DENKSCHRIFTEN

DER

KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

NEUNUNDVIERZIGSTER BAND.

WIEN.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

1885.

Erste Abtheilung.

Abhandlungen von Mitgliedern der Akademie.

Mit 11 Tafeln.

ARITHMETISCHE THEOREME. II.

VON

LEOPOLD GEGENBAUER,

CORRESPONDIRENDEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 16. OCTOBER 1884.

Ich werde in den folgenden Zeilen eine Reihe von neuen arithmetischen Theoremen ableiten.

Multiplicirt man die Gleichung:

1) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mu(n)}{n^{2s}} = \frac{1}{\zeta(2s)}$$

mit $\zeta(s)$, so erhält man:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\mu(n)}{(mn^2)^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\mu^2(r)}{r^s},$$

und daher hat man die Formel:

2) $$\sum_{d_2} \mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \mu^2(r),$$

wo die Summation bezüglich d_2 über alle Divisoren von r zu erstrecken ist, deren complementärer Divisor ein Quadrat ist.

Nun ist:

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} \left[\frac{n}{x^2}\right] \mu(x) = \sum_{x=1,\, y=1}^{x=[\sqrt{n}],\, y=n} \varepsilon\left(\frac{n}{yx^2}\right) \mu(x)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \varepsilon\left(\frac{n}{r}\right)\left(\sum_{d_2} \mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)\right)$$

und demnach ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichung 2) die Relation:

$$3)\qquad \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} \left[\frac{n}{x^2}\right]\mu(x) = \sum_{x=1}^{x=n} \mu^2(x)$$
$$= \mathfrak{Q}(n),$$

wo $\mathfrak{Q}(n)$ die Anzahl derjenigen Zahlen ist, welche nicht grösser als n und durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar sind.

Man hat also den Satz:

Dividirt man die ganze Zahl n durch die Quadrate jener ganzen, die Quadratwurzel aus n nicht übersteigenden Zahlen, welche nur verschiedene Primfactoren enthalten, und versieht die bei diesen Divisionen auftretenden Quotienten mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem die Basis des Divisors aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Primzahlen zusammengesetzt ist, so ist die Summe der so entstehenden Ausdrücke gleich der Anzahl der in dem Intervalle $1\ldots n$ mit Einschluss der Grenzen befindlichen Zahlen, welche durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar sind.

Für die Anzahl aller im Intervalle $1\ldots 100$ liegenden, durch kein Quadrat theilbaren Zahlen erhält man nach diesem Satze:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}(100) &= \left[\frac{100}{1^2}\right]-\left[\frac{100}{2^2}\right]-\left[\frac{100}{3^2}\right]-\left[\frac{100}{5^2}\right]+\left[\frac{100}{6^2}\right]-\left[\frac{100}{7^2}\right]+\left[\frac{100}{10^2}\right]\\ &= 100 - 25 - 11 - 4 + 2 - 2 + 1\\ &= 61.\end{aligned}$$

Auf demselben Wege findet man:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}(400) &= \left[\frac{400}{1^2}\right]-\left[\frac{400}{2^2}\right]-\left[\frac{400}{3^2}\right]-\left[\frac{400}{5^2}\right]+\left[\frac{400}{6^2}\right]-\left[\frac{400}{7^2}\right]+\left[\frac{400}{10^2}\right]-\\ &\quad 400 - 100 - 44 - 16 + 11 - 8 + 4 -\\ &\quad -\left[\frac{400}{11^2}\right]-\left[\frac{400}{13^2}\right]+\left[\frac{400}{14^2}\right]+\left[\frac{400}{15^2}\right]-\left[\frac{400}{17^2}\right]-\left[\frac{400}{19^2}\right]\\ &\quad -3 - 2 + 2 + 1 - 1 - 1\\ &= 244.\end{aligned}$$

Da bekanntlich:

$$4)\qquad \sum_{y=1}^{y=r} \left[\frac{m}{y}\right]\mu(y) = 1 \qquad (r \geqq m)$$

ist, so hat man auch:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}(n) &= \sum_{x,\,y=1}^{x,\,y=n} \left[\frac{n}{xy}\right]\mu^2(x)\,\mu(y)\\ &= \sum_{y=1}^{y=n} \mu(y)\left(\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n}{y}\right]} \left[\frac{n}{xy}\right]\mu^2(x)\right)\end{aligned}$$

also nach einem bekannten Satze:

$$5)\qquad \mathfrak{Q}(n) = \sum_{y=1}^{y=n} \varpi\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\mu(y),$$

welche Gleichung übrigens auch aus einer von mir früher mitgetheilten Formel („Zahlentheoretische Relationen." Sitzungsber. der kais. Akad. d. Wissensch., mathem.-naturw. Classe, II. Abth., 89. Bd., p. 841 ff.) sich unmittelbar ergibt.

Schreibt man in der Gleichung 3) für n: $\left[\frac{n}{y}\right]$, multiplicirt sodann mit $\rho_{\varkappa,2}(y)$ und summirt bezüglich y von 1 bis n, so erhält man:

$$\sum_{y=1}^{y=n} \mathfrak{Q}\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\rho_{\varkappa,2}(y) = \sum_{x=1,\ y=1}^{x=[\sqrt{n}],\ y=n}\left[\frac{n}{x^2 y}\right]\mu(x)\,\rho_{\varkappa,2}(y)$$
$$= \sum_{r=1}^{r=n}\left[\frac{n}{r}\right]\left(\sum_{d_2}\mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)\rho_{\varkappa,2}(d_2)\right).$$

Multiplicirt man die Gleichung 1) mit:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{\rho_{\varkappa,2}(m)}{m^s} = \zeta(2s)\,\zeta(s-\varkappa),$$

so entsteht die Relation:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty}\frac{\mu(n)\,\rho_{\varkappa,2}(m)}{(mn^2)^s} = \zeta(s-\varkappa)$$
$$= \sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{r^\varkappa}{r^s},$$

und daher hat man:

6) $$\sum_{d_2}\mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)\rho_{\varkappa,2}(d_2) = r^\varkappa.$$

Es ist also:

7) $$\sum_{y=1}^{y=n}\mathfrak{Q}\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\rho_{\varkappa,2}(y) = \sum_{r=1}^{r=n}\left[\frac{n}{r}\right]r^\varkappa$$
$$= \Psi_\varkappa(n)$$

und speciell:

8) $$\sum_{y=1}^{y=n}\mathfrak{Q}\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\rho_{0,2}(y) = \Psi(n).$$

Schreibt man nun in der Gleichung 7) für n: $\left[\frac{n}{z}\right]$, multiplicirt sodann mit $z^\varkappa\mu(z)$ und summirt bezüglich z von 1 bis n, so ergibt sich die Beziehung:

$$\sum_{y,\,z=1}^{y,\,z=n}\mathfrak{Q}\left(\left[\frac{n}{yz}\right]\right)\rho_{\varkappa,2}(y)\,z^\varkappa\mu(z) = \sum_{z=1}^{z=n}\Psi_\varkappa\left(\left[\frac{n}{z}\right]\right)z^\varkappa\mu(z),$$

oder unter Berücksichtigung einer von mir a. a. O. mitgetheilten Formel:

9) $$\sum_{r=1}^{r=r}\mathfrak{Q}\left(\left[\frac{n}{r}\right]\right)\left(\sum_{d}\rho_{\varkappa,2}\left(\frac{r}{d}\right)d^\varkappa\mu(d)\right) = n.$$

Schreibt man in der Gleichung 1) für $2s$: $s-\varkappa$ und multiplicirt mit $\zeta(2s)\,\zeta(s-\varkappa)$, so erhält man:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty}\frac{\mu(n)\,n^\varkappa\rho_{\varkappa,2}(m)}{(mn)^s} = \zeta(2s)$$
$$= \sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^{2s}},$$

und daher ist:

10)
$$\sum_d \mu(d)\, d^x \rho_{x,2}\left(\frac{r}{d}\right) = 0,$$

wenn r kein Quadrat ist, hingegen:

11)
$$\sum_d \mu(d)\, d^x \rho_{x,2}\left(\frac{r}{d}\right) = 1,$$

wenn r ein Quadrat ist.

Die Gleichung 9) verwandelt sich daher in die schon von Herrn Bugajef auf anderem Wege abgeleitete Relation:

12)
$$\sum_{r=1}^{r=[\sqrt{n}]} \mathfrak{Q}\left(\left[\frac{n}{r^2}\right]\right) = n.$$

Man hat also die Theoreme:

Die Summe der Anzahlen derjenigen ganzen Zahlen, welche keinen quadratischen Factor enthalten, und beziehungsweise $\frac{n}{1^2}, \frac{n}{2^2}, \ldots, \frac{n}{[\sqrt{n}]^2}$ nicht überschreiten, ist gleich der Zahl n.

Die Anzahl derjenigen Zahlen, welche n nicht überschreiten und einen quadratischen Factor besitzen, ist gleich der Summe der Anzahlen der keinen quadratischen Factor enthaltenden Zahlen, welche beziehungsweise $\frac{n}{2^2}, \frac{n}{3^2}, \ldots, \frac{n}{[\sqrt{n}]^2}$ nicht überschreiten.

Ist z. B. $n = 100$, so sind unter den Zahlen, welche nicht grösser als:

$$\left[\frac{100}{2^2}\right] = 25, \left[\frac{100}{3^2}\right] = 11, \left[\frac{100}{4^2}\right] = 6, \left[\frac{100}{5^2}\right] = 4, \left[\frac{100}{6^2}\right] = 2, \left[\frac{100}{7^2}\right] = 2, \left[\frac{100}{8^2}\right] = 1, \left[\frac{100}{9^2}\right] = 1, \left[\frac{100}{10^2}\right] = 1,$$

sind, beziehungsweise:

16 8 5 3 2 2 1 1 1

Zahlen ohne quadratischen Theiler und daher gibt es in dem Intervalle 1...100 39 Zahlen, welche einen quadratischen Divisor besitzen.

Wird in der Gleichung 3) n durch $\left[\frac{n}{y}\right]$ ersetzt, sodann mit $\psi(y)$ multiplicirt und von $y = 1$ bis $y = n$ summirt, so entsteht die Relation:

$$\sum_{y=1}^{y=n} \mathfrak{Q}\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\psi(y) = \sum_{x=1,\, y=1}^{x=[\sqrt{n}],\, y=n} \left[\frac{n}{x^2 y}\right]\mu(x)\,\psi(y)$$
$$= \sum_{r=1}^{r=n} \left[\frac{n}{r}\right]\left(\sum_{d_2} \mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)\psi(d_2)\right).$$

Aus der Gleichung 1) leitet man durch Multiplication mit:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\psi(m)}{m^s} = \zeta(s)^2$$

die folgende ab:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\mu(n)\,\psi(m)}{(mn^2)^s} = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}$$
$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\omega(r)}{r^s}.$$

und daher ist:

13) $$\sum_{d_2} \mu\left(\frac{r}{d_2}\right) \psi(d_2) = \omega(r).$$

Man hat also:

$$\sum_{y=1}^{y=n} \Omega\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right) \psi(y) = \sum_{r=1}^{r=n} \left[\frac{n}{r}\right] \omega(r),$$

oder nach einem a. a. O. mitgetheilten Satze:

14) $$\sum_{y=1}^{y=n} \Omega\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right) \psi(y) = \Psi(n).$$

Schreibt man in dieser Formel wieder für n: $\left[\frac{n}{z}\right]$, multiplicirt mit $\mu(z)$ und summirt hierauf von $z=1$ bis $z=n$, so ergibt sich die Beziehung:

$$\sum_{y,z=1}^{y,z=n} \Omega\left(\left[\frac{n}{yz}\right]\right) \psi(y) \mu(z) = \sum_{z=1}^{z=n} \Psi\left(\left[\frac{n}{z}\right]\right) \mu(z),$$

welche nach einer a. a. O. mitgetheilten Formel in die folgende übergeht:

$$\sum_{r=1}^{r=n} \Omega\left(\left[\frac{n}{r}\right]\right) \left(\sum_{d} \psi\left(\frac{r}{d}\right) \mu(d)\right) = \varpi(n).$$

Multiplicirt man nun die Gleichung 1), nachdem in derselben $2s$ durch s ersetzt wurde, mit:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_{\varkappa}(m)}{m^s} = \zeta(s)\, \zeta(s-\varkappa)$$

so erhält man.

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\mu(n) \psi_{\varkappa}(m)}{(mn)^s} = \zeta(s-\varkappa)$$
$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{r^{\varkappa}}{r^s},$$

aus welcher Gleichung die Relation:

15) $$\sum_{d} \psi_{\varkappa}(d) \mu\left(\frac{r}{d}\right) = r^{\varkappa}$$

und speciell:

16) $$\sum_{d} \psi(d) \mu\left(\frac{r}{d}\right) = 1$$

folgt. Die letzte Formel ist übrigens auch ein specieller Fall der von mir früher mitgetheilten Gleichung („Über einige zahlentheoretische Functionen". Sitzungsber. d. kais. Akademie d. Wissensch., mathem. naturw. Classe, 89. Bd., II. Abth., p. 37 ff.):

$$\sum_{d} \mu\left(\frac{r}{d}\right) f_{\beta}(d) = f_{\beta-1}(r).$$

Es ist also schliesslich:

17) $$\sum_{r=1}^{r=n} \Omega\left(\left[\frac{n}{r}\right]\right) = \varpi(n).$$

Diese Formel könnte man übrigens auch leicht aus der Gleichung 12) ableiten. Wird in dieser Relation n durch $\left[\frac{n}{x}\right]$ ersetzt, mit $\mu^2(x)$ multiplicirt und von $x=1$ bis $x=n$ summirt, so entsteht die Gleichung:

$$\sum_{r=1,\, x=1}^{r=[\sqrt{n}],\, x=n} \Omega\left(\left[\frac{n}{r^2 x}\right]\right)\mu^2(x) = \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\mu^2(x)$$

oder:

$$\sum_{r=1}^{r=n}\Omega\left(\left[\frac{n}{r}\right]\right)\left(\sum_{d_2}\mu^2(d_2)\right) = \varpi(n).$$

Aus der Gleichung:

18) $$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\mu^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

folgt aber sofort:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty}\frac{\mu^2(n)}{(nm^2)^s} = \sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^s},$$

also:

19) $$\sum_{d_2}\mu^2(d_2) = 1,$$

und daher ergibt sich wieder die Gleichung 17), aus welcher der folgende arithmetische Satz folgt:

Die Summe der Anzahlen derjenigen ganzen Zahlen, welche keinen quadratischen Factor enthalten und beziehungsweise $\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{n}$ nicht überschreiten, ist gleich der Summe der Anzahlen der Zerlegungen aller ganzen Zahlen von 1 bis n in zwei zu einander relativ prime Zahlen.

Ein Corollar dieses Satzes ist das Theorem:

Die Summe der Anzahlen derjenigen ganzen Zahlen, welche keinen quadratischen Divisor besitzen und beziehungsweise $\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{n}$ nicht übertreffen, ist stets ungerade.

Man hat z. B. für $n=20$:

$$\left[\frac{n}{r}\right] = 20,\ 10,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$$

$$\Omega\left(\left[\frac{n}{r}\right]\right) = 13,\ \ 7,\ 5,\ 4,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$$

und da die Summe der letzten Zahlen 53 ist, so sieht man, dass sich alle Zahlen von 1 bis 20 incl. auf 53 verschiedene Arten in zwei zu einander relativ prime Zahlen zerlegen lassen.

Setzt man in der Gleichung 12) für n: $\left[\frac{n}{x}\right]$, multiplicirt mit $\mu(x)$ und summirt von $x=1$ bis $x=n$, so erhält man:

$$\sum_{r=1,\, x=1}^{r=[\sqrt{n}],\, x=n}\Omega\left(\left[\frac{n}{r^2 x}\right]\right)\mu(x) = \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\mu(x),$$

also:

$$\sum_{r=1}^{r=n}\Omega\left(\left[\frac{n}{r}\right]\right)\left(\sum_{d_2}\mu(d_2)\right) = 1.$$

Nun ist aber:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\mu(n)}{(nm^2)^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\lambda(r)}{r^s}$$

und daher:

20) $$\sum_{d_2} \mu(d_2) = \lambda(r).$$

Demnach entsteht die Relation:

21) $$\sum_{r=1}^{r=n} \mathfrak{Q}\left[\frac{n}{r}\right]\lambda(r) = 1.$$

Diese Gleichung liefert das Theorem:

Bestimmt man die Anzahlen jener ganzen Zahlen, welche durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar sind und beziehungsweise die Brüche $\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{n}$ nicht übertreffen, so ist die Summe derjenigen, welche einem aus einer geraden Anzahl von Primzahlen zusammengesetzten Nenner entsprechen, um 1 grösser, als die Summe der übrigen.

Für $n = 20$ ist z. B. die erste Summe 27, die zweite 26.

Wird in der bekannten Formel:

22) $$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right]\lambda(x) = Q(n)$$

für n: $\left[\frac{n}{y}\right]$ geschrieben, sodann mit $\mu^2(y)$ multiplicirt und von $y = 1$ bis $y = n$ summirt, so ergibt sich die Gleichung:

$$\sum_{y=1}^{y=n} Q\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\mu^2(y) = \sum_{x,y=1}^{x,y=n} \left[\frac{n}{xy}\right]\lambda(x)\mu^2(y)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \left[\frac{n}{r}\right]\left(\sum_{d} \mu^2(d)\lambda\left(\frac{r}{d}\right)\right).$$

Da nun:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\mu^2(n)\lambda(m)}{(mn)^s} = 1.$$

ist, so hat man:

23) $$\sum_{d} \lambda\left(\frac{r}{d}\right)\mu^2(d) = 0$$

für $r > 1$ und:

24) $$\sum_{d} \lambda\left(\frac{r}{d}\right)\mu^2(d) = 1$$

für $r = 1$.

Die letzte Formel verwandelt sich daher in die folgende von Herrn Bugajef mitgetheilte Relation:

25) $$\sum_{y=1}^{y=n} Q\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\mu^2(y) = n.$$

Aus dieser Gleichung folgt das Theorem:

Die Summe der Anzahlen der Quadrate, welche beziehungsweise diejenigen unter den Brüchen $\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{n}$ nicht übersteigen, deren Nenner durch kein Quadrat theilbar ist, hat den Werth n.

Für $n = 20$ hat man:

$$\left[\frac{n}{y}\right] = 20,\ 10,\ 6,\ 4,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$$

$$\sum_{y=1}^{y=n} Q\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right) \mu^2(y) = 4+3+2+2+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 20.$$

Schreibt man in der Gleichung 25) $\left[\frac{n}{z}\right]$ für n, multiplicirt mit $\mu(z)$ und summirt von $z = 1$ bis $z = n$, so erhält man:

$$\sum_{y,z=1}^{y,z=n} Q\left(\left[\frac{n}{yz}\right]\right) \mu^2(y)\, \mu(z) = \sum_{z=1}^{z=n} \left[\frac{n}{z}\right] \mu(z),$$

oder nach bekannten Formeln:

26) $$\sum_{r=1}^{r=n} Q\left(\left[\frac{n}{r}\right]\right) \left(\sum_{d} \mu\left(\frac{r}{d}\right) \mu^2(d)\right) = \sum_{r=1}^{r=[\sqrt{n}]} Q\left(\left[\frac{n}{r^2}\right]\right) \mu(r) = 1.$$

Zur Herleitung dieser Formel kann auch folgender Weg eingeschlagen werden.

Es ist:

$$\sum_{r=1}^{r=[\sqrt{n}]} Q\left(\left[\frac{n}{r^2}\right]\right) \mu(r) = \sum_{r=1,\, x=1}^{r=[\sqrt{n}],\, x=n} \left[\frac{n}{r^2 x}\right] \lambda(x)\, \mu(r)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \left[\frac{n}{r}\right] \left(\sum_{d_2} \lambda(d_2)\, \mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)\right).$$

Nun hat man:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\mu(n)\lambda(m)}{(mn^2)^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\mu(r)}{r^s}$$

und daher:

27) $$\sum_{d} \lambda(d_2) \mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \mu(r),$$

so dass die letzte Formel sich sofort in die Gleichung 26) verwandelt.

Man hat also folgendes Theorem:

Bestimmt man die Anzahlen der Quadrate, welche beziehungsweise diejenigen von den Brüchen $\frac{n}{1^2}, \frac{n}{2^2}, \ldots, \frac{n}{[\sqrt{n}]^2}$ nicht übertreffen, in denen die Basis des Nenners keinen quadratischen Divisor besitzt, versieht sodann jede dieser Zahlen mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem die betreffende Basis aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Primzahlen zusammengesetzt ist, so ist die Summe der so entstehenden Zahlen gleich 1.

Für $n = 100$ hat man:

$$\left[\frac{n}{r^2}\right] = 100,\ 25,\ 11,\ 4,\ 2,\ 2,\ 1$$

$$\sum_{r=1}^{r=[\sqrt{n}]} Q\left(\left[\frac{n}{r^2}\right]\right)\mu(r) = 10-5-3-2+1-1+1 = 1.$$

Es ist:

$$\frac{\zeta(s)\,\zeta(2s)}{\zeta(4s)} = \prod_p \frac{1+\frac{1}{p^{2s}}}{1-\frac{1}{p^s}},$$

wo das Product über alle Primzahlen p zu erstrecken ist.

Man hat nun:

$$\prod_p \frac{1+\frac{1}{p^{2s}}}{1-\frac{1}{p^s}} = \prod_p \left\{1+\frac{1}{p^{2s}}\right\} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{1}{p^{\lambda s}}$$

$$= \prod_p \left\{1+\frac{1}{p^s}+2\sum_{\lambda=2}^{\lambda=\infty}\frac{1}{p^{\lambda s}}\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\omega(n)}{2^{\tau(n)}\, n^s}$$

wo $\tau(n)$ die Anzahl jener Primfactoren von n ist, welche nur in der ersten Potenz in n enthalten sind.

Es ist also:

28) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\omega(n)}{2^{\tau(n)}\, n^s} = \frac{\zeta(s)\,\zeta(2s)}{\zeta(4s)}.$$

Nun ist aber auch:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\mu^2(n)}{(mn^2)^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(4s)}\,\zeta(s),$$

und daher hat man:

29) $$\sum_{d_2} \mu^2\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \frac{\omega(r)}{2^{\tau(r)}} = 2^{\bar{\omega}(r)-\tau(r)}.$$

Aus dieser Gleichung folgt der arithmetische Satz:

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche ein Quadrat, aber durch keine vierte Potenz theilbar sind, ist stets gerade, ausser wenn die betreffende Zahl nur verschiedene Primfactoren enthält, in welchem Falle der einzige der angegebenen Bedingung genügende Divisor 1 ist.

Man hat ferner:

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} \left[\frac{n}{x^2}\right]\mu^2(x) = \sum_{x=1,\,y=1}^{x=[\sqrt{n}],\,y=n} \varepsilon\left(\frac{n}{x^2 y}\right)\mu^2(x)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \varepsilon\left(\frac{n}{r}\right)\left(\sum_{d_2}\mu^2\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)\right)$$

und daher:

30) $$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} \left[\frac{n}{x^2}\right]\mu^2(x) = \sum_{r=1}^{r=n} 2^{\bar{\omega}(r)-\tau(r)}.$$

Aus 28) folgt auch:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\omega(n)}{2^{\tau(n)}(n m^4)^s} = \zeta(2s)\,\zeta(s)$$
$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\rho_{0,2}(r)}{r^s},$$

demnach ist:

31) $$\sum_{d_4} \frac{\omega(d_4)}{2^{\tau(d_4)}} = \sum_{d_4} 2^{\bar{\omega}(d_4)-\tau(d_4)} = \rho_{0,2}(r),$$

wo die Summation bezüglich d_4 über alle Divisoren von r zu erstrecken ist, deren complementärer Divisor eine vierte Potenz ist.

Es ist:

$$\sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]} \psi_\varkappa\left(\left[\frac{n}{y^2}\right]\right) y^{2\varkappa}\mu(y) = \sum_{x,y=1}^{x,y=n} \left[\frac{n}{xy^2}\right](xy^2)^\varkappa \mu(y)$$
$$= \sum_{r=1}^{r=n} \left[\frac{n}{r}\right] r^\varkappa \left(\sum_{d_2} \mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)\right),$$

oder nach 2):

32) $$\sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]} \psi_\varkappa\left(\left[\frac{n}{y^2}\right]\right) y^{2\varkappa}\mu(y) = \sum_{r=1}^{r=n} \left[\frac{n}{r}\right] r^\varkappa \mu^2(r).$$

Den speciellen Fall $\varkappa = 0$ dieser Formel:

33) $$\sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]} \psi\left(\left[\frac{n}{y^2}\right]\right) \mu(y) = \sum_{r=1}^{r=n} \left[\frac{n}{r}\right] \mu^2(r)$$
$$= \bar{\omega}(n)$$

hat Herr F. Mertens mitgetheilt („Über einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie". Journal für die reine und angewandte Mathematik von C. W. Borchardt, 77. Band, p. 289 ff.).

Nun ist:

$$\sum_{r=1}^{r=n} \left[\frac{n}{r}\right] r^\varkappa \mu^2(r) = \sum_{x,r=1}^{x,r=n} \varepsilon\left(\frac{n}{xr}\right) r^\varkappa \mu^2(r)$$
$$= \sum_{r=1}^{r=n} \varepsilon\left(\frac{n}{r}\right)\left(\sum_{d} d^\varkappa \mu^2(d)\right)$$
$$= \sum_{r=1}^{r=n} \bar{\psi}_\varkappa(r),$$

wo $\bar{\psi}_\varkappa(r)$ die Summe der $\varkappa$ten Potenzen jener Divisoren von r ist, welche durch kein Quadrat theilbar sind.

Die Gleichung 32) verwandelt sich daher in die folgende:

34) $$\sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]} \psi_\varkappa\left(\left[\frac{n}{y^2}\right]\right) y^{2\varkappa}\mu(y) = \sum_{r=1}^{r=n} \bar{\psi}_\varkappa(r).$$

Zu anderen arithmetischen Theoremen führen sofort folgende aus der Gleichung 3), den in der Arbeit über zahlentheoretische Functionen enthaltenen Formeln 134), 138)... 144), 149) und der in meiner Mittheilung über zahlentheoretische Relationen aufgestellten Beziehung 18) sich ergebende Gleichungen:

$$35)\quad \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{pn}]} \eta_{p,\,pn,\,x^2}\mu(x) = \mathfrak{Q}(pn)-p\,\mathfrak{Q}(n)$$

$$36)\quad \sum_{x=1}^{x=pn} \eta_{p,\,pn,\,x}\,\varphi_\varkappa(x) = S_\varkappa(pn)-p\,S_\varkappa(n)$$

$$37)\quad \sum_{x=1}^{x=pn} \eta_{p,\,pn,\,x}\,\lambda(x) = Q(pn)-p\,Q(n)$$

$$38)\quad \sum_{x=1}^{x=pn} \eta_{p,\,pn,\,x}\,\omega(x) = \bar{\Psi}(pn)-p\,\bar{\Psi}(n)$$

$$39)\quad \sum_{x=1}^{x=pn} \eta_{p,\,pn,\,x}\,\omega(x)\lambda(x) = \Lambda(pn)-p\,\Lambda(n)$$

$$40)\quad \sum_{x=1}^{x=\left[(pn)^{\frac{1}{\tau}}\right]} \eta_{p,\,pn,\,x}\,x^{\tau\varkappa} = \bar{P}_{\varkappa,\tau}(pn)-p\,\bar{P}_{\varkappa,\tau}(n)$$

$$41)\quad \sum_{x=1}^{x=pn} \eta_{p,\,pn,\,x}\,\lambda(x)\psi_\varkappa(x) = \tilde{\rho}_{\varkappa,2}(pn)-p\tilde{\rho}_{\varkappa,2}(n) \qquad \left(\tilde{\rho}_{\varkappa,2}(n)=\sum_{x=1}^{x=n}\rho_{\varkappa,2}(x)\right)$$

$$42)\quad \sum_{x=1}^{x=pn} \eta_{p,\,pn,\,x}\,\lambda(x)\,P_{\varkappa,2\tau}(x) = \tilde{P}_{2\varkappa,\tau}(pn)-p\,\tilde{P}_{2\varkappa,\tau}(n) \qquad \left(\tilde{P}_{\varkappa,\tau}(n)=\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}P_{\varkappa,\tau}(x)\right)$$

$$43)\quad \sum_{x=1}^{x=pn} \eta_{p,\,pn,\,x}\,f_{\beta-1}(x) = F_\beta(pn)-p\,F_\beta(n)$$

$$44)\quad \sum_{x=1}^{x=pn} \eta_{p,\,pn,\,x}\,\psi(x^2) = \tilde{\Psi}(pn)-p\,\tilde{\Psi}(n)$$

$$45)\quad \sum_{x=1}^{x=pn} \eta_{p,\,pn,\,x}\,\mu^2(x) = \bar{\omega}(pn)-p\,\bar{\omega}(n).$$

Aus diesen Formeln ergeben sich sofort die speciellen Relationen:

$$46)\quad \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{2n}]}{}'' \mu(x) = \mathfrak{Q}(2n)-2\mathfrak{Q}(n)$$

$$47)\quad \sum_{x=1}^{x=2n}{}' \varphi_\varkappa(x) = S_\varkappa(2n)-2S_\varkappa(n)$$

$$48)\quad \sum_{x=1}^{x=2n}{}' \lambda(x) = Q(2n)-2Q(n)$$

$$49)\quad \sum_{x=1}^{x=2n}{}' \omega(x) = \bar{\Psi}(2n)-2\bar{\Psi}(n)$$

$$50)\quad \sum_{x=1}^{x=2n}{}' \lambda(x)\,\omega(x) = \Lambda(2n) - 2\Lambda(n)$$

$$51)\quad \sum_{x=1}^{x=\left[(2n)^{\frac{1}{\tau}}\right]}{}' x^{\tau\varkappa} = P_{\varkappa,\tau}(2n) - 2P_{\varkappa,\tau}(n)$$

$$52)\quad \sum_{x=1}^{x=2n}{}' \lambda(x)\,\psi_{\varkappa}(x) = \bar{\rho}_{\varkappa,2}(2n) - 2\bar{\rho}_{\varkappa,2}(n)$$

$$53)\quad \sum_{x=1}^{x=2n}{}' \lambda(x)\,P_{\varkappa,2\tau}(x) = \tilde{P}_{2\varkappa,\tau}(2n) - 2\tilde{P}_{2\varkappa,\tau}(n)$$

$$54)\quad \sum_{x=1}^{x=2n}{}' f_{\beta-1}(x) = F_{\beta}(2n) - 2F_{\beta}(n)$$

$$55)\quad \sum_{x=1}^{x=2n}{}' \psi(x^2) = \tilde{\Psi}(2n) - 2\tilde{\Psi}(n)$$

$$56)\quad \sum_{x=1}^{x=2n}{}' \mu^2(x) = \bar{\omega}(2n) - 2\bar{\omega}(n)$$

Setzt man in den Formeln 40) und 51) speciell $\tau = 1$, so erhält man:

$$57)\quad \sum_{x=1}^{x=pn} \gamma_{p,\,pn,\,x}\, x^{\varkappa} = \Psi_{\varkappa}(pn) - p\,\Psi_{\varkappa}(n)$$

$$58)\quad \sum_{x=1}^{x=2n}{}' x^{\varkappa} = \Psi_{\varkappa}(2n) - 2\Psi_{\varkappa}(n)$$

Die Formeln 36) und 47) für $\varkappa = 1$, 48), 54) für $\beta = 2$, 58) für $\varkappa = 0$, 1 hat schon Herr E. Cesaro mitgetheilt.

Von den in den obigen Gleichungen enthaltenen arithmetischen Theoremen mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

Die Anzahl der in dem Intervalle $n+1\ldots 2n$ enthaltenen durch kein Quadrat theilbaren Zahlen übertrifft die Anzahl der in dem Intervalle $1\ldots n$ enthaltenen Zahlen derselben Beschaffenheit um eben so viel, als die Anzahl der aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primfactoren zusammengesetzten Zahlen x, für welche $\left[\frac{2n}{x^2}\right]$ ungerade ist, grösser ist, als die Anzahl der übrigen die eben genannte Bedingung erfüllenden Zahlen.

Bestimmt man für jede der Zahlen, für welche $\left[\frac{2n}{x}\right]$ ungerade ist, die Anzahl aller sie nicht übertreffenden Zahlen, welche zu ihr relativ prim sind, so ist die Summe dieser Anzahlen gleich n^2.

Diejenigen Zahlen x, für welche $\left[\frac{2n}{x}\right]$ ungerade ist, lassen sich eben so oft in zwei zu einander relativ prime Zahlen zerlegen, als die Anzahl der Divisoren der Quadrate der ersten n natürlichen Zahlen von der Anzahl der Divisoren der Quadrate der folgenden n Zahlen übertroffen wird.

Die Summe der $(\tau\varkappa)$ten Potenzen jener Zahlen x, für welche $\left[\frac{2n}{x}\right]$ ungerade ist, ist gleich der Zahl, um welche die Summe der $\varkappa$ten Potenzen jener Divisoren der ersten n natürlichen Zahlen, welche τte Potenzen sind, kleiner ist, als die Summe der $\varkappa$ten Potenzen derjenigen Divisoren der folgenden n Zahlen, welche τte Potenzen sind

Die Summe der $\varkappa$ten Potenzen derjenigen Zahlen x, für welche $\left[\frac{2n}{x}\right]$ ungerade ist, ist gleich der Zahl, um welche die Summe der $\varkappa$ten Potenzen der Divisoren der ersten n natürlichen Zahlen von der Summe der $\varkappa$ten Potenzen der Divisoren der folgenden n Zahlen übertroffen wird.

Diejenigen Zahlen x, für welche $\left[\frac{2n}{x}\right]$ ungerade ist, können so oft als Producte von $\beta-1$ Zahlen dargestellt werden, als die Zahl beträgt, um welche die ersten n natürlichen Zahlen sich weniger oft als Producte von β Factoren darstellen lassen, als die folgenden n Zahlen.

Die Anzahl der Divisoren der Quadrate derjenigen Zahlen x, für welche $\left[\frac{2n}{x}\right]$ ungerade ist, ist gleich der Zahl, um welche die Summe der Quadrate der Anzahlen der Divisoren der ersten n natürlichen Zahlen kleiner ist, als die Summe der Quadrate der Anzahlen der Divisoren der folgenden n Zahlen.

Es gibt so viele, durch kein Quadrat theilbare Zahlen x, für welche $\left[\frac{2n}{x}\right]$ ungerade ist, als die Differenz aus der Anzahl der Zerlegungen der ersten n natürlichen Zahlen in zwei zu einander relativ prime Zahlen und der erwähnten Anzahl für die folgenden n Zahlen beträgt.

Um zu anderen arithmetischen Theoremen zu gelangen, setze ich in der Formel:

$$59)\qquad \sum_{x=1}^{x=\infty}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=p}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]f(x)+\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{2p+1}\right]}F\left(\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]\right)-\left[\frac{\alpha}{2p+1}\right]F(p)\qquad(\alpha\leqq 2n-1)$$

$$60)\qquad p=\left[\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right]=\sigma$$

Alsdann wird:

$$\left[\frac{\alpha}{2p+1}\right]=\sigma+\varkappa,$$

und daher:

$$[\alpha]=2\sigma^2+(2\varkappa+1)\sigma+\varkappa+\varepsilon\qquad(0\leqq\varepsilon<2\sigma+1).$$

Aus 60) folgt aber:

$$2\sigma^2\leqq\alpha<2\sigma^2+4\sigma+2,$$

und desshalb hat man auch:

$$\varkappa<2$$

$$0\leqq(2\varkappa+1)\sigma+\varkappa+\varepsilon,$$

oder, weil ε niemals grösser als 2σ werden kann:

$$0\leqq 2\varkappa+3.$$

Es kann demnach $\varkappa$ nur einen der drei Werthe -1, 0, $+1$ haben.

Ist $\varkappa=-1$, so hat man:

$$\frac{\alpha+\sigma}{2\sigma}=\sigma+\frac{\varepsilon-1}{2\sigma},$$

und da in diesem Falle ε nicht gleich Null sein kann, weil sonst:

$$[\alpha]=2\sigma^2-\sigma-1$$

wäre, so ist:

$$\left[\frac{\alpha+\sigma}{2\sigma}\right]=\sigma.$$

Ist ferner $z = +1$, so hat man:

$$\frac{\alpha+\sigma+1}{2(\sigma+1)} = \sigma+1+\frac{\varepsilon}{2\sigma+2},$$

und daher:

$$\left[\frac{\alpha+\sigma+1}{2(\sigma+1)}\right] = \sigma+1.$$

Berücksichtigt man, dass z nur dann den Werth $+1$ haben kann, wenn:

61) $$2\sigma^2+3\sigma \leqq [\alpha] < 2\sigma^2+4\sigma+2$$

ist, so erhält man schliesslich:

62) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]f(x) = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]f(x)+\sum_{x=1}^{x=\sigma}F\left(\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]\right)-\sigma F(\sigma)+\eta f(\sigma+1),$$

wo η den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem α der Bedingung 61) genügt oder nicht.

Gibt man in dieser Formel der Function $f(x)$ der Reihe nach die speciellen Werthe:

63) $$f(x)=1,\ x,\ x^3,\ x^m-(x-1)^m,\ \sin\frac{(2x-1)\pi}{4},\ \cos\frac{(2x-1)\pi}{4},\ \cos x\vartheta,\ \sin x\vartheta,\ \log(2x-1),\ (2x-1)^m-(2x-3)^m,$$

so erhält man die Gleichungen:

64) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right] = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]+\sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]-(\sigma^2-\eta)$$

65) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]x = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]x+\sum_{x=1}^{x=\sigma}D\left(\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]\right)-\frac{(\sigma+1)(\sigma^2-2\eta)}{2}$$

66) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]x^3 = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]x^3+\sum_{x=1}^{x=\sigma}D^2\left(\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]\right)-(\sigma+1)^2\left\{\frac{\sigma^3}{4}-\eta(\sigma+1)\right\}$$

67) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]x^m-\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right](x-1)^m = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]x^m-\sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right](x-1)^m+$$
$$+\sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]^m-\sigma^m(\sigma+\eta)+\eta(\sigma+1)^m$$

68) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4} = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\sigma}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]\right)-\sigma\sqrt{2}\sin^2\frac{\sigma\pi}{4}+$$
$$+\eta\sin\frac{(2\sigma+1)\pi}{4}$$

69) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4} = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{x=1}^{x=\sigma}\sin\left(\frac{\pi}{2}\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]\right)-\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sin\frac{\sigma\pi}{2}+$$
$$+\eta\cos\frac{(2\sigma+1)\pi}{4}$$

$$70)\quad 2\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]\cos x\vartheta = 2\sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]\cos x\vartheta + \sum_{x=1}^{x=\sigma}\frac{\sin\vartheta\left\{\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]+\frac{1}{2}\right\}}{\sin\frac{\vartheta}{2}} - \frac{\sigma\sin\frac{(2\sigma+1)\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}} + 2\epsilon\cos(\sigma+1)\vartheta$$

$$71)\quad 2\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]\sin x\vartheta = 2\sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]\sin x\vartheta - \frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\sum_{x=1}^{x=\sigma}\cos\vartheta\left\{\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]+\frac{1}{2}\right\} + \frac{\sigma\cos\frac{(2\sigma+1)\vartheta}{2}}{\sigma\sin\frac{\vartheta}{2}} +$$
$$+ 2\epsilon\sin(\sigma+1)\vartheta$$

$$72)\quad 2\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^x\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right] = 2\sum_{x=1}^{x=\sigma}(-1)^x\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right] + \sum_{x=1}^{x=\sigma}(-1)^{\left[\frac{\sigma+x}{2x}\right]} + (-1)^{\sigma+1}(\sigma+2\epsilon)$$

$$73)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right] = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right] + \sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\sigma}\sin\left(\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) -$$
$$-\sigma\sqrt{2}\sin\frac{(2\sigma+1)\pi}{4} + \epsilon\left((-1)^{\frac{\sigma+1}{2}} + (-1)^{\frac{3\sigma+1}{2}}\right)$$

$$74)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right] = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right] - \sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\sigma}\cos\left(\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) +$$
$$+\sigma\sqrt{2}\cos\frac{(2\sigma+1)\pi}{4} + \epsilon\left((-1)^{\frac{\sigma}{2}} - (-1)^{\frac{3\sigma+2}{2}}\right)$$

$$75)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]\log(2x-1) = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]\log(2x-1) + \sum_{x=1}^{x=\sigma}\log\frac{\Gamma\left(2\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]\right)}{2^{\left[\frac{\sigma+x}{2x}\right]}\Gamma\left(\left[\frac{\alpha+3x}{2x}\right]\right)} - \sigma\log\frac{\Gamma(2\sigma)}{2^{\sigma}\Gamma(\sigma-1)} +$$
$$+\epsilon\log(2\sigma+1)$$

$$76)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right](2x-1)^m - \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right](2x-3)^m = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right](2x-1)^m - \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right](2x-3)^m +$$
$$+\sum_{x=1}^{x=\sigma}\left\{2\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]-1\right\}^m - (\sigma+\epsilon)(2\sigma-1)^m + \epsilon(2\sigma+1)$$

Von den in diesen Formeln enthaltenen arithmetischen Theoremen mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

Die Anzahl derjenigen ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]-1$ sind, ist um $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]^2-\epsilon$ kleiner als die Summe der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{4},\ \frac{n+3}{6},\ \ldots,\ \frac{n+\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}{2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}$$

enthalten sind.

Die Summe der $m$ten Potenzen derjenigen ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]-1$ sind, übertrifft die Summe der $m$ten Potenzen der eben genannten um die Zahl 2 verminderten Divisoren um eben so viel, als die Summe der $m$ten Potenzen derjenigen Zahlen, welche man erhält, wenn man von den grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{1},\ \frac{n+2}{2},\ \frac{n+3}{3},\ldots,\ \frac{n+\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}{\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}$$

enthalten sind, 2 oder 1 subtrahirt, je nachdem die betreffende Zahl ungerade oder gerade ist, grösser ist, als die Differenz

$$\left\{\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]+\sigma\right\}\left\{2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]-1\right\}^{m}-\sigma\left\{2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]+1\right\}^{m}.$$

Die Summe derjenigen ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]-1$ sind, ist um $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]^{3}-2\sigma$ kleiner, als die Summe der Quadrate der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{4},\ \frac{n+3}{6},\ldots,\ \frac{n+\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}{2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}$$

enthalten sind.

Die doppelte Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $4r-1$ und grösser als $2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]-1$ sind, übertrifft die doppelte Anzahl der übrigen die angegebene Grenze überschreitenden ungeraden Divisoren um eben so viel, als die Anzahl der ungeraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{4},\ \frac{n+3}{6},\ldots,\ \frac{n+\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}{2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}$$

enthalten sind, von der Summe aus der Anzahl der geraden grössten ganzen Zahlen und den Ausdruck

$$(-1)^{\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]+1}\left\{\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]+2\sigma\right\}$$

übertreffen wird.

Die doppelte Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $8r+1$ und grösser als $2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]-1$ sind, übertrifft die doppelte Anzahl derjenigen Divisoren, welche von der Form $8r-3$ sind, und die angegebene Grenze überschreiten, um eben so viel, als die Anzahl derjenigen grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{4},\ \frac{n+3}{6},\ldots,\ \frac{n+\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}{2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}$$

enthalten und von der Form $4r$ oder $4r+3$ sind, von der Summe aus der Anzahl der übrigen grössten ganzen Zahlen und dem Ausdrucke

$$\sqrt{2}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]\cos\frac{\pi}{4}\left\{2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]+1\right\}+\varkappa\left\{(-1)^{\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}+(-1)^{\frac{3}{2}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}\right\}$$

übertroffen wird.

Die doppelte Summe derjenigen ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]-1$ sind, vermehrt um ihre Anzahl ist um $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}+1\right]\left\{\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]^2-2\varkappa\right\}$ kleiner, als die doppelte Summe derjenigen Trigonalzahlen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen angegeben werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{4},\ \frac{n+3}{6},\ldots,\ \frac{n+\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}{2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}$$

enthalten sind.

Die vierfache Summe derjenigen ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]-1$ sind, übertrifft ihre vierfache Anzahl um eben so viel, als der Ausdruck

$$\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]\left\{\left(2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]-1\right)^2-8\varkappa\right\}$$

von der Summe der Quadrate derjenigen Zahlen übertroffen wird, welche man erhält, wenn man von den grössten ganzen Zahlen, die in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{1},\ \frac{n+2}{2},\ \frac{n+3}{3},\ldots,\ \frac{n+\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}{\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}$$

enthalten sind, 2 oder 1 subtrahirt, je nachdem die betreffende Zahl ungerade oder gerade ist.

Man sieht sofort, dass die Anzahlen derjenigen Zahlen, für welche $\varkappa = 1$ ist, eine arithmetische Reihe mit dem Anfangsgliede 2 und der Differenz 1 bilden, während die Anzahlen jener Zahlen, für welche $\varkappa = 0$ ist, eine arithmetische Reihe mit dem Anfangsgliede 3 und der Differenz 3 bilden.

Um zu neuen Sätzen zu gelangen, betrachte ich zunächst die Summe:

$$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^2+\beta}}-\rho\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=p}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^2+\beta}}-\rho\right]f(x)+\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^2+\beta}}-\rho\right]f(x).$$

Es sei:

$$\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{b(p+1)^2+\beta}}-\rho\right]=A$$

$$\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bn^2+\beta}}-\rho\right]=B.$$

Die in der Summe:

$$\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^2+\beta}}-\rho\right]f(x)$$

auftretenden ganzen Zahlen:

$$\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}}-\rho\right]$$

erhalten ersichtlich nur die Werthe A, $A-1$, $A-2,\ldots$, $B+1$, B und zwar wird, da aus der Relation:

$$\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{b(x+1)^\sigma+\beta}}-\rho\leqq y<\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}}-\rho$$

die Gleichung:

$$x=\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(y^\tau+\rho)}}-\frac{\beta}{b}\right]$$

folgt, der Werth A für alle x:

$$\text{von } x=p+1 \quad \text{bis } x=\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(A^\tau+\rho)}}-\frac{\beta}{b}\right]$$

der Werth B für alle x:

$$\text{von } x=\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b\{(B+1)^\tau+\rho\}}}-\frac{\beta}{b}\right]+1 \quad \text{bis } x=n$$

ein zwischen A und B liegender Werth y für alle x:

$$\text{von } x=\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b\{(y+1)^\tau+\rho\}}}-\frac{\beta}{b}\right]+1 \quad \text{bis } x=\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(y^\tau+\rho)}}-\frac{\beta}{b}\right]$$

angenommen.

Es ist also:

$$\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}}-\rho\right]f(x)=A\left\{f(p+1)+f(p+2)+\ldots+f\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(A^\tau+\rho)}}-\frac{\beta}{b}\right]\right)\right\}+$$

$$+(A-1)\left\{f\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(A^\tau+\rho)}}-\frac{\beta}{b}+1\right]\right)+f\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(A^\tau+\rho)}}-\frac{\beta}{b}+2\right]\right)+\ldots+f\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b\{(A-1)^\tau+\rho\}}}-\frac{\beta}{b}\right]\right)\right\}+$$

$$+(A-2)\left\{f\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b\{(A-1)^\tau+\rho\}}}-\frac{\beta}{b}+1\right]\right)+f\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b\{(A-1)^\tau+\rho\}}}-\frac{\beta}{b}+2\right]\right)+\ldots+\right.$$

$$\left.+f\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b\{(A-2)^\tau+\rho\}}}-\frac{\beta}{b}\right]\right)\right\}+$$

$$+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;+$$

$$+B\left\{f\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b\{(B+1)^\tau+\rho\}}}-\frac{\beta}{b}+1\right]\right)+f\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b\{(B+1)^\tau+\rho\}}}-\frac{\beta}{b}+2\right]\right)+\ldots+f(n)\right\},$$

oder:

$$\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}}-\rho\right]f(x)=\sum_{x=B+1}^{x=A}F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(x^\tau+\rho)}}-\frac{\beta}{b}\right]\right)-A\,F(p)+B\,F(n).$$

Man hat daher die Relation:

$$77)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}}-\rho\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=p}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}}-\rho\right]f(x)+\sum_{x=B+1}^{x=A}F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(x^\tau+\rho)}}-\frac{\beta}{b}\right]\right)-A\,F(p)+BF(n).$$

Sind α, β, b, n, ρ, σ so beschaffen, dass:

$$B=0$$

wird, so hat man:

78) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=p}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\right]f(x)+\sum_{x=1}^{x=A}F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(x^\tau+\rho)}-\frac{\beta}{b}}\right]\right)-A\,F(p).$$

Für $p=0$ verwandeln sich diese Formeln in die folgenden:

79) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\right]f(x)=\sum_{x=B+1}^{x=A}F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(x^\tau+\rho)}-\frac{\beta}{b}}\right]\right)+B\,F(n)$$

80) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=A}F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(x^\tau+\rho)}-\frac{\beta}{b}}\right]\right).$$

Es sei nun speciell:

$$b=\tau=1\,,\quad \beta=\rho=0\,,\quad \alpha\leqq n\,.$$

Alsdann ist:

$$A=\left[\frac{\alpha}{(p+1)^\sigma}\right]$$

$$B=\begin{cases}0\\1\end{cases}$$

und demnach:

$$B\,F(n)=\begin{cases}0\\F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{1}}\right]\right),\end{cases}$$

und daher hat man die Relationen:

81) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=p}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]f(x)+\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{(p+1)^\sigma}\right]}F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right)-\left[\frac{\alpha}{(p+1)^\sigma}\right]F(p)$$

82) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=[\alpha]}F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right).$$

Setzt man:

83) $$p=\left[\alpha^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]=\mu_\sigma,$$

so ist:

84) $$p^{\sigma+1}\leqq\alpha<(p+1)^{1+\sigma},$$

und daher:

$$A=\left[\frac{\alpha}{(p+1)^\sigma}\right]<p+1.$$

Ist nun:

$$A=p-\varkappa\,,$$

so hat man:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{p-\lambda}}<p+1\qquad(\lambda=0,1,2,\ldots,\varkappa-1),$$

aber auch nach 84):

$$p\leqq\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{p}},$$

und daher:

$$\left[\sqrt[3]{\frac{\alpha}{p-\lambda}}\right]=p \quad (\lambda=0,\,1,\,2,\ldots,\,\varkappa-1).$$

Man hat daher die Relation:

$$85)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=\mu_3}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right]f(x)+\sum_{x=1}^{x=\mu_3}F\left(\left[\sqrt[3]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right)-\mu_3\,F(\mu_3).$$

Gibt man der Function $f(x)$ der Reihe nach die speciellen Werthe 63) mit Ausnahme der letzten zwei, so erhält man die Formeln:

$$86)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right]=\sum_{x=1}^{x=[\alpha]}\left[\sqrt[3]{\frac{\alpha}{x}}\right]$$

$$87)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right]=\sum_{x=1}^{x=\mu_3}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right]+\sum_{x=1}^{x=\mu_3}\left[\sqrt[3]{\frac{\alpha}{x}}\right]-\mu_3^2$$

$$88)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right]x=\sum_{x=1}^{x=[\alpha]}D\left(\left[\sqrt[3]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right)$$

$$89)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right]x=\sum_{x=1}^{x=\mu_3}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right]x+\sum_{x=1}^{x=\mu_3}D\left(\left[\sqrt[3]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right)-\mu_3\,D(\mu_3)$$

$$90)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right]x^3=\sum_{x=1}^{x=[\alpha]}D^2\left(\left[\sqrt[3]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right)$$

$$91)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right]x^3=\sum_{x=1}^{x=\mu_3}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right]x^3+\sum_{x=1}^{x=\mu_3}D^2\left(\left[\sqrt[3]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right)-\mu_3\,D^2(\mu_3)$$

$$92)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right]x^m-\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right](x-1)^m=\sum_{x=1}^{x=[\alpha]}\left[\sqrt[3]{\frac{\alpha}{x}}\right]^m$$

$$93)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right]x^m-\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right](x-1)^m=\sum_{x=1}^{x=\mu_3}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right]x^m-\sum_{x=1}^{x=\mu_3}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right](x-1)^m+\sum_{x=1}^{x=\mu_3}\left[\sqrt[3]{\frac{\alpha}{x}}\right]^m-\mu_3^{m+1}$$

$$94)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=[\alpha]}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\left[\sqrt[3]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right)$$

$$95)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sum_{x=1}^{x=\mu_3}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\mu_3}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\left[\sqrt[3]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right)-\sqrt{2}\,\mu_3\sin^2\frac{\mu_3\pi}{4}$$

$$96)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{x=1}^{x=[\alpha]}\sin\left(\frac{\pi}{2}\left[\sqrt[3]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right)$$

$$97)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sum_{x=1}^{x=\mu_3}\left[\frac{\alpha}{x^3}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{x=1}^{x=\mu_3}\sin\left(\frac{\pi}{2}\left[\sqrt[3]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right)-\frac{\mu_3}{\sqrt{2}}\sin\frac{\mu_3\pi}{2}$$

$$98)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]\cos x\vartheta=\sum_{x=1}^{x=[\alpha]}\frac{\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\left\{2\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]+1\right\}\right)}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}-\frac{[\alpha]}{2}$$

$$99)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]\sin x\vartheta=-\sum_{x=1}^{x=[\alpha]}\frac{\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\left\{2\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]+1\right\}\right)}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}+\frac{[\alpha]}{2}\operatorname{cotang}\frac{\vartheta}{2}$$

$$100)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]\cos x\vartheta=\sum_{x=1}^{x=\nu_\sigma}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]\cos x\vartheta+\frac{1}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\left\{2\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]+1\right\}\right)-\frac{\mu_\sigma\sin\frac{(2\mu_\sigma+1)\vartheta}{2}}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}$$

$$101)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]\sin x\vartheta=\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]\sin x\vartheta-\frac{1}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\left\{2\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]+1\right\}\right)+\frac{\mu_\sigma\cos\frac{(2\mu_\sigma+1)\vartheta}{2}}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}$$

$$102)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right](2x-1)=\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]^2$$

$$103)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right](2x-1)=\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\left[\frac{n}{x}\right](2x-1)+\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\left[\frac{n}{x}\right]^2-[\sqrt{n}]^3$$

$$104)\quad 2\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^x\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]=\sum_{x=1}^{x=[\alpha]}(-1)^{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]}-[\alpha]$$

$$105)\quad 2\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^x\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]=2\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}(-1)^x\left[\frac{\alpha}{x}\right]+\sum_{x=1}^{x=\nu_\sigma}(-1)^{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]}+(-1)^{\mu_\sigma+1}\mu_\sigma$$

$$106)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]=\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=[\alpha]}\sin\left(\frac{\pi}{2}\left\{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]+\frac{1}{2}\right\}\right)-[\alpha]$$

$$107)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]=\sum_{x=1}^{x=\nu_\sigma}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\sin\left(\frac{\pi}{2}\left\{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]+\frac{1}{2}\right\}\right)-$$
$$-\mu_\sigma\sqrt{2}\sin\frac{(2\mu_\sigma+1)\pi}{4}$$

$$108)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]=-\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=[\alpha]}\cos\left(\frac{\pi}{2}\left\{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]+\frac{1}{2}\right\}\right)+[\alpha]$$

$$109)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]=\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]-\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\cos\left(\frac{\pi}{2}\left\{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]+\frac{1}{2}\right\}\right)+$$
$$+\mu_\sigma\sqrt{2}\cos\frac{(2\mu_\sigma+1)\pi}{4}.$$

Von den in diesen Formeln enthaltenen arithmetischen Theoremen mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen und grösser als $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]^\sigma$ sind, ist um $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]^2$ kleiner, als die Summe der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe.

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}}, \ldots, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]}}$$

enthalten sind.

Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $[\sqrt{n}]$ sind, ist um $[\sqrt{n}]^2$ kleiner, als die Summe der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \ldots, \frac{n}{[\sqrt{n}]}$$

enthalten sind.

Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $[\sqrt{n}]$ sind, ist um $[\sqrt{n}]^2$ kleiner, als die Anzahl der übrigen Divisoren.

Die Summe der σten Wurzeln aus jenen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen sind, ist gleich der Summe derjenigen Trigonalzahlen, deren Ordnungszahlen gleich den grössten ganzen Zahlen sind, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}}, \ldots, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{n}}$$

enthalten sind.

Die Summe der σten Wurzeln aus denjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen und grösser als $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]^\sigma$ sind, ist um das $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]$-fache der $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]$ten Trigonalzahl kleiner, als die Summe jener Trigonalzahlen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen angegeben werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}}, \ldots, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]}}$$

enthalten sind.

Die Summe der dritten Potenzen der σten Wurzeln aus jenen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen sind, ist gleich der Summe der Quadrate derjenigen Trigonalzahlen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen angegeben werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}}, \ldots, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{n}}$$

enthalten sind.

Die Summe der Cuben der σten Wurzeln aus denjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen und grösser als $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]^\sigma$ sind, ist um das $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]$fache des Quadrates der $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]$ten Trigonalzahl kleiner, als die Summe der Quadrate jener Trigonalzahlen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen bestimmt werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}}, \ldots, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]}}$$

enthalten sind.

Die Summe aus der Anzahl der geraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen sind, und der Zahl n übertrifft die Anzahl der übrigen Divisoren, welche σte Potenzen sind, um eben so viel, als die Anzahl der geraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}}, \ldots, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{n}}$$

enthalten sind, die Anzahl der ungeraden grössten ganzen Zahlen übertrifft.

Die Summe aus der doppelten Anzahl derjenigen geraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen und grösser als $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]^\sigma$ sind, und der Grösse $(-1)^{\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]}\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]$ übertrifft die doppelte Anzahl der übrigen Divisoren, welche σte Potenzen und grösser als $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]^\sigma$ sind, um eben so viel, als die Anzahl der geraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\ldots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]}}$$

enthalten sind, die Anzahl der übrigen grössten ganzen Zahlen übertrifft.

Die Summe aus der doppelten Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen von mehrfachgeraden Zahlen sind, und der Zahl n übertrifft die Anzahl der übrigen Divisoren, welche σte Potenzen von geraden Zahlen sind, um die Differenz aus der Anzahl derjenigen grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\ldots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{n}}$$

enthalten und von der Form $4r$ oder $4r+1$ sind und der Anzahl der übrigen grössten ganzen Zahlen.

Die doppelte Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen von mehrfachgeraden Zahlen und grösser als $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]^\sigma$ sind, übertrifft die doppelte Anzahl der übrigen Divisoren, welche σte Potenzen von geraden Zahlen sind und oberhalb der angegebenen Grenze liegen, um eben so viel als die Anzahl derjenigen grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\ldots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]}}$$

enthalten und von der Form $4r$ oder $4r+1$ sind, grösser ist, als die Summe aus der Anzahl der übrigen grössten ganzen Zahlen und dem Ausdrucke:

$$\sqrt{2}\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]\sin\frac{\pi}{4}\left\{2\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]+1\right\}$$

Die doppelte Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen von Zahlen der Form $4s+1$ sind, übertrifft die doppelte Anzahl der übrigen ungeraden Divisoren, welche σte Potenzen sind, um eben so viel, als die Anzahl derjenigen grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\ldots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{n}}$$

enthalten sind und die Form $4s$ oder $4s+3$ besitzen, von der Summe aus der Anzahl der übrigen ganzen grössten Zahlen und der Zahl n übertroffen wird.

Die doppelte Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen von Zahlen der Form $4s+1$ und grösser als $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]^\sigma$ sind, übertrifft die doppelte Anzahl der übrigen, oberhalb der angegebenen Grenze liegenden ungeraden Divisoren, welche σte Potenzen sind, um eben so viel, als die Anzahl derjenigen grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\ldots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]}}$$

enthalten sind, und die Form $4s$ oder $4s+3$ besitzen, von der Summe aus der Anzahl der übrigen ungeraden grössten ganzen Zahlen und dem Ausdrucke

$$\sqrt{2}\left[n^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right]\cos\frac{\pi}{4}\left\{2\left[n^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right]+1\right\}$$

übertroffen wird.

Es mag erwähnt werden, dass die Gleichung 87) schon von Herrn Lipschitz, die Gleichung 102) von Herrn E. Cesaro abgeleitet wurde. Bezeichnet man mit $\psi_{0,[\sqrt{n}]}(r)$ die Anzahl derjenigen Divisoren von r, welche nicht grösser als $[\sqrt{n}]$ sind und mit $\bar\psi_{0,[\sqrt{n}]}(r)$ die Anzahl der übrigen Divisoren von r, so folgt aus 87) die Beziehung:

$$\sum_{x=1}^{x=n}\psi_{0,[\sqrt{n}]}(x)-\sum_{x=1}^{x=n}\bar\psi_{0,[\sqrt{n}]}(x)=[\sqrt{n}]^2 \tag{110}$$

oder:

$$\sum_{x=1}^{x=n}\psi_{0,[\sqrt{n}]}(x)-\sum_{x=1}^{x=n}\bar\psi_{0,[\sqrt{n}]}(x)=n+2\varepsilon\sqrt{n}+\varepsilon^2 \qquad (0\leqq\varepsilon<1) \tag{111}$$

und daher hat man:

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{x=1}^{x=n}\psi_{0,[\sqrt{n}]}(x)-\sum_{x=1}^{x=n}\bar\psi_{0,[\sqrt{n}]}(x)}{n}=1 \tag{112}$$

Berücksichtigt man, dass unter denjenigen Divisoren einer Zahl r, welche nicht grösser als $[\sqrt{n}]$ sind, stets die Zahl 1 vorkommt, so liefert diese Gleichung folgendes Theorem:

Abgesehen von dem Divisor 1 hat jede ganze Zahl n im Mittel eben so viele Divisoren, welche grösser als $[\sqrt{n}]$ sind, als solche, welche die angegebene Grenze nicht überschreiten.

Aus der bekannten Formel:

$$\sum_{x=1}^{x=n}\psi(x)=\sum_{x=1}^{x=n}\psi_{0,[\sqrt{n}]}(x)+\sum_{x=1}^{x=n}\bar\psi_{0,[\sqrt{n}]}(x)=n(\log n+2C-1)+\Delta\,,$$

wo C die Euler'sche Constante, und:

$$|\Delta|<4\sqrt{n}$$

st, folgt sofort:

$$\sum_{x=1}^{x=n}\psi_{0,[\sqrt{n}]}(x)=\frac{n}{2}(\log n+2C)+\Delta_1 \tag{113}$$

$$\sum_{x=1}^{x=n}\bar\psi_{0,[\sqrt{n}]}(x)=\frac{n}{2}(\log n+2C-2)+\Delta_2\,, \tag{114}$$

wo:

$$|\Delta_1|<6\sqrt{n}+1$$
$$|\Delta_2|<6\sqrt{n}+1$$

ist.

Aus den letzten zwei Gleichungen ergeben sich die Relationen:

115)
$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \psi_{0,\,[\sqrt{n}]}(x)}{n} = \frac{1}{2}(\log n + 2\,C)$$

116)
$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \bar{\psi}_{0,\,[\sqrt{n}]}(x)}{n} = \frac{1}{2}(\log n + 2\,C - 2)\,,$$

welche folgende Theoreme liefern:

Das arithmetische Mittel der Anzahlen derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche nicht grösser als die grösste ganze Zahl sind, die in der Quadratwurzel aus n enthalten ist, ist für sehr grosse n gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{2}\log n + C.$$

Das arithmetische Mittel der Anzahlen derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als die grösste ganze Zahl sind, die in der Quadratwurzel aus n enthalten ist, ist für sehr grosse n gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{2}\log n + C - 1.$$

Ist n kein Quadrat, so ist die Anzahl derjenigen Divisoren von n, welche nicht grösser als die grösste ganze Zahl sind, welche in der Quadratwurzel aus n enthalten ist, im Mittel gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{2}(\log n + 2\,C + 1).$$

Ist n kein Quadrat, so ist die Anzahl derjenigen Divisoren von n, welche grösser als die grösste ganze Zahl sind, die in der Quadratwurzel aus n enthalten ist, im Mittel gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{2}(\log n + 2\,C - 1).$$

Setzt man in den Gleichungen 81) und 82):

117)
$$f(x) = \log x\,,$$

so erhält man die speciellen Formeln:

118)
$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right] \log x = \sum_{x=1}^{x=[\sigma]} \log \left\{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x^\sigma}}\right]!\right\}$$

119)
$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right] \log x = \sum_{x=1}^{x=\nu_\sigma} \left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right] \log x + \sum_{x=1}^{x=\nu_\sigma} \log \left\{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]!\right\} - \mu_\sigma \log(\mu_\sigma!)\,,$$

oder auch:

120)
$$\prod_{1}^{[\sigma]} x \; P_\sigma(x) = \prod_{1}^{[\alpha]} p \left\{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]!\right\}^\sigma$$

121)
$$(\mu_\sigma!)^{\mu_\sigma} \prod_{1}^{[\alpha]} x \; P_{\sigma,\,\mu_\sigma}(x) = \prod_{1}^{\mu_\sigma} x \left\{\left[\sqrt{\frac{\alpha}{x}}\right]!\right\}^\sigma,$$

wo $P_\sigma(x)$ das Product aller Divisoren von x bezeichnet, welche σte Potenzen sind, $P_{\sigma,\mu_\sigma}(x)$ aber das Product derjenigen von den eben genannten Divisoren, welche grösser als μ_σ^σ sind.

Man hat daher die Theoreme:

Das Product derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen sind, ist gleich der σten Potenz des Productes derjenigen Factoriellen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen angegeben werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\ldots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{n}}$$

enthalten sind.

Das Product derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen und grösser als $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]^\sigma$ sind, ist der $\left\{\left(\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]\right)!\right\}^{\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]}$te Theil der σten Potenz des Productes jener Factoriellen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen bestimmt werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\ldots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]}}$$

enthalten sind.

Das Product der Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n ist gleich dem Producte derjenigen Factoriellen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen angegeben werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1},\ \frac{n}{2},\ \frac{n}{3},\ldots,\ \frac{n}{n}$$

enthalten sind.

Ist:

$$\alpha = n^\sigma$$

$$n = n_1 . n_2,$$

und setzt man:

$$p = n_1,$$

so wird:

$$A = \left[\frac{\alpha}{(n_1+1)^\sigma}\right] < n_2^\sigma.$$

Ist nun:

$$A = n_2^\sigma - \varkappa \qquad (\varkappa > 0),$$

so hat man:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{n_2^\sigma - \lambda}} < n_1 + 1 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \varkappa - 1).$$

Bei dem angegebenen Werthe von α ist aber andererseits auch:

$$n_1 \leqq \sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{n_2^\sigma - \lambda}},$$

und daher:

$$\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{n_2^\sigma - \lambda}}\right] = n_1 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \varkappa - 1).$$

Man hat demnach die Formel:

122) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]f(x)+\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}F\left(\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]\right)-n_2^\sigma F(n_1)$$

aus welcher für $\sigma=1$ die specielle Relation:

123) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n}{x}\right]f(x)+\sum_{x=1}^{x=n_2}F\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)-n_2F(n_1),$$

folgt.

Aus dieser allgemeinen Formel ergeben sich wieder die speciellen Relationen:

124) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]+\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]-n\,n_2^{\sigma-1}$$

125) $$\sum_{x=1}^{x=n}\psi_{0,n_1}(x)=\sum_{x=1}^{x=n_2}\left[\frac{n}{x}\right]-n$$

126) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]x=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]x+\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}D\left(\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]\right)-n_2^\sigma D(n_1)$$

127) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]x^3=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]x^3+\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}D^2\left(\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]\right)-n_2^\sigma D^2(n_1)$$

128) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]x^m-\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right](x-1)^m=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]x^m-\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right](x-1)^m+\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]^m-n_2^\sigma n_1^m$$

129) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right](2x-1)=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right](2x-1)+\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]^2-n_2^\sigma n_1^2$$

130) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]\log x=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]\log x+\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}\log\left\{\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]!\right\}-n_2^\sigma\log(n_1!)$$

131) $$(n_1!)^{n_2^\sigma}\prod_{x=1}^{n^\sigma}P_{\sigma,n_1}(x)\doteq\prod_{x=1}^{n_2^\sigma}\left(\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]!\right)^\sigma$$

132) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]\right)-\sqrt{2}\,n_2^\sigma\sin^2\frac{n_1\pi}{4}$$

133) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}\sin\left(\frac{\pi}{2}\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]\right)-\frac{n_2^\sigma}{\sqrt{2}}\sin\frac{n_1\pi}{2}$$

134) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]\cos x\vartheta=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]\cos x\vartheta+\frac{1}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\left\{2\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]+1\right\}\right)-\frac{n_2^\sigma\sin\frac{(2n_1+1)\vartheta}{2}}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}$$

$$135)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]\sin x\vartheta=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]\sin x\vartheta-\frac{1}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\left\{2\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]+1\right\}\right)+\frac{n_2^\sigma\cos\frac{(2n_1+1)\vartheta}{2}}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}$$

$$136)\quad 2\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^x\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]=2\sum_{x=1}^{x=n_1}(-1)^x\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]+\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}(-1)^{\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]}+(-1)^{n_1+1}n_2^\sigma$$

$$137)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}\sin\left(\frac{\pi}{2}\left\{\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]+\frac{1}{2}\right\}\right)-$$
$$-\sqrt{2}\,n_2^\sigma\sin\frac{(2n_1+1)\pi}{4}$$

$$138)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]-\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}\cos\left(\frac{\pi}{2}\left\{\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]+\frac{1}{2}\right\}\right)+$$
$$+\sqrt{2}\,n_2^\sigma\cos\frac{(2n_1+1)\pi}{4}.$$

Von den in diesen Formeln enthaltenen arithmetischen Theoremen mögen die folgenden bosonders erwähnt werden:

Ist $n=n_1n_2$, so ist die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n^σ, welche σte Potenzen und grösser als n_1^σ sind um $n\,n_2^{\sigma-1}$ kleiner als die Summe der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1},\ \frac{n}{2^{\frac{1}{\sigma}}},\ \frac{n}{3^{\frac{1}{\sigma}}},\dots,n_1$$

enthalten sind.

Ist $n=n_1n_2$, so ist die Summe der σten Wurzeln aus denjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n^σ, welche σte Potenzen und grösser als n_1^σ sind, um $\frac{n(n_1+1)\,n_2^{\sigma-1}}{2}$ kleiner, als die Summe derjenigen Trigonalzahlen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen angegeben werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1},\ \frac{n}{2^{\frac{1}{\sigma}}},\ \frac{n}{3^{\frac{1}{\sigma}}},\dots,n_1$$

enthalten sind.

Ist $n=n_1n_2$, so ist die Summe der dritten Potenzen der σten Wurzeln aus denjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n^σ, welche σte Potenzen und grösser als n_1^σ sind, um $\frac{n^2\,n_2^{\sigma-2}(n_1+1)^2}{4}$ kleiner, als die Summe der Quadrate jener Trigonalzahlen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen angegeben werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1},\ \frac{n}{2^{\frac{1}{\sigma}}},\ \frac{n}{3^{\frac{1}{\sigma}}},\dots,n_1$$

enthalten sind.

Ist $n = n_1 n_2$, so ist das Product derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n^σ, welche σte Potenzen und grösser als n_1^σ sind, der $(n_1!)^{n_2^\sigma}$te Theil des Productes jener Factoriellen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen bestimmt werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1},\ \frac{n}{2^{\frac{1}{\sigma}}},\ \frac{n}{3^{\frac{1}{\sigma}}},\ldots,\ n_1$$

enthalten sind.

Die Summe aus der doppelten Anzahl derjenigen geraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis $(n_1 n_2)^\sigma$, welche σte Potenzen und grösser als n_1^σ sind, und der Grösse $(-1)^{n_1} n_2^\sigma$ übertrifft die doppelte Anzahl der übrigen Divisoren, welche σte Potenzen sind und die angegebene Grenze überschreiten, um eben so viel, als die Anzahl der geraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1},\ \frac{n}{2^{\frac{1}{\sigma}}},\ \frac{n}{3^{\frac{1}{\sigma}}},\ldots,\ n_1$$

enthalten sind, die Anzahl der übrigen grössten ganzen Zahlen übertrifft.

Die doppelte Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis $(n_1 n_2)^\sigma$, welche σte Potenzen von mehrfachgeraden Zahlen und grösser als n_1^σ sind, übertrifft die doppelte Anzahl der übrigen, oberhalb der angegebenen Grenze befindlichen Divisoren, welche σte Potenzen von geraden Zahlen sind, um eben so viel, als die Anzahl derjenigen grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1},\ \frac{n}{2^{\frac{1}{\sigma}}},\ \frac{n}{3^{\frac{1}{\sigma}}},\ldots,\ n_1$$

enthalten und von der Form $4r$ oder $4r+1$ sind, grösser ist, als die Summe aus der Anzahl der übrigen grössten ganzen Zahlen und dem Ausdrucke $\sqrt{2}\, n_2^\sigma \sin\frac{(2n_1+1)\pi}{4}$.

Die doppelte Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis $(n_1 n_2)^\sigma$, welche σte Potenzen von Zahlen der Form $4s+1$ und grösser als n_1^σ sind, übertrifft die doppelte Anzahl der übrigen, oberhalb der angegebenen Grenze liegenden, ungeraden Divisoren, welche σte Potenzen sind, um eben so viel, als die Anzahl derjenigen grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1},\ \frac{n}{2^{\frac{1}{\sigma}}},\ \frac{n}{3^{\frac{1}{\sigma}}},\ldots,\ n_1$$

enthalten sind, und die Form $4s$ oder $4s+3$ besitzen, die Summe aus der Anzahl der übrigen grössten ganzen Zahlen und dem Ausdrucke $\sqrt{2}\, n_2^\sigma \cos\frac{(2n_1+1)\pi}{2}$ übertroffen wird.

Aus der Gleichung 125) folgt:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \bar{\psi}_{0,n_1}(x) = n \sum_{x=1}^{x=n_2} \frac{1}{x} - \sum_{x=1}^{x=n_2} \varepsilon_x - n \qquad (0 \leqq \varepsilon_x < 1),$$

oder:

139) $$\sum_{x=1}^{x=n} \bar{\psi}_{0,n_1}(x) = n\,\{\log n_2 + C - 1\} - \Delta,$$

wo:

$$|\Delta| < n_2 + n_1$$

ist.

Sind n_1 und n_2 so gewählt, dass:

$$\lim_{n_1, n_2 = \infty} \frac{n_2 + n_1}{n_1 n_2} = 0$$

ist, so hat man die Relation:

$$140) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \bar{\psi}_{0, n_1}(x)}{n} = \log n_2 + C - 1\,,$$

welche das folgende Theorem liefert:

Das arithmetische Mittel derjenigen Anzahlen der Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis $n = n_1 n_2$, welche grösser als n_1 sind, ist gleich dem Ausdrucke:

$$\log n_2 + C - 1\,,$$

wenn $\lim_{n=\infty} \frac{n_2 + n_1}{n} = 0$ ist.

Aus 140) folgen sofort die Relationen:

$$141) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \psi_{0, n_1}(x)}{n} = \log n_1 + C$$

$$142) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \psi_{0, n_1}(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=n} \bar{\psi}_{0, n_1}(x)}{n} = 1 + \log \frac{n_1}{n_2}$$

$$143) \qquad \lim_{s=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=10^s} \bar{\psi}_{0, 10^r}(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=10^{s-1}} \bar{\psi}_{0, 10^r}(x)}{10^s - 10^{s-1}} = s \log 10 - \left(r - \frac{1}{9}\right) \log 10 + C - 1$$

$$144) \qquad \lim_{s=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=10^s} \psi_{0, 10^r}(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=10^{s-1}} \psi_{0, 10^r}(x)}{10^s - 10^{s-1}} = r \log 10 + C\,,$$

aus welchen sich folgende Theoreme ergeben:

Das arithmetische Mittel der Anzahlen derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis $n = n_1 n_2$, welche nicht grösser als n_1 sind, ist gleich dem Ausdrucke:

$$\log n_2 + C\,,$$

wenn $\lim_{n=\infty} \frac{n_2 + n_1}{n_1 n_2} = 0$ ist.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel bei hinlänglich grossem r:

$$s \log 10 - \left(r - \frac{1}{9}\right) \log 10 + C - 1.$$

Divisoren, welche grösser als 10^r sind:

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel bei hinlänglich grossem r:

$$r \log 10 + C$$

Divisoren, welche weniger als r Ziffern besitzen.

Jede s-zifferige Zahl hat bei hinlänglich grossem r im Mittel:

$$\log 10$$

r-zifferige Divisoren.

Setzt man in der Gleichung 77)

$$\tau = \sigma = 1\,, \quad \beta = \rho = 0\,, \quad \alpha = n\,, \quad b = \varkappa\,,$$

so erhält man die Formel:

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n}{\varkappa}\right]} \left[\frac{n}{\varkappa x}\right] f(x) = \sum_{x=1}^{x=p} \left[\frac{n}{\varkappa x}\right] f(x) + \sum_{x=B+1}^{x=A} F\left(\left[\frac{n}{\varkappa x}\right]\right) - A\,F(p) + B\,F\left(\left[\frac{n}{\varkappa}\right]\right). \tag{145}$$

Ist nun wieder:

$$n = n_1 n_2$$

und setzt man:

$$p = n_1$$

so hat man:

$$A = \left[\frac{n}{\varkappa n_1 + \varkappa}\right] = \left[\frac{n_2}{\varkappa}\right] - \lambda \tag{146}$$

$$B = \left[\frac{n}{\varkappa\left[\frac{n}{\varkappa}\right]}\right] = 1.$$

Aus der Gleichung 146) folgt:

$$\left[\frac{n_2}{\varkappa}\right] - \lambda \leqq \frac{n}{\varkappa(n_1+1)} \leqq \left[\frac{n_2}{\varkappa}\right] - \lambda + 1,$$

und daher ist:

$$\frac{n}{\varkappa\left\{\left[\frac{n_2}{\varkappa}\right] - \lambda + \rho\right\}} < n_1 + 1 \qquad (\rho = 1, 2, 3, \ldots, \lambda)$$

Wäre nun auch:

$$\frac{n}{\varkappa\left\{\left[\frac{n_2}{\varkappa}\right] - \lambda + \rho\right\}} < n_1$$

so hätte man:

$$n_2 < \varkappa\left[\frac{n_2}{\varkappa}\right] - \varkappa(\lambda - \rho),$$

oder:

$$0 < -\mu - \varkappa(\lambda - \rho)$$

wo:

$$0 \leqq \mu \leqq \varkappa - 1$$

ist. Da diese Beziehung aber unmöglich ist, so hat man die Gleichung:

$$\left[\frac{n}{\varkappa\left\{\left[\frac{n_2}{\varkappa}\right] - \lambda + \rho\right\}}\right] = n_1 \qquad (\rho = 1, 2, 3, \ldots, \lambda).$$

Die Gleichung 145) verwandelt sich daher in dem eben erwähnten speciellen Falle in:

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n}{\varkappa}\right]} \left[\frac{n}{\varkappa x}\right] f(x) = \sum_{x=1}^{x=n_1} \left[\frac{n}{\varkappa x}\right] f(x) + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n_2}{\varkappa}\right]} F\left(\left[\frac{n}{\varkappa x}\right]\right) - \left[\frac{n_2}{\varkappa}\right] F(n_1). \tag{147}$$

Durch ein analoges Verfahren kann man auch die folgende Gleichung ableiten:

148) $$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n}{\varkappa}\right]}\left[\frac{n}{\varkappa x}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n_1}{\varkappa}\right]}\left[\frac{n}{\varkappa x}\right]f(x)+\sum_{x=1}^{x=n_2}F\left(\left[\frac{n}{\varkappa x}\right]\right)-n_2F\left(\left[\frac{n_1}{\varkappa}\right]\right).$$

Setzt man in der Gleichung 147):

$$f(x)=1,$$

so erhält man:

149) $$\sum_{x=1}^{x=n}\psi_{0,\varkappa,\varkappa n_1}(x)=\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n_2}{\varkappa}\right]}\left[\frac{n}{\varkappa x}\right]-n_1\left[\frac{n_2}{\varkappa}\right]$$

wenn mit $\psi_{0,\varkappa,\varkappa n_1}(x)$ die Anzahl derjenigen Divisoren von x bezeichnet wird, welche Vielfache von $\varkappa$ und grösser als $\varkappa n_1$ sind, mit $\psi_{0,\varkappa,\varkappa n_1}(x)$ aber die Anzahl der übrigen durch $\varkappa$ theilbaren Divisoren.

Aus dieser Gleichung ergibt sich sofort die folgende:

150) $$\sum_{x=1}^{x=n}\psi_{0,\varkappa,\varkappa n_1}(x)=\frac{n}{\varkappa}\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n_2}{\varkappa}\right]}\frac{1}{x}-\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n_2}{\varkappa}\right]}\varepsilon_x-\frac{n}{\varkappa}+\varepsilon n_1 \qquad (0\leqq\varepsilon,\varepsilon_x<1)$$

aus welcher die Formel:

151) $$\sum_{x=1}^{x=n}\psi_{0,\varkappa,\varkappa n_1}(x)=\frac{n}{\varkappa}\left\{\log n_2+C-\log\varkappa-1\right\}+\Delta$$

ensteht, wo:

152) $$|\Delta|<(\varkappa+2)n_1+\frac{n_2}{\varkappa}$$

ist.

Ist:

$$\lim_{n_1 n_2=\infty}\frac{\varkappa+2}{n_2}+\frac{1}{\varkappa n_1}=0,$$

so hat man:

153) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{x=1}^{x=n}\psi_{0,\varkappa,\varkappa n_1}(x)}{n}=\frac{1}{\varkappa}\left\{\log n_2+C-1-\log\varkappa\right\}.$$

Nun ist aber bekanntlich:

154) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{x=1}^{x=n}\psi_{0,\varkappa,0}(x)}{n}=\frac{1}{\varkappa}\left\{\log n+2C-1-\log\varkappa\right\},$$

und daher hat man auch:

155) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{x=1}^{x=n}\bar{\psi}_{0,\varkappa,\varkappa n_1}(x)}{n}=\frac{1}{\varkappa}\left\{\log n_1+C\right\}.$$

Man hat daher die Theoreme:

Ist $n=n_1n_2$ und:

$$\lim_{n=\infty}\frac{\varkappa+2}{n_2}+\frac{1}{\varkappa n_1}=0,$$

so ist das arithmetische Mittel der Anzahlen derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche Vielfache von $\varkappa$ und grösser als $\varkappa n_1$ sind, gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{\varkappa}\{\log n_2 + C - 1 - \log \varkappa\}.$$

Ist $n = n_1 n_2$ und:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varkappa+2}{n_2} + \frac{1}{\varkappa n_1} = 0,$$

so ist das arithmetische Mittel der Anzahlen derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche Vielfache von $\varkappa$ und nicht grösser als $\varkappa n_1$ sind, gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{\varkappa}\{\log n_1 + C\}.$$

Ist $n = n_1 n_2$ und:

$$\lim_{n=\infty} \frac{4}{n_2} + \frac{1}{2n_1} = 0,$$

so ist das arithmetische Mittel der Anzahlen derjenigen geraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $2n_1$ sind, gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{2}\{\log n_2 + C - 1 - \log 2\}$$

Ist $n = n_1 n_2$ und:

$$\lim_{n=\infty} \frac{4}{n_2} + \frac{1}{2n_1} = 0,$$

so ist das arithmetische Mittel der Anzahlen derjenigen geraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche nicht grösser als $2n_1$ sind, gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{2}\{\log n_1 + C\}$$

Aus den Gleichungen 153) und 155) leitet man ferner folgende zwei Formeln her:

156)
$$\lim_{s=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=10^s} \psi_{0,\varkappa,10^r\varkappa}(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=10^{s-1}} \psi_{0,\varkappa,10^r\varkappa}(x)}{10^s - 10^{s-1}} = \frac{1}{\varkappa}\left\{s \log 10 - \left(r - \frac{1}{9}\right)\log 10 + C - 1 - \log \varkappa\right\}$$

157)
$$\lim_{s=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=10^s} \psi_{0,\varkappa,10^r\varkappa}(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=10^{s-1}} \psi_{0,\varkappa,10^r\varkappa}(x)}{10^s - 10^{s-1}} = \frac{1}{\varkappa}\{r \log 10 + C\}$$

wo:

$$\lim_{s,\,r=\infty} \frac{\varkappa+2}{10^{s-r}} + \frac{1}{10^r.\varkappa} = 0$$

ist:

Man hat daher die Sätze:

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{\varkappa}\left\{s \log 10 - \left(r - \frac{1}{9}\right)\log 10 + C - 1 - \log \varkappa\right\}$$

durch $\varkappa$ theilbare Divisoren, welche grösser als $10^r.\varkappa$ sind, wenn:

$$\lim_{s,\,r=\infty} \frac{\varkappa+2}{10^{s-r}} + \frac{1}{\varkappa.10^r} = 0$$

ist.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{\varkappa}\left\{r\log 10+C\right\}$$

durch $\varkappa$ theilbare Divisoren, welche nicht grösser als $10^r.\varkappa$ sind, wenn:

$$\lim_{s,\,r=\infty}\frac{\varkappa+2}{10^{s-r}}+\frac{1}{10^r.\varkappa}=0$$

ist.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{2}\left\{s\log 10-\left(r-\frac{1}{9}\right)\log 10+C-1-\log 2\right\}$$

gerade Divisoren, welche grösser als 2.10^r sind, wenn:

$$\lim_{s,\,r=\infty}\frac{4}{10^{s-r}}+\frac{1}{2.10^r}=0$$

ist.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{2}\left\{r\log 10+C\right\}$$

gerade Divisoren, welche nicht grösser als 2.10^r sind, wenn:

$$\lim_{s,\,r=\infty}\frac{4}{10^{s-r}}+\frac{1}{2.10^r}=0$$

ist.

Schliesslich mag noch folgende Summe betrachtet werden:

$$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=p}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x)+\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x).$$

Nun ist:

$$\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x)=\sum_{x=p+1,\;y=1}^{x=n,\;y=\left[\frac{\beta+\zeta+\sqrt{\beta^2+\delta+\varepsilon}}{\gamma}\right]}\varepsilon\left(\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma y x^\sigma}\right)f(x)$$

oder, weil jedesmal, wenn:

$$\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma y x^\sigma}\gtreqless 1$$

ist, auch:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma y-2\beta\zeta+\delta}{(\gamma^2y^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta y)x^\sigma}}\gtreqless 1$$

ist, so hat man:

$$\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x)=\sum_{x=p+1,\;y=1}^{x=n,\;y=\left[\frac{\beta+\zeta+\sqrt{\beta^2+\delta+\varepsilon}}{\gamma}\right]}\varepsilon\left(\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma y-2\beta\zeta+\delta}{(\gamma^2y^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta y)x^\sigma}}\right)f(x)$$

$$=\sum_{y=B+1,\;x=1}^{y=A,\;x=n}\varepsilon\left(\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma y-2\beta\zeta+\delta}{(\gamma^2y^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta y)x^\sigma}}\right)f(x)-AF(p)+BF(n)$$

$$=\sum_{y=B+1}^{y=A}F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma y-2\beta\zeta+\delta}{\gamma^2y^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta y}}\right]\right)-AF(p)+BF(n)$$

wo:

$$A = \left[\frac{\beta+\zeta(p+1)^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta(p+1)^\sigma+\varepsilon(p+1)^{2\sigma}}}{\gamma(p+1)^\sigma}\right]$$

$$B = \left[\frac{\beta+\zeta n^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta n^\sigma+\varepsilon n^{2\sigma}}}{\gamma n^\sigma}\right]$$

ist.

Man hat daher die Relation:

158) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x) = \sum_{x=1}^{x=p}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x) + \\ + \sum_{x=B+1}^{x=A} F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma x-2\beta\zeta+\delta}{\gamma^2x^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta x}}\right]\right) - AF(p) + BF(n),$$

welche für $p=0$ in die folgende übergeht:

159) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x) = \sum_{x=B+1}^{x=A} F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma x-2\beta\zeta+\delta}{\gamma^2x^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta x}}\right]\right) + BF(n).$$

Ist:

$$n > \sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma+\delta-2\beta\zeta}{\zeta^2+\gamma^2-\varepsilon-2\gamma\zeta}}$$

so wird:

$$B = 0$$

und man hat:

161) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x) = \sum_{x=1}^{x=p}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x) + \\ + \sum_{x=1}^{x=A} F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma x-2\beta\zeta+\delta}{\gamma^2x^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta x}}\right]\right) - AF(p)$$

162) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x) = \sum_{x=1}^{x=A} F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma x-2\beta\zeta+\delta}{\gamma^2x^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta x}}\right]\right).$$

Von den speciellen Fällen dieser allgemeinen Formeln mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

163) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right] = \sum_{x=1}^{x=A}\left[\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma x-2\beta\zeta+\delta}{\gamma^2x^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta x}}\right]$$

164) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right](2x-1) = \sum_{x=1}^{x=A}\left[\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma x-2\beta\zeta+\delta}{\gamma^2x^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta x}}\right]^2$$

165) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]x = \sum_{x=1}^{x=A} D\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma x-2\beta\zeta+\delta}{\gamma^2x^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta x}}\right]\right)$$

166) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]x^3 = \sum_{x=1}^{x=A} D^2\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma x-2\beta\zeta+\delta}{\gamma^2x^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta x}}\right]\right)$$

167) $$\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^x\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right] = \sum_{x=1}^{x=A}(-1)^{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma x-2\beta\zeta+\delta}{\gamma^2x^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta x}}\right]}$$

168) $$\left[\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}\right]+3\left[\frac{m+\sqrt{m^2+8}}{4}\right]+5\left[\frac{m+\sqrt{m^2+12}}{6}\right]+7\left[\frac{m+\sqrt{m^2+16}}{8}\right]+\ldots=$$
$$=\left[\frac{m}{1}+\frac{1}{1}\right]^2+\left[\frac{m}{2}+\frac{1}{4}\right]^2+\left[\frac{m}{3}+\frac{1}{9}\right]^2+\left[\frac{m}{4}+\frac{1}{16}\right]^2+\ldots$$

169) $$\left[\frac{m+\sqrt{m^2+1}}{2}\right]+3\left[\frac{m+\sqrt{m^2+2}}{4}\right]+5\left[\frac{m+\sqrt{m^2+3}}{6}\right]+7\left[\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{8}\right]+\ldots=$$
$$=\left[\frac{m}{1}+\frac{1}{4}\right]^2+\left[\frac{m}{2}+\frac{1}{16}\right]^2+\left[\frac{m}{3}+\frac{1}{36}\right]^2+\left[\frac{m}{4}+\frac{1}{64}\right]^2+\ldots$$

170) $$\left[\frac{m+\sqrt{m^2+1}}{3}\right]+3\left[\frac{m+\sqrt{m^2+2}}{6}\right]+5\left[\frac{m+\sqrt{m^2+3}}{9}\right]+7\left[\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{12}\right]+\ldots=$$
$$=\left[\frac{2m}{3}+\frac{1}{9}\right]^2+\left[\frac{2m}{6}+\frac{1}{36}\right]^2+\left[\frac{2m}{9}+\frac{1}{81}\right]^2+\ldots$$

ASYMPTOTISCHE GESETZE DER ZAHLENTHEORIE.

VON

LEOPOLD GEGENBAUER,
CORRESPONDIRENDEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 6. NOVEMBER 1884.

In den folgenden Zeilen werde ich eine Reihe von asymptotischen Gesetzen der Zahlentheorie mittheilen. Setzt man:

$$r_{\sigma,x} = \sqrt[\sigma]{\frac{n}{x}} - \left[\sqrt[\sigma]{\frac{n}{x}}\right]$$

so hat man die Gleichung:

$$\sum_{x=1}^{x=n} [\lambda r_{\sigma,x}] f(x) = \sum_{x=1}^{x=n} \left[\sqrt[\sigma]{\frac{\lambda^\sigma n}{x}}\right] f(x) - \lambda \sum_{x=1}^{x=n} \left[\sqrt[\sigma]{\frac{n}{x}}\right] f(x)$$

oder:

1) $$\sum_{x=1}^{x=n} [\lambda r_{\sigma,x}] f(x) = \sum_{x=1}^{x=\lambda^\sigma n} \left[\sqrt[\sigma]{\frac{\lambda^\sigma n}{x}}\right] f(x) - \lambda \sum_{x=1}^{x=n} \left[\sqrt[\sigma]{\frac{n}{x}}\right] f(x) - \sum_{x=n+1}^{x=\lambda^\sigma n} \left[\sqrt[\sigma]{\frac{\lambda^\sigma n}{x}}\right] f(x).$$

Da nun, wenn:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{m}{xy^\sigma}} \underset{<}{\geqq} 1$$

ist, auch:

$$\frac{m}{xy^\sigma} \underset{<}{\geqq} 1$$

ist, so hat man:

2) $$\sum_{x=p+1}^{x=m} \left[\sqrt[\sigma]{\frac{m}{x}}\right] f(x) = \sum_{x=p+1,\, y=1}^{x=m,\, y=m} \varepsilon\left(\sqrt[\sigma]{\frac{m}{xy^\sigma}}\right) f(x)$$

$$= \sum_{x=p+1,\, y=1}^{x=m,\, y=m} \varepsilon\left(\frac{m}{xy^\sigma}\right) f(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\sigma]{\frac{m}{p+1}}\right]} F\left(\left[\frac{m}{x^\sigma}\right]\right) - \left[\sqrt[\sigma]{\frac{m}{p+1}}\right] F(p)$$

wo:

$$F(r)=\sum_{x=1}^{x=r} f(x)$$

ist.

Die Gleichung 1) verwandelt sich daher in die folgende:

3) $$\sum_{x=1}^{x=n}[\lambda r_{\sigma,x}]f(x)=\sum_{x=1}^{x=[\lambda\sqrt[\sigma]{n}]}F\left(\left[\frac{\lambda^\sigma n}{x^\sigma}\right]\right)-\lambda\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{n}]}F\left(\left[\frac{n}{x^\sigma}\right]\right)-\sum_{x=1}^{x=\left[\lambda\sqrt[\sigma]{\frac{n}{n+1}}\right]}F\left(\left[\frac{\lambda^\sigma n}{x^\sigma}\right]\right)+\left[\lambda\sqrt[\sigma]{\frac{n}{n+1}}\right]F(n).$$

Aus der Gleichung:

$$\left[\lambda\sqrt[\sigma]{\frac{n}{n+1}}\right]=\lambda-\varkappa \qquad (\varkappa\geq 1)$$

folgt:

$$\lambda-\varkappa\leq\lambda\sqrt[\sigma]{\frac{n}{n+1}}<\lambda-\varkappa+1\,,$$

und daher ist:

$$\frac{\lambda^\sigma n}{(\lambda-\varkappa+\rho)^\sigma}<n+1 \qquad (\rho=1,2,3,\ldots,\varkappa-1).$$

Nun ist aber auch:

$$n<\frac{\lambda^\sigma n}{(\lambda-\varkappa+\rho)^\sigma} \qquad (\rho=1,2,3,\ldots,\varkappa-1),$$

und desshalb hat man die Gleichung:

$$\left[\frac{\lambda^\sigma n}{(\lambda-\varkappa+\rho)^\sigma}\right]=n \qquad (\rho=1,2,3,\ldots,\varkappa-1).$$

Die Gleichung 3) kann daher auch in folgender Weise geschrieben werden:

4) $$\sum_{x=1}^{x=n}[\lambda r_{\sigma,x}]f(x)=\sum_{x=1}^{x=[\lambda\sqrt[\sigma]{n}]}F\left(\left[\frac{\lambda^\sigma n}{x^\sigma}\right]\right)-\lambda\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{n}]}F\left(\left[\frac{n}{x^\sigma}\right]\right)-\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}F\left(\left[\frac{\lambda^\sigma n}{x^\sigma}\right]\right)+(\lambda-1)F(n).$$

Setzt man:

$$f_{\sigma,\nu}=\sum_{x_\nu} f(x_\nu)$$

wo die Summation bezüglich x_ν über alle Werthe von x_ν zu erstrecken ist, für welche:

$$\frac{\nu}{\lambda}\leq r_{\sigma,x_\nu}<\frac{\nu+1}{\lambda}$$

ist, so verwandelt sich die Gleichung 4) in:

5) $$\sum_{\nu=1}^{\nu=\lambda-1}\nu f_{\sigma,\nu}=\sum_{x=1}^{x=[\lambda\sqrt[\sigma]{n}]}F\left(\left[\frac{\lambda^\sigma n}{x^\sigma}\right]\right)-\lambda\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{n}]}F\left(\left[\frac{n}{x^\sigma}\right]\right)-\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}F\left(\left[\frac{\lambda^\sigma n}{x^\sigma}\right]\right)+(\lambda-1)F(n).$$

Gibt man der Function $f(x)$ der Reihe nach die speciellen Werthe:

6) $$f(x)=1,x,x^3,\ x^m-(x-1)^m,$$

so entstehen aus der allgemeinen Formel 4) folgende specielle Gleichungen:

7) $$\sum_{x=1}^{x=n}[\lambda r_{\sigma,x}]=\sum_{x=1}^{x=[\lambda\sqrt[\sigma]{n}]}\left[\frac{\lambda^\sigma n}{x^\sigma}\right]-\lambda\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{n}]}\left[\frac{n}{x^\sigma}\right]-\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}\left[\frac{\lambda^\sigma n}{x^\sigma}\right]+(\lambda-1)n$$

$$8)\qquad \sum_{v=1}^{v=n}[\lambda r_{\sigma,v}]v = \sum_{x=1}^{x=[\lambda\sqrt[\sigma]{n}]} D\left(\left[\frac{\lambda^\sigma n}{x^\sigma}\right]\right) - \lambda\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{n}]} D\left(\left[\frac{n}{x^\sigma}\right]\right) - \sum_{x=1}^{x=\lambda-1} D\left(\left[\frac{\lambda^\sigma n}{x^\sigma}\right]\right) + (\lambda-1)D(n)$$

$$9)\qquad \sum_{v=1}^{v=n}[\lambda r_{\sigma,v}]v^3 = \sum_{x=1}^{x=[\lambda\sqrt[\sigma]{n}]} D^2\left(\left[\frac{\lambda^\sigma n}{x^\sigma}\right]\right) - \lambda\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{n}]} D^2\left(\left[\frac{n}{x^\sigma}\right]\right) - \sum_{x=1}^{x=\lambda-1} D^2\left(\left[\frac{\lambda^\sigma n}{x^\sigma}\right]\right) + (\lambda-1)D^2(n)$$

$$10)\qquad \sum_{v=1}^{v=n}[\lambda r_{\sigma,v}]v^m - \sum_{v=1}^{v=n}[\lambda r_{\sigma,v}](v-1)^m = \sum_{x=1}^{x=[\lambda\sqrt[\sigma]{n}]} \left[\frac{\lambda^\sigma n}{x^\sigma}\right]^m - \lambda\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{n}]} \left[\frac{n}{x^\sigma}\right]^m - \sum_{x=1}^{x=\lambda-1} \left[\frac{\lambda^\sigma n}{x^\sigma}\right]^m + (\lambda-1)n^m.$$

Aus der Gleichung:

$$\left[\frac{r}{x^\sigma}\right] = \frac{r}{x^\sigma} - \varepsilon_x \quad (0 \leqq \varepsilon_x < 1)$$

folgt:

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{r}]}\left[\frac{r}{x^\sigma}\right]^s = r^s\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{r}]}\frac{1}{x^{s\sigma}} + \sum_{\mu=0}^{\mu=s-1}(-1)^{s-\mu}\binom{s}{\mu}r^\mu\left(\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{r}]}\frac{\varepsilon_x^{s-\mu}}{x^{\mu\sigma}}\right)$$

$$= r^s\zeta(s\sigma) + \sum_{\mu=0}^{\mu=s-1}(-1)^{s-\mu}\binom{s}{\mu}r^\mu\left(\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{r}]}\frac{\varepsilon_x^{s-\mu}}{x^{\mu\sigma}}\right) - r^s\sum_{x=[\sqrt[\sigma]{r}]+1}^{x=\infty}\frac{1}{x^{s\sigma}}$$

und daher verwandeln sich die obigen Formeln in die folgenden:

$$11)\qquad \sum_{v=1}^{v=n}[\lambda r_{\sigma,v}] = n\left\{\lambda(\lambda^{\sigma-1}-1)\zeta(\sigma) - \lambda^\sigma\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}\frac{1}{x^\sigma} + \lambda - 1\right\} + \Delta_1 \qquad (\sigma > 1)$$

$$12)\qquad \sum_{v=1}^{v=n}[\lambda r_{\sigma,v}]v = \frac{n^2}{2}\left\{\frac{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma\lambda(\lambda^{2\sigma-1}-1)}{2\Gamma(2\sigma+1)} - \lambda^{2\sigma}\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}\frac{1}{x^{2\sigma}} + \lambda - 1\right\} + \Delta_2$$

$$13)\qquad \sum_{v=1}^{v=n}[\lambda r_{\sigma,v}]v^3 = \frac{n^4}{4}\left\{\frac{(2\pi)^{4\sigma}B_{2\sigma}\lambda(\lambda^{4\sigma-1}-1)}{2\Gamma(4\sigma+1)} - \lambda^{4\sigma}\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}\frac{1}{x^{4\sigma}} + \lambda - 1\right\} + \Delta_3$$

$$14)\qquad \sum_{v=1}^{v=n}[\lambda r_{\sigma,v}]v^m - \sum_{v=1}^{v=n}[\lambda r_{\sigma,v}](v-1)^m = n^m\left\{\lambda(\lambda^{m\sigma-1}-1)\zeta(m\sigma) - \lambda^{m\sigma}\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}\frac{1}{x^{m\sigma}} + \lambda - 1\right\} + \Delta_4$$

wo B_σ die σte Bernoulli'sche Zahl ist, und die Grössen Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$15)\qquad \Delta_1 = -\lambda^\sigma n\sum_{x=[\lambda\sqrt[\sigma]{n}]+1}^{x=\infty}\frac{1}{x^\sigma} + \lambda n\sum_{x=[\sqrt[\sigma]{n}]+1}^{x=\infty}\frac{1}{x^\sigma} - \sum_{x=1}^{x=[\lambda\sqrt[\sigma]{n}]}\varepsilon'_{1,x} + \lambda\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{n}]}\varepsilon''_{1,x} + \sum_{x=1}^{x=\lambda-1}\varepsilon'''_{1,x} \qquad (0 \leqq \varepsilon'_{1,x}, \varepsilon''_{1,x}, \varepsilon'''_{1,x} < 1)$$

$$16)\qquad \Delta_2 = -\frac{\lambda^{2\sigma}n^2}{2}\sum_{x=[\lambda\sqrt[\sigma]{n}]+1}^{x=\infty}\frac{1}{x^{2\sigma}} + \lambda^\sigma n\sum_{x=1}^{x=[\lambda\sqrt[\sigma]{n}]}\frac{\frac{1}{2}-\varepsilon'_{2,x}}{x^\sigma} - \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{x=[\lambda\sqrt[\sigma]{n}]}\varepsilon'_{2,x}(1-\varepsilon'_{2,x}) + \frac{\lambda n^2}{2}\sum_{x=[\sqrt[\sigma]{n}]+1}^{x=\infty}\frac{1}{x^{2\sigma}} -$$

$$-\lambda n\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{n}]}\frac{\frac{1}{2}-\varepsilon''_{2,x}}{x^\sigma} + \frac{\lambda}{2}\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{n}]}\varepsilon''_{2,x}(1-\varepsilon''_{2,x}) - \lambda^\sigma n\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}\frac{\frac{1}{2}-\varepsilon'''_{2,x}}{x^\sigma} + \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}\varepsilon'''_{2,x}(1-\varepsilon'''_{2,x}) + \frac{(\lambda-1)n}{2}$$

$$(0 \leqq \varepsilon'_{2,x}, \varepsilon''_{2,x}, \varepsilon'''_{2,x} < 1)$$

$$17)\quad \Delta_3 = \frac{\lambda^{4\sigma} n^4}{4} \sum_{x=[\lambda\sqrt[\sigma]{n}]+1}^{x=\infty} \frac{1}{x^{4\sigma}} + \lambda^{3\sigma} n^3 \sum_{x=1}^{x=[\lambda\sqrt[\sigma]{n}]} \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon'_{3,x}}{x^{3\sigma}} + \lambda^{2\sigma} n^2 \sum_{x=1}^{x=[\lambda\sqrt[\sigma]{n}]} \frac{\frac{3}{2}(\varepsilon'_{3,x}-1)\varepsilon'_{3,x} + \frac{1}{4}}{x^{2\sigma}} +$$

$$+ \lambda^{\sigma} n \sum_{x=1}^{x=[\lambda\sqrt[\sigma]{n}]} \frac{\varepsilon'_{3,x}(1-\varepsilon'_{3,x})(\varepsilon'_{3,x}-\frac{1}{2})}{x^{\sigma}} + \frac{1}{4} \sum_{x=1}^{x=[\lambda\sqrt[\sigma]{n}]} \varepsilon'^{2}_{3,x}(\varepsilon'_{3,x}-1)^2 + \frac{\lambda n^4}{4} \sum_{x=[\sqrt[\sigma]{n}]+1}^{x=\infty} \frac{1}{x^{4\sigma}} - \lambda n^3 \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{n}]} \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon''_{3,x}}{x^{3\sigma}} -$$

$$- \lambda n^2 \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{n}]} \frac{\frac{3}{2}(\varepsilon''_{3,x}-1)\varepsilon''_{3,x} + \frac{1}{4}}{x^{2\sigma}} - \lambda n \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{n}]} \frac{\varepsilon''_{3,x}(1-\varepsilon''_{3,x})(\varepsilon''_{3,x}-\frac{1}{2})}{x^{\sigma}} - \frac{\lambda}{4} \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{n}]} \varepsilon''^{2}_{3,x}(\varepsilon''_{3,x}-1)^2 -$$

$$- \lambda^{3\sigma} n^3 \sum_{x=1}^{x=\lambda-1} \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon'''_{3,x}}{x^{\sigma}} - \lambda^{2\sigma} n^2 \sum_{x=1}^{x=\lambda-1} \frac{\frac{3}{2}(\varepsilon'''_{3,x}-1)\varepsilon'''_{3,x} + \frac{1}{4}}{x^{2\sigma}} + \lambda^{\sigma} n \sum_{x=1}^{x=\lambda-1} \frac{\varepsilon'''_{3,x}(\varepsilon'''_{3,x}-1)(\varepsilon'''_{3,x}-\frac{1}{2})}{x^{\sigma}} -$$

$$- \frac{1}{4} \sum_{x=1}^{x=\lambda-1} \varepsilon'''^{2}_{3,x}(\varepsilon'''_{3,x}-1)^2 + (\lambda-1)\left(\frac{n^2}{4} + \frac{n^3}{2}\right) \quad (0 \leqq \varepsilon'_{3,x}, \varepsilon''_{3,x}, \varepsilon'''_{3,x} < 1)$$

$$18)\quad \Delta_4 = -\lambda^{m\sigma} n^m \sum_{x=[\lambda\sqrt[\sigma]{n}]+1}^{x=\infty} \frac{1}{x^{m\sigma}} + \sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} (-1)^{m-\mu} \binom{m}{\mu} \lambda^{\sigma\mu} n^{\mu} \left(\sum_{x=1}^{x=[\lambda\sqrt[\sigma]{n}]} \frac{\varepsilon'^{\,m-\mu}_{4,x}}{x^{\sigma\mu}} \right) + \lambda n^m \sum_{x=[\sqrt[\sigma]{n}]+1}^{x=\infty} \frac{1}{x^{m\sigma}} -$$

$$- \lambda \sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} (-1)^{m-\mu} \binom{m}{\mu} n^{\mu} \left(\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\sigma]{n}]} \frac{\varepsilon''^{\,m-\mu}_{4,x}}{x^{\sigma\mu}} \right) - \sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} (-1)^{m-\mu} \binom{m}{\mu} \lambda^{\sigma\mu} n^{\mu} \left(\sum_{x=1}^{x=\lambda-1} \frac{\varepsilon'''^{\,m-\mu}_{4,x}}{x^{\sigma\mu}} \right) \quad (0 \leqq \varepsilon'_{4,x}, \varepsilon''_{4,x}, \varepsilon'''_{4,x} < 1)$$

Berücksichtigt man dass:

$$\sum_{x=\xi}^{x=\infty} \frac{1}{x^{\sigma}} < \frac{\zeta(\sigma)}{\xi^{\sigma-1}}$$

$$\sum_{x=1}^{x=m} \frac{1}{x} < \log m + C + \frac{1}{m}$$

ist, wo C die bekannte Euler'sche Constante des Integrallogarithmus, also:

$$C = 0\cdot 57721566\ldots$$

ist, so erhält man:

$$19)\quad |\Delta_1| < 2\lambda(1+\zeta(\sigma))\, n^{\frac{1}{\sigma}} + \lambda - 1 \qquad (\sigma > 1)$$

$$20)\quad |\Delta_2| < \lambda\left(\frac{1}{4} + \zeta(2\sigma)\right) n^{\frac{1}{\sigma}} + \frac{n}{2}\{\lambda(2\lambda^{\sigma-1}+1)\zeta(\sigma) + \lambda - 1\} + \frac{\lambda-1}{8} \qquad (\sigma > 1)$$

$$21)\quad |\Delta_2| < \frac{\lambda n}{2}\left\{\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2} + 3C + \frac{1}{\lambda-1} + \log\{\lambda(\lambda-1)n^2\}\right\} + \lambda\left\{-\frac{n}{2} + \frac{5\lambda+3}{8}\right\} \qquad (\sigma = 1)$$

$$22)\quad |\Delta_3| < \frac{\lambda\sqrt[\sigma]{n}}{2}\left\{\zeta(4\sigma) + \frac{1}{16}\right\} + \frac{\lambda n}{8}(2\lambda^{\sigma-1}+1)\zeta(\sigma) + \frac{n^2}{4}\left\{\lambda - 1 + \frac{5\lambda}{2}\zeta(2\sigma)(2\lambda^{2\sigma-1}+1)\right\} +$$

$$+ \frac{n^3}{2}\{\lambda - 1 + \lambda(2\lambda^{3\sigma-1}+1)\zeta(3\sigma)\} + \frac{\lambda-1}{64} \qquad (\sigma > 1)$$

$$23)\quad |\Delta_3| < \frac{\lambda n}{2}\left\{\frac{\pi^4}{90}+\frac{1}{16}\right\}+\frac{n^2}{4}\left\{\lambda-1+\frac{5\lambda\pi^2}{12}(2\lambda+1)\right\}+\frac{n^3}{2}\left\{\lambda-1+\lambda(2\lambda^2+1)\zeta(3)\right\}+$$
$$+\frac{\lambda n}{8}\left\{\log(\lambda(\lambda-1)n^2)+3C+\frac{1}{\lambda-1}\right\}+\frac{\lambda}{4}\qquad(\sigma=1)$$

$$24)\quad |\Delta_4| < \sum_{\mu=1}^{\mu=m-1} n^{\mu}\lambda(2\lambda^{\sigma\mu-1}+1)\zeta(\sigma\mu)+2\lambda\zeta(m\sigma+1)n^{\frac{1}{\sigma}}+\lambda-1\qquad(\sigma>1)$$

$$25)\quad |\Delta_4| < \sum_{\mu=2}^{\mu=m-1} n^{\mu}\lambda(2\lambda^{\mu-1}+1)\zeta(\mu)+\lambda n\left(\log(\lambda(\lambda-1)n^2)+3C+\frac{1}{\lambda-1}+2+2\zeta(m)\right)+2\lambda\qquad(\sigma=1).$$

Aus den Gleichungen 11) und 13) folgen die Relationen:

$$26)\quad \sum_{x=1}^{x=n}[\lambda r_{2\sigma,x}] = n\left\{\frac{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma\lambda(\lambda^{2\sigma-1}-1)}{2\Gamma(2\sigma+1)}-\lambda^{2\sigma}\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}\frac{1}{x^{2\sigma}}+\lambda-1\right\}-\Delta'_1$$

$$27)\quad \sum_{x=1}^{x=n}[\lambda r_{\sigma,x}]x^m-\sum_{x=1}^{x=n}[\lambda r_{\sigma,x}](x-1)^m = n^m\left\{\frac{(2\pi)^{\sigma m}B_{\frac{\sigma m}{2}}\lambda(\lambda^{\sigma m-1}-1)}{2\Gamma(m\sigma+1)}-\lambda^{m\sigma}\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}\frac{1}{x^{m\sigma}}+\lambda-1\right\}-\Delta'_4\quad(\sigma m\text{ gerade}),$$

wo die oberen Grenzen für $|\Delta'_1|$ und $|\Delta'_4|$ leicht aus den für $|\Delta_1|$ und $|\Delta_4|$ angegebenen abgeleitet werden können.

Aus den entwickelten Formeln ergeben sich die Gleichungen:

$$28)\quad \lim_{n=\infty}\frac{\sum_{x=1}^{x=n}[\lambda r_{\sigma,x}]}{n} = \lambda(\lambda^{\sigma-1}-1)\zeta(\sigma)-\lambda^{\sigma}\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}\frac{1}{x^{\sigma}}+\lambda-1$$

$$29)\quad \lim_{n=\infty}\frac{\sum_{x=1}^{x=n}[\lambda r_{\sigma,x}]x}{n^2} = \frac{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma\lambda(\lambda^{2\sigma-1}-1)}{4\Gamma(2\sigma+1)}-\frac{1}{2}\left\{\lambda^{2\sigma}\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}\frac{1}{x^{2\sigma}}-\lambda+1\right\}$$

$$30)\quad \lim_{n=\infty}\frac{\sum_{x=1}^{x=n}[\lambda r_{\sigma,x}]x^3}{n^4} = \frac{(2\pi)^{4\sigma}B_{2\sigma}\lambda(\lambda^{4\sigma-1}-1)}{8\Gamma(4\sigma+1)}-\frac{1}{4}\left\{\lambda^{4\sigma}\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}\frac{1}{x^{4\sigma}}-\lambda+1\right\}$$

$$31)\quad \lim_{n=\infty}\frac{\sum_{x=1}^{x=n}[\lambda r_{\sigma,x}]x^m-\sum_{x=1}^{x=n}[\lambda r_{\sigma,x}](x-1)^m}{n^m} = \lambda(\lambda^{\sigma m-1}-1)\zeta(m\sigma)-\lambda^{\sigma m}\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}\frac{1}{x^{m\sigma}}+\lambda-1$$

$$32)\quad \lim_{n=\infty}\frac{\sum_{x=1}^{x=n}[\lambda r_{2\sigma,x}]}{n} = \frac{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma\lambda(\lambda^{2\sigma-1}-1)}{2\Gamma(2\sigma+1)}-\lambda^{2\sigma}\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}\frac{1}{x^{2\sigma}}+\lambda-1$$

$$33)\quad \lim_{n=\infty}\frac{\sum_{x=1}^{x=n}[\lambda r_{\sigma,x}]x^m-\sum_{x=1}^{x=n}[\lambda r_{\sigma,x}](x-1)^m}{n^m} = \frac{(2\pi)^{m\sigma}B_{\frac{\sigma m}{2}}\lambda(\lambda^{m\sigma-1}-1)}{2\Gamma(m\sigma+1)}-\lambda^{m\sigma}\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}\frac{1}{x^{m\sigma}}+\lambda-1\quad(\sigma m\text{ gerade})$$

$$34)\quad \lim_{n=\infty}\frac{\sum_{x=1}^{x=n}[\lambda r_{\sigma,x}]x}{n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{x=1}^{x=n}[\lambda r_{2\sigma,x}]}{n}.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich folgende Theoreme:

Zerlegt man jede der Grössen:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\dots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{n}}$$

in eine ganze Zahl und einen positiven echten Bruch, so nähert sich das arithmetische Mittel der grössten ganzen Zahlen, welche in den mit der ganzen Zahl λ multiplicirten echten Brüchen enthalten sind, mit wachsendem n dem Ausdrucke:

$$\lambda(\lambda^{\sigma-1}-1)\,\zeta(\sigma)-\lambda^{\sigma}\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}\frac{1}{x^{\sigma}}+\lambda-1\,.$$

Zerlegt man jede der Grössen:

$$\sqrt[2\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[2\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[2\sigma]{\frac{n}{3}},\dots,\ \sqrt[2\sigma]{\frac{n}{n}}$$

in eine ganze Zahl und einen positiven echten Bruch, so ist für sehr grosse n das arithmetische Mittel der grössten ganzen Zahlen, welche in den mit der ganzen Zahl λ multiplicirten echten Brüchen enthalten sind, gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{(2\pi)^{2\sigma}B_{\sigma}\lambda(\lambda^{2\sigma-1}-1)}{2\Gamma(2\sigma+1)}-\lambda^{2\sigma}\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}\frac{1}{x^{2\sigma}}+\lambda-1$$

Zerlegt man jede der Grössen:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\dots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{n}}$$

in eine ganze Zahl und einen positiven echten Bruch, so nähert sich das arithmetische Mittel der Producte aus den grössten ganzen Zahlen, welche in den mit der ganzen Zahl λ multiplicirten echten Brüchen enthalten sind, und dem jeweiligen Divisor von n mit wachsendem n dem Ausdrucke:

$$n\left\{\frac{(2\pi)^{2\sigma}B_{\sigma}\lambda(\lambda^{2\sigma-1}-1)}{4\Gamma(2\sigma+1)}-\frac{1}{2}\left(\lambda^{2\sigma}\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}\frac{1}{x^{2\sigma}}-\lambda+1\right)\right\}.$$

Zerlegt man jede der Grössen·

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\dots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{n}}$$

in eine ganze Zahl und einen positiven echten Bruch, so nähert sich mit wachsendem n das arithmetische Mittel der Producte aus den grössten ganzen Zahlen, welche in den mit der ganzen Zahl λ multiplicirten echten Brüchen enthalten sind, und dem Cubus des jeweiligen Divisors von n dem Ausdrucke:

$$n^{3}\left\{\frac{(2\pi)^{4\sigma}B_{2\sigma}\lambda(\lambda^{4\sigma-1}-1)}{8\Gamma(4\sigma+1)}-\frac{1}{4}\left(\lambda^{4\sigma}\sum_{x=1}^{x=\lambda-1}\frac{1}{x^{4\sigma}}-\lambda+1\right)\right\}.$$

Bezeichnet man mit $B_{x}\left(\frac{1}{\sigma},\frac{\nu}{\lambda},\frac{\nu+1}{\lambda}\right)$ die Summe der $x$ten Potenzen derjenigen Werthe von x, für welche $r_{\sigma,x}$ zwischen $\frac{\nu}{\lambda}$ und $\frac{\nu+1}{\lambda}$ liegt, so dass also $B_{0}\left(\frac{1}{\sigma},\frac{\nu}{\lambda},\frac{\nu+1}{\lambda}\right)$ die Anzahl der in dem genannten Intervalle befindlichen Brüche $r_{\sigma,x}$ ist, und mit $B'_{x}\left(\frac{1}{\sigma},\frac{\nu}{\lambda},\frac{\nu+1}{\lambda}\right)$ die Summe der $x$ten Potenzen der eben genannten um eine Einheit verminderten Grössen, so kann man die obigen Gleichungen auch in folgender Form schreiben:

35) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=\lambda-1} \nu B_0\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{\nu}{\lambda}, \frac{\nu+1}{\lambda}\right)}{n} = \lambda(\lambda^{\sigma-1}-1)\,\zeta(\sigma) - \lambda^{\sigma} \sum_{x=1}^{x=\lambda-1} \frac{1}{x^{\sigma}} + \lambda - 1$$

36) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=\lambda-1} \nu B_1\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{\nu}{\lambda}, \frac{\nu+1}{\lambda}\right)}{n^2} = \frac{(2\pi)^{2\sigma} B_{\sigma}\, \lambda(\lambda^{2\sigma-1}-1)}{4\Gamma(2\sigma+1)} - \frac{1}{2}\left\{\lambda^{2\sigma} \sum_{x=1}^{x=\lambda-1} \frac{1}{x^{2\sigma}} - \lambda + 1\right\}$$

37) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=\lambda-1} \nu B_3\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{\nu}{\lambda}, \frac{\nu+1}{\lambda}\right)}{n^4} = \frac{(2\pi)^{4\sigma} B_{2\sigma}\, \lambda(\lambda^{4\sigma-1}-1)}{8\Gamma(4\sigma+1)} - \frac{1}{4}\left\{\lambda^{4\sigma} \sum_{x=1}^{x=\lambda-1} \frac{1}{x^{4\sigma}} - \lambda + 1\right\}$$

38) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=\lambda-1} \nu\left\{B_m\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{\nu}{\lambda}, \frac{\nu+1}{\lambda}\right) - B'_m\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{\nu}{\lambda}, \frac{\nu+1}{\lambda}\right)\right\}}{n^m} = \lambda(\lambda^{m\sigma-1}-1)\,\zeta(m\sigma) - \lambda^{m\sigma} \sum_{x=1}^{x=\lambda-1} \frac{1}{x^{m\sigma}} + \lambda - 1$$

39) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=\lambda-1} \nu B_0\left(\frac{1}{2\sigma}, \frac{\nu}{\lambda}, \frac{\nu+1}{\lambda}\right)}{n} = \frac{(2\pi)^{2\sigma} B_{\sigma}\, \lambda(\lambda^{2\sigma-1}-1)}{2\Gamma(2\sigma+1)} - \lambda^{2\sigma} \sum_{x=1}^{x=\lambda-1} \frac{1}{x^{2\sigma}} + \lambda - 1$$

40) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=\lambda-1} \nu\left\{B_m\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{\nu}{\lambda}, \frac{\nu+1}{\lambda}\right) - B'_m\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{\nu}{\lambda}, \frac{\nu+1}{\lambda}\right)\right\}}{n^m} = \frac{(2\pi)^{m\sigma} B_{\frac{m\sigma}{2}}\, \lambda(\lambda^{m\sigma-1}-1)}{2\Gamma(m\sigma+1)} - \lambda^{m\sigma} \sum_{x=1}^{x=\lambda-1} \frac{1}{x^{m\sigma}} + \lambda - 1$$
($m\sigma$ gerade)

41) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=\lambda-1} \nu B_1\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{\nu}{\lambda}, \frac{\nu+1}{\lambda}\right)}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=\lambda-1} \nu B_0\left(\frac{1}{2\sigma}, \frac{\nu}{\lambda}, \frac{\nu+1}{\lambda}\right)}{n}.$$

Für $\lambda = 2$ ergeben sich aus diesen Relationen die speciellen Formeln:

42) $$\lim_{n=\infty} \frac{B_0\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{2}, 1\right)}{n} = 2(2^{\sigma-1}-1)\,\zeta(\sigma) - 2^{\sigma} + 1$$

43) $$\lim_{n=\infty} \frac{B_1\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{2}, 1\right)}{n^2} = \frac{(2\pi)^{2\sigma} B_{\sigma}\,(2^{2\sigma-1}-1)}{2\Gamma(2\sigma+1)} - 2^{2\sigma-1} + \frac{1}{2}$$

44) $$\lim_{n=\infty} \frac{B_3\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{2}, 1\right)}{n^4} = \frac{(2\pi)^{4\sigma} B_{2\sigma}\,(2^{4\sigma-1}-1)}{4\Gamma(4\sigma+1)} - 2^{4\sigma-2} + \frac{1}{4}$$

45) $$\lim_{n=\infty} \frac{B_m\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{2}, 1\right) - B'_m\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{2}, 1\right)}{n^m} = 2(2^{m\sigma-1}-1)\,\zeta(m\sigma) - 2^{m\sigma} + 1$$

46) $$\lim_{n=\infty} \frac{B_0\left(\frac{1}{2\sigma}, \frac{1}{2}, 1\right)}{n} = \frac{(2\pi)^{2\sigma} B_{\sigma}\,(2^{2\sigma}-1)}{\Gamma(2\sigma+1)} - 2^{2\sigma} + 1$$

$$47)\quad \lim_{n=\infty} \frac{B_m\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{2}, 1\right) - B'_m\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{2}, 1\right)}{n^m} = \frac{(2\pi)^{m\sigma} B_{\frac{m\sigma}{2}}(2^{m\sigma}-1)}{\Gamma(m\sigma+1)} - 2^{m\sigma}+1 \qquad (m\sigma \text{ gerade})$$

$$48)\quad \lim_{n=\infty} \frac{B_1\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{2}, 1\right)}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \frac{B_0\left(\frac{1}{2\sigma}, \frac{1}{2}, 1\right)}{n}.$$

Beachtet man, dass:

$$B_0\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{2}, 1\right) + B_0\left(\frac{1}{\sigma}, 0, \frac{1}{2}\right) = n$$

$$B_1\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{2}, 1\right) + B_1\left(\frac{1}{\sigma}, 0, \frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$B_3\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{2}, 1\right) + B_3\left(\frac{1}{\sigma}, 0, \frac{1}{2}\right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$B_m\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{2}, 1\right) + B_m\left(\frac{1}{\sigma}, 0, \frac{1}{2}\right) - B'_m\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{2}, 1\right) - B'_m\left(\frac{1}{\sigma}, 0, \frac{1}{2}\right) = n^m$$

ist, so erhält man auch die Formeln:

$$49)\quad \lim_{n=\infty} \frac{B_0\left(\frac{1}{\sigma}, 0, \frac{1}{2}\right)}{n} = 2^{\sigma} - 2(2^{\sigma-1}-1)\,\zeta(\sigma)$$

$$50)\quad \lim_{n=\infty} \frac{B_3\left(\frac{1}{\sigma}, 0, \frac{1}{2}\right)}{n^4} = 2^{4\sigma-2} - \frac{(2\pi)^{4\sigma} B_{2\sigma}(2^{4\sigma-1}-1)}{4\,\Gamma(4\sigma+1)}$$

$$51)\quad \lim_{n=\infty} \frac{B_1\left(\frac{1}{\sigma}, 0, \frac{1}{2}\right)}{n^2} = 2^{2\sigma-1} - \frac{(2\pi)^{2\sigma} B_{\sigma}(2^{2\sigma-1}-1)}{2\,\Gamma(2\sigma+1)}$$

$$52)\quad \lim_{n=\infty} \frac{B_m\left(\frac{1}{\sigma}, 0, \frac{1}{2}\right) - B'_m\left(\frac{1}{\sigma}, 0, \frac{1}{2}\right)}{n^m} = 2^{m\sigma} - \frac{(2\pi)^{m\sigma} B_{\frac{m\sigma}{2}}(2^{m\sigma-1}-1)}{\Gamma(m\sigma+1)} \qquad (m\sigma \text{ gerade})$$

$$53)\quad \lim_{n=\infty} \frac{B_0\left(\frac{1}{2\sigma}, 0, \frac{1}{2}\right)}{n} = 2^{2\sigma} - \frac{(2\pi)^{2\sigma} B_{\sigma}(2^{2\sigma-1}-1)}{\Gamma(2\sigma+1)}$$

$$54)\quad \lim_{n=\infty} \frac{B_m\left(\frac{1}{\sigma}, 0, \frac{1}{2}\right) - B'_m\left(\frac{1}{\sigma}, 0, \frac{1}{2}\right)}{n^m} = 2^{m\sigma} - 2(2^{m\sigma-1}-1)\,\zeta(m\sigma)$$

$$55)\quad \lim_{n=\infty} \frac{B_1\left(\frac{1}{\sigma}, 0, \frac{1}{2}\right)}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \frac{B_0\left(\frac{1}{2\sigma}, 0, \frac{1}{2}\right)}{n}.$$

Die specielle Formel 53) hat schon Herr Berger aufgestellt, die speciellen Fälle $\sigma = 1$ der Formeln 50) und 51) hat Herr E. Cesaro mitgetheilt.

Von den in den obigen Formeln enthaltenen Sätzen mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

Zerlegt man jede der Grössen:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\ldots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{n}}$$

in eine ganze Zahl und einen positiven echten Bruch, so liegen bei sehr grossem n im Intervalle $0\ldots\frac{1}{2}$

$$\{2^{\sigma}-2(2^{\sigma-1}-1)\zeta(\sigma)\}n$$

von diesen Brüchen, während ausserhalb des genannten Intervalles sich:

$$\{2(2^{\sigma-1}-1)\zeta(\sigma)-2^{\sigma}+1\}n$$

befinden.

Zerlegt man jede der Grössen:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\ldots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{n}}$$

in eine ganze Zahl und einen positiven echten Bruch, so ist für sehr grosse n die Summe derjenigen Nenner von n, für welche der betreffende Bruch im Intervalle $0\ldots\frac{1}{2}$ liegt, gleich:

$$\left\{2^{2\sigma-1}-\frac{(2\pi)^{2\sigma}B_{\sigma}(2^{2\sigma-1}-1)}{2\Gamma(2\sigma+1)}\right\}n^2,$$

während die Summe der übrigen Nenner mit wachsendem n sich dem Ausdrucke:

$$\left\{\frac{(2\pi)^{2\sigma}B_{\sigma}(2^{2\sigma}-1)}{2\Gamma(2\sigma+1)}-2^{2\sigma-1}+\frac{1}{2}\right\}n^2$$

nähert.

Zerlegt man jede der Grössen:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\ldots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{n}}$$

in eine ganze Zahl und einen positiven echten Bruch, so ist für sehr grosse n die Summe der dritten Potenzen jener Nenner, für welche der betreffende echte Bruch im Intervalle $0\ldots\frac{1}{2}$ liegt, gleich:

$$\left\{2^{4\sigma-2}-\frac{(2\pi)^{4\sigma}B_{2\sigma}(2^{4\sigma-1}-1)}{4\Gamma(4\sigma+1)}\right\}n^4,$$

während die Summe der Cuben der übrigen Nenner mit dem Ausdrucke:

$$\left\{\frac{(2\pi)^{4\sigma}B_{2\sigma}(2^{4\sigma-1}-1)}{4\Gamma(4\sigma+1)}-2^{4\sigma-2}+\frac{1}{4}\right\}n^4$$

übereinstimmt.

Zerlegt man jede der Grössen:

$$\sqrt[2\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[2\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[2\sigma]{\frac{n}{3}},\ldots,\ \sqrt[2\sigma]{\frac{n}{n}}$$

in eine ganze Zahl und einen positiven echten Bruch, so ist die Anzahl der innerhalb (ausserhalb) des Intervalles $0\ldots\frac{1}{2}$ liegenden echten Brüche das $\frac{2}{n}$-fache der Summe derjenigen Nenner, für welche die bei der analogen Zerlegung der Glieder der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\ldots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{n}}$$

auftretenden echten Brüche innerhalb (ausserhalb) des Intervalles $0\ldots\frac{1}{2}$ liegen.

Es ist ferner:

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left[\frac{n}{x^r}\right]\mu(x) = \sum_{x=1,\, y=1}^{x=[\sqrt[r]{n}],\, y=n} \varepsilon\left[\frac{n}{x^r y}\right]\mu(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=n} \varepsilon\left(\frac{n}{x}\right)\left(\sum_{d_r} \mu\left(\sqrt[r]{\frac{x}{d_r}}\right)\right).$$

Nun hat man:

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(rs)} = \prod_p \frac{1-\frac{1}{p^{rs}}}{1-\frac{1}{p^s}},$$

wo das Product über alle Primzahlen p zu erstrecken ist, oder:

56) $$\frac{\zeta(s)}{\zeta(rs)} = \prod_p \left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\ldots+\frac{1}{p^{(r-1)s}}\right) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mu_r(n)}{n^s},$$

wo $\mu_r(n)$ den Werth 0 hat, wenn n durch eine $r$te Potenz (ausser 1) theilbar ist, und in allen anderen Fällen gleich $+1$ ist.

Multiplicirt man diese Formel mit $\zeta(rs)$, so erhält man:

$$\sum_{m,\, n=1}^{m,n=\infty} \frac{\mu_r(n)}{(nm^r)^s} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^s},$$

und daher ist:

57) $$\sum_{d_r} \mu_r(d_r) = 1.$$

Schreibt man die Gleichung 56) in folgender Weise:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mu_r(n)}{n^s} = \zeta(s)\cdot\frac{1}{\zeta(rs)} = \sum_{m,\, n=1}^{m,n=\infty} \frac{\mu(n)}{(n^r m)^s}$$

so ergibt sich sofort die Relation:

58) $$\sum_{d_r} \mu\left(\sqrt[r]{\frac{n}{d_r}}\right) = \mu_r(n).$$

Man kann demnach die oben aufgestellte Gleichung auch in folgender Form schreiben:

59) $$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left[\frac{n}{x^r}\right]\mu(x) = \sum_{x=1}^{x=n} \mu_r(x) = \mathfrak{Q}_r(n),$$

wo $\mathfrak{Q}_r(n)$ die Anzahl derjenigen Zahlen ist, welche nicht grösser als n und durch keine $r$te Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Den speciellen Fall $r = 2$ dieser Formel habe ich unlängst mitgetheilt.

Aus der Gleichung 59) folgt der arithmetische Satz:

Dividirt man eine Zahl n durch alle nicht grösseren $r$ten Potenzen ganzer Zahlen und versieht die bei diesen Divisionen auftretenden Quotienten mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem die $r$te Wurzel des Divisors aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist, so ist die Summe der so entstehenden Zahlen gleich der Anzahl derjenigen Zahlen, welche nicht grösser als n und durch keine $r$te Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Aus der Gleichung 59) ergibt sich ferner:

60) $$\sum_{x=1}^{x=n} \mu_r(x) = n \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{\mu(x)}{x^r} - \Delta_5,$$

wo:

$$\Delta_5 = n \sum_{x=\left[\sqrt[r]{n}\right]+1}^{x=\infty} \frac{\mu(x)}{x^r} + \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \varepsilon_x \mu(x) \qquad (0 \leqq \varepsilon_x < 1)$$

ist.

Da nun:

$$\sum_{x=\left[\sqrt[r]{n}\right]+1}^{x=\infty} \frac{\mu(x)}{x^r} < \sum_{x=\left[\sqrt[r]{n}\right]+1}^{x=\infty} \frac{1}{x^r} < \frac{\zeta(r)}{n^{1-\frac{1}{r}}}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \varepsilon_x \mu(x) < \sqrt[r]{n}$$

ist, so hat man:

61) $$|\Delta_5| < (1+\zeta(r))\, n^{\frac{1}{r}}.$$

oder einfacher, wenn auch weniger genau:

62) $$|\Delta_5| < \frac{5}{2} n^{\frac{1}{r}}.$$

Aus der Gleichung 60) folgt:

63) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \mu_r(x)}{n} = \frac{1}{\zeta(r)}$$

64) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \mu_{2r}(x)}{n} = \frac{2\Gamma(2r+1)}{(2\pi)^{2r} B_r}.$$

Der specielle Fall $r = 1$ der Gleichung 64) wurde schon von Dirichlet, Bugajef und Cesaro abgeleitet.

Aus diesen Formeln ergeben sich die Theoreme:

Unter den ganzen Zahlen von 1 bis n gibt es $\frac{n}{\zeta(r)}$ solche, welche durch keine $r$te Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Unter den ganzen Zahlen von 1 bis n gibt es $\frac{2\Gamma(2r+1)}{(2\pi)^{2r}B_r}n$ solche, welche durch keine $(2r)$te Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Ungefähr drei Fünftel (genauer $\frac{6}{\pi^2}$) aller ganzen Zahlen besitzen keinen quadratischen Factor (ausser 1).

Ungefähr fünfzehn Sechzehntel (genauer $\frac{90}{\pi^4}$) aller ganzen Zahlen besitzen keinen biquadratischen Factor.

Ungefähr der neunundsiebzigste Theil aller ganzen Zahlen ist durch eine sechste Potenz theilbar.

Da aus der Gleichung:

$$\sum_{n,m=1}^{n,m=\infty}\frac{\rho_{\varkappa,r}(n)\mu(m)}{(nm^r)^s}=\zeta(s-\varkappa)$$
$$=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n^\varkappa}{n^s}$$

die Relation:

$$\sum_{d_r}\rho_{\varkappa,r}(d_r)\,\mu\left(\sqrt[r]{\frac{n}{d_r}}\right)=n^\varkappa$$

folgt, so ergibt sich aus 59) die Beziehung:

65)
$$\sum_{y=1}^{y=n}\mathfrak{Q}\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\rho_{\varkappa,r}(y)=\sum_{x=1,\,y=1}^{x=\left[\sqrt[r]{n}\right],\,y=n}\left[\frac{n}{x^r y}\right]\mu(x)\,\rho_{\varkappa,r}(y)$$
$$=\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\left(\sum_{d_r}\rho_{\varkappa,r}(d_r)\,\mu\left(\sqrt[r]{\frac{x}{d_r}}\right)\right)$$
$$=\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]x^\varkappa$$
$$=\Psi_\varkappa(n),$$

und speciell:

66)
$$\sum_{y=1}^{y=n}\mathfrak{Q}_r\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\rho_{0,r}(y)=\Psi(n).$$

Aus diesen zwei Gleichungen ergeben sich sofort die Formeln:

67)
$$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{y=1}^{y=n}\mathfrak{Q}_r\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\rho_{\varkappa,r}(y)}{n^{\varkappa+1}}=\frac{\zeta(\varkappa+1)}{\varkappa+1}$$

68)
$$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{y=1}^{y=n}\mathfrak{Q}_r\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\rho_{2\varkappa+1,r}(y)}{n^{2\varkappa+2}}=\frac{(2\pi)^{2\varkappa+2}B_{\varkappa+1}}{2(2\varkappa+2)\Gamma(2\varkappa+3)}$$

69)
$$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{y=1}^{y=n}\mathfrak{Q}_r\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)y^{-\varkappa}P_{\varkappa,r}(y)}{n}=\zeta(\varkappa+1)$$

70) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{y=1}^{y=n} \mathfrak{T}_{\varkappa}\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right) y^{-2\varkappa-1} P_{2\varkappa+1,\varkappa}(y)}{n} = \frac{(2\pi)^{2\varkappa+2} B_{\varkappa+1}}{2\Gamma(2\varkappa+3)}$$

71) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{y=1}^{y=n} \mathfrak{T}_{\varkappa}\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right) \rho_{0,\varkappa}(y)}{n} = \log n + 2C - 1.$$

Schreibt man in der Formel 65) für n: $\left[\frac{n}{z}\right]$, multiplicirt sodann mit $z^{\varkappa}\mu(z)$ und summirt von $z = 1$ bis $z = n$, so erhält man:

$$\sum_{y,\,z=1}^{y,\,z=n} \mathfrak{T}_{\varkappa}\left(\left[\frac{n}{yz}\right]\right) \rho_{\varkappa,r}(y) z^{\varkappa} \mu(z) = \sum_{z=1}^{z=n} \Psi_{\varkappa}\left(\left[\frac{n}{z}\right]\right) z^{\varkappa} \mu(z)$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \mathfrak{T}_{\varkappa}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \left(\sum_{d} \mu(d) d^{\varkappa} \rho_{\varkappa,r}\left(\frac{x}{d}\right)\right) = n.$$

Nun ist aber:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\mu(m) m^{\varkappa} \rho_{\varkappa,r}(n)}{(mn)^{s}} = \zeta(rs)$$
$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{rs}},$$

und daher:

72) $$\sum_{d} \mu(d) d^{\varkappa} \rho_{\varkappa,r}\left(\frac{n}{d}\right) = 0,$$

wenn n keine $r$te Potenz ist, hingegen:

73) $$\sum_{d} \mu(d) d^{\varkappa} \rho_{\varkappa,r}\left(\frac{n}{d}\right) = 1,$$

wenn n eine $r$te Potenz ist.

Die zuletzt entwickelte Formel verwandelt sich daher in die folgende, schon früher von H. Bugajef auf anderem Wege abgeleitete Relation:

74) $$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \mathfrak{T}_{\varkappa}\left(\left[\frac{n}{x^{r}}\right]\right) = n.$$

Bezeichnet man die Summe der reciproken $\varkappa$ten Potenzen derjenigen Divisoren einer Zahl x, welche durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar sind, mit $\psi_{-\varkappa}(x)$, so besteht, wie ich gezeigt habe, die Relation:

$$\sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt{n}\right]} \Psi_{-\varkappa}\left(\left[\frac{n}{y^{2}}\right]\right) \frac{\mu(y)}{y^{2\varkappa}} = \sum_{x=1}^{x=n} \psi_{-\varkappa}(x).$$

Nun ist:

$$\Psi_{-\varkappa}(m) = m\zeta(\varkappa+1) + \frac{\varepsilon\,\zeta(\varkappa+1)}{(m+1)^{\varkappa-1}} + \varepsilon'\zeta(\varkappa) \qquad (\varkappa > 1,\ 0 \leqq \varepsilon,\ \varepsilon' < 1),$$

und daher hat man:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \psi_{-\varkappa}(x) = \zeta(\varkappa+1) \sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]} \left[\frac{n}{y^2}\right] \frac{\mu(y)}{y^{2\varkappa}} + \zeta(\varkappa+1) \sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]} \frac{\varepsilon_y \mu(y)}{\left(\left[\frac{n}{y^2}\right]+1\right)^{\varkappa-1} y^{2\varkappa}} + \zeta(\varkappa) \sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]} \frac{\varepsilon_y' \mu(y)}{y^{2\varkappa}} \quad (0 \leqq \varepsilon_y, \varepsilon_y' < 1),$$

oder:

75) $$\sum_{x=1}^{x=n} \psi_{-\varkappa}(x) = \frac{\zeta(2\varkappa+1)}{\zeta(\varkappa+2)} n + \Delta_6 \qquad (\varkappa > 1),$$

wo:

$$\Delta_6 = -\zeta(\varkappa+1) n \sum_{y=[\sqrt{n}]+1}^{y=\infty} \frac{\mu(y)}{y^{2\varkappa+2}} - \zeta(\varkappa+1) \sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]} \frac{\varepsilon_y'' \mu(y)}{y^{2\varkappa}} + \zeta(\varkappa+1) \sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]} \frac{\varepsilon_y \mu(y)}{y^{2\varkappa}\left(\left[\frac{n}{y^2}\right]+1\right)^{\varkappa-1}} + \zeta(\varkappa) \sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]} \frac{\varepsilon_y' \mu(y)}{y^{2\varkappa}}$$
$$(0 \leqq \varepsilon_y, \varepsilon_y', \varepsilon_y'' < 1)$$

ist.

Man findet leicht, dass Δ_6 folgender Bedingung genügt:

76) $$|\Delta_6| < \frac{\zeta(\varkappa+1)\,\zeta(2\varkappa+2)}{n^{\varkappa-\frac{1}{2}}} + \zeta(\varkappa+1)\,\zeta(2\varkappa) + \frac{\pi^2 \zeta(\varkappa+1)}{6 n^{\varkappa-1}} + \zeta(\varkappa)\,\zeta(2\varkappa)$$

für welche man, zwar weniger genau aber bedeutend einfacher auch schreiben kann:

77) $$|\Delta_6| < \frac{\pi^4}{18}\left(1 + \frac{1}{n^{\varkappa-1}}\right).$$

Aus der Gleichung 75) ergeben sich die Formeln:

78) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \psi_{-\varkappa}(x)}{n} = \frac{2\Gamma(2\varkappa+3)}{(2\pi)^{2\varkappa+2} B_{\varkappa+1}} \zeta(\varkappa+1) \qquad (\varkappa > 1)$$

79) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \psi_{-2\varkappa-1}(x)}{n} = \frac{\Gamma(4\varkappa+1)}{(2\pi)^{2\varkappa}\Gamma(2\varkappa+1)} \frac{B_\varkappa}{B_{2\varkappa}} \qquad (\varkappa > 1).$$

Von den in diesen Relationen enthaltenen Theoremen mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

Die Summe der reciproken $\varkappa$ten Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{2\Gamma(2\varkappa+3)}{(2\pi)^{2\varkappa+2} B_{\varkappa+1}} \zeta(\varkappa+1)$$

Die Summe der reciproken $(2\varkappa-1)$ten Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche keinen quadratischen Factor besitzen, ist im Mittel gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{\Gamma(4\varkappa+1) B_\varkappa}{(2\pi)^{2\varkappa}\Gamma(2\varkappa+1) B_{2\varkappa}}.$$

Die Summe der reciproken Cuben derjenigen Divisoren einer Zahl, welche keinen quadratischen Factor enthalten, beträgt im Mittel $\frac{105}{\pi^4}$.

Die Summe der reciproken fünften Potenzen derjenigen Divisoren einer Zahl, welche durch kein Quadrat theilbar sind, ist im Mittel gleich dem Ausdrucke

$$\frac{675775}{691\,\pi^6}.$$

Aus den zuletzt entwickelten Formeln ergeben sich auch sofort die Relationen:

80) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \tilde{\psi}_{-\varkappa}(x)}{n} = \zeta(\varkappa+1)\left\{1-\frac{2\Gamma(2\varkappa+3)}{(2\pi)^{2\varkappa+2}B_{\varkappa+1}}\right\} \qquad (\varkappa>1)$$

81) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \tilde{\psi}_{-2\varkappa+1}(x)}{n} = \frac{(2\pi)^{2\varkappa}B_\varkappa}{\Gamma(2\varkappa+1)}\left\{1-\frac{2\Gamma(4\varkappa+1)}{(2\pi)^{4\varkappa}B_{2\varkappa}}\right\} \qquad (\varkappa>1)$$

wo $\tilde{\psi}_{-\varkappa}(x)$ die Summe der reciproken $\varkappa$ten Potenzen derjenigen Divisoren von x ist, welche mindestens einen quadratischen Theiler (ausser 1) besitzen.

Man hat daher die Sätze:

Die Summe der reciproken $\varkappa$ten Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche mindestens einen quadratischen Theiler (ausser 1) besitzen, beträgt im Mittel:

$$\zeta(\varkappa+1)\left\{1-\frac{2\Gamma(2\varkappa+3)}{(2\pi)^{2\varkappa+2}B_{\varkappa+1}}\right\}.$$

Die Summe der reciproken $(2\varkappa-1)$ten Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche mindestens einen quadratischen Theiler (ausser 1) besitzen, ist im Mittel gleich dem Ausdrucke.

$$\frac{(2\pi)^{2\varkappa}B_\varkappa}{2\Gamma(2\varkappa+1)}\left\{1-\frac{2\Gamma(4\varkappa+1)}{(2\pi)^{4\varkappa}B_{2\varkappa}}\right\}.$$

Da:

$$\Psi_{-1}(m) = \frac{\pi^2}{6}m - \varepsilon\left\{\log m + C + \frac{1}{m}\right\} - \varepsilon'\frac{\pi^2}{6} \qquad (0 \leqq \varepsilon,\ \varepsilon' < 1)$$

ist, so hat man ferner:

$$\sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]} \Psi_{-1}\left(\left[\frac{n}{y^2}\right]\right)\frac{\mu(y)}{y^2} = \frac{\pi^2}{6}n\sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]}\frac{\mu(y)}{y^4} - \frac{\pi^2}{6}\sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]}\frac{\varepsilon''\mu(y)}{y^2} - \sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]}\frac{\varepsilon_y\log\left(\left[\frac{n}{y^2}\right]\right)\mu(y)}{y^2} - C\sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]}\frac{\varepsilon_y\mu(y)}{y^2} -$$
$$- \sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]}\frac{\varepsilon_y\mu(y)}{y^2\left[\frac{n}{y^2}\right]} - \frac{\pi^2}{6}\sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]}\frac{\varepsilon'_y\mu(y)}{y^2} \qquad (0 \leqq \varepsilon_y,\ \varepsilon'_y,\ \varepsilon''_y < 1),$$

und daher ist:

82) $$\sum_{x=1}^{x=n} \bar{\psi}_{-1}(x) = \frac{15}{\pi^2}n - \Delta_7,$$

wo Δ_7 durch die Gleichung:

$$\Delta_7 = \frac{\pi^2}{6}n\sum_{y=[\sqrt{n}]+1}^{y=\infty}\frac{\mu(y)}{y^4} + \frac{\pi^2}{6}\sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]}\frac{\varepsilon''_y\mu(y)}{y^2} + \sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]}\frac{\varepsilon_y\log\left(\left[\frac{n}{y^2}\right]\right)\mu(y)}{y^2} + C\sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]}\frac{\varepsilon_y\mu(y)}{y^2} + \sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]}\frac{\varepsilon_y\mu(y)}{y^2\left[\frac{n}{y^2}\right]} +$$
$$+ \frac{\pi^2}{6}\sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]}\frac{\varepsilon'_y\mu(y)}{y^2}$$

bestimmt wird, aus welcher sich unmittelbar die Beziehung:

83) $$|\Delta_7| < \frac{\pi^2}{6}\left\{\log n + C + \frac{\pi^2}{6}\right\} + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

ergibt.

Aus der Gleichung 82) ergeben sich die Formeln:

84) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \bar{\psi}_{-1}(x)}{n} = \frac{15}{\pi^2}$$

85) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \tilde{\psi}_{-1}(x)}{n} = \frac{\pi^4-90}{6\pi^2},$$

welche folgende Sätze enthalten:

Die Summe derjenigen reciproken Divisoren einer Zahl, welche keinen quadratischen Theiler (ausser 1) besitzen, beträgt im Mittel $\frac{15}{\pi^2}$.

Die Summe derjenigen reciproken Divisoren einer ganzen Zahl, welche mindestens einen quadratischen Theiler (ausser 1) besitzen, beträgt im Mittel $\frac{\pi^4-90}{6\pi^2}$.

Aus der bekannten Formel:

86) $$\sum_{x=1}^{x=n} \bar{\psi}_0(x) = \frac{6}{\pi^2}\, n \left\{\log n + \frac{12\mathfrak{F}}{\pi^2} + 2C - 1\right\} + \Delta_8,$$

wo:

$$\mathfrak{F} = \sum_{x=2}^{x=\infty} \frac{\log x}{x^2} = 0\cdot 9375482543\ldots$$

$$|\Delta_8| < \left(\frac{1}{2}\log n + 5 + 3C + 2\log 2\right)\sqrt{n} + 2$$

ist, folgt:

87) $$\lim_{s=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=10^s} \bar{\psi}_0(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=10^{s-1}} \bar{\psi}_0(x)}{10^s - 10^{s-1}} = \frac{6s}{\pi^2}\log 10 + \frac{6}{\pi^2}\left\{\frac{12\mathfrak{F}}{\pi^2} + 2C - 1 + \frac{\log 10}{9}\right\}$$

88) $$\lim_{s=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=10^s} \tilde{\psi}_0(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=10^{s-1}} \tilde{\psi}_0(x)}{10^s - 10^{s-1}} = s\log 10\left\{1 - \frac{6}{\pi^2}\right\} + \left(2C - 1 + \frac{\log 10}{9}\right)\left\{1 - \frac{6}{\pi^2}\right\} - \frac{72\mathfrak{F}}{\pi^4}.$$

Man hat daher die Sätze:

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{6s}{\pi^2}\log 10 + \frac{6}{\pi^2}\left\{\frac{12\mathfrak{F}}{\pi^2} + 2C - 1 + \frac{\log 10}{9}\right\}$$

Divisoren ohne quadratischen Theiler.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\left\{ s \log 10 + 2C - 1 + \frac{\log 10}{9} \right\} \left\{ 1 - \frac{6}{\pi^2} \right\} - \frac{72\delta}{\pi^4}$$

Divisoren mit quadratischem Theiler.

Schreibt man in 86) für n: $[ne]$, so erhält man:

89) $$\sum_{x=1}^{x=[ne]} \bar{\psi}_0(x) = \frac{6}{\pi^2}[ne] \left\{ \log n + 2C + \frac{12\delta}{\pi^2} \right\} + \Delta_9,$$

wo:

$$|\Delta_9| < \{\log n + 11 + 6C + 4 \log 2\} \sqrt{n} + 2 + \frac{6}{\pi^2}$$

ist.

Genügt die Grösse η den Bedingungen:

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\sqrt{n} \log n}{\eta} = 0,$$

so hat man auch:

90) $$\sum_{x=n-\eta+1}^{x=n+\eta} \bar{\psi}_0(x) = \frac{12\eta}{\pi^2} \left\{ \log n + \frac{12\delta}{\pi^2} + 2C \right\} + \Delta_{10},$$

wo:

$$|\Delta_{10}| < \left(\frac{3}{2} \log n + 15 + 9C + 7 \log 2\right) \sqrt{n} + 4$$

ist.

Aus den Gleichungen 89) und 90) folgt:

91) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=[ne]} \bar{\psi}_0(x)}{[ne]} = \lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\sum_{x=n-\eta+1}^{x=n+\eta} \bar{\psi}_0(x)}{2\eta}$$

92) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=[ne]} \tilde{\psi}_0(x)}{[ne]} = \lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\sum_{x=n-\eta+1}^{x=n+\eta} \tilde{\psi}_0(x)}{2\eta}.$$

Man hat daher die Sätze:

Ist:

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\sqrt{n} \log n}{\eta} = 0,$$

so hat jede Zahl in dem Intervalle $n-\eta+1 \ldots n+\eta$ im Mittel ebenso viele Divisoren ohne quadratischen Theiler, als jede der Zahlen im Intervalle $1 \ldots [ne]$.

Ist:

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\sqrt{n} \log n}{\eta} = 0,$$

so hat jede Zahl in dem Intervalle $n-\varkappa+1\ldots n+\varkappa$ im Mittel ebenso viele Divisoren mit quadratischem Theiler, als jede der Zahlen im Intervalle $1\ldots[ne]$.

Es ist ferner, wie ich gezeigt habe [„Über einige zahlentheoretische Functionen.“ Sitzungsb. d. k. Akad. d. Wissensch., mathem.-naturw. Cl. 89. Bd. II. Abth. p. 37ff.].

$$\sum_{x=1}^{x=\left[n^{\frac{1}{\tau}}\right]} \left[\frac{n}{x^{\tau}}\right]\frac{1}{x^{\varkappa\tau}} = \sum_{x=1}^{x=n} P_{-\varkappa,\tau}(x).$$

Aus dieser Gleichung folgt:

93) $$\sum_{x=1}^{x=n} P_{-\varkappa,\tau}(x) = n\,\zeta(\tau(\varkappa+1)) + \Delta_{11},$$

wo:

$$\Delta_{11} = -n\sum_{x=\left[\sqrt[\tau]{n}\right]+1}^{x=\infty} \frac{1}{x^{\tau(\varkappa+1)}} - \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\tau]{n}\right]} \frac{\varepsilon_x}{x^{\tau\varkappa}} \qquad (0\leqq\varepsilon_x<1)$$

ist.

Aus dieser Relation ersieht man sofort, dass:

94) $$|\Delta_{11}| < \frac{\zeta(\tau(\varkappa+1))}{(n+1)^{\tau\varkappa-1}} + \zeta(\tau\varkappa) \qquad (\tau\varkappa>1)$$

95) $$|\Delta_{11}| < \zeta(\tau+1) + \log n + C + \frac{1}{n} \qquad (\tau\varkappa=1)$$

96) $$|\Delta_{11}| < (\zeta(\tau)+1)\, n^{\frac{1}{\tau}} \qquad (\varkappa=0,\ \tau>1)$$

ist.

Man hat daher die Formel:

97) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} P_{-\varkappa,\tau}(x)}{n} = \zeta(\tau(\varkappa+1))$$

aus welcher sich folgende specielle Relationen ergeben:

98) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \mathrm{P}_{-(2\nu-1),\tau}(x)}{n} = \frac{(2\pi)^{2\tau\nu} B_{\tau\nu}}{2\Gamma(2\tau\nu+1)}$$

99) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \mathrm{P}_{-\varkappa,2\tau}(x)}{n} = \frac{(2\pi)^{2\tau(\varkappa+1)} B_{\tau(\varkappa+1)}}{2\Gamma(2\tau(\varkappa+1)+1)}$$

100) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \mathrm{P}_{0,\tau}(x)}{n} = \zeta(\tau) \qquad (\tau>1)$$

101) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \mathrm{P}_{0,2\tau}(x)}{n} = \frac{(2\pi)^{2\tau} B_{\tau}}{2\Gamma(2\tau+1)}$$

102) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \psi_{-\varkappa}(x)}{n} = \zeta(\varkappa+1) \quad (\varkappa > 0)$$

103) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \psi_{-2\varkappa-1}(x)}{n} = \frac{(2\pi)^{2\varkappa} B_\varkappa}{2\Gamma(2\varkappa+1)}$$

104) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \mathrm{P}_{-\varkappa,\tau}(x)}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \mathrm{P}_{-\varkappa_1,\tau_1}(x)}{n} \quad (\tau(\varkappa+1) = \tau_1(\varkappa_1+1)).$$

Die Formeln 100)—102) hat schon Herr E. Cesaro, die Formel 103) Herr Berger aufgestellt.

Von den in diesen Formeln enthaltenen Theoremen mögen folgende besonders hervorgehoben werden:

Die Summe der reciproken $\varkappa$ten Potenzen derjenigen Divisoren einer Zahl, welche τte Potenzen sind, ist im Mittel gleich dem Ausdrucke $\zeta(\tau(\varkappa+1))$.

Die Summe der reciproken $(2r-1)$ten Potenzen derjenigen Divisoren einer Zahl, welche τte Potenzen sind, ist im Mittel gleich dem Ausdrucke $\dfrac{(2\pi)^{2\tau} B_\tau}{2\Gamma(2\tau r+1)}$.

Die Summe der reciproken $\varkappa$ten Potenzen derjenigen Divisoren einer Zahl, welche (2τ)te Potenzen sind, ist im Mittel gleich dem Ausdrucke $\dfrac{(2\pi)^{2\tau\,\varkappa+1} B_{\tau\,\varkappa+1}}{2\Gamma(2\tau(\varkappa+1)+1)}$.

Die Summe der reciproken quadratischen Divisoren einer Zahl beträgt im Mittel $\dfrac{\pi^4}{90}$.

Die Summe der reciproken Quadrate der quadratischen Divisoren einer ganzen Zahl beträgt im Mittel $\dfrac{\pi^6}{945}$.

Die Summe der reciproken Cuben der quadratischen Divisoren einer ganzen Zahl beträgt im Mittel $\dfrac{\pi^8}{9450}$.

Die Summe der reciproken biquadratischen Divisoren einer ganzen Zahl beträgt im Mittel $\dfrac{\pi^8}{9450}$.

Die Summe der reciproken cubischen Divisoren einer ganzen Zahl beträgt im Mittel $\dfrac{\pi^6}{945}$.

Aus der von mir früher mitgetheilten Formel:

$$\sum_{y=1}^{n} \varpi\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right) \mu(y) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} \left[\frac{n}{x^2}\right] \mu(x)$$

folgt ferner:

105) $$\sum_{y=1}^{y=n} \varpi\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right) \mu(y) = \frac{6}{\pi^2} n - \Delta'_5$$

wo:

$$|\Delta'_5| < \frac{5}{2}\sqrt{n}$$

ist.

Man hat also:

106) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{y=1}^{y=n} \varpi\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right) \mu(y)}{n} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Schreibt man ferner in der von mir aufgestellten Relation:

$$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\mu^2(x)=\bar{\omega}(n)$$

für $n:\left[\frac{n}{y}\right]$, multiplicirt sodann mit $\lambda(y)\,\psi_\varkappa(y)$ und summirt bezüglich y von 1 bis n, so erhält man:

$$\begin{aligned}\sum_{y=1}^{y=n}\bar{\omega}\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\frac{\lambda(y)\,\psi_\varkappa(y)}{y^\varkappa}&=\sum_{x,y=1}^{x,y=n}\left[\frac{n}{xy}\right]\frac{\lambda(y)\,\psi_\varkappa(y)\,\mu^2(x)}{y^\varkappa}\\&=\sum_{r=1}^{r=n}\left[\frac{n}{r}\right]\left(\sum_d\frac{\lambda(d)\,\psi_\varkappa(d)}{d^\varkappa}\,\mu^2\left(\frac{r}{d}\right)\right)\\&=\sum_{r=1}^{r=n}\left[\frac{n}{r}\right]\lambda(r)\left(\sum_d\frac{\psi_\varkappa(d)\,\mu\left(\frac{r}{d}\right)}{d^\varkappa}\right)\end{aligned}$$

welche Gleichung wegen der Formel:

$$\sum_d\frac{\psi_\varkappa(d)\,\mu\left(\frac{r}{d}\right)}{d^\varkappa}=\frac{1}{r^\varkappa}$$

sofort in die folgende übergeht:

$$107)\qquad \sum_{y=1}^{y=n}\bar{\omega}\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\frac{\lambda(y)\,\psi_\varkappa(y)}{y^\varkappa}=\sum_{r=1}^{r=n}\left[\frac{n}{r}\right]\frac{\lambda(r)}{r^\varkappa}.$$

Aus dieser Gleichung folgt für $\varkappa>1$:

$$\sum_{y=1}^{y=n}\bar{\omega}\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\frac{\lambda(y)\,\psi_\varkappa(y)}{y^\varkappa}=n\sum_{x=1}^{x=\infty}\frac{\lambda(x)}{x^{\varkappa+1}}-\Delta_{12}$$

wo:

$$\Delta_{12}=n\sum_{x=n+1}^{x=\infty}\frac{\lambda(x)}{x^{\varkappa+1}}+\sum_{x=1}^{x=n}\frac{\varepsilon_x\,\lambda(x)}{x^\varkappa}\qquad(0\leqq\varepsilon_x<1).$$

ist.

Aus dieser Gleichung ergibt sich die Beziehung:

$$108)\qquad |\Delta_{12}|<\frac{\zeta(\varkappa+1)}{n^\varkappa}+\zeta(\varkappa)$$

oder einfacher, wenn auch etwas weniger genau:

$$109)\qquad |\Delta_{12}|<\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{1}{n^\varkappa}+1\right)\qquad(\varkappa>1).$$

Aus der Relation 107) folgen die Gleichungen:

$$110)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n}\bar{\omega}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\lambda(x)\,\psi_{-\varkappa}(x)}{n}=\frac{(2\pi)^{2\varkappa+2}B_{\varkappa+1}}{2\Gamma(2\varkappa+3)\,\zeta(\varkappa+1)}$$

$$111)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n}\bar{\omega}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\lambda(x)\,\psi_{-2\varkappa-1}(x)}{n}=\frac{(2\pi)^{2\varkappa}B_{2\varkappa}\Gamma(2\varkappa+1)}{\Gamma(4\varkappa+1)\,B_\varkappa}.$$

Ist $\varkappa = 1$, so hat man:

112) $$\sum_{y=1}^{y=n} \omega\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\lambda(y)\frac{\psi_1(y)}{y} = \frac{\pi^2}{15}\,n - \Delta'_{12},$$

wo:

113) $$|\Delta'_{12}| < \left(\frac{\pi^2}{6}+1\right)\frac{1}{n} + C + \log n$$

ist, und daher:

114) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{y=1}^{y=n}\varpi\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\lambda(y)\psi_{-1}(y)}{n} = \frac{\pi^2}{15}.$$

Man hat ferner:

$$\sum_{y=1}^{y=n}\bar{P}_{0,\tau}\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\mu_\tau(y) = \sum_{x=1,\; y=1}^{x=[\sqrt[\tau]{n}],\; y=n}\left[\frac{n}{y x^\tau}\right]\mu_\tau(y)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\left(\sum_{d_\tau}\mu_\tau(d_\tau)\right)$$

oder wegen 57):

115) $$\sum_{y=1}^{y=n}\bar{P}_{0,\tau}\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\mu_\tau(y) = \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]$$

$$= \Psi(n).$$

Aus dieser Gleichung folgt:

116) $$\sum_{y=1}^{y=n}\bar{P}_{0,\tau}\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\mu_\tau(y) = n\{\log n + 2C - 1\} + \Delta_{13},$$

wo:

$$|\Delta_{13}| < 4\sqrt{n}$$

ist. Es ist also:

117) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{y=1}^{y=n}\bar{P}_{0,\tau}\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\mu_\tau(y)}{n} = \log n + 2C - 1$$

118) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{y=1}^{y=n+\eta}\bar{P}_{0,\tau}\left(\left[\frac{n+\eta}{y}\right]\right)\mu_\tau(y) - \sum_{y=1}^{y=n-\eta}\bar{P}_{0,\tau}\left(\left[\frac{n-\eta}{y}\right]\right)\mu_\tau(y)}{2\eta} = \log n + 2C$$

$$\left(\lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\eta}{n} = 0, \quad \lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta} = 0\right)$$

119) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{y=1}^{y=n+\eta}\bar{P}_{0,\tau}\left(\left[\frac{n+\eta}{y}\right]\right)\mu_\tau(y) - \sum_{y=1}^{y=n-\eta}\bar{P}_{0,\tau}\left(\left[\frac{n-\eta}{y}\right]\right)\mu_\tau(y)}{2\eta} = \lim_{n=\infty}\frac{\sum_{y=1}^{y=[ne]}\bar{P}_{0,\tau}\left(\left[\frac{ne}{y}\right]\right)\mu_\tau(y)}{[ne]}$$

$$\left(\lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\eta}{n} = 0, \quad \lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta} = 0\right)$$

120) $$\lim_{s=\infty}\frac{\sum\limits_{y=1}^{y=10^s}\bar{P}_{0,\tau}\left(\left[\frac{10^s}{y}\right]\right)\mu_\tau(y)-\sum\limits_{y=1}^{y=10^{s-1}}\bar{P}_{0,\tau}\left(\left[\frac{10^{s-1}}{y}\right]\right)\mu_\tau(y)}{10^{s-1}}=9s\log 10+\log 10+18C-9$$
$$=20\cdot 72323\ldots s+3\cdot 69244\ldots$$

Man hat ferner:

121) $$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\varpi\left(\left[\frac{n}{x^2}\right]\right)=\sum_{x=1,\ y=1}^{x=[\sqrt{n}],\ y=n}\left[\frac{n}{x^2y}\right]\mu^2(y)$$
$$=\sum_{r=1}^{r=n}\left[\frac{n}{r}\right]\left(\sum_{d_2}\mu^2(d_2)\right)$$
$$=\sum_{r=1}^{r=n}\left[\frac{n}{r}\right]$$
$$=\Psi(n),$$

und daher ist:

122) $$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\varpi\left(\left[\frac{n}{x^2}\right]\right)=n\{\log n+2C-1\}-\Delta_{13}.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

123) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\varpi\left(\left[\frac{n}{x^2}\right]\right)}{n}=\log n+2C-1$$

124) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=[\sqrt{n+\eta}]}\varpi\left(\left[\frac{n+\eta}{x^2}\right]\right)-\sum\limits_{x=1}^{x=[\sqrt{n-\eta}]}\varpi\left(\left[\frac{n-\eta}{x^2}\right]\right)}{2\eta}=\log n+2C\qquad\left(\lim_{\eta,n=\infty}\frac{\eta}{n}=0,\ \lim_{\eta,n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0\right)$$

125) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=[\sqrt{n+\eta}]}\varpi\left(\left[\frac{n+\eta}{x^2}\right]\right)-\sum\limits_{x=1}^{x=[\sqrt{n-\eta}]}\varpi\left(\left[\frac{n-\eta}{x^2}\right]\right)}{2\eta}=\lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=[n\varepsilon]}\varpi\left(\left[\frac{n\varepsilon}{x^2}\right]\right)}{[n\varepsilon]}\qquad\left(\lim_{\eta,n=\infty}\frac{\eta}{n}=0,\ \lim_{\eta,n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0\right)$$

126) $$\lim_{s=\infty}\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=\left[10^{\frac{s}{2}}\right]}\varpi\left(\left[\frac{10^s}{x^2}\right]\right)-\sum\limits_{x=1}^{x=\left[10^{\frac{s-1}{2}}\right]}\varpi\left(\left[\frac{10^{s-1}}{x^2}\right]\right)}{10^{s-1}}=9s\log 10+\log 10+18C-9.$$

Es ist:

127) $$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\Psi_{-\varkappa}\left(\left[\frac{n}{x^2}\right]\right)=\sum_{x=1,\ y=1}^{x=[\sqrt{n}],\ y=n}\left(\left[\frac{n}{x^2y}\right]\right)\frac{1}{y^\varkappa}$$
$$=\sum_{r=1}^{r=n}\left[\frac{n}{r}\right]\left(\sum_{d_2}\frac{1}{d_2^\varkappa}\right)$$
$$=\sum_{r=1}^{r=n}\left[\frac{n}{r}\right]\rho_{-\varkappa,2}(r)$$

Aus dieser Gleichung folgt für $\varkappa > 1$:

$$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\rho_{-\varkappa,2}(x) = \zeta(\varkappa+1)\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\left[\frac{n}{x^2}\right] + \frac{\pi^2}{6}\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\varepsilon_x + \frac{\pi^2}{6}\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\frac{\varepsilon_x}{\left[\frac{n}{x^2}\right]^{\varkappa-1}} \qquad (0 \leqq \varepsilon_x < 1)$$

oder:

128) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\rho_{-\varkappa,2}(x) = \frac{\pi^2}{6}\zeta(\varkappa+1)n - \Delta_{14}$$

wo:

$$\Delta_{14} = n\zeta(\varkappa+1)\sum_{x=[\sqrt{n}]+1}^{x=\infty}\frac{1}{x^2} + \zeta(\varkappa+1)\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\varepsilon'_x - \frac{\pi^2}{6}\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\varepsilon_x - \frac{\pi^2}{6}\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\frac{\varepsilon_x}{\left[\frac{n}{x^2}\right]^{\varkappa-1}} \qquad (0 \leqq \varepsilon_x, \varepsilon'_x < 1)$$

ist, wesshalb man auch die folgende Relation aufstellen kann:

129) $$|\Delta_{14}| < \left\{\left(\frac{\pi^2}{6} + 1\right)\zeta(\varkappa+1) + \frac{\pi^2}{3}\right\}\sqrt{n},$$

oder einfacher:

130) $$|\Delta_{14}| < \frac{7\pi^2}{9}\sqrt{n}.$$

Ist $\varkappa = 1$, so hat man:

131) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\rho_{-1,2}(x) = \frac{\pi^4}{36}n - \Delta'_{14},$$

wo:

$$\Delta'_{14} = \frac{\pi^2 n}{6}\sum_{x=[\sqrt{n}]+1}^{x=\infty}\frac{1}{x^2} + \frac{\pi^2}{6}\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\varepsilon_x - \frac{\pi^2}{6}\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\varepsilon'_x - \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{x}]}\varepsilon'_x\log\left(\left[\frac{n}{x^2}\right]\right) - C\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\varepsilon'_x - \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\frac{\varepsilon'_x}{\left[\frac{n}{x^2}\right]} \qquad (0 \leqq \varepsilon_x, \varepsilon'_x < 1)$$

ist, aus welcher Gleichung die Relation:

132) $$|\Delta'_{14}| < \frac{\pi^2}{6}\left\{3 + \frac{\pi^2}{6} + C + \log n\right\}\sqrt{n}$$

folgt.

Ist endlich $\varkappa = 0$, so hat man:

$$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\rho_{0,2}(x) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\left[\frac{n}{x^2}\right]\left\{\log\left(\left[\frac{n}{x^2}\right]\right) + 2C - 1\right\} + 4\sqrt{n}\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\frac{\varepsilon'_x}{x}$$

$$= n\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\frac{\log\left(\left[\frac{n}{x^2}\right]\right)}{x^2} + (2C-1)n\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\frac{1}{x^2} + 4\sqrt{n}\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\frac{\varepsilon'_x}{x} - (2C-1)\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\varepsilon''_x - \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\varepsilon''_x\log\left(\left[\frac{n}{x^2}\right]\right)$$

$$(0 \leqq \varepsilon'_x, \varepsilon''_x < 1),$$

oder:

133) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\rho_{0,2}(x) = n\left\{\frac{\pi^2}{6}(2C-1) + \frac{\pi^2}{6}\log n - 2\mathfrak{F}\right\} - \Delta''_{14}$$

wo:

$$\Delta''_{14} = n \sum_{x=[\sqrt{n}]+1}^{x=\infty} \frac{\log\left(\left[\frac{n}{x^2}\right]\right)}{x^2} + (2C-1)\, n \sum_{x=[\sqrt{n}]+1}^{x=\infty} \frac{1}{x^2} - 4\sqrt{n} \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} \frac{\varepsilon'_x}{x} + (2C-1) \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} \varepsilon''_x + \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} \varepsilon''_x \log\left(\left[\frac{n}{x^2}\right]\right) -$$

$$- n \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} \frac{\log\left(1 - \frac{\varepsilon'''_x x^2}{n}\right)}{x^2} \qquad (0 \leqq \varepsilon'_x, \varepsilon''_x, \varepsilon'''_x < 1)$$

ist, aus welcher Gleichung folgt:

134) $$|\Delta''_{14}| < \left\{\left(\frac{\pi^2}{6} + 3\right)(\log n + 2C - 1) + 3\right\} \sqrt{n} + \frac{4}{\sqrt{n-1}}.$$

Die Gleichungen 128), 131) und 133) liefern die Formeln:

135) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \rho_{-\varkappa,2}(x)}{n} = \frac{\pi^2}{6} \zeta(\varkappa+1) \qquad (\varkappa > 0)$$

136) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \rho_{-2\varkappa-1,2}(x)}{n} = \frac{4^{\varkappa-1}\pi^{2\varkappa+2} B_\varkappa}{3\Gamma(2\varkappa+1)}$$

137) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \rho_{0,2}(x)}{n} = \frac{\pi^2}{6} (\log n + 2C - 1) - 2\mathfrak{F}$$

Man hat daher die Theoreme:

Dividirt man die ganze Zahl n durch alle nicht grösseren ganzen Zahlen, und multiplicirt jeden Quotienten mit der Anzahl der quadratischen Theiler des betreffenden Divisors, so ist das arithmetische Mittel der so erhaltenen Producte für sehr grosse n gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{\pi^2}{6} (\log n + 2C - 1) - 2\mathfrak{F}.$$

Dividirt man eine Zahl n durch alle nicht grösseren ganzen Zahlen und multiplicirt jeden Quotienten mit der Summe der reciproken $\varkappa$ten Potenzen derjenigen Theiler des Divisors, deren complementärer Divisor ein Quadrat ist, so ist für sehr grosse n das arithmetische Mittel dieser Producte gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{\pi^2}{6} \zeta(\varkappa+1).$$

Dividirt man eine ganze Zahl n durch alle nicht grösseren ganzen Zahlen und multiplicirt jeden Quotienten mit der Summe der reciproken $(2\varkappa-1)$ten Potenzen derjenigen Theiler des Divisors, deren complementärer Divisor ein Quadrat ist, so ist das arithmetische Mittel dieser Producte für sehr grosse n gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{4^{\varkappa-1}\pi^{2\varkappa+2} B_\varkappa}{3\Gamma(2\varkappa+1)}$$

Dividirt man eine ganze Zahl n durch alle nicht grösseren ganzen Zahlen und multiplicirt jeden Quotienten mit der Summe derjenigen reciproken Theiler des Divisors, deren complementärer Divisor ein Quadrat ist, so ist das arithmetische Mittel dieser Producte für sehr grosse n gleich $\frac{\pi^4}{36}$.

Dividirt man eine ganze Zahl n durch alle nicht grösseren ganzen Zahlen und multiplicirt jeden Quotienten mit der Summe der reciproken Cuben jener Theiler des Divisors, welche einen quadratischen complementären Divisor besitzen, so ist das arithmetische Mittel dieser Producte für sehr grosse n gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{\pi^8}{56700}.$$

Dividirt man eine ganze Zahl n durch alle nicht grösseren ganzen Zahlen und multiplicirt jeden Quotienten mit der Summe der reciproken Quadrate jener Theiler des Divisors, welche einen quadratischen complementären Divisor besitzen, so ist das arithmetische Mittel dieser Producte für sehr grosse n gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{\pi^6}{540}.$$

Setzt man in der von mir mitgetheilten Formel:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \lambda(x)\, P_{\varkappa,2\tau}(x) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} P_{2\varkappa,\tau}(x)$$
$$= \overline{P}_{2\varkappa,\tau}\left(\left[\sqrt{n}\right]\right)$$

für n: $\left[\frac{n}{y}\right]$, multiplicirt sodann mit $\mu^2(y)$ und summirt bezüglich y von $y=1$ bis $y=n$, so erhält man:

$$\sum_{y=1}^{y=n} \overline{P}_{2\varkappa,\tau}\left(\left[\sqrt{\frac{n}{y}}\right]\right)\mu^2(y) = \sum_{x,y=1}^{=} \left[\frac{n}{xy}\right] \lambda(x)\, P_{\varkappa,2\tau}(x)\, \mu^2(y)$$
$$= \sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \left(\sum_{d} \lambda(d)\, P_{\varkappa,2\tau}(d)\, \mu^2\left(\frac{x}{d}\right)\right).$$

Nun hat man aber:

$$\sum_{m,n=1}^{=\infty} \frac{\lambda(n)\, P_{\varkappa,\tau}(n)\, \mu^2(m)}{(mn)^s} = \frac{\zeta(2\tau s - 2\tau\varkappa)}{\zeta(\tau s - \tau\varkappa)}$$
$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\lambda(r)}{r^{\tau(s-\varkappa)}}$$

und daher ist:

138) $$\sum_{d} \lambda(d)\, P_{\varkappa,\tau}(d)\, \mu^2\left(\frac{r}{d}\right) = 0$$

wenn r keine τte Potenz ist, und:

139) $$\sum_{d} \lambda(d)\, P_{\varkappa,\tau}(d)\, \mu^2\left(\frac{r}{d}\right) = \lambda\left(\sqrt[\tau]{r}\right) r^{\varkappa}$$

wenn r eine τte Potenz ist.

Man hat demnach die Relation:

140) $$\sum_{y=1}^{y=n} \overline{P}_{2\varkappa,\tau}\left(\left[\sqrt{\frac{n}{y}}\right]\right)\mu^2(y) = \sum_{r=1}^{=[\sqrt[2\tau]{n}]} \left[\frac{n}{r^{2\tau}}\right] \lambda(r)\, r^{2\varkappa\tau}.$$

Schreibt man in dieser Gleichung für $\varkappa$: $-\varkappa$, so erhält man:

$$\sum_{y=1}^{y=n} \overline{P}_{-2\varkappa,\tau}\left(\left[\sqrt{\frac{n}{y}}\right]\right)\mu^2(y) = n \sum_{r=1}^{=[\sqrt[2\tau]{n}]} \frac{\lambda(r)}{r^{2\tau(\varkappa+1)}} - \sum_{r=1}^{=[\sqrt[2\tau]{n}]} \frac{\varepsilon\, \lambda(r)}{r^{2\varkappa\tau}} \qquad (0 \leqq \varepsilon < 1)$$

und daher ist auch:

141) $$\sum_{y=1}^{y=n} \overline{\mathrm{P}}_{-2\varkappa,\tau}\left(\left[\sqrt{\frac{n}{y}}\right]\right)\mu^2(y) = \frac{(2\pi)^{2\tau(\varkappa+1)}\,\Gamma(2\tau(\varkappa+1)+1)\,B_{2\tau(\varkappa+1)}}{\Gamma(4\tau(\varkappa+1)+1)\,B_{\tau(\varkappa+1)}} - \Delta_{15}$$

wo:

$$\Delta_{15} = n \sum_{r=\left[\sqrt[2\tau]{n}\right]+1}^{r=\infty} \frac{\lambda(r)}{r^{2\tau\varkappa+1}} + \sum_{r=1}^{r=\left[\sqrt[2\tau]{n}\right]} \frac{\varepsilon_r\lambda(r)}{r^{2\tau\varkappa}}$$

ist, aus welcher Gleichung sich sofort die Relation:

142) $$|\Delta_{15}| < \frac{(2\pi)^{2\tau\varkappa+1}\,B_{\tau\varkappa+1}}{2\Gamma(2\tau(\varkappa+1)+1)^{\varkappa-\frac{1}{2\tau}}} + \frac{(2\pi)^{2\tau\varkappa}\,\Gamma(2\tau\varkappa+1)\,B_{2\tau\varkappa}}{\Gamma(4\tau\varkappa+1)\,B_{\varkappa\tau}} \qquad (\varkappa > 0)$$

oder einfacher, wenn auch weniger genau:

143) $$|\Delta_{15}| < \frac{\pi^2}{6n^{\varkappa-\frac{1}{2\tau}}} + 1$$

ergibt.

Für $\varkappa = 0$, ist, wie man leicht zeigen kann:

144) $$|\Delta_{15}| < \left(\frac{\pi^2}{6} + 1\right) n^{\frac{1}{2\tau}}$$

Die Relation 141) liefert die Gleichung:

145) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \overline{\mathrm{P}}_{-2\varkappa,\tau}\left(\left[\sqrt{\frac{n}{x}}\right]\right)\mu^2(x)}{n} = \frac{(2\pi)^{2\tau(\varkappa+1)}\,\Gamma(2\tau(\varkappa+1)+1)\,B_{2\tau(\varkappa+1)}}{\Gamma(4\tau(\varkappa+1)+1)\,B_{\tau(\varkappa+1)}}$$

aus welcher sich folgende specielle Formeln ergeben:

146) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \overline{\mathrm{P}}_{-2,\tau}\left(\left[\sqrt{\frac{n}{x}}\right]\right)\mu^2(x)}{n} = \frac{(2\pi)^{4\tau}\,\Gamma(4\tau+1)\,B_{4\tau}}{\Gamma(8\tau+1)\,B_{2\tau}}$$

147) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \overline{\mathrm{P}}_{-2,1}\left(\left[\sqrt{\frac{n}{x}}\right]\right)\mu^2(x)}{n} = \frac{\pi^4}{105}$$

148) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \overline{\mathrm{P}}_{0,\tau}\left(\left[\sqrt{\frac{n}{x}}\right]\right)\mu^2(x)}{n} = \frac{(2\pi)^{2\tau}\,\Gamma(2\tau+1)\,B_{2\tau}}{\Gamma(4\tau+1)\,B_{\tau}}$$

149) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \overline{\mathrm{P}}_{0,1}\left(\left[\sqrt{\frac{n}{x}}\right]\right)\mu^2(x)}{n} = \frac{\pi^2}{15}$$

150) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \overline{\mathrm{P}}_{0,2}\left(\left[\sqrt{\frac{n}{x}}\right]\right)\mu^2(x)}{n} = \frac{\pi^4}{105}$$

151) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \overline{\mathrm{P}}_{-2,\tau}\left(\left[\sqrt{\frac{n}{x}}\right]\right)\mu^2(x)}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \overline{P}_{0,2\tau}\left(\left[\sqrt{\frac{n}{x}}\right]\right)\mu^2(x)}{n}.$$

Man hat ferner:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \Psi\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\left[\frac{n}{x}\right]\mu(x) = \sum_{x,\,y=1}^{x,\,y=n}\left[\frac{n}{xy}\right]\left[\frac{n}{x}\right]\mu(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\left(\sum_{d}\left[\frac{n}{d}\right]\mu(d)\right).$$

Nun ist aber:

$$\sum_{d}\left[\frac{n}{d}\right]\mu(d) = \varphi(r, n)$$

wo $\varphi(r, n)$ die Anzahl der Zahlen ist, welche nicht grösser als r und zu n relativ prim sind.

Es ist also:

152) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\varphi(x, n) = \sum_{x=1}^{x=n}\Psi\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\left[\frac{n}{x}\right]\mu(x).$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\varphi(x, n) = \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]^2 \mu(x)\left\{\log\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)+2C-1\right\} + 4\sum_{x=1}^{x=n}\varepsilon_x\left[\frac{n}{x}\right]^{\frac{3}{2}}\mu(x) \qquad (0 \leqq \varepsilon_x < 1)$$

und daher hat man:

153) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\varphi(x, n) = \frac{6n^2}{\pi^2}\left\{\log n + 2C - 1\right\} - \Delta_{16},$$

wo:

$$\Delta_{16} = n^2\sum_{x=n+1}^{x=\infty}\frac{\log n\,\mu(x)}{x^2} + n^2\sum_{x=1}^{x=n}\frac{\mu(x)}{x} + n^2(2C-1)\sum_{x=n+1}^{x=\infty}\frac{\mu(x)}{x^2} + 2n\sum_{x=1}^{x=n}\frac{\varepsilon'_x\,\mu(x)\log\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)}{x} + 2(2C-1)n.$$

$$\cdot\sum_{x=1}^{x=n}\frac{\varepsilon'_x\,\mu(x)}{x} - 4\sum_{x=1}^{x=n}\varepsilon_x\left[\frac{n}{x}\right]^{\frac{3}{2}}\mu(x) + \sum_{x=1}^{x=n}\left(\frac{n}{x}\right)^2\mu(x)\log\left(1-\frac{x\varepsilon''_x}{n}\right) - \sum_{x=1}^{x=n}\varepsilon'^2_x\,\mu(x)\log\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)$$

$$(0 \leqq \varepsilon_x, \varepsilon'_x, \varepsilon''_x < 1)$$

ist, aus welcher Gleichung folgt:

154) $$|\Delta_{16}| < 2n(\log n)^2 + n\log n\left(5C + \frac{\pi^2}{6}\right) + 2\log n + 2C(2C-1)n + 2(2C-1) + \frac{\pi^2}{6}n^{\frac{3}{2}}.$$

Aus der Formel 153) ergibt sich die Gleichung:

155) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\varphi(x, n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}\left\{\log n + 2C - 1\right\}.$$

Man hat daher folgendes Theorem:

Dividirt man die Zahl n durch alle nicht grösseren ganzen Zahlen und multiplicirt jeden Quotienten mit der Anzahl derjenigen Zahlen, welche zu n relativ prim und nicht grösser als der betreffende Divisor sind, so ist für sehr grosse n das arithmetische Mittel der so entstehenden Producte gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{6n}{\pi^2}\left\{\log n + 2C - 1\right\}.$$

Bezeichnet man mit $\varkappa_m(x)$ die Summe der $m$ten Potenzen der ungeraden Divisoren von x, so hat man bekanntlich:

156) $$\sum_{x=1}^{x=n} \varkappa_{-m}(x) = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} \left[\frac{n}{2x-1}\right] \frac{1}{(2x-1)^m}$$

$$= n \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{1}{(2x-1)^{m+1}} - \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{\varepsilon_x}{(2x-1)^m}$$

oder wegen:

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{(2x-1)^\nu} = \frac{2^\nu-1}{2^\nu} \zeta(\nu)$$

157) $$\sum_{x=1}^{x=n} \varkappa_{-m}(x) = \frac{2^{m+1}-1}{2^{m+1}} n\zeta(m+1) - \Delta_{17},$$

wo:

$$\Delta_{17} = n \sum_{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]+1}^{x=\infty} \frac{1}{(2x-1)^{m+1}} + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{\varepsilon_x}{(2x-1)^m}$$

ist, so dass man die Beziehungen:

158) $$|\Delta_{17}| < \frac{2^m \zeta(m+1)}{(n+1)^{m-1}} + \frac{2^m-1}{2^m} \zeta(m) \qquad (m > 1)$$

159) $$|\Delta_{17}| < \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2} \log(n+1) + \frac{C}{2} + \frac{1}{n-1} \qquad (m = 1)$$

hat. Für die erste von diesen Formeln kann man auch etwas einfacher schreiben:

160) $$|\Delta_{17}| < \frac{\pi^2}{6} \left(1 + \frac{2^m}{(n+1)^{m-1}}\right).$$

Aus der Gleichung 157) folgt:

161) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \varkappa_{-m}(x)}{n} = \frac{2^{m+1}-1}{2^{m+1}} \zeta(m+1) \qquad (m > 0)$$

162) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \varkappa_{-(2m-1)}(x)}{n} = \frac{(4^m-1)\pi^{2m} B_m}{2\Gamma(2m+1)}$$

welche Relationen sich übrigens auch aus einer Formel des Herrn E. Cesaro über Divisoren, welche Vielfache einer gegebenen Zahl k sind, herleiten lassen.

Man hat also die Theoreme:

Die Summe der reciproken $m$ten Potenzen der ungeraden Divisoren einer Zahl beträgt im Mittel:

$$\frac{2^{m+1}-1}{2^{m+1}} \zeta(m+1).$$

Die Summe der reciproken $(2m-1)$ten Potenzen der ungeraden Divisoren einer Zahl beträgt im Mittel:

$$\frac{(4^m-1)\pi^{2m} B_m}{2\Gamma(2m+1)}$$

Die Summe der reciproken ungeraden Divisoren einer Zahl beträgt im Mittel: $\frac{\pi^2}{8}$.

Die Summe der reciproken Cuben der ungeraden Divisoren einer Zahl beträgt im Mittel: $\frac{\pi^4}{96}$.

Die Summe der reciproken fünften Potenzen der ungeraden Divisoren einer Zahl beträgt im Mittel: $\frac{\pi^6}{960}$.

Das dritte von diesen Theoremen hat schon Herr E. Cesaro ausgesprochen.

Zur Erledigung des speciellen Falles $m=0$ benütze ich die von mir aufgestellte Gleichung: („Arithmetische Theoreme." Denkschriften der k. Akad. d. Wissensch., mathem.-naturw. Classe, 49. Bd., II. Abth., p. 105 ff.):

163) $$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} \left[\frac{n}{2x-1}\right] = \sum_{x=1}^{x=\lambda_1} \left[\frac{n}{2x-1}\right] + \sum_{x=1}^{x=\lambda_1} \left[\frac{n+x}{2x}\right] - \lambda_1^2,$$

wo:

$$\lambda_1 = \left[\frac{\sqrt{8n+1}+1}{4}\right]$$

ist.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\sum_{x=1}^{x=n} z_0(x) = n \sum_{x=1}^{x=2\lambda_1} \frac{1}{x} - \lambda_1^2 + \frac{\lambda_1}{2} - \sum_{x=1}^{x=\lambda_1} (\varepsilon_x + \varepsilon'_x) \qquad (0 \leqq \varepsilon_x, \varepsilon'_x < 1)$$

oder:

164) $$\sum_{x=1}^{x=n} z_0(x) = \frac{n}{2} \{\log n + 2C - 1 + \log 2\} + \Delta'_{17},$$

wo:

$$\Delta'_{17} = \frac{\varepsilon''}{2\lambda_1} + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{8n}\right) + \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{8n+1}+1}\right) + \log\left(1-\frac{4\varepsilon'''}{\sqrt{8n+1}+1}\right) + \frac{\lambda_1}{2} - \sum_{x=1}^{x=\lambda_1} (\varepsilon_x + \varepsilon'_x) -$$
$$- \frac{(4\varepsilon+1)(\sqrt{8n+1}+1)}{8} + \varepsilon^2 \qquad (0 \leqq \varepsilon, \varepsilon_x, \varepsilon'_x, \varepsilon'', \varepsilon''' < 1)$$

ist. Eine einfache Rechnung zeigt, dass Δ'_{17} der Bedingung:

165) $$|\Delta'_{17}| < 1 + \frac{3}{2}\log 2 + \frac{6}{\sqrt{8n+1}-3} + \frac{5(\sqrt{8n+1}+1)}{4}$$

genügt.

Aus der Gleichung 164) folgt:

166) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} z_0(x)}{n} = \frac{1}{2}\{\log n + 2C - 1 + \log 2\}$$

167) $$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\sum_{x=n-\eta+1}^{x=n+\eta} z_0(x)}{2\eta} = \frac{1}{2}\{\log n + 2C + \log 2\} \qquad \left(\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0, \lim_{n, \eta=\infty} \frac{\sqrt{n}}{\eta} = 0\right)$$

168) $$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\sum_{x=n-\eta+1}^{x=n+\eta} z_0(x)}{2\eta} = \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=[ne]} z_0(x)}{[ne]}$$

169) $$\lim_{s=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=10^s} z_0(x) - \sum_{x=1}^{x=10^{s-1}} z_0(x)}{10^s - 10^{s-1}} = \frac{1}{2}\left\{s \log 10 + 2C - 1 + \log 2 + \frac{\log 10}{9}\right\}.$$

Man hat daher die Theoreme:

Ist:

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\sqrt{n}}{\eta} = 0$$

so hat jede ganze Zahl im Intervalle $n-\eta+1 \ldots n+\eta$ im Mittel:

$$\frac{1}{2}(\log n + 2C + \log 2)$$

ungerade Divisoren.

Ist:

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{n,\, \eta=\infty} \frac{\sqrt{n}}{\eta} = 0$$

so hat jede ganze Zahl im Intervalle $n-\eta+1 \ldots n+\eta$ im Mittel eben so viele ungerade Divisoren als die Zahlen im Intervalle $1 \ldots [ne]$.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{2}\left\{ s \log 10 + 2C - 1 + \log 2 + \frac{\log 10}{9} \right\}$$

ungerade Divisoren.

Das arithmetische Mittel der grössten ganzen Zalen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{2n}{2n}$$

enthalten sind, nähert sich mit wachsendem n dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{2}\{\log n + 2C - 1 + \log 2\}.$$

Bezeichnet man mit $\bar{z}_0(x)$ die Anzahl der geraden Divisoren von x, so folgt aus den eben abgeleiteten Gleichungen:

170) $$\sum_{x=1}^{x=n} z_0(x) = \sum_{x=1}^{x=n} \bar{z}_0(x) + n \log 2 + \Delta_{18}$$

171) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} z_0(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=n} \bar{z}_0(x)}{n} = \log 2,$$

wo:

$$|\Delta_{18}| < 4\sqrt{n} + 2 + 3\log 2 + \frac{12}{\sqrt{8n+1}-3} + \frac{5(\sqrt{8n+1}+1)}{2}$$

ist.

Die Formel 171) hat schon Herr E. Cesaro mitgetheilt.

Man sieht sofort, dass aus diesen Gleichungen sich folgende Theoreme ergeben:

Ist:

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\gamma,\, n=\infty} \frac{\sqrt{n}}{\gamma} = 0,$$

so haben die Zahlen im Intervalle $n-\gamma+1 \ldots n+\gamma$ im Mittel eben so viele gerade Divisoren als die Zahlen im Intervalle $1 \ldots [ne]$.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{2}\left\{s \log 10 + 2C - 1 - \log 2 + \frac{\log 10}{9}\right\}$$

gerade Divisoren.

Aus der Formel:

$$2\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^{x-1}\left[\frac{n}{2x-1}\right] = 2\sum_{x=1}^{x=\lambda_1} (-1)^{x-1}\left[\frac{n}{2x-1}\right] + \sum_{x=1}^{x=\lambda_1} (-1)^{\left[\frac{n+x}{2x}\right]} + (-1)^{\lambda_1+1}\lambda_1$$

folgt:

$$2\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^{x}\left[\frac{n}{2x+1}\right] = 2n\sum_{x=1}^{x=\lambda_1} \frac{(-1)^{x-1}}{2x-1} - 2\sum_{x=1}^{x=\lambda_1} (-1)^{x-1}\varepsilon + \sum_{x=1}^{x=\lambda_1} (-1)^{\left[\frac{n+x}{2x}\right]} + (-1)^{\lambda_1+1}\lambda_1.$$

Wegen der bekannten Formel:

$$\sum_{x=1}^{x=m} \frac{(-1)^{x-1}}{2x-1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\sin\left(2m \operatorname{arctang}\frac{1}{\vartheta}\right)}{2m(1+\vartheta^2)} \qquad (|\vartheta|<1)$$

kann man diese Gleichung auch in folgender Form schreiben:

172) $$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^{x-1}\left[\frac{n}{2x-1}\right] = \frac{\pi}{4}\, n + \Delta_{19}$$

wo:

$$\Delta_{19} = \sum_{x=1}^{x=\lambda_1} (-1)^{x}\varepsilon - \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{x=\lambda_1} (-1)^{\left[\frac{n+x}{2x}\right]} + \frac{(-1)^{\lambda_1}\lambda_1}{2} - \frac{n \sin\left(2\lambda_1 \operatorname{arctang}\frac{1}{\vartheta}\right)}{2\lambda_1(1+\vartheta^2)^{\lambda_1}}$$

ist, aus welcher Gleichung sofort die Beziehung:

173) $$|\Delta_{19}| < 2\lambda_1 + \frac{n}{2\lambda_1}$$

oder einfacher:

174) $$|\Delta_{19}| < \frac{6n-4}{\sqrt{8n+1}-3} - 1$$

folgt.

Die eben abgeleiteten Relationen liefern sofort die Formel:

175) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^{x-1}\left[\frac{n}{2x-1}\right]}{n} = \frac{\pi}{4}.$$

Beachtet man, dass die linke Seite der Gleichung 172) den Überschuss der Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $4s+1$ sind, über die Anzahl der übrigen ungeraden Divisoren angibt, so erhält man die Theoreme:

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer Zahl, welche die Form $4s+1$ besitzen, übertrifft die Anzahl der übrigen ungeraden Divisoren im Mittel um $\frac{\pi}{4}$.

Die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch die binäre quadratische Form x^2+y^2 beträgt im Mittel π.

Beiläufig vier Fünftel (genauer $\frac{\pi}{4}$) von den grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{2n}{2n}$$

enthalten sind, sind ungerade.

Dividirt man eine grosse Zahl durch alle das Doppelte dieser Zahl nicht übersteigenden geraden Zahlen, so ist beiläufig bei vier Fünfteln (genauer $\frac{\pi}{4}$) dieser Divisionen entweder der Quotient gerade und gleichzeitig der zugehörige Bruchrest grösser als $\frac{1}{2}$, oder der Quotient ungerade und der zugehörige Bruchrest kleiner als $\frac{1}{2}$.

Man kann 39 gegen 11 wetten, dass der bei der Division einer grossen Zahl durch eine das Doppelte dieser Zahl nicht übertreffende gerade Zahl auftretende Quotient gerade und der zugehörige Bruchrest nicht kleiner als $\frac{1}{2}$, oder dass dieser Quotient ungerade und der zugehörige Bruchrest kleiner als $\frac{1}{2}$ ist.

Für $n = 40$ hat man z. B.:

$$\left[\frac{41}{2}\right] = 20, \left[\frac{42}{4}\right] = 10, \left[\frac{43}{6}\right] = 7, \left[\frac{44}{8}\right] = 5, \left[\frac{45}{10}\right] = 4, \left[\frac{46}{12}\right] = 3, \left[\frac{47}{14}\right] = 3, \left[\frac{48}{16}\right] = 3, \left[\frac{49}{18}\right] = 2, \left[\frac{50}{20}\right] = 2,$$

$$\left[\frac{51}{22}\right] = 2, \left[\frac{52}{24}\right] = 2, \left[\frac{53}{26}\right] = 2, \left[\frac{54}{28}\right] = 1, \left[\frac{55}{30}\right] = 1, \ \ldots, \left[\frac{80}{80}\right] = 1,$$

so dass also 32 von diesen grössten ganzen Zahlen ungerade und nur 8 gerade sind.

Die ersten zwei von den angeführten Sätzen hat schon Herr E. Cesaro mitgetheilt.

Es ist ferner, wie man leicht findet:

$$176) \qquad \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^{\frac{(x-1)(x-2)}{2}} \left[\frac{n}{2x-1}\right] = \sum_{x=1}^{x=\lambda_1} (-1)^{\frac{(x-1)(x-2)}{2}} \left[\frac{n}{2x-1}\right] + \sum_{x=1}^{x=\lambda_1} R\left(\left[\frac{n+x}{2x}\right]\right) - \lambda_1 R(\lambda_1)$$

wo:

$$R(y) = \frac{1-(-1)^y}{2}$$

für ungerade y, hingegen:

$$R(y) = 1-(-1)^{\frac{y}{2}}$$

für gerade y ist.

Da $(-1)^{\frac{(x-1)(x-2)}{2}}$ den Werth $+1$ hat, wenn $2x-1$ eine der Formen $8s+1$, $8s+3$ besitzt, und den Werth -1 in allen übrigen Fällen, so ist die Summe auf der linken Seite der Gleichung 176) die Differenz aus der Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche eine der Formen $8s+1$ oder $8s+3$ besitzen, und der Anzahl der übrigen ungeraden Divisoren.

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^{\frac{(x-1)(x-2)}{2}} \left[\frac{n}{2x-1}\right] = n \sum_{x=1}^{x=\lambda_1} \frac{(-1)^{\frac{(x-1)(x-2)}{2}}}{2x-1} + \Delta_{20}.$$

wo:

$$\Delta_{20} = -\sum_{x=1}^{x=\lambda_1} (-1)^{\frac{(x-1)(x-2)}{2}} \varepsilon_x + \sum_{x=1}^{x=\lambda_1} R\left(\left[\frac{n+x}{2x}\right]\right) - \lambda_1 R(\lambda_1)$$

ist.

Berücksichtigt man die bekannte Formel:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctang} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} - \cdots$$

so erhält man sofort:

177) $$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\nu+1}{2}\right]} (-1)^{\frac{(x-1)(x-2)}{2}} \left[\frac{n}{2x-1}\right] = \frac{n\pi}{2\sqrt{2}} - \Delta_{21},$$

wo:

178) $$|\Delta_{21}| < 5\lambda_1 + \frac{2n}{(\lambda_1-1)!}$$

oder einfacher:

179) $$|\Delta_{21}| < \frac{14n-10}{\sqrt{8n+1}-3} - \frac{5}{2}$$

ist.

Aus diesen Relationen folgt:

180) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\nu+1}{2}\right]} (-1)^{\frac{(x-1)(x-2)}{2}} \left[\frac{n}{2x-1}\right]}{n} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Man hat daher die Theoreme:

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer Zahl, welche eine der Formen $8s+1$, $8s+3$ besitzen, übertrifft die Anzahl der übrigen ungeraden Divisoren im Mittel um $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Die Anzahl der Darstellungen einer Zahl durch die binäre quadratische Form x^2+2y^2 ist im Mittel gleich dem Ausdrucke $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Jede ganze Zahl im Intervalle $n-\eta+1 \ldots n+\eta$, wo:

$$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\sqrt{n}}{\eta} = 0$$

ist, besitzt im Mittel:

$$\frac{1}{4}\left\{\log n + 2C + \log 2 + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right\}$$

Divisoren von den Formen $8s+1$, $8s+3$ und:

$$\frac{1}{4}\left\{\log n + 2C + \log 2 - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right\}$$

Divisoren von den Formen $8s-1$, $8s-3$.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{4}\left\{s \log 10 + 2C - 1 + \log 2 + \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\log 10}{9}\right\}$$

Divisoren, welche eine der Formen $8r+1$, $8r+3$ besitzen, und:

$$\frac{1}{4}\left\{s \log 10 + 2C - 1 + \log 2 - \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\log 10}{9}\right\}$$

Divisoren von den Formen $8r-1$, $8r-3$.

Beiläufig drei Zwanzigstel $\left(\text{genauer } \frac{\pi}{8}(\sqrt{2}-1)\right)$ von den grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{2n}{2n}$$

enthalten sind, sind einfachgerade.

Beiläufig ein Zwanzigstel $\left(\text{genauer } 1-\frac{\pi}{8}(3+\sqrt{2})\right)$ von den grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{2n}{2n}$$

enthalten sind, ist mehrfachgerade.

Dividirt man eine grosse Zahl durch alle, das Doppelte dieser Zahl nicht übersteigenden geraden Zahlen, so ist beiläufig bei einem Zwanzigstel $\left(\text{genauer } 1-\frac{\pi}{8}(3+\sqrt{2})\right)$ dieser Divisionen entweder der Quotient mehrfachgerade (Null eingeschlossen) und der Bruchrest kleiner als $\frac{1}{2}$, oder es hat der Quotient die Form $4s-1$ und der Bruchrest ist grösser als $\frac{1}{2}$.

Dividirt man eine grosse Zahl durch alle, das Doppelte dieser Zahl nicht übertreffenden geraden Zahlen, so ist beiläufig bei drei Zwanzigsteln $\left(\text{genauer } \frac{\pi}{8}(\sqrt{2}-1)\right)$ dieser Divisionen entweder der Quotient von der Form $4s+2$ und der Bruchrest kleiner als $\frac{1}{2}$, oder der Quotient von der Form $4s+1$ und der Bruchrest nicht kleiner als $\frac{1}{2}$.

Man kann 47 gegen 3 wetten, dass bei der Division einer grossen Zahl durch eine das Doppelte derselben nicht übersteigende gerade Zahl, weder ein mehrfachgerader Quotient — Null eingeschlossen — und zugleich ein Bruchrest, welcher kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, noch ein Quotient von der Form $4s-1$ und ein Bruchest, der nicht unterhalb $\frac{1}{2}$ liegt, auftritt.

Man kann 83 gegen 17 wetten, dass bei der Division einer grossen Zahl durch eine das Doppelte derselben nicht übertreffende gerade Zahl weder ein Quotient von der Form $4s+2$ und gleichzeitig ein unterhalb $\frac{1}{2}$ liegender Bruchrest noch ein Quotient von der Form $4s+1$ und gleichzeitig ein Bruchrest, welcher nicht unterhalb $\frac{1}{2}$ liegt, auftritt.

Das zweite von diesen Theoremen hat schon Herr E. Cesaro ausgesprochen.

Man findet ferner die Relation:

$$181)\qquad \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^{\left[\frac{2x}{3}\right]+x-1}\left[\frac{n}{2x-1}\right] = \sum_{x=1}^{x=\lambda_1} (-1)^{\left[\frac{2x}{3}\right]+x-1}\left[\frac{n}{2x-1}\right] + \sum_{x=1}^{x=\lambda_1} R_1\left(\left[\frac{n+x}{2x}\right]\right) - \lambda_1 R_1(\lambda_1)$$

wo:

$$R_1(z) = \alpha$$

ist, wenn:

$$z \equiv \pm\alpha \pmod{6}$$

ist.

Da $(-1)^{\left[\frac{2x}{3}\right]+x-1}$ den Werth $+1$ hat, wenn $2x-1$ eine der Formen $12\mu+1$, $12\mu+3$, $12\mu+5$ besitzt, und den Werth -1, wenn $2x-1$ eine der Formen $12\mu+7$, $12\mu+9$, $12\mu+11$ hat, so ist die Summe auf der linken Seite der Gleichung 181) die Differenz aus der Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche eine der Formen $12\mu+1$, $12\mu+3$, $12\mu+5$ besitzen, und der Anzahl der übrigen ungeraden Divisoren.

Aus der Gleichung 181) folgt:

182) $$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]}(-1)^{\left[\frac{2x}{3}\right]+x-1}\left[\frac{n}{2x-1}\right]=n\sum_{x=1}^{x=\lambda_1}\frac{(-1)^{\left[\frac{2x}{3}\right]+x-1}}{2x-1}+\Delta_{22}$$

wo:

$$\Delta_{22}=\sum_{x=1}^{x=\lambda_1}(-1)^{\left[\frac{2x}{3}\right]+x}\varepsilon_x+\sum_{x=1}^{x=\lambda_1}R_1\left(\left[\frac{n+x}{2x}\right]\right)-\lambda_1 R_1(\lambda_1)$$

ist.

Berücksichtigt man die Formel:

$$\frac{1}{3}\operatorname{arctang} x+\frac{2}{3}\operatorname{arctang}\frac{x}{1-x^2}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}-\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^{13}}{13}+\frac{x^{15}}{15}+\frac{x^{17}}{17}-\ldots$$

so erhält man sofort:

183) $$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]}(-1)^{\left[\frac{2x}{3}\right]+x-1}\left[\frac{n}{2x-1}\right]=\frac{5\pi}{12}n-\Delta'_{22}$$

wo:

184) $$|\Delta'_{22}|<7\lambda_1+\frac{1}{\lambda_1}$$

oder einfacher:

185) $$\Delta'_{22}<\frac{14n+19}{\sqrt{8n+1}-3}+\frac{21}{4}$$

ist.

Aus diesen Relationen folgt:

186) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]}(-1)^{\left[\frac{2x}{3}\right]+x-1}\left[\frac{n}{2x-1}\right]}{n}=\frac{5\pi}{12}.$$

Man hat daher die Theoreme:

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche eine der Formen $12\mu+1$, $12\mu+3$, $12\mu+5$ besitzen, übertrifft die Anzahl der übrigen ungeraden Divisoren im Mittel um $\frac{5\pi}{12}$.

Ist:

$$\lim_{\eta,n=\infty}\frac{\eta}{n}=0$$

$$\lim_{\eta,n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0,$$

so hat jede Zahl im Intervalle $n-\eta+1\ldots n+\eta$ im Mittel:

$$\frac{1}{4}\left\{\log n+2C+\log 2+\frac{5\pi}{6}\right\}$$

Divisoren, welche eine der Formen $12\mu+1$, $12\mu+3$, $12\mu+5$ besitzen, und:

$$\frac{1}{4}\left\{\log n+2C+\log 2-\frac{5\pi}{6}\right\}$$

Divisoren von den Formen $12\mu+7$, $12\mu+9$, $12\mu+11$.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{4}\left\{s\log 10+2C-1+\log 2+\frac{5\pi}{6}+\frac{\log 10}{9}\right\}$$

Divisoren von den Formen $12\mu+1$, $12\mu+3$, $12\mu+5$ und:

$$\frac{1}{4}\left\{s\log 10+2C-1+\log 2+\frac{\log 10}{9}-\frac{5\pi}{6}\right\}$$

Divisoren von den Formen $12\mu+7$, $12\mu+9$, $12\mu+11$.

Ungefähr dreizehn Fünfzigstel $\left(\text{genauer } \frac{\pi}{12}\right)$ von den grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{2n}{2n}$$

enthalten sind, besitzen eine der Formen $6\mu+2$, $6\mu+3$, $6\mu+4$.

Man kann 63 gegen 27 wetten, dass der Quotient, welchen man erhält, wenn man zu einer grossen Zahl eine dieselbe nicht übersteigende Zahl addirt und die Summe durch das Doppelte der hinzugefügten Zahl dividirt, eine der Formen 6μ, $6\mu+1$, $6\mu+5$ besitzt.

Unter den grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{2n}{2n}$$

enthalten sind, gibt es um $\left(\frac{\pi}{3}-1\right)n$ mehr solche, welche die Form $6\mu+3$ besitzen, als solche, welche durch 6 theilbar sind.

Es ist ferner:

$$187)\qquad \sum_{x=1}^{x=n}(-1)^{\left[\frac{x-1}{6}\right]}\left[\frac{n}{x}\right]=\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}(-1)^{\left[\frac{x-1}{6}\right]}\left[\frac{n}{x}\right]+\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}R_2\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)-[\sqrt{n}]\,R_2\left([\sqrt{n}]\right)$$

wo:

$$R_2(z)=\alpha$$

ist, wenn:

$$z\equiv\pm\alpha \pmod{12}$$

ist.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$188)\qquad \sum_{x=1}^{x=n}(-1)^{\left[\frac{x-1}{6}\right]}\left[\frac{n}{x}\right]=n\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\frac{(-1)^{\left[\frac{x-1}{6}\right]}}{x}+\Delta_{23}$$

wo:

$$\Delta_{23}=-\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}(-1)^{\left[\frac{x-1}{6}\right]}\varepsilon_x+\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}R_2\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)-[\sqrt{n}]\,R_2\left([\sqrt{n}]\right)\qquad (0\leqq\varepsilon_x<1)$$

ist.

Berücksichtigt man die Relation:

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{6}\log(1+x^6)+\frac{1}{3}\operatorname{arctang}x+\frac{2}{3}\operatorname{arctang}\frac{x}{1-x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\{\operatorname{arctang}(2x\sqrt{3})-\operatorname{arctang}(2x+\sqrt{3})\}=$$

$$=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}-\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}-\frac{x^9}{9}-\frac{x^{10}}{10}-\frac{x^{11}}{11}-\frac{x^{12}}{12}+\frac{x^{13}}{13}+\frac{x^{14}}{14}+\frac{x^{15}}{15}+\frac{x^{16}}{16}+\frac{x^{17}}{17}+\frac{x^{18}}{18}-\ldots$$

so erhält man die Gleichung:

189) $$\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^{\left[\frac{x-1}{6}\right]}\left[\frac{n}{x}\right]=\left\{\frac{\log 2}{6}+\left(\frac{5}{12}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\pi\right\}n-\Delta'_{23}$$

wo:

190) $$|\Delta'_{23}|<13\sqrt{n}+\frac{2}{\sqrt{n}}$$

ist.

Aus diesen Formeln ergibt sich die Gleichung:

191) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n}(-1)^{\left[\frac{x-1}{6}\right]}\left[\frac{n}{x}\right]}{n}=\left(\frac{5}{12}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\pi+\frac{\log 2}{6}$$

Da $(-1)^{\left[\frac{x-1}{6}\right]}$ den Werth $+1$ hat, wenn x eine der Formen $12\mu+1$, $12\mu+2$, $12\mu+3$, $12\mu+4$, $12\mu+5$, $12\mu+6$ besitzt, hingegen den Werth -1 hat, wenn x einer der Zahlen 0, 7, 8, 9, 10, 11 nach dem Modul 12 congruent ist, so stellt die auf der linken Seite der Gleichung 189) stehende Summe den Überschuss der Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche eine der Formen $12\mu+1$, $12\mu+2$, $12\mu+3$, $12\mu+4$, $12\mu+5$, $12\mu+6$ besitzen, über die Anzahl der übrigen Divisoren vor.

Man hat daher die Theoreme:

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer Zahl, welche eine der Formen $12\mu+2$, $12\mu+4$, $12\mu+6$ besitzen, übertrifft die Anzahl der übrigen geraden Divisoren im Mittel um $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\log 2}{6}$.

Ist:

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\eta}{n}=0$$

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0,$$

so hat jede Zahl im Intervalle $n-\eta+1\ldots n+\eta$ im Mittel:

$$\frac{1}{4}\left(\log n+2C-\frac{2}{3}\log 2+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right)$$

Divisoren, welche nach dem Modul 12 einer der Zahlen 2, 4, 6 congruent sind, und:

$$\frac{1}{4}\left(\log n+2C-\frac{4}{3}\log 2-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right)$$

Divisoren, welche nach dem Modul 12 einer der Zahlen 0, 8, 10 congruent sind.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{4}\left\{s\log 10+2C-1-\frac{2}{3}\log 2+\frac{\log 10}{9}+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right\}$$

Divisoren, welche nach dem Modul 12 einer der Zahlen 2, 4, 6 congruent sind, und:

$$\frac{1}{4}\left\{s\log 10+2C-1-\frac{4}{3}\log 2+\frac{\log 10}{9}-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right\}$$

Divisoren, welche nach dem Modul 12 einer der Zahlen 0, 8, 10 congruent sind.

Aus der Verbindung des von mir aufgestellten Theoremes:

„Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis $(\beta-\gamma)n$, welche von der Form $\beta x-\gamma$ sind, ist gleich der Summe der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{\beta n-(n-1)\gamma}{\beta},\ \frac{\beta n-(n-2)\gamma}{2\beta},\ \frac{\beta n-(n-3)\gamma}{3\beta},\ldots,\frac{\beta n}{\beta n}$$

enthalten sind"

mit bekannten Sätzen über die Divisoren der ganzen Zahlen fliessen sofort die neuen arithmetischen Theoreme:

Das arithmetische Mittel der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{4},\ \frac{n+3}{6},\ldots,\frac{2n}{2n}$$

enthalten sind, ist gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{2}\left\{\log n+2C-1+\log 2\right\}.$$

Das arithmetische Mittel der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+2}{3},\ \frac{n+4}{6},\ \frac{n+6}{9},\ldots,\frac{3n}{3n}$$

enthalten sind, ist gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{3}\left\{\log n+2C+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\log 3-\frac{1}{2}\right\}$$

Das arithmetische Mittel der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+5}{6},\ \frac{n+10}{12},\ \frac{n+15}{18},\ldots,\frac{6n}{6n}$$

enthalten sind, ist gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{6}\left\{\log n+2C+\log 6-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}\right\}$$

Das arithmetische Mittel der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{2n+1}{3},\ \frac{2n+2}{6},\ \frac{2n+3}{9},\ldots,\frac{3n}{3n}$$

enthalten sind, ist gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{2}{3}\left\{\log n+2C+\log 2+\frac{1}{2}\log 3-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right\}.$$

Das arithmetische Mittel der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{3n+1}{4},\ \frac{3n+2}{8},\ \frac{3n+3}{12},\ldots,\frac{4n}{4n}$$

enthalten sind, ist gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{4}\left\{\log n+\log 2-\frac{\pi}{2}+2C-1\right\}.$$

Das arithmetische Mittel der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{5n+1}{6}, \frac{5n+2}{12}, \frac{5n+3}{18}, \ldots, \frac{6n}{6n}$$

enthalten sind, ist gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{5}{6}\left\{\log n+2C+\log 30-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\sqrt{3}\right\}.$$

Aus der von mir mitgetheilten Gleichung: („Zahlentheoretische Relationen" Sitzungsb. d. kais. Akad. d. Wissensch., mathem.-naturw. Cl., 89. Bd., II. Abth., p. 841 ff.).

$$\sum_{x=1}^{x=n} \varphi_\varkappa(x) = \sum_{x=1}^{x=n} \xi_\varkappa\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\mu(x)$$

folgt:

192) $$\sum_{x=1}^{x=n} \varphi_\varkappa(x) = \frac{n^{\varkappa+1}}{(\varkappa+1)\,\zeta(\varkappa+1)}+\Delta_{24}$$

wo:

$$\Delta_{24}=\sum_{x=1}^{x=n}\mu(x)\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{n}{x}\right]^\varkappa+\binom{\varkappa}{2}\frac{B_1}{\varkappa-1}\left[\frac{n}{x}\right]^{\varkappa-1}-\binom{\varkappa}{4}\frac{B_2}{\varkappa-3}\left[\frac{n}{x}\right]^{\varkappa-3}+\binom{\varkappa}{6}\frac{B_3}{\varkappa-5}\left[\frac{n}{x}\right]^{\varkappa-5}-\ldots\right\}+$$
$$+\sum_{x=1,\,\mu=0}^{x=n,\,\mu=\varkappa}(-1)^{\varkappa-\mu}\binom{\varkappa+1}{\mu}\,\varepsilon_x^{\varkappa+1-\mu}\,n^\mu\,\frac{\mu(x)}{(\varkappa+1)x^\mu}$$

ist, aus welcher Gleichung folgt:

193) $$|\Delta_{24}| < \frac{n}{\varkappa+1}+n\left\{\log n+C+\frac{1}{n}\right\}+\sum_{\mu=2}^{\mu=\varkappa}\binom{\varkappa+1}{\mu}\frac{\zeta(\mu)}{(\varkappa+1)}n^\mu+\frac{n^\varkappa}{2}\zeta(\varkappa)+\binom{\varkappa}{2}\frac{B_1\,\zeta(\varkappa-1)}{\varkappa-1}n^{\varkappa-1}+$$
$$+\binom{\varkappa}{4}\frac{B_2\,\zeta(\varkappa-3)}{\varkappa-3}n^{\varkappa-3}+\binom{\varkappa}{6}\frac{B_3\,\zeta(\varkappa-5)}{\varkappa-5}n^{\varkappa-5}+\ldots+B_{\frac{\varkappa-1}{2}}\frac{\pi^2}{12}n^2\varkappa \quad (\varkappa \text{ ungerade}).$$

194) $$|\Delta_{24}| < \frac{n}{\varkappa+1}+n\left\{\log n+C+\frac{1}{n}\right\}+\sum_{\mu=2}^{\mu=\varkappa}\binom{\varkappa+1}{\mu}\frac{\zeta(\mu)}{\varkappa+1}n^\mu+\frac{n^\varkappa}{2}\zeta(\varkappa)+\binom{\varkappa}{2}\frac{B_1\,\zeta(\varkappa-1)}{\varkappa-1}n^{\varkappa-1}+$$
$$+\binom{\varkappa}{4}\frac{B_2\,\zeta(\varkappa-3)}{\varkappa-3}n^{\varkappa-3}+\binom{\varkappa}{6}\frac{B_3\,\zeta(\varkappa-5)}{\varkappa-5}n^{\varkappa-5}+\ldots+B_{\frac{\varkappa}{2}} \quad (\varkappa \text{ gerade}).$$

Man hat daher die Relationen:

195) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{x=1}^{x=n}\varphi_\varkappa(x)}{n^{\varkappa+1}} = \frac{1}{(\varkappa+1)\,\zeta(\varkappa+1)}$$

196) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{x=1}^{x=n}\varphi_{2\varkappa-1}(x)}{n^{2\varkappa}} = \frac{\Gamma(2\varkappa+1)}{(2\pi)^{2\varkappa}\,\varkappa\,B_\varkappa}$$

197) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \varphi(x)}{n^2} = \frac{3}{\pi^2}$$

198) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \varphi_3(x)}{n^3} = \frac{45}{2\pi^4}$$

Die Formel 197) wurde schon von Dirichlet, Mertens, Bugajef, Cesaro, Perott, Sylvester bewiesen.

Man hat ferner:

199) $$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} \left[\frac{n}{2x-1}\right] \frac{(-1)^x}{(2x-1)^r} = n \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(-1)^x}{(2x-1)^{r+1}} - \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(-1)^x \varepsilon_x}{(2x-1)^r}$$
$$= \frac{n}{4^{r+1}} \left\{B\left(\frac{3}{4}, -r-1\right) - B\left(\frac{1}{4}, -r-1\right)\right\} - \Delta_{25}$$

wo:

$$B(x, \nu) = E(x+\varkappa, \nu) - \frac{1}{\nu+1} + C(\nu) - \sum_{s=0}^{s=\varkappa-1} (x+s)^\nu$$

die von Herrn Kinkelin eingeführte allgemeine Bernoulli'sche Function ist, so dass also:

$$E(\varkappa, \nu) = \frac{\varkappa^{\nu+1}}{\nu+1} - \frac{\varkappa^\nu}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{(-1)^{\lambda-1}}{2\lambda} \binom{\nu}{2\lambda-1} B_\lambda \varkappa^{\nu-2\lambda+1} \qquad (\nu+1 \geqq 2\lambda)$$

$$C(\mu) = \zeta(-\mu) + \frac{1}{\mu+1}$$

und:

$$\Delta_{25} = n \sum_{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]+1}^{x=\infty} \frac{(-1)^x}{(2x-1)^{r+1}} - \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(-1)^x \varepsilon_x}{(2x-1)^r}$$

ist, aus welcher Gleichung sofort die Beziehung:

200) $$\Delta_{25} < \frac{2^r \zeta(r+1)}{(n+1)^r} n + \frac{1}{4^r} \left\{B\left(\frac{3}{4}, -r\right) - B\left(\frac{1}{4}, -r\right)\right\}$$

oder einfacher:

201) $$|\Delta_{25}| < \frac{2^r \pi^2}{6n^{r-1}} + 2$$

folgt.

Aus den eben aufgestellten Gleichungen ergeben sich die Formeln:

202) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} \left[\frac{n}{2x-1}\right] \frac{(-1)^x}{(2x-1)^r}}{n} = \frac{1}{4^{r+1}} \left\{B\left(\frac{3}{4}, -r-1\right) - B\left(\frac{1}{4}, -r-1\right)\right\}$$

203)
$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} \left[\frac{n}{2x-1}\right] \frac{(-1)^x}{(2x-1)^{2r}}}{n} = \frac{\pi^{2r+1}\,\tau_{2r}}{2^{2r+2}\,\Gamma(2r+1)}$$

wo die Grösse τ_{2r} der $r$te Secantencoëfficient ist.

Da die auf der linken Seite der Gleichung 199) stehende Summe den Überschuss der Summe der reciproken $r$ten Potenzen derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche die Form $4s+1$ besitzen, über die Summe der reciproken $r$ten Potenzen der übrigen ungeraden Divisoren angibt, so hat man die im Wesentlichen schon von Herrn E. Cesaro aufgestellten Sätze:

Die Summe der reciproken $r$ten Potenzen derjenigen Divisoren einer Zahl, welche die Form $4s+1$ besitzen, übertrifft die Summe der reciproken $r$ten Potenzen der übrigen ungeraden Divisoren im Mittel um:

$$\frac{1}{4^{r+1}}\left\{B\left(\frac{3}{4},-r-1\right)-B\left(\frac{1}{4},-r-1\right)\right\}$$

Die Summe der reciproken $(2r)$ten Potenzen derjenigen Divisoren einer Zahl, welche die Form $4s+1$ besitzen, übertrifft die Summe der reciproken $(2r)$ten Potenzen der übrigen ungeraden Divisoren im Mittel um:

$$\frac{\pi^{2r+1}\,\tau_{2r}}{2^{2r+2}\,\Gamma(2r+1)}.$$

Die Summe der reciproken Quadrate derjenigen Divisoren einer Zahl, welche die Form $4s+1$ besitzen, übertrifft die Summe der reciproken Quadrate der übrigen ungeraden Divisoren im Mittel um $\frac{\pi^3}{32}$.

Die Summe der reciproken Biquadrate derjenigen Divisoren einer Zahl, welche die Form $4s+1$ besitzen, übertrifft die Summe der reciproken Biquadrate der übrigen ungeraden Divisoren im Mittel um $\frac{5\pi^5}{1536}$.

Die Summe der reciproken sechsten Potenzen derjenigen Divisoren einer Zahl, welche die Form $4s+1$ besitzen, übertrifft die Summe der reciproken sechsten Potenzen der übrigen ungeraden Divisoren im Mittel um $\frac{61\,\pi^7}{184320}$.

Schreibt man in der Gleichung:

$$\bar{\omega}(n) = \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\mu^2(x)$$

für n: $\left[\frac{n}{y}\right]$, multiplicirt mit $\varphi_\varkappa(y)$ und summirt bezüglich y von $y=1$ bis $y=n$, so erhält man:

204)
$$\begin{aligned}\sum_{y=1}^{y=n} \bar{\omega}\left[\frac{n}{y}\right]\varphi_\varkappa(y) &= \sum_{x,y=1}^{x,y=n}\left[\frac{n}{xy}\right]\mu^2(x)\,\varphi_\varkappa(y)\\ &= \sum_{x=1}^{x=n}\mu^2(x)\left(\sum_{y=1}^{y=\left[\frac{n}{x}\right]}\left[\frac{\left[\frac{n}{x}\right]}{y}\right]\varphi_\varkappa(y)\right)\\ &= \sum_{x=1}^{x=n} S_\varkappa\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\mu^2(x).\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung folgt:

205)
$$\sum_{y=1}^{y=n}\omega\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\varphi_\varkappa(y) = \frac{n^{\varkappa+1}\,\zeta(\varkappa+1)}{(\varkappa+1)\,\zeta(2\varkappa+2)} + \Delta_{26}$$

wo:

$$\Delta_{26} = \sum_{x=1}^{x=n} \mu^2(x) \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{n}{x}\right]^{\varkappa} + \binom{\varkappa}{2} \frac{B_1}{\varkappa-1} \left[\frac{n}{x}\right]^{\varkappa-1} - \binom{\varkappa}{4} \frac{B_2}{\varkappa-3} \left[\frac{n}{x}\right]^{\varkappa-3} + \binom{\varkappa}{6} \frac{B_3}{\varkappa-5} \left[\frac{n}{x}\right]^{\varkappa-5} - \ldots \right\} +$$

$$+ \sum_{x=1, \nu=0}^{x=n, \nu=\varkappa} (-1)^{\varkappa-\nu} \binom{\varkappa+1}{\nu} \varepsilon_x^{\varkappa+1-\nu}\, n^{\nu} \frac{\mu^2(x)}{(\varkappa+1)\, x^{\nu}}$$

ist, aus welcher Gleichung folgt:

206) $$|\Delta_{26}| < \frac{n}{\varkappa+1} + n \left\{ \log n + C + \frac{1}{n} \right\} + \sum_{\nu=2}^{\nu=\varkappa} \binom{\varkappa+1}{\nu} \frac{\zeta(\nu)}{(\varkappa+1)\, \zeta(2\nu)} n^{\nu} + \frac{n^{\varkappa}}{2} \frac{\zeta(\varkappa)}{\zeta(2\varkappa)} + \binom{\varkappa}{2} \frac{B_1}{\varkappa-1} n^{\varkappa-1} \frac{\zeta(\varkappa-1)}{\zeta(2\varkappa-1)} +$$

$$+ \binom{\varkappa}{4} \frac{B_2}{\varkappa-3} n^{\varkappa-3} \frac{\zeta(\varkappa-3)}{\zeta(2\varkappa-6)} + \binom{\varkappa}{6} \frac{B_3}{\varkappa-5} n^{\varkappa-5} \frac{\zeta(\varkappa-5)}{\zeta(2\varkappa-10)} + \ldots + \frac{15\varkappa}{2\pi^2} B_{\frac{\varkappa-1}{2}} n^2 \qquad (\varkappa \text{ ungerade})$$

207) $$\Delta_{26} < \frac{n}{\varkappa+1} + n \left\{ \log n + C + \frac{1}{n} \right\} + \sum_{\nu=2}^{\nu=\varkappa} \binom{\varkappa+1}{\nu} \frac{\zeta(\nu)}{(\varkappa+1)\, \zeta(2\nu)} n^{\nu} + \frac{n^{\varkappa}}{2} \frac{\zeta(\varkappa)}{\zeta(2\varkappa)} + \binom{\varkappa}{2} \frac{B_1}{\varkappa-1} n^{\varkappa-1} \frac{\zeta(\varkappa-1)}{\zeta(2\varkappa-2)} +$$

$$+ \binom{\varkappa}{4} \frac{B_1}{\varkappa-3} n^{\varkappa-3} \frac{\zeta(\varkappa-3)}{\zeta(2\varkappa-6)} + \binom{\varkappa}{6} \frac{B_3}{\varkappa-5} n^{\varkappa-5} \frac{\zeta(\varkappa-5)}{\zeta(2\varkappa-10)} + \ldots + B_{\frac{\varkappa}{2}} \left\{ \frac{6}{\pi^2} n \left(\log n + \frac{12\mathfrak{C}}{\pi^2} + 2C - 1 \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2} \log n + 5 + 3C + 2 \log 2 \right) \sqrt{n} + 2 \right\}.$$

Man hat daher die Relationen:

208) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \bar{\omega}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \varphi_{\varkappa}(x)}{n^{\varkappa+1}} = \frac{2\zeta(\varkappa+1)\, \Gamma(2\varkappa+3)}{(\varkappa+1)\, (2\pi)^{2\varkappa+2}\, B_{\varkappa+1}}$$

209) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \bar{\omega}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \varphi_{2\varkappa-1}(x)}{n^{2\varkappa}} = \frac{\Gamma(4\varkappa)\, B_{\varkappa}}{(2\pi)^{2\varkappa}\, \varkappa\, \Gamma(2\varkappa)\, B_{2\varkappa}}$$

210) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \bar{\omega}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \varphi(x)}{n^2} = \frac{15}{2\pi^2}$$

211) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \bar{\omega}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \varphi_3(x)}{n^4} = \frac{105}{4\pi^4}$$

212) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \bar{\omega}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \varphi_5(x)}{n^6} = \frac{225225}{1382\pi^6}$$

Es ist:

213) $$\frac{1}{\zeta(s)\, \zeta(2s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s}$$

wo:

$$\sigma(n) = 0$$

ist, wenn n durch eine vierte Potenz theilbar ist, und in den anderen Fällen durch die Gleichung:

$$\sigma(n) = (-1)^{\tau}$$

bestimmt wird, wo τ die Anzahl derjenigen Primfactoren von n ist, welche in keiner höheren als der zweiten Potenz in n auftreten.

Aus der Gleichung 213) folgt:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\sigma(n)}{(mn^2)^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)\,\zeta(4s)}$$

Nun ist aber:

214)
$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)\,\zeta(4s)} = \prod\left(1+\frac{1}{p^s}\right)\left(1-\frac{1}{p^{4s}}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sigma_1(n)}{n^s}$$

wo:

$$\sigma_1(n) = 0$$

ist, wenn n durch eine zweite, dritte, sechste oder höhere Potenz theilbar ist, während in allen anderen Fällen:

$$\sigma_1(n) = (-1)^{\tau_1}$$

ist, wo τ_1 die Anzahl jener Primfactoren bedeutet, welche in n in der vierten oder fünften Potenz vorkommen.

Man hat daher:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\sigma(n)}{(mn^2)^s} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\sigma_1(r)}{r^s}$$

aus welcher Gleichung folgende Relation entspringt:

215)
$$\sum_{d_2} \sigma\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \sigma_1(r).$$

Nun ist:

216)
$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} \left[\frac{n}{x^2}\right]\sigma(x) = \sum_{x=1,\, y=1}^{x=[\sqrt{n}],\, y=n} \varepsilon\left(\frac{n}{x^2 y}\right)\sigma(x)$$
$$= \sum_{x=1}^{x=n} \varepsilon\left(\frac{n}{x}\right)\left(\sum_{d_2}\sigma\left(\sqrt{\frac{x}{d_2}}\right)\right)$$
$$= \sum_{x=1}^{x=n} \sigma_1(x).$$

Aus dieser Gleichung folgt:

217)
$$\sum_{x=1}^{x=n} \sigma_1(x) = \frac{540}{\pi^6}\, n - \Delta_{27}$$

wo:

$$\Delta_{27} = n \sum_{x=[\sqrt{n}]+1}^{x=\infty} \frac{\sigma(x)}{x^2} + \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} \varepsilon_x \sigma(x)$$

ist, aus welcher Formel sich die Beziehung:

218) $$|\Delta_{27}| < \frac{\pi^2}{6\sqrt{n}} + \sqrt{n}$$

ergibt.

Die Gleichung 217) liefert die Relation:

219) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \sigma_1(x)}{n} = \frac{540}{\pi^6}.$$

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER DEN

BAU DER QUERGESTREIFTEN MUSKELFASERN.

I. THEIL.

VON

ALEXANDER ROLLETT,

WIRKLICHEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

(Mit 4 Tafeln.)

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 13. NOVEMBER 1884.

Ich habe den Gegenstand, welchen ich hier behandeln will, seit langen Jahren nicht aus den Augen verloren, aber die Beschäftigung mit demselben wurde in mir unliebsamer Weise oft durch Arbeiten anderer Natur unterbrochen. Erst in der letztverflossenen Zeit sah ich mich anhaltender an denselben gefesselt.

Dabei bemerkte ich aber bald, dass ich eine Reihe von Beobachtungen über den Muskelbau aufgezeichnet habe, deren Mittheilung von einigem Nutzen für die bessere Einsicht in diesen schwierigen und noch vielfach controversen Gegenstand der Histologie sein dürfte. Ich fühle mich aber gedrängt, dieser Mittheilung noch die folgenden Bemerkungen vorauszusenden.

Ich bekenne mich zur Anschauung, dass es die wichtigste Aufgabe der Histologie ist, uns mit dem Bau der physiologischen, der lebenden Elementartheile und Gewebe bekannt zu machen.

Ich behaupte aber auch, dass diese Überzeugung niemals hemmend oder beschränkend auf die Wahl der Methoden wirken darf, deren wir uns zu histologischen Untersuchungen bedienen.

Es wird gewiss Jeder, der über unsere heutigen histologischen Kenntnisse orientirt ist und der weiss, wie wir zu denselben gelangt sind, zugeben, dass wir der nur in beschränktem Masse anwendbaren Untersuchung lebender Gewebe unter dem Mikroskope zwar die werthvollsten, aber doch nur verhältnissmässig geringe Antheile jener Kenntnisse verdanken.

Weit mehr Aufschlüsse haben uns die vielfach ausgebildeten histologischen Untersuchungsmethoden gebracht, bei deren Anwendung wir von vorneherein darauf verzichten, das lebende Gewebe zu beobachten, deren Resultate aber mit der nothwendigen strengen Kritik uns die erwünschten Schlüsse auf den Bau der lebenden Gewebe erlauben. Wo stünden wir heute in der Histologie, wenn diese Wege nicht betreten worden wären? Das mögen sich diejenigen vergegenwärtigen, welche das Vertrauen in histologische Beobachtungen mit der leichtsinnigen Abfertigung zu erschüttern suchen, dass dieselben nicht an frischen, lebenden Geweben gemacht wurden.

Im Allgemeinen gehen die Methoden der Histologie nach zwei Richtungen auseinander.

Wir suchen durch Conservirungs- und Härtemittel, durch Schneiden und Zupfen, durch Aufhellungsmittel und durch differenzirende Tinctionsmittel uns eine den Bau des frischen Gewebes möglichst getreu wiederholende Ansicht des Gewebes und seiner Elementartheile zu verschaffen. Oder wir wenden neben der mechanischen Zergliederung noch chemische Zersetzungsmittel, macerirende, Quellung erzeugende, fällende oder verdauende Agentien u. s. w. an, um aus den bei der Abänderung und dem Zerfall der Gewebe und Elementartheile entstehenden Bildern einen Schluss auf die Structur derselben zu machen.

Ich halte es nun auch nicht für gerechtfertigt, wenn man der ersteren Richtung unter allen Umständen ein grösseres Vertrauen entgegenbringt als der letzteren. Mit der nothwendigen Kritik können sie uns beide gleich werthvolle Aufschlüsse bringen. Ich finde mich veranlasst, auch das hier in Erinnerung zu bringen, weil ich mich überzeugt habe, dass controverse Fragen über den Bau der quergestreiften Muskelfaser an Zerfallbildern derselben ihrer Lösung bedeutend näher gebracht werden können.

Oft schon ist in der Lehre von der Muskelbewegung der Widerspruch zwischen den Ergebnissen der feineren Zergliederung der Muskelfasern und den Postulaten hervorgetreten, welche man auf Grund erkannter physiologischer Gesetze für den Muskelbau auszusprechen sich berechtigt glaubte. Der Skepticismus gegenüber den histologischen Methoden und der allein der Rathlosigkeit entspringende Vorwurf, dass die Histologie sich Artefacte schafft, anstatt lieber einzig das zu berücksichtigen, was am lebenden Gewebe zu sehen ist, wird uns aber niemals über jenes Dilemma hinaushelfen. Was helfen kann, ist einzig und allein Vertiefung durch streng kritische Forschung hier wie dort. Wer sich von dieser Überzeugung leiten lässt, wird meinen, gleich in den ersten Abschnitten enthaltenen Mittheilungen gewiss einiges Interesse entgegenbringen.

Eine weitere Bemerkung habe ich über die Literatur zu machen, dahin gehend, dass ich nicht beabsichtige, eine erschöpfende kritische Darstellung derselben zu geben. Man wird mir das für's Erste bei dem enormen Umfang, welchen die Literatur der quergestreiften Muskelfaser angenommen hat, gewiss nicht zum Vorwurfe machen. Ich werde nur gelegentlich das Eine oder das Andere anführen, was mir zu den Anschauungen, zu welchen ich gelangt bin, in näherer Beziehung zu stehen scheint.

Ich muss darum noch besonders hervorheben, dass meine Mittheilungen fast überall an bekannte Thatsachen anknüpfen werden. Ich will aber durch eine einheitliche, klärende und unrichtige Vorstellungen corrigirende Zusammenfassung meiner mikroskopischen Beobachtungen einer unter den vielen Anschauungen, welche über den Bau der quergestreiften Muskelfasern aufgetaucht sind, die Wege zu allgemeinerer Anerkennung ebnen. Es würde damit die Correctur gar vieler physiologischer Anschauungen über die Muskelcontraction erreicht, die man auf bestimmte, aber nicht zutreffende Vorstellungen vom Muskelbau gegründet hat.

Die Beobachtungen sind grösstentheils an Käfermuskeln gemacht und unter denselben werden sich viele bisher unbekannte, oder nicht oder nur wenig gewürdigte befinden, die in ihrem Zusammenhange die eigentliche Rechtfertigung für die Veröffentlichung dieser Mittheilungen bilden werden.

I.

Vorläufige Skizzirung des Baues der quergestreiften Muskelfaser.

Zur Vereinfachung der Darstellungen, welche ich in den folgenden Abschnitten zu geben habe, halte ich es für zweckmässig, hier eine Skizze des Baues der am meisten verbreiteten Form der quergestreiften Muskelfaser herzusetzen.

Der vom Sarkolemma umschlossene Inhalt der quergestreiften Muskelfaser besteht zunächst aus zwei Theilen: aus dem Sarkoplasma und aus den Fibrillen.

Sarkoplasma entspricht einem histologischen Begriff, ich bezeichne damit die hyalin oder fein körnig und stellenweise oft in ganz regelmässiger Anordnung verdichtet erscheinende, die Kerne in verschiedener, mehr oder weniger regelmässiger Anordnung in sich schliessende Substanz, welche innerhalb des Sarkolemmas alle von den Fibrillen freigelassenen Räume ausfüllt.

Durch die Bezeichnung, welche ich dieser Substanz gegeben habe, soll angedeutet werden, dass sie dem Protoplasma nahe steht, aber doch von demselben unterschieden werden muss.

Die Fibrillen sind der Länge nach gegliederte Gebilde. Ihre Gliederung rührt von einer regelmässigen Folge und Abwechslung verschiedener Substanzen her.

Diese Gliederung ist eine labile, die sie bedingenden Substanzen sind einem mit den verschiedenen physiologischen Zuständen der Muskelfasern einhergehenden Wechsel unterworfen.

Es wechselt die Anzahl, die Form und die substanzielle Beschaffenheit der Fibrillenglieder. Der Grad der Labilität ist aber nicht für alle in bestimmten Zuständen zu unterscheidenden Fibrillenglieder derselbe, während einzelne völlig verschwinden und neu wieder auftreten, vollzieht sich in anderen nur ein mehr oder weniger eingreifender Wechsel ihrer Beschaffenheit.

Die gegliederten Fibrillen liegen im Allgemeinen der Längenaxe der Muskelfasern parallel neben einander. Sie sind aber gruppenweise zu strang-, band- oder röhrenförmigen Bündeln zusammengeordnet und oft erscheinen auch noch diese Bündel (Muskelsäulchen) wieder zu grösseren Gruppen geordnet.

Dieser regelmässigen vor, während und nach der Contraction der lebenden Faser zu beobachtenden, also während aller physiologischen Zustände der Muskelfaser erhaltenen bestimmten Anordnung der gegliederten Fibrillen entspricht, da das Sarkoplasma alle von den Fibrillenbündeln freigelassenen Räume innerhalb der Muskelfaser ausfüllt, auch eine ganz bestimmte Architectonik des Sarkoplasmas selbst, welche am besten ausgeprägt auf dem Querschnitt der Muskelfaser zu sehen ist.

Ungleichmässige Dicke der in der Längenrichtung sich folgenden und abwechselnden verschiedenen Glieder der Fibrillen oder Fibrillenbündel bedingt aber auch in der Längenansicht der Muskelfaser eine wohl ausgeprägte Zeichnung der Grenzen des Sarkoplasmas.

Ausser der sichtlich mit der Vertheilung und Anordnung der Fibrillen zusammenhängenden Gestaltung des Sarkoplasmas, kommen in diesem letzteren selbst manchmal eigenthümlich gestaltete, regelmässig vertheilte und unter einander zusammenhängende Verdichtungen vor.

Das Sarkoplasma geht ohne Unterbrechung über in die nerventragende Substanz der Nervenhügel der zu den Muskelfasern zutretenden motorischen Nerven.

II.

Über den Scheibenzerfall von Käfermuskeln in Alkohol und die Querstreifung der Insectenmuskeln im erschlafften oder der Erschlaffung nahen Zustande.

Der Zerfall quergestreifter Muskelfasern in Scheiben, welchen ich hier beschreiben will, ist der, welchen Skey[1] zuerst abgebildet, und welchen bald darauf Bowman[2] an den Muskeln des Menschen, des Schweines, einer Sprotte und Eidechse in auffallendem Grade entwickelt gesehen und ausführlich behandelt hat.

Bowman[3] ist später wieder darauf zurückgekommen, ohne jedoch etwas Anderes als seine in der ersten Arbeit niedergelegten Beobachtungen anzuführen.

Dieser Zerfall tritt an Muskeln auf, welche in Alkohol eingelegt wurden und ist von einem anderen Zerfall der Muskelfasern in Scheiben, der auf die Wirkung von verdünnten Säuren leicht erhalten werden kann, durchaus verschieden und darf mit dem letzteren nicht verwechselt werden.

---

[1] Skey, Philosophical Transactions of the royal Society of London 1837. Plat XIX. Fig. 5.

[2] Bowman, Philosophical Transactions of the royal Society of London 1840. Part II, p. 469 und 470.

[3] Bowman, Article Muscle; the Cyclopaedia of anatomy and physiology. Edited by R. Todd. Vol. III, 1839—1847. p. 508 und 509 und R. B. Todd and W. Bowman, The physiological anatomy and physiology of man. London 1848—1853, S. 1, p. 151 und 152.

Ich komme hier vorerst in die eigenthümliche Lage, gegen eine meiner früheren Arbeiten [1] selbst polemisiren zu müssen. In derselben beschränkte ich mich auf die Untersuchung von Wirbelthiermuskeln.

An den Muskelfasern dieser war mir aber ein Scheibenzerfall in Folge von Alkoholwirkung damals nicht zur Beobachtung gekommen, ebensowenig, als das bis heute der Fall war.

Ich führte damals [2] an, dass ich nicht anzugeben wisse, welchem Umstande es Bowman zu danken hatte, dass einige von ihm in Weingeist bewahrte Muskeln in die von ihm beschriebenen Discs zerfielen und berief mich auf den einstimmungen Ausspruch Reichert's,[3] Henle's,[4] Hassall's,[5] Kölliker's[6] und E. Weber's,[7] dass dieser Zerfall ein sehr seltenes Ereigniss sein müsse.

Ich meinte aber dem gegenüber, dass von den zwei verschiedenen Substanzen, welche ich als Haupt- und Zwischensubstanz in regelmässiger Abwechslung in der Längenrichtung der Muskelfaser unterschieden hatte, die eine, die Hauptsubstanz, die Substanz der Bowman'schen Discs, Brücke's doppeltbrechende Substanz ganz zufallslos in Form von Scheiben isolirt werden könne, wenn man Salzsäure von 0·1%$_0$ oder Essigsäure auf die Muskelfasern wirken lässt, welche Reagentien die Zwischensubstanz, Brücke's einfach brechende Substanz auflösen sollten.

Das ist aber ganz entschieden unrichtig.

Was in den genannten Säuren quillt und schliesslich aufgelöst wird, ist gerade die stärker brechende Hauptsubstanz des frischen Muskels, sind die Discs von Bowman.

Die Verwechslung rührte daher, dass durch die Säurewirkung vorerst eine ähnliche Umkehr der Erscheinungen an den Muskelfasern zu Stande kommt, wie sie beim Übergang der Muskelfasern aus dem erschlafften in den contrahirten Zustand später allgemein bekannt wurde.

Die schwächer lichtbrechenden Segmente der Muskelfasern werden in Folge der Säurewirkung stärker lichtbrechend, und umgekehrt, die stärker lichtbrechenden Segmente schwächer lichtbrechend und in weiterer Folge der Säurewirkung werden gerade diese aufgelöst und dadurch ein Scheibenzerfall ganz anderer Art hervorgebracht, als der, welchen Bowman beschrieben hat.

Es ist zuerst von Krause [8] richtig erkannt worden, dass verdünnte Säuren die Substanz der Bowman'schen Discs selbst quellen machen und endlich auflösen.

Über das, was bei dem so hervorgebrachten Scheibenzerfall der Muskelfasern in Form von Scheiben isolirt wird, ist aber Krause nicht ins Klare gekommen. Es soll das in dem nächsten Abschnitte, wo ich den Säurezerfall der Muskelfasern ausführlich behandeln will, gezeigt werden.

Einen Scheibenzerfall der Muskelfasern in Alkohol, wie ihn Bowman beobachtete, führt Krause nicht an, wohl aber setzt er [9] dem von ihm in verdünnten Säuren beobachteten Scheibenzerfall einen anderen entgegen, der durch concentrirte Salpetersäure hervorgebracht werde, und bei welchem die coagulirten und gelb gefärbten Bowman'schen Discs isolirt werden sollen.

Von einem sehr untergeordneten Werthe sind in Bezug auf den Zerfall der Muskelfasern in Scheiben die Angaben, welche Reiser [10] in einer vor Krause's Arbeiten erschienenen Dissertation macht. In derselben

[1] Untersuchungen zur näheren Kenntniss des Baues der quergestreiften Muskelfaser. Sitzungsber. d. mathem.-naturw. Classe. d. kais. Akad. d. Wissensch. in Wien. Bd. XXIV, p. 291.

[2] L. c. p. 296.

[3] Müller's Archiv. Jahresbericht 1842.

[4] Canstatt's Jahresbericht für 1846, Bd. I. p. 66.

[5] Mikroskopische Anatomie. Übers. von Dr. O. Kohlschütter, p. 245.

[6] Mikroskopische Anatomie. Bd. II. 1. Hälfte p. 203. Handbuch der Gewebelehre, 2. Aufl., Leipzig 1855, p. 186.

[7] Artik. Muskelbewegung. Wagner's Handwörterbuch der Physiologie, Bd. II. 2. Abth., p. 65.

[8] Krause, Göttinger Nachrichten 1868, Nr. 17, pag. 358. Die motorischen Endplatten der quergestreiften Muskelfasern. Hannover 1860, p. 19, u. d. f. Zeitschr. für Biologie, V. Bd. München 1869, p. 415. Allgemeine und mikroskopische Anatomie. Hannover 1876, p. 85.

[9] Krause, Göttinger Nachrichten l. c. und Allgem. und mikroskop. Anatomie l. c.

[10] Reiser, Die Einwirkung verschiedener Reagentien auf den quergestreiften Muskelfaden. Inaugural-Dissertation. Zürich 1860.

werden die Sarcous elements von Bowman als das Element der contractilen Masse aufgefasst und diese Elemente durch ein besonderes Längsbindemittel zu Fibrillen und durch ein davon verschiedenes besonderes Querbindemittel zu Platten verbunden vorgestellt.

Eine ähnliche Anschauung hat zuerst Haeckel [1] für die Muskeln des Flusskrebses ausgesprochen. In der einfachen Weise, wie sie Reiser vorbringt, birgt sie recht viel Unverständliches in sich. Ich will die Gelegenheit nicht vorübergehen lassen, das zu zeigen, da ich in meinen späteren Auseinandersetzungen noch darauf werde verweisen müssen.

Hält man sich ganz strenge daran, dass ein Längsbindemittel (vergleiche die schematische Fig. 1, *A, l*) die Grundflächen, ein Querbindemittel (Fig. 1, *A, q*) aber die Mantelflächen der Sarcous elements (Fig. 1, *A, s*) verbindet, dann muss etwas Drittes die Räume (Fig. 1, *A. r*), welche zwischen den freien Mantelflächen des Längsbindemittels und der freien gitterförmigen Grundfläche des Querbindemittels vorhanden sein müssen, ausfüllen. Verzichtet man aber auf eine so strenge Auslegung der Bindemittel für die Sarcous elements, dann wären zunächst für zwei Bindemittel folgende Annahmen möglich.

Man könnte sich das Längsbindemittel continuirlich in jedem zwischen zwei Bowman'schen Discs gelegenen Muskelabschnitte vorstellen. (Fig 1. *B. l.*) Damit wäre aber eine Präformation der Platten statuirt und es würde dann leicht verständlich sein, wie durch Lösung des Längsbindemittels eine Isolirung der Platten erfolgen könne. Unverständlich aber bliebe, wie durch Lösung des Querbindemittels (Fig. 1, *B, q*) allein eine Fibrillenbildung erfolgen sollte. Es müsste dann ausser dieser Lösung auch noch eine den aufgereihten Sarcous elements entsprechende Zerklüftung des Längsbindemittels angenommen werden und die Fibrillen wären Artefacte

Zweitens könnte man sich das Querbindemittel continuirlich in der ganzen Länge der Muskelfaser vorstellen (Fig. 1, *C. q*), also nicht blos zwischen den Mantelflächen der Sarcous elements (Fig. 1, *C, s*), sondern auch zwischen den Mantelflächen der Stücke des Längsbindemittels (Fig. 1, *C. l*), welche je zwei Grundflächen der Sarcous elements verbinden. Dann wäre aber eine Präformation der Fibrillen statuirt und es würde verständlich wie durch Lösung des Querbindemittels die Fibrillen isolirt werden können. Unverständlich aber bliebe, wie durch Lösung des Längsbindemittels allein eine Plattenbildung zu Stande kommen könnte. Es müsste dann vielmehr auch noch eine Lösung der den Mantelflächen des Längsbindemittels entsprechenden Abschnitte des Querbindemittels angenommen werden, und die Platten wären dann Artefacte.

Nun will aber Reiser gerade darthun, dass sowohl die Platten als auch die Fibrillen Kunstproducte sind. Die einen sollen isolirt werden durch Reagentien, welche Lösung des longitudinalen Bindemittels allein bewirken. Dahin sollen gehören: Salzsäure, Essigsäure, Phosphorsäure, Chlorbaryum, Chlorcalcium, Natron, Kali, kohlensaures Kali. Andere Reagentien sollen dagegen das Querbindemittel allein lösen und dadurch zur Fibrillenbildung führen, und dahin sollen gehören: Chromsäure, doppeltchromsaures Kali, Millon's Reagens, Sublimatlösung, Alkohol, Äther, Glycerin, Salpetersäure, salpetersaures Kali. Von einem Scheibenzerfall in Alkohol hat — worauf ich jetzt verweisen will, um zu dem eigentlichen Gegenstande zurückzukehren — auch Reiser nichts gesehen, und in Bezug auf die Wirkung der Salpetersäure widerspricht seine Angabe der späteren von Krause.

Von anderen Autoren [2] ist der Scheibenzerfall der Muskelfasern in Alkohol nur gelegentlich als vereinzeltes Vorkommen gestreift worden, oder ein und der andere Bruch einer Faser in der Richtung der Querstreifen notirt worden.

Dagegen ist in die meisten histologischen und physiologischen Lehrbücher der Scheibenzerfall der Muskelfasern in verdünnter Salzsäure in dem Sinne übergegangen, als ob in demselben ein Scheibenzerfall vorläge,

---

[1] Haeckel, Müller's Archiv 1857. p. 491.

[2] Vergleiche u. A.: Schwann, Mikroskopische Untersuchungen über die Übereinstimmung in der Structur und dem Wachsthum der Thiere und Pflanzen. Berlin 1839, p. 165 und 166. Tab. IV, Fig. 4. (Maikäferlarven in Alkohol); Engelmann, Archiv f. d. gesammte Physiologie. Bd. 7, p. 46 und 52; Bd. 25, p. 543 u. d. f.

der mit dem von Bowman an Alkoholpräparaten beobachteten identisch wäre, was, wie schon früher ausgeführt wurde, nicht im Entferntesten der Fall ist.

Ich hatte einmal (18. August 1881) einen frisch gefangenen *Hydrophilus piceus*, nachdem er äusserlich gut abgetrocknet worden war, lebend in Alkohol von 93% geworfen.[1] Als ich nach 17 Tagen die Muskeln dieses Thieres in einer Mischung von 2 Theilen Glycerin und 1 Theil Wasser auf dem Objectträger untersuchte, war ich über die merkwürdigen Bilder, welche dieselben darboten, sehr erstaunt. Alle Muskeln dieses Thieres waren mit Ausnahme von solchen Stellen, wo sich Contractionswellen befanden, in ihrer ganzen Ausdehnung in Scheiben zerfallen. (Fig. 1.) Diese Scheiben entsprachen in vielen Fasern den Bowman'schen Scheiben oder den später von Engelmann[2] so genannten anisotropen Bändern, welche sich nach Engelmann aus zwei dunklen Querscheiben und einer zwischen diesen liegenden hellen Mittelscheibe (Hensen) zusammensetzen. Es sind das die aus langen Sarcous elements zusammengesetzten doppeltbrechenden Abschnitte Brücke's,[3] welche, wie ich gleich hier bemerken will, den in morphologischer Beziehung constantesten, weil in allen physiologischen Zuständen des Muskels immer leicht erkennbaren Gliedern der Muskelfibrille entsprechen. Ich werde diese Abschnitte in toto jetzt und in allen späteren Theilen dieser Abhandlung mit Q bezeichnen, den hellen Streifen aber, welcher in der Mitte derselben liegt, mit h (Fig. 2).

In anderen Fasern, welche den Scheibenzerfall zeigten, befanden sich aber an den isolirten Scheiben auch noch die Körnerschichten Flögel's[4] oder Nebenscheiben Engelmann's,[5] und zwar hing mit jedem Ende von Q eine solche Nebenscheibe zusammen, mit Q durch einen Streifen heller Substanz verbunden. Ich will den den Nebenscheiben Engelmann's entsprechenden Streifen mit N, den hellen Streifen, der N mit Q verbindet, mit J bezeichnen.

Muskeln in dieser Art von Scheibenzerfall begriffen, sind in Figur 3 dargestellt, zwar nicht nach einem Präparate von *Hydrophilus*, aber das Bild stimmt genau mit jenen Bildern überein, welche ich auch beim *Hydrophilus* beobachtet habe.

Man konnte Scheiben der ersten Art (Q) und Scheiben der zweiten Art ($NJQJN$) ganz frei und vereinzelt oder noch in paralleler oder nur wenig verschobener Aufreihung von der Seite beobachten. Noch viel interessanter sind aber Bilder, in denen die isolirten Scheiben noch innerhalb des Sarkolemmas liegend erscheinen, wie das auch in Fig. 1 und Fig. 2 dargestellt ist. Der Sarkolemmaschlauch erscheint dann mehr oder weniger aufgebläht, und zarte Scheidewände, die auf dem optischen Längsschnitt mittelst konischer Ansätze in eine den Sarkolemmaschlauch an seiner inneren Oberfläche belegende, feinkörnige Masse übergehen, theilen denselben in der Länge nach aneinander gereihte Kästchen. Wo sich die Querwände ansetzen, erscheint im Längencontour des Sarkolemmas eine Einziehung, dazwischen sind die Wände der Kästchen ausgebaucht und in jedem der Kästchen liegt eine isolirte Scheibe Q (Fig. 1) oder eine isolirte Scheibe $NJQJN$ (Fig. 3).

Ausserdem waren beide Arten von Scheiben in der Flächenansicht zu beobachten, indem sie völlig frei in der Zusatzflüssigkeit lagen. Oder sie lagen desorientirt in den Kästchen entweder auf der Grundfläche oder in der Seitenansicht mit ihrem Querdurchmesser in der Richtung der Längenaxe der Muskelfaser, oder diese unter verschiedenen Winkeln kreuzend.

Endlich waren auch leer gewordene Sarkolemmaschläuche zu sehen, in denen die früher besprochenen Querwände der Kästchen regelmässig wie Leitersprossen aufeinander folgten. Vergleiche Fig. 4, welches Bild zwar auch von einem erst später zu erwähnenden Käfer herrührt, aber ganz ebenso bei *Hydrophilus* zu beobachten war. Ich habe schon erwähnt, dass bei dem untersuchten *Hydrophilus* alle Muskeln die beschrie-

[1] Es bedeutet das Volumprocente eines Alkohols von 0·7951 spec. Gewicht bei 12° R. nach dem in Österreich eingeführten Alkoholometer.

[2] Engelmann, Pflüger's Archiv. Bd. 7, p. 37.

[3] Brücke, Denkschr. d. mathem.-naturw. Classe d. Wiener Akad. Bd. XV, p. 71.

[4] Flögel, Archiv für mikroskop. Anatomie, Bd. VIII, p. 60. Bonn 1872.

[5] L. c. p. 37 und 50.

bene Veränderung zeigten, und dass nur an Stellen, wo Contractionswellen sich befanden, der Scheibenzerfall nicht eingetreten war. Es ist das aber nicht so zu verstehen, dass der Scheibenzerfall überall fehlte, wo sich Contractionswellen befanden, im Gegentheile, ich traf auch einige contrahirte Stellen im Scheibenzerfall, worauf ich später ausführlich zurückkommen werde.

Nur an den Flugmuskeln des untersuchten Thieres fehlte jede Spur von Scheibenzerfall. Ich überzeugte mich gleich an diesem Käfer von einer schon an einem anderen Orte[1] hervorgehobenen Thatsache, welche ich durch die später mitzutheilenden ausgedehnten Untersuchungen an zahlreichen Coleopteren, Hymenopteren, Fliegen und anderen Insecten immer wieder bestätigt fand, dass nämlich die Flugmuskeln der Insecten in ihrem Bau von den anderen quergestreiften Muskelfasern dieser Thiere so wesentlich verschieden sind, dass aus Beobachtungen an den einen nicht Schlüsse auf das Verhalten der anderen gezogen werden dürften.

Ich habe mir vorgesetzt, die Flugmuskeln der Insecten später einmal besonders zu bearbeiten. In der vorliegenden Abhandlung lasse ich sie mit Ausnahme einer Thatsache, die ich später anführen muss, ganz unberücksichtigt.

In Bezug auf die anderen quergestreiften Muskeln des erwähnten *Hydrophilus* führe ich aber nun noch an, wie ich vorgegangen bin, um mir die Überzeugung zu verschaffen, dass die gesammte Musculatur des Käfers dieselben Veränderungen beim Liegen in Alkohol erlitten hatte. Ich riss zuerst den Kopf aus und untersuchte die an demselben hängen gebliebenen und in demselben enthaltenen Muskelfasern, dann entfernte ich den Prothorax zur Untersuchung der in demselben enthaltenen und das vordere Beinpaar bewegenden Muskeln, dann löste ich das Abdomen von der aus dem vereinigten Meso- und Metathorax bestehenden Flügelbrust und trennte die obere Hälfte derselben von der unteren, um nach Entfernung der Flugmuskeln zu den das zweite und dritte Beinpaar bewegenden Muskeln zu gelangen, und endlich brach ich bei Käfern, deren Grösse das erlaubte, auch noch den Femur des zweiten und dritten Beinpaares auf und untersuchte die darin enthaltenen Muskeln. Schliesslich wurden auch noch die Muskeln zwischen den Abdominalringen und jene des Geschlechtsapparates untersucht.

Das ist die Art, in welcher ich immer verfuhr, wenn es mir bei der Untersuchung eines Käfers darauf ankam, die sämmtlichen Muskeln des Skelettes zu untersuchen. Die Darmmuskeln habe ich, obwohl sie mit den Skelettmuskeln in ihrem Bau sehr nahe übereinstimmen und sich wie diese von den Flugmuskeln wesentlich unterscheiden, doch wegen ihrer Eigenthümlichkeiten vorläufig ebenso unberücksichtigt gelassen wie die Flugmuskeln. Nur gelegentlich werde ich auch eine oder die andere Beobachtung an den Darmmuskeln anführen. Bei dem erwähnten *Hydrophilus* führte mich die Untersuchung der Skelettmuskeln zur Überzeugung, dass ich nun einmal einen so ausgedehnten Scheibenzerfall wie ihn Bowmann an Alkoholpräparaten von Wirbelthiermuskeln beobachtet hatte, auch an Käfermuskeln gesehen habe, und die Bilder, welche ich zu Gesicht bekam, namentlich wenn das Sarkolemma noch erhalten war, forderten ganz entschieden zu einer näheren Verfolgung derselben auf.

Die Zeit von 17 Tagen, nach welcher ich den in Alkohol gebrachten *Hydrophilus* untersuchte, war eine ganz zufällige. Keineswegs war es aber eine so lange Zeit, dass ich annehmen konnte, die Muskeln hätten ihre Veränderung durch langes Liegen in Alkohol erlitten, denn oft hatte ich früher die Muskeln von *Hydrophili* untersucht, die Monate lang in Alkohol gelegen hatten, ohne dass ich einen so ausgedehnten Scheibenzerfall ihrer Muskeln beobachtet hätte.

Es konte ferner nicht ausgeschlossen werden, dass ich an dem untersuchten *Hydrophilus* den Scheibenzerfall der Muskeln schon viel früher zu Gesichte bekommen hätte, wenn ich eben nicht erst 17 Tage nach dem Einlegen in Alkohol, sondern schon früher die Untersuchung vorgenommen hätte.

Ich musste nach allen meinen früheren Erfahrungen annehmen, dass ich an dem untersuchten *Hydrophilus* eines jener seltenen Ereignisse beobachtet hatte, welches Bowman an Wirbelthiermuskeln, die in Alkohol conservirt worden waren, wahrnahm. In dieser Überzeugung brachte ich nun, da mir, wie schon

---

[1] Rollett, Sitzungsber. d. mathem.-naturw. Classe d. Wiener Akad. Bd. LXXXIX, Abth. III, 1884, p. 346.

gesagt, die beobachteten Bilder sehr wichtig zu sein schienen, nicht nur eine sehr grosse Anzahl von *Hydrophilus*, sondern auch zahlreiche andere Käfer, deren ich habhaft werden konnte, in 93% Alkohol mit der Absicht, die Muskeln derselben nach kürzerem oder längerem Verweilen in Alkohol zu untersuchen, um mir so vielleicht neuerlich ähnliche Bilder wie bei dem erst untersuchten *Hydrophilus* und einen Aufschluss über die Zeit, in welcher diese Bilder an den Muskeln auftreten, zu verschaffen.

Beim *Hydrophilus* führten diese Bemühungen zu keinem befriedigenden Resultate.

Sehr oft fand ich bei den untersuchten Thieren schon nach 24 oder 48 Stunden am ausgerissenen Kopf und im Prothorax einzelne Muskelfasern in Scheiben zerfallen, die übrigen Muskelfasern in allen Theilen des Käfers aber völlig compact mit den verschiedenen Zuständen der Querstreifung, die durch Engelmann's Untersuchungen an Käfermuskeln so genau bekannt geworden sind. Ganz dieselben Beobachtungen machte ich ferner, wenn ich Thiere untersuchte, die durch 4, 8, 10, 12, 14 und 16 Tage in Alkohol gelegen hatten, nur dass an den nicht in Scheiben zerfallenen Muskeln mit der Zeit des Verweilens in Alkohol die Deutlichkeit der Längsstreifung und die Isolirbarkeit der Fibrillen oft beträchtlich zunahm. Ich führe hier auch gleich an, dass für den *Hydrophilus* auch eine Veränderung der Stärke des Alkohols nicht zu dem Resultat führte, dass ich wieder einmal ein Thier mit so ausgedehntem Scheibenzerfall seiner Muskeln erhalten hätte, wie er sich bei dem erst erwähnten *Hydrophilus* vorfand.

Ich variirte die Stärke des Alkohols zunächst mit Rücksicht darauf, dass mit dem *Hydrophilus*, an welchem ich die beschriebenen ausgezeichneten Bilder beobachtete, trotz des Abtrocknens seiner äusseren Oberfläche vielleicht doch eine grössere Menge Wassers in den Alkohol hätte gekommen sein können.

Die Prüfung dieser Vermuthung versprach zwar von vorneherein nicht viel, da ich das Thier in ein, sein Volumen um sehr viel Mal übertreffendes Volumen Alkohol gebracht hatte, es war mir aber zum Vergleich mit den Wirkungen des starken Alkohols auch sehr erwünscht, die Wirkungen schwächeren Alkohols auf die Muskeln kennen zu lernen.

Ich fügte darum zu je einem Volumen des 93% Alkohol $^1/_2$, 1 oder 2 Volumina destillirten Wassers und brachte in diesen $^2/_3$-, $^1/_2$- und $^1/_3$-Alkohol wieder eine Anzahl von *Hydrophilus*, um dieselben nach kürzerer oder längerer Zeit zu untersuchen.

In dem $^1/_3$-Alkohol quellen die Muskeln, sowie alle Gewebe des Käfers bald sehr stark an, so dass man Kopf, Prothorax, Abdominalringe und Beine auseinander getrieben und den Käfer dadurch aufgebläht findet.

Unter dem Mikroskope erscheinen die Muskeln erweicht und macerirt. Sie erweisen sich in diesem Zustande bei der Präparation allerdings scheibenbrüchig, wenn ich mich so ausdrücken darf, und zwar gehen die Bruchflächen zwischen den Bowman'schen Scheiben durch, die letzteren sowohl, als auch die zwischen denselben vorhandenen Muskelfaserabschnitte sind aber mannigfach verzerrt und verunstaltet, und theilweise erscheinen die Scheiben selbst unregelmässig zerklüftet. Es sind das Bilder, die unzweifelhaft an die früher beschriebenen Bilder erinnern, aber nicht im Entferntesten die Schärfe und Prägnanz besitzen, welche die früher erwähnten Bilder vom Scheibenzerfall in starkem Alkohol darboten.

In dem $^1/_2$-Alkohol fand ich an allen Muskeln die Längsstreifung sehr hervortretend, den Muskelfaserinhalt viel weniger gequollen, oft aber das Sarkolemma sehr aufgebläht und wie ein weit abstehender Mantel den mit fibrillärer Zeichnung versehenen Muskelfaserinhalt umfassend.

In dem $^2/_3$-Alkohol sind die Muskelfasern noch weniger gequollen; ihr Ansehen stimmt mit dem der Muskeln von in starken Alkohol eingelegten Thieren nahe überein.

Ich habe nur dieses allgemeine Resumé beabsichtigt; auf alle die mannigfachen Bilder, welche man an den Muskeln solcher in verschieden starkem Alkohol conservirter Käfer beobachten kann, will ich nicht näher eingehen.

Den schönen Scheibenzerfall, welchen ich an Muskeln von Käfern, die in starkem Alkohol conservirt worden waren, beobachtete, konnte ich an den Käfern in verdünnterem Alkohol nicht, oder wenigstens nicht sicherer und schöner erhalten.

