F.R MERT

DIE

AUSGLEICHUNGSRECHNUNG

NACH DER METHODE

DER KLEINSTEN QUADRATE

ZWEITE AUFLAGE

P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen**, der **Technischen** und **Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband historische, philosophische und didaktische Fragen besprechen wird. Eine **französische Ausgabe**, von französischen Mathematikern besorgt, hat zu erscheinen begonnen.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica** (Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften), das **Archiv der Mathematik und Physik**, die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, die **Zeitschrift für Mathematik und Physik** (Organ für angewandte Mathematik), die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, die **Mathematisch-naturwissenschaftlichen Blätter**, ferner **Natur und Schule** (Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen), die **Geographische Zeitschrift** u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“.** Diese jährlich zweimal erscheinenden „Mitteilungen“, die in 30000 Exemplaren im In- und Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags durch ausführliche Selbstanzeigen der Verfasser in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte **Ausführliche Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten**, 100. Ausgabe [XLVIII u. 272 S. gr. 8], in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraße 3.

B. G. Teubner.

DIE AUSGLEICHUNGSRECHNUNG

NACH DER

METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE

MIT ANWENDUNGEN AUF DIE GEODÄSIE,
DIE PHYSIK UND DIE THEORIE DER MESSINSTRUMENTE

VON

F. R. HELMERT

DIREKTOR DES KÖNIGLICH PREUSSISCHEN GEODÄTISCHEN INSTITUTS
UND ZENTRALBUREAUS DER INTERNATIONALEN ERDMESSUNG

ZWEITE AUFLAGE

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1907

Vorrede zur ersten Auflage.

Dieses Buch habe ich zunächst in der Absicht geschrieben, es bei meinen Vorträgen über die Anwendungen der Methode der kleinsten Quadrate am Polytechnikum zu Aachen zu benutzen. Ich will damit meinen Zuhörern Gelegenheit bieten, die Behandlung von Beispielen bei einer sich an den Vortrag anschließenden Darstellung in der nur durch den Druck zu erreichenden kompendiösen Form überblicken zu können. Es schien mir zweckmäßig, den Beispielen die allgemeinen Formeln nebst deren Entwicklung beizufügen, einesteils um auch hie und da für denjenigen, welcher sich fortbilden will, etwas mehr zu geben, als im Vortrag zweckmässig ist, und andernteils, weil selbst für den Geübteren eine Übersicht der Formeln oft erwünscht wird. Ich hoffe dadurch zugleich für einen größeren Leserkreis etwas Brauchbares bearbeitet zu haben.

Was den Inhalt des Buches anlangt, so bemerke ich zu dem, was das „Inhaltsverzeichnis“ und die „Übersicht der Beispiele“ darüber angeben, noch folgendes. Weil ich, wie im Vorhergehenden bereits mitgeteilt, in erster Linie die Anwendungen, also die praktische Seite im Auge hatte, so habe ich nur mehr beiläufig der Beziehung zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Methode der kleinsten Quadrate gedacht, dagegen vielmehr die jüngere der beiden Darstellungsweisen der letztern durch Gauß hervorgehoben, weil sie bei einfacherem Kalkül doch ausreichende Strenge und überdies eine größere Allgemeinheit besitzt.

Die Unterscheidung der Hauptformen der Ausgleichungsaufgaben ist nach Gerling, jedoch sind noch zwei allgemeinere

Formen behandelt, wobei durch Erweiterung des Gaußschen Algorithmus Endformeln von derselben Gestalt wie bei den einfachen Formen erzielt wurden, wenn dieselben auch im wesentlichen nicht neu sein können.

Durch Einführung des Begriffs äquivalenter Beobachtungen glaube ich die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen durchsichtiger gemacht zu haben, namentlich für den Fall der Anwendung auf die Theorie der Triangulationen. Zugleich ergab sich aus diesem Begriffe eine neue Darstellung der Eigenschaften der Fehlerellipse, welche bekanntlich Herr von Andrae erfunden hat (Astr. Nachr. Band 47), die aber bisher nur in Beziehung zum Gaußschen Fehlergesetz aufgefaßt worden ist.*)

Die Entwicklungen sind mit Absicht in den ersten Abschnitten etwas breit gehalten, ebenso ist die Kenntnis der Determinantentheorie nicht vorausgesetzt. Die weniger entwickelten Lösungen sind nicht übergangen, um den vereinzelten Anwendungen zu entsprechen, für welche ein Studium der eleganteren und meist rationelleren Lösungen nicht am Platze ist.

Von Wichtigkeit erschien es mir, die Untersuchung der plausibelsten Beobachtungsfehler mehr zu betonen, als sonst wohl üblich in Lehrbüchern, doch ist die gegebene Darstellung weit entfernt, eine abgeschlossene Untersuchung sein zu wollen. Die Unterscheidung wahrer und plausibler Fehler ist allenthalben möglichst streng durchgeführt und demgemäß auch bei der Untersuchung des Verteilungsgesetzes der plausibelsten Fehler zur Vergleichung nicht ein wahrer Fehler benutzt (etwa der mittlere oder wahrscheinliche) — wie z. B. von Encke im Berl. Jahrb. 1834, S. 287, geschehen —, sondern ebenfalls ein plausibelster Fehler.

Um recht ersichtlich zu machen, welcher erhebliche Unterschied zwischen zwei Anwendungen der Methode der kleinsten Quadrate stattfinden kann bezüglich der Bedeutung der Resultate, habe ich auch die Anwendung derselben zu interpolatorischen Zwecken mit aufgenommen.

---

*) Vergl. über die Fehlerellipse auch die S. 309 zitierte Abhandlung des Verfassers.

Abgekürzte Ausgleichungsmethoden, welche oft die strenge Ausgleichung zweckmäßig zu ersetzen geeignet sind, sind nicht behandelt worden, weil dies zu sehr in Spezialitäten geführt hätte. Es muß gewiß auch dem Studium dieser Methoden dasjenige der strengen Theorie vorausgehen, denn erst die Kenntnis der letzteren befähigt zur Beurteilung des Wertes der ersteren. Der Kenner der strengen Methoden wird ferner oft imstande sein, durch passende Anordnung der Beobachtungen die strenge Ausgleichung so einfach zu gestalten, daß die Anwendung eines abgekürzten Verfahrens überflüssig ist.

Ich kann nicht schließen, ohne vorher meinem verehrten Kollegen, Herrn Dr. K. Hattendorff für die freundschaftliche Unterstützung, welche derselbe mir bei der vorletzten Revision der Druckbogen zuteil werden ließ, auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank auszudrücken.

Aachen, den 10. Februar 1872.

Der Verfasser.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Nachdem die erste Auflage des Buches vergriffen war, ging ich gern auf den Wunsch der Verlagsbuchhandlung ein, eine neue Auflage vorzubereiten, weil mir dies Gelegenheit bot, meine in drei Jahrzehnten bei zahlreichen Anwendungen gewonnenen Erfahrungen für das Buch zu verwerten und es dadurch praktisch brauchbarer zu gestalten. Demgemäß hat sich der Umfang desselben vergrößert, wiewohl ich auch einiges gestrichen habe. Weit ausführlicher als früher sind in den letzten Kapiteln behandelt: die Untersuchung der Beobachtungsfehler, die interpolatorischen Anwendungen der Methode der kleinsten Quadrate, die instrumentellen Untersuchungen, die Horizontalwinkelmessungen und die Ausgleichung der Dreiecksnetze. Den Schluß bilden einige Aufgaben über die Ökonomie der Beobachtungen. Zahlreiche Beispiele erläutern die vorgetragenen Theorien und die Formeln.

Bei der Ableitung der Grundformeln habe ich das einfache Prinzip der Methode der kleinsten Quadrate, die Quadratsumme der Verbesserungen gleich genauer Beobachtungen zu einem Minimum zu machen, noch deutlicher als bisher in den Vordergrund gestellt; erst nachträglich wird gezeigt, unter welchen Umständen die damit gewonnenen Lösungen der Aufgaben auch andere Eigenschaften besitzen, deren wichtigste ist, daß die Gewichte der Unbekannten bei gewissen Annahmen über die Natur der Beobachtungsfehler ein Maximum werden. Dies ist der einfachste Weg. Andere Begründungen der Methode der kleinsten Quadrate wurden mehr oder weniger nur gestreift; auf alle einzugehen, war um so weniger nötig, als das Werk von E. Czuber: „Theorie der Beobachtungsfehler", dafür eine eingehende Darstellung gibt.

Wie in der ersten Auflage sind die Entwicklungen in den ersten Kapiteln mit Absicht etwas breit gehalten, weiterhin aber, wo es zulässig erschien, kürzer gefaßt.

Die Korrektheit der Formeln und der Zahlenbeispiele dürfte billigen Anforderungen genügen. Herr Prof. Dr. L. Krüger, Abteilungsvorsteher im Königlich Preußischen Geodätischen Institut, hatte die Güte, fast alles nachzurechnen und die Korrekturbogen mit zu lesen, wofür ich ihm meinen besten Dank ausspreche.

Potsdam, im Februar 1907.

F. R. Helmert.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Einleitende Bemerkungen über die Beobachtungsfehler und die Aufgaben der Ausgleichungsrechnung.

Zweites Kapitel.

Mehrfache Bestimmung einer Größe.

Drittes Kapitel.

Vermittelnde Beobachtungen zur Bestimmung mehrerer Größen: Elementen-Ausgleichung.

Viertes Kapitel.

Korrelatenausgleichung.

Fünftes Kapitel.

Untersuchung der Beobachtungsfehler.

Sechstes Kapitel.
Näherungsweise Darstellung von Funktionen.

Siebentes Kapitel.
Beispiele über Teilkreise, Mikrometerschrauben und Libellen.

Achtes Kapitel.
Horizontalwinkelmessung und Dreiecksnetze.

Neuntes Kapitel.
Ökonomie der Beobachtungen.

Übersicht der Beispiele.

Druckfehler.

S. 119 erste Fußnote zweite und dritte Zeile lies anstatt „und vier Abhandlungen“: und einer Abhandlung.
S. 155 (VIII) erste Zeile dritte Spalte lies anstatt $\beta_2'' \ldots \beta_3''$.
S. 161 (9*), Spalte η_6 dritte Gleichung lies anstatt $-6{,}6667 \ldots +6{,}6667$.
S. 175 letzte Zeile ist ein Komma hinter Gauß einzuschalten.
S. 187 Fußnote lies anstatt medeo: medio.
S. 290 Fußnote letzte Zeile lies: s. Kap., § 3, VI
S. 325 heißt der letzte Nenner im Ausdruck für II: 3.1366.
S. 364 IV lies Beobachtungen anstatt Beobachtungsreihen.
S. 398 ist bei $\alpha = -0{,}7$ zu setzen $P_4 = -0{,}4121$.
S. 402 ist im zweiten Absatz erste Zeile K_3 anstatt K_7 zu lesen.
S. 438 sechste Zeile von unten ist (15) anstatt (13) zu setzen.
S. 543 zweite Fußnote lies Bd. I anstatt Bd. II.

Erstes Kapitel.

Einleitende Bemerkungen über die Beobachtungsfehler und die Aufgaben der Ausgleichungsrechnung.

§ 1. Überschüssige Beobachtungen. Verschiedene Fehlergattungen. Zweck der Ausgleichungsrechnung.

I. Überschüssige Beobachtungen. Beobachtungen, die sich auf Größenbestimmungen beziehen, können niemals absolute Genauigkeit haben, mit welcher Sorgfalt sie auch angestellt werden: sie bleiben immer Fehlern ausgesetzt. Daher ist es eine allgemein geübte Vorsicht, sich auf das Ergebnis einer Beobachtung nicht eher zu verlassen, als bis es einer Prüfung durch andere, sogenannte überschüssige Beobachtungen unterworfen worden ist. Diese Kontrolle erzielt man entweder durch wiederholte Beobachtung derselben Größe oder durch Beobachtung anderer Größen, die mit jener in einer mathematisch darstellbaren Beziehung stehen, wie sie z. B. die Winkelsumme eines Dreiecks darbietet. Fällt die Kontrolle günstig aus, so können alle Beobachtungen zusammengenommen zur Ableitung von Werten dienen, die voraussichtlich genauer sind als die unmittelbar beobachteten.

II. Grobe Fehler. Zeigen sich bei der Kontrolle Widersprüche, die wesentlich größer sind, als unter den vorliegenden Verhältnissen erwartet werden kann, so spricht man von groben Fehlern. Mißt man z. B. mit einem Theodolit, welcher noch 5 Bogensekunden erkennen läßt, die drei Winkel eines ebenen Dreiecks, und erhält man als Winkelsumme etwa nahezu $179^0 59'$ anstatt $180^0 0'$, so ist ein grober Fehler vorgekommen.

In vielen Fällen haben die überschüssigen Beobachtungen nur den Zweck, vor groben Fehlern zu schützen.

War es z. B. nicht möglich, die Grundlinie eines trigonometrischen Netzes mehr als einmal scharf zu messen, so kann man einem groben Versehen, vielleicht wegen Verzählens um eine Meßstange, vorbeugen durch eine erneute Messung mit Meßstäben oder mit einem Meßband (altbayerische Grundlinie 1801).

W. Struve teilte eine nur einmal zu messende Grundlinie in zwei Teile und verglich beide mittels eines kleinen Dreiecksnetzes. Ähnlich verfuhren die Engländer mehrfach bei ihrer Vermessung von Ostindien, und andere später.

Ist ein wichtiger trigonometrischer Punkt nur als Spitze eines Dreiecks bestimmt, in welchem die Winkel an den beiden gegebenen Punkten mit einem großen Instrument gemessen wurden, so ist es gut, falls sich dieses im dritten Punkte nicht aufstellen läßt, den Dreieckswinkel hier wenigstens angenähert zu ermitteln, so daß die Grade und Minuten aller drei Winkel kontrolliert werden. (Dies wurde z. B. von General Baeyer einmal ausgeführt.)

Bei geometrischen Nivellements entstehen erfahrungsmäßig leicht grobe Fehler, weshalb man sich dabei mit vielen Kontrollen umgibt, besonders alles doppelt nivelliert. In einem Höhendreieck HIK, das zur Untersuchung der Refraktion der Lichtstrahlen in der Atmosphäre diente, war Punkt K nur einfach an das Nivellementsnetz des Landes angeschlossen worden. Für K zeigten nun die geometrischen und trigonometrischen Höhenwerte so große Unterschiede, daß grobe Fehler zu vermuten waren, die in der Tat ein zweites Nivellement aufdeckte:

	Entf.	Trig.	Geometrisch 1.	Geometrisch 2.
	km	m	m	m
HI	17	269,88	269,63	(269,63)
IK	34	812,38	810,71	812,34
HK	20	1082,26	1080,33	1081,97 .

Im folgenden wird von groben Fehlern abgesehen, da sie durch Aufmerksamkeit vermieden werden können. Anders ist es mit den kleinen Beobachtungsfehlern, die man bezeichnet als:

III. Regelmäßige und zufällige Beobachtungsfehler. Diese Fehler, insbesondere die zufälligen, sind Ursache, daß eine völlige Übereinstimmung der sich kontrollierenden Beobachtungen in der Regel nicht eintritt. Mit diesen Fehlern macht am besten ein Beispiel näher bekannt.

Mittels eines nicht durchschlagbaren Polarplanimeters werde eine den Planimeterpol nicht einschließende Fläche einmal in möglichster Nähe des Poles zur Fläche, sodann in möglichster Entfernung beider gemessen; hierbei sind es namentlich folgende drei Ursachen, die eine Abweichung der beiden Ergebnisse bedingen:

a) Kleine Abweichungen des Fahrstiftes von dem zu befahrenden Umfange.

b) Unregelmäßiges Wälzen der Rolle, namentlich infolge kleiner Unebenheiten der Unterlage.

c) Unvollkommene Berichtigung des Instruments, also das Vorhandensein von Instrumentalfehlern.

Unter den letzteren kommt insbesondere eine Abweichung von dem Parallelismus zwischen der Rollenachse und der Geraden in der Papierebene durch Fahrstift und Drehachse der Planimeterarme in Betracht. Aber sowohl dieser wie in der Regel auch alle andern Instrumentalfehler können auf ein verschwindendes Maß verkleinert werden: nicht so dagegen die beiden ersten Fehlerursachen, selbst bei größter Aufmerksamkeit und bei sorgfältigster Behandlung der Unterlage und des Rollenumfanges: a) und b) sind daher Ursachen unvermeidlicher Fehler, c) aber ist Ursache von im wesentlichen vermeidlichen Fehlern.

Sie unterscheiden sich aber auch noch in anderer Beziehung: es werden nämlich die beiden ersten Ursachen bei wiederholtem Umfahren der Fläche immer andere Fehler des Ergebnisses erzeugen, denn die Unregelmäßigkeiten im Umfahren des Umfangs und in dem Wälzen der Rolle sind in der Regel bei jedem neuen Umfahren immer wieder andere; man weiß nur, daß sie stattfinden, aber nicht im voraus, wo und

1*

in welchem Betrage sie erfolgen werden. Die dritte Fehlerursache aber hat, was den besonders erwähnten Instrumentalfehler betrifft, so lange einen konstanten Fehler des Ergebnisses zur Folge, als die gegenseitige Lage der Fläche und des Poles dieselbe ist; man kann sogar im voraus aus den Dimensionen des Planimeters und der Form und Lage des Umfangs für jeden Betrag dieses Instrumentalfehlers den Einfluß auf das Ergebnis berechnen. Mit der gegenseitigen Lage von Pol und Fläche ändert sich derselbe, immer aber in einem zu berechnenden Betrage. Die dritte Fehlerursache erzeugt also entweder konstante oder sich regelmäßig ändernde Fehler.

Im Gegensatz dazu nennt man die Fehler infolge der erstgenannten Ursachen unregelmäßige oder auch zufällige.

Wie im Beispiel, so ist es auch allgemein: Die Fehlerursachen und die von ihnen erzeugten Fehler sind teils vermeidlich, teils unvermeidlich; sie sind teils regelmäßig und unter Umständen konstant, teils unregelmäßig oder wie man auch sagt: zufällig. Konstante und regelmäßige Fehler sind in der Regel im wesentlichen vermeidlich, unvermeidlich aber sind immer irgendwelche zufällige Fehler.

Zu den konstanten und regelmäßigen Fehlern zählen u. a. alle durch Instrumentalfehler erzeugten Fehler: diese sind durch direkte Ermittelung der Instrumentalfehler und Berechnung ihres Einflusses, soweit es möglich ist, unschädlich zu machen oder durch besondere Meßverfahren mehr oder weniger zu eliminieren. Sie sind also vermeidlich bis auf relativ zu der Größe der zufälligen Fehler nicht mehr in Betracht kommende Reste. Demgemäß soll z. B. die Länge eines Meßstabes so genau mit der nominellen Länge übereinstimmen, daß eine noch vorhandene kleine Abweichung auf das Ergebnis von vorzunehmenden Längenmessungen mindestens keinen größeren Einfluß haben kann, als die Unsicherheit desselben wegen zufälliger Fehler beträgt.

Zu den Ursachen unregelmäßiger oder zufälliger Fehler rechnet man die Unsicherheit im Einstellen eines Visier-Fadens auf ein Objekt und im Ablesen an Teilungen, die Unruhe der Bilder von entfernten Gegenständen wegen der Undulationen der Luft, kleine Reste von Instrumentalfehlern (die etwa aus ihrer Veränderlichkeit infolge von Temperatureinflüssen usw. entstehen) u. a. m. Durch künstliche Verschärfung unserer Sinne können zwar die aus ihrer Unvollkommenheit entstehenden Fehler in engere Grenzen eingeschlossen werden, doch ganz zu vermeiden sind sie nicht. Auf die Größe der Fehler aber, deren Ursachen außerhalb unseres Machtbereichs liegen, wie z. B. (in der Regel) die Undulationen der Luft, können wir nicht einwirken; soweit daher solche Ursachen zur Geltung kommen, ist den Bemühungen, die Genauigkeit der Beobachtungen zu erhöhen, eine Schranke gezogen.

Konstante und regelmäßige Fehler können unter Umständen in einer Beobachtungsgruppe einen anscheinend unregelmäßigen Charakter annehmen und sich dann annähernd wie zufällige Fehler verhalten. So wirken z. B. Kreisteilungsfehler konstant, solange man Winkel bei derselben Kreisstellung beobachtet. Wird jedoch die Kreisstellung für jede Messung geändert, so wird der Einfluß der Teilungsfehler ein wechselnder und je nach den Umständen anscheinend mehr oder weniger unregelmäßig.

IV. Zweck der Ausgleichungsrechnung. Setzt man voraus, daß nur zufällige Fehler eintreten, so wird man erwarten können, daß wiederholte Messungen einer Größe Ergebnisse liefern, die ihren wahren Wert einschließen; wenigstens darf man gemäß der Erfahrung annehmen, daß es so in der Regel sein wird und daß nur ausnahmsweise die Resultate insgesamt oder vorherrschend kleiner bzw. größer als der wahre Wert sind. Im allgemeinen werden somit Kontrollmessungen auf die wahren Werte der Unbekannten hinweisen, und durch allmähliche Vermehrung der Kontrollen wird es möglich sein, sich den wahren Werten der Unbekannten mehr und mehr zu nähern, also die Genauigkeit ihrer aus den Beobachtungen berechneten Werte zu erhöhen.

In jedem gegebenen Falle verfolgt nun die Ausgleichungsrechnung den Zweck, aus allen Messungen ein von Messungsfehlern möglichst freies Endergebnis, sowie aus den Widersprüchen ein Maß für seine Genauigkeit abzuleiten.

Bei strengerer Behandlung bedient man sich der Methode der kleinsten (Fehler-)Quadrate, nach welcher die Summe der Quadrate der kleinen Verbesserungen, die gleichgenauen Beobachtungswerten hinzuzufügen sind, um ihre Widersprüche zu heben, zu einem Minimum gemacht wird.

Die Ausgleichungsvorschriften der Methode der kleinsten Quadrate sind unabhängig von der Natur der Beobachtungsfehler.

Will man aber auch zu einer allgemeinen Fehlertheorie und Genauigkeitsschätzung gelangen, so muß angenommen werden, daß die Beobachtungsfehler nur zufällige sind; man wird finden, daß die Ausgleichung selbst in gewissem Grade das Mittel bietet, zu entscheiden, in wie weit diese Annahme richtig ist.*)

In den folgenden Paragraphen sollen zunächst die zufälligen Beobachtungsfehler und ihr Zustandekommen eingehender betrachtet werden.

§ 2. Die zufälligen Beobachtungsfehler und das Fehlergesetz.

