorgfältigen Untersuchung unterworfen. Hiezu wählte ich die Muskelemente der Harnblase und des Dünndarmes von Kaninchen und jungen Schweinen, welche ich nach der von Meissner angegebenen Methode 24 Stunden lang in verdünntem Holzessig macerirte und mittelst Präparirnadeln gehörig isolirt mit dem Mikroskope untersuchte.

Schon bei einer 360maligen Vergrößerung konnte ich an vielen ganz isolirt liegenden Faserzellen Querstreifen wahrnehmen; doch waren dieselben nicht so scharf gezeichnet, wie sie Meissner abbildet. Die Querstreifen erschienen mir nicht als zarte einfache Linien, noch

1) L'Institut 1831, Nr. 70.

2) Proc. of the Royal society 1856, Vol. VIII, Nr. 22, pag. 212.

3) Über das Verhalten der musculösen Faserzellen im contrahirten Zustande, in Zeitschr. für rat. Medicin, 1858, 11. Bd., 3. Hft., S. 316 ff., Taf. V.

weniger aber als Runzeln oder Faltungen der Oberfläche, sondern als Reihen von ganz kleinen lichten glänzenden Pünktchen, welche rechtwinkelig zur Längsaxe der Zelle und parallel neben einander verliefen. Die Querreihen schienen durch kleine Zwischenräume von einander getrennt.

Bei 525- oder 936maliger Vergrößerung, die ich später bei demselben Präparate anwendete, konnte ich mich von der Richtigkeit obiger Beobachtung vollkommen und bis auf das kleinste Detail überzeugen. Bei allen muskulösen Faserzellen war dann eine homogene Substanz zu unterscheiden, in welcher runde lichte Körnchen eingebettet waren. Die Grösse dieser Körnchen war bei verschiedenen Zellen verschieden; bei den einen nahmen sie sich wie lichte Pünktchen aus, bei den anderen waren dieselben grösser und deutlich contourirt. Alle aber fielen durch die stark lichtbrechende Eigenschaft, so wie durch ihre gelbliche Farbe auf, wodurch sie sich von der homogenen, schwach lichtbrechenden farblosen Grundsubstanz merklich unterscheiden. Diese Körnchen, die allen ihren Eigenschaften nach, bis auf die geringere Grösse, den *Sarcous elements* oder Fleischkörnchen der quergestreiften Muskelfaser entsprechen, sind bei manchen Zellen in grösserer, bei anderen in geringerer Anzahl vorhanden. In jenen Zellen, die eine deutliche Querstreifung zeigen, sieht man die Fleischkörnchen in regelmässigen parallelen Querreihen neben einander liegen, nur sind die Zwischenräume, welche die ganzen Querreihen so wie die einzelnen Fleischkörnchen einer Querreihe von einander trennen, wenigstens um die Hälfte kleiner als bei quergestreiften Muskelfasern. Gegen die beiden Spitzen hin liegen die Fleischkörnchen weniger regelmässig und scheinen auch viel kleiner, was die Ursache sein mag, dass die Querstreifung an diesen Stellen gewöhnlich fehlt (Taf. IV, Fig. 34 c). Bei anderen Faserzellen ist keine so regelmässige Anordnung der Fleischkörnchen wahrzunehmen; dieselben liegen mehr zerstreut im homogenen Inhalte, wo sie dann häufig an den Seitenrändern in Längsreihen geordnet erscheinen (Fig. 34 a). Bei manchen scheint die homogene Zwischensubstanz, wahrscheinlich in Folge der Maceration, theilweise aufgelöst, wodurch dann seichtere oder tiefere Einkerbungen vom Rande der Faserzelle aus gegen die Mitte zu entstehen und die Ränder derselben wie fein gesägt oder fein gekerbt aussehen (Fig. 34 b). Bisweilen erstrecken sich diese Einkerbungen durch die ganze Breite der Zelle, so dass dieselbe in mehrere regelmässige Querstückchen (Fleischscheiben) zerfällt.

Man ersieht hieraus, dass die Querstreifen auch bei den Elementen der glatten Muskelfasern vorkommen, und dass diese, wie bei quergestreiften Muskelfasern, durch die regelmässige Anordnung eigenthümlicher Fleischkörnchen oder *Sarcous elements* in einer homogenen, optisch und chemisch differenten Grundsubstanz erzeugt werden. Die Querstreifen fehlen aber bei allen jenen Muskelementen, bei welchen die Fleischkörnchen entweder nicht regelmässig geordnet, oder wegen ihrer Kleinheit nicht wahrnehmbar sind.

Was die Kerne der muskulösen Faserzellen anlangt, so wurde bereits im I. Abschnitte, wo von der Entwicklung der glatten Muskelfaser die Rede war, gesagt, dass bei vielen bläschenartige Kerne vorkommen. Durch Essigsäure zerfallen sie nicht selten in einen Haufen kleiner runder Körnchen (Taf. IV, Fig. 34 d); doch sind auch ohne Reagentien ähnliche, wahrscheinlich im Schwindeln begriffene Kerne, so wie das Fehlen des Kernes bei vielen muskulösen Faserzellen nicht selten (Fig. 34 a, b).

Bei anderen Faserzellen scheint die differenzirte contractile Substanz den ganzen inneren Raum auszufüllen bis auf eine Stelle in der Mitte, wo früher der Kern lag. Diese Stelle ist

als ein längerer oder kürzerer, an den Enden zugespitzter Fleck, oder als langer, schmaler Streif zu erkennen. Bei erwachsenen Thieren kommen am häufigsten die linearen, stäbchenförmigen Kerne längs der Axe der Spindelzellen vor, die höchst wahrscheinlich aus den bläschenartigen rundlich-ovalen embryonalen Kernen durch Verlängerung und Consolidirung entstehen. Durch Zusatz von Essigsäure quillt der contractile Inhalt auf, wird lichter ohne deshalb völlig aufgelöst zu werden, wodurch die stäbchenförmigen Kerne längs der Axe der Faserzellen noch schärfer hervortreten.

Bei glatten Muskelfasern erscheinen die Sarcoplasten oder musculösen Faserzellen neben und hinter einander gelagert, indem sie mittelst Bindesubstanz in der Regel zu einem Bande vereinigt werden. Die Sarcoplasten behalten hier eine grössere Selbstständigkeit als bei den quergestreiften Muskelfasern. Zwischen und über ihnen sieht man häufig feine elastische Fasern verlaufen, die in Essigsäure unlöslich sind. Henle¹⁾, der sie für Kernfasern hält, hat dieselben ganz richtig beschrieben. Sie setzen oft durch Anastomosen ein Netzwerk zusammen, in deren Maschen die Faserzellen liegen. In anderen Fällen scheinen sie wellig oder spiralg zwischen den Muskelfasern zu verlaufen ohne durch Seitenäste Anastomosen zu bilden. In diesem Falle scheinen die glatten Muskelfasern, nach Art der quergestreiften, aus mehreren neben und hinter einander zu einem continuirlichen musculösen Bande direct verwachsenen Sarcoplasten zu bestehen.

Zwischen den isolirten Elementen der glatten Muskelfasern finden sich nicht selten auch solche vor, die theils mit ihren Spitzen, theils an der Seite mit feinen elastischen Fasern innig zusammenhängen. Nicht selten habe ich bei jüngeren Thieren 2 — 3 — 5 solche Faserzellen in kleinen Gruppen beisammen getroffen, die mit feinen elastischen Fasern an ihrem Ende, wie mit Sehnen zusammenhängen, was auch Treitz²⁾ und Meissner³⁾ bereits beobachtet haben. Ich erlaube mir in dieser Beziehung nochmals die mit ähnlichen Fasern innig verbundenen Sarcoplasten der quergestreiften Muskelfasern kleiner Froschlungen in Erinnerung zu bringen (vergl. Taf. II, Fig. 11, 12). Diese Fasern scheinen die noch selbstständigen, nicht mit einander verschmolzenen Faserzellen oder Sarcoplasten, indem sie mit ihnen innig verbunden sind, bei der Contraction zusammenzuhalten.

¹⁾ Allgemeine Anatomie, 1841, S. 576.

²⁾ A. a. O. S. 413.

³⁾ A. a. O. S. 316.

Allgemeine Übersicht der Resultate meiner Beobachtungen.

I. Bildung der quergestreiften Muskelfasern.

1. Die Bildung des Sarcolemma ist von der Entwicklung der contractilen Substanz genau zu unterscheiden.

2. Das Sarcolemma ist keine Zellenmembran und ist auch nicht durch Verschmelzung von Zellenmembranen entstanden.

3. Dasselbe bildet sich durch eine Art Verdichtung aus der homogenen oder fibrillären Bindesubstanz in Gestalt eines elastischen Begrenzungshäutchens und unter Mitwirkung der Kerne.

4. Die contractile Substanz ist das Product eigenthümlicher Zellen — sogenannter Sarcoplasten — welche im Blastem und längs der Fasern des Sarcolemma entstehen und sich Anfangs durch Theilung der Kerne und Endogenese vermehren.

5. Diese Zellen gehen eine eigenthümliche Metamorphose durch, indem sich ihr Inhalt allmählich in Fleischsubstanz umwandelt.

6. Die Metamorphose besteht darin, dass sich in dem homogenen Inhalte der Zelle Anfangs sehr kleine, stark lichtbrechende, gelbliche Körperchen von verschiedener Gestalt und Grösse bei verschiedenen Thieren und Muskeln differenziren und allmählich in Querreihen oder Querschichten längs der Zellenwand ablagern.

7. Die Ablagerung dieser Fleischkörnchen oder *Sarcous elements* schreitet von der Peripherie der Sarcoplasten gegen die Mitte, oder von der einen Seitenwand zur anderen hin, bis der ganze Zellenraum mit differenzirter Fleischsubstanz nicht ausgefüllt ist.

8. Die auf diese Art differenzirten Sarcoplasten stellen rundlich-ovale, cylindrische, mehr weniger spindelförmige Körper dar, mit deutlicher Querstreifung und enthalten ausser der contractilen Substanz oft 1—2 lichte Bläschen (Kernbläschen). Die Zellenmembran scheint mit dem Inhalte innig zu verwachsen und kann an vollkommen gebildeten Sarcoplasten direct nicht nachgewiesen werden.

9. Die Sarcoplasten können Fortsätze treiben, 2—3 oder mehrere, wobei stets eine Theilung der Kernbläschen vorangeht. Die Bildung der Fortsätze scheint durch eine Art Knospung zu geschehen.

10. Die Sarcoplasten, die gewöhnlich längs der feinen Faserzüge des embryonalen Sarcolemma entstehen, lagern sich neben und hinter einander und verschmelzen allmählich mit einander.

11. Die Verschmelzung kann sowohl in einfachen als in mehrfachen Reihen geschehen, immer jedoch so, dass sich die Sarcoplasten dabei nie mit breiter Basis berühren, sondern mit ihren Spitzen oder Fortsätzen nach Art der musculösen Faserzellen schief an einander legen.

12. Der contractile Inhalt des Sarcolemma ist daher ein Product der Verschmelzung mehrerer Sarcoplasten, die anfangs mit den Fasern des Sarcolemma in Verbindung stehen und vom Letzteren in Gestalt eines Schlauches umschlossen werden.

13. Die quergestreifte Muskelfaser geht somit weder aus der Verschmelzung einer einfachen Zellenreihe (nach Schwann'schem Typus), noch aus der Verlängerung einer einzigen Embryonalzelle hervor (nach Lebert, Remak, Kölliker).

14. Eben so muss die von Reichert, wie auch die von Leydig gegebene Darstellung der Bildungsweise der Muskelfasern als unrichtig betrachtet werden.

15. Die Sarcoplasten sind die Bildungsstätten der Fleischsubstanz, d. i. der in homogener Grundsubstanz eingelagerten *Sarcous elements*, und ihrer einzelnen doppeltbrechenden Bestandtheile, der von E. Brücke genannten Disdiaklasten; der contractile Inhalt des Sarcolemma geht aus der Verschmelzung der Sarcoplasten hervor.

16. Derselbe Bildungsmodus wurde nicht nur an Wirbelthieren und am Menschen, sondern auch an Insecten und Dekapoden beobachtet, kann also als allgemein gültig betrachtet werden.

17. Die Herzmuskelfasern bilden sich ebenfalls aus Sarcoplasten heran, welche netzförmig mit ihren Fortsätzen verschmelzen.

II. Bildung der glatten Muskelfasern.

18. Die Elemente der glatten Muskelfasern sind Sarcoplasten, bei denen der Inhalt dieselbe Metamorphose durchläuft, mit dem Unterschiede allein, dass die doppelt brechenden Fleischkörnechen viel kleiner sind und sich in geringerer Menge differenziren. Auch ist die regelmässige Anordnung der Letzteren viel seltener.

19. Die glatte Muskelfaser entsteht dadurch, dass sich mehrere neben und hinter einander gelagerte und mittelst Bindesubstanz und elastischer Fasern mit einander zusammenhängende Sarcoplasten zu einem Bande ver-

einen, dessen Elemente in der Regel nicht so vollständig, wie bei quergestreiften Muskelfasern, mit einander verschmelzen.

III. Wachstum und Neubildung der Muskelfasern.

20. Das Längenwachsthum der quergestreiften Muskelfasern geschieht durch Vermehrung von Sarcoplasten innerhalb des Sarcolemma an den Enden der Muskelfasern, wobei auch Letzteres durch Vermehrung der Kerne an Länge zunimmt.

21. Das Dickenwachsthum erfolgt durch Sarcoplasten, welche sich an der inneren Wand des Sarcolemmaschlauches bilden und allmählich mit einander und mit der übrigen Muskelsubstanz verschmelzen.

22. Die physiologische, so wie die pathologische Volumenzunahme geschieht theils durch Dickenzunahme der schon fertigen, theils durch Bildung neuer Muskelfasern zwischen den bereits gebildeten.

23. Während des Wachstums der Thiere und ihrer einzelnen musculösen Apparate findet eine Neubildung von musculösen Elementen Statt, welche denselben Gesetzen folgt, wie die erste Entwicklung der Muskelfasern.

24. Eine fortdauernde Neubildung von Muskelelementen, während im Leben durch die Thätigkeit derselben die alten resorbirt würden, wird durch die Erfahrung nicht bestätigt. Der Stoffwechsel in den Muskeln scheint ein bloß molecularer zu sein und gründet sich nicht auf den Wechsel seiner histologischen Elemente.

IV. Structur der Muskelfasern.

25. Das Sarcolemma scheint nicht ganz structurlos zu sein; dasselbe besteht aus einem elastischen Begrenzungshäutchen, welches mit Kernen und mit feinen Fasern an der inneren Fläche versehen ist.

26. Das Sarcolemma bildet einen direct in die Sehne übergehenden Schlauch, worin die contractile Substanz enthalten ist.

27. Zwischen dem Sarcolemma und dem contractilen Inhalt desselben verlaufen eigenthümliche feine Fäden, die sich bis in die Sehne verfolgen lassen, und zwar nicht nur bei Wirbelthieren sondern auch bei Articulaten.

28. Es treten überdies noch innere Sehnenfäden mit dem Ende der Muskelfaser in Verbindung, es ist aber höchst wahrscheinlich, dass dieselben bei ganz gebildeten Muskelfasern in das Innere nicht hineindringen.

29. Der contractile Inhalt des Sarcolemma ist das Product der Verschmelzung der Sarcoplasten und besteht wie diese aus kleinen geformten Partikelchen

(Fleischkörnchen oder *Sarcous elements*) und einer homogenen Grundsubstanz, in welcher erstere eingebettet sind. Beide Substanzen unterscheiden sich physicalisch, chemisch und optisch von einander.

30. E. Brücke's Theorie über den feineren Bau der Muskelfasern beruht auf Thatsachen, die durch meine histogenetischen und vergleichenden Beobachtungen bestätigt werden.

31. Die Grösse und die Gestalt der Fleischkörnchen ist nicht nur bei verschiedenen Thieren, sondern auch bei ein und demselben Muskel eines Thieres verschieden, ja es können dieselben sogar innerhalb einer Muskelfaser differiren. Auch die Abstände der Fleischkörnchen von einander können sowohl nach der Länge als nach der Breite der Muskelfaser variiren.

32. Die Fleischkörnchen finden sich nicht allein an der Oberfläche, sondern in der ganzen Dicke der Muskelfaser.

33. Die Querstreifung wird durch die regelmässige Anordnung der Fleischkörnchen in parallelen Querschichten, die durch die homogene einfach lichtbrechende Grundsubstanz von einander getrennt werden, erzeugt.

34. In der lebenden Muskelfaser existiren weder Fibrillen noch Scheiben, diese sind bloß das Product der Längs- oder Querspaltung, welche bei todtten und macerirten Muskelfasern unter gewissen Umständen eintreten kann.

35. Im Inneren der contractilen Substanz existiren weder Bindegewebskörperchen, noch plasmaführende Canäle (Leydig, Weleker).

36. Die im Inneren oder an der Oberfläche der contractilen Substanz vorkommenden Kerne sind ihrem Ursprung und ihrer Bedeutung nach von den im Sarcolemma liegenden Kernen genau zu unterscheiden. Erstere sind die Kerne jener Sarcoplasten, aus deren Verschmelzung die Muskelfaser hervorgegangen ist, letztere aber gehören dem Sarcolemma zu.

37. Die an Querschnitten als Bindegewebskörperchen oder sogenannte Muskelkörperchen und als Durchschnitte von Canälen gedeuteten Bilder reduciren sich entweder auf Spalten in der getrockneten contractilen Substanz, oder auf zerdrückte *Sarcous elements*, oder auf einzelne mit der übrigen Substanz nicht ganz verschmolzene Sarcoplasten und deren Kerne.

38. Die längs der Oberfläche der Muskelfasern nicht selten vorkommenden dunkeln, einander nicht correspondirenden, unterbrochenen Längslinien sind die Grenzlinien zwischen den einzelnen verwachsenen Sarcoplasten, die oft auch später bei ganz gebildeten Muskelfasern sichtbar bleiben.

39. Die contractilen Faserzellen oder Sarcoplasten der glatten Muskelfasern bestehen aus einer homogenen Grundsubstanz und den stark lichtbrechenden Fleischkörnchen. Diese können hier, eben so wie bei quergestreiften Muskelfasern, durch ihre regelmässige Anordnung eine deutliche Querstreifung hervorrufen. Bei allen jenen Faserzellen, die keine deutliche Quer-

streifung zeigen, sind die Fleischkörnchen entweder unregelmässig in der homogenen Substanz eingelagert, oder wegen ihrer Kleinheit nicht sichtbar, oder ihre einzelnen, doppeltbrechenden Bestandtheile — Disdiaklasten — sind nicht gruppenweise, sondern gleichförmig im homogenem Inhalte vertheilt.

40. Musculöse Faserzellen besitzen in der Regel einen rundlich-ovalen, bläschenartigen oder linearen, stäbchenförmigen Kern; doch ist auch das Fehlen des Kernes bei manchen Faserzellen nicht selten.

ERKLÄRUNG DER ABBILDUNGEN.

Fig. 1—12, 30—33 und 38 Muskelemente von *Rana*. — Fig. 13 vom Sperling. — Fig. 14 von *Mus decumanus*. — Fig. 15 und 37 vom Menschen. — Fig. 16 und 35 vom Schwein. — Fig. 17 von *Perca fluviatilis*. — Fig. 18 von *Saturnia piri*. — Fig. 19—29 und 40 von *Astacus fluviatilis*. — Fig. 34 vom Kaninchen. — Fig. 36 vom Hühnchen. — Fig. 39 vom *Acridium stridulum*.

TAFEL I.

Fig. 1. In der Entwicklung begriffene Muskelemente aus den Rückenmuskeln einer 25 Millim. langen Froschlarve. 200mal vergrößert.

A. In der Entwicklung begriffene Muskelfaser. — *a*. Sarclemma. — *b*. Sarcoplasten in verschiedenem Entwicklungszustande zwischen dem Sarclemma und der schon fertigen contractilen Substanz *c*.

B. Isolirte Sarcoplasten. — *a, b, c*. Bildungszellen der Sarcoplasten mit 1—2 Kernen und beginnender Umwandlung des Inhalts in Fleischsubstanz. — *d*. Zu quergestreiften Sarcoplasten umgewandelte Bildungszellen mit Kernbläschen. — *e, e*. Mehr ausgewachsene Sarcoplasten. — *f*. Ein Sarcoplast mit beginnender Bildung von Fortsätzen am Ende.

Fig. 2. Sarcoplasten einer Froschlarve mit Essigsäure behandelt. Vergröß. 200.

Fig. 3. Sarcoplasten einer Froschlarve bei stärkerer Vergrößerung.

A. 360 Mal vergrößert. — 1) Sarcoplast mit einem Fortsatz und beginnender Bildung eines zweiten *a*; — *b*. Kernbläschen. — 2) Sarcoplast mit drei Fortsätzen und einem in Theilung begriffenen Kernbläschen.

B. 936 Mal vergrößert. — 1) Ein einfacher Sarcoplast mit zwei Kernbläschen *a*; — reihenweis gelagerte Fleischkörnchen *c*, in der homogenen Grundsubstanz *b*. — 2) Sarcoplast mit zwei Ausläufern und Kernbläschen *a, a*.

Fig. 4. In endogener Vermehrung begriffene Sarcoplasten eines 25 Millim. langen Froschjungen, aus den Rückenmuskeln. Vergrößerung 360.

a, a. Sarclemma. — *b*. Einfache Bildungszelle mit einem Kerne. — *c, c, c*. Quergestreifte Sarcoplasten als Tochterzellen zu 2—5 und mehrere in Mutterzellen *f, f, f*. — *d*. Freigewordene Gruppe von Sarcoplasten.

Fig. 5. Isolirte, in endogener Vermehrung begriffene Sarcoplasten. Vergröß. 360.

a, a, a. Einfache Zellen mit einem oder mehreren Kernen. — *b*. Mutterzellenmembran. — *c, c*. Quergestreifte Tochterzellen mit Kernbläschen. — *d*. Freie Kerne.

Fig. 6. Muskelfasern, den Rückenmuskeln eines Froschjungen entnommen. Vergröß. 360.

a. Sehne einer fertigen Muskelfaser *b*. — *c*. Leerer Sarclemmaschlauch. — *d*. Sarclemmaschlauch mit quergestreiften dicht neben einander liegenden Sarcoplasten *e, e, e* ausgefüllt.

Fig. 7. Muskelfaser in der Entwicklung, mit beginnender Verschmelzung der Sarcoplasten, aus den Rückenmuskeln eines 25 Millim. langen Froschjungen, 360 Mal vergrößert.

a, a. Sarclemma. — *b, b, b*. Gruppen von Sarcoplasten. — *c, c*. Dicht neben und hinter einander gelagerte in Verschmelzung begriffene Sarcoplasten innerhalb des Sarclemma. — *d*. Zu einer mehr continuirlichen Substanz bereits verschmolzene Sarcoplasten.

Fig. 8. Muskelfaser in der Entwicklung, mit weiter fortgeschrittener Verschmelzung der Sarcoplasten, ebendaher, 360 Mal vergrößert.

a, a, a. Kernbläschen. — *b, b*. dunkle, mit einander nicht correspondirende Längslinien, als Grenzlinien zwischen den verschmelzenden Sarcoplasten.

Fig. 9. Im Wachstum begriffene Muskelfaser aus der Schultergegend eines 3 Centim. langen Froschjungen, 360 Mal vergrößert.

a, a. Sarclemma. — *b*. Sehne. — *c*. Fertige Muskelfaser. — *d*. Bildungszellen der Sarcoplasten. — *e, e, e, e*. Einzelnen und gruppenweise beisammen liegende Sarcoplasten unter dem Sarclemma.

Fig. 10. Im Wachstum begriffene Muskelfaser aus der hinteren Extremität einer Froschlarve. Vergrößerung 360.

a. Sarclemma. — *b, b*. Sarcoplasten am Ende der Muskelfaser. — *c*. Aus bereits verschmolzenen Sarcoplasten hervorgegangene continuirliche Muskelsubstanz. — *d, d*. Grenzlinien zwischen den verschmolzenen Sarcoplasten.

TAFEL II.

Fig. 11. Muskelfasern und Sehnenbündel aus den Rückenmuskeln eines 25 Millim. langen Froschjungen, 360 Mal vergrößert.

a, a, a. Sarcoplastengruppen zwischen den Sehnenfasern eingelagert, mit letzteren in Verbindung. — *b*. Sarcoplasten in Begriff zu einer continuirlichen Muskelfaser zusammen zu schmelzen. — *c, c*. Fasern des Sehnenbündels. — *d*. Sarclemma direct in die Sehne übergehend. — *e*. Fertige Muskelfaser.

Fig. 12. Eine Gruppe von Sarcoplasten aus der Fig. 11 bei 936maliger Vergrößerung. Der contractile Inhalt besteht aus homogener Grundsubstanz und den in dieser eingelagerten Fleischkörnchen oder *Sarcous elements*.

a. Ein Sarcoplast, in welchem die Disdiaklasten sich zu Gruppen noch nicht vollkommen vereinigt hatten. In der homogenen Grundsubstanz, welche mit sehr kleinen lichten Pünktchen besät ist, erscheinen meist an der Wandung einzelne Gruppen von Disdiaklasten, in Gestalt von *Sarcous elements*. — *b.* Ein Sarcoplast, in welchem die *Sarcous elements* überall deutlich und regelmässig in Querreihen geordnet erscheinen, wodurch Querstreifen erzeugt werden. — In *c.* sind die Fleischkörnchen theilweise aus ihrer regelmässigen Gleichgewichtslage gebracht. — *d.* Zwei kleinere an Sarcoplasten sich anheftende Faserbündelchen. — *f.* Fibrilläre Sehnensubstanz mit eingestreuten kleinen Körnchen.

Fig. 13. Muskelelemente aus der oberflächlichsten Schicht des *M. pectoralis* eines jungen Sperlings, 360 Mal vergrössert.

a. Bildungszellen der Sarcoplasten, mit Kern, Zellmembran und auf einer Seite der Zellenwand abgelagertem quergestreiftem Inhalt. — *b, b.* Sarcoplasten, weiter entwickelt, mit Kernbläschen am Ende derselben *c, c.* — *d.* Fertige Muskelfaser. — *f.* Ein Sarcoplast mit zum Theile und längs der einen Seite der Zellenwand differenzirtem Inhalt.

Fig. 14. Muskelelemente in der Entwicklung aus dem *M. pectoralis* eines 42 Millim. langen Embryo einer Wanderratte (*Mus decumanus*). Vergrößerung 360.

a, a. Bildungszellen mit Zellmembran, Kern und homogenem Inhalt. — *b.* Aus einer proliferen Bildungszelle freigewordene Gruppe junger Sarcoplasten. — *c, c, c, c.* Junge Sarcoplasten mit differenzirtem, quergestreiftem Inhalt längs der Zellenwand und centraler Lücke. — *d, d, d, d.* Ganz quergestreifte Sarcoplasten, von verschiedener Grösse; an einem Ende derselben häufig ein lichtiges Kernbläschen; die Sarcoplasten liegen theils mehr isolirt, theils in dichten Reihen, in einem fein-faserigen Blastem *f, f.* und hängen mit den Fasern des Letzteren zusammen.

Fig. 15. Muskelfasern in der Entwicklung aus dem *M. pectoralis* eines 6 Centim. langen menschlichen Embryos, 360 Mal vergrössert.

a, a, a, a, a. In der Entwicklung begriffene Sarcoplasten oder Bildungszellen derselben. — *b, b.* Vollkommen entwickelte Sarcoplasten. — *c.* Continuirliche Muskelsubstanz aus verlängerten und mit einander verschmolzenen Sarcoplasten bestehend. — *d, d.* Sarcolemma in der Entwicklung, mit feinen elastischen Fasern und Kernen *f, f.*

Fig. 16. Muskelelemente aus der Harnblasenwand eines reifen Schweinsfötus, nach 24stündiger Maceration in KO, ClO₅ und NO₅, 360 Mal vergrössert.

a, a. Bindesubstanz mit Fasern und Kernen. — *b.* Junge Sarcoplasten mit Zellmembran, Kern und homogenem oder fein granulirtem Inhalt. — *c, c.* Längliche mehr entwickelte Sarcoplasten mit theilweise differenzirtem, spürweise quergestreiftem Inhalt und mit länglichen Lücken längs der Axe. — *d, d.* Gruppenweise nebeneinander liegende Sarcoplasten in Gestalt von contractilen Faserzellen. — *e.* Bündeln von ausgewachsenen Sarcoplasten, sogenannte glatte Muskelfasern.

Fig. 17. Embryonale Muskelfasern, den Rückenmuskeln einer 25 Millim. langen *Perca fluviatilis* entnommen, 360 Mal vergrössert.

a, a. Sarcolemma mit Fasern und Kernen. — *b.* Mehrere Muskelfasern mit continuirlicher quergestreifter Wandung und scheinbarem Hohlraum längs der Axe, ausgefüllt mit Sarcoplasten. — *c.* Sarcoplasten mit deutlicher Querstreifung in verschiedenem Entwicklungszustande, theils isolirt, theils gruppenweise aus dem centralen Hohlraume einer gerissenen Muskelfaser herausgefallen. — *d.* Solide, vollkommen gebildete Muskelfaser. — *e.* Eine Sarcoplastengruppe zwischen dem Sarcolemma und dem übrigen contractilen Inhalt.

Fig. 18. Muskelelemente in der Entwicklung aus dem Abdomen einer Puppe von *Saturnia piri*, 360 Mal vergrössert.

A. Erste Anlage der Muskelfaser. — *a.* Homogene Bindesubstanz zu einem elastischen Häutchen sich consolidirend (Sarcolemma). — *b.* Sarcoplasten in verschiedenem Entwicklungszustande, theils isolirt, theils in Gruppen beisammen liegend innerhalb des Sarcolemmaaschlauches.

B. In der Entwicklung weiter fortgeschrittene Muskelfaser. — *c.* Sarcoplasten innerhalb des Sarcolemma. — *d.* Mehr ausgewachsene und mit einander zu einer continuirlichen Substanz verschmelzende Sarcoplasten.

TAFEL III.

Fig. 19. Erste Anlage der Muskelfasern aus der Dünndarmwand eines 38 Millim. langen Flusskrebses (*Astacus fluviatilis*), 360 Mal vergrössert.

a. Blastem mit eingestreuten Molecularkörnchen und Kernen. — *b, b, b.* Bildungszellen der Sarcoplasten mit Zellmembran, 1—2 Kernen und homogenem oder zum Theil differenzirtem Inhalt. — *c, c.* Sarcoplasten mit zum Theil quergestreiftem wandständigen Inhalt und Kernbläschen. — *d.* Spindelförmig ausgewachsene, einfache junge Sarcoplasten. — *f.* Mehr ausgewachsener quergestreifter Sarcoplast. — *g, g.* Seitlich mit einander verschmelzende Sarcoplasten. — *h.* Ein Sarcoplast in zwei zackenförmige Fortsätze auswachsend.

Fig. 20. Muskelfasern in weiter fortgeschrittener Entwicklung aus der Dünndarmwand eines 50 Millim. langen Flusskrebses. Vergrößerung 360.

a. Blastem mit feinen elastischen Fasern. — *b.* Sarcoplasten in der Bildung begriffen. — *c.* Mit einander verschmelzende, ausgewachsene Sarcoplasten der Längsfaserschicht angehörend, mit noch jungen Sarcoplasten in den Zwischenräumen. — *d.* Dieselben aus der Querfaserschicht.

Fig. 21. Eine ganze Entwicklungsreihe von Sarcoplasten aus der Darmwand eines jungen Flusskrebses. Vergrößerung 360.

a. Runde Bildungszelle mit Membran, homogenem oder feingranulirtem Inhalt, Nucleus und Nucleolus. — *b.* Ovale Bildungszelle mit beginnender Differenzirung des Inhalts, Nucleus und Nucleolus. — *c.* Ovale Bildungszelle mit bereits

an der inneren Zellenwand abgelagertem quergestreiftem Inhalt und schwindendem Kern. — *d.* Vollkommen gebildeter Sarcoplast spindelförmig ausgewachsen. — *e.* Sarcoplast mit zwei zackenförmigen Ausläufern an einem Ende. — *f.* Ein ähnlicher in drei Fortsätze auswachsender Sarcoplast. — *g.* Einige einfache Sarcoplasten seitlich und mit ihren Enden zusammenhängend.

Fig. 22. In der Entwicklung begriffene Muskelfasern aus der Darmwand eines 6 Centim. langen Flusskrebse, 360 Mal vergrößert.

a, a, a. Junge Sarcoplasten mit Kern und theils homogenem, theils quergestreiftem Inhalt. — *b, b, b.* Sarcoplasten mit deutlicher Querstreifung, in Verschmelzung begriffen. — *c.* Binde-substanz mit elastischen Fasern, die Stelle des Sarcolemma vertretend.

Fig. 23. Bildung der Sarcoplasten aus dem Scheerenmuskel eines jungen 5 Centim. langen Flusskrebse, 360 Mal vergrößert.

a, a. Zellenmembran. — *b, b.* Contractiler, zum Theil bereits quergestreifter Inhalt. — *c.* Kernbläschen. — *d, d.* Freie Kerne.

Fig. 24. Zwei aus einfachen, verschmolzenen Sarcoplasten zusammengesetzte Muskelfaserstücke, aus dem Schwanzstrecker eines 5 Centim. langen Flusskrebse, 360 Mal vergrößert.

A. Zwei mit einander völlig verschmolzene Sarcoplasten, mit noch deutlich sichtbarer Grenzlinie zwischen denselben.
B. Mehrere Sarcoplasten zu einer continuirlichen Substanz verschmolzen. — *c, c.* Kernbläschen.

Fig. 25. Embryonale Muskelfaser, ebendaher, 360 Mal vergrößert.

a. Junge, noch getrennte Sarcoplasten am Ende derselben. — *b.* Miteinander bereits verschmolzene Sarcoplasten. — *c, c.* Grenzlinien zwischen denselben, als dunkle nicht correspondirende Längslinien erscheinend.

Fig. 26. Eine in der Bildung und im Wachstum begriffene Muskelfaser aus dem Schwanzstrecker eines 5 Centim. langen Flusskrebse, 360 Mal vergrößert.

a. Die contractile Substanz aus zwei grösseren spindelförmigen Stücken bestehend, die an einer Stelle durch eine Verbindungsbrücke in einander fließen. Die dunkeln Linien an der Oberfläche stellen die Grenzlinien dar zwischen den einzelnen mit einander bereits verschmolzenen Sarcoplasten, aus welchen die grösseren Stücke zusammengesetzt sind. — *b.* Zurückgebliebenes Kernbläschen innerhalb der contractilen Substanz. — *c, c.* In der Bildung begriffenes Sarcolemma, die contractile Substanz in Gestalt eines Schlauches einhüllend, an dessen innerer Seite feine Fäden verlaufen. — *d.* Eine Faser aus dem gerissenen Sarcolemma hervorragend. — *f.* Ein junger, noch unreifer Sarcoplast.

Fig. 27. Fertige Muskelfaser vom Sarcolemma umgeben, ebendaher. Vergrößerung 360.

a. Contractiler Inhalt; die Grenzlinien zwischen den einzelnen Theilen als dunkle Längslinien noch sichtbar. — *b.* Sarcolemmaschlauch mit sich theilenden und netzförmig anastomosirenden Fasern. — *c.* Eine solche Faser mit der contractilen Substanz in directer Verbindung.

TAFEL IV.

Fig. 28. Baumförmig ramificirte Muskelfaser aus dem Dünndarm eines 6 Centim. langen Flusskrebse, 360 Mal vergrößert.

Fig. 29. Stücke von Muskelfasern aus dem Kiefernmuskel eines erwachsenen Flusskrebse. Vergrößerung 936.

a, a. Fleischkörnchen oder *Sarcous elements* in Gestalt von Prismen oder Cylindern, welche regelmässig neben und über einander in der homogenen einfach lichtbrechenden Grundsubstanz eingelagert sind. — *b.* Einige *Sarcous elements*, welche ihre regelmässige Anordnung durch die Präparation verloren haben.

Fig. 30. Übergang einer Muskelfaser in die Sehne, den Rückenmuskeln eines Froschjungen entnommen. Vergrößerung 936.

a. Sarcolemmaschlauch direct in die Sehnen-substanz übergehend. — *b.* Sehnenbündel, an die contractile Substanz sich anheftend. — *c.* Contractile Substanz aus ellipsoidischen oder cylindrischen Fleischkörnchen bestehend, regelmässig in der homogenen Grundsubstanz eingelagert. Durch die dunkeln Linien an der Oberfläche ist die Zusammensetzung der contractilen Substanz aus mehreren Sarcoplasten angedeutet. — *d.* Eine auf der inneren Fläche des Sarcolemma verlaufende Faser.

Fig. 31. Muskelfaserstücke aus der hinteren Extremität einer Froschlarve, 936 Mal vergrößert.

a, a. Regelmässig geordnete runde Fleischkörnchen in der einfach lichtbrechenden homogenen Grundsubstanz eingebettet. — *b, b.* Einzelne aus der Gleichgewichtslage gebrachte Fleischkörnchen.

Fig. 32. Muskelfaser eines erwachsenen Frosches aus dem *M. gastrocnemius*, 360 Mal vergrößert.

a. Contractile Muskelsubstanz. — *b, b.* Sarcolemma, auf einer Seite der Muskelfaser weit abstehend, mit feinen, häufig in blasse Kerne anschwellenden Fasern auf der inneren Fläche.

Fig. 33. Drei Muskelfasern sammt ihren Sehnenansatz, aus den Rückenmuskeln einer Froschlarve. Vergrößerung 360.

a. Contractile Muskelsubstanz, deren Zusammensetzung aus verschmolzenen Sarcoplasten durch die dunkeln Längslinien an der Oberfläche, wie auch durch die in die Sehnen-substanz hineinragenden konischen oder abgerundeten Zacken noch angedeutet ist. — *b.* Sarcolemma direct in die Sehnen-substanz übergehend. — *c.* Eine Gruppe von Bildungszellen der Sarcoplasten an Ende der Muskelfaser. — *d.* Fasern und blasse Kerne der Sehnen-substanz.

Fig. 34. Elemente der glatten Muskelfasern aus der Harnblasenwand eines Kaninchens nach 21stündiger Maceration in verdünntem Holzessig. Vergrößerung 936.

a. Spindelförmig ausgewachsener Sarcoplast oder musculöse Faserzelle, mit sehr kleinen runden Fleischkörnchen, die zerstreut in der homogenen Grundsubstanz liegen. — *b.* Musculöse Faserzelle mit sehr kleinen, dicht neben einander in Querreihen gelagerten Fleischkörnchen, fein gekerbtem Rande und mit beginnenden Zerfallen in kleine

Querstückchen. — *c.* Musculöse Faserzelle, mit regelmässig in parallelen Querreihen geordneten Fleischkörnchen in der homogenen Grundsubstanz, als Ursache der Querstreifung. Gegen die Spitze zu liegen die Fleischkörnchen weniger regelmässig und scheinen viel kleiner zu sein. — Im Inneren derselben ist ein ovaler, ursprünglich bläschenartiger, durch die Holzessigsäure körnig gewordener Kern *d.*

TAFEL V.

- Fig. 35. *A.* Querschnitt aus dem getrockneten Gastrocnemius eines 9 Centim. langen Schweinsfötus. Vergrösserung 360.
a. Perimysium. — *b.* Durchschnitte von embryonalen in der Bildung begriffenen Muskelfasern, mit einer centralen, Blastem enthaltenden Lücke und querdurchschnittenen ringsherum gelagerten Sarcoplasten innerhalb des Sarcolemma. — *c.* Durchschnitte bereits gebildeter Muskelfasern.
- B.* Ein Theil desselben Querschnittes bei 525maliger Vergrösserung, einige embryonale in der Bildung begriffene Muskelfasern und Sarcoplasten im Querschnitte darstellend. — *f. f.* Centrale Lücken, die mit Sarcoplasten noch nicht ausgefüllt sind. — *g.* Durchschnitte der an der inneren Wand des Sarcolemma bereits vollkommen differenzirten, aber noch nicht verschmolzenen Sarcoplasten, deren jeder kleine, runde Körnchen — Fleischkörnchen — in einer homogenen Grundsubstanz eingelagert zeigt. — *k, k.* Durchschnitte von Sarcoplasten mit nicht vollendeter Differenzirung ihres Inhaltes, der in der Mitte deshalb noch ganz homogen erscheint.
- Fig. 36. Querschnitt aus dem getrockneten Schenkelmuskel eines 1stägigen Hühnerembryos, 360 Mal vergrössert.
a. Sarcolemma und Muskelfasern im Querschnitte; in diesen nimmt man im Innern dicht neben einander gelagerte Fleischkörnchen wahr, mit sehr wenig homogener Grundsubstanz. — *b.* Perimysium und secundäre Muskelbündeln.
- Fig. 37. Querschnitt eines getrockneten *M. plantaris* des Menschen, 360 Mal vergrössert.
a. Sarcolemma. — *b, b.* Querschnitte von Muskelfasern mit dicht und concentrisch neben einander gelagerten Fleischkörnchen in der homogenen Grundsubstanz. — *c, c.* Querschnitte mit wenigen, durch den Schnitt etwas zerstreuten Fleischkörnchen. — *d.* Querschnitt mit künstlich erzeugten Rissen und Spalten in der contractilen Substanz. — *f. f.* Querschnitte mit theils regelmässig geordneten, theils mit dem Messer zerdrückten Fleischkörnchen.
- Fig. 38. Querschnitt aus dem *M. gastrocnemius* eines erwachsenen Frosches. Vergrösserung 360.
a. Sarcolemma. — *b.* Querschnitt einer Muskelfaser mit reihenweis und beinahe concentrisch geordneten Fleischkörnchen in der homogenen Grundsubstanz; einige von diesen liegen über dem Niveau der übrigen und scheinen stärker lichtbrechend, was wohl dem mechanischen Eingriff zuzuschreiben ist, wodurch einzelne Fleischkörnchen leicht aus ihrer Lage gebracht werden und so ihre optischen Axen eine zur Fortpflanzungsrichtung der Lichtstrahlen senkrechte Lage bekommen. — *c.* Durchschnitte mit den Contouren der Fleischkörnchen in der homogenen Grundsubstanz, einigen Kernen, aber auch mit einigen künstlich entstandenen Spalten und zerdrückten oder gequetschten Fleischkörnchen. — *d.* Durchschnitte mit Spalten und Klüftungen, welche durch die Präparation entstanden sind.
- Fig. 39. Querschnitt aus dem getrockneten Hinterschenkel (Springfuss) einer Feldheuschrecke (*Acridium stridulum*). Vergröss. 360.
a. Sarcolemma. — *b, b, b.* Durchschnitte der Muskelfasern mit regelmässig in concentrischen oder wellenförmigen Linien geordneten Fleischkörnchen in homogener Grundsubstanz.
- Fig. 40. Querschnitt aus dem Schwanzstrecker eines jungen Flusskrebses, 360 Mal vergrössert.
a. Secundäre und primäre Muskelbündel aus noch gesonderten Sarcoplasten bestehend. — *b.* Einzelne Sarcoplasten am Rande des Präparates, deren Contouren noch deutlich sichtbar sind. — *c.* Sarcolemma. — *d, d.* Durchschnitte von Muskelfasern mit grösstentheils verschmolzenen Sarcoplasten und deutlich wahrnehmbaren Fleischkörnchen in der homogenen, einfach lichtbrechenden Grundsubstanz. (Die Längsansicht solcher Muskelfasern findet sich auf Taf. III, Fig. 25 abgebildet.)

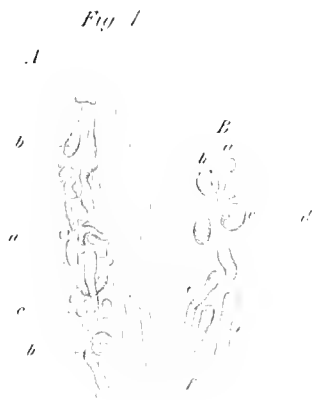


Fig. 2



Fig. 3



Fig. 6



Fig. 5



Fig. 4



Fig. 9

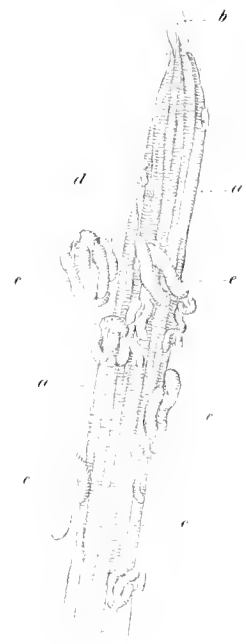
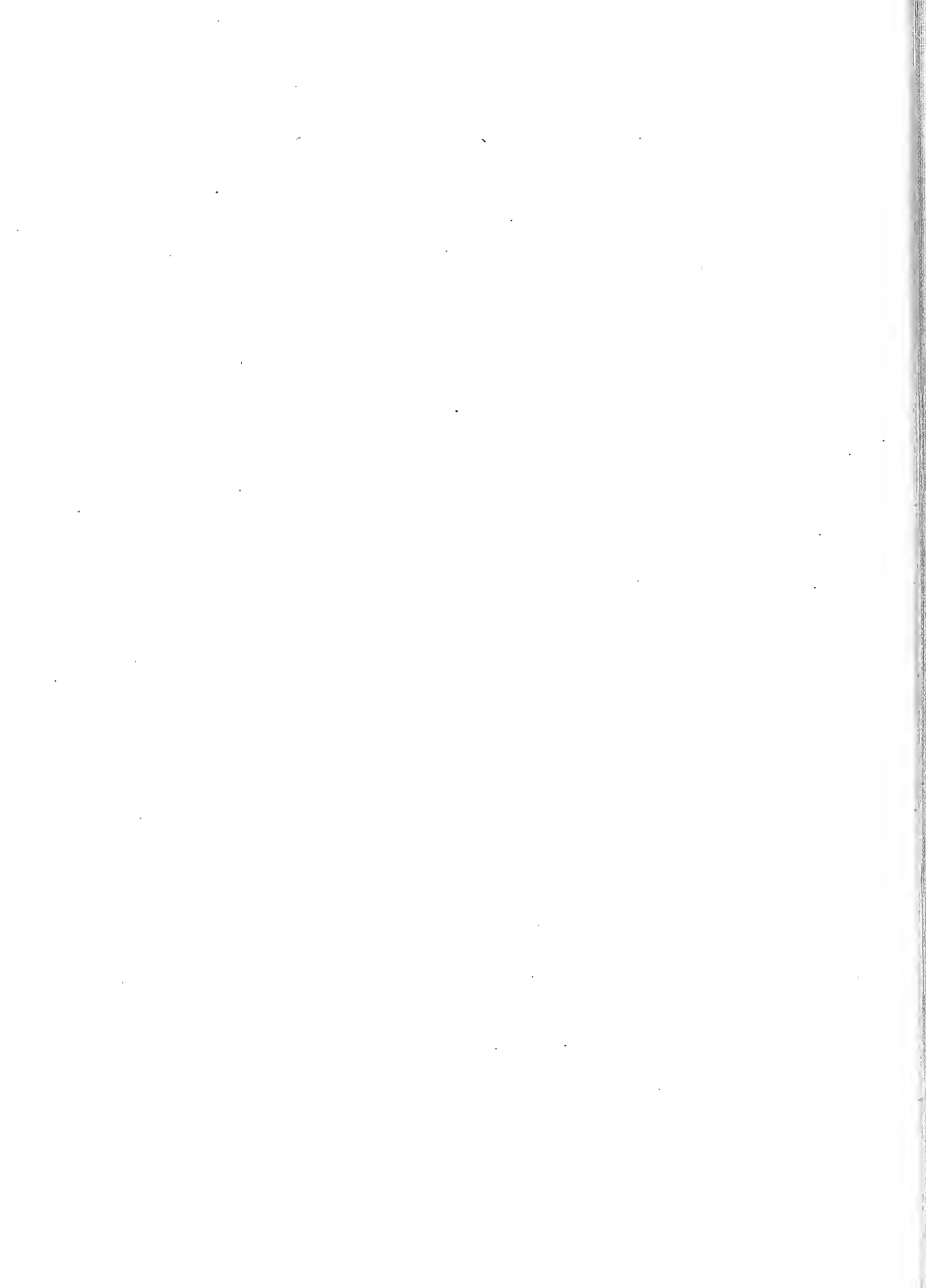


Fig. 8



Fig. 10





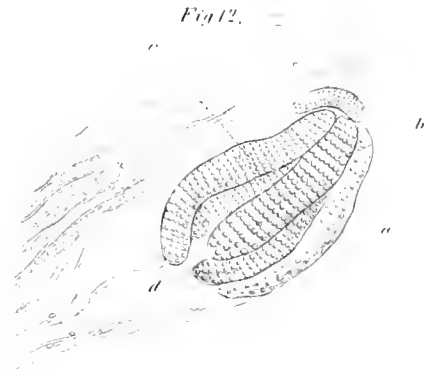


Fig. 13.

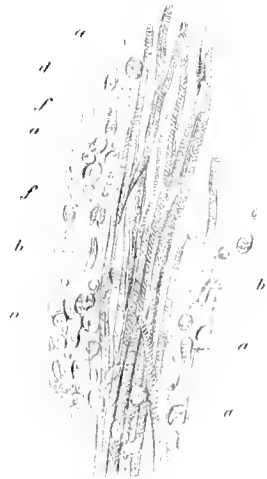


Fig. 15.



Fig. 16.

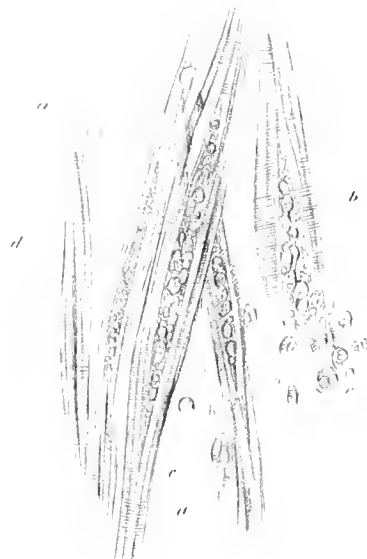


Fig. 18.





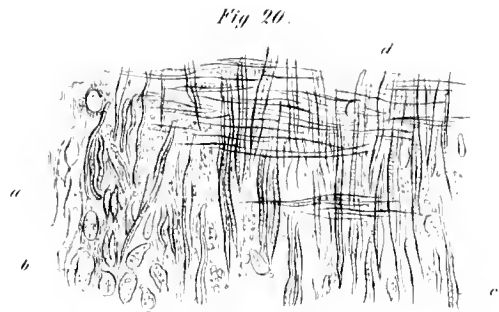


Fig. 22.

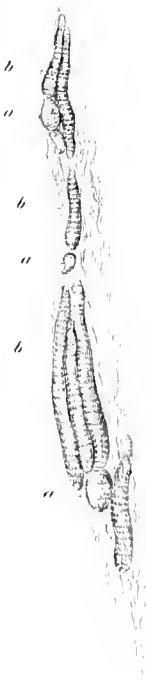


Fig. 21.



Fig. 26.

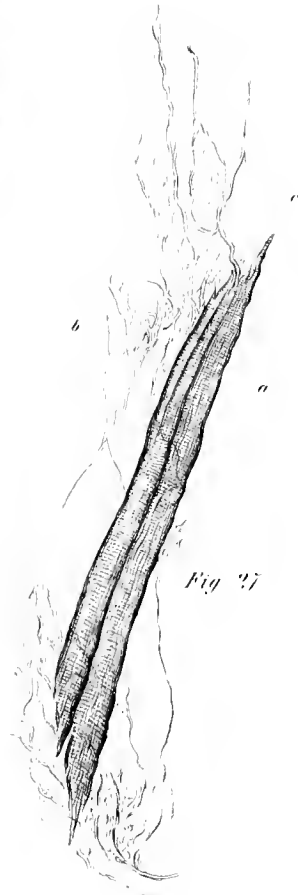
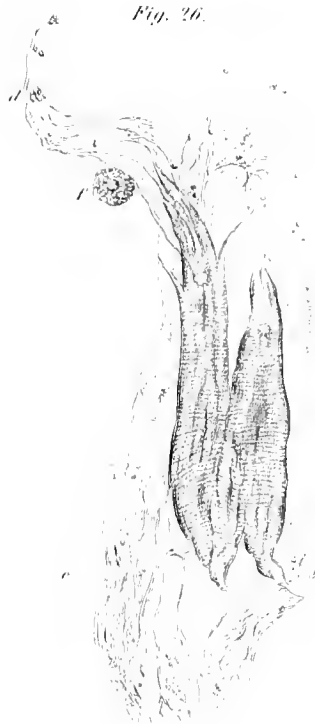


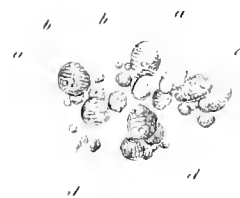
Fig. 27.



Fig. 29.



Fig. 23.



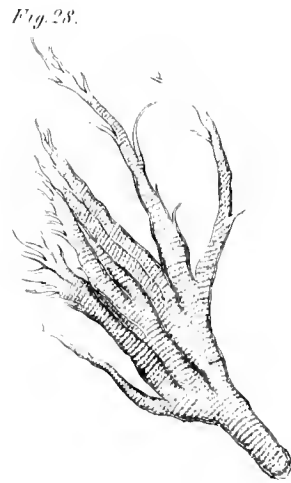


Fig. 33.



Fig. 32.

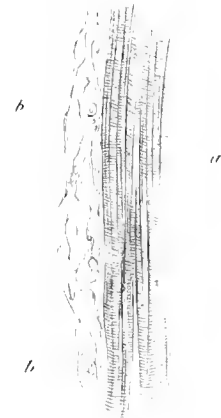


Fig. 29.

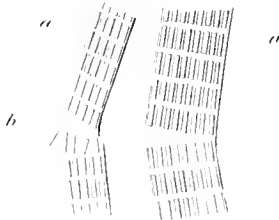


Fig. 34.





Fig. 35.

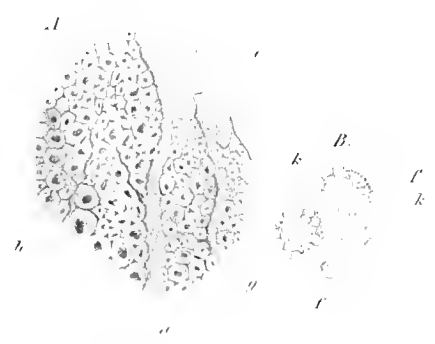


Fig. 36.



Fig. 37.

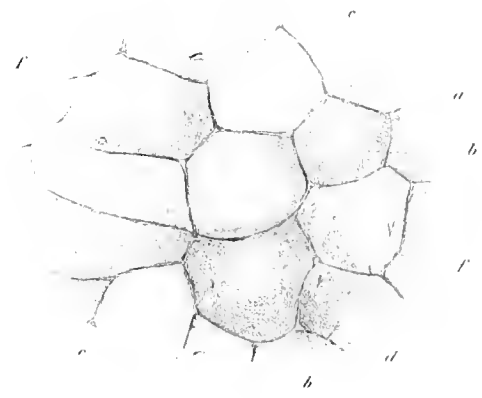


Fig. 39.

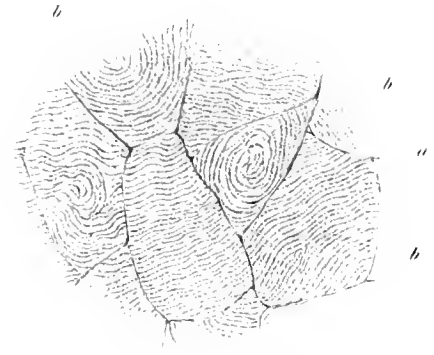


Fig. 38.

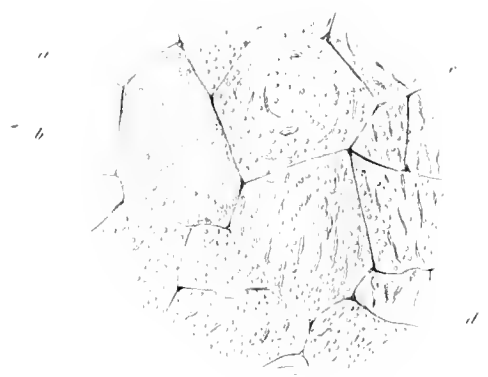
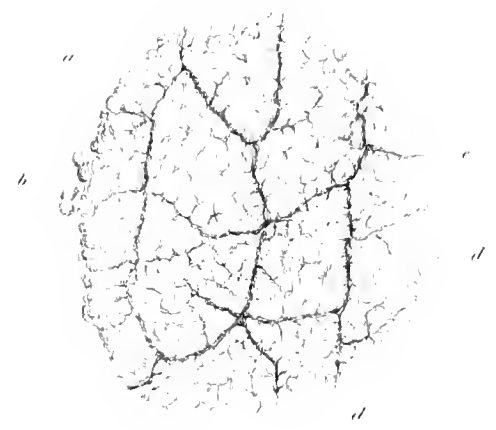
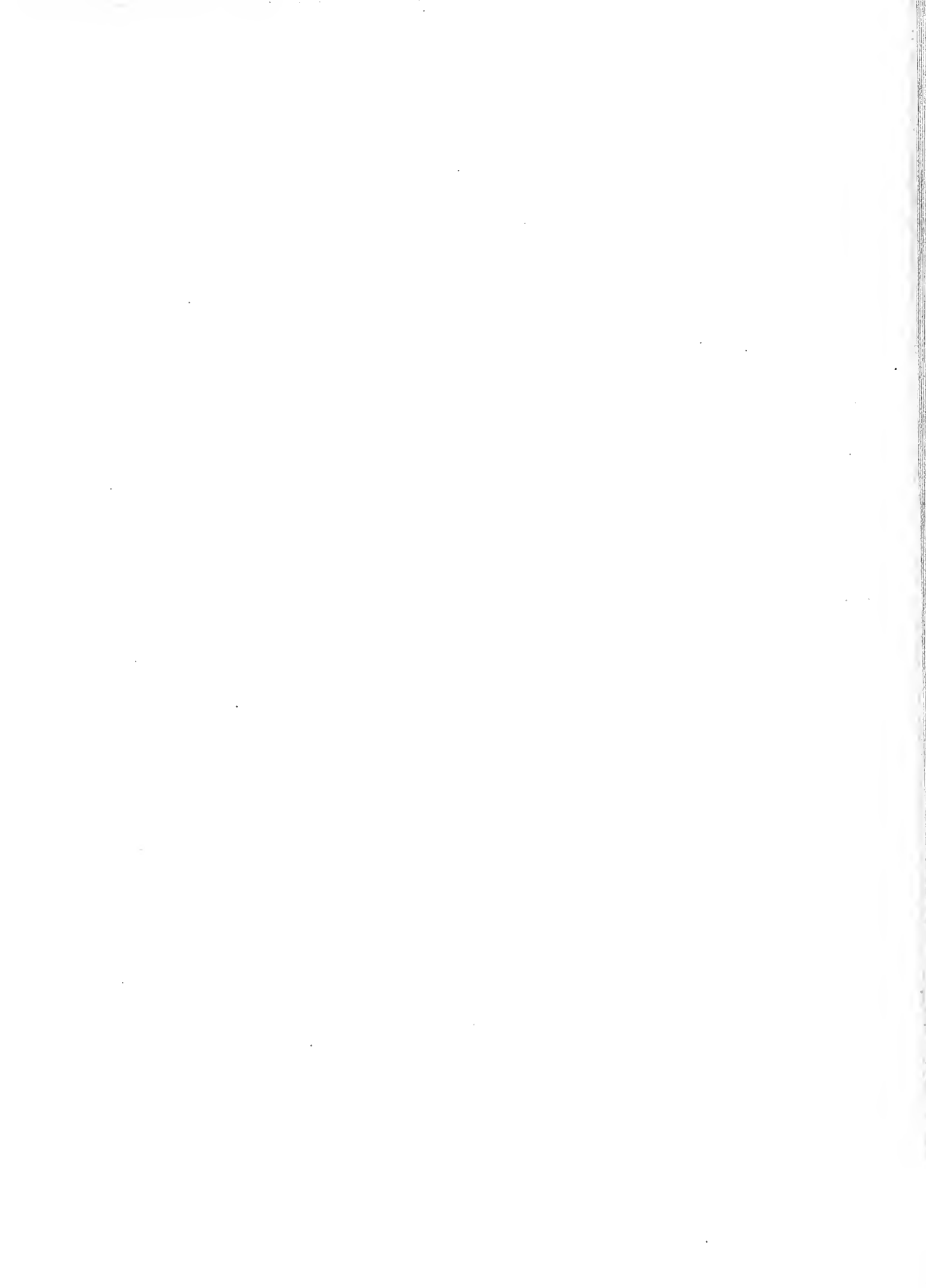


Fig. 40.





DIE MUSCULATUR

AM BODEN DES WEIBLICHEN BECKENS.

VON

DR. HUBERT LUSCHKA,

PROFESSOR DER ANATOMIE IN TÜBINGEN

(Mit 4 Tafeln.)

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 1. NOVEMBER 1858.

Die vielfachen Analogien, welche in der fundamentalen Gestaltung der Bestandtheile am Boden des männlichen und des weiblichen Beckens obwalten, finden auch im Systeme der hierher gehörigen Muskeln ihren Ausdruck. Bei einem richtigen und allseitigen Verständnisse der betreffenden, im Allgemeinen mächtigeren Musculatur des Mannes, hat die Deutung der bezüglichen Verhältnisse des Weibes allerdings nicht die mindeste Schwierigkeit. Eine vollkommene Übereinstimmung findet jedoch keineswegs statt; im Gegentheil existiren mitunter so specifische, qualitative Differenzen, dass eine gesonderte Betrachtung unter keinen Umständen unterbleiben darf.

Die bisherige Lehre von den Muskeln am Boden des weiblichen Beckens ist in hohem Grade unzulänglich und zum Theil so widersprechend, dass sie augenscheinlich nicht in allen Punkten das Ergebniss objectiver Nachforschungen, zum Theil vielmehr das Resultat der blossen Übertragung dessen darstellt, was vom männlichen Körper angenommen worden ist, oder was der eine und der andere Schriftsteller nach seinem subjectiven Ermessen als geschlechtliche Eigenthümlichkeit sich — ausgedacht hat. Ein Blick auf einige in der Literatur niedergelegte Angaben dürfte genügen, um einerseits unsere Aussage zu bekräftigen, andererseits das Unternehmen zu rechtfertigen, welches wir im Nachfolgenden auszuführen gedenken.

Während einige Schriftsteller bei der Beschreibung z. B. des Aferhebers nicht einmal die nach dem Geschlechte einigermaassen wechselnde Lagebeziehung dieses Muskels berücksichtigen, machen andere zwar specielle, aber theilweise ganz entgegengesetzte Mittheilungen.

Im Widerspruche mit allen andern Erfahrungen sagt z. B. J. E. Pétrequin¹⁾ vom *Levator ani* des Weibes: seine Fasern verlaufen concentrisch und gruppiren sich um den Mastdarm, indem sie sich mit denen des *Constrictor cunni* vereinigen, und er spalte sich nach vorn, um die Scheide zu umgeben. Mit der grössten Entschiedenheit erklärt dagegen J. Cruveilhier²⁾, dass nicht eine einzige Fibrille jenes Muskels sich zu diesem Organe begeben. Vom tiefen queren Dammmuskel wurde bald behauptet, dass er dem Weibe gänzlich fehle, bald, dass er mit dem oberflächlichen mehr oder weniger verschmolzen sei. Der sogenannte *Constrictor cunni* hat eine sehr verschiedene Auffassung gefunden. Er wurde bald nur als Abschnitt des *Sphincter ani externus*, bald als ein durchaus selbstständig entspringender Muskel, auch wohl als eine Combination eines solchen mit Bündeln vom *Sphincter ani externus* und *transvers. perinaei superfic.* betrachtet. Über den sogenannten *Musc. Wilsonii* und über den *Constrictor urethrae* ist einfach dasjenige auf die weibliche Harnröhre übertragen worden, was man in Betreff der *Pars membranacea* des Mannes in Erfahrung gebracht hat. Einige andere muskulöse Bestandtheile aber, welche wir des Näheren beschreiben werden, haben sich der bisherigen Beobachtung entweder gänzlich entzogen, oder sie haben in diesem oder jenem Schriftwerke doch jedenfalls eine nur unbestimmte Andeutung gefunden.

Die Muskeln, deren specielle Schilderung den Hauptinhalt der folgenden Erörterungen bilden wird, gruppiren wir nach ihren nächsten und hauptsächlichsten physiologischen Beziehungen als solche, welche 1. dem After, 2. den äusseren Schamtheilen und der Scheide, 3. der Harnröhre, 4. dem Damme zukommen.

I. Die Muskeln des Afters.

Das Ende des Mastdarmes steht mit einer, theils dem Willenseinflusse unterthänigen, theils sogenannten glatten Musculatur in Beziehung. Die willkürlichen Muskeln sind der Heber und der äussere Schliesser des Afters. Diese werden von einigen Autoren ganz mit Unrecht als physiologisch zusammengehörig, d. h. als einiger Muskel betrachtet. Von Cruveilhier³⁾ wird in dieser Hinsicht die Bemerkung gemacht: „*Les releveurs et le sphincter de l'anus constituent un seul et même muscle median*“. Heber und Schliesser des Afters lassen sich, wie wir zu beweisen im Stande sein werden, in keiner Beziehung als zusammengehörig betrachten. Dagegen muss, in sofern man den Afterheber für eine Art von Diaphragma ansehen will, der *Musc. coccygeus* als eine Ergänzung desselben aufgefasst werden. Entschieden müssen wir auch der Meinung derjenigen entgegentreten, welche den Afterheber mit dem *Musc. mylo-hyoideus* in Parallele stellen. Wenn man sich in der Aufsuchung von Analogien gefällt, wird es nicht schwer sein sich davon zu überzeugen, dass der *Musc. transv. perinaei profundus* dem *mylo-hyoideus* entspricht, dass dagegen der *Levator ani* nur mit dem *Musc. buccinatorius* verglichen werden kann.

Von organischer Musculatur besteht am Ende des Mastdarmes, ausser dem *Sphincter ani internus* und der dahin stattfindenden Fortsetzung der Längsfaserschichte des *Rectum* ein

¹⁾ J. E. Pétrequin. Lehrbuch der medicinisch-chirurgischen Anatomie. Übertragen von E. v. Gorup.-Besanez. Erlangen 1845, S. 269 u. 289.

²⁾ J. Cruveilhier, *Traité d'anatomie descriptive*, Paris 1831, Tome III, pag. 727.

³⁾ A. a. O. Bd. III, pag. 661.

kleiner Muskel, welcher meines Wissens zuerst von W. Treitz³⁾ als *Musc. recto-coccygeus* beschrieben worden ist.

1. Der Afterheber.

Der *Levator ani* ist ein dünner, fast membranöser, aus zwei symmetrisch gebildeten Seitenhälften bestehender Muskel, welcher hauptsächlich die fleischige Grundlage des Bodens der kleinen Beckenhöhle darstellt. Seine platten Bündel sind gewöhnlich nur lose unter einander verbunden, und begrenzen selbst da und dort bisweilen grössere Spalten, die von fett-haltigem Zellstoffe erfüllt sind. Alle nehmen eine schräge Verlaufsrichtung von oben nach unten und hinten an, nicht aber ziehen sie radienartig zum Ende des Mastdarmes herab, wie dies von Einigen angenommen wurde der Vorstellung zu Liebe, als bilde der *Levator* einen Trichter, als dessen Spitze der After anzusehen sei. Obgleich es nicht richtig ist, dass die Bündel des Muskels einen zur Circumferenz der Analöffnung convergirenden Lauf haben, so kann man sich andererseits doch leicht davon überzeugen, dass sie mehr und mehr im Herabsteigen sich von der Seitenwand des Beckens entfernen und medianwärts dahinziehen. Das untere Ende des Muskels liegt durchschnittlich 3·5 Centim. einwärts von einer Senkrechten, die von der Mitte der *Linea terminalis* abwärts gezogen worden ist. In dem Verhältnisse, als die Seitenwand des kleinen Beckens beim wohl gestalteten Weibe niedriger ist als beim Mann, ist auch die Höhe des Afterhebers merklich geringer als bei diesem.

Bei einer einlässlicheren Untersuchung des Afterhebers müssen wir seinen Ursprung, seinen Verlauf und seine Endigung in besondere Betrachtung ziehen (vgl. Taf. I).

Der Ursprung des Muskels hat hauptsächlich theils an Knochen, theils an der Binde des kleinen Beckens statt. Der von Knochen geschehende Ursprung gehört zum grössten Theile dem horizontalen Aste des Schambeines an, und beginnt hier in geringer, kaum 1·5 Centim. betragender Entfernung von der Mittellinie des Schossgelenkes. Er ist durchschnittlich zwei Querfinger breit und liegt 3·5 Centim. unter dem oberen Rande des horizontalen Schambeinastes. Zum kleineren Theile, nämlich nur in der Breite von 0·5 Centim., gehört er der inneren Seite des Sitzbeinstachels an, und liegt hier unmittelbar nach vorn von der Anheftung des *Musc. coccygeus*.

Der von der Binde des Beckens aus stattfindende Ursprung geschieht meist in einer exquisit halbmondförmig ausgeschweiften Linie, deren tiefster Punkt 5·5 Centim. unter der *Linea terminalis* des Beckens gelegen ist. Dieser bogenförmige Ursprungsrand des Muskels hängt dadurch innig mit dem Gewebe der *Fascia pelvina* zusammen, dass die Fleischbündel mit einer Sehnensubstanz beginnen, welche in das Gewebe jener Binde ausstrahlt und dasselbe verstärkt. Nach unten von diesem Übergange spaltet sich das durch jene Faserung verstärkte fibröse Blatt in eine Lamelle, welche an der oberen, und in eine, welche an der unteren Fläche des Muskels ihre Ausbreitung findet. Ein unmittelbarer Zusammenhang des Afterhebers mit dem sogenannten *Arcus tendineus* der Beckenbinde findet mindestens nicht regelmässig statt. Diese, eine streifenartige Verdickung jener Binde, oder eine leistenartig gegen die Beckenhöhle hereinspringende Duplicatur derselben darstellende Bildung, entspricht sehr gewöhnlich der Anheftung nicht, sondern zieht zum Theil über die obere Fläche des

1) Vierteljahresschrift für die praktische Heilkunde. Prag 1853. Bd. I, S. 124.

Muskels hinweg und kann dann von diesem, ohne Beeinträchtigung seiner Faserung, abpräparirt werden.

Man muss es, wenn auch nicht als Regel, doch als ein sehr häufiges Vorkommen bezeichnen, dass einzelne Bündel des Afterhebers noch von zwei andern Stellen aus ihren Ursprung nehmen. Einige gewinnen nämlich ihren Abgang von der Aussenseite des *Lig. pubo-vesicale laterale*. Bisweilen geschieht es, dass Fibrillen dieses Ursprunges sich nach aufwärts schlagen und gemischt mit den Elementen des sogenannten *Musc. pubo-vesicalis* in den *Detrusor urinae* übergehen, aber sicherlich schon ihrer Zartheit und höchst geringen Anzahl wegen, keinerlei functionelle Bedeutung haben. Nicht minder unregelmässig ist eine Portion, welche, wie schon J. Müller¹⁾ in Übereinstimmung mit Santorini²⁾ meldet, vom aufsteigenden Aste des Sitzbeines entspringt, und sich in zwei Bündel scheidet, wovon das eine über dem *Musc. transvers. perinaei superfic.* rückwärts und über dem *Sphincter ani externus* am After vorbeigeht, das andere schief rückwärts vor den After gelangt, um hier zu endigen.

In Betreff ihres Verlaufes hat man vor allem zu bemerken, dass die vom Schambeine, und die etwa von dem *Lig. pubo-vesicale laterale*, so wie vom aufsteigenden Sitzbeinaste entspringenden Bündel des Afterhebers neben der Scheide herabziehen, aber an diese durch einen kurzen straffen Zellstoff jedoch so angeheftet sind, dass man sich bei einer sorgfältigen, von der Beckenhöhle aus anzustellenden Präparation darüber versichern kann, dass nicht ein einziges Bündel in der Wandung der Scheide sein wirkliches Ende findet. Diese Thatsache ist schon von B. S. Albin³⁾ erkannt worden, von welchem in dieser Beziehung gesagt wird: „*Idem (i. e. Levator ani) antequam ad rectum perveniat, secundum vaginam inferiore parte sua incedit, eique tam pertinaciter adnectit, ut inserere putares*“. Diese Ansicht wird von den meisten Beobachtern vollkommen getheilt. Andere aber scheinen nicht zur gleichen Überzeugung gelangt zu sein. Bei C. Fr. Th. Krause⁴⁾ finde ich die Angabe: die Muskelbündel des *Levator ani* heften sich auch an die Wand der Scheide, welche sie erweitern (!) können bei der Ausleerung des Harns und bei der Begattung. Noch viel weniger stimmt die folgende von Jarjavay⁵⁾ abgegebene Äusserung mit einer naturgemässen Zergliederung überein. „*Le releveur de l'anus ne present chez la femme de particulier que son insertion sur le col de la vessie, le vagin, le rectum*“. Ich habe schon oben bemerkt, dass Cruveilhier gerade das Gegentheil hiervon bemerkt, indem er auf das Bestimmteste versichert: „*Le releveur ne fournit aucune fibre au vagin; ses fibres s'infléchissent sur les côtés de ce canal qu'ils croisent en se portant d'avant en arrière*“.

Die neben der Scheide herablaufenden Bündel des *Levator ani* schneiden deren Axe unter einem fast rechten Winkel, und es kann daher nicht wohl davon die Rede sein, dass dieser Schlauch durch jenen Muskel gehoben werde. Die Scheide kann im günstigsten Falle, bei starker Contraction des Afterhebers, der vorderen Beckenwand angenähret, auch wohl von beiden Seiten her einigermaassen comprimirt werden.

Die Gesamtheit der dem Afterheber angehörigen Muskelbündel scheidet sich, während ihres schrägen Verlaufes nach abwärts-rückwärts, unter spitzem Winkel in zwei Abschnitte von

¹⁾ Über die organischen Nerven der erectilen männlichen Geschlechtsorgane. Berlin 1836. S. 10.

²⁾ J. Dominici Santorini Septemdecim tabulae. Edit. M. Girardi. Parnae 1775. Tab. XVI. Fig. 1 *h*.

³⁾ B. S. Albini, Historia musculorum hominis. Edit. Jo. Jac. Hartenkeil. Bambergae 1796. pag. 296.

⁴⁾ Handbuch der menschlichen Anatomie. 2. Aufl. Hannover 1843. S. 711.

⁵⁾ J. F. Jarjavay. Traité d'anatomie chirurgicale. Paris 1854. Tome II. pag. 549.

sehr ungleicher Grösse, von welchen der eine vor den Mastdarm, der andere an den seitlichen und hinteren Umfang desselben zu liegen kommt.

Die an die vordere Seite des Mastdarmes herabtretende Portion des *Levator* ist ein plattes, nur wenige Linien breites, bogenförmiges, mit der Convexität des Bogens nach unten und hinten gerichtetes Bündel, dessen tiefst gelegener Punkt sich 1·2 Cent. über der Afteröffnung befindet. Dieses Bündel entspricht nicht den innersten, den vorderen Rand des *Levator* bezeichnenden Fasern, sondern stellt die Fortsetzung von solchen dar, die ein wenig weiter nach aussen entspringen. Sie kreuzen sich daher mit den vorderen Bündeln der weiter rückwärts verlaufenden Portion. Diesem zwischen Mastdarm und Scheide gelagerten höchst unbedeutenden Abschnitte des *Levator* kann man kaum irgend welche bemerkenswerthe Function zuerkennen.

Beim männlichen Geschlechte hat dagegen die vor dem Mastdarme befindliche Partie des *Levator ani* eine ganz spezifische und zwar eine doppelte Bedeutung. Man unterscheidet hier ein starkes, plattes, bogenförmiges Bündel, welches den unteren Umfang der Vorstehdrüse zwingenartig umfasst und dieser Beziehung nach füglich als „*Pars prostatica*“ des Afterhebers aufgeführt werden kann. Es ist schon von Albin¹⁾ beobachtet und von ihm als *Compressor prostaticae* bezeichnet worden. Bei Winslow²⁾ figurirt es unter dem Namen *Muscle prostaticque inferieur*, während Santorini es für passend gefunden hat dasselbe *Adductor prostaticae* zu nennen. Am vorderen, concaven Rande dieses Muskelbündels treten einige Fasern ab, welche theils unmittelbar, theils mit solchen der anderen Seite, nachdem sich diese Bestandtheile des *Musc. transv. perinaei profundus* unter der *Pars membranacea* gekreuzt haben, neben diesem Stücke der Harnröhre medianwärts in die Höhe steigen und sich sehnig an der oberen Grenze der *Aponeurosis perinealis* in deren Gewebe endigen. Ich³⁾ habe diese musculöse Bildung nicht sowohl der Wirkung, als ihrer Lagebeziehung wegen „*Pars urethralis*“ des Afterhebers genannt.

Der an den hinteren Umfang des Mastdarmes gelangende Abschnitt des *Levator ani* verhält sich in beiden Geschlechtern vollkommen übereinstimmend, und lassen sich an ihm jederzeit dreierlei Faserzüge unterscheiden. Der hinterste, kleinste Faserzug heftet sich sehnig an die vordere Fläche des vierten Steissbeinstückes; die Bündel beider Seiten fliessen jedoch hier in der Mittellinie nicht zusammen, sondern lassen eine schmale rinnenartige Vertiefung zwischen sich, in welcher ein aus dem *Ganglion coccygeum* des Sympathicus entspringendes, mit Elementen des *Nervus coccygeus* verbundenes Nervenchen nebst einem Zweige der *Arteria sacralis media* verlaufen, die eine kleine, nach vorn von der Steissbeinspitze gelegene Öffnung durchsetzen, um in der Steissdrüse sich auszubreiten. Ohne Ausnahme habe ich an jenem Nervenchen unmittelbar unter der Spitze des Steissbeines einige Pacini'sche Körperchen vorgefunden. Der mittlere Faserzug geht in Sehnenbündel über, welche vor der Spitze des Steissbeines mit entsprechenden der anderen Seite zu einer sehnigen Platte zusammenfliessen. Diese ist 0·9 Cent. lang, 1 Cent. breit und besteht hauptsächlich aus quer verlaufenden, zum kleineren Theile aus gekreuzten Fasern, welche mit eben so vielen Muskel-

1) A. a. O. Lib. III, cap. 98.

2) J. B. Winslow. Exposition anatomique de la structure du corps humain. Amsterdam 1743. Tome IV, pag. 53.

3) H. Luschka. Über den vorderen inneren Theil des Afterhebers beim Manne. Zeitschr. für rationelle Medicin. 3. R. Bd. IV, Taf. IX.

bündelchen zusammenhängen. Es ist also jene Sehnenplatte kein selbstständiges ligamentöses Gebilde, sondern ein integrierender Bestandtheil des Afterhebers selbst. Der vordere, umfangreichste Faserzug fliesst mit den Bündeln der anderen Seite hinter dem Mastdarme, ohne sehnig zu werden, zusammen. Die höher gegen das Steissbein zu gelegenen Bündel sind platter und dünner und sie betheiligen sich an dem schief nach vorwärts abfallenden, zwischen Steissbein und Mastdarm befindlichen Abschnitte des Bodens der Beckenhöhle. Sie liegen unter der unteren hinteren Curvatur des Mastdarmes und stützen diese von unten her. Die tiefer gelegenen Bündel sind stärker und mehr zusammengedrängt. Sie bilden mit jenen der anderen Seite einen 0.6 Centim. hohen, schleuderartig den hinteren Umfang des Mastdarmes umziehenden Streifen, der sich unmittelbar an den *Sphincter ani externus* anschliesst und hauptsächlich die Wirkung auf das *Rectum* auszuüben vermag. Eines oder das andere Bündel dieser letzteren Portion kreuzt sich gewöhnlich mit einer von denjenigen Fasern des äusseren Afterschliessers, welche sich an die Spitze des Steissbeines anheften, während dagegen ein Bündel des *Sphincters* sich in jenen schleuderförmigen Zug des *Levator* fortsetzt.

Ausser den bisher beschriebenen Faserzügen des Afterhebers lassen sich noch einige wenige Bündelchen dieses Muskels nachweisen, die aus seinen tieferen Schichten hervortreten, und zwischen den oberflächlichen Bündeln der Längsfaserschichte des Mastdarmes bis in das die Aftermündung umgebende Unterhautzellgewebe herab verfolgt werden können. Die Existenz solcher longitudinal verlaufender Bestandtheile des *Levator ani* wird ganz mit Unrecht von manchen Autoren in Frage oder auch wohl gänzlich in Abrede gestellt.

Die Wirkungsweise des Afterhebers ist verschieden beurtheilt worden. Von der alt hergebrachten Vorstellung, nach welcher der *Levator ani* schon von A. Vesal „*musculus sedem attollens*“ genannt worden ist, glaubten einige Schriftsteller sich lossagen zu müssen. Cruveilhier¹⁾ z. B. nimmt keinen Anstand zu behaupten: „*Le releveur est un muscle constricteur de l'anus comme le sphincter.*“ Diese Meinung ist inzwischen gänzlich irrig; der *Levator ani* hebt den Mastdarm allerdings nicht in der Richtung von dessen Axe, sondern er zieht denselben, in sofern er auf ihn unmittelbar einwirkt, nach vorwärts -aufwärts gegen die vordere Beckenwand hin, so dass die Analöffnung nach rückwärts gewendet und zugleich die hintere Wand jenes Darmes der andrängenden Kothsäule entgegen gebracht und schliesslich über diese hinweggeschoben wird. Die sich der Ringfaserhaut des Mastdarmes beigesellenden Bündel haben eine dieser entsprechende, ihrer kleinen Anzahl und Schwäche wegen jedoch nur untergeordnete Wirkung; der grösste Theil der hinter dem Mastdarm herabtretenden, theils sehnig, theils fleischig von beiden Seiten her sich vereinigenden Fasern haben auf das *Rectum* keinen directen Einfluss, sondern sie stellen den schief abfallenden Boden des Beckens, eine Art von *Obturator* dar, welcher durch eigene Contraction aus jeder Lageveränderung wieder in seine frühere Stellung zurückkehren kann.

2. Der äussere Afterschliesser.

Dieser Muskel hat beim weiblichen Geschlechte eine doppelte Bedeutung, indem er nicht allein die Afteröffnung umkreist, sondern auch die äussere Geschlechtsregion umzieht. Er

¹⁾ A. a. O. Bd. III. pag. 667.

besteht theils aus ringförmigen, nur dem Anus angehörigen, theils aus 8-förmigen Bündeln, welche diesen und den Schamtheilen gemeinschaftlich sind.

Die den After ausschliesslich umziehenden ringförmigen Bündel sind elliptisch gekrümmt. Sie legen sich unmittelbar um das untere Ende der Längsfaserschichte herum und grenzen nach unten an denjenigen Bezirk der Haut an, welcher den Übergang in die *Mucosa* des Mastdarmes bildet. Einige wenige Bündelchen der Längsfaserschichte setzen häufig durch diese Ringfasern hindurch, um unterhalb von diesen mit sehnigen Enden sich im Gewebe der Haut zu inseriren.

Die nach aussen von dieser Portion gelagerten Bündel des Sphincter fliessen hinter dem Mastdarme unter spitzem Winkel, nachdem sich einige derselben vorher gekreuzt haben, zusammen und gehen in einen platten, sehnenartigen Streifen über, welcher sich an die hintere Fläche des vierten Steissbeinstückes anheftet. Vor dem Mastdarme erfahren die Fleischbündel eine mehrfache Durchkreuzung. Aus dieser Decussation geht jederseits ein stärkeres Bündel hervor, welches sich an den inneren Rand des *Constrictor cunni* anlegt, auf den Rücken der *Clitoris* gelangt und sehnig mit dem der andern Seite zusammenfliesst. Ein zweites viel schwächeres Bündel begibt sich zur Haut an der vorderen Grenze des Dammes und vermag die Commissur der grossen Schamlippen nach rückwärts hin anzuspannen.

3. Der Rückwärtszieher des Afters.

Dieser aus contractilen Faserzellen bestehende, von Treitz als *Recto-coccygeus s. Retractor recti* zuerst beschriebene Muskel ist nach dem genannten Autor hauptsächlich dazu bestimmt, die Mastdarmwand im Beckenausgange zu fixiren. Ohne Zweifel wurde dieser Muskel gleichzeitig auch von O. Kohlrusch¹⁾ gefunden, der ihn mit dem Namen *Tensor fasciae pelvis* belegt, jedoch irrthümlich gelehrt hat, dass seine Fasern quergestreift seien. Die letztere Angabe rührt wahrscheinlich davon her, dass durch die bisweilen lebhaft braunrothe Färbung des, inzwischen gewöhnlich sehr blassen, Muskels das blosse Auge getäuscht und die mikroskopische Untersuchung, welche nach meiner eigenen wiederholten Revision nur glatte Muskelfasern nachweist, von Kohlrusch unterlassen worden ist. Dass aber beide Autoren den gleichen Muskel vor Augen gehabt haben, geht aus der Vergleichung der beiderseitigen Beschreibung ganz unzweideutig hervor. Nach Treitz zieht vom Steissbeine zur hinteren Mastdarmwand ein blasser Muskelstreifen von beiläufig 1 Zoll Länge, $\frac{1}{2}$ Zoll Breite, 1 Linie Dicke. Er entspringt vom Periost des Steissbeines, liegt zwischen Steissbein und Mastdarm in seinem ganzen Verlaufe auf der Kreuzungsstelle des Afterhebers. Am Mastdarm gehen seine Fasern theils zur Längsschicht, theils durchsetzen sie diese und gehen zur Kreis-schicht, indem sie den *Sphincter ani internus* verstärken. Den Mittheilungen von Kohlrusch zufolge entspringt von der vorderen Fläche des Steissbeines, meistens vom zweiten oder dritten, seltener vom ersten Steissbeinwirbel ein plattes, dünnes Muskelstratum mit longitudinalem Faserverlauf. Es verliert sich in der *Fascia pelvis* am hinteren Umfange des Mastdarmes und ist von dem unter ihm liegenden *Levator* leicht zu unterscheiden, da seine Fasern in der Richtung vom Steissbeine zum After laufen.

¹⁾ O. Kohlrusch. Zur Anatomie und Physiologie der Beckenorgane, Leipzig 1854, S. 51.

Ich habe den in Rede stehenden Muskel bisher regelmässig und zwar bei beiden Geschlechtern in einer ganz übereinstimmenden Anordnung gefunden (vgl. Taf. II *i, i*).

Er besteht im Wesentlichen aus zwei, 0·3—0·4 Centim. breiten, platten Seitenhälften, welche an der vordern Fläche des Steissbeines unter einem spitzen Winkel zusammenfliessen, in der Richtung nach vorn aber so divergiren, dass jedes Bündel an den seitlichen Umfang des Mastdarmes gelangt. Der Muskel hat also im Ganzen die Gestalt eines V, dessen offenem Winkel die hintere Seite des *Rectum* zugekehrt ist. Seine Lage hat er über demjenigen Abschnitte des *Levator ani*, welcher zwischen dem Mastdarm und dem Steisse den Boden der Beckenhöhle darstellt. Das winkelförmige hintere Ende des Muskels bildet seinen Ursprung, der sowohl von dem *Ligamentum sacro-coccygeum antic.*, als auch vom zweiten Steissbeinstücke geschieht. Das Ende jenes Bandes, welches ich¹⁾ zuerst beschrieben habe, bildet mit dem Steissbeine eine Nische, in welche der Winkel jenes Muskels mehr oder weniger tief eingeschoben ist. Die oberflächlichen Schichten des Ligamentes bilden den hinteren Ursprung der *Fascia pelvina*, welche in ihrem Verlaufe von hier aus diesen Muskel vollständig bedeckt.

Während des Verlaufes nach vorn und aussen wird eine jede Seitenhälfte des Muskels breiter und dünner. Die sehr zart und blass gewordenen Bündel fallen fächerartig auseinander und verlieren sich theils zwischen die Längsfasern des Mastdarmes eindringend, theils endigen sie im Gewebe des zur Analöffnung herabtretenden Abschnittes der *Fascia pelvis*. Es kann demnach kein Zweifel obwalten, dass sowohl die Ansicht von Treitz richtig ist, dass der Muskel den Mastdarm gegen den Steiss heranzuziehen vermag, als auch die Angabe von Kohlrausch, dass er die Beckenbinde anzuspannen im Stande ist.

Zu wiederholtenmalen habe ich über der Theilungsstelle dieses Muskels in seine beiden Seitenhälften aus organischen Muskelbündeln bestehende Bogenfaserzüge gefunden, deren Convexität dem Steissbeine zugekehrt war, und deren Schenkel seitlich in das Gewebe der *Fascia pelvis* ausgestrahlt sind.

4. Das Ende der Längsfaserschichte des Mastdarmes.

Über das Verhalten der longitudinalen Muskelschichte zum Ende des Mastdarmes hat schon Treitz²⁾ eine genauere Kenntniss begründet, als man sie früher erlangt hatte, indem von ihm nachgewiesen wurde, dass dieselbe nicht am *Levator ani* aufhört, sondern dass sie sammt den neu hinzugetretenen Fasern in elastische Sehnen übergeht, die bis an's subcutane Bindegewebe der Aftergegend reichen, und sich hier inseriren. Dessgleichen wurde gezeigt, dass die sogenannten *Columnae Morgagnii* keine reinen Schleimhautfältchen sind, sondern zu ihrer Grundlage wesentlich musculöse Faserzellen enthalten. Die Arbeit von Béraud³⁾ enthält daher für uns in dieser Hinsicht nichts Neues; eben so ist die Angabe dieses Autors, dass Anheftungen von Längsfaserbündeln des Mastdarmes auch an die *Capsula prostatica* stattfinden, schon früher durch einen deutschen Forscher ermittelt worden. Kohlrausch⁴⁾ macht nämlich die Bemerkung: beim Manne lösen sich vorn, hinter der Spitze der *Prostata*, ein paar

¹⁾ H. Luschka, Die Hallgelenke des menschlichen Körpers. Berlin 1858. S. 81.

²⁾ A. a. O., S. 126.

³⁾ Du mode de terminaison des fibres longitudinales du rectum. Gazette médicale de Paris. Année 1858. Nr. 13. pag. 201.

⁴⁾ A. a. O., S. 9.

Bündel von der Longitudinalschichte des Mastdarmes ab, und gehen unter dem unteren vorderen Ende der Vorsteherdrüse, dieser ziemlich genau anhängend, nach vorn.

Dagegen ist es meines Wissens bisher nicht bekannt gewesen und namentlich auch Béraud verborgen geblieben, dass beim Weibe Längsbündel des Mastdarmes in der Wand der Scheide ihre Endigung finden. Ich habe es aber als die Regel erkannt, dass einige Bündel von der Längsschichte des *Rectums* da abtreten, wo an seinem vorderen Umfange die Concavität in die convexe Endkrümmung übergeht. Die Fleischbündelchen verlieren sich, indem sie sehnig werden, in der hinteren Wand der Scheide, etwa an der Grenze des mittleren und unteren Drittels derselben. Diese Sache gewinnt dadurch einiges praktische Interesse, dass sie die nachfolgende Lageveränderung des Mastdarmes beim Vorfalle der hinteren Wand der *Vagina* und wohl auch einige andere, diese Anomalie vielleicht begleitende Erscheinungen verständlich machen kann.

Béraud stellt die allerdings ihm eigene Behauptung auf, dass Anheftungen von Längsfasern des Mastdarmes auch an die vordere Seite des Kreuzbeines stattfinden. Diese Angabe ist jedoch, so weit meine eigenen Wahrnehmungen reichen, nicht ganz zutreffend. Man findet allerdings gewöhnlich einige Längsbündel, welche am hinteren Umfange des Mastdarmes in der Nähe seines Endes abtreten, aber nicht an das Kreuzbein gelangen, sondern sehnig, entweder an das *Ligamentum sacro-coccygeum anticum*, oder an das erste oder zweite Steissbeinstück sich anheften. Ich habe öfters bei beiden Geschlechtern eine andere, sehr merkwürdige Einrichtung angetroffen, nämlich einen platt-rundlichen, gelblichen, im hohen Grade dehnbaren Strang, der beinahe ausschliesslich von elastischen Fasern zusammengesetzt wurde. Er hatte durchschnittlich eine Länge von 3·2 Centim., und eine Breite von 0·2 Centim. Derselbe ging aus 5 bis 6 Muskelbündelchen hervor, die etwa an der oberen Grenze der hinteren Mastdarmcurvatur in eine gemeinschaftliche elastische Sehne, d. h. in eben jenes ligamentöse Gebilde scheinbar übergegangen sind, das sich an das *Ligamentum sacro-coccygeum anticum* angeheftet hat. Bei Gelegenheit dieser Untersuchungen habe ich mich indess davon nicht überzeugen können, dass die Muskelzellen selbst unmittelbar in elastische Fasern übergehen, sondern ich habe in Übereinstimmung mit Henle¹⁾ gefunden, dass die elastischen Sehnen im Wesentlichen nichts Anderes sind, als Fortsetzungen der überall zwischen die Muskelbündel reichlich eingestreuten elastischen Fasern.

II. Die Muskeln der Scham und des unteren Endes der Scheide.

Die der äusseren weiblichen Geschlechtsregion zukommende Musculatur gehört ihr theils eigenthümlich, theils ihr und der nächsten Umgebung gemeinschaftlich an. Die meisten Muskeln umziehen schlingenförmig diese Gegend, und sie stehen einerseits im Dienste des Schwellapparates, andererseits dienen sie unmittelbar zur Verengung des Einganges der Scheide. Es machen sich hier bemerklich:

1. Der Musculus ischio-cavernosus.

Dieser ehemals von manchen Autoren als *Erector*, von J. Fr. Meckel²⁾ u. A. dagegen als *Depressor clitoridis* bezeichnete Muskel ist in Betreff seiner Gesamtmasse relativ stärker und

¹⁾ Canstatt's Jahresbericht 1854, S. 43.

²⁾ Handbuch der menschlichen Anatomie, Bd. IV, S. 536.

namentlich, im Einklange mit der bedeutenderen Grösse des weiblichen Schosbogens, länger als beim Manne. Er stellt beim weiblichen Geschlechte in einer noch viel augenfälligeren Weise eine Art fleischig-fibröser Kapsel dar, in welcher der Schenkel des Kitzlers verborgen liegt, und welche diesen am ganzen, an den Knochen nicht angehefteten Umfange vollständig umfasst (vgl. Taf. III, Fig. 2).

Der von sehnigem Gewebe reichlich durchsetzte platte Muskel hat eine sehr in die Länge gezogene Form. Man unterscheidet an ihm ein hinteres, spitz auslaufendes Ende, welches sich bis zur inneren Seite des Sitzbeinhöckers erstreckt, eine vordere und hintere fleischige, eine mittlere theils fleischige, theils tendinöse Zone: ein oberes, eine Aponeurose darstellendes Ende, das in Verbindung mit dem der anderen Seite eine Art fibröser Hülse erzeugt, welche das hintere Ende des Kitzlers vollkommen einschliesst.

Betrachtet man diesen Muskel mit Rücksicht auf die Anordnung seiner Fleischbündeln, dann vermag man leicht dreierlei Züge derselben zu unterscheiden. Es findet sich nämlich erstens eine mittlere longitudinale Faserung, welche das sehnig-fleischige hintere Ende des Muskels fast ganz allein darstellt, in der hinteren Hälfte desselben vorwiegend fleischig ist, dann aber in einen platten Sehnenstreifen übergeht, welcher ausschliesslich auf den Rücken des Kitzlers gelangt. Dieser Abschnitt des Muskels hat aber keinen gestreckten Verlauf, sondern ist schwach S-förmig gekrümmt. Zweitens sind schräg verlaufende Muskelbündel vorhanden, die von der inneren Lefze des aufsteigenden Sitzbein- und des absteigenden Schambeinastes ausgehen, sich um den hintern Umfang des Schenkels der *Clitoris* nach auswärts-aufwärts herumschlagen und sich unten an die longitudinalen Fleischbündel anlegen, weiter oben dagegen in den medianen Sehnenstreifen und schliesslich in die Endaponeurose übergehen. Die obersten dieser hinteren schrägen Muskelbündel stehen nur mit jenem Sehnen- gewebe in Beziehung, welches sich an die untere Seite des Kitzlers begibt. Drittens existiren zarte, schräg verlaufende, grösstentheils von der longitudinalen Faserung gedeckte Fleischbündel, entsprechend dem vorderen Rande des Muskels. Sie gehören nur der oberen Hälfte desselben an, entspringen vom medianen Sehnenstreifen und ziehen schief nach aussen und oben, um theils sich an die vordere Lefze des absteigenden Schambeinastes anzusetzen, theils in die Endaponeurose überzugehen.

Das obere Ende des *Musc. ischio-cavernosus* stellt ein membranartiges Sehnenblatt, d. h. eine Aponeurose dar, welche in der Mittellinie mit jener der anderen Seite zu einer fibrösen Hülse zusammenfliesst, welche die hintere Hälfte der *Clitoris* aufnimmt. Bisher hat man gelehrt, dass das sehnige Ende dieses Muskels sich nur auf den Rücken des Kitzlers begeben, um sich dort über der *Vena dorsalis clitoridis* mit dem anderseitigen zu verbinden. Man kann sich aber leicht davon überzeugen, dass diese Angabe nicht erschöpfend ist. Wenn man die Präparation bei gut injicirtem Schwellapparat vornimmt, dann vermag man ohne Schwierigkeit, sobald die Verbindung der Vorhofszwiebeln mit der unteren Seite des Kitzlers getrennt und einiger Abstand beider Organe bewirkt worden ist, den Nachweis zu liefern: dass auch an der unteren Seite der *Clitoris*, hinter der Stelle ihrer Verbindung mit den Vorhofszwiebeln, eine starke querverlaufende Sehnenfaserung besteht, welche unabhängig von der *Tunica albuginea* sich bis zu den Fleischbündeln jenes Muskels verfolgen lässt. Indem das Gewebe des oberen, aponeurotischen Endes dieses Muskels in vorwiegend querer Richtung unmittelbar über und unter dem hinteren Abschnitte des Kitzlers verläuft und mit dem der anderen Seite zusammenfliesst, wird um dieses Organ eine Art

fibröser Zwinde gelegt, aus welcher sein vorderes Ende hervortritt, um an der unteren Seite mit den steil erhobenen, vereinigten Vorhofszwiebeln in vielfache Communication zu treten.

Der *Musc. ischio-cavernosus* vermag nicht allein den mit Blut sich anfüllenden Schenkel der *Clitoris* sowohl concentrisch als auch longitudinal zusammenzupressen, und den Inhalt mehr und mehr in den Schaft und in die Eichel derselben weiter zu treiben, sondern auch, damit diese Theile während der geschlechtlichen Aufregung einem möglichst hohen Grade von Schwellung entgegengeführt werden, durch Druck seiner Aponeurose auf die *Vena dorsalis clitoridis* den Rückfluss des Blutes zu verhindern.

Den nach dem Zeugnisse von Joh. Müller¹⁾ und Kobelt²⁾ beim männlichen Geschlechte bisweilen, bei vielen Thieren regelmässig vorkommenden *Musc. pubo-cavernosus s. levator penis*, welcher vom Scheitel des Schosshogens entspringt, und sich nach vorne auf dem Rücken des Ruthenkörpers inserirt, habe ich beim Weibe bisher noch nicht auch nur in irgend welcher Andeutung finden können. Eben so wenig vermochte ich hier denjenigen Muskel ausfindig zu machen, welcher unter dem Namen *Erector accessorius* beschrieben worden ist und nach Kohlrausch³⁾ beim Manne häufig vorkommen soll. Er entspringt bei diesem fleischig vom Sitzbeinhöcker, hinter dem *Erector penis*, aber mit demselben so genau verbunden, dass sein Muskelbauch jenem innig anliegt und an dessen innerer Seite eine Strecke weit nach vorne verläuft. Jetzt erst wendet sich der Muskel allmählich zur Mitte, ohne jedoch einen eigentlich queren Verlauf anzunehmen, und dringt seitlich unter die Muskelfasern des *Accelerator* ein, um sich an den seitlichen Umfang des *Corpus cavernosum urethrae* anzuhängen.

2 Der Musculus compressor bulborum vestibuli.

Dieser bandartig platte, unpaarige, auf der Aussenseite der Vorhofszwiebeln liegende Muskel, welcher gemeinhin als Schliesser der weiblichen Scham. als *Constrictor cunni* aufgeführt wird, hat im Verlaufe der Zeit eine sehr wechselnde, sowohl anatomische als physiologische Beurtheilung erfahren. Es muss zuerst die gänzlich irrige Ansicht derjenigen zurückgewiesen werden, welche die Selbstständigkeit dieses Muskels läugnen und behaupten, dass er nur ein Abkömmling und Bestandtheil des *Sphincter ani externus* sei und mit diesem die Figur einer 8 darstelle. Wie wenig man früher über die Bedeutung dieses Muskels eine auch nur annähernd richtige Vorstellung hegte, beweist unter Anderem die kaum erwähnenswerthe Mittheilung J. Fr. Meckel's⁴⁾, welche mit der Bemerkung schliesst: derselbe hefte sich vorn an die Schenkel und an den Körper der Clitoris an. Aber auch spätere Autoren haben sich der Wahrheit nur wenig genähert, und es lieferte z. B. Theile eine Beschreibung, die weit hinter seinen sonst so trefflichen Schilderungen der Muskeln zurückgeblieben ist. Es wird von Fr. Wilh. Theile⁵⁾ über den sogenannten *Constrictor cunni* Folgendes berichtet: „Vom aufsteigenden und vom horizontalen Aste des Kitzlers, besonders aber vom Winkel zwischen

¹⁾ Encyclopäd. Wörterbuch der medicin. Wissenschaften. Art.: Erectio penis.

²⁾ G. L. Kobelt, Die männlichen und weiblichen Wollustorgane des Menschen. Freiburg i. B. 1844, S. 33.

³⁾ A. a. O., S. 44.

⁴⁾ A. a. O., Bd. IV, S. 537.

⁵⁾ S. Th. Sömmerring, Lehre von den Muskeln. Ueugearb. von Fried. W. Theile. Leipzig 1841, S. 121.

beiden entspringt fleischig-sehnig ein dünner, aus einzelnen platten Bündeln bestehender Muskel, der über die Seitenwand der Scheide nach unten und hinten zur Dammgegend herabläuft. Hier verliert er sich sehnig-fleischig an der hinteren Wand der Scheide.

Die ersten genauen Aufschlüsse über die Morphologie und über die Function dieses Muskels hat man G. L. Kobelt zu verdanken. Wenn es jedoch von ihm als die Regel bezeichnet wird, dass der ganze Muskel mit breiter, verflachter Basis etwa in der Mitte zwischen dem *Orificium ani* und dem Sitzhöcker von der *Fascia perinaei* entspringe, so dass die inneren Bündel zu weilen mit denen des *Sphincter ani externus* zusammentreffen, oder die äusseren den aufsteigenden Ast des Sitzbeines berühren, so kann ich diesem Ausspruche für die meisten Fälle nicht unbedingt beitreten. Ich habe mich nämlich durch zahlreiche Untersuchungen davon überzeugt, dass es das gewöhnliche Vorkommen ist, dass der *Constrictor cunni* zwar dem grössten Theile seiner Masse nach ein selbstständig entspringender Muskel ist, dass er aber fast regelmässig eine doppelte Verstärkung erfährt, welche vom *Sphincter ani externus* einerseits und vom *Transversus perinaei superficialis* andererseits herrührt (vgl. Taf. III, Fig. 1).