Ganz anders als am *Hydrophilus* gestaltete sich die Untersuchung, als ich die zahlreichen anderen Käferarten, die mir zugänglich wurden, in Arbeit nahm.

Die Untersuchung von nahe an 300 Käferspecies setzt mich nunmehr in den Stand, eine Reihe von Species anzugeben, bei welchen ein Scheibenzerfall der Muskelfasern, wie ich ihn zuerst bei einem *Hydrophilus* beobachtet habe, nicht zu den Seltenheiten, sondern zur Regel gehört, und zwar ist dieser Scheibenzerfall schon nach 24- bis 48stündigem Verweilen derselben in 93 $^0/_0$tigem Alkohol zu beobachten.

Die untersuchten Käferspecies und die Familien, welchen sie angehören, sind die unter dem Text verzeichneten,[1] und sind die Familien, Gattungen und Species benannt, wie es dem „Catalogus coleopterorum Europae et Caucasi". Auctoribus Dr. L. v. Heyden, E. Reitter et J. Weise. Ed. III., Berolini 1883, entspricht.

[1]

Familie	Gattung	Species	Familie	Gattung	Species
Cicindelidae	*Cicindela*	*campestris* L.		*Cybister*	*Roeseli* Füssly
		hybrida L.	*Gyrinidae*	*Gyrinus*	*natator* L.
Carabidae	*Procerus*	*gigas* Creutz.	*Hydrophilidae*	*Helophorus*	*griseus* Hrbst.
	Procrustes	*coriaceus* L.		*Hydrophilus*	*piceus* Linn.
	Orinocarabus	*hortensis* L.		*Hydrocharis*	*caraboides* L.
	Megadontus	*violaceus* L.	*Sphaeridiidae*	*Sphaeridium*	*scarabaeoides* L.
	Carabus	*cancellatus* Ill.			*bipustulatum* F.
	Nebria	*picicornis* Fabr.		*Cercyon*	*flavipes* F.
		Dahli Duftschm.	*Dryopidae*	*Dryops*	*prolifericornis* F.
	Notiophilus	*aquaticus* Linn.	*Staphylinidae*	*Aleochara*	*tristis* Er.
	Bembidion	*littorale* Oliv.		*Staphylinus*	*caesareus* Lederh.
		lampros Hrbst.			*similis* F.
	Broscus	*cephalotes* Linn.			*picipennis* F.
	Clivina	*fossor* L.		*Paederus*	*littoralis* Grav.
	Chlaenius	*Schrankii* Duft.		*Deleaster*	*dichrous* Grav.
	Badister	*bipustulatus* Fabr.		*Anthophagus*	*testaceus* Grav.
	Ophonus	*azureus* Fabr.	*Scydmaenidae*	*Cephennium*	*thoracicum* Müll.
	Pseudophonus	*ruficornis* Fabr.	*Silphidae*	*Choleva*	*cisteloides* Frölich
	Harpalus	*aeneus* F.		*Phosphuga*	*atrata* L.
	Stenolophus	*vaporariorum* F.			*reticulata* F.
	Zabrus	*gibbus* F.		*Thanatophilus*	*thoracicus* L.
	Amara	*communis* Panz.		*Silpha*	*carinata* Ill.
		trivialis Gyll.			*obscura* L.
		familiaris Duft.			*nigrita* Creutz.
	Abax	*striola* Fabr.		*Necrophorus*	*vespillo* L.
	Pterostichus	*transversalis* Duft.	*Nitidulidae*	*Meligethes*	(?)
		metallicus F.		*Cychramus*	*quadripunctatus* Hrbst.
		fasciatopunctatus Crtz.		*Rhizophagus*	(?)
	Poecilus	*cupreus* L.	*Dermestidae*	*Dermestes*	*vulpinus* F.
	Calathus	*melanocephalus* L.			*lardarius* L.
	Platynus	*angusticollis* F.		*Attagenus*	*megatoma* F.
		albipes F.			*pellio* L.
	Agonum	*prasinum* Letzn.		*Anthrenus*	*scrophulariae* L.
		sexpunctatum L.			*museorum* L.
		parumpunctatum Hb.	*Cistelidae*	*Byrrhus*	*gigas* F.
	Lebia	*crux minor* L.			*pilula* L.
	Brachinus	*crepitans* L.		*Cistela*	*caria* F.
		explodens Duft.	*Histeridae*	*Hister*	*quadrimaculatus* L.
Dyticidae	*Hydroporus*	*pubescens* Gyll.			*terricola* Germ.
	Platambus	*maculatus* L.			*quadrinotatus* Scrib.
	Ilybius	*guttiger* Gyll.	*Lucanidae*	*Lucanus*	*cervus* L.
		fuliginosus L.			v. *capreolus* Sulz.
	Colymbetes	*fuscus* L.		*Dorcus*	*parallelopipedus* L.
	Dyticus	*marginalis* L.	*Scarabaeidae*	*Scarabaeus*	*laticollis* L.
	Acilius	*sulcatus* L.		*Caccobius*	*Schreberi* L.
	Graphoderes	*cinereus* L.		*Copris*	*lunaris* L.

Ich kann nicht umhin, hier meinem Assistenten, Herrn Dr. Carl Laker, der, kundig in der Käferfauna unserer Alpenländer, nicht müde wurde, mich mit immer neuem Materiale zu versehen, dem Coleopterologen,

Familie	Gattung	Species
	Onthophagus	*taurus* Schreber.
		austriacus Panz.
		fracticornis Preyssl.
		ovatus L.
	Oniticellus	*flavipes* F.
	Aphodius	*erraticus* L.
		fossor L.
		fimetarius L.
		granarius L.
		sordidus F.
		inquinatus F.
		porcus F.
		prodromus Brahm.
		rufipes L.
		atramentarius Er.
	Geotrupes	*stercorarius* L.
		sylvaticus Panz.
		hemisphaericus Ol.
	Hoplia	*squamosa* F.
	Serica	*holosericea* Scop.
	Rhizotrogus	*solstitialis* L.
	Melolontha	*hippocastani* F.
		vulgaris F.
	Phyllopertha	*horticola* L.
	Anomala	*aurata* F.
	Oxythyrea	*stictica* L.
	Tropinota	*hirta* Poda.
	Cetonia	*aurata* L.
	Osmoderma	*eremita* Scop.
	Gnorimus	*nobilis* L.
	Trichius	*fasciatus* L.
Buprestidae	*Anthaxia*	*quadripunctata* L.
	Acmaeodora	(?)
	Agrilus	(?)
	Trachys	*minuta* L.
Elateridae	*Lacon*	*murinus* L.
	Elater	*nigrinus* Payk.
	Cardiophorus	*thoracicus* F.
		cinereus Hrbst.
	Melanotus	*niger* F.
		castanipes Payk.
	Athous	*niger* Redtb.
		haemorrhoidalis F.
		subfuscus Müll.
	Corymbites	*aeruginosus* F.
		haematodes F.
		holosericeus Ol.
		aeneus L.
	Agriotes	*aterrimus* L.
		pilosus Panz.
	Dolopius	*marginatus* L.
Dascillidae	*Dascillus*	*cervinus* L.
Cantharidae	*Eros*	*Aurora* Hrbst.
	Lamprorhiza	*splendidula* L.
	Cantharis	*rustica* Fall.

Familie	Gattung	Species
		obscura L.
		albomarginata Märk.
		paludosa Fall.
	Rhagonycha	*nigriceps* Wahlb.
		melanura Oliv.
		testacea L.
	Malthinus	(?)
	Malachius	*viridis* F.
	Dasytes	(?)
Cleridae	*Opilo*	*mollis* L.
	Cleroides	*formicarius* L.
	Clerus	*apiarius* L.
		favarius Ill.
	Necrobia	*violacea* L.
	Elateroides	*dermestoides* L.
Bruchidae	*Bruchus*	*fur* L.
		(?)
Byrrhidae	*Anobium*	*striatum* F.
	Hedobia	*imperialis* F.
Tenebrionidae	*Tentyria*	(?)
	Blaps	*mortisaga* L.
	Pimelia	*cribra* (?) Sol.
	Opatrum	*sabulosum* L.
	Scaphidema	*bicolor* F.
	Corticeus	*ferrugineus* Creutz.
	Tenebrio	*molitor* L.
	Stenomax	*lanipes* L.
Alleculidae	*Mycetochares*	*bipustulata* Ill.
	Cteniopus	*sulfureus* L.
Lagriidae	*Lagria*	*hirta* L.
Pyrochroidae	*Pyrochroa*	*coccinea* L.
Mordellidae	*Mordella*	*aculeata* L.
	Mordellistena	*abdominalis* F.
Meloidae	*Meloë*	*proscarabaeus* L.
		majalis L.
	Lytta	*vesicatoria* L.
Oedemeridae	*Nacerdes*	*melanura* L.
	Oedemera	*virescens* L.
Pythidae	*Mycterus*	*curculionides* F.
Curculionidae	*Otiorrhynchus*	*mastix* Oliv.
		planatus Hrbst.
		carinthiacus Germ.
		laevigatus F.
		perdix Oliv.
		gemmatus F.
		lepidopterus F.
	Phyllobius	*calcaratus* F.
		oblongus L.
	Polydrusus	*sericeus* Schall.
	Sciaphilus	*muricatus* F.
	Liophloeus	*nubilus* F.
	Chlorophanus	*viridis* L.
	Brachycerus	(?)
	Hypera	*punctata* F.
	Cleonus	*sulcirostris* L.

Herrn Major Gatterer, welcher uns bei der Bestimmung der Käfer unterstützte, sowie meinem Collegen, Prof. Dr. R. Klemensiewicz, der mir werthvolles Materiale während eines Aufenthaltes in Corsica sammelte, meinen besten Dank für ihre freundliche Unterstützung auszusprechen.

Ich füge hinzu, dass ich von Hymenopteren: *Vespa crabro* L. und *germanica*; *Polistes gallica* F.; *Apis mellifica* auct.; *Bombus terrestris* L. und einige Ameisen untersucht habe; ferner wurden *Sarcophaga carnaria* L. *Musca (Calliphora) vomitoria* L. und *Musca domestica* L.; *Periplaneta orientalis*, einige Heuschrecken, die gemeine Grille, *Astacus fluviatilis*, *Homarus vulgaris*, *Maja squinado* und eine *Palaemon*-Art in den Kreis der Untersuchung gezogen.

Die Käferspecies, bei welchen in der Regel die meisten oder eine sehr grosse oder nicht unbeträchtliche Menge, oder wenigstens eine Anzahl von Muskelfasern nach 24—48stündigem Liegen in $93^0/_0$tigem Alkohol den früher für den *Hydrophilus* beschriebenen Scheibenzerfall zeigen, sind im Verhältniss zur untersuchten Anzahl von Käferspecies nur wenige.

Familie	Gattung	Species
	Liparus	*germanus* L.
	Hylobius	*abietis* L.
	Pissodes	*pini* L.
	Erirrhinus	(?)
	Orchestes	*quercus* L.
		salicis L.
Apionidae	*Apion*	*craccae* L.
Rhynchitidae	*Rhynchites*	*germanicus* Hrbst.
		betulae L.
	Rhinomacer	*populi* L.
Mylabridae	*Spermophagus*	*cardui* Bohem.
Hylesinidae	*Myelophilus*	*piniperda* L.
Tomicidae	*Tomicus*	*typographus* L.
Cerambycidae	*Spondylis*	*buprestoides* L.
	Prionus	*coriaceus* L.
	Ergates	*faber* L.
	Stenocorus	*inquisitor* L.
	Gaurotes	*virginea* L.
	Acmaeops	*collaris* L.
	Pidonia	*lurida* F.
	Leptura	*tomentosa* F.
		testacea L.
		rubrotestacea Ill.
		scutellata F.
		sanguinolenta F.
		armata Hrbst.
		bifasciata Müll.
	Molorchus	*minor* L.
	Obrium	*brunneum* F.
	Callidium	*variabile* L.
		violaceum L.
	Hylotrupes	*bajulus* L.
	Clytus	*arietis* F.
	Cerambyx	*heros* Scop.
	Aromia	*moschata* L.
	Acanthocinus	*aedilis* L.
	Pogonochaerus	*pilosus* F.
	Dorcadion	*morio* F.
	Lamia	*textor* L.
	Anaesthetis	*testacea* F.
	Tetrops	*praeusta* L.

Familie	Gattung	Species
Chrysomelidae	*Donacia*	*impressa* Payk.
	Plateumaris	*sericea* L.
		affinis Kunz.
	Lema	*cyanella* L.
	Crioceris	*duodecimpunctata* L.
		asparagi L.
	Clytra	*quadripunctata* L.
	Gynandrophthalma	(?)
	Cryptocephalus	*sericeus* L.
		violaceus Leich.
	Gastroidea	*polygoni* L.
	Chrysomela	*caerulea* Ol.
		haemoptera L.
		goettingensis L.
		sanguinolenta L.
		lamina F.
		graminis L.
	Orina	*cacaliae* Schrank.
	Phytodecta	*quinquepunctata* F.
	Phyllodecta	*vulgatissima* L.
	Hydrothassa	*aucta* F.
	Plagiodera	*armoraciae* F.
	Melasoma	*aeneum* L.
		vigintipunctatum Scp.
		populi L.
		tremulae F.
	Agelastica	*alni* L.
	Lochmaea	*capreae* L.
	Galeruca	*tanaceti* L.
	Crepidodera	*helxines* L.
	Haltica	*oleracea* F.
	Cassida	*equestris* F.
Coccinellidae	*Hippodamia*	*tredecimpunctata* L.
	Coccinella	*septempunctata* L.
		bimaculata Pont.
	Mysia	*oblongo-guttata* L.
	Halyzia	*ocellata* L.
		vigintiduopunctata L.
		conglobata L.
	Subcoccinella	*globosa* Schneid.
	Scymnus	*analis* F.

Sie vertheilen sich auf fünf Familien: die Hydrophiliden, Sphaeridiiden, Silphiden, Histeriden, Scarabaeiden, Tenebrioniden und Alleculiden. In erster Reihe sind zu nennen die sämmtlichen oben angeführten *Aphodius*-Arten, *Hydrocharis caraboides*, *Scarabaeus latticollis*, *Sphaeridium scarabaeoides* und *bipustulatum*, *Pimelia cribra*, *Opatrum sabulosum* und *Cteniopus sulfureus*. Daran möchte ich reihen die oben angeführten *Onthophagus*-Arten, *Cercyon flavipes* und *Oniticellus flavipes*, die oben angeführten *Hister*-Arten und *Silpha obscura*. Und daran endlich *Stenomax lanipes*, *Blaps mortisaga*, *Thannatophilus thoracicus*, *Phosphuga atrata* und *reticulata*.

Als vereinzeltes Vorkommen, wie bei *Hydrophilus*, habe ich einen ausgedehnten Scheibenzerfall der Muskelfasern in Alkohol verzeichnet bei *Megadontus violaceus*, *Staphilinus caesareus*, *Oxythyrea stictica*, *Geotrupes sylvaticus*, *Phyllopertha horticola*. Dagegen muss ich hervorheben, dass ich bei den artenreichen Carabiden, mit Ausnahme des oben angeführten Falles, bei den Dyticiden, Elateriden, Curculioniden, Cerambyciden und Chrysomeliden niemals einen auch nur einzelne Fasern in toto betreffenden ähnlichen Scheibenzerfall beobachtet habe.

Diese Angaben stützen sich auf ein sehr reiches Beobachtungsmateriale. Nichtsdestoweniger können sie nicht als solche betrachtet werden, welche jeder Beobachter, der Lust hätte ebenso viele Käfer auf ihre Muskeln zu untersuchen, genau bestätigt finden wird. Diese Überzeugung wird sich wohl jedem einsichtigen Leser bei der Mittheilung der Thatsachen von selbst aufgedrängt haben.

Wohl werden aber meine Angaben für diejenigen von Werth sein, welche mit Aussicht auf Erfolg darangehen wollen, sich die Zerfallsbilder von Käfermuskeln zu verschaffen, die im Folgenden einem näheren Studium unterzogen werden sollen. Ich werde mich dabei vorerst auf die erschlafften oder dem Zustand vollständiger Erschlaffung nahen Muskelfasern beschränken und muss hier einige Bemerkungen über die an solchen Muskelfasern zu beobachtende Querstreifung vorausschicken. An erschlafften Käfermuskeln finde ich die Angaben, welche Engelmann[1] über die Anzahl der zu unterscheidenden Querstreifen oder Querbänder derselben macht, grösstentheils bestätigt. Zur Orientirung über die am häufigsten und gewöhnlichsten vorkommenden Bilder der Querstreifung mögen die in Fig. 5 entworfenen schematischen Zeichnungen dienen, welche ich, auf eine sehr grosse Reihe von Beobachtungen gestützt, entworfen habe. In jeder der Figuren *A*, *B* und *C* ist die Muskelfaser einmal bei hoher Einstellung des Mikroskopes gezeichnet (I) und daneben bei tiefer Einstellung (II).

Es ist in den Zeichnungen nur die Querstreifung berücksichtigt; die Längsstreifung, die in der That oft sowohl an ganz frischen ohne Zusatz untersuchten Muskeln als auch an Alkoholmuskeln in einzelnen oder in allen den verschiedenen Querstreifen völlig unsichtbar sein kann, ist nicht eingezeichnet.

Das Bild bei hoher Einstellung ist jenes, welches man zuerst erhält, wenn man das Objectiv allmälig von obenher dem Objecte annähert, dasselbe ist in Bezug auf die Grenzen der Querstreifen und die Seitenränder der Muskelfaser etwas weniger scharf, als das bei weiterem Senken des Objectivs darauffolgende Bild der tiefen Einstellung, bei welchem die Seitenränder am schärfsten begrenzt erscheinen. Das letztere Bild ist dasjenige, welches die Mikroskopiker gewöhnlich abbilden und ihren Beschreibungen der Muskelfaser zu Grunde legen. Nur in einzelnen Fällen sind auch Bilder bei hoher Einstellung aufgenommen worden.

Ich halte es aber in der That für wichtig, auch das Bild bei hoher Einstellung sehr genau zu berücksichtigen. Nur ist in allen Fällen peinlich darauf zu achten, dass man sich eine Verwechslung des hohen und tiefen Bildes nicht zu Schulden kommen lasse, weil dadurch die Deutung des Gesehenen verwirrt und einzelne Angaben über die Querstreifung einander widersprechend werden können, und weil in der That widersprechende Angaben einzelner Beobachter vorliegen, die nur auf die Verwechslung des hohen mit dem tiefen Bilde oder umgekehrt zurückgeführt werden können.

Die Lichtvertheilung ist in beiden Bildern bekanntlich ganz verschieden; was bei hoher Einstellung hell erscheint, ist bei tiefer Einstellung dunkel und umgekehrt, was bei hoher Einstellung dunkel, bei tiefer hell.

[1] L. c. p. 33.

Es ist dieser Wechsel der Lichtvertheilung bei beiden Einstellungen für die Muskelfasern von Amici[1] einmal eingehend besprochen worden. Später ist Krause[2] in einer Polemik mit Hensen darauf zurückgekommen. Ich lege aber hier besonderen Werth darauf, dass man sich daran erinnere, dass dieser Wechsel der Lichtvertheilung mit dem Vorhandensein verschieden lichtbrechender Substanzen im Muskel zusammenhängt.[3] Alles stärker lichtbrechende erscheint am Muskelfaden bei hoher Einstellung heller, alles schwächer lichtbrechende dabei dunkel; dagegen alles stärker lichtbrechende bei tiefer Einstellung dunkel, alles schwächer lichtbrechende dabei hell.

So gefasst, kann uns der Wechsel der Einstellung zu einem heuristischen Moment werden, und ich werde in der That von dem Wechsel der Einstellung später mehrfachen Gebrauch in diesem Sinne machen.

Abgesehen von der in verschiedenen Muskelfasern desselben Thieres oder verschiedener Thiere sehr wechselnden Breite der einzelnen Querstreifen ist in den Schematen Fig. 5 *A, B, C* dargestellt, was man als Querstreifen an Insectenmuskeln und von der Lichtvertheilung bei hoher und tiefer Einstellung an diesen Querstreifen am häufigsten zu sehen bekommt. Die meisten Bilder lassen sich auf die angeführten drei Formen zurückführen.

Was die Bezeichnung der zu unterscheidenden Querstreifen betrifft, so erschiene es mir zweckmässig, wenn man dieselbe einfach durch Buchstaben bezeichnen würde, sowie man ja auch die dunklen Linien im Sonnenspectrum oder die Bänder in Absorptionsspectren in bündiger und leicht und allgemein verständlicher Weise einfach mittelst Buchstaben bezeichnet. Dass wegen der segmentären Anordnung des Muskelfadens und des zweihälftig symmetrischen Baues der einzelnen Segmente sich dieselben Buchstaben in jedem Segmente, und dann segmentweise immer wiederholen, kann gegen die verschlagene Bezeichnung gewiss nicht eingewendet werden, wir wollen uns ja nicht auf einer beliebigen oder der ganzen Länge einer Muskelfaser, sondern eben nur in jedem der sich stets wiederholenden Segmente einer Muskelfaser mittelst der Buchstabenbezeichnung orientiren. Schon Engelmann[4] hat in beschränktem Masse von einer solchen Buchstabenbezeichnung Gebrauch gemacht; ich hoffe, dass sich ihre regelmässige Anwendung durch den Gebrauch, welchen ich in dieser Arbeit davon machen werde, am besten rechtfertigen wird.

Mit *Q* ist in Fig. 5 *A, B, C* ein breiter Querstreifen bezeichnet, dessen Bedeutung schon früher (p. 6) auseinandergesetzt wurde, ebenso ist dort schon die Bedeutung der Streifen auseinandergesetzt, welche mit *J* und *N* bezeichnet erscheinen.

Mit *Z* ist jener Streifen bezeichnet, welchen zuerst Amici[5] in der Mitte der zwei aufeinanderfolgende Streifen *Q* trennenden Abtheilung der Muskelfasern von Insecten und Säugern als dunkle, punktirte Linie beschrieben und abgebildet hat. Ohne Amici's zu gedenken, hat später W. Krause diesen Streifen als Querlinie und Seitenansicht seiner Grundmembran beschrieben. Engelmann aber sieht diesen Streifen als herrührend von einer durch ihn als Zwischenscheibe bezeichneten Schicht der Muskelfaser an.

Z ist in Fig. 5 *A* von dem Streifen *N* durch einen hellen Streifen getrennt, welchen ich mit *E* bezeichne.

In Fig. 5 *B* fehlt der Streifen *E* und liegen die Streifen *N* beiderseits an den Streifen *Z* unmittelbar an und ich bemerke, dass eben *E* fehlen kann, während der Streifen *J* niemals fehlt. In Fig. 5 *C* fehlen überdies die Streifen *N*.

Q entspricht ferner den *disques épais* Ranvier's,[6] *Z* seinen *disques minces*, *N* seinen *disques accessoires*. *J* und *E* seinen *bandes claires*.

---

[1] Amici (Il Tempo. Giornale ital. di medicina etc. Firenze 1858. Anno I. Vol. II, p. 328), übers. v. Lambl in Virchow's Archiv, Bd. 16, p. 414. Berlin 1859.

[2] Krause, Zeitschrift für Biologie. Bd. VI. p. 453. München 1870.

[3] Vergleiche Amici l. c., auch Dippel, Das Mikroskop. I. Theil, p. 851 u. d. f. 2. Aufl. Braunschweig 1883.

[4] L. c.

[5] Amici l. c., p. 414. Taf. X, Fig. 2 und 4.

[6] Ranvier, Leçons d'anatomie générale sur le système musculaire. Paris 1880, p. 79.

Alle mit den grossen Buchstaben *Q, J, N, E, Z* bezeichneten Querstreifen entsprechen Schichten oder Lagen der Muskelfaser, welche durch ein regelmässiges Aufeinandertreffen gleichnamiger besonderer Glieder der die Muskelfaser zusammensetzenden Fibrillen zwischen zwei einander parallelen Querschnittsebenen der Faser entstehen, wie wir später ausführlich sehen werden. Diese Fibrillenglieder werde ich entsprechend als Glieder *Q* und Glieder *J, N, E* und *Z* der Fibrille bezeichnen. *Q, N* und *Z* entsprechen doppelt-, *J* und *E* einfachbrechenden Lagen der Muskelfaser.

Der mit dem kleinen Buchstaben *h* bezeichnete Streifen, welcher bei tiefer Einstellung hell, bei hoher Einstellung dunkel erscheint, ist in Bezug auf seine Breite relativ zur Breite von *Q* sehr grossen Variationen unterworfen. Er ist oft sehr breit, oft auffallend schmal, was in den Figuren 5 *A, B, C* auch hervorgehoben ist. Es wäre aber unrichtig, sich vorzustellen, dass er, wenn die Querstreifung *C* vorhanden ist, immer am breitesten und wenn die Querstreifung *A* vorhanden ist, immer am schmälsten sei. Im Gegentheile, mit jedem der drei Bilder *A, B, C* kann gegebenen Falles ein *h* von sehr verschiedener Breite zusammentreffen. Die Grenzen von *h* sind in der Regel nicht so scharf, als die Grenzen der anderen Querstreifen. Oft ist dieser Querstreifen bei sehr scharfer Begrenzung aller anderen Streifen nur sehr schwach angedeutet, er ist endlich häufig mit auf das Beste definirenden Systemen und unter den günstigsten Beleuchtungsverhältnissen gar nicht wahrzunehmen. *h* entspricht dem von Hensen[1] zuerst genauer gewürdigten Streifen, welchen später Engelmann als Ausdruck einer Schichte des Muskelfadens, die er mit Hensen Mittelscheibe nennt, dargestellt hat. Ich habe diesen Querstreifen mit einem kleinen Buchstaben bezeichnet, um damit anzudeuten, dass er in einem anderen mit *Q* bezeichneten Streifen liegt. Es wird sich nämlich zeigen, dass er in keinem Zustande der Muskelfaser den Grad von Selbstständigkeit besitzt, wie er anderen mit grossen Buchstaben bezeichneten Querstreifen temporär zukommt, wenn dieselben auch mit Rücksicht auf den Wechsel der verschiedenen physiologischen Zustände im Muskel völlig vergänglich sind. Das ist aber ein Moment für die Rechtfertigung unseres Vorganges auch dem Einwurfe gegenüber, dass bei der Labilität der Fibrillengliederung, auf welche die Querstreifung der Muskelfaser zurückgeführt werden muss, der Streifen *h* dieselbe Behandlung verdienen würde wie alle anderen Streifen. Es wird sich aber später auch noch zeigen, dass die Verwandtschaft des Streifens *h* mit den Endtheilen des Streifens *Q* in der That weitaus grösser ist, als die, welche zwischen je zwei anderen neben einander liegenden Querstreifen herrscht. Eine besondere Eigenthümlichkeit der Muskeln gewisser Käfer ist, dass der Streifen *h* bei denselben häufig doppelt auftritt. Unter den Muskeln aus dem Kopfe und dem Prothorax von *Cetonia aurata, Tropinota hirta* und *Oxythyrea stictica* findet man meist leicht derartige Fasern, auch bei *Ragonycha melanura* bin ich einige Male auf solche Fasern gestossen. Als ich bei diesen Thieren zuerst solche Fasern antraf, an denen auch die Streifen *N* und überhaupt alle zwischen zwei Streifen *Q* gelegenen Streifen nach Art der Fig. 5 *A* vorhanden waren, sah ich mich veranlasst, durch Heben und Senken des Tubus mich der hohen und tiefen Einstellung ganz besonders zu versichern. Der erste Eindruck, den man hat, ist nämlich der, dass bei tiefer Einstellung in der Mitte von *Q* nicht wie gewöhnlich ein heller, sondern ein dunkler Streifen zu beobachten ist. Man überzeugt sich aber bald, dass dann gleichzeitig auch die Enden von *Q* dunkel erscheinen, während zwischen diesen dunklen Enden von *Q* und dem in der Mitte desselben liegenden dunklen Streifen, zwei helle Streifen nach Art des sonst einfachen Streifens *h* auftreten, andererseits aber neben den dunklen Enden von *Q* und von diesen durch die helle Schichte *J* getrennt die Schichten *N* folgen. Wechselt man nun die Einstellung, so wird in allen Streifen die Lichtvertheilung, die, welche in Fig. 5 *A, I* vorhanden ist; nur in *Q* sieht man die Enden und die Mitte hell und zwei dunkle Streifen zwischen je einem hellen Ende von *Q* und einem in der Mitte von *Q* liegenden hellen Streifen.

Fehlen die Schichten *N*, wie in Fig. 5 *C*, dann ist man bei doppeltem *h* leicht geneigt, die dunklen Enden von *Q* für *N* und den zwischen den beiden *h* liegenden Theil von *Q* für das ganze *Q* zu halten, bis man sich durch sorgsame Vergleichung beider Einstellungen von dem richtigen Sachverhalte überzeugt.

---

[1] Hensen, Arbeiten aus dem Kieler physiologischen Institute. Kiel 1869, p. 1.

Man wird sich die Schemata Fig. 5 *A*, *B*, *C* leicht in der entsprechenden Weise modificirt vorstellen und bei den angeführten, leicht zugänglichen Käfern von dem angeführten Sachverhalte überzeugen können.

Ich habe jetzt über die vorgeschlagene Buchstabenbezeichnung für die Querstreifen der Muskelfasern noch zu bemerken, dass ich es mittelst derselben vermeiden will, sowie Engelmann und Ranvier von Scheiben als Bestandtheilen der quergestreiften Muskelfaser sprechen zu müssen und insbesonders vermeiden will, dass, wie es bei Engelmann und noch entschiedener ausgesprochen bei Ranvier der Fall ist, die doppeltbrechenden Schichten der Muskelfasern als Scheiben scharf geschieden werden von den einfach brechenden Schichten der Muskelfasern, für welche die Bezeichnung als Scheiben nicht gebräuchlich geworden ist. Ich will mit dieser Zurückhaltung in Bezug auf die Verwendung der Bezeichnung Scheiben früheren histologischen und physiologischen Vorstellungen gegenüber scharf kennzeichnen, dass Scheiben immer artefacte Producte einer Zerlegung der Muskelfaser und nicht morphologisch präformirte Bestandtheile derselben sind, während die Fibrillen oder Fibrillenbündel als präformirte Bestandtheile der quergestreiften Muskelfaser aufzufassen sind.

Es soll uns aber jetzt der Scheibenzerfall, welchen Käfermuskeln in Alkohol erleiden, und über dessen Vorkommen früher berichtet wurde, zur genaueren Orientirung über die Querstreifung der erschlafften oder der Erschlaffung nahen Muskelfaser dienen. Wir werden sehen, dass alle früher angeführten und mit grossen Buchstaben bezeichneten Querstreifen einer substanziellen Gliederung der die Muskelfaser zusammensetzenden Fibrillen entsprechen.

Dagegen werden sich als völlig haltlos erweisen, die an verschiedenen Orten aufgetauchten, theils leicht hingeworfenen Aussprüche,[1] theils ernster gestützten Behauptungen,[2] dass die Querstreifen allesammt oder einzelne derselben zurückgeführt werden können auf blos optische Effecte, wie man solche herleiten wollte von der regelmässigen Folge von Fibrillen, die in ihrer Substanz homogen, aber abschnittweise knotig verdickt sein sollten, oder von gleichartigen Scheiben, die mittelst eines Bindemittels aneinander haften sollten. Für die Querstreifen *N* (Nebenscheiben Engelmann's) wird sich besonders ergeben, dass sie als eigene, durch die Gliederung der Fibrillen bedingte, wenn auch nur temporär in bestimmten Zuständen des Muskels vorhandene Schicht anerkannt werden müssen.

Die sonderbare Deutung, welche ihnen Merkel[3] gibt, und wonach sie ein „auch unter normalen Umständen im Leben" schon zu beobachtendes abgerissenes Stück des Streifens *Q* sein sollen, wird sich ebenso ungerechtfertigt erweisen, als die Deutung, die ihnen Martin[4] gibt, wonach sie durch Dehnung abgelöste Stücke des Streifens *Z* sein sollen, als nichts sagend.

Nach den Mittheilungen, welche ich früher über das Vorkommen des Scheibenzerfalles von Käfermuskeln in Alkohol gemacht habe, ist derselbe bei einzelnen Species ganz regelmässig in allen Muskelfasern, oder in der grössten Anzahl derselben, oder in sehr vielen Muskelfasern zu beobachten, in welchen letzteren Fällen dann neben den zerfallenen Fasern und abwechslungsweise mit diesen wieder unzerfallene zu beobachten sind. Bei anderen Species dagegen ist dieser Scheibenzerfall, und zwar wieder in grösserer oder geringerer Ausdehnung die Musculatur erfassend nur eine häufig, aber nicht regelmässig zu beobachtende Erscheinung. Bei wieder anderen Species endlich kommt derselbe, und zwar im einzelnen Falle, wieder mit wechselnder Ausdehnung nur gelegentlich und sporadisch vor.

Man wird nun a priori sehr bezweifeln, dass eine solche Erscheinung die Aufmerksamkeit verdiene, welche wir derselben hier gewidmet haben, indem man voraussetzen wird, dass dieselbe zur Aufklärung durchgreifender Structurverhältnisse der Käfermuskeln nur wenig beitragen könne.

---

[1] Vergleiche z. B. Fritsch in Dr. C. Sachs, Untersuchungen am Zitteraal *(Gymnotus electricus)*. Bearb. von E. du Bois-Reymond, Leipzig 1881, p. 379 und 380.

[2] Vergleiche u. A. Haycraft, Quarterly journ. of microscop. science. London 1881, p. 307.

[3] Merkel, Archiv für mikroskopische Anatomie, Bd. XIX. Bonn 1881, p. 669.

[4] Martin, Archives de physiologie norm. et patholog. 1882, p. 465.

Dagegen ist aber Folgendes zu bedenken. Die Käfer, an deren Muskeln wir die Erscheinung beobachteten, wurden in toto in starken Alkohol gebracht. Man könnte sich nun vorstellen, dass Bedingungen, welche von einem vorübergehenden Functionszustande bestimmter Organe des Käfers, z. B. den Verdauungsorganen, abhängig sind, zusammen mit dem Alkohol die besondere Wirkung auf die Muskeln ausüben, und dass diese Bedingungen bei einzelnen Käferspecies häufiger anzutreffen wären, als bei anderen. So könnte man sich z. B. für die *Aphodius*-Arten vorstellen, dass eine oder die andere organische Substanz aus dem Käfer durch den Alkohol extrahirt wurde, und dass die alkoholische Lösung dieser Substanzen die eigenthümliche Wirkung auf die Musculatur hervorbringe, und dass, wenn es gelänge oder zufällig gelingt, bei anderen Käfern dieselben Bedingungen zu realisiren, welche sich bei den *Aphodius*-Arten in der Regel realisirt finden, auch der selbe Scheibenzerfall, welcher bei den *Aphodius*-Arten regelmässig auftritt, bei anderen Käfermuskeln auftreten würde oder zufällig wirklich auftritt. Von solchen Gedanken geleitet, habe ich in der That in das Alkoholextract von einer grösseren Menge des *Aphodius fimetarius* und *erraticus* andere Käfer, bei denen ich den Scheibenzerfall nur vereinzelnt, oder nicht beobachten konnte: *Hydrophilus*, Carabiden, Curculioniden und Chrysomeliden gebracht, ohne jedoch mit dieser Procedur zu reussiren. Vielleicht hätte ich noch mehr solche Versuche anstellen sollen.

Die Resultatlosigkeit von etwa zehn solchen Versuchen schien mir aber zu zeigen, dass die Hauptsache mit der gemachten Voraussetzung nicht getroffen war.

Dazu kommt noch, dass Bowman den Scheibenzerfall der Muskeln in Alkohol an Menschen- und Schweinefleisch, von welchen er gewiss nur Stücke in Alkohol brachte, beobachtet hat, und dass die genauere Überlegung des Vorkommens des Scheibenzerfalles bei Käfermuskeln und namentlich jene Fälle, wo zerfallene und nicht zerfallene Fasern abwechslungsweise in denselben Zuständen der Querstreifung neben einander liegen, der Annahme eines durch Extraction mittelst der Conservirungsflüssigkeit hergestellten Lösungsmittels, welches den Scheibenzerfall der Muskelfasern bewirken würde, nicht günstig sind.

Wir wollen uns jetzt vielmehr einer anderen Betrachtung zuwenden, die uns den Scheibenzerfall von Käfermuskeln in Alkohol trotz seines beschränkten oder vereinzelnten Vorkommens von einem umfassenderen Gesichtspunkte aus zu beurtheilen lehren wird. Wir werden damit auch die Rechtfertigung dafür erbringen, dass wir dieses Phänomen für die Entscheidung allgemeiner Fragen der Muskelstructur heranziehen und den Beweis liefern, dass es die Aufmerksamkeit und Beachtung verdient, die wir ihm gewidmet haben.

Wie ich schon früher hervorgehoben habe, tritt der Scheibenzerfall der Käfermuskeln in Alkohol schon nach 24—48stündigem Verweilen in Alkohol auf. Bei weiterem Liegen in Alkohol ändert sich dann aber sehr wenig mehr. Die Muskeln, welche den Scheibenzerfall erlitten haben, werden dann um so brüchiger, spröder und dunkler, je länger der Alkohol einwirkt, und in ähnlicher Weise verändern sich die anfänglich nicht in Scheiben zerfallenen Muskeln, ohne dass an denselben auch nach monate- und jahrelangem Liegen in Alkohol ein Scheibenzerfall sich einstellen würde.

Ich basire diesen Schluss auf eine äusserst grosse Anzahl von Erfahrungen an den Käferspecies, welche ich früher als geeignet für das Studium des Scheibenzerfalles angeführt habe.

Nur die früher auch genannten *Scarabaeus laticollis* und *Pimelia cribra*, welche mir Pofessor Klemensiewicz um Mitte März 1883 in Corsica sammelte, habe ich erst viele Wochen später, als sie in starken Alkohol gebracht worden waren, untersuchen können. Nach meinen Erfahrungen an den anderen Käferspecies, welche einen ausgedehnten Scheibenzerfall zeigten, habe ich sie diesen zugerechnet.

Es wird das wohl das Richtige sein, denn an *Brachycerus-*, *Tropinota-*, *Geotrupes-* und *Tentyria*-Arten, die mit den Scarabaeen und Pimelien gleichzeitig in denselben Alkohol gebracht worden waren, habe ich keinen Scheibenzerfall beobachtet, während derselbe bei allen den zahlreichen Exemplaren von *Scarabaeus* und bei allen Pimelien in der ausgedehntesten Weise zu beobachten war.

Ich muss aber nun auch gleich in Bezug auf die Methode der Untersuchung hinzufügen, dass die den Scheibenzerfall zeigenden Muskeln sich auch während der ersten 24—48 Stunden und dann noch während der Zeit von 12—14 Tagen nach dem Einbringen der Käfer in Alkohol am besten eignen, um schöne Bilder von ausgedehntem und regelmässigem Scheibenzerfall zu erhalten, namentlich, wenn es sich um die früher erwähnten belehrenden Bilder mit erhaltenem Sarkolemma handelt. Gerade das Sarkolemma wird nach sehr langem Liegen in Alkohol hinfälliger, zerreisslicher und brüchiger.

Will man die Muskeln nur in dem früher erwähnten verdünnten Glycerin untersuchen, so verwende man sie nach 24—48 Stunden. Nach 10—12 Tagen verwende man sie, wenn man, was sehr zu empfehlen ist, beabsichtigt, dieselben mit Haematoxylin zu tingiren. Die Tinction fällt dann gleichmässiger und schöner aus. Diese Empfehlung gebe ich mit Rücksicht auf das von mir verwendete Haematoxylin-Glycerin von Renaut.[1] Ich muss diesem Tinctionsmittel vor anderen Haematoxylinlösungen auch vor dem von Merkel[2] empfohlenen Kupfer-Haematoxylin von Cook[3] grosse Vorzüge nachrühmen. Das nach Renaut's Vorschrift hergestellte concentrirte Haematoxylin-Glycerin hält sich unbegrenzt lange als prächtig violette, vollkommen klare Flüssigkeit. Für den Gebrauch nehme ich einen Tropfen dieser Flüssigkeit und bereite mittelst sehr viel destillirten Wassers daraus die augenblicklich nothwendige, ganz schwach violett gefärbte Tinctionsflüssigkeit. In diese bringe ich die Muskeln, isolire dieselben möglichst durch Zerzupfen und lasse sie 6 bis 12 Stunden in der Tinctionsflüssigkeit sich langsam färben. Es sind dann, wenn man die Färbung zur rechten Zeit unterbricht und die Präparate wieder in verdünntem Glycerin untersucht, die Streifen Q, N und Z von den nur schwach oder nicht gefärbten Streifen J und E sehr schön differenzirt. h ist ebenfalls weniger stark tingirt als die Enden von Q. Sehr wenig oder nicht gefärbt, erscheint das Sarkolemma und Sarkoplasma. Auf die Tinction der Muskelkerne werde ich erst später näher eingehen.

Nach diesen methodischen Bemerkungen kehre ich zu der eben näher beleuchteten Thatsache, dass der Scheibenzerfall der Muskelfasern in Alkohol sich in den ersten 24—48 Stunden ereignet, zurück. Sie weist uns darauf hin, dass wir den ersten Veränderungen, welche die Muskeln von in Alkohol eingebrachten Käfern erleiden, nachzugehen haben, um vielleicht zu einem Verständniss des Scheibenzerfalles und der eigenthümlichen früher besprochenen Verbreitung seines Vorkommens zu gelangen.

Schon aus der Zeit der Entdeckung[4] des Sarkolemma rührt auch die Kenntniss der Thatsache her, dass die Muskelfasern unter Umständen im optischen Längsschnitte an ihren Rändern das Bild regelmässig aufeinanderfolgender Durchschnitte von Tonnengewölben darbieten. Schon Bowman[5] hat diese Bildungen an der Muskelfaser einer Schmeissfliege dargestellt und sie sind später oft und von zahlreichen Autoren wieder erwähnt und abgebildet und gelegentlich auch als Festons bezeichnet worden. Bowman erklärte sie schon als entstanden durch Abheben des Sarkolemma von der Mantelfläche seiner Discs, während das Sarkolemma an den zusammenstossenden Rändern seiner Discs mit denselben fest verbunden bleibe. Dass der höchste Punkt der Bogen der Mitte des Streifens Q gegenüberliegt, ist heute ganz allgemein anerkannt, in Bezug auf den Fusspunkt der Bogen wird mit Rücksicht auf unsere heutigen Kenntnisse der Querstreifung angegeben, dass dieselben an dem Streifen Z liegen,[6] und erklärt werden sie in der Weise Bowman's durch partielle Ablösung des Sarkolemmas von dem Muskelfaserinhalt. An Muskeln von Käfern, welche in 93% Alkohol gebracht und nach 24—48 Stunden untersucht werden, sind diese Gewölbebogen sehr häufig zu sehen. Sie treten aber nicht an jeder Faser auf und sind oft an sehr vielen, oft nur an wenigen Fasern zu beobachten.

---

[1] Renaut, Archives de physiolog. norm. et patholog. 1881, p. 640.

[2] Merkel l. c., p. 662.

[3] Cook Journal of anatomy and physiology. V. XIV. 1879, p. 140.

[4] Bekanntlich haben Schwann (Mikrosk. Untersuch. etc., Berlin 1839, p. 165) und Bowman (Philosophical Transactions of the royal Society of London 1840, Part II, p. 263) das Sarkolemma fast gleichzeitig entdeckt. Bowman (The Cyclopaedia of anatomy and physiology. By R. Todd. Vol. III, London 1830—1846, p. 512) äussert sich, die Priorität Schwann's anerkennend, darüber also: „I discovered this remarcable membrane in Insects, Crustacea and all the tribes of Vertebrata, in 1839, not knowing that Professor Schwann had previously described it in connection with the development of muscle in Insects and Fish."

[5] Bowman l. c., p. 511, Fig. 293.

[6] Vergleiche: Amici l. c. p. 417, Fig. 2. Engelmann l. c., p. 42 und Fig. 12. Fredericq, Génération et structure du tissu musculaire. Bruxelles 1875, p. 9, Fig. 7 *a, b,* pl. 4; Ranvier l. c., p. 108, Fig. 16.

Wenn man sie an solchen Muskeln mittelst starker Vergrösserungen genauer unter dem Mikroskope untersucht, kommt man sehr bald zur Überzeugung, dass es sich bei weitem in den meisten Fällen um etwas Anderes als eine blosse Ablösung des Sarkolemma handelt. Man findet nämlich die innere Seite der Gewölbebogen nicht glatt, wie die äussere, sondern mit einem sehr feinkörnigen Belege versehen, welcher oft nur sehr dünn, oft aber von beträchtlicherer Dicke ist. Diesen körnigen Beleg sieht man auch, wenn man auf die perspectivisch sich präsentirende innere Fläche der Gewölbdecke hinsieht und er bildet auch die spitzen Fusspunkte der Gewölbebogen, welche in die Schichte Z der Muskelfaser übergehen. Es ist dieses Verhalten in Fig. 6 von einer Muskelfaser von *Carabus cancellatus*, an welcher alle Querstreifen der erschlafften Muskelfaser zu sehen sind, dargestellt. Von der an dieser Muskelfaser gleichfalls sichtbaren Längsstreifung aller Schichten werde ch sogleich Einiges bemerken.

Die Gewölbe kommen also in diesem Falle nicht durch Ablösen des Sarkolemma allein zu Stande, sondern mit dem Sarkolemma löst sich noch etwas anderes ab, nämlich ein Theil des Sarkoplasmas. Es entsteht ein Spalt dort, wo die Mantelfläche der Glieder $E+N+J+Q+J+N+E$ der äussersten Fibrillen der Muskelfaser an eine dünne Lage von fibrillenfreiem Sarkoplasma grenzt, die zwischen dem Sarkolemma und der die Fibrillen enthaltenden Substanz vorhanden ist.

In Fig. 6 ist die durch die fibrilläre Structur der Muskelsubstanz bedingte Längsstreifung genau so gezeichnet, wie sie an der betreffenden Faser mittelst starker Vergrösserung wahrzunehmen war. Wir werden sie erst später ausführlicher besprechen. Hier nur so viel, dass die Schichte Z (sogenannte Zwischenscheibe) aus regelmässig neben einander liegenden dunklen Körnern besteht. Die der Länge nach zwischen diesen Körnern vorhandenen hellen Durchgänge entsprechen dem zwischen der Fibrillensubstanz sich einschiebenden Sarkoplasma; wie jede andere Schichte der Muskelfaser, entspricht auch die Schichte Z nur Fibrillengliedern, zwischen denen Sarkoplasma vorhanden ist, und was an das Sarkolemma adhärirt, ist in dieser Schichte ebenso wie in allen andern das Sarkoplasma, in welches die Fibrillen eingelagert sind. Die an den Seitenrändern der Muskelfaser vorhandenen Gewölbe sind entstanden, weil von der der Peripherie des Muskelfadens entsprechenden Mantelzone der Fibrillenglieder Z sich das fibrillenfreie Sarkoplasma nicht in ähnlicher Weise losgelöst hat, wie im Bereich der Schichten $E+N+J+Q+J+N+E$. Was wir also als mit Flüssigkeit gefüllten Innenraum der Gewölbe wahrnehmen, ist ein Raum, eine Vacuole in der Muskelsubstanz selbst, nicht aber zwischen dieser und dem Sarkolemma.

Die Gründe, warum gerade zwischen der Oberfläche des Körpers, welcher aus den den Gliedern $E+N+J+Q+J+N+E$ entsprechenden Fibrillenabschnitten zusammengesetzt wird und dem daranstossenden fibrillenfreien Sarkoplasma eine Ablösungsfläche entsteht, im Einzelnen sich klar zu machen ist sehr schwer, wir müssen uns hier mit der Constatirung der Thatsache begnügen. Sicher ist aber so das Anhaften der Schichte Z an das Sarkolemma und die auf dem optischen Längsschnitt gegen Z hin zugespitzte, gegen das Sarkolemma hin verbreiterte Verbindung zwischen Z und dem Sarkolemma weit verständlicher, als wenn man von der Schichte Z als einer mit dem Sarkolemma fester verbundenen Substanz einer Zwischenscheibe spricht, denn was die Glieder Z der Fibrillen in Form einer Scheibe zusammenhält, ist nur das Sarkoplasma, dieses und nicht die Substanz der an der Peripherie des Muskelfadens gelegenen Glieder Z der Fibrillen haftet am Sarkolemma und der Zusammenhalt der aus den Gliedern Z gebildeten Schichte des Muskels mit dem Sarkolemma ist dadurch bedingt, dass sich das Sarkoplasma nirgends von der Mantelfläche der Glieder Z der Fibrillen losgelöst hat.

Bei dieser Auffassung des durch die vorerwähnte Gewölbebildung dargelegten Anhaftens der Zwischenscheibe Engelmann's an dem Sarkolemma verschwindet auch der Gegensatz, den Engelmann in Bezug auf das Verhalten seiner Zwischenscheibe an verschiedenen Muskeln wahrgenommen haben will, und welchen er mit folgenden Worten bespricht:

„Die feste Verbindung der Zwischenscheibe mit dem Sarkolemma, welche namentlich bei Insectenmuskeln so auffällig ist, hat jedenfalls keine principielle Bedeutung für den Contractionsvorgang, denn sie fehlt in sehr vielen Fällen, z. B. überall da, wo sich zwischen Sarkolemm und quergestreifter Substanz eine Protoplasma-schicht befindet: hier reichen dann die Zwischenscheiben nicht bis an's Sarkolemm heran, sondern hören an der Innenfläche der Protoplasmalage, im gleichen Niveau mit den übrigen Lagen auf. Das auffallendste Beispiel hiefür liefern die Krebsmuskelfasern, bei denen sich zwischen Sarkolemm und quergestreifter Substanz ein vollständiger Mantel von Protoplasma befindet. Aber auch bei vielen anderen Muskeln, namentlich von Insecten, finden sich wenigstens partielle, oft über viele Muskelfächer sich hinziehende Protoplasmamassen, an denen dieselbe Beobachtung zu machen ist."

Für uns besteht nur der Unterschied, dass die Sarkoplasmaschicht, welche fibrillenfrei zwischen Sarkolemma und dem von Fibrillen durchzogenen Sarkoplasma liegt, einmal mehr, das andere Mal weniger mächtig ist. Man wird sich, wenn man eine grössere Zahl von Käfern verschiedener Familien untersucht, leicht von der Richtigkeit unserer Auffassung überzeugen.

Stellen wir uns nun das, was wir über die Bildung der Gewölbebogen in der Seitenansicht der Muskelfaser erfahren haben, mit Bezug auf den ganzen Körper einer Muskelfaser vor, so kommen wir zu dem Resultate, dass an einer also veränderten Muskelfaser regelmässig über einander, ringförmig um die Muskelfaser verlaufende mit Flüssigkeit erfüllte, gewölbte Canäle entstehen.

Solche Bilder sind aber, wie wir wieder der Erfahrung an jenen Käferspecies entnehmen, welche früher als geeignet zum Studium des Scheibenzerfalles empfohlen wurden, die Vorstufen der schönen Bilder von Scheibenzerfall der Muskelfasern innerhalb des Sarkolemmas, wie sie in Fig. 2 und Fig. 3 dargestellt sind. Bei weitaus den meisten Käfern und bei der grössten Anzahl von Individuen bestimmter Käferspecies bleiben alle Muskeln oder die Mehrzahl der Fasern, an welchen jene gewölbten Canäle entstanden sind auf diesem Stadium der Veränderung stehen. Bei den Muskeln bestimmter Käferspecies dagegen oder bestimmter Individuen einer Species oder in einzelnen Fasern derselben, geht aber die Veränderung über dieses Stadium hinaus. Es kommt zum Scheibenzerfall.

Ich glaube aber, dass für die Regelmässigkeit, mit welcher sich dieser in den erwähnten Fällen vollzieht, ausser der besonderen Beschaffenheit und Veränderung der Schichten, in welchen die quere Trennung der Muskelfaser erfolgt, auch das noch erhaltene Sarkolemma als mitwirkende Bedingung in Betracht gezogen werden musss.

Man kann sich in der That vorstellen, dass der endosmotische Druck der Flüssigkeit in den anfänglich um den Muskel entstandenen ringförmigen Canälen sehr stark zunehme, dabei aber die Schichte Z (Fig. 6) eine besondere Festigkeit und Resistenz besitze, während die daran stossende Schichte E dagegen besonders weich und darum auch einer Maceration durch die Flüssigkeit besonders zugänglich ist, die Schichten $N+J+Q+J+N$ aber wieder von grösserer Resistenz und festerem Zusammenhang sind.

Das Resultat wird dann das Freiwerden einer den Schichten $N+J+Q+J+N$ entsprechenden Scheibe in einem Kästchen sein, dessen Wände oben und unten von einer Schichte Z, an den Seiten von der gewölbten Wand des zuerst entstandenen Canales gebildet werden, wie das in Fig. 3, einer zerfallenen Muskelfaser von *Opatrum sabulosum* zu sehen ist. Durch theilweise Zerreissung des Sarkolemma bei der Präparation zerfällt die Muskelfaser in dieser Abbildung in zwei Partien, die durch Sarkolemmafetzen noch an einander hängen.

Eine besonders grosse Resistenz der Schichte Z musste schon nach Engelmann's [1] Untersuchungen über dieselbe angenommen werden. Sie rührt offenbar von der besonderen Natur der Glieder Z der Fibrillen und dem festen Anhaften des Sarkoplasmas an die Mantelflächen dieser Fibrillenglieder her. Für den supponirten hohen Druck der Flüssigkeit spricht die Weite der gebildeten Kästchen im Vergleich zur Grösse der in denselben liegenden Scheiben und die Unmöglichkeit, dieses Missverhältniss aus einer Schrumpfung der isolirten Scheibe zu erklären, denn die Fibrillen oder Fibrillenbündel und die hellen Durchgänge zwischen denselben, welche in den Scheiben $N+J+Q+J+N$ (Fig. 3) so gezeichnet sind, wie sie unter dem Mikroskop erschienen, hatten keine wesentlich anderen Dimensionen wie die Fibrillen oder Fibrillenbündel in solchen

[1] L. c. p. 42.

Fasern desselben *Opatrum,* die keinen Scheibenzerfall und keine Gewölbebogen an den Seiten erkennen liessen.

Freilich könnte man für diese die Annahme machen, dass sie geschrumpft seien, ohne dass gleichzeitig die früher beschriebenen Ablösungsflächen aufgetreten seien, während, wenn durch irgend welche Processe jene Ablösungsflächen auftreten, das Schrumpfen der Scheiben das Missverhältniss zwischen den Kästchen, die den ursprünglichen Dimensionen des Muskelfadens entsprechen und den in denselben liegenden Scheiben zur Folge habe. Dagegen sprechen aber die bauchigen Wände der Kästchen und der Vergleich mit frischen, ohne Zusatz untersuchten Muskelfasern desselben Thieres, der ganz augenfällig zeigt, dass es sich um eine beträchtliche Erweiterung des Sarkolemmaschlauches handelt. Wir werden übrigens später auch noch Fälle zu besprechen haben, in welchen das Sarkolemma eine ganz enorme Erweiterung zu einem mit buchtigen Wandungen versehenen Schlauch erleidet.

Es erscheint ferner die der Schichte Z entsprechende Wand des Kästchens wie durch Ausziehen verdünnt, und immer viel heller als die Schichte Z in nicht zerfallenen Muskeln und die der fibrillären Structur entsprechende körnige Zeichnung ist in derselben nur selten noch deutlich zu sehen, sondern meist nur angedeutet

Der eben besprochene Fall, den wir im Anschluss an Fig. 6 zuerst behandelt haben, zeigt an Muskelfasern an welchen alle Querstreifen zu sehen sind, eine Isolirung einerseits der Schichte Z, die als freistehende Querwand der Kästchen auftritt, andererseits der Schichten $N+J+Q+J+N$, welche als Scheibe in den Kästchen liegen. Es ist nun nicht schwer, auch Bilder zu finden, wo an einer und derselben Faser im Verlauf ihrer Länge theilweise der Scheibenzerfall und die Kästchen, theilweise nur die Bildung der ringförmigen gewölbten Canäle aufgetreten ist. An solchen Fasern wird man, obwohl das ein ziemlich seltenes Ereigniss ist, manchmal auch ein Bild sehen, in welchem die Scheibe $N+J+Q+J+N$ an der einen Seite noch an Z haftet, während sie an der anderen Seite völlig von demselben losgelöst erscheint. Dass bei dem regelmässigen, schon innerhalb 24 Stunden erfolgenden Scheibenzerfall von Käfermuskeln in Alkohol so complicirte und darunter auch rein mechanische Bedingungen ineinandergreifen, wie wir soeben wahrscheinlich gemacht haben, scheint mir auch dadurch bestätiget zu werden, dass die Rolle, welche für gewöhnlich die Schichten E spielen, in anderen Fällen von den Schichten J übernommen wird. Es ist nämlich noch eine andere Art von Scheibenzerfall zu beobachten, die wir jetzt kennen lernen wollen.

Sie tritt viel seltener auf, als die eben beschriebene, verdient unser Interesse aber nicht minder als diese. Bei den *Aphodius*-Arten, namentlich bei *Aphodius rufipes,* bei dem *Scarabaeus laticollis* und bei *Pimelia* beobachtete ich häufig, nur vereinzelt dagegen bei den anderen für das Studium des Scheibenzerfalles empfohlenen Species, dass die Insertion der Gewölbebogen, die in der Seitenansicht der Muskelfaser entstanden waren, ein von der früher beschriebenen Insertion abweichendes Verhalten darbietet.

Die Fusspunkte zweier neben einander liegender Gewölbebogen gehen nämlich nicht wie in Fig. 6 mit einer gemeinsamen Spitze in die Schichte Z über, sondern das Sarkolemma zeigt eine breite Einbuchtung entlang den Schichten $N+E+Z+E+N$ und die Gewölbebogen reichen, nur die Schichte Q überspannend, von N zu N, während sie mit breitem Fusspunkt auf $N+E+Z+E+N$ aufruhen. Mit anderen Worten, es erscheinen nicht wie gewöhnlich nur die sogenannten Zwischenscheiben fester mit dem Sarkolemma verbunden, sondern auch die Nebenscheiben.

Sehr oft reichen dann die Enden der Schichten N in der Richtung gegen den Schlusspunkt des Bogens weiter vor, als die Schichte Z. Diese stellt dann, von aussen betrachtet, wieder den eigentlichen Grenzpunkt zweier neben einander liegender Bogen dar, während die Schichten N etwas in die Wölbung des Bogens hinaufreichend in die feinkörnige Masse an der inneren Seite des Bogens überzugehen scheinen.

Auch in solchen Fällen, in welchen also die Ablösungsfläche des Sarkolemmas und der demselben anliegenden fibrillenfreien Sarkoplasmaschichte nur zwischen der letzteren und der Mantelfläche von Q entstanden ist, kommt es zu einem Scheibenzerfall.

Diese Art von Scheibenzerfall ist in Fig. 7 nach einem Präparate von *Aphodius rufipes* dargestellt.

Man sieht im oberen Theil der Figur die freigewordenen Schichten Q noch eingeschlossen in Kästchen, deren obere und untere Wand dick ist und aus den im Zusammenhang mit dem Sarkolemma gebliebenen Schichten $N+E+Z+E+N$ besteht, deren Seitenwand wieder von der gewölbten Wand der anfänglich entstandenen ringförmigen Canäle gebildet wird. Die Trennung ist hier entsprechend der Schichte J erfolgt.

In dem unteren Theil der Fig. 7 ist das Sarkolemma zerrissen, wie das bei der Präparation der Muskelfasern häufig geschieht. Man sieht an der einen Seite noch einen Fetzen des zerrissenen Sarkolemmas hängen. In Folge der Zerreissung des Sarkolemma's sind aber sowohl die schon früher isolirten Schichten Q, als auch die früheren Querwände der Kästchen, nämlich die Schichten $N+E+Z+E+N$ in Form von Scheiben völlig frei geworden und man sieht die zweierlei Arten von Scheiben noch in der Aufeinanderfolge, die sie im Muskel hatten, nur bald nach der einen, bald nach der anderen Seite hin leicht verschoben neben einander liegen.

Ich habe jetzt endlich noch die dritte Form von Scheibenzerfall anzuführen. Dieselbe ist in Fig. 2 vom *Hydrophilus piceus* dargestellt. Sie tritt auf an Muskelfasern, deren Querstreifung dem Schema Fig 5 C entspricht. Es werden dabei die Schichten Q in Form von Scheiben isolirt, die man wieder noch in den Kästchen mit den von den Schichten Z gebildeten Querwänden oder völlig frei beobachten kann.

Hätte W. Krause Bilder, wie wir sie in Fig. 2 und 3 dargestellt haben, beobachtet, er hätte sie gewiss als den schönsten Beweis für die Existenz seiner Muskelfächer [1] und der Quer- oder Grundmembranen der letzteren angesehen und im Sinne seiner Muskelkästchentheorie verwerthet. Uns scheint trotz der verlockenden Bilder, Krause's Theorie völlig unhaltbar. Es wird sich das von selbst ergeben aus den folgenden Abschnitten, die noch mehr Licht auf die Erklärung, die wir vom Scheibenzerfalle gegeben haben, werfen sollen. Ich wollte darauf besonders aufmerksam machen, weil die Bilder in der That auffallend an Krause's Darstellungen des Muskelbaues gemahnen und vor nicht gar langer Zeit eine Exacerbation der Kästchentheorie allerdings nicht im histologischen Lager stattgefunden hat.[2]

Ich habe jetzt, nachdem ich die in Fig. 2, 3 und 7 dargestellten drei verschiedenen Arten von Scheibenzerfall beschrieben habe, mit Bezug auf die in Fig. 5 A, B und C dargestellten Arten der Querstreifung noch hervorzuheben, dass durch den Scheibenzerfall isolirt werden: 1. Die Schichte Z (in Fig. 2 und 3); 2. die Schichte Q (in Fig. 2 und 7); 3. die Schichten $N+J+Q+J+N$ (in Fig. 3); 4. die Schichten $N+E+Z+E+N$ (in Fig. 7), und dass 5. die Trennung stattfindet in der Schichte E (in Fig. 3) oder in der Schichte J (in Fig. 2 und 7). Man wird zugeben, dass durch diese Bilder die Realität aller der genannten Schichten in einer sehr überzeugenden Weise beleuchtet wird.

Über das Vorkommen der in Fig. 5 A, B, C dargestellten Arten der Querstreifung an Käfermuskeln habe ich aber das Folgende zu bemerken. Wir werden später sehen, dass sich an Contractionswellen, welche den ganzen Muskelquerschnitt erfasst haben, ebensowohl, wie auch an sogenannten seitlichen Contractionswellen darthun lässt, dass die in Fig. 5 A, B und C dargestellten Zustände der Querstreifung an derselben Faser in einander übergehen und dass in diesem Falle der Übergang von A nach B und nach C in der Weise, wie das von Engelmann[3] dargestellt wurde, stattfindet. A, B und C folgen in der Richtung vom erschlafften gegen den contrahirten Theil der Muskelfaser so aufeinander, dass A am weitesten von dem grössten Querschnitt des Bauches absteht, C demselben am nächsten, B zwischen A und C liegt. An solchen Muskelfasern werden wir die Anschauung, dass A dem meist erschlafften Theil der Muskelfaser entsprechend ist, und B und C allmälige Übergänge der Muskelfaser in den Zustand der Contraction bilden, nicht von uns weisen können. Es ist nothwendig, sich die Thatsache immer gegenwärtig zu halten, dass das Bild, welches der im Maximum erschlaffte, und der im Maximum verkürzte Muskel unter dem Mikroskope zeigen, durch eine grosse Reihe von verschiedenen Bildern in einander übergehen.

---

[1] W. Krause, Allgem. und mikroskop. Anatomie. Hannover 1876, p. 87 u. d. f.
[2] C. Schipiloff und A. Danilewsky, Zeitschrift für physiologische Chemie. Bd. 5, 1881, p. 349.
[3] Engelmann, Pflüger's Archiv, Bd. 7, p. 155, Fig. 1; Bd. 18, p. 1, Taf. I.

Es ist aber nicht leicht möglich oder doch eine sehr missliche Sache, aus dem augenblicklichen Ansehen einer Muskelfaser einen Schluss zu ziehen, wie diese Faser aussehen würde, wenn sie im Maximum erschlafft oder contrahirt wäre. Oder mit anderen Worten aus dem mikroskopischen Bilde, welches einer in bestimmt belastetem Zustande und in einem bestimmten Erregungsgrade befindlichen Muskelfaser entspricht, lässt sich kein Schluss darauf ziehen, wie die Muskelfaser aussehen würde, wenn sie mit Gewichten von $0-x$ belastet, sich in Erregungsintensitäten von $0-y$ befände. Im Zustande maximaler Verkürzung zeigen quergestreifte Muskelfasern verschiedener Thiere und verschiedene Muskeln desselben Thieres ein sehr übereinstimmendes Bild. Dagegen weisen alle Beobachtungen darauf hin, dass man sehr verschiedene Bilder erhalten würde, auch wenn es gelänge, Muskelfasern verschiedener Thiere, oder verschiedene Muskelfasern desselben Thieres im völlig erschlafften Zustande bei dem genau gleichen Grade der Dehnung zu untersuchen.

Wenn man die Ergebnisse zahlreicher Untersuchungen möglichst vieler Käferspecies und möglichst vieler von verschiedenen Theilen desselben Käfers genommenen Muskelfasern vergleicht, so wird man oft an diese Schwierigkeiten gemahnt, die sich jeder genau vorhalten sollte, der das kritisiren will, was ein Anderer gesehen zu haben angibt.

Nicht immer erscheint an der Mehrzahl oder auch nur an einer gewissen Anzahl von Muskelfasern desselben Thieres die Querstreifung *A* oder *B* (Fig. 5). Man beobachtet im Gegentheile oft an der Mehrzahl der Fasern die Querstreifung *C* (Fig. 5) und hat Mühe, Muskelfasern, an denen die Querstreifung *A* oder *B* zu sehen ist, aufzufinden. Kurz gesagt, das Vorhandensein oder Fehlen der sogenannten Nebenscheiben ist einem sehr grossen und anscheinend ganz regellosen Wechsel unterworfen.

Wenn wir nun auch dort, wo bei einem und demselben Käfer an demselben Orte einmal Muskeln mit schön entwickelten und dann wieder mit fehlenden Nebenscheiben vorkommen, annehmen können, dass es sich hier um ein zufälliges Absterben einmal im erschlafften, das andere Mal — was an sich wieder eine höchst auffallende Thatsache ist — im leicht contrahirten Zustande handelt, so gibt es doch auch Fälle, in welchen man mit einer solchen Annahme nicht ausreicht, weil in diesen Fällen das Vorhandensein oder Fehlen der sogenannten Nebenscheiben mit grosser Regelmässigkeit an die Muskelfasern bestimmter Örtlichkeiten gebunden vorkommt, und bei bestimmten Species der eine Fall die Regel, der andere dagegen die Ausnahme ist, während bei anderen Species das Umgekehrte der Fall ist. Bei den Dyticiden z. B. ist *C*, Fig. 5, die Regel, obwohl man immer auch einzelne Fasern mit der Querstreifung *A* oder *B* findet, bei den *Aphodius*-Arten, bei *Scarabaeus laticollis*, bei den *Geotrupes*-Arten, bei den *Hister*-Arten; bei *Lucanus*, bei *Stenomax lanipes* ist *A* und *B* die Regel, während *C* nur an einzelnen Fasern zu bobachten ist.

Wenn ich Muskelfasern oder Fibrillen, von welchen später noch besonders die Rede sein wird, mit schön entwickelten Schichten oder Gliedern *N* von *Astacus fluviatilis* demonstriren will, nehme ich die Muskeln, welche von den Coxopoditen der Scheeren- oder Gehfüsse in die Thoracalsomite hineinlaufen, weil an diesen *N* ausnahmslos gut entwickelt ist, während das in den Scheeren- und Schwanzmuskeln nicht so der Fall ist.

Das sind nur Beispiele. Ich bin weder in der Lage, noch beabsichtige ich eine genauere Darstellung dieser Verhältnisse zu geben. Mir sind auch die Gründe dieses Verhaltens nicht in der erwünschten Weise klar geworden, und bedürfte es zur Aufdeckung derselben noch sehr eingehender und gewiss schwieriger Untersuchungen. Ich wollte aber die Aufmerksamkeit darauf lenken, weil die berührten Verschiedenheiten vielleicht einmal von Bedeutung werden könnten für die Frage der anatomisch-physiologischen Verschiedenheit der quergestreiften Muskelfasern verschiedener Thiere oder verschiedener Muskeln desselben Thieres.

Mit Bezug auf den Scheibenzerfall der Muskelfasern muss ich aber hervorheben, dass unter den Muskelfasern desselben Käfers auffallend dünne und auffallend dicke Fasern neben solchen, welche die bei dem betreffenden Thiere vorherrschende mittlere Dicke besitzen, sich immer vorfinden. Ich sehe dabei natürlich von totalen oder partiellen Contractionen einzelner Fasern ab und habe für den Vergleich nur erschlaffte oder der Erschlaffung nahe Muskeln, an welchen die Querstreifung, Fig. 5 *A*, *B* oder *C* vorhanden ist, vor Augen.

Die dünnsten unter diesen Fasern, welche man am besten unter den Muskeln des Kopfes oder des Prothorax aufsucht, zeichnen sich dann gewöhnlich durch eine besondere Breite des Streifens *Q* aus. Diese dünnen Muskelfasern zeigen eine besondere Neigung zum Scheibenzerfall. Man erhält von diesen in Bezug auf die Weite und Geräumigkeit der Kästchen, in welchen die isolirten Scheiben liegen, die vortrefflichsten Bilder. Fig. 2 ist nach solchen Muskelfasern vom ausgerissenen Kopf des *Hydrophilus* gezeichnet. Solche dünne Muskelfasern sind auch die Darmmuskeln und ist an diesen der Scheibenzerfall gewöhnlich sehr schön entwickelt. Oft auch bei solchen Käfern, deren Muskeln für gewöhnlich nicht in Scheiben zerfallen. Besonders zu empfehlen für die Structurstudien sind aber die in Scheiben zerfallenen Darmmuskeln nicht, da sie meist sehr blass aussehen, die Längsstreifung der Scheiben nicht oder sehr unvollkommen vorhanden ist, die Scheiben in den Kästchen verdrückt und mannigfach verunstaltet erscheinen.

Es ist schon früher erwähnt worden, dass die Scheiben in den Kästchen gelegentlich auch desorientirt gefunden werden; auch das ist bei den dünnen Muskeln mit breitem Streifen Q und geräumigen Kästchen bei noch völliger Erhaltung der letzteren am besten zu beobachten.

Bei dicken Fasern, bei welchen der Scheibenzerfall mit Kästchenbildung aufgetreten ist, sind, so lange die Scheidewände der Kästchen intact geblieben sind, die Scheiben immer so aufgereiht, wie die Querstreifen in nicht zerfallenen Muskeln.

Es kommt aber in beiden angeführten Fällen oft zu einer ausgedehnten Zerstörung der Scheidewände und Zerreissungen des Sarkolemmas, und dann erhält man einerseits leere Schläuche oder Fetzen von zerrissenem Sarkolemma, andererseits freie Scheiben, die den Schichten Q (Fig. 2) oder den Schichten $N+J+Q+J+N$ (Fig. 3) oder den Schichten Q und den Schichten $N+E+Z+E+N$ (Fig. 7 unten) entsprechen, und die zum Theile die Mantelfläche, zum Theile die Grundfläche dem Beschauer darbieten.

An den leer gewordenen Schläuchen oder den Fetzen zerrissener Schläuche sieht man dann noch die Ansätze der früher vorhanden gewesenen Kästchenscheidewände oft so regelmässig, dass dieselben das Bild von Leitersprossen darbieten, wie in Fig. 4 nach einem Präparate von *Scarabaeus laticollis* zu sehen ist. An diesem Präparate sind auch noch die Kerne, und zwar deutlich in dem feinkörnigen Beleg an der inneren Seite des Sarkolemma wahrzunehmen.

Ähnliche Bilder erhält man auch, wenn, wie das öfter der Fall ist, das Sarkolemma zerfallener Muskelfasern sich unter Bildung unregelmässiger Aussackungen beträchtlich erweitert. Eine solche Erweiterung kann bis zu dem Doppelten, Drei- und Mehrfachen des Durchmessers der isolirten Scheiben gehen. Auch hier sieht man, wenn auch nicht in der regelmässigen leitersprossenähnlichen Anordnung wie früher, sondern mannigfach verbogen und theilweise unterbrochen noch die Reste der früher beschriebenen Ansatzstellen der Scheidewände.

Was die in Schläuchen mit zerrissenen Scheidewänden oder durch Zerreissung der Schläuche völlig freigewordenen Scheiben betrifft, so zeigen dieselben, wenn sie die Mantelfläche dem Beschauer präsentiren, in den allermeisten Fällen noch sehr schön alle Eigenschaften der in den Kästchen enthaltenen Scheiben, und das sind dieselben, welche man an den entsprechenden Querstreifen noch unzerfallener Muskelfasern wahrnimmt.

Es findet an denselben bei hoher und tiefer Einstellung derselbe Wechsel der Lichtvertheilung statt, wie wir ihn früher beschrieben haben.

In Fig. 2, 3, 7 sind von zerfallenen, in Fig. 6 von einer Muskelfaser, die nur die gewölbten Canäle zeigte, die Verhältnisse so dargestellt, wie sie bei tiefer Einstellung sich präsentirten. An sämmtlichen Fasern zeigte sich die Längsstreifung in ausgezeichneter Weise.

Was zunächst die Schichte Q (Fig. 2, 3, 6 und 7) betrifft, so ist bei dieser Einstellung in der Mitte derselben der helle Streifen h, der in wechselnder relativer Breite in den verschiedenen Muskelfasern auftritt, wahrzunehmen. Definirt man nun Q genauer, so findet man, dass sich dasselbe — wenn man wieder mit peinlicher Sorgfalt und unter öfterem orientirenden Wechsel der Einstellung das festhält, was sich bei tiefer Einstellung ergibt — zusammengesetzt erweist aus Stäben, zwischen welchen helle Durchgänge zu sehen sind.

Sowohl die Stäbe als auch die hellen Durchgänge zwischen denselben zeigen, einzeln ins Auge gefasst, eine bestimmte Form. Die Stäbe erscheinen in der Regel an beiden Enden verdickt und in den verdickten

Theilen dunkler und hören meist mehr oder weniger abgerundet, seltener scharf abgehackt auf. Die Mitte der Stäbe erscheint verdünnt und heller. Der Übergang der verdickten Endtheile in das verdünnte Mittelstück hält sich in den nebeneinander liegenden Stäben auf ziemlich gleicher Höhe und findet auf dieser Höhe in der Weise statt, dass die dunklen Endtheile sich mit kurzen Übergängen in die dünnen Mittelstücke verlieren. Ein scharfer Contour an der Grenze beider ist nicht zu beobachten.

Die hellen Durchgänge zwischen den Stäben sind auf dem optischen Längsschnitt der Muskelfaser ebenfalls von einer bestimmten Form, es erscheint jeder als ein heller Faden, welcher in seiner Mitte verdickt ist. Die verdickte Mitte liegt zwischen den dünnen Mittelpartien der Stäbe, die dünnen Enden des Fadens zwischen den verdickten Endstücken der Stäbe.

Der Streifen *h* ist also einerseits durch die Verdünnung der Stäbe in ihrer Mitte, andererseits durch den grösseren Abstand dieser verdünnten Partien und die grössere Menge von Substanz bedingt, welche diese Zwischenräume der Stäbe ausfüllt.

Entsprechend der Anzahl von Stäben, welche die Schichte *Q* auf einem bestimmten optischen Längsschnitte zusammensetzen, erscheinen in den Schichten *N* wieder durch helle Durchgänge von einander getrennt kürzere Stäbe von ähnlich dunklem Ansehen wie die Enden von *Q* oder manchmal etwas heller, manchmal etwas dunkler als diese. Die Enden der die Schichte *N* zusammensetzenden Stäbe sind entweder leicht abgerundet oder gerade abgeschnitten. (Fig. 3, 6 und 7.)

In vielen Fällen erscheinen die Stäbe sehr kurz und ihre Enden stark abgerundet und macht dann die Schichte *N* den Eindruck, dass sie aus dunkeln neben einander liegenden Punkten (isodiametrischen Körnern) zusammengesetzt ist, von welchen je einer einem Stabe von *Q* entsprechend ist.

So hat schon Flögel [1] seine Körnerschichten der Milbenmuskeln dargestellt.

Ich finde diese Darstellung bei den Käfermuskeln ohne Ausnahme bestätigt, und gerade an Muskelfasern, die den Scheibenzerfall (Fig. 3) erlitten haben, wird man sich von diesem Sachverhalt auf das Schönste überzeugen können.

Die Anschauung, dass die Schichten *N* aus regellos, wie die Granula des Protoplasmas über und neben einanderliegenden Körnchen bestehe, kann nur entstehen, wenn Muskelfasern so auf dem Objectträger liegen, dass ein nicht parallel der Längenaxe liegender optischer Durchschnitt der Schichten *N* sich präsentirt und man dabei anstatt eine bestimmte Einstellung festzuhalten, rasch zwischen verschiedenen Einstellungen hin und her geht.

Ebenso wie die Schichte *N*, besteht auch die Schichte *Z* aus kurzen neben einander liegenden Stäbchen oder Körnern. Diese besitzen in der Regel das dunkelste Ansehen und nur selten wird diese ihre hervorstechende Qualität durch ein gleich dunkles Ansehen der die Schichten *N* zusammensetzenden Stäbchen oder Körner aufgehoben.

Es kommt aber vor, dass bei grosser Breite und scharfem Hervortreten der Schichten *N* die Schichte *Z* äusserst schmal erscheint, so dass man alle Mühe hat, sich noch von der Anwesenheit derselben zu überzeugen. In diesen Fällen erscheinen dann die Schichten *N* viel dunkler als die Schichte *Z*. Ja, man ist manchmal trotz aller Bemühungen nicht mehr im Stande, auch nur eine leise Andeutung von *Z* zu sehen, während die Schichten *Q* und *N* sich so präsentiren, wie sie in Fig. 5 *A* dargestellt erscheinen. Der Raum zwischen den Schichten *N* erscheint dann bei hoher Einstellung als dunkler, bei tiefer Einstellung als heller Streifen, und anstatt der drei dunklen Streifen, die man sonst bei tiefer Einstellung zwischen zwei Schichten *Q* wahrnimmt (Fig. 5 *A*), sind dann nur zwei den Schichten *N* entsprechende dunkle Streifen dort wahrzunehmen.

Ich habe dieses Vorkommen besonders häufig an den Muskeln von *Blaps mortisaga* beobachtet und erschien mir dann der den vereinigten Schichten *E* entsprechende, bei hoher Einstellung dunkler, bei tiefer Einstellung heller erscheinende Raum zwischen den beiden *N*, bei letzterer Einstellung auch auffallend dunkler als die zwischen *N* und *Q* gelegenen Streifen *J*. Ausserdem sah ich ohne besondere Helligkeitsdifferenz

---

[1] L. c., p. 71 und Fig. 1, 2 und 4. Taf. III.

zwischen E und J Ähnliches bei den Muskeln von *Platynus angusticollis, Pterostichus transversalis, Geotrupes stercorarius, Myelophilus piniperda* und bei den Muskeln von *Bombus terrestris.*

Würden die Schichten Z in diesen Fällen in der That nicht vorhanden sein, so wäre damit zu der schweren Verständlichkeit, welche gerade die Streifen in dem Raume zwischen zwei Schichten Q an sich haben, noch ein neues Moment hinzugekommen. Ich werde diese Frage in einem späteren Abschnitte wieder aufnehmen müssen.

Sowie die die Schichten N zusammensetzenden Stäbchen oder Körner, stimmen auch die durch helle Durchgänge getrennten dunklen Partien von Z (Fig. 6 und 7) in ihrer Anzahl auf demselben Längsschnitt der Muskelfaser mit der Anzahl der Stäbe von Q überein. Eine Anschauung, die schon Amici[1] in seiner mehrerwähnten Abhandlung vorgebracht hat und die neuerlich auch Martin[2] in einer stark theoretisirenden Arbeit, abgesehen von der eigenthümlichen Auslegung, die er über Q und N vorbringt, auf Beobachtungen gestützt, vertreten hat.

Die Schichten J und E erscheinen, wenn sie an zerfallenen Muskeln erhalten sind (Fig. 3 J und Fig. 7 E) und in der Regel ebenso an nicht zerfallenen Muskeln (Fig 6 J und E) auch in dem Falle, wo Q, N und Z die schönste Längsstreifung erkennen lassen, als glatte, helle Streifen, die selbst bei den auf's Beste definirenden Objectiven keinerlei Längsstreifung erkennen lassen.

Ich habe für den letzteren Fall gesagt in der Regel, weil wir in einem späteren Abschnitte Objecte kennen lernen werden, an welchen auch in den Schichten J und E eine wohl definirte Längsstreifung beobachtet wurde.

Bei hoher Einstellung erscheinen die Streifen J und E dunkel, ob man sie an zerfallenen oder nicht zerfallenen Muskeln beobachtet. Ich führe das hier wieder speciell an, um daran die Bemerkung zu knüpfen, dass man sich gerade an dem dunklen Ansehen von J und E und an dem an seinen Grenzen verschwommenen Schattenband, welches in diesem Falle h entspricht, in jedem Moment am leichtesten über die Einstellung orientirt. Erscheinen J und E und ebenso h dunkel, dagegen Q, N und Z hell, und beobachtet man nun an einer geeignet dünnen, am besten platten Faser, deren es bei den meisten Käfern etliche gibt, oder am Rande einer cylindrischen oder prismatischen Faser die Längsstreifung, so wird man sich bald überzeugen, dass jetzt die Stäbe von Q und die Stäbchen oder Körner von N und Z hell und die Durchgänge zwischen denselben dunkel erscheinen, und dass man durch Senken des Tubus ebenso wie in Bezug auf die totale Wirkung der Querstreifen auch in Bezug auf die Stäbe und Durchgänge die Lichtvertheilung umkehrt. Hebt man darauf den Tubus wieder, so kehrt sich die Lichtvertheilung abermals um und so weiter.

Wir müssen auf Grund dieser Erscheinungen schliessen, dass die die Stäbe von Q und die Stäbchen oder Körner von N und Z trennende, deren isolirte Sichtbarkeit bedingende, weil in Bezug auf ihr Lichtbrechungsvermögen von der Substanz der Stäbe, Stäbchen und Körner verschiedene Substanz in den Schichten Q, N und Z schwächer lichtbrechend ist, als die Stäbe, Stäbchen und Körner selbst.

Diese Substanz ist das Sarkoplasma, welches wir erst in den späteren Abschnitten näher kennen lernen werden, von dem wir aber hier schon zeigen mussten, in welcher Weise es sich bei der Beobachtung der nach den angeführten Methoden untersuchten Muskeln geltend macht.

Wir könnten uns nun gleich noch des Weiteren mit dem Sarkoplasma beschäftigen, wenn wir die Scheiben, welche durch einen Zerfall nach Art der Fig. 2, 3 und 7 isolirt und freigeworden sind, untersuchen würden, während sie auf der Grundfläche liegend sich präsentiren.

Die Bilder, welche diese Scheiben darbieten, zeigen eine völlige Übereinstimmung mit den Bildern, welche man von Querschnitten der Muskelfasern erhält, die mit dem Messer angefertigt wurden. Da wir aber diese Querschnittsbilder später eingehend behandeln müssen, wollen wir bis dahin auch die Besprechung der Flächenansichten der isolirten Scheiben verschieben. Auch das Verhalten der Scheiben im polarisirten Lichte soll erst

[1] Amici l. c. Fig. 2.
[2] Martin l. c.

später behandelt werden. Hier sei nur so viel bemerkt, dass die Schichten Q, N und Z auch an den isolirten Scheiben ihr Doppelbrechungsvermögen bewahrt haben, und dass darum die in Scheiben zerfallenen Muskeln weiterhin zur Entscheidung einiger, das Verhalten der Muskelfasern im polarisirten Lichte betreffenden Fragen herangezogen werden sollen.

Jetzt muss ich aber noch eine Reihe von Beobachtungen besprechen, welche die Doyère'schen Hügel der Käfermuskeln betreffen. Seit Kühne's [1] bahnbrechenden Arbeiten sind diese Nervenhügel oft der Gegenstand von Untersuchungen [2] gewesen. Mir sind dieselben während dieser Untersuchungen oft und in den verschiedensten Formen und Grössen untergekommen, und ich will hier Veranlassung nehmen, zwar nicht auf die Structur der Nervenhügel, wohl aber auf einige Bilder näher einzugehen, welche mir für den Zusammenhang von Muskel- und motorischem Nerv von Wichtigkeit zu sein scheinen.

Es sind zunächst die Bilder der Nervenhügel, welche man an den Muskeln beobachten kann, die nach 24—48stündigem Liegen der Käfer in 93% Alkohol und Aufpräpariren in verdünntem Glycerin am Rande die früher beschriebenen Gewölbebogen oder den Scheibenzerfall mit Kästchenbildung zeigen.

Es hat bekanntlich Engelmann[3] zuerst darauf hingewiesen, dass bei Käfermuskeln eine besonders innige Verbindung der Sohlensubstanz des Nervenhügels mit der Zwischenscheibe (Krause'schen Membran) zu bestehen scheine. Er sah in Folge von Wasserwirkung Vacuolen zwischen Nervenhügel und quergestreifter Substanz auftreten, welche ersteren immer mehr von der letzteren abhoben. Nur die Zwischenscheiben blieben durch dünne, hautartige Commissuren, welche später einrissen und dann zusammenschnurrten, mit dem Nervenhügel in Verbindung.

Später hat sich v. Thanhoffer mit diesem Gegenstande beschäftigt, und schon im Jahre 1876 zeigte mir derselbe gelegentlich eines Besuches, den er mir in Graz machte, ein mittelst 1% Osmiumsäure hergestelltes Präparat von *Hydrophilus*, an welchem zu sehen war, dass der Nervenhügel nicht mehr mit der ganzen Sohle der Muskelsubstanz anlag, sondern nur mit in der Profilansicht spitzen Ausläufern den Schichten Z entsprechend anhaftete, während sich über Q ein von der Substanz des Nervenhügels gebildetes Gewölbe spannte. v. Thanhoffer hat über diesen Befund erst viel später etwas Ausführlicheres in die Öffentlichkeit gelangen lassen.[4] Inzwischen hatte Föttinger[5] ähnliche Bilder bei verschiedenen anderen Käfern beschrieben.

Föttinger verfolgte auch die früher schon von Arndt[6] hervorgehobene Beobachtung weiter, dass die öfter erwähnten seitlichen Contractionswellen *(ondes laterales)* dort an den Muskeln auftreten, wo sich ein Doyère'scher Hügel an dieselben ansetzt. Oft ist eine grosse Anzahl von Nervenhügeln, welche an einer Muskelfaser sitzen, durch ebenso viele seitliche Contractionswellen gekennzeichnet. Föttinger führt in dieser Beziehung vorzüglich drei Käfer an, nämlich *Chrysomela caerulea*, *Melasoma (Lina) tremulae* und *Passalus glaberrimus*. Den letzteren exotischen Käfer[7] habe ich nicht untersuchen können, und wäre es wünschenswerth, dass Föttinger angegeben hätte, wie und in welchem Zustande er diesen Käfer für seine Untersuchungen benützen konnte.

In Bezug auf die Chrysomeliden muss ich Föttinger's Angaben nach meinen Erfahrungen erweitern.

[1] Kühne, Archiv für Anatomie und Physiologie. 1859, p. 564. Über die peripherischen Endorgane der motorischen Nerven. Leipzig 1862, p. 32.

[2] Vergleiche W. Waldeyer, Zeitschrift f. rationelle Medic. 3. R., Bd. XX, p. 193. Engelmann, Untersuchungen über den Zusammenhang von Nerv und Muskelfaser. Leipzig 1863, p. 33. Jenaische Zeitschrift, Bd. I, 1864, p. 322. Arndt, Archiv für mikroskop. Anatomie, Bd. IX, Bonn 1873, p. 481. Ranvier, Leçons sur l'histologie du système nerveux. Paris 1878, Tom. II, p. 274. Föttinger, Onderzoekingen ged. in het physiologisch. Laborat der Utrechtsche Hoogschool uitgegev. door Donders en Engelmann, V, 1880, p. 293. v. Thanhoffer, Archiv f. mikroskop. Anatomie, Bd. 21. Bonn 1882, p. 26. Bremer, ibidem p. 165.

[3] Engelmann, Pflüger's Archiv, Bd. 7, p. 47.

[4] L. c.

[5] L. c. p. 317.

[6] Arndt l. c.

[7] In dem Catalogus coleopterorum Europae et Caucasi etc. ist keine *Passalus*-Art angeführt. Es fehlen darin überhaupt alle Passaliden, und sind von den Pectinicornien nur die Lucaniden angeführt.

Ich finde, dass es eine merkwürdige, besondere Eigenschaft der meisten Chrysomeliden ist, dass an Muskeln von in Alkohol ertränkten oder nach Föttinger's Methode behandelten Thieren in grosser Zahl seitliche Contractionswellen sich vorfinden, die den Doyère'schen Hügeln entsprechen. Bei *Cassida equestris* fand ich in ganz ausgezeichneter Weise fast alle Fasern in so dichter Weise, wie es Föttinger für *Chrysomela caerulea* in seiner Figur 1 darstellt, mit Nervenhügeln und entsprechenden seitlichen Contractionswellen besetzt. Daran schliessen sich die *Cryptocephalus-*, *Chrysomela-* und *Melasoma*-Arten [1] und *Phyllodecta vulgatissima*, wo sehr zahlreiche Fasern mit mehrfachen, bestimmten Nervenhügeln entsprechenden, seitlichen Wellen besetzt erscheinen.

Ähnlich verhält es sich bei *Lochmaea capreae* und *Plagiodera armoraciae*. Weniger verbreitet, aber noch immer leicht und in grösserer Anzahl in jedem Präparate zu finden, waren seitliche, bestimmten Nervenhügeln entsprechende Contractionswellen bei *Lema cyanella*, *Crioceris duodecimpunctata* und *asparagi*, *Gastroidea polygoni*, *Agelastica alni*, *Phytodecta quinquepunctata* und *Orina cacaliae*.

Im Vergleiche mit diesen Chrysomeliden ist das Auftreten seitlicher Contractionswellen bei anderen Käferspecies ein sehr seltenes und nur gelegentlich zu beobachtendes Ereigniss. Ich habe sie aber bei Tenebrioniden, Curculioniden und Scarabaeiden gesehen; unter den letzteren kann man bei sorgfältigem Absuchen der Musculatur von *Cetonia aurata* und *Oxythyrea stictica* am ehesten darauf rechnen, welche zu finden.

Ich muss annehmen, dass die Nervenhügel der Chrysomeliden der 1% Osmiumsäure und dem Alkohol besondere Angriffspunkte für eine physiologische Wirkung darbieten, als deren Erfolg die dem Nervenhügel entsprechende partielle Contraction unmittelbar vor dem Absterben der Muskelfasern in die Erscheinung tritt.

Ich glaube aber, dass dieses merkwürdige Phänomen noch den Gegenstand eingehenderer Untersuchungen abzugeben verdient.

Was ich nun über den Zusammenhang der Nervenhügel mit den Muskelfasern vorzubringen habe, werde ich in zwei Absätze theilen. Erstens werde ich besprechen die Folgerung eines festeren Zusammenhanges der Sohle des Nervenhügels mit der Zwischenscheibe (Engelmann und Föttinger) oder der Krause'schen Membran (v. Thanhoffer), die man auf die Bildung von den Schichten Q entsprechenden Vacuolen unter der Sohle des Hügels gegründet hat. Zweitens werde ich mich über die von Föttinger angegebene ruthenförmige Auflösung des in den Nervenhügel eintretenden Nerven in Axencylinder und die Verbindung der letzteren mit den Zwischenscheiben und die darin gelegene wenigstens theilweise Begründung jenes innigeren Zusammenhanges des Nervenhügels mit den Zwischenscheiben zu äussern haben.

Was den ersten Punkt betrifft, so findet man an Muskeln von in Alkohol gelegten Käfern, die man in Glycerin aufpräparirt, oft sehr wohl erhaltene Nervenhügel, an welchen sich noch eine lange Strecke des zutretenden Nervens befindet.

Darunter kann man aber gar nicht selten solche beobachten, wie in Fig. 8 einer von *Pterostichus transversalis* dargestellt ist. Wir finden hier den Nervenhügel von der Muskelsubstanz in ähnlicher Weise abgehoben, wie das mit dem Sarkolemma und der unter demselben liegenden fibrillenfreien Sarkoplasmaschichte an den Orten der Fall ist, wo kein Nervenhügel an der Muskelfaser sitzt. Wie im letzteren Falle das fibrillenfreie Sarkoplasma nur noch an den den Schichten Z entsprechenden Theilen des Muskelfaser anhaftet und so auch das Anhaften des Sarkolemmas an diese Schichten vermittelt (siehe die Darstellung pag. 18), so ist auch im ersteren Falle die Substanz des Nervenhügels im Bereich der Schichten $E+N+J+Q+J+N+E$ abgelöst, während sie an Z festhaftet. Die Substanz des Nervenhügels bildet in diesem Falle die gewölbte Decke der ringförmig um den Muskel verlaufenden Canäle, deren Decke dort, wo kein Nervenhügel sich befindet, von dem fibrillenfreien Sarkoplasma gebildet wird.

v. Thanhoffer hat auf Verdauungsversuche, die er mit *Hydrophilus*-Muskeln anstellte, gestützt, ganz richtig beschrieben, wie das Sarkolemma aussieht, wenn dasselbe sich wirklich allein von dem Muskelfaden ablöst. Er beschreibt es als eine „hyaline, homogene“ kernlose Haut. Er würde sich in völliger Überein-

[1] Siehe das Verzeichniss, p. 89.

stimmung befinden, sowohl mit den älteren[1] Beschreibungen des Sarkolemmas, als auch mit den Angaben, welche Chittenden[2] in neuerer Zeit darüber gemacht hat, wenn er das, was er beschreibt, auch für das Sarkolemma gehalten hätte.

v. Thanhoffer hält aber diese hyaline, kernlose Haut nur für ein äusseres Blatt des Sarkolemma, von welchem sich bei der Verdauung ein zweites inneres, Kerne enthaltendes Blatt abgespalten habe, welches den Muskel noch umhüllt.

Diese „kernige innere Lamelle" des Sarkolemmas soll in ununterbrochenem Zusammenhange auch unter die Sohlen der Nervenhügel sich forterstrecken und diese von der Muskelsubstanz scheiden. Dieser „Nervenmantel" oder diese „Sohlenmembran" soll aber ebenso, wie die sich von ihr ausbreitende, kernige, innere Lamelle des Sarkolemma mit den Krause'schen Membranen oder wie v. Thanhoffer auch sagen zu können glaubt, „Nervenplatten" der Muskeln zusammenhängen.

Was v. Thanhoffer als innere Lamelle des Sarkolemmas beschreibt, existirt gerade so gut, wie das, was er als äussere hyaline Lamelle des Sarkolemma bezeichnet; wir müssen aber diese innere Lamelle gerade so wie die äussere Lamelle anders deuten als er. Die äussere Lamelle ist das Sarkolemma, die innere Lamelle ist die an der Oberfläche des Muskels liegende fibrillenfreie Sarkoplasmaschichte und die letztere geht unmittelbar in die Substanz des Nervenhügels über.

Die Erscheinung, aus welcher man auf eine festere Verbindung des Nervenhügels mit den sogenannten Zwischenscheiben schloss, reducirt sich auf dieselbe Erscheinung, die wir an solchen Theilen der Muskelfaser beobachten können, welchen kein Nervenhügel aufsitzt. Dort folgerte man aus dieser Erscheinung eine festere Verbindung des Sarkolemma mit den sogenannten Zwischenscheiben.

In beiden Fällen ist es aber nur das fibrillenfreie Sarkoplasma, welches, den Schichten Z entsprechend, mit dem die Fibrillen enthaltenden Theile der Muskelfasern fest verbunden bleibt, während, entsprechend den Schichten $J+Q+J$ oder den Schichten $E+N+J+Q+J+N+E$ die früher besprochene Ablösung erfolgt.

Am besten wird das Verhältniss der Substanz des Nervenhügels zum Sarkoplasma an Muskeln beurtheilt, welche den früher beschriebenen Scheibenzerfall mit Kästchenbildung erlitten haben.

Wohl erhaltene Nervenhügel mit einem langen Stücke des zutretenden Nerven an solchen Muskeln aufzufinden, ist bei einigem Bemühen nicht schwer. In Fig. 9 ist ein solches Bild von *Hydrophilus*, in Fig. 10 von *Aphodius rufipes* dargestellt.

Die Nervenhügel, die den Schichten Z entsprechenden Querwände der Kästchen, das dem Nervenhügel gegenüber liegende Sarkolemma mit der daran haftenden Schichte Sarkoplasma, die conischen Übergänge des Sarkoplasmas und der Substanz der Nervenhügel zu den Schichten Z sind möglichst naturgetreu gezeichnet. Die in den Kästchen liegenden, isolirten Scheiben sind nur mit Umrissen angelegt.

In Figur 9 befinden sich unmittelbar über den Ablösungsflächen des Nervenhügels dicht gelagerte, lange Kerne von derselben Form, wie sie bei den *Hydrophilus*-Muskeln an zahlreichen anderen Stellen unmittelbar unter dem Sarkolemma sich vorfinden. Das Vorkommen dieser Kerne an der Stelle, wo der Nervenhügel an der Muskelfaser aufsitzt, ist sehr grossen Variationen unterworfen.

Sie kommen einmal an dieser Stelle so dicht gedrängt vor, wie nicht leicht an einer anderen Stelle der Muskelfasern und in Figur 9 ist ein solcher Fall dargestellt; in anderen Fällen kommen viel weniger oder nur vereinzelte solche Kerne unter dem Nervenhügel vor, ja oft ist gar keiner dort zu sehen. Für den *Hydrophilus* hat schon Ranvier[3] auf diese Thatsache aufmerksam gemacht. „À la base de l'éminence", sagt er, „il existe le plus souvent, comme Kühne et Margo l'ont indiqué, des noyaux en assez grande abondance; mais leur nombre n'est pas constant, et vous verrez même, sur une des préparations, que je soumets à votre examen, une terminaison nerveuse au niveau de laquelle il n'en existe aucun."

---

[1] Vergleiche Schwann l. c.; Bowman l. c.

[2] Chittenden, Untersuchungen des physiologischen Institutes der Universität Heidelberg. Bd. III, p. 171.

[3] Ranvier, Leçons sur l'histologie du système nerveux. T. II, Paris 1878, p. 278.

Die Kerne, welche weiter nach aussen im Nervenhügel sich befinden, unterscheiden sich von den früher erwähnten durch ihre mehr runde und gedrungene Form und durch das meist deutlich hervortretende Kernkörperchen. Es ist aber auch die Zahl dieser zweiten Art von Kernen bei den Käfern grossen Schwankungen unterworfen. In der Regel sind nur ein Paar oder ist nur ein solcher Kern zu beobachten, häufig auch keiner.

Bei den Nervenhügeln, unter welchen die Kerne erster Art sehr dicht gedrängt vorkommen, findet man, wie das in Figur 9 der Fall ist, meist in der Substanz des Nervenhügels selbst noch helle Räume, die von der feinkörnigen Masse des Nervenhügels umschlossen werden. Auf dem optischen Längsschnitte scheint dann der Nervenhügel aus zwei durch Brücken mit einander verbundenen Platten von körniger Substanz zu bestehen. Viel seltener und bei weitem nicht so regelmässig treten diese hellen Räume in Nervenhügeln auf, die nur wenige oder keine Kerne der ersteren Art enthalten.

Diese erscheinen in der Regel gleichmässig gezeichnet, von feinkörniger Beschaffenheit wie in Figur 8 und 10. Das ist auch bei den kleinen, aber stark prominirenden Nervenhügeln der Chrysomeliden der Fall, deren Auffindung durch die seitlichen Wellen sehr erleichtert ist.

Ich habe schon erwähnt, dass ich auf eine nähere Untersuchung des Baues der Nervenhügel der Insecten nicht einzugehen gedenke. Es würde mich das zu weit führen, da die Frage nur auf vergleichend-anatomischem Wege behandelt werden kann.

Den auf Grund von Beobachtungen an Käfermuskeln behaupteten innigeren Zusammenhang der sogenannten Zwischenscheiben mit den Nervenhügeln habe ich im Vorausgehenden hinlänglich erläutert. Wir könnten uns nun denken, dass der zu dem Nervenhügel zutretende Nerv sich in jenem dichotomisch theilt, und dass die Nervenenden in das zwischen den Muskelfibrillen vorhandene Sarkoplasma, welches mit der Substanz des Nervenhügels unmittelbar zusammenhängt, eintreten. Würde sich die Sache so verhalten, dann wäre die Beobachtung des Eintretens von Nervenfasern in die mit *Z* verbundenen Sarkoplasmakegel der Figuren 8, 9 und 10 in keiner Weise entscheidend für eine innigere Beziehung der Nerven zu den sogenannten Zwischenscheiben. Es würde eine solche Beobachtung vielmehr nur darauf zurückzuführen sein, dass die Übertrittsstellen des Nerven aus dem Nervenhügel in das Sarkoplasma der Muskelfaser den Schichten *Z* entsprechend erhalten geblieben sind, während den übrigen Schichten entsprechend, die Ablösung des Nervenhügels von der Muskelfaser erfolgte, und die dort in das Sarkoplasma übertretenden Nerven zerrissen wurden. Eine solche Deutung lassen aber die von Föttinger beschriebenen Bilder nicht zu. Föttinger sah vielmehr an Nervenhügeln, welche den Muskelfasern noch voll aufsassen, den zutretenden Nerven sich theilen und die durch Theilung entstandenen Nervenfasern auf die sogenannten Zwischenscheiben und nur auf diese hinlaufen und in diese übergehen.

„Le cylindre-axe des fibres nerveuses motrices, arrivé au sommet de la plaque terminale semble se diviser en un nombre plus ou moins considérable de fibrilles qui vont innerver directement les disques intermédiaires; *il y a continuité directe entre le muscle et le nerf.*“ [1]

Bei der Vorstellung, welche ich mir von der Schichte Z der Muskelfasern auf Grund der vorliegenden Untersuchungen machen muss, ist es mir schwer, mit den Worten Föttinger's einen wahren Sinn zu verbinden. Ich habe schon früher hervorgehoben, dass eine Zwischenscheibe als morphologisches Ding im Muskel ebensowenig existirt, als irgend eine andere der sogenannten Scheiben des Muskels.

Es existirt nur eine Schichte *Z* der Muskelfaser und diese besteht aus den zwischen zwei parallelen Querschnitten liegenden Gliedern *Z* der Fibrillen und dem zwischen diesen vorhandenen Sarkoplasma.

Bei der Continuität, die das Sarkoplasma im ganzen Muskel besitzt, wäre es nun gewiss sehr auffallend, wenn gerade nur den Gliedern *Z* der Fibrillen entsprechend, die Nerven in das Sarkoplasma eintreten würden, selbst wenn, was sehr unwahrscheinlich ist, die Axencylinder in directe Beziehung zu den Gliedern *Z* der Fibrillen treten würden.

---

[1] Föttinger l. c. p. 319.

Das Wichtigste, was ich vorzubringen habe, ist aber, dass es mir ebenso wenig, wie v. Thanhoffer[1] und Bremer[2] gelungen ist, Bilder zu erhalten, wie sie Föttinger beschreibt und abbildet, auch wenn ich Föttinger's Methode sehr genau befolgte. Es ist das ein misslicher Umstand, der mir eine sachliche Kritik der Angaben Föttinger's unmöglich macht.

An Goldpräparaten sah ich in der Regel nicht mehr als Retzius[3] von dem Verhalten der Nerven an nach seiner Weise vergoldeten Muskeln angibt. Verfuhr ich beim Vergolden nach den Angaben Bremers,[4] so sah ich in der Regel ebenfalls keine ordentlichen Nervenbilder und nur einige Male solche Bilder angedeutet, wie Bremer in seiner Figur 25 eines abbildet.

Am weitesten konnte ich den zutretenden Nerven in die Substanz des Nervenhügels an Tinctionspräparaten, die zuerst mit Carmin und dann mit Hämatoxylin gefärbt wurden, verfolgen. An diesen sah ich Bilder, wie Figur 9. Der zutretende Nerv breitet sich in der äusseren Partie des Nervenhügels, sich dichotomich theilend, aus. Die feinen Zweige begaben sich in die Tiefe, waren aber bald in der Substanz des Hügels sich verlierend, nicht weiter zu verfolgen. Bilder von der Nervenausbreitung im Hügel bei *Hydrophilus*, die dem in Figur 9 dargestellten gliechen, erhielt ich sehr regelmässig, wenn ich lebende Käfer nach Entfernung des Abdomens in die Kleinenberg'sche[5] Pikrinschwefelsäure brachte und darnach, sowie das Kleinenberg für seine Präparate angibt, anfangs in schwächeren und dann in stärkeren Alkohol und die von diesen Käfern erhaltenen Muskelfasern zuerst mit Carmin und darauf mit Hämatoxylin färbte. In der blassroth gefärbten Substanz des Nervenhügels sah man dann die Ausbreitung des Nerven röthlich violett gefärbt. Nach diesen Bildern zu urtheilen, ist die typische Vertheilung der Nervenfasern in den Nervenhügeln der Käfer eine andere, als sie Föttinger auf Grund seiner Bilder annimmt. Da aber neuerlich Kühne[6] angekündigt hat, dass es ihm gelungen sei, mittelst Golgi's Methode der combinirten Anwendung von Arsensäure und Goldchloridkalium auch bei den Insecten, wo die Goldmethoden bisher versagten, eine bessere Einsicht in den Bau der Nervenhügel zu gewinnen, empfiehlt es sich, ein definitives Urtheil über diesen Gegenstand noch aufzuschieben. Die supponirte festere Verbindung der Substanz des Nervenhügels mit den sogenannten Zwischenscheiben existirt aber nach meinen Erfahrungen als etwas Präformirtes nicht.

III.

Über Säurebilder und Gold-Säurebilder der quergestreiften Muskelfasern.

Es empfiehlt sich, die Betrachtung dieser Bilder zu beginnen mit der Wirkung, welche eine äusserst geringe Säuremenge auf Muskelfasern ausübt, die von Käfern herrühren, welche 24 Stunden in 93%igem Alkohol gelegen haben, und die den früher beschriebenen Scheibenzerfall zeigen.

Am besten geeignet für diese Versuche fand ich die Muskeln von *Aphodius rufipes*. Es eignen sich dazu aber auch die Muskeln der übrigen *Aphodius*-Arten und aller der Käfer, welche nach 24stündigem Verweilen im Alkohol in Scheiben zerfallene Muskeln darbieten.

Nachdem ich die Muskeln in verdünntem Glycerin aufpräparirt und mit dem Deckgläschen bedeckt hatte, brachte ich an den einen Rand des Deckgläschens einen Tropfen Glycerin, welchem eine Spur von 1%iger Ameisensäure zugesetzt worden war, und legte an den gegenüber liegenden Rand des Deckgläschens ein zungenförmiges Streifchen Filtrirpapiers, und zwar mit der Spitze an die Mitte des Randes des Deckgläschens, so dass der Tropfen angesäuerten Glycerins langsam und die frühere Zusatzflüssigkeit allmälig verdrängend zwischen Objectträger und Deckgläschen eingesaugt wurde.

---

[1] L. c.
[2] Bremer. Archiv f. mikroskop. Anatomie, Bd. 21. Bonn 1882, p. 165.
[3] Retzius, Biolog. Untersuchungen 1881, p. 9, Taf. I, Fig. 11.
[4] L. c.
[5] Kleinenberg, Sullo sviluppo del lumbric. trapezoid. Napoli 1878, p. 6.
[6] Kühne, Verhandlungen des naturhist.-med. Vereines zu Heidelberg. N. F. III. Bd., p. 277.

Wenn man die ersten Spuren einer möglichst schwachen Säurewirkung sehen will, ist bei diesen Versuchen grosse Vorsicht nothwendig. Bei einem geringen Mehr von Säure, als zur Herstellung der Bilder, die ich nun beschreiben will, nothwendig ist, treten sofort andere Bilder in die Erscheinung, die einer weiter fortgeschrittenen Säurewirkung entsprechen, und die uns erst später beschäftigen sollen.

Ich wähle zunächst für die Untersuchung solche Muskeln aus, welche in Scheiben $N+J+Q+J+N$ zerfallen sind (i. e. in Querscheiben mit daran haftenden Nebenscheiben), und an welchen sowohl in N als in Q die Längsstreifung deutlich zu sehen ist, wie das bei dem in Figur 3 abgebildeten Beispiele der Fall war.

Die Veränderung, welche solche Muskelfasern durch sehr schwache Säurewirkung erleiden, ist die folgende. Die Schichten Q werden an ihrem Rande vorgewölbt (Fig. 11 *A*, Q), die Stäbe, aus welchen diese Schichten im Längsschnitt zusammengesetzt erscheinen, verbreitern sich etwas, während zugleich auch die hellen Durchgänge zwischen den Stäben sehr prägnant hervortreten. Gleichzeitig erscheinen die Schichten N in scharfer Zeichnung, ihre Breite ist geringer, als die grösste Breite von Q. Es schliesst sich aber die Breite von Q am oberen und unteren Ende dieser Schichte der Breite von N an.

Die kurzen Stäbe, welche N zusammensetzen, werden nicht, oder nur wenig breiter, sie rücken aber auseinander und werden die hellen Durchgänge zwischen denselben breiter und deutlicher (Fig. 11 *A*).

Hat man Gelegenheit, eine der isolirten Scheiben von der Fläche her zu beobachten, so fällt an derselben zunächst das Bild Figur 11 *B* auf; dieses entspricht dem Querschnitte der Schichte N. Man kann nämlich an jeder auf der Fläche liegenden isolirten Scheibe zweimal, beim Heben und Senken des Mikroskoptubus das Bild Figur 11 *B* erhalten, entsprechend der an jeder Scheibe oben und unten vorhandenen Schichte N.

Die zwei Bilder sind durch ein deutliches Intervall getrennt, und für jedes der Bilder gibt es wieder eine hohe Einstellung, bei welcher helle Felder durch ein dunkles Geäder von einander getrennt erscheinen und eine tiefe Einstellung, bei welcher dunkle Felder durch ein helles Geäder von einander getrennt erscheinen. Bei einer solchen Einstellung auf eine der Schichten N ist Figur 11 *B* gezeichnet.

Einige Schwierigkeit bereitet es, sich davon zu überzeugen, dass beim Übergange von der Einstellung für die obere Schichte N auf die Einstellung für die untere Schichte N für einen Moment breitere Felder von einem äusserst zarten Geäder von einander getrennt zu sehen sind, und dass diese Felder und dieses Geäder in Bezug auf Form und Anordnung der Zeichnung entspricht, welche man auf dem Querschnitte von N wahrnimmt.

Es ist das nur bei sehr guter Beleuchtung und starker Blendung und bei gewisser Ausdauer in der Handhabung der Mikrometerschraube möglich, da man beim Verändern der Einstellung immer leicht durch das Auftauchen der Zeichnung des oberen oder unteren N gestört wird und nur mit Mühe der Punkt festzuhalten ist, bei welchem man sich davon überzeugt, dass auch der optische Querschnitt von Q in der eben angeführten Weise zu sehen ist.

Ein geringes Mehr von Säurewirkung auf die erwähnten isolirten Scheiben fördert oft sehr merkwürdige Bilder zu Tage.

Ein solches Bild ist in Figur 12 *A* und *B* dargestellt und wie ich hervorheben muss, möglichst naturgetreu. Ich bemerke das, weil man sich beim Anblick der Zeichnung des Gedankens nicht wird erwehren können, dass die Darstellung eine stark schematische ist.

In der That ist das aber nicht der Fall. Sehr geübte Mikroskopiker, welchen ich die betreffenden Präparate zeigte, gaben mir das Zeugniss, dass ich dieselben ganz so dargestellt habe, wie man sie wirklich sieht.

Man bemerkt, dass die Schichten Q beträchtlich breiter geworden sind, als die Schichten N, diese kleben auf beiden Grundflächen des stark verbreiterten Q, ohne dass sie ihren Charakter wesentlich verändert hätten, während Q um Vieles heller geworden ist und die Längsstreifung entweder völlig verloren hat oder dieselbe, was wieder nur mit sehr gut definirenden starken Objectiven zu sehen ist, nur noch als sehr feine, zarte Linien erkennen lässt. Von dem Streifen h ist weder an den Präparaten, nach welchen Fig. 11, noch auch an denen, nach welchen Fig. 12 gezeichnet wurde, etwas zu sehen. Präsentirt sich eine der isolirten Scheiben in diesem Stadium der Säurewirkung von der Fläche, so erhält man das Bild Figur 12 *B*.

Die innere Figur in dieser Zeichnung entspricht einem Querschnitte von N, sie ist gleichmässig von einem hellen Hofe umgeben, dessen äussere Grenze der Peripherie des verbreiterten Q entspricht.

Es ist auch hier leicht, durch Heben und Senken des Tubus sich davon zu überzeugen, dass das Bild von N zweimal zu erhalten ist, entsprechend dem oberen und unteren der auf Q klebenden N.

Ich muss nun noch eine zweite Art von Bildern erwähnen, welche man erhält, wenn der Scheibenzerfall der Muskeln so erfolgt ist, wie es in Figur 7 dargestellt ist, und man auf solche Muskeln wieder sehr geringe Mengen von Säure wirken lässt.

Ein Bild dieser Art ist in Fig. 13 von *Aphodius rufipes* dargestellt.

Die Schichten Q sind wieder beträchtlich verbreitert, ihre Längsstreifung ist verstrichen.

Dagegen sind die Schichten $N + E + Z + E + N$ verhältnissmässig schmal.

Die Längsstreifung von N tritt wieder sehr prägnant hervor. Z ist in Form einer dunklen oft deutlich knotigen Linie in der Mitte des hellen Raumes zwischen zwei neben einander liegenden N zu sehen.

In dem oberen Theile der Muskelfaser (Fig. 13) ist rechts über einer grösseren, links über einer kleineren Strecke noch das Sarkolemma erhalten.

Ist das der Fall, so sieht man dasselbe an den Mantelflächen der Scheiben $N + E + Z + E + N$ festhaften, während es durch die verbreiterte Scheibe Q stark nach aussen gedehnt ist und auf dem Längsschnitte das vorstehende Ende von Q in Form einer weiten Falte umfasst.

Es kommen aber nicht immer so regelmässige Bilder in Folge der Säurewirkung zu Stande.

Man beobachtet oft auch Bilder, wie Fig. 14, die für denjenigen, der sie zum ersten Male sieht und hört, dass sie einem schwach angesäuerten Muskel angehören, etwas besonders Überraschendes an sich haben, was sie aber verlieren, wenn man einmal die Bilder Fig. 13 kennt. Beide Bilder unterscheiden sich nur dadurch, dass in Figur 13 eine regelmässige Anordnung der ungleich verbreiterten Scheiben Q und $N + E + Z + E + N$ erhalten blieb, während es zu dem Bilde Figur 14 kommt, wenn die stark sich verbreiternden Scheiben Q das anfänglich an den Scheiben $N + E + Z + E + N$ haftende Sarkolemma ungleichmässig von dem Rande dieser Scheiben ablösen und nur an einer bestimmten Stelle die Scheiben $N + E + Z + E + N$ am Sarkolemma haften bleiben.

Endlich habe ich noch anzuführen, wie in Folge schwacher Säurewirkung sich Muskelfasern verändern, welche vorher nicht in Scheiben zerfallen sind.

Die erste Veränderung derselben stimmt im Wesentlichen mit der Veränderung überein, welche für die zerfallenen Muskeln in Figur 11 *A* dargestellt ist. Würde man sich in dieser Figur zwei aufeinanderfolgende Schichten N durch eine helle Substanz verbunden denken, in welcher, entsprechend den gegenüber liegenden Enden der die Schichte N zusammensetzenden Stäbe und in der Mitte zwischen diesen Enden ein dunkles Korn sitzen würde, so hätte man das Bild einer der schwachen Säurewirkung unterlegenen Muskelfaser. Nur ist zu bemerken, dass die Schichte Z nicht immer aus solchen scharf getrennt neben einander liegenden Körnern besteht, sondern dass häufig die Schichte Z als ein mehr oder weniger dunkles in seinem Tone gleichmässig erscheinendes Band sich präsentirt.

Fasern in diesem Stadium der Veränderung machen namentlich, wenn die Schichten Z in der erstgenannten Weise sich präsentirten, aber auch noch im zweiten Falle den Eindruck, dass die Längsstreifung noch deutlicher hervortritt, als das an den nicht gesäuerten Muskeln der Fall ist.

Schreitet an solchen Muskeln die Säurewirkung etwas weiter fort, so verbreitert sich der Muskel beträchtlich und zugleich werden die Schichten Q länger und um Vieles heller; war h in der Mitte von Q deutlich zu sehen, so erscheint das in der gequollenen Faser wie ein äusserst matter Schatten noch angedeutet. Die Schichten N und Z werden auf einander gedrängt und die Stäbe, aus welchen die Schichten N zusammengesetzt erscheinen, rücken weiter auseinander. Schliesslich tritt ein Bild auf, wie dasselbe in Figur 15 von *Chlaenius Schrankii* dargestellt ist.

Die breiter, länger und heller gewordenen Q erscheinen wie durch dunkle, in bestimmten Abständen stehende Stifte, oder manchmal auch deutlich sanduhrförmige Verbindungsstücke miteinander verbunden.

In der Mitte dieser Stiftenreihe tritt häufig, aber nicht immer eine sehr schmale, dunkle Linie auf, welche aus dünnen, zwischen den Stiften vorhandenen Brücken gebildet erscheint.

Ich werde auf diese Verbindung der Stifte, welche letztere aus den den Schichten N und Z entsprechenden Stäben oder Körnern hergestellt werden, noch später zurückkommen. Auch hier habe ich wieder eines unregelmässig gezeichneten Bildes zu erwähnen, welches häufig auftritt und demselben Veränderungsstadium entspricht, das durch das regelmässig gezeichnete Bild, Fig. 15, repräsentirt ist.

Es kommt nämlich vor, dass die Stifte, welche die gequollenen Q mit einander verbinden sich nicht in annähernd gleichen Abständen von einander befinden, wie in Fig. 15, sondern dass dieselben unregelmässig vertheilt, bald nur durch engere Zwischenräume von einander getrennt und wie zu Gruppen vereinigt, oder einzeln auftreten, während diese Gruppen von Stiften und diese vereinzelten Stifte wieder in theils grösseren, theils kleineren Abständen von einander sich befinden. Eine also veränderte Muskelfaser ist in Figur 16 nach einem Präparate von *Pyrochroa coccinea* gezeichnet.

Ich muss nun wieder auf die Bilder zurückkommen, welche man durch Einwirkung von Säure auf Muskelfasern, die vorher in Scheiben nach Art der Fig. 3 und Fig. 11 A zerfallen waren, erhalten kann.

Ich habe von diesen vorerst nur das bei etwas stärkerer Säurewirkung oft vorkommende merkwürdige Bild, Fig. 12 A und B, besprochen, welches auftritt, wenn beim Quellen von Q der feste Zusammenhang zwischen den Schichten Q und N verloren geht, so dass die quellenden Theile von Q bei der Verbreiterung desselben an den Flächen der nicht sich verbreiternden Schichten N hingleiten und beide Schichten nur durch Adhäsion aneinander haften bleiben

Das ist nur ein sehr merkwürdiger und für die Natur der Schichten Q und N sehr belehrender Fall der Säurewirkung. Anders gestaltet sich der Erfolg der Säurewirkung, wenn beim Quellen der Zusammenhang zwischen Q und N erhalten bleibt.

Man findet dann Bilder, welche sich von den Scheiben, Fig. 11 A, nur dadurch unterscheiden, dass die Breite der Scheiben eine beträchtlichere geworden ist. Die Elemente von N besäumen, aber nur etwas auseinandergerückt, die gequollene Schichte A an beiden Seiten ähnlich regelmässig, wie in Fig. 11 A.

Ist die Säurewirkung so weit vorgeschritten, dann tritt bei weiterer Einwirkung der Säure sehr bald ein wesentlich anderes Bild an die Stelle des beschriebenen.

Wir werden diesen Vorgang später kennen lernen, wo die in Folge von stärkerer Säurewirkung zu erhaltenden Bilder besprochen werden sollen.

Unter Hinweis auf das Bild, Fig. 16, habe ich aber noch anzuführen, dass auch unter den Bildern, welche man durch schwache Einwirkung von Säuren auf Muskeln, die vorher in Scheiben nach Art der Fig. 3 und Fig. 11 A zerfallen waren, solche findet. in denen die Elemente von N, welche die gequollenen Schichten Q an beiden Enden besäumen, eine unregelmässige Vertheilung zeigen in der Art, wie wir sie an den Stiften der Fig. 16 antreffen.

Gewöhnlich wiederholt sich dann die besondere Art der unregelmässigen Vertheilung in den beiden, durch N gebildeten Säumen von Q ebenso wie sieb die unregelmässige Vertheilung der Stifte in Fig. 16 zwischen zwei aufeinanderfolgenden Q ganz regelmässig wiederholt. Dass solche Bilder vorkommen, ja am häufigsten zu beobachten sind, ist sehr wichtig, weil sie auf den regelmässigen Zusammenhang der Elemente der einzelnen queren Schichten der Muskelfasern in der Richtung der Längsaxe der Muskelfasern hinweisen. Immer ist aber die beschriebene Wiederholung der besonderen Zeichnung von N weder an den isolirten Scheiben, noch auch an noch in situ befindlichen Schichten der Muskelfasern zu beobachten.

Es ist vielmehr manchmal in den aufeinanderfolgenden von den Stiften (Fig. 16) gebildeten Schichten oder in den von N gebildeten Säumen (Fig. 11 A) eine immer andere unregelmässige Anordnung zu sehen.

Wenn wir uns an das erinnern, was in Fig. 12 zu sehen war und damit zusammenhalten das, was in Fig. 16 und den analog veränderten isolirten Scheiben zu sehen ist, so fällt es nicht schwer, eine Erklärung für die besprochenen unregelmässigen Bilder darin zu finden, dass beim Quellen von Q der Zusammenhang von Q mit N weder ganz gelöst wurde, noch auch ganz erhalten blieb, sondern partienweise das eine und partienweise das andere der Fall war, so dass die beim Quellen von *Q* auftretende Locomotion sich in der Weise vollzieht, dass die noch mit *Q* zusammenhängenden Elemente von *N* dabei mitgenommen werden, oder aber in der Weise, dass sich das von den Elementen von *N* losgelöste *Q* unter denselben verschiebt. Ich muss anführen, dass alle bisher beschriebenen Säurebilder sich als Dauerpräparate conserviren lassen — ich bewahre solche nun schon durch zwei Jahre — wenn man, nachdem die entsprechende Wirkung der Säure eingetreten ist reichlich mit verdünntem Glycerin drainirt, und dann das Präparat in demselben einschliesst.

Wenn wir nun die Schlüsse ziehen, zu welchen die beschriebenen, in Folge von Säurewirkung auftretenden Bilder berechtigen, so ergibt sich, dass die Schichten *Q* viel rascher und in viel höherem Grade in Säuren quellen, als die Schichten *N* und *Z*, und dass das verschiedene Quellungsvermögen dieser Schichten vor allem bestimmend auf die durch Säurewirkung entstehenden Bilder einwirkt, während ein solcher bestimmender Einfluss der Schichten *J* und *E* nicht hervortritt, sondern vielmehr das Verhalten dieser Schichten ein mehr passives, von dem Verhalten der Schichten *Q* und *N* abhängiges ist.

Ich habe früher einen Werth darauf gelegt, dass die Versuche an Muskeln angestellt werden, welche von Käfern herrühren, die nur 24 Stunden in Alkohol gelegen haben. Es war das nothwendig wegen der Folgerungen, welche ich später noch auf diese Versuche basiren will.

Ich muss aber hier anführen, dass längeres Liegen in Alkohol oder Einlegen der durch 2 bis 4 Tage in Alkohol gelegenen Käfer in Glycerin (2 Theile auf 1 Theil Wasser) die Herstellung von Präparaten, wie die beschriebenen erleichtert, weil das Liegen in Alkohol das Quellungsvermögen der Muskeln beschränkt, ohne dass dadurch das Verhältniss der verschiedenen Quellbarkeit der Schichten *Q* und der Schichten *N* und *Z* auffallend geändert würde. Das nachträgliche Einlegen in Glycerin hindert, dass diese Beschränkung eine zu grosse wird, wie es bei fortdauernder Einwirkung des Alkohols der Fall ist. Mit Muskeln, die einige Zeit in Alkohol gelegenen Käfern entnommen werden, oder solchen Käfern, die nach passend langer Einwirkung des Alkohols in Glycerin gebracht wurden, lassen sich, ohne dass man gar so vorsichtig mit dem Zusatz der $1^0/_0$ igen Ameisensäure zu sein brauchte, die früher beschriebenen Bilder erhalten.

Durch das Liegen in Glycerin verändern sich die Muskeln auch nach sehr langer Zeit nicht wesentlich, und können während dieser Zeit beliebig für die beschriebenen Versuche verwendet werden.

Hat man einiges Materiale zur Verfügung, dann wird es leicht sein, die passende Zeit für die Alkoholwirkung und die Verwendbarkeit der in Glycerin conservirten Thiere für den einzelnen Fall herauszuprobiren.

Ich gehe nun zu anderen Säurebildern über, welche einem weiter vorgeschrittenen Stadium der Säurewirkung entsprechen und werde mit diesen auch zugleich den Scheibenzerfall der Muskelfasern in Säuren, auf welchen schon im zweiten Abschnitte hingewiesen wurde, behandeln. Wir werden uns bei dieser Untersuchung überzeugen, dass die genaue Analyse der vorher besprochenen Säurebilder nothwendig war. Wir werden die nun zu behandelnden Bilder, die in noch wichtigerer Beziehung zu Fragen der Muskelstructur stehen, jetzt viel leichter richtig zu deuten vermögen.

Man gewinnt auch hier einen sehr passenden Ausgangspunkt für die Untersuchung, wenn man vorerst nicht ganz frische Muskeln, sondern solche, welche von Käfern herrühren, die 24—48 Stunden, aber nicht länger in $93^0/_0$ igem Alkohol gelegen haben, der Säurewirkung unterwirft. Ich ersetze zu dem Ende das Glycerin, in welchem die Muskeln aufpräparirt wurden, durch rasche Drainage mittelst $1^0/_0$ iger Ameisensäure und verfolge die successiven Veränderungen, welche eine bestimmte Faser unter den Augen des Beobachters erleidet.

Es ereignen sich dabei mit Bezug auf den Enderfolg der Säurewirkung zwei bemerkenswerthe Fälle, deren Eintritt sich nicht vorhersagen lässt, da Muskeln desselben Thieres, welche vor der Säurewirkung keine erkennbaren Unterschiede ihres mikroskopischen Verhaltens darbieten, sich bald in der einen, bald in der anderen Weise verhalten.

Der Unterschied dieser zwei Fälle besteht darin, dass in dem einen Falle die Theile des veränderten Muskels ihren Zusammenhang bewahren, dass dagegen in dem anderen Falle eine ganz regelmässige, bestimmten Querstreifen entsprechende quere Zerklüftung des Muskels, der Scheibenzerfall des durch Säurewirkung veränderten Muskels auftritt.

Der letztere Fall ist darum von grosser Wichtigkeit, weil er ein für die Kenntniss der Muskelstructur bedeutsames Querschnittsbild in vielfacher Anzahl zu Tage fördert.

Beide Fälle: Entstehung des zu beschreibenden Säurebildes mit Erhaltung des Zusammenhanges und Entstehung des Säurebildes mit Scheibenzerfall, ereignen sich bei den Muskeln aller Käfer in der Regel neben einander. Es muss nur immer dafür gesorgt sein, dass die Muskeln in der Säure rasch bis zu einem Maximum aufquellen. Oft überwiegt dann der eine, oft der anderen Fall. Ja, an derselben Muskelfaser können beide Fälle beobachtet werden. An dem einen Ende der eine, an dem anderen Ende der andere, oder der eine an beiden Enden, der andere in der Mitte. Die Gründe dieses abweichenden Verhaltens kann ich sicher nicht angeben. Eine Vermuthung darüber will ich später aussprechen.

Unrichtig wäre es aber, wenn man glauben wollte, dass die Zeit der Säurewirkung in der Beziehung zu dem Verhalten der Muskelfasern stünde, dass der Scheibenzerfall immer erst in Folge länger andauernder Säurewirkung auftritt. Denn man kann sich leicht davon überzeugen, dass einzelne Muskelfasern auch, wenn man die Säure sehr lange einwirken lässt und durch Drainage öfter erneuert, immer noch ihren Zusammenhang bewahren; bei anderen Fasern führt dagegen die verlängerte und erneuerte Säurewirkung schliesslich den Scheibenzerfall herbei; es kommt aber auch der Fall häufig vor, dass rasch und plötzlich und unmittelbar nach der ersten Berührung der Säure mit den Muskeln diese in Scheiben zerfallen.

Wir wählen für den Versuch vorerst Muskelfasern, an welchen alle Querstreifen nach Art des Schemas, Fig. 5 *A*, deutlich zu sehen sind. Sobald der Säurestrom sich über die Muskelfasern ergiesst, quellen dieselben beträchtlich, sie werden dabei blasser. Das gilt namentlich von der Schichte *Q*.

Die Schichten *N* und *Z* bleiben anfänglich in Bezug auf die Verbreiterung hinter *Q* zurück, so dass die Muskelfaser entsprechend den Schichten *N* und *Z* eingeschnürt ist. In Bezug auf die Ausdehnung in der Richtung der Längenaxe der Muskelfaser bleibt in der gequollenen Faser das Verhältniss der Höhe der Schichten *Q* und *N* und *Z* ebenfalls nicht erhalten. In der gequollenen Faser erscheinen die Schichten *Q* relativ höher, die Schichten *N* und *Z* dagegen aufeinander gedrängt. Rasch folgen aber nun die so veränderten Schichten *N* und *Z* der wachsenden Ausdehnung der Schichten *Q* in die Breite und es stellt sich ein Bild her, welches leicht noch für das im raschen Ablauf der Erscheinungen in der That für einen Moment vorhandene Bild, Fig. 11 *A* und Fig. 15 gehalten werden könnte, welches aber in Wirklichkeit von diesem Bilde wesentlich verschieden ist. Ein solches Säurebild ist in Fig. 17 *A* von *Staphylinus caesareus* dargestellt.

Man sieht statt der früheren dunklen Elemente der Schichten *N* jetzt in den entsprechenden Theilen der Muskelfaser dunkle, runde oder meist etwas in die Länge gestreckte Gebilde in regelmässigen Abständen neben einander, Fig. 17 *A*, l, l u. s. w., die sich wie neben einander liegende Körner ausnehmen. Wir wollen dieselben, ohne jedoch vorläufig damit ihrer Erklärung zu präjudiren, als dunkle Knoten bezeichnen, weil zwischen zwei den Enden je einer Schichte *Q* entsprechenden Querreihen dieser dunklen Knoten äusserst zarte, fadenförmige Verbindungen vorhanden sind, welche ebenfalls etwas dunkler erscheinen, als die Substanz von *Q*, und in welche zwei gegenüberliegende dunkle Knoten mit zugespitzten Enden übergehen.

Der schmale Raum zwischen zwei Querreihen dieser dunklen Knoten, die je zwei aufeinanderfolgenden Schichten *Q* entsprechen, erscheint ebenfalls dunkler als die Substanz von *Q*, und zwar bald mehr, bald weniger stark verdunkelt und meist ist in der Mitte dieses Raumes in Form einer schmalen, dunklen Linie der Streifen *Z* noch deutlich zu sehen (Fig. 17 *A*, *Z*, *Z* —). Durch die Mitte von *Q* zieht an Stelle von *h* meist ein zarter Schatten (Fig. 17 *A*, II, II —). Oft fehlt aber der letztere ganz, dagegen sieht man in einzelnen Fällen an dieser Stelle deutlich eine meist etwas in die Länge gestreckte, leichte Verdickung der durch *Q* laufenden feinen Verbindungsfäden der früher erwähnten Knoten I.

Man kann Präparate, wie die beschriebenen, wieder durch lange Zeit conserviren, wenn man von den gequollenen Muskelfasern die zugesetzte Säure durch verdünntes Glycerin entfernt und dieselben in dem letzteren einschliesst. Das Ansehen der Bilder verändert sich dabei weder beim Zusatz des Glycerins, noch auch nach längerem Liegen in demselben in einer bemerkenswerthen Weise.

Ich möchte im Allgemeinen drei Formen dieses Bildes nach der Form der von den Balken umschlossenen Maschen unterscheiden.

Es ist das beschriebene Bild bei allen untersuchten Käfern mit Ausnahme einer einzigen Familie, welche bald besonders behandelt werden soll, so leicht und häufig zu erhalten, dass ich es unterlasse, besondere Käfer dafür zu empfehlen, bemerken muss ich aber, dass in Bezug auf den Abstand der Knoten I, von einander und die mehr oder weniger gestreckte (spindelförmige, ellipsoidische, rundliche und gedrungene) Form derselben, in Bezug auf die Deutlichkeit, Schärfe und Dicke der die Knoten verbindenden Fäden; in Bezug auf die Breite des schmalen Raumes zwischen zwei neben einanderliegenden Querreihen I; die Deutlichkeit der Linie *Z* in diesem Raume und die Deutlichkeit von *h* die mannigfachsten Variationen beobachtet werden können, die für specielle Fälle zu beschreiben, hier zu weit führen würde.

Ich will vielmehr sogleich zu den Bildern übergehen, welche erhalten werden, wenn in Folge der Säurewirkung ein Scheibenzerfall der Muskelfasern auftritt, weil sie uns ganz besonders in den Stand setzen werden, die Bilder, welche durch Fig. 17 *A* repräsentirt sind und den Unterschied derselben von den früher beschriebenen Säurebildern (Fig. 11—16) zu erklären.

In einem bestimmten Stadium eines langsam sich vollziehenden Scheibenzerfalles in Säuren ist wieder von *Staphylinus caesareus* eine Muskelfaser in Fig. 17 *B* dargestellt. Man sieht, dass die Schichte *Q* in ihren mittleren Partien ihre Continuität verliert, während zwei Querreihen von Knoten durch den schmalen Streifen zwischen denselben verbunden bleiben, und dass dann die Schichten I + *Z* + I auseinander weichen und in Form von Scheiben isolirt werden. An den Enden der Knoten der Querreihen I sind noch die Enden der früheren Verbindungsfäden der Knoten, die obere und untere Fläche der isolirten Scheibe wie die Haare einer Bürste besetzend, zu sehen. In Fig. 17 *B* erscheint die Scheibe *a* vollständig abgetrennt, während die Scheiben *b*, *c* und *d* nur links von einander getrennt, rechts dagegen noch mit einander verbunden erscheinen.

Ich habe von Scheiben gesprochen, weil sich eben leicht zeigen lässt, dass die Bilder *a*, *b*, *c*, *d*, Fig. 17 *B* die Seitenansichten von den ganzen Muskelquerschnitt umfassenden Scheiben sind, von welchen man, da sich die einmal isolirten Scheiben leicht auf die Fläche legen, auch immer zahlreiche Flächenansichten erhalten kann.

Bei *Staphylinus caesareus* geben diese Scheiben in der letzteren Ansicht das in Fig. 17 *C* dargestellte Bild. Man sieht ein Netz von dunklen Balken, in welchem längliche, rhombische oder polygonale, helle Maschenräume vorhanden sind, die mit ihrer langen Diagonale radiär im Muskel angeordnet sind. Die Balken gehen von einer im Inneren der Muskelsubstanz gelegenen feinkörnig erscheinenden Masse aus, welche meist einen Kern in sich schliesst. Dort, wo die die Maschenräume umschliessenden Balken zusammenstossen, treten im Netze verdickte Knoten auf.

Hat man solche Scheiben einmal isolirt, dann gelingt es durch leichte, kurz abgehackte Stösse, welche man mit einer Präparirnadel auf das Deckgläschen ausübt, dieselben zu solchen Bewegungen in der Flüssigkeit zu veranlassen, dass sie einmal von der Fläche, das andere Mal von dem Rande sich präsentiren und man erhält dann von demselben Gebilde wie es in Fig. 17 *C* und *D* gezeichnet ist, einmal die in *C*, das andere die in *D* dargestellte Ansicht. Ausserdem treten viele der Scheiben so gebogen auf, dass einerseits am aufgebogenen Rande die eine, an dem ausgebreiteten Theil der Scheibe die andere Ansicht wahrzunehmen ist. Durch solche Versuche überzeugt man sich auch, dass, ob nun die eine oder die andere Fläche der isolirten Scheibe nach oben zu liegen kommt, immer das Bild *C* mit derselben Schärfe und Deutlichkeit vorhanden ist.

Ich habe mich bisher, um bestimmte Anhaltspunkte für die Darstellung zu gewinnen, an das in Fig. 17 *A*, *B*, *C* und *D* dargestellte Beispiel gehalten. Wenn man aber das Verhalten der verschiedenen Muskeln eines Käfers und der verschiedenen Muskeln einer grossen Reihe von verschiedenen Käferspecies bei dem angeführten Versuche berücksichtigt, so stösst man noch auf eine Menge anderer Bilder, welche eben so bemerkenswerth sind, wie die beschriebenen. Es sind das Bilder, welche die Längenansicht der Muskelfasern betreffen, und solche welche den Querschnitt der Muskelfasern betreffen. Was zunächst die letzteren, also die Flächenansicht der durch Säurewirkung isolirten Scheiben anbelangt, so ist dieselbe bei Weitem nicht bei allen Käfern die, welche wir bei *Staphylinus caesareus* kennen gelernt haben.

Lang gestreckte, radiär gestellte Maschen in dem Balkennetz, wie bei *Staphylinus caesareus*, kommen in vorherrschender Anzahl, wenn nicht ausschiesslich vor bei den Muskeln der Cicindeliden, der kleineren Carabiden, z. B. bei den *Nebria-*, *Pseudophonus-*, *Pterostichus-*, *Platynus-*, *Agonum* und *Brachinus*-Arten, bei vielen Staphyliniden, bei den Cantharideu- und überhaupt bei Käfermuskeln, welche bei kleinem Querschnitt in ihrem Innern die Kerne reihenweise in einem oder nur wenigen der Axe des Muskels entlang laufenden, geschlossenen Strängen feinkörniger Substanz enthalten, mit Ausnahmen, die sogleich näher erwähnt werden sollen.

Ich muss hier nochmals auf den raschen, explosionsartig erfolgenden Scheibenzerfall der Muskeln in Säuren zurückkommen, der nicht selten gelegentlich an den Muskeln der verschiedensten Käfer bei der vorerwähnten Säureapplication zu sehen ist, weil gerade bei kleineren Carabiden, z. B. *Platynus angusticollis* und *albipes*, *Agonum prasinum*, *Pterostichus transversalis*, *Brachinus crepitans* und *Nebria picicornis* wegen der Häufigkeit dieses Vorkommens die beste Gelegenheit ist, dieses Phänomen zu beobachten. Dabei sieht man aus dem Sarkolemma am Ende einer Muskelfaser Scheibe nach Scheibe rasch hervorschiessen, und sich dann in der Flüssigkeit gewöhnlich entweder völlig auf die Fläche ausbreiten, oder mit an dem einen oder dem anderen Orte aufgebogenem Rande sich schwebend in der Flüssigkeit erhalten. Oft erfolgt dieses Hervorschiessen der Scheiben pulsatorisch, wobei jede aus dem Innern des Muskels hervorkommende Scheibe unter mannigfachen Biegungen sich den Ausweg durch das Sarkolemma bahnt, welches nach dem Durchtritt der Scheibe sich wieder zusammenschliesst, um von der nächst ausgestossenen Scheibe wieder eröffnet zu werden u. s. w. Oft hört aber, ehe sich der Sarkolemmaschlauch noch völlig entleert hat, dieses Schauspiel plötzlich auf und man sieht dann einen erweiterten Sarkolemmaschlauch, mit isolirten, in den mannigfachsten Lagen an einander gedrängten Scheiben gefüllt, zurückbleiben.

Es scheinen mir diese Vorgänge darauf hinzuweisen, dass die mehr oder weniger rasche Änderung, welche die elastischen Eigenschaften des Sarkolemma unter dem Einfluss der Säure erleiden, wahrscheinlich bedingend für die früher angeführten verschiedenen Arten der Entstehung des Säurebildes und des Auftretens des Scheibenzerfalles ist.

Ein zweites Bild der Flächen der isolirten Scheiben ist in Fig. 18 *A* von *Dorcadion morio* dargestellt. Die Maschen zwischen den dunklen Balken sind hier mehr ebenmässig entwickelte Polygone und in dem Balkennetz sitzen runde, verdickte Knotenpunkte. Ein Kern findet sich hier der Oberfläche der Muskelfaser entsprechend eingelagert. Die Seitenansicht (Fig. 18 *B*) der isolirten Scheibe ist jener der isolirten Scheibe Fig. 17 ganz ähnlich, nur erscheinen die Knoten der Querreihen etwas mehr in die Länge gestreckt und ist in dem schmalen Raume zwischen den Querreihen der Knoten 1, 1 keine dunkle Linie zu sehen, wie in Fig. 17 *D*. Es ist das Letztere ein Fall, wie er auch bei den früher behandelten Scheiben vorkommen kann, gerade so wie der Fall Fig. 17 *D* auch bei Scheiben, deren Flächenansicht der Form Fig. 18 *A* entspricht, beobachtet werden kann. Scheiben der letzteren Form kommen wieder in weit überwiegender Zahl, wenn nicht ausschliesslich, zu den Muskeln der Hydrophiliden, der Lucaniden, der Scarabaeiden, der Tenebrioniden, der Meloiden, der Curculioniden, der Cerambyciden, und der meisten Chrysomeliden. Es sind das Muskeln, welche ihre Kerne an der Oberfläche unmittelbar unter dem Sarkolemma oder doch ganz vorzugsweise dort haben. Ich werde aber die verschiedene Kernstellung bei den verschiedenen Käfermuskeln erst in einem späteren Abschnitte näher besprechen. Auch eines besonderen Vorkommens in der Mitte der Polygone von *Hydrophilus* werde ich erst später gedenken.

Bei Muskelfasern von sehr breitem Querschnitt, wie sie z. B. bei den grossen Böcken *Cerambyx*, *Ergates*, *Prionus* vorkommen, treten stärkere Balken in grösserer oder geringerer Anzahl auf, welche die Polygone gruppenweise abgrenzen. Meist tauchen die Balken aus einzelnen stärkeren isolirten Knoten auf, um sich nach kurzem Verlauf nach verschiedenen Richtungen wieder dendritisch in die die Mehrzahl der Polygone begrenzenden dünneren Balken aufzulösen. Netze mit ebenmässig entwickelten polygonalen Maschen kommen auch vor bei Muskeln, die ihre Kerne im Innern reihenweise in discret stehenden kurzen Strängen enthalten, wie z. B. bei den Silphiden, ferner in den breiten Muskeln der grösseren Carabiden, z. B. *Procerus gigas*, *Procrustes coriaceus*, *Megadontus violaceus*, die eine grössere Anzahl von Kernreihen in ihrem Innern enthalten.

Die Abgrenzung des Vorkommens der Muskeln mit radiär gestellten verlängerten und mit polygonalen Maschen ist schwierig. Ich werde auf diese Frage noch zurückkommen.

Hier muss ich aber nun noch eine für die Deutung der Säurebilder besonders wichtige Beobachtung anführen.

Die früher ausführlicher behandelten Muskeln der *Aphodius*-Arten, von welchen wir daselbst auch schon ein Querschnittsbild (vergl. Fig. 11 *B* und Fig. 12 *B*) kennen gelernt haben, gehören wie die Muskeln der Scarabaeiden überhaupt in die Reihe jener Muskeln, bei welchen an den durch Säure isolirten Scheiben ebenmässig entwickelte polygonale Maschen in specie das zweite der früher angeführten Bilder der Flächenansicht auftritt.

Wenn man nun auf isolirte Scheiben dieser Muskeln, wie solche in Fig. 11 und Fig. 12 als $N+J+Q+J+N$ und in Fig. 13 als $N+E+Z+E+N$ auftreten, die Säure stark, das ist länger und unter öfterer Erneuerung der zugesetzten Säure mittelst Drainage wirken lässt, so beobachtet man, dass dann auch die Scheiben *N* sich verbreitern.

Dabei ändert sich aber das Querschnittsbild der Scheiben, welches anfangs das Ansehen hat, das in Fig. 11 *B* und Fig. 12 *B* dargestellt ist.

Die Änderung besteht darin, dass bei derselben Einstellung die dunklen Felder der Querschnitte unter gleichzeitiger Vergrösserung immer heller werden, damit vergrössern sich auch die Maschen des zwischen jenen Feldern vorhandenen Geäders und dieses wird im Vergleich zu den Feldern jetzt dunkler, so dass schliesslich das Querschnittsbild ganz ähnlich aussieht, wie das in Fig. 18 *A* gezeichnete.

Es findet also, wenn einmal auch die Elemente von *N* in der Säure gequollen sind, eine Umkehrung der Lichtvertheilung zwischen den von dem Netze umschlossenen Feldern und den Balken des Netzes selbst statt.

Den dunklen Feldern in den Querschnittsbildern, Fig. 11 *B* und Fig. 12 *B*, entsprechen in dem durch Quellung vergrösserten Querschnitte helle Felder; dem früher hellen Geäder entsprechen die dunklen Balken des schliesslich auftretenden Säurebildes.

Die Seitenansicht der Scheiben $N+E+Z+E+N$, welche anfangs die in Fig. 13 dargestellte ist, wird dann die, welche wir in Fig. 17 *D* und in Fig. 18 *B* wahrnehmen.

Man könnte nun, wenn man nur die Seitenansichten der durch Säure veränderten Scheiben Fig. 17 und 18 kennen würde, diese Bilder als gleichbedeutend mit der Seitenansicht der Scheiben $N+E+Z+E+N$ der Fig. 13 ansehen, und die Querreihen 1 von dunklen Knoten für die Elemente (Stäbe) der Schichten *N* halten, während sie in der That etwas ganz anderes sind, wie wir später noch näher sehen werden. An einer früheren Stelle habe ich schon davor gewarnt, dass man nicht das Bild, Fig. 17 *A* mit Bildern wie Fig. 11 *A* und Fig. 15 verwechseln möge. Die Verwechslung würde dort dieselbe sein, welche man beginge, wenn man die Seitenansichten Fig. 17 *D* und Fig. 18 *B* für gleichbedeutend mit der Seitenansicht der Scheiben $N+E+Z+E+N$, Fig. 13, hielte.

Bei den *Aphodius*-Arten und einigen anderen Scarabaeiden ist das Flächenbild der durch Säure veränderten Scheiben insoferne noch besonders bemerkenswerth, als die Knoten des polygonalen Maschenwerkes sehr gross und oft unregelmässig ausgezogen erscheinen, während dagegen die die Knoten verbindenden Seiten der Polygone stellenweise sehr zart sind. Man muss in diesem Falle sehr darauf achten, dass man das Bild richtig deutet. Ich verweise in Beziehung auf das Ansehen solcher Scheiben auf Fig. 23, die nach einem Goldpräparate gezeichnet ist, und werde später auf die Deutung dieses Bildes zurückkommen.

Ein drittes Bild der Fläche von durch Säure isolirten Scheiben von Käfermuskeln ist in Fig. 19 *A* von *Colymbetes fuscus* dargestellt. Es kommt dieses Bild bei der Familie der Dyticiden vor, und zwar habe ich es an den Muskeln aller neun auf Seite 9 angeführten Species von Dyticiden angetroffen.

Diese Käfer besitzen wieder Muskeln, in welchen die Kerne reihenweise in Strängen und Blättern feinkörniger Substanz, die den Muskel durchziehen, angeordnet sind.

Es ist bekanntlich ein Verdienst von Retzius, dieses eigenthümliche Bild für *Dyticus marginalis* auf Grund von Goldpräparaten, welche uns bald ausführlicher beschäftigen sollen, genau beschrieben zu haben.

Retzius [1] gibt auch schon an, dass dieses Bild ebenso an Muskeln, die nur mit Ameisensäure behandelt wurden, zu sehen ist.

Ich lege einen grossen Werth darauf, dass man sich vorerst genau an den Säurebildern orientire, ehe man zur Beurtheilung der Goldbilder übergeht.

Es ist nämlich für die Kenntniss der letzteren wichtig, dass gewisse Goldbilder nichts, als die getreue Wiederholung der Säurebilder, abgesehen von der durch die Imprägnation gesetzten Färbung sind. Für die Beurtheilung dieser Bilder ist es aber gerade wichtig, dass man nicht blos die Endveränderung kennt, welche der Muskel durch die Procedur erlitten hat, der er unterzogen wurde. Es ist vielmehr nothwendig, die successiven Veränderungen kennen zu lernen, nach deren Ablauf sich die Endveränderung am Muskel hergestellt hat, was bei der einfachen Application von Säure viel leichter möglich ist, als bei dem Goldverfahren. Endlich ist es wichtig, dass gewisse Goldbilder der Muskeln als Säurebilder declarirt werden, weil es noch eine andere Art von Goldbildern der Muskelfasern gibt, die sich von den ersteren wesentlich unterscheiden, aber für die Kenntniss der Muskelstructur ebenso wichtig sind, wie die ersteren.

Von dieser zweiten Art von Goldbildern werde ich in einem späteren Abschnitte handeln.

Was Retzius bei Gelegenheit der Beschreibung der Querschnitte von nach seiner Methode vergoldeten Muskeln über die Verschiedenheit der Querschnitte der Muskeln von *Dyticus* anführt, gilt auch für die Muskeln der untersuchten Dyticiden im Allgemeinen. Die Querschnitte sind bald rund, bald oval und dabei oft an den Seiten abgeplattet, so dass mehr ebenmässig entwickelte oder in die Länge gezogene, unregelmässige Vielecke resultiren. Ja, manchmal erscheint eine und die andere Seite des Vieleckes sogar durch eine nebenliegende Faser eingebogen und dann die Ecke, in welcher diese Seite mit der folgenden zusammenstösst, verlängert und spitz.

Bei den kleineren Dyticiden überwiegen entschieden die mehr ebenmässig entwickelten Querschnitte der dünneren Muskelfasern, während die unregelmässigeren Querschnitte an den breiten Muskelfasern der grösseren Dyticiden häufiger vorkommen. Bei den mehr ebenmässig entwickelten Querschnitten findet man gewöhnlich einen Kern in der Mitte, bei den verlängerten finden sich zwei oder drei, deren Constellation im Querschnitte grossen Unregelmässigkeiten unterworfen ist, die aber gewöhnlich in grössere Entfernung in der Richtung, nach welcher der Querschnitt am meisten in die Länge entwickelt ist, auseinandergerückt erscheinen. Das sind die gewöhnlichen Fälle. Es kommen aber auch verlängerte Querschnitte mit nur einem Kern und nicht oder nur wenig verlängerte mit zwei und drei Kernen vor, in welchen dann die Kerne näher bei einander und mehr in den mittleren Partien des Querschnittes liegen.

Die grösste Anzahl von Kernen auf einem Querschnitt, die ich zählte, war vier, und solche Querschnitte sind auffallend gross, dabei sind sie wieder mehr ebenmässig nach den verschiedenen Richtungen entwickelt, enthalten aber alle vier Kerne in excentrischer Stellung und wechselnden Abständen.

Vereinzelt trifft man solche Querschnitte nicht selten an, ihrer Zahl nach bleiben sie aber im Vergleich mit denen, welche einen, zwei oder drei Kerne aufweisen, sehr zurück.

Die Kerne sind umgeben von einer körnigen Substanz, aus welcher sich ein eigenthümliches Balkenwerk entwickelt. In diesem fallen zunächst stärkere Balken auf, die nach verschiedenen Richtungen vom Kerne ausstrahlen (Fig. 19). Diese Balken lösen sich gegen die Peripherie laufend, in kleinere Balken auf, oder sie laufen, während sie fortwährend kleinere Balken aussenden, auf einander zu und setzen als breite Brücken die um die einzelnen Kerne gelagerte Substanz in Verbindung (Fig. 19).

Typisch ist aber der Verlauf der kleineren Balken, welche sich zum Theile aus der um den Kern gelagerten Substanz, zum Theile aus den erwähnten stärkeren Balken entwickeln.

Die grösste Anzahl dieser Balken schlägt unter mannigfachen kleineren Biegungen einen radiären Verlauf zur Peripherie des Querschnittes ein, wodurch stellenweise eine parallele, stellenweise eine federartige Anordnung der Balken die herrschende wird. Während dieses Verlaufes senden sich die Balken zahlreiche

[1] Retzius, Biologische Untersuchungen 1881, p. 1.

längere oder kürzere Anastomosen zu, woraus die verschiedensten Formen und Grössen der gewöhnlich in radiärer Richtung stark verlängerten, von den Balken umschlossenen Felder entstehen.

Die stark gestreckte Form dieser Felder ist in der That nur die am häufigsten auftretende. Man findet aber neben den gestreckten Feldern meist in der Nähe des Ursprunges der kleineren Balken aus den grösseren auch durch häufigere, kürzere Anastomosen bedingte, weniger gestreckte Felder, ohne dass dadurch der Gesammteindruck einer radiären Anordnung des Balkenwerkes wesentlich gestört würde. Es ist endlich von dem eigenthümlich angeordneten Balkenwerk auf dem Querschnitte der Dyticidenmuskeln noch hervorzuheben, dass nicht alle Stellen, wo zwei Balken zusammenstossen, knotig verdickt erscheinen. Es kommen vielmehr eigenthümlich sternförmig erscheinende Verdickungen des Balkenwerkes nur als vereinzelt stehende Knoten vor (Fig. 19) und lässt sich in Bezug auf Zahl und Austheilung dieser irgend welche Gesetzmässigkeit vorerst nicht absehen.

Im Wesentlichen muss ich mich nach der vorstehenden Beschreibung den Angaben anschliessen, welche Retzius für den *Dyticus marginalis* gegeben hat.

Nachdem ich nun die verschiedenen Flächenbilder der durch Säuren isolirten Scheiben von Käfermuskeln beschrieben habe, wollen wir zur Seitenansicht dieser Scheiben, die wir früher schon an Beispielen von *Staphylinus caesareus* und *Dorcadion morio* (Fig. 17 *A*, *B*, *D* und Fig. 18 *B*) beschrieben haben und zur Längenansicht der veränderten Muskeln zurückkehren

Da ist nun für die durch Säuren isolirten Scheiben der Muskeln von Dyticiden hervorzuheben, dass dieselben von der Seite betrachtet, nicht eine Doppelreihe von Knoten I, sondern nur eine einfache Knotenreihe zeigen (Fig. 19 *B*). An den Muskeln der Dyticiden ist, wenn man dieselben Thieren entnimmt, die durch 24 Stunden in 93⁰/₀igem Alkohol gelegen haben, in der Regel die Querstreifung (Fig. 5 *C*) vorhanden, und wenn man auf diese Muskeln 1⁰/₀ige Ameisensäure wirken lässt, tritt unter ähnlichen Veränderungen der Schicht *n* *Q*, wie sie früher beschrieben wurden, an Stelle von *Z* eine einfache Querreihe von Knoten auf (Fig. 20 I, I —).

Die in dieser Figur dargestellte Faser von *Cybister Roeseli* zeigt ferner im Säurebild in der Mitte von *Q* der Lage des früheren Streifens *h* entsprechend noch Querreihen von feineren Knoten (Fig. 20 II, II —), welche in der Mitte der die Knoten I verbindenden Fäden wahrgenommen werden. Die Querreihen der Knoten I sind an den Säurebildern stets mit grosser Deutlichkeit zu sehen und ebenso die dieselben verbindenden Fäden. Anders verhält es sich mit den Querreihen der Knoten II. Diese fehlen oft ganz, manchmal ist an ihrer Stelle nur ein unbestimmter Schatten angedeutet; oft erscheinen die Knoten nicht so rund wie in Fig. 20, sondern stellen mehr längliche spindelförmige Verdickungen der fadenförmigen Verbindungen der Knoten der Querreihen I dar.

Wenn man aber die Säurewirkung an Muskeln von Dyticiden sehr genau verfolgt, so gelingt es manchmal auch, sich davon zu überzeugen, dass anfänglich auch bei diesen die Querreihe der Knoten doppelt auftritt, die Knoten der nebeneinanderliegenden Querreihen sind aber sehr klein und liegen sehr nahe und nur durch ein schmales linienförmiges Band von einander getrennt beisammen. Man muss in solchen Bildern die Analoga der Bilder sehen, die wir früher (Fig. 17 *A* u. *B*) als bei anderen Käfern häufig vorkommend beschrieben haben.

Bei den Dyticiden sieht man aber dieses Bild bei weiterer Wirkung der Säure bald in jenes übergehen, welches nur eine Knotenquerreihe I aufweist, und zwar geschieht das wie man direct beobachten kann, dadurch, dass die kleineren Knoten der doppelten Querreihe paarweise aufeinander rücken und schliesslich zu einfachen grösseren Knoten sich vereinigen.

So wie man aber bei den Muskeln der Dyticiden die Analoga der Bilder mit doppelten Querreihen der Knoten I beobachten kann, so gelingt es bei anderen Käfern auch leicht, die Analoga der gewöhnlichen Endveränderung der Muskeln der Dyticiden zu finden. Man beobachtet nämlich ausser den Muskeln mit doppelten Querreihen der Knoten I bei sehr vielen Käfern, auch solche mit einer einfachen Querreihe der Knoten I, ja manchmal überwiegen sogar diese Muskeln. Es sind aber dann die Knoten I gewöhnlich sehr langgezogen und spindelförmig. Man halte sich hier vorzüglich an Scarabaeiden, Tenebrioniden und Chrysomeliden, bei welchen die Knoten und die sie verbindenden Fäden etwas massiver hervortreten. Es gelingt auch, wenn man nur anhaltend beobachtet, zu sehen, dass eine in einem früheren Moment der Säurewirkung doppelte Querreihe der Knoten I, in einem späteren Stadium der Säurewirkung in eine einfache Querreihe stark verlängerter Knoten übergeht, die durch Verschmelzen je zweier, früher gegenüberliegender Knoten entstehen.

Die Flächenbilder von isolirten Scheiben zeigen, mag nun die Seitenansicht derselben die einfache oder die doppelte Querreihe der Knoten I darbieten, immer dasselbe für die betreffenden Muskeln typische Bild des Netzes der dunklen Balken.

Ich halte nach diesen Erfahrungen die Annahme für gerechtfertigt, dass die Bilder mit den doppelten Querreihen der Knoten I auf einer früheren Stufe der Veränderung stehen gebliebene; die Bilder mit den einfachen Querreihen der Knoten I auf eine weitere Stufe der Veränderung gelangte Säurebilder der Muskeln sind.

Ich habe nun noch ein besonderes Bild zu besprechen, auf welches man bei durch Säure veränderten Muskeln manchmal stösst. Es ist das in Fig. 21 von *Stenomax lanipes* dargestellte. Dasselbe ist dem in Fig. 17 *A* dargestellten Bilde ähnlich. Es unterscheidet sich aber von jenem hauptsächlich dadurch, dass um jeden Knoten der doppelten Reihen I, I ein heller Raum wie ein den Knoten umgebender Hof erscheint, die Contouren dieser Höfe neigen sich nach den Schichten *Q* hin zusammen und vereinigen sich mit dem Faden, welcher zwei an den gegenüberliegenden Seiten von *Q* befindliche Knoten verbindet. Ebenso neigen sich die Contouren dieser Höfe nach der entgegengesetzten Seite zusammen, nämlich in der Richtung gegen den schmalen Raum, der je zwei neben einander liegende Querreihen der Knoten I trennt.

In diesem Raume sieht man den Streifen *Z* als feine Linie. Es stehen aber auch durch diesen Raum hin durch je zwei gegenüber liegende Knoten einer Doppelreihe I durch kurze, dunkle Brücken mit einander in Verbindung, und zwar erscheinen diese Brücken breiter als die durch *Q* hindurchgehenden Verbindungen der Knoten. Die in der Querrichtung zwischen den Höfen der Knoten liegende Substanz der Muskelfaser tritt mit besonderem Glanze hervor.

Wir wollen nun die Säurebilder vorläufig verlassen, da ich ihre weitere Auslegung bis dahin verschieben muss, wo wir auch die ihnen entsprechenden Goldbilder der Muskeln untersucht haben werden. Durch Behandlung frischer oder vorher für kurze Zeit in Ameisensäure eingelegter Muskelfasern mit Goldchlorid und nachfolgende Reduction durch Lichteinwirkung auf die in Essigsäure gebrachten Muskelfasern oder Reduction mittelst Ameisensäure haben Thin[1] und später Bidermann[2] ein die ungefärbt gebliebenen Cohnheim'schen Felder umgrenzendes, rothes, mit Verdickungen in den Knotenpunkten versehenes Netzwerk dargestellt. Der Erstere erklärte dieses Netzwerk für ein durch den Muskel in querer Richtung gespanntes, in bestimmten Abständen sich wiederholendes, elastisches Netzwerk, welches er mit Krause's Quermembran identificirte. Der letztere führte das Netzwerk zurück auf eine zwischen den Kölliker'schen Muskelsäulchen, die den Cohnheim'schen Feldern entsprechen, vorhandene, reducirende Zwischensubstanz.

Später sah Gerlach[3] das die Cohnheim'schen Felder trennende Netzwerk auf dem Querschnitte von vergoldeten Muskeln, welche in Glycerinsäuregemisch in Scheiben zerfallen waren, und die Vergleichung dieser Bilder mit den Bildern, welche er auf dem Längsschnitte der entsprechend behandelten Muskeln zu sehen bekam, führte ihn zu einer ähnlichen Auffassung der vergoldeten Substanz, wie sie Bidermann, dessen Arbeit Gerlach damals noch nicht bekannt gewesen zu sein scheint, kurz zuvor ausgesprochen hatte.

Diese Beobachtungen hätten eine grössere Aufmerksamkeit verdient, als sie bislang gefunden haben. Schon mit Hinblick auf eine Thatsache, die auch Gerlach andeutete. Cohnheim[4] hatte nämlich an gelungenen Silberimprägnationen des Muskelquerschnittes gesehen, dass die später nach ihm benannten Felder braun, das diese Felder trennende Geäder weiss erschien. Nach diesen Beobachtungen musste es ja scheinen, dass zwischen der Substanz der Muskelsäulchen und der Substanz, welche die Muskelsäulchen trennt, ähnliche Unter-

[1] Thin, On the minute anatomy of muscle and tendon. Reprinted from the Edinburgh med. journ. Septemb. 1874, p. 3.

[2] Bidermann, Sitzungsb. d. math. naturw. Classe, d. kais. Akad. d. Wissensch. in Wien. Bd. LXXIV, Abth III, Jahrg. 1876, p. 49.

[3] Gerlach, Archiv f. mikroskop. Anatomie, Bd. XIII. 1877, p. 399.

[4] Gerlach l. c. p. 403.

schiede in dem Verhalten gegen die beiden Metallsalze bestehen, wie zwischen Hornhautkörperchen und Hornhautgrundsubstanz, oder wie zwischen Zell- und Kittsubstanzen; und dass die Säulchen der Muskeln das Verhalten je der zweiten, das Netzwerk aber das Verhalten je der ersten der verglichenen Substanzen, also das des Protoplasmas zeigt, was jedenfalls eine sehr bemerkenswerthe Thatsache ist.

Ranvier[1] hat gelegentlich einer Kritik der Arbeit Gerlach's sich der Deutung, welche der Letztere seinen Bildern gab, angeschlossen.

Im Jahre 1881 veröffentlichte Retzius seine schon früher berührte Arbeit über die Muskeln. Er hat zunächst für den *Dyticus* die Goldbilder mit einer bis dahin nicht gekannten Genauigkeit beschrieben. Er bezeichnete das früher beschriebene seiner Lage nach, den sogenannten Zwischenscheiben oder Krause'schen Membranen entsprechende, eigenthümliche Balkennetz des Querschnittes als Querfadennetz erster Ordnung und deutete die Balken als ein in einem Querschnitte der Muskelfaser entwickeltes Ausläufernetz von Zellen, welche durch die im Innern des Muskels liegenden Kerne und die um dieselben gelagerte körnige Substanz repräsentirt seien. Jede dieser Zellen sende eine Reihe solcher Querfadennetze aus. Die in der Seitenansicht dieser Querfadennetze sichtbaren, früher als Knoten I bezeichneten dunklen Punkte, nennt Retzius Körnerreihen erster Ordnung und er erklärt, was wir als ganz richtig für Säure- und Goldbilder anerkennen müssen, die Körner als die optischen Querschnitte der Fäden des Querfadennetzes. Ausser diesen Fadennetzen kommen noch Querfadennetze zweiter Ordnung vor, die ihrer Lage nach dem Hensen'schen Streifen entsprechen; in der Seitenansicht dieser erscheinen die früher als Knoten II bezeichneten kleineren Körner und die daraus gebildeten Körnerreihen zweiter Ordnung. Endlich kommen bei gewissen Zuständen der Muskeln, und zwar ungefähr in der Mitte zwischen den Querfadennetzen erster und zweiter Ordnung noch Querfadennetze dritter Ordnung und diesen entsprechend in der Seitenansicht noch feinere Körnerreihen dritter Ordnung zur Beobachtung. Durch feine, längsgehende Häutchen scheinen alle diese Querfadennetze in der Längenrichtung des Muskels verbunden zu sein.

Bei *Notonecta, Locusta*; bei *Astacus fluviatilis*; bei *Rana* und *Triton*; bei *Turdus musicus* fand Retzius Querfadennetze ganz anderer Art als bei *Dyticus marginalis*, nämlich Fadennetze, die polygonale Felder umschliessen, welche er als die Cohnheim'schen Felder erklärt. Bei *Musca* und *Oestrus* sah er endlich wieder Fadennetze von radiärer und federartiger Anordnung mit langen Maschenräumen.

Später noch hat sich Bremer[2] mit den Goldsäurebildern beschäftigt, und zwar untersuchte er hauptsächlich Wirbelthiermuskeln. Er glaubt nach der Goldsäurebehandlung von Muskeln des Frosches, einer Eidechse und der Maus unter anderen Gewebsfragmenten eine Anzahl von Bowman'schen Discs erhalten zu haben, welche die Cohnheim'schen Felder zeigten. Ausser dem rothgefärbten Netz, welches die Felder umschliesst, sah Bremer noch in der Mitte jedes Feldes einen rothen Punkt, von welchem radiirende Fäden nach der Peripherie der Felder liefen. Bei Muskeln von *Hydrophilus*, wo der mittelständige Punkt sehr gut zu beobachten ist, seien auch diese irradiirenden Fäden leichter zu sehen, während sie bei den Wirbelthieren, wegen ihrer ausserordentlichen Feinheit nicht immer nachgewiesen werden können.

Auf dem Längsschnitt sieht Bremer Reihen von Knötchen oder Stäbchen, welche durch Quer- und Längsfäden miteinander verbunden, ein aus den Protoplasmafortsätzen der „Muskelkörperchen" sich entwickelndes, wohl definirtes, den Muskel durchziehendes Netz darstellen sollen.

Die Knötchen sollen durch Schrumpfung ursprünglicher Stäbchen zu Stande kommen, und zwar sollen die Stäbchen um so leichter schrumpfen, je jünger (? der Verf.) sie sind. Die Knötchenreihen mit ihren Querfäden seien die Cohnheim'schen Felder von der Seite gesehen. Die Knötchen selbst seien die Kreuzungspunkte der Begrenzungsfäden der Felder und diese Kreuzungspunkte stehen durch Längsfäden mit den entsprechenden Punkten der angrenzenden Cohnheim'schen Felder in Verbindung. Bei genauerer Untersuchung finde man, dass in derselben Reihe mit den grösseren Knötchen oder Stäbchen und mit diesen alternirend kleinere stehen

[1] Ranvier, Leçons sur l'histologie du système nerveux. Tom II, Paris 1878, p. 264.
[2] Bremer, Archiv f. mikroskop. Anatomie, Bd. 22, 1883, p. 318.

Eine Querverbindung dieser mit den grösseren Knötchen konnte Bremer nicht beobachten, hält sie aber wegen der radiirenden Fäden auf den Querschnitten für wahrscheinlich. Dagegen sind die kleineren Knötchen der Länge nach deutlich durch Fäden verbunden. Grosse und kleine Knötchen entsprächen dem dunklen Querbande der Muskelfasern. Zwischen je zwei auf einanderfolgenden Reihen dieser alternirenden Knötchen sehe man die Krause-Amici'sche Linie, diese werde von den Längsverbindungsfäden der kleineren Knötchen gekreuzt und dadurch Rechtecke, welche zwischen je zwei einer oberen und je zwei einer unteren Reihe angehörigen grösseren Knötchen mit ihren Quer- und Längsverbindungen entstehen, wieder in vier kleinere Rechtecke zerlegt. Diese Structurverhältnisse sollen nur an jungen Muskelfasern zu sehen sein. An alten Muskelfasern, in welchen die Differenzirungsvorgänge beendet sind und die „Muskelkörperchen" ihr Protoplasma vollständig eingebüsst haben, sei es nur unter besonders günstigen Umständen möglich, die beschriebenen Structurverhältnisse zu erkennen. Je älter die differenzirte Substanz ist, desto mehr erscheine sie als die bekannten hellen und dunklen Querstreifen der Muskelfasern.

Schliesslich wendet sich Bremer gegen die Auffassung der Trennungslinien der Cohnheim'schen Felder als Querschnitte von zwischen den Muskelsäulchen vorhandenen Scheidewänden und erinnert an die von Heitzmann ausgesprochene Auffassung der Muskelfaser als ein aus protoplasmatischen Fäden bestehendes Netz, indem er annimmt, dass Heitzmann schon die Quer- und Längsverbindungen der beschriebenen dicken Muskelstäbe (grösseren Knötchen) dargestellt habe.

Mit der Darstellung von Retzius stimme, wie Bremer sagt, seine Auffassung insoferne überein, als Retzius, sowie er, die die Cohnheim'schen Felder trennenden Linien nicht als Querschnitte von Scheidewänden, sondern als Querfadennetze, gebildet von Zellausläufern der Muskelkörperchen betrachte.

In Bezug auf die Lage der Querkörnerreihen weicht aber Bremer von Retzius ab. Ersterer nimmt an, dass die Querkörnerreihen erster Ordnung den dunklen Querbändern, ihre Querverbindungsfäden der Hensen'schen Linie entsprechen. Letzterer lässt die Körnerreihen erster Ordnung der Krause'schen Linie entsprechen.

Die Querkörnerreihen zweiter Ordnung entsprechen nach Bremer der Krause-Amici'schen Linie, nach Retzius dem Hensen'schen Streifen.

Der Länge nach reihen sich die Körner erster Ordnung nach Bremer zu Längskörnerreihen erster Ordnung, das seien die bekannten Längslinien (? der Verf.) der Muskelfasern. Alternirend mit diesen Längskörnerreihen erster Ordnung bemerke man unter günstigen Umständen Längskörnerreihen zweiter Ordnung, welche den mittelständigen Punkten entsprechen. Die Körner erster Ordnung seien die Knoten des die Cohnheim'schen Felder trennenden Netzes, die Körner zweiter Ordnung die Knoten eines feineren Netzes.

Darauf, dass die Körner im nicht geschrumpften Zustande als Stäbchen erscheinen, legt Bremer besonderes Gewicht und daran schliesst sich der folgende Ausspruch von Bremer: „Es ist hin und wieder behauptet worden, die Muskelstäbchen färben sich nicht mit Gold, dies ist ein Irrthum, welcher sich aus dem Vorstehenden erklärt. Man übersah die Identität von Stäbchen und Körnern."

Ich glaube, dass gerade der letztere Satz über die Auslegung, die Bremer seinen Befunden geben will, keinen Zweifel mehr übrig lässt, während die an die vorausgehenden Beschreibungen geknüpften Darlegungen Bremer's einer durchsichtigen Nachbildung seiner Vorstellungen, wie mir scheint, nicht besonders förderlich sind.

Also die Muskelstäbe, das ist also wohl die Sarcous elements, sollen sich mit Gold färben und durch Fäden der Quere und der Länge nach zusammenhängen? Was ist aber dann die ganz respectable Substanz des Muskels, die sich mit Gold nicht färbt? Was sind die dann noch durch diese Substanz ziehenden feineren, mit Gold gefärbten Netze?

Wir werden sehen, dass die Auffassung Bremer's für die Goldsäurebilder ganz unzulässig ist. Muskeln, an denen die Sarcous elements mit Gold gefärbt erscheinen, und man kann solche erhalten, sehen ganz anders aus als Goldsäurebilder, an welchen, wie wir sehen werden, das Sarkoplasma mit Gold gefärbt ist.

Ich kann auch die Auffassung von Retzius und Bremer, dass auf Zellausläufer zurückzuführende Querfadennetze den Muskel durchziehen, die in parallelen Querschnittsebenen des Muskels und in bestimmten Abständen entwickelt sind, nicht theilen.

Was Retzius und Bremer mit Gold gefärbt sahen, ist das die Fibrillenbündel (Säulchen) des Muskels trennende Sarkoplasma, welches an den vergoldeten Muskeln in eigenthümliche Formen geprägt erscheint, weil die fibrilläre Substanz der Muskeln beim Quellen in den Säuren, in welchen die Reduction der mit Gold imprägnirten Muskeln vorgenommen wird, sich ihrem gegliederten Baue entsprechend abschnittweise stärker und rascher und abschnittweise weniger stark und weniger rasch verbreitert.

Wenn man ganz frische, eben dem lebenden Thiere entnommene Käfermuskeln nach dem Verfahren von Retzius vergoldet, das ist: sie in $^1/_5$—$^1/_2$%ige Goldchloridlösung bringt, mit Nadeln (ich verwendete ausschliesslich Platinnadeln) etwas auseinanderzieht, 20 bis 25 Minuten im Goldbade verweilen lässt, und sie dann in 1%ige Ameisensäure oder Bastian-Pritchard'sche Reductionsflüssigkeit bringt, so erhält man meist vergoldete Muskeln, welche sich von den zuletzt beschriebenen Säurebildern nur dadurch unterscheiden, dass die dort beschriebenen Balkennetze und Knotenreihen stark roth, die Substanz zwischen denselben nicht oder nur wenig roth gefärbt erscheint.

Ich habe eine sehr grosse Anzahl solcher Präparate von den verschiedensten Käfern hergestellt, will mich aber hier über einen Theil derselben kurz fassen. An diesen Goldbildern wiederholen sich nämlich zunächst nur die früher an den durch Säure veränderten Muskeln beschriebenen Bilder. Ich werde nur wenig zur Ergänzung jener Darstellung beizufügen haben, und länger nur bei solchen Goldsäurebildern der Muskeln verweilen, welche unter den reinen Säurebildern nicht besprochen wurden.

Ich habe aber schon früher angeführt, dass die die Säurebilder nachahmenden Goldbilder der Muskelfasern nur eine Art von Goldbildern ist, die man von denselben erhalten kann, und dass noch eine zweite Art von Goldbildern der Muskeln gewonnen werden kann. Diese letzteren scheinen mir an sich, namentlich aber im Vergleich mit der ersten Art von Goldbildern so wichtig, dass ich denselben später eine besondere, eingehendere Besprechung zu Theil werden lassen muss.

Was nun die erste Art von Goldbildern betrifft, so muss ich für den *Dyticus marginalis* abermals auf die treffliche Beschreibung verweisen, welche Retzius von denselben geliefert hat, wenn ich mich auch der Deutung, die Retzius den Bildern gibt, nicht anschliessen kann.

Im Vergleich mit den einfachen Säurebildern ist für die Goldbilder zunächst hervorzuheben, dass an den letzteren die Knotenreihe II in der Regel viel besser hervortritt, und an viel zahlreicheren Fasern gut zu sehen ist, sie kann aber auch an vergoldeten Muskelfasern vollkommen fehlen.

Merkwürdig ist das von Retzius beschriebene Bild mit drei Ordnungen von Körnerreihen (Knotenreihen). Ich habe dieses Bild nur bei *Dyticus, Cybisteter* und *Acilius sulcatus* gesehen, und zwar an stark gedehnten Muskelfasern. Es schien mir, als ob dann die Knotenreihen I und II feiner und zarter wären, als an den Fasern, wo Knotenreihen III nicht zu sehen waren.

Es ist dieses Bild nach meinen Erfahrungen das Seltenste.

Bei den Muskeln der Dyticiden erscheinen die Knoten der Querreihen I an den Goldbildern immer einfach. Bei den anderen Käfern ist eine doppelte (Fig. 17 und 18) oder eine einfache Querreihe der Knoten I, sowie an den einfachen Säurebildern zu beobachten. An den Muskelfasern von *Oxythyrea stictica*, *Ragonycha melanura* und *Cantharis rustica* sah ich auch die Knotenreihe II einige Male doppelt. Es war das aber nur an wenigen Muskelfasern und selten der Fall.

Da die Knotenreihe II ihrer Lage nach dem Streifen *h* entspricht, richtete ich meine besondere Aufmerksamkeit auf Goldpräparate der Muskeln der gerade erwähnten Käfer, da ich an denselben, wie früher angeführt wurde, den Streifen *h* doppelt beobachten konnte. Aber trotz dieser Bemühungen gelang es mir bei *Cetonia aurata* und *Tropinota hirta* nicht, entsprechende Goldbilder zu erhalten, was, wie schon angeführt, bei *Oxythyrea stictica* und *Ragonycha melanura* gelang. Auch *Cantharis rustica* ist oben dafür angeführt, bei diesem Käfer habe ich zwar das Goldbild, hingegen wieder nicht den doppelten Streifen *h* an unvergoldeten Muskeln beobachtet.

Was Retzius für den *Dyticus marginalis* anführt, nämlich, dass bei vergoldeten Muskeln nach einiger Maceration in dem Ameisensäuregemisch sich sie Querfadennetze isoliren, gilt von allen übrigen Käfermuskeln auch. Es tritt der Zerfall der Muskeln in Scheiben, wie durch die einfache Säurewirkung oft in grossem Umfange, immer aber an sehr vielen Fasern auf. Das ist aber bei weitem kein Zerfall in Bowman'sche Discs, wie Bremer meinte.

Beobachtet man die isolirten Scheiben von der Fläche, so erhält man bei den verschiedenen Käfern verschiedene Bilder, die mit den früher nach Säurewirkung beschriebenen Bildern vollkommen sich decken, nur sind dieselben wegen der rothen Färbung der Balken der verschieden angeordneten Netze um Vieles deutlicher, als die nicht vergoldeten Säurebilder.

Eine besondere Erwähnung verdient hier das Goldbild, welches man von *Hydrophilus piceus* erhält, und auf welches Bremer zuerst die Aufmerksamkeit gelenkt hat. Beim *Hydrophilus* umschliessen die Balken ziemlich regelmässige, wenigstens nicht sonderlich verlängerte und verzerrte Polygone. Merkwürdig ist aber, dass in der Mitte jedes Polygones eine kleine Figur auftritt. Diese erscheint rundlich oder drei- oder viereckig, oder polygonal oder lang gestreckt oder sternförmig, mit einer beschränkten Anzahl von Strahlen. Dieselbe erscheint durch Gold roth gefärbt wie das Netz der Balken selbst. Bremer führt noch an, dass diese von ihm einfach als Punkt bezeichnete Figur durch feine, radienartig verlaufende Fäden mit der rothen Umfassung der Polygone verbunden ist.

An den Goldbildern, welche ich nach der angeführten Methode, nach der Methode Bremer's und auch nach der Methode Golgi's: Vorbehandlung mit Arsensäure, Goldchloridkaliumbad und Reduction am Lichte in Arsensäure, gelegentlich erhielt, konnte ich aber solche feine, regelmässige Brücken nicht beobachten.

Sind die kleinen Figuren in Mitte der Felder auch häufig sternförmig, so reichen doch die Strahlen nicht bis an die Peripherie des Polygones, nur ganz ausnahmsweise reicht der Strahl eines Sternes so weit.

Es liegt hier meiner Anschauung nach, mit grosser Regelmässigkeit wiederkehrend, ein Bild vor, welches gelegentlich und vereinzelnt auch bei anderen Käfermuskeln zu beobachten ist, dass nämlich nicht, wie es zum grössten Theile der Fall ist, die mit Gold gefärbte Substanz, die durch Gold nicht gefärbte, sondern umgekehrt die letztere die erstere umschliesst. Bei *Dyticus marginalis* hat, wie auch schon Bremer[1] hervorhebt, Retzius[2] in einzelnen von den Balken umschlossenen Maschen ebenfalls freistehende Balken, zum Theile aber auch in der Mitte eines von den Balken umschlossenen Feldes nur einen rothen Punkt, der sich wie der Durchschnitt eines Balkens ausnahm, angetroffen und in seinen Abbildungen Fig. 2, 3, 4 dargestellt. Diesen Befund kann man auch an Säurebildern von Dyticidenmuskeln constatiren, siehe unsere Fig. 19 *A*. Den merkwürdigen Befund an dem Muskel von *Hydrophilus* werden wir später darauf zurückführen, dass bei diesem Thiere die Muskelsäulchen hohle, röhrenförmige Gebilde darstellen. Mit den Goldbildern von *Hydrophilus*-Muskeln übereinstimmende Bilder erhielt ich auch von den Muskeln von *Hydrocharis caraboides*.

Ehe ich nunmehr hier auf die Frage eingehe, welche Deutung wir den Säurebildern und den ihnen entsprechenden Goldbildern zu geben haben, bedarf die Art und Weise, in welcher wir die Säure auf den Muskel wirken liessen, noch einiger Worte der Rechtfertigung. Es könnte sich nämlich die Frage aufdrängen, warum wir nicht ganz frische und noch erregbare, überlebende Muskelfasern der Wirkung der Säure aussetzten und so die Säurebilder zu erhalten getrachtet haben.

Man kann das in der That ausführen, und man wird sich dabei überzeugen, dass das rasch auftretende Endergebniss der Säurewirkung ist, dass durch feine Längslinien verbundene Knotenreihen und dem Querschnitte entsprechend Balkennetze auftreten, wie wir sie früher beschrieben haben.

Man hat aber dann in der Regel nur Säurebilder vor sich, die sich aus dem contrahirten Zustande der Fasern entwickelt haben, da die Säure die noch erregbaren Muskeln zunächst in den verkürzten Zustand überführt, aus welchem sich, wie wir später sehen wollen, ganz ähnliche Säurebilder entwickeln, wie wir sie früher erhalten haben, die aber doch den aus erschlafften Muskelfasern erhaltenen Bildern gegenüber ihre eigene Behandlung erfordern.

---

[1] Bremer l. c. p. 328.
[2] Retzius l. c. p. 5.

Wollen wir die Säurewirkung auf einen bestimmten Zustand der Querstreifung der Muskelfasern beziehen, so müssen wir dafür sorgen, dass ein solcher sich vorerst durch Absterben in der Muskelfaser fixirt hat. Natürlich werden wir dabei Sorge tragen müssen, zu zeigen, dass die verschiedenen Zustände der Querstreifung, wie sich dieselben in den Muskeln beim Absterben fixiren, auch bestimmten, am lebenden Muskel vorhandenen Zuständen entsprechen. Es ist diese Frage schon von Engelmann[1] eingehend discutirt worden. Wir wollen ihr nicht aus dem Wege gehen, sondern später zeigen, dass wir uns in dieser Beziehung der Angabe Engelmann's anschliessen müssen, dass alle früher für die erschlafften Muskelfasern beschriebenen Querstreifen schon an lebenden Muskeln, während des ablaufenden Wechsels von Contraction und Erschlaffung dieser letzteren entsprechend zu beobachten sind.

Von Muskelfasern, welche in verschiedenen Zuständen durch natürliches Absterben todtenstarr geworden sind, wie man sie bei Käfern am besten erhält durch Abschneiden der Beine grösserer Käfer und Liegenlassen derselben bis die darin enthaltenen Muskeln nicht mehr auf Reize reagiren, kann man mittelst 1%iger Ameisensäure oder Essigsäure, mit 0.1%iger Salz- oder Salpetersäure und sehr gut auch mit 1%iger Arsensäure, alle die früher beschriebenen Säurebilder und den Scheibenzerfall in Säuren erhalten.

Noch ein Umstand wirkt bei Application der Säuren auf frische Muskeln störend. Es tritt nämlich als erste Wirkung der Säure im Muskel eine Fällung auf. Der Muskel wird zuerst weiss und körnig getrübt und erst daran schliesst sich rasch das Quellen, wobei der Muskel wieder völlig durchsichtig wird. Wenn man aufmerksam die Säurewirkung verfolgt, wird man dieses vorübergehende Stadium der Trübung nirgends übersehen. Es ist aber an den Muskeln gewisser Thiere viel deutlicher und ausgeprägter zu sehen, als bei anderen und sind z. B. die Muskeln von *Astacus fluviatilis* und *Maja squinado* wegen der massigen Ausscheidung des körnigen Niederschlages und der daraus folgenden grossen Opacität der Muskeln im Anfange der Säurewirkung Jedem zu empfehlen, der diese Erscheinung studiren will.

An den Muskeln von Käfern, die 24 Stunden in 93%igem Alkohol gelegen haben, kommt ein solcher störender, körniger Niederschlag im Anfange der Säurewirkung nicht mehr zu Stande. Auch wenn die Säure sehr langsam auf dieselben wirkt, tritt im Anfange keine oder eine kaum nennenswerthe diffuse Verdunklung, niemals aber ein die Ansicht der Muskelfaser vorübergehend störender Niederschlag auf.

Diese und alle aus der früheren Darstellung zu entnehmenden Vortheile gewährt für die Herstellung der Säurebilder die Verwendung von Muskeln, die man Thieren entnimmt, die vorher für einige Zeit in Alkohol gebracht wurden, und ist auch noch besonders die schon früher erwähnte Thatsache hier in Erinnerung zu bringen, dass es durch Verlängerung der Dauer der Alkoholeinwirkung gelingt, successive das Quellungsvermögen der Muskeln in Säuren zu beschränken, was wieder, wie schon angeführt, zum Vortheile der mikroskopischen Untersuchung ausgebeutet werden kann.

Für die den Säurebildern analogen Goldbilder besorgt die Behandlung der Muskelfasern mit dem Goldchlorid die Fixirung bestimmter Zustände der Muskelfasern, während die saure Reductionsflüssigkeit erst das Quellen der Muskelfasern besorgt. Erst dadurch treten die mit Gold imprägnirten Theile des Muskels in Form der beschriebenen Bilder hervor.

Was nun die Bedeutung der Säurebilder und der ihnen entsprechenden Goldbilder der Muskelfasern anbelangt, so will ich nunmehr meine Anschauung darüber aussprechen. Ich werde mich dabei zwar vielfach auf die schon vorgebrachten Thatsachen stützen können, muss aber auch den Vorbehalt machen, dass wesentliche Gründe für die Richtigkeit der darzulegenden Anschauung erst in den folgenden Abschnitten noch vorgebracht werden sollen. Dort werden wir sehen, dass die aus Fibrillen zusammengesetzten Säulchen auf Querschnitten der Muskelfasern bei den verschiedenen Käfern immer die Form besitzen, welche der Form der Maschenräume jener Balkennetze entspricht, die auf der Flächenansicht von durch Säure isolirten Scheiben der entsprechenden Muskelfasern zu sehen sind. Aus der Übereinstimmung der Form der Muskelsäulchen auf dem Querschnitte der Muskelfasern (Cohnheim'schen Felder) mit der Form der Maschenräume zwischen den

[1] L. c.

Balkennetzen der durch Säure veränderten Muskelfasern wollen wir zunächst die Annahme herleiten, dass die Substanz, welche in den Maschen jener Balkennetze (der Retzius'schen Querfadennetze) liegt, veränderte Substanz der Muskelsäulchen ist, dass hingegen die Substanz der Balken einer zwischen den Muskelsäulchen vorhandenen Substanz entspricht. Diese Substanz ist das Sarkoplasma, welches zwischen den Muskelsäulchen liegt. In den nun folgenden Darlegungen kommen nur diese Muskelsäulchen (Fibrillenbündel) in Betracht.

Die Frage der Zusammensetzung der Muskelsäulchen aus Fibrillen und die Art des Zusammenhaltes der Fibrillen in den Säulchen werde ich später behandeln. Hier sei nur bemerkt, dass dieser Zusammenhalt ein solcher ist, dass die Veränderung, welche ein Säulchen durch Säurewirkung erleidet, völlig jener gleicht, welche eine Fibrille erleidet, und dass wir in dieser Beziehung ein Säulchen einheitlich als verdickte Fibrille aufzufassen berechtigt sind.

Der Zusammenhalt der Säulchen zur Muskelfaser ist von ganz anderer Natur als der Zusammenhalt der Fibrillen zu den Säulchen. Es kommen aber Muskelsäulchen vor von so geringem Querschnitte, dass man annehmen muss, dass dieselben nur aus sehr wenigen oder einer einzelnen Fibrille bestehen. Auch der Vergleich der sichtlich aus Fibrillen zusammengesetzten Säulchen mit solchen, welche nur aus sehr wenigen oder einer einzelnen Fibrille bestehen, zeigt, dass wir zu der vorerwähnten einheitlichen Auffassung der Muskelsäulchen berechtigt sind.

In dem Sarkoplasma müssen wir die thatsächliche Grundlage des supponirten Querbindemittels der Muskelsäulchen erblicken. Wir wollen ferner vorerst mit Biderman, Gerlach und Anderen die Annahme machen, dass dieses Bindemittel in der Längenrichtung continuirlich zwischen allen, verschiedenen Gliedern der Fibrillen entsprechenden Abtheilungen der Muskelsäulchen vorhanden ist.

Ist nun in der That ein solches Sarkoplasma im Muskel vorhanden, durch welches die Muskelsäulchen wie parallel neben einander liegende Fäden durchgezogen sind, so müssen wir demselben auf Grund der Kenntnisse, welche wir von den mechanischen Eigenschaften der lebenden Muskeln und dem Vorgange der Muskelcontraction haben, gewiss einen hohen Grad von Plasticität zuschreiben.

Hätte es die letztere nicht, sondern würden die elastischen Kräfte des Sarkoplasmas nur eine einigermassen constante Gleichgewichtsfigur desselben bedingen, so wäre mit der Anwesenheit des Sarkoplasmas für die Verkürzung und Verdickung der Muskelfasern ein gegen alle mechanische Zweckmässigkeit verstossender grosser Widerstand gesetzt.

Wir wollen uns nun vorstellen, dass diese Plasticität des Sarkoplasmas erhalten sei in Muskeln, welche in Säuren quellen, und dass die Quellung, welche dabei die Säulchen in ihren einzelnen Abschnitten erleiden, ebenso wie im lebenden Muskel die Contraction der Fibrillen bedingend auf die räumliche Anordnung des Sarkoplasma wirke.

Wie müssten wir dann das Sarkoplasma in einem durch Säure gequollenen Muskel angeordnet finden, wenn wir nicht wie früher einen einzelnen Querschnitt, sondern die Faser in toto ins Auge fassen?

Offenbar werden bei dieser Anordnung präformirte und erst während des Quellens entstehende Bildungen so ineinandergreifen, dass man sich sehr hüten muss, sich auf einen einseitigen Standpunkt des Urtheiles über diese Bildungen drängen zu lassen.

Ich will darum den doppelten Standpunkt, welchen wir diesen Bildungen gegenüber einzunehmen haben, dadurch noch näher kennzeichnen, dass ich sage, auf dem Querschnitt des gequollenen Muskels (Fig. 17 *C*, Fig. 18 *A* und Fig. 19 *A*) drückt sich vorzugsweise die präformirte Anordnung des Sarkoplasmas, dagegen auf dem Längsschnitte des gequollenen Muskels in den durch Fäden verbundenen Knotenreihen I und II (Fig. 17 *A*, *B*, *D*, Fig. 18 *B*, Fig. 19 *B*, Fig. 20 und Fig. 21) vorzugsweise eine nicht präformirte, nur dem gequollenen Muskel zukommende Anordnung des Sarkoplasmas aus.

Ich pflichte Retzius vollkommen bei, wenn er die Körner seiner Körnerreihen als optische Querschnitte der Fäden seiner Querfadennetze ansieht.

Auch ich halte die Knotenreihen I und II, Fig. 17 *A*, *B*, *D*, Fig. 18 *B*, Fig. 19 *B*, Fig. 20 und Fig 21 nur für die optischen Querschnitte der Balken der auf den Querschnitten sichtbaren Balkennetze. Und ebenso glaube ich wie Retzius, dass diese Balken in der Längenrichtung des Muskels durch zarte Häutchen mit einander verbunden sind, als deren optische Querschnitte sehe ich die Verbindungsfäden der auf dem Längsschnitte des Muskels sichtbaren Knotenreihen an.

Die helle Substanz, welche im Säure- und Goldbilde auf dem Längsschnitte des Muskels eingelagert erscheint zwischen die scheinbaren, in regelmässigen Abständen zu Knoten angeschwollenen, parallel neben einander in der Längenrichtung des Muskels laufenden Fäden, ist dann offenbar die Substanz der Muskelsäulchen.

Wenn das sich aber so verhält, so ergibt sich zunächst für Bilder wie Fig. 20, dass die Substanz der Muskelsäulchen am gequollenen Muskel breit erscheint, zwischen den feinen Fäden, dass sie aber entsprechend den Knoten der Knotenreihen I und II eingeschnürt erscheint. Zur Verständigung über das Gesagte betrachte man die schematische Fig. 22, wo in *A* das dunkle Sarkoplasma und die helle Fibrillensubstanz in einander gelagert erscheinen, während in *B* nur die Contouren angegeben sind, in welchen Sarkoplasma und Säulchen aneinander grenzen, weil so die Form der gequollenen Säulchen leichter zu überschauen ist.

Was wir soeben über die Form der Säulchen des gequollenen Muskels vorgebracht haben, ist, wie ich betonen muss, der directen Anschauung entnommen, wenn wir einmal als festgestellt betrachten, dass das, was hell erscheint, am gequollenen Muskel die Substanz der Muskelsäulchen, das was dunkel erscheint, die Substanz des Sarkoplasma ist. Um aber nun zu einer stereometrischen Vorstellung über das Sarcoplasma einer Muskelfaser in toto zu gelangen, wollen wir uns zunächst der Einfachheit wegen an die Querschnittsbilder Fig. 11 *B*, Fig. 12 *B* und Fig. 18 *A* erinnern. Dort können wir die Anordnung des Sarkoplasmas mit der Anordnung des Wachses auf dem Querschnitt einer Honigwabe vergleichen.

Stellen wie uns nun eine solche Anordnung in der ganzen Länge einer Muskelfaser vor, so würden wir von Serienschnitten, die senkrecht auf die Axe angelegt würden, immer dasselbe Bild erhalten, wenn die Dicke der Wände und die Durchmesser der Lumina des Zellenwerkes immer dieselben bleiben würden.

Stellen wir uns aber nun in regelmässigen Abschnitten die Wände abwechselnd verdickt und wieder verdünnt und die Durchmesser der Lumina des Zellenwerkes entsprechend das eine Mal klein, das andere Mal gross vor, dann würden abwechselnd Querschnitte sich ergeben, auf welchen ein Netz von dicken Balken kleinere Maschenräume, dann wieder solche, auf welchen ein Netz von zarteren Balken grössere Maschenräume umschliessen würde und ein Längsschnitt bei solcher Anordnung würde Bildern entsprechen können, wie sie in Fig. 20 und 22 zu sehen sind.

Was wir soeben an das Querschnittsbild, Fig. 18 *A* anknüpfend entwickelt haben, wird nun nicht schwer sich auch auf Anordnungen übertragen lassen, die dem Querschnitte Fig. 17 *C* und Fig. 19 *A* entsprechen.

Das in der Längenrichtung des Muskels vorhandene abwechselnde An- und Abschwellen der Dicke der zwischen die Muskelsäulchen eingeschobenen Sarkoplasmawände an dem mit Säuren behandelten Muskel ist etwas Artefactes. Es kommt diese Anordnung erst während des Quellens der Säulchen zu Stande, und zwar deswegen, weil die Säulchen abschnittweise in Folge der Quellung sich viel stärker verbreitern, als in den dazwischen liegenden Abschnitten, so dass, wenn man sich die Fibrillensubstanz vor und nach dem Quellen frei vorstellen würde, sie im ersteren Falle die Form von gleichmässig dicken Fäden, im letzteren Falle die Form von Fäden hätte, die absatzweise bauchig erweitert, dann wieder halsartig verengt u. s. w. erscheinen würden.

Steckt die Substanz der Fibrillen, während dieser Quellungsprocess an ihr vorgeht, noch in dem sie umgebenden Sarkoplasma, so wird dieses aus den Zwischenräumen der bauchig anschwellenden Abschnitte verdrängt werden, dagegen in den Zwischenräumen der verengten Abschnitte sich ansammeln.

Ich glaube, dass die früher über die Veränderlichkeit des Bildes des quellenden Muskels vorgebrachten Thatsachen nicht leicht eine andere Deutung zulassen.

Nach diesen allgemeinen Auseinandersetzungen muss ich auf die verschiedenen Bilder, welche das Sarkoplasma am gequollenen Muskel darbietet, besonders zurückkommen. Es kommen Anhäufungen des Sarkoplasma zwischen den schmäler gebliebenen Abschnitten *Z* und *N* der Fibrillensubstanz (Knotenreihen I) Fig. 19 *B* und Fig. 20 I, I, — und zwischen den dem Streifen *h* entsprechenden mittleren Partien von *Q* vor (Knotenreihen II, Fig. 20 II, II). — Die Knotenreihe I kann aber auch doppelt vorhanden sein (Fig. 17 *A*, *B*, *D*,

Fig. 17 *B*, Fig. 21) und diese Bilder gehen nachträglich manchmal noch in solche mit einer einfachen Knotenreihe I über. Solche Bilder können nur dadurch zu Stande kommen, dass im gequollenen Muskel sowohl die den Schichten *Q* entsprechenden Abschnitte der Säulchen, als auch die den Schichten *Z* entsprechenden Abschnitte der Säulchen breit erscheinen, während zwischen beiden die Verengerungen liegen, zwischen welchen sich das Sarkoplasma angehäuft hat. Die der Schichte *Z* (Fig. 17 *A*, *B*, *D*, Fig. 18 *B*) entsprechenden Abschnitte erscheinen aber dann nicht aus demselben Grunde verbreitert wie die Abschnitte *Q*. Diese verbreitern sich durch Quellung und geben damit den Anlass zur Verbreiterung der ganzen Muskelfaser und zur Verschiebung des Sarkoplasmas in die Zwischenräume der Abschnitte der Muskelsäulchen, welche durch Quellung sich viel weniger verbreitern; daher die Knotenreihen. Das Verhalten der Schichte *Z*, welches bedingt, dass die Knotenreihen I bleibend oder vorübergehend doppelt auftreten, kann nicht durch Quellung der den Schichten *Z* entsprechenden Fibrillenabschnitte erklärt werden, sondern muss, wie ich glaube, zurückgeführt werden auf eine Verbreiterung, die an der Schichte *Z* ähnlich wie bei der Dehnung einer Kautschukplatte eintritt. Wir haben schon früher auf eine durch besonderes Festhaften des Sarkoplasmas an den Mantelflächen der Fibrillenabschnitte *Z* offenbar erst beim Behandeln des Muskels mit Reagentien zu Stande kommende Art von Homogenisirung der Schichten *Z* der Muskelfasern hingewiesen.

Ich stelle mir nun vor, dass diese auch vorhanden ist, wenn die Bilder mit doppelten Knotenreihen I auftreten, und dass in den Fällen, wo solche Bilder nachträglich in solche mit einfacher Knotenreihe I übergehen, das dadurch geschieht, dass die anfangs in die Quere gedehnten Abschnitte *Z* der Muskelsäulchen wieder zusammenschnurren, und so das Sarkoplasma zwischen denselben sich ansammeln kann.

Es muss aber jetzt hier auch angeführt werden, dass das Sarkoplasma unter der fortgesetzten Einwirkung der Säure seine Formbarkeit nach und nach einzubüssen scheint. Wir müssen uns in dieser Beziehung an das erinnern, was früher über die Umwandlung der Säurebilder Fig. 11, Fig. 12, Fig. 13, Fig. 14 und Fig. 15 in solche von dem Charakter der Säurebilder in der Fig. 18 gesagt wurde. Es besitzen ferner die beim Scheibenzerfall in Säuren isolirten Balkennetze des Sarkoplasmas ein stark lichtbrechendes, starres Aussehen. Endlich verweise ich auf Bilder wie Fig. 21, wo sich zwischen den verdickten Sarkoplasmabalken I, I und der Fibrillensubstanz mit Flüssigkeit gefüllte Räume gebildet haben, deren äussere Grenzen durch die Contouren der enger gebliebenen Abschnitte der Muskelsäulchen gebildet werden. In diesem Bilde ist ferner die plattenförmig ausgezogene Schichte *Z* und die ganze, dem gequollenen Muskel entsprechende complicirte Configuration der Substanz der Muskelsäulchen in sehr durchsichtiger Weise wahrzunehmen.

Unter den Goldbildern von *Dyticus* wurde früher auch das von Retzius[1] beobachtete und abgebildete Vorkommen von Körnerreihen I., II., und III. Ordnung erwähnt.

Ich habe dieses Bild, wie schon angeführt, auch beobachtet, aber immer nur an vergoldeten, niemals an einfach mit Säuren behandelten Muskeln. Und im ersteren Falle fand ich es sehr selten, auch wenn die Muskeln im stark gedehnten Zustande vergoldet wurden.

Ich habe mich nur davon überzeugen können, dass die Knotenreihen III. Ordnung noch im Bereiche der Schichte *Q* auftreten, und in dieser Beziehung erinnern sie an die doppelten Knotenreihen II, deren ich früher bei einigen Käfern gedachte. Während man aber bei den Muskeln dieser Käfer an nicht vergoldeten Muskeln einen doppelten Streifen *h* beobachten kann, dem dann die doppelten Knotenreihen II entsprechen, wie sonst dem einfachen *h* die einfache Knotenreihe II, ist mir an nicht vergoldeten Muskeln der angeführten Dyticiden ein mehrfacher Streifen *h*, dem die Knotenrenreihen II und III entsprechen könnten, nicht vorgekommen, wohl aber habe ich bei den Muskeln anderer Käfer, und zwar bei *Hydrophilus*, bei *Pimelia*, bei *Aphodius rufipes* und bei *Dolopius marginatus* eine eigenthümliche Beschaffenheit der die Schichten *Q* zusammensetzenden Stäbe wahrgenommen.

Dieselben zeigten nämlich nicht eine Einschnürung, wie sie öfter dem Streifen *h* entsprechend auftritt, sondern eine Reihe von Einschnürungen, so dass ein moniliformes Ansehen dieser Stäbe zu Stande kam.

[1] Retzius l. c. p. 8, Fig. 9.

Entsprechend diesen Einschnürungen liefen dann eine Reihe von parallelen feinen Streifen durch die Schichte *Q*. An Goldpräparaten von *Aphodius rufipes* suchte ich aber vergebens nach entsprechenden Bildern.

Es ist also die an Goldpräparaten von Dyticiden manchmal wahrzunehmende mehrfache Einschnürung der gequollenen Fibrillensubstanz und die entsprechend derselben auftretende mehrfache Ansammlung des Sarkoplasmas, deren Ausdruck die Knotenreihen II und III sind, nicht ohne Analogie. Woher diese besondere Beschaffenheit rührt, ist freilich nicht anzugeben.

Es sind aber aus der Reihe der verschiedenen Goldbilder, welche man bei der Untersuchung von Käfermuskeln erhalten kann, noch einige andere besonders hervorzuheben, die der Deutung Schwierigkeiten entgegensetzen, die aber andererseits gerade durch die Art, in welcher sie von den regelmässigen Goldbildern abweichen, die Deutung unterstützen, welche wir den letzteren gegeben haben.

Es wurde schon früher auf ein Bild hingewiesen, welches bei den *Aphodius*-Arten und anderen Scarabäiden, z. B. bei den *Onthophagus*-Arten, bei *Rhizotrogus solstitialis* und *Hoplia squammosa* ganz regelmässig auftritt und im Vergleich mit anderen Querschnittsbildern vergoldeter Muskeln, an denen polygonale Balkennetze beobachtet werden, sich etwas besonders ausnimmt.

Man vergleiche in dieser Beziehung das in Fig. 23 nach einem Goldpräparate von *Rhizotrogus solstitialis* dargestellte Bild mit Fig. 18 *A*. Es sind das zwei extreme Fälle der Formen, in welchen polygonale Balkennetze auf dem Querschnitt zur Beobachtung kommen können. Das eine mit zarten, aber sehr gleichmässig dicken Balken und regelmässig runden Knoten; das andere mit viel gröberen und mehr unregelmässigen Knoten und theils dickeren, theils dünneren Balken, theils von Knoten zu Knoten wechselnder Dicke des einzelnen Balkens.

Bei den Bildern der letzteren Art muss man besonders aufmerksam sein, um von dem richtigen Sachverhalte sich zu überzeugen. Es treten nämlich besonders bei nicht ganz entsprechender Einstellung die Knoten und starken Balken so überwiegend im Vergleich mit den dünneren Balken hervor, dass es den Anschein haben kann, als ob vergoldete Cohnheim'sche Felder von einem hellen Geäder umfasst vorliegen würden.

Umsomehr ist diese Gefahr der Verwechslung vorhanden, als, wie wir später sehen werden, Bilder, wie ein solches in Fig. 11 *B* dargestellt, in denen in der That die Cohnheim'schen Felder von einem breiten hellen Geäder umfasst erscheinen, unter Umständen auch im vergoldeten Zustande der Muskeln, und zwar wirklich mit rothgefärbten Feldern erhalten werden können. Das gehört aber schon der für später aufbehaltenen Erörterung einer zweiten Art von Goldbildern an, die, wie ich angekündigt habe, von den Goldbildern der ersten Art wohl unterschieden werden müssen. Das in gewissen Fällen beide concurriren können, soll auch später gezeigt werden.

Eine weitere Art besonderer Goldbilder, welche ich als ganz unregelmässige Bilder bezeichnen muss, weil sie an Stelle der für gewöhnlich bei denselben Käfern zu beobachtenden regelmässigen Goldbilder oder mit diesen in verschiedenen Fasern desselben Thieres, ja sogar an verschiedenen Stellen derselben Faser abwechselnd auftreten, habe ich am öftesten bei Dyticiden, aber gelegentlich auch an anderen Käfermuskeln beobachtet. Bei *Dyticus marginalis* sah ich sie, wenn ich die Muskeln ganz so vergoldete, wie früher angegeben wurde, so häufig, namentlich wenn ich Stückchen der grossen pyramidenförmigen Muskeln vergoldete, die von der Flügelbrust zum letzten Beinpaare gehen, dass ich nicht zweifle, dass Nachuntersucher sie ebenso leicht finden werden, wie ich.

Solche Bilder sind in den Figuren 24, 25 und 26 dargestellt. Sie unterscheiden sich von den regelmässigen Bildern zunächst dadurch, dass derbe, durch Gold roth gefärbte, bandförmige, stellenweise verdickt und dunkler, stellenweise verdünnt und heller, nach den Seiten unregelmässig ausgebogen oder ausgezackt erscheinende Massen den Muskel der Länge nach durchziehen (Fig. 24 und 25). Je derber diese Bänder auftreten, um so weniger sind die Knotenreihen I an denselben zu sehen, je mehr jene Bänder noch an die bei regelmässigen Goldbildern vorhandenen feinen Längslinien erinnern, desto deutlicher treten auch die Knotenreihen I an denselben hervor. Man vergleiche in dieser Beziehung Fig. 24 und Fig. 25, welche letztere einem stark gequetschten Muskelstückchen entspricht.

Die Knotenreihen II habe ich an solchen Muskeln nie gesehen. Den Knotenreihen I entsprechend zieht sich ein röthlicher Ton der Quere nach durch den Muskel und dieser schliesst die Knotenreihen zu Querstreifen, die in ziemlich regelmässigen Abständen aufeinanderfolgen, aber meist unregelmässig geschwungen sind.

An Bildern, wie Fig. 24, kommt auf diese Weise zwischen je zwei der derben Längsstreifen das Ansehen von Strickleitern zu Stande.

In Fig. 26 ist ein Stück einer Faser gezeichnet, an welcher das regelmässige Goldbild mit Knotenreihen I und II in das unregelmässige Goldbild übergeht, was häufig zu beobachten ist.

Ich kann nicht angeben, welchen bestimmten Ursachen das Auftreten des unregelmässigen Bildes zuzuschreiben ist, und ob dasselbe eine ganz bestimmte ungewöhnliche Beschaffenheit der Muskelsäulchen oder des Sarkoplasmas oder beider zur Voraussetzung hat.

Wichtig ist aber das Folgende. Solche Muskelfasern sah ich niemals in Scheiben zerfallen. Da es mir aber von grossem Interesse war, doch das Querschnittsbild derselben zu sehen, so zerhackte ich auf einem Objectträger solche Muskeln mit einem scharfen, quer zur Faserrichtung angelegten Scalpelle.

Es gelingt auf diese Weise bei einiger Ausdauer und Übung leicht, eine Anzahl sehr vollkommener Querschnitte zu erhalten. Dieselben zeigen, abgesehen von einer deutlich hervortretenden massigeren Wirkung der Balken, dasselbe in seiner Anordnung charakteristische Balkenwerk, wie es an den regelmässigen Goldbildern entsprechenden Fasern zu sehen ist.

Endlich ist hier auch noch eine andere Abweichung der Goldbilder zu berühren. Sie besteht darin, dass die Knoten der Reihen II gelegentlich bei der Vergoldung der verschiedensten Käfermuskeln ebenso stark entwickelt hervortreten können, wie die Knoten der Reihen I, ja, dass sich sogar das Verhältniss der Grösse beider umkehren kann.

Die Knoten II sind dann meist sehr verlängert. Ein solches Bild, und zwar von der ersterwähnten Art, an welchem zugleich die Knoten der Reihe I eine eigenthümliche regelmässige Schiefstellung zeigen, ist in Fig. 27 von *Lacon murinus* stark vergrössert dargestellt.

Hier ist aber der Ort, wo ich vorläufig abbrechen muss. Ich werde auf die letzteren Bilder zurückkommen, wenn ich später von den früher schon angekündigten Goldbildern anderer Art handeln werde.

Ich glaube, dass die nun hinlänglich besprochene Vielgestaltigkeit der Goldbilder auf dem Längsschnitt der Muskelsfasern, zusammen mit der relativ grossen Constanz des Aussehens der Querschnitte vergoldeter Muskeln nur im Rahmen der Auffassung des Muskelbaues, welche wir früher festgehalten haben, zu verstehen ist.

In einem zweiten Theile dieser Arbeit, welcher bald nachfolgen soll, werde ich über Muskelquerschnitte, Kernvertheilung in den Muskeln, über die Muskelfibrillen, über das Verhalten der Muskelfasern im polarisirten Lichte und über die contrahirte Faser handeln, und damit neue Belege für die Richtigkeit meiner Deutung der Säure- und Goldsäurebilder der Muskelfasern erbringen.

Zum Schlusse möchte ich noch anführen, dass ich versucht habe, durch ein Schema die Vorstellung zu veranschaulichen, welche ich mir von dem Verhältnisse des Sarkoplasma und der Fibrillensubstanz in Muskeln, die durch Säure gequollen sind, machen muss. Ich liess mir zu dem Ende in Stearinkerzen in bestimmten Abständen ringförmige Furchen eindrehen, stellte die Kerzen, dann in sehr kleinen Abständen neben einander auf und goss sie in röthlich gefärbten Gyps ein, so dass die dann entstehende compacte Masse die Form eines Cylinders oder Prismas hatte.

Werden solche Prismen dann vertical durchschnitten, so erhält man Bilder, die so aussehen wie z. B. Fig. 22 A oder Fig. 17 A, und zwar entspricht, was dunkel in diesen Bildern erscheint, dem gefärbten Gyps, was hell erscheint, den ausgedrehten Kerzen. Querschnitte durch I (siehe Fig. 22) gelegt, zeigen am Modell ein Netz breiter, rother Balken mit kleinen Maschen, Querschnitte durch II ein Netz von schmäleren Balken mit grösseren Maschen. Querschnitte zwischen I und II ein sehr zartes Geäder mit sehr weiten Maschen. Aus durchsichtigem Materiale hergestellt, würden solche Modelle die Bilder noch mehr verdeutlichen.

ERKLÄRUNG DER TAFELN.

TAFEL I.

Fig. 1. Schema.
„ 2. Zwei Muskelfasern von *Hydrophilus piceus* in Scheiben zerfallen.
„ 3. Muskelfaser von *Opatrum sabulosum* in Scheiben zerfallen.
„ 4. Leeres Sarkolemma eines in Scheiben zerfallenen Muskels von *Scarabaeus laticollis.*
„ 5. *A, B, C.* Schemata der Querstreifen der Käfermuskeln.

TAFEL II.

Fig. 6. Muskelfaser von *Carabus cancellatus* mit Gewölben an den Seiten.
„ 7. Muskelfaser von *Aphodius rufipes* in Scheiben zerfallen.
„ 8. Muskelfaser von *Pterostichus transversalis* mit Gewölbebildung an den Seiten und aufsitzendem Nervenhügel.
„ 9. Nervenhügel einer in Scheiben zerfallenen Muskelfaser von *Hydrophilus piceus.*
„ 10. Nervenhügel einer in Scheiben zerfallenen Muskelfaser von *Aphodius rufipes.*

TAFEL III.

Fig. 11. *A.* In Scheiben zerfallene Muskelfaser von *Aphodius rufipes* nach sehr schwacher Säurewirkung, *B.* Querschnitt einer Scheibe.
„ 12. *A.* In Scheiben zerfallene Muskelfaser von *Aphodius rufipes* nach etwas stärkerer Säurewirkung, *B.* Querschnitt einer Scheibe.
„ 13. In Scheiben zerfallene Muskelfaser von *Aphodius rufipes* nach schwacher Säurewirkung.
„ 14. In Scheiben zerfallene Muskelfaser von *Aphodius rufipes* nach schwacher Säurewirkung.
„ 15. Muskelfaser von *Chlaenius Schranckii* nach schwacher Säurewirkung.
„ 16. Muskelfaser von *Pyrochroa coccinea* nach schwacher Säurewirkung.
„ 17. *A.* Muskelfaser von *Staphylinus caesareus* nach starker Säurewirkung, *B.* Scheibenzerfall in der Säure, *C.* Flächenansicht, *D.* Seitenansicht einer isolirten Scheibe.
„ 18. *A.* Flächenansicht einer durch Säure isolirten Scheibe einer Muskelfaser von *Dorcadion morio*, *B.* Seitenansicht der Scheibe.
„ 19. *A.* Flächenansicht einer durch Säure isolirten Scheibe einer Muskelfaser von *Colymbetes fuscus*, *B.* Seitenansicht der Scheibe.

TAFEL IV.

Fig. 20. Muskelfaser von *Cybister Roeseli* nach starker Säurewirkung.
„ 21. Muskelfaser von *Stenomax lanipes* nach starker Säurewirkung.
„ 22. Schema.
„ 23. Flächenansicht einer nach Goldsäurewirkung isolirten Scheibe einer Muskelfaser von *Rhizotrogus solstitialis.*
„ 24. Muskelfaser von *Dyticus marginalis* vergoldet.
„ 25. u. 26. Dasselbe.
„ 27. Muskelfaser von *Lacon murinus* vergoldet.

Fig. 1.

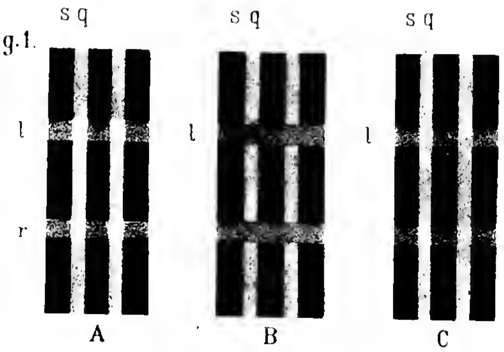


Fig. 2.

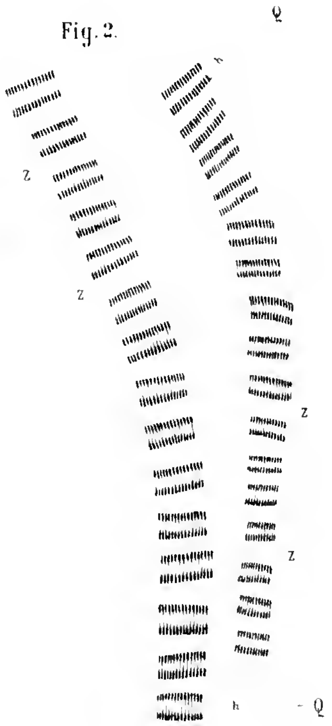


Fig. 4.

Fig. 3.

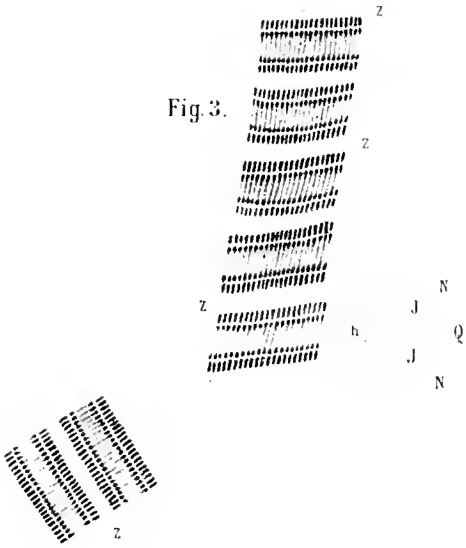


Fig. 5 C

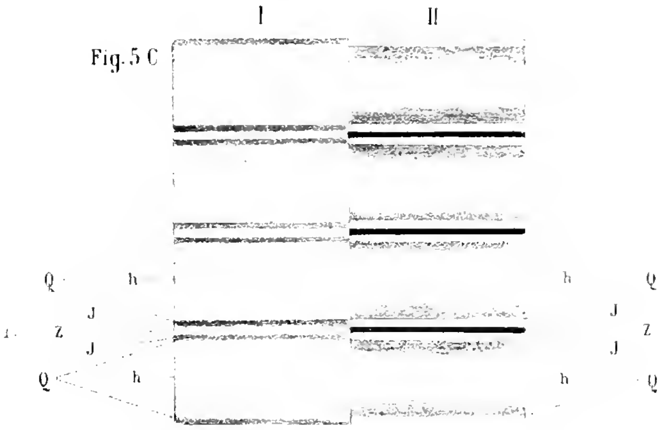


Fig. 5 A

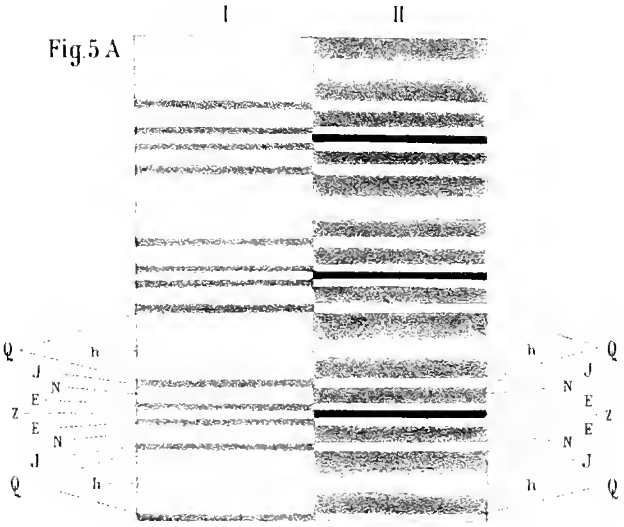
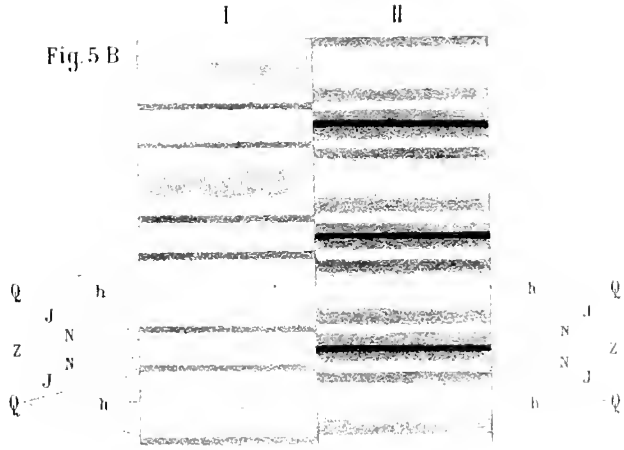


Fig. 5 B



M. Schuster et A. Rollett del.

Lith. von „Leykam" in Graz.

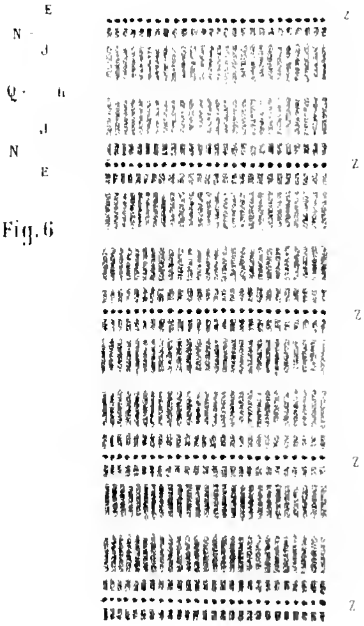


Fig. 6

Fig. 7

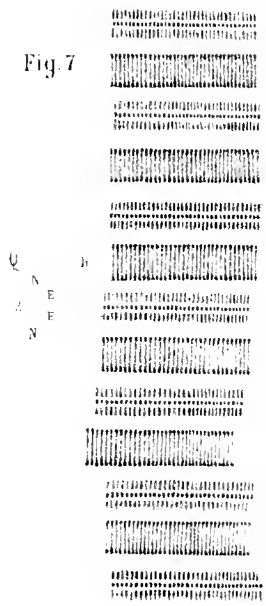
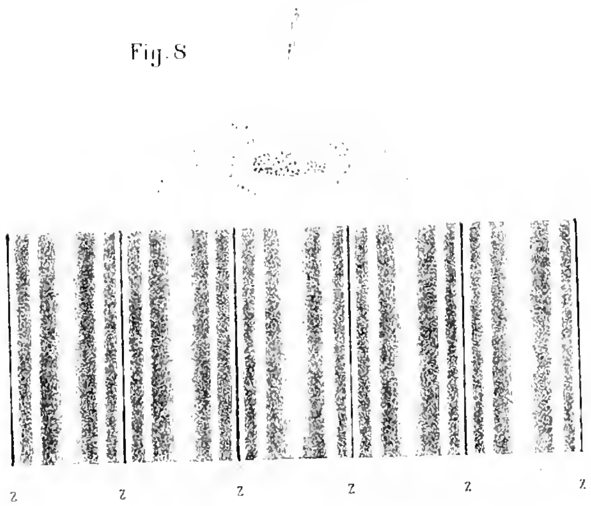


Fig. 10

Fig. 8



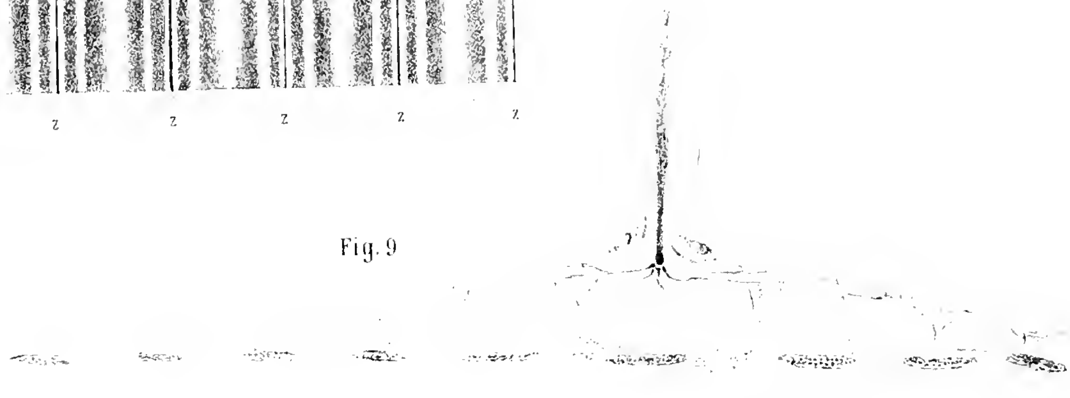
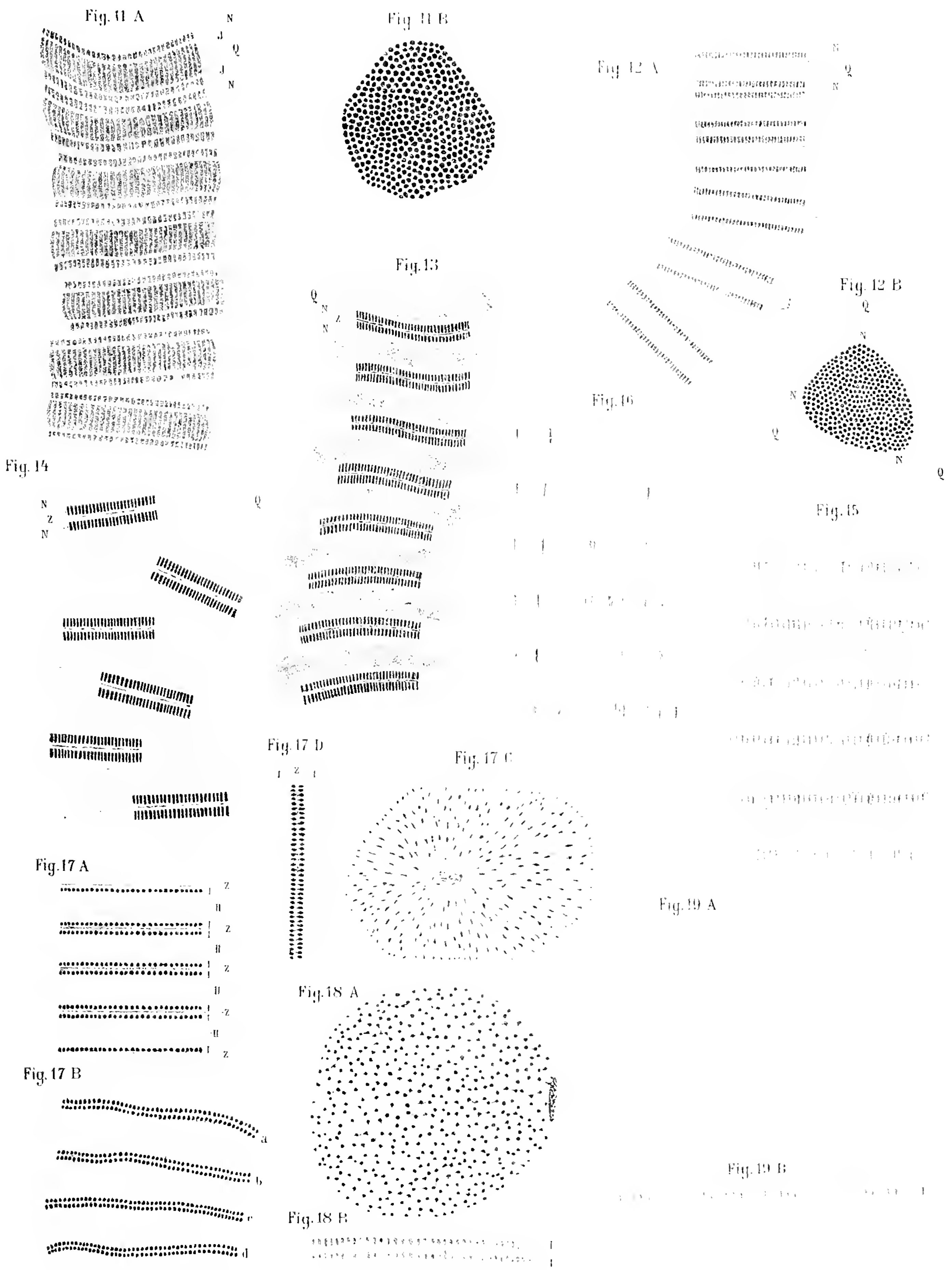


Fig. 9

M. Schuster et A. Rollett del.

Lith. von „Leykam“ in Graz.



M. Schuster et A. Rollett del

Lith von „Leykam" in Graz

Fig. 20

Fig. 21

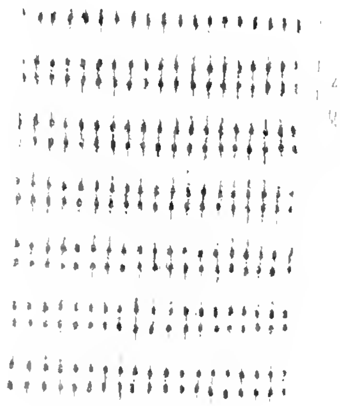


Fig. 22

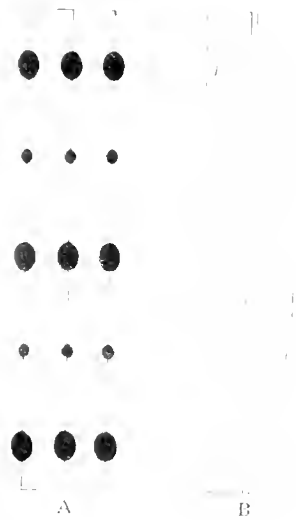


Fig. 23

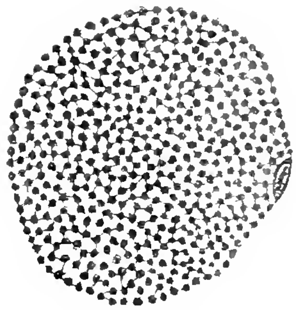


Fig. 24

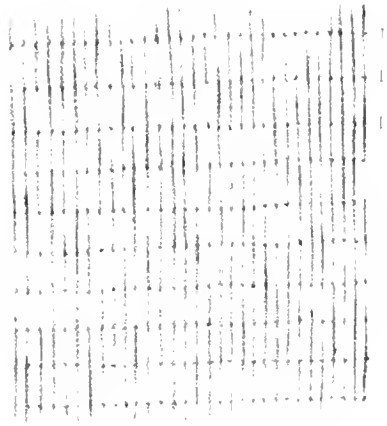


Fig. 26

Fig. 25

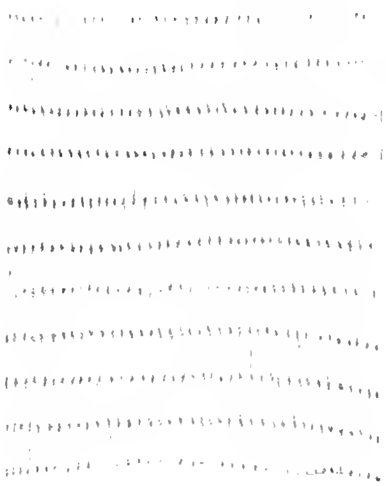
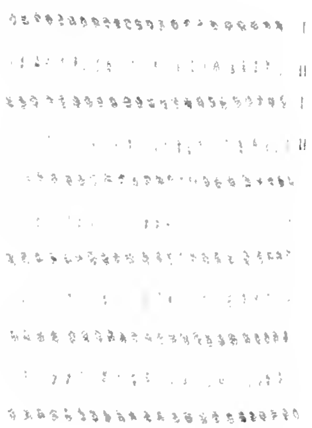


Fig. 27



M. Schuster et A. Rollett del.

Lith. von „Leykam" in Graz

ENTWICKELUNGEN ZUM LAGRANGE'SCHEN REVERSIONSTHEOREM, UND ANWENDUNG DERSELBEN AUF DIE LÖSUNG DER KEPPLER'SCHEN GLEICHUNG.

VON

PROF. DR. E. WEISS,
WIRKLICHEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 20. NOVEMBER 1884.

§. 1.

Die Lagrange'sche Reversionsformel lässt in der Gestalt, in welcher man sie gewöhnlich aufschreibt, in theoretischer Beziehung an Eleganz, Einfachheit und Übersichtlichkeit wohl nichts zu wünschen übrig; wenn man aber in speciellen Fällen daran geht, eine grössere Anzahl von Reihengliedern nach dieser Formel wirklich nicht blos symbolisch zu entwickeln, gestaltet sich die Arbeit in der Regel so weitläufig und zeitraubend, dass sie thatsächlich so gut wie unausführbar wird. Ich erinnere in dieser Beziehung nur an die Keppler'sche Gleichung, eine der denkbar einfachsten Anwendungen des Lagrange'schen Theoremes. Schon bei der Lösung der Gleichung:

$$E = M + \varepsilon \sin E,$$

nämlich der Entwickelung der excentrischen Anomalie in Function der mittleren greift man, um bei der Ausführung der erforderlichen mehrfachen Differentiationen von Potenzgrössen nicht in allzu grosse Weitläufigkeiten zu verfallen, zu dem Kunstgriffe, zuerst die Potenzen des Sinus in Sinusse des vielfachen Bogens zu verwandeln, und erst dann die Differentiationen vorzunehmen, wird aber dadurch auf Reihen geführt, die zu einer effectiven Berechnung der excentrischen Anomalie ganz und gar unbrauchbar sind. Allein nicht blos die excentrische Anomalie, sondern auch jede beliebige Function derselben, wie:

$$\log\left(\frac{r}{a}\right) = \log(1 - \varepsilon \cos E)$$

$$v = \operatorname{arctg} \frac{\sin E . \sqrt{1-\varepsilon^2}}{\cos E - \varepsilon} = 2 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \operatorname{tg}\frac{E}{2}\right)$$

lässt sich mit Hilfe des Lagrange'schen Lehrsatzes theoretisch mit gleicher Leichtigkeit als Function der mittleren Anomalie darstellen: praktisch indess ist ein solcher Versuch bisher noch nie unternommen worden, und zwar einfach desshalb, weil es zu ganz unübersehbaren Rechnungen führen würde. Man wählte daher lieber den Umweg, diese Functionen zunächst nach anderen Methoden in Reihen nach den Cosinussen und Sinussen der excentrischen Anomalie zu entwickeln, dann diese Cosinusse und Sinusse mit Hilfe unseres Lehrsatzes in Functionen der mittleren Anomalie umzusetzen, und nun erst die so erhaltenen Werthe in die früheren Reihen zu substituiren.

Es ist mir nun gelungen, durch eine zweckmässige Gruppirung der Ausdrücke, welche bei einer wirklichen Ausführung der im Lagrange'schen Lehrsatze blos angezeigten Differentiationen auftreten, nicht nur die erforderlichen Operationen in expliciter Form übersichtlich darzustellen, sondern auch die ganze Gliedermasse in ein Conglomerat von Potenzreihen zu zerlegen, und den nach der Summirung dieser resultirenden Ausdruck, wieder so umzustellen, dass er abermals in eine Summe von Potenzreihen übergeht, u. s. w. Die auf diese Art gewonnenen Reihen besitzen daher die Eigenthümlichkeit, dass jedes weitere Glied, welches man berücksichtiget, auch noch einen Theil der Glieder höherer Ordnung mitnimmt, wodurch der Bau des Restes dieser letzteren sich successive immer mehr vereinfacht, und die Convergenz der Entwickelung nicht selten eine sehr namhafte Steigerung erfährt. Durch diesen Umstand unterscheiden sich auch die hier entwickelten Reihen sehr vortheilhaft von den meisten Formeln, die man zur näherungsweisen Berechnung von Functionen anwendet, bei denen in der Regel blos eine bestimmte Anzahl von Anfangsgliedern genau wiedergegeben wird, während der Gang der Glieder höherer Ordnung ein ganz verschiedener ist. Diese Entwickelungen sind daher auch sehr geeignet, einfache und interessante Näherungsformeln zur Berechnung der hierhergehörigen Functionen zu liefern

Um an einem speciellen Beispiele die Brauchbarkeit meiner Formeln nachzuweisen, habe ich sie auf die schon so vielfach bearbeitete Keppler'sche Gleichung und die damit im Zusammenhange stehenden Probleme angewendet, und glaube damit gezeigt zu haben, dass durch die vorliegenden Entwickelungen die Eingangs hervorgehobenen Schwierigkeiten, welche sich bisher einer allgemeineren Anwendung des Lagrange'schen Theorems entgegenstellten, — in vielen Fällen wenigstens — wesentlich vermindert worden sind. Ferner habe ich damit, wie mir scheint, die erste praktisch brauchbare directe Lösung der Aufgabe geliefert, in einer mässig excentrischen elliptischen Bahn, aus der mittleren Anomalie nicht nur die excentrische, sondern auch mit Umgehung derselben unmittelbar die wahre Anomalie und den Radius vector oder dessen Logarithmus zu finden.

Zum Schlusse habe ich noch ein paar einfache Näherungswerthe für die eben genannten Functionen angeführt, die aus meinen Formeln fliessen.

§. 2.

Der Lagrange'sche Reversionssatz lautet bekanntlich:

$$\varphi(z)=\varphi(x)+\frac{\alpha}{1}\cdot\varphi'(x)f(x)+\frac{\alpha^2}{1.2}\cdot\frac{d[\varphi'(x)f(x)^2]}{dx}+\ldots\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{d^n[\varphi'(x)f(x)^{n+1}]}{dx^n}+\ldots \qquad 1)$$

wenn z bestimmt ist durch die Gleichung:

$$z=x+\alpha f(z) \qquad 2)$$

Wir werden im Folgenden statt $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)\ldots$; $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)\ldots$ zur Vereinfachung blos schreiben: φ, φ', $\varphi''\ldots$; f, f', $f''\ldots$; ebenso werden wir uns für $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ der allgemein üblichen Bezeichnung $D^n f$ bedienen. Dies vorausgesetzt, ist die Form des allgemeinen Gliedes, abgesehen von dem Factor $\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}$:

$$D^n(\varphi' f^{n+1})=\varphi' D^n f^{n+1}+\binom{n}{1}\varphi'' D^{n-1} f^{n+1}+\binom{n}{2}\varphi''' D^{n-2} f^{n+1}+\ldots \qquad 3)$$

Führt man hier die angezeigten Differentiationen, welche allgemein die Form $D^r f^p$ haben, successive aus, so erhält man nach und nach:

$$
\begin{aligned}
D^r f^p &= p\, D^{r-1}\left[f^{p-1} f'\right] \\
&= p\, D^{r-2}\left[(p-1) f^{p-2} f'^2 + \binom{2}{2} F_2^{(p-1)}\right] \\
&= p\, D^{r-3}\left[(p-1)(p-2) f^{p-3} f'^3 + \binom{3}{2}(p-1) F_2^{(p-2)} f' + \binom{3}{3} F_3^{(p-1)}\right] \\
&= p\, D^{r-4}\left[(p-1)(p-2)(p-3) f^{p-4} f'^4 + \binom{4}{2}(p-1)(p-2) F_2^{(p-3)} f'^2 + \binom{4}{3}(p-1) F_3^{(p-2)} f' + F_4^{(p-1)}\right] \\
&= p\, D^{r-5}\Big[(p-1)(p-2)(p-3)(p-4) f^{p-5} f'^5 + \binom{5}{2}(p-1)(p-2)(p-3) F_2^{(p-4)} f'^3 + \\
&\qquad + \binom{5}{3}(p-1)(p-2) F_3^{(p-3)} f'^2 + \binom{5}{4}(p-1) F_4^{(p-2)} f' + F_5^{(p-1)}\Big]
\end{aligned}
$$

. . . .

also allgemein:

$$
\begin{aligned}
D^r f^p = p\, D^{r-q}\Big[&(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1) f^{p-q} f'^q + \binom{q}{2}(p-1)\ldots(p-q+2) F_2^{(p-q+1)} f'^{q-2} + \\
&+ \binom{q}{3}(p-1)\ldots(p-q+3) F_3^{(p-q+2)} f'^{q-3} + \binom{q}{4}(p-1)\ldots(p-q+4) F_4^{(p-q+3)} f'^{q-4} + \ldots \\
&+ \ldots \binom{q}{m}(p-1)\ldots(p-q+m) F_m^{(p-q+m-1)} f'^{q-m} + \ldots\Big] \qquad 4)
\end{aligned}
$$

wenn man abkürzungsweise setzt:

$$
\left.
\begin{aligned}
F_2^{(k)} &= f^k f'' \\
F_3^{(k)} &= f^k f''' \\
F_4^{(k)} &= f^k f^{IV} + 3k f^{k-1} f''^2 \\
F_5^{(k)} &= f^k f^{V} + 10k f^{k-1} f'' f''' \\
F_6^{(k)} &= f^k f^{VI} + 5k f^{k-1}(3f'' f^{IV} + 2 f'''^2) + 15k(k-1) f^{k-2} f''^3 \\
F_7^{(k)} &= f^k f^{VII} + 7k f^{k-1}(3f'' f^{V} + 5 f''' f^{IV}) + 105k(k-1) f^{k-2} f''^2 f''' \\
F_8^{(k)} &= f^k f^{VIII} + 7k f^{k-1}(4f'' f^{VI} + 8 f''' f^{V} + 5 f^{IV\,2}) + 70k(k-1) f^{k-2}(3f''^2 f^{IV} + 4 f'' f'''^2) + \\
&\qquad + 105k(k-1)(k-2) f^{k-3} f''^4 \\
F_9^{(k)} &= f^k f^{IX} + 6k f^{k-1}(6f'' f^{VII} + 14 f''' f^{VI} + 21 f^{IV} f^{V}) + 14k(k-1) f^{k-2}(27 f''^2 f^{V} + 90 f'' f''' f^{IV} + 20 f'''^3) + \\
&\qquad + 1260k(k-1)(k-2) f^{k-3} f''^3 f''' \\
F_{10}^{(k)} &= f^k f^{X} + 3k f^{k-1}(15 f'' f^{VIII} + 40 f''' f^{VII} + 70 f^{IV} f^{VI} + 42 f^{V\,2}) + 105k(k-1) f^{k-2}(6 f''^2 f^{VI} + 24 f'' f''' f^{V} + \\
&\qquad + 15 f'' f^{IV\,2} + 20 f'''^2 f^{IV}) + 3150k(k-1)(k-2) f^{k-3}(f''^3 f^{IV} + 2 f''^2 f'''^2) + 945k(k-1)(k-2)(k-3) f^{k-4} f''^5 \\
F_{11}^{(k)} &= f^k f^{XI} + 11k f^{k-1}(5 f'' f^{IX} + 15 f''' f^{VIII} + 30 f^{IV} f^{VII} + 42 f^{V} f^{VI}) + 165k(k-1) f^{k-2}(6 f''^2 f^{VII} + 28 f'' f''' f^{VI} + \\
&\qquad + 42 f'' f^{IV} f^{V} + 28 f'''^2 f^{V} + 35 f''' f^{IV\,2}) + 770k(k-1)(k-2) f^{k-3}(9 f''^3 f^{V} + 45 f''^2 f''' f^{IV} + 20 f'' f'''^3) + \\
&\qquad + 17325k(k-1)(k-2)(k-3) f^{k-4} f''^4 f'''
\end{aligned}
\right\} \quad \mathrm{I}
$$

. . . .

Zwischen diesen F-Functionen besteht folgende, einfache Relation, nach welcher man sie successive sehr bequem berechnen kann.

$$
\left.
\begin{aligned}
F_4^{(k)} &= D F_3^{(k)} - k f' F_3^{(k-1)} + 3k f'' F_2^{(k-1)} \\
F_5^{(k)} &= D F_4^{(k)} - k f' F_4^{(k-1)} + 4k f'' F_3^{(k-1)} \\
F_6^{(k)} &= D F_5^{(k)} - k f' F_5^{(k-1)} + 5k f'' F_4^{(k-1)} \\
&\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\
F_m^{(k)} &= D F_{m-1}^{(k)} - k f' F_{m-1}^{(k-1)} + (m-1) k f'' F_{m-2}^{(k-1)}
\end{aligned}
\right\} \quad \mathrm{I}^*
$$

Lässt man in der Gleichung 4) $q = r$ und $p = n+1$ sein, so wird:

$$
\begin{aligned}
D^r f^{n+1} = (n+1)n(n-1)\ldots(n-r+2) f^{n-r+1} f'^r + \binom{r}{2}(n+1)\ldots(n-r+3) F_2^{(n-r+2)} f'^{r-2} + \\
+ \binom{r}{3}(n+1)\ldots(n-r+4) F_3^{(n-r+3)} f'^{r-3} + \ldots \binom{r}{m}(n+1)\ldots(n-r+m+1) F_m^{(n-r+m)} f'^{r-m} + \ldots
\end{aligned}
$$

Substituirt man hierin der Reihe nach $r = n, n-1, n-2\ldots$, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}
D^{n} f^{n+1} &= (n+1)\ldots 2 f f'^{n} + \binom{n}{2}(n+1)\ldots 3 f'^{n-2} F_2^{(2)} + \binom{n}{3}(n+1)\ldots 4 f'^{n-3} F_3^{(3)} + \\
&\qquad + \binom{n}{4}(n+1)\ldots 5 f'^{n-4} F_4^{(4)} + \ldots \\
D^{n-1} f^{n+1} &= (n+1)\ldots 3 f^2 f'^{n-1} + \binom{n-1}{2}(n+1)\ldots 4 f'^{n-3} F_2^{(3)} + \binom{n-1}{3}(n+1)\ldots 5 f'^{n-4} F_3^{(4)} + \\
&\qquad + \binom{n-1}{4}(n+1)\ldots 6 f'^{n-5} F_4^{(5)} + \ldots \\
D^{n-2} f^{n+1} &= (n+1)\ldots 4 f^3 f'^{n-2} + \binom{n-2}{2}(n+1)\ldots 5 f'^{n-4} F_2^{(4)} + \binom{n-2}{3}(n+1)\ldots 6 f'^{n-5} F_3^{(5)} + \\
&\qquad + \binom{n-2}{4}(n+1)\ldots 7 f'^{n-6} F_4^{(6)} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

also endlich mit Rücksicht auf 3) nach einigen leicht ersichtlichen Transformationen und Umstellungen:

$$\begin{aligned}
\frac{D^{n}(\varphi' f^{n+1})}{(n+1)!} &= \varphi' f f'^{n} + \frac{1}{2!}\binom{n}{1} f^2 f'^{n-1}\varphi'' + \binom{n}{2} f'^{n-2}\left[\frac{1}{3!} f^3\varphi''' + \frac{1}{2!} F_2^{(2)}\varphi'\right] + \binom{n}{3} f'^{n-3}\left[\frac{1}{4!} f^4 \varphi^{IV} + \frac{1}{3!}(3F_2^{(3)}\varphi'' + F_3^{(3)}\varphi')\right] \\
&+ \binom{n}{4} f'^{n-4}\left[\frac{1}{5!} f^5\varphi^{V} + \frac{1}{4!}(6F_2^{(4)}\varphi''' + 4F_3^{(4)}\varphi'' + F_4^{(4)}\varphi')\right] + \\
&+ \binom{n}{5} f'^{n-5}\left[\frac{1}{6!} f^6\varphi^{VI} + \frac{1}{5!}(10F_2^{(5)}\varphi^{IV} + 10F_3^{(5)}\varphi''' + 5F_4^{(5)}\varphi'' + F_5^{(5)}\varphi')\right] + \\
&+ \binom{n}{6} f'^{n-6}\left[\frac{1}{7!} f^7\varphi^{VII} + \frac{1}{6!}(15F_2^{(6)}\varphi^{V} + 20F_3^{(6)}\varphi^{IV} + 15F_4^{(6)}\varphi''' + 6F_5^{(6)}\varphi'' + F_6^{(6)}\varphi')\right] + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Führt man nun weiter die Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= f\varphi' \\
X_2 &= \frac{1}{2!} f^2\varphi'' \\
X_3 &= \frac{1}{3!} f^3\varphi''' + \frac{1}{2!} F_2^{(2)}\varphi' \\
X_4 &= \frac{1}{4!} f^4\varphi^{IV} + \frac{1}{3!}(3F_2^{(3)}\varphi'' + F_3^{(3)}\varphi') \\
X_5 &= \frac{1}{5!} f^5\varphi^{V} + \frac{1}{4!}(6F_2^{(4)}\varphi''' + 4F_3^{(4)}\varphi'' + F_4^{(4)}\varphi') \\
X_6 &= \frac{1}{6!} f^6\varphi^{VI} + \frac{1}{5!}(10F_2^{(5)}\varphi^{IV} + 10F_3^{(5)}\varphi''' + 5F_4^{(5)}\varphi'' + F_5^{(5)}\varphi') \\
X_7 &= \frac{1}{7!} f^7\varphi^{VII} + \frac{1}{6!}(15F_2^{(6)}\varphi^{V} + 20F_3^{(6)}\varphi^{IV} + 15F_4^{(6)}\varphi''' + 6F_5^{(6)}\varphi'' + F_6^{(6)}\varphi') \\
X_8 &= \frac{1}{8!} f^8\varphi^{VIII} + \frac{1}{7!}(21F_2^{(7)}\varphi^{VI} + 35F_3^{(7)}\varphi^{V} + 35F_4^{(7)}\varphi^{IV} + 21F_5^{(7)}\varphi''' + 7F_6^{(7)}\varphi'' + F_7^{(7)}\varphi') \\
X_9 &= \frac{1}{9!} f^9\varphi^{IX} + \frac{1}{8!}(28F_2^{(8)}\varphi^{VII} + 56F_3^{(8)}\varphi^{VI} + 70F_4^{(8)}\varphi^{V} + 56F_5^{(8)}\varphi^{IV} + 28F_6^{(8)}\varphi''' + 8F_7^{(8)}\varphi'' + F_8^{(8)}\varphi') \\
X_{10} &= \frac{1}{10!} f^{10}\varphi^{X} + \frac{1}{9!}(36F_2^{(9)}\varphi^{VIII} + 84F_3^{(9)}\varphi^{VII} + 126F_4^{(9)}\varphi^{VI} + 126F_5^{(9)}\varphi^{V} + 84F_6^{(9)}\varphi^{IV} + 36F_7^{(9)}\varphi''' + 9F_8^{(9)}\varphi'' + \\
&\qquad + F_9^{(9)}\varphi') \\
X_{11} &= \frac{1}{11!} f^{11}\varphi^{XI} + \frac{1}{10!}(45F_2^{(10)}\varphi^{IX} + 120F_3^{(10)}\varphi^{VIII} + 210F_4^{(10)}\varphi^{VII} + 252F_5^{(10)}\varphi^{VI} + 210F_6^{(10)}\varphi^{V} + 120F_7^{(10)}\varphi^{IV} + \\
&\qquad + 45F_8^{(10)}\varphi''' + 10F_9^{(10)}\varphi'' + F_{10}^{(10)}\varphi') \\
X_{12} &= \frac{1}{12!} f^{12}\varphi^{XII} + \frac{1}{11!}(55F_2^{(11)}\varphi^{X} + 165F_3^{(11)}\varphi^{IX} + 330F_4^{(11)}\varphi^{VIII} + 462F_5^{(11)}\varphi^{VII} + 462F_6^{(11)}\varphi^{VI} + 330F_7^{(11)}\varphi^{V} + \\
&\qquad + 165F_8^{(11)}\varphi^{IV} + 55F_9^{(11)}\varphi''' + 11F_{10}^{(11)}\varphi'' + F_{11}^{(11)}\varphi') \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

so wird:

$$\frac{D\,(\varphi' f^{n+1})}{(n+1)!} = X_1 \cdot f'^n + \binom{n}{1} X_2 . f'^{n-1} + \binom{n}{2} X_3 f'^{n-2} + \binom{n}{3} X_4 f'^{n-3} + \binom{n}{4} X_5 f'^{n-4} + \ldots \tag{6}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit α^{n+1} und substituirt man dies dann in die Gleichung 1), so erhält das Resultat die Form:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(z) = \varphi + \alpha X_1 &(1 + \alpha f' + \alpha^2 f'^2 + \alpha^3 f'^3 + \alpha^4 f'^4 + \alpha^5 f'^5 + \alpha^6 f'^6 + \alpha^7 f'^7 + \ldots) + \\
+ \alpha^2 X_2 &(1 + 2\alpha f' + 3\alpha^2 f'^2 + 4\alpha^3 f'^3 + 5\alpha^4 f'^4 + 6\alpha^5 f'^5 + 7\alpha^6 f'^6 + \ldots) + \\
+ \alpha^3 X_3 &(1 + 3\alpha f' + 6\alpha^2 f'^2 + 10\alpha^3 f'^3 + 15\alpha^4 f'^4 + 21\alpha^5 f'^5 + \ldots) + \\
+ \alpha^4 X_4 &(1 + 4\alpha f' + 10\alpha^2 f'^2 + 20\alpha^3 f'^3 + 35\alpha^4 f'^4 + \ldots) + \\
+ \alpha^5 X_5 &(1 + 5\alpha f' + 15\alpha^2 f'^2 + 35\alpha^3 f'^3 + \ldots) + \\
+ \alpha^6 X_6 &(1 + 6\alpha f' + 21\alpha^2 f'^2 + \ldots) + \\
+ \alpha^7 X_7 &(1 + 7\alpha f' + \ldots) + ,
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

d. h.

$$\varphi(z) = \varphi + X_1 \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right) + X_2 \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^2 + X_3 \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^3 + \ldots X_n \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^n + \ldots \tag{8}$$

Sucht man blos z, d. h. ist $\varphi(z) = z$, also $\varphi = x$, $\varphi' = 1$, $\varphi'' = \varphi''' = \varphi^{n} = \ldots = 0$, so schrumpfen die X auf ihre letzten Glieder zusammen, und man hat einfach:

$$z = x + f\left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right) + \frac{1}{2!} F_2^2 \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^3 + \frac{1}{3!} F_3^3 \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^4 + \ldots \frac{1}{n!} F^{(n)} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^{n+1} + \ldots \tag{9}$$

oder explicit geschrieben:

$$\left.\begin{aligned}
z = x + f\left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right) + \frac{1}{2!} f^2 f'' \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^3 + \frac{1}{3!} f^3 f''' \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^4 + \frac{1}{4!} f^3 (f f^{IV} + 12 f''^2) \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f_1}\right)^5 + \\
+ \frac{1}{5!} f^3 (f f^{V} + 50 f'' f''') \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^6 + \frac{1}{6!} f^4 (f^2 f^{VI} + 30 f [3 f'' f^{IV} + 2 f'''^2] + 450 f''^3) \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^7 + \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{9*}$$

Die Anwendung der hier entwickelten Formeln bietet besonders dann grosse Vortheile dar, wenn man mehrere Functionen von z zu suchen hat, weil dafür ein Theil der Arbeit, die Berechnung der F-Functionen, (Gleichungssystem 1) nur einmal durchgeführt zu werden braucht.

Die X lassen sich wohl ohne Schwierigkeit aus dem Systeme der Gleichungen I und II zusammensetzen: für die X mit höherem Index ist es indess immerhin eine ziemlich zeitraubende Arbeit. Sie mögen daher hier, in expliciter Form gegeben, um so mehr einen Platz finden, als wir sie in dieser für die folgenden Untersuchungen benöthigen.

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= \frac{1}{1!} f \varphi'. \\
X_2 &= \frac{1}{2!} f^2 \varphi''. \\
X_3 &= \frac{1}{3!} f^3 \varphi''' + \frac{1}{2!} f^2 f'' \varphi'. \\
X_4 &= \frac{1}{4!} f^4 \varphi^{IV} + \frac{1}{2!\,1!} f^3 f'' \varphi'' + \frac{1}{3!} f^3 f''' \varphi'. \\
X_5 &= \frac{1}{5!} f^5 \varphi^{V} + \frac{1}{2!\,2!} f^5 f'' \varphi''' + \frac{1}{3!\,1!} f^4 f''' \varphi'' + \frac{1}{4!} f^3 (f f^{IV} + 12 f''^2) \varphi'.
\end{aligned}\right\} \text{III}$$

$$X_6 = \frac{1}{6!} f^6 \varphi^{\mathrm{vi}} + \frac{1}{2!\,3!} f^5 f'' \varphi^{\mathrm{v}} + \frac{1}{3!\,2!} f^5 f''' \varphi^{\mathrm{iv}} + \frac{1}{4!\,1!} f^4 (f f^{\mathrm{iv}} + 15 f''^2) \varphi''' + \frac{1}{5!} f^4 (f f^{\mathrm{v}} + 50 f'' f''') \varphi' .$$

$$\begin{aligned} X_7 = {} & \frac{1}{7!} f^7 \varphi^{\mathrm{vii}} + \frac{1}{2!\,4!} f^6 f'' \varphi^{\mathrm{v}} + \frac{1}{3!\,3!} f^6 f''' \varphi^{\mathrm{iv}} + \frac{1}{4!\,2!} f^5 (f f^{\mathrm{iv}} + 18 f''^2) \varphi''' + \frac{1}{5!\,1!} f^5 (f f^{\mathrm{v}} + 60 f'' f''') \varphi'' + \\ & + \frac{1}{6!} f^4 [f^2 f^{\mathrm{vi}} + 30 f (3 f'' f^{\mathrm{iv}} + 2 f'''^2) + 450 f''^3] \varphi' . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_8 = {} & \frac{1}{8!} f^8 \varphi^{\mathrm{viii}} + \frac{1}{2!\,5!} f^7 f'' \varphi^{\mathrm{vi}} + \frac{1}{3!\,4!} f^7 f''' \varphi^{\mathrm{v}} + \frac{1}{4!\,3!} f^6 (f f^{\mathrm{iv}} + 21 f''^2) \varphi^{\mathrm{iv}} + \frac{1}{5!\,2!} f^6 (f f^{\mathrm{v}} + 70 f'' f''') \varphi''' + \\ & + \frac{1}{6!\,1!} f^5 [f^2 f^{\mathrm{vi}} + 35 f (3 f'' f^{\mathrm{iv}} + 2 f'''^2) + 630 f''^3] \varphi'' + \frac{1}{7!} f^5 [f^2 f^{\mathrm{vii}} + 49 f (3 f'' f^{\mathrm{v}} + 5 f''' f^{\mathrm{iv}}) + \\ & + 4410 f''^2 f'''] \varphi' . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_9 = {} & \frac{1}{9!} f^9 \varphi^{\mathrm{ix}} + \frac{1}{2!\,6!} f^8 f'' \varphi^{\mathrm{vii}} + \frac{1}{3!\,5!} f^8 f''' \varphi^{\mathrm{vi}} + \frac{1}{4!\,4!} f^7 (f f^{\mathrm{iv}} + 24 f''^2) \varphi^{\mathrm{v}} + \frac{1}{5!\,3!} f^7 (f f^{\mathrm{v}} + 80 f'' f''') \varphi^{\mathrm{iv}} + \\ & + \frac{1}{6!\,2!} f^6 [f^2 f^{\mathrm{vi}} + 40 f (3 f'' f^{\mathrm{iv}} + 2 f'''^2) + 840 f''^3] \varphi''' + \frac{1}{7!\,1!} f^6 [f^2 f^{\mathrm{vii}} + 56 f (3 f'' f^{\mathrm{v}} + 5 f''' f^{\mathrm{iv}}) + \\ & + 5880 f''^2 f'''] \varphi'' + \frac{1}{8!} f^5 [f^3 f^{\mathrm{viii}} + 56 f^2 (4 f'' f^{\mathrm{vi}} + 8 f''' f^{\mathrm{v}} + 5 f^{\mathrm{iv}\,2}) + 3920 f (3 f''^2 f^{\mathrm{iv}} + 4 f'' f'''^2) + \\ & + 35280 f''^4] \varphi' . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{10} = {} & \frac{1}{10!} f^{10} \varphi^{\mathrm{x}} + \frac{1}{2!\,7!} f^9 f'' \varphi^{\mathrm{viii}} + \frac{1}{3!\,6!} f^9 f''' \varphi^{\mathrm{vii}} + \frac{1}{4!\,5!} f^8 (f f^{\mathrm{iv}} + 27 f''^2) \varphi^{\mathrm{vi}} + \frac{1}{5!\,4!} f^8 (f f^{\mathrm{v}} + \\ & + 90 f'' f''') \varphi^{\mathrm{v}} + \frac{1}{6!\,3!} f^7 [f^2 f^{\mathrm{vi}} + 45 f (3 f'' f^{\mathrm{iv}} + 2 f'''^3) + 1080 f''^3] \varphi^{\mathrm{iv}} + \frac{1}{7!\,2!} f^7 [f^2 f^{\mathrm{vii}} + 63 f (3 f'' f^{\mathrm{v}} + \\ & + 5 f''' f^{\mathrm{iv}}) + 7560 f''^2 f'''] \varphi''' + \frac{1}{8!\,1!} f^6 [f^3 f^{\mathrm{viii}} + 63 f^2 (4 f'' f^{\mathrm{vi}} + 8 f''' f^{\mathrm{v}} + 5 f^{\mathrm{iv}\,2}) + 5040 f (3 f''^2 f^{\mathrm{iv}} + \\ & + 4 f'' f'''^2) + 52920 f''^4] \varphi'' + \frac{1}{9!} f^6 [f^3 f^{\mathrm{ix}} + 54 f^2 (6 f'' f^{\mathrm{vii}} + 14 f''' f^{\mathrm{vi}} + 21 f^{\mathrm{iv}} f^{\mathrm{v}}) + 1008 f (27 f''^2 f^{\mathrm{v}} + \\ & 90 f'' f'' f^{\mathrm{iv}} + 20 f'''^3) + 635040 f''^3 f'''] \varphi' . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{11} = {} & \frac{1}{11!} f^{11} \varphi^{\mathrm{xi}} + \frac{1}{2!\,8!} f^{10} f'' \varphi^{\mathrm{ix}} + \frac{1}{3!\,7!} f^{10} f''' \varphi^{\mathrm{viii}} + \frac{1}{4!\,6!} f^9 (f f^{\mathrm{iv}} + 30 f''^2) \varphi^{\mathrm{vii}} + \frac{1}{5!\,5!} f^9 (f f^{\mathrm{v}} + \\ & + 100 f'' f''') \varphi^{\mathrm{vi}} + \frac{1}{6!\,4!} f^8 [f^2 f^{\mathrm{vi}} + 50 f (3 f'' f^{\mathrm{iv}} + 2 f'''^2) + 1350 f''^3] \varphi^{\mathrm{v}} + \frac{1}{7!\,3!} f^8 [f^2 f^{\mathrm{vii}} + 70 f (3 f'' f^{\mathrm{v}} + \\ & + 5 f''' f^{\mathrm{iv}}) + 9450 f''^2 f'''] \varphi^{\mathrm{iv}} + \frac{1}{8!\,2!} f^7 [f^3 f^{\mathrm{viii}} + 70 f^2 (4 f'' f^{\mathrm{vi}} + 8 f''' f^{\mathrm{v}} + 5 f^{\mathrm{iv}\,2}) + 6300 f (3 f''^2 f^{\mathrm{iv}} + \\ & + 4 f'' f'''^2) + 75600 f''^4] \varphi''' + \frac{1}{9!\,1!} f^7 [f^3 f^{\mathrm{ix}} + 60 f^2 (6 f'' f^{\mathrm{vii}} + 14 f''' f^{\mathrm{vi}} + 21 f^{\mathrm{iv}} f^{\mathrm{v}}) + 1260 f (27 f''^2 f^{\mathrm{v}} + \\ & + 90 f'' f''' f^{\mathrm{iv}} + 20 f'''^3) + 907200 f''^3 f'''] \varphi'' + \frac{1}{10!} f^6 [f^4 f^{\mathrm{x}} + 30 f^3 (15 f'' f^{\mathrm{viii}} + 40 f''' f^{\mathrm{vii}} + 70 f^{\mathrm{iv}} f^{\mathrm{vi}} + \\ & + 42 f^{\mathrm{v}\,2}) + 9450 f^2 (6 f''^2 f^{\mathrm{vi}} + 24 f'' f''' f^{\mathrm{v}} + 15 f'' f^{\mathrm{iv}\,2} + 20 f'''^2 f^{\mathrm{iv}}) + 2268000 f (f''^3 f^{\mathrm{iv}} + 2 f''^2 f'''^2) \\ & + 4762800 f''^5] \varphi' . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{12} = {} & \frac{1}{12!} f^{12} \varphi^{\mathrm{xii}} + \frac{1}{2!\,9!} f^{11} f'' \varphi^{\mathrm{x}} + \frac{1}{3!\,8!} f^{11} f''' \varphi^{\mathrm{ix}} + \frac{1}{4!\,7!} f^{10} (f f^{\mathrm{iv}} + 33 f''^2) \varphi^{\mathrm{viii}} + \frac{1}{5!\,6!} f^{10} (f f^{\mathrm{v}} + \\ & + 10 f'' f''') \varphi^{\mathrm{vii}} + \frac{1}{6!\,5!} f^9 [f^2 f^{\mathrm{vi}} + 55 f (3 f'' f^{\mathrm{iv}} + 2 f'''^2) + 1650 f''^3] \varphi^{\mathrm{vi}} + \frac{1}{7!\,4!} f^9 [f^2 f^{\mathrm{vii}} + 77 f (3 f'' f^{\mathrm{v}} + \\ & + 5 f''' f^{\mathrm{iv}}) + 11550 f''^2 f'''] \varphi^{\mathrm{v}} + \frac{1}{8!\,3!} f^8 [f^3 f^{\mathrm{viii}} + 77 f^2 (4 f'' f^{\mathrm{vi}} + 8 f''' f^{\mathrm{v}} + 5 f^{\mathrm{iv}\,2}) + 7700 f (3 f''^2 f^{\mathrm{iv}} + \end{aligned}$$

III

$$
\left.\begin{aligned}
&+4f''f'''^2)+103950f''^4]\varphi^{IV}+\frac{1}{9!2!}f^8[f^3f^{IX}+66f^2(6f''f^{VII}+14f'''f^{VI}+21f^{IV}f^{V})+1540f(27f''^2f^{V}+\\
&+90f''f'''f^{IV}+20f'''^3)+1247400f''^3f''']\varphi'''+\frac{1}{10!1!}f^7[f^4f^{X}+33f^3(15f''f^{VIII}+40f'''f^{VII}+70f^{IV}f^{VI}+\\
&+42f^{V2})+11550f^2(6f''^2f^{VI}+24f''f'''f^{V}+15f''f^{IV2}+20f'''^2f^{IV})+3118500f(f''^3f^{IV}+2f''^2f'''^2)+\\
&+7484400f''^5]\varphi''+\frac{1}{11!}f^7[f^4f^{XI}+121f^3(5f''f^{IX}+15f'''f^{VIII}+30f^{IV}f^{VII}+42f^{V}f^{VI})+\\
&+18150f^2(6f''^2f^{VII}+28f''f'''f^{VI}+42f''f^{IV}f^{V}+28f'''^2f^{V}+35f'''f^{IV2})+762300f(9f''^3f^{V}+\\
&\qquad\qquad+45f''^2f'''f^{IV}+20f''f'''^3)+137214000f''^4f''']\varphi'.
\end{aligned}\right\}\ \text{III}
$$

§. 3.