I. Die zufälligen Beobachtungsfehler. Indem man die unregelmäßigen Beobachtungsfehler als zufällige Fehler bezeichnet, drückt man damit aus, daß ihre Entstehung mehr oder weniger unbekannt ist. Hiermit steht nicht im Widerspruch, daß wir auf Seite 4 Ursachen zufälliger Fehler anführen konnten; denn die Zurückführung auf diese Ursachen nützt für die mathematische Darstellung noch kaum etwas. Wenn es einmal gelänge, eine Art bisher als zufällig betrachteter Fehler auf solche Ursachen zurückzuführen, deren Größe und Wirkung mathematisch darstellbar sein würden, so wären damit die Fehler dieser Art aus der Gattung der unregelmäßigen Fehler in die Gattung der regelmäßigen versetzt und dadurch der Rechnung zugänglich gemacht. Dies würde aber nur dann etwas nützen, wenn die unabhängigen Veränderlichen

---

*) Von großem Interesse ist, was der Begründer der Methode der kleinsten Quadrate, Carl Friedrich Gauß, in einer Selbstanzeige seiner Theoria combinationis observationum über die verschiedenen Arten der Beobachtungsfehler, die Genauigkeitsschätzung und die Ausgleichungsrechnungen sagt. (Gauß' Werke, IV, S. 95 u. f.).

(die Ursachen) in jedem Einzelfalle gegebene Größen wären. In der Regel wird das nicht der Fall sein.

Abgesehen von solchen Ausnahmefällen, sind die zufälligen Fehler für uns unbekannte Funktionen mehr oder weniger unbekannter Veränderlichen. Diesen Fehlern gegenüber sind wir anscheinend ziemlich hilflos; jedoch ist es günstig, daß wir ein immerwährendes Schwanken im Betrage der Veränderlichen annehmen müssen und daß wir meistens erwarten dürfen, die entsprechenden Beobachtungswerte seien teils zu groß, teils zu klein, daß sie also den wahren Wert einschließen. Ausnahmefälle sind allerdings vorhanden, bei denen wir von einseitig wirkenden Fehlern sprechen.

Denkt man sich nun eine sehr große Reihe von Beobachtungen derselben Art (Anzahl = N, ins Unendliche wachsend), die mit gleicher Sorgfalt angestellt wurden und nur zufälligen Beobachtungfehlern unterworfen sind, so wird ein einzelnes Beobachtungsergebnis, für sich betrachtet, keinen Vorzug vor den andern verdienen; vielmehr wird ihm a priori ein bestimmter Fehler mit derselben Wahrscheinlichkeit zugeschrieben werden müssen, als irgend einem der andern Ergebnisse. Man sagt daher: die Beobachtungsergebnisse haben gleiche Genauigkeit.

Die wirklich eingetretenen Fehler haben im allgemeinen verschiedene Größe, wie die Widersprüche der Beobachtungsergebnisse zeigen. Für die Verteilung der zufälligen Fehler nach ihrer Größe werden, von Ausnahmen abgesehen, die folgenden Regeln angenommen:

1) Es sind gleich große positive und negative Fehler gleich häufig.
2) Die Häufigkeit des Vorkommens nimmt zu mit der Abnahme des absoluten Betrags des Fehlers.
3) Für den Fehler null ist sie ein Maximum.

Diese Regeln entsprechen im allgemeinen recht gut den Erfahrungen. Wird ihnen, insbesondere der Regel 1), nicht genügt, so müssen regelmäßige oder auch einseitig wirkende zufällige Fehler als vorhanden angenommen werden. Solche Fehler sind einer allgemeinen Theorie unzugänglich und daher hier im allgemeinen ausgeschlossen; es wird aber darauf in besondern Bemerkungen zurückgekommen werden.

Fehler, welche die obigen Regeln befolgen, wollen wir als zufällige Fehler im engern oder eigentlichen Sinne oder als rein zufällige bezeichnen; wir werden sie auch oftmals kurzweg „zufällige“ Fehler nennen. Sie entsprechen der gewöhnlichen Vorstellung, die man mit dem Begriff zufällig verbindet; eine andere Art des Auftretens der Fehler beweist eben, daß noch etwas Besonderes obgewaltet hat.

Beurteilen wir nun einen zu erwartenden zufälligen Fehler im engeren Sinne, so ist anzunehmen:

1) Ein positiver und ein gleich großer negativer Fehler sind gleich wahrscheinlich.
2) Es ist wahrscheinlicher, einen kleinen als einen großen Fehler zu begehen.
3) Es ist daher am wahrscheinlichsten, eine fehlerfreie Beobachtung zu erhalten.

Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε mit $\psi(\varepsilon)$, so ist nach diesen Voraussetzungen für rein zufällige Fehler

$$\psi(+\varepsilon) = \psi(-\varepsilon), \tag{1}$$

d. h. es ist $\psi(\varepsilon)$ eine gerade Funktion von ε.

Ferner ist

(2) $\psi(\varepsilon)$ abnehmend für wachsende Absolutwerte der ε;

(3) $\psi(0)$ der größte und $\psi(\pm a)$ der kleinste Wert,

den $\psi(\varepsilon)$ erhalten kann, wobei $\pm a$ den größtmöglichen Wert von ε bezeichnet. Überschreitet der Absolutwert von ε den Betrag a, so wird $\psi(\varepsilon)$ gleich null.

$\psi(\varepsilon)$, die Fehlerwahrscheinlichkeit, ist hierbei in der Art zu verstehen, wie die mathematische Wahrscheinlichkeit eines zukünftigen Ereignisses, also als Quotient aus der Anzahl der Fälle, bei denen der Fehler ε vorkommt, und der Anzahl aller Fälle, wobei zu beachten ist, daß unter diese Fälle auch die genau richtige Beobachtung mit dem Fehler null gerechnet werden muß.

In bezug auf eine gegebene Fehlerreihe ist $\psi(\varepsilon)$ ein Maß für die relative Häufigkeit des Fehlers ε.

Denkt man sich jetzt, um zu schärferen Vorstellungen zu gelangen, daß ε zwischen den Grenzen $+a$ und $-a$ stetig veränderlich sei, so ist N unendlich groß. Ist nun n_ε die Anzahl der Fehler ε, so ist die Summe aller n_ε für ε von $-a$ bis $+a$ gleich N, also

(4) $$[n_\varepsilon]_{-a}^{+a} = N; \quad ^{*})$$

ferner wird

(5) $$\psi(\varepsilon) = \frac{n_\varepsilon}{N},$$

also eine unendlich kleine Größe.

Die beiden Annahmen aber: 1) daß n_ε die Anzahl der Fehler sei, die genau dieselbe Größe ε haben, und 2) daß ε stetig veränderlich sei, bereiten zusammengenommen der Vorstellung Schwierigkeit. Einfacher und den praktischen Verhältnissen (wo man die Angaben auf eine gewisse Stelle, Dezimale, abrundet) mehr entsprechend ist es, unter n_ε die Anzahl der Fehler zu verstehen, die zwischen den engen Grenzen ε und $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ oder zwischen $\varepsilon - \frac{1}{2}\Delta\varepsilon$ und $\varepsilon + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon$ liegen. In (4) und (5) kann man ohne weiteres n_ε in diesem Sinne verstehen. Alsdann wird $\psi(\varepsilon)$ allerdings von $\Delta\varepsilon$ abhängen, dem Intervall $\Delta\varepsilon$ aber um so genauer proportional sein, je kleiner $\Delta\varepsilon$ ist. Nimmt man dafür das Differential $d\varepsilon$, so wird der Quotient $n_\varepsilon : N$ gleich $d\varepsilon$ mal einer Funktion von ε, die mit $\varphi(\varepsilon)$ bezeichnet werden soll; also wird

(6) $$\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{n_\varepsilon}{N}.$$

$\varphi(\varepsilon)$ ist im allgemeinen eine endliche Größe.

Nach (4) ist:

(7) $$\int_{-a}^{+a} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1.$$

Für zwei verschiedene Werte ε und ε' wird

$$\psi(\varepsilon) : \psi(\varepsilon') = n_\varepsilon : n_{\varepsilon'} = \varphi(\varepsilon) : \varphi(\varepsilon').$$

---

*) Auch im folgenden wird als Summenzeichen in der Regel die eckige Klammer benutzt.

Setzt man insbesondere

(8) $$\varphi(0) = c,$$

so ist

$$\varphi(\varepsilon) = c\,\frac{n_\varepsilon}{n_0}$$

oder, wenn man

$$\frac{n_\varepsilon}{n_0} = \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varphi(0)} = \chi(\varepsilon)$$

setzt,

(9) $$\varphi(\varepsilon) = c\chi(\varepsilon),$$

worin nach (2) $\chi(\varepsilon)$ ein echter Bruch sein muß, der um so kleiner ist, je größer ε wird.

II. Fehlergesetz. Die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ nennt man das Fehlergesetz, wohl mit Rücksicht darauf, daß für eine gewisse Beobachtungsart durch dasselbe die relative Häufigkeit der Fehler nicht nur bei einer gegebenen Beobachtungsreihe dargestellt wird, sondern auch für noch anzustellende Reihen. Im letztern Falle spricht man dann von Wahrscheinlichkeit. $\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$ ist die relative Häufigkeit der Fehler im Intervall ε und $\varepsilon + d\varepsilon$, sowie die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler in dieses Intervall fallen wird.

$\varphi(\varepsilon)$ kann man sich durch die Ordinaten y einer Kurve mit der Gleichung $y = \varphi(\varepsilon)$ dargestellt denken. Bei geradem Fehlergesetz verläuft die Kurve symmetrisch zur y-Achse.

Bildet man die Summe aller $\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$ zwischen den Grenzen α und β, so ergibt sich:

(10) $$\int_\alpha^\beta \varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon = \left[\frac{n_\varepsilon}{N}\right]_\alpha^\beta = \frac{[n_\varepsilon]_\alpha^\beta}{N},$$

d. i. der Quotient aus der Anzahl der Fehler zwischen den Grenzen α und β und der Anzahl N aller Fehler; es ist dies also die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler zwischen den Grenzen α und β liegt. Nennt man sie W_α^β, so hat man

(11) $$W_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta \varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Setzt man $\alpha = -a_1$ und $\beta = +a_2$, den äußersten Grenzen für ε, so wird in (10) $[n_\varepsilon]_\alpha^\beta = N$; daher ist

$$W_{-a_1}^{+a_2} = \int_{-a_1}^{+a_2} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1. \tag{12}$$

Diese Gleichung sagt, daß es im Sinne der Wahrscheinlichkeits-rechnung gewiß ist, daß der Fehler einer anzustellenden Beobachtung irgendwo zwischen den Grenzen $-a_1$ und $+a_2$ liegen wird.

III. Erfahrungsmäßige Form des Fehlergesetzes. Von welcher Form das Fehlergesetz $\varphi(\varepsilon)$ ist, kann nur durch Beobachtungen ermittelt werden. Allerdings ist deren Anzahl nie unendlich groß zu erlangen, wie streng genommen erforderlich sein würde; doch wird das Fehlergesetz ohne Zweifel auch durch eine endliche Anzahl Beobachtungen näherungsweise zu ermitteln sein, und zwar um so schärfer, je größer diese Anzahl ist.

Den Erfahrungen zufolge entspricht das Fehlergesetz

$$\varphi(\varepsilon) = c e^{-h^2 \varepsilon^2} \tag{13}$$

dem Vorkommen der zufälligen Beobachtungsfehler in der Regel mit großer Annäherung. Es bezeichnet in (13):

e die Basis der natürlichen Logarithmen,

h eine von der Genauigkeit der Beobachtungen und der Maßeinheit, in der ε ausgedrückt ist, abhängige Konstante,

c die Größe $\varphi(0)$.

Dieses Gesetz erscheint zwar insofern nicht naturgemäß, als auch beliebig große ε nach demselben noch möglich sind; aber sie besitzen doch nur geringe Wahrscheinlichkeit, indem bei wachsendem ε die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ rasch abnimmt. Ist z. B. für den Fehler ε_1

$$\varphi(\varepsilon_1) = c e^{-h^2 \varepsilon_1^2} = c\chi, \tag{14}$$

so wissen wir bereits aus (9), daß χ ein echter Bruch sein muß, was der Anblick der Exponentialgröße sofort bestätigt. Weiter ist aber

$$\begin{array}{lll} \text{für } \varepsilon = 2\varepsilon_1 & \varphi(2\varepsilon_1) = c\chi^4 = \varphi(\varepsilon_1)\chi^3 \\ \varepsilon = 3\varepsilon_1 & \varphi(3\varepsilon_1) = c\chi^9 = \varphi(\varepsilon_1)\chi^8 \\ \cdot & \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \cdot & \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \varepsilon = q\varepsilon_1 & \varphi(q\varepsilon_1) = c\chi^{qq} = \varphi(\varepsilon_1)\chi^{qq-1}, \end{array} \tag{15}$$

woraus die rasche Abnahme von $\varphi(\varepsilon)$ deutlich erhellt, namentlich wenn noch Zahlenwerte eingeführt werden. Es sei z. B. $\varepsilon_1 = \mu$ bei $h^2\mu^2 = \frac{1}{2}$, dann ist $\varphi(\mu) = \frac{c}{1{,}649}$, also $\chi = 0{,}607$ und ferner

$$\begin{aligned} \varphi(2\mu) &= 0{,}223\,\varphi(\mu) \\ \varphi(3\mu) &= 0{,}018\,\varphi(\mu) \qquad (16) \\ \varphi(4\mu) &< 0{,}001\,\varphi(\mu). \end{aligned}$$

IV. Drei verschiedene Formen des Fehlergesetzes. Im folgenden wird im allgemeinen vorausgesetzt, daß $\varphi(\varepsilon)$ den Annahmen (1), (2), (3), Seite 8, entspricht, also eine gerade Funktion von ε ist, die mit wachsendem Absolutwert von ε abnimmt. Teilweise werden wir uns aber auch auf die Annahme (1), also die Annahme einer geraden Funktion, beschränken. Insbesondere unterscheiden wir die drei Fälle:

$$\begin{aligned} &\text{I.}\ \ \varphi(\varepsilon) = c \\ &\text{II.}\ \ \varphi(\varepsilon) = c\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right) \end{aligned} \Bigg\}\ \ \varepsilon^2 \leqq a^2$$

$$\text{III.}\ \ \varphi(\varepsilon) = c e^{-h^2\varepsilon^2}.$$

Der Annahme I zufolge sind alle ε zwischen $\pm a$ gleich wahrscheinlich; es bezeichnet daher diese Annahme einen Grenzfall der Funktion $\varphi(\varepsilon)$ innerhalb der Bedingungen (1), (2), (3), S. 8; diesen genügt I insofern gerade noch, als darnach $\varphi(\varepsilon)$ für wachsende ε auch als unmerkbar wenig abnehmend angesehen werden kann.

Die Annahme II ist das erste Glied in der Entwicklung von III nach Potenzen von $h^2\varepsilon^2$, wenn man $\frac{1}{a^2}$ für h^2 setzt; sie gibt also eine Annäherung an III, doch mit dem Unterschiede, daß $\varphi(\varepsilon)$ schon für endliche Werte von ε verschwindet.

Die in den drei vorstehenden Fehlergesetzen vorkommende Konstante c läßt sich mit Rücksicht auf (7), S. 9, wonach das von $-\infty$ bis $+\infty$ genommene Integral von $\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$ gleich 1 wird, bestimmen. Es ergibt sich

(17) bei I $c = \frac{1}{2a}$; bei II $c = \frac{3}{4a}$ und bei III $c = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$,

wobei im letzteren Falle von dem bekannten Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \tag{18}$$

Gebrauch gemacht ist.*) Die drei Fehlergesetze nehmen damit die Form an:

$$\left.\begin{aligned} \text{I.}\quad \varphi(\varepsilon) &= \frac{1}{2a} \\ \text{II.}\quad \varphi(\varepsilon) &= \frac{3}{4a}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad |\varepsilon| \leqq a; \tag{19}$$
$$\text{III.}\quad \varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}.$$

Das Fehlergesetz III wurde 1794 von C. F. Gauß aufgefunden und trägt seinen Namen.

V. Zustandekommen des Gaußschen Fehlergesetzes. Die meisten Beobachtungswerte, welche in Ausgleichungen eingehen oder zur Untersuchung des Fehlergesetzes dienen, sind aus zusammengesetzten Operationen entstanden oder gar bereits Mittelwerte. Ihre Fehler sind daher Funktionen, und zwar meistens lineare, einer Anzahl elementarer zufälliger Fehler, die den einzelnen Fehlerursachen bzw. den einzelnen Operationen entsprechen. Nimmt man nun an, daß die Elementarfehler gerade Fehlergesetze befolgen und annähernd gleiche Durchschnittswerte besitzen, so ergibt sich aus allen möglichen Kombinationen mit mehr oder weniger Annäherung das Gaußsche Gesetz. Auf die Form der einzelnen Fehlergesetze kommt dabei nichts an.

Hagen**) nahm an, daß der einzelne Elementarfehler gleich $+\delta$ oder $-\delta$ sei. Dies erscheint allerdings zunächst ungeeignet, weil der Fehler null fehlt; indessen geben schon zwei Elementarfehler in allen Kombinationen den Fehler null

*) Bezeichnet man den Integralwert mit J, so ist auch $J^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$, d. i. das Volumen zwischen der xy-Ebene und der Fläche $z = e^{-(x^2+y^2)}$. In Polarkoordinaten ist $J^2 = 2\pi\int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = \pi$.

**) G. Hagen, Die Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin, 1837.

zweimal und außerdem die Fehler $+2\delta$ und -2δ je einmal. Man kommt also rasch zu einer mehr plausiblen Verteilung. Bildet man nach und nach die Kombinationen für 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Elementarfehler, so folgt die nachstehende

Übersicht der Häufigkeit der zusammengesetzten Fehler:

n	-6δ	-5δ	-4δ	-3δ	-2δ	$-\delta$	0	$+\delta$	$+2\delta$	$+3\delta$	$+4\delta$	$+5\delta$	$+6\delta$
1						1	.	1					
2					1	.	2	.	1				
3				1	.	3	.	3	.	1			
4			1	.	4	.	6	.	4	.	1		
5		1	.	5	.	10	.	10	.	5	.	1	
6	1	.	6	.	15	.	20	.	15	.	6	.	1

n ist die Anzahl der Elementarfehler.

Man sieht, daß die Häufigkeitszahlen den Binomialkoeffizienten entsprechen. Allgemeiner ist mittels der Entwicklung

$$(t^{+\delta} + t^{-\delta})^n = t^{n\delta} + (n)_1 t^{n-2\delta} + \cdots + (n)_i t^{n-2i\delta} + \cdots$$

zu erkennen, daß die Häufigkeitszahl $(n)_i$ zu dem zusammengesetzten Fehler $\varepsilon_i = (n-2i)\delta$ gehört. Ist N die Gesamtzahl der ε, und y_i die relative Häufigkeit von ε_i, so ist

$$(n)_i = y_i N. \tag{20}$$

Läßt man nun i in $i+1$ übergehen, so folgt:

$$(n)_{i+1} = y_{i+1} N \text{ für } \varepsilon_{i+1} = (n-2i-2)\delta. \tag{21}$$

Da nun $(n)_{i+1} = (n)_i \dfrac{n-i}{i+1}$ ist, so ergibt sich:

$$(y_{i+1} - y_i) N = (n)_i \frac{n-2i-1}{i+1}. \tag{22}$$

Wird gesetzt:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}}{2} = (n-2i-1)\delta,$$

$$yN = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} N = (n)_i \frac{n+1}{2(i+1)}, \tag{23}$$

$$\Delta y = y_{i+1} - y_i, \quad \Delta\varepsilon = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i,$$

so erhält man aus (22):

$$\frac{\Delta y}{y} = -\frac{\varepsilon \Delta \varepsilon}{(n+1)\delta^2}. \tag{24}$$

Bei unendlich vielen unendlich kleinen Elementarfehlern, d. h. bei $n = \infty$ und δ unendlich klein, gehen Δy und $\Delta \varepsilon$ in Differentiale über. Die Integration ergibt dann mit

$$\frac{1}{2(n+1)\delta^2} = h^2$$

die Gleichung:

(25) $$y = ce^{-h^2\varepsilon^2}.$$

Für $n = \infty$ erhält man also in Strenge das Gaußsche Gesetz.

Aber auch schon für kleine Zahlen von n findet es sich nahezu. Bei $n = 6$ wird für

$$\varepsilon : \delta = 0 \qquad 2 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 8$$

mit $h^2 = 1 : 14\delta^2$ nach (25) das Verhältnis

$$y : c = 1 \qquad 0{,}752 \quad 0{,}319 \quad 0{,}076 \quad 0{,}014\,,$$

wohingegen nach der Tabelle auf S. 14 folgt:

$$1 \qquad 0{,}75 \qquad 0{,}30 \qquad 0{,}050 \quad 0\,.$$

Durch eine kleine Änderung von h^2 könnte man den Anschluß noch verbessern.

Will man c bestimmen, so ist zu beachten, daß $[yN] = N$, also $[y] = 1$ sein muß; in unserem Beispiel sind also die zu den 7 Werten ε gehörigen y zu berücksichtigen, mithin wird $c = \frac{1}{3{,}294} = 0{,}304$.

Nimmt man für den Elementarfehler das Gesetz I, S. 12, was sehr angemessen erscheint, so geben schon ihrer vier etwa dieselbe Annäherung. Doch ist die mathematische Behandlung hier etwas mühsam.*)

Eine eingehende Darstellung der wichtigsten Theorien über die Bildung der Beobachtungsfehler aus Elementarfehlern gab Czuber.**)

*) G. Zachariae, De mindste Kvadraters Methode. Kjobenhavn 1887, S. 91, 92.

**) E. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig 1891, S. 61 u. f.

Zur Ergänzung ist zu vergleichen die Abhandlung: F. Hausdorff, Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3. (Ber. der math.-phys. Kl. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1901, S. 166).

Eine Vereinfachung der Laplaceschen Theorie gab C. V. L. Charlier 1905 im Arkiv för Matematik, Astr. och Fysik, Bd. 2.

Hier möge noch gezeigt werden, wie das Überwiegen eines Elementarfehlers Anlaß zu Abweichungen vom Gaußschen Gesetze gibt. Oben wurde gefunden, daß vier Hagensche Elementarfehler ergeben

die Fehler:	-4δ	-2δ	0	$+2\delta$	$+4\delta$
mit den Häufigkeitszahlen:	1	4	6	4	1.

Nehmen wir hierzu einen Elementarfehler, der dieselben Fehler mit konstanter Häufigkeitszahl 1 gibt, so folgen aus der Kombination nachstehende Zahlen, wobei wir des Raumes wegen die + und — vereinigen.

Fehler:	0	$\pm 2\delta$	$\pm 4\delta$	$\pm 6\delta$	$\pm 8\delta$
Häufigkeitszahlen:	16	15	11	5	1.

Augenscheinlich ist die Verteilung jetzt stark abweichend vom Gaußschen Gesetze.

Treten Elementarfehler auf, die ein ungerades Gesetz befolgen, so wird dies auf das Gesetz des Gesamtfehlers einen entsprechenden Einfluß äußern, der sich aber durch das Zusammenwirken mehrerer solcher Elementarfehler vermindern oder aufheben kann. Es wird aber gut sein, stets mit der Möglichkeit zu rechnen, daß das Fehlergesetz eine minimale Unsymmetrie besitzt.