Der mittlere, grösste und selbstständig entspringende Abschnitt des *Constrictor cunni* geht mit lose zusammenhängenden, meist auffallend gespreizten Bündeln zwischen der Afteröffnung und der *Tuberositas ischi* jederseits von der Binde des Dammes aus. Niemals habe ich gefunden, dass der Ursprung von einem medianen Sehnenstreifen des Dammes geschieht, wie von Einigen behauptet worden ist; auch ist mir bis jetzt kein Fall vorgekommen, in welchem der Muskel vom aufwärtssteigenden Aste des Sitzbeines ausgegangen wäre, wie dies z. B. von M. J. Weber¹⁾ als die Regel bezeichnet worden ist. An den inneren Rand dieses Muskels legt sich eine schmale Fortsetzung von Fleischfasern an, welche aus der vor dem After eingetretenen Durchkreuzung von Bündeln des *Sphincter ani externus* hervorgegangen ist, während sich an seinen äusseren Rand ein Bündelchen begibt, das sich von dem vorderen Rande des *Musc. transversus perinaei superficialis* abgelöst hat. Diese drei Portionen fliessen nun zu einem 6 bis 7 Millim. breiten, bandartigen Streifen zusammen, welcher schräg über den vorderen äusseren Umfang der Vorhofszwiebel, mit ihr durch eine straffe, dünne Zellstoffschichte verbunden, hinwegzieht, um sich in der Nähe des Zusammenstosses von Kitzler und Vorhofszwiebeln in zwei Portionen, in eine oberflächliche und in eine tiefe zu sondern. Die oberflächliche begibt sich auf den Rücken des Clitorisschaftes und geht in eine Aponeurose über, welche mit jener der anderen Seite verschmolzen, über der *Vena dorsalis clitoridis* sich ausbreitet; die tiefere und zugleich ein wenig weiter nach hinten liegende Portion schiebt sich zwischen Clitoris und oberes Ende der Vorhofszwiebeln hinein und fliesst mit dem entsprechenden Gebilde der anderen Seite hier zu einer Aponeurose zusammen, die sich über diejenigen Venen hinweglegt, welche das Blut aus den Vorhofszwiebeln zurückführen.

Hinsichtlich der Wirkung des *Constrictor cunni* hat es sich herausgestellt, dass er nicht in erster Linie ein Schliesser der Scheide, sondern hauptsächlich dazu bestimmt ist, durch Compression derjenigen Venen, über welchen seine sehnigen Enden ausgebreitet sind, die Füllung des Schwellapparates zu sichern. In zweiter Linie vermag er aber allerdings auch dadurch das *Orificium vaginae* zu verengern, dass er die von Blut strotzenden Vorhofszwiebeln bei seiner Zusammenziehung nach innen zu drängen im Stande ist.

¹⁾ Vollständiges Handbuch der Anatomie des menschl. Körpers. Bonn 1839. Bd. I, S. 150.

3. Der Constrictor vestibuli s. Sphincter vaginae.

Bei vielen Thieren, z. B. bei der Stute, Hündin, Katze, beim Schwein, Kaninchen, existirt eine braunrothe, quergestreifte Muskelschichte, welche das Vorhofsrohr umgibt, mit dem *Compressor bulbi* in keiner Beziehung steht und als *Constrictor vestibuli*¹⁾ bezeichnet worden ist. Beim Menschen hat man eine ihr entsprechende Formation bisher noch nicht nachgewiesen. Es gedenkt zwar Bourger y²⁾ eines Muskels, welcher zwischen dem *Constrictor cunni* und dem *Musc. ischio-cavern.* gelegen sein soll, mit folgenden Worten: „Parallèle à l'ischiocaverneux, il naît de l'ischion au-devant de ce dernier, sur la face externe duquel il est accolé. Les fibres musculaires très longues suivent la direction du corps caverneux et se terminent sur un petit tendon plat qui s'insère au-dessous de l'extrémité libre du clitoris“. Allein es lässt sich, wie Kobelt, dem übrigens unser Muskel nicht weniger völlig entgangen ist, mit Recht bemerkt, nicht verkennen, dass Bourger y's Muskel weiter nichts ist, als die hintere, tiefer liegende Portion des *Constrictor cunni*. Einige, aber jedenfalls nur höchst unzulängliche Kenntniss des Muskels scheint J. D. Santorini gehabt zu haben. Derselbe ist auf Tab. XVII. g. angedeutet und als: „*mulibris urethrae depressor*“ bezeichnet, „*qui ab uno ad aliud latus continuatus producitur*“. Auf der Abbildung sieht man nur ein kurzes Stück eines dünnen, zwischen *Musc. ischioc.* und *Constrictor cunni*, auf der sogenannten *Aponeurosis perinealis* liegendes Muskelstratum, welches ein breites, unbestimmt abgegrenztes hinteres Ende zeigt.

Der *Constrictor vestibuli* des Menschen, welchen man auch *Constrictor cunni profundus* für den Fall nennen könnte, als man für den *Compressor bulbi* den Namen *Constrictor cunni* beibehalten wollte, welcher letztere Muskel aber dann zur Unterscheidung als *Constrictor cunni superficialis* aufgeführt werden müsste, lässt sich von vorn her nur theilweise zur Ansicht bringen. Man gewahrt ihn da in der Tiefe zwischen *Musc. ischioc.* und *Constrictor cunni superficialis* als blassröthlichen Streifen, welcher in die Substanz der *Aponeurosis perinealis*, d. h. des sogenannten *Lig. Collesii* s. *Carcassonii* gleichsam eingewoben erscheint. In voller Ausdehnung und allen seinen Beziehungen nach kann man diesen Muskel nur durch eine sorgfältige Präparation von innen her verständlich machen. Zu seiner Darlegung beseitigt man zunächst die hintere Wand des Beckens nebst dem Mastdarme und trägt sodann durch einen verticalen Schnitt durch Scheide und Harnröhre so viel ab, als zum freien Anblicke der bezüglichenden Gegend wünschenswerth ist (vgl. Taf. IV f).

Der ringartig geformte, ganz und gar den Typus eines *Sphincters* zeigende *Constrictor cunni profundus* liegt unmittelbar hinter den Vorhofszwiebeln, zieht über die obere Seite des vorderen Endes der Harnröhre und den ganzen von dieser nicht gedeckten Umfang des unteren Endes der Scheide herum. Der Muskel ist oben und unten schmaler, seitlich breiter, aber auch da höchstens nur 4 Millim. messend; der obere Theil des Muskels stösst an die vordere Grenze derjenigen Bündel, deren Gesamtheit das *Stratum horizontale* der Harnröhre darstellt. Er liegt hier unter der so eben an die hintere Seite des Schossgelenkes tretenden *Vena dorsalis clitoridis*, während, wie bekannt, der *Constrictor cunni superficialis* über dieses Gefäss hinwegschreitet. Der an der unteren Wand der Scheide befindliche Abschnitt des Muskels fließt meist mit dem vorderen Rande des *Musc. transv. perinaei profundus*

¹⁾ Vergl. Kobelt. Die Wollustorgane, S. 53.

²⁾ Anatomie descriptive, II, pag. 64, tab. 105, fig. 2.

zusammen. Dieser letztere bewahrt inzwischen nach Ursprung und Verlaufsweise immerhin seine Selbstständigkeit und ist unter keinen Umständen als Bestandtheil unseres Scheidenschliessers anzusprechen.

Nicht selten kommt es jedoch vor, dass sich schon an seinem Ursprunge vom *Musc. transv. perinaei profundus* ein Bündel ablöst und über die hintere Seite des *Bulbus vestibuli* nach Art eines selbstständigen Muskelchens aufwärts steigt und sich sodann der Faserung des *Constrictor cunni profundus* beigesellt. Ich habe diese durchaus nicht regelmässig vorkommende Anordnung bald auf beiden, bald nur auf einer Seite gefunden. Sie ist ohne Zweifel nichts weiter als der sogenannte „*Muscle ischio-bulbaire*“ des Jarjavay¹⁾, von welchem dieser behauptet, dass er regelmässig vorkomme und sich über ihn folgendermaassen äussert: „*Il se détache de la partie la plus élevée et la plus antérieure de l'ischion par un tendon resplendissant, auquel succèdent des fibres charnues curvilignes, obliques en haut et en dedans et qui vont se rendre en bulbe du vagin. ou elles s'insèrent*“.

Die Bedeutung des *Musc. constrictor vestibuli* lässt sich nach seiner Lagebeziehung und Anordnung leicht ermessen. Er vermag erstens die Harnröhre an die vordere Wand der Scheide anzupressen und sie zu verschliessen, und zweitens kann er die Passage erweitern, durch welche unter dem *Lig. arcuat. inf.* des Schossgelenkes die *Vena dorsalis* und die *Venae profundae clitoridis* hindurchtreten, drittens kann er den Scheideneingang verengern und ist daher in dieser Hinsicht ein wahrer *Sphincter vaginae*.

4. Der Levator vaginae.

Nach der jetzt gangbaren Ansicht²⁾ besteht die Wandung der Scheide aus einer äusseren fibrösen Haut, einer mittleren Muskellage und aus einer Schleimhaut. Die dünne weissliche Faserhaut zeigt aussen ein mehr lockeres, nach innen derberes Bindegewebe mit vielen elastischen Elementen und Venennetzen. Sie geht ohne Grenze in die zweite röthliche Lage über, die neben Bindegewebe und vielen Venen eine ziemliche Anzahl glatter Muskelfasern enthält, die in quer- und längsverlaufende Bündel geordnet, eine wirkliche Muskelhaut zusammensetzen.

Ausser diesen, in die Zusammensetzung der Wand der Scheide eingehenden contractilen Faserzellen, kommt diesem Organe noch eine continuirliche, ausschliesslich longitudinal verlaufende Schichte organischer Muskelfasern zu, welche mit der inneren Binde des Beckens im Zusammenhange stehen. Diese Fascie zerfällt nämlich da, wo sie an die Wand der Scheide herantritt in eine an dieser nach aufwärts ziehende und in eine sich gegen deren Ende herabwendende Lamelle. Mit der letzteren steht nun am seitlichen Umfange der Scheide eine Muskelschichte in Verbindung, welche der Höhe des unteren Drittels dieses Schlauches entspricht. Sie ist blässröthlich und besteht aus sehr dünnen, schmalen, zum Theil geflechtartig ineinander hineingeschobenen Bündelchen, welche in einen an elastischen Fasern sehr reichen Zellstoff eingelagert sind. Es entspringen die Muskelbündelchen aus dem Gewebe jener Fascie und verlieren sich im submucösen Bindegewebe des Scheideneinganges. Jene Binde

¹⁾ J. F. Jarjavay, Traité d'anatomie chirurgicale, Tom. II, Paris 1854, pag. 548.

²⁾ Vgl. Alb. Kölliker, Mikroskopische Anatomie, Bd. II, Abth. 2, S. 456.

stellt das *Punctum fixum* dar, gegen welches das Ende der Scheide gehoben und in einem verschiedenen Grade einwärts gezogen werden kann (vgl. Taf. II, l).

III. Die Muskeln der Harnröhre.

Über die der weiblichen Harnröhre zukommende Musculatur sind bisher theils höchst unvollständige, theils gänzlich irrthümliche Ansichten verbreitet worden. Man hat im Gegensatze zu den vielfachen, die männliche Harnröhre betreffenden Untersuchungen die bezüglichlichen Verhältnisse beim Weibe entweder ganz ausser Acht gelassen, oder in bloß theoretischer Betrachtung einfach auf dasselbe nur das übertragen, was man beim Manne richtig erkannt zu haben glaubte. Indem man sich für berechtigt hielt, die weibliche Harnröhre mit der *Pars membranacea* der männlichen zu vergleichen, nahm man keinen Anstand, auch an ihr einen *Musc. pubo-urethralis s. Wilsonii*, so wie einen *Musc. constrictor* in dem Sinne anzunehmen, wie dieser Muskel nach den übereinstimmenden Angaben von Santorini¹⁾, G. J. Guthrie²⁾ und J. Müller³⁾ am membranösen Theile der Harnröhre des Mannes erkannt worden ist. Bei E. Huschke⁴⁾ z. B. finden wir die Bemerkung, der hinter dem Schambogen gelegene Theil der Harnröhre des Weibes werde vom *Musc. pubo-urethralis* und *urethralis transversus*, und ausserdem auch noch von Kreisfasern wie beim Manne umgeben, in welchen Theilen die Kraft der tonischen Zusammenziehung der Harnröhre zu suchen sei. Krause⁵⁾ macht die Bemerkung: der Anfangstheil der Harnröhre werde, wie beim Manne, von dem *Stratum musculare circulare* umgeben und von dem *Musc. urethralis transversus* oberwärts und zu beiden Seiten umfasst. Fried. Arnold⁶⁾ beschränkt sich wie viele Andere auf die ganz allgemein gehaltene Angabe: der *Musc. urethralis s. constrictor urethrae* zeige beim Weibe im Ganzen eine ähnliche Anordnung wie beim Manne; dasselbe gelte von dem *Musc. pubo-urethralis*.

Mit dieser einfachen Übertragung der die Musculatur der *Pars membr.* der männlichen Harnröhre betreffenden Verhältnisse auf die weibliche steht schon die Erfahrung im Widerspruche, dass die willkürliche Zurückhaltung des Harns beim Weibe in einem viel geringeren Grade möglich ist als beim Manne. Dies hängt nicht, wie man glauben möchte, mit der grösseren Weite der weiblichen Harnröhre, sondern eben damit zusammen, dass dieser eine viel schwächere und einfachere willkürlich bewegliche Muskeleinrichtung zugetheilt ist.

Was zuerst den *Musc. pubo-urethralis* anlangt, so hat James Wilson⁷⁾, der vermeintliche Entdecker „*of two muscles surrounding the membranous part of the urethra*“, seine Angaben und seine Abbildung ausschliesslich nur auf das männliche Geschlecht bezogen und ich finde bei ihm auch nicht eine Andeutung, durch welche auf die weibliche Harnröhre hingewiesen würde. Gleichwohl sind von den meisten Autoren Wilson's Angaben, die sie meist

1) Septemdecim tabulae. Tab. XV.

2) On the anatomy and diseases of the neck of the bladder and the urethra. London 1834.

3) Über die organischen Nerven der erectilen männlichen Geschlechtsorgane. Berlin 1836.

4) Lehre von den Eingeweiden. Leipzig 1844, S. 342.

5) A. a. O., S. 664.

6) Handbuch der Anatomie des Menschen. Freiburg i. B. 1847, Bd. II, I. Abtheil., S. 209.

7) Medico-chirurgical transactions of London. Second Edition, London 1812, Vol. I, pag. 175.

gar nicht einmal durch selbstständige Untersuchungen geprüft haben, ohne Weiteres auch auf das Weib übertragen worden.

Bei einer anderen Gelegenheit habe ich¹⁾ mich schon in Betreff des männlichen Geschlechtes auf Grundlage eigener Zergliederungen mit Entschiedenheit dahin ausgesprochen: dass der Wilson'sche Muskel in der ihm von seinem Entdecker und dessen unbedingten Anhängern zugeschriebenen Beschaffenheit überhaupt gar nicht existire, sondern ein Artefact darstelle, hervorgegangen aus einer willkürlichen Präparation, welche drei ganz disparate Gebilde betroffen hat, nämlich den Ursprung des sogenannten *Musc. pubo-vesicalis*, d. h. eines neben der hintern Seite des Schossgelenkes sehnig entspringenden Bündels der Längsfaserschichte der Blase; zweitens des von mir als *Pars urethralis* des Afterhebers beschriebenen Muskelgebildes, drittens des *Stratum transversale urethrae inferius* des Constrictors der Harnröhre.

Beim weiblichen Geschlechte findet sich nun aber auch nicht einmal eine solche Anordnung musculöser Bestandtheile, welche durch irgend eine Präparation zur Herstellung eines *Musc. Wilsonii* Veranlassung geben könnte. Es besteht da nämlich weder eine *Pars urethralis* des Afterhebers, noch auch eine untere horizontale Muskelschichte der Harnröhre.

Der *Constrictor urethrae* des Mannes besteht aus zwei Bogen in der Quere verlaufender Muskelbündel, welche jederseits an dem *Lig. ischio-prostaticum* ihre Anheftung finden und von oben nach unten den membranösen Theil der Harnröhre, welcher durch sie platt gedrückt werden kann, zwischen sich fassen. Ausserdem findet sich auch noch eine circuläre Schichte quergestreifter Muskelfasern, welche die Bedeutung eines wahren *Sphincter urethrae membr.* hat und ihrer ganzen Länge nach um diese herumgewickelt ist.

Die obere und die untere horizontale Schichte des *Constrictor isthmi urethrae virilis* haben nicht die Bedeutung eines Sphincters, sondern sie stellen den eigentlichen *Accelerator seminis* dar. Durch ihre rasch eintretenden, energischen Contractionen schleudern sie die Flüssigkeitssäule nach aussen, welche den während der Erection, wenn diese überhaupt von einer Samenausscheidung begleitet ist, weit offenen Canal der Harnröhre allmählich erfüllt. Dass aber schon vor dem Eintritte des clonischen Krampfes und der durch ihn bedingten Ausstossung des Samens, Flüssigkeit in die Harnröhre ergossen wird, erkennt man nicht allein an dem feucht werden des *Orificium cutaneum urethrae*, sondern auch daran, dass sie sich in grösserer Menge herauspressen lässt. Die genannte Wirkung der beiden horizontalen Schichten lässt sich experimentell leicht feststellen. Man verbindet eine, in ihrer Lichtung der weit eröffneten Harnröhre gleichkommende 3 bis 4 Zoll lange, an beiden Enden offene, und eine kurze am freien Ende verschlossene Glasröhre mit einem eben so weiten etwa 1 Zoll langen Stücke einer Kautschukröhre möglichst innig. Die ganze Röhre wird jetzt zur Verminderung der Adhäsion ausgeölt und dann mit Wasser erfüllt. Comprimirt man nun die Kautschukröhre, die Wirkung jener Muskelschichten nachahmend, rasch von zwei Seiten her, dann spritzt mit jeder Compression ein Theil der Flüssigkeit stossweise hinaus.

Während die *Pars membranacea* der männlichen Harnröhre von allen Seiten frei, und der Umlagerung durch die genannte Musculatur leicht zugänglich ist, finden wir dagegen den hintern Umfang der weiblichen Harnröhre auf das innigste mit der vorderen Wand der Scheide verwachsen. Es entsteht dadurch eine gemeinschaftliche Wand, *Septum urethro-vaginale*, deren

¹⁾ Über den vorderen inneren Theil des Afterhebers beim Manne. Zeitschrift für rationelle Medicin. 3. R., Bd. IV.

Dicke zwischen 0·9 und 1 Centim. wechselt, während die Wand der weiblichen Harnröhre im übrigen Umfange nur 0·5 Centim. dick ist (Taf. IV, c).

Das nach aussen von der Schleimhaut gelagerte, besonders nach hinten so mächtige, derbe, gelblichrothe Gewebe hat Regner de Graaf¹⁾ „*mulierum prostata s. corpus glandulosum*“ genannt und darüber berichtet: „*et haec est substantia, quam perreptant, et in qua terminantur ductus illi, qui in principio urethrae, et in inferiore antica vaginae parte reperiuntur.*“ In neuerer Zeit hat diese auch durch A. Haller²⁾ vertretene Ansicht im Wesentlichen eine Bestätigung gefunden. Rudolf Leuckart³⁾ lehrt nämlich: auch das ausgebildete menschliche Weib besitze eine *Prostata*, die freilich keine solche zusammenhängende Drüsenmasse darstelle, als beim Manne, wohl aber wie die männliche *Prostata* aus einer grösseren Menge einzelner Blindschläuche, *Folliculi mucosi*, bestehe, die von der Einmündungsstelle der Harnröhre auf die Grenze zwischen Scheide und Scheidenvorhof sich hinziehen. R. Virchow⁴⁾ fand in diesen Drüsengebilden mit den sogenannten Prostataconcretionen des Mannes nach Gestalt und chemischer Constitution im Wesentlichen übereinstimmende Ablagerungen.

Ich habe den in Rede stehenden Drüsen bei verschiedenen Gelegenheiten meine ganze Aufmerksamkeit zugewendet. An der Stelle des Überganges der Blase in die weibliche Harnröhre fand ich jederzeit eine grössere Anzahl kleiner, kaum den Umfang eines Mohusamenkornes darbietender Drüsen, die häufig als weissliche Knötchen über das Niveau ihrer Umgebung hervortraten. Sie erwiesen sich nicht als einfache Schläuche, sondern als acinöse Drüsen, deren grosse, kolbig geformte *Acini* zu einem kurzen gemeinsamen Gange zusammen mündeten. Sowohl im Inneren dieser Drüsen, als auch frei in dem Gewebe der Schleimhaut fand ich bei erwachsenen, zumal älteren Personen, für das blosse Auge leicht erkennbare blass- und dunkelbraune Körnchen. Nur selten waren sie rundlich und deutlich geschichtet gleich den Prostataconcretionen, meistens zeigten sie sich unregelmässig, gewöhnlich ausgezeichnet verästigt.

In dem die weibliche Harnröhre umgebenden derben Fasergewebe begegneten mir verhältnissmässig viel weniger theils kolbenartig gestaltete einfache, theils nur spärlich verästigte Drüsen-schläuche, auch wohl einfache traubenförmige Drüsen, mit wenigen, birnförmigen *Acini*. Manche dieser Drüsen mündeten in jene grösseren, in der Umgebung des *Orificium externum urethrae* wahrnehmbaren Lacunen ein. Diese letzteren fand ich mitunter 2 Millimeter lang und mit kolbig gestalteten blinden Enden versehen. Das Gewebe ihrer Wand producirt zahlreiche, zottenartige Auswüchse, welche nebst flachen Papillen auch der Schleimhaut der Harnröhre zukommen. In den Drüsen der Harnröhrenwand habe ich den Prostataconcretionen ähnliche Bildungen nicht selten angetroffen. Diese wurden von mir auch wiederholt in den Bartholin'schen Drüsen gefunden. Sie können daher keineswegs dafür entscheidend sein, dass die Drüsen der weiblichen Harnröhre als Äquivalent der männlichen Prostata zu deuten seien, und es ist kein Grund vorhanden, sie für etwas Anderes zu erklären als für Schleimdrüsen, gleich den Littre'schen der männlichen Harnröhre.

Das mächtige Fasergewebe, welches die Schleimhaut der weiblichen Harnröhre umgibt, besteht vorzugsweise aus kreisförmig angeordneten Zügen organischer Muskelfasern, welche

1) Regneri de Graaf opera omnia. Lugd. Batav. 1677, pag. 212.

2) Elementa physiologiae, tab. VII, pag. 88.

3) Rubner's Illustrirte medicin. Zeitung. München 1852, Hft. 2, S. 90.

4) Archiv für pathologische Anatomie etc. Bd. V, S. 403, Berlin 1853.

in einen an elastischen Elementen überaus reichen Zellstoff eingelagert sind, der überdies noch von einem dichten Venengeflechte durchzogen wird.

Die der weiblichen Harnröhre eigene, quergestreifte, dem Willenseinflusse unterworfenen Museulatur ist sehr unbedeutend. Sie besteht aus quer verlaufenden, nur sehr lose zusammenhängenden Bündelchen, welche den oberen Umfang und die Seiten der ganzen Harnröhre umziehen und sich ohne scharfe Grenze zwischen den organischen Muskelfasern verlieren. Überlagert ist diese Schichte von einem reichlichen Venennetze. Über dem, der hinteren Seite des Schossgelenkes zugekehrten Abschnitte dieser Muskelschichte liegt ausserdem das *Lig. pubo-vesicale medium*, sowie einige medianwärts untereinander zusammenfliessende Bündelchen des sogenannten *Musc. pubo-vesicalis*. Die quergestreiften Muskelbündel inseriren theils da an der vorderen Wand der Scheide, wo der festere Zusammenhang derselben mit der Harnröhre beginnt, theils verlieren sie sich vereinzelt in dem Gewebe der für Scheide und Harnröhre gemeinschaftlichen Wand. Am letzteren Orte traf ich auch freie Enden quergestreifter Muskelbündel, ganz und gar vom Aussehen derjenigen, welche A. Rollet ¹⁾ im Innern verschiedener anderer Muskeln beobachtet hat.

Jene dünne musculöse Zwinge der weiblichen Harnröhre vermag diese durch Anpressen an die vordere Wand der Scheide zum Verschlusse zu bringen. Sie entspricht dem *Stratum superius* des *Musc. constrictor isthmi urethrae* des Mannes, während das dem letzteren noch zukommende *Stratum inferius*, so wie das *Stratum circulare* der Harnröhre des Weibes gänzlich fehlen. Das *Stratum superius*, das übrigens auch beim Manne nicht identisch ist mit Winslow's ²⁾ „*Muscles prostatiques superieurs*“, welche nichts anderes sind als der *Musc. pubo-vesicalis*, hängt beim Weibe seitlich nicht mit einem fibrösen Streifen zusammen. Dieses von J. Müller beim Manne als *Ligamentum ischio-prostaticum* bezeichnete Gebilde, das Kohlrausch als Bestandtheil des hinteren Blattes der *Aponeurosis perinealis* betrachtet wissen will, ist aber gleichwohl vorhanden; allein es zeigt eine andere Anordnung. Es läuft, mit dem sehnigen Ursprunge des *Musc. transv. perinaei superfic.* und *profundus* in continuirlichem Verbinde stehend, an der hinteren Fläche des *Ramus ascendens ischii* und *descendens pubis* in die Höhe und zerfällt in ein medianwärts verlaufendes Bündel, welches mit dem der anderen Seite hinter dem *Lig. arcuat. inf.* des Schossgelenkes zusammenfliesst und in 1 bis 2 laterale Fascikel, welche neben dem Schossgelenke in das Gewebe der Knochenhaut ausstrahlen.

IV. Die eigenthümlichen Muskeln des Dammes.

Die musculöse Grundlage jener Brücke, welche am Boden des weiblichen Beckens zwischen zwei Öffnungen, zwischen dem Ende der Scheide und des Mastdarmes befindlich, und dieser Lagebeziehung nach von R. de Graaf ³⁾ passend „Interforamineum“ genannt worden ist, der sogenannte Damm im engeren Sinne besteht ausser den in diesen Bezirk zum Theil eingreifenden *Sphincter ani externus*, *Compressor bulbi* und *Constr. vestibuli*, aus zwei ausschliesslich ihm angehörigen Muskeln, die aber von sehr ungleicher Stärke

¹⁾ Sitzungsber. der mathem.-naturw. Cl. der k. Akademie der Wissensch. Bd. XXI. S. 176.

²⁾ A. a. O., pag. 53.

³⁾ A. a. O., pag. 169.

sind. Es kommen constant und in einem sich wesentlich gleichbleibenden Grade der Ausbildung vor:

1. Der *Musc. transversus perinaei superficialis*.

Der oberflächliche oder hintere quere Dammmuskel des Weibes ist im Verhältniss zum tiefen auffallend mächtig. Er ist unpaar, platt und fast bandartig gestaltet und liegt über der Kreuzungsstelle derjenigen Bündel des Afterschliessers, die theils zur Haut treten, welche die *Commissura labiorum* darstellt, theils in die Zusammensetzung des *Compressor bulbi* eingehen. Der Muskel entspringt jederseits mit einer dünnen breiten Sehne von der innern Fläche des Anfanges des aufsteigenden Sitzbeinastes. Seine in die Quere verlaufenden Fleischbündel beschreiben einen schwach gekrümmten, mit der Convexität nach rückwärts und abwärts gekehrten Bogen. Der Muskel hat vorwiegend die Aufgabe den Damm zu stützen und denselben in querer Richtung anzuspannen.

2. Der *Musc. transversus perinaei profundus*.

Über den tiefen oder vorderen queren Dammmuskel des Weibes sind bis jetzt nur höchst mangelhafte Untersuchungen angestellt worden. Er wird von manchen Hand- und Lehrbüchern mit Stillschweigen übergangen, von anderen kaum namhaft gemacht. Es ist mir sehr wahrscheinlich geworden, dass dieser Muskel überhaupt niemals zur Ansicht mancher Zergliederer gekommen ist. Dies muss ich z. B. von Fr. W. Theile¹⁾ glauben, indem er sich auf die Bemerkung beschränkt: beim Weibe scheine er ganz mit dem oberflächlichen Dammmuskel vereinigt zu sein. Aber auch einzelne nähere Angaben anderer Schriftsteller liefern den Beweis, dass ihnen nicht sowohl Beobachtungen als vielmehr blos theoretische Vorstellungen zu Grunde liegen. Diese Aussage wird z. B. auf J. Fr. Meckel's Behauptung²⁾, dass der *Musc. tr. perinaei profundus* mit dem *Constrictor cunni* (d. h. mit unserem *Compressor bulborum vestibuli*) zusammenflüsse, und die Scheide zu öffnen im Stande sei, gewiss ihre volle Anwendung finden können.

Den tiefen Dammmuskel fand ich bis jetzt beim Weibe regelmässig und erkannte in ihm stets eine ganz selbstständige Formation, deren Auffindung und klare Darlegung aber allerdings mit nicht geringen Schwierigkeiten verknüpft ist. Der Muskel ist nämlich kaum zwei Millim. breit und liegt überdies förmlich eingemauert in einem derben, blasseröthlichen, von Venen und organischen Muskelfasern durchsetzten Zellstoffe. Am Ende der hinteren Wand der Scheide liegt er 1 Centim. nach vorne von dem *Musc. perinaei superfic.* und geht sehnig hinter dessen Ursprung von der innern Fläche des *Ramus ascend. ossis ischii* ab. Nach vorne von dem Muskel liegen die abgerundeten Enden der Vorhofszwiebeln so wie die Bartholin'schen Drüsen. An seinen vorderen Rand schliesst sich das untere Segment des *Musc. constrictor vestibuli* so innig an, dass es zur Isolirung beider einer sorgfältigen Präparation bedarf. Er unterstützt theils diesen Muskel und kann sich demnach an der Verengerung des Scheideneinganges betheiligen, theils vermag er während des Zustandes der Schwellung der Vorhofs-

¹⁾ A. a. O., S. 113.

²⁾ A. a. O., IV, S. 565.

zwiebeln einen Druck auf die Bartholin'schen Drüsen auszuüben und so zur Ausscheidung des Secretes derselben während der geschlechtlichen Aufregung beizutragen (vgl. Taf. III, Fig. 1 *h* und Taf. IV, *g*).

Eine von den hier gemachten Mittheilungen in mehrfacher Beziehung abweichende Schilderung des weiblichen *Musc. transversus perinaei profundus* hat F. Führer¹⁾ gegeben, welcher über den fraglichen Gegenstand in folgender Weise berichtet: „Der *Musc. transv. perin. prof.* verläuft nach abwärts, hinten und einwärts in schrägen Bündeln, welche die vordere Seitenwand der Vagina gürtelartig umgeben und so gewissermaassen einen *Constrictor internus* darstellen. Er bildet an seinem Ursprunge in der Regel einen dicken Muskelbauch, welcher alsbald jedoch in zahlreiche schmale Bündel zerfällt. Die obersten Bündel begeben sich an die Seitenwand des Blasenhalses; der grössere Theil breitet sich um die Vagina zur vorderen Wand des Mastdarmes und in das Interstitium zwischen beiden aus“. Mit diesen Angaben liesse sich vielleicht der Zusammenhang des tiefen Dammmuskels mit dem unteren Abschnitte des von mir gefundenen *Constrictor vestibuli* einigermaassen in Einklang bringen. Für das Verständniss der weiteren Erörterungen dieses Autors aber stehen mir eigene Materialien nicht zu Gebote.

¹⁾ Handbuch der chirurgischen Anatomie. Berlin 1857, 2. Abth., S. 909.

ERKLÄRUNG DER ABBILDUNGEN.

TAFEL I.

Durch diese Abbildung sollen die Faserzüge des weiblichen Afterhebers ihrer natürlichen Lage und Verlaufsrichtung nach zum Verständnisse gebracht werden. Das Becken eines 25jährigen Mädchens ist in reiner Seitenansicht und der normalen Inclination entsprechend, dargestellt. Um einen vollkommenen Überblick über die merkwürdige Anordnung des *Levator ani* zu erzielen, wurde, soviel es nöthig erschien, von der seitlichen Beckenwand abgetragen, Alles auf das sorgfältigste präparirt und dann erst das Object in der geeigneten Weise aufgestellt.

Von den Beckenorganen sieht man hier das untere Ende der Scheide (*a*) und des Mastdarmes (*b*). An dem letzteren bemerkt man den *Musc. sphincter ani externus*, dessen innerste Bündel reine Ringfasern sind, während diejenigen, welche die äussere Schichte darstellen, hinter dem Mastdarme zu einem an die Spitze des Steissbeines sehnig sich anheftenden Zipfel (*c*) zusammentreten, vor dem Mastdarme aber sich mehrfach durchkreuzen (*d*) und zum Theil in die Zusammensetzung des *Constrictor cunni superficialis* eingehen.

Die Faserung des *Levator ani* scheidet sich in zwei Portionen, von welchen die eine (*e*) an der vorderen Seite des Mastdarmes liegt, und ein schmales, bogenförmiges Bündel darstellt; die andere aber an den hinteren Umfang dieses Organes gelangt. Diese letztere grössere Portion des Afterhebers zerfällt der Beziehung ihrer Bündel nach in drei Abschnitte. Der kleinste (1) heftet sich sehnig an die vordere Fläche der Steissbeinspitze; der mittlere fliesst mit dem der anderen Seite zu einer sehnigen Platte (2) zusammen; der vor dieser gelegene Abschnitt bildet im Zusammenfusse mit den anderseitigen Fasern ein schleuderförmiges, durchaus fleischiges Bündel (3), welches sich an den *Sphincter ani externus* anschliesst und mit diesem durch einzelne Bündel einen gekreuzten Faseraustausch einget. An den hinteren Rand des Afterhebers grenzt der *Musc. coccygeus* (*f*) an.

TAFEL II.

Die Höhle des kleinen Beckens einer Frau ist von der Seite her geöffnet und ausserdem das Kreuzbein aus seiner Verbindung so gelöst, dass es zur Erzielung einer möglichst umfassenden Einsicht nach Aussen gedreht werden konnte. Es soll durch diese Abbildung die Musculatur am Ende des Mastdarmes, der Scheide und zum Theil diejenige der Harnröhre und Blase zur Ansicht gebracht werden.

An dem Mastdarme (*A*) ist die Längsfaserschichte blossgelegt. Ein Bündel derselben (*a*) heftet sich an die hintere Wand der Scheide an. Einige Längsfaserbündel liefern in eine, fast ganz aus elastischen Fasern bestehende, ein Band darstellende Sehne (*b*) aus, welche sich an das *Lig. sacro-coccygeum autie* (*c*) inserirt. Am Ende des Mastdarmes sieht man den vorderen Abschnitt der ringförmigen Fasern (*d*) seines Sphincters, so wie diejenigen (*e*), welche nach mehrfacher Durchkreuzung in die Zusammensetzung des *Constrictor cunni superfic.* eingehen. Vom *Levator ani* bemerkt man eine Gruppe in die Längsfaserschichte des Mastdarmes übergehender Bündel (*f*); die hinter dem Mastdarme verlaufenden schleuderförmigen Bündel (*g*), und diejenigen, welche zur Bildung einer medianen sehnigen Platte (*h*) zusammentreten. Über dieser liegen die Anfänge der beiden Schenkel des *Musc. retractor ani* (*i*).

An der Scheide (*B*) macht sich die *Fascia pelvina*, und zwar ein Stück (*k*) des *Arcus tendineus* derselben bemerklich, mit deren Gewebe die Faserung des *Levator vaginae* (*l*) in Verbindung steht. Um das Ende der Scheide zieht sich der *Musc. constrictor cunni profundus* (*m*) herum, an welchen nach hinten der *Musc. transversus perinaei profundus* (*n*) angrenzt, hinter welchem der *Musc. trans. perin. superf.* (*o*) gelegen ist.

Von den zur Wandung der Harnblase (*C*) gelangenden Längsfasern sieht man ein von der vorderen Wand der Scheide entspringendes Bündel (*p*), so wie dasjenige, welches neben der hinteren Seite des Schossgelenkes seinen Ursprung nimmt und den sogenannten *Musc. pubo-vesicalis* (*q*) darstellt. An der Harnröhre sind von der Seite her die bogenförmig über ihren oberen Umfang verlaufenden Bündel ihres *Constrictor* (*r*) dargestellt worden.

TAFEL III.

Fig. 1. An diesem, einem 30jährigen Weibe entnommenen, mit vollkommen injicirtem Schwellapparate versehenen Präparate sind die Muskeln der Scham, insoweit sie von der Aussenseite her darstellbar sind, zur Ansicht gebracht. Man erblickt: den *Musc. ischio-cavernosus* (a), den *Constrictor cunni superficialis* (b), dessen eine Portion (c) über dem Rücken des Kitzlers sehnig mit dem entsprechenden Theile der anderen Seite zusammenfließt, während seine andere, weiter nach hinten gelegene Portion (d) unter die *Clitoris* gelangt, und mit dem entsprechenden Abschnitte des anderseitigen Muskels über denjenigen Venen sehnig zusammenfließt, welche Blut aus den Vorhofszwiebeln zurückführen.

Vom *Sphincter ani externus* ist der vordere Abschnitt seiner ringförmigen Fasern (e) dargestellt, sowie die vor dem After sich durchkreuzenden Bündel. Die aus der Decussation hervorgehenden Bündel legen sich theils (f) an den inneren Rand des *Constrictor cunni* an, theils verlieren sie sich im subcutanen Zellstoffe der *Commissura labiorum* (g).

Der *Musc. transvers. perinaei profundus* (h) zieht hinter dem unteren Ende der Vorhofszwiebel (i) bis zur Mittellinie und vereinigt sich theils fleischig, theils sehnig mit dem der anderen Seite. Der *Musc. trans. perin. superfic.* (k) ist ein unpaariger, an seinen beiden Enden mit breiter Sehne angehefteter Muskel.

Fig. 2. Diese Abbildung ist hauptsächlich dem *Musc. ischio-cavernosus* gewidmet, welcher so viele der bisherigen Beobachtung zum Theil entgangene Eigenthümlichkeiten besitzt, dass er durch die blosse Beschreibung kaum völlig verstanden werden könnte. Die bezüglichen Theile sind vorwiegend von unten her gesehen. Der Verband zwischen den Vorhofszwiebeln (a, a) und der *Clitoris* (b) wurde getrennt und das letztere Organ nach aufwärts geschlagen. Am *Musc. ischio-cavernosus* unterscheidet man dreierlei Fleischfaserzüge: 1. longitudinale (c), 2. hintere schräge (d), 3. vordere schräge (e). Das obere Ende des Muskels stellt eine Aponeurose dar, deren Fasern theils auf den Rücken (f) des Kitzlers ziehen, theils unter (g) diesen hinwegtreten, und mit jenen der anderen Seite zu einer fibrösen Hülse zusammenfließen, aus welcher das vordere Ende des Kitzlers hervortritt. Ausserdem ist diejenige Portion des *Constrictor cunni superfic.* (h) zur Ansicht gebracht worden, welcher seine Lage über Venen gewinnt, die Blut aus dem oberen Ende der Vorhofszwiebeln zurückführen.

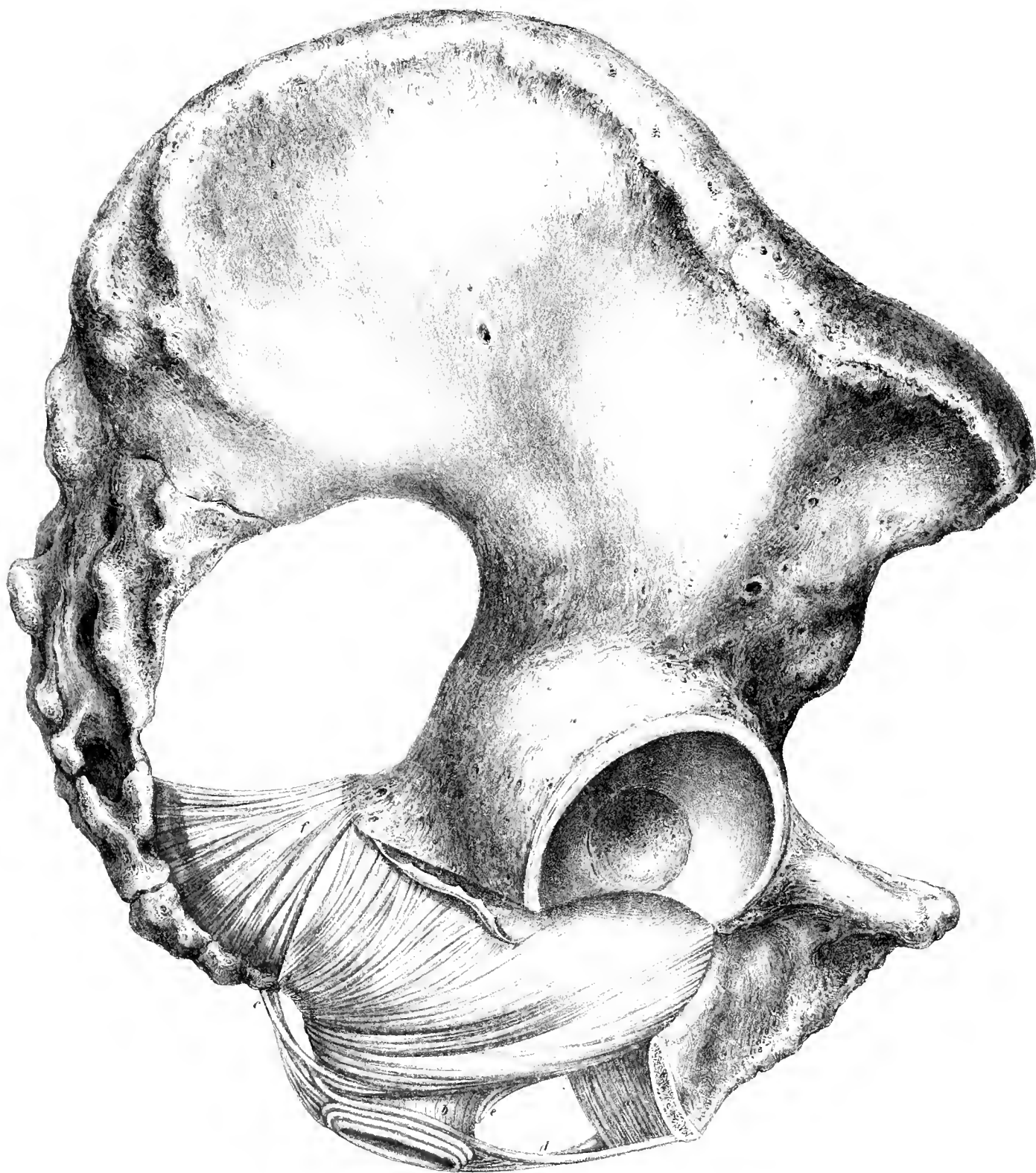
TAFEL IV.

Die Abbildung hat vorzugsweise die Aufgabe den *Sphincter vaginae*, die quergestreifte Musculatur der Harnröhre, so wie die Insertion und Lagebeziehung des *Musc. transversus perinaei profundus* verständlich zu machen.

Die vordere knöcherne Wand vom Becken eines 25 Jahre alten Mädchens, bei welchem die Beckenvenen so wie der Schwellapparat sehr glücklich injicirt waren, ist von der Rückenseite her dargestellt. Nach sorgfältiger Beseitigung aller übrigen Beckenorgane wurde durch einen scharfen, senkrecht auf sie gefallenen Schnitt die Scheide (a) und die Harnröhre (b) kurz vor ihrem Durchtritte unter den Schossbogen quer abgesetzt. Die Dickenverhältnisse beider Schläuche entsprechen genau der Natur. Es fällt die mächtige gemeinschaftliche Wand der Scheide und Harnröhre, das *Septum urethro-vaginale* (bei c) auf. Zur Seite der Vagina befinden sich die Vorhofszwiebeln (d, d); hinter dem unteren Ende einer jeden derselben macht sich die Bartholini'sche Drüse (e) bemerklich.

Überaus deutlich erkennt man von dieser Seite den um die Scheide und zugleich um den oberen Umfang des Endes der Harnröhre herumlaufenden, völlig ringförmig angeordneten *Musc. constrictor cunni profundus* s. *Sphincter vaginae* (f), dessen oberes Segment unter der *Vena dorsalis clitoridis* (t) liegt, während sich sein unteres Ende an den tiefen queren Dammmuskel (g) anschliesst, von welchem letzteren hier ein Bündelchen (h) an den *Constrictor cunni prof.* tritt und wohl dem sogenannten *Muscl. ischio-bulbaire* des Jarjavy entspricht. Hinter dem tiefen liegt der oberflächliche (i) quere Dammmuskel.

Um den oberen Umfang der Harnröhre und um ihre Seiten zieht eine dünne Schichte quergestreifter Muskelbündel herum (k), welche ihren eigenen *Constrictor* darstellen, dessen Elemente aber nicht um die ganze Circumferenz der Harnröhre herumlaufen. Sie entsprechen etwa dem *Stratum horizontale sup.* des *Constrictor urethrae* des Mannes. Beim Weibe findet sich weder ein vollkommenes *Stratum circulare*, noch ein *Stratum horizontale inferius*.



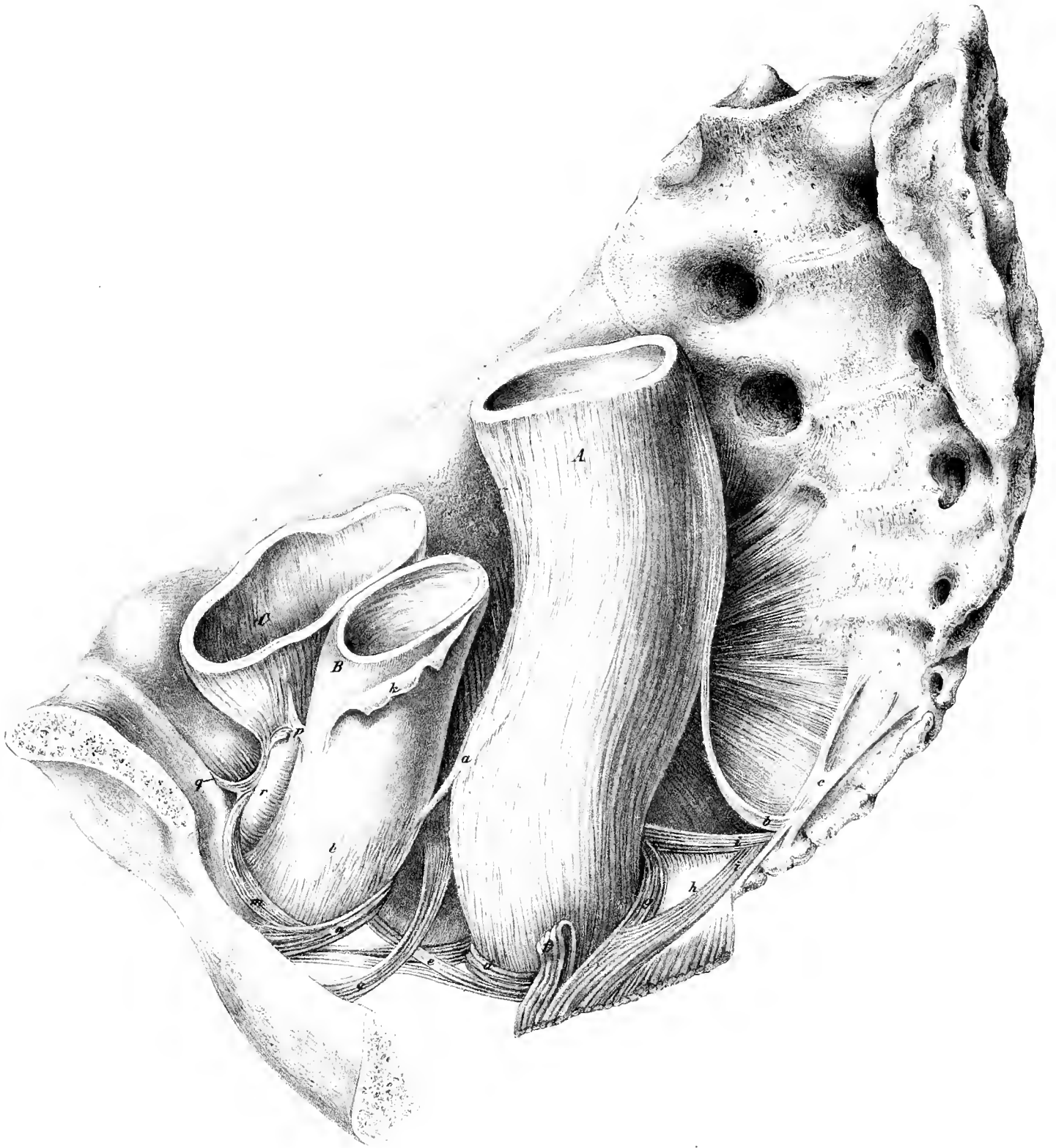


Fig 1

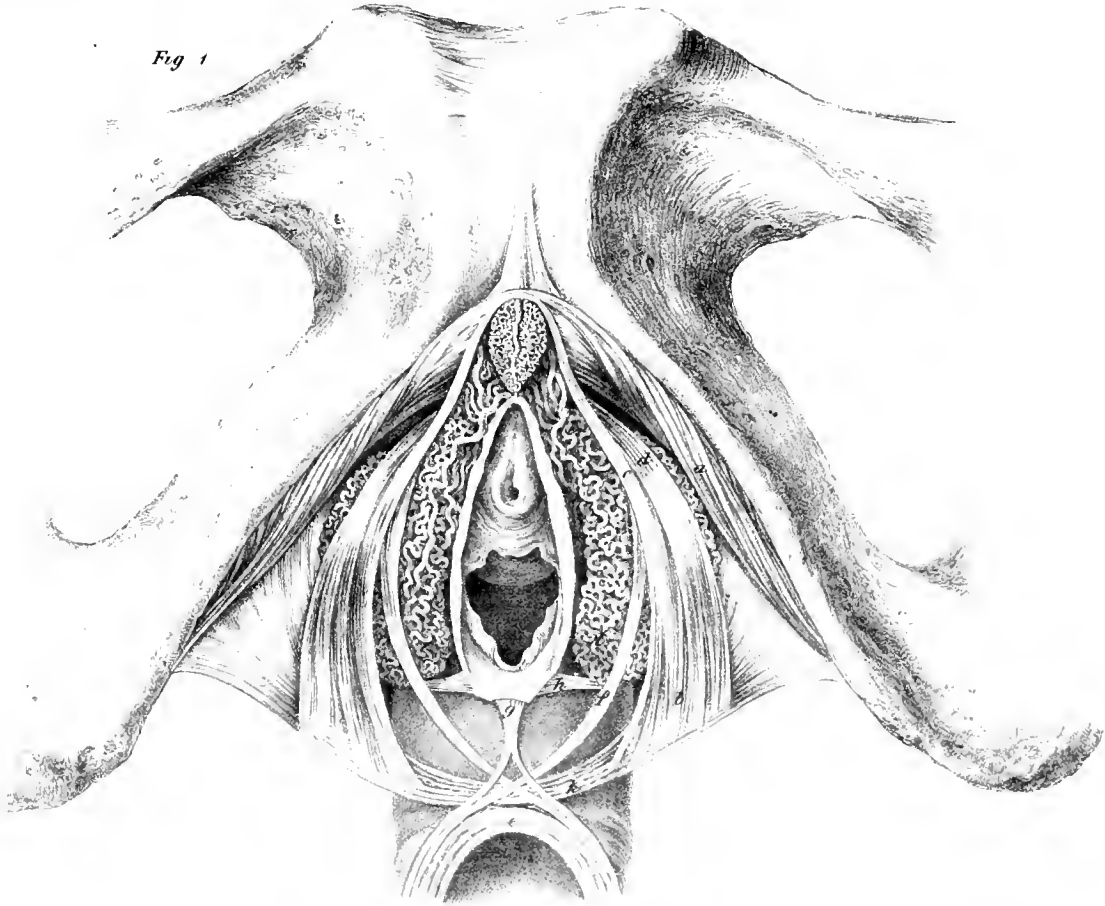
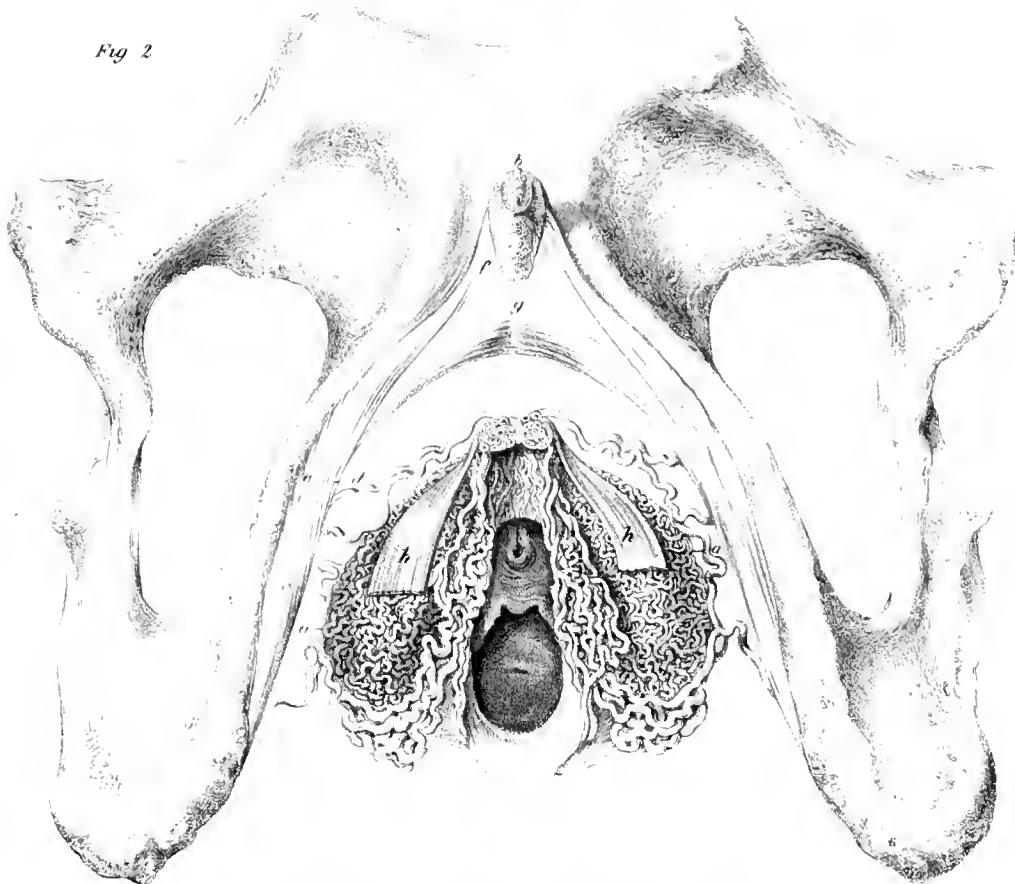
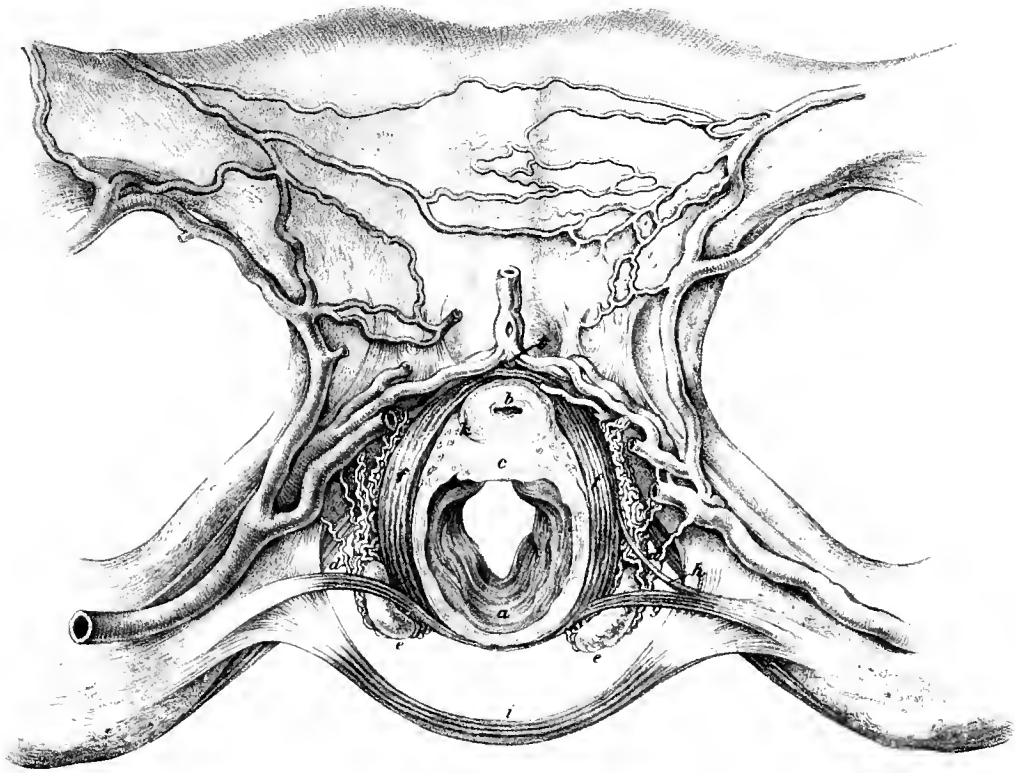


Fig 2





ALLGEMEINE TRANSFORMATION

DER

BESTIMMTEN DOPPEL-INTEGRALE.

VON

DR. ANTON WINCKLER,

PROFESSOR DER HÖHERN MATHEMATIK AM ST. ST. JOANNEUM ZU GRATZ.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 7. JÄNNER 1859.

Doppelte und mehrfache Integrale, zwischen constanten oder durch gewisse Bedingungen bestimmten veränderlichen Grenzen gehören zu den am häufigsten in Anwendung kommenden Partien der Integralrechnung. Zu ihrer praktischen Bedeutung gesellt sich das Interesse, welches sie an sich der Betrachtung darbieten, und diesen beiden Umständen zusammen sind wohl die zahlreichen neuen Erörterungen und die seltene Reihe scharfsinniger Kunstgriffe zuzuschreiben, mit welchen die Entwicklung jenes Gegenstandes weiter geführt worden ist. In den hieher gehörigen Arbeiten kann man im Allgemeinen zweierlei Tendenzen unterscheiden: es wird entweder hauptsächlich auf eine einfachere Gestaltung der Grenzbedingungen hinzuwirken gesucht, und in dieser Hinsicht steht die so überaus schöne Methode des Herrn Prof. Dirichlet oben an; oder es wird vor Allem eine Transformation des gegebenen Differential-Ausdrucks angestrebt, und in dieser letzteren Beziehung bleibt, so ferne es sich bei Integralen mit vorgeschriebenen Grenzen um irgend welche Allgemeinheit handelt, noch fast Alles zu wünschen übrig. — Die so nahe liegende Frage nach der allgemeinen Transformation der bestimmten mehrfachen Integrale durch gleichzeitige Einführung mehrerer neuen Veränderlichen wurde nämlich bis jetzt nur Einen Schritt weit, nur bis zur Darstellung des zu integrierenden Elementes verfolgt. Euler hat in der Abhandlung: „De formulis integralibus duplicatis“ in den „Novi Commentarii Acad. Scient. Petrop. T. XIV, 1759“ für doppelte Integrale die betreffende Formel, — welche also jetzt ihr erstes Jahrhundert feiert, — entwickelt und hierdurch die erste Grundlage zu einer Theorie der doppelten Integrale

gegeben. Wie bekannt zeigte dann Lagrange im Jahre 1773, dass die Transformation dreifacher Integrale nach einer Methode geschehen könne, welche sich auf vielfache Integrale im Allgemeinen anwenden lässt. — So umfassend nun durch diese und einige spätere Arbeiten die Frage, soweit sie die Transformation des Elements betrifft, gelöst ist, so sehr mangelt es bis jetzt selbst an jedem Versuche, den zweiten Theil der Frage, nämlich die explicite Darstellung des transformirten Doppel-Integrals, in der Art allgemein zu lösen, dass die Anzahl der neuen Doppel-Integrale, in welche das gegebene zerfällt und zugleich die Grenzen derselben vollständig bestimmt wären. — In Ermangelung einer solchen Lösung mochte man sich nun allerdings damit beruhigen, dass die vollständige Ausführung der Transformation wenigstens in jedem einzelnen Falle sich werde finden lassen, aber man darf nicht übersehen, dass selbst hierzu im Allgemeinen jeder Anhaltspunkt fehlt, und wohl darum Alles, was in dieser Hinsicht erreicht worden ist, sich auf wenige und sehr specielle Fälle (wie z. B. die Complonation des dreiaxigen Ellipsoids etc.) beschränkt, bei welchen die Grenzen der neuen Doppel-Integrale mittelst geometrischer Betrachtungen, oder durch Verfahrensarten ermittelt werden, welche derselben unmittelbar nachgebildet sind. Dass sich daraus der in anderen Fällen einzuschlagende Weg oder der Charakter der allgemeinen Lösung nicht erkennen lassen konnte, versteht sich, wie ich glaube, ganz von selbst.

In der vorliegenden Materie wachsen allerdings die Schwierigkeiten mit jeder Verallgemeinerung der Grenzbedingungen und mit der Anzahl der Integrationsveränderlichen sehr rasch, und es erscheint zweckmässig auch hier von dem verhältnissmässig Einfachen auszugehen, sich also zunächst auf Doppel-Integrale mit explicite gegebenen Grenzen zu beschränken und selbst bei diesen gewisse Voraussetzungen festzuhalten, zugleich aber auch die möglichst allgemeinen Gesichtspunkte der Behandlung zu verfolgen. — Rücksichtlich dieser letzten Bemerkung glaube ich mich beispielsweise auf eine frühere, im 45. Bande des mathematischen Journals von Crelle erschienene Arbeit beziehen zu können, worin ich die Transformation einer grössern Anzahl doppelter Integrale erörtert habe, welche sich mittelst einer einzigen neuen Veränderlichen auf Quadraturen zurückführen lassen. Als wichtigeres Ergebniss jener auf Grundlage gewisser geometrischer Vorstellungen durchgeführten Betrachtungen hebe ich hervor, dass zur Darstellung des transformirten Doppel-Integrals nie mehr als drei andere doppelte Integrale erforderlich sind, obgleich es deren in besonderen Fällen auch weniger, oder wenn man gewisse symmetrische Formen anstrebt, wohl auch mehr als drei sein können, die sich jedoch immer wieder auf diese Anzahl zurückführen lassen.

In der vorliegenden Abhandlung nun werde ich die in allen Theilen vollständig bestimmte Darstellung der Transformation des doppelten Integrals

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\eta^0(x)}^{\eta^1(x)} f(x, y) dy$$

unter der Voraussetzung herleiten, dass die Veränderlichen x, y gleichzeitig durch zwei andere λ, μ ersetzt werden, welche mit jenen in dem durch die Gleichungen

$$x = X_{(\lambda, \mu)} \quad . \quad y = Y_{(\lambda, \mu)}$$

gegebenen Zusammenhange stehen.

Die Lösung dieser, wie man sieht, sehr allgemeinen Aufgabe ist bis jetzt weder auf geometrischem, noch auf analytischem Wege gelungen und es scheint auch in der That auf

den ersten Anblick, dass sich, ohne vollständige Specialisirung der Grenzen und der Relationen zwischen den alten und neuen Veränderlichen, eine erschöpfende Beantwortung der Frage nicht werde finden lassen. Der weitere Verlauf der vorliegenden Arbeit wird indessen zeigen, dass dies gleichwohl der Fall ist.

Ich werde hierbei den rein analytischen Weg verfolgen, theils weil dieser der Natur der Aufgabe am angemessensten zu sein scheint, theils weil sich auf jenem Wege das Verfahren erkennen lässt, welches zum Ziele führt, wenn die Grenzbedingungen in anderer, noch allgemeinerer Form gegeben sind, als sie hier vorausgesetzt werden. Indessen ist es nicht schwierig vielen Theilen der folgenden analytischen Darstellung eine geometrische Deutung unterzulegen. Ich glaube sie also ohne weitere Ausführung dem Leser überlassen zu dürfen.

Einige an sich bemerkenswerthe Anwendungen des allgemeinen Ergebnisses werden den Schluss dieser Arbeit bilden, wobei ich nicht unterlassen werde die gelegentlich sich ergebenden, meines Wissens bereits bekannten Resultate, in jedem einzelnen Falle als solche zu bezeichnen.

1.

Um den folgenden Erörterungen eine völlig bestimmte Grundlage zu geben, müssen einige, die Allgemeinheit übrigens nur wenig beeinträchtigende Voraussetzungen bis zu ihrer ausdrücklichen Beseitigung festgehalten werden.

1. Bezüglich der Grenzen des Doppel-Integrals wird vorausgesetzt, dass $\varphi^0_{(x)}$ und $\varphi^1_{(x)}$ für alle zwischen ξ_0 und ξ_1 liegenden Werthe von x einformig, stetig und endlich bleiben, und dass zwischen ξ_0 und ξ_1 kein Werth von x liege, für welchen $\varphi^0_{(x)}$ und $\varphi^1_{(x)}$ einander gleich werden, dass sich daher die Grenzbedingungen stets durch die Ungleichheiten:

$$\begin{aligned} \varphi^0(x) < y < \varphi^1(x) \\ \xi_0 < x < \xi_1 \end{aligned}$$

repräsentiren lassen, indem dann niemals $\varphi^0_{(x)}$ grösser als $\varphi^1_{(x)}$ werden kann. An dieser letztern Voraussetzung werde ich durchgehends festhalten, weil durch sie alle Betrachtungen wesentlich vereinfacht werden, und weil sie in der That keine eigentliche Beschränkung der Allgemeinheit in sich enthält. Denn gäbe es wirklich zwischen ξ_0 und ξ_1 einen oder selbst mehrere Werthe von x , für welche $\varphi^0_{(x)}$ und $\varphi^1_{(x)}$ einander gleich werden, so könnte man das Grenzenintervall der Veränderlichen y jenen Stellen entsprechend zerlegen, so dass man mehrere Doppel-Integrale erhielte, welche insgesamt der obigen Voraussetzung entsprechen und auf welche dann die später sich ergebenden Sätze unverändert angewendet werden können.

2. Die Transformation des Doppel-Integrals und der eben bezeichneten Grenzbedingungen durch die neuen Veränderlichen λ, μ geschehe vermöge der Relationen:

$$x = X_{(\lambda, \mu)} \quad : \quad y = Y_{(\lambda, \mu)}$$

wobei die Functionen $X_{(\lambda, \mu)}, Y_{(\lambda, \mu)}$ für alle in Betracht kommenden Werthe von λ, μ stets einformig und stetig bleiben, ob λ, μ einzeln oder gleichzeitig innerhalb eines in Frage kommenden Intervalls sich ändern mögen, und wobei jene Functionen die Beschaffenheit haben, dass einem bestimmten Werthe von x und einem solchen von y jederzeit nur Ein bestimmter Werth von λ und ein solcher von μ entspreche.

Es ist eine nothwendige Folge aller dieser Voraussetzungen, dass sich aus den obigen zwei Gleichungen niemals eine solche bilden lasse, in welcher entweder bloß λ und μ oder bloß x und y vorkommen, so wie auch, dass es keine Werthe von λ und μ gibt, für welche $X_{(\lambda, \mu)}$ zwischen ξ_0 und ξ_1 liegt, wenn sowohl λ als μ aus den Gleichungen:

$$\varphi^0 (X_{(\lambda, \mu)}) = \varphi^1 (X_{(\lambda, \mu)}) = Y_{(\lambda, \mu)}$$

bestimmt werden.

3. Die Wurzel:

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0 \text{ der Gleichung } X_{(\lambda, \mu)} = \xi_0 \\ \mu &= \mu_1 \text{ " " } X_{(\lambda, \mu)} = \xi_1 \\ \mu &= \mu^0 \text{ " " } Y_{(\lambda, \mu)} = \varphi^0 (X_{(\lambda, \mu)}) \\ \mu &= \mu^1 \text{ " " } Y_{(\lambda, \mu)} = \varphi^1 (X_{(\lambda, \mu)}) \end{aligned}$$

wird als vollständig bestimmt und als reell für alle diejenigen Werthe von λ vorausgesetzt, deren Intervalle durch das Folgende ihre nähere Bestimmung erhalten, und welche mit λ_0^1 , λ_1^0 , λ_0^0 , λ_1^1 bezeichnet werden mögen.

4. Diese vier Werthe von λ sind die einzigen reellen, in jeder Hinsicht vollkommen bestimmten Wurzeln gewisser Gleichungen, und zwar sei:

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_0^1 \text{ die Wurzel der Gleichungen } & \begin{cases} X_{(\lambda, \mu)} = \xi_0 \\ Y_{(\lambda, \mu)} = \varphi^1 (X_{(\lambda, \mu)}) \end{cases} \text{ oder: } \mu_0 = \mu^1 \\ \lambda = \lambda_1^0 \text{ " " " " " " " " } & \begin{cases} X_{(\lambda, \mu)} = \xi_1 \\ Y_{(\lambda, \mu)} = \varphi^0 (X_{(\lambda, \mu)}) \end{cases} \text{ " } \mu_1 = \mu^0 \\ \lambda = \lambda_0^0 \text{ " " " " " " " " } & \begin{cases} X_{(\lambda, \mu)} = \xi_0 \\ Y_{(\lambda, \mu)} = \varphi^0 (X_{(\lambda, \mu)}) \end{cases} \text{ " } \mu_0 = \mu^0 \\ \lambda = \lambda_1^1 \text{ " " " " " " " " } & \begin{cases} X_{(\lambda, \mu)} = \xi_1 \\ Y_{(\lambda, \mu)} = \varphi^1 (X_{(\lambda, \mu)}) \end{cases} \text{ " } \mu_1 = \mu^1 \end{aligned}$$

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass in Folge der oben bezeichneten Voraussetzungen die Gleichung $\mu^0 = \mu^1$ keine Werthe von λ und μ , nämlich $\lambda = \lambda^{01}$, $\mu = \mu^{01}$ liefern kann, für welche $X_{(\lambda, \mu)}$ zwischen ξ_0 und ξ_1 fällt. In gleicher Weise können die der Gleichung $\mu_0 = \mu_1$ entsprechenden Werthe $\lambda = \lambda_{01}$, $\mu = \mu_{01}$ keinem zwischen ξ_0 und ξ_1 liegenden Werthe von $X_{(\lambda, \mu)}$ entsprechen.

2.

Ausser den so eben bezüglich der Functionen $\varphi^0(x)$, $\varphi^1(x)$, $X_{(\lambda, \mu)}$, $Y_{(\lambda, \mu)}$ gemachten Annahmen bedarf es keiner weiteren Beschränkungen. Dagegen müssen des Folgenden wegen alle diejenigen Unterscheidungen bemerkt werden, welche sowohl bei der bloß partiellen als bei der gleichzeitigen Änderung der beiden Veränderlichen aufzufassen sind, und welche insbesondere bezüglich des Wachsens oder Abnehmens der Functionen $X_{(\lambda, \mu)}$, $Y_{(\lambda, \mu)}$, μ_0 , μ_1 , μ^0 , μ^1 in dem ganzen zur Sprache kommenden Umfange eintreten können.

Es seien $\partial\lambda$, $\partial\mu$ an sich positive, sehr kleine Zuwächse der Veränderlichen λ , μ , deren Beziehung zu einander in folgender Weise festgesetzt wird. Man lasse nämlich in $X_{(\lambda, \mu)}$ und $Y_{(\lambda, \mu)}$ einmal bloß λ um $\pm \partial\lambda$, und dann bloß μ um $\pm \partial\mu$ sich ändern und setze voraus, es

hänge $X_{(\lambda, \mu)}$ dergestalt von λ und μ ab, dass $\partial\lambda, \partial\mu$ gleichzeitig positiv werden, wenn man ihr Werthverhältniss gemäss der Gleichung

$$X_{(\lambda \pm \partial\lambda, \mu)} = X_{(\lambda, \mu \pm \partial\mu)}$$

bestimmt, so können bei der andern Function $Y_{(\lambda, \mu)}$ offenbar nur die folgenden zwei Fälle eintreten, nämlich dass entweder:

$$Y_{(\lambda \pm \partial\lambda, \mu)} \cong Y_{(\lambda, \mu \pm \partial\mu)}$$

oder dass

$$Y_{(\lambda \pm \partial\lambda, \mu)} \cong Y_{(\lambda, \mu \mp \partial\mu)}$$

wird, wobei alle Doppelzeichen correspondirende sind.

Lässt man dagegen einmal bloss λ um $\pm \partial\lambda$ und dann bloss μ um $\mp \partial\mu$ sich ändern, und setzt man voraus, es hänge nunmehr $X_{(\lambda, \mu)}$ in der Art von λ und μ ab, dass $\partial\lambda, \partial\mu$ positiv ausfallen, wenn man sie der Gleichung

$$X_{(\lambda \pm \partial\lambda, \mu)} = X_{(\lambda, \mu \mp \partial\mu)}$$

gemäss bestimmt, so können bei der Function $Y_{(\lambda, \mu)}$, deren Variable immer zu gleicher Zeit dieselben Änderungen annehmen, ebenfalls zwei Fälle eintreten, indem nämlich entweder

$$Y_{(\lambda \pm \partial\lambda, \mu)} \cong Y_{(\lambda, \mu \mp \partial\mu)}$$

oder aber

$$Y_{(\lambda \pm \partial\lambda, \mu)} \cong Y_{(\lambda, \mu \mp \partial\mu)}$$

sein kann, wo auch hier die Doppelzeichen insgesamt wieder correspondirende sind.

Es ist klar, dass hinsichtlich der partiellen Änderung der Variabeln andere Fälle, welche von den vier angeführten wesentlich verschieden wären, nicht möglich sind.

Ich werde nun die Relationen der Werthe von $X_{(\lambda, \mu)}, Y_{(\lambda, \mu)}$ unter dem Gesichtspunkte betrachten, dass darin beide Veränderliche sich gleichzeitig ändern, und zwar indem μ als irgend eine bestimmte Function von λ gedacht wird. Dabei fasse man alle überhaupt möglichen Beziehungen jener Functionswerthe in das Auge, welche sowohl bei bloss partieller als gleichzeitiger Änderung von λ und μ eintreten können. — Man nehme zu dem Ende an, es sei $d\lambda$ die sehr kleine Änderung von λ , in Folge deren sich μ um $d\mu$ ändert, oder also, es sei $d\mu$ das Differential von μ genommen nach λ .

Um alle hierbei möglichen Fälle zu umfassen, gehe man von den beiden bezüglich der partiellen Änderung so eben getroffenen Unterscheidungen aus und verfähre wie folgt.

3.

Für den ersten Fall nehme ich wieder an, es hänge $X_{(\lambda, \mu)}$ so von λ, μ ab, dass $\partial\lambda, \partial\mu$ positive Werthe erhalten, wenn man einmal $\lambda \pm \partial\lambda$ und dann $\mu \pm \partial\mu$ an die Stelle von λ, μ , und die beiden entsprechenden Werthe von X einander gleich setzt; auch setze ich sofort

$$X_{(\lambda \pm \partial\lambda, \mu)} = X_{(\lambda, \mu \pm \partial\mu)} = X_{(\lambda \pm \partial\lambda, \mu \pm d\mu)} \cdot \cdot \cdot \cdot A^{(0)}, B^{(0)}$$

was immer möglich ist, da die Taylor'sche Entwicklung als Bedingung für die vier Zuwächse die Gleichung:

$$\partial\lambda\partial\mu = \partial\lambda d\mu + \partial\mu d\lambda$$

liefert, welcher durch gehörige Wahl des Zeichens und Werthes von $d\lambda$ immer entsprochen werden kann.

Dies vorausgesetzt kann nun $Y_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu \pm \delta\mu)}$ zu den Gliedern der Ungleichheiten (Art. 2)

$$Y_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu)} \cong Y_{(\lambda, \mu \pm \delta\mu)} \cdot \dots \cdot A^{(0)}$$

$$Y_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu)} \cong Y_{(\lambda, \mu \pm \delta\mu)} \cdot \dots \cdot B^{(0)}$$

jedesmal drei verschiedene Stellungen einnehmen, und zwar in $A^{(0)}$:

$$Y_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu)} \cong Y_{(\lambda, \mu \pm \delta\mu)} \cong Y_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu \pm \delta\mu)} \cdot \dots \cdot A^{(1)}$$

$$Y_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu)} \cong Y_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu \pm \delta\mu)} \cong Y_{(\lambda, \mu \pm \delta\mu)} \cdot \dots \cdot A^{(2)}$$

$$Y_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu \pm \delta\mu)} \cong Y_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu)} \cong Y_{(\lambda, \mu \pm \delta\mu)} \cdot \dots \cdot A^{(3)}$$

Dessgleichen in $B^{(0)}$:

$$Y_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu)} \cong Y_{(\lambda, \mu \pm \delta\mu)} \cong Y_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu \pm \delta\mu)} \cdot \dots \cdot B^{(1)}$$

$$Y_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu)} \cong Y_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu \pm \delta\mu)} \cong Y_{(\lambda, \mu \pm \delta\mu)} \cdot \dots \cdot B^{(2)}$$

$$Y_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu \pm \delta\mu)} \cong Y_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu)} \cong Y_{(\lambda, \mu \pm \delta\mu)} \cdot \dots \cdot B^{(3)}$$

Entwickelt man die Functionswerthe nach der Taylor'schen Reihe und bezeichnet man der Kürze wegen $X_{(\lambda, \mu)}$, $Y_{(\lambda, \mu)}$ einfach durch X , Y , so ergeben sich der Ordnung nach die folgenden, mit den obigen gleichbedeutenden Relationen:

$$\frac{dX}{d\lambda} \delta\lambda = \frac{dX}{d\mu} \delta\mu = \frac{dX}{d\lambda} d\lambda + \frac{dX}{d\mu} d\mu$$

$$\frac{dY}{d\lambda} \delta\lambda > \frac{dY}{d\mu} \delta\mu > \frac{dY}{d\lambda} d\lambda + \frac{dY}{d\mu} d\mu$$

$$\frac{dY}{d\lambda} \delta\lambda > \frac{dY}{d\lambda} d\lambda + \frac{dY}{d\mu} d\mu > \frac{dY}{d\mu} \delta\mu$$

$$\frac{dY}{d\lambda} \delta\lambda + \frac{dY}{d\mu} \delta\mu > \frac{dY}{d\lambda} \delta\lambda > \frac{dY}{d\mu} \delta\mu$$

$$\frac{dY}{d\lambda} \delta\lambda < \frac{dY}{d\mu} \delta\mu < \frac{dY}{d\lambda} d\lambda + \frac{dY}{d\mu} d\mu$$

$$\frac{dY}{d\lambda} \delta\lambda < \frac{dY}{d\lambda} d\lambda + \frac{dY}{d\mu} d\mu < \frac{dY}{d\mu} \delta\mu$$

$$\frac{dY}{d\lambda} d\lambda + \frac{dY}{d\mu} d\mu < \frac{dY}{d\lambda} \delta\lambda < \frac{dY}{d\mu} \delta\mu$$

worauf ich bald wieder zurückkommen werde.

4.

Im zweiten Fall (des Art. 2) hängt $X_{(\lambda, \mu)}$ so von λ, μ ab, dass $\delta\lambda, \delta\mu$ nur dann positive Werthe erhalten können, wenn man einmal $\lambda \pm \delta\lambda$ für λ und dann $\mu \mp \delta\mu$ für μ , und hierauf die beiden entsprechenden Werthe von Y einander gleich setzt. Zugleich setze man

$$X_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu)} = X_{(\lambda, \mu \mp \delta\mu)} = X_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu \mp \delta\mu)} \cdot \dots \cdot A_0, B_0$$

was immer möglich ist, weil die vier Zuwachse nur der Gleichung

$$\delta\lambda\delta\mu = \delta\lambda d\mu + \delta\mu d\lambda$$

zu genügen haben, welcher durch eine passende Wahl des eigenen Zeichens und Werthes von $d\lambda$ jederzeit entsprochen werden kann.

Ist dies der Fall, so kann nun $Y_{(\lambda \pm d\lambda, \mu \mp d\mu)}$, worin $d\lambda, d\mu$ bis auf die Zeichen gewöhnliche Differentiale vorstellen, zu den Gliedern der Ungleichheiten (Art. 2):

$$Y_{(\lambda \pm d\lambda, \mu)} \cong Y_{(\lambda, \mu \mp d\mu)} \cdot \dots \cdot A_0$$

$$Y_{(\lambda \pm d\lambda, \mu)} \cong Y_{(\lambda, \mu \mp d\mu)} \cdot \dots \cdot B_0$$

jedesmal drei verschiedene Stellungen einnehmen, nämlich in A_0 :

$$Y_{(\lambda \pm d\lambda, \mu)} \cong Y_{(\lambda, \mu \mp d\mu)} \cong Y_{(\lambda \pm d\lambda, \mu \mp d\mu)} \cdot \dots \cdot A_1$$

$$Y_{(\lambda \pm d\lambda, \mu)} \cong Y_{(\lambda \pm d\lambda, \mu \mp d\mu)} \cong Y_{(\lambda, \mu \mp d\mu)} \cdot \dots \cdot A_2$$

$$Y_{(\lambda \pm d\lambda, \mu \mp d\mu)} \cong Y_{(\lambda \pm d\lambda, \mu)} \cong Y_{(\lambda, \mu \mp d\mu)} \cdot \dots \cdot A_3$$

und ebenso in B_0 :

$$Y_{(\lambda \pm d\lambda, \mu)} \cong Y_{(\lambda, \mu \mp d\mu)} \cong Y_{(\lambda \pm d\lambda, \mu \mp d\mu)} \cdot \dots \cdot B_1$$

$$Y_{(\lambda \pm d\lambda, \mu)} \cong Y_{(\lambda \pm d\lambda, \mu \mp d\mu)} \cong Y_{(\lambda, \mu \mp d\mu)} \cdot \dots \cdot B_2$$

$$Y_{(\lambda \pm d\lambda, \mu \mp d\mu)} \cong Y_{(\lambda \pm d\lambda, \mu)} \cong Y_{(\lambda, \mu \mp d\mu)} \cdot \dots \cdot B_3$$

Mit diesen gleichbedeutend ergeben sich durch die Entwicklung der Functionswerte in der obigen Ordnung die folgenden Relationen:

$$\frac{dX}{d\lambda} \partial\lambda = - \frac{dY}{d\mu} \partial\mu = \frac{dX}{d\lambda} d\lambda - \frac{dY}{d\mu} d\mu$$

$$\frac{dY}{d\lambda} \partial\lambda > - \frac{dY}{d\mu} \partial\mu > \frac{dY}{d\lambda} d\lambda - \frac{dY}{d\mu} d\mu$$

$$\frac{dY}{d\lambda} \partial\lambda > \frac{dY}{d\lambda} d\lambda - \frac{dY}{d\mu} d\mu > - \frac{dY}{d\mu} \partial\mu$$

$$\frac{dY}{d\lambda} d\lambda - \frac{dY}{d\mu} d\mu > \frac{dY}{d\lambda} \partial\lambda > - \frac{dY}{d\mu} \partial\mu$$

$$\frac{dY}{d\lambda} \partial\lambda < - \frac{dY}{d\mu} \partial\mu < \frac{dY}{d\lambda} d\lambda - \frac{dY}{d\mu} d\mu$$

$$\frac{dY}{d\lambda} \partial\lambda < \frac{dY}{d\lambda} d\lambda - \frac{dY}{d\mu} d\mu < - \frac{dY}{d\mu} \partial\mu$$

$$\frac{dY}{d\lambda} d\lambda - \frac{dY}{d\mu} d\mu < \frac{dY}{d\lambda} \partial\lambda < - \frac{dY}{d\mu} \partial\mu$$

mit deren näherer Betrachtung ich mich alsbald beschäftigen werde.

5.

Eliminirt man aus den sechs am Schluss des Art. 3 stehenden Relationen mittelst der Gleichungen $A^{(0)}, B^{(0)}$ jedesmal drei der Incremente $\partial\lambda, \partial\mu, d\lambda, d\mu$, und setzt man zur Abkürzung:

$$\Delta = \frac{dX}{d\mu} \cdot \frac{dY}{d\lambda} - \frac{dX}{d\lambda} \cdot \frac{dY}{d\mu}$$

so ergeben sich die folgenden Bedingungen:

$$\frac{\Delta}{\frac{dX}{d\mu}} \partial\lambda > 0, \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\lambda}} \partial\mu > 0, \begin{cases} \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\mu}} d\lambda < 0, \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\lambda}} d\mu > 0 \dots \dots A^{(1)} \\ \text{,,} > 0, \text{,,} > 0 \dots \dots A^{(2)} \\ \text{,,} > 0, \text{,,} < 0 \dots \dots A^{(3)} \end{cases}$$

$$\frac{\Delta}{\frac{dX}{d\mu}} \partial\lambda < 0, \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\lambda}} \partial\mu < 0, \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\mu}} d\lambda > 0, \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\lambda}} d\mu < 0 \dots B^{(1)} \\ \text{„} < 0, \text{„} < 0 \dots B^{(2)} \\ \text{„} < 0, \text{„} > 0 \dots B^{(3)} \end{array} \right.$$

Verfährt man in derselben Weise mit den am Schlusse des Art. 4 aufgestellten Relationen, so findet man die denselben entsprechenden Bedingungen wie folgt:

$$\frac{\Delta}{\frac{dX}{d\mu}} \partial\lambda > 0; \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\lambda}} \partial\mu < 0, \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\mu}} d\lambda < 0, \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\lambda}} d\mu < 0 \dots A_1 \\ \text{„} > 0, \text{„} < 0 \dots A_2 \\ \text{„} > 0, \text{„} > 0 \dots A_3 \end{array} \right.$$

$$\frac{\Delta}{\frac{dX}{d\mu}} \partial\lambda < 0, \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\lambda}} \partial\mu < 0, \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\mu}} d\lambda > 0, \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\lambda}} d\mu > 0 \dots B_1 \\ \text{„} < 0, \text{„} > 0 \dots B_2 \\ \text{„} < 0, \text{„} < 0 \dots B_3 \end{array} \right.$$

Wie man hieraus sieht, sind durch die Bedingungen, worin $\partial\lambda$ und $\partial\mu$ vorkommen, die gleichzeitigen Zeichen von Δ und der partiellen Differentialquotienten $\frac{dX}{d\mu}, \frac{dX}{d\lambda}$ und folglich auch die entsprechenden (eigenen) Zeichen von $d\lambda$ und $d\mu$ in allen denkbaren Fällen bestimmt.

Es verdient jedoch im Interesse der Kürze schon jetzt bemerkt zu werden, dass die späterhin ausschliesslich in Frage kommenden eigenen Zeichen von $d\lambda$, resp. bei $A^{(2)}$ und $A^{(3)}$, bei $B^{(2)}$ und $B^{(3)}$, bei A_2 und A_3 so wie bei B_2 und B_3 jedesmal genau dieselben sind, und dass daher, weil eben, wie sich zeigen wird, die Vorzeichen von $d\mu$ nicht in Betracht kommen und $\partial\lambda, \partial\mu$ an und für sich positiv sind, von jetzt an immer nur auf die Fälle $A^{(1)}, A^{(2)}, B^{(1)}, B^{(2)}, A_1, A_2, B_1, B_2$ Rücksicht zu nehmen ist.

6.

Um alle möglichen Zeichenverbindungen, welche die Bedingungen des vorigen Artikels zulassen, zu erhalten, muss man Δ seine zwei möglichen Vorzeichen + und - beilegen, daraus die Zeichen der partiellen Differentialquotienten $\frac{dX}{d\lambda}, \frac{dX}{d\mu}$ und sofort jenes von $d\lambda$ bestimmen. Alle hieraus entspringenden Fälle lassen sich indessen kurz zusammenfassen, und zwar, wie man sich leicht überzeugt, in folgender Form:

| | Δ | $\frac{dX}{d\lambda}$ | $\frac{dX}{d\mu}$ | Eigenes Zeichen von $d\lambda$ | |
|-------------------|----------|-----------------------|-------------------|--------------------------------|---------------------------|
| | | | | $A^{(1)} B^{(1)} A_1 B_1$ | $A^{(2)} B^{(2)} A_2 B_2$ |
| $A^{(1)} A^{(2)}$ | \pm | \pm | \pm | } — + | |
| $B^{(1)} B^{(2)}$ | \pm | \mp | \mp | | |
| $A_1 A_2$ | \pm | \mp | \pm | | |
| $B_1 B_2$ | \pm | \pm | \mp | | |

Hierin ist Alles enthalten, was nun im Folgenden über die Functionen X , Y ausser den im Art. 1 gemachten Annahmen, zu berücksichtigen ist. — Es drückt offenbar den Zusammenhang der Zeichen der Functional-Determinante Δ , der partiellen Differentialquotienten und der Zuwachse der Veränderlichen irgend zweier Functionen aus, welche gemeinschaftlich von denselben zwei veränderlichen Grössen abhängen. Ohne diesen Zusammenhang zu berücksichtigen wäre es nicht möglich das Zeichen der Determinante Δ allgemein zu fixiren, welches bekanntlich die Eingangs bezeichnete Euler'sche Transformation unbestimmt lässt.

7.

Um die folgenden Erörterungen auf genaue Bestimmungen zu gründen, müssen ferner noch alle, hinsichtlich des Wachsens und Abnehmens der Functionen:

$$\varphi^0(X_{(\lambda, \mu)}) \quad , \quad \varphi^1(X_{(\lambda, \mu)})$$

möglichen Fälle in Betracht gezogen werden. — Wie sich nun im weitem Verlauf herausstellen wird, kommt es hierbei auf die Änderungen dieser zwei Functionen in der Nähe derjenigen Werthe einer der beiden Veränderlichen, z. B. jener μ an, für welche die Ungleichheiten des Art. 1, an der Grenze ihrer Giltigkeit, in Gleichheiten übergehen, für welche also entweder:

$$\varphi^0(X_{(\lambda, \mu)}) = Y_{(\lambda, \mu)} \quad \text{oder} \quad \varphi^1(X_{(\lambda, \mu)}) = Y_{(\lambda, \mu)}$$

wird, und wofür (Art. 1) die Veränderliche μ als Function von λ die Werthe μ^0 und μ^1 erhält.

Da nun vermöge der Bedingung (Art. 1):

$$\varphi^0(X_{(\lambda, \mu)}) < Y_{(\lambda, \mu)} < \varphi^1(X_{(\lambda, \mu)})$$

jederzeit $\varphi^0(X)$ kleiner und $\varphi^1(X)$ grösser als Y bleiben muss, so ist leicht zu sehen, dass im Ganzen nur die folgenden vier Fälle möglich sind:

$$\left. \begin{array}{l} Y_{(\lambda, \mu^0 + \partial\mu^0)} > \varphi^0(X_{(\lambda, \mu^0 + \partial\mu^0)}) \\ Y_{(\lambda, \mu^1 - \partial\mu^1)} < \varphi^1(X_{(\lambda, \mu^1 - \partial\mu^1)}) \end{array} \right\} \dots \dots \dots \text{I}$$

$$\left. \begin{array}{l} Y_{(\lambda, \mu^0 - \partial\mu^0)} > \varphi^0(X_{(\lambda, \mu^0 - \partial\mu^0)}) \\ Y_{(\lambda, \mu^1 + \partial\mu^1)} < \varphi^1(X_{(\lambda, \mu^1 + \partial\mu^1)}) \end{array} \right\} \dots \dots \dots \text{II}$$

$$\left. \begin{array}{l} Y_{(\lambda, \mu^0 - \partial\mu^0)} > \varphi^0(X_{(\lambda, \mu^0 - \partial\mu^0)}) \\ Y_{(\lambda, \mu^1 - \partial\mu^1)} < \varphi^1(X_{(\lambda, \mu^1 - \partial\mu^1)}) \end{array} \right\} \dots \dots \dots \text{III}$$

$$\left. \begin{array}{l} Y_{(\lambda, \mu^0 + \partial\mu^0)} > \varphi^0(X_{(\lambda, \mu^0 + \partial\mu^0)}) \\ Y_{(\lambda, \mu^1 + \partial\mu^1)} < \varphi^1(X_{(\lambda, \mu^1 + \partial\mu^1)}) \end{array} \right\} \dots \dots \dots \text{IV}$$

wobei $\partial\mu^0$, $\partial\mu^1$ an sich positive, sehr kleine Zuwachse bezeichnen, deren nähere Bestimmung vorbehalten bleibt.

Welches aber auch die Werthverhältnisse jener Zuwachse seien, so folgt jedenfalls, dass die Erfüllung der obigen vier Bedingungen, hinsichtlich der Werthe der Veränderlichen μ davon abhängt, dass:

$$\begin{array}{ll} \mu > \mu^0 & , \quad \mu < \mu^1 \dots \dots \dots \text{bei I} \\ \mu < \mu^0 & , \quad \mu > \mu^1 \dots \dots \dots \text{bei II} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mu < \mu^0 & \quad , \quad \mu < \mu^1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \text{ bei III} \\ \mu > \mu^0 & \quad , \quad \mu > \mu^1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \text{ bei IV} \end{aligned}$$

sei: eine Bemerkung auf welche ich später zurückkommen werde.

8.

Die so eben bezeichneten vier Fälle lassen sich in eine andere Form bringen, und zwar mittelst einer Umgestaltung, wodurch die Functionen φ^0, φ^1 eliminirt und die entsprechenden Ungleichheiten einfach auf die Formen jener zurückgeführt werden, welche in den vorhergehenden Artikeln betrachtet worden sind. Zugleich erhalten auch die Verhältnisse der Zuwachse $\partial\mu^1, \partial\mu^0$ in jedem einzelnen Falle ihre nähere Bestimmung.

Es sei zu diesem Behufe φ^* der Repräsentant von φ^0 und φ^1 ; μ^* jener von μ^0 und μ^1 , und zwar sei dieses μ^* , als Function von λ gedacht, derjenige Werth, welcher der Gleichung:

$$Y_{(\lambda, \mu^*)} = \varphi^* (X_{(\lambda, \mu^*)})$$

allein Genüge leistet. Lässt man darin λ um $\pm d\lambda$, und entsprechend μ^* um $\pm d\mu^*$ sich ändern, so wird man haben:

$$Y_{(\lambda \pm d\lambda, \mu^* \pm d\mu^*)} = \varphi^* (X_{(\lambda \pm d\lambda, \mu^* \pm d\mu^*)})$$

Bestimmt man nunmehr, wie dies in Art. 3 geschah, und unter der dort gemachten Voraussetzung bezüglich der Zeichen der Zuwachse $\partial\lambda, \partial\mu^*, d\lambda, d\mu^*$ diese letzteren gemäss der Gleichung

$$X_{(\lambda \pm \partial\lambda, \mu^*)} = X_{(\lambda, \mu^* \pm \partial\mu^*)} = X_{(\lambda \pm d\lambda, \mu^* \pm d\mu^*)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot A^* \cdot B^*$$

so lässt sich der für Y gefundenen Gleichung auch die Form geben:

$$Y_{(\lambda \pm d\lambda, \mu^* \pm d\mu^*)} = \varphi^* (X_{(\lambda, \mu^* \pm \partial\mu^*)})$$

Daraus lassen sich nun die folgenden Schlüsse ziehen:

Ist

$$Y_{(\lambda, \mu^* \pm \partial\mu^*)} \cong \varphi^* (X_{(\lambda, \mu^* \pm \partial\mu^*)})$$

so ist auch:

$$Y_{(\lambda \pm d\lambda, \mu^* \pm d\mu^*)} \cong Y_{(\lambda, \mu^* \pm \partial\mu^*)}$$

Ist dagegen

$$Y_{(\lambda, \mu^* \pm \partial\mu^*)} \leq \varphi^* (X_{(\lambda, \mu^* \pm \partial\mu^*)})$$

so ist:

$$Y_{(\lambda \pm d\lambda, \mu^* \pm d\mu^*)} \cong Y_{(\lambda, \mu^* \pm \partial\mu^*)}$$

Ganz analog verfähre man in dem Falle des Art. 4.

Lässt man nämlich in der Gleichung:

$$Y_{(\lambda, \mu^*)} = \varphi^* (X_{(\lambda, \mu^*)})$$

λ um $\pm d\lambda$ sich ändern, und ist $\mp d\mu^*$ die entsprechende Änderung von μ^* , so hat man:

$$Y_{(\lambda \pm d\lambda, \mu^* \mp d\mu^*)} = \varphi^* (X_{(\lambda \pm d\lambda, \mu^* \mp d\mu^*)})$$

und wenn man nun, wie in Art. 4 die Verhältnisse der Zuwachse gemäss der Gleichung:

$$X_{(\lambda \pm \delta \lambda, \mu^*)} = X_{(\lambda, \mu^* \mp \delta \mu^*)} = X_{(\lambda \pm d \lambda, \mu^* \mp d \mu^*)} \cdot \dots \cdot A_{\#}^* \cdot B_{\#}^*$$

bestimmt, so kann man auch schreiben:

$$Y_{(\lambda \pm d \lambda, \mu^* \mp d \mu^*)} = \varphi^* (X_{(\lambda, \mu^* \mp \delta \mu^*)})$$

Hieraus lässt sich schliessen:

Ist

$$Y_{(\lambda, \mu^* \mp \delta \mu^*)} \leq \varphi^* (X_{(\lambda, \mu^* \mp \delta \mu^*)})$$

so folgt:

$$Y_{(\lambda \pm d \lambda, \mu^* \mp d \mu^*)} \geq Y_{(\lambda, \mu^* \mp \delta \mu^*)}$$

Ist dagegen

$$Y_{(\lambda, \mu^* \mp \delta \mu^*)} \geq \varphi^* (X_{(\lambda, \mu^* \mp \delta \mu^*)})$$

so ist:

$$Y_{(\lambda \pm d \lambda, \mu^* \mp d \mu^*)} \leq Y_{(\lambda, \mu^* \mp \delta \mu^*)}$$

} C_{\#}

Andere Fälle als die eben betrachteten lassen sich nicht angeben.

9.

Mit Hilfe der so eben bemerkten Sätze kann man die vier Relationen des Art. 7 in folgender Weise umformen. Verbindet man nämlich die Relationen A*, B* und C*, sodann A_{\#}, B_{\#} und C_{\#} mit jenen des Art. 7, so ergibt sich, wie leicht zu sehen:

Ist X_{(\lambda, \mu)} so beschaffen, dass

$$X_{(\lambda \pm \delta \lambda, \mu)} = X_{(\lambda, \mu \pm \delta \mu)} = X_{(\lambda \pm d \lambda, \mu \pm d \mu)} \cdot \dots \cdot A^{(0)}, B^{(0)}$$

gesetzt werden kann, und ist entweder

$$Y_{(\lambda \pm \delta \lambda, \mu)} \geq Y_{(\lambda, \mu \pm \delta \mu)} \cdot \dots \cdot A^{(0)}$$

oder:

$$Y_{(\lambda \pm \delta \lambda, \mu)} \leq Y_{(\lambda, \mu \pm \delta \mu)} \cdot \dots \cdot B^{(0)}$$

so werden die vier Fälle des Art. 7 durch die folgenden ersetzt:

$$\left. \begin{aligned} Y_{(\lambda + d \lambda, \mu^0 + d \mu^0)} &< Y_{(\lambda, \mu^0 + \delta \mu^0)} \cdot \dots \cdot A^{(1)}, B^{(2)} \\ Y_{(\lambda - d \lambda, \mu^1 - d \mu^1)} &> Y_{(\lambda, \mu^1 - \delta \mu^1)} \cdot \dots \cdot A^{(1)}, B^{(2)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{I}^{(1)}$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{(\lambda - d \lambda, \mu^0 - d \mu^0)} &< Y_{(\lambda, \mu^0 - \delta \mu^0)} \cdot \dots \cdot A^{(2)}, B^{(1)} \\ Y_{(\lambda + d \lambda, \mu^1 + d \mu^1)} &> Y_{(\lambda, \mu^1 + \delta \mu^1)} \cdot \dots \cdot A^{(2)}, B^{(1)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{II}^{(1)}$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{(\lambda - d \lambda, \mu^0 - d \mu^0)} &< Y_{(\lambda, \mu^0 - \delta \mu^0)} \cdot \dots \cdot A^{(2)}, B^{(1)} \\ Y_{(\lambda - d \lambda, \mu^1 - d \mu^1)} &> Y_{(\lambda, \mu^1 - \delta \mu^1)} \cdot \dots \cdot A^{(1)}, B^{(2)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{III}^{(1)}$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{(\lambda + d \lambda, \mu^0 + d \mu^0)} &< Y_{(\lambda, \mu^0 + \delta \mu^0)} \cdot \dots \cdot A^{(1)}, B^{(2)} \\ Y_{(\lambda + d \lambda, \mu^1 + d \mu^1)} &> Y_{(\lambda, \mu^1 + \delta \mu^1)} \cdot \dots \cdot A^{(2)}, B^{(1)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{IV}^{(1)}$$

Ist $X_{(\lambda, \mu)}$ so beschaffen, dass:

$$X_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu)} = X_{(\lambda, \mu \mp \delta\mu)} = X_{(\lambda \pm d\lambda, \mu \mp d\mu)}$$

gesetzt werden kann, und ist entweder:

$$Y_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu)} \geq Y_{(\lambda, \mu \mp \delta\mu)} \cdot \dots \cdot A_0$$

oder:

$$Y_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu)} \leq Y_{(\lambda, \mu \mp \delta\mu)} \cdot \dots \cdot B_0$$

so werden die vier Fälle des Art. 7 durch die folgenden dargestellt:

$$\left. \begin{aligned} Y_{(\lambda - d\lambda, \mu^0 + d\mu^0)} &< Y_{(\lambda, \mu^0 + \delta\mu^0)} \cdot \dots \cdot A_2, B_1 \\ Y_{(\lambda + d\lambda, \mu^1 - d\mu^1)} &> Y_{(\lambda, \mu^1 - \delta\mu^1)} \cdot \dots \cdot A_2, B_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{I}_1$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{(\lambda + d\lambda, \mu^0 - d\mu^0)} &< Y_{(\lambda, \mu^0 - \delta\mu^0)} \cdot \dots \cdot A_1, B_2 \\ Y_{(\lambda - d\lambda, \mu^1 + d\mu^1)} &> Y_{(\lambda, \mu^1 + \delta\mu^1)} \cdot \dots \cdot A_1, B_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{II}_1$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{(\lambda + d\lambda, \mu^0 - d\mu^0)} &< Y_{(\lambda, \mu^0 - \delta\mu^0)} \cdot \dots \cdot A_1, B_2 \\ Y_{(\lambda + d\lambda, \mu^1 - d\mu^1)} &> Y_{(\lambda, \mu^1 - \delta\mu^1)} \cdot \dots \cdot A_2, B_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{III}_1$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{(\lambda - d\lambda, \mu^0 + d\mu^0)} &< Y_{(\lambda, \mu^0 + \delta\mu^0)} \cdot \dots \cdot A_2, B_1 \\ Y_{(\lambda - d\lambda, \mu^1 + d\mu^1)} &> Y_{(\lambda, \mu^1 + \delta\mu^1)} \cdot \dots \cdot A_1, B_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{IV}_1$$

Die derselben Nummer angehörenden und unter einander stehenden Buchstaben bezeichnen hierbei die Bedingungen der Art. 3 und 4, welchen die entsprechenden Functionen μ^0 und μ^1 zu genügen haben. So haben z. B. in III⁽¹⁾ die Functionen μ^0 und μ^1 resp. den Bedingungen $A^{(2)}$ und $A^{(1)}$, oder aber auch jenen $B^{(1)}$ und $B^{(2)}$ Genüge zu leisten. Hiernach kann über den Sinn der gewählten Bezeichnungen wohl kein Zweifel bestehen.

Aus jeder dieser zweigliederigen Ungleichheiten entstehen zwei dreigliederige, wenn man dem entsprechenden $Y_{(\lambda \pm \delta\lambda, \mu)}$ seine möglichen Stellungen in denselben anweist. Die Zahl der Ungleichheitsbedingungen steigt hierdurch auf 32. Der Übersicht wegen habe ich schon weiter oben die Bezeichnung derjenigen in den Art. 3 und 4 aufgestellten Relationen beige-fügt, aus welchen man jene dreigliederigen Bedingungen erhält, wenn man darin μ mit dem betreffenden Index versieht. So entstehen z. B. aus der erstern der Beziehungen I⁽¹⁾ die einzig möglichen dreigliederigen:

$$\begin{aligned} Y_{(\lambda + \delta\lambda, \mu^0)} &> Y_{(\lambda, \mu^0 + \delta\mu^0)} > Y_{(\lambda + d\lambda, \mu^0 + d\mu^0)} \cdot \dots \cdot A^{(1)} \\ Y_{(\lambda, \mu^0 + \delta\mu^0)} &> Y_{(\lambda + d\lambda, \mu^0 + d\mu^0)} > Y_{(\lambda + \delta\lambda, \mu^0)} \cdot \dots \cdot B^{(2)} \end{aligned}$$

welche man aus Art. 3 unmittelbar erhält, wenn man in $A^{(1)}$ und $B^{(2)}$ durchgehends μ^0 für μ setzt. Aus diesem Grunde nun wurde oben der entsprechenden Ungleichheit jedesmal noch das Zeichen $A^{(1)}$, $B^{(2)}$ beige-fügt. In gleicher Weise sind die übrigen Bezeichnungen zu verstehen.