Die im vorigen Paragraph ausgeführten Summationen kann man leicht noch weiter treiben. Führt man nämlich Kürze halber die Bezeichnungen ein:

$$\zeta=\frac{\alpha}{1-\alpha f'}$$

$$\xi=\zeta f=\frac{\alpha f}{1-\alpha f'}$$

so gewinnt die Gleichung 8) die Gestalt:

$$\varphi(z)=\varphi+X_1\zeta+X_2\zeta^2+X_3\zeta^3+\ldots+X_n\zeta^n+\ \ldots \tag{8*}$$

Substituirt man darin die eben gegebenen Werthe der X, und setzt man für den Augenblick noch:

$$y=ff''\zeta^2=\frac{f''}{f}\xi^2,$$

so kann man die Glieder auch folgendermassen gruppiren:

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi(z)=\varphi+\varphi'\xi&\left[1+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2+\frac{5}{8}y^3+\frac{7}{8}y^4+\frac{21}{16}y^5+\ldots\right]+\\
&+\frac{1}{2!}\varphi''\xi^2\left[1+y+\frac{5}{4}y^2+\frac{7}{4}y^3+\frac{21}{8}y^4+\frac{33}{8}y^5+\ldots\right]+\\
&+\frac{1}{3!}\varphi'''\xi^3\left[1+\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}y^2+\frac{7}{2}y^3+\frac{45}{8}y^4+\ldots\right]+\\
&+\frac{1}{4!}\varphi^{IV}\xi^4\left[1+2y+\frac{7}{2}y^2+6y^3+\frac{165}{16}y^4+\ldots\right]+\\
&+\frac{1}{5!}\varphi^{V}\xi^5\left[1+\frac{5}{2}y+5y^2+\frac{75}{8}y^3+\ldots\right]+\\
&+\frac{1}{6!}\varphi^{VI}\xi^6\left[1+3y+\frac{27}{4}y^2+\frac{55}{4}y^3+\ldots\right]+\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{1}{3!}f'''\varphi'\xi^3\zeta\left[1+\frac{5}{2}y+\frac{21}{4}y^2+\frac{21}{2}y^3+\frac{165}{8}y^4+\ldots\right]+\\
&+\frac{1}{4!}(f^{IV}\varphi'+4f'''\varphi'')\xi^4\zeta[1+3y+7y^2+15y^3+\ldots]+\\
&+\frac{1}{5!}(f^{V}\varphi'+5f^{IV}\varphi''+10f'''\varphi''')\xi^5\zeta\left[1+\frac{7}{2}y+9y^2+\frac{165}{8}y^3+\ldots\right]+
\end{aligned}\right\}\ 10)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+\frac{1}{6!}(f^{vi}\varphi'+6f^{v}\varphi''+15f^{iv}\varphi'''+20f'''\varphi^{iv})\xi^6\zeta\left[1+4y+\frac{45}{4}y^2+\ldots\right]+\\
&+\frac{1}{7!}(f^{vii}\varphi'+7f^{vi}\varphi''+21f^{v}\varphi'''+35f^{iv}\varphi^{iv}+35f'''\varphi^{v})\xi^7\zeta\left[1+\frac{9}{2}y+\frac{55}{4}y^2+\ldots\right]+\\
&+\frac{1}{8!}(f^{viii}\varphi'+8f^{vii}\varphi''+28f^{vi}\varphi'''+56f^{v}\varphi^{iv}+70f^{iv}\varphi^{v}+56f'''\varphi^{vi})\xi^8\zeta[1+5y+\ldots]+\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{1}{72}f'''^2\varphi'\xi^5\zeta^2[6+28y+90y^2+\ldots]+\\
&+\frac{1}{144}(f'''f^{iv}\varphi'+2f'''^2\varphi'')\xi^6\zeta^2\left[7+36y+\frac{495}{4}y^2+\ldots\right]+\\
&+\frac{1}{5760}(\{8f'''f^{v}+5f^{iv2}\}\varphi'+40f'''f^{iv}\varphi''+40f'''^2\varphi''')\xi^7\zeta^2[8+45y+\ldots]+\\
&+\frac{1}{17280}(\{6f'''\varphi^{vi}+9f^{iv}f^{v}\}\varphi'+\{24f'''f^{v}+15f^{iv2}\}\varphi''+60f'''f^{iv}\varphi'''+40f'''^2\varphi^{iv})\xi^8\zeta^2[9+55y+\ldots]+\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{1}{1296}f'''^3\varphi'\xi^7\zeta^3[72+495y+\ldots]+\\
&+\frac{1}{1728}\left(f'''^2f^{iv}\varphi'+\frac{4}{3}f'''^3\varphi''\right)\xi^8\zeta^3[90+\ldots]+\\
&+\frac{1}{34560}\left(\{4f'''^2f^{v}+5f'''f^{iv2}\}\varphi'+20f'''^2f^{iv}\varphi''+\frac{40}{3}f'''^3\varphi'''\right)\xi^9\zeta^3[110+\ldots]+\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right\}\quad 10)
$$

Die in eckige Klammern eingeschlossenen Reihen sind, wie leicht ersichtlich, wieder Potenzreihen, und können demgemäss summirt werden. So ist:

$$1+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2+\frac{5}{8}y^3+\frac{7}{8}y^4+\frac{21}{16}y^5+\ldots=\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}=\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}$$

$$1+y+\frac{5}{4}y^2+\frac{7}{4}y^3+\frac{21}{8}y^4+\frac{33}{8}y^5+\ldots=\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^2=\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}\right)^2$$

$$1+\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}y^2+\frac{7}{2}y^3+\frac{45}{8}y^4+\ldots=\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^3=\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}\right)^3$$

$$1+2y+\frac{7}{2}y^2+6y^3+\frac{165}{16}y^4+\ldots=\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^4=\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}\right)^4$$

$$1+\frac{5}{2}y+5y^2+\frac{75}{8}y^3+\ldots=\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^5=\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}\right)^5$$

$$1+3y+\frac{27}{4}y^2+\frac{55}{4}y^3+\ldots=\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^6=\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}\right)^6$$

. . . .

$$1+\frac{5}{2}y+\frac{21}{4}y^2+\frac{21}{2}y^3+\frac{165}{8}y^4+\ldots=\frac{1}{\sqrt{1-2y}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^3=\frac{1}{\sqrt{1-2y}}\cdot\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}\right)^3$$

$$1+3y+7y^2+15y^3+\ldots=\frac{1}{\sqrt{1-2y}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^4=\frac{1}{\sqrt{1-2y}}\cdot\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}\right)^4$$

$$1+\frac{7}{2}y+9y^2+\frac{165}{8}y^3+\ldots=\frac{1}{\sqrt{1-2y}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^5=\frac{1}{\sqrt{1-2y}}\cdot\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}\right)^5$$

$$1+4y+\frac{45}{4}y^2+\ldots=\frac{1}{\sqrt{1-2y}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^6=\frac{1}{\sqrt{1-2y}}\cdot\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}\right)^6$$

$$1+\frac{9}{2}y+\frac{55}{4}y^2+\ldots=\frac{1}{\sqrt{1-2y}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^7=\frac{1}{\sqrt{1-2y}}\cdot\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}\right)^7$$

. . . .

$$6+28y+90y^2+\ldots=\frac{1+5\sqrt{1-2y}}{(1-2y)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^5$$

$$7+36y+\frac{495}{4}y^2+\ldots=\frac{1+6\sqrt{1-2y}}{(1-2y)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^6$$

$$8+45y+\ldots=\frac{1+7\sqrt{1-2y}}{(1-2y)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^7$$

$$9+55y+\ldots=\frac{1+8\sqrt{1-2y}}{(1-2y)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^8$$

. . . .

$$72+495y+\ldots=\frac{3+21\sqrt{1-2y}+48(1-2y)}{(1-2y)^{\frac{5}{2}}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^7$$

$$90+\ldots=\frac{3+24\sqrt{1-2y}+63(1-2y)}{(1-2y)^{\frac{5}{2}}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^8$$

$$110+\ldots=\frac{3+27\sqrt{1-2y}+80(1-2y)}{(1-2y)^{\frac{5}{2}}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^9$$

. . . .

Unter Einführung der Bezeichnungen:

$$\left.\begin{aligned}
p &= \frac{2\zeta}{1+\sqrt{1-2y}}=\frac{2\zeta}{1+\sqrt{1-2ff''y^2}}=\frac{1-\sqrt{1-2ff''y^2}}{f''\zeta}\\
Q_n &= \frac{\zeta}{\sqrt{1-2y}}\,p^{n-1}\\
R_n &= \frac{\zeta^2}{(1-2y)^{\frac{3}{2}}}\left[(n-2)\sqrt{1-2y}+1\right]\cdot p^{n-2}\\
S_n &= \frac{\zeta^3}{(1-2y)^{\frac{5}{2}}}\left[(n-2)(n-4)(1-2y)+3(n-3)\sqrt{1-2y}+3\right]p^{n-3}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad (y=ff''\zeta^2)
\end{aligned}\right\}\ \text{IV}$$

geht daher die Gleichung 10) über in:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(\zeta) = & \left(\varphi + \frac{p}{1}\varphi' + \frac{p^2}{1.2}\varphi'' + \frac{p^3}{3!}\varphi''' + \frac{p^4}{4!}\varphi^{iv} + \frac{p^5}{5!}\varphi^{v} + \dots\dots\dots\right) + \\
& + \left[\frac{1}{3!}Q_4 f'''\varphi' + \frac{1}{4!}Q_5(f^{iv}\varphi' + 4f'''\varphi'') + \frac{1}{5!}Q_6(f^{v}\varphi' + 5f^{iv}\varphi'' + 10f'''\varphi''') + \right. \\
& \qquad + \frac{1}{6!}Q_7(f^{vi}\varphi' + 6f^{v}\varphi'' + 15f^{iv}\varphi''' + 20f'''\varphi^{iv}) + \\
& \qquad \left. + \frac{1}{7!}Q_8(f^{vii}\varphi' + 7f^{vi}\varphi'' + 21f^{v}\varphi''' + 35f^{iv}\varphi^{iv} + 35f'''\varphi^{v}) + \dots\right] \\
& + \frac{1}{12}\left[\frac{1}{3!}R_7 f'''^2\varphi' + \frac{4}{4!}R_8\left(\frac{1}{2}f'''f^{iv}\varphi' + f'''^2\varphi''\right) + \frac{10}{5!}R_9\left(\frac{1}{40}\{8f'''f^{v} + f^{iv\,2}\}\varphi' + f'''f^{iv}\varphi'' + f'''^2\varphi'''\right) + \right. \\
& \qquad + \frac{20}{6!}R_{10}\left(\frac{1}{20}\{2f'''f^{vi} + 3f^{iv}f^{v}\}\varphi' + \frac{3}{40}\{8f'''f^{v} + 5f^{iv\,2}\}\varphi'' + \frac{3}{2}f'''f^{iv}\varphi''' + f'''^2\varphi^{iv}\right) + \\
& \qquad + \frac{35}{7!}R_{11}\left(\frac{1}{350}\{20f'''f^{vii} + 35f^{iv}f^{vi} + 21f^{v\,2}\}\varphi' + \frac{1}{5}(2f'''f^{vi} + 3f^{iv}f^{v})\varphi'' + \right. \\
& \qquad\qquad\qquad \left. + \frac{3}{20}(8f'''f^{v} + 5f^{iv\,2})\varphi''' + 2f'''f^{iv}\varphi^{iv} + f'''^2\varphi^{v}\right) + \\
& \qquad + \frac{56}{8!}R_{12}\left(\frac{1}{140}\{5f'''f^{viii} + 10f^{iv}f^{vii} + 14f^{v}f^{vi}\}\varphi' + \frac{1}{70}\{20f'''f^{vii} + 35f^{iv}f^{vi} + 21f^{v\,2}\}\varphi'' + \right. \\
& \qquad\qquad \left.\left. + \frac{1}{2}\{2f'''f^{vi} + 3f^{iv}f^{v}\}\varphi''' + \frac{1}{4}\{8f'''f^{v} + 5f^{iv\,2}\}\varphi^{iv} + \frac{5}{2}f'''f^{iv}\varphi^{v} + f'''^2\varphi^{vi}\right) + \dots\right] \\
& + \frac{1}{216}\left[\frac{1}{3!}S_{10}f'''^3\varphi' + \frac{1}{4!}S_{11}(3f'''^2f^{iv}\varphi' + 4f'''^3\varphi'') + \right. \\
& \qquad\qquad \left. \frac{1}{5!}S_{12}\left(\frac{3}{4}\{4f'''^2f^{v} + 5f'''f^{iv\,2}\}\varphi' + 15f'''^2f^{iv}\varphi'' + 10f'''^3\varphi'''\right) + \dots\right] \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \text{10*)}$$

Ehe wir weiter gehen, wollen wir vorher noch erwähnen, dass die P, Q, R, S, ... genannten Ausdrücke in folgendem Zusammenhange stehen:

$$\left.\begin{aligned}
Q_n &= \frac{\zeta^2}{n-1}\cdot\frac{d(p^{n-1})}{d\zeta} \\
R_n &= \zeta^2\cdot\frac{d(Q_{n-1})}{d\zeta} \\
S_n &= \zeta^2\cdot\frac{d(R_{n-1})}{d\zeta} \\
&\dots\dots
\end{aligned}\right\} \text{IV*}$$

Die Gleichung 10*) lässt sich noch wesentlich vereinfachen, worauf wir später zurückkommen werden. Vorläufig wollen wir sie nur noch auf eine für die Berechnung von $\varphi(\zeta)$ bequemere Form, die der Gleichung 8*), zurückführen, d. h. sie nach steigenden Potenzen von p entwickeln und nach denselben ordnen. Dazu erinnern wir uns der Bedeutung von p:

$$p = \frac{2f\zeta}{1+\sqrt{1-2ff''\zeta^2}} = \frac{1-\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}{f''\zeta}$$

Daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\zeta &= \frac{2p}{2f+f''p^2} \\
\sqrt{1-2ff''\zeta^2} &= 1-f''p\zeta = \frac{2f-f''p^2}{2f+f''p^2} \\
\frac{\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}} &= \frac{2p}{2f-f''p^2}
\end{aligned}\right\} \text{V}$$

und damit ergibt sich vermöge der Gleichungen IV:

$$Q_n = \frac{p^n}{f}\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{f''}{f}\right)p^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{f''}{f}\right)^2 p^4 + \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{f''}{f}\right)^3 p^6 + \frac{1}{16}\cdot\left(\frac{f''}{f}\right)^4 p^8 + \ldots\right]$$

$$R_n = \frac{p^n}{f^2}\left[(n-1) + n\left(\frac{f''}{f}\right)p^2 + \frac{3}{4}(n+1)\left(\frac{f''}{f}\right)^2 p^4 + \ldots\right]$$

$$S_n = \frac{p^n}{f^3}\left[(n-1)(n-2) + \frac{3}{2}n(n-1)\left(\frac{f''}{f}\right)p^2 + \ldots\right]$$

. . . .

Mit Hilfe dieser Formeln lässt sich nun die Gleichung 10*) leicht in die gewünschte Form:

$$\varphi(z) = \varphi + P_1 p + P_2 p^2 + P_3 p^3 + P_4 p^4 + \ldots \qquad 11)$$

umgestalten. Bei Ausführung der einfachen Rechnung ergeben sich für die P die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{1!}\varphi' \\
P_2 &= \frac{1}{2!}\varphi'' \\
P_3 &= \frac{1}{3!}\varphi''' \\
P_4 &= \frac{1}{4!}\varphi^{iv} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{f'''}{f}\varphi' \\
P_5 &= \frac{1}{5!}\varphi^{v} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{f}[f^{iv}\varphi' + 4f'''\varphi''] \\
P_6 &= \frac{1}{6!}\varphi^{vi} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{f^2}[(ff^{v} + 10f''f''')\varphi' + 5ff^{iv}\varphi'' + 10ff'''\varphi'''] \\
P_7 &= \frac{1}{7!}\varphi^{vii} + \frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{f^2}[(ff^{vi} + 15f''f^{iv} + 60f'''^2)\varphi' + 6(ff^{v} + 10f''f''')\varphi'' + 15ff^{iv}\varphi''' + 20ff'''\varphi^{iv}] \\
P_8 &= \frac{1}{8!}\varphi^{viii} + \frac{1}{7!}\cdot\frac{1}{f^3}[(f^2f^{vii} + f\{21f''f^{v} + 245f'''f^{iv}\} + 210f''^2f''')\varphi' + 7f(ff^{vi} + 15f''f^{iv} + 70f'''^2)\varphi'' + \\
&\qquad + 21f(ff^{v} + 10f''f''')\varphi''' + 35f^2f^{iv}\varphi^{iv} + 35f^2f'''\varphi^{v}] \\
P_9 &= \frac{1}{9!}\varphi^{ix} + \frac{1}{8!}\cdot\frac{1}{f^3}[(f^2f^{viii} + f\{28f''f^{vi} + 448f'''f^{v} + 280f^{iv\,2}\} + 140\{3f''^2f^{iv} + 28f''f'''^2\})\varphi' + \\
&\qquad + 8(f^2f^{vii} + f\{21f''f^{v} + 280f'''f^{iv}\} + 1680f''^2f''')\varphi'' + 28f(ff^{vi} + 15f''f^{iv} + 80f'''^2)\varphi''' + \\
&\qquad + 56f(ff^{v} + 10f''f''')\varphi^{iv} + 70f^2f^{iv}\varphi^{v} + 56f^2f'''\varphi^{vi}]
\end{aligned}\right\} \mathrm{VI}$$

. . . .

Die Gleichung 11) hat wieder ganz die Form von Gleichung 8*), indem sie sich von derselben nur dadurch unterscheidet, dass dort nach steigenden Potenzen von ζ, hier nach solchen von p entwickelt ist. Eine Vergleichung der Coëfficienten, hier der P, dort der X (§. 2, Gleichungssystem III) ist aber sehr lehrreich: sie zeigt, dass durch die neuerliche Summirung nicht nur der Bau der P wesentlich einfacher geworden ist, sondern dass sich auch durch das weitere Herausziehen eines Theiles der Glieder höherer Ordnung aus den späteren Gliedern, die in den Entwickelungen auftretenden numerischen Coëfficienten ganz bedeutend verkleinert haben. Die Gleichung (11) wäre daher der früheren (8*) in jeder Beziehung vorzuziehen, wenn nur die Grösse p nicht viel complicirter gebaut wäre als ζ. Indess kann man auch diesen Übelstand zum grossen Theile wenigstens durch folgende Betrachtung heben.

Führt man die Hilfsgrösse η ein, mittelst der Gleichung:

$$\eta^2 = \frac{\xi^2}{1-\left(\frac{f''}{f}\right)\xi^2}$$

$$\xi^2 = \frac{\eta^2}{1+\frac{f''}{f}\eta^2}$$

so wird:

$$p = \frac{2\xi}{1+\sqrt{1-2\frac{f''}{f}\xi^2}} = \frac{2\eta}{\sqrt{1+\frac{f''}{f}\eta^2}+\sqrt{1-\frac{f''}{f}\eta^2}} = \frac{f}{f''\eta}\left[\sqrt{1+\frac{f''}{f}\eta^2}-\sqrt{1-\frac{f''}{f}\eta^2}\right]$$

$$p = \eta\left(1+\frac{1}{8}\cdot\frac{f''^2}{f^2}\eta^4+\frac{7}{128}\frac{f''^4}{f^4}\eta^8+\frac{33}{1024}\cdot\frac{f''^6}{f^6}\eta^{12}+\ldots\right)$$

Betrachtet man also in Gleichung 2) die Grösse α als eine kleine Grösse, sagen wir als eine Grösse erster Ordnung, so sind ξ und η ebenfalls Grössen erster Ordnung und es unterscheidet sich p von η nur um eine Grösse fünfter Ordnung. Man kann daher in der Gleichung 11), ohne den Charakter derselben wesentlich zu ändern, p durch die einfachere Function η ersetzen: Der ganze Unterschied beschränkt sich darauf, dass die P von P_5 an, etwas complicirter ausfallen.

Die Berechnung von

$$\eta = \frac{\xi}{\sqrt{1-\frac{f''}{f}\xi^2}} = \frac{\alpha f}{\sqrt{(1-\alpha f')^2-ff''\alpha^2}}$$

lässt sich durch Einführung von trigonometrischen Functionen auf eine sehr einfache Weise bewerkstelligen. Sind nämlich:

a) f und f'' gleich bezeichnet, so wird für:

$$\sin\theta = \xi\sqrt{\frac{f''}{f}} = \frac{\alpha\sqrt{ff''}}{1-\alpha f'}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{f}{f''}}\,.\,\mathrm{tg}\,\theta.$$

b) f und f'' ungleich bezeichnet, so erhält man für:

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \xi\sqrt{-\frac{f''}{f}} = \frac{\alpha\sqrt{-ff''}}{1-\alpha f'}$$

$$\eta = \sqrt{-\frac{f}{f''}}\,.\sin\vartheta.$$

Bereits die zwischen den Grössen p, Q, R, S, ... stattfindende Relation, noch deutlicher aber der Bau der obigen P-Functionen (System VI) lässt erkennen, dass man auf dem hier eingeschlagenen Wege mit der Summation schrittweise immer weiter fortfahren könnte. Ich bin auch überzeugt, dass es immerhin ein gewisses theoretisches Interesse hätte, diesen Gedanken weiter zu verfolgen. Doch erlaubt es mir meine sehr knapp zugemessene Zeit nicht, derartige zeitraubende Untersuchungen auszuführen; ich muss mich daher damit begnügen, dieselben hier angeregt zu haben, und deren Ausführung Mathematikern von Fach überlassen.

§. 4.

In der Gleichung 8*) (§. 2) können übrigens die Glieder nach dem Einsetzen der Werthe der X noch auf mannigfache andere Weise derart zusammengefasst werden, dass sich damit erhebliche Vereinfachungen erzielen lassen. In theoretischer Beziehung eine der interessantesten und wichtigsten Gruppirungen dürfte aber die folgende sein:

$$
\begin{aligned}
\varphi(z) = & \left(\varphi + \frac{\xi}{1!}\varphi' + \frac{\xi^2}{2!}\varphi'' + \frac{\xi^3}{3!}\varphi''' + \dots\right) + \\
& + \xi^2\zeta\left(\frac{1}{2!}f'' + \frac{\xi}{3!}f''' + \frac{\xi^2}{4!}f^{iv} + \frac{\xi^3}{5!}f^{v} + \dots\right)\left(\varphi' + \frac{\xi}{1!}\varphi'' + \frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \frac{\xi^3}{1!}\varphi^{iv} + \dots\right) + \\
& + \frac{3}{4!}f''^2\xi^3\zeta^2\left(4\varphi' + 5\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 6\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + 7\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{iv} + \dots\right) + \\
& + \frac{10}{5!}f''f'''\xi^4\zeta^2\left(5\varphi' + 6\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 7\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + 8\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{iv} + \dots\right) + \\
& + \frac{5}{6!}(3f''f^{iv} + 2f'''^2)\xi^5\zeta^2\left(6\varphi' + 7\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 8\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \dots\right) + \\
& + \frac{7}{7!}(3f''f^{v} + 5f'''f^{iv})\xi^6\zeta^2\left(7\varphi' + 8\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 9\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \dots\right) + \\
& + \frac{7}{8!}(4f''f^{vi} + 8f'''f^{v} + 5f^{iv2})\xi^7\zeta^2\left(8\varphi' + 9\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 10\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \dots\right) + \\
& + \frac{6}{9!}(6f''f^{vii} + 14f'''f^{vi} + 21f^{iv}f^{v})\xi^8\zeta^2\left(9\varphi' + 10\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 11\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \dots\right) + \\
& + \frac{3}{10!}(15f''f^{viii} + 40f'''f^{vii} + 70f^{iv}f^{vi} + 42f^{v2})\xi^9\zeta^2\left(10\varphi' + 11\frac{\xi}{1!}\varphi'' + \dots\right) + \\
& + \frac{11}{11!}(5f''f^{ix} + 15f'''f^{viii} + 30f^{iv}f^{vii} + 42f^{v}f^{vi})\xi^{10}\zeta^2(11\varphi' + \dots) + \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + \frac{1}{4!}f''^3\xi^4\zeta^3\left(15\varphi' + 21\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 28\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + 36\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{iv} + 45\frac{\xi^4}{4!}\varphi^{v} + 55\frac{\xi^5}{5!}\varphi^{vi} + \dots\right) + \\
& + \frac{1}{4!}f''^2f'''\xi^5\zeta^3\left(21\varphi' + 28\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 36\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + 45\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{iv} + 55\frac{\xi^4}{4!}\varphi^{v} + \dots\right) + \\
& + \frac{140}{8!}(3f''^2f^{iv} + 4f''f'''^2)\xi^6\zeta^3\left(28\varphi' + 36\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 45\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + 55\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{iv} + \dots\right) + \\
& + \frac{28}{9!}(27f''^2f^{v} + 90f''f'''f^{iv} + 20f'''^3)\xi^7\zeta^3\left(36\varphi' + 45\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 55\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \dots\right) + \\
& + \frac{21}{9!}(6f''^2f^{vi} + 24f''f'''f^{v} + 15f''f^{iv2} + 20f'''^2f^{iv})\xi^8\zeta^3\left(45\varphi' + 55\frac{\xi}{1!}\varphi'' + \dots\right) + \\
& + \frac{3}{9!}(6f''^2f^{vii} + 28f''f'''f^{vi} + 42f''f^{iv}f^{v} + 28f'''^2f^{v} + 35f'''f^{iv2})\xi^9\zeta^3(55\varphi' + \dots) + \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + \frac{630}{8!}f''^4\xi^5\zeta^4\left(56\varphi' + 84\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 120\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + 165\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{iv} + \dots\right) + \\
& + \frac{15}{6!}f''^3f'''\xi^6\zeta^4\left(84\varphi' + 120\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 165\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \dots\right) + \\
& + \frac{210}{8!}(f''^3f^{iv} + 2f''^2f'''^2)\xi^7\zeta^4\left(120\varphi' + 165\frac{\xi}{1}\varphi'' + \dots\right) + \\
& + \frac{42}{9!}(9f''^3f^{v} + 45f''^2f'''f^{iv} + 20f''f'''^3)\xi^8\zeta^4(165\varphi' + \dots) + \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + \frac{252}{8!}f''^5\xi^6\zeta^5\left(210\varphi' + 330\frac{\xi}{1}\varphi'' + \dots\right) + \\
& + \frac{420}{8!}f''^4f'''\xi^7\zeta^5(330\varphi' + \dots) + \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Es ist aber bekanntlich:

$$\varphi(x+\xi) = \varphi + \frac{\xi}{1}\varphi' + \frac{\xi^2}{2!}\varphi'' + \frac{\xi^3}{3!}\varphi''' + \dots$$

$$\varphi'(x+\xi) = \varphi' + \frac{\xi}{1}\varphi'' + \frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \frac{\xi^3}{3!}\varphi^{iv} + \dots$$

Ferner hat man:

$$m\varphi' + \left[m + \binom{1}{1}\right]\frac{\xi}{1}\varphi'' + \left[m + \binom{2}{1}\right]\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \left[m + \binom{3}{1}\right]\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{iv} + \dots +$$
$$+ \left[m + \binom{r}{1}\right]\frac{\xi^r}{r!}\varphi^{(r+1)} + \dots = m\varphi'(x+\xi) + \frac{\xi}{1}\varphi''(x+\xi)$$

$$m\varphi' + \left[m + \binom{1}{1}n\right]\frac{\xi}{1}\varphi'' + \left[m + \binom{2}{1}n + \binom{2}{2}\right]\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \left[m + \binom{3}{1}n + \binom{3}{2}\right]\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{iv} + \dots +$$
$$+ \left[m + \binom{r}{1}n + \binom{r}{2}\right]\frac{\xi^r}{r!}\varphi^{(r+1)} + \dots = m\varphi'(x+\xi) + n\frac{\xi}{1}\varphi''(x+\xi) + \frac{\xi^2}{2!}\varphi'''(x+\xi)$$

$$m\varphi' + \left[m + \binom{1}{1}n\right]\frac{\xi}{1}\varphi'' + \left[m + \binom{2}{1}n + \binom{2}{2}p\right]\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \left[m + \binom{3}{1}n + \binom{3}{2}p + \binom{3}{3}\right]\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{iv} + \dots +$$
$$+ \left[m + \binom{r}{1}n + \binom{r}{2}p + \binom{r}{3}\right]\frac{\xi^r}{r!}\varphi^{(r+1)} + \dots = m\varphi'(x+\xi) + n\frac{\xi}{1}\varphi''(x+\xi) + p\frac{\xi^2}{2!}\varphi'''(x+\xi) + \frac{\xi^3}{3!}\varphi^{iv}(x+\xi)$$

u. s. w.

Mit Hilfe dieser Reductionsformeln erhält unsere Gleichung 12) die elegante Form:

$$\varphi(z) = \varphi(x+\xi) + L_1\varphi'(x+\xi) + L_2\varphi''(x+\xi) + L_3\varphi'''(x+\xi) + \dots \qquad 12^*)$$

Dabei bedeutet:

$$L_1 = \frac{\xi^3}{f}\left[\frac{1}{2!}f'' + \frac{\xi}{3!}f''' + \frac{\xi^2}{4!}f^{iv} + \frac{\xi^3}{5!}f^{v} + \dots\right] +$$
$$+ \frac{\xi^5}{f^2}\left[\frac{1}{2!}f''^2 + \frac{10}{4!}f''f'''\xi + \frac{1}{4!}(3f''f^{iv} + 2f'''^2)\xi^2 + \frac{7}{6!}(3f''f^{v} + 5f'''f^{iv})\xi^3 + \right.$$
$$+ \frac{1}{6!}(4f''f^{vi} + 8f'''f^{v} + 5f^{iv\,2})\xi^4 + \frac{6}{8!}(6f''f^{vii} + 14f'''f^{vi} + 21f^{iv}f^{v})\xi^5 +$$
$$+ \frac{3}{9!}(15f''f^{viii} + 40f'''f^{vii} + 70f^{iv}f^{vi} + 42f^{v\,2})\xi^6 +$$
$$\left. + \frac{11}{10!}(5f''f^{ix} + 15f'''f^{viii} + 30f^{iv}f^{vii} + 42f^{v}f^{vi})\xi^7 + \dots\right] +$$
$$+ \frac{\xi^7}{f^3}\left[\frac{5}{8}f''^3 + \frac{7}{8}f''^2f'''\xi + \frac{7}{72}(3f''^2f^{iv} + 4f''f'''^2)\xi^2 + \frac{1}{360}(27f''^2f^{v} + 90f''f'''f^{iv} + 10f'''^3)\xi^3 + \right.$$
$$+ \frac{1}{384}(6f''^2f^{vi} + 24f''f'''f^{v} + 15f''f^{iv\,2} + 20f'''^2f^{iv})\xi^4 +$$
$$\left. + \frac{11}{24192}(6f''^2f^{vii} + 28f''f'''f^{vi} + 42f''f^{iv}f^{v} + 28f'''^2f^{v} + 35f'''f^{iv\,2})\xi^5 + \dots\right] +$$
$$+ \frac{\xi^9}{f^4}\left[\frac{7}{8}f''^4 + \frac{7}{4}f''^3f'''\xi + \frac{5}{8}(f''^3f^{iv} + 2f''^2f'''^2)\xi^2 + \frac{11}{576}(9f''^3f^{v} + 45f''^2f'''f^{iv} + 20f''f'''^3)\xi^3 + \dots\right] +$$
$$+ \frac{\xi^{11}}{f^5}\left[\frac{21}{16}f''^5 + \frac{55}{16}f''^4f'''\xi + \dots\right] + \dots$$

$$L_2=\frac{\xi^6}{f^2}\Big[\frac{3}{4!}f''^2+\frac{2}{4!}f''f'''\xi+\frac{5}{6!}(3f''f^{iv}+2f'''^2)\xi^2+\frac{1}{6!}(3f''f^{v}+5f'''f^{iv})\xi^3+\frac{7}{8!}(4f''f^{vi}+8f'''f^{v}+5f^{iv\,2})\xi^4+$$

$$+\frac{6}{9!}(6f''f^{vii}+14f'''f^{vi}+21f^{iv}f^{v})\xi^5+\frac{3}{10!}(15f''f^{viii}+40f'''f^{vii}+70f^{iv}f^{vi}+42f^{v\,2})\xi^6+\dots\Big]+$$

$$+\frac{\xi^7}{f^3}\Big[\frac{1}{4}f''^3+\frac{7}{24}f''^2f'''\xi+\frac{1}{36}(3f''^2f^{iv}+4f''f'''^2)\xi^2+\frac{1}{1440}(27f''^2f^{v}+90f''f'''f^{iv}+20f'''^3)\xi^3+$$

$$+\frac{1}{1728}(6f''^2f^{vi}+24f''f'''f^{v}+15f''f^{iv\,2}+20f'''^2f^{iv})\xi^4+\dots\Big]+$$

$$+\frac{\xi^{10}}{f^4}\Big[\frac{7}{16}f''^4+\frac{3}{4}f''^3f'''\xi+\frac{15}{64}(f''^3f^{iv}+2f''^2f'''^2)\xi^2+\dots\Big]+$$

$$+\frac{\xi^{12}}{f^5}\Big[\frac{3}{4}f''^5+\dots\Big]+\dots$$

$$L_3=\frac{\xi^9}{f^3}\Big[\frac{1}{48}f''^3+\frac{1}{48}f''^2f'''\xi+\frac{1}{576}(3f''^2f^{iv}+4f''f'''^2)\xi^2+\frac{1}{25920}(27f''^2f^{v}+90f''f'''f^{iv}+20f'''^3)\xi^3+\dots\Big]+$$

$$+\frac{\xi^{11}}{f^4}\Big[\frac{1}{16}f''^4+\frac{3}{32}f''^3f'''\xi+\dots\Big]+\dots$$

$$L_4=\frac{\xi^{12}}{f^4}\Big[\frac{1}{384}f''^4+\frac{1}{288}f''^3f'''\xi+\frac{1}{1152}(f''^3f^{iv}+2f''^2f'''^2)\xi^2+\dots\Big]$$

. . . .

Zwischen den einzelnen Gliedergruppen von $L_1, L_2, L_3\dots$ bestehen sehr merkwürdige einfache Relationen, die nicht nur deren Berechnung sehr erleichtern, sondern uns auch einen tieferen Einblick in das Wesen und die Bedeutung der ganzen Entwickelungen gewähren. Es ist nämlich:

$$\frac{3}{4!}f''^2+\frac{2}{4!}f''f'''\xi+\frac{5}{6!}(3f''f^{iv}+2f'''^2)\xi^2+\frac{1}{6!}(3f''f^{v}+5f'''f^{iv})\xi^3+\frac{7}{8!}(4f''f^{vi}+8f'''f^{v}+5f^{iv\,2})\xi^4+\dots=$$

$$=\frac{1}{2!}\Big(\frac{1}{2!}f''+\frac{\xi}{3!}f'''+\frac{\xi^2}{4!}f^{iv}+\frac{\xi^3}{5!}f^{v}+\dots\Big)^2$$

$$\frac{1}{48}f''^3+\frac{1}{48}f''^2f'''\xi+\frac{1}{576}(3f''^2f^{iv}+4f''f'''^2)\xi^2+\frac{1}{25920}(27f''^2f^{v}+90f''f'''f^{iv}+20f'''^3)\xi^3+\dots=$$

$$=\frac{1}{3!}\Big(\frac{1}{2!}f''+\frac{\xi}{3!}f'''+\frac{\xi^2}{4!}f^{iv}+\frac{\xi^3}{5!}f^{v}+\dots\Big)^3$$

$$\frac{1}{384}f''^4+\frac{1}{288}f''^3f'''\xi+\frac{1}{1152}(f''^3f^{iv}+2f''^2f'''^2)\xi^2+\dots=\frac{1}{4!}\Big(\frac{1}{2!}f''+\frac{\xi}{3!}f'''+\frac{\xi^2}{4!}f^{iv}+\dots\Big)^4$$

. . . .

$$\frac{1}{2!}f''^2+\frac{10}{4!}f''f'''\xi+\frac{1}{4!}(3f''f^{iv}+2f'''^2)\xi^2+\frac{7}{6!}(3f''f^{v}+5f'''f^{iv})\xi^3+\frac{1}{6!}(4f''f^{vi}+8f'''f^{v}+5f^{iv\,2})\xi^4+\dots=$$

$$=\Big(\frac{1}{2}f''+\frac{\xi}{3!}f'''+\frac{\xi^2}{4!}f^{iv}+\frac{\xi^3}{5!}f^{v}+\dots\Big)\Big(f''+\frac{1}{2}f'''\xi+\frac{\xi^2}{3!}f^{iv}+\frac{\xi^3}{4!}f^{v}+\dots\Big)$$

$$\frac{1}{4}f''^3+\frac{7}{24}f''^2f'''\xi+\frac{1}{36}(3f''^2f^{iv}+4f''f'''^2)\xi^2+\frac{1}{1440}(27f''^2f^{v}+90f''f'''f^{iv}+20f'''^3)\xi^3+\dots=$$

$$=\Big(\frac{1}{2}f''+\frac{\xi}{3!}f'''+\frac{\xi^2}{4!}f^{iv}+\frac{\xi^3}{5!}f^{v}+\dots\Big)^2\Big(f''+\frac{1}{2}f'''\xi+\frac{\xi^2}{3!}f^{iv}+\frac{\xi^3}{4!}f^{v}+\dots\Big)$$

$$\frac{1}{16}f''^4+\frac{3}{32}f''^3f'''\xi+\frac{5}{192}(f''^3f^{iv}+2f''^2f'''^2)\xi^2+\dots=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2!}f''+\frac{\xi}{3!}f'''+\frac{\xi^2}{4!}f^{iv}+\dots\Big)^3\Big(f''+\frac{1}{2}f'''\xi+\frac{\xi^2}{3!}f^{iv}+\dots\Big)$$

. . . .

$$\frac{5}{8}f''^3+\frac{7}{8}f''^2f'''\xi+\frac{7}{72}(3f''^2f^{iv}+4f''f'''^2)\xi^2+\frac{1}{360}(27f''^2f^{v}+90f''f'''f^{iv}+20f'''^3)\xi^3+\ldots=$$
$$=\left(\frac{1}{2}f''+\frac{\xi}{3!}f'''+\frac{\xi^2}{4!}f^{iv}+\ldots\right)\left(\frac{5}{4}f''^2+\frac{4}{3}f''f'''\xi+\frac{1}{48}[23f''f^{iv}+16f'''^2]\xi^2+\frac{1}{240}[31f''f^{v}+55f'''f^{iv}]\xi^3+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1440}[40f''f^{vi}+86f'''f^{v}+55f^{iv\,2}]\xi^4+\frac{1}{5040}[25f''f^{vii}+63f'''f^{vi}+98f^{iv}f^{v}]\xi^5+\ldots\right)$$

$$\frac{7}{16}f''^4+\frac{3}{4}f''^3f'''\xi+\frac{15}{64}(f''^3f^{iv}+2f''^2f'''^2)\xi^2+\frac{11}{1728}(9f''^3f^{v}+45f''^2f'''f^{iv}+20f''f'''^3)\xi^3+\ldots=$$
$$=\left(\frac{1}{2}f''+\frac{\xi}{3!}f'''+\frac{\xi^2}{4!}f^{iv}+\ldots\right)^2\left(\frac{7}{4}f''^2+\frac{11}{6}f''f'''\xi+\frac{1}{48}[31f''f^{iv}+22f'''^2]\xi^2+\ldots\right)$$

. . . .

Schreibt man also abkürzungsweise:

$$\left.\begin{aligned}
\varkappa &= \frac{\xi^3}{f}\left(\frac{1}{2!}f''+\frac{\xi}{3!}f'''+\frac{\xi^2}{4!}f^{iv}+\frac{\xi^3}{5!}f^{v}+\ldots\right)=\frac{\xi}{f}[f(x+\xi)-f-\xi f']\\
\lambda &= \frac{\xi^2}{f}\left(f''+\frac{1}{2}f'''\xi+\frac{\xi^2}{3!}f^{iv}+\frac{\xi^3}{4!}f^{v}+\ldots\right)=\frac{\xi}{f}[f'(x+\xi)-f']\\
\mu &= \frac{\xi^4}{f^2}\left(\frac{5}{4}f''^2+\frac{4}{3}f''f'''\xi+\frac{1}{48}[23f''f^{iv}+16f'''^2]\xi^2+\frac{1}{240}[31f''f^{v}+55f'''f^{iv}]\xi^3+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{1440}[40f''f^{vi}+86f'''f^{v}+55f^{iv\,2}]\xi^4+\frac{1}{5040}[25f''f^{vii}+63f'''f^{vi}+98f^{iv}f^{v}]\xi^5+\ldots\right)\\
\nu &= \frac{\xi^4}{f^2}\left(\frac{7}{4}f''^2+\frac{11}{6}f''f'''\xi+\frac{1}{48}[31f''f^{iv}+22f'''^2]\xi^2+\ldots\right)=\frac{1}{2}\lambda^2+\mu\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\ \text{VII}$$

so ist

$$\left.\begin{aligned}
L_1 &= \varkappa+\varkappa\lambda+\varkappa\mu+\ldots\\
L_2 &= \frac{1}{2!}\varkappa^2+\varkappa^2\lambda+\varkappa^2\nu+\ldots\\
L_3 &= \frac{1}{3!}\varkappa^3+\frac{1}{2!}\varkappa^3\lambda+\ldots\\
L_4 &= \frac{1}{4!}\varkappa^4+\ldots
\end{aligned}\right\}\ \text{VIII}$$

Damit kann man nun wieder die Gleichung 12*) wesentlich zusammenziehen. Ordnet man sie nämlich wie folgt:

$$\varphi(z)=\left[\varphi(x+\xi)+\varkappa\varphi'(x+\xi)+\frac{1}{2!}\varkappa^2\varphi''(x+\xi)+\frac{1}{3!}\varkappa^3\varphi'''(x+\xi)+\frac{1}{4!}\varkappa^4\varphi^{iv}(x+\xi)+\ldots\right]+$$
$$+\varkappa\lambda\left[\varphi'(x+\xi)+\varkappa\varphi''(x+\xi)+\frac{1}{2!}\varkappa^2\varphi'''(x+\xi)+\ldots\right]+$$
$$+\varkappa\mu\,\varphi'(x+\xi)+\varkappa^2\nu\,\varphi''(x+\xi)+\ldots$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

so erkennt man auf den ersten Blick, dass sie nichts anderes vorstellt, als:

$$\varphi(z)=\varphi(x+\xi+\varkappa)+\varkappa\lambda\varphi'(x+\xi+\varkappa)+\varphi'(x+\xi)[\varkappa\mu+\ldots]+\varphi''(x+\xi)[\varkappa^2\nu+\ldots]+\ldots \tag{13}$$

worin man auch $\xi+\varkappa$ ersetzen kann durch seinen Werth:

$$\frac{\xi}{f}[f(x+\xi)-\xi f'].$$

Die Deutung dieser Gleichung ist nicht schwer. Da für $\alpha = 0$, $z = x$ wird, kann man im Allgemeinen

$$\varphi(z) = \varphi[x+\psi(\alpha, x)]$$

setzen. Wir lernen daher durch unsere Entwickelung eine Form kennen, auf welche die ersten Glieder der Function ψ gebracht werden können, und zwar:

$\psi(\alpha, x) = \xi$, genau bis auf einschliesslich Glieder zweiter Ordnung

$\psi(\alpha, x) = \xi+k = \frac{\xi}{f}\{f(x+\xi)-\xi f'\}$, " " " " " vierter " .

§. 5.

Wie bereits im §. 3 angedeutet wurde, ist die Gleichung 10*) dort noch bei weitem nicht in der einfachsten Form angesetzt, deren sie fähig ist. Sie wird schon dadurch noch viel durchsichtiger als sie ohnehin ist, wenn man sie auf die nachstehende Art gruppenweise nach den Functionen $\varphi', \varphi'', \varphi''' \dots$ ordnet:

$$
\begin{aligned}
\varphi(z) = \Big(\varphi + \frac{1}{1!}p\varphi' + \frac{1}{2!}p^2\varphi'' + \frac{1}{3!}p^3\varphi''' + \frac{1}{4!}p^4\varphi^{iv} + \dots\Big) + \\
+ \varphi'\Big[\frac{1}{3!}f'''Q_4 + \frac{1}{4!}f^{iv}Q_5 + \frac{1}{5!}f^{v}Q_6 + \frac{1}{6!}f^{vi}Q_7 + \dots\Big] + \\
+ \varphi''\Big[\frac{1}{3!}f'''Q_5 + \frac{1}{4!}f^{iv}Q_6 + \frac{1}{5!}f^{v}Q_7 + \frac{1}{6!}f^{vi}Q_8 + \dots\Big] + \\
+ \frac{\varphi'''}{2!}\Big[\frac{1}{3!}f'''Q_6 + \frac{1}{4!}f^{iv}Q_7 + \frac{1}{5!}f^{v}Q_8 + \frac{1}{6!}f^{vi}Q_9 + \dots\Big] + \\
+ \frac{\varphi^{iv}}{3!}\Big[\frac{1}{3!}f'''Q_7 + \frac{1}{4!}f^{iv}Q_8 + \dots\Big] + \frac{\varphi^{v}}{4!}\Big[\frac{1}{3!}f'''Q_8 + \frac{1}{4!}f^{iv}Q_9 + \dots\Big] + \\
+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ \frac{1}{12}\varphi'\Big[\frac{1}{3!}f'''^2R_7 + \frac{2}{4!}f'''f^{iv}R_8 + \frac{1}{4.5!}(8f'''f^{v} + 5f^{iv\,2})R_9 + \frac{1}{6!}(2f'''f^{vi} + 3f^{iv}f^{v})R_{10} + \\
+ \frac{1}{10.7!}(20f'''f^{vii} + 35f^{iv}f^{vi} + 21f^{v\,2})R_{11} + \frac{2}{5.8!}(5f'''f^{viii} + 10f^{iv}f^{vii} + 14f^{v}f^{vi})R_{12} + \dots\Big] + \\
+ \frac{1}{12}\varphi''\Big[\frac{1}{3!}f'''^2R_8 + \frac{2}{4!}f'''f^{iv}R_9 + \frac{1}{4.5!}(8f'''f^{v} + 5f^{iv\,2})R_{10} + \frac{1}{6!}(2f'''f^{vi} + 3f^{iv}f^{v})R_{11} + \\
+ \frac{1}{10.7!}(20f'''f^{vii} + 35f^{iv}f^{vi} + 21f^{v\,2})R_{12} + \dots\Big] + \\
+ \frac{1}{12}\cdot\frac{\varphi'''}{2!}\Big[\frac{1}{3!}f'''^2R_9 + \frac{2}{4!}f'''f^{iv}R_{10} + \frac{1}{4.5!}(8f'''f^{v} + 5f^{iv\,2})R_{11} + \frac{1}{6!}(2f'''f^{vi} + 3f^{iv}f^{v})R_{12} + \dots\Big] + \\
+ \frac{1}{12}\cdot\frac{\varphi^{iv}}{3!}\Big[\frac{1}{3!}f'''^2R_{10} + \frac{2}{4!}f'''f^{iv}R_{11} + \frac{1}{4.5!}(8f'''f^{v} + 5f^{iv\,2})R_{12} + \dots\Big] + \\
+ \frac{1}{12}\cdot\frac{\varphi^{v}}{4!}\Big[\frac{1}{3!}f'''^2R_{11} + \frac{2}{4!}f'''f^{iv}R_{12} + \dots\Big] + \frac{1}{12}\cdot\frac{\varphi^{vi}}{5!}\Big[\frac{1}{3!}f'''^2R_{12} + \dots\Big] + \\
+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ \frac{1}{216}\varphi'\Big[\frac{1}{3!}f'''^3S_{10} + \frac{3}{4!}f'''^2f^{iv}S_{11} + \frac{3}{4.5!}(4f'''^2f^{v} + 5f'''f^{iv\,2})S_{12} + \dots\Big] + \\
+ \frac{1}{216}\varphi''\Big[\frac{1}{3!}f'''^3S_{11} + \frac{3}{4!}f'''^2f^{iv}S_{12} + \dots\Big] + \frac{1}{216}\cdot\frac{\varphi'''}{2!}\Big[\frac{1}{3!}f'''^3S_{12} + \dots\Big] + \\
+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Die erste Horizontalreihe lautet nun einfacher geschrieben: $\varphi(x+p)$; der ganze folgende mit den Functionen Q multiplicirte Gliedercomplex geht, wenn man nach System IV die Q durch ihre Werthe in p ausdrückt, über in:

$$\frac{p^3\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\left(\frac{1}{3!}f'''+\frac{1}{4!}f^{iv}p+\frac{1}{5!}f^{v}p^2+\ldots\right)\left(\varphi'+\frac{1}{1!}\varphi''p+\frac{1}{2!}\varphi'''p^2+\frac{1}{3!}\varphi^{iv}p^3+\ldots\right)=$$

$$=\frac{p^3\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\left(\frac{1}{3!}f'''+\frac{1}{4!}pf^{iv}+\frac{1}{5!}p^2f^{v}+\ldots\right)\varphi'(x+p)$$

Zwischen den $R, S, \ldots$ finden abermals nach System IV die Relationen statt:

$$R_{n+m}=p^m R_n+\frac{m\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}\cdot p^{n+m-2}$$

$$S_{n+m}=p^m S_n+\frac{2m\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}p^{m-1}R_n+\frac{m\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}p^{n-1}R_m.$$

Damit kann man der mit den R multiplicirten Gliedergruppe bei entsprechender Zusammenfassung der einzelnen Parthien die Form ertheilen:

$$\frac{1}{12}\Big[\frac{1}{3!}f'''^2R_7+\frac{2}{4!}f'''f^{iv}R_8+\frac{1}{4.5!}(8f'''f^{v}+5f^{iv\,2})R_9+\frac{1}{6!}(2f'''f^{vi}+3f^{iv}f^{v})R_{10}+$$

$$+\frac{1}{10.7!}(20f'''f^{vii}+35f^{iv}f^{vi}+21f^{v\,2})R_{11}+\frac{2}{5.8!}(5f'''f^{viii}+10f^{iv}f^{vii}+14f^{v}f^{vi})R_{12}+\ldots\Big]\varphi'(x+p)+$$

$$+\frac{1}{12}\frac{\zeta^2p^6}{1-2ff''\zeta^2}\Big[\frac{1}{3!}f'''^2+\frac{2}{4!}f'''f^{iv}p+\frac{1}{4.5!}(8f'''f^{v}+5f^{iv\,2})p^2+\frac{1}{6!}(2f'''f^{vi}+3f^{iv}f^{v})p^3+$$

$$+\frac{1}{10.7!}(20f'''f^{vii}+35f^{iv}f^{vi}+21f^{v\,2})p^4+\ldots\Big]\varphi''(x+p).$$

Endlich kann man die letzte Gliedergruppe zunächst folgendermassen umbilden:

$$\frac{1}{216}\Big[\frac{1}{3!}f'''^3S_{10}+\frac{3}{4!}f'''^2f^{iv}S_{11}+\frac{3}{4.5!}(4f'''^2f^{v}+5f'''f^{iv\,2})S_{12}+\ldots\Big]\varphi'(x+p)+$$

$$+\frac{1}{216}\frac{2\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\Big[\frac{1}{3!}f'''^3R_{10}+\frac{3}{4!}f'''^2f^{iv}R_{11}+\frac{3}{4.5!}(4f'''^2f^{v}+5f'''f^{iv\,2})R_{12}+\ldots\Big]\varphi''(x+p)+$$

$$+\frac{1}{216}\cdot\frac{p^9\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\Big[\frac{1}{3!}f'''^3+\frac{3}{4!}f'''^2f^{iv}p+\frac{3}{4.5!}(4f'''^2f^{v}+5f'''f^{iv\,2})p^2+\ldots\Big]\times$$

$$\cdot\Big[\varphi''R_1+\frac{1}{1!}\varphi'''R_2+\frac{1}{2!}\varphi^{iv}R_3+\ldots\Big].$$

Drückt man jetzt in der letzten Horizontalreihe $R_1, R_2, R_3\ldots$ nach der obigen Formel noch durchwegs durch R_1 aus, welches gegeben ist, durch die Gleichung:

$$R_1=\frac{1-\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}{(1-2ff''\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\zeta^2}{p}=\frac{f''\zeta^3}{(1-2ff''\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

so gewinnt man die Formel:

$$R_1\varphi''+\frac{1}{1!}R_2\varphi'''+\frac{1}{2!}R_3\varphi^{iv}+\ldots=\frac{f''\zeta^3}{(1-2ff''\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\varphi''(x+p)+\frac{\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}\cdot\varphi'''(x+p).$$

Auf Grund dieser Umstellungen führen wir die Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned}
K_1 = {} & \frac{p^3\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\left[\frac{1}{3!}f''' + \frac{1}{4!}f^{\text{IV}}p + \frac{1}{5!}f^{\text{V}}p^2 + \frac{1}{6!}f^{\text{VI}}p^3 + \ldots\right] + \\
& + \frac{1}{12}\Big[\frac{1}{3!}f'''^2R_7 + \frac{2}{4!}f'''f^{\text{IV}}R_8 + \frac{1}{4.5!}(8f'''f^{\text{V}}+5f^{\text{IV}2})R_9 + \frac{1}{6!}(2f'''f^{\text{VI}}+3f^{\text{IV}}f^{\text{V}})R_{10} + \\
& \qquad + \frac{1}{10.7!}(20f'''f^{\text{VII}}+35f^{\text{IV}}f^{\text{VI}}+21f^{\text{V}2})R_{11} + \frac{2}{5.8!}(5f'''f^{\text{VIII}}+10f^{\text{IV}}f^{\text{VII}}+14f^{\text{V}}f^{\text{VI}})R_{12} + \ldots\Big] + \\
& + \frac{1}{216}\left[\frac{1}{3!}f'''^3S_{10} + \frac{3}{4!}f'''^2f^{\text{IV}}S_{11} + \frac{3}{4.5!}(4f'''^2f^{\text{V}}+5f'''f^{\text{IV}2})S_{12} + \ldots\right] + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
K_2 = {} & \frac{1}{12}\cdot\frac{p^6\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}\Big[\frac{1}{3!}f'''^2 + \frac{2}{4!}f'''f^{\text{IV}}p + \frac{1}{4.5!}(8f'''f^{\text{V}}+5f^{\text{IV}2})p^2 + \frac{1}{6!}(2f'''f^{\text{VI}}+3f^{\text{IV}}f^{\text{V}})p^3 + \\
& \qquad + \frac{1}{10.7!}(20f'''f^{\text{VII}}+35f^{\text{IV}}f^{\text{VI}}+21f^{\text{V}2})p^4 + \ldots\Big] + \\
& + \frac{1}{108}\cdot\frac{\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\left[\frac{1}{3!}f'''^3R_{10} + \frac{3}{4!}f'''^2f^{\text{IV}}R_{11} + \frac{3}{4.5!}(4f'''^2f^{\text{V}}+5f'''f^{\text{IV}2})R_{12} + \ldots\right] + \\
& + \frac{1}{216}\,\frac{f''p^9\zeta^4}{(1-2ff''\zeta^2)^2}\left[\frac{1}{3!}f'''^3 + \frac{3}{4!}f'''^2f^{\text{IV}}p + \frac{3}{4.5!}(4f'''^2f^{\text{V}}+5f'''f^{\text{IV}2})p^2 + \ldots\right] + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
K_3 = {} & \frac{1}{216}\cdot\frac{p^9\zeta^3}{(1-2ff''\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{1}{3!}f'''^3 + \frac{3}{4!}f'''^2f^{\text{IV}}p + \ldots\right] + \ldots
\end{aligned}\right\}\ \text{IX}$$

Dies vorausgesetzt, haben wir:

$$\varphi(z) = \varphi(x+p) + K_1\varphi'(x+p) + K_2\varphi''(x+p) + K_3\varphi'''(x+p) + \ldots \tag{14}$$

Es erübrigt uns jetzt noch die Grössen $K_1, K_2, K_3\ldots$ nach steigenden Potenzen von p zu entwickeln, um sie in einer, zu ihrer Berechnung geeigneteren Form zu erhalten. Dazu dient uns das schon einmal (§. 3) zu demselben Zwecke verwendete Gleichungssystem V, mit Hilfe dessen sich $R_n, S_n\ldots$ leicht als Functionen von p darstellen lassen. Wir finden so durch eine leichte Rechnung:

$$\left.\begin{aligned}
R_n &= \frac{p^{n-3}\zeta^3}{(1-2ff''\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\left[(n-1)f - \frac{n-3}{2}f''p^2\right] \\
S_n &= \frac{p^{n-5}\zeta^5}{(1-2ff''\zeta^2)^{\frac{5}{2}}}\left[(n-1)(n-2)f^2 - (n-1)(n-5)ff''p^2 + \frac{1}{4}(n-4)(n-5)f''^2p^4\right]
\end{aligned}\right\}\ \text{IV}^{**}$$

Durch Einsetzen dieser Werthe erzielt man die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
K_1 = {} & \frac{p^3\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\left[\frac{1}{3!}f''' + \frac{1}{4!}f^{\text{IV}}p + \frac{1}{5!}f^{\text{V}}p^2 + \frac{1}{6!}f^{\text{VI}}p^3 + \ldots\right] + \\
& + \frac{1}{12}\cdot\frac{p^4\zeta^3}{(\sqrt{1-2ff''\zeta^2})^3}\Big[ff'''^2 + \frac{7}{12}ff'''f^{\text{IV}}p + \frac{1}{60}(8ff'''f^{\text{V}}+5ff^{\text{IV}2}-20f''f'''^2)p^2 + \\
& \qquad + \frac{1}{240}(6ff'''f^{\text{VI}}+9ff^{\text{IV}}f^{\text{V}}-50f''f'''f^{\text{IV}})p^3 + \\
& \qquad + \frac{1}{2.7!}(40ff'''f^{\text{VII}}+70ff^{\text{IV}}f^{\text{VI}}+42ff^{\text{V}2}-504f''f'''f^{\text{V}}-315f''f^{\text{IV}2})p^4 + \\
& \qquad + \frac{1}{20.7!}(55ff'''f^{\text{VIII}}+110ff^{\text{IV}}f^{\text{VII}}+154ff^{\text{V}}f^{\text{VI}}-980f''f'''f^{\text{VI}}-1470f''f^{\text{IV}}f^{\text{V}})p^5 + \ldots\Big] + \\
& + \frac{1}{18}\cdot\frac{p^5\zeta^5}{(\sqrt{1-2ff''\zeta^2})^5}\left[f^2f'''^3 + \frac{15}{16}f^2f'''^2f^{\text{IV}}p + \frac{1}{192}(44f^2f'''^2f^{\text{V}}+55f^2f'''f^{\text{IV}2}-120ff''f'''^3)p^2 + \ldots\right] + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\ \text{IX}^{*}$$

$$\left.\begin{aligned}
K_2 = \frac{1}{72}\cdot\frac{p^6\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}\Big[f'''^2 &+ \frac{1}{2}f'''f^{iv}p + \frac{1}{80}(8f'''f^{v}+5f^{iv\,2})p^2 + \frac{1}{120}(2f'''f^{vi}+3f^{iv}f^{v})p^3 + \\
&+ \frac{1}{8400}(20f'''f^{vii}+35f^{iv}f^{vi}+21f^{v\,2})p^4 + \dots\Big] + \\
+ \frac{1}{72}\cdot\frac{p^7\zeta^4}{(1-2ff''\zeta^2)^2}&\Big[ff'''^3+\frac{5}{6}ff'''^2f^{iv}p+\frac{1}{240}(44ff'''^2f^{v}+55ff'''f^{iv\,2}-\frac{280}{3}f''f'''^3)p^2+\dots\Big] + \\
+ \dots\dots\dots\dots & \\
K_3 = \frac{1}{1296}\cdot\frac{p^9\zeta^3}{(1-2ff''\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}&\Big[f'''^3+\frac{3}{4}f'''^2f^{iv}p+\frac{3}{80}(4f'''^2f^{v}+5f'''f^{iv\,2})p^2+\dots\Big]+\dots
\end{aligned}\right\}\quad \text{IX*}$$

Die Gleichung 14) hat wieder genau die Form der Gleichung 12*); es lohnt sich daher wohl der Mühe, eine nähere Vergleichung zwischen beiden anzustellen. Zunächst ist es abermals sehr auffallend, um wie viel einfacher die Grössen $K_1, K_2, K_3 \dots$ zusammengesetzt sind, als die analogen $L_1, L_2, L_3 \dots$, und um wie viel kleiner die numerischen Coëfficienten der ersteren Gleichung sind als die der letzteren. Gehen wir aber weiter und fassen wir α wieder als eine Grösse erster Ordnung auf, so ist die Ordnung der Grössen $L_1, L_2, L_3 \dots$ der Reihe nach: $3, 6, 9, \dots$, die der Grössen $K_1, K_2, K_3, \dots$: $4, 8, 12, \dots$. Es ist also bereits K_1 um eine Ordnung kleiner als L_1, und es steigt überdies jedes folgende K gleich um vier Ordnungen, während die L nur um je drei Ordnungen ansteigen. Die Convergenz der jetzigen Entwickelung ist daher wesentlich stärker, als die der früheren. Allein noch mehr. Für ein und dasselbe L ist jede folgende Gliedergruppe nur um zwei Ordnungen kleiner als die früheren; bei den K hingegen, wenigstens in den Anfangsgruppen, um drei. Es convergirt daher die frühere Entwickelung nicht nur im Ganzen, sondern auch in ihren einzelnen Theilen erheblich langsamer. So braucht man beispielsweise, will man die Entwickelung einer Function so weit führen als es hier geschehen ist, nämlich bis einschliesslich zur 12. Potenz von α, von L_1 fünf, von K_1 nur drei Gliedergruppen, von L_2 vier, von K_2 hingegen nur zwei u. s. w. Aus diesen Bemerkungen ersieht man sehr deutlich, welchen Gewinn die zweite Summirung gebracht hat.

Aus dem Umstande, dass zwischen den einzelnen Gliedergruppen der L einfache Relationen bestehen, dürfen wir der Analogie nach wohl schliessen, dass auch zwischen den K ähnliche Beziehungen stattfinden werden. Dies ist auch in der That der Fall. Denn es ist:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{36}\Big[f'''^2+\frac{1}{2}f'''f^{iv}p+\frac{1}{80}(8f'''f^{v}+5f^{iv\,2})p^2+\frac{1}{120}(2f'''f^{vi}+3f^{iv}f^{v})p^3+\frac{1}{8400}(20f'''f^{vii}+35f^{iv}f^{vi}+21f^{v\,2})p^4+\dots\Big]=\\
&\qquad=\Big(\frac{1}{3!}f'''+\frac{1}{4!}f^{iv}p+\frac{1}{5!}f^{v}p^2+\frac{1}{6!}f^{vi}p^3+\dots\Big)^2
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{216}\Big[f'''^3+\frac{3}{4}f'''^2f^{iv}p+\frac{3}{80}(4f'''^2f^{v}+5f'''f^{iv\,2})p^2+\dots\Big]=\Big(\frac{1}{3!}f'''+\frac{1}{4!}f^{iv}p+\frac{1}{5!}f^{v}p^2+\dots\Big)^3$$

. . . .

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6}\Big[ff'''^2+\frac{7}{12}ff'''f^{iv}p+\frac{1}{60}(8ff'''f^{v}+5ff^{iv\,2}-20f''f'''^2)p^2+\frac{1}{240}(6ff'''f^{vi}+9ff^{iv}f^{v}-50f''f'''f^{iv})p^3+\dots\Big]=\\
&\qquad=\Big(\frac{1}{3!}f'''+\frac{1}{4!}f^{iv}p+\frac{1}{5!}f^{v}p^2+\frac{1}{6!}f^{vi}p^3+\dots\Big)\Big[ff'''+\frac{1}{3}ff^{iv}p+\frac{1}{12}(ff^{v}-4f''f''')p^2+\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{120}(2ff^{vi}-15f''f^{iv})p^3+\frac{1}{360}(ff^{vii}-12f''f^{v})p^4+\frac{1}{5040}(2ff^{viii}-35f''f^{vi})p^5+\dots\Big].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{36}\Big[ff'''^3+\frac{5}{6}ff'''^2f^{iv}p+\frac{1}{240}(44ff'''^2f^{v}+55f'''f^{iv\,2}-\frac{280}{3}f''f'''^3)p^2+\dots\Big]=\\
&\qquad=\Big(\frac{1}{3!}f'''+\frac{1}{4!}f^{iv}p+\frac{1}{5!}f^{v}p^2+\dots\Big)^2\Big[ff'''+\frac{1}{3}ff^{iv}p+\frac{1}{12}(ff^{v}-\frac{14}{3}f''f''')p^2+\dots\Big]
\end{aligned}$$

. . . .

Es sei also:

$$
\left.\begin{aligned}
k &= \frac{p^3\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\left[\frac{1}{3!}f''' + \frac{1}{4!}f^{IV}p + \frac{1}{5!}f^{V}p^2 + \ldots\right] = \frac{\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\left[f(x+p) - f - pf' - \frac{p^2}{2}f''\right] \\
l &= \frac{1}{2}\cdot\frac{p\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}\left[ff''' + \frac{1}{3}ff^{IV}p + \frac{1}{12}(ff^{V} - 4f''f''')p^2 + \frac{1}{120}(2ff^{VI} - 15f''f^{IV})p^3 + \ldots\right] = \\
&= \frac{p\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}\left[f\left(\frac{1}{2!}f''' + \frac{1}{3!}f^{IV}p + \frac{1}{4!}f^{V}p^2 + \frac{1}{5!}f^{VI}p^3 + \ldots\right) - f''p^2\left(\frac{1}{6}f''' + \frac{1}{16}f^{IV}p + \frac{1}{60}f^{V}p^2 + \frac{1}{288}f^{VI}p^3 + \ldots\right)\right] = \\
&= \frac{f}{p}\cdot\frac{\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}[f'(x+p) - f' - pf''] - \frac{1}{6}\frac{f''p^3\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}\cdot\left[f''' + \frac{3}{8}f^{IV}p + \frac{1}{10}f^{V}p^2 + \frac{1}{48}f^{VI}p^3 + \ldots\right]
\end{aligned}\right\} \quad \text{X}
$$

so hat man:

$$
\left.\begin{aligned}
K_1 &= k + kl + \ldots \\
K_2 &= \frac{1}{2}k^2 + k^2 l + \ldots \\
K_3 &= \frac{1}{3!}k^3 +
\end{aligned}\right\} \quad \text{XI}
$$

Dies in die Gleichung 14) eingeführt, ergibt:

$$
\begin{aligned}
\varphi(z) = \Big[\varphi(x+p) + k\varphi'(x+p) + \frac{k^2}{2}\varphi''(x+p) + \frac{k^3}{6}\varphi'''(x+p) + \ldots\Big] + \\
+ kl[\varphi'(x+p) + k\varphi''(x+p) + \ldots] + \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi(z) &= \varphi(x+p+k) + kl\varphi'(x+p+k) + \ldots \\
\varphi(z) &= \varphi(x+p+k+kl) + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad 14^*)
$$

$$
p + k = \frac{\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}[f(x+p) - pf' - p^2 f'']
$$

Diese Gleichung macht uns mit einer neuen Form der Anfangsglieder der am Ende von §. 4 $\psi(\alpha, x)$ genannten Function bekannt, nämlich:

$$
\psi(\alpha, x) = p + k + kl + \ldots
$$

Die Convergenz der Glieder ist aber hier eine viel raschere. Denn es ist:

$\varphi(z) = \varphi(x+p)$	bereits bis auf einschliesslich Glieder				dritter	Ordnung genau	
$= \varphi(x+p+k)$	„	„	„	„	sechster	„	„
$= \varphi(x+p+k+kl)$	„	„	„	„	neunter	„	„

15)

Behält man indess von l blos seinen ersten Theil

$$
l_1 = \frac{pf\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}\left[\frac{1}{2!}f''' + \frac{1}{3!}f^{IV}p + \frac{1}{4!}f^{V}p^2 + \ldots\right] = \frac{f}{p}\cdot\frac{\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}[f'(x+p) - f' - pf'']
$$

bei, so ist:

$$\varphi(x+p+k+kl_1) \text{ bis auf einschliesslich Glieder achter Ordnung genau.}$$

Da übrigens p, wie §. 3 nachgewiesen wurde, von $\eta = \dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\left(\frac{f''}{f}\right)\zeta^2}}$ blos um eine Grösse fünfter Ordnung abweicht, kann man ohne die Ordnung der Genauigkeit zu ändern in $\varphi(x+p)$, η statt p einsetzen. Allein auch wenn man $p+k$ abkürzt in:

$$
\frac{\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}[f(x+\eta) - \eta f' - \eta^2 f''] = \eta + k'
$$

begeht man nur einen Fehler siebenter Ordnung. Es ist desshalb auch noch mit diesen Vereinfachungen:

$$\left.\begin{array}{ll}\varphi(z) = \varphi(x+\eta) & \text{genau bis auf Grössen dritter Ordnung einschliesslich} \\ \varphi(z) = \varphi(x+\eta+k') & \text{,, ,, ,, ,, sechster ,, ,,}\end{array}\right\} \quad 15^*)$$

Der ganze Unterschied besteht darin, dass jetzt ein etwas geringerer Theil der Glieder höherer Ordnung mitgenommen wird, als wenn man die ursprüngliche Form beibehält.

Aus dieser Darstellung erhellt wohl ohne weiteres, dass die Gleichungen 15) und 15*) zur näherungsweisen Berechnung der Functionen ganz vorzügliche Hilfsmittel darbieten werden. Es fällt übrigens hierbei, ausser der raschen Abnahme der successiven Reihenglieder noch das bereits in der Einleitung hervorgehobene Moment in die Wagschale, dass man, wenn man beim Gliede n-Ordnung stehen bleibt, nebst allen Gliedern einschliesslich der n. Ordnung, auch noch einen Theil der Glieder höherer Ordnungen mitnimmt und in Folge dessen der übrig bleibende Rest derselben im Allgemeinen einen geringeren Betrag erreicht. Von welcher Tragweite dies in speciellen Fällen werden kann, wird uns gleich das folgende Beispiel zeigen.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass auch die Grössen $L_1, L_2, L_3, \ldots; K_1, K_2, K_3, \ldots$, welche in den Gleichungen 12*) und 14) und den aus ihnen abgeleiteten auftreten, von der Form φ der zu suchenden Function unabhängig sind. Es gilt daher auch für diese Gleichungen die bei Gleichung 9*) gemachte Bemerkung.

§. 6.

Um die Einfachheit der soeben gewonnenen Formeln an einem concreten Beispiele nachzuweisen, wählen wir die Keppler'sche Gleichung:

$$\mathrm{E} = M + \varepsilon \sin \mathrm{E} \qquad 16)$$

und werden nacheinander als Functionen der mittleren Anomalie darstellen:

$$A \ldots \mathrm{E}$$

$$B \ldots \frac{r}{a} = 1 - \cos \mathrm{E}$$

$$C \ldots \log \frac{r}{a} = \log(1 - \varepsilon \cos \mathrm{E})$$

$$D \ldots v = 2 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\mathrm{E}}{2}\right).$$

Wir haben hier zu setzen $f = \sin M$, also:

$$\begin{aligned} \sin M &= f = f^{IV} = f^{VIII} = \ldots \\ \cos M &= f' = f^{V} = f^{IX} = \ldots \\ -\sin M &= f'' = f^{VI} = f^{X} = \ldots \\ -\cos M &= f''' = f^{VII} = f^{XI} = \ldots \end{aligned}$$

Damit werden die F-Functionen (System I):

$$\left.\begin{aligned}
F_2^{(k)} &= -\sin M^{k+1}. \\
F_3^{(k)} &= -\sin M^{k} \cos M. \\
F_4^{(k)} &= +(3k+1) \sin M^{k+1}. \\
F_5^{(k)} &= +(10k+1) \sin M^{k} \cos M. \\
F_6^{(k)} &= -(15k^2+1) \sin M^{k+1} + 10k \sin M^{k-1} \cos^2 M. \\
F_7^{(k)} &= -(105k^2-49k+1) \sin M^{k} \cos M. \\
F_8^{(k)} &= +(105k^3-105k^2+63k+1) \sin M^{k+1} - 56k(5k-4) \sin M^{k-1} \cos^2 M.
\end{aligned}\right\} \mathrm{XII}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
F_9^k &= +(1260k^3-2142k^2+1128k+1)\sin M^k\cos M-280k(k-1)\sin M^{k-2}\cos^3 M.\\
F_{10}^k &= -(945k^4-2520k^3+3150k^2-1320k+1)\sin M^{k+1}+6k(1050k^2-2380k+1371)\sin M^{k-1}\cos^2 M.\\
F_{11}^k &= -(17325k^4-62370k^3+84150k^2-38093k+1)\sin M^k\cos M+1540k(k-1)(10k-17)\sin M^{k-2}\cos M^3.\\
F_{12}^k &= +(10395k^5-54975k^4+117810k^3-124410k^2+49203k+1)\sin M^{k+1}-44k(3150k^3-13860k^2+\\
&\quad +20739k-10006)\sin M^{k-1}\cos^2 M+15400k(k-1)(k-2)\sin M^{k-3}\cos M^4.\\
F_{13}^k &= +(270270k^5-1666665k^4+4169880k^3-4715139k^2+194573k+1)\sin M^k\cos M-\\
&\quad -572k(k-1)(1050k^2-4270k+4433)\sin M^{k-2}\cos M^3.
\end{aligned}
\right\}\ \text{XII}
$$

. . . .

Substituirt man diese Werthe in II oder rechnet man direct nach III, so findet man:

$$
\left.
\begin{aligned}
X_1 &= \sin M.\varphi'.\\
X_2 &= \sin M^2.\frac{1}{2}\varphi''.\\
X_3 &= \sin M^3\left[\frac{1}{6}\varphi'''-\frac{1}{2}\varphi'\right].\\
X_4 &= \sin M^4\left[\frac{1}{24}\varphi^{iv}-\frac{1}{2}\varphi''-\frac{1}{6}\operatorname{ctg} M\varphi'\right].\\
X_5 &= \sin M^5\left[\frac{1}{120}\varphi^{v}-\frac{1}{4}\varphi'''-\frac{1}{6}\operatorname{ctg} M\varphi''+\frac{13}{24}\varphi'\right].\\
X_6 &= \sin M^6\left[\frac{1}{720}\varphi^{vi}-\frac{1}{12}\varphi^{iv}-\frac{1}{12}\operatorname{ctg} M\varphi'''+\frac{2}{3}\varphi''+\frac{17}{40}\operatorname{ctg} M\varphi'\right].\\
X_7 &= \sin M^7\left[\frac{1}{5040}\varphi^{vii}-\frac{1}{48}\varphi^{v}-\frac{1}{36}\operatorname{ctg} M\varphi^{iv}+\frac{19}{48}\varphi'''+\frac{61}{120}\operatorname{ctg} M\varphi''-\frac{1}{720}(541-60\operatorname{ctg} M^2)\varphi'\right].\\
X_8 &= \sin M^8\left[\frac{1}{40320}\varphi^{viii}-\frac{1}{240}\varphi^{vi}-\frac{1}{144}\operatorname{ctg} M\varphi^{v}+\frac{11}{72}\varphi^{iv}+\frac{71}{240}\operatorname{ctg} M\varphi'''-\frac{1}{360}(368-35\operatorname{ctg} M^2)\varphi''\right.\\
&\quad\left.-\frac{1601}{1680}\operatorname{ctg} M\varphi'\right].\\
X_9 &= \sin M^9\left[\frac{1}{362880}\varphi^{ix}-\frac{1}{1440}\varphi^{vii}-\frac{1}{720}\operatorname{ctg} M\varphi^{vi}+\frac{25}{576}\varphi^{v}+\frac{9}{80}\operatorname{ctg} M\varphi^{iv}-\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{1440}(961-80\operatorname{ctg}^2 M)\varphi'''-\frac{6329}{5040}\operatorname{ctg} M\varphi''+\frac{1}{40320}(47545-16128\operatorname{ctg}^2 M)\varphi'\right].\\
X_{10} &= \sin M^{10}\left[\frac{1}{3628800}\varphi^{x}-\frac{1}{10080}\varphi^{viii}-\frac{1}{4320}\operatorname{ctg} M\varphi^{vii}+\frac{7}{720}\varphi^{vi}+\frac{91}{2880}\operatorname{ctg} M\varphi^{v}-\right.\\
&\quad-\frac{1}{2160}(608-45\operatorname{ctg}^2 M)\varphi^{iv}-\frac{1613}{2016}\operatorname{ctg} M\varphi'''+\frac{1}{5040}(8576-2583\operatorname{ctg}^2 M)\varphi''+\\
&\quad\left.+\frac{1}{362880}(755191\operatorname{ctg} M-20160\operatorname{ctg}^3 M)\varphi'\right].\\
X_{11} &= \sin M^{11}\left[\frac{1}{39916800}\varphi^{xi}-\frac{1}{80640}\varphi^{ix}-\frac{1}{30240}\operatorname{ctg} M\varphi^{viii}+\frac{31}{17280}\varphi^{vii}+\frac{101}{14400}\operatorname{ctg} M\varphi^{vi}-\right.\\
&\quad-\frac{1}{17280}(1501-100\operatorname{ctg}^2 M)\varphi^{v}-\frac{3337}{10080}\operatorname{ctg} M\varphi^{iv}+\frac{1}{80640}(95131-25760\operatorname{ctg}^2 M)\varphi'''+\\
&\quad\left.+\frac{1}{362880}(1057081\operatorname{ctg} M-25200\operatorname{ctg}^3 M)\varphi''-\frac{1}{3628800}(7231801-4954260\operatorname{ctg}^2 M)\varphi'\right].
\end{aligned}
\right\}\ \text{XIII}
$$

$$\left.\begin{aligned} X_{12} = \sin M^{12}\Big[&\frac{1}{479001600}\varphi^{XII}-\frac{1}{725760}\varphi^{X}-\frac{1}{241920}\operatorname{ctg} M\varphi^{IX}+\frac{17}{60480}\varphi^{VIII}+\frac{37}{28800}\operatorname{ctg} M\varphi^{VII}-\\ &-\frac{1}{43200}(908-55\operatorname{ctg}^2 M)\varphi^{VI}-\frac{12167}{120960}\operatorname{ctg} M\varphi^{V}+\frac{1}{30240}(15968-3927\operatorname{ctg}^2 M)\varphi^{IV}+\\ &+\frac{1}{725760}(1430287\operatorname{ctg} M-30800\operatorname{ctg}^3 M)\varphi'''-\frac{1}{1814400}(5424128-3373953\operatorname{ctg}^2 M)\varphi''-\\ &-\frac{1}{39916800}(180403983\operatorname{ctg} M-15754200\operatorname{ctg}^3 M)\varphi'\Big] \end{aligned}\right\} \quad \text{XIII}$$

. . . .

Der Ausdruck: $\frac{\alpha}{1-\alpha f'}$, nach dessen steigenden Potenzen in Gleichung 8) entwickelt wurde, lautet in unserem speciellen Falle: $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cos M}$, und da hier X_n mit dem Factor $\sin M^n$ behaftet ist, wird es sich empfehlen, zur Abkürzung einzuführen die, auch früher schon mit demselben Buchstaben bezeichnete Function:

$$\xi = \frac{\varepsilon \sin M}{1-\varepsilon\cos M} \qquad \text{XIV}$$

Die Gleichung 8) gestaltet sich dann folgendermassen:

$$\varphi(z) = \varphi + \left(\frac{X_1}{\sin M}\right)\xi + \left(\frac{X_2}{\sin M^2}\right)\xi^2 + \left(\frac{X_3}{\sin M^3}\right)\xi^3 + \ldots\left(\frac{X_n}{\sin M^n}\right)\xi^n + \ldots \qquad 17)$$

Nach diesen Vorbereitungen lassen sich jetzt alle oben genannten Probleme mit grosser Leichtigkeit lösen. Sei nämlich zunächst:

$$\boldsymbol{A} \; . \; . \; . \; \varphi(\mathrm{E}) = \mathrm{E}.$$

In diesem Falle haben wir zu setzen:

$$\varphi = M; \quad \varphi' = 1; \quad \varphi'' = \varphi''' = \varphi^{IV} = \ldots = 0$$

und erhalten dann aus dem Gleichungssysteme XIII, wenn wir unter Einem nach Potenzen von $\operatorname{ctg} M$ ordnen, unmittelbar:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{E} = M + \Big(&\xi-\frac{1}{2}\xi^3+\frac{13}{24}\xi^5-\frac{541}{720}\xi^7+\frac{9509}{8064}\xi^9-\frac{7231801}{3628800}\xi^{11}+\frac{1695106117}{479001600}\xi^{13}-\ldots\Big)-\\ &-\operatorname{ctg} M\left(\frac{1}{6}\xi^4-\frac{17}{40}\xi^6+\frac{1601}{1680}\xi^8-\frac{755191}{362880}\xi^{10}+\frac{180403983}{39916800}\xi^{12}-\frac{20379134161}{2075673600}\xi^{14}+\ldots\right)+\\ &+\operatorname{ctg} M^2\left(\frac{1}{12}\xi^7-\frac{2}{5}\xi^9+\frac{82571}{60480}\xi^{11}-\frac{1843111}{453600}\xi^{13}+\ldots\right)-\\ &-\operatorname{ctg} M^3\left(\frac{1}{18}\xi^{10}-\frac{341}{864}\xi^{12}+\frac{1642849}{907200}\xi^{14}-\ldots\right)+\\ &+\operatorname{ctg} M^4\left(\frac{55}{1296}\xi^{13}-\ldots\right)-\ldots \end{aligned}\right\} \quad 18)$$

Schreibt man nun abkürzungsweise:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{E}_0 &= \xi-\frac{1}{2}\xi^3+\frac{13}{24}\xi^5-\frac{541}{720}\xi^7+\frac{9509}{8064}\xi^9-\frac{7231801}{3628800}\xi^{11}+\frac{1695106117}{479001600}\xi^{13}-\ldots\\ A_1 &= \frac{1}{6}\xi^4-\frac{17}{40}\xi^6+\frac{1601}{1680}\xi^8-\frac{755191}{362880}\xi^{10}+\frac{180403983}{39916800}\xi^{12}-\frac{20379134161}{2075673600}\xi^{14}+\ldots\\ A_2 &= \frac{1}{12}\xi^7-\frac{2}{5}\xi^9+\frac{82571}{60480}\xi^{11}-\frac{1843111}{453600}\xi^{13}+\ldots\\ A_3 &= \frac{1}{18}\xi^{10}-\frac{341}{864}\xi^{12}+\frac{1642849}{907200}\xi^{14}-\ldots\\ A_4 &= \frac{55}{1296}\xi^{13}-\ldots \end{aligned}\right\} \quad \text{XV}$$

. . . .

so stellt sich E in der Form dar:

$$\mathrm{E} = M + \mathrm{E}_0 - A_1 \operatorname{ctg} M + A_2 \operatorname{ctg} M^2 - A_3 \operatorname{ctg} M^3 + A_4 \operatorname{ctg} M^4 - \ldots \qquad 18^*)$$

Die Einfachheit dieser Reihe, welche hier bis einschliesslich der 14. Potenz der Excentricität, also weiter als je bisher entwickelt wurde, wird wohl jeden überraschen, der sich mit diesem Probleme befasst hat, und sie ist, wie ich glaube, ein sprechender Beweis für die Eingangs gemachte Behauptung, dass das successive Mitnehmen von Theilen der Glieder höherer Ordnung den Bau des übrig bleibenden Restes derselben wesentlich vereinfacht.

Ein weiterer, sehr beachtenswerther Vortheil der Gleichung 18) besteht noch darin, dass die Ausdrücke $\mathrm{E}_0, A_1, A_2, A_3 \ldots$ Functionen sind, die an Grösse sehr rasch abnehmen, da jede spätere gleich um drei Ordnungen in Bezug auf ξ, oder was auf dasselbe hinauskommt, in Bezug auf die Excentricität steigt. Es erreicht daher auch in der That die Summe aller auf das erste (E_0) folgenden Glieder selbst für die stärksten Excentricitäten, (etwa 0·35 bei Eva, Istria und Andromache), welche unter den Planetenbahnen unseres Sonnensystemes vorkommen, im Maximum kaum 6''. Man wird daher durch Anlegen einer Tafel mit einfachem Eingange, nämlich dem Argumente $\log \xi$ für das Hauptglied (E_0) und einer kleinen mit dem doppelten Eingange $\log \xi$ und M, oder noch bequemer ε und M die Berechnung der excentrischen Anomalie auf ein Minimum von Arbeit reduciren können. Die Berechnung einer solchen Tafel ist bereits in Angriff genommen, und ich hoffe, sie in einem Nachtrage zu dieser Abhandlung binnen kurzem veröffentlichen zu können. Sie soll bis $\log \xi = 9 \cdot 64$ ausgedehnt werden, um für alle Planeten unseres Systemes auszureichen. Denn da das Maximum ξ_m von ξ für $\cos M = \varepsilon$ eintritt und dieses Maximum:

$$\xi_m = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \operatorname{tg} \varphi$$

beträgt, wenn man unter φ den Excentricitätswinkel versteht, kann sie bis zu einer Excentricität $\varepsilon = 0 \cdot 4$ verwendet werden, — eine Excentricität, welche die grössten bisher bekannten noch um ein Geringes übertrifft.

Die oben (XV) für $\mathrm{E}_0, A_1, \ldots$ gegebenen Reihen convergiren für grössere ξ sehr langsam; man kann aber diesen Uebelstand durch denselben Kunstgriff beseitigen, den ich schon bei einer anderen ähnlichen Gelegenheit[1] mit Vortheil angewendet habe, nämlich dadurch, dass man sie nicht nach steigenden Potenzen von ξ, sondern nach solchen von:

$$\eta = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{\varepsilon \sin M}{\sqrt{1-2\varepsilon \cos M + \varepsilon^2}}; \quad \xi = \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \qquad \mathrm{XVI}$$

entwickelt; sie lauten dann:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{E}_0 &= \eta + \frac{1}{6}\eta^5 - \frac{1}{45}\eta^7 + \frac{83}{840}\eta^9 - \frac{947}{28350}\eta^{11} + \frac{613849}{7484400}\eta^{13} - \ldots \\
A_1 &= \frac{1}{6}\eta^4\left(1 - \frac{11}{20}\eta^2 + \frac{299}{280}\eta^4 - \frac{55351}{60480}\eta^6 + \frac{9064133}{6652800}\eta^8 - \frac{96774893}{69189120}\eta^{10} + \ldots\right) \\
A_2 &= \frac{1}{12}\eta^7\left(1 - \frac{13}{10}\eta^2 + \frac{13397}{5040}\eta^4 - \frac{549559}{151200}\eta^6 + \ldots\right) \\
A_3 &= \frac{1}{18}\eta^{10}\left(1 - \frac{101}{48}\eta^2 + \frac{250549}{50400}\eta^4 - \ldots\right) \\
A_4 &= \frac{55}{1296}\eta^{13}(1 - \ldots)
\end{aligned}\right\} \mathrm{XV}^*$$

---

[1] Über die Berechnung der Differentialquotienten der wahren Anomalie und des Radius vector nach der Excentricität in stark excentrischen Bahnen. Sitzb. d. kais. Akad. d. Wiss. 83. Bd., II. Abth., p. 470.

Setzt man ferner:

$$A_1 = g \cos G \qquad\qquad \text{XVII}$$
$$A_2 = g \sin G$$

so erhält Gleichung 18) die Gestalt:

$$\mathrm{E} = M + \mathrm{E}_0 - g\,\frac{\sin(M-G)}{\sin M}\,\mathrm{ctg}\,M - A_3\,\mathrm{ctg}\,M^3 + \ldots \qquad 18^{**})$$

in welcher sie bequemer zu berechnen ist.

Die Weiterentwickelung der Formel XVII liefert zunächst:

$$g = \frac{1}{6}\eta^4\left(1 - \frac{11}{20}\eta^2 + \frac{299}{280}\eta^4 - \frac{47791}{60480}\eta^6 + \frac{7359353}{6652800}\eta^8 - \frac{55167041}{69189120}\eta^{10} + \ldots\right)$$
$$\mathrm{tg}\,G = \frac{1}{2}\eta^3\left(1 - \frac{3}{4}\eta^2 + \frac{53}{45}\eta^4 - \frac{25219}{20160}\eta^6 + \ldots\right)$$

und hierauf unter m den Modul des Brigg'schen Logarithmensystemes verstanden:

$$\left.\begin{aligned} \log g &= \log\frac{1}{6}\eta^4 - m\left(\frac{11}{20}\eta^2 - \frac{5133}{5600}\eta^4 + \frac{195299}{756000}\eta^6 - \frac{1246784089}{3104640000}\eta^8 + \ldots\right) \\ G &= \frac{1}{2}\eta^3\left(1 - \frac{3}{4}\eta^2 + \frac{53}{45}\eta^4 - \frac{26899}{20160}\eta^6 + \ldots\right) \end{aligned}\right\} \qquad \text{XVII*}$$

Das letzte Glied A_3 ctg M^3 in Gleichung 18**) beträgt selbst für $\varepsilon = 0\cdot4$ im Maximum nur wenige Bruchtheile einer Secunde es wurde daher eine weitere Transformation desselben nicht der Mühe werth gehalten.

Die Berechnung von η gestaltet sich sehr einfach, wenn man den Hilfswinkel y mittelst der Relation einführt:

$$\xi = \mathrm{tg}\,y.$$

Es wird dann:

$$\eta = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} = \sin y.$$

Es wurde eben bemerkt, dass selbst für $\varepsilon = 0\cdot4$ das Glied A_3 ctg M^3 nur noch wenige Bruchtheile einer Bogensecunde erreicht. Bedenkt man nun, dass bei der gewöhnlichen Entwickelung der excentrischen Anomalie nach vielfachen des Sinus der mittleren Anomalie bereits bei $\varepsilon = 0\cdot25$ noch das Glied mit sin $12M$ mitgenommen werden muss, um eine ähnliche Genauigkeit zu erlangen, so sieht man daraus wohl aufs Deutlichste, wie vortheilhaft das successive Mitnehmen eines Theiles der Glieder höherer Ordnung auf die Convergenz der entstehenden Reihen wirkt. Ja wenn man einfach schreibt:

$$\mathrm{E} = M + \eta = M + \sin y \quad \left(\mathrm{tg}\,y = \xi = \frac{\varepsilon\sin M}{1-\varepsilon\cos M}\right)$$

so ist der Maximalfehler, den man begehen kann:

für $\varepsilon = 0\cdot25 : 0'\,51''$ bei $M : \pm 46°$
$\varepsilon = 0\cdot30 : 1\ \ 51$ „ $M : \pm 44°$
$\varepsilon = 0\cdot35 : 3\ \ 35$ „ $M : \pm 41°$
$\varepsilon = 0\cdot40 : 6\ \ 25$ „ $M : \pm 38°$.

Suchen wir jetzt weiter:

$$B: \frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \cos \mathrm{E}.$$

Hier ist:

$$\begin{aligned} \varphi = 1 - \varepsilon \cos M \qquad & + \varepsilon \sin M = \varphi' = \varphi^{V} = \varphi^{IX} = \ldots \\ & + \varepsilon \cos M = \varphi'' = \varphi^{VI} = \varphi^{X} = \ldots \\ & - \varepsilon \sin M = \varphi''' = \varphi^{VII} = \varphi^{XI} = \ldots \\ & - \varepsilon \cos M = \varphi^{IV} = \varphi^{VIII} = \varphi^{XII} = \ldots \end{aligned}$$

Die Gleichungen XIII liefern daher sofort:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= + \varepsilon \sin^2 M \\ X_2 &= + \frac{1}{2} \varepsilon \sin^2 M \cos M \\ X_3 &= - \frac{2}{3} \varepsilon \sin M^4 \\ X_4 &= - \frac{17}{24} \varepsilon \sin M^4 \cos M \\ X_5 &= + \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{6} \operatorname{ctg}^2 M\right) \varepsilon \sin M^6 \\ X_6 &= + \frac{907}{720} \varepsilon \sin M^6 \cos M \\ X_7 &= - \left(\frac{368}{315} - \frac{223}{360} \operatorname{ctg}^2 M\right) \varepsilon \sin M^8 \\ X_8 &= - \left(\frac{98177}{40320} - \frac{7}{72} \operatorname{ctg}^2 M\right) \varepsilon \sin M^8 \cos M \\ X_9 &= + \left(\frac{1072}{567} - \frac{9199}{5040} \operatorname{ctg}^2 M\right) \varepsilon \sin M^{10} \\ X_{10} &= + \left(\frac{17802611}{3628800} - \frac{53}{90} \operatorname{ctg}^2 M\right) \varepsilon \sin M^{10} \cos M \\ X_{11} &= - \left(\frac{169504}{51975} - \frac{8966081}{1814400} \operatorname{ctg}^2 M + \frac{5}{72} \operatorname{ctg}^4 M\right) \varepsilon \sin M^{12} \\ X_{12} &= - \left(\frac{4852742017}{479001600} - \frac{4404983}{1814400} \operatorname{ctg}^2 M\right) \varepsilon \sin M^{12} \cos M \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \text{XVIII}$$

woraus, wenn man bedenkt, dass $\varepsilon \sin M = \xi(1 - \varepsilon \cos M)$, hervorgeht:

$$\left.\begin{aligned} \frac{r}{a} = (1 - \varepsilon \cos M) \Big[& \left(1 + \xi^2 - \frac{2}{3} \xi^4 + \frac{4}{5} \xi^6 - \frac{368}{315} \xi^8 + \frac{1072}{567} \xi^{10} - \frac{169504}{51975} \xi^{12} + \ldots\right) + \\ & + \frac{1}{2} \xi^3 \operatorname{ctg} M \left(1 - \frac{17}{12} \xi^2 + \frac{907}{360} \xi^4 - \frac{98177}{20160} \xi^6 + \frac{17802611}{1814400} \xi^8 - \right. \\ & \qquad \left. - \frac{4852742017}{239500800} \xi^{10} + \ldots\right) - \\ & - \frac{1}{6} \xi^6 \operatorname{ctg}^2 M \left(1 - \frac{223}{60} \xi^2 + \frac{9199}{840} \xi^4 - \frac{8966081}{302400} \xi^6 + \ldots\right) + \\ & + \frac{1}{24} \xi^9 \operatorname{ctg}^3 M \left(\frac{7}{3} - \frac{212}{15} \xi^2 + \frac{4404983}{75600} \xi^4 - \ldots\right) - \\ & - \frac{1}{120} \xi^{12} \operatorname{ctg} M^4 \left(\frac{25}{3} - \ldots\right) + \ldots \Big] \end{aligned}\right\} \quad 19)$$

Diese Reihe hat genau dasselbe Bildungsgesetz wie die Reihe für die excentrische Anomalie (Gleichung 18) und kann daher genau ebenso behandelt werden wie diese: man kann auch hier zur Vergrösserung der Convergenz die Grösse η statt ξ einführen und dann diese Gleichung ebenso wie Nr. 18 auf eine der Gleichung 18**) ähnliche Form bringen. Da indess der Radius vector selbst nur selten gebraucht wird, wollen wir uns dabei nicht aufhalten, sondern sogleich zur Entwickelung von dessen Logarithmus schreiten. Es sei also:

$$C\;.\;\;.\;\;.\;\log\frac{r}{a}=\log(1-\varepsilon\cos\mathrm{E}).$$

Schreibt man in unseren Formeln $\varphi=\log(1-\varepsilon\cos M)$, so wird:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi' &= +\xi.\\
\varphi'' &= +\xi\operatorname{ctg}M-\xi^2.\\
\varphi''' &= -\xi-3\operatorname{ctg}M\xi^2+2\xi^3.\\
\varphi^{IV} &= -\xi\operatorname{ctg}M+(4-3\operatorname{ctg}^2M)\xi^2+12\operatorname{ctg}M\xi^3-6\xi^4.\\
\varphi^{V} &= +\xi+15\operatorname{ctg}M\xi^2-10(2-3\operatorname{ctg}^2M)\xi^3-60\operatorname{ctg}M\xi^4+24\xi^5.\\
\varphi^{VI} &= +\xi\operatorname{ctg}M-(16-15\operatorname{ctg}^2M)\xi^2-30(5\operatorname{ctg}M-\operatorname{ctg}M^3)\xi^3+30(4-9\operatorname{ctg}M^2)\xi^4+360\operatorname{ctg}M\xi^5-120\xi^6.\\
\varphi^{VII} &= -\xi-63\operatorname{ctg}M\xi^2+14(13-30\operatorname{ctg}^2M)\xi^3+210(7\operatorname{ctg}M-3\operatorname{ctg}M^3)\xi^4-840(1-3\operatorname{ctg}^2M)\xi^5-\\
&\qquad -2520\xi^6+\ldots\\
\varphi^{VIII} &= -\xi\operatorname{ctg}M+(64-63\operatorname{ctg}^2M)\xi^2+84(18\operatorname{ctg}M-5\operatorname{ctg}M^3)\xi^3-126(16-60\operatorname{ctg}M^2+5\operatorname{ctg}M^4)\xi^4-\\
&\qquad -5040(3\operatorname{ctg}M-2\operatorname{ctg}M^3)\xi^5+\ldots\\
\varphi^{IX} &= +\xi+255\operatorname{ctg}M\xi^2-10(164-441\operatorname{ctg}M^2)\xi^3-1260(22\operatorname{ctg}M-15\operatorname{ctg}M^3)\xi^4+\ldots\\
\varphi^{X} &= +\xi\operatorname{ctg}M-(256-255\operatorname{ctg}^2M)\xi^2-30(475\operatorname{ctg}M-147\operatorname{ctg}M^3)\xi^3+\ldots\\
\varphi^{XI} &= -\xi-1023\operatorname{ctg}M\xi^2+\ldots\\
\varphi^{XII} &= -\xi\operatorname{ctg}M+\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\text{XIX}$$

Dies in die Gleichungen XIII eingesetzt, liefert:

$$X_1 = +\xi\sin M$$

$$\left.\begin{aligned}
X_2 &= +\sin^2M\left[\frac{1}{2}\operatorname{ctg}M\xi-\frac{1}{2}\xi^2\right]\\
X_3 &= -\sin M^3\left[\frac{2}{3}\xi+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}M\xi^2-\frac{1}{3}\xi^3\right]\\
X_4 &= -\sin M^4\left[\frac{17}{24}\operatorname{ctg}M\xi-\frac{1}{24}(16-3\operatorname{ctg}^2M)\xi^2-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}M\xi^3+\frac{1}{4}\xi^4\right]\\
X_5 &= +\sin M^5\left[\frac{1}{30}(24-5\operatorname{ctg}^2M)\xi+\frac{25}{24}\operatorname{ctg}M\xi^2-\frac{1}{12}(8-3\operatorname{ctg}^2M)\xi^3-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}M\xi^4+\frac{1}{5}\xi^5\right]\\
X_6 &= +\sin M^6\left[\frac{907}{720}\operatorname{ctg}M\xi-\frac{1}{720}(736-375\operatorname{ctg}^2M)\xi^2-\frac{1}{24}(33\operatorname{ctg}M-\operatorname{ctg}M^3)\xi^3+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{24}(16-9\operatorname{ctg}^2M)\xi^4+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}M\xi^5-\frac{1}{6}\xi^6\right]\\
X_7 &= -\sin M^7\left[\frac{1}{2520}(2944-1561\operatorname{ctg}^2M)\xi+\frac{307\operatorname{ctg}M-12\operatorname{ctg}M^3}{144}\xi^2-\frac{448-375\operatorname{ctg}^2M}{360}\xi^3-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{24}(41\operatorname{ctg}M-3\operatorname{ctg}^3M)\xi^4+\frac{1}{6}(4-3\operatorname{ctg}^2M)\xi^5+\frac{1}{2}\xi^6\operatorname{ctg}M\ldots\right]
\end{aligned}\right\}\text{XX}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
X_8 &= -\sin M^8\Big[\frac{1}{5760}(11811\,\mathrm{ctg}\,M-560\,\mathrm{ctg}^3 M)\,\xi-\frac{68608-64967\,\mathrm{ctg}^2 M}{40320}\,\xi^2-\frac{4646\,\mathrm{ctg}\,M-495\,\mathrm{ctg}^3 M}{1440}\,\xi^3+\\
&\qquad+\frac{1}{960}(1408-1660\,\mathrm{ctg}^2 M+15\,\mathrm{ctg}\,M^4)\,\xi^4+\frac{1}{24}(49\,\mathrm{ctg}\,M-6\,\mathrm{ctg}\,M^3)\,\xi^5-\ldots\Big]\\
X_9 &= +\sin M^9\Big[\Big(\frac{1072}{567}-\frac{9199}{5040}\,\mathrm{ctg}^2 M\Big)\,\xi+\Big(\frac{107063}{24192}\,\mathrm{ctg}\,M-\frac{21}{40}\,\mathrm{ctg}^3 M\Big)\,\xi^2-\\
&\qquad-\Big(\frac{6616}{2835}-\frac{9433}{2880}\,\mathrm{ctg}\,M^2+\frac{1}{24}\,\mathrm{ctg}\,M^4\Big)\,\xi^3-\Big(\frac{3271}{720}\,\mathrm{ctg}\,M-\frac{83}{96}\,\mathrm{ctg}\,M^3\Big)\,\xi^4+\ldots\Big]\\
X_{10} &= +\sin M^{10}\Big[\Big(\frac{17802611}{3628800}\,\mathrm{ctg}\,M-\frac{53}{90}\,\mathrm{ctg}\,M^3\Big)\,\xi-\Big(\frac{42576}{14175}-\frac{1084109}{241920}\,\mathrm{ctg}^2 M+\frac{1}{16}\,\mathrm{ctg}^4 M\Big)\,\xi^2-\\
&\qquad-\Big(\frac{292897}{40320}\,\mathrm{ctg}\,M-\frac{1043}{640}\,\mathrm{ctg}\,M^3\Big)\,\xi^3+\ldots\Big]\\
X_{11} &= -\sin M^{11}\Big[\Big(\frac{169504}{51975}-\frac{8966081}{1814400}\,\mathrm{ctg}^2 M+\frac{5}{72}\,\mathrm{ctg}\,M^4\Big)\,\xi+\Big(\frac{33783535}{3628800}\,\mathrm{ctg}\,M-\frac{80379}{36288}\,\mathrm{ctg}\,M^3\Big)\,\xi^2-\ldots\Big]\\
X_{12} &= -\sin M^{12}\Big[\Big(\frac{4852742017}{479001600}\,\mathrm{ctg}\,M-\frac{4404983}{1814400}\,\mathrm{ctg}\,M^3\Big)\,\xi-\ldots\Big]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right\}\quad \mathrm{XX}
$$

Damit erhält man ohne weitere Mühe (nach Formel 17), wenn man unter Einem wieder gleich nach Potenzen von $\mathrm{ctg}\,M$ ordnet und wie früher mit m den Modul des Logarithmensystems bezeichnet:

$$
\left.
\begin{aligned}
\log\Big(\frac{r}{a}\Big) = \log(1-\varepsilon\cos M)+m\Big[&\Big(\xi^2-\frac{7}{6}\,\xi^4+\frac{9}{5}\,\xi^6-\frac{87}{28}\,\xi^8+\frac{16169}{2835}\,\xi^{10}-\frac{1131437}{103950}\,\xi^{12}+\ldots\Big)+\\
&+\mathrm{ctg}\,M\Big(\frac{1}{2}\,\xi^3-\frac{29}{24}\,\xi^5+\frac{2017}{720}\,\xi^7-\frac{86579}{13440}\,\xi^9+\frac{53583581}{3628800}\,\xi^{11}-\\
&\qquad-\frac{16185378277}{479001600}\,\xi^{13}+\ldots\Big)-\\
&-\mathrm{ctg}\,M^2\Big(\frac{7}{24}\,\xi^6-\frac{1001}{720}\,\xi^8+\frac{195679}{40320}\,\xi^{10}-\frac{54168577}{3628800}\,\xi^{12}+\ldots\Big)+\\
&+\mathrm{ctg}\,M^3\Big(\frac{2}{9}\,\xi^9-\frac{2279}{1440}\,\xi^{11}+\frac{957367}{129600}\,\xi^{13}-\ldots\Big)-\\
&-\mathrm{ctg}\,M^4\Big(\frac{109}{576}\,\xi^{12}-\ldots\Big)\Big]
\end{aligned}
\right\}\quad 20)
$$

Wie man sieht, ist auch diese Gleichung den früheren (18 und 19) ganz analog gebaut; auch sie wird durch Einführung von ζ statt ξ viel convergenter, verhält sich überhaupt in jeder Beziehung ganz so wie die Reihe für die excentrische Anomalie. Es ist nämlich in ζ ausgedrückt:

$$
\left.
\begin{aligned}
\log\Big(\frac{r}{a}\Big) = \log(1-\varepsilon\cos M)+m\Big[&\Big(\zeta^2-\frac{1}{6}\,\zeta^4+\frac{7}{15}\,\zeta^6-\frac{29}{140}\,\zeta^8+\frac{1157}{2835}\,\zeta^{10}-\frac{84961}{311850}\,\zeta^{12}+\ldots\Big)+\\
&+\mathrm{ctg}\,M\Big(\frac{1}{2}\,\zeta^3-\frac{11}{24}\,\zeta^5+\frac{517}{720}\,\zeta^7-\frac{6691}{8064}\,\zeta^9+\frac{4134701}{3628800}\,\zeta^{11}-\ldots\Big)-\\
&-\mathrm{ctg}\,M^2\Big(\frac{7}{24}\,\zeta^6-\frac{371}{720}\,\zeta^8+\frac{2801}{2688}\,\zeta^{10}-\frac{5979427}{3628800}\,\zeta^{12}+\ldots\Big)+\\
&+\mathrm{ctg}\,M^3\Big(\frac{2}{9}\,\zeta^9-\frac{839}{1440}\,\zeta^{11}+\frac{92831}{64800}\,\zeta^{13}-\ldots\Big)-\\
&-\mathrm{ctg}\,M^4\Big(\frac{109}{576}\,\zeta^{12}-\ldots\Big)+\ldots\;\ldots\Big]
\end{aligned}
\right\}\quad 20^{*})
$$

Bereits das in $\operatorname{ctg} M^3$ multiplicirte Glied hat für keinen der Planeten unseres Sonnensystems einen Einfluss auf die fünfte Decimale von $\log\left(\frac{r}{a}\right)$ und das in $\operatorname{ctg} M^4$ auch keinen mehr auf die siebente. Schreibt man nun wieder:

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= m\left[\eta^2-\frac{1}{6}\eta^4+\frac{7}{15}\eta^6-\frac{29}{140}\eta^8+\frac{1157}{2835}\eta^{10}-\frac{84961}{311850}\eta^{12}+\ldots\right] \\ \gamma\sin\Gamma &= m\left[\frac{7}{24}\eta^6-\frac{371}{720}\eta^8+\frac{2801}{2688}\eta^{10}-\frac{5979427}{3628800}\eta^{12}+\ldots\right] \\ \gamma\cos\Gamma &= m\left[\frac{1}{2}\eta^3-\frac{11}{24}\eta^5+\frac{517}{720}\eta^7-\frac{6691}{8064}\eta^9+\frac{4134701}{3628800}\eta^{11}-\ldots\right] \end{aligned}\right\}\text{XXI}$$

so wird:

$$\log\frac{r}{a} = \log(1-\varepsilon\cos M)+r_0+\gamma\frac{\sin(M-\Gamma)}{\sin M}\operatorname{ctg} M+\ldots \tag{20**}$$

Entwickelt man auch hier, so wie früher, die letzten beiden Gleichungen von XXI weiter, so erhält man successive:

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= m\left[\frac{1}{2}\eta^3-\frac{11}{24}\eta^5+\frac{517}{720}\eta^7-\frac{6005}{8064}\eta^9+\frac{415867}{453600}\eta^{11}-\ldots\right] \\ \operatorname{tg}\Gamma &= \frac{7}{12}\eta^3\left(1-\frac{17}{20}\eta^2+\frac{4789}{3528}\eta^4-\frac{3228163}{2116800}\eta^6+\ldots\right) \\ \log\gamma &= \log\left(\frac{m}{2}\eta^3\right)-m\left[\frac{11}{12}\eta^2-\frac{1463}{1440}\eta^4+\frac{19489}{45360}\eta^6-\frac{6784589}{14515200}\eta^8+\ldots\right] \\ \Gamma &= \frac{7}{12}\eta^3-\frac{119}{240}\eta^5-\frac{4789}{6048}\eta^7-\frac{3468263}{3628800}\eta^9+\ldots \end{aligned}\right\}\text{XXI*}$$

Die bei der Bildung der Gleichung 20) gewählte Gruppirung der Glieder ist zweifellos die einfachste und naturgemässeste; doch erkennt man beim Betrachten des Systemes der Gleichungen XX auf den ersten Blick, dass auch das Zusammenfassen der Glieder nach anderen Principien zu brauchbaren Resultaten führt. Nimmt man beispielsweise aus dem Ausdrucke:

$$\left(\frac{X_1}{\sin M}\right)\xi+\left(\frac{X_2}{\sin^2 M}\right)\xi^2+\left(\frac{X_3}{\sin^3 M}\right)\xi^3+\ldots$$

zuerst die sämmtlichen letzten Glieder, hierauf die vorletzten, dann die drittletzten u. s. w. heraus, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{r}{a}\right) = \log(1-\varepsilon\cos M) &+ \left(\xi^2-\frac{1}{2}\xi^4+\frac{1}{3}\xi^6-\frac{1}{4}\xi^8+\frac{1}{5}\xi^{10}-\frac{1}{6}\xi^{12}+\ldots\right)+ \\ &+\frac{1}{2}\operatorname{ctg} M(\xi^3-\xi^5+\xi^7-\xi^9+\xi^{11}-\xi^{13}+\ldots)- \\ &-\left[\frac{2}{3}(\xi^4-\xi^6+\xi^8-\xi^{10}+\xi^{12}-\ldots)+\frac{1}{8}\operatorname{ctg} M^2(\xi^6-2\xi^8+3\xi^{10}-4\xi^{12}+\ldots)\right]- \\ &-\left[\frac{1}{24}\operatorname{ctg} M(17\xi^5-25\xi^7+33\xi^9-41\xi^{11}+49\xi^{13}-\ldots)-\right. \\ &\qquad\qquad\left.-\frac{1}{24}\operatorname{ctg} M^3(\xi^9-3\xi^{11}+6\xi^{13}-\ldots)\right]+ \\ &+\left[\frac{2}{45}(18\xi^6-23\xi^8+28\xi^{10}-33\xi^{12}+\ldots)-\right. \\ &\qquad\left.\frac{1}{48}\operatorname{ctg}^2 M(8\xi^6-25\xi^8+50\xi^{10}-83\xi^{12}+\ldots)-\frac{1}{64}\operatorname{ctg} M^4(\xi^{12}-\ldots)\right]+ \end{aligned}$$

$$+\left[\frac{1}{720}\operatorname{ctg} M(907\xi^7-1535\xi^9+2323\xi^{11}-3271\xi^{13}+\ldots)+\frac{1}{96}\operatorname{ctg} M^3(8\xi^9-33\xi^{11}+83\xi^{13}-\ldots)\right]-$$

$$-\left[\frac{8}{2835}(414\xi^8-603\xi^{10}+827\xi^{12}-\ldots)-\frac{1}{5760}\operatorname{ctg} M^2(3568\xi^8-9281\xi^{10}+18866\xi^{12}-\ldots)+\frac{1}{24}\operatorname{ctg} M^4(\xi^{12}\ldots)\right]+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Führt man nun hierin die leicht ersichtlichen Summationen aus und geht man dabei zugleich von den natürlichen auf künstliche Logarithmen mit dem Modul m über, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\log\left(\frac{r}{a}\right) = \log(1-\varepsilon\cos M)+\log(1+\xi^2)+m\Big[&-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\xi^4}{1+\xi^2}-\frac{2}{45}\cdot\frac{18\xi^6+13\xi^8}{(1+\xi^2)^2}+\right.\\ &\left.+\frac{8}{2835}\,\frac{414\xi^8+639\xi^{10}+260\xi^{12}}{(1+\xi^2)^3}-\ldots\right)+\\ &+\operatorname{ctg} M\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\xi^3}{1+\xi^2}-\frac{1}{24}\cdot\frac{17\xi^5+9\xi^7}{(1+\xi^2)^2}+\right.\\ &\left.+\frac{1}{720}\cdot\frac{907\xi^7+1186\xi^9+439\xi^{11}}{(1+\xi^2)^3}-\ldots\right)-\\ &-\operatorname{ctg} M^2\left(\frac{1}{8}\,\frac{\xi^6}{(1+\xi^2)^2}+\frac{1}{48}\cdot\frac{8\xi^6-\xi^8-\xi^{10}}{(1+\xi^2)^3}+\ldots\right)+\\ &+\operatorname{ctg} M^3\left(\frac{1}{24}\cdot\frac{\xi^9}{(1+\xi^2)^3}-\ldots\right)-\\ &-\operatorname{ctg} M^4\left(\frac{1}{64}\cdot\frac{\xi^{12}}{(1+\xi^2)^4}+\ldots\right)+\ldots\Big]+\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\quad 21)$$

Diese Gleichung liesse sich jetzt wohl noch wesentlich reduciren; da sie jedoch im Grunde genommen nur eine andere Form der Entwickelung nach steigenden Potenzen von ε vorstellt, wollen wir uns damit nicht weiter aufhalten. Ähnliche Bemerkungen liessen sich auch an die Gleichung 22) knüpfen.

Was endlich die Entwickelung der wahren Anomalie betrifft, so sei:

$$D.\ \ldots\ v = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin E\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\cos E-\varepsilon}\right)$$

Man hat jetzt $\varphi = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{M}{2}\right)$ zu setzen, und erhält damit:

$$\left.\begin{aligned}\varphi' &= \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos M}\\ \varphi'' &= -\varphi'\xi\\ \varphi''' &= -\varphi'[\xi\operatorname{ctg} M-2\xi^2]\\ \varphi^{iv} &= +\varphi'[\xi+6\xi^2\operatorname{ctg} M-6\xi^3]\\ \varphi^{v} &= +\varphi'[\xi\operatorname{ctg} M-2(4-3\operatorname{ctg}^2 M)\xi^2-36\operatorname{ctg} M\xi^3+24\xi^4]\\ \varphi^{vi} &= -\varphi'[\xi+30\xi^2\operatorname{ctg} M-30(2-3\operatorname{ctg} M^2)\xi^3-240\operatorname{ctg} M\xi^4+120\xi^5]\\ \varphi^{vii} &= -\varphi'[\xi\operatorname{ctg} M-2(16-15\operatorname{ctg} M^2)\xi^2-90(5\operatorname{ctg} M-\operatorname{ctg} M^3)\xi^3+120(4-9\operatorname{ctg} M^2)\xi^4+1800\operatorname{ctg} M\xi^5\ldots]\\ \varphi^{viii} &= +\varphi'[\xi+126\operatorname{ctg} M\xi^2-42(13-30\operatorname{ctg} M^2)\xi^3-840(7\operatorname{ctg} M-3\operatorname{ctg} M^3)\xi^4+\ldots]\end{aligned}\right\}\quad \text{XXII}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi^{IV} &= +\varphi'[\xi \operatorname{ctg} M - 2(64-63 \operatorname{ctg} M^2)\xi^2 - 252(18 \operatorname{ctg} M - 5 \operatorname{ctg} M^3)\xi^3 + \ldots] \\
\varphi^{V} &= -\varphi'[\xi + 510 \operatorname{ctg} M \xi^2 - \ldots] \\
\varphi^{VI} &= -\varphi'[\xi \operatorname{ctg} M - \ldots] \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \text{XXII}$$

Die X lauten nun:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= +\varphi' \sin M. \\
X_2 &= -\frac{1}{2}\xi . \varphi' \sin M^2. \\
X_3 &= -\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{ctg} M \xi - \frac{1}{3}\xi^2\right] \varphi' \sin M^3. \\
X_4 &= -\left[\frac{1}{6} \operatorname{ctg} M - \frac{13}{24}\xi - \frac{1}{4} \operatorname{ctg} M \xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3\right] \varphi' \sin M^4. \\
X_5 &= +\left[\frac{13}{24} + \frac{17}{40} \operatorname{ctg} M \xi - \frac{1}{60}(34-3 \operatorname{ctg} M^2)\xi^2 - \frac{3}{10} \operatorname{ctg} M \xi^3 + \frac{1}{5}\xi^4\right] \varphi' \sin M^5. \\
X_6 &= +\left[\frac{17}{40} \operatorname{ctg} M - \frac{1}{720}(541-60 \operatorname{ctg} M^2)\xi - \frac{17}{24} \operatorname{ctg} M \xi^2 + \frac{1}{24}(14-3 \operatorname{ctg} M^2)\xi^3 + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1}{3} \operatorname{ctg} M \xi^4 - \frac{1}{6}\xi^5\right] \varphi' \sin M^6. \\
X_7 &= -\left[\frac{1}{720}(541-60 \operatorname{ctg} M^2) + \frac{1601}{1680} \operatorname{ctg} M \xi - \frac{1}{2520}(2431-750 \operatorname{ctg} M^2)\xi^2 - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{168}(169 \operatorname{ctg} M - 3 \operatorname{ctg} M^3)\xi^3 + \frac{1}{42}(25-9 \operatorname{ctg} M^2)\xi^4 + \frac{5}{14} \operatorname{ctg} M \xi^5 - \ldots\right] \varphi' \sin M^7. \\
X_8 &= -\left[\frac{1601}{1680} \operatorname{ctg} M - \frac{1}{40320}(47545-16128 \operatorname{ctg} M^2)\xi - \frac{1}{2880}(4873 \operatorname{ctg} M - 120 \operatorname{ctg} M^3)\xi^2 + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{960}(1133-630 \operatorname{ctg} M^2)\xi^3 + \frac{1}{16}(21 \operatorname{ctg} M - \operatorname{ctg} M^3)\xi^4 - \ldots\right] \varphi' \sin M^8. \\
X_9 &= +\left[\frac{1}{40320}(47545-16128 \operatorname{ctg} M^2) + \frac{1}{362880}(755191 \operatorname{ctg} M - 20160 \operatorname{ctg} M^3)\xi - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{181440}(309268-201285 \operatorname{ctg} M^2)\xi^2 - \frac{1}{288}(762 \operatorname{ctg} M - 55 \operatorname{ctg} M^3)\xi^3 + \ldots\right] \varphi' \sin M^9. \\
X_{10} &= +\left[\frac{1}{362880}(755191 \operatorname{ctg} M - 20160 \operatorname{ctg} M^3) - \frac{1}{3628800}(7231801-4954260 \operatorname{ctg} M^2)\xi - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{120960}(466129 \operatorname{ctg} M - 38892 \operatorname{ctg} M^3)\xi^2 + \ldots\right] \varphi' \sin M^{10}. \\
X_{11} &= -\left[\frac{1}{3628800}(7231801-4954260 \operatorname{ctg} M^2) + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{39916800}(180403983 \operatorname{ctg} M - 15754200 \operatorname{ctg} M^3)\xi - \ldots\right] \varphi' \sin M^{11}. \\
X_{12} &= -\left[\frac{1}{39916800}(180403983 \operatorname{ctg} M - 15754200 \operatorname{ctg} M^3) - \ldots\right] \varphi' \sin M^{12}. \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \text{XXIII}$$

Wir haben also schliesslich, wenn wir wieder gleich nach Potenzen von $\operatorname{ctg} M$ ordnen:

$$
\begin{aligned}
v - 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}} \operatorname{tg}\frac{M}{2}\right) &= v - \operatorname{arctg}\frac{\sin M\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\cos M - \varepsilon} = \\
&= \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos M}\Bigg\{\left(\xi - \xi^3 + \frac{17}{12}\xi^5 - \frac{167}{72}\xi^7 + \frac{5519}{1344}\xi^9 - \frac{13848251}{1814400}\xi^{11} + \ldots\right) - \\
&\quad - \operatorname{ctg} M\left(\frac{1}{3}\xi^4 - \frac{11}{10}\xi^6 + \frac{102}{35}\xi^8 - \frac{130519}{18144}\xi^{10} + \frac{28620439}{1663200}\xi^{12} - \ldots\right) + \\
&\quad + \operatorname{ctg} M^2\left(\frac{13}{60}\xi^7 - \frac{1027}{840}\xi^9 + \frac{284887}{60480}\xi^{11} - \ldots\right) - \\
&\quad - \operatorname{ctg} M^3\left(\frac{43}{252}\xi^{10} - \frac{2947}{2160}\xi^{12} - \ldots\right) + \ldots\Bigg\}
\end{aligned} \tag{22}
$$

Zieht man es vor, die Mittelpunktsgleichung zu berechnen, so erreicht man dies, die halben Winkel beibehaltend, mit Hilfe der Relation:

$$
2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{M}{2}\right) = M + 2\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon\sin M}{1-\varepsilon\cos M + \sqrt{1-\varepsilon^2}} = M + 2\operatorname{arctg}\frac{\xi}{1+\dfrac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos M}}
$$

Rechnet man aber lieber mit ganzen Winkeln, so würde die Abtrennung des Bogens M von

$$
\operatorname{arctg}\frac{\sin M\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\cos M - \varepsilon}
$$

auf einen ziemlich complicirten Ausdruck führen. Man bemerkt aber sofort, dass sich der Bogen

$$
\operatorname{arctg}\frac{\sin M\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\cos M - \varepsilon}
$$

von dem Bogen

$$
\operatorname{arctg}\frac{\sin M}{\cos M - \varepsilon} = M + \operatorname{arctg}\xi
$$

nur um eine Grösse zweiter Ordnung in Bezug auf die Excentricität unterscheidet; trennen wir daher diesen Bogen ab, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arctg}\frac{\sin M\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\cos M - \varepsilon} &= M + \operatorname{arctg}\xi - \operatorname{arctg}\frac{\sin M(\cos M - \varepsilon)(1-\sqrt{1-\varepsilon^2})}{(\cos M - \varepsilon)^2 + \sin^2 M\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \\
&= M + \operatorname{arctg}\xi - \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi^2}{1+(1+\xi^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,\frac{\cos M - \varepsilon}{\sin M}\right).
\end{aligned}
$$

Die Reihe 22) hat ebenfalls genau dasselbe Bildungsgesetz wie die Reihen 18), 19) und 20) für die excentrische Anomalie und den Radiusvector; sie ist aber zur Berechnung der wahren Anomalie nicht bequem. Schon die Berechnung des Gliedes $2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{M}{2}\right)$ oder des gleichgeltenden $\operatorname{arctg}\frac{\sin M\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\cos M - \varepsilon}$ ist ziemlich lästig. Diese Arbeit kann man sich indess nicht unerheblich erleichtern, wenn man bemerkt, dass die interessante Beziehung stattfindet:

$$
\operatorname{arctg}\frac{\sin M\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\cos M - \varepsilon} = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} M}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon\sin M}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.
$$

Die ganze weitere Reihe ist jedoch überdies mit dem Factor $\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos M}$ multiplicirt, was die Berechnung nach derselben, selbst unter Anwendung von Hilfstafeln, abermals erschwert. Man kann zwar ohne Mühe alles nach steigenden Potenzen von ξ entwickeln, allein es ändert dadurch die Reihe ihren Charakter. Vermöge der Bedeutung von $\xi = \frac{\varepsilon\sin M}{1-\varepsilon\cos M}$ ist nämlich:

$$\varepsilon = \frac{\xi}{\sin M + \xi \cos M} \qquad 1 - \varepsilon \cos M = \frac{1}{1+\xi \operatorname{ctg} M}$$

$$\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}} = \operatorname{ctg}\frac{M}{2}\,\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\frac{M}{2}+\xi}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{M}{2}-\xi}}\,; \qquad \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos M} = \sqrt{1+2\xi \operatorname{ctg} M - \xi^2}$$

und damit wird:

$$2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}} \operatorname{tg}\frac{M}{2}\right) = 2 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\frac{M}{2}+\xi}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{M}{2}-\xi}} = M + \xi - \frac{1}{2}\xi^2 \operatorname{ctg} M + \frac{1}{6}(1+3 \operatorname{ctg} M^2)\xi^3 -$$

$$- \frac{1}{8}(3 \operatorname{ctg} M + 5 \operatorname{ctg} M^3)\xi^4 + \frac{1}{40}(3+30 \operatorname{ctg} M^2 + 35 \operatorname{ctg} M^4)\xi^5 -$$

$$- \frac{1}{48}(15 \operatorname{ctg} M + 70 \operatorname{ctg} M^3 + 63 \operatorname{ctg} M^5)\xi^6 +$$

$$+ \frac{1}{112}(5+105 \operatorname{ctg} M^2 + 315 \operatorname{ctg} M^4 + 231 \operatorname{ctg} M^6)\xi^7 -$$

$$- \frac{1}{128}(35 \operatorname{ctg} M + 315 \operatorname{ctg} M^3 + 693 \operatorname{ctg} M^5 + 429 \operatorname{ctg} M^7)\xi^8 + \ldots$$

$$\sqrt{1+2\xi \operatorname{ctg} M - \xi^2} = 1 + \xi \operatorname{ctg} M - \frac{1}{2}(1+\operatorname{ctg} M^2)\xi^2 + \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} M + \operatorname{ctg} M^3)\xi^3 - \frac{1}{8}(1+6 \operatorname{ctg}^2 M + 5 \operatorname{ctg} M^4)\xi^4 +$$

$$+ \frac{1}{8}(3 \operatorname{ctg} M + 10 \operatorname{ctg} M^3 + 7 \operatorname{ctg} M^5)\xi^5 - \frac{1}{16}(1+17 \operatorname{ctg} M^2 + 39 \operatorname{ctg} M^4 + 23 \operatorname{ctg} M^6)\xi^6 +$$

$$+ \frac{1}{16}(5 \operatorname{ctg} M + 37 \operatorname{ctg} M^3 + 67 \operatorname{ctg} M^5 + 35 \operatorname{ctg} M^7)\xi^7 - \ldots$$

Substituirt man dies in Gleichung 22), so entsteht nach den entsprechenden Reductionen:

$$\left.\begin{aligned} v - M = {} & \left(2\xi - \frac{4}{3}\xi^3 + \frac{28}{15}\xi^5 - \frac{184}{63}\xi^7 + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{29}{24}\xi^4 + \frac{539}{240}\xi^6 - \frac{43301}{8064}\xi^8 + \ldots\right) \operatorname{ctg} M + \\ & + \left(\frac{1}{6}\xi^5 + \frac{16}{15}\xi^7 + \ldots\right) \operatorname{ctg} M^2 - \left(\frac{1}{8}\xi^4 + \frac{13}{24}\xi^6 + \frac{99}{128}\xi^8 + \ldots\right) \operatorname{ctg} M^3 + \\ & + \left(\frac{1}{4}\xi^5 + \frac{5}{6}\xi^7 + \ldots\right) \operatorname{ctg} M^4 - \left(\frac{7}{16}\xi^6 + \frac{727}{384}\xi^8 + \ldots\right) \operatorname{ctg} M^5 + \left(\frac{5}{8}\xi^7 + \ldots\right) \operatorname{ctg} M^6 - \\ & - \left(\frac{149}{128}\xi^8 + \ldots\right) \operatorname{ctg} M^7 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad 23)$$

Es wachsen also jetzt, abgesehen von dem mit $\operatorname{ctg} M^2$ multiplicirten Gliede, wo der Coëfficient von ξ^3 ausnahmsweise verschwindet, die Potenzexponenten von ξ bei jeder höheren Potenz von $\operatorname{ctg} M$ nicht mehr, wie dies früher überall der Fall war, um je drei Einheiten, sondern nur um je eine Einheit, und es tritt überdies der Factor $\operatorname{ctg} M$ bereits bei den Gliedern zweiter Ordnung auf. Wollte man daher die Berechnung der Mittelpunktsgleichung, so wie die der excentrischen Anomalie und die des Radius vectors blos auf zwei Tafeln, eine mit einfachem und eine mit doppeltem Eingange, zurückführen, so würde die letztere bereits Glieder zweiter Ordnung enthalten, die an der Grenze der Tafel (bei $\varepsilon = 0\cdot4$) auf mehr als $3°$ ansteigen. Es ist desshalb vortheilhafter, zwei Tafeln mit einfachem Eingange anzulegen, welche mit dem Argumente $\log \xi$ geben:

$$\mu_0 = 2\xi - \frac{4}{3}\xi^3 + \frac{28}{15}\xi^5 - \frac{184}{63}\xi^7 + \dots$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{29}{24}\xi^4 + \frac{539}{240}\xi^6 - \frac{43301}{8064}\xi^8 + \dots$$

und nur die Summe der übrigen Glieder, welche wir mit c_1 bezeichnen wollen, in eine Tafel mit doppeltem Eingange zu vereinigen. Die Berechnung stellt sich noch etwas einfacher, wenn man schreibt:

$$\left.\begin{aligned} \mu_0 &= c_0 \cos V \\ \mu_1 &= c_0 \sin V \end{aligned}\right\} \qquad \text{XXIV}$$

Die Mittelpunktsgleichung lautet dann:

$$v - M = c_0 \frac{\sin(M+V)}{\sin M} + c_1 \qquad 23^*)$$

wobei $\log c_0$ und V einer Tafel mit dem Argumente $\log \xi$ und c_1, einer mit den Argumenten ε und M zu entnehmen sind. Was die Grösse von c_1 betrifft, übersteigt es bei den stärksten Excentricitäten, die unter den Asteroidenbahnen vorkommen, kaum $9'$.

Die Ausdrücke für μ_0 und μ_1 convergiren beträchtlich rascher, wenn wir in denselben ξ wieder durch η ersetzen; sie werden dann:

$$\left.\begin{aligned} c_0 \cos V &= 2\eta - \frac{1}{3}\eta^3 + \frac{37}{60}\eta^5 - \frac{65}{504}\eta^7 + \dots \\ c_0 \sin V &= \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{17}{24}\eta^4 + \frac{79}{240}\eta^6 - \frac{70849}{40320}\eta^8 + \dots \end{aligned}\right\} \qquad \text{XXIV}^*$$

Die Weiterentwickelung dieser Formeln liefert zunächst:

$$c_0 = 2\eta - \frac{13}{48}\eta^3 + \frac{6897}{15360}\eta^5 + \frac{379691}{10321920}\eta^7 \dots$$

$$\operatorname{tg} V = \frac{1}{4}\eta - \frac{5}{16}\eta^3 + \frac{17}{480}\eta^5 - \frac{61303}{80640}\eta^7 + \dots$$

und hierauf:

$$\left.\begin{aligned} \log c_0 &= \log(2\eta) - m\left(\frac{13}{96}\eta^2 - \frac{9923}{46080}\eta^4 + \frac{1114009}{22224320}\eta^6 - \dots\right) \\ V &= \frac{1}{4}\eta - \frac{61}{192}\eta^3 + \frac{847}{15360}\eta^5 - \frac{581023}{737280}\eta^7 + \dots \end{aligned}\right\} \qquad \text{XXIV}^{**}$$

Die Gleichung 18) oder die ihr gleichgeltende 18**) liefert meiner Ansicht nach, unter der Voraussetzung der Construction geeigneter Hilfstafeln die erste praktisch brauchbare Lösung der Keppler'schen Gleichung. Auf das Aufsuchen bequemer Auflösungsmethoden für dieselbe, haben sich aber bisher alle Arbeiten auf diesem Gebiete beschränkt. Die Lösung des eigentlichen Problemes der Planetenbewegung, nämlich die Ermittelung des Radius vector und der wahren Anomalie unmittelbar aus der Epoche, hat man, so viel ich weiss, überhaupt noch nie versucht, wenn man von den bekannten Reihenentwickelungen nach Cosinussen und Sinussen der Vielfachen der mittleren Anomalie absieht, die wohl ein gewisses theoretisches Interesse, aber gar keinen praktischen Werth besitzen. Die hier vorgeführten Gleichungen 19), 20) und 23) geben uns aber das Mittel an die Hand, aus der Epoche die wahre Anomalie und den Radius vector ebenso einfach und leicht, wie die excentrische Anomalie zu berechnen. Diese Untersuchungen haben daher auch zu den ersten praktisch verwerthbaren Formeln zur unmittelbaren Berechnung des Ortes eines Planeten in seiner Bahn aus seiner mittleren Anomalie geführt.

§. 7.

Durch die Anwendung des Formelsystemes II) und VI des §. 3 auf die Keppler'sche Gleichung würden wir keine von den obigen wesentlich verschiedenen Resultate erlangen, indem durch die Einführung der Grösse η, welche mit der am Ende des eben angezogenen Paragraphen mit demselben Buchstaben bezeichneten identisch ist, den dortigen Erörterungen zu Folge, dieses Formelsystem im Grunde schon in Verwendung kam. Die Einführung der Grösse p, die in unserem Falle übergeht in:

$$p = \frac{2\xi}{1+\sqrt{1+2\xi^2}} = \frac{\sqrt{1+\eta^2}-\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}$$

würde in den Reihenentwickelungen nur die Coëfficienten der höheren Potenzen, von der fünften angefangen beträchtlich verkleinern. So lautet bei der excentrischen Anomalie die E_0 genannte Grösse in η und p ausgedrückt:

$$E_0 = \eta + \frac{1}{6}\eta^5 - \frac{1}{45}\eta^7 + \frac{83}{840}\eta^9 - \frac{947}{28350}\eta^{11} + \frac{613849}{7484400}\eta^{13} - \ldots$$

$$= p + \frac{1}{24}p^5 - \frac{1}{45}p^7 + \frac{81}{4480}p^9 - \frac{1583}{103400}p^{11} +$$

Da indess die raschere Convergenz der höheren Glieder nur für Tafelrechnungen einen Werth hätte, bei diesen aber der hierdurch erzielte Gewinn mehr als vollständig dadurch compensirt wird, dass die Berechnung des Argumentes p viel zeitraubender ist, als die des Argumentes η, wollen wir die Umsetzung der Reihen nach Potenzen von p unterlassen, und nur noch ganz kurz ein paar Näherungswerthe angeben, die aus unseren Formeln fliessen. Wenden wir uns zu diesem Behufe an die Gleichungen 15) und 15*), so haben wir jetzt:

$$p = \frac{2\xi}{1+\sqrt{1+2\xi^2}} = \frac{\sqrt{1+2\xi^2}-1}{\xi}$$

$$p + k = \frac{1}{\sin M}\cdot\frac{\xi}{\sqrt{1+2\xi^2}}\left[\sin(M+p) - p\cos M + p^2\sin M\right]$$

$$= \frac{\xi}{\sqrt{1+2\xi^2}}\left[\frac{\sin(M+p)}{\sin M} - p\operatorname{ctg} M + p^2\right]$$

und ebenso:

$$\eta = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}$$

$$\eta + k' = \frac{\xi}{\sqrt{1+2\xi^2}}\left[\frac{\sin(M+\eta)}{\sin M} - \eta\operatorname{ctg} M + \eta^2\right] = \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}\left[\frac{\sin(M+\eta)}{\sin M} - \eta\operatorname{ctg} M + \eta^2\right]$$

Begnügen wir uns also mit einer Genauigkeit bis einschliesslich der dritten Potenzen der Excentricität, so ist sehr einfach

$$\left.\begin{aligned}
&E = M+p && \text{oder auch} && E = M+\eta\ ^{1} \\
&\frac{r}{a} = 1-\varepsilon\cos(M+p) && \text{"}\quad\text{"} && \frac{r}{a} = 1-\varepsilon\cos(M+\eta) \\
&\log\frac{r}{a} = \log[1-\varepsilon\cos(M+p)] && \text{"}\quad\text{"} && \log\frac{r}{a} = \log[1-\varepsilon\cos(M+\eta)] \\
&r = \operatorname{arctg}\frac{\sin(M+p).\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\cos(M+p)-\varepsilon} && \text{"}\quad\text{"} && r = \operatorname{arctg}\frac{\sin(M+\eta).\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\cos(M+\eta)-\varepsilon} \\
&= \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(M+p)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon\sin(M+p)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} && \text{"}\quad\text{"} && = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(M+\eta)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon\sin(M+\eta)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}
\end{aligned}\right\} \quad 24)$$

Dabei ist zu bemerken, dass die Gleichungen für $\frac{r}{a}$ und $\log\frac{r}{a}$ bis auf Grössen vierter Ordnung einschliesslich genau sind, da $\cos(M+p)$ oder $\cos(M+\eta)$ selbst mit einer Grösse erster Ordnung multiplicirt ist.

Wollen wir jedoch Näherungswerthe, die genauer sind, so haben wir bis einschliesslich sechster Potenz der Excentricität noch immer einfach genug:

$$\left.\begin{aligned}
E &= M + \frac{\xi}{\sqrt{1+2\xi^2}}\left[\frac{\sin(M+p)}{\sin M} - p\operatorname{ctg} M + p^2\right] \\
\frac{r}{a} &= 1-\varepsilon\cos\left[M+\frac{\xi}{\sqrt{1+2\xi^2}}\left(\frac{\sin(M+p)}{\sin M} - p\operatorname{ctg} M+p^2\right)\right]
\end{aligned}\right\} \quad 25)$$

oder einfacher

$$\left.\begin{aligned}
E &= M + \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}\left(\frac{\sin(M+\eta)}{\sin M} - \eta\operatorname{ctg} M + \eta^2\right) \\
\frac{r}{a} &= 1-\varepsilon\cos\left[M+\frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}\left(\frac{\sin(M+\eta)}{\sin M} - \eta\operatorname{ctg} M+\eta^2\right)\right]
\end{aligned}\right\} \quad 25^{*})$$

u. s. w.

Die Einfachheit und Übersichtlichkeit der Reihen 18), 19), 20), 20*) und 23) gestattet uns auch noch aus diesen für die durch sie dargestellten Functionen, interessante Näherungswerthe herzustellen. So ist:

$$\begin{aligned}
E &= M+\xi-\frac{1}{2}\xi^3\left(1+\frac{1}{3}\xi\operatorname{ctg} M\right) && +\text{Glieder fünfter und höherer Ordnungen} \\
\frac{r}{a} &= (1-\varepsilon\cos M)\left[1+\xi^2\left(1+\frac{1}{2}\xi\operatorname{ctg} M\right)\right] && + \quad \text{"} \quad \text{vierter} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\
\log\frac{r}{a} &= \log(1-\varepsilon\cos M)+m\xi^2\left(1+\frac{1}{2}\xi\operatorname{ctg} M\right) && + \quad \text{"} \quad \text{vierter} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\
v &= 2\xi\left[1+\frac{1}{4}\xi\operatorname{ctg} M\right] && + \quad \text{"} \quad \text{dritter} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}
\end{aligned}$$

Erinnern wir uns nun, dass $1+\xi\operatorname{ctg} M = \frac{1}{1-\varepsilon\cos M}$, so können wir die obigen Gleichungen auch so stellen

$$\left.\begin{aligned}
E &= M+\xi-\frac{1}{2}\cdot\frac{\xi^3}{\sqrt[3]{1-\varepsilon\cos M}} && \text{genau bis einschliesslich Glieder vierter Ordnung} \\
\frac{r}{a} &= (1-\varepsilon\cos M)+\xi^2\sqrt{1-\varepsilon\cos M} && \text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{dritter}\quad\text{"} \\
\log\frac{r}{a} &= \log(1-\varepsilon\cos M)+m\left(\frac{\xi}{\sqrt[4]{1-\varepsilon\cos M}}\right)^2 && \text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{dritter}\quad\text{"} \\
v &= M+\frac{2\xi}{\sqrt[4]{1-\varepsilon\cos M}} && \text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{zweiter}\quad\text{"}
\end{aligned}\right\} \quad 26)$$

---

[1] Auf diesen eigentlich ziemlich nahe liegenden Näherungswerth hat eigenthümlicher Weise erst vor Kurzem (Ast. Nach. B. 99, p. 31) Herr Dr. N. Herz aufmerksam gemacht. Alle anderen, hier angegebenen sind, so viel ich weiss, neu.

Noch etwas genauere Näherungswerthe erhalten wir, wenn wir von den Gleichungen ausgehen:

$$\frac{r}{a} = (1-\varepsilon\cos M)\left[1+\eta^2\left(1+\frac{1}{2}\xi\operatorname{ctg} M\right)\right]$$

$$\log\frac{r}{a} = \log(1-\varepsilon\cos M)+m\eta^2\left(1+\frac{1}{2}\xi\operatorname{ctg} M\right)$$

$$v = 2\eta\left(1+\frac{1}{4}\xi\operatorname{ctg} M\right)$$

Das System dieser Näherungswerthe ist dann:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{E} &= M+\eta \\ \frac{r}{a} &= (1-\varepsilon\cos M)+\eta^2\sqrt{1-\varepsilon\cos M} \\ \log\frac{r}{a} &= \log(1-\varepsilon\cos M)+m\frac{\eta^2}{\sqrt{1-\varepsilon\cos M}} \\ v &= M+\frac{2\eta}{\sqrt[3]{1-\varepsilon\cos M}} \end{aligned}\right\} \quad 27)$$

BEITRÄGE
ZUR
KENNTNISS DER FISCHE JAPAN'S. (III.)

VON

DR. FRANZ STEINDACHNER,
WIRKLICHEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN,

UND

DR. L. DÖDERLEIN.

(Mit 7 Tafeln.)

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 23. MAI 1884.

Fam. CORYPHAENIDAE.

96. *Coryphaena hippurus* Lin.

Bei drei Exemplaren von $35\frac{1}{2}$—$39\frac{1}{2}$ Cent. Länge ist die grösste Rumpfhöhe etwas mehr als $4\frac{2}{3}$—5mal, die Kopflänge $4\frac{2}{5}$— nahezu $4\frac{1}{2}$mal in der Körperlänge, die grösste Kopfhöhe am hinteren Kopfende $4\frac{1}{4}$— fast $4\frac{1}{9}$mal, die Kopfhöhe über der Augenmitte $1\frac{2}{5}$—$1\frac{2}{3}$mal, der Augendiameter genau oder etwas mehr als 5mal, die Schnauzenlänge c. 3mal, die Stirnbreite gleichfalls 3mal in der Kopflänge enthalten.

Die Kopfform ist halb-elliptisch, die Kiefer reichen gleich weit nach vorne. Das hintere Ende des Oberkiefers fällt ein wenig hinter die Augenmitte und ist vom unteren Augenrande nur durch einen schmalen Zwischenraum getrennt. Kiefer-, Vomer- und Gaumenzähne spitz. Die Zahnbinde im Zwischen- und Unterkiefer nimmt gegen das vordere Kieferende rasch an Breite zu; die Zähne der äusseren Reihe sind länger als die der übrigen Reihen.

Hinterer Vordeckelrand schwach nach hinten und unten geneigt. Vordeckelwinkel stark gerundet, unmerklich in den unteren und hinteren Rand übergehend. Die Wangengegend ist bis zu dem äusserst schwach vortretenden Vorrande des Präoperkel mit kleinen Schuppen besetzt, die unter der Haut halb verborgen liegen.

Die an und zunächst dem vorderen und hinteren Augenrande gelegenen Kopfknochen sind mässig wulstförmig aufgetrieben. Der Kiemendeckel zeigt an der Aussenfläche zarte Radien, die vom vorderen oberen Ende des Knochens auslaufen. Nur der oberste Theil des Operkels ist beschuppt.

Die Dorsale beginnt in verticaler Richtung in geringer Entfernung hinter dem Auge und enthält bei den mir zur Beschreibung vorliegenden Exemplaren mittlerer Grösse 57—60 Strahlen. Die vordersten derselben nehmen vom 1. bis zum 9. oder 10. rasch, von diesem bis zum 15. oder 16. nur sehr unbedeutend an Höhe zu; die 4—5 zunächst folgenden Strahlen gleichen sich an Höhe, die übrigen nehmen bis zum Ende der Flosse fast gleichförmig (nicht bedeutend) an Höhe ab. Die Höhe der Dorsale ist übrigens im Verhältniss zur Rumpfhöhe variabel, bei einem der hier beschriebenen Exemplare sind die höchsten Dorsalstrahlen $1\frac{3}{5}$mal, bei einem zweiten aber fast 2mal in der grössten Rumpfhöhe, doch stets genau 2mal oder nur unbedeutend mehr als 2mal in der Kopflänge enthalten.

Die Länge der schlanken, zugespitzt endigenden Ventralen gleicht dem Abstande des hinteren Deckelrandes von der vorderen Narine und die Insertionsstelle derselben fällt in verticaler Richtung genau unter oder nur unbedeutend hinter die Basis des obersten Pectoralstrahles.

Die Pectorale ist schwach säbelförmig gebogen; ihre Länge gleicht dem Abstande der Augenmitte vom hinteren seitlichen Kopfende.

Der Beginn der Anale ist nahezu ebensoweit von der Basis der mittleren Caudalstrahlen wie von der Augenmitte entfernt. Der 4. höchste Analstrahl erreicht nur $1\frac{1}{2}$ Augenlängen und die Höhe der übrigen Strahlen, von dem 7. angefangen, gleicht durchschnittlich einer Augenlänge.

Die Zahl der Analstrahlen beträgt 25—26.

Die Caudallappen sind lang, sehr schlank; der obere derselben ist häufig ein wenig länger als der untere Lappen und seine Länge, von der Basis der mittleren Caudalstrahlen an gemessen, gleicht einer Kopflänge oder übertrifft sie noch ein wenig.

Die Seitenlinie ist über der Pectorale unregelmässig gebogen, doch noch vor dem hinteren Ende derselben zieht sie in horizontaler Richtung längs der Höhenmitte des Rumpfes zur Basis der Caudale.

Eine Reihe rundlicher, goldbrauner, dunkler gesäumter Flecken in sehr geringer Entfernung unterhalb der Basis der Dorsale. Zuweilen liegen ähnliche Flecken auch auf der Oberseite des Kopfes zerstreut.

Coryphaena hippurus wird häufig an den meisten Küsten Japans gefischt. Exemplare bis zu c. 40 Cent. Länge sah Dr. Döderlein im Monate August in Kochi auf Shikoku in sehr bedeutender Menge zu Markte gebracht und grosse Exemplare von 80 Cent. Länge mit stark ausgebildetem Kopfkamm in Tokio während des Sommers.

Japanischer Name: Shiira oder Meshiira.

97. ***Brama Rajii*** Bloch.

Die mir von Dr. Döderlein irrigerweise als *Brama japonica* Hilg. eingesendeten drei grossen Exemplare, von denen das grösste 51 Cent. lang (bis zur Spitze der Caudallappen) und 19 Cent. hoch (über den Ventralen) ist, sind zu *Brama Rajii* Bl. zu beziehen und unterscheiden sich von Exemplaren aus europäischen Meeren weder in der Form des Kopfes und der Dorsale, noch in der Beschuppungsweise der Pectoralgegend. Die Schnauze tritt übrigens bei älteren Individuen stärker höckerförmig über die Mundspalte vor als bei jüngeren.

Bei den von mir untersuchten grossen japanischen Exemplaren liegen 29—32 horizontale Schuppenreihen zwischen der Basis des ersten Dorsalstachels und der Einlenkungsstelle der Ventralen, und von diesen 12—14 oberhalb, 17—18 unterhalb der Seitenlinie, welche letztere c. 85 Schuppen durchbohrt. Die Dorsale enthält 3—4 Stacheln und 30—33 Strahlen, die Anale 2 Stacheln und 26 gespaltene Strahlen. Die Länge der Pectorale ist c. $2\frac{3}{4}$—$2\frac{1}{2}$mal in der des Körpers (d. i. Totallänge mit Ausschluss der Caudale) enthalten.

Die grösste Rumpfhöhe über dem Beginne der Anale ist bei einem Exemptare von 38 Cent. Totallänge $2\frac{1}{3}$mal, bei einem grösseren von 60 Cent. Totallänge etwas mehr als $2\frac{1}{6}$mal ($2\frac{3}{19}$mal), die Kopflänge c. $3\frac{2}{3}$mal in der Körperlänge (bis Basis der mittleren Caudalstrahlen gemessen), die Länge des Auges 4 bis $4\frac{1}{3}$mal, die Schnauzenlänge (bis zur Unterkieferspitze) c. $3\frac{3}{4}$—$3\frac{1}{2}$mal in der Kopflänge enthalten.

Im Zwischenkiefer enthält die äussere Zahnreihe bedeutend längere und stärkere Spitzzähne als die übrigen Reihen, während im Unterkiefer die äussere Zahnreihe wohl von stärkeren Zähnen als die der 1—2 mittleren Reihen gebildet, aber an Länge und Stärke der Zähne von der innersten Zahnreihe weit übertroffen wird, die nach vorne jederseits mit 1—2 Fangzähnen abschliesst.

Nach Döderlein kommt diese Art nicht selten in Exemplaren von 47—51 Cent. Länge vor.

97 *a.* ***Brama japonica*** Hilgend. (? = *Brama Rajii* B. C.).

Taf. 1.

Die Herren Professoren Dr. v. Martens und Hilgendorf hatten die Güte, mir das im Berliner Museum befindliche typische Exemplar von *Br. japonica* Hilg. zum Vergleiche mit der nahe verwandten *Br. Rajii* Bl. einzusenden.

Das typische Exemplar von *Brama japonica* ist bis zur äussersten Spitze der Caudale nahezu 45 Cent. lang. Die grösste Körperhöhe zwischen der Insertionsstelle der Ventrale und dem Beginn der Dorsale ist nahezu $2\frac{1}{4}$mal, die Kopflänge 4mal in der Körperlänge (bis zur Basis der mittleren Caudalstrahlen), die Augenlänge c. $3\frac{2}{5}$mal, die Schnauzenlänge $3\frac{1}{2}$mal, die Stirnbreite ein wenig mehr als $3\frac{1}{2}$mal in der Kopflänge enthalten.

Die obere Profillinie des Kopfes ist wie bei gleich grossen Exemplaren von *Brama Rajii* in der Schnauzengegend (vor dem Auge) concav, über dieser aber ziemlich stark convex und steigt rascher nach oben an als bei *Brama Rajii*.

In der Bezahnungsweise der Kiefer unterscheidet sich *Br. japonica* nicht von *Brama Rajii* und beide Arten stimmen auch in der Art der Kopfbeschuppung mit einander überein; Stirne und Schnauze, Präorbitale und Unterkiefer, sowie das Randstück des Vordeckels sind schuppenlos und von mehr oder minder wurmförmig geschlängelten, röhrenförmigen Canälen durchzogen, zwischen denen äusserst feine, zahlreiche Porenmündungen liegen.

Der Beginn der Dorsale fällt bei dem typischen Exemplare von *Brama japonica* in verticaler Richtung ein wenig hinter die Insertionstelle der Ventralen, wie bei ebenso grossen Exemplaren von *Brama Rajii* [1] und enthält 5 [2] einfache, ungetheilte und 30 gegliederte Strahlen. Der höchste, d. i. der erste gegliederte Dorsalstrahl ist c. $\frac{2}{3}$mal so lang wie der Kopf. Die Pectorale gleicht an Länge $\frac{4}{11}$ des Körpers (mit Ausschluss der Caudale), die Ventrale erreicht nur eine Augenlänge; die schlanken zugespitzten Caudallappen gleichen sich fast genau an Länge und sind nicht bedeutend länger als der Kopf.

Die Anale zeigt 2 einfache und 26 gegliederte Strahlen. Der 1. Gliederstrahl ist c. $2\frac{1}{2}$mal in der Kopflänge enthalten und nicht ganz 2mal so lang wie der letzte. Die Seitenlinie durchbohrt 86—87 Schuppen am Rumpfe; 14 Schuppenreihen liegen zwischen der Basis des ersten, sehr kurzen Dorsalstachels und der Seitenlinie, und 16 zwischen letzterer und der Insertionsstelle der Ventralen. Die über der Seitenlinie bis zur Rückenlinie des Rumpfes gelagerten Schuppen sind voneinander an Grösse nicht bedeutend verschieden. Unterhalb der Seitenlinie nehmen die Schuppen von der 2. oder 3. Schuppenreihe angefangen bis zur Höhe der Pectorale herab, d. i. bis zur 8.—9. horizontalen Schuppenreihe sehr rasch an Höhe, nicht aber an Länge zu, und von der 9. Reihe bis zur Bauchlinie herab, allmälig an Höhe ab. Die die Achselhöhle überdeckenden Schuppen sind bei dem typischen Exemplare von *Brama japonica* merklich schlanker als bei ebenso grossen Exemplaren von *Brama Rajii*, hierin, so wie in der stärkeren Rundung und rascheren Erhebung der Stirnlinie und in dem Vorhandensein von 5 einfachen Dorsalstrahlen liegen die einzigen Merkmale, nach denen sich *Brama japonica* von *B. Rajii* unterscheiden lässt; doch scheint es mir sehr zweifelhaft, ob diese wenigen Unterschiede bei Untersuchung einer grösseren Reihe von Exemplaren sich als constant erweisen werden; insbesondere dürfte die stärkere Ansteigung der Stirnlinie, die bei dem typischen Exemplare von *Brama japonica* bemerkbar ist und durch die stärkere Entwicklung des Stirnkammes veranlasst wird, keinen genügenden Artcharakter abgeben. Steind.

D. 5 (4)/30 (31). A. 2/26. P. 20. V. 1/5. L. lat. 86—87.

---

[1] Bei einem 60 Cent. langen Individuum von Brama Rajii fällt der Beginn der Dorsale in verticaler Richtung über das hintere Ende der horizontal zurückgelegten Ventralen.

[2] Der letzte 5. Strahl, von mir noch zu den einfachen Strahlen gezählt, ist leider nicht mehr vollständig erhalten, es fehlt das obere Endstück, welches vielleicht gespalten gewesen sein mag, in welchem Falle somit wie bei Brama Rajii nur 4 stachelige und 31 getheilte Strahlen zu zählen wären.

98. ***Brama longipinnis*** Lowe (*Argo Steindachneri* Döderl. in litt.).

Bei einer Totallänge von c. 25 Cent. ($19^1/_2$ Cent. bei Ausschluss der Caudale) ist die grösste Rumpfhöhe etwas mehr als $2^1/_5$mal in der Totallänge, genau 2mal in der Körperlänge bis zum hinteren Rande der mittleren Caudalstrahlen oder etwas weniger als $1^3/_4$mal in der Körperlänge bis zum Beginn der Caudale, die Kopflänge $3^1/_4$mal in der Körperlänge, der Augendiameter $4^1/_2$mal, die Schnauzenlänge bis zur Kinnspitze $3^2/_5$mal, die Stirnbreite $2^3/_4$mal, die Länge der Mundspalte 2mal in der Kopflänge enthalten.

Die obere Kopflinie erhebt sich rasch unter schwacher Bogenkrümmung zugleich mit der Nackenlinie bis zum Beginn der Dorsale. Die Stirne ist breit, querüber mässig gewölbt und wie die Schnauze, das Präorbitale und der Unterkiefer schuppenlos.

Die Mundspalte erhebt sich minder steil nach vorne als bei *Brama Rajii* und das hintere Ende des Oberkiefers fällt in verticaler Richtung ein wenig vor den hinteren Augenrand. Beide Kiefer tragen eine Binde spitzer Zähne, die nach hinten allmälig an Breite abnimmt. Im Unterkiefer sind die Zähne der innersten Reihe bedeutend stärker entwickelt als die der Aussenreihe und letztere etwas stärker als die der mittleren Reihen. Im Zwischenkiefer nehmen die Zähne der breiteren Zahnbinde gegen die Innenreihe nur wenig an Grösse zu. Gaumen- und Vomerzähne fehlen.

Der stark gebogene, freie Rand des Vordeckels ist zart gewimpert, das Randstück des letzteren trägt keine Schuppen.

Die Ventrale ist ein wenig vor der Pectorale eingelenkt und an Länge nur $^1/_3$ des Kopfes gleich, die Pectorale dagegen ebenso lang wie der Kopf und minder stark zugespitzt als bei *Brama Rajii* Bl. Die Ventralen sind über dem Bauchrande eingelenkt, der zwischen den Ventralen bis zur Analgrube eine Schneide bildet.

Die Dorsale beginnt in verticaler Richtung ein wenig hinter der Basis der Pectorale und ist in ihrem vorderen Theile sichelförmig erhöht; sie enthält 4 rasch an Höhe zunehmende einfache Strahlen, von denen der letzte jedoch nur kaum $^1/_3$ der Höhe der beiden folgenden getheilten Strahlen erreicht, deren Länge der grössten Rumpfhöhe gleicht.

Die gegliederten Dorsalstrahlen nehmen vom 2. bis zum 9. rasch, die nächstfolgenden bis zum 14. nur wenig an Höhe ab; die übrigen Strahlen sind bis zum letzten fast von gleich geringer Länge. Die Anale ist ähnlich gestaltet wie die Dorsale, enthält 3 ungespaltene, biegsame Strahlen und beginnt in verticaler Richtung unter dem 7. oder 8. gegliederten Dorsalstrahl.

Beide Flossen sind in dem vorderen erhöhten Theile vollständig und hinter der Mitte ihrer Längenausdehnung in der kleineren basalen Höhenhälfte der Strahlen überschuppt. Die Basislänge der Dorsale übertrifft die Hälfte der Körperlänge fast noch um eine Augenlänge, die der Anale dagegen ist ein wenig kürzer als die Hälfte der Körperlänge.

Die Caudale ist am hinteren Rande stark halbmondförmig eingebuchtet und in den beiden grösseren vorderen Dritteln ihrer Ausdehnung vollständig überschuppt. Die Länge der Schwanzflosse ist um einen halben Augendiameter geringer als die des Kopfes. Die Schuppen, insbesondere die am Kopfe gelegenen Schuppen, die im Verhältniss zu den Rumpfschuppen klein zu nennen sind, zeigen am freien Felde zahlreiche, radienförmig nach hinten sich ausbreitende Leistchen, die mit feinen Zähnchen besetzt sind; die mittlere Leiste ist stets etwas stärker entwickelt als die übrigen und beginnt bereits auf den Schuppen am Deckel, Hinterhaupte und am Nacken vorne mit einer etwas stärkeren, knotenförmigen Erhöhung. Bei den übrigen mehr oder minder grösseren Rumpfschuppen bildet sich aber dieser Vorsprung zu einer Art von liegendem Stachel aus, der am stärksten auf den Schuppen des Schwanzstieles und des zunächst sich anschliessenden Rumpftheiles entwickelt ist, und vor welchem jede vorangehende Schuppe in der Höhenmitte des hinteren Randes ziemlich tief eingebuchtet ist. Der Randtheil der Schuppen ist sehr dünn, häutig. Bei den Schuppen des Rumpfes trennt eine Querleiste das bedeckte Schuppenfeld von dem freiliegenden Theile, und in der Höhenmitte derselben liegt der früher erwähnte stachelartige Vorsprung.

Die grössten Rumpfschuppen liegen in und zunächst unter der Höhenmitte des Rumpfes; gegen die Basis der Anale zu nehmen die Schuppen der folgenden Reihen minder rasch an Höhe ab, als die Schuppen der oberen Rumpfhälfte gegen die Rumpfmitte an Höhe zunehmen, sind daher bedeutend grösser als letztere. Nur an und zunächst dem Bauchrande zwischen dem Beginn der Anale und der Ventrale sind die Schuppen an Grösse von jenen zunächst der Basis der Dorsale und der Nackenschuppen gelegenen wenig verschieden.

In den einzelnen horizontalen Schuppenreihen selbst nehmen die Rumpfschuppen vom hinteren Kopfende bis zum Beginn des Schwanzstieles allmälig an Grösse zu und von letzterem bis zur Caudale rascher ab. 7 Schuppen decken die Achselhöhle und eine von 3 kleineren Schuppen überdeckte Flügelschuppe liegt über der Basis der Ventrale (jederseits). 37—38 Schuppen liegen zwischen dem oberen Ende der Kiemenspalte und der Basis der mittleren Caudalstrahlen in einer Längsreihe und 26 Querschuppenreihen zwischen dem Beginn der Dorsale und dem Bauchrande zunächst hinter der Spitze der zurückgelegten Ventralen.

Kopf, Rumpf und der beschuppte Theil der Dorsale, Caudale wie der Anale bleifarben mit lebhaftem Silberglanz (etwas dunkler ist die Oberseite des Kopfes und das obere Viertel des Rumpfes); schuppenloser Theil der Dorsale und Anale schwärzlich; Pectorale und Ventrale wässerig gelblichgrün, schuppenloser Theil der Caudale gelb mit einem Stiche ins Grünliche.

Magen mässig gross, als Inhalt fanden sich Reste von Tintenfischen, Anneliden, kleine Krebse, Quallen oder Salpen. Der Darm macht eine Schlinge; Pylorusanhänge 2 von ziemlicher Grösse. Schwimmblase vorhanden; Pseudobranchien wohl entwickelt.

R. br. 7. D. 4/30. A. 2/23 (24). P. 20. V. 1/5.

Lowe's Beschreibung von *Brama longipinnis* (Proc. Zool. Soc. of London 1843, p. 82) ist leider sehr kurz gehalten, passt aber im Wesentlichen genau auf das in den vorangehenden Zeilen beschriebene Exemplar, welches mir von Döderlein als *Argo Steindachneri* n. sp. & nov. gen. eingesendet wurde, sie lautet nämlich: „B. corpore abbreviato, alto: squamis postice caudam versus antrorsum aculeato-umbonatis; pinna dorsali analique antice longe falcato productis. D. 4+31; A. 2+26; P. 20; V. 1+5. Sq. lin. lat. 41—45. The example seen measured 18 inches and $^1/_4$ in lenght and was 8 inches deep at the origin of the dorsal and anal fins.“

In der Art der Rumpfbeschuppung nähert sich *B. longipinnis* Lowe unter den übrigen Brama-Arten am meisten der *Brama Saussurii* G. Lunel (G. Lunel, Révision du Genre Castagnale (Brama), Mémoires de la Société de Physique et d'Hist. naturelle de Genève. T. XIX, 1866, pag. 185, Pl. II), minder der *Br. Raschii* Esm. (Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania 1861, pag. 239 mit Tafel), unterscheidet sich aber von beiden durch die gedrungenere Körperform und die bedeutend stärkere Verlängerung des vordersten Theiles der Rücken- und Afterflosse. In der Zahl der Flossenstrahlen weicht *Br. longipinnis* L. nur wenig von *Brama Raschii* Esm. ab, deren Flossenformel nach Esmark lautet: D. $^4/_{28}$. P. 18. V. $^1/_5$. A. $^2/_{22}$. L. l. 42.

Dr. Döderlein erhielt *Br. longipinnis* nur einmal (im November) in Tokio; die Fischer erklärten, diesen Fisch noch nie gesehen zu haben.

Japanischer Name: Ebo shidai.

99. ***Pteraclis (Centropholis) Petersii*** Hilgend.

Taf. II.

Das typische, im Universitäts-Museum zu Berlin befindliche Exemplar ist mit Ausschluss der Caudale, deren Spitzen abgebrochen sind, 21 Cent. lang und über dem Beginne der Anale etwas mehr als $7^1/_2$ Cent. hoch; bei Ergänzung der Caudale dürfte die Totallänge c. 25 Cent. betragen.

Die grösste Rumpfhöhe ist c. $2^2/_3$mal, die Kopflänge etwas mehr als 4mal in der Körperlänge, der Augendiameter 3mal, die Stirnbreite $4^2/_5$mal, die Schnauzenlänge bis zur Kinnspitze $4^1/_2$mal, die Länge der Mundspalte etwas weniger als 2mal in der Kopflänge enthalten.

Die Mundspalte steigt sehr rasch nach oben an, die Bezahnung der beiden Kiefer gleicht jener bei *Brama*. Im Unterkiefer sind die Zähne der innersten, 3. Reihe, bedeutend länger als die übrigen, mit der Spitze nach Innen umgebogen und die Zähne der Aussenreihe nur wenig länger als die der Mittelreihe.

Im Zwischenkiefer unterscheiden sich die Zähne der einzelnen Reihen an Länge und Stärke minder bedeutend von einander. Vomer- und Gaumenzähne fehlen. Das hintere Ende des Oberkiefers fällt in verticaler Richtung ein wenig hinter die Augenmitte.

Stirne, Schnauze, Unterkiefer und Randstück des Vordeckels schuppenlos. Hintere Rand des Vordeckels ungezähnt.

Die Dorsale wird nur von einfachen, ungegliederten Strahlen gebildet und beginnt in verticaler Richtung bereits zu Anfang des letzten Viertels der Augenlänge mit kurzen Strahlen, die unter einer Schuppenscheide verborgen liegen.

Diese ersten Strahlen erheben sich vom 1. bis zum 5. minder rasch als vom 5. bis zum 10., dessen Höhe bereits eine Kopflänge erreicht. Der 11. Strahl übertrifft die Kopflänge nahezu um einen Augendiameter, der 14. und 15. längste Dorsalstrahl erreicht nahezu drei Kopflängen; die folgenden Strahlen nehmen bis zum letzten minder rasch an Höhe ab, als die ersteren Dorsalstrahlen (mit Ausschluss der 4—5 vordersten kurzen Strahlen) bis zum 14. an Höhe zunahmen.

Die Anale beginnt in verticaler Richtung ein wenig hinter dem Anfang der Dorsale und gleicht derselben in der allgemeinen Form und Höhe der Strahlen, doch ist bereits der dritte Analstrahl ebenso lang wie der Kopf mit Ausschluss der Schnauze und der 4. und 5. der längste der Flosse und an Höhe drei Kopflängen gleich.

Die Pectorale ist ebenso lang wie der Kopf, die Ventrale ziemlich weit vor der Pectorale eingelenkt und nur wenig länger als das Auge, die Caudale halbmondförmig eingebuchtet. Die Lappen der letzteren dürften stark zugespitzt und höchst wahrscheinlich noch länger als der Kopf gewesen sein. Der noch vorhandene Rest der Caudale an dem hier zu beschreibenden Exemplare ist 3 Ctm. lang und mit Ausnahme des hinteren Theiles der mittleren Strahlen ganz überschuppt. Eine von hohen, schmalen Schuppen gebildete Scheide deckt die Basis der Dorsal- und Analflosse, die hinterste Schuppe dieser Scheide ist besonders stark in die Länge gezogen. Die Flügelschuppe über der Basis der Ventrale, auf welcher noch eine zweite Schuppe sich legt, ist fast so lang wie die Flosse selbst. Drei Schuppen liegen an der Hinterseite der Brustflossenbasis und ragen in die Achselhöhle hinein.

Die Schuppen am Kopfe, Vorderrücken und unterhalb der Pectorale gegen die Ventrale zu sind bedeutend kleiner als die übrigen Rumpfschuppen, welche in ähnlicher Weise wie bei *Brama longipinnis* am Beginne des freien Schuppenfeldes mit einem stachelähnlichen Vorsprunge bewaffnet sind, der in einen Einschnitt am hinteren Rande jeder vorangehenden Schuppe sich einfügt. Zwischen dem oberen Ende der Kiemenspalte und der Basis der Caudale liegen 49 Schuppen in einer Längsreihe und 18 zwischen der Dorsale und der Anale in der grössten Rumpfhöhe.

Kopf und Rumpf silbergrau, Dorsale, Ventrale und Anale schwärzlich, Pectorale gelb. Kiemenstrahlen 7. Pseudobranchien stark entwickelt.

Die Rachenzähne am vorderen unteren Aste des ersten Kiemenbogens sind schlank, am oberen Rande gezähnt und nehmen vom vordersten bis zum 7. rasch an Länge zu; über diesem liegt nur mehr ein einziger etwas kürzerer Rachenzahn am oberen Aste desselben Kiemenbogens.

D. 50. V. 1/5. A. 40. P. 19.

Fundort: Enosima.

Herr Dr. Hilgendorf, dessen Güte ich die Untersuchung des in den vorangehenden Zeilen beschriebenen typischen Exemplares von *Centropholis Petersii* verdanke, hält dasselbe für den Repräsentanten einer besonderen Gattung *(Centropholis)*, meiner Ansicht nach unterscheidet es sich aber nicht wesentlich von den *Pteraclis*-Arten. Steind.

100. *Lampris luna* sp., Lin., Gmel.

R. br. 6. D. 48. A. 37. P. 22. V. 12. C. 5/20/5.

Der Fisch ist den Japanern wohl bekannt und wird besonders im Herbst nicht sehr selten gefangen. Sein Fleisch ist sehr geschätzt, seiner bedeutenden Grösse halber aber kommt er gewöhnlich nur in Stücken zum Verkauf.

Die Fischer von Tokio erzählten mir lange Zeit von dem riesigen, farbenprächtigen *Mandai* oder *Ebosudai*, welche Namen fälschlicher Weise auch auf andere Fische angewendet wurden, bis sie mir ein ihrer Ansicht nach kleines Exemplar unzerstückt brachten. Es mass von der Schnauzenspitze bis zur Schwanzspitze 110 Ctm., der Kopf allein war 28 Ctm. lang und 17 Ctm. breit.

Längster Dorsalstrahl 24 Ctm., 12. Dorsalstrahl 4 Ctm., 36. Dorsalstrahl $7^1/_2$ Ctm., letzter 3 Ctm.; 2. Analstrahl 4 Ctm., 12. Analstrahl 7 Ctm., letzter $2^1/_2$ Ctm.; Länge der Pectorale 24 Ctm., der Ventrale 26 Ctm., der Caudale 22 Ctm.

Augendurchmesser $5^1/_2$ Ctm., Schnauzenlänge 12 Ctm. Farbe glänzend röthlich, mit runden Silberflecken, Flossen goldroth (Döderlein).

Fam. SCOMBRIDAE.

101. *Scomber colias* Lin., Gmel.

Syn.: *Scomber pneumatophorus* de la Roche.
„ *grex* Mitch.
„ *pneumatophorus major* Schleg., Fauna japonica, Poiss., p. 93, Pl. 47, Fig. 1.
„ *saba* Blkr., Niewe Nalez. op de Ichth. van Japan. p. 95, in Verhand. van het Batav. Genootsch. van Kunst u. Wetensch. Deel. XXVI.
„ *pneumatophorus minor* Schleg., l. c. pag. 94, Pl. 47, Fig. 2.
„ *janesaba* Blkr., l. c. pag. 96.
„ *tapeinocephalus* Blkr. l. c. pag. 97.
„ *Diego* Ayres, Proc. Cal. Acad. Nat, Sc. I, pag. 92, 1855.
„ *pneumatophorus* Jord & Gilb., Bull. of the U. St. Nat. Mus., Nro. 16, 1883, pag. 424.
„ *colias* Jord. & Gilb., l. c. pag. 910.

Ich habe bereits in der 5. Fortsetzung meines ichthyologischen Berichtes über eine nach Spanien und Portugal unternommene Reise (1868) hervorgehoben, dass die Zahl der Stacheln in der 1. Dorsale stets mehr als 7 und zwar mindestens 9 (bei alten Individuen), in der Regel aber 10 und wie sich aus der Untersuchung zahlreicher neu erworbener Exemplare ergab, insbesondere bei jüngeren Individuen häufig auch 11 beträgt; die beiden letzten Stacheln sind aber stets sehr kurz und spitz, liegen in der Dorsalfurche verborgen und verschwinden bei älteren Individuen zuweilen spurlos.

Die Kopflänge ist bei Individuen von nur $13^1/_2$—$17^1/_2$ Ctm. Länge genau oder etwas mehr als $3^1/_2$ mal, bei älteren Exemplaren von 22—25 Ctm. Länge genau oder etwas mehr als $3^3/_5$ mal, bei erwachsenen Individuen von 40—42 Ctm. Länge $3^1/_2$ bis $3^3/_5$ mal in der Körperlänge enthalten; bei einem 34 Ctm. langen Exemplare aus Fiume (♀ zur Laichzeit im Juli gefangen) erreicht sie dagegen ausnahmsweise fast nur $^1/_4$ der Körperlänge oder $^2/_9$ der Totallänge.

Das Verhältniss der Rumpfhöhe zur Körperlänge ist sehr variabel und hängt theilweise von der Jahreszeit (unmittelbar vor oder nach Beendigung des Laichgeschäftes), theilweise aber auch von der mehr oder minder reichen Nahrung ab, die die Fische an gewissen Localitäten finden. Die Rumpfhöhe schwankt hienach zwischen $^2/_9$—$^1/_6$ der Körperlänge und beträgt bei einigen von mir untersuchten Kümmerern aus Japan sogar nur $^5/_{33}$ der letzteren.

Die Augenlänge ist bei jungen Individuen genau oder etwas mehr als 4mal, bei älteren und völlig erwachsenen Exemplaren ca. $4^2/_5$ mal in der Kopflänge enthalten. Der Zeichnung nach lassen sich wie bei *Scomber scombrus* zwei Hauptvarietäten unterscheiden; bei der einen ist die obere Rumpfhälfte mit mehr minder geschlängelten Querbinden geziert, die bald mehr bald minder schmal sind, bei der anderen Varietät aber sind die Binden durch Flecken ersetzt.

Die von Döderlein mir eingesendeten Exemplare waren als *Sc. janesaba* Blkr. bezeichnet und sind von geringer Grösse (bis 22 Ctm.). Die Körperhöhe ist bei denselben $6^1/_2$ mal, die Kopflänge 4 mal in der Totallänge, der Augendiameter ca. 4 mal in der Kopflänge enthalten.

Japanischer Name: Saba.

Sehr häufig bei Tokio, ebenso bei Tango. Das Wiener Museum besitzt überdies noch japanische Exemplare von Nagasaki und Osaka durch Baron Ransonett.

NB. Schon aus einer ganz oberflächlichen Betrachtung der von Cuvier und Valenciennes gegebenen Abbildung von *Sc. colias* ergibt sich, dass diese Art mehr als 7 Stacheln in der Dorsale enthalten muss, und dass der Zeichner entweder die zwei letzen Strahlen zu zeichnen vergass, oder dass dieselben bei dem typischen Exemplare abgebrochen waren.

Mit bewunderungswürdiger Zähigkeit halten noch manche Ichthyologen der Gegenwart an dem Irrthume fest, dass *Sc. colias* sich von *Sc. pneumathophorus* in der Zahl der Dorsalstachel wesentlich unterscheiden lasse, obwohl Cuvier und Valenciennes selbst über die Zahl der Stacheln in der Dorsale bei *Sc. colias* sich nirgends aussprechen, und es gerade nicht schwer fällt, sich ein grosses Exemplar einer Makrele mit einer Schwimmblase zu verschaffen, das eben nach C. V. ein *Sc. colias* sein muss.

102. ***Orcynus Schlegelii*** n. sp.?, Steind.

Taf. III, Fig. 1.

Die Kopflänge ist bei einer Totallänge von nahezu 40 Ctm. Länge unbedeutend mehr als 3 mal, die grösste Rumpfhöhe ein wenig mehr als 4 mal in der Körperlänge, die Länge der Augenhöhle bedeutend mehr als $4^1/_3$ mal (fast $4^1/_4$ mal), der nach Aussen frei liegende Theil des Auges aber $6^1/_8$ mal, die Stirnbreite $3^1/_4$ mal, die Schnauzenlänge etwas mehr als $3^1/_4$ mal die grösste Kopfbreite etwas mehr als 2 mal, die grösste Kopfhöhe $1^3/_{10}$ mal in der Kopflänge enthalten.

Das hintere Ende des Oberkiefers fällt unter die Augenmitte. Die Mundspalte steigt nur mässig nach vorne an und die beiden Kiefer reichen gleich weit nach vorne. 26 schlanke, spitze Zähne liegen im Unterkiefer und 29—30 im Zwischenkiefer; sie bilden eine einfache Reihe und sind mit der Spitze nach hinten gekehrt. Auf den Gaumenbeinen wie am Vomer liegt eine längliche, schmale Binde von Sammtzähnen.

Der hintere Rand des Vordeckels ist bogenförmig gekrümmt und vereinigt sich mit dem unteren Rande unter einem stumpfen Winkel, der sich einem rechten stark nähert. Der hintere Rand des Kiemendeckels läuft parallel zu dem entsprechenden des Vordeckels. Der Deckel selbst ist ca. $2^1/_2$ mal höher als lang.

Der 1. Dorsalstachel ist ca. $2^3/_5$ mal, der 4. $3^2/_5$ mal, der 6. ca. $4^1/_2$ mal, der 8. ca. $6^1/_4$ mal, der 10. $7^4/_5$ mal, der 13. letzte Strahl fast 14 mal in der Kopflänge enthalten; der obere Rand der stacheligen Dorsale ist nur zwischen den sieben ersten Stacheln concav, von dem 8. bis zum letzten Stachel senkt er sich ohne Krümmung und gleichmässig schwach nach hinten.

Die grösste Höhe der 2. Dorsale am 4. und 5. Strahle erreicht ca. $^1/_4$ der Kopflänge; der obere hintere Rand derselben Flosse ist stärker concav als der der ersten stacheligen Dorsale und fällt zugleich viel rascher und steiler nach unten ab. Hinter der 2. Dorsale, die im Ganzen 13 Strahlen enthält ($^1/_2/_{10}$), liegen 10, hinter der 14-strahligen Anale, die an Form und Höhe der 2. Dorsale entspricht, 8 Flösselchen. Von den 10 Flösselchen hinter der 2. Dorsale ist das erste sehr klein und steht sehr nahe hinter dem letzten Strahle der 2. Dorsale.

Die Länge der Pectorale ist ca. $1^4/_5$ mal, die der Ventrale etwas mehr als $2^4/_5$ mal in der Kopflänge begriffen.

Die schlanken Caudallappen sind nahezu von gleicher Länge und erreichen, von der Basis der mittleren Caudalstrahlen gemessen, ca. $^5/_8$ der Kopflänge.

Die Wangenschuppen sind gross, lang, lancetförmig und liegen unter der Kopfhaut verborgen; etwas kleiner sind die Schuppen an den Seiten des Hinterhauptes. Die Schuppen des Corselets sind zunächst der Scapula und unter (und vor) der Basis der Pectorale ziemlich gross, nehmen längs dem oberen Rande der horizontal zurückgelegten Brustflosse nach hinten allmälig an Umfang ab und gehen hinter der Spitze der

Pectorale unmerklich in die kleinen Schuppen der hinteren oberen Rumpfhälfte über. Einige Reihen grösserer, überhäuteter Schuppen liegen zunächst unter der Basis der stacheligen Dorsale.

Körper oben bläulich, unten silberglänzend, erste Dorsale schwärzlich.

Fundort: Tokio.

Das hier beschriebene 36 Ctm. lange japanische Exemplar, welches mir von Dr. Döderlein als *Thynnus pelamys?* eingesendet wurde, zeigt eine auffallende Aehnlichkeit mit *Thynn. brachypterus* C. V. und *Thynn. brevipinnis* C. V., die jetzt wohl ziemlich allgemein als Jugendformen von *Thynn. thynnus* White, Gthr. (= *Thynnus vulgaris* C. V. = *Orcynus thynnus* sp. Lin.) betrachtet werden, doch unterscheidet es sich, abgesehen von einigen wohl nicht wesentlichen Unterschieden in der Zahl der Dorsalflossen-Strahlen, von gleich grossen Exemplaren des gemeinen Thunfisches durch die gedrungenere Körperform und die grössere Länge der Pectorale (bei zwei Exemplaren des *Orcynus brachypterus* von $36^1/_2$—39 Ctm. Länge ist der Kopf $3^1/_2$—$3^3/_4$ mal in der Körperlänge enthalten); ich bin daher in einigem Zweifel, ob dasselbe nur als eine Jugendform von *Orcynus thynnus* sp. L., oder aber als Repräsentant einer besonderen Art betrachtet werden darf.

D 13/13+X. A. 14+VIII. P. 30.

NB. Von *Thynnus pelamys* L. = *Euthynnus pelamys* (L.) Ltk. besitzt das Wiener Museum Prachtexemplare von den Galapagos-Inseln, Peru, den Gesellschaftsinseln, von Cuba und St. Helena. (Steind.)

103. *Scarda (= Pelamys) chilensis* C. V., var. *orientalis* Schleg.

Die beiden von Dr. Döderlein bei Tokio gesammelten Exemplare besitzen, wie das von Schlegel in der Fauna japonica abgebildete Exemplar, nur sechs Flösselchen hinter der Anale und acht hinter der 2. Dorsale.

Bei dem nur $45^1/_2$ Ctm. langen Exemplare ist die Kopflänge $3^1/_2$ mal, die grösste Rumpfhöhe mehr als $4^2/_3$ mal in der Körperlänge (bis zur Basis der mittleren Caudalstrahlen), die Länge des Auges, so weit es nach Aussen frei liegt, ca. $7^3/_4$ mal, die Schnauzenlänge 3 mal, die Stirnbreite $3^1/_2$ mal, die Länge der Pectorale $2^2/_5$ mal in der Kopflänge enthalten. Sieben nur wenig nach hinten und oben ansteigende, blaue Längsstreifen in fast gleicher Entfernung von einander in der oberen Rumpfhälfte, und eine verschwommene graue Längsbinde etwas unter der Höhenmitte des Rumpfes.

D. 19 [1]/15+VIII. A. 15/6+VI.

Bei dem 2. grösseren Exemplare von fast 60 Ctm. Länge ist die Kopflänge unbedeutend mehr als 3 mal, die Rumpfhöhe kaum $3^4/_5$ mal in der Körperlänge, der Augendiameter $7^2/_5$ mal, die Schnauzenlänge nicht ganz 3 mal, die Stirnbreite ca. $3^1/_3$ mal und die Länge der Pectorale mehr als $2^1/_5$ mal in der Kopflänge enthalten.

Auf der rechten Rumpfseite liegen 9—10 blaue Längsstreifen, die ein wenig schräge nach hinten und oben ziehen. Auf der linken Rumpfseite dagegen ziehen die obersten breiteren fünf Längsstreifen sehr schräge nach hinten und oben, und endigen zwischen der 2. Dorsale und dem 1. Flösselchen. Von dem 5. Längsstreifen zweigen sich zwei Längsstreifen ab, die horizontal nach hinten ziehen, und unter diesen liegen noch zwei schwach ausgeprägte Längsstreifen, die bereits in der Pectoralgegend beginnen.

D. 20 [1]/15+VIII. A. 15 (16?)+VI.

Dieses Exemplar zeigt in der Anordnung und Zahl der Längsstreifen einen interessanten Uebergang zu jener an der Westküste Amerikas häufig vorkommenden Varietät (mit schrägen ansteigenden Längsstreifen), welche von Cuvier und Valenciennes als *Pelamys chilensis* beschrieben wurde. Die Zahl der Flösselchen ist bei dieser Art sehr variabel; bei zwei grossen Exemplaren, welche ich aus Peru erhielt, liegen acht Flösselchen hinter der Dorsale und sieben hinter der Anale, und bei einem dritten Exemplar aus Chile sieben hinter der Dorsale, sechs hinter der Anale.

Japanischer Name: Kitsune (d. i. Fuchs) oder Sujikatsuun.

---

[1] Der letzte 19., resp. 20. Dorsalstachel ist ganz überhäutet, sehr kurz und nicht frei beweglich.

104. *Auxis Rochei* sp., Risso.

Syn: *Auxis tapeinosoma* Blkr., l. c. pag. 98, Taf. VII, Fig. 1 (jun.).

Die beiden von Dr. Döderlein bei Tokio gesammelten Exemplare sind 30 und 45 Ctm. lang. Bei dem kleineren Exemplare ist die grösste Rumpfhöhe nicht ganz $4^1/_2$ mal in der Körper-, oder ein wenig mehr als 5 mal in der Totallänge, die Länge des Kopfes etwas mehr als $3^2/_3$ mal in der Körperlänge, der Augendiameter $5^2/_3$ mal, die Schnauzenlänge $4^1/_3$ mal, die Stirnbreite $3^3/_4$ mal, die Länge der Pectorale unbedeutend mehr als 2 mal in der Kopflänge enthalten. Die Kiefer reichen gleich weit nach vorne. Das hintere Ende des Oberkiefers fällt in verticaler Richtung unter die Augenmitte.

Bei dem zweiten grösseren Exemplare dagegen ist die grösste Rumpfhöhe $3^1/_2$ mal, die Kopflänge $3^2/_5$ mal in der Körperlänge (bis zur Basis der mittleren Caudalstrahlen), die Schnauzenlänge unbedeutend mehr als 4 mal, die Länge des Auges, so weit es nach aussen frei liegt, ca. $6^2/_3$ mal, die Stirnbreite $3^3/_4$ mal, die Länge der Pectorale 2 mal in der Kopflänge enthalten. Das hintere Ende des Oberkiefers fällt in verticaler Richtung ein wenig hinter die Augenmitte.

Bei dem kleineren Exemplare enthält die Dorsale eilf, bei dem grösseren zehn Stacheln in der 1. Dorsale, und bei beiden liegen acht Flösselchen hinter der 2. Dorsale, sieben hinter der Anale.

Rumpfzeichnung und Beschuppung genau wie bei den europäischen Exemplaren. Ganz junge Individuen zeigen eine auffallend schlanke Körperform, die jener von *Scomber scombrus* gleicht; so ist bei einem Individuum von kaum 16 Ctm. Länge die Körperhöhe mehr als $5^2/_3$ mal in der Körperlänge oder $6^1/_6$ mal in der Totallänge, die Kopflänge 4 mal in der Körperlänge, die grösste Kopfhöhe mehr als $1^3/_5$ mal, die grösste Kopfbreite ca. $2^2/_5$ mal, die Länge der Pectorale $2^1/_2$ mal in der Kopflänge enthalten.

Auxis tapeinosoma Blkr. ist meines Erachtens nur eine Jugendform von *Auxis Rochei*. Bezüglich der Zahl der Flösselchen ist Bleeker's Abbildung in vollem Widerspruche mit der Beschreibung, nach letzterer sollen neun Flösselchen hinter der Dorsale liegen, während die Abbildung deren nur sieben zeigt, vielleicht ist beides irrig und es waren acht Flösselchen ursprünglich vorhanden. Übrigens kommt es bei den thynnus-artigen Fischen nicht selten vor, dass der letzte Strahl der 2. Dorsale sich von letzterer ein wenig nach Art eines Flösselchens trennt und ein wenig entfernt.

Die Körperhöhe soll ferner bei *A. tapeinosoma* Blkr. $6^1/_2$ mal in der Totallänge enthalten sein, während erstere nach Bleeker's Abbildung kaum mehr als $^1/_6$ der Totallänge erreicht.

Nach Dr. Döderlein kommt *Auxis Rochei* häufig bei Tokio vor und wird Sodagat su uwo von den Japanern genannt.

105. *Scomberomorus (= Cybium) niphonium* C. V.

Diese Art ist überaus häufig an den südlichen Küsten Japans und kommt auch an den Küsten von China vor.

Die beiden von Dr. Döderlein eingesendeten Exemplare sind 49 und 51 Centimeter lang. Die grösste Rumpfhöhe ist bei denselben nahezu 6 bis fast $6^2/_5$ mal, die Kopflänge $4^3/_4$ bis fast $4^5/_6$ mal in der Körperlänge, der Augendurchmesser c. $6^3/_4$—7 mal, die Schnauzenlänge 3—$2^3/_4$ mal, die Stirnbreite nahezu $3^3/_4$—$3^2/_3$ mal, die grösste Kopfhöhe c. $1^1/_3$ mal, die grösste Kopfbreite zwischen den Deckeln $2^1/_2$—$2^3/_5$ mal, die Länge der sichelförmigen Pectorale $2^1/_5$ bis unbedeutend mehr als 2 mal in der Kopflänge enthalten.

Das hintere Ende des Oberkiefers fällt in verticaler Richtung genau unter oder noch ein wenig hinter den hinteren Augenrand. Beide Kiefer reichen gleich weit nach vorne. Im Zwischenkiefer liegen jederseits 19—20, im Unterkiefer 16—18, dreieckige, comprimirte, schlanke Zähne, von denen die des Unterkiefers bedeutend stärker als die des Zwischenkiefers entwickelt sind. In beiden Kiefern nehmen die Zähne gegen die Längenmitte der Kieferseiten an Länge und Stärke allmälig zu. Die Vomer- und Gaumenzähne bilden ziemlich schmale Längsbinden und sind sehr klein, sammtartig.

Der hintere Rand des Vordeckels ist fast vertical gestellt, ziemlich stark eingebuchtet; der Vordeckelwinkel nach hinten vorgezogen, elliptisch gerundet. Pseudobranchien stark entwickelt.

Die stachelige Dorsale beginnt in verticaler Richtung ein wenig hinter der Basis der Pectorale und enthält bei jedem der beiden Exemplare aus Döderlein's Sammlung 19 Stacheln, die zweite Dorsale im Ganzen 17 Strahlen, hinter welchen 8 Flösselchen liegen, die Anale 16—17 Strahlen, auf welche 9 Flösselchen folgen. Der Beginn der Anale ist ebenso weit von der Basis der mittleren Caudalstrahlen wie vom hinteren Ende des Kopfes entfernt und der Beginn der zweiten Dorsale fällt circa in die Mitte der Entfernung des hinteren Augenrandes von der Basis der mittleren Caudalstrahlen.

Die Seitenlinie ist in dem mittleren Theile ihres Verlaufes am Rumpfe schwach wellenförmig gebogen und senkt sich unter dem Beginn der zweiten Dorsale, somit ein wenig vor der Mitte der Rumpflänge, unter schwacher Bogenkrümmung mässig rasch nach hinten.

Oben blau, unten silberig; mehrere Längsreihen nicht sehr scharf hervortretender Flecken an den Seiten des Rumpfes in dessen oberer Höhenhälfte. Erste Dorsale, Schwanz- und Brustflossen schwärzlich, ebenso die obere Hälfte den zweiten Rückenflosse; die übrigen Flossen sind gelblich.

Häufig bei Tokio und Tango (am japanischen Meere).

Japanischer Name: Sawara.

Das Wiener Museum erhielt überdies von derselben Art zwei junge Exemplare von Tschifu durch Herrn Baron Ransonett. Bei einer Totallänge von 14 und 15 Ctm. ist die grösste Rumpfhöhe c. $5^1/_2$mal, die Kopflänge 4mal in der Körperlänge, der Augendiameter nicht ganz 5mal, die Schnauzenlänge $2^3/_4$mal, die Stirnbreite 4mal, die Länge der Pectorale mehr als $2^1/_3$mal in der Kopflänge enthalten. 20—21 Stacheln in der ersten Dorsale; zweite Dorsale mit einem kurzen Vorstachel und 17 Strahlen, auf welche 7 Flösselchen folgen. Anale mit 18—19 Stsahlen und 8 Flösselchen.

Der letzte Strahl der zweiten Dorsale und der Anale ist etwas weiter als die übrigen von dem vorangehenden Strahle entfernt, flösschenartig, doch noch vollständig (seiner ganzen Höhe nach) mit dem vorletzten Strahle durch Haut verbunden; er löst sich somit erst im vorgerückteren Alter als selbstständiges Flösschen ab, daher man dann auch in der zweiten Dorsale und der Anale um einen Strahl weniger zählt.

Cybium chinense nur nach einer, wenigstens theilweise unrichtigen Zeichnung (bezüglich der Form der Pectorale) von Cuvier-Valenciennes und Schlegel beschrieben, ist wohl zweifellos identisch mit *C. niphonium* (= *Scomberomorus niphonium* Ltk.), selbst wenn bei ersterem nur 7 Flösselchen hinter der Dorsale vorhanden gewesen wären. Die geringe Zahl der Stacheln der ersten Dorsale nach der von Schlegel publicirten Abbildung erklärt sich daraus, dass die Zeichner die letzten kurzen Stacheln übersehen hat, daher auch der Abstand des Endes der ersten Dorsale von dem Beginne der zweiten Dorsale ein unnatürlich grosser ist.

Der ganze Habitus von *Cybium chinense* spricht für die Richtigkeit meiner Vermuthung. (Steind.)

106. ***Elacate nigra*** sp., Bloch.

Zwei grosse Exemplare von $51^1/_2$ und 54 Ctm. Länge. Leibeshöhe c. 8mal, Koflänge c. 5mal in der Totallänge (bis zur Spitze des oberen Caudallappens) oder erstere c. $6^1/_3$, letztere unbedeutend mehr als 4mal in der Körperlänge, grösste Kopfbreite 2mal, Schnauzenlänge bis zur vorragenden Spitze des Unterkiefers c. $2^2/_5$—mal, Augenlänge c. $7^1/_3$mal, Länge der Pectorale $1^1/_3$mal, Länge der Ventrale $2^2/_5$mal in der Kopflänge enthalten. Der obere längere Caudallappen erreicht nahezu eine Kopflänge. Eine ziemlich breite, schwarzbraune Längsbinde zieht vom Seitenrande der Schnauze zur Caudale; in der vorderen Rumpfhälfte wird er von der Seitenlinie halbirt, weiter zurück aber läuft er über die Seitenlinie hin; eine schmälere hellbraune Binde liegt über der dunklen Mittelbinde.

Zahnbinde am Vomer fast rhombenförmig oder breit nagelförmig, mit etwas concaven Hinterrändern.

Zunge mit einer lanzettförmigen Zahnbinde in der Mitte und zahlreichen kleinen Zahngruppen an den Randtheilen. Keine Pseudobranchien.

Kiemendeckel nur im obersten Theile beschuppt, mit 5—6 radienförmig nach hinten auslaufenden, ziemlich stark entwickelten stumpfen, leistenartigen Vorsprüngen.

Bei Tokio nach Döderlein selten.

Japanischer Name: Sugi.

Dr. Klunzinger ist der Ansicht, dass *Elacate* mit *Echeneis* in eine Gruppe zu vereinigen sei, welche er *Echeneides* nennt (s. Klunz., Die Fische des Rothen Meeres, I. Theil. 1884, Stuttgart, p. 109 u. 114).

Fam. ECHENEIDIDAE.

107. *Echeneis naucrates* Lin.

Die Saugscheibe des von Döderlein eingesendeten, 64 Ctm. langen Exemplares besteht aus 23 Paaren von Lamellen und ihre Länge ist genau 4mal in der Körperlänge oder $4^3/_5$mal in der Totallänge, die Breite des Kopfes zwischen den Brustflossen 8mal in der Körperlänge oder fast $9^1/_4$mal in der Totallänge enthalten.

Ziemlich selten bei Tokio.

Japanischer Name: Koban same.

108. *Echeneis brachyptera* Lowe.

Die beiden von Döderlein gesammelten Exemplare sind 17 und $18^1/_4$ Ctm. lang; bei dem grösseren besteht die Saugscheibe aus 15, bei dem kleineren aus 16 Paaren von Lamellen und ihre Länge ist genau oder nahezu 4mal, die grösste Kopfbreite zwischen den Pectoralen $7^1/_2$mal in der Totallänge enthalten.

Die Dorsale enthält 30—31, die Anale 25 Strahlen.

Nach Döderlein bei Tokio nicht sehr selten.

Japanischer Name: Koban sama.

Fam. CYTTIDAE.

109. *Zeus nebulosus* Schleg.

Grösste Rumpfhöhe etwas mehr als 2mal, Kopflänge etwas mehr als 3mal in der Totallänge, Schnauzenlänge bis zur vorderen Spitze der Unterkiefers 2mal in der Kopflänge enthalten. Die Augenlänge erreicht nicht ganz $^1/_4$ der Kopflänge. Zahl der Platten längs der Dorsal- und Analflossenbasis, nach den bisher untersuchten Exemplaren zu schliessen, sehr constant, sechs längs der Basis der Stacheln, sieben längs der Basis der Gliederstrahlen der Dorsale, acht längs der Basis der Anale und acht am Bauchrande zwischen der Ventrale und dem Beginne der Anale.

Die Ventrale ist nahezu um einen Augendiameter länger als der Kopf.

Zwei Exemplare, jedes c. 21 Cent. lang.

Japanischer Name: Kagamidai.

Fam. NOMEIDAE.

110. *Psenes anomalus* Schleg.

B. 7. D. 6/30. A. 3/27.

Die grösste Körperhöhe übertrifft mehr oder minder bedeutend $^1/_3$ der Totallänge, während die Kopflänge circa $4^1/_3$—$4^1/_4$mal in der Totallänge enthalten ist. Die Länge des Auges übertrifft die der Schnauze, erster ist 4mal, letztere circa $4^2/_5$mal, die Breite der Stirne mehr als $2^3/_5$mal in der Kopflänge enthalten. Das hintere Ende des schmalen Maxillare fällt ziemlich bedeutend vor die Augenmitte. In beiden Kiefern eine Reihe sehr feiner, dicht stehender, gleich langer Zähnchen. Der hintere, geradlinige oder schwach concave Rand des Vordeckels ist sehr stark nach hinten und unten geneigt, der Vordeckelwinkel stark gerundet.

Nur eine Dorsale mit 6 kurzen, theilweise in der Haut versteckten Stacheln.

Von den weichen Dorsalstrahlen ist der 5. oder 6. am höchsten und circa $1^3/_4$mal in der Kopflänge enthalten. Die Länge der Pektorale ist circa um eine halbe Schnauzenlänge geringer als die des Kopfes. Die Länge der Ventralen gleicht $^2/_5$ einer Kopflänge.

Ziemlich selten bei Tokio. Das grösste der von Dr. Döderlein gesammelten Exemplare ist 18^{cm} lang. Japanischer Name: Ebodai.

Fam. STROMATEIDAE

111. *Centrolophus japonicus* n. sp. Döderl.

B. 7. D. 8/22. A. 3/19. P. 23. V. 1/5. L. lat. c. 98—100 (bis zur Caudalbasis.)

Die grösste Körperhöhe ist kaum bedeutender als die Länge des Kopfes, welche letztere circa $3^3/_4$ mal in der Totallänge enthalten ist. Der Orbitaldurchmesser gleicht der Breite des Interorbitalraumes und ist $^2/_3$ mal in der Schnauzenlänge oder 3 mal in der Kopflänge enthalten. Die Schnauze ist wulstig aufgetrieben und fällt steil nach unten zum Vorderende der Mundspalte ab, die stark nach vorne sich erhebt. Das hintere Ende des schmalen Oberkiefers fällt unter die Augenmitte.

Eine Reihe feiner, gleich langer Zähnchen in beiden Kiefern.

Vom Interorbitalraum zieht sich bis zur Nackengegend ein starker Kiel fort; das Profil des Hinterhauptes wird durch denselben stark convex, das des vorderen Theiles des Interorbitalraumes concav.

Der Vordeckel ist radiär gefurcht; der hintere, concave, schräge gestellte Rand desselben ist gezähnt, der untere häutig und mit zarten Cilien besetzt. Die Spitzen der ziemlich stark entwickelten Zähne am hinteren Rande des Vordeckels sind schräge nach oben gekehrt. Auch der ganze freie Rand des Zwischendeckels und der vordere Theil des freien Unterdeckel-Randes mit Cilien besetzt.

Vom oberen Theile der Kiemenbogen ragen 3 Paare polsterförmiger Zahnpackete herab.

Die Dorsale beginnt über dem hinteren Theile der Pektoralwurzel, die Stacheln sind schwach, kurz und liegen fast vollständig unter den Schuppen verborgen. Der letzte, höchste Dorsalstachel erreicht an Länge nur $^1/_4$ des Kopfes. Der stachelige Theil der Rückenflosse geht ohne Unterbrechung in den weichen über; die vordersten dieser biegsamen Strahlen sind länger als die mittleren und hinteren, der 2. oder 3. höchste Gliederstrahl ist leider an der Spitze abgebrochen und dürfte (ergänzt) circa $2^2/_5$ mal in der Kopflänge enthalten sein. Die ganze Dorsale ist mit Schuppen bedeckt.

Die Anale ist an dem uns zur Beschreibung vorliegenden Exemplare stark beschädigt, doch lässt sich noch deutlich erkennen, dass der gliederstrahlige Theil der Anale in der Form wesentlich mit dem der Dorsale übereinstimmt. Die Pektoralen sind lang und reichen zurückgelegt fast bis zur Analmündung.

Die Ventralen beginnen unmittelbar hinter der Pektoralwurzel (in vertikaler Richtung) und ihre Spitze liegt gerade in der Mitte zwischen ihrer Basis und dem Beginn der Afterflosse. Die gabelige Caudale ist ganz beschuppt.

Die Länge der Pektorale ist circa $1^1/_8$ mal, die der Ventrale $2^1/_4$ mal und die der Caudale circa $1^1/_7$—$1^1/_8$ mal in der Kopflänge enthalten.

Die Schuppen sind ziemlich klein, ganzrandig und fallen leicht ab. Am Kopfe sind die Wangen und nach Döderleins Angabe auch die Deckelstücke mit Ausnahme des breiten Randtheiles des Vordeckels beschuppt. Die Oberseite des Kopfes ist von weicher poröser Haut bedeckt.

Die Seitenlinie liegt an ihrem Beginne im oberen Drittel der Rumpfhöhe, verläuft eine kurze Strecke horizontal, steigt dann allmälig abwärts, bis sie ein wenig hinter dem Beginn des gliederstrahligen Theiles der Anale die Mitte der Körperhöhe erreicht hat, und verläuft hierauf in horizontaler Richtung bis zur Caudale.

Graubraun, oben dunkel, unten heller. Der obere Theil des Kopfes ist schwarzbraun.

Der Magen ist sehr lang und erstreckt sich bis zur Analgegend, der Darm macht eine Schlinge. Pylorusanhänge zahlreich, zu circa 8—10 handförmigen Büscheln vereinigt. Schwimmblase vorhanden.

Nur Ein Exemplar von 42^{cm} Länge in Tokio erhalten, und von den Fischern als eine grosse Seltenheit erklärt.

Japanischer Name: Medai.

Dieser von Döderlein entdeckten japanischen Art steht die von mir an den Küsten Perus aufgefundene *Centrolophus*-Art am nächsten und hält sich wie letztere wahrscheinlich in bedeutender Tiefe auf (Steind.).

Fam. CARANGIDAE

112. *Trachurus trachurus* Linn.

In ganz Japan sehr gemein und zu Tausenden gefangen.

Japanischer Name: Aji.

113. *Caranx torvus* Jen.

Das mir vorliegende Exemplar von 18^{cm} Länge stimmt vollständig mit der Beschreibung von *Caranx torvus* Jen. überein, doch hat es einen schwarzen Operkelfleck. (Döderl.)

Nicht sehr häufig bei Tokio.

Japanischer Name: Meaji.

114. *Caranx delicatissimus* n. sp. Döderl.

$$\text{D. } 8 / \frac{1}{25}. \quad \text{A. } 2 / \frac{1}{11}. \quad \text{L. lat. } 85+24.$$

Die grösste Körperhöhe ist $3^1/_2$ mal, die Kopflänge 4mal in der Totallänge, der Augendiameter $1^1/_2$ mal in der Schnauzenlänge und $4^1/_2$ mal in der Kopflänge enthalten. Der Kopf ist $2^1/_3$mal länger als breit.

Das Profil des Rückens von der Schnauze bis zum Ende der Dorsale ist fast ganz gleichmässig gebogen. Das Maxillare endigt in vertikaler Richtung noch vor dem Vorderrand des Auges; der Unterkiefer ist nicht länger als der Oberkiefer. Beide Kiefer tragen nur eine Reihe kleiner Zähne. Keine Zähne am Vomer, die Gaumenbeine dagegen sind bezahnt. Wenige Zähne auf der Zunge.

Die erste Dorsale ist gut entwickelt; bei der zweiten sind die vordersten Strahlen länger als die hinteren. Keine falschen Flossen am hinteren Ende der zweiten Dorsale und der Anale. Die beiden isolirten Stacheln vor der Anale sind ziemlich kräftig entwickelt. Pektorale sehr lang und sichelförmig.

Die Höhe der ersten Dorsale ist $2^1/_4$ mal, die der zweiten Dorsale $2^2/_3$ mal, die Länge der Pektorale $^7/_8$ mal, die der Ventrale $2^1/_5$ mal in der Kopflänge enthalten.

Die Seitenlinie ist vorne mässig gebogen, vom Ende der Pektorale angefangen läuft sie in horizontaler Richtung fort. Der gerade verlaufende Theil der Seitenlinie verhält sich zum gebogenen wie 4 zu 5, und besteht theilweise aus sehr stark gekielten Schuppen. Die Brustgegend ist beschuppt.

Die Färbung des Körpers ist oben blau, unten weiss, metallisch schimmernd.

Ein schwarzer Operkelfleck.

Japanischer Name: Shima aji.

Diese Art ist nicht häufig auf dem Fischmarkte von Tokio und gilt als einer der köstlichsten Tafelfische. Das mir zur Beschreibung vorliegende Exemplar misst 40^{cm}. (Döderl.)

Das Wiener Museum besitzt kein Exemplar dieser Art.

115. *Caranx equula* Temm. Schleg.

Häufig bei Tokio.

Japanischer Name: Shira aji oder Kaiwari(?)

116. *Caranx hippos* sp. Linn.

Ziemlich häufig bei Tokio.

117. *Seyris ciliaris* sp. Bloch.

Sehr häufig bei Tokio in einer Länge von 18^{cm}.

Japanischer Name: Maaji.

118. *Decapterus Russellii* sp. Rüpp.

Taf. IV, Fig. 2.

Syn. *Caranx Russellii* Rüpp., Atl. p. 99 (Jahr 1828).
„ *kurra* C. V. (1833), Gthr.

Decapterus kurra et *D. kurroides* Blkr.
Caranx maruadsi Schleg., Gthr.
Decapterus maruadsi Blkr.
„ *Russellii* Klunz., Die Fische des rothen Meeres, I. Theil, 1884, p. 91.

Nach Untersuchung einer grossen Anzahl von Individuen verschiedener Grösse von Suez, den Philippinen Hongkong und Tokio glaube ich die Ansicht aussprechen zu müssen, dass *Caranx Russelli* Rüpp., d. i. *Caranx kurra* C. V. von *Caranx maruadsi* Schleg. aus Japan nicht specifisch zu trennen sei.

Die relative Körperhöhe nimmt mit dem Alter ab, und ist bei jungen Individuen nur unbedeutend mehr oder weniger als 5mal, bei alten dagegen $5^1{}_2$ bis fast $5^2{}_3$mal in der Totallänge enthalten.

Bei jungen Individuen fällt das hintere Ende des Oberkiefers in vertikaler Richtung genau unter, bei älteren ein wenig vor den Vorderrand des Auges; Vomer, Gaumenbeine und Zunge stets bezahnt. Ein schwarzer Fleck am hinteren, überhäuteten Ausschnitt des Kiemendeckels.

Die vordere, kaum gebogene Hälfte der Seitenlinie ist bei jungen Individuen ein wenig kürzer, bei alten Exemplaren eben so lang wie die hintere, mit Schildern bedeckte Hälfte des Seitencanales und geht unter einer in der Regel ziemlich starken Krümmung in letztere über. Die Schuppen in der vorderen Hälfte der Seitencanales sind von gleicher, geringer Höhe; unmittelbar am Beginne der 2. Längenhälfte des Seitencanales, d. i. circa unter dem 10. Strahle der zweiten Dorsale, nehmen die Schuppen rasch an Höhe zu und endigen in Dornen, doch tragen die 3—5 ersten derselben noch keine Kiele längs der Schuppenmitte; auch schwankt die Zahl und Entwicklung der Kielschuppen auf dem basalen Theile der Caudale, daher die Angaben der Autoren über die Zahl der Seitenschienen schwanken und zur Aufstellung von Nominalarten Anlass gaben. (Steind.)

$$\text{D. } 8/\frac{1}{31-32\,(-34)} + \text{I. A. } 2/\frac{1}{27-29} + \text{I. L. lat. } 45-53+32-36$$

Sehr häufig bei Tokio in Exemplaren bis zu 18^{cm} Länge.
Japanischer Name: Maaji.

118. *Decapterus sanctae Helenae* sp. C.V. (= *Caranx muroadsi* Schl.)

Taf. IV, Fig. 1.

Diese Art unterscheidet sich, abgesehen von der schlanken, *Scomber*-artigen Körperform schon auf den ersten Blick durch die geringe Entwicklung der Seitenschilder in dem vorderen Theile der hinteren, horizontal verlaufenden Längenhälfte der Seitenlinie. Die vordere Hälfte der Seitenlinie ist äusserst schwach gebogen und geht zuweilen fast ohne merkliche Krümmung in den horizontal verlaufenden Theil der *Linea lateralis* über, der in der Regel in vertikaler Richtung unter dem 9.—10. Strahle der zweiten Dorsale beginnt. Nur in den zwei letzten Dritteln der hinteren Längenhälfte der Seitenlinie sind die Seitenschilder gekielt und die grössten liegen nur wenig vor dem isolirten Flösselchen der Anale und der 2. Dorsale (in vertikaler Richtung).

Bei dem allmäligen Übergange der Schuppen der hinteren Hälfte der Seitenlinie in gekielte Schilder ist die genaue Zahl der letzteren nicht immer ganz genau anzugeben, zumal dieselbe auch individuellen Schwankungen unterliegt. Bei der zahlreichen, mir von Dr. Döderlein eingesendeten Exemplaren zähle ich durchschnittlich circa 28—32 gekielte Schienen längs der Seitenlinie.

Bei grossen Exemplaren aus S. Helena, Chile, Peru und von den Sandwichsinseln finde ich die Zahl der gekielten Seitenschilder häufig geringer als bei jenen (kleineren) von Tokio, nämlich 22—28, glaube sie jedoch nicht specifisch unterscheiden zu dürfen, wie Dr. Klunzinger in neuester Zeit vorschlägt. (Steind.)

Japanischer Name: Muroaji.
Sehr häufig bei Tokio in Exemplaren bis zu 18^{cm} Länge.

$$\text{D. } 8/\frac{1}{32} + \text{I. A. } 2/\frac{1}{27} - 28 + \text{I. L. lat. c. } 28-32.$$

119. *Seriola quinqueradiata* Schleg.

D. 6/32—33. A. 2/18.

Die Körperhöhe ist $5^1/_4$—$5^2/_5$ mal, die Kopflänge etwas mehr als 4 mal ($4^1/_6$ m.) in der Totallänge, der nach Aussen freie Theil des Auges 2—$2^1/_2$ mal in der Schnauzenlänge, $1^1/_2$—$2^1/_2$ mal in der Breite des gekielten Interorbitalraumes und $5^3/_4$—6 mal in der Kopflänge enthalten. Das hintere, fast vertikal abgestutzte (äusserst schwach concave) Endstück des Maxillare fällt ein wenig vor die Augenmitte.

Die Zahnbinde am Vomer ist nagelförmig gestielt und kürzer als die zungenförmige Zahnbinde der Gaumenbeine. Eine gestreckt ovale Zahnbinde längs der Zungenmitte und kleine Zahngruppen zunächst dem Seitenrande der Zunge.

Der freie Rand des Vordeckels ist häutig und bei älteren Individuen dicht mit zarten, zahnähnlichen Cilien besetzt. Der Vordeckelwinkel ist stark gerundet. Die Wangengegend und der oberste Theil des Kiemendeckels sind beschuppt.

Die grösste Höhe des Kopfes am Ende der Occipitalcrista ist etwas mehr als $1^1/_2$ mal in der Kopflänge enthalten.

Die Stacheln der ersten Dorsale sind ziemlich kräftig, doch von geringer Höhe. Der 3. höchste Dorsalstachel ist nur wenig länger als der freiliegende Theil des Auges und circa $5^2/_5$ mal in der Kopflänge enthalten, der letzte äusserst kurz, daher leicht zu übersehen.

Die vorderen höchsten Strahlen der 2. Dorsale verhalten sich zur Kopflänge wie 1 : $2^2/_3$. Die Pectorale ist bezüglich ihrer Länge circa $2^1/_4$ mal, die Ventrale 2 mal in der Kopflänge enthalten. Die Entfernung der Ventralspitze von der Anale gleicht $1^1/_4$—$1^1/_2$ Ventrallängen.

Die Caudallappen sind stark zugespitzt und die Länge des oberen, von der Basis der mittleren Caudalstrahlen gemessen, ist circa $1^2/_5$ mal in der Kopflänge begriffen.

Der vordere Theil der Seitenlinie ist leicht gebogen; das Ende der Krümmung fällt unter oder ein wenig hinter den Beginn der 2. Dorsale. Der gerade hintere Theil der Seitenlinie ist circa $2^1/_2$ mal länger als der vordere gebogene Theil. Am Schwanzstiele springt die Seitenlinie schwach kielförmig vor.

Oben bräunlich, unten heller.

Fundort: Tokio.

120. *Seriola Lalandii* C. V.

Von dieser Art liegen mir zwei kleine Exemplare von Tokio vor, welche von Dr. Döderlein als Seriola Dumerilii eingesendet wurden. Die Leibeshöhe ist bei denselben nahezu 5 mal, die Kopflänge etwas mehr als 4 mal in der Totallänge, der nach Aussen freiliegende Theil des Auges nahezu 5 mal und die Schnauzenlänge 3 mal in der Kopflänge enthalten. Die mittlere Stirnbreite erreicht nahezu eine Schnauzenlänge. Der hintere, vertikal gestellte Rand des Oberkiefers fällt unter die Augenmitte.

Die Entfernung der Spitze der Bauchflossen vom Beginne der Anale gleicht nahezu $1^3/_5$ Ventrallängen.

Die erste Dorsale enthält nur 6 Stacheln, die zweite 33 getheilte und einen einfachen Strahl.

Die Seitenlinie ist im vorderen Längendrittel des Rumpfes schwach gebogen und senkt sich allmälig nach unten bis zum Beginne des letzten Viertels der Rumpflänge, in welchem sie horizontal hinläuft. (Steind.)

121. *Seriola Dumerilii* sp. Risso. C. V.

Dr. Döderlein gibt nach von ihm in Tokio gesammelten Exemplaren folgende Notizen:

D. 7/32. A. 2/10.

Die Körperhöhe ist $3^3/_4$ mal, die Kopflänge $4^1/_4$ mal enthalten in der Totallänge.

Der Augendurchmesser (nicht Orbitaldurchmesser) geht $1^3/_5$ mal in die Schnauzenlänge, 2 mal in die Breite des stark gewölbten Interorbitalraumes und fast 5 mal in die Kopflänge.

Maxillare reicht bis unter die Augenmitte; Pectorallänge $2^1/_4$ mal, Ventrallänge $1^3/_5$ mal in der Kopflänge enthalten.

Die Spitze der Ventrale liegt gerade in der Mitte zwischen ihrer Basis und der weichen Anale. Körper stahlblau, metallisch glänzend, und unten heller.

Tokio.

122. ***Seriola cristata*** n. sp. Döderl.

$$D. 6/\frac{1}{34}. A. 2/\frac{1}{19}.$$

Die Körperhöhe ist circa $5^1/_2$ mal, die Kopflänge $4^1/_3$ mal in der Totallänge, der äusserlich freie Theil des Auges $4^3/_4$ mal, die mittlere Breite des stark gekielten Interorbitalraumes unbedeutend mehr als 3 mal, die Schnauzenlänge nahezu 3 mal in der Kopflänge enthalten.

Der hintere Rand des Maxillare fällt in verticaler Richtung unter die Augenmitte. Eine nagelförmige, nach vorne verbreiterte Zahnbinde am Vomer und auf der Zungenmitte, Zahnbinde auf den Gaumenbeinen viel weiter nach hinten reichend als die des Vomers. Häutiger Präoperkelrand mit zarten Cilien besetzt.

Die grösste Kopfhöhe ist circa $1^1/_3$ mal in der Kopflänge enthalten.

Die erste Dorsale enthält 6 Stacheln, von denen der 2. und 3. höchste je eine Augenlänge erreicht.

Die Länge der Pectorale wie der Ventrale ist etwas weniger als 2 mal, der vorderste höchste Theil der 2. Dorsale $2^1/_2$ mal, die Länge der Caudale circa $1^1/_3$ mal in der Kopflänge enthalten.

Die Spitze der Ventrale fällt etwas vor die Mitte des Abstandes der Basis der Ventrale von dem Beginne der gliederstrahligen Anale.

Der vordere Theil der Seitenlinie ist schwach gebogen, und der hintere, horizontal hinlaufende Theil derselben $1^1/_2$ mal länger als der gebogene Theil.

Oben bläulich, unten weisslich.

Fundort: Tokio.

123. ***Naucrates ductor*** sp. Lin.

In Tokio nicht häufig.

Das von Dr. Döderlein eingesendete Exemplar ist 34^{cm} lang.

Japanischer Name: Shime inada.

Fam. EQUULIDAE.

124. ***Equula nuchalis*** Schleg.

Diese an den Küsten Japans sehr gemeine Art erreicht eine Länge von 10^{cm}.

Japanischer Name in Kochi: Nirogi.

Fam. CAPRIDAE.

125. ***Antigonia capros*** Lowe.

Taf. V. (?)

Syn. *Caprophonus aurora* Müll. et Trosch.
? *Hypsinotus rubescens* Schleg.

Ich habe bereits im Jahre 1879 die Vermuthung ausgesprochen und mitgetheilt, dass die von Dr. Schlegel publicirte Abbildung (Bürger's) des *Hypsinotus rubescens* ungenau sein dürfte, dass aber leider wegen des Verlustes des Originalexemplares kein sicherer Nachweis geliefert werden könne, ob *Antigonia capros* Lowe mit *Hypsinotus rubescens* Schl. identisch sei oder nicht. Da aber in den letzteren Jahren zu wiederholten Malen ziemlich zahlreiche Exemplare erstgenannter Art von den Küsten Japans nach Europa gelangten, so z. B. von Dr. Roretz und Dr. Döderlein, nie aber die als *Hypsinotus rubescens* abgebildete Form, so liegt die Vermuthung sehr nahe, dass auch Herrn Bürger ein Exemplar des nicht sehr seltenen *Antigonia capros* zu Händen kam, dasselbe aber von ihm (ausnahmsweise) flüchtig und theilweise unrichtig skizzirt wurde.

R. br. 6. D. 8/36. A. 3/33. V. 1/5. P. 13. C. 12. L. l. 59. L. tr. 15/40.

Die grösste Rumpfhöhe nimmt im Verhältnisse zur Körperlänge mit dem Alter merklich ab, ist aber stets ein wenig beträchtlicher als die Länge des Körpers (mit Ausschluss der Caudale), die Kopflänge ist bei jüngeren Exemplaren etwas weniger als 3mal, bei älteren genau 3mal in der Körperlänge, der Augendiameter $2^1/_2$—$2^2/_3$mal, die Schnauzenlänge $3^3/_4$—$3^2/_3$mal, die Stirnbreite 3mal in der Kopflänge enthalten.

Der Interorbitalraum ist querüber gewölbt.

Die obere Profillinie des Kopfes erhebt sich von der Schnauzenspitze an sehr steil und ist in der Augengegend stark concav, in der Hinterhauptsgegend aber stark convex. Der Unterkiefer ist sehr schräge gestellt (bei geschlossener Mundspalte); hinter demselben bildet die untere Profillinie des Körpers einen mässig gekrümmten, doch rasch abfallenden Bogen bis zur Einlenkungsstelle der Ventralen, die nahe vor dem Beginne der Analstacheln liegt.

Längs der Basis der Dorsale senkt sich die Rückenlinie unter geringer Bogenkrümmung schwächer, als die obere Kopflinie zum Beginne der Dorsale ansteigt, während die Bauchlinie längs der Anale merklich rascher sich erhebt, als die Rückenlinie längs der Dorsale abfällt.

Die Mundspalte ist klein, in Folge der verhältnissmässig langen Intermaxillarstiele vorstreckbar.

Das hintere Ende des Oberkiefers fällt unter den Vorderrand des Auges.

In beiden Kiefern liegen zarte, einreihige Zähnchen.

Die beiden Vorleisten des Präoperkels vereinigen sich unter einem spitzen Winkel, der sich einem rechten bedeutend nähert. Auf den Wangen liegen 3—4 Reihen fast vertical gestellter Schuppen mit äusserst rauher Aussenfläche. Auch der Kiemendeckel, die Unterseite des Kopfes zwischen dem Deckel und den Maxillarästen und endlich ein Theil des unteren Randstückes des Vordeckels sind beschuppt. Die übrigen Kopfknochen zeigen eine rauhe Oberfläche, zahlreiche Leisten mit gesägter Kante, zahnähnliche Vorsprünge und Dornen.

Besonders reich mit Dornen ist das Präoculare besetzt, und nach den von mir untersuchten 5 Exemplaren zu schliessen, sind diese bei Männchen noch stärker entwickelt als bei den Weibchen. An der Einlenkungsstelle der Unterkieferäste liegt bei alten Männchen (jederseits) ein kräftiger Doppeldorn; bei 2 jüngeren Weibchen fällt er wegen seiner geringen Grösse nicht besonders auf. Auch der untere Rand des Vordeckels ist bei Männchen mit viel stärkeren Dornen und Leisten besetzt als bei gleich grossen Weibchen. Der Vordeckelwinkel ist gerundet, der aufsteigende Rand desselben Knochens schräge gestellt.

Sämmtliche Flossenstacheln sind kräftig und die stärksten derselben an der Aussenseite gerieft. Die 2 ersten Dorsalstacheln sind kurz; der folgende 3. Stachel fällt durch seine Länge und Stärke auf; er ist bald gerade, bald ziemlich stark säbelförmig gebogen. Die übrigen 5 Dorsalstacheln nehmen gegen den letzten allmälig an Höhe ab und tragen an ihrem vorderen Rande eine Schuppenreihe. Die Gliederstrahlen der Dorsale hängen mit dem stacheligen Theile der Flosse zusammen und nehmen gegen das hintere Flossenende ganz allmälig an Höhe ab; sie sind im unteren Höhendrittel mit Schuppen bedeckt.

Der Ventralstachel ist noch kräftiger, doch kürzer als der 3. Dorsalstachel, reicht mit seiner Spitze bis zum Beginne der gegliederten Analstrahlen und trägt am ganzen vorderen Rande (die folgenden Ventralstrahlen jederseits) eine Reihe von ziemlich starken Schuppen, deren Rand gesägt ist.

Von den 3 Stacheln der Anale ist der längste erste bei jüngeren Individuen ebenso lang oder länger wie das Auge, bei älteren Exemplaren zuweilen etwas kürzer.

Die Schwanzflosse ist in der Regel vertical abgestutzt.

In der Länge des Kopfes ist der 3. Dorsalstachel $1^1/_4$—$1^1/_2$mal, der 8. Dorsalstachel 6—$6^1/_2$mal, der 1. Analstachel $2^1/_4$—$2^2/_3$mal, der 3. Analstachel circa 6mal, der 1. gegliederte Dorsalstrahl $3^1/_2$mal, der letzte 7mal, die Länge der Brustflossen 1mal, die der Bauchflossen $1^1/_4$—$1^3/_5$mal und die Länge der Caudale $1^1/_2$—$^2/_5$mal enthalten.

Die Schuppen des Körpers sind von mässiger Grösse, stark gezähnt und tragen auf dem freien Theile ihrer Oberfläche eine Anzahl kurzer Stachelchen, die besonders auf den Schuppen der Brustgegend sehr entwickelt sind. Der ganze Fisch fühlt sich dadurch sehr rauh und gleichsam klebrig an.

Die Seitenlinie folgt im Allgemeinen der Richtung der Rückenlinie, erhebt sich aber erst unter dem stacheligen Theile der Dorsale zu entsprechender Höhe und läuft ohne Unterbrechung bis zur Caudale hin.

Färbung des Fisches im Leben goldroth.

Der Magen ist ziemlich gross, der Darm macht eine Schlinge. Der Magen fand sich mit Überresten von Fischen und Isopoden gefüllt. Schwimmblase ziemlich gross.

Japanischer Name: Shishidai.

Diese Fischart scheint stellenweise nicht sehr selten bei Tokio zu sein und wird von den Fischern stets in mehreren Exemplaren in einem Fischzuge gefangen. Das grösste Exemplar der Wiener Sammlung ist circa 18^{cm} lang.

Fam. **TRACHINIDAE.**

126. ***Uranoscopus bicinctus*** Schleg.

D. $4/\frac{3}{12}$. A. 13

Unterer Rand des Präoperkels mit 4 Spitzen.

Die bei weitem grössere hintere Hälfte der Caudale ist tiefbraun wie die beiden Querbinden des Rumpfes und am Flossenende hell gerandet.

Nicht häufig bei Tokio und in Exemplaren bis zu 23^{cm} Länge gefangen.

Japanischer Name: Anesagochi.

127. ***Uranoscopus asper*** Schleg.

D. 4/13. A. 13.

Die Kopflänge bis zum knöchernen Rande des Deckels ist bei jungen Individuen mehr als 4 mal, bei grossen Exemplaren circa $3^{3}/_{4}$ mal in der Totallänge enthalten.

Der Unterrand des Vordeckels trägt bei 2 kleinen Exemplaren nur 3 Spitzen und bei einem grösseren 3. Exemplare auf der rechten Kopfseite 4, auf der linken aber 5 stachelartige Vorsprünge, indem die 2 vordersten Spitzen sich in 3 auflösten.

Erste Dorsale tiefschwarz, nur längs der ganzen Basis und an den Strahlenspitzen milchweiss; 2. Dorsale braun getupft; übrige Flossen ungefärbt.

Japanischer Name: Okose (auch für *Pelor* gebraucht) und Mishima-okose, in Kochi aber Mushima kubuto.

Nicht sehr häufig in der Tokio-Bai und bei Kochi, doch stets von geringer Grösse bis zu 13^{cm} Länge.

128. ***Anema inerme*** sp. C. V.

D. 20. A. 16. L. lat. 50.

Japanischer Name: Mishima okose.

Ziemlich selten bei Tokio.

129. ***Anema elongatum*** sp. Schleg.

D. 13. A. 17.

Die Kopflänge ist $3^{2}/_{3}$ mal, die Kopfbreite $4^{2}/_{3}$ mal in der Totallänge, der Augendiameter $1^{2}/_{5}$ mal in der Breite des Interorbitalraumes, $^{3}/_{4}$ mal in der Schnauzenlänge und $5^{3}/_{4}$ mal in der Kopflänge enthalten. Der Kopf ist 2 mal länger als hoch.

Eigenthümlich sind die geringe Entwicklung der Panzerplatte des Kopfes und 2 breite Fortsätze des Unterkiefers auf seiner unteren, nach vorne gerichteten Seite.

Die Anale beginnt hinter der Spitze der Pectoralen, die Dorsale noch etwas weiter nach hinten.

Die Länge der Dorsale ist wenig mehr als 1 mal, die Höhe derselben Flosse 3 mal, die Länge der Pectoralen $1^{1}/_{2}$ mal, die Breite der Pectoralwurzel $3^{1}/_{3}$ mal, die Länge der Ventralen $2^{2}/_{5}$ mal in der Kopflänge enthalten.

Die Schuppen sind sehr klein, rudimentär und bilden keine regelmässigen Reihen.

Farbe bei Weingeistexemplaren bräunlich mit vielen, schwärzlichen Tupfen; die Flossen dunkel, besonders die Caudale; Anale gelblich; Bauchfläche weiss.

Diese Art erreicht eine Länge von 52^{cm} und scheint bei Tokio selten zu sein.

Das untersuchte Exemplar ist ein Weibchen, dessen Eierstöcke mit Eiern dicht gefüllt sind.

130 *Percis pulchella* Schleg.

Die Länge des Auges gleicht der der Schnauze und beträgt mehr als das Doppelte von der Breite des Interorbitalraumes oder $^1/_4$ der Kopflänge.

Gaumenzähne fehlen.

Ziemlich häufig bei Tokio in der Tokio-Bai in unbedeutender Tiefe, und eine Länge bis zu 16^{cm} erreichend.

131. *Parapercis sexfasciata* sp Schleg.

D. 5/23. A. 21. L. l. 60—61 (bis z. Beginn d. Caud.)

Die Körperhöhe ist $6^1/_2$—7 mal, die Kopflänge $4^1/_2$—$4^3/_5$ mal in der Totallänge, der Augendiameter, welcher der Schnauze an Länge gleicht, etwas weniger als 4—$3^3/_5$ mal in der Kopflänge enthalten. Die Stirnbreite ist sehr gering, nahezu nur $^1/_3$ der Augenlänge gleich. 7—11 zarte Dörnchen am ganzen freien Rande des Vordeckels in fast gleichmässigen Abständen von einander. Zähne auf den Gaumenbeinen, jederseits in einer schmalen Binde. Die 6 Stacheln der Dorsale nehmen bis zum letzten allmälig an Höhe zu.

Sechs dunkle Querbinden am Rumpfe, die mit Ausnahme der vordersten Binde nach oben sich gabelförmig spalten; zwischen je 2 dieser Binden ein verschwommener Fleck in geringer Entfernung unterhalb der Seitenlinie. Eine dunkle Querbinde auf den Wangen und auf der Stirne, vom Auge unterbrochen, und eine 2. Binde von geringer Ausdehnung zwischen den vorderen Augenrändern, somit am vorderen Ende der Stirne.

132. *Parapercis multifasciata* n. sp. Döderl.

Taf. VI, Fig. 2 und 2 *a*.

D. 5/23. A. 20. L. l. 60. (bis z. Caud.)

Die grösste Körperhöhe ist 6 mal, die Kopflänge weniger als 4 mal in der Körperlänge, oder erstere $6^3/_4$ mal, letztere $4^2/_3$—$4^3/_5$ mal in der Totallänge enthalten.

Der Augendurchmesser gleicht der Schnauzenlänge; er beträgt über das Doppelte von der Breite des Interorbitalraumes und geht $3^1/_2$ mal in die Kopflänge.

Die weiche Haut, welche das Hinterhaupt bedeckt, ist mit vielen Poren besetzt, die an der Spitze je einer kleinen tuberkelförmigen Erhöhung liegen, auch auf der Schnauze und dem Unterkiefer zeigen sich Porenmündungen in geringerer Anzahl. Präoperkel mit gerundetem hinterem Winkel und ohne Zähnelung an den häutigen Rändern. Operkel mit einem kurzen, dicken Stachel.

Mundspalte ziemlich lang; das hintere Ende des Oberkiefers fällt unter die Augenmitte.

Im Zwischenkiefer liegt am Aussenrande der Zahnbinde eine Reihe stärkerer Zähne, die gegen das vordere Mundende allmälig an Grösse zunehmen. Vorne im Unterkiefer zunächst der Symphyse eine Reihe von 6 stärkeren Zähnen, hakenförmig gebogen, und seitlich, fast in halber Länge des Unterkieferastes, jederseits 3 grössere Hakenzähne, auf welche nach hinten viel kleinere Zähne in der Aussenreihe der Zahnbinde folgen.

Zähne am Vomer wie auf den Gaumenbeinen in schmalen Binden.

Wangen- und Kiemendeckel dicht beschuppt, ebenso der an diese angrenzende, seitliche Theil der Hinterhauptsgegend.

Der letzte Dorsalstachel ist der längste, doch nur wenig länger als der vorangehende Stachel. Der 1. Dorsalstachel ist sehr kurz und zart, fast nur halb so stark und wenig mehr als halb so lang wie der 2. und dieser kaum halb so lang wie der 3. Stachel.

Die Pectorale reicht noch über den Beginn der Anale zurück, die Ventrale bis zur Anusmündung. Die Caudale ist am hinteren Rande schwach gerundet. Die Gliederstrahlen der Anale sind kürzer als die der Dorsale.

Die Höhe des 5. Dorsalstachels ist 4 mal, die grösste Höhe des gliederstrahligen Theiles der Dorsale (am 13.—15. Strahle) circa $1^2/_3$ mal, die der Anale $2^1/_3$ mal, die Länge der Pectorale $1^1/_3$ die der Ventrale genau oder etwas mehr als $1^1/_3$ mal in der Kopflänge enthalten.

Oberer Theil des Körpers röthlich, Bauch gelblich. Kopf röthlich mit gelben, braun gesäumten Streifen auf dem Hinterhaupte. Über den Rücken laufen 10 braune Querstreifen, die in der Höhe der Seitenlinie endigen.

Alle Flossen sind gelblich; zwischen den Dorsalstacheln und den ersten gegliederten Dorsalstrahlen zeigt sich eine schwärzliche Trübung an der Flossenhaut; zwischen den letzten 7 Dorsalstrahlen verlaufen circa 6 schiefe, dunkle Binden. Etwas über der Mitte der Caudalwurzel ein dunkler Fleck. Caudale selbst mit circa 6 dunkeln Querbinden, die sich aber nicht auf die untersten Caudalstrahlen erstrecken. Diese Art ist ziemlich häufig im Winter bei Tokio; die grössten Exemplare unserer Sammlung erreichen eine Länge von 17^{cm}

Vulgärname: Häcatorá-haze (nach einer brieflichen Mittheilung des Herrn Bellotti).

133. *Parapercis aurantiaca* n. sp. Döderl.

Taf. III, Fig. 2 und 2 *a*.

D. 5 23. A 21. L. lat. 57—60.

Die grösste Körperhöhe ist $6^1/_2$—$7^1/_3$ mal, die Kopflänge $4^2/_3$ mal in der Totallänge, der Augendurchmesser 3—$3^1/_4$ mal in der Kopflänge enthalten. Die Schnauze ist etwas kürzer als das Auge und der Interorbitalraum an Breite fast nur $^1/_3$ der Augenlänge gleich und bedeutend schmäler als bei der früher beschriebenen Art. Zahlreiche tubenförmige Erhöhungen mit Porenmündungen am Hinterhaupte und minder zahlreiche, doch grössere Porenöffnungen auf der schmalen Stirne, der Schnauze, rings um das Auge und auf der flachen Unterseite des Unterkiefers.

In der Bezahnung der Mundspalte, des Vomers und der Gaumenbeine stimmt *Parap. aurantiaca* genau mit *P. multifasciata* überein, ebenso in der Beschuppung der Wangen und der Deckelgegend; Operkel mit stark abgestumpftem Stachel.

Von den Dorsalstacheln sind die beiden letzten am längsten, der erste Dorsalstachel ist halb so lang wie der zweite.

Die Pectorale reicht bis zum Beginn der Anale zurück, die Spitze der Ventralen nicht ganz bis zur Analmündung. Der hintere Rand der Caudale ist mehr oder minder schwach gerundet.

Die Länge des 5. Dorsalstachels ist $3^1/_2$—$4^2/_5$ mal, die grösste Höhe des gliederstrahligen Theiles der Dorsale $1^5/_6$ mal, die der Anale $2^2/_5$ mal, Länge der Pectorale wie der Ventrale $1^2/_5$ mal in der Kopflänge enthalten.

Der vordere Theil der Pectorale und der Caudale ist beschuppt, ebenso die Ventrale an der Unterseite ihrer halben Länge nach.

Goldroth mit 5 breiten, citrongelben Querbändern über dem Körper (die bei in Weingeist conservirten Exemplaren nicht mehr sichtbar sind, daher auch auf der Zeichnung dieser Art auf Tafel III nicht angedeutet werden konnten); Kopf gelb und roth. Flossen gelb.

Die letzten Strahlen der Dorsale mit circa 3 schmalen, violetten, schief verlaufenden Binden.

Caudale mit 5 senkrechten Binden, die sich aber nicht auf die untersten Strahlen erstrecken.

Japanischer Name: Akagisu.

Im Winter nicht selten und in bedeutender Tiefe gefangen.

Das grösste Exemplar unserer Sammlung ist $17^1/_2{}^{cm}$ lang.

Die Gattung *Parapercis* Steind., auf Exemplare aus dem Golf S. Vincent in Australien gegründet, unterscheidet sich von *Percis* durch das Vorkommen von Zähnen auf den Gaumenbeinen. Vielleicht kann als ein zweites minder wichtiges charakteristisches Merkmal auch die Form des stacheligen Theiles der Dorsale angenommen werden; bei sämmtlichen, von uns zur Gattung *Parapercis* gezählten Arten nehmen die Stacheln der Dorsale bis zum letzten Stachel an Höhe zu, während bei sämmtlichen von uns untersuchten *Percis*-Arten ohne Gaumenzähne, wie z. B. *Percis polyophthalma, P. pulchella* etc. die mittleren Dorsalstacheln länger als die ersten und auch als die letzten sind.

134. *Sillago japonica* Schleg.

Sehr häufig an allen japanischen Küsten.

Bei keinem der mir von Dr. Döderlein eingesendeten Exemplaren zähle ich mehr als 68—70 Schuppen längs der Seitenlinie bis zum Beginn der Caudale. Die Kopflänge ist $3^1/_2$—$3^3/_5$ mal in der Körperlänge (d. i. Totallänge mit Ausschluss der Caudale), die Augenlänge etwas mehr als 4mal, die Schnauzenlänge $2^2/_3$ mal in der Kopflänge enthalten.

Nur 3 Schuppenreihen zwischen der Seitenlinie und der Basis des ersten Stachels der ersten Dorsale.

Japanischer Name: Aogisu oder Kisu, in Kochi aber Kisugo.

Das grösste der von Dr. Döderlein gesammelten Exemplare misst 22^{cm}.

Das Wiener Museum erhielt überdies ein Exemplar von Tschifu.

135. *Sillago sihama* sp. Forsk.

Unter den von Dr. Döderlein mir als *S. japonica* eingesendeten Exemplaren befanden sich 2 grössere Stücke, die zweifellos zu *Sillago sihama* zu beziehen sind, da unter den ersten Rückenstachel 4—5 Schuppenreihen liegen.

Die Kopflänge ist $3^2/_3$—$3^3/_5$ mal in der Körperlänge, genau oder mehr als 4mal in der Totallänge, der Augendiameter $1^3/_4$—2mal in der Schnauzenlänge, letztere circa $2^1/_2$ mal in der Kopflänge enthalten.

Die Seitenlinie durchbohrt 68 Schuppen am Rumpfe und noch eine beträchtliche Anzahl sehr kleiner Schüppchen auf der Caudale selbst.

$$D.\ 11/\frac{1}{20-21}$$

136. *Champsodon vorax* Gthr.

B. 6. D. 5/20. A. 17. P. 11. V. 1/5.

Die Körperhöhe ist 6mal, die Kopflänge 4mal in der Totallänge enthalten. Der Augendurchmesser gleicht der Schnauzenlänge, geht $^3/_5$ mal in die Breite des Interorbitalraumes und 4mal in die Kopflänge. Der Kopf ist mehr als 2mal so lang wie breit und nicht ganz doppelt so lang als hoch.

Das obere Profil des Körpers bildet von der Schnauze bis zur Schwanzflosse eine fast ganz gerade Linie. Der Interorbitalraum ist etwas concav; vom oberen Orbitalrande nach der Schnauzenspitze ziehen zwei fast parallele Leisten; eben solche von gleicher Länge, aber weiter von einander entfernt auf dem Hinterkopf.

Das Maxillare endigt hinter dem hinteren Orbitalrand.

Die Zähne sind sehr fein, einreihig, besonders im Unterkiefer von ungleicher Länge; sie stehen in beiden Kiefern und auf dem Vomer. Der Unterkiefer überragt nach vorne den Oberkiefer und bildet nach oben einen Fortsatz, der in eine Einbuchtung des oberen Kiefers greift.

Das Präorbitale zeigt am Unterrande 3 spitze Zähne, von denen je einer nach vorne, nach hinten und nach unten gerichtet ist. Der Vordeckel ist deutlich doppelrandig. Am abgerundeten Winkel trägt er einen circa $^3/_4$ Augendurchmesser an Länge erreichenden, spitzen, etwas nach oben gebogenen Stachel. Der Hinterrand des Präoperkels ist kaum sichtbar gezähnt. Der Unterrand trägt 2 spitze, nach vorne gerichtete Zähne.

Das Operculum ist sehr dünn und biegsam, abgerundet, mit einem etwas nach unten gerichteten, sehr schwachen Stachel und radiären Streifen, die von zwei untereinander liegenden Centren ausgehen.

Von dem hintersten Ende der oben erwähnten Occipitalleisten divergiren 2 ebenso lange Suprascapularleisten, die in einen mehrspitzigen Stachel enden.

Die beiden Rückenflossen folgen in kurzen Abständen aufeinander. Die erste wird von feinen Stacheln gebildet, von denen der erste am längsten ist; der letzte ist etwa halb so lang wie dieser.

Die Brustflosse ist sehr kurz; die Ventrale reicht bis zur Analmündung. Die Schwanzflosse ist gabelig.

In der Kopflänge sind enthalten:

1. Dorsalstrahl $2^1/_4$ mal,	Länge der Brustflosse $2^1/_2$ mal,
Höhe der weichen Dorsale 2mal,	„ „ Bauchflossen $1^1/_3$ mal,
„ „ Anale $2^1/_2$ mal,	„ „ Schwanzflosse $1^1/_3$ mal.

Die Schuppen sind klein, rudimentär und bedecken den Körper und Kopf, mit Ausnahme der Lippen. Auch der Bauch ist zum grössten Theile nackt.

Es zeigen sich 2 Seitenlinien, die die Höhe des Körpers in 3 nahezu gleiche Theile theilen. Von diesen Seitenlinien gehen, und zwar senkrecht zu ihnen, noch eine grössere Anzahl Zweige aus, nach oben wie nach unten. Auch der Kopf zeigt zahlreiche Poren auf dem Hinterhaupte, den Wangen, der Schnauze und dem Unterkiefer.

Die Kiemenöffnungen sind ausserordentlich weit, sowohl die äusseren wie die inneren; die letzteren beginnen schon fast unterhalb der Schnauzenspitze. Pseudobranchien ziemlich klein.

Die Farbe ist im frischen Zustande oben rostroth mit einer Reihe dunkler Tropfen längs der Seite. Im Weingeist ist sie grau mit Spuren der seitlichen Flecke. Die untere Körperhälfte ist silberglänzend.

Mir liegen 2 Exemplare von nahezu 8^{cm} Länge vor, von denen ich das eine aus einer Tiefe von circa 200 Faden in der Sagami-Bai heraufbrachte (mit einem Hanfquastenapparat); das andere Exemplar fand ich im Magen von *Megaperca ishinagi.*

Champsodon vorax ist vorzüglich durch die Challenger-Expedition bekannt geworden, und zwar aus geringen Tiefen in der Nähe der Philippinen, bei den Admiralitäts-Inseln und in der Arafura-See in einer Tiefe von 115, 152 und 129 Faden. (Döderl.)

137. *Latilus argentatus* C.V.

D. 7/15. A. 2/11. L. lat. c. 52.

Die Kopflänge ist $4^1/_4$—$4^1/_2$ mal, die grösste Rumpfhöhe $4^1/_2$—$4^3/_4$ mal in der Totallänge, der Augendiameter 3mal, die Stirnbreite $4^2/_3$ mal, die Kopfhöhe circa $1^1/_7$ mal in der Kopflänge enthalten.

Die obere Profillinie des Kopfes ist sehr stark gebogen, die hohe Schnauze fällt steil zur Mundspalte ab.

Die Mundwinkel fallen ein wenig hinter die Augenmitte. Vomer und Gaumenbeine zahnlos.

Der lange, aufsteigende Rand des Vordeckels ist vertical gestellt und trifft mit dem unteren kurzen Rande unter einem rechten Winkel zusammen, dessen Spitze abgerundet ist. Die Zähnchen am hinteren Vordeckelrande sind etwas grösser und stärker als die am Winkel und unteren Rande.

Die Wangen, der Deckel und Unterdeckel, sowie die Hinterhauptsgegend bis gegen die Mitte der Stirnlänge sind beschuppt. Beiläufig von der Mitte der Stirngegend zieht eine niedrige, kammartige, schwarzgefärbte Hautfalte zum Beginn der Dorsale.

Die Pectorale ist ebenso lang wie der Kopf. Die Ventrale ist circa $1^3/_4$ mal in der Länge des letzteren enthalten.

Die sogenannten Dorsal- und Analstachel sind sehr schlank und biegsam.

Rumpfschuppen festsitzend und zart gezähnt. Die Seitenlinie durchbohrt bis zum Beginn der zum grössten Theile überschuppten Caudale nur 58 Schuppen, doch liegen im Ganzen circa 70 verticale Schuppenreihen zwischen dem oberen Ende der Kiemenspalte und der Basis der Caudale. (Steind.)

Ziemlich häufig an den meisten Küsten Japans. Die Exemplare aus Döderlein's Sammlung wurden bei Tokio und an der Küste von Tango am japanischen Meere gefischt und sind bis zu 19^{cm} lang.

Japanischer Name: Amadai.

Fam. PEDICULATI.

138. *Lophius setigerus* Wahl.

Diese Art ist sehr häufig an allen japanischen Küsten. Döderlein's Exemplare wurden bei Tokio und Kagoshima gefischt.

Japanischer Name: Anko.

139. *Antennarius marmoratus* Schn.

Ein Exemplar von Kobe aus dem inneren Meere, in welchem er wie bei Tokio sehr selten vorkommen soll.

140. *Chaunax fimbriatus* Hilgend.

D. 1/11. A. 7. P. 13. V. 4. C. 8.

Der Kopf ist sehr breit und niedergedrückt. Die Kiemenöffnung liegt etwas vor Mitte der Totallänge. Die Kopfbreite ist $2^1/_2$mal in der Totallänge oder 2mal in der Körperlänge begriffen.

Der Augendiameter erreicht $^3/_4$ der Schnauzenlänge und gleicht der Breite des knöchernen Interorbitalraumes, die Breite der Mundspalte $^1/_5$ der Totallänge.

Die Mundspalte öffnet sich nach oben und nimmt die ganze Vorderseite des Kopfes ein.

Der Unterkiefer überragt nach vorne den Zwischenkiefer, der ziemlich vorstreckbar ist. Schmale Binden beweglicher Hakenzähne in beiden Kiefern, am Vomer und auf den Gaumenbeinen. Im Schlunde liegen oben und unten mehrere Polster von ähnlichen Zähnen. Kiemenöffnung schmal, über dem hintersten Theile der Pectoralwurzel gelegen.

Auf der Schnauze befindet sich ein, auf einem knieförmigen Gelenke beweglicher, kurzer, aber ziemlich steifer Tentakel; die Länge des oberen Theiles desselben gleicht $^3/_4$ des Augendurchmessers.

Ein wenig vor der Kiemenöffnung beginnt die eigentliche Dorsale, deren Höhe $1^2/_3$—2 Augendurchmesser beträgt.

Die Caudale hat einen geraden Hinterrand, und ihre Länge gleicht $^1/_5$ der Totallänge.

Die kurze Anale liegt unter dem hintersten Theile der Dorsale, der sie an Höhe gleicht; die Länge ihrer Basis erreicht nicht ganz $^1/_3$ der Basislänge der Dorsale, welche $3^2/_3$mal in der Totallänge enthalten ist.

Die Pectoralen liegen weit von einander entfernt; ihre Länge ist $6^1/_2$mal in der Totallänge des Fisches enthalten. Die Ventralen sind unter der Mitte der Kopfscheibe eingelenkt und erreichen an Länge $^2/_3$ der Pectorale; ihre Entfernung von einander beträgt $^2/_3$ ihrer Länge.

Die Oberseite des Kopfes und Rumpfes ist mit kleinen Hautstacheln besetzt, fühlt sich daher rauh an. Schleimcanäle oder Seitenlinien sehr stark entwickelt; sie stellen sich äusserlich als glatte Furchen der Haut dar, die in kurzer Entfernung von einander Vertiefungen enthalten.

Jede dieser Vertiefungen ist von harten Fortsätzen der die Furchen begrenzenden, chagrinartigen Haut überwölbt, so dass diese Furchen ein kettenförmiges Aussehen erhalten.

Ein solcher Schleimcanal verläuft in einem Halbkreise am unteren Kopfrande und endigt nächst der Pectorale; er ist in seiner ganzen Ausdehnung von kurzen, gelben Barteln begleitet. Gerade unter dem Munde steht auf ihm noch ein kleinerer halbkreisförmiger Schleimcanal. Ein anderer verläuft vom Mundwinkel gerade nach hinten, endigt aber bald hinter dem Auge. Ein dritter Schleimcanal zieht sich längs der Oberlippe hin, wendet sich gerade vor dem Rostraltentakel nach hinten, geht sodann im Bogen über den inneren (oberen) Orbitalrand; hinter dem Auge entfernt er sich etwas von der Mittellinie des Rückens, verläuft in der Mitte zwischen Kiemenöffnung und Dorsale, hierauf in der Mittellinie der Schwanzhöhe, endigt aber im unteren Winkel der Caudalbasis.

Schliesslich verläuft eine Reihe überwölbter Poren ohne verbindende Furchen quer über die Oberfläche des Kopfes in einiger Entfernung hinter den Augen und verbindet in dieser Weise die beiden seitlichen Äste des untersten Schleimcanales.

Ausser den oben erwähnten Barteln kommt noch eine zweite Reihe ähnlicher zarter Hautfasern vor, die am Hinterende der Pectoralwurzel beginnen, unter der Kiemenöffnung vorüberziehen und den caudalen Schleimcanal bis zur Schwanzflosse begleiten.

Die Farbe des Fisches ist im Leben goldroth mit grossen, runden Flecken auf der Oberseite. Leider verschwindet diese Färbung bei in Weingeist conservirten Exemplaren vollständig.

Das einzige von Dr. Döderlein in Tokio erworbene Exemplar ist 33^{cm} lang.

Diese zuerst von Dr. Hilgendorf entdeckte und kurz charakterisirte Art (Sitzungsber. naturf. Freunde, Berlin, 20. Mai 1879) steht dem viel früher von Lowe nach einem Exemplare aus dem atlantischen Ocean (bei Madeira) beschriebenen *Ch. pictus* sehr nahe, unterscheidet sich aber leicht durch die grössere Anzahl der Analstrahlen.

141. ***Halieutaea stellata*** Wahl.

Ziemlich häufig bei Tokio in Exemplaren bis zu 23^{cm} Länge.

Japanischer Name: Akagutsu.

Fam. SCORPAENIDAE.

142. ***Scorpaena fimbriata*** n. sp. Döderl.

D. 12/9. A. 3/5. P. 17/11. L. l. c. 21. Sq. lat. c. 40—42.

Die grösste Körperhöhe ist 4 mal, die Kopflänge genau oder nahezu 3 mal in der Totallänge enthalten. Die grösste Kopfbreite erreicht nicht ganz die Hälfte der Kopflänge.

Die Länge des Auges ist $4^1/_2$—$4^3/_4$ mal, die Schnauzenlänge mehr als $3^2/_3$—$3^3/_5$ mal, die mittlere Stirnbreite $5^3/_5$—$7^2/_5$ mal in der Kopflänge begriffen.

Das hintere Ende des Oberkiefers fällt unter das Ende des 3. Längenviertels des Auges.

Kinnspitze knopfförmig vorspringend. Zähne in den Kiefern, am Vomer und auf den Gaumenbeinen. Beide Kiefer gleich weit nach vorne reichend.

Oberer Augenrand mit 3 Stacheln, von denen der vorderste am längsten ist. Nasalstachel etwas schwächer entwickelt als der erste Orbitalstachel, Nasallappen von ziemlicher Grösse. Interorbitalraum querüber stark concav mit 2)(-förmigen Leisten, die nach hinten stärker als nach vorne divergiren und am hinteren Ende durch eine querliegende, schwach wellenförmige Leiste mit einander verbunden sind. Ganz nahe hinter dem seitlichen Ende dieser Querleiste liegt ein ziemlich kräftiger Stachel, dessen Basis sich in eine stumpfe Längsleiste fortzieht, welche mit der der entgegengesetzten Seite einen etwas vertieften viereckigen Raum am Hinterhaupte seitlich abschliesst, der etwas breiter als lang ist; hinter dieser sogenannten Occipitalgrube jederseits 2 Stacheln, von denen der hintere der bei weitem stärkere ist.

Die zum Vordeckel ziehende Knochenplatte der Wangengegend mit 4 leistenförmigen Vorsprüngen, von denen die 3 hinteren in Stacheln endigen. Eine Grube unter dem Auge kaum angedeutet. Kopf schuppenlos, mit Ausnahme des obersten Theiles des Operkels bis zum hinteren Augenrande, in welcher Gegend mehr minder rauhe, überhäutete Knochenplättchen zerstreut liegen.

Breite, häutige Tentakeln stehen am oberen Orbitalrand, am unteren Präorbitalrand (der hinter dem letzten hintersten Stachel am unteren Rande des Präorbitales gelegene Lappen ist auffallend lang), am hinteren Theil der Wangenplatte und am unteren Rand des Vordeckels (sehr lang sind die 2 vordersten Lappen am unteren Vordeckelrande), der in 5 Dornen ausläuft, von denen der hinterste oberste sehr stark entwickelt ist und an der Basis einen Nebendorn trägt. Keine Hautlappen am Unterkiefer.

Der stachelige Theil der Dorsale ist am oberen Rande mässig gerundet. Der 3. und 4. Dorsalstachel sind von gleicher Höhe, fast ebenso lang wie der höchste 5. Gliederstrahl derselben Flosse und kaum $^1/_2$—$^2/_3$ mal so lang wie der Kopf. Der 2. Analstachel ist zuweilen etwas länger und stets stärker als der 3. Analstachel, und merklich kürzer als der höchste Dorsalstachel.

Die Länge der stacheligen Rückenflosse ist fast 1mal, die des gliederstrahligen Theiles der Dorsale $2^1/_2$ mal, Länge der Anale $2^3/_4$ mal, Länge des 2. Analstachels etwas weniger als 3mal (bei jungen Individuen) bis 4mal, Länge der Brustflossen $1^3/_5$—$1^5/_6$ mal, der Ventralen weniger als 2mal (bei kleineren Exemplaren) bis $2^3/_5$ mal in der Kopflänge enthalten.

Eine nicht unbedeutende Anzahl von Rumpfschuppen sind mit kurzen Hautläppchen geziert.

Körper und Flossen röthlich braun mit vier dunkeln, unbestimmten, wolkigen Querbändern, die sich an der Rückenflosse etwas in die Höhe ziehen und daselbst basale Flecken bilden. Weiche Rückenflosse, Anale, Caudale und Ventrale dunkel gefleckt. Bauchflosse weisslich wie der Bauch. Einige intensiv braune Flecken in der Achselgegend und in dem von der zurückgelegten Pectorale überdeckten Theile der Körperseiten.

Nach Döderlein nicht sehr häufig bei Tokio. (Meines Erachtens dürfte vielleicht die hier beschriebene Art, die mit *Scorpaena scrofa* nahe verwandt ist, mit *Sc. neglecta* Schleg. identisch sein, und stimmt in der Kopfform, sowie insbesondere in der Anordnung und Grösse der Kopfstacheln genau mit letzterer überein, s. Schlegel's Abbildung in der Fauna japonica, Pisces, Taf. 17, Fig. 4. Nach Schlegel entbehrt zwar *S. neglecta* der Hautlappen an den Seiten des Kopfes und am Rumpfe, dagegen liesse sich jedoch einwenden, dass Schlegel's Beschreibung nach trockenen ausgestopften Exemplaren entworfen wurde. Steind.)

143. *Scorpaena kagoshimana* n. sp. Döderl.

D. 12/10. A. 3/5. P. 6/11. L. l. 4—45.

Körperhöhe $3^1/_3$ mal, Kopflänge 3mal in der Totallänge. Kopf $1^1/_2$ mal länger als breit. Augendiameter $1^1/_2$ mal in der Schnauzenlänge, $5^1/_4$ mal in der Kopflänge und $1^1/_4$ mal in der Breite des Interorbitalraumes enthalten.

Das Maxillare reicht bis unter die Augenmitte.

Die meisten Kopfstacheln sind als kurze Leisten mit stark gezähnten oberen Rändern ausgebildet. So sind die oberen Orbitalstacheln, der Nasalstachel und die Occipitalstacheln, auch die des Unterrandes des Präorbitale und der Wangenplatte. Opercular- und Präopercularstacheln einfach. Interorbitalleisten sehr schwach ausgebildet, zwischen ihnen ist eine breite, ziemlich tiefe Rinne, welche nach hinten durch eine zarte bogenförmige Querleiste abgeschlossen ist. Occipitalgrube breiter als lang. Unter dem Vorderrand der Augen liegt eine tiefe Grube. Kopf schuppenlos bis auf den obersten Theil des Operkels. Kurze Tentakeln stehen nur am Unterrande des Präorbitale und des Präoperkels. Gaumenzähne fehlen. Zweiter Analstachel etwas länger, aber nicht stärker als der dritte. Auf den Körperschuppen keine Tentakeln. Die Seitenlinie durchbohrt nur c. 22 Schuppen, doch liegen c. 44—45 quere Schuppenreihen zwischen dem oberen Ende der Kiemenspalte und der Basis der Caudale.

Auf tiefgrauem Grunde zeigen sich mehrere, sehr breite, dunkle, nicht scharf abgegrenzte Querbänder; der Kopf ist auch auf der Unterseite dunkel gefärbt. Sämmtliche Flossen dunkel gewölkt. Schwanzflosse mit einem breiten, dunklen Querbande in der hinteren Längenhälfte, welches von wellenförmig gebogenen, weisslichen Linien durchsetzt ist. Die innere Seite der Brustflossen hellblau, vorne dunkel gefleckt, und gegen den freien Strahlenrand zu mit einem breiten, schwarzen Saume geziert.

Dieser Fisch ist nicht selten im Hafen von Kagoshima.

Das Wiener Museum besitzt zwei Exemplare dieser Art, von denen das grössere in einer der folgenden Abtheilungen dieser Abhandlung abgebildet werden wird.

144. *Tetraroge longispinis* C. V.

Dieses Fischchen scheint überall an den japanesischen Küsten in ziemlicher Menge vorzukommen und erreicht eine Länge von 8cm. Dr. Döderlein sammelte Exemplare dieser Art in der Tokio-Bai, bei Tagawa im inneren Meere, an der Küste von Tango am japanischen Meere, wo er sich häufig im japanischen Grundnetze fing. Die Fischer fürchten genannte Art wegen ihrer spitzen Stacheln und behandeln die gefischten Exemplare mit grosser Vorsicht.

145. *Aploactis aspera* Schleg.

Diese Art wurde von Dr. Döderlein nur einmal in einem Exemplare von $6^1/_2$ cm Länge im Hafen von Kagoshima gefangen.

146. *Minous pusillus* Schleg.

D. 11/9. A. 10.

Körperhöhe $3^1/_3$mal, Kopflänge $2^2/_3$mal in der Körperlänge (ohne Caudale) enthalten. Augendiameter $^1/_2$mal in der Breite des sehr concaven Interorbitalraumes, $^3/_4$mal in der Schnauzenlänge und $2^3/_4$mal in der Kopflänge enthalten.

Die Brustflosse reicht bis zum 6., die Bauchflosse bis zum 1. Analstrahl.

Die untere Körperhälfte ist weiss, die obere schwärzlich mit Weiss vermischt; Rücken- und Schwanzflosse gebändert; Afterflosse weiss mit dunklem Rande. Bauchflossen dunkel; Brustflossen schwärzlich mit helleren Stellen, die hintere Hälfte der oberen Strahlen weisslich. Oberer Theil des Kopfes hellgrau.

Ein Exemplar aus dem Hafen von Kagoshima, von $6^1/_2$ cm Länge.

147. *Pelor japonicum* C.V.

Syn. *Pelor aurantiacum* Schleg.

Durch Vergleichung einer Anzahl typischer Exemplare beider angenommener Arten und von Übergangsformen zwischen denselben, von denen mir eine ganze Reihe vorliegt, komme ich zu der Ansicht, dass beide Arten nicht wohl sich von einander trennen lassen, sondern nur als Farbenvarietäten aufzufassen sind.

In ihrem Körperbau kann ich keinen specifischen und constanten Unterschied auffinden: die erhabenen Kopfleisten und Stacheln sind bei den einzelnen Individuen sehr verschieden entwickelt, ganz unabhängig von der Färbung, die das Thier hat. Die Schnauze ist bei manchen Exemplaren so weit in die Höhe gezogen, dass der oberste Rand der Oberlippe in der Höhe der Augenmitte liegt, bei anderen fällt er noch tiefer als der Unterrand des Auges.

Die Breite des Interorbitalraumes schwankt zwischen $1^1/_2$ und 2 Augenlängen, doch sind diese Verschiedenheiten nur individuell und ein typisches Exemplar von *Pelor japonicum* ist darin oft mehr verschieden von den übrigen derselben Art, als von einem Exemplare des *Pelor aurantiacum.*

Eine Verschiedenheit in der Krümmung des Rückens, wie Schlegel sie angibt, kann ich nicht bemerken. Bezüglich der Tentakelanhänge scheint es mir, als ob die dunkelsten Individuen, also die echten *Pelor japonicum,* dieselben am stärksten entwickelt hätten; die hellsten Individuen, also der typische *Pelor aurantiacum,* am schwächsten. Letzterem fehlen solche anscheinend vollständig an den Flossen; doch finden sich darin genug Übergänge und grosse Verschiedenheiten zwischen gleichgefärbten Formen.

Als einziger Unterschied würde noch die Farbe bleiben. Hätten freilich andere Individuen die charakteristische Färbung einer der beiden Formen, wie sie in Schlegel's Atlas ausgeführt ist, so könnte man sie allenfalls in zwei Arten trennen. Nun kommen aber nicht selten Individuen vor, deren Färbung derartig die Mitte hält zwischen der der beiden fraglichen Arten, dass man sie der einen mit demselben Rechte wie der anderen zuweisen könnte.

Der typische *Pelor japonicum* hat Roth, Braungrau und Weisslich mehr oder weniger unregelmässig über seinen Körper vertheilt. Nun gibt es Individuen, denen das Roth theilweise oder ganz fehlt. An Stelle dieser Farbe ist Gelblichweiss getreten, dazu kommen an den Seiten des Körpers und der Schwanzflosse kleine, schwarze Tupfen in verschiedener Grösse und Anzahl; das Gelbliche kann nun mehr und mehr überhand nehmen und die übrigen Farben ganz verdrängen, bis schliesslich die typische Färbung des *Pelor aurantiacum* entsteht: Gelblich mit schwarzen Tupfen auf der Seite.

Der echte *Pelor aurantiacum* hat eine ganz ungefärbte Zunge; *Pelor japonicum* zeigt eine Menge schwarzer Tupfen auf derselben, doch steht die Menge derselben ganz im Verhältniss zur dunkeln Färbung des Äusseren.

Die beiden Arten stellen nur die Endpunkte einer fortlaufenden Reihe von Farbenvarietäten vor, unter den Zwischenformen sind alle Übergänge zu finden. Man könnte mit gleichem Rechte auf Grund der verschiedenen Interorbitalbreite oder anderer Merkmale solche Reihen von Varietäten herstellen, die sich aber durchaus nicht mit der Reihe der Farbenvarietäten decken würden.

Mir liegt eine Reihe von 10 Individuen vor, die jeden wünschenswerthen Farbenübergang in einander zeigen. Nicht 2 davon haben die gleiche Färbung. Die Reihe beginnt mit einem Exemplare, das vollkommen hellgelb ist; auf den Seiten des Körpers zeigen sich einige kleine, runde Flecken mit scharfer Abgrenzung; nur die Oberseite der Pectoralen zeigt einige schmutziggraue Stellen, ebenso die Spitze der Ventralen. Die nächste Form ist ganz ähnlich, hat aber auf der Schulter und dem Operculum solche graue Stellen; statt der inneren ist die äussere Pectoralseite etwas gefärbt; der ganze Ventralrand ist grau gezeichnet.

Bei einer weiteren Form sind die schwarzen Punkte grösser und zahlreicher; die schmutziggraue Färbung erstreckt sich schon über den ganzen Rücken und auf sämmtliche Flossen; trotzdem ist die Grund- und Hauptfarbe noch hellgelb.

Bei der nächsten Form wird die graue Färbung dunkler, und geht theilweise ins Dunkelbraune über; gelb ist fast ganz verdrängt auf der Aussenseite der Pectorale, der Schulter und dem Operculum. An mehreren Stellen des Kopfes, besonders in der Orbitalgrube beginnt eine weisse Marmorirung sich abzuheben, die alle weiteren Formen immer deutlicher zeigen.

Bei einer fünften Form sind die schwarzen Punkte fast ganz verschwunden; die Bauchseite ist noch gelb; auf der Rückenseite überwiegt dunkelbraun. Beide Farben sind ziemlich scharf abgegrenzt, der vordere Theil des Kopfes ist noch verhältnissmässig wenig gefärbt.

Bei einer sechsten Reihe ist ein grosser Theil der Oberseite des Kopfes tiefbraun mit heller Marmorirung; einzelne braue Flecken gehen schon auf die Bauchseite über; eine Anzahl der hellen Stellen des Rückens zeigt einen röthlichen Ton.

Bei der nächstfolgenden Form ist Gelb völlig von der Oberseite des Körpers und der Pectorale verschwunden, die roth und schwarzbraun mit weisslicher Marmorirung gefärbt sind. Die Bauchseite ist noch zum grössten Theile gelblich; die schwarzen Flecke sind nicht mehr sichtbar. Ähnlich ist die 8. Formenreihe, bei der die gelbe Farbe, die nunmehr weisslich wird, auch auf den Seiten des Körpers und Kopfes verdrängt ist.

Bei der 9. Form ist die Bauchseite weisslich und braun gefleckt, die erstere Farbe aber noch etwas im Übergewicht.

Bei der letzten, mir vorliegenden Form ist auch auf der Bauchseite die helle Färbung zum grössten Theile von Braun und Grau ersetzt.

Der dunkel gefärbte typische *Pelor japonicum* ist an allen japanesischen Küsten sehr häufig; viel seltener sind die heller gefärbten Varietäten, die als Albinobildung aufgefasst werden dürften,[1] doch erhielt ich in Tokio eine Anzahl derselben.

Der japanische Name für den Fisch ist Okose.

Pelor japonicum wird überall gegessen, die Fischer behandeln ihn mit sehr grosser Vorsicht, da er mit seinen langen Rückenstacheln äusserst empfindlich zu stechen vermag; in manchen Gegenden hält man die Stacheln für giftig und erzählt Fälle, dass in Folge der Verwundungen durch dieselben der Tod erfolgt sei. Ein solcher Fall wurde mir von einem zuverlässigen, deutschen Arzte mitgetheilt. Gegen die Giftigkeit spricht der Umstand, dass in einigen Gegenden die Fischer Nachts ohne Licht auf Fischfang ausgehen, z. B. in Tagawa am inneren Meere; beim Leeren ihrer Netze wurden sie dann nicht selten von dem daselbst nicht

[1] Albino-Bildung bei Fischen kommt nicht selten in Japan vor, besonders bei *Pleuronectes scutifer*, *Silurus asotus* und *Conger vulgaris*.

ziemlich häufigen *Pelor* gestochen und erzählten mir, dass der Stich im ersten Augenblicke äusserst schmerzhaft wäre, wussten aber nichts von weiteren schlimmen Folgen des Stiches.

Das grösste Exemplar meiner Sammlung misst 26^{cm}. (Döderl.)

148. ***Synancidium erosum*** sp. C.V.

D. $\frac{13-14}{7}$. A. 3/6.

Die knöchernen Fortsätze des Kopfes zeigen individuell verschiedene Ausbildung in Form, Länge und Dicke.

Die hufeisenförmige Grube zwischen den Augen ist bei einzelnen Individuen ebenso breit wie lang, bei anderen überwiegt die Länge deutlich die Breite.

Die Grundfarbe ist bei vielen Exemplaren röthlich, bei anderen grau bis schwärzlich.

Japanischer Name: Tokenoko.

Häufig bei Tokio und im Hafen von Kagoshima bis zu 16^{cm} Länge.

149. ***Pterois lunulata*** Schleg.

D. 13/11. A. 3/7. P. 13.

Die grösste Körperhöhe ist $3^1/_5$—3mal, die Kopflänge etwas weniger als 3mal in der Körperlänge (d. i. Totallänge mit Ausschluss der Caudale), der Augendiameter sowie die Breite des concaven Interorbitalraumes etwas mehr als 5—$5^2/_5$mal, die Schnauzenlänge circa $2^3/_4$mal in der Kopflänge enthalten. Die schwach nach hinten divergirenden Kämme am Hinterhaupte endigen am hinteren oberen Ende in 2 ziemlich starke Dornen. Am oberen Orbitalende liegen circa 4 Zähne, von denen jedoch nur der hinterste bedeutend entwickelt ist, und ein kurzes Hautläppchen fast in der Mitte des oberen Randes auf einem kleinen, stumpfen Knochenvorsprunge. Von den Hautlappen an den Seiten des Kopfes ist nur das hintere am unteren Rande des Präorbitale von bedeutender Länge. Die Leiste auf den Suborbitalknochen trägt bei jüngeren Individuen am freien Rande mehrere Zahnfortsätze, im Übrigen sind die Suborbitalia glatt und überhäutet; bei alten Individuen dagegen sind die Suborbitalia und deren Längsleiste ihrer ganzen Ausdehnung nach mit zahllosen, stark vorspringenden und bedornten kurzen Nebenleistchen besetzt, wie sie Schlegel's Abbildung dieser Art in der Fauna japonica zeigt.

Interorbitalraum klein und dicht beschuppt, zwischen den Occipitalkämmen eine nackte Stelle.

Die längsten Strahlen der Pectorale reichen noch bei Exemplaren mittlerer Grösse bis zur Basis der Caudale, oder noch ein wenig weiter zurück, bei alten Individuen bis zum hinteren Basisende der Dorsale und die Spitze der Ventralen stets bis zur Analmündung.

Der höchste 6. Dorsalstachel ist bei Exemplaren mittlerer Grösse fast so lang wie der Kopf, bei einem grossen Exemplare unserer Sammlung aber $1^1/_3$mal in der Kopflänge enthalten, die Caudale bei erstem eben so lang, bei letzterem etwas kürzer als der Kopf.

Die abwechselnd schmäleren und etwas breiteren Querbinden des Kopfes erstrecken sich nicht auf die Unterseite desselben.

Die zahllosen schwarzbraunen Flecken der Pectorale zeigen meist die Form von Pfeilspitzen. Nur wenige Flecken liegen auf dem gliederstrahligen Theile der Dorsale und der Anale; auf der Caudale fehlen sie bei sämmtlichen von uns untersuchten Exemplaren.

Zwischen dem oberen Ende der Kiemenspalte und der Caudale liegen circa 70 schräge Schuppenreihen, doch sind nur 26—27 Schuppen von der Seitenlinie durchbohrt.