VI. Gaußsche Bedingung für zufällige Fehler. Wenn die Beobachtungsfehler nicht in linearer Weise von den Elementarfehlern, den Ursachen, abhängen, so wird auch bei rein zufälligem Charakter der letzteren das Auftreten der Beobachtungsfehler nicht notwendig mehr ein rein zufälliges sein. Dann spricht man also von einseitig wirkenden Fehlerursachen. Sind nun einseitig wirkende Fehlerursachen vorhanden, und ist das Fehlergesetz demzufolge keine gerade Funktion, so kann man zwar die Methode d. kl. Qu. anwenden, es ist aber fraglich, ob damit eine größere Annäherung an die Wahrheit entsteht. Die Verhältnisse werden aber günstiger, wenn man von den Fehlern ε einen konstanten Teil k abtrennen kann, dergestalt, daß

$$k = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon \varphi(\varepsilon) d\varepsilon . \tag{26}$$

Die Grenzen des Integrals sind hier auf unendlich ausgedehnt. Das ist zulässig, indem man $\varphi(\varepsilon)$ einfach gleich null annehmen kann, wenn ε die möglichen Grenzwerte überschreitet.

Das Integral (26) hat die Bedeutung des Durchschnittswertes einer unendlichen Reihe von Fehlern ε. Ist z. B. n_ε die Anzahl der Fehler ε in den Grenzen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$, und ist N die Anzahl aller Fehler, so ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon\varphi(\varepsilon)d\varepsilon = \left[\varepsilon \frac{n_\varepsilon}{N}\right] = \frac{[\varepsilon n_\varepsilon]}{N}.$$

$[\varepsilon n_\varepsilon]$ ist aber die Summe aller Fehler ε zwischen den möglichen Grenzwerten.

Setzt man in (26) für ε den Wert $\varepsilon' + k$ und beachtet, daß nach der auch jetzt gültigen Gl. (12), S. 11,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon)d\varepsilon = 1$$

sein muß, so folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon' \varphi(\varepsilon' + k)d\varepsilon' = 0. \tag{27}$$

Ist es nun möglich, den konstanten Teil k im Sinne des Durchschnittswertes unendlich vieler Fehler ε zu bilden oder als Unbekannte in die Ausgleichung einzuführen (wie z. B. als persönlichen Fehler bei gewissen astronomischen Beobachtungen), so bleibt für die Teile $\varepsilon' = \varepsilon - k$ die Eigenschaft (27), die Gaußsche Bedingung*), oder anders ausgedrückt:

$$\int_0^{+\infty} \varepsilon' \varphi(\varepsilon' + k)d\varepsilon' = \int_0^{-\infty} \varepsilon' \varphi(\varepsilon' + k)d\varepsilon'. \tag{27*}$$

Diese Gleichung tritt an Stelle von $\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$ bei rein zufälligen Fehlern. Jetzt ist $\varphi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon' + k)$ keine gerade Funktion von ε bzw. ε' mehr; man kann sie auch mit $\varphi'(\varepsilon')$ bezeichnen. Diese Funktion hat als Kurve $y' = \varphi'(\varepsilon')$ die

---

*) C. F. Gauß' Werke. IV, S. 6, oder: Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate von C. F. Gauß. In deutscher Sprache herausgegeben von A. Börsch und P. Simon. Berlin 1887, S. 4 u. 5.

Eigenschaft, daß die Flächenräume zwischen der Abscissenachse ε' und der Kurve zu beiden Seiten der Ordinatenachse in bezug auf diese gleiche statische Momente haben; also liegt der Schwerpunkt der ganzen Fläche in der y'-Achse.

§ 3. Maße für die Genauigkeit einer Beobachtung.

I. Durchschnittsfehler und mittlerer Fehler. Man wird eine Beobachtungsreihe für genauer ansehen, als eine andere, wenn bei ihr vergleichsweise größere Fehler weniger häufig eingetreten sind, als bei dieser.

Um die noch unbestimmte Ausdrucksweise schärfer fassen zu können, bezeichnen wir alle Größen, die sich auf die genauere Reihe beziehen, oben mit einem Striche und, so weit sie sich auf die ungenauere Reihe beziehen, mit einem Doppelstrich.

Die absoluten Werte der ε werden mit $|\varepsilon|$ bezeichnet.

Endlich nehmen wir an, daß die Fehlergesetze gerade Funktionen von ε sind, und daß $\varphi'(\varepsilon)$ und $\varphi''(\varepsilon)$ nur für einen Wert α von $|\varepsilon'| = |\varepsilon''|$ einander gleich werden, d. h. daß die Kurven $y' = \varphi'(\varepsilon)$ und $y'' = \varphi''(\varepsilon)$ sich auf jeder Seite der y-Achse nur einmal schneiden. Ein solcher Wert α muß vorhanden sein, da

$$(1) \qquad \int_{-a'}^{+a'} \varphi'(\varepsilon)\,d\varepsilon = 1 = \int_{-a''}^{+a''} \varphi''(\varepsilon)\,d\varepsilon\,,$$

also die Gesamtflächenräume zwischen beiden Kurven und der Abscissenachse der ε gleich groß sind. In (1) kann man die Grenzwerte a' und a'' wieder durch ∞ ersetzen, indem $\varphi(\varepsilon)$ für $|\varepsilon| > a$ null zu setzen ist.

Da die erste Reihe die genauere sein soll, so ist

$$(2) \qquad \varphi'(\varepsilon) > \varphi''(\varepsilon) \text{ für } |\varepsilon| < \alpha$$

und

$$(3) \qquad \varphi'(\varepsilon) < \varphi''(\varepsilon) \text{ für } |\varepsilon| > \alpha\,.$$

Hiernach hat man, wenn m einen Exponenten $>$ null bezeichnet:

$$\varphi'(\varepsilon) - \varphi''(\varepsilon) \text{ positiv, } \alpha^m - |\varepsilon^m| \text{ positiv, für } |\varepsilon| < \alpha,$$

$$\varphi'(\varepsilon) - \varphi''(\varepsilon) \text{ negativ, } \alpha^m - |\varepsilon^m| \text{ negativ, für } |\varepsilon| > \alpha,$$

und es ist somit für beliebige ε

$$(\varphi'(\varepsilon) - \varphi''(\varepsilon))\,(\alpha^m - |\varepsilon^m|) \geqq 0\,.$$

Bildet man für alle Werte von ε hiervon die Summe, so ergibt sich:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(\varepsilon) - \varphi''(\varepsilon))\,(\alpha^m - |\varepsilon^m|)\,d\varepsilon > 0$$

oder

$$\alpha^m \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(\varepsilon)\,d\varepsilon - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi''(\varepsilon)\,d\varepsilon \right\} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon^m|\,\varphi'(\varepsilon)\,d\varepsilon + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon^m|\,\varphi''(\varepsilon)\,d\varepsilon > 0,$$

mithin wegen (1):

$$(4) \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon^m|\,\varphi'(\varepsilon)\,d\varepsilon < \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon^m|\,\varphi''(\varepsilon)\,d\varepsilon\,; \quad m > 0\,.$$

Diese Ungleichung ist unter der Voraussetzung entwickelt, daß die Funktionen $\varphi'(\varepsilon)$ und $\varphi''(\varepsilon)$ nur einmal, für $|\varepsilon| = \alpha$, gleich werden; sie ist daher nicht allgemein für beliebige Formen zufälliger Fehlergesetze gültig. Befolgen indessen beide Beobachtungsreihen dasselbe Gesetz I oder II oder III, S. 13, nur mit anderen Parametern, so ist die Voraussetzung erfüllt, wie man unter Zuziehung graphischer Darstellung leicht erkennt.

Die Integrale in (4) haben aber für jedes Fehlergesetz die Bedeutung durchschnittlicher Werte der $m$ten Potenzen der absoluten Werte aller ε; denn ist wieder n_ε die Anzahl der Fehler zwischen den Grenzen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$, ist ferner N die Anzahl aller Fehler, so hat man, vgl. (6), S. 9,

$$(4^*) \qquad S_m = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon^m|\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon = \left[|\varepsilon^m| \frac{n_\varepsilon}{N} \right] = \frac{[|\varepsilon^m|\,n_\varepsilon]}{N}\,,$$

d. i. die Summe der $m$ten Potenzen der Absolutwerte aller Fehler, dividiert durch ihre Anzahl. S_m ist also der Durchschnittswert von $|\varepsilon^m|$.

Die Ungleichung (4) zeigt demnach, daß für beliebige positive Werte des Exponenten die Durchschnittswerte S_m der $m$ten Potenzen aller Fehler um so kleiner werden, je genauer die Beobachtungen angestellt worden sind. Allerdings gilt dieser Satz nicht allgemein für beliebige Fehlergesetze, er gilt aber jedenfalls für die drei Gesetze auf S. 13, insbesondere für das dort zuletzt angegebene besonders wichtige Gaußsche Gesetz.

Die S_m bieten sich nun als Maße der Genauigkeit (Präzision) der Beobachtungen dar; da jedes $m > 0$ den gleichen Dienst leistet, so beachten wir lediglich die praktisch bequemen Formen für m gleich 1 und 2.

$m = 1$ gibt den Durchschnittsfehler:

$$\vartheta = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon\ \varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon\,. \tag{5}$$

$m = 2$ gibt den mittleren (zu befürchtenden) Fehler im Quadrat (nach Gauß):

$$\mu^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon\,. \tag{6}$$

Man setzt den numerischen Werten von ϑ und μ das Vorzeichen $\pm$ vor aus leicht begreiflichen Gründen.

II. Wahrscheinlicher Fehler. Außer dem Durchschnittsfehler und dem mittleren Fehler findet man häufig den wahrscheinlichen Fehler angegeben, der durch die Gleichung

$$\int_{-\varrho}^{+\varrho} \varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{1}{2} \tag{7}$$

definiert ist. Da nun $\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon = n_\varepsilon : N$ die relative Häufigkeit der Fehler zwischen den Grenzen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ ist, so sagt (7) aus, daß dieselbe gerade $\frac{1}{2}$ ist für die Grenzen $-\varrho$ und $+\varrho$. Mit Beachtung von (7), S. 9, erkennt man, daß sie ebenso groß ist wie für den Fall, wo ε diese Grenzen überschreitet. Die relative Häufigkeit oder Wahrscheinlichkeit des Vorkommens eines Fehlers innerhalb $\pm\varrho$ ist also gerade so groß wie die des Vorkommens außerhalb, oder $|\varepsilon| < \varrho$ und $|\varepsilon| > \varrho$ sind gleich häufig, gleich wahrscheinlich.

ϱ ist ebensogut ein Genauigkeitsmaß wie S_m, wie man am bequemsten graphisch im Anschluß an die Betrachtung S. 18 erkennt. Denn da die ganzen Flächenräume der beiden

Kurven y' und y'' einander gleich sind, in der Nähe der Ordinatenachse aber $y' > y''$ ist, so muß gleichzeitig

$$\int_{-\varrho'}^{+\varrho'} \varphi'(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \int_{-\varrho'}^{+\varrho'} \varphi''(\varepsilon)d\varepsilon < \frac{1}{2}$$

sein; also muß ϱ'', für welches das zweite Integral $= \frac{1}{2}$ wird, größer als ϱ' werden.

Die Vergleichung der wahrscheinlichen Fehler läßt somit ebenfalls wie die der Durchschnittsfehler und der mittleren Fehler erkennen, welche von zwei Beobachtungsreihen die genauere ist. Bezeichnet man die Genauigkeiten mit G' und G'', so hat man:

$$G' > G''$$

für

$$\vartheta' < \vartheta'' \qquad \mu' < \mu'' \qquad \varrho' < \varrho'',$$

und zwar bedarf es nur der Prüfung durch eine dieser Ungleichungen. In aller Strenge gelten diese Ungleichungen allerdings nur dann, wenn für die beiden Fehlergesetze die auf S. 18 angegebenen beschränkenden Annahmen bestehen, wenn also insbesondere das Gaußsche Gesetz stattfindet.

III. Beziehungen zwischen Durchschnittsfehler, mittlerem und wahrscheinlichem Fehler. Zwischen ϑ, μ und ϱ einer Beobachtungsreihe finden Beziehungen statt, die nur von der Funktion $\varphi(\varepsilon)$ abhängen und sich numerisch angeben lassen, wenn diese bekannt ist.

Aus (5), (6) und (7) folgt zunächst unter Voraussetzung eines geraden Fehlergesetzes:

(8) $$\vartheta = 2\int_0^\infty \varepsilon\varphi(\varepsilon)d\varepsilon,$$

(9) $$\mu^2 = 2\int_0^\infty \varepsilon^2\varphi(\varepsilon)d\varepsilon,$$

(10) $$\int_0^\varrho \varphi(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{1}{4}.$$

Wendet man die drei Fehlergesetze (19), S. 13, an, so ergibt die erste Annahme

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2a}, \qquad |\varepsilon| \leqq a:$$

(11) $$\vartheta = \frac{a}{2};$$

(12) $$\mu^2 = \frac{a^2}{3}, \quad \mu = 0{,}57735\,a, \quad a = 1{,}73205\,\mu;$$

(13) $$\varrho = \frac{a}{2};$$

und damit

$$\text{I.} \begin{cases} \varrho = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mu = 0{,}86603\,\mu, \\ \mu = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\vartheta = 1{,}15470\,\vartheta. \end{cases}$$

Die Annahme II $\varphi(\varepsilon) = \frac{3}{4a}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right)$, $|\varepsilon| \leqq a$, gibt:

(14) $$\vartheta = \tfrac{3}{8}\,a;$$

(15) $$\mu^2 = \tfrac{1}{5}\,a^2, \quad \mu = 0{,}44721\,a, \quad a = 2{,}23607\,\mu.$$

Ferner folgt aus (10)

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{4a}\int_0^{\varrho}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right)d\varepsilon = \frac{3a^2\varrho - \varrho^3}{4a^3};$$

daher hat man zur Bestimmung von ϱ die Gleichung

$$\varrho^3 - 3a^2\varrho + a^3 = 0.$$

Ihre trigonometrische Auflösung liefert als einzigen brauchbaren Wert

(16) $$\varrho = 0{,}347296\,a,$$

indem die absoluten Werte der beiden andern Wurzeln $> a$ sind. Damit wird

$$\text{II.} \begin{cases} \varrho = 0{,}77658\,\mu \\ \mu = 1{,}19257\,\vartheta. \end{cases}$$

Die Annahme III $\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\varepsilon^2}$ gibt:

(17) $$\vartheta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\varepsilon\,e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{\pi}},$$

$$\mu^2 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{2h^2}. \tag{18}$$

Im letzten Falle ist die Formel

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \tag{18*}$$

benutzt, welche man aus (18), S. 13, durch teilweise Integration findet, wobei t als erster Faktor zu nehmen ist:

$$\int t^2 e^{-t^2} dt = -\frac{t}{2} e^{-t^2} + \frac{1}{2}\int e^{-t^2} dt + \text{Konst.} \tag{18**}$$

Es ist ferner nach (10), S. 21:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\varrho e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{4};$$

setzt man hierin $h\varepsilon = t$, so wird daraus

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\varrho} e^{-t^2} dt = \frac{1}{4}.$$

ϱ kann man aus einer der bekannten Tafeln der Integralwerte von

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

finden*); z. B. ist

t	Integralwert	t	Integralwert
0,00	0,00000	1,00	0,84270
0,10	0,11246	1,10	0,88021
0,20	0,22270	1,20	0,91031
0,30	0,32863	1,30	0,93401
0,40	0,42839	1,40	0,95229
0,46	0,484656	1,50	0,96611
0,47	0,493745	1,60	0,97635
0,48	0,502750	1,70	0,98379
0,50	0,52050	1,80	0,98909
0,60	0,60386	1,90	0,99279
0,70	0,67780	2,00	0,99532
0,80	0,74210	2,50	0,99959
0,90	0,79691	3,00	0,99998
1,00	0,84270	3,50	0,999999

*) E. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, S. 411.

Durch Interpolation folgt hieraus $t = 0{,}476936$ für den Integralwert 0,5: es ist daher

(19) $$h\varrho = 0{,}47694\,^{*}),$$

und hiernach sowie nach (17) und (18):

$$\text{III.} \begin{cases} \varrho = 0{,}67449\,\mu = 0{,}84535\,\vartheta, \\ \mu = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\vartheta = 1{,}25331\,\vartheta. \end{cases}$$

Für die drei Annahmen hat man mithin folgende Zusammenstellung:

	$\varrho =$	$\varrho =$	$\mu =$	$a =$
I	$0{,}86603\,\mu$	$1{,}00000\,\vartheta$	$1{,}15470\,\vartheta$	$1{,}73205\,\mu$
II	$0{,}77658\,\mu$	$0{,}92612\,\vartheta$	$1{,}19257\,\vartheta$	$2{,}23607\,\mu$
III	$0{,}67449\,\mu$	$0{,}84535\,\vartheta$	$1{,}25331\,\vartheta$	$\infty \cdot \mu$

ϱ, μ, ϑ stehen sonach für jede der drei Annahmen für sich in konstantem Verhältnisse.

Es ist nicht überflüssig zu bemerken, daß bei der Berechnung von ϑ und μ nach (17) und (18) diejenigen Fehler ε, welche absolut genommen größer als etwa 5μ sind, praktisch keinen Einfluß haben. Dies mag für μ^2 gezeigt werden. Bildet man anstatt (18) das Integral

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{n\mu} \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon\,,$$

setzt $h\varepsilon = t$ und beachtet die Beziehung $\mu^2 = 1 : 2h^2$, so ergibt sich nach (18**) für dasselbe zunächst

$$\frac{1}{2h^2}\left\{-n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-\frac{n^2}{2}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{n}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt\right\};$$

*) Über die direkte Berechnung von $h\varrho = 0{,}476936$ vergl. die Abhandlung von H. Opitz: Die Kramp-Laplacesche Transzendente und ihre Umkehrung. (Jahresbericht des Königstädtischen Realgymnasiums zu Berlin 1900, oder Archiv der Mathematik und Physik, III. Reihe. V, S. 42–46.)

Nach Hammer hat Burgeß von dem umstehend tabulierten Integral sehr vollständige Tafeln gegeben in den Transact. of the Royal Society of Edinburgh 1898, 39 II.

für $n = 5$ folgt hieraus
$$\mu^2(-0{,}000015 + 0{,}999999),$$
mithin nicht wesentlich von μ^2 verschieden.

IV. Maß der Präzision beim Gaußschen Fehlergesetz. Wird mit G die mathematische Genauigkeit bezeichnet, so ist für zwei Beobachtungsreihen mit derselben Fehlerfunktion I, II oder III:

$$(20) \qquad G' : G'' = \mu'' : \mu' = \vartheta'' : \vartheta' = \varrho'' : \varrho'.$$

Für die Annahme III ist insbesondere wegen (18):
$$\mu' : \mu'' = h'' : h';$$
daher wird auch
$$(21) \qquad G' : G'' = h' : h'',$$
weshalb man h das Maß der Präzision nennt.

V. Praktischer Vorgang bei der Genauigkeitsberechnung. Insofern die Annahme III dem Vorkommen zufälliger Beobachtungsfehler erfahrungsgemäß vielfach näherungsweise genügt, kann man wegen (20) sowohl aus μ wie aus ϑ oder ϱ auf die Genauigkeit schließen; ja man würde dies auch mittels der $m$ten Wurzeln aus den Durchschnittswerten S_m beliebiger $m$ter Potenzen, (4*) S. 19. tun können. Jedoch benutzt man aus praktischen Gründen nur die Exponenten $m = 1$ und 2, welche ϑ und μ ergeben.

In der Regel versagt aber ϑ. Denn meistens liegen nicht wahre Fehler ε einer Beobachtungsreihe vor, sondern nur Verbesserungen λ der Beobachtungen, die die Ausgleichung zur Beseitigung der Widersprüche fordert. Es entsteht dann die Aufgabe, die Ausdrücke für ϑ und μ, (5) und (6) S. 20, so umzuformen, daß anstatt der ε die λ auftreten. Dies führt aber nur für μ zu allgemein brauchbaren Ausdrücken, nicht jedoch für ϑ. Da nun auch eine direkte Ermittelung von ϱ aus den λ, wie sich zeigt, keinen genauen Wert gibt, so bleibt als einziges, allgemein brauchbares Maß der (reziproken) Genauigkeit der mittlere Fehler μ.

Es wird allerdings vielfach nicht μ, sondern ϱ angegeben, das durch seine Bedeutung einen Vorzug hat. Dieses ist aber dann immer aus μ durch Multiplikation mit der Zahl 0,67449 berechnet, die dem Gaußschen Fehlergesetze entspricht. Genau genommen müßte also noch der Nachweis für dessen Gültigkeit im betreffenden Falle geliefert werden, was bei der Benutzung von μ nicht erforderlich ist.

Auch steht die Benutzung von μ einzig und allein im Einklang mit der M. d. kl. Qu. Denkt man sich nämlich eine Gruppe gleichgenauer Beobachtungen ausgeglichen, so ergibt sich ein Wert der minimalen Quadratsumme $[\lambda\,\lambda]$. Wird nun bei demselben mathematischen Zusammenhange die Beobachtungsgruppe wiederholt und $[\lambda'\lambda']$ gefunden, so wird man die zweite Gruppe für genauer halten als die erste, wenn $[\lambda'\lambda'] < [\lambda\,\lambda]$. Diese Quadratsummen sind aber, wie sich zeigen wird, μ^2 proportional anzunehmen: sie werden im Durchschnitt vieler Fälle gleich μ^2 mal der Anzahl der überschüssigen Beobachtungen. Es führt also die Grundbedingung der M. d. kl. Qu. auf geradem Wege zur Benutzung von μ als Maß der (reziproken) Genauigkeit.

Es ist noch von Interesse, nachzuweisen, daß schon unter Voraussetzung wahrer Fehler ε, wenn sie nur in endlicher Anzahl gegeben sind, μ den Vorzug verdient. Denn ist die Fehleranzahl endlich, so ist die Berechnung der Genauigkeitsmaße nicht genau möglich, aber für μ ergibt sich die größte Sicherheit.

VI. Durchschnittswert einiger Fehlerprodukte für zufällige Fehler. Bei den jetzt und später folgenden Entwicklungen ist der Durchschnittswert von Produkten der Form $\varepsilon_1\,\varepsilon_2$, $\varepsilon_1{}^i\,\varepsilon_2{}^k$, $\varepsilon_1{}^i\,\varepsilon_2{}^k$ nötig, wo i und k positive ganze Zahlen und ε_1 und ε_2 die Fehler der voneinander unabhängigen Beobachtungen sind. Es wird dabei angenommen, daß die Gruppe l_1, l_2 unendlich viele Male wiederholt wird.