Ich bemerke schliesslich noch, dass aus dem Vorzeichen der an sich immer positiven Grösse $\delta\mu$ unmittelbar erkannt werden kann, ob das betreffende μ der grösste oder kleinste Werth ist, für welchen die zugehörige Ungleichheit noch besteht. So z. B. besagt die Ungleichheit:

$$Y_{(\lambda + d\lambda, \mu^0 + d\mu^0)} < Y_{(\lambda, \mu + \delta\mu^0)}$$

dass in der Function $Y_{(\lambda, \mu)}$ die Veränderliche μ nicht kleiner als μ^0 werden dürfe. Wo aber $\mu^1 - \partial\mu^1$ vorkommt, da besteht die entsprechende Bedingung nur für Werthe von μ^1 , welche nicht grösser als μ^1 sind. — U. s. f.

10.

Ich komme nun zur nähern Betrachtung der zweiten Bedingung, durch welche die Grenzen des Doppel-Integrals gegeben sind, und welche heisst:

$$\xi_0 < X_{(\lambda, \mu)} < \xi_1$$

Hier ist die Sache viel einfacher, denn man braucht blos zu untersuchen, wann die beiden Functionen μ_0, μ_1 , welche der Form nach ganz dieselben sind und sich überhaupt nur durch die Constanten ξ_0, ξ_1 unterscheiden, der obigen Bedingung gemäss, entweder die obere oder die untere Grenze der Veränderlichen μ bilden. Beachtet man zu diesem Zwecke, dass nach der im Art. 1 angenommenen Bezeichnung:

$$X_{(\lambda, \mu_0)} = \xi_0 \quad : \quad X_{(\lambda, \mu_1)} = \xi_1$$

und dass stets

$$X_{(\lambda, \mu)} > \xi_0 \quad ; \quad X_{(\lambda, \mu)} < \xi_1$$

bleiben soll, so kann man in folgender Weise bestimmen, in welchen Fällen μ_0 und μ_1 die grössten oder die kleinsten von allen zulässigen Werthen der Veränderlichen μ sind. Nun ist es eine unmittelbare Folge der Voraussetzungen (2) des Art. 1, dass immer gleichzeitig μ_0 der kleinste und μ_1 der grösste, oder umgekehrt μ_0 der grösste und μ_1 der kleinste jener Werthe sein müsse, dass also etweder:

$$X_{(\lambda, \mu_0 + \partial\mu_0)} > \xi_0 \quad \text{und} \quad X_{(\lambda, \mu_1 - \partial\mu_1)} < \xi_1$$

oder:

$$X_{(\lambda, \mu_0 - \partial\mu_0)} > \xi_0 \quad \text{und} \quad X_{(\lambda, \mu_1 + \partial\mu_1)} < \xi_1$$

ist. Entwickelt man die Functionswerthe nach der Taylor'schen Reihe, so ergibt sich, dass entweder:

$$\frac{dX_{(\lambda, \mu_0)}}{d\mu_0} \cdot \partial\mu_0 > 0 \quad \text{und} \quad \frac{dX_{(\lambda, \mu_1)}}{d\mu_1} \cdot \partial\mu_1 > 0$$

oder:

$$\frac{dX_{(\lambda, \mu_0)}}{d\mu_0} \cdot \partial\mu_0 < 0 \quad \text{und} \quad \frac{dX_{(\lambda, \mu_1)}}{d\mu_1} \cdot \partial\mu_1 < 0$$

Daraus aber folgt sogleich:

Es muss $\mu > \mu_0$ und $\mu < \mu_1$, oder also $\mu_0 < \mu_1$ sein, wenn $\frac{dX}{d\mu}$ positiv,

dagegen muss $\mu < \mu_0$ und $\mu > \mu_1$, oder also $\mu_0 > \mu_1$ sein, wenn $\frac{dX}{d\mu}$ negativ

ist. Es versteht sich von selbst, dass diesen Forderungen durch Werthe von λ entsprochen werden kann und muss, welche innerhalb bestimmter Intervalle liegen.

Bezüglich der Werthe von $Y_{(\lambda, \mu_0 \pm \partial\mu_0)}$, $Y_{(\lambda, \mu_1 \pm \partial\mu_1)}$ welche den oben zur Sprache gebrachten Werthen von X correspondiren, können nun wieder alle Fälle eintreten, welche in der Tabelle des Art. 6 unterschieden worden sind. Man würde die Zusammenstellung aller dieser Fälle

erhalten, wenn man in jener Tabelle, den Zeichen von $\frac{dX}{d\mu}$ entsprechend, die Grenzen von μ , wie sie oben angegeben sind, beifügte.

11.

Es genügt jedoch nicht, dass $X_{(\lambda, \mu)}$ stets zwischen den Grenzen ξ_0 und ξ_1 eingeschlossen bleibe, sondern es muss gleichzeitig auch der andern Bedingung des Art. 1 Genüge geschehen, welche fordert, dass man jederzeit habe:

$$\varphi^0(X_{(\lambda, \mu)}) < Y_{(\lambda, \mu)} < \varphi^1(X_{(\lambda, \mu)})$$

Um nun diese beiden Bedingungen zu erfüllen, muss man allen in Art. 9 ausführlich angegebenen Fällen, in Verbindung mit den zugehörigen Bedingungen zwischen μ , μ^0 und μ^1 , sodann mit den entsprechenden Zeichen von $\frac{dX}{d\mu}$ und von Δ noch die entsprechenden Bedingungen für μ , μ_0 und μ_1 , wie sie aus dem vorigen Artikel sich ergeben, hinzufügen.

Ich unterlasse es auch hier, diese Fälle tabellarisch zusammen zu stellen, weil später folgende Übersichten solches entbehrlich machen. Die Erwähnung eines einzigen Falles dürfte hier genügen; ich wähle dazu den Fall III⁽¹⁾ des Art. 9.

In Bezug auf μ^0 kann der Fall A⁽²⁾, bezüglich μ^1 der Fall A⁽¹⁾ als zugehörig eintreten. Angenommen nun, es sei Δ positiv, so ist nach Art. 9:

$$\mu < \mu^0 \quad \text{und} \quad \mu < \mu^1$$

und nach Art. 5: $\frac{dX}{d\mu}$ positiv, folglich nach Art. 10:

$$\mu > \mu_0 \quad \text{und} \quad \mu < \mu_1$$

Ist dagegen Δ negativ, so folgt aus Art. 9 ebenfalls:

$$\mu < \mu^0 \quad \text{und} \quad \mu < \mu^1$$

und nach Art. 5: $\frac{dX}{d\mu}$ negativ, folglich nach Art. 10:

$$\mu < \mu_0 \quad \text{und} \quad \mu > \mu_1$$

Hiernach finden also gleichzeitig die folgenden Beziehungen statt:

$$\frac{dX}{d\mu} > 0 \quad , \quad \Delta > 0 \quad , \quad \mu < \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1 \quad , \quad \mu > \mu_0 \quad , \quad \mu < \mu_1$$

$$\frac{dX}{d\mu} < 0 \quad , \quad \Delta < 0 \quad , \quad \mu < \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1 \quad , \quad \mu < \mu_0 \quad , \quad \mu > \mu_1$$

Auf ähnliche Art würden sich alle übrigen Fälle ergeben.

12.

Durch das Vorhergehende sind in allen Fällen die Grenzbedingungen für die Veränderliche μ gegeben. Aber auch die correspondirenden Grenzen von λ sind dadurch bestimmt. Diese sind nämlich, wie sich zeigen wird, diejenigen Werthe von λ , für welche die Ungleichheiten:

$$\mu_0 \geq \mu^0 \quad ; \quad \mu_0 \geq \mu^1 \quad ; \quad \mu_1 \geq \mu^0 \quad ; \quad \mu_1 \geq \mu^1$$

in Gleichungen übergehen. Die wesentliche Frage hierbei betrifft jedoch, wie man sich bald überzeugen kann, nicht sowohl jene Werthe an und für sich, als vielmehr den Weg, auf

welchem man von einem Werthe der Veränderlichen λ , der eine jener Ungleichheiten realisiert, ausgehend, zu dem Werthe, der diese Ungleichheit in eine Gleichung verwandelt, gelangen muss.

Angenommen z. B. es sei $\mu_0 < \mu^0$ die in dieser Richtung zu untersuchende Bedingung, und es sei irgend ein derselben entsprechender Werth für die Veränderliche λ gewählt, so ist es die Frage, ob man von diesem Werthe ausgehend, zu grösseren oder kleineren Zahlenwerthen übergehen müsse, um zu demjenigen zu gelangen, für welchen genau $\mu_0 = \mu^0$ wird. Auf welche Weise sich diese Frage in jedem einzelnen Falle beantworten lässt, wird sich deutlich genug aus der nähern Erörterung des oben gewählten Beispiels erkennen lassen.

Die vor Allem nothwendige Unterscheidung bezieht sich auf das Zeichen von $\frac{dX}{d\mu}$; dasselbe ergibt sich wie folgt.

Da die unabhängig Veränderliche μ in dem Intervall der Ungleichheit $\mu_0 < \mu^0$ liegen soll, so ist nothwendig:

$$\mu > \mu_0 \quad \text{und} \quad \mu < \mu^0$$

und es muss also in Folge der erstern Bedingung nach Art. 10 . . . $\frac{dX}{d\mu}$ positiv sein.

Diese Bestimmung bietet sofort ein Mittel dar, die ursprüngliche Ungleichheit $\mu_0 < \mu^0$ durch eine andere zu ersetzen; denn es muss jetzt offenbar auch:

$$X_{(\lambda, \mu_0)} < X_{(\lambda, \mu^0)}$$

oder also:

$$\xi_0 < X_{(\lambda, \mu^0)}$$

sein, und es geht diese Ungleichheit mit der ursprünglichen gleichzeitig und für denselben Werth von λ in eine Gleichung über. Damit nun aber dieser Übergang stattfinden, muss offenbar λ sich so ändern, dass $X_{(\lambda, \mu^0)}$ abnimmt.

Um die Art dieser Änderung zu erfahren, bemerke man, dass das Abnehmen von $X_{(\lambda, \mu^0)}$ auch durch eine bloss negative Änderung $-\delta\mu^0$ von μ^0 hervorgerufen werden kann, dass nämlich:

$$X_{(\lambda, \mu^0)} > X_{(\lambda, \mu^0 - \delta\mu^0)} > \xi_0$$

Lässt man nun aber λ um $-d\lambda$ und in Folge dessen μ^0 um $-d\mu^0$ sich ändern, so kann man fragen, welches Zeichen die Änderung $d\lambda$ an sich haben müsse, damit $X_{(\lambda, \mu^0 - \delta\mu^0)}$ sich durch $X_{(\lambda - d\lambda, \mu^0 - d\mu^0)}$ ersetzen lasse, oder also, damit:

$$X_{(\lambda - d\lambda, \mu^0 - d\mu^0)} = X_{(\lambda, \mu^0 - \delta\mu^0)}$$

werde. Um diese Frage vollständig zu beantworten, muss man vor Allem bis zur Unterscheidung der möglichen Zeichen von $\frac{dX}{d\lambda}$ zurückgehen, was dadurch geschieht, dass man einmal annimmt, es sei $X_{(\lambda - \delta\lambda, \mu^0)}$ und dann $X_{(\lambda + \delta\lambda, \mu^0)}$ fähig den Werth $X_{(\lambda, \mu^0 - \delta\mu^0)}$ darzustellen, so dass man entweder:

$$X_{(\lambda - \delta\lambda, \mu^0)} = X_{(\lambda - d\lambda, \mu^0 - d\mu^0)} = X_{(\lambda, \mu^0 - \delta\mu^0)} \cdot \cdot \cdot \cdot A^{(0)}, B^{(0)}$$

oder aber:

$$X_{(\lambda + \delta\lambda, \mu^0)} = X_{(\lambda + d\lambda, \mu^0 - d\mu^0)} = X_{(\lambda, \mu^0 - \delta\mu^0)} \cdot \cdot \cdot \cdot A_0, B_0$$

hat. — Da sich aber auch hieraus noch nicht die eigenen Zeichen von $d\lambda$ in ihrem nothwendigen Zusammenhange mit dem Zeichen der Determinante Δ ergeben, so

lasse man zu den Gleichungen $A^{(0)}, B^{(0)}$ noch die sechs, bezüglich der Function Y möglichen Fälle des Art. 3, und zu den Gleichungen A_0, B_0 die sechs Fälle des Art. 4 hinzu treten, so wird man, sowohl wenn $\frac{dX}{d\lambda}$ positiv als negativ ist, nicht nur das Zeichen von Δ , sondern auch jedesmal das eigene Zeichen von $d\lambda$ finden, und sofort aus $A^{(0)}, B^{(0)}$ und A_0, B_0 erkennen, ob λ eine positive oder negative Änderung erfahren muss, damit $X_{(\lambda-\delta\lambda, \mu^0-d\mu^0)}$ oder $X_{(\lambda-\delta\lambda, \mu^0)}$, und $X_{(\lambda+\delta\lambda, \mu^0-d\mu^0)}$ oder $X_{(\lambda, \mu^0-d\mu^0)}$ abnehme und sich also dem festen Werthe ξ_0 auf diesem Wege nähern könne.

Die ganz gleiche Betrachtung ist bei der Ungleichheit $\mu_0 < \mu^1$, oder was gleichbedeutend ist, bei $\mu > \mu_0, \mu < \mu^1$, wo $\frac{dX}{d\mu}$ ebenfalls positiv sein muss, anzustellen.

Man kann daher diese beiden Fälle zusammenfassen, indem man von der Bedingung:

$$\mu_0 < \mu^*$$

oder den gleichbedeutenden:

$$\mu > \mu_0 \quad , \quad \mu < \mu^* \quad , \quad \frac{dX}{d\mu} \text{ positiv}$$

ausgeht, und dabei μ^* als den Repräsentanten von μ^0 und μ^1 ansieht.

Die gleiche Bezeichnung will ich auch bei allen übrigen noch in Betracht zu ziehenden Fällen gebrauchen. Da diese Fälle sich in durchaus analoger Weise, wie im eben betrachteten Beispiele erörtern lassen, so scheint es angemessener, statt der ins Einzelne gehenden Ausführung aller jener Fälle, eine übersichtliche Zusammenstellung aller hierher gehörigen Resultate, wie sie sich jedesmal gegenseitig bedingen, in einer Art folgen zu lassen, welche wohl jede weitere Erklärung unnöthig machen dürfte.

| An- nahme | $\frac{dX}{d\mu}$ | $\frac{dX}{d\lambda}$ | Grenzen der Veränderlichen μ | $X(\lambda, \mu^*) < \xi_1$ $X(\lambda, \mu^*)$ wächst gleichzeitig mit: | $A^{(1)}$ | $B^{(1)}$ | $A^{(2)}$ | $B^{(2)}$ | | | | | |
|--------------|-------------------|-----------------------|-------------------------------------|---|---|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|-------|---|---|---|---|
| | | | | | Δ Änderung von λ | Δ Änderung von λ | Δ Änderung von λ | Δ Änderung von λ | | | | | |
| (1) | $\mu^* < \mu_1$ | + | + | $\mu > \mu_0, \mu < \mu_1, \mu > \mu^*$ | $X(\lambda + \delta\lambda, \mu^*) = X(\lambda + d\lambda, \mu^* + d\mu^*) = X(\lambda, \mu^* + \delta\mu^*)$ | + | - | - | - | + | + | - | + |
| (2) | $\mu^* > \mu_1$ | - | - | $\mu < \mu_0, \mu > \mu_1, \mu < \mu^*$ | $X(\lambda - \delta\lambda, \mu^*) = X(\lambda - d\lambda, \mu^* - d\mu^*) = X(\lambda, \mu^* - \delta\mu^*)$ | - | + | + | + | - | - | + | - |
| | | | | | $X(\lambda, \mu^*) > \xi_0$ $X(\lambda, \mu^*)$ nimmt gleichzeitig ab mit: | | | | | | | | |
| (3) | $\mu^* > \mu_0$ | + | + | $\mu > \mu_0, \mu < \mu_1, \mu < \mu^*$ | $X(\lambda - \delta\lambda, \mu^*) = X(\lambda - d\lambda, \mu^* - d\mu^*) = X(\lambda, \mu^* - \delta\mu^*)$ | + | + | - | + | + | - | - | - |
| (4) | $\mu^* < \mu_0$ | - | - | $\mu < \mu_0, \mu > \mu_1, \mu > \mu^*$ | $X(\lambda + \delta\lambda, \mu^*) = X(\lambda + d\lambda, \mu^* + d\mu^*) = X(\lambda, \mu^* + \delta\mu^*)$ | - | - | + | - | - | + | + | + |
| | | | | | $X(\lambda, \mu^*) < \xi_1$ $X(\lambda, \mu^*)$ wächst gleichzeitig mit: | A_1 | B_1 | A_2 | B_2 | | | | |
| | | | | | Δ Änderung von λ | Δ Änderung von λ | Δ Änderung von λ | Δ Änderung von λ | | | | | |
| (5) | $\mu^* > \mu_1$ | - | + | $\mu < \mu_0, \mu > \mu_1, \mu < \mu^*$ | $X(\lambda + \delta\lambda, \mu^*) = X(\lambda + d\lambda, \mu^* - d\mu^*) = X(\lambda, \mu^* - \delta\mu^*)$ | - | - | + | - | - | + | + | + |
| (6) | $\mu^* < \mu_1$ | + | - | $\mu > \mu_0, \mu < \mu_1, \mu > \mu^*$ | $X(\lambda - \delta\lambda, \mu^*) = X(\lambda - d\lambda, \mu^* + d\mu^*) = X(\lambda, \mu^* + \delta\mu^*)$ | + | + | - | + | + | - | - | - |
| | | | | | $X(\lambda, \mu^*) > \xi_0$ $X(\lambda, \mu^*)$ nimmt ab gleichzeitig mit: | | | | | | | | |
| (7) | $\mu^* < \mu_0$ | - | + | $\mu < \mu_0, \mu > \mu_1, \mu > \mu^*$ | $X(\lambda - \delta\lambda, \mu^*) = X(\lambda - d\lambda, \mu^* + d\mu^*) = X(\lambda, \mu^* + \delta\mu^*)$ | - | + | + | + | - | - | + | - |
| (8) | $\mu^* > \mu_0$ | + | - | $\mu > \mu_0, \mu < \mu_1, \mu < \mu^*$ | $X(\lambda + \delta\lambda, \mu^*) = X(\lambda + d\lambda, \mu^* - d\mu^*) = X(\lambda, \mu^* - \delta\mu^*)$ | + | - | - | - | + | + | - | + |

Die Ungleichheiten: $\mu_0 \geq \mu_1$ und $\mu^0 \geq \mu^1$, insbesondere deren Übergang in Gleichungen, blieben hier ganz unberücksichtigt, wofür der Grund nach den Voraussetzungen des Art. 1 leicht einzusehen ist. Was zunächst die Gleichung $\mu_0 = \mu_1$ betrifft, so sind darin μ_0 und μ_1 Functionen von durchaus gleicher Form, welche sich überhaupt nur durch die Constanten ξ_0 und ξ_1 unterscheiden. Jene Gleichung, welche ihren Ursprung in den beiden Gleichungen:

$$Y_{(\lambda, \mu)} = \xi_0 \quad , \quad X_{(\lambda, \mu)} = \xi_1$$

hat, ist also, wie man sieht, im Allgemeinen selbst eine Unmöglichkeit.

Die zweite Ungleichheit $\mu^0 \geq \mu^1$ kann in Folge der Voraussetzung des Art. 1 eben so wenig in eine Gleichung übergehen. Denn da es keinen zwischen ξ_0 und ξ_1 liegenden Werth von x gibt, für welchen $\varphi^0(x)$ und $\varphi^1(x)$ einander gleich werden, so gibt es auch keinen der Gleichung

$$\varphi^0(X_{(\lambda, \mu)}) = \varphi^1(X_{(\lambda, \mu)}) = Y_{(\lambda, \mu)}$$

genügenden zwischen ξ_0 und ξ_1 liegenden Werth von $X_{(\lambda, \mu)}$. Ein solcher Werth, er möge ξ heissen, müsste aber existiren, damit aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \xi &= X_{(\lambda, \mu)} \\ \varphi^0(\xi) &= \varphi^1(\xi) = Y_{(\lambda, \mu)} \end{aligned}$$

die Werthe $\lambda = \lambda^0$, $\mu = \mu^0$, welche der Gleichung $\mu^0 = \mu^1$ entsprechen, berechnet werden könnten. Es können daher niemals gleichzeitig jene Werthe im Bereiche der Integrationswerthe, — wenn gleich der eine ohne den andern — vorkommen.

An diesen Bemerkungen muss im Folgenden durchaus festgehalten werden.

13.

Aus der im vorigen Artikel angeführten Zusammenstellung lässt sich nun, in Verbindung mit jener des Art. 9, für alle Fälle, die hier in Frage kommen können, der Zusammenhang zwischen den Vorzeichen der Determinante Δ , den Grenzbedingungen für die Veränderliche μ und den Grössenverhältnissen der hier ausschliesslich in Betracht kommenden vier Wurzelwerthe λ_0^0 , λ_0^1 , λ_1^0 , λ_1^1 herstellen. Wie sich derselbe in jedem einzelnen Falle finden lässt, ist nunmehr nachzuweisen; es wird aber vollkommen hinreichen, wenn die Art der Herleitung in zwei Fällen vollständig ausgeführt wird.

Als ersten Fall will ich jenen I⁽¹⁾ des Art. 9 annehmen, bei welchem die Bedingung $A^{(1)}$ für μ^0 , und ebenfalls $A^{(1)}$ für μ^1 stattfindet, wofür ausserdem nach Art. 7

$$\mu > \mu^0 \quad \text{und} \quad \mu < \mu^1$$

sein muss. Das Zeichen von Δ ist aber hierdurch keineswegs schon bestimmt, es kann sowohl positiv als negativ sein.

Angenommen es sei Δ positiv, so ist klar, dass in der Zusammenstellung des Art. 12, und zwar in der

$$\left. \begin{array}{l} \text{Horizontalreihe (1) } \mu^* = \mu^0 \\ \text{„ (3) } \mu^* = \mu^1 \end{array} \right\} \mu > \mu_0, \mu < \mu_1$$

zu setzen ist. Jene Tabelle liefert nun sogleich als zugehörend die folgenden unumgänglichen Bedingungen:

$$\begin{aligned} \mu^0 < \mu_1 & \text{Änderung von } \lambda \text{ negativ,} \\ \mu^1 > \mu_0 & \text{ „ „ } \lambda \text{ positiv.} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass λ von demjenigen Werth, wofür $\mu^0 < \mu_1$ bis zu demjenigen, wofür $\mu_0 = \mu^1$ ist, abnehmen muss, weil die entsprechende Änderung von λ negativ ist.

Es ist daher λ_1^0 der kleinste zulässige Werth der Veränderlichen λ .

In gleicher Weise ergibt sich, dass λ von einem der Ungleichheit $\mu^1 > \mu_0$ Genüge leistenden Werth bis zu demjenigen, wofür $\mu^1 = \mu_0$ wird, durch Wachsen gelangt, dass daher λ_0^1 der grösste aller zulässigen Werthe von λ ist.

Fasst man Alles zusammen, so folgt als Resultat:

Wenn die Functionen φ^0 , φ^1 und X , Y der Bedingungen in $I^{(1)}$ und $A^{(1)}$, $A^{(1)}$ entsprechen, und wenn Δ als positiv angesehen wird, so ist gleichzeitig:

$$\mu > \mu_0 \quad , \quad \mu < \mu_1 \quad , \quad \mu > \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1$$

also:

$$\mu_0 < \mu_1 \quad , \quad \mu^0 < \mu_1 \quad , \quad \mu^1 > \mu_0 \quad , \quad \mu^0 < \mu^1$$

und:

$$\lambda_0^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^1 > \lambda_1^0$$

oder auch:

$$\lambda_0^1 > \lambda_1^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^0$$

Rücksichtlich der letztern Verwechslung der Zwischenwerthe λ_0^0 und λ_1^1 genügt es, zu bemerken, dass für deren Grössenverhältniss keine besondere Bedingung existirt, also die beiden angegebenen Verhältnisse gleich möglich sind. Der eigentliche Grund hiefür liegt aber darin, dass hier die Bedingungen:

$$\mu_0 < \mu_1 \quad , \quad \mu^0 < \mu^1$$

eine nothwendige Folge des Vorhergehenden sind, an und für sich schon stattfinden und also nicht in ihr Gegentheil übergehen können, so dass die diesem Übergange entsprechenden Werthe

$$\mu_{01} \quad , \quad \lambda_{01} \quad \text{und} \quad \mu^{01} \quad , \quad \lambda^{01}$$

zwischen den äussersten Grenzen λ_0^1 und λ_1^0 nicht vorkommen.

Da nun diese, in den Voraussetzungen des Art. 1 gegründete Forderung, welche allein noch zu beachten wäre, von selbst stattfindet, so kann also in der That von den Zwischengrenzen λ_0^0 , λ_1^1 sowohl die eine als die andere die grössere sein.

Angenommen es sei nun Δ negativ, so ist nach der Tabelle des Art. 12 in der

$$\left. \begin{array}{l} \text{Horizontalreihe (1) } \mu^{\#} = \mu^0 \\ \text{ „ (2) } \mu^{\#} = \mu^1 \end{array} \right\} \mu < \mu_0 \quad , \quad \mu > \mu_1$$

zu setzen. Jene Tabelle gibt zugleich als nothwendige Bedingungen:

$$\begin{aligned} \mu^0 < \mu_0 & \text{Änderung von } \lambda \text{ negativ,} \\ \mu^1 > \mu_1 & \text{ „ „ } \lambda \text{ positiv.} \end{aligned}$$

Es muss daher λ von demjenigen Werthe, für welcher $\mu^0 < \mu_0$ ist, bis zu demjenigen, wofür $\mu^0 = \mu_0$ wird, abnehmen, so dass λ_0^0 der kleinste zulässige Werth von λ ist.

Dagegen muss λ von dem Werthe wofür $\mu^1 > \mu_1$ bis zu jenem, wofür $\mu^1 = \mu_1$ wird, wachsen, wonach also λ_1^1 als der grösste aller zulässigen Werthe von λ erscheint.

Man sieht hieraus, dass unter den Bedingungen I⁽¹⁾ und A⁽¹⁾, A⁽¹⁾ und wenn Δ negativ ist, gleichzeitig:

$$\mu < \mu_0 \quad , \quad \mu > \mu_1 \quad , \quad \mu > \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1$$

also:

$$\mu_0 > \mu_1 \quad , \quad \mu^0 < \mu_0 \quad , \quad \mu^1 > \mu_1 \quad , \quad \mu^0 < \mu^1$$

und

$$\lambda_1^1 > \lambda_0^1 > \lambda_1^0 > \lambda_0^0$$

oder auch:

$$\lambda_1^1 > \lambda_1^0 > \lambda_0^1 > \lambda_0^0$$

sein muss. Hinsichtlich der Vertauschung der Zwischenwerthe λ_1^0, λ_0^1 gilt hier dieselbe Bemerkung wie in dem, für das positive Zeichen von Δ betrachteten Falle.

Um den Vorgang bei den hier zu treffenden Bestimmungen, welche für alles Folgende durchaus massgebend sind, vollständig darlegen zu können, wähle ich noch einen zweiten Fall, nämlich denjenigen, welcher der Bedingung III⁽¹⁾ des Art. 9 entspricht, und in welchem die Relation B⁽¹⁾ für μ^0 , und B⁽²⁾ für μ^1 besteht, wofür also nach Art. 9 jederzeit:

$$\mu < \mu^0, \mu < \mu^1$$

sein muss.

Auch hier ist die Betrachtung sowohl für das positive als das negative Vorzeichen von Δ durchzuführen.

Angenommen es sei Δ positiv, so muss in der Tabelle des Art. 12 und zwar in der

$$\left. \begin{array}{l} \text{Horizontalreihe (2) } \mu^* = \mu^0 \\ \text{„ (2) } \mu^* = \mu^1 \end{array} \right\} \mu < \mu_0 \quad , \quad \mu > \mu_1$$

gesetzt werden. Zugleich ergeben sich daraus als nothwendige Folge der gemachten Annahmen die Bedingungen:

$$\begin{array}{l} \mu^0 > \mu_1 \quad . \quad . \quad . \quad \text{Änderung von } \lambda \text{ positiv,} \\ \mu^1 > \mu_1 \quad . \quad . \quad . \quad \text{„ „ } \lambda \text{ negativ.} \end{array}$$

Der Werth von λ , für welchen $\mu^0 > \mu_1$ ist, muss also wachsen, um denjenigen zu erreichen, für welchen $\mu^0 = \mu_1$ ist. Hiernach erscheint λ_1^0 als der grösste aller derjenigen Werthe von λ , für welche, wie bedungen ist, die Ungleichheit $\mu^0 > \mu_1$ nicht in ihr Gegentheil umschlägt.

In ganz ähnlicher Weise ergibt sich, dass λ_1^1 der kleinste aller zulässigen Werthe von λ ist.

Was nun das Grössenverhältniss der beiden anderen Werthe λ_0^0, λ_0^1 betrifft, so ist dasselbe hier, im Gegensatze zu den beiden zuerst betrachteten Fällen, kein ganz unbestimmtes, sondern es muss hier $\lambda_0^0 > \lambda_0^1$ sein. Um dies zu zeigen, gehe ich von der Bemerkung aus, dass durch die Ungleichheiten

$$\mu < \mu_0 \quad , \quad \mu < \mu^0 \quad , \quad \mu > \mu_1 \quad , \quad \mu < \mu^1$$

zwar ausgesprochen ist, es müsse stets $\mu_0 > \mu_1$ bleiben, dass aber keineswegs, wie in den früheren Fällen, eine unüberschreitbare Beziehung zwischen μ^0 und μ^1 , wie etwa $\mu^0 > \mu^1$ oder umgekehrt $\mu^0 < \mu^1$ vorliegt, dass daher die stets festzuhaltende Voraussetzung, wonach der Werth von λ , welcher der Gleichung $\mu^0 = \mu^1$ Genüge leistet, nicht in das Intervall des grössten und kleinsten Werthes (λ_1^0 und λ_1^1) fallen darf, erst noch besonders eingeführt werden muss. Dies kann aber auf folgende Art geschehen.

Da jederzeit

$$\xi_0 < X_{(\lambda, \mu^0)} < \xi_1$$

sein soll und da λ_1^0 der grösste zulässige Werth von λ ist, also das Intervall, welches der so eben angeführten Bedingung entspricht, durch die Relation:

$$\lambda_0^0 < \lambda < \lambda_1^0$$

gegeben ist, und da in ganz gleicher Weise auch

$$\xi_0 < X_{(\lambda, \mu^1)} < \xi_1$$

sein soll, λ_1^1 aber der kleinste zulässige Werth von λ , folglich das zugehörige Intervall durch die Relation

$$\lambda_0^1 > \lambda > \lambda_1^1$$

gegeben ist, so schliesst man mit Sicherheit: Soll die Gleichung $X_{(\lambda, \mu^0)} = X_{(\lambda, \mu^1)}$ oder also jene $\mu^0 = \mu^1$ für keinen zwischen λ_1^1 und λ_1^0 liegenden Werth von λ erfüllt werden, so muss nothwendig $\lambda_0^0 > \lambda_0^1$ sein. Wäre nämlich $\lambda_0^0 < \lambda_0^1$, so würden sich die beiden Ungleichheiten

$$\lambda_1^0 > \lambda > \lambda_0^0 \quad \text{und} \quad \lambda_0^1 > \lambda > \lambda_1^1$$

übergreifen, und es liesse sich dann zwischen λ_0^0 und λ_1^0 ein Werth von λ angeben, für welchen

$$\xi_0 < X_{(\lambda, \mu^0)} < X_{(\lambda, \mu^1)} < \xi_1$$

und ein anderer, ebenfalls zwischen λ_0^0 und λ_0^1 enthalten, für welchen

$$\xi_0 < X_{(\lambda, \mu^1)} < X_{(\lambda, \mu^0)} < \xi_1$$

sein würde. Es müsste folglich auch einen dritten, zwischen jenen beiden liegenden Werth von λ geben, für welchen eben:

$$X_{(\lambda, \mu^0)} = X_{(\lambda, \mu^1)} \quad \text{oder also} \quad \mu^0 = \mu^1$$

wäre, was den Voraussetzungen widerspricht.

Hieraus zieht man das Resultat:

Für den Fall III⁽¹⁾ des Art. 9 und wenn für μ^0 , μ^1 resp. die Bedingungen $B^{(1)}$, $B^{(2)}$ stattfinden, dabei angenommen es sei Δ positiv, hat man:

$$\mu < \mu_0 \quad , \quad \mu < \mu^0 \quad , \quad \mu > \mu_1 \quad . \quad \mu < \mu^1$$

also:

$$\mu_0 > \mu_1 \quad . \quad \mu^0 > \mu_1$$

und zugleich:

$$\lambda_1^0 > \lambda_0^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^1$$

Nimmt man Δ negativ an, so folgt aus Art. 12:

Horizontalreihe (3) . . . $\mu^* = \mu^0$ also $\mu^0 > \mu_0$, . . . Änderung von λ positiv,

„ (3) . . . $\mu^* = \mu^1$ „ $\mu^1 > \mu_0$, . . . „ „ λ negativ.

Zugleich folgt, dass λ_0^0 der grösste und λ_0^1 der kleinste zulässige Werth von λ und:

$$\mu > \mu_0 \quad , \quad \mu < \mu_1 \quad , \quad \mu < \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1$$

ist.

Was aber das Grössenverhältniss von λ_1^0, λ_1^1 betrifft, so ist dasselbe auch hier nicht ganz willkürlich, was sich auf folgende Art zeigen lässt.

Da nämlich:

$$\xi_0 < X_{(\lambda, \mu^0)} < \xi_1$$

bleiben soll, so muss nothwendig:

$$\lambda_0^0 > \lambda > \lambda_1^0$$

Da ferner:

$$\xi_0 < X_{(\lambda, \mu^1)} < \xi_1$$

so muss:

$$\lambda_0^1 < \lambda < \lambda_1^1$$

sein. Fiele nun λ_1^1 zwischen λ_0^0 und λ_1^0 , so müsste es nothwendig zwischen λ_1^1 und λ_1^0 einen Werth geben, wofür $X_{(\lambda, \mu^0)} = X_{(\lambda, \mu^1)}$ oder also $\mu^0 = \mu^1$ würde, was gegen die Voraussetzung wäre.

Alles zusammengefasst hat man also das Resultat, dass bei dem Falle III⁽¹⁾. B⁽¹⁾, B⁽²⁾:

für Δ negativ: $\mu > \mu_0 \quad , \quad \mu < \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu_1 \quad , \quad \mu < \mu^1$

und:

$$\lambda_0^0 > \lambda_1^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^1$$

Ich füge schliesslich noch die folgende Bemerkung bei:

In allen aus I⁽¹⁾ und II⁽¹⁾ entstehenden Fällen ist entweder die Bedingung $\mu^1 > \mu^0$ oder jene $\mu^1 < \mu^0$ ohne Weiteres schon vorgeschrieben, so dass man nicht zu besorgen braucht, es könnte eine Wurzel λ^{01} der Gleichung $\mu^0 = \mu^1$ in das Bereich der Werthe $\lambda_0^0, \lambda_0^1, \lambda_1^0, \lambda_1^1$ fallen; wesshalb hier eine Vertauschung der zwei, zwischen die äussersten Grenzen fallenden, Werthe von λ stattfinden kann und muss, wenn man alle möglichen Fälle berücksichtigen will.

Bei den aus III⁽¹⁾ und IV⁽¹⁾ entspringenden Fällen jedoch besteht eine solche Bedingung $\mu^1 > \mu^0$ oder $\mu^1 < \mu^0$ nicht schon von selbst und sie muss daher erst besonders eingeführt werden, was auf oben bemerkte Art zu geschehen hat. Hierdurch aber fällt, wie gezeigt worden ist, die Vertauschung der beiden Zwischenwerthe der Grenzen weg.

14.

Nach diesen Auseinandersetzungen wird die folgende, der Übersicht wegen in die Form einer Tabelle gebrachte Zusammenstellung der auf die Fälle I⁽¹⁾, II⁽¹⁾, III⁽¹⁾, IV⁽¹⁾ sich beziehenden Resultate, welche ich in extenso anführen zu müssen glaube, keiner weitem Erklärung bedürfen.

| Fälle des Art. 9. | Relation der ν für | | Zei- chen von Δ | Grenzen der Veränderlichen μ | Unüberschreitbare Bedingungen | | Überschreitbare Bedingungen | | Grenzwerte der Veränderlichen λ | Nr. |
|-------------------------|---------------------------|-----------|---------------------------------|--|--|--|--|--|--|-----|
| | μ^0 | μ^1 | | | $\mu^* = \mu^0$ | $\mu^* = \mu^1$ | $\mu^* = \mu^0$ | $\mu^* = \mu^1$ | | |
| I ⁽¹⁾ | $A^{(1)}$ | $A^{(1)}$ | + | $\mu > \mu^0, \mu < \mu^1$ $\mu > \mu_0, \mu < \mu_1$ | $\mu^0 < \mu_1$ $\lambda > \lambda_1^0$ (1) | $\mu^1 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$ (3) | $\mu^0 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$ (3) | $\mu^1 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$ (1) | $\lambda_0^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^1 > \lambda_1^0$ $> \lambda_1^1 > \lambda_0^0$ | 1 |
| | $A^{(1)}$ | $A^{(1)}$ | - | $\mu > \mu^0, \mu < \mu^1$ $\mu < \mu_0, \mu > \mu_1$ | $\mu^0 < \mu_0$ $\lambda > \lambda_0^0$ (4) | $\mu^1 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$ (2) | $\mu^0 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$ (2) | $\mu^1 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$ (4) | $\lambda_1^1 > \lambda_0^1 > \lambda_1^0 > \lambda_0^0$ $> \lambda_1^0 > \lambda_0^1$ | 2 |
| | $B^{(2)}$ | $B^{(2)}$ | - | $\mu > \mu^0, \mu < \mu^1$ $\mu > \mu_0, \mu < \mu_1$ | $\mu^0 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$ (1) | $\mu^1 > \mu_0$ $\lambda > \lambda_0^1$ (3) | $\mu^0 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$ (3) | $\mu^1 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$ (1) | $\lambda_1^0 > \lambda_0^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^1$ $> \lambda_1^1 > \lambda_0^0$ | 3 |
| | $B^{(2)}$ | $B^{(2)}$ | + | $\mu > \mu^0, \mu < \mu^1$ $\mu < \mu_0, \mu > \mu_1$ | $\mu^0 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$ (4) | $\mu^1 > \mu_1$ $\lambda > \lambda_1^1$ (2) | $\mu^0 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$ (2) | $\mu^1 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$ (4) | $\lambda_0^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^0 > \lambda_1^1$ $> \lambda_1^0 > \lambda_0^1$ | 4 |
| II ⁽¹⁾ | $A^{(2)}$ | $A^{(2)}$ | + | $\mu < \mu^0, \mu > \mu^1$ $\mu > \mu_0, \mu < \mu_1$ | $\mu^0 > \mu_0$ $\lambda > \lambda_0^0$ (3) | $\mu^1 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$ (1) | $\mu^0 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$ (1) | $\mu^1 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$ (3) | $\lambda_1^1 > \lambda_0^1 > \lambda_1^0 > \lambda_0^0$ $> \lambda_1^0 > \lambda_0^1$ | 5 |
| | $A^{(2)}$ | $A^{(2)}$ | - | $\mu < \mu^0, \mu > \mu^1$ $\mu < \mu_0, \mu > \mu_1$ | $\mu^0 > \mu_1$ $\lambda > \lambda_1^0$ (2) | $\mu^1 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$ (4) | $\mu^0 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$ (4) | $\mu^1 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$ (2) | $\lambda_0^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^1 < \lambda_1^0$ $> \lambda_1^1 > \lambda_0^0$ | 6 |
| | $B^{(1)}$ | $B^{(1)}$ | - | $\mu < \mu^0, \mu > \mu^1$ $\mu > \mu_0, \mu < \mu_1$ | $\mu^0 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$ (3) | $\mu^1 < \mu_1$ $\lambda > \lambda_1^1$ (1) | $\mu^0 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$ (1) | $\mu^1 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$ (3) | $\lambda_0^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^0 > \lambda_1^1$ $> \lambda_1^0 > \lambda_0^1$ | 7 |
| | $B^{(1)}$ | $B^{(1)}$ | + | $\mu < \mu^0, \mu > \mu^1$ $\mu < \mu_0, \mu > \mu_1$ | $\mu^0 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$ (2) | $\mu^1 < \mu_0$ $\lambda > \lambda_0^1$ (4) | $\mu^0 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$ (4) | $\mu^1 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$ (2) | $\lambda_1^0 > \lambda_0^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^1$ $> \lambda_1^1 < \lambda_0^0$ | 8 |
| III ⁽¹⁾ | $A^{(2)}$ | $A^{(1)}$ | - | $\mu < \mu^0, \mu < \mu^1$ $\mu < \mu_0, \mu > \mu_1$ | $\mu^0 > \mu_1$ $\lambda > \lambda_1^0$ (2) | $\mu^1 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$ (2) | $\mu^0 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$ (4) | $\mu^1 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$ (4) | $\lambda_1^1 > \lambda_0^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^0$ | 9 |
| | $A^{(2)}$ | $A^{(1)}$ | + | $\mu < \mu^0, \mu < \mu^1$ $\mu > \mu_0, \mu < \mu_1$ | $\mu^0 > \mu_0$ $\lambda > \lambda_0^0$ (3) | $\mu^1 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$ (3) | $\mu^0 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$ (1) | $\mu^1 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$ (1) | $\lambda_0^1 > \lambda_1^1 > \lambda_1^0 > \lambda_0^0$ | 10 |
| | $B^{(1)}$ | $B^{(2)}$ | + | $\mu < \mu^0, \mu < \mu^1$ $\mu < \mu_0, \mu > \mu_1$ | $\mu^0 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$ (2) | $\mu^1 > \mu_1$ $\lambda > \lambda_1^1$ (2) | $\mu^0 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$ (4) | $\mu^1 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$ (4) | $\lambda_1^0 > \lambda_0^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^1$ | 11 |
| | $B^{(1)}$ | $B^{(2)}$ | - | $\mu < \mu^0, \mu < \mu^1$ $\mu > \mu_0, \mu < \mu_1$ | $\mu^0 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$ (3) | $\mu^1 > \mu_0$ $\lambda > \lambda_0^1$ (3) | $\mu^0 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$ (1) | $\mu^1 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$ (1) | $\lambda_0^0 > \lambda_1^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^1$ | 12 |
| IV ⁽¹⁾ | $A^{(1)}$ | $A^{(2)}$ | - | $\mu > \mu^0, \mu > \mu^1$ $\mu < \mu_0, \mu > \mu_1$ | $\mu^0 < \mu_0$ $\lambda > \lambda_0^0$ (4) | $\mu^1 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_0^1$ (4) | $\mu^0 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$ (2) | $\mu^1 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$ (2) | $\lambda_0^1 > \lambda_1^1 > \lambda_1^0 > \lambda_0^0$ | 13 |
| | $A^{(1)}$ | $A^{(2)}$ | + | $\mu > \mu^0, \mu > \mu^1$ $\mu > \mu_0, \mu < \mu_1$ | $\mu^0 > \mu_1$ $\lambda > \lambda_1^0$ (1) | $\mu^1 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$ (1) | $\mu^0 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$ (3) | $\mu^1 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$ (3) | $\lambda_1^1 > \lambda_0^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^0$ | 14 |
| | $B^{(2)}$ | $B^{(1)}$ | + | $\mu > \mu^0, \mu > \mu^1$ $\mu < \mu_0, \mu > \mu_1$ | $\mu^0 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$ (4) | $\mu^1 < \mu_0$ $\lambda > \lambda_0^1$ (4) | $\mu^0 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$ (2) | $\mu^1 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$ (2) | $\lambda_0^0 > \lambda_1^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^1$ | 15 |
| | $B^{(2)}$ | $B^{(1)}$ | - | $\mu > \mu^0, \mu > \mu^1$ $\mu > \mu_0, \mu < \mu_1$ | $\mu^0 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$ (1) | $\mu^1 < \mu_1$ $\lambda > \lambda_1^1$ (1) | $\mu^0 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$ (3) | $\mu^1 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$ (3) | $\lambda_1^0 > \lambda_0^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^1$ | 16 |

Die mit Klammern umgebenen Ziffern (1), (2), (3) bis (8) bezeichnen die Horizontalreihe der Tabelle des Art. 12, aus welcher die betreffenden Resultate hergeleitet worden sind.

Wie man sieht, kommen in dieser Zusammenstellung von den 1. 2. 3. 4. oder 24 möglichen gegenseitigen Stellungen der vier Werthe $\lambda_0^0, \lambda_0^1, \lambda_1^0, \lambda_1^1$ nur 12 derselben vor. Man kann nach dem Grunde dieser Beschränkung fragen, der sich übrigens leicht einsehen lässt.

Einmal dürfen, wie gezeigt wurde, in III⁽¹⁾ und IV⁽¹⁾ die inneren Werthe der λ nicht vertauscht werden, so dass dadurch 4 Combinationen wegfallen; sodann sind diejenigen Verbindungen, worin

$$\lambda_1^1, \lambda_0^1 ; \lambda_0^1, \lambda_1^1 ; \lambda_1^0, \lambda_0^0 ; \lambda_0^0, \lambda_1^0$$

resp. die grössten und kleinsten Werthe darstellen, überhaupt gar nicht zulässig, wodurch abermals 4 Combinationen wegfallen. Die weiteren 4 Combinationen wären nun diejenigen, welche in der letzterwähnten durch Versetzung der inneren Glieder entstehen würden. Es sind also in der That 12 solcher Combinationen, in Folge der Bedingungen der Aufgabe, ganz unzulässig und deshalb in der Zusammenstellung nicht vorhanden.

In durchaus analoger Weise kann man nun auch bezüglich der Fälle I₁, II₁, III₁, IV₁ verfahren und sich die entsprechende Übersicht entwerfen. Man kann sich jedoch dieser Mühe durch die Bemerkung entheben, dass für beide Veränderliche λ, μ genau dieselben Bedingungen wieder auftreten, so dass es, mit alleiniger Ausnahme der Reihenfolge, bloß eine Wiederholung des bereits Angeführten wäre, wollte ich auch für die bezeichneten Fälle die Zusammenstellung mittheilen.

Damit man jedoch die Fälle übersichtlich vor sich habe, in welchen dieselben Bedingungen zum Vorschein kommen, und damit man sich in jedem einzelnen Falle von deren Identität leicht selbst überzeugen könne, füge ich die folgende kleine Tabelle hinzu.

| Zeichen von Δ | Die Grenzbedingungen sind dieselben resp. in den Fällen: | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------------------|--|------------------|----------------|----------------|---------------------------------------|------------------|----------------|----------------|---|------------------|----------------|----------------|---------------------------------------|------------------|----------------|----------------|
| | I ⁽¹⁾ und I ₁ | | | | II ⁽¹⁾ und II ₁ | | | | III ⁽¹⁾ und III ₁ | | | | IV ⁽¹⁾ und IV ₁ | | | |
| | μ^0 | μ^1 | μ^0 | μ^1 | μ^0 | μ^1 | μ^0 | μ^1 | μ^0 | μ^1 | μ^0 | μ^1 | μ^0 | μ^1 | μ^0 | μ^1 |
| \pm | A ⁽¹⁾ | A ⁽¹⁾ | A ₂ | A ₂ | A ⁽²⁾ | A ⁽²⁾ | A ₁ | A ₁ | A ⁽²⁾ | A ⁽²⁾ | A ₁ | A ₂ | A ⁽¹⁾ | A ⁽¹⁾ | A ₂ | A ₁ |
| \pm | B ⁽²⁾ | B ⁽²⁾ | B ₁ | B ₁ | B ⁽¹⁾ | B ⁽¹⁾ | B ₂ | B ₂ | B ⁽¹⁾ | B ⁽²⁾ | B ₂ | B ₁ | B ⁽²⁾ | B ⁽¹⁾ | B ₁ | B ₂ |

15.

Von jetzt an fallen, wie man sieht, alle Unterscheidungen weg, welche sich nicht unmittelbar auf die 16 Fälle der im vorigen Artikel enthaltenen Zusammenstellung beziehen. Aber auch diese Fälle sind keinesweges so verschieden, dass sie sich theilweise nicht schon zum Voraus auf einander reduciren liessen.

In der That lässt sich ohne Weiteres einsehen, dass jedesmal die zwei Fälle unter sich identisch sind, welche in der bezeichneten Tabelle unter:

$$1 \text{ und } 8 \quad ; \quad 2 \text{ und } 7 \quad ; \quad 3 \text{ und } 6 \quad ; \quad 4 \text{ und } 5$$

sodann unter:

$$9 \text{ und } 16 \quad ; \quad 10 \text{ und } 15 \quad ; \quad 11 \text{ und } 14 \quad ; \quad 12 \text{ und } 13$$

angeführt wurden, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil bei jedem dieser Paare das Zeichen von Δ dasselbe ist, während sowohl $\mu^0, \mu^1, \mu_0, \mu_1$ zu μ , als auch $\lambda_0^0, \lambda_0^1, \lambda_1^0, \lambda_1^1$ zu einander durchaus die entgegengesetzten Stellungen einnehmen. In Folge dieses Gegensatzes

nehmen die entsprechenden doppelten Integrale zweimal das negative Zeichen an, bleiben aber gerade darum in jeden Fall identisch dieselben.

Hiernach hat man es also nur noch mit acht Fällen und zwar mit I⁽¹⁾ und III⁽¹⁾, oder auch mit II⁽¹⁾ und IV⁽¹⁾ zu thun. Welches dieser zwei Paare man wählt, ist ganz gleichgiltig.

Die Fälle, welche je einem dieser Paare entsprechen, liessen sich leicht auf die Hälfte reduciren durch eine Bemerkung, welche näher angedeutet zu werden verdient. Ich will dabei das Paar I⁽¹⁾, III⁽¹⁾ in das Auge fassen, dann kann man sich leicht überzeugen, dass jedesmal die Fälle:

$$1 \text{ und } 3 \quad ; \quad 2 \text{ und } 4 \quad ; \quad 9 \text{ und } 11 \quad ; \quad 10 \text{ und } 12$$

zu demselben Resultate führen müssen. In jedem dieser letztern Paare hat nämlich Δ einmal das positive und einmal das negative Vorzeichen, während die Bedingungen für μ jedesmal genau dieselben sind, so dass in dieser Hinsicht die Doppel-Integrale dieselbe Form erhielten. Nun muss man sie aber, wie sich später ergeben wird, immer mit dem negativen Zeichen nehmen, wenn Δ negativ ist. Dieses Zeichen wird aber wieder aufgehoben und daher Alles auf den Stand wie für positive Δ gebracht, weil in den Fällen eines negativen Δ die Relationen zwischen $\lambda_0^0, \lambda_0^1, \lambda_1^0, \lambda_1^1$ durchgehends die umgekehrten von denjenigen sind, welche den Fällen für positive Δ entsprechen. Hiernach reducirt sich also in der That die Anzahl der näher zu erörternden Fälle auf vier, als welche man z. B. jene 1, 4, 10, 11 wählen könnte, die insgesamt einem positiven Δ zugehören. Ich werde jedoch von der hierdurch ermöglichten Abkürzung keinen Gebrauch machen, einmal um thatsächlich die der Sache nach bestehende Übereinstimmung aller in I⁽¹⁾ und III⁽¹⁾ enthaltenen Fälle, und zwar nicht nur wenn Δ positiv, sondern auch wenn es negativ ist, zu zeigen; sodann aber auch um alle 12 Formeln ausführlich vor sich zu haben, welche den 12 zwischen $\lambda_0^0, \lambda_0^1, \lambda_1^0, \lambda_1^1$ möglichen Grössenverhältnissen (Art. 14) entsprechen. Ich bemerke hierbei noch, dass durch das Hinzukommen von 6 weiteren Gleichungen der Kürze kein Eintrag geschieht, indem dieselben in der für den spätern Gebrauch zweckmässigeren Darstellungsart des Doppelintegrals erscheinen, und also ohnehin durch Umformungen abgeleitet werden müssten, wenn solches nicht schon hier geschehen wäre. Alle sich ergebenden Endresultate werde ich jedesmal auf einander zurückzuführen suchen, um einen Schluss auf die wesentliche Übereinstimmung aller dieser Resultate unter sich ziehen zu können.

Im Hinblick auf die zahlreichen Reductionen, welche in diesem und dem vorigen Artikel stattfanden, wird kaum die Vermuthung entstehen, als hätte sich die Betrachtung auf Umwegen bewegt. Denn es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass alle denkbaren Fälle nicht nur im Allgemeinen bezeichnet, sondern so ausführlich dargelegt werden mussten, um mit Sicherheit erkennen zu können, in wiefern sie sich auf einander zurückführen lassen und welches die Hauptfälle sind, womit das Weitere sich beschäftigen soll.

16.

Die nähere Untersuchung der Fälle, auf welche so eben alle übrigen zurückgeführt worden sind, leitet nun direct zur Lösung der ursprünglich gestellten Frage.

Nur eine kurze Bemerkung möge vorausgehen. Durch Einführung der neuen Veränderlichen λ, μ an Stelle der alten x, y geht das gegebene Differential $f(x, y) dx dy$ bekanntlich über in:

$$\pm \left(\frac{dX}{d\mu} \cdot \frac{dY}{d\lambda} - \frac{dX}{d\lambda} \cdot \frac{dY}{d\mu} \right) f(X, Y) d\lambda d\mu$$

wobei, wie zuerst Euler a. a. O. gezeigt hat, dasjenige Zeichen zu wählen ist, für welches der Factor

$$\pm \left(\frac{dX}{d\mu} \cdot \frac{dY}{d\lambda} - \frac{dX}{d\lambda} \cdot \frac{dY}{d\mu} \right) = \pm \Delta$$

positiv wird. Diese Zeichenbestimmung sollte scheinbar dem speciellen Falle vorbehalten bleiben, und bildet offenbar den schwierigeren Theil der Frage, ohne dessen Erledigung an eine allgemeine Lösung derselben nicht zu denken war. Durch das Vorhergehende ist nun diese Zeichenbestimmung in die engste Verbindung mit den Grenzen des Integrals, resp. mit den Grössenverhältnissen der Wurzeln gewisser Gleichungen gebracht und zwar ist das transformirte Differential für ein an sich positives Δ , also in den Fällen 1, 4, 5, 8 zu setzen $= + f(X, Y) \cdot \Delta d\lambda d\mu$. Wenn dagegen Δ an sich negativ ist, also in den Fällen 2, 3, 6, 7, so ist jenes Differential zu nehmen $= - f(X, Y) \cdot \Delta d\lambda d\mu$.

Dies vorausgesetzt beginne ich nun mit dem ersten Falle des Art. 14, für welchen, bezüglich der Veränderlichen μ die Bedingungen:

$$\mu > \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1 \quad . \quad \mu > \mu_0 \quad . \quad \mu < \mu_1$$

gegeben sind. — Vor Allem ist nun klar, dass diesen Bedingungen im Ganzen auf die folgenden vier Arten Genüge geschehen kann, nämlich

$$\mu_0 < \mu^0 < \mu < \mu_1 < \mu^1 \quad . \quad . \quad . \quad (1) \quad , \quad (1^1)$$

$$\mu_0 < \mu^0 < \mu < \mu^1 < \mu_1 \quad . \quad . \quad . \quad (2) \quad . \quad (4^1)$$

$$\mu^0 < \mu_0 < \mu < \mu^1 < \mu_1 \quad . \quad . \quad . \quad (3) \quad . \quad (3^1)$$

$$\mu^0 < \mu_0 < \mu < \mu_1 < \mu^1 \quad . \quad . \quad . \quad (4) \quad , \quad (2^1)$$

Hierzu kommen noch die weiteren Bedingungen:

$$\lambda_0^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^1 > \lambda_1^0 \quad . \quad . \quad . \quad (l)$$

oder aber:

$$\lambda_0^1 > \lambda_1^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (l')$$

Angenommen nun die erstere (l) finde statt, so leuchtet ein, dass man, um die Gesamtheit aller Werthe von λ und μ zu erschöpfen, welche zulässig sind, so lange die Ungleichheiten (1) unverändert bleiben, die Veränderliche μ nur diejenigen Werthe annehmen lassen darf, welche zwischen μ^0 und μ_1 liegen.

Was nun aber die Gesamtheit der zulässigen Werthe von λ betrifft, so muss man bemerken, dass die Bedingung $\mu^0 < \mu_1$ nur so lange stattfindet, als λ grösser ist, als der kleinste aller. derselben noch entsprechenden Werthe, nämlich grösser als λ_1^0 , dass man aber von diesem Werthe an, die Veränderliche λ nur so weit wachsen lassen darf, als in den übrigen Gliedern von (1), also in den Beziehungen:

$$\mu_0 < \mu^0 \quad , \quad \mu_1 < \mu^1$$

keine Änderung eintritt. Die erste derselben geht aber schon in ihr Gegentheil über (und zwar früher als die zweite) wenn λ den auf λ_1^0 zunächst folgenden Werth λ_1^1 erreicht.

Sämmtliche Werthe von λ und μ , welche den Bedingungen (1) entsprechen, sind daher durch die Grenzen-Intervalle des Integrals:

$$(1) = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu$$

dargestellt, und erst von dem Werthe $\lambda = \lambda_1^1$ an nehmen die Bedingungen (1) die Gestalt derjenigen in (2) an, welche hinwieder so lange unverändert bestehen, als sich λ von λ_1^1 bis λ_0^0 wachsend bewegt. — Da hierbei die Ungleichheit $\mu_0 < \mu_1$ nicht in ihr Gegentheil verkehrt wird, indem die Gleichung $\mu_0 = \mu_1$ vermöge früherer Voraussetzungen innerhalb des bezeichneten Intervalls keine Wurzel besitzt, so ist klar, dass der ganze Umfang der von der Bedingung (2) eingeräumten Werthe von λ und μ dargestellt wird durch die Intervalle der Grenzen des Integrals

$$(2) = \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu$$

Lässt man sofort λ den Werth λ_0^0 wachsend überschreiten, so geht die Bedingung (2) in jene (3) über, und es bleibt darin so lange $\mu_0 < \mu^1$, als λ seinen grössten Werth λ_0^1 nicht überschritten hat. Hiernach erschöpfen die Grenzen des Integrals:

$$(3) = \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu$$

alle in (3) zulässigen Werthe der Veränderlichen λ und μ .

Es entsteht nun allein die Frage, ob man auch den Bedingungen in (4) noch Genüge leisten könne, ohne mit den zu Grunde liegenden Voraussetzungen in Widerspruch zu gerathen. Dass dies in der That unmöglich ist, davon kann man sich auf verschiedene Arten, sehr einfach aber wie folgt, überzeugen:

Aus dem hier vorliegenden ersten Falle der Tabelle des Art. 14 geht nämlich hervor, dass

$$\mu_0 < \mu^0 \text{ für } \lambda < \lambda_0^0$$

und

$$\mu_1 > \mu^1 \text{ für } \lambda > \lambda_1^1$$

Nun steht aber sowohl die erste als die letzte Ungleichheit, wie man sieht, mit (4) in directem Widerspruche. Wenn aber λ nicht kleiner als λ_0^0 und nicht grösser als λ_1^1 sein darf, so lässt die Bedingung (4), nämlich:

$$\lambda_0^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^1 > \lambda_1^0$$

auch nicht den geringsten Raum für einen Werth, geschweige denn für ein Intervall von Werthen der Variablen λ übrig. Daraus folgt, dass die Bedingungen (4) sich unter den bestehenden Voraussetzungen nicht erfüllen lassen, und dass daher die Integrale (1), (2), (3)

zusammen alle zulässigen Werthe von λ, μ erschöpfen und das gegebene doppelte Integral darstellen.

Hieraus folgt also: Wenn $\lambda_0^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^1 > \lambda_1^0$ so ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y) dy = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu \dots \dots \dots \text{(I)}$$

Es bleibt noch der Fall zu erörtern, in welchem die Grenzwerte von λ die Stellung in (l^1) zu einander haben. Zu dem Ende denke man sich die Ungleichheiten bezüglich μ in der schon oben angedeuteten Ordnung (1¹), (2¹), (3¹), (4¹) angeschrieben, so wird man durch ein ganz ähnliches Raisonement wie oben finden:

$$(1^1) = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu; (2^1) = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu; (3^1) = \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu$$

Den Ungleichheiten (4¹) vermag auch hier kein Werth von λ Genüge zu thun. In der That folgt aus der Tabelle des Art. 15, dass für:

$$\mu^1 < \mu_1 \text{ nothwendig } \lambda > \lambda_1^1$$

und für

$$\mu_0 < \mu^0 \quad ,, \quad \lambda < \lambda_0^0$$

Nun soll aber vermöge (l^1) gleichzeitig auch noch:

$$\lambda_0^1 > \lambda_1^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^0$$

sein; man sieht also, dass es absurd wäre, unter diesen nach allen Richtungen sich widersprechenden Anforderungen einen Werth von λ angeben zu wollen. Es finden somit auch in dem vorliegenden Falle nur drei Theilintegrale statt, und zwar ergibt sich:

Wenn $\lambda_0^1 > \lambda_1^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^0$ so ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y) dy = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu \dots \dots \dots \text{(II)}$$

Die Resultate (I) und (II) lassen sich durch eine einfache Verwandlung auf einander zurückführen. In der That, addirt man zum ersten und dritten Gliede der zuletzt erhaltenen Gleichung resp. die Integrale:

$$\int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu, \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu$$

und zieht die Summe beider vom zweiten Gliede wieder ab, so erhält man, wie eine leichte Rechnung zeigt, die zuerst gefundene Gleichung wieder. Daraus folgt also, dass zwischen den beiden Ergebnissen so lange kein wesentlicher Unterschied besteht, als die addirten und wieder subtrahirten Integrale nicht unbestimmt sind.

17.

Betrachtet man in gleicher Weise den zweiten Fall der Tabelle des Art. 14, welcher auf den Bedingungen:

$$\mu > \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1 \quad . \quad \mu < \mu_0 \quad , \quad \mu > \mu_1$$

beruht, so zeigt sich auf der Stelle, dass die Veränderliche μ auch hier wieder auf vier Arten jenen Forderungen Genüge leisten könne, nämlich:

$$\mu_1 < \mu^0 < \mu < \mu_0 < \mu^1 \quad . \quad . \quad . \quad (1) \quad , \quad (1^1)$$

$$\mu^0 < \mu_1 < \mu < \mu_0 < \mu^1 \quad . \quad . \quad . \quad (2) \quad , \quad (4^1)$$

$$\mu^1 < \mu_1 < \mu < \mu^1 < \mu_0 \quad . \quad . \quad . \quad (3) \quad , \quad (3^1)$$

$$\mu_1 < \mu^0 < \mu < \mu^1 < \mu_0 \quad . \quad . \quad . \quad (4) \quad , \quad (2^1)$$

Hierzu kommen noch die weiteren Bedingungen aus Art. 14:

$$\lambda_1^1 < \lambda_0^1 < \lambda_1^0 < \lambda_0^0 \quad . \quad . \quad . \quad (l)$$

oder aber:

$$\lambda_1^1 < \lambda_1^0 < \lambda_0^1 < \lambda_0^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (l')$$

und ferner: Δ an sich negativ, also $-f(X, Y) \Delta d\lambda d\mu$ das neue Differential.

Ich werde zunächst wieder die Relation (l) als bestehend voraussetzen.

In der Bedingung (1) darf μ alle zwischen μ^0 und μ_0 liegenden Werthe annehmen, und λ ein Intervall von Werthen durchlaufen, für welches in der Stellung der Glieder in (1) keinerlei Änderung eintritt. Nun bleibt $\mu^0 < \mu_0$ nur so lange, als $\lambda > \lambda_0^0$, und $\mu_1 < \mu^0$ nur so lange, als noch $\lambda < \lambda_1^0$, wie dies aus Art. 14 hervorgeht. Folglich darf λ blos das Intervall λ_0^0 bis λ_1^0 durchlaufen, und man hat:

$$(1) = - \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_0} f(X, Y) \cdot \Delta d\mu$$

für $\lambda = \lambda_1^0$ geht die Bedingung (1) in (2) über, und man findet durch das ähnliche Raisonnement:

$$(2) = - \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y) \cdot \Delta d\mu$$

Für $\lambda = \lambda_0^1$ geht sofort (2) in (3) über und man erhält:

$$(3) = - \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu$$

Auch hier kann der Bedingung in (4) nicht Genüge gethan werden. Denn, wie aus der Tabelle des Art. 14 hervorgeht, ist:

$$\begin{aligned} \mu_0 &> \mu^1, \text{ so lange } \lambda > \lambda_0^1 \\ \mu_1 &< \mu^0. \text{ „ „ } \lambda < \lambda_1^0 \end{aligned}$$

Wenn aber hiernach λ einmal grösser als λ_0^1 und zugleich wieder kleiner als λ_1^0 sein soll, so kann ihm gemäss (l) gar kein Werth angewiesen werden. — Das Integral besteht also nur aus den obigen drei Theilen, so dass für: $\lambda_1^1 > \lambda_0^1 > \lambda_1^0 > \lambda_0^0$ ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y) dy = \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu \dots \dots \dots \text{ (III)}$$

Addirt man zum ersten und dritten Gliede resp. die Integrale:

$$\int_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu, \quad \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu$$

und zieht deren Summe vom zweiten Gliede wieder ab, so erhält man, wie eine leichte Rechnung zeigt, genau die Gleichung (II).

Legt man die Bedingungen (l') zu Grunde, und betrachtet die Ungleichheiten bezüglich der Veränderlichen μ in der oben bereits angedeuteten Ordnung (1'), (2'), (3'), (4'), so wird man durch eine ganz analoge Betrachtung finden, dass:

$$(1') = \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu; \quad (2') = \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu; \quad (3') = \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu.$$

Man wird ferner finden, dass (4') auch in diesem Falle nicht befriedigt werden kann, und zwar darum, weil nach Art. 14

$$\mu_0 < \mu^1, \text{ wenn } \lambda < \lambda_0^1$$

und

$$\mu^0 < \mu_1, \text{ wenn } \lambda > \lambda_1^0$$

Wenn aber λ gleichzeitig grösser als λ_1^0 und kleiner als λ_0^1 sein soll, so lassen die Forderungen in (l') keinen Spielraum für irgend einen Werth von λ übrig. Es entspricht daher diesem Falle kein Integral. und man hat das Resultat:

Wenn $\lambda_1^1 > \lambda_1^0 > \lambda_0^1 > \lambda_0^0$ so ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y) dy = \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu \dots \dots \dots \text{ (IV)}$$

Diese Gleichung lässt sich sogleich auf die oben erhaltene (III) zurückführen. Addirt man nämlich zum ersten und dritten Glied resp. die Integrale:

$$\int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu \quad , \quad \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu$$

und zieht deren Summe vom zweiten Gliede wieder ab, so findet man genau die Gleichung (III) wieder.

18.

Ich komme zu dem unter Nr. 3 angeführten Falle des Art. 14, für welchen die Bedingungen bezüglich μ bestehen;

$$\mu > \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1 \quad , \quad \mu > \mu_0 \quad , \quad \mu < \mu_1$$

denen man, im Allgemeinen auf die folgenden vier Arten genügen kann:

$$\mu^0 < \mu_0 < \mu < \mu^1 < \mu_1 \quad . \quad . \quad . \quad (1) \quad , \quad (1^1)$$

$$\mu^0 < \mu_0 < \mu < \mu_1 < \mu^1 \quad . \quad . \quad . \quad (2) \quad , \quad (4^1)$$

$$\mu_0 < \mu^0 < \mu < \mu_1 < \mu^1 \quad . \quad . \quad . \quad (3) \quad , \quad (3^1)$$

$$\mu_0 < \mu^0 < \mu < \mu^1 < \mu_1 \quad . \quad . \quad . \quad (4) \quad ; \quad (2^1)$$

wozu für λ noch die weiteren Bedingungen:

$$\lambda_1^0 > \lambda_0^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^1 \quad . \quad . \quad (l)$$

oder auch:

$$\lambda_1^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^0 > \lambda_0^1 \quad . \quad . \quad . \quad (l')$$

kommen, und wobei Δ an sich negativ ist.

Angenommen es finde die Bedingung (l) statt, so darf μ in (1) das Intervall von μ_0 bis μ^1 , dagegen λ nur jenes von λ_0^1 bis λ_1^1 durchlaufen, weil nach Art. 14 nur dann $\mu_0 < \mu^1$, so lange $\lambda > \lambda_0^1$, und $\mu^1 < \mu_1$, so lange $\lambda < \lambda_1^1$ ist.

Man hat daher:

$$(1) = - \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu$$

Für $\lambda > \lambda_1^1$ geht also (1) in (2) über und erhält man:

$$(2) = - \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu$$

Wenn $\lambda > \lambda_0^0$ so geht (2) in (3) über und es bleibt (3) unverändert, so lange $\lambda < \lambda_1^0$, weil dann nach Art. 14 immer noch $\mu^0 < \mu_1$ bleibt. Es ist also:

$$(3) = - \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu$$

Was nun die Bedingung (4) betrifft, so kann ihr hier kein Genüge geschehen. Denn nach Art. 14 ist

$$\lambda > \lambda_0^0 \text{ wenn } \mu_0 < \mu^0$$

und

$$\lambda < \lambda_1^1 \text{ wenn } \mu^1 < \mu_1$$

Das gleichzeitige Bestehen dieser Eingrenzung von λ , mit der Voraussetzung (l) zusammengehalten, lässt auf der Stelle erkennen, dass sich kein λ angeben lässt, welches (4) genügt.

Wenn also: $\lambda_1^0 > \lambda_0^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^1$, so ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\xi^0(x)}^{\xi^1(x)} f(x, y) dy = \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu \dots \dots \dots (V)$$

Auch diese Gleichung stimmt dem Wesen nach mit allen vorhergehenden überein. Um sich davon auf einfache Art zu überzeugen, addire man resp. zum ersten und dritten Gliede die Integrale:

$$\int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu \quad , \quad \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu$$

und ziehe ihre Summe vom zweiten Gliede ab, so wird man unmittelbar zur Gleichung (III) gelangen.

Es ist nun noch der Fall zu betrachten, in welchem die Voraussetzung (l') stattfindet. Man betrachte die Bedingungen für μ in der oben schon angedeuteten Aufeinanderfolge (1'), (2'), (3'), (4') so wird man finden, dass (1') nur so lange unverändert bleibt, als μ zwischen μ_0 und μ^1 sich bewegt, und $\lambda > \lambda_0^1$ und $\lambda < \lambda_0^0$ bleibt, weil nach Art. 14 nur dann $\mu^0 < \mu_0$, $\mu_0 < \mu^1$ ist. Somit erhält man:

$$(1') = - \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu$$

Für $\lambda = \lambda_0^0$ geht (1') in (2') über und behält die letztere Form so lange sich μ zwischen μ^0 und μ^1 , und so lange sich λ zwischen λ_0^0 und λ_1^1 bewegt, weil dann nach Art. 14 beständig $\mu_0 < \mu^0$ und $\mu^1 < \mu_1$ bleibt. Es ist daher

$$(2') = - \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu$$

Wenn sofort λ den Werth λ_1^1 überschreitet, so geht (2') in (3') über, und man findet hierfür durch dasselbe Raisonement:

$$(3') = - \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu$$

Den Bedingungen (4¹) kann auch hier nicht entsprochen werden, denn nach Art. 14 muss:

$$\lambda < \lambda_0^0 \quad , \quad \text{wenn } \mu^0 < \mu_0$$

und

$$\lambda > \lambda_1^1 \quad , \quad \text{wenn } \mu_1 < \mu^1$$

sein soll. Diese Anforderungen, verglichen mit (*l*¹) lassen aber keinen Werth für λ zu. Hieraus folgt nun das Resultat:

Wenn $\lambda_1^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^0 > \lambda_0^1$ so ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y) dy = \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu \dots \dots \dots \text{(VI)}$$

Addirt man zum ersten und dritten Gliede resp. die Integrale:

$$\int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu \quad , \quad \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu$$

und zieht ihre Summe vom zweiten Gliede wieder ab, so ergibt sich genau die Gleichung (V).

19.

Für den vierten Fall des Art. 14 bestehen die Bedingungen:

$$\mu > \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1 \quad , \quad \mu < \mu_0 \quad , \quad \mu > \mu_1$$

welchen auf die vier verschiedenen Arten:

$$\mu^0 < \mu_1 < \mu < \mu^1 < \mu_0 \dots \dots \dots (1), (1^1)$$

$$\mu_1 < \mu^0 < \mu < \mu^1 < \mu_0 \dots \dots \dots (2), (4^1)$$

$$\mu_1 < \mu^0 < \mu < \mu_0 < \mu^1 \dots \dots \dots (3), (3^1)$$

$$\mu^0 < \mu_1 < \mu < \mu_0 < \mu^1 \dots \dots \dots (4), (2^1)$$

entsprochen werden kann, und wozu die weitere Bedingung:

$$\lambda_0^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^0 > \lambda_1^1 \dots \dots (l)$$

oder aber:

$$\lambda_0^0 > \lambda_1^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^1 \dots \dots \dots (l')$$

kommt, und wobei Δ an sich positiv ist.

Wird zunächst (*l*) vorausgesetzt, so kann in (1) die Veränderliche μ alle zwischen μ_1 und μ^1 liegenden Werthe annehmen, und da stets $\mu_1 < \mu^1$ und $\mu^0 < \mu_1$ bleiben soll, was nach Art. 14 nur so lange der Fall ist, als gleichzeitig $\lambda > \lambda_1^1$ und $\lambda < \lambda_1^0$ bleibt, so hat man offenbar:

$$(1) = \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich dass:

$$(2) = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu \quad ; \quad (3) = \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu$$

Die Bedingungen (4) lassen sich auch hier nicht verwirklichen; denn nach Art. 14 muss nothwendig:

$$\lambda > \lambda_0^1 \quad , \quad \text{wenn} \quad \mu_0 < \mu^1$$

und

$$\lambda < \lambda_1^0 \quad , \quad \text{wenn} \quad \mu^0 < \mu_1$$

sein soll.

Da aber diese Eingrenzung von λ mit (l) gleichzeitig nicht bestehen kann, so rechtfertigt sich die obige Behauptung von selbst.

Wenn also: $\lambda_0^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^0 > \lambda_1^1$ so ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\zeta^0(x)}^{\zeta^1(x)} f(x, y) dy = \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu \dots \dots \dots \quad (VII)$$

Addirt man resp. zum ersten und dritten Glied die Integrale:

$$\int_{\lambda_1^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu \quad , \quad \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu$$

und zieht alsdann die Summe beider vom zweiten Gliede wieder ab, so erhält man die Gleichung (VI).

Wird die Relation (l') zu Grunde gelegt, so wird man durch ein Raisonement, welches dem bisherigen durchaus analog ist und darum nicht näher ausgeführt zu werden braucht, erhalten:

$$(1') = \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu \quad ; \quad (2') = \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu \quad ; \quad (3') = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu$$

Bezüglich der Bedingung (4') müsste nach Art. 14:

$$\lambda > \lambda_1^0 \quad , \quad \text{wenn} \quad \mu_1 < \mu^0$$

und

$$\lambda < \lambda_0^1 \quad , \quad \text{wenn} \quad \mu^1 < \mu_0$$

sein sollte, was mit (l') im Widerspruch steht, es bietet also (4') keine Lösung dar. Wenn daher $\lambda_0^0 > \lambda_1^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^1$ so ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\zeta^0(x)}^{\zeta^1(x)} f(x, y) dy = \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu \dots \dots \dots \quad (VIII)$$

Addirt man zum ersten und dritten Glied resp. die Integrale:

$$\int_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu \quad , \quad \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu$$

und zieht ihre Summe vom zweiten Gliede wieder ab, so wird man die vorige Gleichung (VII) wieder finden.

20.

Durch die vorhergehenden Betrachtungen sind alle zu I⁽¹⁾ des Art. 14 gehörenden Fälle erledigt, und nicht nur die entsprechenden Transformationsformeln hergestellt, sondern successive auch auf einander zurückgeführt oder als wesentlich unter sich übereinstimmend erkannt worden. Dieselbe Aufgabe bleibt nun zur Vollendung des Beweises für die in III⁽¹⁾ enthaltenen Fälle zu lösen übrig. Ich werde mich nunmehr mit derselben beschäftigen.

Der erste jener Fälle ist Nr. 9 der Tabelle in Art. 14, für welchen die Bedingungen bestehen:

$$\mu < \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1 \quad , \quad \mu < \mu_0 \quad , \quad \mu > \mu_1$$

denen im Allgemeinen auf die folgenden sechs Arten Genüge geschehen kann:

$$\mu_1 < \mu < \mu^0 < \mu_0 < \mu^1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\mu_1 < \mu < \mu_0 < \mu^0 < \mu^1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\mu_1 < \mu < \mu_0 < \mu^1 < \mu^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\mu_1 < \mu < \mu^1 < \mu_0 < \mu^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\mu_1 < \mu < \mu^1 < \mu^0 < \mu_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\mu_1 < \mu < \mu^0 < \mu^1 < \mu_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Hierzu kommt noch, dass:

$$\lambda_1^1 > \lambda_0^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (l)$$

und Δ an sich negativ ist.

Mit Rücksicht auf diese und die übrigen in Art. 14 gegebenen Bedingungen lässt sich leicht einsehen, dass die Fälle (5) und (6) als unzulässig ausgeschlossen werden müssen. Denn darnach ist:

$$\lambda > \lambda_0^1, \text{ wenn } \mu^1 < \mu_0 \text{ wie in (5) gefordert wird,}$$

und

$$\lambda < \lambda_0^0, \text{ wenn } \mu^0 < \mu_0 \text{ wie in (6) gefordert wird.}$$

Da nun $\mu^1 < \mu_0$ und $\mu^0 < \mu_0$ gemeinschaftliche Bedingungen von (5) und (6) sind, so genügt es, zu untersuchen, ob es Werthe von λ gibt, welche jenen beiden Anforderungen und zugleich jener (l) genügen können. Aus $\lambda > \lambda_0^1$ und $\lambda < \lambda_0^0$ folgt aber $\lambda_0^0 > \lambda_0^1$ und diese Forderung steht mit (l) im Widerspruch: folglich kann weder (5) noch (6) entsprochen werden.

Um nun den Umfang der Werthe von λ und μ zu bestimmen, für welchen die Bedingungen (1) unverändert dieselben bleiben, bemerke man zunächst, dass μ alle Werthe durchlaufen darf, welche zwischen μ_1 und μ^0 liegen, dass aber, damit in der That $\mu_1 < \mu^0$ sei, nach

Art. 14 nothwendig $\lambda > \lambda_1^0$ vorausgesetzt werden müsse. Da also λ_1^0 die unterste Grenze von λ , so ergibt sich eben so aus (I) dass, wenn λ den nächst grössern Werth λ_0^0 erreicht, die Ungleichheit $\mu^0 < \mu_0$ in ihr Gegentheil übergeht, weil eben nach Art. 14:

$$\mu^0 > \mu_0 \text{ wird, wenn } \lambda > \lambda_0^0 \text{ ist.}$$

Daraus ergibt sich ohne Weiteres, dass das Bereich aller durch die Bedingungen in (1) eingeräumten Werthe von λ und μ durch die Grenzen-Intervalle des Integrals

$$(1) = - \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu$$

erschöpft werden.

Bei $\lambda = \lambda_0^0$ gehen die Ungleichheiten (1) in jene (2) über. Da hierbei μ beständig zwischen die Grenzen μ_1 und μ_0 eingeschlossen bleibt, also niemals den Werth erreichen kann, welchen μ^0 und μ^1 annehmen, wenn sie einander gleich werden (wobei es übrigens ganz gleichgiltig bleibt, von welcher Beschaffenheit der entsprechende Werth λ^{01} sein möge) so darf man λ bis λ^{01} wachsen (oder nöthigenfalls abnehmen) lassen, indem dann niemals der Fall eintritt, dass λ und μ gleichzeitig die der Gleichung $\mu^0 = \mu^1$ entsprechenden Werthe im Bereich der Integration annehmen.

Hieraus folgt, dass die Gesammtheit der Werthe von λ und μ , welche den Bedingungen in (2) Genüge leisten, in den Grenzen des Integrals:

$$(2) = - \int_{\lambda_0^0}^{\lambda^{01}} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu$$

vollständig enthalten ist.

Bei dem Werthe $\lambda = \lambda^{01}$ angelangt, geht (2) in (3) über und behält diese Form bis $\lambda = \lambda_0^1$ wird. Es ist daher:

$$(3) = - \int_{\lambda_0^1}^{\lambda^{01}} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu$$

Von $\lambda = \lambda_0^1$ an geht sofort (3) in (4) über und behält diese Form bis $\lambda = \lambda_1^1$ geworden ist. Man hat also:

$$(4) = - \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu.$$

Nimmt man nun alle diese Auflösungen zusammen, und bemerkt, dass die Integrale (2) und (3) in ein einziges sich verwandeln lassen und dass bei dieser Gelegenheit λ^{01} daraus verschwindet, so ergibt sich:

Wenn $\lambda_1^1 > \lambda_0^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^0$ so ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y) dy = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu \dots \dots \dots (IX)$$

Addirt man zum ersten Glied dieser Gleichung das Integral:

$$\int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu$$

und zieht es vom zweiten Gliede wieder ab, so wird man nach einer einfachen Reduction die Gleichung (VIII) wieder finden.

21.

In gleicher Weise ist nun der Fall Nr. 10 der Tabelle des Art. 14 zu betrachten, wofür die Bedingungen bestehen:

$$\mu < \mu^0, \quad \mu < \mu^1, \quad \mu > \mu_0, \quad \mu < \mu_1$$

welchen, im Allgemeinen, auf die folgenden sechs Arten entsprochen werden kann:

$$\mu_0 < \mu < \mu^0 < \mu_1 < \mu^1 \dots \dots (1)$$

$$\mu_0 < \mu < \mu_1 < \mu^0 < \mu^1 \dots \dots (2)$$

$$\mu_0 < \mu < \mu_1 < \mu^1 < \mu^0 \dots \dots (3)$$

$$\mu_0 < \mu < \mu^1 < \mu_1 < \mu^0 \dots \dots (4)$$

$$\mu_0 < \mu < \mu^0 < \mu^1 < \mu_1 \dots \dots (5)$$

$$\mu_0 < \mu < \mu^1 < \mu^0 < \mu_1 \dots \dots (6)$$

wozu die weitere Bedingung kommt, dass

$$\lambda_0^1 > \lambda_1^1 > \lambda_1^0 > \lambda_0^0 \dots \dots (l)$$

und Δ an sich positiv sei. — Ich werde vor Allem nachweisen, dass die Fälle (5) und (6) auch hier ausgeschlossen werden müssen. Denn es ist nach Art. 14:

$$\lambda < \lambda_1^0 \text{ wenn } \mu^0 < \mu_1$$

und

$$\lambda > \lambda_1^1 \text{ wenn } \mu^1 < \mu_1$$

Da nun sowohl in (5) als in (6) gleichzeitig $\mu^0 < \mu_1$ und $\mu^1 < \mu_1$ sein soll, so sieht man, dass λ weder im Intervall von λ_0^0 bis λ_0^1 noch ausserhalb desselben einen Werth erhalten kann, welcher allen Anforderungen, worunter insbesondere (l) gehört, entspricht: hierdurch ist aber die Behauptung gerechtfertigt.

Die Ungleichheiten in (1) bleiben nun so lange dieselben, als μ zwischen μ_0 und μ^0 eingeschlossen bleibt. Zugleich aber muss nach Art. 14 nothwendig $\lambda > \lambda_0^0$ sein, damit wirklich $\mu_0 < \mu^0$ bleiben kann, und ebenso nothwendig muss $\lambda < \lambda_1^0$ bleiben, damit stets $\mu^0 < \mu_1$ bleibe, weil diese Ungleichheit für $\lambda = \lambda_1^0$ in ihr Gegentheil übergeht, indem

$$\mu_1 < \mu^0 \text{ wird, wenn } \lambda > \lambda_1^0$$

ist. Daraus ergibt sich ohne Weiteres, dass man habe:

$$(1) = \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu$$

Für (2) findet man durch ein Raisonnement, welches dem entsprechenden im vorigen Art. durchaus analog ist:

$$(2) = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu$$

Bei dem Werthe $\lambda = \lambda_0^1$ angelangt, geht (2) in (3) über und behält dieselbe Form bis $\lambda = \lambda_1^1$ wird. Es ist daher:

$$(3) = \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu$$

Von $\lambda = \lambda_1^1$ an geht (3) in (4) über und behält diese Form bis $\lambda = \lambda_0^1$ geworden ist. Man hat also:

$$(4) = \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu$$

Nimmt man alle diese Integrale zusammen, und bemerkt, dass bei der Vereinigung von (2) und (3) der Grenzwert λ_0^1 ganz verschwindet, so wird man haben:

Wenn $\lambda_0^1 > \lambda_1^1 > \lambda_1^0 > \lambda_0^0$, so ist:

$$\int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu \dots (X)$$

Addirt man zum ersten und dritten Glied resp. die Integrale:

$$\int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu, \quad \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu$$

und zieht ihre Summe vom zweiten Glied ab, so ergibt sich die Gleichung (IX) wieder.

22.

Den Bedingungen:

$$\mu < \mu^0, \quad \mu < \mu^1, \quad \mu < \mu_0, \quad \mu > \mu_0$$

des unter Nr. 11 im Art. 14 angeführten Falles kann man im Allgemeinen ebenfalls auf sechs verschiedene Arten genügen, nämlich:

$$\mu_1 < \mu < \mu^1 < \mu_0 < \mu^0 \dots (1)$$

$$\mu_1 < \mu < \mu_0 < \mu^1 < \mu^0 \dots (2)$$

$$\mu_1 < \mu < \mu_0 < \mu^0 < \mu^1 \dots (3)$$

$$\mu_1 < \mu < \mu^0 < \mu_0 < \mu^1 \dots (4)$$

$$\mu_1 < \mu < \mu^0 < \mu^1 < \mu_0 \dots (5)$$

$$\mu_1 < \mu < \mu^1 < \mu^0 < \mu_0 \dots (6)$$

wobei noch

$$\lambda_1^0 > \lambda_0^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^1 \dots (l)$$

und Δ an sich positiv ist.

Vor Allem bemerke man, dass auch hier die Fälle (5) und (6) als unstatthaft ausgeschlossen werden müssen. Denn es ist nach Art. 14:

$$\lambda > \lambda_0^0 \quad , \quad \text{wenn } \mu^0 < \mu_0$$

und

$$\lambda < \lambda_0^1 \quad , \quad \text{wenn } \mu^1 < \mu_0$$

Da aber diese Forderungen gleichzeitig erfüllt werden müssten, so müsste auch $\lambda_0^0 < \lambda_0^1$ sein, während die Bedingung (l) fordert, dass $\lambda_0^0 > \lambda_0^1$ sei. Daraus sieht man, dass es gar nicht möglich ist, den Bedingungen (5) und (6) und gleichzeitig den übrigen Forderungen zu genügen.

Für die übrigen vier Ungleichheiten findet man auf ganz ähnlichem Wege, wie er nun wiederholt bezeichnet worden ist, dass:

$$\begin{aligned} (1) &= \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu & ; & & (2) &= \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu \\ (3) &= \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu & , & & (4) &= \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu \end{aligned}$$

Durch die Vereinigung dieser Integrale fällt die Zwischengrenze λ_0^1 heraus, und man erhält das Resultat:

Wenn $\lambda_1^0 > \lambda_0^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^1$, so ist:

$$\begin{aligned} &\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y) dy = \\ &\int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu \dots \dots \dots (XI) \end{aligned}$$

Addirt man zum zweiten Gliede das Integral:

$$\int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu$$

und zieht es vom dritten Gliede wieder ab, so findet man genau die Gleichung (X) wieder.

23.

Ich komme zum letzten Falle, nämlich zu Nr. 12 des Art. 14, wofür die Bedingungen:

$$\mu < \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1 \quad , \quad \mu > \mu_0 \quad , \quad \mu < \mu_1$$

gegeben sind, denen man wieder auf sechs Arten entsprechen kann:

$$\mu_0 < \mu < \mu^1 < \mu_1 < \mu^0 \dots (1)$$

$$\mu_0 < \mu < \mu_1 < \mu^1 < \mu^0 \dots (2)$$

$$\mu_0 < \mu < \mu_1 < \mu^0 < \mu^1 \dots (3)$$

$$\mu_0 < \mu < \mu^0 < \mu_1 < \mu^1 \dots (4)$$

$$\mu_0 < \mu < \mu^0 < \mu^1 < \mu_1 \dots (5)$$

$$\mu_0 < \mu < \mu^1 < \mu^0 < \mu_1 \dots (6)$$

wobei noch:

$$\lambda_0^0 > \lambda_1^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^1$$

und Δ an sich negativ ist.

Da hierin:

$$\lambda > \lambda_1^0 \quad \text{wenn } \mu^0 < \mu_1$$

und

$$\lambda < \lambda_1^1 \quad \text{wenn } \mu^1 < \mu_1$$

so ist ohne Weiteres klar, dass auch hier die Bedingungen (5) und (6) als unerfüllbar auszuschliessen sind.

Da die Discussion der übrigen vier Fälle auf die wiederholt schon vorgekommene Art zu führen ist, so füge ich blos deren Ergebnisse bei. Man erhält nämlich:

$$(1) = - \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu \quad ; \quad (2) = - \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu$$

$$(3) = - \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu \quad ; \quad (4) = - \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu$$

Wenn daher:

$$\lambda_0^0 > \lambda_1^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^1$$

so ist:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} dx \int_{\zeta^0(x)}^{\zeta^1(x)} f(x, y) dy =$$

$$\int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^0} f(X, Y) \Delta d\mu \dots (XII)$$

Addirt man zum ersten und dritten Glied resp. die Integrale:

$$\int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu \quad , \quad \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu$$

und zieht ihre Summe vom zweiten Gliede ab, so wird man die Gleichung (XI) genau wieder finden.

24.

Durch die vorangehenden Betrachtungen sind nun nicht bloß die früher als wesentlich verschiedenen erkannten Fälle insgesamt untersucht, sondern es sind zugleich auch die ihnen entsprechenden Transformationsformeln des gegebenen Doppel-Integrals wirklich dargestellt worden, auf welche es ursprünglich vor Allem abgesehen war.

Es wurde gleichzeitig mit der Entwicklung jener 12 Gleichungen die wesentliche Übereinstimmung der in denselben enthaltenen Darstellungen des transformirten Integrals unter sich nachgewiesen, so dass von jetzt an, so weit es sich um den vollständigen Ausdruck dieses Integrals handelt, auch die letzten in Art. 15 noch für nöthig gehaltenen Unterscheidungen als ganz unwesentlich erscheinen und weiter nichts besagen, was man nicht unmittelbar durch blosse Addition und Subtraction gewisser endlicher Ausdrücke in Integralform erreichen kann.

Hiernach lässt sich das Ergebniss der ganzen vorhergehenden Untersuchung, alle Fälle umfassend, in folgender Weise darstellen:

Theorem.

Bezeichnen $\varphi^0(x)$ und $\varphi^1(x)$ zwei Functionen von x , welche innerhalb der Werthe ξ_0 und ξ_1 von x endlich und stetig, so wie einwerthig und reell bleiben, und für keinen zwischen ξ_0 und ξ_1 liegenden Werth von x einander gleich werden; setzt man in dem doppelten Integral:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y) dy$$

an die Stelle der Veränderlichen x, y Functionen zweier neuen Veränderlichen λ, μ , bestimmt durch die beiden Gleichungen:

$$x = X_{(\lambda, \mu)} \quad , \quad y = Y_{(\lambda, \mu)}$$

aus welchen sich niemals eine dritte bilden lässt, welche bloß x und y oder bloß λ und μ enthält, und wobei $X_{(\lambda, \mu)}, Y_{(\lambda, \mu)}$ in Verbindung mit $\varphi^0(x), \varphi^1(x)$ von der Beschaffenheit sind, dass die Wurzel:

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0 \text{ der Gleichung } X_{(\lambda, \mu)} = \xi_0 \\ \mu &= \mu_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad X_{(\lambda, \mu)} = \xi_1 \\ \mu &= \mu^0 \quad \cdot \quad \cdot \quad Y_{(\lambda, \mu)} = \varphi^0(X_{(\lambda, \mu)}) \\ \mu &= \mu^1 \quad \cdot \quad \cdot \quad Y_{(\lambda, \mu)} = \varphi^1(X_{(\lambda, \mu)}) \end{aligned}$$

vollkommen bestimmt, reell und so lange einwerthig bleibt, als λ zwischen dem grössten und kleinsten der Werthe liegt, welche als die einzige reelle Wurzel:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0^0 \text{ der Gleichungen: } X_{(\lambda, \mu)} = \xi_0 \quad \cdot \quad Y_{(\lambda, \mu)} = \varphi^0(\xi_0) \\ \lambda &= \lambda_0^1 \quad \cdot \quad \cdot \quad X_{(\lambda, \mu)} = \xi_0 \quad \cdot \quad Y_{(\lambda, \mu)} = \varphi^1(\xi_0) \\ \lambda &= \lambda_1^0 \quad \cdot \quad \cdot \quad X_{(\lambda, \mu)} = \xi_1 \quad \cdot \quad Y_{(\lambda, \mu)} = \varphi^0(\xi_1) \\ \lambda &= \lambda_1^1 \quad \cdot \quad \cdot \quad X_{(\lambda, \mu)} = \xi_1 \quad \cdot \quad Y_{(\lambda, \mu)} = \varphi^1(\xi_1) \end{aligned}$$

sich ergeben; bezeichnet man ferner zur Abkürzung:

$$\Delta = \frac{dX}{d\mu} \cdot \frac{dY}{d\lambda} - \frac{dX}{d\lambda} \cdot \frac{dY}{d\mu}$$

so ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\zeta^0(x)}^{\zeta^1(x)} f(x, y) dy = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_1} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu^1} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu$$

wofür man auch jeden der eilf übrigen, dem Werthe nach hiermit übereinstimmenden Ausdrücke (II) bis (XII) setzen kann, welche in den Art. 16 bis 24 entwickelt sind.

Durch diesen Satz ist die Unbestimmtheit des Zeichens von Δ , welche die Euler'sche Transformation übrig liess, allgemein aufgehoben. Es kann nun aber wohl geschehen, dass Δ seiner Natur nach (z. B. als Quadratwurzel) ein Doppelzeichen in sich schliesst. Auch in diesem Falle wird nicht erst eine besondere Untersuchung nöthig, wenn man die Grenzen der Integrale, unter Zugrundelegung irgend eines der beiden Zeichen von Δ , das Zeichen von X und Y und sofort die demselben entsprechenden Werthe der Grenzen bestimmt.

Dieser Fall entspricht zwar den Voraussetzungen des Satzes nicht; wenn aber in eben bezeichneter Weise alle Bestimmungen auf die zusammen gehörigen Zweige der Functionen X und Y bezogen werden, was immer geschehen kann, sobald die nicht zusammengehörigen Zweige für bestimmte, innerhalb des zu untersuchenden Intervalls liegende Werthe der Veränderlichen nicht zusammenlaufen, so verhält sich Alles so, wie bei einwerthigen Functionen und es finden daher die früheren Voraussetzungen statt.

25.

Ich werde nunmehr diese Lösung der in wenig beschränkter Allgemeinheit gestellten Aufgabe auf eine grössere Anzahl mehr oder weniger specieller Fälle anwenden, welche geeignet sind, die Bedeutung des gefundenen Theorems sowie auch die Art seiner Anwendung und einige dabei in Betracht kommende Umstände am besten ins Licht zu setzen.

Für die erste Anwendung nehme ich an, die Transformation solle dadurch geschehen, dass man voraussetzt, es sei:

$$\begin{aligned} x &= X_{(\lambda, \mu)} = \mu \\ y &= Y_{(\lambda, \mu)} = \lambda \end{aligned}$$

Dafür erhält man dann $\Delta = +1$ und es folgt:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \xi_0 \text{ aus der Gleichung } X_{(\lambda, \mu)} = \xi_0 \\ \mu_1 &= \xi_1 \text{ aus der Gleichung } X_{(\lambda, \mu)} = \xi_1 \end{aligned}$$

Die Gleichungen:

$$Y_{(\lambda, \mu)} = \varphi^0(X_{(\lambda, \mu)}) \quad , \quad Y_{(\lambda, \mu)} = \varphi^1(X_{(\lambda, \mu)})$$

gehen daher beziehungsweise über in:

$$\lambda = \varphi^0(\mu), \text{ woraus } \mu = \mu^0 = \varphi^0(\lambda)$$

und

$$\lambda = \varphi^1(\mu), \text{ woraus } \mu = \mu^1 = \varphi^1(\lambda)$$

wobei jetzt auf $\varphi^0(\lambda)$, $\varphi^1(\lambda)$ die Bedingung der Einwerthigkeit in dem Sinne des vorigen Artikels überzutragen ist.

Ferner ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lambda_0^0 &= \varphi^0(\xi_0) & \lambda_1^0 &= \varphi^0(\xi_1) \text{ aus der Gleichung } \lambda = \varphi^0(\mu) \\ \lambda_0^1 &= \varphi^1(\xi_0) & \lambda_1^1 &= \varphi^1(\xi_1) \text{ aus der Gleichung } \lambda = \varphi^1(\mu) \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (I) des Art. 16 ein, so erfolgt:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y) dy = \int_{\varphi^0(\xi_1)}^{\varphi^1(\xi_1)} d\lambda \int_{\varphi^0(\lambda)}^{\xi_1} f(\mu, \lambda) d\mu + \int_{\varphi^1(\xi_1)}^{\varphi^0(\xi_0)} d\lambda \int_{\varphi^0(\lambda)}^{\varphi^1(\lambda)} f(\mu, \lambda) d\mu + \int_{\varphi^0(\xi_0)}^{\varphi^1(\xi_0)} d\lambda \int_{\xi_0}^{\varphi^1(\lambda)} f(\mu, \lambda) d\mu$$

Setzt man x für μ , und y für λ , so lässt sich, wie leicht zu sehen, dieser Gleichung die folgende Form geben:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y) dy = \int_{\varphi^0(\xi_1)}^{\varphi^1(\xi_1)} dy \int_{\varphi^0(y)}^{\xi_1} f(x, y) dx + \int_{\varphi^1(\xi_1)}^{\varphi^0(\xi_0)} dy \int_{\varphi^0(y)}^{\varphi^1(y)} f(x, y) dx + \int_{\varphi^0(\xi_0)}^{\varphi^1(\xi_0)} dy \int_{\varphi^0(y)}^{\varphi^1(y)} f(x, y) dx \dots \dots \dots (1)$$

Auf gleiche Art liessen sich aus den früheren Gleichungen (II) bis (XII) noch weitere eilf Formen ableiten. Ich will, des spätern Gebrauches wegen, nur noch diejenige anführen, welche sich aus (II) ergibt. Sie ist die folgende:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y) dy = \int_{\varphi^0(\xi_1)}^{\varphi^1(\xi_1)} dy \int_{\varphi^0(y)}^{\xi_1} f(x, y) dx + \int_{\varphi^1(\xi_1)}^{\varphi^0(\xi_0)} dy \int_{\varphi^0(y)}^{\varphi^1(y)} f(x, y) dx + \int_{\varphi^0(\xi_0)}^{\varphi^1(\xi_0)} dy \int_{\varphi^0(y)}^{\xi_0} f(x, y) dx \dots \dots \dots (2)$$

wobei die Gleichung $\varphi^0(x) = \varphi^1(x)$ keine zwischen ξ_0 und ξ_1 liegende reelle Wurzel besitzt, und die als einwerthig vorausgesetzte Function:

$$x = \varphi^0(y) \text{ aus der Gleichung } y = \varphi^0(x)$$

und

$$x = \varphi^1(y) \text{ aus der Gleichung } y = \varphi^1(x)$$

abzuleiten ist.

Hierdurch nun ist der Satz bewiesen, dass auch bei Doppel-Integralen mit veränderlichen Grenzen die Umkehrung der Integrationsfolge gestattet ist, dass aber hieraus im Allgemeinen **drei** andere doppelte Integrale hervorgehen, deren zum Theil veränderliche Grenzen aus der Umkehrung der ursprünglich gegebenen erhalten und zur Bildung der Grenzen in der durch die Gleichung (1) [oder (2)] vorgeschriebenen Weise mit einander verbunden werden müssen.

Diesen bemerkenswerthen Satz habe ich bereits in der früher erwähnten Abhandlung¹⁾ durch rein geometrische Betrachtungen für den Fall begründet, dass die unteren Grenzen ξ_0 und $\varphi^0(x)$ Null seien. Das daselbst gefundene Resultat stimmt mit dem aus (2) sich ergebenden:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\varphi(x)} f(x, y) dy = \int_0^{\varphi(\xi)} dy \int_0^{\xi} f(x, y) dx = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\xi)} dy \int_0^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

vollständig überein.

26.

Als Anwendungen des eben bewiesenen Satzes will ich einige besondere Fälle betrachten.

Angenommen es seien die Functionen $\varphi^0(x)$ und $\varphi^1(x)$, sowie die Grenzwerte ξ_0 und ξ_1 von der Beschaffenheit, dass gleichzeitig

$$\varphi^0(\xi_0) = \varphi^1(\xi_0) \quad \text{und} \quad \varphi^0(\xi_1) = \varphi^1(\xi_1)$$

sei, was offenbar mit den Voraussetzungen des Satzes nicht in Widerspruch steht.

Für diese Annahmen nun ergibt sich aus der Gleichung (1) des vorigen Art. statt des dreigliederigen der bloß eingliedrige Ausdruck:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y) dy = \int_{\varphi^1(\xi_0)}^{\varphi^1(\xi_1)} dy \int_{\varphi^0(y)}^{\varphi^1(y)} f(x, y) dx$$

Transformirt man das Integral rechter Hand durch Einführung einer neuen Veränderlichen z , welche mit der ursprünglichen x in der Beziehung

$$x = \frac{(a^1 + r)(a^0 - z)\varphi^1(y) - (a^0 + r)(a^1 - z)\varphi^0(y)}{(a^0 - a^1)(r + z)}$$

steht, und für welche also:

$$dx = \frac{(a^0 + r)(a^1 + r)}{a^0 - a^1} \cdot \frac{\varphi^0(y) - \varphi^1(y)}{(r + z)^2} dz$$

wo a^0, a^1, r gewisse constante Grössen bedeuten.

Setzt man zugleich:

$$f(x, y) = \frac{F(z, y)}{\varphi^0(y) - \varphi^1(y)}$$

wobei

$$z = \frac{a^0(a^1 + r)\varphi^1(y) - a^1(a^0 + r)\varphi^0(y) - (a^0 - a^1)rx}{(a^1 + r)\varphi^1(y) - (a^0 + r)\varphi^0(y) + (a^0 - a^1)x}$$

¹⁾ Crelle, Journal B. 15.

so geht die oben erhaltene Gleichung in die folgende über:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} \frac{F(z, y) dy}{\phi^1(y) - \phi^0(y)} = \frac{(a^0 + r)(a^1 + r)}{a^0 - a^1} \int_{\varphi^1(\xi_0)}^{\varphi^1(\xi_1)} dy \int_{a^0}^{a^1} \frac{F(z, y)}{(r + z)^2} dz$$

Durch diese Gleichung ist das Doppel-Integral linker Hand auf ein viel einfacheres zurückgeführt, welches von den Functionen $\varphi^0(x)$, $\varphi^1(x)$ und deren Umkehrungen nur in so fern abhängt, als zwei besondere Werthe dieser Functionen die Grenzen bilden. Ein doppeltes Integral, wie das eben betrachtete hat also die Eigenschaft, dass man für $\varphi^0(x)$ und $\varphi^1(x)$ Functionen annehmen kann, welche man immer wolle, wenn nur sie und ihre Umkehrungen $\phi^0(y)$, $\phi^1(y)$ innerhalb des in Frage kommenden Intervalls stetig und einförmig bleiben und von der Beschaffenheit sind, dass:

$$\varphi^0(\xi_0) = \varphi^1(\xi_0) \quad , \quad \varphi^0(\xi_1) = \varphi^1(\xi_1)$$

ist: dann hängt der Werth des Integrals immer nur von den Endwerthen $\varphi^1(\xi_0)$ und $\varphi^1(\xi_1)$ ab.