Nicht selten bei Tokio bis zu einer Länge von 31^{cm}.

Japanischer Name: Minokasago.

150. *Pterois Bleekeri* n. sp. Döderl.

Taf. VI, Fig. 1 und 1 *a*.

D. 13/9. A. 3/7. P. 16.

Die grösste Körperhöhe ist $2^{6}/_{7}$ mal, die Kopflänge etwas mehr als $2^{3}/_{5}$ mal, die Länge der Caudale nur 2 mal in der Körperlänge, der Augendiameter etwas mehr als 4 mal, die Stirnbreite gleichfalls ein wenig mehr als 4 mal, die Schnauzenhöhe etwas mehr als 3 mal in der Kopflänge enthalten. Die obere Kopflinie erhebt sich rascher als bei allen übrigen bisher bekannten Arten derselben Gattung. Das hintere Ende des Oberkiefers fällt unter die Augenmitte.

Die beiden Occipitalleisten erheben sich manchmal zu ganz ungewöhnlich hohen und dabei sehr dünnen, halbmondförmigen oder nierenförmigen Fortsätzen, doch bleiben sie auch öfter kurz, und zeigen höchstens sehr schwache Zähne (vielleicht bei Weibchen? — Steind.). Der obere Orbitalrand ist unregelmässig gezähnt. Die Tentakeln sind überall sehr kurz: über dem Auge, über der vorderen Nasenöffnung, am Präorbitale und dem Vordeckel.

Der Interorbitalraum ist schuppenlos. Wangen (über und unter der Wangenleiste), Kiemendeckel und seitlicher Abfall des Hinterhauptes sind mit sehr rauhen, festsitzenden Schuppen bedeckt. Das ganze Präorbitale ist bei dem auf Tafel VI abgebildeten Exemplare, einem Männchen, von rauhen Leisten durchzogen.

Der längste Dorsalstachel ist nicht ganz 3 mal in der Körperlänge enthalten. Die Brustflosse endigt vor der Schwanzflosse, die Bauchflosse erreicht mit ihrer Spitze zuweilen die Afterflosse.

Die Zeichnung des Kopfes und des Rumpfes ist jener von *P. lunulata* sehr ähnlich. Die Flossen sind gelblich. Nur die Brustflosse zeigt breite, dunkle Querbänder.

Der Kopf trägt am Hinterhaupte eine dunkle Binde, welche schräge nach hinten zum hinteren Rande des Deckels zieht, und vom unteren (theilweise auch hinteren und vorderen) Augenrande laufen 3 dunkle Bänder radienförmig nach unten aus.

Diese Art ist bei Tokio seltener als *P. lunulata* und erreicht nicht die Grösse der letzteren.

151. *Apistus alatus* C.V.

Apistus alatus scheint bei Tokio nicht vorzukommen und Schlegel bezeichnet sie als eine sehr selten in Japan vorkommende Art.

Döderlein erhielt sie jedoch in ziemlicher Menge in Exemplaren bis zu 11^{cm} Länge im Hafen von Kagoshima und vor dem Hafen von Kochi auf Shikoku aus circa 10—30 Faden Tiefe mit dem japanischen Grundnetze. Man fürchtet diesen Fisch seiner Stacheln wegen. Döderlein bezweifelt, dass *Apistus alatus* seine Flossen zum Fliegen benützt, wie Dr. Günther vermuthet. Die japanischen Fischer wissen wenigstens nichts davon.

152. *Sebastes marmoratus* C.V.

Unter den zahlreichen von Dr. Döderlein bei Tokio gesammelten Exemplaren zeigt ein mässig grosses Exemplar merklich dickere Kopfstacheln und ein relativ etwas kleineres Auge als die übrigen Individuen, unterscheidet sich aber von letzteren weder in der Zahl und Anordnung der Kopfstacheln noch in der Körperzeichnung, daher ich die Creirung einer besonderen Art (*Seb. crassispinis* Död.) für unbegründet halte.

Das Wiener Museum besitzt überdiess noch Exemplare von Singapore, Java, Manila und Hongkong, welche zum Theile während der Novara-Expedition gesammelt wurden. Bei dem aus Hongkong stammenden Exemplare stossen die beiden Interorbitalleisten fast in dem ganzen mittleren Drittel ihrer Länge dicht aneinander und weichen dann rascher auseinander als bei allen übrigen von mir untersuchten Individuen, ohne aber andere unterscheidende Merkmale zu zeigen.

Häufig bei Tokio bis zu einer Länge von 46^{cm}.

Japanischer Name: Kasago.

153. *Sebastes pachycephalus* Schleg.

Kopf nach vorne zugespitzt endigend, Unterkiefer nach vorne ein wenig vom Zwischenkiefer überragt. Die obere Kopflinie erhebt sich ohne Krümmung bis zum Beginn der stacheligen Dorsale. Die Kopflänge ist ca. $2^3/_5$ mal in der Körperlänge oder ein wenig mehr als 3mal in der Totallänge, die grösste Rumpfhöhe fast $3^1/_2$ mal in der Totallänge, der Augendiameter, welcher an Länge die Schnauze nur unbedeutend übertrifft, $4^1/_4$ mal, die mittlere Stirnbreite $7^3/_4$ mal, die Kopfbreite etwas mehr als 2mal in der Kopflänge enthalten.

Die Mundspalte erhebt sich ziemlich rasch nach vorne, das hintere Ende des Maxillare fällt in verticaler Richtung weit hinter die Augenmitte.

5 kräftige Dornen am Vordeckelrande; Nasalstachel schlank, spitz. Nur ein deutlich vorspringender spitzer Stachel am hinteren Ende des unteren Randes des ziemlich niedrigen Praeorbitale. Interorbitalleisten nicht stark vorspringend und parallel zum oberen Augenrande laufend. Die beiden kräftigen Occipitalleisten divergiren bedeutend nach hinten. Die beiden kurzen Postorbitalleisten endigen in verhältnissmässig viel längere freie Dornen als die Leisten am Occipitale.

Der höchste 5., 6. und 7. Dorsalstachel erreicht nur $^1/_3$ der Kopflänge.

Die 9 untersten Strahlen der Pectorale sind einfach; der oberste derselben ist der längste Strahl der ganzen Flosse und ca. $1^1/_2$ mal in der Kopflänge enthalten. Die Ventrale gleicht an Länge fast nur dem hinter dem Auge gelegenen Theile des Kopfes oder der Länge der Caudale.

Die kleinere basale Höhenhälfte des stacheligen Theiles der Dorsale ist dicht beschuppt. Zwischen den Gliederstrahlen derselben Flosse reichen die Schuppen höher hinauf. Rumpfschuppen ziemlich gross. Die Seitenlinie durchbohrt ca. 27—30 Schuppen am Rumpfe und ca. 3 auf dem basalen Theile der Caudale, während ca. 46—47 quere Schuppenreihen zwischen dem oberen Ende der Kiemenspalte und der Basis der Caudale unmittelbar über der Seitenlinie endigen. 7—8 Schuppenreihen liegen zwischen der Basis der höchsten Dorsalstacheln und der Seitenlinie in einer verticalen Reihe.

Die grössten der von Dr. Döderlein bei Tokio gesammelten Exemplare sind 14cm lang.

D. 14/12 (11). A. 3/6. P. 17.

154. *Sebastes dactylopterus* de la Roche.

D. 11—12/12—13. A. 3/5. P. 11/8. L. lat. 60. L. tr. 10/17.

Kopfstacheln: n. o′ o″ o‴. po. oe″ oe‴. Int.-L. Int.-R.

Die Köperhöhe ist $3^2/_5$ mal, die Kopflänge $2^1/_2$ mal in der Körperlänge (ohne Caud.), der Augendurchmesser nahezu $^2/_3$ mal in der Schnauzenlänge, $^1/_3$ mal in der Breite des Interorbitalraumes und 3 ($3^1/_4$) mal in der Körperlänge enthalten.

Das hintere Ende des Maxillare reicht in verticaler Richtung bis über die Augenmitte zurück. Zähne in ziemlich schmalen Binden.

Die beiden hinteren Drittel des unteren Präorbitalrandes mit je einer stumpfen, kurzen Spitze.

Der Kopf ist mit Ausnahme des Unterkiefers, des Präorbitale und des halben Interorbitalraumes beschuppt. Auf der unteren Seite des Unterkiefers und an anderen Stellen des Kopfes findet sich eine Anzahl grosser Poren vor.

Von den Stacheln der Dorsale ist der dritte und vierte am längsten. Die Schwanzflosse ist ein wenig concav am hinteren Rande.

In der Kopflänge sind enthalten:

3. Dorsalstachel $2^2/_5$ mal, vorletzter 4 ($4^1/_3$) mal, letzter 3 ($3^1/_3$) mal.

2. und 3. Analstachel $2^2/_3$ mal und etwas mehr als 3mal; Länge der Brustflosse $1^1/_2$ mal, Länge der Bauchflosse $1^3/_4$ mal, Höhe der Pectoralwurzel $3^1/_2$ mal.

Die Seitenlinie durchbohrt ca. 26—28 Schuppen am Rumpfe.

Goldroth, unterhalb der Rückenflosse und auf dem Nacken spärliche schwarze Fleckchen.

Hinterer Theil der Mundhöhle schwärzlich, ebenso die Wände der Bauchhöhle.

Die Kiemendornen sind so lang als die Kiemenblättchen.

Längs der Seitenlinie liegen ca. 60 quere Schuppenreihen, die Seitenlinie selbst durchbohrt ca. 42 Schuppen.

Sehr selten bei Tokio; das grössere der beiden gesammelten Exemplare misst 27^cm und wurde mir von Dr. Döderlein als *Seb. Hilgendorfii* n. sp. eingesendet.

155. ***Sebastes nivosus*** Hilgend.

Taf. VII.

D. 13/12. A. 3/6. P. 8/11. L. lat. 70.

Kopfstacheln: n. o' o'''. po. oc'''.

Die obere Kopflinie erhebt sich unter schwacher Bogenkrümmung bis zum Beginne der Dorsale und ist hinter dem Auge ein wenig eingedrückt.

Die grösste Rumpfhöhe gleicht genau oder nahezu der Kopflänge und ist genau oder ein wenig mehr als $2^2/_3$ mal in der Körperlänge oder ca. $3^1/_2$ mal in der Totallänge, die Länge des Auges so wie der Schnauze $4^2/_5$ mal, die mittlere Breite der Stirne ca. $5^1/_2$ mal in der Kopflänge enthalten.

Das hintere Ende des Auges fällt in verticaler Richtung unter den hinteren Augenrand, bei älteren Individuen reicht es noch etwas weiter zurück. Der untere Rand des Präorbitale zeigt 3 mehr oder minder stumpf gerundete Auszackungen, die hinterste derselben endigt nach hinten in einen kurzen stumpfen Dorn. Die Stirne ist, abgesehen von den wulstigen Leisten am oberen Augenrande, querüber schwach convex.

Der Kopf ist mit Ausnahme der Kiefer, der Schnauze (von den Narinen angefangen), des Präorbitale und fast des ganzen Zwischendeckels beschuppt. Die kleinen, festsitzenden Schuppen fühlen sich sehr rauh an und sind gleich den Rumpfschuppen an der Basis noch mit sehr kleinen Schüppchen überdeckt. Die 5 Vordeckelstacheln sind plattgedrückt, dreieckig, stumpf und zeichnen sich durch keine besondere Länge aus.

Der obere Rand der stacheligen Dorsale ist gleichförmig gerundet; der 5. und 6. höchste Dorsalstachel erreicht bei jüngeren Exemplaren nahezu die Hälfte einer Kopflänge und ist bei älteren Individuen fast $2^1/_4$ mal in der Kopflänge enthalten.

Der 2. Analstachel ist bedeutend kräftiger, doch nur wenig länger als der dritte und $2^1/_2$—$2^2/_5$ mal in der Kopflänge begriffen.

Die Pectorale gleicht an Länge dem Kopfe mit Ausschluss der Schnauze und circa eines halben Augendiameters, somit ca. $^3/_3$ der ganzen Kopflänge; die kürzere Ventrale ist bedeutend mehr als $1^3/_5$ mal in der Kopflänge enthalten und ebenso lang wie die Caudale, deren hinterer Rand äusserst schwach gebogen ist.

Die Seitenlinie durchbohrt 36—39 Schuppen am Rumpfe, und 2—3 auf der Caudale, während ca. 70 schräge Schuppenreihen zur Seitenlinie herabziehen.

Schwarzbraun mit zahllosen weissen Pünktchen am Körper wie auf den Flossen. Bei einigen Exemplaren ist das einförmige Schwarzbraun des Rumpfes durch hellere Nebelflecken unterbrochen.

Nicht selten auf dem Fischmarkte von Tokio in Exemplaren bis zu 26^cm Länge.

Das Wiener Museum besitzt überdiess noch ein grösseres Exemplar von Hakodate.

Japanischer Name: Kogumesoi oder Keshimuyo, nach Hilgendorf aber Goma soi.

156. ***Sebastes Schlegelii*** Hilgend. (= ***Sebastes inermis*** Schleg.).

D. 13/12. A. 3/7—8. L. lat. c. 66—70.

Kopfstacheln: n. o' o'''. po. oc'''. Interorbitalleiste.

Körperhöhe stets weniger als 3 mal in der Körperlänge oder ca. $3^1/_2$ mal in der Totallänge, Kopflänge $2^5/_6$—$2^3/_4$ mal in der Kopflänge, Augendiameter $4^1/_4$ mal Schnauzenlänge (bis zur schwach vorspringenden Unterkieferspitze gemessen) etwas weniger als 4 mal, mittlere Stirnbreite $4^3/_5$—5 mal in der Kopflänge enthalten.

Das hintere Ende des Maxillare fällt in verticaler Richtung unter den hinteren Augenrand. Das Präorbitale trägt am unteren Rande 2—3 spitze Dornen, deren Spitze schräge nach hinten gerichtet ist. 5 plattgedrückte, meist spitzige Dornen am ganzen Vordeckelrande, von denen der 4. am längsten und horizontal nach hinten gerichtet ist; der erste unterste ist bei alten Individuen häufig stark abgestumpft und breit dreieckig.

Der untere Rand des Zwischendeckels endigt am oberen hinteren Ende in einen mehr oder minder schwach entwickelten zarten spitzen Stachel, neben welchem zuweilen ein zweiter Stachel am unteren Ende des Suboperkels liegt.

Der Kopf ist mit Ausnahme der Kiefer, der Schnauze (von den Narinen angefangen) und des grössten vorderen Theiles des Präorbitale schuppenlos. Die Schuppen am Interoperkel sind äusserst klein. Auf der unteren Seite des Unterkiefers zeigen sich mehrere ziemlich grosse Porenöffnungen.

Der 6. oder 6.—7. höchste Dorsalstachel ist stets etwas mehr als 2mal in der Kopflänge enthalten. Der 2. Analstachel ist kräftiger, doch bald ein wenig länger, bald nur eben so lang als der 3. Analstachel und ca. $2^3/_5$—3mal in der Kopflänge begriffen. Die Pectorale übertrifft die Ventrale nur wenig an Länge und ist ca. $1^1/_2$mal in der Kopflänge enthalten; die Länge der Ventralen beträgt $^2/_3$ einer Kopflänge. Die Schwanzflosse ist am hinteren Rande fast vertical abgestutzt. Die Spitze der Ventralen reicht bis zur Aftermündung und überragt ein wenig den Hinterrand der Pectoralen.

Braungrau (bei Weingeistexemplaren) mit helleren und dunkleren Schattirungen; ein dunkler Streif auf dem Maxillare und zwei bis drei über den Wangen. Operculum oben und unten mit einem dunklen verschwommenen Fleck (als Endtheile der 2 oberen Wangenstreifen, von denen der oberste häufig im vorderen Theile verschwindet).

Ziemlich häufig auf dem Fischmarkt zu Tokio in einer Länge bis zu 29^{cm}.

Das Wiener Museum besitzt dieselbe Art in zahlreichen kleineren Exemplaren aus dem Meerbusen Strietok durch Dr. Dybowski.

157. ***Sebastes vulpes*** n. sp. Döderl.

D. 13/13. A. 3/6. P. 9/9. L. lat. c. 61 (davon 32—36 durchbohrt.)

Kopfstacheln: n. o′ o′′′. po. oc′′′, ziemlich erhaben. Int.-L. wenig hervortretend.

Die grösste Rumpfhöhe ist $3^1/_8$—3mal, die Kopflänge $2^3/_5$—$2^1/_2$ in der Körperlänge, der Augendurchmesser 4—$4^2/_3$mal, die Schnauzenlänge (bis zum knopfförmig verdickten, vorspringenden Unterkieferende gemessen) 4—$4^3/_4$mal, die mittlere Stirnbreite $5^3/_5$—5mal in der Kopflänge enthalten.

Das hintere Ende des Oberkiefers fällt in verticaler Richtung unter den hinteren Augenrand. Kieferzähne in mässig breiten Binden.

Der Unterkiefer überragt nach vorne den Zwischenkiefer und ist vom vorderen Ende knopfförmig aufgetrieben.

Der untere Rand des Präoculare ist 3mal stufenförmig ausgezackt. Der freie Rand des Vordeckels zeigt 5 Stacheln, von denen die 2 untersten stark plattgedrückt, dreieckig und stumpf, die 3 übrigen schlanker und länger und meist sehr spitzig sind. Die beiden viel längeren Operkelstacheln divergiren stark nach hinten.

Der freie Rand des Zwischendeckels trägt am oberen Ende einen insbesondere bei älteren Individuen gut entwickelten spitzen Dorn, neben welchem am unteren Ende des Suboperkels ein zweiter schwächer ausgebildeter Stachel liegt, der zuweilen in mehrere Spitzen sich theilt. Die Schnauze, der grössere vordere Theil des Präoculare und der Unterkiefer sind schuppenlos. Am Maxillare liegt zunächst hinter und unter dem Ende des Präoculare eine kleine Gruppe sehr kleiner Schuppen. Der übrige Theil des Kopfes ist dicht mit rauhen Schuppen bedeckt. Jederseits mehrere Poren an der Unterseite des Unterkiefers. Stirne querüber nahezu flach mit sehr schwach vertretenden Leisten. Rechenzähne am ersten Kiemenbogen, insbesondere am mittleren Theile desselben, lang und schlank.

Die obere Profillinie des Kopfes erhebt sich mässig steil und ist in der Schnauzengegend ein wenig gebogen.

Von den Stacheln der Dorsale sind der 5. oder der 6. und 7. am höchsten und ca. 2 bis etwas mehr als $2^1/_4$ mal in der Koflänge enthalten. Der 2. Analstachel ist kräftiger als der 3., doch zuweilen ein wenig kürzer als letzterer; seine Länge, bei 3 Exemplaren gemessen, ist bei kleinen Individuen $2^1/_2$ mal, bei einem grossen Exemplare fast 3 mal in der Kopflänge enthalten.

Die Pectorale ist ebenso lang wie der Kopf mit Ausschluss der Schnauze; die Länge der Ventrale ist $1^2/_3$ bis nahezu $1^3/_4$ mal in der Kopflänge enthalten.

Das äusserste Ende des zurückgelegten Pectorale reicht bei alten Exemplaren bis zur Analmündung, bei jüngeren Individuen noch ein wenig über letztere hinaus.

Die Caudale ist ca. ebenso lang wie die Ventrale und am hinteren Rande schwach convex. Die Körperschuppen sind im mittleren Theile der Rumpfseiten ziemlich gross, bilden schräge Reihen und tragen theilweise zunächst der Basis des freien Schuppenfeldes kleine Schüppchen.

Die Seitenlinie durchbohrt nur 32—36 Schuppen am Rumpfe und 1—2 auf der Basis der Caudale, doch liegen ca. 61 Schuppenreihen zwischen dem oberen Ende der Kiemenspalte und der Basis der Caudale zunächst über der Seitenlinie.

Rumpf röthlichbraun und weisslich melirt, eben so die Dorsale, Caudale und Anale. Pectorale und Ventrale graulich. Kopf in der oberen Hälfte rothbraun und mit dunklen braunen punktartigen Fleckchen übersäet, welche in der Hinterhauptsgegend sich zu wellenförmigen Streifen fast vereinigen, oder aber wie der Rumpf gezeichnet. Unterseite des Kopfes und Rumpfes weisslichgelb.

Nicht selten auf dem Fischmarkte zu Tokio.

L. Sebastes vulpes steht dem *Sebast. Schlegelii* Hilg. äusserst nahe, lässt sich aber von letzterem schon auf den ersten Blick durch den Mangel spitzer Stacheln am Unterrande des Präoculare unterscheiden.

158. ***Sebastes oblongus*** Gthr. (var.?)

D. 13/12. A. 3/7. L. lat. 42 (wirklich durchbohrt).

Kopfstacheln: n. o‴. po. oc‴, alle rudimentär.

Die Körperhöhe ist $3^1/_2$ mal, die Kopflänge $2^3/_4$ mal in der Körperlänge enthalten.

Der Augendurchmesser gleicht der Breite des Interocularraumes und geht $1^1/_8$ mal in die Schnauzenlänge und $5^1/_2$ mal in die Kopflänge.

Das Maxillare reicht bis hinter den Hinterrand des Auges. Kieferzähne in breiten Binden. Unterrand des Präorbitale mit sehr wenig deutlichen Vorsprüngen. Die unteren Präoperkelstacheln sehr undeutlich. Kopf mit Ausnahme des Unterkiefers und des Maxillare beschuppt. Poren am Unterkiefer wenig entwickelt.

In der Rückenflosse ist der 4.—7. Stachel am längsten. Der 2. Analstachel ist länger und stärker als der 3.; die Brustflosse ist abgerundet. Die Caudale zeigt eine schwache Krümmung am hinteren Rande.

In der Kopflänge sind enthalten:

Kopfbreite $2^1/_3$ mal,	3. Analstachel $3^3/_4$ mal,
4. Dorsalstachel $2^1/_4$ mal,	Höhe der gliederstrahligen Dorsale $2^1/_2$ mal,
Vorletzter Dorsalstachel 5 mal,	Länge der Brustflossen $1^1/_2$ mal,
Letzter Dorsalstachel $4^1/_4$ mal.	„ der Bauchflossen $1^4/_5$ mal,
2. Analstachel 3 mal.	Höhe der Basis der Pectoralen $4^1/_3$ mal.

Die Brustflosse reicht bis hinter die Analmündung zurück, die Bauchflosse bis zu letzterer. Körper dunkelbraun. Vom Auge aus verlaufen 5 dunkle, radiäre Bänder nach dem hinteren Theile des Kopfes. Kopf im unteren Theile hell mit braunen Flecken.

Ein Exemplar von 31cm Länge in Tokio erhalten. (Döderl.)

159. *Sebastes elegans* n. sp. Döderl.

D. 13/12. A. 3/6. L. lat. 35 (durchbohrt.)

Kopfstacheln: n. o‴. po. oe‴. wenig erhaben.

Die Körperhöhe ist $2^3/_4$ mal, die Kopflänge eben so oft in der Körperlänge (ohne Caudale) enthalten. Der Augendurchmesser erreicht $^3/_4$ der Schnauzenlänge, $^3/_5$ der Stirnbreite, und ist $3^3/_4$ mal in der Kopflänge enthalten.

Das Maxillare reicht bis zum Hinterrande des Auges. Zähne in etwas schmalen Bändern.

Unterrand des Präorbitale mit sehr seichten Einbuchtungen. Unbeschuppt sind Mandibulare, Maxillare und Präorbitale. Poren im Unterkiefer deutlich.

An der Rückenflosse ist der 4.–7. Stachel am längsten. Der 2. Analstachel ist wenig stärker und länger als der dritte.

Sämmtliche Pectoralstrahlen sind einfach.[1]

Hinterrand der Schwanzflosse gerade abgestutzt.

In der Kopflänge sind enthalten:

Kopfbreite $2^1/_2$ mal,	Länge der Brustflossen $1^1/_2$ mal,
Länge des 4. Dorsalstachels $4^1/_3$ mal,	„ „ Bauchflossen $1^3/_4$ mal,
„ „ vorletzten Dorsalstachels 4 mal	Höhe der Pectoralbasis $3^3/_5$ mal,
„ „ letzten Dorsalstachels $3^1/_3$ mal,	Länge der Schwanzflosse $1^2/_3$ mal,
Höhe der gliederstrahligen Dorsale $2^1/_2$ mal.	„ „ Caudale 2 mal.

Die Bauchflosse reicht bis zum After, die Brustflosse noch etwas weiter zurück.

Färbung hell; Körper mit 5 mehr oder weniger in Flecken aufgelösten, dunkelbraunen Querbändern; eben solche Flecken bedecken die Flossen und die Unterseite des Kopfes so wie des Rumpfes. Kopf mit mehreren, vom Auge radiär ausstrahlenden dunkelbraunen Bändern; die Oberseite desselben ist dunkel.

Ich fing ein Exemplar von $6^1/_2$ cm Länge bei Tagawa im inneren Meere (Döderl.).

160. *Sebastes inermis* C. V.

D. 13/15. A. 3/7. L. lat. 38—42 (durchbohrt).

Kopfstacheln: n. o′, o‴. po. oe‴ alle rudimentär.

Die obere Kopflinie erhebt sich mässig rasch, ohne Krümmung bis zur schwach gebogenen Nackengegend. Der Kopf spitzt sich nach vorne zu; der Unterkiefer überragt nach vorne den Unterkiefer und endigt in einen knopfförmigen Vorsprung.

Die grösste Rumpfhöhe ist $2^4/_5$—3 mal in der Körperlänge enthalten und steht der Kopflänge nur ganz unbedeutend nach. Die Länge des Auges ist etwas mehr als 3—$3^2/_5$ mal, die Schnauzenlänge (bis zur Kinnspitze gemessen) $2^2/_3$—$2^3/_4$ mal, die Stirnbreite $4^1/_4$—$4^1/_3$ mal in der Kopflänge enthalten.

Die Mundspalte erhebt sich rasch nach vorne. Das hintere Ende des Oberkiefers fällt in verticaler Richtung unter oder ein wenig hinter die Augenmitte. Zahnbinden in den Kiefern, am Vomer und auf den Gaumenbeinen schmal; Zähne zart und spitzig. Präorbitale niedrig, mit 2 kräftigen Stacheln, deren Spitze nach hinten gekehrt ist.

Maxillare und Unterkiefer beschuppt.

Der obere Rand der stacheligen Dorsale ist ziemlich stark gebogen; der 5. und 6. höchste Dorsalstachel erreicht nahezu eine halbe Kopflänge, der 1. Stachel übertrifft nur unbedeutend die halbe Länge eines Auges und der vorletzte ist ca. ebenso lang wie die Schnauze.

---

[1] Nur eine Eigenthümlichkeit junger Individuen. Steind.

Die Länge der Ventrale ist ca. $2^2/_5$ mal, die der Pectorale ca. $1^1/_3$ mal, die der Caudale ca. $1^3/_5$ mal in der Kopflänge enthalten. Die Spitze der Ventralen reicht beinahe ebenso weit zurück wie der längste Pectoralstrahl, und zwar bei manchen Exemplaren fast bis zum Beginn der Anale.

Der 2. Analstachel ist stets kräftiger als der 3., und bald ein wenig länger, bald etwas kürzer als dieser. Der hintere Rand der Caudale ist nahezu vertical abgestutzt.

Maxillare äusserst zart beschuppt. Unterkiefer, Schnauze und Präorbitale schuppenlos.

Die Seitenlinie läuft nahezu parallel zur mässig gebogenen Rückenlinie und durchbohrt 38—42 Schuppen am Rumpfe und 2 auf der Caudale.

Schwärzlichgrau oder röthlichviolett, nach unten heller.

Häufig bei Tokio.

Vulgärname: Me waru.

161. *Sebastes Joyneri* Gthr.

D. 13/14—15. A. 3/7. P. 10/6. L. l. c. 42—49 (durchbohrt).

Kopfstacheln: n. o′ o″. oe‴, alle sehr klein.

Die grösste Rumpfhöhe gleicht der Kopflänge oder übertrifft sie ein wenig und ist nahezu 3—$3^1/_6$ mal in der Kö perlänge, der Augendiameter 3 mal, die Schnauzenlänge sowie die Stirnbreite mehr als $3^3/_4$ mal in der Kopflänge enthalten.

Die Mundspalte ist von mässiger Länge und erhebt sich ziemlich rasch nach oben. Der Unterkiefer überragt mit seinem vorderen aufgetriebenen Ende den Vorderrand des Zwischenkiefers. Kieferzähne zart, spitz in schmalen Binden. Das hintere Ende des Oberkiefers fällt in verticaler Richtung ein wenig vor die Augenmitte. Präorbitale niedrig, mit 2 starken Stacheln am unteren Rande, deren Spitzen nach hinten geneigt sind.

Die Stacheln des Vordeckels nehmen vom vordersten 1. bis zum 4., vorletzten rasch an Länge zu und sind sehr schlank. Der 5. oberste Stachel ist noch ein wenig schwächer als der erste.

Die beiden Deckelstacheln liegen fast parallel zu einander und der obere ist länger und etwas kräftiger als der untere.

Maxillare beschuppt, ebenso die ganze Unterseite des Unterkiefers wie bei *Seb. inermis* C. V., ferner auch ein grosser Theil der Schnauze und des Präorbitale, somit fast der ganze Kopf mit Ausschluss der Lippen.

Unterkieferporen wenig bemerkbar.

In der Dorsale ist der 4. oder der 4.—6. Stachel am längsten und genau 2 mal in der Kopflänge enthalten.

Der 2. Analstachel übertrifft den 3. an Stärke, gleicht ihm aber an Länge und ist genau oder nahezu ebenso lang wie der höchste Dorsalstachel.

Die Pectorale spitzt sich etwas nach hinten zu, ist nur um eine halbe Augenlänge kürzer oder nahezu so lang wie der Kopf und reicht zurückgelegt ein wenig über die Aftermündung hinaus oder selbst bis zum Beginn der Anale.

Die Länge der Ventrale gleicht der der Caudale, das ist: $^2/_3$ einer Kopflänge.

Der 2. oder 3. gegliederte Dorsalstachel ist etwas kürzer als die Hälfte des Kopfes und ca. $2^1/_3$ mal länger als der letzte Gliederstrahl derselben Flosse. Der hintere Rand der Caudale ist schwach concav.

Der stachelige Theil der Dorsale ist in der unteren Höhenhälfte mit winzigen Schüppchen bedeckt, während der gliederstrahlige Theil der Dorsale, der Anale und die Caudale vollständig beschuppt sind.

Färbung im Leben roth (nach Döderlein), auf dem Rücken dunkler. Fünf schwärzliche Querbinden ziehen über den Rücken herab und erstrecken sich nach oben über den basalen Theil der Rückenflosse und endigen mit Ausnahme der 2. und 3. Binde bereits an der Seitenlinie. Die 2 letzten Querbinden sind von geringer Höhe, fleckenartig gerundet. Auch die 2 längsten mittleren Querbinden lösen sich zuweilen in 2 über einander liegende runde Flecken auf.

Die von Dr. Döderlein in Tokio gesammelten Exemplare sind 16cm lang; nach der häufigen Vorstülpung des Magens zu schliessen, scheinen sie in etwas grösserer Tiefe sich aufzuhalten.

Japanischer Name: Tokenoko me waru.

Sebastes Joyneri Gthr. ist schon durch seine eigenthümliche Zeichnung und geringere Schuppengrösse nicht mit *S. inermis* zu verwechseln, dem er übrigens durch seine Kopfbewaffnung äusserst nahe steht. Dr. Hilgendorf hält beide Arten für identisch.

Die grösste Anzahl der japanischen *Sebastes*-Arten scheint nicht im Süden von Japan vorzukommen, da die meisten der bekannten Arten von Tokio und Hakodate stammen, nicht aber von dem am besten erforschten Nagasaki.

BATHYSEBASTES n. gen.

7 Kiemenhautstrahlen. Oberseite des Kopfes schuppenlos. Die oberflächlichen Kopfknochen schliessen weite Hohlräume ein.

Mundspalte ausserordentlich ausdehnungsfähig. Zahnbinden in den Kiefern, am Vomer und auf den Gaumenbeinen. Rumpfschuppen cycloid, Schuppen an den Seiten des Kopfes von der allgemeinen Kopfhaut überdeckt. Übrige Charaktere wie bei *Sebastes*.

162. ***Bathysebastes albescens*** n. sp. Döderl.

D. 12/10. A. 3/5. P. 15/6. V. 1/5. L. lat. 27. (durchbohrte Schuppen.)

Kopfstacheln: n. o' o'''. po. oc''', sämmtliche obere Kopfstacheln mit Ausnahme der Occipitaldornen (oc''') sehr klein.

Die grösste Rumpfhöhe ist ca. $3^1/_4$ mal in der Körperlänge oder 4 mal in der Totallänge, die Kopflänge $2^3/_{11}$ mal in der Körperlänge oder etwas weniger als 3 mal in der Totallänge, der Augendiameter $5^2/_5$ mal, die Schnauzenlänge (bis zur Kinnspitze gemessen) ca. $3^1/_4$ mal, die mittlere Stirnbreite mehr als $5^1/_3$ mal, die grösste Kopfhöhe ca. $1^3/_5$ mal, die grösste Kopfbreite $2^4/_5$ mal in der Kopflänge enthalten.

Die Länge der Mundspalte, von der Kinnspitze bis zum hinteren Ende des Maxillare genommen, ist nur wenig kürzer als die Hälfte der Kopflänge. Das hintere Ende des Maxillare fällt in vertikaler Richtung ein wenig vor den hinteren Augenrand.

Die Kinnspitze ist mässig verdickt. Kiefer-, Vomer- und Gaumenzähne klein, spitz, in schmalen Binden.

Der untere Rand des Präorbitale endigt in 3 lange, schlanke Dornen, von denen der erste nach vorne, der zweite ein wenig schräge nach unten und der dritte stark schräge nach hinten gekehrt ist. 5 lange spitze Dornen am Vordeckelrande, von denen der 3. und 4. am stärksten entwickelt ist; der letzte oder oberste 5 Vordeckelstachel gleicht an Länge dem 2., und der erste ist ca. halb so lang wie der nächstfolgende.

Von der Articulationsstelle des Kiemendeckel laufen bei dem zur Untersuchung vorliegenden Unicum links 2, auf der rechten Kopfseite aber 3 nach hinten divergirende und zugleich nach oben gewendete Leisten aus, die in lange freie Stacheln endigen.

Die Orbita ist nicht rund, sondern nähert sich einem Dreieck mit abgerundeten Winkeln, dessen untere Seite parallel mit dem Maxillare läuft. Die Stirne ist querüber schwach gewölbt. Nasaldorn sehr zart, spitz, ziemlich hoch über den vorderen kleinen Narinen gelegen.

Sämmtliche Knochen an der Oberfläche des Kopfes, die Suborbitalia, der Unterkiefer und das Randstück des Vordeckels bilden mehr oder minder weite Hohlräume, die nach aussen durch eine dünne, schuppenlose Membran, welche an mehreren Stellen von grösseren oder kleineren Poren durchbrochen ist, überdeckt sind.

Der Zwischendeckel ist von geringer Höhe und wird von dem Präoperkel nach aussen fast vollständig überdeckt.

Die Rechenzähne an der Vorderseite des ersten Kiemenbogens stehen in einer lockern Reihe, sind daher nicht zahlreich; sie nehmen zunächst dem hinteren Kiemenbogenwinkel rasch an Länge zu, zeigen zunächst vor demselben die Form einer Messerscheide, und sind am oberen Rande stets fein gezähnt. Nach vorne nehmen sie am unteren Kiemenbogen sehr rasch an Länge ab und liegen fast horizontal demselben an. Die obersten vordersten 3—4 Rechenzähne am oberen Kiemenbogenaste gleichen zarten Plättchen mit gezähntem freien (unteren Rande). Die Zahnfortsätze an der Vorderseite aller übrigen Kiemenbogen sind am oberen Ende abgerundet, plattgedrückt, von sehr mässiger Höhe und nehmen überdiess nach vorne wie gegen das obere Ende des Kiemenbogens bedeutend an Breite zu, aber ein wenig an Höhe ab. An der Hinterseite der 3 ersten Kiemenbogen sind die Rechenzähne sehr schlank, pfeilspitzenförmig und nehmen gegen das vordere untere wie gegen das obere Ende jedes Kiemenbogens an Höhe ab. Die Pseudobranchien sind mässig entwickelt.

Am Kopfe sind nur die Wangen (mit Ausschluss der Suborbitalia und der Knochenstütze des Präoperkels), der obere Theil des Kiemendeckels und der Unterdeckel beschuppt. Mundhöhle schwärzlich-violett pigmentirt.

Die Dorsalstacheln sind schlank und von geringer Höhe. Der 4. höchste Stachel ist nicht viel länger als jeder der beiden folgenden und erreicht nur wenig mehr als $^1/_4$ der Kopflänge. Der 1. wie der 12. Dorsalstachel ist ca. halb so lang wie das Auge; der letzte 13. Dorsalstachel übertrifft ein wenig die Länge eines Auges und der 2. höchste Gliederstrahl derselben Flosse ist etwas mehr als $2^3/_4$ mal in der Kopflänge enthalten.

Die Pectorale ist stark entwickelt, lang; die 3 obersten und die 6 untersten Strahlen sind einfach, der längste 8. und 9. Pectoralstrahl gleichen an Länge dem Kopfe mit Ausschluss der Schnauze, sind somit ca. $1^3/_5$ mal in der Kopflänge enthalten. Die Spitze der Brustflossen reicht bis zur Analmündung zurück. Die Länge der Ventralen ist $2^1/_5$ mal, die der Caudale $1^3/_4$ mal in der Kopflänge enthalten. Die Stacheln der Anale nehmen vom ersten bis zum dritten ungleichmässig an Höhe zu; der 2. Analstachel erreicht fast die doppelte Höhe des 1., und der 3. ist ca. $1^1/_3$ mal höher als der 2. und ca. 4 mal in der Kopflänge enthalten. Der Hinterrand der Caudale ist schwach concav.

Die Rumpfschuppen sind sehr dünn, ganzrandig und zum grössten Theile in der Haut eingebettet. Die Seitenlinie ist breit rinnenförmig mit vorspringenden Rändern. Sie läuft fast parallel zur schwachgebogenen oberen Profillinie des Rumpfes und liegt zum grössten Theil in oder noch über dem oberen Höhendrittel des Rumpfes; nur unmittelbar vor der Basis der Caudale senkt sie sich allmälig zur Höhenmitte des Caudalstieles herab. Einige 70 Schuppenreihen laufen zum oberen Rande des Seitencanals (zwischen dem oberen Ende der Kiemenspalte und der Basis der Caudale) herab. Der basale Theil der Schwanzflosse und ein noch schmälerer Streifen zunächst der Basis der Pectorale sind beschuppt; alle übrigen Flossen sind vollkommen schuppenlos.

Die Farbe des Fisches ist weisslich gelb; Magen und Darmcanal schwarz gefärbt, die übrigen Eingeweide hell. Schwimmblase vorhanden.

Japanischer Name: Skirokasago (d. h. weisser *Sebastes*).

Diese Art soll nach Aussage des Fischer sehr selten vorkommen und scheint eine typische Tiefsee-Form zu sein. Das beschriebene Exemplar ist 30cm lang.

Fam. COTTIDAE.

163. *Cottus Hilgendorfii* n. sp. Döderl.

D. 8/17. A. 13. P. 16. L. lat. 35.

Die grösste Rumpfhöhe ist ca. $5^3/_5$ mal in der Körperlänge oder mehr als $6^2/_3$ mal in der Totallänge; die Kopflänge 4 mal in der Totallänge, der Augendiameter fast 4 mal, die Schnauzenlänge unbedeutend mehr als 4 mal, die grösste Kopfhöhe 2 mal, die grösste Kopfbreite etwas weniger als $1^1/_3$ mal in der Kopflänge enthalten. Die mittlere Breite des knöchernen Theiles der Stirne ist sehr gering und erreicht ca. $^1/_3$ der Augenlänge.

Das hintere Ende des Oberkiefers fällt in verticaler Richtung ein wenig hinter die Augenmitte. Die Mundspalte zeigt eine nahezu horizontale Lage; schmale Zahnbinden in den Kiefern und am Vomer.

Der Vordeckel trägt am gerundeten Winkel einen einzigen starken, säbelförmig aufgebogenen Stachel von nicht unbedeutender Länge; ein viel kleinerer Stachel liegt am unteren vorderen Ende des Suboperkels unter der Haut halb verborgen.

Kiemenhaut in ziemlicher Ausdehnung mit dem Isthmus verwachsen.

Die Aftermündung liegt ebenso weit vom vorderen Augenrande wie von der Basis der Caudale entfernt.

Die erste Dorsale beginnt in verticaler Richtung über dem Ende der häutigen Suboperkelspitze und ist durch einen sehr kleinen Zwischenraum von der 2. höheren Dorsale getrennt.

Die Anale beginnt senkrecht unter dem 2. oder 3. Strahl der 2. Dorsale.

Die Brustflosse hat eine hohe, schräg gestellte Basis und reicht nahezu bis zum Beginn der Anale zurück; die Bauchflosse beginnt circa unter der Basis der mittleren Pectoralstrahlen (in verticaler Richtung) und die äusserste Spitze der Ventralen fällt circa um eine Augenlänge vor die Ansmündung. Der hintere Rand der Caudale ist fast vertical abgestutzt.

Die Körperhaut ist nackt, vollständig glatt; nur am Hinterhaupte liegen äusserst zarte, feine Wärzchen.

Die Färbung ist oben braun, unten gelblich, an den Seiten dunkler gefleckt. Zwei schwärzliche Binden ziehen von der Basis der 2. Dorsale schräge nach vorne und unten, ohne die Bauchseite zu erreichen. Die 3. undeutlicher ausgeprägte Binde von geringerer Höhe liegt unter dem vordersten Theile der 1. Dorsale und eine 4. schmale halbmondförmige Binde unmittelbar an der Basis der Caudale. Sämmtliche Flossen sind gelblich und mit braunen Flecken geziert, die schräge oder verticale Reihen bilden; nur die Ventralen sind einfärbig gelb.

Das hier beschriebene Exemplar ist 9^{cm} lang und wurde Herrn Dr. Döderlein als eine Seltenheit von den Fischern in Tokio gebracht.

Cottus Hilgendorfii ist sehr nahe mit *Cottus pollux* Gthr. verwandt, welche letzte Art aber 9 Stacheln und 19 Gliederstrahlen nach Günther's Beschreibung besitzt und deren Ventrale noch ein wenig über die Analmündung zurückreicht.

164. *Centidermichthys percoides* sp. Gthr., Steind.

B. 6. D. 10/19. A. 17. P. 15. V. 1/2.

Körperform bei erwachsenen Individuen sehr gestreckt; die grösste Rumpfhöhe ist bei denselben 6—7 mal, die Kopflänge ca. $3^1/_6$ mal in der Totallänge, der Augendiameter $5^2/_5$—$5^3/_5$ mal, die Schnauzenlänge etwas mehr als $3^1/_2$ mal, die mittlere Stirnbreite 9—$9^1/_2$ mal, die grösste Kopfhöhe $2^1/_4$—$2^1/_2$ mal, die grösste Kopfbreite mehr als $2^2/_3$—3 mal in der Kopflänge enthalten.

Mundspalte sehr lang, mässig nach vorne ansteigend. Das hintere Ende des Oberkiefers fällt unter den hinteren Rand des ovalen Auges.

Spitze schlanke Zähne in den Kiefern, am Vomer und auf den Gaumenbeinen.

Die Zahnbinde des Zwischenkiefers nimmt gegen das vordere Knochenende rasch an Breite zu. An den Seiten des Unterkiefers sind die mittleren Zähne der innersten Reihe bedeutend grösser als die entsprechenden des Zwischenkiefers und ebenso gross wie die längsten Zähne des Zwischenkiefers am vorderen Ende jeder Zwischenkieferhälfte.

Ein ziemlich kräftiger, meist schwach hakenförmig gebogener stumpfer Zahn in der Winkelgegend des Vordeckels und 2—3 schwach vortretende, stark abgestumpfte, zuweilen selbst abgerundete, zahnartige Vorsprünge am unteren gebogenen Rande desselben Knochens. Nasalstachel klein, spitz: Interorbitalraum mässig concav. Ein zartes Hautläppchen am hinteren Ende des oberen Augenrandes.

Die beiden Dorsalen stehen unmittelbar hinter einander, hängen aber nicht zusammen. Der 3. oder der 3. und 4. Dorsalstachel erreichen die grösste Höhe, welche circa einer Schnauzenlänge gleicht. Der höchste 6. und 7. oder 6.—8. Strahl der zweiten Dorsale ist ca. $2^2/_3$— nahezu 3 mal in der Kopflänge enthalten.

Sämmtliche Pectoralstrahlen sind einfach und die unteren dicker als die oberen. Die grösste Länge der Pectorale am 7. oder 8. Strahl gleicht der Entfernung des Augencentrums von der äussersten hinteren Spitze des Suboperkels. Die Länge der Ventrale übertrifft die Augenlänge nicht bedeutend und ist ca. $4^3/_5$ mal in der Kopflänge enthalten. Die Länge der Caudale, deren hinterer Rand fast vertical abgestutzt ist, erreicht etwas mehr als eine halbe Kopflänge.

Haut vollständig nackt, auf dem Kopfe eine Anzahl kleiner Tuberkeln mit Porenmündungen. Farbe des Rumpfes und des Kopfes gelbbraun, die obere Hälfte dunkler und mit schwärzlichen querbindenähnlichen

Zeichnungen versehen. Die Flossenhaut der ersten Dorsale in der Mitte glashell, vorne und hinten bräunlich. Bei den übrigen Flossen ist die Flossenhaut glashell, während die Strahlen gelblich und mit Ausnahme der Bauchflossen mit bräunlichen Tupfen versehen sind. An der Wurzel der Brustflosse bemerkt man 2—3 deutliche, dunkle schräge Streifen. Ein dunkelbrauner Fleck an der Pectoralachsel und unter demselben an der Hinterseite der Pectorale ein viel grösserer milchweisser Fleck. Unter dem Auge, auf dem Maxillarrand und auf den Wangen liegen 3—4 Flecke. Länge der beiden beschriebenen Exemplare, eines Weibchens und eines Männchens, mit langer penisartiger Urogenitalpapille: 20 und 22^{cm}.

164 *a.* ***Centridermichthys Schlegelii*** n. sp. Döderl. (= ***C. percoides*** sp. Gthr. sec. Steind.)

B. 6. D. 10/19. A. 17. P. 15. V. 1/2.

Grösste Rumpfhöhe nahezu 6— unbedeutend mehr als 5 mal in der Totallänge, Länge des Kopfes 3— mehr als $2^3/_5$ mal in der Körperlänge oder etwas mehr als $3^1/_7$—$3^1/_5$ mal in der Totallänge, Augendiameter nahezu oder genau 6 mal, Schnauzenlänge $3^1/_2$ mal, mittlere Stirnbreite $8^1/_2$—$8^3/_5$ mal, grösste Kopfhöhe etwas mehr oder weniger als 2 mal, grösste Kopfbreite ca. $2^1/_2$ mal in der Kopflänge enthalten. Nasalstachel zart, spitz. Mundspalte sehr lang, mässig nach vorne ansteigend, das hintere Ende des Oberkiefers fällt unter oder noch ein wenig hinter den hinteren Augenrand. Augententakel vorhanden. Kiefer- und Gaumenbezahnung, ferner Vordeckeldornen wie bei *C. percoides.* Pectorale ebenso lang oder unbedeutend kürzer (um $^1/_2$ Augenlänge) als der Kopf mit Ausschluss der Schnauze, das ist ca. $1^1/_3$— fast $1^2/_3$ mal in der Kopflänge enthalten.

Die beiden Rückenflossen stehen unmittelbar hinter einander, hängen aber nicht zusammen. Der 3. höchste Dorsalstachel ist nur unbedeutend länger als die nächstfolgenden oder nur ebenso lang wie der 4., 5. und 6. und an Länge der Schnauze gleich. Sämmtliche Pectoralstrahlen einfach, die unteren dicker als die oberen.

Hinterrand der Schwanzflosse kaum convex. Länge der Caudale mehr als $1^2/_3$—2 mal in der Kopflänge enthalten.

Farbe unten gelblichbraun mit undeutlichen blauen Flecken, oben dunkelbraun, ohne deutliche Flecken. Erste Dorsale vorne und hinten bräunlich, in der Mitte mit glasheller Flossenhaut. Die Flossenstrahlen der Rücken-, Schwanz- und Bauchflosse sind bräunlich. An den oberen und unteren Strahlen der Caudale bemerkt man Spuren abwechselnd hellerer und dunklerer Querbinden. Ein tiefbrauner Fleck an der Pectoralachsel, unter diesem ein grösserer milchweisser oder hell silbergrauer Fleck an der Hinterseite der Pectoralbasis wie bei *C. percoides.* Drei braune Streifen in der basalen Hälfte der Pectorale.

Japanischer Name: Maradashi (d. i. Penis).

Meines Erachtens ist *C. Schlegelii* Döderl. nur eine fast ganz ungefleckte Farbenvarietät von *C. percoides* Steind.

165. ***Centridermichthys marmoratus*** n. sp. Döderl.

B. 6. D. 9/19. A. 16. P. 13. V. 1/2.

Körperform schlank; Kopf nach vorne zugespitzt; obere Profillinie des Kopfes ohne Krümmung und nur mässig nach hinten ansteigend.

Die grösste Rumpfhöhe ist $4^2/_5$ mal in der Körper- oder $5^2/_5$ mal in der Totallänge, die Kopflänge ca. $3^1/_2$ mal in der Totallänge, der Augendiameter 5 mal, die Schnauzenlänge etwas mehr als 4 mal, die mittlere Stirnbreite ca. 13 mal, die grösste Kopfhöhe 2 mal, die grösste Kopfbreite ca. $2^2/_5$ mal in der Kopflänge enthalten. Stirne querüber concav, obere Augenränder ziemlich wulstig.

Das hintere Ende des langen Maxillare fällt ein wenig vor den hinteren Augenrand. Vordeckel mit einem ziemlich kräftigen, etwas nach oben gebogenen Stachel, unter welchem noch 3 kleinere zahnähnliche Vorsprünge in der unteren Hälfte des freien Vordeckelrandes liegen. Die beiden untersten dieser Zähne sind mit ihrer Spitze nach unten und zugleich ein wenig nach vorne gekehrt. Nasalstachel fehlend.

Der obere Rand der ersten Dorsale ist bei dem mir zur Beschreibung vorliegenden Unicum vielleicht abnormer Weise wellenförmig gebogen. Der 2. und 3. Stachel sind die höchsten der Flosse und ca. $2^1/_2$ mal in der Kopflänge enthalten, der 4. ist bedeutend kürzer als der 1. und nur wenig kürzer als der 5. Stachel; der 6. und 7. dagegen sind wieder ein wenig länger als der 5. Stachel. Die höchsten mittleren Gliederstrahlen der 2. Dorsale sind nur wenig länger als der höchste 2. oder 3. biegsame Stachel der 1. Dorsale.

Die beiden einander sehr nahe gerückten Rückenflossen hängen an der Basis durch einen niedrigen Hautsaum zusammen.

Die Pectoralstrahlen sind einfach und die unteren dicker als die oberen. Der längste 7. Strahl steht der Kopflänge nur um etwas mehr als eine halbe Schnauzenlänge nach und reicht bis zum Beginn der Anale zurück. Die Länge der Ventrale gleicht $^1/_3$ der Kopflänge.

Die Caudale ist am hinteren Rande äusserst schwach convex bei vollkommen ausgebreiteten Strahlen.

Die Anale reicht nicht so weit nach hinten zurück wie die 2. Dorsale und steht letzterer auch bezüglich der Höhe der Strahlen bedeutend nach.

Die geringste Rumpfhöhe am Schwanzstiele gleicht kaum einer Augenlänge.

Körperhaut nackt, glatt. Nur am Kopfe und Rücken findet sich eine Anzahl winziger Tuberkeln mit Porenmündungen vor. Seitenlinie deutlich, in der vorderen kleineren Rumpfhälfte 2mal stark wellenförmig, gebogen.

Farbe gelbbraun. Kopf und Rumpf (mit Ausnahme der Bauchseite) sowie die Flossen mit schwarzbraunen Flecken und Bändern marmorirt.

Sechs grosse, von intensiv braunen Flecken gebildete Querbänder ziehen jederseits von der Rückenflosse bis in die Nähe der Seitenlinie herab. Zwischen dem 3. und 6. Dorsalstachel ist die Flossenhaut theilweise glashell.

In der Körperzeichnung hat diese Art eine auffallende Ähnlichkeit mit *Centr. elegans* Steind., doch ist die Kopfform bedeutend schlanker als bei letzterer Art, bei welcher überdies Nasalstacheln vorkommen.

Das einzige von Dr. Döderlein bei Tokio gesammelte Exemplar ist 13^{cm} lang.

ERKLÄRUNG DER ABBILDUNGEN.

TAFEL I.

Brama japonica Hilgend. (Typ.).

TAFEL II.

Pteraclis (Centropholis) Petersii Hilgend. (Typ.).

TAFEL III.

Fig. 1. *Orcinus Schlegelii* n. sp.?. Steind.
„ 2. *Neopercis*[1] *aurantiaca* n. sp., Döderl.

TAFEL IV.

Fig. 1. *Decapterus sanctae Helenae* sp. C. V.
„ 2. „ *Russellii* sp. Rüpp.

TAFEL V.

Antigonia capros Lowe. adult. ♂.

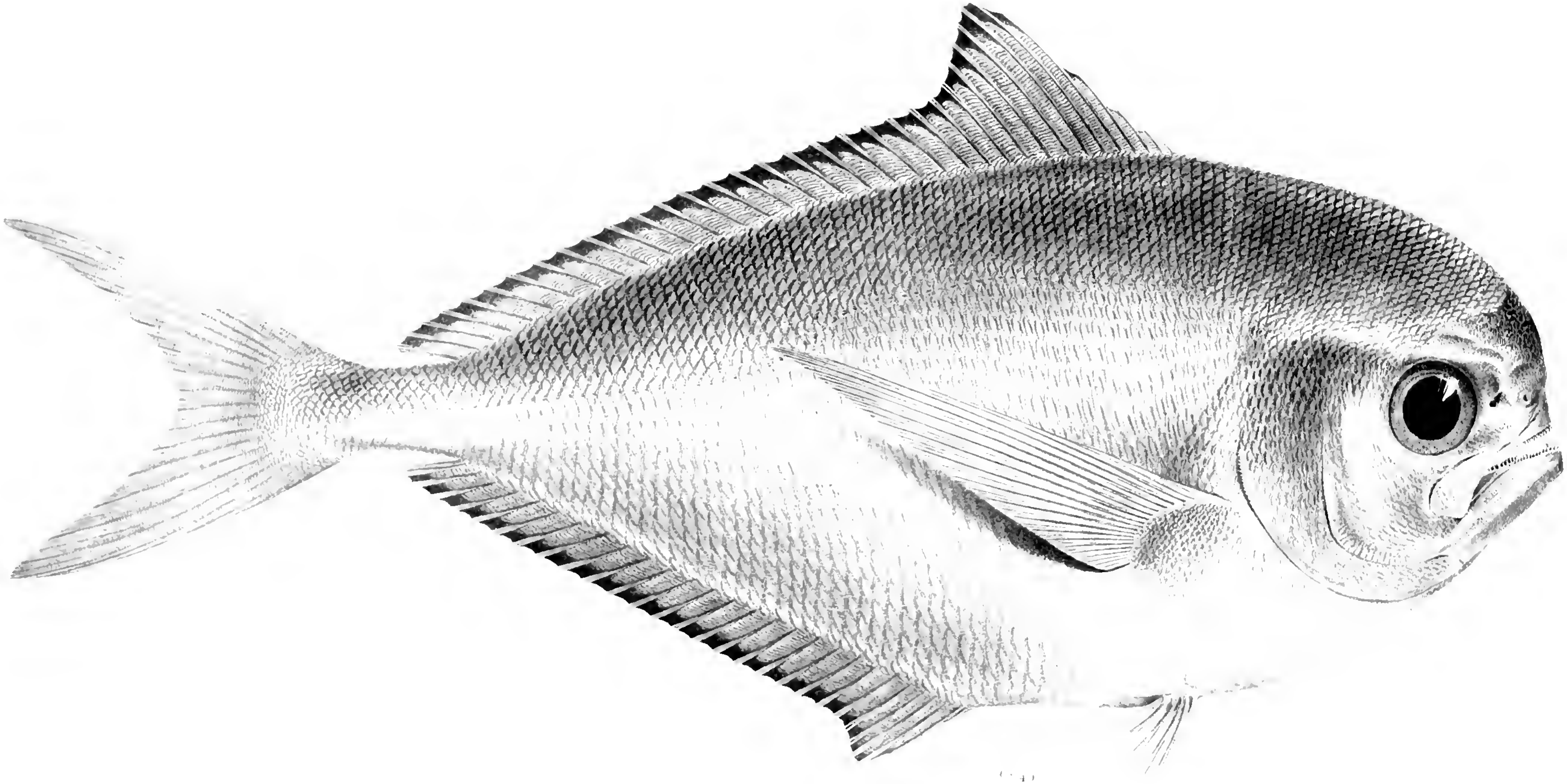
TAFEL VI.

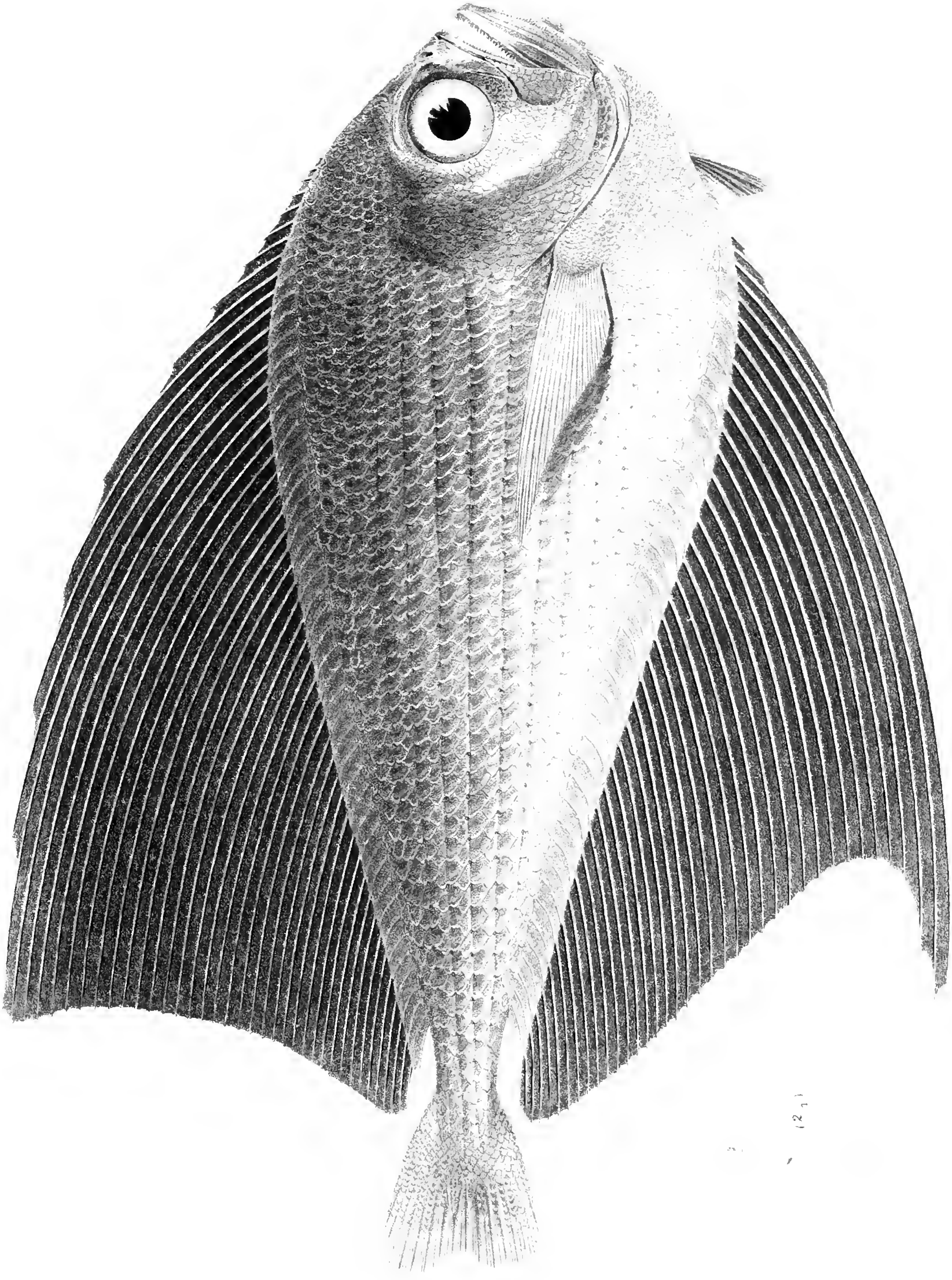
Fig. 1. *Pterois Bleekeri* Döderl., n. sp.
„ 1 *a*. „ „ „ „ Oberseite des Kopfes.
„ 2. *Neopercis multifasciata* n. sp., Döderl.
„ 2 *a*. „ „ „ „ Oberseite des Kopfes.

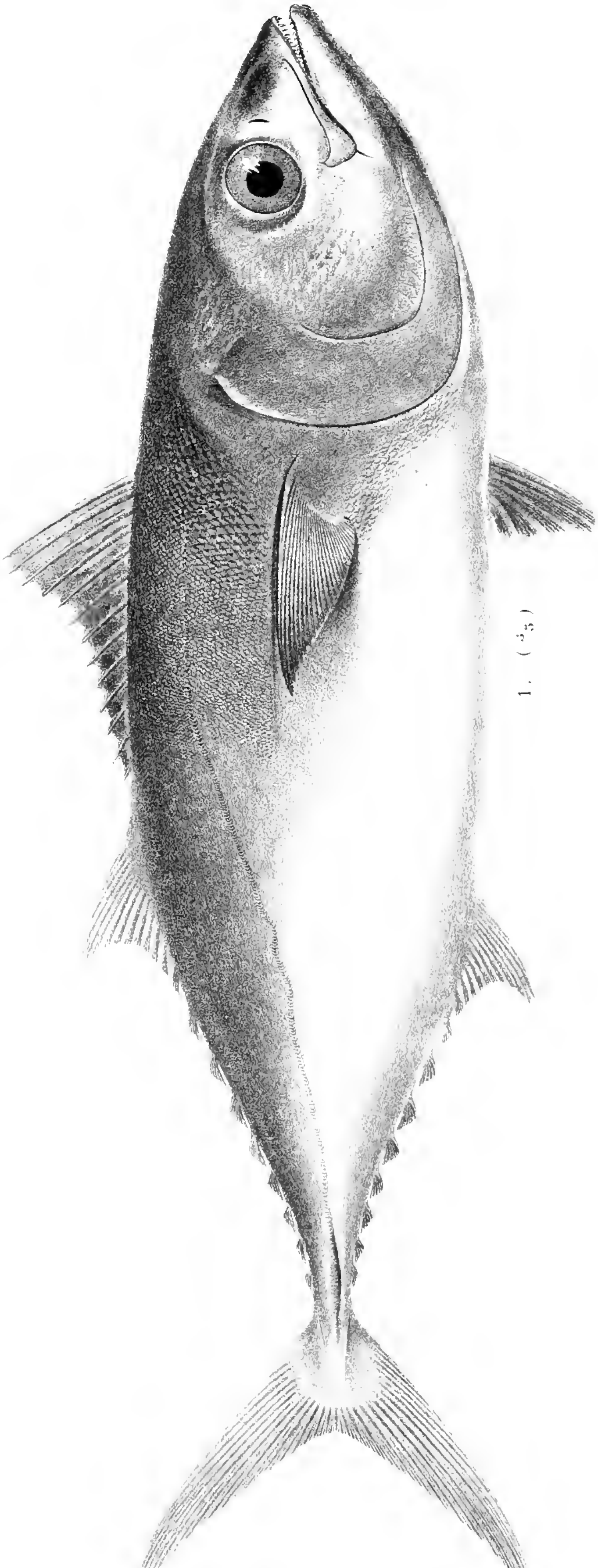
TAFEL VII.

Fig. 1. *Sebastes nivosus* Hilgend.
„ 2 *a*. „ „ „ Oberseite des Kopfes; Fig. 1 *b* erster Kiemenbogen.

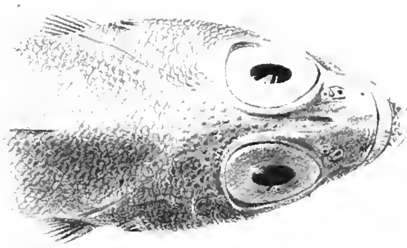
[1] Da der von mir im Jahre 1883 vorgeschlagene Gattungsname „*Parapercis*" (s. Steind., Ichthyol. Beitr. XIII) bereits früher von Dr. Bleeker für *Percis*-Arten ohne Rücksicht auf das Vorkommen oder die Abwesenheit von Gaumenzähnen gebraucht wurde, so ändere ich den Namen *Parapercis* Steind. (nec Blkr.) in *Neopercis* Steind. et Döderl. ab. In die Gattung *Neopercis* fallen somit *Neopercis Haackei* (Steind., Ichthyol. Beitr. XIII), *Neop. aurantiaca* n. sp. Döderl., *Neop. multifasciata* n. sp. Döderl. und *Neop. sexfasciata* sp. Schleg. Die Gattung *Parapercis* Blkr. (nec Steind.) hat keine Berechtigung und umfasst sowohl *Percis*-Arten (ohne Gaumenzähne) als auch *Neopercis*-Arten (wie *Percis sexfasciata* Schleg.). Steind.



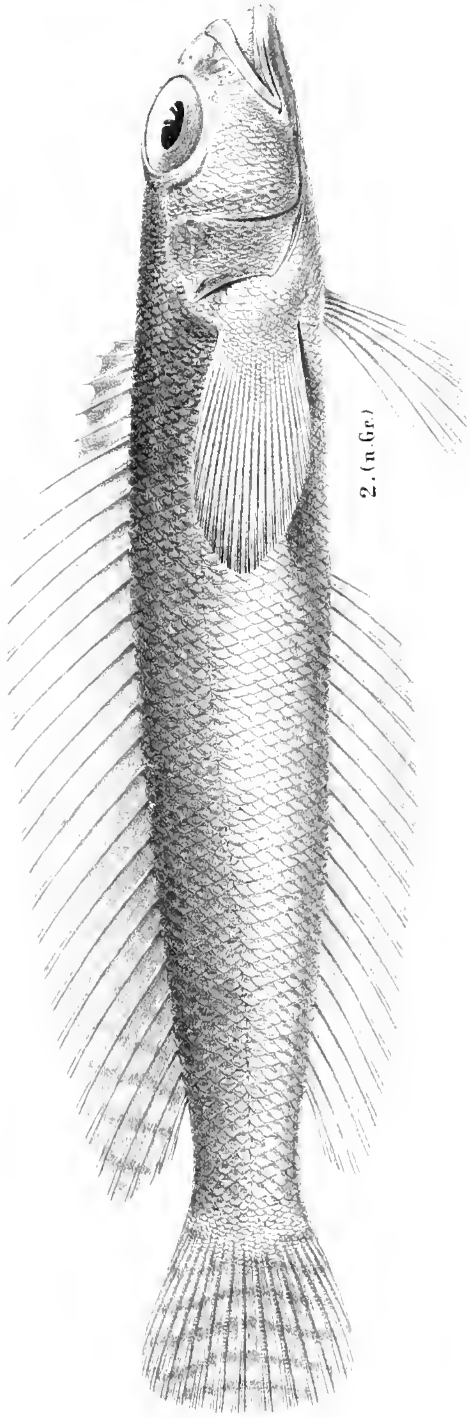




1. (2/3)

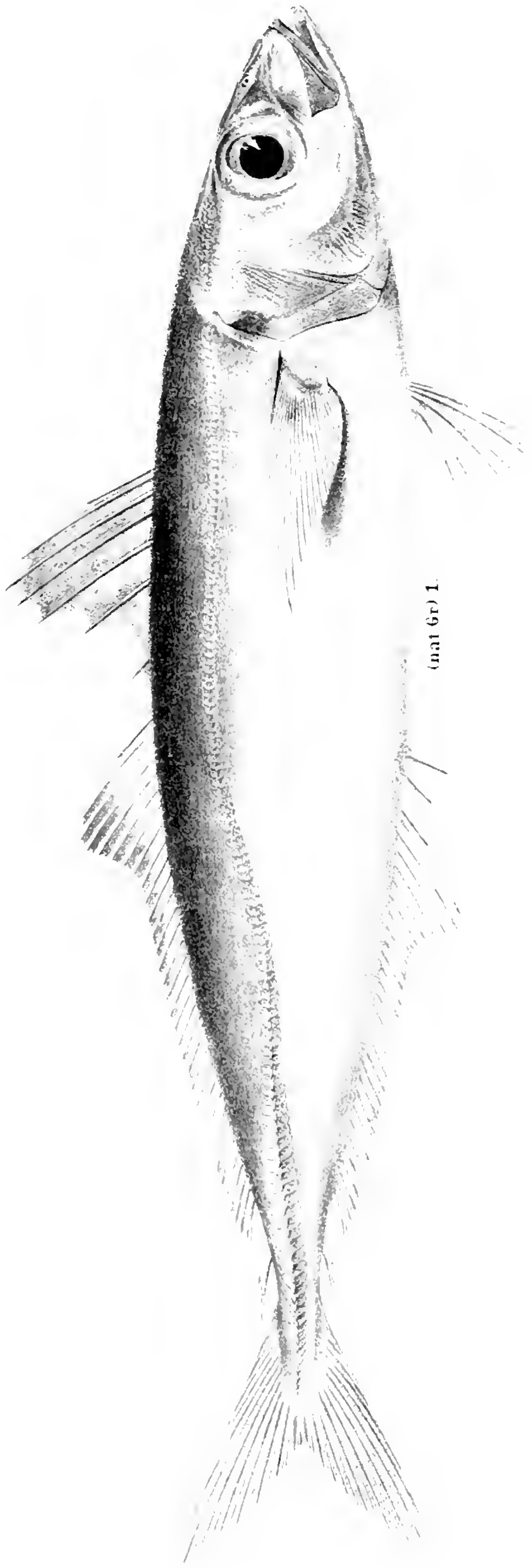


2 a (n. Gr.)

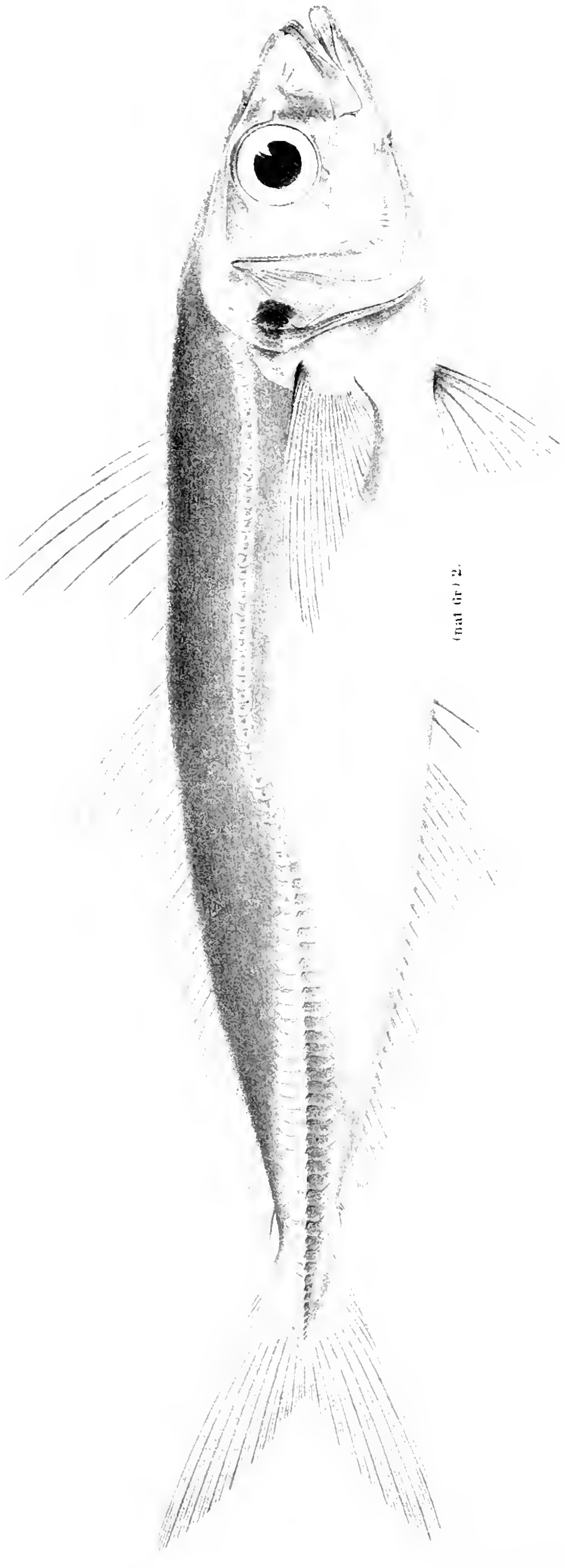


2. (n. Gr.)

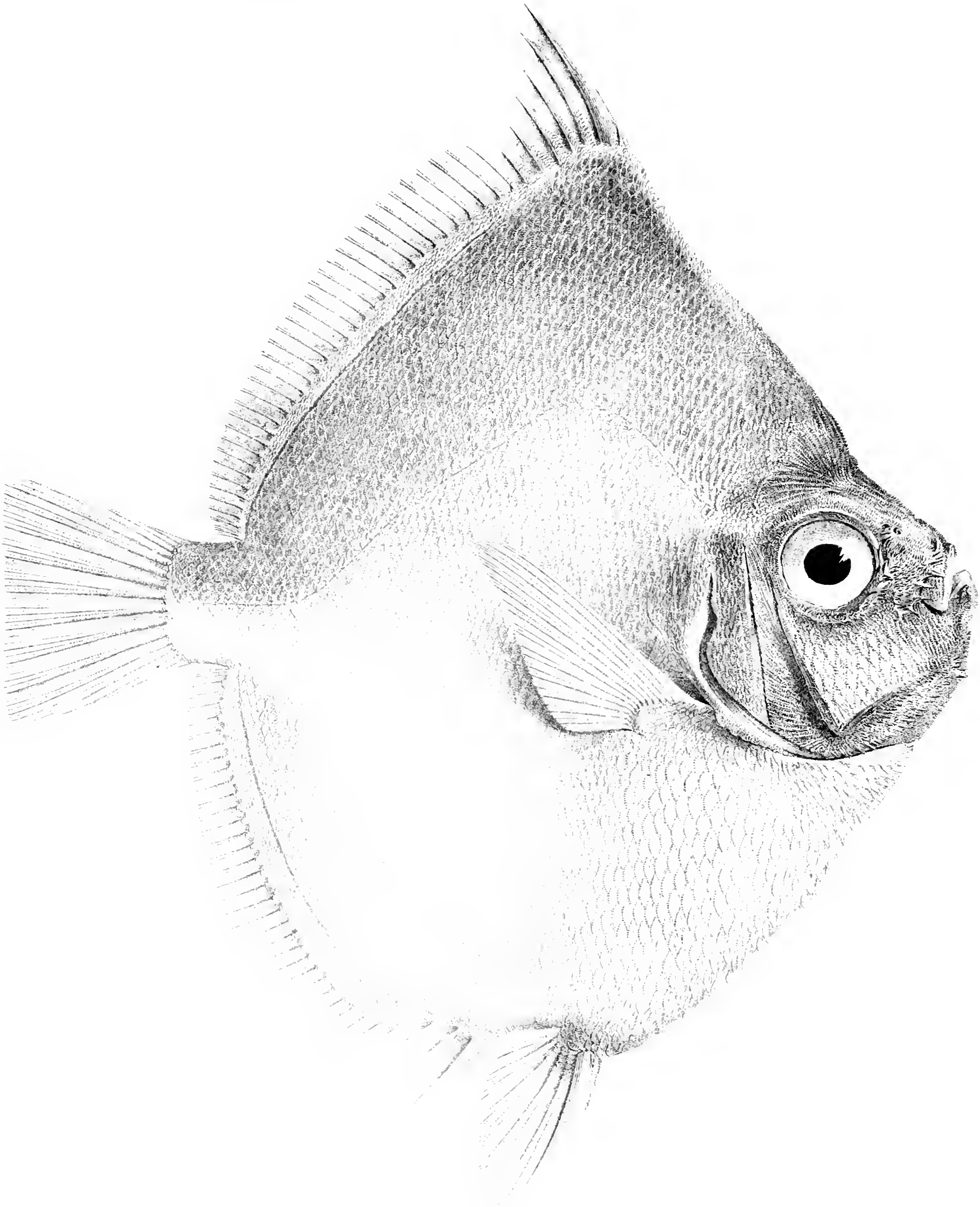
K. k. Hof- u. Staatsdruckerei



(nat. Gr.) 1.

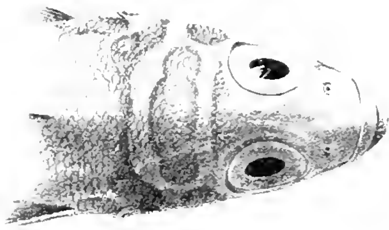


(nat. Gr.) 2.

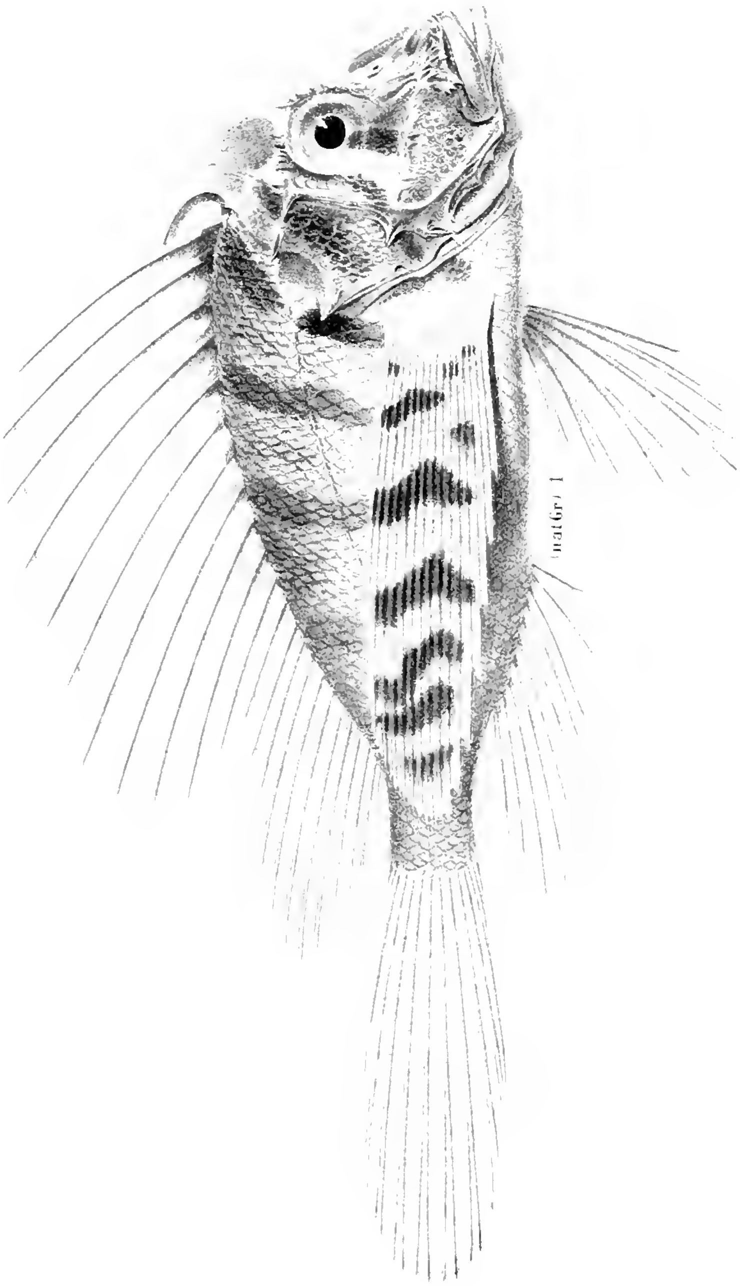


A. d. Nat. gez. u. lith. v. Ed. Konopicky K. k. Hof- u. Staatsdruckerei

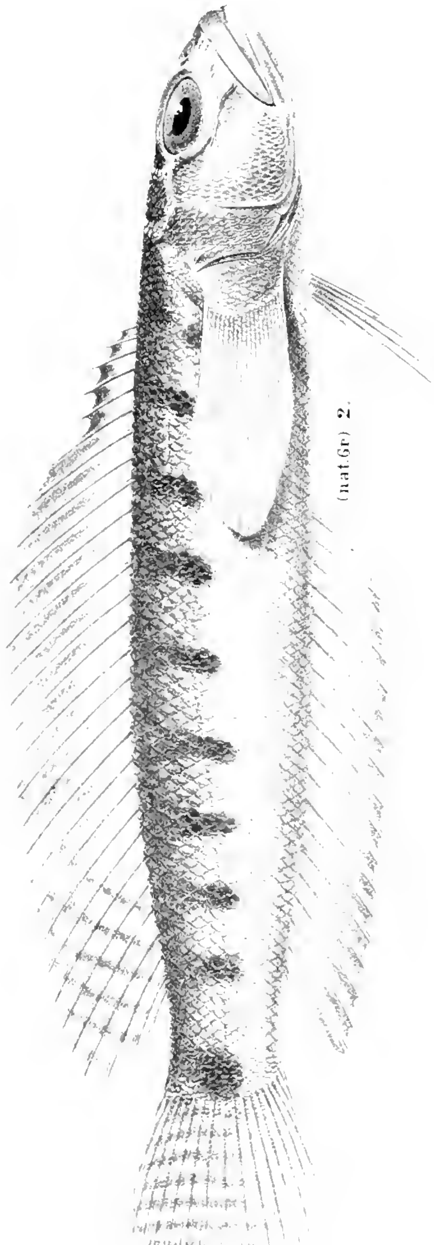
(nat. Gr.) 1a



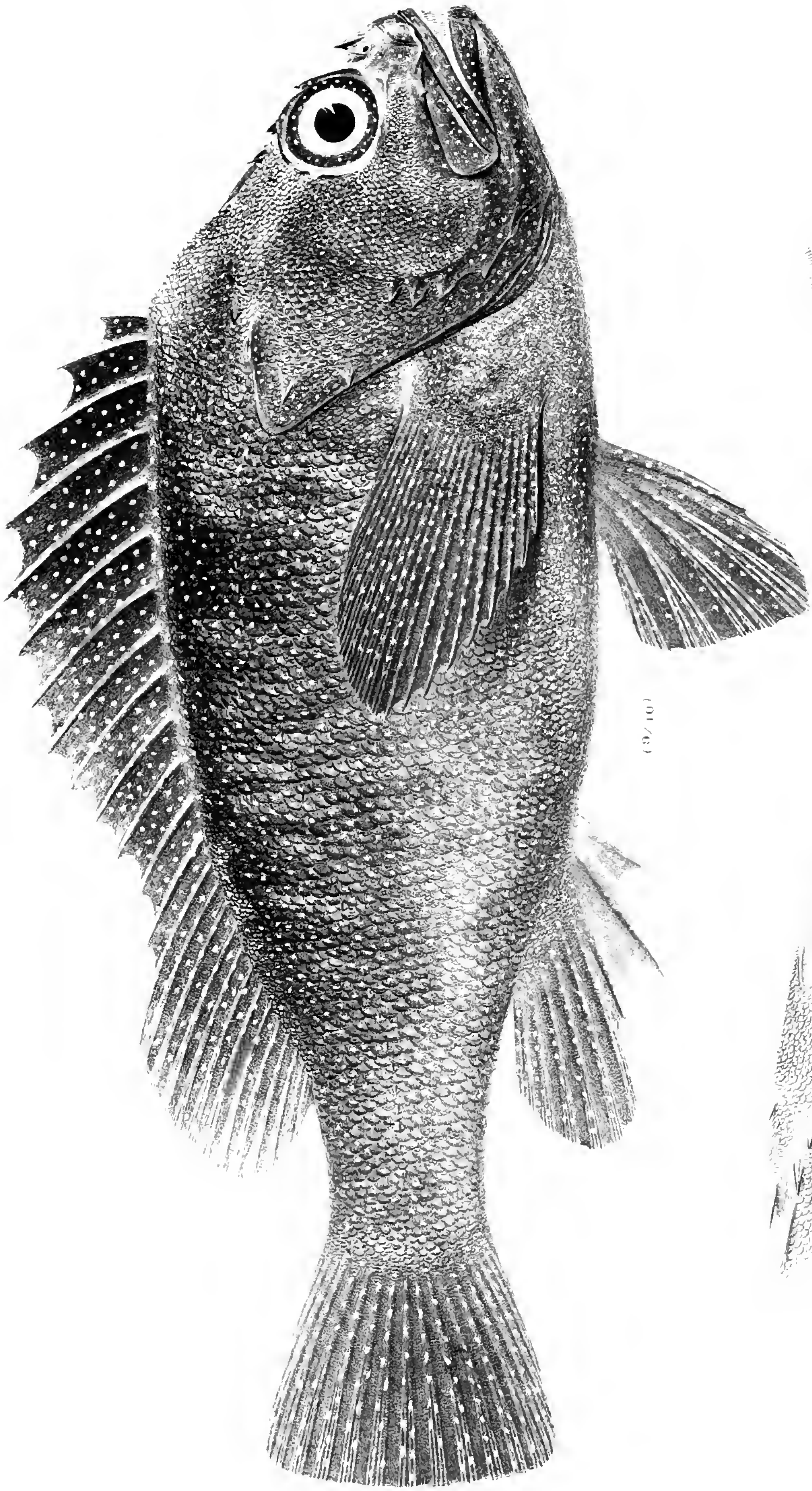
(nat. Gr.) 2a



(nat. Gr.) 1

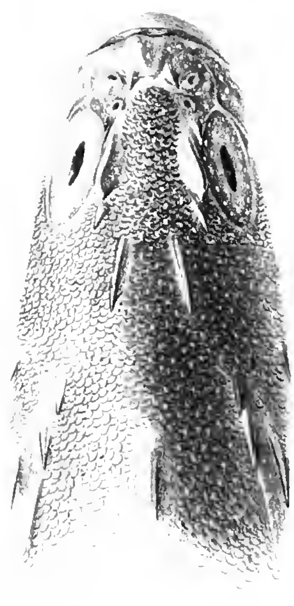


(nat. Gr.) 2.



(9/10)

n. Gr.



(9/10)

Zweite Abtheilung.

Abhandlungen von Nicht-Mitgliedern der Akademie.

Mit 13 Tafeln.

DIE INTEGRATION

DER

PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

GRUNDLINIEN EINER ALLGEMEINEN INTEGRATIONSMETHODE.

VON

D^r. VICTOR SERSAWY,

PRIVATDOCENT FÜR MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT IN WIEN.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 13. MÄRZ 1884.

Unter dem Titel der Integration partieller Differentialgleichungen werden gemeinhin zwei von einander verschiedene analytische Probleme zusammengefasst. Das eine besteht in der Aufsuchung eines allgemeinen Integrales, welches die erforderliche Anzahl willkürlicher Functionen enthält, während das andere dahin abzielt, diese willkürlichen Bestandtheile der allgemeinen Lösung einer gewissen Anzahl ausserdem noch vorhandener, sogenannter Anfangsbedingungen anzupassen. Obwohl gerade in den wichtigsten Untersuchungen, nämlich in den physikalischen, beide Probleme regelmässig in dieser Verbindung auftreten, so ist es doch keinem Zweifel unterworfen, dass dieselben ihrem analytischen Charakter nach von einander unabhängig sind, also einzeln einer weiteren Untersuchung unterzogen werden können.

Die gegenwärtige Abhandlung stellt sich demgemäss die Aufgabe:

Die allgemeine Lösung einer partiellen Differentialgleichung:

$$0 = \varphi\left(x_1, x_2, \ldots x_q z, \ldots, \frac{\partial^p z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots}, \ldots\right),$$

d. h., alle Functionen der q Independenten $x_1, x_2, \ldots x_q$ aufzusuchen, welche für z gesetzt, der gegebenen Gleichung genügen.

Von etwaigen Anfangsbedingungen wird hiebei abgesehen.

In dieser Absicht wird vor Allem eine neue Form der Bedingungen aufgestellt, durch deren Erfüllung der Ausdruck

$$dz = z_1 dx_1 + z_2 dx_2 + \ldots + z_q dx_q$$

integrabel wird. Mit Hilfe dieser neuen Form der Integrabilitätsbedingungen wird die Aufgabe jedesmal auf die Integration eines Systems von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt. Bei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ist dieses System stets bestimmt, indem es eben so viel Gleichungen als Unbekannte enthält; bei Differentialgleichungen höherer Ordnung enthält es immer weniger Gleichungen als Unbekannte, so dass einige der letzteren, so weit es sich um die Integration eben dieses Systems handelt, unbestimmt verbleiben.

Führt man nach vollzogener Integration die Integrationsconstanten als neue Veränderliche ein, so verwandelt sich die Aufgabe in ein Aggregat von Problemen, welche durch geeignete Wahl der unbestimmt gebliebenen Grössen in Pfaff'sche Probleme verwandelt werden. Nachdem die Gleichungen, welche die Wahl der unbestimmten Grössen bestimmen, abgeleitet und gezeigt worden ist, wie denselben Genüge geschieht, ist die Aufgabe für erledigt anzusehen.

Indem bezüglich der Einzelheiten der Untersuchungen wie natürlich auf die Abhandlung verwiesen werden muss, ist noch zu bemerken, dass Beispiele nur insoferne aufgenommen wurden, als sie zur Erläuterung einzelner Stellen dienlich sein konnten, und zwar aus dem Grunde, weil einerseits die Auswahl geeigneter Beispiele noch beschränkt, und andererseits der Rechnungsapparat auch bei einfach scheinenden Beispielen in der Regel ein sehr grosser ist.

Erster Abschnitt.

Die Integrabilitätsbedingungen.

1.

Ein Ausdruck von der Form:

$$dz = z_1 dx_1 + z_2 dx_2 + \ldots + z_q dz_q, \tag{1}$$

— in welchem $z_1, z_2, \ldots z_q$ gegebene Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_q$ und z bedeuten — wird unbeschränkt integrabel genannt, wenn derselbe durch eine einzige Beziehung in endlichen Dimensionen zwischen den Grössen $x_1, x_2, \ldots x_q$ und z integrirt werden kann. Die Bedingung hiefür ist, wie bekannt, dass alle Gleichungen, welche aus der allgemeinen Formel:

$$\frac{\partial z_r}{\partial x_s} + z_s \frac{\partial z_r}{\partial z} - \frac{\partial z_s}{\partial x_r} - z_r \frac{\partial z_s}{\partial z} = \left(\frac{\partial z_r}{\partial x_s}\right) - \left(\frac{\partial z_s}{\partial x_r}\right) = (r, s) = 0 \tag{2}$$

durch Specialisirung von r und s in $1, 2, \ldots q$ entstehen, identisch erfüllt sind. Ist dies der Fall, so können die (2) durch die folgenden ersetzt werden:

$$\begin{aligned}
0 &= (1, 1)\delta x_1 + (1, 2)\delta x_2 + \ldots + (1, q)\delta x_q \\
0 &= (2, 1)\delta x_1 + (2, 2)\delta x_2 + \ldots + (2, q)\delta x_q \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= (q, 1)\delta x_1 + (q, 2)\delta x_2 + \ldots + (q, q)\delta x_q,
\end{aligned} \tag{3}$$

ohne dass damit zwischen den Variationen $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_q$ irgend eine Bedingung festgesetzt wird und umgekehrt, wenn die (3) gelten sollen, während die ebengenannten Variationen untereinander unabhängig bleiben, so kann dies nicht anders geschehen, als wenn die (2) identisch befriedigt sind. Man kann also sagen, dass der Ausdruck (1) unbeschränkt integrabel ist, wenn die Gleichungen (3) zwischen den Variationen $\delta x_1, \delta x_2, \ldots \delta x_q$ keine Beziehungen involviren.

Sind die Gleichungen (2) nicht identisch befriedigt, so kann der Ausdruck (1) nur durch mehr als eine Relation zwischen den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_q$ und z integrirt werden, ist also nicht unbeschränkt integrabel, und gleichzeitig können die Gleichungen (3) nicht mehr bestehen, ohne die Variationen $\delta x_1, \delta x_2, \ldots \delta x_q$ in Beziehung zu einander zu setzen. Es besteht also ein Zusammenhang zwischen der Integrabilität der Gleichung (1) und der Art, wie die (2) befriedigt werden können.

Um diesen Zusammenhang näher zu erkennen, nehmen wir an, dass m der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_q$ independent bleiben, und denken uns vermittelst der integrirenden Beziehungen

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_q$$

als Functionen von

$$x_1, x_2, \ldots, x_m$$

dargestellt, welch' letztere dann unabhängig bleiben. Die Gleichung (1) verwandelt sich bei dieser Annahme in die folgende:

$$dz = \left(z_1 + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} z_{m+\lambda} \frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_1}\right) dx_1 + \ldots + \left(z_m + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} z_{m+\lambda} \frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_m}\right) dx_m \tag{4}$$

und diese muss, nachdem die $x_{m+1}, \ldots, x_m$ überall durch ihre Werthe in $x_1, x_2, \ldots x_m$ ersetzt worden sind, unbeschränkt integrabel sein. Entwickeln wir also die Ausdrücke, welche oben durch (r, s) bezeichnet worden sind, für die Gleichung (4) und bezeichnen sie zum Unterschiede durch eckige Klammern, so erhalten wir:

$$[i, k] = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left[z_i + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} z_{m+\lambda} \frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_i}\right]\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left[z_k + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} z_{m+\lambda} \frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_k}\right]\right).$$

Es ist aber

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left[z_i + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} z_{m+\lambda} \frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_i}\right]\right) = \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_{m+\lambda}}\right) \frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_k}$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} \left(\frac{\partial z_{m+\lambda}}{\partial x_k}\right) \frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} \sum_{\mu=1}^{\mu=q-m} \left(\frac{\partial z_{m+\lambda}}{\partial x_{m+\mu}}\right) \frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_i} \frac{\partial x_{m+\mu}}{\partial x_k} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} z_{m+\lambda} \frac{\partial^2 x_{m+\lambda}}{\partial x_i \, \partial x_k}$$

sonach

$$[i, k] = \left\{(i, k) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} (i, m+\lambda) \frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_k}\right\} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} \left\{(m+\lambda, k) + \sum_{\mu=1}^{\mu=q-m} (m+\lambda, m+\mu) \frac{\partial x_{m+\mu}}{\partial x_k}\right\} \frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_i}.$$

Durch dieselben Relationen, welche wir soeben zur Bildung der Ausdrücke $[i, k]$ verwendet haben, verwandeln sich andererseits die Gleichungen (3) in die nachstehenden:

$$0 = \left[(1, 1) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} (1, m+\lambda) \frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_1}\right] \delta x_1 + \ldots + \left[(1, m) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} (1, m+\lambda) \frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_m}\right] \delta x_m$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 = \left[(q, 1) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} (q, m+\lambda) \frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_1}\right] \delta x_1 + \ldots + \left[(q, m) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} (q, m+\lambda) \frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_m}\right] \delta x_m,$$

welche wegen der Unabhängigkeit der $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_m$ in Gleichungen von der Form:

$$0 = (i, k) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} (i, m+\lambda) \frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_k} \tag{5}$$

zerfallen, worin der Reihe nach für i alle ganzen Zahlen von 1 bis q, für k hingegen blos jene von 1 bis m zu setzen sind. Durch diese Gleichungen werden aber die $[i, k]$ identisch Null, woraus erhellt, dass die Gleichungen (3) eben jene Beziehungen zwischen den $x_1, x_2, \ldots x_q$ festsetzen, durch welche der Ausdruck (1) integrabel wird.

2.

Wie man sich durch directe Rechnung leicht überzeugt, ist das System (3) unmittelbar mit jenem System von Differentialgleichungen identisch, welches nach dem Pfaff'schen Verfahren für die hier gewählte Form resultiren würde. Dies lässt sich indess aus den Gleichungen (3) selbst erweisen, wie aus den folgenden kurzen Andeutungen entnommen werden kann.

Da der Natur der Sache nach $m<q$, und aus den Gleichungen (5), indem man $k=1, 2, 3, \ldots, m$ setzt, m Systeme von je q Gleichungen zusammengestellt werden können, welche durch dieselben Differentialquotienten

$$\frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_k} \; (\lambda=1,2,\ldots,q-m)$$

befriedigt werden sollen, so werden durch Elimination der letzteren in jedem der erwähnten Systeme m Gleichungen entstehen, welche im Allgemeinen nicht identisch erfüllt sein werden. In diesem Falle, den wir zunächst betrachten wollen, können die Gleichungen (5) gleichzeitig nur dann befriedigt werden, wenn $m=1$ und q eine ungerade Zahl bedeutet, welches letztere übrigens, wie bekannt, ohne Integration bewerkstelligt werden kann. Dann ziehen sich nämlich die Gleichungen (5) auf das Eine, mit (3) identische System:

$$\begin{aligned}
0 &= (1,\ 1)+(1,2)\frac{dx_2}{dx_1}+\ldots+(1,q)\frac{dx_q}{dx_1}\\
0 &= (2,\ 1)+(2,2)\frac{dx_2}{dx_1}+\ldots+(2,q)\frac{dx_q}{dx_1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= (q,\ 1)+(q,2)\frac{dx_2}{dx_1}+\ldots+(q,q)\frac{dx_q}{dx_1}
\end{aligned} \tag{6}$$

zurück, dessen Determinante verschwindet, so dass die Berechnung der Verhältnisse

$$\frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}, \ldots, \frac{dx_q}{dx_1}$$

thatsächlich möglich ist. Da in den Klammerausdrücken dieser Gleichungen auch z enthalten ist, muss man, um integriren zu können, die aus (1) fliessende Gleichung

$$0=z_1+z_2\frac{dx_2}{dx_1}+\ldots+z_q\frac{dx_q}{dx_1}-\frac{dz}{dx_1} \tag{7}$$

zu Hilfe nehmen.

Benützt man nun die Integralgleichungen, um die Integrationsconstanten

$$f_1, f_2, \ldots, f_q$$

als neue Variable an Stelle von $z, x_2, x_3, \ldots x_q$ einzuführen, so erhält man aus (1) die neue Gleichung:

$$0=X_1 dx_1+F_1 df_1+\ldots+F_q df_q,$$

in welcher

$$F_i=z_2\frac{\partial x_2}{\partial f_i}+\ldots+z_q\frac{\partial x_q}{\partial f_i}-\frac{\partial z}{\partial f_i}$$

zu verstehen ist. Der Coëfficient X_1 wird

$$z_1+z_2\frac{dx_2}{dx_1}+\ldots+z_q\frac{dx_q}{dx_1}-\frac{dz}{dx_1}$$

also wegen (7) identisch Null, und x_1 selbst ist nur mehr in einem, allen Coëfficienten F gemeinsamen Factor enthalten. In der That findet man, die Differentiation nach allen, also auch implicite enthaltenen x_1 und f_i durch eckige Klammern anzeigend:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_1} = \frac{\partial X_1}{\partial f_i} - \left[\frac{\partial z_1}{\partial f_i}\right] + \sum_{r=2}^{r=q} \left\{ \left[\frac{\partial z_r}{\partial x_1}\right] \frac{\partial x_r}{\partial f_i} - \left[\frac{\partial z_r}{\partial f_i}\right] \frac{\partial x_r}{\partial x_1} \right\}$$

und hieraus, indem man die angezeigten Operationen ausführt und auf die Relationen (6) und (7) Rücksicht nimmt:

$$\frac{\partial \log F_i}{\partial x_1} = \frac{\partial z_1}{\partial z} + \frac{\partial z_2}{\partial z} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial z_q}{\partial z} \cdot \frac{\partial x_q}{\partial x_1}.$$

Dies ist ein Ausdruck, der wohl x_1 enthalten kann, aber von dem Stellenzeiger i unabhängig ist, daher sind alle F von der Form:

$$F_i = \Phi_i(f_1, f_2, \ldots f_q) e^{\int \left(\frac{\partial z_1}{\partial z} + \frac{\partial z_2}{\partial z} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial z_q}{\partial z} \frac{\partial x_q}{\partial x_1}\right) dx_1},$$

womit die gedachte Eigenschaft bewiesen ist.

Wenn ein $m > 1$ vorhanden ist, für welches die Gleichungen (5) gleichzeitig bestehen können, oder anders ausgedrückt, wenn mehr als Eine der Gleichungen (3) linear durch die anderen nicht mehr linear abhängigen dargestellt werden können, so sind die letzteren (siehe Frobenius: Über das Pfaff'sche Problem, Crelle 82) stets unbeschränkt integrabel, und ziehen aus diesem Grunde Integrale von der Form:

$$\begin{gathered} x_{m+1} = \psi_{m+1}(f_{m+1} \ldots f_q, f, x_1, \ldots, x_m), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_q = \psi_q(f_{m+1} \ldots, f_q, f, x_1, \ldots, x_m), \\ z = \psi(f_{m+1}, \ldots f_q, f, x_1, \ldots, x_m) \end{gathered}$$

nach sich, worin $f_{m+1}, \ldots, f_q, f$ die Integrationsconstanten bedeuten. Führt man auch hier statt der Variabeln $x_{m+1}, \ldots x_q, z$ die Integrationsconstanten als neue Veränderliche ein, so erhält man an Stelle der Gleichung (1) die folgende:

$$0 = F_{m+1} df_{m+1} + \ldots + F_q df_q + F df,$$

indem die Coëfficienten der Differentiale: $dx_1, \ldots dx_m$ identisch verschwinden. Man beweist in derselben Weise wie oben, dass, wenn die Gleichungen (5) gleichzeitig bestehen,

$$\frac{\partial \log F_\rho}{\partial x_i} = \frac{\partial z_{m+1}}{\partial z} \cdot \frac{\partial x_{m+1}}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial z_q}{\partial z} \frac{\partial x_q}{\partial x_i} + \frac{\partial z_i}{\partial z}$$

ist, also für alle ρ denselben Werth erhält. Die Coëfficienten F enthalten also $x_1, x_2, \ldots x_m$ nicht anders als in einem allen gemeinsamen Factor, welcher übrigens nur für singuläre Werthsysteme verschwinden kann. Das Pfaff'sche Problem mit $q+1$ Variabeln wird also durch dieses Verfahren auf ein anderes mit $q+1-m$ Variabeln reducirt.

Aus diesen Bemerkungen ergibt sich der Charakter der Gleichungen (3) mit hinreichender Deutlichkeit:

> Statuiren nämlich die Gleichungen (3) zwischen den Variabeln des Systems einen Zusammenhang, so wird, wenn man dieselben integrirt, und die Integrationsconstanten als neue Variable einführt, das Problem (1) in ein anderes mit weniger Variabeln umgewandelt; und zwar ist die Anzahl der Veränderlichen, um welche das Problem vermindert wird, stets gleich der Anzahl der linear abhängigen Gleichungen in (3). Sind die Gleichungen (3) erfüllt, ohne eine Beziehung zwischen den Grössen $x_1, x_2, \ldots x_q$ zu involviren, so ist die (1) unbeschränkt integrabel.

Wir bezeichnen demzufolge die Gleichungen (3) in der Folge als Integrabilitätsbedingungen im weiteren Sinne, geben denselben jedoch in unseren Anwendungen die Form:

$$\begin{aligned}
\partial z_1 &= \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\right)\partial x_2 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial x_1}\right)\partial x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial z_q}{\partial x_1}\right)\partial x_q,\\
\partial z_2 &= \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_2}\right)\partial x_1 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial x_2}\right)\partial x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial z_q}{\partial x_2}\right)\partial x_q,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\partial z_q &= \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_q}\right)\partial x_1 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial x_q}\right)\partial x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial z_q}{\partial x_q}\right)\partial x_q,
\end{aligned} \tag{8}$$

welche, wenn die Variationen ∂z_k durch deren explicite Werthe:

$$\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_1}\right)\partial x_1 + \left(\frac{\partial z_k}{\partial x_2}\right)\partial x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial z_k}{\partial x_q}\right)\partial x_q$$

ersetzt werden, unmittelbar in jene (3) übergeht. Es ist klar, dass die Integrabilitätsbedingungen auch in dieser Form im Wesentlichen den soeben definirten Charakter beibehalten.

3.

Um die Anwendung, welche ich von den Integrabilitätsbedingungen im Folgenden machen werde, an einem bekannten Beispiele zu zeigen, soll die Aufgabe gestellt werden, das allgemeine Integrale der Differentialgleichung erster Ordnung:

$$0 = \varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_q, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_q}\right) \tag{α}$$

aufzufinden.

Die Aufgabe ist gelöst, wenn es gelungen ist, gewisse Functionen:

$$z_1, z_2, \ldots, z_q$$

der Independenten:

$$x_1, x_2, \ldots, x_q$$

so zu bestimmen, dass sie

Erstens: In der angegebenen Reihenfolge bezüglich für

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_q}$$

eingesetzt, die Gleichung (α) identisch befriedigen, oder, was dasselbe ist, dass

$$0 = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_q, z, z_1, z_2, \ldots z_q) \quad \text{und} \tag{β}$$

Zweitens: Den Ausdruck:

$$dz = z_1\, dx_1 + z_2\, dz_2 + \ldots + z_q dz_q \tag{1}$$

unbeschränkt integrabel machen.

Ersetzt man nun nach dem Vorgange von Lagrange die Gleichung (β) durch die folgenden:

$$0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}\left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\right) + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial z_q}\left(\frac{\partial z_q}{\partial x_1}\right), \ldots, 0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_q}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}\left(\frac{\partial z_1}{\partial x_q}\right) + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial z_q}\left(\frac{\partial z_q}{\partial x_q}\right),$$

in welchen das Zeichen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \quad \text{für} \quad \frac{\partial u}{\partial x_k} + z_k \frac{\partial u}{\partial z}$$

gebraucht worden ist, und vergleicht dieselben mit den Integrabilitätsbedingungen (8), welche im gegenwärtigen Falle unmittelbar giltig sind, so ist ersichtlich, dass vor Allem die Gleichungen

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_2}} = \ldots = \frac{dx_q}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_q}} = \frac{dz_1}{-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)} = \frac{dz_2}{-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)} = \ldots = \frac{dz_q}{-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_q}\right)} = \frac{dz}{z_1\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial \varphi}{\partial z_2} + \ldots + z_q\frac{\partial \varphi}{\partial z_q}} \tag{γ}$$

erfüllt sein müssen.

Die Integralgleichungen dieses Systems führen auch zwischen den Grössen $x_1, x_2, \ldots x_q$ Beziehungen ein; der Ausdruck (1) wird also durch Einführung der Integrationsconstanten als neue Variable in ein Pfaff'sches Problem verwandelt, dessen Behandlung indess bereits in unseren Lehrbüchern gezeigt zu werden pflegt.

Das System (γ) ist bestimmt; denn es enthält ebenso viele Gleichungen als Unbekannte, ein Umstand, der, wie schon in der Einleitung bemerkt, bei Differentialgleichungen höherer Ordnung nicht wiederkehrt.

Zweiter Abschnitt.

Die allgemeine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei Independenten.

4.

Ist die allgemeine Gleichung zweiter Ordnung mit zwei Independenten vorgelegt:

$$0 = \varphi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

so denken wir uns zunächst die Functionen von x und y:

$$z, p, q, r, s, t,$$

so bestimmt, dass sie in derselben Ordnung, beziehungsweise für

$$z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

eingesetzt, die gegebene Gleichung befriedigen. Es ist dann identisch

$$0 = \varphi(x, y, z, p, q, r, s, t). \tag{2}$$

Differentiiren wir diese Gleichung zuerst nach allen x, dann nach allen y, und setzen hiebei

$$\frac{\partial z}{\partial y} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = r, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = s, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = t,$$

sowie

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p\frac{\partial \varphi}{\partial z} + r\frac{\partial \varphi}{\partial p} + s\frac{\partial \varphi}{\partial q}$$

und

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + q\frac{\partial \varphi}{\partial z} + s\frac{\partial p}{\partial p} + t\frac{\partial \varphi}{\partial q},$$

so erhalten wir die beiden Relationen:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} \\ 0 &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} \end{aligned} \tag{3}$$

Multipliciren wir umgekehrt die erste derselben mit dx, die zweite mit dy, addiren und integriren, so folgt:

$$\text{Const} = \varphi(x, y, z, p, q, r, s, t) - \int \frac{\partial \varphi}{\partial z}(dz - p\,dx - q\,dy) - \int \frac{\partial \varphi}{\partial p}(dp - r\,dx - s\,dy) - \int \frac{\partial \varphi}{\partial q}(dq - s\,dx - t\,dy);$$

wir können also, von einer willkürlichen Constanten abgesehen, die (2) durch jene (3) ersetzen, wenn nur die Beziehungen

$$\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy, \\ dp &= r\,dx + s\,dy, \\ dq &= s\,dx + t\,dy \end{aligned} \tag{4}$$

stattfinden, wobei es an sich gleichgiltig ist, wie viele und welche Relationen zu deren Befriedigung verwendet werden. Wählen wir aber aus allen Functionen z, p, q, r, s, t, welche die (2) befriedigen, jene aus, für welche zugleich die (4) unbeschränkt integrabel werden, so ergibt sich aus denselben:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\ \frac{\partial z}{\partial y}=q,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=s,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t$$

und das z dieser Gleichungen ist die gesuchte Lösung.

Entwickeln wir zunächst die Integrabilitätsbedingungen für die erste der Gleichungen (4), so folgen nach Anleitung der Formeln (8) des Artikels 3 die Relationen:

$$\delta p=r\delta x+s\delta y,\quad \delta q=s\delta x+t\delta y;$$

also ist die Gleichung

$$dz=pdx+qdy$$

integrabel, — im weiteren Sinne —, wenn die beiden anderen Beziehungen in (4) bereits befriedigt sind. Es kommt also nur darauf an, diese letzteren integrabel zu machen. Die Auseinandersetzungen des vorigen Abschnittes geben für

$$dp=rdx+sdy$$

die Integrabilitätsbedingungen:

$$\delta r=\frac{\partial r}{\partial x}\delta x+\frac{\partial s}{\partial x}\delta y,\quad \delta s=\frac{\partial r}{\partial y}\delta x+\frac{\partial s}{\partial y}\delta y, \tag{5}$$

für die Gleichung:

$$dq=sdx+tdy$$

aber die Bedingungen:

$$\delta s=\frac{\partial s}{\partial x}\delta x+\frac{\partial t}{\partial x}\delta y,\quad \delta t=\frac{\partial s}{\partial y}\delta x+\frac{\partial t}{\partial y}\delta y, \tag{6}$$

die Grössen z, p, q, r, s, t sind also so zu bestimmen, dass sie den Gleichungen (3), (5), (6) gleichzeitig Genüge leisten.

Wir benützen nun den vorläufig noch unbestimmten Factor λ'', um mit dessen Hilfe aus den Gleichungen (5) und (6) die beiden folgenden zu bilden:

$$\begin{aligned}\delta r+\lambda''\delta s&=\frac{\partial r}{\partial x}\delta x+\frac{\partial s}{\partial x}(\delta y+\lambda''\delta x)+\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\lambda''\delta y,\\ \delta s+\lambda''\delta t&=\frac{\partial r}{\partial y}\delta x+\frac{\partial s}{\partial y}(\delta y+\lambda''\delta x)+\frac{\partial t}{\partial y}\cdot\lambda''\delta y,\end{aligned} \tag{7}$$

und erkennen sofort, dass die (5) und (6) gleichzeitig mit den (3) nur dann bestehen können, wenn die Relationen:

$$\frac{\delta r+\lambda''\delta s}{-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}=\frac{\delta s+\lambda''\delta t}{-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}=\frac{\delta x}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}}=\frac{\delta y+\lambda''\delta x}{\frac{\partial\varphi}{\partial s}}=\frac{\lambda''\delta y}{\frac{\partial\varphi}{\partial t}} \tag{8}$$

befriedigt sind. Die drei letzten Glieder dieser Reihe:

$$\frac{\delta x}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}}=\frac{\delta y+\lambda''\delta x}{\frac{\partial\varphi}{\partial s}}=\frac{\lambda''\delta y}{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}$$

erhalten durch die Bezeichnung:

$$\delta y=\lambda'\delta x \tag{9}$$

die Gestalt:

$$\lambda'+\lambda''=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial s}}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}}\,,\qquad \lambda'\lambda''=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}}\,,$$

und hieraus ergibt sich unmittelbar, dass

$$\lambda' \text{ und } \lambda''$$

die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\lambda^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\lambda-\frac{\partial\varphi}{\partial s}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{10}$$

sind.

Um unnöthige Weitläufigkeiten zu vermeiden, wollen wir vorderhand die Annahme machen, dass beide Wurzeln dieser Gleichung endlich und von Null verschieden sind, eine Annahme, welche voraussetzt, dass weder $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ noch $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ den Werth Null besitzen. Identificirt man $\frac{\partial y}{\partial x}$ mit der einen Wurzel λ' der Gleichung (10), so ist die andere für den früher unbestimmten Factor λ'' zu setzen, und in den zwei Gleichungen:

$$\frac{\partial r}{\partial x}+\lambda''\frac{\partial s}{\partial x}=-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}} \quad\text{und}\quad \frac{\partial s}{\partial x}+\lambda''\frac{\partial t}{\partial x}=-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}}\,,$$

welche noch in (8) enthalten sind, haben nun alle Bestandtheile bestimmte Werthe angenommen. Die Gleichungen (7) können auch in der Form:

$$0=\left[\partial r-\frac{\partial r}{\partial x}\partial x-\frac{\partial s}{\partial x}\partial y\right]+\lambda''\left[\partial s-\frac{\partial s}{\partial x}\partial x-\frac{\partial t}{\partial x}\partial y\right]$$

$$0=\left[\partial r-\frac{\partial r}{\partial y}\partial x-\frac{\partial s}{\partial y}\partial y\right]+\lambda''\left[\partial t-\frac{\partial s}{\partial y}\partial x-\frac{\partial t}{\partial y}\partial y\right]$$

geschrieben werden, sie ersetzen also entweder die (5) oder die (6). Es ist somit das eine Paar der Integrabilitätsbedingungen (5) und (6) von selbst befriedigt, wenn auf irgend eine mit den Gleichungen (8) verträgliche Weise dem anderen Paare bereits Genüge geschehen ist.

Die Gleichungen (8) enthalten in endlicher Form alle Variabeln des Problems, der Zahl nach acht, in Form von Differentialen nur fünf. Aber auch, wenn wir die Gleichungen (4) zu Hilfe nehmen, besitzen wir nur sechs Bestimmungsgleichungen für die sieben Grössen y, z, p, q, r, s, t. Verwandeln wir das allgemeine Zeichen der Variation ∂ in das für die Differentiation gebräuchliche d, so entsteht also das System simultaner, gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx}=\lambda'\\
&\frac{dz}{dx}=p+\lambda' q\\
&\frac{dp}{dx}=r+\lambda' s\\
&\frac{dq}{dx}=s+\lambda' t\\
&\frac{dr}{dx}+\lambda''\frac{ds}{dx}=-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}}\\
&\frac{ds}{dx}+\lambda''\frac{dt}{dx}=-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}}\,;
\end{aligned}\tag{11}$$

und dieses System bleibt unbestimmt, da nichts mehr vorhanden ist, wodurch es completirt werden könnte. Die Integration desselben muss ausgeführt werden, während eine der sieben Unbekannten, — wir wählen hiefür s — als eine vorläufig noch unbestimmte Function angesehen wird, und das System ist dann als integrirt zu erachten, wenn es gelungen ist, die Unbekannten

$$y, z, p, q, r \text{ und } t$$

als Functionen von x, s und der Integrationsconstanten darzustellen. Selbstverständlich ist, dass hiebei s nicht allein als Functionsargument in gewöhnlichem Sinne, sondern auch als Integrand unter Quadraturen in die Integralgleichungen eintritt. Das vollständige Integralsystem besteht also aus sechs Gleichungen und enthält sechs willkürliche Constante.

Differentiirt man eine Function der Variabeln x, y, z, p, q, r, s, t — Quadraturen, welche s enthalten, sind hiebei als Functionen von x anzusehen, — nach x, und setzt für die Differentialquotienten der Argumente deren Werthe aus dem Systeme (11), so wird das Resultat dieser Operation, welche wir durch D' bezeichnen, identisch Null, wenn die gedachte Function ein Integrale des obigen Systems ist. Für jedes Integrale F ist also:

$$D'F = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial r}} \frac{\partial F}{\partial r} + \lambda' \left\{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial t}\right\} - \frac{1}{\lambda''} \frac{ds}{dx} \left\{\lambda''^2 \frac{\partial F}{\partial r} - \lambda'' \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t}\right\} \equiv 0, \tag{12}$$

wobei in Analogie mit einer bereits benützten Bezeichnung

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} + r \frac{\partial F}{\partial p} + s \frac{\partial F}{\partial q} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} + s \frac{\partial F}{\partial p} + t \frac{\partial F}{\partial q} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

geschrieben wurde. Da die Integration bei willkürlichem s vorzunehmen ist, müssen durch jedes Integrale des Systems (11) insbesondere die beiden Gleichungen:

$$0 = \lambda''^2 \frac{\partial F}{\partial r} - \lambda'' \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

und

$$0 = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial r}} \frac{\partial F}{\partial r}\right] + \lambda' \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial t}\right] \tag{13}$$

befriedigt werden.

Die Gleichung (12) wird unter Anderem auch durch die Supposition $F = \varphi$ identisch erfüllt. Die rechte Seite der Gleichung (2) wird also durch das vollständige Integralsystem auf eine Constante reducirt; demnach genügt es, die gegebene Gleichung (2) selbst unter die Integrale aufzunehmen, damit sich alle Rechnungen, wie erforderlich, in der That auf das vorgelegte Problem beziehen. Das Nämliche wird jedoch auch dadurch erreicht, dass man zwischen den Integrationsconstanten eine entsprechende Beziehung statuirt, eine Voraussetzung, welche wir als die allgemeinere festhalten wollen. In beiden Fällen wird die Anzahl der willkürlichen Constanten auf fünf reducirt.

5.

Wir benützen nun das gewonnene Integralsystem, um in den Relationen (4) des vorigen Artikels die Integrationsconstanten als neue Veränderliche einzuführen. Beziehen wir das Zeichen Σ auf alle unabhängigen Integrationsconstanten f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, so verwandeln sich die Gleichungen (4) in die folgenden:

$$
\begin{aligned}
0 &= \Sigma\left(\frac{\partial z}{\partial f} - q\,\frac{\partial y}{\partial f}\right) df, \\
0 &= \Sigma\left(\frac{\partial p}{\partial f} - s\,\frac{\partial y}{\partial f}\right) df, \\
0 &= \Sigma\left(\frac{\partial q}{\partial f} - t\,\frac{\partial x}{\partial f}\right) df.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Aus ihnen ist das Differentiale von x entfallen, dass aber x — specielle Fälle ausgenommen — durch diese Transformation von selbst ausfalle, oder durch Hebung eines gemeinsamen Factors entfernt werden könne, ist schon desshalb nicht nachweisbar, weil in den (14) auch die unbestimmte Function s enthalten ist. Im Gegentheile, eben dieses s muss so bestimmt werden, dass x aus den (14) entfällt, da sonst eine Integration derselben nicht möglich ist.

Differentiiren wir nun die erste dieser Gleichungen nach allen darin enthaltenen x, so finden wir:

$$
\frac{d}{dx}\sum\left(\frac{\partial z}{\partial f} - q\,\frac{\partial y}{\partial f}\right) df = \sum\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial f} - q\,\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial f} - \frac{dq}{dx}\,\frac{\partial y}{\partial f}\right) df = \sum\left(\frac{\partial p}{\partial f} - s\,\frac{\partial y}{\partial f}\right) df + \lambda' \sum\left(\frac{\partial q}{\partial f} - t\,\frac{\partial y}{\partial f}\right) df.
$$

Die erste Gleichung in (14) enthält also kein x, wenn die beiden anderen bereits befriedigt sind; in Folge dessen genügt es, s so zu bestimmen, dass x aus diesen beiden zum Ausfall kommt. Damit dies geschehe, müssen die beiden Gleichungen:

$$
0 = \frac{d}{dx}\sum\left(\frac{\partial p}{\partial f} - s\,\frac{\partial y}{\partial f}\right) df, \quad 0 = \frac{d}{dx}\sum\left(\frac{\partial q}{\partial f} - t\,\frac{\partial y}{\partial f}\right) df
$$

durch geeignete Wahl von s befriedigt werden. Durch Ausführung der angezeigten Operationen und mit Benützung der (11) fliessen hieraus die Bedingungen:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum\left(\frac{\partial r}{\partial f} + \lambda'\,\frac{\partial s}{\partial f} - \frac{ds}{dx}\,\frac{\partial y}{\partial f}\right) df, \\
0 &= \sum\left(\frac{\partial s}{\partial f} + \lambda'\,\frac{\partial t}{\partial f} - \frac{dt}{dx}\,\frac{\partial y}{\partial f}\right) df.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Nach den Ausführungen des vorigen Artikels muss erwartet werden, dass mit der einen dieser Gleichungen zugleich auch der anderen Genüge geleistet werden kann. Dies in der That der Fall. Denn multipliciren wir die erste derselben mit $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$, die zweite mit $\lambda''\frac{\partial \varphi}{\partial r}$, und addiren die Resultate, so erhalten wir mit Rücksicht auf die Relationen:

$$
(\lambda' + \lambda'')\,\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \quad \lambda'\lambda''\,\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial r}\left(\frac{ds}{dx} + \lambda''\,\frac{dt}{dx}\right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)
$$

die Gleichung:

$$
0 = \sum\left[\frac{\partial \varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial f} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\,\frac{\partial s}{\partial f} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial f} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial_{,}}\right] df.
$$

Andererseits ist nachgewiesen worden, dass in Folge des Integralsystems φ kein x enthält; demzufolge ist:

$$
0 = \sum\left[\frac{\partial \varphi}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial f} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\,\frac{\partial s}{\partial f} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial f} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial f} + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\,\frac{\partial q}{\partial f} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial f} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial f}\right] df.
$$

Ziehen wir nun von dieser Gleichung die unmittelbar vorhergehende ab, und setzen hiebei für $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$ seinen oben angegebenen Werth, so resultirt

$$
0 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\sum\left(\frac{\partial z}{\partial f} - q\,\frac{\partial y}{\partial f}\right) df + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\sum\left(\frac{\partial p}{\partial f} - s\,\frac{\partial y}{\partial f}\right) df + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\sum\left(\frac{\partial q}{\partial f} - t\,\frac{\partial y}{\partial f}\right) df,
$$

womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist. Damit ist die Übereinstimmung mit den Entwicklungen des vorigen Artikels hergestellt, wozu noch bemerkt werden mag, dass die Integrabilitätsbedingungen (5) und (6) durch die Transformation des gegenwärtigen Artikels paarweise in die Gleichungen (15) übergehen.

Denken wir uns nun auf irgend eine Weise eine Lösung der (15) gefunden, und in den (14) eingeführt. Dann fällt x aus denselben heraus, und sie bleiben unverändert, wenn man nach der Substitution des richtigen s dem x einen beliebigen Werth ertheilt. Nach einem bekannten Schlusse können dann die Resultate der Substitution unmittelbar angegeben werden, wenn man das System der sogenannten Hauptintegrale zu Grunde legt. Bezeichnen wir also einen beliebigen concreten Werth von x mit x^0, die durch Einsetzung desselben in die Integralgleichungen sich ergebenden Werthe der Dependenten mit

$$y^0, z^0, p^0, r^0, s^0, t^0,$$

— wobei jedoch x^0 kein singulärer Werth sein darf — und führen diese Grössen an Stelle der f als Integrationsconstante ein, so verwandeln sich nach gehöriger Bestimmung von s die (14) in die folgenden:

$$\begin{aligned} dz^0 &= q^0 dy^0, \\ dp^0 &= s^0 dy^0, \\ dq^0 &= t^0 dy^0, \end{aligned} \tag{16}$$

deren Integrale ohne Schwierigkeiten angegeben werden können. Setzen wir nämlich

$$z^0 = \Phi(y^0),$$

wo $\Phi(y_0)$ eine willkürliche Function von y^0 bedeutet, so folgt aus denselben:

$$q^0 = \Phi'(y^0), \quad t^0 = \Phi''(y_0),$$

indem für die Ableitungen einer Function die Lagrange'sche Bezeichnungsweise verwendet wurde. Der zweiten Gleichung in (16) wegen ist auch s^0 eine Function von y^0, denn setzt man

$$p^0 = \Psi(y^0),$$

so folgt

$$s^0 = \Psi'(y^0);$$

r^0 endlich kann dann vermittelst der gegebenen Gleichung berechnet werden. Also erhalten wir nach Ermittlung des s ein Gleichungssystem von folgender Gestalt:

$$z^0 = \Phi(y^0),\ q^0 = \Phi'(y^0),\ t^0 = \Phi''(y^0),\ p^0 = \Psi(y^0),\ s^0 = \Psi'(y^0),\ \varphi(x^0, y^0, z^0, p^0, r^0, s^0, t^0) = 0, \tag{17}$$

und damit sind die Beziehungen hergestellt, welche die Pfaff'schen Gleichungen (14) den Integrationsconstanten auferlegen.

Dieses Resultat lehrt:

Erstens, dass die Constanten des Integralsystems als Functionen Einer von ihnen anzusehen sind und

Zweitens, dass das allgemeine Integral einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei Independenten nie mehr als zwei willkürliche Functionen enthalten kann.

Beide Bemerkungen sind offenbar nicht an den Gebrauch der Hauptintegrale gebunden. Die Einführung der letzteren bringt die zwischen den Constanten einzuführenden Relationen in die einfache, in (17) angegebene Gestalt, bei jedem anderen Systeme müssen dieselben direct aus den Gleichungen (14) ermittelt werden.

Ist s bekannt, und sind die eben erwähnten Relationen zwischen den Constanten gefunden, und in das Integralsystem (11) eingeführt, so soll das so entstehende Integralsystem als das definitive Integralsystem bezeichnet werden. Es ist nun so beschaffen, dass die gesuchte Lösung ohne weiters angegeben werden kann. Da es nämlich in sieben Gleichungen die neun Grössen x, y, z, p, q, r, s, t und y^0 oder die an dessen Stelle gewählte independente Integrationsconstante enthält, so resultirt durch Elimination der letzteren und der Grössen p, q, r, s, t eine Gleichung, welche nur mehr z, x und y enthält, und offenbar die gesuchte Lösung ist.

6.

Den eben abgeschlossenen Entwicklungen gemäss werden wir im Folgenden eine der Integrationsconstanten dadurch auszeichnen, dass wir sie als Independente ansehen, während alle anderen als Functionen dieser Einen zu betrachten sind. Diese unabhängige Constante bezeichnen wir durch f ohne Index, so dass das noch zu bestimmende s, welches in letzter Linie von x und y abhängt, als Function von x und f anzusehen ist.

Ertheilen wir dieser unabhängigen Constanten einen unendlich kleinen Zuwachs ∂f, so werden alle Integrationsconstanten und daher auch die Variabeln des Systems selbst und zwar ebenfalls unendlich kleine Zuwächse erleiden, welche wir durch das Zeichen ∂ kenntlich machen wollen. Dadurch verwandeln sich die Gleichungen (14) und (15) in die folgenden:

$$Z = \partial z - q\partial y = 0$$

$$P = \partial p - s\partial y = 0$$

$$Q = \partial q - t\partial y = 0$$

$$R = \partial r + \lambda'\partial s - \frac{ds}{dx}\partial y = 0$$

$$T = \partial s + \lambda'\partial t - \frac{dt}{dx}\partial y = 0$$

Die Variation einer beliebigen Function F der Argumente x, y, z, p, q, r, s, t ist dann gegeben durch die Gleichung:

$$\partial F = \frac{\partial F}{\partial y}\partial y + \frac{\partial F}{\partial z}\partial z + \frac{\partial F}{\partial p}\partial p + \frac{\partial F}{\partial q}\partial q + \frac{\partial F}{\partial r}\partial r + \frac{\partial F}{\partial s}\partial s + \frac{\partial F}{\partial t}\partial t.$$

Definiren wir nun im Gegensatze zur Operation D' die Operation D'' durch die Gleichung:

$$D''F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) - \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}}\frac{\partial F}{\partial r} + \lambda''\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}\frac{\partial F}{\partial t}\right\} - \frac{1}{\lambda'}\frac{ds}{dx}\left\{\lambda'^2\frac{\partial F}{\partial r} - \lambda'\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t}\right\},$$

so finden wir sofort:

$$D''F - D'F = (\lambda'' - \lambda')\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \frac{ds}{dx}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{\lambda'}\frac{dt}{dx}\frac{\partial F}{\partial t}\right\},$$

und es wird:

$$\partial F - \frac{D''F - D'F}{\lambda'' - \lambda'}\partial y = Z\frac{\partial F}{\partial z} + P\frac{\partial F}{\partial p} + Q\frac{\partial F}{\partial q} + \left(\partial r - \frac{ds}{dx}\partial y\right)\frac{\partial F}{\partial r} + \left(\partial t - \frac{1}{\lambda'}\frac{dt}{dx}\partial y\right)\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial s}\partial s.$$

Es ist aber:

$$\partial r - \frac{ds}{dx}\partial y = R - \lambda'\partial s,\quad \partial t - \frac{1}{\lambda'}\frac{dt}{dx}\partial y = \frac{1}{\lambda'}(T - \partial s),$$

daher ist auch:

$$\partial F - \frac{D''F - D'F}{\lambda'' - \lambda'}\partial y = Z\frac{\partial F}{\partial z} + P\frac{\partial F}{\partial p} + Q\frac{\partial F}{\partial q} + R\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{\lambda'}T\frac{\partial F}{\partial t} - \partial s\left\{\lambda'\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{\lambda'}\frac{\partial F}{\partial t}\right\},$$

oder endlich:

$$Z\frac{\partial F}{\partial z} + P\frac{\partial F}{\partial p} + Q\frac{\partial F}{\partial q} + R\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{\lambda'}T\frac{\partial F}{\partial t} = \partial F - \frac{D''F - D'F}{\lambda'' - \lambda'}\partial y + \partial s\left\{\lambda'\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{\lambda'}\frac{\partial F}{\partial t}\right\}. \tag{18}$$

Diese Gleichung ist eine identische, das heisst, sie gilt für jedes F, und wir erkennen aus derselben, dass die Ausdrücke:

$$Z, P, Q, R, T,$$

wie es in unserer Absicht liegt, den Werth Null erhalten, wenn es gelungen ist, die Relation

$$0 = \delta F - \frac{D''F - D'F}{\lambda'' - \lambda'}\delta y + \delta s \left\{\lambda' \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{\lambda'}\frac{\partial F}{\partial t}\right\} \tag{19}$$

durch fünf, bezüglich der Grössen z, p, q, r, t von einander unabhängige F zu befriedigen. In der That folgen dann aus (18) fünf lineare homogene Gleichungen, in welchen Z, P, Q, R und T als Unbekannte angesehen werden können. Die Werthe derselben müssen also wegen der nicht verschwindenden Determinante mit Null zusammenfallen.

Die Definition von D'' unterscheidet sich von jener der Operation D' nur darin, dass in $D''F$ überall λ'' steht, wo in $D'F$ λ' zu finden war, und umgekehrt λ' an die Stelle von λ'' getreten ist. Ist also $D''F = 0$, so ist F ein Integrale jenes Differentialsystems, welches aus dem bisher Betrachteten durch eben dieselben Vertauschungen entsteht. Dieses Differentialsystem, welches auch dadurch gewonnen wird, dass man von vornherein $\frac{dy}{dx}$ nicht mit λ', sondern mit λ'' identificirt, bezeichnen wir im Gegensatze zu dem ersten als das zweite Differentialsystem und wird dasselbe integrirt, indem s abermals willkürlich bleibt, so muss jedes Integrale dieses Systems die Gleichung

$$0 = \lambda' \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{\lambda'}\frac{\partial F}{\partial t} \tag{20}$$

identisch befriedigen. Nimmt man also in (19) für F ein Integrale des zweiten Systems, so verschwindet der Coëfficient von δs, sowie $D''F$ identisch, und es entsteht die Gleichung:

$$0 = \delta F + \frac{D'F}{\lambda'' - \lambda'}\delta y.$$

Wäre nun F zugleich ein Integrale des ersten Systems, so würde auch $D'F$ verschwinden, und nur mehr

$$\delta F = 0$$

zu machen sein. Wie leicht einzusehen, gibt es, so lange s unbestimmt bleibt, ausser dem φ keine Function, welche beiden Systemen zugleich als Integrale angehören könnte. Eine Function dieser Art müsste nämlich sowohl die Gleichung (20) als auch jene (13) befriedigen, was offenbar nur durch φ selbst geleistet wird. Stellt man also das Verlangen, dass eine Function F Integrale in beiden Systemen sein solle, so kann dies nur durch eine entsprechende Wahl für s hervorgerufen werden. Da nun die Gleichung (19) durch fünf von einander unabhängige F erfüllt werden muss, jedes der vorhandenen Systeme aber nur fünf von einander unabhängige Integrale besitzt, aus denen mit Hilfe der gegebenen Gleichung alle anderen Integrale zusammengesetzt werden können, so ist der gesuchte Werth von s derjenige, welcher sämmtliche Integrale des einen Systems in Integrale des anderen verwandelt. Bezeichnen wir nun die Integrale des zweiten Systems — es ist hier wie überall die allgemeinere Form vorausgesetzt — durch

$$g, g_1, g_2, \ldots, g_5,$$

so ist durch die Gleichungen

$$g_1 - \psi_1(g) = F_1,$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$g_5 - \psi_5(g) = F_5,$$

zwischen welchen in Hinsicht auf die gegebene Gleichung eine Relation von der Form:

$$\vartheta(g, \psi_1, \psi_2 \ldots \psi_5) = \Theta(F_1, F_2, \ldots F_5) = 0$$

bestehen muss, die allgemeinste Form eines vollständigen Integralsystems gegeben, und der gesuchte Werth von s ist derjenige, welcher diese fünf Integrale des zweiten Systems in Integrale des ersten Systems verwandelt, das heisst, die Grössen $F_1, F_2, \ldots F_5$ in Functionen von $f_1, f_2, \ldots f_5$ überführt. Setzt man endlich diese Functionen gleich Null, was zur Folge hat, dass $f_1, \ldots f_5$ als Functionen von f dargestellt werden können, wie bereits oben von der Theorie gefordert wurde, so wird auch $\partial F = 0$ und damit die Gleichung (19) vollständig befriedigt. Die Bestimmungsgleichungen für s erhalten also die Gestalt:

$$g_1 - \psi_1(g) = 0, \quad g_2 - \psi_2(g) = 0, \ldots, g_5 - \psi_5(g) = 0, \tag{21}$$

und setzt man in diesen Gleichungen für die Variabeln des Problems deren Werthe aus dem ersten Integralsysteme, so erhält man aus denselben nicht nur den gesuchten Werth von s, sondern auch die zwischen den Constanten einzuführenden Relationen.

In der That, bezeichnen wir irgend einen der Ausdrücke in den linken Seiten von (21) wieder mit F, so ist identisch die Gleichung:

$$0 = \lambda' \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{\lambda'} \frac{\partial F}{\partial t}$$

erfüllt. Ein Integrale, welches weder r noch t enthält, kann also auch kein s enthalten. Demnach gibt es nur zwei von einander unabhängige Integrale, welche die Grössen zweiter Ordnung r, s und t enthalten, aus allen anderen Integralen des vollständigen Systems können dieselben gleichzeitig zum Ausfall gebracht werden. Unter den linken Seiten in (18) befinden sich also ebenfalls nur zwei, welche bezüglich R und T von einander unabhängig sind, während aus allen anderen diese Grössen gleichzeitig eliminirt werden können. Diese letzteren Gleichungen erzeugen also, gleich Null gesetzt, keine Bestimmungsgleichungen für s. Übrigens verschwindet die rechte Seite in (18) auch für $F = \varphi$, man kann sonach aus den noch in Rede stehenden Gleichungen T entfernen, so dass für s nur eine Bestimmungsgleichung übrig bleibt. Es genügt daher auch, eine der Gleichungen (21), wenn nur in derselben s enthalten ist: denn bestimmt man daraus dieses letztere, und führt den gefundenen Werth desselben in die (14) ein, so verwandeln sich dieselben in Pfaff'sche Probleme, aus denen die noch fehlenden Relationen gewonnen werden können. Ich befolge in den weiter unten mitgetheilten Beispielen in der Regel diesen Weg, da er zugleich als Controle der Rechnung dient.

7.

Indem ich mich nun zur Darstellung der praktischen Rechnung wende, will ich zunächst einige einfache Fälle anführen, um hieran die Erörterungen über den allgemeinen Fall anzuschliessen. Selbstverständlich liegt die eigenthümliche Schwierigkeit des Problems immer in der Bestimmung von s; ich hebe also zunächst einige Fälle hervor, in welchen diese Bestimmung verhältnissmässig leicht vollzogen werden kann.

Dies ist insbesondere der Fall, wenn in beiden Integralsystemen je zwei Integrale existiren, welche keine Quadraturen über s enthalten. Bezeichnen wir dieselben respective durch F, f, G, g, so ist auch in den Gleichungen:

$$F - \chi(f) = 0 \quad \text{und} \quad G - \psi(g) = 0$$

keine Quadratur enthalten, und man kann die Grössen r, s und t sofort durch die Variabeln des Problems ausdrücken. Substituirt man den erhaltenen Werth in eines der Differentialsysteme, so entsteht eine Differentialgleichung, mit deren Hilfe dasselbe System vervollständigt werden kann. Enthalten voranstehende Gleichungen nur r, s, t, x und y, so sind durch dieselben und die gegebene Gleichung sofort die wahren Werthe von r, s, t bestimmt.

So verhält es sich beispielsweise bei der sehr bekannten Gleichung:

$$r - a^2 t = 0$$

Die Gleichung (10) ist hier:

$$\lambda^2 - a^2 = 0,$$

also lauten die beiden Differentialsysteme wie folgt:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx}=a\,, && \frac{dy}{dx}=-a\\
&\frac{dz}{dx}=p+aq\,, && \frac{dz}{dx}=p-aq\\
&\frac{dp}{dx}=r+as\,, && \frac{dp}{dx}=r-as\\
&\frac{dq}{dx}=s+at\,, && \frac{dq}{dx}=s-at\\
&\frac{dr}{dx}-a\frac{ds}{dx}=0\,, && \frac{dr}{dx}+a\frac{ds}{dx}=0\\
&\frac{ds}{dx}-a\frac{dt}{dx}=0\,, && \frac{ds}{dx}+a\frac{dt}{dx}=0.
\end{aligned}$$

Die Integralgleichungen des ersten Systems sind:

$$y=f_1+ax,\quad z=f_5+x(f_3+af_4)+f_2x^2+4a\int dx\int s dx,$$

$$p=f_3+f_2x+2a\int sdx,\quad q=f_4+\frac{f_2x}{a}+2\int sdx,\quad r=f_2+as,\quad t=\frac{f_2}{a^2}+\frac{s}{a};$$

von den Integralen des zweiten Systems genügt es, das eine

$$r+as=g_2$$

zu kennen. Denn setzt man

$$f_2=2a^2\Phi''(f_1),\quad g_2=2a^2\Psi''(g_1),$$

so folgt aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
r+as&=2a^2\Psi''(y+ax)\\
r-as&=2a^2\Phi''(y-ax)
\end{aligned}$$

sofort der richtige Werth von s:

$$s=-a\Phi''(y-ax)+a\Psi''(y+ax).$$

Ausserdem findet man

$$\begin{aligned}
r&=a^2\Phi''(y-ax)+a^2\Psi''(y+ax)\\
t&=\ \ \Phi''(y-ax)+\ \ \Psi''(y+ax).
\end{aligned}$$

Es ist durchaus nicht schwierig, aus diesen Gleichungen den Werth von z ohne weitere Rechnung anzugeben, doch dürfte eben die Einfachheit des Problems empfehlen, den Gang der Rechnung vollständig durchzugehen. Zunächst wollen wir also mit dem gefundenen Werthe von s in die (14) eingehen, um nachzuweisen, dass x wirklich ausgefallen ist. Die erste dieser Gleichungen lautet in unserem Falle:

$$\delta p-s\delta y=\delta f_3+x\delta f_2+2a\int\frac{\partial s}{\partial f_1}dx\,.\,\delta f_1-s\delta f_1=0;$$

es ist nun

$$\frac{\partial s}{\partial f_1}\delta f_1=-a\Phi'''(f_1)\delta f_1+a\Psi'''(f_1+2ax)\delta f_1,$$

also

$$\int\frac{\partial s}{\partial f_1}\delta f_1\,dx=-ax\Phi'''(f_1)\delta f_1+\frac{1}{2}\Psi''(f_1+2ax)\delta f_1,$$

unsere Gleichung geht also über in die folgende:

$$\delta f_3+a\Phi''(f_1)\delta f_1=0.$$

Die letzte Gleichung in (14) gibt in gleicher Weise:

$$\partial f_4 - \Phi''(f_1)\partial f_1 = 0,$$

und endlich die erste:

$$\partial f_5 - f_4 \partial f_1 = 0.$$

Die Integrale dieser Relationen sind gegeben durch die Gleichungen:

$$f_5 = \Phi(f_1), \quad f_4 = \Phi'(f_1), \quad f_3 = -a\Phi'(f_1), \quad f_2 = 2a^2\Phi''(f_1),$$

womit nun alle nothwendigen Beziehungen gewonnen sind.

Mit dem gefundenen Werthe von s folgt ferner:

$$\int s dx = -ax\,\Phi''(f_1) + \frac{1}{2}\Psi'(f_1+2ax),$$

$$\int dx \int s dx = -a\frac{x^2}{2}\Phi''(f_1) + \frac{1}{4a}\Psi(f_1+2ax),$$

und das definitive Integralsystem wird:

$$\begin{aligned}
y &= f_1 + ax \\
z &= \Phi(f_1) + \Psi(f_1+2ax) \\
p &= -a\,\Phi'(f_1) + a\Psi'(f_1+2ax) \\
q &= \Phi'(f_1) + \Psi'(f_1+2ax) \\
r &= a^2\Phi''(f_1) + a^2\Psi''(f_1+2ax) \\
s &= -a\,\Phi''(f_1) + a\,\Psi''(f_1+2ax) \\
t &= \Phi''(f_1) + \Psi''(f_1+2ax)
\end{aligned}$$

und indem man noch in dem Ausdrucke für z an Stelle von f_1, dessen Werth aus der ersten Gleichung setzt, erhält man die wohlbekannte Lösung:

$$z = \Phi(y-ax) + \Psi(y+ax).$$

Auch dann, wenn nur eines der beiden Integralsysteme Quadraturen enthält, tritt eine Vereinfachung ein Sei etwa:

$$F - \chi(f) = 0 \tag{α}$$

ein Integrale des ersten Systems, welches von Quadraturen frei ist, während in allen Integralen des zweiten Systems Quadraturen auftreten, so wird das Resultat, welches durch Substitution der Integralwerthe aus dem zweiten Systeme in (a) entsteht, ebenfalls Quadraturen enthalten. Da aber die letzteren bei constantem y auszuführen sind, sind sie durch die Operation D'' aufhebbar, und man kann durch fortgesetzte Anwendung dieser Operation immer so viel Gleichungen erzeugen, als zur Elimination der Integrale nothwendig sind. Das Eliminationsresultat ist eine Differentialgleichung für s, in welcher das letztere mit dem Zeichen D'' behaftet ist; die Integrationsconstanten sind also als Functionen von y anzusehen.

Als Beispiel hiefür mag die Gleichung:

$$x^2 r - y^2 t = 0$$

dienen. Sie liefert für λ die Werthe:

$$\lambda' = -\frac{y}{x}, \quad \lambda'' = \frac{y}{x}$$

und damit die beiden Differentialsysteme:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}\,, && \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\,,\\
&\frac{dz}{dx} = p - \frac{y}{x}\,q\,, && \frac{dz}{dx} = p + \frac{y}{x}\,q\,,\\
&\frac{dp}{dx} = r - \frac{y}{x}\,s\,, && \frac{dp}{dx} = r + \frac{y}{x}\,s\,,\\
&\frac{dq}{dx} = s - \frac{y}{x}\,t\,, && \frac{dq}{dx} = s + \frac{y}{x}\,t\,,\\
&\frac{dr}{dx} + \frac{y}{x}\frac{ds}{dx} = -\frac{2r}{x}\,, && \frac{dr}{dx} - \frac{y}{x}\frac{ds}{dx} = -\frac{2r}{x}\,,\\
&\frac{ds}{dx} + \frac{y}{x}\frac{dt}{dx} = -\frac{2yt}{x^2}\,, && \frac{ds}{dx} - \frac{y}{x}\frac{dt}{dx} = -\frac{2yt}{x^2}\,.
\end{aligned}
$$

Da sich im ersten Systeme sofort zwei Integrale ohne Quadraturen ergeben:

$$xy = f, \quad x^2r + xys = F,$$

so begnügen wir uns hiemit, und integriren das zweite System. Ein vollständiges Integralsystem ist:

$$y = gx$$

$$r = g^2t = \frac{g_3}{x^2} + gs - \frac{2g}{x^2}\int xs\,dx$$

$$p = g_2 + gg_4 - \frac{g_3}{x} + \frac{2g}{x}\int xs\,dx$$

$$q = g_4 - \frac{g_3}{gx} + \frac{2}{x}\int xs\,dx$$

$$z = g_5 + x(g_2 + gg_4) - 2g_3 \log x + 4g\int\frac{dx}{x}\int xs\,dx.$$

Wir wollen hier für den Augenblick davon absehen, dass aus diesen Gleichungen leicht zwei Integrale ohne Quadraturen gebildet werden können, nämlich;

$$xr - gs + p = g_2 + gg_4$$

und

$$p - \frac{y}{x}\,q = g_2;$$

vielmehr bilden wir aus den beiden oben angeführten Integralen des ersten Systems die Gleichung:

$$x^2r + xys = \chi(xy),$$

und substituiren darin die Variabeln durch ihre Integralwerthe aus dem zweiten Systeme.

Dadurch folgt als Bestimmungsgleichung für s:

$$g_3 + 2gx^2s - 2g\int xs\,dx - \chi(gx^2) = 0,$$

und indem man die Operation D'' anwendet:

$$x\,D''s + s - \chi' = 0.$$

Hieraus ergibt sich:

$$xs = \Phi(g) + \int \chi'(gx^2)\,d'x,$$

wobei, um Verwechslungen zu vermeiden, der Sinn des Integralzeichens durch die dem Differentiationszeichen angefügten Accente gekennzeichnet ist. Setzen wir:

$$yx^2 = u,$$

so wird, da y als constant anzusehen ist,

$$dx = \frac{du}{2\sqrt{yu}},$$

also

$$s = \frac{\Phi(y)}{x} + \frac{1}{2\sqrt{u}}\int \frac{\chi'(u)du}{\sqrt{u}},$$

oder, was dasselbe ist:

$$s = \frac{\Phi(y)}{x} + \Psi(u) = \frac{1}{x}\,\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \Psi(xy).$$

Verwenden wir hingegen die Gleichung:

$$x^2r - xys + xp = x\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

welche mit Hilfe des ersten der angeführten Integrale ohne Quadraturen gewonnen wird, um in Verbindung mit der Gleichung:

$$x^2r + xys = \chi(xy)$$

s zu berechnen, so erhalten wir:

$$2xys - xp = \chi(xy) - x\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

eine Gleichung, welche nach dem ersten Falle zu behandeln ist. Differentiiren wir selbe nach dem Zeichen D', so folgt:

$$2xy\,D's = \psi\left(\frac{y}{x}\right) + 2\,\frac{y}{x}\,\psi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

wofür man wegen der Willkürlichkeit des ψ auch schreiben kann:

$$xy\,D's = \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Da nun $xy = f$ bei der Differentiation D' constant bleibt, wird weiter:

$$s = \Phi^1(f) + \frac{1}{f}\int \psi\left(\frac{f}{x^2}\right) d'x,$$

ein Ausdruck, welcher durch die Substitution:

$$f = x^2u$$

in die Form:

$$s = \Phi_1(f) + \frac{1}{x}\,\Psi_1(u)$$

gebracht wird, die mit der oben gefundenen im wesentlichen identisch ist.

Geht man aber von dem dritten der oben angegebenen Integrale des zweiten Systems aus, und bildet die Gleichung:

$$p - \frac{y}{x}\,q = \chi\left(\frac{y}{x}\right),$$

so besitzt man sofort ein intermediäres Integrale erster Ordnung und man erhält in allen drei Fällen für z den Werth:

$$z = x\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \Psi(xy).$$

Wie ersichtlich, ist die Rechnung davon unabhängig, ob Integrale ohne Quadraturen gefunden werden können oder nicht, eine Bemerkung, welche nicht ohne Werth ist, wenn man bedenkt, dass die Auffindung von Integralen ohne Quadraturen, — wenn solche überhaupt existiren — in der Regel mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist.

Im Allgemeinen hat weder das eine noch das andere Integralsystem von Quadraturen freie Integrale. Die Bestimmungsgleichung für s enthält dann Quadraturen von zweierlei Sinn, das ist sowohl solche, welche aus dem ersten System, als auch solche, welche aus dem zweiten System herstammen. Man kann nun, wie sogleich gezeigt werden wird, durch hinreichend fortgesetzte Anwendung eines der Operationszeichen D' oder D'' immer die eine Art von Integralzeichen entfernen, und erhält als Resultat eine Gleichung, welche noch Quadraturen der zweiten Art in sich fasst. Denken wir uns, um die Vorstellung zu fixiren, unsere Absicht dahin gerichtet, die Integrale des zweiten Systems zu eliminiren, so entstehen unter den verschiedenen, im Eliminationsresultate noch verbleibenden Integralzeichen des ersten Systems Ausdrücke von der Form:

$$R(x, s, D''s, D''^2 s, \ldots)$$

und die Bestimmungsgleichung für s erhält die Gestalt:

$$0 = \vartheta(R_1, \int R_2 d'x, \int R_3 d'x, \ldots), \tag{β}$$

worin abermals der Charakter der Integrationen durch einen dem Differentiationszeichen d angefügten Accent auch äusserlich kenntlich gemacht worden ist.

Ein jeder Versuch, durch Anwendung der Operation D' auch die noch verbliebenen Integrale erster Art zu entfernen, führt zu Gleichungen, welche Differentialquotienten von der Form:

$$D'^{(i)} D''^{(k)} s$$

enthalten, also neuerdings zu partiellen Differentialgleichungen, deren Ordnung überdies die der gegebenen Gleichung in der Regel übersteigt. Es gibt also nur eine Möglichkeit, die Integrale der ersten Art zu entfernen und diese tritt dann ein, wenn es gelingt, aus den Gleichungen, welche durch successive Anwendung der Operation D'' gewonnen werden, eine andere zu bilden, in welcher jene R, welche sich unter Integralzeichen befinden, als Functionen des von Integralzeichen freien R dargestellt werden können, ohne dass s selbst oder eine der Operationen D' oder D'' hiebei zur Verwendung kommen. In der That, ist

$$\begin{gathered} R_2 = \omega_2(x, R_1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ R_i = \omega_i(x, R_1), \end{gathered}$$

so kann man durch successive Anwendung der Operation D' die Integralzeichen erster Art aus (β) entfernen so dass schliesslich R_1 durch eine Beziehung zwischen

$$x, R_1, D' R_1, D'^2 R_1, \ldots$$

gegeben ist. Die Integration dieser Gleichung, bei welcher die Integrationsconstanten als Functionen von f anzusehen sind, gibt R_1, und indem man für dasselbe dessen oben definirten Werth setzt, erhält man eine Relation zwischen

$$x, s, D''s, D''^2 s, \ldots$$

deren Integration endlich zu dem gesuchten Werthe von s führt. Bei der letzteren Integration sind selbstverständlich die Integrationsconstanten als Functionen von y zu betrachten.

Es erübrigt also noch zu zeigen, dass die bei der Anwendung der Operation D'' unter den Integralzeichen erster Art auftretenden Ausdrücke in der That auf die angegebene Form gebracht werden können.

Ist J irgend eine Function von y und x, so ist:

$$D'J = \frac{\partial J}{\partial x} + \lambda' \frac{\partial J}{\partial y}$$

$$D''J = \frac{\partial J}{\partial x} + \lambda'' \frac{\partial J}{\partial y}$$

also

$$D''J - D'J = (\lambda'' - \lambda') \frac{\partial J}{\partial y}; \tag{γ}$$

ferner ist, wie man leicht berechnet:

$$\frac{\partial D'J}{\partial y} = D' \frac{\partial J}{\partial y} + \frac{\partial \lambda'}{\partial y} \frac{\partial J}{\partial y}. \tag{δ}$$

Ist also J ein Integrale des ersten Systems, etwa

$$J = \int S d'x \quad \text{oder} \quad D'J = S,$$

so folgt aus (γ):

$$D''J = S - (\lambda' - \lambda'') \frac{\partial J}{\partial y}$$

und aus (δ):

$$\frac{\partial J}{\partial y} = e^{-\int \frac{\partial \lambda'}{\partial y} d'x} \int \frac{\partial S}{\partial y} e^{\int \frac{\partial \lambda'}{\partial y} d'x} d'x,$$

somit gilt als Regel für die Anwendung der Operation D'' auf Integrale der ersten Art:

$$D''J = S - (\lambda' - \lambda'') e^{-\int \frac{\partial \lambda'}{\partial y} d'x} \int \frac{\partial S}{\partial y} e^{\int \frac{\partial \lambda'}{d y} d'x} d'x.$$

Im zweiten Theile dieses Ausdruckes treten Integrale von der Form

$$\int \frac{\partial f(x,s)}{\partial y} d'x = \int \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} d'x$$

auf. Ersetzt man $\frac{\partial s}{\partial y}$ durch den damit identischen Werth

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{D's - D''s}{\lambda' - \lambda''},$$

so verwandelt sich das obige Integrale in folgendes:

$$\int \frac{\partial f}{\partial s} \frac{D's}{(\lambda' - \lambda'')} d'x - \int \frac{\partial f}{\partial s} \frac{D''s}{(\lambda' - \lambda'')} d'x.$$

Der Subtrahend dieses Ausdruckes hat bereits die angestrebte Form. Der Minuend lässt sich immer von der Grösse $D's$ befreien. In der That, sucht man eine Function H von der Beschaffenheit, dass

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{1}{(\lambda' - \lambda'')} \frac{\partial f}{\partial s},$$

so folgt:

$$D'H = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{D's}{\lambda - \lambda'} \frac{\partial f}{\partial s}$$

und es wird:

$$\int \frac{D's}{\lambda' - \lambda''} \frac{\partial f}{\partial s} d'x = H - \int \frac{\partial H}{\partial x} d'x.$$

Da nun H kein $D's$ enthalten kann, so ist durch diese Operation $D's$ thatsächlich entfernt und gezeigt, dass $D''J$ in die angegebene Form überführt werden kann. Bezüglich der von Integralzeichen freien Theile besteht von vornherein kein Zweifel, unsere Behauptung ist daher zunächst für die erste Differentiation bewiesen.

Dass auch bei weiterer Differentiation unter allen Zeichen $\int$ die Form R hergestellt werden kann, lässt sich beweisen, indem man zeigt, dass dies beim Übergange von der $n$ten zur $(n+1)$ten Ordnung der Fall ist. Was die von Integralzeichen freien Theile anbelangt, so leuchtet ohneweiters ein, dass sie stets die besprochene Form erhalten. Es genügt sonach, ein Integrale von der Form:

$$J = \int R(x, s, D''s, \ldots, D''^{(n)}s)\, d'x$$

zu betrachten. In Folge der Differentiationsregel ist nun:

$$D''J = R - (\lambda' - \lambda'')e^{-\int \frac{\partial \lambda'}{\partial y} d'x} \int \left[\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\partial R}{\partial D''^{(i)}.s} \frac{\partial D''^{(i)}.s}{\partial y} \right] e^{\int \frac{\partial \lambda'}{\partial y} d'x} d'x.$$

Das Integrale:

$$\int \frac{\partial \lambda'}{\partial y} d'x$$

enthält keine höheren Differentialquotienten, und ist überdies früher bereits berücksichtigt worden, es ist also blos nöthig, Integrale von der Form

$$\int \sum_{i=0}^{i=n} A_i \frac{\partial D''^{(i)}.s}{\partial y} d'x$$

zu behandeln. Hierin sind die Coëfficienten A_i Functionen von $x, s, D's, \ldots, D''^{(n)}.s$.

Es ist nun:

$$\frac{\partial D''^{(i)}.s}{\partial y} = \frac{D'D''^{(i)}s - D''^{(i+1)}.s}{\lambda' - \lambda''},$$

unser Integrale wird also:

$$\int \sum_{i=0}^{i=n} \frac{A_i}{\lambda' - \lambda''} D'D''^{(i)}.s.d'x - \int \sum_{i=0}^{i=n} \frac{A_i}{\lambda' - \lambda''} D''^{(i+1)}.s\, d'x$$

und der Subtrahend hat bereits die angestrebte Form. Um auch den Minuend zu transformiren, bestimmen wir zunächst eine Function H_1 von $x, s, D''s, \ldots D''^{(n)}s$ so, dass

$$\frac{\partial H_1}{\partial D''^{(n)}.s} = \frac{A_n}{\lambda' - \lambda''};$$

dann wird:

$$D'H_1 = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial s} D's + \frac{\partial H_1}{\partial D''s} DD''s + \ldots + \frac{\partial H_1}{\partial D''^{(n-1)}.s} D'D''^{(n-1)}s + \frac{A_n}{\lambda' - \lambda''} D'D''^{(n)}s,$$

also

$$\int \frac{A_n}{\lambda' - \lambda''} D'D''^{(n)}s d'x = H_1 - \int \frac{\partial H_1}{\partial x} d'x - \int \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{\partial H_1}{\partial D''^{(i)}.s} D'D''^{(i)}s d'x.$$

Da nun durch die Einsetzung dieses Werthes in den obigen Minuend ein neues Integral derselben Art entsteht, in welchem jedoch die Ordnung i, bis zu welcher die Ableitungen $D''^{(i)}s$ aufsteigen, gegen früher um Eins erniedrigt ist, so ist damit unsere Behauptung bewiesen; denn man kann durch fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens die Ordnungszahl bis auf Null erniedrigen, das heisst alle D' entfernen. Damit ist nun allgemein nachgewiesen, dass durch fortgesetzte Anwendung der Operation D'' die oben erwähnte Form thatsächlich zum Vorschein kommt.

Dass durch geeignete Verbindung der so erhaltenen Gleichungen jederzeit eine andere gebildet werden könne, aus welcher zunächst R_1 und mittelbar s sich berechnen lassen, kann a priori nicht nachgewiesen werden. Im Gegentheile, es gibt unendlich viele Gleichungen, in welchen diese Forderung einen sachlichen Widerspruch bedingt. Es ist dies in der Regel ein Beweis, dass das unbekannte s Transcendenten enthält, welche durch Differentialgleichungen mit ganzzahligem Ordnungsindex nicht definirt werden können. Dann muss man also die vorhandenen Gleichungen entweder durch Transcendente, welche hiezu geeignet sind, zu integriren suchen, oder zur Reihenentwicklung schreiten.

Für den practischen Gebrauch empfiehlt sich in mehreren Fällen eine zweite Differentiationsregel für Integrale von der Form:

$$J = \int S d'x,$$

nämlich:

$$D''J = \int D''S\,.\,d'x + \int \frac{\partial J}{\partial y}(D'D''y - D''D'y)\,d'x.$$

Sie stammt aus der leicht zu beweisenden Formel:

$$D'D''J - D''D'J = \frac{\partial J}{\partial y}(D'D''y - D''D'y),$$

und zeigt insbesondere, dass, wenn

$$D'D''y - D''D'y = 0,$$

die Differentiation nach dem Zeichen D'' einfach unter dem Integralzeichen ausgeführt werden kann. Dieser Fall tritt insbesondere dann ein, wenn λ' und λ'' absolute Constante sind.

Es sei die Gleichung gegeben:

$$r - t = \frac{2\nu p}{x},$$

worin ν zunächst als ganzzahlig und positiv vorausgesetzt wird. Wir erhalten hier für λ die Gleichung:

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

und setzen demzufolge:

$$\lambda' = 1\,, \quad \lambda'' = -1.$$

Es genügt, wenigstens soweit es sich um die Bestimmung von s handelt, in beiden Systemen nur die Gleichungen

$$D'y = 1, \qquad D''y = -1,$$

$$D's - D't = \frac{2\nu s}{x}, \qquad D''s + D''t = \frac{2\nu s}{x},$$

zu integriren. Danach wird im ersten Systeme:

$$y = x - f \quad \text{oder} \quad f = x - y$$

und

$$t = F + s - 2\nu \int \frac{s}{x}\, d'x;$$

im zweiten Systeme

$$y = g - x \quad \text{oder} \quad g = x + y.$$

Wir bilden also die Gleichung

$$t - s + 2\nu \int \frac{s d'x}{x} - \chi(x - y) = 0,$$

und differentiiren dieselben nach dem zweiten System, da es augenscheinlich einerlei ist, ob man zuerst t aus dem zweiten System einsetzt und dann nach D'' differentiirt, oder ob man sogleich differentiirt und den Werth von $D''t$ aus dem zweiten System nimmt. Es folgt also:

$$-2D''s+\frac{2\nu s}{x}+2\nu\int\left(\frac{D''s}{x}-\frac{s}{x^2}\right)d'x-2\chi'=0.$$

Differentiirt man diese Gleichung $(\nu-1)$mal mit dem Zeichen D'' so erhält man:

$$-\left\{\sum_{i=0}^{i=\nu}\frac{(-1)^{\nu-i}}{x^{\nu-i}}\frac{D''^{(i)}s}{i!}\right\}+\nu\int\frac{d'x}{x}\left\{\sum_{i=0}^{i=\nu}\frac{(-1)^{\nu-i}}{x^{\nu-i}}\frac{D''^{(i)}s}{i!}\right\}-2^{\nu-1}\chi^{(\nu)}=0,$$

oder, wenn

$$R=\sum_{i=0}^{i=\nu}\frac{(-1)^{\nu-i}}{x^{\nu-i}}\frac{D''^{(i)}s}{i!}$$

gesetzt wird:

$$-R+\nu\int\frac{Rd'x}{x}-2^{\nu-1}\chi^{(\nu)}=0.$$

Man kann also das Integralzeichen der ersten Art entfernen; in der That, durch Differentiation nach dem Zeichen D' folgt sofort

$$D'R=\frac{\nu R}{x}$$

und daraus

$$R=x^\nu\Phi(x-y).$$

Die Bestimmungsgleichung für s lautet demnach:

$$\sum_{i=0}^{i=\nu}\frac{(-1)^{\nu-i}}{x^{\nu-i}}\frac{D''^{(i)}s}{i!}=x^\nu\Phi(x-y).$$

Die Integration dieser Gleichung bereitet keine Schwierigkeiten, sie gibt s in der Form:

$$s=\sum_{0}^{\nu}{}_k\, x^i[\mu_i\varphi^{(i+2)}(x-y)+\nu_i\psi^{(i+2)}(x+y)],$$

worin

$$\varphi^{(i+2)}(x-y)=\frac{d^{i+2}\varphi(x-y)}{[d(x-y)]^{i+2}},\qquad \psi^{(i+2)}(x+y)=\frac{d^{i+2}\psi(x+y)}{[d(x+y)]^{i+2}}$$

zu verstehen ist. Die Berechnung der Coëfficienten μ_i und ν_i aus der Gleichung für s selbst ist umständlich, es empfiehlt sich daher, da z von der Form

$$z=\sum_{k=0}^{k=\nu}x^k[A_k\varphi^{(k)}(x-y)+B_k\psi^{(k)}(x+y)]$$

sein muss, die Coëfficienten A_k und B_k direct aus der gegebenen Gleichung zu berechnen. Man erhält:

$$A_k=A_0(-1)^k\frac{2^k}{k!}\frac{\binom{\nu}{k}}{\binom{2\nu}{k}},\qquad B_k=B_0(-1)^k\frac{2^k}{k!}\frac{\binom{\nu}{k}}{\binom{2\nu}{k}},$$

also da A_0 und B_0 unbeschadet der Allgemeinheit gleich 1 gesetzt werden können;

$$z=\sum_{k=0}^{k=\nu}(-1)^k\frac{2^k}{k!}\frac{\binom{\nu}{k}}{\binom{2\nu}{k}}x^k[\varphi^{(k)}(x-y)+\psi^{(k)}(x+y)].$$

So ergibt sich beispielsweise für $\nu = 3$, das heisst für die Gleichung:

$$r - t = \frac{6p}{x}$$

das Integrale

$$z = [\varphi(x-y)+\psi(x+y)] - x[\varphi'(x-y)+\psi'(x+y)] + \frac{2x^2}{5}[\varphi''(x-y)+\psi''(x+y)] - \frac{x^3}{15}[\varphi'''(x-y)+\psi'''(x+y)].$$

Ist ν eine negative ganze Zahl, hat also die gegebene Gleichung die Form:

$$r - t + \frac{2\nu p}{x} = 0,$$

so kann man das Integrale

$$t - s - 2\nu \int \frac{s}{x}\, d'x - \chi(x-y) = 0,$$

welches im gegebenen Falle an die Stelle des im Vorhergehenden zu Grunde gelegten treten würde, nicht zum Ausgangspunkte der Rechnung nehmen, da wie ersichtlich durch fortgesetztes Differentiiren eine Identität wie im früheren Falle nicht erzielt werden kann. Wir benützen daher ein Integrale, welches sich aus der Integration der Gleichungen:

$$D'r - D's = \frac{2\nu p}{x^2} - \frac{2\nu r}{x}$$

$$D'p = r + s$$

ergibt, nämlich das Integrale:

$$[(2\nu+1)r - 2\nu s - t]\, x^{2\nu+1} + 4\nu\,.\,\nu+1\,.\int x^{2\nu} s\, d'x - \Phi(x-y) = 0.$$

Differentiirt man nun nach dem Zeichen D'' und setzt für die auftretenden Differentialquotienten

$$D''r, \quad D''t$$

deren Werthe aus dem zweiten Systeme, so folgt:

$$-(x^{2\nu+1} D''s + \nu x^{2\nu} s) + (\nu+1)\int (x^{2\nu} D''s + 2\nu x^{2\nu-1} s)\, d'x - 2\Phi' = 0,$$

und diese Gleichung verwandelt sich durch die Substitution

$$s = u\, x^{-(2\nu+1)}$$

in die nachstehende:

$$-\left[D''u - (\nu+1)\frac{u}{x}\right] + (\nu+1)\int_a \left[\frac{D''u}{x} - \frac{u}{x^2}\right] d'x - 2\Phi' = 0,$$

welche im früheren Falle ein Analogon besitzt. Wir schliessen hieraus sofort, dass s die Form:

$$s = \sum_{k=0}^{k=\nu+1} \frac{C_k \varphi^{(k)}(x-y) + D_k \psi^{(k)}(x+y)}{x^{2\nu-k+1}},$$

also z die Form:

$$z = \sum_{k=0}^{k=\nu-1} \frac{A_k \varphi^{(k)}(x-y) + B_k \psi^{(k)}(x+y)}{x^{2\nu-k-1}}$$

besitzt. Die directe Berechnung der Coëfficienten aus der gegebenen Gleichung gibt dann:

$$\frac{A_k}{A_0} = \frac{B_k}{B_0} = (-1)^k \cdot \frac{2^k}{k!} \frac{\binom{\nu-1}{k}}{\binom{2\nu-2}{k}}$$

und die Lösung ist:

$$z = \sum_{k=0}^{k=\nu-1} (-1)^k \cdot \frac{2^k}{k!} \frac{\binom{\nu-1}{k}}{\binom{2\nu-2}{k}} \frac{\varphi^{(k)}(x-y)+\psi^{(k)}(x+y)}{x^{2\nu-k-1}}.$$

Man findet insbesondere für $\nu = 2$, also für die Gleichung

$$r-t = -\frac{4p}{x}$$

die Lösung

$$z = \frac{1}{x^3}[\varphi(x-y)+\psi(x+y)] - \frac{1}{x^2}[\varphi'(x-y)+\psi'(x+y)].$$

Ist ν keine ganze Zahl, so kann die unbekannte Grösse s nicht durch eine Differentialgleichung mit ganzzahligem Ordnungsindex definirt werden. Da aber die Bedeutung gebrochener oder irrationaler Ordnungsexponenten bei der Differentiation noch nicht so weit aufgeklärt ist, um sie im Calcul anwenden zu können, muss man zur Reihenentwicklung schreiten.

Bei der Gleichung

$$c^2 x^{\frac{4}{3}} r - t = 0,$$

für welche

$$\lambda' = \frac{1}{c} x^{-\frac{2}{3}} \qquad \lambda'' = -\frac{1}{c} x^{-\frac{2}{3}},$$

also

$$f = 3x^{\frac{1}{3}} - cy, \qquad g = 3x^{\frac{1}{3}} + cy$$

ist

$$D' D'' g - D'' D' g = \frac{4}{2c} x^{-\frac{5}{3}},$$

somit von Null verschieden. Es genügt auch hier, von der Gleichung

$$D's - \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{c} D't = 0$$

des ersten Systems auszugehen. Das Integrale derselben ist

$$F = t - c x^{\frac{2}{3}} s + \frac{2c}{3} \int x^{-\frac{1}{3}} s\, d'x,$$

wir bilden also die Gleichung

$$t - c x^{\frac{2}{3}} s + \frac{2c}{3} \int x^{-\frac{1}{3}} s\, d'x - f(3x^{\frac{1}{3}} - cy) = 0$$

und differentiiren unter Berücksichtigung der oben gegebenen Differentiationsregel nach dem Zeichen D''. Es folgt nach mehreren Reductionen:

$$-2c\left[x^{\frac{4}{3}} D''s + \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} s\right] + \frac{2c}{3} \int \left[x^{\frac{4}{3}} D''s + \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} s\right] \frac{d'x}{x} - 2f'(3x^{\frac{1}{3}} - cy) = 0$$

und, wenn wir

$$x^{\frac{4}{3}} D''s + \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} s = R$$

setzen:

$$D'R - \frac{R}{3x} = 0.$$

Die Bestimmungsgleichung für s wird demnach:

$$xD''s + \frac{s}{3} = \Phi\,(3x^{\frac{1}{3}} - cy),$$

und hieraus fliesst für s die Relation:

$$x^{\frac{1}{3}}s = \varphi\,(3x^{\frac{1}{3}} + cy) + \psi(3x^{\frac{1}{2}} - cy).$$

Das allgemeine Integrale der gegebenen Gleichung ist:

$$z = \Phi(3x^{\frac{1}{3}} + cy) + \Psi(2x^{\frac{1}{3}} - cy) - 3x^{\frac{1}{3}}\left[\Phi'(3x^{\frac{1}{3}} + cy) + \Psi'(3x^{\frac{1}{3}} - cy)\right]$$

Die vorliegende Gleichung ist übrigens nur ein specieller Fall der allgemeinen Gleichung:

$$(2\nu+1)^2 x^{\frac{4\nu}{2\nu+1}}\, r - t = 0,$$

welche durch die Substitution:

$$x = \xi^{2\nu+1}$$

in die neue Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2\nu}{\xi}\,\frac{\partial z}{\partial \xi}$$

übergeht und für ganzzahlige ν im Vorigen bereits erledigt ist.

Die Erörterungen dieses und des vorigen Artikels beruhen auf der stillschweigend gemachten Voraussetzung, dass die beiden Wurzeln λ' und λ'' der Gleichung (10) und daher auch die beiden Differentialsysteme, von denen die Rede war, von einander verschieden sind. Es genügen einige kurze Bemerkungen, um auch den Fall gleicher Wurzeln zu erledigen.

Denken wir uns die beiden Wurzeln für den Augenblick noch verschieden, so muss, da die aus denselben entspringenden Differentialsysteme beim stetigen Übergange des λ'' in λ' in eines zusammenfallen, es möglich sein, jedem Integrale des einen Systems ein Integrale des andern Systems so zuzuordnen, dass beim stetigen Übergange von λ'' zu λ' das letztere mit dem ersten zusammenfällt. Ist also, wie früher, F irgend ein beliebiges Integrale des zweiten Systems von der Form

$$F = G - \psi(g) = 0,$$

so verwandelt sich die Gleichung (19) in die folgende:

$$0 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \frac{ds}{dx}\,\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{\lambda'}\,\frac{dt}{dx}\,\frac{\partial F}{\partial t} \qquad (\varepsilon)$$

und beim Grenzübergange ziehen sich die hierin enthaltenen Ableitungen von F auf die gleichnamigen Ableitungen eines dem ersten Systeme angehörigen Integrales

$$f_1 - \psi(f) = 0$$

zurück. Man kann also die Bestimmungsgleichung (ε) direct aus einem Integrale des ersten Systems ableiten; sie enthält nur Bestandtheile des ersten Systems und setzt der Berechnung von s keine anderen Schwierigkeiten entgegen, als die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen überhaupt.

Die Gleichung

$$rt - s^2 = 0$$

gibt für λ' und λ'' den gemeinsamen Werth

$$\lambda' = \lambda'' = -\frac{s}{t} = -\frac{r}{s},$$

so dass das Differentialsystem:

$$Dy = -\frac{s}{t}$$

$$Dz = p - \frac{s}{t} q$$

$$Dp = 0$$

$$Dq = 0$$

$$sDr - rDs = 0$$

$$tDs - sDt = 0$$

entsteht. Dasselbe wird integrirt durch die Relationen;

$$z = f_5 + (f_1 - f_3 f_2) x$$

$$p = f_1$$

$$q = f_2$$

$$r = f_3 s$$

$$t = \frac{s}{f_3}$$

$$y = f_4 - x f_3.$$

Zur Bestimmung von s benützen wir die Gleichung:

$$y + x\frac{r}{s} = \psi\left(\frac{r}{s}\right),$$

und erhalten an Stelle der (ε) die folgende:

$$1 + \frac{ds}{dx}\left(\frac{x}{s} - \frac{1}{s}\psi'\left(\frac{r}{s}\right)\right) = 0,$$

somit

$$s = \frac{\varphi\left(\frac{r}{s}\right)}{x - \psi'\left(\frac{r}{s}\right)}$$

und hieraus die bekannte Lösung.

Die einfache Construction des Differentialsystems erlaubt jedoch, die Lösung zu finden, ohne dass der Werth von s ausdrücklich berechnet wird. Es werden nämlich im gegenwärtigen Falle die Gleichungen (14) durch die folgenden ersetzt:

$$\partial f_1 = s(\partial f_4 - x\partial f_3),$$

$$f_3 \partial f_2 = s(\partial f_4 - x\partial f_3),$$

$$\partial f_5 - f_2 \partial f_4 = x(\partial f_1 - f_3 \partial f_2),$$

aus welchen sich sofort die Beziehungen:

$$\partial f_1 = f_3 \partial f_2, \quad \partial f_5 = f_2 \partial f_4$$

ergeben. Setzen wir also

$$f_1 = \varphi(f_2), \quad f_4 = \psi(f_2),$$

woraus sich

$$f_5 = f_2 \psi(f_2) - \int \psi(f_2) df_2 \quad \text{und} \quad f_3 = \varphi'(f_2)$$

ergibt, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\frac{r}{s} = \varphi'(q), \quad p = \varphi(q), \quad y + \frac{r}{s} x = \psi(q)$$

$$z - \left(p - \frac{r}{s} q\right) x = q\psi(q) - \int \psi(q) dq,$$

und hieraus abermals die Lösung:

$$z = x\varphi(q) + yq - \Psi(q)$$
$$o = x\varphi'(q) + y - \Psi'(q).$$

8.

Im Artikel 4 wurde vorausgesetzt, dass beide Wurzeln der Gleichung (10) endlich und von Null verschieden seien oder, was dasselbe ist, dass weder $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ noch $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ den Werth Null annehme. Indem ich mich nun zur Behandlung dieser speciellen Fälle wende, will ich zunächst darauf aufmerksam machen, dass der Fall, in welchem eine der beiden Wurzeln bestimmt und endlich, die andere aber unendlich ist, immer auf den anderen zurückgeführt werden kann, in welchem die eine Wurzel ebenfalls bestimmt und endlich ist, die andere aber den Werth Null annimmt. Man kann nämlich statt der Gleichungen (7) des Artikels 4 auch die folgenden:

$$\lambda''_1\,\partial r + \partial s = \frac{\partial r}{\partial x}\lambda''_1\,\partial x + \frac{\partial s}{\partial x}(\lambda''_1\,\partial y + \partial x) + \frac{\partial t}{\partial x}.\partial y$$

$$\lambda''_1\,\partial s + \partial t = \frac{\partial r}{\partial y}\lambda''_1\,\partial x + \frac{\partial s}{\partial y}(\lambda''_1\,\partial y + \partial x) + \frac{\partial t}{\partial y}.\partial y$$

benützen, was dieselben Folgen nach sich zieht, als ob man statt λ'' den Factor $\frac{1}{\lambda''_1}$ eingeführt hätte. Setzt man nun

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \lambda'_1,$$

so resultiren die Beziehungen:

$$\frac{\lambda'_1\lambda''_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}} = \frac{\lambda'_1 + \lambda''_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial s}} = \frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial t}},$$

so dass λ'_1 und λ''_1 der Gleichung:

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial s} + \lambda_1^2\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Genüge leisten. Die Wurzeln dieser Gleichung sind aber die reciproken Werthe der Wurzeln der Gleichung (10), womit unsere Behauptung bewiesen ist. Wie vorauszusehen war, besteht diese Zurückführung im Wesentlichen darin, dass in dem zu construirenden Differentialsysteme y als die unabhängige Variable angesehen wird.

Somit können wir uns auf den Fall

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

beschränken. Die Gleichungen (3) des Artikels 4 lauten dann:

$$0 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}$$

$$0 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}$$

und, da aus denselben $\frac{\partial t}{\partial x}$ und $\frac{\partial t}{\partial y}$ entfallen sind, genügt es, die Integrabilitätsbedingungen (5) in Anspruch zu nehmen. Man erschliesst solcher Art das folgende System von Proportionen:

$$\frac{dr}{-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)} = \frac{ds}{-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)} = \frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}} = \frac{dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial s}}.$$

Bezeichnet man den Quotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial s}}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}},$$

welcher nichts Anderes ist, als die eine von Null verschiedene Wurzel der Gleichung:

$$0 = \lambda^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial s}$$

abermals mit λ', so resultirt das Differentialsystem:

$$\frac{dy}{dx} = \lambda'$$

$$\frac{dz}{dx} = p + \lambda' q$$

$$\frac{dq}{dx} = r + \lambda' s$$

$$\frac{dp}{dx} = s + \lambda' t$$

$$\frac{dr}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}}$$

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}}.$$

In demselben muss t als die unbestimmte Grösse angesehen werden. Transformirt man vermittelst der Integrale dieses Systems die Gleichung:

$$\partial p = r\partial x + s\partial y,$$

so fällt aus derselben x heraus, die Gleichung

$$\partial q = s\partial x + t\partial y$$

enthält aber auch nach dieser Transformation x und man muss t so bestimmen, dass ersteres zum Ausfall kommt.

Es besteht nun die Identität:

$$\frac{\partial F}{\partial z} Z + \frac{\partial F}{\partial p} P + \frac{\partial F}{\partial q} Q + \frac{\partial F}{\partial r} R - \left(\lambda' \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial s}\right) T = \partial F - \frac{D''F - D'F}{-\lambda'} \partial y - \partial t \left(\lambda'^2 \frac{\partial F}{\partial r} - \lambda' \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t}\right),$$

in welcher D' und D'' eine durch den vorliegenden speciellen Fall modificirte Bedeutung haben, deren Discussion, wie oben vorgenommen, im Wesentlichen zu denselben Resultaten führt.

Der vorliegende Fall unterscheidet sich also von dem allgemeinen blos durch die äussere Form des Differentialsystems und in den unmittelbaren Consequenzen, welche diese zur Folge hat, während der allgemeine Gang der Rechnung derselbe bleibt. Es mag jedoch bemerkt werden, dass auch die Construction dieses Differentialsystems kein abweichendes Verfahren bedingt. Indem wir nämlich

$$\lambda' = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial s}}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}}$$

gesetzt haben, ist für λ'' der Werth Null zu setzen, wodurch das allgemeine Differentialsystem sofort in das hier gefundene übergeht. Der blosse Anblick der Relationen (8) zeigt übrigens, dass denselben auch durch die Annahme

$$\frac{dy}{dx}=0, \qquad \lambda''=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial s}}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}}$$

genügt werden kann, wodurch sich nun der vorliegende Fall vollständig dem allgemeinen unterordnet. Da aber in einem der möglichen Differentialsysteme nur t für die unbestimmt verbleibende Variable genommen werden kann, empfiehlt es sich, auch im zweiten Systeme nicht s, sondern t als Unbekannte zu betrachten.

Die Gleichung:

$$r-\alpha s^2=0,$$

für welche

$$\lambda'=0, \quad \lambda''=-2\alpha s$$

gibt Anlass zu den beiden Systemen:

$$\begin{aligned}
D'y&=0\,, & D''y&=-2\alpha s\,,\\
D'z&=p\,, & D''z&=p-2\alpha sq\,,\\
D'p&=r\,, & D''p&=r-2\alpha s^2=-\alpha s^2\,,\\
D'q&=s\,, & D''q&=s-2\alpha st\,,\\
D'r-2\alpha s\,D's&=0\,, & D''r&=0\,,\\
D's-2\alpha s\,D't&=0\,, & D''s&=0\,,
\end{aligned}$$

Wir erhalten daher im zweiten System:

$$r=\alpha y^2, \quad s=y, \quad y=y_1-2\alpha yx$$

im ersten:

$$y=f.$$

Wir bilden also die Gleichung:

$$y=\varphi(y)-2\alpha yx,$$

und erhalten durch Einsetzung des Werthes von y aus dem ersten System:

$$f=\varphi(y)-2\alpha yx.$$

Bei der Integration im ersten System bleibt f constant, und es wird

$$dx=\frac{y\varphi'(y)-\varphi(y)+f}{2\alpha y^2}\,dy.$$

Es folgt somit zunächst

$$p=\Phi_2(f)+\frac{fy}{2}+\alpha(y\Psi'-\Psi),$$

und hierauf:

$$z=\Phi_3(f)+x\Phi_2(f)+\frac{f}{2}\left[\Psi'(y)-\frac{\Psi(y)}{y}\right]+\frac{f^2}{4\alpha}\log y+\alpha\int\frac{y\Psi'(y)-\Psi(y)}{y}\,.\,\Psi''(y)\,dy,$$

worin

$$\varphi(y)=y\vartheta(y) \quad \text{und} \quad y\vartheta'(y)=2\alpha\Psi''(y)$$

zu verstehen ist.

Führt man diese Werthe in die Gleichungen (14) ein, so ergibt sich, dass Φ_2 eine absolute Constante sein muss. Die Lösung ist also:

$$z=\Phi(y)+bx+\frac{y}{2}\left[\Psi'(y)-\frac{\Psi(y)}{y}\right]+\frac{y^2}{4\alpha}\log y+\alpha\int\frac{y\Psi'(y)-\Psi(y)}{y}\,\Psi''(y)\,dy$$

$$y=\varphi(y)-2\alpha yx, \quad \varphi(y)=y\vartheta(y), \quad y\vartheta'(y)=2\alpha\Psi''(y).$$

Von den sonst noch möglichen Fällen verdient blos derjenige Erwähnung, in welchem sowohl $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ als auch $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ den Werth Null besitzen, und zwar wegen der eigenthümlichen Form der hier auftretenden Differentialsysteme. Da die vorgelegte Gleichung von den Ableitungen zweiter Ordnung nur s enthält, bringen wir sie in die Form

$$s = \psi(x, y, z, p, q),$$

und finden dann durch Verfolgung des allgemeinen Gedankenganges die Proportionen:

$$\frac{\partial r + \lambda''\partial s}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)} = \frac{\partial s + \lambda''\partial t}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)} = \frac{\partial x}{0} = \frac{\partial y + \lambda''\partial x}{1} = \frac{\lambda''\partial y}{0}.$$

Diese können befriedigt werden durch die Annahme $\lambda'' = \infty$, welche gibt:

$$\frac{\partial s}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial \alpha}\right)} = \frac{\partial t}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)} = \frac{\partial x}{1} = \frac{\partial y}{0}$$

oder durch die Annahme: $\lambda'' = 0$, aus welcher folgt:

$$\frac{\partial r}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)} = \frac{\partial s}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)} = \frac{\partial x}{0} = \frac{\partial y}{1}.$$

Mit den nöthigen Ergänzungen treten hier also die folgenden zwei Differentialsysteme auf:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{p} = \frac{dp}{r} = \frac{dq}{s} = \frac{ds}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)} = \frac{dt}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)}$$

und

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{q} = \frac{dp}{s} = \frac{pq}{t} = \frac{dr}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)} = \frac{ds}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)}.$$

Ich unterlasse es, direct nachzuweisen, dass auch hier der allgemeine Gang der Rechnung unverändert bleibt. Es folgt dies auch indirect aus einem Satze über die Transformation der behandelten Differentialgleichungungen, welcher lehrt:

> dass bei Einführung neuer Independenten an Stelle von x und y die Werthe von λ eine lineare Transformation erfahren.

In der That, setzt man

$$x = u(\xi, \eta), \quad y = v(\xi, \eta),$$

so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \xi}\, d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}\, d\eta}{\frac{\partial x}{\partial \xi}\, d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}\, d\eta}.$$

Bezeichnet man also die beiden Werthe, welche $\frac{dy}{dx}$ annehmen kann, wie bisher durch λ, das Verhältniss $\frac{d\eta}{d\xi}$ durch Λ, so ist demnach:

$$\lambda = \frac{\Lambda\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}}{\Lambda\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \xi}}$$

womit der Satz bewiesen ist.

Setzt man insbesondere:

$$x = \alpha\xi + \beta\eta, \quad y = \gamma\xi + \delta\eta,$$

so folgt

$$\Lambda = -\frac{\alpha\lambda - \gamma}{\beta\lambda - \delta}$$

und den Werthen

$$\lambda' = 0, \quad \text{und} \quad \lambda'' = \infty$$

entsprechen die Werthe

$$\Lambda' = -\frac{\gamma}{\delta}, \quad \Lambda'' = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Zugleich ist klar, dass man die Einführung neuer Null- oder Unendlichkeitswerthe immer vermeiden kann. Sonach kann man singuläre Werthe von λ durch eine lineare Transformation entfernen, und dadurch kehrt das Problem unter den allgemeinen Fall zurück.

In Folge dessen kann die Gleichung

$$s = z$$

ebenfalls nach der allgemeinen Methode behandelt werden. Die beiden Differentialsysteme lauten:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{p} = \frac{dp}{r} = \frac{dq}{s} = \frac{ds}{p} = \frac{dt}{q}$$

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{q} = \frac{dp}{s} = \frac{dq}{t} = \frac{dr}{p} = \frac{ds}{q}$$

Aus dem ersten System folgt sofort:

$$p - \int r dx = \varphi(y),$$

und indem man mehrmals im Sinne des zweiten Systems differentirt, schliesslich:

$$D'' t - \int t d' x = \varphi^{n}(y),$$

eine Gleichung, welche durch die Supposition:

$$t = \Sigma X_m Y_m, \quad Y^{\gamma}_m = \alpha_m Y_m, \quad \int X_m dx = \alpha_m X_m + \gamma_m,$$

in welchen X_m eine Function x, Y_m eine Function von y allein bedeutet, und die Summe in t auf beliebige m bezogen werden kann, befriedigt wird. Damit folgt

$$z = \Sigma A_m e^{\frac{x}{\alpha m} + \gamma m y},$$

aus welcher Lösung leicht die bekannten Formen hergestellt werden können.

Dritter Abschnitt.

Die allgemeine partielle Differentialgleichung $p$ter Ordnung mit zwei Independenten.

9.

Indem wir nun zur Integration der allgemeinen Gleichung $p$ter Ordnung mit zwei Independenten übergehen, stellt sich das Bedürfniss ein, eine übersichtliche Bezeichnungsweise einzuführen.

Die allgemeine Gleichung $p$ter Ordnung mit zwei Independenten enthält neben diesen Independenten, die wir wieder mit x und y bezeichnen, die Dependente z und alle Ableitungen bis zur $p$ten Ordnung, welche durch successive Differentiation nach x und y erhalten werden. Wir werden dieselben zunächst durch gewisse Functionen von x und y ersetzen, denen wir vor der Hand nur die eine Eigenschaft auferlegen, dass die gegebene Gleichung identisch befriedigen, und zwar soll diejenige Function, welche an Stelle des Differentialquotienten

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}}$$

zu setzen ist, durch

$$(\alpha, \beta)$$

bezeichnet werden. In allen diesen Klammerausdrücken soll der erste Index α angeben, wie oft in dem entsprechenden Differentialquotienten t nach x abgeleitet wurde, während der zweite Index dieselbe Bedeutung bezüglich der Independenten y haben soll; die Summe der beiden Indices ist offenbar die Gesammtordnung der Differentiation. Vermittelst dieser Bezeichnungen gewinnt die vorgelegte Gleichung die Gestalt:

$$0 = \varphi[x, y, (0,0); (1,0), (0,1); \ldots\ldots; (p,0), (p-1,1), (p-2,2), \ldots, (1,p-1), (0,p)], \tag{1}$$

wobei die eingeführte Bezeichnung auch auf z als die nullte Ableitung seiner selbst ausgedehnt worden ist. Die Zahl der in (1) eintretenden Argumente ist also:

$$\binom{p+2}{2} + 2.$$

Wir ersetzten die Gleichung (1) durch zwei andere, indem wir zuerst nach x, und hierauf nach y differentiiren. Bei dieser Differentiation setzen wir, so lange

$$\alpha + \beta < p:$$

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial x} = (\alpha+1, \beta) \quad \text{und} \quad \frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial x} = (\alpha, \beta+1),$$

und machen der Kürze wegen:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial(0,0)}(1,0) + \frac{\partial\varphi}{\partial(1,0)}(2,0) + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial(0,p-1)}(1,p-1) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sum_{\alpha+\beta=0}^{\alpha+\beta=p-1} \frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha,\beta)}(\alpha+1,\beta),$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial(0,0)}(0,1) + \frac{\partial\varphi}{\partial(1,0)}(1,1) + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial(0,p-1)}(0,p) = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \sum_{\alpha+\beta=0}^{\alpha+\beta=p-1} \frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha,\beta)}(\alpha,\beta+1).$$

Dadurch erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\frac{\partial(p,0)}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}\frac{\partial(0,p)}{\partial x} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \sum_{i=0}^{i=p} \frac{\partial\varphi}{\partial(p-i,i)}\frac{\partial(p-i,i)}{\partial x} \\ 0 &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\frac{\partial(p,0)}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}\frac{\partial(0,p)}{\partial y} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \sum_{i=0}^{i=p} \frac{\partial\varphi}{\partial(p-i,i)}\frac{\partial(p-i,i)}{\partial y}, \end{aligned} \tag{2}$$

welche die (1) bis auf eine Integrationsconstante ersetzen, wenn nachstehende Relationen:

$$d(0,0) = (1,0)\,dx + (0,1)\,dy \tag{3_0}$$

$$\begin{aligned} d(1,0) &= (2,0)\,dx + (1,1)\,dy \\ d(0,1) &= (1,1)\,dx + (0,2)\,dy \end{aligned} \tag{3_1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d(\alpha,\beta) = (\alpha+1,\beta)\,dx + (\alpha,\beta+1)\,dy \tag{$3_{\alpha+\beta}$}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned} d(p-1,0) &= (p,0)\,dx + (p-1,1)\,dy \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d(0,p-1) &= (1,p-1)\,dx + (0,p)\,dy \end{aligned} \tag{3_{p-1}}$$

befriedigt sind. Dies findet auch dann statt, wenn die voranstehenden Gleichungen (3) nicht unbeschränkt integrabel sind, sind aber die letzteren unbeschränkt integrabel, so folgt aus denselben:

$$(\alpha, \beta) = \frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$$

und das Problem ist gelöst.

Heben wir nun irgend eine der Gleichungen (3), etwa die folgende:

$$d(\alpha, \beta) = (\alpha+1, \beta) dx + (\alpha, \beta+1) dy$$

der Gruppe $(3_{\alpha+\beta})$ heraus, so lauten nach den Gleichungen (8) des Artikels 3 die Integrabilitätsbedingungen für dieselbe

$$d(\alpha+1, \beta) = (\alpha+2, \beta) dx + (\alpha+1, \beta+1) dy,$$

$$d(\alpha, \beta+1) = (\alpha+1, \beta+1) dx + (\alpha, \beta+2) dy.$$

Diese sind, so lange $(\alpha+\beta) < p$, unter den Gleichungen der nächstfolgenden Gruppe $(3_{\alpha+\beta+1})$ enthalten, so dass die Gleichungen irgend einer der in (3) formirten Gruppen zugleich die Integrabilitätsbedingungen für die Gleichungen der unmittelbar vorhergehenden Gruppe sind. Daraus folgt, dass wir nur für die Gleichungen der letzten Gruppe besondere Integrabilitätsbedingungen aufzustellen haben. Diese lauten:

$$d(p,0) = \frac{\partial(p,0)}{\partial x} dx + \frac{\partial(p-1,1)}{\partial x} dy, \ldots, d(p-i,i) = \frac{\partial(p-i,i)}{\partial x} dx + \frac{\partial(p-i-1,i+1)}{\partial x} dy, \ldots, d(1,p-1) =$$

$$\frac{\partial(1,p-1)}{\partial x} dx + \frac{\partial(0,p)}{\partial x} dy, \tag{4}$$

$$d(p-1,1) = \frac{\partial(p,0)}{\partial y} dx + \frac{\partial(p-1,1)}{\partial y} dy, \ldots, d(p-i-1,i+1) = \frac{\partial(p-i,i)}{\partial y} dx + \frac{\partial(p-i-1,i+1)}{\partial y} dy, \ldots, d(0,p) =$$

$$\frac{\partial(1,p-1)}{\partial y} dx + \frac{\partial(0,p)}{\partial y} dy$$

und sind sogleich so geordnet worden, dass in der ersten Zeile alle jene zusammentreffen, welche Ableitungen von x enthalten, in der zweiten dagegen alle jene, in denen Ableitungen nach y auftreten.

Wir bezeichnen nun p vorläufig noch unbestimmte Factoren durch die Zeichen:

$$[p-1,0], [p-2,1], \ldots, [p-i,i-1], \ldots, [0,p-1],$$

und bilden die Gleichungen:

$$[p-1,0]\, d(p,0) + \ldots [p-i-1,i]\, d(p-i,i) + \ldots + [0,p-1]\, d(1,p-1) =$$

$$= \frac{\partial(p,0)}{\partial x} [p-1,0] dx + \ldots + \frac{\partial(p-i,i)}{\partial x} \Big\{ [p-i-1,i] dx + [p-i,i-1] \Big\} dy + \ldots + \frac{\partial(0,p)}{\partial x} [0,p-1] dy, \tag{5}$$

$$[p-1,0]\, d(p-1,1) + \ldots + [p-i,i-1]\, d(p-i,i) + \ldots + [0,p-1]\, d(0,p) =$$

$$= \frac{\partial(p,0)}{\partial y} [p-1,0] dx + \ldots + \frac{\partial(p-i,i)}{\partial y} \Big\{ [p-i-1,i] dx + [p-i,i-1] \Big\} dy + \ldots + \frac{\partial(0,p)}{\partial y} [0,p-1] dy.$$

Verglichen mit den (2) führen dieselben zu den Proportionen:

$$\frac{[p-1,0]\,d(p,0)+\ldots+[p-i-1,i]\,d(p-i,i)+\ldots+[0,p-1]\,d(1,p-1)}{-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}$$

$$=\frac{[p-1,0]\,d(p-1,1)+\ldots+[p-i,i-1]\,d(p-i,i)+\ldots+[0,p-1]\,d(0,p)}{-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)} \tag{6}$$

$$=\frac{[p-1,0]\,dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}=\ldots\ldots\ldots=\frac{[p-i-1,i]\,dx+[p-i,i-1]\,dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p-i,i)}}=\ldots\ldots\ldots=\frac{[0,p-1]\,dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}}.$$

Da einer der unbestimmten Factoren, wie aus diesen Beziehungen zu ersehen, willkürlich ist, setzen wir

$$[p-1,0]=1,$$

und betrachten zunächst die $p+1$ letzten Glieder der voranstehenden Reihe (6). Dieselben gehen mit der Bezeichnung

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_1$$

in die Gleichungen:

$$\lambda_1+[p-2,1]=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial(p-1,1)}}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}},\ldots\ldots,[p-i-1,i]\,\lambda_1+[p-i,i-1]=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial(p-i,i)}}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}},\ldots\ldots,[0,p-1]\,\lambda_1=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}$$

über, vermittelst welcher sowohl λ_1 als auch die noch unbestimmten $p-1$ Factoren berechnet werden können.

Bedeutet nämlich λ eine willkürliche Grösse, so wird:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\{\lambda^{p-1}-[p-2,1]\lambda^{p-2}+\ldots+(-1)^i[p-i-1,i]\lambda^{p-i-1}+\ldots+(-1)^{p-1}.[0,p-1]\}(\lambda-\lambda_1)=$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\left\{\begin{array}{l}\lambda^p-[p-2,1]\lambda^{p-1}+\ldots+(-1)^i[p-i-1,i]\lambda^{p-i}+\ldots+(-1)^{p-1}[0,p-1]\lambda\\ -\lambda_1\lambda^{p-1}+\ldots+(-1)^i\lambda_1[p-i,i-1]\lambda^{p-i}+\ldots+(-1)^{p-1}\lambda_1[1,p-2]\lambda+(-1)^p\lambda_1[0,p-1]\end{array}\right\},$$

das ist:

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\lambda^p-\frac{\partial\varphi}{\partial(p-1,1)}\lambda^{p-1}+\ldots+(-1)^i\frac{\partial\varphi}{\partial(p-i,i)}\lambda^{p-i}+\ldots+(-1)^p\frac{\partial\varphi}{\lambda(0,p)}.$$

Sind also

$$\lambda_1,\lambda_2\ldots\ldots,\lambda_p$$

die Wurzeln der Gleichung:

$$P(\lambda)=\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\lambda^p-\frac{\partial\varphi}{\partial(p-1,1)}\lambda^{p-1}+\ldots\ldots+(-1)^i\frac{\partial\varphi}{\partial(p-i,i)}\lambda^{p-i}+\ldots\ldots+(-1)^p\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}=0, \tag{7}$$

und setzt man:

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_1,$$

so wird

$$\begin{aligned}[p-2,1]&=\lambda_2+\lambda_3+\ldots+\lambda_p\\ [p-3,2]&=\lambda_2\lambda_3+\ldots+\lambda_{p-1}\lambda_p\\ &\ldots\ldots\\ [0,p-1]&=\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_p.\end{aligned} \tag{8}$$

Wir erhalten also mit Zuziehung der Gleichungen (3) das folgende Differentialsystem:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = \lambda_1 \\
&\frac{d(0,0)}{dx} = (1,0)+\lambda_1(0,1) \\
&\frac{d(1,0)}{dx} = (2,0)+\lambda_1(1,1) \\
&\frac{d(0,1)}{dx} = (1,1)+\lambda_1(0,2) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{d(\alpha,\beta)}{dx} = (\alpha+1,\beta)+\lambda_1(\alpha,\beta+1) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{d(p-1,0)}{dx} = (p,0)+\lambda_1(p-1,1) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{d(0,p-1)}{dx} = (1,p-1)+\lambda_1(0,p)
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{d(p,0)}{dx}+[p-2,1]\frac{d(p-1,1)}{dx}+\ldots+[p-i-1,i]\frac{d(p-i,i)}{dx}+\ldots+[0,p-1]\frac{d(1,p-1)}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}$$

$$\frac{d(1,p-1)}{dx}+[p-2,1]\frac{d(p-2,2)}{dx}+\ldots+[p-i,i-1]\frac{d(p-i,i)}{dx}+\ldots+[0,p-1]\frac{d(0,p)}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}.$$

10.

In dem Differentialsysteme (9) sind

$$\binom{p+1}{2}+3$$

Gleichungen zur Bestimmung von

$$\binom{p+2}{2}+1$$

Grössen gegeben; von den letzteren sind also

$$p-1$$

durch das System nicht bestimmt, und müssen während der Integration desselben als willkürliche Functionen von x und den Integrationsconstanten angesehen werden.

Wir wählen hiefür die Grössen:

$$(1,p-1),\quad (2,p-2),\ldots,(p-1,1), \tag{10}$$

und werden dieselben später so bestimmen, dass aus den einzuführenden Pfaff'schen Gleichungen das x entfällt. Die Integration betrachten wir dann als vollzogen, wenn die Dependenten des Systems (9), als Functionen des x, der $\binom{p+1}{2}+3$ Integrationsconstanten und der in (10) angeführten willkürlich bleibenden Variabeln dargestellt worden sind. Da Integrationen über solche Glieder, welche einige der willkürlichen Grössen enthalten, nicht ausgeführt, sondern nur angezeigt werden können, werden diese unbestimmten Grössen im Allgemeinen nicht nur frei, sondern auch unter Integralzeichen auftreten, deren Anzahl bis zu

$$\binom{p+1}{2}+3$$

aufsteigen kann.

Differentiirt man eine Function F, deren Argumente die Variabeln des Problems sind, und setzt statt der Differentialquotienten der Variabeln deren Werthe aus dem Systeme (9) ein, so soll das Resultat dieser Operation durch

$$D_1 F$$

bezeichnet werden. Die Ausführung dieser Rechnung gibt:

$$D_1 F = \tag{11}$$

$$\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)-\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial(p,0)}}\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\right\}+\lambda_1\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)-\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial(0,p)}}\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\right\}-\sum\frac{d(\alpha,\beta)}{dx}\left\{\frac{[\alpha-1,\beta]}{[p-1,0]}\frac{\partial F}{\partial(p,0)}+\frac{[\alpha,\beta-1]}{[0,p-1]}\frac{\partial F}{\partial(0,p)}-\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}\right\},$$

wobei der Symmetrie wegen die Bezeichnung $[p-1,0]$ für 1 beibehalten wurde, und die Summe über alle Ausdrücke (α,β), für welche

$$\alpha+\beta=p$$

auszudehnen ist. Hiebei ist ausserdem

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}+\sum\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}(\alpha+1,\beta)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\frac{\partial F}{\partial y}+\sum\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}(\alpha,\beta+1)$$

zu verstehen und in diesen Formeln die Summe über alle (α,β) zu erstrecken, für welche

$$\alpha+\beta<p.$$

Ist insbesondere F ein Integrale des Systems (9), so ist

$$D_1 F=0.$$

Das vollständige Integralsystem besteht aus

$$N=\binom{p+1}{2}+3$$

Gleichungen mit eben so vielen Integrationsconstanten und jedes Integral des Systems muss sich als Function von je N von einander unabhängigen Integralen darstellen lassen. Da nun identisch

$$D_1\varphi=0,$$

so ist die rechte Seite der gegebenen Gleichung selbst als Function der Integrationsconstanten darstellbar. Es kann sonach durch eine entsprechend gewählte Relation zwischen den letzteren die gegebene Gleichung stets befriedigt werden. Wir denken uns diese Wahl vollzogen, so dass in dem Integralsystem nur mehr

$$\binom{p+1}{2}+2$$

willkürliche Constanten enthalten sind.

Führen wir nun in den Gleichungen (3) die Integrationsconstanten als neue Variable ein, so entstehen

$$\binom{p+1}{2}$$

Gleichungen von der Form:

$$\sum\left[\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial f}-(\alpha,\beta+1)\frac{\partial y}{\partial f}\right]df=0, \tag{12}$$

worin das Zeichen Σ auf alle Integrationsconstanten zu beziehen ist, und $\alpha+\beta$ alle ganzen Zahlen von 0 bis $p-1$ bedeuten kann. Aus denselben ist dx entfallen, es muss also auch x aus ihnen entfernt werden, das heisst, die in denselben auftretenden bisher noch unbestimmten Grössen (10) müssen so gewählt werden, dass die linken Seiten dieser Gleichungen (12), wenn sie der Operation D_1 unterworfen werden, die Null zum Resultate geben.

Betrachten wir zunächst eine Gleichung, für welche

$$\alpha+\beta<p-1$$

ausfällt und differentiiren dieselbe nach x, so erhalten wir:

$$\frac{d}{dx}\sum\left[\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial f}-(\alpha,\beta+1)\frac{\partial y}{\partial f}\right]df=\sum\frac{\partial}{\partial f}\left[\frac{d(\alpha,\beta)}{dx}-(\alpha,\beta+1)\frac{dy}{dx}\right]df+\sum\left[\frac{\partial(\alpha,\beta+1)}{\partial f}\frac{dy}{dx}-\frac{d(\alpha,\beta+1)}{dx}\frac{\partial y}{\partial f}\right]df,$$

also mit Rücksicht auf das System (9)

$$\frac{d}{dx}\sum\left[\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial f}-(\alpha,\beta+1)\frac{\partial y}{\partial f}\right]df=\sum\left[\frac{\partial(\alpha+1,\beta)}{\partial f}-(\alpha+1,\beta+1)\frac{\partial y}{\partial f}\right]df+\lambda_1\sum\left[\frac{\partial(\alpha,\beta+1)}{\partial f}-(\alpha,\beta+2)\frac{\partial y}{\partial f}\right]df.$$

Es folgt hieraus, dass die Variable x aus allen Gleichungen (12) von selbst entfällt, wenn dies durch geeignete Wahl der Grössen (10) bereits bei jenen bewirkt worden ist, für welche

$$\alpha+\beta=p-1.$$

Ist dies nämlich geschehen, so ist es möglich, die Ausdrücke

$$\sum\left[\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial f}-(\alpha,\beta+1)\frac{\partial y}{\partial f}\right]df=0,\quad \alpha+\beta=p-1$$

durch Beziehungen zwischen den Constanten auf den Werth Null zu bringen, die vorhin entwickelte Identität zeigt aber, dass dann aus den Gleichungen, für welche $\alpha+\beta=p-2$, das x zum Ausfall kommt, und durch Wiederholung dieses Schlusses beweist man, dass in Folge der gemachten Annahme in der That in allen Gleichungen (12) x zum Verschwinden gebracht werden kann. Somit genügt es, jene Gleichungen

$$0=D_1\sum\left[\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial f}-(\alpha,\beta+1)\frac{\partial y}{\partial f}\right]df$$

zu erfüllen, in welchen $\alpha+\beta$ den Werth $p-1$ besitzt.

Die Ausführung der hier angezeigten Operation ergibt nun die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0&=\sum\left[\frac{\partial(p,0)}{\partial f}+\lambda_1\frac{\partial(p-1,1)}{\partial f}-(p-1,1)'\frac{\partial y}{\partial f}\right]df,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0&=\sum\left[\frac{\partial(p-i,i)}{\partial f}+\lambda_1\frac{\partial(p-i-1,i+1)}{\partial f}-(p-i-1,i+1)'\frac{\partial y}{\partial f}\right]df,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0&=\sum\left[\frac{\partial(1,p-1)}{\partial f}+\lambda_1\frac{\partial(0,p)}{\partial f}-(0,p)'\frac{\partial y}{\partial f}\right]df,
\end{aligned} \tag{13}$$

in welchen der Kürze halber für die Ableitung einer Function u nach x die Lagrange'sche Bezeichnung

$$\frac{du}{dx}=u'$$

benützt worden ist.

Da uns nur $p-1$ unbestimmte Grössen zur Verfügung stehen, können die eben aufgestellten p Gleichungen nur dann befriedigt werden, wenn eine derselben eine Folge der $p-1$ anderen ist. Dass dies der Fall ist, lässt sich in der That beweisen. Wir finden nämlich, dass

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\sum_{i=0}^{i=p-1}[p-i-1,i]\sum\left\{\frac{\partial(p-i,i)}{\partial f}+\lambda_1\frac{\partial(p-i-1,i+1)}{\partial f}-(p-i-1,i+1)'\frac{\partial y}{\partial f}\right\}df=$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\sum df.\sum_{i=0}^{i=p-1}[p-i-1,i]\frac{\partial(p-i,i)}{\partial f}+\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\sum df\sum_{i=0}^{i=p-1}\lambda_1[p-i-1,i]\frac{\partial(p-i-1,i+1)}{\partial f}$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\cdot\sum\frac{\partial y}{\partial f}df\sum_{i=0}^{i=p-1}[p-i-1,i](p-i-1,i+1)'.$$

Das letzte Glied dieses Ausdruckes ist in Folge der Gleichungen (9)

$$=\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial f}df,$$

während die beiden ersten sich zur Summe:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\sum df\sum_{i=0}^{i=p-1}\{[p-i-1,i]+\lambda_1[p-i,i-1]\}\frac{\partial(p-i,i)}{\partial f}$$

vereinigen lassen. Setzt man nämlich fest, dass ein Ausdruck von der Form

$$[\alpha,\beta]$$

den Werth Null annimmt, sobald einer der Indices eine negative Zahl vorstellt, so kann die Summation bezüglich des Index i wieder auf die Werthe

$$i=0,1,2,\ldots,p-1$$

ausgedehnt werden. Bei derselben Festsetzung ist aber allgemein:

$$[p-i-1,i]+\lambda_1[p-i,i-1]=\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(p-i,i)}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}},$$

es wird also:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\sum_{i=0}^{i=p-1}[p-i-1,i]\sum\left\{\frac{\partial(p-i,i)}{\partial f}+\lambda_1\frac{\partial(p-i-1,i+1)}{\partial f}-(p-i-1,i+1)'\frac{\partial y}{\partial f}\right\}df=$$

$$=\sum df\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\cdot\frac{\partial(p,0)}{\partial f}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial(p-i,i)}\frac{\partial(p-i,i)}{\partial f}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}\frac{\partial(0,p)}{\partial f}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial f}\right\}.$$

Es hat sich nun andererseits ergeben, dass durch Einsetzung der aus den Integralgleichungen von (9) fliessenden Werthe der Variabeln in die Gleichung (1) die Veränderliche x zum Ausfall kommt, und da wir das Integralsystem in einer Form voraussetzen, vermöge welcher die (1) identisch befriedigt ist, haben wir die Identität:

$$0=\sum df\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial f}+\sum\frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha,\beta)}\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial f}\right\},$$

in welcher die innere Summe auf alle vorhandenen (α,β) zu beziehen ist. Subtrahirt man diese Gleichung von der unmittelbar vorhergehenden, so folgt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial (p,0)} \sum_{i=0}^{i=p-1} [p-i-1, i] \sum df \left\{ \frac{\partial (p-i, i)}{\partial f} + \lambda_1 \frac{\partial (p-i-1, i+1)}{\partial f} - (p-i-1, i+1)' \frac{\partial y}{\partial f} \right\} =$$

$$= -\sum \frac{\partial \varphi}{\partial (\alpha,\beta)} \left\{ \sum \left[\frac{\partial (\alpha,\beta)}{\partial f} - (\alpha, \beta+1) \frac{\partial y}{\partial f} \right] df \right\}.$$

In dem letzten Ausdrucke ist das äussere Summenzeichen nur über jene Glieder zu erstrecken, für welche $\alpha+\beta \leqq p-1$, da jene, für welche die Indexsumme p wird, sich bei der Subtraction gegenseitig tilgen. In die rechte Seite der letzten Gleichung treten also nur die linken Theile der Gleichungen (12) ein, was beweist, dass zwischen den Gleichungen, welche noch befriedigt werden müssen, eine lineare Beziehung besteht, und daher eine derselben eine Folge aller anderen ist. Damit ist aber unsere Behauptung bewiesen.

Denken wir uns nun die unbestimmt verbliebenen Grössen (10) so gewählt, dass die (13) befriedigt sind, so fällt x aus allen (12) heraus. Führt man also die Hauptintegrale ein, indem man die Werthe der Dependenten des Systems (9), welche einem concreten, nicht singulären Werthe x^0 des x entsprechen, also die Grössen

$$y^0, (\alpha,\beta)^0$$

als Integrationsconstanten wählt, so reduciren sich die Gleichungen (12) auf Gleichungen von der Form:

$$\frac{\partial (\alpha,\beta)^0}{\partial y^0} = (\alpha,\beta+1)^0,$$

worin die Summe $\alpha+\beta$ alle Werthe von 0 bis $p-1$ erhalten kann. Da hieraus folgt:

$$(\alpha, \beta)^0 = \frac{\partial^\beta (\alpha, 0)^0}{(\partial y^0)^\beta}, \quad \alpha+\beta \leqq p-1,$$

so erkennen wir, dass die Werthe der Constanten, welche den (12) Genüge leisten, Ableitungen der p Grössen

$$(0,0)^0, (1,0)^0, (2,0)^0, \ldots (\alpha,0)^0, \ldots (p-1,0)^0$$

sind, welche schliesslich willkürlich bleiben. Setzen wir also

$$(\alpha, 0)^0 = \Phi_\alpha(y^0),$$

wo α von Null bis $p-1$ variiren kann und die Φ_α willkürliche Functionen sind, so ist:

$$\begin{aligned}
(0,0)^0 = \Phi_0(y^0), (0,1)^0 = \Phi'_0(y^0), (0,2)^0 = \Phi''_0(y^0), \ldots\ldots &, (0,p)^0 = \Phi_0^{(p)}(y^0);\\
(1,0)^0 = \Phi_1(y^0), (1,1)^0 = \Phi'_1(y^0), \ldots\ldots &, (1,p-1)^0 = \Phi_1^{(p-1)}(y^0);\\
(2,0)^0 = \Phi_2(y^0), \ldots\ldots &, (2,p-2)^0 = \Phi_2^{(p-2)}(y^0);\\
\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
(p-1,0)^0 = \Phi_{p-1}(y^0), (p-1,1)^0 = &\ \Phi'_{p-1}(y^0);
\end{aligned}$$

und hierin ist allgemein:

$$\Phi_\alpha^{(i)}(y^0) = \frac{d^i \Phi_\alpha(y^0)}{(dy^0)^i}$$

zu verstehen.

Aus diesen Formeln ergeben sich zwei wichtige Folgerungen, nämlich:

erstens, dass alle Integrationsconstanten als Functionen Einer von ihnen anzusehen sind und

zweitens, dass das allgemeine Integrale einer partiellen Differentialgleichung $p$ter Ordnung mit zwei Independenten nie mehr als p willkürliche Functionen enthalten kann.

Beide Folgerungen sind offenbar nicht an den Gebrauch der Hauptintegrale gebunden. Benützt man irgend ein anderes vollständiges Integralsystem, so müssen die zwischen den Constanten einzuführenden Relationen direct aus den Gleichungen (12) genommen werden.

Denken wir uns nun die Werthe der Grössen (10) und der Constanten gefunden und in das vollständige Integralsystem von (9) eingeführt, so verwandelt sich dasselbe in das definitive Integralsystem, welches die gesuchte Lösung bereits in sich enthält. Da es nämlich aus

$$\binom{p+2}{2}+1$$

Gleichungen zwischen den

$$\binom{p+2}{2}+2$$

Variabeln der Aufgabe und der unabhängigen Integrationsconstante besteht, so können die letztere und die

$$\binom{p+2}{2}-1 \text{ Grössen } (\alpha,\beta),$$

für welche $\alpha+\beta > 0$ eliminirt werden. Es bleibt dann eine Gleichung, welche nur mehr

$$z, x \text{ und } y$$

enthält und offenbar die gesuchte Lösung ist.

II.

Bezeichnen wir die unabhängige Constante, auf welche den Ergebnissen des vorigen Artikels zufolge alle anderen bezogen werden, durch f, so wird eine Änderung des f auch die Werthe aller anderen Integrationsconstanten, also mittelbar auch die Werthe der Variabeln verändern, sonach ein unendlich kleiner Zuwachs ∂f von f die Variationen

$$\partial y, \partial(0,0), \partial(1,0), \ldots, \partial(\alpha,\beta), \ldots \partial(0,p)$$

erzeugen. Es erhalten sonach die Gleichungen (12) die Gestalt:

$$P(\alpha,\beta) = \partial(\alpha,\beta) - (\alpha,\beta+1)\partial y = 0, \quad \alpha+\beta \leqq p-1,$$

während die (13) in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
Z_{p-1,0} &= \partial(p,0)+\lambda_1\partial(p-1,1)-(p-1,1)'\partial y = 0\\
Z_{p-2,1} &= \partial(p-1,1)+\lambda_1\partial(p-2,2)-(p-2,2)'\partial y = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Z_{p-i-1,i} &= \partial(p-i,i)+\lambda_1\partial(p-i-1,i+1)-(p-i-1,i+1)'\partial y = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Z_{0,p-1} &= \partial(1,p-1)+\lambda_1\partial(0,p)-(0,q)'\partial y = 0
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

übergehen. Eine beliebige Function der Variabeln des Problems wird unter den gleichen Verhältnissen die Variation:

$$\partial F = \frac{\partial F}{\partial y}\partial y + \sum \frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}\partial(\alpha,\beta) \qquad \alpha+\beta \gtreqless p$$

erleiden.

Wir denken uns nun ein zweites Differentialsystem aufgestellt, welches sich von dem bisher behandelten dadurch unterscheidet, dass an die Stelle von λ_1 irgend eine andere Wurzel λ_i der Gleichung (7) getreten ist. Hiebei ändern sich auch die Werthe

$$|\alpha,\beta|, \quad \alpha+\beta = p-1,$$

und zwar in einer Weise, welche wir sogleich besprechen werden. Die Klammerausdrücke dieser Art, welche wir bisher benützt haben, sind nichts Anderes als die mit entsprechenden Potenzen von -1 multiplicirten

Coëfficienten jenes Polynoms, welches aus dem Polynom der Gleichung (7) durch Division mit $\lambda-\lambda_1$ entsteht. Die Klammerausdrücke des neuen Systems, welche wir durch

$$\begin{bmatrix}\alpha,\beta\\ \lambda_i\end{bmatrix},\quad \alpha+\beta=p-1$$

bezeichnen, werden also in ähnlicher Weise durch Division desselben Polynoms mit $\lambda-\lambda_i$ gewonnen werden. Bezeichnen wir nun das Polynom, welches aus (7) durch Division mit

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_i)$$

entsteht, wie folgt:

$$P_2=\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\left\{\lambda^{p-2}-\begin{bmatrix}p-3,1\\ \lambda_1\,\lambda_i\end{bmatrix}\lambda^{p-3}+\Big[\ldots+(-1)^i\begin{bmatrix}p-i,i-2\\ \lambda_1\,\lambda_i\end{bmatrix}\lambda^{p-i}+\ldots+(-1)^{p-2}\begin{bmatrix}0,p-2\\ \lambda_1\,\lambda^i\end{bmatrix}\right\}$$

so erscheinen umgekehrt die Ausdrücke $[\alpha,\beta]$, welche von jetzt ab als

$$\begin{bmatrix}\alpha,\beta\\ \lambda_1\end{bmatrix}$$

bezeichnet werden müssen, durch Multiplication von P_2 mit $\lambda-\lambda_i$. Somit ist allgemein

$$\begin{bmatrix}p-\varrho,\varrho-1\\ \lambda_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p-\varrho-1,\varrho-1\\ \lambda_1\,\lambda_i\end{bmatrix}+\lambda_i\begin{bmatrix}p-\varrho,\varrho-2\\ \lambda_1\,\lambda_i\end{bmatrix}\tag{15}$$

und diese Formel kann auch für die Grenzfälle $\varrho=1$ und $\varrho=p$ beibehalten werden, wenn festgesetzt wird, dass die Ausdrücke

$$\begin{bmatrix}\alpha,\beta\\ \lambda_1,\lambda_i\end{bmatrix}$$

den Werth Null erhalten, sobald einer der Stellenzeiger α, β eine negative Zahl ist.

Andererseits treten die Ausdrücke $\begin{bmatrix}\alpha,\beta\\ \lambda_i\end{bmatrix}$ als Coëfficienten des Polynoms auf, welches durch Multiplication von P_2 mit $\lambda-\lambda_1$ entsteht. Daher ist:

$$\begin{bmatrix}p-\varrho,\varrho-1\\ \lambda_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p-\varrho-1,\varrho-1\\ \lambda_1\,\lambda_i\end{bmatrix}+\lambda_1\begin{bmatrix}p-\varrho,\varrho-2\\ \lambda_1\,\lambda_i\end{bmatrix}\tag{16}$$

und da wir die Grössen $\begin{bmatrix}\alpha,\beta\\ \lambda_1,\lambda_i\end{bmatrix}$, sobald die Wurzeln λ_1 und λ_i gefunden sind, leicht berechnen können, sind alle Stücke in diesen Formeln als gegeben anzusehen.

Ändern wir nun in (11) rechterseits λ_1 in λ_i und dem entsprechend die Ausdrücke $\begin{bmatrix}\alpha,\beta\\ \lambda_1\end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix}\alpha,\beta\\ \lambda_i\end{bmatrix}$, so entsteht ein Ausdruck, welchen wir durch D_iF bezeichnen. Es ist sonach

$$D_iF=$$

$$\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}\cdot\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\right\}+\lambda_i\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}}\cdot\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\right\}-\Sigma(\alpha,\beta)'\left\{\frac{\begin{bmatrix}\alpha-1,\beta\\ \lambda_i\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}p-1,0\\ \lambda_i\end{bmatrix}}\frac{\partial F}{\partial(p,0)}+\frac{\begin{bmatrix}\alpha,\beta-1\\ \lambda_i\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0,p-1\\ \lambda_i\end{bmatrix}}\frac{\partial F}{\partial(0,p)}-\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}\right\}$$

worin die Summe über dieselben (α,β) wie in (11) auszudehnen ist. D_iF wird identisch Null, wenn F ein Integrale des soeben construirten Differentialsystems ist.

Wir bilden nun die Differenz D_1F-D_iF, und finden:

$$D_1F-D_iF=$$

$$(\lambda_1-\lambda_i)\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}}\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\right\}-\Sigma(\alpha,\beta)'\left\{\left[\frac{\begin{bmatrix}\alpha-1,\beta\\ \lambda_1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}p-1,0\\ \lambda_1\end{bmatrix}}-\frac{\begin{bmatrix}\alpha-1,\beta\\ \lambda_i\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}p-1,0\\ \lambda_i\end{bmatrix}}\right]\frac{\partial F}{\partial(p,0)}+\left[\frac{\begin{bmatrix}\alpha,\beta-1\\ \lambda_1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0,p-1\\ \lambda_1\end{bmatrix}}-\frac{\begin{bmatrix}\alpha,\beta-1\\ \lambda_i\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0,p-1\\ \lambda_i\end{bmatrix}}\right]\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\right\}$$

wozu zu bemerken ist, dass die Grössen $\begin{bmatrix} p-1,0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} p-1,0 \\ \lambda_i \end{bmatrix}$ welche der Symmetrie wegen beibehalten wurden, beide den Werth 1 besitzen. Den Formeln (15) und (16) zufolge ist:

$$\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} 0,p-2 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix} \quad \text{sowie} \quad \begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0,p-2 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}$$

also

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix};$$

darnach wird:

$$\frac{\begin{bmatrix} \alpha-1,\beta \\ \lambda_1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} p-1,0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}} - \frac{\begin{bmatrix} \alpha-1,\beta \\ \lambda_i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} p-1,0 \\ \lambda_i \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \alpha-1,\beta \\ \lambda_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha-1,\beta \\ \lambda_i \end{bmatrix} = (\lambda_i-\lambda_1)\begin{bmatrix} \alpha-1,\beta-1 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}$$

sowie

$$\frac{\begin{bmatrix} \alpha,\beta-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}} - \frac{\begin{bmatrix} \alpha,\beta-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}} = \frac{\lambda_i\begin{bmatrix} \alpha,\beta-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} - \lambda_i \begin{bmatrix} \alpha,\beta-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}}{\lambda_1\lambda_i\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}} = (\lambda_1-\lambda_i)\frac{\begin{bmatrix} \alpha-1,\beta-1 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}}{\lambda_1\lambda_i\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}}.$$

Es ist also:

$$\frac{D_1F-D_iF}{\lambda_1-\lambda_i} = \left\{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}}\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\right\} + \Sigma\begin{bmatrix} \alpha-1,\beta-1 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}(\alpha,\beta)'\left\{\frac{\partial F}{\partial(p,0)} - \frac{1}{\lambda_1\lambda_i\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}}\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\right\}.$$

In dieser Gleichung, welche identisch, d. h. für jede beliebige Function F giltig ist, führen wir an Stelle der Variabeln deren Integralwerthe aus dem ersten System ein, es ist dann

$$-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}} = -\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\lambda_1\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}} = \sum\frac{\begin{bmatrix} \alpha,\beta-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}(\alpha,\beta)'}{\lambda_1\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}}$$

und die Summation wie überall, wo nicht ausdrücklich etwas Anderes bedungen ist, über alle (α,β), für welche $\alpha+\beta=p$ ist, zu erstrecken. Dadurch geht die letzte Gleichung über in die folgende:

$$\frac{D_1F-D_iF}{\lambda_1-\lambda_i} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial(p,0)}\sum\begin{bmatrix} \alpha-1,\beta-1 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}(\alpha,\beta)' + \frac{\partial F}{\partial(0,p)}\sum\frac{\begin{bmatrix} \alpha,\beta-2 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}}{\lambda_1\begin{bmatrix} 0,p-2 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}}(\alpha,\beta)'. \tag{17}$$

Wir bilden nun den Ausdruck:

$$\delta F - \frac{D_1F-D_iF}{\lambda_1-\lambda_i}\delta y =$$

$$S\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}P(\alpha,\beta) + \sum\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}\delta(\alpha,\beta) - \frac{\partial F}{\partial(p,0)}\sum\begin{bmatrix} \alpha-1,\beta-1 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}(\alpha,\beta)'\delta y - \frac{\partial F}{\partial(0,p)}\sum\frac{\begin{bmatrix} \alpha,\beta-2 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}}{\lambda_1\begin{bmatrix} 0,p-2 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}}(\alpha,\beta)'\delta y,$$

worin S eine Summation bedeutet, welche auf alle Complexionen α,β, für welche $\alpha+\beta \leqq p-1$ auszudehnen ist. Wir betrachten zunächst die beiden negativen Glieder dieses Ausdruckes und bemerken, dass in den Summen derselben, wegen der daneben stehenden Klammerausdrücke

$$\begin{bmatrix} p-1,-1 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} p,-2 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}$$

die Grösse $(p,0)'$ nicht auftreten kann. Für alle anderen aber gelten die Beziehungen:

$$(p-\rho-1,\rho-1)'\delta y = -Z_{p-\rho-1,\rho}+\delta(p-\rho,\rho)+\lambda_1\,\delta(p-\rho-1,\rho+1),$$

wie aus den (13) gefunden wird. Schreiben wir also $(p-\rho-1,\rho+1)$ statt (α,β) und versehen demzufolge die Summenzeichen mit der Grenzbezeichnung $\rho=0$ bis $\rho=p-1$, so erhalten die fraglichen zwei Glieder die Gestalt:

$$-\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\sum_{\rho=0}^{\rho=p-1}\left[\begin{matrix}p-\rho-2,\rho\\ \lambda_1\lambda_i\end{matrix}\right]\{-Z_{p-\rho-1,\rho}+\delta(p-\rho,\rho)+\lambda_1\,\delta(p-\rho-1,\rho+1)\}$$

$$-\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\sum_{\rho=0}^{\rho=p-1}\frac{\left[\begin{matrix}p-\rho-1,\rho-1\\ \lambda_1\lambda_i\end{matrix}\right]}{\lambda_1\left[\begin{matrix}0,p-2\\ \lambda_1\lambda_i\end{matrix}\right]}\{-Z_{p-\rho-1,\rho}+\delta(p-\rho,\rho)+\lambda_1\,\delta(p-\rho-1,\rho+1)\}.$$

und haben zur Summe den Betrag:

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=p-1}Z_{p-\rho-1,\rho}\times\left\{\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\left[\begin{matrix}p-\rho-2,\rho\\ \lambda_1\lambda_i\end{matrix}\right]+\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\frac{\left[\begin{matrix}p-\rho-1,\rho-1\\ \lambda_1\lambda_i\end{matrix}\right]}{\lambda_1\left[\begin{matrix}0,p-2\\ \lambda_1\lambda_i\end{matrix}\right]}\right\}$$

$$-\Sigma\,\delta(p-\rho,\rho)\left\{\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\left[\begin{matrix}p-\rho-1,\rho\\ \lambda_i\end{matrix}\right]+\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\frac{\left[\begin{matrix}p-\rho,\rho-1\\ \lambda_i\end{matrix}\right]}{\left[\begin{matrix}0,p-1\\ \lambda_i\end{matrix}\right]}\right\}.$$

Also ist

$$\delta F-\frac{D_1F-D_iF}{\lambda_1-\lambda_i}\,\delta y = S\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}P(\alpha,\beta)+\sum_{\rho=0}^{\rho=p-1}Z_{p-\rho-1,\rho}\times\left\{\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\left[\begin{matrix}p-\rho-2,\rho\\ \lambda_1\lambda_i\end{matrix}\right]+\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\frac{\left[\begin{matrix}p-\rho-1,\rho-1\\ \lambda_1\lambda_i\end{matrix}\right]}{\lambda_1\left[\begin{matrix}0,p-2\\ \lambda_1\lambda_i\end{matrix}\right]}\right\}$$

$$-\sum_{\rho=0}^{\rho=p}\delta(p-\rho,\rho)\left\{\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\frac{\left[\begin{matrix}p-\rho-1,\rho\\ \lambda_i\end{matrix}\right]}{\left[\begin{matrix}p-1,0\\ \lambda_i\end{matrix}\right]}+\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\frac{\left[\begin{matrix}p-\rho,\rho-1\\ \lambda_i\end{matrix}\right]}{\left[\begin{matrix}0,p-1\\ \lambda_i\end{matrix}\right]}-\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}\right\}$$

wobei in der letzten Summe als obere Grenze $\rho=p$ eingeführt werden konnte, da das der Supposition $\rho=p$ entsprechende Glied identisch verschwindet.

Wir finden hieraus endlich die Identität:

$$\begin{aligned}&S\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}P(\alpha,\beta)+\sum_{\rho=0}^{\rho=p-1}Z_{p-\rho-1,\rho}\left\{\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\left[\begin{matrix}p-\rho-2,\rho\\ \lambda_1\lambda_i\end{matrix}\right]+\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\frac{\left[\begin{matrix}p-\rho-1,\rho-1\\ \lambda_1\lambda_i\end{matrix}\right]}{\lambda_1\left[\begin{matrix}0,p-2\\ \lambda_1\lambda_i\end{matrix}\right]}\right\}\\ &\equiv\delta F-\frac{D_1F-D_iF}{\lambda_1\lambda_i}\,\delta y+\Sigma\,\delta(\alpha,\beta)\left\{\frac{\left[\begin{matrix}\alpha-1,\beta\\ \lambda_i\end{matrix}\right]}{\left[\begin{matrix}p-1,0\\ \lambda_i\end{matrix}\right]}\frac{\partial F}{\partial(p,0)}+\frac{\left[\begin{matrix}\alpha,\beta-1\\ \lambda_i\end{matrix}\right]}{\left[\begin{matrix}0,p-1\\ \lambda_i\end{matrix}\right]}\frac{\partial F}{\partial(0,p)}-\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}\right\},\end{aligned}\tag{18}$$

in deren rechten Seite die am Eingange der Transformation benützte Bezeichnung restituirt worden ist.

Setzt man in dieser Gleichung $F=\varphi$, so wird wegen $\varphi=0$ die rechte Seite selbst zu Null, und es folgt:

$$S\frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha,\beta)}P(\alpha,\beta)+\sum_{\rho=0}^{\rho=p}\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\left[\begin{matrix}p-\rho-1,\rho\\ \lambda_1\end{matrix}\right]Z_{p-\rho-1,\rho}=0,\tag{19}$$

das ist eine Gleichung, die in anderer Form bereits weiter oben entwickelt worden ist. Die Anzahl der P ist nun gleich der Anzahl der Ableitungen von höchstens $p-1$ter Ordnung, das ist:

$$\binom{p+1}{2}$$

die Anzahl der Z ist p. Ich werde nun zeigen, dass aus (18) stets

$$\binom{p+1}{2}+p-1$$

in Bezug auf die Grössen P und Z lineare und homogene Gleichungen abgeleitet werden können, welche in Verbindung mit der Gleichung (19) wegen nicht verschwindender Determinante den Grössen P und Z die Werthe Null auferlegen.

12.

Wir bezeichnen jenes Differentialsystem, welches durch die Supposition

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_i$$

entspringt, kurz als das $i$te Differentialsystem und beweisen zunächst einige wichtige Eigenschaften des ihm zugehörenden Integralsystems.

Wir denken uns in allen Systemen die Integration ausgeführt, während die in (10) angeführten Grössen willkürlich bleiben. Ist nun F ein Integrale des $i$ten Systems, also:

$$D_i F=$$

$$\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\right\}+\lambda_i\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}}\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\right\}-\Sigma(\alpha,\beta)'\left\{\frac{\begin{bmatrix}\alpha-1,\beta\\ \lambda_i\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}p-1,0\\ \lambda_i\end{bmatrix}}\frac{\partial F}{\partial(p,0)}+\frac{\begin{bmatrix}\alpha,\beta-1\\ \lambda_i\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0,p-1\\ \lambda_i\end{bmatrix}}-\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}\right\}=0.$$

so müssen die Coëfficienten der Grössen:

$$(p-1,1)',\ (p-2,2)',\ldots(2,p-2)',\ (1,p-1)'$$

identisch verschwinden, da diese letzteren Grössen sonst nicht willkürlich bleiben. Es müssen also durch jedes Integral F des $i$ten Systems die Gleichungen, welche durch Specialisirung des

$$(\alpha,\beta)\text{ in }(p-1,1),\ (p-2,2)\ldots(2,p-2),\ (1,p-1)$$

aus der Formel

$$\frac{\begin{bmatrix}\alpha-1,\beta\\ \lambda_i\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}p-1,0\\ \lambda_i\end{bmatrix}}\frac{\partial F}{\partial(p,0)}+\frac{\begin{bmatrix}\alpha,\beta-1\\ \lambda_i\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0,p-1\\ \lambda_i\end{bmatrix}}\frac{\partial F}{\partial(0,p)}-\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}=0 \tag{20}$$

entstehen, identisch erfüllt sein, somit auch die Gleichung:

$$0=\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\right\}+\lambda_i\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}}-\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\right\}.$$

In der Gleichung (20), welche übrigens durch die Suppositionen $(\alpha,\beta)=(p,0)$ und $(\alpha,\beta)=(0,p)$ eine identische wird, dividiren wir durch $\frac{\partial F}{\partial(p,0)}$, und setzen

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial(0,p)}}{\frac{\partial F}{\partial(p,0)}}=\varepsilon\,.$$

Wir erhalten sodann

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial(p-1,1)}}{\frac{\partial F}{\partial(p,0)}} = \begin{bmatrix} p-2,1 \\ \lambda_i \end{bmatrix} + \varepsilon \frac{\begin{bmatrix} p-1,0 \\ \lambda_i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}}, \ldots$$

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial(p-i,i)}}{\frac{\partial F}{\partial(p,0)}} = \begin{bmatrix} p-i-1,i \\ \lambda_i \end{bmatrix} + \varepsilon \frac{\begin{bmatrix} p-i,i-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}}, \ldots, \frac{\frac{\partial F}{\partial(1,p-1)}}{\frac{\partial F}{\partial(p,0)}} = \begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix} + \varepsilon \frac{\begin{bmatrix} 1,p-2 \\ \lambda_i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}}$$

und folgern hieraus, dass die Gleichung:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial(p,0)} \omega^p - \frac{\partial F}{\partial(p-1,i)} \omega^{p-1} + \ldots + (-1)^i \frac{\partial F}{\partial(p-i,i)} \omega^{p-i} + \ldots + (-1)^p \frac{\partial F}{\partial(0,p)} = 0 \tag{21}$$

die Wurzeln:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots \lambda_p$$

mit der Gleichung (7) gemein hat; die Wurzel λ_i ist abgeworfen, und dafür die Wurzel

$$\frac{\varepsilon}{\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}} = \frac{1}{\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}} \frac{\frac{\partial F}{\partial(0,p)}}{\frac{\partial F}{\partial(p,0)}}$$

aufgenommen. Die letztere kann, wenn F von φ verschieden ist, nicht mit λ_i zusammenfallen, da aus dieser Annahme, wie leicht zu sehen, alle

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}}{\frac{\partial F}{\partial(p,0)}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial(\alpha,\beta)}}{\frac{\partial \varphi}{\partial(p,0)}}$$

folgen, und daher F entweder eine Function von φ oder diesem letzteren gleich sein müsste; Beides widerspricht der Voraussetzung. Daher kann es auch, so lange die Grössen (10) willkürlich sind, ausser φ keine Function geben, welche in zwei Systemen zugleich Integrale sein könnte, da in diesem Falle die Gleichung (21) alle Wurzeln mit (7) gemeinsam haben müsste.

Wir ziehen aus den (20) noch eine weitere Folgerung. Verschwinden nämlich $\frac{\partial F}{\partial(p,0)}$ und $\frac{\partial F}{\partial(0,p)}$, so erhält auch $\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}$ den Werth Null, das heisst, wenn ein Integrale weder $(p,0)$ noch $(0,p)$ enthält, so kann es auch keine andere Ableitung $p$ter Ordnung enthalten. Berechnen wir demnach aus zwei Integralen des $i$ten Systems die Grössen $(p,0)$ und $(0,p)$, und setzen deren Werthe in ein drittes ein, so müssen alle anderen Ableitungen $p$ter Ordnung von selbst ausfallen. Es gibt also nur zwei Integrale, welche bezüglich der Grösse $p$ter Ordnung von einander unabhängig sind. Hieraus ergibt sich der Schluss, dass, so lange die Grössen (10) unbestimmt bleiben, das vollständige Integralsystem des $i$ten, also auch eines jeden anderen der p möglichen Differentialsysteme in zwei Gruppen zerlegt werden kann. Die erste Gruppe besteht aus zwei von einander unabhängigen Integralen, deren jedes Ableitungen $p$ter Ordnung enthält, und die wegen dieser Eigenschaft, die sogleich eine Wichtigkeit erlangen wird, wesentliche Integrale genannt werden sollen. Die zweite Gruppe umfasst alle übrigen Integrale, welche nun die Ableitungen $p$ter Ordnung nur insoferne enthalten, als sie als Functionen der wesentlichen Integrale dargestellt werden können. [1]

---

[1] Es lässt sich immer ein Paar wesentlicher Integrale aufstellen von der Beschaffenheit, dass das eine Integrale kein $(0,p)$ das andere kein $(p,0)$ enthält. Wird im System $\frac{dy}{dx} = \lambda_1$ das erste mit W_1, das letzte mit W_2 bezeichnet, so muss

Es ist klar, dass unendlich viele Paare wesentlicher Integrale aufgestellt werden können, eines derselben muss jedoch die gegebene Gleichung selbst enthalten, da diese augenscheinlich ebenfalls ein wesentliches Integrale ist. Jedes System hat also neben der gegebenen Gleichung nur mehr Ein wesentliches Integrale.

Kehren wir nun zur Gleichung (18) zurück und setzen in derselben irgend ein Integrale des $i$ten Systems an die Stelle von F, so verschwinden, wie man sofort sieht, die Coëfficienten der Variationen $\delta(\alpha,\beta)$, diese fallen also identisch aus. Zugleich wird $D_i F = 0$ und die rechte Seite in (18) reducirt sich auf

$$\delta F - \frac{D_1 F}{\lambda_1 - \lambda_i}\,\delta y\,.$$

So lange die Grössen (10) unbestimmt verbleiben, kann F nicht auch zugleich ein Integrale des ersten Systems sein, wir wählen also diese unbestimmten Grössen so, dass

$$D_1 F = 0$$

und haben dann noch

$$\delta F = 0$$

zu machen. F ist durch die für die Grössen (10) getroffene Wahl auf eine Function der Integrationsconstanten des ersten Systems reducirt, und damit nun auch $\delta F = 0$ werde, müssen die in Folge früherer Untersuchungen zwischen den Constanten bestehenden Relationen so gewählt werden, dass sich der zuletzt gefundene Werth von F von selbst auf Null reducirt. Jede Function von F, welche die rechte Seite in (18) zum Verschwinden bringt, verwandelt die (18) selbst in eine lineare, homogene Gleichung zwischen den Grössen $P(\alpha,\beta)$ und $Z_{p-\varrho-1\varrho}$. Da es sich um das Nullwerden dieser Ausdrücke handelt, müssen wir so viele F dieser Art aufsuchen, als Grössen P und Z vorhanden sind, also, da φ selbst die von den F verlangte Eigenschaft besitzt, noch

$$\binom{p+1}{2} + p - 1.$$

Eine genaue Betrachtung der Gleichung (18) lehrt indess, dass unter diesen Functionen sich mindestens $p-1$ vorfinden müssen, welche $(p,0)$ oder $(0,p)$ enthalten, da im Gegentheile die Coëfficienten der Z gleich

---

die Gleichung $D_1 W_1 = 0$ mit der vorletzten Gleichung in (9), die Gleichung $D_1 W_2 = 0$ mit der letzten desselben Systems zusammenfallen. Also ist:

$$\frac{\partial W_1}{\partial(p-i,i)} = \left[\begin{matrix}p-i-1,i\\ \lambda_1\end{matrix}\right]\frac{\partial W_1}{\partial(p,0)}, \qquad \frac{\partial W_2}{\partial(p-i,i)} = \frac{\left[\begin{matrix}p-i,i-1\\ \lambda_1\end{matrix}\right]}{\left[\begin{matrix}0,p-1\\ \lambda_1\end{matrix}\right]}\cdot\frac{\partial W_2}{\partial(0,p)} \quad \text{u.s.f.}$$

Man kann ferner leicht zeigen, dass man immer zwei wesentliche Integrale aufstellen kann, welche zusammen die gegebene Gleichung ersetzen. Es ist nämlich φ immer darstellbar als Function der Integrationsconstanten. Ist also

$$F = f.$$

ein wesentliches Integrale, so muss zwischen der Constanten f dieses Integrals und den übrigen Integrationsconstanten eine Relation bestehen, welche aus der gegebenen Gleichung $\varphi = 0$ ihren Ursprung nimmt. Sei daher etwa

$$f = \mathfrak{F}(f_1, f_2, \ldots)$$

und ersetzt man hierin die Constanten $f_1, f_2, \ldots$ durch ihre Werthe in den Variabeln des Systems, so entsteht rechter Hand ein Ausdruck, welcher augenscheinlich wieder ein wesentliches Integrale ist. Bezeichnen wir diesen Ausdruck durch G, so sind F und G zwei von φ unabhängige Integrale, welche jedoch zusammen die gegebene Gleichung ersetzen, denn dieselbe reducirt sich augenscheinlich auf die Relation:

$$F - G = 0.$$

Ersetzt man nun in F ein etwa vorhandenes $(0,p)$ durch seinen aus der gegebenen Gleichung $\varphi = 0$ fliessenden Werth, und in G das etwa vorhandene $(p,0)$ ebenso durch dessen aus $\varphi = 0$ sich ergebenden Werth, so hat man also zwei wesentliche Integrale f und g, von denen das erste kein $(0,p)$, das zweite kein $(p,0)$ enthält und welche zusammen die gegebene Gleichung ersetzen, denn diese lautet

$$f - g = 0.$$

Null ausfallen würden, und daher aus dem Verschwinden der rechten Seite auf das Verschwinden der Z keineswegs geschlossen werden könnte. Wir haben nun φ unter die Functionen F aufgenommen, es gibt also in jedem System nur mehr Eine Function von der verlangten Art, welche von φ unabhängig ist; es ist dies je Eines der zwei wesentlichen Integrale. Die Anzahl dieser von φ und nach dem oben Vorgetragenen auch unter sich unabhängigen Integrale ist $p-1$ also die geforderte. Wir verändern somit in (18) i der Reihe nach in 2, $3, \ldots p$, und setzen in die erste der so erhaltenen Gleichungen für F ein wesentliches Integrale des 2ten, in die zweite Gleichung ein wesentliches Integrale des 3ten, endlich in die letzte Gleichung ein wesentliches Integrale des $p$ten Systems. Werden nun die unbestimmten Grössen (10) so bestimmt, dass sich diese $p-1$ wesentliche Integrale auf Integrale des ersten Systems und vermöge der zwischen den Integrationsconstanten dieses Systems herrschenden Relationen auf Null reduciren, so verschwinden die rechten Seiten der eben aufgezählten Gleichungen identisch, und wir haben, die (19) mitgerechnet, p Gleichungen für die unbekannten P und Z.

Da die übrigen Gleichungen (18) wohl die Z enthalten können, aber nicht nothwendig enthalten müssen, können wir zur Aufstellung der noch fehlenden $\binom{p+1}{2}$ Gleichungen Integrale der zweiten Gruppe nehmen, und zwar genügen, da jedes System $\binom{p+1}{2}+1$ solcher Integrale besitzt, die Integrale irgend eines Systems für sich. Diese Integrale enthalten nun die Grössen $(p,0)$ und $(0,p)$ nur insoferne, als sie als Functionen wesentlicher Integrale dargestellt werden können. Die Gleichungen (18), welche durch Einsetzung solcher Integrale entstehen, gestatten also, die Z gleichzeitig zu entfernen, und die resultirenden Gleichungen sind nicht mehr Bestimmungsgleichungen für die unbekannten Grössen (10), sondern nur identische Transformationen der Pfaff'schen Probleme (12).

Die gesuchten Werthe der Grössen (10) sind also diejenigen, welche ein vollständiges System von Integralen irgend eines vom ersten verschiedenen Systems in ein vollständiges Integralsystem des ersten Differentialsystems verwandeln oder mit anderen Worten, welche bewirken, dass alle p Integralsysteme in Eines zusammenfallen.

Wir bezeichnen also ein wesentliches Integrale des $i$ten Systems durch W_i, ein im Allgemeinen beliebiges Integrale der zweiten Gruppe desselben Systems durch w_i, sowie eine Reihe von $p-1$ willkürlichen Functionsformen durch $\psi_2, \psi_3, \ldots \psi_p$. Dann sind:

$$W_2-\psi_2(w_2), \quad W_3-\psi_3(w_3), \ldots, \quad W_p-\psi_p(w_p)$$

wesentliche Integrale des 2ten, 3ten, ... $p$ten Systems. Wir bestimmen die Grössen (10) so, dass sich diese Differenzen auf Functionen der Integrationsconstanten reduciren, und führen dann zwischen den Constanten des ersten Systems solche Relationen ein, dass die eben genannten Functionen den Werth Null annehmen, d. h., wir betrachten die Gleichungen:

$$W_2-\psi_2(w_2)=0, \quad W_3-\psi_3(w_3)=0, \ldots, \quad W_p-\psi_p(w_p)=0, \tag{22}$$

nachdem in denselben die Variabeln durch ihre aus dem ersten Integralsysteme fliessenden Werthe ersetzt worden sind, als Bestimmungsgleichungen für die unbekannten Grössen:

$$(p-1,1), \quad (p-2,2), \ldots (2,p-2), \quad (1,p-1).$$

Die Anzahl der Gleichungen (22) ist gleich der Anzahl der zu bestimmenden Grössen, es genügt also, die letzteren aus den (22) zu berechnen. Die Einführung der berechneten Werthe in die Gleichungen (12) verwandelt diese in Pfaff'sche Gleichungen und die Integration derselben liefert die noch fehlenden Relationen zwischen den Constanten. Dieselben Relationen erhält man auch dadurch, dass man — unter den Grössen $r_1, r_2, r_3 \ldots$ die der zweiten Gruppe des Systems i angehörigen Integrale verstanden — in den Gleichungen:

$$r_1-\varphi_1(w_i)=0, \quad r_2-\varphi_2(w_i)=0, \quad r_3-\varphi_3(w_i)=0 \ldots$$

für die Variabeln deren Werthe aus dem ersten System und für die Grössen (10) die aus den Gleichungen (22) gefundenen Werthe setzt.

Die vorangehenden Entwicklungen setzen mit Nothwendigkeit voraus, dass die Integration der p Differentialsysteme bei völliger Unbestimmtheit der unter (10) angeführten Grössen vollzogen werde. Diese letzteren gehen also in die Integralgleichungen nicht nur als Functionsargumente im gewöhnlichen Sinne ein, sondern auch als Integranden in nach x auszuführenden Quadraturen. Im Allgemeinen enthält also eine jede Gleichung von der Form:

$$W_i - \psi_i(w_i) = 0$$

Quadraturen aus dem $i$ten System, das heisst solche, in welchen w_i als Constante anzusehen ist. Indem man nun die Variabeln durch ihre Werthe aus dem ersten System ersetzt, werden anderseits Quadraturen aus dem ersten System eingeführt, in welchen also w_1 als Constante anzusehen ist. Die Bestimmungsgleichungen enthalten also im Allgemeinen Quadraturen von zweierlei Sinn, und die Differentiation mit dem Zeichen D_1 kann wohl die Quadraturen des ersten Systems, nicht aber auch die anderen noch enthaltenen Quadraturen entfernen. Bezeichnen wir, um eine Quadratur aus dem $i$ten System zu kennzeichnen, das Differentiale unter dem Integralzeichen durch $d_i x$, und sei demnach

$$J = \int S d_i x,$$

ein Integrale aus dem $i$ten System, so gilt für die Differentiation $D_1 J$ die Regel:

$$D_1 J = S + (\lambda_1 - \lambda_i) \frac{\partial J}{\partial y}$$

und es ist:

$$\frac{\partial J}{\partial y} = e^{-\int \frac{\partial \eta_i}{\partial y} d_i x} \int \frac{\partial S}{\partial y} e^{\int \frac{\partial \eta_i}{\partial y} d_i x}$$

sowie

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{D_1 S - D_i S}{\lambda_1 - \lambda_i}.$$

Die Differentiationsregeln sind also, wie vorauszusehen war, im Wesentlichen dieselben wie bei den Differentialgleichungen zweiter Ordnung und die gegenwärtige Rechnung unterscheidet sich von der dortigen überhaupt nur darin, dass S nicht Eine, sondern im Allgemeinen alle unbestimmten Grössen (10) zu gleicher Zeit enthält. Durch fortgesetzte Anwendung der Operation D_1 entstehen also unter dem Integralzeichen Ausdrücke von der Form:

$$R[x; (p-1, 1), \; D_1(p-1, 1), \; D^2_1(p-1, 1) \ldots; \; (p-2, 2), \; D_1(p-2, 2), \ldots; \; (1, p-1), \; D_1(1, p-1), \ldots].$$

Gelingt es nun, aus den gewonnenen Gleichungen eine Relation herzustellen, in welcher die unter den Integralzeichen befindlichen Theile sich als Functionen des von Integralzeichen freien Theiles darstellen lassen, so kann man durch wiederholte Anwendung der Operation D_i die Integralzeichen des $i$ten Systems entfernen und es entsteht eine Gleichung zwischen

$$x, R, D_i R, D_i^2 R, \ldots.$$

Die Integration dieser gewöhnlichen Differentialgleichung, bei welcher die Integrationsconstanten als Functionen von w_i anzusehen sind, ergibt dann eine Relation zwischen x und den verschiedenen Ableitungen der unbestimmten Grössen (10) genommen nach dem Zeichen D_1. Dieser Vorgang wiederholt sich $p-1$ mal, da uns eben so viele Bestimmungsgleichungen zur Verfügung stehen. Wir erhalten also ein System simultaner Differentialgleichungen von der Form:

$$\Theta_1[x; (p-1, 1), \; D_1(p-1, 1), \ldots; \; (p-2, 2), \; D_1(p-2, 2), \ldots; \; (1, p-1), \; D_1(1, p-1), \ldots] = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Theta_{p-1}[x, (p-1, 1), \; D_1(p-1, 1), \ldots; \; (p-2, 2), \; D_1(p-2, 2), \ldots; \; (1, p-1), \; D_1(1, p-1), \ldots] = 0,$$

durch dessen Integration endlich die Werthe der unbekannten Grössen erhalten werden. Lassen sich Gleichungen dieser Art nicht bilden, so muss man zur Reihenentwicklung schreiten, ausgenommen man wäre zufällig im Besitze solcher Transcendenten, welche den vorliegenden Gleichungen Genüge thun.

13.

Wir bezeichnen im Folgenden die Coëfficienten des Quotienten, welcher aus der Division von

$$\lambda^p - \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial(p-1,1)}}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}\lambda^{p-1} + \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial(p-2,2)}}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}\lambda^{p-2} - \ldots + (-1)^i\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial(p-i,i)}}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}\lambda^{p-i} + \ldots + (-1)^p\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}$$

durch

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_k)$$

entsteht, durch

$$\begin{bmatrix}p-k,0\\ \lambda_1,\ldots\lambda_k\end{bmatrix}, -\begin{bmatrix}p-k-1,1\\ \lambda_1,\lambda_2\ldots\lambda_k\end{bmatrix}, \ldots\ldots, \pm\begin{bmatrix}\alpha,\beta\\ \lambda_1,\lambda_2\ldots\lambda_k\end{bmatrix}, \ldots,$$

das heisst, wir setzen:

$$(\lambda-\lambda_{k+1})(\lambda-\lambda_{k+2})\ldots(\lambda-\lambda_p) =$$

$$\lambda^{p-k} - \begin{bmatrix}p-k-1,1\\ \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k\end{bmatrix}\lambda^{p-k-1} + \ldots + (-1)^i\begin{bmatrix}p-k-i,i\\ \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k\end{bmatrix}\lambda^{p-k-i} + \ldots + (-1)^{p-k}\begin{bmatrix}0,p-k\\ \lambda_1\ldots\lambda_k\end{bmatrix},$$

wobei wir der Symmetrie wegen

$$\begin{bmatrix}p-k,0\\ \lambda_1\ldots\lambda_k\end{bmatrix} = 1$$

machen und festsetzen, dass ein Klammernausdruck der Art

$$\begin{bmatrix}p-k-i,i\\ \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k\end{bmatrix}$$

den Werth Null annimmt, sobald einer bei den Indices in der oberen Reihe einer negativen Zahl gleich wird. Diese Bezeichnungsweise ist nur eine Erweiterung der bisher gebrauchten und es ist augenscheinlich

$$\begin{bmatrix}\alpha,\beta\\ \lambda_1,\ldots\lambda_k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha-1,\beta\\ \lambda_1\ldots\lambda_k\lambda_{k+1}\end{bmatrix} + \lambda_{k+1}\begin{bmatrix}\alpha,\beta-1\\ \lambda_1\ldots\lambda_k\lambda_{k+1}\end{bmatrix}$$

und daher

$$\begin{bmatrix}\alpha,\beta\\ \lambda_1,\ldots\lambda_{k-1}\lambda_k\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha,\beta\\ \lambda_1\ldots\lambda_{k-1}\lambda_{k+1}\end{bmatrix} = (\lambda_{k+1}-\lambda_k)\begin{bmatrix}\alpha,\beta-1\\ \lambda_1\ldots\lambda_{k-1}\lambda_k\lambda_{k+1}\end{bmatrix}.$$

Behalten wir im Übrigen die Bezeichnungen des vorigen Artikels bei und setzen

$$F_i = W_i - \psi_i(w_i),$$

so verschwinden, wenn man in (18)

$$F = F_i = 0$$

substituirt, rechter Hand die Variationen $\delta(\alpha,\beta)$ und δF und es bleibt noch

$$\frac{D_1F - D_iF}{\lambda_1-\lambda_i}\delta y = \left\{\left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right) + \frac{\partial F_i}{\partial(p,0)}\sum\begin{bmatrix}\alpha-1,\beta-1\\ \lambda_1\lambda_i\end{bmatrix}(\alpha,\beta)' + \frac{\partial F_i}{\partial(0,p)}\sum\frac{\begin{bmatrix}\alpha,\beta-2\\ \lambda_1\lambda_i\end{bmatrix}}{\lambda_1\begin{bmatrix}0,p-2\\ \lambda_1\lambda_i\end{bmatrix}}(\alpha,\beta)'\right\}\delta y.$$

Man kann also die rechte Seite in (18) auch dadurch annulliren, dass man

$$\eta_i(F_i) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right) + \frac{\partial F_i}{\partial(p,0)} \sum \begin{bmatrix} \alpha-1, \beta-1 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix} (\alpha, \beta)' + \frac{\partial F_i}{\partial(0,p)} \sum \frac{\begin{bmatrix} \alpha, \beta-2 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix}}{\lambda_1 \begin{bmatrix} 0, p-2 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix}} (\alpha, \beta)' = 0$$

macht.

Wir zeigen zunächst, dass, wenn $\eta_i(F_i) = 0$, auch

$$\xi_i(F_i) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial F_i}{\partial(p,0)} \sum \begin{bmatrix} \alpha-2, \beta \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix} (\alpha, \beta)' + \frac{\partial F_i}{\partial(0,p)} \sum \frac{\begin{bmatrix} \alpha-1, \beta-1 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix}}{\lambda_1 \begin{bmatrix} 0, p-2 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix}} (\alpha, \beta)' = 0$$

sein muss. In der That, es ist

$$\xi_i(F_i) + \lambda_i \eta_i(F_i) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right) + \lambda_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial(p,0)} \sum (\alpha, \beta)' \left\{ \begin{bmatrix} \alpha-2, \beta \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix} + \lambda_i \begin{bmatrix} \alpha-1, \beta-1 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_1 \begin{bmatrix} 0, p-2 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix}} \frac{\partial F}{\partial(0,p)} \sum (\alpha, \beta)' \left\{ \begin{bmatrix} \alpha-1, \beta-1 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix} + \lambda_i \begin{bmatrix} \alpha, \beta-2 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix} \right\},$$

also in Folge der Relation (15) und mit Rücksicht auf die Relationen

$$\sum \begin{bmatrix} \alpha-1, \beta \\ \lambda_1 \end{bmatrix} (\alpha, \beta)' = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial(p,0)}} \quad \text{und} \quad \sum \begin{bmatrix} \alpha, \beta-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} (\alpha, \beta)' = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial(p,0)}}$$

auch:

$$\xi_i(F_i) + \lambda_i \eta_i(F_i) = \left\{ \left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right) - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial(p,0)}} \frac{\partial F_i}{\partial(p,0)} \right\} + \lambda_i \left\{ \left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right) - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial(0,p)}} \frac{\partial F_i}{\partial(0,p)} \right\}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet aber identisch, wie eingangs des vorigen Artikels bemerkt worden ist, also ist auch

$$\xi_i(F_i) + \lambda_i \eta_i(F_i) = 0,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

In der Transformation, welche zur Gleichung (18) geführt hat, sind die Grössen $(\alpha, \beta)'$ als dem ersten Differentialsystem angehörige Differentialquotienten anzusehen, dasselbe muss also auch in den Ausdrücken $\xi_i(F_i)$ und $\eta_i(F_i)$ geschehen, die Gleichungen

$$\eta_i(F_i) = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, p$$

können also zur Completirung des ersten Systems verwendet werden. In der That besteht dasselbe nach Hinzufügung dieser Gleichungen aus

$$\binom{p+1}{2} + 3 + (p-1) = \binom{p+2}{2} + 1$$

Gleichungen mit eben so viel Dependenten, ist also völlig bestimmt. Die Integrale desselben haben nun die Eigenschaft, die Gleichungen (12) unmittelbar in Pfaff'sche Gleichungen zu verwandeln, so dass nach Befriedigung dieser das definitive System gewonnen ist. Die Gleichungen

$$\xi_i(F_i) = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, p$$

sind eine nothwendige Folge der obigen, mit welchen sie durch die identischen Relationen:

$$D_2 F_2 = 0, \quad D_3 F_3 = 0, \ldots, D_p F_p = 0$$

verbunden sind. Sie geben daher eine Completirung, welche wohl der Form, nicht aber dem Wesen nach von der obigen verschieden ist.

Da in den Ergänzungsgleichungen die Differentialquotienten $(\alpha,\beta)'$ linear enthalten sind, so hat es keine Schwierigkeit, dieselbe zu berechnen. Die Rechnung gestaltet sich am einfachsten, wenn man die in der Anmerkung des vorigen Artikels charakterisirten wesentlichen Integrale zu Grunde legt. Ist nämlich f_i ein wesentliches Integrale des $i$ten Systems, welches kein $(0,p)$ enthält, g_i das Ergänzungsintegrale, welches kein $(p,0)$ enthält, so ist nach dem obigen:

$$\varphi = f_i - g_i = 0, \tag{α}$$

also:

$$\begin{gathered}\frac{\dfrac{\partial f_i}{\partial(p-\rho,\rho)}}{\dfrac{\partial f_i}{\partial(p,0)}} = \genfrac{[}{]}{0pt}{}{p-\rho-1,\rho}{\lambda_i}, \quad \frac{\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x}\right)+\lambda_i\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y}\right)}{\dfrac{\partial f_i}{\partial(p,0)}} = \frac{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}, \\ \frac{\dfrac{\partial g_i}{\partial(p-\rho,\rho)}}{\dfrac{\partial g_i}{\partial(0,p)}} = \frac{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{p-\rho,\rho-1}{\lambda_i}}{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{0,p-1}{\lambda_i}}, \quad \frac{\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x}\right)+\lambda_i\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial y}\right)}{\dfrac{\partial g_i}{\partial(0,p)}} = \frac{\lambda_i\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}},\end{gathered} \tag{β}$$

wie unmittelbar aus den Gleichungen (20) und (21) gefunden wird. Anderseits ist zufolge der Relation (α):

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial g_i}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial g_i}{\partial y}\right);\ \frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)} = \frac{\partial f_i}{\partial(p,0)},\ \frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)} = -\frac{\partial g_i}{\partial(0,p)}; \tag{γ}$$

und damit ergibt sich aus (β)

$$\lambda_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial g_i}{\partial x}\right) \equiv 0. \tag{δ}$$

Die Gleichung (7) erhält nun die Gestalt:

$$0 = \left(\lambda\frac{\partial f_i}{\partial(p,0)} + \frac{1}{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{0,p-1}{\lambda}}\frac{\partial g_i}{\partial(0,p)}\right)\cdot\sum_0^{p-1}(-1)^\rho\lambda^{p-\rho-1}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{p-\rho-1,\rho}{\lambda_i};$$

der zweite Factor dieses Ausdruckes ist nichts Anderes als der Quotient, der durch Division des Polynoms (7) mit $\lambda-\lambda_i$ entsteht, er verschwindet also für alle Werthe $\lambda=\lambda_l$, welche von λ_i verschieden sind. Hieraus folgt, dass der erste Factor durch die Substitution $\lambda=\lambda_i$ identisch der Null gleich werden muss, d. h., dass

$$\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial(p,0)} + \frac{1}{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{0,p-1}{\lambda_i}}\frac{\partial g_i}{\partial(0,p)} = 0. \tag{ε}$$

Bilden wir nun die Ausdrücke ξ_i und η_i für beide wesentliche Integrale, und setzen dieselben, wie verlangt, gleich Null, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\xi_i(f_i) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial f_i}{\partial(p,0)}\sum\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha-2,\beta}{\lambda_1\lambda_i}(\alpha,\beta)' = 0,$$

$$\xi_i(g_i) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial g_i}{\partial(0,p)}\,\frac{\sum\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha-1,\beta-1}{\lambda_1\lambda_i}(\alpha,\beta)'}{\lambda_1\genfrac{[}{]}{0pt}{}{0,p-2}{\lambda_1\lambda_i}} = 0,$$

$$\eta_i(f_i) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right) + \frac{\partial f_i}{\partial(p,0)}\sum\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha-1,\beta-1}{\lambda_1\lambda_i}(\alpha,\beta)' = 0,$$

$$\eta_i(g_i) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y}\right) + \frac{\partial g_i}{\partial(0,p)}\,\frac{\sum\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha,\beta-2}{\lambda_1\lambda_i}(\alpha,\beta)'}{\lambda_1\genfrac{[}{]}{0pt}{}{0,p-2}{\lambda_1\lambda_i}} = 0.$$

Wegen (δ) und (ε) ist

$$\xi_i(y_i)+\lambda_i\eta_i(f_i)=0,$$

also ist die dritte der voranssteheuden Gleichungen von der zweiten nur der Form nach verschieden, und man kann die Werthe der in den obigen Relationen enthaltenen Summen ohneweiters berechnen. Das Resultat ist von der Form:

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=p-2}\left[{p-2-\rho,\rho \atop \lambda_1\,\lambda_i}\right](p-\rho,\rho)'=A_i,\quad \sum_{\rho=1}^{\rho=p-1}\left[{p-1-\rho,\rho-1 \atop \lambda_1\,\lambda_i}\right]=B_i,\quad \sum_{\rho=2}^{\rho=p}\left[{p-\rho,\rho-2 \atop \lambda_1\,\lambda_i}\right](p-\rho,\rho)'=C_i. \qquad (\zeta)$$

In den linken Seiten dieser Gleichungen sind von den Ausdrücken $(p-\rho,\rho)'$ nur je $p-1$ enthalten.
Ist nun

$$P_{1,i}(\lambda)=\frac{P_1(\lambda)}{\lambda-\lambda_i}=\frac{P(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_i)}=\sum_{\rho=0}^{\rho=p-2}(-1)^\rho\lambda^{p-2-\rho}\left[{p-2-\rho,\rho \atop \lambda_1\,\lambda_i}\right],$$

so ist augenscheinlich

$$P_{1,i}(\lambda_k)=0,$$

wenn k von i verschieden ist, sowie

$$P_{1,i}(\lambda_i)=P'_1(\lambda_i).$$

Setzen wir nun für $\rho=0$ bis $\rho=p-2$

$$(p-\rho,\rho)'=(-1)^\rho\sum_{\sigma=2}^{\sigma=p}\frac{\lambda_\sigma^{p-\rho-2}A_\sigma}{P_1'(\lambda_\sigma)},$$

so wird

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=p-2}\left[{p-2-\rho,\rho \atop \lambda_1\,\lambda_i}\right](p-\rho,\rho)'=\sum_{\sigma=2}^{\sigma=p}\frac{A_\sigma}{P_1'(\lambda_\sigma)}\sum_{\rho=0}^{\rho=p-2}(-1)^\rho\left[{p-\rho-2,\rho \atop \lambda_1\,\lambda_i}\right]\lambda_\sigma^{p-2-\rho}=A_i;$$

damit ist die erste Gleichung in (ζ) befriedigt, aus der zweiten folgt dann der Werth von $(1,p-1)'$ und aus der dritten endlich $(0,p)'$.