Die unendlich vielen Wiederholungen geben nun die ε nach ihrem Fehlergesetz verteilt. Wir können uns das so denken, daß für alle Werte von ε_1 in den Grenzen ε_1 und $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$ die zugehörigen ε_2 aufgesucht werden. Diese werden dann nach dem Gesetz $\varphi(\varepsilon_2)$ verteilt sein. Indem man nun noch ε_1 nach dem Fehlergesetz $\varphi(\varepsilon_1)$ zwischen den Grenzwerten variieren läßt, ergeben sich alle Fälle.

Wir nehmen zunächst an, daß die ε gerade Fehlergesetze befolgen.

Bei dem Produkt $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ wechselt nun das Vorzeichen, wenn ε_1 festgehalten und ε_2 variiert wird, sobald ε_2 durch null hindurchgeht. Mit Rücksicht auf die vorausgesetzte Form von $\varphi(\varepsilon_2)$ ist daher die Summe der Produkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ für jeden Wert von ε_1 gleich null. Folglich ist der Durchschnittswert von $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ gleich null.

Dies gilt auch noch für $\varepsilon_1{}^i \varepsilon_2{}^k$, wenn k eine ungerade Zahl > 1 ist; i kann dabei gerade oder ungerade sein. Da man ε_1 und ε_2 vertauschen kann, gilt dasselbe auch für ungerade i.

Anders ist es für $\varepsilon_1{}^i \varepsilon_2{}^k$ mit geraden Exponenten oder für $|\varepsilon_1{}^i \varepsilon_2{}^k|$. Es genügt den letzten Fall zu betrachten.

Nun ist $|\varepsilon_1{}^i \varepsilon_2{}^k| = |\varepsilon_1{}^i| \cdot |\varepsilon_2{}^k|$. Werden wieder für alle Werte von ε_1 in den Grenzen ε_1 und $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$ die ε_2 betrachtet, so verteilen sich diese nach dem Fehlergesetze $\varphi(\varepsilon_2)$. Der Durchschnittswert der Absolutwerte $|\varepsilon_2{}^k|$ für alle diese Fälle ist S_k. Für die Summe der Produkte $|\varepsilon_1{}^i| \cdot |\varepsilon_2{}^k|$ in den Grenzen ε_1 und $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$ können wir daher auch setzen $n_1 |\varepsilon_1{}^i| S_k$, worin n_1 die Anzahl der Fehler ε_1 in diesen Grenzen bezeichnet.

Variieren wir jetzt ε_1, so wird n_1 nach Maßgabe des Fehlergesetzes sich ändern. Nun ist die Anzahl aller Produkte gleich $[n_1]$; da ferner $n_1 : [n_1] = \varphi(\varepsilon_1) d\varepsilon_1$ und S_k ein gemeinsamer Faktor aller Produkte ist, so folgt als Durchschnittswert von $|\varepsilon_1{}^i \varepsilon_2{}^k|$:

$$S_k \int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon_1{}^i| \, \varphi(\varepsilon_1) d\varepsilon_1, \text{ d. i. } S_k S_i. \tag{22}$$

Bei diesen Entwicklungen brauchen die Fehlergesetze $\varphi(\varepsilon_1)$ und $\varphi(\varepsilon_2)$ nicht übereinzustimmen. Dem entsprechend müßte man in $S_k S_i$ eigentlich die beiden S noch mit Indices versehen.

Hat man es nicht lediglich mit geraden Fehlergesetzen zu tun, sondern ist nur die Gaußsche Bedingung erfüllt, so tritt für $\varepsilon_1{}^i \varepsilon_2{}^k$ ein Verschwinden des Durchschnittswertes nicht in allen Fällen ein, wo i oder k ungerade sind. Jedenfalls verschwindet aber immer der Durchschnitt von $\varepsilon_1 \varepsilon_2{}^k$, wenn auch $\varphi(\varepsilon_1)$ nur die Gaußsche Bedingung erfüllt, bei beliebigem Werte von k.

§ 4. Bestimmung des durchschnittlichen, des mittleren und des wahrscheinlichen Fehlers aus einer endlichen Anzahl von wahren Fehlern.

I. Bestimmung des durchschnittlichen und des mittleren Fehlers aus einer endlichen Anzahl von Fehlern. Nach Gl. (4*), S. 19, ist S_m bei unendlich vielen gegebenen wahren Fehlern ε der Durchschnittswert von $|\varepsilon|^m$; insbesondere ist ϑ derjenige von $|\varepsilon|$ und μ^2 derjenige von ε^2. Ist die Anzahl n der gegebenen Fehler aber nur eine endliche, so kann man zwar entsprechend setzen:

$$(1)\qquad S_m = \frac{|\varepsilon_1|^m + |\varepsilon_2|^m + \cdots + |\varepsilon_n|^m}{n} = \frac{[\,|\varepsilon|^m\,]}{n},$$

$$(2)\qquad \vartheta = \frac{|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \cdots + |\varepsilon_n|}{n} = \frac{[\,|\varepsilon|\,]}{n},$$

$$(3)\qquad \mu^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2}{n} = \frac{[\varepsilon^2]}{n};$$

da aber eine endliche Fehleranzahl das Fehlergesetz nicht genau zum Ausdruck bringt, so geben diese Formeln auch nicht die strengen Werte von S_m, ϑ, μ^2.

Man kann aber zeigen, daß im Durchschnitt unendlich vieler solcher Fälle wieder die strengen Werte von S_m, ϑ, μ^2 erhalten werden. Denken wir uns nämlich die Reihe von n Beobachtungen N-mal wiederholt, lim. $N = \infty$, und denken wir uns ferner die N Ausdrücke

$$\frac{1}{n}\{|\varepsilon_1|^m + |\varepsilon_2|^m + \cdots + |\varepsilon_n|^m\}$$

unter einander geschrieben, addiert und mit N dividiert, so ergibt sich S_m genau. Denn für irgend ein ε_i ist die Summe aller vertikal übereinander stehenden $|\varepsilon_i|^m : N$ nichts anderes als S_m nach (4*), S. 19. Wir haben somit im Durchschnitt

$$\frac{1}{n}\{S_m + S_m + \cdots + S_m\}, \text{ d. i. } S_m.$$

Dies gilt also auch für ϑ und μ^2.

Im Falle der Gültigkeit des Fehlergesetzes III gibt die Gleichung (3) mit $h^2 = 1 : 2\mu^2$ im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung von allen möglichen die günstigste Berechnungsweise von h^2, wie Gauß gezeigt hat. (Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, S. 125.)

II. Bestimmung der mittleren zu befürchtenden Fehler in ϑ und μ^2. Die Formeln (1), (2) und (3) bestimmen wie bemerkt S_m, ϑ und μ^2 nur näherungsweise richtig. Ist nun wieder S_m der strenge Wert des Durchschnittsbetrages der $m$ten Potenzen der Fehler, so ist

$$(4) \qquad \left(\frac{|\varepsilon_1|^m + |\varepsilon_2|^m + \cdots + |\varepsilon_n|^m}{n} - S_m\right)^2$$

das Quadrat des Fehlers des nach (1) berechneten S_m. Jedes der $|\varepsilon|$ kann alle Werte zwischen null und dem Maximalwert a annehmen, das Fehlerquadrat des aus einer endlichen Fehleranzahl berechneten S_m schwankt daher zwischen null und $(a^m - S_m)^2$ bezw. $(-S_m)^2$, welche Grenzwerte eintreten einerseits für den Fall, daß die endliche Fehleranzahl genau S_m ergibt, andrerseits für die Fälle $|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = \cdots = a$ bezw. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = 0$.

Aus (4) folgt:

$$\left(\frac{|\varepsilon_1|^m + |\varepsilon_2|^m + \cdots + |\varepsilon_n|^m}{n} - S_m\right)^2$$
$$(5) \qquad = \frac{\varepsilon_1^{2m} + \varepsilon_2^{2m} + \cdots + \varepsilon_n^{2m}}{n^2}$$
$$+ 2\,\frac{|\varepsilon_1|^m|\varepsilon_2|^m + |\varepsilon_1|^m|\varepsilon_3|^m + \cdots + |\varepsilon_2|^m|\varepsilon_3|^m + \cdots\cdots + |\varepsilon_{n-1}|^m|\varepsilon_n|^m}{n^2}$$
$$- 2S_m\,\frac{|\varepsilon_1|^m + |\varepsilon_2|^m + \cdots + |\varepsilon_n|^m}{n} + S_m^2.$$

Denken wir uns nun wieder die Reihe der n Fehler ε $N = \infty$-mal gegeben, entsprechend ∞-facher Wiederholung der Beobachtungsreihe, so gibt die Reihe der Fehlerquadrate (5) alle möglichen Fehlerquadrate der Bestimmung von S_m aus (1); der Durchschnittswert aller der unendlich vielen Werte ist also das mittlere Fehlerquadrat in der Bestimmung von S_m.

Der Durchschnittswert der rechten Seite von (5) für alle möglichen Werte jedes der ε wird aber erhalten, indem man von jedem Gliede einzeln den Durchschnittswert ermittelt.

Für den Durchschnittswert eines der Glieder

$$\varepsilon_1^{2m},\ \varepsilon_2^{2m},\ \cdots,\ \varepsilon_n^{2m}$$

hat man nach (4*), S. 19, als den Durchschnittswert der $2m$ten Potenzen aller möglichen Fehler, den Wert

$$(6) \qquad S_{2m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{2m} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon .$$

Hiernach ist

der Durchschnittswert von $\frac{\varepsilon_1^{2m} + \varepsilon_2^{2m} + \cdots + \varepsilon_n^{2m}}{n^2}$ gleich $\frac{S_{2m}}{n}$.

Für den Durchschnittswert von $|\varepsilon_1^m \varepsilon_2^m| = |\varepsilon_1^m| \cdot |\varepsilon_2^m|$ erhält man nach (22), S. 27, den Wert S_m^2, unter S_m wieder den Durchschnittswert der $m$ten Potenzen aller möglichen Fehler verstanden:

$$(7) \qquad S_m = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon^m| \varphi(\varepsilon) d\varepsilon ,$$

sowie unter Voraussetzung der Unabhängigkeit der Beobachtungen voneinander. Daher ist der Durchschnittswert des aus $\frac{n(n-1)}{2}$ Gliedern bestehenden Ausdrucks

$$2 \frac{|\varepsilon_1^m \varepsilon_2^m| + |\varepsilon_1^m \varepsilon_3^m| + \cdots + |\varepsilon_2^m \varepsilon_3^m| + \cdots + |\varepsilon_{n-1}^m \varepsilon_n^m|}{n^2}$$

gleich

$$\frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} S_m^2 = S_m^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Der Durchschnittswert von

$$2 S_m \cdot \frac{|\varepsilon_1^m| + |\varepsilon_2^m| + \cdots + |\varepsilon_n^m|}{n}$$

endlich ist gleich $2 S_m^2$.

Es wird mithin das Quadrat des mittleren zu befürchtenden Fehlers μ_m in dem aus n Fehlern ε nach (1) berechneten S_m gleich:

$$\frac{1}{n} S_{2m} + S_m^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) - 2 S_m^2 + S_m^2 ,$$

d. i.

$$(8) \qquad \mu_m^2 = \frac{1}{n} (S_{2m} - S_m^2) = \frac{S_m^2}{n} \left(\frac{S_{2m}}{S_m^2} - 1\right).$$

Insbesondere ist das Quadrat des mittleren Fehlers in ϑ, wenn dies nach der Formel (2) berechnet ist:

$$(9) \qquad \mu_1^2 = \frac{\vartheta^2}{n} \left(\frac{\mu^2}{\vartheta^2} - 1\right),$$

weil S_2 und S_1 bezw. gleich μ^2 und ϑ sind.

Ferner wird das Quadrat des mittleren Fehlers in μ^2, dieses nach Formel (3) berechnet, gleich:

(10)
$$\mu_2{}^2 = \frac{\mu^4}{n}\left(\frac{\nu^4}{\mu^4} - 1\right),$$

wo

$$\nu^4 = S_4 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^4 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$$

ist.*)

Wir wenden nun diese Formeln auf die drei Annahmen über $\varphi(\varepsilon)$ an und erhalten, vergl. § 3, S. 22 23:

Annahme I:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2a}, \quad \varepsilon \leqq a;$$

$$\nu^4 = \frac{1}{5} a^4, \quad \frac{\nu^4}{\mu^4} = \frac{9}{5}, \quad \frac{\mu^2}{\vartheta^2} = \frac{4}{3};$$

(11)
$$\mu_1{}^2 = \frac{1}{3} \frac{\vartheta^2}{n} = \frac{1}{12} \frac{a^2}{n},$$

(12)
$$\mu_2{}^2 = \frac{4}{5} \frac{\mu^4}{n} = \frac{4}{45} \frac{a^4}{n}.$$

Annahme II:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{3}{4a}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right), \quad \varepsilon \leqq a;$$

$$\nu^4 = \frac{3}{2a}\left(\frac{a^5}{5} - \frac{a^5}{7}\right) = \frac{3}{35} a^4, \quad \frac{\nu^4}{\mu^4} = \frac{15}{7}, \quad \frac{\mu^2}{\vartheta^2} = \frac{64}{45};$$

(13)
$$\mu_1{}^2 = \frac{19}{45} \frac{\vartheta^2}{n} = \frac{19}{320} \frac{a^2}{n},$$

(14)
$$\mu_2{}^2 = \frac{8}{7} \frac{\mu^4}{n} = \frac{8}{175} \frac{a^4}{n}.$$

Annahme III:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2};$$

$$\nu^4 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \varepsilon^4 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{3}{4h^4}.$$

ν^4 findet man leicht mittels (18*), S. 23, wenn bei der partiellen Integration ε^3 als erster Faktor genommen und dann $h\varepsilon = t$ gesetzt wird.

---

*) Gauß bezeichnete S_4 mit ν^4.

$$\frac{\nu^4}{\mu^4} = 3, \quad \frac{\mu^2}{\vartheta^2} = \frac{\pi}{2} = 1{,}57080;$$

(15) $$\mu_1^2 = \frac{\pi - 2}{2} \frac{\vartheta^2}{n} = \frac{\pi - 2}{2\pi n h^2},$$

(16) $$\mu_2^2 = 2\frac{\mu^4}{n} = \frac{1}{2nh^4}.$$

Hiermit ergibt sich bei den drei Annahmen über das Fehlergesetz folgende Übersicht der mittleren Fehlerquadrate in der Bestimmung von ϑ und μ^2 aus n wahren Fehlern:

(17)

	I	II	III	
$\mu_1^2 =$	0,33333	0,42222	0,57080	$\times \frac{\vartheta^2}{n}$
$\mu_2^2 =$	0,80000	1,14286	2,00000	$\times \frac{\mu^4}{n}$

Zieht man die Quadratwurzeln aus diesen Werten, so erhält man die mittleren Fehler für ϑ und μ^2.

Um den mittleren Fehler für μ selbst abzuleiten, bedenken wir, daß mit Rücksicht auf die bekannte Entwicklung

(18) $$\sqrt{1 + \Delta} = 1 + \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{8}\Delta^2 + \cdots,$$

einem relativen Fehler Δ in μ^2 ein relativer Fehler $\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{8}\Delta^2 + \cdots$ in μ entspricht, wofür näherungsweise $\frac{1}{2}\Delta$ gesetzt werden darf. Der relative Fehler in μ^2 ist aber $\mu_2 : \mu^2$, der relative Fehler in μ daher $\mu_2 : 2\mu^2$.

Wir haben somit als Ergebnis: der mittlere zu befürchtende Fehler in μ ist näherungsweise gleich

$$\frac{\mu_2}{2\mu}.$$

Hiernach ergibt sich aus (17) die folgende Zusammenstellung:

(19)

Mittlerer Fehler	I	II	III	
in $\vartheta =$	0,57735	0,64979	0,75551	$\times \frac{\vartheta}{\sqrt{n}}$
in $\mu =$	0,44721	0,53452	0,70711	$\times \frac{\mu}{\sqrt{n}}$

Die Genauigkeit der Berechnung von ϑ und μ ist mithin proportional der Quadratwurzel aus der Anzahl der zur Rechnung verwendeten wahren Fehler.

Bei sehr kleinen n gelten die für μ in (19) angegebenen Zahlen nicht mehr, weil Δ in (18) dann nahezu gleich 1 ist, ja unter Umständen sogar größer als 1 wird, und (18) also seine Gültigkeit verliert. Man kann indessen für $n = 1$ leicht zeigen, daß auch noch in diesem Grenzfalle ein angenäherter Wert erhalten wird. Ist nämlich $n = 1$, so muß man $\mu = |\varepsilon|$ setzen. Bezeichnet aber der Buchstabe μ selbst den genauen Wert des mittleren Fehlers, so ist das entsprechende Fehlerquadrat $(|\varepsilon| - \mu)^2 = \varepsilon^2 - 2|\varepsilon|\mu + \mu^2$. Für unendlich viele Fälle ist der Durchschnitt hiervon: $2\mu^2 - 2\vartheta\mu$; also hat die Bestimmung $\mu = |\varepsilon|$ den mittleren Fehler $\pm\mu\sqrt{2 - 2\frac{\vartheta}{\mu}}$, d. i. für die drei Fehlergesetze I, II und III bezw. gleich μ mal

$$0{,}51764 \qquad 0{,}56829 \qquad 0{,}63579\,.$$

Die Bestimmung von μ bleibt also auch hier, wie im allgemeinen, günstiger als diejenige von ϑ.

III. Die direkte Berechnung des mittleren Fehlers μ ist bei den drei Annahmen über $\varphi(\varepsilon)$ genauer als die indirekte mit Hilfe des direkt ermittelten Durchschnittsfehlers ϑ. Nach (19) ist beispielsweise für die Annahme III bei direkter Berechnung der mittlere Fehler enthalten zwischen den (mittlern) Grenzen

$$\mu\left(1 \pm \frac{0{,}70711}{\sqrt{n}}\right); \tag{20}$$

dagegen bei Berechnung aus ϑ (vergl. S. 24) zwischen den Grenzen

$$1{,}25331\left(\vartheta \pm 0{,}75551\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}\right),$$

d. i.

$$\mu\left(1 \pm \frac{0{,}75551}{\sqrt{n}}\right), \tag{20*}$$

was also ungünstiger als (20) ist. Ist n allerdings so groß, daß die Berechnung von ϑ und μ überhaupt sehr genau wird, so ist es ziemlich gleichgültig, wie man μ berechnet, da der Unterschied der Genauigkeiten, an sich nicht beträchtlich, in diesem Falle noch weniger ins Gewicht fällt.

Wollte man μ indirekt aus dem Durchschnittswerte der dritten oder höherer Potenzen aller gegebenen Fehler berechnen, so würde die Rechnung jedenfalls unbequemer. Sie würde aber für den Fall des Fehlergesetzes III auch ungenauer, wie C. F. Gauß gezeigt hat, vergl. Werke IV, S. 116. (Über die Entwicklung vergl. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, S. 130 u. f.). Bei Bestehen des Fehlergesetzes I, also bei konstanter Fehlerwahrscheinlichkeit, nimmt allerdings mit wachsendem m der mittlere Fehler der Bestimmung von μ aus $\sqrt[m]{S_m}$ ab, und es ist daher am besten, den Grenzwert a gleich dem größten ε zu setzen. (Vergl. hierzu, wie auch über die eingehendere Behandlung der Fragen der Genauigkeit im allgemeinen den Aufsatz von Helmert: Über die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler usw. Zeitschrift für Mathematik und Physik von Schlömilch, 1876, S. 192—218.) Es sei noch bemerkt, daß für größere n die Abweichungen zwischen dem berechneten Werte $\sqrt[m]{S_m}$ und dem strengen im allgemeinen wieder das Gaußsche Fehlergesetz befolgen, so daß die Beurteilung der bei Anwendung verschiedener m erreichten Genauigkeit mittels der 2. Potenzen wie vorher erfolgen darf (S. 20).

IV. Der wahrscheinliche Fehler ϱ läßt sich aus wahren Fehlern durch Abzählen direkt ermitteln. Ordnet man nämlich die n Fehler ε nach ihrer Größe ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, so wird bei sehr großem n nach der Definition von ϱ die eine Hälfte der Fehler zwischen null und ϱ, die andere zwischen ϱ und dem Grenzwerte a zu suchen sein. Bei großem n fällt daher der mittelste Beobachtungsfehler, wenn n ungerade ist, oder das arithmetische Mittel der beiden mittelsten, wenn n gerade ist, mit ϱ zusammen. Die Vermutung, daß diese Bestimmungsweise von ϱ verhältnismäßig recht unsicher ist, bestätigt sich bei genauerer Untersuchung. Eine solche führte schon C. F. Gauß unter Voraussetzung seines Fehlergesetzes durch, ohne den Beweis mitzuteilen, den Dirichlet gab (vergl. Encke, Berliner astronomisches Jahrbuch 1834, S. 295—298, oder Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, S. 141—145). Darnach ist die Bestimmung von ϱ durch Abzählen nahezu $\frac{5}{3}$ mal ungenauer als die indirekte Bestimmung aus μ. Wir werden im folgenden in der Regel auf die direkte Bestimmung von ϱ verzichten, schon darum, weil wir in der Regel nur solche Fehler kennen lernen, die die

Ausgleichung fordert, welche aber von den wahren Fehlern abweichen. Die Bestimmung von ϱ durch Abzählen an jenen Fehlern würde offenbar deshalb einer noch größern Unsicherheit unterliegen.

F. Hausdorff hat in dem „Bericht der mathematisch-physischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften“ vom 6. Mai 1901, S. 164—166, darauf hingewiesen, daß man unter Voraussetzung des Gaußschen Fehlergesetzes die Präzision durch Abzählen an der geordneten Reihe der Absolutwerte der Fehler wesentlich genauer finden könne als durch direktes Abzählen von ϱ als mittelstem Fehler.

Er findet: das Präzisionsmaß h ist rund das Reziproke desjenigen Wertes ε, der von $16\,\%$ der beobachteten Fehler überschritten wird. Da nun $h\varrho = 0{,}477$ ist, kann man hiermit ϱ leicht berechnen. Die mittlere Unsicherheit ist dann nur noch $\frac{5}{4}$ derjenigen der Bestimmung aus μ.

Hierzu sei bemerkt, daß es nicht wesentlich ungenauer ist, den Fehler 2ϱ direkt als denjenigen abzuzählen, der von $18\,\%$ der beobachteten Fehler überschritten wird.

Es möge eine kurze Ableitung dieser Sätze hier folgen, obwohl das Verfahren den Übelstand hat, daß Abweichungen von der Fehlerverteilung nach dem Gaußschen Gesetz gerade bei den größeren Fehlern häufig sind, wodurch die Ermittelung von 2ϱ stark beeinflußt werden kann.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Beobachtungsfehler, absolut genommen, kleiner als x sei, ist im Falle des Gaußschen Fehlergesetzes

$$(A) \qquad u = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon .$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer bestimmten Anordnung der Beobachtungen k Fehler kleiner als x und l größer als x sind (die Fehler immer als Absolutwerte gedacht), ist dann

$$u^k (1 - u)^l .$$

Gleich demselben Ausdruck, multipliziert mit einem von k und l abhängenden Zahlenfaktor, ist die Wahrscheinlichkeit U, daß von $(k + l)$ Fehlern irgendwelche k kleiner als x und die andern l größer als x sind. (Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, S. 141.)