Ich will annehmen, es werde $f(y) \cdot F(z)$ an die Stelle von $F(z, y)$ gesetzt. Man findet dann:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} F(z) \frac{f(y) dy}{\phi^1(y) - \phi^0(y)} = \frac{(a^0 + r)(a^1 + r)}{a^0 - a^1} \int_{\varphi^1(\xi_0)}^{\varphi^1(\xi_1)} f(y) dy \int_{a^0}^{a^1} \frac{F(z) dz}{(r + z)^2}$$

Für $a^0 = 0$, $a^1 = \infty$, $r = 1$ folgt hieraus:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} F \left(\frac{x - \phi^0(y)}{\phi^0(y) - x} \right) \cdot \frac{f(y) dy}{\phi^0(y) - \phi^1(y)} = \int_{\varphi^1(\xi_0)}^{\varphi^1(\xi_1)} f(y) dy \int_0^{\infty} \frac{F(z) dz}{(1 + z)^2}$$

Es sei z. B.

$$\varphi^0(x) = x^{\frac{1}{r}} \quad . \quad \varphi^1(x) = x^{\frac{1}{s}}$$

so ist:

$$\phi^0(y) = y^r \quad . \quad \phi^1(y) = y^s$$

und setzt man zugleich

$$\xi_0 = 0 \quad . \quad \xi_1 = 1$$

so werden offenbar alle Bedingungen erfüllt.

Ich will nun ausserdem noch annehmen, es sei:

$$F(z) = \frac{z^{m+1}}{(1+z)^{m+n-2}}$$

Dann erhält man nach einigen Umformungen:

$$\int_0^1 dx \int_{\frac{1}{x^r}}^{\frac{1}{x^s}} \frac{(y^r - x)^{m-1} (x - y^s)^{n-1}}{(y^r - y^s)^{m+n-1}} \cdot f(y) dy = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_0^1 f(y) dy$$

Für $m = n = \frac{1}{2}$ folgt hieraus:

$$\int_0^1 dx \int_{\frac{1}{x^r}}^{x^s} \frac{f(y) dy}{\sqrt{(y^r - x)(x - y^s)}} = \pi \int_0^1 f(y) dy$$

Wie man sieht, hat das Doppel-Integral die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sein Werth von r und s so lange unabhängig bleibt, als diese Constanten von einander verschieden sind.

27.

Wenn die untere Grenze $\varphi^0(x) = \eta_0$ constant ist, so geht die Gleichung (2) des Art. 25 über in:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} dx \int_{\eta_0}^{\varphi(x)} f(x, y) dy = \int_{\varphi(\xi_0)}^{\varphi(\xi)} dy \int_{\phi(y)}^{\xi_0} f(x, y) dx + \int_{\eta_0}^{\varphi(\xi)} dy \int_{\xi_0}^{\xi} f(x, y) dx$$

wobei der Kürze wegen $\varphi(x)$ für $\varphi^1(x)$, $\phi(y)$ für $\phi^1(y)$ und ξ für ξ_1 gesetzt worden ist.

Man nehme an, es sei in dieser Gleichung ξ_0 ein Werth von x , für welchen:

$$\varphi(\xi_0) = \eta_0$$

so vereinfacht sich dieselbe und man erhält:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} dx \int_{\eta_0}^{\varphi(x)} f(x, y) dy = \int_{\eta_0}^{\varphi(\xi)} dy \int_{\phi(y)}^{\xi} f(x, y) dx$$

wo also:

$$x = \phi(y) \text{ aus der Gleichung } y = \varphi(x)$$

als die einzige reelle, zwischen ξ_0 und ξ liegende Wurzel abzuleiten ist. — Setzt man nun:

$$\frac{f(y)}{\xi - \phi(y)} \cdot F(z) \text{ an die Stelle von } f(x, y)$$

und ist darin:

$$z = \frac{a_0(a+r)\phi(y) - a(a_0+r)\xi - (a_0-a)rx}{(a+r)\phi(y) - (a_0+r)\xi + (a_0-a)x}$$

so ergibt sich:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} dx \int_{\eta_0}^{\varphi(x)} \frac{f(y) dy}{\phi(y) - \xi} F(z) = \frac{(a_0+r)(a+r)}{a_0-a} \int_{\eta_0}^{\varphi(\xi)} f(y) dy \int_{\sigma_0}^a \frac{F(z) dz}{(r+z)^2}$$

In dieser Gleichung sind einige beachtenswerthe specielle Fälle enthalten, die sich leicht auf die folgende Art darstellen lassen.

Es sei zunächst:

$$\xi_0 = \eta_0, \quad \varphi(x) = x, \quad \phi(y) = y, \quad F(z) = 1$$

so erhält man die eigenthümliche, auf anderem Wege nicht so leicht herzustellende Gleichung:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} dx \int_{\xi_0}^x \frac{f(y)}{\xi - x} dy = \int_{\xi_0}^{\xi} f(y) dy$$

Setzt man dagegen $a_0 = 0$, $a = \infty$, dabei immer angenommen, dass $\varphi(\xi_0) = \eta_0$ sei, so ergibt sich:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} dx \int_{\eta_0}^{\varphi(x)} F\left(\frac{\xi - x}{x - \psi(y)}\right) \cdot \frac{f(y) dy}{\xi - \psi(y)} = \int_{\eta_0}^{\varphi(\xi)} f(y) dy \int_0^{\infty} \frac{F(z)}{(1+z)^2} dz$$

Daraus erhält man z. B. für $\xi_0 = \eta_0$, $\varphi(x) = x$ das Resultat:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} dx \int_{\xi_0}^x F\left(\frac{\xi - x}{x - y}\right) \cdot \frac{f(y) dy}{\xi - y} = \int_{\xi_0}^{\xi} f(y) dy \int_0^{\infty} \frac{F(z) dz}{(1+z)^2}$$

Für den noch speciellern Fall, dass

$$\xi_0 = 0 \quad \text{und} \quad F(z) = \frac{z^{m-1}}{(1+z)^{n+n-2}}$$

gesetzt wird, erhält man die Gleichung:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^x \frac{(\xi - x)^{m-1} (x - y)^{n-1}}{(\xi - y)^{m+n-1}} f(y) dy = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_0^{\xi} f(y) dy \quad \dots \quad (1)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lassen sich die beiden folgenden Fragen beantworten:

1. In der Gleichung:

$$\int_0^x \frac{(x - y)^{n-1}}{(\xi - y)^{m+n-1}} \cdot f(y) dy = F(x, \xi)$$

ist $F(x, \xi)$ eine gegebene Function: man soll die dieser Gleichung Genüge leistende Function $f(y)$ unter dem Integralzeichen finden.

Vermöge der oben entwickelten Formel hat man unmittelbar:

$$\int_0^{\xi} (\xi - x)^{m-1} F(x, \xi) dx = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_0^{\xi} f(y) dy$$

Setzt man nun in dem Integral linker Hand:

$$x = \xi \cdot t$$

und differentiirt hierauf die ganze Gleichung in Bezug auf ξ , so wird man alsbald finden:

$$f(\xi) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m) \Gamma(n)} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \left\{ m \xi^{m-1} F(\xi t, \xi) + \xi^m \frac{d \cdot F(\xi t, \xi)}{d \xi} \right\} dt$$

wodurch die Frage beantwortet ist.

Für $m = n = \frac{1}{2}$ erhält man hieraus die Gleichung, welche zur Lösung einer die Tautochronen betreffenden Aufgabe nöthig ist, und welche für jenen speciellen Fall mit Hilfe ziemlich umständlicher Reihenentwickelungen im 48. Bande des Journals von Crelle abgeleitet worden ist.

2. Von der eben vorgetragenen dem ersten Anschein nach verschieden ist die folgende Aufgabe.

In der Gleichung:

$$\int_0^x \frac{(x-y)^{n-1}}{(\xi-y)^{m+n-1}} \cdot df(y) = \phi(x)$$

ist $\phi(x)$ eine gegebene Function: man verlangt die derselben entsprechende Form der Function $f(y)$.

Hier liefert die Gleichung (1) sogleich die Lösung, indem man daraus erhält:

$$f(\xi) - f(0) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^\xi (\xi-x)^{m-1} \phi(x) dx$$

Für $m = 1 - n$ ergibt sich hieraus unmittelbar die Gleichung, welche zur Lösung einer den Fall eines schweren Körpers bei gegebener Fallzeit betreffenden Aufgabe nöthig ist, und welche dieser Aufgabe wegen zuerst Abel (s. Oeuvres compl. T. I, p. 29) für jenen besondern Werth von m , auf ganz andern Wege entwickelt hat.

Ich füge schliesslich noch einige andere Anwendungen bei. Hat $\varphi(x)$ die Eigenschaft, dass:

$$\varphi(0) = 0 \quad , \quad \text{und setzt man noch } \xi_0 = \gamma_0 = 0, \text{ so folgt:}$$

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\varphi(x)} f(x, y) dy = \int_0^{\varphi(\xi)} dy \int_{\phi(y)}^\xi f(x, y) dx$$

Hieraus findet man z. B. die Gleichung:

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\varphi(x)} F\left(\frac{x-\phi(y)}{\xi-\phi(y)}\right) \cdot \frac{f(y) dy}{\xi-\phi(y)} = \int_0^{\varphi(\xi)} f(y) dy \int_{\phi(y)}^\xi \frac{dx}{\xi-\phi(y)} \cdot F\left(\frac{x-\phi(y)}{\xi-\phi(y)}\right)$$

Setzt man in dem Integral rechter Hand

$$\frac{x-\phi(y)}{\xi-\phi(y)} = z \quad , \quad \frac{dx}{\xi-\phi(y)} = dz$$

so verwandelt es sich in das Product zweier von einander unabhängiger Quadraturen und man erhält:

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\varphi(x)} F\left(\frac{\phi(y)-x}{\phi(y)-\xi}\right) \frac{f(y) dy}{\xi-\phi(y)} = \int_0^{\varphi(\xi)} f(y) dy \int_0^1 F(z) dz$$

Es sei z. B.

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2} \cdot \sqrt{1-k^2 z^2}} \quad : \quad \varphi(x) = x \quad . \quad \phi(y) = y$$

und man bezeichne

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2} \cdot \sqrt{1-k^2 z^2}} = K$$

so erfolgt

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^x \frac{f(y) dy}{\sqrt{(\xi-x)(\xi+x-2y)} \cdot \sqrt{(\xi-y)^2 - k^2(x-y)^2}} = K \cdot \int_0^{\xi} \frac{f(y)}{\xi-y} dy$$

Hat $\varphi(x)$ die Eigenschaft, dass $\varphi(\xi) = 0$ wird, so ist

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\varphi(x)} f(x, y) dy = \int_0^{\varphi(0)} dy \int_0^{\phi(y)} f(x, y) dx$$

Daraus lässt sich leicht die Gleichung finden:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\varphi(x)} F\left(\frac{x}{\phi(y)}\right) f(y) dy = \int_0^{\varphi(0)} f(y) \phi(y) dy \cdot \int_0^1 F(z) dz$$

Setzt man darin für $F(z)$ den obigen Ausdruck und zugleich

$$\varphi(x) = \xi - x \quad , \quad \text{also} \quad \phi(y) = \xi - y$$

so ergibt sich:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\xi-x} \frac{f(y) dy}{\sqrt{(\xi-y)^2 - x^2} \cdot \sqrt{(\xi-y)^2 - k^2 x^2}} = K \int_0^{\xi} \frac{f(y)}{\xi-y} dy$$

Wie man sieht kann man die Grenzen des Doppelintegrals auch als durch die Ungleichheit $0 < x + y < \xi$ gegeben ansehen.

Diese wenigen Beispiele mögen hinreichen die Bedeutung der im Art. 25 entwickelten Umkehrungs-Formeln erkennen zu lassen.

28.

Ich wende mich nunmehr zu einer andern Anwendung der allgemeinen Transformation, und zwar möge angenommen werden, es sei:

$$\begin{aligned} x &= X_{(\lambda, \mu)} = \mu \\ y &= Y_{(\lambda, \mu)} \end{aligned}$$

so dass also nur die Function X näher specialisirt wird. Man hat dann einfach:

$$\Delta = + \frac{dY}{d\lambda}$$

und erhält:

$$\mu_0 = \xi_0 \quad , \quad \mu_1 = \xi_1$$

und für die Functionen μ^0 und μ^1 hat man die Gleichung:

$$\begin{aligned} Y_{(\lambda, \mu)} &= \varphi^0(\mu) \quad \text{aus welcher folgt: } \mu^0 = \varphi^0(\lambda) \\ Y_{(\lambda, \mu)} &= \varphi^1(\mu) \quad \text{.. } \mu^1 = \varphi^1(\lambda) \end{aligned}$$

wobei nun die für μ^0, μ^1 gestellte Bedingung der Einförmigkeit auf die Functionen $\varphi^0(\lambda), \varphi^1(\lambda)$ überzutragen ist.

Bezüglich der Werthe $\lambda_0^0, \lambda_0^1, \lambda_1^0, \lambda_1^1$ hat man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} Y_{(\lambda, \xi_0)} &= \varphi^0(\xi_0) \quad \text{woraus } \lambda_0^0 = \theta^0(\xi_0) \\ Y_{(\lambda, \xi_1)} &= \varphi^0(\xi_1) \quad \text{.. } \lambda_1^0 = \theta^0(\xi_1) \\ Y_{(\lambda, \xi_0)} &= \varphi^1(\xi_0) \quad \text{.. } \lambda_0^1 = \theta^1(\xi_0) \\ Y_{(\lambda, \xi_1)} &= \varphi^1(\xi_1) \quad \text{.. } \lambda_1^1 = \theta^1(\xi_1) \end{aligned}$$

wobei auch diese Werthe als vollständig bestimmt und als die einzigen reellen Wurzeln zweier Gleichungen vorausgesetzt werden.

Substituirt man nun diese besonderen Werthe in die Gleichung (I) des Art. 16, schreibt zugleich auch x für μ , und z für λ , so ergibt sich:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y) dy = \int_{\theta^0(\xi_1)}^{\theta^0(\xi_0)} dz \int_{\varphi^0(z)}^{\varphi^1(z)} f(x, Y_{(z, x)}) \cdot \frac{dY}{dz} dx + \int_{\theta^1(\xi_1)}^{\theta^1(\xi_0)} dz \int_{\varphi^0(z)}^{\varphi^1(z)} f(z, Y_{(z, x)}) \cdot \frac{dY}{dz} dx + \int_{\theta^0(\xi_0)}^{\theta^0(\xi_1)} dz \int_{\varphi^0(z)}^{\varphi^1(z)} f(x, Y_{(z, x)}) \cdot \frac{dY}{dz} dx$$

Andere Formen würden sich aus den elf übrigen Darstellungen der allgemeinen Transformation ergeben; unter den oben ausdrücklich gemachten Annahmen fallen dieselben aber dem Wesen nach ganz mit der eben geführten Gleichung zusammen.

Diese Gleichung nun zeigt, wie man ein Doppel-Integral durch Einführung einer einzigen neuen Veränderlichen z transformiren müsse. Was durch sie hauptsächlich geleistet werden kann, besteht darin, dass man, wenn die Veränderlichen x, y in der Function $f(x, y)$ einen explicite gegebenen Ausdruck bilden, diesen durch die neue Veränderliche z ersetzen kann, so dass die nach x zuerst zu vollziehende Integration von der nähern Beschaffenheit von $f(z)$, weil eben z dabei constant bleibt, ganz unabhängig ist. Hierdurch ergeben sich Reductionsformeln für doppelte Integrale von Functionen, deren Argument z allein näher bestimmt ist, welche also ihrer übrigen Beschaffenheit nach willkürlich sind. In dieser Hinsicht stellt also die obige Gleichung in vollständiger Entwicklung den allgemeinen Typus der Lösung aller derartigen Probleme dar, so dass man in besonderen Fällen nur ihrer Vorschrift zu folgen braucht.

Von der eben bezeichneten Art sind die, jedoch mit Hilfe geometrischer Betrachtungen gefundenen Reductionsformeln, deren Eingangs Erwähnung geschah. Obgleich ich nun eine ziemlich grosse Anzahl solcher im 45. Bande des Journals von Crelle entwickelt habe, so scheinen doch die folgenden weiteren Fälle schon darum Beachtung zu verdienen, weil sie den, bis dahin noch nicht sehr weit geführten, Gegenstand der Reduction doppelter Integrale auf Quadraturen nahe berühren, zugleich aber geeignet sein dürften, den Nutzen der vorangehenden Resultate noch mehr hervortreten zu lassen.

29.

Als ersten Fall möge angenommen werden, es sei:

$$f(x, y) = f(z) \quad \text{und} \quad z = ax + bxy + cy$$

Dann ist:

$$Y(z, x) = \frac{z - ax}{bx + c} \quad , \quad \Delta = \frac{dY}{dz} = \frac{1}{bx + c}$$

Zugleich seien

$$\varphi^0(x) = \eta_0 \quad , \quad \varphi^1(x) = \eta_1$$

constante Grössen, so dass also:

$$\begin{aligned} \phi^0(z) &= \frac{z - c\eta_0}{a + b\eta_0} & , & & \phi^1(z) &= \frac{z - c\eta_1}{a + b\eta_1} \\ \theta^0(\xi_0) &= a\xi_0 + b\xi_0\eta_0 + c\eta_0 & , & & \theta^1(\xi_0) &= a\xi_0 + b\xi_0\eta_1 + c\eta_1 \\ \theta^0(\xi_1) &= a\xi_1 + b\xi_1\eta_0 + c\eta_0 & , & & \theta^1(\xi_1) &= a\xi_1 + b\xi_1\eta_1 + c\eta_1 \end{aligned}$$

Da ausserdem:

$$\int f(z) \cdot \frac{dY}{dz} dx = \frac{f(z)}{b} \log(bx + c) + \text{Const.}$$

so ergibt sich, wenn man in die Formel des vorigen Art. substituirt:

$$\begin{aligned} & \int_{\xi}^{\xi_1} dx \int_{\eta_0}^{\eta_1} f(ax + bxy + cy) dy = \\ & \frac{1}{b} \left\{ \int_{\frac{a\xi_0 + b\xi_0\eta_0 + c\eta_0}{a\xi_0 + b\xi_0\eta_0 + c\eta_0}}^{\frac{a\xi_1 + b\xi_1\eta_1 + c\eta_1}{a\xi_1 + b\xi_1\eta_1 + c\eta_1}} f(z) \cdot \log \frac{ac + bz}{(b\xi_0 + c)(b\eta_1 + a)} dz + \int_{\frac{a\xi_1 + b\xi_1\eta_1 + c\eta_1}{a\xi_1 + b\xi_1\eta_1 + c\eta_1}}^{\frac{a\xi_0 + b\xi_0\eta_0 + c\eta_0}{a\xi_0 + b\xi_0\eta_0 + c\eta_0}} f(z) \cdot \log \frac{ac + bz}{(b\xi_1 + c)(b\eta_0 + a)} dz \right\} \\ & + \frac{1}{b} \log \frac{a + b\eta_1}{a + b\eta_0} \cdot \int_{\frac{a\xi_0 + b\xi_0\eta_0 + c\eta_0}{a\xi_0 + b\xi_0\eta_0 + c\eta_0}}^{\frac{a\xi_1 + b\xi_1\eta_1 + c\eta_1}{a\xi_1 + b\xi_1\eta_1 + c\eta_1}} f(z) dz \end{aligned}$$

Man kann auf ganz gleiche Art die Reduction bewirken, wenn die gegebene Function die Form $f[(a + x)(\beta + y)]$ hat, wie aus der Bemerkung hervorgeht, dass:

$$ax + bxy + cy = \frac{1}{b} \left\{ (bx + c)(by + a) - ac \right\}$$

ist.

Für $b = 0$ gehen die drei Integral-Ausdrücke in unbestimmte Formen über, deren wahre Werthe man jedoch entweder auf gewöhnliche Art oder auch wie folgt bestimmen kann. Es ist nämlich:

$$\log \frac{ac + bz}{(b\xi_0 + c)(b\eta_1 + a)} = \log \left(1 + \frac{bz}{ac} \right) - \log \left(1 + \frac{b\xi_0}{c} \right) - \log \left(1 + \frac{b\eta_1}{a} \right)$$

folglich geht, wenn man jeden der drei Logarithmen bis auf zwei Glieder entwickelt, der Ausdruck über in:

$$- b \left(\frac{\xi_0}{c} + \frac{\eta_1}{a} - \frac{z}{ac} \right) + \dots$$

Da der Factor b durch Division fortgeht, so hat man, wenn nach dessen Beseitigung $b = 0$ gesetzt wird, und wenn man dann mit den zwei übrigen Integralen auf gleiche Weise verfährt, schliesslich auch wieder b für c setzt, die Gleichung:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\eta_0}^{\eta_1} f(ax + by) dy = \frac{1}{ab} \left\{ \int_{a\xi_0 + b\eta_0}^{a\xi_0 + b\eta_1} (z - a\xi_0 - b\eta_1) f(z) dz + \int_{a\xi_0 + b\eta_0}^{a\xi_1 + b\eta_1} (z - a\xi_1 - b\eta_1) f(z) dz + \int_{a\xi_0 + b\eta_0}^{a\xi_1 + b\eta_0} (z - a\xi_1 - b\eta_0) f(z) dz \right\}$$

wobei, der Symmetrie wegen, eine etwas andere Form als die unmittelbar sich darbietende gewählt worden ist.

Gewissermassen analog zu dem eben betrachteten Falle ist derjenige, für welchen

$$z = ae^{mx} + be^{mx+ny} + ce^{ny}$$

und

$$\Delta = \frac{dY}{dz} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{z - ae^{mx}}$$

folglich:

$$\int f(x, Y) \frac{dY}{dz} dx = -\frac{1}{mnz} \log(z e^{-mx} - a) + \text{Const.}$$

Angenommen es sei auch hier $\varphi^0(x) = \eta_0$, $\varphi^1(x) = \eta_1$ constant, so ist:

$$\begin{aligned} \psi^0(z) &= \frac{1}{m} \log \frac{z - ce^{n\eta_0}}{a + be^{n\eta_0}} & , & & \psi^1(z) &= \frac{1}{m} \log \frac{z - ce^{n\eta_1}}{a + be^{n\eta_1}} \\ \theta^0(\xi_0) &= ae^{m\xi_0} + be^{m\xi_0 + n\eta_0} + ce^{n\eta_0} & , & & \theta^1(\xi_0) &= ae^{m\xi_0} + be^{m\xi_0 + n\eta_1} + ce^{n\eta_1} \\ \theta^0(\xi_1) &= ae^{m\xi_1} + be^{m\xi_1 + n\eta_0} + ce^{n\eta_0} & , & & \theta^1(\xi_1) &= ae^{m\xi_1} + be^{m\xi_1 + n\eta_1} + ce^{n\eta_1} \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung des vorigen Artikels ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\eta_0}^{\eta_1} f(ae^{mx} + be^{mx+ny} + ce^{ny}) dy = \\ \frac{1}{mn} \left\{ \int_{\theta^0(\xi_1)}^{\theta^1(\xi_1)} \frac{f(z)}{z} \log \frac{ac + bz}{(ze^{-m\xi_1} - a)(ze^{-n\eta_0} - c)} dz + \int_{\theta^1(\xi_0)}^{\theta^0(\xi_0)} \frac{f(z)}{z} \log \frac{ac + bz}{(ze^{-m\xi_0} - a)(ze^{-n\eta_1} - c)} \cdot dz \right\} \\ + \frac{1}{mn} \int_{\theta^0(\xi_0)}^{\theta^1(\xi_1)} \frac{f(z)}{z} \log \frac{ze^{-n\eta_0} - c}{ze^{-n\eta_1} - c} \cdot dz \end{aligned}$$

Für $\xi_0 = \eta_0 = 0$ und $\xi_1 = \eta_1 = \infty$ ergibt sich hieraus, wie leicht zu sehen, die Gleichung:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(ae^{mx} + be^{mx+ny} + ce^{ny}) dy = \frac{1}{mn} \int_{a+b+c}^{\infty} \frac{f(z)}{z} \log \frac{(z-a)(z-c)}{bz+ac} dz$$

Es verdient schliesslich noch bemerkt zu werden, dass, wenn man $f(bz + ac)$ an die Stelle von $f(z)$ setzt, die oben entwickelten Formeln das Doppel-Integral der Function

$$f \{ (be^{mz} + c) (be^{nz} + a) \}$$

liefern.

30.

Mehrere bemerkenswerthe Einzelheiten lassen sich aus dem Falle ableiten, in welchem für das Argument der Ausdruck :

$$z = \frac{ax^m + by^n + c}{ax^m + \beta y^n + \gamma} \dots \dots \dots (1)$$

gewählt wird. Dieser Annahme entspricht die Gleichung:

$$(az - a) x^m + (\beta z - b) y^n + \gamma z - c = 0$$

woraus folgt:

$$y = Y(z, x) = \left(\frac{(az - a) x^m + \gamma z - c}{b - \beta z} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Man findet hieraus:

$$\frac{dY}{dz} = \frac{(ab - a\beta)x^m + b\gamma - \beta c}{n(b + \beta z)^{\frac{1}{n} + 1}} \cdot \left((az - a) x^m + \gamma z - c \right)^{\frac{1}{n} + 1}$$

und sofort das unbestimmte Integral:

$$\int f(x, Y) \frac{dY}{dz} dx = \frac{(ab - a\beta)f(z)}{n(b - \beta z)^{\frac{1}{n} + 1}} \cdot \int \left((az - a)x^m + \gamma z - c \right)^{\frac{1}{n} - 1} x^m dx + \frac{(b\gamma - \beta c)f(z)}{n(b - \beta z)^{\frac{1}{n} + 1}} \int \left((az - a)x^m + \gamma z - c \right)^{\frac{1}{n} - 1} dx \dots (2)$$

Um von hier aus weiter zu kommen ist es nöthig die Grenzen des Integrals sowie auch gewisse Bestimmungen über die Constanten fest zu setzen.

Ich werde nun zunächst $c = -k$ und $\gamma = -z$ setzen und unter k und z positive Werthe verstehen; ferner werde ich durchgehends $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{n}$ für m und n schreiben und annehmen, es seien die Grenzen des Integrals durch die Bedingung

$$0 < ax^m + \beta y^n < \lambda$$

gegeben, dabei aber nur die, derselben genügenden, positiven Werthe von x und y zulässig.

Bestimmt man unter diesen Voraussetzungen die Grenzen sowohl des ursprünglichen als des transformirten Integrals, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\varphi^0(x) &= 0 & , & & \varphi^1(x) &= \left(\frac{x - ax^{\frac{1}{m}}}{\beta} \right)^n \\
\xi_0 &= 0 & , & & \xi_1 &= \left(\frac{x}{a} \right)^m \\
\psi^0(z) &= \left(\frac{xz - k}{az - a} \right)^m & , & & \psi^1(z) &= \left(\frac{bx - \beta k}{ba - \beta a} \right)^m \\
\theta^0(\xi_0) &= \frac{k}{x} & , & & \theta^1(\xi_0) &= \infty \\
\theta^0(\xi_1) &= \infty & , & & \theta^1(\xi_1) &= \infty
\end{aligned}$$

Dies vorausgesetzt gibt nun die Gleichung des Art. 28 unmittelbar:

$$\iint f \left(\frac{\frac{1}{ax^m} + \frac{1}{by^n} - k}{\frac{1}{ax^m} + \frac{1}{\beta y^n} - x} \right) dx dy = \int_{\frac{k}{x}}^{\infty} f(z) dz \int_0^{\left(\frac{xz - k}{az - a} \right)^m} \frac{dY}{dz} \cdot dx$$

Nun ist aber, nach Anwendung der jetzt eingeführten Bezeichnungen:

$$\frac{dY}{dz} dx = n \cdot \frac{(ab - a\beta)x^{\frac{1}{m}} + \beta k - bx}{(\beta z - b)^{n+1}} \left\{ xz - k - (az - a)x^{\frac{1}{m}} \right\}^{n-1}$$

wenn man also eine neue Veränderliche t für x einführt, für welche:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{az - a}{xz - k} x^{\frac{1}{m}} & , & & x &= \left(\frac{xz - k}{az - a} \right)^m \cdot t^m \\
dx &= m \left(\frac{xz - k}{az - a} \right)^m \cdot t^{m-1} dt
\end{aligned}$$

so erfolgt:

$$\frac{dY}{dz} dx = mn \frac{(xz - k)^{m+n-1}}{(az - a)^m (\beta z - b)^{n+1}} \left\{ (ab - a\beta) \frac{xz - k}{az - a} \cdot t + \beta k - bx \right\} t^{m-1} (1 - t)^{n-1} dt$$

Ferner ist, wie man sich auf der Stelle überzeugt:

$$(ab - a\beta) \frac{xz - k}{az - a} \cdot t + \beta k - bx = (\beta z - b) \cdot \frac{ak - ax}{az - a} t + (\beta k - bx) (1 - t)$$

folglich hat man auch:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\left(\frac{xz - k}{az - a} \right)^m} \frac{dY}{dz} dx = \\
& mn \frac{(xz - k)^{m+n-1}}{(az - a)^m (\beta z - b)^n} \left\{ \frac{ak - ax}{az - a} \int_0^1 t^m (1 - t)^{n-1} dt + \frac{\beta k - bx}{\beta z - b} \int_0^1 t^{m-1} (1 - t)^n dt \right\}
\end{aligned}$$

Die beiden letzten Integrale lassen sich durch Gammafunctionen ausdrücken, und man findet das Resultat:

Erstreckt sich die Integration über alle positiven Werthe von x, y , welche der Bedingung

$$0 < ax^{\frac{1}{m}} + \beta y^{\frac{1}{n}} < x$$

Genüge thun, so findet die Gleichung statt:

$$\iint f\left(\frac{ax^{\frac{1}{m}} + \beta y^{\frac{1}{n}} - k}{ax^{\frac{1}{m}} + \beta y^{\frac{1}{n}} - x}\right) dx dy = \frac{mn}{m+n} \cdot \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \cdot \int_{\frac{k}{x}}^{\infty} \frac{(xz-k)^{m+n-1}}{(az-a)^m(\beta z-b)^n} \left\{ m \frac{ak-ax}{az-a} + n \frac{\beta k-bx}{\beta z-b} \right\} dz$$

Die Potenzen $(az-a)^m, (\beta z-b)^n$ bleiben, wie man sich leicht überzeuget, sowohl für gebrochene als ganze Werthe von m und n reell, insofern:

$$ak - ax > 0 \quad \text{und} \quad \beta k - bx > 0$$

In diesem Falle gilt also auch die obige Formel für alle Werthe m und n .

Für $a = \beta = x = 1$ erhält man den speciellen Fall einer allgemeinen Reductionsformel für ein beliebig vielfaches Integral, welche meines Wissens zuerst Liouville gefunden hat und die später in voller Allgemeinheit von Schlömilch hergeleitet wurde.

31.

Minder einfach wird das Ergebniss, wenn die Grenzen des Integral constant sind. Lässt man dasselbe sowohl nach x als nach y mit o anfangen, setzt also:

$$\xi_0 = o \quad , \quad \xi_1 = \xi \quad ; \quad \varphi^0(x) = o \quad , \quad \varphi^1(x) = \eta$$

und legt man den Werth von z in der Form zu Grunde, wie er im vorigen Artikel, Gleichung (1) angegeben wurde, so findet man:

$$\begin{aligned} \phi^0(z) &= \left(\frac{\gamma z - c}{a - \alpha z}\right)^{\frac{1}{m}} \quad , \quad \phi^1(z) = \left(\frac{\gamma z - c + (\beta z - b)\eta^n}{a - \alpha z}\right)^{\frac{1}{m}} \\ \theta^0(\xi_0) &= \frac{c}{\gamma} \quad , \quad \theta^1(\xi_0) = \frac{b\eta^n + c}{\beta\eta^n + \gamma} \\ \theta^0(\xi_1) &= \frac{a\xi^m + c}{a\xi^m - \gamma} \quad , \quad \theta^1(\xi_1) = \frac{a\xi^m + b\eta^n + c}{a\xi^m + \beta\eta^n + \gamma} \end{aligned}$$

Wenn man nun die beiden Integrale, welche in der Gleichung (2) des vorigen Art. vorkommen, auch hier mittelst einer neuen Grösse t transformirt, für welche:

$$t = -\frac{az-a}{\gamma z-c} x^m \quad , \quad x = \left(-\frac{\gamma z-c}{az-a}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot t^{\frac{1}{m}}$$

$$dx = \frac{1}{m} \left(-\frac{\gamma z-c}{az-a}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot t^{\frac{1}{m}-1} dt$$

und wenn man nach geschעהener Substitution bemerkt, dass:

$$\int (1-t)^{\frac{1}{n}-1} \cdot t^{\frac{1}{m}} dt = -\frac{mn}{m+n} (1-t)^{\frac{1}{n}} \cdot t^{\frac{1}{m}} + \frac{n}{m+n} \int (1-t)^{\frac{1}{n}-1} \cdot t^{\frac{1}{m}-1} dt$$

wie sich durch theilweises Integriren ergibt, so wird man bald finden:

$$\int f(x, Y) \frac{dY}{dz} dx = \frac{a\beta-ab}{m+n} \cdot \frac{x[\gamma z-c+(az-a)x^m]^{\frac{1}{n}}}{(a-az)(b-\beta z)^{\frac{1}{n}+1}} + \frac{1}{m+n} \cdot \frac{(\gamma z-c)^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}}{(a-az)^{\frac{1}{m}}(b-\beta z)^{\frac{1}{n}}} \left\{ \frac{a\gamma-ac}{m(a-az)} + \frac{b\gamma-\beta c}{n(b-\beta z)} \right\} \cdot \int (1-t)^{\frac{1}{n}-1} \cdot t^{\frac{1}{m}-1} dt$$

Dieses vorausgesetzt substituirt man nun die angegebenen Grenzwerte von x und die denselben entsprechenden von t , sowie auch die ebenfalls angegebenen Grenzen von z in die Gleichung des Art. 28; setze auch der Kürze wegen:

$$Z = \frac{(\gamma z-c)^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}}{(a-az)^{\frac{1}{m}}(b-\beta z)^{\frac{1}{n}}} \left\{ \frac{a\gamma-ac}{m(a-az)} + \frac{b\gamma-\beta c}{n(b-\beta z)} \right\}$$

$$U = \frac{\xi(a\beta-ab)}{(a-az)(b-\beta z)} \cdot \left(\frac{\gamma z-c+(az-a)\xi^m}{b-\beta z} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$V = \frac{\eta(ba-\beta a)}{(a-az)(b-\beta z)} \cdot \left(\frac{\gamma z-c+(\beta z-b)\eta^n}{a-az} \right)^{\frac{1}{m}}$$

Dann wird man nach einigen nahe liegenden Umformungen erhalten:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} f\left(\frac{ax^m+by^n+c}{ax^m+\beta y^n+\gamma}\right) dy = \frac{1}{m+n} \cdot \frac{I\left(\frac{1}{m}\right)I\left(\frac{1}{n}\right)}{I\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)} \left\{ \int_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{b\gamma^n+c}{\beta\gamma^n+\gamma}} Z \cdot f(z) dz - \int_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{a\zeta^m+b\gamma^n+c}{a\zeta^m+\beta\gamma^n+\gamma}} Z \cdot f(z) dz + \int_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{a\zeta^m+c}{a\zeta^m+\gamma}} Z \cdot f(z) dz \right\} + \frac{1}{m+n} \left\{ \int_{\frac{b\gamma^n+c}{\beta\gamma^n+\gamma}}^{\frac{a\zeta^m+b\gamma^n+c}{a\zeta^m+\beta\gamma^n+\gamma}} f(z) dz \cdot \left[V + Z \int_0^{\frac{b-\beta z}{\gamma z-c}} (1-t)^{\frac{1}{m}-1} t^{\frac{1}{n}-1} dt \right] + \int_{\frac{a\zeta^m-c}{a\zeta^m+\gamma}}^{\frac{a\zeta^m+b\gamma^n+c}{a\zeta^m+\beta\gamma^n+\gamma}} f(z) dz \cdot \left[U + Z \int_0^{\frac{a-az}{\gamma z-c}} (1-t)^{\frac{1}{n}-1} t^{\frac{1}{m}-1} dt \right] \right\}$$

Die Integrationen nach t lassen sich unbestimmt ausführen, wenn entweder $\frac{1}{m}$ oder $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ oder $\frac{1}{n}$ eine ganze Zahl ist. Es versteht sich von selbst, dass man für gebrochene Werthe von m und n , die soeben erhaltene Gleichung und die ihr zu Grunde liegende Transformation durch die Veränderliche t , nicht anwenden kann, wenn die Coëfficienten so beschaffen sind, dass einzelne Bestandtheile jener Gleichung imaginär werden; man muss dann, um das Imaginäre zu vermeiden, eine andere Transformation zu Grunde legen.

Sind speciell $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $c = 0$. so wird

$$Z = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \frac{z^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1}}{a^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{n}}}, \quad U = 0 \quad , \quad V = 0$$

und es ergibt sich für diese Annahmen:

$$mn a^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \cdot \int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} f(ax^m + by^n) dy =$$

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{m}) \Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})} \left\{ \int_0^{a\xi^m} z^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} f(z) dz - \int_0^{a\xi^m + b\eta^n} z^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} f(z) dz + \int_0^{b\eta^n} z^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} f(z) dz \right\}$$

$$+ \int_{a\xi^m}^{a\xi^m + b\eta^n} z^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} f(z) dz \int_0^{\frac{a\xi^m}{z}} t^{\frac{1}{m} - 1} (1-t)^{\frac{1}{n} - 1} dt + \int_{b\eta^n}^{a\xi^m + b\eta^n} z^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} f(z) dz \int_0^{\frac{b\eta^n}{z}} t^{\frac{1}{n} - 1} (1-t)^{\frac{1}{m} - 1} dt$$

Es sei noch specieller

$$\xi = \infty \quad , \quad \eta = \infty$$

so erhält man die, meines Wissens zuerst von Raabe gefundene Gleichung:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(ax^m + by^n) dy = \frac{1}{mn a^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{m}) \Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})} \int_0^{\infty} z^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} f(z) dz$$

Soll diese Gleichung für alle möglichen positiven Werthe von m und n gelten, so müssen offenbar die Coëfficienten a und b positiv sein.

32.

Einer der Fälle, in welchen die vorhin erhaltenen Formeln wegen darin vorkommenden imaginären Bestandtheile unbrauchbar werden, verdient näher in Betracht gezogen zu werden.

Ich werde dabei annehmen, es seien die Grenzen bezüglich der ursprünglichen Veränderlichen x und y , sowie der neuen z dieselben wie im vorigen Falle. —

Geht man nun auch hier wieder von dem Ausdruck

$$\int f(x, Y) \frac{dY}{dz} dx = \frac{ba - \beta a}{m + n} \cdot \frac{x[(a - az)x^m + c - \gamma z]^{\frac{1}{n}}}{(a - az)(\beta z - b)^{\frac{1}{n} + 1}}$$

$$+ \frac{m}{m + n} \frac{1}{(\beta z - b)^{\frac{1}{n}}} \left\{ \frac{a\gamma - ac}{m(az - a)} + \frac{b\gamma - \beta c}{m(\beta z - b)} \right\} \int \left((a - az)x^m + c - \gamma z \right)^{\frac{1}{n} - 1} dx$$

aus, setzt zur Abkürzung:

$$T = \frac{m}{(\beta z - b)^{\frac{1}{n}}} \left\{ \frac{a\gamma - ac}{m(a z - a)} + \frac{b\gamma - \beta c}{n(\beta z - b)} \right\}$$

und legt den beiden Grössen U und V dieselbe Bedeutung bei, wie im vorigen Artikel, so wird man nach einigen leichten Umformungen zu der folgenden Gleichung gelangen:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} f\left(\frac{ax^m + by^n + c}{ax^m + \beta y^n + \gamma}\right) dy =$$

$$\frac{1}{m+n} \left\{ \int_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{a\xi^m + c}{a\xi^m + \gamma}} T \cdot f(z) dz \int_{\infty}^{\left(\frac{\gamma z - c}{a - az}\right)^{\frac{1}{m}}} [(a - az)x^m + c - \gamma z]^{\frac{1}{n} - 1} dx + \int_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{b\eta^n + c}{\beta\eta^n + \gamma}} T \cdot f(z) dz \int_0^{\infty} [(a - az)x^m + c - \gamma z]^{\frac{1}{n} - 1} dx \right\}$$

$$+ \frac{1}{m+n} \left\{ \int_{\frac{a\xi^m + b\eta^n + c}{a\xi^m + \beta\eta^n + \gamma}}^{\frac{a\xi^m + c}{a\xi^m + \gamma}} f(z) dz \left[U + T \int_{\xi}^{\infty} [(a - az)x^m + c - \gamma z]^{\frac{1}{n} - 1} dx \right] + \int_{\frac{a\xi^m + b\eta^n + c}{a\xi^m + \beta\eta^n + \gamma}}^{\frac{b\eta^n + c}{\beta\eta^n + \gamma}} f(z) dz \left[V + T \int_{\infty}^{\left(\frac{(\beta z - b)\eta^n + \gamma z - b}{a - az}\right)^{\frac{1}{m}}} [(a - az)x^m + c - \gamma z]^{\frac{1}{n} - 1} dx \right] \right\}$$

Vorausgesetzt nun, es seien die Coefficienten so beschaffen, dass die Ausdrücke:

$$a\gamma - ac \quad , \quad a\beta - ab \quad , \quad c\beta - \gamma b$$

insgesammt positiv sind, so wird man stets reelle Formen behalten, wenn man auf die vier Integrale nach x die folgenden Transformationen anwendet.

Bezeichnet man zur Abkürzung jene vier Integrale der Ordnung nach durch i_1, i_2, i_3, i_4 , und setzt man in erstere

$$t = \frac{\gamma z - c}{a - az} x^{-m} \quad , \quad dx = -\frac{1}{m} \left(\frac{\gamma z - c}{a - az}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot t^{-\left(\frac{1}{m} + 1\right)} dt$$

so wird man finden:

$$i_1 = -\frac{(\gamma z - c)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1}}{m(a - az)^{\frac{1}{m}}} \cdot \int_0^1 (1 - t)^{\frac{1}{n} - 1} \cdot t^{-\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} dt$$

oder

$$i_1 = -\frac{(\gamma z - c)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1}}{m(a - az)^{\frac{1}{m}}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{m}}{\sin \left(\frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}$$

Mittelst derselben Transformation erhält man ferner:

$$i_3 = +\frac{(\gamma z - c)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1}}{m(a - az)^{\frac{1}{m}}} \cdot \int_0^{\frac{\gamma z - c}{a - az} \cdot \xi^{-m}} (1 - t)^{\frac{1}{n} - 1} t^{-\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} dt$$

Behufs der Transformation der Integrale i_2 und i_4 setze man:

$$t = \frac{c - \gamma z}{(a - az)x^m + c - \gamma z}, \quad dx = -\frac{1}{m} \left(\frac{c - \gamma z}{a - az} \right)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^{\frac{1}{m} - 1} \cdot \frac{dt}{t^2}$$

so ergibt sich in ganz analoger Weise wie i_1 der Werth:

$$i_2 = + \frac{(c - \gamma z)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1}}{m(a - az)^{\frac{1}{m}}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \left(\frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n} \right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}$$

und sofort auch:

$$i_4 = - \frac{(c - \gamma z)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1}}{m(a - az)^{\frac{1}{m}}} \int \frac{\frac{c - \gamma z}{\beta z - b} \gamma^{-n}}{(1 - t)^{\frac{1}{m} - 1}} \cdot t^{-\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} dt$$

Setzt man nun der Kürze wegen:

$$S = \frac{1}{(a - az)^{\frac{1}{m}} (\beta z - b)^{\frac{1}{n}}} \left[\frac{a\gamma - ac}{m(a - az)} + \frac{c\beta - \gamma b}{n(\beta z - b)} \right]$$

und substituirt für i_1, i_2, i_3, i_4 die so eben gefundenen Werthe, so wird man zu der Gleichung gelangen:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\xi} dx \int_0^{\gamma} f \left(\frac{ax^m + by^n + c}{ax^m + \beta y^n + \gamma} \right) dy = \\ & \frac{1}{(m+n) \sin \left(\frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n} \right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} \left\{ \sin \frac{\pi}{m} \int_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{a\xi^m + c}{a\xi^m + \gamma}} f(z) (\gamma z - c)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} \cdot S \cdot dz - \sin \frac{\pi}{n} \int_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{b\gamma^n + c}{\beta\gamma^n + \gamma}} f(z) (c - \gamma z)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} \cdot S dz \right\} \\ & - \frac{1}{m+n} \int_{\frac{a\xi^m + c}{a\xi^m + \gamma}}^{\frac{a\xi^m + b\gamma^n + c}{a\xi^m + \beta\gamma^n + \gamma}} dz f(z) \left\{ U - S \cdot (\gamma z - c)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} \cdot \int_0^{\frac{\gamma z - c}{a - az} \xi^{-m}} (1 - t)^{\frac{1}{m} - 1} t^{-\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} dt \right\} \\ & - \frac{1}{m+n} \int_{\frac{b\gamma^n + c}{\beta\gamma^n + \gamma}}^{\frac{a\xi^m + b\gamma^n + c}{a\xi^m + \beta\gamma^n + \gamma}} dz f(z) \left\{ V + S \cdot (c - \gamma z)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} \cdot \int_0^{\frac{c - \gamma z}{\beta z - b} \gamma^{-n}} (1 - t)^{\frac{1}{m} - 1} t^{-\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} dt \right\} \end{aligned}$$

In dem speciellen Falle:

$$a = 0, \beta = 0, \gamma = 1, c = 0$$

muss, damit die rücksichtlich der Coëfficienten gemachten Voraussetzungen stattfinden, angenommen werden, es sei b an sich negativ. Schreibt man daher $-b$ für b und betrachtet

dann b als positiv, so wird man nach einigen sich leicht anbietenden Reductionen die folgende Gleichung erhalten:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} f(ax^m - by^n) dy =$$

$$\frac{1}{mna^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{n}} \sin\left(\frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} \left\{ \sin \frac{\pi}{m} \int_0^{a\xi^m} z^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} f(z) dz + \sin \frac{\pi}{n} \int_0^{b\eta^n} z^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} f(-z) dz \right\}$$

$$+ \frac{1}{mna^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{n}}} \left\{ \int_{a\xi^m}^{a\xi^m - b\eta^n} z^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} f(z) dz \int_0^{\frac{z}{a\xi^m}} (1-t)^{\frac{1}{n} - 1} t^{-\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} dt + \int_{b\eta^n}^{b\eta^n - a\xi^m} z^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} f(-z) dz \int_0^{\frac{z}{b\eta^n}} (1-t)^{\frac{1}{m} - 1} t^{-\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} dt \right\}$$

Macht man die noch speciellere Annahme, dass $\xi = \infty, \eta = \infty$ sei, so wird man haben:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(ax^m - by^n) dy =$$

$$\frac{1}{mna^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{n}} \sin\left(\frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} \left\{ \sin \frac{\pi}{m} \int_0^{\infty} z^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} f(z) dz + \sin \frac{\pi}{n} \int_0^{\infty} z^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} f(-z) dz \right\}$$

Diese letztere Gleichung ist, so viel mir bekannt, zuerst von Raabe gefunden worden. (Crelle, Journal Bd. 37.)

Diese besonderen Fälle mögen genügen, um den Nutzen der Gleichung des Art. 28 für die Reduction doppelter Integrale auf Quadraturen zu zeigen.

33.

Die folgenden Anwendungen werden die Allgemeinheit des Theorems in Art. 24 in grösserm Masse als die bisherigen in Anspruch nehmen, indem darin gleichzeitig zwei neue Veränderliche zur Transformation verwendet werden. Ich werde dabei die Function unter den Integralzeichen als abhängig von zwei von einander getrennten Ausdrücken, — die ich der Kürze halber Argumente nennen werde, — voraussetzen, und für jeden derselben, als gegebene Function von x und y , eine neue Veränderliche einführen.

Um hierbei mit dem einfachsten Falle zu beginnen, will ich annehmen, die Function hänge von den beiden Ausdrücken:

$$ax + by \quad , \quad ax + \beta y$$

ab, und es seien die Integrationsgrenzen durchaus constant, nämlich ξ_0 und ξ_1 nach x , und η_0 und η_1 nach y . — Setzt man nun:

$$ax + by = \lambda \quad , \quad ax + \beta y = \mu$$

so folgt:

$$x = X_{(\lambda, \mu)} = \frac{\beta\lambda - b\mu}{a\beta - ab} \quad ; \quad y = Y_{(\mu, \lambda)} = \frac{a\lambda - a\mu}{ba - \beta a}$$

und

$$\Delta = \frac{1}{ab - a\beta}$$

Auch findet man:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{\beta}{b}\lambda + \frac{ab - a\beta}{b}\xi_0 & , & & \mu^0 &= \frac{a}{a}\lambda + \frac{\beta a - ba}{a}\eta_0 \\ \mu_1 &= \frac{\beta}{b}\lambda + \frac{ab - a\beta}{b}\xi_1 & , & & \mu^1 &= \frac{a}{a}\lambda = \frac{\beta a - ba}{a}\eta_1 \end{aligned}$$

und sofort:

$$\begin{aligned} \lambda_0^0 &= a\xi_0 + b\eta_0 & , & & \lambda_1^0 &= a\xi_1 + b\eta_0 \\ \lambda_0^1 &= a\xi_0 + b\eta_1 & , & & \lambda_1^1 &= a\xi_1 + b\eta_1 \end{aligned}$$

Dies vorausgesetzt, geht die Gleichung (III) des Art. 17 über in die folgende:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\eta_0}^{\eta_1} f(ax + by, ax + \beta y) dy = \frac{1}{ab - a\beta} \left\{ \int_{a\xi_0 + b\eta_0}^{a\xi_1 + b\eta_0} d\lambda \int_{\frac{\beta}{b}\lambda + \frac{ab - a\beta}{b}\xi_0}^{\frac{a}{a}\lambda + \frac{a\beta - ab}{a}\eta_0} f(\lambda, \mu) d\mu + \int_{a\xi_0 + b\eta_0}^{a\xi_1 + b\eta_1} d\lambda \int_{\frac{\beta}{b}\lambda + \frac{ab - a\beta}{b}\xi_0}^{\frac{a}{a}\lambda + \frac{a\beta - ab}{a}\eta_1} f(\lambda, \mu) d\mu + \int_{a\xi_1 + b\eta_0}^{a\xi_1 + b\eta_1} d\lambda \int_{\frac{\beta}{b}\lambda + \frac{ab - a\beta}{b}\xi_1}^{\frac{a}{a}\lambda + \frac{a\beta - ab}{a}\eta_1} f(\lambda, \mu) d\mu \right\}$$

Diese Gleichung liefert eine zwar nur specielle, aber immerhin bemerkenswerthe Verification der allgemeinen Transformationsformeln, wenn man für $f(\lambda, \mu)$ einfach den Werth 1 setzt. Man gelangt dann in der That auf eine reine Identität.

Um eine der vielen Anwendungen, welche sich von obiger Gleichung machen lassen, zu bemerken, will ich annehmen, es sei:

$$\xi_0 = 0 \quad , \quad \eta_0 = 0 \quad , \quad \xi_1 = \infty \quad , \quad \eta_1 = \infty$$

Dann erhält man, wie leicht zu sehen, die Gleichung:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(ax + by, ax + \beta y) dy = \frac{1}{ab - a\beta} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{\frac{\beta}{b}\lambda}^{\frac{a}{a}\lambda} f(\lambda, \mu) d\mu$$

Es sei z. B.

$$f(\lambda, \mu) = e^{-\left(\frac{h}{\lambda} + \frac{k}{\mu}\right)\mu}$$

so ist:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{h}{ax + by} + \frac{ax + by}{k}\right)(ax + \beta y)} dy = \frac{k}{ab - a\beta} \int_0^{\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2 + hk} \left(e^{-\frac{\beta}{bk}(\lambda^2 + hk)} - e^{-\frac{a}{ak}(\lambda^2 + hk)} \right)$$

Setzt man auf der rechten Seite dieser Gleichung:

$$\lambda^2 = h k x$$

so geht sie über in:

$$\frac{k}{2(ab - a\beta)} \int_0^\infty \frac{dx}{x+1} \left(e^{-\frac{\beta h}{b}(x+1)} - e^{-\frac{ah}{a}(x+1)} \right)$$

Bezeichnet man nun, wie seit Bessel's Vorschlag üblich ist, den „Integrallogarithmus“

$$\int_0^\infty e^{-r(1+x)} \frac{dx}{1+x} = -li(e^{-r})$$

so hat man das folgende Resultat:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-\left(\frac{h}{ax+by} + \frac{ax+\beta y}{k}\right)(ax+\beta y)} dy = \frac{k}{2(ab - a\beta)} \left\{ li\left(e^{-\frac{a}{a}h}\right) - li\left(e^{-\frac{\beta}{b}h}\right) \right\}$$

welches auf andern Wege weniger leicht zu finden wäre.

Nimmt man an, es sei gegeben:

$$f(\lambda, \mu) = \frac{\lambda^{r-1} \mu^{s-1}}{(1+\lambda)^n}$$

so folgt:

$$\int_0^\infty d\lambda \int_{\frac{\beta}{b}\lambda}^{\frac{a}{a}\lambda} f(\lambda, \mu) d\mu = \frac{1}{s} \left\{ \left(\frac{a}{a}\right)^s - \left(\frac{\beta}{b}\right)^s \right\} \int_0^\infty \frac{\lambda^{r+s-1} d\lambda}{(1+\lambda)^n}$$

und man hat daher die Gleichung:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{(ax+by)^{r-1} (ax+\beta y)^{s-1}}{(1+ax+by)^n} dy = \frac{1}{sa^s b^s} \cdot \frac{(ab)^s - (a\beta)^s}{ab - a\beta} \cdot \frac{\Gamma(r+s) \Gamma(n-r-s)}{\Gamma(n)}$$

Damit dieses Doppel-Integral einen endlichen Werth behalte, muss, wie man sieht $n > r + s$ sein.

Nimmt man ferner an, es sei

$$f(\lambda, \mu) = \lambda^{n-1} e^{-k\mu}$$

so folgt zunächst:

$$\int_0^\infty d\lambda \int_{\frac{\beta}{b}\lambda}^{\frac{a}{a}\lambda} f(\lambda, \mu) d\mu = \frac{1}{k} \int_0^\infty \lambda^{n-1} \left(e^{-\frac{\beta}{b}k\lambda} - e^{-\frac{a}{a}k\lambda} \right) d\lambda$$

und man hat daher nach Ausführung dieser letztern Integration das Resultat:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty (ax+by)^{n-1} e^{-k(ax+\beta y)} dy = \frac{\Gamma(n)}{k^{n+1} a^n \beta^n} \cdot \frac{(ab)^n - (a\beta)^n}{ab - a\beta}$$

Wenn in den beiden letzten Fällen $a = a$ und $\beta = b$ wird, so erscheinen die entsprechenden Resultate rechter Hand in unbestimmter Form. Nach bekannten Regeln erhält man jedoch sehr leicht ihren wahren Werth, nämlich:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \frac{(ax + by)^{m-2}}{(1 + ax + by)^n} dy = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n-m)}{ab \cdot \Gamma(n)}$$

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} (ax + by)^{n-1} e^{-k(ax+by)} dy = \frac{n \Gamma(n)}{abk^{n+1}}$$

wobei m für $r + s$ geschrieben wurde.

Ich will schliesslich annehmen, es sei:

$$f(\lambda, \mu) = \frac{\sin k\lambda}{\lambda} e^{-x\mu}$$

so wird man mit Benützung bekannter Formeln finden:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \frac{\sin k(ax+by)}{ax+by} e^{-x(ax+\beta y)} dy = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{ab - a\beta} \cdot \arctang \frac{(ab - a\beta) zk}{a\beta x^2 + abk^2}$$

Daraus folgt, wenn man $z = 0$ setzt:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \frac{\sin k(ax+by)}{ax+by} dy = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{ab}$$

Diese Gleichung, welche eine gewisse Analogie zu der bekannten Formel:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin kx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

zeigt, stellt den Werth des Doppel-Integrals als dem Product der Coëfficienten a und b umgekehrt proportional dar, was beim ersten Anblick wohl auffallen mag. Dass aber in der That jener Werth um so grösser werden muss, je kleiner a und b sind, ergibt sich bald aus der Bemerkung, dass x und y von Null angefangen, ein sehr grosses Intervall von Werthen durchlaufen müssen, ehe der Bogen $k(ax + by)$ den Werth π erreicht, der Sinus desselben also negativ wird, und in das Integral negative Elemente eingehen. Das Integral umfasst also einen mit abnehmenden Werthen von a und b sich rasch ausbreitenden Umfang von lauter positiven Elementen, die fast insgesamt viel grösser sind, als die später eintretenden negativen, und daraus lässt sich das unbegrenzte Wachstum des Integrals, welches mit der unbegrenzten Abnahme der Coëfficienten a und b eintritt, hinlänglich erklären.

Setzt man entweder $k = 1$, oder, was auf dasselbe hinführt, x, y für kx, ky so erhält man:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \frac{\sin(ax+by)}{ax+by} dy = \frac{1}{ab}$$

u. s. f.

34.

Die vorhin entwickelten Formeln lassen sich noch beträchtlich verallgemeinern. In der That, es sei:

$$ax^m + by^n = \lambda \quad , \quad ax^m + \beta y^n = \mu$$

so folgt:

$$x = X_{(\lambda, \mu)} = \left(\frac{\beta\lambda - b\mu}{a\beta - ab} \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$y = Y_{(\lambda, \mu)} = \left(\frac{a\lambda - a\mu}{ba - \beta a} \right)^{\frac{1}{n}}$$

und

$$\Delta = \frac{1}{mn} \cdot \frac{1}{(ab - a\beta)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1}} \cdot (a\lambda - a\mu)^{\frac{1}{n} - 1} (b\mu - \beta\lambda)^{\frac{1}{m} - 1}$$

Rücksichtlich der Grenzbedingungen werde angenommen, die Integration habe sich über alle diejenigen positiven Werthe von x und y zu erstrecken, welche mit der Ungleichheit:

$$0 < ax^m + \beta y^n < z$$

verträglich sind. Dann folgt:

$$\varphi^0(x) = 0 \quad , \quad \varphi^1(x) = \left(\frac{x - ax^m}{\beta} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\xi_0 = 0 \quad , \quad \xi_1 = \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{m}}$$

und hiernach:

$$\mu_0 = \frac{\beta}{b} \lambda \quad , \quad \mu^0 = \frac{a}{a} \lambda$$

$$\mu_1 = \frac{\beta}{b} \lambda + \frac{ab - a\beta}{ab} z \quad , \quad \mu^1 = z$$

woraus sich sofort die weiteren Werthe:

$$\lambda_0^0 = 0 \quad , \quad \lambda_0^1 = \frac{b}{\beta} z$$

$$\lambda_1^0 = \frac{a}{a} z \quad , \quad \lambda_1^1 = \frac{a}{a} z$$

ergeben. Dies vorausgesetzt substituirt man diese besonderen Werthe in die allgemeine Gleichung (VI) des Art. 18, so wird man, ohne weitere Umgestaltungen direct erhalten:

$$\iint f(ax^m + by^n, ax^m + \beta y^n) dx dy =$$

$$\frac{1}{mn} \cdot \frac{1}{(ab - a\beta)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1}} \cdot \int_0^{\frac{a}{a} z} d\lambda \int_x^{\frac{a}{a} \lambda} (a\lambda - a\mu)^{\frac{1}{n} - 1} \cdot (b\mu - \beta\lambda)^{\frac{1}{m} - 1} \cdot f(\lambda, \mu) d\mu$$

$$+ \frac{1}{mn} \cdot \frac{1}{(\beta a - ba)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1}} \cdot \int_0^{\frac{b}{\beta} z} d\lambda \int_x^{\frac{\beta}{b} \lambda} (\beta\lambda - b\mu)^{\frac{1}{m} - 1} \cdot (a\mu - a\lambda)^{\frac{1}{n} - 1} \cdot f(\lambda, \mu) d\mu$$

wobei das ursprüngliche Integral auf alle der Ungleichheit

$$0 < ax^m + \beta y^n < x$$

entsprechenden positiven Werthe von x und y sich erstrecken muss.

Diese in allen Theilen symmetrische Formel besitzt einen erheblichen Grad von Allgemeinheit. Ähnlich wie im vorigen Artikel, kann man die entsprechende Formel auch für den Fall constanter Grenzen herstellen. Sind dieselben 0 und ∞ , so ist:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(ax^m + by^n, ax^m + \beta y^n) dy =$$

$$\frac{1}{mn} \cdot \frac{1}{(ab - a\beta)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1}} \cdot \int_0^{\frac{a}{\beta} \lambda} d\lambda \int_{\frac{\beta}{a} \lambda}^{\frac{a}{\beta} \lambda} (a\lambda - a\mu)^{\frac{1}{n} - 1} \cdot (b\mu - \beta\lambda)^{\frac{1}{m} - 1} \cdot f(\lambda, \mu) d\mu$$

Man kann leicht bewirken, dass auch auf der rechten Seite die Grenzen constant werden; setzt man nämlich

$$\mu = \lambda\rho$$

wo ρ eine von λ unabhängige neue Veränderliche bezeichnet, und ändert man nach geschehener Substitution rechter Hand die Integrationsfolge, bezüglich λ und ρ , so wird man finden:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(ax^m + by^n, ax^m + \beta y^n) dy =$$

$$\frac{1}{mn} \cdot \frac{1}{(ab - a\beta)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1}} \cdot \int_{\frac{\beta}{a}}^{\frac{a}{\beta}} (a - a\rho)^{\frac{1}{n} - 1} (b\rho - \beta)^{\frac{1}{m} - 1} d\rho \int_0^{\infty} \lambda^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} f(\lambda, \lambda\rho) d\lambda$$

Setzt man hierin x und y für x^m und y^n , und schreibt man dann überall $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{n}$ für m und n , so nimmt diese Gleichung die etwas einfachere Form an:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(ax + by, ax + \beta y) \cdot x^{m-1} y^{n-1} dy =$$

$$\frac{1}{(ab - a\beta)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1}} \cdot \int_{\frac{\beta}{a}}^{\frac{a}{\beta}} (a - a\rho)^{n-1} (b\rho - \beta)^{m-1} d\rho \int_0^{\infty} \lambda^{m+n-1} f(\lambda, \lambda\rho) d\lambda$$

Beispielsweise sei:

$$f(\lambda, \mu) = f(r\lambda + c\mu) = f[\lambda(c\rho + r)]$$

Aus der am Schlusse des Art. 31 angeführten Gleichung ergibt sich dann der Werth des Doppel-Integrals:

$$= \frac{1}{(\gamma a + c\alpha)^m (\gamma b + c\beta)^n} \cdot \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty z^{m+n-1} f(z) dz$$

und da:

$$\int_0^\infty \lambda^{m+n-1} f(\lambda, \lambda\rho) d\lambda = \frac{1}{(c\rho + \gamma)^{m+n}} \cdot \int_0^\infty z^{m+n-1} f(z) dz$$

so findet man nach einigen leichten Reductionen:

$$\int_{\frac{\beta}{b}}^{\frac{\alpha}{a}} \frac{(a - a\rho)^{n-1} (b\rho - \beta)^{m-1}}{(c\rho + \gamma)^{m+n}} d\rho = \frac{(ab - a\beta)^{m+n-1}}{(\gamma a + c\alpha)^m (\gamma b + c\beta)^n} \cdot \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Setzt man hierin a und b für $\frac{a}{a}$ und $\frac{\beta}{b}$, so ergibt sich hieraus:

$$\int_b^a \frac{(a - \rho)^{n-1} (\rho - b)^{m-1}}{(c + \rho)^{m+n}} d\rho = \frac{(a - b)^{m+n-1}}{(a + c)^m (b + c)^n} \cdot \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Für $\rho = b + x$, $a - b = 1$, $c + b = a$ folgt die Gleichung:

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} (1-x)^{n-1}}{(x+a)^{m+n}} dx = \frac{1}{(1+a)^m a^n} \cdot \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

welche zuerst von Abel bemerkt worden ist. (S. Abel, Oeuvres compl. T. I, p. 95.) Eine andere Bedeutung als die einer einfachen Transformation des Euler'schen Integrals erster Art hat jedoch diese Gleichung nicht, wie man sogleich sieht, wenn in der Formel:

$$\int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

die Substitution:

$$t = \frac{1+a}{x+a} x, \quad dx = \frac{(1+a)a}{(x+a)^2} dx$$

gemacht wird.

Nimmt man an, es sei

$$f(\lambda, \mu) = e^{-\lambda} F\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$$

und bemerkt man, dass:

$$\int_0^\infty \lambda^{m+n-1} f(\lambda, \lambda\rho) d\lambda = \Gamma(m+n) \cdot F(\rho)$$

so ergibt sich die Gleichung:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-(ax+by)} \cdot F\left(\frac{ax+\beta y}{ax+by}\right) \cdot x^{m-1} \cdot y^{n-1} \cdot dy = \frac{\Gamma(m+n)}{(ab-a\beta)^{m+n-1}} \int_{\frac{\beta}{b}}^{\frac{a}{a}} (a-a\rho)^{n-1} (b\rho-\beta)^{m-1} F(\rho) d\rho$$

Schliesslich will ich annehmen es sei:

$$f(\lambda, \mu) = \frac{\mu^r}{(1+\lambda)^{r+s}}$$

Dann wird man weiter finden:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \frac{(ax+\beta y)^r x^{m-1} y^{n-1}}{(1+ax+by)^{r+s}} dy = \frac{1}{(ab-a\beta)^{m+n-1}} \cdot \frac{\Gamma(m+n+r) \Gamma(s)}{\Gamma(m+n+r+s)} \cdot \int_{\frac{\beta}{b}}^{\frac{a}{a}} (a-a\rho)^{n-1} (b\rho-\beta)^{m-1} \cdot \rho^r d\rho$$

35.

An die Stelle zweier linearen Verbindungen der Veränderlichen x und y möge nunmehr bloss eine und das Product der Veränderlichen treten, so dass das gegebene Differential:

$$x^{m-1} y^{n-1} f(ax+by, xy) dx dy$$

sei. Für manche Anwendungen, von welchen später die Rede sein wird, ist es zweckmässig, jene Ausdrücke durch neue Veränderliche in der Art zu ersetzen, dass man annimmt:

$$\begin{aligned} ax + by &= 2\lambda \\ xy &= \lambda^2 \mu \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun

$$\begin{aligned} x &= \lambda \frac{1 \pm \sqrt{1-ab\mu}}{a} \\ y &= \lambda \frac{1 \mp \sqrt{1-ab\mu}}{b} \end{aligned}$$

und es tritt hier der früher ausgeschlossene Fall ein, dass zwar λ und μ durch x und y , nicht aber umgekehrt x und y durch λ und μ vollständig bestimmt sind. Hinsichtlich der Doppelwerthe von x und y sind daher die am Schlusse des Art. 24 angedeuteten Betrachtungen anzustellen. Vor Allem bemerke man, dass

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\mu} &= \mp \frac{b\lambda}{2\sqrt{1-ab\mu}} \quad , \quad \frac{dy}{d\mu} = \pm \frac{a\lambda}{2\sqrt{1-ab\mu}} \\ \frac{dx}{d\lambda} &= \frac{1 \pm \sqrt{1-ab\mu}}{a} \quad , \quad \frac{dy}{d\lambda} = \frac{1 \mp \sqrt{1-ab\mu}}{b} \end{aligned}$$

und also:

$$\Delta = \mp \frac{\lambda}{\sqrt{1-ab\mu}}$$

wobei die Doppelzeichen durchaus correspondirende sind. Das gegebene Differential erhält hiernach die Form:

$$\mp \frac{\lambda^{m+n-1}}{a^{m-1} b^{n-1} \sqrt{1-ab\mu}} \left\{ 1 \mp \sqrt{1-ab\mu} \right\}^{m-1} \left\{ 1 \pm \sqrt{1-ab\mu} \right\}^{n-1} \cdot f(2\lambda, \lambda^2\mu) d\lambda d\mu$$

Fügt man hierzu noch die Gleichungen:

$$\frac{ax}{1 \pm \sqrt{1-ab\mu}} = \frac{by}{1 \mp \sqrt{1-ab\mu}}$$

$$\frac{ax}{2\lambda} + \frac{by}{2\lambda} = 1$$

welche sich aus den bereits angeführten unmittelbar ergeben, so übersieht man auf der Stelle den Zusammenhang der Werthe von x und y , welcher bei einseitiger Änderung von μ oder von λ stattfindet. Betrachtet man nämlich y als Function von x , so ergeben sich wegen des Doppelzeichens zwei Zweige derselben, welche sich in einem Werthe nur dann vereinigen, wenn, für ein beliebiges λ , die Gleichung $1-ab\mu = 0$ stattfindet oder also

$$\mu = \frac{1}{ab}$$

Die Grenzen des vorgelegten Integrals seien constant, und zwar die unteren Grenzen gleich Null, so dass man es also mit:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\zeta} x^{m-1} y^{n-1} f(ax+by, xy) dy$$

zu thun hat. —

Bezüglich des Doppelzeichens, womit der durch λ, μ dargestellte Differentialausdruck behaftet ist, bemerke man nun vor Allem, dass an der Stelle, bei welcher die Doppelwerthe sich mit einander vereinigen, also für $\mu = \frac{1}{ab}$, die Relation $ax = by$ stattfindet, mithin $y = \frac{a}{b}x$ wird, und dass es daher zweckmässig sein wird das Integral in die beiden Theile:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\frac{a}{b}x} x^{m-1} y^{n-1} f(ax+by, xy) dy \quad \text{und} \quad \int_0^{\xi} dx \int_{\frac{a}{b}x}^{\zeta} x^{m-1} y^{n-1} f(ax+by, xy) dy$$

zu zerlegen, und jeden einzelnen zu betrachten. Indem man von einem dieser Theile ausgeht, kann man entweder das obere oder das untere Zeichen wählen, muss aber dann an allen Consequenzen, welche sich aus dieser Annahme ergeben, durchaus und namentlich auch bei dem andern Theile des Integrals festhalten. — Ich will nun das obere Zeichen wählen, und von dem erstern Theile ausgehen, so dass:

$$x = \lambda \frac{1 + \sqrt{1 - ab\mu}}{a}, \quad y = \lambda \frac{1 - \sqrt{1 - ab\mu}}{b}$$

$$\mu = \frac{x(2\lambda - ax)}{b\lambda^2} = \frac{y(2\lambda - by)}{a\lambda^2}; \quad \Delta = -\frac{\lambda}{\sqrt{1 - ab\mu}}$$

Vor Allem handelt es sich nun um die Grenzen $\mu_0, \mu_1, \mu^0, \mu^1$ und $\lambda_0^0, \lambda_0^1, \lambda_1^0, \lambda_1^1$. Bei der oben getroffenen Wahl des Zeichens existirt offenbar kein Werth $\mu = \mu_0$, für welchen $x = \xi_0 = 0$ werden könnte. Dies wäre zwar der Fall, wenn zugleich auch $\lambda = 0$ gesetzt würde, aber es liegt in der Definition aller Grössen $\mu_0, \mu_1, \mu^0, \mu^1$ dass sie den betreffenden Gleichungen Genüge leisten müssen, welchen Werth man der Veränderlichen λ beilegen möge.

Dagegen erhält man nun für $x = \xi_1 = \xi$ den Werth

$$\mu_1 = \frac{\xi(2\lambda - a\xi)}{b\lambda^2}$$

Für $y = \eta_0 = 0$ sieht man ferner, dass

$$\mu^0 = 0$$

sein müsse.

Was nun aber μ^1 betrifft, so hat man nach Art. 24 hiefür die Gleichung:

$$Y = \varphi^1(X)$$

oder also im vorliegenden Falle:

$$\lambda \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - ab\mu}}{b} = \frac{a}{b} \cdot \lambda \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - ab\mu}}{a}$$

oder

$$\frac{2\lambda}{b} \sqrt{1 - ab\mu} = 0$$

woraus folgt

$$\mu^1 = \frac{1}{ab}$$

Für λ_0^0 hat man die Gleichungen:

$$0 = \lambda \frac{1 + \sqrt{1 - ab\mu}}{a}, \quad 0 = \lambda \frac{1 - \sqrt{1 - ab\mu}}{b}$$

woraus nothwendig folgt

$$\lambda_0^0 = 0$$

Für λ_0^1 bestehen die Bedingungen:

$$0 = \lambda \frac{1 + \sqrt{1 - ab\mu}}{a}, \quad \varphi^1(\xi_0) = \frac{a}{b} \xi_0 = 0 = \lambda \frac{1 - \sqrt{1 - ab\mu}}{b}$$

woraus folgt

$$\lambda_0^1 = 0$$

Für λ_1^0 hat man:

$$\xi = \lambda \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - ab\mu}}{a}, \quad 0 = \lambda \frac{1 - \sqrt{1 - ab\mu}}{b}$$

welchen beiden Gleichungen nur dann gleichzeitig genügt werden kann, wenn man:

$$\lambda_1^0 = \frac{a\xi}{2} \quad \text{und} \quad \mu_1^0 = 0$$

setzt.

Für λ_1^1 endlich hat man die beiden Gleichungen:

$$\xi = \lambda \frac{1 + \sqrt{1 - ab\mu}}{a} \quad , \quad \frac{b}{a} \lambda \frac{1 + \sqrt{1 - ab\mu}}{a} = \lambda \frac{1 - \sqrt{1 - ab\mu}}{b}$$

welchen man gleichzeitig durch die Werthe:

$$\lambda_1^1 = a\xi \quad \text{und} \quad \mu_1^1 = \frac{1}{ab}$$

genügt. Setzt man diese Werthe in die Gleichung (IV) des Art. 17 ein, so ergibt sich:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\frac{a}{b}x} f(ax + by, xy) \cdot x^{m-1} y^{n-1} dy =$$

$$= \frac{1}{a^{m-1} b^{n-1}} \int_0^{\frac{a\xi}{2}} \lambda^{m+n-1} d\lambda \int_{\frac{1}{ab}}^0 (1 + \sqrt{1 - ab\mu})^{m-1} (1 - \sqrt{1 - ab\mu})^{n-1} \frac{f(2\lambda, \lambda^2\mu)}{\sqrt{1 - ab\mu}} d\mu \quad (1)$$

$$= \frac{1}{a^{m-1} b^{n-1}} \int_{\frac{a\xi}{2}}^{a\xi} \lambda^{m+n-1} d\lambda \int_{\frac{1}{ab}}^{\frac{\xi(2\lambda - a\xi)}{b\lambda^2}} (1 + \sqrt{1 - ab\mu})^{m-1} (1 - \sqrt{1 - ab\mu})^{n-1} \frac{f(2\lambda, \lambda^2\mu)}{\sqrt{1 - ab\mu}} d\mu$$

Da für $\mu = \frac{1}{ab}$ die Wurzelgrösse $\sqrt{1 - ab\mu}$ durch Null geht und ihr Zeichen ändert, so ist für den zweiten Theil des ursprünglichen Integrals das untere Zeichen jener Wurzel zu Grunde zu legen, also nunmehr zu setzen:

$$x = \lambda \frac{1 - \sqrt{1 - ab\mu}}{a} \quad , \quad y = \lambda \frac{1 + \sqrt{1 - ab\mu}}{b}$$

$$\Delta = + \frac{\lambda}{\sqrt{1 - ab\mu}}$$

Bestimmt man die Grenzen des entsprechenden transformirten Doppel-Integrals, so erlangt man auf durchaus analoge Weise wie oben, die Werthe:

$$\mu_0 = 0 \quad , \quad \mu_1 = \frac{\xi(2\lambda - a\xi)}{b\lambda^2} \quad ; \quad \mu^0 = \frac{1}{ab} \quad , \quad \mu^1 = \frac{\eta(2\lambda - b\eta)}{a\lambda^2}$$

und ebenso:

$$\lambda_0^0 = 0 \quad , \quad \mu_0^0 = \frac{1}{ab} \quad ; \quad \lambda_0^1 = \frac{b\eta}{2} \quad , \quad \mu_0^1 = 0$$

$$\lambda_1^0 = a\xi \quad , \quad \mu_1^0 = \frac{1}{ab} \quad ; \quad \lambda_1^1 = \frac{a\xi + b\eta}{2} \quad , \quad \mu_1^1 = \frac{4\xi\eta}{(a\xi + b\eta)^2}$$

Setzt man nun auch diese Werthe in die Gleichung (IV) des Art. 17 ein, so ergibt sich:

$$\int_0^{\xi} dx \int_{\frac{a}{b}x}^{\eta} f(ax + by, xy) \cdot x^{m-1} y^{n-1} dy =$$

$$+ \frac{1}{a^{m-1} b^{n-1}} \int_0^{\frac{b\gamma}{2}} \lambda^{m+n-1} d\lambda \int_0^{\frac{1}{ab}} (1 - \sqrt{1 - ab\mu})^{m-1} (1 + \sqrt{1 - ab\mu})^{n-1} \frac{f(2\lambda, \lambda^2\mu)}{\sqrt{1 - ab\mu}} d\mu$$

$$+ \frac{1}{a^{m-1} b^{n-1}} \int_{\frac{b\gamma}{2}}^{a\xi} \lambda^{m+n-1} d\lambda \int_{\frac{\gamma(2\lambda - b\gamma)}{a\lambda^2}}^{\frac{1}{ab}} (1 - \sqrt{1 - ab\mu})^{m-1} (1 + \sqrt{1 - ab\mu})^{n-1} \frac{f(2\lambda, \lambda^2\mu)}{\sqrt{1 - ab\mu}} d\mu \dots (2)$$

$$+ \frac{1}{a^{m-1} b^{n-1}} \int_{a\xi}^{\frac{a\xi + b\gamma}{2}} \lambda^{m+n-1} d\lambda \int_{\frac{\gamma(2\lambda - b\gamma)}{a\lambda^2}}^{\frac{\xi(2\lambda - a\xi)}{a\lambda^2}} (1 - \sqrt{1 - ab\mu})^{m-1} (1 + \sqrt{1 - ab\mu})^{n-1} \frac{f(2\lambda, \lambda^2\mu)}{\sqrt{1 - ab\mu}} d\mu$$

Addirt man die beiden Gleichungen (1) und (2) zusammen, so stellt die Summe das verlangte Doppel-Integral dar.

Es ist leicht dieses Resultat in einem gewissen Sinne noch zu verallgemeinern. Denkt man sich nämlich unter den Integralzeichen an die Stelle von $f(ax + by, xy)$ überhaupt nur $f(x, y)$ geschrieben, so hat man in (1) statt $f(x, y)$ zu setzen:

$$f \left\{ \lambda \frac{1 + \sqrt{1 - ab\mu}}{a}, \lambda \frac{1 - \sqrt{1 - ab\mu}}{b} \right\}$$

in (2) dagegen:

$$f \left\{ \lambda \frac{1 - \sqrt{1 - ab\mu}}{a}, \lambda \frac{1 + \sqrt{1 - ab\mu}}{b} \right\}$$

Sonst aber ändert sich Nichts.

Ich hebe die folgenden besonderen Fälle hervor. Es sei nämlich

$$m = 1 \quad , \quad n = 1$$

Dann erhält man aus (1) und (2) nach einigen Umformungen:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(ax + by, xy) x^{m-1} y^{n-1} dy =$$

$$\int_0^{a\xi} \lambda d\lambda \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{f(2\lambda, \lambda^2\mu)}{\sqrt{1 - ab\mu}} d\mu + \int_0^{\frac{b\gamma}{2}} \lambda d\lambda \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{f(2\lambda, \lambda^2\mu)}{\sqrt{1 - ab\mu}} d\mu$$

$$+ \int_{\frac{a\xi}{2}}^{\frac{a\xi + b\gamma}{2}} \lambda d\lambda \int_{\frac{\gamma(2\lambda - b\gamma)}{a\lambda^2}}^{\frac{1}{ab}} \frac{f(2\lambda, \lambda^2\mu)}{\sqrt{1 - ab\mu}} d\mu + \int_{\frac{b\gamma}{2}}^{\frac{a\xi + b\gamma}{2}} \lambda d\lambda \int_{\frac{\gamma(2\lambda - b\gamma)}{a\lambda^2}}^{\frac{1}{ab}} \frac{f(2\lambda, \lambda^2\mu)}{\sqrt{1 - ab\mu}} d\mu \quad (1)$$

Es seien ferner in (1) und (2):

$$\xi = \infty \quad , \quad \gamma = \infty \quad , \quad a \text{ und } b \text{ positiv.}$$

so erhält man, wie leicht zu sehen:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty x^{m-1} y^{n-1} f(ax + by, xy) dy =$$

$$\frac{1}{a^{m-1} b^{n-1}} \int_0^\infty \lambda^{m+n-1} d\lambda \int_0^{\frac{1}{ab}} (1 + \sqrt{1-ab\mu})^{m-1} (1 - \sqrt{1-ab\mu})^{n-1} \frac{f(2\lambda, \lambda^2\mu)}{\sqrt{1-ab\mu}} d\mu$$

$$+ \frac{1}{a^{m-1} b^{n-1}} \int_0^\infty \lambda^{m+n-n} d\lambda \int_0^{\frac{1}{ab}} (1 + \sqrt{1-ab\mu})^{m-1} (1 + \sqrt{1-ab\mu})^{n-1} \frac{f(2\lambda, \lambda^2\mu)}{\sqrt{1-ab\mu}} d\mu \quad (II)$$

Setzt man hierin auch noch $m = 1, n = 1$, so erfolgt:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(ax + by, xy) dy = 2 \int_0^\infty \lambda d\lambda \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{f(2\lambda, \lambda^2\mu)}{\sqrt{1-ab\mu}} d\mu \dots \dots \dots (III)$$

36.

Die zahlreichen Anwendungen, welche die beiden zuletzt angeführten Gleichungen zulassen, sind von besonderem Interesse, weil sich aus ihnen nicht nur bereits bekannte sondern auch mehrere bemerkenswerthe neue Resultate ableiten lassen.

In (II) setze man:

$$f(ax + by, xy) = e^{-k\sqrt{xy}} \cdot \sin(ax + by)$$

und mache zugleich die Integration in Bezug auf λ zur ersten so wird man finden:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty x^{m-1} y^{n-1} e^{-k\sqrt{xy}} \cdot \sin(ax + by) dy =$$

$$\frac{1}{a^{m-1} b^{n-1}} \int_0^{\frac{1}{ab}} (1 + \sqrt{1-ab\mu})^{m-1} (1 - \sqrt{1-ab\mu})^{n-1} \frac{d\mu}{\sqrt{1-ab\mu}} \int_0^\infty \lambda^{m+n-1} e^{-k\lambda\sqrt{\mu}} \cdot \sin 2\lambda d\lambda$$

$$+ \frac{1}{a^{m-1} b^{n-1}} \int_0^{\frac{1}{ab}} (1 - \sqrt{1-ab\mu})^{m-1} (1 + \sqrt{1-ab\mu})^{n-1} \frac{d\mu}{\sqrt{1-ab\mu}} \int_0^\infty \lambda^{m+n-1} e^{-k\lambda\sqrt{\mu}} \cdot \sin 2\lambda d\lambda$$

Führt man die Integration bezüglich λ nach der bekannten Formel von Euler aus, so ergibt sich:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty x^{m-1} y^{n-1} e^{-k\sqrt{xy}} \cdot \sin(ax + by) dy =$$

$$\frac{\Gamma(m+n)}{a^{m-1} b^{n-1}} \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{\sin \left\{ (m+n) \arctg \frac{2}{k\sqrt{\mu}} \right\}}{(k^2\mu + 4)^{\frac{m+n}{2}} \sqrt{1-ab\mu}} \left[(1 + \sqrt{1-ab\mu})^{m-1} (1 - \sqrt{1-ab\mu})^{n-1} \right.$$

$$\left. + (1 - \sqrt{1-ab\mu})^{m-1} (1 + \sqrt{1-ab\mu})^{n-1} \right] d\mu$$

Auf ganz analoge Weise erhält man auch:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} x^{m-1} y^{n-1} e^{-k\sqrt{xy}} \cdot \cos(ax + by) dy =$$

$$\frac{\Gamma(m+n)}{a^{m-1} b^{n-1}} \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{\cos \left\{ (m+n) \operatorname{arctg} \frac{2}{k\sqrt{\mu}} \right\}}{(k^2\mu + 4)^{\frac{m+n}{2}} \sqrt{1-ab\mu}} \left[(1 + \sqrt{1-ab\mu})^{m-1} (1 - \sqrt{1-ab\mu})^{n-1} \right. \\ \left. + (1 - \sqrt{1-ab\mu})^{m-1} (1 + \sqrt{1-ab\mu})^{n-1} \right] d\mu$$

Man sieht hieraus, dass jedes dieser beiden Doppel-Integrale sich vollständig finden lässt, wenn m und n ganze Zahlen sind, und dass jedenfalls das Differential bezüglich μ algebraisch wird, wenn wenigstens $m+n$ eine ganze Zahl ist.

Angenommen es sei $m=1$, $n=1$, so folgt:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-k\sqrt{xy}} \sin(ax + by) dy = 8k \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{\sqrt{\mu} d\mu}{\sqrt{1-ab\mu} \cdot (4 + k^2\mu)^2}$$

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-k\sqrt{xy}} \cos(ax + by) dy = 2 \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{k^2\mu - 4}{(k^2\mu + 4)^2} \cdot \frac{d\mu}{\sqrt{1-ab\mu}}$$

Setzt man in der erstern Gleichung:

$$\frac{\mu}{1-ab\mu} = t^2 \quad , \quad d\mu = \frac{2t dt}{(1-abt^2)^2}$$

in der letztern dagegen:

$$1-ab\mu = t^2 \quad , \quad d\mu = -\frac{2t}{b} dt$$

so gehen die Integrale rechter Hand über. resp. in:

$$\int_0^{\infty} \frac{2t^2 dt}{\{4 + (4ab + k^2)t^2\}^2} = \frac{\pi}{4(4ab + k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und

$$2 \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{k^2 - 4ab - k^2 t^2}{(k^2 + 4ab - k^2 t^2)^2} dt = -\frac{2}{k^2 + 4ab} + \frac{k}{(k^2 + 4ab)^{\frac{3}{2}}} \log \frac{\sqrt{k^2 + 4ab} + k}{\sqrt{k^2 + 4ab} - k}$$

Dies vorausgesetzt hat man also die beiden Resultate:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-k\sqrt{xy}} \cdot \sin(ax + by) dy = \frac{2\pi k}{(k^2 + 4ab)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-k\sqrt{xy}} \cos(ax + by) dy = -\frac{4}{k^2 + 4ab} + \frac{2k}{(k^2 + 2ab)^{\frac{3}{2}}} \log \frac{\sqrt{k^2 + 4ab} + k}{\sqrt{k^2 + 4ab} - k}$$

Die erstere dieser beiden Gleichungen fand meines Wissens zuerst Cauchy: beide sind mittelst ziemlich verwickelter Reihenentwickelungen hergeleitet in einer der Noten zu dem „Mémoire sur la théorie de la propagation des ondes . . .“ (S. Mémoires présentés par div. sav. T. I. 1827.) Um seine Form zu erhalten braucht man nur $a = 1$, $b = 1$. und $2k$ für k zu setzen.

37.

In der Gleichung (III) des Art. 35 setze man für $f(ax + by, xy)$ einmal

$$e^{-x\sqrt{xy}} \cdot \frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cos(ax + by) \quad \text{und dann} \quad e^{-x\sqrt{xy}} \frac{\cos k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \sin(ax + by)$$

so wird man erhalten:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-x\sqrt{xy}} \cdot \frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cdot \cos(ax + by) dy = 2 \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu} \cdot \sqrt{1-ab\mu}} \cdot \int_0^\infty e^{-x\lambda\sqrt{\mu}} \cdot \sin k\lambda\sqrt{\mu} \cdot \cos 2\lambda d\lambda$$

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-x\sqrt{xy}} \cdot \frac{\cos k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cdot \sin(ax + by) dy = 2 \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu} \cdot \sqrt{1-ab\mu}} \cdot \int_0^\infty e^{-x\lambda\sqrt{\mu}} \cdot \cos k\lambda\sqrt{\mu} \cdot \sin 2\lambda d\lambda$$

Nun ist aber:

$$\int_0^\infty e^{-r\lambda} \cos a\lambda \sin \beta\lambda d\lambda = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a + \beta}{(a + \beta)^2 + r^2} - \frac{a - \beta}{(a - \beta)^2 + r^2} \right\}$$

folglich kann man die beiden auf λ sich beziehenden Integrationen ausführen und erhält:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-x\sqrt{xy}} \frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cos(ax + by) dy =$$

$$\int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu} \sqrt{1-ab}} \left\{ \frac{k\sqrt{\mu} + 2}{(k\sqrt{\mu} + 2)^2 + x^2\mu} + \frac{k\sqrt{\mu} - 2}{(k\sqrt{\mu} - 2)^2 + x^2\mu} \right\}$$

und ebenso:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-x\sqrt{xy}} \frac{\cos k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \sin(ax + by) dy =$$

$$\int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu} \sqrt{1-ab\mu}} \cdot \left\{ \frac{k\sqrt{\mu} + 2}{(k\sqrt{\mu} + 2)^2 + x^2\mu} - \frac{k\sqrt{\mu} - 2}{(k\sqrt{\mu} - 2)^2 + x^2\mu} \right\}$$

Wie man sieht, können nunmehr auch die Integrationen bezüglich μ vollständig ausgeführt werden. Beachtenswerther als die hierdurch sich ergebenden sehr weiläufigen Resultate ist jedoch die Erörterung des besondern Falles, welcher der Annahme $x=0$ entspricht.

Der erste Theil der Integrale rechter Hand ist alsdann:

$$\int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{(k\sqrt{\mu} + 2) \sqrt{\mu} \cdot \sqrt{1-ab\mu}}$$

Dieses Integral hat stets einen bestimmten Werth, welcher sich leicht finden lässt, wenn man etwa setzt:

$$\sqrt{\mu} = \frac{4x}{x^2 + 4ab} \quad ; \quad \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}} = -8 \cdot \frac{x^2 - 4ab}{(x^2 + 4ab)^2} dx$$

Es folgt alsdann:

$$\sqrt{1 - ab\mu} = -\frac{x^2 - 4ab}{x^2 + 4ab} \quad ; \quad k\sqrt{\mu} + 2 = \frac{2(x^2 + 2kx + 4ab)}{x^2 + 4ab}$$

so dass das Integral übergeht in:

$$\begin{aligned} & 4 \int_0^{2\sqrt{ab}} \frac{dx}{x^2 + 2kx + 4ab} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4ab - k^2}} \operatorname{arc} \cos \frac{k}{2\sqrt{ab}} \quad , \quad \text{wenn } 4ab - k^2 > 0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{k^2 - 4ab}} \log \frac{(k + \sqrt{k^2 - 4ab})^2}{4ab} \quad , \quad \text{wenn } k^2 - 4ab > 0 \end{aligned}$$

Der zweite Theil der auf μ sich beziehenden Integrale unterscheidet sich vom ersten nur durch das Zeichen von k ; er ist

$$4 \int_0^{2\sqrt{ab}} \frac{dx}{x^2 - 2kx + 4ab}$$

und zwar in der ersten Gleichung abzuziehen, in der zweiten zu addiren. — Der Werth desselben ist

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\sqrt{4ab - k^2}} \operatorname{arc} \cos \frac{-k}{2\sqrt{ab}} \quad , \quad \text{wenn } 4ab - k^2 > 0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{k^2 - 4ab}} \log \frac{(k - \sqrt{k^2 - 4ab})^2}{4ab} \quad , \quad \text{wenn } k^2 - 4ab > 0 \end{aligned}$$

Verbindet man nun diese beiden Theile in der angegebenen Weise, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cos(ax + by) dy &= \frac{2}{\sqrt{4ab - k^2}} \left(2 \operatorname{arc} \cos \frac{k}{2\sqrt{ab}} - \pi \right), \quad \text{wenn } 4ab - k^2 > 0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{k^2 - 4ab}} \log \frac{(k + \sqrt{k^2 - 4ab})^2}{16a^2b^2}, \quad \text{wenn } k^2 - 4ab > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{\cos k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \sin(ax + by) dy &= \frac{2\pi}{\sqrt{4ab - k^2}}, \quad \text{wenn } 4ab - k^2 > 0 \\ &= 0 \quad , \quad \text{wenn } k^2 - 4ab > 0 \end{aligned}$$

Die Resultate der letztern Gleichung, wonach das Doppel-Integral eine discontinuirliche Function ist, fand zuerst Cauchy in der erwähnten Abhandlung, ebenfalls mittelst unend-

licher Reihen. — Schliesslich noch die Bemerkung, dass, wenn man in der zweiten Gleichung dieses Artikels $k = 0$ setzt, daraus die Gleichung:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-x\sqrt{xy}} \frac{\sin(ax + by)}{\sqrt{xy}} dy = 2 \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu} \cdot \sqrt{1 - ab\mu}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-x\lambda\sqrt{\mu}} \sin 2\lambda d\lambda$$

hervorgeht, deren rechte Seite nach Ausführung der auf λ sich beziehenden Integration übergeht in:

$$4 \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{(x^2\mu + 4)\sqrt{\mu} \cdot \sqrt{1 - ab\mu}}$$

Führt man auch diese Integration aus, so wird man $\frac{2\pi}{\sqrt{4ab + k^2}}$ erhalten, und es folgt somit die Gleichung:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-x\sqrt{xy}} \frac{\sin(ax + by)}{\sqrt{xy}} dy = \frac{2\pi}{\sqrt{4ab + k^2}}$$

welche für $a = 1, b = 1$ ganz mit derjenigen übereinstimmt, welche Cauchy a. a. O. aus der Betrachtung von Reihen erhielt.

38.

In der Gleichung (III) des Art. 35 setze man für $f(ax + by, xy)$ einmal:

$$e^{-x\sqrt{xy}} \frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \sin(ax + by) \quad \text{und dann:} \quad e^{-x\sqrt{xy}} \frac{\cos k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cos(ax + by)$$

so wird man nach Umkehrung der Integrationsfolge der Veränderlichen λ und μ finden:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-x\sqrt{xy}} \frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \sin(ax + by) dy = 2 \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu} \cdot \sqrt{1 - ab\mu}} \int_0^{\infty} e^{-x\lambda\sqrt{\mu}} \sin k\lambda\sqrt{\mu} \cdot \sin 2\lambda d\lambda$$

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-x\sqrt{xy}} \frac{\cos k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cos(ax + by) dy = 2 \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu} \cdot \sqrt{1 - ab\mu}} \int_0^{\infty} e^{-x\lambda\sqrt{\mu}} \cos k\lambda\sqrt{\mu} \cdot \cos 2\lambda d\lambda$$

Nun ist offenbar:

$$\int_0^{\infty} e^{-r\lambda} \sin a\lambda \sin \beta\lambda d\lambda = \frac{1}{2} \left\{ \frac{r}{(a-\beta)^2 + r^2} - \frac{r}{(a+\beta)^2 + r^2} \right\}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-r\lambda} \cos a\lambda \cos \beta\lambda d\lambda = \frac{1}{2} \left\{ \frac{r}{(a-\beta)^2 + r^2} + \frac{r}{(a+\beta)^2 + r^2} \right\}$$

Es lassen sich also auch hier die beiden Integrationen nach λ sogleich ausführen, und man erhält:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-z\sqrt{xy}} \frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \sin(ax + by) dy =$$

$$z \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{1-ab\mu}} \left\{ \frac{1}{(k\sqrt{\mu}-2)^2 + z^2\mu} - \frac{1}{(k\sqrt{\mu}+1)^2 + z^2\mu} \right\}$$

und ebenso:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-z\sqrt{xy}} \frac{\cos k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cos(ax + by) dy =$$

$$z \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{1-ab\mu}} \left\{ \frac{1}{(k\sqrt{\mu}-2)^2 + z^2\mu} + \frac{1}{(k\sqrt{\mu}+2)^2 + z^2\mu} \right\}$$

Da sich auch die Integrationen bezüglich μ ausführen lassen, so sieht man dass die beiden Doppel-Integrale in endlicher Form gefunden werden können.

Von Interesse ist jedoch nur der specielle Fall für $z = 0$. Es ereignet sich nämlich auch hierfür der Umstand, das beide Integrale rechter Hand verschwinden, wenn $(k^2 - 4ab)$ negativ, dagegen einen von Null verschiedenen Werth erhalten, wenn jener Ausdruck positiv ist. Um dies zu zeigen bemerke man vor Allem, dass das auf das zweite Glied sich beziehende Integral, nämlich:

$$\int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{1-ab\mu}} \cdot \frac{z}{(k\sqrt{\mu}+2)^2 + z^2\mu}$$

unter allen Umständen mit z verschwindet, so dass man es also nur mit dem ersten Gliede

$$\int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{1-ab\mu}} \cdot \frac{z}{(k\sqrt{\mu}-2)^2 + z^2\mu}$$

zu thun hat. Es sei nun k so beschaffen, dass $k\sqrt{\mu} - 2$ niemals Null werden kann, so lange μ zwischen 0 und $\frac{1}{ab}$ liegt, so dass also der Ausdruck $k\sqrt{\mu}$ auch für den grössten Werth von μ den Werth 2 nicht erreicht, und daher

$$\frac{k}{\sqrt{ab}} - 2 < 0 \quad \text{oder} \quad k^2 - 4ab < 0$$

Alsdann bleibt, wie im vorigen Falle, auch für $z = 0$ der Nenner stets von Null verschieden, folglich das Integral endlich. Mit $z = 0$ werdend verschwindet also der ganze Ausdruck.

Anders aber verhält es sich in dem letzten noch zu betrachtenden Falle, wenn $k\sqrt{\mu} - 2$ für einen zwischen 0 und $\frac{1}{ab}$ liegenden Werth von μ verschwinden kann, oder also:

$$\frac{k}{\sqrt{ab}} - 2 > 0 \quad \text{oder} \quad k^2 - 4ab > 0$$

ist. Dann erscheint das Integral als zu der Classe der sogenannten singulären Integrale gehörig, deren Werth bloß aus einem unendlich kleinen Intervall der Grenzen entspringt und

zu welchem aus den übrigen Intervallen kein Beitrag geleistet wird. Im vorliegenden Falle bildet jenes Intervall die unendlich nahe Umgebung des Werthes $\mu = \frac{4}{k^2}$, für welchen der Nenner $(k\sqrt{\mu} - 2)^2 + x^2\mu$ mit x verschwindet, und daher das entsprechende Element des Integrals unendlich gross macht. Ich will nun vor Allem das Integral in die Form

$$\int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\mu} - ab}} \cdot \frac{x}{(k\sqrt{\mu} - 2)^2 + x^2\mu}$$

bringen und von der Bemerkung ausgehen, dass, weil nur die in unmittelbarer Nähe von $\mu = \frac{4}{k^2}$ liegenden Werthe in Frage kommen, der Factor

$$\sqrt{\frac{1}{\mu} - ab} = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - 4ab}$$

als constant vor das Integralzeichen gesetzt werden kann. Setzt man zugleich auch

$$\sqrt{\mu} = \frac{2}{x} \quad , \quad \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}} = -\frac{4dx}{x^2}$$

so ergibt sich:

$$\frac{2}{\sqrt{k^2 - 4ab}} \int_{2\sqrt{ab}}^{\infty} \frac{x dx}{(k-x)^2 + x^2}$$

Bezeichnet ε eine sehr kleine Grösse, so verschwinden, für $x = 0$, offenbar diejenigen Theile dieses Integrals, deren Grenzen resp. von $2\sqrt{ab}$ bis $k - \varepsilon$, und von $k + \varepsilon$ bis ∞ sich erstrecken, so dass allein das Zwischenglied:

$$\frac{2}{\sqrt{k^2 - 4ab}} \int_{k-\varepsilon}^{k+\varepsilon} \frac{x dx}{(k-x)^2 + x^2}$$

übrig bleibt, welches um so näher den ganzen Integralwerth darstellt, je enger das Intervall $k - \varepsilon$ bis $k + \varepsilon$ genommen wird. Führt man nun die Integration aus, so erfolgt:

$$\frac{4}{\sqrt{k^2 - 4ab}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\varepsilon}{x} \right)$$

Hieraus lässt sich leicht erkennen, was für ein in Null übergehendes x hervorgeht. Für $x = 0$ wird nämlich der eine Factor

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{\varepsilon}{x} \right) = \frac{\pi}{2}$$

und für ein gleichfalls ohne Ende abnehmendes ε stellt der andere Factor

$$\frac{2}{\sqrt{k^2 - 4ab}}$$

bereits den richtigen Grenzwert dar.

Fasst man diese Resultate zusammen, so folgt, dass jedes der beiden Integrale:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \sin(ax + by) dy \quad , \quad \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \frac{\cos k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cos(ax + by) dy$$

$$= 0 \quad , \quad \text{wenn } 4ab - k^2 > 0$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - 4ab}} \quad , \quad \text{wenn } k^2 - 4ab > 0$$

Für das erstere Doppel-Integral stimmen diese Ergebnisse genau mit denjenigen überein, welche Cauchy a. a. O. auf ganz verschiedenem Wege gefunden hat. Soviel mir bekannt ist dagegen das zweite Integral bis jetzt nicht in Betracht gezogen worden.

39.

Setzt man in der Gleichung (III) des Art. 35 für $f(ax + by, xy)$ den Ausdruck:

$$\frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{\sin(ax + by)}{ax + by}$$

so wird man finden:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{\sin(ax + by)}{ax + by} dy = \int_0^{ab} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu} \cdot \sqrt{1 - ab\mu}} \cdot \int_0^\infty \frac{\sin(k\sqrt{\mu} \cdot \lambda)}{\lambda} \sin 2\lambda d\lambda$$

Um zuerst die Integration nach λ auszuführen, kann man von der bekannten Gleichung:

$$\int_0^\infty e^{-r\lambda} \frac{\cos a\lambda - \cos b\lambda}{\lambda} d\lambda = \frac{1}{2} \log \frac{r^2 + b^2}{r^2 + a^2}$$

ausgehen und bemerken, dass

$$\cos a\lambda - \cos b\lambda = -2 \sin \frac{a-b}{2} \lambda \sin \frac{a+b}{2} \lambda$$

und also, wenn: $a = a + \beta$, $b = a - \beta$ gesetzt wird:

$$\int_0^\infty e^{-r\lambda} \frac{\sin \beta\lambda}{\lambda} \sin a\lambda d\lambda = \frac{1}{4} \log \frac{(a + \beta)^2 + r^2}{(a - \beta)^2 + r^2}$$

und für $r = 0$:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \beta\lambda}{\lambda} \sin a\lambda \cdot d\lambda = \frac{1}{4} \log \left(\frac{a + \beta}{a - \beta} \right)^2$$

Setzt man hierin: $\beta = k\sqrt{\mu}$, $a = 2$ und substituirt dann den Werth des Integrals in die obige Gleichung, so folgt für deren rechte Seite der Ausdruck:

$$\frac{1}{4} \int_0^{ab} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu} \cdot \sqrt{1 - ab\mu}} \log \left(\frac{2 + k\sqrt{\mu}}{2 - k\sqrt{\mu}} \right)^2$$

Setzt man darin, der Vereinfachung wegen:

$$ab \cdot \mu = \cos^2 x \quad , \quad \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}} = -\frac{2 \sin x}{\sqrt{ab}} \cdot dx$$

so erhält man:

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cdot \log \left(\frac{2\sqrt{ab} + k \cos x}{2\sqrt{ab} - k \cos x} \right)^2$$

Ob sich dieses Integral in endlicher Form darstellen lässt, oder ob es nur einer Reduc-tion auf eine einfachere Quadratur fähig sei, will ich auf folgende Art zu entscheiden suchen. Es seien α und β zwei Constante und zwar sei:

$$0 < \alpha < \pi \quad \text{und} \quad -1 < \beta < +1$$

so ist offenbar:

$$\int_0^{\alpha} dx \int_0^{\beta} \frac{\cos x \, dy}{y \cos x + 1} = \int_0^{\beta} dy \int_0^{\alpha} \frac{\cos x \, dx}{y \cos x + 1}$$

Führt man auf jeder Seite die erste Integration aus, so findet man:

$$\int_0^{\alpha} \log(1 + \beta \cos x) \, dx = \int_0^{\beta} \frac{dy}{y} \left\{ \alpha - \frac{2}{\sqrt{1-y^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \cdot \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \right) \right\}$$

Schreibt man $-\beta$ für β , und $-y$ für y , so erfolgt:

$$\int_0^{\alpha} \log(1 - \beta \cos x) \, dx = \int_0^{\beta} \frac{dy}{y} \left\{ \alpha - \frac{2}{\sqrt{1-y^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \cdot \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \right) \right\}$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen gibt:

$$\int_0^{\alpha} \log \frac{1 + \beta \cos x}{1 - \beta \cos x} \, dx = 2 \int_0^{\beta} \frac{dy}{y \sqrt{1-y^2}} \left\{ \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \cdot \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \cdot \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \right) \right\}$$

Das Integral rechter Hand lässt eine beträchtliche Vereinfachung zu. In der That, setzt man:

$$y = \sin x \quad , \quad dy = \cos x \, dx$$

so gelangt man zu der bemerkenswerthen Gleichung:

$$\int_0^{\alpha} \log \frac{1 + \beta \cos x}{1 - \beta \cos x} \, dx = 2 \int_0^{\operatorname{arcsin} \beta} \frac{dx}{\sin x} \operatorname{arctg}(\sin \alpha \operatorname{tang} x) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ folgt hieraus:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1 + \beta \cos x}{1 - \beta \cos x} \, dx = 2 \int_0^{\operatorname{arcsin} \beta} \frac{dx}{\sin x}$$

Hieraus geht nun zur Genüge hervor, dass von einer Darstellung des vorliegenden Inte-grals in endlicher Form nicht die Rede sein kann. Ich erwähne dieses Umstandes auch darum, weil aus einer Formel von Lobatschewsky¹⁾ (Mém. Kasan. 1836. II, p. 23) für jenes Integral sich der Werth:

$$2 \lambda \log \sec \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{2} \arccos \beta \right)$$

ergibt.