Dasselbe Resultat erhält man durch eine Methode der successiven Berechnung, welche auf die eingangs dieses Artikels entwickelten Eigenschaften der Klammerausdrücke $[\alpha,\beta]$ begründet ist. Setzt man nämlich in (ζ) für den Index i der Reihe nach $2,3,\ldots p$, so entstehen die drei Reihen:

$$\sum\left[{\alpha-2,\beta \atop \lambda_1\,\lambda_2}\right](\alpha,\beta)'=A_2,\ \sum\left[{\alpha-2,\beta \atop \lambda_1\,\lambda_3}\right](\alpha,\beta)'=A_3,\ \ldots\ldots,\ \sum\left[{\alpha-2,\beta \atop \lambda_1\,\lambda_p}\right](\alpha,\beta)'=A_p;$$

$$\sum\left[{\alpha-1,\beta-1 \atop \lambda_1\,\lambda_2}\right](\alpha,\beta)'=B_2,\ \sum\left[{\alpha-1,\beta-1 \atop \lambda_1\,\lambda_3}\right](\alpha,\beta)'=B_3,\ \ldots\ldots,\ \sum\left[{\alpha-1,\beta-1 \atop \lambda_1\,\lambda_p}\right](\alpha,\beta)'=B_p;$$

$$\sum\left[{\alpha,\beta-2 \atop \lambda_1\,\lambda_2}\right](\alpha,\beta)'=C_2,\ \sum\left[{\alpha,\beta-2 \atop \lambda_1\,\lambda_3}\right](\alpha,\beta)'=C_2,\ \ldots\ldots,\ \sum\left[{\alpha,\beta-2 \atop \lambda_1\,\lambda_p}\right](\alpha,\beta)'=C_p.$$

Bezeichnet man die Operation

$$-\frac{u_{i+1}-u_i}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}\quad\text{durch}\quad\Delta u_{i+1},$$

so ergibt die Bildung der Differenzreihen die Gleichungen:

$$\sum\left[{\alpha-2,\beta-1 \atop \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3}\right](\alpha,\beta)'=\Delta A_3,\ \sum\left[{\alpha-2,\beta-1 \atop \lambda_1\,\lambda_3\,\lambda_4}\right](\alpha,\beta)'=\Delta A_4,\ \ldots\ldots,\ \sum\left[{\alpha-2,\beta-1 \atop \lambda_1\,\lambda_{p-1}\,\lambda_p}\right](\alpha,\beta)'=\Delta A_p,$$

$$\sum\left[{\alpha-1,\beta-2 \atop \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3}\right](\alpha,\beta)'=\Delta B_3,\ \sum\left[{\alpha-1,\beta-2 \atop \lambda_1\,\lambda_3\,\lambda_4}\right](\alpha,\beta)'=\Delta B_4,\ \ldots\ldots,\ \sum\left[{\alpha-1,\beta-2 \atop \lambda_1\,\lambda_p\,\lambda_p}\right](\alpha,\beta)'=\Delta B_p,$$

$$\sum\left[{\alpha,\beta-3 \atop \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3}\right](\alpha,\beta)'=\Delta C_3,\ \sum\left[{\alpha,\beta-3 \atop \lambda_1\,\lambda_3\,\lambda_4}\right](\alpha,\beta)'=\Delta C_4,\ \ldots\ldots,\ \sum\left[{\alpha,\beta-3 \atop \lambda_1\,\lambda_{p+1}\,\lambda_p}\right](\alpha,\beta)'=\Delta C_p,$$

zu welchen sich leicht die Reihe für die Ausdrücke:

$$\sum \begin{bmatrix} \alpha-3, \beta \\ \lambda_1 \lambda_k \lambda_{k+1} \end{bmatrix}$$

bilden lässt. Die Fortsetzung dieser Operation bewirkt, dass endlich die Differentialquotienten $(\alpha, \beta)'$ getrennt erscheinen, und zwar, wie eine leichte Überlegung zeigt, nachdem alle Wurzeln in die eckigen Klammern einbezogen worden sind. Dann erhält man nämlich Summen von der Form

$$\sum \begin{bmatrix} \alpha-p+i, \beta-i \\ \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p \end{bmatrix} (\alpha, \beta)',$$

da aber $\alpha+\beta=p$ und daher $\alpha-p+i=-(\beta-i)$, so ist diese Summe auch

$$\sum \begin{bmatrix} -(\beta-i), (\beta-i) \\ \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p \end{bmatrix} (\alpha, \beta)',$$

dieser Ausdruck besteht also nur aus einem einzigen Gliede, nämlich jenem, welches dem Werthe $\beta = i$ entspricht. Es ist aber in jedem System $[0, 0] = 1$, so dass in der That die Differentialquotienten $(\alpha, \beta)'$ separirt erscheinen.

Da bei diesen Rechnungen Integrale aller Systeme mit Ausnahme des ersten in Verwendung kommen, so enthalten die Schlussgleichungen im Allgemeinen Quadraturen der verschiedenen Systeme. Diese können durch die Anwendung der Operationen $D_2 \ldots D_p$ nicht entfernt werden, da die Ausdrücke $(\alpha, \beta)'$ dem ersten System angehören und daher durch Anwendung der Operationen $D_2, \ldots, D_p$ wieder partielle Differentialgleichungen entstehen. Die Entfernung der Integralzeichen muss also successive nach dem bereits hinreichend beschriebenen Verfahren vorgenommen und im äussersten Falle zur Reihenentwicklung geschritten werden.

Die vorhergehenden Entwicklungen geben Gelegenheit, den Fall gleicher Wurzeln zu betrachten, in welchem also die Anzahl der untereinander verschiedenen Differentialsysteme kleiner ist als die Ordnungszahl p des gegebenen Problems. Die Bestimmungsgleichungen für die Grössen (10) zeichnen sich dadurch aus, dass sie stetig in gewisse Grenzgleichungen übergehen, sobald einige oder mehrere der Wurzeln der Greichung (7) stetig in einen gemeinsamen Werth übergeführt werden. Diese Grenzgleichungen müssen dann dazu benützt werden, um die nöthige Anzahl von Gleichungen wieder herzustellen.

Um eine bestimmte Vorstellung zu haben, nehmen wir an, dass

die Wurzel	λ_1	σ_1 mal,
„ „	λ_2	σ_2 „ ,
. . . .	. . .	. . .
„ „	λ_m	σ_m „ ,

vorhanden sei, wonach

$$\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_m = p$$

sein muss. Es entstehen nun offenbar so viel Gleichungen als erforderlich, wenn man als Wurzeln der Gleichung (7) die Werthe

$$\begin{gathered} \lambda_1, \lambda_1+\varepsilon_{21}, \lambda_1+\varepsilon_{21}+\varepsilon_{31}, \ldots, \lambda_1+\varepsilon_{21}+\varepsilon_{31}+\ldots+\varepsilon_{\sigma_1 1}; \\ \lambda_2, \lambda_2+\varepsilon_{22}, \lambda_2+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{32}, \ldots, \lambda_2+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{32}+\ldots+\varepsilon_{\sigma_2 2}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

in den Gleichungen des vorliegenden Artikels einführt und hierauf zur Grenze für verschwindend ε übergeht. Die wesentlichen Integrale, von denen man ausgeht, sind früheren Entwicklungen zufolge stets in der Form

$$W-\psi(w)$$

vorausgesetzt. Da nun σ_1 anfängliche Systeme sich mit dem Verschwinden der ε auf das System

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1$$

zusammenziehen, so müssen sich die Integrale dieser Systeme in eine Form bringen lassen, in deren Folge sie beim Grenzübergange in ein und dasselbe System übergehen. Man wird also W_1 als die gemeinsame Grenze der $W_2, W_3, \ldots, W_\sigma$ und ebenso w_1 als die gemeinsame Grenze der $w_2, w_3, \ldots, w_\sigma$ ansehen können. Die Functionsformen $\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_\sigma$ müssen jedoch keineswegs mit ψ_1 zusammenfallen. Da Ähnliches auch für jede andere der oben angeführten Wurzelgruppen gilt, so erhellt, dass je σ_1 von einander unabhängige Functionen des Argumentes w_1, je σ_2 des Argumentes w_2, u. s. f. in die allgemeine Lösung eintreten werden.

Das Resultat der vorzunehmenden Grenzübergänge kann natürlich erst dann ausgegeben werden, wenn die betreffenden Integrale der einzelnen Systeme gefunden sind.

14.

Zur Erläuterung des Vorgetragenen diene das Problem:

$$0 = (p,0) + B_1(p-1,1) + B_2(p-2,2) + \ldots + B_i(p-i,i) + \ldots + B_p(0,p), \tag{α}$$

in welchem die Coëfficienten $B_1, B_2, \ldots B_p$ constante Grössen sind. Die Gleichung (7), Art. 9 wird hier:

$$0 = \lambda^p - B_1\lambda^{p-1} + B_2\lambda^{p-2} + \ldots + (-1)^i B_i\lambda^{p-i} + \ldots + (-1)^p B_p \tag{β}$$

und wir wollen zunächst voraussetzen, dass die Wurzeln derselben sämmtlich von einander verschieden sind. Wir bezeichnen dieselben in beliebiger Reihenfolge durch

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p,$$

so dass

$$P(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\alpha_2)\ldots(\lambda-\alpha_i)\ldots(\lambda-\alpha_p)$$

ist. Die Integration der verschiedenen Differentialsysteme geht ohne Schwierigkeit vor sich und ergibt insbesondere im $i$ten System die Gleichungen:

$$y = w_i + \alpha_i x,$$

$$(p,0) + \left[\begin{matrix}p-2,1\\ \alpha_i\end{matrix}\right](p-1,1) + \left[\begin{matrix}p-3,2\\ \alpha_i\end{matrix}\right](p-2,2) + \ldots + \left[\begin{matrix}0,p-1\\ \alpha_i\end{matrix}\right](1,p-1) = W_i,$$

$$(p-1,1) + \left[\begin{matrix}p-2,1\\ \alpha_i\end{matrix}\right](p-2,2) + \left[\begin{matrix}p-3,2\\ \alpha_i\end{matrix}\right](p-3,3) + \ldots + \left[\begin{matrix}0,p-1\\ \alpha_i\end{matrix}\right](0,p) = V_i.$$

Es ist sonach

$$W_i - \alpha_i\psi_i(y-\alpha_i x) = f_i$$

ein wesentliches Integrale, welches kein $(0,p)$ enthält, und

$$\alpha_i V_i + \alpha_i\psi_i(y-\alpha_i x) = -g_i$$

das Ergänzungsintegrale, denn es ist

$$f_i - g_i = W_i + \alpha_i V_i = 0$$

nichts Anderes als die gegebene Gleichung selbst. Eines der wesentlichen Integrale aus jedem System nehmend, erhält man ein System von Gleichungen, welches zur Berechnung der unbestimmten Grössen (10) verwendet werden kann. Der Theorie gemäss sind nämlich in den wesentlichen Integralen des 2ten, 3ten, $\ldots p$ten Systems die Grössen des Problems durch ihre Werthe aus dem ersten System zu ersetzen und die so erhaltenen Ausdrücke gleich Null setzen. Da aber in allen genannten Integralen nur für $(p,0)$ dessen Werth aus dem ersten Integralsystem gesetzt werden kann, so genügt es, den obigen Gleichungen die aus dem ersten System fliessende:

$$W_1 - \alpha_1\psi_1(y-\alpha_1 x) = 0$$

hinzuzufügen. Dadurch entsteht das System:

$$(p,0)+\begin{bmatrix}p-2,1\\ \alpha_1\end{bmatrix}(p-1,1)+\begin{bmatrix}p-3,2\\ \alpha_1\end{bmatrix}(p-2,2)+\ldots+\begin{bmatrix}0,p-1\\ \alpha_1\end{bmatrix}(1,p-1)=\alpha_1\psi_1(y-\alpha_1 x)$$

$$(p,0)+\begin{bmatrix}p-2,1\\ \alpha_2\end{bmatrix}(p-1,1)+\begin{bmatrix}p-3,2\\ \alpha_2\end{bmatrix}(p-2,2)+\ldots+\begin{bmatrix}0,p-1\\ \alpha_2\end{bmatrix}(1,p-1)=\alpha_2\psi_2(y-\alpha_2 x)$$

$$(p,0)+\begin{bmatrix}p-2,1\\ \alpha_3\end{bmatrix}(p-1,1)+\begin{bmatrix}p-3,2\\ \alpha_3\end{bmatrix}(p-2,2)+\ldots+\begin{bmatrix}0,p-1\\ \alpha_3\end{bmatrix}(1,p-1)=\alpha_3\psi_3(y-\alpha_3 x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(p,0)+\begin{bmatrix}p-2,1\\ \alpha_p\end{bmatrix}(p-1,1)+\begin{bmatrix}p-3,2\\ \alpha_p\end{bmatrix}(p-2,2)+\ldots+\begin{bmatrix}0,p-1\\ \alpha_p\end{bmatrix}(1,p-1)=\alpha_p\psi_p(y-\alpha_p x)$$

aus welchem zunächst die Grössen

$$(p,0),(p-1,1),(p-2,2),\ldots,(1,p-1)$$

und vermöge der gegebenen Gleichung schliesslich auch $(0,p)$ berechnet werden können.

Zufolge der für die Grössen

$$\begin{bmatrix}p-k,k-1\\ \alpha_i\end{bmatrix}$$

gegebenen Definition ist nun

$$P_i(\lambda)=\lambda^{p-1}-\begin{bmatrix}p-2,1\\ \alpha_i\end{bmatrix}\lambda^{p-2}+\begin{bmatrix}p-3,2\\ \alpha_i\end{bmatrix}\lambda^{p-3}+\ldots\ldots+(-1)^{p-1}\begin{bmatrix}0,p-1\\ \alpha_i\end{bmatrix}=\frac{P(\lambda)}{\lambda-\alpha_i}$$

es wird also

$$P_i(\alpha_k)\equiv 0,$$

wenn k von i verschieden ist, während

$$P_i(\alpha_i)=P'(\alpha_i)$$

ausfällt. Es ist also:

$$(p,0)=\frac{\alpha^p{}_1}{P'(\alpha_1)}\psi_1(y-\alpha_1 x)+\frac{\alpha^p{}_2}{P'(\alpha_2)}\psi_2(y-\alpha_2 x)+\ldots+\frac{\alpha^p{}_p}{P'(\alpha_p)}\psi_p(y-\alpha_p x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(p-i,i)=\frac{(-1)^i\alpha_1{}^{p-i}}{P'(\alpha_1)}\psi_1(y-\alpha_1 x)+\frac{(-1)^i\alpha_2{}^{p-i}}{P'(\alpha_2)}\psi_2(y-\alpha_2 x)+\ldots+\frac{(-1)^i\alpha_2{}^{p-i}}{P'(\alpha_p)}\psi_p(y-\alpha_p x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(1,p-1)=\frac{(-1)^{p-1}\alpha_1}{P'(\alpha_1)}\psi_1(y-\alpha_1 x)+\frac{(-1)^{p-1}\alpha_2}{P'(\alpha_2)}\psi_2(y-\alpha_2 x)+\ldots+\frac{(-1)^{p-1}\alpha_p}{P'(\alpha_p)}\psi_p(y-\alpha_p x),$$

woraus sich leicht:

$$(0,p)=\frac{(-1)^p}{P'(\alpha_1)}\psi_1(y-\alpha_1 x)+\frac{(-1)^p}{P'(\alpha_2)}\psi_2(y-\alpha_2 x)+\ldots+\frac{(-1)^p}{P'(\alpha_p)}\psi_p(y-\alpha_p x)$$

ergibt.

Da die Werthe $\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_p$ constant sind, kann man die Herstellung und Integration der Pfaff'schen Probleme umgehen, denn es ist klar, dass die gesuchte allgemeine Lösung in der Gleichung:

$$(0,0)=z=\Phi_1(y-\alpha_1 x)+\Phi_2(y-\alpha_2 x)+\ldots+\Phi_p(y-\alpha_p x)$$

enthalten ist.

Durch die Methode der Ergänzung erhält man zunächst an Stelle der Gleichungen (ξ) die folgenden:

$$\sum\begin{bmatrix}\alpha-2,\beta\\ \alpha_1\,\alpha_i\end{bmatrix}(\alpha,\beta)'=-\alpha_i^2\psi'_i(y-\alpha_i x),\ \sum\begin{bmatrix}\alpha-1,\beta-1\\ \alpha_1\,\alpha_i\end{bmatrix}(\alpha,\beta)'=\alpha_i\psi'_i(y-\alpha_i x),\ \sum\begin{bmatrix}\alpha,\beta-2\\ \alpha_1\,\alpha_i\end{bmatrix}(\alpha,\beta)'=-\psi_i(y-\alpha_i x)$$

also für die dort mit A_i, B_i, C_i bezeichneten Grössen respective:

$$-\alpha^2{}_i\psi_i'(y-\alpha_i x),\quad \alpha_i\psi_i'(y-\alpha_i x),\quad -\psi_i'(y-\alpha_i x),$$

sonach wird:

$$(p-\rho,\rho)' = (-1)^{\rho+1}\sum_{\sigma=2}^{\sigma=p}\frac{\alpha_\sigma^{p-\rho}}{P'_1(\alpha_\sigma)}\psi'_\sigma(y-\alpha_\sigma x).$$

Ersetzt man hierin y durch seinen Werth

$$y = w_1+\alpha_1 x$$

aus dem ersten System und integrirt hierauf, so tritt vor die Function ψ_σ noch der Factor

$$\frac{-1}{\alpha_\sigma-\alpha_1}$$

heraus und es ist eine willkürliche Function von w_1 hinzuzufügen. Sonach erhält man:

$$(p-\rho,\rho) = (-1)^\rho\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p}\frac{\alpha_\sigma^{p-\rho}}{P'_1(\alpha_\sigma)}\psi_\sigma(y-\alpha_\sigma x),$$

also denselben Werth wie oben.

Im Falle gleicher Wurzeln kann die Lösung durch einen einfachen Grenzübergang aus den erhaltenen Gleichungen gewonnen werden. Besitzt nämlich die Gleichung (β) die Wurzel

$$\begin{array}{ll} \beta_1 & \sigma_1 \text{ mal} \\ \beta_2 & \sigma_2 \text{ mal} \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \beta_m & \sigma_m \text{ mal} \end{array}$$

so setze man

$$\alpha_1 = \beta_1,\quad \alpha_2 = \beta_1+\varepsilon_1,\quad \alpha_3 = \beta_1+2\varepsilon_1,\ldots,\ \alpha_{\sigma_1} = \beta_1+(\sigma_1-1)\varepsilon,$$
$$\alpha_{\sigma_1+1} = \beta_2,\quad \alpha_{\sigma_1+2} = \beta_2+\varepsilon_2,\quad \alpha_{\sigma_1+3} = \beta_2+2\varepsilon_2,\ldots,\ \alpha_{\sigma_1+\sigma_2} = \beta_2+(\sigma_{2-1})\varepsilon_2 \quad \text{u. s. f.}$$

und berücksichtige, dass beim Grenzübergange die Functionen

$$\psi_1,\psi_2,\ldots\psi_{\sigma_1}$$

nicht in eine und dieselbe Functionsform übergehen müssen. Es folgt dann für $(0,p)$ beispielsweise ein Werth von der Form:

$$(0,p) = \psi_{11}(y-\beta_1 x)+x\psi_{12}(y-\beta_1 x)+\ldots+x^{\sigma_1-1}\psi_{1,\sigma_1}(y-\beta_1 x)+$$
$$+\psi_{21}(y-\beta_2 x)+x\psi_{22}(y-\beta_2 x)+\ldots+x^{\sigma_2-1}\psi_{2,\sigma_2}(y-\beta_2 x)+\ldots$$

und daraus

$$(0,0) = \Psi_{11}(y-\beta_1 x)+x\Psi_{12}(y-\beta_1 x)+\ldots+x^{\sigma_1-1}\Psi_{1\sigma_1}(y-\beta_1 x)+$$
$$+\Psi_{21}(y-\beta_2 x)+x\Psi_{22}(y-\beta_2 x)+\ldots+x^{\sigma_2-1}\Psi_{2\sigma_2}(y-\beta_2 x)+\ldots$$

worin die Functionen:

$$\Psi_{11},\ldots,\Psi_{1\,\sigma_1},\ \Psi_{21},\ldots,\Psi_{2\,\sigma_2},\ldots$$

völlig willkürlich sind.

Dieselbe Lösung erhält man, wenn man in der Gleichung:

$$(0,0) = \Psi_{11}(y-\beta_1 x)+\Psi_{21}(y-\beta_2 x)+\ldots+\Psi_{m1}(y-\beta_m x),$$

auf welche sich im gegenwärtigen Falle die früher gefundene Lösung zusammenzieht, β_i durch $\beta_i+\varepsilon_i$ ersetzt und in der Entwicklung

$$\Psi_{i_1}(y-\beta_i x-\varepsilon_i x) = \Psi_{i_1}(y-\beta_i x)-x\varepsilon_i\Psi'_{i_1}(y-\beta_i x)+\ldots+(-1)^{\sigma_i-1}x^{\sigma_i-1}\frac{\varepsilon_i^{\sigma_i-1}}{(\sigma_{i-1})!}\Psi_{i_1}^{(\sigma_i-1)}(y-\beta_i x),$$

welche mit dem (σ_i-1) Gliede abzuschliessen ist,

$$(-1)^k\frac{\varepsilon_i^k}{k!}\Psi_{i_1}^{(k)}(y-\beta_i x) \quad \text{durch} \quad \Psi_{i,k+1}(y-\beta_i x)$$

ersetzt, ein Vorgang, welcher übrigens nur desshalb möglich ist, weil die Wirkungen, welche eine Veränderung der λ hervorbringt, in den Integralen unmittelbar ersichtlich werden. Wo dies nicht der Fall ist, müssen die nothwendigen Gleichungen durch successive Vervollständigung eines beliebigen Differentialsystems gewonnen werden.

Die Gleichung:

$$x^3(3,0)+(\alpha+\beta+\gamma)x^2y(2,1)+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)xy^2(1,2)+\alpha\beta\gamma y^2(0,3)+3x^2(2,0)+$$
$$\{(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\}xy(1,1)+3\alpha\beta\gamma y^2(0,2)+x(1,0)+\alpha\beta\gamma y(0,1)=0$$

verwandelt sich durch die Substitution

$$y=e^\eta, \quad x=e^\xi$$

in die Gleichung

$$\frac{\partial^3 z}{\partial\xi^3}+(\alpha+\beta+\gamma)\frac{\partial^3 z}{\partial\xi^2\partial\eta}+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\frac{\partial^3 z}{\partial\xi\partial\eta^2}+\alpha\beta\gamma.\frac{\partial^3 z}{\partial\eta^3}=0,$$

und hat demzufolge die Lösung:

$$(0,0)=\Phi(yx^{-\alpha})+\Psi(yx^{-\beta})+\Psi(yx^{-\gamma}).$$

Ist $\beta=\alpha$, so setze man zunächst

$$(0,0)=\Phi(yx^{-\beta})+\Psi(yx^{-\gamma})$$

und

$$\beta=\alpha+\varepsilon.$$

Da nun für verschwindendes ε

$$yx^{-\beta}=yx^{-\alpha-\varepsilon}=yx^{-\alpha}-\varepsilon\log x\,.\,yx^{-\alpha},$$

so gibt die Entwicklung von $\Phi(yx^{-\beta})$ bis einschliesslich der ersten Potenz von ε den Ausdruck

$$\Phi(yx^{-\beta})=\Phi(yx^{-\alpha}-\varepsilon\log x\,.\,yx^{-\alpha})=\Phi(yx^{-\alpha})-\varepsilon\log x\,.\,yx^{-\alpha}\Phi'(yx^{-\alpha});$$

ersetzen wir nun

$$-\varepsilon yx^{-\alpha}\Phi'(yx^{-\alpha}) \quad \text{durch} \quad \Phi_1(yx^{-\alpha}),$$

so wird

$$(0,0)=\Phi(yx^{-\alpha})+\log x\Phi_1(yx^{-\alpha})+\Psi(yx^{-\gamma})$$

und dies ist die Lösung der Gleichung:

$$0=x^3(3,0)+(2\alpha+\gamma)x^2y(2,1)+(\alpha^2+2\alpha\gamma)xy^2(1,2)+\alpha^2\gamma y^3(0,3)+3x^2(2,0)+\{2\alpha+\gamma+\alpha^2+2\alpha\gamma\}xy(1,1)+$$
$$+3\alpha^2\gamma y^2(0,2)+x(1,0)+\alpha^2\gamma y(0,1).$$

In gleicher Weise folgt für die Gleichung:

$$0=x^3(3,0)+3\alpha x^2y(2,1)+3\alpha^2xy^2(1,2)+\alpha^3y^3(0,3)+3x^2(2,0)+(3\alpha+3\alpha^2)xy(1,1)+3\alpha^3y^2(0,2)+x(1,0)+$$
$$+\alpha^3y(0,1)$$

die Lösung:

$$(0,0)=\Phi(yx^{-\alpha})+\log x\Phi_1(yx^{-\alpha})+(\log x)^2\Phi_2(yx^{-\alpha}).$$

15.

Wie ersichtlich, erfordern die Entwicklungen dieses Abschnittes, dass die Gleichung (7) des Artikels 9 eben so viele Wurzeln besitzt, als die Ordnungszahl Einheiten beträgt, und dass diese Wurzeln ebenso von Null als von Unendlich verschieden sind. Es treten jedoch Nullwerthe für die Wurzeln auf, sobald eine geschlossene Reihe von Endcoëfficienten:

$$\ldots\ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial(2,p-2)},\frac{\partial\varphi}{\partial(1,p-1)},\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}$$

h

verschwinden, während, im Falle eine geschlossene Reihe anfänglicher Coëfficienten:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)},\ \frac{\partial\varphi}{\partial(1,p-1)},\ \frac{\partial\varphi}{\partial(2,p-2)},\ \ldots\ldots$$

den Werth Null besitzt, die in Folge dieses Umstandes fehlenden Wurzeln als unendlich gross angesehen werden müssen. In beiden Fällen können durch eine Transformation der Independenten an Stelle der Null- und Unendlichkeitswerthe der Wurzeln beliebige endliche Werthe eingeführt werden, so dass die eben erwähnten Probleme sich wieder den Voraussetzungen der vorhergehenden Artikel unterordnen.

Es beruht dies auf dem Umstande, dass λ bei Substituirung neuer Independenten stets linear transformirt wird. Sind nämlich

$$\xi = u(x,y), \quad \eta = v(x,y)$$

die Transformationsgleichungen, so folgt unmittelbar für den Werth von $\frac{d\eta}{d\xi}$, den wir mit Λ bezeichnen wollen:

$$\Lambda = \frac{\dfrac{\partial\eta}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial\eta}{\partial y}}{\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial\xi}{\partial y}},$$

und hiemit ist die gedachte Eigenschaft bereits bewiesen. So folgt insbesondere für die lineare Transformation

$$\xi = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \gamma x + \delta y$$

$$\Lambda = \frac{\gamma + \lambda\delta}{\alpha + \lambda\beta}.$$

Den Nullwerthen von λ entspricht dann der Werth

$$\Lambda_0 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

den Unendlichkeitswerthen hingegen

$$\Lambda_\infty = \frac{\delta}{\beta}$$

und es ist klar, dass man $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ stets so wählen kann, dass keine neuen Null- oder Unendlichkeitswerthe eingeführt werden. Es ist hiefür genügend, die Transformationsparameter als allgemeine mit den Constanten des Problems in keiner Beziehung stehende Constanten anzusehen. Damit sind auch diese speciellen Fälle auf den allgemeinen Fall zurückgeführt.

Vierter Abschnitt.

Das allgemeine Problem.

16.

Die Complication, welche durch Vermehrung der Independenten von 2 auf q in allen Zahlenverhältnissen des Problems hervorgebracht wird, macht es zur Nothwendigkeit, der Bezeichnung der zu betrachtenden Grössen eine erhöhte Aufmerksamkeit zuzuwenden. Bekanntlich besteht der erste Schritt zur Lösung unseres Problems darin, dass wir die zu suchende Dependente und deren Ableitungen, insoferne sie in der gegebenen Gleichung enthalten sind, durch gewisse Functionen der Independenten:

$$x_1, x_2, \ldots, x_q$$

ersetzen, welche zunächst nur die eine Eigenschaft besitzen, dass sie an Stelle der entsprechenden Ableitungen in die gegebene Gleichung eingesetzt, dieselbe identisch befriedigen. Da diese Functionen der fortwährende Gegenstand unserer Untersuchungen sein werden, sind sie es hauptsächlich, welche eine übersichtliche

Bezeichnungsweise erfordern. Diejenige Bezeichnungsweise, welche sich, wie es scheint, den Bedürfnissen der Rechnung am besten anschliesst, ist die bereits im vorigen Abschnitte gebrauchte, welche natürlich eine entsprechende Erweiterung erfahren muss. Wir bezeichnen also jene Function, welche an die Stelle von

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_q} z}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_q^{\alpha_q}}$$

zu substituiren sein wird, durch das Symbol:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q),$$

so dass die Stelle, welche irgend ein Index in der voranstehenden Complexion einnimmt, diejenige der unabhängigen Variabeln kennzeichnet, nach welcher abgeleitet werden soll, während der Werth des Index — der natürlich ganzzahlig ist — angibt, wie oft die Differentiation nach der gedachten Independenten vorzunehmen ist. Der Summe der in einer Complexion enthaltenen Indices ist selbstverständlich die Ordnungszahl des betreffenden Differentialquotienten von z. Findet nach einer der Independenten eine Ableitung nicht statt, so wird der betreffende Index gleich Null gesetzt, so dass die Anzahl der Indices stets gleich q erhalten wird. Diese Bezeichnungsweise reicht aus, so lange die Indices α allgemeine Werthe besitzen, oder so lange nicht einzelne derselben eine besondere Aufmerksamkeit erregen. Überall, wo ein Zweifel entstehen könnte, wollen wir daher unter die Reihe der Differentiations-Indices die Reihe der ganzen Zahlen von 1 bis q anbringen, und zwar so, dass über jedem einzelnen Index der unteren Reihe die Ordnungszahl der Differentiation nach jener Independenten geschrieben wird, deren Index mit dem eben gedachten der unteren Reihe zusammenfällt. Demnach wird beispielsweise die Ableitung

$$\frac{\partial^{10} z}{\partial x_1^3\,\partial x_i^7} \quad \text{durch die Function} \quad \begin{pmatrix} 3, 0, \ldots, 7, \ldots, 0 \\ 1, 2, \ldots, i, \ldots, q \end{pmatrix}$$

zu ersetzen sein. Für einige specielle Ableitungen werden wir noch kürzere Bezeichnungen einführen und an Ort und Stelle definiren. Die Grösse z, deren Darstellung als Function der Independenten $x_1, x_2, \ldots x_q$ den wesentlichen Inhalt unseres Problems bildet, ist nach diesem Bezeichnungssysteme durch die Function

$$(0, 0, \ldots, 0)$$

zu ersetzen.

Ertheilt man den Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_q$ die Zuwächse $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_q$ und entwickelt den Werth, welchen z für die Argumente $x_1+\xi_1, x_2+\xi_2, \ldots, x_q+\xi_q$ annimmt, nach ganzen, positiven, steigenden Potenzen der Zuwächse $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_q$ — da es sich hier nur um die Form dieser Entwickelung handelt, ist eine Untersuchung über die Zulässigkeit derselben überflüssig — so tritt, von rein numerischen Coëfficienten abgesehen, zu dem Differentialquotienten:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q),$$

das Product

$$\xi_1^{\alpha_1}, \xi_2^{\alpha_2}, \ldots, \xi_q^{\alpha_q}$$

hinzu, in welchem, wenn die Grössen ξ nach der natürlichen Reihenfolge ihrer Indices geordnet werden, die Potenz-Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ dieselbe Ordnung innehalten, wie die Differentiations-Indices der nebenstehenden Complexion. Der Inbegriff aller Glieder von der Ordnung σ in dieser Entwickelung kann also auch als eine ganze, rationale und homogene Function der q Argumente $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_q$ angesehen werden und folgt daraus sofort, dass die Anzahl der möglichen Differentialquotienten σ^{ter} Ordnung gleich ist der Anzahl der Glieder einer algebraischen Form vom Grade σ und der Dimension q. Bezeichnen wir diese Anzahl durch $N\sigma$, so ist

$$N_\sigma = \binom{q-1+\sigma}{\sigma} = \binom{q-1+\sigma}{q-1},$$

wobei unter

$$\binom{m}{k}$$

der $k$te Coëfficient in der Entwickelung des Binomes

$$(1+x)^m$$

verstanden wird. Die Anzahl aller in der vorgelegten Differentialgleichung enthaltenen partiellen Differentialquotienten, das heisst die Anzahl aller Ableitungen bis zur $p$ten Ordnung, die letzte mit eingeschlossen, ergibt sich hieraus gleich

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} N_\sigma = \binom{q}{1} + \binom{q+1}{2} + \ldots + \binom{q-1+p}{p}.$$

Zählt man z als die Ableitung nullter Ordnung seiner selbst hinzu, so ist also die Anzahl aller Ableitungen von höchstens $p$ter Ordnung

$$N = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=p} N_\sigma = 1 + \binom{q}{q-1} + \binom{q+1}{q-2} + \ldots + \binom{q-1+p}{q-1} = \binom{p+q}{q}.$$

Indem nun im Allgemeinen zwischen diesen $\binom{q+p}{q}$ Ableitungen und den q Independenten $x_1, x_2, \ldots x_q$ eine Beziehung festgesetzt wird, entsteht die allgemeine partielle Differentialgleichung $p$ter Ordnung mit q Independenten. Sei dieselbe dargestellt durch die Gleichung:

$$0 = \varphi\,(x_1, x_2, \ldots x_q, z, \ldots\ldots, \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots+\alpha_q} z}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_q^{\alpha_q}}, \ldots\ldots),$$

so haben die vorher eingeführten Functionen vor Allem die Relation:

$$(1) \qquad 0 = \varphi(x_1, x_2 \ldots\ldots x_q, (0, 0, \ldots\ldots 0), \;.\;\;.\;\;.\; (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q)\;.\;\;.\;\;.\;)$$

identisch zu befriedigen. Die Anzahl der in der rechten Seite von (1) enthaltenen Argumente ist nach dem Vorigen:

$$\binom{q+p}{q} + q$$

Aus der oben aufgestellten Analogie in der Bedeutung der Indices α lässt sich ein recurrentes Verfahren für die Bildung sämmtlicher Ableitungen irgend einer bestimmten Ordnung herleiten. Multiplicirt man nämlich eine algebraische Form vom Grade σ und der Dimension q mit einer linearen Form derselben Dimension, so entsteht eine Form $q$ter Dimension aber vom Grade $(\sigma+1)$. Da aber bei dieser Multiplication in allen Gliedern zuerst der Exponent von ξ_1, hierauf jener von ξ_2 u. s. f. je um eine Einheit erhöht werden, so folgt, dass man aus den Complexionen der σten Ordnung jene der Ordnung $\sigma+1$ erhält, wenn man in allen Complexionen der Ordnung σ zunächst den ersten, hierauf den zweiten Index u. s. f. je um eine Einheit erhöht. Der Inbegriff der so entstehenden q Reihen enthält nothwendigerweise alle Complexionen $(\sigma+1)$ter Ordnung, und zwar einige mehr als Einmal, da jede Complexion $(\sigma+1)$ter Ordnung aus denen der σten Ordnung so oft entstehen kann, als die erste von Null verschiedene Indices besitzt. Und umgekehrt behält man von den Complexionen $(\sigma+1)$ter Ordnung jene bei, in welchen der Index der $i$ten Stelle von Null verschieden ist, so entstehen alle Complexionen σter Ordnung, indem man in den beibehaltenen Complexionen den Index der $i$ten Stelle um eine Einheit verringert.

Nach diesen Vorbereitungen besteht unsere Aufgabe darin, die Functionen

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_q)$$

so zu bestimmen, dass sie

1. der Gleichung (1) identisch genügen und
2. gewisse, sogleich näher zu entwickelnde Integrabilitätsbedingungen befriedigen

Diese Aufgabe kann nach dem Verfahren von Lagrange in folgender Weise transformirt werden:

Differentiirt man die Gleichung (1) nach x_k und setzt, so lange

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots+\alpha_q<p,$$

für

$$\frac{\partial(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots\alpha_q)}{\partial x_k}$$

den Ausdruck

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k+1,\ldots\alpha_q),$$

so folgt,

$$0=\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}+\sum\frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha_1,\ldots\alpha_k,\ldots\alpha_q)}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)+\sum\frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha_1,\ldots\alpha_k\ldots,\alpha_q)}\cdot\frac{\partial(\alpha_1,\ldots\alpha_k,\ldots\alpha_q)}{\partial x_k} \qquad (2)$$

worin die Summe im zweiten Gliede auf alle Complexionen zu erstrecken ist, deren Indexsumme kleiner ist als p, während in die Summation des letzten Gliedes alle Complexionen $p$ter Ordnung einzubeziehen sind.

Multiplicirt man nun die Gleichungen, welche sich aus (2) durch Specialisirung des k in $1, 2, \ldots, q$ ergeben, beziehungsweise mit $dx_1, dx_2, \ldots, dx_q$ und addirt, so folgt durch unbestimmte Integration:

$$\text{Const.}=\varphi-\int\sum\frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha_1,\ldots\alpha_k,\ldots\alpha_q)}\left[d(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)-\sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)dx_k\right],$$

in welchem Ausdrucke die unmittelbare, hinter dem Integralzeichen stehende Summe auf alle Complexionen von niedrigerer als der $p$ten Ordnung zu erstrecken ist. Es ergibt sich hieraus, dass die Gleichungen (2) jene (1) bis auf eine willkürliche Integrationsconstante ersetzen, sobald für alle Complexionen von geringerer als der $p$ten Ordnung:

$$d(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)=\sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)dx_k. \qquad (3)$$

Wenn nun noch diese Gleichungen (3) unbeschränkt integrabel sind, so sind, wie man ohneweiters einsieht, die Functionen

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)$$

die partiellen Ableitungen von $(0, 0, \ldots 0)$; diese letztere Grösse ist demnach die gesuchte Lösung. Unsere Aufgabe ist also gelöst, wenn es gelungen ist, die Functionen $(\alpha_1,\ldots\alpha_q)$ so zu bestimmen, dass sie die Gleichungen (2) identisch befriedigen, während die (3) unbeschränkt integrabel sind. Da nämlich die durch die Integration eingeführte Constante willkürlich ist, wird sie im Verlaufe der Rechnung stets gleich Null gemacht werden können, und damit sind alle Bedingungen des Problems erfüllt.

17.

Im ersten Abschnitte sind die Bedingungen angegeben worden, unter welchen Gleichungen von der Form (3) im weiteren Sinne integrabel werden. Betrachten wir zunächst nur jene unter den Gleichungen (3), bei welchen die Summe der in der linken Seite auftretenden Indices $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_q$ kleiner ist als $p-1$, oder, wie wir der Kürze wegen sagen wollen, die Gleichungen von niedrigeren als der $(p-1)$ten Ordnung und entwickeln für eine derselben die Integrabilitätsbedingungen im Sinne des Artikels 3, so erhalten wir q Gleichungen, welche aus der Formel:

$$d(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)=\sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)dx_k$$

hervorgehen, wenn man den Index i der Reihe nach die ganzen Zahlen $1, 2, \ldots q$ bedeuten lässt. Man erkennt sofort, dass jede dieser Gleichungen unter den (3) bereits mitenthalten ist, wenn die Summe

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_i+\ldots+\alpha_k+\ldots+\alpha_q<p-1,$$

wie wir vorausgesetzt haben. Aus den Gleichungen (3) lassen sich also stets Gruppen von je q Gleichungen zusammenstellen, so dass die Gleichungen einer Gruppe zugleich die Integrabilitätsbedingungen für eine gewisse ebenfalls unter den (3) befindliche Gleichung nächst niedriger Ordnung sind. Daraus folgt, dass alle Gleichungen niederer Ordnung integrabel sind, sobald dies bei den Gleichungen der höchsten Ordnung der Fall ist; es ist also blos nöthig, die Integrabilitätsbedingungen für jene unter den Gleichungen (3) zu entwickeln, bei denen

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_q=p-1.$$

Man erhält diese Bedingungen, indem man in der Formel

$$d(\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots\alpha_k,\ldots\alpha_q)=\sum_{k=1}^{k=q}\frac{\partial(\alpha_1,\ldots\alpha_i,\ldots\alpha_k+1,\ldots\alpha_q)}{\partial x_i}dx_k \tag{4}$$

für $\alpha_1, \alpha_2,\ldots\alpha_q$ alle Complexionen $(p-1)$ter Ordnung setzt und hierauf i alle Zahlen $1, 2,\ldots q$ der Reihe nach bedeuten lässt. Die solcherart entstehenden Relationen sind die nothwendigen und hinreichenden Integrabilitätsbedingungen.

Es ist zunächst zu bemerken, dass — die Gleichungen (4) in ihrer Gesammtheit betrachtet — sowohl in den linken Seiten, hier mit dem Zeichen der totalen Differentiation versehen, als auch in den rechten Seiten, hier mit dem Zeichen der partiellen Differentiation verbunden, alle Ableitungen $p$ter Ordnung enthalten sind, wie aus dem im vorigen Artikel aufgestellten recurrenten Bildungsgesetze unmittelbar zu entnehmen ist. Anderseits ist klar, dass sich diese Gleichungen von selbst in q Gruppen scheiden, je nach der Independenten, nach welcher in der rechten Seite und zwar partiell abzuleiten ist, und zwar entstehen die Integrabilitätsbedingungen der $i$ten Gruppe, wenn man in (4) den Index i festhält und statt der Grössen $\alpha_1, \alpha_2,\ldots\alpha_q$ alle Complexionen $(p-1)$ter Ordnung substituirt. Jede solche Gruppe enthält aber so viel Gleichungen als Differentialquotienten $(p-1)$ter Ordnung, das ist

$$\binom{q-1+p-1}{q-1}$$

und in den rechten Seiten aller Gleichungen einer und derselben Gruppe sind abermals sämmtliche Complexionen $p$ter Ordnung enthalten. Aus einer und derselben Complexion

$$(\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_q)\quad\text{der }(p-1)\text{ten Ordnung}$$

können q von den Gleichungen (4) abgeleitet werden, deren jede einer anderen Gruppe angehört; daher ist jede der Gleichungen (4) definirt, wenn man einerseits die Complexion $(p-1)$ter Ordnung angibt, aus der sie hergeleitet ist, und anderseits die Gruppe, der sie angehört.

Wir vereinigen nun die Gleichungen einer jeden Gruppe zu einer neuen Gleichung, indem wir jedes Individuum einer Gruppe mit einem vorläufig noch unbestimmten Factor multipliciren und die erhaltenen Producte addiren. Zur Kennzeichnung der hiemit eingeführten Factoren genügt es nach dem eben Gesagten, die Complexion anzugeben, aus welcher die mit denselben multiplicirten Gleichungen entstehen und die Gruppe, welcher dieselben angehören. Daher bezeichnen wir den Factor der Gleichung (4) durch

$$[\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_q]^{(i)}$$

und erhalten aus der $i$ten Gruppe die Relation:

$$\sum[\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_q]^{(i)}d(\alpha_1,\ldots\alpha_i+1,\ldots,\alpha_q)=\sum[\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q]^{(i)}\sum_{k=1}^{k=q}\frac{\partial(\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)}{\partial x_i}dx_k,$$

wobei die Summenzeichen, bei denen sich keine nähere Angabe befindet, bedeuten, dass die Summation über alle Ausdrücke, für welche

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_i+\ldots+\alpha_k+\ldots\alpha_q=p-1,$$

zu erstrecken ist. Durch Specialisirung von i in $1, 2, \ldots q$ resultiren hieraus q Gleichungen, den q Gruppen entsprechend, in welche sich die Integrabilitätsbedingungen formiren lassen.

Wie aus einer vorhin gemachten Bemerkung ohneweiters fliesst, sind in den rechten Seiten einer jeden der zuletzt aufgestellten q Gleichungen die Ableitungen aller Functionen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ enthalten, deren Indexsumme p beträgt. Benützen wir also zum deutlichen Unterschiede die Symbole:

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$$

zur Bezeichnung der Ableitungen $p$ter Ordnung, und ordnen die rechten Seiten der letzten Gleichung nach diesen, so entsteht die Formel:

$$\begin{aligned} &\sum [\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_q]^{(i)} d(\alpha_1, \ldots \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_q) = \\ &\sum \frac{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_k, \ldots, \beta_q)}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{k=q} [\beta_1, \ldots \beta_i \ldots, \beta_k - 1, \ldots, \beta_q]^{(i)} dx_k, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_i + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q = p - 1$$

und

$$\beta_1 + \ldots + \beta_i + \ldots + \beta_k + \ldots + \beta_q = p$$

zu halten ist.

Wir haben damit q Gleichungen erhalten, welche unmittelbar mit jenen (2) des vorigen Artikels verglichen werden können. Um dies deutlicher hervortreten zu lassen, fassen wir in den (2) die Glieder von niederer als der $p$ten Ordnung unter die Bezeichnung:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \sum \frac{\partial \varphi}{\partial(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_q)} (\alpha_1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_q).\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q < p \tag{6}$$

zusammen und ersetzen hienach den Index k durch i, sowie die Complexionen $p$ter Ordnung, welche dort durch $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q)$ bezeichnet wurden, durch die hier eingeführten Complexionen $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$. Dann lauten die (2) wie folgt:

$$-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial(\beta_1 \ldots, \beta_q)} \frac{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_q)}{\partial x_i}.\ \beta_1 + \ldots + \beta_q = p,$$

und durch Vergleichung dieser Relation mit der obigen (5) folgt, dass für alle Werthe des $i = 1, 2, \ldots, q$ und für alle Complexionen $p$ter Ordnung:

$$\frac{\sum [\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_q]^{(i)} d(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_q)}{-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)} = \frac{\sum_{k=1}^{k=q} [\beta_1, \ldots, \beta_k - 1, \ldots, \beta_q]^{(i)} dx_k}{\frac{\partial \varphi}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_k, \ldots, \beta_q)}}$$

sein muss. Die Summe linker Hand ist hiebei auf alle Complexionen zu erstrecken, für welche

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i + \ldots + \alpha_q = p - 1.$$

Eine unmittelbare Folge dieser Gleichungen ist, dass der unbestimmte Factor, mit welchem irgend eine der Gleichungen (4) multiplicirt worden ist, nur abhängig sein kann von der Complexion, aus welcher die zu vervielfachende Gleichung entstanden ist, keineswegs aber von der Gruppe, in welche die betreffende Gleichung eingeordnet wurde. Es resultirt dies aus dem Umstande, dass die Nenner rechter Hand von i unabhängig sind. Daher ist der Index, welcher den unbestimmten Factoren beigefügt worden, überflüssig und die zu erfüllenden Gleichungen lauten:

$$\frac{\sum [\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_q]\, d(\alpha_1, \ldots, \alpha_i+1, \ldots \alpha_q)}{-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)} = \frac{\sum_{k=1}^{k=q} [\beta_1, \ldots, \beta_k-1, \ldots, \beta_q]\, dx_k}{\frac{\partial \varphi}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_k, \ldots, \beta_q)}} \tag{7}$$

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_i+\ldots+\alpha_q = p-1, \qquad \beta_1+\ldots+\beta_k+\ldots+\beta_q = p.$$

Die Ausdrücke auf beiden Seiten in (7) bilden sich nach einfachen Gesetzen. Was zunächst die Brüche links betrifft, so ist jeder derselben durch den Index i bestimmt, für welchen er zu bilden ist. Schreibt man nämlich alle Complexionen $(p-1)$ter Ordnung an, und schliesst jede einzelne mit eckigen Klammern ein, so hat man alle unbestimmten Factoren, welche in den Zähler eingehen, wobei man übrigens bemerken wird, dass diese zugleich alle unbestimmten Factoren sind, welche überhaupt in Rechnung treten. Man erhält nun den Zähler, welcher zu dem Nenner $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)$ gehört, indem man jeden unbestimmten Factor mit dem totalen Differentiale jener Ableitung $p$ter Ordnung multiplicirt, deren Indexreihe aus der des nebenstehenden Factors durch Erhöhung des α_i um eine Einheit entsteht und die erhaltenen Producte addirt.

Die Brüche rechterseits sind durch die Complexionen bestimmt, welche im Nenner auftreten. Der Zähler ist eine Summe von der Form:

$$X_1\, dx_1 + \ldots + X_k\, dx_k + \ldots + X_q\, dx_q,$$

und der Coëfficient X_k von dx_k ist jener unbestimmte Factor:

$$[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k-1, \ldots, \beta_q],$$

dessen Indexfolge aus der des Nenners entsteht, indem man den Index der $k$ten Stelle um Eins verringert.

Der Natur der Sache nach können die Indices innerhalb der eckigen Klammern niemals negative Zahlen werden. Es müssen also Klammerausdrücke, welche bei Befolgung dieser Gesetze negative Indices erhalten würden, der Null gleich gesetzt werden.

18.

Die Gleichungen (7) repräsentiren ein System simultaner gewöhnlicher Differentialgleichungen, in welchen eine beliebige der Variabeln als Independente angesehen werden kann. Wir bestimmen hiezu x_1, und setzen allgemein

$$\frac{dx_k}{dx_1} = \lambda_k$$

so dass λ_1, wo es der Symmetrie wegen beibehalten wurde, den Werth 1 besitzt. Da ferner einer der unbestimmten Factoren willkürlich ist, setzen wir

$$[p-1, 0, 0, \ldots, 0] = 1$$

und verwenden durchgehends die Lagrange'sche Bezeichnung der Differentialquotienten, wonach

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)' = \frac{d}{dx_1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$$

zu verstehen ist. Durch diese Suppositionen erhalten wir aus (7) das System:

$$\sum [\alpha_1, \ldots, \alpha_i \ldots, \alpha_q](\alpha_1, \ldots, \alpha_i+1, \ldots, \alpha_q)' = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial(p, 0, \ldots, 0)}}, \alpha_1+\ldots+\alpha_i+\ldots+\alpha_q = p-1; \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{k=q} \lambda_k [\beta_1, \ldots, \beta_k - 1, \ldots, \beta_q] = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(\beta_1, \ldots \beta_k, \ldots \beta_q)}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(p, 0, \ldots, 0)}} \cdot \beta_1 + \ldots + \beta_k + \ldots + \beta_q = p. \tag{9}$$

Wir fügen sowie bei den runden Klammern in zweifelhaften Fällen auch bei den Ausdrücken mit eckigen Klammern eine untere Indexreihe hinzu, durch welche die Stelle der oberen Indices angegeben wird, und setzen insbesondere:

$$[1] = \begin{bmatrix} p-1, 0, \ldots, 0, \ldots, 0 \\ 1, \; 2, \ldots, i, \ldots, q \end{bmatrix}, \qquad (1) = \begin{pmatrix} p, 0, \ldots, 0, \ldots, 0 \\ 1, 2, \ldots, i, \ldots, q \end{pmatrix}$$

$$[2] = \begin{bmatrix} 0, p-1, \ldots, 0, \ldots, 0 \\ 1, \; 2, \; \ldots, i, \ldots, q \end{bmatrix}, \qquad (2) = \begin{pmatrix} 0, p, \ldots, 0, \ldots, 0 \\ 1, 2, \ldots, i, \ldots, q \end{pmatrix}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$[i] = \begin{bmatrix} 0, 0, \ldots, p-1, \ldots, 0 \\ 1, 2, \ldots, \; i, \; \ldots, q \end{bmatrix}, \qquad (i) = \begin{pmatrix} 0, 0, \ldots, p, \ldots 0 \\ 1, 2, \ldots, i, \ldots, q \end{pmatrix}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$[q] = \begin{bmatrix} 0, 0, \ldots, 0, \ldots, p-1 \\ 1, 2, \ldots, i, \ldots, \; q \end{bmatrix}, \qquad (q) = \begin{pmatrix} 0, 0, \ldots, 0, \ldots, p \\ 1, 2, \ldots, i, \ldots, q \end{pmatrix}.$$

4.

Die Anzahl der Gleichungen, welche durch Specialisirung von $(\beta_1, \ldots, \beta_k, \ldots, \beta_q)$ aus (9) entstehen, ist um eine Einheit geringer als die Anzahl der Differentialquotienten $p$ter Ordnung, also gleich:

$$\binom{q-1+p}{q-1} - 1.$$

Diese Gleichungen enthalten die unbestimmten Factoren, deren noch

$$\binom{q-1+p-1}{q-1} - 1$$

geblieben sind, und ausser diesen die

$$q-1$$

unbekannten Grössen:

$$\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_q.$$

Es sind also um

$$\left\{\binom{q-1+p}{q-1} - 1\right\} - \left\{\binom{q-1+p-1}{q-1} - 1 + (q-1)\right\} = \binom{q-2+p}{q-2} - (q-1)$$

Gleichungen mehr vorhanden als unbekannte Grössen. Berechnet man die

$$\binom{q-2+p}{q-1} + (q-2)$$

Unbekannten aus eben so vielen mit einander verträglichen Gleichungen und setzt die erhaltenen Werthe in die übrigen Gleichungen ein, so entstehen also

$$\binom{q-2+p}{q-2} - (q-1)$$

Bedingungsgleichungen, welche bestimmte Beziehungen zwischen den Ableitungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(\beta_1, \ldots \beta_q)}$$

enthalten und aus diesem Grunde im Allgemeinen nicht befriedigt sein werden. Es kann nun augenscheinlich nur zweierlei der Fall sein. Entweder sind in Folge der besonderen Beschaffenheit der vorgelegten Gleichung diese Bedingungsgleichungen identisch erfüllt, und dann sind jene Gleichungen des Systems (9), aus denen sie hervorgegangen sind, überflüssig. Oder die Bedindungsgleichungen, von denen jetzt die Rede ist, sind nicht erfüllt und dann steht der eine Theil der Gleichungen (9) mit dem anderen im Widerspruche. Scheiden wir also aus dem System (9) jene Gleichungen aus, welche zur Berechnung der Unbekannten dienlich und hinreichend sind, so können im ersten Falle die übrigen weggelassen werden, da sie den Vorigen keinen neuen Inhalt hinzufügen; im zweiten Falle müssen sie weggelassen werden, da sonst ein Widerspruch entstünde. Unter allen Umständen müssen also, nachdem ein zur Berechnung der Unbekannten geeignetes System aus (9) ausgeschieden ist, die übrig bleibenden Gleichungen gestrichen werden, und es handelt sich vor Allem darum, diese Ausscheidung in entsprechender Weise vorzunehmen.

Wir bezeichnen mit Rücksicht auf spätere Untersuchungen:

$$\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial(p,0,\ldots,0)}} = [\beta_1,\ldots,\beta_q],$$

wodurch ein Irrthum nicht entstehen kann, da in den eben eingeführten Klammernausdrücken die Summe der Indices immer p beträgt, während in den unbestimmten Factoren diese Summe immer nur $p-1$ ausmacht, und schreiben demnach die Gleichungen (9) in der Form:

$$[\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q] = \sum_{k=1}^{k=q} \lambda_k[\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{k-1},\ldots,\beta_q],\ \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_q+\ldots+\beta_q = p. \tag{10}$$

Um nun die nothwendig gewordene Auswahl unter diesen Gleichungen in übersichtlicher Weise vorzunehmen, legen wir einem Klammernausdrucke von der Form:

$$[\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k,\ldots,\beta_q]$$

nach dem ersten Index den Rang β_1 bei, ohne auf die Indexsumme Rücksicht zu nehmen. Da zur Construction der Gleichung (10) die Angabe der Complexion genügt, welche in die Klammer linker Hand eintritt, so werden wir im übertragenen Sinne auch von der Gleichung (10) sagen, sie besitze den Rang β_1. Um im Folgenden eine gleichförmige Ausdrucksweise zu ermöglichen, müssen wir jedoch für die einzifferigen Complexionen:

$$\begin{bmatrix}0,p,\ldots,0\\1,2,\ldots,q\end{bmatrix},\ \ldots\ldots,\begin{bmatrix}0,0,\ldots,p\\1,2,\ldots,q\end{bmatrix}$$

deren Bedeutung aus der kurz vorher gegebenen Definition ohneweiters folgt, und für die folgenden:

$$\begin{bmatrix}0,p-1,\ldots,0\\1,\ 2.\ldots,\ q\end{bmatrix},\ \ldots\ldots,\begin{bmatrix}0,0,\ldots p-1\\1,2.\ \ldots,\ q\end{bmatrix}$$

deren Bedeutung weiter oben angegeben wurde, eine Ausnahme bedingen, indem wir denselben, obwohl der erste Index Null ist, dennoch einen von Null verschiedenen Rang beilegen. Wenn also von Ausdrücken die Rede sein wird, deren Rang von Null verschieden ist, so werden darunter nicht nur die Ausdrücke, deren erster Index von Null verschieden ist, sondern auch die einzifferigen Complexionen der betreffenden Ordnung zu verstehen sein.

Setzen wir nun für den Augenblick die Grössen $\lambda_2,\ldots,\lambda_q$ als bekannt voraus und schreiben die Formel (10) per extensum auf, wie folgt:

$$[\beta_1,\ldots,\beta_q] = [\beta_1-1,\beta_2,\ldots,\beta_q]+\lambda_2[\beta_1,\beta_2-1,\ldots,\beta_q]+\ldots\ldots+\lambda_q[\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q-1],$$

so sehen wir, dass, so lange die Complexion linker Hand einen von Null verschiedenen Rang besitzt, der erste der auf der rechten Seite auftretenden unbestimmten Factoren, das ist

$$[\beta_1-1,\ \beta_2,\ldots\beta_q]$$

im Range stets um eine Einheit niedriger ist, als alle übrigen in derselben Formel enthaltenen, und ziehen daraus den Schluss, dass alle unbestimmten Factoren von gegebenem Range berechnet werden können, wenn die Berechnung der Factoren nächst höheren Ranges und der λ auf irgend eine Weise bereits vollzogen ist. Da ferner der unbestimmte Factor

$$|\beta_1 - 1, \beta_2, \dots \beta_q|$$

in den Gleichungen vom Range β_1 nur einmal auftritt, und daher, so lange β_1 von Null verschieden ist, für jeden zu bestimmenden Factor nur Eine Gleichung vorhanden ist, so sieht man, dass, sobald die Grössen $\lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_q$ bekannt sind, das System jener Gleichungen (10), in welchen $\beta_1 > 0$ zur Berechnung der unbestimmten Factoren jederzeit geeignet ist. Es ist aber auch ausreichend, denn die Anzahl der Gleichungen, welche der aufgestellten Bedingung genügen, ist gleich der Anzahl der Complexionen $(p-1)$ter Ordnung, also auch gleich der Anzahl der unbestimmten Factoren, wobei der leichteren Ausdrucksweise wegen einerseits die identische Gleichung:

$$|p, 0, 0, \dots, 0| = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial(1)}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial(1)}} = 1$$

und andererseits der Factor

$$|p-1, 0, \dots, 0| = |1| = 1$$

mitgezählt wurden.

Um die noch fehlenden Werthe der $(q-1)$ Grössen $\lambda_2, \dots, \lambda_q$ zu finden, heben wir aus den Gleichungen (10) die folgenden heraus:

$$\frac{\lambda_1 |1|}{1} = \frac{\lambda_1 \begin{bmatrix} p-2, 0, 1, \dots, 0 \\ 1, \dots 2 \dots k, \dots, q \end{bmatrix} + \lambda_k \begin{bmatrix} p-1, 0, \dots, 0, \dots, 0 \\ 1, \quad 2, \dots k, \dots, q \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} p-1, 0, \dots, 1, \dots, 0 \\ 1, \dots 2, \dots, k, \dots, q \end{bmatrix}} = \dots = \frac{\lambda_1 \begin{bmatrix} p-i-1, 0, \dots, i, \dots, 0 \\ 1, \dots, 2, \dots, k, \dots, q \end{bmatrix} + \lambda_k \begin{bmatrix} p-i, 0, \dots, i-1, \dots, 0 \\ 1, \dots 2, \dots, k, \dots \quad q \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} p-i, 0, \dots, i, \dots, 0 \\ 1, \quad 2, \dots k, \dots, q \end{bmatrix}}$$

$$= \dots\dots = \frac{\lambda_k \begin{bmatrix} 0, 0, \dots, p-1, \dots, 0 \\ 1, 2, \dots, k, \dots, q \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0, 0, \dots, p, \dots, 0 \\ 1, 2, \dots, k, \dots, q \end{bmatrix}}, \tag{11}$$

in welchen der Symmetrie wegen die allgemeinen Zeichen

$$|1| \text{ und } \lambda_1,$$

statt ihres gemeinsamen Werthes 1 beibehalten werden. Es sind dies p Gleichungen, welche die $(p-1)$ regelmässig abgestuften Factoren:

$$\begin{bmatrix} p-2, 0, \dots, 1, \dots, 0 \\ 1, \dots 2, \dots, k, \dots, q \end{bmatrix}, \dots\dots, \begin{bmatrix} p-i, 0, \dots, i-1, \dots, 0 \\ 1, \dots 2, \dots, k, \dots, q \end{bmatrix}, \dots\dots, \begin{bmatrix} 0, 0, \dots p-1, \dots, 0 \\ 1, 2, \dots, k, \dots, q \end{bmatrix} = |k| \tag{α}$$

und die Grösse λ_k enthalten, sonach zur Bestimmung dieser Grössen hinreichend sind.

Verstehen wir unter ω_k eine willkürliche Grösse, bilden das Product:

$$\left\{ \sum_{i=0}^{i=p-1} (-1)^i \omega_k^{p-i-1} \begin{bmatrix} p-i-1, 0, \dots, i, \dots, 0 \\ 1, \dots 2, \dots, k, \dots, q \end{bmatrix} \right\} \cdot \{\omega_k - \lambda_k\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=p} (-1)^i \omega_k^{p-i} \left\{ \begin{bmatrix} p-i-1, 0, \dots, i, \dots, 0 \\ 1, \dots 2, \dots, k, \dots, q \end{bmatrix} + \lambda_k \begin{bmatrix} p-i, 0, \dots, i-1, \dots, 0 \\ 1, 2, \dots, k, \dots, q \end{bmatrix} \right\}$$

und ersetzen im Resultate die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von ω_k durch die aus den Gleichungen (11) fliessenden Werthe derselben, so folgt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial(1)} \left\{ \sum_{i=0}^{i=p-1} (-1)^i \omega_k^{p-i-1} \begin{bmatrix} p-i-1, 0, \dots, i, \dots, 0 \\ 1, \dots 2, \dots, k, \dots, q \end{bmatrix} \right\} \times \{\omega_k - \lambda_k\} = \sum_{i=0}^{i=p} (-1)^i \omega_k^{p-i} \frac{\partial \varphi}{\partial \begin{pmatrix} p-i, 0, \dots, i, \dots, 0 \\ 1, \dots 2, \dots, k, \dots, q \end{pmatrix}}.$$

$\omega_k - \lambda_k$ ist also ein Theiler des letzten Polynoms, oder mit anderen Worten, λ_k ist eine Wurzel der Gleichung:

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial(1)}\omega_k^p - \frac{\partial\varphi}{\partial\begin{pmatrix}p-1,0,\ldots,1,\ldots,0\\1,2,\ldots,k,\ldots,q\end{pmatrix}}\omega_k^{p-1} + \ldots + (-1)^i \frac{\partial\varphi}{\partial\begin{pmatrix}p-i,0,\ldots,i,\ldots,0\\1,2,\ldots,k,\ldots,q\end{pmatrix}}\omega_k^{p-i} + \ldots \tag{12}$$
$$+(-1)^p\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial(k)} = P(\omega_k).$$

Mit λ_k zugleich werden aber die oben unter (α) angeführten unbestimmten Factoren bestimmt. Wählt man nämlich aus den p Wurzeln der Gleichung (12) eine aus, um sie mit λ_k zu identificiren, so sind die genannten unbestimmten Factoren rationale, symmetrische Functionen der übrigen $p-1$ Wurzeln, und man erhält sie entweder durch Division des Polynoms $P(\omega_k)$ mit $\frac{\partial\varphi}{\partial(1)}(\omega_k-\lambda_k)$ als Coëfficienten der Grössen $(-1)^i\omega_k^{p-i-1}$ oder durch directe Rechnung aus den Gleichungen (11). Man wird bemerken, dass in den Nennern in (11), den letzten ausgenommen, nur solche Complexionen enthalten sind, in denen der Index von Null verschieden ist; man muss also, um λ_k zu bestimmen, noch die Gleichung, welche die einzifferige Complexion

$$\begin{bmatrix}0,0,\ldots,p,\ldots,0\\1,2,\ldots,k,\ldots,q\end{bmatrix}$$

enthält, zu Hilfe nehmen.

Specialisirt man in (12) die Zahl k in $2,3,\ldots,q$, so erhält man der Reihe nach Gleichungen für $\lambda_2,\ldots,\lambda_q$, nachdem man noch aus (10) die aus den einzifferigen Complexionen

$$\begin{bmatrix}0,p,\ldots,0\\1,2,\ldots,q\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0,0,p,\ldots,0\\1,2,3,\ldots,q\end{bmatrix},\ldots\ldots,\begin{bmatrix}0,0,\ldots,p\\1,2,\ldots,q\end{bmatrix}$$

entstehenden Gleichungen zu Hilfe genommen hat.

Da solcherart die Werthe der Grössen $\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_q$ und der unbestimmten Factoren vom höchsten Range gefunden sind, ist gezeigt, dass aus jenen Gleichungen in (10), deren Rang von Null verschieden ist, alle Unbekannten eindeutig berechnet werden können; es sind also aus dem System (10) alle Gleichungen nullten Ranges wegzustreichen.

Es gibt nun Complexionen $p$ter Ordnung überhaupt:

$$\binom{q-1+p}{q-1},$$

Complexionen, deren erster Index von Null verschieden ist

$$\binom{q-1+p-1}{q-1}$$

und da in dieser Anzahl eine einzifferige Complexion mitgezählt ist, sind ausserdem noch

$$q-1$$

einzifferige Complexionen vorhanden, die Anzahl der Complexionen nullten Ranges, also auch die Zahl der vernachlässigten Gleichungen, ist demnach

$$\left[\binom{q-1+p}{q-1}-\binom{q-1+p-1}{q-1}\right]-(q-1)=\binom{q-2+p}{q-2}-(q-1).$$

Diese Anzahl fällt zusammen mit der Zahl der Ableitungen $p$ter Ordnung einer Function von $q-1$ Argumenten, wenn die $(q-1)$ einzifferigen Ableitungen $p$ter Ordnung nicht gezählt werden. Es ist also zu erwarten, dass im Verlaufe der Rechnung eine gleich grosse Anzahl von Bedingungen auftreten wird, welche die hier verloren gegangenen Beziehungen ersetzen müssen.

B.

Indem nun ein Theil der Gleichungen (10) vernachlässigt, der andere aber zur Berechnung der unbekannten Grössen verwendet wurde, verbleiben noch die Gleichungen:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \lambda_2, \quad \frac{dx_3}{dx_1} = \lambda_3, \ldots, \quad \frac{dx_q}{dx_1} = \lambda_q$$

und die q Gleichungen (8). Diese enthalten in endlicher Form alle Variabeln des Problems, mit dem Zeichen $\frac{d}{dx_1}$ behaftet nebst den Independenten $x_2, x_3, \ldots, x_q$ nur die Variabeln der $p$ten Ordnung.

Wir nehmen also die Gleichungen (3) zu Hilfe und haben sonach das System:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \lambda_2, \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \lambda_3, \ldots\ldots, \frac{dx_q}{dx_1} = \lambda_q$$

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_q)' = \sum_{k=1}^{k=q} \lambda_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_k+1, \ldots, \alpha_q), \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q < p \qquad (I)$$

$$\Sigma[\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_q](\alpha_1, \ldots, \alpha_i+1, \ldots, \alpha_q)' = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial(1)}}, \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_i + \ldots + \alpha_q = p-1.$$

Da in der ersten Zeile $(q-1)$, in der zweiten $\binom{q-1+p}{p-1}$, und in der dritten q Gleichungen enthalten sind, besitzen wir im Ganzen:

$$(q-1) + \binom{q-1+p}{q-1} + q = \binom{q-1+p}{p-1} + 2q - 1$$

Gleichungen zur Bestimmung der

$$\binom{q+p}{q} + q - 1$$

Dependenten des Systems und daher um

$$\left\{\binom{q+p}{p} + q - 1\right\} - \left\{\binom{q+p-1}{p-1} + 2q - 1\right\} = \binom{q-1+p}{p} - q = \binom{q-1+p}{q-1} - q$$

Gleichungen weniger als zu bestimmende Grössen vorhanden sind. Eine gleiche Anzahl der letzteren muss also während der Integration als unbestimmt angesehen werden. Da nun überhaupt

$$\binom{q-1+p}{q-1}$$

Ableitungen $p$ter Ordnung vorhanden sind, und vermöge der q letzten Gleichungen des Systems (I) die Differentialquotienten der einzifferigen Functionen

$$(1), (2), \ldots, (q)$$

durch die Differentialquotienten der übrigen Functionen $p$ter Ordnung ausgedrückt werden können, empfiehlt es sich, die letzteren als die willkürlich bleibenden Grössen anzusehen. Sonach verbleiben während der Integration des Systems (*I*) alle Dependenten $p$ter Ordnung mit Ausnahme der einzifferigen unbestimmt, und wir betrachten dieses System als integrirt, wenn es gelungen ist, alle übrigen Dependenten des Systems als Functionen der Independenten x_1, der erforderlichen Anzahl Integrationsconstanten und der willkürlichen Grössen darzustellen. Es ist übrigens klar, dass die letzteren in den Integralgleichungen nicht nur als Functionsargumente im gewöhnlichen Sinne, sondern auch unter Integralzeichen auftreten werden. Die Anzahl der Integrationsconstanten ist gleich der Anzahl der Gleichungen, also:

$$\binom{q+p-1}{p-1}+2q-1.$$

19.

Eine Function der in dem System (I) auftretenden Argumente wird im engeren Sinne ein Integrale dieses Systems genannt, wenn deren Ableitung nach x_1 mit Rücksicht auf die Gleichungen (I) identisch verschwindet. Um also die Definitionsgleichung der Integrale zu erhalten, entwickeln wir den Differentialquotienten von

$$F[x_1, x_2, \ldots, x_q, \ldots, (\alpha_1, \ldots, \alpha_q), \ldots]$$

nach x_1 und setzen denselben gleich Null. Da vorausgesetzt werden muss, dass in der Function F auch Quadraturen über die willkürlich gebliebenen Grössen enthalten sind, so bemerken wir, dass alle Bestandtheile dieser Art als Functionen von x_1, welche im Allgemeinen auch sämmtliche Integrationsconstanten enthalten, anzusehen sind. Danach wird zunächst:

$$\frac{dF}{dx_1}=\sum_{k=1}^{k=q}\frac{\partial F}{\partial x_k}\lambda_k+\sum\frac{\partial F}{\partial(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)}\sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\lambda_k+\sum\frac{\partial F}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}(\beta_1,\ldots,\beta_q)'.$$

Hierin ist die erste der zwei Summen, bei welchen sich keine nähere Angabe befindet, auf alle Complexionen von niederer als der $p$ten Ordnung, die zweite hingegen auf alle Complexionen $p$ter Ordnung zu erstrecken.

Wir schreiben die erhaltene Gleichung in der Form:

$$\frac{dF}{dx_1}=\sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k\left\{\frac{\partial F}{\partial x_k}+\sum\frac{\partial F}{\partial(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\right\}+\sum\frac{\partial F}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}(\beta_1,\ldots,\beta_q)'$$

und benützen die Bezeichnung:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial F}{\partial x_k}+\sum\frac{\partial F}{\partial(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q),\quad \alpha_1+\ldots+\alpha_k+\ldots+\alpha_q<p, \tag{13}$$

um sie noch weiter zur Gleichung:

$$\frac{dF}{dx_1}=\sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)+\sum\frac{\partial F}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}(\beta_1,\ldots,\beta_q)',\ \beta_1+\ldots+\beta_q=p$$

abzukürzen.

Aus den Gleichungen (8) folgt nun:

$$(k)'=-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial k_k}\right)}{|k|\frac{\partial\varphi}{\partial(1)}}-S\frac{|\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q|}{|k|}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)',\ \alpha_1+\ldots+\alpha_k+\ldots+\alpha_q=p-1$$

worin das Zeichen S vorübergehend dazu gebraucht wurde, um anzuzeigen, dass die Summation rechter Hand über alle Complexionen, für welche $\alpha_1+\ldots+\alpha_k+\ldots+\alpha_q=p-1$, mit Ausnahme der Complexionen

$$|1|,\ |2|,\ldots,|q|$$

auszudehnen ist. Mit Rücksicht auf die Relationen:

$$\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)}{[k]\frac{\partial\varphi}{\partial(1)}} = \frac{\lambda_k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)}{\lambda_k[k]\frac{\partial\varphi}{\partial(1)}} = \frac{\lambda_k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(k)}}$$

wird weiter

$$\frac{dF}{dx_1} = \sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right) - \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(k)}}\frac{\partial F}{\partial(k)}\right\} + S\frac{\partial F}{\partial(\beta_1\ldots\beta_q)}(\beta_1\ldots,\beta_q)'$$

$$-\sum_{k=1}^{k=q}\frac{\partial F}{\partial(k)}S\frac{[\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots\alpha_q]}{[k]}(\alpha,\ldots\alpha_k+1,\ldots\alpha_q)',$$

oder, da die letzte Summe auch gleich:

$$S(\beta_1\ldots\beta_k\ldots\beta_q)'\sum_{k=1}^{k=q}\frac{[\beta_1\ldots\beta_k-1\ldots\beta_q]}{[k]}\frac{\partial F}{\partial(k)},\quad \beta_1+\ldots+\beta_k+\ldots+\beta_q=p,$$

und wenn wir noch die Abkürzung einführen:

$$F_k = \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right) - \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(k)}}\frac{\partial F}{\partial(k)}$$

endlich

$$\frac{dF}{dx_1} = \sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k F_k - S(\beta_1,\ldots,\beta_q)'\left\{\sum_{k=1}^{k=q}\frac{[\beta_1\ldots\beta_k-1,\ldots\beta_q]}{[k]}\frac{\partial F}{\partial(k)} - \frac{\partial F}{\partial(\beta_1\ldots\beta_k)}\right\}.$$

In dieser Gleichung kann übrigens das Zeichen S wieder durch Σ ersetzt werden, da die Coëfficienten der einzifferigen Grössen

$$(1)',\quad (2)',\ldots(q)'$$

identisch gleich Null werden. Bezeichnen wir also die in der rechten Seite der letzten Gleichung definirte Operation mit D_l, das heisst, verstehen wir:

$$D_l F = \sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k F_k + \sum(\beta_1\ldots\beta_k\ldots\beta_q)'\left\{\frac{\partial F}{\partial(\beta_1\ldots\beta_k\ldots\beta_q)} - \sum_{k=1}^{k=q}\frac{[\beta_1\ldots\beta_k-1\ldots\beta_q]}{[k]}\frac{\partial F}{\partial(k)}\right\}, \tag{14}$$

$$\beta_1+\ldots+\beta_k+\ldots+\beta_q=p,$$

so ist F ein Integrale des Systems (I), wenn

$$D_l F \equiv 0.$$

Wir bemerken, ohne vorderhand auf die Eigenschaften der Integrale näher einzugehen, dass jedes Integrale des Systems (I) allen Gleichungen der Form:

$$\frac{\partial F}{\partial(\beta_1\ldots\beta_k\ldots\beta_q)} - \sum_{k=1}^{k=q}\frac{[\beta_1\ldots\beta_k-1\ldots\beta_q]}{[k]}\frac{\partial F}{\partial(k)} = 0;\quad \beta_1+\ldots+\beta_k+\ldots+\beta_q=p \tag{15}$$

identisch genügen muss, da im Gegentheile gegen die Voraussetzung eine Relation zwischen den willkürlich gebliebenen Grössen gegeben wäre. Aus eben diesem Grunde folgt aber auch, dass die gegebene Gleichung selbst nicht unter allen Umständen zu den Integralen des Systems (I) gehören kann. In der That, setzen wir in (14) φ statt F, so verschwinden die F_k, jetzt φ_k identisch und es folgt:

$$D_I\varphi = \Sigma(\beta_1, \ldots, \beta_k, \ldots, \beta_q)' \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_k, \ldots, \beta_q)} - \sum_{k=1}^{k=q} \frac{[\beta_1, \ldots, \beta_k - 1, \ldots, \beta_q]}{[k]} \frac{\partial\varphi}{\partial(k)} \right\}.$$

Benützen wir die Relation

$$\lambda_k[k] = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(k)}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(1)}}$$

um den Coëfficienten von $(\beta_1, \ldots, \beta_k, \ldots, \beta_q)'$ zu transformiren, so wird derselbe gleich:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_k, \ldots, \beta_q)} - \sum_{k=1}^{k=q} \lambda_k[\beta_1, \ldots, \beta - 1, \ldots, \beta_q] \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial(1)}.$$

Von den Ausdrücken dieser Art werden bei allen Problemen jene gleich Null, bei denen die Complexion $(\beta_1, \ldots, \beta_k, \ldots, \beta_q)$ einen von Null verschiedenen Rang besitzt, während die Coëfficienten nullten Ranges nur bei besonderer Beschaffenheit der gegebenen Gleichung verschwinden. Die gegebene Gleichung wird also durch die Integralgleichungen des Systems (I) im Allgemeinen nicht auf Constante reducirt, doch kann der Ausdruck, welcher entsteht, wenn man in φ an Stelle der Variabeln deren Werthe aus dem Integralsystem substituirt, neben den Integrationsconstanten nur mehr die Variabeln nullten Ranges, nicht aber x_1 enthalten, wie aus dem Werthe von $D_I\varphi$ unmittelbar zu erkennen ist.

Nun muss aber die gegebene Gleichung (1) unter allen Umständen befriedigt werden. Sind die Gleichungen (10) alle mit einander verträglich, so geschieht dies sowie bei den früher behandelten Problemen durch eine Beziehung zwischen den Integrationsconstanten, sind aber in (10) einige oder alle Gleichungen nullten Ranges im Widerspruche mit den übrigen, so muss man zu der gegebenen Gleichung die Gleichung, welche aus (1) durch Substitution der Integralwerthe der Variabeln entsteht, als Bedingungsgleichung für die Variabeln nullten Ranges hinzufügen. Es möge sogleich bemerkt werden, dass diese Bedingungsgleichung jederzeit dadurch erfüllt werden kann, dass man die Grössen nullten Ranges als absolute Constante ansieht, da dann $D_I\varphi$ identisch verschwindet.

Die hier gefundenen Eigenthümlichkeiten haben selbstverständlich ihren Grund darin, dass das System (10) im Allgemeinen ein überbestimmtes ist. Wie seinerzeit bemerkt wurde, ist der Überschuss der in (10) enthaltenen Gleichungen über die in denselben enthaltenen Unbekannten oder, was dasselbe ist, die Anzahl der Grössen nullten Ranges, gleich der Zahl:

$$\binom{q-2+p}{q-2} - (q-1).$$

Es gibt daher nur zwei Classen von Problemen, bei welchen keine Bedingungsgleichungen auftreten, nämlich:

Erstens: Die Gleichungen erster Ordnung, und bei diesen Problemen ist überdies das Differentialsystem (I) jederzeit bestimmt, denn die Anzahl der fehlenden Gleichungen:

$$\binom{q-1+p}{p} - q$$

wird für $p=1$ gleich Null.

Zweitens: Die Gleichungen beliebiger Ordnung mit zwei Independenten, die wir in den vorigen Abschnitten ausführlich behandelt haben.

20.

Die nächste Aufgabe ist nun, den Einfluss zu untersuchen, welchen die Integration des Systems (I) auf die Integrabilitätsbedingungen ausübt. Zu diesem Behufe benützen wir die Integralgleichungen, um an Stelle der Dependenten des Systems (I) die Integrationsconstanten als neue Veränderliche einzuführen. Hiebei wollen wir die Veränderung, welche irgend eine Variable des Systems, etwa u, erleidet, sobald x_1 allein einen unendlich kleinen Zuwachs erleidet, wie bisher durch du bezeichnen, die Veränderung aber, welche durch Incremente aller Constanten hervorgerufen werden, durch δu andeuten, so dass die Gesammtänderung, welche u überhaupt erfahren kann, durch

$$du+\delta u$$

dargestellt wird. Dann entsteht aus der Gleichung (3) des Artikels 16 durch Variation des x_1 und sämmtlicher constanter Parameter die folgende:

$$d(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)+\delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)=\sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\lambda_k dx_1+\sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\delta x_k$$

und hieraus wegen der Beziehungen (I):

$$\delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)=\sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\delta x_k,\quad (\alpha_1+\ldots+\alpha_k+\ldots+\alpha_q<p. \tag{16}$$

Diese Gleichungen enthalten dx_1 nicht, um dieselben integriren zu können, muss also x_1 selbst zum Ausfalle gebracht werden. In der That wird es stets möglich sein, die in diesen Gleichungen noch enthaltenen willkürlichen Grössen, — es sind dies, wie erinnerlich, alle Functionen $(\alpha_1,\ldots\alpha_q)$ der $p$ten Ordnung, die einzifferigen $(1), (2)\ldots(q)$ ausgenommen — so zu bestimmen, dass x_1 aus allen Gleichungen verschwindet.

Wir bringen die Gleichung (16) in die Form:

$$0=\delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)-\sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\delta x_k,$$

und bezeichnen den Ausdruck rechter Hand, ohne Rücksicht auf den Werth, den derselbe erhalten soll, durch

$$P(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q),\quad \alpha_1+\ldots+\alpha_k+\ldots+\alpha_q<p,$$

eine Bezeichnung, welche vollkommen ausreicht, da jede einzelne der Gleichungen (16) durch die Complexion $(\alpha_1,\ldots\alpha_k,\ldots\alpha_q)$, welche ihr zu Grunde liegt, vollkommen gekennzeichnet ist. Dann muss mit Hilfe der Differentialgleichungen (I) die Ableitung von P nach x_1, das heisst

$$\frac{d}{dx_1}P(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)=0$$

ausfallen. Es ist nun:

$$\frac{d}{dx_1}P(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)=\frac{d\delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)}{dx_1}-\sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\frac{d\delta x_k}{dx_1}-\sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)'\delta x_k,$$

und andererseits:

$$0=\delta\sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)-\sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\frac{d\delta x_k}{dx_1}-\sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k\delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q);$$

daher wird:

$$\frac{d}{dx_1}P(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)=\delta\left\{\frac{d}{dx_1}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)-\sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\right\}+\sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k\delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)$$
$$\sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)'\delta x_k.$$

k *

Da in allen diesen Ausdrücken

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q < p,$$

so ist laut (I)

$$\frac{d}{dx_1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_q) = \sum_{k=1}^{k=q} \lambda_k (\alpha_1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_q).$$

und wir erhalten als Bedingung dafür, dass x_1 aus den P entfalle, die Gleichungen:

$$Z(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_q) = \sum_{k=1}^{k=q} \lambda_k \delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_q) - \sum_{k=1}^{k=q} (\alpha_1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_q)' \delta x_k = 0.$$

Hier ist nun zu unterscheiden, ob

$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q$ gleich oder kleiner ist als $(p-1)$.

Im ersten Falle erlaubt die Gleichung (17) keine weitere Veränderung, im letzteren aber ist:

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + 1 + \ldots + \alpha_q < p,$$

und daher:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_q)' = \sum_{i=1}^{i=q} (\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_q) \lambda_i.$$

Mit diesem Werthe verwandelt sich nun die Gleichung (17) in die folgende:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{k=q} \lambda_k \delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_q) - \sum_{k=1}^{k=q} \delta x_k \sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i (\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_q) \\ &= \sum_{k=1}^{k=q} \lambda_k \delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_k) - \sum_{k=1}^{k=q} \lambda_q \sum_{i=1}^{i=q} (\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_q) \delta x_i \\ &= \sum_{k=1}^{k=q} \lambda_k \left\{ \delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_q) - \sum_{i=1}^{i=q} (\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_q) \delta x_i \right\}. \end{aligned}$$

Sind demnach von den Gleichungen (17) diejenigen identisch erfüllt, für welche

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q = p - 1,$$

so fällt aus jenen Gleichungen in (16), bei denen ebenfalls:

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q = p - 1$$

ist, x_1 heraus und dieselben verwandeln sich in Pfaff'sche Probleme, welche durch Beziehungen zwischen den Constanten allein befriedigt werden können. Denken wir uns nun die hiezu erforderlichen Relationen zwischen den Constanten hergestellt, so verschwinden zufolge der letzten Formel auch diejenigen unter den Gleichungen (17), für welche

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q = p - 2,$$

wonach sich dieselbe Schlussfolgerung auch auf die Gleichungen niederer Ordnung fortsetzen lässt. Es erhellt daraus, dass x_1 aus allen Ausdrücken P zum Ausfall gebracht werden kann, wenn dies nur bei denen der höchsten Ordnung bereits geschehen ist. Daher genügt es, von den Gleichungen (17) blos jene beizubehalten, für welche

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q = p - 1.$$

Die Anzahl der noch zu erfüllenden Bedingungen ist also gleich der Anzahl der Complexionen $(p-1)$ter Ordnung, das ist:

$$\binom{q - 1 + p - 1}{q - 1}$$

Die Zahl der Complexionen $p$ter Ordnung besteht aus drei Theilen, da in derselben

Erstens: die einzifferigen Complexionen, q an der Zahl;

Zweitens: die $\binom{q-1+p-1}{q-1}-1$ Complexionen, deren erster Index von Null verschieden ist, endlich

Drittens: die Complexionen vom nullten Range enthalten sind.

Von der Gesammtzahl dieser Complexionen sind nun die q ersten durch das System (I) bestimmt, $\binom{p-1+q-1}{q-1}$ durch die Bedingungsgleichungen (17), die letzteren haben also Eine Bedingungsgleichung für die Grössen nullten Ranges zur Folge.

Da nach Erfüllung der (17) aus den Relationen (16) x_1 entfällt, so verwandeln sich diese in Pfaff'sche Gleichungen, deren Lösung dann diejenigen Beziehungen zwischen den Integrationsconstanten ergibt, aus denen schliesslich das allgemeine Integrale der gegebenen Gleichung resultirt.

Denkt man sich die Bedingungsgleichungen (17) integrirt, so ist die Form, in welcher die eben erwähnten Pfaff'schen Gleichungen auftreten, in dem einen Falle leicht herzustellen, wenn als Integrationsconstante des Systems (I) die Anfangswerthe der Dependenten genommen werden, welche vermöge der Integralgleichungen einem concreten, nicht singulären Werthe x_1^0 des x_1 entsprechen. Bezeichnen wir diese Anfangswerthe durch oben angefügte „^{0}", so reduciren sich die Gleichungen (16) auf die Form:

$$\delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)^0 = \sum_{k=2}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)^0\,\delta x_k{}^0,\quad \alpha_1+\ldots+\alpha_k+\ldots+\alpha_q<p;$$

setzt man also:

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)^0 = \Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q),$$

wobei unter

$$\Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)$$

irgend eine Function der Anfangswerthe $x_2^0,\ldots x_q^0$ zu verstehen ist, so ist:

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)^0 = \frac{\partial\Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)}{\partial x^0{}_k},$$

und hieraus folgt sofort:

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)^0 = \frac{\partial^{\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\cdots+\alpha_q}\Phi(\alpha,\ldots,0,\ldots,0)}{(\partial x_2{}^0)^{\alpha_2}\ldots(\partial k_k{}^0)^{\alpha_k}\ldots(\partial x_q{}^0)^{\alpha_q}}.$$

Somit ist jede der Integrationsconstanten bestimmt, sobald für die Functionen:

$$\Phi(0,0,\ldots,0),\quad \Phi(1,0,\ldots,0),\quad \Phi(p-1,0,\ldots,0)$$

eine Wahl getroffen worden ist. Da nun die Bedingungsgleichungen für die Grössen 0ten Ranges nur auf die Form dieser Functionen Einfluss üben können, so schliessen wir:

Erstens: dass $(q-1)$ der Integrationsconstanten unabhängig, alle anderen aber als Functionen dieser anzusehen sind und

Zweitens: dass das allgemeine Integrale einer Differentialgleichung $p$ter Ordnung mit q Independenten nie mehr als p willkürliche Functionen enthalten können. Doch muss sogleich bemerkt werden, dass diese zweite Schlussfolgerung nur in gewissem Sinne richtig ist, welcher aber dem ausgesprochenen Satze, wie sich später zeigen wird, ohne Zwang beigelegt werden kann.

Wendet man nicht die Hauptintegrale an, sondern irgend ein anderes vollständiges Integralsystem, so behalten diese Bemerkungen augenscheinlich ihre Giltigkeit; die Relationen zwischen den Integrationsconstanten erhalten aber dann nicht die einfache hier angegebene Gestalt, vielmehr müssen sie erst durch die factische Integration der Gleichungen (16) gewonnen werden.

21.

Zur Construction des Systems (I) genügt es, festzusetzen, welcher von den p möglichen Werthen des λ_k mit $\frac{dx_k}{dx_1}$ zu identificiren ist. Wir haben weiter oben gesehen, dass durch diese Festsetzung auch die Werthe der unbestimmten Factoren

$$[\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_q], \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q = p-1$$

festgelegt wird, so dass alle Bestandtheile des Systems (I) bestimmt erscheinen.

Da wir im Folgenden gezwungen sein werden, zwischen den verschiedenen Werthen zu unterscheiden, welche λ_k annehmen kann, und die wir im Allgemeinen als endlich, von Null und unter einander verschieden voraussetzen, bezeichnen wir denjenigen dieser Werthe, welcher zum Aufbaue des Systems (I) verwendet wurden, durch λ_k^I. Scheiden wir dann aus der Gesammtheit der Wurzelwerthe λ diejenigen aus, welche mit dem Index „I" bezeichnet sind, so ist es immer möglich, aus den übrigen λ Werthen einen Complex zusammenzustellen, der seinerseits abermals zur Bildung eines dem Systeme (I) analogen Differentialsystems verwendet werden kann. Wir bezeichnen diesen Complex durch

$$\lambda_2^{II}, \lambda_3^{II}, \ldots, \lambda_q^{II}$$

und nennen das aus demselben hervorgehende Differentialsystem das System (II). In gleicher Weise unterscheiden wir noch ein System (III), welches aus den Wurzeln

$$\lambda_2^{III}, \lambda_3^{III}, \ldots, \lambda_q^{III}$$

entsteht und so fort, bis endlich mit dem Systeme (P), das den Wurzeln

$$\lambda_2^{P}, \lambda_3^{P}, \ldots, \lambda_q^{P}$$

entspricht, der gesammte Wurzelvorrath erschöpft wird. Die bisherige Bezeichnungsweise reicht nicht aus, um auch in den von der Wahl des Wurzelcomplexes abhängigen Bestandtheilen deren Herkunft anzugeben. Daher bezeichnen wir die unbestimmten Factoren im Systeme (K) durch

$$\left[\underset{K}{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_q}\right], \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q = p-1,$$

so dass das Zeichen

$$\left[\underset{I}{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_q}\right]$$

mit dem bisher verwendeten

$$[\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_q]$$

identisch ist. Dessgleichen bezeichnen wir eine Differentiation nach x_1, wenn hiebei das System (K) zu berücksichtigen ist, durch

$$D_K$$

und gebrauchen diese Bezeichnung, wo Zweifel entstehen könnten, auch innerhalb des betreffenden Systems an Stelle des bisher benützten Lagrange'schen Zeichens. Das System (K) hat dann die Form:

$$\left.\begin{aligned} & D_K x_2 = \lambda_2^K, \ldots, D_K x_q = \lambda_q^K \\ & D_K(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_q) = \sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i^K (\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_q), \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_i + \ldots + \alpha_q < p \\ & \sum \left[\underset{K}{\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_q}\right] D_K(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_q) = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial (1)}}, \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_i + \ldots + \alpha_q = p-1 \end{aligned}\right\} \quad (K)$$

und irgend eine Function F der hier vorkommenden Argumente ist ein Integral dieses Systems, wenn

$$D_K F = \sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i^K F_i + \sum D_K(\beta_1 \ldots, \beta_q) \left\{ \frac{\partial F}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_q)} - \sum_{i=1}^{i=q} \frac{\left[\underset{K}{\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_q}\right]}{\left[\underset{K}{i}\right]} \frac{\partial F}{\partial(i)} \right\} = 0.$$

$$\beta_1 + \ldots + \beta_q = p.$$

Die Ausdrücke

$$[\beta_1, \ldots, \beta_q] = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_q)}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(1)}},$$

in welchen $\beta_1 + \ldots + \beta_q = p$, bedürfen als in allen Systemen gleichbleibend keiner näheren Bezeichnung des Systems; die unbestimmten Factoren im Systeme (K) sind also aus den Gleichungen:

$$[\beta_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_q] = \sum_{i=2}^{i=q} \lambda_i^K \left[\underset{K}{\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_q}\right], \quad \beta_1 + \ldots + \beta_i + \ldots + \beta_q = p \tag{18}$$

zu berechnen. Da die linken Seiten dieser Gleichungen sich nicht ändern, wenn man die Wurzelwerthe eines vom Kten verschiedenen Complexes mit den entsprechenden Werthen eines anderen ebenfalls vom Kten verschiedenen Complexes vertauscht, so folgt, dass die Ausdrücke

$$\left[\underset{K}{\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_q}\right]$$

bezüglich aller oberen Stellenzeiger der λ, welche von I verschieden sind, symmetrisch sein müssen.

Sowie nun die Gleichungen (18) stets befriedigt werden können, so lange der Rang der auf der linken Seite auftretenden Complexion von Null verschieden ist, so können auch alle Ausdrücke

$$\left[\underset{K}{\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_q}\right],$$

deren Rang von Null verschieden ist, ihrerseits zur Berechnung neuer Ausdrücke

$$\left[\underset{K,\,L}{\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\nu - 1, \ldots, \beta_q}\right]$$

verwendet werden, welche den Gleichungen

$$\left[\underset{L}{\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_q}\right] = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \lambda_\nu^L \left[\underset{K,\,L}{\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\nu - 1, \ldots, \beta_q}\right] \tag{19}$$

Genüge leisten. Es folgt dies durch eine Schlussweise, welche sich von der analogen des Art. 18 nur dadurch unterscheidet, dass hier die Werthe $\lambda_2^L, \ldots, \lambda_q^L$ von vornherein gegeben sind.

Aus dem Bildungsgesetze dieser Grössen folgt unmittelbar, dass dieselben bezüglich der von K und L verschiedenen Indices symmetrisch sind, sie müssen also auch bei einer Vertauschung von L mit K denselben Werth behalten, also ist:

$$\left[\underset{K,\,L}{\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\mu - 1, \ldots, \beta_q}\right] = \left[\underset{L,\,K}{\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\nu - 1, \ldots, \beta_p}\right].$$

Ist nun der Rang der Complexion

$$\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_q$$

von Null verschieden, so ist:

$$\left[\underset{K}{\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_q}\right] = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^L \left[\underset{KL}{\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\mu - 1, \ldots, \beta_q}\right]$$

und andererseits

$$\left[\underset{L}{\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_q}\right]=\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\lambda_\mu^K\left[\underset{KL}{\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q}\right],$$

somit:

$$\left[\underset{K}{\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_q}\right]-\left[\underset{L}{\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_q}\right]=-\sum_{\mu=2}^{\mu=q}(\lambda_\mu^K-\lambda_\mu^L)\left[\underset{KL}{\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q}\right]$$

Diese Gleichung drückt eine Eigenschaft der in Betrachtung stehenden Grössen aus, welche, wie wir sogleich zeigen wollen, für alle Complexionen ohne Unterschied des Ranges giltig ist. Es wurde seinerzeit bemerkt, dass in denjenigen von den Gleichungen (10), welche ein vollständiges und zugleich widerspruchfreies System bilden, jede der Grössen:

$$[\beta_1-1,\ldots,\beta_q]$$

nur Einmal als Unbekannte vorkommt, eine Bemerkung, welche selbstverständlich auch für die Grössen

$$\left[\underset{K}{\beta_1-1,\ldots,\beta_q}\right]$$

im Systeme (18) Geltung hat. Da hiebei der Rang der Complexion $\beta_1,\ldots,\beta_q$ von Null verschieden sein muss, somit β_1 den Werth 1 noch annehmen kann, so kann der Rang der letzteren Grössen bis auf Null herabsinken, was übrigens schon daraus hervorgeht, dass die erwähnten Gleichungen hinreichen, um alle Ausdrücke der genannten Art zu berechnen. Ist umgekehrt ein solcher Ausdruck vom Range Null, also etwa

$$\left[\underset{K}{0,\gamma_2,\ldots,\gamma_q}\right],\quad \gamma_2+\ldots+\gamma_q=p-1$$

gegeben, so ist es leicht, jene Gleichung herzustellen, welche den vorgelegten Ausdruck enthält, und, wie natürlich, einen von Null verschiedenen Rang besitzt, da sie zu dem Systeme gehören soll, aus welchem die unbestimmten Factoren zu berechnen möglich ist. Es ist dies offenbar die folgende:

$$[1,\gamma_2,\ldots,\gamma_q]=\left[\underset{K}{0,\gamma_2,\ldots,\gamma_q}\right]+\sum_{i=2}^{i=q}\lambda_i^K\left[\underset{K}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q}\right]$$

Die Grösse linker Hand gestattet aber auch die Zerlegung:

$$[1,\gamma_2,\ldots,\gamma_q]=\left[\underset{L}{0,\gamma_2,\ldots,\gamma_q}\right]+\sum_{i=2}^{i=q}\lambda_i^L\left[\underset{L}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q}\right]$$

und hieraus folgt:

$$\left[\underset{K}{0,\gamma_2,\ldots,\gamma_q}\right]-\left[\underset{L}{0,\gamma_2,\ldots,\gamma_q}\right]=-\sum_{i=2}^{i=q}\left\{\lambda_i^K\left[\underset{K}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q}\right]-\lambda_i^L\left[\underset{L}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q}\right]\right\}$$

das ist:

$$=-\sum_{i=2}^{i=q}(\lambda_i^K-\lambda_i^L)\left[\underset{K}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q}\right]-\sum_{i=2}^{i=q}\lambda_i^L\left\{\left[\underset{K}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q}\right]-\left[\underset{L}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q}\right]\right\}$$

Da im zweiten Theile der rechten Seite nur Complexionen vom ersten Range auftreten, kann man

$$\left[\underset{K}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q}\right]-\left[\underset{L}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q}\right]=-\sum_{\mu=2}^{\mu=q}(\lambda_\mu^K-\lambda_\mu^L)\left[\underset{KL}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_\mu-1,\ldots,\gamma_q}\right]$$

substituiren und erhält dann

$$\left[\underset{K}{0,\gamma_2,\ldots,\gamma_q}\right]-\left[\underset{L}{0,\gamma_2,\ldots,\gamma_q}\right]=-\sum_{i=2}^{i=q}(\lambda_i^K-\lambda_i^L)\left\{\left[\underset{K}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q}\right]-\sum_{\mu=2}^{\mu=q}\lambda_\mu^L\left[\underset{KL}{1,\gamma_2\ldots\gamma_i-1,\ldots,\gamma_\mu-1,\ldots\gamma_q}\right]\right\}.$$

Es ist nun

$$\left[\begin{matrix}1, \gamma_2, \ldots, \gamma_i - 1, \ldots, \gamma_q \\ K\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix}0, \gamma_2, \ldots, \gamma_i - 1, \ldots, \gamma_q \\ KL\end{matrix}\right] + \sum_{\mu=2}^{\mu=q} \lambda_\mu^L \left[\begin{matrix}1, \gamma_2, \ldots, \gamma_i - 1, \ldots, \gamma_\mu - 1, \ldots, \gamma_q \\ KL\end{matrix}\right]$$

und, indem man diesen Werth in der vorigen Gleichung substituirt, endlich:

$$\left[\begin{matrix}0, \gamma_2, \ldots, \gamma_q \\ K\end{matrix}\right] - \left[\begin{matrix}0, \gamma_2, \ldots, \gamma_q \\ L\end{matrix}\right] = -\sum_{i=2}^{i=q} (\lambda_i^K - \lambda_i^L) \left[\begin{matrix}0, \gamma_2, \ldots, \gamma_i - 1, \ldots, \gamma_q \\ KL\end{matrix}\right], \tag{20}$$

was zu beweisen war.

Wir werden in den folgenden Untersuchungen Veranlassung finden, diese Zerlegung weiter fortzusetzen, und die Gleichungen

$$\left[\begin{matrix}\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\nu - 1, \ldots, \beta_q \\ K, L\end{matrix}\right] = \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \lambda_\rho^M \left[\begin{matrix}\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\nu - 1, \ldots, \beta_\rho - 1, \ldots, \beta_q \\ K, L, M\end{matrix}\right]$$

aufzustellen, welche ihrerseits zu einer analogen Discussion und zu weiterer Zerlegung Anlass geben. Dadurch gewinnen wir eine Reihe von Ausdrücken der Form

$$\left[\begin{matrix}\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\mu - 1, \ldots, \beta_\rho - 1, \ldots, \beta_\sigma - 1, \ldots, \beta_q \\ K, L, M, N\end{matrix}\right] \text{ u. s. w.}$$

welche wir nach der Anzahl der in der unteren Reihe stehenden Indices in eine Stufenfolge bringen, der zufolge Ausdrücke mit Einem lateinischen Index zur ersten Stufe, solche mit zwei lateinischen Indices zur zweiten Stufe u. s. w. zählen. Es ist klar, dass man nicht weiter als bis zur $p$ten Stufe fortschreiten kann.

Von den Klammerausdrücken irgend einer Stufe können im Allgemeinen nur jene in Ausdrücke der nächst höheren Stufe zerlegt werden, deren Rang von Null verschieden ist, also können umgekehrt aus den Ausdrücken einer bestimmten Stufe im Allgemeinen nicht alle Ausdrücke der nächst niederen Stufe zusammengesetzt werden, sondern nur diejenigen, deren Rang von Null verschieden ist. Ist aber die gedachte Zerlegung für alle Complexionen in jeder Stufe durchführbar, so lässt sich der Ausdruck:

$$\Sigma \,|\beta_1, \ldots, \beta_q|\, \xi_1^{\beta_1} \ldots \xi_q^{\beta_q}, \qquad \beta_1 + \ldots + \beta_q = p \tag{21}$$

in p lineare Factoren zerlegen. In der That ist dann:

$$\sum |\beta_1, \ldots, \beta_q|\, \xi_1^{\beta_1} \ldots \xi_q^{\beta_q} = \sum \xi_1^{\beta_1} \ldots \xi_q^{\beta_q} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^I \left[\begin{matrix}\beta_1, \ldots, \beta_\mu - 1, \ldots, \beta_q \\ I\end{matrix}\right] = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^I\, \xi_\mu \sum \left[\begin{matrix}\beta_1 \ldots \beta_\mu - 1 \ldots \beta_q \\ I\end{matrix}\right] \xi_1^{\beta_1} \ldots \xi_q^{\beta_q},$$

und da man für

$$\sum \left[\begin{matrix}\beta_1, \ldots, \beta_\mu - 1, \ldots, \beta_q \\ I\end{matrix}\right] \xi_1^{\beta_1} \ldots \xi_\mu^{\beta_\mu - 1} \ldots \xi_q^{\beta_q}$$

immer denselben Werth erhält, wie man auch μ wählen möge, so wird der obige Ausdruck gleich

$$\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^I\, \xi_\mu\right) \cdot \left(\sum \left[\begin{matrix}\beta_1, \ldots, \beta_k - 1, \ldots, \beta_q \\ I\end{matrix}\right] \xi_1^{\beta_1} \ldots \xi_k^{\beta_k - 1} \ldots \xi_q^{\beta_q}\right)$$

worin nun der zweite Factor in derselben Weise weiter zerlegt werden kann. Man gewinnt also schliesslich die Gleichung:

$$\sum |\beta_1, \ldots, \beta_q|\, \xi_1^{\beta_1} \ldots \xi_q^{\beta_q} = \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^I\, \xi_\mu\right) \cdot \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^{II}\, \xi_\mu\right) \ldots \ldots \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^P\, \xi_\mu\right),$$

wie behauptet worden.

Die Factorenfolge rechts ist symmetrisch bezüglich der Indices $I, II, \ldots, P$, das heisst, sie behält denselben Werth, wenn man alle λ-Werthe irgend eines Systems gleichzeitig gegen die entsprechenden λ-Werthe eines anderen Systems, also beispielsweise

$$\lambda_2^K \text{ mit } \lambda_2^L \text{ und gleichzeitig } x_3^K \text{ mit } \lambda_3^L, \ldots, \lambda_q^K \text{ mit } \lambda_q^L$$

vertauscht. Bei jeder anderen Vertauschung ändert sich der Werth der rechten Seite. Man erkennt daraus, dass, je nachdem die Vertheilung der Wurzelwerthe λ in die p verschiedenen Systeme vorgenommen wurde, eine grössere oder geringere Zahl der Gleichungen (10) in Art. 18 und der analogen höheren Stufe erfüllt sein werden. Im Allgemeinen gibt es also unter allen möglichen Gruppirungen der λ-Werthe Eine, für welche die Anzahl der mit einander verträglichen Gleichungen des Systems (10) und der analogen höheren Stufe die grösste ist.

22.

Wir definiren nun den Ausdruck $\binom{K,\,L}{i}(F)$ durch die Gleichung:

$$\binom{K,L}{i}(F) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) + \sum D_K(\beta_i, \ldots, \beta_q) \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \frac{\begin{bmatrix} \beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\rho - 1, \ldots, \beta_q \\ K, L \end{bmatrix}}{\lambda_\rho^K \begin{bmatrix} \rho \\ K, L \end{bmatrix}} \frac{\partial F}{\partial(\rho)}, \tag{22}$$

$$\beta_1 + \ldots + \beta_i + \ldots + \beta_\rho + \ldots + \beta_q = p.$$

und suchen den Werth von

$$\delta F - \sum_{i=1}^{i=q} \binom{I,L}{i}(F)\,\delta x_i.$$

Wie aus den Festsetzungen des Art. 20 erinnerlich ist, verwenden wir das Zeichen δ, um die Veränderung anzuzeigen, welche die unmittelbar auf dieses Zeichen folgende Grösse durch unendlich kleine Variationen der Integrationsconstanten erleidet. Das Zeichen δx_1 ist also gleich Null und wird in den folgenden Entwicklungen nur der Symmetrie wegen beibehalten.

Zunächst ist also:

$$\delta F = \sum_{i=1}^{i=q} \frac{\partial F}{\partial x_i}\delta x_i + \sum \frac{\partial F}{\partial(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)}\delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) + \sum \frac{\partial F}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_q)}\delta(\beta_1, \ldots, \beta_q),$$

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_q < p, \qquad \beta_1 + \ldots + \beta_q = p,$$

und andererseits ist

$$\sum_{i=1}^{i=q} \binom{I,L}{i}(F)\,\delta x_i = \sum_{i=1}^{i=q}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)\delta x_i + \sum_{i=1}^{i=q}\delta x_i \sum D_I(\beta_1, \ldots, \beta_q) \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \frac{\begin{bmatrix} \beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\rho - 1, \ldots, \beta_q \\ I, L \end{bmatrix}}{\lambda_\rho^I \begin{bmatrix} \rho \\ L \end{bmatrix}} \frac{\partial F}{\partial(\rho)}$$

Subtrahirt man die letzte Gleichung von der unmittelbar vorhergehenden, nachdem zuvor für $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)$ dessen ausführlicher Werth substitsirt worden ist, so folgt mit der Bezeichnung des Art. 20:

$$\delta F - \sum_{i=1}^{i=q} \binom{I,K}{i}(F)\,\delta x_i = \sum \frac{\partial F}{\partial(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)} P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) + \sum \frac{\partial F}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_q)}\delta(\beta_1, \ldots, \beta_q)$$

$$- \sum_{i=1}^{i=q}\delta x_i \sum D_I(\beta_1, \ldots, \beta_q) \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \frac{\begin{bmatrix} \beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\rho - 1, \ldots, \beta_q \\ I, L \end{bmatrix}}{\lambda_\rho^I \begin{bmatrix} \rho \\ I, L \end{bmatrix}} \frac{\partial F}{\partial(\rho)}.$$

Das erste Glied der rechten Seite verbleibt in seiner gegenwärtigen Gestalt bis zum Schlusse der Transformation; das dritte kann in folgender Art geschrieben werden:

$$-\sum_{\rho=1}^{\rho=q}\frac{\frac{\partial F}{\partial(\rho)}}{\lambda'_\rho\left[\begin{matrix}\rho\\ I,L\end{matrix}\right]}\sum\left[\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho-1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_q\\ I,L\end{matrix}\right]\sum_{i=1}^{i=q}D_I(\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_q)\delta x_i,$$

und dieser Ausdruck, in welchem

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_\rho+\ldots+\alpha_i+\ldots+\alpha_q=p-1$$

zu halten ist, soll zunächst einer weiteren Transformation unterzogen werden. Wegen (17) in Art. 20 ist

$$-\sum_{i=1}^{i=q}D_I(\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_q)\equiv Z(\alpha_1,\ldots,\alpha_q)-\sum_{i=1}^{i=q}\lambda'_i\,\delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_q),$$

und diese Beziehung verwandelt den zu transformirenden Ausdruck in den folgenden:

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=q}\frac{\frac{\partial F}{\partial(\rho)}}{\lambda'_\rho\left[\begin{matrix}\rho\\ I,L\end{matrix}\right]}\sum\left[\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho-1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_q\\ I,L\end{matrix}\right]Z(\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_q)$$

$$-\sum_{\rho=1}^{\rho=q}\frac{\frac{\partial F}{\partial(\rho)}}{\lambda'_\rho\left[\begin{matrix}\rho\\ I,L\end{matrix}\right]}\sum\left[\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho-1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_q\\ I,L\end{matrix}\right]\sum_{i=1}^{i=q}\lambda'_i\,\delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_q).$$

Wir schreiben den ersten Theil dieses Ausdruckes in der Form:

$$\sum Z(\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho,\ldots,\alpha_q)\sum_{\rho=1}^{\rho=q}\frac{\left[\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho-1,\ldots,\alpha_q\\ I,L\end{matrix}\right]}{\lambda'_\rho\left[\begin{matrix}\rho\\ I,L\end{matrix}\right]}\frac{\partial F}{\partial(\rho)},$$

welche er dann bis zum Schlusse beibehält.

Im zweiten Theile des gefundenen Ausdruckes verändern wir die Ordnung der Summation und schreiben ihn wie folgt:

$$-\sum\delta(\beta_1,\ldots,\beta_q)\sum_{\rho=1}^{\rho=q}\frac{\frac{\partial F}{\partial(\rho)}}{\lambda'_\rho\left[\begin{matrix}\rho\\ I,L\end{matrix}\right]}\sum_{i=1}^{i=q}\lambda'_i\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_q\\ I,L\end{matrix}\right]$$

worin nun wieder die auf die Complexionen $(\beta_1,\ldots,\beta_q)$ bezügliche Summation der Bedingung

$$\beta_1+\ldots+\beta_q=p$$

unterworfen ist. In Folge aller dieser Veränderungen wird also:

$$\delta F-\sum_{i=1}^{i=q}\left(\begin{matrix}I,L\\ i\end{matrix}\right)(F)\,\delta x_i=$$

$$=\sum\frac{\partial F}{\partial(\alpha_1,\ldots,\alpha_q)}P(\alpha_1,\ldots,\alpha_q)+\sum Z(\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho,\ldots,\alpha_q)\sum_{\rho=1}^{\rho=q}\frac{\left[\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho-1,\ldots,\alpha_q\\ I,L\end{matrix}\right]}{\lambda'_\rho\left[\begin{matrix}\rho\\ I,L\end{matrix}\right]}\frac{\partial F}{\partial(\rho)}$$

$$+\sum\delta(\beta_1,\ldots,\beta_q)\left\{\frac{\partial F}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}-\sum_{\rho=1}^{\rho=q}\frac{\frac{\partial F}{\partial(\rho)}}{\lambda'_\rho\left[\begin{matrix}\rho\\ I,L\end{matrix}\right]}\sum_{i=1}^{i=q}\lambda'_i\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q\\ I,L\end{matrix}\right]\right\}.$$

Von den Ausdrücken

$$\sum_{i=1}^{i=q}\lambda_i'\left[\beta_1\ldots\beta_i-1,\underset{I,\,L}{\ldots}\beta_\rho-1,\ldots\beta_q\right],$$

die im letzten Gliede auftreten, kann ein Theil in einen Klammerausdruck erster Stufe zusammengezogen werden denn wir wissen aus dem vorigen Artikel, dass

$$\left[\beta_1\ldots\beta_i\underset{L}{\ldots}\beta_\rho-1,\ldots\beta_q\right]=\sum_{i=1}^{i=q}\lambda_i'\left[\beta_1\ldots\beta_i-1,\underset{I,\,L}{\ldots}\beta_\rho-1,\ldots\beta_q\right],$$

sobald der Rang der Complexion $\beta_1,\ldots\beta_i,\ldots\beta_\rho-1,\ldots\beta_q$ von Null verschieden ist. Ist dies jedoch nicht der Fall, so ist die rechte Seite in der letzten Gleichung dem Werthe nach von der linken Seite verschieden, das Gleichheitszeichen also nicht mehr giltig. Wir bezeichnen nun den Werth der rechten Seite, wie auch die Complexion der β beschaffen sein möge, durch

$$\left[\left(\beta_1\ldots\beta_i\underset{L}{\ldots}\beta_\rho-1,\ldots\beta_q\right)\right]=\sum_{i=1}^{i=q}\lambda_i'\left[\beta_1\ldots\beta_i-1,\underset{I,\,L}{\ldots}\beta_\rho-1,\ldots\beta_q\right],$$

wonach

$$\left[\left(\beta_1\ldots\beta_i\underset{L}{\ldots}\beta_\rho-1,\ldots\beta_q\right)\right]$$

für alle Complexionen $\beta_1\ldots\beta_i\ldots\beta_\rho-1\ldots\beta_q$, deren Werth von Null verschieden ist, mit

$$\left[\beta_1\ldots\beta_i\underset{L}{\ldots}\beta_\rho-1,\ldots\beta_q\right]$$

zusammenfällt und erhalten mit dieser Bezeichnung schliesslich:

$$\sum\frac{\partial F}{\partial(\alpha_1,\ldots,\alpha_q)}P(\alpha_1,\ldots,\alpha_q)+\sum Z(\gamma_1,\ldots,\gamma_q)\sum_{\rho=1}^{\rho=q}\frac{\left[\gamma_1,\ldots\underset{I,\,L}{\gamma_\rho-1},\ldots,\gamma_q\right]}{\lambda_\rho'\left[\underset{I,\,L}{\rho}\right]}\frac{\partial F}{\partial(\rho)}= \tag{23}$$

$$=\partial F-\sum_{i=1}^{i=q}\binom{I,\,L}{i}(F)\,\partial x_i-\sum\partial(\beta_1,\ldots,\beta_\rho,\ldots,\beta_q)\left\{\frac{\partial F}{\partial(\beta_1\ldots\beta_\rho\ldots\beta_q)}-\sum_{\rho=1}^{\rho=q}\frac{\left[\left(\beta_1,\ldots,\underset{L}{\beta_\rho-1},\ldots,\beta_q\right)\right]}{\left[\underset{L}{\rho}\right]}\frac{\partial F}{\partial(\rho)}\right\}$$

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_q<p-1,\qquad\gamma_1+\ldots+\gamma_q=p-1,\qquad\beta_1+\ldots+\beta_\rho+\ldots+\beta_q=p.$$

So oft nun die rechte Seite dieser Identität den Werth Null erhält, entsteht eine Gleichung, welche in Bezug auf die Grössen P und Z linear und homogen ist. Gelingt es also, die rechte Seite so oft gleich Null zu machen als P und Z vorhanden sind, und zwar so, dass die daraus entstehenden Gleichungen von einander unabhängig sind, so erhalten die Grössen P und Z insgesammt den Werth Null, und damit sind endlich alle Bedingungen des Problems erfüllt.

23.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung einiger Eigenschaften der Integrale der verschiedenen Systeme, welche in dem Vorkommen willkürlicher Grössen in den Differentialsystemen begründet und für die Lösung der noch zu erfüllenden Aufgabe von Bedeutung sind. Wir gehen hiebei von dem Systeme (K) aus, welches durch die Gleichungen (K) des Art. 21 definirt ist und als Repräsentant aller Systeme angesehen werden kann.

Denken wir uns das System (K) integrirt, während die in demselben enthaltenen willkürlichen Grössen, — welche übrigens, wie aus den Ausführungen des Art. 18 ersichtlich ist, in allen Systemen dieselben bleiben, —

keiner Beschränkung unterworfen werden, so muss jedes Integrale, das ist jede Function F, welche die Gleichungen (K) des Art. 21 identisch befriedigt, auch der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_\rho\ldots,\beta_q)} = \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \frac{\left[\frac{\beta_1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q}{K}\right]}{\left[\frac{\rho}{K}\right]} \frac{\partial F}{\partial(\rho)} \tag{24}$$

identisch Genüge leisten, und zwar für alle

$$\beta_1+\ldots+\beta_\rho+\ldots+\beta_q = p$$

ohne Unterschied. Ein Integrale, welches keine der Grössen

$$(1),\ (2),\ldots,(q)$$

enthält, kann also auch keine andere der Grössen $p$ter Ordnung enthalten, da die Annahme

$$\frac{\partial F}{\partial(1)} = \frac{\partial F}{\partial(2)} = \ldots\ldots = \frac{\partial F}{\partial(\rho)} = \ldots\ldots = \frac{\partial F}{\partial(q)} = 0$$

für jede Complexion $\beta_1,\ldots,\beta_q$ der $p$ten Ordnung die Relation:

$$\frac{\partial F}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)} = 0$$

zur Folge hat. Berechnen wir daher aus q von einander unabhängigen Integralen die Werthe der einzifferigen Grössen: $(1), (2),\ldots(q)$ und setzen dieselben in irgend ein anderes Integral desselben Systems ein, so müssen in letzterem alle Grössen $p$ter Ordnung gleichzeitig zum Ausfall kommen. Es gibt daher in jedem Systeme nur q Integrale, welche bezüglich der Grössen $p$ter Ordnung von einander unabhängig sind. Sonach kann jedes vollständige Integralsystem in zwei Gruppen zerlegt werden; die eine besteht aus q von einander unabhängigen Integralen, welche im Allgemeinen alle Grössen $p$ter Ordnung enthalten und wegen dieser Eigenschaft als wesentliche Integrale bezeichnet werden sollen; die zweite Gruppe umfasst alle übrigen Integrale des Systems und diese enthalten die Grössen $p$ter Ordnung nur insoferne, als sie als Functionen der wesentlichen Integrale dargestellt werden können.

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial(\rho)}}{\left[\frac{\rho}{K}\right]\frac{\partial F}{\partial(1)}} = \zeta_\rho,$$

so verwandelt sich die Gleichung (24) in die folgende:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}}{\frac{\partial F}{\partial(1)}} = \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \zeta_\rho \left[\frac{\beta_1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q}{K}\right], \tag{25}$$

welche dadurch ausgezeichnet ist, dass sie einen den Gleichungen (9) im Art. 18 völlig analogen Bau besitzt. Wegen der Bedeutung dieser Gleichungen erkennt man hieraus, dass, wenn an Stelle der gegebenen Gleichung die neue:

$$F = 0$$

gegeben wäre, das neue Problem die Wurzeln

$$\lambda_1^K,\ \lambda_2^K,\ldots\lambda_q^K$$

gegen die Grössen

$$\zeta_1,\ \zeta_2,\ldots,\zeta_q$$

umgetauscht, alle anderen λ-Werthe aber, und zwar in derselben Vertheilung wie beim gegebenen Probleme, beibehalten hat. Ausserdem ist die Zerlegung (18) im Art. 21 bei F für alle Complexionen $p$ter Ordnung ausführbar, da die Gleichung (24) ebenfalls für alle Complexionen $p$ter Ordnung giltig ist.

Wir nehmen nun an, dass dies auch bei der Zerlegung (19) desselben Artikels der Fall sei, dann ist für alle $\beta_1+\ldots+\beta_\rho+\ldots+\beta_q = p$:

$$\left[\beta_1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q\right]_{K} = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^L \left[\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q\right]_{K,\,L}$$

und damit folgt:

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}}{\dfrac{\partial F}{\partial(1)}} = \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \zeta_\rho \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^L \left[\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q\right]_{K,\,L} = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^L \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \zeta_\rho \left[\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q\right]_{K,\,L}$$

worin L alle von K verschiedenen Indices bedeuten kann. Ausser den Grössen ζ kann also jeder Wurzelcomplex des gegebenen Problems, den mit dem Index K versehenen ausgenommen, zur Construction der dem Probleme $F=0$ entsprechenden Differentialsysteme verwendet werden, doch sind hierbei die unbestimmten Factoren gleich

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=q} \zeta_\rho \left[\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q\right]_{K,\,L}$$

zu setzen. Sonach folgt aus der obigen Aufstellung insbesondere das System:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_2}{dx_1} = \lambda_2^L,\ldots\ldots,\frac{dx_q}{dx_1} = \lambda_q^L \\ &\frac{d}{dx_1}(\alpha_1,\ldots\alpha_\iota,\ldots,\alpha_q) = \sum_{\iota=1}^{\iota=q} (\alpha_1,\ldots,\alpha_\iota+1,\ldots,\alpha_q)\lambda_\iota^L,\quad \alpha_1+\ldots+\alpha_\iota+\ldots+\alpha_q < p. \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

$$\sum \frac{d}{dx_1}(\beta_1,\ldots\beta_\mu,\ldots,\beta_\rho) \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \zeta_\rho \left[\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q\right]_{K,\,L} = -\frac{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_\mu}\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial(1)}},\quad \beta_1+\ldots+\beta_\mu+\ldots+\beta_\rho+\ldots+\beta_q = p \quad (27)$$

Die Gleichungen (26) finden sich in derselben Form und mit derselben Bedeutung der gebrauchten Zeichen auch im Systeme (L) des Problems $\varphi=0$; die Gleichungen (27) verwandeln sich aber, wenn man für die ζ wieder ihre Werthe restituirt, in die folgenden:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_\mu}\right) + \sum \frac{d}{dx_1}(\beta_1,\ldots,\beta_\mu,\ldots,\beta_q) \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \frac{\left[\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q\right]_{K,\,L}}{\left[\rho\right]_{K}} \cdot \frac{\partial F}{\partial(\rho)} = 0,$$

welche endlich, wenn man, was offenbar berechtigt ist, das Zeichen

$$\frac{d}{dx_1} \quad \text{durch } D_L$$

ersetzt und bemerkt, dass

$$\left[\rho\right]_{K} = \lambda_\rho^L \left[\rho\right]_{K,\,L},$$

in die Relationen

$$\binom{L,\,K}{\mu}(F) = 0$$

übergehen. Durch die Gleichungen (26) und (27) wird eine Operation definirt, welche häufig wiederkehren wird, so dass wir sie mit einem eigenen Namen bezeichnen wollen. Da es jedesmal nur auf die wesentlichen Integral des betreffenden Systems ankommt, soll also diese Operation als „die Zerlegung der Function F in ihre wesentlichen Integrale nach dem Systeme (L)“ bezeichnet werden. Die Integration des Systems (K) im Art. 21 bewirkt demgemäss die Zerlegung der Function φ in ihre wesentlichen Integrale nach dem System (K) u. s. w.

Da nun φ in q wesentliche Integrale zerlegt werden kann, und jedes dieser Integrale der Gleichung (24) identisch genügt, so gilt die vorige Entwicklung für alle q wesentlichen Integrale. Bezeichnen wir also die q wesentlichen Integrale des Systems (K) durch

$$K_1,\ K_2, \dots K_\sigma, \dots K_q,$$

so ändern sich gleichzeitig mit F auch die Grössen ζ, so dass wir dieselben mit doppeltem Index versehen müssen. Demnach setzen wir:

$$\zeta_{\sigma,\rho} = \frac{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(\rho)}}{\begin{bmatrix}\rho\\K\end{bmatrix}\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(1)}}$$

und erhalten nun neben den Gleichungen (26) die folgenden:

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=q} \zeta_{\sigma,\rho} \sum \begin{bmatrix}\beta_1, \dots, \beta_\rho - 1, \dots, \beta_\varsigma - 1, \dots, \beta_q\\ K,L\end{bmatrix} D_L(\beta_1, \dots, \beta_q) = \frac{\left(\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial x_\varsigma}\right)}{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(1)}}$$

und diese geben mit Hilfe der Grössen $Z_{\sigma,\tau}$, welche die Eigenschaft haben, dass

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=q} \zeta_{\sigma,\rho} Z_{\sigma,\tau} = \begin{cases}0, \text{ wenn } \tau \gtrless \rho.\\ 1, \text{ wenn } \rho = \tau,\end{cases}$$

die Relationen:

$$\sum \begin{bmatrix}\beta_1, \dots, \beta_\mu - 1, \dots, \beta_\rho - 1, \dots, \beta_q\\ KL\end{bmatrix} D_L(\beta_1 \dots \beta_\mu \dots \beta_\rho \dots \beta_q) = -\sum_{\sigma=1}^{\sigma=q} Z_{\sigma,\rho} \frac{\left(\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(1)}} \tag{28}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen ändern ihren Werth nicht, wenn μ mit ρ vertauscht wird; dasselbe ist jedoch bei der rechten Seite im Allgemeinen nicht der Fall. Um dies zu zeigen, bemerken wir, dass wegen der Definition der K die Identität besteht.

$$0 \equiv \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^K \left(\frac{\left(\dfrac{\partial K^\sigma}{\partial x_\mu}\right)}{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(1)}} - \frac{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right)}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial(\mu)}} \frac{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(\mu)}}{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(1)}} \right)$$

Multiplicirt man dieselbe mit $Z_{\sigma,\rho}$ und summirt bezüglich des σ zwischen den Grenzen 1 und q, so folgt:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^K \sum_{\sigma=1}^{\sigma=q} Z_{\sigma\rho} \frac{\left(\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(1)}} = \frac{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\rho}\right)}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial(1)}}$$

und durch die Supposition:

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=q} z_{\sigma\rho} \cdot \frac{\left(\frac{\partial K_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}{\frac{\partial K_\sigma}{\partial(1)}} = A(\mu, \rho) \tag{α}$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^K A(\mu,\rho) = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\rho}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(1)}}.$$

Augenscheinlich ist nun $A(\mu, \rho)$ der Ausdruck, um den es sich handelt, der also die Eigenschaft besitzen soll, bei Vertauschung der μ mit ρ unverändert zu bleiben. Nehmen wir an, das letztere sei thatsächlich der Fall, so kann in der letzten Gleichung $A(\rho, \mu)$ statt $A(\mu, \rho)$ gesetzt werden, und sie lautet dann:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=h} \lambda_\mu^K A(\rho, \mu) = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\rho}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(1)}} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\rho}\right) = \sum_\mu \frac{A(\rho, \mu)}{\begin{vmatrix}\mu\\K\end{vmatrix}} \frac{\partial\varphi}{\partial(\mu)}. \tag{β}$$

Aus (α) folgt nun

$$\left(\frac{\partial K_\sigma}{\partial x_\mu}\right) = \sum_{\tau=1}^{\tau=q} \frac{A(\mu, \tau)}{\begin{vmatrix}\tau\\K\end{vmatrix}} \frac{\partial K_\sigma}{\partial(\tau)}$$

setzen wir also noch zur Abkürzung

$$\frac{A(\mu, \tau)}{\begin{vmatrix}\tau\\K\end{vmatrix}} = B(\mu, \tau),$$

so erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right) &= B(\mu, 1)\frac{\partial\varphi}{\partial(1)} + B(\mu, 2)\frac{\partial\varphi}{\partial(2)} + \ldots + B(\mu, q)\frac{\partial\varphi}{\partial(q)}\\
\left(\frac{\partial K_1}{\partial x_\mu}\right) &= B(\mu, 1)\frac{\partial K_1}{\partial(1)} + B(\mu, 2)\frac{\partial K_1}{\partial(2)} + \ldots + B(\mu, q)\frac{\partial K_1}{\partial(q)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\left(\frac{\partial K_q}{\partial x_\mu}\right) &= B(\mu, 1)\frac{\partial K_q}{\partial(1)} + B(\mu, 2)\frac{\partial K_q}{\partial(2)} + \ldots + B(\mu, q)\frac{\partial K_q}{\partial(q)}.
\end{aligned}$$

Die Voraussetzung, dass

$$A(\mu, \rho) = A(\rho, \mu)$$

hat also die Relation:

$$\begin{vmatrix}
\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right), & \frac{\partial\varphi}{\partial(1)}, & \frac{\partial\varphi}{\partial(2)}, & \ldots, & \frac{\partial\varphi}{\partial(q)}\\
\left(\frac{\partial K_1}{\partial x_\mu}\right), & \frac{\partial K_1}{\partial(1)}, & \frac{\partial K_1}{\partial(2)}, & \ldots, & \frac{\partial K_1}{\partial(q)}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\left(\frac{\partial K_q}{\partial x_\mu}\right), & \frac{\partial K_q}{\partial(1)}, & \frac{\partial K_q}{\partial(2)}, & \ldots, & \frac{\partial K_q}{\partial(q)}
\end{vmatrix} = 0$$

zur Folge, welche beweist, dass die gemachte Voraussetzung nur dann bestehen kann, wenn φ ohne Rücksicht auf die Beziehungen des Problems, identisch als Function der wesentlichen Integrale K ausgedrückt werden kann. Dies setzt nun wieder voraus, dass φ selbst ein Integral des Systems (K) sei, oder mit anderen Worten, dass die Gleichungen (18), Art. 21, für alle Complexionen $p$ter Ordnung befriedigt sind.

Wir setzen für die folgenden Entwicklungen fest, dass die Zerlegung des Art. 21 durch alle Stufen möglich sei, dann sind selbstverständlich auch alle bisher nothwendig gewordenen Voraussetzungen erfüllt, und die Gleichungen (28) entstehen eindeutig aus der Zerlegung aller wesentlichen Integrale K in ihre wesentlichen Integrale nach dem Systeme (L). Die Anzahl dieser Gleichungen ist gleich der Anzahl der Combinationen zweiter Classe mit Wiederholungen aus q Elementen, das ist

$$\binom{q+1}{2}.$$

Die Gleichungen (26) und (28) zusammengenommen bilden nun ein System von Differentialgleichungen, in welchem das System (L) unseres Hauptproblems mit enthalten ist. Multipliciren wir nämlich die Gleichungen (28) mit λ_μ^K und summiren für alle Werthe von $\mu = 1$ bis $\mu = q$, so folgt:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^K \sum \left[{\beta_1,\ldots,\beta_\mu \quad 1,\ldots,\beta_\rho - 1,\ldots,\beta_q \atop K,L}\right] D_L(\beta_1,\ldots,\beta_\mu,\ldots,\beta_\rho,\ldots,\beta_q) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=q} Z_{\sigma\rho} \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^K \frac{\left(\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(1)}}$$

Da aber die K Integrale des Systems (K) sind, ist:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^K \frac{\left(\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(1)}} = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \frac{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right)}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial(1)}} \cdot \zeta_{\sigma,\mu}$$

also wird der Ausdruck rechter Hand gleich

$$-\frac{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\rho}\right)}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial(1)}}.$$

Links erhält man durch Änderung der Summationsordnung

$$\sum D_L(\beta_1,\ldots,\beta_\mu,\ldots,\beta_\rho,\ldots,\beta_q) \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^K \left[{\beta_1,\ldots,\beta_\mu \quad 1,\ldots,\beta_\rho - 1,\ldots,\beta_q \atop KL}\right]$$

und in Folge der obigen Voraussetzungen:

$$\sum D_L(\beta_1,\ldots,\beta_\mu,\ldots,\beta_\rho,\ldots,\beta_q) \left[{\beta_1,\ldots,\beta_\rho - 1,\ldots,\beta_q \atop L}\right]$$

durch diese Operationen folgen also die Gleichungen:

$$\sum \left[{\beta_1,\ldots,\beta_\rho - 1,\ldots,\beta_q \atop L}\right] D_L(\beta_1,\ldots,\beta_\rho,\ldots,\beta_q) = -\frac{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\rho}\right)}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial(1)}}, \quad \rho = 1, 2, \ldots, q,$$

welche in Verbindung mit den Gleichungen (26) eben das System (L) constituiren. Also sind die Gleichungen (28) eine Erweiterung des Systems (L), und zwar sind:

$$\binom{q+1}{2} - q = \binom{q}{2}$$

neue Gleichungen hinzugekommen. Unter den Integralen des Systems (26), (28) befinden sich somit auch die q a priori vorhanden gewesenen wesentlichen Integrale des Systems (L), welche im Vereine mit den $\binom{q}{2}$ neuen wesentlichen Integralen die Gesammtheit der wesentlichen Integrale des Systems (26), (28) repräsentiren.

Zerlegt man also die gegebene Gleichung in ihre wesentlichen Integrale nach dem System (K) und die letzteren wieder in deren wesentliche Integrale nach dem System (L), so entstehen $\binom{q+1}{2}$ Functionen, aus denen 1. ihrer Definition zufolge die wesentlichen Integrale des Systems (K) und 2. nach dem eben Bewiesenen auch die wesentlichen Integrale des Systems (L) zusammengesetzt werden können. Die Differentialgleichungen, welche diese Functionen definiren, machen identisch:

$$\binom{L,K}{i}(K_\sigma) = 0.$$

Es sei nun M_σ ein wesentliches Integrale des Systems (M), so bewirken die Gleichungen:

$$D_K x_2 = \lambda_2^K, \ldots\ldots, D_K x_q = \lambda_q^K,$$

$$\left.\begin{array}{l} D_K(\alpha_1 \ldots, \alpha_\mu \ldots \alpha_q) = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} (\alpha_1 \ldots, \alpha_\mu + 1 \ldots, \alpha_q)\lambda_\mu^K, \alpha_1 + \ldots + \alpha_\mu + \ldots \alpha_q < p \\ \sum D_K(\beta_1 \ldots \beta_\mu \ldots \beta_i \ldots \beta_q) \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \eta_{\sigma\mu}\left[\beta_1 \ldots \beta_i - \underset{NK}{1 \ldots} \beta_\mu - 1, \ldots \beta_q\right] = \dfrac{\left(\dfrac{\partial M_\sigma}{\partial x_i}\right)}{\dfrac{\partial M_\sigma}{\partial(1)}}, \beta_1 + \ldots + \beta_i + \ldots + \beta_\mu + \beta_q = p, \end{array}\right\} \quad (29)$$

in welchen

$$\eta_{\sigma\mu} = \frac{\dfrac{\partial M_\sigma}{\partial(\mu)}}{\left[\begin{matrix}\mu \\ M\end{matrix}\right]\dfrac{\partial M_\sigma}{\partial(1)}} \tag{30}$$

zu verstehen ist, die Zerlegung von M_σ in seine wesentlichen Integrale nach dem System (K). Sind also die Functionen:

$$M_{\sigma,\tau}$$

die wesentlichen Integrale dieses Systems (29), so muss jedes derselben identisch den Gleichungen:

$$0 = \sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i^k \left\{\left(\frac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial x_i}\right) - \frac{\left(\dfrac{\partial M_\sigma}{\partial x_i}\right)}{\dfrac{\partial M_\sigma}{\partial(i)}} \frac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(i)}\right\} \tag{31}$$

und

$$0 = \frac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(\beta_1 \ldots : \beta_h)} - \sum_{i=1}^{i=q} \frac{\dfrac{\partial M_{\sigma\tau}}{\partial(i)}}{\eta_{\sigma,i}\left[\begin{matrix} i \\ MK\end{matrix}\right]} \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \eta_{\sigma\mu}\left[\beta_1 \ldots \beta_i - \underset{M.K}{1 \ldots,} \beta_\mu - 1, \ldots, \beta_q\right] \tag{32}$$

Genüge leisten.

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit

$$\frac{\partial M_\sigma}{\partial M_{\sigma\tau}}$$

und summirt über τ von $\tau = 1$ bis $\tau = q$, so ergibt sich, da M_σ eine Function der wesentlichen Integrale $M_{\sigma,\tau}$, und daher:

$$\frac{\partial M_\sigma}{\partial(\beta_1 \ldots, \beta_q)} = \sum_{\tau=1}^{\tau=q} \frac{\partial M_\sigma}{\partial M_{\sigma,\tau}} \frac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(\beta_1 \ldots, \beta_q)}$$

sein muss,

$$\frac{\partial M_\sigma}{\partial(\beta_1 \ldots, \beta_q)} = \sum_{\tau=1}^{\tau=q} \frac{\partial M_\sigma}{\partial M_{\sigma,\tau}} \sum_{i=1}^{i=q} \frac{\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(i)}}{\eta_{\sigma i}\left[\begin{matrix} i \\ MK\end{matrix}\right]} \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \eta_{\sigma,\mu}\left[\beta_1 \ldots, \beta_i - \underset{MK}{1 \ldots,} \beta_\mu - 1, \ldots, \beta_q\right]$$

und durch Änderung der Summationsordnung:

$$\frac{\partial M_\sigma}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \gamma_{\sigma\mu} \sum_{\iota=1}^{\iota=q} \frac{\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_\iota-1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q\\ MK\end{matrix}\right]}{\gamma_{\sigma\iota}\left[\begin{matrix} i \\ MK\end{matrix}\right]} \sum_{\tau=1}^{\tau=q} \frac{\partial M_\sigma}{\partial M_{\sigma,\tau}} \cdot \frac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(i)}$$

das ist

$$= \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \gamma_{\sigma\mu} \sum_{\iota=1}^{\iota=q} \frac{\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_\iota-1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q\\ MK\end{matrix}\right]}{\gamma_{\sigma\iota}\left[\begin{matrix} i \\ MK\end{matrix}\right]} \frac{\partial M_\sigma}{\partial(i)}.$$

Wegen der Bedeutung von $\gamma_{\sigma\iota}$ wird die rechte Seite dieser Gleichung auch

$$= \frac{\partial M_\sigma}{\partial(1)} \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \gamma_{\sigma\mu} \sum_{\iota=1}^{\iota=q} \lambda_\iota^K \left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_\iota-1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q\\ MK\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{\partial M_\sigma}{\partial(1)} \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \gamma_{\sigma\mu} \left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q\\ M\end{matrix}\right]$$

also schliesslich:

$$= \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \frac{\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q\\ M\end{matrix}\right]}{\left[\begin{matrix}\mu\\ M\end{matrix}\right]} \frac{\partial M_\sigma}{\partial(\mu)}.$$

Die Gleichungen (29) ersetzen sonach die Beziehungen:

$$\frac{\partial M_\sigma}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \frac{\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q\\ M\end{matrix}\right]}{\left[\begin{matrix}\mu\\ M\end{matrix}\right]} \frac{\partial M_\sigma}{\partial(\mu)}.$$

da sie dieselben zur nothwendigen Folge haben.

Nun setzen wir in (32)

$$\vartheta_{\sigma,\tau,\iota} = \frac{\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(i)}}{\gamma_{\sigma\iota}\left[\begin{matrix} i\\ MK\end{matrix}\right]\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(1)}}$$

so dass dieselben die Form

$$\frac{\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}}{\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(1)}} = \sum_{\iota=1}^{\iota=q} \vartheta_{\sigma,\tau,\iota} \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \gamma_{\sigma,\mu} \left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_\iota-1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q\\ MK\end{matrix}\right]$$

annehmen und benützen die Relationen:

$$\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_\iota-1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q\\ MK\end{matrix}\right] = \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \lambda_\rho^L \left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q\\ MKL\end{matrix}\right],$$

um die vorigen in die folgenden zu transformiren:

$$\frac{\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}}{\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(1)}} = \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \lambda_\rho^L \sum_{\iota=1}^{\iota=q} \vartheta_{\sigma,\tau,\iota} \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \gamma_{\sigma,\mu} \left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_\iota-1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q\\ MLK\end{matrix}\right].$$

Diese zeigen, welche Werthe bei einer neuerlichen Zerlegung der Integrale $M_{\sigma,\tau}$ in wesentliche Integrale des Systems (L) als unbestimmte Factoren auftreten und es entsteht das Differentialsystem:

$$\left.\begin{aligned}
&D_L x_2 = \lambda_2^L, \ldots, D_L x_q = \lambda_q^L \\
&D_L(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_q) = \sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i^L (\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_q), \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_i + \ldots + \alpha_q < p \\
&\sum D_L(\beta_1, \ldots, \beta_q) \sum_{i=1}^{i=q} \vartheta_{\sigma,\tau,i} \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \varkappa_{\sigma,\mu} \left|\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\mu - 1, \ldots, \beta_\rho - 1, \ldots, \beta_q\right|_{MLK} = - \frac{\left(\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial x_\rho}\right)}{\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(1)}},
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

also endlich, wenn

$$\Theta_{\sigma,\tau,\omega}$$

solche Grössen sind, dass

$$\sum_{\tau=1}^{\tau=q} \vartheta_{\sigma,\tau,i} \Theta_{\sigma,\tau,\omega} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } \omega \gtrless i \\ 1, \text{ wenn } \omega = i, \end{cases}$$

$$\sum D_L(\beta_1, \ldots, \beta_q) \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \varkappa_{\sigma,\mu} \left|\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\mu - 1, \ldots, \beta_\rho - 1, \ldots, \beta_q\right|_{MKL} = - \sum_{\tau=1}^{\tau=q} \Theta_{\sigma,\tau,i} \frac{\left(\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial x_\rho}\right)}{\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(1)}}. \tag{34}$$

Multipliciren wir nun die letzte Gleichung mit λ_ρ^K und summiren bezüglich des ρ von $\rho = 1$ bis $\rho = q$, so folgt:

$$\sum D_L(\beta_1, \ldots, \beta_q) \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \varkappa_{\sigma,\mu} \left[\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\mu - 1, \ldots \beta_q\right]_{ML} = - \sum_\tau \frac{\Theta_{\sigma,\tau,i}}{\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(1)}} \cdot \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \lambda_\rho^K \left(\frac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial x_\rho}\right),$$

worin die rechte Seite wegen Gleichungen (31) und durch die Einsetzung der Werthe von $\vartheta_{\sigma,\tau,i}$ und $\varkappa_{\sigma,\mu}$ successive in

$$- \frac{\left(\dfrac{\partial M_\sigma}{\partial x_i}\right)}{\dfrac{\partial M_\sigma}{\partial(1)}}$$

übergeht. Ersetzt man nun auch links $\varkappa_{\sigma,\mu}$ durch seinen weiter oben angegebenen Werth und vereinigt alle Glieder der Gleichung auf einer Seite, so folgt:

$$\left(\frac{\partial M_\sigma}{\partial x_i}\right) + \sum D_L(\beta_1, \ldots, \beta_q) \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \frac{\left[\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\mu - 1, \ldots, \beta_q\right]_{ML}}{\lambda_\mu^L \left|\begin{matrix}\mu \\ ML\end{matrix}\right|} \cdot \frac{\partial M_\sigma}{\partial(\mu)} = 0, \text{ das heisst:}$$

$$\binom{L, M}{i}(M_\sigma) = 0.$$

Variirt man in (34) σ und τ der Reihe nach in $1, 2, \ldots, q$, so ergibt eine Reihe von Schlüssen, welche den obigen ganz analog ist, dass sich aus den so erhaltenen Gleichungen eindeutig die Relationen:

$$\sum \left[\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\mu - 1, \ldots, \beta_\rho - 1, \beta_q\right]_{MKL} D_L(\beta_1, \ldots, \beta_q) = - \sum_{\sigma=1}^{\sigma=q} \text{H}_{\sigma,\mu} \sum_{\tau=1}^{\tau=q} \Theta_{\sigma,\tau,i} \frac{\left(\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial x_\rho}\right)}{\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(1)}}. \tag{35}$$

ergeben, worin die Grössen $H_{\sigma,\mu}$ die im gegenwärtigen Falle eintretenden $Z_{\sigma,\mu}$ bedeuten. Dieselben bleiben bei einer Vertauschung von i, μ und ρ untereinander ungeändert und zwar auf beiden Seiten, wenn alle Integrale M_σ identisch durch die wesentlichen Integrale $M_{\sigma,\tau}$ dargestellt werden können, was nach den

Voraussetzungen, die den vorliegenden Untersuchungen zu Grunde liegen, ohnehin der Fall sein muss. Die Anzahl dieser Gleichungen ist sonach gleich der Anzahl der Combinationen der dritten Classe mit Wiederholungen aus q Elementen, das ist

$$\binom{q+2}{3}.$$

Es ist nicht schwer zu beweisen, dass in dem System (26), (35) das System (L) des ursprünglichen Problems wieder enthalten ist, so dass das letztere zu $\binom{q+2}{3}$ Gleichungen ergänzt worden ist.

Da die Ausdrücke, auf welche sich unsere Schlüsse bezogen haben, auch wenn man in der begonnenen Weise weiter schreitet, stets dieselbe Form behalten, so ist klar, wie sich diese Resultate erweitern lassen: sie enthalten die Hilfsmittel, welche uns endlich die Befriedigung der aufgestellten Forderungen ermöglichen.

24.

Wir halten vorderhand noch an den Voraussetzungen fest, welche den Entwicklungen des vorigen Artikels zu Grunde liegen und ziehen also nur solche Gleichungen in Betracht, bei denen die am Schlusse des Art. 21 angeführte Zerlegung durch alle Stufen durchgeführt werden kann. In diesem Falle kann die allgemeine Lösung sofort gefunden werden.

Wir bezeichnen nach den Ergebnissen des Art. 20, welchen zufolge und zwar, wie leicht ersichtlich, in jedem Systeme — je $(q-1)$ Integrations-Constanten unabhängig sind, $(q-1)$ Integrale der zweiten Gruppe in irgend einem Systeme, also etwa im Systeme (K) durch

$$w_2^K,\ w_3^K,\ \ldots,\ w_q^K$$

und setzen alle Integrale, aus welchem Systeme immer sie herrühren mögen, in der Form:

$$W^K - \Phi^K(w_2^K, w_3^K, \ldots w_q^K) = 0$$

voraus, in der Absicht, die Variation δF in Gleichung (25) des Art. 22 von vornherein gleich Null zu machen.

Setzen wir nun in dieser Gleichung $L = II$ und für F ein wesentliches Integrale des Systems (II), so verschwinden in der rechten Seite die Variationen der Grössen $p$ter Ordnung. Stellen wir dann die Gleichungen

$$\binom{I,\,II}{i}(F) = 0$$

auf, so verschwindet die rechte Seite, da δF wegen der besonderen Form der Integrale von vornherein verschwindet, und das System (I) wird um $\binom{q}{2}$ Gleichungen vermehrt. Man kann also durch diesen Vorgang die rechte Seite $q$mal der Null gleich machen und demzufolge q Gleichungen von der Art erzielen, wie sie zum Schlusse des Art. 22 postulirt worden sind.

Nehmen wir ein wesentliches Integrale des Systems (III) und zerlegen dasselbe zunächst in seine wesentlichen Integrale nach dem Systeme (II), so bewirken die hierauf bezüglichen Gleichungen, dass in der Gleichung (23) die Variationen $p$ter Ordnung verschwinden, da durch die aufgestellten Gleichungen die Coëfficienten derselben identisch der Null gleich werden, wie im vorigen Artikel bewiesen worden ist. Durch diese Zerlegung erhalten wir $\binom{q+1}{2}$ Functionen, welche untereinander unabhängig sind und aus denen sich die wesentlichen Integrale des Systems (III) zusammensetzen lassen. Aber jedes andere wesentliche Integrale des Systems (III) muss, wie aus dem Charakter eines vollständigen Integralsystems ohneweiters folgt, aus eben denselben Functionen zusammengesetzt werden können. Fügen wir also noch die Anforderung bei, diese $\binom{q+1}{2}$ wesentlichen Integrale der zweiten Stufe noch weiter in ihre wesentlichen Integrale nach dem Systeme (I) zu zerlegen, so wird nach dem Bewiesenen:

$$\binom{I,\,III}{i}(F) = 0$$

und in der rechten Seite besitzen alle Theile den Werth Null. Die linke Seite aber zerfällt in $\binom{q+1}{2}$ Theile von derselben Form, deren jeder für sich gleich Null sein muss, da sie mit willkürlichen Bestandtheilen multiplicirt erscheinen. Bei diesem Vorgange sind

$$\binom{q+1}{2}$$

Gleichungen der verlangten Form entstanden und gleichzeitig ist das System (I) auf

$$(q-1)+\binom{q+p-1}{p-1}+\binom{q+2}{3}$$

Gleichungen vervollständigt worden.

In dieser Weise fortschreitend erkennt man, dass durch successive Zerlegung der wesentlichen Integrale vom Systeme (P) angefangen bis zum System (I) die linke Seite der Gleichung (23) in

$$\binom{q-1+p-1}{q-1}$$

Theile zerfällt, deren jeder, sowie der Ausdruck, aus dem sie entstanden, bezüglich der Z linear ist und von denen jeder einzelne gleich Null werden muss, da sie mit willkürlichen Factoren multiplicirt erscheinen. Da nun durch diesen Vorgang so viele Gleichungen gewonnen werden als Z vorhanden sind, genügt es, zu denselben jene Gleichungen hinzuzufügen, welche aus den noch vorhandenen

$$\binom{q-1+p}{p-1}$$

von einander unabhängigen Integralen der zweiten Gruppe irgend eines Systems entstehen, um endlich alle Gleichungen zu haben, welche erfordert werden. Da die letzteren dann untereinander unabhängig sind, so folgt aus denselben ohneweiters:

$$P=0,\ Z=0$$

und die Integrabilitätsbedingungen sind erfüllt. Durch diese Rechnungen ist gleichzeitig das System (I) auf

$$(q-1)+\binom{q+p-1}{p-1}+\binom{q-1+p}{p}=\binom{q+p}{p}+(q-1)$$

Gleichungen angewachsen. Es ist also jetzt complet, denn es besteht aus ebensoviel Gleichungen als Dependente in ihm enthalten sind. Die Integralgleichungen desselben verwandeln nun die Gleichungen $P=0$ in Pfaff'sche Probleme und die Integration dieser letzteren ergibt endlich das definitive Integralsystem.

In den Fällen, bei welchen die bisher festgehaltenen Voraussetzungen nicht eintreffen, kann man in allen zu integrirenden Systemen die Zerlegung der Klammerausdrücke auf diejenigen Complexionen beschränken, für welche sie in dem gegebenen Stadium der Rechnung möglich ist und im Übrigen den soeben beschriebenen Rechnungsvorgang beibehalten. Dies hat zur Folge, dass die erhaltenen Integrale nicht, wie gefordert werden muss, als Functionen ihrer Unter Intergrale dargestellt werden können. Man wird vielmehr durch Einsetzung der Integralwerthe in jene wesentlichen Integrale, deren Zerlegung sie ihren Ursprung verdanken, Bedingungsgleichungen für gewisse Grössen:

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q) \text{ der } p\text{ten Ordnung}$$

erhalten. Diese Bedingungsgleichungen erstrecken sich nicht bloss auf diejenigen Grössen dieser Art, welche den Rang Null besitzen, da schon durch die zweite Zerlegung alle Grössen nullten Ranges von der Form

$$\begin{bmatrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q \\ K\end{bmatrix},\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_q=p-1$$

im Allgemeinen aus den Klammerausdrücken der nächst höheren Stufe nicht mehr zusammengesetzt werden können und daher auch von den Ausdrücken

$$[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q],\ \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_q=p$$

einige, deren Rang von Null verschieden ist, nicht mehr jenen Werth annehmen, der ihnen der gegebenen Gleichung wegen zukommen sollte. Wir entwickeln daher, nachdem sämmtliche λ-Werthe berechnet und in p Systeme eingereiht worden sind, das Product

$$\Big(\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^I \xi_\mu\Big)\ldots\Big(\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^{II} \xi_\mu\Big)\ldots\Big(\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^P \xi_\mu\Big) = \sum \{\beta_1, \ldots, \beta_q\} \xi_1^{\beta_1} \ldots \xi_q^{\beta_q}, \; \beta_1 + \ldots + \beta_q = p$$

und legen die so erhaltenen Ausdrücke $\{\,\}$ der Rechnung zu Grunde. Mit diesen Ausdrücken, welche die erforderlichen Zerlegungen durch alle Stufen hindurch gestatten, kann nun der oben beschriebene Vorgang vollständig durchgeführt werden. Die solcherart erhaltenen Werthe der Variabeln erfüllen nun ihrerseits die gegebene Gleichung ebenfalls nicht und wir erhalten durch Einsetzung derselben in die gegebene Gleichung abermals eine Bedingungsgleichung. Da nun aber klar ist, dass von den Ausdrücken $[\beta_1, \ldots, \beta_q]$ nur jene mit den gleichnamigen $\{\beta_1, \ldots, \beta_q\}$ nothwendig zusammenfallen müssen, welche zur Construction der Gleichungen (12) verwendet wurden, so folgt sofort, dass alle anderen $(\beta_1, \ldots, \beta_q)$, deren Complexion $\beta_1, \ldots, \beta_q$ nicht in den (12) auftritt, in die Bedingungsgleichung eintreten können. Es sind also gleichsam alle Bedingungsgleichungen des vorigen Falles in eine einzige zusammengeschoben worden; da aber die letztere willkürliche Functionen enthält, so zerfällt sie in mehrere Theile, deren jeder für sich gleich Null gemacht werden muss.

Bezeichnen wir nun, um kürzer reden zu können, diejenigen Complexionen für $\beta_1, \ldots, \beta_q$, für welche die Ausdrücke

$$\{\beta_1, \ldots, \beta_q\} \text{ mit den gleichnamigen } [\beta_1, \ldots, \beta_q]$$

nicht zusammenfallen, da die ihnen entsprechenden Grössen $(\beta_1, \ldots, \beta_q)$ gewissen Bedingungen unterliegen, als bedingte Complexionen, und setzen in (23) Art. 22 φ an Stelle von F, so werden die Ausdrücke $\binom{I, K}{i}(\varphi)$ identisch Null und es folgt:

$$\sum \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha_1 \ldots \alpha_q)} P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) + \frac{\partial\varphi}{\partial(1)} \sum \begin{Bmatrix}\gamma_1, \ldots, \gamma_q \\ I\end{Bmatrix} Z(\gamma_1 \ldots \gamma_q) =$$

$$-\sum \partial(\beta_1, \ldots, \beta_q) \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial(\beta_1 \ldots \beta_q)} - \sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i^I \begin{Bmatrix}\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_q \\ I\end{Bmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial(1)}\right\},$$

wie man übrigens durch directe Berechnung der Summe

$$\sum \begin{Bmatrix}\gamma_1 \ldots \gamma_q \\ I\end{Bmatrix} Z(\gamma_1 \ldots \gamma_q)$$

in Verbindung mit der Forderung, dass $\partial\varphi$ gleich Null sei, finden kann. Man erkennt hieraus, dass man die Bedingungsgleichung jederzeit dadurch erfüllen kann, dass man die bedingten Grössen $(\beta_1, \ldots, \beta_q)$ gleich absoluten Constanten setzt, welche letzteren übrigens, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, auch gleich Null gemacht werden können.

Was endlich die Form der Bedingungsgleichung anbelangt, so ist dieselbe augenscheinlich eine Beziehung zwischen den Ableitungen der in den letzten Integralgleichungen enthaltenen willkürlichen Functionen nach den dieselben constituirenden Argumenten:

$$w_2^I, \ldots, w_q^I; \ldots, w_2^{II}, \ldots, w_q^{II}; \ldots, w_2^P, \ldots, w_q^P;$$

zerfällt also im Allgemeinen in mehrere partielle Differentialgleichungen der $p$ten Ordnung, jedoch mit je $(q-1)$ Independenten. Die Bedingungsgleichung, respective die einzelnen Theile, in die sie zerlegt werden muss, haben also zur Folge, dass die eben genannten Argumente nicht mehr, wie früher, untereinander unabhängig, sondern in festen Verbindungen in die betreffenden willkürlichen Functionen eintreten, so dass diese letzteren im äussersten Falle in die Form:

$$\Phi_2(w_2) + \Phi_3(w_3) + \ldots + \Phi_q(w_q)$$

aufgelöst werden müssen.

Soll nun der in Art. 20 ausgesprochene Satz über die Anzahl der willkürlichen Functionen auch in diesem Falle seine Giltigkeit beibehalten, so müssen unter der Bezeichnung: „willkürliche Function der Argumente $w_2, \ldots, w_q$“ auch Functionen in aufgelöster Form verstanden werden oder mit anderen Worten, es müssen immer alle Bestandtheile, welche die Integrale $w_2, \ldots, w_q$ eines und desselben Systems enthalten, als eine einzige Function dieser Argumente angesehen werden. Da aber den gebrauchten Ausdrücken der eben präcisirte Sinn ohne Zwang beigelegt werden kann, so kann der citirte Satz in unveränderter Form aufrecht erhalten bleiben.

Wie weit die erwähnte Auflösung der Functionsform zu gehen hat und wie dieselbe zu vollziehen ist, hängt natürlich damit zusammen, wie weit und in welcher Art die Zerlegung des Art. 21 ausführbar ist und muss in jedem einzelnen Falle durch die Rechnung selbst gefunden werden.

Für die praktische Rechnung ist es nützlich zu bemerken, dass die Completirungsgleichungen der verschiedenen Systeme durch partielle Differentiation gewonnen werden können. Setzen wir, was zum Beweise genügt, voraus, dass das wesentliche Integrale K_σ des Systems (K) von den einzifferigen Grössen $p$ter Ordnung nur (σ) enthalte und schreiben für alle Fälle die Klammern $\}\{$ anstatt der $|\ |$, so folgt aus den Gleichungen (24) des Art. 23:

$$\frac{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_q)}}{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(\sigma)}} = \frac{\left\}\begin{matrix}\beta_1, \ldots, \beta_\sigma - 1, \ldots, \beta_q \\ K\end{matrix}\right\{}{\left\}\begin{matrix}\sigma \\ K\end{matrix}\right\{}.$$

Besitzt also, wie überall in den Schlussgleichungen K_σ die Form:

$$K_\sigma = W_\sigma - \Phi(w_2^K, \ldots, w_q^K) = 0,$$

so folgt durch partielle Ableitung nach x_i

$$0 = \left(\frac{\partial K_\sigma}{\partial x_i}\right) + \sum \frac{\partial K_\sigma}{\partial(\sigma)} \frac{\left\}\begin{matrix}\beta_1, \ldots, \beta_\sigma - 1, \ldots, \beta_q \\ K\end{matrix}\right\{}{\left\}\begin{matrix}\sigma \\ K\end{matrix}\right\{} \cdot (\beta_1, \ldots, \beta_\sigma, \ldots, \beta_i + 1, \ldots, \beta_q)$$

und wegen:

$$\left\}\begin{matrix}\beta_1, \ldots, \beta_\sigma - 1, \ldots, \beta_q \\ K\end{matrix}\right\{ = \sum_{\nu=1}^{\nu=q} \lambda_\nu^L \left\}\begin{matrix}\beta_1, \ldots, \beta_\nu - 1, \ldots, \beta_\sigma - 1, \ldots, \beta_q \\ K, L\end{matrix}\right\{,$$

welche Gleichung nun für alle Complexionen und zwar in jeder Stufe richtig ist, auch

$$0 = \left(\frac{\partial K_\sigma}{\partial x_i}\right) + \sum \frac{\partial K_\sigma}{\partial(\sigma)} \frac{(\beta_1, \ldots, \beta_\sigma, \ldots, \beta_i + 1, \ldots, \beta_q)}{\left\}\begin{matrix}\sigma \\ K\end{matrix}\right\{} \sum_{\nu=1}^{\nu=q} \lambda_\nu^L \left\}\begin{matrix}\beta_1, \ldots, \beta_\nu - 1, \ldots, \beta_\sigma - 1, \ldots, \beta_q \\ KL\end{matrix}\right\{.$$

$$\beta_1 + \ldots + \beta_\nu + \ldots + \beta_\sigma + \ldots + \beta_i + \ldots + \beta_q = p.$$

Diese Gleichung kann auch in der Form:

$$0 = \left(\frac{\partial K_\sigma}{\partial x_i}\right) + \sum \frac{\partial K_\sigma}{\partial(\sigma)} \frac{\left\}\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, \ldots, \alpha_\sigma - 1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_q \\ KL\end{matrix}\right\{}{\left\}\begin{matrix}\sigma \\ K\end{matrix}\right\{} \sum_{\nu=1}^{\nu=q} \lambda_\nu^L (\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu + 1, \ldots, \alpha_\sigma, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_q)$$

$$= \left(\frac{\partial K_\sigma}{\partial x_i}\right) + \sum \frac{\partial K_\sigma}{\partial(\sigma)} \frac{\left\}\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, \ldots, \alpha_\sigma - 1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_q \\ KL\end{matrix}\right\{}{\left\}\begin{matrix}\sigma \\ K\end{matrix}\right\{} D_L(\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, \ldots, \alpha_\sigma, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_q),$$

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu + \ldots + \alpha_\sigma + \ldots + \alpha_i + \ldots + \alpha_q = p - 1$$

geschrieben werden und die letzte ist unmittelbar identisch mit:

$$0 = \left(\frac{\partial K_\sigma}{\partial x_i}\right) + \sum D_L(\beta_1,\ldots,\beta_\rho,\ldots,\beta_\sigma,\ldots,\beta_i,\ldots,\beta_q)\left\{ \binom{\beta_1,\ldots,\beta_\rho,\ldots,\beta_\sigma-1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_q}{KL} - \lambda_\sigma^L \left\{ {\sigma \atop KL} \right\} \right\} \frac{\partial K_\sigma}{\partial(\sigma)},$$

das ist mit der Gleichung

$$0 = \binom{LK}{i}(K_\sigma)$$

wie sie sich bei den gemachten Voraussetzungen über K_σ ergeben würde. Hiemit ist zugleich die aufgestellte Behauptung bewiesen.

In allen Integrationen, welche bei der successiven Construction des definitiven Intergralsystems zu vollziehen sind, sind gewisse Ableitungen $p$ter Ordnung als unbestimmt anzusehen, was zur Folge hat, dass dieselben in die Integralgleichungen im Allgemeinen nicht nur als Functionsargumente im gewöhnlichen Sinne, sondern auch als Integranden unter Quadraturen eintreten. Es ist also nothwendig, zu zeigen, wie solche Quadraturen sich Differentiationen gegenüber, welche einem anderen Systeme angehören, verhalten. Es genügt hiebei, zu zeigen, wie die partielle Differentiation auszuführen ist. Sei also Q_K eine Quadratur nach dem System (K), wesshalb wir schreiben:

$$Q_K = \int q d_K x_1,$$

so ist offenbar:

$$D_K \cdot \frac{\partial Q_K}{\partial x_1} + \frac{\partial \lambda_2^K}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial Q_K}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \lambda_q^K}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial Q_K}{\partial x_q} = \frac{\partial q}{\partial x_1}$$

$$D_K \cdot \frac{\partial Q_K}{\partial x_2} + \frac{\partial \lambda_2^K}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial Q_K}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \lambda_q^K}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial Q_K}{\partial x_q} = \frac{\partial q}{\partial x_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_K \cdot \frac{\partial Q_K}{\partial x_q} + \frac{\partial \lambda_2^K}{\partial x_q} \cdot \frac{\partial Q_K}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \lambda_q^K}{\partial x_q} \cdot \frac{\partial Q_K}{\partial x_q} = \frac{\partial q}{\partial x_q}.$$

Die Integration dieses Systems, welches in jedem einzelnen Falle auszuführen ist, gibt die Regeln für die partielle Differentiation. Wegen der rechten Seiten in den vorigen Gleichungen treten nun unter die Integralzeichen Ausdrücke ein, wie

$$\frac{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}{\partial x_i},$$

da aber die Ausdrücke, welche von Integralzeichen frei sind, wie aus dem kurz vorher Bewiesenen folgt, sich in Ausdrücke verwandeln lassen, welche bloss das Operationszeichen D_L enthalten, so müssen, damit man integriren könne, auch die Theile unter dem Integralzeichen auf dieselbe Form gebracht werden. Es ist nun

$$D_K\Omega - D_L\Omega = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} (\lambda_\mu^K - \lambda_\mu^L)\frac{\partial\Omega}{\partial x_\mu}$$

und diese Formel muss dazu benützt werden, um möglichst viele von den partiellen Ableitungen durch die totalen Differentiale D_K und D_L auszudrücken, von denen die ersteren durch partielle Integration entfernt werden können. Es ist nicht vorauszusehen, dass hiedurch alle partiellen Ableitungen zum Verschwinden gebracht werden können, doch kann man durch wiederholte Anwendung der Formeln:

$$\frac{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}{\partial x_\rho} = \frac{\partial(\beta_1-1,\ldots,\beta_\rho+1,\ldots,\beta_q)}{\partial x_1}, \quad D_K(\beta_1-1,\ldots,\beta_\rho+1,\ldots,\beta_q) = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^K \frac{\partial(\beta_1-1,\ldots,\beta_\rho+1,\ldots,\beta_q)}{\partial x_\mu}$$

alle Ausdrücke dieser Art in partielle Ableitungen der bedingten Grössen verwandeln. Der Complex, der nun unter dem Integralzeichen verbleibt, enthält also nur bedingte Grössen und ist entweder identisch gleich Null oder verschwindet in Folge der Bedingungsgleichungen aus der Rechnung. Ist aber keines von beiden der Fall, so kann derselbe gleich Null gesetzt werden, da stets alle Bedingungsgleichungen entfallen, sobald die bedingten Ableitungen den Werth Null erhalten. Man erhält dann Ausdrücke, welche ausserhalb und innerhalb der Integralzeichen totale Differentiale derselben Art enthalten und nach den im vorigen Abschnitt entwickelten Principien weiter zu behandeln sind.

Die in diesem Abschnitte vorgenommenen Untersuchungen beruhen in mehrfacher Hinsicht auf der Voraussetzung, dass die Werthe λ, welche aus einer und derselben Gleichung (12) fliessen, untereinander verschieden sind. Trifft dies nicht ein, so fallen natürlich diejenigen unter den Integralen $w_2, \ldots, w_q$, welche aus derselben Wurzel entspringen, zusammen und dies hat zur Folge, dass bei der Zerlegung in wesentliche Integrale in zwei oder mehreren der willkürlichen Functionen einige oder alle Argumente w dieselben sind. In diesen Fällen muss man, um dass allgemeine Integrale zu finden, die Methode anwenden, welche im vorigen Abschnitte bei gleicher Gelegenheit benützt wurde und übrigens bei ähnlichen Anlässen in der Analysis allgemein gebräuchlich ist.

Zum Schlusse ist noch zu bemerken, dass durch Einführung neuer Independenten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q$ die λ-Werthe eine lineare Transformation erfahren. In der That ist, wenn $\frac{d\xi_i}{d\xi_1} = \Lambda_i$ und $\frac{dx_\rho}{dx_1} = \lambda_\rho$ gesetzt wird:

$$\Lambda_i = \frac{\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=q} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\rho} \lambda_\rho}{\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=q} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_\rho} \lambda_\rho}, \quad \text{also bei der linearen Transformation:} \quad \xi_i = \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \alpha_{i\rho} x_\rho \qquad \Lambda_i = \frac{\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=q} \alpha_{i\rho} \lambda_\rho}{\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=q} \alpha_{1\rho} \lambda_\rho}.$$

Man erkennt hieraus, dass etwa vorhandene Null- oder Unendlich-Werthe der λ durch lineare Substitution der Independenten in endliche, von Null verschiedene Λ-Werthe verwandelt werden können. Betrachtet man noch die Substitutionsparameter als allgemeine, mit den gegebenen Grössen des Problems in keiner Relation stehende Constante, so können auf diesem Wege auch keine neuen Null- oder Unendlichkeits-Werthe der λ eingeführt werden. Sonach können diese bisher nicht berücksichtigten speciellen Fälle jederzeit auf den allgemeinen Fall zurückgeführt werden und damit sind unsere gegenwärtigen Untersuchungen geschlossen.

25.

Ist nun ein concretes Beispiel gegeben, wie das folgende:

$$\begin{gathered}(300) + (\lambda_2^{I} + \lambda_2^{II} + \lambda_2^{III})(210) + (\lambda_3^{I} + \lambda_3^{II} + \lambda_3^{III})(201) + (\lambda_2^{I}\lambda_2^{II} + \lambda_2^{II}\lambda_2^{III} + \lambda_2^{III}\lambda_2^{I})(120) + (\lambda_3^{I}\lambda_3^{II} + \lambda_3^{II}\lambda_3^{III} + \lambda_3^{III}\lambda_3^{I})(102) + \\ + \{\lambda_2^{I}\lambda_3^{II} + \lambda_3^{I}\lambda_2^{II} + \lambda_2^{III}[\lambda_3^{I} + \lambda_3^{II}] + \lambda_3^{III}[\lambda_2^{I} + \lambda_2^{II}]\}(111) + \{\lambda_2^{III}[\lambda_2^{II}\lambda_3^{I} + \lambda_3^{II}\lambda_2^{I}] + \lambda_2^{I}\lambda_2^{II}\lambda_3^{III}\}(021) \\ + \{\lambda_3^{I}\lambda_3^{II}\lambda_2^{III} + \lambda_3^{III}[\lambda_3^{I}\lambda_2^{II} + \lambda_2^{I}\lambda_3^{II}]\}(012) + \lambda_2^{I}\lambda_2^{II}\lambda_2^{III}(030) + \lambda_3^{I}\lambda_3^{II}\lambda_3^{III}(003) = 0,\end{gathered}$$

in welchem die Grössen λ_2^{I}, λ_2^{II}, etc. Constante bedeuten, so empfiehlt es sich, zu Beginn der Rechnung alle Complexionen zu verzeichnen, welche während derselben in Verwendung kommen. In unserem Falle sind dies die Complexionen:

nullter Ordnung: (000)
erster „ : (100), (010), (001)
zweiter „ : (200), (110), (101), (020), (011), (012)
dritter „ : (300), (210), (201), (120), (111), (102), (030), (021), (012), (003).

Für die Wurzelwerthe λ_2 besteht die Gleichung:

$$0 = \lambda_2^3 - (\lambda_2^{I} + \lambda_2^{II} + \lambda_2^{III})\lambda_2^2 + (\lambda_2^{I}\lambda_2^{II} + \lambda_2^{II}\lambda_2^{III} + \lambda_2^{III}\lambda_2^{I})\lambda_2 - \lambda_2^{I}\lambda_2^{II}\lambda_2^{III},$$

deren drei Wurzeln, respective mit λ_2^{I}, λ_2^{II}, λ_2^{III} zusammenfallen. Die Gleichung für λ_3, das ist

$$0 = \lambda_3^3 - (\lambda_3^{I} + \lambda_3^{II} + \lambda_3^{III})\lambda_3^2 + (\lambda_3^{I}\lambda_3^{II} + \lambda_3^{II}\lambda_3^{III} + \lambda_3^{III}\lambda_3^{I})\lambda_3 - \lambda_3^{I}\lambda_3^{II}\lambda_3^{III}.$$

gibt für λ_3 die Werthe λ_3', λ_3'', λ_3''' und das Product

$$(\xi_1+\lambda_2'\xi_2+\lambda_3'\xi_3)(\xi_1+\lambda_2''\xi_2+\lambda_3''\xi_3)(\xi_1+\lambda_2'''\xi_2+\lambda_3'''\xi_3)$$

zeigt, dass die Gössen

$$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\} = [\beta_1,\beta_2,\beta_3], \quad \beta_1+\beta_2+\beta_3 = 3$$

ausfallen; die gegebene Gleichung ist also Integrale in allen drei Systemen. Wenn wir nun die Wurzelwerthe λ_2' und λ_3' zum Aufbaue eines ersten Differentialsystems verwenden, folgt:

$$\begin{bmatrix}200\\I\end{bmatrix}=1, \quad \begin{bmatrix}110\\I\end{bmatrix}=\lambda_2''+\lambda_2''', \quad \begin{bmatrix}101\\I\end{bmatrix}=\lambda_3''+\lambda_3''', \quad \begin{bmatrix}020\\I\end{bmatrix}=\lambda_2''\lambda_2''', \quad \begin{bmatrix}011\\I\end{bmatrix}=\lambda_2''\lambda_3'''+\lambda_3''\lambda_2''', \quad \begin{bmatrix}002\\I\end{bmatrix}=\lambda_3''\lambda_3'''$$

und das erste Differentialsystem lautet:

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\lambda_2', \qquad \frac{dx_3}{dx_1}=\lambda_3'.$$

$$\begin{aligned}
\frac{d(000)}{dx_1} &= (100)+\lambda_2'(010)+\lambda_3'(001),\\
\frac{d(100)}{dx_1} &= (200)+\lambda_2'(110)+\lambda_3'(101),\\
\frac{d(010)}{dx_1} &= (110)+\lambda_2'(020)+\lambda_3'(011),\\
\frac{d(001)}{dx_1} &= (101)+\lambda_2'(011)+\lambda_3'(002);\\
\frac{d}{dx_1}(200) &= (300)+\lambda_2'(210)+\lambda_3'(201),\\
\frac{d}{dx_1}(110) &= (210)+\lambda_2'(120)+\lambda_3'(111),\\
\frac{d}{dx_1}(101) &= (201)+\lambda_2'(111)+\lambda_3'(102),\\
\frac{d}{dx_1}(020) &= (120)+\lambda_2'(030)+\lambda_3'(021),\\
\frac{d}{dx_1}(011) &= (111)+\lambda_2'(021)+\lambda_3'(012),\\
\frac{d}{dx_1}(002) &= (102)+\lambda_2'(012)+\lambda_3'(003);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx_1}(300)+(\lambda_2''+\lambda_2''')\frac{d}{dx_1}(210)+(\lambda_3''+\lambda_3''')\frac{d}{dx_1}(201)+\lambda_2''\lambda_2'''\frac{d}{dx_1}(120)+(\lambda_2''\lambda_3'''+\lambda_3''\lambda_2''')\frac{d}{dx_1}(111)+\lambda_3''\lambda_3'''\frac{d}{dx_1}(102)=0\\
&\frac{d}{dx_1}(210)+(\lambda_2''+\lambda_2''')\frac{d}{dx_1}(120)+(\lambda_3''+\lambda_3''')\frac{d}{dx_1}(111)+\lambda_2''\lambda_2''\frac{d}{dx_1}(030)+(\lambda_2''\lambda_3'''+\lambda_3''\lambda_2''')\frac{d}{dx_1}(021)+\lambda_3''\lambda_3'''\frac{d}{dx_1}(012)=0\\
&\frac{d}{dx_1}(201)+(\lambda_3''+\lambda_2''')\frac{d}{dx_1}(111)+(\lambda_3''+\lambda_3''')\frac{d}{dx_1}(102)+\lambda_2''\lambda_2'''\frac{d}{dx_1}(021)+(\lambda_2''\lambda_3'''+\lambda_3''\lambda_2''')\frac{d}{dx_1}(012)+\lambda_3''\lambda_3'''\frac{d}{dx_1}(003)=0.
\end{aligned}$$

Die letzten drei Gleichungen geben die Integrale:

$$\begin{aligned}
(300)+(\lambda_2''+\lambda_2''')(210)+(\lambda_3''+\lambda_3''')(201)+\lambda_2''\lambda_2'''(120)+(\lambda_2''\lambda_3'''+\lambda_3''\lambda_2''')(111)+\lambda_3''\lambda_3'''(102) &= W_1,\\
(210)+(\lambda_2''+\lambda_2''')(120)+(\lambda_3''+\lambda_3''')(111)+\lambda_2''\lambda_2'''(030)+(\lambda_2''\lambda_3'''+\lambda_3''\lambda_2''')(021)+\lambda_3''\lambda_3'''(012) &= W_2,\\
(201)+(\lambda_2''+\lambda_2''')(111)+(\lambda_3''+\lambda_3''')(102)+\lambda_2''\lambda_2'''(021)+(\lambda_2''\lambda_3'''+\lambda_3''\lambda_2''')(012)+\lambda_3''\lambda_3'''(003) &= W_3.
\end{aligned}$$

welche wegen der gegebenen Gleichung der Bedingung:

$$W_1 + \lambda_2^{I} W_2 + \lambda_3^{I} W_3 = 0$$

unterworfen sind.

Anderseits folgt aus den beiden ersten Gleichungen des Systems:

$$x_2 - \lambda_2^{I} x_1 = w_2^{I}, \quad x_3 - \lambda_3^{I} x_1 = w_3^{I}.$$

Wir setzen also:

$$(300) + (\lambda_2^{II} + \lambda_2^{III})(210) + (\lambda_3^{II} + \lambda_3^{III})(201) + \lambda_2^{II}\lambda_2^{III}(120) + (\lambda_2^{II}\lambda_3^{III} + \lambda_3^{II}\lambda_2^{III})(111) + \lambda_3^{II}\lambda_3^{III}(102) \quad \Phi_1(x_2 - \lambda_2^{I} x_1, x_3 - \lambda_3^{I} x_1) = 0,$$

$$(210) + (\lambda_2^{II} + \lambda_2^{III})(120) + (\lambda_3^{II} + \lambda_3^{III})(111) + \lambda_2^{II}\lambda_2^{III}(030) + (\lambda_2^{II}\lambda_3^{III} + \lambda_3^{II}\lambda_2^{III})(021) + \lambda_3^{II}\lambda_3^{III}(012) \quad \Phi_2(x_2 - \lambda_2^{I} x_1, x_3 - \lambda_3^{I} x_1) = 0,$$

$$(201) + (\lambda_2^{II} + \lambda_2^{III})(111) + (\lambda_3^{II} + \lambda_3^{III})(102) + \lambda_2^{II}\lambda_2^{III}(021) + (\lambda_2^{II}\lambda_3^{III} + \lambda_3^{II}\lambda_2^{III})(012) + \lambda_3^{II}\lambda_3^{III}(003) \quad \Phi_3(x_2 - \lambda_2^{I} x_1, x_3 - \lambda_3^{I} x_1) = 0$$

und zerlegen diese Gleichungen in ihre wesentlichen Integrale nach dem Systeme (II), welches wir durch die Gleichungen:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \lambda_2^{II}, \quad \frac{dx_3}{dx_1} = \lambda_3^{II}$$

charakterisiren. Indem man jede der drei vorigen Gleichungen partiell nach x_1, x_2, x_3 differentiirt, findet man:

$$\begin{aligned}
&D_{II}(300) + \lambda_2^{III} D_{II}(210) + \lambda_3^{III} D_{II}(201) + \lambda_2^{I} \frac{\partial \Phi_1}{\partial w_2^{I}} + \lambda_3^{I} \frac{\partial \Phi_1}{\partial w_3^{I}} = 0,\\
&D_{II}(210) + \lambda_2^{III} D_{II}(120) + \lambda_3^{III} D_{II}(111) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial w_2^{I}} = 0,\\
&D_{II}(201) + \lambda_2^{III} D_{II}(111) + \lambda_3^{III} D_{II}(102) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial w_3^{I}} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&D_{II}(210) + \lambda_2^{III} D_{II}(120) + \lambda_3^{III} D_{II}(111) + \lambda_2^{I} \frac{\partial \Phi_2}{\partial w_2^{I}} + \lambda_3^{I} \frac{\partial \Phi_2}{\partial w_3^{I}} = 0,\\
&D_{II}(120) + \lambda_2^{III} D_{II}(030) + \lambda_3^{III} D_{II}(021) - \frac{\partial \Phi_2}{\partial w_2^{I}} = 0,\\
&D_{II}(111) + \lambda_2^{III} D_{II}(021) + \lambda_3^{III} D_{II}(012) - \frac{\partial \Phi_2}{\partial w_3^{I}} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&D_{II}(201) + \lambda_2^{III} D_{II}(111) + \lambda_3^{III} D_{II}(102) + \lambda_2^{I} \frac{\partial \Phi_3}{\partial w_2^{I}} + \lambda_3^{I} \frac{\partial \Phi_3}{\partial w_3^{I}} = 0,\\
&D_{II}(111) + \lambda_2^{III} D_{II}(021) + \lambda_3^{III} D_{II}(012) - \frac{\partial \Phi_3}{\partial w_2^{I}} = 0,\\
&D_{II}(102) + \lambda_2^{III} D_{II}(012) + \lambda_3^{III} D_{II}(002) - \frac{\partial \Phi_3}{\partial w_3^{I}} = 0;
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Bedingungen:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial w_3^{I}} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial w_2^{I}}, \quad \lambda_2^{I} \frac{\partial \Phi_2}{\partial w_3^{I}} + \lambda_3^{I} \frac{\partial \Phi_2}{\partial w_3^{I}} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial w_2^{I}}, \quad \lambda_2^{I} \frac{\partial \Phi_3}{\partial w_2^{I}} + \lambda_3^{I} \frac{\partial \Phi_3}{\partial w_3^{I}} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial w_3^{I}},$$

welche durch die Suppositionen:

$$\Phi_1 = -\lambda_2^{I} \frac{\partial U}{\partial w_2^{I}} - \lambda_3^{I} \frac{\partial U}{\partial w_3^{I}}, \quad \Phi_2 = \frac{\partial U}{\partial w_2^{I}}, \quad \Phi_3 = \frac{\partial U}{\partial w_3^{I}}$$

befriedigt werden. Dadurch wird übrigens auch

$$\Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \lambda_3 \Phi_3 = 0,$$

wie weiter oben gefordert wurde.

Aus den obigen neun Differentialgleichungen entstehen demnach folgende sechs:

$$D_{II}(300)+\lambda_2^{III}D_{II}(210)+\lambda_3^{III}D_{II}(201) = (\lambda_2^{I})^2\frac{\partial^2 U}{(\partial w_2^I)^2}+2\lambda_2^I\lambda_3^I\frac{\partial^2 U}{\partial w_2^I\partial w_3^I}+(\lambda_3^I)^2\frac{\partial^2 U}{(\partial w_3^I)^2}$$

$$D_{II}(210)+\lambda_2^{III}D_{II}(120)+\lambda_3^{III}D_{II}(111) = -\lambda_2^I\frac{\partial^2 U}{(\partial w_2^I)^2}-\lambda_3^I\frac{\partial^2 U}{\partial w_2^I\partial w_3^I}$$

$$D_{II}(201)+\lambda_2^{III}D_{II}(111)+\lambda_3^{III}D_{II}(102) = -\lambda_2^I\frac{\partial^2 U}{\partial w_2^I\partial w_3^I}-\lambda_3^I\frac{\partial^2 U}{(\partial w_3^I)^2}$$

$$D_{II}(120)+\lambda_2^{III}D_{II}(030)+\lambda_3^{III}D_{II}(021) = \frac{\partial^2 U}{(\partial w_2^I)^2}$$

$$D_{II}(111)+\lambda_2^{III}D_{II}(021)+\lambda_3^{III}D_{II}(012) = \frac{\partial^2 U}{\partial w_2^I\partial w_3^I}$$

$$D_{II}(102)+\lambda_2^{III}D_{II}(012)+\lambda_3^{III}D_{II}(003) = \frac{\partial^2 U}{(\partial w_3^I)^2}.$$

Die Integration dieses Systems ist ohneweiters möglich, wenn man noch die Gleichungen:

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\lambda_2^{II},\quad \frac{dx_3}{dx_1}=\lambda_3^{II}$$

hinzunimmt. Ist eine Function der Argumente w_2^I, w_3^I, gegeben

$$\mathfrak{F}(w_2^I,w_3^I)=\mathfrak{F}(x_2-\lambda_2^I x_1,\, x_3-\lambda_3^I x_1),$$

so ist:

$$D_{II}\mathfrak{F}=(\lambda_2^{II}-\lambda_2^I)\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial w_2^I}+(\lambda_3^{II}-\lambda_3^I)\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial w_3^I},$$

setzen wir also:

$$U=(\lambda_2^{II}-\lambda_2^I)\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial w_2^I}+(\lambda_3^{II}-\lambda_3^I)\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial w_3^I},$$

so wird die rechte Seite der ersten Gleichung im vorigen System:

$$D_{II}\left\{(\lambda_2^I)^2\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{(\partial w_2^I)^2}+2\lambda_2^I\lambda_3^I\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial w_2^I\partial w_3^I}+(\lambda_3^I)^2\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{(\partial w_3^I)^2}\right\},$$

während sich der Reihe nach für die übrigen Gleichungen die folgenden Ausdrücke ergeben:

$$-D_{II}\left\{(\lambda_2^I)^2\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{(\partial w_2^I)^2}+\lambda_3^I\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial w_2^I\partial w_3^I}\right\},\quad -D_{II}\left\{\lambda_2^I\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial w_2^I\partial w_3^I}+\lambda_3^I\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{(\partial w_3^I)^2}\right\},\quad D_{II}\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{(\partial w_2^I)^2},\quad D_{II}\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial w_2^I\partial w_3^I},\quad D_{II}\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{(\partial w_3^I)^2}.$$

Also sind die Integrale des obigen Systems gegeben durch die Gleichungen:

$$(300)+\lambda_2^{III}(210)+\lambda_3^{III}(201) = (\lambda_2^I)^2\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{(\partial w_1^I)^2}+2\lambda_2^I\lambda_3^I\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial w_2^I\partial w_3^I}+(\lambda_3^I)^2\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{(\partial w_3^I)^2}+f_1(w_2^{II},w_3^{II}),$$

$$(210)+\lambda_2^{III}(120)+\lambda_3^{III}(111) = -\lambda_2^I\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{(\partial w_2^I)^2}-\lambda_3^I\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial w_2^I\partial w_3^I}+f_2(w_2^{II},w_3^{II}),$$

$$(201)+\lambda_2^{III}(111)+\lambda_3^{III}(102) = -\lambda_2^I\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial w_2^I\partial w_3^I}-\lambda_3^I\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{(\partial w_3^I)^2}+f_3(w_2^{II},w_3^{II}),$$

$$(120)+\lambda_2^{III}(030)+\lambda_3^{III}(021) = \frac{\partial^2\mathfrak{F}}{(\partial w_2^I)^2}+f_4(w_2^{II},w_3^{II}),$$

$$(111)+\lambda_2^{III}(021)+\lambda_3^{III}(012) = \frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial w_2^I\partial w_3^I}+f_5(w_2^{II},w_3^{II}),$$

$$(102)+\lambda_2^{III}(012)+\lambda_3^{III}(003) = \frac{\partial^2\mathfrak{F}}{(\partial w_3^I)^2}+f_6(w_2^{II},w_3^{II}).$$

Zwischen den Functionen f werden durch die Forderung, dass sich aus den gegenwärtigen Integralen die früheren zusammensetzen lassen sollen, drei Bedingungsgleichungen eingeführt, deren Erfüllung anderseits bewirkt, dass bei der nächsten Zerlegung abermals ein eindeutiges System entsteht. Man findet diese Bedingungsgleichungen unter beiden Voraussetzungen; da aber das Resultat hinsichtlich der beiden Integralsysteme symmetrisch sein muss, können wir die Integralgleichungen sofort in der Form aufschreiben:

$$(300)+\lambda_2'''(210)+\lambda_3'''(201)=(\lambda_2')^2\frac{\partial^2\mathfrak{J}}{(\partial w_2')^2}+2\lambda_2'\lambda_3'\frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial w_2'\partial w_3'}+(\lambda_3')^2\frac{\partial^2\mathfrak{J}}{(\partial w_3')^2}+(\lambda_2'')^2\frac{\partial^2\eta}{(\partial w_2'')^2}+2\lambda_2''\lambda_3''\frac{\partial^2\eta}{\partial w_2''\partial w_2''}+(\lambda_3'')^2\frac{\partial^2\eta}{(\partial w_2'')^2}$$

$$(210)+\lambda_2'''(120)+\lambda_3'''(111)=-\lambda_2'\frac{\partial^2\mathfrak{J}}{(\partial w_2')^2}-\lambda_3'\frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial w_2'\partial w_3'}-\lambda_2''\frac{\partial^2\eta}{(\partial w_2'')^2}-\lambda_3''\frac{\partial^2\eta}{\partial w_2''\partial w_3''}$$

$$(201)+\lambda_2'''(111)+\lambda_3'''(102)=-\lambda_2'\frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial w_2'\partial w_3'}\quad\lambda_3'\frac{\partial^2\mathfrak{J}}{(\partial w_3')^2}-\lambda_2''\frac{\partial^2\eta}{\partial w_2''\partial w_3''}-\lambda_3''\frac{\partial^2\eta}{(\partial w_3'')^2}$$

etc.

Der weitere Rechnungsgang ist nun schon durchsichtig, ich begnüge mich also, das Resultat anzugeben. Wie vorauszusehen war, ist:

$$z=\Phi(x_2-\lambda_2'x_1,x_3-\lambda_3'x_1)+X(x_2-\lambda_2''x_1,x_3-\lambda_3''x_1)+\Psi(x_2-\lambda_2'''x_1,x_3-\lambda_3'''x_1),$$

wobei Φ, X, Ψ ganz willkürlich sind.

Die Gleichung:

$$(300)+2(210)-2(201)-5(120)-19(111)-5(102)-6(030)-9(021)+10(012)+6(003)=0.$$

besitzt die Wurzelsysteme:

$$\lambda_2=1,\quad 3,\quad -2$$
$$\lambda_3=-1,\quad 2,\quad -3.$$

und es ist:

$$(\xi_1+\xi_2-\xi_3)(\xi_1+3\xi_2+2\xi_3)(\xi_1-2\xi_2-3\xi_2)=$$
$$=\xi_1^3+2\xi_1^2\xi_2-2\xi_1^2\xi_3-5\xi_1\xi_2^2-15\xi_1\xi_2\xi_3-5\xi_1\xi_3^2-6\xi_2^3-7\xi_2^2\xi_3+7\xi_2\xi_3^2+6\xi_3^3.$$

Es fallen also für die Complexionen: (111), (021), (012) — und dies sind alle, welche nicht zur Bildung der Gleichungen (12) beizuziehen sind — die Werthe { } verschieden von den [ ]-Werthen aus. Legen wir nun die aus dem Producte fliessenden Coëfficienten der Rechnung zu Grunde, so erhalten wir augenscheinlich

$$(000)=\Phi(x_2-x_1,x_3+x_1)+X(x_2-3x_1,x_3-2x_1)+\Psi(x_2+2x_1,x_3+3x_1).$$

und es entstehen durch Einführung dieses Werthes in die gegebene Gleichung die Bedingungen:

$$2\frac{\partial^3\Phi}{(\partial w_2')^2\partial w_3'}-\frac{\partial^3\Phi}{\partial w_2'(\partial w_3')^2}=0,\quad 10\frac{\partial^2 X}{(\partial w_2'')^2\partial w_3''}+11\frac{\partial^3 X}{\partial w_2''.(\partial w_3'')^2}=0$$

$$10\frac{\partial^3\Psi}{(\partial w_2''')^2\partial w_3'''}+9\frac{\partial^3\Psi}{\partial w_2'''.(\partial w_3''')^2}=0,$$

Hiebei sind

$$w_2'=x_2-x_1,\quad w_2''=x_2-3x_1,\quad w_3'''=x_2+2x_1,$$
$$w_3'=x_3+x_1,\quad w_3''=x_3-2x_1,\quad w_3'''=x_3+3x_1$$

zu verstehen. Die allgemeine Lösung der gegebenen Gleichung ist also:

$$z=\Phi_1(x_2-x_1)+\Phi_2(x_3+x_1)+\Phi_3(x_1+x_2+2x_3)+X_1(x_3-2x_1)+X_2(x_3-2x_1)+X_3(13x_1-11x_2+10x_3)$$
$$+\Psi_1(x_2+2x_1)+\Psi_2(x_3+3x_1)+\Psi_3(12x_1-9x_2+10x_3).$$

Es sei noch das Beispiel:

$$(200)-\{(020)+2(011)+(002)\}-\frac{2(100)}{x_1}=0$$

gegeben. Wir finden

$$\lambda_2=1,\quad -1;\quad \lambda_3=1,\quad -1,$$

und setzen insbesondere

$$\lambda_2'=1,\quad \lambda_2''=-1,$$
$$\lambda_3'=1,\quad \lambda_3''=-1,$$

denn es wird dann:

$$(\xi_1+\xi_2+\xi_3)(\xi_1-\xi_2-\xi_3) = \xi_1^2-(\xi_2^2+2\xi_2\xi_3+\xi_3^2),$$

was mit der gegebenen Gleichung übereinstimmt.

Die Integralgleichungen des ersten Systems sind dann:

$$(200)-(110)-(101)-2\int d_\lambda x_1 \frac{[(110)+(101)]}{x_1} = f_1+x_1f_2$$

$$(110)-(020)-(011)-2\int\frac{d_\lambda x_1}{x_1}(110) = g,$$

$$(101)-(011)-(002)-2\int\frac{d_\lambda x_1}{x_1}(101) = h,$$

wobei wir die zwischen den Constanten herrschenden Relationen vorläufig ignoriren, da sich diejenigen, deren wir benöthigen, im Laufe der Rechnung von selbst ergeben. Wir beschränken uns übrigens darauf, durch Zerlegung der zweiten dieser Gleichungen in wesentliche Integrale den Werth von (011) zu bestimmen, da sich wegen der Einfachheit des Exempels hieraus der Werth von (000) bereits erschliessen lässt. Da nun g sowohl als auch h als Functionen der Integrale

$$w'_2 = x_2-x_1, \quad w'_3 = x_3-x_1$$

anzusehen ist, so folgt, indem man die zweite Gleichung nach x_3 partiell differentiirt und bemerkt, dass wegen der constanten λ die Operationen des Integrirens und Differertiirens beliebig angeordnet werden können:

$$D_{II}(011)-2\int\frac{d_\lambda x_1}{x_1}(111) = \frac{\partial g}{\partial w'_3}$$

Differentiirt man anderseits die dritte Gleichung nach x_2, so folgt:

$$D_{II}(011)-2\int\frac{d_\lambda x_1}{x_1}(111) = \frac{\partial h}{\partial w'_2},$$

wir setzen also

$$g = \frac{\partial\Omega}{\partial w'_2}, \quad h = \frac{\partial\Omega}{\partial w'_3}$$

und erhalten damit

$$D_{II}(011)-2\int\frac{d_\lambda x_1}{x_1}(111) = \frac{\partial^2\Omega}{\partial w'_2\partial w'_3}.$$

Da nun

$$D_I(011) = (111)+\{(021)+(012)\}$$
$$D_{II}(011) = (111)-\{(021)+(012)\},$$

so wird

$$2(111) = D_I(011)+D_{II}(011)$$

und die obige Gleichung verwandelt sich in die folgende:

$$\left\{D_{II}(011)-\frac{(011)}{x_1}\right\}-\int d_\lambda x_1 \left\{\frac{D_{II}(011)}{x_1}+\frac{(011)}{x_1^2}\right\} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial w'_2\partial w'_3}.$$

Differentiirt man nun noch einmal mit dem Zeichen D_{II} und berücksichtigt, dass dadurch in der rechten Seite wieder ein Integrale des ersten Systems entsteht, was wir kurz durch I andeuten wollen, so erhält man:

$$\left\{D_{II}^2(011)-\frac{D_{II}(011)}{x_1}+\frac{(011)}{x_1^2}\right\}-\int d_\lambda x_1 \left\{\frac{D_{II}^2(011)}{x_1}-\frac{2(011)}{x_1^3}\right\} = I.$$

Es folgt nun, wie man leicht findet, aus der obigen Gleichung die andere:

$$\left\{\frac{D_{II}(011)}{x_1}-\frac{(011)}{x_1^2}\right\}-2\int d_\lambda x_1 \frac{(011)}{x_1^3} = I_1.$$

worin I_1 wieder ein Integrale des ersten Systems bedeutet, die Addition der beiden letzten Gleichungen gibt:

$$D_{II}^2(011) - \int \frac{dx_1}{x_1} D_{II}^2(011) = I_2$$

und hieraus folgt

$$D_{II}^2(011) = I_3 x_1.$$

Da nun die Anwendung der Operation D_{II} auf ein Integrale des ersten Systems wieder ein Integrale desselben Systems hervorbringt, können wir:

$$I_3 = -\frac{1}{2} D_{II}^3 \Phi(w_2^I, w_3^I)$$

substituiren, und damit folgt endlich

$$(011) = x \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial w_2^I} + \frac{\partial \Phi}{\partial w_3^I}\right\} + \Phi + x \left\{\frac{\partial \Psi}{\partial w_2^{II}} + \frac{\partial \Psi}{\partial w_3^{II}}\right\} - \Psi$$

worin Ψ ein Integral des zweiten Systems bedeutet und

$$w_2^{II} = x_2 + x_1, \quad w_3^{II} = x_3 + x_1$$

zu verstehen sind. Wie ersichtlich, ist z von derselben Form; in der That ist

$$z = \Omega(x_2 - x_1, x_3 - x_1) + x_1 \left\{\frac{\partial \Omega}{\partial w_2^I} + \frac{\partial \Omega}{\partial w_3^I}\right\} + H(x_2 + x_1, x_3 + x_1) - x_1 \left\{\frac{\partial H}{\partial w_2^{II}} + \frac{\partial H}{\partial w_3^{II}}\right\}.$$

Druckfehler:

Seite 9, Gl. (10) lies: $\lambda^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$

„ 10, Gl. 12) „ : $D' F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial r}} \frac{\partial F}{\partial r} + \text{etc.} \ldots$

„ 11, Zeile 3 v. o. lies: $\frac{\partial y}{\partial f}$ statt $\frac{\partial x}{\partial t}$.

„ 35: in beiden Gl. (5) ist dy unmittelbar vor $\{$ zu setzen.

„ 36, Zeile 10 v. o. lies: $[p-i-1, i] + \lambda_1 [p-i, i-1] = \ldots$

„ 43, „ 8 „ „ ist am Schlusse $\}$ anzubringen und $]$ nach dem 2. Gliede zu streichen.

„ 46, „ 4 v. u. lies im 2. Gliede: $\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial (o,p)}} \frac{\partial F}{\partial (o,p)}\right\}.$

„ 47, „ 9 v. o. fehlt der Bruchstrich unter z.

„ 51, „ 6 „ „ fehlt in der 2. Gl. $(p-\rho, \rho)'$.

ARITHMETISCHE THEOREME.

VON

LEOPOLD GEGENBAUER.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 24. APRIL 1884.

In den folgenden Zeilen werde ich eine Reihe von neuen arithmetischen Sätzen mittheilen. Ich betrachte zunächst die Summe:

$$S_{n,\gamma} = \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) = \sum_{x=1}^{x=p}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) + \sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) \qquad (\beta>\gamma\geqq 0).$$

Es sei:

1) $$\left[\frac{\alpha}{\beta p+\beta-\gamma}\right] = A$$

2) $$\left[\frac{\alpha}{\beta n-\gamma}\right] = B$$

3) $$F(r) = \sum_{x=1}^{x=r} f(x)$$

alsdann ist:

$$\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) = \sum_{x=p+1,\; y=1}^{x=n,\; y=A} \varepsilon\left(\frac{\alpha}{y(\beta x-\gamma)}\right) f(x).$$

Nun ist aber, wenn:

$$\frac{\alpha}{y(\beta x-\gamma)} \lesseqgtr 1$$

ist, auch:

$$\frac{\alpha+\gamma y}{\beta x y} \lesseqgtr 1$$

und daher hat man:

$$\sum_{x=p+1,\; y=1}^{x=n,\; y=A} \varepsilon\left(\frac{\alpha}{y(\beta x-\gamma)}\right) f(x) = \sum_{x=p+1,\; y=1}^{x=n,\; y=A} \varepsilon\left(\frac{\alpha+\gamma y}{\beta x y}\right) f(x)$$

$$= \sum_{y=B+1,\; x=1}^{y=A,\; x=n} \varepsilon\left(\frac{\alpha+\gamma y}{\beta x y}\right) f(x) - AF(p) + BF(n).$$

Bei gegebenem y erhält die zahlentheoretische Function $\varepsilon\left(\frac{\alpha+\gamma y}{\beta x y}\right)$ für alle x, welche grösser als $\left[\frac{\alpha+\gamma y}{\beta y}\right]$ sind, den Werth 0, und daher ist:

$$\sum_{y=B+1,\, x=1}^{y=A,\, x=n} \varepsilon\left(\frac{\alpha+\gamma y}{\beta x y}\right) f(x) = \sum_{y=B+1}^{y=A} F\left(\left[\frac{\alpha+\gamma y}{\beta y}\right]\right).$$

Es ist also:

4) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) = \sum_{x=1}^{x=p}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) + \sum_{x=B+1}^{x=A} F\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right) - AF(p) + BF(n).$$

Ist:

5) $$\alpha < \beta n - \gamma,$$

so wird $B = 0$, ist aber:

6) $$\beta n - \gamma \leqq \alpha < \beta(n+1) - \gamma,$$

so wird $B = 1$ und $\left[\frac{\alpha+\gamma}{\beta}\right] = n$.

Man hat daher in diesem Falle die specielle Relation:

7) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) = \sum_{x=1}^{x=p}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) + \sum_{x=1}^{x=A} F\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right) - AF(p).$$

Für $p = 0$ verwandeln sich die Gleichungen 4) und 7) in die folgenden:

8) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) = \sum_{x=B+1}^{x=A} F\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right) + BF(n).$$

9) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]} F\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right).$$

Setzt man:

$$r_x = \frac{\alpha}{\beta x-\gamma} - \left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]$$

so ist:

10) $$\sum_{x=1}^{x=n}[k r_x] f(x) = \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{k\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) - k\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x)$$
$$= S_{kn,\,k\alpha} - kS_{n,\,\alpha} - \sum_{x=n+1}^{x=kn}\left[\frac{k\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x)$$

wo k eine positive ganze Zahl sein soll.

Aus den Relationen:

$$\frac{pr}{s} = \left[\frac{pr}{s}\right] + \varepsilon \qquad (0 \leqq \varepsilon < 1)$$

$$\frac{r}{s} = \left[\frac{r}{s}\right] + \varepsilon_1 \qquad (0 \leqq \varepsilon_1 < 1)$$

folgt:

11) $$\left[\frac{pr}{s}\right] = p\left[\frac{r}{s}\right] + \sigma_{p,\,r,\,s} \qquad (0 \leqq \sigma_{p,\,r,\,s} < p),$$

also:

$$\left[\frac{pr}{s}\right] \equiv \chi_{p,r,s} \;(\text{mod. } p)$$

so dass $\chi_{p,r,s}$ der Rest ist, welcher bei der Division von $\left[\frac{pr}{s}\right]$ durch p bleibt.

Ist speciell $p = 2$, so verwandelt sich die Formel 11) in die schon von Gauss mitgetheilte Relation:

12) $$\left[\frac{2r}{s}\right] = 2\left[\frac{r}{s}\right] + \chi_{2,r,s},$$

wo $\chi_{2,r,s}$ die Werthe 0 oder 1 hat, je nachdem $\left[\frac{2r}{s}\right]$ gerade oder ungerade ist.

Man hat daher auch die Gleichungen:

13) $$\sum_{x=1}^{x=n} \chi_{k,\alpha,\beta x-\gamma}\, f(x) = \sum_{x=1}^{x=n} [kr_x] f(x)$$

14) $$\sum_{x=1}^{x=n}{}' f(x) = \sum_{x=1}^{x=n} [2r_x] f(x)$$

wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene Werthe von x zu nehmen sind, für welche $\left[\frac{2\alpha}{\beta x-\gamma}\right]$ ungerade ist.

Nach den früheren Entwicklungen ist nun:

$$\sum_{x=n+1}^{x=kn} \left[\frac{k\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) = \sum_{x=B+1}^{x=A} F\left(\left[\frac{k\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right) - AF(n) + BF(kn),$$

wo:

$$A = \left[\frac{k\alpha}{\beta n+\beta-\gamma}\right]$$

$$B = \left[\frac{k\alpha}{\beta kn-\gamma}\right]$$

ist. Genügt nun α der Bedingung 6), so hat man:

$$\frac{k\alpha}{\beta kn-\gamma} < 1 + \frac{\beta k-(k-1)\gamma}{\beta kn-\gamma}$$

und daher ist:

$$B = 0, 1.$$

Ist $B = 1$, so ist auch:

$$kn \leqq \frac{k\alpha+\gamma}{\beta} < k(n+1)$$

und daher:

$$\left[\frac{k\alpha+\gamma}{\beta}\right] = kn + \rho,$$

wo ρ eine nicht negative ganze Zahl ist, welche nicht grösser als $k-1$ sein kann.

Aus der Relation 6) folgt ferner:

$$A = k - \sigma \;(\sigma > 0).$$

Nun ergibt sich aus der Relation:

$$k-\sigma \leqq \frac{k\alpha}{\beta n+\beta-\gamma} < k-\sigma+1$$

sofort die Beziehung:

$$\frac{k\alpha+\gamma(k-\sigma+\tau)}{\beta(k-\sigma+\tau)} < n+1, \;(\tau = 1, 2, \ldots \sigma-1).$$

Es ist aber auch:

$$n \leqq \frac{k\alpha+\gamma(k-\sigma+\tau)}{\beta(k-\sigma+\tau)}$$

denn wäre:

$$\frac{k\alpha+\gamma(k-\sigma+\tau)}{\beta(k-\sigma+\tau)} < n$$

so hätte man:

$$0 < (\beta n-\gamma-\alpha)k-(\sigma-\tau)(\beta n-\gamma),$$

was nach den gemachten Voraussetzungen unmöglich ist. Man hat daher die Gleichung:

$$\left[\frac{k\alpha+\gamma(k-\sigma+\tau)}{\beta(k-\sigma+\tau)}\right] = n \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, \sigma-1).$$

Es ist also schliesslich:

15) $$\sum_{x=1}^{x=n} [kr_x] f(x) = S_{kn,\,k\alpha} - kS_{n,\,\alpha} - \sum_{x=1}^{x=k-1} F\left(\left[\frac{k\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right) + (k-1)F(n) + F(kn+\rho_1) - F(kn),$$

wo $\rho_1 = 0$ ist, wenn:

$$k\alpha < \beta kn-\gamma$$

ist, sonst aber die kleinste Wurzel der Congruenz:

$$z \equiv \left[\frac{k\alpha+\gamma}{\beta}\right] \pmod{k}$$

vorstellt.

Nimmt man speciell:

$$f(x) = 1,\ \alpha = n,\ \gamma = 0,\ \beta = 1,$$

so erhält man die Formel:

16) $$\sum_{x=1}^{x=n} [kr_x] = \sum_{x=1}^{x=kn}\left[\frac{kn}{x}\right] - k\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right] + (k-1)n - \sum_{x=1}^{x=k-1}\left[\frac{kn}{x}\right]$$

welche Gleichung man unter Berücksichtigung der bekannten Relation:

17) $$\sum_{x=1}^{x=m}\left[\frac{m}{x}\right] = m \log m + (2C-1)m + \varepsilon' \sqrt{m}$$

wo C die Euler'sche Constante und ε' eine Grösse ist, welche bei wachsendem m endlich bleibt, auch in folgender Form schreiben kann:

18) $$\sum_{x=1}^{x=n} [kr_x] = n\{k \log k + k - 1\} - kn \sum_{x=1}^{x=k-1} \frac{1}{x} + \varepsilon' \sqrt{n} + \varepsilon''(k-1) \qquad (0 \leqq \varepsilon'' < 1).$$

Es ist also:

19) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} [kr_x]}{n} = k \log k + k - 1 - k \sum_{x=1}^{x=k-1} \frac{1}{x}$$

Man hat daher den Satz:

Das arithmetische Mittel der grössten ganzen Zahlen, welche in den k-fachen Verhältnissen der Reste zu den jeweiligen Divisoren enthalten sind, die bei der Division einer ganzen Zahl n durch alle nicht grösseren ganzen Zahlen auftreten, nähert sich mit wachsendem n dem Ausdrucke $k \log k + k - 1 - k \sum_{x=1}^{x=k-1} \frac{1}{x}$

Den Fall $k=2$ der zuletzt abgeleiteten speciellen Formeln, aus welchem bekanntlich folgt, dass von den Verhältnissen der Reste zu den Divisoren, welche bei der Division hinlänglich grosser Zahlen n durch alle nicht grösseren ganzen Zahlen auftreten, eine grössere Anzahl in dem Intervalle $0 \dots \frac{1}{2}$, als in dem Intervalle $\frac{1}{2} \dots 1$ liegt, hat schon Dirichlet mitgetheilt; für $k=3, 4, 6$ wurden die obigen Relationen von Herrn Berger abgeleitet.

Berücksichtigt man, dass jedesmal, wenn für einen bestimmten Werthe von $x=x_\nu$

20) $$\frac{\nu}{k} \leqq r_{x_\nu} < \frac{\nu+1}{k}$$

ist, die Gleichung:

$$[k r_{x_\nu}] = \nu$$

besteht, so kann man die Formel 15) auch in folgender Weise schreiben:

21) $$\sum_{\nu=1}^{\nu=k-1} \nu f_\nu = S_{kn,\,k\alpha} - k S_{n,\,\alpha} - \sum_{x=1}^{x=k-1} F\left(\left[\frac{k\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right) + (k-1) F(n) + F(kn+\varrho_1) - F(kn),$$

wo:

$$f_\nu = \sum_{x_\nu} f(x_\nu)$$

ist, wenn die Summation bezüglich x_ν über alle jene Werthe von x erstreckt wird, für welche die Relation 20) besteht.

Erhält die Function $f(x)$ den speciellen Werth 1, so bezeichnet f_ν die Anzahl der Reste, welche in dem Intervalle $\frac{\nu}{k} \dots \frac{\nu+1}{k}$ liegen.

Gibt man in der Gleichung 9) der Function $f(x)$ die speciellen Werthe:

22) $$f(x) = 1,\, x,\, x^3,\, x^m - (x-1)^m,\, \sin\frac{(2x-1)\pi}{4}\quad \cos\frac{(2x-1)\pi}{4},\quad \cos x\vartheta, \sin x\vartheta,$$

so erhält $F(r)$ der Reihe nach folgende Werthe:

23) $$F(r) = r,\ D(r),\ D^3(r),\ r^m,\ \sqrt{2}\,\sin^2\frac{r\pi}{4},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,\sin\frac{r\pi}{2},$$
$$-\frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{(2r+1)\vartheta}{2}}{2\sin\frac{\vartheta}{2}},\quad \frac{1}{2}\cot\!g\,\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{(2r+1)\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}$$

wo $D(r)$ die $r$te Trigonalzahl ist, und daher hat man die Formeln:

24) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]$$

25) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] x = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]} D\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)$$

26) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] x^3 = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]} D^2\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)$$

27) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] x^m - \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right](x-1)^m = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]^m$$

$$28)\qquad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)$$

$$29)\qquad \sum_{x=1}^{x=r}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}\sin\left(\frac{\pi}{2}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)$$

$$30)\qquad 2\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos x\vartheta=-\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]+\frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}\sin\vartheta\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]+\frac{1}{2}\right\}$$

$$31)\qquad 2\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin x\vartheta=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}-\frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}\cos\vartheta\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]+\frac{1}{2}\right\}$$

Setzt man in der Gleichung 30) $\vartheta=\pi,\ \frac{\pi}{2}$ und in der Gleichung 31) $\vartheta=\frac{\pi}{2}$, so erhält man die speciellen Formeln:

$$32)\qquad 2\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^x\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=-\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]+\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}(-1)^{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]}$$

$$33)\qquad 2\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos\frac{x\pi}{2}=\sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=-\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}\sin\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$34)\qquad 2\sum_{x=i}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin\frac{x\pi}{2}=\sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]-\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}\cos\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right\}.$$

Aus diesen Formeln kann man sofort eine Reihe von Sätzen über die Divisoren der ganzen Zahlen ableiten. Es ist nämlich:

$$\sum_{x=1}^{x=m}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]f_1(\beta x-\gamma)=\sum_{x=1,\,y=1}^{x=m,\,y=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}\varepsilon\left(\frac{\alpha}{y(\beta x-\gamma)}\right)f_1(\beta x-\gamma).$$

$$=\sum_{r=1}^{r=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}\varepsilon\left(\frac{\alpha}{r}\right)\sum_{d'_r}f(d'_r),$$

wo die Summation bezüglich d'_r über alle Divisoren von r zu erstrecken ist, welche von der Form $\beta x-\gamma$ und nicht grösser als $\beta m-\gamma$ sind.

Setzt man nun:

$$F_1(r)=\sum_{d'_r}f_1(d'_r),$$

so hat man:

$$35)\qquad \sum_{r=1}^{r=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}F_1(r)=\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]f_1(\beta x-\gamma).$$

Nimmt man speciell:

$$f_1(x)=x,\quad \alpha=n,\quad \beta=2,\quad \gamma=1,$$

so erhält man die Relation:

36)
$$\sum_{x=1}^{x=n} k_1(x) = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} \left[\frac{n}{2x-1}\right](2x-1)$$

wo $k_m(x)$ die Summe der $m$ten Potenzen der ungeraden Divisoren von x bezeichnet.

Diese specielle Relation hat unlängst Herr Stieltjes in einer in den Schriften der Pariser Akademie enthaltenen Notiz mitgetheilt („Sur quelques théorèmes arithmétiques.“ Note de M. Stieltjes [Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite] C. R. Tome XCVII, Nr. 17, 22 octobre 1883).

Nach den eben gemachten Bemerkungen ergeben sich aus den obigen Formeln folgende arithmetische Sätze:

Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $\beta x-\gamma$ sind, ist gleich der Summe der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{\beta n-(n-1)\gamma}{\beta}, \; \frac{\beta n-(n-2)\gamma}{2\beta}, \; \frac{\beta n-(n-3)\gamma}{3\beta}, \ldots, \frac{\beta n}{\beta n}$$

enthalten sind.

Die Anzahl der ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n ist gleich der Summe der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \; \frac{n+2}{4}, \; \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{2n}{2n}$$

enthalten sind.

Die Summe der ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n ist gleich der Summe der Quadrate der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \; \frac{n+2}{4}, \; \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{2n}{2n}$$

enthalten sind.

Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $4x+1$ sind, übertrifft die Anzahl der übrigen ungeraden Divisoren um die Anzahl der ungeraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \; \frac{n+2}{4}, \; \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{2n}{2n}$$

enthalten sind.

Die Anzahl aller Darstellungen einer beliebigen positiven ungeraden Zahl n oder einer einfach geraden Zahl $2n$ durch die Form x^2+y^2 ist gleich dem vierfachen Überschusse der Anzahl der ungeraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \; \frac{n+2}{4}, \; \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{2n}{2n}$$

enthalten sind, über die Anzahl der ungeraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{2}, \; \frac{n+1}{4}, \; \frac{n+2}{6}, \ldots, \frac{2n-2}{2n-2}$$

enthalten sind.

Ist n eine Primzahl von der Form $4x+1$, so kommen unter den grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \; \frac{n+2}{4}, \; \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{2n}{2n}$$

enthalten sind, zwei ungerade Zahl mehr vor, als unter den grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{2}, \frac{n+1}{4}, \frac{n+2}{6}, \ldots, \frac{2n-2}{2n-2}$$

enthalten sind; ist aber n eine Primzahl von der Form $4r-1$, so ist die Anzahl der ungeraden grössten ganzen Zahlen in beiden Zahlenreihen gleich gross.

Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $8r\pm1$ sind, übertrifft die Anzahl der übrigen ungeraden Divisoren um eben so viel, als die Anzahl derjenigen grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{2n}{2n}$$

enthalten sind und die Form $4r+1$ besitzen, grösser ist als die Anzahl der übrigen ungeraden grössten ganzen Zahlen.

Die Anzahl aller den Bedingungen $y\geq0$, $2x>3y$ genügenden Darstellungen einer positiven ungeraden Zahl n durch die Form x^2-2y^2 ist gleich dem Überschusse der Differenz aus der Anzahl derjenigen ungeraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{2n}{2n}$$

enthalten sind und die Form $4r+1$ besitzen, und der Anzahl der übrigen ungeraden grössten ganzen Zahlen, über die Differenz aus der Anzahl derjenigen ungeraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{2}, \frac{n+1}{4}, \frac{n+2}{6}, \ldots, \frac{2n-2}{2n-2}$$

enthalten und von der Form $4r+1$ sind, und der Anzahl der übrigen ungeraden grössten ganzen Zahlen.

Die Summe der $m$ten Potenzen der Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n übertrifft die Summe der $m$ten Potenzen der um die Einheit verminderten Divisoren um die Summe der $m$ten Potenzen der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \ldots, \frac{n}{n}$$

enthalten sind.

Die doppelte Summe der Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n übertrifft ihre Anzahl um die Summe der Quadrate der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \ldots, \frac{n}{n}$$

enthalten sind.

Die Summe derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von $n+1$ bis $2n$, welche grösser als n sind, ist nach dem Modul 2 der Summe derjenigen ganzen Zahlen x congruent, für welche die in dem Bruche $\frac{2n}{x}$ enthaltene grösste ganze Zahl ungerade ist.

Berücksichtigt man, dass:

$$\left[\sqrt{m}\right] = \left[\sqrt{m-1}\right] + \tau$$

ist, wo τ gleich 1 oder 0 ist, je nachdem m ein Quadrat ist oder nicht, so sieht man, dass die Anzahl der Darstellungen einer positiven ungeraden oder einfachgeraden Zahl n als Summe zweier Quadrate durch folgende Differenz ausgedrückt wird:

$$\sum_{x=0}^{x=\left[\sqrt{n}\right]}\left[\sqrt{n-x^2}\right] - \sum_{x=0}^{x=\left[\sqrt{n-1}\right]}\left[\sqrt{n-1-x^2}\right]$$

Man hat daher auch die Relation:

$$\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^{x-1}\left[\frac{n}{2x-1}\right]-\sum_{x=1}^{x=n-1}(-1)^{x-1}\left[\frac{n-1}{2x-1}\right]=\sum_{x=0}^{x=[\sqrt{n}]}\left[\sqrt{n-x^2}\right]-\sum_{x=0}^{x=[\sqrt{n-1}]}\left[\sqrt{n-1-x^2}\right]$$

Schreibt man in dieser Gleichung für n der Reihe nach:

$$n,\ n-1,\ n-2,\ldots,2$$

und addirt die so entstehenden Gleichungen, so erhält man die Formel:

$$37)\qquad \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]}(-1)^{x-1}\left[\frac{n}{2x-1}\right]=\sum_{x=0}^{x=[\sqrt{n}]}\left[\sqrt{n-x^2}\right]$$

welche schon Liouville ohne Beweis mitgetheilt hat.

Verbindet man diese Gleichung mit 32), so erhält man die Relation:

$$38)\qquad 2\sum_{x=0}^{x=[\sqrt{n}]}\left[\sqrt{n-x^2}\right]=n-\sum_{x=1}^{x=}(-1)^{\left[\frac{n+x}{2x}\right]}$$

Die auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Summe lässt sich noch auf eine andere Form bringen. Um zu derselben zu gelangen, betrachte ich die Summe:

$$39)\qquad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\sqrt{\alpha-\gamma x^3}}{\delta}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=p}\left[\frac{\beta+\sqrt{\alpha-\gamma x^3}}{\delta}\right]f(x)+\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\sqrt{\alpha-\gamma x^3}}{\delta}\right]f(x),$$

Da aus der Relation:

$$\frac{\beta+\sqrt{\alpha-\gamma x^3}}{\delta y}\gtreqless 1$$

die Beziehung:

$$\sqrt[3]{\frac{\alpha-(\delta y-\beta)^2}{\gamma x^3}}\gtreqless 1$$

folgt, so ist:

$$\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\sqrt{\alpha-\gamma x^3}}{\delta}\right]f(x)=\sum_{x=p+1,\ y=1}^{x=n,\ y=A}\varepsilon\left(\frac{\beta+\sqrt{\alpha-\gamma x^3}}{\delta y}\right)f(x)\qquad\left(A=\left[\frac{\beta+\sqrt{\alpha-\gamma(p+1)^3}}{\delta}\right]\right)$$

$$=\sum_{x=p+1,\ y=1}^{x=n,\ y=A}\varepsilon\left(\sqrt[3]{\frac{\alpha-(\delta y-\beta)^2}{\gamma x^3}}\right)f(x)$$

$$=\sum_{y=B+1,\ x=1}^{y=A,\ x=n}\varepsilon\left(\sqrt[3]{\frac{\alpha-(\delta y-\beta)^2}{\gamma x^3}}\right)f(x)-AF(p)+BF(n)\qquad\left(B=\left[\frac{\beta+\sqrt{\alpha-\gamma n^3}}{\delta}\right]\right)$$

$$=\sum_{y=B+1}^{y=A}F\left(\left[\sqrt[3]{\frac{\alpha-(\delta y-\beta)^2}{\gamma}}\right]\right)-AF(p)+BF(n)$$

und daher hat man die Gleichung:

$$40)\qquad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\sqrt{\alpha-\gamma x^3}}{\delta}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=p}\left[\frac{\beta+\sqrt{\alpha-\gamma x^3}}{\delta}\right]f(x)+\sum_{x=B+1}^{x=A}F\left(\left[\sqrt[3]{\frac{\alpha-(\delta x-\beta)^2}{\gamma}}\right]\right)-AF(p)+BF(n).$$

Setzt man in dieser Gleichung:

$$[illegible] = 1,\ \beta = 1,\ \alpha = [illegible],\ \gamma = 1,\ \delta = 2,\ \sigma = 2,\ \rho = 0,\ m \geq n^2,$$

so erhält man die Relation:

(41) $$\sum_{[illegible]}^{[illegible]} \left[\frac{1+\sqrt{[illegible]-r^2}}{2}\right] = \sum_{[illegible]}^{[illegible]} \left[\sqrt{m-(2r-1)^2}\right] + \left[\frac{1+\sqrt{m-n^2}}{2}\right] n,$$

in welcher Gleichung die von Herrn Cesàro mitgetheilte Formel:

(42) $$\sum_{[illegible]}^{[illegible]} \left[\frac{1+\sqrt{[illegible]-r^2}}{2}\right] = \sum_{r=1}^{[illegible]} \left[\sqrt{n-(2r-1)^2}\right]$$

als specieller Fall enthalten ist.

Setzt man aber in der Gleichung (40):

$$[illegible] = 1,\ \beta = 0,\ \delta = 1,\ \gamma = 4,\ \sigma = 2,\ \rho = 0,\ \alpha \geq 4n^2$$

so ergibt sich die Formel:

(43) $$\sum_{[illegible]}^{[illegible]} \left[\sqrt{\alpha-4r^2}\right] = \sum_{[illegible]}^{[illegible]} \left[\sqrt{\frac{\alpha-r^2}{4}}\right] + \left[\sqrt{\alpha-4n^2}\right] n$$

aus welcher wieder die specielle Relation:

(44) $$\sum_{[illegible]}^{[illegible]} \left[\sqrt{[illegible]-4r^2}\right] = \sum_{[illegible]}^{[illegible]} \left[\sqrt{\frac{n-r^2}{4}}\right]$$

sich ergibt.

Unter Benützung der eben abgeleiteten Formeln lässt sich die Gleichung (38) auch in folgender Gestalt schreiben:

(45) $$\sum_{[illegible]}^{[illegible]} \left[\frac{1}{2}\sqrt{[illegible]-r^2}\right] + \sum_{[illegible]}^{[illegible]} \left[\frac{1+\sqrt{[illegible]-r^2}}{2}\right] = n - \sum_{r=1}^{[illegible]} (-1)^{[illegible]}$$

Setzt man in der Gleichung (7):

(46) $$[illegible] = \lambda = \left[\frac{\sqrt{4\alpha\beta+\gamma^2}+\gamma}{2\beta}\right]$$

so hat man:

(47) $$[illegible]\ \beta\lambda-\gamma\ [illegible] \leq \alpha < [illegible] + 1)\ (\beta\lambda+\beta-\gamma),$$

und daher:

$$A = \left[\frac{\alpha}{\beta\lambda+\beta-\gamma}\right] = \lambda - \xi,$$

wo ξ nur die Werthe 0, 1 haben kann.

Ist $A = \lambda - 1$, so folgt aus der Relation:

$$\lambda - 1 \leq \frac{\alpha}{\beta\lambda+\beta-\gamma} < \lambda$$

die Beziehung:

$$\lambda - 1 < \frac{\alpha+\gamma\lambda}{\beta\lambda} < \lambda + 1.$$

Wäre nun:

$$\left[\frac{\alpha+\gamma\lambda}{\beta\lambda}\right]=\lambda-1;$$

so müsste:

$$\alpha<\lambda(\beta\lambda-\gamma)$$

sein, was nach (47) unmöglich ist, daher ist:

$$\left[\frac{\alpha+\gamma\lambda}{\beta\lambda}\right]=\lambda.$$

Man hat demnach die Gleichung:

(48) $$\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]f(x)+\sum_{x=1}^{x=\lambda}F\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)-\lambda F(\lambda).$$

Gibt man in dieser Gleichung der Function $f(x)$ der Reihe nach die speciellen Werthe (22), so erhält man die Formeln:

(49) $$\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]+\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]-\lambda^2$$

(50) $$\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]x=\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]x+\sum_{x=1}^{x=\lambda}D\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)-\frac{\lambda^2(\lambda+1)}{2}$$

(51) $$\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]x^3=\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]x^3+\sum_{x=1}^{x=\lambda}D^2\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)-\frac{\lambda^3(\lambda+1)^2}{4}$$

(52) $$\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]^x-\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]^{(x-1)}=\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]^x-\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]^{(x-1)}+\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]-\lambda^\lambda$$

(53) $$\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\lambda}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)-\lambda\sqrt{2}\sin\frac{\lambda\pi}{4}$$

(54) $$\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{x=1}^{x=\lambda}\sin\left(\frac{\pi}{2}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\sin\frac{\lambda\pi}{2}$$

(55) $$2\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos x\xi=2\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos x\xi+\sum_{x=1}^{x=\lambda}\frac{\sin\xi\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]+\frac{1}{2}\right\}}{\sin\frac{\xi}{2}}-\frac{\lambda\sin\frac{(2\lambda+1)\xi}{2}}{\sin\frac{\xi}{2}}$$

(56) $$2\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin x\xi=2\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin x\xi-\frac{1}{\sin\frac{\xi}{2}}\sum_{x=1}^{x=\lambda}\cos\xi\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]+\frac{1}{2}\right\}+\frac{\lambda\cos\frac{(2\lambda+1)\xi}{2}}{\sin\frac{\xi}{2}}$$

(57) $$2\sum_{x=1}^{x=\lambda}(-1)^x\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=2\sum_{x=1}^{x=\lambda}(-1)^x\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]+\sum_{x=1}^{x=\lambda}(-1)^{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]}+(-1)^{\lambda+1}\lambda$$

$$58)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\lambda}\sin\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right\}-$$
$$-\lambda\sqrt{2}\sin\frac{(2\lambda+1)\pi}{4}$$

$$59)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]-\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\lambda}\cos\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right\}+$$
$$+\lambda\sqrt{2}\cos\frac{(2\lambda+1)\pi}{4}.$$

Setzt man in den Gleichungen 52) und 53):

$$\alpha=n,\ \beta=2,\ \gamma=1,\ m=2,$$

so erhält man die von Herrn Stieltjes a. a. O. mitgetheilten speciellen Relationen:

$$60)\quad \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]}\left[\frac{n}{2x-1}\right](2x-1)=\sum_{x=1}^{x=n}k_1(x)=\sum_{x=1}^{x=\lambda_1}\left[\frac{n}{2x-1}\right](2x-1)+\sum_{x=1}^{x=\lambda_1}\left[\frac{n+x}{2x}\right]^2-\lambda_1^3\qquad \left(\lambda_1=\left[\frac{\sqrt{8n+1}+1}{4}\right]\right)$$

$$61)\quad \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]}\left[\frac{n}{2x-1}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sum_{x=1}^{x=\lambda_1}\left[\frac{n}{2x-1}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\lambda_1}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\left[\frac{n+x}{2x}\right]\right)-\lambda_1\sqrt{2}\sin\frac{2\lambda_1\pi}{4}.$$

Von den in diesen Formeln enthaltenen arithmetischen Theoremen mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $\beta x-\gamma$ und grösser als $\beta\lambda-\gamma$ sind, ist um λ^2 kleiner, als die Summe der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{\beta n-(n-1)\gamma}{\beta},\quad \frac{\beta n-(n-2)\gamma}{2\beta},\quad \frac{\beta n-(n-3)\gamma}{3\beta},\ \ldots,\ \frac{\beta n-(n-\lambda)\gamma}{\lambda\beta}$$

enthalten sind.

Die Anzahl der ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $2\lambda_1-1$ sind, ist um λ_1^2 kleiner, als die Summe def grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\quad \frac{n+2}{4},\quad \frac{n+3}{6},\ \ldots,\ \frac{n+\lambda_1}{2\lambda_1}$$

enthalten sind.

Die Summe der Quadrate der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\quad \frac{n+2}{4},\quad \frac{n+3}{6},\ \ldots,\ \frac{n+\lambda_1}{2\lambda_1}$$

enthalten sind, übertrifft die Summe derjenigen ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $2\lambda_1-1$ sind, um λ_1^3.

Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $4x+1$ und grösser als $2\lambda_1-1$ sind, übertrifft die Anzahl der übrigen ungeraden, oberhalb der angegebenen Grenze liegenden Divisoren um ebenso viel, als die Anzahl der ungeraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\quad \frac{n+2}{4},\quad \frac{n+3}{6},\ \ldots,\ \frac{n+\lambda_1}{2\lambda_1}$$

enthalten sind, grösser ist, als der Ausdruck $\lambda_1\frac{1-(-1)^{\lambda_1}}{2}$.

Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $8r\pm 1$ und grösser als $2\lambda_1-1$ sind, übertrifft die Anzahl der übrigen ungeraden, oberhalb der angegebenen Grenze liegenden Divisoren um ebensoviel, als die Anzahl derjenigen grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{4},\ \frac{n+3}{6},\ \ldots,\ \frac{n+\lambda_1}{2\lambda_1}$$

enthalten sind, und die Form $4r+1$ besitzen, die Summe aus der Anzahl der übrigen ungeraden grössten ganzen Zahlen und dem Ausdrucke $i^{\lambda_1-1}\lambda_1\dfrac{1-(-1)^{\lambda_1}}{2}$ übertrifft.

Ist:

62) $$[\alpha]=(\beta n_1-\gamma)n_2$$

und setzt man in der Gleichung 7):

$$p=n_1,$$

so wird:

$$A=\left[\frac{\alpha}{\beta n_1+\beta-\gamma}\right]=n_2-\vartheta_1,$$

wo ϑ_1, wie man sofort sieht, der Relation:

$$(\vartheta_1-1)(\beta n_1+\beta-\gamma)<\beta n_2\leqq\vartheta_1(\beta n_1+\beta-\gamma)$$

genügt. Aus der Beziehung:

$$n_2-\vartheta_1\leqq\frac{\alpha}{\beta n_1+\beta-\gamma}<n_2-\vartheta_1+1$$

folgt:

$$n_1+\frac{\beta(n_2-\vartheta_1)-\sigma(n_1\beta-\gamma)}{\beta(n_2-\vartheta_1+\sigma)}\leqq\frac{\alpha+\gamma(n_2-\vartheta_1+\sigma)}{\beta(n_2-\vartheta_1+\sigma)}<n_1+1+\frac{(1-\sigma)(\beta n_1+\beta-\gamma)}{\beta(n_2-\vartheta_1+\sigma)}\qquad(\sigma=1,2,3,\ldots,\vartheta_1)$$

und daher ist:

$$\left[\frac{\alpha+\gamma(n_2-\vartheta_1+\sigma)}{\beta(n_2-\vartheta_1+\sigma)}\right]=n_1-\rho\qquad(\rho\geqq 0).$$

Wäre $\rho>0$, so hätte man die Relation:

$$\alpha-[\alpha]<(1-\rho)\beta n_2-(\vartheta_1-\sigma)(\beta n_1+\beta-\gamma-\rho\beta)$$

was unmöglich ist, da die rechte Seite negativ, die linke aber positiv oder Null ist.

Man hat also die Gleichung:

$$\left[\frac{\alpha+\gamma(n_2-\vartheta_1+\sigma)}{\beta(n_2-\vartheta_1+\sigma)}\right]=n_1\qquad(\sigma=1,2,\ldots,\vartheta_1).$$

Es besteht daher die Relation:

63) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]f(x)+\sum_{x=1}^{x=n_2}F\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)-n_2F(n_1).\qquad\{[\alpha]=(\beta n_1-\gamma)n_2\}.$$

Gibt man in dieser Gleichung der Function $f(x)$ wieder der Reihe nach die speciellen Werthe 22), so erhält man die Formeln:

64) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]+\sum_{x=1}^{x=n_2}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]-n_1n_2$$

65) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]x=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]x+\sum_{x=1}^{x=n_2}D\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)-n_2D(n_1)$$

66) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]x^3=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]x^3+\sum_{x=1}^{x=n_2}D^2\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)-n_2D^2(n_1)$$

67) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]x^m-\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right](x-1)^m=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]x^m-\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right](x-1)^m+\sum_{x=1}^{x=n_2}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]^m-n_2n_1^m$$

68) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=n_2}\sin^2\left\{\frac{\pi}{4}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right\}-n_2\sqrt{2}\sin^2\frac{n_1\pi}{4}$$

69) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{x=1}^{x=n_2}\sin\left\{\frac{\pi}{2}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right\}-\frac{n_2}{\sqrt{2}}\sin\frac{n_1\pi}{2}$$

70) $$2\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos x\vartheta=2\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos x\vartheta+\frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\sum_{x=1}^{x=n_2}\sin\vartheta\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]+\frac{1}{2}\right\}-\frac{n_2\sin\frac{(2n_1+1)\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}$$

71) $$2\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin x\vartheta=2\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin x\vartheta-\frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\sum_{x=1}^{x=n_2}\cos\vartheta\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]+\frac{1}{2}\right\}+\frac{n_2\cos\frac{(2n_1+1)\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}$$

72) $$2\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^x\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=2\sum_{x=1}^{x=n_1}(-1)^x\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]+\sum_{x=1}^{x=n_2}(-1)^{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]}+(-1)^{n_1+1}n_2$$

73) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=n_2}\sin\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right\}-$$
$$-n_2\sqrt{2}\sin\frac{(2n_1+1)\pi}{4}$$

74) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]-\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=n_2}\cos\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right\}+$$
$$+n_2\sqrt{2}\cos\frac{(2n_1+1)\pi}{4}.$$

Von den speciellen Fällen dieser Formeln mögen die folgenden von Herrn Cesaro mitgetheilten Gleichungen erwähnt werden:

75) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]=\sum_{x=1}^{x=n'_1}\left[\frac{n}{x}\right]+\sum_{x=1}^{x=n'_2}\left[\frac{n}{x}\right]-n\qquad(n=n'_1\,n'_2)$$

76) $$\sum_{x=2}^{x=m^2}\left[\frac{m^2}{x}\right]=\sum_{x=m+1}^{x=m^2}\left[\frac{m^2}{x}\right].$$

Die obigen Formeln enthalten eine Reihe von arithmetischen Theoremen, von denen die folgenden besonders hervorgehoben werden mögen:

Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $\beta x-\gamma$ und grösser als $\beta n_1-\gamma$ sind, übertrifft um n_1n_2 die Summe der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{\beta n-(n-1)\gamma}{\beta},\ \frac{\beta n-(n-2)\gamma}{2\beta},\ \frac{\beta n-(n-3)\gamma}{3\beta},\ldots,\ \frac{\beta n-(n-n_2)\gamma}{n_2\beta}$$

enthalten sind, wenn $n=(\beta n_1-\gamma)n_2$ ist.

Ist $n = n_1 n_2$, so ist die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als n_2 sind, um n kleiner, als die Anzahl derjenigen Divisoren, welche nicht grösser als n_1 sind.

Ist $n = n_1 n_2$, so übertrifft die Summe der $m$ten Potenzen derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als n_1 sind, die Summe der $m$ten Potenzen der eben genannten, um die Einheit verminderten Divisoren um eben so viel, als die Summe der $m$ten Potenzen der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1},\ \frac{n}{2},\ \frac{n}{3},\ldots,\ \frac{n}{n_2}$$

enthalten sind, das Product $n\, n_1^{m-1}$ übertrifft.

Ist $n = n_1 n_2$, so übertrifft die doppelte Summe derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als n_1 sind, ihre Anzahl um eben so viel, als die Summe der Quadrate der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1},\ \frac{n}{2},\ \frac{n}{3},\ldots,\ \frac{n}{n_2}$$

enthalten sind, grösser als das Product $n\, n_1$ ist.

Ist $n = n_1 n_2$, so ist die Summe derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als n_1 sind, um $\frac{n\,(n_1+1)}{2}$ kleiner, als die Summe derjenigen Trigonalzahlen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen angegeben werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1},\ \frac{n}{2},\ \frac{n}{3},\ldots,\ \frac{n}{n_2}$$

enthalten sind, während die Summe der dritten Potenzen der angegebenen Divisoren von der Summe der Quadrate der erwähnten Trigonalzahlen um $n\,\frac{n_1(n_1+1)^2}{4}$ übertroffen wird.

Ist $n = (2n_1-1)\, n_2$, so ist die Anzahl derjenigen ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $2n_1-1$ sind, um $n_1 n_2$ kleiner, als die Summe der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{4},\ \frac{n+3}{6},\ldots,\ \frac{n+n_2}{2n_2}$$

enthalten sind.

Ist $n = (2n_1-1)n_2$, so ist die Summe derjenigen ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $2n_1-1$ sind, um $n^2_1\, n_2$ kleiner, als die Summe der Quadrate der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{4},\ \frac{n+3}{6},\ldots,\ \frac{n+n_2}{2n_2}$$

enthalten sind.

Ist $n = (2n_1-1)\, n_2$, so übertrifft die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $4r+1$ und grösser als $2n_1-1$ sind, die Anzahl der übrigen oberhalb der angegebenen Grenze liegenden ungeraden Divisoren um eben so viel, als die Anzahl der ungeraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{4},\ \frac{n+3}{6},\ldots,\ \frac{n+n_2}{2n_2}$$

enthalten sind, das Product $n_2\,\frac{1-(-1)^{n_1}}{2}$ übertrifft.

Ist $n = (2n_1-1)\, n_2$, so übertrifft die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $8r\pm1$ und grösser als $(2n_1-1)$ sind, die Anzahl der übrigen oberhalb der angegebenen Grenze liegenden ungeraden Divisoren um eben so viel, als die Anzahl derjenigen grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{n+n_2}{2n_2}$$

enthalten, und von der Form $4r+1$ sind, die Summe aus der Anzahl der übrigen ungeraden grössten ganzen Zahlen und dem Producte $n_2\, i^{n_1-1}\, \frac{1-(-1)^{n_1}}{2}$ übertrifft.

Auf die in dieser Mittheilung angegebenen Formeln gedenke ich übrigens demnächst in einer Arbeit über asymptotische Gesetze der Zahlentheorie zurückzukommen.

Es mag bei dieser Gelegenheit noch gezeigt werden, wie leicht sich mit Hilfe der zahlentheoretischen Function $\varepsilon(x)$ jener allgemeine Satz ableiten lässt, welchen Herr Stern in seiner interessanten Arbeit: „Über einige Eigenschaften der Function $E(x)$“ mitgetheilt hat. (Journal für die reine und angewandte Mathematik von Borchardt, 59. Band.)

Der erwähnte Satz, in welchem bekannte Theoreme von Eisenstein und Sylvester als specielle Fälle enthalten sind, lautet:

Es ist:

77) $$\sum_{x=1}^{x=\frac{k(q-f)}{n}} \left[\frac{xpn}{qm}\right] + \sum_{y=1}^{y=\frac{k(p-e)}{m}} \left[\frac{yqm}{pn}\right] = \frac{k^2(p-e)(q-f)}{mn}$$

wenn:

$$ke < m$$

$$kf < n$$

und $\frac{p-e}{m}$, $\frac{q-f}{n}$ positive ganze Zahlen sind.

Die auf der linken Seite der Gleichung 77) stehende Summe hat den Werth:

$$\sum_{x=1,\, y=1}^{x=\frac{k(q-f)}{n},\; y=\left[\frac{kp(q-f)}{qm}\right]} \varepsilon\left(\frac{xpn}{yqm}\right) + \sum_{y=1,\, x=1}^{y=\frac{k(p-e)}{m},\; x=\left[\frac{kq(p-e)}{pn}\right]} \varepsilon\left(\frac{yqm}{xpn}\right)$$

Nun ist:

$$\frac{kp(q-f)}{qm} = \frac{k(p-e)}{m} + \frac{k(qe-pf)}{qm}$$

$$\frac{kq(p-e)}{pn} = \frac{k(q-f)}{n} - \frac{k(eq-pf)}{pn}$$

und daher, wie auch die Differenz $qe-pf$ beschaffen sein mag:

$$\left[\frac{kp(q-f)}{qm}\right] \leqq \frac{k(p-e)}{m}$$

$$\left[\frac{kq(p-e)}{pn}\right] \leqq \frac{k(q-f)}{n}$$

Da nun jedesmal, wenn $x < 1$ ist, $\varepsilon(x) = 0$ wird, so kann man den Ausdruck 78) auch in folgender Form schreiben:

$$\sum_{x=1,\, y=1}^{x=\frac{k(q-f)}{n},\; y=\frac{k(p-e)}{m}} \left\{\varepsilon\left(\frac{xpn}{yqn}\right) + \varepsilon\left(\frac{yqm}{xpn}\right)\right\}$$

und diese Summe ist, weil für jedes Werthepaar x, y einer der beiden Brüche $\frac{xpm}{yqm}$, $\frac{yqm}{xpn}$ grösser, der andere aber kleiner als 1 ist, gleich der Anzahl der Werthepaare, d. i. gleich $\frac{k^2(p-e)(q-f)}{mn}$.

ÜBER DEN

CIRCULATIONS-APPARAT IN DER NASENSCHLEIMHAUT.

VON

PROF. DR. E. ZUCKERKANDL.

(Mit 5 Tafeln.)

(VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 8. MAI 1884.)

Die Circulationsverhältnisse der Nasenschleimhaut und ihrer in die Sinuse fortgesetzten Anhänge sind noch nicht genügend gekannt, und zwar fehlt es nicht blos an Angaben über feinere Verhältnisse, z. B. über die Weise, in welcher der Kreislauf zwischen den venösen und arteriellen Gefässen zum Abschlusse kommt, sondern selbst gröbere Verhältnisse, wie: die Verbindungen zwischen dem Schwellkörper der Nasenschleimhaut und den peripheren Venen sind bisher nicht genügend dargelegt worden. Das Ausführlichste, was vorliegt, verdanken wir W. Kohlrausch,[1] bei dessen Angaben man eigentlich stehen blieb; denn auch Voltolini's[2] Untersuchungen haben — anatomisch genommen — den Gegenstand kaum gefördert.

Die vorliegende Schrift soll nun diese Lücke in unserer Literatur ausfüllen, und es werden der Reihe nach folgende Punkte zur Besprechung kommen:

A. Die Methode der Untersuchung.
B. Die Arterien der Nasenschleimhaut.
C. Die aus den venösen Netzen der Nasenschleimhaut heraustretenden Venen.
D. Das Schwellgewebe und die Venennetze der Nasenschleimhaut.
E. Die kleineren Arterien, die Capillaren der Nasenschleimhaut und deren Verbindungen mit dem Schwellgewebe und den Venennetzen.
F. Die Gefässe der pneumatischen Anhänge.

---

[1] Archiv f. Anat. u. Physiol.; herausg. von J. Müller. Berlin 1853.
[2] Monatsschr. f. Ohrenheilk. Berlin 1877, Nr. 1, und: Die Rhinoskopie u. Pharyngoskopie. Breslau 1879.

A. Methode der Untersuchung.

Für die Darstellung der gröberen Gefässverhältnisse in der Nasenschleimhaut habe ich, um des Erfolges sicher zu sein, die Gefässe kurz vor ihrem Eintritt in die Nasenhöhle aufgesucht und eingespritzt. Von einer Injection der grossen zu- und abführenden Gefässe — Carotis communis, Jugularis — bin ich schon aus dem Grunde abgestanden, weil dieser Vorgang, abgesehen von dem zweifelhaften Erfolge, nicht so pralle Füllungen der feinen Gefässe ergibt.

Nach der angegebenen Weise hingegen liess die Injection, selbst wenn vorher der Kopf, dessen Nasenschleimhaut injicirt werden sollte, pathologisch anatomischer Zwecke halber bereits eröffnet war, nichts zu wünschen übrig. An Objecten letzterer Art durchtrennte ich den vom Stamme gelösten Kopf in sagittaler Richtung, comprimirte die Durchschnittsflächen an der knorpeligen Nase und am Gaumen mittelst Sperrpincetten, unterband, bei verletzter Scheidewand, die Nasopalatina und eröffnete, wenn z. B. eine Injection der aus der Flügelgaumengrube in die Nasenschleimhaut eindringenden Gefässe geplant war, diese Spalte, so weit als eben nothwendig schien, um bequem operiren zu können. Handelte es sich um eine arterielle Einspritzung, dann wurde der Hauptstamm der Maxillaris interna bis nahe an das Foramen spheno-palatinum verfolgt, und in die Arteria spheno-palatina die Canüle eingebunden.

Noch wichtiger als für die arterielle Injection erwies sich die directe Einspritzung der Nasenschleimhautgefässe für die Darstellung der venösen Gefässe. Sie ist eigentlich die einzige Methode, die ein Gelingen verspricht, da eine Injection der grösseren venösen Halsgefässe niemals eine zufriedenstellende Füllung der inneren Nasenvenen herbeiführt.

Zur Darlegung der gröberen venösen Gefässverhältnisse injicirte ich zumeist die Vena nasalis externa und posterior. Ich suchte mir die Vena nasalis externa am Abgange von der Vena facialis antica, und in der Flügelgaumengrube die Vena spheno-palatina auf. Die Auffindung der vorderen Vene bereitet niemals Schwierigkeiten, wohl aber häufig die der hinteren, zumal wenn sie blutleer und collabirt ist. Von Klappen habe ich an ihnen nichts bemerkt; weder stellte sich der Injection ein Widerstand entgegen, noch zeigten die Venen jenes charakteristisch-knotige Aussehen, welches nach der Einspritzung von mit Klappen versehenen Venen niemals ausbleibt. Auf dieselbe Weise habe ich die Venen der Nasenschleimhaut auch für Corrosionen gefüllt und bin mit den erhaltenen Resultaten zufrieden gewesen.

Die directe Einspritzung der Venen habe ich für die Darstellung der feineren, präcapillaren venösen Gefässe nicht geübt. Für eine solche benützte ich das weit einfachere Verfahren der Injection mittelst Einstich. Der Stachel einer grösseren Pravaz'schen Spritze wurde in das Schwellgewebe, respective Venennetz der Nasenschleimhaut eingestochen und die Masse in den Sticheanal hineingetrieben. Es füllten sich auf diese Weise die Venennetze bis in ihre feinsten Zweige, zuweilen auch stellenweise die Capillaren, diese aber stets unvollkommen, weil das Injectionsmateriale leicht durch die reichlich sich darbietenden weiten periferen Venen abfloss.

Nicht unerwähnt soll bleiben, dass die Injection der venösen Nasengefässe durch Einstich stets auch zu einer Füllung der den Thränennasengang umgebenden Venennetze und durch diese zur, wenn auch nur unvollkommenen Injection der Orbital- und Facialvenen führt. Es dürfte dies auch die einfachste Methode sein, um diese Netze isolirt zu injiciren, da ich mich an mikroskopischen Querschnitten solcher injicirter Thränennasengänge davon überzeugt habe, dass nur die Netze und nicht die Capillaren vollkommen gefüllt waren. Die Masse fliesst eben zu leicht gegen die Orbita und gegen das Gesicht ab.

Bei mikroskopischen Doppelinjectionen ging ich folgendermassen zu Werke: ich injicirte zuerst die Venennetze durch Einstich und schickte dieser Einspritzung eine arterielle von Seiten der Sphenopalatina oder der Nasalis anterior nach. Dieser Vorgang bei der Injection verdient empfohlen zu werden, weil sich durch denselben wirklich schöne Doppelinjectionen erreichen lassen. Aus dem Schwellnetz, in welches man eingestochen, fliesst wegen der in grosser Menge sich darbietenden Abflüsse, wie gerade bemerkt wurde, das Injectionsmateriale nur in geringer Menge in die Capillaren über, diese bleiben sammt den Arterien grösstentheils leer, und die der venösen Injection nachfolgende arterielle Einspritzung mit einer anders gefärbten Masse grenzt an vielen Stellen ganz prachtvoll die venösen Blutbahnen gegen die Capillaren und Arterien ab. Wie ich in der Abhandlung lese, die W. Tomsa[1] über die „Anatomie und Physiologie der menschlichen Haut" verfasst hat, ist dieser Forscher ähnlich vorgegangen und rühmt es, dass bei dieser Reihenfolge der Injection sich die Füllung des Venensystems eben nur auf diesen Bezirk beschränkt.

Was das Injectionsmateriale anlangt, so benützte ich für makroskopische Zwecke feinere Wachs- und die Hojer'sche Schellackmasse. Mit denselben Massen fertigte ich auch Corrosionspräparate an. Für die mikroskopischen Einspritzungen kamen in Anwendung das lösliche Berlinerblau, die feinere Sorte der Hojer'schen Schellackmasse und die von Kollmann angegebene kaltflüssige Carminmasse, die den Vorzug einer sehr einfachen Bereitungsweise besitzt.

Tingirt wurden die mikroskopischen Präparate theils mit Carmin, theils mit Hämatoxylin; letzteres namentlich in den Fällen, in welchen es sich um die Darlegung organischer Muskelzüge handelte.

B. Die Arterien der Nasenschleimhaut.

Taf. I, Fig. 1, 2 und Taf. II, Fig. 6.

Der Nasenschleimhaut wird das Ernährungsmateriale durch mehrere Arterien zugeleitet, von welchen die Arteria nasalis anterior der Maxillaris externa, dann die Arteria spheno-palatina der Maxillaris interna und schliesslich die beiden Arteriae ethmoidales der Carotis cerebralis die bedeutendsten sind. Von diesen drei Gefässen ist die Spheno-palatina am stärksten und besitzt ein sehr ausgebreitetes Ramificationsgebiet; ihre Verzweigung erstreckt sich nämlich von den Choanen bis in das Vestibulum nasale hinein, während die anderen Gefässe, die direct in die Äste der Nasalis posterior übergehen und mehr die Rolle collateraler Bahnen spielen, sich auf die äussere Nase und die oberste Regien der Nasenschleimhaut beschränken. Die Spheno-palatina begnügt sich aber nicht mit der Nasenschleimhaut allein, sondern greift auch noch auf die nachbarlichen pneumatischen Räume (Sinus frontalis, maxillaris, sphenoidalis, ethmoidales) über, denen sie ansehnliche Zweige zusendet.

Die genauere Betrachtung der einzelnen Arterien ergibt nachstehende Details:

1. Arteria spheno-palatina s. nasalis posterior communis.

Taf. I, Fig. 1-4.

Die Arteria spheno-palatina geht aus dem in der Flügelgaumengrube gelegenen Endstücke der Maxillaris interna hervor, begibt sich zu dem Foramen spheno-palatinum, und theilt sich schon vor oder erst in demselben in zwei Zweige, von welchen der eine (Taf. I, Fig. 1 *B*) für die laterale, der andere (Taf. I, Fig 1 *C*) für die mediale Wand der Nasenhöhle bestimmt ist; ersterer heisst Arteria nasalis posterior schlechtweg, letzterer Arteria naso-palatina. Auf dem Wege zur Nasenhöhle durchbohrt die Arteria spheno-palatina — gegebenen Falles ihre beiden Hauptstämme — ein das Foramen spheno-palatinum verstopfendes Zellgewebe, von welchem nicht selten ein Theil in ein die Lücke zweitheilendes Bändchen umgewandelt erscheint. Über dem Bändchen liegt dann die Arteria naso-palatina, unterhalb desselben die Nasalis posterior. Bandartige Apparate um einzelne Zweige der Maxillaris interna gehören überhaupt zur Norm, nur ist ihre Ausbildung mannigfachem Wechsel unterworfen.

Die am Tuber maxillare verlaufenden Gefässe (Art. infraorbitalis, dentalis superior) werden gewöhnlich von mehreren (2—4) Bändern überbrückt, welche am Rande der unteren Augenhöhlenspalte oder in deren

[1] Archiv f. Dermatol. u. Syphilis. Prag 1873.

nächster Umgebung beginnen und am Tuber maxillare, in der Fascia buccinatoria und am Processus pterygoideus endigen. Die Arteria spheno-palatina (respective Arteria maxillaris interna) ist gar nicht selten sogar von einem fibrösen Rohre umschlossen, welches mit mehreren zackigen Fortsätzen an das Oberkiefer- und Keilbein geknüpft ist. Von den Bändern sind einzelne oft 2—3 Ctm. lang, 3—4 Mm. breit und mehrschichtig.[1]

Die Ramificationsbezirke der beiden oben angeführten Nasenarterien sind, wie wir bald sehen werden, nicht strenge von einander geschieden, denn die Nasopalatina sendet auch Zweige zur lateralen Wand.

Der Hauptstamm der Nasalis posterior läuft an der Seitenwand zwischen den hinteren Enden der unteren und mittleren Muschel abwärts und spaltet sich, nachdem er vorher einen Ast für den unteren Nasengang abgegeben (Taf. I, Fig. 1 *a*), an der unteren Muschel in drei sagittal gelagerte Zweige, von welchen der stärkste ungefähr in der Mitte zwischen dem oberen und unteren Muschelrande vorwärts zieht, die knorpelige Nase erreicht und in der Wandung der letzteren mit Zweigen der Maxillaris externa anastomosirt.

Von den beiden übrigen Zweigen wählt der stärkere den freien Muschelrand zum Verlaufe, gibt einen vorderen Ast für den unteren Nasengang ab (Taf. I, Fig. 1 *b*) und erreicht gleich dem mittleren Stamme die knorpelige Nase; der schwächere zieht am Insertionsrande der Muschel vorwärts, verlässt diesen aber bald und begibt sich auf die Wand des mittleren Nasenganges (siehe die Abbildung). Auf der Muschel befinden sich die Gefässe streckenweise in tief gegrabenen Rinnen untergebracht; im übrigen formiren sie im oberen und mittleren Nasengange, ferner auf der unteren Muschel ein grobmaschiges Arteriennetz.

In das Verzweigungsgebiet der Arteria nasalis posterior fällt auch die mittlere Nasenmuschel. Das starke Gefäss (Taf. I, Fig. 1 *c, c, c*) derselben, welches knapp hinter der mittleren Muschel abzweigt, verlauft theils am Muschelrande, theils gedeckt von diesem vorwärts, und seine Äste bilden auf der medialen Muschelfläche ein Geflecht.

Es verzweigt sich also die Arteria nasalis posterior in der Pars respiratoria und auch noch im unteren Bezirke der Riechspalte (mittlere Muschel).

Die obere Muschel, und wenn eine vierte vorhanden ist, auch diese, liegen der Verästelung der Nasalis posterior zu fern und erhalten daher ihr Blut aus der Arteria naso-palatina, die an der Basis des Keilbeinkörpers und gerade in der Projection der oberen Muschel in die Nasenhöhle eintritt. Diese schwächste unter den Muschelarterien (Taf. I, Fig. 1 *d, d*) bildet auch ein Netz und sendet eine Reihe von Zweigen gegen das Siebbeinlabyrinth ab.

Von den zwei Arteriae ethmoidales, welche die Ophthalmica der Nasenschleimhaut zuschickt, ist die anterior die stärkere. Zwischen beiden Ethmoidales obwaltet im Übrigen ein gewisses compensatorisches Verhältniss; denn man beobachtet, dass, je schwächer die vordere, desto stärker die hintere Siebbeinarterie ausgebildet ist. Die Ethmoidalis anterior (Taf. I, Fig. 1 *e, g* und Fig. 2 *a, b*) zieht in Gesellschaft des gleichnamigen Nerven, oft eine Strecke weit in einer Siebbeinzelle freiliegend, medialwärts, sendet neben dem Hauptstamme mehrere Zweige durch Öffnungen der Lamina cribrosa in die Nasenhöhle und verzweigt sich an der lateralen Wand, am Septum und in der äusseren Nase; sie inosculirt direct in einige Zweige der Nasalis posterior und der Nasopalatina. Die Ethmoidalis posterior (Taf. I, Fig. 1 *f.* und Fig. 2 *c* und *d*) anastomosirt auf der Siebplatte mit der Ethmoidalis anterior und inosculirt an der medialen wie lateralen Wand in das Arteriennetz der Nasalis posterior und der Nasopalatina.

Gar nicht selten ist die eine Ethmoidalis schwach entwickelt, dafür aber entweder, wie bereits angeführt, die andere stärker, oder es hat sich compensirend ein Nebenzweig zu einem verhältnissmässig ansehnlichen Ast emporgeschwungen. Durch die Verbindungen der Arteria ethmoidalis mit den Ästen der Nasalis posterior stehen die Meningealarterien mit den Arterien der Nasenschleimhaut in directem Connex.

[1] Ein ähnliches Band zieht unmittelbar unterhalb des Foramen ovale vom hinteren Rande der äusseren Platte des Proc. pterygoideus in schräger Richtung nach hinten zum Rande des Tympanicum. Auf dem Bändchen ruht der dritte Ast des Trigeminus.

Von minder wichtigen Arterien der Nasenschleimhaut seien erwähnt:

a) Der Nasenast der Arteria palatina descendens (Palatina major, Luschka), der kurz vor dem Austritte der Gaumenarterie aus dem Canal die zarte, siebförmig durchlöcherte mediale Wand desselben perforirt und sich hinten am Nasenboden verzweigt. Die Palatina descendens gibt aber auch, entsprechend dem mittleren Nasengange, einen Ast ab, der mit dem Hauptstamme der Nasalis posterior anastomosirt, zuweilen 1 Mm. dick ist und mit Endzweigen gleichfalls die Schleimhaut am Nasenboden erreicht.

b) Die Arteria pharyngea suprema, welche sich in der Choanengegend ramificirt.

2. Nasenäste der Maxillaris externa.

Die äussere Nase besitzt zwei Hautblätter: ein äusseres der Gesichtshaut zugehöriges, und ein inneres, welches theilweise das Vestibulum nasale auskleidet. Im ersteren liegen die starken Äste der Arteria nasalis externa, im letzteren die Endzweige der Nasalis posterior. Zwischen beiden Gefässsystemen existirt durch Zweige (2—3), welche am Rande der knöchernen Nasenöffnung von der Nasalis externa abzweigen und direct in die vorderen Enden der Nasenschleimhautgefässe (untere Muschel) übergehen, ein Verkehr. Diese Anastomosen können eine Dicke von $^1/_2$ Mm. erreichen.

3. Arterien der Nasenscheidewand.

Die Nasenscheidewand bezieht ihr Blut aus der Arteria naso-palatina (Taf. I, Fig. 1 *C*, Fig. 2 *A*), den beiden Arteriae ethmoidales (Taf. I, Fig. 2 *a, b, c, d*), der Arteria septi narium (Taf. I, Fig. 2 *B*) und den Gaumenarterien, aber auch an dieser Wand der Nasenhöhle, sowie an der lateralen, geben die Zweige der Arteria spheno-palatina den Ausschlag. Die Nasopalatina tritt knapp über der mittleren Muschel in die Nasenhöhle ein, und theilt sich an der Nasenscheidewand in einen oberen und unteren Zweig. Der obere, schwächere liegt auf der Lamina perpendicularis, der untere, stärkere auf dem Pflugscharbein. Letzterer spaltet sich wieder in zwei Zweige, von welchen der eine durch das Foramen incisivum gegen das Gaumengewölbe herab tritt. Die Nebenäste dieser Arterien lösen sich in ein Netz auf, welches oben mit den Scheidewandzweigen der Arteriae ethmoidales, vorne mit der Arteria septi narium und ganz hinten mit den schwachen Ausläufern der Arteria palatina anastomosirt.

4. Verbindungen der Nasenschleimhaut-Arterien mit der Art. angularis und der Ophthalmica.

Taf. II, Fig. 6.

Neben den Anastomosen, welche die Nasalis posterior mit Ästen der Maxillaris externa und der Augenpulsader, nämlich mit der Nasalis externa und den beiden Arteriae ethmoidales eingeht, existirt entlang des Thränennasenganges eine zweite ähnliche collaterale Bahn. Die Arterien des Thränennasenganges bilden nämlich ein weitmaschiges Geflecht (Taf. II, Fig. 6 *a, a*) und dieses Geflecht inosculirt:

a) Oben am Thränensacke durch einen vorderen Ast (*c*) in die Angularis.

b) Durch zwei nach hinten ziehende Zweige (*b, b*) in die Ophthalmica und endlich durch eine Arterie, die sich um den hinteren Rand des knöchernen Thränenganges herumschlägt, in einen Abkömmling der Arteria infraorbitalis. —

Die aufgezählten Arterien bilden in der Nasenschleimhaut (tiefste Schichte) ein Netz, aus welchem erst die eigentlichen Parenchymgefässe der Schleimhaut hervorgehen. Diese der Schleimhautoberfläche zustrebenden Äste sind spiralig gewunden, insbesondere in jenen Partien, wo die Schleimhaut in Folge der Einschaltung eines Schwellgewebes die Fähigkeit besitzt, an- und abzuschwellen. Ähnlich sind auch in anderen Organen, deren Volumen ansehnlich wechselt, wie in der Zunge, den Schwellkörpern der Geschlechtswerkzeuge, in den Gesichtsweichtheilen, am Herzen etc. die Arterien korkzieherartig gewunden, mit dem Unterschiede aber, dass in diesen alle Arterien, in der Nase aber nur die feineren Zweige aufgedreht sind; denn die grösseren liegen hier gestreckt und fixirt auf den Knochen oder in Furchen der letzteren.

Resumé.

a) In das Verzweigungsgebiet der Arteria nasalis posterior fällt die Regio respiratoria und noch eine untere Partie von der Riechspalte.

b) In das der Arteria naso-palatina die Scheidewand und der obere Antheil der Riechspalte.

c) Collaterale Bahnen sind reichlich vorhanden; zu diesen zählen: 1. Die Arteriae ethmoidales, 2. die Arteria nasalis externa, 3. Arteria septi narium, 4. die Arteria palatina und 5. die Arterien des Thränennasenganges.

In Folge dieses Reichthumes an collateralen Bahnen wird es innerhalb des arteriellen Schenkels der Nasenschleimhaut nicht leicht zu einer Circulationsstörung kommen.

C. Die Venen der Nasenschleimhaut.

Aus dem dichten Venennetze, beziehungsweise aus dem Schwellgewebe der Nasenschleimhaut, treten Venenstämme hervor, die, das Verhalten der Arterien nachahmend und sie begleitend, nach verschiedenen Richtungen abziehen. Man kann fünf Gruppen solcher Venen unterscheiden, von welchen

a) die eine, Plexus nasalis externus, vorwärts gegen die äussere Nasenöffnung;

b) die zweite, Venae ethmoidales anteriores et posteriores, aufwärts gegen die Schädel- und Augenhöhle;

c) eine dritte rückwärts gegen das Gaumensegel und den Pharynx;

d) eine vierte rück- und aufwärts durch das Foramen spheno-palatinum in die Flügelgaumengrube hinein; und

e) eine fünfte durch das Siebbein in die Schädelhöhe zieht, um hier in die Venen der Pia mater zu inosculiren.

1. Die vordere tiefe Nasenvene.

Taf. I, Fig. 3, 4, 5 und Taf. II, Fig. 5.

Die vordere tiefe Nasenvene recrutirt sich aus den dichten Venengeflechten der Nasenschleimhaut und der Haut des Vestibulum nasale. Die venösen Geflechte der Nasenschleimhaut setzen sich nämlich auch in das Vestibulum der Nase fort (Plexus nasalis externus) und sind hier grösstentheils von den Knorpeln der äusseren Nase gedeckt. Über den Flügeln lässt sich das Geflecht leicht darstellen, denn der Knorpel ist mit den Venen blos durch lockeres Gewebe verbunden; nicht so leicht gelingt dies aber am Nasenflügel selbst, weil eine innige Coalition zwischen letzterem und dem Geflechte besteht. Nach Ablösung des Knorpels erscheint die laterale Seite — demnach der gröbere Antheil — des Venennetzes, während der feinere dem Vestibulum nasale zugekehrt ist. Jene Partie der gröberen äusseren Venenschichte, welche vom Nasenflügelknorpel gedeckt wird, ist zarter und engmaschiger als der übrige Antheil.

Die aus diesem Netze[1] abziehenden Venenstämme begeben sich zum Rande der Apertura pyriformis Taf. I, Fig. 3, 4 und 5 *a', a', a'*), anastomosiren hier mit anderen aus der Nasenschleimhaut heraustretenden Zweigen (*b, b, b*), die sich um den Rand der knöchernen Nasenöffnung herumwinden und ferner mit Venen, die dem vorderen unteren Bezirke der Nasenscheidewand (*c, c, c*) angehören. Durch den Conflux so zahlreicher Venen am Rande der äusseren Nasenöffnung kommt es auch hier zur Bildung eines grobstämmigen, dichten Geflechtes (Taf. I, Fig. 3 und 4 *b, b, b*), dessen unterer Abschnitt stärker ist, weil hier die Venenstämme der Nasenscheidewand zum Geflechte hinzutreten. Diesen dichteren unteren Antheil des den Übergang zwischen den inneren und äusseren Nasenvenen vermittelnden Geflechtes hat zuerst N. Rüdinger[2] beschrieben.

Aus dem Geflechte gehen schliesslich 3—5 Venen (Taf. I, Fig. 3 und 4 *d, d, d*) hervor, welche in die vordere tiefe Nasenvene (Taf. I, Fig. 3 und 4 und Taf. II, Fig. 5 *e, e, e*) einmünden.

---

[1] Auf Taf. I, Fig. 5 vergrössert abgebildet.

[2] Chirurg. Anat. d. Menschen. Stuttgart 1871, Abth. III, Heft 1.

Von den aufgezählten Venen abgesehen, münden in das Randgeflecht der äusseren Nasenöffnung noch einige stärkere, oberflächliche Äste, die unter dem Depressor nasi und auf dem Nasenflügelknorpel liegen und mit 3—5 Zweigen in dem dichten Venennetze der Nasenhaut wurzeln. In diese Haut-Muskelvenen der Nase inosculiren eine Menge von kleineren Ästen aus dem vorher beschriebenen dichten, subcartilaginösen Venengeflechte.

Aus dieser Beschreibung ist zu ersehen, dass die äussere Nase einen grossen Reichthum an Venen besitzt. Die Venen liegen in drei Lagen übereinander geschichtet, und zwar die eine in der Haut, die zweite subcartilaginös in der Auskleidung des Vestibulum nasale und zwischen beiden eine dritte, perichondrale im Perichondrium der Nasenknorpeln.

Ein anderer Abfluss aus den venösen Gefässen der Nasenschleimhaut ist durch einige der grösseren Knochenvenen des Oberkiefers und des Nasenbeines gegeben. Man bemerkt bei jeder Injection des Schwellgewebes der Nasenschleimhaut, dass sich neben zahlreichen kleineren Knochenvenen auch einige dickere (Taf. II, Fig. 5 *e, e*) und durch diese rasch die Gesichtsvenen füllen. Bei näherer Untersuchung zeigt sich eine den Oberkiefer durchsetzende Vene am stärksten, da ihr Querdurchmesser im eingespritzten Zustande 1 Mm. beträgt; sie hängt innen mit einem dickeren venösen Zweig der Nasenschleimhaut zusammen, liegt mit einem ungefähr 1 Ctm. langen Stücke im Kiefer und mündet gewöhnlich wenige Millimeter unterhalb des Infraorbitalrandes in die Gesichtsvene. Diese Vene ist ein wahres Emissarium der Nasenschleimhaut.[1]

2. Die vorderen oberen venösen Abzugscanäle der Nasenschleimhaut.

Zu den aus dem venösen Geflechte der Nasenschleimhaut sich entwickelnden und gegen die Schädelhöhle gerichteten Venen gehören vor Allem die Venae comitantes der Arteriae ethmoidales, welche dadurch, dass ihr intracranielles Stück mit den Venen der Dura mater und dem oberen Sichelblutleiter anastomosirt, eine wichtige Verbindung zwischen den Gefässbezirken der Nasenschleimhaut und der harten Hirnhaut herstellen.[2] Eine zweite ähnliche, welche einen Nebenzweig der Arteria ethmoidalis anterior begleitet, dringt durch die Siebplatte in die Schädelhöhle ein, und geht entweder in das Venengeflecht des Tractus olfactorius oder direct in eine stärkere Vene am Orbitallappen über. Wegen dieser Inosculation darf sie mehr Dignität als die Verbindung der Vena ethmoidalis anterior mit den Netzen der Meninx fibrosa für sich in Anspruch nehmen. Um die in Rede stehende Anastomose darzustellen, ist es nicht nothwendig, eine complete Injection der Nasenschleimhaut auszuführen; es genügt, an einem sagittal durchtrennten Kopfe, dessen Gehirnhemisphären beim Sägen gar nicht, oder doch nicht zu stark verletzt wurden, eine Einstichsinjection in der Gegend jener Wulstung zu machen, die in der Anatomie Agger nasi genannt wird. Man sieht, wenn dies gelungen, an der Nasenschleimhaut ein Gefäss verlaufen, welches einen aufsteigenden Verlauf wählt, die Siebplatte passirt und in der vorderen Schädelgrube angelangt, entweder in das Venennetz des Tractus olfactorius übergeht, oder direct mit einer stärkeren Vene des Orbitallappens in Communication tritt. In einem Falle sah ich sogar den Hauptstamm dieser Vene in den oberen Sichelblutleiter einmünden.