Differenziert man vorstehendes Produkt nach u, so erkennt man, daß es ein Maximum wird für u gleich

$$u_0 = \frac{k}{k+l}. \tag{B}$$

Hierzu gehört der Maximalwert U_0 von U. Man kann nun U nach dem Taylorschen Satze entwickeln; die ersten Glieder sind:

$$U = U_0 \left\{ 1 - \frac{(k+l)^3}{2\,k\,l} (u - u_0)^2 + \cdots \right\}.$$

oder angenähert:

$$U = U_0 e^{-H_u^2 (u-u_0)^2}, \quad \text{mit} \quad 2\,H_u^2 = \frac{(k+l)^3}{k\,l}.$$

Gehört x_0 zu u_0, so ist angenähert

$$u - u_0 = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x_0^2} (x - x_0);$$

also wird

$$\text{(C)} \qquad U = U_0 e^{-H_x^2 (x-x_0)^2} \quad \text{mit} \quad 2\,H_x^2 = \frac{4\,h^2}{\pi} e^{-2\,h^2 x_0^2} \frac{(k+l)^3}{k\,l}.$$

Diese Gleichung zeigt, daß U beiderseits U_0 abnimmt wie beim Gaußschen Fehlergesetz.

Denkt man sich die Beobachtungsreihe sehr viele Male wiederholt, so gibt U für jeden Wert x die relative Häufigkeit der Fälle an, daß gleichzeitig k Fehler $< x$ und l Fehler $> x$ sind. Im Einzelfalle wird man x als denjenigen Wert x_0 ansehen, für den U den Maximalwert U_0 hat. Damit bestimmt sich h nach (A) und (B) aus der Gleichung

$$u_0 = \frac{k}{k+l} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h x_0} e^{-t^2} dt. \tag{D}$$

Man wird hierbei x_0 in der Mitte des $k$ten und $(k+1)$ten Fehlers annehmen, entsprechend dem symmetrischen Verlauf von U zu beiden Seiten von U_0.

Für einen Wert x, der von x_0 um $\xi = x - x_0$ abweicht, ist U kleiner als U_0. Die relative Häufigkeit, die zu ξ gehört, ist proportional $U : U_0$. Die Wahrscheinlichkeit, daß $x - x_0$ zwischen den Grenzen ξ und $\xi + d\xi$ liegt, ist daher

$$C e^{-H_x^2 \xi^2} d\xi,$$

wobei sich C aus der Bedingung bestimmt, daß das hiervon genommene Integral für ξ von $-\infty$ bis $+\infty$ gleich 1 ist.

Das mittlere Quadrat von $\xi = x - x_0$ im Sinne des mittlern Fehlerquadrats ist $1 : 2H_x^2$, also gleich

$$\frac{\pi}{4h^2} e^{2h^2x_0^2} \frac{kl}{(k+l)^3}.$$

Zu dem Fehler in x_0 gehört aber bei Benutzung von (D) ein Fehler in h nach Maßgabe von $hx_0 =$ Konst., d. h. $dh : h = -dx_0 : x_0$.

Das mittlere Fehlerquadrat in der Bestimmung von h aus (D) ist daher gleich

$$\text{(E)} \qquad \frac{\pi}{4x_0^2} e^{2h^2x_0^2} \frac{kl}{(k+l)^3},$$

oder wegen (D), wo u_0 als Funktion von k und l gegeben ist, gleich

$$\text{(E*)} \qquad \frac{h^2\pi}{4(k+l)} \cdot \frac{u_0(1-u_0)}{h^2x_0^2} \cdot e^{2h^2x_0^2}.$$

Es liegt daher h zwischen den mittlern Grenzen

$$h\left\{1 \pm \frac{F}{\sqrt{n}}\right\}$$

mit

$$F = \frac{\sqrt{\pi u_0(1-u_0)}}{2hx_0} e^{h^2x_0^2} \text{ und } k + l = n.$$

Man erhält hierzu mittels der Tafel für u_0, S. 23:

$hx_0 =$	0,2	0,4	0,477	0,6	0,8	0,954	1,0	1,2
$u_0 =$	0,223	0,428	0,500	0,604	0,742	0,823	0,843	0,910
$F =$	1,919	1,287	1,166	1,035	0,919	0,882	0,877	0,891.

Beispiel. Sind gegeben die wahren Fehler für fünf Beobachtungen derselben Art (Dreieckswinkelsummen):

$$(1) \qquad -1{,}37 \quad +1{,}77 \quad +1{,}04 \quad -0{,}81 \quad -0{,}75,$$

so wird

$$(2) \qquad \vartheta = \pm\frac{5{,}74}{5} = \pm 1{,}15,$$

und

$$(3) \qquad \begin{aligned} \mu &= \pm\sqrt{\tfrac{1}{5}(1{,}37^2 + 1{,}77^2 + 1{,}04^2 + 0{,}81^2 + 0{,}75^2)} \\ &= \pm\sqrt{\frac{7{,}31}{5}} = \pm 1{,}21. \end{aligned}$$

Für die Annahme III des Fehlergesetzes (vergl. S. 32) ist der mittlere Fehler in ϑ gleich

$$(2^*) \qquad \mu_1 = \pm 0{,}756 \frac{1{,}15}{\sqrt{5}} = \pm 0{,}39 \,.$$

oder es liegt ϑ zwischen den mittlern Grenzen:

$$(4) \qquad \vartheta = \pm (1{,}15 \pm 0{,}39)\,, \text{ d. i. } \pm 0{,}76 \text{ und } \pm 1{,}54 \,.$$

Ferner ist der mittlere Fehler in μ gleich

$$(3^*) \qquad \frac{\mu_2}{2\mu} = \pm 0{,}707 \frac{1{,}21}{\sqrt{5}} = \pm 0{,}38 \,,$$

oder es liegt μ zwischen den mittlern Grenzen:

$$(5) \qquad \mu = \pm (1{,}21 \pm 0{,}38)\,, \text{ d. i. } \pm 0{,}83 \text{ und } \pm 1{,}59 \,.$$

Berechnet man μ aus ϑ, so wird nach S. 24:

$$(6) \qquad \mu = \pm (1{,}44 \pm 0{,}49)\,, \text{ d. i. } \pm 0{,}95 \text{ und } \pm 1{,}93 \,.$$

Engere Grenzen liefern die Annahmen I und II für das Fehlergesetz. Noch engere Grenzen ergeben sich, wenn man aus den ε selbst für die Formeln (9) und (10), S. 30 31, die Verhältnisse $\mu^2 : \vartheta^2$ und $\nu^4 : \mu^4$ berechnet. Aus $[\varepsilon^4] = 15{,}25$ folgt $\nu^4 = 3{,}05$. Es wird $\mu^2 : \vartheta^2 = 1{,}11$ und $\nu^4 : \mu^4 = 1{,}42$. Damit wird

$$(7) \qquad \mu_1 = \pm 0{,}17 \text{ und } \frac{\mu_2}{2\mu} = \pm 0{,}18 \,.$$

Doch sind diese Werte wohl zu klein; die Vorsicht gebietet, die nach dem Fehlergesetz III erhaltenen weiteren Grenzen anzunehmen.

Der wahrscheinliche Fehler ergibt sich durch

Abzählen gleich 1,04;

dagegen berechnet er sich aus ϑ (Annahme III, S. 24) zu 0,97

und aus μ („ „) zu 0,82.

In dem vorstehenden Beispiel wurde mit Absicht nur eine geringe Anzahl von Fehlern benutzt, um recht augenfällig die Unsicherheit zu zeigen, welche dann den berechneten Maßen der reziproken Genauigkeit anhaftet.

§ 5. Verschiedene Formen der Ausgleichungsaufgabe.

I. Direkte Beobachtungen. Die Ausgleichung hat die einfachste Form, wenn sogenannte direkte Beobachtungen einer unbekannten Größe gegeben sind. Man versteht darunter, im engern Sinne, wiederholte unmittelbare Beobachtungen einer Größe; im weitern Sinne auch wiederholte mittelbare Beobachtungen, wenn sie nur immer vollkommen unabhängig voneinander durchgeführt worden sind.

Es seien l_1, l_2, l_3 zum Beispiel die Beobachtungsergebnisse, dann ist unsere Aufgabe, aus ihnen einen Wert x abzuleiten, der dem wahren Werte X möglichst nahe kommt, was durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate geschieht.

x nennt man den plausibelsten Wert der Unbekannten. Derselbe weicht von l_1, l_2, l_3 um Größen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ab; mit diesen müssen die Beobachtungsergebnisse verbessert werden, damit sie mit x übereinstimmen.

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nennt man die plausibelsten Verbesserungen, auch übrigbleibende Beobachtungsfehler.

$l_1 + \lambda_1,\ l_2 + \lambda_2,\ l_3 + \lambda_3$ heißen die ausgeglichenen Beobachtungswerte.

Man hat also die Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} l_1 + \lambda_1 &= x \\ l_2 + \lambda_2 &= x \\ l_3 + \lambda_3 &= x \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -\,l_1 + x \\ \lambda_2 &= -\,l_2 + x \\ \lambda_3 &= -\,l_3 + x\,, \end{aligned}$$

welche wir Fehlergleichungen nennen wollen.*) Da nun schon

*) Man hat in neuerer Zeit darauf aufmerksam gemacht, daß dieser Ausdruck durch „Verbesserungsgleichungen" ersetzt werden müßte. In der Tat, wenn man die Beobachtungsfehler streng mathematisch wie die Differentiale von Veränderlichen zählt (was auch hier in den vorhergehenden Paragraphen geschehen ist), so sind auch die λ keine Fehler, sondern Fehler mit umgekehrten Vorzeichen. Dennoch möchte ich die Bezeichnung „Fehlergleichungen" nicht aufgeben, da sie sich eingebürgert hat, und da man doch auch die Verbesserungen im weitern Sinne als Fehler auffassen kann.

Ebenso scheint es mir unbedenklich, das Symbol ε, das bisher eine dieser Gleichungen ($\lambda = 0$ gesetzt) ausreicht zu einer Bestimmung der Unbekannten, so sind $2 = 3 - 1$ der Gleichungen und Beobachtungen überschüssig. Allgemein bei n direkten Beobachtungen sind $(n - 1)$ überschüssige Beobachtungen und Gleichungen vorhanden.

Für den wahren Wert X der Unbekannten und die wahren Verbesserungen ε der Beobachtungen hat man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -l_1 + X \\ \varepsilon_2 &= -l_2 + X \qquad (2) \\ \varepsilon_3 &= -l_3 + X, \end{aligned}$$

welche zwar X nicht finden lassen, die sich aber doch auch von Nutzen erweisen werden.

Um Zahlenwerte zu erhalten, sei ein Beispiel gegeben.

Beispiel. Beim Gebrauch der Nivellierinstrumente mit umlegbarem Fernrohr kommt der Einfluß in Frage, den eine Ungleichheit der Ringdurchmesser auf den Winkel zwischen Fernrohrachse und Libellenachse hat.

Mit Hilfe einer Setzlibelle läßt sich derselbe ermitteln. Liest man die Setzlibelle ab, legt das Fernrohr alsdann in den Lagern um und setzt die Libelle in unveränderter Stellung wieder auf, so ist der Ausschlag der Libelle der vierfache Betrag der gesuchten Größe. Um die Änderungen in der Lage des Fernrohrträgers während des Umlegens kennen zu lernen, ist es zweckmäßig, noch eine Libelle, die an dem Fernrohrträger befestigt ist, vorher und nachher abzulesen.

So erhielt der Verfasser für ein Stampfersches Nivellierinstrument (Nr. 1864 von Starke und Kammerer in Wien, Eigentum der Technischen Hochschule in Aachen) u. a. bei einer Messung folgende Libellenablesungen:

---

streng mathematisch „Fehler" bezeichnete, von nun ab für die wahren „Verbesserungen" zu benutzen.

Übrigens stammt der Ausdruck Fehlergleichungen von C. F. Gauß selbst. Siehe z. B. Werke V, S. 632 und IX, S. 290.

In seinen Vorlesungen scheint Gauß allerdings auch den Ausdruck „Beobachtungsgleichungen" gebraucht zu haben; vergl. die „Festschrift zur Feier des 150-jährigen Bestehens der Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen", Berlin 1901 (R. Dedekind, Gauß in seiner Vorlesung über die M. d. kl. Qu.), S. 49.

(1)

Objektivende	Feste Libelle links	Feste Libelle rechts	Setzlibelle links	Setzlibelle rechts
links	8,1	14,15	14,1	7,15
rechts	11,2	10,95	15,9	4,9

Ist nun ein Libellenteil der Setzlibelle gleich o Bogensekunden und ein Libellenteil der festen Libelle gleich u Bogensekunden, so folgt zunächst der Stand der Setzlibelle reduziert auf den Stand null der festen Libelle für

$$\text{Objektivende links gleich } 3{,}48\,o + 3{,}03\,u$$
$$\text{,, \quad rechts \quad ,, } \quad 5{,}50\,o - 0{,}13\,u$$

und daraus

$$\frac{\text{Obj.}\,l - \text{Obj.}\,r}{4} = -\,2{,}02\,\frac{o}{4} + 3{,}16\,\frac{u}{4}\,.$$

Nun ist nach andern Bestimmungen

$$o = 5'',93 \text{ und } u = 5'',40\,.$$

Man hat daher

(2) $$\frac{\text{Obj.}\,l - \text{Obj.}\,r}{4} = +\,1'',27\,.$$

Ist die Visierachse zentriert und die Setzlibelle als solche berichtigt, so ist hiernach der Winkel zwischen Libellenachse und Visierachse gleich $+\,1'',27$ und zwar konvergieren beide Achsen gegen das Okularende des Fernrohrs hin.

Im ganzen wurden 16 Bestimmungen dieser Art gemacht und folgende Beobachtungswerte erhalten.

(3)
$$\begin{array}{llll}
l_1 = +\,1'',27 & l_5 = +\,0'',03 & l_9 = -\,0'',90 & l_{13} = -\,0'',60 \\
l_2 = -\,0{,}78 & l_6 = +\,0{,}07 & l_{10} = +\,0{,}20 & l_{14} = -\,0{,}90 \\
l_3 = +\,0{,}11 & l_7 = +\,0{,}08 & l_{11} = +\,0{,}96 & l_{15} = -\,0{,}17 \\
l_4 = -\,0{,}71 & l_8 = +\,0{,}56 & l_{12} = +\,0{,}86 & l_{16} = -\,0{,}03\,. \\
\text{am 10. Febr.} & \text{am 25. Febr.} & \multicolumn{2}{c}{\text{am 28. Febr. 1871.}}
\end{array}$$

Die Fehlergleichungen sind nun z. B. für den ersten Tag:

(4)
$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\,1{,}27 + x \\
\lambda_2 &= +\,0{,}78 + x \\
\lambda_3 &= -\,0{,}11 + x \\
\lambda_4 &= +\,0{,}71 + x\,,
\end{aligned}$$

und entsprechend weiter für die andern Tage.

Bei dieser einfachen Aufgabe scheint es keinem Zweifel zu unterliegen, daß als plausibelster Wert x das arithmetische Mittel der Messungsergebnisse genommen werden muß. In der Tat verlangt die M. d. kl. Qu. für x das arithmetische Mittel. Für den ersten Tag ergibt sich daher:

$$(5) \qquad x = \frac{+1{,}27 - 0{,}78 + 0{,}11 - 0{,}71}{4} = -0'',03\,.$$

Damit wird

$$(6) \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -1{,}30 \\ \lambda_2 &= +0{,}75 \\ \lambda_3 &= -0{,}14 \\ \lambda_4 &= +0{,}68; \end{aligned} \qquad [\lambda\lambda] = 2{,}73\,.$$

Der zweite Tag liefert $x = +0'',18$, der dritte $x = -0'',07$; im Gesamtmittel der 16 Werte l wird erhalten:

$$(7) \qquad x = +0'',00\,.$$

Hierzu gehören somit die negativen l als Verbesserungen λ:

$$(7^*) \qquad \lambda = -l\,,$$

so daß man in (3) nur die Vorzeichen zu wechseln braucht, um die λ zu erhalten. Es wird jetzt

$$(8) \qquad [\lambda\lambda] = 6{,}77\,,$$

und diese Quadratsumme ist kleiner als für irgend einen andern Wert von x.

Wären die λ die wahren Fehler ε, so hätten wir als mittlern zu befürchtenden Fehler einer Messung:

$$(9) \qquad \pm\sqrt{\frac{6{,}77}{16}}\,, \text{ d. i. } \pm 0'',65\,.$$

Indessen ist dies nur die mittlere Abweichung vom arithmetischen Mittel.

Dagegen wird sich später finden, daß man zu setzen hat für den mittlern zu befürchtenden Beobachtungsfehler (mittlere zu befürchtende Abweichung von der Wahrheit):

$$(9^*) \qquad \mu = \pm\sqrt{\frac{6{,}77}{16-1}}\,, \text{ d. i. } \pm 0'',67\,.$$

μ wird also gerade so bestimmt, als wäre $[\lambda\lambda]$ aus so vielen wahren Fehlern ε abgeleitet, als überschüssige Messungen vorhanden sind.

Die eingehendere Behandlung dieses Beispiels wie überhaupt der direkten Beobachtungen erfolgt im zweiten Kapitel. Insbesondere wird dort auch die Genauigkeit der Mittelwerte durch Bildung des mittlern Fehlers abgeleitet werden.

II. Vermittelnde Beobachtungen werden solche Messungen genannt, welche sich auf Größen beziehen, die Funktionen eines und desselben Systems von Unbekannten sind, um deren Bestimmung es sich handelt. Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel.

Beispiel. Auf dem Standpunkte D' seines Dreiecksnetzes bei Speyer wurden von Prof. Schwerd zwischen den Objekten $A\,B\,W\,H\,N$ durch das Repetitionsverfahren folgende Winkel gemessen:*)

(1)	BA	90 Repetitionen:	$19^0\ 25'\ 59'',42 + \lambda_1$
	BW	80 „	$34\ \ 18\ \ 43,61 + \lambda_2$
	AW	70 „	$14\ \ 52\ \ 44,33 + \lambda_3$
	HW	20 „	$15\ \ 34\ \ 58,80 + \lambda_4$
	BH	20 „	$18\ \ 43\ \ 45,60 + \lambda_5$
	NA	40 „	$12\ \ 26\ \ 24,65 + \lambda_6$
	BN	60 „	$6\ \ 59\ \ 34,51 + \lambda_7$
	NH	20 „	$11\ \ 44\ \ 11,60 + \lambda_8$.

Den Beobachtungswerten sind hierbei gleich die noch unbekannten plausibelsten Verbesserungen beigefügt worden.

Bezeichnen wir nun die plausibelsten Werte der Winkel

$$(2)\qquad \begin{array}{lll} BN & \text{mit} & x \\ BH & „ & y \\ BA & „ & z \\ BW & „ & t, \end{array}$$

so sind alle gemessenen Winkel teils Beobachtungen von x, y, z, t selbst, teils von Summen und Differenzen derselben. Drückt man jetzt alle in (1) gegebenen plausibelsten Winkelwerte durch x, y, z, t aus, so erhält man folgende Fehlergleichungen:

*) Friedr. M. Schwerd, Die kleine Speyerer Basis. Speyer 1822, S. 43 u. 44.

$$
(3)\qquad
\begin{array}{lllllllll}
\lambda_1 = & -19^{\circ} & 25' & 59''{,}42 & \cdot & \cdot & +z & \cdot \\
\lambda_2 = & -34 & 18 & 43{,}61 & \cdot & \cdot & \cdot & +t \\
\lambda_3 = & -14 & 52 & 44{,}33 & \cdot & \cdot & -z & +t \\
\lambda_4 = & -15 & 34 & 58{,}80 & \cdot & -y & \cdot & +t \\
\lambda_5 = & -18 & 43 & 45{,}60 & \cdot & +y & \cdot & \cdot \\
\lambda_6 = & -12 & 26 & 24{,}65 & -x & \cdot & +z & \cdot \\
\lambda_7 = & -6 & 59 & 34{,}51 & +x & \cdot & \cdot & \cdot \\
\lambda_8 = & -11 & 44 & 11{,}60 & -x & +y & \cdot & \cdot\,.
\end{array}
$$

Gehen wir von den direkt beobachteten Werten der Unbekannten aus, so können wir ansetzen:

$$
(4)\qquad
\begin{array}{l}
x = 6^{0}\ 59'\ 34''{,}51 + \xi \\
y = 18\ \ 43\ \ 45{,}60 + \eta \\
z = 19\ \ 25\ \ 59{,}42 + \zeta \\
t = 34\ \ 18\ \ 43{,}61 + \tau\,,
\end{array}
$$

wo den direkten Beobachtungswerten noch Verbesserungen ξ, η, ζ, τ beigefügt sind. Um nämlich die allen Messungen möglichst entsprechenden Werte der vier Unbekannten zu erhalten, werden wir die aus den direkten Beobachtungen für dieselben abgeleiteten Werte um kleine Beträge abändern müssen. Die Anzahl der überschüssigen Messungen ist offenbar $8 - 4 = 4$.

Durch Einführung der Werte (4) in (3) ergibt sich:

$$
(5)\qquad
\begin{array}{llllll}
\lambda_1 = & 0''{,}00 & \cdot & \cdot & +\zeta & \cdot \\
\lambda_2 = & 0{,}00 & \cdot & \cdot & \cdot & +\tau \\
\lambda_3 = & -0{,}14 & \cdot & \cdot & -\zeta & +\tau \\
\lambda_4 = & -0{,}79 & \cdot & -\eta & \cdot & +\tau \\
\lambda_5 = & 0{,}00 & \cdot & +\eta & \cdot & \cdot \\
\lambda_6 = & +0{,}26 & -\xi & \cdot & +\zeta & \cdot \\
\lambda_7 = & 0{,}00 & +\xi & \cdot & \cdot & \cdot \\
\lambda_8 = & -0{,}51 & -\xi & +\eta & \cdot & \cdot\,.
\end{array}
$$

Aus diesen acht Fehlergleichungen sind die plausibelsten Werte für ξ, η, ζ, τ abzuleiten. Dabei ist zu berücksichtigen, daß den Beobachtungswerten ungleiche Repetitionszahlen entsprechen, daher auch ihre Genauigkeit eine verschiedene ist. Zunächst wollen wir aber davon absehen und gleiche Genauigkeit annehmen, um die Aufgabe zu vereinfachen. Indessen wissen wir auch trotz dieser Vereinfachung ohne weiteres noch keinen Weg zu ihrer Lösung einzuschlagen: das Gefühl, das uns bei dem Beispiel auf Seite 42 leitete, läßt uns jetzt bei der größern Verwicklung der Aufgabe im Stich.