¹⁾ S. Bierens de Haan. Tables d'intégrales définies. T. 343, Nr. 13.

Dies vorausgesetzt, hat man also:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \frac{\sin k \sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{\sin (ay + by)}{ax + by} dy = \frac{2}{\sqrt{ab}} \int_0^{\arcsin \frac{k}{2\sqrt{ab}}} \frac{x dx}{\sin x} \quad , \quad \text{wenn } 4ab - k^2 < 0$$

Die oben gefundene Formel (1) ist nicht mehr brauchbar, wenn der absolute Werth von β die Einheit übersteigt. Dann muss in der Gleichung:

$$\int_0^a \log \frac{1 + \beta \cos x}{1 + \cos x} dx = \int_1^{\beta} dy \int_0^a \frac{\cos x dx}{y \cos x + 1}$$

die Integration nach x auf der rechten Seite durch Logarithmen statt durch Bogen geschehen, wobei man findet:

$$\int_0^a \log \frac{1 + \beta \cos x}{1 + \cos x} dx = \int_1^{\beta} \frac{dy}{y} \left\{ a - \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \log \frac{\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1} \cdot \tan \frac{a}{2}}{\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1} \cdot \tan \frac{a}{2}} \right\}$$

Führt man in gleicher Weise in der Gleichung:

$$\int_0^a \log \frac{1 - \beta \cos x}{1 - \cos x} dx = \int_1^{\beta} dy \int_0^a \frac{-\cos x dx}{-y \cos x + 1}$$

die Integration aus, so erfolgt:

$$\int_0^a \log \frac{1 - \beta \cos x}{1 - \cos x} dx = \int_0^{\beta} \frac{dy}{y} \left\{ a - \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \log \frac{\sqrt{y-1} + \sqrt{y+1} \cdot \tan \frac{a}{2}}{\sqrt{y-1} - \sqrt{y+1} \cdot \tan \frac{a}{2}} \right\}$$

also durch Subtraction der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \int_0^a \log \frac{1 + \beta \cos x}{1 - \beta \cos x} dx &= -2 \int_0^a \log \tan \frac{x}{2} dx \\ &+ \int_1^{\beta} \frac{dy}{y \sqrt{y^2 - 1}} \log \frac{(\sqrt{y-1} + \sqrt{y+1} \cdot \tan \frac{a}{2})(\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1} \cdot \tan \frac{a}{2})}{(\sqrt{y-1} - \sqrt{y+1} \cdot \tan \frac{a}{2})(\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1} \cdot \tan \frac{a}{2})} \end{aligned}$$

Auch hier lässt das letzte Glied eine beträchtliche Vereinfachung zu, wenn man:

$$\sqrt{\frac{y-1}{y+1}} = \tan \frac{x}{2} \quad , \quad y = \sec x \quad , \quad dy = \sin x \sec^2 x dx$$

substituirt. Nach einigen Umformungen erhält man nämlich:

$$\int_0^a \log \left(\frac{1 + \beta \cos x}{1 - \beta \cos x} \right)^2 dx = -2 \int_0^a \log \left(\tan \frac{x}{2} \right)^2 dx + \int_0^{\arcsin \beta} \log \left(\frac{\sin (a+x)}{\sin (a-x)} \right)^2 dx \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Diese Gleichung ist nur so lange giltig als $\beta \cos \alpha$ nicht unter die Einheit fällt. Durch die Gleichungen (1) und (2) ist die Transformation des in Frage gestellten Integrals für alle Fälle gegeben, in welchen es nicht unbestimmt oder unendlich gross wird.

40.

Der Zusammenhang zwischen den alten und neuen Veränderlichen sei den Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= X_{(\lambda, \mu)} = (r\lambda + s)^m (a\mu + b)^n \\ y &= Y_{(\lambda, \mu)} = (r\lambda + s)^m (a\mu + \beta)^n \end{aligned}$$

gemäss festgestellt. Man erhält dann, wie leicht zu sehen:

$$\Delta = mn r (a\beta - ab) \cdot (r\lambda + s)^{2m-1} \cdot (a\mu + b)^{n-1} \cdot (a\mu + \beta)^{n-1}$$

und wenn die gegebenen Grenzen des Integrals nach x und y constant sind, so ergeben sich diejenigen bezüglich der neuen Veränderlichen wie folgt. Es ist

$$\mu = -\frac{b}{a} + \frac{x^{\frac{1}{n}}}{a(r\lambda + s)^{\frac{m}{n}}} \quad , \quad \mu = -\frac{\beta}{a} + \frac{y^{\frac{1}{n}}}{a(r\lambda + s)^{\frac{m}{n}}}$$

also:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= -\frac{b}{a} + \frac{\xi_0^{\frac{1}{n}}}{a(r\lambda + s)^{\frac{m}{n}}} \quad , \quad \mu_1 = -\frac{b}{a} + \frac{\xi_1^{\frac{1}{n}}}{a(r\lambda + s)^{\frac{m}{n}}} \\ \mu^0 &= -\frac{\beta}{a} + \frac{\eta_0^{\frac{1}{n}}}{a(r\lambda + s)^{\frac{m}{n}}} \quad , \quad \mu^1 = -\frac{\beta}{a} + \frac{\eta_1^{\frac{1}{n}}}{a(r\lambda + s)^{\frac{m}{n}}} \end{aligned}$$

Daraus findet man auf bekannte Art, die weiteren Grenzen-Werthe:

$$\begin{aligned} \lambda_0^0 &= -\frac{s}{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{a\eta_0^{\frac{1}{n}} - a\xi_0^{\frac{1}{n}}}{a\beta - ab} \right)^{\frac{n}{m}} \quad , \quad \lambda_1^0 = -\frac{s}{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{a\eta_0^{\frac{1}{n}} - a\xi_1^{\frac{1}{n}}}{a\beta - ab} \right)^{\frac{n}{m}} \\ \lambda_0^1 &= -\frac{s}{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{a\eta_1^{\frac{1}{n}} - a\xi_0^{\frac{1}{n}}}{a\beta - ab} \right)^{\frac{n}{m}} \quad , \quad \lambda_1^1 = -\frac{s}{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{a\eta_1^{\frac{1}{n}} - a\xi_1^{\frac{1}{n}}}{a\beta - ab} \right)^{\frac{n}{m}} \end{aligned}$$

Da hierdurch Alles gegeben ist, was zur Darstellung des transformirten Integrals verlangt wird, so scheint eine weitere Ausführung derselben nicht nöthig zu sein. Wohl aber verdienen einige besondere Fälle einer nähern Beachtung. Es sei nämlich:

$$\xi_0 = 0 \quad , \quad \eta_0 = 0 \quad , \quad \xi_1 = \xi \quad , \quad \eta_1 = \eta$$

Ausserdem nehme man an, es sei

$$r = 1 \quad , \quad s = 0 \quad , \quad a = 1 \quad , \quad b = 0 \quad , \quad \alpha = -1 \quad , \quad \beta = +1$$

Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 0 \quad , \quad \mu^0 = +1 \quad , \quad \mu_1 = \xi^{\frac{1}{n}} \lambda^{-\frac{m}{n}} \quad , \quad \mu^1 = 1 - \eta^{\frac{1}{n}} \lambda^{-\frac{m}{n}} \\ \lambda_0^0 &= 0 \quad , \quad \lambda_1^0 = \xi^{\frac{1}{m}} \quad , \quad \lambda_0^1 = \eta^{\frac{1}{m}} \quad , \quad \lambda_1^1 = \left(\xi^{\frac{1}{m}} + \eta^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{n}{m}} \\ \Delta &= mn \cdot \lambda^{2m-1} \mu^{n-1} (1 - \mu)^{n-1} \quad , \quad x = \lambda^m \mu^n \quad , \quad y = \lambda^m (1 - \mu)^n \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (III) des Art. 17, so findet man nach einigen Umgestaltungen die folgende Gleichung:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} f(x, y) dy =$$

$$mn \left\{ \int_0^{\frac{1}{\xi^m}} \lambda^{2m-1} d\lambda \int_{\frac{1}{\xi^n \lambda^m}}^1 (\mu - \mu^2)^{n-1} f[\lambda^m \mu^n, \lambda^m (1 - \mu)^n] d\mu + \int_0^{\frac{1}{\eta^m}} \lambda^{2m-1} d\lambda \int_{\frac{1}{\eta^n \lambda^m}}^1 (\mu - \mu^2)^{n-1} f[\lambda^m (1 - \mu)^n, \lambda^m \mu^n] d\mu \right\}$$

$$+ mn \int_0^{\left(\frac{1}{\xi^m + \eta^m}\right)^{\frac{1}{m}}} \lambda^{2m-1} d\lambda \left\{ \int_0^{\frac{1}{\xi^n \lambda^m}} (\mu - \mu^2)^{n-1} f[\lambda^m \mu^n, \lambda^m (1 - \mu)^n] d\mu + \int_0^{\frac{1}{\eta^n \lambda^m}} (\mu - \mu^2)^{n-1} f[\lambda^m (1 - \mu)^n, \lambda^m \mu^n] d\mu \right\}$$

worin die Symmetrie bezüglich ξ und η deutlich hervortritt.

Nimmt man hierin die besonderen Werthe $m = 1$, $n = 2$ an und setzt zugleich auch:

$$\mu = \cos^2 \theta \quad , \quad d\mu = -2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

so kann man der Gleichung nach einigen leichten Umformungen die folgende sehr einfache Gestalt geben:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} f(x, y) dy =$$

$$\int_0^{\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}} \lambda d\lambda \int_0^{\arccos \frac{\xi}{\lambda}} f(\lambda \cos \theta, \lambda \sin \theta) d\theta + \int_0^{\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}} \lambda d\lambda \int_0^{\arccos \frac{\eta}{\lambda}} f(\lambda \sin \theta, \lambda \cos \theta) d\theta$$

$$+ \int_0^{\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2}} \lambda d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\lambda \cos \theta, \lambda \sin \theta) d\theta$$

Diese Formel wird in vielen Fällen von Nutzen sein, da, wie bekannt, die zu Grunde liegenden Substitutionen:

$$x = \lambda \cos \theta \quad , \quad y = \lambda \sin \theta$$

häufig die gewünschte Umgestaltung des gegebenen Differentials bewirken.

Ist $\xi = \infty$ und $\eta = \infty$, so ergibt sich:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^{\infty} \lambda d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\lambda \cos \theta, \lambda \sin \theta) d\theta$$

Es sei z. B.

$$f(x, y) = e^{-k^2(x^2 + y^2)}$$

so gibt die angeführte Formel unmittelbar:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-k^2(x^2 + y^2)} dy = \int_0^{\infty} \lambda d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-k^2 \lambda^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} d\theta$$

oder was dasselbe sagt:

$$\left\{ \int_0^{\infty} e^{-k^2 x^2} dx \right\}^2 = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-k^2 \lambda^2} \cdot \lambda d\lambda$$

Das rechter Hand noch stehende Integral lässt sich unbestimmt finden und hat den Werth $\frac{1}{2k^2}$ und man erhält somit die bekannte Gleichung:

$$\int_0^{\infty} e^{-k^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2k}$$

Es sei ferner:

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \cdot x^{2m-1} y^{2n-1}$$

so ergibt sich unmittelbar:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2m-1} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{2n-1} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2} \lambda^{2(m+n)-1} d\lambda$$

Bemerkt man aber, dass:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2m-1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{m-1} dx = \frac{1}{2} \Gamma(m)$$

so geht die so eben gefundene Gleichung über in die folgende

$$\frac{1}{2} \Gamma(m) \Gamma(n) = \Gamma(m+n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta$$

woraus man sofort erhält:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} \theta \cdot \sin^{2n-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Es sei hierin:

$$\cos \theta = \sqrt{x} \quad , \quad \sin \theta = \sqrt{1-x} \quad , \quad d\theta = - \frac{dx}{2 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}}$$

so verwandelt sich diese Gleichung in die bekannte Relation der Euler'schen Integrale erster und zweiter Gattung, indem man erhält:

$$\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Ich will ferner noch annehmen, es werde an die Stelle von $f(x, y)$ der Ausdruck:

$$\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{ax^2+by^2}}$$

gesetzt. Man findet dann aus der frühern Gleichung die folgende:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{ax^2+by^2}} dy = \int_0^{\infty} f(\lambda^2) d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta}}$$

Vorausgesetzt, dass a positiv und $\frac{b}{a} < 1$ sei, lässt sich das auf θ beziehende Integral in die Form:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b}{a}\right) \sin^2 \theta}}$$

bringen und man hat dann, wenn zur Bezeichnung dieses elliptischen Integrals nach Legendre das Zeichen $F' \left(\sqrt{1 - \frac{b}{a}} \right)$ angewendet wird, die Gleichung:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{f(x^2 + y^2)}{\sqrt{ax^2 + by^2}} dy = \frac{1}{\sqrt{a}} F' \left(\sqrt{1 - \frac{b}{a}} \right) \cdot \int_0^\infty f(\lambda^2) d\lambda$$

welche man auch auf anderem Wege leicht finden könnte.

41.

Um in einem bestimmten Falle die oben betrachtete Transformation anzuwenden, wenn die Integrations-Grenzen veränderlich sind, seien dieselben gegeben durch die Ungleichheit:

$$0 < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

Es seien ferner in den Ausdrücken:

$$x = (r\lambda + s)^m (a\mu + b)^n, \quad y = (r\lambda + s)^m (a\mu + \beta)^n$$

die besonderen Werthe

$$r = 1, \quad s = 0, \quad b = 0, \quad \beta = -a$$

und

$$m = 2, \quad n = 2$$

auch werde a^2 für a gesetzt, so dass also:

$$x = X_{(\lambda, \mu)} = a \sqrt{\lambda \mu}$$

$$y = Y_{(\lambda, \mu)} = b \sqrt{\lambda (1 - \mu)}$$

Angenommen nun die Integration habe sich nur auf alle positive Werthe von x und y zu erstrecken, welche jener Ungleichheit Genüge leisten, so ist

$$\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y) dy$$

das zu betrachtende Integral, also:

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = a, \quad \varphi^0(x) = 0, \quad \varphi^1(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Hierfür ergibt sich aus den bekannten Gleichungen:

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad \mu^0 = 1, \quad \mu^1 \text{ unbestimmt.}$$

$$\lambda_0^0 = 0, \quad \lambda_0^1 = 1, \quad \lambda_1^0 = 1, \quad \lambda_1^1 = 1$$

Auch findet man:

$$\Delta = \frac{ab}{4\sqrt{\mu - \mu^2}}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (X) des Art. 21, so folgt:

$$\iint f(x, y) dx dy = \frac{ab}{4} \int_0^1 d\lambda \int_0^1 \frac{f[a\sqrt{\lambda\mu}, b\sqrt{\lambda(1-\mu)}]}{\sqrt{\mu(1-\mu)}} d\mu$$

wobei alle positiven Werthe von x und y zu umfassen sind, welche der Bedingung:

$$0 < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

entsprechen. Setzt man $\lambda = \rho^2$, $\mu = \cos^2 \theta$ so wird

$$\iint f(x, y) dx dy = ab \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\rho \cos \theta, b\rho \sin \theta) d\theta$$

Handelt es sich z. B. um den Inhalt des Quadranten der Ellipse, so ist $f(x, y) = 1$ zu setzen und man erhält, wie es sein soll, $\frac{\pi}{4} ab$ für den Werth des Doppel-Integrals.

42.

Unterwirft man den Ausdruck

$$f(x^2 - 2xy \cos \gamma + y^2) \cdot \frac{dx dy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$$

der doppelten Integration, und soll derselbe alsdann durch neue Veränderliche transformirt werden, so eignen sich hierzu die Relationen:

$$x = X_{(\lambda, \mu)} = a\lambda\sqrt{1-b^2\mu^2} - b\mu\sqrt{1-a^2\lambda^2}$$

$$y = Y_{(\lambda, \mu)} = a\lambda\sqrt{1-b^2\mu^2} + b\mu\sqrt{1-a^2\lambda^2}$$

worin unter a und b positive Grössen verstanden sind.

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst:

$$x + y = 2 a \lambda \sqrt{1 - b^2 \mu^2} \quad , \quad xy = a^2 \lambda^2 - b^2 \mu^2$$

$$x^2 + y^2 = 2 \left[a^2 \lambda^2 + b^2 \mu^2 - 2 a^2 b^2 \lambda^2 \mu^2 \right]$$

Dessgleichen erhält man:

$$x^2 - 2xy \cos \gamma + y^2 = 4 \left[a^2 \lambda^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} + b^2 \mu^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} - a^2 b^2 \lambda^2 \mu^2 \right]$$

$$(1-x^2)(1-y^2) = (1-a^2\lambda^2 - b^2\mu^2)^2$$

Hieraus folgt:

$$\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = 1 - a^2\lambda^2 - b^2\mu^2$$

wenn nämlich vorausgesetzt wird, es solle in der hier vorliegenden Aufgabe stets der positive Werth dieser Wurzelgrösse genommen werden. — Ferner findet man:

$$\Delta = 2 ab \cdot \frac{a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 - 1}{\sqrt{1-a^2\lambda^2} \cdot \sqrt{1-b^2\mu^2}}$$

so dass sich das vorgelegte Differential in den folgenden Ausdruck verwandelt:

$$- 2 ab \cdot f \left[4 (a^2 \lambda^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} + b^2 \mu^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} - a^2 b^2 \lambda^2 \mu^2) \right] \cdot \frac{d\lambda d\mu}{\sqrt{1 - a^2 \lambda^2} \cdot \sqrt{1 - b^2 \mu^2}}$$

Ohne der Allgemeinheit zu schaden kann man hierin

$$a = \cos \frac{\gamma}{2} \quad , \quad b = \sin \frac{\gamma}{2}$$

setzen, so dass nunmehr

$$x = \lambda \cos \frac{\gamma}{2} \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} - \mu \sin \frac{\gamma}{2} \sqrt{1 - \lambda^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}}$$

$$y = \lambda \cos \frac{\gamma}{2} \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} + \mu \sin \frac{\gamma}{2} \sqrt{1 - \lambda^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}}$$

wird, und der gegebene Differential-Ausdruck die Form

$$f \left[\sin^2 \gamma - (1 - \lambda^2) (1 - \mu^2) \sin^2 \gamma \right] \cdot \frac{- \sin \gamma \cdot d\lambda d\mu}{\sqrt{1 - \lambda^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}} \cdot \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}}$$

erhält. Um die Bestimmung der Integrations-Grenzen bezüglich λ und μ an einem bestimmten Falle durchzuführen, will ich annehmen das Doppel-Integral habe sich auf alle positiven und negativen Werthe von x und y zu erstrecken, welche der Bedingung

$$0 < x^2 + y^2 < 1$$

Genüge thun. Dann sind die Grenzen des Doppel-Integrals offenbar:

$$\xi_0 = -1 \quad , \quad \xi_1 = +1$$

$$\varphi^0(x) = -\sqrt{1 - x^2} \quad , \quad \varphi^1(x) = +\sqrt{1 - x^2}$$

Die Werthe μ_0, μ_1 ergeben sich, wenn man aus der Gleichung

$$x = a\lambda \cdot \sqrt{1 - b^2 \mu^2} - b\mu \sqrt{1 - a^2 \lambda^2}$$

den Werth

$$b\mu = -x \sqrt{1 - a^2 \lambda^2} \pm a\lambda \sqrt{1 - x^2}$$

ableitet und darin $x = -1$ und $x = +1$ setzt, wie folgt:

$$\mu_0 = + \frac{\sqrt{1 - a^2 \lambda^2}}{b} \quad , \quad \mu_1 = - \frac{\sqrt{1 - a^2 \lambda^2}}{b}$$

Wenn für irgend einen Werth von λ die Veränderliche μ zwischen diesen Grenzen liegt, so bleibt, wie oben vorausgesetzt wurde, der Ausdruck:

$$\sqrt{(1 - x^2) (1 - y^2)} = 1 - a^2 \lambda^2 - b^2 \mu^2 = (\sqrt{1 - a^2 \lambda^2} - b\mu) (\sqrt{1 - a^2 \lambda^2} + b\mu)$$

in der That beständig positiv.

Was nun ferner die Werthe μ^0, μ^1 betrifft, so müssen sie sich aus der Gleichung:

$$x^2 + y^2 = 1$$

ergeben, welcher sie Genüge leisten müssen. Daraus aber folgt, wie leicht zu sehen:

$$1 - 2 b^2 \mu^2 = 2 a^2 \lambda^2 (1 - 2 b^2 \mu^2)$$

und dieser Gleichung wird, was auch λ sein möge, entsprochen wenn man

$$\mu = \pm \frac{1}{b \sqrt{2}}$$

setzt. Hierdurch sind nun μ^0, μ^1 bis auf die Zeichen gefunden, welche sich wie folgt bestimmen lassen.

Da μ^0 der Bedingung $y = \varphi^0(x) = -\sqrt{1-x^2}$ entsprechen und für y einen negativen Werth geben soll, so überzeugt man sich auf der Stelle, dass

$$\mu^0 = -\frac{1}{b \sqrt{2}} \quad , \quad \mu^1 = +\frac{1}{b \sqrt{2}}$$

zu setzen ist.

Für λ_0^0 hat man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} -1 &= a\lambda \sqrt{1-b^2\mu^2} - b\mu \sqrt{1-a^2\lambda^2} \quad \text{oder} \quad -1 = 2a\lambda \sqrt{1-b^2\mu^2} \\ 0 &= a\lambda \sqrt{1-b^2\mu^2} - b\mu \sqrt{1-a^2\lambda^2} \quad \text{oder} \quad +1 = 2b\mu \sqrt{1-a^2\lambda^2} \end{aligned}$$

woraus man sieht, dass λ_0^0 negativ (μ_0^0 dagegen positiv) werden muss, und zwar findet man

$$\lambda_0^0 = -\frac{1}{a \sqrt{2}}$$

Für λ_1^1 hat man aus ähnlichen Gründen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} +1 &= 2a\lambda \sqrt{1-b^2\mu^2} \\ -1 &= 2b\mu \sqrt{1-a^2\lambda^2} \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\lambda_1^1 = +\frac{1}{a \sqrt{2}}$$

In gleicher Weise findet man die übrigen Werthe

$$\lambda_0^1 = -\frac{1}{a \sqrt{2}} \quad , \quad \lambda_1^0 = +\frac{1}{a \sqrt{2}}$$

Dieses vorausgesetzt, substituirt man die gefundenen Werthe in die Gleichung (IV) des Art. 17, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\iint \frac{f(x^2 - 2xy \cos \gamma + y^2)}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}} dx dy = \\ &2ab \int_{-\frac{1}{a\sqrt{2}}}^{+\frac{1}{a\sqrt{2}}} d\lambda \int_{-\frac{1}{b\sqrt{2}}}^{+\frac{1}{b\sqrt{2}}} f \left[\frac{\sin^2 \gamma - 4 \left(a^2 \lambda^2 - \cos^2 \frac{\gamma}{2} \right) \left(b^2 \mu^2 - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right)}{\sqrt{1-a^2\lambda^2} \cdot \sqrt{1-b^2\mu^2}} \right] d\mu \end{aligned}$$

wobei für x und y alle positiven und negativen Werthe zu setzen welche der Bedingung $0 < x^2 + y^2 < 1$ genügen.

Im 20. Bande des Journals von Crellé beschäftigt sich Prof. Haedenkamp mit einer analogen Transformation für den besondern Fall, in welchem

$$\frac{f(x^2 - 2xy \cos \gamma + y^2)}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}} dx dy = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \gamma - (x^2 - 2xy \cos \gamma + y^2)}} \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}}$$

Setzt man:

$$x = \cos u \quad , \quad y = \sin v$$

so verwandelt sich der Differentialausdruck sogleich in die daselbst gewählte Form, nämlich in:

$$\frac{du \, dv}{\sqrt{1 - \cos^2 \gamma - \cos^2 u - \cos^2 v - 2 \cos \gamma \cos u \cos v}} \dots \dots \dots (1)$$

Wendet man dagegen die Transformation mittelst der Grössen λ, μ an, so erhält man:

$$\frac{d\lambda \, d\mu}{\sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - \lambda^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2})} \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \mu^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2})}} \dots \dots \dots (2)$$

Wenn nun aber hieraus der Schluss gezogen wird, dass auch die doppelten Integrale von (1) und (2) einander gleich seien und zwar dass

$$\iint \frac{du \, dv}{\sqrt{1 - \cos^2 \gamma - \cos^2 u - \cos^2 v - 2 \cos \gamma \cos u \cos v}} = F\left(\lambda, \cos \frac{\gamma}{2}\right) \cdot F\left(\mu, \sin \frac{\gamma}{2}\right) \dots \dots (3)$$

das Product zweier elliptischen Integrale erster Gattung sei, so liegt hierin offenbar ein Irrthum; denn aus den vorangegangenen Betrachtungen hat sich mit Bestimmtheit ergeben, dass das durch zwei neue Veränderliche transformirte Doppel-Integral nicht nur aus Einem, sondern im Allgemeinen aus drei wesentlich verschiedenen Bestandtheilen gebildet ist, deren Grenzen nicht constant, sondern veränderlich sind. Nun müssten aber wohl die Grenzen bezüglich der neuen Veränderlichen λ, μ constant, oder, was dasselbe ist, von einander unabhängig sein, wenn aus der Integration von (2) das angegebene Product hervorgehen sollte. Fehlschlüsse, wie derjenige, aus welchem die Gleichung (3) erhalten worden ist, lassen sich jedoch in dieser Materie auch sonst öfter bemerken.

Ich füge nur noch bei, dass man in dem oben betrachteten Beispiele auch die Grenzbedingung: $0 < x^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} + y^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} < 1$ hätte zu Grunde legen können, und dass die Transformations-Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= a\lambda \sqrt{1 + b^2 \mu^2} - b\mu \sqrt{1 + a^2 \lambda^2} \\ y &= a\lambda \sqrt{1 + b^2 \mu^2} + b\mu \sqrt{1 + a^2 \lambda^2} \end{aligned}$$

wofür man

$$\Delta = -2ab \cdot \frac{1 + a^2 \lambda^2 + b^2 \mu^2}{\sqrt{1 + a^2 \lambda^2} \cdot \sqrt{1 + b^2 \mu^2}}$$

erhält, ebenfalls zu neuen Resultaten führt.

43.

Manche bemerkenswerthe Ergebnisse lassen sich aus der folgenden Betrachtung ziehen.

Der Zusammenhang zwischen den alten und neuen Veränderlichen sei durch die Gleichungen:

$$\frac{x^m}{\lambda^r - a^r} + \frac{y^n}{\lambda^s - b^s} = 1$$

$$\frac{x^m}{\mu^r - a^r} + \frac{y^n}{\mu^s - b^s} = 1$$

gegeben, oder, was dasselbe heisst, es seien für x, y die folgenden Ausdrücke in λ, μ gewählt worden:

$$x = X_{(\lambda, \mu)} = \left\{ \frac{(\lambda^s - \mu^s) (\lambda^r - a^r) (\mu^r - a^r)}{(\mu^r - a^r) (\lambda^s - b^s) - (\lambda^r - a^r) (\mu^s - b^s)} \right\}^{\frac{1}{m}}$$

$$y = Y_{(\lambda, \mu)} = \left\{ \frac{(\mu^r - \lambda^r) (\lambda^s - b^s) (\mu^s - b^s)}{(\mu^r - a^r) (\lambda^s - b^s) - (\lambda^r - a^r) (\mu^s - b^s)} \right\}^{\frac{1}{n}}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$P = (\mu^r - a^r) (\lambda^s - b^s) \quad , \quad Q = (\lambda^r - a^r) (\mu^s - b^s)$$

so ergibt sich, wie eine leichte Rechnung zeigt:

$$\Delta = \frac{1}{mn} \cdot X^{1-\frac{1}{m}} Y^{1-\frac{1}{n}} \frac{[r\mu^{r-1} (\lambda^s - \mu^s) Q + s\mu^{s-1} (\mu^r - \lambda^r) P] [s\lambda^{s-1} (\lambda^r - \mu^r) Q + r\lambda^{r-1} (\mu^s - \lambda^s) P]}{(P - Q)^3}$$

Was die Grenzen des Doppel-Integrals betrifft, so werde ich in den Fällen, von welchen bald ausführlicher die Rede sein wird, annehmen, die Integration habe alle diejenigen positiven Werthe von x und y zu umfassen, welche der Bedingung:

$$0 < \frac{x^m}{\lambda^r - a^r} + \frac{y^n}{\lambda^s - b^s} < 1$$

Genüge leisten, vorausgesetzt dass α, β, a, b positive Grössen bezeichnen. Da die Durchführung der Aufgabe in der so eben angedeuteten Allgemeinheit hier, schon der weitläufigen Resultate wegen nicht Platz finden kann, so werde ich nur solche Fälle näher erörtern, in welchen gewisse Specialisirungen eine Vereinfachung bewirken.

44.

Zunächst möge der besondere Fall betrachtet werden, in welchem die beiden Exponenten r und s einander, und zwar jeder der Einheit gleich ist.

Für diesen Fall wird Δ wesentlich einfacher. Man erhält nämlich nach einigen Reductionen:

$$\Delta = \frac{1}{mn (a-b)^{m+\frac{1}{n}-1}} \cdot \frac{\mu - \lambda}{\left[(\lambda - a) (a - \mu) \right]^{1-\frac{1}{m}} \left[(\lambda - b) (\mu - b) \right]^{1-\frac{1}{n}}}$$

Dieser Ausdruck kommt also zur Anwendung, wenn in einem Doppel-Integral statt x, y die neuen Veränderlichen λ, μ vermöge der Gleichungen:

$$\frac{x^m}{\lambda - a} + \frac{y^n}{\lambda - b} = 1$$

$$\frac{x^m}{\mu - a} + \frac{y^n}{\mu - b} = 1$$

eingeführt werden sollen. Auch hierbei findet die Voraussetzung des Art. 1 nicht statt, dass die neuen Veränderlichen λ , μ durch die alten x , y ganz unzweideutig bestimmt seien. Um sich hiervon zu überzeugen kann man λ , μ explicite durch x , y ausdrücken, was, wie man sogleich bemerkt, sowohl für λ als auch für μ die Auflösung einer Gleichung zweiten Grades erfordert. Aber es ist zugleich auch klar, dass diese Gleichung genau dieselbe für λ wie für μ ist, dass mithin λ und μ die beiden Wurzeln jener Gleichung sind, und dass man also hat:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ x^m + y^n + a + b \pm \sqrt{(x^m + y^n + a + b)^2 - 4(bx^m + ay^n + ab)} \right\}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \left\{ x^m + y^n + a + b \mp \sqrt{(x^m + y^n + a + b)^2 - 4(bx^m + ay^n + ab)} \right\}$$

wo die Doppel-Zeichen correspondirende sind.

Es ist nun aber von Interesse die Grenzen zu kennen, zwischen welchen diese Wurzeln gleichzeitig liegen, wenn man, wie dies die Aufgabe verlangt, x und y als positive und reelle Grössen voraussetzt.

Leichter als aus den angeführten Wurzel-*ausdrücken* lässt sich diese Frage auf folgendem Wege beantworten.

In den Gleichungen

$$x = \left\{ - \frac{(\lambda - a)(\mu - a)}{a - b} \right\}^{\frac{1}{m}}$$

$$y = \left\{ + \frac{(\lambda - b)(\mu - b)}{a - b} \right\}^{\frac{1}{n}}$$

kann man, ohne der Allgemeinheit zu schaden, annehmen, es seien die als positiv vorausgesetzten Grössen a und b so beschaffen, dass $a > b$, folglich $a - b$ positiv ist.

Alsdann lassen sich drei Intervalle unterscheiden, zwischen welchen λ liegen kann; die entsprechenden Intervalle von μ lassen sich wie folgt finden.

Es sei zunächst $\lambda > a > b$ so ist $\lambda - a$ und $\lambda - b$ positiv; es kann daher x unter allen Umständen nur dann reell und positiv bleiben, wenn $\mu - a$ negativ, oder also $\mu < a$ ist. Damit ferner auch y reell und positiv bleibe, muss $\mu - b$ positiv, folglich $\mu > b$ sein.

Nimmt man ferner an, es sei $a > \lambda > b$ so ergibt sich durch dasselbe Raisonnement dass $\mu > a$ und $\mu > b$ sein müsse.

Nimmt man endlich den letzten noch möglichen Fall an, dass $a > b > \lambda$, dann könnte x offenbar nur reell und positiv sein, wenn $\mu - a$ positiv, folglich $\mu > a$ wäre, während y unter derselben Voraussetzung nur dann reell und positiv sein könnte, wenn $\mu - b$ negativ, folglich $\mu < b$ wäre. Wäre nun aber $\mu > a$ und $\mu < b$ so müsste auch $b > a$ sein, was gegen die Voraussetzung ist. Es sind also nur die beiden zuerst betrachteten Fälle möglich, und es folgt hieraus, dass

$$\text{entweder } \lambda > a > b \text{ und gleichzeitig } a > \mu > b \dots \dots (1)$$

$$\text{oder } a > \lambda > b \text{ und gleichzeitig } \mu > a > b \dots \dots (2)$$

sein muss, womit die Grenzen der Wurzeln jener quadratischen Gleichung gegeben sind.

Da sowohl x als y durchaus symmetrische Functionen von λ und μ sind, so ist das Bereich der Werthe, welche x und y durchlaufen, dasselbe, ob man sich λ und μ in den Intervallen (1) oder in jenen (2) bewegen lässt. Daraus folgt, dass bei Bestimmung der

Integrations-Grenzen bezüglich der neuen Veränderlichen nur entweder die Intervalle (1) oder nur jene (2) berücksichtigt werden dürfen, in keinem Falle aber die beiden zugleich.

Welches der Intervalle (1), (2) man wähle, ist an und für sich ganz gleichgültig. Wenn man aber, wie es seither gehalten wurde, bezüglich der Aufeinanderfolge der Integrationen nach den neuen Veränderlichen, bereits eine feste Ordnung gewählt hat, so übt jene Wahl auf die Form des transformirten Integrals einen wesentlich bestimmenden Einfluss aus. Dieser Umstand verdient eine etwas nähere Ausführung, und ich werde daher, immer unter der seitherigen Annahme, dass zuerst nach μ und erst dann nach λ integrirt werde, die beiden Fälle (1), (2) nach einander betrachten.

45.

Aus der Grenzbedingung:

$$0 < \frac{x^m}{\alpha - a} + \frac{y^n}{\beta - b} < 1$$

folgt

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 0 & \varphi^0(x) &= 0 \\ \xi_1 &= \sqrt[m]{\alpha - a} & \varphi^1(x) &= \sqrt[n]{\frac{\beta - b}{\alpha - a}} \cdot \sqrt[m]{\alpha - a - x^m} \end{aligned}$$

Unter der durchaus festzuhaltenden Annahme, dass

$$\alpha > \beta > a > b$$

werde ich nun den ersten der im vorigen Artikel unterschiedenen Fälle näher betrachten, in welchem nämlich

$$\lambda > a > b \quad \text{und zugleich} \quad a > \mu > b$$

ist. Vor Allem handelt es sich dann um die Werthe $\mu_0, \mu_1, \mu^0, \mu^1$.

Nach Art. 1 findet man nun

μ_0 aus der Gleichung $(\lambda - a)(\mu - a) = 0$, so dass $\mu_0 = a$

μ_1 aus der Gleichung $(\lambda - a)(\mu - a) = (b - a)(\alpha - a)$ also $\mu_1 = a_1 - \frac{(a - b)(\alpha - a)}{\lambda - a}$

wobei, wie man sich sogleich überzeugt, $\mu_1 > b$ bleibt, so lange man $\lambda > a$ nimmt. Sofort erhält man:

μ^0 aus der Gleichung $(\lambda - b)(\mu - b) = 0$, so dass $\mu^0 = b$

μ^1 aus der Gleichung $(\lambda - b)(\mu - b) = (a - b)(\beta - b) + \frac{\beta - b}{\alpha - a}(\lambda - a)(\mu - a)$

woraus sich ergibt:

$$\mu^1 = a - \frac{(\alpha - a)(a - b)(\lambda - \beta)}{\lambda(\alpha - \beta - a + b) + a\beta - ab} = b + \frac{(\beta - b)(a - b)(\alpha - \lambda)}{\lambda(\alpha - \beta - a + b) + a\beta - ab}$$

Hier muss nun untersucht werden, für welches Intervall von Werthen der Veränderlichen λ der Werth von μ^1 in der That zwischen a und b liegt. Dieses aber lässt sich entscheiden, wenn man bestimmt, zwischen welchen Werthen λ liegen müsse, damit die Brüche in den beiden Darstellungen von μ positiv bleiben. Zu diesem Zwecke bemerke man, dass der Ausdruck im Nenner $\lambda(\alpha - \beta - a + b) + a\beta - ab$ stets positiv bleibt, so lange λ

zwischen den äussersten Werthen α und b der Ungleichheit $\alpha > \beta > a > b$ enthalten bleibt. In der That erhält man den Werth $(\alpha - a)(\alpha - \beta)$ für $\lambda = \alpha$ und ebenso erhält man den Werth $(\beta - b)(\alpha - b)$ für $\lambda = b$. Da nun der gedachte Ausdruck linear ist, so leuchtet die Richtigkeit des Behaupteten von selbst ein.

Untersucht man nun auch den Zähler jener Brüche, so ist klar, dass das Zeichen des einen nur von dem Factor $\lambda - \beta$ abhängt, dass also der ganze Bruch positiv bleibt, so lange $\lambda > \beta$ ist. Eben so zeigt sich, dass der zweite Bruch nur so lange positiv bleibt, als $\lambda > \alpha$ ist.

Daraus folgt als Resultat:

Es ist: $a > \mu^1 > b$ nur so lange als $\alpha > \lambda > \beta > a > b$;

und der für μ^1 gefundene Ausdruck ist nur so lange gültig als jenes der Fall bleibt.

Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass diese Einschränkungen aus den beiden zu Grunde gelegten Bedingungen $\lambda > a > b$, $a > \mu > b$ und der Grenzbedingung des Doppel-Integrals hervorgegangen sind.

Auf diese Ergebnisse gestützt sind nun auch die Werthe von λ_0^0 , λ_1^1 , λ_0^1 , λ_1^0 zu bestimmen. Mit Rücksicht auf die Gleichungen des Art. 1 erhält man λ_0^0 aus den beiden Gleichungen:

$$(\lambda - a)(\mu - a) = 0 \quad , \quad (\lambda - b)(\mu - b) = 0$$

welchen gleichzeitig genügt wird, wenn man

$$\lambda_0^0 = a \quad , \quad \mu_0^0 = b$$

setzt. Zwar würden auch die Werthe $\lambda_0^0 = b$, $\mu_0^0 = a$ genügen; sie sind aber nicht zulässig, weil sonst, entgegen der frühern Voraussetzung, λ unter a zu liegen käme.

Ferner findet man λ_1^1 aus den Gleichungen:

$$(\lambda - a)(\mu - a) = (b - a)(\alpha - a)$$

$$(\alpha - a)(\lambda - b)(\mu - b) = (\alpha - a)(\beta - b)(\alpha - b) + (\lambda - a)(\mu - a)(\beta - b)$$

Da die letztere Gleichung sich einfach durch die folgende $(\lambda - b)(\mu - b) = 0$ ersetzen lässt, so folgt, dass den beiden Gleichungen durch die Werthe

$$\lambda_1^1 = a \quad , \quad \mu_1^1 = b$$

entsprochen werden kann. Zwar geschieht dies auch, wenn man $\lambda_1^1 = b$, $\mu_1^1 = a$ setzt; da aber hierbei Werthe von λ vorkämen, welche kleiner als a wären, so würde man mit der zu Grunde liegenden Voraussetzung in Widerspruch gerathen.

Für λ_0^1 hat man die beiden Gleichungen

$$(\lambda - a)(\mu - a) = 0$$

$$(\alpha - a)(\lambda - b)(\mu - b) = (\alpha - a)(\beta - b)(\alpha - b) + (\lambda - a)(\mu - a)(\beta - b)$$

Wie man leicht bemerkt, kann die letztere Gleichung durch $(\lambda - b)(\mu - b) = (\beta - b)(\alpha - b)$ ersetzt werden, so dass die Werthe

$$\lambda_0^1 = \beta \quad , \quad \mu_0^1 = a$$

als entsprechend erscheinen. Auch das Paar $\lambda_0^1 = a$, $\mu_0^1 = \beta$ genügt jenen Gleichungen, aber es ist dennoch auszuschliessen, weil darin ein Werth von μ vorkommt, welcher grösser als a , nämlich $= \beta$ ist, was der Voraussetzung widerspricht.

Endlich hat man für λ_1^0 die Gleichungen:

$$(\lambda - b)(\mu - b) = 0 \quad , \quad (\lambda - a)(\mu - a) = (b - a)(\alpha - a)$$

welchen durch die Werthe:

$$\lambda_1^0 = \alpha \quad , \quad \mu_1^0 = b$$

Genüge geschieht. Die beiden Werthe $\lambda_1^0 = b$, $\mu_1^0 = \alpha$, welche ebenfalls genügen, sind unzulässig, indem dabei μ über a zu liegen kommt.

Die Substitution der so eben ermittelten Grenzwerte in die Gleichung (IV) des Art. 17 liefert nun das folgende bemerkenswerthe Resultat:

$$m \dot{n} (a - b)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} \cdot \iint f(x, y) dx dy =$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\lambda \int_{\alpha}^b \frac{(\mu - \lambda) f(X, Y) d\mu}{\left[(\lambda - a)(a - \mu) \right]^{1 - \frac{1}{m}} \left[(\lambda - b)(\mu - b) \right]^{1 - \frac{1}{n}}} + \int_{\beta}^{\alpha} d\lambda \int_{\alpha}^b \frac{(\mu - \lambda) f(X, Y) d\mu}{\left[(\lambda - a)(a - \mu) \right]^{1 - \frac{1}{m}} \left[(\lambda - \beta)(\mu - \beta) \right]^{1 - \frac{1}{n}}}$$

$a + \frac{(\alpha - a)(a - b)(\beta - \lambda)}{\lambda(\alpha - \beta - a + b) + a\beta - \alpha b}$

wobei das Doppel-Integral linker Hand sich über alle positiven Werthe von x und y zu erstrecken hat, welche der Bedingung

$$0 < \frac{x^m}{\alpha - a} + \frac{y^n}{\beta - b} < 1$$

entsprechen, und worin zur Abkürzung:

$$X = \left(- \frac{(\lambda - a)(\mu - a)}{a - b} \right)^{\frac{1}{m}} \quad , \quad Y = \left(\frac{(\lambda - b)(\mu - b)}{a - b} \right)^{\frac{1}{n}}$$

gesetzt wurde; dabei ist vorausgesetzt, dass $\alpha > \beta > a > b$ sei.

46.

In gleicher Weise werde ich nun auch den Fall (2) des Art. 44 betrachten, für welchen gezeigt worden ist, dass alle möglichen Werthe von x, y erhalten werden können, wenn man λ, μ in den Intervallen

$$a > \lambda > b \quad \text{und gleichzeitig} \quad \mu > a > b$$

sich bewegen lässt. Sucht man, immer unter der Voraussetzung dass $\alpha > \beta > a > b$, die Werthe von $\mu_0, \mu_1, \mu^0, \mu^1$ so ergibt sich auf gleiche Art wie im vorigen Artikel

$$\mu_0 = a \quad . \quad \mu_1 = a + \frac{(a - b)(\alpha - a)}{a - \lambda}$$

wobei in der That $\mu_1 > a$ bleibt, so lange $\lambda < a$ ist.

Für μ^0 lässt sich kein Werth angeben, welcher den obigen Anforderungen entspricht und für welchen gleichzeitig sowohl x als auch y positiv wäre. Indessen eliminirt die allgemeine Formel, auf welche der vorliegende Fall alsbald angewendet werden wird, von selbst die fragliche Grösse μ^0 .

Ferner ist:

$$\mu^1 = a + \frac{(\alpha - a)(a - b)(\beta - \lambda)}{\lambda(\alpha - \beta - a + b) + a\beta - \alpha b}$$

Wie früher gezeigt wurde, bleibt der Nenner dieses Bruches so lange positiv, als λ zwischen den äussersten Werthen a und b enthalten ist. Es bleibt somit der ganze Bruch positiv, so lange $\lambda < \beta$ ist. Daraus folgt also:

Es ist $\mu^1 > a > b$, nur so lange als $a > \beta > \lambda$ bleibt.

Die vier Grenzwerte der Veränderlichen λ ergeben sich wie folgt.

λ_0^0 findet man aus den Gleichungen:

$$(\lambda - a) (\mu - a) = 0 \quad , \quad (\lambda - b) (\mu - b) = 0$$

Man genügt beiden zugleich, wenn man setzt:

$$\lambda_0^0 = b \quad , \quad \mu_0^0 = a$$

Zwar liesse sich jenen Gleichungen auch noch dadurch Genüge thun, dass man $\lambda_0^0 = a$, $\mu_0^0 = b$ setzt; aber diese beiden Werthe sind auszuschliessen, weil sonst μ unter a herabgehen würde.

λ_1^1 erhält man aus den beiden Gleichungen

$$(\lambda - a) (\mu - a) = (b - a) (a - a) \quad , \quad (\lambda - b) (\mu - b) = 0$$

und man findet:

$$\lambda_1^1 = b \quad , \quad \mu_1^1 = a$$

Die beiden anderen, im Allgemeinen noch möglichen Werthe $\lambda_1^1 = a$, $\mu_1^1 = b$ sind wie leicht zu sehen, unzulässig.

λ_0^1 liefern die Gleichungen:

$$(\lambda - a) (\mu - a) = 0 \quad , \quad (\lambda - b) (\mu - b) = (\beta - b) (a - b)$$

aus ihnen findet man:

$$\lambda_0^1 = a \quad , \quad \mu_0^1 = \beta$$

Die beiden noch möglichen Werthe $\lambda_0^1 = \beta$, $\mu_0^1 = a$ sind zu verwerfen.

λ_1^0 endlich folgt aus den Gleichungen:

$$(\lambda - b) (\mu - b) = 0 \quad , \quad (\lambda - a) (\mu - a) = (\beta - a) (a - a)$$

und zwar hat man zu nehmen:

$$\lambda_1^0 = b \quad , \quad \mu_1^0 = a$$

Auch hier sind die weiteren Werthe $\lambda_1^0 = a$, $\mu_1^0 = b$ als den Voraussetzungen widersprechend nicht zulässig.

Setzt man diese Werthe der Grenzen von λ und μ in die Gleichung (V) des Art. 18 ein, so ergibt sich als Resultat dieser Betrachtung:

$$mn (a - b)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} \cdot \iint f(x, y) dx dy = \int_a^b d\lambda \int_a^a \frac{(\mu - \lambda) f(X, Y) d\mu}{\left[(\lambda - a) (a - \mu) \right]^{1 - \frac{1}{m}} \left[(\lambda - b) (\mu - b) \right]^{1 - \frac{1}{n}}}$$

$$\frac{(\lambda - a) (a - b) (\beta - \lambda)}{\lambda (a - \beta - a + b) + a\beta - ab}$$

wobei das Integral auf der linken Seite sich auf alle positiven Werthe von x und y bezieht, welche der Bedingung

$$0 < \frac{x^m}{a - a} + \frac{y^n}{\beta - b} < 1$$

genügen, und wobei zur Abkürzung:

$$X = \left(-\frac{(\lambda - a)(\mu - a)}{a - b} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad Y = \left(\frac{(\lambda - b)(\mu - b)}{a - b} \right)^{\frac{1}{n}}$$

gesetzt, und $a > \beta > a > b$ angenommen worden ist.

Vergleicht man das Resultat dieses Artikels mit jenem des vorigen, so zeigt sich der merkwürdige Umstand, dass das transformirte Integral einmal bloß aus einem, und das anderemal aus zwei verschiedenen Ausdrücken zusammengesetzt erscheint. Es kann daher wohl die Frage entstehen, ob sich die Übereinstimmung beider Ergebnisse nachweisen lasse. Die Beantwortung dieser Frage ist schon darum von Interesse, weil in ihr zugleich eine gute Probe nicht nur der so eben gefundenen, sondern auch einiger früheren allgemeinen Resultate enthalten ist.

Es läßt sich nämlich leicht zeigen, dass die in diesem Artikel erhaltene Transformation unmittelbar auf die zweigliederige des vorigen Artikels führt, wenn man einfach (im Sinne des Art. 25 begründeten Satzes) die Integrationsfolge umkehrt, und sich hierzu der Formel (2) des Art. 25 bedient, vermöge welcher man hat:

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \int_{\varphi^0(\lambda)}^{\varphi^1(\lambda)} f(\lambda, \mu) d\mu = \int_{\varphi^0(\lambda_1)}^{\varphi^0(\lambda_0)} d\lambda \int_{\varphi^1(\mu)}^{\lambda_1} f(\lambda, \mu) d\lambda + \int_{\varphi^1(\lambda_0)}^{\lambda_0} d\mu \int_{\varphi^0(\lambda)}^{\varphi^1(\lambda_1)} f(\lambda, \mu) d\lambda + \int_{\varphi^0(\lambda_0)}^{\varphi^0(\lambda_1)} d\lambda \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} f(\lambda, \mu) d\lambda$$

worin $\lambda = \varphi^0(\mu)$ aus der Gleichung $\mu = \varphi^0(\lambda)$
und $\lambda = \varphi^1(\mu)$ aus der Gleichung $\mu = \varphi^1(\lambda)$

abzuleiten ist. In dem vorliegenden Fall ist zu setzen

$$\lambda_0 = a, \quad \lambda_1 = b, \quad \varphi^0(\lambda) = a + \frac{(\alpha - a)(a - b)(\beta - \lambda)}{\lambda(\alpha - \beta - a + b) + ab - \alpha b}, \quad \varphi^1(\lambda) = a$$

Daraus erhält man also: $\varphi^1(\lambda_0) = \varphi^1(\lambda_1) = a$ und

$$\varphi^0(\lambda_0) = \beta, \quad \varphi^0(\lambda_1) = a, \quad \varphi^0(\mu) = a + \frac{(\alpha - a)(a - b)(\beta - \mu)}{\mu(\alpha - \beta - a + b) + a\beta - \alpha b}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$F(\lambda, \mu) = \frac{f(X, Y)}{\left[(\lambda - a)(a - \mu) \right]^{1 - \frac{1}{m}} \left[(\lambda - b)(\mu - b) \right]^{1 - \frac{1}{n}}}$$

so hat man also:

$$\int_a^b d\lambda \int_{\varphi^0(\lambda)}^a (\mu - \lambda) \cdot F(\lambda, \mu) d\mu = \int_a^\beta d\mu \int_{\varphi^0(\mu)}^b (\mu - \lambda) F(\lambda, \mu) d\lambda + \int_\beta^a d\mu \int_a^b (\mu - \lambda) F(\lambda, \mu) d\lambda$$

Wenn man nun in den beiden rechts stehenden Integralen die Veränderlichen λ und μ mit einander vertauscht und bemerkt, dass hierdurch $F(\lambda, \mu)$ als durchaus symmetrische Function von λ und μ sich nicht ändert, während der andere Factor $(\mu - \lambda)$ als alternirende

Function das entgegengesetzte Zeichen annimmt, und die Ausdrücke $\varphi^0(\lambda)$ und $\varphi^0(\mu)$ geradezu in einander übergehen, so folgt unmittelbar, dass:

$$\int_a^b d\lambda \int_{\varphi^0(\lambda)}^a (\mu - \lambda) F(\lambda, \mu) d\mu = \int_a^{\beta} d\lambda \int_a^b (\mu - \lambda) F(\lambda, \mu) d\mu + \int_{\beta}^a d\lambda \int_{\varphi^0(\lambda)}^b (\mu - \lambda) F(\lambda, \mu) d\mu$$

Q. E. D.

47.

Um an bereits bekannte Resultate anzuschliessen, will ich einige besondere Fälle der so eben gefundenen Formeln betrachten, und wähle dazu den Fall, in welchem $\beta = \alpha$ ist. Hierfür ergibt sich aus der Gleichung des Art. 45, wenn man darin zugleich m und n für $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{n}$ setzt:

$$\iint f(x, y) dx dy = \frac{mn}{(a-b)^{m+n-1}} \int_a^a d\lambda \int_a^b \frac{(\mu - \lambda) f(X, Y) d\mu}{[(\lambda - a)(a - \mu)]^{1-m} [(\lambda - b)(\mu - b)]^{1-n}}$$

mit der Bedingung:

$$0 < \frac{x^{\frac{1}{m}}}{\alpha - a} + \frac{y^{\frac{1}{n}}}{\alpha - b} < 1 \quad , \quad x \text{ und } y \text{ positiv}$$

und wobei

$$X = \left[\frac{(\lambda - a)(a - \mu)}{a - b} \right]^m \quad , \quad Y = \left[\frac{(\lambda - b)(\mu - b)}{a - b} \right]^n$$

Es sei zunächst

$$f(x, y) = 1$$

dann lässt sich der Werth des Doppel-Integrals leicht finden, man erhält nämlich:

$$\int_0^{(\alpha-a)^m} dx \int_0^{\left(\frac{\alpha-b}{\alpha-a}\right)^n (\alpha-a-x^{\frac{1}{m}})^n} dy = \left(\frac{\alpha-b}{\alpha-a}\right)^n \int_0^{(\alpha-a)^m} dx \left(\alpha - a - x^{\frac{1}{m}}\right)^n$$

Setzt man hierin:

$$x = (\alpha - a)^m \cdot t^m \quad , \quad dx = m(\alpha - a)^m t^{m-1} dt$$

so geht das letztere Integral über in:

$$m(\alpha - a)^m (\alpha - b)^n \int_0^1 (1 - t)^n t^{m-1} dt$$

wofür sich der Werth:

$$\frac{mn}{m+n} (\alpha - a)^m (\alpha - b)^n \cdot \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Hieraus zieht man das Resultat:

$$\int_a^a d\lambda \int_a^b \frac{(\mu - \lambda) d\mu}{[(\lambda - a)(a - \mu)]^{1-m} [(\lambda - b)(\mu - b)]^{1-n}} = \frac{mn}{m+n} (\alpha - a)^m (\alpha - b)^n (a - b)^{m+n-1} \cdot \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Ich will ferner annehmen, es werde

$$f\left(1 + \frac{x^{\frac{1}{m}}}{a} + \frac{y^{\frac{1}{n}}}{b}\right)$$

für $f(x, y)$ gesetzt.

Drückt man diese Function durch λ, μ aus, so erhält man sehr einfach:

$$f\left(\frac{\lambda\mu}{ab}\right) \text{ für } f(X, Y)$$

Es ist daher:

$$\iint f\left(1 + \frac{x^{\frac{1}{m}}}{a} + \frac{y^{\frac{1}{n}}}{b}\right) dx dy = \frac{mn}{(a-b)^{m+n-1}} \int_a^\alpha d\lambda \int_a^b \frac{(\mu-\lambda) f\left(\frac{\lambda\mu}{ab}\right) d\mu}{[(\lambda-a)(a-\mu)]^{1-m} [(\lambda-b)(\mu-b)]^{1-n}}$$

wobei:

$$0 < \frac{x^{\frac{1}{m}}}{x-a} + \frac{y^{\frac{1}{n}}}{x-b} < 1$$

In dieser Gleichung sind einige bemerkenswerthe besondere Fälle enthalten, zu welchen man auf folgende Art gelangen kann. Man setze $-\lambda, -\mu$ für λ, μ , so wie gleichzeitig auch $-a, -b$ für a, b und setze hierauf $\alpha = 0$; dadurch nimmt die Gleichung die folgende Form an:

$$\iint f\left(1 - \frac{x^{\frac{1}{m}}}{a} - \frac{y^{\frac{1}{n}}}{b}\right) dx dy = \frac{mn}{(b-a)^{m+n-1}} \int_0^a d\lambda \int_a^b \frac{(\lambda-\mu) f\left(\frac{\lambda\mu}{ab}\right) d\mu}{[(\lambda-a)(a-\mu)]^{1-m} [(\lambda-b)(\mu-b)]^{1-n}}$$

mit der Bedingung:

$$0 < \frac{x^{\frac{1}{m}}}{a} + \frac{y^{\frac{1}{n}}}{b} < 1$$

Bemerkt man nun, dass aus einer Gleichung des Art. 30 das auch sonst schon bekannte Resultat:

$$\iint F\left(\frac{x^{\frac{1}{m}}}{a} + \frac{y^{\frac{1}{n}}}{b}\right) dx dy = mn a^m b^n \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_0^1 z^{m+n-1} F(z) dz \dots \dots \dots (1)$$

folgt, wobei für x, y die obigen Bedingungen gelten, und setzt man $F(z) = f(1-z)$ so kann man das ursprünglich gegebene Doppel-Integral sogleich auf eine Quadratur reduciren, und erhält somit die folgende Gleichung:

$$\int_0^a d\lambda \int_a^b \frac{(\lambda-\mu) f\left(\frac{\lambda\mu}{ab}\right) d\mu}{[(\lambda-a)(a-\mu)]^{1-m} [(\lambda-b)(\mu-b)]^{1-n}} = a^m b^n (b-a)^{m+n-1} \cdot \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_0^1 z^{m+n-1} f(1-z) dz$$

Es sei, um ein Beispiel zu betrachten:

$$f(z) = z^{r-1}, \quad f(1-z) = (1-z)^{r-1}$$

so findet man die bemerkenswerthe Gleichung:

$$\int_0^a d\lambda \int_a^b \frac{(\lambda - \mu) \lambda^{r-1} \mu^{r-1} d\mu}{[\lambda - a]^{1-m} \cdot [(\lambda - b) (\mu - b)]^{1-n}} = a^{m+r-1} b^{n+r-1} (b-a)^{m+n-1} \frac{\Gamma(m) \Gamma(n) \Gamma(r)}{\Gamma(m+n+r)}$$

Indem ich noch weiter specialisire, sei

$$m = n = r = \frac{1}{2}$$

Dann ergibt sich, mit Rücksicht auf die Gleichungen:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

und wenn man zugleich λ^2, μ^2 für λ, μ und a^2, b^2 für a, b setzt:

$$\int_0^a d\lambda \int_a^b \frac{(\mu^2 - \lambda^2) d\mu}{\sqrt{(\lambda^2 - a^2) (a^2 - \mu^2) (\lambda^2 - b^2) (\mu^2 - b^2)}} = \frac{\pi}{2}$$

Wie man sieht ist diese bekannte Gleichung, welche zuerst Lamé fand, und welche später von Poisson auf andere Weise abgeleitet, von Chasles und Terquem aber durch geometrische Betrachtungen gefunden wurde (s. Moigno, Calc. intégr. pag. 244 -- 249), nur ein sehr specieller Fall des oben entwickelten Theorems.

Ich will schliesslich noch annehmen, es sei

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2} \cdot \sqrt{1-k^2 z^2}}, \quad m+n=1$$

dann wird man nach wenigen Umformungen erhalten:

$$\int_0^a d\lambda \int_a^b \frac{(\lambda - \mu) d\mu}{[(\lambda - a) (a - \mu)]^n [(\lambda - b) (\mu - b)]^{1-n}} \cdot \frac{d\mu}{\sqrt{a^2 b^2 - k^2 \mu^2} \cdot \sqrt{a^2 b^2 - k^2 \lambda^2 \mu^2}} = \frac{\pi}{\sin n\pi} \cdot \frac{b^{n-2}}{a^{n+1}} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-k^2 x^2}} = \frac{\pi}{\sin n\pi} \cdot \frac{b^{n-2}}{a^{n+1}} \cdot K$$

wenn man, wie in Art. 27 mit K das hierin vorkommende elliptische Integral bezeichnet.

Auf ähnliche Weise würde man durch die Annahmen

$$f(z) = \sqrt{1-z^2} \cdot \sqrt{1-k^2 z^2}, \quad m+n=1$$

$$f(z) = \log(1-z)$$

u. s. w. zu neuen Resultaten gelangen.

Die so eben gefundenen Ergebnisse waren, für die Annahme $\beta = \alpha = 0$, besondere Fälle der am Schlusse des Art. 45 erhaltenen Gleichung. Ich werde nunmehr einige Anwendungen von der im Art. 46 entwickelten allgemeinen Gleichung, für die Annahme $\alpha - a = \beta - b$ folgen lassen, wofür jene Gleichung in

$$\iint f(x, y) dx dy = \frac{mn}{(a-b)^{m+n-1}} \cdot \int_a^b d\lambda \int_{a+b-\lambda}^a \frac{(\mu-\lambda) f(X, Y) d\mu}{[(\lambda-a)(a-\mu)]^{1-m} [(\lambda-b)(\mu-b)]^{1-n}}$$

übergeht, mit der Bedingung

$$0 < \frac{\frac{1}{x^m} + \frac{1}{y^n}}{a-a} < 1$$

Man nehme an, es werde hierin

$$f\left(a + b + x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{n}}\right) \text{ an die Stelle von } f(x, y).$$

also:

$$f(\lambda + \mu) \text{ an die Stelle von } f(X, Y)$$

gesetzt. Alsdann ergibt sich, wie man leicht ersieht, die folgende Gleichung:

$$\iint f\left(a + b + x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{n}}\right) dx dy = \frac{mn}{(a-b)^{m+n-1}} \cdot \int_a^b d\lambda \int_{a+b-\lambda}^a \frac{(\mu-\lambda) f(\lambda + \mu) d\mu}{[(\lambda-a)(a-\mu)]^{1-m} [(\lambda-b)(\mu-b)]^{1-n}}$$

Da nun

$$f\left(a + b + x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{n}}\right) = f\left(a + b + (a-a) \cdot \frac{x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{n}}}{a-a}\right)$$

so hat man, nach der Gleichung (1) des vorigen Artikels:

$$\iint f\left(a + b + x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{n}}\right) dx dy = mn (a-a)^{m+n} \cdot \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_0^1 z^{m+n-1} f[a + b + (a-a)z] dz$$

womit man sofort weiter findet:

$$\int_a^b d\lambda \int_{a+b-\lambda}^a \frac{(\mu-\lambda) f(\lambda + \mu) d\mu}{[(\lambda-a)(a-\mu)]^{1-m} [(\lambda-b)(\mu-b)]^{1-n}} =$$

$$(a-a)^{m+n} (a-b)^{m+n-1} \cdot \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \cdot \int_0^1 z^{m+n-1} f[a + b + (a-a)z] dz$$

Es geht aus der Herleitung dieser Gleichung hervor, dass sie auf der Annahme beruht, es sei $a-a$ positiv. Für $m=n=\frac{1}{2}$ geht die Gleichung in die folgende über:

$$\int_a^b d\lambda \int_{a+b-\lambda}^a \frac{(\mu-\lambda) f(\lambda + \mu) d\mu}{\sqrt{(\lambda-a)(a-\mu)} \sqrt{(\lambda-b)(\mu-b)}} = (a-a) \pi \int_0^1 f[a + b + (a-a)z] dz$$

Für $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ erhält man z. B.

$$\int_a^b d\lambda \int_{a+b-\lambda}^a \frac{(\mu-\lambda) d\mu}{\sqrt{(\lambda-a)(a-\mu)} \sqrt{(\lambda-b)(\mu-b)} \sqrt{\lambda+\mu}} = 2\pi (\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b})$$

So wie die vom Art. 43 an entwickelten Resultate sich auf die Substitutions-Gleichungen

$$\frac{x^m}{\lambda^r - a^r} + \frac{y^n}{\lambda^s - b^s} = 1$$

$$\frac{x^m}{\mu^r - a^r} + \frac{y^n}{\mu^s - b^s} = 1$$

gründen, so lässt sich eine Reihe nicht minder interessanter Resultate erlangen, wenn man die Transformation mittelst der Gleichungen:

$$\frac{x^m}{\lambda^r - a^r} + \frac{y^n}{\mu^s - b^s} = 1$$

$$\frac{x^m}{\lambda^r - \alpha^r} + \frac{y^n}{\mu^s - \beta^s} = 1$$

oder mittelst der hiervon wesentlich verschiedenen:

$$\frac{x^m}{\lambda^r - a^r} + \frac{y^n}{\mu^s - b^s} = 1$$

$$\frac{x^m}{\mu^s - \beta^s} + \frac{y^n}{\lambda^r - \alpha^r} = 1$$

bewirkt. Eben so sind die Ergebnisse von besonderm Interesse, welche der Transformation mittelst der Beziehungen:

$$x = (ae^{r\lambda} + be^{s\mu})^m$$

$$y = (ae^{r\lambda} - \beta e^{s\mu})^n$$

entsprechen. U. s. w.

Die nähere Ausführung dieser Fälle würde jedoch hier den Raum zu sehr in Anspruch nehmen, kann aber um so eher einer andern Gelegenheit vorbehalten bleiben, als der Zweck aller früheren Specialitäten hauptsächlich darin bestand, die Bedeutung und den Nutzen des allgemeinen Satzes über die Transformation so wie die Art seiner Anwendung in gegebenen Fällen darzulegen.

49.

Den Beschluss der vorliegenden Arbeit möge die Begründung eines sehr allgemeinen, und wie es scheint, für die Theorie der bestimmten Integrale nicht unwichtigen Verfahrens bilden. Wie bekannt, gewinnt jene Theorie einen grossen Theil ihrer Resultate aus der Betrachtung doppelter Integrale mit constanten Grenzen, welche sie in den beiden Arten der Integrationsfolge jedesmal auf Quadraturen zu reduciren oder so weit möglich, vollständig zu bestimmen sucht. Wenn aber weder bei der einen noch bei der andern Folge der Integrationen eine solche Reduction möglich ist und sich also auf diesem Wege nichts erreichen lässt, so kann doch in manchen Fällen eine andere Methode wirksam sein, welche in der Transformation des Doppel-Integrals durch zwei neue Veränderliche besteht und welche ich in Kürze hier bezeichnen will. Wenn, wie bisher, der Zusammenhang zwischen den alten und neuen Veränderlichen durch die Gleichungen:

$$x = X_{(\lambda, \mu)} \quad , \quad y = Y_{(\lambda, \mu)}$$

und daraus abgeleitet, durch:

$$\lambda = A_{(x, y)} \quad , \quad \mu = M_{(x, y)}$$

gegeben ist, und wenn aus der Gleichung

$$\begin{aligned} X_{(\lambda, \mu)} &= \xi_0 \text{ der Werth } \mu = \mu_0 \\ X_{(\lambda, \mu)} &= \xi_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \mu = \mu_1 \\ Y_{(\lambda, \mu)} &= \eta_0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \mu = \mu^0 \\ Y_{(\lambda, \mu)} &= \eta_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \mu = \mu^1 \end{aligned}$$

berechnet wird, so hat man zufolge der Gleichung (XII) des Art. 23:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\eta_0}^{\eta_1} f(x, y) dy = \int_{A(\xi_0, \eta_1)}^{A(\xi_1, \eta_1)} \int_{\mu^1}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{A(\xi_1, \eta_1)}^{A(\xi_1, \eta_0)} \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu + \int_{A(\xi_1, \eta_0)}^{A(\xi_0, \eta_0)} \int_{\mu^0}^{\mu_0} f(X, Y) \Delta d\mu$$

wobei, wie bisher:

$$\Delta = \frac{dX}{d\mu} \cdot \frac{dY}{d\lambda} - \frac{dX}{d\lambda} \cdot \frac{dY}{d\mu}$$

Hierdurch ist das bemerkte Verfahren im Wesentlichen gegeben.

Die folgende Umformung der Gleichung aber verdient näher berührt zu werden. Man setze nämlich den Ausdruck:

$$\left\{ \frac{dA}{dy} \cdot \frac{dM}{dx} - \frac{dA}{dx} \cdot \frac{dM}{dy} \right\} f(x, y) \text{ an die Stelle von } f(x, y)$$

und bemerke, dass der alsdann auf der ersten Seite der Gleichung vorkommende Ausdruck:

$$\left\{ \frac{dA}{dy} \cdot \frac{dM}{dx} - \frac{dA}{dx} \cdot \frac{dM}{dy} \right\} \left\{ \frac{dX}{d\mu} \cdot \frac{dY}{d\lambda} - \frac{dX}{d\lambda} \cdot \frac{dY}{d\mu} \right\}$$

nach der Lehre von den Determinanten gleich der Einheit ist, so dass sich die Function unter den Integralzeichen, bezüglich λ und μ , auf $f(X, Y)$ reducirt, dass folglich auch:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\eta_0}^{\eta_1} f(x, y) \left\{ \frac{dA}{dy} \cdot \frac{dM}{dx} - \frac{dA}{dx} \cdot \frac{dM}{dy} \right\} dy = \int_{A(\xi_0, \eta_1)}^{A(\xi_1, \eta_1)} \int_{\mu^1}^{\mu_0} f(X, Y) d\mu + \int_{A(\xi_1, \eta_1)}^{A(\xi_1, \eta_0)} \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y) d\mu + \int_{A(\xi_1, \eta_0)}^{A(\xi_0, \eta_0)} \int_{\mu^0}^{\mu_0} f(X, Y) d\mu$$

Setzt man z. B. hierin

$$f(x, y) = 1$$

so lässt sich das Doppel-Integral auf der ersten Seite der Gleichung unmittelbar auf zwei Quadraturen bringen, wenn man von der folgenden Bemerkung ausgeht. Es findet nämlich, wie man sich direct durch Differentiiren überzeugen kann, identisch die folgende Gleichung statt:

$$\frac{dA}{dy} \frac{dM}{dx} - \frac{dM}{dy} \frac{dA}{dx} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{d \left[A \frac{dM}{dx} - M \frac{dA}{dx} \right]}{dy} + \frac{d \left[M \frac{dA}{dy} - A \frac{dM}{dy} \right]}{dx} \right\}$$

Wird dieser Ausdruck zwischen constanten Grenzen nach x und y integrirt, so kann man beim ersten Theil die Integration nach y , und beim zweiten jene nach x zur ersten machen, so dass man, wie leicht zu sehen, zu der Gleichung gelangt:

$$\frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \left[A \frac{dM}{dx} - M \frac{dA}{dx} \right]_{\eta_0}^{\eta_1} + \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta_1} dy \left[M \frac{dA}{dy} - A \frac{dM}{dy} \right]_{\xi_0}^{\xi_1} =$$

$$\int_{A(\xi_0, \eta_1)}^{A(\xi_0, \eta_0)} \mu_0 d\lambda + \int_{A(\xi_1, \eta_0)}^{A(\xi_1, \eta_1)} \mu_1 d\lambda + \int_{A(\xi_0, \eta_0)}^{A(\xi_1, \eta_0)} \mu^0 d\lambda + \int_{A(\xi_1, \eta_1)}^{A(\xi_0, \eta_1)} \mu^1 d\lambda$$

Durch ihre Symmetrie liefert diese Relation eine gewisse Controle aller bei ihrer Herleitung benutzten Resultate.

Die in das Einzelne gehende Erörterung dieses Gegenstandes würde jedoch mehr zur Lehre von den bestimmten (einfachen) Integralen als hierher gehören und mag an anderm Orte weiter geführt werden. Ich glaubte desselben als einer der zahlreichen Anwendungen erwähnen zu müssen, welche die allgemeine Lösung der im Eingange dieser Arbeit mir gestellten Aufgabe zulässt.

Berichtigung.

Seite 175 ganz unten heisst es:

$$2 \lambda \log \sec \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{2} \arccos \beta \right)$$

soll aber richtig heissen:

$$2 \pi \log \sec \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \beta \right)$$

DIE VENEN DES MENSCHLICHEN HALSES.

VON

Dr. HUBERT LUSCHKA,
PROFESSOR DER ANATOMIE ZU TÜBINGEN.

(Mit 2 Tafeln.)

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 4. NOVEMBER 1859.

Indem ich die Venen des Halses zum Gegenstande einer speciellen Untersuchung mache, bin ich weit davon entfernt, das Augenmerk hauptsächlich allen jenen Variationen zuzuwenden, welchen zumal die oberflächlicheren Halsvenen unterworfen zu sein pflegen. Eine solche Bemühung wäre in ihren Resultaten um so nutzloser, als eine Erschöpfung des Themas nach dieser Seite hin, der bis ins Unendliche gehenden Verschiedenheiten wegen, eine reine Unmöglichkeit sein würde. Vielmehr muss es unsere wichtigste Aufgabe bleiben, aus der grossen Mannigfaltigkeit die Einheit und die Gesetzmässigkeit der Anordnung aufzusuchen und die Schwankungen zu bezeichnen, welche den fundamentalen Typus verhüllen und zu fehlerhaften oder einseitigen Anschauungen und Beschreibungen Veranlassung geben können.

Zu einem einigermaßen befriedigenden Abschlusse kann diese Aufgabe aber nur dadurch geführt werden, dass an der Hand der Entwicklungsgeschichte und der vergleichenden Anatomie dasjenige mit Umsicht geprüft wird, was man durch die betreffende Zergliederung des ausgebildeten menschlichen Körpers an den Tag gelegt hat.

Jetzt, nachdem ein volles Verständniss erzielt worden ist, dürfte es zum Zwecke der Mittheilung unserer Befunde förderlich sein, wenn die Darlegung des Entwicklungsgesetzes und der stationären Typen im Thierreiche den Erörterungen über die bezüglichen Verhältnisse des Menschen vorausgeschickt wird.

An diese die gröbere Morphologie betreffenden Betrachtungen schliessen sich naturgemäss aber auch da und dort Untersuchungen an, welche nur durch das bewaffnete Auge erledigt werden können. Ich erinnere in dieser Hinsicht an die auch praktisch wichtige Frage über das Verhältniss der Gewebetheile der Wandung gewisser Halsvenen zu den Blutleitern des Gehirns, an die noch nicht genau ermittelte Structur der Venenklappen u. dgl. m.

I. Die Entwicklungsgeschichte der Halsvenen.

Nachdem vorher nur wenige Versuche gemacht worden waren, die Bildungsweise einzelner Abschnitte des Venensystems zu erforschen, ist eine zusammenhängende, das ganze

System der Venen aller Wirbelthierelassen umfassende Entwicklungsgeschichte erst durch Heinrich Rathke¹⁾ begründet worden.

Durch die folgenreichen Bemühungen Rathke's wurde demnächst die wichtige Thatsache festgestellt: dass das primitive Körpervenensystem im ganzen Wirbelthierreiche durchaus übereinstimmend und im hohen Grade einfach gebildet ist.

In einer sehr frühen Periode des fötalen Lebens, beim Menschen vielleicht in der vierten Woche, besteht ein verhältnissmässig sehr kurzer, für alle Venen gemeinschaftlicher Stamm, der in das Vorhofsende des um diese Zeit nur erst einen stark gekrümmten Schlauch darstellenden Herzens einmündet. Derselbe verschwindet später spurlos, indem er in den mehr und mehr sich erweiternden Vorhof hereingezogen wird und also keineswegs, wie man wohl erwarten möchte, eine Weiterbildung zu einer Hohlader erfährt.

Zwei etwas längere, aber dünnere Gefässe münden unter spitzem Winkel zu jenem Stamme zusammen. Sie werden unter dem Namen der *Ductus Cuvieri* beschrieben. Bei manchen Thieren bewahren diese Gänge ihre Existenz in Gestalt von zwei vorderen Hohlvenen für die ganze Dauer des Lebens. So bei allen Vögeln; unter den Säugethieren bei den Monotremen, den Beutelthieren, den meisten Nagern, beim Elephanten, bei *Erinaceus* und *Sorex*, bei einigen Fledermäusen. Die zweite oder linke vordere Hohlvene läuft zuerst gestreckt vor der bezüglichen Lungenwurzel, sodann in einem starken Bogen um den hintern oberen Umfang der Basis des Herzens entsprechend dem bezüglichen *Sulcus atrio-ventricularis*, herum und stösst unter rechtem Winkel mit dem Ende der hinteren Hohlvene zusammen. Bei Vorhandensein von zwei vorderen Hohlvenen mündet die *Vena coronaria cordis magna*, wenn sie überhaupt existirt, wie Stannius²⁾ richtig bemerkt in die linke Hohlvene ein. Es verdient gekannt zu sein, dass bei einigen Thieren, wie z. B. beim Eichhörnchen und beim Igel, die *Vena jug. externa*, bevor sie als Hohlader in den Brustraum eintritt, auf beiden Seiten in gleicher Weise sich in zwei Äste spaltet, welche kranzartig das Sternalende des Schlüsselbeines zwischen sich fassen, um gleich wieder zusammenzuffliessen. Beim Igel und bei manchen anderen Thieren mündet in jede von den beiden vorderen Hohlvenen von der Rückenseite her eine Vene ein, welche, rechterseits die *Vena azygos* darstellend, viel bedeutender ist als links, wo sie der, beim Menschen jedoch sich gewöhnlich mit der vorigen zu einem gemeinsamen Stamme sich vereinigenden, *V. hemiazygos* entspricht. Die Vereinigung der beiden vorderen Hohlvenen zu einem einfachen Stamme ist bei einigen Thieren angedeutet durch eine Queranastomose, welche einen Theil des Blutes aus der linken Hohlvene in die rechte führt. Beim Menschen bildet sich diese Anastomose nach dem Schwunde des linken *Ductus Cuvieri* zur *Vena innominata sinistra* aus. Nicht nur beim Menschen, sondern bei den meisten Säugern schwindet der linke *Ductus Cuvieri* vollständig, und es erfährt hier nur der rechte eine weitere Entwicklung zu *Vena cava superior*. In höchst seltenen Fällen³⁾ erscheinen auch beim Menschen als eine sehr merkwürdige Bildungshemmung zwei obere Hohlvenen, welche dann in ganz ähnlicher Weise wie bei den mit zwei *Venae cavae anteriores* versehenen Thieren angeordnet sind, indem die linke Hohlvene, von der rechten ganz getrennt, sich um die Basis des Herzens herumschlägt.

¹⁾ Über den Bau und die Entwicklung des Venensystems der Wirbelthiere. Königsberg 1838.

²⁾ H. Stannius. Lehrbuch der vergleichenden Anatomie der Wirbelthiere. Berlin 1846. S. 444.

³⁾ Boehmer. Dissertatio de confluxu trium venarum cavarum in dextro cordis atrio. Halae 1763.

Ein jeder *Ductus Cuvieri* wird seinerseits durch zwei, in entgegengesetzten Richtungen verlaufende Venen hergestellt. Die eine derselben, genannt *Vena cardinalis*, beginnt am Schwanzende des Fötus und zieht an der inneren Seite des Wolff'schen Körpers in die Höhe. Die beiden *Venae cardinales*, welche neben der Anlage der Wirbelsäule verlaufen und die *Aorta* zwischen sich fassen, erscheinen in ihrem vorderen Abschnitte später als *Vena azygos* und *hemiazygos*. Ausser Venen des Rumpfes nehmen die Cardinalvenen später auch die der unteren Glieder auf. In dem Grade, als der hintere Abschnitt der Cardinalvenen schwindet, nehmen die *Venae crurales* an Umfang zu, und diese treten schliesslich zu der als zartestes Stämmchen beginnenden und höchst wahrscheinlich aus dem vordersten Theile der Nabelgekrösvene herauswachsenden unteren Hohlader zusammen. Die zweite, zur Bildung des *Ductus Cuvieri* beitragende Vene ist kürzer, aber eben so dick, als die *Vena cardinalis* und entspringt jederseits in ganz gleicher Weise mit vielen Zweigen aus dem Kopfe, besonders aus dem Hirne und dessen Häuten, läuft dicht über den Kiemenspalten zuerst in fast verticaler Richtung und dann in einem schwachen Bogen gegen den *Ductus Cuvieri* hin. Dieses im Wesentlichen der oberen Körperhälfte angehörige Gefäss ist die *Vena jugularis* s. *Vena cardinalis superior*. Seine in der Schädelhöhle beginnenden Zweige fliessen zu einem Aste zusammen, welcher als eigentlicher Anfang des Stammes der *Vena jug.* zu betrachten ist und sich später zum *Sinus transversus* ausbildet. Der Austritt des Gefässes aus der Schädelhöhle geschieht immer neben dem künftigen Ohrlabyrinth, seitwärts von der *Basis cranii*, bei dem einen Thiere mehr nach vorne, bei dem andern mehr nach hinten. Die Austrittsstelle entspricht also nicht dem künftigen *Foramen jugulare* des Schädelgrundes, sondern ist eine nach aussen von jenem und viel höher gelegene, im Falle ihrer Persistenz später von ihm durch die Pyramide des Schläfenbeins geschiedene Öffnung, welche als *Foramen jugulare spurium* bezeichnet zu werden pflegt.

Bei vielen Thieren kommt jederseits nur eine *Vena jugularis* zur Ausbildung, welche das Blut dann sowohl aus der Schädelhöhle abführt, als auch von den ausserhalb derselben befindlichen Bestandtheilen des Kopfes. Bei anderen dagegen kommen regelmässig sowohl auf der rechten als auch auf der linken Seite zwei Jugularvenen vor, von welchen die eine, die *Vena jug. externa*, sehr oberflächlich gelagert ist, die andere dagegen, die *Vena jug. interna*, in der Tiefe des Halses verläuft und neben der Luftröhre in Gesellschaft der *Carotis primitiva* und des *Nervus vagus* gefunden wird. In Betreff der Entwicklung der *Vena jug. interna* muss bemerkt werden, dass dieselbe ganz nahe dem *Ductus Cuvieri* aus dem medialen Umfange der *Vena jug. externa* hervorwächst und also jedenfalls späteren Ursprunges ist.

Bei manchen Thieren erscheint die innere Drosselvene nur als sehr untergeordneter kurzer Zweig der *Vena jug. externa*, welcher sich nicht einmal bis zum Kehlkopfe erstreckt. Im Verlaufe einer weiteren Entwicklung gelangt die Ader bei nicht wenigen Thieren bis in die Gegend dieses Organes, oder noch über dasselbe hinaus, erreicht aber die Aussenseite des Schädelgrundes noch nicht. Erst in einer weiteren Reihe von Thieren wächst sie bis an diesen heran und sendet selbst einen feinen Zweig zum *Foramen lacerum*. Im höchsten Grade ihrer Ausbildung erreicht die innere Drosselvene nicht allein den Schädelgrund, sondern senkt sich mit ihrer ganzen Dicke in das *Foramen jugulare* ein und führt fast alles Blut aus dem Innern des Schädels ab.

Ogleich es bis jetzt noch nicht gelungen ist, am menschlichen Fötus die verschiedenen Stadien der Entwicklung der Halsvenen zu beobachten, welche Rathke an Embryonen ver-

schiedener Thiere direct verfolgt hat, so kann es doch kaum einem Zweifel unterliegen, dass beim Menschen in Betreff der ersten Bildung seines Venensystems ganz und gar dasselbe Gesetz walten werde, welches im ganzen übrigen Wirbelthierreiche volle Giltigkeit hat. Vor mehr als zwei Decennien hat Rathke ahnungsvoll in dieser Beziehung bemerkt: „wahrscheinlich komme auch beim Menschen anfangs hinter dem Kiefergelenk ein *Foramen jugulare spurium* vor, welches aber verschwinde, wenn sich jener Zweig der *Vena jug. interna* überwiegend entwickle, welcher das Blut durch das *Foramen lacerum* aus dem Inneren des Schädels abzapfe“.

Durch die naheliegende Vermuthung, dass im Wachstume weitergeschrittene Spuren der primitiven Bahn für den Austritt des Blutes aus der Schädelhöhle in Ausnahmefällen, gewissermassen als Bildungshemmungen vorkommen möchten, wurde seit längerer Zeit meine Aufmerksamkeit auf diesen Gegenstand hingelenkt. Ich bin nunmehr in der glücklichen Lage, das mit aller Bestimmtheit nachweisen zu können, was Rathke ehemals in Betreff der Menschen nur als wahrscheinlich hingestellt hat. Ich habe nämlich das *Foramen jugulare spurium* an zahlreichen Menschenschädeln in aller nur wünschenswerthen Deutlichkeit wirklich gefunden. In Gemeinschaft mit dieser Öffnung, aber auch ohne dieselbe, beobachtete ich ausserdem am Schläfenbeine eine Venenfurche, welche für nichts anderes gehalten werden kann, als für das vordere Ende des ursprünglichen *Sinus transversus* und die man füglich *Sulcus transversus spurius*, oder ihren räumlichen Beziehungen nach auch wohl *Sulcus petroso-squamosus* nennen könnte. Wir müssen beiden eine gesonderte Betrachtung widmen.

a) Das *Foramen jugulare spurium* erscheint auch im höchsten Maasse seiner Ausbildung am Schläfenbeine des Menschen so geringfügig, dass es nicht befremden kann, wenn es entweder ganz übersehen oder doch kaum der Erwähnung werth befunden worden ist. Nachdem man weiss, dass ausser den legitimen Emissarien, da und dort an dem Hirnschädel anomal und zufällig auftretende kleine rundliche, die ganze Dicke der Knochen durchsetzende Öffnungen nicht selten vorkommen, wie z. B. an der Stelle des Zusammenstosses des *Processus pterygoideus* mit dem grossen Flügel des Keilbeines, konnte für Jene, welche unseres *Foramen jugulare spurium* etwa ansichtig wurden, die Vorstellung genügen, dass es eben nichts Anderes darstellen werde, als vielleicht ein anomales Emissarium. Durch tiefer greifende, die Entwicklungsgeschichte und gewisse stationäre Typen des Thierreiches umfassende Betrachtungen, musste aber jene kleine Öffnung ein hohes Interesse dadurch gewähren, dass ihre Nachweisung¹⁾ die Ansichten über ein wichtiges Bildungsgesetz zu ergänzen, fester zu begründen und mit Sicherheit auch auf den Menschen auszudehnen erlaubte.

Das *Foramen jugulare spurium* des Menschen ist im Falle seines Vorkommens meistens genau an derselben Stelle angebracht, an welcher es bei vielen Säugethieren getroffen wird. Es befindet sich zwischen dem Unterkiefergelenk und dem äusseren knöchernen Gehörgange. Bei genauerer Betrachtung machen sich an dem hier in Frage kommenden Bezirke folgende Skeletverhältnisse bemerklich: Derjenige Abschnitt des menschlichen Schläfenbeins, welcher die untere Seite der Wurzel des Jochfortsatzes darstellt, ist durch einen schief nach vor- und einwärts ziehenden Rand, welcher mit der *Pars tympanica* zum Theil zur Begrenzung der Glaser'schen Spalte zusammentritt, in einen hinteren Bezirk geschieden, der die Decke des

¹⁾ H. Luschka. Das *Foramen jugulare spurium* und der *Sulcus petroso-squamosus* des Menschen. Zeitschr. f. rat. Medicin. 1859. S. 72.

äusseren Gehörganges bildet und in eine vordere Region, die zum grössten Theile durch die Gelenkgrube für die untere Kinnlade eingenommen wird. Das äussere Ende jenes die Grenzscheide der genannten Bezirke darstellenden Randes bildet einen nach unten hin convexen, leistenartigen Vorsprung. Er ist von dem seiner hinteren Seite entsprechenden Absehnitte der *Pars tympanica* durch eine rinnenartige Vertiefung, von dem äusseren Ende der *Fissura Glaseri* durch eine kurze Knochenbrücke getrennt. Jener Knochenvorsprung, welcher die hintere, schmale Wand der Gelenkgrube repräsentirt, hat an verschiedenen Köpfen einen sehr ungleichen Grad der Ausbildung. Bei manchen ist er eine kaum in die Augen fallende leistenartige Erhebung, an vielen Köpfen dagegen ein stark ausgeprägter, schnabelähnlich vor dem lateralen Ende des oberen Randes der *Pars tympanica* herabtretender Fortsatz. Dieser Fortsatz, welchen die Zootomen¹⁾ dem *Tuberculum articulare* gegenüber *Processus articularis posterior* nennen, gewinnt bei manchen Säugern, zumal bei den reissenden eine bedeutende Länge und hat den Zweck, die Ausweichung der unteren Kinnlade nach rückwärts zu verhindern.

In den meisten bis jetzt von mir beobachteten Fällen befand sich das *Foramen jug. spur.* unmittelbar hinter jenem *Processus articularis posterior*. Es ist in Wahrheit die äussere Mündung eines 5—8 Millim. langen, das Schläfenbein schief nach vorwärts-einwärts durchsetzenden Canales, dessen innere Öffnung das vordere Ende des *Sulcus petroso-squamosus* beziehet. Die untere Wand dieses Canales ist gegen die Schädelhöhle, die obere nach aussen hin merklich länger. Seine Mündungen zeigen sehr schwankende Dimensionen und muss es namentlich bemerkt werden, dass Anfang und Ende nicht selten von ungleicher Weite sind. An manchen Köpfen findet man einen in hohem Grade verengten, nur für die feinsten Schweinsborsten permeablen Canal; in anderen, jedoch verhältnissmässig seltenen Fällen besitzt er eine grössere, die Durchführung von dünnen Sonden gestattende Weite. Ja, an dem Schläfenbeine eines vierzigjährigen Menschen (Taf. I, Fig. 1 b) besass die länglich - runde äussere Mündung des Canales eine Höhe von 3 Millim. und eine Breite von 2 Millim. Der Canal hat nicht selten einen unregelmässig gekrümmten Verlauf, so dass bei einer bedeutenden Enge desselben die Durchführung einer Schweinsborste mit nicht geringen Schwierigkeiten verknüpft sein kann. Auch ist es nicht zu vergessen, dass der Canal an einer Stelle seines Verlaufes so verengt sein kann, dass es nicht gelingt, auch die feinste Borste ganz durchzuleiten, sondern nur möglich ist, dieselbe bis zu einiger Tiefe einzuführen. Nach meinen bisherigen Erfahrungen findet sich das *Foramen jugulare spurium*, respective der Canal, dessen Ausmündung dasselbe ist, bald ganz übereinstimmend auf beiden Seiten, bald von ungleicher Grösse, zuweilen aber auch nur auf einer, und zwar am häufigsten auf der rechten Seite. Wenn man sich daran erinnert, dass das *Foramen jugulare spurium* normalmässig dem Plane der künftigen Anordnung seines Venensystems gemäss, beim Menschen schon in einer sehr frühen Fötalperiode verschwindet, dann wird man es begreiflich finden, dass es am Schädel älterer Fötus und des Neugeborenen nicht häufiger sein wird als beim erwachsenen Menschen und namentlich nicht grösser als bei diesem. Im Gegentheile nimmt es, wenn aus unbekanntem Gründen seine Persistenz einmal gesichert ist, bis zur Vollendung des Körperwachsthums an Umfang eher zu als ab.

¹⁾ E. F. Gurtt. Handbuch der vergleichenden Anatomie der Haussäugethiere. 2. Aufl. Berlin 1833. Bd. I, S. 45.

Manchmal nimmt das *Foramen jugulare spurium* nicht die oben bezeichnete Stelle ein, sondern ist hart über der Wurzel des Jochfortsatzes gelegen, entweder in verticaler Richtung nach oben vom *Processus articularis* oder ein wenig nach vorn oder nach hinten von dieser Linie. Hieher gehören ohne Zweifel Wahrnehmungen, die schon von Loder¹⁾ gemacht worden sind, welchen zufolge „nahe an der Vereinigung des Schuppentheiles und Felsenbeines bisweilen ein Loch vorkommt, das einen Canal bildet, der schräg aufwärts und vorwärts zieht, und sich über dem Ursprunge des Jochfortsatzes öffnet“. Wie wenig inzwischen Loder eine Ahnung von der wahren morphologischen und genetischen Bedeutung seiner Beobachtung hatte, geht unter anderem aus der beigefügten Bemerkung hervor: Durch diesen Canal dringe ein *Emissarium Santorini* aus dem *Sinus petrosus anterior* in die Venen des Schläfenmuskels. Unter *Sinus petrosus anterior*, über welchen jedoch nichts Näheres mitgeteilt wurde, kann Loder nur unseren *Sinus petroso-squamosus* gemeint haben. Andere Schriftsteller²⁾ aber begreifen unter vorderem Felsenblutleiter denjenigen Abschnitt des *Sinus petrosus inferior*, welcher zwischen dem Seitenrande des Basilartheiles vom Hinterhauptsbeine und der Pyramidenspitze des Schläfenbeins nach aufwärts steigt und sich mit seinem vorderen Ende in den *Sinus cavernosus* einsenkt. Übereinstimmend mit den Angaben Loder's sind die von Hyrtl³⁾ und eine vereinzelte Beobachtung Henle's⁴⁾, welcher an einem Schläfenbeine der Göttinger Sammlung „einen 1 Millim. weiten Canal gefunden hat, der schräg vorwärts durch die Schuppe in die Schädelhöhle führte und dicht über dem hinteren Rande der Wurzel des Jochbogens nach aussen mündete“. Die von Gruber⁵⁾ gemachte Wahrnehmung einer Öffnung in der Schuppe des Schläfenbeines, durch welche ein Zweig der *Arteria meningea media* aus der Schädelhöhle in die Schläfengrube getreten sein soll, kann der letzteren Angabe zufolge nicht hierher gezählt werden.

Jene Abweichung der Lage des menschlichen *Foramen jugulare spurium* von der gesetzmässigen Anordnung stimmt mit constanten Lagerungsverhältnissen dieser Öffnung bei einigen Thieren überein. Bei *Arctomys marmota* z. B. liegt das eigentliche, oblonge, ansehnliche *Foramen jugulare spurium* über der hinteren Wurzel des Jochfortsatzes, während unter derselben nur eine ganz kleine von jener grösseren durch eine schmale Knochenbrücke getrennte Lücke vorhanden ist. Beim Maulwurfe befindet sich die Öffnung sogar hinter den äusseren knöchernen Theilen des Gehörapparates.

Bei den meisten mit einem *Foramen jugulare spurium* versehenen Säugethieren ist dasselbe unmittelbar unter der hinteren Wurzel des Jochfortsatzes, knapp hinter dem *Processus articularis posterior* gelegen, d. h. zwischen diesem und dem knöchernen äusseren Gehörgange angebracht. Dasselbe gibt, je nach der Species, verschiedene Dimensionen zu erkennen. Den grössten Umfang erreicht es bei denjenigen Geschöpfen, bei welchen durch das *Foramen lacerum* gar kein Blut abgeführt wird, wie dies z. B. bei den Wiederkäuern der Fall ist. Das *Foramen jugulare spurium* ist hier überall die äussere Mündung eines kurzen weiten Canales, in welchen sich der *Sinus transversus* fortsetzt. Derselbe ist bei den Thieren zuerst

1) Just. Christ. Loder. Anatomisches Handbuch. Jena 1788. Bd. I. S. 19.

2) Vincenz Alex. Bochdalek. Anleitung zur praktischen Zergliederung des menschlichen Gehirns. Prag 1833. S. 201.

3) Lehrbuch der Anatomie des Menschen. Prag 1846. S. 696.

4) J. Henle. Handbuch der Knochenlehre des Menschen. Braunschweig 1855. S. 131.

5) W. Gruber. Abhandlungen aus der menschlichen und vergleichenden Anatomie. Petersburg 1852. S. 126.

von Otto¹⁾ gesehen und als „*Canalis temporalis*“ wie folgt beschrieben worden: *hoc nomine significo foramen quoddam, aut fissuram, aut denique canalem, inter os petrosum et os temporis aut solum in hoc et supra aurem situm, quo sinus cerebri transversus cum vena jugulari externa commercium habet ita, ut maxima sanguinis cerebri copia non ut in homine per foramen jugulare, sed per hunc canalem temporalem profluat.*

Wie sehr variabel die relative Grösse des *Foramen jugulare spurium* ist, erhellt aus der vergleichenden Betrachtung verschiedener Thiere in einer sehr belehrenden Weise. Beim Kalbe (Taf. I, Fig. 4 b), z. B. hat diese Öffnung eine Breite von 8 Millim., eine Höhe von 5 Millim. und einen Umkreis von 2·2 Centim. Hallmann²⁾ macht die Bemerkung, dass diese Öffnung mit dem zunehmenden Alter des Thieres kleiner werde. Die einfache Vergleichung des Schädels vom Kalbe mit dem der Kuh widerlegt diese Angabe und es zeigt die genauere Messung, dass das *Foramen jugulare spurium* der Kuh einen Umkreis von mindestens 3 Centim. besitzt, aber durch die stärker gewordenen Knochenvorsprünge tiefer gelagert und weniger kenntlich ist, als beim Kalbe. Viel kleiner, mitunter höchst unbedeutend ist das *Foramen jugulare spurium* bei Thieren, aus deren Schädelhöhle Blut auch durch das *Foramen lacerum* abgeführt wird. Dies ist unter anderen bei vielen Ferae und bei einzelnen Quadrumanen der Fall. Im hohen Grade auffallend ist es, dass bei einigen Species dieser Ordnungen das *Foramen jugulare spurium* gänzlich fehlt. Während es z. B. beim Hunde von ansehnlicher Grösse und zur Ableitung sehr vielen Blutes bestimmt ist, findet sich bei der Katze in der Regel kaum eine Spur derselben. Ebenso haben einige Affen ein sehr deutlich ausgeprägtes *Foramen jugulare spurium*, welchem auch ein *Sulcus transversus spurius* entspricht, wie z. B. *Macacus cynomolgus*, indessen andere, wie *Inuus ecaudatus* diese Einrichtung vollständig entbehren.

b) Der *Sulcus transversus spurius*. Der quere Blutleiter verläuft im frühesten Fötalleben des Menschen von der, der *Protuberantia occipitalis interna* des Schädels entsprechenden Stelle aus, über die obere innere Fläche der Basis des Felsenbeins hinweg, um durch das *Foramen jugulare spurium* nach aussen zu münden. Erst im weiteren Verlaufe der Entwicklung ändert sich die Richtung dieser primitiven Venenbahn. Jemehr das *Foramen jugulare spurium* seiner Obliteration entgegengeht und der an den Schädelgrund heranwachsende, die künftige innere Drosselvene darstellende Zweig der primitiven *Vena jugularis* an Umfang zunimmt, umsomehr bildet sich jener Abschnitt des *Sinus transversus* aus, welcher dem Laufe der künftigen, an die *Pars mastoidea* des Schläfenbeines geknüpften sogenannten *Fossa sigmoidea* entspricht.

Der ursprüngliche Lauf des queren Blutleiters geht in vielen Fällen nicht gänzlich unter, sondern es erhalten sich mehr oder weniger deutliche Spuren das ganze Leben hindurch. Sie machen sich am Schläfenbein in Gestalt einer Furehe bemerklich, welche in der Richtung des Zusammenstosses von Schuppe und Pyramide, d. h. im Wesentlichen entlang der sogenannten *Sutura petro-squamosa* dahinzieht. Nach den Bemerkungen von G. J. Schultz³⁾ findet sich in der Mehrzahl der Fälle entlang dieser Nath ein Canal, welcher den vorderen

1) Ad. Wilh. Otto. De animalium quorundam per hiemem dormientium vasis cephalicis et aure interna. Nova acta phys. medic. Acad. Caes. Leop. Carol. T. XIII., p. 23.

2) Ed. Hallmann. Die vergleichende Osteologie des Schläfenbeines. Hannover 1837. S. 4.

3) Bemerkungen über den Bau der normalen Menschenschädel. Leipzig 1852. S. 31.

Felsenblutleiter constant mit dem *Sinus transversus* verbinden und zu diesem Behufe die Basis des Felsenbeines durchbohren soll.

Die von mir in Betreff dieses Punktes angestellten Nachforschungen haben durchaus nicht zu dem Resultate geführt, dass die Existenz jenes *Sulcus* zu den gewöhnlichen Vorkommnissen, sondern zu den, wenn auch nicht selten stattfindenden, Ausnahmen gehöre. Es lässt sich allerdings nicht in Abrede stellen, dass an vielen Schädeln eine seichte, schmale, entlang oder entsprechend der *Sutura petro-squamosa* verlaufende Furche vorhanden ist, die mitunter stellenweise von Knochensubstanz überbrückt wird, über das hintere Ende der oberen Kante des Felsenbeines zieht, oder aber dieselbe durchbohrt und in den *Sulcus transversus* übergeht. Sie steht sehr häufig mit dem *Foramen spinosum* in Beziehung, indem das Blut durch den in ihr liegenden *Sinus* zum Theil in die *Vena meningea media* ergossen wird. Es ist aber hier zunächst daran zu erinnern, dass man den vorderen Abschnitt dieser Venenrinne nicht mit demjenigen *Sulcus meningeus* verwechseln darf, welcher durch den *Ramus petrosus* der *Art. meningea media* bisweilen erzeugt wird, und welcher von der Stelle aus, an der die genannte Arterie sich in ihren vorderen und hinteren Ast zerspaltet, eine kürzere oder längere Strecke in der Richtung der *Sutura petroso-squamosa* nach rückwärts verläuft.

In denjenigen Fällen, in welchen der *Sulcus transversus spurius* durch eine eigene, auf das ursprüngliche *Foramen jugulare spurium* zurückführbare Lücke nach aussen hin sich eröffnet, endigt dieser *Sulcus* in der Regel zugleich mit der inneren Mündung des *Meatus temporalis* und entspricht also nicht der ganzen Länge jener Nath. Doch findet man es bisweilen, dass die Furche über die Stelle des *Foramen jugulare spurium* hinaus, nach vorne bis zum Stachelloche sich fortsetzt.

Der *Sulcus transversus spurius* pflegt im Falle der Existenz einer selbstständigen Ausmündung meist besonders stark und deutlich ausgeprägt zu sein. In mehreren vor mir liegenden, der hiesigen Sammlung angehörigen Schläfenbeinen, an welchen sich ein auffallend grosses *Foramen jugulare spurium* befindet, hat die in maximo 4 Millim. breite und 3 Millim. tiefe Furche einen geschlängelten Verlauf. In dem einen Falle geht sie als solche über das hintere Ende der Pyramide hinweg, in einem andern wird sie nach hinten zu einem vollständigen Canale, welcher die obere Kante des Felsenbeines durchbohrt, in beiden Fällen aber, wie fast regelmässig, mit dem *Sulcus transversus verus* da zusammenmündet, wo dieser eben im Begriffe ist sich in die sogenannte *Fossa sigmoidea* fortzusetzen.

Darüber, dass der *Sulcus petroso-squamosus*, auch wenn er nicht durch ein *Foramen jugulare spurium* nach aussen mündet, gleichwohl dieselbe genetische Bedeutung habe, lässt sich kaum ein begründeter Zweifel erheben. Man wird sich aber zur Annahme genöthigt sehen, dass, wenn nach Obliteration der selbstständigen Mündung des ursprünglichen *Sinus transversus* dieser nicht untergeht, das in ihm kreisende Blut sich zum Theil eine andere Bahn eröffnet und sich demnächst in die durch das *Foramen spinosum* austretenden *Venae meningae mediae* ergiesst.