Auf Taf. II, Fig. 2 ist eine solche Venenverbindung abgebildet. Man sieht, wie eine die Siebplatte perforirende Vene fünf Zweige ausschickt, um mit den meningealen Venen des Orbitallappens einen Verkehr herzustellen.

Der Blutstrom in der eben beschriebenen Vene wird unter normalen Circulationsverhältnissen wohl cerebralwärts gerichtet sein. Zu dieser Annahme veranlasst mich einmal die Analogie mit der Stromrichtung in

---

[1] Häufig sind im Oberkiefer, wie auch in der Abbildung zu sehen, ihrer zwei vorhanden.

[2] The Cyclopaedia of Anatomy and Physiology by R. B. Todd. Vol. III. „The veins of the nose, so far as they are known, are associated with its arteries. Their communication with the veins within the skull has been already mentioned. The anastomosis is chiefly effected by means of the branches of the ethmoidal and spheno-palatine veins, which communicate with branches opening into the longitudinal and coronary sinuses. (J. Paget.) — Sappey (Band III seiner Anatomie) sah als Varietät eine oder die andere der Venae ethmoidales in den oberen Sichelblutleiter münden.

den Ethmoidalvenen, zu deren System ja streng genommen, unsere Vene gehört, und dann die Stelle, an der die Vene die Nasenschleimhaut verlässt. Die Vene liegt nämlich den meningealen Venen viel näher als den grösseren, die Nasenhöhle verlassenden venösen Abzugscanälen. Noch wahrscheinlicher wird die angegebene Stromrichtung des Blutes in der genannten Vene, wenn man den Einfluss erwägt, den die in Folge ihres Baues am Collabiren verhinderten Sinuse, auf die Circulation innerhalb des Schädels ausüben. So wie der Druck in den grösseren Halsvenen fällt, äussern die Sinuse auf die Meningealvenen, resp. Gehirnvenen eine saugende Wirkung, und diese wird sich gewiss auch auf die Venen des Orbitallappens fortsetzen.

Die eben geschilderte Verbindung zwischen den Venen der Nasenschleimhaut und der Pia mater scheint bisher gar nicht oder nur wenig beachtet worden zu sein. Mehr Beachtung fand dagegen ein Emissarium des Foramen coecum, welches den grossen Sichelblutleiter mit den Nasenvenen in Verbindung setzen soll. Für diese Communication sind die meisten der anatomischen Schriftsteller unter Anderen H. Beaunis und A. Bouchard,[1] J. Hyrtl,[2] W. Krause[3] und C. Langer[4] eingetreten. Auch Luschka[5] fasste mit einiger Modification das Foramen coecum als Venencanal auf, welcher sich im weiteren Verlaufe theilt, um in die hinteren Cellulae frontales des Siebbeines einzumünden. In einem Falle sah Luschka den Canal am Nasenrücken münden. Nach F. W. Theile[6] steht der obere Sichelblutleiter durch das blinde Loch nur bei Kindern mit den Venen der Nase im Zusammenhange, eine Anschauung, der sich auch J. Henle[7] anschloss. Wenn die Auffassung Theile's richtig wäre, dann müsste es während der Entwicklungsperiode des Körpers zu einer Obliteration der das Foramen coecum passirenden und vom Sinus falciformis zu den Nasenvenen ziehenden Vene kommen.

Noch negativer als Theile fasst Sappey[8] die Verbindung auf, indem er sie überhaupt bestreitet, wobei ich bemerken muss, dass er nur vom Erwachsenen spricht; Sappey sagt bei Beschreibung des oberen Sichelblutleiters: „Son sommet corresponde à l'extremité supérieure de la crête coronale; il se termine graduellement en cul-de-sac. C'est à tort que quelques anatomistes le prolongent jusqu'au trou borgne,[9] où il se continuerait avec les veines nasales."

Um diese, wie aus den Angaben hervorgeht, noch immer strittige Angelegenheit endgiltig auszutragen, ist eine genaue Untersuchung des vorderen Endes des Processus falciformis nothwendig. Eine solche lehrt vor Allem, dass das Foramen coecum, abweichend von den übrigen Emissarien, keine den Canal ausfüllende Vene enthält, sondern vielmehr einen konischen Fortsatz der Sichel beherbergt, welcher sich mit Leichtigkeit aus dem Canale herausziehen lässt, und der in Bezug auf seine Länge sehr variirt. Ich fand ihn nicht selten 1—1½ Ctm. lang und mit seinem periferen, in einen sehr dünnen Faden auslaufenden Antheil frei endigend. Beim Neugebornen ist diese Fortsetzung wohl kürzer, aber bedeutend voluminöser; sie bildet hier einen kurzen, dicken und breiten bindegewebigen Pfropfen, der zwischen dem Siebbeine und dem Frontale lagert und für den die vordere Seite der Crista galli eine Vertiefung trägt.[10] Die Umwandlung dieses Pfropfes in den konischen Fortsatz der Sichel scheint sehr rasch zu erfolgen, denn ich fand ihn, ähnlich wie am Manne, auch schon in der Leiche eines nur zwei Jahre alt gewordenen Kindes. Dass dieser Conus im Erwachsenen wie im Neugeborenen Gefässe enthält, sieht man deutlich am Querschnitte; die Beziehungen der letzteren treten aber erst nach einer Injection zu Tage, und für eine solche wählt man am besten den oberen Sichelblut-

---

[1] Anatomie descriptive. 1880.
[2] Descriptive Anatomie.
[3] Handbuch der Anatomie.
[4] Lehrbuch der Anatomie.
[5] Anatomie des Menschen. Tübingen 1867.
[6] Siehe Th. Sömering, Vom Baue des menschlichen Körpers; umgearbeitet von F. W. Theile. Bd. III. Leipsig 1847.
[7] Gefässlehre.
[8] Traité d'Anatomie descriptive. Paris 1876.
[9] Trou borgne = Foramen coecum.
[10] Ich habe diesen Fortsatz, dessen Bedeutung noch nicht hinlänglich gekannt ist, in den Medic. Jahrb. Wien 1878, beschrieben und abgebildet.

leiter. Injicirt man diesen Blutbehälter, so zeigt sich vor Allem, dass derselbe im vordersten Bereiche mit der Abnahme aller seiner Durchmesser, auch den Charakter eines Sinus ablegt und dafür den einer gewöhnlichen Vene annimmt. Von vorne verfolgt, acquirirt der Blutbehälter der Sichel den Charakter eines Sinus erst mit der Einmündung einer verhältnissmässig stärkeren Vene des Orbitallappens, die oft schon knapp über der Crista galli einmündet, und von der vorher erzählt wurde, dass dieselbe mit der aus der Nasenschleimhaut in die Schädelhöhle ziehenden Vene communicire.

Ist nun die Einspritzung des vorderen Sichelendes gelungen, dann füllen sich im Momente *a)* die Venen des Stirnbeines, *b)* theilweise die Venen der Auskleidung des Sinus frontalis, *c)* die Venen im Pfropfe des Foramen coecum, *d)* die Venen der Weichtheile und Knochen der äusseren Nase, falls die Sichel eines Kindes (am besten eines neugeborenen) injicirt wurde, und *e)* die Nasenschleimhaut; erstere durch eine grosse Menge von feinen, in den Sichelblutleiter einmündenden Knochenvenen: die Nasenschleimhaut einerseits durch die Verbindung des Sichelblutleiters mit den Ethmoidalvenen und andererseits durch den Zusammenhang der bereits mehrfach citirten Vene des Orbitallappens mit den Venen der Nasenschleimhaut.

In dem beim Neugeborenen zwischen Stirn- und Siebbein eingeschobenen Bindegewebspfropf bilden die mit dem Sinus falciformis verbundenen 4—6 verhältnissmässig starken Venenzweige ein wahres venöses Geflecht, welches perifer mit den periostalen Venen der Nasenbeine und indirect mit den Venen der letzteren und mit denen der Gesichtsweichtheile anastomosirt. Durch dieses Verhalten erklärt sich leicht die Erscheinung, dass bei den Injectionen am kindlichen Schädel die Gesichtsweichtheile oft schon intensiv gefärbt sind, während die Nasenschleimhaut noch blass ist. Mündet in dieses Geflecht eine stärkere Knochenvene eines Nasenbeines, dann wird es wie in dem Luschka'schen Falle möglich sein, das Foramen coecum bis an die Gesichtsfläche zu sondiren. Einer solchen wohl blos ausnahmsweise vorhandenen Verbindung ist gewiss vom chirurgischen Standpunkte eine gewisse Bedeutung nicht abzusprechen.

Wird der Sinus falciformis major der Erwachsenen eingespritzt, dann erfolgt die Injection des Nasendaches nicht mehr in der für das Kind angegebenen Weise. Der Conus des Foramen coecum ist durch die Ausbildung des Stirn- und Siebbeines, ferner durch die Verengerung des primären, sehr weiten Foramen coecum vom Perioste des Nasenbeines abgeschnürt, die Venen des Conus haben sich verringert, und der Nachweis einer Verbindung derselben mit den periostalen Venen des Nasenbeines gelingt nicht mehr, wenigstens war ich in keinem Falle im Stande, eine solche nachzuweisen.

Einer Verbindung der im Conus eingeschlossenen Venen mit jenen der Stirnhöhlenschleimhaut durch Spalten der hinteren Sinuswand kommt keine besondere Bedeutung zu.

Es ergibt sich somit, dass Theile's Angabe wohl die richtige ist, dass aber auch Sappey Recht behält, denn eine directe Verbindung zwischen den Nasenschleimhaut-Venen und dem oberen Sichelblutleiter via Foramen coecum besitzt nicht einmal der Neugeborene. Es bleiben also an directen Communicationen zwischen den Nasenschleimhautvenen, Sinus falciformis und Gehirnvenen nur übrig: *a)* die die Siebplatte durchsetzende starke Vene, und *b)* die Verbindung der Venae ethmoidales mit dem Sinus falciformis major. Zuweilen sind diese Verbindungen sehr bedeutend und zwar in dem Falle, wenn eine Vena ethmoidalis direct in den oberen Sichelblutleiter mündet, oder einen starken Nebenzweig einer meningealen Vene des Orbitallappens zuschickt.

Nach dem geschilderten Verhalten der Venen im Foramen coecum ist es klar, dass, wenn Blutungen aus der Nasenschleimhaut (ob es sich um Erwachsene oder Kinder handelt, ist gleichgiltig), eine fühlbare Erleichterung nach sich rufen, diese nur auf eine Entleerung der die Siebplatte passirenden Venen und nicht auf die Venen des Propfes bezogen werden darf, denn bei Erwachsenen fehlt die beschriebene Verbindung und im Neugeborenen verbinden sich die Venen des Pfropfes nur auf Umwegen und nur durch zarte Ästchen mit den Schleimhautgefässen der Nase.

3. Die rückwärts abziehenden Venen der Nasenschleimhaut.

Taf. I und Taf. II, Fig. 1.

Unter den rückwärts abziehenden Venen der Nasenschleimhaut hat man zwei Systeme, ein oberflächliches und ein tiefliegendes zu unterscheiden, die aber unter einander durch vielfache Anastomosen geflechtartig verknüpft sind. Die Venen des oberflächlichen Systems (Taf. II, Fig. 1 *a, b, c*) treten aus den hinteren Muschelenden hervor, schicken sich Verbindungsäste zu und begeben sich schliesslich zu den grossen Venen des Schlundkopfes (*b*), des Gaumensegels (*a*), und die der obersten (*c*) zu den Venen in der äusseren Schleimhautbekleidung des Keilbeinkörpers. Die Hauptstämme der rückwärts aus den Muschelenden hervortretenden Venen verlaufen gewöhnlich für sich und werden oft dadurch, dass, wie auch in der Abbildung, die Vene der mittleren Muschel um den Tubenwulst herumzieht, auseinandergehalten. Diese Venen sind so stark und liegen so oberflächlich, dass sie im gefüllten Zustande, gleich den Venen am Zungengrunde, ohne Präparation sichtbar sind.

Das zweite System der rückwärtigen Abzugsröhren begibt sich durch das Foramen spheno-palatinum in die Flügelgaumengrube und wird erst sichtbar, wenn man die Nasenschleimhaut von der lateralen Wand ablöst. Sie erscheinen dann als comitirende Äste der Arteria nasalis posterior (siehe Taf. I, Fig. 1) und gewöhnlich wird jeder stärkere Arterienast von zwei Venen begleitet, die unter einander wieder durch quere Sprossen anastomosiren. Diese Venen gehen da aus der Nasenschleimhaut hervor, wo die Arterie in dieselbe eintritt, also schon vor dem hinteren Muschelende.

An jenen Stellen, wo die Arterienzweige in Knochenfurchen gebettet sind, wandelt sich die Vene in ein die Pulsader einschliessendes Geflecht um, auf dessen Function ich später zurückkommen werde. Am Foramen sphenopalatinum gruppiren sich die Venen ähnlich, wie wir dies für die Arterien angegeben haben: Die Venen der oberen Muschel confluiren mit denen der Nasenscheidewand, ziehen getrennt von jenen der Arteria nasalis posterior in die Fossa pterygo-palatina hinein, vereinigen sich, und inosculiren in den Plexus pterygoideus. Feinere venöse Zweige der Nasenschleimhaut begeben sich auch in den Canalis pterygo-palatinus und ergiessen ihren Inhalt in die Gaumenvenen.

Trotzdem diese Venen entweder durch directe Füllung oder durch Einstich in das Schwellgewebe der Nasenschleimhaut sich leicht darstellen lassen, so sind sie bisher doch nicht ganz richtig aufgefasst worden. Man hat die Strömung in den Nasenvenen zu einseitig betrachtet und der rückwärtigen, tiefliegenden Bahn mit Vernachlässigung aller anderen ein zu grosses Gewicht beigelegt. So hält z. B. Sappey[1] die hinteren Venen für stärker als die vorderen, und die gegen das Gaumensegel verlaufenden starken Äste werden mit Stillschweigen übergangen. Letztere hat meines Wissen blos F. Arnold in seinen Icones anatomicae theilweise abgebildet und bezeichnet.

Die Venen an der Nasenscheidewand gruppiren sich ähnlich wie die an der lateralen Wand und man kann auch hier oberflächliche und tiefliegende Venen unterscheiden. Erstere (Taf. I, Fig. 2 *c, c*) ziehen gegen das Gaumensegel ab, letztere, Venae nasopalatinae (siehe die Abbildung), begleiten, in Doppelreihen angeordnet, die gröberen Arterienzweige. Das venöse Netz der Schleimhaut pflegt überdies durch aufsteigende Zweige Beziehungen zu den Venae ethmoidales und anastomosirt vorne mit den Lippenvenen und dem Geflechte an der Umrandung der äusseren Nasenöffnung.

4. Verbindung der Nasenschleimhautvenen mit den Gesichts- und Orbitalvenen, entlang des Thränennasenganges (Plexus lacrymalis).

Taf. II, Fig. 3, 4 u. 5.

Wenn das Schwellgewebe der Nasenschleimhaut gefüllt ist, am besten durch Einstich, so dringt die Masse mit Leichtigkeit in das dichte, den Thränennasengang umspinnende Venengeflecht ein, und aus diesem

[1] Anatomie. Bd. III.

in die Vena facialis anterior, ophthalmica und infraorbitalis. Am Gange selbst verlaufen die einzelnen Röhren des Netzes entweder longitudinal oder etwas schräg, und gehen mit ihren unteren Enden (heissen wir sie Venae lacrymales inferiores) in die sagittal gerichteten Venen des unteren Nasenganges, entsprechend dem Muschelansatze, über (Taf. II, Fig. 4 *c*, *c*, *c*), während ihre oberen Theile am Übergange des Ductus in den Thränensack sich, nachdem sie noch vorher einige Zweige aus dem Saccus lacrymalis aufgenommen (siehe die Abbildung) in zwei Reihen gruppiren, von welchen die vordere einen starken Venenast (Fig. 3 und 4 *a* und Fig. 5 *d*) darstellend, sich um den Infraorbitalrand herumschlägt und in die Vena facialis antica einmündet, während sich die hintere (Fig. 3 und 4 *b*) mit den vorderen Orbitalvenen verbindet; erstere will ich Vena lacrymo-facialis, letztere lacrymo-orbitalis nennen. In die Vena lacrymo-facialis mündet ein stärkerer Zweig (Fig. 5 *f*), der aus den vorderen Siebbeinzellen stammt, und das Thränenbein durchbohrt.

An, für mikroskopische Untersuchung hergerichteten Querschnitten des injicirten Thränennasenganges überzeugt man sich davon, dass in das grobe oberflächliche Netz das feine Schleimhautnetz des Ganges einmündet. Über die Schichte, in der das von Vielen als Schwellnetz angesprochene Geflecht lagert, äussert sich J. Henle[1] in nachstehender Weise: „In dem unteren Theile des Thränencanales nimmt die eigentliche Schleimhaut, die conglobirte Schichte, an Mächtigkeit zu, und die fibröse wandelt sich in ein entschieden cavernöses Gewebe um, welches eine Fortsetzung des cavernösen Gewebes der Schleimhaut der unteren Muschel ist. Ihre Mächtigkeit beträgt im blutleeren Zustande 0·5—1·5 Mm.: davon zeigt nur eine dünne, der Knochenwand nächste Schichte die dem Periost eigenthümliche Zusammensetzung. Im Übrigen bilden den Hauptbestandtheil der Membran Netze venöser Gefässe mit longitudinal verlängerten Maschen." Dieses Geflecht hat nach Henle die Aufgabe, die Absperrung des Thränenganges gegen die Nasenhöhle zu besorgen, damit aus der Nase nicht Luft und Flüssigkeiten gegen den Thränensack aufsteigen, da, wie Henle mit Recht hervorhebt, keine der im Thränengange vorkommenden Klappen, im mechanischen Sinne des Wortes, diesen Namen verdient. Wir haben uns vorzustellen, dass im Ruhezustande das Schwellgewebe gefüllt und hiedurch die Lichtung des Rohres vernichtet ist. Beim Durchtritte von Thränen wird das Schwellgewebe gedrückt und nun entleert es sich entsprechend dem Grade der Compression gegen die Nasen-, Gesichts- und Orbitalvenen.

Bei Störungen könnte es sich ereignen, dass eine grössere Menge venösen Blutes der Nasenschleimhaut gezwungen wird, durch das Geflecht des Thränennasenganges gegen die Gesichtsweichtheile abzufliessen.

Fasse ich am Schlusse dieses Abschnittes alles über die venösen Abzugsröhren Gesagte zusammen, so zeigt sich, das für den Abfluss des Blutes aus der Nasenschleimhaut eine Reihe von grossen Emissarien zu Gebote stehen, und aus diesem Grunde wird es innerhalb dieser Röhrenleitung nicht leicht zu Stauungen kommen.

Auch die Bemerkung soll hier angefügt werden, dass das Venennetz, aus welchem die in dem letzten Capitel beschriebenen Venenstämme hervorgehen, morphologisch genommen, nur zum Theile dem arteriellen Netze entspricht, denn Ersteres ist viel dichter und bald sind die Arterienzweigchen von starken, bald von sehr zarten Venen begleitet, oder es decken sich die beiden Gefässnetze überhaupt nicht. Das Vorwiegen des Venennetzes zeigt sich am schönsten, wenn man die gröberen Venen und Arterien im mittleren Nasengange oder am Boden der Nasenhöhle miteinander vergleicht.

An den grösseren Arterien bilden die begleitenden Venen stellenweise Geflechte, welche durch ihre Fortsetzung bis in die Adventitia der Arterien die Gegenwart von Vasa vasorum bekunden. Es münden also wie nicht anders vorauszusehen, die Abzugsröhrchen aus den Capillaren der Gefässhaut in die commitirenden Venen.

[1] Eingeweidelehre.

D. Das Schwellgewebe und die Venennetze der Nasenschleimhaut.

Taf. III und IV.

Ich kann dieses Capitel nicht besser als mit den wenigen Zeilen einleiten, die W. Kohlrausch,[1] der Entdecker des Schwellgewebes in der Nasenschleimhaut, der Beschreibung desselben widmete. Diese Beschreibung lautet: „Das Venennetz, sich in den reichsten Anastomosen überall verbindend, liegt zwischen Periosteum und Schleimhaut, ist stellenweise, im ausgedehnten Zustande, $1^1/_2$—2‴ dick. Die Venenschlingen stehen in ihrer Hauptrichtung senkrecht gegen den Knochen gerichtet und zeigen im injicirten Zustande eine Dicke von $^1/_6$—$^1/_3$‴“; weiter heisst es: „die Gefässanordnung ist insofern von wissenschaftlichem Interesse, als sich daraus die Anschwellung der Schleimhaut der Nasengänge erklärt, welche bei chronischem Schnupfen so häufig ist. Gewiss hat Mancher schon die Erfahrung gemacht, dass bei solchen chronischen catarrhalischen Zuständen Nachts gewöhnlich das Nasenloch der Seite, auf welcher man liegt, verstopft ist und dies bald wechselt, wenn man sich auf die andere Seite legt. Es erklärt sich aus der Senkung des Blutes nach der tiefsten Stelle. Die immense Production von Flüssigkeit bei einem recht fliessenden Schnupfen bei der doch kleinen secernirenden Oberfläche habe ich mir erst erklären können, seit ich dies cavernöse Gewebe mit den dazwischen gelagerten grossen Drüsen kenne. Auch zur Erklärung der profusen Nasenblutungen möchte diese Gefässanordnung nicht unwichtig sein.“

Voltolini's[2] Angaben über das Schwellnetz werde ich später besprechen, daher ich nur noch R. Seeberg[3] anzuführen habe, der die senkrecht gegen die Muschel gestellten Venenschlingen[4] des Schwellnetzes der unteren Muschel nicht wieder darzustellen vermochte und ihre Darstellung durch Kohlrausch auf eine durch den Injectionsdruck veranlasste allzustarke Ausdehnung der Gefässe zurückführt. Hiemit ist aber nichts gesagt, denn der Injectionsdruck wird nicht im Stande sein, sagittal verlaufenden Venen eine frontale Richtung zu geben; wenn daher Seeberg die Schlingen nicht finden konnte, so wird hieran wohl die mangelhafte Technik Schuld gewesen sein.

Ich gehe nun zu den Resultaten meiner eigenen Untersuchungen über:

Der Schwellkörper der Nasenschleimhaut liegt nicht in einer eigenen Schichte, sondern durchsetzt die Mucosa von ihrer periostalen Seite an bis empor an die subepitheliale Schichte. So wird auch der Ausspruch von Kohlrausch: dass das Venennetz „zwischen Periosteum und Schleimhaut“ lagere, zu deuten sein. Den besten Beweis für die Richtigkeit dieser Localisation des Schwellkörpers liefern die Drüsen, die man allenthalben im Zwischengewebe des Schwellnetzes findet, und die sich stellenweise bis ganz nahe an die periostale Schichte in die Tiefe erstrecken.

Man kann im Allgemeinen die Behauptung aufstellen, dass die Nasenschleimhaut an jenen Stellen, wo sie, wie in der Regio respiratoria, mit einer grösseren Quantität Luft in Berührung kommt, dicker wird und aus diesem Grunde ist auch ein eigentlicher Schwellkörper blos an der unteren Nasenmuschel, dann am Rande der mittleren und ferner an dem hinteren Ende der mittleren und oberen Muschel entwickelt, in den zarteren oberen Theilen der Nasenschleimhaut kann hingegen nur von einem dichten Venennetze, nicht aber von einem Schwellgewebe die Rede sein. Dies sieht man am deutlichsten bei pathologischen Schwellungen und an gelungenen Injectionspräparaten der Nasenschleimhaut. Jene Stellen, welche einen Schwellkörper besitzen, schwellen diesfalls oft bis zum völligen Verschluss der unteren Nasengänge an, während die eigentliche Riechschleimhaut es zu keiner solchen enormen Verdickung bringt und sich auch nicht so elastisch anfühlt, als der injicirte Schwellkörper der Nasenschleimhaut. Am dicksten ist der eines Schwellkörpers entbehrende Antheil der Nasenschleimhaut vorne, entsprechend dem mittleren Nasengange,

[1] L. c.
[2] L. c.
[3] Disquisitio microscop. de text. membr. pituit. nasi. Dorpat 1856.
[4] Abgebildet von Kohlrausch, l. c. auf Taf. V, Fig. 1.

in dem Vestibulum nasale, zarter am Nasenboden und an den lateralen mit Nebenbuchten versehenen Flächen der Muscheln. In den Buchten der lateralen Muschelflächen ist sie oft so dünn, wie die Auskleidung einer pneumatischen Kammer. Hauptsubstrat der Schleimhaut bildet hier eine grösstentheils bindegewebige, stellenweise conglobirtes Gewebe enthaltende, oberflächlich mit Flimmerepithel bekleidete Membran, deren Venensystem stark reducirt erscheint und in welcher Drüsen nur mehr in spärlicher Anzahl angetroffen werden.

Ähnlich dem Vestibulum nasale verhält sich die Nasenscheidewand, da, morphologisch genommen, nirgends in derselben das Venennetz zu einem Schwellkörper aufgelöst ist. Wenn daher Hojer[1] sagt: „crassissima tunica in media septi parte et super conchis apparet, quoniam ibi plurimis vasis abundat", so muss ich für die bezeichnete Stelle der Nasenscheidewand wohl geltend machen, dass sie ihre Dicke nicht so sehr Gefässen als vielmehr der besonders reichlichen Einlagerung von Drüsen zu verdanken hat.

Übergehend zu dem Schwellnetze werde ich das der unteren Nasenmuschel beschreiben, weil es hier am schönsten ausgebildet ist.

Das erste, was bei Betrachtung dieses Schwellkörpers auffällt, ist, dass dieses Geflecht, ähnlich wie dies C. Langer[2] für das Schwellgewebe des Corpus cavernosum penis beschrieben hat, gegen die Peripherie hin, d. h. gegen die freie Fläche, an Stärke abnimmt, daher es des Vergleiches halber angezeigt ist, auf den Typus des Schwellgewebes in den Geschlechtsorganen näher einzugehen. Das centrale gröbere Venenconvolut des Penis ist nach Langer oberflächlich von einem feinen Venengeflechte eingeschlossen, dessen einzelne Röhrchen so zart sind, dass man sie nur mit der Loupe unterscheiden kann. An diesem feinen Netze, welches Langer „Rindennetz" nennt, unterscheidet er wieder eine gröbere innere und eine feinere äussere capillare Gefässpartie, die nebst präcapillaren und unmittelbaren Übergängen den Kreislauf im Gliede zum Abschlusse bringt.

Der Schwellkörper der Harnröhre besitzt auch zwei verschiedene Antheile, einen äusseren, den eigentlichen Schwellkörper, der aus dicht beisammenliegenden und anastomosirenden Venen besteht und einen inneren, der gleichmässig die Harnröhre umgibt, aus kleinen parallelen Längsgefässen besteht, auf welche gegen die Schleimhaut noch feinere Venen und die Capillaren der Urethralschleimhaut folgen.

In der Nasenschleimhaut besteht nun das Schwellnetz auch aus zwei Schichten, aus einer gröbere Venenstämme enthaltenden, dem eigentlichen Schwellgewebe, auf welchem als zweite sich eine feinere Rindenschichte lagert. Nur unterscheidet sich der Aufbau dieser Schichten dadurch von jenem des Corpus cavernosum penis, dass in der Nasenschleimhaut die beiden Schichten sich nicht so jäh als im Schwellkörper des Gliedes gegeneinander absetzen. Mehr Ähnlichkeit, schon wegen der Gegenwart einer Schleimhaut, besteht zwischen dem Schwellkörper der unteren Nasenmuschel und dem der Harnröhre.

Der tiefer gelegene Antheil des Schwellkörpers der Nase (Taf. III, Fig. 1 bis 11) besteht aus weiten, stellenweise gebuchteten und vielfach untereinander anastomosirenden Venen (Fig. 5), die trotz ihrer zahlreichen Verbindungen doch noch eine bestimmte Verlaufsrichtung erkennen lassen: sie verlaufen nämlich, wie dies schon Kohlrausch richtig angegeben hat, mehr quer zwischen der Schleimhautoberfläche und der knöchernen Muschel. Bei der Herstellung mikroskopischer Präparate der Schwellkörper ist es schwer, die Richtung der gröberen Gefässe zu treffen, daher man selten die Venen des Schwellnetzes der Länge nach durchschneidet. Zumeist werden sie quer oder schräge getroffen und man erhält rundliche, polygonale und zackige Lumina (Taf. III, Fig. 3, 5 und 10).[3] Hieraus folgerte J. Henle, dass der Schwellkörper der Nase aus vorzugsweise sagittal verlaufenden Venenstämmen aufgebaut sei, eine Annahme, der ich, wie schon bemerkt, nicht beizustimmen vermag. Leicht erhält man Aufschluss über die Richtung der Venen an Corrosionspräparaten des Schwellkörpers. Man braucht, nachdem ein solches Präparat angefertigt ist, nur eine Bruchfläche (Taf. III,

---

[1] De tunica mucosae narium structura. Berolini 1857.
[2] Über d. Gefässsystem d. männl. Schwellorgane. Sitzungsb. d. kais. Akad. d. Wissensch. Bd. XLVI.
[3] Siehe auch Henle, Eingeweidelehre. Fig. 638.

Fig. 1 und 2 desselben zu betrachten, und man wird über die Direction der Venen keinen Augenblick mehr im Zweifel sein. Auch an mikroskopischen Schnitten gelingt es zuweilen, ähnliche Bilder darzustellen, wie dies die Figur 4 der III. Tafel lehrt. Es stammt das Präparat vom Rande der unteren Nasenmuschel und der Schnitt wurde sehr schräge, beinahe parallel mit der Muschelfläche, durch das Gewebe geführt. Auf diese Weise erhielt ich die feineren Venennetze der oberflächlichen Schichte (a) und ihren Übergang in das gröbere Netz, dessen Röhren der Länge nach getroffen wurden.

Weniger schräg durch die Nasenschleimhaut geführte Schnitte sind auch instructiv, weil sie die vielen Verbindungen, welche zwischen den einzelnen Röhren des Schwellkörpers bestehen, darlegen. Einen solchen Durchschnitt habe ich auf Taf. III, Fig. 7 abbilden lassen, und er illustrirt so recht anschaulich Eberth's[1] Schilderung eines Schwellnetzes, welches nach diesem Forscher durch zahlreiche und rasch folgende Anastomosen zugleich weiter Gefässe, deren Gefässwände hiedurch zu dünnen Balken und Plättchen rareficirt werden, zu Stande kommen soll.

Durch die frontale Richtung der einzelnen Schwellkörperröhrchen wird bei ihrer Füllung rasch eine Verengerung der Pars respiratoria nasi eintreten. Dass eine gewisse Normalfüllung des Schwellgewebes vorhanden sein muss, um dem Nasengange jene Form und Weite zu geben, welche für die Respiration am geeignetsten ist, bedarf keines näheren Beweises, und von dieser Turgescenz an kann einerseits die Schwellung so weit zunehmen, dass der untere Nasengang vollständig verlegt wird, und andererseits wieder so abnehmen, dass weder die Besichtigung noch die Betastung der Schleimhaut einen Schwellkörper verrathen würde.

Ich gehe nun zu den Verbindungen des Schwellkörpers mit den aus der Nasenhöhle heraustretenden Venen über und halte mich bezüglich dieser vornehmlich an die tiefliegenden Abzugsröhren, da ja die Verhältnisse der oberflächlichen höchst einfach sind.

Löst man eine Nasenschleimhaut, deren Venensystem injicirt ist, von der knöchernen Wandung ab und betrachtet sie von ihrer periostalen Seite (Taf. III, Fig. 8) aus, so erscheint da, wo wir nicht von einem Schwellkörper sprechen, ein grobstämmiges, engmaschiges, kubisches Venennetz (a) (unterer, mittlerer Nasengang, Vestibulum nasale); da, wo ein Schwellkörper entwickelt ist, sieht man bis auf einzelne Stellen, und zwar solchen, die die grösseren Abflussröhren abgeben, die basale Seite des Schwellkörpers mosaikartig angeordnet (b). An wenigen Stellen hingegen gibt das Schwellnetz die beschriebene Ordnung auf und formt sich in ein gewöhnliches Geflecht um, dessen Fortsetzung eine sagittale Richtung acquirirt (c). Diese sagittal verlaufenden Venensäulen begleiten die grösseren Arterienstämme und bilden da, wo diese in Furchen der Muschel gebettet lagern, förmliche Geflechte um die Pulsadern. Diese Venengeflechte haben neben ihrer Hauptaufgabe, das Blut aus der Nasenschleimhaut herauszuschaffen, noch eine zweite Aufgabe zu erfüllen, auf die ich etwas genauer eingehen möchte. Die in die Furchen gebetteten Arterienstücke als Röhren, deren Volumen bald enger, bald weiter wird, können nämlich diese Dickenveränderung nur ausführen, wenn zwischen ihnen und der Knochenwandung ein Gewebe eingeschaltet ist, welches sich bei der Dilatation des Arterienrohres zusammendrücken lässt, und bei der Verengerung des arteriellen Gefässes seine frühere Gleichgewichtsfigur wieder erlangt. Hierzu ist kein Gewebe so geeignet, als gerade ein Venengeflecht. Daher finden wir auch diese Einrichtung ziemlich verbreitet. Für die Knochenarterien ist sie durch C. Langer[2] bekannt worden. Langer beschreibt, wie im Canalis nutritius tibiae neben der Arterie eine grössere, eine kleinere Vene und überdies ein zartes arterielles und venöses Geflecht enthalten ist und fügt dem anhangsweise folgende Reflexionen bei: „Bemerkenswerth scheint mir noch ein zartes Venengeflecht zu sein, welches ich nach einer ganz gelungenen Veneninjection auf der Wand einiger noch grösserer arterieller Stämmchen aufliegend angetroffen habe. Es bildete enge, rundliche Maschen. Es dürfte nicht ungerechtfertigt sein, diesen Geflechten noch eine weitere Bestimmung zuzumuthen. Der ganze Gefässcomplex ist in feste, unnachgiebige Wände eingeschlossen; ein Verschieben der, wenn auch noch so nachgiebigen Marksubstanz, ist

---

[1] Stricker's Handbuch der Gewebelehre.

[2] Das Gefässsystem der Röhrenknochen. Denkschr. d. kais. Akad. d. Wissensch. in Wien. Bd. XXXVI. Wien 1875.

daher nur möglich auf Grund des wechselnden Inhaltes der Venen. Da nun aber die schon ins Mark eingetretenen Arterien, selbst die mittleren Calibers, noch mit allen Häuten ausgestattet sind, sich daher selbst bis zum vollen Anschlusse der Wände contrahiren können, somit ihr Volum in verhältnissmässig grossen Differenzen verändern, so dürfte wohl den benachbarten Venen, deren Stämmchen so zahlreiche Emissäre besitzen, aber auch den die Arterie umspinnenden Plexus die Aufgabe zufallen, diese rasch wechselnden Differenzen ebenso rasch wieder zu begleichen.[1]

Ähnlich sind alle Venengeflechte der Knochencanäle, unter welchen der des carotischen Canals am bedeutendsten ist, aufzufassen; ja eine in einem grösseren Knochencanale eintretende Arterie, deren Wandung mit der Knochenwand verwachsen gedacht wird, ist physiologisch ein Unding. Auch die Einschaltung der Carotis cerebralis in den Sinus cavernosus habe ich auf dieselbe Weise zu erklären gesucht.[2] Da nämlich zwischen der oberen Mündung des Canalis caroticus und der Gehirnbasis kein sonst ein Subarachnoidalraum vorhanden ist, der die Arterie so aufnehmen würde wie dies rückwärts in Bezug auf die Arteria vertebralis der Fall ist, so muss die Arterie von einem anderen Medium umschlossen werden, welches sich dem wechselnden Volumen der Arterie accommodirt, und hiezu ist ein grosser Sinus am geeignetsten, namentlich dann, wenn die Arterie in den Blutstrom selbst eingeschaltet ist. Im systolischen Zustande der Carotis cerebralis füllt sich der Sinus, im diastolischen entleert er sich und auf diese Weise fördert die Bewegung der Arterie die Circulation im Sinus. Auch die in Fascien-Dissepimenten die Arterie umschliessenden Venengeflechte, z. B. das Geflecht um die Pudenda communis im Ligamentum triangulare urethrae dürften ausser ihrer Hauptfunction auch noch in dem eben besprochenen Sinne wirksam sein.

Auf den bisher beschriebenen lacunären Antheil des Schwellkörpers lagert sich oberflächlich das Rindennetz, und man beobachtet schon mit freiem Auge am Querschnitte der Muschel, dass die Lacunen gegen die Muscheloberfläche enger werden. Aber erst am Injectionspräparate wird dieses Verhalten ganz klar; mikroskopische Schnitte[3] (Taf. III, Fig. 4) zeigen dies recht deutlich, und noch schärfer die Bruchstücke von Corrosionspräparaten (Taf. III, Fig. 1 und 2 r) des Schwellkörpers wegen der Plastik, mit der an solchen das Schwellgewebe vortritt. Das weniger dicke Rindennetz hält mit seiner oberflächlichen Schichte eine sagittale Verlaufsrichtung ein, es besteht stellenweise aus mehreren dicht an einander geschobenen Schichten, und in denselben fällt die ungleiche Breite der unter einander zusammenhängenden Venen nicht mehr so stark auf, als dies in der tieferen Schichte der Fall gewesen ist, wodurch es dem Charakter eines gewöhnlichen Venengeflechtes näher steht, als dem eines Schwellkörpers. Es reicht bis an die conglobirte Schichte (Taf. III, Fig. 3 c) der Schleimhaut und nimmt aus derselben die venösen Capillaren auf.

Directe Übergänge präcapillarer Arterien in das Rindennetz oder in die tiefliegenden Lacunen habe ich trotz vielfacher Injectionen nicht angetroffen, und dies setzt einen grossen Unterschied zwischen dem Schwellkörper der Nasenschleimhaut und dem des Gliedes, in welchem nach Langer's Untersuchungen directe Übergänge reichlich vorkommen. Aber auch die Betrachtung des Balkengewebes im Schwellkörper der Nasenschleimhaut (Taf. III, Fig. 6) zeigt einen Bau, der sich von dem des Balkengewebes im Gliede wesentlich unterscheidet. Im Schwellkörper des Gliedes repräsentiren die Balken die ungemein rareficirten zu einem Strick- und Blätterwerke aufgelösten Gefässwandungen, und die Venenräume selbst sind zu unregelmässig geformten und verhältnissmässig sehr weiten Lacunen umgewandelt. Die Musculatur der Balken — in letzter Reihe eigentlich die der venösen Gefässe — ist sehr unregelmässig angeordnet und von einer Vertheilung, wie wir eine solche um Venen antreffen, ist nicht mehr die Rede. Im Schwellkörper der Nasenschleimhaut hingegen ist es mit der Auflösung der Venen in ein lacunäres System nicht so weit gediehen, daher auch die Muskellage bei weitem regelmässiger angeordnet erscheint. An guten Präparaten sieht man recht schön, wie die weiten Röhren des Schwellnetzes rings um die Gefässlichtung herum eine

[1] Einen ähnlichen Venenapparat werde ich im Canalis vertebralis ... W... beschreiben.
[2] Monatsschr. f. Ohrenheilkunde. Nr. 4. Berlin 1878.
[3] Am schönsten an der unteren Nasenmuschel zu erkennen.

äusseren Seite des endothelialen Rohres eine dicke Muscularis führen. In einzelnen Fällen, in welchen stellenweise die Wände der Lacunen stark contrahirt waren und zapfenartig gegen den Hohlraum vorsprangen, sah ich Querschnitte der Muskelbalken, ähnlich wie sie J. Henle in seiner Eingeweidelehre (Fig. 305) für die Harnröhre abbilden liess. Am schönsten zeigte sich die Muscularis der Lacunen, wenn die einzelnen Röhren des Schwellnetzes ihrer Länge nach getroffen wurden.

An der äusseren Peripherie der Muscularis löst sich das Bindegewebe der Gefässe in einen Filz auf, der auf diese Weise das Zwischengewebe des Schwellkörpers darstellt, und welcher je nachdem er blos aus Bindegewebe besteht oder auch eingeschobene Drüsenfortsätze enthält, eine verschiedene Dicke aufweist. In diesem auch reichlich elastische Fasern enthaltenden Zwischengewebe verlaufen auch die einzelnen zur Oberfläche der Schleimhaut hinziehenden arteriellen Zweige. Wenn man für die Nasenschleimhaut an dem Terminus Balkengewebe festhalten will, so dürfte man darunter eigentlich nur das zwischen den Muskelhäuten der Venen eingeschaltete Bindegewebe verstehen. Wollte man aber wie im Gliede unter Balken das Zwischengewebe zweier Venenlumina begreifen, so müsste man zu den Bindegewebsbalken auch noch die demselben zugekehrten Stücke der Gefässwände zählen. Richtiger aber ist es nach meiner Meinung, das ganze bindegewebige Substrat, welches auch die Drüsen enthält, als der Schleimhaut angehörig zu betrachten und in Bezug auf sein Verhalten zu den venösen Gefässen zu sagen: es werde von einem mit allen Schichten eines Blutgefässes ausgestatteten Schwellnetze canalisirt.

Ich muss noch beifügen, dass ich mich bestrebt habe, zu erfahren, ob auch in den bindegewebigen Balken Muskelzüge sich vorfinden. Diese Untersuchung hat wohl ein negatives Resultat ergeben, indem an vielen Stellen keine Spur von Muskeln in den Balken zu sehen war, aber bei oberflächlicher Betrachtung könnte man leicht verführt werden, an solche Muskelzüge zu denken; denn es finden sich in vielen Schnitten zwischen den einander zugekehrten Wänden zweier oder mehrerer Venen Muskelstränge untergebracht. Eine genaue und oftmalige Untersuchung des Gegenstandes lehrt aber, dass man es, bezüglich der genannten Muskelstreifen, nicht mit Bestandtheilen der Balken selbst, sondern mit Stücken von abzweigenden oder nachbarlichen Venenstämmen zu thun hat. Es passirt in einem Gewirre von Venen, wie es in einem Schwellkörper vorliegt, sehr leicht, dass man eine Vene quer trifft, eine nachbarliche, sagen wir schräg durchtrennt, und dass der Schnitt eine quere Anastomose zwischen beiden gerade im Muskelstratum durchsetzt. Jetzt erhalten wir im mikroskopischen Bilde zwei weite Venenlumina und ein den Zwischenbalken stellenweise deckendes Muskelband, welches man, wie bemerkt, bei oberflächlichem Studium leicht als einen dem letzteren angehörigen Bestandtheil betrachten könnte.

Vergleicht man die geringe Masse der Schleimhaut an der unteren Muschel mit dem grossen Reichthum an Venenmusculatur, von dem ich eben gesprochen, so drängt sich gewiss Jedem bald der Gedanke auf, dass die Nasenschleimhaut in bestimmten Bezirken ein sehr musculöses Organ sei, und dies ist, wie wir später sehen werden, physiologisch nicht unwichtig.

Im Neugebornen ist das Schwellnetz der Nasenschleimhaut (Taf. III, Fig. 9) einfacher, als im Erwachsenen; es bildet ein schönes Venennetz, dessen einzelne Schenkel aber noch keine lacunenartigen Buchtungen führen. Diese scheinen erst später, wie ich vermuthe, erst in der Zeit, in der das Schwellnetz mehr in Function tritt, die volle Ausbildung zu erreichen.

Vergleiche ich nach Allem was vorhergegangen, den Schwellkörper der Nasenschleimhaut mit dem Corpus cavernosum penis, welcher den Typus des cavernösen Gewebes enthält, so zeigt sich, dass, morphologisch genommen, eine vollständige Übereinstimmung beider nicht herrscht. In Bezug auf die Dicke und die Dichtigkeit der venösen Netze herrscht Analogie, aber das Schwellgewebe der Nase entfernt sich von dem Typus dadurch, dass erstens in demselben keine directen Gefässübergänge existiren, zweitens der Charakter von Venen durch die regelmässige Anordnung der Musculatur noch ganz deutlich ausgesprochen ist, und dass drittens das Schwellgewebe in eine Schleimhaut eingelagert ist; denn ich wiederhole, dass man stellenweise sehen kann, wie die Drüsen von der conglobirten Schichte bis nahe an die periostale Schichte der Schleimhaut reichen.

Zufolge dieser Eigenschaften, und dazu kommt noch die, dass er das Capillarsystem einer Schleimhaut in sich aufnimmt, gleicht der Schwellkörper der Nasenschleimhaut viel mehr dem der Harnröhre als dem des Gliedes. Berücksichtigt man das Verhalten der Musculatur in beiden Schwellkörpern (der Nase und des Gliedes), so wird man zur Annahme veranlasst: es nehme morphologisch der Schwellkörper der Nase eine Art Mittelstellung zwischen einem venösen Geflechte und einem wahren Schwellkörper ein; dass das Gewebe, von dem eben die Rede ist, physiologisch einem Schwellgewebe entspricht, unterliegt nach den Erscheinungen, die es im Leben darbietet und die gleich noch näher besprochen werden sollen, keinem Zweifel.

Die Füllung und Entleerung des Schwellkörpers dürften, ähnlich wie dies für die Geschlechtswerkzeuge der Fall ist, vom Nervensysteme, und für die Nase zunächst vom Ganglion sphenopalatinum abhängen. Dasselbe wird einerseits bei Füllung des Schwellkörpers vasodilatatorisch wirken, die Arterienwände und desgleichen die reichliche Musculatur des Venengeflechtes erschlaffen machen und andererseits wieder eine verengernde Thätigkeit ausüben; denn man bemerkt, dass bei Entleerung des Schwellkörpers die Schleimhaut nicht als schlaffer Sack die Muschel umgibt, sondern fest contrahirt der letzteren enge anliegt, welche Erscheinung nur auf Muskelzusammenziehung zurückgeführt werden kann.

Dieser Einfluss der Nerven auf den Schwellkörper der Nase ist im Übrigen durch Studien erwiesen, und ich hebe blos das Factum hervor, dass der Schwellkörper sich einerseits auf Reflexe hin füllt und dass andererseits Reflexe, welche „in weit entfernten Bezirken sich abspielen“, vom Schwellkörper der Nase ihren Ursprung nehmen, wie dies namentlich durch W. Hack[1] eingehend besprochen wurde. Hack schreibt:

„Tagtäglich kann die folgende Beobachtung gemacht werden. Sehr viele Menschen leiden, ohne gerade besonders zu Schnupfen prädisponirt zu sein, oft an einer flüchtigen, vorübergehenden verminderten Durchgängigkeit der Nasenhöhle. Ausserordentlich rasch kann sich dieser Zustand entwickeln, ausserordentlich rasch wieder verschwinden. Versucht man die Natur dieser Obstruction durch eine Untersuchung der Nasenhöhle festzustellen, so scheitert dieses Bestreben manchmal aus einer eigenthümlichen Ursache. Bei ängstlichen Individuen genügt die Furcht vor dem Einführen von Instrumenten, um die Erscheinungen mit einem Schlage zum Verschwinden zu bringen: die Nasenathmung ist dann wieder völlig frei und die rhinoskopische Untersuchung zeigt, dass sich dem Respirationsstrom nirgend ein Hinderniss in den Weg stellt.

So bedeutend kann der Einfluss rein nervöser Momente auf die in Rede stehende Erscheinung werden. In solchen Fällen muss wiederholt untersucht werden, bis es glückt, die psychische Alteration auszuschalten und das gleiche Resultat zu gewinnen, welches bei weniger ängstlichen Individuen bei der ersten Speculirung der Nasenhöhle constatirt werden kann. Es zeigt sich, dass das Lumen der Nasenhöhle durch eine auffallend starke Vorwulstung der Schleimhautpartie, welche das vordere Ende der unteren Muschel überzieht, verlegt ist. Die besprochene Schwellung pflegt bei Gesunden meist nur auf relativ ziemlich energische Reize einzutreten. Beim Aufenthalt in durch Staub, durch das Schwaden einer Lampe u. s. w. verunreinigten Luft kann sich dieser Zustand herausbilden, um gleich wieder zu verschwinden, sobald die Gelegenheitsursache entfernt ist. Es besteht hier also ursprünglich ein rein physiologischer Verschlussmechanismus, welcher im Stande ist, die Nasenhöhle gegen schädliche Einflüsse bis zu einem gewissen Grade zu verwahren.“

Vor W. Hack hat aber schon R. Voltolini[3] auf dieses Verhalten der Nasenmuschel die Aufmerksamkeit der Ärzte gelenkt. Er schreibt: „Dies eigenthümliche Schwellgewebe erklärt uns manche auffallenden Erscheinungen, die uns bei der Untersuchung und in Krankheiten der Nase begegnen, und die ohne die Kenntniss jenes Gewebes uns völlig räthselhaft wären. Wir sehen nämlich zuweilen bei der Untersuchung der Nase diese verlegt durch die untere Muschel, der Kranke bekommt keine Luft durch die Nase — wir untersuchen denselben Patienten nach einigen Stunden wieder und sehen, dass die Verlegung der Nase völlig aufgehört hat und die Nase frei ist.“

---

[1] Über eine operative Radicalbehandlung von Migraine etc. Wiesbaden 1884.

[2] Kälte, stark bewegte Luft, übermässig erwärmte Luft.

[3] Die Rhinoskopie und Pharyngoskopie. Breslau 1879.

Trotzdem hat Voltolini im Bezug auf die Erection des Nasenschwellkörpers den Einfluss des Nervensystems nicht berücksichtigt und eine von meiner Theorie über die Füllung und Entleerung des Schwellkörpers ganz abweichende Lehre aufgestellt, auf die ich bei der Wichtigkeit des Gegenstandes näher eingehen muss. Voltolini sagt: „Das Schwellgewebe gleicht dem der Pars cavernosa penis et urethrae und sie können sich im Allgemeinen eine Vorstellung davon machen, wenn Sie sich denken, dass die derbe nur 4^{mm} dicke Schleimhaut über dem Periost der Muschel in ein Balkennetz und in Höhlen sich zerklüftet, gleich einem Badeschwamm, und dieser Blutreichthum erklärt unter Anderem die copiösen Massensecrete, welche beim fliessenden Schnupfen ausgesondert werden."

„Dieser grosse Blutreichthum kann aber nur vorhanden sein, wenn das Schwellgewebe, so zu sagen, sich immer in Erection befindet; denn an der Pars cavernosa penis beobachten wir den Blutreichthum nur in der Erection. Wenn daher der Schwellkörper der Nase ganz so gebaut wäre wie der der Pars cavernosa penis, so würde für die Nase wohl der Übelstand entstehen, dass sie bald trocken, bald feucht wäre. Es ist eine bekannte physiologische Anschauung, dass die Nasenmuscheln dazu da sind, um die Fläche der Schleimhaut zu vergrössern; sie sind auch ferner dazu da, um dem Schwellkörper eine Stütze zu bieten."

Dies Alles ist gewiss richtig und auch einleuchtend, es erklärt aber immer noch nicht, wodurch das cavernöse Gewebe sich dauernd in einer Art Erection erhält; die Theorie, welche nun Voltolini aufstellt, um die Erection der Nasenschleimhaut zu erklären, geht von den zahlreichen feinen Öffnungen aus, welche die Nasenmuscheln besitzen, und durch welche Gefässe verlaufen.

Voltolini bemerkt: „Der Knochen gehört, so zu sagen, mit zu dem cavernösen Gewebe, er ist der harte Schwamm, welcher in den weichen hineingeschoben ist und ist nicht bloss eine feste Stütze dieses Gewebes; er macht es, dass der grösste Theil der Gefässe innerhalb des Knochens mit ihren Wänden befestigt sind. Würden die Gefässe bloss auf der Fläche des Knochens verlaufen, ohne ihn so zahlreich zu durchbohren, so könnten sie zwar auch die cavernösen Räume mit Blut erfüllen; wodurch würde aber dann das ganze Gewebe so zu sagen in Erection erhalten, damit das Blut in die Cavernen gelangen kann, wie beim Penis, wo das cavernöse Maschenwerk von der Tunica albuginea ausgeht, welche die Erection bewirkt? Die Verhältnisse der Gefässe in der knöchernen Muschel sind ähnlich wie die der Venae diploïcae am Schädel, die auch stets offen, beständig eine freie Communication zwischen Gehirn und Aussenfläche des Schädels ermöglichen."

Nach dieser Beschreibung muss ich annehmen, dass Voltolini den Gegenstand nicht von der richtigen Seite auffasste. Es soll das cavernöse Gewebe der Nase, damit es seiner Aufgabe gerecht werde, beständig in einer Art von Erection erhalten werden, und Voltolini glaubt, dass diese Erection durch die vielen Gefässe, welche die Lücken der Muschel passiren und an diesen fixirt sind, persistirend bleibe. Ich kann dem weder aus anatomischen noch physiologischen Gründen beipflichten; aus anatomischen nicht, weil ich nicht finde, dass die Venen des Schwellkörpers der unteren Muschel Lücken der letzteren passiren, und an der lateralen Seite der Muschel weiterziehen[1]; aus physiologischen nicht, weil die offen gehaltenen Venen gerade jene Erscheinung verhindern, welche Voltolini ihnen zuschreibt; es kann nämlich gar keinem Zweifel unterliegen, dass Blut viel leichter abfliessen wird, wenn die Gefässe so fixirt sind, wie dies Voltolini beschreibt, daher von einer Förderung der Erection im Schwellgewebe der Nase durch fixirte, offen gehaltene Venen nicht die Rede sein kann. Voltolini nahm zu wenig Rücksicht auf die Arterien, und das ist ein Fehler, denn die Arterien allein und nicht die Venen füllen den Schwellkörper; von den Arterien ist aber, wie gesagt, bei Voltolini nicht die Rede. Sehen wir der Analogie halber nach, wie in anderen Organen eine Erection eingeleitet wird. Für den Penis ist erwiesen, dass bei der Erection unter dem Einflusse des Lendenmarkes sich die Arterien dilatiren, die Balkenmuskeln erschlaffen, und dass an dem mit Blut vollgepumpten Schwellgewebe Einrichtungen existiren, die den Abfluss des Blutes einigermassen erschweren. Anders verhält es sich an der Muschel, trotzdem die einleitenden Momente dieselben sein werden, aber es ist immerhin möglich, dass hier die

[1] Im Knochen liegen nur seine eigenen Gefässe; die Arterien und die Venengeflechte hingegen wie bereits ausgeführt, stellenweise in Knochenrinnen.

Blutzufuhr nicht vermehrt zu werden braucht, und dass für ein weiteres Anschwellen schon eine Erschlaffung der Venenmuskeln hinreicht. Es verhält sich anders, weil sich, wie bereits bemerkt wurde, aus dem Schwellkörper der Nase das Blut leicht herausdrücken lässt. Es gehört das Gewebe, wie Henle[1] in einer brieflichen Mittheilung an Voltolini ganz richtig bemerkt, zu den compressiblen Schwellgeweben.

Man könnte vielleicht die in der Nasenschleimhaut obwaltenden Circulationsverhältnisse mit den in einem Rohre vergleichen, welches in seiner Mitte einen Ballon eingeschaltet enthält. Die durchströmende Flüssigkeit wird den Ballon füllen und er bleibt gefüllt, in so lange das Abflussrohr nicht weiter wird als das, welches die Flüssigkeit zuleitet. Übertragen auf den Schwellkörper der Muschel, ist die Arterie das zuführende, die Vene das der Arterie gleichweite, abführende Rohr, und dem Ballon entspricht der unter dem Einflusse des Nervensystemes stehende muskulöse, also regulationsfähige Schwellkörper, welcher eine bedeutende Dilatation seiner Räume zulässt und so lange gefüllt bleiben wird, als sich seine Muskeln nicht zusammenziehen. Da Voltolini auf die Arterien keine Rücksicht genommen und den noch dazu offenen Venen eine ihrer Function ganz widersprechende Aufgabe zuschreibt, nämlich die, die Erection des Schwellgewebes der Nase zu erhalten, so werde ich nicht zu weit gehen, wenn ich die Theorie Voltolini's als unhaltbar bezeichne.

Im Leben ist die Nasenschleimhaut hochroth, der Schwellkörper gefüllt, in der Leiche leer, und zusammengezogen oder nur mässig gefüllt. Stark geschwellt ist der Schwellkörper in der Leiche nur dann, wenn vorher die Muskeln in Folge eines chronischen Catarrhs gelähmt waren.

Bei der normalen Füllung des Schwellkörpers sind seine Maschenräume nicht ad maximum ausgedehnt, denn er ist im Stande auf Reiz noch stärker anzuschwellen. Die Erection des Schwellkörpers der Nase ist aber der des Corpus cavernosum penis nicht vergleichbar, weil das erigirte Glied bei Druck noch steifer wird im Gegensatze zu dem Schwellkörper der Nase, der unter dieselben Umstände versetzt, sich entleert, aber sofort sich wieder füllt, sobald der Druck nachlässt.

Schon der Umstand, dass die Nasenschleimhaut nur in der Pars respiratoria einen Schwellkörper besitzt, lässt vermuthen, dass derselbe zur Athmung in Beziehung stehe. Es hatten nun schon R. B. Todd und W. Bowman[2] die Bemerkung gemacht, dass die Geflechte sich in einer Region befinden, die mehr als eine andere erkältenden Einflüssen ausgesetzt sei, und dass sie daher dazu bestimmt scheinen, die Wärme dieser Theile und die Temperatur der in die Lungen einströmenden Luft zu erhöhen. Andererseits wurde wieder darauf aufmerksam gemacht, dass den reichlichen Venengeflechten der Nasenhöhle auch die Aufgabe zufiele, die Nasenschleimhaut beständig feucht zu erhalten (Voltolini). Für letztere Theorie spricht Manches; wir bemerken z. B., dass während die gesunde Nasenschleimhaut durch die Athmung nicht vertrocknet, die Mundschleimhaut alsbald vertrocknet wenn man gezwungen wird, durch die Mundhöhle zu respiriren. Daraus aber, dass bei der Athmung durch die Mundhöhle auch die Rachen- und Kehlkopfschleimhaut mit vertrocknet, müssen wir schliessen, dass bei normaler Respiration die Nasenschleimhaut an die Athmungsluft Feuchtigkeit abgibt. Gestützt auf Experimente, die Traube über den Einfluss zu kalter und erhitzter Luft auf die Lunge anstellte, und die negativ ausfielen, habe ich früher der Erwärmung der Respirationsluft kein Gewicht beigemessen, bin aber in jüngster Zeit von dieser Anschauung zurückgekommen, und dies namentlich durch die

[1] „In Bezug auf das Schwellgewebe spricht Herr Prof. Henle (nach einer brieflichen Mittheilung) die Ansicht aus: Sollte das Blut im Naseneingange nicht vielmehr wie an manchen anderen Stellen als Heizmaterial dienen, hier zur Erwärmung der Inspirationsluft? Er meint aus demselben Grunde den Gefässreichthum des Paukenfelles erklären zu können, das ja zu seiner Ernährung einer so ansehnlichen Blutzufuhr nicht zu bedürfen scheint. In Bezug auf die Füllung des cavernösen Gewebes spricht sich Henle dahin aus, dass, um die Gefässe, die nicht mit besonders contractilen Wänden versehen sind, offen zu erhalten — wie er glaubt — keiner anderen Hilfe bedarf, als des vom Herzen ausgehenden Blutdruckes. Er würde das cavernöse Gewebe der Muscheln zu der Art von Schwellgewebe nehmen, die er compressible genannt hat, deren Normalzustand die Schwellung ist, und zu deren Entleerung besondere Anlässe, wie äusserer Druck oder die vermehrte Contraction der Gefässe erforderlich sind. — Wenn auch die Füllung des cavernösen Gewebes, d. h. der Gefässe, welche jenes constituiren durch den vom Herzen ausgehenden und durch die Arterien verstärkten Blutdruck besorgt werden kann, und diese offen erhalten werden, so muss doch — sollte ich glauben — die Füllung beschleunigt werden durch den eigentlichen Verlauf der Gefässe im Knochen, wo deren Wände so befestigt sind, dass sie stets offen bleiben." (Voltolini, Die Rhinoskopie etc.)

[2] The physiological Anatomy and Physiologie, Vol. II. London 1859.

Mittheilung des Prof. Störk, nach welcher Leute, die gezwungen sind, durch die Mundhöhle zu athmen, an Kehlkopfkatarrh erkranken.

Um zu zeigen, wie verschieden geformt die Venengeflechte der Nasenschleimhaut sind, habe ich auf Taf. V, Fig. 1, die Venen der Nasenschleimhaut des Schafes abbilden lassen. Die Schleimhaut selbst ist an der unteren Muschel dünn und an Stelle des Schwellkörpers findet man in ihr einen Plexus, der aus reihenförmig angeordneten Venensäulen (*a*) besteht, zwischen welchen in regelmässigen Abständen die Arterien (*b*) eingeschaltet sind. Der Ausfall eines Schwellkörpers und der Ersatz desselben durch ein analoges dünnschichtiges Geflecht dürfte für die Function der Nasenschleimhaut als Erwärmungs- und Durchfeuchtungsapparat hinreichen, zumal, wenn man bedenkt, dass bei diesem Thier die Schleimhautoberfläche wegen der Länge des Gesichtsschädels und der unteren Nasenmuschel bedeutend grösser ist, als beim Menschen.

E. Die Capillarsysteme der Nasenschleimhaut und deren Verbindungen.

Taf. III, Fig. 10, 11 und Taf. IV, Fig. 1—7.

Bevor ich auf diese Capillaren eingehe, werde ich die Oberfläche der Nasenschleimhaut beschreiben, denn dieselbe nimmt auf die Formation der Gefässe Einfluss. An Angaben über das Relief der Nasenschleimhautoberfläche ist unsere Literatur weder reich noch ausführlich.

Am ausführlichsten hat sich über dasselbe noch Hyrtl[1] ausgesprochen, nach welchem die Nasenschleimhaut mit feinen Wärzchen (Tastpapillen), Flocken und niedrigen Fältchen besetzt ist. R. Seeberg[2] huldigt einer ähnlichen Anschauung, indem er sagt: „Membrana pituitaria circa concham inferiorem propter vasa multa, quae in illa decurrunt, rubida, spongiosa, $1^1/_2$—2 lineas crassa, in superficie conchae convexa ad nasi aperturam versus leviter granulata, in partibus posticis impressionibus subrotundis praedita apparet. Ad conchas versus prominentiae extant verrucosae vel rubiformes."

Ich selbst habe bezüglich der Schleimhautoberfläche mein Augenmerk hauptsächlich auf jene Theile gelenkt, welche mit einem Schwellkörper versehen sind und stimme im Allgemeinen den Angaben der beiden citirten Autoren bei, kann es aber nicht unterlassen zu bemerken, dass so einfach auch die Entscheidung, ob die Schleimhautoberfläche glatt oder mit Erhabenheiten versehen ist, zu sein scheint, man in praxi nicht so bald zu einem positiven Ausspruche gelangen wird, und dies aus folgendem Grunde: Die Nasenschleimhaut ist häufig Erkrankungen unterworfen, die verändernd auf dieselbe einwirken und wenn wir nun bei der Section, wie dies häufig zutrifft, eine mit Falten und Wärzchen besetzte Nasenschleimhaut vorfinden, so ist damit noch nicht bewiesen, dass dies zur Norm gehöre; die Erhabenheiten können ebenso gut pathologischen Ursprunges sein und sind es auch gewiss in allen jenen Fällen, wo dieselben eine gewisse Grösse überschritten haben. Hierauf weist schon die eine Thatsache hin, dass man in einem Falle die Schleimhaut mit hohen Leisten und grösseren Wärzchen besetzt antrifft, während man in einem andern Mühe hat, solche zu entdecken. Ich habe, um ein sicheres Urtheil fällen zu können, die Nasenschleimhäute von jugendlichen Personen und Neugeborenen untersucht, und bin durch diese Untersuchung zu dem Resultate gelangt, dass an der unteren Nasenmuschel die Oberfläche der Schleimhaut neben den Drüsenmündungen eine Reihe von leistenartigen Erhebungen, kleine Wärzchen (Taf. III, Fig. 10 *l* und 11 *a, b*) und eine Anzahl von Grübchen besitzt. Zwischen je zwei Leisten, welche eine sehr verschiedene Breite besitzen können, findet sich eine Rinne, die zuweilen in schräger Richtung und dabei recht tief in die Schleimhaut fortgesetzt ist, eine Auskleidung von Flimmerepithel besitzt, und am Querschnitte ganz einer Crypte gleicht. Diese Rinnen dürfen auch als solche aufgefasst werden, denn sie verstreichen durchaus nicht, selbst wenn man durch Injection die Schleimhautoberfläche ad maximum dehnt. Die erwähnten Leisten und Rinnen sind namentlich an den hinteren Muschelenden gut entwickelt. Stellenweise wieder ist die Schleimhaut nahezu glatt.

---

1 Descriptive Anatomie.

2 L. c.

Papillen, im wahren Sinne des Wortes, gibt es auf der Nasenschleimhaut nicht, ausser man wollte kurze Leisten oder kleine Wärzchen als solche ansprechen; stärker entwickelte Leisten aber geben im Durchschnitte das Bild einer Papille, worauf man Rücksicht zu nehmen hat.

Ähnliches zeigt auch der Rand und das hintere Ende der mittleren Muschel; desgleichen ist auch stellenweise die Schleimhaut an der Nasenseitenwand uneben, während die mediale Seite der beiden Siebbeinmuscheln und der grösste Theil der Nasenscheidewand beinahe glatt erscheinen.

Auf einige der gefalteten Stellen in der Nasenschleimhaut, namentlich aber auf eine der Scheidewand werde ich in einer eigenen Abhandlung zurückkommen.

Wenn die Nasenschleimhaut längere Zeit an chronischem Catarrh gelitten, dann hypertrofiren die Leisten, Wärzchen und die anderen Erhabenheiten der Nasenschleimhaut (untere Muschel), bis schliesslich dieselbe ein warzig-zottiges Aussehen angenommen hat. Am schönsten kann man diese Veränderung an der unteren Nasenmuschel studiren. Solche pathologische Fälle sind schon oft für normale ausgegeben worden und auch die von J. Henle auf p. 826 der Eingeweidelehre gegebene Abbildung gehört in diese Categorie und sollte daher aus einem Handbuche der normalen Anatomie ausgemerzt werden.

Ich gehe nun nach dieser Abschweifung zur Besprechung der Arterien, der Schleimhautcapillaren und ihres Zusammenhanges mit dem Schwellkörper über.

Die Arterien sind im Vergleiche mit der grossen Menge von Venen minder zahlreich und enger als diese. Ihre einzelnen Zweige geben, bevor sie noch recht zur Schleimhaut in Beziehung getreten sind, periostale Äste ab, die in letzterem Gewebe in ein feines, gestrecktes, aber weitmaschiges Capillarnetz sich auflösen, dessen Röhrchen entweder in die tiefste Schichte der Venengeflechte oder in die abziehenden Venenstämme einmünden. An den dünneren Stellen der Nasenschleimhaut, z. B. an der Scheidewand, in welcher die dicken Drüsenkörper, die ganze Dicke der Nasenschleimhaut durchsetzend, ziemlich regelmässig bis an die periostale Schichte grenzen, münden stellenweise die periostalen Capillaren in Venenzweige, die aus der Drüse heraus- und gegen die tiefen Abzugscanäle hinziehen.

Man kann auch zuweilen Capillaren sehen, die an der basalen Drüsenseite hervortreten und, weiter werdend, sich einer Vene zuwenden, nachdem sich vorher mit ihrer erweiterten Strecke eine periostale Capillare verbunden hat.

Nach Abgabe des periostalen Capillarnetzes ziehen die Arterien, wie bereits hervorgehoben wurde, korkzieherartig aufgewunden, in den Zwischenbalken des Schwellkörpers gegen die Schleimhautoberfläche empor, und geben da, wo sie auf Drüsen stossen, an letztere Zweigchen ab (Taf. III, Fig. 10). Auf diese Weise kommt es zu einem zweiten Capillarsystem, zu dem der Drüsen, auf welches in der oberflächlichen, conglobirten Schichte der Schleimhaut ein drittes Capillarnetz folgt. (Taf. III, Fig. 10*a*.) Die durch eine eigene Kapsel von dem umgebenden Gewebe geschiedenen Drüsen werden von den Capillaren korbartig umflochten. Um die einzelnen Schläuche bilden die Capillaren ein Röhrennetz, wie ich ein solches auf Taf. IV, Fig. 6, theilweise abbilden liess. Die in der Continuität der Capillaren gezeichneten und geränderten Kreise sind Querschnitte von der Länge nach auf den Drüsenschläuchen verlaufenden Gefässröhrchen. Die aus den Drüsencapillaren hervorgehenden Venen ergiessen sich je nach der Schichte, in der sie lagern, in weitere oder engere Venen. Die der Schleimhautoberfläche näher liegenden Drüsencapillaren münden mit ihren Abzugsröhrchen in das Rindennetz des Schwellkörpers, während die Venchen, welche aus den in der Tiefe der Schleimhaut, oft nahe dem Perioste, steckenden Drüsenkörpern heraustreten, ihr Blut in die nächst gelegenen weiten Lacunen des Schwellgewebes ergiessen. (Siehe Taf. III, Fig. 10 die tiefere Schichte zwischen *b* u. *b*.) Da, wo Drüsenkörper bis in die conglobirte Schichte emporreichen, und wie wir gleich hören werden auch im Bereiche der Mündungen der Drüsenausführungsgänge, verbinden sich die zwei Capillarsysteme unter einander.

Bemerkenswerth scheint mir in Bezug auf das Gefässsystem der Drüsen noch zu sein, dass die Ausführungsgänge — namentlich die der grösseren Drüsen — von einem äusserst dichten Capillarnetz umsponnen sind. Die aus dem Geflechte hervorgehenden Röhrchen münden (Taf. IV, Fig. 1 *a*, *a*) in umliegende Venen, darüber in das Rindennetz und da, wo der Gang in den Bereich der oberflächlichen Capillaren tritt, auch in dieses. Die Geflechte, wie die grösseren Gänge im Vestibulum nasale konnte ich gerade noch als dunkle Streifen mit unbewaffnetem Auge beobachten. Dieses Geflecht ist dem sogenannten compressiblen Schwellgewebe, speciell dem des Thränennasenganges vergleichbar und dürfte den Zweck haben, im Ruhezustande der Drüse die Lichtung des Ganges zu verschliessen.

Aber es gibt die Betrachtung dieses Geflechtes noch zu einer anderen Theorie Veranlassung, welche der gleicht, die vorher über die Venengeflechte in Knochencanälen aufgestellt wurde. Hiezu ist es aber nothwendig, die Lage eines solchen Drüsenganges in der Schleimhaut näher zu betrachten, und davon auszugehen, dass die Wänd'e des Ganges gleich denen der meisten übrigen röhrenförmigen Organe aneinander schliessen, wenn nicht gerade ein Körper ihre Lichtung passirt. Stellen wir uns einen solchen Drüsenausführungsgang im Ruhezustand, also ohne Lichtung vor: wie soll Flüssigkeit durchtreten? Wäre der Gang an die Wand des Rohres, in dem er steckt, festgewachsen, so müsste er stets offen bleiben, ausgenommen es wäre erlaubt, dem Stroma der Schleimhaut die Fähigkeit zu collabiren zuzuschreiben. Nun ist aber der Gang im Ruhezustande ohne Lichtung, und das durchtretende Secret müsste daher, falls auch das Stroma zusammengesunken ist, dieses auf die Seite schieben. Es ist unwahrscheinlich, dass solche Gewebsverschiebungen (in den dichten Antheilen der Schleimhaut) vorkommen. Viel wahrscheinlicher ist hingegen, dass, um dem auszuweichen, zwischen dem Gange und dem Canale, in dem er steckt, ein compressibles Gewebe in Form eines Venenplexus eingeschaltet ist. Dieser füllt sich, wenn die Secretion aufhört, entleert sich, wenn Secret den Gang durchströmt, und das eigentliche Stroma verbleibt dabei in Ruhe.

Ich habe bereits bemerkt, dass die Arterien der Nasenschleimhaut in den oberflächlichen, conglobirten Schichten in ein drittes Capillarsystem übergehen. Die Capillaren dieser Örtlichkeit erheben sich, namentlich da, wo die Schleimhaut Erhabenheiten in Form von Leisten und Wülsten trägt, zu langgestreckten, dicht gruppirten Schlingen, die aber auch an den beinahe glatten Stellen nicht fehlen; nur sind sie hier selbstverständlich niedrig, wie flach gedrückt. Da die Leisten der Nasenschleimhaut stets breiter als Hautpapillen, oft aber sogar sehr breit sind (siehe Taf. III, Fig. 11 *aa*), so finden wir in denselben stets eine Gruppe von Schlingen eingetragen, welche untereinander selbst ganz nahe an ihren Umbiegungsstellen in Verbindung treten.

Die der Schlinge das Blut zuführende Arterie ist verhältnissmässig sehr eng, während der dem Venensystem zugekehrte, absteigende Schenkel der Schlinge sich erweitert und sehr abrupt in den im Vergleich zu den Schlingen sehr weiten oberflächlichen Theil des Rindennetzes, beziehungsweise in stärkere Venen einmündet. Die Arterien sind von den Venen leicht zu unterscheiden; erstere sind sehr eng, letztere recht weit.

Auf Taf. III, Fig. 11 und Taf. IV, Fig. 2, 3, 4 und 5 habe ich solche Schlingen abbilden lassen. Taf. III, Fig. 11, stellt einen Längsschnitt von dem hinteren Ende der unteren Muschel vor. Man sieht bei *a. a. a.* eine sehr breite Leiste, der sich seitlich je eine andere *(b)* anschliesst. Im Innern der Leiste findet sich ein dichtes, aus zahlreichen, untereinander anastomosirenden Schlingen gebildetes Geflecht, das schliesslich in das Rindennetz einmündet. Fig. 2 der IV. Tafel zeigt zwei Schlingen der unteren Muschel mit arteriellem Ursprunge und deren Übergang in die Vene; Fig. 3 derselben Tafel liess ich anfertigen, um die Verbindung der Schlingen zu zeigen.

In Fig. 4 und 5 sieht man recht niedrige Schlingen, die plötzlich in weite Venenstämme übergehen. Es haben Todd und Bowman [1] in der injicirten Schleimhaut der Riechsphäre eines Embryo an den Capillaren niedrige Schlingen mit partiellen Erweiterungen gefunden und dem beigefügt, dass sie nicht im Stande waren, Ähnliches vom Erwachsenen darzustellen. Ich weiss wohl nicht, ob die Homologie ausser Zweifel steht, möchte aber glauben, dass die von mir auf Taf. IV, Fig. 4 und 5 abgebildeten Schlingen den von Todd und Bowman gefundenen entsprechen.

Um die Drüsenöffnungen an der Oberfläche der Schleimhaut bilden die Capillaren Gefässringe, welche den die Mündungen der Haarbälge umgebenden (Taf. IV, Fig. 7) ziemlich gleichen, nur sind letztere grösser.

[1] L. c.

Der Übergang der Nasenschleimhaut in die Haut des Vestibulum nasale und in die Schleimhaut des Gaumens erfolgt, wie das im Allgemeinen schon R. Seeberg[1] richtig angab, allmälig: nur für die Seitenwand und die Choanen möchte ich eine Ausnahme verlangen, wo die Nasenschleimhaut durch den Sulcus nasalis posterior ziemlich scharf abgegrenzt ist.

Etwas anders verhält es sich mit den Gefässen; denn man bemerkt, dass im Vestibulum nasale die Gefässe, wo die Schleimhaut beginnt, plötzlich bedeutend weiter werden, während die im Hautantheile des Vestibulum bei aller ihrer Dichtigkeit durch Zartheit sich auszeichnen. Bei dieser Gelegenheit sei bemerkt, dass die einzelnen Schichten der äusseren Nase ausserordentlich reich an Gefässen sind, und ferner, dass die durch die Nasenknorpel getrennten Gefässbezirke in den Zwischenräumen der Knorpel, und dann an den Rändern derselben (durch die Gefässe des Periostes), mit einander anastomosiren.

Um die Wandungen der Haarbälge bilden die Capillaren zarte, weite Gefässkränze (Taf. IV, Fig. 7).

Nach allem, was beschrieben wurde, gestaltet sich demnach in den mit einem Schwellkörper versehenen Antheilen der Nasenschleimhaut die Circulation in nachstehender Weise:

Die Arterie löst sich im Perioste, in den Drüsen und in der conglobirten Schichte in drei capillare Netze auf, und zwischen diesen und den abführenden Venen ist ein Schwellkörper, resp. ein dichter Venenplexus eingeschaltet. Durch die Einschaltung eines Schwellkörpers, also einer sehr ausgebreiteten Blutbahn zwischen Capillaren und Venenabflüssen, welche den Blutdruck in der Schleimhaut steigert, die Stromgeschwindigkeit des Blutes hingegen verlangsamt, wird ein Stauungsapparat geschaffen, welcher der Secretion und Wärmeausstrahlung sehr zu Statten kömmt.

Die Capillaren der conglobirten Schichte und ein Theil der Drüsencapillaren sammeln sich in Venen, die in das Rindennetz münden; die Venen der tiefer gelegenen Drüsenantheile und die des Periostes gehen in die lacunären Partien des Schwellkörpers über, und die des Periostes zum Theil in die cavernösen Räume, zum Theil in die aus denselben gegen die periferen Venen abziehenden weiten Nasenvenen. Ein den Gefässschlingen der conglobirten Schichte durch die Arterie zugeführter Blutstropfen passirt, bevor er die Nasenhöhle verlässt, die Schlingen, dann das Rindennetz, hierauf das tiefe Netz des Schwellkörpers und schliesslich eine der abziehenden Venen. Ein Blutstropfen der Drüsencapillaren wird durch das Rindennetz den eben beschriebenen Weg nehmen, oder kann, wenn er in den tieferen Theilen sich befindet, direct durch die Lacunen einer abziehenden Vene zusteuern. Ein Blutstropfen in den Capillaren des Periostes kann direct in eine Vene übergehen.

Ich will nun zum Schlusse den Circulationsapparat der Nasenschleimhaut mit dem der Haut vergleichen, und beziehe mich in Bezug auf die Gefässe der Haut auf die bereits citirte Abhandlung von W. Tomsa.

Zwischen diesen beiden Organen herrscht manche Analogie: *a*) In der Nasenschleimhaut, wie in der Cutis gibt es einen secretorischen Blutstrom, der sich aus den Capillaren der Drüsensubstanz und denen der Papillarschichte, beziehungsweise dort aus denen der conglobirten Schichte zusammensetzt. Sowie in der Haut, sehen wir auch in der Nasenschleimhaut eine enge Arterie zu einer Schlinge werden, aus der das Blut durch weite Abflussröhren abgeleitet wird. Tomsa sagt: „dass die absteigenden Schenkel der Capillaren sich nicht überall gleich an der Basis der Wärzchen mit den benachbarten zu Venenwurzeln“ vereinigen, sondern häufig eine Art mehr oder minder deutlichen Schwellnetzes bilden, welches stellenweise, z. B. in der Hohlhand zwei Schichten besitzt, eine oberflächliche, deren Längsaxe mit den Reihen der Hautpapillen parallel läuft und eine tiefe, polygonale Maschen bildende, aus der die Venenstämme hervorgehen. Die Bezeichnung „Schwellnetz“ für das Venennetz begründet Tomsa damit, dass er auf die Differenz in der Lichtung der Zufluss- und Abflussröhren des Papillarblutstromes aufmerksam macht, der darauf hinweist, dass das Netz nur dann „allseitig von strömendem Blute gefüllt sein wird, wenn eine aussergewöhnliche Erweiterung der Arterien stattgefunden“. Ähnliches gilt für die Nasenschleimhaut; auch hier ist der arterielle Schenkel eng, der venöse verhältnissmässig

---

[1] L. c. „Membrana pituitaria nasi neque in anteriore parte prope nares externos neque in posteriore ad fauces versus certo limite terminatur, sed eo potius loco, quo nares aperiuntur, cutis faciei sensim in illos transit.“

ausserordentlich weit, und die absteigenden Schenkel der Gefässsehlingen gehen nicht sofort in die Venenwurzeln über, sondern in ein Schwellgewebe, an dem sich auch zwei Abschnitte, nämlich ein engerer und ein sehr weiter unterscheiden lassen; der Unterschied liegt nur darin, dass unser Rindennetz weiter und dichter ist, als das Schwellnetz Tomsa's.

b) Der Blutstrom durchfliesst, wie Tomsa angibt, ein Hautstück in senkrechter oder diagonaler Richtung und sondert sich in drei übereinander geschichtete Blutbahnen, die schliesslich wieder in gemeinsame Venenstämme einmünden. Zu diesen drei Bahnen zählen: 1. der „Fettstrom", 2. die Schweissdrüsenblutbahn und 3. der Papillarstrom.

Auch in der Nasenschleimhaut haben wir drei übereinander geschichtete Blutbahnen, und zwar:

1. Eine dem Papillarstrome der Haut analoge oberflächliche Capillarschichte.
2. Eine den Hautdrüsen correspondirende Schleimdrüsenblutbahn, und
3. einen periostalen Strom für den ausfallenden „Fettstrom" der Haut. Ein Unterschied ist nur darin gelegen, dass die Capillarsysteme der Cutis schärfer von einander geschieden sind, als die der Nasenschleimhaut. In der Nasenschleimhaut sind, bis auf das periostale Netz, welches isolirt ist, die Capillarsysteme einander dadurch, dass die Drüsenmassen stellenweise beinahe die ganze Dicke der Schleimhaut durchsetzen, sehr genähert, und die Verbindung erfolgt vorwiegend durch das Rindennetz des Schwellkörpers.

Die Frage, ob das Blut immer gleichzeitig durch alle drei Bahnen der Haut fliesst, oder ob nicht unter gewissen Umständen, die eine oder die andere der Bahnen ausgeschaltet werde, glaubt Tomsa dahin beantworten zu dürfen, dass letzteres, wenn auch nicht geradezu sichergestellt, so doch sehr wahrscheinlich ist. Ob Ähnliches an der Nasenschleimhaut vorkommen könne, will ich nicht discutiren, möchte aber darauf aufmerksam machen, dass, wenn man sich das Schwellgewebe auf das Äusserste contrahirt denkt, dies den Kreislauf in der periostalen Schichte durchaus nicht aufhebt.

Eine weitere Analogie wird dadurch hergestellt, dass es auch in der Nasenschleimhaut keinen derivatorischen Kreislauf gibt.

Von den Schweissdrüsen erzählt Tomsa, dass ihr Blutstrom am Knäuel nicht abschliesst, sondern mit den Blutgefässen des Ausführungsganges in Zusammenhang steht. Aus den Blutgefässen des Knäuels sondern sich nämlich mehrere Gefässe ab, die langgestreckt, stellenweise durch kurze Queranastomosen verbunden, den Drüsengang nach aufwärts begleiten, um in die Blutbahn der Pars papillaris einzumünden. Ähnlich sind die Ausführungsgänge der Drüsen in der Nasenschleimhaut von Venen umgeben, deren Function anzudeuten ich mir vorher erlaubte.

F. Die Gefässe in den Schleimhäuten der pneumatischen Räume.

Die pneumatischen Anhänge verhalten sich in Bezug auf ihr Gefässsystem ganz ähnlich der Nasenschleimhaut, und es kann dies nicht auffallen, wenn man berücksichtigt, dass die Auskleidung der pneumatischen Räume aus Ausstülpungen der Nasenschleimhaut sich entwickelt. Das arterielle Hauptgefäss der Nasenhöhle wird also auch die Gebilde der pneumatischen Räume ernähren, und die Venen derselben werden zu den Abzugscanälen der Nasenschleimhaut zurückkehren. Es muss nur berücksichtigt werden, dass entwicklungsgeschichtlich die pneumatischen Räume des Siebbeines anderer Abkunft als die des Stirn-, Keil- und Oberkieferbeines sind; daher gewahrt man, dass das Gefässsystem des Siebbeinlabyrinthes trotz seiner vielfachen Beziehungen zur Nasenschleimhaut, zum Sinus frontalis und zum Thränenapparate in den Ethmoidalgefässen eine verhältnissmässig weite collaterale Bahn findet. Die drei übrigen geräumigen pneumatischen Räume besitzen gleichfalls collaterale Gefässbahnen, wenn auch nicht so bedeutende, als das Siebbein, und beispielsweise hebe ich hervor, dass die Auskleidung der Kieferhöhle neben der Hauptarterie, welche im mittleren Nasengange (Taf. I, Fig. 1 bei *h*) aus einem Aste der Nasalis posterior abzweigt und, im Sinus supramaxillaris angelangt, sich vorerst in der Schleimhautbekleidung der medialen Sinuswand ausbreitet, eine Reihe von allerdings zarten collateralen

Ästen aus der Arteria infraorbitalis an der Decke und aus den hinteren oberen Alveolararterien an der äusseren hinteren Kieferwand bezieht. Die Stirnbeinhöhle enthält neben den arteriellen Zweigen aus der Nasenschleimhaut auch noch solche aus den Zweigen der Ophthalmica und die Auskleidung der Keilbeinhöhle steht, abgesehen von ihrer Verbindung mit den Arterien der Nasenschleimhaut auch mit den Arterien der die cerebrale Seite des Keilbeinkörpers überziehenden Dura in Zusammenhang. Die Siebbeinzellen erhalten ihren Blutstrom durch die Gefässe der beiden Siebbeinmuscheln, durch die Arteria ethmoidalis und gewiss auch noch durch zarte Zweige des den Thränensack umgebenden Arteriennetzes. Die Communicationsröhrchen zwischen den Hauptgefässen der Sinusschleimhaut und den collateralen Bahnen passiren zum guten Theile die knöcherne Wand des entsprechenden pneumatischen Raumes. Noch schärfer tritt diese Beziehung zwischen den Knochenwänden der Räume und ihren Auskleidungen hervor, wenn man das venöse System untersucht, von welchem gleich die Rede sein wird.

Die in die Auskleidung eindringenden und der Schleimhautoberfläche zusteuernden Arterien geben für die periostale Schichte der Auskleidung eine Reihe von Zweigen ab, die in dieser Schichte ein zartes, gestreck verlaufendes und weitmaschiges Capillarnetz formiren. In diesem Gefässnetze sieht man stellenweise korkzieherartig gewundene und zusammengerollte Ausläufer, welche dadurch, dass beim Ablösen der Auskleidung von der Knochenwand die in diese eintretenden Röhrchen ab- oder herausgerissen werden, diese eigenthümliche Form erlangen. Mit den Periostgefässen der Sinusauskleidung hängen da, wo die Zahnnerven an der inneren Wand der Kieferhöhle freiliegen und dem Perioste sich anschmiegen, auch die Gefässe derselben zusammen; für jene feineren Zahnnerven hingegen, die in der periostalen Schichte selbst verlaufen, besitzt die Sinusauskleidung ein eigenes Capillarnetz. Die der Oberfläche (Schleimhautschichte) der Sinusbekleidung zusteuernden Arterien lösen sich, nachdem sie vorher schon für die spärlichen Drüsenschläuche der Membran ein Capillarnetz gebildet, in der oberflächlichen Schichte in ein zweites, flächenartig ausgebreitetes Capillarnetz auf (Taf. V, Fig. 7), welches minder dicht als das in der Nasenschleimhaut, und flachgedrückter als jenes in der dünneren, wahren Riechschleimhaut, den Charakter von Gefässschleifen nicht recht aufkommen lässt.

Die venösen Antheile der Capillaren gehen in gröbere Gefässe über und diese in ein dichtes, tiefliegendes Geflecht von dicken Abzugscanälen (die auf Taf. V, Fig. 7 lichter gehaltenen Gefässe), die den Communicationsöffnungen der Sinuse zusteuern und ihr Blut in die diesen Ostien zunächst gelegenen Nasenvenen ergiessen. Von der Stärke dieser Venen kann man sich eine Vorstellung machen, wenn man die dritte Figur der fünften Tafel besichtigt, in welcher die stärksten Venen der Auskleidung des Sinus frontalis abgebildet sind. Die Röhren des tiefliegenden Netzes verlaufen da, wo sie der Mündung der Höhlen schon nahe sind, in Reihen nebeneinander (Taf. V, Fig. 4 und 6 *b* und Fig. 5). An den Ostien der Sinuse, wo die sich verdünnende Nasenschleimhaut ihren Übergang in die Auskleidung der pneumatischen Räume vollführt, gewahrt man auch an den Venen eine Art von Übergang, indem die nebeneinander liegenden und gestreckt verlaufenden Venenröhren sich in einen Venenplexus (Taf. V, Fig. 4 und 6 *a*) auflösen, der dem in der Nasenschleimhaut enthaltenen ähnlich ist. Die Dichtigkeit des Venengeflechtes in der Nähe der Ostien ersieht man schon daraus, dass es, wie allenthalben auch an anderen Stellen der Auskleidung, nicht schwer fällt, dasselbe durch Einstich zu füllen.

So verhält es sich nicht bloss in den grossen Sinusen, denn auch die Auskleidung der Siebbeinzellen führt ein dichtes und verhältnissmässig aus weiten Einzelvenen zusammengesetztes Geflecht. Wenn auch, wie schon Eingangs hervorgehoben wurde, der Hauptstrom des venösen Blutes gegen die Nasenhöhle gerichtet ist, so sind nichtsdestoweniger auch die übrigen recht zahlreichen Abzugsröhrchen aus der Blutbahn der Sinuse bemerkenswerth. Vor Allem erinnere ich an die Knochenvenchen, die in das Venennetz der periostalen Schichte der Sinusauskleidung inosculiren und die, wie Injectionsexperimente lehren, durch Vermittlung des Gefässsystems der Knochen mit den Gefässen des äusseren Periostes (an der Kieferwandung und der vorderen Platte des Sinus frontalis), beziehungsweise mit denen der Dura mater (wie an der cerebralen Seite des Keilbeinkörpers und an der hinteren Platte der Stirnbeinhöhle) in Verbindung stehen. Die Venen der Siebbeinzellen zeigen ein ähnliches Verhalten und besitzen collaterale Bahnen, die sich vorne mit den Venen der Stirnbeinhöhlen und durch Zweige, welche das Thränenbein perforiren, mit den Geflechten des Thränenapparates, respective mit der Vena angularis, verbinden.

Für die Sinus supramaxillares wäre noch der wichtigen Verbindung der Gefässe der Auskleidung mit den Zahngefässen zu gedenken.

Verglichen mit der Nasenschleimhaut, ergibt sich, dass die, zwei ausgebreitete Capillarnetze enthaltende Auskleidung eines pneumatischen Raumes verhältnissmässig, wenn man nämlich ihre Zartheit in Betracht zieht, nahezu ebenso gefässreich ist als die Nasenschleimhaut, wobei wir von jenen Stellen der Nase absehen müssen, in welchen sich das Veneneonvolut zu einem Schwellkörper entwickelt hat. Allgemein genommen, bildet das Venennetz keine so engen kubischen Spalten und dann auch keine so starken Röhren, als in der Nasenschleimhaut. Ausgenommen dürften bloss jene Stellen werden, wo die Schleimhaut an den lateralen Muschelflächen (untere und mittlere Muschel) jene Buchten auskleidet, welche ich auf pag. 13 erwähnt habe.

Diese, also wohl absolut, aber nicht relativ schwächere Entwicklung des Gefässsystems in der Sinusschleimhaut dürfte von der verhältnissmässig geringen Menge an Drüsen, welche eine entsprechende Reduction von Capillaren veranlasste, mitbeeinflusst werden.

Das Gefässsystem der pneumatischen Räume ist aber dicht genug, um durch seine Secretion die Schleimhaut vor Vertrocknung zu bewahren und wird vielleicht ähnlich den Apparaten in den Nasenhöhlen für die Erwärmung der sie durchstreichenden Luft, die bei jeder Inspiration ausgepumpt und wieder durch frische ersetzt wird, besorgt sein.

Gesammtresumé.

1. Die Arteria spheno-palatina ist unter den Nasenarterien das Hauptgefäss der Nasenschleimhaut. In das Verzweigungsgebiet ihres lateralen Zweiges (Arteria nasalis posterior) fällt die ganze Respirationssphäre der Nasenhöhle und noch eine untere Partie der Riechspalte; in das ihres medialen Astes (Arteria nasopalatina) die Nasenscheidewand und der obere Antheil der Riechspalte. Collaterale Bahnen, welche in das Arteriennetz der Schleimhaut inosculiren, sind reichlich vorhanden; zu diesen zählen neben unbedeutenden Zweigchen: *a)* die Arteriae ethmoidales, *b)* die Arteria nasalis externa, *c)* die Arteria septi narium und *d)* ein Arterienzug, der am Thränennasengange hinzieht und die Nasenschleimhaut-Arterien mit den Gesichts- und Orbitalarterien in Verbindung setzt.

In Folge dieses Reichthumes an collateralen Bahnen wird es innerhalb des arteriellen Schenkels der Nasenschleimhaut nicht leicht zu einer Circulationsstörung kommen.

Die aufgezählten Arterien bilden in der basalen Schichte der Nasenschleimhaut ein weitmaschiges Geflecht, aus welchem erst die Parenchymgefässe der Schleimhaut hervorgehen. Diese verlaufen, wie allenthalben auch die Arterien in anderen Organen, deren Volumen ansehnlich wechselt, korkzieherartig gewunden.

2. Aus dem dichten Venennetze, beziehungsweise aus dem Schwellgewebe der Nasenschleimhaut treten Venenstämme hervor, die, das Verhalten der Arterien nachahmend und diese begleitend, nach verschiedenen Richtungen abziehen. Man kann fünf Gruppen solcher Venen unterscheiden, von welchen die eine, Plexus nasalis externus, vorwärts gegen die äussere Nasenöffnung, die zweite und dritte (Venae ethmoidales) aufwärts gegen die Schädel- und Augenhöhle, eine vierte rückwärts gegen das Gaumensegel und endlich eine fünfte rück- und aufwärts in die Flügelgaumengrube zieht.

3. Die vordere tiefe Nasenvene erhält ihre Zuzüge aus dem Venengeflechte der Nasenschleimhaut und der Hautbekleidung des Vestibulum nasale. Die stärkeren Röhren der Geflechte bilden nämlich durch gegenseitigen Conflux an der Umrandung der Apertura pyriformis ein dichtes grobstämmiges Geflecht, in welches auch noch einige gröbere Zweige der knorpeligen Nasenscheidewand einmünden, und aus diesem gehen 3 bis 5 Venen hervor, welche als Wurzeln der Vena nasalis anterior profunda aufzufassen sind.

Die äussere Nase besitzt überhaupt einen grossen Reichthum an Venen. Diese liegen in drei Lagen übereinander geschichtet, u. zw. die eine in der Haut, die zweite in der Auskleidung des Vestibulum nasale, die dritte zwischen beiden im Perichondrium der Nasenknorpel.

Auch einzelne Knochenvenen des Oberkiefers leiten Blut aus der Nasenhöhle heraus.

4. Die gegen die Schädelhöhle gerichteten Venen (Venae ethmoidales) der Nasenschleimhaut anastomosiren in der Schädelhöhle mit dem Venennetze der harten Hirnhaut und mit dem oberen Sichelblutleiter. Wichtiger als diese Verbindung ist eine andere, welche von einer, einen grösseren Nebenzweig der Arteria ethmoidalis anterior begleitenden und durch die Siebplatte in die vordere Schädelgrube eindringenden Vene gebildet wird, und die entweder in das Venennetz des Tractus olfactorius oder direct in eine grössere Vene am Orbitallappen inosculirt.

Der Blutstrom in dieser Vene wird unter gewöhnlichen Verhältnissen wohl cerebralwärts gerichtet sein. Dies erschliesse ich:

1. Aus der Analogie mit der Stromrichtung in den Ethmoidalvenen, zu deren System ja strenge genommen unsere Vene gehört, und

2. aus der Stelle, an welcher die Vene die Nasenschleimhaut verlässt. Die Vene liegt nämlich den meningealen Venen viel näher, als den übrigen Abzugsvenen der Nasenhöhle, und es darf auch nicht übersehen werden, dass die weiten Sinuse der Schädelhöhle, sobald der Blutdruck in den grossen Halsvenen sinkt, auf die Gehirnvenen saugend einwirken, und diese Wirkung sich gewiss auch auf die Venen des Orbitallappens fortsetzen wird.

Die eben geschilderte Vene scheint bisher wenig beachtet worden zu sein. Mehr Beachtung fand dagegen eine, das Foramen coecum passirende angebliche Communication zwischen den Nasenvenen und dem Sinus falciformis major. Bis auf Theile, der sie nur für Kinder gelten lässt, und Sappey, der sie überhaupt bestreitet, sind die meisten Anatomen für die Verbindung eingetreten. Meine eigenen Untersuchungen lehren: Das Foramen coecum enthält einen konischen, der Länge nach variirenden, zuweilen selbst $1\frac{1}{2}$ Ctm. langen Fortsatz der Sichel, der sich mit Leichtigkeit aus dem Canale herausziehen lässt. Beim Neugebornen ist dieser Fortsatz bedeutend voluminöser und schliesst in sich ein Venengeflecht, welches oben mit dem Sinus falciformis und unten mit den Periostvenen der Nasenbeine in Verbindung steht. Im Erwachsenen ist dieses Geflecht minder dicht und hat sich von den Venen des Nasenperiostes abgeschnürt. Wenn daher Blutentziehungen aus der Nasenschleimhaut (selbst beim Kinde) eine fühlbare Erleichterung nach sich rufen, so darf diese nicht auf die Venen des Foramen coecum, sondern nur auf die Entleerung der die Siebplatte durchsetzenden Vene bezogenwerden.

5. Die rückwärts aus der Nasenschleimhaut abziehenden Venen gruppiren sich in zwei Lagen, in eine oberflächliche, welche in die Gaumen- und Pharynxvenen, und in eine tiefliegende, welche als Venae comitantes der Arterien, mit diesen durch das Foramen spheno-palatinum in die Flügelgaumengrube hineinziehen.

6. Ähnlich, wie die Arterien des Thränenapparates, stellen die stärkeren Venen des Plexus lacrymalis eine indirecte Verbindung zwischen Nasen-, Gesichts- und Augenhöhlenvenen her.

7. Es zeigt sich somit nach Allem, dass für den Abfluss des Blutes aus der Nasenhöhle eine grosse Reihe von Emissarien zu Gebote steht, daher es auch innerhalb der venösen Nasengeflechte nicht leicht zu Stauungen kommen wird.

8. Da, wo die Nase einen Schwellkörper besitzt (untere Muschel, Rand der mittleren, hintere Enden aller drei Muscheln), liegt derselbe in der Schleimhaut selbst. Der Schwellkörper scheidet sich, ähnlich wie das Corpus cavernosum penis, in eine oberflächliche engmaschige Schichte, Rindennetz, und eine tiefe, weite Lacunen enthaltende Schichte, deren einzelne Röhren eine frontale Richtung einhalten, während das Rindennetz einen sagittalen Verlauf nimmt.

An der periostalen Seite der Nasenschleimhaut wandeln sich einzelne Theile des Schwellkörpers in sagittal gerichtete Venengeflechte um, welche die stärkeren Arterienstämme begleiten, und da, wo letztere in Furchen lagern, förmliche Geflechte um die Pulsadern bilden.

9. Das Balkengewebe im Schwellkörper der Nasenschleimhaut unterscheidet sich von dem des Gliedes wesentlich. Im Schwellkörper der Nasenschleimhaut ist es nämlich mit der Auflösung der Venen in ein lacunäres System nicht so weit gediehen als im Gliede, und man sieht rings um die Lichtungen der Venen eine Muskelschichte herumgelegt. Die Nasenschleimhaut ist demnach von einem mit allen Schichten eines Blutgefässes ausgestatteten, stark muskulösen Schwellnetz canalisirt, und in die breiten, reichliches elastisches Gewebe einschliessenden Balken zwischen den Venen erstrecken sich verschieden tief Drüsen hinein.

10. Da der Schwellkörper der Nasenschleimhaut aus der conglobirten Schichte und den Drüsen die Capillaren aufnimmt, so nähert er sich einigermassen dem der Harnröhre; dadurch aber, dass seine Musculatur so regelmässig angeordnet ist, entfernt er sich wieder von dem typischen Schwellgewebe der Geschlechtswerkzeuge. Er stellt morphologisch eine Art Übergang zwischen einem einfachen venösen Plexus und einem wahren Schwellkörper dar.

11. Die Füllung und Entleerung des Schwellkörpers in der Nasenschleimhaut steht unter dem Einflusse des Nervensystems.

12. Die Arterien der Nasenschleimhaut sind im Vergleiche zur grossen Menge und zum Querdurchmesser der Venen enge und nur in geringer Anzahl vorhanden. Sie bilden in der Schleimhaut drei Netze: ein periostales, eines für die Drüsen und ein drittes oberflächliches in der conglobirten Schichte der Schleimhaut, welches in Form eines in seinen einzelnen Theilen communicirenden Schlingensystems aufgebaut ist.

13. Die sich aus den Drüsencapillaren sammelnden Venchen (die oberflächlichen) münden theils in das Rindennetz, theils (die tiefer gelegenen) in die weiten Räume des Schwellnetzes. An jenen Stellen, wo die Drüsen bis in die conglobirte Schichte sich erstrecken, hängen die Capillarsysteme beider zusammen.

14. Die Drüsengänge besitzen ein dichtes Capillargeflecht, aus welchem Verbindungen gegen die umliegenden Venen und oberflächlich gegen die Capillaren der conglobirten Schichte abgehen. Diese Geflechte dürften, namentlich an den grösseren Gängen einerseits die Function des compressiblen Gewebes übernehmen, also im Ruhezustande der Drüse die Lichtung des Ganges verschliessen, und andererseits wieder gleich den in den Knochencanälen die Arterien umspinnenden Venengeflechten fungiren. Der Gang liegt in einem Canale des Bindegewebsfilzes der Schleimhaut. Wäre der Gang an die Wand des Rohres, in dem er steckt, festgewachsen, so müsste er stets offen bleiben, ausgenommen, man dürfte dem Stroma der Schleimhaut die Fähigkeit, zu collabiren, zuschreiben. Nun ist aber der Gang im Ruhezustande ohne Lichtung und das durchtretende Secret müsste daher, falls auch das Stroma zusammengesunken ist, dieses auf die Seite schieben. Es ist unwahrscheinlich, dass solche Gewebsverschiebungen vorkommen; viel wahrscheinlicher ist, dass gerade, um dem auszuweichen, zwischen Gang und Canal, in dem er steckt, ein Gefässplexus eingeschaltet ist; dieser füllt sich, wenn die Secretion aufhört, entleert sich, wenn das Secret den Gang durchströmt, und das eigentliche Stroma verbleibt dabei in Ruhe.

15. Am Übergange der Nasenhaut in die Schleimhaut bemerkt man, dass die Gefässe, namentlich die Capillaren, plötzlich weiter werden.

16. Die Circulation in der Nasenschleimhaut stellt sich nach Allem in folgender Weise her: Die Arterien lösen sich im Periost, um die Drüsen und in der conglobirten Schichte in drei capillare Netze auf, und zwischen den Capillaren und Venen ist ein Schwellkörper, respective ein dichter Venenplexus eingeschaltet. Die Capillaren der conglobirten Schichte und der obere Theil der Drüsencapillaren ergiessen ihr Blut in das Rindennetz, das periostale Netz und die tieferen Schichten der Drüsencapillaren in die lacunäre Partie des Schwellkörpers, beziehungsweise in die grossen Abzugsvenen, welche sich zu den verschiedenen bereits aufgezählten periferen Venen hinbegeben.

17. Eine derivative Blutbahn, directe Übergänge von Arterien in den Schwellkörper gibt es nicht; zum mindesten ist es mir nicht gelungen, solche nachzuweisen.

18. Die pneumatischen Räume beziehen, neben zahlreichen kleinen collateralen Bahnen, ihren Ernährungsstrom gleich der Nasenschleimhaut durch die Arteria spheno-palatina.

19. Die collateralen Bahnen passiren zum guten Theile die Knochenwand der lufthältigen Räume. Die Arterien der Sinusauskleidung geben, ähnlich wie die der Nasenschleimhaut, drei Capillarsysteme ab, ein periostales, ein oberflächliches und eines für die Drüsen, welch' letzteres wegen der Reduction der Drüsen ärmer ist, als das der Nasenschleimhaut.

20. Die Capillaren gehen in gröbere Gefässe und diese in ein dichtes, aus breiten Venen zusammengesetztes Geflecht über, welches den Öffnungen der Sinuse zusteuert und hier den venösen Blutstrom gegen die Nasenhöhle abführt.

21. Die periostalen Venchen anastomosiren durch die Knochenwand mit den Venen des äusseren Periostes, respective mit jenen der harten Hirnhaut (Keilbeinkörper, zum Theil auch Stirnbeinhöhle).

ERKLÄRUNG DER ABBILDUNGEN.

TAFEL I.

Fig. 1. Laterale Wand einer rechtsseitigen Nasenhöhle mit ihrem Arteriennetze.

A. Arteria nasalis posterior.

B. Ast derselben für die untere Muschel, an deren hinterem Pol er in drei Zweige zerfällt, die am oberen und unteren Muschelrande, ferner in der Mitte der Muschel vorwärts ziehen und streckenweise, wie auch aus der Zeichnung ersichtlich, in Knochenfurchen verlaufen.

C. Arteria nasopalatina mit der Arteria für die obere, resp. auch vierte Muschel.

e und *g.* Äste der Arteria ethmoidalis anterior.

f. Verbindung der Nasalis posterior mit der Arteria ethmoidalis posterior.

a und *b.* Äste der Arteria nasalis posterior für den unteren Nasengang.

D. Äste der Nasalis posterior im Vestibulum nasale; in diese inosculiren einige Zweige der Arteria maxillaris externa.

Neben den beiden Hauptstämmen der Arteria spheno-palatina sind die entsprechenden Venen abgebildet.

„ 2. Rechte Seite der Nasenscheidewand.

A, A. Die beiden von ihren Venen begleiteten Arterien der Scheidewand.

B. Arteria septi narium.

a und *b.* Scheidewandäste der Arteria ethmoidalis anterior.

c und *d.* Scheidewandäste der Arteria ethmoidalis posterior.

e. Anastomose einer Vena naso-palatina mit den Gaumenvenen.

„ 3. Stück einer rechtsseitigen Gesichtshälfte mit Darstellung der Venengeflechte an der Apertura pyriformis und an der knorpeligen Nase.

a. Eine Partie des venösen Geflechtes der knorpeligen Nase zwischen der Cartilago triangularis und dem Nasenflügel.

a'. Venen der äusseren Nase, deren geflechtartige Fortsetzungen nicht weiter ausgeführt sind.

b. Geflecht am Rande der Nasenöffnung, welches eine Reihe von Zweigen aus der Nasenschleimhaut bezieht, und in welches das Geflecht der äusseren Nase einmündet.

A. Septum nasale.

c. Venen aus dem vorderen unteren Antheile der Nasenscheidewand.

d. Abzugscanäle des Randgeflechtes, welche in die tiefe äussere Nasenvene *e* einmünden.

„ 4 und 5. Dasselbe, nur im vergrösserten Massstabe dargestellt.

TAFEL II.

Fig. 1. Laterale Wand einer rechten Nasenhöhle mit den rückwärtigen oberflächlichen Abzugsröhren.

a. die der unteren,

b. „ „ mittleren,

c. „ „ oberen Nasenmuschel.

d. Sagittal hinziehende weite Venenstämme des unteren Nasenganges.

„ 2. Sagittaler Durchschnitt durch den Schädel eines nur wenige Wochen alt gewordenen Kindes. Vorne ist die Schleimhaut (*a, a*) vom Knochen gelöst und rückwärts geschlagen und man bemerkt, wie aus derselben eine Vene heraustritt, die an der basalen Seite des Stirnlappens rückwärts zieht und mehrere Zweige absendet, welche, was aus der Abbildung nicht ersichtlich, mit den in den Gehirnfurchen gelagerten Venen sich verbinden.

„ 3. Oberkiefergerüst der rechten Seite; der Thränennasengang ist freigelegt, und das denselben umhüllende dichte Venengeflecht ist dargestellt; die grosse den Gang passirende Vene mündet entsprechend dem unteren Nasengange in einen dicken venösen Stamm und geht oben an der Mündung des Thränensackes vermittelst eines Zweiges (*a*) in die Vena facialis anterior über; das hintere Geflecht (*b*) inosculirt in die Orbitalvenen.

Fig. 4. Dasselbe Geflecht vergrössert dargestellt.
a. Ast für die Vena facialis anterior;
b, b. für die Orbitalvenen.
c, c, c. Verbindungen mit den Nasenvenen.

„ 5. Rechtsseitiges Kiefergerüst mit Darstellung einiger in die Vena facialis anterior einmündender Venen.
A. Vena facialis antica.
B. Vena ophthalmica.
e, e, e. Tiefe äussere Nasenvene.
a. Verbindung mit den Venen der Nasenscheidewand.
b. Ein Ast des Randgeflechtes der Apertura pyriformis.
c, c. Venen, die den Oberkiefer durchsetzen und innen mit den Schleimhautgefässen anastomosiren.
d. Eine Vene des Thränennasenganges, die auf dem Gange abwärts zieht und direct in eine starke innere Nasenvene übergeht.
f. Eine aus den vorderen Siebbeinzellen stammende, das Thränenbein perforirende Vene.

„ 6. Das Oberkiefergerüst der rechten Seite des Thränennasenganges ist freigelegt, und gleich dem Thränensacke im oberen Theile gespalten.
a, a. Arterien an der Wandung des Thränenganges.
b, b, b. Verbindungen mit der Ophthalmica, resp. der Infraorbitalis.
c. Anastomose mit der Arteria angularis.

TAFEL III.

Fig. 1. Ein Stück vom Schwellkörper der unteren Nasenmuschel (Corrosionspräparat). Man sieht bei *a* die tiefere Schichte des Rindennetzes. In der Ebene zwischen den beiden *b* wurde das Präparat auseinandergelegt, um die weiten tief liegenden, frontal gelagerten Röhren des cavernösen Gewebes ansichtig zu machen.

„ 2. Ähnlich zubereitetes Präparat vom Schwellgewebe der mittleren Nasenmuschel.
a, a. Rindenschichte.
b. Tief liegende Schichte.

„ 3. Querschnitt durch die Schleimhaut der unteren Nasenmuschel.
e. Epithel.
a. Rindennetz.
b. Tief liegende Lacunen. Hartnack Obj. 4, Oc. 2.

„ 4. Schrägschnitt durch das Schwellgewebe der unteren Nasenmuschel. Hartn. Obj. 2, Oc. 2. Man sieht recht deutlich, wie die buchtigen Lacunen von der Schleimhautoberfläche gegen die knöcherne Muschel verlaufen; bei *a* sind Theile vom Rindennetze getroffen.

„ 5. Weniger schräg geführter Schnitt durch das Schwellgewebe der unteren Nasenmuschel, um die reichlichen Verbindungen zwischen den Lacunen zu zeigen. Hartn. Obj. 1, Oc. 2.
a. Eine mehr oberflächliche Schichte der Schleimhaut. Gegenüber, wo die weiten Lumina lagern, eine tiefere Schichte der Schleimhaut.

„ 6. Schwellgewebe der unteren Nasenmuschel; die Venenmündungen sind schattirt, die weissen Stränge zwischen denselben entsprechen den Balken.

„ 7. Durchschnitt des Schwellkörpers nahe der Muschel. Das Schwellgewebe war fest contrahirt, daher man um die Lumina deutliche Gefässwandungen wahrnimmt.

„ 8. Periostale Fläche der unteren Nasenmuschel.
a, a. Venennetze.
b, b, b. Mosaikartige Anordnung der Schwellkörper an der periostalen Schichte.
c, c. Venensäulen, welche in Furchen der Muschel gelagert, die tief liegenden Arterienzweige einhüllen.

„ 9. Frontalschnitt durch die Schleimhaut der unteren Muschel eines Neugebornen. Hartn. Obj. 4, Oc. 2. Der Schnitt ist nicht ganz senkrecht zur Muschel geführt, daher die oberflächliche Schichte der Gefässe fehlt. Das Präparat liess ich zeichnen, um darzulegen, dass beim Neugebornen die langen Röhren des Netzes noch nicht so buchtig sind, wie im Erwachsenen, und dass der Schwellkörper noch mehr einem gewöhnlichen Venengeflechte gleicht.

„ 10. Querschnitt durch den Schwellkörper (hinteres Ende) der unteren Nasenmuschel. Hartn. Obj. 4, Oc. 2. Die Gefässe der Drüsen sind mit Obj. 7 eingezeichnet worden.
a. Theil des Rindennetzes.
b. Lacunärer Theil des Schwellkörpers. Man sieht die in natura spiralig gewundenen Arterien gegen die Schleimhautoberfläche emporziehen und in den conglobirten Schichten (*a, a*) derselben sich in ihre Capillaren auflösen. Da wo die gabelig gespaltene Arterie verläuft, sieht man die Theile einer tief in die Schleimhaut versenkten Drüse, welche von der Arterie ein Zweigchen erhält und an den Schwellkörper ein Ästchen wieder abgibt.

Fig. 11. Längsschnitt durch das hintere Ende der unteren Nasenmuschel; arterielle Injection. Hartn. Obj. 4, Oc. 2.
a und *b*. Leisten der Schleimhaut. In denselben sieht man Gruppen von Gefässschlingen, die in der Tiefe in das Rindennetz des Schwellkörpers übergehen.

TAFEL IV.

Fig. 1 Ein Stück Drüsenkörper sammt Ausführungsgang aus der Schleimhaut des Vestibulum nasale, um das dichte Geflecht zu zeigen, welches den Gang umspinnt. Die Äste *a, a* begeben sich zu den umliegenden Venen, *b* ist ein Stück vom Geflechte eines einmündenden Nebenganges.

„ 2. Zwei Schlingen aus der Schleimhaut der unteren Nasenmuschel. Hartn. Obj. 7, Oc. 2. Arterie roth. Vene blau.

„ 3. Eine Reihe von Schlingen aus derselben Localität. Vergrösserung dieselbe. Die blau gefärbten Theile des Geflechtes sind venöse Zweige.

„ 4. Querschnitt der Schleimhaut an der unteren Nasenmuschel eines 10 Jahre alten Kindes. Hartn. Obj. 7, Oc. 2. Man sieht die kurzen und wie flachgedrückten Schlingen in verhältnissmässig weite Venen einmünden.

„ 5. Ähnliches Präparat der Riechschleimhaut (mediale Seite der oberen Nasenmuschel). Hartn. Obj. 7, Oc. 2. Die kurzen Schlingen münden gleichfalls in eine sehr weite Vene.

„ 6. Einige Drüsenacini aus der Schleimhaut der unteren Nasenmuschel. Hartn. Obj. 7, Oc. 2. Die eingesäumten Kreise im Capillarnetze entsprechen Querschnitten von den Schläuchen parallel ziehenden Capillaren. Das blau gefärbte Gefäss entspricht einer Vene.

„ 7. Capillarnetz um die Mündungen der Haarbälge im Vestibulum nasale.

TAFEL V.

Fig. 1. Venengeflechte aus der Nasenschleimhaut des Schafes. Die Geflechte sind in Form von einzelnen Säulen (*a*) angeordnet, zwischen welchen die Arterienzweige (*b*) dahinziehen. Die Arterien werden von einem zarteren Geflecht umwickelt, welches je zwei Venensäulen unter einander verbindet.

„ 2. Die Capillaren der Schleimhautoberfläche des Schafes. Unter denselben sieht man deutlich die Venensäulen.

„ 3. Venen in der Schleimhautbekleidung des Sinus frontalis.

„ 4. Übergang der Venen der Nasenschleimhaut in jene der Auskleidung der Kieferhöhle. Hartn. Obj. 2, Oc. 2.
a. Übergangsstelle.
b. Venen der Kieferhöhle.

„ 5. Die Venen der Kieferhöhle im weiteren Verlaufe. Hartn. Obj. 2, Oc. 2.

„ 6. Übergang der Nasenschleimhaut in die Auskleidung der Keilbeinhöhle. Hartn. Obj. 2, Oc. 2.
a. Übergangsstelle.
b. Venen der Keilbeinschleimhaut selbst.

„ 7. Capillaren und grössere Venen der Kieferhöhlenschleimhaut, von der Oberfläche besehen. Hartn. Obj. 4, Oc. 2. Zwischen denselben schimmern die gröberen Venen durch.

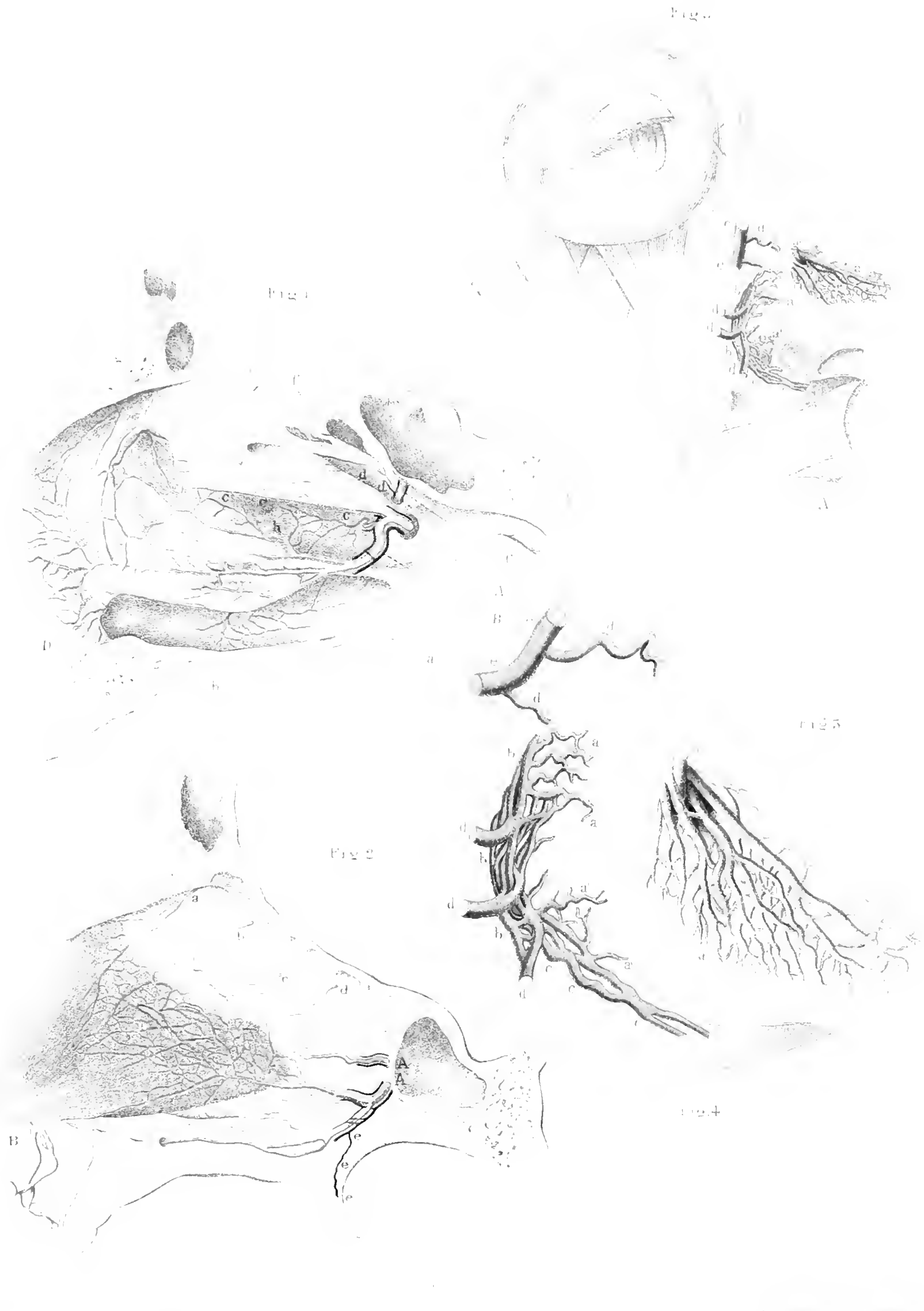


Fig. 1.

Fig. 3.

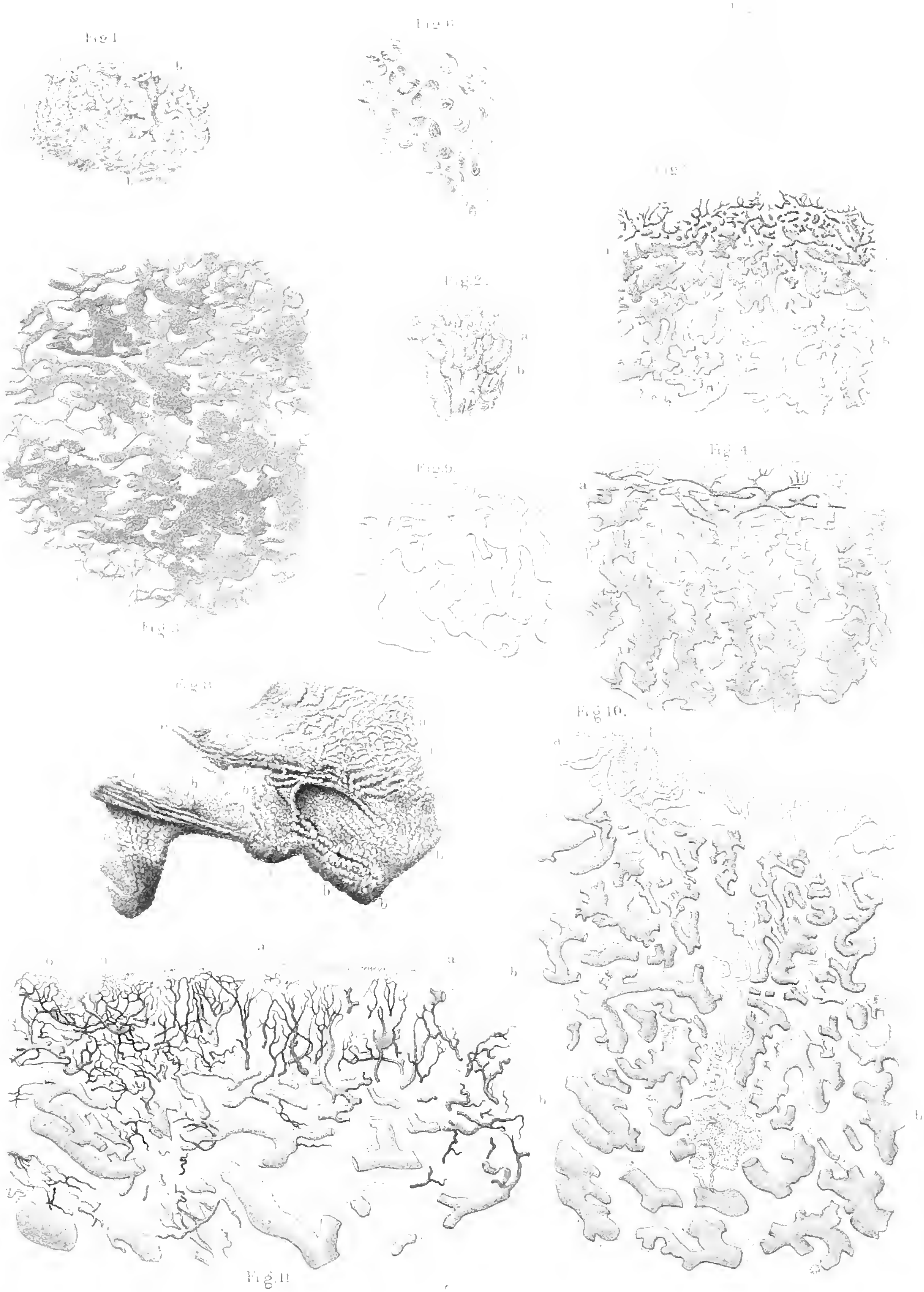


Fig. 1
Fig. 6
Fig. 2
Fig. 9
Fig. 4
Fig. 10
Fig. 11

Fig. 1.

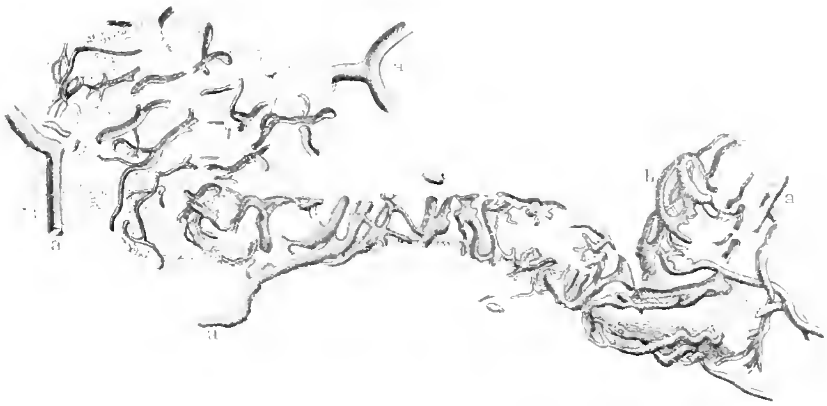


Fig. 3.

Fig. 5.

Fig. 2.

Fig. 6.

Fig. 4.

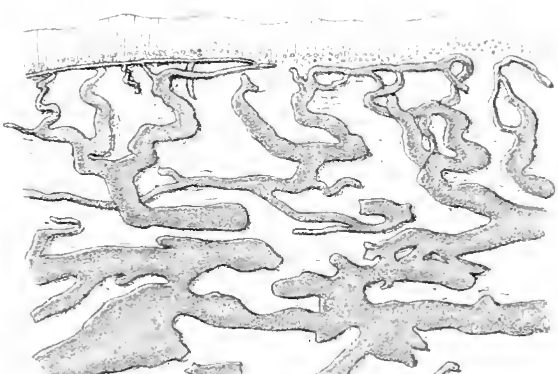


Fig. 7.

Fig. 1.

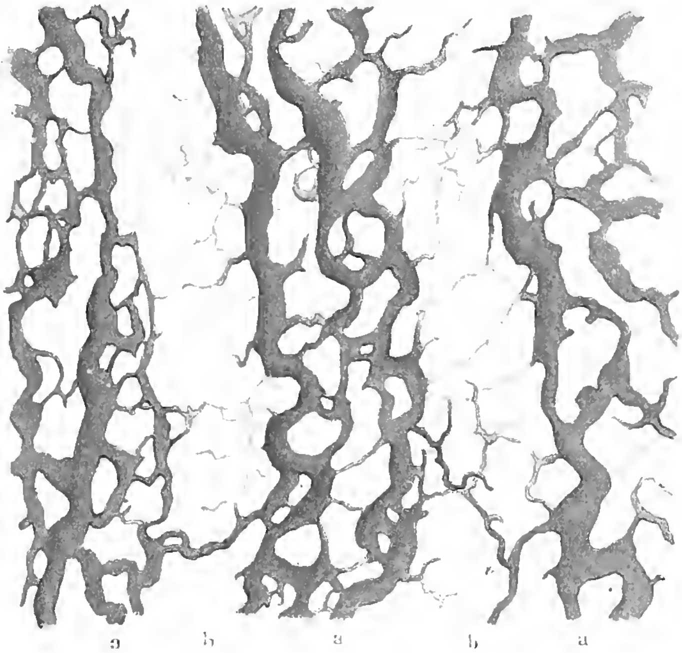


Fig. 4.

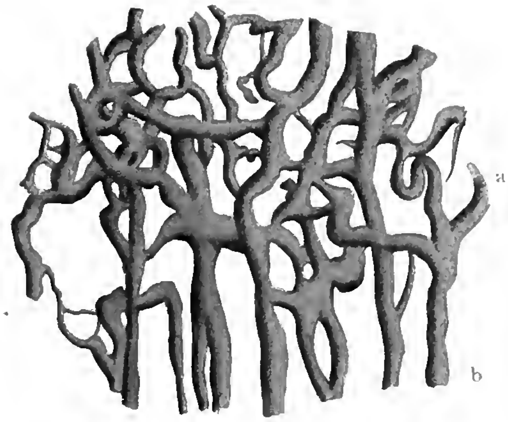


Fig. 7.

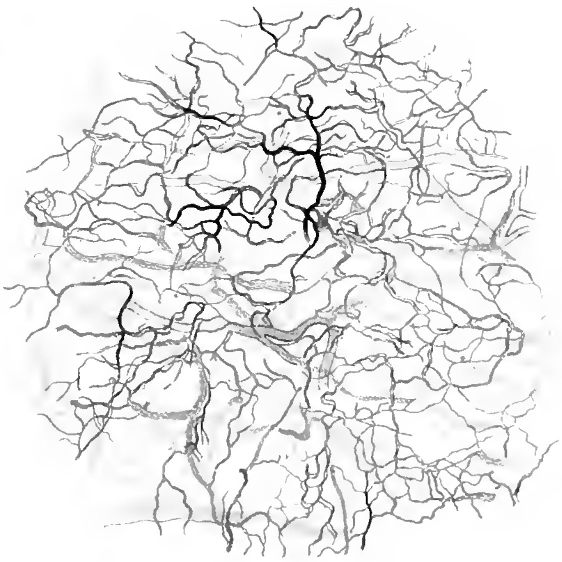


Fig. 2.

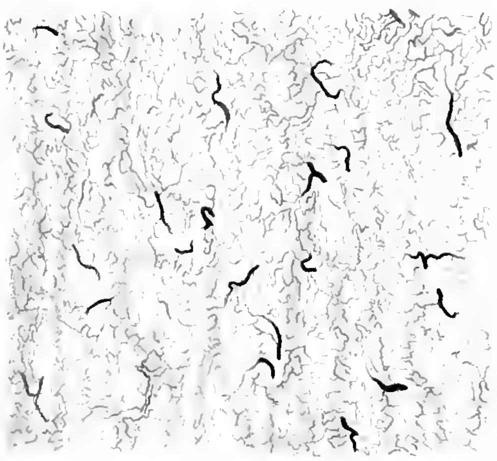


Fig. 3.

Fig. 5.

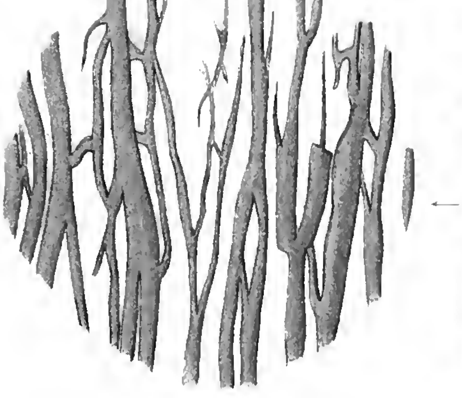
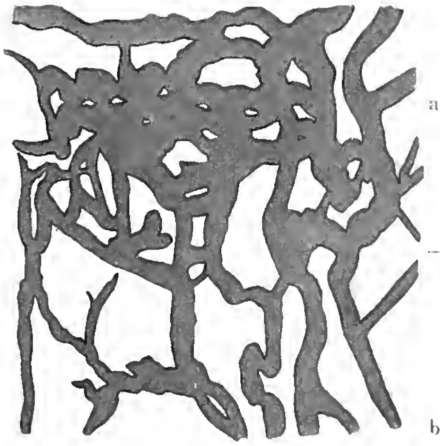


Fig. 6.



ASTRONOMISCHE BEITRÄGE

ZUR

ASSYRISCHEN CHRONOLOGIE.

VON

DR. EDUARD FREIHERRN VON HAERDTL.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 15. MAI 1884.

Die vorliegende Arbeit zerfällt dem Wesen nach in zwei Theile. Der erste Theil enthält eine Reihe astronomischer Angaben, deren Kenntniss dem Historiker nicht unerwünscht sein wird, weil sie sowohl bei jeder einzelnen assyrischen Zeitangabe in Betracht kommen, als auch in ihrer Gesammtheit vielleicht die Aufstellung eines assyrischen Kalenders ermöglichen. Im zweiten Theil ist eine Zusammenstellung sämmtlicher centralen Finsternisse gegeben, welche von der Mitte des 10. Jahrhunderts bis zum Jahre 574 vor Chr. Geburt in Ninive sichtbar waren, zu welcher Untersuchung mich der Umstand veranlasste, dass mehrerer dieser Finsternisse auch in historischen Quellen Erwähnung geschieht. Bevor ich aber in die einzelnen Theile näher eingehe, will ich einige Bemerkungen über die assyrische Zeitrechnung vorausschicken.

Der assyrischen Zeitrechnung lag das Mondjahr zu Grunde, das sie von Zeit zu Zeit durch Schaltung mit dem Sonnenjahr ausgeglichen haben. Da die Assyrer ferner — nach Angabe einiger Historiker — das Jahr mit dem Monat Nisan, und zwar mit dem ersten Neumond vor dem Frühjahrsanfang begannen, bedarf es zur Festsetzung des Jahresanfangs vor Allem der astronomischen Angabe, auf welchen julianischen Tag das Frühlings-Äquinoctium trifft. Neben dieser Angabe findet sich im Folgenden die Zusammenstellung sämmtlicher Neumonde, welche vom Jahre — 956 bis — 604 stattgefunden haben.

Da für den Zweck, für welchen ich die Frühlings-Tag- und Nachtgleiche gerechnet habe, eine Genauigkeit von etwa zwei Stunden hinreicht, habe ich durch blosse Addition der Argumente der zwei ersten Schram'schen Tafeln aus den „Hilfstafeln für Chronologie von Robert Schram" die Zeit des Eintrittes der Sonne in das Zeichen des Widders erhalten.

Der Berechnung der Neumonde sind dieselben Tafeln zu Grunde gelegen, welche auch mit einer genügenden Genauigkeit — von ungefähr einer halben Stunde — den Eintritt der Phase in Greenwicher Zeit angeben.

Die Resultate sind durch doppelte Rechnung geprüft.

Frühlings-Tag- und Nachtgleiche der Jahre —956 bis —604.

Datum			Uhr	Datum			Uhr	Datum			Uhr
—956	März	29	20h	—896	März	29	9h	—836	März	28	22h
—955	„	30	2	—895	„	29	14	—835	„	29	3
—954	„	30	8	—894	„	29	20	—834	„	29	9
—953	„	30	14	—893	„	30	2	—833	„	29	15
—952	„	29	20	—892	„	29	8	—832	„	28	21
—951	„	30	2	—891	„	29	14	—831	„	29	3
—950	„	30	7	—890	„	29	19	—830	„	29	8
—949	„	30	13	—889	„	30	1	—829	„	29	14
—948	„	29	19	—888	„	29	7	—828	„	28	20
—947	„	30	1	—887	„	29	13	—827	„	29	2
—946	„	30	7	—886	„	29	19	—826	„	29	8
—945	„	30	13	—885	„	30	1	—825	„	29	14
—944	„	29	18	—884	„	29	6	—824	„	28	19
—943	„	30	0	—883	„	29	12	—823	„	29	1
—942	„	30	6	—882	„	29	18	—822	„	29	7
—941	„	30	12	—881	„	29	24	—821	„	29	13
—940	„	29	18	—880	„	29	6	—820	„	28	19
—939	„	29	23	—879	„	29	11	—819	„	29	1
—938	„	30	5	—878	„	29	17	—818	„	29	6
—937	„	30	11	—877	„	29	23	—817	„	29	12
—936	„	29	17	—876	„	29	5	—816	„	28	18
—935	„	29	23	—875	„	29	11	—815	„	28	24
—934	„	30	5	—874	„	29	17	—814	„	29	6
—933	„	30	10	—873	„	29	22	—813	„	29	11
—932	„	29	16	—872	„	29	4	—812	„	28	17
—931	„	29	22	—871	„	29	10	—811	„	28	23
—930	„	30	4	—870	„	29	16	—810	„	29	5
—929	„	30	10	—869	„	29	22	—809	„	29	11
—928	„	29	15	—868	„	29	3	—808	„	28	17
—927	„	29	21	—867	„	29	9	—807	„	28	22
—926	„	30	3	—866	„	29	15	—806	„	29	4
—925	„	30	9	—865	„	29	21	—805	„	29	10
—924	„	29	15	—864	„	29	3	—804	„	28	16
—923	„	29	20	—863	„	29	9	—803	„	28	22
—922	„	30	2	—862	„	29	14	—802	„	29	2
—921	„	30	8	—861	„	29	20	—801	„	29	8
—920	„	29	14	—860	„	29	2	—800	„	28	14
—919	„	29	20	—859	„	29	8	—799	„	28	20
—918	„	30	2	—858	„	29	14	—798	„	29	2
—917	„	30	7	—857	„	29	19	—797	„	29	7
—916	„	29	12	—856	„	29	1	—796	„	28	13
—915	„	29	18	—855	„	29	7	—795	„	28	19
—914	„	29	23	—854	„	29	13	—794	„	29	1
—913	„	30	6	—853	„	29	19	—793	„	29	7
—912	„	29	11	—852	„	29	1	—792	„	28	13
—911	„	29	17	—851	„	29	6	—791	„	28	18
—910	„	29	23	—850	„	29	12	—790	„	29	0
—909	„	30	5	—849	„	29	18	—789	„	29	6
—908	„	29	11	—848	„	28	24	—788	„	28	12
—907	„	29	17	—847	„	29	6	—787	„	28	18
—906	„	29	22	—846	„	29	11	—786	„	28	24
—905	„	30	4	—845	„	29	17	—785	„	29	5
—904	„	29	10	—844	„	28	23	—784	„	28	11
—903	„	29	16	—843	„	29	5	—783	„	28	17
—902	„	29	22	—842	„	29	11	—782	„	28	23
—901	„	30	3	—841	„	29	17	—781	„	29	5
—900	„	29	9	—840	„	28	22	—780	„	28	10
—899	„	29	15	—839	„	29	4	—779	„	28	16
—898	„	29	21	—838	„	29	10	—778	„	28	22
—897	„	30	3	—837	„	29	16	—777	„	29	4

Datum			Uhr	Datum			Uhr	Datum			Uhr
—776	März	28	10h	—716	März	27	23h	—656	März	27	11h
—775	"	28	16	—715	"	28	5	—655	"	27	17
—774	"	28	21	—714	"	28	10	—654	"	27	22
—773	"	29	3	—713	"	28	16	—653	"	28	4
—772	"	28	9	—712	"	27	22	—652	"	27	10
—771	"	28	15	—711	"	28	4	—651	"	27	16
—770	"	28	21	—710	"	28	10	—650	"	27	22
—769	"	29	2	—709	"	28	15	—649	"	28	4
—768	"	28	8	—708	"	27	21	—648	"	27	9
—767	"	28	14	—707	"	28	3	—647	"	27	15
—766	"	28	20	—706	"	28	9	—646	"	27	21
—765	"	29	2	—705	"	28	15	—645	"	28	3
—764	"	28	8	—704	"	27	21	—644	"	27	9
—763	"	28	13	—703	"	28	2	—643	"	27	15
—762	"	28	19	—702	"	28	8	—642	"	27	20
—761	"	29	1	—701	"	28	14	—641	"	28	2
—760	"	28	7	—700	"	27	20	—640	"	27	8
—759	"	28	13	—699	"	28	2	—639	"	27	14
—758	"	28	18	—698	"	28	7	—638	"	27	20
—757	"	29	0	—697	"	28	13	—637	"	28	1
—756	"	28	6	—696	"	27	19	—636	"	27	7
—755	"	28	12	—695	"	28	1	—635	"	27	13
—754	"	28	18	—694	"	28	7	—634	"	27	19
—753	"	28	24	—693	"	28	13	—633	"	28	1
—752	"	28	5	—692	"	27	18	—632	"	27	7
—751	"	28	11	—691	"	28	0	—631	"	27	12
—750	"	28	17	—690	"	28	6	—630	"	27	18
—749	"	28	23	—689	"	28	12	—629	"	28	0
—748	"	28	5	—688	"	27	18	—628	"	27	6
—747	"	28	10	—687	"	27	23	—627	"	27	11
—746	"	28	16	—686	"	28	4	—626	"	27	17
—745	"	28	22	—685	"	28	10	—625	"	27	23
—744	"	28	4	—684	"	27	16	—624	"	27	5
—743	"	28	10	—683	"	27	22	—623	"	27	11
—742	"	28	15	—682	"	28	4	—622	"	27	17
—741	"	28	21	—681	"	28	9	—621	"	27	23
—740	"	28	3	—680	"	27	15	—620	"	27	4
—739	"	28	9	—679	"	27	21	—619	"	27	10
—738	"	28	15	—678	"	28	3	—618	"	27	16
—737	"	28	20	—677	"	28	9	—617	"	27	22
—736	"	28	2	—676	"	27	14	—616	"	27	4
—735	"	28	8	—675	"	27	20	—615	"	27	9
—734	"	28	14	—674	"	28	2	—614	"	27	15
—733	"	28	20	—673	"	28	8	—613	"	27	21
—732	"	28	2	—672	"	27	14	—612	"	27	3
—731	"	28	7	—671	"	27	20	—611	"	27	9
—730	"	28	13	—670	"	28	1	—610	"	27	14
—729	"	28	19	—669	"	28	7	—609	"	27	20
—728	"	28	1	—668	"	27	13	—608	"	27	2
—727	"	28	7	—667	"	27	19	—607	"	27	8
—726	"	28	13	—666	"	28	1	—606	"	27	14
—725	"	28	18	—665	"	28	7	—605	"	27	19
—724	"	28	0	—664	"	27	12	—604	"	27	1
—723	"	28	6	—663	"	27	18				
—722	"	28	12	—662	"	27	24				
—721	"	28	18	—661	"	28	6				
—720	"	27	23	—660	"	27	12				
—719	"	28	5	—659	"	27	17				
—718	"	28	11	—658	"	27	23				
—717	"	28	17	—657	"	28	5				

Neumonde der Jahre —956 bis —604.

Jahr	Datum		Uhr	
—956	Jänner	4	14^h	10^m
	Februar	3	5	2
	März	3	17	17
	April	2	2	38
	Mai	1	10	5
	Mai	30	17	2
	Juni	28	23	31
	Juli	28	7	55
	August	26	18	58
	September	25	8	38
	October	25	0	58
	November	24	7	41
	December	23	15	22
—955	Jänner	22	9	50
	Februar	21	1	55
	März	22	15	7
	April	21	1	12
	Mai	20	9	50
	Juni	18	16	48
	Juli	18	0	0
	August	16	7	55
	September	14	18	0
	October	14	6	29
	November	12	21	50
	December	12	15	7
—954	Jänner	11	9	30
	Februar	10	3	50
	März	11	20	38
	April	10	11	17
	Mai	9	22	48
	Juni	8	8	24
	Juli	7	16	34
	August	6	0	29
	September	4	9	7
	October	3	18	58
	November	2	6	14
	December	1	20	10
	December	31	11	17
—953	Jänner	30	3	50
	Februar	28	21	7
	März	30	13	26
	April	29	5	2
	Mai	28	18	14
	Juni	27	5	46
	Juli	26	15	50
	August	25	6	43
	September	23	10	48
	October	22	21	7
	November	21	8	10
	December	20	20	10
—952	Jänner	19	9	7
	Februar	17	23	17
	März	18	13	55
	April	17	5	46
	Mai	16	21	7
	Juni	15	12	0
	Juli	15	1	41
	August	13	14	10
	September	12	1	55
	October	11	12	58
	November	9	23	46
	December	9	10	10

Jahr	Datum		Uhr	
—951	Jänner	7	21^h	22^m
	Februar	6	8	10
	März	7	20	10
	April	6	8	24
	Mai	5	22	5
	Juni	4	13	12
	Juli	4	4	19
	August	2	19	55
	September	1	11	17
	October	1	1	12
	October	30	14	24
	November	29	2	10
	December	28	13	12
—950	Jänner	26	23	17
	Februar	25	8	38
	März	26	18	0
	April	25	4	5
	Mai	24	15	50
	Juni	23	5	31
	Juli	22	20	53
	August	21	13	41
	September	20	6	43
	October	19	23	2
	November	18	14	24
	December	18	3	50
—949	Jänner	16	15	36
	Februar	15	0	58
	März	16	9	36
	April	14	17	17
	Mai	14	1	41
	Juni	12	11	17
	Juli	11	23	17
	August	10	13	55
	September	9	7	12
	October	9	1	26
	November	7	19	55
	December	7	12	43
—948	Jänner	6	3	36
	Februar	4	16	5
	März	5	2	16
	April	3	9	50
	Mai	2	17	2
	Juni	1	0	14
	Juni	30	8	24
	Juli	29	19	12
	August	28	8	24
	September	27	0	58
	October	26	19	41
	November	25	15	7
	December	25	9	50
—947	Jänner	24	2	10
	Februar	22	15	22
	März	24	2	10
	April	22	10	5
	Mai	21	17	2
	Juni	19	23	46
	Juli	19	7	26
	August	17	16	48
	September	16	5	17
	October	15	20	38
	November	14	14	24
	December	14	9	50

Jahr	Datum		Uhr	
—946	Jänner	13	4^h	48^m
	Februar	11	22	5
	März	13	12	43
	April	12	0	14
	Mai	11	9	36
	Juni	9	17	2
	Juli	9	0	0
	August	7	7	41
	September	5	16	34
	October	5	4	5
	November	3	18	0
	December	3	9	50
—945	Jänner	2	4	5
	Jänner	31	22	34
	März	2	16	5
	April	1	7	41
	April	30	20	38
	Mai	30	7	26
	Juni	28	16	19
	Juli	28	0	29
	August	26	8	53
	September	24	18	0
	October	24	4	34
	November	22	17	17
	December	22	7	41
—944	Jänner	20	23	17
	Februar	19	16	5
	März	20	8	53
	April	19	0	43
	Mai	18	15	7
	Juni	17	3	36
	Juli	16	14	53
	August	15	0	43
	September	13	10	34
	October	12	20	24
	November	11	6	58
	December	10	18	29
—943	Jänner	9	6	43
	Februar	7	19	55
	März	9	10	19
	April	8	1	26
	Mai	7	17	2
	Juni	6	8	10
	Juli	5	22	19
	August	4	11	31
	September	2	23	46
	October	2	11	31
	October	31	22	19
	November	30	9	36
	December	29	20	24
—942	Jänner	28	6	58
	Februar	26	18	14
	März	28	5	46
	April	26	18	29
	Mai	26	8	53
	Juni	25	0	14
	Juli	24	15	50
	August	23	7	26
	September	21	22	19
	October	21	12	0
	November	20	0	29
	December	19	12	0

Jahr	Datum		Uhr	
—941	Jänner	17	22h	34m
	Februar	16	7	55
	März	17	17	2
	April	16	2	53
	Mai	15	13	20
	Juni	14	1	55
	Juli	13	16	34
	August	12	8	38
	September	11	2	10
	October	10	19	12
	November	9	11	17
	December	9	1	41
—940	Jänner	7	14	10
	Februar	6	0	29
	März	6	9	22
	April	4	16	48
	Mai	4	0	43
	Juni	2	9	30
	Juli	1	20	10
	Juli	31	9	30
	August	30	1	55
	September	28	19	55
	October	28	14	38
	November	27	8	38
	December	27	0	58
—939	Jänner	25	14	24
	Februar	24	1	20
	März	25	9	50
	April	23	17	31
	Mai	23	0	14
	Juni	21	7	41
	Juli	20	17	2
	August	19	5	2
	September	17	20	10
	October	17	13	55
	November	16	9	7
	December	16	4	19
—938	Jänner	14	22	19
	Februar	13	13	12
	März	15	0	58
	April	13	10	5
	Mai	12	17	31
	Juni	11	0	0
	Juli	10	7	12
	August	8	15	50
	September	7	2	53
	October	6	16	34
	November	5	9	7
	December	5	3	50
—937	Jänner	3	23	2
	Februar	2	17	31
	März	4	9	22
	April	2	22	19
	Mai	2	8	38
	Mai	31	17	17
	Juni	30	0	14
	Juli	29	7	41
	August	27	16	5
	September	26	2	24
	October	25	15	7
	November	24	5	46
	December	23	23	2

Jahr	Datum		Uhr	
—936	Jänner	22	17h	17m
	Februar	21	11	2
	März	22	3	30
	April	20	17	40
	Mai	20	5	40
	Juni	18	15	30
	Juli	18	0	14
	August	16	8	10
	September	14	17	31
	October	14	3	36
	November	12	15	22
	December	12	4	48
—935	Jänner	10	19	41
	Februar	9	11	31
	März	11	4	5
	April	9	20	24
	Mai	9	11	31
	Juni	8	1	12
	Juli	7	12	43
	August	5	23	31
	September	4	9	30
	October	3	19	20
	November	2	5	40
	December	1	16	48
	December	31	4	34
—934	Jänner	29	17	2
	Februar	28	6	58
	März	29	21	7
	April	28	12	29
	Mai	28	3	30
	Juni	26	18	43
	Juli	26	8	53
	August	24	21	50
	September	23	10	5
	October	22	21	36
	November	21	8	24
	December	20	19	41
—933	Jänner	19	6	0
	Februar	17	16	19
	März	19	3	22
	April	17	15	7
	Mai	17	4	48
	Juni	15	19	26
	Juli	15	11	17
	August	14	3	22
	September	12	18	58
	October	12	9	30
	November	10	22	48
	December	10	11	2
—932	Jänner	8	21	50
	Februar	7	7	41
	März	7	16	48
	April	6	1	26
	Mai	5	11	17
	Juni	3	22	34
	Juli	3	11	46
	August	2	3	36
	August	31	20	38
	September	30	14	24
	October	30	7	12
	November	28	33	2
	December	28	12	43

Jahr	Datum		Uhr	
—931	Jänner	26	23h	46m
	Februar	25	9	7
	März	26	17	2
	April	25	0	20
	Mai	24	8	24
	Juni	22	18	14
	Juli	22	6	14
	August	20	20	53
	September	19	14	38
	October	19	8	53
	November	18	3	50
	December	17	21	22
—930	Jänner	16	12	14
	Februer	15	0	29
	März	16	9	50
	April	14	17	31
	Mai	14	0	43
	Juni	12	7	26
	Juli	11	15	50
	August	10	2	38
	September	8	16	19
	October	8	8	53
	November	7	3	36
	December	6	23	2
—929	Jänner	5	17	31
	Februar	4	9	50
	März	5	23	17
	April	4	9	36
	Mai	3	17	40
	Juni	2	0	14
	Juli	1	7	12
	Juli	30	14	53
	August	29	0	58
	September	27	13	26
	October	27	4	34
	November	25	22	19
	December	25	17	40
—928	Jänner	24	12	20
	Februar	23	5	31
	März	23	19	55
	April	22	7	12
	Mai	21	16	34
	Juni	20	0	29
	Juli	19	7	55
	August	17	15	36
	September	16	1	12
	October	15	12	43
	November	14	2	24
	December	13	18	14
—927	Jänner	12	11	46
	Februar	11	0	0
	März	12	23	17
	April	11	14	38
	Mai	11	3	50
	Juni	9	14	24
	Juli	8	23	46
	August	7	8	24
	September	5	17	2
	October	5	2	38
	November	3	13	41
	December	3	1	55

Jahr	Datum	Uhr
−926	Jänner 1	10^h 5^m
	Jänner 31	7 12
	März 1	23 17
	März 31	15 30
	April 30	6 58
	Mai 29	21 30
	Juni 28	10 48
	Juli 27	22 5
	August 26	8 38
	September 24	18 43
	October 24	5 2
	November 22	15 50
	December 22	3 7
−925	Jänner 20	15 7
	Februar 19	3 50
	März 20	17 17
	April 19	7 55
	Mai 18	23 2
	Juni 17	14 24
	Juli 17	5 17
	August 15	18 58
	September 14	7 55
	October 13	19 55
	November 12	7 55
	December 11	18 43
−924	Jänner 10	5 2
	Februar 8	15 7
	März 9	1 55
	April 7	12 58
	Mai 7	1 12
	Juni 5	15 22
	Juli 5	6 43
	August 3	22 48
	September 2	14 53
	October 2	6 14
	October 31	20 38
	November 30	9 22
	December 29	21 7
−923	Jänner 28	6 58
	Februar 26	16 5
	März 28	0 58
	April 26	9 50
	Mai 25	20 10
	Juni 24	8 24
	Juli 23	23 17
	August 22	15 50
	September 21	9 22
	October 21	3 7
	November 19	19 26
	December 19	10 5
−922	Jänner 17	22 34
	Februar 16	8 38
	März 17	17 31
	April 16	0 29
	Mai 15	8 24
	Juni 13	16 48
	Juli 13	3 22
	August 11	16 48
	September 10	9 22
	October 10	3 36
	November 8	22 34
	December 8	17 2

Jahr	Datum	Uhr
−921	Jänner 7	9^h 22^m
	Februar 5	22 34
	März 7	9 22
	April 5	17 46
	Mai 5	0 43
	Juni 3	7 26
	Juli 2	14 53
	August 1	0 43
	August 30	12 43
	September 29	3 50
	October 28	21 50
	November 27	17 2
	December 27	12 29
−920	Jänner 20	6 14
	Februar 24	20 53
	März 25	8 24
	April 23	17 31
	Mai 23	0 43
	Juni 21	7 41
	Juli 20	14 53
	August 18	23 31
	September 17	10 48
	October 17	0 43
	November 15	17 17
	December 15	11 46
−919	Jänner 14	6 43
	Februar 13	0 43
	März 14	16 34
	April 13	5 31
	Mai 12	15 50
	Juni 11	0 14
	Juli 10	7 55
	August 8	15 50
	September 7	0 29
	October 6	10 48
	November 4	23 31
	December 4	14 24
−918	Jänner 3	6 58
	Februar 2	0 43
	März 3	18 14
	April 2	10 19
	Mai 2	0 43
	Mai 31	12 43
	Juni 29	22 34
	Juli 29	7 55
	August 27	16 34
	September 26	2 10
	October 25	12 29
	November 24	0 0
	December 23	13 26
−917	Jänner 22	3 36
	Februar 20	18 58
	März 22	11 2
	April 21	2 38
	Mai 20	18 0
	Juni 19	7 55
	Juli 18	20 10
	August 17	7 12
	September 15	17 46
	October 15	4 5
	November 13	15 7
	December 13	1 55

Jahr	Datum	Uhr
−916	Jänner 11	13^h 12^m
	Februar 10	1 41
	März 10	14 10
	April 9	4 5
	Mai 8	18 43
	Juni 7	10 5
	Juli 7	1 12
	August 5	15 50
	September 4	5 31
	October 3	18 14
	November 2	6 14
	December 1	17 31
	December 31	4 19
−915	Jänner 29	14 10
	Februar 28	0 29
	März 29	10 48
	April 27	22 19
	Mai 27	11 2
	Juni 26	2 10
	Juli 25	18 0
	August 24	10 34
	September 23	2 38
	October 22	17 46
	November 21	7 41
	December 20	20 10
−914	Jänner 19	6 29
	Februar 17	15 50
	März 19	0 29
	April 17	8 38
	Mai 16	18 0
	Juni 15	5 17
	Juli 14	18 43
	August 13	10 34
	September 12	4 5
	October 11	22 19
	November 10	16 5
	December 10	7 26
−913	Jänner 8	21 7
	Februar 7	8 10
	März 8	17 17
	April 7	0 58
	Mai 6	8 10
	Juni 4	15 36
	Juli 4	1 12
	August 2	13 12
	September 1	4 19
	September 30	21 50
	October 30	16 48
	November 29	12 0
	December 29	5 31
−912	Jänner 27	20 10
	Februar 26	8 10
	März 26	17 46
	April 25	0 58
	Mai 24	7 55
	Juni 22	14 53
	Juli 21	23 17
	August 20	10 5
	September 19	0 0
	October 18	16 19
	November 17	11 31
	December 17	6 58

Jahr	Datum		Uhr	
−911	Jänner	16	1^h	20^m
	Februar	14	17	31
	März	16	6	43
	April	14	16	48
	Mai	14	0	58
	Juni	12	7	41
	Juli	11	14	53
	August	9	23	2
	September	8	8	53
	October	7	21	30
	November	6	12	58
	December	6	6	14
−910	Jänner	5	1	12
	Februar	3	16	41
	März	5	12	43
	April	4	3	7
	Mai	3	14	38
	Juni	2	0	0
	Juli	1	7	41
	Juli	30	15	22
	August	28	23	46
	September	27	9	22
	October	26	20	53
	November	25	10	48
	December	25	2	53
−909	Jänner	23	19	41
	Februar	22	13	12
	März	24	6	14
	April	22	21	7
	Mai	22	10	19
	Juni	20	21	36
	Juli	20	7	26
	August	18	16	19
	September	17	1	26
	October	16	11	31
	November	14	22	34
	December	14	10	48
−908	Jänner	13	0	14
	Februar	11	14	53
	März	12	6	14
	April	10	12	19
	Mai	10	13	55
	Juni	9	4	34
	Juli	8	17	31
	August	7	5	46
	September	5	16	34
	October	5	3	22
	November	3	14	10
	December	3	0	43
−907	Jänner	1	12	0
	Jänner	30	23	31
	März	1	11	31
	März	31	0	14
	April	29	14	24
	Mai	29	5	31
	Juni	27	21	7
	Juli	27	12	14
	August	26	2	38
	September	24	16	5
	October	24	4	48
	November	22	16	34
	December	22	3	36

Jahr	Datum		Uhr	
−906	Jänner	20	13^h	41^m
	Februar	18	23	31
	März	20	9	22
	April	18	19	55
	Mai	18	7	55
	Juni	16	21	50
	Juli	16	14	10
	August	15	5	31
	September	13	22	19
	October	13	14	24
	November	12	5	2
	December	11	18	14
−905	Jänner	10	5	31
	Februar	8	15	36
	März	10	0	14
	April	8	8	24
	Mai	7	17	17
	Juni	6	3	7
	Juli	5	15	7
	August	4	6	0
	September	2	22	48
	October	2	17	2
	November	1	11	2
	December	1	3	50
	December	30	18	43
−904	Jänner	29	6	43
	Februar	27	16	48
	März	28	0	58
	April	26	7	55
	Mai	25	15	7
	Juni	24	0	14
	Juli	23	10	48
	August	22	0	14
	September	20	16	48
	October	20	11	31
	November	19	6	43
	December	19	1	12
−903	Jänner	17	17	17
	Februar	16	6	43
	März	17	17	17
	April	16	1	26
	Mai	15	8	10
	Juni	13	14	53
	Juli	12	22	34
	August	11	7	55
	September	9	20	24
	October	9	11	31
	November	8	6	0
	December	8	1	26
−902	Jänner	6	20	24
	Februar	5	13	41
	März	7	4	19
	April	5	15	36
	Mai	5	0	43
	Juni	3	8	10
	Juli	2	15	7
	Juli	31	22	34
	August	30	7	26
	September	28	18	58
	October	28	8	53
	November	27	1	12
	December	26	19	41

Jahr	Datum		Uhr	
−901	Jänner	25	14^h	24^m
	Februar	24	7	55
	März	25	23	46
	April	24	12	43
	Mai	23	23	2
	Juni	22	7	41
	Juli	21	15	36
	August	19	23	31
	September	18	8	38
	October	17	16	26
	November	16	8	10
	December	15	22	48
−900	Jänner	14	14	53
	Februar	13	8	10
	März	14	1	12
	April	12	17	2
	Mai	12	7	26
	Juni	10	19	26
	Juli	10	6	0
	August	8	15	50
	September	7	1	12
	October	6	10	48
	November	4	21	22
	December	4	8	53
−899	Jänner	2	21	36
	Februar	1	11	31
	März	3	2	10
	April	1	17	46
	Mai	1	9	22
	Mai	31	0	43
	Juni	29	14	24
	Juli	29	3	22
	August	27	14	53
	September	26	2	10
	October	25	12	43
	November	23	23	31
	December	23	10	48
−898	Jänner	21	21	36
	Februar	20	9	22
	März	21	21	30
	April	20	10	48
	Mai	20	1	26
	Juni	18	17	2
	Juli	18	8	10
	August	16	23	17
	September	15	13	26
	October	15	2	38
	November	13	14	53
	December	13	2	10
−897	Jänner	11	12	58
	Februar	9	22	34
	März	11	7	55
	April	9	18	14
	Mai	9	5	2
	Juni	7	18	14
	Juli	7	8	24
	August	6	0	58
	September	4	18	0
	October	4	10	34
	November	3	2	10
	December	2	16	19

Jahr	Datum	Uhr
−896	Jänner 1	4^h 34^m
	Jänner 30	14 53
	Februar 29	0 0
	März 29	7 55
	April 27	16 5
	Mai 27	1 12
	Juni 25	12 29
	Juli 25	1 26
	August 23	17 46
	September 22	11 31
	October 22	6 14
	November 21	0 0
	December 20	16 5
−895	Jänner 19	5 17
	Februar 17	16 19
	März 19	0 43
	April 17	8 10
	Mai 16	15 22
	Juni 14	22 48
	Juli 14	8 24
	August 12	20 38
	September 11	11 46
	October 11	5 46
	November 10	0 43
	December 9	19 55
−894	Jänner 8	13 26
	Februar 7	4 5
	März 8	16 19
	April 7	1 12
	Mai 6	8 38
	Juni 4	15 22
	Juli 3	22 5
	August 2	6 29
	August 31	17 46
	September 30	7 41
	October 30	0 29
	November 28	19 12
	December 28	14 53
−893	Jänner 27	9 7
	Februar 26	1 12
	März 27	13 55
	April 26	0 14
	Mai 25	8 10
	Juni 23	15 7
	Juli 22	22 34
	August 21	6 58
	September 19	17 2
	October 19	5 46
	November 17	21 50
	December 17	14 38
−892	Jänner 16	9 7
	Februar 15	3 22
	März 15	19 55
	April 14	10 5
	Mai 13	21 36
	Juni 12	6 58
	Juli 11	15 22
	August 9	23 2
	September 8	8 10
	October 7	18 0
	November 6	5 46
	December 5	19 26

Jahr	Datum	Uhr
−891	Jänner 4	10^h 48^m
	Februar 3	3 22
	März 4	20 24
	April 3	12 43
	Mai 3	4 5
	Juni 1	17 17
	Juli 1	4 34
	Juli 30	14 53
	August 29	0 14
	September 27	9 50
	October 26	19 55
	November 25	7 12
	December 24	19 12
−890	Jänner 23	8 24
	Februar 21	22 19
	März 23	13 12
	April 22	5 2
	Mai 21	20 24
	Juni 20	11 2
	Juli 20	0 58
	August 18	13 12
	September 17	0 43
	October 16	12 0
	November 14	22 48
	December 14	9 36
−889	Jänner 12	20 24
	Februar 11	7 26
	März 12	18 58
	April 11	7 26
	Mai 10	21 22
	Juni 9	12 14
	Juli 9	3 36
	August 7	19 12
	September 6	10 19
	October 6	0 29
	November 4	13 26
	December 4	1 12
−888	Jänner 2	12 14
	Jänner 31	22 5
	März 1	7 26
	März 30	16 48
	April 29	3 7
	Mai 28	14 38
	Juni 27	4 34
	Juli 26	20 10
	August 25	12 58
	September 24	6 0
	October 23	22 19
	November 22	13 26
	December 22	2 53
−887	Jänner 20	14 24
	Februar 18	23 46
	März 20	7 55
	April 18	15 50
	Mai 18	0 0
	Juni 16	10 5
	Juli 15	22 5
	August 14	12 58
	September 13	6 26
	October 13	0 58
	November 11	19 26
	December 11	12 29

Jahr	Datum	Uhr
−886	Jänner 10	2^h 53^m
	Februar 8	15 7
	März 10	0 43
	April 8	8 24
	Mai 7	15 36
	Juni 6	3 50
	Juli 5	7 12
	August 3	18 0
	September 2	7 41
	October 2	0 29
	October 31	19 12
	November 30	14 38
	December 30	9 22
−885	Jänner 29	1 12
	Februar 27	14 24
	März 29	0 43
	April 27	8 38
	Mai 26	15 36
	Juni 24	22 19
	Juli 24	6 0
	August 22	15 50
	September 21	4 19
	October 20	20 10
	November 19	13 55
	December 19	9 22
−884	Jänner 18	4 19
	Februar 16	21 22
	März 17	11 46
	April 15	23 2
	Mai 15	7 55
	Juni 13	15 36
	Juli 12	22 48
	August 11	0 0
	September 9	15 36
	October 9	3 7
	November 7	17 17
	December 7	9 22
−883	Jänner 6	3 36
	Februar 4	22 5
	März 6	15 36
	April 5	6 58
	Mai 4	19 41
	Juni 3	0 14
	Juli 2	15 7
	Juli 31	23 17
	August 30	7 41
	September 28	17 2
	October 28	3 50
	November 26	16 34
	December 26	6 58
−882	Jänner 24	22 48
	Februar 23	15 36
	März 25	7 55
	April 23	23 46
	Mai 23	14 10
	Juni 22	2 24
	Juli 21	13 41
	August 19	23 31
	September 18	9 22
	October 17	18 29
	November 16	6 0
	December 15	17 31

Jahr	Datum		Uhr	
—881	Jänner	14	0^h	0^m
	Februar	12	19	12
	März	14	9	22
	April	13	0	20
	Mai	12	16	5
	Juni	11	7	12
	Juli	10	21	22
	August	9	10	48
	September	7	22	48
	October	7	10	19
	November	5	21	30
	December	5	8	53
—880	Jänner	3	19	20
	Februar	2	6	0
	März	2	17	2
	April	1	4	48
	April	30	17	31
	Mai	30	7	55
	Juni	28	23	17
	Juli	28	15	7
	August	27	6	43
	September	25	21	22
	October	25	11	17
	November	23	23	40
	December	23	11	2
—879	Jänner	21	21	22
	Februar	20	6	43
	März	21	15	50
	April	20	1	20
	Mai	19	12	14
	Juni	18	0	58
	Juli	17	15	30
	August	16	20	53
	September	15	1	26
	October	14	18	20
	November	13	10	34
	December	13	0	43
—878	Jänner	11	13	12
	Februar	9	23	2
	März	11	7	55
	April	9	15	30
	Mai	8	23	17
	Juni	7	8	24
	Juli	6	19	12
	August	5	8	38
	September	4	1	12
	October	3	19	41
	November	2	14	10
	December	2	8	24
—877	Jänner	1	0	14
	Jänner	30	13	20
	März	1	0	14
	März	30	8	24
	April	28	15	50
	Mai	27	22	34
	Juni	26	6	14
	Juli	25	10	5
	August	24	4	5
	September	22	19	20
	October	22	13	20
	November	21	8	38
	December	21	4	19
—876	Jänner	19	21^h	36^m
	Februar	18	12	14
	März	18	23	46
	April	17	8	53
	Mai	16	16	5
	Juni	14	22	34
	Juli	14	6	0
	August	12	14	24
	September	11	1	55
	October	10	15	50
	November	9	8	24
	December	9	3	22
—875	Jänner	7	22	34
	Februar	6	16	48
	März	8	8	38
	April	6	21	7
	Mai	6	7	12
	Juni	4	15	50
	Juli	3	22	34
	August	2	6	14
	August	31	14	53
	September	30	1	12
	October	29	14	10
	November	28	5	17
	December	27	22	10
—874	Jänner	20	16	34
	Februar	25	10	10
	März	27	2	38
	April	25	16	48
	Mai	25	4	19
	Juni	23	14	10
	Juli	22	22	48
	August	21	6	58
	September	19	16	16
	October	19	2	38
	November	17	14	24
	December	17	4	5
—873	Jänner	15	18	58
	Februar	14	10	48
	März	16	3	22
	April	14	19	20
	Mai	14	10	34
	Juni	13	0	0
	Juli	12	11	40
	August	10	22	34
	September	9	8	38
	October	8	18	29
	November	7	4	48
	December	6	15	50
—872	Jänner	5	3	30
	Februar	3	16	19
	März	4	6	14
	April	2	20	24
	Mai	2	11	31
	Juni	1	2	53
	Juni	30	17	40
	Juli	30	7	55
	August	28	20	53
	September	27	9	7
	October	26	20	38
	November	25	7	26
	December	24	18	43
—871	Jänner	23	5^h	2^m
	Februar	21	15	22
	März	23	2	24
	April	21	14	10
	Mai	21	3	30
	Juni	19	18	43
	Juli	19	10	34
	August	18	2	38
	September	16	18	29
	October	16	8	38
	November	14	22	19
	December	14	10	19
—870	Jänner	12	20	53
	Februar	11	0	20
	März	12	15	22
	April	11	0	14
	Mai	10	10	19
	Juni	8	21	30
	Juli	8	11	2
	August	7	3	22
	September	5	20	10
	October	5	13	55
	November	4	6	58
	December	3	22	19
—869	Jänner	2	12	14
	Jänner	31	22	48
	März	2	8	10
	März	31	16	5
	April	29	23	31
	Mai	29	7	26
	Juni	27	17	17
	Juli	27	5	31
	August	25	20	38
	September	24	13	55
	October	24	8	53
	November	23	3	36
	December	22	20	53
—868	Jänner	21	11	31
	Februar	19	23	31
	März	20	8	53
	April	18	16	5
	Mai	17	23	17
	Juni	16	6	14
	Juli	15	14	53
	August	14	1	41
	September	12	15	30
	October	12	8	24
	November	11	3	30
	December	10	23	2
—867	Jänner	9	17	17
	Februar	8	9	7
	März	9	22	5
	April	8	8	24
	Mai	7	16	34
	Juni	5	23	2
	Juli	5	6	0
	August	3	13	55
	September	1	23	40
	October	1	12	58
	October	31	4	5
	November	29	22	5
	December	29	17	31

Jahr	Datum		Uhr	
−866	Jänner	28	12^h	0^m
	Februar	27	5	2
	März	28	19	12
	April	27	6	14
	Mai	26	15	36
	Juni	24	23	17
	Juli	24	6	43
	August	22	14	38
	September	21	0	14
	October	20	12	0
	November	19	1	55
	December	18	18	0
−865	Jänner	17	11	31
	Februar	16	5	46
	März	17	22	48
	April	16	13	41
	Mai	16	2	38
	Juni	14	13	26
	Juli	13	22	48
	August	12	7	12
	September	10	16	19
	October	10	1	55
	November	8	12	58
	December	8	1	41
−864	Jänner	6	15	36
	Februar	5	6	29
	März	5	22	48
	April	4	15	7
	Mai	4	6	29
	Juni	2	20	53
	Juli	2	6	50
	Juli	31	21	22
	August	30	7	41
	September	28	18	0
	October	28	4	19
	November	26	15	7
	December	26	2	24
−863	Jänner	24	14	24
	Februar	23	3	7
	März	24	16	34
	April	23	7	12
	Mai	22	22	34
	Juni	21	13	55
	Juli	21	4	34
	August	19	18	14
	September	18	7	26
	October	17	19	26
	November	16	7	12
	December	15	18	0
−862	Jänner	14	4	19
	Februar	12	14	38
	März	14	0	58
	April	12	12	0
	Mai	12	0	29
	Juni	10	14	38
	Juli	10	0	0
	August	8	22	19
	September	7	14	10
	October	7	5	46
	November	5	19	55
	December	5	8	53

Jahr	Datum		Uhr	
−861	Jänner	3	20	10
	Februar	2	6	14
	März	3	15	7
	April	1	23	46
	Mai	1	8	53
	Mai	30	19	12
	Juni	29	7	26
	Juli	28	22	34
	August	27	15	36
	September	26	9	7
	October	26	2	53
	November	24	19	12
	December	24	9	50
−860	Jänner	22	21	36
	Februar	21	7	41
	März	21	16	5
	April	19	23	17
	Mai	19	6	43
	Juni	17	15	50
	Juli	17	2	38
	August	15	16	19
	September	14	8	53
	October	14	3	22
	November	12	22	34
	December	12	16	48
−859	Jänner	11	8	53
	Februar	9	21	50
	März	11	8	24
	April	9	16	48
	Mai	8	23	31
	Juni	7	6	14
	Juli	6	13	55
	August	4	23	31
	September	3	12	0
	October	3	3	22
	November	1	21	36
	December	1	17	2
	December	31	12	14
−858	Jänner	30	5	31
	Februar	28	20	10
	März	30	7	12
	April	28	16	19
	Mai	27	23	17
	Juni	26	6	43
	Juli	25	13	41
	August	23	22	34
	September	22	10	5
	October	22	0	14
	November	20	16	48
	December	20	11	46
−857	Jänner	19	6	29
	Februar	18	0	14
	März	19	15	50
	April	18	4	19
	Mai	17	14	53
	Juni	15	23	2
	Juli	15	6	58
	August	13	14	24
	September	11	23	31
	October	11	10	19
	November	9	23	2
	December	9	13	55

Jahr	Datum		Uhr	
−856	Jänner	8	6^h	43^m
	Februar	7	0	14
	März	7	17	46
	April	6	9	50
	Mai	5	23	46
	Juni	4	11	46
	Juli	3	21	36
	August	2	6	43
	August	31	15	36
	September	30	1	12
	October	29	11	46
	November	27	23	17
	December	27	12	58
−855	Jänner	26	2	53
	Februar	24	18	14
	März	26	10	19
	April	25	2	10
	Mai	24	17	2
	Juni	23	6	58
	Juli	22	19	12
	August	21	6	14
	September	19	17	2
	October	19	3	7
	November	17	14	24
	December	17	1	12
−854	Jänner	15	12	29
	Februar	14	0	58
	März	15	13	41
	April	14	3	22
	Mai	13	18	14
	Juni	12	9	22
	Juli	12	0	43
	August	10	15	22
	September	9	5	2
	October	8	17	46
	November	7	5	46
	December	6	16	48
−853	Jänner	5	3	22
	Februar	3	13	26
	März	4	23	31
	April	3	9	50
	Mai	2	21	22
	Juni	1	10	19
	Juli	1	1	26
	Juli	30	17	31
	August	29	10	5
	September	28	2	24
	October	27	17	17
	November	26	7	12
	December	25	19	26
−852	Jänner	24	5	46
	Februar	22	15	7
	März	22	23	31
	April	21	7	26
	Mai	20	17	2
	Juni	19	4	19
	Juli	18	18	14
	August	17	10	5
	September	16	3	36
	October	15	22	5
	November	14	0	29
	December	14	7	12

Jahr	Datum		Uhr	
—851	Jänner	12	20^h	24^m
	Februar.	11	7	20
	März .	12	16	5
	April .	10	23	40
	Mai	10	0	58
	Juni	8	14	38
	Juli	8	0	14
	August .	6	12	43
	September	5	3	50
	October.	4	21	30
	November.	3	16	34
	December .	3	11	40
—850	Jänner	2	5	2
	Jänner	31	19	20
	März .	2	7	20
	März .	31	16	34
	April .	30	0	0
	Mai	29	6	29
	Juni	27	13	41
	Juli	26	22	5
	August .	25	9	22
	September	23	23	17
	October.	23	16	5
	November.	22	11	31
	December .	22	6	43
—849	Jänner	21	0	58
	Februar.	19	17	2
	März .	21	5	40
	April .	19	15	50
	Mai	18	23	31
	Juni	17	6	29
	Juli	16	13	41
	August .	14	21	50
	September	13	8	10
	October.	12	21	7
	November.	11	12	43
	December .	11	6	20
—848	Jänner	10	0	58
	Februar.	8	19	20
	März .	9	12	0
	April .	8	2	10
	Mai	7	13	41
	Juni	5	22	48
	Juli	5	6	43
	August .	3	14	10
	September	1	22	48
	October.	1	8	24
	October.	30	20	24
	November.	29	10	19
	December .	29	2	24
—847	Jänner	27	16	12
	Februar.	26	12	58
	März .	28	5	31
	April .	26	20	24
	Mai	26	9	22
	Juni	24	20	24
	Juli	24	6	14
	August .	22	15	22
	September	21	0	29
	October.	20	10	48
	November.	18	21	50
	December .	18	10	5
—846	Jänner	16	23^h	40^m
	Februar.	15	14	10
	März .	17	5	40
	April .	15	21	30
	Mai	15	13	12
	Juni	14	3	50
	Juli	13	17	2
	August .	12	4	34
	September	10	16	5
	October.	10	2	38
	November.	8	13	20
	December .	8	0	0
—845	Jänner	6	11	17
	Februar.	4	22	34
	März .	6	10	48
	April .	4	23	40
	Mai	4	13	55
	Juni	3	5	2
	Juli	2	20	24
	August .	1	11	40
	August .	31	1	55
	September	29	15	30
	October.	29	4	5
	November.	27	15	50
	December .	27	2	53
—844	Jänner	25	12	58
	Februar.	23	22	34
	März .	24	8	24
	April .	22	18	58
	Mai	22	6	58
	Juni	20	21	7
	Juli	20	12	58
	August .	19	5	2
	September	17	22	5
	October.	17	13	55
	November.	16	4	34
	December .	15	17	31
—843	Jänner	14	4	48
	Februar.	12	14	53
	März .	13	23	17
	April .	12	7	12
	Mai	11	15	50
	Juni	10	2	10
	Juli	9	14	24
	August .	8	5	31
	September	6	22	34
	October.	6	16	48
	November	5	11	2
	December .	5	3	30
—842	Jänner	3	18	14
	Februar.	2	6	14
	März	3	16	5
	April .	1	23	40
	Mai	1	6	43
	Mai	30	14	10
	Juni	28	23	2
	Juli	28	9	50
	August	26	23	40
	September	25	10	10
	October.	25	11	17
	November.	24	6	29
	December .	24	0	43
—841	Jänner .	22	10^h	34^m
	Februar.	21	5	40
	März .	22	16	5
	April .	21	0	0
	Mai	20	7	12
	Juni	18	13	41
	Juli	17	21	22
	August	16	7	12
	September	14	19	41
	October.	14	11	17
	November.	13	5	31
	December .	13	1	12
—840	Jänner	11	19	55
	Februar.	10	13	12
	März	11	3	30
	April	9	14	53
	Mai	8	23	31
	Juni	7	7	12
	Juli	6	13	55
	August	4	21	22
	September	3	6	43
	October.	2	18	29
	November.	1	8	38
	December .	1	0	58
	December .	30	16	20
—839	Jänner	29	13	55
	Februar.	28	7	20
	März	29	23	2
	April .	28	11	40
	Mai	27	22	5
	Juni	26	6	43
	Juli	25	14	38
	August	23	22	34
	September	22	7	55
	October.	21	18	43
	November.	20	7	26
	December .	19	22	34
—838	Jänner	18	14	24
	Februar.	17	7	41
	März	19	0	29
	April	17	16	16
	Mai	17	0	20
	Juni	15	18	26
	Juli	15	5	2
	August	13	14	24
	September	12	0	14
	October.	11	10	5
	November.	9	20	38
	December .	9	8	10
—837	Jänner	7	21	7
	Februar.	6	10	48
	März .	8	1	41
	April .	6	17	2
	Mai	6	8	38
	Juni	4	23	40
	Juli	4	13	41
	August .	3	2	38
	September	1	14	10
	October.	1	1	20
	October.	30	12	14
	November.	28	22	48
	December .	28	9	50

Jahr	Datum		Uhr	
—836	Jänner	26	21h	7m
	Februar	25	8	38
	März	25	20	38
	April	24	10	5
	Mai	24	0	29
	Juni	22	19	5
	Juli	22	7	26
	August	20	22	34
	September	19	12	58
	October	19	2	19
	November	17	14	38
	December	17	1	41
—835	Jänner	15	12	14
	Februar	13	21	50
	März	15	7	12
	April	13	17	17
	Mai	13	4	5
	Juni	11	17	2
	Juli	11	7	55
	August	10	0	29
	September	8	17	31
	October	8	10	19
	November	7	1	41
	December	6	15	36
—834	Jänner	5	3	50
	Februar	3	14	19
	März	4	23	17
	April	3	6	58
	Mai	2	15	7
	Juni	1	0	29
	Juni	30	11	17
	Juli	30	0	58
	August	28	17	17
	September	27	11	17
	October	27	6	0
	November	25	23	31
	December	25	15	36
—833	Jänner	24	4	48
	Februar	22	15	36
	März	24	0	0
	April	22	6	58
	Mai	21	14	24
	Juni	19	21	50
	Juli	19	7	41
	August	17	19	55
	September	16	11	17
	October	16	5	17
	November	15	0	43
	December	14	19	55
—832	Jänner	13	13	12
	Februar	12	3	30
	März	12	15	22
	April	11	0	29
	Mai	10	7	26
	Juni	8	14	19
	Juli	7	21	7
	August	6	5	46
	September	4	17	2
	October	4	7	12
	November	3	0	14
	December	2	19	12

Jahr	Datum		Uhr	
—831	Jänner	1	14h	24m
	Jänner	31	8	38
	März	2	0	29
	März	31	12	58
	April	29	23	2
	Mai	29	6	58
	Juni	27	13	55
	Juli	26	21	36
	August	25	6	0
	September	23	19	19
	October	23	5	17
	November	21	20	53
	December	21	14	10
—830	Jänner	20	8	38
	Februar	19	2	38
	März	20	18	58
	April	19	8	53
	Mai	18	20	24
	Juni	17	6	0
	Juli	16	14	10
	August	14	22	5
	September	13	7	12
	October	12	17	17
	November	11	5	2
	December	10	18	58
—829	Jänner	9	10	19
	Februar	8	2	38
	März	9	19	55
	April	8	12	0
	Mai	8	3	7
	Juni	6	16	19
	Juli	6	3	39
	August	4	13	55
	September	2	23	17
	October	2	8	53
	October	31	19	29
	November	30	6	29
	December	29	18	43
—828	Jänner	28	7	41
	Februar	26	21	50
	März	27	12	29
	April	26	4	5
	Mai	25	19	41
	Juni	24	10	19
	Juli	24	0	0
	August	22	12	29
	September	21	0	14
	October	20	11	17
	November	18	22	5
	December	18	9	7
—827	Jänner	16	19	55
	Februar	15	6	43
	März	16	18	14
	April	15	6	29
	Mai	14	20	24
	Juni	13	11	31
	Juli	13	2	53
	August	11	18	43
	September	10	9	50
	October	10	0	0
	November	8	12	58
	December	8	0	43

Jahr	Datum		Uhr	
—826	Jänner	6	11h	31m
	Februar	4	21	22
	März	6	6	43
	April	4	16	5
	Mai	4	2	10
	Juni	2	13	41
	Juli	2	3	36
	Juli	31	19	26
	August	30	12	29
	September	29	6	58
	October	28	22	5
	November	27	12	58
	December	27	2	24
—825	Jänner	25	13	41
	Februar	23	23	2
	März	25	7	12
	April	23	14	38
	Mai	22	23	2
	Juni	21	9	7
	Juli	20	21	36
	August	19	12	29
	September	18	6	14
	October	18	0	43
	November	16	18	58
	December	16	12	0
—824	Jänner	15	2	24
	Februar	13	14	24
	März	13	23	46
	April	12	7	26
	Mai	11	14	24
	Juni	9	21	39
	Juli	9	6	14
	August	7	17	17
	September	6	6	58
	October	6	0	0
	November	4	18	58
	December	4	14	10
—823	Jänner	3	8	53
	Februar	2	0	43
	März	3	13	41
	April	1	23	31
	Mai	1	7	26
	Mai	30	14	24
	Juni	28	21	7
	Juli	28	4	48
	August	26	15	7
	September	25	3	39
	October	24	19	12
	November	23	13	26
	December	23	9	7
—822	Jänner	22	3	50
	Februar	20	20	53
	März	22	10	48
	April	20	22	5
	Mai	20	6	58
	Juni	18	14	38
	Juli	17	21	39
	August	16	5	17
	September	14	14	53
	October	14	2	38
	November	12	16	48
	December	12	9	7

Jahr	Datum	Uhr
—821	Jänner . . . 11	3^h 7^m
	Februar. . . . 9	21 22
	März 11	14 24
	April 10	5 40
	Mai 9	18 29
	Juni 8	5 2
	Juli 7	13 55
	August 5	22 5
	September . . 4	6 43
	October. . . . 3	10 19
	November. . . 2	3 22
	December . . . 1	10 5
	December . . . 31	6 29
—820	Jänner. 29	22 5
	Februar. . . . 28	14 53
	März 29	7 12
	April 27	22 48
	Mai 27	13 12
	Juni 26	1 41
	Juli 25	12 29
	August 23	22 19
	September . . 22	8 38
	October 21	18 43
	November. . . 20	5 17
	December . . . 19	17 2
—819	Jänner 18	5 31
	Februar. . . . 16	18 43
	März 18	8 38
	April 16	23 40
	Mai 16	15 7
	Juni 15	6 14
	Juli 14	20 53
	August 13	9 50
	September . . 11	22 19
	October. . . . 11	9 50
	November. . . 9	21 7
	December . . . 9	7 55
—818	Jänner 7	18 43
	Februar. . . . 6	5 17
	März 7	16 19
	April 6	3 50
	Mai 5	16 34
	Juni 4	7 12
	Juli 3	22 19
	August 2	14 24
	September . . 1	6 0
	September . . 30	20 53
	October. . . . 30	10 34
	November. . . 28	23 2
	December . . . 28	10 19
—817	Jänner 26	20 53
	Februar. . . . 25	6 0
	März 26	14 38
	April 25	0 14
	Mai 24	10 48
	Juni 23	0 0
	Juli 22	14 53
	August 21	7 20
	September . . 20	0 58
	October. . . . 19	18 14
	November. . . 18	10 19
	December . . . 18	0 14

Jahr	Datum	Uhr
—816	Jänner . . . 16	12^h 14^m
	Februar. . . . 14	22 19
	März 15	6 58
	April 13	14 38
	Mai 12	22 19
	Juni 11	7 12
	Juli 10	18 14
	August 9	8 10
	September . . 8	0 43
	October. . . . 7	18 58
	November. . . 6	13 55
	December . . . 6	7 55
—815	Jänner 4	23 40
	Februar. . . . 3	12 58
	März 4	23 31
	April 3	7 41
	Mai 2	14 38
	Mai 31	21 30
	Juni 30	5 2
	Juli 29	15 7
	August 28	3 22
	September . . 26	18 58
	October. . . . 26	13 12
	November. . . 25	8 24
	December . . . 25	3 50
—814	Jänner 23	21 7
	Februar. . . . 22	11 17
	März 23	22 48
	April 22	7 20
	Mai 21	14 53
	Juni 19	21 30
	Juli 19	4 48
	August 17	13 20
	September . . 16	1 12
	October. . . . 15	15 22
	November. . . 14	8 24
	December . . . 14	3 22
—813	Jänner 12	22 19
	Februar. . . . 11	10 19
	März 13	7 41
	April 11	20 24
	Mai 11	6 14
	Juni 9	14 24
	Juli 8	21 22
	August 7	5 17
	September . . 5	14 10
	October. . . . 5	0 43
	November. . . 3	13 41
	December . . . 3	5 2
—812	Jänner 1	22 5
	Jänner 31	10 5
	März 1	9 50
	März 31	1 55
	April 29	10 5
	Mai 29	3 22
	Juni 27	13 12
	Juli 26	21 50
	August 25	6 14
	September . . 23	15 30
	October 23	1 55
	November. . . 21	13 41
	December . . . 21	3 30

Jahr	Datum	Uhr
—811	Jänner . . . 19	18^h 14^m
	Februar. . . . 18	10 19
	März 20	2 38
	April 18	18 20
	Mai 18	9 36
	Juni 16	23 2
	Juli 16	10 48
	August 14	21 22
	September . . 13	7 41
	October. . . . 12	17 40
	November . . . 11	4 34
	December . . . 10	15 22
—810	Jänner. 9	3 7
	Februar. . . . 7	15 36
	März 9	5 17
	April 7	19 12
	Mai 7	10 48
	Juni 6	1 55
	Juli 5	16 48
	August 4	6 58
	September . . 2	20 10
	October. . . . 2	8 24
	October. . . . 31	19 55
	November. . . 30	6 58
	December . . . 29	17 40
—809	Jänner 28	4 5
	Februar. . . . 26	14 24
	März 28	1 26
	April 26	13 12
	Mai 26	2 38
	Juni 24	18 0
	Juli 24	6 30
	August 23	1 41
	September . . 21	17 40
	October 21	8 10
	November. . . 19	21 50
	December . . . 19	9 30
—808	Jänner 17	20 10
	Februar . . . 16	5 46
	März 16	14 24
	April 14	23 2
	Mai 14	9 7
	Juni 12	20 38
	Juli 12	10 34
	August 11	2 24
	September . . 9	16 55
	October. . . . 9	13 26
	November. . . 8	0 29
	December . . . 7	21 30
—807	Jänner 6	10 48
	Februar. . . . 4	22 5
	März 6	6 58
	April 4	14 53
	Mai 3	22 19
	Juni 2	9 14
	Juli 1	19 5
	Juli 31	4 34
	August 29	19 41
	September . . 28	13 41
	October 28	8 24
	November . . 27	3 7
	December . . . 26	20 10

Jahr	Datum		Uhr	
−806	Jänner	25	[illegible]	34
	Februar	23	22	1
	März	25	7	41
	April	23	14	38
	Mai	22	21	30
	Juni	21	5	2
	Juli	21	13	41
	August	19	0	43
	September	17	14	53
	October	17	7	55
	November	16	2	53
	December	15	22	34
−805	Jänner	14	10	48
	Februar	13	8	38
	März	14	21	7
	April	13	7	12
	Mai	12	15	7
	Juni	10	21	52
	Juli	10	4	34
	August	8	12	23
	September	6	22	48
	October	6	11	4
	November	5	3	52
	December	4	21	50
−804	Jänner	3	17	2
	Februar	2	11	[illegible]
	März	3	4	5
	April	1	18	[illegible]
	Mai	1	5	2
	Mai	30	14	1
	Juni	28	21	5[illegible]
	Juli	28	5	17
	August	26	13	2[illegible]
	September	24	23	2
	October	24	11	2
	November	23	1	12
	December	22	17	17
−803	Jänner	21	12	48
	Februar	2[illegible]	4	48
	März	21	21	30
	April	20	12	4[illegible]
	Mai	20	1	20
	Juni	18	1	5
	Juli	17	21	22
	August	16	[illegible]	[illegible]
	September	14	15	7
	October	14	7	58
	November	12	12	
	December	12	0	58
−802	Jänner	11	14	38
	Februar	[illegible]	5	40
	März	11	21	52
	April	9	14	12
	Mai	9	5	31
	Juni	7	3	55
	Juli	7	8	24
	August	5	21	17
	September	4	9	47
	October	3	17	17
	November	2	[illegible]	[illegible]
	December	1	14	10
	December	31	1	41

Jahr	Datum		Uhr	
−801	Jänner	29	13	20
	Februar	28	2	10
	März	29	15	30
	April	28	0	14
	Mai	27	21	30
	Juni	26	12	43
	Juli	26	3	30
	August	24	17	17
	September	23	6	14
	October	22	18	20
	November	21	5	40
	December	20	17	2
−800	Jänner	19	3	22
	Februar	17	13	20
	März	18	0	0
	April	16	10	48
	Mai	15	23	17
	Juni	14	13	41
	Juli	14	5	17
	August	12	21	7
	September	11	13	41
	October	11	5	2
	November	9	19	12
	December	9	7	55
−799	Jänner	7	19	12
	Februar	6	5	2
	März	7	13	55
	April	5	22	5
	Mai	5	7	41
	Juni	3	18	12
	Juli	3	6	2[illegible]
	August	1	21	5[illegible]
	August	31	12	3[illegible]
	September	30	8	3[illegible]
	October	30	2	22
	November	28	18	2
	December	28	8	53
−798	Jänner	26	21	53
	Februar	25	9	43
	März	26	14	58
	April	24	22	5
	Mai	24	5	17
	Juni	22	14	24
	Juli	22	1	20
	August	20	15	7
	September	19	8	24
	October	19	2	53
	November	17	22	5
	December	17	10	5
−797	Jänner	16	7	55
	Februar	14	20	53
	März	16	7	12
	April	14	15	7
	Mai	13	22	1[illegible]
	Juni	12	4	48
	Juli	11	12	2[illegible]
	August	9	22	34
	September	8	11	17
	October	8	2	53
	November	6	21	7
	December	6	10	34

Jahr	Datum		Uhr	
−796	Jänner	5	11h	31
	Februar	4	5	2
	März	4	19	12
	April	3	0	14
	Mai	2	14	53
	Mai	31	22	19
	Juni	30	4	48
	Juli	29	12	29
	August	27	21	30
	September	26	9	22
	October	25	23	31
	November	24	10	19
	December	24	11	17
−795	Jänner	23	0	0
	Februar	21	23	31
	März	23	14	53
	April	22	3	7
	Mai	21	13	20
	Juni	19	22	5
	Juli	19	5	31
	August	17	13	12
	September	15	22	19
	October	15	9	7
	November	13	22	34
	December	13	13	12
−794	Jänner	12	0	0
	Februar	10	23	40
	März	12	17	2
	April	11	9	7
	Mai	10	22	48
	Juni	9	10	48
	Juli	8	20	38
	August	7	9	0
	September	5	14	38
	October	5	0	29
	November	3	11	17
	December	2	23	2
−793	Jänner	1	12	14
	Jänner	31	2	24
	März	1	17	40
	März	31	9	30
	April	30	1	20
	Mai	29	10	19
	Juni	28	0	14
	Juli	27	18	14
	August	26	5	31
	September	24	10	19
	October	24	2	38
	November	22	13	20
	December	22	0	43
−792	Jänner	20	11	40
	Februar	18	23	40
	März	19	12	29
	April	18	2	24
	Mai	17	17	31
	Juni	16	8	38
	Juli	16	0	0
	August	14	14	38
	September	13	4	19
	October	12	17	17
	November	11	5	2
	December	10	10	5

Jahr	Datum		Uhr	
−791	Jänner	9	2	53
	Februar.	7	12	43
	März .	8	22	34
	April .	7	8	53
	Mai	6	20	22
	Juni . .	5	9	22
	Juli .	5	0	20
	August . .	3	10	34
	September	2	0	22
	October. .	2	1	41
	October. .	31	10	48
	November . .	30	0	20
	December . .	29	18	43
−790	Jänner	28	4	48
	Februar.	26	14	10
	März . . .	27	22	10
	April .	26	9	43
	Mai	25	10	5
	Juni .	24	3	30
	Juli	23	17	17
	August .	22	9	30
	September	21	3	22
	October	. 20	21	22
	November.	19	14	53
	December .	. 19	6	20
−789	Jänner .	17	19	55
	Februar	16	6	29
	März .	17	15	7
	April .	15	22	48
	Mai .	15	5	40
	Juni . .	13	13	20
	Juli	12	23	31
	August .	11	12	0
	September	10	3	22
	October. .	9	21	22
	November. .	8	10	34
	December . .	8	11	17
−788	Jänner	7	4	34
	Februar.	5	18	58
	März .	6	4	10
	April .	4	15	30
	Mai	3	22	34
	Juni	2	5	31
	Juli . .	1	12	43
	Juli	30	21	22
	August .	29	8	38
	September	27	23	2
	October.	27	15	50
	November. .	26	11	2
	December . .	26	0	43
−787	Jänner	25	0	43
	Februar. .	23	10	19
	März . .	25	5	2
	April .	23	14	38
	Mai	22	22	34
	Juni . .	21	5	17
	Juli . .	20	12	43
	August .	18	20	53
	September	17	7	20
	October. . .	16	20	38
	November. .	15	12	14
	December . .	15	0	0
−786	Jänner	14	[illegible]	43
	Februar.	12	18	58
	März .	14	11	31
	April .	13	1	12
	Mai .	12	12	47
	Juni	10	21	30
	Juli	10	5	31
	August .	8	13	20
	September	6	21	50
	October. .	6	7	53
	November .	4	17	55
	December .	4	9	50
−785	Jänner	3	1	41
	Februar.	1	18	20
	März . .	3	12	14
	April .	2	4	48
	Mai .	1	19	41
	Mai	31	8	38
	Juni	29	19	20
	Juli	29	5	17
	August .	27	12	24
	September	25	23	40
	October.	25	[illegible]	52
	November	23	21	7
	December .	23	[illegible]	30
−784	Jänner	21	23	2
	Februar.	20	13	41
	März .	21	5	2
	April .	19	20	53
	Mai .	19	12	0
	Juni	18	2	31
	Juli	17	16	5
	August .	16	3	50
	September	14	15	7
	October.	14	1	55
	November .	12	12	43
	December .	11	23	31
−783	Jänner .	10	10	10
	Februar.	8	21	52
	März .	10	9	52
	April .	8	22	48
	Mai .	8	13	12
	Juni .	7	4	5
	Juli . .	6	17	20
	August .	5	10	48
	September	4	1	12
	October. .	3	14	53
	November.	2	3	7
	December .	1	8	10
	December .	31	2	10
−782	Jänner .	29	12	0
	Februar. .	27	21	52
	März .	29	7	41
	April . . .	27	18	0
	Mai . .	27	0	14
	Juni . . .	25	20	24
	Juli . .	25	12	14
	August .	24	4	48
	September .	22	21	30
	October. . .	22	13	20
	November. .	21	4	5
	December .	20	17	2
−781	Jänner	19	4	1
	Februar.	17	13	41
	März .	18	22	5
	April .	17	9	12
	Mai .	16	14	53
	Juni .	15	1	12
	Juli	14	13	41
	August .	13	4	49
	September	11	22	10
	October.	11	10	19
	November.	10	16	34
	December .	10	3	7
−780	Jänner	8	17	31
	Februar.	7	5	17
	März .	7	14	53
	April .	5	23	2
	Mai	5	5	40
	Juni	3	12	58
	Juli	2	21	50
	August	1	8	53
	August	30	23	2
	September .	29	10	3
	October	29	1	48
	November .	28	[illegible]	[illegible]
	December .	28	[illegible]	2
−779	Jänner	26	10	1
	Februar.	25	5	2
	März .	26	15	7
	April .	24	23	2
	Mai	24	5	40
	Juni	22	12	2
	Juli .	21	20	38
	August .	20	6	20
	September	18	15	20
	October.	18	11	2
	November .	17	5	17
	December .	17	9	43
−778	Jänner	15	10	41
	Februar.	14	12	58
	März .	16	2	53
	April .	14	14	12
	Mai .	13	22	34
	Juni	12	6	[illegible]
	Juli	11	12	58
	August .	9	20	38
	September	8	5	40
	October.	7	17	40
	November.	6	8	12
	December .	6	0	43
−777	Jänner	4	19	12
	Februar.	3	13	41
	März . .	5	6	58
	April .	3	22	3
	Mai . .	3	12	34
	Juni	1	20	53
	Juli	1	5	17
	Juli .	30	13	20
	August .	28	21	50
	September	27	7	12
	October.	26	18	14
	November.	25	6	58
	December .	24	22	5

Jahr	Datum	Uhr
−776	Jänner 23	13h 55m
	Februar 22	5 40
	März 23	0 0
	April 21	15 36
	Mai 21	5 40
	Juni 19	17 40
	Juli 19	4 5
	August 17	13 41
	September 15	23 2
	October 15	9 7
	November 13	19 55
	December 13	7 41
−775	Jänner 11	20 38
	Februar 10	10 5
	März 12	0 58
	April 10	16 34
	Mai 10	7 55
	Juni 8	23 2
	Juli 8	12 58
	August 7	1 41
	September 5	13 26
	October 5	9 43
	November 3	11 31
	December 2	22 34
−774	Jänner 1	9 7
	Jänner 30	19 55
	März 1	7 55
	März 30	19 41
	April 29	9 7
	Mai 28	23 31
	Juni 27	15 22
	Juli 27	6 58
	August 25	21 50
	September 24	12 14
	October 24	1 26
	November 22	13 55
	December 22	1 12
−773	Jänner 20	11 31
	Februar 18	20 53
	März 20	6 14
	April 18	16 5
	Mai 18	3 22
	Juni 16	16 5
	Juli 16	7 26
	August 14	23 46
	September 13	17 2
	October 13	9 50
	November 12	1 12
	December 11	15 7
−772	Jänner 10	3 22
	Februar 8	13 12
	März 8	18 58
	April 7	6 0
	Mai 6	13 55
	Juni 4	23 17
	Juli 4	10 19
	August 3	0 14
	September 1	16 48
	October 1	10 48
	October 31	5 31
	November 29	23 17
	December 29	15 7

Jahr	Datum	Uhr
−771	Jänner 28	4h 5m
	Februar 26	14 38
	März 27	22 48
	April 26	6 14
	Mai 25	12 58
	Juni 23	20 38
	Juli 23	6 43
	August 21	19 12
	September 20	10 48
	October 20	5 2
	November 19	0 29
	December 18	19 41
−770	Jänner 17	12 43
	Februar 16	2 53
	März 17	14 10
	April 15	23 17
	Mai 15	6 14
	Juni 13	12 58
	Juli 12	20 10
	August 11	5 2
	September 9	16 34
	October 9	6 58
	November 7	23 40
	December 7	18 58
−769	Jänner 6	14 10
	Februar 5	8 10
	März 6	23 46
	April 5	12 14
	Mai 4	22 5
	Juni 3	5 46
	Juli 2	12 43
	Juli 31	20 24
	August 30	5 2
	September 28	15 39
	October 28	4 48
	November 26	20 24
	December 26	13 55
768	Jänner 25	8 24
	Februar 24	2 10
	März 24	18 29
	April 23	8 10
	Mai 22	19 26
	Juni 21	5 2
	Juli 20	13 26
	August 18	21 7
	September 17	6 14
	October 16	19 34
	November 15	4 34
	December 14	18 29
−767	Jänner 13	10 5
	Februar 12	2 24
	März 13	19 12
	April 12	11 31
	Mai 12	2 24
	Juni 10	15 22
	Juli 10	2 38
	August 8	12 58
	September 6	22 34
	October 6	8 10
	November 4	18 43
	December 4	6 0

Jahr	Datum	Uhr
766	Jänner 2	18h 14m
	Februar 1	6 58
	März 2	21 7
	April 1	11 46
	Mai 1	3 36
	Mai 30	18 43
	Juni 29	9 39
	Juli 28	23 2
	August 27	11 46
	September 25	23 17
	October 25	10 34
	November 23	21 36
	December 23	8 24
765	Jänner 21	18 58
	Februar 20	6 0
	März 21	17 17
	April 20	5 31
	Mai 19	19 26
	Juni 18	10 34
	Juli 18	2 10
	August 16	17 46
	September 15	9 7
	October 14	23 2
	November 13	12 29
	December 13	0 14
764	Jänner 11	10 48
	Februar 9	20 24
	März 10	5 31
	April 8	14 53
	Mai 8	1 12
	Juni 6	12 58
	Juli 6	2 53
	August 4	18 43
	September 3	11 46
	October 3	5 17
	November 1	21 39
	December 1	12 29
	December 31	1 41
−763	Jänner 29	12 43
	Februar 27	21 50
	März 29	6 0
	April 27	13 26
	Mai 26	22 5
	Juni 25	8 10
	Juli 24	20 38
	August 23	12 0
	September 22	5 31
	October 22	0 14
	November 20	18 43
	December 20	11 31
762	Jänner 19	1 55
	Februar 17	13 41
	März 18	23 2
	April 17	6 14
	Mai 16	13 12
	Juni 14	20 24
	Juli 14	5 17
	August 12	16 19
	September 11	6 43
	October 10	23 46
	November 9	18 58
	December 9	14 10

Jahr	Datum		Uhr	
—761	Jänner	8	8h	38m
	Februar	7	0	0
	März	8	12	58
	April	6	22	48
	Mai	6	6	29
	Juni	4	13	20
	Juli	3	19	55
	August	2	4	5
	August	31	14	16
	September	30	3	7
	October	29	18	58
	November	28	12	58
	December	28	8	53
—760	Jänner	27	3	22
	Februar	25	20	10
	März	26	9	50
	April	24	20	53
	Mai	24	5	40
	Juni	22	13	20
	Juli	21	20	38
	August	20	4	16
	September	18	14	24
	October	18	2	10
	November	16	16	19
	December	16	8	53
—759	Jänner	15	2	53
	Februar	13	21	7
	März	15	13	55
	April	14	5	2
	Mai	13	17	40
	Juni	12	4	5
	Juli	11	12	58
	August	9	21	22
	September	8	5	46
	October	7	15	50
	November	6	2	53
	December	5	15	50
—758	Jänner	4	6	0
	Februar	2	21	50
	März	4	14	24
	April	3	6	43
	Mai	2	22	5
	Juni	1	12	29
	Juli	1	0	29
	Juli	30	11	31
	August	28	21	30
	September	27	7	55
	October	26	18	14
	November	25	4	48
	December	24	16	34
—757	Jänner	23	4	34
	Februar	21	18	0
	März	23	7	55
	April	21	22	48
	Mai	21	14	24
	Juni	20	5	31
	Juli	19	19	55
	August	18	9	7
	September	16	21	22
	October	16	9	22
	November	14	20	38
	December	14	7	20

Jahr	Datum		Uhr	
—756	Jänner	12	18h	0m
	Februar	11	4	48
	März	11	15	22
	April	10	3	7
	Mai	9	15	50
	Juni	8	6	29
	Juli	7	4	50
	August	6	13	41
	September	5	5	31
	October	4	20	24
	November	3	10	5
	December	2	22	48
—755	Jänner	1	9	50
	Jänner	30	19	55
	März	1	5	2
	März	30	13	41
	April	28	23	17
	Mai	28	9	50
	Juni	26	23	17
	Juli	26	13	55
	August	25	6	58
	September	24	0	20
	October	23	17	40
	November	22	9	30
	December	22	0	0
—754	Jänner	20	11	40
	Februar	18	21	30
	März	20	6	0
	April	18	13	12
	Mai	17	21	7
	Juni	16	6	14
	Juli	15	17	17
	August	14	7	12
	September	13	0	0
	October	12	18	43
	November	11	13	41
	December	11	7	20
—753	Jänner	9	23	17
	Februar	8	12	14
	März	9	22	48
	April	8	6	29
	Mai	7	13	41
	Juni	5	20	24
	Juli	5	4	5
	August	3	14	10
	September	2	2	53
	October	1	18	29
	October	31	12	58
	November	30	8	10
	December	30	3	30
—752	Jänner	28	20	24
	Februar	27	10	34
	März	27	21	50
	April	26	6	43
	Mai	25	13	20
	Juni	23	20	24
	Juli	23	3	50
	August	21	12	43
	September	20	0	29
	October	19	14	53
	November	18	8	10
	December	18	2	53

Jahr	Datum		Uhr	
—751	Jänner	16	22h	5m
	Februar	15	15	50
	März	17	6	58
	April	15	19	20
	Mai	15	5	17
	Juni	13	13	12
	Juli	12	20	24
	August	11	4	34
	September	9	13	20
	October	9	0	0
	November	7	13	20
	December	7	4	34
—750	Jänner	5	21	30
	Februar	4	15	50
	März	6	9	7
	April	5	1	12
	Mai	4	15	7
	Juni	3	2	24
	Juli	2	12	14
	Juli	31	20	53
	August	30	5	17
	September	28	14	53
	October	28	1	12
	November	26	13	12
	December	26	3	7
—749	Jänner	24	18	0
	Februar	23	9	30
	März	25	1	55
	April	23	17	40
	Mai	23	8	38
	Juni	21	22	5
	Juli	21	10	5
	August	19	20	38
	September	18	6	58
	October	17	17	40
	November	16	3	50
	December	15	14	53
—748	Jänner	14	2	38
	Februar	12	15	7
	März	13	4	19
	April	11	18	29
	Mai	11	10	5
	Juni	10	1	12
	Juli	9	16	5
	August	8	6	29
	September	6	19	20
	October	6	7	55
	November	4	19	20
	December	4	6	14
—747	Jänner	2	17	17
	Februar	1	3	22
	März	2	13	41
	April	1	0	29
	April	30	12	29
	Mai	30	1	55
	Juni	28	17	2
	Juli	28	8	53
	August	27	1	12
	September	25	17	2
	October	25	7	41
	November	23	21	7
	December	23	9	7

Jahr	Datum	Uhr
−746	Jänner 21	19^h 26
	Februar 20	4 48
	März 21	13 26
	April 19	22 5
	Mai 19	7 55
	Juni 17	19 41
	Juli 17	9 36
	August 16	1 41
	September 14	19 12
	October 14	13 12
	November 13	6 0
	December 12	21 22
−745	Jänner 11	10 5
	Februar 9	21 7
	März 11	6 0
	April 9	13 41
	Mai 8	21 7
	Juni 7	5 17
	Juli 6	15 7
	August 5	3 36
	September 3	19 12
	October 3	13 12
	November 2	7 55
	December 2	2 38
	December 31	19 55
−744	Jänner 30	9 50
	Februar 28	21 36
	März 29	6 29
	April 27	13 41
	Mai 26	20 24
	Juni 25	3 50
	Juli 24	12 43
	August 23	0 0
	September 21	14 24
	October 21	7 41
	November 20	2 38
	December 19	22 5
−743	Jänner 18	16^h 19^m
	Februar 17	7 55
	März 18	20 24
	April 17	6 0
	Mai 16	13 55
	Juni 14	20 38
	Juli 14	3 36
	August 12	11 31
	September 10	22 19
	October 10	11 17
	November 9	3 22
	December 8	21 36
−742	Jänner 7	16 34
	Februar 6	10 48
	März 8	3 36
	April 6	17 17
	Mai 6	4 19
	Juni 4	13 12
	Juli 3	20 53
	August 2	4 19
	August 31	12 43
	September 29	22 34
	October 29	10 34
	November 28	0 43
	December 27	17 2

Jahr	Datum	Uhr
−741	Jänner 26	10^h 34^m
	Februar 25	4 19
	März 26	20 53
	April 25	12 0
	Mai 25	0 29
	Juni 23	11 17
	Juli 22	20 38
	August 21	5 17
	September 19	14 38
	October 19	0 14
	November 17	11 31
	December 17	0 14
−740	Jänner 15	14 10
	Februar 14	5 17
	März 14	21 7
	April 13	13 26
	Mai 13	4 34
	Juni 11	18 58
	Juli 11	7 26
	August 9	19 12
	September 8	5 46
	October 7	16 34
	November 6	3 7
	December 5	13 41
−739	Jänner 4	1 12
	Februar 2	12 58
	März 4	1 26
	April 2	14 53
	Mai 2	5 31
	Mai 31	20 53
	Juni 30	11 46
	Juli 30	2 53
	August 28	16 48
	September 27	5 46
	October 26	18 0
	November 25	5 17
	December 24	16 34
−738	Jänner 23	2 38
	Februar 21	12 43
	März 22	23 2
	April 21	9 50
	Mai 20	22 34
	Juni 19	12 58
	Juli 19	4 34
	August 17	20 38
	September 16	13 12
	October 16	4 34
	November 14	18 43
	December 14	7 20
−737	Jänner 12	18 43
	Februar 11	4 19
	März 12	12 58
	April 10	21 22
	Mai 10	0 29
	Juni 8	17 17
	Juli 8	5 46
	August 6	20 53
	September 5	14 10
	October 5	8 10
	November 4	1 55
	December 3	18 14

Jahr	Datum	Uhr
−736	Jänner 2	8^h 10^m
	Jänner 31	20 10
	März 1	5 46
	März 30	13 41
	April 28	20 53
	Mai 28	4 34
	Juni 26	13 26
	Juli 26	0 43
	August 24	14 38
	September 23	7 26
	October 23	2 24
	November 21	21 36
	December 21	10 5
−735	Jänner 20	7 26
	Februar 18	20 10
	März 20	6 14
	April 18	14 10
	Mai 17	21 7
	Juni 16	3 36
	Juli 15	11 46
	August 13	21 36
	September 12	10 34
	October 12	2 10
	November 10	20 38
	December 10	16 19
−734	Jänner 9	11 2
	Februar 8	4 5
	März 9	18 29
	April 8	5 17
	Mai 7	13 55
	Juni 5	21 7
	Juli 5	3 50
	August 3	11 31
	September 1	20 38
	October 1	8 38
	October 30	23 2
	November 29	15 50
	December 29	10 34
−733	Jänner 28	5 17
	Februar 26	23 2
	März 28	13 55
	April 27	2 24
	Mai 26	12 14
	Juni 24	20 53
	Juli 24	4 34
	August 22	12 29
	September 20	21 50
	October 20	8 38
	November 18	22 5
	December 18	12 14
−732	Jänner 17	5 49
	Februar 15	23 2
	März 16	16 5
	April 15	8 10
	Mai 14	21 50
	Juni 13	9 22
	Juli 12	19 26
	August 11	4 48
	September 9	13 41
	October 8	23 31
	November 7	10 5
	December 6	22 5

Jahr	Datum		Uhr	
−731	Jänner	5	11h	17m
	Februar	4	1	41
	März	5	10	48
	April	4	8	38
	Mai	4	0	29
	Juni	2	15	22
	Juli	2	4	48
	Juli	31	17	17
	August	30	4	34
	September	28	15	22
	October	28	1	41
	November	26	12	29
	December	25	23	46
−730	Jänner	24	10	48
	Februar	22	22	48
	März	24	11	31
	April	23	1	12
	Mai	22	16	10
	Juni	21	7	29
	Juli	20	23	2
	August	19	13	41
	September	18	3	22
	October	17	16	10
	November	16	4	10
	December	15	15	36
−729	Jänner	14	1	55
	Februar	12	11	46
	März	13	21	22
	April	12	7	55
	Mai	11	19	26
	Juni	10	8	24
	Juli	9	23	17
	August	8	15	50
	September	7	8	38
	October	7	0	58
	November	5	16	5
	December	5	5	46
−728	Jänner	3	17	46
	Februar	2	3	36
	März	2	12	58
	März	31	21	7
	April	30	5	31
	Mai	29	14	53
	Juni	28	2	24
	Juli	27	10	19
	August	26	8	53
	September	25	2	24
	October	24	20	53
	November	23	14	24
	December	23	5	46
−727	Jänner	21	18	58
	Februar	20	5	31
	März	21	13	55
	April	19	21	7
	Mai	19	4	19
	Juni	17	12	14
	Juli	16	22	19
	August	15	10	48
	September	14	2	38
	October	13	20	53
	November	12	16	5
	December	12	10	48

Jahr	Datum		Uhr	
−726	Jänner	11	3h	50m
	Februar	9	18	0
	März	11	5	31
	April	9	14	10
	Mai	8	21	22
	Juni	7	4	5
	Juli	6	11	17
	August	4	20	10
	September	3	7	41
	October	2	22	5
	November	1	15	22
	December	1	10	34
	December	31	6	0
−725	Jänner	29	23	46
	Februar	28	15	22
	März	30	3	50
	April	28	13	20
	Mai	27	21	7
	Juni	26	4	5
	Juli	25	11	31
	August	23	19	41
	September	22	6	29
	October	21	19	41
	November	20	11	31
	December	20	5	31
−724	Jänner	19	0	14
	Februar	17	18	14
	März	18	10	34
	April	17	0	0
	Mai	16	11	2
	Juni	14	20	24
	Juli	14	4	19
	August	12	12	0
	September	10	20	53
	October	10	6	58
	November	8	19	12
	December	8	9	7
−723	Jänner	7	0	58
	Februar	5	17	46
	März	7	9	7
	April	6	3	50
	Mai	5	18	43
	Juni	4	7	26
	Juli	3	18	14
	August	2	4	19
	August	31	13	26
	September	29	22	48
	October	29	8	53
	November	27	20	24
	December	27	8	53
−722	Jänner	25	22	10
	Februar	24	12	43
	März	26	4	10
	April	24	19	41
	Mai	24	11	2
	Juni	23	1	41
	Juli	22	15	7
	August	21	2	53
	September	19	14	24
	October	19	1	12
	November	17	12	0
	December	16	22	48

Jahr	Datum		Uhr	
−721	Jänner	15	9h	36m
	Februar	13	21	7
	März	15	8	53
	April	13	21	50
	Mai	13	12	14
	Juni	12	3	7
	Juli	11	18	29
	August	10	10	5
	September	9	0	14
	October	8	13	55
	November	7	2	38
	December	6	14	24
−720	Jänner	5	1	26
	Februar	3	11	2
	März	3	20	38
	April	2	6	14
	Mai	1	16	48
	Mai	31	5	2
	Juni	29	19	12
	Juli	29	11	17
	August	28	3	50
	September	26	20	38
	October	26	12	29
	November	25	3	7
	December	24	16	19
−719	Jänner	23	3	7
	Februar	21	12	43
	März	22	20	53
	April	21	5	2
	Mai	20	13	41
	Juni	19	0	0
	Juli	18	12	43
	August	17	4	5
	September	15	21	22
	October	15	15	50
	November	14	10	5
	December	14	2	24
−718	Jänner	12	10	34
	Februar	11	4	19
	März	12	13	41
	April	10	21	36
	Mai	10	4	19
	Juni	8	11	46
	Juli	7	20	38
	August	6	7	41
	September	4	22	19
	October	4	15	22
	November	3	10	34
	December	3	5	31
−717	Jänner	1	23	46
	Jänner	31	15	22
	März	2	4	5
	März	31	13	55
	April	29	21	36
	Mai	29	4	34
	Juni	27	11	17
	Juli	26	19	12
	August	25	5	17
	September	23	18	29
	October	23	10	19
	November	22	4	34
	December	22	0	14

Jahr	Datum		Uhr	
−716	Jänner	20	19^h	12^m
	Februar	19	12	0
	März	20	1	55
	April	18	12	43
	Mai	17	21	22
	Juni	16	4	34
	Juli	15	11	46
	August	13	19	12
	September	12	5	2
	October	11	16	48
	November	10	7	26
	December	10	0	14
−715	Jänner	8	18	43
	Februar	7	12	43
	März	9	6	14
	April	7	21	7
	Mai	7	9	22
	Juni	5	19	41
	Juli	5	4	5
	August	3	12	14
	September	1	20	38
	October	1	6	0
	October	30	17	17
	November	29	6	14
	December	28	21	7
−714	Jänner	27	13	12
	Februar	26	6	14
	März	27	23	2
	April	26	14	24
	Mai	26	4	19
	Juni	24	16	34
	Juli	24	2	53
	August	22	12	29
	September	20	22	5
	October	20	8	24
	November	18	19	26
	December	18	6	43
−713	Jänner	16	19	41
	Februar	15	9	22
	März	17	0	0
	April	15	15	22
	Mai	15	6	43
	Juni	13	21	50
	Juli	13	11	46
	August	12	0	43
	September	10	12	43
	October	10	0	0
	November	8	10	34
	December	7	21	36
−712	Jänner	6	8	24
	Februar	4	19	12
	März	5	6	58
	April	3	18	58
	Mai	3	8	10
	Juni	1	22	48
	Juli	1	13	55
	Juli	31	6	0
	August	29	21	7
	September	28	11	31
	October	28	0	43
	November	26	12	58
	December	26	0	14

Jahr	Datum		Uhr	
−711	Jänner	24	10^h	34^m
	Februar	22	19	55
	März	24	5	2
	April	22	14	38
	Mai	22	2	10
	Juni	20	14	53
	Juli	20	6	29
	August	18	23	2
	September	17	16	5
	October	17	8	53
	November	16	0	43
	December	15	14	38
−710	Jänner	14	2	24
	Februar	12	12	14
	März	13	20	53
	April	12	4	48
	Mai	11	12	29
	Juni	9	21	50
	Juli	9	9	7
	August	7	23	17
	September	6	16	5
	October	6	10	5
	November	5	4	48
	December	4	22	48
−709	Jänner	3	14	10
	Februar	2	3	7
	März	3	13	29
	April	1	21	36
	Mai	1	4	48
	Mai	30	11	31
	Juni	28	19	26
	Juli	28	5	31
	August	26	18	29
	September	25	10	5
	October	25	4	19
	November	24	0	0
	December	23	18	58
−708	Jänner	22	11	46
	Februar	21	1	55
	März	21	12	58
	April	19	21	50
	Mai	19	4	34
	Juni	17	11	31
	Juli	16	18	58
	August	15	3	50
	September	13	15	36
	October	13	6	14
	November	11	23	31
	December	11	18	29
−707	Jänner	10	13	41
	Februar	9	7	41
	März	10	22	48
	April	9	11	17
	Mai	8	21	7
	Juni	7	4	48
	Juli	6	11	46
	August	4	19	12
	September	3	4	5
	October	2	14	53
	November	1	4	19
	November	30	19	55
	December	30	13	26

Jahr	Datum		Uhr	
−706	Jänner	29	7^h	55^m
	Februar	28	1	41
	März	29	17	31
	April	28	7	12
	Mai	27	18	29
	Juni	26	4	5
	Juli	25	12	14
	August	23	20	24
	September	22	5	46
	October	21	15	50
	November	20	4	5
	December	19	18	0
705	Jänner	18	9	22
	Februar	17	1	55
	März	18	18	43
	April	17	10	34
	Mai	17	1	12
	Juni	15	14	24
	Juli	15	1	55
	August	13	12	0
	September	11	21	50
	October	11	7	41
	November	9	18	29
	December	9	5	17
704	Jänner	7	17	47
	Februar	6	6	29
	März	6	20	24
	April	5	11	2
	Mai	5	2	38
	Juni	3	17	46
	Juli	3	8	38
	August	1	22	19
	August	31	10	48
	September	29	22	48
	October	29	10	5
	November	27	20	53
	December	27	7	41
−703	Jänner	25	18	29
	Februar	24	5	2
	März	25	16	19
	April	24	4	34
	Mai	23	18	29
	Juni	22	9	50
	Juli	22	1	41
	August	20	21	7
	September	19	8	38
	October	18	22	34
	November	17	12	0
	December	16	23	46
−702	Jänner	15	10	19
	Februar	13	19	55
	März	15	4	48
	April	13	13	55
	Mai	13	0	14
	Juni	11	12	0
	Juli	11	2	10
	August	9	18	14
	September	8	11	17
	October	8	4	48
	November	6	21	22
	December	6	12	14

Jahr	Datum		Uhr		Jahr	Datum		Uhr		Jahr	Datum		Uhr	
−701	Jänner	5	1^h	12^m	−696	Jänner	9	5^h	46^m	−691	Jänner	13	22^h	48^m
	Februar	3	12	0		Februar	7	21	7		Februar	12	11	31
	März	4	21	7		März	8	13	41		März	13	21	36
	April	3	5	2		April	7	5	46		April	12	5	31
	Mai	2	12	29		Mai	6	21	22		Mai	11	12	43
	Mai	31	21	7		Juni	5	11	31		Juni	9	19	12
	Juni	30	7	12		Juli	4	23	31		Juli	9	2	53
	Juli	29	19	55		August	3	10	34		August	7	13	12
	August	28	11	17		September	1	20	53		September	6	2	19
	September	27	5	2		October	1	7	12		October	5	18	0
	October	26	23	46		October	30	17	31		November	4	12	29
	November	25	18	14		November	29	4	5		December	4	7	55
	December	25	11	2		December	28	15	50					
										−690	Jänner	3	2	53
−700	Jänner	24	1	12	−695	Jänner	27	4	5		Februar	1	19	41
	Februar	22	12	43		Februar	25	17	17		März	3	9	50
	März	22	21	50		März	27	0	58		April	1	20	53
	April	21	5	17		April	25	22	5		Mai	1	5	31
	Mai	20	12	0		Mai	25	13	12		Mai	30	12	29
	Juni	18	19	12		Juni	24	4	48		Juni	28	19	12
	Juli	18	4	5		Juli	23	18	58		Juli	28	2	38
	August	16	15	36		August	22	8	21		August	26	12	0
	September	15	6	0		September	20	20	53		September	24	23	46
	October	14	23	17		October	20	8	38		October	24	14	24
	November	13	18	29		November	18	19	55		November	23	7	41
	December	13	13	55		December	18	6	43		December	23	2	38
−699	Jänner	12	8	10	−694	Jänner	16	17	31	−689	Jänner	21	21	22
	Februar	10	23	17		Februar	15	3	50		Februar	20	15	7
	März	12	12	0		März	16	14	38		März	22	6	14
	April	10	21	50		April	15	2	10		April	20	18	14
	Mai	10	5	17		Mai	14	14	53		Mai	20	4	5
	Juni	8	12	14		Juni	13	5	17		Juni	18	12	14
	Juli	7	18	58		Juli	12	20	53		Juli	17	19	26
	August	6	3	7		August	11	12	58		August	16	3	22
	September	4	13	26		September	10	5	2		September	14	12	43
	October	4	2	38		October	9	19	55		October	13	23	31
	November	2	18	43		November	8	9	36		November	12	12	58
	December	2	12	43		December	7	22	5		December	12	4	5
−698	Jänner	1	8	24	−693	Jänner	6	8	53	−688	Jänner	10	21	22
	Jänner	31	2	53		Februar	4	19	12		Februar	9	15	7
	März	1	19	26		März	6	4	19		März	10	8	38
	März	31	8	53		April	4	12	43		April	9	0	29
	April	29	19	55		Mai	3	22	19		Mai	8	14	10
	Mai	29	4	48		Juni	2	9	7		Juni	7	1	26
	Juni	27	12	14		Juli	1	22	5		Juli	6	11	2
	Juli	26	19	41		Juli	31	13	26		August	4	19	55
	August	25	3	36		August	30	6	14		September	3	4	19
	September	23	13	26		September	29	0	14		October	2	14	10
	October	23	1	41		October	28	17	17		November	1	0	43
	November	21	15	50		November	27	9	7		November	30	12	43
	December	21	8	38		December	26	23	31		December	30	2	38
−697	Jänner	20	2	24	−692	Jänner	25	11	17	−687	Jänner	28	17	17
	Februar	18	20	38		Februar	23	20	53		Februar	27	9	7
	März	20	12	58		März	24	5	2		März	29	1	12
	April	19	4	5		April	22	12	14		April	27	16	48
	Mai	18	16	48		Mai	21	20	10		Mai	27	7	55
	Juni	17	2	53		Juni	20	5	17		Juni	25	21	7
	Juli	16	12	0		Juli	19	16	48		Juli	25	9	7
	August	14	20	10		August	18	6	29		August	23	19	55
	September	13	5	17		September	16	23	31		September	22	6	14
	October	12	14	53		October	16	18	0		October	21	16	19
	November	11	2	10		November	15	13	26		November	20	3	7
	December	10	15	7		December	15	7	26		December	19	14	24

Jahr	Datum	Uhr
−686	Jänner 18	1h 55m
	Februar 16	14 24
	März 18	3 36
	April 16	17 31
	Mai 16	9 7
	Juni 15	0 29
	Juli 14	15 22
	August 13	5 31
	September 11	18 58
	October 11	7 26
	November 9	18 58
	December 9	5 46
−685	Jänner 7	16 34
	Februar 6	2 38
	März 7	12 58
	April 5	23 46
	Mai 5	11 46
	Juni 4	1 12
	Juli 3	16 19
	August 2	8 24
	September 1	0 29
	September 30	16 34
	October 30	7 12
	November 28	20 38
	December 28	8 24
−684	Jänner 26	18 43
	Februar 25	4 5
	März 25	12 29
	April 23	21 7
	Mai 23	6 58
	Juni 21	18 43
	Juli 21	8 53
	August 20	1 12
	September 18	18 58
	October 18	12 43
	November 17	5 31
	December 16	20 38
−683	Jänner 15	9 36
	Februar 13	20 38
	März 15	5 2
	April 13	12 29
	Mai 12	20 10
	Juni 11	4 5
	Juli 10	14 10
	August 9	2 53
	September 7	18 29
	October 7	12 43
	November 6	7 55
	December 6	2 24
−682	Jänner 4	19 26
	Februar 3	9 22
	März 4	20 53
	April 3	5 31
	Mai 2	12 29
	Mai 31	19 26
	Juni 30	2 53
	Juli 29	11 46
	August 27	23 17
	September 26	13 41
	October 26	7 12
	November 25	2 24
	December 24	21 50

Jahr	Datum	Uhr
−681	Jänner 23	15h 50m
	Februar 22	7 12
	März 23	19 26
	April 22	5 2
	Mai 21	12 43
	Juni 19	19 41
	Juli 19	2 38
	August 17	10 48
	September 15	21 36
	October 15	10 48
	November 14	3 7
	December 13	21 7
−680	Jänner 12	16 5
	Februar 11	10 19
	März 12	2 38
	April 10	16 19
	Mai 10	3 7
	Juni 8	12 0
	Juli 7	19 41
	August 6	3 22
	September 4	11 46
	October 3	21 50
	November 2	10 5
	December 2	0 14
	December 31	16 34
−679	Jänner 30	9 50
	März 1	3 50
	März 30	20 24
	April 29	11 2
	Mai 28	23 31
	Juni 27	10 16
	Juli 26	19 41
	August 25	4 19
	September 23	13 41
	October 22	23 46
	November 21	11 2
	December 20	23 46
−678	Jänner 19	13 41
	Februar 18	4 48
	März 19	20 53
	April 18	12 43
	Mai 18	3 50
	Juni 16	18 14
	Juli 16	6 58
	August 14	18 0
	September 13	5 17
	October 12	15 36
	November 11	2 10
	December 10	13 12
−677	Jänner 9	0 58
	Februar 7	12 14
	März 9	0 43
	April 7	14 24
	Mai 7	4 48
	Juni 5	20 10
	Juli 5	11 17
	August 4	2 24
	September 2	16 5
	October 2	5 2
	October 31	17 17
	November 30	4 34
	December 29	15 36

Jahr	Datum	Uhr
−676	Jänner 28	1h 55m
	Februar 26	11 46
	März 26	21 50
	April 25	9 7
	Mai 24	21 36
	Juni 23	12 0
	Juli 23	3 50
	August 21	20 10
	September 20	12 43
	October 20	4 5
	November 18	18 0
	December 18	6 58
−675	Jänner 16	17 46
	Februar 15	3 36
	März 16	12 0
	April 14	20 24
	Mai 14	5 17
	Juni 12	16 5
	Juli 12	5 2
	August 10	20 38
	September 9	13 55
	October 9	7 55
	November 8	1 41
	December 7	17 46
−674	Jänner 6	7 41
	Februar 4	19 26
	März 6	4 48
	April 4	12 43
	Mai 3	19 41
	Juni 2	3 22
	Juli 1	12 14
	Juli 30	23 46
	August 29	14 10
	September 28	7 12
	October 28	2 24
	November 26	21 22
	December 26	15 36
−673	Jänner 25	6 43
	Februar 23	19 26
	März 25	5 17
	April 23	12 58
	Mai 22	19 55
	Juni 21	2 38
	Juli 20	10 34
	August 18	20 53
	September 17	9 50
	October 17	1 55
	November 15	20 38
	December 15	16 5
−672	Jänner 14	11 2
	Februar 13	3 36
	März 13	17 31
	April 12	4 34
	Mai 11	12 58
	Juni 9	19 55
	Juli 9	2 53
	August 7	10 34
	September 5	19 55
	October 5	8 10
	November 3	22 48
	December 3	15 36

Jahr	Datum		Uhr	
—671	Jänner	2	10h	34m
	Februar	1	4	48
	März	2	22	34
	April	1	13	12
	Mai	1	1	26
	Mai	30	11	2
	Juni	28	19	26
	Juli	28	3	7
	August	26	11	31
	September	24	20	53
	October	24	7	55
	November	22	21	7
	December	22	12	43
—670	Jänner	21	5	17
	Februar	19	22	34
	März	21	15	36
	April	20	7	12
	Mai	19	20	53
	Juni	18	8	24
	Juli	17	18	26
	August	16	3	36
	September	14	12	43
	October	13	22	48
	November	12	9	22
	December	11	21	22
—669	Jänner	10	10	48
	Februar	9	0	58
	März	10	16	19
	April	9	8	10
	Mai	8	23	46
	Juni	7	14	24
	Juli	7	4	5
	August	5	16	19
	September	4	3	50
	October	3	14	24
	November	2	0	58
	December	1	12	0
	December	30	23	2
—668	Jänner	29	10	5
	Februar	27	22	5
	März	28	10	48
	April	27	0	43
	Mai	26	15	22
	Juni	25	6	58
	Juli	24	22	19
	August	23	12	58
	September	22	2	53
	October	21	15	36
	November	20	3	36
	December	19	14	38
—667	Jänner	18	1	12
	Februar	16	10	48
	März	17	20	38
	April	16	9	58
	Mai	15	18	26
	Juni	14	7	41
	Juli	13	23	2
	August	12	15	22
	September	11	8	24
	October	11	0	43
	November	9	15	50
	December	9	5	17

Jahr	Datum		Uhr	
—666	Jänner	7	17h	2m
	Februar	6	2	53
	März	7	12	0
	April	5	20	10
	Mai	5	4	19
	Juni	3	13	55
	Juli	3	1	26
	August	1	15	50
	August	31	8	24
	September	30	2	24
	October	29	20	38
	November	28	13	55
	December	28	5	17
—665	Jänner	26	18	14
	Februar	25	4	34
	März	26	12	58
	April	24	19	55
	Mai	24	3	7
	Juni	22	11	17
	Juli	21	21	36
	August	20	10	19
	September	19	2	24
	October	18	20	38
	November	17	15	50
	December	17	10	48
—664	Jänner	16	3	22
	Februar	14	17	31
	März	15	4	19
	April	13	12	58
	Mai	12	20	10
	Juni	11	2	53
	Juli	10	10	5
	August	8	19	26
	September	7	9	58
	October	6	21	36
	November	5	15	7
	December	5	10	19
—663	Jänner	4	5	46
	Februar	2	23	17
	März	4	14	53
	April	3	2	38
	Mai	2	12	26
	Mai	31	19	55
	Juni	30	2	53
	Juli	29	10	5
	August	27	18	43
	September	26	5	31
	October	25	19	12
	November	24	11	17
	December	24	5	17
—662	Jänner	22	23	46
	Februar	21	17	46
	März	23	6	50
	April	21	23	17
	Mai	21	10	5
	Juni	19	19	12
	Juli	19	3	7
	August	17	11	2
	September	15	19	55
	October	15	9	14
	November	13	18	43
	December	13	8	53

Jahr	Datum		Uhr	
—661	Jänner	12	0h	26m
	Februar	10	17	31
	März	12	10	48
	April	11	3	7
	Mai	10	18	0
	Juni	9	6	29
	Juli	8	17	17
	August	7	3	7
	September	5	5	17
	October	4	22	5
	November	3	8	24
	December	2	19	41
—660	Jänner	1	8	24
	Jänner	30	21	36
	Februar	29	12	14
	März	30	3	36
	April	28	16	12
	Mai	28	10	19
	Juni	27	0	58
	Juli	26	14	10
	August	25	2	10
	September	23	13	26
	October	23	0	29
	November	21	11	17
	December	20	21	50
—659	Jänner	19	8	53
	Februar	17	20	10
	März	19	8	19
	April	17	20	53
	Mai	17	11	17
	Juni	16	2	38
	Juli	15	18	0
	August	14	6	7
	September	12	23	46
	October	12	13	12
	November	11	1	55
	December	10	13	55
—658	Jänner	9	0	43
	Februar	7	16	5
	März	8	19	55
	April	7	5	31
	Mai	6	16	5
	Juni	5	4	19
	Juli	4	18	43
	August	3	10	48
	September	2	3	22
	October	1	20	24
	October	31	12	29
	November	30	2	38
	December	29	15	36
—657	Jänner	28	2	24
	Februar	26	11	31
	März	27	19	41
	April	26	3	50
	Mai	25	12	43
	Juni	23	23	2
	Juli	23	12	0
	August	22	3	36
	September	20	21	22
	October	20	15	36
	November	19	9	50
	December	19	2	10

Jahr	Datum		Uhr	
−656	Jänner	17	10^h	5^m
	Februar	16	3	36
	März	16	12	43
	April	14	20	24
	Mai	14	3	7
	Juni	12	10	34
	Juli	11	19	26
	August	10	7	12
	September	8	21	36
	October	8	15	7
	November	7	10	19
	December	7	5	31
−655	Jänner	5	23	31
	Februar	4	14	53
	März	6	3	7
	April	4	12	58
	Mai	3	20	24
	Juni	2	3	22
	Juli	1	9	50
	Juli	30	18	14
	August	29	4	34
	September	28	0	58
	October	27	10	5
	November	26	4	34
	December	26	0	14
−654	Jänner	24	18	43
	Februar	23	11	31
	März	25	0	58
	April	23	11	31
	Mai	22	20	16
	Juni	21	3	22
	Juli	20	10	34
	August	18	18	14
	September	17	4	5
	October	16	16	19
	November	15	6	58
	December	15	0	0
−653	Jänner	13	18	14
	Februar	12	12	43
	März	14	5	31
	April	12	20	24
	Mai	12	8	24
	Juni	10	18	43
	Juli	10	3	7
	August	8	11	2
	September	6	19	41
	October	6	5	17
	November	4	16	34
	December	4	6	0
−652	Jänner	2	20	38
	Februar	1	12	43
	März	2	5	46
	März	31	22	19
	April	30	13	55
	Mai	30	3	22
	Juni	28	15	36
	Juli	28	1	41
	August	26	11	46
	September	24	21	7
	October	24	7	41
	November	22	18	29
	December	22	6	29
−651	Jänner	20	19^h	12^m
	Februar	19	8	53
	März	20	23	17
	April	19	14	38
	Mai	19	6	0
	Juni	17	21	7
	Juli	17	11	2
	August	15	23	46
	September	14	11	46
	October	13	23	17
	November	12	9	50
	December	11	20	53
−650	Jänner	10	7	41
	Februar	8	18	14
	März	10	6	0
	April	8	18	0
	Mai	8	7	26
	Juni	6	22	5
	Juli	6	13	26
	August	5	5	17
	September	3	20	24
	October	3	10	48
	November	2	0	14
	December	1	12	29
	December	30	23	31
−649	Jänner	29	9	36
	Februar	27	18	58
	März	29	3	50
	April	27	13	41
	Mai	27	0	58
	Juni	25	14	10
	Juli	25	5	31
	August	23	22	19
	September	22	15	50
	October	22	8	38
	November	21	0	14
	December	20	14	10
−648	Jänner	19	1	41
	Februar	17	11	31
	März	17	19	55
	April	16	3	22
	Mai	15	11	31
	Juni	13	20	53
	Juli	13	8	38
	August	11	22	48
	September	10	15	36
	October	10	10	5
	November	9	4	48
	December	8	22	5
−647	Jänner	7	13	41
	Februar	6	2	24
	März	7	12	43
	April	5	20	24
	Mai	5	3	36
	Juni	3	10	34
	Juli	2	18	29
	August	1	4	48
	August	30	17	46
	September	29	9	50
	October	29	4	19
	November	27	23	31
	December	27	18	43
−646	Jänner	26	11^h	31^m
	Februar	25	1	12
	März	26	12	14
	April	24	20	24
	Mai	24	3	36
	Juni	22	10	19
	Juli	21	18	0
	August	20	2	53
	September	18	15	7
	October	18	5	46
	November	16	23	17
	December	16	18	29
−645	Jänner	15	13	26
	Februar	14	7	12
	März	15	22	5
	April	14	10	5
	Mai	13	19	41
	Juni	12	3	22
	Juli	11	10	19
	August	9	18	0
	September	8	2	53
	October	7	14	10
	November	6	3	50
	December	5	19	26
−644	Jänner	4	13	12
	Februar	3	7	26
	März	4	0	58
	April	2	16	34
	Mai	2	6	0
	Mai	31	17	17
	Juni	30	2	38
	Juli	29	10	48
	August	27	19	12
	September	26	4	34
	October	25	14	53
	November	24	3	22
	December	23	17	17
−643	Jänner	22	8	24
	Februar	21	1	12
	März	22	17	46
	April	21	9	36
	Mai	21	0	14
	Juni	19	13	26
	Juli	19	0	29
	August	17	10	48
	September	15	20	38
	October	15	6	43
	November	13	17	17
	December	13	4	34
−642	Jänner	11	16	34
	Februar	10	5	31
	März	11	19	26
	April	10	10	5
	Mai	10	1	41
	Juni	8	16	48
	Juli	8	7	41
	August	6	21	22
	September	5	9	50
	October	4	22	5
	November	3	9	7
	December	2	19	55

Jahr	Datum		Uhr	
−641	Jänner	1	6h	43m
	Jänner	30	17	17
	März	1	4	5
	März	30	15	22
	April	29	3	30
	Mai	28	17	46
	Juni	27	8	53
	Juli	27	0	43
	August	25	16	34
	September	24	7	41
	October	23	21	50
	November	22	11	2
	December	21	22	48
640	Jänner	20	9	22
	Februar	18	18	43
	März	19	3	36
	April	17	12	43
	Mai	16	22	48
	Juni	15	11	2
	Juli	15	1	20
	August	13	17	17
	September	12	10	48
	October	12	4	19
	November	10	20	38
	December	10	11	31
−639	Jänner	9	0	14
	Februar	7	10	48
	März	8	19	55
	April	7	3	30
	Mai	6	11	2
	Juni	4	19	41
	Juli	4	6	0
	August	2	18	58
	September	1	10	34
	October	1	4	48
	October	30	23	31
	November	29	17	40
	December	29	10	19
−638	Jänner	28	0	14
	Februar	26	11	40
	März	27	20	24
	April	26	3	50
	Mai	25	10	34
	Juni	23	18	0
	Juli	23	2	53
	August	21	14	38
	September	20	5	31
	October	19	23	2
	November	18	18	0
	December	18	13	20
−637	Jänner	17	7	20
	Februar	15	22	34
	März	17	10	48
	April	15	20	24
	Mai	15	3	50
	Juni	13	10	34
	Juli	12	17	31
	August	11	1	55
	September	9	12	43
	October	9	1	55
	November	7	18	14
	December	7	12	29

Jahr	Datum		Uhr	
−636	Jänner	6	8h	10m
	Februar	5	2	24
	März	5	18	43
	April	4	8	10
	Mai	3	18	43
	Juni	2	3	22
	Juli	1	10	34
	Juli	30	18	14
	August	29	2	24
	September	27	12	29
	October	27	0	43
	November	25	15	22
	December	25	8	10
−635	Jänner	24	1	41
	Februar	22	19	55
	März	24	12	20
	April	23	3	7
	Mai	22	15	36
	Juni	21	1	55
	Juli	20	10	48
	August	18	18	58
	September	17	4	5
	October	16	13	55
	November	15	1	41
	December	14	14	24
634	Jänner	13	5	2
	Februar	11	20	38
	März	13	12	58
	April	12	5	2
	Mai	11	20	24
	Juni	10	10	34
	Juli	9	22	34
	August	8	9	22
	September	6	19	41
	October	6	6	0
	November	4	10	34
	December	4	3	22
−633	Jänner	2	14	53
	Februar	1	3	7
	März	2	10	19
	April	1	0	0
	April	30	21	7
	Mai	30	12	29
	Juni	29	3	36
	Juli	28	18	0
	August	27	7	20
	September	25	19	55
	October	25	7	41
	November	23	18	43
	December	23	6	0
−632	Jänner	21	10	19
	Februar	20	2	38
	März	20	13	20
	April	19	0	43
	Mai	18	13	55
	Juni	17	4	19
	Juli	16	10	55
	August	15	12	14
	September	14	4	5
	October	13	19	12
	November	12	8	53
	December	11	21	30

Jahr	Datum		Uhr	
−631	Jänner	10	8h	38m
	Februar	8	18	29
	März	10	3	22
	April	8	11	46
	Mai	7	21	22
	Juni	6	8	10
	Juli	5	20	53
	August	4	12	14
	September	3	5	46
	October	2	23	31
	November	1	17	2
	December	1	8	38
	December	30	22	34
−630	Jänner	29	10	10
	Februar	27	19	55
	März	29	4	5
	April	27	11	17
	Mai	26	18	58
	Juni	25	4	34
	Juli	24	15	50
	August	23	0	0
	September	21	23	17
	October	21	17	46
	November	20	12	58
	December	20	0	29
−629	Jänner	18	22	19
	Februar	17	10	48
	März	18	20	53
	April	17	4	34
	Mai	16	11	17
	Juni	14	18	14
	Juli	14	2	10
	August	12	12	29
	September	11	1	41
	October	10	17	46
	November	9	12	14
	December	9	7	41
−628	Jänner	8	2	38
	Februar	6	19	26
	März	7	9	7
	April	5	19	55
	Mai	5	4	19
	Juni	3	11	17
	Juli	2	18	14
	August	1	1	55
	August	30	11	2
	September	28	23	17
	October	28	13	55
	November	27	7	20
	December	27	2	24
−627	Jänner	25	21	7
	Februar	24	14	38
	März	26	5	31
	April	24	17	17
	Mai	24	2	53
	Juni	22	11	2
	Juli	21	18	29
	August	20	2	24
	September	18	11	31
	October	17	22	48
	November	16	12	29
	December	16	4	5

Jahr	Datum		Uhr	
—026	Jänner	14	20h	53m
	Februar	13	14	53
	März	15	7	55
	April	13	23	46
	Mai	13	13	12
	Juni	12	0	29
	Juli	11	10	5
	August	9	18	58
	September	8	3	36
	October	7	13	26
	November	6	0	0
	December	5	12	0
—025	Jänner	4	1	41
	Februar	2	16	19
	März	4	8	24
	April	3	0	29
	Mai	2	16	19
	Juni	1	6	58
	Juni	30	20	24
	Juli	30	8	10
	August	28	19	12
	September	27	5	17
	October	26	15	36
	November	25	2	38
	December	24	13	41
—024	Jänner	23	1	12
	Februar	21	13	41
	März	22	2	53
	April	20	16	48
	Mai	20	7	55
	Juni	18	23	31
	Juli	18	14	38
	August	17	4	48
	September	15	18	14
	October	15	6	43
	November	13	18	29
	December	13	5	17
—023	Jänner	11	15	50
	Februar	10	1	55
	März	11	12	0
	April	9	22	48
	Mai	9	10	48
	Juni	8	0	14
	Juli	7	15	36
	August	6	7	26
	September	5	0	0
	October	4	15	36
	November	3	6	29
	December	2	19	55
—022	Jänner	1	7	55
	Jänner	30	18	0
	März	1	3	7
	März	30	11	31
	April	28	19	55
	Mai	28	6	0
	Juni	26	17	46
	Juli	26	8	10
	August	25	0	29
	September	23	18	29
	October	23	12	14
	November	22	5	17
	December	21	20	19

Jahr	Datum		Uhr	
—021	Jänner	20	9h	7m
	Februar	18	19	26
	März	20	4	5
	April	18	11	31
	Mai	17	18	43
	Juni	16	3	7
	Juli	15	13	26
	August	14	2	10
	September	12	18	14
	October	12	12	29
	November	11	7	41
	December	11	1	55
—020	Jänner	9	18	43
	Februar	8	8	38
	März	8	19	55
	April	7	4	34
	Mai	6	11	46
	Juni	4	18	14
	Juli	4	1	26
	August	2	10	48
	August	31	22	34
	September	30	13	12
	October	30	6	43
	November	29	1	55
	December	28	21	22
—019	Jänner	27	15	22
	Februar	26	6	29
	März	27	18	29
	April	26	3	50
	Mai	25	11	31
	Juni	23	18	29
	Juli	23	1	41
	August	21	9	50
	September	19	21	7
	October	19	10	19
	November	18	2	24
	December	17	20	38
—018	Jänner	16	15	50
	Februar	15	10	5
	März	17	2	10
	April	15	15	22
	Mai	15	2	10
	Juni	13	11	2
	Juli	12	18	43
	August	11	2	24
	September	9	10	48
	October	8	21	7
	November	7	9	36
	December	7	0	0
—017	Jänner	5	16	5
	Februar	4	9	36
	März	6	3	7
	April	4	19	12
	Mai	4	9	50
	Juni	2	22	34
	Juli	2	9	7
	Juli	31	18	29
	August	30	3	22
	September	28	12	58
	October	27	22	48
	November	26	10	19
	December	25	23	17

Jahr	Datum		Uhr	
—016	Jänner	24	12h	58m
	Februar	23	4	5
	März	23	19	55
	April	22	11	46
	Mai	22	2	53
	Juni	20	17	17
	Juli	20	6	0
	August	18	17	17
	September	17	4	5
	October	16	15	7
	November	15	1	41
	December	14	12	29
—015	Jänner	13	0	0
	Februar	11	11	31
	März	13	0	0
	April	11	13	26
	Mai	11	3	50
	Juni	9	19	12
	Juli	9	10	34
	August	8	1	26
	September	6	15	22
	October	6	4	34
	November	4	16	48
	December	4	4	5
—014	Jänner	2	14	53
	Februar	1	0	58
	März	2	11	2
	März	31	20	53
	April	30	8	10
	Mai	29	20	38
	Juni	28	11	17
	Juli	28	3	7
	August	26	19	26
	September	25	12	0
	October	25	3	36
	November	23	17	31
	December	23	6	29
—013	Jänner	21	17	2
	Februar	20	2	53
	März	21	11	2
	April	19	19	12
	Mai	19	4	19
	Juni	17	14	53
	Juli	17	4	19
	August	15	19	41
	September	14	13	12
	October	14	7	12
	November	13	1	12
	December	12	17	17
—012	Jänner	11	7	12
	Februar	9	18	43
	März	10	4	5
	April	8	11	31
	Mai	7	18	43
	Juni	6	2	24
	Juli	5	11	17
	August	3	23	2
	September	2	13	26
	October	2	6	43
	November	1	1	41
	November	30	20	53
	December	30	14	53

Jahr	Datum		Uhr	
611	Jänner . .	20	0^h	14^m
	Februar .	27	18	43
	März .	26	4	10
	April .	27	12	0
	Mai . .	26	18	43
	Juni . .	24	23	40
	Juli . .	24	0	30
	August . .	22	20	10
	September	21	0	22
	October .	21	1	20
	November .	19	20	24
	December .	19	15	30
610	Jänner .	18	10	34
	Februar .	17	3	7
	März	18	10	34
	April .	17	3	22
	Mai .	16	11	40
	Juni	14	18	43
	Juli .	14	1	55
	August .	12	0	30
	September	10	19	20
	October . . .	10	7	41
	November .	8	22	10
	December .	8	15	22
609	Jänner . .	7	10	5
	Februar .	6	4	34
	März . .	7	21	50
	April .	6	12	20

Jahr	Datum		Uhr	
—609	Mai .	6	0^h	20^m
	Juni	4	10	10
	Juli	3	18	20
	August .	2	2	10
	August	31	10	34
	September	29	20	24
	October .	29	7	20
	November .	27	20	38
	December .	27	12	14
608	Jänner	26	4	48
	Februar . .	24	22	5
	März . .	25	14	53
	April . . .	24	6	14
	Mai . .	23	20	10
	Juni .	22	7	26
	Juli .	21	17	40
	August . .	20	2	53
	September	18	12	0
	October .	17	22	5
	November	16	0	7
	December . . .	15	20	53
607	Jänner	14	10	10
	Februar	13	0	20
	März .	14	15	36
	April .	13	7	20
	Mai . . .	12	22	48
	Juni	11	13	41
	Juli	11	3	7
	August .	9	15	36

Jahr	Datum		Uhr	
—607	September	8	2^h	53^m
	October .	7	13	55
	November .	6	0	29
	December .	5	11	31
—606	Jänner .	3	22	10
	Februar .	2	9	22
	März	3	21	22
	April . .	2	0	50
	Mai .	1	23	31
	Mai .	31	14	38
	Juni .	30	6	0
	Juli . . .	29	21	22
	August .	28	12	14
	September .	27	2	10
	October . . .	26	15	7
	November . .	25	3	7
	December . . .	24	14	10
—605	Jänner	23	0	29
	Februar .	21	10	5
	März	22	10	20
	April .	21	5	40
	Mai . . .	20	17	17
	Juni . .	19	6	43
	Juli . .	18	22	19
	August . .	17	14	24
	September	16	7	20
	October .	16	0	14
	November .	14	15	22
	December . . .	14	4	48
—604	Jänner .	12	16	10

In dem Zeitraume vom Jahre —956 bis zum Jahre —574 fanden 912 Sonnenfinsternisse statt, von denen 585 central, 327 partiell waren. Von den centralen Finsternissen entfallen 249 auf totale, 23 auf ringförmig-totale, 313 auf ringförmige. — Da die partiellen Finsternisse für eine geografische Breite, wie sie Ninive besitzt, keine merkliche Lichtabschwächung hervorbringen, habe ich nicht weiter untersucht, ob diese für diesen Ort auch sichtbar waren.

Um die Entscheidung darüber treffen zu können, welche von den centralen Finsternissen in jenem Ort sichtbar waren, musste für alle diese Finsternisse die Curve der Centralität gerechnet werden, die durch die Coordinaten jener drei Punkte auf der Oberfläche der Erde genähert bestimmt ist, in denen die Finsterniss bei Sonnenaufgang, zu Mittag und bei Sonnenuntergang central gesehen wird.

Nachdem ich diese drei Punkte auf Karten eingetragen und einen Kreisbogen durch dieselben gelegt hatte um den beiläufigen Curvenzug zu übersehen, war die Frage, ob eine Finsterniss für Ninive sichtbar oder unsichtbar ist, nach dem Verlaufe der Curve sofort zu beantworten. — Von den 585 centralen Sonnen-Finsternissen waren in Ninive bloss 124 sichtbar, deren Elemente ich hier folgen lasse.

Was die Rechnung der Finsternisse betrifft, so bediente ich mich zur Aufstellung der Elemente der Tafeln Oppolzers „Syzygien Tafeln für den Mond" Publication der astronomischen Gesellschaft Nr. XVI.

Elemente der Sonnenfinsternisse.

Nr.	T Julianischer Kalender			T Uhr		T Julianischer Tag		L'	Z	ε	P	Q	$\log p$	$\log \Delta L$	$\log q$	u'_{a}	$\log f_{a}$	Art der Finsterniss
1	—957	Juni	11	0^h	9^m2	1371	675·0064	69°127	—2°42	23°823	359°191	357°063	0·7030	9·7503	8·7458	0·5385	7·6025	t
2	—956	Mai	30	16	33·3	1372	029·6898	59·078	—2·06	23·824	7·943	7·568	0·6902	9·7044	8·7593	0·5366	7·6022	t
3	—954	October	3	18	47·8	1372	885·7832	181·527	—1·79	23·824	175·640	174·175	0·6944	9·7581	8·7551	0·5410	7·6749	t
4	—950	Juli	22	20	20·1	1374	273·8473	109·532	—0·16	23·822	177·045	176·059	0·7443	9·7018	8·7057	0·5678	7·6657	r
5	—947	Mai	21	16	53·0	1375	307·7035	50·372	—2·51	23·820	172·784	173·037	0·6964	9·7646	8·7597	0·5305	7·6022	t
6	—946	November	3	17	51·6	1375	838·7442	213·668	—3·05	23·818	3·566	1·121	0·7218	9·7278	8·7283	0·5598	7·6774	r
7	—938	Juni	11	0	2·2	1378	615·0015	69·510	—2·39	23·821	7·668	6·849	0·6966	9·7645	8·7595	0·5307	7·6025	t
8	—935	April	9	20	47·0	1379	648·8660	10·538	+0·46	23·822	3·032	3·396	0·7443	9·7019	8·7055	0·5670	7·6642	r
9	—932	August	2	3	10·4	1380	859·1322	126·126	+0·27	23·821	176·348	175·852	0·7438	9·7019	8·7061	0·5686	7·6670	r
10	—931	Jänner	26	23	43·0	1381	036·9882	299·204	+4·00	23·820	5·153	6·591	0·6947	9·7582	8·7550	0·5399	7·6732	t
11	—929	Juni	2	0	20·7	1381	863·0144	60·799	—2·58	23·818	171·964	172·313	0·6966	9·7044	8·7594	0·5366	7·6023	t
12	—925	März	20	17	42·7	1383	286·7380	350·713	+2·54	23·816	175·409	173·497	0·7342	9·7147	8·7162	0·5668	7·6664	r
13	—922	Jänner	17	22	31·3	1384	314·9384	289·630	+3·32	23·817	169·340	171·287	0·6997	9·7529	8·7503	0·5436	7·6743	t
14	—910	Juni	1	23	59·3	1388	832·9995	61·172	—2·56	23·815	179·786	181·698	0·7054	9·7486	8·7443	0·5393	7·6022	t
15	—909	November	14	22	35·2	1389	303·9411	224·449	—2·94	23·814	11·386	9·651	0·6967	9·7555	8·7534	0·5439	7·6777	t
16	—907	März	31	0	44·6	1389	806·0310	1·296	+1·44	23·814	174·712	172·726	0·7331	9·7164	8·7172	0·5592	7·6053	r
17	—906	September	13	22	10·1	1390	397·9237	161·661	—0·58	23·814	3·407	5·139	0·7371	9·7100	8·7134	0·5672	7·6725	r
18	—902	Juli	2	15	9·2	1391	785·6314	96·449	—1·28	23·816	5·398	5·495	0·6900	9·7646	8·7597	0·5312	7·6037	t
19	—900	November	4	21	1·7	1392	641·8831	215·007	—3·07	23·818	175·406	174·218	0·6921	9·7601	8·7576	0·5411	7·6774	t
20	—896	August	23	17	16·2	1394	029·7196	141·522	+0·32	23·817	175·186	174·455	0·7430	9·7027	8·7008	0·5699	7·6698	r
21	—895	August	12	20	23·0	1394	383·8493	130·617	+0·49	23·816	183·070	180·848	0·7272	9·7225	8·7222	0·5576	7·6683	r
22	—893	Juni	23	15	22·9	1395	063·6409	81·660	—1·80	23·815	170·167	170·916	0·6910	9·7637	8·7587	0·5315	7·6030	t
23	—892	December	5	19	36·3	1395	594·8169	240·666	—1·53	23·813	3·521	1·009	0·7176	9·7323	8·7320	0·5572	7·6776	r
24	—884	Juli	12	22	50·0	1398	376·9514	100·974	—0·59	23·813	4·028	4·883	0·6900	9·7644	8·7598	0·5319	7·6647	t
25	—880	April	30	17	48·5	1399	758·7420	31·175	—1·47	23·815	8·466	6·684	0·7357	9·7132	8·7138	0·5596	7·6628	r
26	—878	September	4	0	36·1	1400	615·0251	152·333	—0·66	23·815	174·725	173·893	0·7424	9·7029	8·7074	0·5707	7·6713	r
27	—877	März	1	0	28·8	1400	793·0200	331·845	+4·04	23·815	4·021	5·748	0·6977	9·7555	8·7516	0·5392	7·6691	t
28	—875	Juli	3	22	56·9	1401	648·9562	92·179	—1·14	23·813	169·386	170·249	0·6913	9·7631	8·7583	0·5322	7·6639	t
29	—871	April	21	14	32·9	1403	036·6062	22·284	—0·72	23·809	173·156	171·639	0·7307	9·7198	8·7195	0·5561	7·6634	r
30	—870	April	11	0	24·0	1403	391·0167	11·964	+0·33	23·809	181·741	179·426	0·7073	9·7493	8·7425	0·5417	7·6643	t

Nr.	T Julianischer Kalender		T Uhr		T Julianischer Tag		L'	Z	ε	P	Q	$\log p$	$\log \Delta L$	$\log q$	u'_u	$\log f_u$	Art der Finsterniss
31	—863	Mai. 22	22h	27m·8	1405	989·9300	52°197	—2°48	23°812	359°457	359°352	0·7448	9·7019	8·7052	0·5658	7·6622	r
32	—862	Mai. 12	0	20·2	1406	344·0182	41·580	—2·12	23·813	7·578	5·711	0·7345	9·7147	8·7149	0·5587	7·6624	r
33	—856	Juli 3	21	47·2	1408	588·6078	92·518	—1·12	23·810	177·282	179·051	0·7095	9·7437	8·7400	0·5428	7·6638	t
34	—853	Mai. 2	21	22·0	1409	621·8903	32·723	—1·59	23·807	172·312	170·129	0·7292	9·7210	8·7209	0·5550	7·6627	r
35	—852	October 15	21	43·3	1410	153·9051	195·038	—2·58	23·806	2·828	4·220	0·7395	9·7004	8·7111	0·5714	7·6700	r
36	—851	October 4	21	14·8	1410	507·8853	183·048	—1·95	23·806	10·038	9·538	0·7439	9·7008	8·7008	0·5741	7·6750	r
37	—849	Februar 19	17	23·7	1411	616·7248	322·906	+4·41	23·806	176·276	178·454	0·7283	9·7210	8·7216	0·5596	7·6704	r
38	—848	August . . . 3	14	27·6	1411	541·6025	122·198	+0·37	23·807	3·273	3·820	0·6602	9·7639	8·7597	0·5334	7·6670	t
39	—846	December . . . 8	0	3·9	1412	398·0027	248·706	—1·35	23·809	175·405	174·509	0·6605	9·7017	8·7593	0·5402	7·6779	t
40	—841	September . . 14	19	31·6	1414	139·8138	103·088	—0·65	23·810	181·780	179·434	0·7228	9·7207	8·7204	0·5576	7·6726	r
41	—837	Jänner 7	21	10·8	1415	350·8825	280·170	+2·20	23·807	3·304	0·895	0·7139	9·7370	8·7357	0·5533	7·6755	r
42	—831	März 2	0	50·0	1417	596·0386	333·075	+3·95	23·804	175·707	177·915	0·7296	9·7198	8·7203	0·5595	7·6686	r
43	—830	August 14	22	27·7	1418	126·0359	132·908	+0·48	23·804	2·705	3·396	0·6605	9·7635	8·7566	0·5343	7·6684	t
44	—824	October 5	23	33·4	1420	376·9815	185·205	—2·04	23·808	173·821	172·075	0·7403	9·7040	8·7094	0·5718	7·6751	r
45	—823	April 1	23	53·8	1420	548·9957	3·829	+1·22	23·808	2·172	4·173	0·7014	9·7521	8·7478	0·5390	7·6652	t
46	—818	Jänner 7	18	54·4	1422	266·7878	280·401	+2·33	23·805	11·261	9·041	0·6620	9·7666	8·7572	0·5401	7·6755	t
47	—816	Mai. 12	22	22·5	1423	146·9323	43·294	—2·16	23·803	179·285	177·166	0·7033	9·7509	8·7405	0·5382	7·6623	t
48	—810	December . . . 29	17	52·5	1425	508·7448	271·101	+1·23	23·803	175·320	174·041	0·6898	9·7028	8·7661	0·5396	7·6763	t
49	—808	Juni 12	20	28·2	1426	666·8526	72·771	—2·18	23·804	4·882	2·803	0·7308	9·7161	8·7186	0·5561	7·6626	r
50	—804	April 1	18	36·3	1427	488·7752	4·004	+1·20	23·805	10·039	12·288	0·7258	9·7245	8·7235	0·5549	7·6652	r
51	—802	August 5	20	4·4	1428	344·8304	124·240	+0·42	23·804	175·187	177·033	0·7137	9·7384	8·7350	0·5477	7·6671	rt
52	—799	Juni 3	17	49·8	1429	377·7429	63·939	—2·45	23·802	169·075	167·352	0·7248	9·7206	8·7250	0·5518	7·6623	rt
53	—797	November . . . 6	21	9·9	1430	203·8819	217·036	—3·12	23·799	9·709	8·870	0·7426	9·7017	8·7080	0·5749	7·6774	r
54	—794	September . . 5	14	50·6	1431	267·6185	154·543	—0·16	23·799	1·803	2·743	0·6612	9·7023	8·7590	0·5366	7·6713	t
55	—790	Juni 24	3	16·3	1432	685·1303	83·198	—1·05	23·801	4·016	1·878	0·7296	9·7207	8·7207	0·5555	7·6631	r
56	—787	October 16	20	10·9	1433	895·8406	196·205	—2·66	23·803	181·186	178·770	0·7186	9·7310	8·7305	0·5572	7·6761	r
57	—783	Februar 8	21	57·3	1435	166·9148	313·186	+4·46	23·801	2·669	0·240	0·7099	9·7419	8·7394	0·5484	7·6717	rt
58	—777	April 3	22	31·9	1437	351·9388	5·575	+1·05	23·797	173·867	175·869	0·7335	9·7159	8·7166	0·5595	7·6651	r
59	—776	März 23	0	25·9	1437	706·0186	354·788	+2·18	23·796	181·827	182·004	0·7449	9·7010	8·7058	0·5687	7·6663	r
60	—776	September . . 15	23	12·6	1437	882·0071	165·472	—0·80	23·796	1·480	2·532	0·6916	9·7018	8·7588	0·5376	7·6727	t
61	—770	November . . . 7	23	44·4	1440	126·9862	218·001	—3·12	23·800	173·465	172·000	0·7383	9·7068	8·7116	0·5716	7·6775	r
62	—769	Mai. 4	22	9·4	1440	304·9232	35·310	—1·71	23·801	359·762	2·018	0·7050	9·7480	8·7430	0·5406	7·6628	t

Nr.	Julianischer Kalender			T Uhr		Julianischer Tag		L'	Z	ε	Γ	Ω	$\log p$	$\log \Delta L$	$\log q$	d'_u	$\log f_u$	Art der Finsterniss
63	−705	August	16	17h	39m·6	1441	869·7358	134°·924	+0°·45	23°·800	182°·255	183°·842	0·7378	9·7096	8·7121	0·5650	7·6685	r
64	−704	Februar	9	20	32·2	1442	046·8557	313·514	+4·46	23·800	10·501	9·562	0·6911	9·7021	8·7585	0·5369	7·6717	t
65	−702	Juni	14	20	20·4	1442	902·8475	74·566	−2·08	23·797	176·689	174·832	0·6993	9·7549	8·7504	0·5366	7·6626	t
66	−757	September	16	21	37·4	1444	822·9010	105·794	−0·82	23·795	9·370	11·794	0·7110	9·7410	8·7388	0·5494	7·6727	rt
67	−755	Jänner	30	19	54·5	1445	324·8295	304·329	+4·25	23·796	174·811	174·473	0·6895	9·7039	8·7667	0·5366	7·6729	t
68	−754	Juli	15	17	12·0	1445	855·7167	104·164	−0·34	23·796	2·421	0·179	0·7268	9·7238	8·7230	0·5547	7·6649	r
69	−750	Mai	4	15	26·1	1447	244·6431	35·432	−1·70	23·799	7·668	9·700	0·7302	9·7197	8·7190	0·5558	7·6628	r
70	−748	September	6	19	18·5	1448	100·8045	150·562	−0·28	23·799	173·729	170·182	0·7176	9·7332	8·7316	0·5532	7·6714	r
71	−744	December	19	22	27·7	1449	665·9359	202·125	+0·08	23·795	2·533	3·292	0·7428	9·7015	8·7076	0·5748	7·6770	r
72	−743	December	8	21	37·0	1450	019·9007	250·626	−1·23	23·794	9·618	8·456	0·7409	9·7038	8·7695	0·5737	7·6775	r
73	−740	October	7	16	20·9	1451	053·6812	187·540	−2·23	23·792	1·058	2·312	0·6626	9·7663	8·7576	0·5368	7·6751	t
74	−736	Juli	26	0	21·7	1452	441·0151	114·726	+0·17	23·794	1·709	359·424	0·7252	9·7255	8·7246	0·5545	7·6659	r
75	−732	Mai	14	22	10·4	1453	829·9239	45·841	−2·22	23·796	6·722	8·753	0·7314	9·7182	8·7178	0·5565	7·6623	r
76	−729	März	13	21	38·6	1454	802·9018	345·558	+3·66	23·796	1·261	358·950	0·7661	9·7407	8·7430	0·5433	7·6676	t
77	−723	Mai	5	18	50·3	1457	107·7849	36·676	−1·80	23·791	171·444	173·104	0·7372	9·7117	8·7131	0·5663	7·6627	r
78	−722	April	24	20	15·8	1457	461·8443	26·301	−1·00	23·790	179·463	179·286	0·7450	9·7015	8·7056	0·5665	7·6633	r
79	−716	December	16	0	28·7	1459	883·0199	252·211	−1·07	23·792	173·408	171·710	0·7359	9·7103	8·7141	0·5699	7·6775	r
80	−711	September	17	15	55·4	1461	625·6635	167·399	−0·95	23·793	180·933	182·247	0·7399	9·7058	8·7099	0·5696	7·6728	r
81	−710	März	13	20	59·3	1461	802·8745	345·917	+3·03	23·793	9·142	8·523	0·6900	9·7036	8·7593	0·5338	7·6676	t
82	−708	Juli	16	18	50·7	1462	658·7852	166·043	−0·22	23·791	174·301	172·763	0·6659	9·7582	8·7533	0·5355	7·6656	t
83	−705	Mai	17	1	25·1	1463	693·0591	47·379	−2·27	23·789	170·553	172·120	0·7381	9·7166	8·7121	0·5668	7·6623	r
84	−703	October	18	22	37·9	1464	578·9430	168·951	−2·84	23·787	8·841	11·266	0·7148	9·7361	8·7351	0·5542	7·6761	r
85	−701	März	4	20	48·2	1465	080·8668	336·934	+3·73	23·787	173·623	173·675	0·6897	9·7644	8·7665	0·5342	7·6687	t
86	−699	August	6	3	5·2	1465	966·1286	125·556	+0·45	23·788	8·945	7·071	0·6966	9·7539	8·7502	0·5391	7·6672	t
87	−694	October	9	19	36·9	1467	856·8173	189·523	−2·35	23·791	172·963	175·365	0·7215	9·7281	8·7276	0·5582	7·6752	r
88	−690	Juli	28	2	34·2	1469	244·1071	116·636	+0·24	23·790	173·664	172·184	0·7948	9·7591	8·7550	0·5356	7·6661	t
89	−689	Jänner	21	22	7·4	1469	421·9218	295·393	+3·67	23·789	2·665	2·487	0·7439	9·7666	8·7663	0·5738	7·6742	r
90	−689	Juli	17	19	35·8	1469	598·8165	166·466	−0·20	23·788	182·140	182·862	0·6616	9·7634	8·7587	0·5325	7·6649	t
91	−688	Jänner	10	21	48·1	1469	775·9084	284·054	+2·66	23·788	9·343	7·879	0·7389	9·7070	8·7112	0·5766	7·6752	r
92	−686	November	9	18	45·6	1470	869·7817	221·045	−3·14	23·786	0·867	2·391	0·6946	9·7576	8·7555	0·5425	7·6774	t
93	−682	August	27	22	51·0	1472	196·9521	146·816	+0·19	23·784	0·016	357·641	0·7211	9·7298	8·7266	0·5544	7·6700	r

Nr.	T: Julianischer Kalender	T: Uhr	T: Julianischer Tag	L'	Z	ε	Γ	Q	$\log p$	$\log \Delta L$	$\log q$	u'_u	$\log f_u$	Art der Finsterniss
94	−678 Juni 16	18^h 8^m6	1473 585·7560	77°036	−1°91	23°787	4°027	5°832	0·7353	9·7137	8·7143	0·5592	7·6627	r
95	−668 Mai. 26	15 25·8	1477 217·6429	57·500	−2·41	23·783	170·751	170·217	0·7443	9·7026	8·7061	0·5653	7·6622	r
96	−663 August 27	19 2·6	1479 136·7935	147·050	+0·18	23·783	7·968	6·218	0·6974	9·7560	8·7526	0·5394	7·6700	t
97	−661 Jänner 12	0 58·3	1479 639·0405	285·638	+2·83	23·784	173·143	171·209	0·7332	9·7144	8·7168	0·5662	7·6752	r
98	−660 Juni 27	0 49·2	1480 171·0342	87·404	−1·32	23·784	3·162	4·888	0·7305	9·7123	8·7136	0·5694	7·6633	r
99	−656 April 14	20 22·3	1481 558·8488	17·719	−0·15	23·786	7·057	6·880	0·6898	9·7049	8·7599	0·5314	7·6641	t
100	−654 August . . . 18	18 24·0	1482 414·7667	138·606	+0·43	23·786	172·419	171·235	0·6929	9·7005	8·7566	0·5393	7·6688	t
101	−650 Juni 6	21 49·1	1483 802·9091	67·886	−2·25	23·782	175·832	175·184	0·7439	9·7030	8·7064	0·5651	7·6623	r
102	−649 November . . 21	0 18·4	1484 335·0128	232·521	−2·74	23·781	8·761	11·179	0·7186	9·7314	8·7312	0·5579	7·6777	r
103	−647 April 5	20 30·0	1484 836·8542	8·605	+0·75	23·780	171·748	172·223	0·6967	9·7040	8·7597	0·5322	7·6649	t
104	−645 September . 8	3 15·6	1485 722·1358	157·911	−0·33	23·779	7·512	5·916	0·6964	9·7508	8·7538	0·5396	7·6715	t
105	−640 November . 10	20 44·3	1487 612·8641	222·682	−3·12	23·783	172·738	175·037	0·7251	9·7234	8·7243	0·5624	7·6774	r
106	−636 August . . . 29	2 34·7	1489 000·1074	148·801	+0·10	23·783	171·938	170·878	0·6923	9·7016	8·7573	0·5366	7·6701	t
107	−635 August . . . 18	19 13·9	1489 354·8013	138·435	+0·43	23·782	180·251	181·372	0·6919	9·7016	8·7575	0·5357	7·6687	t
108	−634 Februar . . . 11	21 4·5	1489 531·8781	316·686	+4·47	23·782	8·525	6·791	0·7304	9·7109	8·7134	0·5661	7·6715	r
109	−625 Februar 2	16 50·3	1492 809·7016	307·659	+4·33	23·778	172·686	170·015	0·7310	9·7174	8·7166	0·5631	7·6728	r
110	−623 Juli 7	15 13·7	1493 695·6345	97·603	−0·67	23·780	9·452	9·132	0·7449	9·7019	8·7056	0·5668	7·6641	r
111	−609 September 29	20 5·7	1498 892·8373	179·848	−1·78	23·775	6·958	5·548	0·6945	9·7585	8·7566	0·5402	7·6740	t
112	−607 Februar . . . 13	0 35·9	1499 395·0249	318·566	+4·47	23·775	172·347	170·215	0·7302	9·7191	8·7202	0·5614	7·6714	r
113	−606 Juli 29	21 10·4	1499 926·8822	118·993	+0·36	23·775	0·824	2·279	0·7394	9·7081	8·7169	0·5645	7·6662	r
114	−602 Mai. 17	19 2·2	1501 314·7932	49·115	−2·24	23·778	4·531	4·833	0·6901	9·7043	8·7594	0·5300	7·6624	t
115	−596 Juli 8	17 16·2	1503 558·7196	99·162	−0·58	23·776	173·201	172·213	0·7422	9·7047	8·7079	0·5652	7·6642	r
116	−595 Juni 27	21 46·4	1503 912·9072	88·578	−1·22	23·776	181·405	179·134	0·7246	9·7266	8·7250	0·5523	7·6633	r
117	−593 Mai. 8	19 16·8	1504 592·8033	40·394	−1·66	23·774	169·355	170·207	0·6921	9·7027	8·7578	0·5317	7·6627	t
118	−586 December . . . 13	22 3·8	1507 308·9193	250·613	−0·65	23·775	172·695	174·846	0·7288	9·7191	8·7209	0·5649	7·6774	r
119	−584 Mai. 28	2 29·8	1507 900·1040	59·543	−2·33	23·775	3·049	4·110	0·6904	9·7042	8·7591	0·5307	7·6622	t
120	−581 September. . . 20	19 57·4	1509 110·8315	171·035	−1·21	23·776	179·050	180·504	0·6938	9·7596	8·7556	0·5393	7·6729	t
121	−580 März 15	19 10·4	1509 287·7989	349·271	+2·74	23·776	7·009	5·042	0·7332	9·7153	8·7103	0·5609	7·6673	r
122	−578 Juli. 19	23 58·3	1510 143·9988	109·698	+0·01	23·775	172·414	171·321	0·7414	9·7055	8·7085	0·5652	7·6651	r
123	−577 Jänner 13	23 42·1	1510 321·9876	288·221	+3·03	23·774	0·670	2·634	0·7003	9·7520	8·7493	0·5445	7·6752	t
124	−574 Mai 8	17 54·1	1511 532·7459	40·725	−1·90	23·771	177·248	179·622	0·7110	9·7425	8·7389	0·5430	7·6627	t

Da zur Ermittlung der Hauptumstände einer Sonnenfinsterniss für einen Ort die östliche Länge von Greenwich und die geographische Breite dieses Ortes bekannt sein muss, habe ich aus dem „Index Geographicus im Verlag von William Blackwood" diese Coordinaten entnommen, die ich hier folgen lasse:

$$\text{Ninive (Mosul): } \lambda = 44° \, 9' \text{ östl. } \varphi = +36° \, 19'$$

Die Gleichungen zur Bestimmung der Zeit der grössten Phase, die Hansen in der Theorie der Sonnenfinsternisse ableitet:

$$m \sin M = \gamma - \eta \cos g + \xi \sin g \sin(G+t_0)$$

$$m \cos M = (t_0 - \lambda - \mu)\frac{n}{15} - \eta \cos k + \xi \sin k \cos(K+t_0)$$

$$m' \sin M' = -\varkappa\xi \sin g \cos(G+t_0)$$

$$m' \cos M' = n - \varkappa\xi \sin k \sin(K+t_0)$$

$$t = t_0 - 15\frac{m}{m'}\cos(M+M')$$

sind in Bezug auf die Unbekannte t transcendent. Um nun den genauen Werth von t zu ermitteln, ist man bei der Benützung des Näherungsverfahrens genöthigt, die gesammte Rechnung so lange zu wiederholen, bis der Anfangs- und Schlusswerth übereinstimmen, was, wenn keine Näherung bekannt ist, meist eine dreimalige Wiederholung erfordert. Ich habe aber Hansen's Verfahren nicht eingeschlagen, sondern eine von Prof. Oppolzer vorgeschlagene Methode benützt, die nur die Wiederholung eines ganz kleinen Theiles der Rechnung erfordert und eine fast völlige Strenge erreichen lässt.