Die Methode der kleinsten Quadrate wird uns nun zeigen, daß in folgender Weise vorzugehen ist.

a. Man multipliziere die rechte Seite jeder Fehlergleichung mit dem Koeffizienten von ξ, addiere die Produkte und setze die Summe gleich null:

$$\begin{array}{lrrrrr}
 & -0{,}26 & +\ \xi & \cdot & -\ \zeta & \cdot \\
 & 0{,}00 & +\ \xi & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & +0{,}51 & +\ \xi & -\ \eta & \cdot & \cdot \\
\hline
\text{(a)}\quad 0 = & +0{,}25 & +\ 3\xi & -\ \eta & -\ \zeta & \cdot\ .
\end{array}$$

b. Man wiederhole dasselbe in bezug auf die Koeffizienten von η:

$$\begin{array}{lrrrrr}
 & +0{,}79 & \cdot & +\ \eta & \cdot & -\ \tau \\
 & 0{,}00 & \cdot & +\ \eta & \cdot & \cdot \\
 & -0{,}51 & -\ \xi & +\ \eta & \cdot & \cdot \\
\hline
\text{(b)}\quad 0 = & +0{,}28 & -\ \xi & +\ 3\eta & \cdot & -\ \tau\ .
\end{array}$$

c. Ebenso für ζ:

$$\begin{array}{lrrrrr}
 & 0{,}00 & \cdot & \cdot & +\ \zeta & \cdot \\
 & +0{,}14 & \cdot & \cdot & +\ \zeta & -\ \tau \\
 & +0{,}26 & -\ \xi & \cdot & +\ \zeta & \cdot \\
\hline
\text{(c)}\quad 0 = & +0{,}40 & -\ \xi & \cdot & +\ 3\zeta & -\ \tau\ .
\end{array}$$

d. Ebenso für τ:

$$\begin{array}{lrrrrr}
 & 0{,}00 & \cdot & \cdot & \cdot & +\ \tau \\
 & -0{,}14 & \cdot & \cdot & -\ \zeta & +\ \tau \\
 & -0{,}79 & \cdot & -\ \eta & \cdot & +\ \tau \\
\hline
\text{(d)}\quad 0 = & -0{,}93 & \cdot & -\ \eta & -\ \zeta & +\ 3\tau\ .
\end{array}$$

Dadurch erhält man im ganzen zur Bestimmung der vier Unbekannten ξ, η, ζ, τ die vier Gleichungen (a), (b), (c), (d):

$$(6)\qquad \begin{array}{lrrrrr}
0 = & +\ 0.25 & +\ 3\xi & -\ \eta & -\ \zeta & \cdot \\
0 = & +\ 0.28 & -\ \xi & +\ 3\eta & \cdot & -\ \tau \\
0 = & +\ 0.40 & -\ \xi & \cdot & +\ 3\zeta & -\ \tau \\
0 = & -\ 0.93 & \cdot & -\ \eta & -\ \zeta & +\ 3\tau\ .
\end{array}$$

Addiert man diese vier Gleichungen, so folgt

$$0 = \xi + \eta + \zeta + \tau\ .$$

Addiert man die zweite und dritte Gleichung, so wird

$$0 = +\,0{,}68 - 2\xi + 3\eta + 3\zeta - 2\tau,$$

also infolge der vorhergehenden Gleichung

$$0 = +\,0{,}68 + 5\eta + 5\zeta$$

oder

$$0 = +\,0{,}136 + \eta + \zeta.$$

Subtrahiert man die dritte Gleichung von der zweiten und dividiert alsdann durch 3, so erhält man

$$0 = -\,0{,}040 + \eta - \zeta.$$

Die letzten beiden Gleichungen ergeben:

$$\eta = -\,0'',048, \qquad \zeta = -\,0'',088.$$

(7) Damit ist weiter

$$\xi = -\,0'',129, \qquad \tau = +\,0'',265.$$

Nach (4) sind daher die plausibelsten Werte der Unbekannten:

$$(8)\qquad \begin{aligned} x &= 6^0\ 59'\ 34'',381\\ y &= 18\ \ 43\ \ 45,552\\ z &= 19\ \ 25\ \ 59,332\\ t &= 34\ \ 18\ \ 43,875. \end{aligned}$$

Die plausibelsten Verbesserungen λ werden nach (5) und (7):

$$(9)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -\,0'',088 & \lambda_5 &= -\,0'',048\\ \lambda_2 &= +\,0,265 & \lambda_6 &= +\,0,301\\ \lambda_3 &= +\,0,213 & \lambda_7 &= -\,0,129\\ \lambda_4 &= -\,0,477 & \lambda_8 &= -\,0,429: \end{aligned}$$

$$[\lambda\lambda] = 0{,}6445.$$

Die ausgeglichenen Beobachtungswerte sind mithin nach (1) und (9):

(10)

BA	19°	25′	59″,332	BH	18°	43′	45″,552
BW	34	18	43,875	NA	12	26	24,951
AW	14	52	44,543	BN	6	59	34,381
HW	15	34	58,323	NH	11	44	11,171,

welche sich nicht mehr widersprechen, indem beispielsweise die Zahlenwerte für BA und AW zusammen genau den Zahlenwert BW ergeben.

Um μ aus $[\lambda\lambda]$ zu berechnen, ist zu bedenken, daß die λ die wahren Beobachtungsfehler selbst nicht sind. Nach später abzuleitenden Formeln wird

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{0{,}6445}{8-4}} = \pm 0'',401 . \tag{11}$$

μ wird gerade so gebildet, als sei $[\lambda\lambda]$ aus so vielen wahren Fehlern gebildet, als überschüssige Messungen vorhanden sind.

Die Fehlergleichungen für vermittelnde Beobachtungen haben im allgemeinen folgende Form:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots \\ \lambda_3 &= -l_3 + a_3 x + b_3 y + c_3 z + \cdots \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_n &= -l_n + a_n x + b_n y + c_n z + \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

für n Beobachtungswerte l und m Unbekannte $x, y, z, \ldots$. Die Koeffizienten $a, b, c, \ldots$ sind gegebene Größen, welche als fehlerfrei vorausgesetzt werden.

Insofern man jede der Formen $ax + by + cz + \cdots$ auch als speziellen Wert einer Funktion der Variablen $a, b, c, \ldots$ und der Konstanten $x, y, z, \ldots$ ansehen kann, ist man berechtigt, $x, y, z, \ldots$ die durch vermittelnde Beobachtungen zu bestimmenden Konstanten der Aufgabe zu nennen. Sie werden auch Elemente genannt; man spricht dann von Elementen-Ausgleichung.

Eine Ausgleichungsaufgabe liegt nur dann vor, wenn die Anzahl n der Gleichungen (3) größer ist als die Anzahl m der Unbekannten, mit andern Worten: solange die Anzahl der überschüssigen Messungen $n - m >$ null ist.

Für $n = m$ ist die Aufgabe bestimmt und in diesem Falle geben die Gleichungen (3) die Unbekannten, indem man die λ null setzt und in gewöhnlicher Weise die n Gleichungen mit n Unbekannten auflöst. Da hierbei jede Kontrolle fehlt, so gehen die Beobachtungsfehler der m Messungsergebnisse in die Werte der n Unbekannten voll ein.

Die Aufgabe ist nur unvollständig bestimmt für $n < m$.

Eine unvollständige Bestimmung kann auch auftreten in den beiden vorhergehenden Fällen bei besonderer Gestaltung der Koeffizientensysteme $a, b, c, \ldots$. Im Falle $n = m$ ist Bedingung der vollständigen Bestimmung, daß die Determinante des Koeffizientensystems nicht verschwindet. In den meisten praktischen Fällen wird man auch ohne Bildung des Wertes der Determinante erkennen können, ob eine vollständige Bestimmung vorliegt.

Im Falle $n > m$ ist Bedingung einer vollständigen Bestimmung, daß unter den n Fehlergleichungen sich wenigstens ein System von m solchen auswählen läßt, die mit $\lambda = 0$ eine vollständige Bestimmung geben.

Den Fehlergleichungen (3) für die plausibelsten Werte der Unbekannten und der Fehler entsprechen ebenso viele Gleichungen zwischen den wahren Werten der Unbekannten und den wahren Werten der Verbesserungen:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= -l_1 + a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + \cdots \\
\varepsilon_2 &= -l_2 + a_2 X + b_2 Y + c_2 Z + \cdots \\
\varepsilon_3 &= -l_3 + a_3 X + b_3 Y + c_3 Z + \cdots \qquad (4)\\
&\quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\varepsilon_n &= -l_n + a_n X + b_n Y + c_n Z + \cdots.
\end{aligned}
$$

Obgleich die m Unbekannten $X, Y, Z, \cdots$ und die ε sich nicht finden lassen, so gibt doch die Methode der kleinsten Quadrate unter gewissen Voraussetzungen über das Fehlergesetz $\varphi(\varepsilon)$ ein Mittel an die Hand, sich diesen Größen möglichst zu nähern. Sie lehrt auch aus den λ den mittlern zu befürchtenden Wert der ε finden (vergl. z. B. (11) im Beispiel auf S. 47), ebenso wie die mittlern zu befürchtenden Abweichungen zwischen $x, y, z, \cdots$ und $X, Y, Z, \cdots$.

Die eingehendere Behandlung der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen erfolgt im dritten Kapitel.

III. Bedingte Beobachtungen. Man spricht von bedingten Beobachtungen, wenn zwischen den wahren Werten der Beobachtungsgrößen Bedingungsgleichungen bestehen, die auch von ihren ausgeglichenen Werten streng zu erfüllen sind. Wir nehmen zur Erläuterung wieder ein einfaches Beispiel vor.

Beispiel. Prof. Schwerd erhielt in dem Dreieck DHJ seines Dreiecksnetzes (Die kleine Speyerer Basis, S. 48, 49, 55 und 56) die Winkel:

$$\begin{array}{lllll} & H: & 81^0\ 21'\ 43'',36 & & 70\text{-mal repetiert} \\ (1) & J: & 25\ \ 16\ \ 28,85 & & 101\ \ ,,\ \ \ ,, \\ & D: & 73\ \ 21\ \ 46,35 & & 85\ \ ,,\ \ \ ,, \end{array}$$

Die Länge der Seite HD ist $4962{,}8282\,m$; die theoretische Winkelsumme des Dreiecks wird mithin schon merkbar von 180^0 abweichen. Den sphärischen Exzeß des Dreiecks berechnen wir nach der Formel:

$$(2)\qquad \text{Sphär. Exzeß in Sek.} = \frac{\text{Inhalt des Dreiecks}}{\text{Quadrat des Erdradius}} \cdot 206\,265\,,$$

worin log Inhalt $= 7{,}4365$ für Quadratmeter ist, und als Erdradius der Wert num log $6{,}8046$ (streng gültig für 45^0 geographische Breite und ein mittleres Azimut) genommen werden darf; also

$$(2^*)\qquad \log \text{Exzeß} = 7{,}4365 - 8{,}2948;\quad \text{Exzeß} = 0'',139.$$

$$\begin{array}{lr} \text{Die theoretische Winkelsumme ist daher:} & 180^0\ \ 0'\ \ 0'',139; \\ \text{dagegen hat man aus (1) für die beobachtete:} & 179\ \ 59\ \ 58,56; \\ \text{Unterschied:} & 1'',579. \end{array}$$

Nennt man die 3 Beobachtungswerte l_1, l_2, l_3 und ihre plausibelsten Verbesserungen λ_1, λ_2, λ_3, so hat man hiernach:

$$\begin{aligned} 180^0\ 0'\ 0'',139 &= (l_1 + \lambda_1) + (l_2 + \lambda_2) + (l_3 + \lambda_3) \\ &= 179^0\ 59'\ 58'',56 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3; \end{aligned}$$

mithin wird die Bedingungsgleichung für die Fehler:

$$(3)\qquad 0 = -\,1'',579 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3\,.$$

Wenn wir nun die drei Beobachtungen als gleich genau voraussetzen, ohne Rücksicht auf die verschiedenen Repetitionszahlen, so ist kein Grund vorhanden, die λ verschieden anzunehmen; wir setzen daher

$$(4)\qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = +\,\frac{1{,}579}{3} = 0'',526,$$

was mit den Forderungen der Methode der kleinsten Quadrate übereinstimmt.

Die ausgeglichenen Beobachtungswerte sind:

$$(5)\qquad \begin{array}{rrr} 81^0 & 21' & 43'',886 \\ 25 & 16 & 29,376 \\ 73 & 21 & 46,876 \\ \hline 180 & 0 & 0,138. \end{array}$$

Nicht so einfach wird die Lösung bei Berücksichtigung der ungleichen Genauigkeit der Messungsergebnisse l oder in Fällen, wo mehr als eine Bedingungsgleichung auftritt. Darauf gehen wir jetzt nicht weiter ein, sondern schreiben nur noch die allgemeine Form auf, unter welcher sich die Aufgabe III darbietet.

Es seien

$l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ die Beobachtungswerte,

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$ ihre wahren Verbesserungen,

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ ihre plausibelsten Verbesserungen,

und es sollen die n wahren Werte $(l + \varepsilon)$ die σ Bedingungsgleichungen:

$$
(5) \qquad \begin{array}{l}
0 = p_0 + p_1(l_1 + \varepsilon_1) + p_2(l_2 + \varepsilon_2) + \cdots + p_n(l_n + \varepsilon_n) \\
0 = q_0 + q_1(l_1 + \varepsilon_1) + q_2(l_2 + \varepsilon_2) + \cdots + q_n(l_n + \varepsilon_n) \\
0 = r_0 + r_1(l_1 + \varepsilon_1) + r_2(l_2 + \varepsilon_2) + \cdots + r_n(l_n + \varepsilon_n) \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\qquad\qquad (\text{Anzahl} = \sigma)
\end{array}
$$

erfüllen, worin die Koeffizienten $p, q, r, \cdots$ gegebene Zahlen bezeichnen. Denken wir uns zunächst die Ausdrücke

$$
(6) \qquad \begin{array}{l}
w_1 = p_0 + p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n \\
w_2 = q_0 + q_1 l_1 + q_2 l_2 + \cdots + q_n l_n \\
w_3 = r_0 + r_1 l_1 + r_2 l_2 + \cdots + r_n l_n \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\qquad\qquad (\text{Anzahl} = \sigma)
\end{array}
$$

berechnet, so nehmen die Bedingungsgleichungen die Form an:

$$
(7) \qquad \begin{array}{l}
0 = w_1 + p_1 \varepsilon_1 + p_2 \varepsilon_2 + \cdots + p_n \varepsilon_n \\
0 = w_2 + q_1 \varepsilon_1 + q_2 \varepsilon_2 + \cdots + q_n \varepsilon_n \\
0 = w_3 + r_1 \varepsilon_1 + r_2 \varepsilon_2 + \cdots + r_n \varepsilon_n \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\qquad\qquad (\text{Anzahl} = \sigma)
\end{array}
$$

Die wahren Verbesserungen ε kann man nur finden für $\sigma = n$; doch hat man in diesem Falle keine Ausgleichungsaufgabe mehr, sondern die bestimmte Aufgabe, aus n Gleichungen

n Unbekannte zu ermitteln, wobei der Umstand, daß schon Beobachtungswerte l für diese vorliegen, bedeutungslos wird.

Für $\sigma > n$ gibt die Aufgabe im allgemeinen zu viel Bedingungen, die sich nicht gleichzeitig erfüllen lassen.

Uns interessiert ausschließlich der Fall $\sigma < n$. Da man mittels der σ Gleichungen (5), in denen für den Augenblick die ε irgend ein System von Verbesserungen bezeichnen mögen, immer σ der Werte $(l + \varepsilon)$ durch die $n - \sigma$ andern ausdrücken kann, so sind σ überschüssige Beobachtungen vorhanden.

Die Methode der kleinsten Quadrate zeigt nun, wie man ein System von Verbesserungen λ finden kann, die die Gleichungen

$$
(8) \qquad \begin{array}{l}
0 = w_1 + p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \cdots + p_n\lambda_n \\
0 = w_2 + q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + \cdots + q_n\lambda_n \\
0 = w_3 + r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + \cdots + r_n\lambda_n \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}
$$

$$(\text{Anzahl} = \sigma)$$

erfüllen und die zugleich als die plausibelsten erscheinen. Die eingehendere Behandlung vorstehender Aufgabe erfolgt im vierten Kapitel.

IV. Vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen. Eine andere für die Geodäsie wichtige Form der Ausgleichungsaufgabe entsteht aus der Verbindung vermittelnder Beobachtungen mit einer Anzahl Bedingungsgleichungen, die nicht zwischen den Beobachtungswerten l, sondern zwischen den zu bestimmenden Elementen der Fehlergleichungen bestehen.

Mit Benutzung des bei Form II, S. 47, Gegebenen haben wir somit die Gleichungen

$$
(9) \qquad \left.\begin{array}{l}
\lambda_1 = -\,l_1 + a_1x + b_1y + c_1z + \cdots \\
\lambda_2 = -\,l_2 + a_2x + b_2y + c_2z + \cdots \\
\lambda_3 = -\,l_3 + a_3x + b_3y + c_3z + \cdots \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\lambda_n = -\,l_n + a_nx + b_ny + c_nz + \cdots
\end{array}\right\} \quad (m \text{ Unbekannte})
$$

$$
(9^*) \quad \left.\begin{array}{l}
0 = p_0 + p_1 x + p_2 y + p_3 z + \cdots \\
0 = q_0 + q_1 x + q_2 y + q_3 z + \cdots \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{array}\right\} (m \text{ Unbekannte})
$$

$$(\sigma \text{ Bedingungsgleichungen})$$

zur Lösung der Aufgabe. Dabei ist notwendige Voraussetzung, daß

$$\sigma < m \quad \text{und} \quad n > m - \sigma$$

oder zusammengefaßt

$$(10) \qquad n > m - \sigma > 0$$

ist.

Ist nämlich $\sigma < m$, so lassen sich aus den σ Bedingungsgleichungen σ von den Unbekannten durch die $m - \sigma$ andern ausdrücken und damit aus den n Fehlergleichungen eliminieren. so daß die n Beobachtungen $m - \sigma$ Unbekannte zu bestimmen haben, weshalb für eine Ausgleichungsaufgabe $n > m - \sigma$ sein muß. Die Anzahl der überschüssigen Messungen ist $n - (m - \sigma) = n + \sigma - m$.

Im Falle $n = m - \sigma$ würde sich eine bestimmte Lösung (mit $\lambda = \text{null}$) ergeben, dagegen würde $n < m - \sigma$ eine unvollständige Aufgabe liefern. Die Fälle $\sigma > m$ sind ohne praktische Bedeutung.

Die Aufgabe IV kommt häufig bei der Ausgleichung von Dreiecksnetzen vor. Sind hier z. B. die Winkel auf den Netzpunkten wie im Beispiel auf S. 43 u. f. gemessen, so treten im Netze die verschiedenen Systeme $x, y, z, \ldots$ der Unbekannten noch zu Bedingungsgleichungen zusammen, die aus den geometrischen Beziehungen im Netze hervorgehen.

V. Bedingte Beobachtungen mit Unbekannten. Die bisher erwähnten Formen der Ausgleichungsaufgabe können als Spezialfälle der folgenden allgemeinern Aufgabe betrachtet werden. Es sind die Verbesserungen λ aus den Gleichungen zu bestimmen:

$$
(11) \quad \left.\begin{array}{l}
0 = w_1 + p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 + \cdots + p_n \lambda_n + a_1 x + b_1 y + \cdots \\
0 = w_2 + q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2 + \cdots + q_n \lambda_n + a_2 x + b_2 y + \cdots \\
0 = w_3 + r_1 \lambda_1 + r_2 \lambda_2 + \cdots + r_n \lambda_n + a_3 x + b_3 y + \cdots \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{array}\right\} (m \text{ Unbekannte})
$$

$$(\text{Anzahl} = \sigma),$$

worin die w und die Koeffizienten $p, q, r, \cdots, a, b, \cdots$ die frühere Bedeutung haben. Eine Ausgleichung ist nur für $\sigma > m$ möglich; $\sigma = m$ gibt eine bestimmte Aufgabe mit $\lambda =$ null, $\sigma < m$ eine unvollständige Aufgabe. Ist nun $\sigma > m$, so kann man die m Unbekannten eliminieren, und es bleiben dann $\sigma - m$ Bedingungsgleichungen mit n Verbesserungen λ; daher muß für eine Ausgleichung

$$n > \sigma - m$$

sein, also mit der vorigen Ungleichung verbunden:

$$n > \sigma - m > 0. \tag{12}$$

Auf die Aufgabe V stößt man z. B., wenn in einem Dreiecksnetz die nach dem Repetitionsverfahren gemessenen Winkel alle um eine Konstante zu klein sind, die nicht durch Messen der Supplementwinkel eliminiert ist. Die Konstante erscheint dann als Unbekannte x. Auf die Aufgabe V wird man auch geführt, wenn man für die Ausgleichung eines Rückwärtseinschnitts Bedingungsgleichungen benutzt; in diesem Falle tritt die Orientierungsgröße auf dem Beobachtungspunkte als Unbekannte auf.

Die Aufgaben III, IV und V, die im vierten Kapitel eingehend behandelt werden, haben das Gemeinsame, daß bei der direkten Lösung Hilfsgrößen eingehen, die man Korrelaten nennt. Man kann daher diese Fälle als Korrelatenausgleichung zusammenfassen.

VI. Gemeinsame Form der Ausgleichungsaufgaben. Die erwähnten 5 Formen lassen sich sowohl auf die Form II wie auf die Form III reduzieren; in welcher Gestalt man die Ausgleichung ausführt, hängt von der Bequemlichkeit der Rechnung ab. Auf die Endergebnisse hat es selbstredend keinen Einfluß, ob nach der einen oder andern Form gerechnet wird, da die Methode der kleinsten Quadrate den von den Beobachtungswerten zu erfüllenden Beziehungen eine Bedingung hinzufügt, durch welche die Aufgabe eine bestimmte wird.

VII. Nichtlineare Beziehungen. Wir haben im Vorhergehenden allen Beziehungen eine lineare Form gegeben. Es genügt dies, da andere Formen darauf zurückgeführt werden können; ja es führt der Rechnungsgang, welcher für lineare Formen bequem ist, in seiner Anwendung auf nichtlineare Formen, wenigstens in meist ausreichender Annäherung, doch auf lineare Gleichungen.

VIII. Funktionen direkt beobachteter Größen. Ehe wir auf die erwähnten Ausgleichungsaufgaben näher eingehen, ist es notwendig, einen Fall zu betrachten, der als Umkehrung der Aufgabe II angesehen werden kann. Wurden dort mittels direkter Beobachtungen Funktionswerte unbekannter Konstanten (Elemente) bestimmt, so werden hier unbekannte Funktionswerte mittels direkter Beobachtung von Konstanten (Elementen) ermittelt. Zwar gibt dies keine Ausgleichung, aber doch eine Aufgabe, die sich immer an Ausgleichungen anschließt, nämlich die Ermittelung der Genauigkeit des berechneten Funktionswertes aus der Unsicherheit der beobachteten Größen. Wir wenden uns zunächst dieser Aufgabe zu und setzen dabei voraus, daß die Beobachtungen unabhängig voneinander erfolgt sind, die Beobachtungswerte also nicht etwa durch Rechnung aus teilweise denselben Beobachtungsdaten abgeleitet wurden.