Die Betrachtung der den *Sinus transversus* betreffenden Verhältnisse im Thierreiche, gewährt sehr werthvolle Anhaltspunkte für die Deutung und für das richtige Verständniss der so eben erörterten, beim Menschen zwar ausnahmsweise vorkommenden, aber für die Bildungsgeschichte desselben höchst bedeutsamen Verhältnisse. Bei einigen Affen kommt als Regel vor, was beim Menschen Ausnahme ist. Bei *Macacus cynomolgus* z. B. ist ein *Sinus* und *Sulcus transversus* vorhanden, welcher an der Basis der Pyramide des Schläfenbeines in zwei

Segmente auseinanderläuft. Das eine bedeutend breitere und tiefere Segment der Furchung setzt sich als *Fossa sigmoidea* ganz so wie beim Menschen zum *Foramen lacerum p.* des Schädelgrundes fort; das andere viel schwächere zieht entlang der hinteren Hälfte der *Sutura petrosquamosa* bis zu dem die Ausmündung des betreffenden *Sinus* bezeichnenden *Foramen jug. spurium*.

Beim Kalbe verfolgt der sehr mächtige *Sinus* und *Sulcus transversus* diejenige Richtung, welche der *Sulcus petrosquamosus* des Menschen nimmt. Der zwischen Schuppe und Pyramide des Schläfenbeines nach vorwärts-auswärts zum *Foramen jugulare spurium* ziehende Abschnitt desselben wird durch vorspringende, einander zugekehrte Ränder jener Knochen-theile förmlich überbrückt und in einen wahren Canal umgewandelt. Der in diesem liegende Theil des *Sinus* erscheint als ein schon mit ganz selbstständiger Wand versehener Venenstamm, auf dessen bedeutenden Nerven Gehalt ich¹⁾ schon bei einer anderen Gelegenheit aufmerksam gemacht habe. Eine nicht unbedeutende Abzweigung des *Sinus transversus* wendet sich in eine tiefe, entlang dem unteren inneren Rande des Felsenbeines verlaufende Rinne und geht in eine Vene über, die ihren Weg durch einen den *Processus innominatus* des Hinterhauptbeines durchsetzenden Canal nimmt, um theils mit den Venen des Wirbelekanals, theils direct mit der *Vena vertebralis* in Communication zu treten. Dieses Verhältniss besteht auch beim Hunde. Bei diesem Thiere bietet im Übrigen der *Sinus transversus* sehr bemerkenswerthe Eigenthümlichkeiten dar. Er liegt nämlich während seines ganzen Verlaufes in einem knöchernen Canale, welcher sich entlang dem angewachsenen Rande des hier knöchernen Gezeltes dahinzieht. Das *Tentorium* stellt aber eine hauptsächlich von dem hinteren Rande der beiden Seitenwandbeine ausgehende, flügelartige Verlängerung der bezüglichen inneren Knochen tafeln dar. Zwischen die Seitentheile des Gezeltes greift zwickelartig eine gegen das Schädelcavum hereinragende Erhebung des Endes der Hinterhauptsschuppe ein. Jener Canal wird einerseits von einer tiefen Rinne des Gezeltes, andererseits durch eine an diese sich anschliessende Furchung der Hinterhauptsschuppe begrenzt. Er setzt sich schliesslich zwischen Schuppe und Pyramide des Schläfenbeines nach aussen hin fort und mündet unmittelbar vor dem knöchernen äusseren Gehörgange aus. Eine solche Anordnung des *Sinus transversus* zeigen übrigens nicht alle mit einem knöchernen Gezelte versehenen Thiere und finden sich z. B. bei der Katze wesentlich andere Verhältnisse. Hier wird der angewachsene Rand des Gezeltes von der Mittellinie aus in kurzer Strecke durch einen den *Sinus* einschliessenden Canal schief durchsetzt. Im weiteren Verlaufe geht der quere Blutleiter ähnlich wie beim Menschen in einer hufeisenähnlich gekrümmten Furchung, welche aber unter und frei von dem Gezelte ist, zum *Foramen lacerum* des Schädelgrundes herab, da diesem Thiere ein *Foramen jugulare spurium* entweder gänzlich abgeht, oder jedenfalls nur als schwacher Rest der fötalen Bildung angedeutet ist.

Die Parallelgefässe der primitiven Jugularvenen sind in der Nackenregion die *Venae vertebrales*, welche jedoch nur bei den Ophidiern, Sauriern, bei den Vögeln, den Säugethieren und dem Menschen zur Ausbildung gelangen. Dieselben gehen aus denjenigen Zweigen hauptsächlich hervor, welche der Halswirbelsäule und ihrem Inhalte angehören. Es sind aber diese Venenzweige ursprünglich integrirende Bestandtheile des Jugularsystems. Bemerkenswerth ist es, dass bei manchen Säugethieren dieser Verband theilweise in einer sehr merkwürdigen Weise das ganze Leben hindurch fortbesteht. Beim Kalbe und bei der Ziege z. B. steht der

¹⁾ H. Luschka. Die Nerven in der harten Hirnhaut. Tübingen 1850. Taf. III, b. c.

Anfang des Stammes der *Vena vertebralis* durch eine starke, horizontal verlaufende Anastomose mit der *Jugularis externa* in Communication.

Ausserdem, dass die *Vena vertebralis* nicht wenig Blut durch Vermittlung des *Sinus circularis* des grossen Hinterhauptsloches und der Blutleiter des Wirbelcanales, mit welchen sie zahlreiche Verbindungen eingeht, aus dem Inhalte der Schädelhöhle ableitet, geht bei manchen Thieren der Stamm dieser Ader direct aus einer Blutbahn der Schädelhöhle hervor. Es ist der *Sinus petrosus inferior*, welcher mitunter ganz in die Vertebralvene übergeht. Noch viel eigenthümlicher gestalten sich die Verhältnisse bei der Katze, bei welcher nicht allein der untere Felsenbeinblutleiter, sondern auch der ganze *Sinus transversus* in die *Vena vertebralis* sich fortsetzt. Der bei diesen Thieren überaus dünne Zweig der *Vena jugularis interna*, welcher bis an den Schädelgrund herantritt, mündet unmittelbar unter dem *Foramen lacerum* in die Vertebralvene ein.

Die Vertebralvenen des Halses — die von Rathke sogenannten *Venae vertebrales anteriores* — gehören also nicht dem primordialen Venensysteme an, vielmehr treten dieselben als eine secundäre Formation, jedoch ziemlich frühe auf, und es wurden dieselben von dem genannten Beobachter schon beim vierwöchentlichen Schweins-Embryo wahrgenommen.

Die von Rathke sogenannten *Venae vertebrales posteriores* gehen unmittelbar aus den *Venae cardinales* hervor und werden beim ausgebildeten Individuum als *Vena azygos* und *hemiazygos* bezeichnet. Morphologisch und physiologisch sind dieselben aber insofern die Äquivalente der vorderen Vertebralvenen, als sie hauptsächlich das Blut aus den Geflechten des Canales und der Aussenseite der Wirbelsäule sammt deren Adnexa aufzunehmen bestimmt sind.

II. Die Halsvenen verschiedener Thiere.

Die im Wirbelthierreiche verbreiteten stationären Typen in der Anordnung der Halsvenen repräsentiren zum Theil die verschiedenen Entwicklungsphasen, welche auch in dieser Hinsicht der menschliche Fötus durchläuft. Die Kenntniss derselben ist daher ganz besonders geeignet, ein tieferes und richtiges Verständniss der bisweilen in mannigfaltiger Weise verhüllten und getrübbten Formen vorzubereiten, die am ausgebildeten menschlichen Organismus getroffen werden. Es ist aber vornehmlich die äussere Drosselvene an sich und ihr Verhältniss zur *Vena jugularis interna*, welche einer weiteren Aufklärung bedürftig sind.

Wenn man es versucht, die Thiere rücksichtlich des Verhaltens dieser beiden Adern einzutheilen, dann gelangt man zur Aufstellung von folgenden vier Gruppen:

1. Es besteht jederseits nur eine einzige Jugularvene, welche das Blut sowohl aus den innerhalb der Schädelhöhle befindlichen Theilen, als auch aus den ausserhalb derselben liegenden Gebilden des Kopfes hauptsächlich abführt. Hierher gehören die Fische, verschiedene Amphibien, die Vögel und eine Anzahl Säugethiere. Bezüglich der Vögel hat Rathke¹⁾ die bemerkenswerthe Wahrnehmung gemacht, dass bei manchen Spechten der Stamm der linken Drosselvene gänzlich fehlt, so dass die rechte *Vena jugularis* nebst den Vertebralvenen alles Blut vom Kopfe ableitet. Aus einer gefälligen brieflichen Mittheilung des unübertrefflichen Rathke, dessen Tod wir bald darauf zu beklagen hatten, entnahm ich, dass er später bei einigen Spechtarten zwei Jugularvenen gefunden hat, von welchen jedoch die linke sich überaus dünn gezeigt hat. Bei den meisten Vögeln ist die linke Drosselvene

¹⁾ Vgl. a. a. O. S. 7.

übrigens um Vieles dünner als die rechte, und fand ich z. B. bei der Ente die *Vena jugularis dextra* 5 Millim., die *sinistra* nur 1 Millim. dick. Bei den Raubvögeln ist das Verhältniss etwas günstiger und besitzen namentlich die Eulen eine linke Drosselvene, welche der rechten an Dicke nur wenig nachsteht.

Unter den Säugethieren haben nach Rathke das Kaninchen, der Hase, das Eichhörnchen, das Pferd und die Wiederkäuer jederseits nur eine Jugularvene. Hiegegen muss ich die Bemerkung machen, dass Otto beim Eichhörnchen auch eine, jedoch durch ihre Feinheit der Beobachtung leicht entgehende, *Vena jugularis interna* durch die Injection nachgewiesen und bildlich dargestellt hat. In Betreff des Kaninchens kann ich anführen, dass ich eine dünne *Vena jugularis interna* auf jeder Seite regelmässig vorgefunden habe, welche unter dem *Foramen lacerum* in die durch diese Öffnung hervorgetretene und aus dem *Sinus cavernosus* zunächst hervorgegangene *Vena vertebralis* einmündet, neben der *Carotis communis* in der Tiefe des Halses herabläuft und sich in den inneren Umfang des Endes der *Jugularis externa* einsenkt. Bei diesem Thiere verläuft überdies in der Mittellinie des vorderen Umfanges der Nackenwirbelsäule eine starke Vene, welche einerseits direct mit der *Vena vertebralis* in Verbindung steht, andererseits mit Venen des Wirbeleanales zwischen Atlas und unterem Umfange des grossen Hinterhauptsloches in Communication tritt. Unter den Wiederkäuern habe ich die *Vena jugularis interna* bei der Ziege z. B. vollständig vermisst, bei anderen dagegen in ziemlich bedeutendem Grade ausgebildet gefunden. Solchen merkwürdigen Schwankungen begegnet man auch in anderer Hinsicht bei sehr nahe stehenden Arten verschiedener Gattungen der Säugethiere.

2. Es bestehen jederseits zwei Drosselvenen; allein die verhältnissmässig nur höchst unbedeutende *Vena jugularis interna* erreicht die *Basis cranii* nicht, nimmt wenigstens direct kein Blut aus der Schädelhöhle auf, sondern nur aus dem Schlundkopfe, Kehlkopfe, der Schilddrüse, bisweilen nur aus dem letzteren Organe allein. Sie verläuft aber in der Tiefe des Halses neben der Luftröhre und in Begleitung des *Nervus vagus* und der *Carotis primitiva*. Dieses Verhalten wird z. B. bei manchen Nagern und Wiederkäuern vorgefunden. Unter den letzteren habe ich besonders das Kalb einer einlässlicheren Untersuchung unterworfen, nachdem das ganze Venensystem dieses Thieres möglichst vollständig mit Wachsmasse injicirt worden war.

Die *Vena jugularis externa* hat hier eine sehr bedeutende, durchschnittlich 1 Centim. betragende Dicke und einen ganz oberflächlichen, hart dem äusseren Rande des Kopfnickers folgenden Verlauf. Sie geht aus dem Zusammenflusse von zwei Hauptästen — der *Vena facialis anterior* und *posterior* — hervor. Die vordere Gesichtsvene umgibt in weitem Bogen den Bezirk des Auges, kommt sodann in eine tiefe Furche des Seitenwandbeines zu liegen und nimmt daselbst eine durch ein Loch dieses Knochens aus der Augenhöhle hervortretende Vene auf. Unter der Wurzel des Joehbogens verbindet sich die *Vena facialis anterior* mit dem kurzen dicken Gefässe, welches an dem *Foramen jugulare spurium* beginnt, eine Fortsetzung des *Sinus transversus* darstellt und von den Zootomen²⁾ gemeinhin *Vena cerebralis superior* genannt wird. Hinter dem Winkel der unteren Kinnlade verbindet sich die *Vena facialis anterior* mit der hinteren Gesichtsvene, welche eine sehr starke *Vena submentalis* aufnimmt.

1) A. a. O., S. 44.

2) E. F. Gurlt, Handbuch der vergleichenden Anatomie der Haussäugethiere. 2. Aufl. Berlin 1834. Bd. II. S. 295.

Die *Vena jugularis interna* des Kalbes ist ein 16 Centim. langes, 3 Millim. dickes Gefäss, welches entlang und neben der Luftröhre verläuft, mit dem *Nervus vagus* und der *Carotis primitiva* in eine ziemlich feste Zellstoffscheide eingeschlossen. Die Vene nimmt Blut aus der Schilddrüse auf und steht durch einen starken Zweig mit dem Ende einer *Vena thyroidea* in Communication, welche sich direct in die *Vena jugularis interna* einsenkt. Die Ader nimmt während ihres Verlaufes viele Zweige aus der Thymusdrüse auf und mündet in den inneren Umfang des Endes der *Jugularis externa* ein, oder fliesst auch wohl mit dem entsprechenden Gefässe der anderen Seite zu einem kurzen Stämmchen zusammen, das sich in den Winkel einsenkt, unter welchem die beiden äusseren Drosselvenen zur Erzeugung der *Cava anterior* zusammenfliessen. Ungenannte Venen in dem Verhältnisse, wie sie beim Menschen vorkommen, gibt es bei dem Kalbe nicht, vielmehr erscheint die *Vena subclavia* nur als ein sehr starker Ast, welcher sich in den äusseren Umfang der *Jugularis externa* da einsenkt, wo sie eben im Begriffe ist, mit der bezüglichen Vene der anderen Seite zur vorderen Hohlader zusammenzumünden.

3. Auf jeder Seite des Halses befinden sich zwei *Venae jugulares*, von welchen jedoch die innere im Verhältniss zur äusseren sehr dünn ist, sich jedoch nicht allein bis zum Schädelgrunde erstreckt, sondern auch schon einiges Blut aus der Schädelhöhle in sich aufnimmt. Hierher gehören unter anderen die meisten reissenden Thiere, von welchen wir den Hund und die Katze in dieser Beziehung des Genauereren untersuchten.

Beim Hunde ist die *Vena jugularis externa* ein starker, bei mittelgrossen Thieren 6—7 Millim. dicker Gefässstamm, welcher in der Gegend des Kehlkopfes aus der Zusammenmündung der vorderen und der hinteren Gesichtsvene entsteht. Die *Vena facialis posterior* nimmt vier Hauptäste auf: die *Vena auric. post.*, die *Vena temp. superfic.*, die *Vena maxill. int.* und die sogenannte *Vena cerebialis superior*. Das letztere Gefäss ist kurz und dick und erscheint als die am *Foramen jugulare spurium* beginnende Fortsetzung des queren Blutleiters. Dieser aber ist ein überaus dünnwandiges, lose in einem Knochencanal liegendes Gefäss, welches an Nerven sehr reich ist und aus Epithel, einer zarten Längsfaserhaut und einer diese umlagernden Zellstoffschicht besteht. Die vordere Gesichtsvene nimmt unter anderen die *Vena submentalis*, die *Vena lingualis* und die *Vena thyroidea superior* auf. Die beiden *Venae linguales* werden durch eine starke, quer entlang dem Körper des Zungenbeines verlaufende, oberflächlich liegende Anastomose unter einander in Communication gesetzt.

Die *Vena jug. interna* ist kaum halb so dick als die äussere Drosselvene und nimmt nach aussen von der *Carotis primitiva* in der Tiefe des Halses ihren Verlauf. Sie geht hervor aus dem Zusammenflusse der *Vena thyroidea inf.*, der *Vena pharyngea* und einem Zweige, der bis zum Schädelgrunde in die Höhe steigt. Dieser letztere Zweig ist nur sehr unbedeutend, indem er auch bei grösseren Hunden kaum mehr als 1 Millim. dick ist. Er tritt nicht durch das *Foramen lacerum* in die Schädelhöhle ein, sondern mündet knapp unter demselben in die daselbst zum Vorschein kommende *Vena vertebralis* ein. Der das Blut aus dem *Sinus cavernosus* aufnehmende untere Felsenbein-Blutleiter tritt nämlich beim Hunde durch eine an dem vorderen Ende der inneren unteren Kante des Felsenbeines befindliche Lücke, welche in das *Foramen lacerum* ausmündet, durch dieses zum Schädel heraus und setzt sich in den Stamm der Wirbelvene fort. Mit Rücksicht auf gewisse, beim Menschen gemeinhin zu stärkerer Ausbildung kommende Verhältnisse sind Verbindungszweige beim Hunde beachtenswerth, welche die beiden Hauptäste der *Jugularis externa* und die beiden Gesichtsvenen nämlich

mit der inneren Drosselader in Communication setzen. Es ist damit eine Andeutung derjenigen Formation gegeben, welche wir beim Menschen als sogenannte *Vena facialis communis* finden werden.

Die Katze bietet in mehrfacher Beziehung von der Venenanordnung des Hundes verschiedene Verhältnisse dar. Die *Vena jugularis externa* ist zwar auch hier ein starkes und namentlich den Umfang der inneren Drosselader weit übertreffendes Gefäss. Allein sie nimmt dennoch aus dem Innern des Hirnschädels direct kein Blut auf, wie denn auch eine *Vena cerebralis superior* diesem Thiere gänzlich fehlt. Aus dem *Sinus transversus* ergiesst sich das Blut durch das *Foramen lacerum* grösstentheils in die *Vena vertebralis*, welche an dieser Öffnung ihren eigentlichen Anfang nimmt, während die *Vena jug. interna* durch eine kurze, quere Anastomose mit ihr in Verbindung steht, aber auch direct durch einen kurzen Zweig Blut aus der Schädelhöhle durch eine kleine Öffnung abzapft, welche hart vor dem *Foramen jugulare* liegt und die Ausmündung des *Sinus petrosus inferior* bezeichnet. Bemerkenswerth ist auch ein starker Zweig der *Jug. int.*, welcher an dem Schädelgrunde sich hart vor dem knöchernen Gehörgange nach aussen wendet und die Verbindung mit der *Vena facialis posterior* vermittelt. Die beiderseitige Anastomose wird ihrerseits in querer Richtung durch ein kurzes Gefässstück verbunden, welches an der Aussenseite des Körpers vom Grundbeine gelegen ist.

4. Die *Vena jugularis interna* nimmt das meiste Blut aus der Schädelhöhle auf. Diese Einrichtung besteht bei verschiedenen Thieren, namentlich beim Schweine und bei der grösseren Mehrzahl der Affen. Am schärfsten und reinsten aber ist dieser Typus ausgeprägt beim Menschen, den wir in dieser Hinsicht im Nachfolgenden eingehenden Betrachtungen unterwerfen.

III. Die Halsvenen des Menschen.

Die innere Drosselvene bleibt auch bei denjenigen Thieren, bei welchen sie das meiste Blut aus dem Innern des Hirnschädels ableitet, in Betreff ihrer relativen Mächtigkeit weit hinter jener des Menschen zurück. Dies steht natürlich im Einklange mit der viel bedeutenderen relativen Grösse des menschlichen Gehirnes und mit seiner regeren, eine ungleich grössere Blutzufuhr erheischenden Thätigkeit. Die Betrachtung der Venen des menschlichen Halses führt uns im Hinblicke auf die Entwicklungsgeschichte und auf die Typen im Thierreiche zur gesonderten Untersuchung der *Vena jugularis interna*, der *Vena jugularis externa*, der *Vena vertebralis*.

1. Die *Vena jugularis interna*.

Auch da, wo diese Ader im Thierreiche das meiste Blut aus der Schädelhöhle ableitet, übertrifft sie an Stärke die äussere Drosselvene nicht, indem diese das Blut aus denjenigen Abschnitten des Kopfes hauptsächlich abzuleiten hat, welche bei allen Thieren den Umfang und die Masse des Inhalts vom Hirnschädel weit übersteigen.

Erst beim Menschen ist die *Vena jugularis interna* nach relativer Grösse und Bedeutung der wichtigste Venenstamm des Halses, in dessen ganzer Höhe er lateral

herabläuft¹⁾. Er tritt während dieses Verlaufes mit nicht wenigen Gebilden in eine nahe räumliche, aber von Stelle zu Stelle wechselnde Beziehung. Man kann in Betreff des Lageverhältnisses dieser Ader zu ihrer Nachbarschaft füglich drei Abschnitte derselben unterscheiden, welche ihrer Länge nach nahezu übereinstimmen. Der obere Abschnitt erstreckt sich vom Schädelgrunde bis herab zum Winkel der unteren Kinnlade und hat seine Lage in der Tiefe der *Fossa parotidea*, nach aussen von der *Carotis interna*. Zwischen beiden Gefässen liegen der Stamm des *Nervus hypoglossus* und *vagus*, so wie der *Accessorius Willisii*, dessen äusserer Ast sich um den vorderen und lateralen Umfang der Vene herumschlägt. Über die Vene läuft schief von vorn nach hinten die *Arteria occipitalis* und *auricularis posterior*, so wie ein Theil der *Carotis externa*; schief von hinten nach vorn tritt über sie der *Musc. digastricus* und *stylohyoideus* hinweg. Der mittlere Abschnitt der *Vena jug. int.* erstreckt sich vom Winkel der unteren Kinnlade bis herab zur Kreuzung mit der intermediären Sehne des *Musc. omohyoideus* und ist wohl charakterisirt durch seine vom Kopfnicker gänzlich überdeckte Lage. Anfangs befindet er sich nach aussen von der *Carotis externa*, dann neben der *Carotis primitiva*. Zwischen Arterie und Vene zieht in der Tiefe der Stamm des *Nervus vagus* herab. Dieser mittlere Abschnitt der inneren Drosselvene wird sehr häufig von einer Nervenschlinge, der sogenannten *Ansa hypoglossi* umfasst, welche aber auch nicht selten von der Ader bedeckt wird. Schon wiederholt habe ich den Nachweis geliefert, dass auch der in die Bildung dieser *Ansa* eingehende sogenannte *Nerv. descendens hypogl.* mit dem Zungenfleischerven nichts gemein hat, sondern ein vom ersten und zweiten Cervicalnerven herrührender Zweig ist, welcher nur eine Strecke in der Scheide desselben verläuft. Die in die Bildung der *Ansa* nicht selten eingehenden centripetalen Bogenfasern sind ebenfalls Cervicalfäden, welche in die Scheide des *Hypogl.* eintreten, aber nur um als *Nervus thyreo-hyoideus* wieder zum Vorscheine zu kommen. Aber auch wenn solche Bogenfasern nicht existiren, ist der *Nervus thyreo-hyoideus* gleichwohl kein Abkömmling des *Hypoglossus*, sondern rührt von dem in die Scheide desselben eingetretenen *Ramus descendens* des ersten und zweiten *Cervicalis* her, von welchem einzelne Fädchen nur weiter medianwärts in der Richtung des *Arcus hypogl.* verlaufen sind, ehe sie zur Abscheidung gelangten. Man sieht also, dass sämmtliche Unterzungenbeinmuskeln nicht vom *Hypoglossus*, sondern von Cervicalnerven versorgt werden, was ohne Zweifel auch die Pathologie bestätigen wird, indem sie sicherlich zur Beobachtung vollständiger, vom Centrum ausgegangener Zungenlähmungen gelangt, ohne dass dabei auch die Unterzungenbeinmuskeln paralisirt sind. Das untere Drittel der *Jug. int.* zieht schief über den medialen Rand des *Musculus scal. ant.* herab, liegt nach aussen von der *Carotis primitiva* und vor der *Art. subclavia* und dem Anfange der *Art. thy. inferior*. Die Ader liegt

¹⁾ Nicht wenige Lehrer und Schriftsteller bezeichnen als *Vena jugularis interna* nur denjenigen Abschnitt des in Rede stehenden Gefässstammes, welcher vom zerrissenen Loche bis zur Einsenkung der *Vena fac. comm.* reicht, und nennen den übrigen längeren und dickeren Abschnitt desselben *Vena jug. communis*. Abgesehen davon, dass die letztere Bezeichnung in sofern keinen rechten Sinn hat, als die sogenannte gemeinschaftliche Drosselblutader nicht die Gesamtheit der Drosselvenen repräsentirt, indem ja die *Jugularis externa* sich in die *Vena subclavia* begibt, ist eine solche Anschauungsweise auch schon morphologisch deshalb ganz unzulässig, weil jener Venenstamm nach Analogie mancher Thiere häufig in einem nur sehr untergeordneten Verbande mit den Antlitzvenen steht und eine *Vena facialis communis* in der Art nur ausnahmsweise besteht, dass sie eine Vereinigung der *Vena fac. anterior* und *posterior* darstellt. Es ist daher sehr wohl begründet, wenn viele und namentlich die französischen Autoren eine solche Eintheilung nicht befolgen. So gibt z. B. Cruveilhier (*Traité d'anatomie descript. trois. édit. III. p. 29*) in dieser Beziehung folgende Erklärung ab: „*La veine jugulaire interne commence au trou déchiré postérieur, et finit au trou veineux brachio-céphalique*“

gewöhnlich hinter der dreiseitigen, an den meisten Hälsen im Leben als seichte, grubenartige Vertiefung erscheinenden, von den beiden Ursprungsportionen des Kopfnickers begrenzten Spalte. Unter gewissen pathologischen, eine Erweiterung der Vene bedingenden Einflüssen wird statt jener Grube eine mehr oder weniger prononcirte Wölbung bemerkt.

Die beiden *Venae jugulares internae* laufen nicht parallel, sondern convergiren nach unten hin merklich. Sie sind, in gerader Linie gemessen, in der Höhe des Kehlkopfes durchschnittlich 6·5 Centim., an ihrer untersten Grenze aber nur 5·5 Centim. von einander entfernt. Von der Mittellinie des Halses sind sie gleichweit entfernt. Eine ungleiche Lagebeziehung der beiden Drosseladern vermag ich nicht als Regel zu erkennen. Wenn behauptet werden will, rechts liege das untere Ende des Gefässes entsprechend dem dreiseitigen Zwischenraume, welchen die beiden Köpfe des *Nutator* hart über dem Schlüsselbeine gewöhnlich begrenzen, links dagegen werde dasselbe hinter dem Schlüsselbeinursprunge des Kopfnickers gefunden, so ergibt sich die Unstatthaftigkeit einer solchen Annahme schon aus dem ausserordentlichen Wechsel der Breite der Clavicular-Insertion des Kopfnickers.

Gewisser Eigenthümlichkeiten und Beziehungen wegen müssen wir das Verhalten des oberen und des unteren Endes der *Jug. interna* gesondert und dann erst die ihr Blut direct in diese Ader ergiessenden Venen betrachten.

a) Das obere Ende der Vena jugularis interna.

Das *Foramen lacerum posterius* des Schädelgrundes zerfällt in zwei Abschnitte von sehr ungleicher Grösse. An manchen Köpfen sind dieselben durch einen Knochenvorsprung — *Processus intrajugularis* —, welcher über der Ausmündung des *Caulis hypoglossi* aus dem Seitentheile des Hinterhauptsbeines hervorgeht und sich genau an den gegenüberliegenden Punkt des Felsenbeines anlegt, oder beim Mangel desselben durch ein fibröses Gebilde vollständig von einander geschieden. Der kleinere Abschnitt ist median- und vorwärts gelegen und dient dem Durchtritte des neunten, zehnten und elften Hirnnerven, so wie der Ausmündung des *Sinus petrosus inferior*.

Der geräumigere Theil des *Foramen lacerum post.* ist seitwärts-rückwärts gelagert und stellt das *Foramen jugulare* im engeren Sinne dar, welches aber in Wahrheit ein von ungleich hohen Wänden begrenzter Canal ist. Seine äussere, durch das Felsenbein gebildete Wand hat beim Erwachsenen durchschnittlich eine Höhe von 1·4 Centim., während die Höhe der nach vorn gekehrten Wand nur 0·6 Centim. beträgt. Der Umfang des *Canalis jug.* ist, wie ich aus der Vermessung genauer Abgüsse desselben entnommen habe, an verschiedenen Stellen nicht gleich. Die grösste Circumferenz liegt in der Ebene des tiefsten Punktes der *Incisura jug.* des Felsenbeines und beträgt durchschnittlich 4·5 Centim. Hier muss ich aber bemerken, dass jene Incisur von sehr ungleicher Tiefe ist und an manchen Köpfen sogar nur eine flache Kerbe darstellt, wodurch eine bedeutende Beschränkung des Umfanges der Lichtung jenes Canales gesetzt wird. Der Umfang der äusseren Mündung beträgt 4 Centim., der Umfang der inneren 3·5 Centimeter. Von diesen durchschnittlichen Maassen gibt es mannigfaltige, sich noch innerhalb der Norm bewegende Abweichungen. Ein Beispiel der Abweichung, in welchem die innere Mündung einen Umkreis von nur 2·2 Centim. gezeigt hat, erscheint mir desshalb einer besonderen Erwähnung werth, weil hier der *Sinus transversus* der bezüglichlichen Seite sich in der Richtung und anstatt des *Sinus occipitalis* in dieses auffallend

enge *Foramen jug.* erstreckt hat, während eine Abzweigung des *Sinus transversus* entsprechend seinem gewöhnlichen Verlaufe sich zum *Foramen mastoideum* begeben hat, durch dessen bedeutende Grösse jenes Missverhältniss compensirt worden ist.

In jenem Canale liegt das obere Ende, der sogenannte *Bulbus superior*, der inneren Drosselader, welcher nach Grösse und Gestalt im Wesentlichen eine Wiederholung desselben darstellt. Die Wand dieses Gefässes bietet innerhalb jenes Canales, mit dessen Periost sie durch eine dünne Zellstoffschichte verbunden ist, schon nicht mehr dieselben Qualitäten dar, welche ihr im übrigen Verlaufe zukommen, indem sie daselbst der Muskelfasern entbehrt. Vom Umkreise der inneren Mündung des *Canalis jugularis* an, d. h. beim Übergange in den *Sinus transversus* ändern sich die Verhältnisse noch viel mehr. Die *Adventitia* und die *Tunica media* der Gefässwand verlieren sich alsbald in das fibröse Gewebe, welches den Blutleiter umlagert. Dagegen bewahrt die innerste Gefässhaut durch alle *Sinus* hindurch ihre Eigenthümlichkeit. Die Längsfaserschichte und das Epithelium setzen sich nämlich von allen mit den Blutleitern in Verbindung stehenden Venen als Auskleidung derselben fort. Die erstere erweist sich aber als ein viel zarteres Häutchen, welches aus feinsten, zu einem dichten Netzwerke zusammengefügt elastischen Fibrillen besteht und wie überall durch Unempfindlichkeit gegen Essigsäure und durch die grosse Geneigtheit sich zusammenzurollen ausgezeichnet ist. Das Epithelium besteht an den meisten Stellen aus oblongen, meist mit deutlichen *nucleolis* versehenen Kernen, die in eine fein moleculäre Substanz ordnungslos eingestreut sind. Es fehlt aber auch da und dort nicht an lanzettlich und polygonal gestalteten kernhaltigen Blättchen. An dieser oder jener Stelle ruht das Epithelium auf einer überaus dünnen Grenzschichte auf, welche vom Epithelium aber auch nicht selten gänzlich entblösst gefunden wird.

Obgleich die mittlere und die äussere Venenhaut in den Blutleitern des Gehirnes ihre Selbstständigkeit eingebüsst haben, so fehlt es doch nicht an *Vasa vasorum* und an Nerven, welche sich in den Bindegewebfaserschichten der Wand der *Sinus* ausbreiten. Die meisten Gefässe rühren von der *Arteria pharyngea adscendens* her. Die Angaben der Schriftsteller über die Verbreitung dieser Arterie in der Schädelhöhle sind aber im höchsten Grade ungenügend. Krause¹⁾ z. B. beschränkt sich auf die Bemerkung: das Gefäss gebe ein durch die *Fibrocartilago basilaris* dringendes Ästchen an die *Dura mater* ab; während Fr. Arnold²⁾ berichtet, dass der *Ramus basilaris* desselben durch das zerrissene Loch einen Zweig an die harte Hirnhaut entsende.

Zum Zwecke der Erledigung dieses Punktes habe ich wiederholt die *Art. pharyngea adscendens* gesondert mit einer sehr feinen Siegelackmasse injicirt und dadurch stets die gleichen, in mehrfacher Hinsicht sehr beachtenswerthen Resultate erzielt. Der *Ramus basilaris s. meningeus* dieses Gefässes entsendet immer durch sehr verschiedene Öffnungen der *Basis cranii* viele Zweige in die Schädelhöhle. Der stärkste tritt in den *Canalis hypoglossi* ein, und zertheilt sich in Gefässchen, die in der Wand des *Sinus circ. for. occipit.* ihre Endausbreitung finden und in solche, welche im Vereine mit entsprechenden der anderen Seite auf dem Körper des Grundbeines sich zu einem sehr weiten Netzwerke ausbreiten und mit Zweigen

¹⁾ Handbuch der menschlichen Anatomie. 2. Aufl. Hannover 1843. S. 802.

²⁾ Handbuch der Anatomie des Menschen. Freiburg i. B. 1851. II. 1. S. 449.

anastomosiren, die aus dem im *Sinus cavernosus* liegenden Abschnitte der *Carotis interna* entsprungen sind. Aus diesen Anastomosen hervorgehende Reiserchen breiten sich in der Wand des unteren Felsenbein-Blutleiters aus. Ein zweiter Zweig der *Art. pharyngea adscendens* tritt durch das hintere zerrissene Loch der *Basis cranii* in die Schädelhöhle ein und begibt sich grösstentheils zur Wand des *Sinus transversus*, welcher aber auch noch durch die *Art. meningea postica* aus der *Art. occipitalis* versorgt wird. Ein dritter Zweig gelangt in den *Canalis caroticus*, um sich in der Wand des *Sinus cavernosus* auszubreiten, während ein vorderer Zweig durch die *Fibrocartilago basilaris* sich zum Gewebe der harten Hirnhaut begibt.

Über die Nerven, welche in der Wandung verschiedener Blutleiter des Gehirnes ihre Ausbreitung gewinnen, namentlich über den *Ramus sinuialis* aus dem ersten Aste des *Quintus*, der zum *Sinus transversus* und zum *Sinus tentorii* gelangt; über Zweige, welche vom *Ramus lingualis trigemini* herrühren und in der Scheide des *Nerv. hypoglossus* bis zum *Sinus circularis* des grossen Hinterhauptloches ziehen, habe ich¹⁾ schon bei anderen Gelegenheiten ausführlich berichtet.

Die Thatsache, dass die Venenwandung beim Übergange in die Blutleiter ihre Selbstständigkeit nicht gänzlich aufgibt, sondern dass derselbe in der eben geschilderten Weise geschieht, hat bisher einen bestimmteren Ausdruck noch nicht gefunden. Überhaupt wird des Verhältnisses der Wand der zahlreichen, mit den *Sinus*, ausser der *Jugularis* in offener Verbindung stehenden Venen — der *Venae cerebrales superiores*, der *Vena magna Galeni*, der verschiedenen Emissarien — gar nicht gedacht, obwohl sich hieran Beobachtungen knüpfen, die ein bedeutendes praktisches Interesse haben. Bekannt ist es z. B., dass in der Nähe der Emissarien gesetzte Läsionen der verschiedensten Art nicht selten sehr tiefgreifende, auf die Blutleiter sich fortsetzende Erkrankungen im Gefolge haben, die sicherlich wenigstens theilweise auf das Continuitätsverhältniss der bezüglichen Venenwände mit jenen der Blutleiter zurückführbar sind. So ist z. B. in einem von Pitha²⁾ beschriebenen Falle eine tödtlich gewordene Entzündung der Schädelblutleiter eingetreten in Folge einer auf der linken Seite des Kopfes in der Nähe des *Foramen mastoideum* gesetzten Hiebwunde.

b) Das untere Ende der *Vena jugularis interna*.

Von J. Cruveilhier³⁾ ist zuerst die Aufmerksamkeit darauf gelenkt worden, dass die innere Drosselvene vor ihrer, mit etwas verjüngtem Ende knapp nach aussen von der Sternoclaviculär-Articulation, hinter dem Schlüsselbeine geschehenden Zusammenmündung mit der *Subclavia* eine ovale Erweiterung besitze, die von ihm „*Sinus*“ genannt worden ist. Diese Erweiterung ist als *Bulbus inferior* nachmals besonders genau von W. Gruber⁴⁾ zumal in Rücksicht auf die ihr entsprechenden Klappen untersucht worden. Aus vielen diesem Gegenstande gewidmeten Nachforschungen hat es sich ergeben, dass jener *Bulbus* vorzugsweise deutlich und regelmässig nur auf der rechten Seite ausgebildet ist, indessen er links häufig

1) H. Luschka. Die Nerven in der harten Hirnhaut. Tübingen 1850. S. 18, und J. Mueller's Archiv. 1856. „Die sensitiven Zweige des Zungenfleischnerven“.

2) Österreichische Zeitschrift für praktische Heilkunde. V. 1. 1859.

3) Traité d'anatomie descriptive. Trois. édit. Tome III. p. 29.

4) Vier Abhandlungen aus dem Gebiete der medicinisch-chirurgischen Anatomie. Berlin 1849. S. 31.

gänzlich vermisst, oder im Falle seines Vorhandenseins doch nur höchst selten von gleichem Grade der Ausbildung wie rechts gefunden wird.

Im Innern jenes *Bulbus* finden sich zwei, seinen lateralen Ausbuchtungen entsprechende, breithalbmondförmige, mit ihren Enden zusammenfliessende Klappen, deren freie, dem Herzen zugekehrte Ränder eine knopflochähnliche Lücke begrenzen, welche mit dem bezüglichen geraden Durchmesser der Vene coincidirt. Höchst selten ist nur eine einzige Klappe vorhanden, welche dann meist an dem in die Lichtung des Gefässes hereintretenden Winkel angebracht ist, welcher den Zusammenstoss der *Vena jug. int.* und *subclavia* bezeichnet.

Ihrer Structur nach stimmen diese Klappen vollkommen mit allen übrigen des Venensystemes überein und ich muss namentlich im Widerspruche mit F. Wahlgren¹⁾, welcher in grösseren Venenklappen organische Muskelfasern gefunden haben will, bemerken, dass diese in jenen grössten aller Venenklappen entschieden gänzlich fehlen und von mir auch sonst nirgends in den Klappen des Venensystems angetroffen worden sind. Nach Dowel²⁾, welcher, anstatt sich mit der Textur der menschlichen Venenklappen zu befassen, einschlägige Untersuchungen über die Venenklappen des Schafes mittheilt, enthalten die letzteren unverkennbare musculöse Faserzellen. Doch wurde die Bemerkung für nöthig erachtet: „*they are very conspicuous in some specimens, and very indistinct in others; whilst in others they cannot be discovered at all*“.

Über das Verhältniss des Gewebes der Klappe zu dem der Venenwand erhält man ungemein belehrende Ansichten an mit dem Rasirmesser hergestellten Durchschnitten vorher aufgeblasener und getrockneter Venen. Unter Anwendung verschiedener Reagentien überzeugt man sich leicht, dass die Klappen ihrer fundamentalen Gestaltung nach Duplicaturen der inneren Gefässhaut sind, zwischen deren beiden am freien Rande ineinander übergehenden Blättern ein sehr mächtiges, von Zellen reichlich durchsetztes Fasergerüste gewissermassen ein Parenchym darstellend, eingetragen ist. Die Elemente dieses Gerüstes sind theils isolirte, theils zu Netzen verschmolzene, breitere elastische Fasern, welche in mächtigen, schon mit freiem Auge wahrnehmbaren Zügen vorzugsweise in querer, aber auch in longitudinaler Richtung verlaufen. Diese Faserung ist in ein reichliches fibrilläres Bindegewebe eingelagert, das zum Theil stärkere Bündel darstellt, von welchen manche nach Zusatz von Essigsäure ringförmig und spiralgig umwickelt erscheinen. Besonders bemerkenswerth ist die grosse Anzahl von Zellen, welche in das Fasergerüste eingestreut sind. Sie sind länglich-rund, dunkel contourirt und treten nach Zusatz von Essigsäure ausgezeichnet deutlich hervor. Sie sind meist in grösserer oder geringerer Entfernung von einander in Reihen geordnet, welche sowohl in der Breite als Höhe der Klappe verlaufen und so zwischen Bindegewebsfaserzüge eingeschlossen sind, dass eine gewisse Ähnlichkeit mit den durch Essigsäure behandelten Muskel-Faserzügen gesetzt wird, welche ohne Zweifel Wahlgren zu jener irrthümlichen Annahme verleitet hat. Manche jener Zellen sind mit deutlichen Ausläufern versehen, welche mit nachbarlichen ihresgleichen in mehrfache, selbst zur Bildung von Maschenwerken führende Communication treten und höchst wahrscheinlich zur Leitung von Ernährungssaft bestimmt sind. Dies möchte ich daraus entnehmen, dass es mir bis jetzt trotz aller Bemühung nicht gelungen ist, im Gewebe der Venenklappen ein Blut führendes Gefässsystem nachzuweisen.

¹⁾ Vensystemets allmänna anatomi. Lund 1851.

²⁾ Cyclopaedia of anatomy and physiology. Vol. IV. p. 1380. London 1852.

³⁾ Joh. Müller's Archiv für Anatomie etc. S. 79.

c) Die ihr Blut unmittelbar in die innere Drosselader ergießenden Venen.

Kurz nachdem die *Vena jug. interna* am Schädelgrunde zum Vorschein gekommen ist, senkt sich in ihren vorderen Umfang das Ende des *Sinus petrosus inferior* ein. Dieser Blutleiter, welcher in einer Furche zwischen dem Felsenbeine und dem Körper des Hinterhauptsbeines verläuft, geht am vorderen Ende des zerrissenen Loches, durch welches er herabzieht, gewöhnlich in eine, mit ganz selbstständiger Wandung versehene Vene über, die beim Erwachsenen durchschnittlich eine Dicke von 2 Millim. und eine Länge von 6 Millim. besitzt. Dicht vor der Durchtrittsstelle dieses *Sinus* läuft der *N. glossopharyngeus*, hinter ihr der *vagus* und *accessorius Willisii* von besonderen scheidenartigen Fortsätzen der harten Hirnhaut umschlossen, durch den vorderen kleinen Abschnitt des *Foramen lacerum* hindurch und sie sind während dieses Verlaufes von der inneren Drosselader entweder durch den *Processus jugularis spurius* getrennt, oder durch eine diesen ersetzende fibröse Scheidewand.

Ein zweites Gefäß, welches in der Regel und zwar hoch oben in den vorderen Umfang der inneren Drosselader einmündet, ist eine *Vena pharyngea*. Diese nimmt Blut aus dem Gewölbe und aus dem oberen Ende der hinteren Wand des Schlundkopfes auf und verbindet sich sehr häufig mit derjenigen Vene, welche aus dem *Canalis hypoglossi* hervortritt. Diese letztere Ader aber ist es, welche das Blut aus dem *Circellus venosus hypoglossi* ableitet, einem Venengeflechte, das kranzartig den Eingang in den *Canalis hypoglossi* umgibt und daher, wie ich bei einer anderen Gelegenheit auseinandergesetzt habe, unter Umständen einen störenden Druck auf die Wurzel des Zungenfleischnerven auszuüben vermag. Der Venenkranz steht in mehrfacher offener Verbindung mit dem Blutleiter des Hinterhauptsloches. Da dieser letztere nun mit den Wirbelvenen communicirt und diese ihrerseits mit den *Venae occipitales superfic.* in Verbindung stehen, so begreift sich die Möglichkeit einiger Blutentleerung des überfüllten *Circellus venosus hypoglossi* durch die Application von Blutegeln in die obere Nackenregion. In einem vor mir liegenden Hinterhauptsbeine tritt die Abzugsvene des *Circellus hypoglossi* durch eine besondere runde Öffnung der lateralen Wand des *Canalis hypoglossi* in den *Canalis jugularis* ein, um hier in den *Bulbus* der inneren Drosselader einzumünden.

In der Höhe des Zungenbeines senkt sich nicht selten eine zweite Vene des Schlundkopfes, welche neben diesem Organe vertical herabläuft und von Stelle zu Stelle kleinere Zweige aus demselben aufnimmt, in den medialen Umfang der *Vena jug. interna* ein. Dieselbe verbindet sich bisweilen mit der *Vena lingualis* zu einem kurzen, gemeinsamen Stämmchen, das sich mitunter auch in die sogenannte *Vena facialis communis* begibt.

Die sogenannte gemeinschaftliche Antlitzvene ist der bedeutendste Ast der *Jug. interna*. Sie hat eine Länge von 2.5 Cent. und eine durchschnittliche Dicke von 0.9 Centimeter. Ihren Anfang nimmt sie nahe unter dem Winkel der unteren Kinnlade und zieht schief über den *Musc. digastricus*, den *Arcus hypoglossi* und die *Carotis externa* nach aussen bis zum grossen Horne des Zungenbeines herab, um in den medialen Umfang der inneren Drosselader einzumünden. Es hat sich als Regel herausgestellt, dass jener Venenstamm zunächst aus dem Zusammenflusse der ganzen *Vena facialis anterior* und einem anastomotischen Zweige der *Vena fac. posterior* hervorgeht und dass sie nur in seltenen Ausnahmefällen beide Antlitzvenen ganz in sich aufnimmt. Manchmal existirt sogar nur eine durch einen dünnen Zweig vermittelte Anastomose der *Jug. interna* entweder mit der *Vena facialis post.* oder mit der *Vena fac. anterior*

allein, oder zwar durch ein gemeinschaftliches Stämmchen, welches aber aus nur anastomitischen Zweigen der beiden Antlitzvenen hervorgegangen ist.

In die nach dem Obigen nicht mit Recht sogenannte *Vena facialis communis* senken sich nicht selten verschiedene Venen ein. Die *Vena maxillaris interna* begibt sich zu ihr mindestens eben so oft, als sie sich in die hintere Antlitzvene einsenkt. Nicht selten nimmt die *Vena facialis communis* die Zungenvene auf. Diese gelangt übrigens viel häufiger zum Ende der vorderen Antlitzvene. Die letztere Thatsache hat insoferne einiges Interesse, als die *Vena lingualis* die erste Anlage zur Bildung der *Vena facialis anterior* darstellt, welche bei manchen Wirbelthieren, wie Rathke gefunden hat, grösstentheils für die ganze Dauer des Lebens nur als Zungenvene erscheint.

In der grösseren Mehrzahl der Fälle ist es auch die *Vena thyreoidea superior*, welche sich in die gemeinschaftliche Antlitzvene, entweder in den Anfang derselben oder in deren Ende einsenkt. Verhältnissmässig selten fand ich die directe Einmündung dieser Ader in die *Jugularis interna*. Sie nimmt fast regelmässig die *Vena laryngea superior* auf. Die *Vena thyreoidea media*, welche aber auch bisweilen gänzlich fehlt, mündet in der Regel direct in die *Jug. int.* an der unteren Grenze von deren mittlerem Drittel, oder auch weiter unten, seltener weiter oben von dieser Stelle ein. Die *Vena thyreoidea inferior* hat zur inneren Drosselader in der Regel keine unmittelbare Beziehung und gibt übrigens mancherlei Schwankungen in ihrem Verhalten zu erkennen. Sie ist bisweilen nach Art der *Arteria thyreoidea ima* unpaar und bildet einen kurzen, in der Mittellinie der unteren Halsregion herablaufenden Stamm, der sich zur Mitte der linken ungenannten Vene begibt und aus einem über der Luftröhre ausgebreiteten Geflechte hervorgeht, welches mit der beiderseitigen *Vena thyr. media* und *superior* mehrfach anastomosirt. Wenn zwei *Venae thyreoideae inferiores* vorhanden sind, dann laufen ihre Stämme entweder parallel neben der Luftröhre herab und münden beide in die *Vena innominata sinistra* ein, oder sie weichen unten aus einander, indem sich die eine zur *Vena innominata dextra*, die andere zur *Vena innominata sinistra* oder auch in das Ende der bezüglichen inneren Drosselader begibt. Eine seltene Ausnahme ist es, wenn ausser den beiden unteren Schilddrüsenvenen noch eine in der Mittellinie des Halses verlaufende unpaare *Vena thyreoidea ima* vorhanden ist.

2. Die *Vena jugularis externa*.

Diese Ader stellt mit ihren Ästen das oberflächlichere, mit Klappen reichlich versehene Venensystem des Halses dar. Nach der von Joh. Gottl. Walter¹⁾ begründeten Ansicht existirt in der Regel ein kurzer, nur wenige Linien langer und ebenso dicker gemeinschaftlicher Stamm, welcher aus dem Zusammenflusse von drei Hauptästen, aus der *Vena jugularis externa anterior* und *posterior* und der *Vena transversa colli* hervorgehen soll. Wenn sich auch die Häufigkeit eines solchen Vorkommens nicht bezweifeln lässt, so werden wir gleichwohl durch das Zeugniß der Entwicklungsgeschichte und durch die bei fast allen Wirbelthieren bestehenden Verhältnisse zu anderen Anschauungen und Auffassungsweisen hingedrängt.

Die sogenannte *Vena jugularis externa posterior* der Autoren erweist sich nämlich selbst als der Stamm für jenes oberflächliche Venensystem, in welchen sich Äste in wechselnder

1) *Observationes anatomicae*, Berolini 1775. Cap. IV. „De venis capitis et colli.“

Anzahl und an verschiedenen Stellen einsenken. Die sichersten Anhaltspunkte für die Richtigkeit dieser Betrachtung gewinnt man durch die Wahrnehmung solcher Ausnahmefälle beim Menschen, welche sich unmittelbar an die gesetzmässigen Typen des Thierreiches anschliessen. Es treten nämlich bisweilen die *Vena facialis anterior* und *posterior* unter spitzem Winkel in der Höhe des Schlundkopfes zu einem gemeinsamen Stamme zusammen, welcher, die *Vena jugularis externa post.* darstellend (Taf. II. Fig. 1), über den Kopfnicker herabläuft und in der Nähe ihres unteren Endes die *Vena transversa colli* von hinten und die sogenannte *Vena jug. externa ant.* von vorne aufnimmt. Ganz ähnlich wie bei den meisten Säugern steht hier nur die *Vena facialis post.* durch einen dünnen, bald über, bald unter dem hinteren Bauche des *Digastricus* herablaufenden Zweig, welcher die sogenannte *Vena facialis communis* repräsentirt, mit der inneren Drosselader in Communication. In den gewöhnlichen Fällen findet von diesem beim Menschen nur ausnahmsweisen Typus die Abweichung statt, dass sich die *Vena fac. anterior* nicht zur äusseren Drosselader begibt, sondern mit jenem anastomotischen Zweig der hinteren Antlitzvene zu der in die *Jug. interna* einmündenden *Vena facialis communis* sich verbindet.

Nach der fast allgemein verbreiteten Ansicht¹⁾ erscheint es als Regel, dass die *Vena jug. externa posterior* hinter dem äusseren Ohre, zunächst aus der Vereinigung von *Venae occipit.* und *auriculares post.* entsteht und gewöhnlich nur durch einen dünneren oder dickeren Zweig mit der hinteren Antlitzvene communicirt. Eine solche Anordnung ist aber, wie ich aus zahlreichen Zergliederungen weiss, nur ausnahmsweise vorhanden. In der überwiegenden Mehrzahl der Fälle beginnt die *Vena jug. externa post.* vor dem äusseren Ohre, d. h. sie ist der Hauptsache nach eine unmittelbare Fortsetzung der hinteren Antlitzvene, welche also nicht blos der Analogie nach, wie Rathke sagt, der äusseren Drosselvene angehört, sondern factisch deren wichtigsten Ursprung ausmacht. Die *Vena facialis posterior* geht ihrerseits zunächst aus der Vereinigung der *Vena temporalis superficialis* und *media* hervor und steigt vor dem äusseren Ohre durch die Substanz der *Parotis* meist hinter, seltener vor der *Art. temporalis superf.* über die Wurzel des Jochbogens herab, und nimmt während dieses Verlaufes *Rami masseterici* und *auriculares anteriores* auf. Die *Vena maxillaris interna* verbindet sich bald mit ihr, bald geht sie in die *Vena facialis communis*.

In der Gegend des Winkels der unteren Kinnlade, gewöhnlich unmittelbar unter demselben entsendet der Stamm der hinteren Antlitzvene einen medianwärts meist fast horizontal verlaufenden, eine Anastomose mit dem Ende der *Vena facialis anterior* vermittelnden Zweig, (Taf. II. Fig. 3 d), welcher mit dieser die sogenannte *Vena facialis communis* darstellt. Nur ausnahmsweise senkt sich dieser anastomotische Zweig unmittelbar in die innere Drosselader ein. Fast regelmässig durchsetzt er den unter dem Winkel der unteren Kinnlade herabragenden Abschnitt der Ohrspeicheldrüse und wird daher bei Volumens-Zunahme dieses Organes noch vielmehr in den Bereich desselben hereingezogen, so dass er bei Ausrottung²⁾ desselben einer Verletzung nicht entgehen kann. Nur diese Anastomose kann es sein, über welche Cruveilhier³⁾ folgendermaassen berichtet: „*Dans tous les cas la veine jugulaire externe communique soit directement, soit indirectement avec la jugulaire interne dans l'épaisseur de la parotide par une branche quelquefois très considérable*“.

1) C. Fr. Th. Krause, Handbuch der menschlichen Anatomie. Hannover 1843. 2. Aufl. S. 921 und Fr. Arnold, Handbuch der Anatomie des Menschen, Bd. II. I. S. 583.

2) M. A. Bérard, Maladies de la glande parotide. Paris 1841. p. 246.

3) A. a. O. III. p. 27

Die, eine directe Fortsetzung der hinteren Antlitzvene darstellende *Vena jugularis externa* läuft vom oberen Ende des inneren Kopfnickerrandes aus fast vertical über den mittleren Abschnitt dieses Muskels, um mit ihrem Ende dessen seitlichem Rand entlang bald vor, bald hinter dem *Musc. omohyoideus* herab zu steigen, gedeckt von der Haut, von der Binde des Halses und von dem *Musc. latissimus colli*. Das untere Ende des Gefäßes ist gewöhnlich augenfällig medianwärts gekrümmt, so dass es nicht selten erst hinter der Clavicula-Insertion des Kopfnickers seine Einmündung in die *Vena subclavia* erfährt. Dies ist besonders dann der Fall, wenn die Einmündung in den von der *Vena jug. int.* und *subclavia* erzeugten Winkel geschieht. Viel gewöhnlicher findet jedoch die Einmündung 4—6 Linien nach aussen von dem lateralen Rande der Schlüsselbein-Insertion des Kopfnickers statt.

Eine besondere Erwähnung verdient, mit Rücksicht auf den Verlauf dieser Ader in die Tiefe, das Verhältniss der *Fascia colli* in der Oberschlüsselbeingrube. Das oberflächliche Blatt derselben gewinnt in dem Winkel, welcher durch das Schlüsselbein im Vereine mit dem lateralen Rande des Kopfnickers erzeugt wird, eine auffallende Festigkeit. Derjenige Theil der Binde, welcher mit jenem Muskelrande in unmittelbare Beziehung tritt, springt mit ihm über das Niveau der nächsten Umgebung hervor, während der übrige laxere Abschnitt der Binde tiefer in jene Grube zurücksinkt. So kommt es denn, wie C. Dittel¹⁾ richtig bemerkt, wenigstens nicht selten zur Ausprägung einer Art von sichelförmigem, mit dem sogenannten *Processus falciformis* der Schenkelgrube vergleichbarem, fibrösem Rande, dessen unteres Horn die Stelle der Einmündung der *Vena jug. externa* in die *Vena subclavia* einigermaassen überdeckt. Auf das Verhalten der *Jug. externa* bei excessiver Ausbreitung des Schlüsselbeinansatzes des *Musc. cucullaris* hat W. Gruber²⁾ aufmerksam gemacht. In denjenigen Fällen, in welchen dieser Muskel $1\frac{1}{2}$ —2 Zoll über die Regel nach vorn an das Schlüsselbein sich inserirte, befand sich unmittelbar über der *Clavicula* in demselben eine quer-ovale, mit einem zum Theil sehnigen Rande versehene Öffnung, welche dem Durchtritte der *Vena jug. externa* und der *Nervi supraclaviculares* gedient hat.

Während ihres Verlaufes senken sich in die *Vena jug. externa* folgende Äste ein:

a) Die *Vena auricularis posterior*. Sie entspricht im Wesentlichen der Arterie gleichen Namens, nimmt oberflächliche Hinterhauptsvenen und Venen des äusseren Ohres, bisweilen auch das *Emissarium mastoideum* auf. Sie läuft über den *Processus mastoid.*, d. h. über die Insertion des Kopfnickers schief zum inneren Rande dieses Muskels herab und senkt sich in einiger Entfernung unter dem Ohrläppchen in den hinteren Umfang der *Vena jug. externa* ein. Oberflächliche und tiefe Hinterhauptsvenen vereinigen sich nicht selten zu einem stärkeren Gefässe, welches hinter der *Jug. externa* mitunter sehr weit herabläuft, um mit ihr unter spitzem Winkel zusammenzuströmen.

b) Die *Vena cervicalis superficialis*. Dieselbe geht aus Zweigen hervor, die zum Theil vom Nacken herabsteigen, zum Theil, vom *Cucullaris* gedeckt, von der Schultergegend kommen. Der Stamm des Gefäßes verläuft ganz oberflächlich, parallel mit dem Schlüsselbeine, 3—4 Querfingerbreiten über diesem Knochen und senkt sich auch in dieser Höhe in den hinteren Umfang der *Vena jug. ext.* ein. Ganz gewöhnlich nimmt diese Ader unmittelbar vor ihrer Einmündung noch eine der *Art. cervicalis ascendens* entsprechende Vene auf, welche

1) Die Topographie der Halsfaszien. Wien 1857. S. 6

2) Vier Abhandlungen etc. S. 17.

als „*Vena vertebralis externa anterior*“ bezeichnet zu werden pflegt. Sie nimmt mit vielen kleinen Zweigen Blut durch die *Foramina intervertebralia* aus dem Nackentheile des Wirbelcanales, so wie aus den Venengeflechten am vorderen Umfange der Halswirbelsäule auf.

c) Die *Vena transversa colli*. Der Stamm dieses Gefässes verläuft hart über dem Schlüsselbeine und erzeugt in vielen Fällen mit dem Stamme der vorigen Ader eine *Ansa*, welche oberflächliche Nackenvenen, mitunter auch die *Vena vertebralis externa ant.* aufnimmt. In den meisten Fällen mündet sie hinter dem Schlüsselbeine in den hinteren Umfang des Endes der *Vena jug. externa*; nicht selten tritt sie aber auch nach aussen von dieser, gesondert oder nach vorheriger Vereinigung mit der *Vena transversa scapulae*, in die Schlüsselbeinvene ein.

d) Die *Vena subcutanea colli* (Taf. II, Fig. 3 h). Sie ist der bedeutendste, in seinem Verhalten eigenthümlichste Ast der äusseren Drosselader. Das Gefäss figurirt in den anatomischen Schriften unter sehr verschiedenen Namen. Die hier adoptirte, für die in Rede stehende Vene in sofern ganz geeignete Bezeichnung, als dieselbe die einzige ist, welche in grösserer Strecke unmittelbar unter der Haut des Halses verläuft, ist von S. Th. Sömmerring¹⁾ gewählt worden. Breschet²⁾ führte dieses Gefäss als *Vena mediana colli* auf. Andere nennen es *Vena jugularis media*. Die Meisten belieben dasselbe nach dem Vorgange von G. Lauth *Vena jugularis externa anterior* zu heissen.

In regelmässigen Fällen der Anordnung lassen sich an dieser Ader zwei, durch ihren Verlauf und ihre Lage verschiedene Abschnitte, ein verticaler und ein horizontaler unterscheiden. Der verticale Theil des Gefässes zieht in wechselnder Entfernung von der Mittellinie des Halses auf dem Brustzungenbein-Muskel ganz subcutan zum Ende des inneren Randes vom Kopfnicker herab. Bisweilen sind die bezüglichlichen Gefässabschnitte beider Seiten einander in dem Grade genähert, dass sie sich wenigstens stellenweise mit ihrem inneren Umfange unmittelbar berühren. Das Gefäss beginnt unter dem Kinne mit Mentalvenen und steht meist durch einen mehr lateral verlaufenden, häufig genau dem inneren Kopfnicker-rande folgenden stärkeren Zweig (Fig. 3 i) mit der vorderen Antlitzvene, bisweilen auch mit deren *Ramus anastomoticus cum v. fac. post.* in Communication. Diese Thatsache ist desshalb von grossem Interesse, weil sie es verständlich macht wie es kömmt, dass ausnahmsweise die ganze *Vena facialis anterior* sich in die *Subcutanea colli* fortsetzt. Ein im höchsten Grade seltsames, ohne Zweifel in der frühzeitigen Verödung gesetzmässiger Verbindungen begründetes Vorkommen besteht in dem völligen Übergange der beiden Antlitzvenen in die *Vena subcutanea colli* (Taf. II, Fig. 2), wobei die *Vena facialis communis* nur durch eine Anastomose ausgedrückt ist, welche zwischen der inneren Drosselader und dem Ende der *Vena facialis post.* stattfindet. Es lässt sich diese Anordnung wohl nicht anders als so erklären, dass die ursprüngliche Fortsetzung der hinteren Antlitzvene in die äussere Drosselader schon im frühen Fötalleben geschwunden, dagegen die Verbindung der *Vena subcutanea colli* mit der vorderen Antlitzvene zu einer excessiven Ausbildung gediehen ist. Die in solchen Fällen verhältnissmässig dünne *Vena jug. externa* ging in einer hierher gehörigen Wahrnehmung hauptsächlich aus dem *Emissarium mastoideum* hervor. Aus der gewöhnlichen Art der Verbindung der *Vena subcutanea colli* mit der vorderen Antlitzvene ergibt es sich, dass auch aus dieser Ader einiges Blut in die äussere Drosselvene abgeleitet wird, während es dagegen bei den Säugethieren

1) Sömmerring. Vom Baue des menschlichen Körpers. IV. Theil. Frankfurt a. M. 1792. S. 393.

2) M. G. Breschet. Recherches anatomiques sur le système veineux. Paris 1829.

die Regel ist, dass alles Blut und zwar auf kürzerem Wege aus der vorderen Gesichtsvene in die äussere Drosselader gelangt, was, wie oben bemerkt worden ist, beim Menschen auch, jedoch als eine nur seltene Ausnahme, vorkommt.

In der Höhe des oberen Umfanges vom Sternalende des Schlüsselbeines ändert die *Vena subcutanea colli* in den meisten Fällen plötzlich unter einem fast rechten Winkel ihren Lauf, indem sie nunmehr eine fast horizontale Richtung annimmt, aber zugleich auch tiefer zu liegen kommt. Sie geht nämlich hart über dem Schlüsselbeine, mitunter sogar von vorne her durch diesen Knochen einigermaassen gedeckt, hinter den Insertionen des Kopfnickers hinweg und vor den *M. M. sternohyoid.* und *sternothyreoideus*, so wie vor dem Ende der inneren Drosselader vorbei, um in den medialen Umfang des Endes der *Vena jug. externa* einzutreten, oder auch mit diesem zu einem gemeinsamen kurzen Stämmchen zusammenzufliessen. Häufig senkt sie sich aber auch gesondert nach aussen oder innen von der Einmündungsstelle der *Vena jug. externa* in die *Subclavia* ein. Eine Seltenheit¹⁾ dagegen ist es, wenn sie ihre Einmündung in das Ende der *Jug. interna* erfährt.

Derjenige Abschnitt der *Vena subcutanea colli*, welcher in der bezeichneten Weise horizontal verläuft (Taf. II, Fig. 3 k) wird von einigen Schriftstellern mit einem eigenen Namen belegt. Er wird von Manchen als *Vena mediana colli* aufgeführt. Eine solche Bezeichnung ist aber nicht allein ganz widersinnig, sondern kann auch desshalb zu Missverständnissen Veranlassung geben, weil von verschiedenen Autoren der verticale Abschnitt der subcutanen Vene des Halses so genannt wird. Breschet, der sich in der Terminologie auch in Betreff anderer Venen nicht consequent bleibt, nennt das horizontale Stück bald *Vena jugularis anterior horizontalis*, bald *Vena transversalis cervicalis antica*. Wie sehr ungeeignet eine besondere Benennung für den unteren, nur seinen Lauf ändernden Abschnitt der *Vena subcutanea colli* ist, geht unter anderem schon daraus hervor, dass die Ader ihre Richtung nicht immer so augenfällig und plötzlich ändert, sondern bisweilen ganz allmählich und in wechselndem Grade in schiefer Richtung hinter den Kopfnicker zur Stelle ihrer Einmündung herabsteigt.

Die beiden *Venae subcutaneae colli* gehen mancherlei nicht ganz constante Verbindungen ein, sowohl unter sich, als auch mit nachbarlichen Gefässen.

Unter sich werden die beiden subcutanen Halsvenen an der Stelle der Abänderung ihres verticalen Laufes in den horizontalen durch ein kurzes, federkiel dickes, der Breite der *Incisura semilunaris superior* des Brustbeines gleichkommendes, meist unmittelbar über dem *Lig. interclaviculare* gelagertes Gefässstück in der Mehrzahl der Fälle in Verbindung gesetzt. Dieser *Ramus communicans* (Taf. II, Fig. 3 l), den Walter „*Vena subcutanea inferior*“ nennt, und welchen Einige als *Arcus venosus anterior* bezeichnen, während sie dagegen den horizontal verlaufenden Abschnitt der *Vena subcutanea colli* mit dem Namen *Arcus venosus medius* ganz unpassend belegen, ist zwischen zwei dichtere Zellstofflamellen eingeschoben, in welche sich das vordere Blatt der Halsfascie an der oberen Grenze der Handhabe des Brustbeines zerspaltet. In diesen kurzen, queren Verbindungsast begeben sich von verschiedenen Regionen herkommende Venenzweige. Am regelmässigsten ist ein Gefäss, welches aus einem an der Aussenseite der Handhabe des Brustbeines liegenden Netze hervorgeht und seinen Verlauf bald über, bald unter dem *Lig. interclaviculare* nimmt. Im letzteren Falle befindet sich

¹⁾ Breschet a. a. O. Livr. I. Pl. I. (17).

zwischen dem Bande und dem halbmondförmigen Ausschnitte der Handhabe des Brustbeines eine rundliche Lücke, welche seitlich nicht selten von besonderen, vertical gestellten Bändchen begrenzt wird. Bisweilen treten zur Erzeugung jenes kurzen Stämmchens drei stärkere Venenzweige zusammen, von welchen der eine in der Mittellinie des Handgriffes emporsteigt, von den beiden anderen jeder über und entlang der vorderen Fläche des Schlüsselbeines verläuft. An der hinteren Fläche der Handhabe steigt in der Mittellinie desselben öfters eine Vene in die Höhe, welche theils aus *Venae thymicae* und *mediastinales anteriores*, theils aus Verbindungszweigen mit den *Venae mammae internae* hervorgeht. Dieselbe tritt mitunter durch die Faserung des *Lig. interclaviculare* hindurch, wobei dieses Band dann eine Art von Duplicität in der Weise zeigt, dass es in eine vordere stärkere und in eine hintere schwächere Schichte zerfallen erscheint. Ein selteneres, für den Wundarzt jedoch beachtenswerthes Vorkommen ist es, wenn in jenen *Ramus communicans* sich von oben her eine Vene einsenkt, die genau in der Mittellinie des Halses zwischen den beiden legitimen subcutanen Venen herabsteigt und mit diesen durch seitliche Zweige in Verbindung tritt. Eine solche echte *Vena mediana colli* löst sich an ihrem unteren Ende bisweilen auch in Zweige auf, die mit Schilddrüsen-Venen communiciren. Ausser der unteren queren Anastomose, besteht in manchen Fällen auch weiter oben, gewöhnlich nahe unter dem Zungenbeine, eine Verbindung, welche bald mehr in die Quere, bald mehr in schiefer Richtung verläuft.

Von den Verbindungen der subcutanen Halsvenen mit nachbarlichen Gefässen sind diejenigen die wichtigsten, welche mit der äusseren Drosselader durch Äste geschehen, die über den Kopfnicker in schiefer Richtung verlaufen, durch die Haut hindurch meist schon sichtbar sind und mitunter ein sehr complicirtes Bild in der Anordnung der Halsvenen begründen, indem sie nicht selten wieder unter einander plexusartig verbunden sind. Sehr häufig findet man überdies einen starken Verbindungsast zwischen der *Vena mammae interna* und dem Ende des verticalen Abschnittes der *Vena subcutanea colli*, nämlich ein Gefäss, welches die Bündel des *Musc. pectoralis major* durchbricht, an der inneren Seite des Sternoclavicular-Gelenkes emporsteigt und theils mit dem *Plexus sternalis anterior*, theils mit einem Venengeflechte in Verbindung steht, welches auf dem *Musc. subclavius* liegt und durch einen starken Ast mit der *Vena subclavia* da anastomosirt, wo diese am oberen Rande des *Musc. pect. minor* zum Vorscheine kommt. In das Ende des horizontalen Abschnittes der *Vena subcutanea colli* mündet bisweilen eine neben dem äusseren Rande des Kopfnickers in die Tiefe der Oberschlüsselbeingrube hereintretende *Vena thoracica externa*, welche sich aus der Gegend der Brustwarze über die *Clavicula* nach aufwärts begibt. Erwähnungswerth sind schliesslich noch diejenigen Verbindungen, welche fast regelmässig mit den Schilddrüsen-Venen stattfinden. Unter diesen verdient besonders eine, nicht selten vorkommende beachtet zu werden. Sie besteht darin, dass eine vom Kopfnicker gedeckte Vene vertical herabsteigt und die *Vena thyreoidea superior* mit dem horizontalen Segmente der *Vena subcutanea colli* in Communication setzt. Diese Ader könnte unter Umständen bei der Tenotomie des Kopfnickers getroffen werden.

III. Die Vena vertebralis.

Die Wirbelvene, welche im Wesentlichen nur dem Cervicaltheile der gleichnamigen Arterie entspricht, und die *Vena cervicalis profunda*, die auch wohl *Vena vertebralis externa*

genannt wird, bilden eine Gesamtheit, die sich nicht allein durch ähnliche Beziehungen beider Gefässe zur Nackenwirbelsäule und zum Kopfe, sondern auch dadurch bekrundet, dass beide Adern zu einem gemeinsamen kurzen Stamme zusammenfliessen, der zwischen dem Querfortsatze des siebenten Hals- und des ersten Brustwirbels hindurchtritt, hinter der *Arteria subclavia* herabzieht und seine Einmündung gewöhnlich in die *Vena brachio-cephalica*, seltener in die Schlüsselbeinvene gewinnt. Es ist eine sehr merkwürdige, jedoch nicht selten vorkommende Ausnahme, das anstatt jenes kurzen ein sehr langer gemeinschaftlicher Venenstamm besteht, welcher mit einer *Ansa* beginnt, deren einer Schenkel, der *Vena vertebralis* entsprechend, über den seitlichen Theil des hinteren Bogens vom Atlas und durch das *Foramen transversarium* dieses Wirbels verläuft, der andere dagegen neben den Dornfortsätzen der drei oberen Nackenwirbel herabsteigt, um mit dem vorigen unter spitzem Winkel zum gemeinsamen Stamme zusammenzuströmen. Dieser nimmt während seines Verlaufes hinter den Gelenkfortsätzen das Blut aus den *Sinus* des Canales und aus den äusseren Geflechten der Halswirbelsäule auf und entspricht der Hauptsache nach der *Vena cervicalis profunda*.

In gewöhnlichen Fällen nimmt die *Vena cervicalis profunda*, welche neben der Arterie dieses Namens auf dem *Musc. semispinalis cervicis* liegt, in der oberen Nackenregion die tiefen Hinterhauptvenen und meist auch diejenige Vene auf, welche Blut durch das *Foramen mastoid.* ableitet, tritt zwischen dem *Musc. obliq. capit. superior, inferior* und *rectus capit. post. major*, während sie über dem hinteren Bogen des Atlas mehrfache Anastomosen mit dem *Sin. for. occipit.* eingeht, in die Tiefe und empfängt in ihrem weiteren Verlaufe zahlreiche Zweige aus den Nackenmuskeln und aus einem Geflechte, welches die Bögen und die Dornfortsätze der Halswirbel umspinnt, so wie sie ihrerseits auch viele Anastomosen eingeht mit Zweigen der Wirbelvene.

Die *Vena vertebralis* nimmt über dem hinteren Bogen des Atlas mit zwei Hauptästen ihren eigentlichen Anfang. Der eine empfängt Blut aus dem *Sinus foraminis occipit.* so wie meist auch aus dem *Foramen condyloid. posticum* und folgt dem Laufe der horizontal liegenden Flexur der *Arteria vertebralis* bis zum obersten *Foramen transversarium*. Der zweite Ast ist nicht ganz regelmässig vorhanden. Er stellt eine Anastomose mit dem hinteren Umfange der *Vena jug. int.* dar, in welche er unmittelbar unter dem *Foramen jugulare* einmündet. Diese Einrichtung erscheint gewissermaassen als letzte Andeutung jenes bei manchen Säugethieren (z. B. dem Hunde) regelmässig bestehenden Verhältnisses, bei welchen die *Vena vertebralis* das aus dem *Sinus cavernosus* und *petrosus inferior* hervorgehende, durch das *Foramen jugulare* austretende Gefäss darstellt, mit welchem dann unterhalb jener Öffnung die hier jedoch nur sehr dünne *Vena jug. int.* anastomosirt.

Während ihres Verlaufes durch die *Foramina transversaria* bewahrt die *Vena vertebralis* nur selten in ihrer ganzen Länge die Form eines wirklichen Venenstammes; meist löst sie sich in ein Geflecht auf, welches einerseits die *Arteria vertebralis* umspinnt, andererseits mit zahllosen Zweigen Blut durch die *Foramina intervertebralia* aus den *Sinus* der Halswirbelsäule, aber auch aus den *Plexus venosi* aufnimmt, welche die Aussenseite der Wirbelsäule umgeben.

Durch die vielfache Verbindung der *Vena vertebralis* mit den Blutleitern des Wirbelcanales und mit dem *Sinus for. occipit.* steht diese Ader in einer nahen Beziehung zur Ableitung des Blutes auch aus der Schädelhöhle, was besonders klar aus der Thatsache erkannt wird, dass man von ihr aus alle *Sinus durae matris* künstlich zu injiciren im Stande ist. Indem

diese Vene eine vor Druck sehr geschützte Lage hat, so begreift sich leicht, dass beim Erhängen der durch sie vermittelte Abfluss des Blutes aus der Schädelhöhle nicht wesentlich beeinträchtigt, während derselbe durch die Compression der am vorderen Umfange des Halses befindlichen, den Rückfluss des Blutes aus dem Gesichte und von der Aussenseite des Hirnschädels bewerkstelligenden Venen im hohen Grade gestört wird. Damit steht die vielfach gemachte Beobachtung im Einklange, dass an Leichen Erhängter eine bedeutende Hyperämie der äusseren Kopfbedeckungen vorhanden sein kann, während das Hirn und seine Häute keine entsprechende Blutfülle, mitunter sogar eine auffallende Blässe zu erkennen geben.

ERKLÄRUNG DER ABBILDUNGEN.

TAFEL I.

- Fig. 1. Rechtes Schläfenbein eines vierzigjährigen Mannes. Hinter dem *Processus articularis posterior* a) befindet sich ein auffallend weites *Foramen jugulare spurium* b).
- Fig. 2. Rechtes Schläfenbein eines *Macacus Cynomolgus*. Der *Proc. artie. post.* ist a) abgetragen worden, um das bei diesem Thiere sehr tief und knapp vor dem äusseren Gehörgange gelegenen *Foramen jugulare spurium* b) zeigen zu können.
- Fig. 3. Rechtes Schläfenbein eines Metzgerhundes. Der *Proc. artie. post.* a) ist schnabelartig in die Länge gezogen und das *Foramen jug. spurium* mündet in der Richtung nach unten aus.
- Fig. 4. Rechtes Schläfenbein vom Kalbe. Hinter der Basis des stark ausgeprägten *Processus artie. post.* a) befindet sich das kolossale *Foramen jug. spurium* b).

TAFEL II.

- Fig. 1. Die *Vena jug. externa* a) ist auffallend stark, im Einklange damit, dass dieselbe, gleich wie bei den meisten Säugern, aus dem Zusammenflusse der vorderen b) und der hinteren c) Antlitzvene hervorgeht. Aus der *Vena facialis post.* geht ein dünner Zweig d) hinter dem *Musc. digastric.* herab, um die Communication mit der *Vena jug. interna* zu vermitteln. Eine sogenannte *Vena facialis communis* hat in diesem Falle gänzlich gefehlt. Die *Vena subcutanea colli* e) verbindet sich auch hier, wie fast immer, durch einen starken Zweig f) mit der *Vena facialis anterior*.
- Fig. 2. Die *Vena jug. ext.* a) ist hier sehr klein und nimmt hauptsächlich nur das Blut aus dem *Foramen mastoid.* auf. Die *Vena subcutanea colli* b) dagegen ist um so bedeutender, da sie in ganz anomaler Weise durch ihren lateralen Verbindungsast die beiden Antlitzvenen aufnimmt. Das Ende der *Vena fac. ant.* geht durch einen starken Zweig c) eine Communication ein mit der *Vena jug. interna*.
- Fig. 3. Zeigt die am gewöhnlichsten vorkommende Anordnung der Halsvenen. Die *Vena jug. externa* a), welche ihren hauptsächlichsten Anfang vor dem äusseren Ohre nimmt, d. h. eine unmittelbare Fortsetzung der *Vena facialis post.* b) ist, nimmt demnächst die hinter dem äusseren Ohre herabsteigende *Vena auric. post.* c) auf und geht nach vorne durch einen verschiedenen starken, sich meist um den Winkel des Unterkiefers herumlegenden Zweig d) eine Verbindung mit der *Vena facialis anterior* e) ein, oder vereinigt sich mit dieser unter einem spitzen Winkel zu einem gemeinsamen, als *Vena fac. communis* f) bezeichneten Stämmchen. In den hinteren Umfang des Endes der *Vena jug. ext.* senkt sich die *Vena transversa colli* g) ein. Die *Vena subcutanea colli* h) verbindet sich durch einen lateralwärts laufenden Zweig i) mit der *Vena facialis anterior* und steht an der Stelle ihres Überganges in das horizontale Stück k) durch eine kurze, quere Anastomose l) mit dem gleichnamigen Gefässe der anderen Seite in Verbindung. Die *Vena cervicalis profunda* m) nimmt tiefe Hinterhauptsvenen, sowie einen Zweig n) aus dem *Foramen mastoideum* auf.

Die *Vena jugularis interna* o) empfängt, soweit sie hier sichtbar ist, ausser der *Vena facialis communis*, welche ihrerseits die *Vena thyroidea superior* p) aufnimmt, auch die *Vena thyroidea media* q). Um das obere Ende der *Jug. interna* schlägt sich in der Richtung nach aussen der äussere Ast r) des *Nerv. access. Willisii* herum. Die *Ansa hypoglossi* umfasst diese Ader am Anfange ihres unteren Drittels. Die in die Bildung der *Ansa* eingehenden centripetalen, von dem zweiten oder dritten Cervicalnerven herrührenden Bogenfasern s) treten am Anfange des *Arcus hypoglossi* in die Scheide dieses Nerven ein, um nach einigem Verlaufe wieder als *Nervus thyreo-hyoideus* abzugehen.

- Fig. 4. Während sich die hintere Antlitzvene a) wie gewöhnlich ohne Weiteres in die äussere Drosselader b) fortsetzt, geht die *Vena facialis anterior* c) ganz in denjenigen Verbindungszweig d) der *Vena subcutanea colli* über, der sonst nur eine untergeordnete Communication mit ihr eingeht. Die *Vena jug. externa* entsendet einen dünnen, die *Vena subcut. colli* dagegen einen dicken Zweig, welche sich zu einem Stämmchen e) verbinden, das die *Vena facialis communis* repräsentirt.

Fig. 1.



Fig. 2.

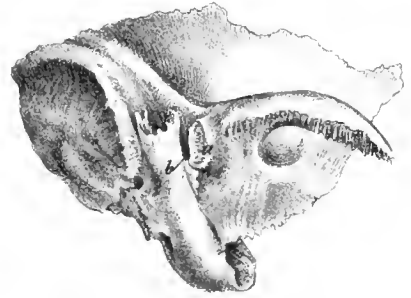


Fig. 3.

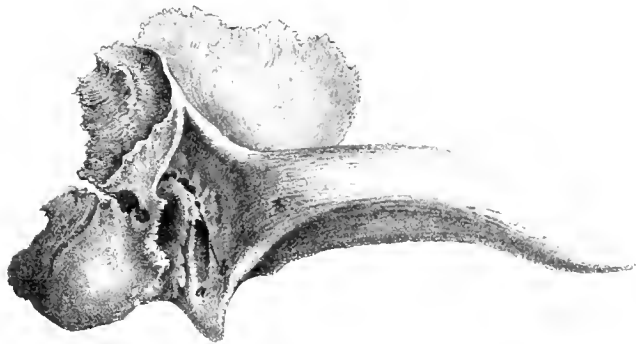
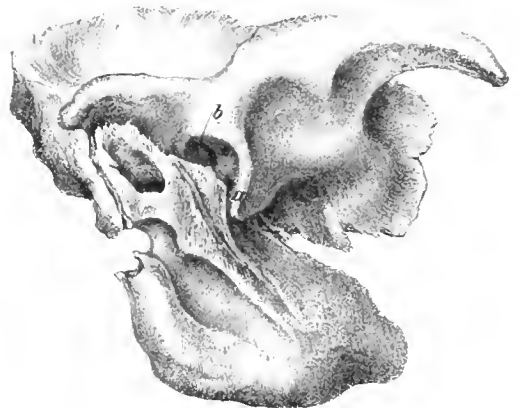


Fig. 4.



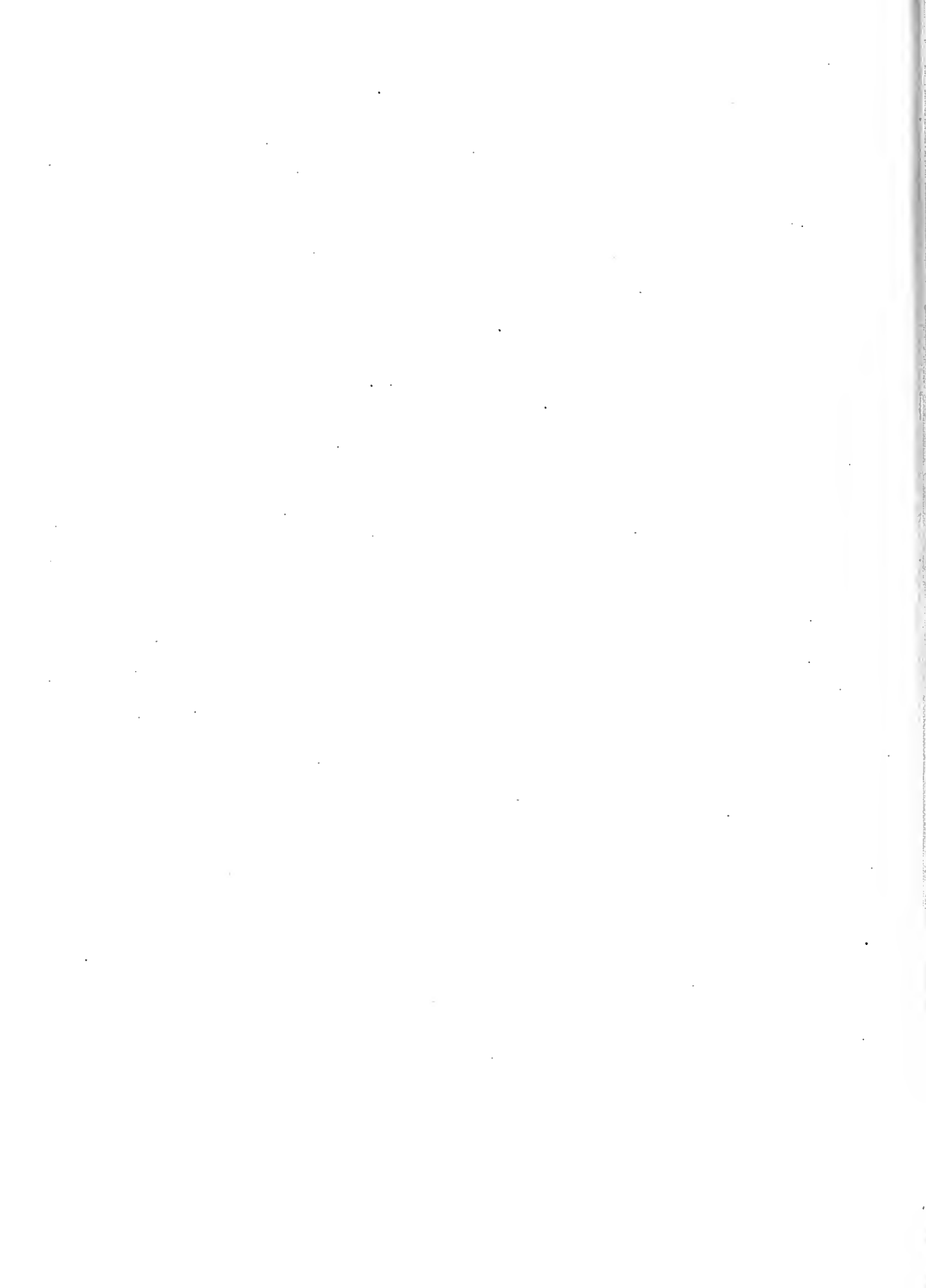




Fig 1



Fig 2

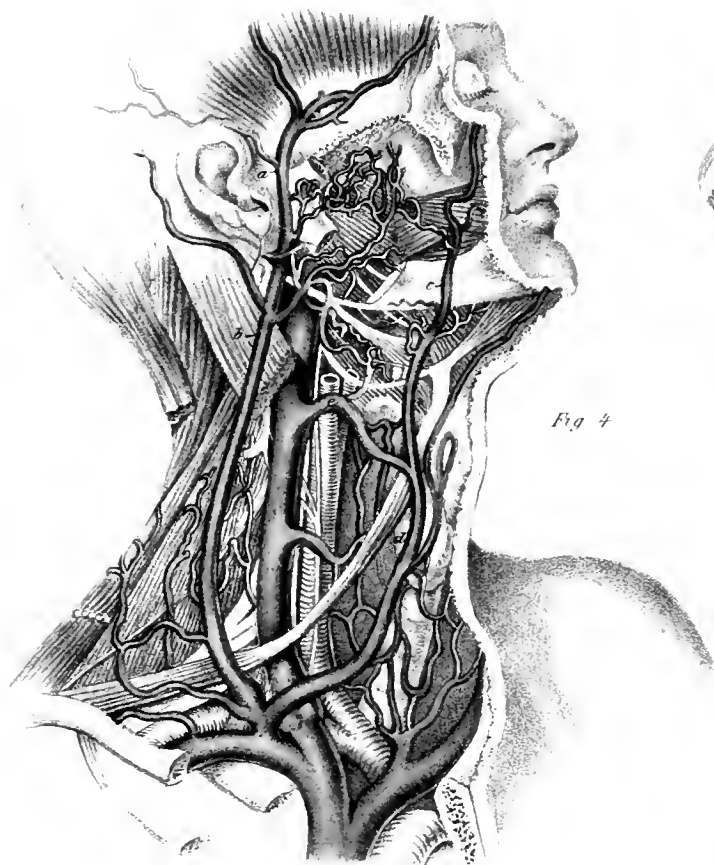


Fig 4

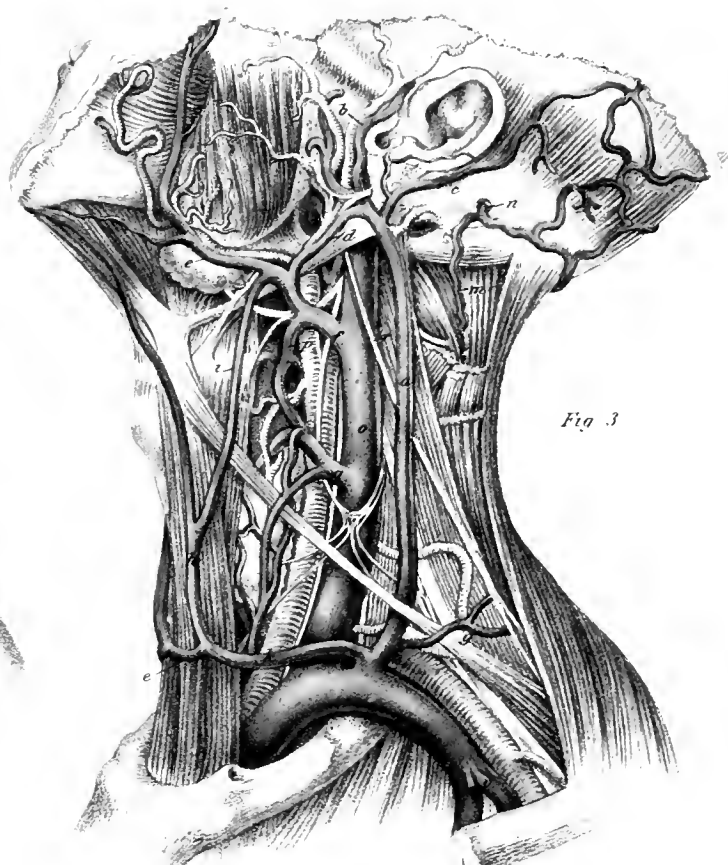


Fig 3



DAS UMGEKEHRTE PROBLEM

DER

BRENNLINIEN.

VON

DR. G. W. STRAUCH.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATH. NATURW. CLASSE AM 17. NOVEMBER 1859.

Einleitung.

§. 1.

Wenn von einer ebenen Curve Lichtstrahlen zurückgeworfen oder gebrochen werden, und diese sich hierauf in einer stetigen Folge von Punkten schneiden; so wird dadurch eine neue Curve erzeugt, welche man Brenmlinie (*linea caustica*) nennt, und zwar Brenmlinie durch Zurückwerfung (*linea catacaustica*) oder Brenmlinie durch Brechung (*linea diacaustica*). Die ursprünglichen Lichtstrahlen können entweder alle mit einander parallel sein, oder alle von einem leuchtenden Punkte herkommen; und eine Brenmlinie kann entweder aus einer Curve bestehen, oder sich in einen einzigen Punkt zusammenziehen.

Der erste Punkt einer Brenmlinie liegt da, wo der erste und zweite der (zurückgeworfenen oder gebrochenen) Lichtstrahlen sich schneiden. Der zweite Punkt einer Brenmlinie liegt sodann da, wo der zweite und dritte der (zurückgeworfenen oder gebrochenen) Lichtstrahlen sich schneiden. Und so fort.

Hierdurch ist veranschaulicht, dass die Brennlilien von sämmtlichen (zurückgeworfenen oder gebrochenen) Lichtstrahlen berührt werden; und weil die Lichtstrahlen nur grade Linien sind, so ist diese Berührung auch nur eine der ersten Ordnung, d. h. die Brennlilien können als die einhüllenden Gränz-Curven sämmtlicher (zurückgeworfener oder gebrochener) Lichtstrahlen definirt werden. So oft aber die eingehüllten Curven nur grade Linien sind, können die einhüllenden Gränz-Curven nicht auch grade Linien sein, d. h. alle Brennlilien, welche sich nicht in einen einzigen Punkt zusammenziehen, können nur krumme Linien sein. (Man vergleiche den Nachtrag §. 25 — 27.)

Die Brennlilien machen also keine eigene Gattung von Curven aus; und es kann jede beliebige Curve als Brenmlinie gelten, so dass man das Problem auch umkehren, und diejenige zurückwerfende oder brechende Curve aufsuchen kann, zu welcher irgend eine vorgeschriebene Curve sich als Katakaustika oder Diakaustika verhält.

§. 2.

Eine Katakaustika ist, wie gesagt, diejenige Brennlinie, welche entsteht, wenn die von einer Curve (Reflexions-Curve genannt) zurückgeworfenen Lichtstrahlen sich in stetig aufeinander folgenden Punkten schneiden. Wenn man nun in den Punkt der Reflexions-Curve, wo ein Lichtstrahl eintrifft und zurückgeworfen wird, die Normale zieht, so heisst der vom einfallenden Lichtstrahle und von der Normale gebildete Winkel der Einfallswinkel, dagegen wird der vom zurückgeworfenen Lichtstrahle und von der Normale gebildete Winkel der Ausfallswinkel genannt. Bei jeder Lichtreflexion besteht aber das Gesetz, dass der Ausfallswinkel gleich ist dem Einfallswinkel; und mit Hülfe dieses Gesetzes kann man zu jeder vorgeschriebenen Reflexions-Curve die zugehörige Katakaustika aufsuchen.

Sind nämlich die ursprünglichen Lichtstrahlen alle mit einander parallel; so richte man das Coordinatensystem der vorgeschriebenen Reflexions-Curve so ein, dass ihre Abscissenaxe mit den Lichtstrahlen ebenfalls parallel ist. Kommen aber die ursprünglichen Lichtstrahlen alle von einem leuchtenden Punkte her; so richte man das Coordinatensystem der vorgeschriebenen Reflexions-Curve so ein, dass ihre Abscissenaxe durch den leuchtenden Punkt geht. Bei solcher Einrichtung sei

$$1) \quad F(x, y) = 0$$

die auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene Gleichung der vorgeschriebenen Reflexions-Curve; und wenn man mit x und y die auf dasselbe System bezogenen Coordinaten der gesuchten Katakaustika bezeichnet, so gelangt man bekanntlich zu folgenden Gleichungen:

$$2) \quad x = x + (u-p) \cdot \frac{dx}{du}$$

und

$$3) \quad y = y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dy}{du}$$

Hier ist p das gebräuchliche Abkürzungszeichen statt $\frac{dy}{dx}$, und u bedeutet die goniometrische Tangente des vom zurückgeworfenen Lichtstrahle und von der Abscissenaxe gebildeten Winkels. Wenn nun die ursprünglichen Lichtstrahlen mit einander parallel sind, so ist

$$4) \quad u = \frac{2 \cdot p}{1-p^2}$$

wenn die ursprünglichen Lichtstrahlen aber von einem leuchtenden Punkte herkommen, so ist

$$5) \quad u = \frac{2 \cdot (x-g) \cdot p - y \cdot (1-p^2)}{2 \cdot y \cdot p + (x-g) \cdot (1-p^2)}$$

wo g die feste Abscisse des leuchtenden Punktes bedeutet.

Wenn man jetzt die der vorgeschriebenen Reflexions-Curve zugehörige Gleichung $F(x, y) = 0$ zweimal differentirt, und sodann die zwei sich ergebenden Differentialgleichungen mit 1), 2), 3) verbindet; so hat man fünf Gleichungen, aus welchen man die vier Bestandtheile $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ eliminiren muss. Dadurch ergibt sich eine zwischen x und y bestehende neue Gleichung

$$6) \quad \delta(x, y) = 0$$

wodurch die gesuchte Katakaustika bestimmt ist; und man erkennt, dass zur Bestimmung einer Katakaustika keine Integration nöthig ist.

§. 3.

Eine Diakaustika ist (§. 1) diejenige Brennlinie, welche entsteht, wenn Lichtstrahlen durch eine Curve (Refractions-Curve genannt) hindurchgehen, und bei ihrem Durchgange so von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt werden, dass sie sich hierauf in stetig aufeinander folgenden Punkten schneiden. Wenn man nun in den Punkt der Refractions-Curve, wo ein Lichtstrahl durchgeht und gebrochen wird, die Normale zieht, und auch die ursprüngliche Richtung des Lichtstrahles verlängert; so heisst der vom eintreffenden Lichtstrahle und von der Normale gebildete Winkel der Einfallswinkel, der vom gebrochenen Lichtstrahle und von der Normale gebildete Winkel heisst der Brechungswinkel, und der von der Verlängerung des ursprünglichen Lichtstrahles und vom gebrochenen Lichtstrahle gebildete Winkel heisst der Ablenkungswinkel. Bei jeder Lichtrefraction besteht aber das Gesetz, dass im ganzen Verlaufe der Refractions-Curve das Verhältniss, in welchem der Sinus des Einfallswinkels und der Sinus des Brechungswinkels zu einander stehen, constant bleibt. Ist also γ der Einfallswinkel, und ω der Brechungswinkel; so muss sich zwischen ihnen, wie sie sich auch immer ändern mögen, die Gleichung

$$7) \quad \frac{\sin \gamma}{\sin \omega} = \lambda$$

stattfinden, wo der Werth des λ , wie gesagt, constant ist, und das Brechungsverhältniss genannt wird.

Mit Hülfe dieses Gesetzes kann man zu jeder vorgeschriebenen Refractions-Curve die zugehörige Diakaustika aufsuchen.

Sind nämlich die ursprünglichen Lichtstrahlen alle mit einander parallel; so richte man das Coordinatensystem der vorgeschriebenen Refractions-Curve so ein, dass ihre Abscissenaxe mit den Lichtstrahlen ebenfalls parallel ist. Kommen aber die ursprünglichen Lichtstrahlen alle von einem leuchtenden Punkte her; so richte man das Coordinatensystem der vorgeschriebenen Refractioncurve so ein, dass ihre Abscissenaxe durch den leuchtenden Punkt geht. Bei solcher Einrichtung sei

$$8) \quad F(x, y) = 0$$

die auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene Gleichung der vorgeschriebenen Refractions-Curve; und wenn man mit x und y die auf dasselbe System bezogenen Coordinaten der gesuchten Diakaustika bezeichnet, so gelangt man bekanntlich zu folgenden Gleichungen:

$$9) \quad x = x + (r + p) \cdot \frac{dx}{dv}$$

und

$$10) \quad y = y - v \cdot (r + p) \cdot \frac{dy}{dv}$$

Hier ist p wiederum das gebräuchliche Abkürzungszeichen statt $\frac{dy}{dx}$, und v bedeutet die goniometrische Tangente des vom gebrochenen Lichtstrahle und von der Abscissenaxe gebildeten Winkels. Wenn nun die ursprünglichen Lichtstrahlen mit einander parallel sind, so ist

$$11) \quad v = - \frac{p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1 + p^2) - 1}}{1 - p \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1 + p^2) - 1}}$$

wenn die ursprünglichen Lichtstrahlen aber von einem leuchtenden Punkte herkommen, so ist

$$12) \quad v = \frac{-((x-g)+y.p).p + \sqrt{\lambda^2 \cdot ((x-g)^2 + y^2) \cdot (1+p^2) - ((x-g)+y.p)^2}}{+((x-g)+y.p)+p \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot ((x-g)^2 + y^2) \cdot (1+p^2) - ((x-g)+y.p)^2}}$$

wo g die feste Abscisse des leuchtenden Punktes bedeutet.

Wenn man jetzt die der vorgeschriebenen Refractions-Curve zugehörige Gleichung $F(x, y) = 0$ zweimal differentiirt, und dann die zwei sich ergebenden Differentialgleichungen mit 8), 9), 10) verbindet; so hat man fünf Gleichungen, aus welchen man die vier Bestandtheile $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ eliminiren muss. Dadurch ergibt sich eine zwischen x und y bestehende neue Gleichung

$$13) \quad \mathfrak{F}(x, y) = 0$$

wodurch die gesuchte Diakaustika bestimmt ist; und man erkennt, dass man auch zur Bestimmung einer Diakaustika keine Integration nöthig hat.

Zusatz. Die diakaustischen Resultate gehen alle, wenn man $\lambda = -1$ setzt, in die katakaustischen über. Gleichung 11) geht nämlich über in

$$v = -\frac{p+p}{1-p^2} = -\frac{2.p}{1-p^2} = -u$$

und ebenso geht Gleichung 12) über in

$$v = \frac{-((x-g)+y.p).p + \sqrt{(y-(x-g).p)^2}}{+((x-g)+y.p)+p \cdot \sqrt{(y-(x-g).p)^2}} = -\frac{2.(x-g).p - y \cdot (1-p^2)}{2.y.p + (x-g) \cdot (1-p^2)} = -u$$

Wenn man also $\lambda = -1$ setzt, so wird $v = -u$, und dabei wird $dv = -du$; und wenn man $-u$ und $-du$ bezüglich statt v und dv in die Gleichungen 9) und 10) setzt, so bekommt man wieder die Gleichungen 2) und 3).

§. 4.

Jetzt kann man das Problem der Brennlinien auch umkehren, d. h. man kann auch die Brennlinien vorschreiben, und die zugehörige Reflexions- oder Refractions-Curve aufsuchen. Wenn nämlich durch die Gleichung

$$14) \quad \mathfrak{F}(x, y) = 0$$

eine bestimmte Curve als Katakaustika oder Diakaustika vorgeschrieben ist, und man die zugehörige Reflexions- oder Refractions-Curve sucht; so hat man weiter nichts zu thun, als statt x und y die betreffenden Ausdrücke in 14) zu substituiren. Dadurch ergibt sich eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung, deren allgemeines Urintegral mit zwei Integrations-Constanten versehen sein muss. Durch ein mit zwei Integrations-Constanten versehenes Urintegral sind aber jedesmal unendlich viele Curven-Schaaren dargestellt. Es ist jedoch, wie später nachgewiesen werden wird, keine einzige von allen diesen Curven so beschaffen, dass sie mehr als einen einzigen Punkt der vorgeschriebenen Brennlinien erzeugen könnte. Deshalb muss man sich noch umschaun, ob von den durch das allgemeine Urintegral dargestellten unendlich vielen Curven-Schaaren auch Gränz-Curven erzeugt werden; und diese sind alsdann die gesuchten Reflexions- oder Refractions-Curven. Die Gränz-Curven selbst sind aber von

zweierlei Art, je nachdem sie mit ihren Erzeugungs-Curven eine Berührung von ungrader oder eine Berührung von grader Ordnung eingehen.

Wenn eine Gränz-Curve mit ihren Erzeugungs-Curven eine Berührung ungrader Ordnung eingeht, dann liegen die Erzeugungs-Curven mit allen ihren Punkten auf der nämlichen Seite der Gränz-Curve; und desshalb wird jede Gränz-Curve ungrader Ordnung eine einhüllende oder umfangende Curve, und die Erzeugungs-Curven selbst werden die eingehüllten oder umfangenen Curven genannt.

Wenn aber eine Gränz-Curve mit ihren Erzeugungs-Curven eine Berührung grader Ordnung eingeht, dann wird die Gränz-Curve von den Erzeugungs-Curven im Berührungspunkte geschnitten; und desshalb kommt einer Gränz-Curve grader Ordnung nicht die Eigenschaft einer einhüllenden Curve zu.

Weil nun die gesuchten Reflexions- und Refractions-Curven jedesmal einer Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen müssen, so müssen dieselben auch Gränz-Curven der zweiten Ordnung sein, während die zugehörigen Brennlinien, wie schon (in §. 1) auseinander gesetzt wurde, nur Gränz-Curven der ersten Ordnung sind.

Das Problem der Brennlinien ist also dem Evolutionsproblem analog; denn auch die Evolventen sind Gränz-Curven der zweiten, und die Evoluten sind Gränz-Curven der ersten Ordnung.

Schluss der Einleitung.

Die Reflexions- und Refractions-Curven werden, wie man später sehen wird, durch einfach singuläre Integrale dargestellt. Man kann aber die einfach singulären Integrale, welche den Total-Differentialgleichungen zweiter Ordnung angehören, jedesmal durch drei verschiedene Hilfsmittel aufsuchen; nämlich:

1. mittels des (mit zwei Integrations-Constanten versehenen) allgemeinen Urintegrals;
2. mittels einer jeden der (mit nur einem Integrations-Constanten versehenen) zwei ersten Stammgleichungen; und
3. mittels der ursprünglichen Total-Differentialgleichung zweiter Ordnung.