Da der Werth von m, unter der Voraussetzung, dass eine merkliche Verfinsterung der Sonnenscheibe eintritt, klein ist, und auch $\cos M$, da M bei 90° oder 270° liegt, nahe 0 wird, so wird das Product $m \cos M$ für eine centrale Finsterniss sehr klein. Berücksichtigt man ferner, dass der Fehler, den man durch die Vernachlässigung des Productes begeht, die Genauigkeit, welche bei der Zeitangabe der grössten Phase historischer Finsternisse nöthig ist, nicht mehr beeinträchtigen kann, so kann man:

$$(t_0 - \lambda - \mu)\frac{n}{15} - \eta \cos k + \xi \sin k \cos(K+t_0) = 0$$

setzen.

Setzt man ferner:

$$-\frac{15}{n}\xi \sin k = a$$

$$\lambda + \mu + \frac{15}{n}\eta \cos k = L$$

endlich:

$$K + L = K',$$

aus welchen Ausdrücken sich, da alle Grössen linker Hand bei Beginn der Rechnung bekannt sind, a, L, K' als bestimmte numerische Werthe ergeben, so geht der erste Ausdruck über in:

$$t_0 - L - a\cos(K+t_0) = 0$$

Führt man ferner eine Grösse τ so ein, dass sie der Relation genügt:

$$\tau = t_0 - L$$

so ergibt sich:

$$\tau - a\cos(K'+\tau) = 0.$$

welche Gleichung sich auch so schreiben lässt:

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{a\cos K'}{\dfrac{\tau}{\sin\tau} + a\sin K'}.$$

Im Ausdrucke rechts ist nur der Quotient: $\frac{\tau}{\sin\tau}$ unbekannt. Berechnet man sich nun eine kleine Tafel, die mit dem Argument τ den logar. des Quotienten: $\frac{\tau}{\sin\tau} = \nu$ gibt, und welche sich, da: $t_0 - L$ nicht grösser als 30° werden kann, nur bis zum Argument $\tau = 30°$ zu erstrecken braucht, so erhält man:

τ	ν		τ	ν		τ	ν	
0°	1·7581		10°	1·7603		20°	1·7670	
					+5			+9
1°	1.7581		11°	1·7608		21°	1·7679	
		+1			+5			+9
2°	1.7582		12°	1·7613		22°	1·7688	
		+1			+6			+10
3°	1·7583		13°	1·7619		23	1·7698	
		+2			+6			+11
4°	1·7585		14°	1·7625		24°	1·7709	
		+2			+6			+11
5°	1·7587		15°	1·7631		25°	1·7720	
		+2			+7			+11
6°	1·7589		16°	1·7638		26°	1·7731	
		+3			+7			+12
7°	1·7592		17°	1·7645		27°	1·7743	
		+3			+8			+12
8°	1·7595		18°	1·7653		28°	1·7755	
		+4			+8			+13
9°	1·7599		19°	1·7661		29°	1·7768	
		+4			+9			+13
10°	1·7603		20°	1·7670		30°	1·7781	

Mit Hilfe dieser Tafel lässt sich aber der Werth von τ sehr leicht ermitteln. Macht man nämlich für ν die Annahme $\nu' = 1{\cdot}7631$, welche dem Mittelargument der Tafel entspricht, und berechnet mit diesem Werthe nach obiger Formel tg τ, so wird man für τ einen Werth τ' finden. Geht man nun mit diesem so gewonnenen Werth τ' als Argument in die Tafel ein, so finde sich für ν der Werth ν''. Stimmt dieser Werth mit dem erst angenommenen von ν überein, ist also: $\nu' = \nu''$, so braucht man die Rechnung nicht weiter fortzusetzen, man hat schon den Schlusswerth von τ ermittelt.

Ist dieses aber nicht der Fall, so wird man mit dem erhaltenen ν'' nochmals den obigen Ausdruck durchrechnen, und das Verfahren so lange fortsetzen, bis der letzt gefundene Werth von ν mit demjenigen Werth übereinstimmt, den die Tafel für den letzten Werth von τ ergibt. Im ungünstigsten Fall ist die dreimalige Berechnung des obigen Ausdruckes nöthig.

Hat man aber mehreremale die Formel benützt, so wird man bei dem geringen Differenzengang der Tafelwerthe, gleich eine solche Wahl für den Anfangswerth treffen können, dass nur eine Wiederholung der Rechnung nöthig wird, die obendrein in den meisten Fällen durch ein Abändern der letzten Decimalstelle ersetzbar sein wird. Über das Vorzeichen von τ kann kein Zweifel sein, es ist + oder —, je nachdem der Zähler: $a \cos K'$ das + oder — Vorzeichen hat.

Ist τ ermittelt, so ergibt sich aus der Gleichung:

$$t_0 = \tau + L$$

der Werth von t_0.

Löst man in dem Ausdruck: $t = t_0 + 15\frac{m}{m'}\cos(M+M')$ die cos-Function auf und substituirt für $m \sin M$ seinen Werth, so erhält man:

$$t = t_0 + \frac{15}{m'}\sin M'\,\{\gamma - \eta\cos g + \xi\sin g\sin(G+t_0)\}.$$

Strenge genommen, sollte m' und M', die ich nach Hansen's Formen:

$$m'\sin M' = \quad - \varkappa\xi\sin g\cos(G+t_0)$$
$$m'\cos M' = n - \varkappa\xi\sin k\sin(K+t_0)$$

bestimmte, nicht mit dem Werth t_0 sondern mit dem Werth t berechnet werden. Da aber das Correctionsglied: $-\frac{15m}{m'}\cos(M+M')$ sehr klein ist — $\cos(M+M')$ ist fast gleich 0, da sich die Winkel M und M' nahe zu 90° oder 270° ergänzen — so kommt der Einfluss, den die Nichtberücksichtigung dieses Correctionsbetrages auf die Hilfsgrössen m und M ausübt, nicht in Betracht.

Die Grösse m, welche auch zur Berechnung der grössten Phase nöthig ist, erhält man endlich nach:

$$m = \pm\frac{\gamma - \eta\cos g + \xi\sin g\sin G}{\cos M},$$

wo das Zeichen stets so zu wählen ist, dass m positiv wird.

Ich stelle nun die Formeln so zusammen, wie sie der Reihe nach zur Anwendung kommen:

$$a = -\frac{15}{n}\xi\sin k, \quad b = \frac{15}{n}\eta\cos k$$

$$L = \lambda+\mu+b, \qquad K' = K+L$$

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{a\cos K'}{\nu + a\sin K'}$$

$$t_0 = \tau + L$$

$$m'\sin M' = \quad -z\xi\sin g\cos(G+t_0)$$

$$m'\cos M' = n - z\xi\sin k\sin(K+t_0)$$

$$t = t_0 + \frac{15}{m'}\sin M'\{\gamma - \eta\cos g + \xi\sin g\sin(G+t_0)\}$$

$$m = \pm\frac{\gamma - \eta\cos g + \xi\sin g\sin(G+t)}{\cos M}.$$

Die in der folgenden Tafel angeführten Angaben der Zeit und Grösse der gr. Phase der in Ninive sichtbaren Sonnenfinsternisse sind ebenfalls durch doppelte Rechnung geprüft.

Die Buchstaben *t*, *r*, *rt* bedeuten: total, ringförmig, ringförmig-total. Das Sternchen bei dem Numero der Finsterniss weist darauf hin, dass die grösste Phase, weil bereits unter dem Horizont, nicht mehr sichtbar war, wol aber der Anfang oder beziehungsweise das Ende der Finsterniss.

Numero	Datum			Art der Finsterniss	Ninive: Wahre Ortszeit der gr. Phase	Ninive: Grösse der gr. Phase	Numero	Datum			Art der Finsterniss	Ninive: Wahre Ortszeit der gr. Phase	Ninive: Grösse der gr. Phase
1	−957	Juni	11	*t*	$4^h 38^m$	5"2	16	−907	März	31	*r*	$5^h 25^m$	7"8
2	−956	Mai	30	*t*	18 20	10·8	17	−906	September	13	*r*	1 5	7·4
3	−954	October	3	*t*	20 18	8·0	18	−902	Juli	2	*t*	16 53	6·0
4	−950	Juli	22	*t*	22 38	9·4	19	−900	November	4	*t*	23 31	6·4
5	−947	Mai	21	*t*	18 51	11·9	20	−896	August	23	*r*	18 16	5·5
6	−946	November	3	*r*	19 11	9·7	21	−895	August	12	*r*	22 10	1·9
7	−938	Juni	11	*t*	4 27	3·6	22	−893	Juni	23	*t*	17 5	6·7
8	−935	April	9	*r*	0 16	8·6	23	−892	December	5	*r*	21 21	2·8
9	−932	August	2	*r*	7 5	1·5	24	−884	Juli	12	*t*	2 34	9·8
10	−931	Jänner	20	*t*	3 45	11·5	25	−880	April	30	*r*	19 48	11·1
11	−929	Juni	2	*t*	5 0	5·3	26	−878	September	4	*r*	4 19	5·7
12	−925	März	20	*r*	19 31	3·9	27	−877	März	1	*t*	4 41	9·2
13	−922	Jänner	17	*t*	2 7	9·0	28	−875	Juli	3	*t*	3 9	0·2
14	−910	Juni	1	*t*	4 21	4·7	29*	−871	April	21	*r*	16 34	8·0
15	−909	November	14	*t*	1 52	8·8	30	−870	April	11	*t*	4 55	1·8

Numero	Datum	Art der Finsterniss	Ninive: Wahre Ortszeit der gr. Phase	Ninive: Grösse der gr. Phase
31	−863 Mai 22	r	$2^h 47^m$	7·4
32	−862 Mai 12	r	5 11	0·1
33	−856 Juli 3	t	1 10	11·8
34	−853 Mai 2	r	0 58	3·8
35	−852 October 15	r	0 18	3·5
36	−851 October 4	r	23 46	3·3
37	−849 Februar 19	r	18 48	2·6
38*	−848 August 3	t	15 59	5·0
39	−846 December 8	t	4 2	1·8
40	−841 September 14	r	20 54	4·5
41	−837 Jänner 7	r	0 23	0·4
42	−831 März 2	r	5 23	11·1
43	−830 August 14	t	1 41	8·2
44	−824 October 5	r	3 0	7·0
45	−823 April 1	t	4 16	11·3
46	−818 Jänner 7	t	20 40	9·6
47	−816 Mai 12	t	2 22	7·3
48	−810 December 29	t	19 17	8·1
49	−808 Juni 12	r	23 6	8·0
50	−804 April 1	t	20 43	9·2
51	−802 August 5	rt	22 14	6·3
52	−799 Juni 3	rt	19 36	2·1
53	−797 November 6	t	23 38	7·4
54*	−794 September 5	t	16 15	6·1
55*	−790 Juni 24	r	7 42	7·8
56	−787 October 16	t	21 40	1·6
57	−783 Februar 8	rt	1 47	4·3
58	−777 April 3	r	2 41	7·6
59	−776 März 23	r	5 1	1·3
60	−776 September 15	t	2 33	0·3
61	−770 November 7	r	3 29	5·6
62	−769 Mai 4	t	2 14	7·6
63	−765 August 16	r	18 43	3·7
64	−764 Februar 9	t	23 11	10·0
65	−762 Juni 14	t	23 4	11·2
66	−757 September 16	rt	0 23	4·7
67	−755 Jänner 30	t	22 7	3·1
68	−754 Juli 15	r	18 38	0·5
69	−750 Mai 4	r	17 26	8·1
70	−748 September 6	t	21 4	3·3
71	−744 December 19	r	2 26	0·7
72	−743 December 8	r	0 32	10·2
73*	−740 October 7	t	17 42	7·2
74	−736 Juli 26	r	4 24	4·7
75	−732 Mai 14	r	1 56	2·3
76	−729 März 13	t	1 36	4·7
77	−723 Mai 5	r	21 2	0·3
78	−722 April 24	r	23 22	3·1
79*	−716 December 10	r	4 45	7·8
80*	−711 September 17	r	16 59	0·7
81	−710 März 13	t	$24^h 0^m$	7·8
82	−708 Juli 16	t	20 35	5·6
83	−705 Mai 17	r	6 28	1·9
84	−703 October 18	r	1 52	11·1
85	−701 März 4	t	23 51	8·9
86	−699 August 6	t	6 59	11·3
87	−694 October 9	r	21 32	4·7
88	−690 Juli 28	t	6 31	6·6
89	−689 Jänner 21	r	2 14	2·5
90	−689 Juli 17	t	21 33	4·0
91	−688 Jänner 10	r	1 2	9·4
92	−686 November 9	t	20 19	1·9
93	−682 August 27	r	2 6	0·7
94	−678 Juni 16	r	19 57	8·8
95	−668 Mai 26	r	7 14	3·5
96	−663 August 27	t	20 30	3·3
97*	−661 Jänner 12	r	5 19	10·4
98	−660 Juni 27	r	5 20	9·9
99	−656 April 14	t	23 17	10·0
100	−654 August 18	t	19 54	6·3
101	−650 Juni 6	r	1 38	8·5
102	−649 November 21	r	4 21	11·4
103	−647 April 5	t	23 31	8·6
104*	−645 September 8	t	7 2	8·5
105	−640 November 10	r	23 2	11·0
106	−636 August 29	t	6 21	7·7
107	−635 August 18	t	20 50	8·5
108	−634 Februar 11	r	0 6	9·7
109*	−625 Februar 2	r	18 13	11·4
110*	−623 Juli 7	r	16 30	7·2
111	−609 September 29	t	22 4	8·5
112	−607 Februar 13	r	4 56	6·0
113	−606 Juli 29	r	23 53	7·8
114	−602 Mai 17	t	21 30	9·1
115	−596 Juli 8	r	18 30	5·5
116	−595 Juni 27	r	0 57	3·7
117	−593 Mai 8	t	21 42	2·5
118	−586 December 13	r	1 16	7·5
119	−584 Mai 28	t	7 4	11·3
120	−581 September 20	t	21 43	8·2
121	−580 März 15	r	21 35	8·9
122	−578 Juli 19	r	4 14	8·4
123	−577 Jänner 13	t	4 1	1·8
124	−574 Mai 8	t	19 59	3·9

In denselben Zeitraum, für den ich oben die Sonnenfinsternisse untersucht habe, fallen 364 in Ninive sichtbare Mondesfinsternisse, von denen 175 total, 189 partiell sind. Zur Rechnung dieser Finsternisse bediente ich mich der „Tafeln zur Berechnung der Mondesfinsternisse von Oppolzer XVII. Band der Denkschriften der Akademie der Wissenschaften in Wien". Auch hier ist die Zeit der grössten Phase in wahrer Greenwicher Zeit angesetzt und bei der Angabe der Jahre die astronomische Zählweise verstanden.

Mondesfinsternisse vom Jahr −956 bis −575.

Nr.	T Julianischer Kalender	T Julianischer Tag	λ	β	Grösse der gr. Phase	Halbe Dauer der Partial.	Halbe Dauer der Total.
1*	−957 November. 20, 16h 20m	1371 837.687	− 67°	+18°	1.4	0h 39m	—
2	−956 November. 9, 8 12	1372 102.342	+ 57	+15	16.0	1 47	0h 41m
3*	−955 Mai.... 5, 2 4	1372 306.086	+149	−13	19.5	1 50	49
4	−954 April... 24, 10 32	1372 723.439	+ 22	−10	3.2	0 58	—
5	−952 März... 4, 9 40	1373 403.403	+ 35	+10	10.7	1 48	43
6	−952 August.. 27, 12 42	1373 579.529	− 10	−14	13.1	1 42	23
7	−949 December. 21, 13 24	1374 709.558	− 21	+23	15.9	1 47	40
8	−948 Juni ... 16, 8 15	1374 908.344	+ 56	−23	21.3	1 52	51
9	−948 December. 10, 2 10	1375 145.090	+148	+22	13.9	1 44	30
10	−947 Juni . 5, 10 36	1375 322.442	+ 21	−21	5.7	1 14	—
11	−945 April.. 15, 9 42	1376 001.404	+ 35	− 7	12.3	1 40	12
12*	−944 April. . 4, 1 26	1376 356.060	+158	− 2	16.5	1 48	42
13*	−941 Juli .. 28, 15 49	1377 506.659	− 57	−21	17.0	1 49	44
14	−940 Juli . 17, 7 26	1377 921.310	+ 68	−23	12.0	1 39	—
15	−938 Mai.... 27, 0 27	1378 600.269	+ 83	−19	5.5	1 13	—
16*	−938 November. 20, 17 1	1378 777.709	− 75	+18	15.9	1 47	40
17	−937 Mai. ... 16, 8 47	1378 954.366	+ 48	−16	21.5	1 52	51
18	−937 November. 10, 5 43	1379 132.238	+ 64	+15	13.7	1 43	28
19	−933 März . 5, 4 52	1380 343.203	+107	+16	12.4	1 40	14
20	−933 August . 28, 7 57	1380 519.331	+ 61	−13	16.1	1 47	41
21	−931 Juli .. 8, 6 37	1381 169.276	+ 81	−24	3.2	0 58	—
22*	−930 Juni .. 27, 14 56	1381 553.622	− 44	−24	16.4	1 50	49
23	−930 December. 21, 10 57	1381 730.456	+ 16	+23	13.9	1 44	30
24	−927 October. 20, 6 39	1382 704.277	+ 80	+ 8	13.4	1 43	26
25	−926 April. 15, 9 10	1382 941.382	+ 42	− 7	18.2	1 50	47
26	−926 October. 9, 5 51	1383 118.244	+ 62	+ 3	15.2	1 46	37
27	−925 September 28, 8 0	1383 472.333	+ 66	− 1	0.7	0 28	—
28	−923 Februar. 12, 3 48	1383 975.158	+123	+16	15.4	1 46	38
29	−922 Februar. 1, 3 37	1384 329.151	+126	+20	12.6	1 41	17
30*	−922 Juli 28, 15 4	1384 506.628	40	−21	13.5	1 43	27
31	−921 December. 12, 10 12	1385 008.425	+ 27	+22	1.4	0 39	—
32	−920 Juni 6, 12 40	1385 185.528	− 10	−21	3.4	0 59	—
33*	−920 December. 1, 1 52	1385 363.078	+152	+21	16.1	1 47	41
34	−919 Mai..... 26, 15 23	1385 539.641	− 51	−19	21.1	1 52	51
35	−919 November. 20, 14 15	1385 717.594	− 34	+18	13.7	1 43	28
36*	−916 März . . 26, 1 29	1386 574.062	+158	+ 1	14.4	1 45	33
37	−916 September 18, 4 45	1386 750.198	+ 49	− 5	11.9	1 39	—
38	−915 März..... 15, 12 24	1386 928.517	− 6	+ 6	13.6	1 43	28
39*	−915 September 7, 10 16	1387 104.678	− 64	− 9	16.8	1 49	43
40	−914 August... 28, 8 4	1387 459.336	+ 59	−13	1.8	0 44	—
41	−913 Juli...... 19, 13 55	1387 784.580	− 29	−23	1.7	0 43	—
42	−912 Jänner.... 12, 6 10	1387 961.257	+ 87	+23	15.4	1 46	38
43	−909 October... 31, 14 43	1389 349.613	− 41	+11	13.0	1 42	22
44	−908 October.. 19, 13 49	1389 703.576	− 27	+ 7	15.5	1 46	38
45	−907 April. . 15, 9 37	1389 881.401	+ 36	− 7	3.1	0 57	—
46	−905 Februar. 23, 11 8	1390 566.464	+ 13	+13	14.4	1 45	33
47	−905 August . 19, 7 57	1390 739.331	+ 61	−16	14.6	1 45	34
48	−904 Februar. 12, 11 14	1390 914.468	+ 12	+16	13.4	1 43	26
49	−902 December. 12, 10 39	1391 948.444	+ 20	+22	10.0	1 47	41
50	−900 Mai. 26, 8 2	1392 479.335	+ 59	−19	8.5	1 28	—
51	−898 April. 6, 9 12	1393 159.383	+ 42	− 3	13.0	1 42	22
52	−898 September 29, 13 2	1393 335.543	− 15	− 1	11.5	1 37	—
53	−894 Jänner 22, 14 28	1394 546.603	− 37	+22	15.1	1 46	36
54	−894 Juli . 19, 4 28	1394 724.186	+113	−23	15.9	1 47	40
55	−893 Jänner . 12, 4 10	1394 901.178	+116	+23	14.3	1 45	33
56	−893 Juli . 8, 5 41	1395 078.237	+ 95	−24	11.4	1 37	—
57	−891 Mai..... 17, 7 45	1395 757.323	+ 64	−17	7.6	1 24	—
58	−886 August . 19, 6 33	1397 677.273	+ 82	−16	15.4	1 46	38
59	−884 Jänner... 3, 3 39	1398 179.152	+125	+24	1.4	0 39	—
60	−883 Juni . 17, 4 45	1398 710.198	+109	−23	17.5	1 49	45

Nr.	*T* Julianischer Kalender	Julianischer Tag	γ	δ	Grösse der gr. Phase	Halbe Dauer der Partial.	Halbe Dauer der Total.
61	−883 December. 12, 7^h13^m	1398 888.301	+72°	+22°	13·5	1^h43^m	0^h27^m
62*	−882 Juni 6, 15 13	1399 064.634	−48	−21	10·2	1 34	—
63*	−879 April 6, 3 3	1400 099.127	+134	−3	10·2	1 47	42
64	−879 September 29, 9 20	1400 275.389	+40	−1	17·8	1 50	40
65	−876 Juli ... 29, 11 27	1401 309.477	+8	−21	14·0	1 45	34
66	−875 Jänner.. .22, 12 50	1401 486.535	−13	+22	14·7	1 45	35
67	−875 Juli 18, 12 20	1401 663.514	−5	−23	13·1	1 42	23
68*	−873 Mai.......28, 15 4	1402 342.628	−40	−10	0·0	1 10	—
69	−873 November. 22, 6 52	1402 520.286	+77	+18	13·0	1 42	22
70	−872 Mai. ... 17, 7 51	1402 697.327	+62	−17	22·7	1 52	52
71	−872 November. 10, 5 57	1402 874.248	+91	+15	15·9	1 47	40
72	−871 October. 30, 9 0	1403 228.375	+45	+11	1·4	0 30	—
73*	−869 März .. 17, 1 19	1403 731.055	+100	+5	12·1	1 30	7
74*	−868 März . . . 5, 2 4	1404 085.086	+140	+10	15·6	1 47	39
75*	−868 August . .29, 14 34	1404 262.607	−39	−13	10·2	1 47	42
76	−867 Februar. 22, 8 38	1404 439.360	+50	+13	0·2	0 15	—
77	−866 Jänner .. 13, 12 20	1404 764.514	−5	+23	1·3	0 38	—
78	−865 Jänner.... 3, 4 0	1405 119.167	+120	+24	15·0	1 47	39
79	−865 Juni 28, 11 33	1405 295.481	+7	−24	15·0	1 47	40
80	−865 December. 23, 15 37	1405 473.651	−54	+24	13·0	1 43	28
81	−862 October. 21, 5 54	1406 506.246	+91	+8	11·1	1 30	—
82	−861 April. . 17, 10 6	1406 684.421	+28	−7	17·0	1 50	47
83	−860 April. 5, 12 56	1407 038.539	−14	−3	0·5	0 23	—
84	−860 September 29, 9 48	1407 215.408	+33	−1	3·5	1 0	—
85	−858 Februar. 13, 6 56	1407 717.289	+70	+10	14·1	1 44	31
86	−856 Jänner.. 23, 13 26	1408 426.560	−22	+22	0·2	0 11	—
87	−855 December. 2, 14 53	1409 105.620	−43	+21	12·8	1 42	20
88*	−854 Mai... . 28, 15 20	1409 282.638	−59	−10	21·1	1 52	51
89	−854 November. 21, 14 0	1409 459.583	−30	+18	10·0	1 47	41
90	−853 Mai. . . .18, 7 51	1409 637.327	+62	−17	7·0	1 24	—
91	−851 März . . 27, 8 21	1410 316.348	+55	+1	10·7	1 35	—
92	−851 September 20, 9 7	1410 493.380	+43	−4	12·0	1 41	17
93	−850 März ... 16, 9 24	1410 670.392	+39	+5	10·8	1 40	43
94	−847 Jänner 13, 12 33	1411 704.523	−8	+23	15·3	1 40	37
95	−846 Juni . 28, 5 43	1412 235.238	+64	24	13·5	1 43	27
96	−844 Mai..... . 8, 7 29	1412 915.312	+68	−14	8·2	1 27	—
97	−844 October. .31, 14 28	1413 091.603	−37	+11	11·0	1 30	—
98	−843 October. .21, 2 54	1413 446.121	+130	+8	18·2	1 50	47
99	−840 Februar. 24, 14 59	1414 302.624	−45	+13	13·3	1 43	25
100	−839 Februar. 13, 5 47	1414 657.241	+93	+10	10·0	1 47	41
101	−838 Juli . 29 4 18	1415 188.179	+110	−21	0·4	0 21	—
102	−837 Juni . . 19, 5 40	1415 513.236	+95	−23	2·7	0 53	—
103*	−835 Mai... . 28, 15 3	1416 222.627	−40	−10	0·4	1 31	—
104*	−835 November. 21, 1 51	1416 399.077	+152	+18	1·7	0 43	—
105*	−833 April. . . 7, 15 4	1416 901.628	−40	−3	0·1	1 30	—
106*	−832 März ... 26, 16 34	1417 255.690	−68	+1	18·4	1 50	48
107	−832 September 20, 6 58	1417 433.290	+79	−4	17·4	1 40	45
108	−831 September 9, 13 38	1417 787.568	−24	9	0·0	0 20	—
109	−830 Februar. 4, 5 28	1417 935.228	+98	−10	0·4	0 21	—
110	−828 Jänner . 14, 8 14	1418 644.343	+57	+23	13·0	1 44	30
111	−828 Juli 8, 13 8	1418 820.547	−17	−24	15·1	1 40	30
112*	−826 Mai.......19, 14 38	1419 500.610	−40	−17	0·5	1 18	—
113	−825 November. 1, 11 41	1420 031.487	+5	+12	18·4	1 50	48
114	−824 October. 21, 3 26	1420 386.143	+129	+8	3·8	1 2	—
115	−822 August . 31, 9 12	1421 065.383	+42	−12	11·0	1 30	—
116	−821 Februar.. 24, 14 4	1421 242.586	−31	+13	10·8	1 40	43
117	−821 August ...20, 9 4	1421 419.378	+44	−10	17·3	1 40	45
118	−820 Februar. 14, 0 19	1421 597.203	+85	+10	1·1	0 35	—
119	−820 August . . 8, 11 31	1421 773.480	+7	−19	1·0	0 42	—
120	−819 Juni ... 29. 13 2	1422 098.543	−15	−24	1·3	0 38	—

Nr.	*T* Julianischer Kalender	Julianischer Tag	λ	δ	Grösse der gr. Phase	Halbe Dauer der Partial.	Halbe Dauer der Total.
121	819 December . 24, $6^{h}43^{m}$	1422 276.280	+ 79°	+24°	$12^{z}5$	$1^{h}40^{m}$	$0^{h}16^{m}$
122	—818 Juni . 19, 6 6	1422 453.254	+ 89	—23	17·7	1 50	46
123	—818 December . 13, 6 3	1422 630.252	+ 89	+23	16·0	1 47	41
124	—817 December . 2, 10 18	1422 984.429	+ 26	+21	1·7	0 43	—
125*	—815 October . 12, 2 31	1423 664.105	+142	+ 5	11·8	1 38	—
126*	—814 October . 1, 15 20	1424 018.639	50	0	17·8	1 50	46
127	813 März . . 27, 7 55	1424 165.330	+ 61	+ 1	3·9	1 3	—
128	811 Februar . 4, 5 31	1424 875.230	+ 97	+19	14·3	1 45	33
129	—811 Juli 30, 8 51	1425 051.369	+ 47	21	11·6	1 38	—
130*	—810 Jänner 24, 16 21	1425 229.681	— 65	+21	14·3	1 45	33
131	809 Juli . 6, 13 3	1425 766.544	— 16	24	1·1	0 35	—
132	—808 November . 22, 7 35	1426 262.316	+ 66	+18	11·1	1 30	—
133	—807 Mai . . 19, 6 29	1426 440.270	+ 83	-17	21·2	1 52	51
134	—806 Mai . . . 8, 8 38	1426 794.360	+ 50	- 14	5·8	1 15	—
135	—806 November . 1, 12 14	1426 971.510	- 4	+12	3·9	1 3	—
136	—804 März . . 17, 6 50	1427 473.285	+ 77	+ 5	11·3	1 37	—
137	802 Februar 24, 14 37	1428 182.609	— 39	+13	1·8	0 44	—
138	800 Jänner . . 4, 14 36	1428 861.608	— 39	+24	12·2	1 40	10
139	800 Juni . . 29, 13 34	1429 038.565	— 23	24	16·5	1 48	42
140	—800 December . 23, 14 4	1429 215.586	— 31	+24	10·3	1 48	42
141	799 Juni 19, 5 25	1429 393.226	+ 96	23	12·6	1 41	17
142	797 April . 29, 4 19	1430 072.180	+115	11	5·5	1 13	—
143	797 October . 23, 11 18	1430 249.471	+ 10	+ 8	11·5	1 37	—
144	—796 April . . 17, 6 35	1430 426.274	+ 81	7	21·6	1 52	52
145*	795 April . . 6, 15 26	1430 780.643	— 51	3	5·2	1 12	—
146	—795 October . 1, 5 23	1430 958.224	+ 99	0	1·5	0 40	—
147	—793 Februar . 15, 13 45	1431 460.573	— 26	+16	13·7	1 43	28
148	—792 Juli 30, 4 21	1431 991.181	+115	21	18·0	1 50	47
149	—790 Juni . 10, 4 47	1432 671.199	+108	—22	3·0	0 50	—
150*	—790 December . 3, 16 11	1432 847.674	63	+21	11·2	1 37	—
151	—789 Mai . . 30, 13 5	1433 025.545	— 16	—20	19·4	1 50	49
152	—789 November . 23, 5 23	1433 202.224	+ 96	+19	18·5	1 50	48
153*	788 Mai . . . 18, 15 0	1433 379.625	45	17	7·6	1 24	
154	—786 März . 28, 14 36	1434 058.608	- 39	+ 1	10·3	1 34	—
155	—785 März . 18, 6 22	1434 413.265	+ 85	+ 5	18·9	1 50	49
156	—781 Juni . 30, 12 42	1435 978.529	— 10	—24	14·1	1 44	31
157	781 December . 24, 3 4	1436 155.128	+134	+24	1·6	0 45	—
158	—779 Mai . 6, 10 45	1436 657.448	+ 19	—14	3·6	1 1	—
159	—778 April . 28, 13 24	1437 011.558	21	- 11	21·2	1 52	51
160	—778 October . 23, 8 15	1437 189.344	+ 56	+ 8	18·3	1 50	48
161	—777 October . 12, 13 24	1437 543.558	— 21	+ 5	2·0	0 46	—
162	—774 Februar . 15, 8 18	1438 400.346	+ 55	+16	15·5	1 46	38
163	—774 August . 10, 12 13	1438 576.509	— 3	—19	19·0	1 50	49
164	—773 Juli . 31, 4 36	1438 931.192	+111	—21	3·5	1 0	—
165	772 Juni . 20, 11 50	1439 256.493	+ 3	—23	1·3	0 38	—
166*	772 December . 14, 0 43	1439 433.030	+109	+23	11·4	1 37	—
167	—771 December . 3, 14 14	1439 787.593	— 33	+21	18·4	1 50	48
168	—770 November 23, 5 57	1440 142.248	+ 91	+19	3·7	1 2	—
169	—768 October . 2, 8 23	1440 821.349	+ 54	+ 1	8·8	1 29	—
170	—767 März . 28, 14 23	1440 998.599	— 36	+ 1	20·2	1 51	50
171	—767 September 21, 7 39	1441 175.319	+ 65	— 4	19·7	1 51	50
172	—766 März . . 18, 6 40	1441 353.278	+ 80	+ 5	3·8	1 2	—
173	—766 September 10, 10 39	1441 529.444	+ 20	— 8	4·5	1 7	—
174	—764 Jänner 26, 5 56	1442 032.247	+ 91	+21	11·5	1 37	—
175	—764 Juli . . 21, 4 49	1442 209.201	+108	—23	13·4	1 43	26
176	—763 Jänner 14, 5 51	1442 386.244	+ 92	+23	16·9	1 49	44
177	—762 Jänner 3, 11 30	1442 740.479	+ 8	+24	2·1	0 47	—
178	—761 November 14, 4 57	1443 420.206	+106	+16	11·3	1 37	—
179*	—760 November . 2, 16 45	1443 774.698	— 71	+12	18·2	1 50	47
180	—759 April . . 28, 6 19	1443 951.263	+ 85	—11	8·5	1 28	—

Nr.	*T*		λ	δ	Grösse der gr. Phase	Halbe Dauer der Partial.	Halbe Dauer der Total.
	Julianischer Kalender	Julianischer Tag					
181	−757 März … 9, 5^h57^m	1444 631.248	+ 91°	+ 8°	11″8	1^h38^m	—
182	−757 September 1, 7 52	1444 807.328	+ 62	−12	8·5	1 28	—
183*	−756 Februar. 26, 16 0	1444 985.667	− 60	+12	10·5	1 48	0^h42^m
184	−755 August. 16, 12 35	1445 516.524	− 9	−19	4·7	1 9	—
185	−754 December. 25, 9 13	1446 018.384	+ 42	+24	11·2	1 37	—
186*	−752 Juni …. 9, 3 33	1446 550.148	+127	−22	11·8	1 38	—
187	−752 December. 3, 14 47	1446 727.616	− 42	+21	3·8	1 2	—
188	−750 April ….19, 5 51	1447 229.244	+ 92	− 8	7·5	1 23	—
189*	−750 October…13, 16 15	1447 406.677	− 64	+ 5	8·1	1 26	—
190*	−749 October… 2, 15 26	1447 760.643	− 51	+ 1	20·3	1 51	50
191	−748 März ….28, 14 36	1447 938.608	− 39	+ 1	4·6	1 10	—
192	−746 Februar. 5, 13 35	1448 617.566	− 24	+16	10·9	1 36	—
193	−746 August. 1, 12 40	1448 794.528	− 10	−21	12·2	1 40	10
194	−745 Jänner 25, 13 44	1448 971.572	− 26	+21	17·6	1 50	46
195*	−745 Juli. 22, 3 22	1449 149.140	+130	−23	16·8	1 49	43
196	−743 November. 24, 13 47	1450 005.574	− 27	+16	11·1	1 36	—
197*	−742 Mai… 20, 3 1	1450 182.126	+135	−18	17·7	1 50	46
198*	−742 November. 14, 1 16	1450 360.053	+101	+16	18·4	1 50	48
199	−741 Mai… 6, 13 36	1450 536.567	− 24	−14	10·2	1 34	—
200	−741 November. 3, 5 31	1450 714.230	+ 67	+12	2·2	0 48	—
201	−739 März … 19, 13 52	1451 216.578	− 28	+ 4	10·6	1 36	—
202*	−739 September 11, 15 56	1451 392.664	− 59	− 8	7·8	1 25	—
203	−738 September 1, 4 31	1451 747.188	+112	−12	20·8	1 52	51
204*	−735 Jänner. 4, 17 41	1452 603.737	− 85	+24	11·1	1 36	—
205	−735 Juli 1, 8 44	1452 781.364	+ 49	−24	13·7	1 43	28
206	−735 December. 25, 7 47	1452 958.324	+ 63	+24	18·6	1 50	48
207	−734 Juni 20, 9 52	1453 135.411	+ 32	−23	13·5	1 43	27
208	−732 April.. 29, 13 21	1453 814.556	− 20	−11	6·0	1 16	—
209	−731 April… 19, 5 59	1454 169.249	+ 90	− 8	22·7	1 52	52
210*	−730 October. 2, 2 56	1454 706.122	+136	+ 1	5·6	1 14	—
211	−727 August. 1, 10 54	1455 734.454	+ 17	−21	18·2	1 50	47
212	−726 Jänner.. 25, 4 0	1455 911.167	+126	+21	3·0	0 56	—
213	−724 Mai… 30, 9 42	1456 767.404	+ 35	−26	15·9	1 47	46
214	−724 November. 24, 9 43	1456 945.405	+ 34	+19	18·3	1 50	48
215	−723 November. 13, 13 38	1457 299.568	− 24	+16	2·2	0 48	—
216	−720 März. 19, 7 0	1458 156.292	+ 75	+ 4	18·7	1 50	48
217	−720 September 11, 12 53	1458 332.537	− 13	− 8	21·4	1 52	51
218	−719 März … 8, 9 19	1458 510.388	+ 40	+ 9	1·6	0 42	—
219	−719 September 1, 5 4	1458 687.211	+104	−12	6·3	1 17	—
220	−717 Jänner …16, 2 10	1459 189.090	+148	+23	11·0	1 36	—
221*	−717 Juli 12, 15 23	1459 366.641	− 51	−24	12·0	1 39	—
222*	−716 Jänner 5, 16 32	1459 543.689	− 68	+24	18·8	1 50	49
223	−716 December. 25, 8 21	1459 898.348	+ 55	+24	3·8	1 2	—
224	−714 November. 4, 8 18	1460 577.346	+ 55	+13	7·6	1 24	—
225	−713 April. 30, 13 38	1460 754.568	− 24	−12	21·2	1 52	51
226	−713 October. 24, 7 26	1460 931.310	+ 68	+ 9	20·9	1 52	51
227	−712 April. …16, 7 53	1461 106.245	+ 62	− 8	7·7	1 24	—
228	−712 October. 12, 11 18	1461 285.471	+ 10	+ 5	6·0	1 16	—
229	−710 Februar. 27, 4 19	1461 788.180	+115	+12	9·0	1 36	—
230	−710 August. 23, 4 45	1461 965.198	+106	−15	10·1	1 33	—
231	−709 Februar. 16, 5 11	1462 142.216	+102	+15	18·6	1 50	49
232	−708 Februar. 5, 12 14	1462 496.510	− 4	+19	3·6	1 1	—
233	−707 December. 16, 7 13	1463 176.301	+ 72	+23	11·2	1 37	—
234*	−705 Mai… 31, 4 5	1463 707.170	+119	−20	13·6	1 43	28
235	−703 April… 10, 5 10	1464 387.215	+103	− 2	7·9	1 25	—
236	−703 October… 3, 8 33	1464 563.356	+ 52	+ 1	7·0	1 21	—
237	−702 März … 30, 14 14	1464 741.593	− 33	0	20·1	1 51	50
238	−701 September 12, 13 28	1465 272.561	− 22	− 7	7·0	1 21	—
239	−699 Jänner.. 26, 10 31	1465 774.438	+ 22	+22	10·8	1 35	—
240*	−698 Jänner 16, 1 9	1466 129.048	+103	+23	18·9	1 50	49

Nr.	T Julianischer Kalender	T Julianischer Tag	λ	δ	Grösse der gr. Phase	Halbe Dauer der Partial.	Halbe Dauer der Total.
241*	−697 Jänner 5, 17^h 0^m	1466 483.708	−75°	+24°	3·9	1^h 3^m	—
242	−696 Mai 21, 4 3	1466 985.169	+119	−18	3·0	0 50	—
243*	−696 November 14, 10 16	1467 162.678	−64	+16	7·7	1 24	—
244	−695 November 3, 15 32	1467 516.647	−53	+12	21·1	1 52	0^h51^m
245	−694 April 30, 13 18	1467 694.554	−19	−12	9·1	1 30	—
246	−692 März 9, 11 31	1468 373.480	+7	+8	7·8	1 25	—
247	−692 September 2, 12 56	1468 550.539	−14	−11	9·1	1 30	—
248	−691 Februar 26, 12 43	1468 727.530	−11	+12	19·8	1 51	50
249*	−691 August 23, 2 20	1468 905.097	+145	−15	20·2	1 51	50
250	−690 August 12, 9 9	1469 259.381	+43	−18	2·8	0 54	—
251	−689 December 27, 15 56	1469 761.664	−59	+24	11·1	1 36	—
252	−688 December 16, 2 31	1470 116.105	+142	+23	18·4	1 50	48
253	−687 Juni 10, 11 15	1470 292.469	+11	−22	15·3	1 46	37
254	−687 December 5, 5 47	1470 470.241	+93	+22	2·2	0 48	—
255	−685 April 21, 12 37	1470 972.526	−9	−9	6·4	1 18	—
256	−684 October 3, 6 9	1471 503.256	+88	+1	22·4	1 52	52
257	−681 August 3, 5 7	1472 537.213	+103	−20	9·2	1 31	—
258	−680 Jänner 27, 9 45	1472 714.406	+34	+21	19·3	1 50	49
259	−680 Juli 22, 5 27	1472 891.227	+98	−23	18·7	1 50	48
260*	−679 Jänner 10, 1 36	1473 069.067	+150	+23	4·2	1 5	—
261	−679 Juli 11, 8 34	1473 245.357	+51	−24	2·7	0 53	—
262	−678 Juni 1, 11 25	1473 570.476	+9	−20	1·3	0 38	—
263	−677 Mai 22, 4 36	1473 925.192	+111	−18	17·9	1 50	47
264	−676 November 3, 4 12	1474 456.175	+117	+12	6·4	1 18	—
265	−673 September 3, 10 15	1475 490.427	+20	−11	21·1	1 52	51
266	−672 Februar 27, 4 22	1475 667.182	+114	+11	5·3	1 12	—
267*	−670 Jänner 7, 0 32	1476 347.022	+172	+23	10·9	1 30	—
268	−670 Juli 2, 6 14	1476 523.260	+86	−24	11·1	1 36	—
269	−670 December 27, 10 47	1476 701.449	+18	+24	18·2	1 50	47
270	−669 December 16, 13 44	1477 055.572	−26	+23	2·3	0 49	—
271	−668 Juni 10, 11 21	1477 232.473	+10	−22	1·3	0 38	—
272*	−667 October 25, 1 36	1477 734.067	+150	+9	6·5	1 18	—
273	−666 April 21, 4 16	1477 912.178	+116	−9	21·1	1 52	51
274	−666 October 14, 14 53	1478 088.620	−43	+5	22·5	1 52	52
275	−665 April 10, 6 1	1478 266.251	+90	−5	6·2	1 17	—
276	−665 October 4, 6 43	1478 443.280	+79	+1	7·9	1 25	—
277	−663 Februar 17, 3 4	1478 945.128	+134	+15	9·5	1 31	—
278	−663 August 13, 12 9	1479 122.506	−2	−18	7·6	1 24	—
279	−662 August 2, 12 16	1479 479.511	−4	−20	20·3	1 51	50
280	−661 Jänner 27, 10 11	1479 654.424	+27	+21	4·3	1 6	—
281	−660 December 6, 8 18	1480 333.340	+55	+22	7·4	1 23	—
282	−659 Juni 1, 12 1	1480 501.500	0	−20	16·2	1 47	42
283	−659 November 25, 7 47	1480 687.324	+63	+19	21·4	1 53	51
284*	−658 Mai 22, 3 50	1480 865.160	+122	−18	12·6	1 41	17
285	−658 November 14, 12 45	1481 041.531	−11	+16	6·6	1 19	—
286	−656 September 24, 5 57	1481 721.248	+91	−3	7·7	1 24	—
287	−655 März 20, 3 30	1481 898.140	+127	+4	22·0	1 52	52
288	−655 September 13, 18 22	1482 075.765	−95	−7	21·8	1 52	52
289	−654 März 9, 12 17	1482 252.512	−4	+8	6·4	1 18	—
290	−652 Jänner 18, 9 0	1482 932.375	+45	+22	10·7	1 35	—
291	−652 Juli 12, 13 19	1483 108.555	−20	−24	9·5	1 31	—
292*	−649 Mai 13, 3 3	1484 143.127	+134	−16	3·1	0 57	—
293	−649 November 5, 10 11	1484 319.424	+27	+13	6·7	1 19	—
294	−648 Mai 1, 11 2	1484 497.460	+14	−12	19·4	1 50	49
295	−647 April 20, 12 39	1484 851.527	−10	−9	7·8	1 25	—
296*	−647 October 14, 15 30	1485 028.646	−53	+5	7·9	1 25	—
297	−645 Februar 28, 11 10	1485 530.465	+13	+12	8·8	1 29	—
298	−644 Februar 18, 2 40	1485 885.111	+140	+15	20·6	1 52	51
299	−642 December 17, 16 11	1486 918.674	−63	+23	7·2	1 22	—
300	−641 December 6, 15 50	1487 272.660	−58	+22	21·3	1 52	51

Nr.	T Julianischer Kalender			T Julianischer Tag		γ	δ	Grösse der gr. Phase	Halbe Dauer der Partial.	Halbe Dauer der Total.
301	—640	Juni 1.	$10^{h}58^{m}$	1487	450.457	+ 15°	—20°	14·2	$1^{h}44^{m}$	$0^{h}32$
302	—638	April . 11.	8 8	1488	129.339	+ 58	— 5	3·3	0 58	—
303	—638	October . 5.	14 37	1488	306.609	— 39	+ 2	7·4	1 23	—
304	—637	März . . . . 31.	10 42	1488	483.446	+ 19	— 1	20·6	1 52	51
305*	—637	September 25.	2 31	1488	661.105	+142	— 2	22·2	1 52	52
306	—636	September 13.	7 34	1489	015.315	+ 07	— 7	5·6	1 14	—
307*	—634	Jänner . . 28.	17 27	1489	517.727	— 82	+21	10·2	1 34	—
308	—633	Jänner . . . 18.	3 12	1489	872.133	+132	+22	18·8	1 50	49
309	—633	Juli . . . 13.	9 24	1490	048.392	+ 39	—24	20·0	1 51	50
310	—632	Jänner . 7.	5 33	1490	220.231	+ 07	+23	2·7	0 53	—
311	—631	Mai . . . . . . 23.	10 8	1490	728.422	+ 28	—18	1·4	0 39	—
312	—630	November. 5.	8 33	1491	250.356	+ 52	+13	22·2	1 52	52
313*	—627	September 4.	2 48	1492	293.117	+138	—11	5·3	1 12	—
314	—626	Februar. . . 28.	11 0	1492	470.458	+ 15	+12	21·5	1 52	51
315*	—626	August . . . 24.	2 31	1492	647.105	+142	—15	21·2	1 52	51
316	—625	Februar. 18.	2 56	1492	825.122	+136	+15	5·5	1 13	—
317	—625	August . 13.	6 17	1493	001.262	+ 86	—18	6·9	1 20	—
318*	—623	Juni . . . . 23.	2 48	1493	681.117	+138	—23	13·2	1 42	24
319	—622	December . 6.	5 46	1494	212.240	+ 94	+22	6·6	1 19	—
320*	—620	April . . . . . 21.	14 50	1494	714.618	— 42	— 9	1·6	0 42	—
321	—619	October. 5.	10 48	1495	246.450	+ 18	+ 2	22·0	1 52	52
322	—618	März . . . . 31.	3 45	1495	423.156	+124	— 1	8·9	1 30	—
323*	—618	September 24.	15 19	1495	600.638	— 50	— 3	6·1	1 16	—
324*	—616	Februar . . 9.	1 48	1496	103.075	+153	+17	9·0	1 32	—
325*	—616	August . . 3.	4 0	1496	279.167	+120	—20	6·7	1 19	—
326	—615	Jänner . . 28.	11 10	1496	457.465	+ 13	+21	19·1	1 50	49
327	—614	Jänner . . . . 17.	13 19	1496	811.555	— 20	+22	2·9	0 55	—
328	—614	Juli . . . . . . 13.	9 55	1496	988.413	+ 31	—24	5·6	1 14	—
329	—613	November. 27.	3 32	1497	490.147	+127	+20	6·9	1 20	—
330*	—612	November 15.	17 27	1497	844.727	— 82	+16	22·2	1 52	52
331	—611	November. 5.	9 9	1498	199.381	+ 43	+13	8·4	1 28	—
332	—609	März . . 22.	3 4	1498	701.128	+134	+ 3	6·7	1 19	—
333	—609	September 15.	10 21	1498	878.431	+ 25	— 0	4·3	1 6	—
334	—608	September 3.	9 56	1499	232.414	+ 31	—11	20·2	1 51	50
335	—607	Februar. 28.	11 5	1499	410.462	+ 14	+12	6·3	1 17	—
336	—607	August . 23.	13 54	1499	586.579	— 28	—15	8·0	1 26	—
337	—605	Jänner 8.	7 55	1500	089.330	+ 01	+23	6·9	1 20	—
338	—605	Juli . . . . . 4.	10 16	1500	266.428	+ 26	—24	11·5	1 37	—
339	—605	December. 28.	8 1	1500	443.334	+ 00	+24	21·5	1 52	51
340	—604	December. 16.	14 14	1500	797.593	— 33	+23	6·8	1 20	—
341	—602	October . 27.	8 0	1501	477.333	+ 00	+10	6·8	1 20	—
342	—600	April . . . 10.	11 20	1502	008.472	+ 10	— 5	10·5	1 34	—
343	—598	Februar. 19.	10 0	1502	688.417	+ 30	+14	8·9	1 30	—
344	—598	August . 14.	11 36	1502	864.483	+ 6	—17	5·6	1 14	—
345	—595	December . 7.	12 9	1504	075.506	— 2	+22	6·9	1 20	—
346	—594	Juni . . . . 3.	6 46	1504	253.282	+ 78	—21	13·8	1 44	29
347	—594	November. 27.	2 18	1504	430.096	+145	+20	22·3	1 52	52
348	—593	Mai. . . 23.	7 55	1504	607.330	+ 01	—19	13·0	1 43	28
349	—591	April . . 1.	10 51	1505	286.452	+ 17	— 2	5·8	1 15	—
350	—590	März . . . . 22.	3 14	1505	641.135	+131	+ 2	22·0	1 52	52
351	—587	Jänner . . . . 18.	15 36	1506	674.650	— 54	+21	6·5	1 18	—
352	—586	Jänner . . . . 7.	15 59	1507	028.666	— 66	+22	21·7	1 52	52
353	—586	Juli . . . . . . 4.	8 21	1507	206.348	+ 55	—24	18·6	1 50	48
354*	—584	November. 6.	16 47	1508	062.699	— 72	+15	6·7	1 19	—
355	—583	Mai. . . . . . . 2.	7 48	1508	239.325	+ 63	—13	16·1	1 47	41
356	—583	October . . . 27.	3 33	1508	417.148	+127	+11	21·3	1 52	51
357	—582	October . . . 16.	7 0	1508	771.292	+ 73	+ 7	6·8	1 20	—
358	—579	Februar. . . 19.	2 50	1509	628.118	+138	+13	20·5	1 51	50
359	—579	August . . . 14.	8 47	1509	804.366	+ 48	—17	21·7	1 52	52
360	—578	Februar. . . 8.	4 32	1509	982.189	+112	+17	4·2	1 5	—
361	—576	Juni . . . . . . 13.	13 13	1510	838.551	— 18	—22	12·0	1 39	—
362	—576	December . 7.	11 8	1511	015.464	+ 13	+22	22·2	1 52	52
363*	—575	Juni . . . . . . 2.	14 17	1511	192.595	— 34	—21	15·4	1 46	38
364	—575	November. 27.	2 44	1511	370.114	+139	+20	8·1	1 26	—

Ich glaube, dass dem Historiker die Zusammenstellung sämmtlicher in Ninive sichtbarer Sonnen und Mondesfinsternisse sehr erwünscht sein werden.

Wie die Abhandlung „The astronomy and astrology of the Babylonians" Vol. III aus den „Transactions of society of Biblical Archeology" beweist, besitzen wir eine grosse Zahl Aufzeichnungen von Finsternissen. Diese zu identificiren ist dem Astronomen unmöglich, weil nähere Zeitangaben, die einzigen Anhaltspunkte für ihn, bei ihrer Erwähnung fehlen. Dem Historiker stehen aber noch andere Mittel zur Verfügung. Ich erwähne zum Beispiel die Ähnlichkeit der Handschrift, die Hinks in einer Abhandlung, auf die ich weiter unten zurückkommen werde, für die Zeit des Stattfindens der dort behandelten Mondesfinsternisse als sehr gewichtigen Grund anführt. Da aus dem obigen Verzeichniss zu ersehen ist, dass im Durchschnitt nur wenige Sonnenfinsternisse innerhalb Decennien sichtbar sind — Finsternisse, welche die Grösse von 5′ nicht erreichen, können als nicht sichtbar für das unbewaffnete Auge betrachtet werden — dürfte es dem Historiker, wenn ihm das Verzeichniss sämmtlicher Finsternisse vorliegt, möglich sein aus der näherungsweisen Zeitangabe, die er sich vielleicht aus Nebenumständen verschaffen kann, einige von den in der oben erwähnten Abhandlung angezeigten Finsternissen zu identificiren.

So viel mir bekannt, wurden von sämmtlichen in meinem Verzeichniss angeführten Sonnenfinsternissen nur zwei mit Finsternissen, deren in assyrischen Quellen Erwähnung geschieht, als identisch erkannt.

Erstere fällt auf das Datum —762 Juni 14. Die grösste Phase fand statt um $23^h 4^m$ und die Grösse betrug 11·2 Zoll. Auf diese von Oppolzer in seiner Abhandlung „Sonnenfinsternisse des Schu-king" Berlin 1880 besprochenen Finsterniss werde ich weiter unten noch zurückkommen. Die näheren Umstände der zweiten Sonnenfinsterniss wurden von Bernhard Schwarz in der Abhandlung „Astronomische Untersuchungen über eine von Archilochus und eine in einer assyrischen Inschrift erwähnte Sonnenfinsterniss" Wien 1883 mitgetheilt. Die assyrische Inschrift, welche zur Aufsuchung dieser Finsterniss veranlasste, setze ich nach Oppert's Übersetzung hier an:

„Im Monat Tamūz fand eine Finsterniss des Herrn des Tages, des Gott des Lichtes statt. Die untergehende Sonne liess davon ab zu leuchten, und wie diese liess auch ich davon ab, während . . . . Tage den Krieg gegen Elam zu beginnen".

Schwarz kommt zu dem Resultat, dass die Finsterniss, auf die sich diese Inschrift bezieht, nur die Finsterniss des Jahres —660 Juni 27. gewesen sein könne. Auf seine nähere Begründung gehe ich nicht ein und erwähne nur, dass sich in meinem Verzeichniss der Sonnenfinsternisse keine andere vorfindet, welche die gestellten Bedingungen auch erfüllt.

Von den oben mitgetheilten assyrischen Mondesfinsternissen wurden vier bereits früher ausführlich bearbeitet.

Die Finsterniss Nr. 216: —720 März 19, Nr. 218: —719 März 8, Nr. 219: —719 Sept. 1,
Nr. 320*: —620 April 21,

und zwar von Zech in der Preisschrift „Astronomische Untersuchungen über die Mondesfinsternisse des Amagest" Leipzig 1851 und Oppolzer im Anhang I zu den „Syzygien Tafeln" Leipzig 1881.

Zum Schluss will ich zwei Fragen erörtern, von denen die erste sich auf Sonnenfinsternisse, die zweite auf Mondesfinsternisse beziehen, deren in alten Quellen Erwähnung geschieht.

Da die erste Frage in einem Schreiben des Herrn Dr. Krall mir vorliegt, will ich dessen Inhalt hier wiedergeben, damit das Wesentliche der Frage klar wird.

„Noch nicht entschieden ist die Frage, ob die in den assyrischen Annalen erwähnte Sonnenfinsterniss:

— Im Monat Sivan erlitt die Sonne eine Verfinsterung —

in das Jahr 762 oder in das Jahr 808 vor Christi gehört.

Mit dieser Frage steht eine andere in Verbindung. Der assyrische König Azurnazirhabal erwähnt in seinen Annalen: „Beim Beginn meiner Herrschaft, in meinem ersten Jahre (geschah es) dass die Sonne, die Herrscherin der Welt, ihren günstigen Schatten auf mich warf, und ich voller Majestät auf den Thron mich setzte."

Azurnazirhabal's Regierungsantritt kann wegen der Unsicherheit, in welches Jahr die erst erwähnte Finsterniss fällt, zweifach angesetzt werden. Geht man vom Jahr —762 aus, so fällt sein erstes

Regierungsjahr in das Jahr 1883 vor Christi. Geht man dagegen vom Jahr —808 aus, so fiele es in das Jahr —929. Da die Bemerkung „Bei Beginn meiner Herrschaft“ auf die Zeit hinweist, die von dem Tag der Thronbesteigung bis auf dem 1. Nisan des ersten Jahres des Königs verstrichen war, käme im ersten Fall das Jahr —884, im zweiten Fall das Jahr —930 in Betracht.

Berücksichtigt man ferner, dass in der Zählung der Eponymen immerhin einzelne kleine Irrthümer vorliegen können, so erweitern sich die Fragen dahin:

War innerhalb der Jahre —885 bis —882 und —933 bis —928 in Ninive eine Sonnenfinsterniss sichtbar.“

Aus der oben angeführten Tafel entnehme ich folgende vier Sonnenfinsternisse:

Nr.	Datum		Zeit	Grösse	Nr.	Datum		Zeit	Grösse
10	—931 Jänner	20	$3^h 45^m$	$11^{\text{z}}5$	24	—884 Juli	12	$2^h 34^m$	$9^{\text{z}}8$
49	—808 Juni	12	23 6	8·0	65	—702 Juni . .	14	23 4	11·2

Da für die Jahre —808 und —762 der Jahresanfang beziehungsweise auf den 16. und 18. März fällt, der Sivan aber der dritte Monat ist, genügen beide Finsternisse (Nr. 49 und 65) der Bedingung, die durch den Wortlaut der ersten Stelle des Textes gestellt ist.

Was ferner die Frage betrifft, ob die Finsterniss Nr. 49 oder 65 diejenige ist, deren in der erstmitgetheilten Stelle Erwähnung geschieht, so fällt die Möglichkeit der präcisen Beantwortung dieser Frage aus der Bedingung, dass der ersten Finsterniss eine zweite in einer Zwischenzeit von beiläufig 122 Jahren entsprechen soll, ebenfalls weg, da diese Bedingung in beiden Combinationen erfüllt wird. Eine Entscheidung vom astronomischen Standpunkt ist also nicht möglich.

In dem zweiten Beispiel will ich von der oben gegebenen Zusammenstellung der in Ninive sichtbaren Mondesfinsternisse Gebrauch machen. Einer an die Akademie der Wissenschaften in Berlin gerichteten Mittheilung des Herrn Edw. **Hinks** entnehme ich folgende englische Übersetzung einer assyrischen Inschrift:

„In the month Nisan, of the fourteenth day, the moon was eclipsed“

„In the month Tisri, the moon was eclipsed... The moon emerged from the shadow, while the sun was rising“.

„In the month Sabat the moon was eclipsed.“

Ich füge hier noch ein, dass Herr **Hinks** für die Zeit des Stattfindens dieser Finsternisse nur den Zeitraum von —750 bis —650 berücksichtigt, und ich daraus zu entnehmen glaube, dass weitere Grenzen zu ziehen, aus historischen Gründen nicht zulässig ist.

Bevor ich aber auf die Besprechung der in Betracht kommenden Finsternisse übergehe, will ich noch Einiges über den assyrischen Kalender vorausschicken, das ich ebenfalls der Mittheilung des Herrn Dr. Jakob **Krall** verdanke.

Wie schon oben bemerkt, war für die assyrische Zeitrechnung der Mond massgebend, und es ist auch erwiesen, dass sie durch Schaltung das Zurückbleiben des Mondjahres gegen das Sonnenjahr ausgeglichen haben. In welcher Weise diese Schaltung aber vor sich ging, darüber fehlen bestimmte Angaben.

Ferner ist noch zu erwähnen, dass der Anfang des assyrischen Jahres wahrscheinlich auf den ersten Neumond vor dem Frühlingsäquinoctium fiel, der Beginn der einzelnen Monate wohl durch das erste Sichtbarwerden der Mondsichel bedingt war.

Da der Nisan der Name des ersten, Tisri des 7. und Sabat des 11. Monats ist, also alle innerhalb eines Jahres fallen, ferner in der Tafel über die Jahre keine Angaben gemacht sind, schien es mir eine Hauptbedingung zu sein, dass diese Finsternisse innerhalb eines Zeitraumes fallen, der mit Zuhilfenahme von Schaltmonaten — ohne diese ist die Möglichkeit überhaupt ausgeschlossen — die Grenzen eines assyrischen Jahres nicht überschreitet. Da die Anwendung eines Schaltmonates aber ein Zufrüheintreten des Jahresanfangs voraussetzt, ja überhaupt nur in diesem Fall das Einschalten eines Monates erlaubt sein kann, so ist die Annahme, dass der Jahresanfang vor dem, dem Frühlingsäquinoctium vorangehenden Neumond eintrat, erlaubt, und es hat keine Bedenken die Bedingung fallen zu lassen, die die erste Textstelle festsetzt, dass nämlich die erste Finsterniss am 21. Tag nach dem Neumond stattfand, welcher der Frühlings-Tag- und Nachtgleiche vorangeht.

Berücksichtigt man ferner, dass gesagt wird, die zweite Finsterniss habe an einem Morgen des Monates Tisri stattgefunden, so können zwei Zusammenstellungen von Finsternissen in Betracht kommen, nämlich Nr. 192, 193, 194 und Nr. 246, 247, 248, die ich hier nochmals ansetze:

Nr.	Datum	Uhr	Dauer	Nr.	Datum	Uhr	Dauer
192	—746 Februar. . . 5	13^h35^m	3^h12^m	246	—692 März . . . 9	11^h31^m	2^h50^m
193	—746 August . . . 1	12 40	3 20	247	—692 September . . 2	12 56	3 0
194	—745 Jänner . . 25	13 44	3 40	248	—691 Februar. . . . 20	12 43	3 42

Da die Zwischenzeit der Finsternisse von Nr. 193 und 194, ferner von Nr. 247 und 248 ungefähr 180 Tage beträgt, könnte diesen beiden Combinationen nur durch die Annahme genügt werden, dass nach dem siebenten Monat zwei Schaltmonate eingefügt worden waren.

Abgesehen davon, dass eine solche Schaltung nach dem, was ich über die assyrische Zeitrechnung bei den Historikern erwähnt fand, unzulässig ist, fällt die Möglichkeit einer solchen Annahme auch deshalb weg, da der Zweck, das Sonnenjahr mit dem Mondjahr in Einklang zu bringen, durch eine solche Schaltung im Jahr —746 und —692 nicht erreicht worden wäre.

Die drei Finsternisse können also in einem Jahre nicht stattgefunden haben.

In derselben Mittheilung, deren ich die Übersetzungen der Quellenstellen entnommen habe, vertritt Hinks die Ansicht, dass diese Finsternisse identisch seien mit den Mondfinsternissen:

—701 März 20
—701 Sept. 13
—699 Jän. 27

Der zweiten und dritten Finsterniss entsprechen Nr. 238 und 239 meines Verzeichnisses. Die Finsterniss vom Jahre —701 März 19 war aber ihrem ganzen Verlauf nach in Ninive nicht sichtbar, findet sich daher in der Zusammenstellung nicht vor. Die näheren Daten dieser Finsterniss lauten:

T	Julianischer Tag	λ	δ	Grösse	Halbe Dauer der Partial.
—701 März 19, . . . 16^h21^m	1465 095.081	—05	+4	3.0	0^h56^m

Unter Beibehaltung der Finsternisse Nr. 238 und Nr. 239 käme für die erste Finsterniss: Nr. 237 die Mondfinsterniss des Jahres —702 März 30 in Betracht.

Da der erste Neumond vor der Frühlings-Tag- und Nachtgleiche des Jahres —702 auf den 15. März fällt, so fällt die Finsterniss der Zeitangabe der Inschrift nahe entsprechend, in die Mitte des Monates Nisan.

Stellt man die drei Finsternisse zusammen, so ergibt sich nun die Combination:

—702 März 30, 14^h14^m
—701 Sept. 12, 13 28
—699 Jän. 26, 10 31.

Aus dem Verzeichniss der Mondfinsternisse kann man ersehen, dass innerhalb des Zeitraumes von —750 bis —650 mehrere Combinationen allen den gestellten Bedingungen genügen und ebenfalls keinen längeren Zeitraum als zwei oder drei Jahre in Anspruch nehmen.

Der Zeitpunkt, wann obige Finsternisse stattfanden, lässt sich also nicht fixiren, wenn man hier davon absieht, dass vielleicht eine oder die andere Combination aus historischen Gründen grössere Wahrscheinlichkeit für sich hat.

SÜDJAPANISCHE ANNELIDEN.

BEARBEITET VON

DR. EMIL v. MARENZELLER.

II.

AMPHARETEA, TEREBELLACEA, SABELLACEA, SERPULACEA.

(Mit 4 Tafeln.)

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 3. JULI 1884.

Im Folgenden wird der Rest des im I. Theile[1] erwähnten Materiales beschrieben. Ausserdem wurden einschlägige Arten einer umfangreichen Sammlung entnommen, welche von Dr. Ludwig Döderlein in Japan gemacht und mir in entgegenkommender Weise im Vorjahre zur Bearbeitung überlassen wurde. Die gänzliche Durchführung der Untersuchung dieser dritten japanischen Anneliden-Sammlung dürfte noch einige Zeit in Anspruch nehmen. Dann erst will ich die in Aussicht gestellten allgemeinen Betrachtungen über diesen Theil der Fauna Japan's geben.

Von den 25 hier angeführten Arten sind 16 neu. Die neun anderen Arten waren bereits von anderen Punkten bekannt, so *Amage auricula* Mgrn., *Potamilla Torelli* Mgrn. aus den europäischen Meeren, *Amphitrite vigintipes*, Ehbg. Gr., *Leprea Ehrenbergi* Gr., *Pista fasciata* Ehbg. Gr. aus dem Rothen Meere, *Hypsicomus phaeotaenia* Schmarda von Ceylon, *Amphicteis angustifolia* Gr., *Loimia Montagui* Gr., *Nicolea gracilibranchis* Gr. von den Philippinen.

Fam. AMPHARETEA Mgrn.

AMPHICTEIS (Gr. p. p.) Char. emend. Mgrn.

Eine Ampharetea aus der Sammlung Dr. Döderlein's hat alle charakteristischen Eigenschaften vorstehender Gattung, allein die Fühlfäden sind nicht glatt, sondern gefiedert. Dies sah auch Haswell[2] an der von ihm beschriebenen *Amphicteis foliosa*, und Wirén[3] hat gleichfalls von seiner *Amphicteis Vega* angegeben,

[1] Diese Denkschriften, XLI. Bd. 1879. p. 109 ff.

[2] On some new Australian tubicolous Annelids. Proc. of the Linnean Soc. of New-South-Wales. Vol. VII. 1883. p. 636.

[3] Chaetopoder fran sibiriska ishafvet och Beringshaf insamlade under Vega-Exped. 1878—79 (ur Vega-Exped. Vetenskaplige Jaktagelser, Bd. II. Stockholm 1883. p. 415.

dass die Fühlfäden mit kurzen Cilien besetzt seien. Es ist somit zur Gattungsdiagnose Malmgren's hinzuzusetzen: Fühlfäden auch gefiedert.

Amphicteis angustifolia.

Taf. II, Fig. 5.

1878. *Sabellides angustifolia* Grube E. *Annulata Semperiana.* Mém. de l'Acad. imp. de sciences de St. Pétersbourg, VII. sér. Tom. XXV, Nr. 8, p. 206, Taf. XII, Fig. 1.

Wenn man Grube's Beschreibung seiner *Sabellides angustifolia* aufmerksam durchgeht und die Abbildung ansieht, wird man leicht inne, dass man es mit einer *Amphicteis*-Art, freilich ohne Nackenpaleen und mit gefiederten Fühlfäden, zu thun hat. Um diese Art unterzubringen, veränderte Grube die Gattung *Sabellides*, mit deren bisher bekannten Arten sie nicht die geringste Verwandtschaft besitzt.

Die Gesammtheit der Merkmale aber, welche Grube für seine *S. angustifolia* anführt, finde ich an jener *Amphicteis*, welche mir zur Erweiterung dieser Gattung Veranlassung gab, und ich kann deshalb nur annehmen, dass in dem Exemplare Grube's die kurzen, zarten Nackenpaleen abgestossen waren oder dass sie übersehen wurden.

Zwei Exemplare lagen mir vor. Das eine weniger gut conservirte, schlaffe Exemplar war 27^{mm} lang und 4^{mm} breit. Hievon entfallen 11^{mm} auf die 15 Segmente mit Borstenwülsten, welche auf das letzte Haarborsten tragende Segment folgen. Das Aftersegment fehlte. Das zweite stark contrahirte Exemplar war 33^{mm} lang, $3 \cdot 5^{mm}$ breit. Der gleiche Leibesabschnitt wie oben, aber mit Aftersegment, war 14^{mm} lang. Die Analcirren sind nicht viel länger als das vorhergehende Segment. Es sind somit, einschliesslich das Aftersegment, 36 Segmente vorhanden, wenn man die Segmente so auffasst, wie Malmgren. Nach Grube wären es 34, da er die drei ersten Segmente in eines zusammenzieht. Die 7—9 Paleen sind an der Basis $0 \cdot 03^{mm}$ breit, ragen $0 \cdot 63^{mm}$ vor und laufen in eine nicht sehr lange, feine, etwas nach der Seite gebogene Spitze aus. Die breitesten Haarborsten sind an der grössten Ausbauchung der Schneide $0 \cdot 07^{mm}$ breit (Fig. 5). Daneben nur halb so breite, aber mit ebenso breitem Schafte. Der Saum der Haarborsten ist nicht schmal, wie Grube angibt, und fein aber scharf gerieft. Die 4—5 zähnigen Hakenborsten (Fig. 5 *A*) zeigen in Obensicht die Zähne einzeln hintereinander folgend.

Gefunden von Dr. Döderlein bei Kagoshima in c. 10—20 Faden Tiefe und bei Kachigama (Tokio-Bai) in 10—20 Faden Tiefe in sandigem Boden.

Amage auricula.

Taf. II, Fig. 6.

1865. Malmgren J. Nordiska Hafs-Annulat. Öfvers. af kongl. Vetenskap. Akad. Förh. p. 371, Taf. XXV, Fig. 72.

Der Unterschied zwischen einer japanischen Amage, die mir in einem Exemplare vorlag, und der Beschreibung und Abbildung der europäischen *Amage auricula* — einen unmittelbaren Vergleich konnte ich leider nicht machen — beschränkt sich auf abweichende Verhältnisse der ersten Segmente und eine andere Form des vor dem ersten Zahne liegenden Randes der Hakenborsten. Die *Amage auricula* stellt sich als eine unter den anderen Amphareteen ziemlich isolirte Form dar. Wenn eine solche scharf ausgeprägte Form in einem Meere auftritt, wo bereits das Vorhandensein europäischer Arten nachgewiesen wurde, und ich an ihr die wesentlichen Merkmale alle erhalten sehe, kann ich mich nicht zur Aufstellung einer eigenen Art auf Grund von Differenzen entschliessen, die sich durch, theils in der Beschaffenheit der Objecte, theils in der Wiedergabe des Beobachteten liegende, Zufälligkeiten erklären lassen.

Das Exemplar war 12^{mm} lang, 4^{mm} breit. Die grösste Breite trat in der Höhe des 7. Segmentes auf. Der Vorderrand des Kopflappens ist leicht ausgerandet, der vor den kleinen Erhebungen auf seiner oberen Fläche liegende Theil kürzer als aus der Abbildung Malmgren's zu ersehen; dadurch erscheint auch der hinter jenem gelegene Theil im Verhältniss länger. Am Rücken ist das erste Segment sehr kurz, nur $0 \cdot 07^{mm}$ lang, ventralwärts verlängert es sich noch um $0 \cdot 16^{mm}$ zu einem dicken Lappen, der den Mund wie eine Unterlippe bedeckt. Der Lappen wird nach hinten von dem übrigen Theile des Segmentes durch eine Furche abgesetzt. Die Grenzen der folgenden Segmente sind am Rücken nicht deutlich. Ventral ist das zweite $0 \cdot 09^{mm}$, das dritte wie das vierte $0 \cdot 05^{mm}$, das fünfte $0 \cdot 09^{mm}$, das sechste doppelt so lang als das vorhergehende. Die hinteren Kiemen, welche etwas länger sind als die vorderen, reichen zurückgelegt bis zum 8. Borstenbündel. Unter den Haarborsten kann man sehr lange, mit breiterem dünnem und glattem Saume und wenig vorragende und nur halb so breite unterscheiden. Die Stärke des Schaftes ist bei beiden gleich. Die Breite des ersteren (Fig. 6) beträgt an der Stelle, wo der Saum auftritt, $0 \cdot 015^{mm}$. An den Hakenborsten (Fig. 6 *A*) sehe ich in Obensicht fünf Reihen von Zähnchen. In den zwei ersten Reihen steht nur je ein Zähnchen, in der dritten Reihe zwei, in der vierten zwei oder auch daneben noch ein drittes kleines und ganz vorn finden sich drei kleinste Zähnchen.

Die acht letzten Segmente ohne Haarborstenbündel waren 4^{mm} lang.

Gefunden von Dr. Döderlein bei Eno-sima in 100 Faden Tiefe.

Fam. TERELLACEA[1] Mgrn.

Amphitrite vigintipes.

Taf. I, Fig. 1.

1869. *Terebella vigintipes* Ehbg. Gr.; Grube Ed., Beschreibung neuer od. wenig bekannter, von Herrn Ehrenberg gesammelter Anneliden des Rothen Meeres. Monatsber. d. k. preuss. Akad. d. Wiss. Jahrg. 1869, p. 509. Berlin 1870.

Körper der stark contrahirten Thiere 30^{mm} lang, wovon 10^{mm} auf den mit Haarborstenbündeln versehenen Vorderleib entfallen, hinter den Kiemen mässig angeschwollen, an der breitesten Stelle 4^{mm} breit, nach hinten sich sehr langsam verschmälernd. 70—74 Segmente. Farbe gegenwärtig grauröthlich.

Der Kopflappen bildet seitlich einen derben, relativ hohen, stumpfkonischen Fortsatz, der die Basis der Fühlfäden bedeckt.

Die Fühlfäden farblos, einzelne leicht bräunlich angehaucht, breit, tiefrinnig, sehr lang. Die längsten sind länger als die Hälfte des Körpers.

An den Seiten des 2. und 3. Segmentes kurze, wulstartige Flankenlappen.

Die drei Paar Kiemen dichotomisch verzweigt. Die erste Kieme am buschigsten, die dritte in einem Falle auf nur wenige Endfäden reducirt. Der Stamm kurz. Er nimmt im Verlaufe eine horizontale Lage an, gibt zumeist von seinem oberen Umfange ein paar stärkere Äste ab und ist besonders an seinem Ende reichlicher ästig. Die Äste häufig nur einmal gegabelt oder zweimal, selten dreimal. Die Gabelung ist nicht regelmässig, indem oft ein Ast 2. oder 3. Ordnung ungegabelt bleibt, oder indem an einem der Endfäden in geringer Entfernung des Endes eine neue Gabelung stattfindet. Der Habitus erinnert an den der *Amphitrite groenlandica* Mgrn. Die Äste 2. und 3. Ordnung sehr kurz, die Endfäden in einem Exemplare bis 2^{mm} lang, in einem zweiten etwa halb so lang,

13 Bauchschilder. Deutlich abgegrenzt ist erst das zweite, welches dem dritten Segmente entspricht. Die ersten drei oder vier sind unbedeutend breiter als die folgenden, aber kürzer. Die übrigen zeichnen sich durch eine nahezu gleiche Breite aus, so dass selbst das letzte nur ein Weniges schmäler ist, als die vorhergehenden. Die Bauchschilder sind, die ersten ausgenommen, durchschnittlich $2^1/_2$—3 mal so breit als lang. Ihre Form ist quadratisch.

Nach aussen und unten von der 2. Kieme ist eine lange Papille bemerkbar, eine etwas kürzere steht nach unten von dem ersten Borstenhöcker. Kleine und schmale finden sich nach unten und aussen des 2., 3., 4., 5. Borstenhöckers, zwischen diesen und den Borstenwülsten. Es sind somit im Ganzen sechs Papillen vorhanden.

22 Borstenhöcker mit Säge-Haarborsten (Fig. 1).

[1] Vergl. die Systematik der Terebellen (Subf. *Amphitritea* Mgrn.) betreffend: Marenzeller E. v., Zur Kenntniss der adriatischen Anneliden. III. Beitrag. LXXXIX. Bd. d. Sitzungsb. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien. Jahrg. 1884, p. 151—214.

Die Borstenwülste sind vorn etwa $1^1/_2$ mal so hoch als die Bauchschilder breit und nehmen bis zum letzten Haarborstenbündel an Höhe langsam ab. Nach diesem, also vom 26. Segmente ab, werden sie nicht so auffallend und plötzlich niedriger als bei anderen *Amphitrite*-Arten, erheben sich auch nicht um in Flösschen überzugehen. Sie folgen dicht aufeinander. Erst etwa vom 45. Segmente an könnte man von kurzen Flösschen sprechen. Chitinöse Stützborsten. Die Hakenborsten (Fig. 1 *A*) vom 11. Segmente an in doppelter Stellung, halb gegenständig, in allen Borstenwülsten und Flösschen, die allerletzten ausgenommen. Die Spitze des grossen Zahnes ist stumpf.

Die *Terebella vigintipes* Ehbg. Gr. kenne ich aus, allerdings nicht sehr gut conservirten, Exemplaren von Tor am Rothen Meere. Ich fand an ihr die Charaktere der Gattung *Amphitrite* Mgrn., weiters dieselbe eigenthümliche Anordnung der Hakenborsten wie in der japanischen Form. Es ist also die Angabe Grube's, die Hakenborsten stünden in den Segmenten ohne Haarborstenbündel einreihig, richtig zu stellen und dieser Gegensatz in der Beschreibung Grube's mit meiner vorstehenden fällt. Dagegen sehe auch ich an den Exemplaren aus dem Rothen Meere nur 20 Borstenbündel, während an den drei japanischen Thieren 22 auftraten. Weitere bemerkenswerthe Unterschiede fielen mir jedoch nicht auf, und deshalb nahm ich die Identität mit der *Amphitrite vigintipes* Ehbg. Gr. an. Es ist übrigens bei *Amphitrite*-Arten ein Schwanken um ein oder zwei Haarborstenbündel nichts Ungewöhnliches. So gibt Quatrefages [1] bei seiner *Terebella modesta* aus der Bai von Jervis, einer *Amphitrite*, die vielleicht hieher gehört, 21, 22 Haarborstenbündel an. Grube [2] fand bei einer Nachuntersuchung der Originalexemplare 22, dann 24 und in einem dritten Exemplare auf einer Seite 20, auf der anderen 23. Verwandt mit *A. vigintipes* ist *A. rubra* Risso aus dem Mittelmeere wegen der gleichen Gruppirung der Hakenborsten, allein durch den abweichenden Bau der Kiemen und Hakenborsten, sowie die Zahl der Öffnungen der Segmentalorgane (14) leicht zu unterscheiden. Sie hat gewöhnlich 23 Haarborstenbündel, selten 22 oder 24.

Gefunden an der Ostküste der Insel Eno-sima (Dr. Koerbl); an Eno-sima während der Ebbe, im Hafen von Kagoshima (20—30 Faden). (Dr. Döderlein.)

Amphitrite ramosissima n. sp.

Taf. I, Fig. 2.

Körper 170^{mm} lang, wovon 46^{mm} auf den mit Haarborstenbündeln versehenen Theil entfallen, vorn hoch, hinter den Kiemen etwas angeschwollen, im 7. Segmente 15^{mm}, im 20. 8^{mm} breit, sodann langsam nach hinten sich verschmälernd. 110 Segmente. Farbe gegenwärtig grauröthlich.

Der Kopflappen bildet seitlich 2^{mm} lange und 3^{mm} hohe, abgerundete Läppchen.

Die Fühlfäden nur zum Theil erhalten, farblos, tiefrinnig. Die längsten (40^{mm}) reichen zurückgelegt bis in das 12. Segment.

Das 2. und 3. Segment tragen seitlich einen niederen, vorspringenden Lappen.

Drei Paar dichotomisch verzweigte, sehr buschige Kiemen. Die erste ist die am reichsten verzweigte, die zweite und dritte sind untereinander nahezu gleich gross. Der Stamm ist stark, aber sehr kurz. Es entstehen gleich ober der Basis nach hinten und innen seitliche Äste, die sich nicht wie bei anderen Arten sofort mehr minder regelmässig dichotomisch verzweigen, sondern meist wieder Äste zweiter Ordnung ansetzen und diese erst theilen sich in typischer Weise (bis 4mal). Dadurch entsteht ein auffallender Reichthum an Ästen und Zweigen und die Kieme geht stark in die Breite. Die Zweige sind bis zur nächsten Gabelung sehr kurz, so dass es nicht selten den Anschein hat, als stünden die Fäden an einem Zweigende gehäuft. Die Höhe der Kiemen beträgt 5—6^{mm}, die Länge der Endfäden nur 2^{mm}. Die Verästelung der Kiemen ähnelt sehr der von *Amphitrite Grayi* Mgrn., nur ist sie noch reicher und die Endgabeln sind viel kürzer. An einem kleinen unvollständigen Exemplare, das bei 22^{mm} Länge 44 Segmente hatte, war der Stamm der Kieme bald ober

[1] Hist. nat. d. Annelés. Tom. II, 1865, p. 365.

[2] Bemerkungen über Anneliden des Pariser Museums. Arch. f. Naturg. 36 Jahrg. 1870, p. 325.

der Basis mit Ästen besetzt. Diese nicht oft (höchstens 3mal) und nicht gleichmässig dichotomisch verzweigt. Zweige bis zur nächsten Gabelung länger als bei dem grossen Exemplare, Endgabeln ungleich, im Verhältnisse kurz.

13 Bauchschilder. Das erste, deutlicher abgegrenzte, im 3. Segmente liegende ist quadratisch, schmäler als die folgenden. An diesen sind die äusseren Enden zugespitzt, nicht abgestutzt wie bei anderen *Amphitrite*-Arten. An dem 9. Bauchschilde nimmt die Breite ab. Im 12. beträgt sie etwas mehr als die Hälfte des 7. Bauchschildes.

Nach aussen und unter der 2. Kieme, sowie nach aussen und unter den acht ersten Borstenhöckern, zwischen diesen und dem dorsalen Ende der Borstenwülste eine kleine Papille; somit neun derartige Papillen im Ganzen.

17 Borstenhöcker mit Säge-Haarborsten. (Fig. 2.)

Die ersten Borstenwülste sind so hoch ($7 \cdot 5^{mm}$) als die Bauchschilder. Der dem letzten Haarborstenbündel entsprechende Borstenwulst (20. Segment) ist 5^{mm} hoch. Von hier an nehmen die Borstenwülste nur allmälig an Höhe ab (3^{mm} hoch im 24. Segmente) und gehen in Flösschen über, welche anfangs in grösseren Zwischenräumen, gegen das Ende zu immer gedrängter folgen. Am 80. Segmente war das Flösschen $1 \cdot 25^{mm}$ hoch. Chitinöse Stützborsten. Die Hakenborsten (Fig. 2 *A*) vom 11.—20. Segmente in doppelter Stellung, halb gegenständig.

Gesammelt von Dr. A. v. Roretz; das kleine, unvollständige Exemplar wurde an Eno-sima in einer Tiefe von 129 Faden Tiefe von Dr. Döderlein gefunden.

Lepreа Ehrenbergi.

Taf. I, Fig. 3.

1869. *Terebella Ehrenbergi* Grube E., Beschreibungen neuer od. wenig bekannter, von Herrn Ehrenberg gesammelter Anneliden des rothen Meeres. Monats. d. k. preuss. Akad. d. Wiss. Jahrg. 1869, p. 511. Berlin 1870.

Körper 20 und 27^{mm} lang mit 87 und 118 Segmenten. Das grössere Exemplar vorn $3 \cdot 5^{mm}$ breit, hochrückig. Im letzten Drittel verjüngt sich der Leib auffallend bis auf einen Durchmesser von 1^{mm}. Das kleinere Individuum war vorn $1 \cdot 5^{mm}$ breit, von gleichem Habitus.

Die Fühlfäden weiss, verhältnissmässig lang, ziemlich fest haftend.

Zahlreiche Augenpunkte.

Keine Lappen an den ersten Segmenten.

An beiden Exemplaren ist die dritte Kieme die grösste. An dem grösseren ist rechts die erste Kieme grösser wie links, die zweite kleiner wie die erste, die dritte sowie die erste. Links sind die 1. und 2. Kieme gleich gross, die 3. ist die grösste, namentlich lang und auch länger als die dritte rechts. Das dritte Paar steht viel höher den Rücken hinauf als die zwei anderen. Der Bau der Kiemen (Fig. 3) ähnlich dem der *Lepreа lapidaria* L. An dem Stamme sitzen theils direct Fäden, theils mit Fäden verschiedener Länge besetzte Zweige. Die Kieme hat die Tendenz sich in die Höhe zu entwickeln, die Seitenzweige aber bleiben zurück; die Gestalt wird also eine mehr pyramidenförmige.

13 Bauchschilder, das 1. dem 2. Segmente entsprechend angenommen. Die ersten sind sehr kurz, dann nimmt die Länge immer mehr zu. Im 4.—7. Bauchschilde beträgt die Breite das Vierfache der Länge. Auch das letzte Bauchschild ist noch etwas breiter als lang. An den Schildern kann man in Folge des Auftretens zweier seichter Furchen ein breiteres Mittelfeld und zwei schmälere Seitenfelder unterscheiden.

Unter der zweiten Kieme eine ansehnliche Papille; weitere, zweifelsohne vorhandene, waren wegen der sogleich zu erwähnenden Hypodermis-Bildungen nicht sicher zu stellen.

Die Bündel von Haarborsten gehen vom 4. Segmente nicht bis an das Ende des Leibes. An dem grösseren Exemplare fehlten sie den 40 letzten Segmenten in einer Ausdehnung von 7^{mm}, an dem kleineren den letzten 26 Segmenten in einer Ausdehnung von 3^{mm}. Vom 2. bis zum 13. Segmente weissliche, polsterartige Hypodermis-Bildungen, welche sich ventralwärts ausdehnen und hinter dem oberen Ende des Borstenwulstes noch etwas nach abwärts reichen. Ihre Hauptmasse liegt stets hinter der Geraden, welche man vom Borstenbündel zum Borstenwulst ziehen würde. Sie werden nach hinten unbedeutender in dem Masse, als die dorsoventrale Ausdehnung der Borstenwülste zuzunehmen beginnt, was wieder mit der Breitenabnahme der Bauchschilder im Zusammenhange steht. Hinter dem letzten Bauchschilde sind noch zwei Segmente mit derartigen, aber bereits sehr reducirten, seitlichen Polstern versehen.

Die Haarborsten (Fig. 3 *A*) zeigen die für *Leprea* charakteristische Form. Sie sind sehr zart, zarter als bei *Leprea lapidaria* L. Es besteht auch hier ein Gegensatz zwischen den Borsten der vorderen und hinteren Segmente, er tritt jedoch nicht so scharf hervor wie bei jener Art, da der Schaft der vorderen Haarborsten nur ganz unmerklich gesäumt ist, und beruht hauptsächlich in der Grösse des zerschlitzten Endanhanges der hinteren Borsten, den ich jedoch nie gleich von seinem Ursprunge an spiralig eingerollt sah. Die Segmente zu bestimmen, wo der Wechsel stattfindet, war ich nicht im Stande, da die Objecte hiezu nicht geeignet waren. In den Borstenbündeln der vorderen Segmente ist der Anhang der längeren Borsten mehr gerade, der der kürzeren mehr gekniet.

Die Hakenborsten (Fig. 3 *B*) vom 11. Segmente an in doppelter Stellung an allen folgenden, die letzten 25 Segmente (des grösseren Exemplares) ausgenommen.

In den beiden hier berücksichtigten Exemplaren waren die Hakenborsten leicht halbgegenständig, in einem später untersuchten, aus der Sammlung des Dr. Döderlein, aber ganz gegenständig, zweireihig angeordnet. An den Hakenborsten der ersten Borstenwülste sind die vor den Zähnchen zweiter Ordnung liegenden kleinsten Zähnchen zahlreicher als an den folgenden und auch in der Seitenlage besser bemerkbar. An den Hakenborsten etwa des 17. Segmentes unterscheidet man in Obensicht vor dem grossen Zahne nur schwer drei Zähnchen neben einander, von denen der die Mitte einnehmende der längste und deutlichste ist, während die seitlichen mehr herabgerückt sind, und vor diesen zwei Reihen zahlreicher kleinster. In Seitensicht zeigen sich vor dem grossen Zahn ein kleineres Zähnchen und vor diesem noch etwa zwei kleinere dicht an einander liegende. Ebenso ist auf der Fläche der Hakenborste selbst in der Nähe des Ursprunges des grossen Zahnes ein kleines Zähnchen zu sehen. Die Hakenborsten der hintersten Borstenwülste sind um mehr als ein Drittel kleiner, dicker, die Zähnchen sind derber und folgen, wie man der Seitenansicht entnehmen kann, nicht so gedrängt aufeinander als bei den Hakenborsten der vorderen Borstenwülste. Auch der grosse Zahn ist massiver und die Hakenborste ist breiter in der Dimension von dem Grunde des Einschnittes unter dem grossen Zahne zum Innenrande.

Die *Terebella Ehrenbergi* Grube's aus dem Rothen Meere muss der Gattung *Leprea* untergestellt werden, ebenso *T. pterochaeta* Schmarda vom Cap der guten Hoffnung, *T. megalonema* Schmarda von Jamaika, *T. subcirrata* Gr. von St. Paul und *Amphitrite Orotavae* Langerh. von den canarischen Inseln. Ich vereinige die japanische *Leprea* mit der aus dem Rothen Meere unter einem Namen, weil bei dieser wie bei jener die Borstenbündel nicht bis an das Ende des Körpers gehen, die Haarborstenbündel als schwach angegeben werden und die Verhältnisse der Grösse der Kiemen, sowie der Länge des Körpers zur Segmentzahl stimmen. *Leprea lapidaria* L. hat Haarborstenbündel bis zum Aftersegment und derbere Haar- und Haken-Borsten. Die ersteren differiren auch etwas in der Gestalt und der grösseren Stärke und geringeren Zahl der Zähnchen vor dem grossen Zahne.

Gefunden von Dr. Koerbl an der Ostküste der Insel Eno-sima; ebenda bei Ebbe und in einer Tiefe von 100 Faden von Dr. Döderlein.

Pista fasciata.

Taf. I, Fig. 4

1869. *Terebella (Phyzelia) fasciata* Ehbg. Gr.; Grube E., Beschreibungen neuer od. wenig bekannter, von Herrn Ehrenberg gesammelter Anneliden des Rothen Meeres. Monatsb. d. k. preuss. Akad. d. Wiss. Jahrg. 1869, p. 513. Berlin 1870.

Ein vollständiges Exemplar von 58mm Länge und c. 3mm Breite hatte 131 Segmente, ein zweites, fast ganz erhaltenes 118 Segmente bei 80mm Länge und 5mm Breite. Der Körper vorn gleichbreit, nach hinten allmälig verschmälert. Die Farbe ist blass graugelblich; an den vordersten Segmenten Spuren eines braunen Pigmentes.

Der Kopflappen wenig entwickelt. Die Fühlercirren, so weit vorhanden, kurz.

Das Buccalsegment erhebt sich seitlich zu einem 2^{mm} hohen und $1 \cdot 5^{mm}$ langen Lappen, der den Kopflappen überragt. Bei dem grösseren Exemplare betrugen die entsprechenden Masse $2 \cdot 5^{mm}$ und 2^{mm}. Der dadurch gebildete Kragen klafft in der Mittellinie des Rückens 2^{mm} ($2 \cdot 5^{mm}$), des Bauches c. 1^{mm} ($1 \cdot 5^{mm}$).

Die Flankenlappen des 2. Segmentes sehr kurz, sich bis auf die Bauchseite erstreckend und hier deutlich vorspringend; der des 3. Segmentes kaum ein Drittel so lang als die des ersten. Am Vorderrande des 4. Segmentes ein etwas unter dem Haarborstenbündel beginnender, in der Ausdehnung von vorn nach hinten kurzer Kamm und beiläufig halb so hohe, ähnliche, aber noch unbedeutendere Vorsprünge finden sich am 5. und 6. Segmente. Sie beginnen hier etwas ober und vor dem unteren Ende des Borstenwulstes und erstrecken sich bis gegen die Bauchschilder. Bei *Pista cristata* O. F. Müll. unserer Meere ist wohl noch am 4., nicht aber am 5. und 6. Segmente die Andeutung eines Läppchens zu sehen. Die Länge des 1. Segmentes in der Mitte der Bauchfläche ist so gross wie die des zweiten, hingegen ist das dritte nur halb so lang als dieses. Alle drei sind so lang wie die drei folgenden Segmente zusammengenommen.

Von den vier Kiemen war bei zwei Exemplaren die erste links am meisten entwickelt. Deren Länge betrug an 3^{mm}. Die Äste sind zahlreich, gehäuft. Eine spiralige Anordnung wie bei *P. cristata* O. F. Müll. ist nicht deutlich. Die Enden der Äste trachten eine Ebene zu erreichen: Die Gestalt der Kieme ist demnach quastenförmig. Die Äste sind häufig (bis 8mal) dichotomisch verzweigt, die Zweige bis zur neuen Theilung kurz, die Endgabeln sogar sehr kurz. Bei *P. cristata* O. F. Müll. sind die Äste nicht so oft gegabelt (höchstens 5mal), daher kürzer, aber die Zweige der Äste und die Endgabeln sind länger (4—5mal länger als bei *P. fasciata*).

15 Bauchschilder, am zweiten Segmente beginnend. Die Schilder sind erst vom 7. Segmente an seitlich gut abgegrenzt, jedoch nie in dem Masse als bei *P. cristata*; auch sind sie breiter, weniger regelmässig quadratisch. Am Rücken des 6. und 7. Segmentes etwas ober und hinter dem Borstenhöcker eine deutliche Papille.

17 Haarborstenbündel. Die Haarborsten (Fig. 4) schlanker als bei *P. cristata* O. F. Müll. Die Borstenwülste an dem grösseren Exemplare anfangs 2^{mm} hoch, im 20. Segmente nicht ganz $1 \cdot 5^{mm}$. Die ersten Flösschen kaum 1^{mm} hoch.

Die Hakenborsten vom 11.—20. Segmente in doppelter Stellung, abwechselnd, einreihig. Hinterer Muskelfortsatz an den Hakenborsten der 16 ersten Borstenwülste (Fig. 4 *A*, 4 *B*), doch allmälig an Grösse abnehmend. Das Hinterende des Aussenrandes abgerundet, das Spatium zwischen dem grossen Zahne und dem gegenüber liegenden kleinen Fortsatze, dem Träger des Schutzpolsters gering, während bei *P. cristata* O. F. Müll. das Hinterende des Aussenrandes in einen kurzen, gekrümmten oder knopfartigen Fortsatz ausgeht und der Hinterrand mehr gerade verläuft; ferner ist der erwähnte Zwischenraum viel weiter, weil der Zahn nicht so stark gekrümmt ist. Im Profile lässt sich bei *P. fasciata* Ehlbg., Gr. vor dem grossen Zahne noch eine Anzahl kleinerer erkennen, wie denn in der That bei Ansicht von oben vor dem grossen Zahne zunächst meist vier grössere in einer regelmässigen Reihe stehende und dann noch je nach der Stellung der Hakenborsten zwei oder mehr Reihen weniger regelmässig angeordneter Zähnchen zu erblicken sind. Die Hakenborsten der Flösschen (Fig. 4 *C*) zeigen gleichfalls eine von denen der *P. cristata* O. F. Müll. etwas abweichende Gestalt.

Chitinöse Stützborsten.

Gefunden von Dr. Koerbl an der Ostküste der Insel Eno-sima; bei Kochigame (Tokio-Bai) in einer Tiefe von 10—20 Faden von Dr. Döderlein.

Der Hauptcharakter dieser Art der Gattung *Pista* liegt in dem grossen Lappen zu Seiten des 1. Segmentes, der den Kopflappen überragt. Dadurch unterscheidet sie sich leicht von *Pista cristata* O. F. Müll. Als weitere Arten dieser Gattung wurden von Grube *Pista thuja* [1] (aus dem Museum Godeffroy, unbekannten Ursprungs) und *Pista typha* [2] von den Philippinen aufgestellt. Die kurze Beschreibung der ersteren ist Vergleichen wenig dienlich, an der zweiten erwähnt Grube nichts von den Flankenlappen des 1. Segmentes und die Angaben über eine besondere Breite der Lappen am 2. und 3. Segmente, sowie über den Bau der Kiemen passen nicht auf die japanische Form. Ich erkenne aber in einer von Grube vergessenen *Terebella*, in der *Terebella fasciata* Ehbg., Gr. aus dem Rothen Meere eine vierte Art der Gattung *Pista* und halte sie für dieselbe wie die mir aus Japan vorliegende. Nur sind einige Richtigstellungen in der Diagnose Grube's nöthig. Grube sah die Flankenlappen, die ich für das 1., 2., 3., 4. Segment angebe, er verlegt sie jedoch auf das 2., 3., 4., 5. Er führt ferner an, dass das erste Borstenbündel am 5., der erste Borstenwulst am 6. Segmente auftrete, eine Behauptung, die sofort klar macht, dass auch die Lage der Lappen unrichtig angegeben ist. Es gibt wohl Terebellen, bei welchen das erste Haarborstenbündel am 2. oder 3. Segmente auftritt, bei allen übrigen bisher bekannten aber ist es das 4. Segment. Man muss also annehmen, dass Grube das 1. Segment für das 2. Segment angesehen u. s. f. Widerspruchsvoll, wenn auch thatsächlich richtig, sind die Angaben über die Stellung der Kiemen am 2. und 3. Segmente und den Beginn der Flösschen mit dem 21. Segmente; denn im Zusammenhange mit den früheren Bemerkungen müssten die Kiemen am 1. und 2. Segmente stehen und die Flösschen am 22. beginnen. Für meine Auffassung der *Terebella fasciata* Ehbg. Gr. als Glied der Gattung *Pista* waren die Schilderung der Kiemen und besonders die Erwähnung der zwei Papillen am 6. und 7. Segmente (bei Grube 7 und 8) ausschlaggebend, die ich bei *Pista cristata* O. F. Müll. und der japanischen *Pista* aufgefunden. Papillen an diesen Stellen kannte man bisher nur bei *Nicolea* Mgrn. s. str. Das Vorhandensein des grossen Flankenlappens am 1. Segmente im Vereine mit den kleineren an den folgenden, sowie der Bau der Kiemen, veranlassten mich sodann die *Pista* aus dem Rothen Meere für dieselbe zu halten, wie die von mir genau untersuchte von Japan.

Pista maculata n. sp.

Taf. 1, Fig. 5.

Ein fast vollständiges Exemplar hatte bei einer Länge von 55^{mm} 200 Segmente. Die Breite betrug vorn 3^{mm}, nach rückwärts verjüngte sich der Körper allmälig.

Ein zweites intactes Individuum war 33^{mm} lang, vorn etwas über 2^{mm} breit und besass 110 Segmente. Die Länge des Körpers von der Spitze des Flankenlappens des 1. Segmentes bis zum ersten Flösschen betrug an dem grossen Individuum 12^{mm}, an dem kleinen 10^{mm}.

Die Fühlfäden grösstentheils abgefallen, soweit vorhanden, kurz. Sie sind mit graubraunen, meist quadratischen Fleckchen geziert, die zu beiden Seiten der seichten Rinne ziemlich regelmässig angeordnet sind.

Am 1. Segmente ein nur mässig entwickelter Flankenlappen. Das 2. Segment ohne Flankenlappen am Bauche in grösserer oder geringerer Ausdehnung deutlich erkennbar, je nachdem es von den Bauchschildern verdeckt wird, der Vorderrand etwas vorspringend.

Drei sehr reichästige, dendritische Kiemen (Fig. 5), deren Grösse gemäss der Folge abnimmt. Der ungetheilte Stamm dick, hoch. Die Verzweigung bis 8mal dichotomisch, an den sehr kurzen Ästen erster bis vierter Ordnung regelmässig, dann unvollständig. Habitus gedrungen, straussförmig. Endgabeln ziemlich lang, ungleich

Bauchschilder gewöhnlicher Art bis zum 18. oder 20. Segmente. Entsprechend dem 2., 3. und 4. Segmente bilden sie eine seitlich wohl abgegrenzte, nach vorn stumpfkonische Masse, die unregelmässig durch Längsfurchen in Feldchen getheilt ist und auch mehr minder deutliche Querfurchen zeigt. Ich finde diese Platte an dem grösseren Exemplare mehr vortretend und sich weiter über das 2. Segment erstreckend als an

[1] Einiges aus einer kritischen Übersicht der bisher beschriebenen Terebellen etc. 49. Jahresber. d. schles. Gesellsch. f. vaterl. Cultur, im Jahre 1872; pag. 50. Breslau 1872.

[2] Annulata Semperiana. p. 232.

dem kleineren. Die folgenden Bauchschilder sind durch deutliche Querfurchen getrennt und nehmen die ganze Breite zwischen den Borstenwülsten ein. Ihre seitlichen Grenzen sind aber, namentlich vorn, nicht scharf ausgeprägt. Das Gewebe, welches die Bauchschilder bildet, erstreckt sich in Form schmaler und kurzer rechteckiger Plättchen, welche die Mitte der Bauchfläche einnehmen, noch weit nach hinten. Es umrahmt ferner die Borstenwülste, besonders an ihrem Vorderrande, und häuft sich in der Gegend der Borstenhöcker, diese vollständig umschliessend und den Zwischenraum zwischen den aufeinander folgenden Borstenhöckern ausfüllend, an. Am Rücken entsteht dadurch ein nach innen von den Bündeln der Haarborsten herablaufendes Band mit geradem Rande. Die Breite der Bauchschilder betrug am 10. Segmente noch die des entsprechenden Borstenwulstes. Von hier nahm sie fortwährend ab; am 18. betrug sie etwa die Hälfte. Die sechs letzten sind länger als die vorhergehenden, beiläufig so lang als breit, mit etwas concaven Seiten.

Papillen nicht auffindbar.

17 Haarborstenbündel. Die Haarborsten (Fig. 5 *A*) nicht sehr lang, kräftig, ziemlich breit gesäumt.

Die Borstenwülste hoch, dicht aufeinanderfolgend, nicht besonders vorspringend.

Hakenborsten vom 11.—20. Segmente in doppelter Stellung, leicht halb gegenständig oder nahezu abwechselnd einreihig. Auffallend ist das Hinterende des Aussenrandes an den mit langem hinterem Muskelfortsatze versehenen Hakenborsten (Fig. 5 *B*) der ersten Borstenwülste, das durch einen tiefen Einschnitt von dem Träger des Schutzpolsters unter dem grossen Zahne getrennt ist; an dem kleineren Exemplare war dieses Verhältniss weniger ausgebildet. In Obensicht bemerkt man vor dem grossen Zahne vier Zähne in einer Reihe (Hakenborsten der ersten Borstenwülste) oder fünf, wobei aber die äussersten jedenfalls tiefer an die Seiten herabgerückt sind. Da es jedoch selten gelingt die Hakenborsten vollkommen senkrecht auf ihren Innenrand zu stellen, bemerkt man gewöhnlich nur vier von diesen Zähnchen und mit ihnen abwechselnd eine Reihe von drei kleineren und vor diesen noch einige ganz kleine Zähnchen. In Seitenlage vor dem grossen Zahne einen ziemlich starken und ganz vorn einen kleinen. An den Hakenborsten weiter nach hinten gelegener Segmente werden die auf den grossen Zahn folgenden Zähnchen allmälig kleiner und in den hintersten Flösschen sieht man an den dicken Hakenborsten (Fig. 5 *D*) von oben vor dem grossen Zahne drei und mehr Bogen zahlreicher kleinster Zähnchen. Die Flösschen des jüngeren Exemplares deutlich vorspringend. Zarte chitinöse Stützborsten.

Verwandt mit *P. maculata* ist *Pista cretacea* Gr. aus der Adria, gleichfalls mit drei Paar Kiemen.

Gefunden von Dr. Koerbl an der Ostküste der Insel Eno-sima.

Loimia Montagui.

Taf. II, Fig. 1.

1878. *Terebella Montagui* Grube E. Annulata Semperiana. Mém. de l'Acad. imp. d. sciences de St. Pétersbourg. VII. sér., Tom. XXIV, Nr. 8, p. 224, Taf. XII, Fig. 3.

Zwei unvollständige Exemplare, denen das hintere Leibesende in grösserer Ausdehnung fehlte, lagen vor. Beide waren ohne Fühlfäden, nur das eine hatte Kiemen. Das eine Individuum 103^{mm} lang mit 42 Segmenten, wovon 65^{mm} auf den mit Haarborstenbündeln ausgerüsteten Theil des Leibes kommen, das zweite, mehr contrahirte 80^{mm} lang mit 31 Segmenten, wovon 54^{mm} auf den gleichen Leibesabschnitt entfallen. Die Breite betrug bei dem ersten im 5. Segmente 10^{mm}, im 9. $8{\cdot}5^{mm}$, im 26. nicht ganz 7^{mm}, im 42. 5^{mm}; bei dem 2. im 7. Segmente 13^{mm}, im 12. Segmente 11^{mm}, im 30. 6^{mm}. Der Vordertheil in dem einen Exemplare gar nicht, in dem anderen nur mässig angeschwollen, die Bauchfläche hier vorgewölbt. Vom 21. Segmente an nimmt der Leib eine fast cylindrische Gestalt an, indem nur die Bauchfläche abgeplattet ist. Die Höhe des Körpers ist in den letzt vorhandenen Segmenten um Weniges grösser als die Breite. Die Färbung ist graulich, an den 16 letzten Segmenten des längeren Thieres sind Reste bräunlichen Pigmentes bemerkbar.

Der Kopflappen bildet seitlich keine vorspringenden Läppchen, der den Mund überragende Antheil derselben ist sehr kurz.

Die Fühlfäden sind nicht erhalten.

Am 1. Segmente seitlich ein 3·5^{mm} hoher, 2^{mm} langer abgerundeter Vorsprung, hinter diesem ein 3^{mm} langer Lappen, dessen Basis 2^{mm} beträgt, mit rechteckigem Contour. Er entspricht dem 3. Segmente, dessen Vorderrand auch dorsal vorspringt. Die 1. Kieme ist 17^{mm} lang, der Stamm an der Basis über 1·5^{mm} breit. Sie hat das Ansehen eines armzweigigen, schlanken, wenig in die Breite gehenden Strauches. In ansehnlichen Zwischenräumen folgen 6—9^{mm} lange Seitenäste, welche in einiger Entfernung von ihrem Ursprunge abermals Äste abgeben. Der erste Seitenast des Hauptstammes steht 2^{mm} über der Basis. Untersucht man einen dieser Äste zweiter Ordnung (Fig. 1) unter dem Mikroskope, so sieht man vom Stamme theils einzelne Fäden, häufig übereinander, theils kurze Zweige entstehen, welche solche einfache Fäden in regelloser oder auch kammförmiger Anordnung tragen und in Endgabeln ausgehen. Die Fäden sind sehr kurz, höchstens 0·5^{mm} lang, daher haben die Äste der Kiemen bei Betrachtung mit freiem Auge ein filziges Ansehen. Die 2. Kieme theilt sich unmittelbar ober der Basis in einen äusseren und inneren Ast, welch' letzterer sofort in zwei starke Äste zerfällt, so dass man auch sagen könnte, der Stamm der Kieme theile sich in drei Hauptäste. Der innerste Hauptast wird 11^{mm} lang, und zeigt den Habitus der ersten Kieme, die zwei anderen entwickeln sich mehr in die Breite, indem sie von zahlreichen, doch höchstens 6^{mm} langen Ästchen besetzt werden. Die 3. Kieme kleiner als die 2., aber mit dem gleichen Plane der Verästelung. Der innerste Hauptast ist auch hier der längste (8^{mm}). Die Entfernung der 3. Kieme von der zweiten ist mindestens dreimal so gross, als die der zweiten von der ersten.

Über die Seitenfläche des Rückens zieht von der 1. Kieme bis zum 8. Haarborstenbündel (11. Segment) ein bis 3^{mm} breiter, nach hinten sich zuspitzender, leicht erhabener Streif, der durch Textur und weissliche Färbung auffällt. Die Mitte des Rückens ist in einer Breite von 3^{mm} frei. Das Gewebe, welches diesen Streif zusammensetzt, erstreckt sich zwischen die Borstenhöcker und Borstenwülste auch auf die Bauchfläche gegen die Bauchschilder zu. In einer Höhe mit den Borstenhöckern des 6., 7., 8. Segmentes, doch etwas hinter derselben eine stumpfe Papille.

Das 2., 3. und 4. Segment verwachsen auf der Bauchfläche zu einem einzigen bis 4^{mm} langen Segmente, oder es ist eine seichte Furche an der vorderen Grenze des 4. Segmentes bemerkbar.

11 Bauchschilder. Hiebei nehme ich das erste an dem aus der Verwachsung des 2., 3. und 4. Segmentes entstandenen langen Abschnitte, das letzte am 14. Segmente an; diese beiden sind jedoch nicht so scharf abgegrenzt. Am schärfsten umschrieben ist das zweite bis achte. Die Gestalt ist trapezförmig mit breiterem Vorderrande. Die ersteren sind 4—5mal so breit als lang, dann nimmt die Länge etwas zu, die Breite ab. Das achte ist nahezu 2mal so lang, als das zweite, aber nur 2mal so breit als lang. Die folgenden werden noch kleiner.

17 Haarborstenbündel. Die Borstenhöcker sind an dem einen Individuum etwas länger als breit, an dem anderen waren sie mehr eingezogen. Die Haarborsten sind wenig gebogen. Es kommen stärkere (bis 0·018^{mm}), breitgesäumte und schwächere (0·0075^{mm}) mit sehr schmalem oder undeutlichem Saume vor.

Die 16 Borstenwülste, welche nach dem 17. Borstenhöcker von Flösschen abgelöst werden, sind durchschnittlich 4^{mm} breit und $2^1/_2$mal schmäler als die vorderen Bauchschilder.

Die Hakenborsten vom 11.—20. Segmente in doppelter Stellung, ganz rückenständig, zweireihig. Sie sind 6zähnig oder 6zähnig mit einem sehr kleinen, oder manchmal undeutlichen, vordersten Zähnchen. Ich fand aber auch in den ersten Borstenwülsten ausnahmsweise Hakenborsten mit nur fünf groben Kammzähnen und einem vor ihnen stehenden sehr kleinen. Bei Obensicht zeigte es sich, dass die Zähne alle einfach aufeinander folgen; es bilden sich keine Querreihen, selbst an dem vordersten Theile nicht. Der Träger des Schutzpolsters ist meist nur angedeutet. Die Hakenborsten der Borstenwülste sind etwas länger (0·078^{mm}) als die der Flösschen. Abgebildet ist (Fig 1 *A*) eine Hakenborste des letzten Borstenwulstes mit undeutlichem 7. Zahne. Der Übergang der Borstenwülste in Flösschen am 21. Segment ist ein sehr plötzlicher. Schon der Aussenrand des 1. Flösschens ist nur 1·5^{mm} breit. Sie ragen nicht so weit vor als sie hoch sind, scheinen jedoch nach hinten länger zu werden. In ihnen liegen die 0·063^{mm} langen Hakenborsten. Abgebildet ist (Fig. 1 *B*) eine aus dem Flösschen des 42. Segmentes mit gut ausgebildeten vorderen Zähnchen. Chitinöse Stützborsten.

Gesammelt von Dr. A. v. Roretz.

Die Beschreibung der *Loimia Montagui* ist leider wie die der übrigen *Loimia*-Arten Grube's so unbestimmt und hebt die zur Unterscheidung dieser Arten untereinander, und von eventuell noch in der Folge aufzufindenden, bedeutungsvollen Merkmale so wenig hervor, dass eine Identificirung wohl nur mit voller Sicherheit zu machen sein wird, wenn die Originale verglichen werden können oder doch Exemplare von demselben Fundorte vorliegen. Mir scheint es sehr wahrscheinlich, dass die vorstehend beschriebene Form und die *Loimia Montagui* Gr. zusammenfallen. Die Grössenverhältnisse und die nur von dieser Art bekannt gewordene hohe Zahl der Zähne der Hakenborsten weisen darauf hin.

Nicolea gracilibranchis.

Taf. II, Fig. 2.

1878. *Terebella gracilibranchis* Grube E. Annulata Semperiana. Mém. de l'Acad. imp. de sciences de St. Pétersbourg. VII. sér., Tom. XXV, Nr. 8, p. 230, Taf. XII, Fig. 6.

Das mir vorliegende, in zwei Theile getrennte Individuum ist kleiner wie das von Grube beschriebene von den Philippinen. Die Länge des Körpers beträgt ohne Fühlfäden 20mm. Die Zahl der Segmente war 46. Die grösste Breite des Leibes erreichte 4mm, hinter dem letzten Borstenbündel ist er kaum 2mm breit. Zur Ergänzung der zur Sicherstellung der Art ausreichenden Beschreibung Grube's gebe ich eine Abbildung der ersten rechten Kieme (Fig. 2) und der Hakenborsten (Fig. 2 A). Diese vom 11.—20. Segmente in doppelter Stellung, halb gegenständig. In der Seitenlage bemerkt man vor dem grossen Zahne zwei, höchst selten drei Zähnchen.

Die Hakenborsten, aber auch die Kiemen weisen die Art zu *Nicolea*. So viel sich an dem einzigen contrahirten Exemplare constatiren lässt, ist das erste Segment ventral nicht so lang als bei der von mir jüngst beschriebenen *Nicolea venustula* Mont., welcher *N. gracilibranchis* Gr. nahe steht, und die seitlichen Spitzchen des Vorderrandes fallen weniger auf. Auch der dorsale, papillenartige Vorsprung der Flösschen ist kaum zu bemerken. Papillen liegen auch hier hinter der zweiten Kieme und unmittelbar hinter den Borstenhöckern des 6. und 7. Segmentes.

Gefunden von Dr. Döderlein bei Eno-sima, während der Ebbe.

Polymnia congruens n. sp.

Taf. II, Fig. 3.

Es ist nur ein 26mm langes Bruchstück mit 60 Segmenten vorhanden. Der Körper vorn etwas aufgebläht hoch, hinter dem Kopflappen c. 2mm, im 12. Segmente 4mm breit.

Die Fühlfäden meist fehlend.

Zahlreiche Augenpunkte.

Das 2. und 3. Segment tragen kurze Flankenlappen. Der des ersten liegt stark ventral unter dem des dritten. Auch der Vorderrand des 4. Segmentes springt etwas vor.

Drei Paar Kiemen. Die Kiemen gestielt, gemäss der Aufeinanderfolge an Grösse abnehmend. Die längste Kieme ist 2mm lang. An der Seite des Stammes sitzen übereinander zwei Äste, welche nicht das Ende der Krone des Kiemenbaumes erreichen und mit ihren Nebenzweigen nicht so in die Breite gehen, wie die am Ende des Stammes entspringenden drei Äste. Die Art der Verzweigung dieser Äste ist zuerst handförmig. Jeder dieser Zweige theilt sich in einiger Entfernung vom Ursprunge dichotomisch. Die Zweige zweiter Ordnung gabeln sich bald abermals. Die so entstandenen Zweige dritter Ordnung sind kurz, unter sich fast gleich lang und gehen an ihrem Ende in zwei sehr kurze Zinken aus. Die ganze 2. Kieme (Fig. 2) gibt eine Vorstellung der Verzweigung eines der drei dem Stamme der ersten Kieme aufsitzenden Äste.

16 Bauchschilder, die ganze Fläche zwischen den Borstenwülsten einnehmend. Das 1. am 2. Segmente ist etwas schmäler als das des dritten. Dieses sowie die sieben folgenden sind durch Querfurchen in eine sehr

kurze vordere und eine längere hintere Zone getheilt; ausserdem zerfallen sie durch Längsfurchen in kleine Feldchen. Das 12. Bauchschild ist 3^{mm} breit. Die folgenden sind eben so breit, nur das 16. ist etwas schmäler. Auch die Breite der vorhergehenden, mit Ausnahme des ersten, ist nur um Weniges geringer. Das 12. bis 15. Bauchschild ist am längsten.

17 Haarborstenbündel. Die Haarborsten (Fig. 3 *A*) sehr lang, schlank, schmal geflügelt. Länge des Körpers vom 1.—17. Segmente 10^{mm}.

Die Borstenwülste nehmen von vorn nach hinten an Höhe zu und bleiben dann ziemlich gleich hoch. Der höchste ist der zwölfte (2^{mm}).

Die Hakenborsten (Fig. 3 *B*) vom 11.—20. Segmente in doppelter Stellung, halb gegenständig. In Obensicht vor dem grossen Zahne zwei parallele Zähnchen, zwischen deren Wurzeln ein drittes dritter Grösse und seitlich von diesem je ein ganz kleines. In Seitensicht vor dem grossen Zahne ein Zähnchen zweiter Ordnung und diesem dicht anliegend ein kleinstes drittes. Das Hinterende des Aussenrandes ist leicht abgerundet. Die Hakenborsten der Flösschen mit starken chitinösen Stützborsten.

Gefunden von Dr. Koerbl an der Ostküste der Insel Eno-sima.

Diese Art nähert sich sehr der *Polymnia nesidensis* delle Chiaje der europäischen Meere.

Thelepus japonicus n. sp.

Taf. II, Fig. 4.

Körper des einzigen aber vollständigen Exemplares 115^{mm} lang, vorn auffallend verbreitert. Die Breite beträgt im 2. Segmente 3^{mm}, im fünften $4 \cdot 5^{mm}$, im zwölften $7 \cdot 5^{mm}$. Dann nimmt sie allmälig ab, erreicht im 31. Segmente $6 \cdot 5^{mm}$, im 36. aber nur 3^{mm}. Diese starke Verschmälerung des Körpers an dieser Stelle ist wohl zum Theile eine Contractionserscheinung, da das hinterste Drittel des Leibes breiter als dort ist und die Breite im 100. Segmente noch 4^{mm} ausmacht. 122 Segmente, von welchen die vor dem Aftersegmente sehr kurz sind. Färbung gelblich-grau; ein Stück der Bauchfläche hinter den weisslichen Bauchschildern dunkler bräunlich. Über die Farbe im Leben notirte Dr. Koerbl: Körper dunkel fleischfarben, seitlich weisse Stellen. Fühlfäden braun.

Die Fühlfäden stark, bis 16^{mm} lang, jetzt grauviolett gefärbt, an der Basis heller. Die Ränder der tiefen Rinne sind glatt. Am Rücken der Fäden bemerkt man unter der Loupe einander gegenüberstehende Anhäufungen des braunen Pigmentes, welche durch einfache oder doppelte feine Querbinden mit einander in Verbindung treten. Die Stellen zwischen diesen Querbinden sind hell, pigmentlos.

Der Kopflappen nicht ganz 2^{mm} lang; sein vorderer Rand bildet einen sehr flachen Bogen. Zahlreiche mehrere Reihen bildende Augenpunkte.

Das Buccalsegment auf der Bauchseite länger als das 2. und 3. Segment zusammengenommen. Es springt gegen die Mundöffnung etwas vor.

Drei Paar Kiemen. Die Kiemen des ersten Paares sind durch einen Zwischenraum von kaum $1 \cdot 5^{mm}$ getrennt, die des folgenden annähernd durch den gleichen, die des dritten sind um $0 \cdot 7^{mm}$ von einander entfernt. Die etwas gelockten Kiemenfäden sind zahlreich, in den ersten Kiemen bilden sie vier Reihen, aber relativ schmal und kurz. Sie sind fast viermal schmäler als die Fühlfäden und die längsten massen nur 2^{mm}. Sie entspringen nicht unmittelbar aus der Oberfläche des Rückens, sondern sitzen einer deutlichen Erhebung auf, deren Breite an der 1. Kieme nicht ganz 2^{mm} beträgt. Die 1. Kieme ragt weit nach aussen und unten über eine Linie, die man sich in Verlängerung des 1. Borstenhöckers nach vorn gezogen denkt, die zweite reicht bis zum Borstenhöcker, die dritte geht sogar etwas hinter den 2. Borstenhöcker.

Die Bauchschilder seitlich nicht deutlich abgegrenzt. Man kann solche höchstens an der durch ihre weissliche Farbe abstechenden Bauchfläche des 2.—18. Segmentes annehmen. Zu bemerken sind weissliche, schwammige Erhebungen, welche die Borstenhöcker nach innen, vorn und aussen umgeben. Sie sind an den vorderen Segmenten am besten entwickelt, nehmen in dem hinteren Theile des erweiterten Vorderleibes an Ausdehnung immer mehr ab und verschwinden völlig, wenn die Verengerung des Leibes und die Bildung von Flösschen eingetreten. Man kann eine nach innen der Borstenhöcker liegende kleine Partie und eine grössere, breitere, von dieser abgesetzte unterscheiden, welche vor dem Borstenhöcker beginnt, sich an dessen äusserer Seite hinzieht und noch vor das dorsale Ende des entsprechenden Borstenwulstes erstreckt.

Die Haarborstenbündel beginnen am 3. Segmente und finden sich an allen, die letzten 11 Segmente ausgenommen. Es sollten somit 109 Borstenhöcker mit Bündeln von Haarborsten jederseits vorhanden sein, allein es sind deren nur 106, weil drei Segmente vor den zwei letzten mit Borstenbündeln versehenen derselben ledig sind. Die Borstenhöcker sind von vorn nach hinten comprimirt, schief von oben nach abwärts und einwärts abgeschnitten, daher in ihrem dorsalen Antheile breiter als in ihrem ventralen, der nur wenig aus der Seitenfläche des Körpers heraustritt. An der vorderen Körperhälfte sind sie grösser, d. h. ihr mit Borsten versehener Aussenrand ist höher, als in der mit dem verengten Theile des Körpers folgenden Strecke, doch weniger vorspringend; nach hinten werden sie immer kleiner, papillenförmig. Es sind längere und kürzere Haarborsten vorhanden. Die ersteren sind fast gerade, die letzteren etwas geschwungen, beide mit schmalen Säumen.

Die Borstenwülste an gewöhnlicher Stelle beginnend. Der erste ist nur 1^{mm} hoch, die Höhe des 8. Borstenwulstes (12. Segment) ist 3^{mm}. Diese Dimension erhält sich eine Strecke und nimmt sodann wieder ab. Der 25. Borstenwulst ist 2^{mm} hoch, der 32. (36. Segment) 1^{mm}. An dieser Stelle ist auch das Hervortreten der Borstenwülste, der Übergang in Flösschen bemerkbar. Diese sind dick und zweimal höher als lang.

Die Hakenborsten (Fig. 4) zeigen in Obensicht vor dem grossen Zahne zwei parallele Zähnchen und zwischen den Wurzeln derselben ein einziges drittes sehr kleines. In der Seitenlage werden gewöhnlich nur zwei Zähnchen sichtbar, selten erkennt man auch das vorderste, kleinste Zähnchen. Ganz vereinzelt trifft man auch Hakenborsten, bei denen ganz vorn statt einem sehr kleinen Zähnchen zwei oder vier auftreten.

Gefunden an der Ostküste der Insel Eno-sima von Dr. Koerbl und vor dem Hafen von Mazuru in einer Tiefe von c. 50 Faden von Dr. Döderlein.

Es ist sehr möglich, dass diese Art in unserer Literatur bereits unter einem anderen Namen vorkommt. Aus dem indischen und Stillen Ocean stammen 8 oder 9 Arten, die zu *Thelepus* mit drei Kiemen zu stellen wären, während aus den europäischen Meeren nur zwei Arten bekannt sind. Leider steht mir kein exotisches Material zur Verfügung, um zu entscheiden, ob denn diese „Arten" in der That so wenig äussere Eigenthümlichkeiten besitzen, als aus den betreffenden, die Hakenborsten nicht berücksichtigenden Beschreibungen erhellt.

Polycirrus nervosus n. sp.

Taf. II, Fig. 7.

Körper 32^{mm} lang, vorn nicht besonders aufgebläht, $2 \cdot 5^{mm}$ breit mit 100 Segmenten. Der Kopflappen mächtig entwickelt, so lang als das erste unpaare Bauchschild. Seine Breite eben so gross als seine Länge. Der Vorderrand abgerundet, gefaltet. Das unpaare Bauchschild, von umgekehrt T-förmiger Gestalt, ist fast so lang als die vier folgenden Bauchschilder zusammengenommen. 11 paarige Bauchschilder. Das erste sehr kurz, die folgenden sieben zwei- oder dreimal breiter als lang, das neunte ein wenig breiter als lang, aber länger wie die vorhergehenden, das zehnte und eilfte rudimentär. Die ersten sieben sind einander in der Mittellinie sehr genähert. Die Länge der neun ersten paarigen Bauchschilder zusammengenommen beträgt 3^{mm}. Vom 2. Segmente angefangen finden sich an 32 Segmenten Bündel von Haarborsten, sodann folgen zwei Segmente ohne und hierauf wieder zwei mit Haarborsten. Die Haarborsten sind die der Gattung. Ihre Breite beträgt, bevor sie sich zuzuspitzen beginnen, $0 \cdot 0032$, $0 \cdot 0048$—$0 \cdot 008^{mm}$. Die Hakenborsten (Fig. 7) beginnen am 13. Haarborsten tragenden Segmente und sind sogleich mit Stützborsten versehen. Ihre Form ist nicht wie z. B. bei *Polycirrus aurantiacus* Gr. in den ersten Borstenwülsten eine andere als in den weiter nach hinten gelegenen. Sie sind überall nahezu gleich. In Obensicht bemerkt man einen grösseren Zahn und vor diesem einen kleineren, der von zwei kleinsten in die Mitte genommen wird. In Seitensicht treten diese kleinsten Zähnchen nicht immer hervor und es sind nur zwei Zähne sichtbar. Auf der Unterseite der drei ersten Borstenhöcker sehe ich je eine deutliche perforirte Papille. Ähnliche Öffnungen, doch nicht besonders hervortretend, scheinen auch noch auf den fünf folgenden Borstenhöckern aufzutreten.

Ein Exemplar gefunden von Dr. Koerbl an der Ostküste der Insel Eno-sima.

Fam. SABELLACEA (Mgrn.)[1] Langerhans Char. emend.

Sabella aulaconota n. sp.

Taf. II, Fig. 8.

Körper des einzigen Exemplares 70mm lang, fast 6mm breit mit 145 Segmenten, bis auf die dunkleren, grauen Bauchschilder hell, ungefärbt. Die Bauchfurche setzt sich deutlich auf den Rücken fort.

Der Halskragen klafft dorsal in einer Breite von 2mm. Er ist seitlich nicht eingeschnitten, ventral gespalten. Die so gebildeten Spitzen sind kurz, kaum umgeschlagen.

Thorax 6mm lang, fast eben so breit, mit acht Borstenhöckern. Bauchschilder des Thorax, das erste ausgenommen, welches rechts und links etwas vorragt, von gleichen Dimensionen wie die anstossenden des Abdomens, auf einer langen Strecke 2·5mm breit.

Die Kiemen 20mm lang mit 20 Fäden jederseits. Das Basalblatt sehr kurz. Die Schäfte farblos oder mit einigen braunen Punkten und Strichelchen, die Strahlen besonders an der Basis hellbraun und nur an wenigen kurzen Stellen weiss. Keine Augen. Das strahlenlose Ende des Schaftes 1·5mm lang. Die Strahlen 3mal so lang als die Schäfte breit sind,

In dem 1. Borstenhöcker nur Haarborsten von der Form 8 *A*. In den Borstenhöckern des Thorax treten noch einige breite, ungesäumte von der Form 8 *B* hinzu. Die Haarborsten im Abdomen besitzen in etwas wechselnder Breite die Form 8 *C*. In den Borstenwülsten des Thorax zwei Arten von Borsten. (Fig 8 *D*).

Gefunden bei Nagasaki von Dr. A. v. Roretz.

Potamilla Torelli.

Taf. III, Fig. 1.

1865. Malmgren, Nordiska Hafs Annul. Öfvers. af k. Vet. Akad. Förh., p. 402; 1867. Annulat. polych. Ebenda, p. 222, Taf. XIV, Fig. 76.

1870. *Sabella brachychona* Claparède Ed., Annél. chétop. du golfe de Naples. Mém. de la soc. de phys. et d'hist. nat. de Genève. Tom. XX, part. II, p. 503, pl. XXIV, fig. 5.

1880. *Sabella (Potamilla) Torelli* Mgrn.; Langerhans P., Die Wurmfauna von Madeira. Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. XXXIV, p. 112, Taf. V, Fig. 26.

Zwei vollkommen gut erhaltene Potamillen zeigten im Ganzen eine so grosse Übereinstimmung mit der Beschreibung und Abbildung der *P. Torelli* durch Malmgren und mit Originalen aus der Adria,[2] dass mir die Aufstellung einer eigenen Art nicht gerechtfertigt erscheint. Die Thiere massen 10 und 18mm in der Länge, $2-2\frac{1}{2}$mm in der Breite und hatten 58—74 Segmente. Der Körper war bis auf dunkler (graulich-bräunlich) gefärbte Bauchschilder und braune Pünktchen unter den Borstenhöckern des Thorax ungefärbt. Die kurzen,

---

[1] Auch hinsichtlich der Sabellen war es erst Malmgren, der zeigte, dass die eingehende Untersuchung und Berücksichtigung der Borsten der Weg sei, auf welchem allein man zu einer gründlichen Kenntniss der in diese Familie gehörigen Formen gelangen kann. Da ihm aber nur Einzelne folgten, so können die meisten der nach seiner Arbeit erschienenen Beschreibungen von Sabellen eben so wenig Anspruch auf weitgehendere Beachtung erheben, wie dies von so vielen älteren gilt. Man wird vielleicht den inhaltslosen Namen durch Nachuntersuchung der Originale in der Folge die Existenzberechtigung zu schaffen im Stande sein, gegenwärtig jedoch hat man bei Bearbeitung von Sabellen nur wenig zu vergleichen, und es bleibt nichts übrig, als die Zahl der „Arten" zu vermehren.

[2] Ich fand *P. Torelli* Mgrn. an verschiedenen Punkten der Adria (Triest, Lussin, Lesina). Sie hatten acht oder auch nur sechs Thoraxsegmente wie die *S. brachychona* Claparède's von Neapel, in welcher ich nur eine grössere *P. Torelli* Mgrn. erkenne. Sie theilt die durchsichtige, hornige Röhre und das Vorkommen in selbstgefertigten Gängen des Gesteines mit *P. reniformis* O. Fr. Müll. (*S. saxicola* Gr.) und mag bei flüchtiger Untersuchung manchmal mit ihr verwechselt werden.

aus je 11 Fäden bestehenden Kiemen waren braun gebändert. Augenpunkte am ersten Segmente liessen sich nicht mit Sicherheit erkennen. Dagegen fanden sich solche am Aftersegmente. Der Thorax bestand aus acht Segmenten.

Alles dies entspricht den mir vorliegenden Exemplaren aus der Adria. Kleine Unterschiede finden sich erst bei einem aufmerksamen Vergleiche der Borsten, ohne dass aber deren Grundcharakter wesentlich alterirt würde. Die Borsten sind insgesammt weniger kräftig als die der europäischen Individuen. Die Paleen sind etwas gestreckter und schmäler, die Hakenborsten etwas kleiner, die Haarborsten des Abdomen minder breitrandig. (Fig. 1 *A*, 1 *B*, 1 *C*, 1 *D*).

Gefunden bei Eno-sima. (Dr. Koerbl, Dr. Döderlein).

Potamilla myriops n. sp.

Taf. III, Fig. 2.

Körper bei 205mm Länge vorn 6mm breit mit 298 Segmenten. Rücken des Thorax bis auf eine helle Mittellinie bräunlich überlaufen, besonders vorn; auch die Seitenfläche zwischen den Borstenwülsten bräunlich. Der übrige Körper hellgelbröthlich, rückwärts mehr grünlich.

Der Halskragen ungefärbt, dorsal wenig auseinander weichend, hier sehr kurz; seitlich und ventral, wo er meist umgeschlagen ist, länger. Der Thorax mit 13 Borstenhöckern 11mm lang. (Ein zweites nur in einem Bruchstücke vorhandenes, ebenso grosses Individuum besass einen Thorax von 9mm Länge mit nur acht Borstenhöckern.) Die Bauchschilder am Thorax etwas über 3mm breit, allmälig mit dem Körper an Breite abnehmend.

Die Kiemen c. 20mm lang. Basalblatt 2·5—3mm. Jederseits 40—44 Fäden in zwei Reihen. Die äusseren Fäden an der Basis wie das Basalblatt bräunlich überlaufen, sonst weisslich mit etwa 4—6 bräunlich-röthlichen Binden. An jedem Schafte c. 21 sehr deutliche Augen, bald ober der Basis beginnend, im letzten Drittel aufhörend. Die Augen vorspringend, einreihig, ausnahmsweise auch einige gegenständig. Die Strahlen über 4mal so lang als die Schäfte breit sind, bis an deren Enden gehend.

In dem 1. Borstenhöcker Haarborsten von der Form der Fig. 2 *A*, 2 *B*. Die Haarborsten des Thorax waren meist abgebrochen. Ich sah nur die Form *A* und an 40 Paleen (Fig. 2 *C*). In den Borstenhöckern des Abdomen Haarborsten von der Form 2 *D* oder gleiche nur etwas längere und daneben einige von der Form 2 *E*. In den Borstenwülsten des Thorax die zwei Borstenformen 2 *F* und 2 *G*.

Die langen Röhren sind gelblich, durchscheinend, mit feinem Sande bedeckt.

Gesammelt von Dr. A. v. Roretz.

HYPSICOMUS.

1870. Grube E., Bemerk. über Annel. d. Pariser Museums. Arch. f. Naturg. 36. Jahrg. p. 348.

Grube vereinigt in dieser Gattung Sabellen, „die alle darin übereinstimmen, dass das Basalblatt der Kiemen ungewöhnlich hoch, der Halskragen ganz niedrig wie ein Ringwulst ist und die Borsten des ersten Bündels in einer breiten, schräg emporlaufenden Querreihe stehen". Als hieher gehörige Arten führt er an: *S. stichophthalmos* Gr. (Adria), *alticollis* Gr. (Rothes Meer), die von mir in der Literatur nicht aufgefundene *brevicollaris* Gr. und *simplex* Qfg. (Port du roi Georges). Den obigen Merkmalen ist aber noch ein weiteres sehr wichtiges, die Gattung erst rechtfertigendes hinzuzufügen, nämlich das Vorhandensein von Paleen auch an den postthoracalen Segmenten. Im Übrigen nähert sich *Hypsicomus* am meisten *Potamilla*. Man müsste den obigen Arten noch anreihen: *S. phaeotaenia* Schmarda (Ceylon), *S. fusco-taeniata* Gr. (Ceylon), *S. scoparia* Gr. (Uea). Ich führe alle diese Arten, welche ich mit Ausnahme von *H. stichophtalmos* und *phaeotaenia* nicht kenne, an, ohne damit auch für ihre Selbstständigkeit einzutreten.

Hypsicomus phaeotaenia.

Taf. III, Fig. 3.

1861. *Sabella phaeotaenia* Schmarda L. K., Neue wirbellose Thiere. II. Hälfte. Leipzig, p. 35, Taf. XXII. Fig. 88.

Es ist nur ein Bruchstück von 5^{mm} Länge (ohne Kiemen) und $2 \cdot 2^{mm}$ Breite vorhanden mit 28 Segmenten. Rücken und Bauch des Thorax violett, vorn dunkler, die Borstenwülste ungefärbt. Bauchschilder des Abdomens in ihrem medianen Antheile graubräunlich, durch die farblose Bauchfurche getheilt, welche sich am Rücken in einer hellen Mittellinie verliert.

Der Halskragen violett, sehr kurz, nirgends eingeschnitten, am Bauche etwas weiter nach vorn gehend als am Rücken mit einem kleinen medianen weissen Flecke hinter dem Rande.

Thorax 2^{mm} lang, $2 \cdot 2^{mm}$ breit mit acht Borstenhöckern. Die Borstenwülste beiläufig so breit als die Bauchschilder.

Kiemen mit dem Basalblatte 6^{mm} lang, dieses 1^{mm} lang und $0 \cdot 7^{mm}$ breit. Im Ganzen 15 Kiemenfäden. Da das Epithel grösstentheils abgehoben war, lassen sich die Färbung sowie Zahl und Stellung der Augen nicht mit voller Genauigkeit angeben. Die Basis der Kiemen ist in einer Ausdehnung von 2^{mm} violett mit einigen dunkelvioletten Flecken, der übrige Theil hell mit mehreren violetten Binden. Die Augen treten ober der Mitte der Schäfte auf, anfangs paarig, dann einzeln. Es scheinen 11 oder 12 Paare und 5—8 einzelne Augen vorzukommen. Die Schäfte mit zwei Knorpelzellchen im optischen Querschnitte, die Strahlen bis $0 \cdot 8^{mm}$ lang.

Im ersten leicht *S* förmig von unten und hinten nach vorn und innen aufsteigenden Borstenhöcker c. 30 nur wenig vorragende Borsten von zweierlei Gestalt in zwei Reihen. Dem Leibe zunächst die Form 3 *A* (Taf. III) und ihnen aufliegend derbere Borsten (Fig. 3 *B*), die an die Pickelborsten der Borstenwülste erinnern. In dem 2.—8. Borstenhöcker 3—4 lanzenförmige Haarborsten (Fig 3 *C*) und stumpfe Paleen (Fig. 3 *D*). Am 4. Segmente waren an 20 Paleen vorhanden, an den anderen viel weniger. In den Borstenhöckern des Abdomens 2 sehr feine Haarborsten (Fig. 3 *E*) und 2 spitzentragende Paleen (Fig. 3 *F*). In den Borstenwülsten des Thorax kurzstielige Hakenborsten (Fig. 3 *G*) und Pickelborsten (Fig. 3 *H*). In den Borstenwülsten des Abdomens nur Hakenborsten von derselben Gestalt wie im Thorax.

Gefunden von Dr. Döderlein bei Naze auf Oshima (Liu-Kiu Insel) auf Korallen.

Schmarda erwähnt die Augen nicht. Im Übrigen ergeben sich, wie ich glaube, genügende Anhaltspunkte, um die japanische Form auf die ceylonische zu beziehen. Wahrscheinlich ist auch die *Sabella fuscotaeniata* Gr., wie der Autor selbst vermuthet, nur eine blosse Varietät der *S. phaeotaenia* Schm. Auch das, was Grube über die *S. scoparia* angibt, reicht nicht hin, um sie von *Hypsicomus phaeotaenia* nach obiger Beschreibung zu trennen. *Sabella pyrrhogaster* Gr. von den Philippinen lässt gleichfalls an *Hypsicomus* und selbst an unsere Art denken, aber es soll nur eine Art Borsten in den Borstenwülsten des Thorax vorkommen.

Laonome japonica n. sp.

Taf. III, Fig. 4.

Körper des einzigen Exemplares 133^{mm} lang, vorn 15^{mm} breit, mit 181 Segmenten. Farbe des Leibes dunkelviolettbraun, die Bauchschilder ein wenig heller, unter der Loupe gesprenkelt. Am hellsten ist vom 2. Drittel des Leibes an eine kleine Stelle auf der Bauchfläche der Segmente nach aussen der Bauchschilder, wodurch zwei helle Längslinien entstehen. Die Borstenhöcker und die Borstenwülste ungefärbt. Ober den Borstenhöckern, zumal des Abdomens, ist in einer kleinen, helleren Erhebung eine punktförmige Anhäufung bräunlichen Pigmentes bemerkbar. Die Bauchfurche biegt zwischen dem 8. und 9. Segmente auf den Rücken um und geht hier in eine kaum vertiefte Bogenlinie über, welche sich, die Concavität nach aussen, gegen den dorsalen Spalt des Halskragens hinzieht und durch ihre helle Färbung von dem dunklen Ton des Rückens auffallend absticht.

Der Rand des in der Mitte des Rückens und Bauches unterbrochenen Halskragens ist gefaltet, so dass es den Eindruck macht, er sei auch seitlich eingeschnitten, was jedoch nicht der Fall ist.

Der Thorax mit 8 Borstenhöckern ist etwas breiter als lang. Die Segmente sind hier am längsten, die Bauchplatten aber werden weiter nach rückwärts breiter. Im 6. Segmente ist das Segment 9mal, die Bauchplatte 6mal breiter als lang, im letzten Drittel des Leibes war ein Segment 18mal breiter als lang, die Bauchplatte 11mal. Die vordersten Borstenwülste sind so breit, die des Abdomens nur ein Drittel so breit als die Bauchplatten.

Die Kiemen 58^{mm} lang; hievon entfallen 5^{mm} auf das Basalblatt. Die Kiemenfäden sind bald durchaus licht (die Schäfte bräunlich, die Strahlen schmutzig grau-gelblich) oder in ihrer vorderen Hälfte, selten im Verlaufe, dunkelviolettbraun gefärbt; gebändert erscheinen die Kiemen demnach nicht. 144 Kiemenfäden jederseits, einen äusseren und inneren Kreis bildend. Der geschlossene äussere Kreis besteht aus Fäden mit stärkerem Schafte, der eng anliegende zum Theil, jedoch nie so weit, dass er von aussen sichtbar wird, eingeschobene innere Kreise aus solchen mit schwächeren Schäften. Die Mundtentakel 17^{mm} lang, also beiläufig ein Drittel so lang als die Kiemen.

Die Haarborsten des 1. Borstenhöckers jenen des Thorax ähnlich nur schwächer, die lange, schmale Form (Fig. 4 *A*) vorwiegend. Die Haarborsten der sieben anderen Borstenhöcker (Fig. 4 *A*, 4 *B*) theils weit vorragend, schlank, wenig gekrümmt, theils kurz, breit und gebogen. Hakenborsten (Fig. 4 *C*) nur einerlei Art. Die Riefelung am Kamme sehr fein. Die Haar- und Hakenborsten des Abdomens nicht wesentlich verschieden von jenen des Thorax.

Gefunden bei Nagasaki von Dr. A. v. Roretz.

Sabella indica Sav. hat ebenfalls Kiemen, deren Fäden in 2 Kreisen stehen und ähnliche Dimensionen. Savigny,[1] Quatrefages,[2] Grube,[3] machen über sie folgende Angaben. Länge 119, 80, 135^{mm}; Breite 13, 10, 12^{mm}; Segmentzahl 227, 200, 196; Zahl der Kiemenfäden 84, 60, 66; Länge der Kiemen: Länger als die Hälfte des Körpers (Savigny, Grube), fast so lang, als dieselbe (Quatrefages). Da unsere Sammlung keine *Sabella* besitzt, auf welche diese makroskopischen Merkmale passen, an der ich sodann die Borsten hätte untersuchen können, beruht die Unterscheidung der *Laonome japonica* von *S. indica* Sav. vorläufig auf einer geringeren Zahl der Segmente, kürzeren Kiemen und zahlreicheren Kiemenfäden. Besser passen die Beschreibungen der *S. indica* auf eine *Laonome* von der Insel Cebu, die ich als *Sabella spectabilis* Gr.[4] bezeichnen muss, wiewohl Grube bei dieser Art nichts von der Anordnung der Kiemenfäden in zwei Reihen erwähnt. Die volle Übereinstimmung meiner Exemplare mit der Abbildung Grube's und seinen übrigen Angaben, die Identität des Fundortes gestatten die Annahme, dass Grube die Doppelstellung der Kiemenfäden übersehen. Ein Exemplar meiner *S. spectabilis* Gr. war 77^{mm} lang mit 158 Segmenten. Die Kiemen erreichten 45^{mm} und hatten 55 Fäden. Ein zweites stark contrahirtes, noch in der Röhre eingeschlossenes Thier war 100^{mm} lang. Die Kiemen massen 65^{mm} und hatten 73 Fäden. *Laonome spectabilis* Gr. ist specifisch verschieden von *Laonome japonica* mihi. Ausser den die Dimensionen des Körpers, Segmentzahl und Kiemen betreffenden Differenzen ergeben sich noch solche hinsichtlich der Borsten. Die Haarborsten der ersten Art haben eine stärker vorspringende Schneide und die Hakenborsten (Taf. III, Fig. 5) sind grösser, von abweichender Form, mit groben Riefelungen am Kamme.

Myxicola platychaeta n. sp.

Taf. III, Fig. 6.

Der cylindrische Körper 28^{mm} lang, etwas über 4^{mm} breit mit 82 Segmenten, von welchen die letzten sehr kurz sind. Das Ende des Körpers nicht auffallend stumpf. Farbe gegenwärtig hell, gelblich röthlich, die

[1] Syst. d. Annel., p. 77.
[2] Hist. nat. d. Annel. II, p. 432.
[3] Bemerk. über Annel. d. Paris. Mus. Arch. f. Naturg. 36. Jahrg. 1870, p. 340.
[4] Annulata Semperiana, l. c. p. 253.

allerersten Segmente etwas dunkler, grauviolett überlaufen. Auch an den vordersten Segmenten eine leichte Ringelung bemerkbar. Der konische ventrale Vorsprung des ersten Segmentes ist kürzer als bei *M. infundibulum* und nicht so spitz zulaufend. Die seichte Bauchfurche biegt zwischen 8. und 9. Borstenbündel auf den Rücken um, wo sie tiefer werdend vollkommen deutlich bis nach vorn verläuft.

Die Kiemen 9^{mm} lang, aus je 16 Fäden bestehend. Sie waren umgestülpt, die die Strahlen verbindende Membran war meist eingerissen oder abgehoben, so dass sich über das Verhältniss der freien Spitze der Strahlen zu dem durch die Verbindungshaut besetzten Theil nicht völlige Gewissheit erlangen lässt. Es scheint, dass die Länge der Strahlen die der Verbindungshaut um ein Sechstel übertrifft. Mit Bestimmtheit sehe ich jedoch, dass sich noch ein ansehnlicher häutiger Saum bis an das Ende der Strahlen hinaufzieht, dass dieses also nicht wie bei *M. infundibulum* nackt ist. Augen sind keine vorhanden. Die Kiemen sind an der Basis hell in der vorderen Hälfte dunkler, leicht grauviolett. Von den kurzen, lappenförmigen, abgerundeten Tentakeln war nur der linke erhalten.

Der Thorax besteht aus neun Segmenten, wovon acht Haarborstenbündel tragen. Die Grenze nach hinten ist durch die Bauchfurche angegeben und seine Länge betrug $5 \cdot 5^{mm}$. Ich betrachte das erste borstentragende Segment als das zweite; denn es ist durch eine deutliche Furche von einem vorhergehenden getrennt. Im 2. Segmente sehe ich nur feinste Haarborsten (Fig. 6 *A*) von lanzenförmiger Gestalt mit relativ breitem Saume, von der Art, wie sie auch in der europäischen *Myxicola infundibulum* vorkommen. Diese Haarborsten gehen bis zum anteanalen Segmente. Im dritten bis zum 9. Segmente findet man unter und etwas hinter dem 2.—8. Borstenbündel breite, derbe, an der Spitze etwas gekrümmte Borsten (Fig. 6 *B*), welche man den langgestielten Hakenborsten anderer *Myxicola*-Arten [1] gleichstellen muss. An dem plumpen Ende ist keine Zähnelung zu bemerken. Im 3. Segmente sind 15, im 9. aber 10 derartige Hakenborsten vorhanden. Vom 10. Segment (9. Borstenbündel) an verschwinden sie und werden von den eigentlichen Hakenborsten (Fig. 6 *C*) in bekannter Anordnung abgelöst.

Gefunden von Dr. Koerbl an der Ostküste von Eno-sima in einem Exemplare.

Fam. **SERPULACEA** Mgrn.

Vor vierzig Jahren klagte Philippi, als er nach den Deckelbildungen seine Gattungen aufstellte und Arten unterschied, dass wenige Thiere so vernachlässigt seien wie die Serpeln. So reformatorisch seine Directive auch war, hätte die Klage über Vernachlässigung bei den inzwischen gewachsenen Ansprüchen heute gleiche Berechtigung wie damals, wenn nicht durch eine vor ganz kurzer Zeit erschienene Arbeit in viel versprechender Weise gezeigt worden wäre, was zu thun sei, um eine rationelle Sytematik der Serpeln zu begründen. Langerhans war es, der in dem eben ausgegebenen II. Hefte des 40. Bandes der Zeitschr. f. wiss. Zoologie in seinem IV. Beitrage zur Wurmfauna Madeira's, Betrachtungen über die Gruppirung der Serpeln anstellte, welche es nur bedauern lassen, dass diesem feinsinnigen und gründlichen Anneliden-Forscher nicht ein umfassenderes Material zur Verfügung stand, mit dessen Hilfe er gewisse Lücken auszufüllen im Stande gewesen wäre, die geschlossen sein müssen, um völlig befriedigende Folgerungen zu ermöglichen. Meine nachstehenden Beschreibungen von 7 Serpeln folgen dem von Langerhans gegebenen Beispiele. Ich fasse hier die Ergebnisse kurz zusammen. Wenn man die einfach kammförmigen Hakenborsten der Gattungen *Serpula* (Fig. 1 *A*),[2] *Hydroides* (2 *A*) *Eupomatus* (3 *B*), welche im Profil wie die der Amphareteen aussahen, untereinander ver-

[1] Sie fehlen auch nicht der *M. infundibulum*, wie Claparède meinte, und haben bei dieser Art beiläufig die Gestalt jener, welche dieser Autor von seiner *Leptochone aesthetica* abbildet (Annél. chétop. du golfe de Naples. Mém. de la soc. d. phys. et d'hist. nat. de Genève. Tom. XX, part. II, 1870, pl. XIV, fig. 1 *B*), nur bemerke ich — ähnlich wie an den gestielten Hakenborsten der *Chone*- und *Euchone*-Arten — auf der Kuppe des Hakens ein Zähnchen. Es muss somit die Gattung *Leptochone* Clap., die sich von *Myxicola* durch das Vorhandensein von Uncini am Thorax unterscheiden sollte, als die jüngere gestrichen werden.

[2] Die hier citirten Figuren befinden sich alle auf Taf. IV.

gleicht, wird man auch an denselben wie an den Borsten des ersten Segmentes (Bajonettborsten) (Fig. 1, 3) und den ventralen Abdominalborsten (Spateln) (Fig. 1 *C*, 2 *B*, 3 *C*) den gemeinschaftlichen Charakter herausfinden; die Deckel dieser 3 Gattungen (*Eupomatus* könnte übrigens mit *Hydroides* vereiniget werden) aber zeigen untereinander auffallende Modificationen. Bei *Pomatoceros* und *Pomatostegus* sehen wir bei verschiedenem Bau des Deckels ventrale Abdominalborsten (Dütenborsten) (Fig. 4 *B*, 5 *C*) und Hakenborsten (Fig. 4 *A*, 5 *D*) übereinstimmen und beide von denen der drei oben erwähnten Gattungen sehr abweichen. Die Hakenborsten besitzen unter den Kammzähnen einen hohlmeisselartigen Fortsatz (Meisselzahn). Während jedoch die Borsten des 1. Segmentes bei *Pomatoceros* gar nicht ausgezeichnet sind, hat *Pomatostegus* eine eigene Form (Fig. 5). Und an *Pomatocerus* und *Pomatostegus* muss man den ventralen Abdominalborsten und den Hakenborsten zu Folge *Placostegus* anschliessen, dessen erstes Segment gänzlich borstenlos ist. Nach den Hakenborsten müsste man mit diesen drei Gattungen *Vermilia* und *Omphalopoma* (Fig. 6 *D*) in Verbindung bringen, die anderen Borstenarten entfernen sie aber wieder sehr. Endlich mache ich noch als dritten Typus auf die Hakenborsten von *Apomatus* (Fig. 7 *D*). aufmerksam. Auch *Protula* [1] besitzt dieselben. Wegen dieser Hakenborsten und auch weil diese Gattung, wie ich an *P. Rudolphi* Risso sehe, mit „Salmacinenborsten" [2] versehen ist, steht sie besser in der *Apomatus*-Gruppe. Ich habe mich hier mit 10 Serpuliden-Gattungen beschäftigt und innerhalb dieser zehn Gattungen sehen wir nur drei Typen von Hakenborsten auftreten. Diese Thatsache stützt sich nicht allein auf die sieben japanischen Serpeln sondern auch auf die jüngste Arbeit von Langerhans, auf die brauchbaren Abbildungen früherer Autoren und endlich auf die eigene Untersuchung einschlägiger, europäischer Arten. Sie gibt dem von Langerhans gelieferten Nachweise, dass unsere auf die Deckelbildung gegründeten Serpuliden-Gattungen unnatürliche sind, eine weitere Stütze. Das Fehlen oder die Beschaffenheit des Deckels ist ein secundärer Charakter. Was käme für eine bunte Gesellschaft zusammen, wenn man z. B. in die Gattung *Protula*, weil ihr als Kriterium die Deckellosigkeit zugeschrieben wird, alle Deckellosen somit auch die nur zufällig Deckellosen, normal aber gedeckelten Serpeln einreihen würde. Claparède that diesen Missgriff. Sein *Psygmobranchus multicostatus* ist, man vergleiche nur die Abbildungen der Borsten, eine *Vermilia*, wahrscheinlich seine *V. infundibulum* Phil. = *V. multivarica* Mörch. und sein *Psygmobranchus coecus*, dessen ungebührliche Stellung auch Langerhans hervorhob, eine *Serpula*-Art. Es wäre kein Wunder, wenn mit dem Wanken der Gattungen auch ein Theil der auf derselben Basis aufgebauten Arten seine Stabilität einbüssen würde. Die Prüfung der sich als typisch erweisenden Merkmale an einer grösseren Reihe von Individuen einer Gattung wird den Massstab für die Grenzen der Variabilität der secundären Merkmale abgeben und hie und da ein Zusammenziehen der Arten nöthig machen.

Serpula granulosa n. sp.

Taf. IV, Fig. 1.

Vier Exemplare lagen mir vor. Der Körper des kleinsten mass 22^{mm} bei 140 Segmenten; der Thorax war 5^{mm} lang, der Deckel sammt Stiel 6^{mm}. Der Rand des Deckels hatte 40 Zähne. Das grösste Individuum war 58^{mm} lang mit c. 150 Segmenten, der Thorax 7^{mm}, der Deckel sammt Stiel 10^{mm}. Der Rand des Deckels hatte 46 Zähne. Bei den beiden anderen Thieren war der Körper nur in einer Länge von 33^{mm} erhalten und

---

[1] Die Gattung *Protula* Risso hat vor der auf einen sehr unwesentlichen Charakter begründeten Gattung *Psygmobranchus* Philippi die Priorität. Dass die Anordnung der Kiemenfäden höchstens ein Speciesmerkmal bilden darf, stellt sich deutlich bei *Cymospira* Bl. heraus, welche Gattung Grube mit Recht beseitigte.

[2] Langerhans nennt so thoracale Haarborsten, die, zuerst von Claparède bei Salmacina entdeckt, aus einem gesäumten und einem ungesäumten, dünnen, aber in Hinsicht auf die Länge breiten Theile bestehen. Der gesäumte Theil ist meist vorgebaucht und mehr minder gestrichelt, der ungesäumte wie mit stumpfen Zähnchen besetzt. Ich halte diese Zähnelung für nur scheinbar und für den Effect einer sehr feinen und regelmässigen Faltung des Randes. Es wechseln dunkle und helle Stellen ab, allein Intervalle, wie sie bei einer wirklichen Zähnelung auftreten müssten, sehe ich nicht. An den Salmacinenborsten von *Protula* ist der gesäumte Theil nur wenig vorgebaucht und gestrichelt und die Faltung im Rande des ungesäumten Theiles schwach ausgeprägt.

zählte 94—140 Segmente. Der Thorax war 6—7mm lang, der Deckel sammt Stiel 9mm. Der Rand des Deckels hatte 50—51 Zähne. Bei den Angaben über die Körperlänge sind die Kiemen nicht mitgemessen. Die letzten Segmente sind sehr kurz.

Die Kiemen mit gegen 35 Fäden.

Der Deckel stand dreimal rechts, einmal links an Stelle des ersten Kiemenfadens. An correspondirender Stelle der anderen Seite war stets das Rudiment eines Deckels vorhanden. Der trichterförmige Deckel ist nicht besonders vertieft, die Zähnelung ähnlich jener der *S. vermicularis* L. aus dem atlantischen Ocean. Die Wärzchen auf der einen Fläche des Deckels sind relativ zahlreich, in einem Exemplare dicht aufeinander folgend, in anderen wieder etwas spärlicher.

Sieben Thoraxsegmente. In dem ersten Borstenbündel die zwei Borsten-Arten der Gattung: Bajonnettborsten (Fig. 1) und einfach spitz zulaufende. Diese 0·04mm breit, kaum merklich gesäumt, gestrichelt. Die bis ein und einhalbmal breiteren Haarborsten der folgenden Thoraxsegmente haben einen breiten, kräftig gerieften Saum. Die Hakenborsten des Thorax (Fig. 1 *A*) 4—5 zähnig. Die des Abdomens (Fig. 1 *B*) höchstens 6 zähnig. Die ventralen Abdominalborsten (Spateln) sind in Fig. 1 *C* abgebildet.

Nur ein Exemplar befand sich in einer der Länge nach einem Steine aufgewachsenen dickwandigen Röhre, welche dorsal mit einem niederen medianen Kamme, der über die Mündung leicht zahnartig vorspringt, versehen ist; an den Seiten keine Längsleisten.

Gefunden an der Ostküste der Insel Eno-sima (Dr. Koerbl) und im Hafen von Kagoshima in einer Tiefe von 10—30 Faden (Dr. Döderlein).

Eine echte *Serpula* ist bereits aus dem nordjapanischen Meere bekannt. Es ist die *S. princeps* Grube.[1] Leider besteht die ganze Charakteristik nur aus den folgenden Worten: „Verhältnissmässig ansehnlich gross. Der Leib 41mm. Der Deckel mit seinem dicken Stiel 14mm lang. Der Deckel ist tiefer als sonst ausgehöhlt, und merklich trichterförmig, mit über 100 Randzacken, jederseits etwa 50 Kiemenfäden, welche noch zwei dunkel rosenrothe ziemlich breite Binden zeigen.“ Zu einem Vergleiche mit der von mir beschriebenen *Serpula* könnte auch die *Serpula* aus dem Rothen Meere, welche Grube *Serpula Gervaisi* Qfg.? nennt, herangezogen werden, wenn dieselbe einmal genauer untersucht sein wird. Sie ist jedenfalls verschieden von der *S. Gervaisii* Qfg. aus dem Mittelmeere, die übrigens auf sehr schwachen Füssen steht

Hydroides multispinosa n. sp.

Taf. IV, Fig. 2.

Körper des einzigen unvollständigen Exemplares 9mm lang (ohne Kiemen), vorn 1·5mm breit mit 27 Segmenten. Thorax 3mm lang. Links und rechts je ein etwas über 4mm langer Deckel.

Die Kiemen 4mm lang mit 13 und 15 Fäden.

Der rechte Deckel mit 27 stumpfen Zähnen des Trichters und 12 Stäben auf dessen innerer Fläche, der linke mit 25 Zähnen und 10 Stäben. Die Seiten der langen schmalen Stäbe bis fast an das Ende mit nicht ganz gegenständigen Stacheln besetzt. Solcher Stacheln sind meist acht vorhanden. Sie nehmen von der Basis gegen das Ende des Stabes an Länge zu, aber an Stärke ab. Ausserdem vier starke, gekrümmte Stacheln auf der Fläche der Stäbe, in deren Mittellinie; der stärkere unmittelbar an der Basis der Stäbe, der letzte in der Höhe des 6. Seitenstachels.

Sieben Thoraxsegmente. Von den zwei Borsten-Arten der Gattung im ersten Bündel waren nur die schmalen 0·006mm breiten, schwach gesäumten vorhanden. Sie waren fein gestrichelt, ihr Rand war ausgezackt. Die Haarborsten der anderen Segmente zweierlei Art: Breite, deutlich gestrichelte (Fig. 2), und schmale wie im ersten Bündel. Die Hakenborsten (Fig. 2 *A*) des Thorax mit sieben Zähnen, die des Abdomens etwas kleiner, auch nur mit sechs Zähnen. Die Spateln des Abdomens mit etwas gekrümmten Zähnchen. (Fig. 2 *A*).

[1] Naturh. Ber. d. schles. Ges. f. vaterl. Cultur, 1877, p. 62.

Die *u* förmig gebogene Röhre vorn $1 \cdot 5^{mm}$ breit, frei, dünn, zwar ohne Längsleisten, aber im Querschnitte doch nicht vollkommen rund, sondern leicht pentagonal.

Gefunden von Dr. Döderlein an Eno-sima während der Ebbe.

Eupomatus exaltatus n. sp.

Taf. IV, Fig. 3.

Körper des einzigen Exemplares 16^{mm} lang (ohne Kiemen), vorn nicht ganz 2^{mm} breit mit 64 Segmenten. Thorax $4 \cdot 5^{mm}$ lang. Zwei Deckel.

Die Kiemen 5^{mm} lang mit 15 Fäden.

Der vollkommen ausgebildete rechte Deckel sammt Stiel 6^{mm} lang. Sein Trichter mit 27 zugespitzten, nicht ganz gleichen Zähnchen. Er ist nicht vollkommen kreisförmig, sondern im dorsalen Rande etwas abgeflacht und hier sind auch die Zähnchen kleiner. Die Stäbe entspringen nicht direct von der inneren Fläche des Trichters. Sie stehen auf einer kurzen, beiläufig centralen, nach oben sich verbreiternden Säule. Es sind acht unter sich gleiche und ein sehr grosser vorhanden. Die kleineren sind zweimal länger und kräftiger als die grössten Zähne des Trichters und dem Ende zu hakenförmig gebogen. Der eine grosse ist fast zweimal so stark als die kleinen, anfangs seitlich zusammengedrückt, dann wieder verdickt, erhebt sich über dieselben, und ist plötzlich fast in einem rechten Winkel geknickt, mit seinem Haken über das Centrum des durch die 9 Stäbe gebildeten Kreises hinaus reichend. Er steht in der Verlängerung des Stieles und richtet seinen Haken ventralwärts. Der Durchmesser des von den Stäben gebildeten Kreises ist etwas grösser als die Hälfte des Trichterdurchmessers. Die Consistenz des Trichters ist eine mässige, die Stäbe sind steif, leicht gelblich, durchscheinend. Der linke kürzere und kleinere Deckel ist ganz weich. Die Verhältnisse sind dieselben wie am rechten, nur hat der Trichterrand weniger Zähne.

Die ausserordentliche Entwicklung eines Stabes auf dem Trichter sehen wir auch bei *Eupomatus heteroceros* Gr., *Eupomatus albiceps* Ehrbg. Gr. und *Serpula (Hydroides) minax* Gr. Die letzte Art, welche man wohl, wenn man die Gattungen *Hydroides* und *Eupomatus* annimmt, besser zu letzterer stellen soll, hat ausserdem mit unserer Art das Merkmal gemeinsam, dass der Kranz von Stäben einer centralen Säule aufsitzt. Die Form der Zähne des Trichters und des grossen Stabes ist aber verschieden.

Sieben Thoraxsegmente mit Borsten. Im ersten Borstenbündel Bajonnettborsten (Fig. 3) und schmale, $0 \cdot 007^{mm}$ breite, fast nicht gesäumte Borsten mit etwas welligem Rande. In den folgenden Borstenbündeln eben solche feine, nur deutlicher gesäumte und breitere Haarborsten (Fig. 3 *A*). Der Saum dieser ist wenig merklich gestrichelt. Die Hakenborsten des Thorax (Fig 3 *B*) mit sieben, selten acht Zähnen, die des Abdomens meistens mit sechs Zähnen. Bei *E. minax* Gr. sollen die Hakenborsten vierzähnig sein. Die Spateln (Fig. 3 *C*) des Abdomens feinzähnig.

Die Röhre $2 \cdot 5^{mm}$ im Durchmesser, hinten hakenförmig gebogen, rund, ohne Längsleisten, mit queren Ansatzstreifen, vorn nicht angewachsen.

Gefunden von Dr. Koerbl an der Ostküste der Insel Eno-sima.

Pomatoceros helicoides n. sp.

Taf. IV, Fig. 4.

Körper des einzigen Exemplares 45^{mm} lang (ohne Kiemen) vorn $5 \cdot 5^{mm}$ breit mit c. 180 Segmenten Thorax 10^{mm} lang. Ein Deckel links.

Die Kiemen im Spiren von 7 Umgängen, 10^{mm} lang. Das Basalblatt bläulich überlaufen.

Der 7^{mm} lange, in einer Ausdehnung von $4 \cdot 5^{mm}$ mit einem jederseits $1 \cdot 5^{mm}$ breiten Saume versehene Stiel setzt sich etwas unter dem dorsalen Rande des Deckels an. Der Deckel stellt eine eiförmige, ventral breitere, an ihrer Oberfläche kalkig belegte, etwas concave, dorso-ventral leicht gebogene Platte dar. Der sagittale Durchmesser beträgt 7^{mm}, der frontale an der breitesten Stelle 6^{mm}. Entsprechend der Insertionsstelle des

Stieles, etwa 1^{mm} nach innen von dem oberen Rande des Deckels, findet sich an dessen oberen Fläche eine aus breiterer Basis aufsteigende kegelförmige Erhebung, die sich in einer Höhe von etwas mehr als 1^{mm} gabelt. Die Äste oder Fortsätze dieser Erhebung sind jedoch sämmtlich abgebrochen und man kann nur aus dem Vorhandensein von Öffnungen auf dieselben schliessen. Es sind zwei in einem rechten Winkel zueinander stehende, nach rechts und links gerichtete Hauptäste von etwa $0 \cdot 5^{mm}$ Dicke vorhanden, welche an ihrer dorsalen Seite nahe ihrem Ursprunge wieder einen kleinen Seitenast abgegeben haben müssen und ein schmächtigerer, wohl median und ventral gerichteter Fortsatz, der an der vorderen Seite der gemeinsamen Erhebung noch vor der Gabelung entsteht.

Eine ähnliche Deckelbildung zeigen *S (Pomatoceros) crucigera* Gr. aus dem Rothen Meere, mit welcher *Cymospira tricornis* Baird. von Djedda identisch sein dürfte, und *Pomatoceros bucephalus* Mörch von den Philippinen. Die erste Art hat auch spiralige Kiemen, über die Beschaffenheit der Kiemen bei der zweitgenannten ist nichts bekannt. An dem japanischen *Pomatoceros* sind die Lage und Anordnung der Protuberanzen und namentlich deren im Verhältniss zur grossen Deckelfläche geringe Ausbildung auffallend.

Das Collare sehr lang, 3^{mm}, seitlich eingeschnitten. Am ersten Segmente keine Borsten [1] bemerkbar. Die Haarborsten der sechs folgenden Segmente von der Stärke der abgebildeten (Fig. 4) oder etwas schmäler; ausserdem sehr ähnliche, kürzer gesäumte und mehr gerade verlaufende. Die Hakenborsten des Thorax mit meist 20 Kammzähnen und einem Meisselzahne,[2] die des Abdomens gleichgeformt aber kleiner und mit nur 10—12 Zähnen (Fig. 4 *A*). Ventral am Abdomen drei Dütenborsten (Claparède) Fig. 4 *B*.

Die Röhre 10^{mm} im Durchmesser, ziemlich drehrund, von vielen Anwachsstreifen runzlig, aussen rosenroth überlaufen, innen hellbräunlich.

Gesammelt von Dr. A. v. Roretz.

Pomatostegus latiscapus n. sp.

Taf. IV, Fig. 5.

Mehrere Exemplare darunter jedoch nur ein vollständiges liegen vor. Der Körper desselben 21^{mm} lang, (ohne Kiemen) vorn 2^{mm} breit mit 67 Segmenten. Thorax 4^{mm} lang.

Die Kiemen 5^{mm} lang mit 25 Fäden.

Der Deckel stets links, mit 3, 4 und 7 Scheiben übereinander. Der schon an der Basis breite, dorsoventral comprimirte Stiel verbreitert sich im Verlaufe und setzt sich unmittelbar unter dem dorsalen Rande der ersten Scheibe fest. Eine zarte, jederseits vor dem Deckel in einen lanzettlichen Zacken auslaufenden Membran säumt ihn ein. Die Spindel, welche die einzelnen Scheiben verbindet, ist sehr breit, der vorstehende Rand der an Grösse successive abnehmenden Scheiben daher sehr schmal. Sie steht nicht central, sondern etwas mehr dorsal; die Scheiben springen ventral mehr vor als dorsal. An dem vollständigen Exemplar mass der Deckel sammt Stiel $6 \cdot 5^{mm}$ und hatte 4 Scheiben. In einem anderen Falle war er $8 \cdot 5^{mm}$ lang, wovon $2 \cdot 5^{mm}$ auf den eigentlichen Deckel entfielen. Dieser bestand aus 6 Scheiben. Die unterste Scheibe hatte einen sagittalen Durchmesser von etwas über 2^{mm}. Der Durchmesser der Spindel, welche die nächste Scheibe trug, war $1 \cdot 5^{mm}$.

Das Collare vorn gerade verlaufend, seitlich nicht eingeschnitten.

[1] Sie müssen, jedenfalls hinsichtlich Grösse und Quantität sehr reducirt, entweder zufällig verloren gegangen sein oder sie obsolescirten. Auch bei *Pomatoceros triqueter* L. sind sie spärlich und zart oder mögen manchmal dem ausgewachsenen Thiere ganz fehlen; an der Larve sind sie aber vorhanden. (Siehe R. v. Drasche, Beiträge zur Entwicklung der Polychaeten. 1. Heft, Wien 1884, Taf. III, Fig. 33.

[2] Wenn man die Hakenborsten von *Pomatoceros*, *Pomatostegus*, *Placostegus* in der Seitenlage, die Zähne nach hinten gerichtet, untersucht, so erscheint vor dem 1. Kammzahne eine derbe, stumpfe, nicht zahnartige Hervorragung. Die Obensicht ergibt, dass diese dann wie ausgeschnittene Hervorragung ein hohlmeisselartiger Fortsatz ist, dessen Convexität dem 1. Kammzahne zugekehrt ist. Ich nenne diesen Fortsatz „Meisselzahn". Bei *Omphalopoma* und *Vermilia* ist er charakteristischer Weise nicht, oder nur so wenig ausgehöhlt, dass man ihn für massiv halten könnte.

Thorax mit sieben borstentragenden Segmenten. Am ersten Segment nur Haarborsten. Ausser sehr eigenthümlichen Borsten (Fig. 5) um die Hälfte schmälere, schwach gesäumte am Ende leicht gebogene Borsten gewöhnlicher Form. Die Haarborsten der sechs folgenden Segmente gleichfalls zweierlei Art: Breite, nur in kurzer Ausdehnung gesäumte geschwungene (Fig. 5 *A*) und schmale mehr gerade. (Fig. 5 *B*). Der Saum auch der breiten Haarborsten ist sehr schwach gestrichelt, der Rand daher nur bei starker Vergrösserung gesägt erscheinend. Die Hakenborsten des Thorax mit 12 Kammzähnen und einem Meisselzahn, die des Abdomens kleiner, aber auch noch mit 10—12 Zähnen (Fig. 5 *C*). Ventral am Abdomen drei Dütenborsten (Fig. 5 *D*). Diese Borsten verändern sich an den allerletzten Segmenten. Das verbreiterte Ende wird immer schmäler. Zuletzt sind nur feine, am Ende etwas geknickte Borsten vorhanden und dieses Ende ist feingesägt.

Die entweder völlig aufgewachsene oder zum Theil freie Röhre ist im Durchschnitt leicht dreieckig, die Seiten dieses Dreieckes sind aber etwas vorgewölbt. Den drei Kanten der Röhre entlang ziehen in Lappen oder Dornen zerschlitzte hohe aber dünne Längsleisten. Die bedeutendste liegt, wenn die Röhre aufgewachsen ist, der Fläche, mit welcher sie festsitzt, gegenüber. Über die Seitenflächen ziehen je zwei viel weniger bedeutende Längsleisten. Sie sind manchmal nur angedeutet, öfter erhaben und mit feinen Dörnchen oder kleinen spitzen Lamellen besetzt. Es kann auch auf einer Seite nur eine Längsleiste auftreten. Die Farbe der Röhren ist rosenroth.

Gefunden von Dr. Döderlein bei Eno sima in einer Tiefe von c. 100 Faden und bei Naze auf Oshima.

Omphalopoma Langerhansii n. sp.

Taf. IV, Fig. 6.

Ich stelle die anbei beschriebene Form zu *Omphalopoma* Mörch auf Grund der durch die Untersuchungen von Langerhans [1] uns gewordenen Kenntniss dieser Gattung. Langerhans vereinigt unter diesem Namen Serpeln, die sich durch die Form des Deckels und die Bewaffnung des ersten Segmentes von *Vermilia* unterscheiden, mit welcher sie sonst die grösste Verwandtschaft zeigen. Die japanische Art nähert sich sehr einer der von Langerhans beschriebenen zwei Arten, nämlich der *O. cristata*, die in Bezug auf Deckel und Borsten des 1. Segmentes stark von der anderen Art abweicht und es ist möglich, dass sich, wenn einmal eine grössere Zahl hierher gehöriger Formen genau bekannt sein wird, eine Spaltung dieser Gattung als nothwendig herausstellen wird.

Das einzige Exemplar 16^{mm} lang (ohne Kiemen) vorn 2^{mm} breit mit 70 Segmenten. Thorax 3^{mm} lang.

Die Kiemen 8^{mm} lang mit 27 Fäden.

Ein Deckel rechts, sammt Stiel 8^{mm} lang. Der an der Basis sehr schmale, oben c. 1^{mm} breite, 5·5^{mm} lange Stiel ist oben etwas breiter als der Theil des Deckels, mit dem er in Verbindung tritt. Der eigentliche Deckel ist vollkommen farblos. Er besteht aus einer umgekehrt kegelförmigen weichen Ampulle, die eine etwas geneigte consistente weissliche Platte von 2^{mm} Durchmesser trägt. Die Platte ist schwach concav und bis auf einige periphere concentrische Anwachsringe glatt, compact, mit einem ganz unbedeutenden nicht ganz centralen Buckel versehen.

Das Collare ist seitlich eingeschnitten, sein Vorderrand wellig. Der Thorax mit 7 Segmenten. Das erste nur mit Haarborsten. Diese zweierlei Art. Solche, welche an Breite alle anderen Borsten des Thorax übertreffen, mit einem theilweise sehr stark vorgewölbten Saume, der scharf gestrichelt ist, während der Rest der Borsten wie gestichelt aussieht (Fig. 6) und $2^1/_2$ mal schmälere, schmal gesäumte gertenförmige (Fig. 6). An den folgenden Segmenten schwach gebogene Borsten mit breitem, deutlich gestricheltem Saume (Fig. 6 *A*) einige gertenförmige Borsten wie im ersten Segmente und vom 3. Segmente an etwa 10 Salmacinenborsten (Fig. 6 *B*.) Die Hakenborsten des Thorax mit meist sieben aber auch sechs oder acht Kammzähnen und einem derben Meisselzahne. Die des Abdomens (Fig 6 *D*) sind kleiner, haben aber trotzdem acht Kammzähne und

[1] Die Wurmfauna von Madeira. IV. Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. XL. p. 284. 1884

differiren auch dadurch, dass der die Zähne tragende Rand von dem übrigen Theil der Hakenborsten mehr abgesetzt ist. Die ventralen Borsten des Abdomens (Fig. 6 *C*) sind an ihrem Ende etwas geschwungen und die Schneide ist hier gezähnt. Sie nehmen nach hinten an Länge zu und ragen in auffallender Weise immer weiter aus dem Körper hervor. Anfangs sind ihrer nur drei in einem Borstenhöcker. Dann werden sie viel zahlreicher, besonders an den letzten Segmenten, und es geht auch eine Veränderung in der Form vor sich, indem sie mehr gerade werden. Das Ende ist jedoch stets, wie man sich bei Anwendung starker Vergrösserungen überzeugen kann, gesägt. Die Borstenwülste des Abdomens laufen ventral in einen besonders an den hinteren Segmenten ganz ansehnlichen, cirrusartigen Fortsatz aus.

Die kreideweisse Röhre dünnwandig, rund, vorn 2^{mm} im Durchmesser. Die Mündung leicht trichterförmig, $2 \cdot 5^{mm}$ hinter ihr ein mässig erhabener Ring. Dorsal eine mit regelmässigen feinen Dörnchen besetzte Längsleiste bis hinten; 7^{mm} vor der Mündung endet jederseits seitlich eine ebenso starke mit gleich grossen nur weniger spitzen Dörnchen besetzte Längsleiste. Ventral zieht von der Mündung bis zur Stelle, wo die Seitenleisten auftreten, eine seichte Raphe. Hier theilt sie sich in zwei, bald weiter auseinander weichende, bald nur in einer Entfernung von kaum 1^{mm} verlaufende Längsleisten, die bis nach hinten gehen.

Gefunden von Dr. Döderlein bei Eno-sima in einer Tiefe von 200 Faden.

Apomatus Enosimae n. sp.

Taf. IV, Fig. 7.

Körper des einzigen, nicht vollständigen Exemplars 15^{mm} lang (ohne Kiemen) vorn $1 \cdot 5^{mm}$ breit mit 19 segmenten. Thorax 7^{mm} lang.

Die Kiemen 7^{mm} lang mit 20 Fäden, unter welchen die ventralen sehr kurz sind.

Der kugelige Deckel wird von dem zweiten Kiemenfaden rechts getragen.

Das Collare lang, seitlich eingeschnitten, die Läppchen abgerundet.

Der Thorax mit sieben Segmenten. Das erste Segment nur mit Haarborsten. Diese theils schmal (Fig. 7) theils breiter und von der Form in Fig. 7 *B*, doch nicht so breit gesäumt wie diese. In den folgenden Segmenten schmale (Fig. 7 *A*), breit gesäumte mit fast glattem Saume (Fig. 7 *B*) und Salmacinenborsten (Fig. 7 *C*). Über die Zahl der letzteren in einem Bündel kann ich keine bestimmten Angaben machen, da die Borsten stark gelitten haben. Ich glaube aber, dass sie nur sehr spärlich sind. Die Hakenborsten (Fig. 7 *D*) beginnen am zweiten Segmente und zeigen über 20 Zähnchen. Die des Abdomens um wenig kleiner, aber von derselben Gestalt. Im Abdomen zwei scharf geknickte, gezähnte ventrale Borsten. Die Borsten der letzten Segmente konnten, da diese fehlten, nicht untersucht werden.

Die kreideweisse, drehrunde Röhre kaum 2^{mm} im Durchmesser.

Gefunden von Dr. Döderlein bei Eno-sima in einer Tiefe von c. 100 Faden.

Verzeichniss der in Betracht gezogenen Gattungen und Arten.

(Die Synonyme sind durchschossen gedruckt.)

ERKLÄRUNG DER ABBILDUNGEN.

TAFEL I.

Fig. 1. *Amphitrite vigintipes* Ehlbg. Gr. Haarborsten. 330/1.
" 1 *A*. " " Hakenborsten. 560/1.
" 2. " *ramosissima* n. sp. Haarborsten. 330/1.
" 2 *A*. " " Hakenborste. 330/1.
" 3. *Lepraea Ehrenbergi* Gr. Zweite Kieme. 30/1.
" 3 *A*. " " Haarborsten; die grösseren aus der hinteren Körperhälfte. 670/1.
" 3 *B*. " " Hakenborste. 330/1.
" 4. *Pista fasciata* Ehlbg. Gr. Haarborste. 240/1.
" 4 *A*. " " Hakenborste des 2. Borstenwulstes. 330/1.
" 4 *B*. " " " " 7. " von oben. 330/1.
" 4 *C*. " " " " 1. Flösschens. 330/1.
" 5. *Pista maculata* n. sp. Kieme. 25/1.
" 5 *A*. " " Haarborste. 240/1.
" 5 *B*. " " Hakenborste des 2. Borstenwulstes. 240/1.
" 5 *C*. " " " " 6. " 240/1.
" 5 *D*. " " " der Flösschen. 240/1.

TAFEL II.

Fig. 1. *Loimia Montagui* Gr. Ein Kiemenast zweiter Ordnung. 24/1.
" 1 *A*. " " Hakenborste des 16. Borstenwulstes. 330/1.
" 1 *B*. " " " " 12. Segmentes. 330/1.
" 2. *Nicolea gracilibranchis* Gr. Erste Kieme. 24/1.
" 2 *A*. " " Hakenborste des 4. Borstenwulstes. 560/1.
" 3. *Polymnia congruens* n. sp. Zweite Kieme. 20/1.
" 3 *A*. " " Haarborste. 330/1.
" 3 *B*. " " Hakenborste. 560/1.
" 4. *Thelepus japonicus* n. sp. Hakenborste. 560/1.
" 5. *Amphicteis angustifolia* Gr. Haarborste. 240/1.
" 5 *A*. " " Hakenborsten. 560/1.
" 6. *Amage auricula* Mgrn. Haarborste des 13. Segmentes. 630/1.
" 6 *A*. " " Hakenborste des 3. Borstenwulstes. 630/1.
" 7. *Polycirrus nervosus* n. sp. Hakenborste. 670/1.
" 8 *A*. *Sabella aulaconota* n. sp. Haarborste des 1. Borstenbündels. 240/1.
" 8 *B*. " " " " 5. " 240/1.
" 8 *C*. " " " " 32. " 240/1.
" 8 *D*. " " Haken- und Pickelborsten des Thorax. 240/1.

TAFEL III.

Fig. 1 *A*. *Potamilla Torelli* Mgrn. Haarborste des 7. Borstenbündels. 240/1.
" 1 *B*. " " Paleen von der Fläche und im Profil. 240/1.
" 1 *C*. " " Hakenborste. 240/1.
" 1 *D*. " " Pickelborsten. 560/1.

Fig. 2 *A*, 2 *B*. *Potamilla myriops* n. sp. Haarborsten des 1. Borstenbündels. 240/1.
„ 2 *C*. „ Paleen „ 8. „ 240/1.
„ 2 *D*. „ Haarborste „ 11. „ 240/1.
„ 2 *E*. „ „ „ 60. „ 240/1.
„ 2 *F*. „ Hakenborste des Thorax. 240/1.
„ 2 *G*. „ Pickelborste. 240/1.
„ 3 *A*. *Hypsicomus phaeotaenia* Schmarda. Borsten des 1. Bündels. 240/1.
„ 3 *B*. „ „ „ „ 1. „ 240/1.
„ 3 *C*. „ „ Haarborste des 2. Bündels. 240/1.
„ 3 *D*. „ „ Paleen des Thorax. 240/1.
„ 3 *E*. „ „ Haarborste des 12. Borstenbündels. 240/1.
„ 3 *F*. „ „ Palee „ 12. „ 240/1.
„ 3 *G*. „ „ Hakenborste des Thorax. 330/1.
„ 3 *H*. „ „ Pickelborsten. 330/1.
„ 4 *A*. *Laonome japonica* n. sp. Haarborste des Thorax. 240/1.
„ 4 *B*. „ „ „ „ „ 240/1.
„ 4 *C*. „ „ Hakenborsten des Thorax. 240/1.
„ 5. *Laonome spectabilis* Gr. Hakenborste des Thorax. 240/1.
„ 6 *A*. *Myricola platychaeta* n. sp. Haarborste. 560/1.
„ 6 *B*. „ „ Borsten des 3.—9. Segmentes. 560/1.
„ 6 *C*. „ „ Hakenborsten. 670/1.

TAFEL IV.

Fig. 1. *Serpula granulosa* n. sp. Bajonnettborste des 1. Bündels. 90/1.
„ 1 *A*. „ „ Hakenborsten des Thorax. 560/1.
„ 1 *B*. „ „ Hakenborste des Abdomens. 560/1.
„ 1 *C*. „ „ Spateln. 560/1.
„ 2. *Hydroides multispinosa* n. sp. Haarborste des 3. Segmentes. 560/1.
„ 2 *A*. „ „ Hakenborste des Thorax. 560/1.
„ 2 *B*. „ „ Spatel. 560/1.
„ 3. *Eupomatus exaltatus* n. sp. Bajonnettborste des 1. Bündels. 240/1.
„ 3 *A*. „ „ Haarborsten des Thorax. 330/1.
„ 3 *B*. „ „ Hakenborste „ „ 560/1.
„ 3 *C*. „ „ Spatel. 560/1.
„ 4. *Pomatoceros helicoides* n. sp. Haarborste des 2. Segmentes. 240/1.
„ 4 *A*. „ „ „ „ Abdomens. 670/1.
„ 4 *B*. „ „ Dütenborste des Abdomens. 560/1.
„ 5. *Pomatostegus latiscapus* n. sp. Haarborste des 1. Bündels. 560/1.
„ 5 *A*. „ „ Breite Haarborste des 7. Segmentes. 330/1.
„ 5 *B*. „ „ Schmale „ „ 7. „ 560/1.
„ 5 *C*. „ „ Dütenborste des Abdomens. 560/1.
„ 5 *D*. „ „ Hakenborste „ „ 560/1.
„ 6. *Omphalopoma Langerhansii* n. sp. Haarborsten des 1. Segmentes. 240/1.
„ 6 *A*. „ „ Haarborste des 2.—7. Segmentes. 240/1.
„ 6 *B*. „ „ „ „ 3.—7. „ (Salmacinenborste). 330/1.
„ 6 *C*. „ „ Abdominalborste. 560/1.
„ 6 *D*. „ „ Hakenborste des Abdomens. 630/1.
„ 7 *A*. *Apomatus Enosimae* n. sp. Haarborste des Thorax. 560/1.
„ 7 *B*. „ „ „ „ „ 560/1.
7 *C*. „ „ „ „ „ (Salmacinenborste). 560/1.
„ 7 *D*. „ „ Hakenborste des Thorax. 630/1.
„ 7 *E*. „ „ Abdominalborste. 560/1.


5 D
2 A
1 A.
5.
5 C.
5 B
1.
4 C.
4 B
4 A
4.
5 A.
2.
3
3 B
3 A.


8D.
1.
2A.
8B
3B.
7.
8C.
8A.
5A
3.
1A.
1B
2.
6A
5
3A.
6.

3 A. 3 B. 4 C.

3 G. 2 G.

3 H. 5

2 C.

2 F.

3 D.

3 C. 3 E.

3 F.

1 D. 6 C. 4 A.

1 C.

2 B.

2 D.

6 B. 2 A.

1 B. 6 A.

1 A.

2 E. 4 B.

E. v. Marenzeller del.

E. v. Marenzeller del.

ÜBER

DETERMINANTEN HÖHEREN RANGES.

VON

LEOPOLD GEGENBAUER.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 10. JULI 1884

Die symmetrische Determinante zweiten Ranges:

$$\left| c_{\iota, \varkappa} \right| (\iota, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_r - 1),$$

in welcher:

$$c_{\iota, \varkappa} = a_{j_1 - \varkappa_1, j_2 - \varkappa_2, \ldots, j_r - \varkappa_r}$$

ist, wenn die Indices j_λ und k_λ nach dem Modul n_λ genommen und die Zahlen ι, $\varkappa$ aus den Congruenzen:

$$\frac{\iota - j_1 - j_2 n_1 - j_3 n_1 n_2 - \ldots - j_{\lambda-1} n_1 n_2 \ldots n_{\lambda-2}}{n_1 n_2 \ldots n_{\lambda-1}} \equiv j_\lambda \pmod{n_\lambda}$$

1)

$$\frac{\varkappa - \varkappa_1 - \varkappa_2 n_1 - \varkappa_3 n_1 n_2 - \ldots - \varkappa_{\lambda-1} n_1 n_2 \ldots n_{\lambda-2}}{n_1 n_2 \ldots n_{\lambda-1}} \equiv \varkappa_\lambda \pmod{n_\lambda}$$

bestimmt werden, lässt sich, wie von Herrn M. Nöther und mir gezeigt wurde, unter Adjunction von Einheitswurzeln als ein Product von homogenen linearen Functionen der Elemente darstellen. Die schon von Bessel bemerkte Determinante:

$$\left| a_{\iota - \varkappa} \right| (\iota, \varkappa = 1, 2, \ldots, n-1),$$

in welcher sämmtliche Indices nach dem Modul n zu nehmen sind, und die von Herrn A. Puchta in seiner Arbeit: „Ein Determinantensatz und seine Umkehrung" (Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften. mathem.-naturw. Classe, XXXVIII. Bd., II. Abth., p. 215 ff.) betrachtete Determinante der Ordnung 2^n sind bekanntlich specielle Fälle der eben angeführten allgemeinen Determinante.

Es lässt sich nun, wie in den folgenden Zeilen gezeigt werden soll, ein dem erwähnten Satze analoges Theorem für Determinanten höheren Ranges aufstellen.

Die Elemente der Determinante $(p+2)$ten Ranges und $(n_1 n_2 \ldots n_r)$ter Ordnung:

$$\left| c_{i_1, i_2, \ldots i_p, \iota, \varkappa} \right| (i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_r - 1)$$

mögen durch die Gleichungen:

$$c_{i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota, \varkappa} = b_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2, \ldots, j_r-\varkappa_r} \quad (i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_r - 1\,;\; 0 \leqq j_\lambda, \varkappa_\lambda < n_\lambda)$$

bestimmt sein, wo die Indices ι, $\varkappa$ mit den Indices $j_1, j_2, \ldots, j_r$, $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r$ durch die Congruenzen 1) verbunden sind und

$$b_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2, \ldots, j_r-\varkappa_r} = a_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2, \ldots, j_r-\varkappa_r} \quad (j_1 \geqq \varkappa_1, j_2 \geqq \varkappa_2, \ldots, j_r \geqq \varkappa_r)$$

$$b_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2, \ldots, j_r-\varkappa_r} = \omega_{\lambda_1}^{\beta_{\lambda_1}} \omega_{\lambda_2}^{\beta_{\lambda_2}} \ldots \omega_{\lambda_\tau}^{\beta_{\lambda_\tau}} a_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2, \ldots, j_r-\varkappa_r} \quad (j_1 \geqq \varkappa_1, j_2 \geqq \varkappa_2, \ldots, j_{\lambda_1-1} \geqq \varkappa_{\lambda_1-1}, j_{\lambda_1} < \varkappa_{\lambda_1}, j_{\lambda_1+1} \geqq \varkappa_{\lambda_1+1}, \ldots, j_{\lambda_2-1} \geqq \varkappa_{\lambda_2-1}, j_{\lambda_2} < \varkappa_{\lambda_2}, j_{\lambda_2+1} \geqq \varkappa_{\lambda_2+1}, \ldots, j_{\lambda_\tau-1} \geqq \varkappa_{\lambda_\tau-1}, j_{\lambda_\tau} < \varkappa_{\lambda_\tau}, j_{\lambda_\tau+1} \geqq \varkappa_{\lambda_\tau+1}, \ldots, j_{\lambda_r} \geqq \varkappa_{\lambda_r})$$

sein soll.

Setzt man nun:

$$2)\quad \pi_{i_1, i_2, \ldots, i_p; \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r} = \sum_{j_1=0, j_2=0, \ldots, j_r=0}^{j_1=n_1-1, j_2=n_2-1, \ldots, j_r=n_r-1} b_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2, \ldots, j_r-\varkappa_r}\, \rho_1^{j_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)} \rho_2^{j_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)} \ldots \rho_r^{j_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)}$$

so erhält man:

$$\pi_{i_1, i_2, \ldots, i_p; \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r}\, \rho_1^{-\varkappa_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)} \rho_2^{-\varkappa_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)} \ldots \rho_r^{-\varkappa_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)} =$$

$$= \sum_{j_1=0, j_2=0, \ldots, j_r=0}^{j_1=n_1-1, j_2=n_2-1, \ldots, j_r=n_r-1} b_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2, \ldots, j_r-\varkappa_r}\, \rho_1^{(j_1-\varkappa_1)(\alpha_1\mu_1+\beta_1)} \rho_2^{(j_2-\varkappa_2)(\alpha_2\mu_2+\beta_2)} \ldots \rho_r^{(j_r-\varkappa_r)(\alpha_r\mu_r+\beta_r)}$$

$$= \sum_{j_1=-\varkappa_1, j_2=-\varkappa_2, \ldots, j_r=-\varkappa_r}^{j_1=n_1-\varkappa_1-1, j_2=n_2-\varkappa_2-1, \ldots, j_r=n_r-\varkappa_r-1} b_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_r}\, \rho_1^{j_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)} \rho_2^{j_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)} \ldots \rho_r^{j_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)}.$$

Berücksichtigt man, dass die Indices j_λ nach dem Modul n_λ zu nehmen sind, so erhält man:

$$3)\quad \pi_{i_1, i_2, \ldots, i_p; \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r}\, \rho_1^{-\varkappa_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)} \rho_2^{-\varkappa_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)} \ldots \rho_r^{-\varkappa_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)} =$$

$$= \sum_{j_1=0, j_2=0, \ldots, j_r=0}^{j_1=n_1-1, j_2=n_2-1, \ldots, j_r=n_r-1} b'_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_r}\, \rho_1^{j_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)} \rho_2^{j_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)} \ldots \rho_r^{j_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)},$$

wo:

$$b'_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_r} = a_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_r} \quad (j_1 < n_1-\varkappa_1, j_2 < n_2-\varkappa_2, \ldots, j_r < n_r-\varkappa_r)$$

$$b'_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_r} = \omega_{\lambda_1}^{\beta_{\lambda_1}} \omega_{\lambda_2}^{\beta_{\lambda_2}} \ldots \omega_{\lambda_\tau}^{\beta_{\lambda_\tau}} \rho_{\lambda_1}^{-n_{\lambda_1}(\alpha_{\lambda_1}\mu_{\lambda_1}+\beta_{\lambda_1})} \rho_{\lambda_2}^{-n_{\lambda_2}(\alpha_{\lambda_2}\mu_{\lambda_2}+\beta_{\lambda_2})} \ldots \rho_{\lambda_\tau}^{-n_{\lambda_\tau}(\alpha_{\lambda_\tau}\mu_{\lambda_\tau}+\beta_{\lambda_\tau})} a_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_r}$$

$$(j_1 < n_1-\varkappa_1, j_2 < n_2-\varkappa_2, \ldots, j_{\lambda_1-1} < n_{\lambda_1-1}-\varkappa_{\lambda_1-1}, j_{\lambda_1} \geqq n_{\lambda_1}-\varkappa_{\lambda_1}, j_{\lambda_1+1} < n_{\lambda_1+1}-\varkappa_{\lambda_1+1}, \ldots, j_{\lambda_2-1} < n_{\lambda_2-1}-\varkappa_{\lambda_2-1}, j_{\lambda_2} \geqq n_{\lambda_2}-\varkappa_{\lambda_2}, j_{\lambda_2+1} < n_{\lambda_2+1}-\varkappa_{\lambda_2+1}, \ldots, j_{\lambda_\tau-1} < n_{\lambda_\tau-1}-\varkappa_{\lambda_\tau-1}, j_{\lambda_\tau} \geqq n_{\lambda_\tau}-\varkappa_{\lambda_\tau}, j_{\lambda_\tau+1} < n_{\lambda_\tau+1}-\varkappa_{\lambda_\tau+1}, \ldots, j_{\lambda_r} < n_{\lambda_r}-\varkappa_{\lambda_r})$$

ist.

Aus der Gleichung 3) folgt die Relation:

4) $$\left| \pi_{i_1, i_2, \ldots, i_p; \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r} \right|$$
$$= \left| \sum_{j_1=0, j_2=0, \ldots, j_r=0}^{j_1=n_1-1, j_2=n_2-1, \ldots, j_r=n_r-1} b'_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_r} \, \rho_1^{(j_1+\varkappa_1)(\alpha_1\mu_1+\beta_1)} \rho_2^{(j_2+\varkappa_2)(\alpha_2\mu_2+\beta_2)} \ldots \rho_r^{(j_r+\varkappa_r)(\alpha_r\mu_r+\beta_r)} \right|$$
$$(i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota', \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_r - 1),$$

wo die Indices ι', $\varkappa$ sich aus den Congruenzen 1) ergeben, wenn in denselben j_λ durch μ_λ ersetzt wird und das durch den Index ι' angegebene Indexsystem das System der festen Indices sein soll.

Nun habe ich folgenden Satz bewiesen: („Über Determinanten höheren Ranges". Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften, mathem.-naturw. Classe, XLIII. B.d, II. Abth., p. 17 ff.).

Sind in einer Determinante $n$ter Ordnung und $m$ten Ranges

$$\left| e_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m} \right|_{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m = 1, 2, \ldots, n)}$$

die einzelnen Elemente Producte von r Grössen $(r < m)$ in der Weise, dass:

$$e_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m} = \overset{(1)}{e}_{\lambda_1, \lambda_{\rho_{1,1}}, \lambda_{\rho_{1,2}}, \ldots, \lambda_{\rho_{1,\sigma_1}}} \cdot \overset{(2)}{e}_{\lambda_1, \lambda_{\rho_{2,1}}, \lambda_{\rho_{2,2}}, \ldots, \lambda_{\rho_{2,\sigma_2}}} \ldots \overset{(r)}{e}_{\lambda_1, \lambda_{\rho_{r,1}}, \lambda_{\rho_{r,2}}, \ldots, \lambda_{\rho_{r,\sigma_r}}}$$

ist, wo die Zahlen

$$\rho_{1,1}, \rho_{1,2}, \ldots, \rho_{r,\sigma_r},$$

deren Anzahl gleich $m-1$ ist, verschiedene Zahlen aus der Reihe $2, 3, \ldots, m$ und so beschaffen sind, dass

$$\rho_{\varkappa, \alpha} \lesseqgtr \rho_{\mu, \alpha}$$

für $\varkappa \lesseqgtr \mu$ ist, so zerfällt die erwähnte Determinante in ein Product von r Determinanten derselben Ordnung, deren Rangzahlen durch die Anzahlen der Indices der verschiedenen Grössen $e^{(\sigma)}$ angegeben werden, so dass also:

$$\left| e_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m} \right| = \left| \overset{(1)}{e}_{\lambda_1, \lambda_{\rho_{1,1}}, \lambda_{1,2}, \ldots, \lambda_{\rho_1, \sigma_1}} \right| \cdot \left| \overset{(2)}{e}_{\lambda_1, \lambda_{\rho_{2,1}}, \lambda_{\rho_{2,2}}, \ldots, \lambda_{\rho_{2,\sigma_2}}} \right| \ldots \left| \overset{(r)}{e}_{\lambda_1, \lambda_{\rho_{r,1}}, \lambda_{\rho_{r,2}}, \ldots, \lambda_{\rho_{r,\sigma_r}}} \right|$$
$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m = 1, 2, \ldots, n).$$

ist.

Die Gleichung 4) verwandelt sich daher in die folgende:

5) $$\left| \pi_{i_1, i_2, \ldots, i_p; \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu} \right| = \left| \rho_1^{\varkappa_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)} \rho_2^{\varkappa_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)} \ldots \rho_r^{\varkappa_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)} \right|$$
$$\left| \sum_{j_1=0, j_2=0, \ldots, j_r=0}^{j_1=n_1-1, j_2=n_2-1, \ldots, j_r=n_r-1} b'_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_r} \, \rho_1^{j_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)} \rho_2^{j_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)} \ldots \rho_r^{j_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)} \right|$$
$$(i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota', \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_r - 1).$$

Für die auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Determinante ergibt sich aber aus der Gleichung 2) auch folgender Werth:

$$\left| \pi_{i_1, i_2, \ldots, i_p; \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r} \right| = \left| \sum_{j_1=0, j_2=0, \ldots, j_r=0}^{j_1=n_1-1, j_2=n_2-1, \ldots, j_r=n_r-1} b_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2, \ldots, j_r-\varkappa_r} \, \rho_1^{j_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)} \rho_2^{j_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)} \ldots \rho_r^{j_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)} \right|$$
$$(i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota', \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_r - 1).$$

Nach dem von mir a. a. O. mitgetheilten Multiplicationstheoreme der Determinanten höheren Ranges ist aber die auf der rechten Seite der letzten Relation stehende Determinante $(p+2)$ten Ranges das Product einer Determinante zweiten und einer Determinante $(p+2)$ten Ranges, so dass man hat:

$$6)\quad \left|\pi_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p;\, \varkappa_1,\, \varkappa_2,\ldots,\, \varkappa_r;\, \mu_1,\, \mu_2,\ldots,\, \mu_r}\right| = \left|\rho_1^{j_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)}\;\rho_2^{j_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)}\ldots\rho_r^{j_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)}\right| \cdot \left|c_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p,\, \iota,\, \varkappa}\right|$$

$$(i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota, \iota', \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_r - 1).$$

Aus den Gleichungen 5) und 6) folgt:

$$7)\quad \left|c_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p,\, \iota,\, \varkappa}\right| = \left|\sum_{j_1=0,\, j_2=0,\ldots,\, j_r=0}^{j_1=n_1-1,\, j_2=n_2-1,\ldots,\, j_r=n_r-1} b_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p,\, j_1,\, j_2,\ldots,\, j_r}\, \rho_1^{j_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)}\;\rho_2^{j_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)}\ldots\rho_r^{j_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)}\right|$$

$$(i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota, \iota', \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_r - 1)$$

Die Gleichung 7) zeigt zunächst, dass die Determinante $(p+2)$ten Ranges:

$$\left|c_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p,\, \iota,\, \varkappa}\right|_{(i_1,\, i_2\ldots,\, i_p,\, \iota,\, \varkappa\, =\, 0,1,2,\ldots,\, n_1 n_2 \ldots n_r - 1)},$$

in welcher die Elemente den früher angegebenen Bedingungen genügen, unter Adjunction der r Grössen $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ sich auf eine Determinante derselben Ordnung vom Range $p+1$ reduciren lässt, deren Elemente lineare homogene Functionen der Elemente der ursprünglichen Determinante sind.

Man sieht ferner sofort, dass die Determinante $(p+1)$ten Ranges:

$$\left|\sum_{j_1=0,\, j_2=0,\ldots,\, j_r=0}^{j_1=n_1-1,\, j_2=n_2-1,\ldots,\, j_r=n_r-1} b_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p,\, j_1,\, j_2,\ldots,\, j_r}\, \rho_1^{j_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)}\;\rho_2^{j_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)}\ldots\rho_r^{j_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)}\right|$$

$$(i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota', \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_r - 1)$$

von den Grössen $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ unabhängig ist.

Ist speciell:

$$\rho_\lambda^{n_\lambda} = \omega_\lambda$$

$$\omega_\lambda^{\alpha_\lambda} = 1\,,$$

so verwandelt sich die Relation 7) in:

$$8)\quad \left|c_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p,\, \iota,\, \varkappa}\right| = \left|\sum_{j_1=0,\, j_2=0,\ldots,\, j_r=0}^{j_1=n_1-1,\, j_2=n_2-1,\ldots,\, j_r=n_r-1} a_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p,\, j_1,\, j_2,\ldots,\, j_r}\, \rho_1^{j_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)}\;\rho_2^{j_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)}\;\rho_r^{j_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)}\right|$$

$$(i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota, \iota', \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_r - 1).$$

Von den speciellen Fällen dieser Formel mögen die folgenden zwei Relationen besonders hervorgehoben werden.

Es sei:

$$\alpha_\lambda = 1,\ \ \beta_\lambda = 0,\ \ \omega_\lambda = 1,$$

alsdann ist ρ_λ eine primitive $n_\lambda$te Einheitswurzel und man hat daher die Relation:

$$9)\qquad \left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2, \ldots, j_r-\varkappa_r} \right| = \left| \sum_{j'_1=0, j'_2=0, \ldots, j'_r=0}^{j'_1=n_1-1, j'_2=n_2-1, \ldots, j'_r=n_r-1} a_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_r} \rho_1^{j_1' \mu_1} \rho_2^{j_2' \mu_2} \cdots \rho_r^{j_r' \mu_r} \right|$$

$$(i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota, \iota', \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_r - 1).$$

Man hat also den Satz:

Die Determinante $(p+2)$ten Ranges und $(n_1 n_2 \ldots n_r)$ter Ordnung,

$$\left| c_{i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota, \varkappa} \right| \quad (i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_r - 1)$$

in welcher:

$$c_{i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota, \varkappa} = a_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2, \ldots, j_r-\varkappa_r}$$

ist, wenn die Indices $\iota, \varkappa$ durch die Congruenzen 1) bestimmt und die Grössen j_λ und $\varkappa_\lambda$ nach dem Modul n_λ genommen werden, lässt sich unter Adjunction der Gattung der $(n_1 n_2 \ldots n_r)$ten Einheitswurzeln auf eine Determinante vom Range $p+1$ und der Ordnung $n_1 n_2 \ldots n_r$ reduciren, deren Elemente lineare homogene Functionen der Elemente der ursprünglichen Determinante sind.

Beachtet man, dass eine Determinante ersten Ranges von n Elementen das Product dieser Elemente ist, so erhält man aus der Gleichung 9) für $p = 0$ sofort den im Anfange erwähnten Satz über symmetrische Determinanten zweiten Ranges.

Ist ferner:

$$\alpha_\lambda = 2, \ \beta_\lambda = 1, \ \omega_\lambda = -1,$$

also:

$$\rho_\lambda^{n_\lambda} + 1 = 0,$$

so verwandelt sich die Relation 8) in:

$$10)\quad \left| a'_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2, \ldots, j_r-\varkappa_r} \right| = \left| \sum_{j'_1=0, j'_2=0, \ldots, j'_r=0}^{j'_1=n_1-1, j'_2=n_2-1, \ldots, j'_r=n_r-1} a_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_r} \rho_1^{j_1'(2\mu_1+1)} \rho_2^{j_2'(2\mu_2+1)} \cdots \rho_r^{j_r'(2\mu_r+1)} \right|$$

$$(i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota, \iota', \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_r - 1).$$

wo die Marke an den Elementen der Determinante auf der linken Seite der Gleichung anzeigt, dass das betreffende Element mit dem Vorzeichen $(-1)^\tau$ zu versehen ist, wenn τ der Grössen $j_1, j_2, \ldots, j_r$ kleiner als die entsprechenden Zahlen $\varkappa$ sind.

Man hat also das Theorem:

Die Determinante $(p+2)$ten Ranges:

$$\left| c'_{i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota, \varkappa} \right| \quad (i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_r - 1),$$

in welcher:

$$c'_{i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota, \varkappa} = (-1)^\tau a_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2, \ldots, j_r-\varkappa_r}$$

ist, wenn die Indices j_λ und $\varkappa_\lambda$ nach dem Modul n_λ genommen, die Zahlen ι, $\varkappa$ aus den Congruenzen 1) bestimmt werden, und die Grösse τ angibt, wie viele der Indices $j_1, j_2, \ldots, j_r$ kleiner als die zugehörigen Zahlen $\varkappa$ sind, lässt sich unter Adjunction der Wurzeln der Gleichungen:

$$\rho_\lambda^{n_\lambda} + 1 = 0$$

als eine Determinante vom Range $p+1$ und der Ordnung $n_1 n_2 \ldots . n_r$ darstellen, deren Elemente lineare, homogene Functionen der Grössen

$$a_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_r}$$

sind.

Den speciellen Fall $p = 0$, $r = 1$ dieses Satzes hat unlängst Herr Scott mitgetheilt.

Die Relationen 9) und 10) zeigen, dass die auf der linken Seite der Gleichung 9) stehende Determinante, wenn eine der Zahlen n_λ gerade ist, sich in ein Product von zwei Determinanten zerlegen lässt. Für quadratische Determinanten hat auf diesen Umstand zuerst Herr Glaisher aufmerksam gemacht.

ZUR KENNTNISS

DER

MITTELCRETACISCHEN CEPHALOPODEN-FAUNA DER INSELN ELOBI

AN DER WESTKÜSTE AFRIKA'S.

VON

DR. LADISLAUS SZAJNOCHA,

PRIVATDOCENTEN AN DER K. K. UNIVERSITÄT IN KRAKAU.

(Mit 4 Tafeln.)

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 17. JULI 1884.

Die in der Bai von Corisco unter 1° nördl. Br. an der Westküste Afrika's liegende Inselgruppe Elobi wurde in geologischer Beziehung zum ersten Male im Jahre 1874 von Dr. Lenz während seiner, im Auftrage der Deutschen Afrikanischen Gesellschaft unternommenen Expedition nach Gabun und Okanda-Land untersucht. Diese Inselgruppe besteht nach den Beobachtungen von Dr. Lenz [1] aus horizontal geschichteten Lagen eines ausserordentlich feinkörnigen, thonigen oder mergeligen Sandsteines von hellgrauer Farbe und ausgesprochener Spaltbarkeit, der sich auch auf der benachbarten Küste von Gabun gleich stark entwickelt, in einem sehr bedeutenden Gebiete an der Mündung der Flüsse Muni und Munda vorfindet. Ausser zahlreichen Abdrücken der, specifisch nicht näher bestimmbaren Meeresalgen, enthalten die Sandsteinlagen mehr oder weniger gut erhaltene Cephalopoden nebst undeutlichen Spuren kleiner Zweischaler.

Die flachgeschichteten Sandsteinlagen werden auf den kaum 8 bis 10 Meter über das Meeresniveau hervorragenden Elobi-Inseln von einer Humusdecke überlagert, während auf der nahen Küste von Gabun diesen Sandstein eine 2 Meter starke Schichte eines dichten sandigen Kalksteines mit einer grossen Anzahl organischer Überreste bedeckt. Kleine Gasteropoden, Bivalven, Korallen und Foraminiferen bilden die dichte Masse des Kalksteines, unter welcher an vielen Stellen Gänge eines dunkelbraunen, sandigen Eisensteines hervortreten. Auf dieser 2 Meter starken Kalksteinschichte liegt unmittelbar das Diluvium in Gestalt von braunen, eisenhältigen Thonen mit Concretionen eines cavernösen Eisensteines, welche an das Auftreten des ostindischen Laterit lebhaft erinnern.

[1] Ankunft in der Corisco-Bai und Excursion nach Gabun. Geologische Notizen von der Westküste von Afrika. Verhandlungen der k. k. geol. Reichsanstalt. Wien 1874. — Geologische Mittheilung aus West-Afrika. Idem 1878. — Geologische Karte von West-Afrika. Petermann's Mittheilungen. Gotha 1882.

Dr. Lenz sammelte in dem erwähnten grauen Sandsteincomplexe eine bedeutende Anzahl von Cephalopoden, von denen zwar der grössere, schlecht erhaltene Theil eine specifische Bestimmung nicht zulässt, der kleinere aber mit einigen Exemplaren von ansehnlicher Grösse eine sichere Grundlage zur Altersbestimmung jener Schichten ergibt. Alle diese Exemplare gehören ausnahmslos zur einzigen Gattung, *Schlönbachia*, die nach der Classification von Neumayr [1] sowohl durch die eigenthümliche Verzweigung der Lobenlinie wie auch durch den stark ausgebildeten Rückenkiel und das starke Hervortreten der, nach vorne concaven Lateralrippen ausgezeichnet ist.

Die Lenz'sche Sammlung lieferte folgende vier Arten, von denen drei sich als neu, obzwar zum Formenkreise der längst bekannten *Schl. inflata* Sow. gehörig erwiesen:

Schlönbachia inflata Sow.	*Schlönbachia inflatiformis* n. f.
„ *Lenzi* n. f.	„ *Elobiensis* n. f.

1. *Schlönbachia inflata* Sow.

Taf. I, Fig. 1 und Taf. II, Fig. 1, 2, 3.

Syn. *Ammonites inflatus*. 1818. Sowerby. Mineral Conchology of Great Britain. Bd. II, S. 170, Taf. 178.
„ *rostratus*. 1818. Idem. S. 163, Taf. 173.
„ *tetrammatus*. 1829. Idem Bd. VI, S. 166, Taf. 587.
„ *inflatus*. 1822. Broguiart et Cuvier. Description géologique des environs de Paris. S. 83 u. 95, Taf. VI. Fig. 1.
„ *inflatus*. 1825. Haan. Monographiae Ammoniteorum et Goniatiteorum. S. 120.
„ *affinis*. 1825. Idem. S. 120.
„ *rostratus*. 1825. Idem S. 117.
„ *inflatus*. 1840. Orbigny. Paléontologie française. Terrains crétacés. S. 304, Taf. 90.
„ *varicosus inflatus*. 1849. Quenstedt. Petrefactenkunde Deutschlands. Cephalopoden. S. 209, Taf. 17, Fig. 2.
„ *inflatus*. 1850. Orbigny. Prodrome de Paléontologie. Bd. II, S. 124 u. 148.
„ *inflatus*. 1852. Buvignier. Statistique géologique du Département de la Meuse. Atlas. S. 46, Taf. 31, Fig. 8 und 9.
„ *inflatus*. 1853. Pictet et Roux. Description des grès verts des environs de Génève. S. 102, Taf. IX, Fig. 6; Taf. X, Fig. 1 u. 2.
„ *rostratus*. 1854. Morris. Catalogue of British fossils. S. 298.
„ *inflatus*. 1860. Pictet et Campiche. Description des fossiles de St. Croix. S. 178 u. 308, Taf. XXI, Fig. 5; Taf. XXII, Fig. 3 u. 4.
„ *inflatus*. 1861. Hauer. Über die Petrefacten der Kreideformation des Bakonyer-Waldes. S. 656.
„ *inflatus*. 1865. Stoliczka. Paleontologia indica. Fossil Cephalopoda of Southern India. S. 48, Taf. 27—29; Taf. 30, Fig. 1—3.

Die meisten Exemplare der Lenz'schen Sammlung gehören zu dieser gut bekannten Gattung, deren zahlreiche Varietäten in den Arbeiten von Pictet und Stoliczka so ausgezeichnet beschrieben wurden. Ein zu den grössten Stücken dieser Species, die überhaupt aus den Kreideschichten Europas und Ostindiens bekannt sind, gehörendes Exemplar erreicht einen Durchmesser von 26^{cm}, und wird durch ausserordentlich starke Seitenrippen besonders ausgezeichnet, welche ganz ohne Knoten sehr regelmässig, circa 15^{mm} von einander entfernt, von dem Mittelpunkte der Schale gegen den Rand verlaufen und dabei den breiten, scharfen Rückenkiel fast berühren. Auf den äusseren Enden dieser Rippen sieht man eine merkliche Verdickung in der Form von breiten, flachen Knöpfen, die jedoch auf dem grössten Exemplare weit weniger scharf hervortreten, als auf anderen Stücken von geringerem Durchmesser. Die Windungen umfassen sich beinahe bis zur Hälfte und wachsen vom Mittelpunkte der Schale gegen den Aussenrand schnell an, indem dabei ein Nabel mit verhältnissmässig steilen Wänden und mit weniger deutlichen Rippen der Innenwindungen gebildet wird.

Auf diesem grössten Exemplare tritt die Zweitheilung der Rippen gar nicht hervor, dagegen erscheint sie deutlich auf einem anderen Exemplare von bedeutend kleinerem, kaum 6^{cm} erreichendem Durchmesser, wo

[1] Die Ammoniten der Kreide und die Systematik der Ammonitiden. Zeitschrift der Deutschen Geologischen Gesellschaft. Berlin 1875.

sich mehrere Rippen, ungefähr in der halben Höhe der Windung in zwei gleich starke, secundäre Rippen gabeln oder zwischen zwei regelmässig verlaufende Rippen sich eine kurze, aber scharf gezeichnete Secundärrippe von dem Aussenrande her einschaltet. Dieses Exemplar nähert sich im Allgemeinen der von Stoliczka in seiner trefflichen Monographie der südindischen Cephalopoden, (Paleontologia indica, Taf. 28, Fig. 10 aus Moravior im Trichinoply-Distrikt abgebildeten Varietät der *Schl. inflata*, und alle wichtigeren Merkmale, wie die Grösse, die Zeichnung, der Verlauf der Rippen, die flache Nabelöffnung und der ganze Habitus stimmen auf beiden Exemplaren vortrefflich überein. Sogar die Spuren der Schalensculptur, die hauptsächlich in feinen auf Rippenenden verlaufenden Spirallinien besteht, lassen sich eben so gut auf dem indischen, wie auch auf dem afrikanischen Exemplare beobachten. Stoliczka bezeichnet diese Form als die Varietät II der *Schl. inflata* im Gegensatze zu breiteren Formen der Varietät I mit stärkeren Rippen und eine ähnliche Trennung ist auch unter den Exemplaren von den Elobi-Inseln leicht durchführbar, indem das erste, oberwähnte Exemplar der Normalform mit Knoten und mächtigen Rippen entspricht, während die Varietät II durch kleinere, viel schmächtigere Exemplare vertreten wird.

Am deutlichsten tritt die Gabelung und das Einschieben von Secundärrippen auf einem dritten, stark verdrückten Exemplare hervor, wo gegen den Schalenrand zu die Rippen immer mehr und mehr verflachen und ausserordentlich feine, paralelle Linien die zierliche Oberflächensculptur vervollständigen.

Ausser diesen Exemplaren, die durch den allgemeinen Habitus sich weit mehr den südindischen Formen als den aus Frankreich, England und Norddeutschland bekannten Typen der *Schl. inflata* nähern, befindet sich in der von Dr. Lenz mitgebrachten Sammlung noch ein Bruchstück derselben Art, das in der Great-Fish Bay an der Küste Benguelas südlich von Mosamedes im Jahre 1875 von Dr. Peschuel-Lösche gefunden wurde. Dieses Bruchstück, welches hier seiner stratigraphischen Bedeutung wegen Erwähnung finden soll, ist in dem feinkörnigen, eisenhältigen Sandsteine so gut erhalten, dass die Schalendicke und der Verlauf des Rückenkiels weit besser als bei den flachen Abdrücken von den Elobi-Inseln untersucht werden können. Auf jenem Stücke sieht man keine Gabelung der Rippen; im Gegentheil, dieselben verlaufen regelmässig, fast parallell zu einander in gleichen Abständen bis an den Schalenrand und bilden nur an ihrer Externseite scharfe Anschwellungen, welche an die Anfänge der Externknoten bei den westeuropäischen Formen erinnern. Man könnte nun hoffen, wenigstens auf diesem Exemplare die deutliche Lobenlinie zu finden, leider aber vernichtete die, das Innere der Schale ausfüllende Gesteinsmasse die Kammerwände beinahe vollständig, und sogar das Anätzen mit Salzsäure ergab keine Resultate.

Schl. inflata ist in Europa aus den mittelcretacischen Schichten Grosbritanniens, der Insel Wight, Süd- und Central-Frankreichs, der westlichen Schweiz, der westphälischen und norddeutschen Kreide längst bekannt, wie auch weiter im Osten aus den Nana- und Penzeskut-Schichten des Bakonyerwaldes. Im südlichen Ostindien tritt diese Species als ein charakteristisches Leitfossil in der Ootator-Group auf und nach den älteren Angaben von Buch wurde sie auch in Südamerika gefunden. Coquand [1] erwähnt ihr Vorkommen in Djebel-Loha und Djebel Taskroun in der Provinz Constantine. Die älteren deutschen Geologen, wie Schlütter, Strombeck und Geinitz stellten die Schichten mit *Schl. inflata* in den oberen Theil des Gault, die englischen, wie Sowerby, Sharpe und Fitton und die französischen, wie Orbigny, Pictet und Reynès hingegen zählten dieselben bald zum Gault bald zum Cenoman, bis die neuesten Arbeiten von Hébert und Barrois zum wahren Vortheil der Sache die, *Schl. inflata* enthaltenden Schichten in entschiedenster Weise als eine besondere Zone des Unter-Cenomans abgesondert haben.

Während man früher dieser Art kein besonderes Gewicht beizulegen pflegte, ist sie jetzt mit *Inoceramus sulcatus* und *Turrilites Bergeri* ein ausgezeichnetes Leitfossil des Beginnes der cenomanen Transgression geworden, ebenso gut in Europa wie in Ostindien und mit grosser Wahrscheinlichkeit darf man das Auffinden dieser Species noch an mehreren Punkten der ehemaligen untercenomanen Küste erwarten.

[1] Coquand H. Géologie et Paléontologie de la région du sud de la province de Constantine. Mémoires de la société d'émulation de Provence. Vol. II. Marseille. 1862.

2. *Schlönbachia Lenzi* n. f.

Taf. II, Fig. 4.

Die äusserst feine und zierliche Ausbildung der sanft gebogenen Seitenrippen, welche sowohl auf dem Aussen, wie auch auf dem Innenrande der Windungen kleinwinzige, längliche, knotenartige Anschwellungen bilden, während in der Mitte der Umgänge dieselben vollständig verschwinden, verleiht dieser Species, die in der Lenz'schen Sammlung durch ein einziges, stark verdrücktes Exemplar vertreten ist, ein besonderes charakteristisches Gepräge. Die volle Anzahl der Rippen lässt sich zwar nicht mit Gewissheit feststellen, doch dürften ihrer mindestens 30 vorhanden sein und leichte Spuren paraleller Spirallinien sind hier in der Nähe der Anschwellungen am Externrücken leicht zu bemerken. Die Windungen umfassen sich bis über $^3/_4$ ihrer Höhe und indem die Internwände der Windungen sich kaum merklich über den Innentheil der Embryonal-Umgänge erheben, entsteht eine ganz kleine und flache Nabelöffnung.

Obwohl der Habitus der Schale durch die starke Verdrückung dieses Stückes wesentlich verändert ist, kann man diese Species als eine der flachsten Formen der Gattung *Schlönbachia* betrachten und zwar in der Mutationsrichtung der, den Typus der ganzen Gruppe der *Cristati* darstellenden *Schl. costata*. Der Rückenkiel in der Höhe von 2^{mm} verläuft regelmässig auf der Externseite und dürfte über den Schalenrand hinausgeragt haben, ohne von den Externknoten, die im äusseren Habitus des Gehäuses gänzlich verschwinden, verdeckt gewesen zu sein.

Diese kleine und zierliche Form scheint mit keiner bisher bekannten *Schlönbachia*-Art identisch zu sein, und wenn auch die zahlreichen Varietäten der *Schl. inflata* vollinhaltlich gewürdigt werden müssen, erscheint die Trennung dieser Form von der letzteren jedenfalls angezeigt.

Bisher nur in einem einzigen Exemplare von den Elobi-Inseln bekannt.

3. *Schlönbachia inflatiformis* n. f.

Taf. III, Fig. 1, 2.

Zwei ganz ausgewachsene Exemplare, das eine vom Durchmesser von 11^{cm}, das andere vom Durchmesser von 15^{cm} lassen sich weder in den Formenkreis der *Schl. inflata*, noch in den der verwandten Art *Schl. Candolliana* einreihen, indem die regelmässig verlaufenden Rippen nicht eine Spur von irgend welchen Verdickungen oder Knoten aufweisen.

Ausserordentlich regelmässig treten die langen und verhältnissmässig scharfen Rippen in einer anderen Weise als bei *Schl. inflata* hervor, indem sie ihre grösste Höhe mehr weniger in der Hälfte des Windungsdurchmessers erreichen, dagegen sowohl auf dem Aussen- wie auch auf dem Innenrande allmählig verschwinden und mit dem übrigen Theil der Schale unmerklich verschwimmen. Eine Gabelung derselben ist nicht zu sehen und nur in den seltensten Fällen schiebt sich von dem Externrande her eine grössere Secundärrippe ein, um sehr bald, meistens schon in der halben Windungshöhe zu verschwinden. So viel dies bei dem schlechten Erhaltungszustande dieser Exemplare berechnet werden kann, dürfte die Anzahl der Rippen in den engen Grenzen zwischen 40 und 50 schwanken, wobei ungefähr dieselbe Anzahl auch auf den Embryonalwindungen auftritt, auf welch' letzteren sich die Zwischenräume bedeutend verkleinern und die Rippen immer enger zusammenrücken. Der Rückenkiel erreicht die Höhe von 4^{mm}, und auf seinem Rande erscheinen wieder die feinen, paralellen Spirallinien, die, wie es scheint, ein gemeinsames Merkmal der Schalensculptur aller Schlönbachien von den Elobi-Inseln abgeben.

Die Windungen umfassen sich ungefähr in $^1/_5$ ihrer Höhe, wodurch auch die Nabelöffnung viel breiter erscheint, während die sanft gerundeten Innenseiten derselben die Höhe von 2 bis 3^{mm} niemals überschreiten. Was die Anzahl und den regelmässigen Verlauf der Rippen anbelangt, nähert sich diese neue Form einigermassen der *Schl. Bouchardiana* d'Orb. und der *Schl. Candolliana* Pictet, welche von Pictet in seiner Beschreibung der cretacischen Ablagerungen in der Gegend von Genf und St. Croix und späterhin von Stoliczka (*Palaeontologia indica*, Taf. 30, Fig. 4) meisterhaft beschrieben und abgebildet wurden. Das vollständige Fehlen jeglicher

Knoten und Rippenanschwellungen bildet, wie oben erwähnt, ein charakteristisches Merkmal, durch welches diese Form von zahlreichen Varietäten der *Schl. inflata* unterschieden werden kann, indem die letztere in der Regel theils auf der Extern-, theils auf der Internseite der Windungen kleinere oder grössere Knoten aufweist.

Der allgemeine Bau der Rippen und der Schale erinnert ein wenig an *Lytoceras rectisulcatum* aus dem oberen Neocom, wenn auch das Auftreten des Rückenkiels diese beiden Gattungen auf den ersten Blick von einander trennt. Ausser zwei oder drei gut erhaltenen Exemplaren dieser Species befinden sich in der Lenz'schen Sammlung noch zahlreiche Bruchstücke, welche höchst wahrscheinlich der *Schl. inflatiformis* oder den Zwischenformen zwischen *Schl. inflatiformis* und *inflata* zugezählt werden dürften; ihr schlechter Erhaltungszustand macht jedoch die zweifellose specifische Bestimmung unmöglich.

Schl. inflatiformis, welche eine von dem Grundtypus der *Schl. inflata* in einer der *Schl. Candolliana* und *Bouchardiana* entgegensetzten Richtung abgeleitete Mutation darstellt, scheint in den Ablagerungen der Elobi-Inseln diese beiden nahe verwandten Arten gänzlich zu vertreten.

Die Lobenlinie war auch auf diesen Exemplaren nicht zu finden.

4. *Schlönbachia Elobiensis* n. f.

Taf. IV, Fig. 1.

Diese prachtvolle, nur in einem einzigen Exemplare von 18^{cm} Durchmesser vertretene Species, unterscheidet sich durch die ausserordentlich feine und verzierte Schalensculptur vollständig von allen anderen, bisher bekannten *Schlönbachia*-Arten. Paralelle, feine Spirallinien, die wir schon in ihren Embryonalstadien auf den Externknoten mancher Stücke der *Schl. inflata*, wie auch der *Schl. inflatiformis* gesehen haben, erreichen hier ihre grösste Ausbildung und bedecken die Flanken der Windungen vom Nabelrand bis zum Rückenkiel vollständig. Auf der letzten grössten Windung sieht man 14 solcher Linien und vom Innern gegen den Schalenrand zu treten dieselben immer schärfer hervor, indem sie dort, wo die gewöhnlichen, flachen Lateralrippen von ihnen gekreuzt werden, sehr scharfe, längliche und verhältnissmässig hohe Knötchen erzeugen, wodurch die ganze Schale ein zierliches, gestreiftes Äussere erlangt. Zum grössten Theile verlaufen diese Spirallinien paralell zu einander, und nur an seltenen Stellen, vorwiegend auf den Lateralrippen, bilden sie kleine, sanft ausgeschweifte, wellige Buchten. Durch diese Spiralstreifung verlieren die Lateralrippen stark an Bedeutung und treten in den Umrissen der Schale keineswegs mit der Schärfe auf, wie es bei *Schl. inflata* oder *inflatiformis* der Fall ist. So viel dies auf diesem einzigen Exemplare, dessen eine Seite übrigens stark beschädigt ist, berechnet werden konnte, wird die vollständige Anzahl der Rippen auf der letzten Windung auf 25 bis 30 anzunehmen sein und die einzelnen Intervalle überschreiten niemals die Breite von $8-10^{mm}$, während auf den älteren Windungen die Rippen viel mehr zusammengedrängt erscheinen und die Streifung an Bedeutung verliert.

Die Innenwand einer jeden Windung erhebt sich unmerklich über die vorhergehenden Umgänge und die, wenn auch ziemlich breite Nabelöffnung verschwimmt mit dem Inneren der Schale. Man sieht bei dieser Species an den Rippen weder Knoten noch irgend welche Anschwellungen, nicht einmal an der Externseite, wo der Rückenkiel von den Rippen berührt wird und dieselben mit dem Rückenrand allmählig verschwimmen, wie das besonders deutlich an einigen weniger beschädigten Stellen des Exemplares gegen die Mündung der Schale zu beobachtet werden kann.

Der Rückenkiel ist $4-5^{mm}$ hoch und seine feine Leiste tritt scharf aus dem allgemeinen Umrisse der Schale hervor.

Der allgemeine Habitus dieser äusserst flachen, an die *Schl. Lenzi* sich anlehnenden Species und vor Allem die regelmässige Streifung der ganzen Schalenoberfläche, lässt eine Verwechslung der *Schl. Elobiensis* mit irgend einer anderen Art aus der *Cristati*-Gruppe wohl kaum zu. Sie stellt uns den, in der, durch gewisse Varietäten der *Schl. inflata* und *Candolliana* angedeuteten Richtung am weitesten ausgebildeten Typus dar, dessen Beginn das leise Auftreten der feinen Streifung auf dem Externrande bei diesen beiden Arten kennzeichnet. Das allmählige Verschwinden der Rippen, wie auch die bedeutende Flachheit der ganzen Schale nähert andererseits die *Schl. Elobiensis* der *Schl. Lenzi*, deren geringe Grösse jedoch das beste Unterscheidungsmerkmal abgibt.

Von einer Lobenlinie ist bei diesem einzigen, sehr stark, wenn auch glücklicher Weise ohne Schaden für die Oberflächensculptur verdrückten Exemplare nicht eine Spur zu entdecken.

Die oben beschriebene Cephalopoden-Fauna von den Elobi-Inseln wird nun keineswegs als besonders reich zu bezeichnen sein. Sie enthält, wie wir das sahen, nur vier Arten einer und derselben Gattung, von denen drei sich als neu erwiesen, während nur eine zur sicheren Altersbestimmung der betreffenden Ablagerungen verwendet werden konnte. Diese eine Art *Schl. inflata* ist dennoch ein, für das unterste Cenoman so charakteristisches Leitfossil, dass von einer Altersverwechslung nicht die Rede sein kann und wir die Cephalopoden führenden Sandsteine der Elobi-Inseln mit vollster Sicherheit der Zone der *Schl. inflata* oder der untersten Abtheilung des Cenomans zuzählen dürfen.

Bei der Aufzählung der europäischen und indischen Fundorte der *Schl. inflata* wurde schon einmal erwähnt, dass dieselbe mit allen ihren Varietäten ebenso gut in ganz Nord- und Südfrankreich, im Juragebirge der westlichen Schweiz, wie auch in der westphälischen, norddeutschen und südenglischen Kreideprovinz vorzukommen pflegt. Ewald, Strombeck, Schlütter und Geinitz betrachteten die, *Schl. inflata* führenden Flammenmergel durchwegs als dem Gault angehörig, im Gegensatze zu den meisten französischen und schweizerischen Geologen, die wie Reynès, Renevier, Pictet, Orbigny und Coquand die glaukonitischen Mergel, Sande und Sandsteine mit *Schl. inflata*, *Inoceramus sulcatus* und *Turrilites Bergeri* als sowohl Gault wie auch Cenomantypen enthaltende Couches de passage bezeichneten.

Erst Hébert [1] war es vorbehalten gewesen, durch äusserst genaue Untersuchungen einzelner französischer Kreidebecken, vor Allem der Becken von Paris und Uchaux, wie auch der Provence und der Touraine, mit vollster Evidenz zu zeigen, dass die echte Gault-Fauna mit der Cenoman-Fauna fast gar keine nähere Verwandtschaft besitze, und dass das cenomane Meer viel grössere Flächen bedeckte, als die untercretacischen Fluthen des Neocom und des Gault. Zu demselben Resultate gelangte Barrois [2] in seinen Studien über die Kreide Grossbritanniens und der Insel Wight, wie auch Peron,[3] Tribolet[4] und Carez[5] in ihren neuesten Arbeiten über die schweizerischen und südfranzösischen Kreidebildungen und die Frage der Zugehörigkeit der Zone mit *Schl. inflata* zum untersten Cenoman oder der *Craie glauconieuse* der französischen Geologen kann wohl heute als definitiv gelöst betrachtet werden.

Für die nordeuropäische wie auch für die hercynische Kreideprovinz von Böhmen und Sachsen und aus dem Sudetengebirge, fehlen bisher solche vergleichende Studien; es unterliegt jedoch keinem Zweifel, dass auch hier ähnliche Resultate erreicht werden dürften.

Im Bereiche der karpathisch-alpinen Kreide kennt man die *Schl. inflata* nur aus den Nana- und Penzeskutschichten des Bakonyerwaldes, die ebenfalls dem Gault zugezählt werden; dieses isolirte Vorkommen ist

[1] Matériaux pour servir à la description du terrain crétacé supérieur en France. — Description du bassin d'Uchaux. Annales des sciences géologiques. Vol. VI. Paris 1875.

[2] Recherches sur le terrain crétacé supérieur de l'Angleterre et de l'Irlande. Lille 1876.

Sur le Gault et sur les couches entre lesquelles il est compris dans le bassin de Paris. Annales de la société géologique du Nord. 1875.

Ondulations de la craie dans le Sud de l'Angleterre. Annales de la société géologique du Nord. 1875.

Étude sur le Cénomanien et le Turonien du bassin de Paris. Annales de la société géologique du Nord. 1875.

Description géologique de la craie de l'île de Wight. Annales des sciences géologiques. Paris 1875.

[3] Nouvelles observations au sujet de la classification du terrain crétacé supérieur du midi. Bulletin de la société géologique de France. Vol. VIII 1880.

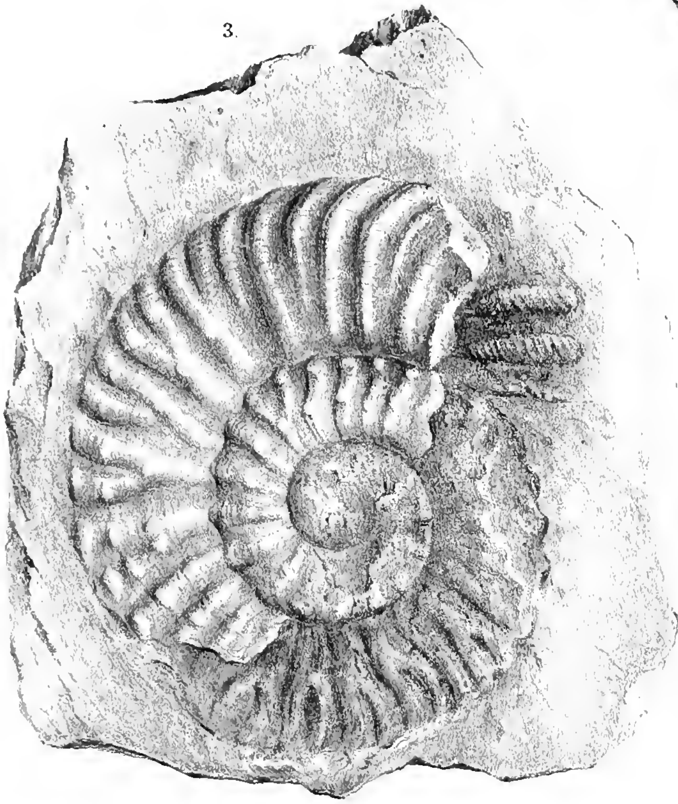
[4] L. Charpy et de Tribolet. Note sur la présence du terrain crétacé moyen et supérieur à Cuiseaux (Saône et Loire). Bulletin de la société géologique de France. 1882. Vol. X.

[5] L. Carez. Sur l'Aptien et le Gault dans les départements du Gard et de l'Ardèche. Bulletin de la société géologique de France. 1883. Vol. XI.

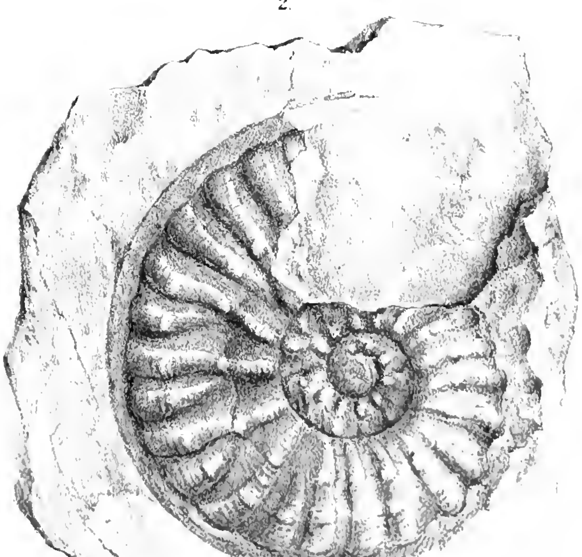
1.

1.

3.



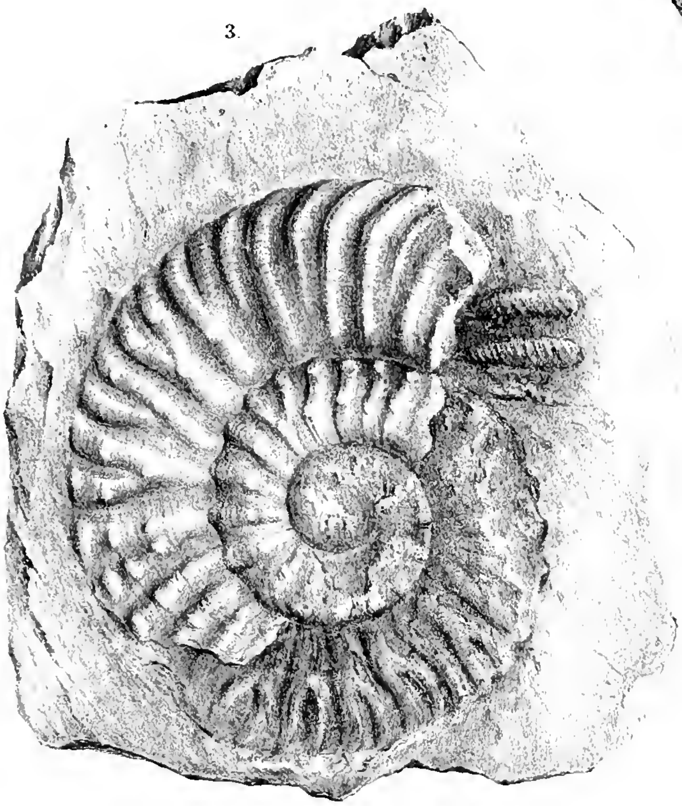
2.



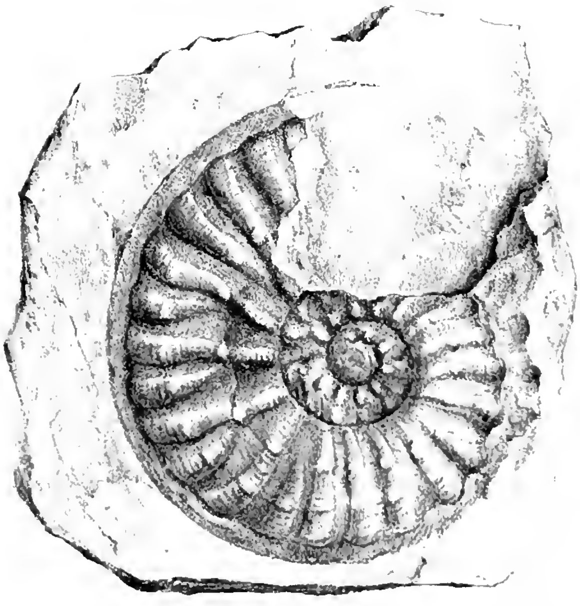
4.

1

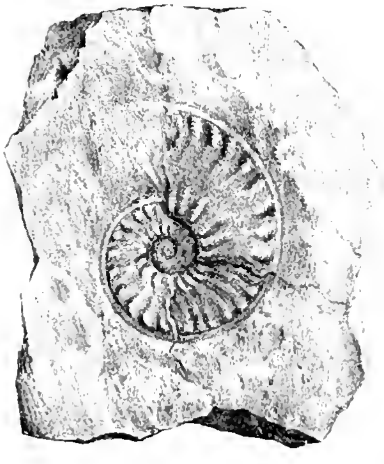
3.

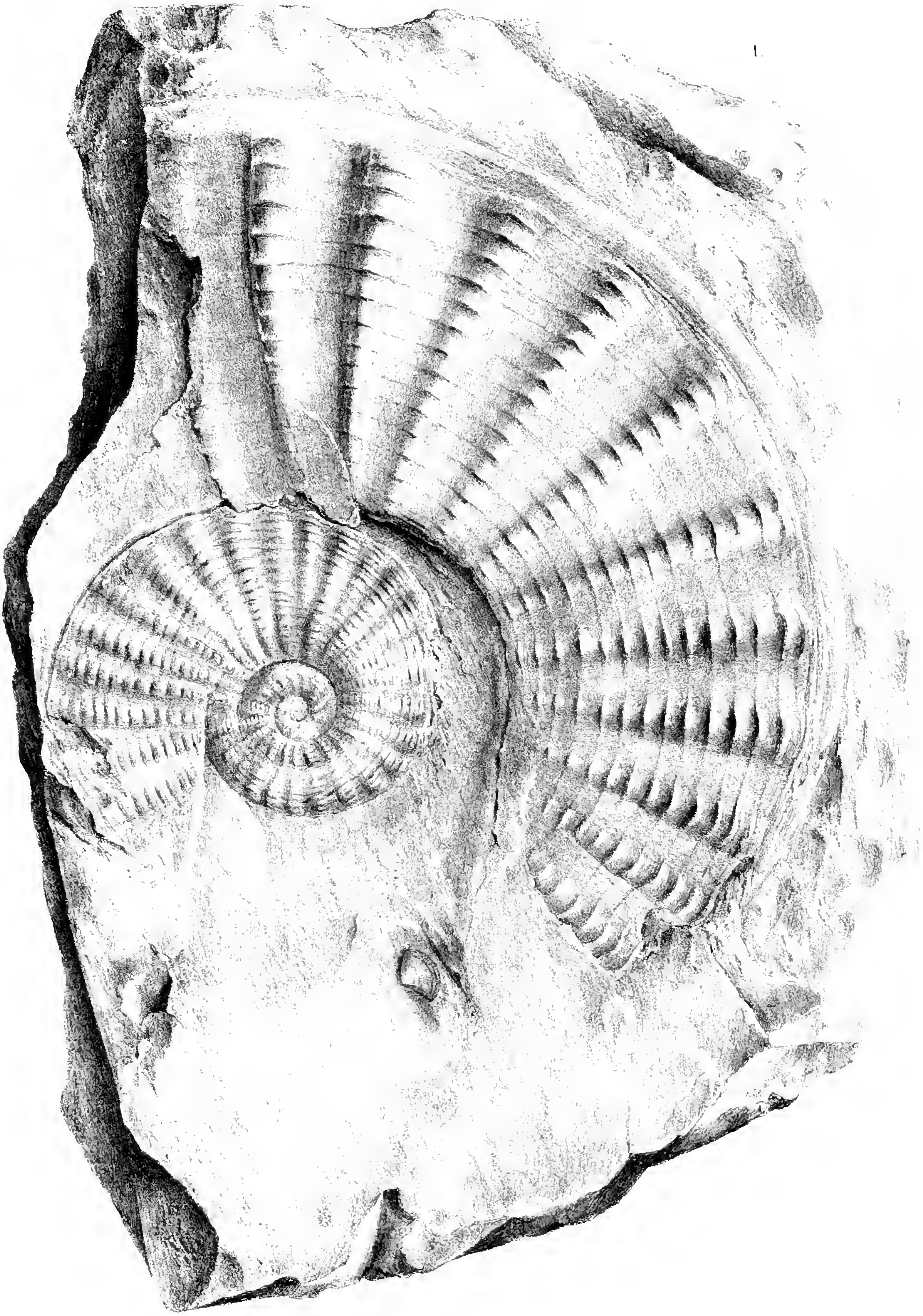


2



4.





1.

jedoch noch zu wenig untersucht worden, um mit anderen, gleichaltrigen Vorkommnissen der übrigen Kreideprovinzen verglichen werden zu können.

Wenn wir nun, nach dem bisher Gesagten, die Cephalopoden-Fauna der Elobi-Inseln mit anderen Punkten des Auftretens der Zone mit *Schl. inflata* vergleichen wollen, so ergeben sich vor Allem zwei Äquivalente, zuerst in den ostindischen Schichten der Ootator-Group aus Moravian und dann in der französischen Kalkfacies aus dem Departement Yonne und Aube im Becken von Paris. Als Vergleichsmoment dient an allen diesen Punkten das Auftreten zahlreicher Varietäten der *Schl. inflata* nebst anderen verwandten Arten, wie *Schl. Candolliana* oder *Schl. Hugardiana* und angesichts der verhältnissmässigen Armuth der Elobi-Fauna darf die, vielleicht allzuwenig genaue Fixirung des Horizontes nicht überraschen. Das vollständige Fehlen von Gasteropoden oder Inoceramen, die in vielen Arten und Gattungen die *Schl. inflata*, hauptsächlich in den südfranzösischen Becken in der Regel begleiten, ist für das Cenoman der Elobi-Inseln ein charakteristisches, negatives Merkmal, dessen Analogon bisher aus Europa nicht bekannt ist. Viel entferntere Ähnlichkeit erkennen wir in den Kreideschichten der Perte du Rhône, Saxonet oder des Zuges der Morgenberghornkette [1] südlich von Bern, wo in allen diesen Gegenden einzelne Arten der *Schlönbachia*-Gattung in der Gesammtfauna die meistens überwiegende Majorität bilden. Noch weit weniger Analogie zur Fauna der Elobi-Inseln bieten uns die Vorkommnisse der Zone mit *Schl. inflata* aus Algier oder Süd-England.

Wie arm die Cephalopoden-Fauna der Elobi-Inseln auch sein mag, beweist dieselbe doch mit genügender Sicherheit, dass die weitgehende cenomane Transgression der mitteleuropäischen Kreide gegen Süden längs der jetzigen Ufer des atlantischen Oceans bis an die Westküste Afrikas hin reichte, wo die mergeligen Sandsteine mit *Schl. inflata* von den Elobi-Inseln bis nach Mosamedes und Benguela einen schmalen Randstreifen auf den westlichen Abhängen der hohen, krystallinischen Gebirgszüge, Sierra da Cristal und Sierra Complida darstellen.

Früher oder später werden höchst wahrscheinlich auch weiter gegen Norden zu an der Liberia- oder senegambischen Küste Ablagerungen der Zone mit *Schl. inflata* gefunden werden, die das Auftreten des Cenomans in England und Südfrankreich mit den Vorkommnissen in Gabun und Benguela verbinden würden.

[1] M. de Tribolet. Geologie der Morgenberghornkette und der angrenzenden Flysch- und Gypsregion am Thunersee Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft. Berlin 1875.

Gault vom Brunnisschafberg und oberhalb der Aarbrücke bei Heimwehfluh.

ERKLÄRUNG DER TAFELN

TAFEL I

TAFEL II

TAFEL III

TAFEL IV

DIE CENTRALEN SONNENFINSTERNISSE DES XX. JAHRHUNDERTS.

Dr. EDUARD MAHLER

da es für jeden Astronomen, der die hier publicirten Tafeln benützen wird, leicht sein wird, sich ein Bild über den Verlauf der Centralitätscurve zu schaffen.

Wichtiger als dies schien mir von den Beschlüssen der im October 1883 zu Rom getagten allgemeinen Conferenz der europäischen Gradmessung und den Modificationen, die dieselben zu Washington von Seite der verschiedenen Regierungen erfuhren und von den Letzteren in dieser Form auch im Principe angenommen wurden, hier Gebrauch zu machen. Es betrifft dies die Einführung des Meridians zu Greenwich als Ausgangsmeridian bei Zählung der geographischen Längen (die von 0° bis 180° östlich und von 0° bis 180° westlich gezählt und dadurch gekennzeichnet werden, dass die östlich gezählten Längen positiv, die westlich gezählten Längen dagegen negativ genommen werden) und die Einführung einer am ganzen Erdballe einheitlichen Zeit, der sogenannten Weltzeit. Dieselbe ist definirt als die von Mitternacht beginnende mittlere Greenwicher Zeit und wird aus der bisher gebrauchten astronomischen Greenwicher Zeit erhalten, indem man zur Letzteren 12^h addirt. Die Einführung dieses Begriffes erforderte aber eine entsprechende Änderung des Datums. Denn während bei der bisher in der Astronomie gebrauchten Greenwicher Zeit der Datumwechsel mit dem Eintritte des Greenwicher Mittags stattfand, wird nach der Weltzeit der Datumwechsel mit Eintritt der Greenwicher Mitternacht erfolgen. Nennt man dieses Datum „Weltdatum", so ist klar, dass das Weltdatum gegen das sonst übliche astronomische Datum einen halben Tag voraus hat. Es hat aber die Einführung des Weltdatums für uns in Europa den Vortheil, dass es sich mit dem bürgerlichen Datum so ziemlich deckt, was mir namentlich für die vorliegende Arbeit einigermassen wichtig schien.

Auch muss hervorgehoben werden, dass ich in Tafel III nur jene centralen Finsternisse aufgenommen habe, die einen reellen Mittagspunkt haben, da Finsternisse, die statt eines Mittagspunktes einen Mitternachtspunkt haben, oder solche, deren Mittagspunkt imaginär ist, von nur sehr geringer Bedeutung sind. Es sind dies die Finsternisse mit den Nummern: 7429, 7438, 7481, 7491, 7499, 7524, 7532, 7562, 7564, 7572, 7602, 7604, 7611, die auch im Oppolzer'schen Canon als solche angeführt sind, und ausser diesen die Nummern: 7448, 7455, 7456, 7498, 7588, die im Canon zwar einen reellen Mittagspunkt haben, da dort nur auf die Centralcurve Rücksicht genommen wurde; berechnet man aber die Grenzcurven, so findet man, dass bei den angeführten Nummern eine der Grenzcurven schon über den betreffenden Pol hinübergreift und sonach einen Mitternachtspunkt statt eines Mittagspunktes hat.

Die gebrauchten Grössen haben die von Oppolzer in seinen „Syzygien-Tafeln für den Mond" (Publication der astronomischen Gesellschaft XVI) eingeführte Bedeutung.

Was die Bearbeitung der Tafeln selbst betrifft, so sind — wie bereits oben erwähnt wurde — die in Tafel I mitgetheilten Elemente, sowie die in Tafel II gegebenen Hilfsgrössen G, K, $-\mu$, $\sin g$, $\sin k$, n dem Oppolzer'schen Canon entnommen worden und auf Grund dieser Grössen wurden die Constanten p', q', r, s, $\gamma+u'_i$, $\gamma-u'_i$, $f\sin\delta$, u'_i berechnet. Mit Hilfe dieser Daten unternahm ich die Berechnung der Tafel III, die derart angelegt wurde, dass zu passend gewählten Stundenwinkeln ($t_a =$ Stundenwinkel bei Sonnenaufgang, $t_a+20°$, $t_a+40°$, $t_a+60°$ ..... $t_u =$ Stundenwinkel bei Sonnenuntergang) die zugehörigen Grenzpunkte der Centralität berechnet wurden. Die Formeln, nach denen gerechnet wurde, finden sich auf Seite 53 der genannten Syzygien-Tafeln und sind:

$$\left.\begin{aligned} a\sin A &= \sin g\sin(G+t) \pm q'\cos t \\ a\cos A &= p' \\ \sin(\varphi_1 - A) &= \frac{\gamma \pm u'_i}{a} \\ \lambda &= t - \mu + r\sin\varphi_1 + s\cos(K+t)\cos\varphi_1 \end{aligned}\right\}$$

wobei in einem gegebenen Falle entweder nur die oberen oder nur die unteren Zeichen zu benützen sind. Bei totalen Verfinsterungen gibt die Anwendung der oberen Zeichen die nördliche, die der unteren die südliche Grenzcurve; bei ringförmigen Finsternissen findet das Umgekehrte statt.

Die Dauer der Totalität (τ' positiv) oder Ringförmigkeit (τ' negativ) ist in Einheiten der Zeitminute angegeben worden, und zwar nach den (siehe ebenfalls auf Seite 53 der Syzygien) Formeln:

$$\left.\begin{aligned} u &= u'_i - (1-e) f_i \sin\delta \sin\varphi_1 + q \cos t \cos\varphi_1 \\ \tau' &= \frac{k' u}{u k - \cos\varphi_1 \sin k \sin(K+t)} \end{aligned}\right\}$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass

$$\log(1-e) = 9\cdot9985, \quad \log k' = 2\cdot6612, \quad \log k = 0\cdot5820$$

ist.

Der Zeichenunterschied bei der Dauer der Totalität und bei der der Ringförmigkeit kommt bei ringförmig-totalen Finsternissen besonders zu statten, insofern an jenen Stellen, wo die Finsterniss total ist, die Dauer τ' das + Vorzeichen hat, während an Stellen, wo die Finsterniss ringförmig ist, das − Vorzeichen erscheint. Die ringförmig-totalen Finsternisse unterscheiden sich hier in noch einer Beziehung von den übrigen centralen Finsternissen. Um nämlich die einzelnen Grenzcurven zu erhalten, sind die Zahlen, welche den Punkten der nördlichen Grenzcurve angehören, in stark markirte Häuschen gesetzt.

Tafel I.

Nr. des Canon	Weltzeit: Gregorianischer Kalender	Weltzeit: Julianischer Tag	L'	Z	ε	P	Q	$\log p$	$\log \Delta L$	$\log q$	u'_a	$\log f_a$	Gattung der Finsternisse
7406	1900, V. 28. $14^h 49^m 9$	2415 168·6180	66°784	−0°70	23°448	175°503	173°149	0·7116	9·7415	8·7379	0·5442	7·6640	t.
7407	1900, XI. 22. 7 17·0	2415 346·3035	239·558	−3·49	447	357·605	350·355	0·7355	9·7113	8·7147	0·5682	7·6754	r.
7408	1901, V. 18. 5 38·0	2415 523·2347	56·575	−0·97	446	184·217	183·035	0·6630	9·7615	8·7569	0·5336	7·6648	t.
7409	1901, XI. 11. 7 34·9	2415 700·3159	228·233	−4·01	446	4·924	4·889	0·7447	9·6997	8·7061	0·5742	7·6744	r.
7413	1903, III. 29. 1 26·4	2416 203·0600	7·192	+1·32	445	176·773	173·146	0·7227	9·7278	8·7273	0·5558	7·6706	r.
7414	1903, IX. 21. 4 30·4	2416 379·1878	177·012	1·04	445	349·041	347·680	0·7009	9·7527	8·7493	0·5404	7·6683	t.
7415	1904, III. 17. 5 38·8	2416 557·2353	356·215	+2·16	445	178·021	179·741	0·7413	9·7047	8·7092	0·5700	7·6716	r.
7416	1904, IX. 9. 20 42·7	2416 733·8630	166·707	−0·71	445	358·069	358·046	0·6900	9·7644	8·7603	0·5332	7·6670	t.
7417	1905, III. 6. 5 19·8	2416 911·2221	344·987	+2·90	445	185·997	185·181	0·7431	9·7021	8·7074	0·5722	7·6732	r.
7418	1905, VIII. 30. 13 13·4	2417 088·5510	156·471	+0·17	445	0·558	8·482	0·6995	9·7543	8·7503	0·5386	7·6658	t.
7422	1907, I. 14. 5 57·1	2417 590·2480	292·934	+2·20	446	169·805	168·493	0·6634	9·7589	8·7565	0·5416	7·6771	t.
7423	1907, VII. 10. 15 16·7	2417 767·6366	107·107	+1·25	445	353·422	353·705	0·7448	9·7020	8·7056	0·5666	7·6627	r.
7424	1908, I. 3. 21 44·2	2417 944·9057	282·146	+1·09	446	177·711	178·525	0·6603	9·7621	8·7599	0·5399	7·6773	t.
7425	1908, VI. 28. 16 31·9	2418 121·6888	96·528	+0·74	447	1·442	359·804	0·7379	9·7107	8·7121	0·5616	7·6627	r.
7426	1908, XII. 23. 11 49·5	2418 299·4927	271·284	−0·22	447	185·619	187·946	0·7072	9·7446	8·7423	0·5502	7·6772	r.–t.
7427	1909, VI. 17. 23 28·8	2418 475·9783	86·082	+0·15	447	9·928	7·485	0·7168	9·7357	8·7325	0·5470	7·6626	t.
7429	1910, V. 9. 5 33·4	2418 801·2315	47·711	−0·92	448	348·825	348·248	0·6903	9·7639	8·7592	0·5327	7·6657	t.
7431	1911, IV. 28. 22 25·7	2419 155·9345	37·501	−0·63	449	357·320	358·805	0·6957	9·7586	8·7537	0·5305	7·6668	t.
7432	1911, X. 22. 4 9·1	2419 332·1730	207·643	−3·81	449	176·503	174·347	0·7285	9·7200	8·7208	0·5612	7·6722	r.
7433	1912, IV. 17. 11 39·8	2419 510·4860	27·084	0·10	449	5·816	8·242	0·7170	9·7345	8·7323	0·5505	7·6681	r.–t.
7434	1912, X. 10. 13 40·7	2419 686·5699	196·886	3·23	446	184·663	182·453	0·7052	9·7471	8·7442	0·5449	7·6708	t.
7438	1914, II. 25. 0 1·6	2420 189·0011	335·557	+3·35	449	350·052	348·726	0·7306	9·7006	8·7161	0·5705	7·6742	r.
7439	1914, VIII. 21. 12 26·9	2420 366·5187	147·586	+0·78	449	171·257	173·494	0·7046	9·7483	8·7441	0·5416	7·6656	t.
7440	1915, II. 14. 4 31·4	2420 543·1885	324·413	+3·56	448	357·757	355·334	0·7166	9·7366	8·7294	0·5572	7·6753	r.
7441	1915, VIII. 10. 22 52·0	2420 720·9528	137·201	+1·31	447	176·847	182·635	0·7284	9·7220	8·7211	0·5554	7·6641	r.
7442	1916, II. 3. 16 6·2	2420 897·6710	313·526	+3·47	447	5·794	3·942	0·6670	9·7556	8·7523	0·5433	7·6761	t.
7443	1916, VII. 30. 2 15·2	2421 075·0939	126·566	+1·56	447	188·617	188·713	0·7436	9·7032	8·7063	0·5656	7·6634	r.
7448	1917, XII. 14. 9 17·7	2421 577·3873	261·835	1·38	446	349·744	352·179	0·7146	9·7365	8·7354	0·5544	7·6768	r.
7449	1918, VI. 8. 22 3·2	2421 753·9189	77·279	−0·32	445	174·743	172·358	0·7162	9·7431	8·7362	0·5431	7·6633	t.
7450	1918, XII. 3. 15 19·2	2421 931·6383	250·666	−2·58	445	357·458	356·136	0·7363	9·7166	8·7137	0·5664	7·6763	r.
7451	1919, V. 29. 13 12·3	2422 108·5502	67·116	−0·73	444	183·438	182·385	0·6923	9·7621	8·7570	0·5327	7·6646	t.
7452	1919, XI. 22. 15 19·7	2422 285·6387	239·286	−3·52	444	4·763	4·557	0·7446	9·6998	8·7061	0·5749	7·6754	r.
7455	1921, IV. 8. 9 5·9	2422 788·3791	17·666	+0·49	443	176·297	172·636	0·7241	9·7265	8·7266	0·5559	7·6663	r.
7456	1921, X. 1. 12 26·1	2422 964·5181	187·776	−2·56	443	346·123	347·234	0·6608	9·7537	8·7564	0·5405	7·6666	t.
7457	1922, III. 28. 13 3·8	2423 142·5443	7·073	+1·31	443	178·166	179·213	0·7416	9·7042	8·7087	0·5695	7·6767	r.
7458	1922, IX. 21. 4 38·4	2423 319·1933	177·416	−1·04	442	357·476	357·579	0·6898	9·7643	8·7605	0·5337	7·6682	t.
7459	1923, III. 17. 12 51·0	2423 496·5354	355·616	+2·18	442	185·646	184·726	0·7427	9·7028	8·7078	0·5716	7·6726	r.
7460	1923, IX. 10. 20 53·2	2423 673·8703	167·167	−0·72	442	5·868	7·661	0·7005	9·7536	8·7493	0·5394	7·6676	t.
7464	1925, I. 24. 14 45·0	2424 175·6146	304·128	+3·66	443	169·866	168·521	0·6628	9·7597	8·7573	0·5416	7·6767	t.
7465	1925, VII. 20. 21 40·3	2424 352·9030	117·616	+1·54	443	352·566	352·686	0·7146	9·7016	8·7055	0·5662	7·6636	r.