§ 6. Mittlerer Fehler von Funktionen unabhängig voneinander bestimmter Größen.

Es wird hier vorausgesetzt, daß das Fehlergesetz $\varphi(\varepsilon)$ entweder eine gerade Funktion von ε ist, oder daß wenigstens die Gaußsche Bedingung (27), S. 17, erfüllt wird.

I. Vielfaches eines Beobachtungswertes. Es sei wieder l der Beobachtungswert und

$$f = \alpha l\,, \tag{1}$$

worin α ein gegebener Zahlenkoeffizient ist: dann entspricht einem Fehler ε in l ein Fehler $\alpha\varepsilon$ in f. Es ist daher das Quadrat des mittlern Fehlers in f:

$$\mu_f^2 = \alpha^2\mu^2 \text{ und } \mu_f = \alpha\mu\,. \tag{2}$$

Denn denken wir uns die Beobachtung l unendlich viele

Male wiederholt und den Durchschnittswert der entsprechenden $\alpha^2\varepsilon^2$ gebildet, so ist das einerseits μ_f^2 und andrerseits $\alpha^2\mu^2$.

Ist beispielsweise

(3) $$f = 3l\,,$$

so ergibt sich

(4) $$\mu_f = 3\mu\,.$$

II. Lineare Funktion unabhängiger Beobachtungen.

Es sei

(5) $$f = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \cdots$$

eine lineare Funktion der unabhängig voneinander ermittelten Beobachtungswerte $l_1, l_2, l_3, \ldots$, wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ gegebene Zahlenkoeffizienten bedeuten. Der wahre Wert von f, den wir mit F bezeichnen wollen, ergibt sich aus (5) durch Einführung der verbesserten Beobachtungswerte $l + \varepsilon$; also wird

$$F = \alpha_1(l_1 + \varepsilon_1) + \alpha_2(l_2 + \varepsilon_2) + \alpha_3(l_3 + \varepsilon_3) + \cdots,$$

womit für den wahren Fehler in f folgt:

(6) $$F - f = \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3 + \cdots.$$

Um den mittlern Feher in f zu erhalten, bilden wir zunächst

(7) $$(F - f)^2 = \alpha_1^2\varepsilon_1^2 + \alpha_2^2\varepsilon_2^2 + \alpha_3^2\varepsilon_3^2 + \cdots + R\,,$$

worin R die Summe der doppelten Produkte je zweier $\alpha\varepsilon$ mit verschiedenen Indices vorstellt. Denken wir uns nun die Beobachtungsgruppe $l_1, l_2, l_3, \ldots$ unendlich viele Male wiederholt, jedesmal $(F - f)^2$ gebildet und dann den Durchschnitt der Ausdrücke (7) genommen, so erhalten wir links das Quadrat des mittlern Fehlers in f und rechts die durchschnittlichen Werte der einzelnen Glieder. Der durchschnittliche Wert jedes der Glieder von der Form $\alpha_i^2\varepsilon_i^2$ ist aber $\alpha_i^2\mu_i^2$, wenn μ_i^2 der mittlere Wert von ε_i^2, d. i. das mittlere Fehlerquadrat von l_i ist. Der Durchschnittswert jedes der Glieder von R ist ferner nach VI, S. 27, gleich null, da wir ein gerades Fehlergesetz oder wenigstens die Erfüllung der Gaußschen Bedingung vorausgesetzt haben. Man hat daher für das mittlere Fehlerquadrat der Bestimmung von f aus (5)

(8) $$\mu_f^2 = \alpha_1^2\mu_1^2 + \alpha_2^2\mu_2^2 + \alpha_3^2\mu_3^2 + \cdots,$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$\mu_f = \pm\sqrt{[\alpha^2\mu^2]}\,. \tag{8*}$$

Nimmt man zum Beispiel

$$f = l_1 + l_2 + l_3\,, \tag{9}$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu\,,$$

so ist

$$\mu_f = \mu\sqrt{3}\,. \tag{9*}$$

Nicht ohne Interesse ist es, dieses Ergebnis mit dem von S. 55 für $f = 3l$ zu vergleichen.

Sind die Werte l_1, l_2, usw. nicht unabhängig voneinander ermittelt, so gilt Formel (8) im allgemeinen nicht mehr. Daß aber in besonderen Fällen die Gültigkeit dieser Formel erhalten bleibt, wird im 3. Kapitel, § 11, bei Behandlung der „freien“ Funktionen gezeigt werden.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß der wahre Fehler $F - f = \varepsilon_f$ der Funktion f ein gerades Fehlergesetz befolgt, wenn die ε_1, ε_2, $\varepsilon_3, \ldots$ ein solches befolgen. Dies zeigt der Anblick von (6) sofort. Demgemäß hat auch μ_f das Vorzeichen $\pm$ zu erhalten.

Ist $\varphi(\varepsilon)$ für die ε_1, ε_2, $\varepsilon_3, \ldots$ das Gaußsche Gesetz, so wird auch das Fehlergesetz für ε_f das Gaußsche, wie sich leicht zeigen läßt. Dieses tritt sogar näherungsweise auch dann ein, wenn das Fehlergesetz der ε_1, ε_2, $\varepsilon_3, \ldots$ eine andere gerade Funktion ist, falls die α untereinander von der Gleichheit nicht zu sehr entfernt sind und die Anzahl der Glieder rechter Hand in (6) groß ist. (Vergl. hierzu V, S. 13 u. f.)

Beispiel. Fortsetzung von S. 42. Wir untersuchen den Einfluß der Ablesefehler an den Libellen auf x. Werden die Ablesungen an beiden Libellen mit O bezw. U bezeichnet, so ist in Sekunden:

$$\begin{aligned} x = {} & \frac{o}{4}\left\{\left(\frac{O_l - O_r}{2}\right)_{\text{Obj. } l} - \left(\frac{O_l - O_r}{2}\right)_{\text{Obj. } r}\right\} \\ & - \frac{u}{4}\left\{\left(\frac{U_l - U_r}{2}\right)_{\text{Obj. } l} - \left(\frac{U_l - U_r}{2}\right)_{\text{Obj. } r}\right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Der mittlere Fehler einer Ablesung O oder U sei in Skalenteilen gleich μ, dann ist

$$\mu_x^2 = \left(\frac{4\,o^2}{64} + \frac{4\,u^2}{64}\right)\mu^2; \quad \mu_x = \frac{\mu}{4}\sqrt{o^2 + u^2}\,. \tag{11}$$

Da $\varrho = 5'',93$, $u = 5'',40$ ist, so wird μ_x in Sekunden gleich 2μ in Skalenteilen. Da μ ferner $\pm 0,1$ kaum überschreiten dürfte, so wäre damit $\mu_x = \pm 0'',2$. Aus (9*) auf S. 42 folgt aber $\pm 0'',67$. Es müssen daher noch andere Fehlerursachen vorhanden sein. Als solche treten auf 1) kleine Unregelmäßigkeiten der Ringe, Lager und Libellenfüße: das Fernrohr wurde von Versuch zu Versuch verschiedentlich um 180^0 oder 360^0 um seine Achse gedreht; 2) Staubteilchen: 0,001 mm gibt bei der geringen Entfernung der beiden Ringe voneinander (die weniger als 200 mm beträgt) schon mehr als $0'',5$ in x.

Beispiel. Fehler der Längenmessung.

Ist die Länge eines Längenmessers (Meßband, Meßdraht, Meßstange usw.) gleich l und die Länge der gemessenen Linie $L = nl$, wo wir der Einfachheit halber n als ganze Zahl ansehen, so wird das Messungsergebnis behaftet sein mit den sämtlichen Fehlern, welche den n Lagen des Längenmessers entsprechen. Bezeichnen wir mit $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ die Verbesserungen der nominellen Angaben zu den wahren Werten, so wird

$$L = l_1 + l_2 + \cdots + l_n + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n, \tag{1}$$

worin sehr nahe $l_1 = l_2 = \cdots = l_n = l$ ist.

Genügt nun das Vorkommen der ε der Bedingung $\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$, so kann man den mittlern Fehler von L nach (8*) bilden. Dieser ergibt sich zu

$$\mu_L = \mu\sqrt{n} = \mu\sqrt{\frac{L}{l}}, \tag{2}$$

wobei μ den mittlern Fehler der l bezeichnet.

Wenn innerhalb gewisser Grenzen der Länge des Längenmessers μ sich nicht ändert, so ist es hiernach am vorteilhaftesten, den Längenmesser so lang wie möglich zu nehmen, weil alsdann für dieselbe zu messende Länge L der Faktor $\sqrt{n}$ in (2) am kleinsten wird.

Diese Bemerkung gilt auch noch dann, wenn die ε der obigen Voraussetzung nicht genügen. Sind die ε zum Beispiel vorherrschend positiv, aber unabhängig von der Länge des Längenmessers, so erkennt man ohne weiteres, daß die Summe der ε in (1) mit der Anzahl derselben im allgemeinen wachsen muß.

In der Tat sind die ε in vielen Fällen vorherrschend positiv oder vorherrschend negativ.

Eine Längenmessung wird nämlich fehlerhaft:

1) wegen der Abweichung der nominellen Länge der Längenmesser bei einer gewissen Temperatur von der wahren Länge;

2) wegen fehlerhafter Berichtigung der gemessenen Länge infolge Temperatur, Neigung und Einfluchtung, sowie unter Umständen infolge Feuchtigkeit und Verbiegung der Längenmesser;

3) wegen fehlerhafter Verbindung der aufeinander folgenden Lagen der Längenmesser und wegen mangelhafter Bodenfestigkeit.

Die erste Ursache hat einen konstanten Fehler zur Folge, der proportional der Länge L wächst.

Die Ursachen 2) geben leicht Veranlassung zu regelmäßigen Fehlern und zu einseitig wirkenden zufälligen Fehlern. Was zunächst die Korrektion wegen Temperatur anbelangt (die überhaupt erst für feinere Messungen notwendig wird), so ist dazu eine genaue Kenntnis des Temperaturkoeffizienten und der Temperatur des Längenmessers nötig. Ein Fehler im Temperaturkoeffizienten gibt einen regelmäßigen Fehler; es gelingt jedoch immer, diesen Koeffizienten so genau zu ermitteln, daß seine Unsicherheit nicht in Betracht kommt. Schwieriger ist es, die jeweilige Temperatur der Längenmesser zu ermitteln, weil die Lufttemperatur und die strahlende Wärme eine fortwährende Änderung derselben bewirken. Den entstehenden regelmäßigen Fehler eliminiert man größtenteils durch Messung bei steigender und bei fallender Temperatur, oder man berechnet ihn nach Maßgabe von Laboratoriumsversuchen.

Um den Fehler überhaupt zu verkleinern, hat man verschiedene Konstruktionen der Längenmesser ausgeführt. Besonders wertvoll ist die in neuerer Zeit erfolgte Erfindung der Nickelstahllegierung Invar (36 % Ni), deren Ausdehnungskoeffizient schon auf $0.5 \cdot 10^{-6}$ herabgedrückt worden ist.

Während also hierdurch die Möglichkeit gegeben ist, den Temperaturfehler bei Metallstäben und Metalldrähten fast ganz zu beseitigen, bleibt bei Holzlatten der Einfluß der Temperatur, der sich hier noch mit dem der Feuchtigkeit der Luft verbindet, als Ursache von regelmäßigen Fehlern.

Wird dem Längenmesser eine horizontale Lage in der Fluchtungsebene, d. h. der Vertikalebene der beiden festen Punkte, zwischen denen gemessen wird, gegeben, so wirkt jede Abweichung von der horizontalen Lage sowie von der Fluchtungsebene immer in demselben Sinne auf fehlerhafte Bestimmung der Länge, indem die Projektionen des fehlerhaft gerichteten

Längenmessers auf den Horizont und auf die Vertikalebene kleiner sind, als die in Rechnung gezogenen schiefen Längen. Obwohl nun die betreffenden Neigungsfehler ν und Fluchtungsfehler f, gemessen im Sinne vertikaler bezw. horizontaler Abstände, im allgemeinen gerade Fehlergesetze befolgen, ist doch der Fehler ε der einzelnen Lage l immer positiv im Sinne einer Vergrößerung der nominellen Länge, nämlich gleich $(\nu^2 + \Delta f^2) : 2l$, worin Δf den Unterschied der f an beiden Enden bezeichnet.*) Dieser Fehler wird aber durch sorgfältige Maßnahmen bei feinern Arbeiten so gut wie ganz vermieden: er ist jedoch für gewöhnliche Lattenmessung von großer Bedeutung.

Eine Formveränderung Verbiegung und dergl., kann einseitig wirkende Fehler erzeugen, sowohl bei Anwendung von Stäben, wie Bändern und Meßstangen.

Die Ursachen 3) sind sehr verschieden, je nach der Art des Längenmessers und dem angewandten Verfahren.

Wird ein Meßband mit Endringen, durch welche Stäbe zum Anziehen gesteckt werden, benutzt, so entsteht leicht ein Fehler immer in demselben Sinne, wenn die Stäbe nicht genau vertikal, sondern etwas schief gestellt werden.

In immer gleichem Sinne fehlerhaft wirkt auch ein zu kräftiges Anziehen des Bandes, indem dadurch nicht nur das Band gedehnt, sondern besonders der nachfolgende Stab ein Stück vorwärts gezogen wird: auf felsigem und auf weichem Boden ist dies besonders zu fürchten.

Bei dem Messen mit Stäben kann ein Fehler immer in demselben Sinne entstehen, wenn im horizontalen Gelände die Stäbe aneinander gestoßen werden, so daß der nachfolgende etwas zurückweicht, oder wenn ein zu großer Zwischenraum bleibt.

Dazu treten vielleicht noch andere einseitig wirkende Kontaktfehler. Bei Staffelmessung im geneigten Gelände kann bei dem Abloten des Endpunktes des horizontalen Stabes nach dem Augenmaß ein einseitig wirkender Fehler entstehen.

Bei den feinsten Apparaten und Methoden ist auch die

---

*) Wir haben also hier eine Fehlerquelle rein zufälligen Charakters, die durchaus einseitige Messungsfehler erzeugt.

mangelhafte Bodenfestigkeit, namentlich die Bodenelastizität, die Ursache einseitig wirkenker Fehler.

In Gl. (1), S. 57, müssen wir nun nach VI, S. 16, ε_i in zwei Teile zerlegen, einen konstanten Teil k, der sich aus den einseitig wirkenden Einflüssen bildet, und einen veränderlichen Teil ε_i', für den die Gaußsche Bedingung (27), S. 17, gilt. Der Fehler in L nimmt damit die Gestalt an:

$$\varepsilon_L = [\varepsilon_i'] + nk, \qquad i = 1 \ldots n. \tag{3}$$

Bildet man nun ε_L^2 aus dem Durchschnitt unendlich vieler Fälle, so verschwinden auch jetzt noch die Glieder $2\varepsilon_i' nk$, und es folgt:

$$\mu_L^2 = 2a^2 + n\mu^2 + n^2k^2, \tag{4}$$

wobei darauf Rücksicht genommen ist, daß ε_1 und ε_n, also die Fehler beim Anschluß an die beiden Endpunkte, noch einen Anschlußfehler $\pm a$ enthalten werden. Da n proportional L ist, kann man auch setzen:

$$\mu_L^2 = 2a^2 + b^2L + c^2L^2. \tag{4*}$$

Die Erfahrung zeigt, daß die Koeffizienten a, b, c ihrem Betrage nach ungemein wechseln, auch bei demselben Apparat, mit dem Wechsel der Beobachter. Aber in der Regel herrscht das Glied c^2L^2 vor, d. h. die einseitig wirkenden Fehler haben den größten Einfluß.

Reinhertz*) fand beim Nachmessen der Grundlinie bei Bonn für eine Strecke von 1400 m im Mittel mehrerer Beobachter (für welche c verschiedene Größe und Vorzeichen hatte) u. a. bei 5 m-Latten für Millimeter (L in m):

$$2a^2 = 10, \qquad b^2 = 20\,400 \cdot 10^{-6}, \qquad c^2 = 560 \cdot 10^{-6},$$

also angenähert

$$a = \pm 2, \qquad b = \pm 0{,}143, \qquad c = \pm 0{,}024.$$

Schon von $L = 37$ m ab überwiegt demnach das Glied mit c^2 dasjenige mit b^2; für L über 150 m überwiegt es auch die Summe der beiden Glieder mit a^2 und b^2.

*) Die Ergebnisse der Messung der Bonner Basis mit Meßlatten und Meßband. (Zeitschrift für Vermessungswesen 1896, S. 8 u. f., insbesondere S. 53.)

Die preußische Vermessungsanweisung IX*) setzt als Grenze der zulässigen Abweichungen zweier Messungen untereinander und mit trigonometrisch bestimmten Längen in nicht ungünstigem Gelände und für Metermaß fest:

$$0{,}01\sqrt{4L + 0{,}005\,L^2}\,,$$

so daß also a nicht berücksichtigt wird. Nimmt man $\frac{1}{4}$ als mittleren Fehler einer Messung, so folgt für mm abgerundet

$$b = \pm 5\,, \qquad c = \pm 0{,}18\,.$$

Hier überwiegt c von $L = 800$ m ab.

In jedem Einzelfalle ist die genaue Beurteilung der Fehler der Längenmessung recht unsicher. Der strengen Ausgleichung von Liniennetzen und dergleichen stellen sich daher große Schwierigkeiten entgegen.**)

Beispiel. Vergleichung zweier verschiedener Verfahren zur Ermittelung des Unterschiedes zweier nahezu gleichen Gewichtstücke A und B auf einer gleicharmigen Wage mit anhängenden Schalen.

1. Verfahren (nach Borda). Man bringe in die eine Wagschale ein Hilfsgewichtstück von der Größe der zu vergleichenden Gewichte und in die andere nacheinander A, B, B, A. Sehen wir nun vom Einflusse der Luft ab (oder denken wir ihn in Rechnung gezogen), und ist T das Gewicht des Hilfsstückes, so hat man entsprechend den 4 Wägungen, die in nahezu gleichen Zeitintervallen aufeinander folgen werden:

$$(1)\quad \begin{aligned} T(1+\alpha) &= A + a_1 + c \quad\cdot\quad + \varepsilon_1 \\ \text{,,}\qquad &= B + b_1 + c + w + \varepsilon_2 \\ \text{,,}\qquad &= B + b_2 + c + 2w + \varepsilon_3 \\ \text{,,}\qquad &= A + a_2 + c + 3w + \varepsilon_4\,. \end{aligned}$$

*) Anweisung vom 25. Oktober 1881 für die trigonometrischen und polygonometrischen Arbeiten bei Erneuerung der Karten und Bücher des Grundsteuerkatasters, S. 21 u. 23.

**) Hier möge auch folgender Aufsätze gedacht werden: F. R. Helmert, Bestimmung des m. Fehlers der Längenmessungen aus den Differenzen von Doppelmessungen (Astr. Nachr. 1873, Bd. 81, Nr. 1924.). Vergleiche dazu auch eine Anmerkung von Zachariae (Astr. Nachr. Nr. 1935) und von Helmert (Astr. Vierteljahrsschr., Bd. 13, S. 69).

Hierin bedeuten:

$1 + \alpha$ das Verhältnis der Hebelarme für T und A, B;

a_1, b_1, b_2, a_2 die Zulagen, um den Zeigerarm der Wage auf einem und demselben Punkt zum Einspielen zu bringen;

c eine Konstante zur Reduktion auf den wahren Spielpunkt;

w den Einfluß der der Zeit proportionalen Änderung der Länge der Wagbalken infolge sich ändernder Temperatur usw. auf die scheinbare Größe der Gewichtstücke;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ die Wägungsfehler.

Aus (1) folgt durch Elimination von c und $T(1 + \alpha)$ aus den beiden ersten und den beiden letzten Gleichungen:

$$\begin{aligned} A - B &= b_1 - a_1 + w + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \\ A - B &= b_2 - a_2 - w + \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \end{aligned}$$

und daraus durch Elimination von w:

$$(2) \qquad A - B = \frac{(b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)}{2} + \frac{(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_4)}{2}.$$

Daher ist der mittlere Fehler von $A - B$, wenn diese Differenz nach (2) unter Vernachlässigung der ε berechnet wird, und falls $\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$ ist, gleich

$$\mu \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2},$$

oder es ist:

$$(3) \qquad A - B = \frac{(b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)}{2} \pm \mu,$$

wo μ den mittlern Beobachtungsfehler einer Gewichtsvergleichung (bei der Belastung T) bezeichnet.

2. Verfahren (nach Gauß). Anstatt das Hilfsstück T zu benutzen, legen wir in die beiden Wagschalen

1)	links	B,	rechts	A
2)	„	A,	„	B
3)	„	A,	„	B
4)	„	B,	„	A

und erhalten:

$$(1^*) \qquad \begin{aligned} B(1 + \alpha) &= A + a_1 + c \phantom{{}+ 3w} + \varepsilon_1 \\ A(1 + \alpha) &= B + b_1 + c + w + \varepsilon_2 \\ A(1 + \alpha) &= B + b_2 + c + 2w + \varepsilon_3 \\ B(1 + \alpha) &= A + a_2 + c + 3w + \varepsilon_4. \end{aligned}$$

und damit unter Vernachlässigung von $B\alpha - A\alpha$:

$$(2^*)\quad 2(A - B) = \frac{(b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)}{2} + \frac{(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_4)}{2}.$$

Der mittlere Fehler in $2(A - B)$ ist wieder μ, in $A - B$ daher $\frac{\mu}{2}$; mithin wird:

$$(3^*)\qquad A - B = \frac{(b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)}{4} \pm \frac{\mu}{2}.$$

Wenn wir nun voraussetzen können, daß μ für beide Verfahren gleichen Wert hat, so ist hiermit erwiesen, daß das zweite Verfahren die doppelte Genauigkeit gegenüber dem ersten gewährt. Vier Wägungen nach dem ersten Verfahren geben erst dieselbe Genauigkeit, als eine Wägung nach dem zweiten Verfahren.

Sind die ε nicht zufällig, aber im Durchschnitt für beide Verfahren als gleich groß zu betrachten, so zeigt die Vergleichung von (2) und (2*), daß auch in diesem Falle das zweite Verfahren das günstigere ist.*)

III. Nichtlineare Funktionen. Wenn die Funktion f von den Beobachtungswerten l nicht in linearer Weise abhängt, so läßt sich die Berechnung des mittleren Fehlers doch auf eine Formel der Gestalt (8*), S. 56, zurückführen. Ist

$$(10)\qquad f = f(l_1, l_2, l_3, \ldots),$$

so ist der wahre Wert

$$F = f(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, l_3 + \varepsilon_3, \ldots),$$

und da die ε kleine Größen sind, so kann man F im allgemeinen in eine Reihe entwickeln, die nach Potenzen der ε fortschreitet, wobei es meistens genügt, bei den ersten Potenzen abzubrechen. In jedem praktischen Falle wird man leicht beurteilen können, ob dies auch wirklich für die größten vorkommenden Fehler ausreicht.