So verschieden aber auch die Formen der durch diese dreierlei Hilfsmittel erlangten Resultate sein mögen, so sind doch die allen diesen Formen entsprechenden Resultate ihrem Wesen nach ganz gleichbedeutend, und jedesmal kann die eine Form in die andere umgesetzt werden.

Schaut man nun vorwärts auf die Gleichungen 44), 177), 229), 373), wo sich diejenigen Formen befinden, welche für die einfach singulären Integrale aus dem allgemeinen Urintegral gewonnen werden; so erkennt man, dass ich mein Problem auf eine einfache Rectification der vorgeschriebenen Katakaustika oder Diakaustika zurückgeführt habe. Die Einfachheit und Allgemeinheit meiner Lösung lässt also nichts zu wünschen übrig.

Um jetzt die vorliegende Abhandlung systematisch durchzuführen, mag sie in zwei Abtheilungen gebracht werden, deren erste sich mit Bestimmung der Reflexions-Curven, und deren zweite sich mit Bestimmung der Refractions-Curven befasst. Jede dieser beiden Abtheilungen zerfällt aber von selbst wieder in zwei Abschnitte, je nachdem die ursprünglichen Lichtstrahlen mit einander parallel sind, oder von einem leuchtenden Punkte herkommen.

ERSTE ABTHEILUNG.

Bestimmung der Reflexions-Curven, während die Katakaustika vorgeschrieben ist.

Erster Abschnitt.

Bestimmung der Reflexions-Curven für parallele Lichtstrahlen.

§. 5.

Man sucht diejenige Reflexions-Curve, bei welcher die parallel auf sie auffallenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass die Katakaustika sich in einen einzigen Punkt (Brennpunkt) concentrirt.

Man richte das Coordinatensystem der gesuchten Reflexions-Curve so ein, dass ihre Abscissenaxe mit den Lichtstrahlen parallel ist; und wenn dabei die Coordinaten des vorgeschriebenen Brennpunktes die festen Werthe g und h haben, so specialisiren sich für dieselben die Gleichungen 2) und 3) bezüglich in

$$15) \quad g = x + (u-p) \cdot \frac{dx}{du}$$

und

$$16) \quad h = y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du}$$

und jede Curve, welche diesen beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung zugleich genügt, hat die in der Aufgabe geforderte Eigenschaft. Gleichung 15) lässt sich umsetzen in

$$(x-g) \cdot du + u \cdot dx - dy = 0$$

und daraus folgt durch Integration

$$17) \quad (x-g) \cdot u - y + A = 0$$

wo A ein Integrations-Constanter ist. Man hat nun allerdings die erste Stammgleichung zu Gleichung 15); ob jedoch Gleichung 17) auch der 16) genügt, muss noch besonders nachgewiesen werden. Aus 17) folgt

$$y = A + (x-g) \cdot u$$

und

$$p = u + (x-g) \cdot \frac{du}{dx}$$

und wenn man für y und p die hier hergestellten Ausdrücke substituirt, so reducirt Gleichung 16) sich auf

$$18) \quad h = A$$

so dass 17) übergeht in

$$19) \quad y - h = (x-g) \cdot u$$

Hiermit hat man eine erste Stammgleichung, welche jetzt, nachdem der Integrations-Constante A den besonderen Werth h angenommen hat, wirklich so beschaffen ist, dass sie den beiden Differentialgleichungen 15) und 16) zugleich genügt.

Um aber die Aufgabe weiter durchführen zu können, muss man für u den Ausdruck 4) zurückführen; und dabei geht 19) über in

$$20) \quad (y-h) \cdot p^2 + 2 \cdot (x-g) \cdot p = (y-h)$$

Man multiplicire bei dieser Gleichung alle Theilsätze mit $(y-h)$, und addire sodann beiderseits das Quadrat $(x-g)^2$; so bekommt man

$$\left((y-h) \cdot p + (x-g) \right)^2 = (y-h)^2 + (x-g)^2$$

oder

$$\pm \frac{(y-h) \cdot p + (x-g)}{\sqrt{(y-h)^2 + (x-g)^2}} = 1$$

Daraus folgt durch Integration

$$21) \quad \pm \sqrt{(y-h)^2 + (x-g)^2} = x + E$$

oder

$$22) \quad (y-h)^2 = 2 \cdot (g + E) \cdot \left(x - \frac{g-E}{2} \right)$$

Das Urintegral ist also diesmal nur mit einem und nicht mit zwei Integrations-Constanten versehen; denn der erste Integrations-Constante A hat, damit den beiden Differentialgleichungen 15) und 16) zugleich genügt wird, den besonderen Werth h angenommen.

Die durch 22) dargestellte Curvenreihe besteht aus konischen Parabeln, deren Parameter $= 2 \cdot (g + E)$ ist, deren Scheitel bestimmt wird durch $y = h$ und $x = \frac{g-E}{2}$, und deren Hauptaxe in der Entfernung $y = h$ mit der Abscissenaxe parallel läuft. Nun ist bei jeder konischen Parabel die Brennweite gleich dem vierten Theile des Parameters, d. h. gleich $\frac{g+E}{2}$; und somit ist $\frac{g-E}{2} + \frac{g+E}{2}$ oder g die Entfernung des Brennpunktes von der Ordinatenaxe. Alle durch 22) dargestellten unendlich vielen Parabeln haben also den durch die festen Coordinaten g und h vorgeschriebenen Brennpunkt mit einander gemein, d. h. von allen diesen unendlich vielen Parabeln werden die Lichtstrahlen, welche in einer mit der Hauptaxe parallelen Richtung eintreffen, nach einem und demselben Brennpunkte (g, h) reflectirt.

§. 6.

Man sucht diejenige Reflexions-Curve, bei welcher die parallel auf sie einfallenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass ihr eine bestimmt vorgeschriebene Curve als Katakaustika zukommt.

Auch hier richte man das Coordinatensystem so ein, dass die Abscissenaxe mit den Lichtstrahlen parallel läuft; und wenn sich dann für die vorgeschriebene Katakaustika die bestimmte Gleichung

$$23) \quad \mathfrak{F}(x, y) = 0$$

ergibt, so hat man für x und y die Ausdrücke 2) und 3) einzuführen, und man bekommt für die gesuchte Reflexions-Curve folgende Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$24) \quad \mathfrak{F} \left\{ \left(x + (u-p) \cdot \frac{dv}{du} \right), \left(y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dv}{du} \right) \right\} = 0$$

Um das Verfahren bequem fortführen zu können, setze man

$$M \text{ anstatt } x + (u-p) \cdot \frac{dx}{du}$$

und

$$N \text{ anstatt } y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du}$$

Dabei kürzt Gleichung 24) sich ab in

$$25) \quad \mathfrak{F}(M, N) = 0$$

und wenn man nach allen x differentiirt, so bekommt man

$$26) \quad \left(\frac{d_M \mathfrak{F}}{dM} + u \cdot \frac{d_N \mathfrak{F}}{dN} \right) \cdot \left(2 - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{du} - (u-p) \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = 0$$

Dieser Gleichung wird aber genügt, entweder wenn

$$27) \quad 2 - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{du} - (u-p) \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

oder wenn

$$28) \quad \frac{d_M \mathfrak{F}}{dM} + u \cdot \frac{d_N \mathfrak{F}}{dN} = 0$$

Die Differentialgleichung 27), welche von der dritten Ordnung ist, und aus welcher das der vorgelegten Differentialgleichung 24) entsprechende allgemeine Urintegral gewonnen wird, lässt sich ohne weiters integriren, und liefert

$$29) \quad x + (u-p) \cdot \frac{dx}{du} = A$$

wo A ein Integrations-Constanter ist. Dabei geht Gleichung 24) über in

$$30) \quad \mathfrak{F} \left\{ A, \left(y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du} \right) \right\} = 0$$

An dieser Gleichung erkennt man, dass der Ausdruck $\left(y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du} \right)$ einen von x und von y unabhängigen Werth hat; und wenn man diesen Werth mit B bezeichnet, so bekommt man

$$31) \quad y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du} = B$$

während zwischen A und B die ganz bestimmte Gleichung

$$32) \quad \mathfrak{F}(A, B) = 0$$

stattfindet. Wenn man Gleichung 29) mit u multiplicirt, und das sich ergebende Product von 31) subtrahirt; so bleibt

$$33) \quad (y-B) = (x-A) \cdot u$$

Hiermit hat man eine erste Stammgleichung, in welcher zwar zwei Integrations-Constanten A und B vorkommen; weil aber A und B in der durch 32) ausgesprochenen Abhängigkeit zu einander stehen, so kann man entweder A oder B aus 33) eliminiren, und eine erste Stammgleichung mit nur einem Integrations-Constanten herstellen.

Um nun die Gleichung 33) weiter behandeln zu können, muss man für u den Ausdruck 4) zurückführen; und dabei geht 33) über in

$$34) \quad (y-B) \cdot p^2 + 2 \cdot (x-A) \cdot p = (y-B)$$

Mit dieser Gleichung verfähre man jetzt weiter, wie im vorigen Paragraph mit Gleichung 20); so bekommt man das Urintegral

$$35) \quad \pm \sqrt{(y-B)^2 + (x-A)^2} = x + E$$

Hier erscheinen sogar drei Integrations-Constanten A , B , E , während die vorgelegte Differentialgleichung 24) nur eine von der zweiten Ordnung ist. Weil jedoch A und B in der durch 32) ausgesprochenen Abhängigkeit zu einander stehen, so kann man entweder A oder B eliminiren, und eine Urgleichung mit nur zwei Integrations-Constanten herstellen.

Vergleicht man jetzt die Gleichungen 23) und 32) mit einander, so erkennt man, dass zwischen A und B dieselbe Relation stattfindet, wie zwischen \mathfrak{x} und \mathfrak{y} . Man kann also statt der Integrations-Constanten A und B auch die zur vorgeschriebenen Katakaustika gehörigen Coordinaten \mathfrak{x} und \mathfrak{y} setzen; und dabei geht 35) über in

$$36) \quad \pm \sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2} = x + E$$

oder, wenn man umformt, in

$$37) \quad (y-\mathfrak{y})^2 = 2 \cdot (x + E) \cdot \left(x - \frac{\mathfrak{x}-E}{2}\right)$$

Alle hierdurch dargestellten unendlich vielen Curven-Schaaren bestehen sonach aus konischen Parabeln, deren Parameter $= 2 \cdot (x + E)$ sind, deren Scheitel bestimmt werden durch $y = \mathfrak{y}$ und $x = \frac{\mathfrak{x}-E}{2}$, und deren Hauptaxen in der Entfernung $y = \mathfrak{y}$ mit der allen durch 37) dargestellten Parabeln gemeinschaftlichen Abscissenaxe parallel laufen. Nun ist bei jeder konischen Parabel die Brennweite gleich dem vierten Theile des Parameters, d. h. gleich $\frac{\mathfrak{x}+E}{2}$; und somit ist $\frac{\mathfrak{x}-E}{2} + \frac{\mathfrak{x}+E}{2}$ oder \mathfrak{x} die Entfernung des Brennpunktes von der Ordinatenaxe, und der Brennpunkt selbst hat die Coordinaten \mathfrak{x} und \mathfrak{y} , d. h. alle Brennpunkte der hier gefundenen unendlich vielen Parabel-Schaaren liegen in der vorgeschriebenen Katakaustika.

Es trifft sich, wie am Schlusse des §. 5 auseinander gesetzt ist, bei jeder konischen Parabel, dass, sobald die Lichtstrahlen parallel mit der Hauptaxe auffallen, die Katakaustika sich in den Brennpunkt zusammenzieht. Wählt man also im Umfange der vorgeschriebenen Katakaustika irgend einen Punkt, und zieht man durch diesen eine mit den Lichtstrahlen parallele Grade; so sind alle unendlich vielen konischen Parabeln, denen der eben besagte Punkt als Brennpunkt und die eben besagte Grade als Hauptaxe zukommt, so beschaffen, dass sie die mit der Hauptaxe parallel eintreffenden Lichtstrahlen nach dem (im Umfange der vorgeschriebenen Katakaustika) gewählten Punkte reflectiren. Geht man zu einem zweiten (unmittelbar anliegenden) Punkte im Umfange der vorgeschriebenen Katakaustika über, und zieht man durch diesen zweiten Punkt wiederum eine mit den Lichtstrahlen parallele Grade; so sind alle unendlich vielen konischen Parabeln, denen dieser zweite Punkt als Brennpunkt und diese zweite Grade als Hauptaxe zukommt, ebenfalls so beschaffen, dass sie die mit der Hauptaxe parallel eintreffenden Lichtstrahlen nach dem (im Umfange der vorgeschriebenen Katakaustika) gewählten zweiten Punkte reflectiren. Und so fort.

Desshalb ist unter den gefundenen Parabeln keine einzige im Stande, von der vorgeschriebenen Katakaustika mehr als einen Punkt zu erzeugen, d. h. keine einzige dieser Parabeln ist die gesuchte Reflexions-Curve. Man muss daher untersuchen, ob unter diesen unendlich vielen Parabel-Schaaren solche Reihen stetig neben einander liegender Parabeln vorkommen, die sich so schneiden, dass die dadurch entstandenen Durchschnittslinien auch noch

der vorgelegten Differentialgleichung 24) genügen. Weil aber diese Differentialgleichung eine der zweiten Ordnung ist, so muss jede Durchschnittslinie (§. 4) eine solche Gränz-Curve sein, welche in allen ihren Punkten mit irgend einer der sich schneidenden Parabeln eine Berührung der zweiten Ordnung eingeht. Die Gränz-Curven der zweiten Ordnung werden aber, wie in der analytischen Geometrie noch näher nachgewiesen werden muss, durch das einfach singuläre¹⁾ Urintegral dargestellt; und dieses kann bekanntlich auf drei verschiedenen Wegen ermittelt werden.

Erste Methode. Wenn man das einfach singuläre Urintegral aus dem allgemeinen ableiten will, so ist dessen in Gleichung 36) aufgestellte Form die bequemste. Nun beachte man, dass die Integrations-Constanten von x und von y unabhängig sind bei allen sich schneidenden Parabeln; und wenn man in dieser Beziehung die Gleichung 36) differentiirt, so bekommt man

$$38) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-(x-r) \pm \sqrt{(y-\eta)^2 + (x-r)^2}}{(y-\eta)}$$

Dagegen müssen die Integrations-Constanten Functionen von x sein bei allen Gränz-Curven; und wenn man in dieser Beziehung die Gleichung 36) nach allem x differentiirt, so bekommt man weiter

$$39) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-(x-r) \pm \sqrt{(y-\eta)^2 + (x-r)^2}}{(y-\eta)} + \frac{(y-\eta) \cdot \frac{d\eta}{dx} + (x-r)}{(y-\eta)} \cdot \frac{dr}{dx} \pm \frac{\sqrt{(y-\eta)^2 + (x-r)^2}}{(y-\eta)} \cdot \frac{dE}{dx}$$

Damit aber aus 38) und 39) sich für $\frac{dy}{dx}$ zwei ebenförmige Ausdrücke ergeben können, muss die Gleichung

$$40) \quad \left((y-\eta) \cdot \frac{d\eta}{dx} + (x-r) \right) \cdot \frac{dr}{dx} \pm \left(\sqrt{(y-\eta)^2 + (x-r)^2} \right) \cdot \frac{dE}{dx} = 0$$

stattfinden. Differentiirt man die Gleichung 38) noch einmal sowohl nach allem explicit als auch nach allem implicit in y, r, η enthaltenen x ; so bekommt man neben der Gleichung 40) auch noch

$$41) \quad \left((x-r) \mp \sqrt{(y-\eta)^2 + (x-r)^2} \right) \cdot \left((y-\eta) - (x-r) \cdot \frac{d\eta}{dx} \right) \cdot \frac{dr}{dx} = 0$$

Daraus kann aber nur folgen

$$42) \quad (y-\eta) - (x-r) \cdot \frac{d\eta}{dx} = 0$$

und hiermit wird diejenige Grade dargestellt, welche durch den Punkt (x, y) der gesuchten Reflexions-Curve geht, und zugleich die zum Punkte (r, η) der vorgeschriebenen Katakaustika gehörige Tangente ist. Jede Katakaustika ist ja, wie schon (in §. 1) auseinander gesetzt wurde, eine einhüllende Gränzeurve.

Eliminirt man jetzt mittels 42) die Differenz $(y-\eta)$ aus 40), so fällt auch die Differenz $(x-r)$ mit hinweg; und 40) geht über in

$$\left(dx^2 + dy^2 \right) \pm \left(\sqrt{dx^2 + dy^2} \right) \cdot dE = 0$$

oder in

$$\left(\sqrt{dx^2 + dy^2} \right) \pm dE = 0$$

¹⁾ Die singulären Integrale, welche einer Differentialgleichung zweiter Ordnung angehören, sind entweder einfach singuläre oder zweifach singuläre.

Daraus folgt

$$dE = \mp \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

oder

$$43) \quad E = K \mp \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

wo K ein Integrations-Constanter ist. Gleichung 36) geht also über in

$$44) \quad \pm \sqrt{(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2} = x + K \mp \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Mit dieser Gleichung muss man aber noch folgende drei

$$42) \quad (y-\eta) - (x-\xi) \cdot \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

$$23) \quad \mathfrak{F}(\xi, \eta) = 0$$

$$45) \quad \frac{d_\xi \mathfrak{F}}{d\xi} + \frac{d_\eta \mathfrak{F}}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

verbinden, d. h. man muss die in 44) angezeigte Integration ausführen, und sodann die drei Bestandtheile ξ , η , $d\eta$ eliminiren. Dabei fällt auch $d\xi$ mit hinweg, und es ergibt sich eine Gleichung zwischen x und y und dem Integrations-Constanten K . Diese neue Gleichung ist aber ein einfach singuläres Urintegral zu 24); und durch dasselbe ist, wegen des Integrations-Constanten K , eine Reihe stetig aufeinander folgender Reflexions-Curven dargestellt, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die bestimmt vorgeschriebene Katakaustika $\mathfrak{F}(\xi, \eta) = 0$ erzeugt wird.

Zweite Methode. Zu dem einfach singulären Integral kann man auch mittels der ersten Stammgleichung gelangen. Man beachte also wiederum, dass die Integrations-Constanten von x und y unabhängig sind bei allen sich schneidenden Parabeln; und wenn man in dieser Beziehung die Gleichung 33) differentiirt, und dabei sich erinnert, dass u diesmal weiter nichts als ein mit p versehener Ausdruck ist; so bekommt man

$$46) \quad \frac{dp}{dx} = - \frac{(u-p)}{(x-A) \cdot \frac{du}{dp}}$$

Dagegen müssen die Integrations-Constanten Functionen von x sein bei allen Gränz-Curven; und wenn man in dieser Beziehung die Gleichung 33) nach allen x differentiirt, so bekommt man weiter

$$47) \quad \frac{dp}{dx} = - \frac{(u-p)}{(x-A) \cdot \frac{du}{dp}} - \frac{\frac{dB}{dA} - u}{(x-A) \cdot \frac{du}{dp}} \cdot \frac{dA}{dx}$$

Damit aber aus 46) und 47) für $\frac{dp}{dx}$ zwei ebenförmige Ausdrücke sich ergeben können, muss die Gleichung

$$48) \quad \frac{dB}{dA} - u = 0$$

stattfinden. Nun folgt aus 32) die Differentialgleichung

$$49) \quad \frac{d_A \mathfrak{F}}{dA} + \frac{d_B \mathfrak{F}}{dB} \cdot \frac{dB}{dA} = 0$$

und wenn man aus den vier Gleichungen 32). 33). 48). 49) die drei Bestandtheile A , B , $\frac{dB}{dA}$ eliminirt, so bekommt man endlich

$$50) \quad y - u \cdot x = \psi(u)$$

wo die Form des Ausdruckes $\phi(u)$ abhängig ist von $\mathfrak{F}(A, B) = 0$. Hier hat man für u noch den Ausdruck $\frac{2 \cdot p}{1-p^2}$ zurückzuführen, und die sich ergebende Differentialgleichung erster Ordnung zu integrieren. Dadurch gelangt man zu der nämlichen mit x, y und dem Integrations-Constanten K versehenen Urgleichung, wie bei der ersten Methode.

Dritte Methode. Lässt man die Gleichung 28), d. h. die Gleichung

$$28) \quad \frac{d_M \mathfrak{F}}{dM} + u \cdot \frac{d_N \mathfrak{F}}{dN} = 0$$

gelten, so hat man jetzt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung; und man muss eine solche der ersten Ordnung aufsuchen, von welcher die beiden Gleichungen 24) und 28) zugleich erfüllt werden. Die so aufgesuchte Differentialgleichung erster Ordnung wird aber genau wieder die Gleichung 50) sein, durch deren Integration sich also auch die nämliche mit x, y und dem Integrations-Constanten K versehene Urgleichung ergibt, wie bei der ersten Methode.

(Man vergleiche die dritte Methode in §. 7, §. 8, §. 9.)

§. 7.

Beispiel 1. Man sucht diejenige Reflexions-Curve, bei welcher die parallel auf sie einfallenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass die zugehörige Katakaustika die durch folgende Gleichung

$$51) \quad y^3 = h \cdot x^2$$

vorgeschriebene semikubische Parabel ist.

Hier bekommt man für die gesuchte Reflexions-Curve folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$52) \quad \left(y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du} \right)^3 = h \cdot \left(x + (u-p) \cdot \frac{dx}{du} \right)^2$$

und wenn man differentiirt, so gibt sich weiter

$$53) \quad \left[3u \cdot \left(y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du} \right)^2 - 2h \cdot \left(x + (u-p) \cdot \frac{dx}{du} \right) \right] \cdot \left(2 - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{du} - (u-p) \cdot \frac{d^2u}{du^2} \right) = 0$$

Lässt man die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$54) \quad 2 - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{du} - (u-p) \cdot \frac{d^2u}{du^2} = 0$$

gelten; so ist (nach §. 6) die den beiden Differentialgleichungen 52) und 54) zugleich genügende Differentialgleichung erster Ordnung dargestellt durch die Verbindung der beiden Gleichungen

$$55) \quad B^3 = h \cdot A^2$$

und

$$56) \quad (y-B) = (x-A) \cdot u$$

Jetzt substituirt man für u den Ausdruck $\frac{2 \cdot p}{1-p^2}$ in 56), so bekommt man

$$(y-B) \cdot p^2 + 2 \cdot (x-A) \cdot p = (y-B)$$

und wenn man mit dieser Gleichung weiter verfährt, wie mit Gleichung 20) in §. 5; so ist das allgemeine Integral durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$57) \quad B^3 = h \cdot A^2$$

und

$$58) \quad \pm \sqrt{(y-B)^2 + (x-A)^2} = x + E$$

oder, was das nämliche ist, durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$59) \quad \eta^3 = h \cdot \xi^2$$

und

$$60) \quad \pm \sqrt{(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2} = x + E$$

dargestellt, d. h. man hat alle jene unendlich vielen Schaaren konischer Parabeln, deren Hauptaxen mit der allen diesen Parabeln gemeinschaftlichen Abscissenaxe parallel laufen, und deren Brennpunkte in der durch die Gleichung $\eta^3 = h \cdot \xi^2$ vorgeschriebenen Katakaustika liegen.

Num sind die Reflexions-Curven als Gränz-Curven der zweiten Ordnung nicht durch allgemeine, sondern durch einfach singuläre Integrale darzustellen; und diese kann man, wie schon im §. 6 vermerkt, auf drei verschiedenen Wegen aufsuchen.

Erste Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus dem allgemeinen ableitet, so specialisiren sich die (in §. 6 aufgestellten) zwei Gleichungen 42) und 44) diesmal in

$$61) \quad (y-\eta) - (x-\xi) \cdot \frac{2h \cdot \xi}{3 \cdot \eta^2} = 0$$

und

$$62) \quad \pm \sqrt{(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2} = x + K \mp \frac{1}{27} \cdot \sqrt{(4 \cdot h^{\frac{2}{3}} + 9 \cdot \xi^{\frac{2}{3}})^3}$$

Nun ist

$$\frac{2h \cdot \xi}{3 \cdot \eta^2} = \frac{2h \cdot \xi^2}{3 \cdot \xi \cdot \eta^2} = \frac{2 \cdot \eta^3}{3 \cdot \xi \cdot \eta^2} = \frac{2 \cdot \eta}{3 \cdot \xi}$$

und somit setzt Gleichung 61) sich um in

$$63) \quad (y-\eta) - (y-\xi) \cdot \frac{2 \cdot \eta}{3 \cdot \xi} = 0$$

Ferner ist

$$\sqrt{(4 \cdot h^{\frac{2}{3}} + 9 \cdot \xi^{\frac{2}{3}})^3} = \frac{\sqrt{(4 \cdot (h \cdot \xi^2)^{\frac{2}{3}} + 9 \cdot \xi^2)^3}}{\xi^2} = \frac{\sqrt{(4 \cdot \eta^2 + 9 \cdot \xi^2)^3}}{\xi^2}$$

somit setzt Gleichung 62) sich um in

$$64) \quad \pm \sqrt{(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2} = x + K \mp \frac{\sqrt{(4 \cdot \eta^2 + 9 \cdot \xi^2)^3}}{27 \cdot \xi^2}$$

Wenn man zuerst die Differenz $(y-\eta)$, und hierauf die Differenz $(x-\xi)$ aus 63) und aus 64) eliminirt, so bekommt man bezüglich

$$65) \quad \frac{-3\xi \pm \sqrt{4 \cdot \eta^2 + 9 \cdot \xi^2}}{3\xi} \cdot x = K \mp \frac{4 \cdot h}{27 \cdot \eta} \cdot \sqrt{4 \cdot \eta^2 + 9 \cdot \xi^2}$$

und

$$66) \quad \frac{-3\xi \pm \sqrt{4 \cdot \eta^2 + 9 \cdot \xi^2}}{2\eta} \cdot y = K - \frac{\xi}{2} \pm \left(\frac{1}{6} - \frac{4h}{27\eta} \right) \cdot \sqrt{4 \cdot \eta^2 + 9 \cdot \xi^2}$$

Durch die Verbindung der drei Gleichungen 51), 65), 66) hat man, wegen des Integrations-Constanten K , eine Reihe stetig aufeinander folgender Reflexions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die vorgeschriebene Katakaustika $\eta^3 = h \cdot \xi^2$ erzeugt wird; und weil x und y als Functionen von ξ und η ausgedrückt sind, so können alle diese Reflexions-Curven mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Katakaustika construirt werden.

Auch ist zu bemerken, dass, je nachdem man aus 51) und 65) entweder das ξ oder das η eliminirt, im ersten Falle das η und im zweiten Falle das ξ als Function von x und K erscheint; und somit ist nachgewiesen, dass die Verbindung der drei Gleichungen 51), 65), 66) ein einfach singuläres und nicht ein einfach particuläres Integral ist.

Zweite Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus der ersten Stammgleichung ableiten will; so muss man die zwei Gleichungen 55) und 56) zu Hülfe nehmen; und dabei specialisirt sich Gleichung 50) in

$$67) \quad y - u \cdot x = \frac{4h}{27} \cdot \frac{1}{u^2}$$

Das nächste Geschäft ist jetzt, dass man sich überzeugt, ob von der Gleichung 67) auch die 52) erfüllt wird, und ob das zu 67) gehörige Integral ein einfach singuläres oder ein einfach particuläres ist. Aus 67) aber folgt der Reihe nach

$$68) \quad y = u \cdot x + \frac{4h}{27} \cdot \frac{1}{u^2}$$

$$69) \quad p = u + \left(x - \frac{8h}{27} \cdot \frac{1}{u^3} \right) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$70) \quad \frac{dp}{dx} = 2 \cdot \frac{du}{dx} + \frac{8h}{9 \cdot u^4} \cdot \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(x - \frac{8h}{27 \cdot u^3} \right) \cdot \frac{d^2u}{dx^2}$$

Wenn man die hier für y und p hergestellten Ausdrücke in Gleichung 52) einsetzt, so wird diese identisch, d. h. Gleichung 52) wird von dem zu 67) gehörigen Integral erfüllt. Wenn man ebenso die hier für p und $\frac{dp}{dx}$ hergestellten Ausdrücke in Gleichung 54) einsetzt, so reducirt sich diese auf

$$71) \quad - \frac{8 \cdot h}{9 \cdot u^4} \cdot \frac{du}{dx} = 0$$

Letztere Gleichung trägt aber einen Widerspruch in sich selbst; und somit ist man überzeugt, dass das zu 67) gehörige Integral wirklich ein einfach singuläres zu der vorgelegten Differentialgleichung 52) ist. Um jedoch Gleichung 67) weiter behandeln zu können, muss man für u den Ausdruck $\frac{2 \cdot p}{1 - p^2}$ zurückführen; und dabei geht 67) über in

$$72) \quad y - \frac{2p}{1 - p^2} \cdot x = \frac{h}{27} \cdot \frac{(1 - p^2)^3}{p^2}$$

Daraus folgt durch Differentiation

$$p - \frac{2p}{1 - p^2} - \frac{2 \cdot (1 + p^2) \cdot x}{(1 - p^2)^2} \cdot \frac{dp}{dx} = - \frac{2h}{27} \cdot \frac{(1 + p^2) \cdot (1 - p^2)}{p^3} \cdot \frac{dp}{dx}$$

oder, indem man die beiden ersten Theilsätze in einen zusammenzieht, und alsdann alle Zeichen in die entgegengesetzten verwandelt,

$$\frac{p \cdot (1 + p^2)}{1 - p^2} + \frac{2 \cdot (1 + p^2) \cdot x}{(1 - p^2)^2} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{2h}{27} \cdot \frac{(1 + p^2) \cdot (1 - p^2)}{p^3} \cdot \frac{dp}{dx}$$

Der integrirende Factor dieser Gleichung ist $\frac{p}{1+p^2}$; denn dabei geht sie über in

$$\frac{p^2}{1-p^2} + \frac{2p \cdot x}{(1-p^2)^2} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{2h}{27} \cdot \left(\frac{1}{p^2} - 1 \right) \cdot \frac{dp}{dx}$$

Daraus folgt durch Integration

$$73) \quad \frac{p^2}{1-p^2} \cdot x = L - \frac{2h}{27} \cdot \frac{1+p^2}{p}$$

und wenn man x aus 72) und 73) eliminirt, so bekommt man weiter

$$74) \quad p \cdot y = 2L - \frac{4h}{27} \cdot \frac{1+p^2}{p} + \frac{h}{27} \cdot \frac{(1-p^2)^2}{p}$$

Durch die Verbindung der beiden Gleichungen 73) und 74) hat man, wegen des Integrations-Constanten L , abermals eine Reihe stetig auf einander folgender Reflexions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auf-fallen, die bestimmt vorgeschriebene Katakaustika $\eta^3 = h \cdot \xi^2$ erzeugt wird; und weil x und y als Functionen von p ausgedrückt sind, so können alle diese Reflexions-Curven mittels ihrer Tangenten construirt werden.

Dass aber aus der Verbindung der beiden Gleichungen 73) und 74) dieselben Curven hervorgehen, wie aus der Verbindung der Gleichungen 65) und 66): davon kann man sich auf folgende Weise überzeugen:

In Folge der drei Gleichungen 38), 39), 40) ist bekannt, dass, es mögen die Bestandtheile ξ, η, E von x unabhängig oder von x abhängig sein, der für p hervorgehende Ausdruck sich jedesmal auf folgende Form

$$75) \quad p = \frac{-(x-\xi) \pm \sqrt{(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2}}{(y-\eta)}$$

reducirt; und wenn man aus 63) und 75) die Differenz $(y-\eta)$ eliminirt, so fällt auch $(x-\xi)$ mit hinweg, d. h. Gleichung 75) geht über in

$$76) \quad p = \frac{-3 \cdot \xi \pm \sqrt{4 \cdot \eta^2 + 9 \cdot \xi^2}}{2 \cdot \eta}$$

Daraus folgt weiter

$$77) \quad \frac{p^2}{1-p^2} = \frac{-3 \cdot \xi \pm \sqrt{4 \cdot \eta^2 + 9 \cdot \xi^2}}{6 \cdot \xi}$$

$$78) \quad \frac{1+p^2}{p} = \frac{\pm \sqrt{4 \cdot \eta^2 + 9 \cdot \xi^2}}{\eta}$$

$$79) \quad \frac{(1-p^2)^2}{p} = \frac{9 \cdot \xi^2 \cdot (-3 \cdot \xi \pm \sqrt{4 \cdot \eta^2 + 9 \cdot \xi^2})}{2 \cdot \eta^3} = \frac{9 \cdot (-3 \cdot \xi \pm \sqrt{4 \cdot \eta^2 + 9 \cdot \xi^2})}{2 \cdot h}$$

Nun substituirt man die für $\frac{p^2}{1-p^2}$ und für $\frac{1+p^2}{p}$ hergestellten Ausdrücke in Gleichung 73), so geht sie über in

$$\frac{-3 \cdot \xi \pm \sqrt{4 \cdot \eta^2 + 9 \cdot \xi^2}}{6 \cdot \xi} \cdot x = L \mp \frac{2h}{27 \cdot \eta} \cdot \sqrt{4 \cdot \eta^2 + 9 \cdot \xi^2}$$

oder, wenn man Alles mit 2 multiplicirt, in

$$80) \quad \frac{-3 \cdot \xi \pm \sqrt{4 \cdot \eta^2 + 9 \cdot \xi^2}}{3 \cdot \xi} \cdot x = 2L \mp \frac{4 \cdot h}{27 \cdot \eta} \cdot \sqrt{4 \cdot \eta^2 + 9 \cdot \xi^2}$$

Ebenso geht, durch die gehörigen Substitutionen, Gleichung 74) über in

$$81) \quad \frac{-3 \cdot \xi \pm \sqrt{4 \cdot \eta^2 + 9 \cdot \xi^2}}{2 \cdot \eta} \cdot y = 2L - \frac{\xi}{2} \pm \left(\frac{1}{6} - \frac{4h}{27 \cdot \eta} \right) \cdot \sqrt{4 \cdot \eta^2 + 9 \cdot \xi^2}$$

Wenn man hier noch K statt $2L$ setzt, so fallen die Gleichungen 80) und 81) genau mit 65) und 66) zusammen, wie zu beweisen war.

Dritte Methode. Man kann das einfach singuläre Integral auch gewinnen, wenn man bei Gleichung 53) den ersten Factor zu Null werden, d. h. wenn man die Gleichung

$$82) \quad 3 \cdot u \cdot \left(y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du} \right)^2 = 2h \cdot \left(x + (u-p) \cdot \frac{dx}{du} \right)$$

gelten lässt. Man dividire mit 52) in 82), so gibt sich

$$3 \cdot u \cdot \left(x + (u-p) \cdot \frac{dx}{du} \right) = 2 \cdot \left(y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du} \right)$$

oder

$$83) \quad u \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du} = 2 \cdot y - 3u \cdot x$$

Jetzt eliminire man $\frac{dx}{du}$ aus 52) und 83), so gibt sich weiter

$$84) \quad 27 \cdot (y-ux)^3 = \frac{4h}{u^2} \cdot (y-ux)^2$$

oder

$$85) \quad y - ux = \frac{4h}{27} \cdot \frac{1}{u^2}$$

Nun muss man untersuchen, ob von 85) auch den beiden Gleichungen 52) und 82) zugleich genügt wird, und ob das zu 85) gehörige Integral ein einfach singuläres oder ein einfach particuläres ist. Weil aber Gleichung 85) dieselbe ist, wie 67); so ist auch der weitere Verlauf dieser dritten Methode, wie bei der zweiten.

§. 8.

Beispiel 2. Man sucht diejenige Reflexions-Curve, bei welcher die parallel auf sie auffallenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass die zugehörige Katakaustika die durch folgende Gleichung

$$86) \quad y^2 = 2h \cdot x$$

vorgeschriebene konische Parabel ist.

Hier bekommt man für die gesuchte Reflexions-Curve folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$87) \quad \left(y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du} \right)^2 = 2h \cdot \left(x + (u-p) \cdot \frac{dx}{du} \right)$$

und wenn man differentiiert, so gibt sich weiter

$$88) \quad \left(u \cdot y + u^2 \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du} - h \right) \cdot \left(2 \cdot \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{du} - (u-p) \cdot \frac{d^2u}{du^2} \right) = 0$$

Lässt man die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$89) \quad 2 \cdot \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{du} - (u-p) \cdot \frac{d^2u}{du^2} = 0$$

gelten; so ist (nach §. 6) die den beiden Differentialgleichungen 87) und 89) zugleich genügende Differentialgleichung erster Ordnung dargestellt durch die Verbindung der beiden Gleichungen

$$90) \quad B^2 = 2h \cdot A$$

und

$$91) \quad (y-B) = (x-A) \cdot u$$

Jetzt substituirt man für u den Ausdruck $\frac{2 \cdot p}{1-p^2}$ in Gleichung 91). so geht diese über in

$$92) \quad (y-B) \cdot p^2 + 2 \cdot (x-A) \cdot p = (y-B)$$

und wenn man mit dieser Gleichung weiter verfährt, wie mit Gleichung 20) in §. 5: so ist das allgemeine Integral durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$93) \quad B^2 = 2h \cdot A$$

und

$$94) \quad \pm \sqrt{(y-B)^2 + (x-A)^2} = x + E$$

oder, was das nämliche ist, durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$95) \quad y^2 = 2h \cdot x$$

und

$$96) \quad \pm \sqrt{(y-y)^2 + (x-x)^2} = x + E$$

dargestellt, d. h. man hat alle jene unendlich vielen Schaaren konischer Parabeln, deren Hauptaxen mit der allen diesen Parabeln gemeinschaftlichen Abscissenaxe parallel laufen, und deren Brennpunkte in der durch die Gleichung $y^2 = 2h \cdot x$ vorgeschriebenen Katakaustika liegen.

Nun sind die Reflexions-Curven als Gränz-Curven der zweiten Ordnung nicht durch allgemeine, sondern durch einfach singuläre Integrale darzustellen; und diese kann man, wie schon in §. 6 vermerkt, auf drei verschiedenen Wegen aufsuchen.

Erste Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus dem allgemeinen ableitet, so beachte man vorerst, dass

$$\begin{aligned} \pm \int \sqrt{dx^2 + dy^2} &= \pm \int \frac{\sqrt{h^2 + v^2}}{h} \cdot dy \\ &= \pm \frac{v \cdot \sqrt{h^2 + v^2}}{2 \cdot h} + \frac{h}{2} \cdot \text{lg nat} \left(\frac{v \pm \sqrt{h^2 + v^2}}{h} \right) \\ &= \pm \frac{v \cdot \sqrt{h^2 + v^2}}{2 \cdot h} - \frac{h}{2} \cdot \text{lg nat} \left(\frac{h}{v \pm \sqrt{h^2 + v^2}} \right) \\ &= \pm \frac{v \cdot \sqrt{h^2 + v^2}}{2 \cdot h} - \frac{h}{2} \cdot \text{lg nat} \left(\frac{-v \pm \sqrt{h^2 + v^2}}{h} \right) \end{aligned}$$

ist. Hier gehören durchweg die oberen Zeichen zusammen, und ebenso die unteren; und es specialisiren die (in §. 6 aufgestellten) zwei Gleichungen 42) und 44) sich diesmal in

$$97) \quad (y-y) - (x-x) \cdot \frac{h}{v} = 0$$

und

$$98) \quad \pm \sqrt{(y-y)^2 + (x-x)^2} = x + K \mp \frac{v \cdot \sqrt{h^2 + v^2}}{2h} + \frac{h}{2} \cdot \text{lg nat} \left(\frac{-v \pm \sqrt{h^2 + v^2}}{h} \right)$$

Eliminirt man zuerst die Differenz $(y-y)$, und hierauf die Differenz $(x-x)$ aus 97) und 98); so bekommt man bezüglich

$$99) \quad \frac{-v \pm \sqrt{h^2 + v^2}}{v} \cdot x = K + \frac{h}{2} \cdot \text{lg nat} \left(\frac{-v \pm \sqrt{h^2 + v^2}}{h} \right)$$

und

$$100) \quad \frac{-v \pm \sqrt{h^2 + v^2}}{h} \cdot y = K + \frac{v \cdot (-v \pm \sqrt{h^2 + v^2})}{2h} + \frac{h}{2} \cdot \text{lg nat} \left(\frac{-v \pm \sqrt{h^2 + v^2}}{h} \right)$$

Durch die Verbindung der drei Gleichungen 86), 99), 100) hat man, wegen des Integrations-Constanten K , eine Reihe stetig aufeinander folgender Reflexions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abseissenaxe auffallen, die vorgeschriebene Katakaustika $\eta^2 = 2h \cdot x$ erzeugt wird: und weil x und y als Functionen von x und η ausgedrückt sind, so können alle diese Reflexions-Curven mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Katakaustika construirt werden.

Auch ist zu bemerken, dass, je nachdem man aus 86) und 99) entweder das x oder das η eliminirt, im ersten Falle das η und im zweiten Falle das x als Function von x und K erscheint; und somit ist nachgewiesen, dass die Verbindung der drei Gleichungen 86), 99), 100) ein einfach singuläres und nicht ein einfach particuläres Integral ist.

Zweite Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus der ersten Stammgleichung ableiten will, so muss man die zwei Gleichungen 90) und 91) zu Hilfe nehmen; und dabei specialisirt sich Gleichung 50) in

$$101) \quad y - u \cdot x = \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{u}$$

Das nächste Geschäft ist jetzt, dass man sich überzeugt, ob von der Gleichung 101) auch die 87) erfüllt wird, und ob das zu 101) gehörige Integral ein einfach singuläres oder ein einfach particuläres ist. Aus 101) aber folgt der Reihe nach

$$102) \quad y = u \cdot x + \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{u}$$

$$103) \quad p = u + \left(x - \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{u^2} \right) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$104) \quad \frac{dp}{dx} = 2 \cdot \frac{du}{dx} + h \cdot \frac{1}{u^3} \cdot \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(x - \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{u^2} \right) \cdot \frac{d^2u}{dx^2}$$

Wenn man die hier für y und p hergestellten Ausdrücke in Gleichung 87) einsetzt, so wird diese identisch, d. h. Gleichung 87) wird von dem zu 101) gehörigen Integral erfüllt. Wenn man ebenso die hier für p und $\frac{dp}{dx}$ hergestellten Ausdrücke in Gleichung 89) substituirt, so reducirt sich diese auf

$$105) \quad - \frac{h}{u^3} \cdot \frac{du}{dx} = 0$$

Letztere Gleichung trägt aber einen Widerspruch in sich selbst; und somit ist man überzeugt, dass das zu 101) gehörige Integral wirklich ein einfach singuläres zu der vorgelegten Differentialgleichung 87) ist. Um jedoch Gleichung 101) weiter behandeln zu können, muss man für u den Ausdruck $\frac{2 \cdot p}{1-p^2}$ zurückführen; und dabei geht 101) über in

$$106) \quad y - \frac{2p}{1-p^2} \cdot x = \frac{h}{4} \cdot \frac{1-p^2}{p}$$

oder, wenn man differentiirt, sodann die beiden ersten Theilsätze in einen zusammenzieht, und zuletzt Alles mit $\frac{p}{1+p^2}$ multiplicirt,

$$107) \quad \frac{p^2}{1-p^2} + \frac{2p \cdot x}{(1-p^2)^2} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{h}{4} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dx}$$

Daraus folgt durch Integration

$$108) \quad \frac{p^2}{1-p^2} \cdot x = L + \frac{h}{4} \cdot \text{lg nat } p$$

und wenn man x aus 106) und 108) eliminirt, so bekommt man weiter

$$109) \quad p \cdot y = 2L + \frac{h}{4} \cdot (1-p^3) + \frac{h}{2} \cdot \text{lg nat } p$$

Durch die Verbindung der beiden Gleichungen 108) und 109) hat man, wegen des Integrations-Constanten L , abermals eine Reihe stetig aufeinander folgender Reflexions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auf-fallen, die bestimmt vorgeschriebene Katakaustika $\eta^2 = 2h \cdot x$ erzeugt wird; und weil x und y als Functionen von p ausgedrückt sind, so können alle diese Reflexions-Curven mittels ihrer Tangenten construirt werden.

Dass aber aus der Verbindung der beiden Gleichungen 108) und 109) dieselben Curven hervorgehen, wie aus der Verbindung der Gleichungen 99) und 100); davon kann man sich auf folgende Weise überzeugen:

In Folge der drei Gleichungen 38), 39), 40) ist bekannt, dass, es mögen die Bestandtheile x , η , E von x unabhängig oder von x abhängig sein, der für p hervorgehende Ausdruck sich jedesmal auf folgende Form

$$110) \quad p = \frac{-(x-\eta) \pm \sqrt{(x-\eta)^2 + (x-\eta)^2}}{(y-\eta)}$$

reducirt; und wenn man aus 97) und 110) die Differenz $(y-\eta)$ eliminirt, so fällt auch $(x-\eta)$ mit hinweg, d. h. Gleichung 110) geht über in

$$111) \quad p = \frac{-\eta \pm \sqrt{h^2 + \eta^2}}{h}$$

Daraus folgt weiter

$$112) \quad 1 - p^2 = \frac{2\eta \cdot (-\eta \pm \sqrt{h^2 + \eta^2})}{h^2}$$

und

$$113) \quad \frac{p^2}{1-p^2} = \frac{-\eta \pm \sqrt{h^2 + \eta^2}}{2\eta}$$

Nun substituirt man die für p und $\frac{p^2}{1-p^2}$ hergestellten Ausdrücke in die Gleichung 108), so bekommt man

$$\frac{-\eta \pm \sqrt{h^2 + \eta^2}}{2\eta} \cdot x = L + \frac{h}{4} \cdot \text{lg nat} \left(\frac{-\eta \pm \sqrt{h^2 + \eta^2}}{\eta} \right)$$

oder, wenn man Alles mit 2 multiplicirt,

$$114) \quad \frac{-\eta \pm \sqrt{h^2 + \eta^2}}{\eta} \cdot x = 2L + \frac{h}{2} \cdot \text{lg nat} \left(\frac{-\eta \pm \sqrt{h^2 + \eta^2}}{\eta} \right)$$

Ebenso geht, durch die gehörigen Substitutionen, Gleichung 109) über in

$$115) \quad \frac{-\eta \pm \sqrt{h^2 + \eta^2}}{\eta} \cdot y = 2L + \frac{\eta \cdot (-\eta \pm \sqrt{h^2 + \eta^2})}{2h} + \frac{h}{2} \cdot \text{lg nat} \left(\frac{-\eta \pm \sqrt{h^2 + \eta^2}}{\eta} \right)$$

Wenn man hier noch K statt $2L$ setzt, so fallen die Gleichungen 114) und 115) genau mit 99) und 100) zusammen, wie zu beweisen war.

Dritte Methode. Man kann das einfach singuläre Integral auch gewinnen, wenn man bei Gleichung 88) den ersten Factor zu Null werden, d. h. wenn man die Gleichung

$$116) \quad u \cdot y + u^2 \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du} - h = 0$$

gelten lässt. Daraus folgt

$$117) \quad (u-p) \cdot \frac{dx}{du} = \frac{h-u \cdot y}{u^2}$$

und wenn man diesen für $(u-p) \cdot \frac{dx}{du}$ hergestellten Ausdruck in Gleichung 87) substituiert, so geht diese über in

$$\left(\frac{h}{u}\right)^2 = 2h \cdot \frac{u \cdot (u-x-y) + h}{u^2}$$

und daraus folgt weiter

$$118) \quad y - ux = \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{u}$$

Man muss man untersuchen, ob von 118) auch den beiden Gleichungen 87) und 116) zugleich genügt wird, und ob das zu 118) gehörige Integral ein einfach singuläres oder ein einfach particuläres ist. Weil aber Gleichung 118) dieselbe ist, wie 101); so ist auch der weitere Verlauf dieser dritten Methode, wie bei der zweiten.

§. 9.

Beispiel 3. Man sucht diejenige Reflexions-Curve, bei welcher die parallel auf sie einfallenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass die zugehörige Katakaustika die durch folgende Gleichung

$$119) \quad y^2 + x^2 = k^2$$

vorgeschriebene Kreislinie ist.

Hier bekommt man für die gesuchte Reflexions-Curve folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$120) \quad \left(y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du}\right)^2 + \left(x + (u-p) \cdot \frac{dx}{du}\right)^2 = k^2$$

und wenn man differentiirt, so gibt sich weiter

$$121) \quad \left(u \cdot y + x + (1+u^2) \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du}\right) \cdot \left(2 - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{du} - (u-p) \cdot \frac{d^2u}{du^2}\right) = 0$$

Lässt man die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$122) \quad 2 - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{du} - (u-p) \cdot \frac{d^2u}{du^2} = 0$$

gelten; so ist (nach §. 6) die den beiden Differentialgleichungen 120) und 122) zugleich genügende Differentialgleichung erster Ordnung dargestellt durch die Verbindung der beiden Gleichungen

$$123) \quad B^2 + A^2 = k^2$$

und

$$124) \quad (y-B) = (x-A) \cdot u$$

Jetzt substituirt man für u den Ausdruck $\frac{2 \cdot p}{1-p^2}$ in 124), so bekommt man

$$(y-B) \cdot p^2 + 2 \cdot (x-A) \cdot p = (y-B)$$

und wenn man mit dieser Gleichung weiter vordringt, wie mit Gleichung 20) in §. 5; so ist das allgemeine Integral durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$125) \quad B^2 + A^2 = k^2$$

und

$$126) \quad \pm \sqrt{(y-B)^2 + (x-A)^2} = x + E$$

oder, was das nämliche ist, durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$127) \quad y^2 + r^2 = k^2$$

und

$$128) \quad \pm \sqrt{(y-y)^2 + (x-r)^2} = x + E$$

dargestellt, d. h. man hat alle jene unendlich vielen Schaaren konischer Parabeln, deren Hauptachsen mit der allen diesen Parabeln gemeinschaftlichen Abscissenaxe parallel laufen, und deren Brennpunkte in der durch die Gleichung $y^2 + r^2 = k^2$ vorgeschriebenen Kreislinie liegen.

Nun sind die Reflexions-Curven als Gränz-Curven der zweiten Ordnung nicht durch allgemeine, sondern durch einfach singuläre Integrale darzustellen: und diese kann man, wie schon in §. 6 vermerkt, auf drei verschiedenen Wegen aufsuchen.

Erste Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus dem allgemeinen ableitet, so beachte man vorerst, dass

$$\begin{aligned} \int \sqrt{dx^2 + dy^2} &= k \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - r^2}} \\ &= k \cdot \arcsin \frac{r}{k} = k \cdot \arccos \frac{y}{k} = k \cdot \operatorname{arctg} \frac{r}{y} \end{aligned}$$

ist; und so specialisiren sich die in §. 6 aufgestellten zwei Gleichungen 42) und 44) diesmal in

$$129) \quad (y-y) + (x-r) \cdot \frac{r}{y} = 0$$

und

$$130) \quad \pm \sqrt{(y-y)^2 + (x-r)^2} = x + K \mp k \cdot \operatorname{arctg} \frac{r}{y}$$

Um nun das x als Function von r und y auszudrücken, eliminire man die Differenz $(y-y)$ aus 129) und 130); so bekommt man

$$131) \quad \frac{\pm (x-r) \cdot \sqrt{r^2 + y^2}}{y} = x + K \mp k \cdot \operatorname{arctg} \frac{r}{y}$$

Um ferner auch das y als Function von r und y auszudrücken, addire man auf der rechten Seite der letzten Gleichung die identische Differenz $(r-r)$; so gibt sich zunächst

$$132) \quad \frac{\pm (x-r) \cdot \sqrt{r^2 + y^2}}{y} = (x-r) + K + r \mp k \cdot \operatorname{arctg} \frac{r}{y}$$

Nun folgt aus 129); dass

$$133) \quad (x-r) = - (y-y) \cdot \frac{y}{r}$$

und wenn man jetzt die Differenz $(x-r)$ aus 132) eliminirt, so bekommt man weiter

$$134) \quad \frac{\pm (y-y) \cdot \sqrt{r^2 + y^2}}{r} = - (y-y) \cdot \frac{y}{r} + K + r \mp k \cdot \operatorname{arctg} \frac{r}{y}$$

Man kann aber, wegen Gleichung 119), auch k statt $\sqrt{r^2 + y^2}$ setzen, und so kann man 131) und 134) auch umformen in

$$135) \quad \frac{\pm k - y}{y} \cdot x = K \pm k \cdot \left(\frac{r}{y} - \operatorname{arctg} \frac{r}{y} \right)$$

und

$$136) \quad \frac{\pm k - y}{r} \cdot y = - K - \frac{k^2}{r} \pm k \cdot \left(\frac{y}{r} + \operatorname{arctg} \frac{r}{y} \right)$$

Durch die Verbindung der drei Gleichungen 119), 135), 136) hat man, wegen des Integrations-Constanten K , eine Reihe stetig aufeinander folgender Reflexions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abseissenaxe auffallen, die vorgeschriebene Katakaustika $\xi^2 + \eta^2 = k^2$ erzeugt wird; und weil x und y als Functionen von ξ und η ausgedrückt sind, so können alle diese Reflexions-Curven mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Katakaustika construirt werden.

Auch ist zu bemerken, dass, je nachdem man aus 119) und 135) entweder das ξ oder das η eliminirt, im ersten Falle das η und im zweiten Falle das ξ als Function von x und K erscheint; und somit ist nachgewiesen, dass die Verbindung der drei Gleichungen 119), 135) und 136) ein einfach singuläres und nicht ein einfach particuläres Integral ist.

Zweite Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus der ersten Stammgleichung ableiten will, so muss man die zwei Gleichungen 123) und 124) zu Hülfe nehmen; und dabei specialisirt sich Gleichung 50) in

$$137) \quad y - u \cdot x = \pm k \cdot \sqrt{1 + u^2}$$

Das nächste Geschäft ist jetzt, dass man sich überzeugt, ob von der Gleichung 137) auch die 120) erfüllt wird, und ob das zu 137) gehörige Integral ein einfach singuläres oder ein einfach particuläres ist. Aus 137) aber folgt der Reihe nach

$$\begin{aligned} y &= u \cdot x \pm k \cdot \sqrt{1 + u^2} \\ p &= u + \left(x \pm \frac{k \cdot u}{\sqrt{1 + u^2}} \right) \cdot \frac{du}{dx} \\ \frac{dp}{dx} &= 2 \cdot \frac{du}{dx} + \left(x \pm \frac{k \cdot u}{\sqrt{1 + u^2}} \right) \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \pm \frac{k}{(\sqrt{1 + u^2})^3} \cdot \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \end{aligned}$$

Wenn man die hier für y und p hergestellten Ausdrücke in Gleichung 120) substituirt, so wird diese identisch, d. h. Gleichung 120) wird von dem zu 137) gehörigen Integral erfüllt. Wenn man ebenso die hier für p und $\frac{dp}{dx}$ hergestellten Ausdrücke in Gleichung 122) substituirt, so reducirt sich dieselbe auf

$$\mp \frac{k}{(\sqrt{1 + u^2})^3} \cdot \frac{du}{dx} = 0$$

und weil letztere Gleichung einen Widerspruch in sich selbst trägt, so ist man überzeugt, dass das zu 137) gehörige Integral wirklich ein einfach singuläres der Gleichung 122) ist.

Um jedoch Gleichung 137) weiter behandeln zu können, muss man für u den Ausdruck substituiren; und dabei setzt Gleichung 137) sich um in

$$138) \quad y - \frac{2p}{1-p^2} \cdot x = \pm k \cdot \frac{1+p^2}{1-p^2}$$

oder, wenn man differentirt, sodann die beiden ersten Theilsätze in einen zusammenzieht, hierauf alle Vorzeichen in die entgegengesetzten verwandelt, und zuletzt Alles mit $\frac{p}{1+p^2}$ multiplicirt,

$$139) \quad \frac{p^2}{1-p^2} + \frac{2p \cdot x}{(1-p^2)^2} \cdot \frac{dp}{dx} = \mp 4k \cdot \frac{p}{(1-p^2)^2 \cdot (1+p^2)} \cdot \frac{dp}{dx}$$

Daraus folgt durch Integration

$$140) \quad \frac{p^2}{1-p^2} \cdot x = L \mp k \cdot \left(\frac{p}{1-p^2} - \operatorname{arctg} p \right)$$

und wenn man x aus 138) und 140) eliminirt, so bekommt man weiter

$$141) \quad p \cdot y = 2L \mp k \cdot (p - 2 \cdot \text{arc tg } p)$$

Durch die Verbindung der beiden Gleichungen 140) und 141) hat man, wegen des Integrations-Constanten L , abermals eine Reihe stetig aufeinander folgender Reflexions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die bestimmt vorgeschriebene Katakaustika $y^2 + x^2 = k^2$ erzeugt wird; und weil x und y als Functionen von p ausgedrückt sind, so können alle diese Reflexions-Curven mittels ihrer Tangenten construirt werden.

Dass aber aus der Verbindung der beiden Gleichungen 140) und 141) dieselben Curven hervorgehen, wie aus der Verbindung der beiden Gleichungen 135) und 136); davon kann man sich auf folgende Weise überzeugen:

In Folge der drei Gleichungen 38), 39), 40) ist bekannt, dass, es mögen die Bestandtheile x, y, E von x unabhängig oder von x abhängig sein, der für p hervorgehende Ausdruck sich jedesmal auf

$$142) \quad p = \frac{-(x-r) \pm \sqrt{(y-r)^2 + (x-r)^2}}{(y-r)}$$

reducirt. Nun folgt aus 129), dass

$$143) \quad (y-r) = -(x-r) \cdot \frac{x}{y}$$

ist; und indem man mittels 143) die Differenz $(y-r)$ aus 142) entfernt, fällt auch $(x-r)$ mit hinweg, und es bleibt nur

$$144) \quad p = \frac{-y \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{-x} = \frac{-y \pm k}{-x} = \frac{y}{x} + \frac{k}{x}$$

Daraus folgt weiter

$$145) \quad 1 - p^2 = \frac{2y \cdot (-y \pm k)}{x^2}$$

und

$$146) \quad \text{arc tg } p = \frac{1}{2} \cdot \text{arc tg } \frac{2p}{1-p^2} = \frac{1}{2} \cdot \text{arc tg } \frac{-x}{y} = -\frac{1}{2} \cdot \text{arc tg } \frac{x}{y}$$

Nun substituirt man die betreffenden Ausdrücke in 140), so bekommt man

$$\frac{-y \pm k}{2 \cdot y} \cdot x = L \mp k \cdot \left(\frac{-x}{2 \cdot y} + \frac{1}{2} \cdot \text{arc tg } \frac{x}{y} \right)$$

oder, wenn man Alles mit 2 multiplicirt,

$$147) \quad \frac{\pm k - y}{y} \cdot x = 2L \pm k \cdot \left(\frac{x}{y} - \text{arc tg } \frac{x}{y} \right)$$

Man substituirt ebenso die betreffenden Ausdrücke in die Gleichung 141), so bekommt man weiter

$$\frac{y \pm k}{x} \cdot y = 2L \mp k \cdot \left(\frac{-y \pm k}{-x} + \text{arc tg } \frac{x}{y} \right)$$

oder

$$\mp \frac{k \pm y}{x} \cdot y = 2L + \frac{k^2}{x} \mp k \cdot \left(\frac{y}{x} + \text{arc tg } \frac{x}{y} \right)$$

oder, mit Veränderung der Zeichen

$$148) \quad \frac{\pm k - y}{x} \cdot y = -2L - \frac{k^2}{x} \pm k \cdot \left(\frac{y}{x} + \text{arc tg } \frac{x}{y} \right)$$

Wenn man hier noch K statt $2L$ setzt, so fallen die Gleichungen 147) und 148) genau mit 135) und 136) zusammen, wie zu beweisen war.

Dritte Methode. Man kann das einfach singuläre Integral auch gewinnen, wenn man bei Gleichung 121) den ersten Factor zu Null werden, d. h. wenn man die Gleichung

$$149) \quad u \cdot y + x + (1 + u^2) \cdot (u - p) \cdot \frac{dx}{du} = 0$$

gelten lässt. Daraus folgt

$$150) \quad (u - p) \cdot \frac{dx}{du} = - \frac{u \cdot y + x}{1 + u^2}$$

und wenn man diesen für $(u - p) \cdot \frac{dx}{du}$ hergestellten Ausdruck in Gleichung 120) substituirt, so geht diese über in

$$\left(\frac{y - ux}{1 + u^2}\right)^2 + \left(-\frac{u \cdot (y - ux)}{1 + u^2}\right)^2 = k^2$$

oder in

$$\frac{(y - ux)^2}{1 + u^2} = k^2$$

und daraus folgt weiter

$$151) \quad y - ux = \pm k \cdot \sqrt{1 + u^2}$$

Nun muss man untersuchen, ob von 151) auch den beiden Gleichungen 120) und 149) zugleich genügt, und ob das zu 151) gehörige Integral ein einfach singuläres oder ein einfach particuläres ist. Weil aber Gleichung 151) dieselbe ist, wie Gleichung 137); so ist auch der weitere Verlauf dieser dritten Methode, wie bei der zweiten.

Zweiter Abschnitt.

Bestimmung der Reflexions-Curven für von einem leuchtenden Punkte herkommende Lichtstrahlen.

§. 10.

Man sucht diejenige Reflexions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass die Katakaustika sich in einen einzigen Punkt (Brennpunkt) zusammenzieht.

Man richte das Coordinatensystem der gesuchten Reflexions-Curve so ein, dass die Abscissenaxe durch den leuchtenden Punkt geht; und wenn dabei die Coordinaten des vorgeschriebenen Brennpunktes die festen Werthe g und h haben, so specialisiren sich für dieselben die Gleichungen 2) und 3) bezüglich in

$$152) \quad g = x + (u - p) \cdot \frac{dx}{du}$$

und

$$153) \quad h = y + u \cdot (u - p) \cdot \frac{dx}{du}$$

und jede Curve, welche diesen beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung zugleich genügt, hat die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft.

Das nächste Geschäft ist nun, eine erste Stammgleichung aufzusuchen, welche diesen beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung zugleich genügt; und wenn man hier wie in §. 5 verfährt, so bekommt man

$$154) \quad y - h = (x - g) \cdot u$$

Diese erste Stammgleichung enthält keinen Integrations-Constanten; denn nur so kann sie, wie man bereits im §. 5 ersehen hat, den beiden vorgelegten Differentialgleichungen 152) und 153) zugleich genügen. Um aber die Aufgabe weiter durchführen zu können, muss man für u den in §. 2 befindlichen Ausdruck

$$\frac{2 \cdot (x-g) \cdot p - y \cdot (1-p^2)}{2 \cdot y \cdot p + (x-g) \cdot (1-p^2)}$$

in welchem durch g die Abscisse des leuchtenden Punktes dargestellt ist, zurückführen. Dabei geht Gleichung 154) über in

$$155) \quad \left((x-g) \cdot (y-h) + (x-g) \cdot y \right) \cdot p^2 + 2 \cdot \left((x-g) \cdot (x-g) - (y-h) \cdot y \right) \cdot p - (x-g) \cdot (y-h) - (x-g) \cdot y = 0$$

Man multiplicire diese Gleichung mit $\left((x-g) \cdot (y-h) - (x-g) \cdot y \right)$, so gibt sich

$$156) \quad \left((x-g)^2 \cdot (y-h)^2 - (x-g)^2 \cdot y^2 \right) \cdot p^2 + 2 \cdot \left((x-g)^2 \cdot (x-g) \cdot (y-h) - (x-g) \cdot (y-h)^2 \cdot y - (x-g) \cdot (x-g)^2 \cdot y + (x-g) \cdot (y-h) \cdot y^2 \right) \cdot p - (x-g)^2 \cdot (y-h)^2 + (x-g)^2 \cdot y^2 = 0$$

Man addire die beiden identischen Differenzen

$$(x-g)^2 \cdot (x-g)^2 - (x-g)^2 \cdot (x-g)^2$$

und

$$(y-h)^2 \cdot y^2 \cdot p^2 - (y-h)^2 \cdot y^2 \cdot p^2$$

so setzt Gleichung 156) sich um in

$$157) \quad \left((x-g)^2 + y^2 \right) \cdot \left((x-g) + y-h \right) \cdot p^2 - \left((x-g)^2 + (y-h)^2 \right) \cdot \left((x-g) + y \right) \cdot p = 0$$

Daraus folgt

$$158) \quad \frac{(x-g) + y \cdot p}{\sqrt{(x-g)^2 + y^2}} \pm \frac{(x-g) + (y-h) \cdot p}{\sqrt{(x-g)^2 + (y-h)^2}} = 0$$

und wenn man integrirt, so gibt sich

$$159) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-g)^2 + (y-h)^2} = G$$

Das den Differentialgleichungen 152) und 153) gemeinsame Urintegral ist also nur mit einem und nicht mit zwei Integrations-Constanten versehen. Die Ursache ist schon bei Gleichung 22) angemerkt.

Bei Gleichung 159) erkennt man, dass der Ausdruck $\sqrt{(x-g)^2 + y^2}$ der vom leuchtenden Punkte, und dass der Ausdruck $\sqrt{(x-g)^2 + (y-h)^2}$ der vom vorgeschriebenen Brennpunkte (g, h) nach irgend einem Punkte der gesuchten Reflexions-Curve gezogene Leitstrahl ist; und daraus folgt, dass, je nachdem man beim Doppelzeichen \pm das obere oder untere gelten lässt, entweder die Summe oder der Unterschied der beiden Leitstrahlen gleich ist dem Integrations-Constanten G , d. h. die durch 159) dargestellte Curvenreihe besteht entweder aus konischen Ellipsen oder aus konischen Hyperbeln, welchen allen die unveränderliche Excentricität $\sqrt{(g-g)^2 + h^2}$ gemeinschaftlich ist. Nun hat man zu unterscheiden:

1. Bei den konischen Ellipsen wird jeder zwischen zwei zusammengehörigen Leitstrahlen liegende Winkel von der betreffenden Normale halbirt; und somit wird jeder von einem

Brennpunkte einer konischen Ellipse ausgehende Lichtstrahl nach dem anderen Brennpunkte reflectirt. Weil nun alle durch

$$\sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(x-g)^2 + (y-b)^2} = G$$

dargestellten Ellipsen die Brennpunkte gemeinschaftlich haben, so haben auch alle diese Ellipsen die von der Aufgabe verlangte Eigenschaft.

2. Bei den konischen Hyperbeln wird jeder zwischen zwei zusammengehörigen Leitstrahlen liegende Winkel von der betreffenden Tangente halbirt; und somit wird jeder von einem Brennpunkte der konischen Hyperbeln ausgehende Lichtstrahl sowohl im näheren als auch im entfernteren Hyperbelzweige so reflectirt, dass, wenn man den reflectirten Lichtstrahl rückwärts verlängert, diese Verlängerung in den anderen Brennpunkt eintrifft. Bei den konischen Hyperbeln werden also die von einem Brennpunkte ausgehenden Lichtstrahlen so reflectirt, dass sie sich zerstreuen, und keine Katakaustika erzeugen.

§. 11.

Man sucht diejenige Reflexions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass ihr eine bestimmt vorgeschriebene Curve als Katakaustika zukommt.

Auch hier richte man das Coordinatensystem so ein, dass die Abscissenaxe durch den leuchtenden Punkt geht; und wenn sich dann für die vorgeschriebene Katakaustika die bestimmte Gleichung

$$160) \quad \delta(r, y) = 0$$

ergibt, so hat man für r und y die Ausdrücke 2) und 3) einzuführen, und man bekommt für die gesuchte Reflexions-Curve folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$161) \quad \delta \left\{ \left(x + (u-p) \cdot \frac{dr}{du} \right), \left(y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dy}{du} \right) \right\} = 0$$

Man bediene sich auch hier der schon in §. 6 angewendeten Abkürzungszeichen M und N und differentiire 161); so bekommt man auch hier

$$162) \quad \left(\frac{d_M \delta}{dM} + u \cdot \frac{d_N \delta}{dN} \right) \cdot \left(2 - \frac{dp}{dr} \cdot \frac{dr}{du} - (u-p) \cdot \frac{d^2 u}{du^2} \right) = 0$$

Dieser Gleichung wird aber genügt, entweder wenn

$$163) \quad 2 - \frac{dp}{dr} \cdot \frac{dr}{du} - (u-p) \cdot \frac{d^2 u}{du^2} = 0$$

oder wenn

$$164) \quad \frac{d_M \delta}{dM} + u \cdot \frac{d_N \delta}{dN} = 0$$

Die Differentialgleichung 163), welche von der dritten Ordnung ist, führt hier ebenso, wie in §. 6. zu folgender Verbindung zweier Gleichungen:

$$165) \quad \delta(A, B) = 0$$

und

$$166) \quad (y-B) = (x-A) - u.$$

Die Verbindung dieser beiden Gleichungen ist die erste Stammgleichung zu 161); und weil A und B in der durch 165) ausgesprochenen Abhängigkeit zu einander stehen, so kann man entweder A oder B aus 166) eliminieren, wodurch man eine erste Stammgleichung mit nur einem Integrations-Constanten bekommt.

Um nun die Gleichung 166) weiter behandeln zu können, muss man für u den Ausdruck 5) zurückführen; und dabei geht 166) über in

$$167) \left((x-g) \cdot (y-B) + (x-A) \cdot y \right) \cdot p^2 + 2 \cdot \left((x-g) \cdot (x-A) - (y-B) \cdot y \right) \cdot p - (x-g) \cdot (y-B) - (x-A) \cdot y = 0$$

Mit dieser Gleichung verfähre man jetzt weiter, wie mit Gleichung 155) im §. 10; so bekommt man die Urgleichung

$$168) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-A)^2 + (y-B)^2} = G$$

Hier erscheinen drei Integrations-Constanten A , B , G , während die vorgelegte Differentialgleichung 161) nur eine von der zweiten Ordnung ist. Weil jedoch A und B in der durch Gleichung 165) ausgesprochenen Abhängigkeit zu einander stehen, so kann man entweder A oder B eliminieren, und ein Urintegral mit nur zwei Integrations-Constanten herstellen.

Vergleicht man jedoch die Gleichungen 160) und 165) mit einander, so erkennt man, dass zwischen A und B dieselbe Relation stattfindet, wie zwischen x und y . Man kann also statt der Integrations-Constanten A und B auch die zur vorgeschriebenen Katakaustika gehörigen Coordinaten x und y setzen: und dabei geht 168) über in

$$169) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-r)^2 + (y-\eta)^2} = G$$

Der Ausdruck $\sqrt{(x-g)^2 + y^2}$ ist der vom leuchtenden Punkte nach irgend einem zur gesuchten Reflexions-Curve gehörigen Punkte (x, y) gezogene Leitstrahl. Ebenso ist der Ausdruck $\sqrt{(x-r)^2 + (y-\eta)^2}$ der von irgend einem zur vorgeschriebenen Katakaustika gehörigen Punkte (r, η) nach dem zur gesuchten Reflexions-Curve gehörigen Punkte (x, y) gezogene Leitstrahl. Daraus folgt, dass, je nachdem man in Gleichung 169) dem Doppelzeichen seine positive oder negative Bedeutung beilegt, entweder die Summe oder der Unterschied der beiden Leitstrahlen gleich ist dem Integrations-Constanten G , d. h. alle durch 169) dargestellten unendlich vielen Curven-Schaaren bestehen entweder aus konischen Ellipsen oder aus konischen Hyperbeln mit der Hauptaxe G und mit der Excentricität $\sqrt{(r-g)^2 + \eta^2}$. Jeder im Umfange der vorgeschriebenen Katakaustika liegende Punkt (r, η) ist der eine Brennpunkt, und der leuchtende Punkt ist der andere Brennpunkt der durch 169) dargestellten Ellipsen oder Hyperbeln. Man hat nun zu unterscheiden:

1. Bei den konischen Ellipsen wird jeder zwischen zwei zusammengehörigen Leitstrahlen liegende Winkel von der betreffenden Normale halbirt, und somit wird jeder von einem Brennpunkte der konischen Ellipsen ausgehende Lichtstrahl in den anderen Brennpunkt reflectirt. Wählt man also im Umfange der vorgeschriebenen Katakaustika irgend einen Punkt, und verbindet man diesen mit dem leuchtenden Punkte; so sind alle unendlich

vielen konischen Ellipsen, denen die eben besagte Verbindungslinie als Excentricität zukommt; so beschaffen, dass sie die vom leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen nach jenem (im Umfange der vorgeschriebenen Katakaustika gewählten) Punkte reflectiren. Geht man zu einem zweiten (unmittelbar anliegenden) Punkte im Umfange der vorgeschriebenen Katakaustika über, und verbindet man diesen zweiten Punkt wiederum mit dem leuchtenden Punkte; so sind alle unendlich vielen konischen Ellipsen, denen diese zweite Verbindungslinie als Excentricität zukommt, ebenfalls so beschaffen, dass sie die vom leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen nach dem (im Umfange der vorgeschriebenen Katakaustika gewählten) zweiten Punkte reflectiren. Und so fort.

Weil nun (nach §. 10) bei jeder konischen Ellipse, sobald der eine ihrer Brennpunkte der leuchtende Punkt ist, die Katakaustika sich in den anderen Brennpunkt zusammenzieht, welcher bei allen durch 169) dargestellten unendlich vielen Ellipsen-Schaaren jedesmal ein dem Umfange der vorgeschriebenen Katakaustika angehöriger Punkt ist; so ist unter allen diesen Ellipsen keine einzige im Stande, von der vorgeschriebenen Katakaustika mehr als einen Punkt zu erzeugen, d. h. keine einzige dieser Ellipsen ist die gesuchte Reflexions-Curve. Man muss also untersuchen, ob unter diesen unendlich vielen Ellipsen-Schaaren solche Reihen stetig nebeneinander liegender Ellipsen vorkommen, die sich so schneiden, dass die dadurch entstandenen Durchschnittslinien auch noch der vorgelegten Differentialgleichung 161) genügen. Weil aber diese Differentialgleichung eine der zweiten Ordnung ist, so muss jede Durchschnittslinie (§. 4) eine solche Gränz-Curve sein, welche in allen ihren Punkten mit irgend einer der sich schneidenden Ellipsen eine Berührung der zweiten Ordnung eingeht. Die Gränz-Curven der zweiten Ordnung werden aber, wie in der analytischen Geometrie noch näher nachgewiesen werden muss, durch das einfach singuläre Urintegral dargestellt; und dieses kann bekanntlich auf drei verschiedenen Wegen ermittelt werden.

2. Bei den konischen Hyperbeln wird jeder zwischen zwei zusammengehörigen Leitstrahlen liegende Winkel von der betreffenden Tangente halbirt, und somit wird jeder von einem Brennpunkte der konischen Hyperbeln ausgehende Lichtstrahl sowohl im näheren als auch im entfernteren Hyperbelzweige so reflectirt, dass, wenn man den reflectirten Strahl rückwärts verlängert, diese Verlängerung in den anderen Brennpunkt eintrifft. Bei den konischen Hyperbeln werden also die von einem Brennpunkte ausgehenden Lichtstrahlen so reflectirt, dass sie sich zerstreuen; und desshalb kann auch von den diese Hyperbeln osculirenden Gränz-Curven keine Katakaustika erzeugt werden.

Weil nun durch Gleichung 169) nur konische Ellipsen dargestellt werden dürfen, so darf bei dem Doppelzeichen auch nur das positive gelten; und Gleichung 169) specialisirt sich in

$$170) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(x-r)^2 + (y-b)^2} = G$$

Erste Methode, das einfach singuläre Integral zu bestimmen. Wenn man dieses aus dem allgemeinen Urintegral ableiten will; so beachte man, dass die Integrations-Constanten von x und von y unabhängig sind bei allen sich schneidenden Curven; und wenn man in dieser engen Beziehung die Gleichung 170) differentiirt, so bekommt man

$$171) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(x-r) \cdot \sqrt{(x-g)^2 + y^2} + (x-g) \cdot \sqrt{(x-r)^2 + (y-b)^2}}{(y-b) \cdot \sqrt{(x-g)^2 + y^2} + y \cdot \sqrt{(x-r)^2 + (y-b)^2}}$$

Dagegen müssen die Integrations-Constanten Functionen von x sein bei allen Gränz-Curven; und wenn man in dieser weiteren Beziehung die Gleichung 170) nach allen x differentiirt, so bekommt man

$$172) \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{(x-r) \cdot \sqrt{(x-g)^2 + y^2} + (x-g) \cdot \sqrt{(x-r)^2 + (y-\eta)^2}}{(y-\eta) \cdot \sqrt{(x-g)^2 + y^2} + y \cdot \sqrt{(x-r)^2 + (y-\eta)^2}} \\ + \frac{((x-r) + (y-\eta) \cdot \frac{d\eta}{dx}) \cdot \frac{dx}{dx} + (\sqrt{(x-r)^2 + (y-\eta)^2}) \cdot \frac{dx}{dx}}{(y-\eta) \cdot \sqrt{(x-g)^2 + y^2} + y \cdot \sqrt{(x-r)^2 + (y-\eta)^2}} \cdot \sqrt{(x-g)^2 + y^2}$$

Damit aber aus 171) und 172) sich für $\frac{dy}{dx}$ zwei ebenförmige Ausdrücke ergeben können, muss die Gleichung

$$173) \quad ((x-r) + (y-\eta) \cdot \frac{d\eta}{dx}) \cdot \frac{dx}{dx} + (\sqrt{(x-r)^2 + (y-\eta)^2}) \cdot \frac{dG}{dx} = 0$$

stattfinden. Differentiirt man Gleichung 171) noch einmal sowohl nach allem explicit als auch nach allem implicit in y, r, η enthaltenen x ; so bekommt man neben der Gleichung 173) auch noch

$$174) \quad [(x-g)(x-r) + y(y-\eta) + (\sqrt{(x-g)^2 + y^2}) \cdot \sqrt{(x-r)^2 + (y-\eta)^2}] \cdot ((y-\eta) - (x-r) \cdot \frac{d\eta}{dx}) \cdot \frac{dx}{dx} = 0$$

Daraus kann aber nur folgen

$$175) \quad (y-\eta) - (x-r) \cdot \frac{d\eta}{dx} = 0$$

und hiermit wird diejenige Gerade dargestellt, welche durch den Punkt (x, y) der gesuchten Reflexions-Curve geht, und zugleich die zum Punkte (r, η) der vorgeschriebenen Katakaustika gehörige Tangente ist. Jede Katakaustika ist ja, wie schon in §. 1 auseinandergesetzt wurde, eine einhüllende Gränz-Curve.

Eliminirt man jetzt mittels der Gleichung 175) die Differenz $(y-\eta)$ aus 173), so fällt auch $(x-r)$ mit hinweg; und 173) geht über in

$$(\sqrt{dx^2 + d\eta^2}) + (\sqrt{dx^2 + d\eta^2}) \cdot dG = 0$$

oder in

$$(\sqrt{dx^2 + d\eta^2}) + dG = 0.$$

Daraus folgt

$$dG = - \sqrt{dx^2 + d\eta^2}$$

oder

$$176) \quad G = K - \int \sqrt{dx^2 + d\eta^2}$$

wo K ein Integrations-Constanter ist. Gleichung 170) geht also über in

$$177) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(x-r)^2 + (y-\eta)^2} = K - \int \sqrt{dx^2 + d\eta^2}.$$

Mit dieser Gleichung hat man aber noch folgende drei

$$175) \quad (y-\eta) - (x-r) \cdot \frac{d\eta}{dx} = 0$$

$$160) \quad \delta(r, \eta) = 0$$

$$178) \quad \frac{d\delta}{dx} + \frac{d\delta}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{dx} = 0$$

zu verbinden, d. h. man hat die in 177) angezeigte Integration auszuführen, und sodann die drei Bestandtheile $r, \eta, d\eta$ zu eliminiren. Dabei fällt auch dx mit hinweg, und es ergibt sich

eine Gleichung zwischen x und y und dem Integrations-Constanten K . Diese neue Gleichung ist aber ein einfach singuläres Urintegral zu 161); und durch dasselbe ist, wegen des Integrations-Constanten K , eine Reihe stetig aufeinander folgender Reflexions-Curven dargestellt, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen von dem leuchtenden Punkte, dessen Abscisse $= g$ ist, herkommen, die bestimmt vorgeschriebene Katakaustika $\delta(x, y) = 0$ erzeugt wird.

Zweite Methode. Zu dem einfach singulären Integrale kann man auch mittels der ersten Stammgleichung gelangen. Man beachte also wiederum, dass die Integrations-Constanten von x und von y unabhängig sind bei allen sich schneidenden Ellipsen; und wenn man in dieser engen Beziehung die Gleichung 166) differentiirt, und dabei sich erinnert, dass u diesmal eine Function von x, y, p ist; so bekommt man

$$179) \quad \frac{dp}{dx} = - \frac{(u-p) + (x-A) \cdot \left(\frac{dxu}{dx} + \frac{dyu}{dy} \cdot p \right)}{(x-A) \cdot \frac{dpu}{dp}}$$

Dagegen müssen die Integrations-Constanten Functionen von x sein bei allen Gränz-Curven; und wenn man in dieser weiteren Beziehung die Gleichung 166) nach allen x differentiirt, so bekommt man weiter

$$180) \quad \frac{dp}{dx} = - \frac{(u-p) + (x-A) \cdot \left(\frac{dxu}{dx} + \frac{dyu}{dy} \cdot p \right)}{(x-A) \cdot \frac{dpu}{dp}} - \frac{\frac{dB}{dA} - u}{(x-A) \cdot \frac{dpu}{dp}} \cdot \frac{dA}{dx}$$

Damit aber aus 179) und 180) für $\frac{dp}{dx}$ zwei ebenförmige Ausdrücke sich ergeben können, muss die Gleichung

$$181) \quad \frac{dB}{dA} - u = 0$$

stattfinden. Nun folgt aus 165) die Differentialgleichung

$$182) \quad \frac{d_N \delta}{dA} + \frac{d_N \delta}{dB} \cdot \frac{dB}{dA} = 0$$

und wenn man aus den vier Gleichungen 165), 166), 181), 182) die drei Bestandtheile $A, B, \frac{dB}{dA}$ eliminirt, so bekommt man endlich

$$183) \quad y - u \cdot x = \psi(u)$$

wo die Form des Ausdruckes $\psi(u)$ abhängig ist von $\delta(A, B) = 0$. Hier hat man für u noch seinen Ausdruck

$$\frac{2 \cdot (x-g) \cdot p - y \cdot (1-p^2)}{2y \cdot p + (x-g) \cdot (1-p^2)}$$

zurückzuführen, und die sich ergebende Differentialgleichung erster Ordnung zu integriren. Dadurch gelangt man zu der nämlichen mit x, y und dem Integrations-Constanten K versehenen Urgleichung, wie bei der ersten Methode.

Dritte Methode. Lässt man die Gleichung 164), d. h. die Gleichung

$$184) \quad \frac{d_M \delta}{dM} + u \cdot \frac{d_N \delta}{dN} = 0$$

gelten, so hat man jetzt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung; und man muss eine solche der ersten Ordnung aufsuchen, von welcher die beiden Gleichungen 161) und 184) zugleich erfüllt werden. Die hier aufzusuchende Differentialgleichung erster Ordnung wird

aber genau wieder die Gleichung 183) sein, durch deren Integration sich also auch die nämliche mit x , y und dem Integrations-Constanten K versehene Ugleichung ergibt, wie bei der zweiten Methode.

(Man vergleiche die dritte Methode in §. 7, §. 8, §. 9.)

Anmerkung. In speciellen Fällen werden durch die zweite und dritte Methode grosse Weitläufigkeiten veranlasst; und desshalb sollen die in §. 12, §. 13, §. 14 nachfolgenden Beispiele nur nach der ersten Methode ausgeführt werden.

§. 12.

Beispiel 4. Man sucht diejenige Reflexions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass die zugehörige Katakaustika die durch die Gleichung

$$185) \quad y^3 = h \cdot x^2$$

vorgeschriebene semikubische Parabel ist.

Hier ist (nach §. 11) das allgemeine Integral durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$186) \quad B^3 = h \cdot A^2$$

und

$$187) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(x-A)^2 + (y-B)^2} = C$$

oder, was das nämliche ist, durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$188) \quad y^3 = h \cdot x^2$$

und

$$189) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(x-r)^2 + (y-b)^2} = G$$

dargestellt, d. h. man hat alle unendlich vielen Schaaren konischer Ellipsen, bei denen jeder im Umfange der vorgeschriebenen Parabel liegende Punkt der eine Brennpunkt sein kann, und bei denen der leuchtende Punkt der andere Brennpunkt sein muss.

Nun sind die Reflexions-Curven, als Gränz-Curven der zweiten Ordnung, nicht durch ein allgemeines sondern durch ein einfach singuläres Integral darzustellen; und die Gleichungen 175) und 177) specialisiren sich diesmal in

$$190) \quad (y-b) - (x-r) \cdot \frac{2y}{3x} = 0$$

und

$$191) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(x-r)^2 + (y-b)^2} = K - \left(\frac{1}{3} + \frac{1/2}{27y}\right) \cdot \sqrt{9 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2}$$

Durch die Verbindung der drei Gleichungen 185), 190), 191) hat man, wegen des Integrations-Constanten K , eine Reihe stetig auf einander folgender Reflexions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen von einem leuchtenden Punkte, dessen Abscisse $= g$ ist, herkommen, die vorgeschriebene Katakaustika $y^3 = h \cdot x^2$ erzeugt wird; und weil man x und y als Functionen von x und y ausdrücken kann, so können alle diese Reflexions-Curven mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Katakaustika construirt werden.

Auch ist zu bemerken, dass, je nachdem man entweder y und η , oder y und χ aus den drei Gleichungen (185), (190), (191) eliminirt, im ersten Falle das χ , und im zweiten Falle das η als Function von x und K erscheint; und somit ist nachgewiesen, dass die Verbindung dieser drei Gleichungen ein einfach singuläres und nicht ein einfach particuläres Integral ist.

§. 13.

Beispiel 5. Man sucht diejenige Reflexions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so reflectirt werden, dass die zugehörige Katakaustika die durch die Gleichung

$$192) \quad \eta^2 = 2h \cdot \chi$$

vorgeschriebene konische Parabel ist.

Hier specialisiren sich die Gleichungen (175) und (177) bezüglich in

$$193) \quad (y-\eta) - (x-\chi) \cdot \frac{h}{\eta} = 0$$

und

$$194) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\chi)^2 + (y-\eta)^2} = K - \frac{b\sqrt{h^2 + b^2}}{2h} + \frac{h}{2} \cdot \operatorname{lgnat} \left(\frac{-\eta + \sqrt{h^2 + \eta^2}}{h} \right)$$

und man kann die gesuchte Reflexions-Curve mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Katakaustika construiren.

§. 14.

Beispiel 6. Man sucht diejenige Reflexions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so reflectirt werden, dass die zugehörige Katakaustika die durch folgende Gleichung

$$195) \quad \eta^{\frac{2}{3}} + \chi^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}$$

vorgeschriebene Hypokykloide ist.

Hier specialisiren sich die Gleichungen (175) und (177) bezüglich in

$$196) \quad (y-\eta) \cdot \sqrt{\chi} + (x-\chi) \cdot \sqrt{\eta} = 0$$

und

$$197) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\chi)^2 + (y-\eta)^2} = K - \frac{2}{3} \sqrt{k \cdot \chi^2}$$

und man kann auch hier die gesuchte Reflexions-Curve mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Katakaustika construiren.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Bestimmung der Refractions-Curven, während die Diakaustika vorgeschrieben ist.

Erster Abschnitt.

Bestimmung der Refractions-Curven für parallele Lichtstrahlen.

§. 15.

Man sucht diejenige Refractions-Curve, bei welcher die parallel auf sie auffallenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass die Diakaustika sich in einen einzigen Punkt (Brennpunkt) zusammenziehen.

Man richte das Coordinatensystem der gesuchten Refractions-Curve so ein, dass ihre Abscissenaxe mit den Lichtstrahlen parallel ist; und wenn dabei die Coordinaten des vorgeschriebenen Brennpunktes die festen Werthe g und h haben, so specialisiren sich für dieselben die Gleichungen 9) und 10) bezüglich in

$$198) \quad g = x + (r+p) \cdot \frac{dx}{dr}$$

und

$$199) \quad h = y - r \cdot (r+p) \cdot \frac{dy}{dr}$$

und jede Curve, welche diesen beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung zugleich genügt, hat die in der Aufgabe geforderte Eigenschaft. Gleichung 198) lässt sich umsetzen in

$$(r-g) \cdot dr + r \cdot dx + dy = 0$$

und wenn man integrirt, so gibt sich

$$200) \quad (x-g) \cdot r + y = A$$

wo A ein Integrations-Constanter ist. Man hat nun allerdings die erste Stammgleichung zu 198); ob jedoch Gleichung 200) auch der 199) genügt, muss noch besonders nachgewiesen werden. Aus 200) folgt

$$y = A - (x-g) \cdot r$$

und

$$p = -r - (x-g) \cdot \frac{dr}{dx}$$

und wenn man für y und p diese Ausdrücke substituirt, so reducirt Gleichung 199) sich auf

$$201) \quad h = A$$

so dass 200) übergeht in

$$202) \quad (y-h) + (x-g) \cdot r = 0$$

Hiermit hat man eine erste Integralgleichung, welche jetzt, nachdem der Integrations-Constante A den besonderen Werth h angenommen hat, wirklich so beschaffen ist, dass sie den beiden Differentialgleichungen 198) und 199) zugleich genügt.

Um aber die Aufgabe weiter durchführen zu können, muss man für v den Ausdruck 11) zurückführen; und dabei geht 202) über in

$$203) \quad (y-h) - (x-g) \cdot p = \left((y-h) \cdot p + (x-g) \right) \cdot \sqrt{\lambda^2 - (1+p^2)} - 1$$

Man erhebe beiderseits aufs Quadrat, so ergibt sich eine Gleichung, welche sich auf folgende Weise anordnen lässt:

$$204) \quad \left((y-h)^2 + (x-g)^2 \right) \cdot (1+p^2) = \lambda^2 \left((y-h) \cdot p + (x-g) \right)^2 \cdot (1+p^2)$$

und daraus folgt weiter

$$205) \quad \mp \lambda \cdot \frac{(y-h) \cdot p + (x-g)}{\sqrt{(y-h)^2 + (x-g)^2}} = 1$$

Wenn man integriert, so gibt sich

$$206) \quad \mp \lambda \cdot \sqrt{(y-h)^2 + (x-g)^2} = x + E$$

und letztere Gleichung kann man nach umformen in

$$207) \quad \frac{\left(x - \frac{\lambda^2 \cdot g + E}{\lambda^2 - 1} \right)^2}{\left(\frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \right)^2 \cdot (g+E)^2} + \frac{(y-h)^2}{\frac{1}{\lambda^2 - 1} \cdot (g+E)^2} = 1$$

(Man vergleiche den Zusatz am Ende des §'s, wo der Werth $\lambda = -1$ besprochen werden wird.)

Das Urintegral ist also diesmal nur mit einem und nicht mit zwei Integrations-Constanten versehen; denn der erste Integrations-Constante A hat, damit den beiden Differentialgleichungen 198) und 199) zugleich genügt wird, den besonderen Werth h angenommen.

Die durch 207) dargestellte Curvenreihe besteht aus konischen Ellipsen oder konischen Hyperbeln, je nachdem $\lambda^2 > 1$ oder $\lambda^2 < 1$ ist.

Die Hauptaxe aller dieser Curven läuft in der Entfernung $\eta = h$ mit der Abscissenaxe parallel, sie ist also auch mit den ursprünglichen Lichtstrahlen parallel. Die Hauptaxe selbst ist $= \frac{2\lambda \cdot (g+E)}{\lambda^2 - 1}$, und die Nebenaxe ist $= \frac{2 \cdot (g+E)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$.

Die Ordinaten sowohl der beiden Scheitel als auch der beiden Brennpunkte haben den vorgeschriebenen Werth h ; dagegen die Abscissen der beiden Scheitel haben die Werthe

$$\frac{\lambda \cdot g - E}{\lambda + 1}, \quad \text{und} \quad \frac{\lambda \cdot g + E}{\lambda - 1}$$

und die Abscissen der beiden Brennpunkte haben die bezüglichen Werthe

$$g, \quad \text{und} \quad g + \frac{2 \cdot (g+E)}{\lambda^2 - 1}$$

Daraus folgt, dass die Excentricität $= \frac{2 \cdot (g+E)}{\lambda^2 - 1}$ ist.

Zusatz. Die für die Refractions-Curve gefundene Gleichung 206) geht, wenn man $\lambda = -1$ setzt, wieder über in die für die Reflexions-Curve gefundene Gleichung 21). Aber die Gleichung 207) bekommt bei diesem Werthe des λ Null in den Nenner, d. h. bei $\lambda = -1$ verliert die Gleichungsform 207) ihre Gültigkeit; und deshalb muss man -1 statt λ schon

in 206) einsetzen, und erst alsdann darf man umformen, wodurch sich wieder die Gleichung 22) ergibt.

§. 16.

Man sucht diejenige Refractions-Curve, bei welcher die parallel auf sie einfallenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass ihr eine bestimmt vorgeschriebene Curve als Diakaustika zukommt.

Auch hier richte man das Coordinatensystem so ein, dass die Abscissenaxe mit den Lichtstrahlen parallel läuft: und wenn sich dann für die vorgeschriebene Diakaustika die bestimmte Gleichung

$$208) \quad \delta(x, y) = 0$$

ergibt, so hat man für x und y die Ausdrücke 9) und 10) einzuführen; und man bekommt für die gesuchte Refractioncurve folgende Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$209) \quad \delta \left(x + (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}, \left(y - v \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv} \right) \right) = 0$$

Um das Verfahren bequem fortführen zu können, setze man

$$Q \text{ anstatt } x + (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}$$

und

$$R \text{ anstatt } y - v \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}$$

Dabei kürzt Gleichung 209) sich ab in

$$210) \quad \delta(Q, R) = 0$$

und wenn man nach allem x differentiirt, so bekommt man

$$211) \quad \left(\frac{d_Q \delta}{dQ} - v \cdot \frac{d_R \delta}{dR} \right) \cdot \left(2 + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} - (v+p) \cdot \frac{d^2v}{dv^2} \right) = 0$$

Dieser Gleichung wird aber genügt, entweder wenn

$$212) \quad 2 + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} - (v+p) \cdot \frac{d^2v}{dv^2} = 0$$

oder wenn

$$213) \quad \frac{d_Q \delta}{dQ} - v \cdot \frac{d_R \delta}{dR} = 0$$

Die Differentialgleichung 212), welche von der dritten Ordnung ist, und aus welcher das der vorgelegten Differentialgleichung 209) entsprechende allgemeine Urintegral gewonnen wird, lässt sich ohneweiters integriren und liefert

$$214) \quad x + (v+p) \cdot \frac{dx}{dv} = A$$

wo A ein Integrations-Constanter ist. Dabei geht Gleichung 209) über in

$$215) \quad \delta \left\{ A, \left(y - v \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv} \right) \right\} = 0$$

An dieser Gleichung erkennt man, dass der Ausdruck $\left(y - v \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv} \right)$ einen von x und von y unabhängigen Werth hat; und wenn man diesen Werth mit B bezeichnet, so bekommt man

$$216) \quad y - v \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv} = B$$

während zwischen A und B die ganz bestimmte Gleichung

$$217) \quad \mathfrak{F}(A, B) = 0$$

stattfindet. Wenn man Gleichung 214) mit v multiplicirt, und das sich ergebende Produkt zu 216) addirt; so bekommt man

$$218) \quad (y-B) + (x-A) \cdot v = 0$$

Hiermit hat man eine erste Stammgleichung, in welcher zwar zwei Integrations-Constanten A und B vorkommen; weil aber A und B in der durch 217) ausgesprochenen Abhängigkeit zu einander stehen, so kann man entweder A oder B aus 218) eliminiren, und eine erste Stammgleichung mit nur einem Integrations-Constanten herstellen.

Um nun die Gleichung 218) weiter behandeln zu können, muss man für v den Ausdruck 11) zurückführen; und dabei geht 218) über in

$$219) \quad (y-B) - (x-A) \cdot p = \left((y-B) \cdot p + (x-A) \right) \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}$$

Mit dieser Gleichung verfähre man jetzt weiter, wie mit Gleichung 203) im vorigen §; so bekommt man das Urintegral

$$220) \quad \mp \lambda \cdot \sqrt{(y-B)^2 + (x-A)^2} = x + E$$

Hier erscheinen sogar drei Integrations-Constanten A, B, E , während die vorgelegte Differentialgleichung 209) nur von der zweiten Ordnung ist. Weil jedoch A und B in der durch 217) ausgesprochenen Abhängigkeit zu einander stehen, so kann man entweder A oder B eliminiren, und eine Urgleichung mit nur zwei Integrations-Constanten herstellen.

Vergleicht man jetzt die Gleichungen 208) und 217) mit einander, so erkennt man, dass zwischen A und B dieselbe Relation stattfindet, wie zwischen x und y . Man kann also statt der Integrations-Constanten A und B auch die zur vorgeschriebenen Diakaustika gehörigen Coordinaten x und y setzen; und dabei geht 220) über in

$$221) \quad \mp \lambda \cdot \sqrt{(y-y)^2 + (x-x)^2} = x + E$$

oder in

$$222) \quad \frac{\left(x - \frac{\lambda^2 \cdot x + E}{\lambda^2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}\right)^2 \cdot (x + E)^2} + \frac{(y-y)^2}{\frac{1}{\lambda^2 - 1} \cdot (x + E)^2} = 1$$

(Man vergleiche den Zusatz am Ende des §'s, wo der Werth $\lambda = -1$ besprochen werden wird.)

Alle hierdurch dargestellten unendlich vielen Curven-Schaaren bestehen sonach entweder aus konischen Ellipsen oder aus konischen Hyperbeln, je nachdem $\lambda^2 > 1$ oder $\lambda^2 < 1$ ist.

Die Hauptaxen aller dieser Ellipsen oder Hyperbeln laufen in der Entfernung $y = \eta$ mit der Abscissenaxe parallel, sind also auch mit den ursprünglichen Lichtstrahlen parallel. Die Hauptaxen selbst sind $= \frac{2\lambda \cdot (x + E)}{\lambda^2 - 1}$, und die Nebenaxen sind $= \frac{2 \cdot (x + E)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$.

Die Abscissen der beiden Scheitel sind $\frac{\lambda \cdot x - E}{\lambda + 1}$ und $\frac{\lambda \cdot x + E}{\lambda - 1}$; dagegen haben beide Scheitel eine gleich lange Ordinate, nämlich $y = \eta$.

Der eine Brennpunkt ist bestimmt durch die beiden Coordinaten x und y , und der andere durch die beiden Coordinaten $(x + \frac{2 \cdot (x+E)}{\lambda^2 - 1})$ und y .

Daraus folgt, dass die Excentricität $= \frac{2 \cdot (x+E)}{\lambda^2 - 1}$ ist.

Vergleicht man die in §. 15 hergestellte Gleichung (207) mit der hier gefundenen Gleichung (222), so erkennt man, dass, wie sich dort die gebrochenen Lichtstrahlen in dem vorgeschriebenen Brennpunkte (g, h) concentriren mussten, hier die gebrochenen Lichtstrahlen sich im Brennpunkte (x, y) concentriren, d. h. jeder einzelne Punkt der hier vorgeschriebenen Diakaustika $\mathfrak{F}(x, y) = 0$ ist ein Brennpunkt zu irgend einer der durch Gleichung (222) dargestellten Ellipsen oder Hyperbeln. Desshalb ist unter allen diesen Ellipsen oder Hyperbeln keine einzige im Stande, von der vorgeschriebenen Diakaustika mehr als einen einzigen Punkt zu erzeugen, d. h. keine einzige der hier gefundenen Ellipsen oder Hyperbeln ist die gesuchte Refractions-Curve. Man muss daher untersuchen, ob unter diesen unendlich vielen Ellipsen-Schaaren oder Hyperbel-Schaaren solche Reihen stetig neben einander liegender Ellipsen (oder Hyperbeln) vorkommen, die sich so schneiden, dass die dadurch entstandenen Durchschnittslinien auch noch der vorgelegten Differentialgleichung (209) genügen. Weil aber diese Differentialgleichung eine der zweiten Ordnung ist, so muss jede Durchschnittslinie (§. 4) eine solche Gränz-Curve sein, welche in allen ihren Punkten mit irgend einer der sich schneidenden Ellipsen (oder Hyperbeln) eine Berührung der zweiten Ordnung eingeht. — Die Gränz-Curven der zweiten Ordnung werden aber, wie in der analytischen Geometrie noch näher auseinander gesetzt werden muss, durch das einfach singuläre Urintegral dargestellt; und dieses kann bekanntlich auf drei verschiedenen Wegen ermittelt werden.

Erste Methode. Wenn man das einfach singuläre Urintegral aus dem allgemeinen ableiten will, so ist dessen in Gleichung (221) aufgestellte Form die bequemste. Nun beachte man, dass die Integrations-Constanten von x und von y unabhängig sind bei allen sich schneidenden Ellipsen (oder Hyperbeln); und wenn man in dieser engen Beziehung die Gleichung (221) differentiirt, so bekommt man

$$223) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\lambda \cdot (x-r) \mp \sqrt{(x-r)^2 + (y-h)^2}}{\lambda \cdot (y-h)}$$

Dagegen müssen die Integrations-Constanten Functionen von x sein bei allen Gränz-Curven; und wenn man in dieser weiteren Beziehung die Gleichung (221) nach allem x differentiirt, so bekommt man jetzt

$$224) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\lambda \cdot (x-r) \mp \sqrt{(x-r)^2 + (y-h)^2}}{\lambda \cdot (y-h)} + \frac{(y-h) \cdot \frac{dh}{dx} + (x-r)}{(y-h)} \cdot \frac{dx}{dx} \mp \frac{\sqrt{(x-r)^2 + (y-h)^2}}{\lambda \cdot (y-h)} \cdot \frac{dE}{dx}$$

Damit aber aus (223) und aus (224) sich für $\frac{dy}{dx}$ zwei ebenförmige Ausdrücke ergeben können, muss die Gleichung

$$225) \quad ((y-h) \cdot \frac{dh}{dx} + (x-r)) \cdot \frac{dx}{dx} \mp \frac{1}{\lambda} \cdot (\sqrt{(x-r)^2 + (y-h)^2}) \cdot \frac{dE}{dx} = 0$$

stattfinden. Differentiirt man die Gleichung (223) noch einmal sowohl nach allem explicit als auch nach allem implicit in y, x, h enthaltenen x ; so bekommt man neben der Gleichung (225) auch noch

$$226) \quad ((x-r) \pm \lambda \cdot \sqrt{(x-r)^2 + (y-h)^2}) \cdot ((y-h) - (x-r) \cdot \frac{dh}{dx}) \cdot \frac{dx}{dx} = 0$$

Daraus kann aber nur folgen

$$227) \quad (y-\eta) - (x-\xi) \cdot \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

und hiermit wird diejenige Grade dargestellt, welche durch den Punkt (x, y) der gesuchten Refractions-Curve geht, und zugleich die zum Punkte (ξ, η) der vorgeschriebenen Diakaustika gehörige Tangente ist. Jede Diakaustika ist ja, wie schon im §. 1 auseinander gesetzt wurde, eine einhüllende Gränz-Curve.

Eliminirt man jetzt mittels 227) die Differenz $(y-\eta)$ aus 225), so fällt auch die Differenz $(x-\xi)$ mit hinweg; und 225) geht über in

$$(d\xi^2 + d\eta^2) \mp \frac{1}{\lambda} \cdot (\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}) \cdot dE = 0$$

oder in

$$\lambda \cdot \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} \mp dE = 0$$

Daraus folgt

$$dE = \pm \lambda \cdot \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$$

oder

$$228) \quad E = K \pm \lambda \cdot \int \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$$

wo K ein Integrations-Constanter ist. Gleichung 221) geht also über in

$$229) \quad \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = x + K \pm \lambda \cdot \int \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$$

Mit dieser Gleichung muss man aber noch folgende drei

$$227) \quad (y-\eta) - (x-\xi) \cdot \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

$$208) \quad \mathfrak{F}(\xi, \eta) = 0$$

$$230) \quad \frac{d_x \mathfrak{F}}{d\xi} + \frac{d_\eta \mathfrak{F}}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

verbinden, d. h. man muss die in 229) angezeigte Integration ausführen, und sodann die drei Bestandtheile $\xi, \eta, d\eta$ eliminiren. Dabei fällt auch $d\xi$ mit hinweg, und es ergibt sich eine Gleichung zwischen x und y und dem Integrations-Constanten K . Diese neue Gleichung ist aber ein einfach singuläres Urintegral zu 209); und durch dasselbe ist, wegen des Integrations-Constanten K , eine Reihe stetig aufeinander folgender Refractions-Curven dargestellt, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auf-fallen, die bestimmt vorgeschriebene Diakaustika $\mathfrak{F}(\xi, \eta) = 0$ erzeugt wird.