Nr. des Canon	Weltzeit: Gregorianischer Kalender	Weltzeit: Julianischer Tag	L'	Z	ε	P	Q	$\log p$	$\log \Delta L$	$\log q$	u'_a	$\log f_a$	Gattung der Finsternisse
7466	1926, I. 14. 6h 35m·4	2424 530·2740	293°·356	+2°·23	23°·443	177°·665	178°·576	0·6968	9·7017	8·7595	0·5400	7·6771	t.
7467	1926, VII. 9. 23 6·3	2424 706·9627	106·644	+1·25	444	0·538	358·873	0·7370	9·7116	8·7131	0·5604	7·6627	r.
7468	1927, I. 3. 20 29·0	2424 884·8538	282·487	+1·11	444	185·576	187·033	0·7083	9·7427	8·7411	0·5516	7·6773	r.-t.
7469	1927, VI. 29. 6 32·6	2425 061·2722	96·523	+0·75	445	0·657	0·616	0·7154	9·7376	8·7342	0·5458	7·6627	t.
7474	1929, V. 9. 6 8·2	2425 741·2557	48·126	0·02	446	356·637	358·266	0·6668	9·7576	8·7528	0·5366	7·6657	t.
7475	1929, XI. 1. 12 0·6	2425 917·5004	218·585	4·08	446	176·174	173·667	0·7275	9·7212	8·7220	0·5613	7·6733	r.
7476	1930, IV. 28. 16 9·6	2426 095·7083	37·758	0·05	446	5·197	7·617	0·7185	9·7329	8·7308	0·5508	7·6669	r.-t.
7477	1930, X. 21. 21 47·2	2426 271·9078	207·776	−3·83	446	184·303	182·118	0·7036	9·7484	8·7454	0·5448	7·6721	t.
7481	1932, III. 7. 7 44·5	2426 774·3226	340·541	+2·80	446	346·702	348·348	0·7386	9·7071	8·7107	0·5093	7·6731	r.
7482	1932, VIII. 31. 19 55·3	2426 951·8301	158·107	+0·04	446	176·531	172·820	0·7002	9·7408	8·7428	0·5424	7·6659	t.
7483	1933, II. 24. 12 44·2	2427 128·5307	335·474	+3·32	446	357·561	355·124	0·7185	9·7316	8·7307	0·5557	7·6743	r.
7484	1933, VIII. 21. 5 49·1	2427 306·2424	147·714	+0·78	447	176·051	181·186	0·7266	9·7262	8·7198	0·5568	7·6649	r.
7485	1934, II. 14. 0 43·9	2427 483·0305	324·647	+3·59	446	5·629	3·881	0·6962	9·7566	8·7532	0·5424	7·6754	t.
7486	1934, VIII. 10. 8 46·2	2427 660·3654	137·626	+1·33	446	187·146	187·735	0·7439	9·7025	8·7061	0·5664	7·6646	r.
7491	1935, XII. 25. 17 49·6	2428 162·7428	273·022	−0·04	445	349·686	352·123	0·7152	9·7356	8·7342	0·5555	7·6772	r.
7492	1936, VI. 19. 5 15·2	2428 339·2189	87·728	+0·26	444	173·896	171·547	0·7087	9·7447	8·7408	0·5418	7·6629	t.
7493	1936, XII. 13. 23 25·6	2428 516·9761	261·816	−1·36	443	357·347	358·941	0·7371	9·7096	8·7129	0·5764	7·6768	r.
7494	1937, VI. 8. 20 34·4	2428 693·8575	77·668	+0·29	443	182·616	181·617	0·6919	9·7629	8·7586	0·5320	7·6633	t.
7495	1937, XII. 2. 23 11·5	2428 870·9663	250·379	−2·62	442	4·536	4·281	0·7444	9·6997	8·7063	0·5754	7·6762	r.
7496	1938, V. 29. 14 0·1	2429 048·5834	67·531	0·72	442	191·236	192·486	0·6946	9·7664	8·7566	0·5337	7·6646	t.
7498	1939, IV. 19. 16 35·2	2429 373·6911	28·726	−0·21	441	169·747	172·648	0·7254	9·7252	8·7248	0·5559	7·6680	r.
7499	1939, X. 12. 20 30·3	2429 549·8544	198·669	−3·35	441	348·077	346·872	0·6986	9·7546	8·7517	0·5407	7·6709	t.
7500	1940, IV. 7. 20 18·7	2429 727·8463	17·866	+0·50	441	177·665	178·665	0·7425	9·7030	8·7080	0·5690	7·6693	r.
7501	1940, X. 1. 12 41·5	2429 904·5288	188·182	−2·59	441	356·945	357·182	0·6897	9·7643	8·7667	0·5346	7·6696	t.
7502	1941, III. 27. 20 14·4	2430 081·8433	6·775	+1·35	441	185·223	184·196	0·7421	9·7038	8·7085	0·5697	7·6707	r.
7503	1941, IX. 21. 4 38·8	2430 259·1936	177·863	−1·67	441	5·302	7·375	0·7016	9·7517	8·7482	0·5468	7·6682	t.
7507	1943, II. 4. 23 30·5	2430 760·9796	315·201	+3·52	441	169·714	168·516	0·6924	9·7663	8·7578	0·5403	7·6761	t.
7508	1943, VIII. 1. 4 6·0	2430 938·1708	128·644	+1·56	442	351·612	351·671	0·7451	9·7016	8·7053	0·5665	7·6634	r.
7509	1944, I. 25. 15 24·6	2431 115·6421	304·550	+3·08	441	177·666	178·616	0·6914	9·7613	8·7586	0·5466	7·6767	t.
7510	1944, VII. 20. 5 43·4	2431 292·2385	117·370	+1·55	441	359·643	357·892	0·7366	9·7136	8·7142	0·5597	7·6636	r.
7511	1945, I. 14. 5 7·0	2431 470·2132	293·686	+2·24	442	185·536	187·913	0·7096	9·7413	8·7399	0·5517	7·6771	r.-t.
7512	1945, VII. 9. 13 30·2	2431 646·5668	106·959	+1·26	442	8·184	5·756	0·7139	9·7392	8·7357	0·5450	7·6627	t.
7517	1947, V. 20. 13 44·1	2432 326·5723	58·669	−0·91	444	355·899	357·656	0·6986	9·7559	8·7516	0·5366	7·6647	t.
7518	1947, XI. 12. 20 1·8	2432 502·8346	229·593	−3·96	444	175·917	173·676	0·7262	9·7224	8·7233	0·5612	7·6745	r.
7519	1948, V. 9. 2 30·6	2432 681·1046	48·376	−0·03	444	4·516	6·617	0·7201	9·7315	8·7293	0·5509	7·6657	r.-t.
7520	1948, XI. 1. 6 2·7	2432 857·2519	218·729	−4·08	445	183·991	181·863	0·7027	9·7496	8·7467	0·5449	7·6733	t.
7524	1950, IX. 12. 3 29·1	2433 537·1452	168·893	−0·86	445	169·866	172·201	0·7075	9·7453	8·7415	0·5439	7·6671	t.
7525	1951, III. 7. 20 51·6	2433 713·8692	340·482	+2·78	445	357·304	354·858	0·7173	9·7332	8·7317	0·5541	7·6731	r.
7526	1951, IX. 1. 12 50·0	2433 891·5347	158·275	+0·03	444	178·307	180·380	0·7306	9·7186	8·7186	0·5584	7·6659	r.
7527	1952, II. 25. 9 16·7	2434 068·3866	335·722	+3·32	444	5·438	3·772	0·6953	9·7576	8·7539	0·5412	7·6743	t.
7528	1952, VIII. 20. 15 21·5	2434 245·6399	147·524	+0·82	441	186·323	186·767	0·7442	9·7020	8·7058	0·5673	7·6649	r.
7532	1954, I. 5. 2 21·8	2434 748·0985	284·216	+1·28	443	349·639	352·072	0·7166	9·7336	8·7329	0·5564	7·6773	r.
7533	1954, VI. 30. 12 26·9	2434 924·5187	98·175	+0·85	441	173·629	176·725	0·7073	9·7464	8·7422	0·5466	7·6627	t.
7534	1954, XII. 25. 7 34·6	2435 102·3153	272·682	0·04	441	357·263	358·774	0·7378	9·7078	8·7121	0·5712	7·6772	r.
7535	1955, VI. 20. 4 12·6	2435 279·1750	88·678	+0·29	441	181·763	186·986	0·6913	9·7633	8·7585	0·5315	7·6629	t.
7536	1955, XII. 14. 7 8·4	2435 456·2975	261·517	−1·43	440	4·409	4·649	0·7441	9·7000	8·7064	0·5757	7·6768	r.
7537	1956, VI. 8. 21 30·0	2435 633·8958	78·626	−0·26	439	166·417	161·783	0·6948	9·7597	8·7551	0·5338	7·6633	t.
7541	1958, IV. 19. 3 24·6	2436 313·1417	28·576	−0·26	438	177·111	177·612	0·7431	9·7032	8·7075	0·5685	7·6686	r.
7542	1958, X. 12. 20 51·8	2436 489·8693	196·626	−3·38	438	356·494	356·851	0·6897	9·7638	8·7606	0·5355	7·6709	t.
7543	1959, IV. 8. 3 29·7	2436 667·1456	17·561	+0·52	438	184·721	183·565	0·7416	9·7047	8·7096	0·5683	7·6693	r.
7544	1959, X. 2. 12 31·5	2436 844·5216	188·565	−2·62	438	4·783	6·917	0·7027	9·7504	8·7471	0·5423	7·6696	t.
7547	1961, II. 15. 8 11·6	2437 346·3416	326·417	+3·56	438	169·579	168·478	0·6918	9·7616	8·7584	0·5394	7·6752	t.
7548	1961, VIII. 11. 10 35·9	2437 523·4416	138·508	+1·29	438	356·753	356·666	0·7451	9·7016	8·7056	0·5671	7·6641	r.
7549	1962, II. 5. 0 11·1	2437 701·0077	315·716	+3·51	438	177·507	178·614	0·6926	9·7606	8·7583	0·5401	7·6761	t.
7550	1962, VII. 31 12 24·5	2437 877·5170	127·812	+1·58	438	358·773	356·946	0·7349	9·7145	8·7151	0·5592	7·6634	r.

Nr. des Canon	Weltzeit: Gregorianischer Kalender	Weltzeit: Julianischer Tag	L'	Z	ε	P	Q	log p	log ΔL	log q	u'_a	log f_a	Gattung der Finsternisse
7551	1963, I. 25. 13h 42m·8	2438 055·5714	304°872	+3°08	23°438	185°470	187°871	0·7108	9·7401	8·7389	0·5522	7·6707	r.
7552	1963, VII. 20 20 42·7	2438 231·8636	117·401	+1·50	439	7·318	4·909	0·7126	9·7407	8·7372	0·5442	7·6630	t.
7557	1965, V. 30. 21 13·8	2438 911·8840	69·221	−0·04	440	355·106	356·962	0·6991	9·7548	8·7504	0·5367	7·6639	t.
7558	1965, XI. 23. 4 10·8	2439 088·1742	240·662	−3·43	441	175·727	173·440	0·7249	9·7239	8·7245	0·5610	7·6755	r.
7559	1966, V. 20. 9 42·9	2439 266·4048	58·927	−0·91	441	3·703	6·155	0·7216	9·7268	8·7279	0·5513	7·6647	r. t.
7560	1966, XI. 12. 14 26·6	2439 442·6018	229·755	−3·96	441	183·748	181·679	0·7016	9·7566	8·7480	0·5450	7·6745	t.
7562	1967, XI. 2. 5 47·9	2439 797·2416	219·115	−4·09	442	191·833	191·644	0·6891	9·7640	8·7666	0·5368	7·6733	t.
7564	1968, IX. 22. 11 9·2	2440 122·4647	170·502	−1·84	442	166·270	171·641	0·7088	9·7437	8·7403	0·5456	7·6684	t.
7565	1969, III. 18. 4 52·3	2440 299·2039	357·422	+2·00	442	356·974	354·525	0·7159	9·7348	8·7330	0·5524	7·6718	r.
7566	1969, IX. 11. 19 56·1	2440 476·8306	168·896	−0·88	441	177·621	176·633	0·7318	9·7170	8·7176	0·5599	7·6671	r.
7567	1970, III. 7. 17 43·2	2440 653·7383	346·743	+2·70	441	5·183	3·003	0·6647	9·7579	8·7540	0·5399	7·6731	t.
7568	1970, VIII. 31. 22 2·6	2440 830·9185	158·070	+0·66	441	185·548	185·909	0·7443	9·7015	8·7056	0·5681	7·6659	r.
7572	1972, I. 16. 10 53·3	2441 333·4537	295·412	+2·37	440	349·580	352·013	0·7178	9·7321	8·7310	0·5572	7·6771	r.
7573	1972, VII. 10. 19 39·5	2441 509·8101	108·615	+1·32	440	172·156	169·968	0·7000	9·7479	8·7435	0·5401	7·6627	t.
7574	1973, I. 4. 15 42·9	2441 687·6548	284·102	+1·27	439	357·187	358·612	0·7380	9·7068	8·7113	0·5719	7·6773	r.
7575	1973, VI. 30. 11 39·1	2441 864·4855	98·529	+0·88	439	180·891	180·258	0·6609	9·7638	8·7589	0·5312	7·6627	t.
7576	1973, XII. 24. 15 8·1	2442 041·6306	272·686	−0·69	439	4·309	3·840	0·7437	9·7000	8·7066	0·5757	7·6772	r.
7577	1974, VI. 20. 4 55·6	2442 219·2053	88·496	+0·31	438	189·567	191·053	0·6657	9·7588	8·7541	0·5340	7·6629	t.
7581	1976, IV. 29. 10 19·9	2442 898·4305	39·223	−0·68	437	176·456	177·145	0·7436	9·7027	8·7068	0·5679	7·6668	r.
7582	1976, X. 23. 5 10·0	2443 075·2153	209·928	−3·93	436	356·115	356·507	0·6809	9·7636	8·7666	0·5363	7·6722	t.
7583	1977, IV. 18. 10 30·8	2443 252·4422	28·282	−0·18	435	184·147	182·921	0·7412	9·7059	8·7095	0·5609	7·6681	r.
7584	1977, X. 12. 20 30·8	2443 429·8547	199·398	−3·41	435	4·339	6·529	0·7038	9·7489	8·7466	0·5438	7·6766	t.
7587	1979, II. 26. 16 46·6	2443 931·6990	337·492	+3·25	435	166·387	168·384	0·6914	9·7616	8·7596	0·5384	7·6742	t.
7588	1979, VIII. 22. 17 10·9	2444 108·7159	149·612	+0·73	435	349·934	349·764	0·7449	9·7015	8·7057	0·5676	7·6650	r.
7589	1980, II. 16. 8 52·1	2444 286·3695	326·842	+3·54	435	177·371	178·573	0·6926	9·7662	8·7578	0·5399	7·6753	t.
7590	1980, VIII. 10. 19 10·6	2444 462·7990	138·284	+1·39	435	357·933	356·024	0·7337	9·7157	8·7166	0·5589	7·6641	r.
7591	1981, II. 4. 22 14·3	2444 640·9266	316·626	+3·49	436	185·379	187·796	0·7122	9·7388	8·7375	0·5526	7·6761	r.
7592	1981, VII. 31. 3 53·1	2444 817·1619	127·865	+1·58	436	6·473	4·662	0·7112	9·7424	8·7387	0·5435	7·6634	t.
7597	1983, VI. 11. 4 38·2	2445 497·1932	79·716	+0·15	437	354·279	356·226	0·7005	9·7537	8·7492	0·5376	7·6633	t.
7598	1983, XII. 4. 12 26·4	2445 673·5183	251·786	−2·50	437	175·589	173·269	0·7237	9·7253	8·7257	0·5600	7·6763	r.
7599	1984, V. 30. 16 48·0	2445 851·7000	69·437	−0·62	438	2·966	5·333	0·7230	9·7283	8·7265	0·5516	7·6640	r.-t.
7600	1984, XI. 22. 22 57·5	2446 027·9566	246·838	−3·42	438	183·566	181·562	0·7004	9·7516	8·7492	0·5449	7·6754	t.
7602	1985, XI. 12. 14 20·1	2446 382·5973	236·145	−3·95	439	191·582	191·508	0·6889	9·7639	8·7667	0·5374	7·6744	t.
7604	1986, X. 3. 18 55·2	2446 707·7883	196·207	−2·75	439	168·746	171·148	0·7099	9·7421	8·7396	0·5471	7·6697	t.
7605	1987, III. 29. 12 45·5	2446 884·5316	8·265	+1·23	439	356·571	354·123	0·7146	9·7365	8·7343	0·5507	7·6706	r.-t.
7606	1987, IX. 23 3 8·8	2447 062·1311	179·569	−1·84	439	176·669	178·945	0·7329	9·7154	8·7164	0·5616	7·6683	r.
7607	1988, III. 18. 2 3·0	2447 239·0854	357·698	+2·02	439	4·854	3·366	0·6940	9·7588	8·7552	0·5389	7·6716	t.
7608	1988, IX. 11. 4 49·7	2447 416·2012	168·672	−0·85	439	184·828	185·078	0·7444	9·7012	8·7055	0·5696	7·6670	r.
7611	1990, I. 26. 19 21·1	2447 918·8003	306·588	+3·13	438	349·514	351·929	0·7196	9·7308	8·7304	0·5577	7·6767	r.
7612	1990, VII. 22. 2 54·1	2448 095·1209	119·666	+1·58	438	171·266	169·105	0·7045	9·7494	8·7449	0·5394	7·6636	t.
7613	1991, I. 15. 23 50·8	2448 272·9936	295·337	+2·37	437	357·107	358·447	0·7392	9·7059	8·7107	0·5723	7·6771	r.
7614	1991, VII. 11. 19 6·4	2448 449·7961	108·983	+1·35	436	180·615	179·529	0·6605	9·7641	8·7591	0·5310	7·6627	t.
7615	1992, I. 4. 23 10·5	2448 626·9656	283·853	+1·23	436	4·222	3·656	0·7439	9·7004	8·7069	0·5756	7·6773	r.
7616	1992, VI. 30. 12 18·6	2448 804·5126	98·948	+0·61	436	188·766	190·298	0·6666	9·7586	8·7536	0·5345	7·6627	t.
7620	1994, V. 10. 17 7·4	2449 483·7135	49·812	−0·91	434	175·736	176·311	0·7446	9·7024	8·7065	0·5674	7·6657	r.
7621	1994, XI. 3. 13 35·6	2449 660·5664	226·963	−4·12	434	355·817	356·407	0·6901	9·7632	8·7662	0·5371	7·6734	t.
7622	1995, IV. 29. 17 30·2	2449 837·7335	38·937	−0·07	433	183·503	182·175	0·7404	9·7068	8·7101	0·5654	7·6668	r.
7623	1995, X. 24. 4 36·8	2450 015·1922	216·268	−3·93	433	3·966	6·266	0·7048	9·7475	8·7446	0·5453	7·6722	t.
7626	1997, III. 9. 1 15·5	2450 517·0524	348·507	+2·66	433	166·131	168·232	0·6911	9·7624	8·7593	0·5376	7·6736	t.
7628	1998, II. 26. 17 27·0	2450 871·7271	337·916	+3·22	433	177·182	178·478	0·6935	9·7595	8·7566	0·5397	7·6742	t.
7629	1998, VIII. 22. 2 3·4	2451 048·0857	148·706	+0·70	432	357·141	355·157	0·7325	9·7172	8·7178	0·5587	7·6650	r.
7630	1999, II. 16. 6 39·7	2451 226·2770	327·144	+3·52	432	185·244	187·072	0·7135	9·7374	8·7364	0·5526	7·6753	r.
7631	1999, VIII. 11. 11 8·4	2451 402·4042	138·355	+1·31	433	5·066	3·312	0·7066	9·7438	8·7402	0·5436	7·6641	t.

Tafel II.

Nr. des Canon	log $f_n \sin\delta$	u'_n	log sin g	log sin k	log n	log p'_n	log p'	log q	log r	log s	log $(q+u'_n)$	log $(q-u'_n)$	G	K	$-\gamma$
7400	7_n2250	+0·0031	9·5702	9·9990	9·7430	9·9654	9·9670	7·6300	0_n2518	1·4315	9·6014	9·5946	78°97	88°51	315°70
7407	7·2086	−0·0206	9·5502	9·9974	9·7135	9·9676	9·9691	7·6460	0·4968	1·4600	9_n3929	9_n3124	251·26	87·71	66·59
7408	7_n1839	+0·0137	9·5514	9·9964	9·7636	9·9684	9·9698	7·6372	0_n5178	1·4089	9_n5406	9_n5736	67·61	87·46	95·46
7409	7·1446	−0·0209	9·5349	9·9935	9·7019	9·9707	9·9720	7·6522	0·7067	1·4077	9·6508	9·7001	238·42	86·96	63·70
7413	6_n3058	−0·0085	9·4862	9·9793	9·7299	9·9773	9·9771	7·6679	0_n9251	1·4255	9·9213	9·9300	8·92	89·09	157·39
7414	5_n9830	+0·0000	9·4880	9·9785	9·7547	9·9771	9·9771	7·6666	0·9669	1·4001	9_n9503	9_n9509	176·32	90·38	168·45
7415	6·0892	0·0227	9·4820	9·9791	9·7009	9·9773	9·9774	7·6695	0·9466	1·4483	9·9386	9·1895	355·27	90·48	97·66
7416	6_n9202	+0·0141	9·4896	9·9802	9·7665	9·9763	9·9770	7·6630	0·8778	1·3898	9_n1764	9_n2512	163·56	91·62	228·19
7417	6·6842	0·0249	9·4886	9·9809	9·7643	9·9767	9·9771	6·6687	0_n9331	1·4527	9_n7783	9_n7407	341·33	91·86	104·66
7418	6_n8646	+0·0093	9·5002	9·9831	9·7504	9·9752	9·9759	7·6581	0·8553	1·4028	9·7621	9·7486	151·16	92·62	343·28
7422	7·2389	+0·0057	9·5708	9·9990	9·7616	9·9609	9·9658	7·6430	0_n2288	1·4141	9·9395	9·9338	280·88	91·48	66·73
7423	7_n2404	−0·0187	9·5808	9·9998	9·7642	9·9652	9·9636	7·6266	9·8773	1·4717	9_n8142	9_n7886	94·15	90·60	310·19
7424	7·2051	+0·0074	9·5961	0·0000	9·7642	9·9636	9·9619	7·6394	9·2849	1·4119	9·3058	9·2728	268·86	89·82	214·54
7425	7_n2575	−0·0137	9·6000	9·9995	9·7129	9·9618	9·9601	7·6230	0·1298	1·4027	9·6966	9·1778	82·68	88·85	293·17
7426	7·2747	−0·0029	9·6080	9·9986	9·7461	9·9603	9·9585	7·6376	0·3386	1·4286	9_n6984	9_n6932	257·41	87·68	3·73
7427	7_n2595	+0·0003	9·6168	9·9970	9·7378	9·9568	9·9585	7·6234	0_n5046	1·4353	9·9513	9·9511	72·07	87·08	196·37
7429	7_n1324	+0·0146	9·6638	9·9768	9·7659	9·9459	9·9473	7·6438	0_n9588	1·3816	9_n6689	9_n6824	36·36	83·28	93·39
7431	7_n0488	+0·0108	9·6735	9·9612	9·7661	9·9433	9·9444	7·6515	1_n0215	1·3772	9_n3426	9_n3833	27·83	83·66	202·35
7432	6·9293	−0·0139	9·6801	9·9529	9·7221	9·9415	9·9424	7·6625	1·0977	1·4069	9·4928	9·5299	200·15	84·69	112·99
7433	6_n9240	−0·0032	9·6766	9·9526	9·7366	9·9417	9·9425	7·6587	1_n0840	1·3921	9·7180	9·7233	16·77	84·78	6·36
7434	6·7313	+0·0024	9·6844	9·9459	9·7492	9·9410	9·9403	7·6657	1·0970	1·3728	9_n6134	9_n6184	192·16	86·45	332·71
7438	6·8886	−0·0232	9·6812	9·9507	9·7081	9·9412	9·9420	7·6666	1_n1205	1·4187	9_n9854	9_n9641	342·23	94·84	180·21
7439	6_n9918	+0·0003	9·6764	9·9570	9·7504	9·9420	9·9436	7·6527	1·0516	1·3827	9·8882	9·8811	156·11	95·87	352·04
7440	7·0378	−0·0099	9·6753	9·9594	9·7321	9·9428	9·9439	7·6611	1_n0583	1·4034	9_n3306	9_n2885	333·70	96·19	115·17
7441	7_n0930	−0·0081	9·6699	9·9658	9·7241	9·9454	9·9443	7·6454	1·0320	1·4178	7·7853	8·3483	147·93	96·66	198·20
7442	7·1341	+0·0040	9·6605	9·9692	9·7571	9·9466	9·9452	7·6551	0_n9778	1·3882	9·7002	9·6932	324·87	96·75	303·20
7443	7_n1658	−0·0183	9·6509	9·9755	9·7053	9·9483	9·9468	7·1424	0·9835	1·4463	9_n8957	9_n8755	138·98	96·70	150·02
7448	7·2699	−0·0071	9·5969	9·9967	9·7386	9·9607	9·9625	7·6380	9_n9673	1·4372	9_n9658	9_n9596	275·37	96·83	30·71
7449	7_n2501	+0·0042	9·5896	0·0000	9·7452	9·9621	9·9638	7·6256	8·8205	1·4309	9·6740	9·6662	90·39	90·06	207·64
7450	7·2487	−0·0221	9·5709	9·9997	9·7122	9·9643	9·9659	7·6411	0·0534	1·4636	9_n4191	9_n3391	263·66	89·09	306·92
7451	7_n2258	+0·0146	9·5705	9·9991	9·7642	9·9654	9·9670	7·1945	0_n2147	1·4110	9_n4461	9_n4893	79·39	88·56	341·95
7452	7·2072	0·0276	9·5553	9·9974	9·7626	9·9677	9·9692	7·6462	0·5135	1·4715	9·6289	9·6818	251·00	87·69	307·92
7455	6_n7566	−0·0086	9·4931	9·9815	9·7286	9·9419	9·9413	7·6638	0_n9024	1·4266	9·9445	9·9529	22·21	87·88	41·54
7456	6·3984	+0·0068	9·4895	9·9790	9·7557	9·9766	9·9766	7·6668	0·9617	1·3994	9_n9704	9_n9767	189·56	89·01	348·52
7457	6_n3586	−0·0222	9·4836	9·9795	9·7661	9·9775	9·9773	7·6680	0_n9462	1·4492	9·1781	9·2903	8·82	89·11	344·84
7458	5_n9207	+0·0136	9·4852	9·9788	9·7664	9·9772	9·9772	7·6659	0·8926	1·3885	9_n3043	9_n3502	176·79	90·33	108·22
7459	6·1221	0·0237	9·4830	9·9791	9·7656	9·9773	9·9774	6_n1219	0_n9507	1·4502	9_n7519	9_n7139	354·01	90·52	351·05
7460	6_n6131	+0·0079	9·4903	9·9801	9·7551	9·9765	9·9769	7·6631	0·8612	1·4011	9·7168	9·7035	164·09	91·58	227·30
7464	7·1621	+0·0063	9·5505	9·9961	9·7618	9·9669	9·9684	7·6495	0_n5371	1·4104	9·9417	9·9354	293·39	92·69	319·46
7465	7_n2080	−0·0189	9·5615	9·9982	9·7638	9·9684	9·9669	7·6320	0·4351	1·4705	9_n8693	9_n8465	105·67	92·00	214·32
7466	7·2375	+0·0073	9·5966	9·9990	9·7638	9·9671	9·9655	7·6438	0_n2312	1·4113	9·3145	9·2826	281·03	91·49	82·86
7467	7_n2409	0·0131	9·5813	9·9999	9·7141	9·9652	9·9630	7·2009	9·8377	1·4619	8·5786	8·8069	93·88	90·56	194·83
7468	7·2644	−0·0037	9·5893	0·0000	9·7448	9·9638	9·9621	7·6396	9·0818	1·4313	9_n6970	9_n6905	209·28	89·89	235·17
7469	7_n2575	+0·0015	9·5998	9·9996	9·7397	9·9602	9·9619	7·6236	0_n0884	1·4369	9·9111	9·9095	82·92	88·89	84·95
7474	7_n1353	+0·0107	9·6648	9·9708	9·7591	9·9456	9·9470	7·6435	0_n9653	1·3878	9_n4469	9_n4789	36·54	83·24	86·28
7475	7·0658	−0·0140	9·6731	9·9626	9·7233	9·9434	9·9446	7·6573	1·0539	1·4148	9·5323	9·5665	208·66	83·57	354·78
7476	7_n0515	0·0035	9·6731	9·9615	9·7356	9·9434	9·9445	7·6514	1_n0450	1·4026	9·6703	9·6768	28·07	83·65	253·24
7477	6·9386	+0·0025	9·6796	9·9531	9·7505	9·9425	9·9416	7·6623	1·0684	1·3787	9_n5741	9_n5799	206·27	84·68	210·36
7481	6·6376	−0·0220	9·6851	9·9444	9·7692	9·9403	9·9407	7·6690	1_n1423	1·4113	9_n9963	9_n9766	350·32	92·88	63·85
7482	6_n8339	+0·0049	9·6819	9·9496	9·7489	9·9410	9·9417	7·6589	1·0866	1·3762	9·9228	9·9177	164·16	94·41	239·01

Nr. des Canon	log $f_i \sin\delta$	u'_i	log sin g	log sin k	log n	log p'_n	log p'_s	log q	log r	log s	log $(q+u'_i)$	log $(q-u'_i)$	G	K	$-\eta$
7483	6·8900	−0·0084	9·6815	9·9507	9·7337	9·9412	9·9420	7·6601	1n0600	1·3931	9·3013	9n3284	342°19	04°85	351°00
7484	6n9901	−0·0095	9·6777	9·9505	9·7224	9·9432	9·9422	7·6527	1·0816	1·4102	8·8071	8·9008	156·31	05·88	93·27
7485	7·0354	+0·0049	9·6751	9·9503	9·7581	9·9440	9·9420	7·6614	1n0330	1·3773	9·6901	9·6813	333·87	06·17	173·87
7486	7n0052	−0·0191	9·6699	9·9606	9·7047	9·9455	9·9444	7·6452	1·0507	1·4374	9n8480	9n8244	147·81	06·06	51·82
7491	7·2742	−0·0082	9·6155	9·9973	9·7371	9·9571	9·9580	7·7377	0n4840	1·4363	9n0700	9·9623	287·07	02·78	270·04
7492	7n2001	+0·0055	9·6008	9·9988	9·7408	9·9589	9·9600	7·6233	0·2057	1·4281	9·7377	9·7289	101·47	01·84	100·03
7493	7·2008	−0·0231	9·5970	9·9998	9·7112	9·9607	9·9625	7·6380	0n0150	1·4047	9n4385	9·3585	275·04	00·88	180·47
7494	7n2505	+0·0153	9·5894	0·0000	9·7050	9·9621	9·9638	7·6250	9·1310	1·4111	9n3185	9n3780	99·84	00·13	229·42
7495	7·2477	−0·0281	9·5762	9·9997	9·7010	9·9644	9·9661	7·6412	0·0803	1·4739	9·6114	9·6074	263·34	89·66	160·83
7496	7n2272	+0·0136	9·5717	9·9991	9·7024	9·9652	9·9668	7·6303	0n2121	1·4128	9n9754	9·9878	79·52	88·57	331·66
7498	6n9472	0·0086	9·5054	9·9852	9·7273	9·9754	9·9740	7·6577	0n8570	1·4310	9·9097	9·9779	35·19	87·03	288·37
7499	6·7723	+0·0066	9·4966	9·9814	9·7566	9·9903	9·9958	7·6652	0·8758	1·4009	9n0807	9n9926	202·79	87·80	220·59
7500	6n7535	−0·0217	9·4908	9·9817	9·7058	9·9766	9·9763	7·6638	0n9230	1·4520	9·2990	9·3854	22·18	87·91	235·17
7501	6·4203	+0·0127	9·4865	9·9794	9·7664	9·9772	9·9770	7·6667	0·8887	1·3891	9n3925	9n4351	190·14	88·97	340·38
7502	6n3400	−0·0224	9·4839	9·9793	9·7600	9·9774	9·9772	7·6680	0n9473	1·4494	9·7181	9n6791	8·44	86·15	230·25
7503	5n8403	+0·0005	9·4800	9·9787	9·7538	9·9771	9·9771	7·6659	0·9677	1·4010	9·0713	9·0501	177·28	00·28	109·83
7507	7·1209	+0·0070	9·5316	9·9918	9·7023	9·9725	9·9713	7·6502	0n6680	1·4055	9·9457	9·9387	300·17	03·28	188·05
7508	7n1571	−0·0192	9·5423	9·9949	9·7038	9·9711	9·9698	7·6388	0·6505	1·4072	9n9171	9·8904	117·49	02·02	117·68
7509	7·1000	+0·0073	9·5480	9·9961	9·7034	9·9701	9·9687	7·6408	0n5373	1·4088	9·3205	9·2956	293·57	02·08	311·39
7510	7n2086	−0·0124	9·5626	9·9983	9·7152	9·9683	9·9668	7·6318	0·4166	1·4592	8n6646	8n3304	105·38	01·97	95·59
7511	7·2304	0·0044	9·5901	9·9990	9·7434	9·9672	9·9656	7·6440	0n2604	1·4317	9n0952	9·0874	281·51	01·55	100·80
7512	7n2409	+0·0023	9·5813	9·9998	9·7413	9·9634	9·9650	7·6205	9·8370	1·4340	9·8000	9·8058	94·12	00·00	330·17
7517	7n1939	+0·0107	9·6539	9·9801	9·7580	9·9485	9·9500	7·6350	0·8870	1·3982	9n5371	9n5033	45·72	83·57	33·14
7518	7·1537	−0·0130	9·6637	9·9720	9·7245	9·9459	9·9473	7·6514	0·9011	1·4250	9·5603	9·5923	217·72	83·23	234·52
7519	7·1368	−0·0036	9·6643	9·9711	9·7330	9·9458	9·9472	7·6434	0n9890	1·4130	9·6098	9·6174	30·76	83·25	142·53
7520	7·0072	+0·0024	9·6727	9·9622	9·7517	9·9447	9·9435	7·6572	1·0244	1·3866	9n5402	9n5401	208·86	83·57	86·16
7524	6n5520	+0·0034	9·6850	9·9437	9·7474	9·9403	9·9407	7·6630	1·1081	1·3724	9·9524	9·9401	171·05	02·42	124·52
7525	6·6395	−0·0068	9·6854	9·9444	9·7353	9·9402	9·9400	7·6690	1n1180	1·3852	9n3697	9n3755	350·29	02·89	220·20
7526	6n8318	0·0111	9·6831	9·9486	9·7208	9·9413	9·9400	7·6589	1·1150	1·4039	9·1673	9·2284	164·30	04·41	347·66
7527	6·8858	+0·0061	9·6813	9·9505	9·7501	9·9420	9·9412	7·6662	1n0706	1·3075	9·0755	9·6641	342·36	04·81	45·35
7528	6n9023	−0·0200	9·6776	9·9507	9·7042	9·9432	9·9422	7·6525	1·0001	1·4286	9n7080	9n7094	150·17	05·00	312·74
7532	7·2613	−0·0091	9·6323	9·9922	9·7357	9·9535	9·9552	7·6402	0n7120	1·4320	9n9730	9n9051	298·29	04·58	143·28
7533	7n2557	+0·0004	9·6230	9·9954	9·7485	9·9555	9·9573	7·6239	0·5891	1·4230	9·7938	9·7847	112·16	03·01	352·51
7534	7·2741	0·0230	9·6159	9·9972	9·7100	9·9570	9·9588	7·6377	0n5168	1·4633	9n4528	9n3727	287·31	02·82	05·68
7535	7n2002	+0·0158	9·6075	9·9987	9·7054	9·9588	9·9605	7·6233	0·2957	1·4094	9n1200	9n2200	101·90	01·92	117·07
7536	7·2695	−0·0284	9·5965	9·9997	9·7022	9·9608	9·9620	7·6381	0n0042	1·4736	9·5970	9·6558	275·38	00·83	72·75
7537	7n2513	+0·0135	9·5903	0·0000	9·7017	9·9619	9·9636	7·6254	9·2113	1·4144	9n0433	9n0505	91·00	00·15	210·19
7541	6n9452	−0·0212	9·5030	9·9853	9·7054	9·9750	9·9748	7·6578	0n8704	1·4500	9·4089	9·4754	35·23	87·00	127·06
7542	6·7813	+0·0118	9·4940	9·9817	9·7059	9·9705	9·9700	7·6650	0·8015	1·3919	9n4565	9n4010	203·40	87·78	222·01
7543	6n7403	−0·0210	9·4907	9·9816	9·7069	9·9769	9·9764	7·6640	0n9231	1·4508	9n6746	9n6342	21·86	87·04	126·44
7544	6·4399	+0·0050	9·4874	9·9794	9·7525	9·9771	9·9769	7·6666	0·9012	1·4030	9·0268	9·0105	190·59	88·03	350·59
7547	7·0154	+0·0079	9·5134	9·9870	9·7030	9·9745	9·9730	7·6622	0n7933	1·4001	9·9511	9·9433	319·19	03·21	58·57
7548	7n0827	−0·0198	9·5239	9·9900	9·7037	9·9732	9·9721	7·6402	0·7836	1·4030	9n9586	9n9392	120·61	03·29	10·68
7549	7·1175	+0·0072	9·5289	9·9918	9·7027	9·9728	9·9710	7·6505	0n6965	1·4052	9·3428	9·3135	300·38	03·25	180·19
7550	7n1584	−0·0119	9·5425	9·9950	9·7107	9·9698	9·9711	7·6387	0·6379	1·4444	9n1059	9n0102	117·20	02·90	355·13
7551	7·1881	−0·0049	9·5484	9·9959	9·7422	9·9688	9·9702	7·6501	0n5704	1·4208	9n6922	9·6834	294·04	02·72	338·66
7552	7n2088	+0·0031	9·5622	9·9982	9·7428	9·9668	9·9683	7·6319	0·3952	1·4315	9·8177	9·8135	105·02	02·00	232·03
7557	7n2322	+0·0106	9·6411	9·9881	9·7509	9·9514	9·9530	7·6204	0n7808	1·4073	9n0170	9n6387	55·40	84·55	210·86
7558	7·2134	−0·0137	9·6520	9·9810	9·7200	9·9486	9·9504	7·6455	0·9036	1·4317	9·5796	9·6008	227·43	83·70	112·70
7559	7n1940	−0·0040	9·6537	9·9803	9·7319	9·9485	9·9500	7·6357	0n0121	1·4245	9·5315	9·5410	45·01	83·58	34·31

Nr. des Canon	log $f_i \sin\delta$	u'_i	log sin g	log sin k	log u	log p'_u	log p'_s	log q	log r	log s	log $(q+u'_i)$	log $(q-u'_i)$	G	K	$-\gamma$
7560	7·1547	+0·0023	9·6635	9·9722	9·7527	9·9474	9·9460	7·6513	0·9016	1·3950	9n5119	9n5180	217°88	83°24	320°25
7562	7·0707	+0·0105	9·6710	9·9630	9·7660	9·9452	9·9441	7·6509	1·0061	1·3731	9n9944	0n0030	209·26	83·58	91·42
7564	5n2050	+0·0017	9·6862	9·9416	9·7458	9·9401	9·9401	7·6662	1·1150	1·3719	9·9774	9·9758	179·64	90·11	8·37
7565	5·9224	−0·0051	9·6869	9·9415	9·7369	9·9398	9·9399	7·6695	1n1243	1·3807	9n4443	9n4281	358·16	90·57	108·24
7566	6n5495	−0·0120	9·6865	9·9432	9·7192	9·9402	9·9398	7·6630	1·1364	1·4001	9·3224	9·3716	172·05	92·41	239·46
7567	6·6310	+0·0074	9·6853	9·9442	9·7600	9·9400	9·9402	7·6691	1n0921	1·3603	9·6556	9·6412	350·48	92·84	278·12
7568	6n8357	−0·0208	9·6834	9·9486	9·7037	9·9413	9·9406	7·6589	1·1327	1·4210	9n7441	9n7102	164·17	94·45	210·99
7572	7·2304	−0·0099	9·6470	9·9848	9·7342	9·9500	9·9517	7·6449	0n8557	1·4267	9n9773	9n9681	308·94	95·96	16·47
7573	7n2369	+0·0072	9·6377	9·9897	9·7500	9·9523	9·9539	7·6272	0·7577	1·4158	9·8434	9·8343	122·38	95·15	244·65
7574	7·2614	−0·0246	9·6330	9·9921	9·7090	9·9533	9·9550	7·6401	0n7421	1·4592	9n4655	9n3854	298·48	94·62	304·75
7575	7n2554	+0·0161	9·6240	9·9952	9·7059	9·9554	9·9572	7·6240	0·5818	1·4054	8n7774	8n9643	112·65	93·70	6·29
7576	7·2742	−0·0284	9·6155	9·9973	9·7022	9·9571	9·9589	7·6377	0n5176	1·4712	9·5865	9·6461	287·64	92·77	314·14
7577	7n2602	+0·0133	9·6077	9·9987	9·7608	9·9587	9·9604	7·6233	0·3073	1·4140	9n9072	9n9213	102·15	91·95	108·47
7581	7n0651	−0·0206	9·5193	9·9898	9·7049	9·9739	9·9728	7·6504	0n8014	1·4610	9·5054	9·5580	47·88	86·73	23·32
7582	6·9677	+0·0110	9·5068	9·9856	9·7057	9·9752	9·9744	7·6613	0·8114	1·3606	9n5041	9n5330	216·64	86·97	97·72
7583	6n9411	−0·0196	9·5028	9·9852	9·7081	9·9756	9·9748	7·6580	0n8755	1·4532	9n6192	9n5762	34·86	87·08	21·86
7584	6·7896	+0·0035	9·4947	9·9818	9·7510	9·9765	9·9760	7·6649	0·8756	1·4066	9·5843	9·5763	203·96	87·75	229·66
7587	6·8546	+0·0089	9·4990	9·9827	9·7639	9·9760	9·9753	7·6669	0n8529	1·3949	9·9589	9·9503	332·44	92·54	289·35
7588	6n9741	−0·0203	9·5079	9·9861	9·7030	9·9751	9·9743	7·6535	0·8664	1·4586	9n9943	9n9761	142·04	93·08	286·16
7589	7·0166	+0·0074	9·5110	9·9871	9·7023	9·9748	9·9736	7·6626	0n7935	1·4009	9·3661	9·3375	319·45	93·17	49·94
7590	7n0846	−0·0116	9·5240	9·9908	9·7179	9·9733	9·9722	7·6401	0·7665	1·4490	9n3139	9n2620	129·29	93·28	253·16
7591	7·1151	−0·0053	9·5288	9·9916	9·7406	9·9715	9·9727	7·6566	0n7229	1·4268	9n6868	9n6772	306·83	93·27	211·26
7592	7n1581	+0·0038	9·5430	9·9949	9·7445	9·9697	9·9716	7·6387	0·6138	1·4250	9·7640	9·7583	117·42	92·93	124·84
7597	7n2530	+0·0103	9·6204	9·9943	9·7558	9·9549	9·9566	7·6250	1n1253	1·4146	9n6886	9n7661	65·59	86·03	166·01
7598	7·2514	−0·0133	9·6379	9·9867	9·7274	9·9523	9·9535	7·6407	0·7787	1·4384	9·5931	9·6216	237·77	84·86	349·78
7599	7n2328	−0·0043	9·6410	9·9883	9·7304	9·9515	9·9531	7·6264	0n8051	1·4340	9·4283	9·4420	55·57	84·57	288·13
7600	7·2140	+0·0024	9·6517	9·9818	9·7537	9·9506	9·9491	7·6453	0·8736	1·4042	9n4886	9n4954	227·59	83·71	193·02
7602	7·1571	+0·0099	9·6618	9·9729	9·7659	9·9478	9·9464	7·6509	0·9434	1·3831	9n9852	9n9946	218·39	83·28	323·46
7604	6·5182	+0·0002	9·6850	9·9434	9·7442	9·9400	9·9403	7·6664	1·1107	1·3753	9·9983	9·9981	187·38	87·78	250·82
7605	6n4272	0·0034	9·6861	9·9420	9·7386	9·9400	9·9403	7·6677	1n1191	1·3801	9n4941	9n4844	5·94	88·19	349·01
7606	5n1422	−0·0143	9·6878	9·9412	9·7176	9·9397	9·9397	7·6661	1·1448	1·3997	9·4270	9·4711	179·69	90·10	136·15
7607	5·8733	+0·0084	9·6867	9·9415	9·7669	9·9399	9·9398	7·6690	1n1001	1·3567	9·6281	9·6106	358·35	90·51	152·35
7608	6·5577	−0·0217	9·6868	9·9432	9·7034	9·9402	9·9398	7·6635	1·1523	1·4159	9n6870	9n6465	171·90	92·46	108·11
7611	7·1788	−0·0104	9·6595	9·9756	9·7329	9·9466	9·9484	7·6511	0n9507	1·4188	9n9816	9n9721	318·95	96·68	250·26
7612	7n2019	+0·0079	9·6503	9·9822	9·7514	9·9495	9·9516	7·6329	0·8721	1·4009	9·8872	9·8781	132·11	96·23	136·09
7613	7·2306	−0·0250	9·6486	9·9846	9·7081	9·9498	9·9515	7·6449	0n8842	1·4526	9n4778	9n3988	309·09	95·99	183·85
7614	7n2358	+0·0163	9·6387	9·9893	9·7662	9·9521	9·9537	7·6274	0·7489	1·3992	8·1761	8n2455	122·89	95·23	254·75
7615	7·2619	−0·0283	9·6327	9·9923	9·7026	9·9534	9·9551	7·6400	0n7442	1·4658	9·5770	9·6377	298·22	94·57	194·83
7616	7n2548	+0·0128	9·6240	9·9950	9·7666	9·9553	9·9571	7·6241	0·5983	1·4111	9n8668	9n8816	112·88	93·73	358·17
7620	7n1402	−0·0201	9·5378	9·9941	9·7046	9·9715	9·9702	7·6424	0n6832	1·4656	9·5920	9·6345	66·19	86·97	281·00
7621	7·0869	+0·0102	9·5233	9·9903	9·7053	9·9733	9·9675	7·6556	0·7286	1·4011	9n5384	9n5034	229·64	86·70	331·07
7622	7n0625	−0·0181	9·5189	9·9896	9·7696	9·9738	9·9728	7·6505	0n7997	1·4567	9n5473	9n5003	47·54	86·73	276·26
7623	6·9725	+0·0020	9·5075	9·9858	9·7406	9·9751	9·9743	7·6610	0·8254	1·4123	9·5451	9·5401	217·07	86·95	107·86
7626	6·5698	+0·0097	9·4905	9·9796	9·7044	9·9768	9·9764	7·6664	0n8859	1·4013	9·9691	9·9660	345·86	91·43	161·49
7628	6·8467	+0·0070	9·4968	9·9828	9·7616	9·9763	9·9757	7·6671	0n8529	1·3973	9·3965	9·3692	332·78	92·49	286·84
7629	6n9767	0·0114	9·5078	9·9862	9·7194	9·9751	9·9743	7·6534	0·8486	1·4429	9n4464	9n4094	141·75	93·08	149·14
7630	7·0070	−0·0056	9·5109	9·9869	9·7395	9·9738	9·9747	7·6627	0n8191	1·4235	9n6774	9n6671	319·88	93·16	84·85
7631	7n0840	+0·0043	9·5246	9·9906	9·7459	9·9721	9·9732	7·6462	0·7411	1·4208	9·7052	9·6977	129·50	93·30	15·54

Tafel III.

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
7406	*t* 1900, Mai 28	97°29	+18°23	110°79	+17°79	110°71	+ 0·0
		77·29	+20·44	98·04	+25·79	98·49	+ 1·1
		57·29	+34·01	83·42	+33·28	83·24	+ 1·6
		− 37·29	+39·04	69·74	+39·04	69·56	+ 2·1
		17·29	+43·86	56·54	+42·92	56·42	+ 2·3
		+ 2·71	+45·71	43·27	+44·78	43·25	+ 2·4
		+ 22·71	+45·51	29·57	+44·62	− 29·81	+ 2·2
		+ 42·71	+43·31	16·08	+42·40	− 16·25	+ 1·9
		+ 62·71	+39·01	1·13	+38·20	− 1·30	+ 1·5
		+ 82·71	+32·74	+ 14·98	+32·13	+ 14·83	+ 1·0
		+100·74	+25·77	+ 31·64	+25·34	+ 31·57	+ 0·0
7407	*r* 1900, Nov. 22	− 92·22	4·70	+ 2·76	− 7·39	+ 2·49	− 4·7
		− 72·22	12·54	+ 20·82	− 14·98	+ 20·41	− 5·1
		− 52·22	20·10	+ 35·30	22·30	+ 34·90	− 5·7
		− 32·22	26·42	+ 47·62	− 28·49	+ 47·25	− 6·2
		− 12·22	−30·81	+ 58·97	−32·80	+ 58·75	− 6·5
		+ 7·78	−33·08	+ 70·34	−35·02	+ 70·31	− 6·4
		+ 27·78	−33·17	+ 82·20	−35·15	+ 82·41	− 6·3
		+ 47·78	−31·05	+ 95·12	−33·16	+ 95·43	− 5·8
		+ 67·78	26·80	+109·52	−29·09	+109·90	− 5·3
		+ 87·78	20·93	+120·35	−23·17	+120·69	− 4·5
		+ 97·01	17·27	+135·22	−19·02	+135·50	− 4·7
7408	*t* 1901, Mai 18	79·59	−20·43	+ 40·10	28·26	+ 39·82	+ 3·0
		59·59	−18·76	+ 58·41	−20·78	+ 58·25	+ 3·9
		− 39·59	−11·20	+ 73·40	13·37	+ 73·38	+ 5·1
		− 19·59	− 4·91	+ 85·80	− 7·18	+ 85·89	+ 6·2
		+ 0·41	− 0·79	+ 96·00	− 3·03	+ 97·02	+ 6·7
		+ 20·41	+ 0·78	+107·99	− 1·41	+108·11	+ 6·4
		+ 40·41	− 0·34	+120·17	− 2·45	+120·21	+ 5·4
		+ 60·41	− 3·03	+134·43	− 5·62	+134·00	+ 4·3
		+ 85·49	−11·78	+150·71	−13·57	+150·99	+ 3·0
7409	*r* 1901, Nov. 11	− 70·05	+38·77	+ 12·78	+34·97	+ 13·66	− 6·9
		− 50·05	+31·72	+ 31·32	+28·10	+ 31·83	− 7·8
		− 30·05	+24·19	+ 46·26	+20·81	+ 46·40	− 9·0
		10·05	+17·45	+ 58·04	+14·27	+ 57·92	− 10·3
		+ 3·35	+11·86	+ 67·85	+ 9·50	+ 67·70	− 11·0
		+ 23·35	+10·08	+ 77·94	+ 7·06	+ 77·59	− 10·5
		+ 43·35	+10·39	+ 89·32	+ 7·24	+ 88·88	− 9·3
		+ 63·35	+13·40	+103·44	+10·02	+102·83	− 8·0
		+ 84·50	+19·14	+122·43	+15·44	+121·57	− 6·9
7413	*r* 1903, März 29	92·38	+40·98	+ 79·60	+39·15	+ 80·30	1·9
		72·38	+43·37	+ 97·82	+41·73	+ 98·49	1·8
		52·38	+48·43	+112·91	+46·94	+113·48	1·8
		32·38	+55·29	+126·44	+53·77	+126·89	1·7
		12·38	+62·41	+140·40	+60·86	+140·40	− 1·7
		− 7·62	+68·30	+156·04	+66·70	+156·00	1·8
		27·62	+72·51	+173·38	+70·83	+173·13	1·8
		47·62	+75·01	−168·15	+73·34	168·63	− 1·8
		+ 67·62	+76·24	−149·00	+74·56	149·63	− 1·9
		+ 87·62	+76·47	−129·41	+74·71	130·13	− 1·9
		+100·57	+76·08	−116·55	+74·23	117·30	1·9
7414	*t* 1903 Sept. 21	88·70	45·66	+ 31·53	45·77	+ 31·47	+ 1·5
		68·70	46·70	+ 49·88	48·83	+ 49·02	+ 1·9
		48·70	50·97	+ 65·28	53·55	+ 64·39	+ 2·2
		28·70	57·73	+ 79·26	60·68	+ 78·52	+ 2·3
		8·70	65·13	+ 93·91	68·04	+ 93·52	+ 2·2
		+ 11·24	72·20	+110·40	75·22	+110·59	+ 1·9

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
		+ 31°24	−70°81	+128°82	−79°44	+129°34	+1·7
		+ 51·24	−79·53	+148·16	−81·72	+148·89	+1·6
		+ 71·24	−80·77	+167·80	−82·70	+168·60	+1·5
		+ 81·73	−81·29	+178·42	−83·12	+179·18	+1·5
7415	*r* 1904, März 17	90·27	− 8·77	+ 35·91	−11·42	+ 36·07	−5·4
		− 70·27	− 8·34	+ 54·15	10·80	+ 54·33	−6·0
		− 50·27	− 5·82	+ 69·02	− 8·15	+ 69·27	−6·8
		− 30·27	− 1·42	+ 80·95	− 3·07	+ 81·28	−7·7
		− 10·27	+ 4·34	+ 90·88	+ 2·14	+ 91·23	−8·2
		+ 9·73	+10·73	+100·25	+ 8·52	+100·56	−8·2
		+ 29·73	+16·81	+110·69	+14·54	+110·89	−7·5
		+ 49·73	+21·80	+123·45	+19·42	+123·49	−6·6
		+ 69·73	+25·18	+139·09	+22·69	+138·98	−5·9
		+ 89·20	+26·69	+157·20	+24·04	+157·08	−5·4
7416	*t* 1904, Sept. 9	90·72	+ 8·62	+162·80	+ 6·02	+162·73	+2·9
		70·72	+ 9·58	−178·67	+ 7·56	−178·82	+4·2
		50·72	+ 8·33	−163·01	+ 5·97	163·31	+5·7
		30·72	+ 5·07	149·09	+ 2·42	−150·29	+7·2
		10·72	− 0·01	138·65	2·82	−139·02	+8·2
		+ 9·28	6·26	127·96	9·08	128·30	+8·1
		+ 29·28	12·80	−116·49	15·47	−116·69	+6·9
		+ 49·28	−18·64	102·98	21·08	103·01	+5·3
		+ 69·28	23·29	86·81	25·22	− 86·73	+4·0
		+ 87·37	25·91	69·81	27·57	− 69·67	+2·9
7417	*r* 1905, März 6	97·54	50·22	+ 31·79	53·02	+ 30·75	−5·6
		77·54	51·55	+ 50·94	54·09	+ 49·93	6·2
		57·54	51·24	+ 68·85	54·09	+ 67·09	6·9
		37·54	49·32	+ 84·43	52·82	+ 83·07	7·2
		17·54	45·70	+ 98·03	49·35	+ 98·64	7·5
		+ 2·46	40·04	+111·09	44·31	+111·59	−9·1
		+ 22·46	34·37	+122·32	38·07	+123·21	9·1
		+ 42·46	27·79	+133·59	31·47	+134·68	−8·4
		+ 62·46	21·03	+146·00	25·52	+147·73	−7·2
		+ 82·46	17·09	+162·83	21·21	+163·89	−6·1
		+ 91·04	16·43	+171·87	19·06	+172·01	5·7
7418	*t* 1905, Aug. 30	−101·01	+50·83	96·35	+46·46	96·02	+1·9
		81·01	+53·33	77·17	+51·88	76·78	+2·3
		61·01	+54·18	59·36	+52·62	58·94	+2·7
		41·01	+54·71	42·86	+51·74	42·37	+3·2
		21·01	+51·62	27·14	+49·31	27·09	+3·6
		1·01	+46·94	12·99	+45·03	13·17	+3·9
		+ 18·99	+41·36	0·01	+39·32	0·41	+4·0
		+ 38·99	+34·61	+ 12·56	32·71	+ 11·99	+3·7
		+ 58·91	+27·82	+ 25·63	+26·09	+ 25·42	+3·0
		+ 78·99	22·07	+ 41·76	+20·56	+ 41·35	+2·3
		+ 93·00	+19·14	+ 54·99	+17·83	+ 54·57	+1·9
7422	*t* 1907, Januar 14	61·07	51·51	+ 41·78	+46·80	+ 42·33	−1·4
		41·07	43·01	+ 59·97	+42·09	+ 60·37	−1·9
		21·07	39·80	+ 74·87	+37·89	+ 75·10	+2·4
		1·07	39·05	+ 88·05	+37·69	+ 88·10	+2·6
		+ 18·33	43·53	+101·51	+41·56	+101·35	+2·3
		+ 38·33	+50·94	+117·26	+48·96	+116·99	+1·8
		+ 53·26	58·01	+131·31	+56·16	+130·74	+1·4

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
7423	*r* 1907, Juli 10	— 73°62	—33°15	—100°09	—30°29	—101°01	—5·1
		— 53·62	—25·20	— 82·34	—28·01	— 82·87	—5·7
		— 33·62	—19·30	— 68·44	—21·81	— 68·71	—6·4
		— 13·62	16·27	— 57·23	—18·56	— 57·34	—7·0
		+ 6·38	—16·30	— 47·10	—18·64	— 47·08	—7·1
		+ 26·38	—19·62	— 36·34	—22·04	— 36·17	—6·6
		+ 46·38	—25·66	— 23·29	—28·40	— 22·86	—5·8
		+ 66·38	—33·66	— 6·57	—36·73	— 5·76	—5·2
		+ 71·79	—35·95	— 1·35	—39·13	— 0·43	—5·1
7424	*t* 1908, Januar 3	— 85·39	+11·33	+154·43	+10·36	+154·51	+1·6
		— 65·39	+ 3·11	+172·63	+ 1·95	+172·65	+2·3
		— 45·39	— 3·85	—172·47	— 5·15	—172·51	+3·2
		— 25·39	— 8·67	—159·87	—10·03	—159·90	+4·0
		— 5·39	—10·89	—148·43	—12·29	—148·44	+4·5
		+ 14·61	—10·43	—137·21	—11·84	—137·19	+4·3
		+ 34·61	— 7·30	—125·34	— 8·66	—125·35	+3·7
		+ 54·61	— 1·70	—111·85	— 2·93	—111·83	+2·8
		+ 74·61	+ 5·82	— 92·38	+ 4·75	— 95·01	+2·0
		+ 85·77	+10·45	— 84·96	+ 9·51	— 85·05	+1·6
7425	*r* 1908, Juni 28	— 91·97	+ 5·45	—130·08	+ 3·71	—129·97	—3·1
		— 71·97	+14·01	—112·18	+12·49	—111·97	—3·3
		— 51·97	+21·67	— 97·72	+20·36	— 97·50	—3·5
		— 31·97	+27·45	— 85·34	+26·29	— 85·17	—3·6
		— 11·97	+30·93	— 73·83	+29·84	— 73·75	—3·7
		+ 8·03	+32·05	— 62·40	+30·98	— 62·47	—3·7
		+ 28·03	+30·78	— 50·77	+29·65	— 50·88	—3·7
		+ 48·03	+27·15	— 38·27	+25·90	— 38·46	—3·5
		+ 68·03	+21·24	— 24·18	+19·80	— 24·38	—3·3
		+ 88·03	+13·49	— 7·95	+11·82	— 7·45	—3·2
		+ 94·30	+10·83	— 1·24	+ 9·09	— 1·35	—3·1
7426	*r—t* 1908, Dec. 23	—100·37	—22·47	— 73·25	—22·89	— 73·33	—0·6
		— 80·37	—31·68	— 55·12	—31·89	— 55·18	—0·3
		— 60·37	—40·24	— 39·87	—40·20	— 39·87	0·0
		— 40·37	—40·84	— 25·83	—40·94	— 25·86	+0·2
		— 20·37	—51·21	— 11·92	—51·37	— 11·95	+0·4
		0·37	—53·49	+ 2·28	—53·64	+ 2·27	+0·4
		+ 19·63	—53·79	+ 10·81	—53·92	+ 10·81	+0·3
		+ 39·63	—52·14	+ 31·57	—52·22	+ 31·59	+0·2
		+ 59·63	—48·42	+ 46·07	—48·43	+ 46·07	0·0
		+ 79·63	—42·36	+ 62·51	—42·52	+ 62·55	—0·2
		+105·48	—31·59	+ 85·82	—32·04	+ 85·92	—0·5
7427	*t* 1909, Juni 17	—120·51	+50·09	+ 82·03	+50·00	+ 82·07	+0·1
		—100·51	+62·45	+ 99·32	+61·84	+ 99·58	+0·3
		— 80·51	+76·35	+113·17	+74·98	+113·81	+0·5
		— 60·51	+84·83	+128·88	+83·40	+129·50	+0·5
		— 40·51	+87·30	+147·50	+86·39	+147·85	+0·5
		— 20·51	+88·10	+167·03	+87·42	+167·10	+0·5
		— 0·51	+88·42	—173·28	+87·84	—173·27	+0·5
		+ 19·49	+88·49	—153·54	+87·97	—153·01	+0·5
		+ 39·49	+88·37	—133·79	+87·80	—133·00	+0·5
		+ 59·49	+88·01	—114·12	+87·30	—114·40	+0·5
		+ 79·49	+87·04	— 94·70	+86·15	— 95·11	+0·5
		+ 99·49	+83·82	— 76·24	+82·69	— 76·79	+0·4
		+119·49	+74·14	— 59·89	+72·27	— 60·02	+0·3
		+138·53	+60·74	— 43·23	+60·66	— 43·24	+0·1

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
7431	*t* 1911, April 28	−79°29	−30·21	+148°44	−37°55	+149°43	+2·3
		−59·29	−29·58	+167·13	−31·19	+167·11	+3·1
		−39·29	−20·37	−177·31	−22·22	−177·20	+3·9
		−19·29	−9·67	−165·02	−11·66	−164·72	+4·9
		+0·71	+0·64	−154·72	−1·36	−154·35	+5·4
		+20·71	+8·76	−144·38	+6·86	−144·00	+5·3
		+40·71	+13·85	−132·52	+12·11	−132·30	+4·5
		+60·71	+15·65	−118·42	+14·66	−118·27	+3·6
		+80·71	+14·17	−101·76	+12·76	−101·64	+2·8
		+92·77	+11·69	−90·30	+10·36	−90·17	+2·3
7432	*r* 1911, Oct. 22	−79·31	+45·78	+60·40	+44·04	+60·67	−3·3
		−59·31	+40·54	+79·35	+38·87	+79·49	−3·4
		−39·31	+32·49	+95·53	+30·92	+95·49	−3·6
		−19·31	+22·14	+108·24	+20·68	+108·04	−3·7
		+0·69	+11·00	+118·09	+9·74	+117·82	−3·9
		+20·69	+1·41	+127·22	+0·15	+126·94	−3·8
		+40·69	−5·34	+137·81	−6·63	+137·56	−3·7
		+60·69	−8·63	+151·04	−10·04	+150·81	−3·5
		+80·69	−8·40	+167·43	−9·98	+167·19	−3·4
		+91·44	−6·79	+177·66	−8·52	+177·40	−3·3
7433	*r—t* 1912, April 17	−90·90	+5·13	−61·19	+4·69	−59·09	−0·7
		−70·90	+10·67	−43·25	+10·49	−43·23	−0·4
		−50·90	+19·66	−29·30	+19·57	−29·29	−0·1
		−30·90	+30·78	−18·23	+30·68	−18·20	+0·2
		−10·90	+41·72	−7·48	+41·66	−7·45	+0·2
		+9·10	+50·40	+5·05	+50·34	+5·06	+0·1
		+29·10	+56·22	+19·85	+56·17	+19·82	−0·1
		+49·10	+59·51	+39·31	+59·37	+39·30	−0·3
		+69·10	+60·64	+54·02	+60·42	+54·02	−0·4
		+89·10	+59·80	+72·02	+59·49	+72·54	−0·6
		+106·45	+57·45	+89·54	+56·98	+89·43	−0·7
7434	*t* 1912, Oct. 10	−89·56	+3·97	−92·48	+3·66	−92·54	+0·5
		−69·56	−0·11	−74·49	−0·57	−74·91	+1·0
		−49·56	−7·66	−59·82	−8·46	−60·01	+1·6
		−29·56	−18·03	−48·45	−18·96	−48·71	+2·0
		−9·56	−29·28	−38·28	−30·26	−38·50	+2·2
		+10·44	39·25	−26·93	−40·15	−27·07	+1·9
		+30·44	−46·61	−13·26	−47·35	−13·27	+1·6
		+50·44	−51·13	+2·66	−51·73	+2·66	+1·2
		+70·44	−53·17	+20·12	−53·64	+20·21	+0·9
		+90·44	−52·93	+38·96	−53·28	+39·02	+0·6
		+98·59	−52·20	+47·00	−52·49	+47·06	+0·5
7439	*t* 1914, August 21	−130·11	+72·43	−121·30	+70·91	−120·89	+1·2
		−110·11	+70·59	−101·68	+75·15	−101·17	+1·4
		−90·11	+78·62	−82·27	+77·24	−81·77	+1·6
		−70·11	+79·37	−62·97	+78·00	−62·53	+1·7
		−50·11	+79·10	−43·82	+77·94	−43·46	+1·8
		−30·11	+77·70	−24·95	+76·08	−24·75	+1·9
		−10·11	+74·65	−6·74	+72·70	−6·79	+2·0
		+9·89	+68·76	+10·04	+66·45	+9·62	+2·2
		+29·89	+58·87	+24·25	+56·40	+23·48	+2·4
		+49·89	+46·12	+39·18	+43·95	+35·34	+2·3
		+69·89	+34·24	+48·89	+32·53	+48·23	+1·9
		+89·89	+26·00	+65·25	+24·72	+64·80	+1·4
		+95·51	+24·52	+70·67	+23·33	+70·27	+1·2

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
7440	r 1915, Febr. 14	−99°80	−35°34	+42°54	−36°54	+42°42	−2·2
		−79·80	−38·89	+61·41	−39·91	+61·29	−2·2
		−59·80	−39·70	+78·31	−40·03	+78·24	−2·1
		−39·80	−37·99	+93·41	−38·82	+93·41	−2·2
		−19·80	−33·52	+106·00	−34·23	+106·08	−1·9
		+0·14	−26·20	+117·83	−26·88	+117·98	−1·9
		+20·14	−16·43	+127·77	−17·10	+127·94	−2·0
		+40·14	−5·00	+138·20	−6·43	+138·39	−2·0
		+60·14	+4·35	+151·32	+3·30	+151·49	−2·1
		+80·14	+11·83	+168·24	+10·69	+168·37	−2·1
		+86·86	+13·04	+174·77	+12·45	+174·88	−2·2
7441	r 1915, August 10	−90·92	+23·84	+129·03	+22·86	+129·04	−1·8
		−70·92	+27·00	+148·14	+27·17	+148·17	−1·7
		−50·92	+29·18	+164·15	+28·55	+164·10	−1·6
		−30·92	+27·53	+178·00	+27·03	+177·98	−1·5
		−10·92	+22·09	−170·18	+22·53	−170·24	−1·4
		+3·08	+15·00	−160·04	+15·15	−160·13	−1·4
		+23·08	+5·93	−150·46	+5·44	−150·56	−1·5
		+43·08	−4·57	−139·41	−5·21	−139·52	−1·6
		+63·08	−14·04	−125·08	−14·86	−125·15	−1·7
		+83·60	−21·29	−106·44	−22·27	−106·44	−1·8
7442	t 1916, Febr. 3	−87·81	+7·47	−122·22	+0·97	−121·79	+0·9
		−67·81	+3·37	−103·82	+2·06	−103·07	+1·1
		−47·81	+2·90	−89·04	+1·98	−88·90	+2·1
		−27·81	+0·17	−70·90	+5·07	−70·70	+2·7
		−7·81	+12·96	−60·29	+11·81	−60·11	+2·6
		+12·19	+22·57	−55·58	+21·43	−55·46	+2·5
		+32·19	+33·33	−42·67	+32·32	−42·08	+1·9
		+52·19	+43·09	−20·41	+42·30	−20·50	+1·6
		+69·04	+49·04	−9·86	+49·05	−9·03	+0·9
7443	r 1916, Juli 30	−79·51	−20·83	+90·01	−30·36	+87·14	−5·1
		−59·51	−22·26	+107·48	−25·53	+100·47	−5·9
		−39·51	−22·18	+120·92	−25·37	+120·09	−6·8
		−19·51	−26·57	+131·70	−29·03	+131·09	−7·2
		+0·49	−35·04	+142·13	−38·86	+141·75	−7·0
		+20·49	−46·31	+154·73	−50·74	+154·97	−6·1
		+40·49	−57·03	+171·39	−62·46	+172·49	−5·4
		+48·02	−61·29	+178·61	−66·10	+176·99	−5·2
7449	t 1918, Juni 8	−101·68	+20·16	+129·72	+25·56	+129·84	+0·8
		−81·68	+34·73	+147·95	+33·98	+148·15	+1·3
		−61·68	+42·01	+163·66	+41·03	+163·93	+1·8
		−41·68	+47·30	+178·18	+46·26	+178·42	+2·2
		−21·68	+50·43	−167·05	+49·36	−167·51	+2·4
		−1·68	+51·53	−153·51	+50·46	−153·50	+2·5
		+18·32	+50·07	−139·39	+49·59	−139·51	+2·5
		+38·32	+47·82	−125·25	+46·77	−125·48	+2·2
		+58·32	+42·82	−110·87	+41·83	−111·13	+1·8
		+78·32	+35·77	−95·46	+34·91	−95·68	+1·4
		+101·54	+25·00	−74·57	+25·28	−74·70	+0·8
7450	r 1918, Dec. 3	−94·37	−0·31	−119·05	−12·15	−110·38	−4·6
		−74·37	−17·56	−100·97	−20·16	−101·43	−5·4
		−54·37	−24·90	−86·26	−27·38	−86·73	−6·0
		−34·37	−30·00	−73·55	−32·83	−73·93	−6·5
		−14·37	−34·05	−61·72	−36·10	−61·93	−6·8
		+5·63	−35·20	−50·06	−37·34	−50·93	−6·9
		+25·63	−34·21	−38·15	−36·34	−37·93	−6·7
		+45·63	−30·90	−25·00	−33·10	−25·21	−6·1

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
		+65°63	—25°43	—11°69	—27°91	—11°23	—5·7
		+85·63	—18·12	+4·66	—20·85	+5·08	—5·2
		+96·27	—13·78	+14·79	—16·64	+15·12	—4·9
7451	*t* 1919, Mai 29	—81·99	—18·70	—75·27	—20·10	—75·44	+3·1
		61·99	10·59	—57·09	12·54	57·20	+3·9
		—41·99	—3·27	—42·27	—5·27	—42·26	+4·8
		—21·99	+2·19	—30·43	+0·21	—29·81	+5·7
		—1·99	+5·23	—18·66	+3·24	—18·59	+6·1
		+18·01	+5·58	—7·51	+3·60	—7·47	+5·9
		+38·01	+3·21	+4·55	+1·26	+4·25	+5·1
		+58·01	—1·66	+18·52	—3·60	+18·41	+4·2
		+78·01	—8·69	+35·44	—10·49	+35·62	+3·4
		+85·10	—11·38	+42·27	—13·25	+42·49	+3·1
7452	*r* 1919, Nov. 22	—77·17	+33·56	—103·14	+29·67	102·32	—7·2
		57·17	+25·67	—84·83	+22·02	84·36	—8·2
		—37·17	+18·08	—70·33	+14·71	—70·21	—9·5
		17·17	+12·08	—58·91	+8·85	—58·99	—10·8
		+2·83	+8·39	—49·05	+5·32	—49·22	—11·5
		+22·83	+7·53	—39·11	+4·46	—39·35	—10·9
		+42·83	+9·55	—27·68	+6·31	—24·08	—9·6
		+62·83	+14·23	—14·44	+10·72	—13·99	—8·2
		+82·82	+21·02	+3·64	+17·20	+3·79	—7·2
7457	*r* 1922, März 28	—89·63	—6·29	—75·87	—8·88	—75·63	—5·2
		—69·63	—4·33	—57·67	—6·78	—57·41	—5·8
		—49·63	—0·42	—43·02	—2·74	—42·69	—6·4
		—29·63	+5·66	—31·34	+2·82	—30·95	—7·4
		—9·63	+11·36	—21·48	+9·19	—21·13	—8·0
		+10·37	+17·59	—11·87	+15·42	—11·60	—7·8
		+30·37	+22·92	—0·97	+20·69	—0·85	—7·2
		+50·37	+26·74	+12·14	+24·44	+12·08	—6·4
		+70·37	+28·79	+27·86	+26·37	+28·38	—5·9
		+91·46	+28·96	+47·40	+26·24	+47·16	—5·2
7458	*t* 1922, Sept. 21	—90·10	+6·32	+43·30	+4·67	+43·13	+2·8
		—70·10	+5·66	+61·73	+3·83	+61·54	+3·7
		—50·10	+2·87	+77·16	+0·83	+76·91	+4·7
		—30·10	—1·85	+90·01	—4·05	+89·68	+5·8
		—10·10	—7·92	+101·16	—10·22	+100·83	+6·4
		+9·90	—14·50	+111·96	—16·79	+111·71	+6·2
		+29·90	—20·66	+123·84	—22·84	+123·74	+5·4
		+49·90	—25·59	+137·79	—27·60	+137·84	+4·4
		+69·90	—29·20	+154·21	—31·00	+154·36	+2·8
		+89·40	—30·19	+172·54	—31·84	+172·71	+2·8
7459	*r* 1923, März 17	—91·96	—49·04	—75·67	—52·27	—76·57	—5·5
		—71·96	—48·80	—56·57	—52·03	—57·40	—6·2
		—51·96	—46·91	—39·31	—50·20	—39·92	—7·0
		—31·96	—43·39	—24·09	—46·77	—24·33	—8·0
		—11·96	—38·33	—10·99	—41·79	—10·79	—8·9
		+8·04	—32·17	+0·27	—35·65	+0·87	—9·7
		+28·04	—25·69	+10·80	—29·15	+11·65	—9·1
		+48·04	—20·23	+22·33	—23·61	+23·28	—8·1
		+68·04	—15·74	+36·23	—19·04	+37·17	—6·8
		+90·44	—13·62	+56·20	—16·88	+57·09	—5·6

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
7460	*t* 1923, Sept. 10	−95°00	+48°70	+154°00	+47°05	+154°33	+1·6
		−75·00	+50·55	+173·00	+48·54	+173·52	+2·0
		−55·00	+49·11	−166·11	+47·77	−168·88	+2·5
		−35·00	+46·04	−153·03	+45·34	−152·89	+3·0
		−15·00	+42·85	−138·33	+41·24	−138·03	+3·6
		+4·34	+37·38	−125·71	+35·68	−125·94	+3·8
		+24·34	+30·91	−113·82	+29·25	−114·18	+3·8
		+44·34	+24·37	−101·04	+22·80	−102·03	+3·3
		+64·34	+18·76	−87·63	+17·37	−87·66	+2·5
		+84·34	+14·04	−76·03	+13·79	−76·91	+1·8
		+91·23	+14·13	−63·07	+13·08	−64·21	+1·6
7464	*t* 1925, Januar 24	−67·04	+46·46	−95·66	+47·88	−94·54	+2·1
		−47·04	+43·39	−76·85	+41·54	−76·38	+2·6
		−27·04	+40·80	−61·79	+38·85	−61·47	+3·2
		−7·04	+42·12	−48·44	+40·00	−48·28	+3·3
		+12·96	+47·10	−34·83	+44·98	−34·93	+3·1
		+32·96	+55·00	−19·02	+52·87	−19·39	+2·6
		+50·31	+62·92	−2·67	+60·91	−3·25	+2·1
7465	*r* 1925, Juli 20	−73·24	−35·66	+162·15	−39·49	+166·66	−5·2
		−53·24	−26·18	+179·89	−32·24	+179·13	−5·8
		−33·24	−24·89	−166·15	−27·06	−166·66	−6·4
		−13·24	−23·98	−154·73	−26·34	−154·96	−6·9
		+6·76	−25·74	−144·16	−28·43	−144·17	−6·9
		+26·76	−30·76	−132·53	−33·76	−132·27	−6·3
		+46·76	−38·02	−118·11	−41·37	−117·41	−5·7
		+65·87	−45·85	−106·86	−49·54	−99·07	−5·2
7466	*t* 1926, Januar 14	−87·28	+7·46	+20·86	+6·47	+20·94	+1·6
		−67·28	+6·11	+39·16	−1·01	+39·12	+2·3
		−47·28	−5·51	+54·13	−6·77	+54·13	+3·2
		−27·28	−8·85	+66·92	−10·19	+66·92	+4·0
		−7·28	−9·63	+78·42	−11·04	+78·45	+4·4
		+12·72	−7·84	+89·54	−9·24	+89·66	+4·3
		+32·72	−3·57	+101·22	−4·94	+101·29	+3·6
		+52·72	+2·80	+114·61	+1·54	+114·63	+2·8
		+72·72	+10·47	+130·87	+9·42	+130·83	+2·0
		+84·20	+15·01	+141·78	+14·08	+141·71	+1·6
7467	*r* 1926, Juli 9	−91·68	+4·01	+132·66	+3·28	+132·16	2·9
		−71·68	+12·82	+150·02	+11·31	+150·16	3·4
		−51·68	+19·35	+164·66	+17·95	+164·82	3·8
		−31·68	+23·81	+177·14	+22·51	+177·25	4·3
		−11·68	+25·94	−171·52	+24·07	−171·48	4·6
		+8·32	+25·66	−160·59	+24·41	−160·94	4·7
		+28·32	+23·02	−149·46	+21·70	−149·66	4·4
		+48·32	+18·66	−137·39	+16·66	−137·56	3·9
		+68·32	+11·15	−123·24	+9·03	−123·38	3·4
		+90·55	+2·16	−103·53	+0·53	−103·57	3·0
7468	*r—t* 1927, Januar 3	−102·31	−26·75	+156·37	−27·26	+156·25	−0·8
		−82·31	−35·37	+174·04	−35·68	+174·55	0·5
		−62·31	−42·77	−169·03	−42·93	−169·07	0·3
		−42·31	−48·19	−155·07	−48·22	−155·07	0·0
		−22·31	−51·43	−140·86	−51·46	−140·86	+0·1
		−2·31	−52·66	−126·55	−52·73	−126·55	+0·1
		+17·69	−52·01	−112·27	−52·05	−112·26	+0·1
		+37·69	−49·46	−97·96	−49·41	−97·66	0·0
		+57·69	−44·95	−83·46	−44·70	−83·43	0·2
		+77·69	−37·78	−68·07	−38·00	−67·96	−0·4
		+97·69	−29·46	−50·53	−29·89	−50·42	−0·5
		+102·58	−27·38	−45·73	−27·68	−45·07	−0·7

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
7469	*t* 1927, Juni 29	−116°52	+46°02	15°83	+46°25	−15°70	+0·3
		−96·52	+56·87	+2·21	+56·16	+2·51	+0·6
		−76·52	+66·03	+18·17	+65·08	+18·58	+0·8
		−56·52	+72·37	+34·26	+71·37	+34·66	+0·9
		−36·52	+76·06	+51·27	+75·13	+51·54	+1·0
		−16·52	+77·94	+68·96	+77·09	+69·09	+1·0
		+3·48	+78·62	+87·01	+77·81	+86·99	+1·0
		+23·48	+78·30	+105·12	+77·47	+104·97	+1·0
		+43·48	+76·87	+123·05	+76·04	+122·79	+1·0
		+63·48	+73·93	+140·54	+73·02	+140·18	+0·9
		+83·48	+68·63	+157·41	+67·74	+157·03	+0·8
		+103·48	+60·34	+174·15	+59·07	+173·88	+0·5
		+121·56	+51·16	−169·22	+50·79	−169·34	+0·3
7474	*t* 1929, Mai 9	−76·65	−36·19	+34·07	−37·56	+34·51	+2·3
		−56·65	−28·34	+53·23	−29·07	+53·16	+3·0
		−36·65	−18·38	+68·46	−20·24	+68·56	+4·0
		−16·65	−7·84	+80·50	−9·82	+80·76	+5·0
		+3·35	+1·36	+90·86	−0·66	+91·18	+5·5
		+23·35	+7·86	+101·46	+6·01	+101·74	+5·2
		+43·35	+11·14	+113·56	+9·42	+113·76	+4·4
		+63·35	+11·09	+127·85	+9·52	+128·01	+3·5
		+83·35	+7·69	+144·86	+6·28	+145·00	+2·6
		+91·46	+5·39	+152·67	+4·04	+152·83	+2·3
7475	*r* 1929, Nov. 1	−75·98	+44·54	−54·88	+42·76	−54·58	−3·2
		−55·98	+37·85	−36·07	+36·16	−35·91	−3·5
		−35·98	+28·52	−20·40	+26·03	−20·45	−3·6
		−15·98	+17·68	−8·33	+16·25	−8·53	−3·8
		+4·02	+7·34	+1·32	+6·03	+1·08	−4·0
		+24·02	−0·07	+10·82	−1·04	+10·57	−4·0
		+44·02	−5·41	+21·66	−6·72	+21·74	−3·8
		+64·02	−6·63	+35·71	−8·09	+35·49	−3·6
		+84·02	−4·28	+52·05	−5·07	+52·38	−3·4
		+96·91	−2·07	+59·32	−4·43	+59·03	−3·3
7476	*r—t* 1930, April 28	−90·87	+4·47	−173·50	+3·25	−173·23	−0·7
		−70·87	+10·43	−155·37	+10·16	−155·32	−0·5
		−50·87	+20·06	−141·45	+19·08	−141·43	−0·1
		−30·87	+31·05	−130·23	+31·00	−130·22	+0·2
		−10·87	+41·14	−119·27	+41·06	−119·25	+0·2
		+9·13	+48·75	−100·77	+48·73	−100·77	+0·1
		+29·13	+53·65	−92·36	+53·66	−92·37	−0·1
		+49·13	+56·14	−76·41	+56·01	−76·44	−0·3
		+69·13	+56·47	−59·31	+56·26	−59·35	−0·4
		+89·13	+54·72	−41·18	+54·37	−41·28	−0·6
		+107·71	+51·00	−23·28	+50·50	−23·30	−0·7
7477	*t* 1930, Oct. 21	−89·17	+4·57	+145·86	+4·25	+145·84	+0·5
		−69·17	−0·86	+164·06	−1·41	+163·94	+1·0
		−49·17	−9·50	+178·46	−10·29	+178·26	+1·6
		−29·17	−20·21	−170·13	−21·17	−170·39	+2·1
		−9·17	−31·06	−159·69	−32·01	−159·92	+2·2
		+10·83	−39·93	−148·07	−40·84	−148·19	+2·0
		+30·83	−46·15	−134·39	−46·93	−134·40	+1·7
		+50·83	−49·64	−118·79	−50·28	−118·72	+1·3
		+70·83	−50·72	−101·66	−51·24	−101·58	+1·0
		+90·83	−49·51	−83·21	−49·91	−83·13	+0·7
		+101·97	−47·86	−72·32	−48·12	−72·26	+0·5

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
7482	*t* 1932, August 31	−144°11	+81°00	+109°34	+79°25	+109°75	+1·0
		−124·11	+84·15	+129·13	+82·68	+129·03	+1·1
		−104·11	+85·40	+148·91	+84·19	+149·40	+1·2
		−84·11	+85·94	+168·72	+84·77	+169·18	+1·2
		−64·11	+85·95	−171·49	+84·75	−171·07	+1·3
		−44·11	+85·48	−151·75	+84·11	−151·42	+1·3
		−24·11	+84·24	−132·10	+82·55	−131·97	+1·4
		−4·11	+81·26	−113·07	+78·05	−113·10	+1·5
		+15·89	+73·84	−95·71	+70·88	−96·30	+1·6
		+35·89	+60·19	−82·20	+57·48	−83·12	+1·9
		+55·89	+45·51	−70·92	+43·49	−71·74	+1·8
		+75·89	+34·05	−57·49	+33·20	−58·07	+1·4
		+94·65	+29·21	−40·92	+28·10	−41·31	+1·0
7483	*r* 1933, Febr. 24	−97·89	−39·05	−79·19	−40·05	−79·29	−1·8
		−77·89	−41·17	−60.20	−42·01	−60·28	−1·8
		−57·89	−40·07	−43·11	−41·39	−43·15	−1·7
		−37·89	−37·53	−27·94	−38·14	−27·92	−1·6
		−17·89	−31·54	−14·95	−32·09	−14·88	−1·4
		+2·11	−22·78	−4·17	−23·29	−4·00	−1·4
		+22·11	−12·07	+5·41	−12·01	+5·55	−1·4
		+42·11	−1·23	+15·98	−1·90	+16·12	−1·6
		+62·11	+7·74	+29·55	+6·94	+30·20	−1·7
		+82·11	+13·74	+40·82	+12·78	+40·94	−1·8
		+87·57	+14·81	+52·22	+13·80	+52·32	−1·8
7484	*r* 1933, August 21	−97·25	+30·86	+24·28	+29·74	+24·33	−2·1
		−77·25	+33·73	+42·99	+32·80	+43·04	−2·1
		−57·25	+33·80	+59·43	+33·00	+59·44	−2·1
		−37·25	+31·07	+73·70	+30·39	+73·66	−2·0
		−17·25	+25·43	+85·87	+24·79	+85·07	−2·0
		+2·75	+16·99	+95·85	+16·40	+95·72	−1·9
		+22·75	+6·07	+105·18	+5·97	+105·01	−2·0
		+42·75	−3·90	+115·94	−4·79	+115·79	−2·0
		+62·75	−12·98	+150·99	−13·95	+129·87	−2·1
		+85·39	−19·84	+172·16	−20·97	+150·33	−2·1
7485	*t* 1934, Febr. 14	−89·11	+4·12	+107·59	+3·47	+107·74	+1·1
		−69·11	+1·24	+125·79	+0·55	+125·92	+1·4
		−49·11	+2·19	+140·58	+1·42	+140·73	+1·7
		−29·11	+6·88	+152·70	+6·08	+152·86	+2·0
		−9·11	+15·03	+163·15	+14·19	+163·31	+2·0
		+10·89	+25·59	+173·80	+24·75	+173·61	+1·8
		+30·89	+36·54	−173·21	+35·79	−173·20	+1·5
		+50·89	+45·78	−159·64	+45·07	−157·02	+1·1
		+72·33	+52·63	−136·57	+52·04	−136·70	+0·9
7486	*r* 1934, August 10	−84·35	−17·85	−10·49	−21·02	−11·57	5·0
		−64·35	−14·44	+7·69	−17·24	+6·25	5·5
		−44·35	−15·28	+20·67	−17·91	+19·96	6·1
		−24·35	−20·29	+31·38	−23·00	+30·75	6·5
		−4·35	−29·66	+41·05	−32·06	+40·58	−6·4
		+15·65	−40·25	+52·28	−43·02	+52·19	−5·9
		+35·65	−51·28	+67·17	−54·97	+67·68	−5·4
		+57·83	−60·63	+87·71	−64·35	+88·86	−5·0

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
7492	*t* 1936, Juni 19	−106°89	+34°50	+15°61	+33°64	+15°80	+1·1
		−86·89	+43·17	+33·99	+42·09	+34·30	+1·5
		−66·89	+49·97	+50·31	+48·79	+50·66	+2·0
		−46·89	+54·52	+65·78	+53·30	+66·08	+2·3
		−26·89	+56·95	+81·38	+55·70	+81·42	+2·6
		−6·89	+57·42	+96·07	+56·21	+96·10	+2·7
		+13·11	+56·12	+110·92	+54·82	+110·79	+2·7
		+33·11	+52·77	+125·40	+51·44	+125·09	+2·6
		+53·11	+47·21	+139·66	+45·92	+139·27	+2·2
		+73·11	+39·46	+154·39	+38·28	+154·02	+1·8
		+93·11	+30·35	+171·08	+29·38	+170·83	+1·3
		+102·01	+26·25	+179·50	+25·42	+179·38	+1·1
7493	*r* 1936, Dec. 13	96·57	−14·09	+118·30	−17·09	+117·94	−5·1
		−76·57	−22·50	+136·51	−25·20	+135·90	−5·7
		−56·57	−29·42	+151·41	−31·95	+150·90	−6·2
		−36·57	−34·19	+164·57	−36·51	+164·21	−6·8
		−16·57	−36·62	+176·85	−38·83	+176·70	−7·1
		+3·43	−36·72	−171·24	−38·93	−171·16	−7·2
		+23·43	−34·52	−159·42	−36·79	−159·10	−7·0
		+43·43	−30·00	−147·23	−32·42	−146·79	−6·6
		+63·43	−23·20	−133·84	−25·93	−133·29	−6·0
		+83·43	−14·95	−117·86	−17·84	−117·41	−5·4
		+94·02	−9·89	−107·00	−12·91	−106·60	−5·1
7494	*t* 1937, Juni 8	−85·07	−10·68	+169·55	−12·06	+169·37	+3·3
		−65·07	−2·37	−172·34	−4·51	−172·39	+4·3
		−45·07	+4·53	−157·50	+2·27	−157·45	+5·6
		−25·07	+9·15	−144·90	+6·85	−144·84	+6·7
		−5·07	+11·12	−133·44	+8·74	−133·44	+7·3
		+14·93	+10·32	−122·22	+7·99	−122·26	+7·1
		+34·93	+6·81	−110·13	+4·50	−110·40	+6·1
		+54·93	+0·79	−96·77	−1·42	−96·77	+4·9
		+74·93	−7·06	−80·38	−9·13	−80·25	+3·8
		+84·77	−11·28	−71·02	−13·26	−70·83	+3·3
7495	*r* 1937, Dec. 2	−78·28	+28·24	+138·91	+24·28	+139·72	−7·3
		−58·28	+19·90	+157·03	+16·22	+157·47	−8·4
		−38·28	+12·66	+171·19	+9·29	+171·32	−9·9
		−18·28	+7·04	−177·58	+4·50	−177·59	−11·3
		+1·72	+5·42	−167·74	+2·36	−167·80	−11·8
		+21·72	+6·20	−157·82	+3·07	−157·94	−11·1
		+41·72	+9·89	−146·40	+6·58	−146·63	−9·8
		+61·72	+16·16	−132·09	+12·53	−132·57	−8·4
		+86·77	+23·66	−114·77	+19·75	−115·58	−7·3
7496	*t* 1938, Mai 29	−31·32	−61·41	−51·52	*i*	*i*	+3·3
		−11·32	−52·43	−34·88	−59·76	−35·37	+4·0
		+8·68	−49·31	−20·56	−55·66	−20·17	+4·3
		+28·68	−51·54	−5·77	−58·36	−4·50	+3·9
		+45·31	−57·07	+8·74	−67·87	+9·71	+3·3
7500	*r* 1940, April 7	−89·53	−2·58	+174·29	−5·17	+174·58	−5·1
		69·53	+0·82	−167·61	−1·61	−167·20	−5·6
		−49·53	+5·98	−153·16	+3·68	−152·70	−6·4
		−29·53	+12·23	−141·62	+10·03	−141·19	−7·1
		−9·53	+18·09	−131·03	+16·54	−131·27	−7·5
		+10·47	+24·42	−121·57	+22·30	−121·35	−7·4
		+30·47	+28·77	−110·19	+26·02	−110·14	−6·8
		+50·47	+31·40	−96·79	+29·10	−96·93	−6·2
		+70·47	+32·17	−81·11	+29.80	−81·37	−5·3
		+93·94	+30·61	−59·52	+28·08	−59·81	−5·1

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
7501	t 1940, Oct. 1	−89°80	+3°33	−78°58	+1°80	−78°76	+2·0
		−69·80	+1·17	−60·18	−0·55	−60·40	+3·4
		−49·80	−2·93	−44·89	−4·87	−45·20	+4·4
		−29·80	−8·55	−32·19	−10·64	−32·54	+5·4
		−9·80	−14·94	−21·00	−17·11	−21·32	+5·9
		+10·14	−21·19	−9·89	−23·20	−10·10	+5·7
		+30·14	−25·93	+2·43	−27·94	+2·37	+5·1
		+50·14	−30·10	+16·62	−31·98	+16·70	+4·2
		+70·14	−32·02	+33·01	−33·71	+33·19	+3·3
		+92·07	−31·98	+53·59	−33·51	+53·75	+2·0
7502	r 1941, März 27	−87·00	−40·20	+178·00	−49·24	+177·29	−5·4
		−67·00	−44·54	−162·09	−47·42	−163·62	−5·8
		−47·00	−41·15	−140·24	−43·95	−146·00	−6·3
		−27·00	−39·21	−131·05	−38·93	−132·00	−6·9
		−7·00	−30·13	−120·03	−32·79	−119·70	−7·5
		+12·94	−23·66	−109·07	−26·27	−109·19	−7·7
		+32·94	−17·82	−99·35	−20·42	−98·75	−7·3
		+52·94	−13·45	−87·35	−16·13	−86·69	−6·6
		+72·94	−11·18	−72·38	−13·99	−71·07	−5·8
		+89·41	−11·05	−57·27	−14·05	−56·59	−5·4
7503	t 1941, Sept. 21	−90·80	+40·04	+42·20	+45·20	+41·44	+1·4
		−70·80	+45·57	+61·35	+44·59	+61·55	+1·8
		−50·80	+43·39	+78·04	+42·25	+78·79	+2·3
		−30·80	+39·50	+93·98	+38·26	+94·02	+2·9
		−10·80	+34·24	+107·32	+32·82	+107·21	+3·4
		+9·11	+27·92	+119·09	+26·45	+118·85	+3·7
		+29·11	+21·40	+130·39	+20·00	+130·19	+3·4
		+49·11	+15·89	+142·70	+14·62	+142·49	+2·7
		+69·11	+11·98	+157·55	+10·92	+157·33	+2·0
		+90·15	+10·25	+170·63	+9·40	+170·40	+1·4
7507	t 1943, Febr. 4	−71·84	+48·20	+128·88	+46·40	+129·50	+1·0
		−51·84	+43·74	+147·17	+41·09	+147·70	+2·2
		−31·84	+42·78	+162·37	+40·00	+162·81	+2·6
		−11·84	+45·50	+175·92	+43·17	+176·17	+2·8
		+8·16	+51·51	−170·24	+49·04	−170·20	+2·6
		+28·16	+59·74	−154·19	+57·24	−154·58	+2·1
		+48·17	+68·21	−135·22	+65·81	−135·99	+1·0
7508	r 1943, August 1	−72·87	−30·98	+63·05	−41·22	+61·44	−5·2
		−52·87	−34·05	+80·74	−38·27	+79·06	−5·8
		−32·87	−32·09	+94·84	−35·40	+94·15	−6·4
		−12·87	−32·98	+106·61	−36·26	+106·23	−6·7
		+7·13	−37·00	+118·01	−40·47	+117·99	−6·5
		+27·13	−43·02	+131·05	−47·53	+131·55	−6·6
		+47·13	−51·57	+147·28	−56·02	+148·48	−5·5
		+58·35	−56·00	+157·88	−66·69	+159·47	−5·2
7509	t 1944, Januar 25	−88·70	+3·95	−112·12	+3·04	−112·04	+1·0
		−68·70	−2·18	−93·85	−3·28	−93·80	+2·3
		−48·70	−6·38	−78·60	−7·60	−78·04	+3·1
		−28·70	−8·22	−65·74	−9·55	−65·70	+3·9
		−8·70	−7·57	−54·25	−8·99	−54·17	+4·4
		+11·21	−4·51	−43·20	−5·94	−43·10	+4·4
		+31·21	+0·72	−32·13	−0·64	−31·05	+3·7
		+51·21	+7·58	−18·37	+6·34	−18·30	+2·8
		+71·21	+15·07	−2·07	+14·02	−2·12	+2·0
		+83·22	+19·39	+9·34	+18·48	+9·20	+1·0

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
7510	*r* 1944, Juli 20	−91°24	+4°18	+33°25	+2°05	+33°24	−2·9
		−71·24	+11·09	+51·27	+9·78	+51·33	−3·0
		−51·24	+16·28	+66·02	+15·18	+66·08	−3·2
		−31·24	+19·30	+78·49	+18·33	+78·54	−3·3
		−11·24	+19·98	+89·60	+19·00	+89·58	−3·4
		+8·76	+18·29	+100·08	+17·35	+100·00	−3·4
		+28·76	+14·28	+110·73	+13·29	+110·63	−3·3
		+48·76	+8·28	+122·66	+7·11	+122·55	−3·2
		+68·76	+0·87	+137·22	−0·46	+137·16	−3·0
		+87·38	−0·30	+154·07	−7·84	+154·10	−2·9
7511	*r—t* 1945, Januar 14	−103·65	−30·95	+26·78	−31·62	+26·64	−0·9
		−83·65	−38·67	+45·23	−39·10	+45·12	−0·7
		−63·65	−44·81	+61·43	−45·06	+61·36	−0·5
		−43·65	−48·92	+76·48	−49·07	+76·44	−0·3
		−23·65	−51·07	+90·99	−51·14	+90·99	−0·1
		−3·65	−51·28	+105·22	−51·32	+105·22	−0·1
		+16·35	−48·85	+119·08	−49·64	+119·17	−0·1
		+36·35	−45·62	+132·91	−46·04	+132·95	−0·2
		+56·35	−40·23	+146·85	−40·43	+146·96	−0·4
		+76·35	−32·80	+161·92	−33·20	+162·04	−0·6
		+96·35	−24·55	+179·56	−25·16	+179·70	−0·8
		+99·72	−23·19	−177·12	−23·81	−176·99	−0·9
7512	*t* 1945, Juli 9	−113·44	+44·61	−115·92	+44·15	−115·77	+0·4
		−93·44	+53·56	−97·56	+52·71	−97·22	+0·8
		−73·44	+60·82	−80·97	+59·95	−80·62	+1·0
		−53·44	+65·87	−64·75	+64·93	−64·44	+1·2
		−33·44	+68·87	−48·30	+67·96	−48·08	+1·4
		−13·44	+70·22	−31·57	+69·33	−31·49	+1·4
		+6·56	+70·17	−14·77	+69·27	−14·83	+1·4
		+26·56	+68·73	+1·85	+67·79	+1·66	+1·4
		+46·56	+65·61	+18·10	+64·66	+17·79	+1·3
		+66·56	+60·41	+33·92	+59·49	+33·56	+1·1
		+86·56	+52·98	+49·89	+52·23	+49·59	+0·9
		+106·56	+44·02	+67·49	+43·49	+67·31	+0·5
		+111·23	+41·89	+72·04	+41·44	+71·89	+0·5
7517	*t* 1947, Mai 20	−74·54	−35·90	−77·84	−37·36	−78·06	+2·4
		−54·54	−27·12	−59·41	−28·82	−59·51	+3·1
		−34·54	−16·89	−44·46	−18·81	−44·39	+4·2
		−14·54	−7·05	−32·65	−9·03	−32·34	+5·1
		+5·46	+0·71	−22·08	−1·22	−21·82	+5·6
		+25·46	+5·46	−11·25	+3·61	−11·03	+5·2
		+45·46	+6·88	+1·04	+5·17	+1·22	+4·4
		+65·46	+4·94	+15·57	+3·36	+15·74	+3·4
		+85·46	−0·32	+33·08	−1·74	+33·28	+2·5
		+89·17	−1·62	+36·73	−3·03	+36·94	+2·4
7518	*r* 1947, Nov. 12	−73·93	+42·22	−173·06	+40·32	−173·10	−3·3
		−53·93	+34·23	−154·59	+32·45	−154·63	−3·5
		−33·93	+24·12	−139·72	+22·55	−139·68	−3·7
		−13·93	+13·54	−128·30	+12·14	−128·19	−3·9
		+6·07	+4·47	−118·67	+3·20	−118·54	−4·0
		+26·07	−1·72	−108·76	−2·99	−108·67	−3·9
		+46·07	−4·44	−97·16	−5·81	−97·11	−3·8
		+66·07	−3·74	−83·04	−5·25	−83·01	−3·6
		+89·76	+1·66	−62·08	−0·10	−62·07	−3·4

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Zone: Nördliche φ	Zone: Nördliche λ	Zone: Südliche φ	Zone: Südliche λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
7519	*r—t* 1948, Mai 9	−90°70	+2°08	+76°99	+2°21	+77°08	−0·8
		−70·70	+10·37	+94·91	+10·10	+94·90	−0·5
		−50·70	+20·34	+108·89	+20·28	+108·91	−0·1
		−30·70	+30·88	+120·33	+30·83	+120·35	+0·1
		−10·70	+39·07	+131·50	+39·88	+131·52	+0·2
		+9·24	+46·40	+143·93	+46·45	+143·94	+0·1
		+29·24	+50·39	+157·94	+50·39	+157·94	0·0
		+49·24	+51·07	+173·29	+51·89	+173·28	−0·2
		+69·24	+51·37	−170·22	+51·18	−170·29	−0·4
		+89·24	+48·50	−152·58	+48·17	−152·66	−0·6
		+107·10	+43·83	−135·53	+43·34	−135·62	−0·8
7520	*t* 1948, Nov. 1	−89·03	+3·96	+22·05	+3·66	+21·99	+0·5
		−69·03	−2·72	+40·17	−3·29	+40·66	+1·0
		−49·03	−12·16	+54·52	−12·94	+54·33	+1·6
		−29·03	−22·96	+66·06	−23·82	+65·81	+2·0
		−9·03	−32·89	+76·86	−33·84	+76·65	+2·2
		+10·97	−40·63	+88·79	−41·50	+88·68	+2·1
		+30·97	−45·68	+102·50	−46·43	+102·50	+1·7
		+50·97	−48·12	+117·84	−48·76	+117·91	+1·4
		+70·97	−48·20	+134·58	−48·74	+134·66	+1·0
		+90·97	−45·93	+152·65	−46·33	+152·72	+0·6
		+103·89	−43·11	+164·88	−43·42	+165·22	+0·5
7525	*r* 1951, März 7	−94·90	−42·24	+161·10	−43·07	+161·00	−1·5
		−74·90	−42·91	−179·85	−43·58	−179·92	−1·4
		−54·90	−40·98	−162·65	−41·52	−162·68	−1·2
		−34·90	−36·32	−147·57	−36·77	−147·54	−1·1
		−14·90	−27·77	−135·13	−29·13	−134·91	−0·9
		+5·10	−18·71	−124·70	−19·04	−124·62	−0·8
		+25·10	−7·55	−115·27	−7·90	−115·19	−0·9
		−45·10	+2·62	−104·32	+2·17	−104·21	−1·1
		+65·10	+10·15	−90·17	+9·55	−90·07	−1·3
		+88·03	+14·83	−68·98	+14·01	−68·89	−1·5
7526	*r* 1951, Sept. 1	−96·28	+37·15	−81·12	+35·84	−81·01	−2·5
		−76·28	+38·68	−62·22	+37·54	−62·14	−2·5
		−56·28	+37·54	−45·43	+36·52	−45·40	−2·5
		−36·28	+33·63	−30·83	+32·09	−30·89	−2·5
		−16·28	+26·86	−18·65	+26·02	−18·79	−2·6
		+3·72	+17·40	−8·72	+16·52	−8·93	−2·6
		+23·72	+6·47	+0·41	+5·56	+0·18	−2·5
		+43·72	−3·66	+11·08	−4·07	+10·87	−2·5
		+63·72	−12·13	+25·08	−13·28	+24·92	−2·5
		+83·72	−17·25	+42·75	−18·55	+42·94	−2·5
		+87·17	−17·86	+46·15	−19·12	+46·06	−2·5
7527	*t* 1952, Febr. 25	−89·89	+1·64	−21·53	+0·24	−21·37	+1·3
		−69·89	−0·29	−3·35	−1·30	−3·14	+2·0
		−49·89	+2·19	+11·50	+0·98	+11·79	+2·6
		−29·89	+8·40	+23·52	+6·98	+23·85	+3·3
		−9·89	+17·82	+33·85	+16·27	+34·19	+3·5
		+10·11	+28·98	+44·53	+27·44	+44·73	+3·1
		+30·11	+39·00	+57·70	+38·27	+57·72	+2·5
		+50·11	+47·94	+73·95	+46·84	+73·83	+1·9
		+70·11	+53·44	+92·61	+52·54	+92·44	+1·5
		+76·81	+54·68	+99·22	+53·85	+99·05	+2·0

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone		Südliche Zone		Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
			φ	λ	φ	λ	Minuten
		−87°48	−9°96	−110°76	−12°95	−111°68	−5·1
		−67·48	−7·75	−93·05	−10·46	−93·80	−5·6
		−47·48	−9·04	−79·29	−12·20	−79·99	−6·2
		−27·48	−15·51	−68·58	−18·11	−69·25	−6·5
7528	*r* 1952, August 20	−7·48	−24·83	−59·33	−27·62	−59·89	−6·4
		+12·52	−36·12	−48·99	−39·21	−49·10	−5·8
		+32·52	−46·92	−35·31	−50·21	−35·07	−5·3
		+52·52	−55·24	−18·11	−58·55	−17·41	−5·3
		+67·03	−59·45	−4·11	−62·69	−3·18	−5·1
		−112·97	+43·18	−99·56	+42·04	−99·27	+1·2
		−92·97	+51·71	−80·98	+50·39	−80·55	+1·7
		−72·97	+57·91	−63·97	+56·51	−63·52	+2·0
		−52·97	+61·74	−47·50	+60·33	−47·12	+2·3
		−32·97	+63·50	−31·19	+62·13	−30·94	+2·5
7533	*t* 1954, Juni 30	−12·97	+63·66	−15·06	+62·18	−15·01	+2·7
		+7·03	+62·00	+0·66	+60·48	+0·50	+2·7
		+27·03	+58·40	+15·75	+56·80	+15·38	+2·7
		+47·03	+52·45	+30·11	+50·81	+29·58	+2·5
		+67·03	+44·14	+44·28	+42·58	+43·74	+2·1
		+87·03	+34·35	+59·84	+33·05	+59·43	+1·6
		+102·20	+27·07	+78·91	+20·03	+78·27	+1·2
		−99·17	−18·77	−5·00	−21·92	−5·46	−5·3
		−79·17	−27·01	+13·18	−29·88	+12·65	−5·8
		−59·17	−33·24	+28·57	−35·85	+28·06	−6·4
		−39·17	−37·07	+42·25	−39·49	+41·91	−6·9
		−19·17	−38·48	+54·96	−40·81	+54·85	−7·3
7534	*r* 1954, Dec. 25	+0·83	−37·55	+67·04	−39·87	+67·19	−7·5
		+20·83	−34·22	+78·70	−36·02	+79·10	−7·3
		+40·83	−28·46	+90·42	−31·03	+91·00	−6·9
		+60·83	20·57	+103·27	−23·37	+103·89	−6·3
		+80·83	−11·45	+118·85	−14·45	+119·30	−5·9
		+93·19	−5·84	+130·45	−8·95	+130·84	−5·3
		88·44	2·52	+54·74	−4·52	+54·62	+3·3
		68·44	+5·67	+72·85	+3·50	+72·85	+4·4
		48·44	+11·90	+87·87	+9·03	+87·92	+5·9
		28·44	+15·56	+100·77	+13·23	+100·84	+6·7
		8·44	+16·48	+112·59	+14·10	+112·54	+7·3
7535	*t* 1955, Juni 20	+11·56	+14·01	+123·94	+12·23	+123·80	+7·2
		+31·56	+10·04	+135·62	+7·65	+135·46	+6·4
		+51·56	+3·00	+148·74	+0·74	+148·63	+5·1
		+71·56	−5·56	+164·55	−7·72	+164·58	+4·1
		+84·56	−11·41	+176·72	−13·49	+176·56	+3·4
		−80·52	+23·26	+18·75	+19·26	+19·56	−7·4
		−60·52	+14·78	+36·81	+11·14	+37·25	−8·5
		40·52	+8·20	+50·89	+4·87	+51·07	−10·0
		20·52	+4·30	+62·15	+1·18	+62·23	−11·4
7536	*r* 1955, Dec. 14	−0·52	+3·50	+72·01	+0·41	+72·06	−12·0
		+19·48	+5·81	+81·86	+2·04	+81·87	−11·3
		+39·48	+11·05	+93·14	+7·06	+93·02	−9·9
		+59·48	+18·67	+107·42	+14·04	+106·99	−8·5
		+78·56	+27·07	+124·79	+23·06	+124·00	−7·4
		−53·06	−53·13	+178·76	−57·95	+177·31	+3·3
		−33·06	−44·30	−163·57	−48·52	−164·33	+4·1
7537	*t* 1956, Juni 8	−13·06	−39·35	−149·18	−43·38	−149·46	+4·8
		+6·94	−38·89	−136·17	−42·00	−136·04	+4·9
		+26·94	−42·02	−122·35	−47·14	−121·75	+4·3
		+46·94	−51·06	−105·67	−55·75	−104·42	+3·5
		+52·12	−53·70	−100·70	−58·55	−99·27	+3·3

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
		−90°20	+ 2°32	+ 65°97	− 0°26	+ 66°32	−4·9
		−70·20	+ 7·08	+ 83·98	+ 4·62	+ 84·42	−5·4
		−50·20	+13·25	+ 98·30	+10·95	+ 98·79	−6·1
		−30·20	+19·93	+109·83	+17·74	+110·34	−6·7
	r	−10·20	+26·17	+120·28	+24·05	+123·64	−7·1
7541	1958, April 19	+ 9·80	+31·16	+130·96	+29·07	+131·12	−7·0
		+29·80	+34·47	+142·85	+32·36	+142·82	−6·5
		+49·80	+35·94	+150·45	+33·74	+150·23	−6·0
		+69·80	+35·52	+171·99	+33·19	+171·64	−5·5
		+89·80	+33·25	−170·24	+30·70	−170·62	−5·0
		+90·57	+32·06	−163·64	+26·45	−164·01	−4·9
		−90·09	+ 0·00	+157·45	− 1·41	+157·27	+2·4
		−70·09	− 3·53	+175·81	− 5·19	+175·55	+3·2
		−50·09	− 8·83	−169·01	−10·68	−169·34	+4·1
		−30·09	−15·19	−156·30	−17·16	−156·73	+5·0
	t	−10·09	−21·67	−144·97	−23·74	−145·27	+5·4
7542	1958, October 12	+ 9·91	−27·38	−133·44	−29·38	−133·62	+5·3
		+29·91	−31·66	−120·75	−33·21	−120·76	+4·7
		+49·91	−34·19	−106·30	−35·93	−106·22	+3·9
		+69·91	−34·88	− 90·06	−36·48	− 89·85	+3·2
		+89·91	−33·71	− 71·71	−35·16	− 71·52	+2·5
		+94·09	−33·12	− 66·71	−34·53	− 66·62	+2·1
		−83·49	−42·03	+ 72·49	−44·79	+ 71·85	−5·1
		−63·49	−38·80	+ 91·24	−41·44	+ 90·78	−5·5
		−43·49	−33·06	+107·36	−36·56	+107·14	−6·1
		−23·49	−27·66	+120·03	−30·32	+120·09	−6·8
	r	− 3·49	−21·35	+131·53	−23·66	+131·81	−7·3
7543	1959, April 8	+16·51	−15·39	+141·38	−17·06	+141·76	−7·4
		+36·51	−10·71	+151·81	−13·01	+152·27	−6·8
		+56·51	− 8·10	+164·38	−10·51	+164·88	−6·1
		+76·51	− 7·81	−179·87	−10·39	−170·30	−5·4
		+88·77	− 8·79	−168·37	−11·53	−167·74	−5·1
		−86·91	+42·77	− 72·34	+42·13	− 72·22	+1·1
		−66·91	+40·78	− 53·35	+39·68	− 53·22	+1·5
		−46·91	+37·12	− 36·52	+36·13	− 36·43	+2·0
		−26·91	+31·91	− 22·04	+30·79	− 22·05	+2·7
	t	− 6·91	+25·67	− 9·71	+24·45	− 9·83	+3·2
7544	1959, October 2	+13·09	+19·21	+ 1·31	+17·99	+ 1·12	+3·3
		+33·09	+13·50	+ 12·49	+12·37	+ 12·28	+2·9
		+53·09	+ 9·40	+ 25·31	+ 8·42	+ 25·12	+2·3
		+73·09	+ 7·41	+ 40·84	+ 6·02	+ 40·70	+1·5
		+89·57	+ 7·51	+ 56·13	+ 6·88	+ 56·00	+1·1
		−76·25	+47·99	− 6·17	+45·85	− 5·36	+1·8
		−56·25	+45·07	+ 12·13	+42·75	+ 12·87	+2·3
		−36·25	+45·71	+ 27·46	+43·19	+ 28·68	+2·8
	t	−16·25	+49·82	+ 41·24	+47·66	+ 41·65	+2·9
7547	1961, Febr. 15	+ 3·75	+56·79	+ 55·52	+53·86	+ 55·51	+2·7
		+23·75	+65·13	+ 71·86	+62·65	+ 71·49	+2·2
		+43·75	+72·66	+ 90·88	+69·71	+ 90·16	+1·8
		+47·25	+73·06	+ 94·39	+70·83	+ 93·57	+1·8
		−72·28	−45·91	− 49·70	−51·49	− 50·85	−6·8
		−52·28	−42·68	− 22·56	−46·95	− 24·00	−6·1
	r	−32·28	−41·69	− 6·16	−46·34	− 7·25	−6·2
7548	1961, Aug. 11	−12·28	−44·82	+ 6·34	−49·66	+ 5·72	−6·4
		+ 7·72	−50·95	+ 19·19	−56·53	+ 19·28	−6·1
		+27·72	−58·95	+ 34·46	−65·72	+ 35·70	−5·7
		+45·33	−66·03	+ 50·58	−73·71	+ 53·05	−5·3

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
7549	*t* 1962, Febr. 5	−89°80	+1°15	+115°00	+0°27	+115°75	+1·5
		−69·80	−3·66	+133·98	−4·71	+134·04	+2·2
		−49·80	−6·37	+149·28	−7·57	+149·34	+3·1
		−29·80	−7·16	+162·28	−8·04	+162·33	+3·9
		−9·80	−4·60	+173·69	−6·10	+173·21	+4·3
		+10·20	−0·46	−175·48	−1·89	−175·36	+4·3
		+30·20	+5·55	−164·04	+4·18	−163·94	+3·6
		+50·20	+12·53	−150·63	+11·32	−150·60	+2·7
		+70·20	+19·49	−134·24	+18·48	−134·30	+2·0
		+83·00	+23·47	−122·06	+22·57	−122·15	+1·5
7550	*r* 1962, Juli 31	−90·79	+3·13	−68·22	+1·65	−68·03	−2·8
		−70·79	+8·93	−51·12	+7·65	−50·91	−2·9
		−50·79	+12·75	−36·86	+11·64	−36·66	−3·0
		−30·79	+14·32	−24·53	+13·31	−24·38	−3·2
		−10·79	+13·52	−13·30	+12·58	−13·24	−3·3
		+9·21	+10·41	−2·49	+9·47	−2·41	−3·3
		+29·21	+5·22	+9·06	+4·21	+9·15	−3·2
		+49·21	−1·52	+22·55	−2·65	+22·69	−3·0
		+69·21	−8·89	+39·11	−10·15	+39·33	−2·8
		+84·91	−14·41	+54·61	−15·77	+54·91	−2·8
7551	*r* 1963, Januar 25	−104·03	−34·95	−101·54	−35·66	−101·69	−1·0
		−84·03	−41·70	−82·95	−41·77	−82·97	−0·8
		−64·03	−46·27	−66·26	−46·61	−66·30	−0·6
		−44·03	−49·10	−50·84	−49·32	−50·89	−0·5
		−24·03	−50·05	−36·16	−50·20	−36·18	−0·3
		−4·03	−49·15	−22·09	−49·27	−22·09	−0·3
		+15·97	−46·37	−8·58	−46·48	−8·56	−0·3
		+35·97	−41·63	+4·57	−41·81	+4·62	−0·4
		+55·97	−35·15	+18·02	−35·44	+18·10	−0·5
		+75·97	−27·52	+32·99	−27·99	+33·11	−0·8
		+97·09	−19·47	+52·02	−20·18	+52·19	−1·0
7552	*t* 1963, Juli 20	−110·40	+43·28	+142·61	+42·73	+142·76	+0·6
		−90·40	+50·88	+161·21	+50·11	+161·48	+0·9
		−70·40	+56·72	+178·11	+55·85	+178·37	+1·2
		−50·40	+60·56	−165·66	+59·63	−165·39	+1·5
		−30·40	+62·60	−149·64	+61·62	−149·47	+1·7
		−10·40	+62·99	−133·70	+61·99	−133·72	+1·8
		+9·60	+61·79	−118·15	+60·70	−118·26	+1·8
		+29·60	+58·88	−102·98	+57·83	−103·22	+1·8
		+49·60	+54·03	−88·22	+53·00	−88·55	+1·6
		+69·60	+47·22	−73·79	+46·29	−74·13	+1·3
		+89·60	+39·08	−56·79	+38·35	−57·43	+0·9
		+103·99	+33·13	−43·79	+32·61	−44·02	+0·6
7557	*t* 1965, Mai 30	−72·95	−35·74	+170·70	−37·13	+170·46	+2·2
		−52·95	−26·29	−170·96	−28·05	−171·11	+3·2
		−32·95	16·29	−156·23	−18·23	−156·19	+4·3
		−12·95	−7·54	−144·37	−9·52	−144·20	+5·2
		+7·05	−1·41	−133·71	−3·34	−133·51	+5·6
		+27·05	+1·50	−122·71	−0·33	−122·52	+5·2
		+47·05	+1·04	−110·21	−0·68	−110·04	+4·3
		+67·05	−2·79	−95·30	−4·39	−96·01	+3·3
		−85·97	−9·30	−78·12	−10·76	−77·85	+2·4

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
7558	r 1965. Nov. 23	−73°31	+39°02	+65°15	+37°11	+65°49	−3·3
		−53·31	+30·10	+83·63	+28·36	+83·70	−3·5
		−33·31	+19·83	+98·37	+18·32	+98·31	−3·7
		−13·31	+10·10	+109·78	+8·77	+109·63	−3·9
		+6·69	+2·56	+119·03	+1·34	+119·46	−4·0
		+26·69	−1·82	+129·89	−3·04	+129·63	−3·9
		+46·69	−2·81	+141·64	−4·11	+141·48	−3·7
		+66·69	−0·20	+155·92	−1·80	+155·72	−3·5
		+88·69	+0·12	+175·11	+4·28	+174·78	−3·3
7559	r—t 1966, Mai 20	−90·03	+2·01	−30·25	+1·48	−30·16	−0·8
		−70·03	+10·47	−12·32	+10·14	−12·25	−0·5
		−50·63	+20·46	+1·74	+20·33	+1·78	−0·3
		−30·03	+30·21	+13·43	+30·21	+13·43	0·0
		−10·03	+38·19	+24·77	+38·15	+24·78	+0·1
		+9·37	+43·59	+37·07	+43·59	+37·07	0·0
		+29·37	+46·52	+50·60	+46·49	+50·60	−0·1
		+49·37	+47·12	+65·30	+46·99	+65·34	−0·3
		+69·37	+45·40	+81·23	+45·17	+81·19	−0·5
		+89·37	+41·25	+98·40	+40·87	+98·38	−0·7
		+105·11	+36·20	+113·38	+35·66	+113·32	−0·8
7560	t 1966, Nov. 12	−89·33	+2·28	−104·01	+1·98	−104·06	+0·5
		−69·33	−5·46	−85·02	−6·04	−86·03	+0·9
		−49·33	−15·37	−71·00	−16·12	−71·78	+1·5
		−29·33	−25·70	−59·83	−26·01	−60·07	+2·0
		−9·33	−34·65	−48·59	−35·57	−48·78	+2·2
		+10·67	−41·10	−30·37	−42·01	−30·40	+2·0
		+30·67	−45·03	−22·67	−45·80	−22·07	+1·8
		+50·67	−46·45	−7·00	−47·08	−7·54	+1·4
		+70·67	−45·49	+8·71	−46·04	+8·81	+1·1
		+90·67	−42·16	+20·42	−42·50	+20·50	+0·7
		+104·51	−38·22	+39·73	−38·52	+39·77	+0·5
7565	r 1969. März 18	−91·03	−44·88	+43·64	−45·46	+43·56	−1·1
		−71·03	−44·01	+62·75	−44·49	+62·80	−1·0
		−51·03	−40·57	+79·04	−40·92	+79·94	−0·8
		−31·03	−34·30	+94·76	−34·54	+94·79	−0·6
		−11·03	−25·24	+100·82	−25·35	+100·84	−0·3
		+8·97	−14·26	+110·02	−14·35	+110·09	−0·2
		+28·97	−3·34	+120·15	−3·48	+120·20	−0·3
		+48·97	+5·54	+137·73	+5·28	+137·79	−0·6
		+68·97	+11·23	+152·55	+10·85	+152·60	−0·9
		+89·76	+13·62	+171·52	+13·01	+171·59	−1·1
7566	r 1969, Sept. 11	−93·90	+42·43	+173·34	+40·94	+173·51	−2·9
		−73·90	+42·01	−167·63	+41·20	−167·49	−2·9
		−53·90	+40·17	−150·59	+38·93	−150·54	−3·0
		−33·90	+34·96	−135·84	+33·79	−135·62	−3·0
		−13·90	+26·87	−123·80	+25·74	−124·00	−3·1
		+6·10	+16·45	−114·30	+15·34	−114·58	−3·2
		+26·10	+5·33	−105·11	+4·18	−105·40	−3·2
		+46·10	−4·43	−94·27	−5·65	−94·51	−3·0
		+66·10	−11·37	−80·05	−12·68	−80·25	−3·0
		+88·75	−15·20	−59·01	−16·09	−59·78	−2·9

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
7567	t 1970, März 7	−90°19	−1°63	−148°83	−2°58	148°04	+1·6
		70·19	−1·47	130·60	−2·04	−130·37	+2·2
		−50·19	+2·48	115·75	+1·08	115·44	+3·0
		−30·19	+10·05	103·83	+8·56	103·49	+3·6
		−10·19	+20·43	−93·62	+18·71	−93·24	+3·9
		+9·81	+31·81	82·84	+30·09	82·60	+3·5
		+29·81	+41·83	−69·53	+40·33	69·50	+2·8
		+49·81	+49·22	−53·34	+47·96	−53·47	+2·3
		+69·81	+53·79	−34·99	+52·69	−35·18	+1·8
		+82·58	+55·37	23·47	+54·39	23·67	+1·6
7568	r 1970, Aug. 31	−89·31	−3·18	+147·15	−6·05	+140·37	−5·2
		−69·31	−2·27	+164·99	−4·90	+164·31	−5·7
		−49·31	−2·42	+179·70	−4·86	+179·07	−6·3
		−29·31	−12·71	170·49	−14·66	−171·02	−6·8
		9·31	−22·40	−161·41	−25·12	−162·04	−7·0
		+10·69	−35·00	−151·74	−37·93	152·09	−6·5
		+30·69	−43·94	−138·60	−46·98	−138·60	−6·0
		+50·69	−51·80	−122·37	−54·84	121·88	−5·5
		+75·61	−57·60	−98·78	−60·02	97·09	−5·1
7573	t 1972, Juli 10	−120·21	+52·08	+143·48	+50·60	+143·85	+1·4
		−100·21	+60·35	+162·28	+58·77	+162·82	+1·7
		−80·21	+65·86	+179·98	+64·26	−179·45	+2·1
		−60·21	+69·01	162·55	+67·42	−162·60	+2·3
		−40·21	+70·34	−145·12	+68·76	−144·79	+2·4
		−20·21	+70·21	−127·88	+68·58	127·75	+2·6
		−0·21	+68·57	111·05	+66·82	111·19	+2·7
		+19·79	+64·94	−95·04	+63·14	−95·44	+2·8
		+39·79	+59·03	−80·15	+57·00	−80·81	+2·7
		+59·79	+50·29	66·29	+48·30	−67·01	+2·4
		+79·79	+39·74	51·89	+38·03	−52·59	+2·0
		+102·37	+28·00	−32·08	+27·35	−32·44	+1·4
7574	r 1973, Januar 4	−101·14	−23·67	127·97	−20·91	−128·38	−5·5
		−81·14	−31·39	109·59	−34·30	−110·14	−6·6
		−61·14	−36·66	−93·82	−39·35	94·31	−6·5
		41·14	−39·45	79·64	−41·96	−79·91	−7·1
		−21·14	−39·86	−66·50	−42·23	−66·02	−7·5
		1·14	37·73	−54·40	−40·18	−54·17	−7·7
		18·86	33·18	42·99	−35·73	42·49	7·6
		+38·86	26·14	31·75	−28·85	−31·09	−7·2
		+58·86	−17·16	19·39	−20·68	18·70	−6·5
		+78·86	7·50	4·03	−10·60	−3·59	−5·8
		+91·31	−1·90	+7·62	−5·09	+8·03	−5·5
7575	t 1973, Juni 30	−91·96	+5·02	−60·60	+3·58	−66·05	+3·4
		71·96	+13·39	−41·80	+11·22	−41·76	+4·4
		51·96	+18·80	−32·17	+16·53	−26·39	+5·5
		−31·96	+21·50	−13·00	+19·18	−13·04	+6·5
		11·96	+21·43	−0·88	+19·05	−0·98	+7·2
		+8·04	+18·01	+10·03	+16·10	+10·42	+7·2
		+28·04	+13·08	+22·10	+10·61	+21·88	+6·6
		+48·04	+5·20	+34·79	+2·79	+34·58	+5·4
		+68·04	−4·04	+49·97	−6·27	+49·90	+4·2
		+84·53	−11·03	+65·15	−13·66	+65·21	+3·4

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
7576	r 1973, Dec. 24	— 82°85	+18°17	—102°02	+14°22	—101°25	— 7·4
		— 62·85	+10·07	— 84·02	+ 0·48	— 83·59	— 8·5
		— 42·85	+ 4·38	— 69·96	+ 1·12	— 69·72	—10·0
		— 22·85	+ 1·82	— 58·66	— 1·28	— 58·48	—11·3
		— 2·85	+ 1·86	— 48·78	— 1·20	— 48·60	—11·9
		+ 17·15	+ 6·32	— 39·09	+ 3·12	— 38·96	—11·3
		+ 37·15	+13·05	— 27·95	+ 9·61	— 27·99	— 9·9
		+ 57·15	+21·84	— 13·71	+18·08	— 14·09	— 8·4
		+ 76·36	+30·82	+ 3·84	+26·78	+ 3·06	— 7·4
7577	t 1974, Juni 20	— 64·42	—43·00	+ 59·32	—40·93	+ 58·31	+ 3·2
		— 44·42	—35·40	+ 77·17	—38·62	+ 76·49	+ 4·2
		— 24·42	—30·74	+ 91·55	—33·96	+ 91·15	+ 5·0
		— 4·42	—30·23	+104·00	—33·49	+103·86	+ 5·4
		+ 15·58	—33·94	+110·43	—37·28	+116·60	+ 5·0
		+ 35·58	—41·28	+130·82	—44·89	+131·41	+ 4·1
		+ 55·37	—51·35	+148·60	—54·93	+149·61	+ 3·2
7581	r 1976, April 29	— 91·80	+ 8·24	— 40·88	+ 5·03	— 40·45	— 4·7
		— 71·80	+14·18	— 22·96	+11·72	— 22·42	— 5·1
		— 51·80	+21·08	— 8·03	+18·77	— 10·21	— 5·7
		— 31·80	+27·88	+ 3·26	+25·09	+ 3·79	— 6·3
		— 11·80	+33·02	+ 14·29	+31·53	+ 14·03	— 6·5
		+ 8·20	+37·73	+ 25·68	+35·69	+ 25·81	— 6·5
		+ 28·20	+40·03	+ 38·12	+37·99	+ 38·01	— 6·2
		+ 48·20	+40·44	+ 51·86	+38·29	+ 51·57	— 5·8
		+ 68·20	+38·97	+ 66·70	+36·08	+ 66·24	— 5·3
		+ 88·20	+35·66	+ 84·42	+33·10	+ 83·94	— 4·6
		+ 99·18	+33·09	+ 94·93	+30·43	+ 94·49	— 4·7
7582	t 1976, Oct. 23	— 90·80	— 3·61	+ 31·23	— 4·97	+ 31·04	+ 2·2
		— 70·80	— 8·51	+ 49·55	—10·10	+ 49·27	+ 2·9
		— 50·80	—14·78	+ 64·05	—16·58	+ 64·30	+ 3·8
		— 30·80	—21·53	+ 77·40	—23·47	+ 77·02	+ 4·6
		— 10·80	—27·78	+ 89·14	—29·74	+ 88·84	+ 5·0
		+ 9·14	—32·72	+101·14	—34·63	+101·01	+ 4·9
		+ 29·14	—35·96	+114·18	—38·26	+114·25	+ 4·7
		+ 49·14	—37·36	+128·66	—39·63	+128·84	+ 3·8
		+ 69·14	—36·87	+144·75	—38·43	+144·99	+ 3·3
		+ 89·14	—34·53	+162·72	—35·96	+162·94	+ 2·4
		+ 97·69	—32·97	+171·06	—34·34	+171·27	+ 2·2
7583	r 1977, April 18	— 81·48	—30·00	— 32·52	—36·18	— 33·02	— 4·7
		— 61·48	—32·01	— 13·98	—34·41	— 14·31	— 5·0
		— 41·48	—25·98	+ 1·47	—28·25	+ 1·37	— 5·6
		— 21·48	—19·29	+ 13·86	—21·41	+ 13·98	— 6·3
		— 1·48	—12·90	+ 24·11	—14·04	+ 22·52	— 6·8
		+ 18·52	— 7·86	+ 33·78	— 9·79	+ 34·07	— 6·8
		+ 38·52	— 4·05	+ 44·40	— 6·66	+ 44·77	— 6·3
		+ 58·52	— 3·78	+ 56·33	— 5·96	+ 57·86	— 5·6
		+ 88·44	— 6·88	+ 82·38	— 9·39	+ 83·53	— 4·8
7584	t 1977, Oct. 12	— 83·90	+38·99	+170·53	+38·55	+170·66	+ 0·8
		— 63·90	+35·51	170·63	+34·90	170·54	+ 1·2
		— 43·90	+30·45	154·32	+29·65	158·39	+ 1·8
		— 23·90	+24·23	—140·67	+23·30	140·70	+ 2·4
		— 3·90	+17·65	129·12	+16·65	129·23	+ 2·8
		+ 16·10	+11·71	—118·40	+10·70	—118·61	+ 2·9
		+ 36·10	+ 7·25	—107·10	+ 6·30	107·39	+ 2·4
		+ 56·10	+ 4·86	— 93·90	+ 4·09	94·02	+ 1·8
		+ 76·10	+ 4·77	— 77·81	+ 4·18	— 77·89	+ 1·1
		+ 86·24	+ 5·97	— 65·43	+ 5·53	— 65·51	+ 0·8

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
7587	*t* 1979, Febr. 20	− 80°41 − 60·41 − 40·41 − 20·41 − 0·41 + 19·59 + 47·05	+48°90 +47·03 +49·91 +55·51 +63·35 +71·53 +79·40	−140°44 −122·13 −106·67 − 92·01 − 77·84 − 60·79 − 33·51	+40°47 +44·93 +46·93 +52·11 +59·62 +67·68 +76·16	−130°48 −121·17 −105·83 − 91·99 − 77·07 − 61·21 − 34·49	+ 2·0 + 2·5 + 2·9 + 3·0 + 2·7 + 2·3 + 2·0
7589	*t* 1980, Febr. 10	− 90·28 − 70·28 − 50·28 − 30·28 − 10·28 + 9·72 + 29·72 + 49·72 + 69·72 + 83·60	− 0·80 − 4·17 − 5·37 − 4·22 − 0·89 + 4·33 +10·81 +17·60 +23·73 +27·10	− 15·11 + 3·24 + 18·60 + 31·50 + 42·87 + 53·59 + 65·08 + 78·65 + 95·13 +108·33	− 1·69 − 5·20 − 6·58 − 5·60 − 2·34 + 2·88 + 9·41 +16·35 +22·68 +26·25	− 15·04 + 3·32 + 18·69 + 31·07 + 43·02 + 53·74 + 65·17 + 79·66 + 95·06 +108·25	+ 1·0 + 2·2 + 3·1 + 3·9 + 4·4 + 4·3 + 3·6 + 2·8 + 2·0 + 1·0
7590	*r* 1980, Aug. 10	− 90·27 − 70·27 − 50·27 − 30·27 − 10·27 + 9·73 + 29·73 + 49·73 + 69·73 + 83·40	+ 1·67 + 6·16 + 8·52 + 8·59 + 6·33 + 1·94 − 4·11 −11·08 −17·80 −21·99	−168·03 −150·80 −135·98 −120·04 −113·13 −103·20 − 92·87 − 80·33 − 64·50 − 51·06	+ 0·27 + 4·07 + 7·50 + 6·45 + 5·48 + 1·06 − 5·11 −12·21 −19·20 −23·41	−169·00 −150·88 −130·02 −123·84 −113·20 −103·39 − 92·95 − 80·35 − 64·49 − 51·53	− 2·7 − 2·8 − 3·0 − 3·1 − 3·2 − 3·2 − 3·1 − 2·9 − 2·8 − 2·7
7591	*r* 1981, Febr. 4	−103·14 − 83·14 − 63·14 − 43·14 − 23·14 − 3·14 + 16·86 + 36·86 + 56·86 + 76·86 + 94·84	−38·45 −43·64 −47·01 −48·52 −48·21 −46·13 −42·15 −36·42 −29·42 −22·05 −16·12	+131·97 +150·77 +167·71 −176·03 −161·95 −148·18 −135·23 −122·64 −109·54 − 94·37 − 77·92	−39·20 −44·16 −47·39 −48·80 −48·44 −45·55 −42·32 −36·66 −29·77 −22·60 −16·85	+131·81 +150·63 +167·61 −176·07 −161·95 −148·22 −135·20 −122·62 −109·44 − 94·23 − 77·75	− 1·1 − 1·1 − 0·8 − 0·6 − 0·5 − 0·4 − 0·4 − 0·5 − 0·7 − 1·1 − 1·1
7592	*t* 1981, Juli 31	−107·14 − 87·14 − 67·14 − 47·14 − 27·14 − 7·14 + 12·86 + 32·86 + 52·86 + 72·86 + 92·86 + 98·70	+42·25 +48·51 +53·00 +55·59 +56·45 +55·59 +53·00 +48·54 +42·28 +34·77 +27·12 +25·03	+ 39·58 + 58·34 + 75·43 + 91·60 +107·16 +122·20 +136·61 +150·46 +164·16 +178·83 −164·01 −158·30	+41·07 +47·76 +52·11 +54·63 +55·44 +54·54 +51·91 +47·45 +41·24 +33·89 +26·47 +24·47	+ 39·72 + 58·57 + 75·68 + 91·81 +107·28 +122·18 +136·46 +150·18 +163·84 +178·56 −164·19 −158·50	+ 0·8 + 1·1 + 1·5 + 1·8 + 1·8 + 2·2 + 2·2 + 2·1 + 1·8 + 1·4 + 0·9 + 0·8

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
7597	*t* 1983, Juni 11	71°87	35°05	+ 65°30	37°22	+ 65°28	+ 2·4
		51·87	20·08	+ 82·31	27·87	+ 82·37	+ 3·2
		31·87	10·77	+ 95·55	18·70	+ 95·81	+ 4·3
		11·87	9·42	+100·31	11·38	+100·71	+ 5·2
		+ 8·13	5·04	+110·43	6·95	+110·88	+ 5·5
		+ 28·13	4·00	+127·47	5·85	+120·03	+ 4·9
		+ 48·13	6·38	+140·04	8·10	+141·12	+ 4·0
		+ 68·13	12·00	+157·14	13·64	+157·59	+ 3·0
		+ 81·95	17·49	+170·72	− 19·63	+171·27	+ 2·4
7598	*r* 1983, Dec. 4	73·95	+35·28	− 58·60	+33·44	− 58·30	3·2
		53·95	+25·80	40·35	+24·23	− 40·23	3·4
		33·95	+16·00	− 25·88	+14·59	25·89	3·6
		13·95	+ 7·49	14·49	+ 6·22	− 14·00	3·8
		+ 6·05	+ 1·57	4·45	+ 0·41	4·57	− 3·9
		+ 26·05	1·11	+ 5·62	− 2·20	+ 5·80	− 3·8
		+ 46·05	− 0·35	+ 17·82	− 1·65	+ 17·70	− 3·6
		+ 66·05	− 3·62	+ 32·28	+ 2·11	+ 32·09	− 3·4
		+ 85·99	+ 6·70	+ 49·57	+ 8·89	+ 49·63	− 3·2
7599	*r—t* 1984, Mai 30	90·55	+ 1·66	−135·60	+ 0·74	−135·49	− 0·9
		70·55	+ 10·54	− 117·68	+ 10·18	−117·61	− 0·7
		50·55	+ 20·27	− 103·50	+ 20·16	−103·49	− 0·4
		− 30·55	+ 29·66	− 91·59	+29·66	− 91·55	− 0·1
		10·55	+ 35·84	80·68	+35·84	− 80·68	0·0
		+ 9·45	+40·11	67·99	+40·11	− 67·99	0·0
		+ 29·45	+41·93	− 54·02	+41·88	− 54·01	− 0·1
		+ 49·45	+41·37	− 40·82	+41·24	− 40·84	− 0·3
		+ 69·45	+38·42	− 25·53	+38·16	− 25·58	− 0·3
		+ 89·45	+32·97	− 8·58	+32·54	− 8·05	− 0·8
		+102·16	+28·24	+ 3·53	+27·66	+ 3·45	− 1·2
7600	*t* 1984, Nov. 22	− 90·17	− 0·26	+128·01	− 0·61	+127·97	+ 0·5
		− 70·17	− 8·82	+146·08	− 9·38	+145·97	+ 1·0
		− 50·17	−18·77	+160·47	−19·54	+160·29	+ 1·5
		− 30·17	−28·21	+172·62	−29·25	+172·37	+ 2·0
		− 10·17	−36·11	−175·73	−37·01	−175·80	+ 2·2
		+ 9·83	−41·36	−163·26	−42·20	−163·32	+ 2·1
		+ 29·83	−44·10	−149·63	−44·80	−149·60	+ 1·8
		+ 49·83	−44·45	−134·86	−45·13	−134·79	+ 1·5
		+ 69·83	−42·43	−118·66	−43·01	−118·87	+ 1·1
		+ 89·83	−37·94	−101·64	−38·38	−101·55	+ 0·7
		+104·01	−33·20	− 88·10	−33·52	− 88·07	+ 0·5
7605	*r—t* 1987, März 29	− 86·50	−46·77	− 71·47	−47·18	− 71·53	− 0·8
		− 66·50	−44·41	− 52·34	−44·70	− 52·38	− 0·6
		− 46·50	−39·37	− 35·29	−39·45	− 35·30	− 0·3
		− 26·50	−31·48	− 20·93	−31·48	− 20·93	0·0
		− 6·50	−21·05	− 9·54	−21·10	− 9·51	+ 0·3
		+ 13·50	− 9·84	− 0·04	− 9·07	− 0·01	+ 0·4
		+ 33·50	+ 0·03	+ 9·02	− 0·03	+ 9·02	+ 0·2
		+ 53·50	+ 7·07	+ 22·22	+ 7·00	+ 22·23	− 0·2
		+ 74·50	+10·76	+ 39·09	+10·51	+ 37·71	− 0·5
		+ 90·63	+11·17	+ 53·57	+10·72	+ 53·63	− 0·8
7606	*r* 1987, Sept. 23	− 90·17	+40·59	+ 67·28	+44·89	+ 67·02	− 3·3
		− 70·17	+45·35	+ 86·50	+43·76	+ 86·08	− 3·4
		− 50·17	+41·49	+103·65	+39·66	+103·04	− 3·5
		− 30·17	+34·81	+118·27	+33·35	+118·15	− 3·7
		− 10·17	+25·36	+129·91	+23·66	+129·04	− 3·9
		+ 9·83	+14·23	+139·26	+12·87	+138·86	− 3·9

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
		+29°83	+3°30	+148°30	+2°04	+147°95	−3·8
		+49·83	−5·05	+159·63	−6·40	+159·33	−3·6
		+69·83	−10·29	+174·29	−11·85	+174·04	−3·4
		+89·66	−12·03	−167·34	−13·74	−167·59	−3·3
7007	*t* 1988. März 18	−90·07	−3·96	+85·83	−5·05	+86·03	+1·8
		−70·07	−2·32	+104·08	−3·00	+104·33	+2·4
		−50·07	+3·09	+118·88	+1·55	+119·23	+3·2
		−30·07	+11·86	+130·67	+10·11	+131·11	+3·6
		−10·07	+22·91	+140·87	+21·03	+141·31	+4·1
		+9·93	+34·07	+151·82	+32·25	+152·09	+3·8
		+29·93	+43·25	+165·27	+41·63	+165·31	+3·1
		+49·93	+49·60	−178·68	+48·21	−178·80	+2·6
		+69·93	+53·21	−166·65	+52·02	−166·84	+2·1
		+88·75	+54·44	−142·38	+53·39	−142·59	+1·8
7008	*r* 1988, Sept. 11	−90·08	+2·48	+44·65	−0·36	+43·97	−5·3
		−70·08	+2·04	+62·61	−0·60	+61·97	−5·8
		−50·08	−2·21	+76·71	−4·72	+76·04	−6·4
		−30·08	−10·02	+87·47	−12·55	+86·74	−7·1
		−10·08	−20·59	+96·30	−23·26	+95·62	−7·6
		+9·92	−31·65	+105·79	−34·78	+105·36	−7·7
		+29·92	−41·60	+118·16	−44·77	+128·13	−7·3
		+49·92	−49·10	+133·77	−51·66	+154·12	−6·6
		+69·92	−53·49	+151·83	−56·32	+152·43	−5·8
		+83·27	−55·04	+164·84	−57·88	+165·52	−5·3
7012	*t* 1990, Juli 22	−129·60	+61·19	+23·31	+59·21	+23·82	+1·5
		−109·60	+66·17	+42·30	+67·10	+43·04	+1·8
		−89·60	+73·91	+60·69	+71·96	+61·45	+2·0
		−69·60	+76·40	+79·11	+74·57	+79·76	+2·2
		−49·60	+77·40	+97·60	+75·61	+98·07	+2·3
		−29·60	+77·30	+115·99	+75·43	+116·26	+2·4
		−9·60	+76·03	+134·08	+74·00	+134·66	+2·5
		+10·40	+73·12	+151·48	+70·83	+151·11	+2·6
		+30·40	+67·78	+167·60	+65·17	+166·84	+2·7
		+50·40	+59·02	−178·13	+56·36	−179·15	+2·6
		+70·40	+47·02	−164·79	+45·27	−165·74	+2·3
		+90·40	+36·47	−149·50	+34·63	−150·17	+1·8
		+102·39	+31·08	−138·50	+29·55	−139·00	+1·5
7013	*r* 1991, Januar 15	−102·78	−28·43	+109·48	−31·71	+109·06	−5·6
		−82·78	−35·30	+128·05	−38·26	+127·50	−6·1
		−62·78	−39·56	+144·25	−42·28	+143·79	−6·6
		−42·78	−41·29	+158·90	−43·86	+158·63	−7·0
		−22·78	−40·57	+172·27	−43·07	+172·28	−7·6
		−2·78	−37·34	−175·55	−39·88	−175·25	−7·9
		+17·22	−31·52	−164·47	−34·18	−163·90	−7·8
		+37·22	−23·24	−153·77	−26·07	−153·02	−7·4
		+57·22	−13·36	−141·80	−16·37	−141·07	−6·7
		+77·22	−3·54	−126·56	−6·69	−126·00	−5·9
		+89·90	+1·88	−114·69	−1·33	−114·27	−5·6
7014	*t* 1991, Juli 11	−95·20	+13·68	−174·76	+11·65	−174·76	+3·4
		−75·20	+20·79	−156·43	+18·63	−156·33	+4·3
		−55·20	+25·27	−140·69	+23·04	−140·58	+5·3
		−35·20	+27·02	−126·75	+24·09	−126·72	+6·3
		−15·20	+26·01	−114·10	+23·59	−114·23	+7·0
		+4·80	+22·23	−102·37	+19·74	−102·07	+7·2
		+24·80	+15·76	−91·01	+13·23	−91·39	+6·6
		+44·80	+7·21	−78·82	+4·73	−79·14	+5·6
		+64·80	−2·65	−64·25	−4·96	−64·41	+4·3
		+84·74	−11·56	−46·20	−14·02	−46·20	+3·4

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
7615	r 1992, Januar 4	— 85°21	+13°32	+130°42	+ 0°43	+137°10	— 7·3
		— 65·21	+ 5·80	+154·40	+ 2·33	+154·84	— 8·4
		— 45·21	+ 1·32	+108·52	— 1·88	+108·83	— 9·8
		— 25·21	+ 0·11	+179·91	— 2·97	—179·80	— 11·1
		— 5·21	+ 2·24	—170·27	— 0·84	—169·97	— 11·7
		+ 14·79	+ 7·63	—160·71	+ 4·38	—160·46	— 11·1
		+ 34·79	+15·77	—149·72	+12·25	—149·67	— 9·7
		+ 54·79	+25·44	—135·48	+21·63	—135·81	— 8·3
		+ 74·52	+35·61	—117·36	+30·70	—118·16	— 7·3
7616	t 1992, Juni 30	— 72·32	— 34·43	— 56·58	— 36·66	— 57·34	+ 3·1
		— 52·32	— 26·86	— 38·69	— 29·48	— 39·27	+ 4·0
		— 32·32	— 22·86	— 24·32	— 25·58	— 24·73	+ 5·0
		— 12·32	— 22·07	— 12·15	— 25·72	— 12·40	+ 5·5
		+ 7·68	— 27·07	— 0·49	— 29·63	— 0·54	+ 5·3
		+ 27·68	— 35·25	+ 12·59	— 37·07	+ 12·79	+ 4·4
		+ 47·68	— 44·76	+ 28·73	— 47·07	+ 29·33	+ 3·5
		+ 57·66	— 50·12	+ 38·52	— 52·66	+ 39·27	+ 3·1
7620	r 1994, Mai 10	— 94·46	+15·14	—140·76	+12·46	—145·21	— 4·5
		— 74·46	+22·09	—128·83	+19·57	—128·16	— 4·9
		— 54·46	+26·41	—114·34	+27·08	—113·76	— 5·4
		— 34·46	+36·01	—101·89	+33·81	—101·35	— 5·8
		— 14·46	+41·07	— 89·99	+38·99	— 89·66	— 6·0
		+ 5·54	+44·33	— 77·74	+42·28	— 77·65	— 6·0
		+ 25·54	+45·66	— 64·73	+43·63	— 64·86	— 5·8
		+ 45·54	+45·19	— 50·81	+43·06	— 51·20	— 5·5
		+ 65·54	+42·83	— 35·76	+40·52	— 36·31	— 5·1
		+ 85·54	+38·58	— 19·13	+36·05	— 19·74	— 4·8
		+101·04	+33·91	— 4·04	+31·18	— 4·58	— 4·5
7621	t 1994, Nov. 3	— 92·19	— 7·47	— 96·66	— 8·88	— 96·37	+ 2·0
		— 72·19	—13·55	— 78·66	—15·28	— 79·01	+ 2·7
		— 52·19	—20·54	— 63·51	—22·56	— 64·00	+ 3·5
		— 32·19	—27·35	— 50·57	—29·53	— 51·02	+ 4·3
		— 12·19	—33·08	— 38·39	—35·31	— 38·72	+ 4·6
		+ 7·81	—37·12	— 25·92	—39·35	— 26·04	+ 4·6
		+ 27·81	—39·32	— 12·00	—41·47	— 12·50	+ 4·2
		+ 47·81	—39·61	+ 1·85	—41·65	+ 2·12	+ 3·9
		+ 67·81	—37·69	+ 17·66	—39·94	+ 18·00	+ 3·0
		+ 87·81	—34·50	+ 35·18	—36·30	+ 35·50	+ 2·3
		+ 99·81	—31·55	+ 46·75	—33·23	+ 47·00	+ 2·0
7622	r 1995, April 29	— 80·99	—30·32	—130·94	—32·04	—137·33	— 4·4
		— 60·99	—24·44	—118·05	—26·59	—118·85	— 4·8
		— 40·99	—17·59	—103·79	—19·58	—103·74	— 5·4
		— 20·99	—10·79	— 92·00	—12·58	— 91·88	— 6·0
		— 0·99	— 5·02	— 82·06	— 6·74	— 81·88	— 6·4
		+ 19·01	— 1·08	— 72·37	— 2·81	— 72·17	— 6·3
		+ 39·01	+ 0·59	— 61·51	— 1·18	— 61·31	— 5·8
		+ 59·01	— 0·17	— 48·37	— 2·05	— 48·15	— 5·2
		+ 79·01	— 3·20	— 32·07	— 5·36	— 31·76	— 4·6
		+ 88·33	— 5·36	— 23·21	— 7·05	— 22·83	— 4·4
7623	t 1995, Oct. 24	— 81·92	+34·80	+ 50·85	+34·55	+ 50·89	+ 0·4
		— 61·92	+29·93	+ 69·52	+29·48	+ 69·50	+ 0·9
		— 41·92	+23·73	+ 85·29	+23·10	+ 85·31	+ 1·4
		— 21·92	+16·94	+ 98·25	+16·19	+ 98·22	+ 2·0
		— 1·92	+10·66	+109·31	+ 9·79	+109·22	+ 2·4
		+ 18·08	+ 5·64	+119·87	+ 4·84	+119·76	+ 2·3
		+ 38·08	+ 2·68	+131·38	+ 1·99	+131·29	+ 1·9
		+ 58·08	+ 2·02	+144·95	+ 1·47	+144·88	+ 1·3
		+ 78·08	+ 3·71	+161·40	+ 3·35	+161·35	+ 0·7
		+ 88·88	+ 5·59	+171·68	+ 5·33	+171·64	+ 0·4

Nr.	Gattung und Datum der Finsterniss	Stundenwinkel	Nördliche Zone φ	Nördliche Zone λ	Südliche Zone φ	Südliche Zone λ	Dauer der Finsterniss auf der Curve der Centralität
							Minuten
7026	*t* 1907, März 9	84°66	+51°50	+ 90°02	+48°54	+ 91°50	+2·1
		64·66	+51·88	+107·00	+48·68	+109·30	+2·5
		− 44·66	+55·97	+122·37	+52·19	+123·80	+2·0
		24·66	+63·22	+135·49	+58·78	+130·61	+2·9
		4·66	+72·14	+150·05	+66·95	+150·45	+2·7
		+ 15·34	+79·95	+167·69	+74·52	+167·03	+2·3
		+ 35·34	+84·18	172·71	+79·65	−174·08	+2·1
		+ 49·87	+85·69	158·14	+81·83	159·70	+2·0
7028	*t* 1908, Febr. 26	− 90·33	1·77	− 144·33	− 2·68	−144·24	+1·6
		70·33	− 3·62	−125·97	4·72	−125·87	+2·3
		− 50·33	− 3·28	110·61	4·54	−110·49	+3·1
		30·33	− 0·70	− 97·71	2·12	− 97·58	+3·9
		10·33	+ 3·82	− 86·56	+ 2·33	− 86·38	+4·5
		+ 9·67	+ 9·79	− 75·88	+ 8·29	− 75·71	+4·3
		+ 29·67	+10·35	− 64·24	+14·95	− 64·16	+3·7
		+ 49·67	+22·60	− 50·43	+21·33	− 50·45	+2·8
		+ 69·67	+27·66	− 33·85	+26·66	− 33·83	+2·1
		+ 85·03	+30·45	− 19·25	+29·54	− 19·33	+1·6
7029	*r* 1908, Aug. 22	− 89·82	− 0·20	+ 86·08	− 1·59	+ 86·79	−2·7
		− 69·82	+ 2·88	+105·12	+ 1·72	+104·99	−2·8
		− 49·82	+ 3·75	+119·93	+ 2·74	+119·83	−2·9
		− 29·82	+ 2·31	+132·06	+ 1·20	+131·94	−3·0
		− 9·82	− 1·30	+142·41	− 2·18	+142·30	−3·1
		+ 10·18	− 0·75	+152·17	− 7·64	+152·08	−3·1
		+ 30·18	−13·30	+162·90	−14·29	+162·84	−2·9
		+ 50·18	−20·00	+176·02	−21·15	+176·04	−2·8
		+ 70·18	−25·90	−167·05	−27·21	−167·53	−2·7
		+ 83·16	−28·06	−155·34	−30·37	−155·16	−2·7
7030	*r* 1909, Febr. 16	−101·14	−41·05	+ 7·86	−41·82	+ 7·70	−1·2
		− 81·14	−44·79	+ 26·79	−45·38	+ 26·64	−1·0
		− 61·14	−46·73	+ 43·94	−47·18	+ 43·85	−0·9
		− 41·14	−46·91	+ 59·68	−47·24	+ 59·68	−0·7
		− 21·14	−45·30	+ 74·16	−45·54	+ 74·15	−0·6
		− 1·14	−41·89	+ 87·40	−42·09	+ 87·43	−0·5
		+ 18·86	−36·78	+ 99·68	−36·98	+ 99·72	−0·5
		+ 38·86	−30·30	+111·69	−30·57	+111·76	−0·6
		+ 58·86	−21·75	+124·39	−22·16	+124·50	−0·8
		+ 78·86	−16·79	+140·46	−17·40	+140·61	−1·0
		+ 93·91	−13·08	+153·67	−13·83	+153·82	−1·2
7031	*t* 1909, Aug. 11	−103·61	+41·21	− 64·92	+40·57	− 64·77	+0·9
		− 83·61	+46·09	− 46·06	+45·33	− 45·87	+1·3
		− 63·61	+49·17	− 28·91	+48·29	− 28·70	+1·6
		− 43·61	+50·45	− 12·95	+49·48	− 12·79	+2·0
		− 23·61	+49·98	+ 2·03	+48·92	+ 2·10	+2·3
		− 3·61	+47·73	+ 16·10	+46·61	+ 16·03	+2·6
		+ 16·39	+43·67	+ 29·30	+42·50	+ 29·09	+2·6
		+ 36·39	+37·87	+ 42·01	+36·73	+ 41·72	+2·3
		+ 56·39	+30·86	+ 55·20	+29·84	+ 54·91	+1·9
		+ 76·39	+23·59	+ 70·33	+22·77	+ 70·14	+1·4
		+ 94·88	+17·66	+ 87·23	+17·06	+ 87·09	+0·9

Auf Grund dieser Daten dürfte es kaum mehr schwierig sein, sich ein Bild über den Verlauf der centralen Verfinsterung der hier publicirten Finsternisse zu schaffen. Dessenungeachtet wird es wohl jedem der Leser willkommen sein, dies in den folgenden Blättern besprochen zu finden. Ich bemerke nur nochmals, dass sich die hier folgenden Angaben nur auf die Centralität der Verfinsterungen beziehen.

t. **1900, Mai 28.** Geht vom grossen Ocean (Revilla Gigedo-Ins.) über Amerika (Mexico, G. v. Mexico, Vereinigte Staaten [Washington]), dem atlantischen Ocean nach Europa (Portugal, Spanien) dem mittelländischen Meere und dem nördlichen Afrika.

r. **1900, November 22.** Geht vom atlantischen Ocean über Südafrika, dem indischen Ocean nach Australien.

t. **1901, Mai 18.** Die Finsterniss ist sichtbar im indischen Ocean, auf den Sunda-Inseln (Sumatra, Borneo, Celebes) und in Neu Guinea.

r. **1901, November 11.** Die Finsterniss wird im mittelländischen Meere, nördlichen Afrika (Ägypten), rothen Meere, Arabien, indischen Ocean, Ceylon, Siam, Annam, süd-chinesischen Meere und auf den Phillippinen sichtbar sein.

r. **1903, März 29.** Wird in Asien (Turkestan, Mongolei, Ostsibirien) und dem nördlichen Eismeere sichtbar sein.

t. **1903, September 21.** Fällt ganz ins Meer [indischen Ocean und nördliches Eismeer].

r. **1904, März 17.** Wird sichtbar sein in Afrika, indischen Ocean, Asien (malaische Halbinsel, Siam, Annam) und im grossen Ocean. Auch diese Finsterniss fällt zum grössten Theile ins Meer.

t. **1904, September 9.** Geht durch den grossen Ocean bis an die Westküste Südamerikas.

r. **1905, März 6.** Wird im indischen und grossen Ocean, Australien (Süd-Australien, Queensland) und Neu-Caledonien sichtbar sein.

t. **1905, August 30.** Wird in Nordamerika (Canada, Labrador), auf dem atlantischen Ocean, in Europa (nördlicher Theil von Spanien) mittelländischem Meere, nördlichem Afrika (Algier, Tripolis, Ägypten) und südlichem Arabien sichtbar sein.

t. **1907, Jauuar 14.** Wird in Russland (Astrachan), ganz Centralasien sichtbar sein.

r. **1907, Juli 10.** Geht vom grossen Ocean über den mittleren Theil von Südamerika und wird auch im atlantischen Ocean sichtbar sein.

t. **1908, Jauuar 3.** Fällt in den grossen Ocean.

r. **1908, Juni 28.** Geht vom grossen Ocean über Amerika (Mexico, G. v. Mexico, Florida), dem atlantischen Ocean nach Afrika.

r—t. **1908, December 23.** Wird in Südamerika als *r.* sichtbar sein, fällt aber sonst ins Meer.

t. **1909, Juni 17.** Wird in Sibirien, dem nördlichen Eismeer und auf Grönland sichtbar sein.

t. **1911, April 28.** Geht von Australien (Victoria) über den grossen Ocean bis an die Küste Mittelamerikas und wird auch auf den Norfolt-Ins. in der Dauer von mehr denn 3 Zeitminuten und auf mehreren anderen Inseln Polynesiens sichtbar sein.

r. **1911, October 22.** Wird auf einem grossen Theile Asiens (Wüste Kisil Kum, Wüste Gobi, Tibet, China), auf den Inseln Hainan, Palawan und Neu-Guinea, sowie auf andern Inseln des grossen Oceans sichtbar sein.

r—t. **1912, April 17.** Geht vom nördlichen Theile Südamerikas, woselbst sie als *r.* sichtbar sein wird, über den atlantischen Ocean nach Europa und von da nach Asien. In Europa wird diese Finsterniss im südlichen Theile Portugals sowie im nordwestlichen Spanien als *t.*, dagegen in Frankreich, Belgien, Holland, Deutschland, auf der Ostsee und ganzen nördlichen Russland als *r.* sichtbar sein.

t. **1912, October 10.** Wird im atlantischen Ocean, Südamerika (in der Dauer von mehr denn 2 Zeitminuten) und auf dem grossen Ocean sichtbar sein.

t. **1914, August 21.** Wird im nördlichen Eismeere, auf Skandinavien, im Bottn. Meerbusen, auf der Ostsee (Alands-Ins., Ins. Daga, Ins. Ösel), dem B. v. Riga, in Russland [von Riga südwärts bis zum asow. Meer], auf dem schwarzen Meere und Asien (Klein-Asien und Persien) sichtbar sein.

r. **1915, Februar 14.** Wird im indischen Ocean, Australien (West-Australien, Tasman-Land) auf Inseln der Harafura See, auf Neu-Guinea und im stillen Ocean (Carolinen Ins.) sichtbar sein.

r. **1915, August 10.** Fällt in den grossen Ocean.

t. **1916, Februar 3.** Wird im grossen Ocean (Galapagos-Ins.), Südamerika (Columbien, Venezuela mit Dauer von 3 Zeitminuten) und im atlantischen Ocean (westindischen Inseln) sichtbar sein.

r. **1916, Juli 30.** Geht vom indischen Ocean über Australien, der Insel Tasmania nach dem südlichen Eismeere.

r. **1917, December 14.** Fällt in das südliche Eismeer.

t. **1918, Juni 8.** Wird im grossen Ocean, südlichem Theil Nordamerikas (Vereinigte Staaten, Halbinsel Florida) und dem westlichen Theil des atlantischen Oceans sichtbar sein.

r. **1918, December 3.** Geht vom grossen Ocean über Südamerika (Argentinien), dem atlantischen Ocean zur Westküste Südafrikas.

t. **1919, Mai 29.** Wird in Südamerika (Peru, Brasilien mit Dauer von 4 Zeitminuten), atlantischen Ocean und Afrika sichtbar sein.

r. **1919, November 22.** Wird in den Vereinigten Staaten, G. v. Mexico, den Antillen, auf Venezuela, dem atlantischen Ocean und nördlichen Afrika sichtbar sein.

r. **1922, März 28.** Wird in Südamerika (Peru, Brasilien), im atlantischen Ocean, in Nord-Afrika, im rothen Meere und Arabien sichtbar sein.

t. **1922, September 21.** Geht von der Ostküste Afrikas über den indischen Ocean (Malediven) nach Australien (durchschneidet diesen Welttheil in der Richtung von Nordwest [Grey-Fluss] nach Ost [Clarence]) und wird auch im grossen Ocean sichtbar sein. In Australien wird die Verfinsterung eine mittlere Dauer von 4 Minuten haben, indem sie beim Eintritt in den Continent eine Dauer von etwa 6·2 Zeitminuten und beim Austritt aus demselben noch eine Dauer von 2·8 Zeitminuten haben wird.

r. **1923, März 17.** Wird in Südamerika (Patagonien), im atlantischen Ocean, Südafrika und indischen Ocean (Madagaskar) sichtbar sein.

t. **1923, September 10.** Geht über den grossen Ocean nach Amerika (Nieder-Californien [Dauer = 3·8 Minuten], Mexico, Yucatan) und dem atlantischen Ocean. In Amerika wird die Verfinsterung eine mittlere Dauer von 3 Zeitminuten haben.

t. **1925, Januar 24.** Wird in Nordamerika (Vereinigte Staaten [New-York mit Dauer von uber 2·6 Minuten]) und im atlantischen Ocean sichtbar sein.

r. **1925, Juli 20.** Fällt in den grossen Ocean.

t. **1926, Januar 14.** Wird in Centralafrika, dem indischen Ocean, den Sundainseln (Sumatra, Borneo) und auf den Philippinen (Mandanao) sichtbar sein.

r. **1926, Juli 9.** Fällt in den grossen Ocean.

r—t. **1927, Januar 3.** Fällt zum grössten Theile in den grossen Ocean und wird in Südamerika als *r.* sichtbar sein.

t. **1927, Juni 29.** Diese Finsterniss wird in England, auf der Halbinsel Skandinavien (welche in ihrer ganzen Längenrichtung von Süden nach Norden hin durchschnitten wird), auf dem nördlichen Eismeere und im nordöstlichen Theile von Sibirien sichtbar sein. Ihre mittlere Dauer beträgt in Europa etwas mehr als 0·5 Zeitminuten.

t. **1929, Mai 9.** Fällt grösstentheils ins Meer (indischer Ocean) und wird auf Sumatra, der Halbinsel Mala und den Philippinen sichtbar sein. Die Verfinsterung erreicht auf Sumatra und Mala eine Dauer von mehr als 5 Minuten.

r. **1929, November 1.** Wird im atlantischen Ocean, in Nord- und Centralafrika, sowie im indischen Ocean sichtbar sein.

r—t. **1930, April 28.** Wird im grossen Ocean, Nordamerika (Vereinigte Staaten [als *t.*], Labrador) und atlantischen Ocean sichtbar sein.

t. **1930, October 21.** Fällt in den grossen Ocean und wird auch an der Westküste Patagoniens sichtbar sein.

t. **1932, August 31.** Wird im nördlichen Eismeere, Nordamerika (Canada, Vereinigte Staaten [Boston]) und im atlantischen Ocean sichtbar sein.

r. **1933, Februar 24.** Geht vom grossen Ocean über Südamerika (Chile, Patagonien), dem atlantischen Ocean, nach Centralafrika bis in den indischen Ocean.

r. **1933, August 21.** Wird in Tripolis, im levantischen Meere, in Asien (Palästina, Syrien, Persien, Afghanistan, Hindostan, Siam, Borneo, Ins. Timor) und in Australien (Nord-Australien, Queensland) sichtbar sein.

t. **1934, Februar 14.** Wird auf Borneo und Celebes sichtbar sein: die Finsterniss fällt aber zum grössten Theil ins Meer (grosser Ocean).

r. **1934, August 10.** Die Verfinsterung wird im atlantischen Ocean, in Südafrika und im südlichen Eismeere sichtbar sein.

t. **1936, Juni 19.** Wird im südlichen Europa (Griechenland [Dauer = 1 Minute], ägeisches Meer, Dardanellen, Marmara-Meer, Bosporus [Constantinopel], schwarzes Meer, Russland [Astrachan]), in Asien (vom schwarzen Meere bis an die Ostküste Asiens, sowie auf Jn. Jeso) und im grossen Ocean sichtbar sein.

r. **1936, December 13.** Geht über ganz Australien und auf dem grossen Ocean.

t. **1937, Juni 8.** Fällt zum grössten Theile in den grossen Ocean und endet im nördlichen Südamerika (Peru) mit Dauer von 3·5 Zeitminuten.

r. **1937, December 2.** Geht über den grossen Ocean.

t. **1938, Mai 29.** Die Finsterniss wird im südlichen Theil des atlantischen Oceans und im südlichen Eismeer sichtbar sein.

r. **1939, April 19.** Wird in Nordamerika (Alaska) und im nördlichen Eismeere sichtbar sein.

r. **1940, April 7.** Wird in einem grossen Theile des grossen Oceans, in Nordamerika (Nieder-Californien, Mexico, Vereinigte Staaten) und im atlantischen Ocean sichtbar sein.

t. **1940, October 1.** Die Verfinsterung geht über Südamerika (Columbia, Brasilien, mit einer mittleren Dauer von 5 Minuten), atlantischen Ocean, Südspitze Afrikas und indischen Ocean.

r. **1941, März 27.** Fällt zum grossen Theile in den grossen Ocean und wird in Amerika (Peru, Bolivien und Brasilien) sichtbar sein.

t. **1941, September 21.** Durchschneidet ganz Asien in der Richtung vom Kaukasus bis zum ostchin. Meer und geht noch über einen grossen Theil des grossen Oceans. Die Finsterniss hat in China eine Dauer von mehr denn 3 Minuten

t. **1943, Februar 4.** Geht von Asien (Mandschurei, Sibirien, Insel Jeso) über den grossen Ocean nach Nordamerika (Alaska).

r. **1943, August 1.** Fällt ganz ins Meer.

t. **1944, Januar 25.** Wird im grossen Ocean, Südamerika (Peru, Brasilien [Dauer fast 4 Minuten]), atlantischen Ocean und in Nordafrika sichtbar sein.

r. **1944, Juli 20.** Geht von Afrika über den indischen Ocean nach Asien (Dekhan, Mb. v. Bengalen, Hinterindien, Ins. Palawan)

r—*t*. **1945, Januar 14.** Fällt zum grössten Theile ins Meer und wird nur an der Südspitze Afrikas, im Nordwesten der Insel Tasmania und einigen kleineren Inseln des grossen Oceans sichtbar sein.

t. **1945, Juli 9.** Wird in Nordamerika (Vereinigte Staaten, Brit. Amerika), Grönland, nördl. Eismeer, Europa (Skandinavien [Dauer mehr denn 1 Minute], Russland) und Asien (Kirgisen-Steppe) sichtbar sein.

t. **1947, Mai 20.** Wird in Südamerika (Argentinien, Paraguay, Brasilien), atlantischen Ocean und Afrika sichtbar sein.

r—*t*. **1948, Mai 9.** Geht vom indischen Ocean über Hinterindien, China, Korea nach dem grossen Ocean. In Schanghai sowie auf Korea erscheint die Finsterniss als *t*.

t. **1948, November 1.** Wird in Central-Afrika und indischen Ocean sichtbar sein.

r. **1951, März 7.** Geht von Neu-Seeland über den grossen Ocean nach Central-Amerika und den atlantischen Ocean.

r. **1951, September 1.** Wird in Nordamerika, atlantischen Ocean, Afrika und Madagaskar sichtbar sein.

t. **1952, Februar 25.** Geht vom atlantischen Ocean über ganz Afrika in der Richtung von West nach Nordost (hat in Nubien eine Dauer von 3·5 Minuten), Arabien, Persien, Wüste Kara Kum, Wüste Kisil Kum und endet in Sibirien.

r. **1952, August 20.** Die Zone geht vom grossen Ocean über Südamerika nach dem atlantischen Ocean.

t. **1954, Juni 30.** Wird in Nordamerika [Vereinigte Staaten, Canada, Labrador], Grönland, auf Ins. Island [Dauer 2·5 Minuten], Skandinavien [Dauer 2·7 Minuten], in der Ostsee, Deutschland [Königsberg i. Pr. mit Dauer von mehr denn 2·5 Minuten], Russland, Asien [vom kaspischen Meer über Turkestan, Afghanistan bis nach Hindostan] sichtbar sein.

r. **1954, December 25.** Die Zone wird im indischen Ocean und Südspitze Afrikas sichtbar sein.

t. **1955, Juni 20.** Wird im indischen Ocean [Ins. Ceylon (Dauer über 4 Minuten), Angdamanen (Dauer nahezu 6 Minuten), Hinterindien, Ins. Lucon (Dauer über 7 Minuten)] sichtbar sein.

r. **1955, December 14.** Geht von Afrika über den indischen Ocean [Hinterindien].

t. **1956, Juni 8.** Fällt in das südliche Eismeer.

r. **1958, April 19.** Geht vom indischen Ocean über Hinterindien in den grossen Ocean.

t. **1958, October 12.** Wird im grossen Ocean sichtbar sein und endet in Südamerika [Argentinien] mit Dauer von über 2 Minut.

r. **1959, April 8.** Geht vom indischen Ocean über Australien nach dem grossen Ocean.

t. **1959, October 2.** Wird im atlantischen Ocean, Afrika [von den canarischen Inseln bis zur Halbinsel Somâl] sichtbar sein.

t. **1961, Februar 15.** Wird in Europa [Frankreich, Italien, Österreich (Pola mit Dauer von 2·5 Minuten), dem nördlichen Theile der Balkan-Halbinsel und Russland] und Asien [Sibirien] sichtbar sein.

r. **1961, August 11.** Fällt in das südliche Eismeer.

t. **1962, Februar 5.** Wird im grossen Ocean [Insel Celebes, Neu-Guinea mit Dauer von 3 Minuten] sichtbar sein.

r. **1962, Juli 31.** Geht von Südamerika über den atlantischen Ocean nach Afrika und Insel Madagaskar.

r. **1963, Januar 25.** Wird in Südamerika und Südafrika sichtbar sein, wird aber zum grössten Theile ins Meer fallen

t. **1963, Juli 20.** Wird auf dem grossen Ocean und Südamerika sichtbar sein.

t. **1965, Mai 30.** Fällt in den grossen Ocean.

r. **1965, November 23.** Wird in Asien [Vorder- und Hinter-Indien, Borneo, Celebes] und auf Neu-Guinea sichtbar sein.

r—t. **1966, Mai 20.** Geht vom atlantischen Ocean über Nordwest-Afrika nach Europa [Griechenland, woselbst sie total ist], von da über Kleinasien nach Centralasien.

t. **1966, November 12.** Geht vom grossen Ocean über Südamerika [Bolivien, Argentinien und Brasilien mit Dauer von 2 Minuten] nach dem atlantischen Ocean.

r. **1969, März 18.** Fällt in den indischen Ocean und geht über die Südseeinseln in den grossen Ocean.

r. **1969, September 11.** Fällt zum grossen Theile in den grossen Ocean und wird auch in Südamerika [Brasilien] sichtbar sein.

t. **1970, März 7.** Wird im grossen Ocean, Amerika [Mexico mit Dauer von mehr denn 3·5 Minuten, Florida, Neu-Braunschweig, Neu-Fundland] und im atlantischen Ocean sichtbar sein.

r. **1970, August 31.** Fällt in den grossen Ocean.

t. **1972, Juli 10.** Geht von Nordosten Asiens [Insel Sachalin, Halbinsel Kamtschatka] in das nördliche Eismeer, nach Nordamerika [Labrador und Neu-Fundland] und dem atlantischen Ocean.

r. **1973, Januar 4.** Geht vom grossen Ocean über Südspitze Amerikas in den atlantischen Ocean. Die Finsterniss fällt zum grössten Theile ins Meer.

t. **1973, Juni 30.** Wird in Südamerika, atlantischen Ocean und Afrika sichtbar sein.

r. **1973, December 24.** Geht vom grossen Ocean über Südamerika und dem atlantischen Ocean nach Afrika.

t. **1974, Juni 20.** Wird im indischen Ocean und auf der Südwestspitze Australiens sichtbar sein.

r. **1976, April 29.** Wird im atlantischen Ocean, Afrika, Europa [Griechenland], Kleinasien und Centralasien sichtbar sein.

t. **1976, October 23.** Geht von Afrika über indischen Ocean nach Australien und grossen Ocean.

r. **1977, April 18.** Wird im atlantischen Ocean, Afrika und indischen Ocean sichtbar sein.

t. **1977, October 12.** Wird im grossen Ocean und Südamerika [Venezuela] sichtbar sein.

t. **1979, Februar 26.** Geht vom grossen Ocean über Nordamerika [Vereinigte Staaten und brit. Amerika] zum nördlichen Eismeer.

t. **1980, Februar 16.** Wird im atlantischen Ocean, Afrika, indischen Ocean, Vorder- und Hinter-Indien sichtbar sein.

r. **1980, August 10.** Wird zum grössten Theile im grossen Ocean, ausserdem noch in Südamerika sichtbar sein.

r. **1981, Februar 4.** Fällt in den grossen Ocean [Insel Tasmania].

t. **1981, Juli 31.** Wird in Asien [vom schwarzen Meere bis zur Insel Sachalin] und im grossen Ocean sichtbar sein.

t. **1983, Juni 11.** Wird im indischen Ocean [Insel Java mit Dauer von über 5 Minuten, Neu-Guinea] sichtbar sein.

r. **1983, December 4.** Wird im atlantischen Ocean und Afrika sichtbar sein.

r—t. **1984, Mai 30.** Geht vom grossen Ocean über Amerika [Mexico, Vereinigte Staaten] und atlantischen Ocean nach Afrika.

t. **1984, November 22.** Fällt in den grossen Ocean.

r—t. **1987, März 29.** Geht von der Südspitze Amerikas über den atlantischen Ocean nach Afrika.

r. **1987, September 23.** Wird in Asien und grossen Ocean sichtbar sein.

t. **1988, März 18.** Wird im indischen Ocean [Sumatra, Borneo mit Dauer von über 2 Minuten und Philippinen] und grossen Ocean sichtbar sein.

r. **1988, September 11.** Fällt ganz ins Meer [indischen Ocean und südliches Eismeer].

t. **1990, Juli 22.** Wird im nördlichen Europa [Finnland, Halbinsel Kola], nördlichen Eismeer und atlantischen Ocean sichtbar sein.

r. **1991, Januar 15.** Wird im grossen Ocean [Insel Tasmania, Neu-Seeland] sichtbar sein.

t. **1991, Juli 11.** Wird im grossen Ocean [Insel Hawaii] und Amerika [Mexico, Mittelamerika und Brasilien] sichtbar sein.

r. **1992, Januar 4.** Fällt ganz ins Meer [grossen Ocean].

t. **1992, Juni 30.** Fällt in den atlantischen Ocean.

r. **1994, Mai 10.** Geht vom grossen Ocean über Amerika [Californien, Vereinigte Staaten] zum atlantischen Ocean.

t. **1994, November 3.** Wird im grossen Ocean, Südamerika und atlantischen Ocean sichtbar sein.

r. **1995, April 29.** Geht vom grossen Ocean über Brasilien in den atlantischen Ocean.

t. **1995, October 24.** Wird in Asien (Vorder- und Hinter-Indien) und auf dem grossen Ocean sichtbar sein.

t. **1997, März 9.** Wird im nordöstlichen Asien und im nördlichen Eismeer sichtbar sein.

t. **1998, Februar 26.** Geht vom grossen Ocean über Panama in den atlantischen Ocean.

r. **1998, August 22.** Wird auf den Südseeinseln [Sumatra, Borneo] und anderen Inseln des grossen Oceans sichtbar sein.

r. **1999, Februar 16.** Geht über den indischen Ocean nach Australien und grossen Ocean.

t. **1999, August 11.** Wird im atlantischen Ocean, Europa [südliche Spitze Grossbritanniens, Frankreich, Deutsches Reich, Österreich (nächst Wien mit Dauer von 26 Minuten), Ungarn, Rumänien], Asien [Klein-Asien, Persien, Vorder-Indien] sichtbar sein.

Und nun möge noch folgende nach den 5 Erdtheilen geordnete statistische Zusammenstellung folgen.

Asien	Afrika	Europa	Amerika	Australien
1901 V. 18. total	1900 V. 28. total	1900 V. 28. total	1900 V. 28. total	1900 XI. 22. ringf.
1901 XI. 11. ringf.	1900 XI. 22. ringf.	1905 VIII. 30. total	1905 VIII. 30. total	1901 V. 18. total
1903 III. 29. ringf.	1901 XI. 11. ringf.	1907 I. 14. total	1907 VII. 10. ringf.	1905 III. 6. ringf.
1904 III. 17. ringf.	1904 III. 17. ringf.	1912 IV. 17. r—t.	1908 VI. 28. ringf.	1911 IV. 28. total
1905 VIII. 30. total	1905 VIII. 30. total	1914 VIII. 21. total	1908 XII. 23. ringf.	1911 X. 22. ringf.
1907 I. 14. total	1908 VI. 28. ringf.	1927 VI. 29. total	1912 IV. 17. ringf.	1915 II. 14. ringf.
1909 VI. 17. total	1919 V. 29. total	1936 VI. 19. total	1912 X. 10. total	1916 VII. 30. ringf.
1911 X. 22. ringf.	1919 XI. 22. ringf.	1945 VII. 9. total	1916 II. 3. total	1922 IX. 21. total
1912 IV. 17. ringf.	1922 III. 28. ringf.	1954 VI. 30. total	1918 VI. 8. total	1933 VIII. 21. ringf.
1914 VIII. 21. total	1923 III. 17. ringf.	1961 II. 15. total	1918 XII. 3. ringf.	1936 XII. 13. ringf.
1922 III. 28. ringf.	1926 I. 14 total	1966 V. 20. total	1919 V. 29. total	1945 I. 14. ringf.
1926 I. 14. total	1929 XI. 1. ringf.	1976 IV. 29. ringf.	1919 XI. 22. ringf.	1959 IV. 8. ringf.
1927 VI. 29. total	1933 II. 24. ringf.	1990 VII. 22. total	1922 III. 28. ringf.	1962 II. 5. total
1929 V. 9. total	1933 VIII. 21. ringf.	1999 VIII. 11. total	1923 III. 17. ringf.	1965 XI. 23. ringf.
1933 VIII. 21. ringf.	1934 VIII. 10. ringf.		1923 IX. 10. total	1974 VI. 20. total
1934 II. 14. total	1940 X. 1. total		1925 I. 24. total	1976 X. 23. total
1936 VI. 19. total	1944 I. 25. total		1927 I. 3. ringf.	1981 II. 4. ringf.
1941 IX. 21. total	1944 VII. 20. ringf.		1930 IV. 28. r—t.	1983 VI. 11. total
1943 II. 4. total	1945 I. 14. r—t.		1932 VIII. 31. total	1991 I. 15. ringf.
1944 VII. 20. ringf.	1947 V. 20. total		1933 II. 24. ringf.	1999 II. 16. ringf.
1945 VII. 9. total	1948 XI. 1. total		1937 VI 8. total	
1948 V. 9. r—t.	1951 IX. 1. ringf.		1939 IV. 19. ringf.	
1952 II. 25. total	1952 II. 25. total		1940 IV. 7. ringf.	
1954 VI. 30. total	1954 XII. 25. ringf.		1940 X. 1. total	
1955 VI. 20. total	1955 XII. 14. ringf.		1941 III. 27. ringf.	
1955 XII. 14. ringf.	1959 X. 2. total		1943 II. 4 total	
1958 IV. 19. ringf.	1962 VII. 31. ringf.		1944 I. 25. total	
1961 II. 15. total	1963 I. 25. ringf.		1945 VII. 9. total	
1962 II. 5. total	1966 V. 20. ringf.		1947 V. 20. total	
1965 XI. 23. ringf.	1973 VI. 30. total		1951 III. 7. ringf.	
1966 V. 20. ringf.	1973 XII. 24. ringf.		1951 IX. 1. ringf.	
1969 III. 18. ringf.	1976 IV. 29. ringf.		1952 VIII. 20. ringf.	
1972 VII. 10. total.	1976 X. 23. total		1954 VI. 30. total	
1976 IV. 29. ringf.	1977 IV. 18. ringf.		1958 X. 12. tota	
1980 II. 16. total	1980 II. 16. total		1962 VII. 31. ringf.	
1981 VII. 31. total	1983 XII. 4. ringf.		1963 I. 25. ringf.	
1983 VI. 11. total	1984 V. 30. ringf.		1963 VII. 20. total	
1987 IX. 23. ringf.	1987 III. 29. ringf.		1966 XI. 12. total	
1988 III. 18. total			1969 IX. 11. ringf.	
1995 X. 24. total			1970 III. 7. total	
1997 III. 9. total			1972 VI. 10. total	
1998 VIII. 22 ringf.			1973 I. 4. ringf.	
1999 VIII. 11. total			1973 VI. 30. total	
			1973 XII. 24. ringf.	
			1977 X. 12. total	
			1979 II. 26. total	
			1980 VIII. 10. ringt.	
			1984 V. 30. ringf.	
			1991 VII. 11. total	
			1994 V. 10. ringf.	
			1994 XI. 3. total	
			1995 IV. 29. ringf.	
			1998 II. 26. total	

Von diesen durch Europa gehenden Centralitäts-Zonen werden nur 2 durch Österreich gehen. Es sind dies: t., 1961. II. 15. und t., 1999. VIII. 11., von denen die letztere in der Nähe von Wien (Dauer der Totalität = 2·6 Minuten) sichtbar sein wird.

ZUR

THEORIE EINES SIMULTANEN SYSTEMS DREIER BINÄRER CUBISCHER FORMEN,

VON

DR. B. IGEL,

DOCENT AN DER K. K. TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN WIEN

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 15. DECEMBER 1881

Folgende Abhandlung ist die Fortsetzung meiner Arbeit[1] „Über ein Princip zur Erzeugung von Covarianten". Daselbst habe ich für ein System dreier binärer cubischer Formen zwei Systeme simultaner Covarianten aufgestellt, von denen das eine neun von der zweiten Ordnung und vom vierten Grade, das andere neun von der sechsten Ordnung und vom achten Grade enthält. Von dem Ersteren zeigte ich schon dort, dass sie sich aus bereits bekannten Formen zusammensetzen. Was das Letztere betrifft, so führte mich der Umstand, dass einerseits sechs derselben nur die Coëfficienten je zweier Grundformen enthalten, dieselben also nur simultane Covarianten eines Systems von zwei cubischen Formen sind, und dass andererseits zwei cubische Formen keine Covarianten von dieser Ordnung und diesem Grade besitzen, darauf, dass die Covarianten desselben ebenfalls zerlegbar sein müssen. Wie aber die Zerlegung durchzuführen ist und ob auch die übrigen drei, welche simultane Covarianten eines Systems dreier cubischer Formen sind, sich auf niedere Covarianten zurückführen lassen, konnte ich dort nicht ermitteln. Ebenso habe ich dort für dasselbe System von Formen vierundachtzig Invarianten vom zwölften Grade aufgestellt und auch von diesen konnte ich nur drei auf niedere Invarianten zurückführen. Erst in der letzten Zeit ist es mir durch eine andere Auffassung der dort zu Grunde gelegten Formen gelungen, eine Lösung eines Theiles der erwähnten Fragen zu erlangen.

Betreffs der Covarianten gibt die Lösung die vollständige Durchführung der Zerlegung der sechs Covarianten, welche, wie schon erwähnt, einem System von nur zwei Grundformen angehören. Von den übrigen drei, welche simultane Covarianten eines Systems von drei Grundformen sind, konnte ich bis jetzt keine Gewissheit erlangen, ob dieselben in niedere Covarianten zerlegbar sind oder nicht. Die Art der erwähnten Lösung scheint darauf zu führen, dass dieselben fundamentale Covarianten sind. In Bezug der erwähnten vierundachtzig Invarianten gibt die Lösung von sechs derselben ihre Zurückführung auf niedere Invarianten und von den übrigen die Zerlegung gewisser Summen je dreier derselben. Diese letzteren Beziehungen sind keineswegs als

[1] Denkschriften der mathem.-naturw. Cl. XLVI. Bd.

erschöpft zu betrachten, aber ich glaube, dass die Methode, welche zu ihnen geführt hat, hinreicht, um die noch etwa vorhandenen Beziehungen zu ermitteln. Damit habe ich in Kürze das Ziel folgender Arbeit gezeichnet.

Schon an dieser Stelle will ich darauf aufmerksam machen, dass in Folge der in dieser Arbeit erlangten Resultate sich die geometrische Interpretation in §. 10 der citirten Arbeit als unrichtig erweist. Ich werde darauf, wie sie in Wirklichkeit zu lauten hat, an anderer Stelle zurückkommen.

§. 1.

Sind:

$$f_1(x_1 x_2) = a_0 x_1^n + \frac{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n$$

$$f_2(x_1 x_2) = b_0 x_1^n + \frac{n}{1} b_1 x_1^{n-1} x_2 + \frac{n(n-1)}{1.2} b_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + b_n x_2^n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n(x_1 x_2) = c_0 x_1^n + \frac{n}{1} c_1 x_1^{n-1} x_2 + \frac{n(n-1)}{1.2} c_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + c_n x_2^n$$

n binäre Formen der $n$ten Ordnung und bildet man die Combinante:[1]

1) $$M = \begin{vmatrix} \frac{d^{n-1} f_1}{dx_1^{n-1}} & \frac{d^{n-1} f_1}{dx_1^{n-2}\, dx_2} & \ldots & \frac{d^{n-1} f_1}{dx_2^{n-1}} \\ \frac{d^{n-1} f_2}{dx_1^{n-1}} & \frac{d^{n-1} f_2}{dx_1^{n-2}\, dx_2} & \ldots & \frac{d^{n-1} f_2}{dx_2^{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d^{n-1} f_n}{dx_1^{n-1}} & \frac{d^{n-1} f_n}{dx_1^{n-2}\, dx_2} & \ldots & \frac{d^{n-1} f_n}{dx_2^{n-1}} \end{vmatrix}$$

so lässt sich M, wenn n ungerade ist, linear durch die f ausdrücken, so dass es etwa folgende Form hat:

2) $$M = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n$$

Für ein gerades n ist diese Darstellung nicht möglich.

Beweis.

Die Form M lässt sich auch auf folgende Weise darstellen:

3) $$M = \begin{vmatrix} x_2^n, & -x_2^{n-1} x_1, & x_2^{n-2} x_1^2 & \ldots & (-1)^n x_1^n \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_0 & l_1 & l_2 & \ldots & l_n \end{vmatrix}.$$

Um die Identität von 1) und 3) zu beweisen, mache ich von einer sehr bekannten Transformation Gebrauch.

[1] Die Combinante M und ihr Ausdruck 3) kommt in einer Arbeit von Sturm in Crelle's Journal, Bd. LXXXVI vor.

Es ist nämlich:

$$\begin{vmatrix} x_2^n, -x_2^{n-1}x_1 & \cdots & (-1)^n x_1^n \\ a_0 \quad a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 \quad b_1 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ i_0 \quad i_1 & \cdots & i_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \\ x_1 & x_2 & & & \\ & x_1 & x_2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & x_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2^n & 0 & 0 & \\ 0 & a_0x_1 + a_1x_2 & a_1x_1 + a_2x_2 & \cdots a_{n-1}x_1 + a_nx_n \\ 0 & b_0x_1 + b_1x_2 & b_1x_1 + b_2x_2 & \cdots b_{n-1}x_1 + b_nx_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Dividirt man auf beiden Seiten durch x_2^n, so folgt die Identität von 1) und 3).

Die Quadrate des Rechteckes:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \cdots a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 \cdots b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ i_0 & i_1 & i_2 \cdots i_n \end{vmatrix},$$

welche die Coëfficienten von M sind, bezeichnen wir der Kürze wegen durch die folgenden Buchstaben:

$$A_0, A_1, A_2 \ldots A_n,$$

so dass:

$$A_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \cdots a_{n-1} \\ b_0 & b_1 & b_2 \cdots b_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ i_0 & i_1 & i_2 \cdots i_{n-1} \end{vmatrix} \ldots A_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \cdots a_n \\ b_1 & b_2 \cdots b_n \\ \cdots & \cdots \\ i_1 & i_2 \cdots i_n \end{vmatrix}$$

Wenn wir nun setzen:

$$\lambda_0 = A_0, \quad \lambda_1 = -\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \cdots A_n \\ a_1 & a_2 \cdots a_n \\ c_1 & c_2 \cdots c_n \\ \cdots & \cdots \\ i_1 & i_2 \cdots i_n \end{vmatrix}$$

$$\lambda_2 = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \cdots A_n \\ a_1 & a_2 \cdots a_n \\ c_1 & c_2 \cdots c_n \\ \cdots & \cdots \\ i_1 & i_2 \cdots i_n \end{vmatrix}, \quad \lambda_n = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \cdots A_n \\ a_1 & a_2 \cdots a_n \\ b_1 & b_2 \cdots b_n \\ d_1 & d_2 \cdots d_n \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

so besteht die Identität:

4) $$\lambda_0 M + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n = 0.$$

Um dies einzusehen, entwickeln wir:

$$-\lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2 - \lambda_3 f_3 \ldots - \lambda_n f_n$$

nach Potenzen der x. Der Coëfficient von x^n hat, wie man leicht sieht, die Form:

$$\Sigma(A_i A'_k - A'_i A_k) + A_n A_0$$

und eine kleine Überlegung zeigt, dass:

$$A_i = A'_i$$
$$A_k = A'_k$$

ist, so dass der Coëfficient von x

$$A_0 A_n$$

ist. Was die übrigen Coëfficienten von M betrifft, so sieht man sehr leicht, dass das Aggregat der Producte der Adjungirten irgend eines A in die entsprechenden Coëfficienten der Formen immer verschwindet, wenn der Index dieser Coëfficienten mit demjenigen des A nicht übereinstimmt. Es bleibt daher in jedem Coëfficienten nur ein A zurück, welches mit der Summe der Producte seiner Adjungirten in die Coëfficienten der Formen multiplicirt ist und denselben Index, wie diese, hat.

Es ist also z. B. der Coëfficient von

$$\begin{array}{cc} x_1^{n-1} x_2, & x_1^{n-2} x_2^2 \\ A_1 A_n & A_2 A_n \end{array}$$

Somit ist der erste Theil des Satzes bewiesen.

Der Grund, warum bei geradem n eine solche Darstellung nicht möglich ist, liegt darin, dass der Coëfficient von x_1^n in diesem Falle ausser $A_0 A_n$ ein Product $A_\iota A_\varkappa$ enthält, welches nicht verschwindet.

§. 2.

Für den speciellen Fall von drei binären cubischen Formen habe ich den obigen Satz in der schon oft citirten Arbeit bewiesen. Ist nämlich:

$$5) \qquad M = \begin{vmatrix} x_2^3, -x_2^2 x_1, & x_2 x_1^2, -x_1^3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

die Combinante der drei cubischen Formen, so dass die Coëfficienten derselben

$$A_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad A_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}; \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

sind, so besteht die Identität

$$6) \qquad \lambda_0 M + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0,$$

wo:

$$\lambda_0 = 9 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \lambda_1 = - \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{vmatrix},$$

$$\lambda_2 = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \lambda_3 = - \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Eine leichte Überlegung führt darauf, dass die drei Verhältnisse:

$$\lambda_1 : \lambda_0, \ \lambda_2 : \lambda_0, \ \lambda_3 : \lambda_0$$

Invarianten sein müssen, was man durch eine leichte Rechnung in folgender Weise bestätigt.

Entwickelt lautet die Determinante für λ_1:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = & -3\,\{a_0(b_1c_3-b_3c_1)+a_1(b_3c_0-b_0c_3)+a_3(b_0c_1-b_1c_0)\}(b_2c_3-b_3c_2)\\
& -3\,\{a_0(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_0-b_0c_3)+a_3(b_0c_2-b_2c_0)\}(b_3c_1-b_1c_3)\\
& -9\,\{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\}(b_1c_2-b_2c_1)\\
= & +3a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_0 \end{vmatrix}\left\{\begin{vmatrix} b_0 & b_3 \\ c_0 & c_3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right\} + 3a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_2 & c_1 \end{vmatrix}\left\{\begin{vmatrix} b_0 & b_3 \\ c_0 & c_3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right\}\\
& -3a_3(b_0c_1-b_1c_0)(b_2c_3-b_3c_2)-3a_3(b_0c_2-b_2c_0)(b_3c_1-b_1c_3)\\
& -9a_3(b_1c_2-b_2c_1)^2.
\end{aligned}$$

Wegen der Identität:

$$\begin{aligned}
& (b_0c_1-b_1c_0)(b_2c_3-b_3c_2)+(b_0c_2-b_2c_0)(b_3c_1-b_1c_3)\\
= & (b_1c_2-b_2c_1)(b_3c_0-b_0c_3)
\end{aligned}$$

geht das letzte Glied über in:

$$3a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\left\{\begin{vmatrix} b_0 & b_3 \\ c_0 & c_3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right\},$$

folglich der ganze Ausdruck für λ_1 in

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = 3\left\{\begin{vmatrix} b_0 & b_3 \\ c_0 & c_3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right\}\left\{a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right\}\\
= 3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} . P_1,
\end{aligned}$$

wo P_1 die einfachste Invariante von f_2 und f_3 ist.

Für λ_2 und λ_3 findet man ebenso:

$$\lambda_2 = 3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} . P_2,\quad \lambda_3 = 3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} P_3$$

Dividirt man 6) durch A_3, so erhält man:

7) $$3M = P_1f_1 + P_2f_2 + P_3f_3.$$

Diese Identität findet sich, wie ich erst kürzlich erinnert wurde, bei Clebsch.[1]

§. 3.

Bildet man aus den drei cubischen Formen folgende Formen:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{f_2(x_1x_2)f_3(y_1y_2)-f_2(y_1y_2)f_3(x_1x_2)}{x_1y_2-x_2y_1} = \varphi_1x_1^2+\varphi_2x_1x_2+\varphi_3x_2^2\\
X_2 &= \frac{f_3(x_1x_2)f_1(y_1y_2)-f_3(y_1y_2)f_1(x_1x_2)}{x_1y_2-x_2y_1} = \psi_1x_1^2+\psi_2x_1x_2+\psi_3x_2^2\\
X_3 &= \frac{f_1(x_1x_2)f_2(y_1y_2)-f_1(y_1y_2)f_2(x_1x_2)}{x_1y_2-x_2y_1} = \chi_1x_1^2+\chi_2x_1x_2+\chi_3x_2^2,
\end{aligned}$$

[1] Theorie der binären algebraischen Formen, p. 419.

so ist, wie ich l. c. nachgewiesen habe,

$$\pi = \begin{vmatrix} \varphi_1(y_1 y_2) & \varphi_2(y_1 y_2) & \varphi_3(y_1 y_2) \\ \psi_1(y_1 y_2) & \psi_2(y_1 y_2) & \psi_3(y_1 y_2) \\ \chi_1(y_1 y_2) & \chi_2(y_1 y_2) & \chi_3(y_1 y_2) \end{vmatrix}$$

eine simultane Covariante der drei cubischen Formen. Ich will nun zeigen, dass dieselbe identisch verschwindet. Es ist nämlich:

$$9)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_1(y_1 y_2) &= (10)_{23} y_1^2 + (20)_{23} y_1 y_2 + (30)_{23} y_2^2 \\ \varphi_2(y_1 y_2) &= (20)_{23} y_1^2 + \{(30)_{23} + (21)_{23}\} y_1 y_2 + (31)_{23} y_2^2 \\ \varphi_3(y_1 y_2) &= (30)_{23} y_1^2 + (31)_{23} y_1 y_2 + (32)_{23} y_2^2 \end{aligned}\right.$$

$$10)\quad \left\{\begin{aligned} \psi_1(y_1 y_2) &= (10)_{31} y_1^2 + (20)_{31} y_1 y_2 + (30)_{31} y_2^2 \\ \psi_2(y_1 y_2) &= (20)_{31} y_1^2 + \{(30)_{31} + (21)_{31}\} y_1 y_2 + (31)_{31} y_2^2 \\ \psi_3(y_1 y_2) &= (30)_{31} y_1^2 + (31)_{31} y_1 y_2 + (32)_{31} y_2^2 \end{aligned}\right.$$

$$11)\quad \left\{\begin{aligned} \chi_1(y_1 y_2) &= (10)_{12} y_1^2 + (20)_{12} y_1 y_2 + (30)_{12} y_2^2 \\ \chi_2(y_1 y_2) &= (20)_{12} y_1^2 + \{(30)_{12} + (21)_{12}\} y_1 y_2 + (31)_{12} y_2^2 \\ \chi_3(y_1 y_2) &= (30)_{12} y_1^2 + (31)_{12} y_1 y_2 + (32)_{12} y_2^2. \end{aligned}\right.$$

folglich ist der Coëfficient von y_1^6 in π folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} (b_1 c_0 - b_0 c_1) & (b_2 c_0 - b_0 c_2) & (b_3 c_0 - b_0 c_3) \\ (c_1 a_0 - c_0 a_1) & (c_2 a_0 - c_0 a_2) & (c_3 a_0 - c_0 a_3) \\ (a_1 b_0 - a_0 b_1) & (a_2 b_0 - a_0 b_2) & (a_3 b_0 - a_0 b_3) \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man die erste Reihe dieser Determinante mit a_0, die zweite und dritte resp. mit b_0 und c_0 und addirt die letzteren zur ersten, so erhält man als Elemente derselben folgende Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{vmatrix},$$

welche sämmtlich Null sind. Der nächste Coëfficient in π ist:

$$\begin{vmatrix} (b_1 c_0 - b_0 c_1) & (b_2 c_0 - b_0 c_2) & (b_3 c_1 - b_1 c_3) \\ (c_1 a_0 - c_0 a_1), & (c_2 a_0 - c_0 a_2), & (c_3 a_1 - c_1 a_3) \\ (a_1 b_0 - a_0 b_1) & (a_2 b_0 - a_0 b_2) & (a_3 b_1 - a_1 b_3) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (b_1 a_0 - b_0 a_1) & (b_2 a_1 - b_1 a_2) & (b_3 a_0 - b_0 a_3) \\ (c_1 a_0 - c_0 a_1), & (c_2 a_1 - c_1 a_2), & (c_3 a_0 - c_0 a_3) \\ (a_1 b_0 - a_0 b_1) & (a_2 b_1 - a_1 b_2) & (a_3 b_0 - a_0 b_3) \end{vmatrix}$$

Transformirt man diese Determinanten durch das eben angegebene Verfahren, so verschwindet in der ersten Determinante das erste und zweite Element der ersten Zeile und das dritte Element derselben wird:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix},$$

so dass die ganze Determinante in die folgende übergeht:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (c_1 a_0 - c_0 a_1) & (c_2 a_0 - c_0 a_2) \\ (a_1 b_0 - a_0 b_1) & (a_2 b_0 - a_0 b_2) \end{vmatrix}.$$

Die zweite Determinante geht ebenso in:

$$-\begin{vmatrix} a_0 \, b_0 \, c_0 \\ a_2 \, b_2 \, c_2 \\ a_1 \, b_1 \, c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (c_1 a_0 - c_0 a_1) \, (c_3 a_0 - c_0 a_3) \\ (a_1 b_0 - a_0 b_1) \, (c_3 b_0 - c_0 b_3) \end{vmatrix}$$

über. Da aber bekanntlich:

$$\begin{vmatrix} (c_1 a_0 - c_0 a_1) \, (c_2 a_0 - c_0 a_2) \\ (a_1 b_0 - a_0 b_1) \, (a_2 b_0 - a_0 b_2) \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} a_0 \, b_0 \, c_0 \\ a_2 \, b_2 \, c_2 \\ a_1 \, b_1 \, c_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (c_1 a_0 - c_0 a_1) \, (c_3 a_0 - c_0 a_3) \\ (a_1 b_0 - a_0 b_1) \, (a_3 b_0 - a_0 b_3) \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} a_0 \, b_0 \, c_0 \\ a_3 \, b_3 \, c_3 \\ a_1 \, b_1 \, c_1 \end{vmatrix}.$$

so folgt unmittelbar, dass auch der zweite Coëfficient von π identisch verschwindet. In gleicher Weise könnte man zeigen, dass alle Coëfficienten verschwinden; ich will aber einen originellen Beweis für das Verschwinden der Covariante π geben, der nur die Kenntniss, dass der erste Coëfficient von π verschwindet, voraussetzt. Um diesen Beweis führen zu können, muss ich einige Bemerkungen vorausschicken.

Bildet man die drei Jakobi'schen Determinanten der drei Formen und von ihnen wiederum die Jakobi'schen Determinanten, so ist bekanntlich:

$$\begin{aligned} J(J_{12} J_{13}) &= M . f_1 \\ J(J_{12} J_{23}) &= M . f_2 \\ J(J_{13} J_{23}) &= M . f_3 , \end{aligned}$$

wo M die oben angegebene Combinante der drei Formen ist. Betrachtet man die Jakobi'schen Determinanten als Grundformen und bildet von den drei Jakobi'schen Covarianten derselben wiederum die Jakobi'schen Covarianten, so bestehen die Identitäten:

$$12) \quad \left\{ \begin{aligned} J(J(J_{12} J_{13}), \; J(J_{12} J_{23})) &= k_1 . M^2 . J_{12} \\ J(J(J_{12} J_{13}), \; J(J_{13} J_{23})) &= k_2 . M^2 . J_{13} \\ J(J(J_{12} J_{23}), \; J(J_{13} J_{23})) &= k_3 . M^2 . J_{23} , \end{aligned} \right.$$

wo die z_i etwaige bestimmte Zahlen bedeuten, auf die es hin nicht weiter ankommt. Diese Bemerkung, an sich einleuchtend, lässt sich leicht verificiren.

Es ist nämlich:

$$J(J(J_{12} J_{13}), \, J(J_{12} J_{23})) = \begin{vmatrix} \dfrac{d(Mf_1)}{dx_1} & \dfrac{d(Mf_1)}{dx_2} \\ \dfrac{d(Mf_2)}{dx_1} & \dfrac{d(Mf_2)}{dx_2} \end{vmatrix}$$

$$= M^2 J_{12} + \begin{vmatrix} \dfrac{df_1}{dx_1} & f_1 \\ \dfrac{df_2}{dx_1} & f_2 \end{vmatrix} M \frac{dM}{dx_2} + \begin{vmatrix} f_1 & \dfrac{df_1}{dx_2} \\ f_2 & \dfrac{df_2}{dx_2} \end{vmatrix} M \frac{dM}{dx_1}$$

Entwickelt man f_1 und f_2 nach dem bekannten Euler'schen Satze, so findet man die Richtigkeit der Behauptung. Für drei binäre Formen dritter Ordnung, z. B.:

$$13)\qquad J(J(J_{12},J_{13}),\, J(J_{12},J_{23})) = \begin{vmatrix} \dfrac{d^2 J_{12}}{dx_1^2} & \dfrac{d^2 J_{12}}{dx_1\,dx_2} & \dfrac{d^2 J_{12}}{dx_2^2} \\[2ex] \dfrac{d^2 J_{13}}{dx_1^2} & \dfrac{d^2 J_{13}}{dx_1\,dx_2} & \dfrac{d^2 J_{13}}{dx_2^2} \\[2ex] \dfrac{d^2 J_{23}}{dx_1^2} & \dfrac{d^2 J_{23}}{dx_1\,dx_2} & \dfrac{d^2 J_{23}}{dx_2^2} \end{vmatrix} \cdot J_{12}.$$

Wir erhalten daher die Identität:

$$14)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{d^2 J_{12}}{dx_1^2} & \dfrac{d^2 J_{12}}{dx_1\,dx_2} & \dfrac{d^2 J_{12}}{dx_2^2} \\[2ex] \dfrac{d^2 J_{13}}{dx_1^2} & \dfrac{d^2 J_{13}}{dx_1\,dx_2} & \dfrac{d^2 J_{13}}{dx_2^2} \\[2ex] \dfrac{d^2 J_{23}}{dx_1^2} & \dfrac{d^2 J_{23}}{dx_1\,dx_2} & \dfrac{d^2 J_{23}}{dx_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{d^2 f_1}{dx_1^2} & \dfrac{d^2 f_1}{dx_1\,dx_2} & \dfrac{d^2 f_1}{dx_2^2} \\[2ex] \dfrac{d^2 f_2}{dx_1^2} & \dfrac{d^2 f_2}{dx_1\,dx_2} & \dfrac{d^2 f_2}{dx_2^2} \\[2ex] \dfrac{d^2 f_3}{dx_1^2} & \dfrac{d^2 f_3}{dx_1\,dx_2} & \dfrac{d^2 f_3}{dx_2^2} \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} x_2^3, & -x_2^2 x_1, & x_2 x_1^2, & -x_1^3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2$$

Nun ist, wie leicht zu sehen:

$$15)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}\,\frac{d^2 J_{12}}{dx_1^2} &= 2\chi_1(x_1 x_2) - P_3\, x_2^2 \\ \frac{1}{2}\,\frac{d^2 J_{12}}{dx_1\,dx_2} &= \chi_2(x_1 x_2) + P_3\, x_1 x_2 \\ \frac{1}{2}\,\frac{d^2 J_{12}}{dx_2^2} &= 2\chi_3(x_1 x_2) - P_3\, x_1^2\,, \end{aligned} \right.$$

folglich erhalten wir, wenn wir diese Ausdrücke in die Determinante links einsetzen, folgende Identität:

$$16)\qquad \begin{vmatrix} 2\chi_1 - P_3 x_2^2 & \chi_2 + P_3 x_1 x_2 & 2\chi_3 - P_3 x_1^2 \\ 2\psi_1 - P_2 x_2^2 & \psi_2 + P_2 x_1 x_2 & 2\psi_3 - P_2 x_1^2 \\ 2\varphi_1 - P_1 x_2^2 & \varphi_2 + P_1 x_1 x_2 & 2\varphi_3 - P_1 x_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} \chi_1 \chi_2 \chi_3 \\ \psi_1 \psi_2 \psi_3 \\ \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} \chi_1 \chi_2 -P_3 \\ \psi_1 \psi_2 -P_2 \\ \varphi_1 \varphi_2 -P_1 \end{vmatrix} x_1^2 + 4\begin{vmatrix} \chi_1 P_3 \chi_3 \\ \psi_1 P_2 \psi_3 \\ \varphi_1 P_1 \varphi_3 \end{vmatrix} x_1 x_2 + 2\begin{vmatrix} -P_3 \chi_2 \chi_3 \\ -P_2 \psi_2 \psi_3 \\ -P_1 \varphi_2 \varphi_3 \end{vmatrix} x_2^2$$

$$= 4\begin{vmatrix} \chi_1 \chi_2 \chi_3 \\ \psi_1 \psi_2 \psi_3 \\ \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \end{vmatrix} - 2\left\{ \begin{vmatrix} \chi_1 \chi_2 P_3 \\ \psi_1 \psi_2 P_2 \\ \varphi_1 \varphi_2 P_1 \end{vmatrix} x_1^2 + 2\begin{vmatrix} \chi_1 \chi_3 P_3 \\ \psi_1 \psi_3 P_2 \\ \varphi_1 \varphi_3 P_1 \end{vmatrix} x_1 x_2 + \begin{vmatrix} P_3 \chi_2 \chi_3 \\ P_2 \psi_2 \psi_3 \\ P_1 \varphi_2 \varphi_3 \end{vmatrix} x_2^2 \right\}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2^3, & -x_2^2 x_1, & x_2 x_1^2, & -x_1^3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2.$$

Entwickeln wir die Determinanten, welche die P enthalten nach diesen und fassen alle Glieder, die mit demselben P multiplicirt sind, zusammen, so erhalten wir folgenden Ausdruck:

17)
$$-2P_3\left\{\begin{vmatrix}\psi_1 & \psi_2\\ \varphi_1 & \varphi_2\end{vmatrix}x_1^2+2\begin{vmatrix}\psi_1 & \psi_3\\ \varphi_1 & \varphi_3\end{vmatrix}x_1x_2+\begin{vmatrix}\psi_2 & \psi_3\\ \varphi_2 & \varphi_3\end{vmatrix}x_2^2\right\}$$
$$-2P_2\left\{\begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\\ \chi_1 & \chi_2\end{vmatrix}x_1^2+2\begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_3\\ \chi_1 & \chi_3\end{vmatrix}x_1x_2+\begin{vmatrix}\varphi_2 & \varphi_3\\ \chi_2 & \chi_3\end{vmatrix}x_2^2\right\}$$
$$-2P_1\left\{\begin{vmatrix}\chi_1 & \chi_2\\ \psi_1 & \psi_2\end{vmatrix}x_1^2+2\begin{vmatrix}\chi_1 & \chi_3\\ \psi_1 & \psi_3\end{vmatrix}x_1x_2+\begin{vmatrix}\chi_2 & \chi_3\\ \psi_2 & \psi_3\end{vmatrix}x_2^2\right\}$$
$$=-2\left\{P_3\begin{vmatrix}x_2^2, & -2x_1x_2, & x_1^2\\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3\\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\end{vmatrix}+P_2\begin{vmatrix}x_2^2, & -2x_1x_2, & x_1^2\\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_3\end{vmatrix}+P_1\begin{vmatrix}x_2^2, & -2x_1x_2, & x_1^2\\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_3\\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3\end{vmatrix}\right\}.$$

Achtet man darauf, dass man die Jakobi'sche Covariante irgend zweier Formen Φ_1 Φ_2 auch auf folgende Weise bilden kann, indem man die Formen folgendermassen schreibt:

$$\Phi_1=\frac{1}{n}\left\{\frac{d^2\Phi_1}{dx_1^2}x_1^2+2\frac{d^2\Phi_1}{dx_1\,dx_2}x_1x_2+\frac{d^2\Phi_1}{dx_2^2}x_2^2\right\}$$
$$\Phi_2=\frac{1}{n}\left\{\frac{d^2\Phi_2}{dx_1^2}x_1^2+2\frac{d^2\Phi_2}{dx_1\,dx_2}x_1x_2+\frac{d^2\Phi_2}{dx_2^2}x_2^2\right\}$$

und dieselben wie quadratische Formen ansieht, so findet man:

18)
$$J(J_{12}J_{13})=\begin{vmatrix}x_2^2, & -x_1x_2, & x_1^2\\ \frac{d^2J_{12}}{dx_1^2} & \frac{d^2J_{12}}{dx_1\,dx_2} & \frac{d^2J_{12}}{dx_2^2}\\ \frac{d^2J_{13}}{dx_1^2} & \frac{d^2J_{13}}{dx_1\,dx_2} & \frac{d^2J_{13}}{dx_2^2}\end{vmatrix}\quad \text{u. s. w.}$$

Drückt man in dieser Determinante die zweiten Differentialquotienten durch die χ, ψ und P aus und zieht die erste Zeile, nachdem man dieselbe resp. mit P_3 und P_2 multiplicirt hat, von der zweiten und dritten Zeile ab, so erhält man, von einem etwaigen Zahlenfactor abgesehen,

19)
$$J(J_{12}J_{13})=4\begin{vmatrix}x_2^2, & -2x_1x_2, & x_1^2\\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_3\\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3\end{vmatrix}.$$

Ebenso findet man für:

$$J(J_{12}J_{23}),\quad J(J_{13}J_{23})$$

20)
$$J(J_{12}J_{23})=4\begin{vmatrix}x_2^2, & -2x_1x_2, & x_1^2\\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_3\\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\end{vmatrix}\quad J(J_{13}J_{23})=4\begin{vmatrix}x_2^2, & -2x_1x_2, & x_1^2\\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3\end{vmatrix}.$$

Die Identität 14) lautet also jetzt:

21)
$$\Sigma\pm\frac{d^2J_{12}}{dx_1^2}\,\frac{d^2J_{13}}{dx_1\,dx_2}\,\frac{d^2J_{23}}{dx_2^2}$$
$$=4\Sigma\pm\chi_1\psi_2\varphi_3-\frac{1}{2}\{P_1J(J_{12}J_{31})+P_2J(J_{12}J_{23})+P_3J(J_{13}J_{23})\}$$
$$=4\Sigma\pm\chi_1\psi_2\varphi_3-\frac{1}{2}\{P_1f_1+P_2f_2+P_3f_3\}.M$$
$$=4\Sigma\pm\chi_1\psi_2\varphi_3-\frac{1}{2}M^2=\mu.M^2.$$

Aus dieser Formel folgt, dass

$$\pi = \Sigma \pm \chi_1 \psi_2 \varphi_3$$

entweder auch ein vollständiges Quadrat von M ist oder aber identisch verschwindet. Dass Ersteres nicht der Fall sein kann, zeigt der Umstand, dass der erste Coëfficient in π identisch verschwindet, es muss letzteres der Fall sein. Q. e. d.

Wenn man betrachtet, dass die drei Jakobi'schen Determinanten sich auf folgende Weise darstellen lassen:

22)
$$\left\{\begin{aligned} J_{12} &= \chi_1(x_1 x_2)\, x_1^2 + \chi_2(x_1 x_2)\, x_1 x_2 + \chi_3(x_1 x_2)\, x_2^2 \\ J_{31} &= \psi_1(x_1 x_2)\, x_1^2 + \psi_2(x_1 x_2)\, x_1 x_2 + \psi_3(x_1 x_2)\, x_2^2 \\ J_{23} &= \varphi_1(x_1 x_2)\, x_1^2 + \varphi_2(x_1 x_2)\, x_1 x_2 + \varphi_3(x_1 x_2)\, x_2^2 \end{aligned}\right.$$

so bemerkt man sofort, dass π die zweite Überschiebung von:

$$J_{12} \quad \text{über} \quad J(J_{13} J_{23})$$

oder

$$J_{13} \quad \text{über} \quad J(J_{12} J_{23})$$

oder

$$J_{23} \quad \text{über} \quad J(J_{12} J_{31}),$$

wenn man dieselben als quadratische Formen betrachtet. Wir können daher das obige Resultat folgendermassen aussprechen:

Satz.

Bildet man von einem System dreier cubischer Formen die ersten Überschiebungen, von dieser wiederum die ersten Überschiebungen, stellt erstere in der Form 22) und letztere in der Form 19) 20) dar und betrachtet beide Systeme als quadratische Formen, so ist die zweite Überschiebung je einer der ersteren über je eine der letzteren identisch Null.

§. 4.

Es sollen nun noch zwei Formeln abgeleitet werden, welche in Verbindung mit den bisherigen Resultaten uns in den Stand setzen werden, die in der Einleitung erwähnten Covarianten auf niedere Formen zurückzuführen. Diese Formeln betreffen die zweiten Überschiebungen irgend einer Form oder deren Quadrat über die Jakobi'sche Covariante zweier Formen. Was die erste Formel angeht, so werden wir sie, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, aus der symbolischen Gestalt der Formen ableiten, wobei wir auf etwaige Zahlenfactoren keine Rücksicht nehmen werden.

Setzen wir:

$$f_1(x_1 x_2) = a_x^n \qquad f_2(x_1 x_2) = b_x^n$$

und bilden die zweite Polare von J_{12}, so erhalten wir:

$$\Delta^2(J) = (n-1)(n-2)(ab)\, a_x^{n-3} a_y^2 b_x^{n-1} + 2(n-1)^2 (ab)\, a_x^{n-2} a_y b_x^{n-2} b_y$$
$$+ (n-1)(n-2)(ab)\, a_x^{n-1} b_x^{n-3} b_y^2.$$

Setzt man $y_1 = y_2$, $y_2 = -y_1$ und multiplicirt mit der entsprechenden Potenz von y_x, so erhält man:

23)
$$(Jy)^2 = (n-1)(n-2)\left\{(ab)(ay)^2 a_x^{n-3} b_x^{n-1} y_x^{n-2} + (ab)(by)^2 a_x^{n-1} b_x^{n-3} y_x^{n-2}\right\}$$
$$+ 2(n-1)^2 (ab)(ay)(by)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} y_x^{n-2}$$
$$= (n-1)(n-2)(ab)\, a_x^{n-3} b_x^{n-3} y_x^{n-2} \left\{(ay)^2 b_x^2 + (by)^2 a_x^2\right\}$$
$$+ 2(n-1)^2 (ab)(ay)(by)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} y_x^{n-2}.$$

Es besteht aber bekanntlich die Identität:

$$(ay)^2 b_x^2 + (by)^2 a_x^2 = (ab)^2 y_x^2 + 2(ya)(yb)\, a_x b_x,$$

folglich ist:

24) $$(Jg)^2 = (n-1)(n-2)(ab)a_x^{n-3}b_x^{n-3}g_x^{n-2}\left\{(ab)^2g_x^2 + 2(ga)(gb)a_xb_x\right\}$$
$$+ 2(n-1)^2(ab)(ag)(bg)a_x^{n-2}b_x^{n-2}g_x^{n-2}$$
$$= (n-1)(n-2)g_x^n.(ab)^3a_x^{n-3}b_x^{n-3}$$
$$+ 2\left\{(n-1)(n-2) + (n-1)^2\right\}(ab)(ag)(bg)a_x^{n-2}b_x^{n-2}g_x^{n-2}.$$

für $n = 3$ geht diese Formel in folgende über:

25) $$(Jg)^2 = 2(ab)^3.g^3 + 12(ab)(ag)(bg)a_xb_xg_x.$$

Diese Formel besagt, dass die zweite Überschiebung dieser Form g_x^3 über die Jakobi'sche Covariante zweier Formen a_x^3, b_x^3 sich als Summe darstellt, deren erster Summand aus der einfachsten Invariante der Formen a_x^3, b_x^3 multiplicirt in g_x^3 besteht und deren zweiter Summand die Combinante M der drei Formen a_x^3, b_x^3 und g_x^3 ist. Fällt g_x^3 mit a_x^3 oder mit b_x^3 zusammen, so ist:

26) $$(Ja)^2 = 2(ab)^3.a_x^3$$
$$(Jb)^2 = 2(ab)^3.b_x^3.$$

Die zweite Überschiebung des Quadrates von g_x^n über die Jakobi'sche Covariante von a_x^n, b_x^n ermitteln wir auf folgende Weise. Es ist:

27) $$(Jg^2)^2 = \frac{d^2J}{dx_1^2}\left(2g\frac{d^2g}{dx_2^2} + 2\left(\frac{dg}{dx_2}\right)^2\right) - 2\frac{d^2J}{dx_1\,dx_2}\left(2g\frac{d^2g}{dx_1\,dx_2} + 2\frac{dg}{dx_1}\frac{dg}{dx_2}\right)$$
$$+ \frac{d^2J}{dx_2^2}\left(2g\frac{d^2g}{dx_1^2} + 2\left(\frac{dg}{dx_1}\right)^2\right)$$
$$= -2g\left\{\frac{d^2J}{dx_1^2}\frac{d^2g}{dx_2^2} - 2\frac{d^2J}{dx_1\,dx_2}\frac{d^2g}{dx_1\,dx_2} + \frac{d^2J}{dx_2^2}\frac{d^2g}{dx_1^2}\right\}$$
$$+ 2\left\{\frac{d^2J}{dx_1^2}\left(\frac{dg}{dx_2}\right)^2 - 2\frac{d^2J}{dx_1\,dx_2}\frac{dg}{dx_1}\frac{dg}{dx_2} + \frac{d^2J}{dx_2^2}\left(\frac{dg}{dx_1}\right)^2\right\}$$
$$= 2g_x^n.(Jg)^2 + 2\left\{\frac{d^2J}{dx_1^2}\left(\frac{dg}{dx_2}\right)^2 - 2\frac{d^2J}{dx_1\,dx_2}\frac{dg}{dx_1}\frac{dg}{dx_2} + \frac{d^2J}{dx_2^2}\left(\frac{dg}{dx_1}\right)^2\right\}.$$

Den Ausdruck in der Klammer wollen wir nun umformen. Er lässt sich folgendermassen schreiben:

$$\left\{\frac{d^2J}{dx_1^2}\frac{dg}{dx_2} - \frac{d^2J}{dx_1\,dx_2}\frac{dg}{dx_1}\right\}\frac{dg}{dx_2} + \left\{\frac{d^2J}{dx_2^2}\frac{dg}{dx_1} - \frac{d^2J}{dx_1\,dx_2}\frac{dg}{dx_2}\right\}\frac{dg}{dx_1}$$
$$= \begin{vmatrix} \dfrac{d^2J}{dx_1^2} & \dfrac{d^2J}{dx_1\,dx_2} \\ \dfrac{dg}{dx_1} & \dfrac{dg}{dx_2} \end{vmatrix}\frac{dg}{dx_2} + \begin{vmatrix} \dfrac{d^2J}{dx_2^2} & \dfrac{d^2J}{dx_1\,dx_2} \\ \dfrac{dg}{dx_2} & \dfrac{dg}{dx_1} \end{vmatrix}\frac{dg}{dx_1}.$$

Benützt man die Identitäten:

$$\frac{dg}{dx_1} = \frac{1}{(n-1)}\left\{\frac{d^2g}{dx_1^2}x_1 + \frac{d^2g}{dx_1\,dx_2}x_2\right\}$$
$$\frac{dg}{dx_2} = \frac{1}{(n-1)}\left\{\frac{d^2g}{dx_1\,dx_2}x_1 + \frac{d^2g}{dx_2^2}x_2\right\},$$

so geht der letzte Ausdruck in den folgenden über:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2 J}{dx_1^2} & \frac{d^2 g}{dx_1^2} & x_1 \\ \frac{d^2 J}{dx_1\, dx_2} & \frac{d^2 g}{dx_1\, dx_2} & x_1 \end{vmatrix} \frac{dg}{dx_2} + \begin{vmatrix} \frac{d^2 J}{dx_1^2} & \frac{d^2 g}{dx_1\, dx_2} & x_2 \\ \frac{d^2 J}{dx_1\, dx_2} & \frac{d^2 g}{dx_2^2} & x_2 \end{vmatrix} \frac{dg}{dx_2}$$

$$+ \begin{vmatrix} \frac{d^2 J}{dx_2^2} & \frac{d^2 g}{dx_1\, dx_2} & x_1 \\ \frac{d^2 J}{dx_1\, dx_2} & \frac{d^2 g}{dx_1^2} & x_1 \end{vmatrix} \frac{dg}{dx_1} + \begin{vmatrix} \frac{d^2 J}{dx_2^2} & \frac{d^2 g}{dx_2^2} & x_2 \\ \frac{d^2 J}{dx_1\, dx_2} & \frac{d^2 g}{dx_1\, dx_2} & x_2 \end{vmatrix} \frac{dg}{dx_1}$$

$$= \frac{d^2 J}{dx_1^2}\left(\frac{d^2 g}{dx_1\, dx_2} x_1 + \frac{d^2 g}{dx_2^2} x_2\right)^2 - 2\frac{d^2 J}{dx_1\, dx_2}\left(\frac{d^2 g}{dx_1^2} x_1 + \frac{d^2 g}{dx_1\, dx_2} x_2\right)\left(\frac{d^2 g}{dx_1\, dx_2} x_1 + \frac{d^2 g}{dx_2^2} x_2\right)$$

$$+ \frac{d^2 J}{dx_2^2}\left(\frac{d^2 g}{dx_1^2} x_1 + \frac{d^2 g}{dx_1\, dx_2} x_2\right)^2.$$

Dieser Ausdruck lässt sich wie folgt schreiben:

$$\frac{d^2 J}{dx_1^2}\left(\frac{d^2 g}{dx_1\, dx_2}\right)^2 x_1^2 + \frac{d^2 J}{dx_2^2}\left(\frac{d^2 g}{dx_1\, dx_2}\right)^2 x_2^2 + 2\frac{d^2 J}{dx_1\, dx_2}\left(\frac{d^2 g}{dx_1\, dx_2}\right)^2 x_1 x_2$$

$$-2\frac{d^2 J}{dx_1\, dx_2}\left(\frac{d^2 g}{dx_1\, dx_2}\right)^2 x_1 x_2$$

$$-2\frac{d^2 J}{dx_1\, dx_2}\frac{d^2 g}{dx_1^2}\frac{d^2 g}{dx_2^2} x_1 x_2 - \frac{d^2 J}{dx_1^2}\frac{d^2 g}{dx_1^2}\frac{d^2 g}{dx_2^2} x_1^2 - \frac{d^2 J}{dx_2^2}\frac{d^2 g}{dx_1^2}\frac{d^2 g}{dx_2^2} x_2^2$$

$$+ \frac{d^2 J}{dx_1^2}\frac{d^2 g}{dx_2^2}\left\{\frac{d^2 g}{dx_1^2} x_1^2 + 2\frac{d^2 g}{dx_1\, dx_2} x_1 x_2 + \frac{d^2 g}{dx_2^2} x_2^2\right\}.$$

$$+ \frac{d^2 J}{dx_2^2}\frac{d^2 g}{dx_1^2}\left\{\frac{d^2 g}{dx_1^2} x_1^2 + 2\frac{d^2 g}{dx_1\, dx_2} x_1 x_2 + \frac{d^2 g}{dx_2^2} x_2^2\right\}$$

$$-2\frac{d^2 J}{dx_1\, dx_2}\frac{d^2 g}{dx_1\, dx_2}\left\{\frac{d^2 g}{dx_1^2} x_1^2 + \frac{d^2 g}{dx_2^2} x_2^2 + \frac{d^2 g}{dx_1\, dx_2} x_1 x_2\right\}.$$

Die erste und dritte Reihe zusammen geben:

$$-J \,.\, H(g),$$

wo $H(g)$ die Hesse'sche Determinante von g bedeutet, alle übrigen Glieder zusammengefasst liefern den Ausdruck:

$$g \cdot \left\{\frac{d^2 J}{dx_1^2}\frac{d^2 g}{dx_2^2} - 2\frac{d^2 J}{dx_1\, dx_2}\frac{d^2 g}{dx_1\, dx_2} + \frac{d^2 J}{dx_2^2}\frac{d^2 g}{dx_1^2}\right\}$$

$$= g \,.\, (Jg)^2.$$

Wir erhalten daher folgende Formel für die zweite Überschiebung von J über das Quadrat einer Form g.

28) $$(Jg^2)^2 = a\, g \,.\, (Jg)^2 + b\, J \,.\, H(g).$$

Wenn wir jetzt für:

$$(Jg)^2$$

seinen Ausdruck aus 25) einsetzen, so kommt endlich:

29) $$(Jg^2)^2 = a\, P_3 \,.\, g^2 + b\, g \,.\, M + c\, J \,.\, H(g),$$

wo a, b, c bestimmte Zahlen sind.

§. 5.

Bevor wir zu unserem eigentlichen Gegenstande übergehen, wollen wir noch einen Rückblick auf die Art wie die Covarianten, deren Reducirung wir anstreben, entstanden sind, werfen. Aus einer Form X_i in § 3, welche von zwei Reihen von Variabeln abhängt, und einer Grundform f_i haben wir y eliminirt, es entstand eine Form ψ von der sechsten Ordnung in x. Von dieser haben wir l. c. bewiesen, dass sie die Invarianteneigenschaft besitzt und aus ihr, da sie als Resultante zweier Formen von der dritten, resp. zweiten Ordnung sich in niedere Formen zerlegen lässt, die in Frage stehenden Covarianten hergestellt. Es ist nämlich:

$$\psi = R(X_i f_i) = -2DA_0 + A_1,$$

wo D die Discriminante von X ist und A_0, A_1 die simultanen Invarianten von X und f sind. Wie sich D und A_0 in bereits bekannte Covarianten zerlegen, habe ich l. c. gezeigt. Um auch die Covarianten, die aus A_1 entstehen, aus niederen Covarianten abzuleiten, gehe ich von einer anderen Auffassung von ψ aus. Ich lasse nämlich in den X_i die zwei Reihen von Variabeln zusammenfallen, in Folge dessen sie nach 22) die Jakobi'schen Covarianten darstellen. Fasst man diese als quadratische Formen der explicite auftretenden Variabeln auf, und eliminirt aus einer derselben und irgend einer Grundform die expliciten Variabeln so ist diese Resultante nach einem bekannten Principe eine Covariante. Nach dieser Auffassung wird es mit Hilfe unserer früheren Betrachtung leicht sein, die Covarianten auf niedere Formen zurückzuführen, wenn wir nur auf die Entstehung von A_1 Rücksicht nehmen. Nun entsteht A_1 dadurch, dass man die lineare Covariante, welche die zweite Überschiebung der Form dritter Ordnung über die Form zweiter Ordnung ist, auf's Quadrat erhebt und dieses Quadrat noch zweimal über die Form zweiter Ordnung schiebt. In unserem Falle, wo die Form zweiter Ordnung die Jakobi'sche Covariante in der Gestalt 22) ist, kommt es also darauf an, in der zweiten Überschiebung der Jakobi'schen Form über eine Grundform die zweiten Differentialquotienten der Jakobi'schen Covariante als constant zu betrachten, und diese zweite Überschiebung, welche also wie eine lineare Covariante zu betrachten ist, nachdem man sie aufs Quadrat erhoben hat, wiederum zweimal über die Jakobi'sche Covariante zu schieben. Bevor wir dieses durchführen, wollen wir sehen, wie sich die Sache verhält, wenn wir die zweite Überschiebung von J über eine der Grundformen als cubische Covariante betrachten, weil sich in den Resultaten eine merkwürdige Ähnlichkeit zeigt.

Es ist nach dem Früheren:

$$(Jf_i)^2 = \alpha P f_i + \beta M.$$

Erhebt man diesen Ausdruck aufs Quadrat und berücksichtigt die oben angeführte Formel für M, so erhält man:

$$\begin{aligned}[(Jf_i)^2]^2 = \alpha^2 P^2 f_i^2 + 2\alpha\beta P f_i \{P_1 f_1 + P_2 f_2 + P_3 f_3\} \\ + \beta^2 \{P_1 f_1 (P_1 f_1 + P_2 f_2 + P_3 f_3) + P_2 f_2 (P_1 f_1 + P_2 f_2 + P_3 f_3) \\ + P_3 f_3 (P_1 f_1 + P_2 f_2 + P_3 f_3)\}.\end{aligned}$$

Schiebt man jetzt wiederum J über diesen Ausdruck zweimal, so erhält man:

30)
$$\begin{aligned}\alpha^2 P (Jf_i^2)^2 + 2\alpha\beta \{P P_1 (J, f_1 f_i)^2 + P_2 P (J, f_2 f_i)^2 + P_3 P (J, f_3 f_i)^2\} \\ + \beta^2 \{P_1^2 (J, f_1^2)^2 + P_2^2 (J, f_1 f_2^2)^2 + P_3^2 (J, f_1 f_3^2)^2 + 2 P_1 P_2 (J, f_1 f_2)^2 \\ + 2 P_1 P_3 (J, f_1 f_3)^2 + 2 P_2 P_3 (J, f_2 f_3)^2\}.\end{aligned}$$

Ist f_i eine der zwei Formen, aus denen die Jakobi'sche Covariante gebildet ist, so verschwindet in diesem Falle M und bleibt:

31)
$$\alpha' P^6 f_i^2 + \beta' P^2 . J . H(f_i). —$$

Um nun auch den Fall, wo die zweite Überschiebung der Jakobi'schen Covariante über eine der Grundformen als lineare Covariante betrachtet wird, zu erledigen, führe ich folgende Bezeichnungen ein. Ich bezeichne mit α die Jakobi'sche Covariante als Form zweiter Ordnung betrachtet, so dass:

$$\alpha = \alpha_x^2$$

ist, ferner die lineare Covariante mit p, so dass:

$$p = (a\alpha)^2 a_x.$$

Das Quadrat derselben ist nun:

$$p^2 = (a\alpha)^2 a_x . (a'\alpha')^2 a'_x = \mu = \mu_x^2.$$

Bilde ich die zweite Überschiebung von μ über J, also:

$$(\mu J)^2 J_x^2,$$

so ist nun die Aufgabe, die Symbole von μ und α durch die Symbole der Grundformen auszudrücken. Nun entsteht $(\mu J)^2 J_x^2$ aus:

$$\mu_y^2 = (a\alpha)^2 a_y . (a'\alpha')^2 a'_y .$$

wenn man $y_1 = J_2$, $y_2 = -J_1$ setzt und mit J_x^2 multiplicirt, folglich erhalte ich:

$$(\mu J)^2 J_x^2 = (a\alpha)^2 (aJ)(a'\alpha)^2 (a'J) . J_x^2$$

32) $$= (a\alpha)(a'\alpha').(a\alpha)(aJ)(a'\alpha')(a'J).J_x^2$$

$$= \frac{1}{2}(a\alpha)(a'\alpha)\{(a\alpha)^2(a'J)^2 + (a'\alpha)^2(aJ)^2 - (aa')^2(\alpha J)^2\} J_x^2.$$

Um nun auch die Symbole von J herauszuschaffen, gehe ich von der Identität aus:

$$J_x^2 J_y^2 = (ab) a_x^2 b_y^2 + 2(ab) a_x a_y . b_x b_y + (ab) a_y^2 . b_x^2 .$$

Setzt man $y_1 = a'_2$, $y_2 = -a'_1$, so erhält man:

33) $$(a'J)^2 J_x^2 = (ab)(ba')^2 a_x^2 + (ab)(aa')^2 b_x^2 ,$$

setzt man ferner:

$$y_1 = a_2 \qquad y_2 = -a_1$$

so erhält man:

34) $$(aJ)^2 J_x^2 = (ab)(ba)^2 a_x^2 ,$$

und setzt man endlich:

$$y_1 = \alpha_2 \qquad y_2 = -\alpha_1$$

so erhält man schliesslich:

35) $$(\alpha J)^2 J_x^2 = (ab)(b\alpha)^2 a_x^2 + 2(ab)(a\alpha)(b\alpha) . a_x b_x + (ab)(a\alpha)^2 b_x^2 .$$

Dies in 32) eingesetzt ergibt:

36) $$\frac{1}{2}(ab)^3 . [(a\alpha)^2 a_x]^2 + \frac{1}{2}(aa')^2(a\alpha)(a'\alpha).(ab)(a\alpha)^2 b_x^2$$

$$+ \frac{1}{2}(ab)^3 [(a\alpha)^2 a_x]^2$$

$$- \frac{1}{2}(aa')^2(a\alpha)(a'\alpha).(ab)(b\alpha)^2 a_x^2 - (aa')^2(a\alpha)(a'\alpha).(ab)(a\alpha)(a'\alpha) a_x b_x$$

$$- \frac{1}{2}(aa')^2(a\alpha)(a'\alpha).(ab)(b\alpha)^2 a_x^2$$

$$= (ab)^3 . [(a\alpha)^2 a_x]^2 - (aa')^2(a\alpha)(a'\alpha).(ab)(a\alpha)(b\alpha) a_x b_x$$

$$- \frac{1}{2}(aa')^2(a\alpha)(a'\alpha).(ab)(b\alpha)^2 a_x^2 .$$

Benützt man die Identität:

$$(a\alpha)(b\alpha)a_x b_x = \frac{1}{2}\{(a\alpha)^2 b_x^2 + (b\alpha)^2 a_x^2 - (ab)^2 \alpha_x^2\}$$

so bekommt man:

37) $$(\varphi J)^2 J_x^2 = (ab)^3 . [(a\alpha)^2 a_x]^2 + \frac{1}{2}(a\alpha')^2 (a\alpha)(a'\alpha) . (ab)^3 . \alpha_x^2$$

$$- (aa')^2 (a\alpha)(a'\alpha)\{(ab)(b\alpha)^2 a_x^2 + \frac{1}{2}(ab)(a\alpha)^2 b_x^2\}.$$

Drückt man endlich die Symbole der α durch die Symbole der J aus und transformirt in der mehrfach erwähnten Weise, so erhält man schliesslich:

38) $$(\varphi J)^2 J_x^2 = r . P^3 . f_x^2 + s . J . (JH)^2 . P.$$

Aus dieser Formel ersieht man also, wie die l. c. gefundenen Covarianten, sofern bei ihrer Bildung nur zwei der Grundformen in Betracht kommen, sich durch die Formen selbst, ihren Jakobi'schen Covarianten und den einfachsten Invarianten ausdrücken. Kommen bei der Bildung der Covarianten alle drei Grundformen in Verwendung, so kann man dieselben auf die angegebene Weise nicht zerlegen, und ich vermuthe, dass sie überhaupt fundamentale Covarianten sind. Ich will nur noch aufmerksam machen auf die Ähnlichkeit der Formeln 31) und 38) und bemerken, dass ich bei denselben auf die bestimmten Zahlen keine Rücksicht genommen habe.

§. 6.

Zwischen den drei Formen:

$$\begin{aligned}
I_{23} &= 2\{\varphi_1(\alpha_1\alpha_2)x_1^2 + \varphi_2(\alpha_1\alpha_2)x_1x_2 + \varphi_3(\alpha_1\alpha_2)x_2^2\} \\
I_{31} &= 2\{\psi_1(\alpha_1\alpha_2)x_1^2 + \psi_2(\alpha_1\alpha_2)x_1x_2 + \psi_3(\alpha_1\alpha_2)x_2^2\} \\
I_{12} &= 2\{\chi_1(\alpha_1\alpha_2)x_1^2 + \chi_2(\alpha_1\alpha_2)x_1x_2 + \chi_3(\alpha_1\alpha_2)x_2^2\}
\end{aligned}$$

muss, da:

$$\pi = \begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha_1\alpha_2) & \varphi_2(\alpha_1\alpha_2) & \varphi_3(\alpha_1\alpha_2) \\ \psi_1(\alpha_1\alpha_2) & \psi_2(\alpha_1\alpha_2) & \psi_3(\alpha_1\alpha_2) \\ \chi_1(\alpha_1\alpha_2) & \chi_2(\alpha_1\alpha_2) & \chi_3(\alpha_1\alpha_2) \end{vmatrix} = 0$$

ist, die Identität:

$$\lambda_1 I_{23} + \lambda_2 I_{31} + \lambda_3 I_{12} = 0$$

bestehen, wo:

$$\lambda_1 = \varphi \begin{vmatrix} \psi_2 \chi_2 \\ \psi_3 \chi_3 \end{vmatrix}, \quad \lambda_2 = \varphi \begin{vmatrix} \chi_2 \varphi_2 \\ \chi_3 \varphi_3 \end{vmatrix}, \quad \lambda_3 = \varphi \begin{vmatrix} \varphi_2 \psi_2 \\ \varphi_3 \psi_3 \end{vmatrix}$$

ist, Es ist demnach:

$$J(I_{23} I_{12}) = J\left(I_{23}, -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} I_{23} - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} I_{31}\right) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3} J(I_{23} I_{31})$$

$$J(I_{31} I_{12}) = J\left(I_{31}, -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} I_{23} - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} I_{31}\right) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} J(I_{31} I_{23})$$

oder:

39) $$\left\{\begin{aligned} J(I_{23} I_{12}) &= \begin{vmatrix} \varphi_2 \chi_2 \\ \varphi_3 \chi_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varphi_2 \chi_2 \\ \varphi_3 \chi_3 \end{vmatrix} \times J(I_{23} I_{31}) \\ J(I_{31} I_{12}) &= \begin{vmatrix} \psi_2 \chi_2 \\ \psi_3 \chi_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varphi_2 \psi_2 \\ \varphi_3 \psi_3 \end{vmatrix} \times J(I_{23} I_{31}). \end{aligned}\right.$$

Ersetzt man y durch x, so gehen:

$$I_{23},\ I_{31},\ I_{13} \text{ in } J_{23},\ J_{31},\ J_{12}$$

über, die Relationen in 39) also in:

$$
40) \quad \left\{ \begin{aligned} J(J_{23}, J_{12}) &= M \cdot f_2 = \frac{(\varphi_2 \chi_3)}{(\varphi_2 \psi_3)} \cdot M \cdot f_3 \\ J(J_{31}, J_{12}) &= M \cdot f_1 = \frac{(\psi_2 \chi_3)}{(\varphi_2 \psi_3)} \cdot M \cdot f_3 \, . \end{aligned} \right.
$$

Daraus folgt, dass die drei Unterdeterminanten in folgender Form darstellbar sein müssen:

$$
\begin{aligned} (\varphi_2 \chi_3) &= \mathrm{M} \cdot f_2 \\ (\varphi_2 \psi_3) &= \mathrm{M} \cdot f_3 \\ (\psi_2 \chi_3) &= \mathrm{M} \cdot f_1 \end{aligned}
$$

wo M eine lineare Function ist.

Die wirkliche Ausrechnung ergibt folgende Ausdrücke für die Unterdeterminante von π:

$$
41) \quad \begin{aligned}
(\varphi_1 \psi_2) &= f_3 \cdot \left\{ \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_2 \right\} \\
(\varphi_1 \chi_2) &= f_2 \cdot \left\{ \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_2 \right\} \\
(\psi_1 \chi_2) &= f_1 \cdot \left\{ \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_2 \right\} \\
(\varphi_2 \psi_3) &= f_3 \cdot \left\{ \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_2 \right\} \\
(\varphi_2 \chi_3) &= f_2 \cdot \left\{ \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_2 \right\} \\
(\psi_2 \chi_3) &= f_1 \cdot \left\{ \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_2 \right\} \\
(\varphi_1 \psi_3) &= f_3 \cdot \left\{ \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_2 \right\} \\
(\varphi_1 \chi_3) &= f_2 \cdot \left\{ \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_2 \right\} \\
(\psi_1 \chi_3) &= f_1 \cdot \left\{ \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_2 \right\} .
\end{aligned}
$$

Ein flüchtiger Blick auf diese Ausdrücke zeigt, dass dieselben die zweiten Differentialquotienten von M sind.

Multiplicirt man in π die erste Kolonne mit x_1^2, die zweite und dritte resp. mit $x_1 x_2$ und x_2^2 und addirt die letzteren zur ersten, so bekommt man die bekannte Relation:

$$f_1 J_{23} + f_2 J_{31} + f_3 J_{12} = 0.$$

An Stelle dieser Relation kann man aber drei andere viel durchsichtigere setzen, denn aus der Entwicklung von π folgt unmittelbar:

42) $$\left\{\begin{aligned} \varphi_1 f_1 - \psi_1 f_2 + \chi_1 f_3 &= 0 \\ \varphi_2 f_1 - \psi_2 f_2 + \chi_2 f_3 &= 0 \\ \varphi_3 f_1 - \psi_3 f_2 + \chi_3 f_3 &= 0. \end{aligned}\right.$$

§. 7.

Mit Hilfe der vorigen Auseinandersetzungen können wir folgende Covariante leicht in niedere Formen zerlegen:

$$N = \begin{vmatrix} (J_{12} H_1)^2, & (J_{31} H_1)^2, & (J_{23} H_1)^2 \\ (J_{12} H_2)^2, & (J_{31} H_2)^2, & (J_{23} H_2)^2 \\ (J_{12} H_3)^2, & (J_{31} H_3)^2, & (J_{23} H_3)^2 \end{vmatrix}$$

Es ist nämlich:

43) $$N = \begin{vmatrix} (X_3 H_1)^2 - P_3 H_1, & (X_2 H_1)^2 - P_2 H_1, & (X_1 H_1)^2 - P_1 H_1 \\ (X_3 H_2)^2 - P_3 H_2, & (X_2 H_2)^2 - P_2 H_2, & (X_1 H_1)^2 - P_1 H_2 \\ (X_3 H_3)^2 - P_3 H_3, & (X_2 H_3)^2 - P_2 H_3, & (X_1 H_3)^2 - P_1 H_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (X_3 H_1)^2, & (X_2 H_1)^2, & (X_1 H_1)^2 \\ (X_3 H_2)^2, & (X_2 H_2)^2, & (X_1 H_2)^2 \\ (X_3 H_3)^2, & (X_2 H_2)^2, & (X_1 H_3)^2 \end{vmatrix} - P_3 \begin{vmatrix} H_1 & (X_2 H_1)^2 & (X_1 H_1)^2 \\ H_2 & (X_2 H_2)^2 & (X_1 H_2)^2 \\ H_3 & (X_2 H_3)^2 & (X_1 H_3)^2 \end{vmatrix}$$

$$- P_2 \begin{vmatrix} (X_3 H_1)^2 & H_1 & (X_1 H_1)^2 \\ (X_3 H_2)^2 & H_2 & (X_1 H_2)^2 \\ (X_3 H_3)^2 & H_3 & (X_1 H_3)^2 \end{vmatrix} - P_1 \begin{vmatrix} (X_3 H_1)^2 & (X_2 H_1)^2 & H_1 \\ (X_3 H_2)^2 & (X_2 H_2)^2 & H_2 \\ (X_3 H_3)^2 & (X_2 H_3)^2 & H_3 \end{vmatrix}.$$

Die erste Determinante verschwindet identisch, da sie in zwei Factoren zerlegbar ist, von denen einer die Form π ist, folglich bleibt, indem man zugleich die übrig bleibenden Determinanten nach den H_i entwickelt:

44) $$N = -H_1 \left\{ P_3 \begin{vmatrix} (X_2 H_2)^2 & (X_1 H_2)^2 \\ (X_2 H_3)^2 & (X_1 H_3)^2 \end{vmatrix} + P_2 \begin{vmatrix} (X_1 H_2)^2 & (X_3 H_2)^2 \\ (X_1 H_3)^2 & (X_3 H_3)^2 \end{vmatrix} + P_1 \begin{vmatrix} (X_3 H_2)^2 & (X_2 H_2)^2 \\ (X_3 H_3)^2 & (X_2 H_3)^2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$- H_2 \left\{ P_3 \begin{vmatrix} (X_2 H_3)^2 & (X_1 H_3)^2 \\ (X_2 H_1)^2 & (X_1 H_1)^2 \end{vmatrix} + P_2 \begin{vmatrix} (X_3 H_3)^2 & (X_1 H_3)^2 \\ (X_3 H_1)^2 & (X_1 H_1)^2 \end{vmatrix} + P_1 \begin{vmatrix} (X_3 H_3)^2 & (X_2 H_3)^2 \\ (X_3 H_1)^2 & (X_2 H_1)^2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$- H_3 \left\{ P_3 \begin{vmatrix} (X_2 H_1)^2 & (X_1 H_1)^2 \\ (X_2 H_2)^2 & (X_1 H_2)^2 \end{vmatrix} + P_2 \begin{vmatrix} (X_3 H_1)^2 & (X_1 H_1)^2 \\ (X_3 H_2)^2 & (X_1 H_2)^2 \end{vmatrix} + P_1 \begin{vmatrix} (X_3 H_1)^2 & (X_2 H_1)^2 \\ (X_3 H_2)^2 & (X_2 H_2)^2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Nun ist z. B.:

45)
$$\begin{vmatrix} (X_2 H_2)^2 & (X_1 H_2)^2 \\ (X_2 H_3)^2 & (X_1 H_3)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_1 B_2 - \frac{1}{2}\psi_2 B_1 + \psi_3 B_0, & \varphi_1 B_2 - \frac{1}{2}\varphi_2 B_1 + \varphi_3 B_0 \\ \psi_1 C_2 - \frac{1}{2}\psi_2 C_1 + \psi_3 C_0, & \varphi_1 C_2 - \frac{1}{2}\varphi_2 C_1 + \varphi_3 C_0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (\psi_1\varphi_2) & (\psi_1\varphi_3) & (\psi_2\varphi_3) \\ B_2 & -\frac{1}{2}B_1 & B_0 \\ C_0 & -\frac{1}{2}C_2 & C_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_1\psi_2\psi_3 \\ \varphi_1\varphi_2\varphi_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_2 - \frac{1}{2}B_1 & C_0 \\ C_2 - \frac{1}{2}C_1 & C_0 \end{vmatrix},$$

folglich findet man, wenn man an die Ausdrücke, die wir oben für die zweigliedrigen Determinanten des ersten Rechteckes gegeben haben, denkt:

46)
$$\begin{vmatrix} (X_2 H_2)^2 & (X_1 H_2)^2 \\ (X_2 H_3)^2 & (X_1 H_3)^2 \end{vmatrix} = -f_3 \left\{ \frac{d^2 M}{dx_1^2} \begin{vmatrix} B_2 - \frac{1}{2}B_1 \\ C_2 - \frac{1}{2}C_1 \end{vmatrix} + \frac{d^2 M}{dx_1 dx_2} \begin{vmatrix} B_2 B_0 \\ C_2 C_0 \end{vmatrix} + \frac{d^2 M}{dx_2^2} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}B_1 B_0 \\ -\frac{1}{2}C_1 C_0 \end{vmatrix} \right\}.$$

Überlegt man ferner, dass der Ausdruck in der Klammer die zweite Überschiebung der Form M über die Jakobi'sche Determinante der zwei Hesse'schen Covarianten H_2 und H_3 ist, so erhält man schliesslich, wenn wir dieselbe mit L_1 bezeichnen:

47)
$$\begin{vmatrix} (X_2 H_2)^2 & (X_1 H_2)^2 \\ (X_2 H_3)^2 & (X_1 H_3)^2 \end{vmatrix} = -L_1 \cdot f_3$$

zerlegt man auf diese Weise alle zweigliedrigen Determinanten in 44), so gelangt man schliesslich zu folgendem Resultat:

48)
$$\begin{aligned} N &= H_1 \{P_1 f_1 + P_2 f_2 + P_3 f_3\} \cdot L_1 \\ &+ H_2 \{P_1 f_1 + P_2 f_2 + P_3 f_3\} \cdot L_2 \\ &+ H_3 \{P_1 f_1 + P_2 f_2 + P_3 f_3\} \cdot L_3 \\ &= \{H_1 L_1 + H_2 L_2 + H_3 L_3\} \cdot M. \end{aligned}$$

§. 8.

Bildet man aus je drei quadratischen Covarianten des folgenden Systems:

$$\begin{matrix} (X_1 H_1)^2, & (X_1 H_2)^2, & (X_1 H_3)^2 \\ (X_2 H_1)^2, & (X_2 H_2)^2, & (X_2 H_3)^2 \\ (X_3 H_1)^2, & (X_3 H_2)^2, & (X_3 H_3)^2 \end{matrix}$$

die Combinanten, so ergeben sich deren vierundachtzig. Es sollen jetzt die Beziehungen zwischen denselben aufgesucht werden. Zu diesem Behufe führe ich der besseren Übersicht wegen für die Combinanten kurze Bezeichnungen ein, von deren Richtigkeit man sich sofort überzeugt. Ich schreibe z. B. die Combinante, welche aus den drei in der ersten Horizontalreihe stehenden Formen gebildet ist, folgendermassen:

$$D_1 = \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, & (\varphi_2 H_1)^2, & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\varphi_1 H_2)^2, & (\varphi_2 H_2)^2, & (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\varphi_1 H_3)^2, & (\varphi_2 H_3)^2, & (\varphi_3 H_3)^2 \end{vmatrix}.$$

Es bestehen nun, wie l. c. gezeigt habe, die folgenden Beziehungen:

$$
49)\quad \left\{
\begin{aligned}
D_1 &= \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, & (\varphi_2 H_1)^2, & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\varphi_1 H_2)^2, & (\varphi_2 H_2)^2, & (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\varphi_1 H_3)^2, & (\varphi_2 H_3)^2, & (\varphi_3 H_3)^2 \end{vmatrix} = R(f_2 f_3) \cdot R\}_{H_1 H_2 H_3}\{ \\
D_2 &= \begin{vmatrix} (\psi_1 H_1)^2, & (\psi_2 H_1)^2, & (\psi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_2)^2, & (\psi_2 H_2)^2, & (\psi_3 H_2)^2 \\ (\psi_1 H_3)^2, & (\psi_2 H_3)^2, & (\psi_3 H_3)^2 \end{vmatrix} = R(f_1 f_3) \cdot R\}_{H_1 H_2 H_3}\{ \\
D_3 &= \begin{vmatrix} (\chi_1 H_1)^2, & (\chi_2 H_1)^2, & (\chi_3 H_1)^2 \\ (\chi_1 H_2)^2, & (\chi_2 H_2)^2, & (\chi_3 H_2)^2 \\ (\chi_1 H_3)^2, & (\chi_2 H_3)^2, & (\chi_3 H_3)^2 \end{vmatrix} = R(f_1 f_2) \cdot R\}_{H_1 H_2 H_3}\{
\end{aligned}
\right.
$$

wo $R(f_i f_k)$ die Resultante der Formen f_i und f_k, und $R\}_{H_1 H_2 H_3}\{$ die Combinante der drei Hesse'schen Determinanten bedeutet.

Die Formeln 49) besagen, dass die Combinanten aus je drei in einer Reihe stehenden Formen des Systems sich in Producte aus den Resultaten je zweier der drei Grundformen in die Combinante der drei Hesse'schen Determinanten zerlegen. Bildet man die Combinanten aus je drei in einer Kolonne befindlichen Formen des Systems, entwickelt dieselben nach den Coëfficienten von H_1, H_2, H_3 und transformirt sie mit Hülfe der aus der Identität:

$$\pi = 0$$

folgenden Identitäten, so überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit folgender Beziehungen:

$$
50)\quad D_1' = \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2 & (\varphi_2 H_1)^2 & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_1)^2 & (\psi_2 H_1)^2 & (\psi_3 H_1)^2 \\ (\chi_1 H_1)^2 & (\chi_2 H_1)^2 & (\chi_3 H_1)^2 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
= \Bigg[A_2 \left\{ \begin{vmatrix} a_0 a_2 a_3 \\ b_0 b_2 b_3 \\ c_0 c_2 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_2 \\ b_0 b_1 b_2 \\ c_0 c_1 c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_3 \\ b_0 b_1 b_3 \\ c_0 c_1 c_3 \end{vmatrix}^2 \right\} - A_1 \left\{ \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_2 \\ b_0 b_1 b_2 \\ c_0 c_1 c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_3 \\ b_0 b_1 b_3 \\ c_0 c_1 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 a_2 a_3 \\ b_0 b_2 b_3 \\ c_0 c_2 c_3 \end{vmatrix} \right\} \\
+ A_0 \left\{ \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_3 \\ b_0 b_1 b_3 \\ c_0 c_1 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 a_2 a_3 \\ b_0 b_2 b_3 \\ c_0 c_2 c_3 \end{vmatrix}^2 \right\} \Bigg] \cdot (H_1 H_1')^2
\end{aligned}
$$

$$
D_2' = \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_2)^2, & (\varphi_2 H_2)^2, & (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\psi_1 H_2)^2, & (\psi_2 H_2)^2, & (\psi_3 H_2)^2 \\ (\chi_1 H_2)^2, & (\chi_2 H_2)^2, & (\chi_3 H_2)^2 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
= \Bigg[B_2 \left\{ \begin{vmatrix} a_0 a_2 a_3 \\ b_0 b_2 b_3 \\ c_0 c_2 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_2 \\ b_0 b_1 b_2 \\ c_0 c_1 c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_3 \\ b_0 b_1 b_3 \\ c_0 c_1 c_3 \end{vmatrix}^2 \right\} - B_1 \left\{ \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_2 \\ b_0 b_1 b_2 \\ c_0 c_1 c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_3 \\ b_0 b_1 b_3 \\ c_0 c_1 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 a_2 a_3 \\ b_0 b_2 b_3 \\ c_0 c_2 c_3 \end{vmatrix} \right\} \\
+ B_0 \left\{ \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_3 \\ b_0 b_1 b_3 \\ c_0 c_1 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 a_2 a_3 \\ b_0 b_2 b_3 \\ c_0 c_2 c_3 \end{vmatrix}^2 \right\} \Bigg] \cdot (H_2 H_2')^2
\end{aligned}
$$

$$D'_3 = \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_3)^2, & (\varphi_2 H_3)^2, & (\varphi_3 H_3)^2 \\ (\psi_1 H_3)^2, & (\psi_2 H_3)^2, & (\psi_3 H_3)^2 \\ (\chi_1 H_3)^2, & (\chi_2 H_3)^2, & (\chi_3 H_3)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \Bigg[C_2 \left\{ \begin{vmatrix} a_0 a_2 a_3 \\ b_0 b_2 b_3 \\ c_0 c_2 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_2 \\ b_0 b_1 b_2 \\ c_0 c_1 c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_3 \\ b_0 b_1 b_3 \\ c_0 c_1 c_3 \end{vmatrix}^2 \right\} - C_1 \left\{ \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_2 \\ b_0 b_1 b_2 \\ c_0 c_1 c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_3 \\ b_0 b_1 b_3 \\ c_0 c_1 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 a_2 a_3 \\ b_0 b_2 b_3 \\ c_0 c_2 c_3 \end{vmatrix} \right\}$$

$$+ C_0 \left\{ \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_3 \\ b_0 b_1 b_3 \\ c_0 c_1 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 a_2 a_3 \\ b_0 b_2 b_3 \\ c_0 c_2 c_3 \end{vmatrix}^2 \right\} \Bigg] \cdot (H_3 H'_3)^2.$$

Diese Formeln lehren, dass die Combinanten, welche aus je drei in derselben Colonne stehenden Formen des Systems gebildet sind, gleich dem Producte aus der zweiten Überschiebung der Hesse'schen Covariante von M über die bezüglichen Hesse'schen Covarianten der Grundformen in die resp. zweiten Überschiebungen der Hesse'schen Formen über sich selbst sind. Es ist aber, von einem Zahlenfactor abgesehen:

$$M = P_1 f_1 + P_2 f_2 + P_3 f_3,$$

die zweite Überschiebung von M über sich selbst also:

$$(MM')^2 = P_1^2 H_1 + P_2^2 H_2 + P_3^2 H_3 + 2 P_1 P_2 H_{12} + 2 P_1 P_3 H_{13} + 2 P_2 P_3 H_{23},$$

wenn man mit H_i die zweite Überschiebung zweier der Grundformen bezeichnet, folglich ist:

$$D'_1 = (H_1 H'_1)^2 \{ P_1^2 (H_1 H'_1)^2 + P_2^2 (H_1 H_2)^2 + P_3^2 (H_1 H_3) + 2 P_1 P_2 (H_1 H_{12})^2$$
$$+ 2 P_1 P_3 (H_1 H_{13})^2 + 2 P_2 P_3 (H_1 H_{23})^2 \}$$

$$D'_2 = (H_2 H'_2)^2 \{ P_1^2 (H_1 H_2)^2 + P_2^2 (H_2 H'_2)^2 + P_3^2 (H_2 H_3)^2 + 2 P_1 P_2 (H_2 H_{12})^2$$
$$+ 2 P_1 P_3 (H_2 H_{13})^2 + 2 P_2 P_3 (H_2 H_{23})^2 \}$$

$$D' = (H_3 H'_3)^2 \{ P_1^2 (H_1 H_3)^2 + P_2^2 (H_2 H_3)^2 + P_3^2 (H_3 H'_3)^2 + 2 P_1 P_2 (H_3 H_{12})^2$$
$$+ 2 P_1 P_3 (H_3 H_{13})^2 + 2 P_2 P_3 (H_3 H_{23})^2 \}.$$

Aus den Relationen 49) und 50), welche Combinanten betreffen, die entweder aus drei Formen in einer Zeile oder aus drei Formen in einer Colonne gebildet sind, lassen sich nun auch Relationen zwischen den übrigen Combinanten herleiten. Versteht man nämlich unter:

$$\Delta^B (D'_1)$$

folgende Operation:

$$\Delta^B (D) = \frac{dD}{dA_0} B_0 + \frac{dD}{dA_1} B_1 + \frac{dD}{dA_2} B_2$$

so erhält man:

$$51)\quad \Delta^B (D'_1) = \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_2)^2, & (\varphi_2 H_2)^2, & (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\psi_1 H_1)^2, & (\psi_2 H_1)^2, & (\psi_3 H_1)^2 \\ (\chi_1 H_1)^2, & (\chi_2 H_1)^2, & (\chi_3 H_1)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, & (\varphi_2 H_1)^2, & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_2)^2, & (\psi_2 H_2)^2, & (\psi_3 H_2)^2 \\ (\chi_1 H_1)^2, & (\chi_2 H_1)^2, & (\chi_3 H_1)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, & (\varphi_2 H_1)^2, & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_1)^2, & (\psi_2 H_1)^2, & (\psi_3 H_1)^2 \\ (\chi_1 H_2)^2, & (\chi_2 H_2)^2, & (\chi_3 H_2)^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta^C (D'_1) = \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_3)^2, & (\varphi_2 H_3)^2, & (\varphi_3 H_3)^2 \\ (\psi_1 H_1)^2, & (\psi_2 H_1)^2, & (\psi_3 H_1)^2 \\ (\chi_1 H_1)^2, & (\chi_2 H_1)^2, & (\chi_3 H_1)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, & (\varphi_2 H_1)^2, & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_3)^2, & (\psi_2 H_3)^2, & (\psi_3 H_3)^2 \\ (\chi_1 H_1)^2, & (\chi_2 H_1)^2, & (\chi_3 H_1)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, & (\varphi_2 H_1)^2, & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_1)^2, & (\psi_2 H_1)^2, & (\psi_3 H_1)^2 \\ (\chi_1 H_3)^2, & (\chi_2 H_3)^2, & (\chi_3 H_3)^2 \end{vmatrix}$$

u. s. w., d. h. die Summe dreier Combinanten, von denen jede aus zwei Formen in einer Colonne und einer dritten mit ihnen weder in einer Zeile noch in einer Colonne stehenden Form gebildet sind, lässt sich durch niedere Invarianten ausdrücken. Setzen wir ferner:

$$\Delta^B(D') = N,$$

so ist:

52)
$$\Delta^C(N) = \frac{dN}{dA_0} C_0 + \frac{dN}{dA_1} C_1 + \frac{dN}{dA_2} C_2$$

$$= \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_2)^2, & (\varphi_2 H_2)^2, & (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\psi_1 H_3)^2, & (\psi_2 H_3)^2, & (\psi_3 H_3)^2 \\ (\chi_1 H_1)^2, & (\chi_2 H_1)^2, & (\chi_3 H_1)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_2)^2, & (\varphi_2 H_2)^2, & (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\psi_1 H_1)^2, & (\psi_2 H_1)^2, & (\psi_3 H_1)^2 \\ (\chi_1 H_3)^2, & (\chi_2 H_3)^2, & (\chi_3 H_3)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_3)^2, & (\varphi_2 H_3)^2, & (\varphi_3 H_3)^2 \\ (\psi_1 H_2)^2, & (\psi_2 H_2)^2, & (\psi_3 H_2)^2 \\ (\chi_1 H_1)^2, & (\chi_2 H_1)^2, & (\chi_3 H_1)^2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, & (\varphi_2 H_1)^2, & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_2)^2, & (\psi_2 H_2)^2, & (\psi_3 H_2)^2 \\ (\chi_1 H_3)^2, & (\chi_2 H_3)^2, & (\chi_3 H_3)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_3)^2, & (\varphi_2 H_3)^2, & (\varphi_3 H_3)^2 \\ (\psi_1 H_1)^2, & (\psi_2 H_1)^2, & (\psi_3 H_1)^2 \\ (\chi_1 H_2)^2, & (\chi_2 H_2)^2, & (\chi_3 H_2)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, & (\varphi_2 H_1)^2, & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_3)^2, & (\psi_2 H_3)^2, & (\psi_3 H_3)^2 \\ (\chi_1 H_2)^2, & (\chi_2 H_2)^2, & (\chi_3 H_2)^2 \end{vmatrix}$$

d. h. die Summe von sechs Combinanten, von denen keine die Coëfficienten von zwei Formen in einer Zeile oder einer Colonne vorkommt, lässt sich durch niedere Invarianten ausdrücken.

Berücksichtigt man, dass die Relationen 49) bestehen, was auch A, B, C sein mögen, und bildet die Form:

$$\Delta\,(D) = \frac{dD}{da_0} c_0 + \frac{dD}{da_1} c_1 + \frac{dD}{da_2} c_2 + \frac{dD}{da_3} c_3$$

so erhält man:

53)
$$\Delta\,(D_1) = \begin{vmatrix} (\psi_1 H_1)^2, & (\psi_2 H_1)^2, & (\psi_3 H_1)^2 \\ (\varphi_1 H_2)^2, & (\varphi_2 H_2)^2, & (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\varphi_1 H_3)^2, & (\varphi_2 H_3)^2, & (\varphi_3 H_3)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, & (\varphi_2 H_1)^2, & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_2)^2, & (\psi_2 H_2)^2, & (\psi_3 H_2)^2 \\ (\varphi_1 H_3)^2, & (\varphi_2 H_3)^2, & (\varphi_3 H_3)^2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, & (\varphi_2 H_1)^2, & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\varphi_1 H_2)^2, & (\varphi_2 H_2)^2, & (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\psi_1 H_3)^2, & (\psi_2 H_3)^2, & (\psi_3 H_3)^2 \end{vmatrix} = \Delta\ R(f_2 f_3) \,.\, R\{H_1 H_2 H_3\}'$$

d. h. die Summe von drei Combinanten, deren jede aus zwei Formen in einer Reihe und einer dritten, welche mit diesen weder in einer Reihe noch in einer Colonne steht, gebildet ist, ist durch niedere Invarianten ausdrückbar.

Was die Combinanten betrifft, die aus je drei Formen gebildet sind, von denen zwei in einer Reihe und zwei in einer Colonne stehen, so konnte ich bei denselben ähnliche einfache Relationen nicht auffinden, und ich muss mich daher beschränken, den Typus folgender Relationen anzugeben, die man mit Hilfe eines bekannten Determinantensatzes leicht verificiren kann. Es ist:

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, (\varphi_2 H_1)^2, (\varphi_1 H_1)^2 \\ (\varphi_1 H_2)^2, (\varphi_2 H_2)^2, (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\psi_1 H_1)^2, (\psi_2 H_1)^2, (\psi_3 H_1)^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, (\varphi_2 H_1)^2, (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\varphi_1 H_3)^2, (\varphi_2 H_3)^2, (\varphi_3 H_3)^2 \\ (\chi_1 H_1)^2, (\chi_2 H_1)^2, (\chi_3 H_1)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, (\varphi_2 H_1)^2, (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\varphi_1 H_2)^2, (\varphi_2 H_2)^2, (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\chi_1 H_1)^2, (\chi_2 H_1)^2, (\chi_3 H_1)^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, (\varphi_2 H_1)^2, (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_1)^2, (\psi_2 H_1)^2, (\psi_3 H_1)^2 \\ (\varphi_1 H_3)^2, (\varphi_2 H_3)^2, (\varphi_3 H_3)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, (\varphi_2 H_1)^2, (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\varphi_1 H_2)^2, (\varphi_2 H_2)^2, (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\varphi_1 H_3)^2, (\varphi_2 H_3)^2, (\varphi_3 H_3)^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, (\varphi_2 H_1)^2, (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_1)^2, (\psi_2 H_1)^2, (\psi_3 H_1)^2 \\ (\chi_1 H_1)^2, (\chi_2 H_1)^2, (\chi_3 H_1)^2 \end{vmatrix}$$

$$= R(f_2 f_3) \,.\, R\{H_1 H_2 H\}$$

$$(H_1 H_1')^2 \{P_1^2 (H_1 H_1')^2 + P_2^2 (H_1 H_2)^2 + P_3^2 (H_1 H_3)^2 + 2P_1 P_2 (H_1 H_{12})^2$$
$$+ 2P_1 P_3 (H_1 H_{13})^2 + 2P_2 P_3 (H_1 H_{23})^2\}.$$

WIEN.
AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.
1885.