Zweite Methode. Zu dem einfach singulären Integral kann man auch mittels der ersten Stammgleichung gelangen. Man beachte also wiederum, dass die Integrations-Constanten von x und von y unabhängig sind bei allen sich schneidenden Ellipsen (oder Hyperbeln); und wenn man in dieser engen Beziehung die Gleichung 218) differentiirt, und dabei sich erinnert, dass r diesmal nichts als ein mit p versellener Ausdruck ist; so bekommt man

$$231) \quad \frac{dp}{dx} = - \frac{(r+p)}{(x-A) \cdot \frac{dv}{dp}}$$

Dagegen müssen die Integrations-Constanten Functionen von x sein bei allen Gränz-Curven; und wenn man in dieser weiteren Beziehung die Gleichung 218) nach allen x differentiirt, so bekommt man jetzt

$$232) \quad \frac{dp}{dx} = - \frac{(r+p)}{(x-A) \cdot \frac{dv}{dp}} + \frac{\frac{dB}{dA} + r}{(x-A) \cdot \frac{dv}{dp}} \cdot \frac{dA}{dx}$$

Damit aber aus 231) und 232) für $\frac{dp}{dx}$ zwei ebenförmige Ausdrücke sich ergeben können, muss die Gleichung

$$233) \quad \frac{dB}{dA} + v = 0$$

stattfinden. Nun folgt aus 217) die Differentialgleichung

$$234) \quad \frac{d_A \delta}{dA} + \frac{d_B \delta}{dB} \cdot \frac{dB}{dA} = 0$$

und wenn man aus den vier Gleichungen 217), 218), 233), 234) die drei Bestandtheile $A, B, \frac{dB}{dA}$ eliminirt, so bekommt man endlich

$$235) \quad y + v \cdot x = \phi(v)$$

wo die Form des Ausdruckes $\phi(v)$ abhängig ist von $\delta(A, B) = 0$. Hier hat man für v noch den Ausdruck

$$v = \frac{p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)} - 1}{1 - p \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)} - 1}$$

zurückzuführen, und die sich ergebende Differentialgleichung erster Ordnung zu integrieren. Dadurch gelangt man zu der nämlichen mit x, y und dem Integrations-Constanten K versehenen Ugleichung, wie bei der ersten Methode.

Dritte Methode. Lässt man die Gleichung 213), d. h. die Gleichung

$$213) \quad \frac{d_q \delta}{dq} - v \cdot \frac{d_k \delta}{dk} = 0$$

gelten, so hat man jetzt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung; und man muss eine solche der ersten Ordnung aufsuchen, von welcher die beiden Gleichungen 209) und 213) zugleich erfüllt werden. Die hier aufgesuchte Differentialgleichung erster Ordnung wird aber genau wieder die Gleichung 235) sein, durch deren Integration sich also auch die nämliche mit x, y und dem Integrations-Constanten K versehene Ugleichung ergibt, wie bei der ersten Methode.

(Man vergleiche die dritte Methode, in §. 17, §. 18, §. 19.)

Zusatz. Alle hier in §. 16 befindlichen refractorischen Resultate gehen, wenn man $\lambda = -1$ setzt, wieder in die reflexorischen (§. 6) über. Bei $\lambda = -1$ bekommt aber die Gleichung 222) Null in den Nenner, und dabei verliert die Gleichungsform 222) ihre Gültigkeit. Desshalb muss man -1 statt λ schon in 221) einsetzen, und erst alsdann darf man umformen, wodurch sich wieder die Gleichung 37) ergibt.

§. 17.

Beispiel 1. Man sucht diejenige Refractions-Curve, bei welcher die parallel auf sie einfallenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass die zugehörige Diakaustika die durch folgende Gleichung

$$236) \quad \eta^3 = h \cdot \tau^2$$

vorgeschriebene semikubische Parabel ist.

Hier bekommt man für die gesuchte Refractions-Curve folgende Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$237) \quad (y - v \cdot (v + p) \cdot \frac{dx}{dv})^3 = h \cdot (x + (v + p) \cdot \frac{dx}{dv})^2$$

und wenn man differentiirt, so gibt sich weiter

$$238) \quad - \left[3v \cdot (y - v \cdot (v + p) \cdot \frac{dx}{dv})^2 + 2h \cdot (x + (v + p) \cdot \frac{dx}{dv}) \right] \cdot \left(2 + \frac{dp}{dv} \cdot \frac{dx}{dv} - (v + p) \cdot \frac{d^2v}{dv^2} \right) = 0$$

Lässt man die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$239) \quad 2 + \frac{dp}{dv} \cdot \frac{dx}{dv} - (v + p) \cdot \frac{d^2v}{dv^2} = 0$$

gelten; so ist (nach §. 16) die den beiden Differentialgleichungen 237) und 239) zugleich genügende Differentialgleichung erster Ordnung dargestellt durch die Verbindung der beiden Gleichungen

$$240) \quad B^3 = h \cdot A^2$$

und

$$241) \quad (y - B) + (x - A) \cdot v = 0$$

Jetzt substituirt man für v den Ausdruck 11), so setzt Gleichung 241) sich um in

$$242) \quad (y - B) - (x - A) \cdot p = \left((y - B) \cdot p + (x - A) \right) \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1 + p^2)} - 1$$

und wenn man mit dieser Gleichung weiter verfährt, wie mit Gleichung 203) in §. 15; so ist das allgemeine Integral durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$243) \quad B^3 = h \cdot A^2$$

und

$$244) \quad \mp \lambda \cdot \sqrt{(y - B)^2 + (x - A)^2} = x + E$$

oder, was das nämliche ist, durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$245) \quad \eta^3 = h \cdot \tau^2$$

und

$$246) \quad \mp \lambda \cdot \sqrt{(y - \eta)^2 + (x - \tau)^2} = x + E$$

dargestellt, d. h. man hat alle jene unendlich vielen Schaaren konischer Ellipsen oder konischer Hyperbeln, deren Hauptaxen mit der allen diesen Curven gemeinschaftlichen Abscissenaxe parallel laufen, und deren einer Brennpunkt im Umfange der vorgeschriebenen Diakauстика liegt.

Nun sind die Refractions-Curven als Gränz-Curven der zweiten Ordnung nicht durch allgemeine, sondern durch einfach singuläre Integrale darzustellen; und diese kann man, wie schon im §. 16 vermerkt, auf drei verschiedenen Wegen aufsuchen.

Erste Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus dem allgemeinen ableitet, so specialisiren die in §. 16 aufgestellten zwei Gleichungen 227) und 229) sich diesmal in

$$247) \quad (y - \eta) - (x - \tau) \cdot \frac{2 \cdot \eta}{3 \cdot \tau} = 0$$

und

$$248) \quad \mp \lambda \cdot \sqrt{(y - \eta)^2 + (x - \tau)^2} = x + K \pm \lambda \cdot \frac{\sqrt{(4 \cdot \eta^2 + 9 \cdot \tau^2)^{3/2}}}{27 \cdot \tau^2}$$

Wenn man zuerst die Differenz $(y-\eta)$ und hierauf die Differenz $(x-r)$ aus 247) und 248) eliminirt, so bekommt man bezüglich

$$249) \quad \frac{-3.r \mp \lambda \sqrt{4.\eta^2 + 9.r^2}}{3.r} \cdot x = K \pm \lambda \cdot \frac{4.h}{27.\eta} \cdot \sqrt{4.\eta^2 + 9.r^2}$$

und

$$250) \quad \frac{-3.r \mp \lambda \sqrt{4.\eta^2 + 9.r^2}}{2.\eta} \cdot y = K - \frac{r}{2} \mp \lambda \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{4.h}{27.\eta} \right) \cdot \sqrt{4.\eta^2 + 9.r^2}$$

Durch die Verbindung der drei Gleichungen 236), 249), 250) hat man, wegen des Integrations-Constanten K , eine Reihe stetig aufeinander folgender Refractions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die bestimmt vorgeschriebene Diakaustika $\eta^3 = h \cdot r^2$ erzeugt wird; und weil x und y als Functionen von r und η ausgedrückt sind, so können alle diese Refractions-Curven mittels der Coordinaten η der vorgeschriebenen Diakaustika construirt werden.

Auch ist zu bemerken, dass, je nachdem man aus 236) und 249) entweder das η oder das r eliminirt, im ersten Falle das r und im zweiten Falle das η als Function von x und von K erscheint; und hiermit ist nachgewiesen, dass die Verbindung der drei Gleichungen 236), 249), 250) ein einfach singuläres und nicht ein einfach particuläres Integral ist.

Zweite Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus der ersten Stammgleichung ableiten will, so muss man die zwei Gleichungen 240) und 241) zu Hülfe nehmen; und dabei specialisirt sich Gleichung 235) in

$$251) \quad y + v \cdot x = \frac{4.h}{27} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Das nächste Geschäft ist jetzt, dass man sich überzeugt, ob von der Gleichung 251) auch die 237) erfüllt wird, und ob das zu 251) gehörige Integral ein einfach singuläres oder nur ein einfach particuläres ist. Aus 251) aber folgt der Reihe nach

$$252) \quad y = -v \cdot x + \frac{4.h}{27.r^2}$$

$$253) \quad p = -v - \left(x + \frac{8.h}{27.r^3} \right) \cdot \frac{dr}{dx}$$

$$254) \quad \frac{dp}{dx} = -2 \cdot \frac{dr}{dx} + \frac{8.h}{9.r^4} \cdot \left(\frac{dr}{dx} \right)^2 - \left(x + \frac{8.h}{9.r^3} \right) \cdot \frac{d^2r}{dx^2}$$

Wenn man die für y und p hergestellten Ausdrücke in Gleichung 237) substituirt, so wird diese identisch, d. h. Gleichung 237) wird von dem zu 251) gehörigen Integral erfüllt. Wenn man ebenso die hier für p und $\frac{dp}{dx}$ hergestellten Ausdrücke in Gleichung 239) einsetzt, so reducirt sich diese auf

$$255) \quad \frac{8.h}{9.r^4} \cdot \frac{dv}{dx} = 0$$

Diese Gleichung trägt aber einen Widerspruch in sich selbst; und somit ist man überzeugt, dass das zu 251) gehörige Integral wirklich ein einfach singuläres der vorgelegten Differentialgleichung 237) ist. Um jedoch Gleichung 251) weiter behandeln zu können, muss man für v den (in §. 3 aufgestellten) Ausdruck 11) zurückführen; und dabei geht Gleichung 251) über in

$$256) \quad y - \frac{p + \sqrt{\lambda^2.(1+p^2) - 1}}{1 - p \cdot \sqrt{\lambda^2.(1+p^2) - 1}} \cdot x = \frac{4.h}{27} \cdot \left(\frac{1 - p \cdot \sqrt{\lambda^2.(1+p^2) - 1}}{p + \sqrt{\lambda^2.(1+p^2) - 1}} \right)^2$$

Die letzte Gleichung nimmt eine bequemere Gestalt an, wenn man Zähler und Nenner des ersten Bruches mit $(p - \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)} - 1)$, und wenn man Zähler und Nenner des zweiten Bruches mit $(p - \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)} - 1)^2$ multiplicirt; denn dadurch bekommt man zunächst

$$y = \frac{(\lambda^2 - 1) \cdot (1+p^2)}{(-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)}) \cdot (1+p^2)} \cdot x = \frac{4h}{27} \frac{(-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)} - 1)^2 \cdot (1+p^2)^2}{(\lambda^2 - 1)^2 \cdot (1+p^2)^2}$$

oder, wenn man in Zähler und Nenner die gemeinschaftlichen Factoren unterdrückt

$$257) \quad y = \frac{\lambda^2 - 1}{-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)} - 1} \cdot x = \frac{4h}{27 \cdot (\lambda^2 - 1)^2} \cdot \left(-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)} - 1 \right)^2$$

Man differentiiere diese Gleichung, und ziehe alsdann die beiden ersten Theilsätze in einen zusammen. Dadurch gelangt man zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, wo alle Theilsätze mit dem gemeinschaftlichen Factor $(p - \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)} - 1)$ versehen sind; und wenn man diesen unterdrückt, so gibt sich

$$258) \quad \frac{\sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)} - 1}{-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)} - 1} \cdot dx + \frac{\lambda^2 \cdot (\lambda^2 - 1) \cdot x}{(-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)} - 1)^2 \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)} - 1} \cdot dp \\ = \frac{8 \cdot \lambda^2 \cdot h}{27 \cdot (\lambda^2 - 1)^2} \cdot \left(dp - \frac{\lambda^2 \cdot p \cdot dp}{\sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)} - 1} \right)$$

Daraus folgt durch Integration

$$259) \quad \frac{\sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)} - 1}{-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)} - 1} \cdot x = L + \frac{8 \cdot \lambda^2 \cdot h}{27 \cdot (\lambda^2 - 1)^2} \cdot \left(p - \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)} - 1 \right)$$

und, wenn man x aus 257) und 259) eliminirt,

$$260) \quad \left(\sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)} - 1 \right) \cdot y = (\lambda^2 - 1) \cdot L + \frac{8 \cdot \lambda^2 \cdot h}{27 \cdot (\lambda^2 - 1)} \cdot \left(p - \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)} - 1 \right) \\ + \frac{4h}{27 \cdot (\lambda^2 - 1)^2} \cdot \left(-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)} - 1 \right)^2 \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2)} - 1$$

(Man vergleiche den Zusatz am Ende dieses §'s, wo der Werth $\lambda = -1$ besprochen werden wird.)

Durch die Verbindung der beiden Gleichungen 259) und 260) hat man, wegen des Integrations-Constanten L , abermals eine Reihe stetig aufeinander folgender Refractions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die bestimmt vorgeschriebene Diakaustika $\eta^3 = h \cdot x^2$ erzeugt wird; und weil x und y als Functionen von p ausgedrückt sind, so können alle diese Refractionseurven mittels ihrer Tangenten construirt werden.

Dass aber aus der Verbindung von 259) und 260) dieselben Curven hervorgehen, wie aus der Verbindung der Gleichungen 249) und 250); davon überzeugt man sich auf folgende Weise:

In Folge der drei Gleichungen 223), 224), 225) ist bekannt, dass, es mögen die Bestandtheile x , y , E von x unabhängig oder von x abhängig sein, der für p hervorgehende Ausdruck sich jedesmal auf folgende Form

$$261) \quad p = \frac{-\lambda \cdot (x-y) \mp \sqrt{(y-u)^2 + (x-y)^2}}{\lambda \cdot (y-u)}$$

reducirt; und wenn man aus 247) und 261) die Differenz $(y - \eta)$ eliminirt, so fällt auch die Differenz $(x - r)$ mit hinweg, d. h. die Gleichung 261) geht über in

$$262) \quad p = \frac{-3\lambda \cdot r \mp \sqrt{4 \cdot b^2 + 9 \cdot r^2}}{2\lambda \cdot b}$$

Daraus folgt weiter

$$263) \quad \sqrt{\lambda^2 \cdot (1 + p^2) - 1} = \frac{-3 \cdot r \mp \lambda \cdot \sqrt{4 \cdot b^2 + 9 \cdot r^2}}{2 \cdot b}$$

$$264) \quad -\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1 + p^2) - 1} = \frac{3 \cdot (\lambda^2 - 1) \cdot r}{2 \cdot b}$$

$$265) \quad p - \sqrt{\lambda^2 \cdot (1 + p^2) - 1} = \frac{\pm (\lambda^2 - 1) \cdot \sqrt{4 \cdot b^2 + 9 \cdot r^2}}{2\lambda \cdot b}$$

Man substituirt jetzt die betreffenden Ausdrücke in Gleichung 259), so geht diese über in

$$\frac{-3 \cdot r \mp \lambda \cdot \sqrt{4 \cdot b^2 + 9 \cdot r^2}}{3 \cdot (\lambda^2 - 1) \cdot r} \cdot x = L \pm \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \cdot \frac{4h}{27b} \cdot \sqrt{4 \cdot b^2 + 9 \cdot r^2}$$

oder, wenn man Alles mit $(\lambda^2 - 1)$ multiplicirt, in

$$266) \quad \frac{-3 \cdot r \mp \lambda \cdot \sqrt{4 \cdot b^2 + 9 \cdot r^2}}{3 \cdot r} \cdot x = (\lambda^2 - 1) \cdot L \pm \lambda \cdot \frac{4h}{27b} \cdot \sqrt{4 \cdot b^2 + 9 \cdot r^2}$$

Man substituirt auch die betreffenden Ausdrücke in Gleichung 260), so geht diese über in

$$\begin{aligned} \frac{-3 \cdot r \mp \lambda \cdot \sqrt{4 \cdot b^2 + 9 \cdot r^2}}{2b} \cdot y &= (\lambda^2 - 1) \cdot L \pm \lambda \cdot \frac{4h}{27 \cdot b} \cdot \sqrt{4 \cdot b^2 + 9 \cdot r^2} \\ &+ \frac{h}{3} \cdot \frac{r^2}{b^2} \cdot \frac{-3 \cdot r \mp \lambda \cdot \sqrt{4 \cdot b^2 + 9 \cdot r^2}}{2 \cdot b} \end{aligned}$$

oder in

$$267) \quad \frac{-3 \cdot r \mp \lambda \cdot \sqrt{4 \cdot b^2 + 9 \cdot r^2}}{2 \cdot b} \cdot y = (\lambda^2 - 1) \cdot L - \frac{r}{2} \mp \lambda \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{4h}{27b} \right) \cdot \sqrt{4 \cdot b^2 + 9 \cdot r^2}$$

Wenn man hier noch K statt $(\lambda^2 - 1) \cdot L$ setzt, so fallen die Gleichungen 266) und 267) genau mit 249) und 250) zusammen, wie zu beweisen war.

Dritte Methode. Man kann das einfach singuläre Integral auch gewinnen, wenn man bei Gleichung 238) den ersten Factor zu Null werden, d. h. wenn man die Gleichung

$$268) \quad 3v \cdot (y - v \cdot (r + p) \cdot \frac{dx}{dv})^2 = -2h \cdot (x + (r + p) \cdot \frac{dx}{dv})$$

gelten lässt. Man dividirt 237) in 268), so gibt sich

$$3v \cdot (x + (r + p) \cdot \frac{dx}{dv}) = -2 \cdot (y - v \cdot (r + p) \cdot \frac{dx}{dv})$$

oder

$$269) \quad v \cdot (r + p) \cdot \frac{dx}{dv} = -(2y + 3vx)$$

Man eliminire $\frac{dx}{dv}$ aus 269) und aus 237), so gibt sich weiter

$$270) \quad 27 \cdot (y + vx)^2 = \frac{4h}{v^2} \cdot (-y - vx)^2$$

oder

$$271) \quad y + vx = \frac{4h}{27} \cdot \frac{1}{v^2}$$

Nun muss man untersuchen, ob von 271) auch den beiden Gleichungen 237) und 268) zugleich genügt wird, und ob das zu 271) gehörige Integral ein einfach singuläres oder nur ein einfach particuläres ist. Weil aber die Gleichung 271) mit 251) zusammenfällt, so ist auch der weitere Verlauf der dritten Methode ganz derselbe, wie bei der zweiten.

Zusatz. Wenn man die hier (§. 17) befindlichen refractorischen Resultate dadurch, dass man $\lambda = -1$ setzt, in die reflexorischen (§. 7) verwandeln will; so hat dieses bei der ersten Methode keinen Anstand. Bei der zweiten Methode aber bekommen die Gleichungen 257), 258), etc. Null in den Nenner. Man muss also -1 statt λ schon in Gleichung 256) einsetzen, und erst dann darf man integrieren, wodurch man wieder zu den Resultaten gelangt, wie bei der zweiten Methode des §. 7.

§. 18.

Beispiel 8. Man sucht diejenige Refractions-Curve, bei welcher die parallel auf sie einfallenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass die zugehörige Diakaustika die durch folgende Gleichung

$$272) \quad \eta^2 = 2h \cdot x$$

vorgeschriebene konische Parabel ist.

Hier bekommt man für die gesuchte Refractions-Curve folgende Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$273) \quad \left(y - v \cdot (v + p) \cdot \frac{dx}{dv} \right)^2 = 2 \cdot h \cdot \left(x + (v + p) \cdot \frac{dx}{dv} \right)$$

und wenn man differentiirt, so gibt sich weiter

$$274) \quad - \left(v \cdot y - v^2 \cdot (v + p) \cdot \frac{dx}{dv} + h \right) \cdot \left(2 + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} - (v + p) \cdot \frac{d^2x}{dv^2} \right) = 0$$

Lässt man die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$275) \quad 2 + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} - (v + p) \cdot \frac{d^2x}{dv^2} = 0$$

gelten; so ist (nach §. 16) die den beiden Differentialgleichungen 273) und 275) zugleich genügende Differentialgleichung erster Ordnung dargestellt durch die Verbindung der beiden Gleichungen

$$276) \quad B^2 = 2 \cdot h \cdot A$$

und

$$277) \quad (y - B) + (x - A) \cdot v = 0$$

Jetzt substituirt man für v den Ausdrück 11), so setzt Gleichung 277) sich um in

$$278) \quad (y - B) - (x - A) \cdot p = \left((y - B) \cdot p + (x - A) \right) \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1 + p^2)} - 1$$

und wenn man mit dieser Gleichung weiter verfährt, wie mit Gleichung 203) in §. 15; so ist das allgemeine Integral durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$279) \quad B^2 = 2h \cdot A$$

und

$$280) \quad \mp \lambda \cdot \sqrt{(y - B)^2 + (x - A)^2} = x + E$$

oder, was das nämliche ist, durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$281) \quad \eta^2 = 2h \cdot \xi$$

und

$$282) \quad \mp \lambda \cdot \sqrt{(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2} = x + E$$

dargestellt, d. h. man hat alle jene unendlich vielen Schaaren konischer Ellipsen oder konischer Hyperbeln, deren Hauptaxen mit der allen diesen Curven gemeinschaftlichen Abscissenaxe parallel laufen, und deren einer Brennpunkt im Umfange der vorgeschriebenen Diakaustika liegt.

Nun sind die Refractions-Curven als Gränz-Curven der zweiten Ordnung nicht durch allgemeine, sondern durch einfach singuläre Integrale darzustellen; und diese kann man, wie schon in §. 16 vermerkt, auf drei verschiedenen Wegen aufsuchen.

Erste Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus dem allgemeinen ableitet, so beachte man, dass wie in §. 8, so auch hier

$$\pm \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm \frac{v \cdot \sqrt{h^2 + v^2}}{2h} - \frac{h}{2} \cdot \text{lg nat} \left(\frac{-v \pm \sqrt{h^2 + v^2}}{h} \right)$$

ist; und so specialisiren sich die (im §. 16 aufgestellten) zwei Gleichungen 227) und 229) diesmal in

$$283) \quad (y-\eta) - (x-\xi) \cdot \frac{h}{v} = 0$$

und

$$284) \quad \mp \lambda \cdot \sqrt{(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2} = x + K + \lambda \cdot \left\{ \pm \frac{v \cdot \sqrt{h^2 + v^2}}{2h} - \frac{h}{2} \cdot \text{lg nat} \left(\frac{-v \pm \sqrt{h^2 + v^2}}{h} \right) \right\}$$

Eliminirt man zuerst die Differenz $(y-\eta)$, und hierauf die Differenz $(x-\xi)$ aus 283) und 284), so bekommt man bezüglich

$$285) \quad \frac{-v \mp \lambda \cdot \sqrt{h^2 + v^2}}{v} \cdot x = K - \lambda \cdot \frac{h}{2} \cdot \text{lg nat} \left(\frac{-v \pm \sqrt{h^2 + v^2}}{h} \right)$$

und

$$286) \quad \frac{-v \mp \lambda \cdot \sqrt{h^2 + v^2}}{h} \cdot y = K + \frac{v \cdot (-v \mp \lambda \cdot \sqrt{h^2 + v^2})}{2h} - \lambda \cdot \frac{h}{2} \cdot \text{lg nat} \left(\frac{-v \pm \sqrt{h^2 + v^2}}{h} \right)$$

Durch die Verbindung der drei Gleichungen 272), 285), 286) hat man, wegen des Integrations-Constanten K , eine Reihe stetig aufeinander folgender Refractions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auf fallen, die bestimmt vorgeschriebene Diakaustika $\eta^2 = 2h \cdot \xi$ erzeugt wird; und weil x und y als Functionen von ξ und η ausgedrückt sind, so können alle diese Refractions-Curven mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Diakaustika construirt werden.

Auch ist zu bemerken, dass, je nachdem man aus 272) und 285) entweder das η oder das ξ eliminirt, im ersten Falle das ξ und im zweiten Falle das η als Function von x und von K erscheint; und somit ist nachgewiesen, dass die Verbindung der drei Gleichungen 272), 285), 286) ein einfach singuläres und nicht ein einfach particuläres Integral ist.

Zweite Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus der ersten Stammgleichung ableiten will, so muss man die zwei Gleichungen 276) und 277) zu Hülfe nehmen; und dabei specialisirt sich Gleichung 235) in

$$287) \quad y + v \cdot x = -\frac{h}{2v}$$

Das nächste Geschäft ist jetzt, dass man sich überzeugt, ob von der Gleichung 287) auch die 273) erfüllt wird, und ob das zu 287) gehörige Integral ein einfach singuläres oder nur ein einfach particuläres ist. Aus 287) aber folgt der Reihe nach

$$288) \quad y = -vx - \frac{h}{2v}$$

$$289) \quad p = -v - \left(x - \frac{h}{2v^2}\right) \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$290) \quad \frac{dp}{dx} = -2 \cdot \frac{dv}{dx} - \frac{h}{v^3} \cdot \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - \left(x - \frac{h}{2v^2}\right) \cdot \frac{d^2v}{dx^2}$$

Wenn man die für y und p hergestellten Ausdrücke in Gleichung 273) substituirt, so wird diese identisch, d. h. Gleichung 273) wird von dem zu 287) gehörigen Integral erfüllt. Wenn man ebenso die hier für p und $\frac{dp}{dx}$ hergestellten Ausdrücke in Gleichung 275) substituirt, so reducirt sich diese auf

$$291) \quad -\frac{h}{v^3} - \frac{dv}{dx} = 0$$

und weil letztere Gleichung einen Widerspruch in sich selbst trägt, so ist man überzeugt, dass das zu 287) gehörige Integral wirklich ein einfach singuläres der Gleichung 273) ist. Um jedoch Gleichung 287) weiter behandeln zu können, muss man für v den (in §. 3 aufgestellten) Ausdruck 11) zurückführen; und dabei geht Gleichung 287) über in

$$292) \quad y = \frac{p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}{1 - p \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \cdot x = + \frac{h}{2} \cdot \frac{1 - p \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}{p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}$$

Diese Gleichung nimmt eine bequemere Form an, wenn man bei beiden Brüchen den Zähler und den Nenner mit $(p - \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1})$ multiplicirt; denn dadurch bekommt jeder Bruch im Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Factor $(1+p^2)$, welchen man unterdrücken kann, so dass Gleichung 292 sich reducirt auf

$$293) \quad y = \frac{\lambda^2 - 1}{-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \cdot x = + \frac{h}{2 \cdot (\lambda^2 - 1)} \cdot \left(-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}\right)$$

Man differentiiere, und vereinige alsdann die beiden ersten Theilsätze. Dadurch erscheint der Ausdruck $(p - \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1})$ als ein der ganzen Gleichung gemeinsamer Factor; und wenn man diesen unterdrückt, so bleibt endlich nur

$$294) \quad \frac{\sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}{-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \cdot dx + \frac{\lambda^2 \cdot (\lambda^2 - 1) \cdot x}{(-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1})^2 \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \cdot dp \\ = \frac{\lambda^2 \cdot h}{2 \cdot (\lambda^2 - 1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \cdot dp$$

Daraus folgt durch Integration

$$295) \quad \frac{\sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}{-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \cdot x = L + \frac{\lambda \cdot h}{2 \cdot (\lambda^2 - 1)} \cdot \text{lg nat} \left(\lambda \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1} \right)$$

und wenn man aus 293) und 295) das x eliminirt, so bekommt man weiter

$$296) \quad \left(\sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1} \right) \cdot y = (\lambda^2 - 1) \cdot L + \frac{h}{2 \cdot (\lambda^2 - 1)} \cdot \left(-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1} \right) \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1} \\ + \frac{\lambda \cdot h}{2} \cdot \text{lg nat} \left(\lambda \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1} \right)$$

(Man vergleiche den Zusatz am Ende dieses §'s, wo der Werth $\lambda = -1$ besprochen werden wird.)

Durch die Verbindung der beiden Gleichungen 295) und 296) hat man, wegen des Integrations-Constanten L , abermals eine Reihe stetig auf einander folgender Refractions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die bestimmt vorgeschriebene Diakaustika $y^2 = 2h \cdot x$ erzeugt wird; und weil x und y als Functionen von p ausgedrückt sind, so können alle diese Refractions-Curven mittels ihrer Tangenten construirt werden.

Dass aber aus der Verbindung von 295) und 296) dieselben Curven hervorgehen, wie aus der Verbindung der Gleichungen 285) und 286); davon überzeugt man sich auf folgende Weise:

In Folge der Gleichungen 223), 224), 225) ist bekannt, dass, es mögen die Bestandtheile x, y, E von x unabhängig oder von x abhängig sein, der für p hervorgehende Ausdruck sich jedesmal auf

$$297) \quad p = \frac{-\lambda \cdot (x-r) \mp \sqrt{(x-r)^2 + (y-v)^2}}{\lambda \cdot (y-v)}.$$

reducirt; und wenn man aus 283) und 297) die Differenz $(y-v)$ eliminirt, so fällt auch die Differenz $(x-r)$ mit hinweg, d. h. Gleichung 297) geht über in

$$298) \quad p = \frac{-\lambda \cdot v \mp \sqrt{h^2 - v^2}}{\lambda \cdot h}$$

und daraus folgt weiter

$$299) \quad \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1} = \frac{-v \mp \lambda \cdot \sqrt{h^2 - v^2}}{h}$$

$$300) \quad (-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2(1+p^2) - 1}) = \frac{(\lambda^2 - 1) \cdot v}{h}$$

$$\begin{aligned} 301) \quad \operatorname{lgnat} \left(\lambda \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1} \right) &= \operatorname{lgnat} \left(\frac{(-\lambda - 1) \cdot (v \pm \sqrt{h^2 - v^2})}{h} \right) \\ &= \operatorname{lgnat} (-\lambda - 1) + \operatorname{lgnat} \left(\frac{v \pm \sqrt{h^2 - v^2}}{h} \right) \\ &= \operatorname{lgnat} (-\lambda - 1) - \operatorname{lgnat} \left(\frac{h}{v \pm \sqrt{h^2 - v^2}} \right) \\ &= \operatorname{lgnat} (-\lambda - 1) - \operatorname{lgnat} \left(\frac{-v \pm \sqrt{h^2 - v^2}}{h} \right) \end{aligned}$$

Man substituirt die betreffenden Ausdrücke in Gleichung 295), so bekommt man

$$\frac{-v \mp \lambda \cdot \sqrt{v^2 + h^2}}{(\lambda^2 - 1) \cdot v} \cdot x = \left(L + \frac{\lambda \cdot h}{2 \cdot (\lambda^2 - 1)} \cdot \operatorname{lgnat} (-\lambda - 1) \right) - \frac{\lambda \cdot h}{2 \cdot (\lambda^2 - 1)} \cdot \operatorname{lgnat} \left(\frac{-v \pm \sqrt{v^2 + h^2}}{h} \right)$$

oder, wenn man Alles mit $(\lambda^2 - 1)$ multiplicirt,

$$302) \quad \frac{-v \mp \lambda \cdot \sqrt{v^2 + h^2}}{v} \cdot x = \left((\lambda^2 - 1) \cdot L + \frac{\lambda \cdot h}{2} \cdot \operatorname{lgnat} (-\lambda - 1) \right) - \frac{\lambda \cdot h}{2} \cdot \operatorname{lgnat} \left(\frac{-v \pm \sqrt{v^2 + h^2}}{h} \right)$$

Man substituirt ebenso die betreffenden Ausdrücke in Gleichung 296), so bekommt man weiter

$$\begin{aligned} 303) \quad \frac{-v \mp \lambda \cdot \sqrt{v^2 + h^2}}{h} \cdot y &= \left((\lambda^2 - 1) \cdot L + \frac{\lambda \cdot h}{2} \cdot \operatorname{lgnat} (-\lambda - 1) \right) + \frac{v(-v \mp \lambda \cdot \sqrt{v^2 + h^2})}{2h} \\ &\quad - \frac{\lambda \cdot h}{2} \cdot \operatorname{lgnat} \left(\frac{-v \pm \sqrt{v^2 + h^2}}{h} \right) \end{aligned}$$

Wenn man hier noch K statt $\left((\lambda^2 - 1) \cdot L + \frac{\lambda \cdot h}{2} \cdot \operatorname{lgnat} (-\lambda - 1) \right)$ setzt, so fallen die Gleichungen 302) und 303) genau mit den Gleichungen 285) und 286) zusammen, wie zu beweisen war.

Dritte Methode. Man kann das einfach singuläre Integral auch gewinnen, wenn man bei Gleichung 274) den ersten Factor zu Null werden, d. h. wenn man die Gleichung

$$304) \quad v \cdot y - v^2 \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv} + h = 0$$

gelten lässt. Daraus folgt

$$305) \quad (v+p) \cdot \frac{dx}{dv} = + \frac{h + v \cdot y}{v^2}$$

und wenn man diesen für $(v+p) \cdot \frac{dx}{dv}$ hergestellten Ausdruck in Gleichung 273) substituirt, so geht diese über in

$$\left(\frac{h}{v}\right)^2 = 2h \cdot \frac{v \cdot (vx+y) + h}{v^2}$$

und daraus folgt weiter

$$306) \quad y + v \cdot x = - \frac{h}{2v}$$

Nun muss man untersuchen, ob von 306) auch den beiden Gleichungen 273) und 304) zugleich genügt wird, und ob das zu 306) gehörige Integral ein einfach singuläres oder nur ein einfach particuläres ist. Weil aber die Gleichung 306) mit 287) zusammenfällt, so ist auch der weitere Verlauf der dritten Methode ganz derselbe, wie bei der zweiten.

Zusatz. Wenn man die hier (§. 18) befindlichen refractorischen Resultate dadurch, dass man $\lambda = -1$ setzt, in die reflexorischen (§. 8) verwandeln will; so hat dieses bei der ersten Methode keinen Anstand. Bei der zweiten Methode aber bekommen die Gleichungen 293), 294) etc. Null in den Nenner. Man muss also -1 statt λ schon in Gleichung 292) einsetzen, und erst dann darf man integrieren, wodurch man wieder zu den Resultaten gelangt, wie bei der zweiten Methode des §. 8.

§. 19.

Beispiel 9. Man sucht diejenige Refractions-Curve, bei welcher die parallel auf sie auffallenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass die zugehörige Diakaustika die durch folgende Gleichung

$$307) \quad x^2 + y^2 = k^2$$

vorgeschriebene Kreislinie ist.

Hier bekommt man für die gesuchte Refractions-Curve folgende Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$308) \quad \left(x + (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(y - v \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}\right)^2 = k^2$$

und wenn man differentiirt, so gibt sich weiter

$$309) \quad \left(-v \cdot y + x + (1+v^2) \cdot (v+p) \cdot \frac{dv}{dx}\right) \cdot \left(2 + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} - (v+p) \cdot \frac{d^2v}{dx^2}\right) = 0$$

Lässt man die Differentialgleichung der dritten Ordnung

$$310) \quad 2 + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} - (v+p) \cdot \frac{d^2v}{dx^2} = 0$$

gelten; so ist (nach §. 16) die den beiden Differentialgleichungen 308) und 310) zugleich genügende Differentialgleichung erster Ordnung dargestellt durch die Verbindung der beiden Gleichungen

$$311) \quad A^2 + B^2 = k^2$$

und

$$312) \quad (y-B) + (x-A) \cdot v = 0$$

Jetzt substituirt man für v den Ausdruck 11), so setzt Gleichung 312) sich um in

$$313) \quad (y-B) - (x-A) \cdot p = \left((y-B) \cdot p + (x-A) \right) \cdot \sqrt{\lambda^2 - (1+p^2) - 1}$$

und wenn man mit dieser Gleichung weiter verfährt, wie mit Gleichung 203) in § 15; so ist das allgemeine Integral durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$314) \quad A^2 + B^2 = k^2$$

und

$$315) \quad \mp \lambda \cdot \sqrt{(y-B)^2 + (x-A)^2} = x + E$$

oder, was dasselbe ist, durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$316) \quad r^2 + \eta^2 = k^2$$

und

$$317) \quad \mp \lambda \cdot \sqrt{(y-\eta)^2 + (x-r)^2} = x + E$$

dargestellt, d. h. man hat alle jene unendlich vielen Schaaren konischer Ellipsen oder konischer Hyperbeln, deren Hauptaxen mit der allen unseren Curven gemeinschaftlichen Abscissenaxe parallel laufen, und deren einer Brennpunkt im Umfange der vorgeschriebenen Dia-kaustika liegt.

Nun sind die Refractions-Curven, als Gränz-Curven der zweiten Ordnung, nicht durch allgemeine, sondern durch einfach singuläre Integrale darzustellen; und diese kann man wie schon in §. 16 vermerkt, auf drei verschiedenen Wegen aufsuchen.

Erste Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus dem allgemeinen ableiten will, so beachte man, dass, wie in §. 9, so auch hier

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = k \cdot \text{arc tg } \frac{x}{y}$$

ist; und so specialisiren sich die (in §. 16 aufgestellten) zwei Gleichungen 227) und 229) diesmal in

$$318) \quad (y-\eta) + (x-r) \cdot \frac{x}{y} = 0$$

und

$$319) \quad \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-r)^2 + (y-\eta)^2} = x + K \pm \lambda \cdot k \cdot \text{arc tg } \frac{x}{y}$$

Um nun das x als Function von r und η auszudrücken, eliminire man die Differenz $(y-\eta)$ aus 318) und 319); so bekommt man

$$320) \quad \frac{\mp (x-r) \cdot \lambda \cdot \sqrt{r^2 + \eta^2}}{\eta} = x + K \pm \lambda \cdot k \cdot \text{arc tg } \frac{x}{y}$$

Um ferner auch das y als Function von x und η auszudrücken, addire man auf der rechten Seite der letzten Gleichung die identische Differenz $(x-r)$; so gibt sich

$$321) \quad \frac{\mp (x-r) \cdot \lambda \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{y} = x + (x-r) + K \pm \lambda k \cdot \text{arc tg } \frac{x}{y}$$

Nun folgt aus 318), dass

$$322) \quad (x-r) = - (y-\eta) \cdot \frac{\eta}{x}$$

und wenn man jetzt die Differenz $(x-r)$ aus 321) eliminirt, so gibt sich weiter

$$323) \quad \frac{\pm (y-\eta) \cdot \lambda \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = x - (y-\eta) \cdot \frac{\eta}{x} + K \pm \lambda \cdot k \cdot \text{arc tg } \frac{x}{y}$$

Man kann aber, wegen Gleichung 307), auch k^2 statt $(x^2 + y^2)$, und folglich auch k statt $\sqrt{x^2 + y^2}$ setzen; und so kann man 320) und 323) umformen in

$$324) \quad \frac{-\eta \mp \lambda \cdot k}{y} \cdot x = K \mp \lambda \cdot k \cdot \left(\frac{x}{y} - \text{arc tg } \frac{x}{y} \right)$$

und

$$325) \quad \frac{-\eta \mp \lambda \cdot k}{x} \cdot y = -K - \frac{k^2}{x} \mp \lambda \cdot k \cdot \left(\frac{y}{x} + \text{arc tg } \frac{x}{y} \right)$$

Durch die Verbindung der drei Gleichungen 307), 324), 325) hat man, wegen des Integrations-Constanten K , eine Reihe stetig aufeinander folgender Refractions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die vorgeschriebene Diakaustika $x^2 + y^2 = k^2$ erzeugt wird; und weil x und y als Functionen von r und η ausgedrückt sind, so können die Refractions-Curven mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Diakaustika construirt werden.

Auch ist zu bemerken, dass, je nachdem man aus 307) und 324) das η oder das r eliminirt, im ersten Falle das r und im zweiten Falle das η als Function von x und K erscheint; und somit ist nachgewiesen, dass die Verbindung der drei Gleichungen 307), 324), 327) ein einfach singuläres und nicht ein einfach particuläres Integral ist.

Zweite Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus der ersten Stammgleichung ableiten will, so muss man die zwei Gleichungen 311) und 312) zu Hülfe nehmen; und dabei specialisirt sich Gleichung 235) in

$$326) \quad y + v \cdot x = \mp k \cdot \sqrt{1 + v^2}$$

Das nächste Geschäft ist jetzt, dass man sich überzeugt, ob von der Gleichung 326) auch die 308) erfüllt wird, und ob das zu 326) gehörige Integral ein einfach singuläres oder ein einfach particuläres ist. Aus 326) folgt der Reihe nach

$$327) \quad y = -v \cdot x \mp k \cdot \sqrt{1 + v^2}$$

$$328) \quad p = -v + \left(-x \mp \frac{k \cdot v}{\sqrt{1 + v^2}} \right) \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$329) \quad \frac{dp}{dx} = -2 \cdot \frac{dv}{dx} + \left(-x \mp \frac{k \cdot v}{\sqrt{1 + v^2}} \right) \cdot \frac{d^2v}{dx^2} \mp \frac{k}{(\sqrt{1 + v^2})^3} \cdot \left(\frac{dv}{dx} \right)^2$$

Wenn man die hier für y und p hergestellten Ausdrücke in Gleichung 308) substituirt, so wird diese identisch, d. h. Gleichung 308) wird von dem zu 326) gehörigen Integral erfüllt.

Wenn man ebenso die hier für p und $\frac{dp}{dx}$ hergestellten Ausdrücke in Gleichung 310) substituiert, so reducirt sich dieselbe auf

$$330) \quad \mp \frac{k}{(\sqrt{1+v^2})^3} \cdot \frac{dv}{dx} = 0$$

und weil letztere Gleichung einen Widerspruch in sich selbst trägt, so ist man überzeugt, dass das zu 326) gehörige Integral wirklich ein einfach singuläres der Gleichung 308) ist. Um jedoch Gleichung 326) weiter behandeln zu können, muss man für v den (in §. 3 aufgestellten) Ausdruck 11) zurückführen; und dabei geht Gleichung 326) über in

$$331) \quad y = \frac{p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}{1 - p \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \cdot x = \mp \lambda \cdot k \cdot \frac{1 + p^2}{1 - p \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}$$

Diese Gleichung nimmt eine bequemere Form an, wenn man bei beiden Brüchen Zähler und Nenner mit $(p - \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1})$ multiplicirt; denn dadurch bekommt man

$$332) \quad y = \frac{(\lambda^2 - 1) \cdot (1 + p^2)}{(-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}) \cdot (1 + p^2)} \cdot x = \pm \lambda \cdot k \cdot \frac{(p - \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}) \cdot (1 + p^2)}{(-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}) \cdot (1 + p^2)}$$

oder, wenn man im Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Factor $(1 + p^2)$ unterdrückt,

$$333) \quad y = \frac{\lambda^2 - 1}{-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \cdot x = \pm \lambda \cdot k \cdot \frac{p - \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}{-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}$$

Man differentire, und ziehe hierauf die beiden ersten Theilsätze zusammen, so gibt sich

$$334) \quad \frac{(p - \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}) \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}{-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \cdot dx + \frac{\lambda^2 \cdot (\lambda^2 - 1) \cdot (p - \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}) \cdot x}{(-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}) \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \cdot dp \\ = \pm \lambda \cdot k \cdot d\left(\frac{p - \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}{-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}\right)$$

oder, indem man diese ganze Gleichung mit $(p - \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1})$ dividirt,

$$335) \quad \frac{\sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}{-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \cdot dx + \frac{\lambda^2 \cdot (\lambda^2 - 1) \cdot x}{(-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}) \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \cdot dp \\ = \pm \lambda \cdot k \cdot \frac{1}{p - \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \cdot d\left(\frac{p - \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}{-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}\right)$$

Diese Gleichung ist integrabel, und liefert ohnweiters

$$336) \quad \frac{\sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}{-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \cdot x = L \pm \lambda \cdot k \cdot \left(\frac{1}{-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} + \int \frac{dp}{(p - \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}) \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \right)$$

Nun multiplicire man Zähler und Nenner des noch nicht integrierten Theilsatzes mit $(p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1})$, so bekommt man

$$\int \frac{dp}{(p - \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}) \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} = -\frac{1}{\lambda^2 - 1} \cdot \int \left(\frac{dp}{1 + p^2} + \frac{p \cdot dp}{(1+p^2) \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \right) \\ = -\frac{1}{\lambda^2 - 1} \cdot \left(\text{arc tg } p + \text{arc tg } \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1} \right) \\ = -\frac{1}{\lambda^2 - 1} \cdot \text{arc tg } \frac{p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}{1 - p \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \\ = -\frac{1}{\lambda^2 - 1} \cdot \text{arc tg } \frac{1}{-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \\ = +\frac{1}{\lambda^2 - 1} \cdot \text{arc tg } \frac{1}{-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}$$

und Gleichung 336) geht über in

$$337) \frac{\sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}{-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \cdot x = L \pm \lambda k \cdot \left(\frac{1}{-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} + \frac{1}{\lambda^2 - 1} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{-(\lambda^2 - 1)}{-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \right)$$

und wenn man x aus 333) und 337) eliminirt, so gibt sich weiter

$$338) \frac{\sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}{\lambda^2 - 1} \cdot y = L \pm \frac{\lambda k}{\lambda^2 - 1} \cdot \left(p + \operatorname{arc\,tg} \frac{-(\lambda^2 - 1)}{-\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}} \right)$$

(Man vergleiche den Zusatz am Ende dieses §'s, wo der Werth $\lambda = -1$ besprochen werden wird.)

Durch die Verbindung der beiden Gleichungen 337) und 338) hat man, wegen des Integrations-Constanten L , abermals eine Reihe stetig aufeinander folgender Refractions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die bestimmt vorgeschriebene Diakaustika $x^2 + y^2 = k^2$ erzeugt wird; und weil x und y als Functionen von p ausgedrückt sind, so können alle durch die Verbindung von 337) und 338) dargestellten Refractions-Curven mittels ihrer Tangenten construirt werden.

Dass aber aus der Verbindung von 337) und 338) dieselben Curven hervorgehen, wie aus der Verbindung der Gleichungen 324) und 325); davon überzeugt man sich auf folgende Weise:

In Folge der Gleichungen 223), 224), 225) ist bekannt, dass, es mögen die Bestandtheile r , η , E von x unabhängig oder von x abhängig sein, der für p hervorgehende Ausdruck sich jedesmal auf

$$339) \quad p = \frac{-\lambda \cdot (x-r) \mp \sqrt{(x-r)^2 + (y-\eta)^2}}{\lambda \cdot (y-\eta)}$$

reducirt; und daraus folgt, dass

$$340) \quad \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1} = \frac{-(x-r) \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-r)^2 + (y-\eta)^2}}{(y-\eta)}$$

und

$$341) \quad -\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1} = \frac{(\lambda^2 - 1) \cdot (x-r)}{(y-\eta)}$$

ist. Nun folgt aus 318), dass

$$342) \quad (y-\eta) = -(x-r) \cdot \frac{y}{\eta}$$

und sonach gehen die drei Gleichungen 339), 340), 341) bezüglich über in

$$343) \quad p = \frac{-\lambda \cdot \eta \mp \sqrt{\eta^2 + \eta^2}}{-\lambda \cdot \eta} = \frac{\eta}{\eta} \pm \frac{k}{\lambda \cdot \eta}$$

$$344) \quad \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1} = \frac{-\eta \mp \lambda \cdot \sqrt{\eta^2 + \eta^2}}{-\eta} = \frac{-\eta \mp \lambda \cdot \lambda}{-\eta}$$

$$345) \quad -\lambda^2 \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1} = -(\lambda^2 - 1) \cdot \frac{\eta}{\eta}$$

Man substituirt jetzt die betreffenden Ausdrücke in Gleichung 337), so geht diese über in

$$\frac{-\eta \mp \lambda \cdot k}{(\lambda^2 - 1) \cdot \eta} \cdot x = L \mp \frac{\lambda \cdot k}{\lambda^2 - 1} \cdot \left(\frac{\eta}{\eta} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{\eta} \right)$$

oder, wenn man Alles mit $(\lambda^2 - 1)$ multiplicirt, in

$$346) \quad \frac{-\eta \mp \lambda \cdot k}{\eta} \cdot x = (\lambda^2 - 1) L \mp \lambda \cdot k \cdot \left(\frac{\eta}{\eta} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{\eta} \right)$$

Wenn man ebenso die betreffenden Ausdrücke in Gleichung 338) substituirt, so geht diese über in

$$\frac{-v \mp \lambda \cdot k}{-(\lambda^2 - 1) \cdot x} \cdot y = L \pm \frac{\lambda \cdot k}{\lambda^2 - 1} \cdot \left(\frac{v}{x} \pm \frac{k}{\lambda \cdot x} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{v} \right)$$

oder, wenn man Alles mit $-(\lambda^2 - 1)$ multiplicirt, in

$$347) \quad \frac{-v \mp \lambda \cdot k}{x} \cdot y = -(\lambda^2 - 1) \cdot L - \frac{k^2}{x} \mp \lambda \cdot k \cdot \left(\frac{v}{x} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{v} \right)$$

Endlich setze man noch K anstatt $(\lambda^2 - 1) \cdot L$, so fallen die Gleichungen 346) und 347) genau mit 324) und 325) zusammen, wie zu beweisen war.

Dritte Methode. Man kann das einfach singuläre Integral auch gewinnen, wenn man bei Gleichung 309) den ersten Factor zu Null werden, d. h. wenn man die Gleichung

$$348) \quad -v \cdot y + x + (1 + v^2) \cdot (v + p) \cdot \frac{dv}{dx} = 0$$

gelten lässt. Daraus folgt

$$349) \quad (v + p) \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{v \cdot y - x}{1 + v^2}$$

und wenn man diesen für $(v + p) \cdot \frac{dv}{dx}$ hergestellten Ausdruck in Gleichung 308) substituirt, so geht diese über in

$$(y + v \cdot x)^2 = (1 + v^2) \cdot k^2$$

und daraus folgt

$$350) \quad y + v \cdot x = \mp k \cdot \sqrt{1 + v^2}$$

Nun muss man untersuchen, ob von 350) auch den beiden Gleichungen 308) und 348) zugleich genügt wird, und ob das zu 350) gehörige Integral ein einfach singuläres oder nur ein einfach particuläres ist. Weil aber die Gleichung 350) mit 326) zusammenfällt, so ist auch der weitere Verlauf dieser dritten Methode ganz derselbe, wie bei der zweiten.

Zusatz. Wenn man die hier (§. 19) befindlichen refractorischen Resultate dadurch, dass man $\lambda = -1$ setzt, in die reflexorischen (§. 9) verwandeln will; so hat dieses bei der ersten Methode keinen Anstand. Bei der zweiten Methode aber bekommen die Gleichungen 332), 333) etc. Null in den Nenner. Man muss also -1 statt λ schon in Gleichung 331) einsetzen, und erst dann darf man integriren, wodurch man wieder zu den Resultaten gelangt, wie bei der zweiten Methode des §. 9.

Zweiter Abschnitt.

Bestimmung der Refractions-Curven für von einem leuchtenden Punkte herkommende Lichtstrahlen.

§. 20.

Man sucht diejenige Refractions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass die Diakaustika sich in einem einzigen Punkt (Brennpunkt) zusammenziehen.

Man richte das Coordinatensystem der gesuchten Refractions-Curve so ein, dass die Abscissenaxe durch den leuchtenden Punkt geht; und wenn dabei die Coordinaten des vor-

geschriebenen Brennpunktes die festen Werthe g und h haben, so specialisiren sich für dieselben die Gleichung 9) und 10) bezüglich in

$$351) \quad g = x + (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}$$

und

$$352) \quad h = y - v \cdot (v+p) \cdot \frac{dv}{dx}$$

und jede Curve, welche diesen beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung zugleich genügt, hat die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft.

Das nächste Geschäft ist nun, eine erste Stammgleichung aufzusuchen, welche diesen beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung zugleich genügt; und wenn man hier wie in §. 15 verfährt, so bekommt man

$$353) \quad (y-h) + (x-g) \cdot v = 0$$

Diese erste Stammgleichung enthält keinen Integrations-Constanten; denn nur so kann sie, wie man bereits in §. 15 erschen hat, den beiden vorgelegten Differentialgleichungen 351) und 352) zugleich genügen. Um aber die Aufgabe weiter durchführen zu können, muss man für v den in §. 3 befindlichen Ausdruck 12)

$$\frac{-((x-g) + y \cdot p) \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot ((x-g)^2 + y^2) \cdot (1+p^2) - ((x-g) + y \cdot p)^2}}{+((x-g) + y \cdot p) + p \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot ((x-g)^2 + y^2) \cdot (1+p^2) - ((x-g) + y \cdot p)^2}}$$

in welchem durch g die Abscisse des leuchtenden Punktes dargestellt ist, zurückführen. Dabei geht Gleichung 353) über in

$$354) \quad ((x-g) \cdot p - (y-h)) \cdot ((x-g) + y \cdot p) \\ = ((x-g) + (y-h) \cdot p) \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot ((x-g)^2 + y^2) \cdot (1+p^2) - ((x-g) + y \cdot p)^2}$$

Nun erhebe man beiderseits auf das Quadrat, so ergibt sich eine Gleichung, welche man auf folgende Weise anordnen kann:

$$((x-g)^2 + (y-h)^2) \cdot ((x-g) + y \cdot p)^2 \cdot (1+p^2) = ((x-g) + (y-h) \cdot p)^2 \cdot \lambda^2 \cdot (1+p^2) \cdot ((x-g)^2 + y^2)$$

und daraus folgt weiter

$$355) \quad \frac{(x-g) + y \cdot p}{\sqrt{(x-g)^2 + y^2}} \mp \lambda \cdot \frac{(x-g) + (y-h) \cdot p}{\sqrt{(x-g)^2 + (y-h)^2}} = 0$$

Diese Gleichung lässt sich ohneweiters integriren und liefert

$$356) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-g)^2 + (y-h)^2} = G$$

Das den Differentialgleichungen 351) und 352) gemeinsame Urintegral ist hier nur mit einem und nicht mit zwei Integrations-Constanten versehen. Die Ursache ist schon bei Gleichung 207) angegeben.

Die hier gefundene Refractions-Curve ist im Allgemeinen eine Curve des vierten Grades, welcher sich aber auf den zweiten erniedrigt, wenn $G = 0$ ist.

Um jedoch der Gleichung 356) eine geometrische Bedeutung abzugewinnen, beachte man, dass der Ausdruck $\sqrt{(x-g)^2 + y^2}$ der vom leuchtenden Punkte, und dass der Ausdruck $\sqrt{(x-g)^2 + (y-h)^2}$ der vom vorgeschriebenen Brennpunkte (g, h) nach irgend einem Punkte

der gefundenen Refractions-Curve gezogene Leitstrahl ist. Unsere Curve hat also in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft, dass die zwei zusammengehörigen Leitstrahlen in einer von den Coordinaten unabhängigen Beziehung zusammen stehen.

Zusatz. Die für die Refractions-Curve gefundene Gleichung 356) geht, wenn man $\lambda = -1$ setzt, wieder über in die für die Reflexions-Curve gefundene Gleichung 159). Als dann darf aber, wie schon (in §. 10) auseinandergesetzt ist, bei dem Doppelzeichen nur das obere genommen werden.

§. 21.

Man sucht diejenige Refractions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass ihr eine bestimmt vorgeschriebene Curve als Diakaustika zukommt.

Auch hier richte man das Coordinatensystem so ein, dass die Abscissenaxe durch den leuchtenden Punkt geht; und wenn sich dann für die vorgeschriebene Diakaustika die bestimmte Gleichung

$$357) \quad \mathfrak{F}(x, y) = 0$$

ergibt, so hat man für x und y die Ausdrücke 9) und 10) einzuführen; und man bekommt für die gesuchte Refractions-Curve folgende Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$358) \quad \mathfrak{F} \left(x + (r+p) \cdot \frac{dx}{dr}, \left(y - r \cdot (r+p) \cdot \frac{dr}{dx} \right) \right) = 0$$

Man bediene sich auch hier der schon im §. 16 angewendeten Abkürzungszeichen Q und R , und differentiire 358); so bekommt man auch hier

$$359) \quad \left(\frac{d_Q \mathfrak{F}}{dQ} - r \cdot \frac{d_R \mathfrak{F}}{dR} \right) \cdot \left(2 + \frac{dp}{dr} \cdot \frac{dr}{dx} - (r+p) \cdot \frac{d^2 r}{dx^2} \right) = 0$$

Dieser Gleichung wird aber genügt, entweder wenn

$$360) \quad 2 + \frac{dp}{dr} \cdot \frac{dr}{dx} - (r+p) \cdot \frac{d^2 r}{dx^2} = 0$$

oder wenn

$$361) \quad \frac{d_Q \mathfrak{F}}{dQ} - r \cdot \frac{d_R \mathfrak{F}}{dR} = 0$$

Die Differentialgleichung 360), welche von der dritten Ordnung ist, führt hier ebenso, wie in §. 16, zu folgender Verbindung zweier Gleichungen:

$$362) \quad \mathfrak{F}(A, B) = 0$$

und

$$363) \quad (y-B) + (x-A) \cdot r = 0$$

Die Verbindung dieser beiden Gleichungen ist die erste Stammgleichung zu 358); und weil A und B in der durch 362) ausgesprochenen Abhängigkeit zu einander stehen, so kann man entweder A oder B aus 363) eliminiren, wodurch man eine erste Stammgleichung mit nur einem Integrations-Constanten bekommt.

Um nun die Gleichung 363) weiter behandeln zu können, muss man für v den im §. 3 befindlichen Ausdruck 12) zurückführen; und dabei geht 363) über in

$$364) \quad ((x-A) \cdot p - (y-B)) \cdot ((x-g) + y \cdot p) \\ = ((x-A) + (y-B) \cdot p) \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot ((x-g)^2 + y^2) \cdot (1+p^2) - ((x-g) + y \cdot p)^2}$$

Mit dieser Gleichung verfähre man jetzt weiter, wie mit Gleichung 354) in §. 20; so bekommt man die Urgleichung

$$365) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-A)^2 + (y-B)^2} = G$$

Hier erscheinen sogar drei Integrations-Constanten A, B, G , während die vorgelegte Differentialgleichung 358) nur von der zweiten Ordnung ist. Weil jedoch A und B in der durch 362) ausgesprochenen Abhängigkeit zu einander stehen, so kann man entweder A oder B eliminiren, und eine Urgleichung mit nur zwei Integrations-Constanten herstellen.

Vergleicht man jetzt die Gleichungen 357) und 362) mit einander, so erkennt man, dass zwischen A und B dieselbe Relation stattfindet, wie zwischen x und y . Man kann also statt der Integrations-Constanten A und B auch die zur vorgeschriebenen Diakaustika gehörigen Coordinaten x und y setzen; und dabei geht 365) über in

$$366) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-x)^2 + (y-y)^2} = G$$

Die hier gefundene Gleichung stellt also im Allgemeinen Curven des vierten Grades dar, welcher sich aber auf den zweiten erniedrigt, wenn $G = 0$ ist.

Vergleicht man die (im §. 20 befindliche) Gleichung 356) mit der hier gefundenen (Gleichung 366), so erkennt man, dass, wie sich dort die gebrochenen Lichtstrahlen in dem vorgeschriebenen Brennpunkte (g, h) concentriren mussten, hier die gebrochenen Lichtstrahlen sich im Brennpunkte (x, y) concentriren, d. h. jeder einzelne Punkt der hier vorgeschriebenen Diakaustika $\mathfrak{F}(x, y) = 0$ ist ein Brennpunkt zu irgend einer der durch 366) dargestellten Curven. Somit ist unter allen diesen Curven keine einzige im Stande, von der vorgeschriebenen Diakaustika mehr als einen Punkt zu erzeugen, d. h. keine einzige der hier gefundenen Curven ist die gesuchte Refractions-Curve. Man muss also untersuchen, ob unter den, durch 366) dargestellten, unendlich vielen Curven-Schaaren solche Reihen stetig nebeneinander liegender Curven vorkommen, die sich so schneiden, dass die Durchschnitts-Curven auch noch der Differentialgleichung 358) genügen, und zugleich in allen ihren Punkten mit irgend einer der sich schneidenden Curven eine Berührung der zweiten Ordnung eingehen. Alle diese Durchschnitts-Curven sind also Gränz-Curven der zweiten Ordnung, und werden, wie in der analytischen Geometrie näher nachgewiesen werden muss, durch das einfach singuläre Integral dargestellt. Dieses kann bekanntlich auf drei verschiedenen Wegen ermittelt werden.

Erste Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus dem allgemeinen ableiten will, so beachte man, dass die Integrations-Constanten von x und von y unabhängig sind bei allen sich schneidenden Curven; und wenn man in dieser engen Beziehung die Gleichung 366) differentiirt, so bekommt man

$$367) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\lambda \cdot (x-x) \cdot \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp (x-g) \cdot \sqrt{(x-x)^2 + (y-y)^2}}{\lambda \cdot (y-y) \cdot \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp y \cdot \sqrt{(x-x)^2 + (y-y)^2}}$$

Dagegen müssen die Integrations-Constanten Functionen x von sein bei allen Gränz-Curven; und wenn man in dieser weiteren Beziehung die Gleichung 366) nach allem x differentiirt, so bekommt man jetzt

$$368) \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{\lambda \cdot (x-r) \cdot \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp (x-g) \cdot \sqrt{(x-r)^2 + (y-b)^2}}{\lambda \cdot (y-b) \cdot \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp y \cdot \sqrt{(x-r)^2 + (y-b)^2}} \\ + \frac{\lambda \cdot \left((y-b) \frac{dy}{dx} + (x-r) \right) \frac{dx}{dx} \mp \left(\sqrt{(x-g)^2 + (y-b)^2} \right) \frac{dG}{dx}}{\lambda \cdot (x-r) \cdot \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp y \cdot \sqrt{(x-r)^2 + (y-b)^2}} \cdot \sqrt{(x-g)^2 + y^2}$$

Damit aber aus 367) und 368) sich für $\frac{dy}{dx}$ zwei ebenförmige Ausdrücke ergeben können, muss die Gleichung

$$369) \quad \lambda \cdot \left((y-b) \cdot \frac{dy}{dx} + (x-r) \right) \cdot \frac{dx}{dx} \mp \left(\sqrt{(x-g)^2 + (y-b)^2} \right) \cdot \frac{dG}{dx} = 0$$

stattfinden. Differentiirt man die Gleichung 367) noch einmal sowohl nach allem explicit als auch nach allem implicit in y, r, b enthaltenen x ; so bekommt man neben der Gleichung 369) auch noch

$$370) \quad \lambda \cdot \left((y-b) - (x-r) \cdot \frac{dy}{dx} \right) \cdot \left((x-g) \cdot (x-r) + y \cdot (y-b) \mp \left(\sqrt{(x-g)^2 + y^2} \right) \cdot \sqrt{(x-r)^2 + (y-b)^2} \right) \cdot \frac{dx}{dx} = 0$$

Daraus kann aber nur folgen

$$371) \quad (y-b) - (x-r) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

und hiermit wird diejenige Gerade dargestellt, welche durch den Punkt (x, y) der gesuchten Refractions-Curve geht, und zugleich die zum Punkte (r, b) der vorgeschriebenen Diakaustika gehörige Tangente ist. Jede Diakaustika ist ja, wie schon im §. 1 auseinander gesetzt wurde, eine einhüllende Gränz-Curve.

Eliminirt man jetzt mittels 371) die Differenz $(y-b)$ aus 369), so fällt auch die Differenz $(x-r)$ hinweg; und 369) geht über in

$$\lambda \cdot (dx^2 + dy^2) \mp \left(\sqrt{dx^2 + dy^2} \right) \cdot dG = 0$$

oder in

$$\lambda \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2} \mp dG = 0$$

Daraus folgt

$$dG = \pm \lambda \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

oder

$$372) \quad G = K \pm \lambda \cdot \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

wo K ein Integrations-Constanten ist. Gleichung 366) geht also über in

$$373) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-r)^2 + (y-b)^2} = K \pm \lambda \cdot \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Mit dieser Gleichung, wo bei den Doppelzeichen durchweg die oberen und ebenso durchweg die unteren zusammengehören, muss man aber noch folgende drei

$$374) \quad (y-b) - (x-r) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$375) \quad \delta(r, b) = 0$$

$$376) \quad \frac{d_r \delta}{dx} + \frac{d_b \delta}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

verbinden, d. h. man muss die in 373) angezeigte Integration ausführen, und sodann die drei Bestandtheile x , y , dy eliminiren. Dabei fällt auch dx mit hinweg, und es ergibt sich eine Gleichung zwischen x , y und dem Integrations-Constanten K . Diese neue Gleichung ist aber ein einfach singuläres Urintegral zu 358); und durch dasselbe ist, wegen des Integrations-Constanten K , eine Reihe stetig aufeinander folgender Refractions-Curven dargestellt, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen von dem leuchtenden Punkte, dessen Abscisse = g ist, herkommen, die bestimmt vorgeschriebene Diakaustika $\mathfrak{F}(x, y) = 0$ erzeugt wird.

Zweite Methode. Zu dem einfach singulären Integral kann man auch mittels der ersten Stammgleichung gelangen. Man beachte also wiederum, dass die Integrations-Constanten von x und von y unabhängig sind bei allen sich schneidenden Curven; und wenn man in dieser engen Beziehung die Gleichung 363) differentiirt, und dabei sich erinnert, dass v diesmal eine Function von x , y , p ist; so bekommt man

$$375) \quad \frac{dp}{dx} = - \frac{(v+p) + (x-A) \cdot \left(\frac{dx^v}{dx} + \frac{dy^v}{dy} \cdot p \right)}{(x-A) \cdot \frac{d\rho^v}{dp}}$$

Dagegen müssen die Integrations-Constanten Functionen von x sein bei allen Gränz-Curven; und wenn man in dieser weiteren Beziehung die Gleichung 363) nach allem x differentiirt, so bekommt man jetzt

$$376) \quad \frac{dp}{dx} = - \frac{(v+p) + (x-A) \cdot \left(\frac{dx^v}{dx} + \frac{dy^v}{dy} \cdot p \right)}{(x-A) \cdot \frac{d\rho^v}{dp}} + \frac{\frac{dB}{dA} + v}{(x-A) \cdot \frac{d\rho^v}{dp}} \cdot \frac{dA}{dx}$$

Damit aber aus 375) und 376) für $\frac{dp}{dx}$ zwei ebenförmige Ausdrücke sich ergeben können, muss die Gleichung

$$377) \quad \frac{dB}{dA} + v = 0$$

stattfinden. Nun folgt aus 362) die Differentialgleichung

$$378) \quad \frac{d_A \mathfrak{F}}{dA} + \frac{d_B \mathfrak{F}}{dB} \cdot \frac{dB}{dA} = 0$$

und wenn man aus den vier Gleichungen 362), 363), 377), 378) die drei Bestandtheile A , B , $\frac{dB}{dA}$ eliminirt, so bekommt man endlich

$$379) \quad y + v \cdot x = \phi(v)$$

wo die Form des Ausdruckes $\phi(v)$ abhängig ist von $\mathfrak{F}(A, B) = 0$. Hier hat man für v noch seinen Ausdruck

$$\frac{-((x-g) + y \cdot p) \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot ((x-g)^2 + y^2) \cdot (1+p^2) - ((x-g) + y \cdot p)^2}}{+ ((x-g) + y \cdot p) + p \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot ((x-g)^2 + y^2) \cdot (1+p^2) - ((x-g) + y \cdot p)^2}}$$

zurückzuführen, und die sich ergebende Differentialgleichung erster Ordnung zu integriren. Dadurch gelangt man zu der nämlichen mit x , y , und dem Integrations-Constanten K versehenen Urgleichung, wie bei der ersten Methode.

Dritte Methode. Lässt man die Gleichung 361), d. h. die Gleichung

$$380) \quad \frac{d\varrho\delta}{d\varrho} - r \cdot \frac{d_n\delta}{dR} = 0$$

gelten, so hat man jetzt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung; und man muss eine solche der ersten Ordnung aufsuchen, von welcher die beiden Gleichungen 358) und 380) zugleich erfüllt werden. Die hier aufzusuchende Differentialgleichung erster Ordnung wird aber genau wieder die Gleichung 379) sein, durch deren Integration sich also auch die nämliche mit x, y und dem Integrations-Constanten K versehene Urgleichung ergibt, wie bei der zweiten Methode.

(Man vergleiche die dritte Methode in §. 17, §. 18, §. 19.)

Anmerkung. In speciellen Fällen werden durch die zweite und dritte Methode grosse Weitläufigkeiten veranlasst; und desshalb sollen die in §. 22, §. 23, §. 24 nachfolgende Beispiele nur nach der ersten Methode ausgeführt werden.

Zusatz. Alle hier (§. 21) befindlichen refractorischen Resultate gehen, wenn man $\lambda = -1$ setzt, in die reflexorischen (§. 11) über. Alsdann dürfen aber, wie schon (in §. 10 und §. 11) auseinander gesetzt ist, bei den Doppelzeichen nur die oberen genommen werden.

§. 22.

Beispiel 10. Man sucht diejenige Refractions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass die zugehörige Diakautika die durch die Gleichung

$$381) \quad y^3 = h \cdot x^2$$

vorgeschriebene semikubische Parabel ist.

Hier ist (nach §. 21) das allgemeine Integral durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$382) \quad B^3 = h \cdot A^2$$

und

$$383) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-A)^2 + (y-B)^2} = G$$

oder, was dasselbe ist, durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$384) \quad y^3 = h \cdot x^2$$

und

$$385) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-r)^2 + (y-y)^2} = G$$

dargestellt, d. h. jeder einzelne Punkt der vorgeschriebenen Diakautika $y^3 = h \cdot x^2$ ist ein Brennpunkt zu irgend einer dieser Curven. Keine einzige derselben ist jedoch im Stande, von der vorgeschriebenen Diakautika mehr als einen Punkt zu erzeugen, d. h. keine einzige derselben ist die gesuchte Refractions-Curve, welche, als Gränz-Curve der zweiten Ordnung, nur durch ein einfach singuläres Integral dargestellt werden kann. Zu diesem Ende specialisiren die Gleichungen 371) und 373) sich diesmal in

$$386) \quad (y-y) - (x-r) \cdot \frac{2y}{3r} = 0$$

und

$$387) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-r)^2 + (y-y)^2} = K \pm \lambda \left(\frac{1}{3} + \frac{4h}{27r} \right) \cdot \sqrt{9x^2 + 4y^2}$$

Durch die Verbindung der drei Gleichungen 381), 386), 387) hat man, wegen des Integrations-Constanten K , eine Reihe stetig aufeinander folgender Refractions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen von dem leuchtenden Punkte, dessen Abscisse $= g$ ist, herkommen, die vorgeschriebene Diakaustika $\eta^3 = h \cdot \xi^2$ erzeugt wird; und weil man x und y als Functionen von ξ und η ausdrücken kann, so können die Refractions-Curven auch mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Diakaustika construirt werden.

Auch ist zu bemerken, dass, je nachdem man entweder y und η , oder y und ξ aus den drei Gleichungen 381), 386), 387) eliminirt, im ersten Falle das ξ , und im zweiten Falle das η als Function von x und K erscheint; und somit ist nachgewiesen, dass die Verbindung dieser drei Gleichungen ein einfach singuläres und nicht ein einfach particuläres Integral ist.

Zusatz. Alle hier (§. 22) befindlichen refractorischen Resultate gehen, wenn man $\lambda = -1$ setzt, in die reflexorischen (§. 12) über. Alsdann dürfen aber bei den Doppelzeichen nur die oberen gewonnen werden.

§. 23.

Beispiel 11. Man sucht diejenige Refractions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte hervorkommenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass die zugehörige Diakaustika die durch die Gleichung

$$388) \quad \eta^2 = 2h \cdot \xi$$

vorgeschriebene konische Parabel ist.

Hier specialisiren sich die Gleichungen 371) und 373) bezüglich in

$$389) \quad (y-\eta) - (x-\xi) \cdot \frac{h}{\eta} = 0$$

und

$$390) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = K \pm \lambda \cdot \left(\eta \cdot \sqrt{k^2 + \eta^2} - \frac{h}{2} \cdot \operatorname{Lognat} \frac{-\eta + \sqrt{k^2 + \eta^2}}{h} \right)$$

und man kann die gesuchte Refractions-Curve mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Diakaustika construiren.

Zusatz. Alle hier (§. 23) befindlichen refractorischen Resultate gehen, wenn man $\lambda = -1$ setzt, in die reflexorischen (§. 13) über. Alsdann dürfen aber bei den Doppelzeichen nur die oberen genommen werden.

§. 24.

Beispiel 12. Man sucht diejenige Refractions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte hervorkommenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass die zugehörige Diakaustika die durch folgende Gleichung

$$391) \quad \eta^{\frac{2}{3}} + \xi^{\frac{2}{3}} = h^{\frac{2}{3}}$$

vorgeschriebene Hypokykloide ist.

Hier specialisiren sich die Gleichungen 371) und 373) bezüglich in

$$392) \quad (y-\eta) \cdot \sqrt{\xi} + (x-\xi) \cdot \sqrt{\eta} = 0$$

und

$$393) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = K \pm \frac{3h}{2} \cdot \sqrt{k \cdot \xi^2}$$

und man kann die hier gesuchte Refractions-Curve mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Diakaustika construiren.

Zusatz. Alle hier (§. 24) befindlichen refractorischen Resultate gehen, wenn man $\lambda = -1$ setzt, in die reflexorischen (§. 14) über. Alsdann dürfen aber bei den Doppelzeichen nur die oberen genommen werden.

NACHTRAG.

§. 25.

Schon in der Einleitung (§. 1) wurde mittels geometrischer Betrachtung nachgewiesen, dass einer graden Linie niemals die Eigenschaft einer Brennlinie zukommen könne. Nun soll auf analytischem Wege nachgewiesen werden, dass, wenn eine grade Linie als Brennlinie vorgeschrieben wird, weder eine Reflexions- noch eine Refractions-Curve existirt.

§. 26.

Man sucht diejenige Reflexions-Curve, von welcher die Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass ihr die durch folgende Gleichung

$$394) \quad y = m \cdot x + \mathfrak{A}$$

vorgeschriebene Grade als Katakaustika zukommt.

Wenn man (aus §. 2) für x und y die Ausdrücke 2) und 3) hier einführt, so bekommt man für die gesuchte Reflexions-Curve folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$395) \quad y - mx - \mathfrak{A} + (u - m) \cdot (u - p) \cdot \frac{dr}{du} = 0$$

Erste Auflösung.

Um letztere Gleichung direct zu integriren, multiplicire man sie mit du ; so setzt sie sich um in

$$396) \quad m \cdot dy - mu \cdot dx - mx \cdot du - u \cdot dy + u^2 \cdot dx + y \cdot du - \mathfrak{A} \cdot du = 0$$

Man addire die identische Differenz

$$u \cdot x \cdot du - u \cdot x \cdot du$$

so bekommt man weiter

$$397) \quad (m - u) \cdot (dy - u \cdot dx - x \cdot du) + (y - ux - \mathfrak{A}) \cdot du = 0$$

Diese Gleichung wird integrabel durch den Multiplicator $\frac{1}{(m-u)^2}$; denn dabei geht sie über in

$$398) \quad \frac{(m-u) \cdot (dy - u \cdot dx - x \cdot du) + (y - ux - \mathfrak{A}) \cdot du}{(m-u)^2} = 0$$

Daraus folgt durch Integration

$$399) \quad \frac{y-u \cdot x-\mathfrak{A}}{m-u} = A$$

oder

$$400) \quad y - (mA + \mathfrak{A}) = (x - A) \cdot u$$

Um nun diese Differentialgleichung erster Ordnung weiter behandeln zu können, muss man unterscheiden, ob die auf die gesuchte Reflexions-Curve auffallenden Lichtstrahlen mit einander parallel laufen, oder von einem leuchtenden Punkte herkommen.

Erster Fall. Wenn die auf die gesuchte Reflexions-Curve auffallenden Lichtstrahlen mit einander parallel sind, so muss man (aus §. 2) für u den Ausdruck 4) hier einführen; und dabei geht Gleichung 400) über in

$$401) \quad (y - (mA + \mathfrak{A})) \cdot (1 - p^2) = 2 \cdot (x - A) \cdot p$$

Mit dieser Gleichung verfähre man jetzt weiter, wie mit Gleichung 20) in §. 5; so bekommt man die Urgleichung

$$402) \quad \pm \sqrt{(y - (mA + \mathfrak{A}))^2 + (x - A)^2} = x + E$$

wo A und E die beiden Integrations-Constanten sind. Setzt man hier \mathfrak{r} statt A , so geht letztere Gleichung über in

$$403) \quad \pm \sqrt{(y - (m \cdot \mathfrak{r} + \mathfrak{A}))^2 + (x - \mathfrak{r})^2} = x + E$$

oder, wegen Gleichung 394), in

$$404) \quad \pm \sqrt{(y - \mathfrak{y})^2 + (x - \mathfrak{r})^2} = x + E$$

Dadurch sind aber alle jene unendlich vielen Schaaren konischer Parabeln dargestellt, deren Brennpunkt jeder in der als Katakaustika vorgeschriebenen Graden 394) liegende Punkt sein kann, und deren Hauptaxen mit den Lichtstrahlen parallel sein müssen. Man vergleiche §. 6. Dort ist auch auseinander gesetzt, dass keine einzige der hier gefundenen Parabeln im Stande ist, von der vorgeschriebenen Katakaustika mehr als einen Punkt zu erzeugen, und dass man, um zu der gesuchten Reflexions-Curve zu gelangen, die Gränz-Curven der zweiten Ordnung aufsuchen müsse; und wenn man hierzu die (in §. 6 mitgetheilte) erste Methode anwenden will, so gehen die dortigen zwei Gleichungen 42) und 44) diesmal über in

$$405) \quad (y - \mathfrak{y}) - (x - \mathfrak{r}) \cdot m = 0$$

und

$$406) \quad \pm \sqrt{(y - \mathfrak{y})^2 + (x - \mathfrak{r})^2} = x + K \mp \mathfrak{r} \cdot \sqrt{1 + m^2}$$

Eliminirt man die Differenz $(y - \mathfrak{y})$ aus 405) und 406), so bekommt man

$$\pm (x - \mathfrak{r}) \cdot \sqrt{1 + m^2} = x + K \mp \mathfrak{r} \cdot \sqrt{1 + m^2}$$

oder

$$407) \quad x \cdot (-1 \pm \sqrt{1 + m^2}) = K$$

Eliminirt man ferner den Bestandtheil \mathfrak{y} aus 394) und 405), so fällt auch \mathfrak{r} mit hinweg; und es bleibt nur

$$408) \quad y = m \cdot x + \mathfrak{A}$$

Weil nun bei jeder Elimination des Bestandtheiles η auch χ mit hinwegfällt, so ist es unmöglich zwischen der als Katakaustika vorgeschriebenen Graden und zwischen einer als Reflexions-Curve gesuchten Curve irgend eine Relation herzustellen.

„Es existirt also bei parallel auffallenden Lichtstrahlen keine Reflexions-Curve, welcher eine grade Linie als Katakaustika angehört.“

Zweiter Fall. Wenn die auf die gesuchte Reflexions-Curve auffallenden Lichtstrahlen von einem leuchtenden Punkte herkommen, so muss man (aus §. 2) für u den Ausdruck 5) einsetzen; und dabei geht Gleichung 400) über in

$$409) (y - (m \cdot A + \mathfrak{A})) \cdot (2yp + (x-g) \cdot (1-p^2)) = (x-A) \cdot (2(x-g) \cdot p - g \cdot (1-p^2))$$

Mit dieser Gleichung verfähre man jetzt weiter, wie mit Gleichung 155) in §. 10; so bekommt man die Ugleichung

$$410) \sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(y-(m \cdot A + \mathfrak{A}))^2 + (x-A)^2} = G$$

wo A und G die zwei Integrations-Constanten sind.

Hier müssen beide Radicale als positiv genommen werden, weil, wie in §. 10 und in §. 11 nachgewiesen ist, die konischen Hyperbeln nicht beachtet werden dürfen.

Setzt man χ statt A , so geht letztere Gleichung über in

$$411) \sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(y-(m \cdot \chi + \mathfrak{A}))^2 + (x-\chi)^2} = G$$

oder, wegen Gleichung 394), in

$$412) \sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(y-\eta)^2 + (x-\chi)^2} = G$$

Dadurch sind aber alle jene unendlich vielen Schaaren konischer Ellipsen dargestellt, deren einer Brennpunkt der leuchtende Punkt sein muss, und deren anderer Brennpunkt jeder in der als Katakaustika vorgeschriebenen Graden 394) liegende Punkt sein kann. Nun ist bereits (in §. 11) auseinander gesetzt, dass keine einzige der hier gefundenen Ellipsen im Stande ist, von der vorgeschriebenen Katakaustika mehr als einen Punkt zu erzeugen, und dass man, um zur gesuchten Reflexions-Curve zu gelangen, die Gränz-Curve der zweiten Ordnung aufsuchen müsse. Zu diesem Ende gehen die in §. 11 befindlichen zwei Gleichungen 175) und 177) diesmal über in

$$413) (y-\eta) - (x-\chi) \cdot m = 0$$

und

$$414) \sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(y-\eta)^2 + (x-\chi)^2} = K - \chi \cdot \sqrt{1+m^2}$$

Eliminirt man die Differenz $(y-\eta)$ aus 413) und 414), so bekommt man

$$\sqrt{(x-g)^2 + y^2} + (x-\chi) \cdot \sqrt{1+m^2} = K - \chi \cdot \sqrt{1+m^2}$$

oder

$$415) \sqrt{(x-g)^2 + y^2} + x \cdot \sqrt{1+m^2} = K$$

Eliminirt man ferner den Bestandtheil η aus 394) und 413), so fällt auch χ mit hinweg; und es bleibt nur

$$416) y = mx + \mathfrak{A}$$

Weil nun bei jeder Elimination des Bestandtheiles η auch das χ mit hinwegfällt, so ist es auch diesmal unmöglich, zwischen der als Katakaustika vorgeschriebenen Graden und zwischen einer als Reflexions-Curve gesuchten Curve irgend eine Relation herzustellen.

„Es existirt also auch bei den von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen keine Reflexions-Curve, welcher eine grade Linie als Katakaustika angehört.“

Zweite Auflösung.

Man differentiire Gleichung 395) nach allem x , so bekommt man

$$417) \quad (u-m) \cdot \left(2 - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{du} - (u-p) \cdot \frac{d^2u}{du^2} \right) = 0$$

und dieser Gleichung wird genügt, entweder wenn

$$418) \quad 2 - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{du} - (u-p) \cdot \frac{d^2u}{du^2} = 0$$

oder wenn

$$419) \quad u-m = 0$$

Erstens. Lässt man Gleichung 418) gelten, so bekommt man durch Integration

$$420) \quad (y-B) = (x-A) \cdot u$$

während, damit der vorgelegten Differentialgleichung 395) genügt wird, zwischen den beiden Integrations-Constanten A und B folgende Relation

$$421) \quad B = m \cdot A + \mathfrak{A}$$

stattfinden muss. Um nun die Differentialgleichung 420) nochmals integriren zu können, muss man von jetzt an unterscheiden, ob die Lichtstrahlen parallel auf die gesuchte Reflexions-Curve auffallen, oder von einem leuchtenden Punkte herkommen. Dabei ergibt sich im ersten Falle (nach §. 6)

$$422) \quad \pm \sqrt{(y-B)^2 + (x-A)^2} = x + E$$

und im zweiten Falle ergibt sich (nach §. 11)

$$423) \quad \sqrt{(x-y)^2 + y^2} + \sqrt{(y-B)^2 + (x-A)^2} = G$$

Man hat hiermit wiederum die vorhin in der ersten Auflösung gefundenen zwei Gleichungen 404) und 412); und diese führen also auch wiederum zu dem Resultate, dass keine Reflections-Curve existirt, welcher eine grade Linie als Katakaustika angehört.

Zweitens. Lässt man die Gleichung 419) gelten, so bekommt man

$$424) \quad u = m$$

d. h. u ist constant. Man muss aber vor Allem untersuchen, ob $u = m$ die Differentialgleichung zu einem einfach singulären Urintegral ist, oder nicht; und zu diesem Ende eliminire man B aus 420) und 421) so bekommt man

$$425) \quad y - (m \cdot A + \mathfrak{A}) = (x-A) \cdot u$$

Diese Gleichung aber reducirt sich, wenn man m statt u setzt, sofort auf

$$426) \quad y = m \cdot x + \mathfrak{A}$$

Der Integrations-Constante A ist also weggefallen, ohne dass er irgend eine Bestimmung gefunden hat; und daraus folgt, dass $u = m$ nicht die Differentialgleichung zu einem einfach singulären Integral ist. Somit erkennt man zum zweiten Male, dass keine Reflexions-Curve existirt, welcher eine grade Linie als Katakaustika angehört.

§. 27.

Man sucht diejenige Refractions-Curve, von welcher die Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass ihr die durch folgende Gleichung

$$427) \quad \eta = m \cdot \xi + \mathfrak{A}$$

vorgeschriebene Grade als Diakaustika zukommt.

Wenn man (aus §. 3) für ξ und η die Ausdrücke 9) und 10) hier einführt, so bekommt man für die gesuchte Refractions-Curve folgende Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$428) \quad y - m \cdot x - \mathfrak{A} - (v + m) \cdot (v + p) \cdot \frac{dx}{dv} = 0$$

Erste Auflösung.

Um letztere Gleichung direct zu integriren, multiplicire man sie mit dv , und sie setzt sich um in

$$429) \quad m \cdot dy + mv \cdot dx + mx \cdot dv + v \cdot dy + v^2 \cdot dx - y \cdot dv + \mathfrak{A} \cdot dv = 0$$

Man addire die identische Differenz

$$v \cdot x \cdot dv - v \cdot x \cdot dv$$

so bekommt man weiter

$$430) \quad (v + m) \cdot (dy + v \cdot dx + x \cdot dv) - (y + vx - \mathfrak{A}) \cdot dv = 0$$

Diese Gleichung wird integrabel durch den Multiplikator $\frac{1}{(v+m)^2}$; denn dabei geht sie über in

$$431) \quad \frac{(v+m) \cdot (dy + v \cdot dx + x \cdot dv) - (y + vx - \mathfrak{A}) \cdot dv}{(v+m)^2} = 0$$

und daraus folgt durch Integration

$$432) \quad \frac{y + vx - \mathfrak{A}}{v + m} = A$$

oder

$$433) \quad (y - (mA + \mathfrak{A})) + (x - A) \cdot v = 0$$

Um nun diese Differentialgleichung erster Ordnung weiter behandeln zu können, muss man unterscheiden, ob die auf die gesuchte Refractions-Curve auffallenden Lichtstrahlen mit einander parallel laufen, oder von einem leuchtenden Punkt herkommen.

Erster Fall. Wenn die auf die gesuchte Refractions-Curve auffallenden Lichtstrahlen mit einander parallel sind, so muss man (aus §. 3) für v den Ausdruck 11) hier einführen; und dabei geht Gleichung 433) über in

$$434) \quad (x - A) \cdot p - (y - (mA + \mathfrak{A})) + [(x - A) + (y - (mA + \mathfrak{A})) \cdot p] \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1 + p^2) - 1} = 0$$

Mit dieser Gleichung verfähre man jetzt weiter, wie mit Gleichung 203) in §. 15; so bekommt man die Urgleichung

$$435) \quad \mp \lambda \cdot \sqrt{(y - (m \cdot A + \mathfrak{Q}))^2 + (x - A)^2} = x + E$$

wo A und E die beiden Integrations-Constanten sind. Setzt man hier x statt A , so geht letztere Gleichung über in

$$436) \quad \mp \lambda \cdot \sqrt{(y - (m \cdot x + \mathfrak{Q}))^2 + (x - x)^2} = x + E$$

oder, wegen Gleichung 427) in

$$437) \quad \mp \lambda \cdot \sqrt{(y - \mathfrak{h})^2 + x - x)^2} = x + E$$

Alle hierdurch dargestellten unendlich vielen Curven-Schaaren bestehen also (nach der zu Gleichung 222) in §. 16 gemachten Erklärung) entweder aus konischen Ellipsen oder aus konischen Hyperbeln, je nachdem $\lambda^2 > 1$ oder $\lambda^2 < 1$ ist.

Die Hauptaxen aller dieser Ellipsen oder Hyperbeln laufen in der Entfernung $y = \mathfrak{h}$ mit der Abscissenaxe parallel; und wenn man die in §. 15 hergestellte Gleichung 206) mit der hier gefundenen Gleichung 437) vergleicht, so erkennt man, dass, wie sich dort die gebrochenen Strahlen in dem vorgeschriebenen Brennpunkte (g, h) concentriren mussten, hier die gebrochenen Strahlen sich im Brennpunkte (x, y) concentriren, d. h. jeder einzelne Punkt der hier als Diakaustika vorgeschriebenen Graden ist ein Brennpunkt zu irgend einer der durch 437) dargestellten Ellipsen und Hyperbeln. Nun ist (ebenfalls in §. 16) auseinander gesetzt, dass keine einzige der hier gefundenen Ellipsen oder Hyperbeln im Stande ist, von der vorgeschriebenen Diakaustika mehr als einen Punkt zu erzeugen, und dass man, um zur gesuchten Refractions-Curve zu gelangen, die Gränz-Curven der zweiten Ordnung aufsuchen müsse; und wenn man hierzu die (in §. 16 mitgetheilte) erste Methode anwenden will, so gehen die dortigen zwei Gleichungen 227) und 229) diesmal über in

$$438) \quad (y - \mathfrak{h}) - (x - x) \cdot m = 0$$

und

$$439) \quad \mp \lambda \cdot \sqrt{(y - \mathfrak{h})^2 + (x - x)^2} = x + K \pm \lambda \cdot x \cdot \sqrt{1 + m^2}$$

Eliminirt man die Differenz $(y - \mathfrak{h})$ aus 438) und 439), so bekommt man

$$\mp \lambda \cdot (x - x) \cdot \sqrt{1 + m^2} = x + K \pm \lambda \cdot x \cdot \sqrt{1 + m^2}$$

oder

$$440) \quad x \cdot (-1 \mp \lambda \cdot \sqrt{1 + m^2}) = K$$

Eliminirt man ferner den Bestandtheil \mathfrak{h} aus 427) und 438), so fällt auch x mit hinweg; und es bleibt nur

$$441) \quad y = m \cdot x + \mathfrak{Q}$$

Weil nun bei jeder Elimination des Bestandtheiles \mathfrak{h} auch x mit hinwegfällt, so ist es unmöglich, zwischen der als Diakaustika vorgeschriebenen Graden und zwischen einer als Refractions-Curve gesuchten Curve irgend eine Abhängigkeit herzustellen.

„Es existirt also bei parallel auffallenden Lichtstrahlen keine Refractions-Curve, welcher eine grade Linie als Diakaustika zugehört.“

Zweiter Fall. Wenn die auf die gesuchte Refractions-Curve auffallenden Lichtstrahlen von einem leuchtenden Punkte herkommen, so muss man (aus §. 3) für v den Ausdruck 12) einführen; und dabei geht Gleichung 433) über in

$$442) \quad \left\{ (x-A) \cdot p - (y - (mA + \mathfrak{A})) \right\} \cdot ((x-g) + y \cdot p) \\ = \left\{ (x-A) + (y - (mA + \mathfrak{A})) \cdot p \right\} \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) \cdot ((x-g)^2 + y^2) - ((x-g) + y \cdot p)^2}$$

Mit dieser Gleichung verfähre man jetzt weiter, wie mit Gleichung 354) in §. 20; so bekommt man die Urgleichung

$$443) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-A)^2 + (y - (mA + \mathfrak{A}))^2} = G$$

wo A und G die beiden Integrations-Constanten sind. Setzt man x statt A , so geht letztere Gleichung über in

$$444) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-x)^2 + (y - (m \cdot x + \mathfrak{A}))^2} = G$$

oder, wegen Gleichung 427), in

$$445) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-x)^2 + (y-y)^2} = G$$

Die hier gefundene Gleichung ist im Allgemeinen eine des vierten Grades, welcher sich aber auf den zweiten erniedrigt, wenn $G = 0$.

Vergleicht man die im §. 20 hergestellte Gleichung 356) mit der hier gefundenen Gleichung 445), so erkennt man, dass, wie sich dort die gebrochenen Strahlen in dem vorgeschriebenen Brennpunkte (g, h) concentriren mussten, hier die gebrochenen Strahlen sich im Brennpunkte (x, y) concentriren, d. h. jeder einzelne Punkt der hier als Diakaustika vorgeschriebenen Graden 427) ist ein Brennpunkt zu irgend einer der durch 445) dargestellten Curven. Nun ist bereits (in §. 21) auseinandergesetzt, dass keine einzige der hier gefundenen Curven im Stande ist, von der vorgeschriebenen Diakaustika mehr als einen Punkt zu erzeugen, und dass man, um zur gesuchten Refractions-Curve zu gelangen, die Gränz-Curven der zweiten Ordnung aufsuchen müsse. Zu diesem Ende gehen die in §. 21 aufgestellten zwei Gleichungen 371) und 373) diesmal über in

$$446) \quad (y-y) - (x-x) \cdot m = 0$$

und

$$447) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-x)^2 + (y-y)^2} = K \pm \lambda \cdot x \cdot \sqrt{1+m^2}$$

Eliminirt man die Differenz $(y-y)$ aus 446) und 447), so bekommt man

$$\sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp \lambda \cdot (x-x) \cdot \sqrt{1+m^2} = K \pm \lambda \cdot x \cdot \sqrt{1+m^2}$$

oder

$$448) \quad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp \lambda \cdot x \cdot \sqrt{1+m^2} = K$$

Eliminirt man ferner den Bestandtheil η aus 427) und 446), so fällt auch r mit hinweg; und es bleibt nur

$$449) \quad y = m \cdot x + \mathfrak{A}$$

Weil nun bei jeder Elimination des Bestandtheiles η auch das r mit hinwegfällt, so ist es auch diesmal unmöglich, zwischen der als Diakaustika vorgeschriebenen Graden 427) und zwischen einer als Refractions-Curve gesuchten Curve irgend eine Relation herzustellen.

„Es existirt also auch bei den von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen keine Refractions-Curve, welcher eine grade Linie als Diakaustika angehört.“

Zweite Auflösung.

Man differentiire Gleichung 428) nach allem x , so bekommt man

$$450) \quad (v+m) \cdot \left(2 + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} - (v+p) \cdot \frac{d^2r}{dx^2} \right) = 0$$

und dieser Gleichung wird genügt, entweder wenn

$$451) \quad 2 + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} - (v+p) \cdot \frac{d^2r}{dx^2} = 0$$

oder wenn

$$452) \quad v + m = 0$$

Erstens. Lässt man Gleichung 451) gelten, so bekommt man durch Integration

$$453) \quad (y-B) + (x-A) \cdot v = 0$$

während, damit die vorgelegte Differentialgleichung 428) erfüllt wird, zwischen den Integrations-Constanten A und B folgende Relation

$$454) \quad B = m \cdot A + \mathfrak{A}$$

stattfinden muss. Um nun die Differentialgleichung 453) nochmals integriren zu können, muss man von jetzt an unterscheiden, ob die Lichtstrahlen parallel auf die gesuchte Refractions-Curve auffallen, oder von einem leuchtenden Punkte herkommen. Dabei ergibt sich im ersten Falle (nach §. 16)

$$455) \quad \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-A)^2 + (y-B)^2} = x + E$$

und im zweiten Falle (nach §. 21)

$$456) \quad \sqrt{(x-y)^2 + y^2} \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-A)^2 + (y-B)^2} = G$$

Man hat hiermit wiederum die vorhin in der ersten Auflösung gefundenen zwei Gleichungen 437) und 445); und diese führen also auch wiederum zu dem Resultate, dass keine Refractions-Curve existirt, welcher eine grade Linie als Diakaustika angehört.

Zweitens. Lässt man die Gleichung 452) gelten, so bekommt man

$$457) \quad v = -m$$

d. h. v ist constant. Man muss aber vor Allem untersuchen, ob $v = -m$ die Differentialgleichung zu einem einfach singulären Integral ist, oder nicht: und zu diesem Ende eliminire man B aus 453) und 454), so bekommt man

$$458) \quad (y - (mA + \mathfrak{A})) + (x - A) \cdot v = 0$$

Diese Gleichung reducirt sich, wenn man $-m$ statt v einsetzt, sofort auf

$$459) \quad y = m \cdot x + \mathfrak{A}$$

Der Integrations-Constante A ist also weggefallen, ohne dass er irgend eine Bestimmung gefunden hat; und daraus folgt, dass $v = -m$ nicht die Differentialgleichung zu einem einfach singulären Integral ist. Somit erkennt man zum zweiten Male, dass keine Refractions-Curve existirt, welcher eine grade Linie als Diakaustika angehört.

Zusatz. Alle hier (§. 27) befindlichen refractorischen Resultate gehen, wenn man $\lambda = -1$ setzt, in die reflexorischen (§. 26) über. Aber alsdann dürfen bei den Doppelzeichen nur die oberen genommen werden.

INHALT.

| | Seite |
|---|-------|
| Einleitung. Begriff der Brennlinien, und Eintheilung derselben in katakaustische und diakaustische. Die Brennlinien sind einhüllende Gränz-Curven. Einer graden Linie kann niemals die Eigenschaft einer Brennlinie zukommen. Die Brennlinien machen keine eigene Gattung von Curven aus, und es kann jede beliebige Curve als Katakaustika oder als Diakaustika vorgeschrieben, und die zugehörige Reflexions- oder Refractions-Curve aufgesucht werden. §. 1 | 227 |
| Kurze Anleitung, zu einer vorgeschriebenen Reflexions-Curve die Katakaustika zu bestimmen. Dazu bedarf es keiner Integration. §. 2 | 228 |
| Kurze Anleitung, zu einer vorgeschriebenen Refractions-Curve die Diakaustika zu bestimmen. Dazu bedarf es ebenfalls keiner Integration. §. 3 | 229 |
| Zusatz. Die diakaustischen Resultate gehen alle, sobald man $\lambda = -1$ setzt, in die katakaustischen über | 230 |
| Vorläufige Andeutung, wie man zu einer vorgeschriebenen Brennlinie die zugehörige Reflexions- oder Refractions-Curve bestimmt. Unterscheidung zwischen einhüllenden und nicht einhüllenden Gränz-Curven. Die Brennlinien sind einhüllende, und die Reflexions- und Refractions-Curven sind nicht einhüllende Gränz-Curven. Das Problem der Brennlinien ist dem Evolutionsproblem analog. Eintheilungsprincip der vorliegenden Abhandlung. §. 4 | 230 |
| Schluss der Einleitung. Die Einfachheit und Allgemeinheit meiner Lösung des Problems lässt nichts zu wünschen übrig | 231 |
| Erste Abtheilung. Bestimmung der Reflexions-Curven, während die Katakaustika vorgeschrieben ist. §. 5—14 | 232 |
| Erster Abschnitt. Bestimmung der Reflexions-Curven für parallele Lichtstrahlen. §. 5—9 | 232 |
| Bestimmung derjenigen Reflexions-Curve, bei welcher die parallel auf sie auffallenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass die Katakaustika sich in einem Punkt zusammenzieht. §. 5 | 232 |
| Allgemeine Bestimmung derjenigen Reflexions-Curve, bei welcher die parallel auf sie auffallenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass ihr eine bestimmt vorgeschriebene Curve als Katakaustika zukommt. Die gesuchte Reflexions-Curve ist eine Gränz-Curve, welche durch ein einfach singuläres Integral dargestellt wird. Es gibt drei verschiedene Methoden zur Herstellung der einfach singulären Integrale. §. 6 | 233 |
| Beispiel 1. Bestimmung derjenigen Reflexions-Curve, bei welcher die parallel auffallenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass die Katakaustika als semikubische Parabel erscheint. §. 7 | 238 |
| Beispiel 2, dass die Katakaustika als konische Parabel erscheint. §. 8 | 242 |
| Beispiel 3, dass die Katakaustika als Kreislinie erscheint. §. 9 | 246 |
| Zweiter Abschnitt. Bestimmung der Reflexions-Curven für von einem leuchtenden Punkte herkommende Lichtstrahlen. §. 10—14 | 250 |
| Bestimmung derjenigen Reflexions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass die Katakaustika sich in einem Punkt zusammenzieht. §. 10 | 250 |
| Allgemeine Bestimmung derjenigen Reflexions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass ihr eine bestimmt vorgeschriebene Curve als Katakaustika zukommt. Die gesuchte Reflexions-Curve ist eine Gränz-Curve, welche durch ein einfach singuläres Integral dargestellt wird. Es gibt drei verschiedene Methoden zur Herstellung der einfach singulären Integrale. §. 11 | 252 |
| Beispiel 4. Bestimmung derjenigen Reflexions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass die Katakaustika als semikubische Parabel erscheint. §. 12 | 257 |
| Beispiel 5, dass die Katakaustika als konische Parabel erscheint. §. 13 | 258 |
| Beispiel 6, dass die Katakaustika als Hypokykloide erscheint. §. 14 | 258 |
| Zweite Abtheilung. Bestimmung der Refractions-Curven, während die Diakaustika vorgeschrieben ist. §. 15—24 | 259 |
| Erster Abschnitt. Bestimmung der Refractions-Curven für parallele Lichtstrahlen. §. 15—19 | 259 |
| Bestimmung derjenigen Refractions-Curve, bei welcher die parallel auf sie auffallenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass die Diakaustika sich in einem einzigen Punkt zusammenzieht. §. 15 | 259 |

| | Seite |
|--|-------|
| Allgemeine Bestimmung derjenigen Refractions-Curve, bei welcher die parallel auf sie auffallenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass ihr eine bestimmt vorgeschriebene Curve als Diakaustika zukommt. Die gesuchte Refractions-Curve ist eine Gränz-Curve, welche durch ein einfach singuläres Integral dargestellt wird. §. 16 . . . | 261 |
| Beispiel 7. Bestimmung derjenigen Refractions-Curve, bei welcher die parallel auf sie auffallenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass die Diakaustika als semikubische Parabel erscheint. §. 17 | 265 |
| Beispiel 8, dass die Diakaustika als konische Parabel erscheint. §. 18 | 270 |
| Beispiel 9, dass die Diakaustika als Kreislinie erscheint. §. 19 | 274 |
| Zweiter Abschnitt. Bestimmung der Refractions-Curven für von einem leuchtenden Punkte herkommende Lichtstrahlen. §. 20—24 | 279 |
| Bestimmung derjenigen Refractions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass die Diakaustika sich in einem einzigen Punkt zusammenzieht. §. 20 | 279 |
| Allgemeine Bestimmung derjenigen Refractions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass ihr eine bestimmt vorgeschriebene Curve als Diakaustika zukommt. Die gesuchte Refractions-Curve ist eine Gränz-Curve, welche durch ein einfach singuläres Integral dargestellt wird. §. 21 | 281 |
| Beispiel 10. Bestimmung derjenigen Refractions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass die Diakaustika als semikubische Parabel erscheint. §. 22 | 285 |
| Beispiel 11, dass die Diakaustika als konische Parabel erscheint. §. 23 | 286 |
| Beispiel 12, dass die Diakaustika als Hypokykloide erscheint. §. 24 | 286 |
| Anhang. Specieller Nachweis, dass, wenn eine grade Linie als Brennlinie vorgeschrieben wird, weder eine Reflexions- noch eine Refractions-Curve existirt. §. 25—27 | 287 |

A decorative border with a repeating geometric pattern of squares and rectangles, with some elements having semi-circular or scalloped edges, framing the central text.

WIEN.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

1862.







3 2044 093 282 317