Man hat also

$$F = f + \frac{\partial f}{\partial l_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial f}{\partial l_3}\varepsilon_3 + \cdots,$$

*) Eingehende Mitteilungen über Wägungen gab B. Weinstein: Handbuch der physikalischen Maßbestimmungen II. Berlin 1888, S. 368 u. f.

und wenn man abgekürzt schreibt

$$F = f + \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \alpha_3 \varepsilon_3 + \cdots,$$

so wird, wie früher,

$$(11) \qquad \mu_f^2 = [\alpha^2 \mu^2] = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)^2 \mu^2\right];$$

$$(12) \qquad \mu_f = \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)^2 \mu^2\right]}.$$

Hierzu ist noch zu erwähnen, daß die Produkte $\frac{\partial f}{\partial l}\mu$ in ein und derselben Einheit ausgedrückt sein müssen.

Beispiel. In dem Dreieck DMO seines Dreiecksnetzes ist nach Prof. Schwerd (Die kleine Speyerer Basis. S. 49, 50, 56, 57, 98) gefunden worden:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\text{Winkel} \binom{OM}{D} = 17^0 \; 41' \; 17''.59, \quad \text{38-mal repetiert,} \\ &\quad ,, \quad \binom{DO}{M} = 90 \quad 1 \quad 56.79, \quad \text{15-mal repetiert,*)} \\ &\text{Seite } DM = 18854.370\,m. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(2) \qquad DO = 19793.53\,m, \qquad MO = 6014.003\,m$$

$$\text{Winkel} \binom{MD}{O} = 72^0 \; 16' \; 45''.91.$$

Der sphärische Exzeß E des Dreiecks ist $0''.288$; er ergibt sich nach der schon im Beispiel auf S. 49 gegebenen Formel (2), wenn man setzt $\log$ Dreiecksinhalt $= 7,7536$, womit $\log E$ in Sekunden $= 9,4588$ wird.

Die mittlern Fehler der drei gegebenen Stücke (1) seien in Bogensekunden bezw. in Metern

$$(3) \qquad \mu_1, \quad \mu_2, \quad \mu_3.$$

Dann erhält man die mittleren Fehler der drei berechneten Stücke (2) wie folgt.

Der Winkel in O ist:

$$(4) \qquad O = 180^0 + E - D - M;$$

---

*) Eigentlich aus zwei Winkeln mit je 30-maliger Repetition zusammengesetzt.

er ist also eine Funktion von D und M, wobei wir vernachlässigen, daß auch E eine Funktion der beobachteten Größen ist, weil kleine Änderungen der letzteren den sphärischen Exzeß nur ganz unmerklich ändern. Der mittlere Fehler in O wird somit in Sekunden:

$$\pm\sqrt{\mu_1^{\,2}+\mu_2^{\,2}}\,. \tag{5}$$

Nimmt man z. B. $\mu_1 = \pm 1''$, $\mu_2 = \pm 1'',6$, so folgt $\mu_O = \pm 1'',9$.

Man erkennt hieraus zugleich, daß durch eine direkte Messung des Winkels in O bei etwa 30-maliger Repetition ein wesentlich genaueres Resultat würde erhalten worden sein.

Weiter wird

$$DO = DM\,\frac{\sin\,(M-\frac{1}{3}E)}{\sin\,(O-\frac{1}{3}E)} = DM\,\frac{\sin\,M^*}{\sin\,O^*}\,, \tag{6}$$

wobei

$$O-\tfrac{1}{3}E = O^* = 180^0+\tfrac{2}{3}E-D-M \tag{6*}$$

ist. Logarithmieren wir (6) und differenzieren alsdann, dabei E als konstant ansehend, so folgt

$$\frac{\partial(DO)}{\partial(DM)} = \frac{DO}{DM} = \frac{\sin\,M^*}{\sin\,O^*}\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial(DO)}{\partial D} = DO\,\cot\,O^*\,, \tag{8}$$

$$\frac{\partial(DO)}{\partial M} = DO\,(\cot\,M^*+\cot\,O^*)\,. \tag{9}$$

∂D und ∂M sind hierin in Bogenmaß zu verstehen; da jedoch μ_1 und μ_2, die mittleren Werte von ∂D und ∂M, in Sekunden angegeben sind, drücken wir auch diese Differentiale in Sekunden aus:

$$\frac{\partial(DO)}{(\partial D)''} = \frac{DO\,\cot\,O^*}{206\,265}\,, \tag{8*}$$

$$\frac{\partial(DO)}{(\partial M)''} = \frac{DO\,(\cot\,M^*+\cot\,O^*)}{206\,265}\,. \tag{9*}$$

Damit wird

$$\mu_{DO}^2 = \left(\frac{DO}{DM}\right)^2\mu_3^{\,2} + \left(\frac{DO\,(\cot\,M^*+\cot\,O^*)}{206\,265}\right)^2\mu_2^{\,2} + \left(\frac{DO\,\cot\,O^*}{206\,265}\right)^2\mu_1^{\,2}\,. \tag{10}$$

Ebenso ergibt sich aus

$$(11)\qquad OM = DM\,\frac{\sin\,(D-\frac{1}{3}E)}{\sin\,(O-\frac{1}{3}E)} = DM\,\frac{\sin\,D^*}{\sin\,O^*}\,;$$

$$(12)\qquad \mu^2_{OM} = \left(\frac{OM}{DM}\right)^2 \mu_3{}^2 + \left(\frac{OM\,\cot\,O^*}{206\,265}\right)^2 \mu_2{}^2 + \left(\frac{OM\,(\cot\,D^* + \cot\,O^*)}{206\,265}\right)^2 \mu_1{}^2\,.$$

In den Formeln (10) und (12) ist jedes Glied in Quadratmetern ausgedrückt.

Für die gegebenen Zahlenwerte ist

$$\cot\,M^* = 0{,}000\,,\qquad \cot\,D^* = 3{,}136\,,\qquad \cot\,O^* = 0{,}320\,;$$

damit folgt, wenn $(0{,}00001\,.\,DO)^2$ bezw. $(0{,}00001\,.\,OM)^2$ als Faktor herausgehoben wird:

$$(13)\qquad \mu^2_{DO} = 0{,}198^2\{(5{,}304\,\mu_3)^2 + (0{,}155\,\mu_2)^2 + (0{,}155\,\mu_1)^2\}$$

$$(14)\qquad \mu^2_{OM} = 0{,}060^2\{(5{,}304\,\mu_3)^2 + (0{,}155\,\mu_2)^2 + (1{,}676\,\mu_1)^2\}\,.$$

Diese Ausdrücke zeigen, daß auf DO der Fehler in dem Winkel D verhältnismäßig viel weniger Einfluß hat als auf OM. Nehmen wir μ_3 zu $\pm\,0{,}1$ m an, so muß $\mu_1 < \frac{1}{3}$ Sek. sein, damit sein Einfluß auf OM denjenigen von μ_3 nicht übersteigt.

Wir wollen noch anführen, daß die Differentialquotienten der Funktionen DO und OM nach den Beobachtungsgrößen sich bequemer als oben in folgender Weise berechnen lassen. Setzen wir nach (6)

$$(15)\qquad DO + \delta(DO) = (DM + \delta(DM))\,\frac{\sin\,(M^* + \delta M)}{\sin\,(O^* + \delta O)}\,,$$

worin die δ kleine Änderungen in Metern bezw. in Sekunden andeuten, und substituieren wir die Werte

$$DM = 18\,854{,}370\ \text{m}\,,\qquad M^* = 90^0\ 1'\ 56''{,}694$$

aus (1) und ferner nach (4) und (2):

$$\delta O = -(\delta D + \delta M)\,,\qquad O^* = 72^0\ 16'\ 45''{,}812\,,$$

so gibt die Logarithmierung von (15):

$$\begin{aligned}\log\,(DO + \delta(DO)) = {} & 4{,}2754120 + 0{,}0000230\,\delta\,(DM)\\ & + 9{,}9999999 + 0{,}00000000\,\delta\,M\\ & - 9{,}9788887 + 0{,}000000672\,(\delta D + \delta M)\,;\end{aligned}$$

also

$$\log\,(DO + \delta(DO)) = 4{,}2965232 + 0{,}0000230\,\delta(DM) \\ + 0{,}000000672\,(\delta D + \delta M)\,.$$

Setzen wir nun

$$\log\, DO = 4{,}2965232\,, \qquad DO = 19\,793{,}53\,,$$

so ist

$$\log\,(DO + \delta(DO)) = 4{,}2965232 + 0{,}0000220\,\delta(DO)\,,$$

und daher

$$0{,}0000220\,\delta(DO) = 0{,}0000230\,\delta(DM) + 0{,}000000672\,(\delta D + \delta M)\,,$$

oder

$$\delta(DO) = \frac{230}{220}\,\delta(DM) + \frac{6{,}72}{220}\,(\delta D + \delta M)\,;$$

mithin ist endlich

$$(16) \qquad \frac{\partial(DO)}{\partial(DM)} = 1{,}045\,; \quad \frac{\partial(DO)}{(\partial D)''} = 0{,}03055\,; \quad \frac{\partial(DO)}{(\partial M)''} = 0{,}03055$$

Damit ergibt sich hinreichend übereinstimmend mit (13):

$$(17) \qquad \mu^2_{DO} = (1{,}045\,\mu_3)^2 + (0{,}03055\,\mu_2)^2 + (0{,}03055\,\mu_1)^2\,.$$

In ähnlicher Weise folgt bei Berechnung von OM aus (11) mit Benutzung logarithmischer Differenzen übereinstimmend mit (14):

$$(18) \qquad \mu^2_{OM} = (0{,}318\,\mu_3)^2 + (0{,}0093\,\mu_2)^2 + (0{,}1007\,\mu_1)^2.$$

Setzen wir in Rücksicht auf eine spätere Fortsetzung dieses Beispiels im vierten Kapitel, § 7,

$$(19) \qquad \mu_1 = \pm\,\frac{2'',07}{\sqrt{38}}\,, \quad \mu_2 = \pm\,\frac{2'',07}{\sqrt{15}}\,, \quad \mu_3 = \pm\,0{,}1\ \text{m}$$

so erhalten wir

$$(20) \qquad \begin{aligned} \mu^2_{DO} &= 0{,}0113\,; & \mu_{DO} &= \pm\,0{,}106\ \text{m}\,. \\ \mu^2_{OM} &= 0{,}0022\,; & \mu_{OM} &= \pm\,0{,}047\ \text{m}\,. \end{aligned}$$

Ein anderes interessantes Beispiel behandelt L. Krüger in der Zeitschrift für Vermessungswesen 1895, S. 393 u. f., in dem Aufsatz: Über die Bestimmung von Entfernungen aus einer kleinen Basis.

IV. Mittlerer Fehler, entstanden aus mehreren Fehlerursachen. Wir gedenken noch des Falles, wo der mittlere Betrag der Einwirkung mehrerer voneinander unabhängigen Fehlerursachen, welche bei einer Beobachtung auftreten, bekannt ist.

Der wahre Beobachtungsfehler in l sei z. B.

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''', \tag{13}$$

wo ε', ε'', ε''' die aus drei verschiedenen, voneinander unabhängigen Fehlerursachen entstandenen Fehler seien. Wenn deren mittlere Werte μ', μ'', μ''' sind, so wird der mittlere Wert von ε^2 gleich

$$\mu^2 = \mu'^2 + \mu''^2 + \mu'''^2, \tag{14}$$

was in derselben Weise abzuleiten ist, wie bei II auf S. 55.

Diese Formel gilt auch noch, wenn eine der Fehlerursachen systematisch oder konstant wirkt, bei mehreren solchen jedoch nicht mehr. Für diese müßte das mittlere Fehlerquadrat ihrer Summenwirkung eingeführt werden.

Beispiel. Mittlerer Fehler einer Richtungsbeobachtung bei Horizontalwinkelmessungen. Zur Beobachtung eines Objekts (also einer Richtung) ist seine Einstellung und die Ablesung des Horizontalkreises notwendig; daher setzt sich der Fehler zusammen aus den Fehlern im Einstellen (Visieren) und Ablesen, abgesehen von den Instrumentalfehlern, welche sich eliminieren lassen. Man kann diese Fehler noch zergliedern, was wir später ausführen werden. Wenn bei den verschiedenen Winkelmessungen an wesentlich verschiedenen Kreisstellen abgelesen wird, so können wir voraussetzen, daß im allgemeinen die Ablesungsfehler der eingangs dieses Paragraphen erwähnten und zur Ableitung von (14) erforderlichen Bedingung genügen; dasselbe können wir auch von den Visurfehlern voraussetzen. Ist deren mittlerer Betrag μ_v und der mittlere Ablesungsfehler μ_a, so wird der mittlere Fehler einer Richtungsbeobachtung

$$\mu = \pm \sqrt{\mu_v^2 + \mu_a^2}. \tag{1}$$

Dieser Ausdruck ist für die Theorie der Winkelmessung von Wichtigkeit, da er den Einfluß aller der Fehlerquellen enthält, welche sich unter normalen Verhältnissen nicht durch gehörige Zentrierung und Nivellierung des Instruments, sowie durch Verbindung von Messungen in beiden Lagen des Fernrohrs und in entgegengesetzter Reihenfolge der Objekte eliminieren lassen.

Ein Winkel ist die Differenz zweier Richtungen; es ist daher der mittlere Winkelfehler im Quadrat gleich $2\mu^2$ und also der mittlere Fehler einer Winkelbeobachtung selbst gleich $\mu\sqrt{2}$.

Hat man drei Objekte und beobachtet den Winkel zwischen dem ersten und zweiten, sowie zwischen dem ersten und dritten, so sind deren mittlere Fehler $\mu\sqrt{2}$; berechnet man den Winkel zwischen dem zweiten und dritten Objekt, so folgt dessen mittlerer Fehler gleich $\sqrt{(\mu\sqrt{2})^2 + (\mu\sqrt{2})^2} = 2\mu$. Beobachtet man aber die drei Objekte nach Art der Satzbeobachtung, so erhält man jeden der drei Winkel nur mit dem mittlern Fehler $\mu\sqrt{2}$; außerdem ist die darauf verwendete Mühe nur gleich 3, wenn man die der beiden ersten Winkelmessungen gleich 4 setzt. Wenn daher nicht besondere Umstände hinzutreten, so sind Satzbeobachtungen den Winkelbeobachtungen vorzuziehen. Solche besondere Umstände treten allerdings auf bei den feinern Messungen für Hauptdreiecksnetze. Vergl. hierzu das 8. Kapitel.*)

*) Wie sich der Ausdruck fürs mittlere Fehlerquadrat eines Winkels mit Rücksicht auf Zentrierungsfehler gestaltet, habe ich in der Zeitschrift für Vermessungswesen 1877, S. 15, angegeben.

Zweites Kapitel.

Mehrfache Bestimmung einer Größe.

§ 1. Ausgleichung direkter Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

I. Berechnung der Unbekannten. Schon in dem Beispiele auf S. 42 ist angegeben worden, daß wir über den plausibelsten Wert x der Unbekannten, für die gleich genaue, direkte Beobachtungswerte $l_1, l_2, l_3, \ldots$ vorliegen, nicht im Zweifel sind. Wir nehmen als solchen das arithmetische Mittel, also bei n Messungen:

$$x = \frac{[l]}{n}. \tag{1}$$

Die plausibelsten Beobachtungsfehler, im Sinne der Verbesserungen der beobachteten l, werden damit

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + x \\ \lambda_2 &= -l_2 + x \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_n &= -l_n + x, \end{aligned} \tag{2}$$

woraus durch Addition folgt

$$[\lambda] = 0. \tag{3}$$

Diese Formel gewährt eine vollständige Kontrolle für richtige Berechnung des x und der λ.

Bezeichnet X einen von x verschiedenen Wert, so treten an Stelle von (2) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -l_1 + X \\ \varepsilon_2 &= -l_2 + X \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varepsilon_n &= -l_n + X. \end{aligned} \tag{4}$$

Allgemein ist für den Index i nach (2) und (4)

$$(5) \qquad \varepsilon_i = \lambda_i + (X - x);$$

also wird mit Rücksicht auf (3):

$$(5^*) \qquad \frac{[\varepsilon]}{n} = X - x\,.$$

Quadriert man die Gleichung (5) und bildet alsdann die Summe für $i = 1 \ldots n$, so folgt mit (3):

$$(6) \qquad [\varepsilon\varepsilon] = [\lambda\lambda] + n(X - x)^2.$$

Diese Gleichung zeigt, daß $[\varepsilon\varepsilon] > [\lambda\lambda]$ ist. Von allen möglichen Werten X gibt daher $X = x = [l] : n$ die kleinste Quadratsumme der Verbesserungen.

Das arithmetische Mittel genügt hiernach der Forderung der Methode der kleinsten Quadrate.

II. Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels. Ist der mittlere zu befürchtende Beobachtungsfehler μ bekannt, so haben wir nach (8), S. 55, indem wir x für f setzen, für jeden der Koeffizienten α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots$ den Wert $1 : n$, und daher als Quadrat des mittlern zu befürchtenden Fehlers in x:

$$(7) \qquad \begin{aligned} \mu_x{}^2 &= \mu^2 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \cdots (n)\right) = \frac{\mu^2}{n}, \\ \mu_x &= \frac{\mu}{\sqrt{n}}: \end{aligned}$$

d. h. die Genauigkeit des arithmetischen Mittels nimmt proportional der Quadratwurzel aus der Beobachtungsanzahl zu. Es geben z. B.

4 Beobachtungen die 2-fache Genauigkeit,
9 „ „ 3- „ „ .

Die Formel (7) setzt zu ihrer Gültigkeit außer der Unabhängigkeit der Beobachtungen voraus, daß die Beobachtungsfehler ε entweder rein zufälliger Natur sind, also $\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$ ist, oder wenn statt dessen nur die Gaußsche Bedingung besteht, daß der konstante Teil der Fehler null ist (S. 17).

Wäre ein konstanter Teil k vorhanden, also die wahre Verbesserung $\varepsilon = \varepsilon' + k$, so würde aus (5*) folgen

$$(8) \qquad X - x = k + \frac{[\varepsilon']}{n}.$$

Der mittlere zu befürchtende Betrag von $[\varepsilon']:n$ ist wieder durch (7) gegeben, wenn μ den mittlern zufälligen Beobachtungsfehler mit Ausschluß von k bezeichnet. Wie groß man aber auch n nehmen mag, so wird doch der Einfluß von k auf $X-x$ nicht vermindert; ist n so groß, daß k und $\frac{\mu}{\sqrt{n}}$ ungefähr einander gleichen, so nützt eine weitere Vergrößerung der Anzahl der Messungen nicht mehr viel.

Da man k aus der vorliegenden Beobachtungsreihe $l_1, l_2, \ldots, l_n$ nicht finden kann, muß man seinen möglichen Betrag entweder theoretisch oder auf Grund anderer Erfahrungen schätzen und hat dann für das Quadrat des vollständigen mittlern Fehlers von x die Formel

$$\mu_x^2 = k^2 + \frac{\mu^2}{n}; \tag{9}$$

vergl. S. 60.

Es ist wichtig, hier die Bedeutung von μ_x etwas eingehender zu erörtern. Formel (7) ist aus der Gleichung

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n}{n}$$

gewonnen. Man hat sich zu denken, daß unendlich viele Bestimmungen von x, jede aus n Beobachtungen l, vorliegen. μ_x^2 ist dann der Durchschnittswert von ε_x^2 für diese unendlich vielen Fälle.

Ebenso wie man μ^2 aus den Widersprüchen direkter Beobachtungen der l finden kann, würde man μ_x^2 aus den Widersprüchen wiederholter Bestimmungen von x finden. μ^2 und μ_x^2 sind somit gleichartige Größen: Quadrate der mittlern zu befürchtenden Fehler einer gewissen Beobachtungsart bzw. Bestimmungsart.

Dabei ist beachtenswert, daß man μ_x^2 schon angeben kann, ehe man noch die Beobachtungswerte kennt, wenn nur sicher ist, daß die Beobachtungsumstände dem μ^2 entsprechen, dessen Betrag von früher her bekannt ist.

Dieser mittleren Fehlerberechnung a priori kann man gegenüberstellen eine solche a posteriori, wobei man sich an die gegebenen Werte l hält. Dadurch wird den Annahmen über den Betrag der $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ eine Beschränkung auferlegt, indem allgemein $\varepsilon_i - \varepsilon_h = -l_i + l_h$ sein muß. Man kann sich nun nicht mehr unendlich viele Bestimmungen von x, die unabhängig voneinander sind, denken. Die

Berechnung des m. F. ist jetzt eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Berücksichtigung der möglichen Hypothesen über den Betrag der ε unter Festhaltung der Bedingungen $\varepsilon_i - \varepsilon_h = -l_i + l_h$.

Beim Gaußschen Fehlergesetz kommt man nun zu demselben Ausdruck für μ_x^2 wie früher. Kennt man aber das Fehlergesetz nicht, so ist die Aufgabe unlösbar. Weicht das Fehlergesetz vom Gaußschen ab, so wird voraussichtlich auch der Ausdruck für μ_x^2 ein anderer und zwar abhängig von den besonderen Werten der l.

Diese Abhängigkeit ist eigentlich schon beim Gaußschen Gesetz da, denn man wird konsequentermaßen für jeden Fall μ^2 aus der Gruppe der l ableiten müssen. Die Formel $\mu_x^2 = \mu^2 : n$ bedeutet also jetzt doch etwas anderes als vorher.

Das hat aber wieder den Übelstand zur Folge, daß zwei ganz gleichartige Bestimmungen von x, also mit gleicher Anzahl n, verschiedene m. F. μ_x erhalten, wenn μ^2 verschieden ausfällt. Ihre Vereinigung zu einem Gesamtmittel wird daher ein anderes Resultat liefern als die direkte Vereinigung der $2n$ Beobachtungen. Die widerspruchsfreie Theorie verlangt daher zweifellos, daß die Genauigkeit der Ergebnisse nach der Gaußschen aprioristischen Methode der mittleren Fehlerschätzung erfolgt.

Unter der Annahme des Gaußschen Fehlergesetzes für die wahren Fehler $X - x$ wird aus dem mittleren Fehler μ_x der wahrscheinliche Fehler für x gleich (S. 24)

$$\varrho_x = 0{,}67449\,\mu_x. \tag{10}$$

Die Annahme ist gerechtfertigt, wenn $\varphi(\varepsilon)$ selbst diesem Gesetz entspricht oder wenn bei gerader Funktion $\varphi(\varepsilon)$ die Anzahl der Beobachtungen n ein großer Wert ist. (S. 13).

III. Berechnung des mittlern Beobachtungsfehlers aus den übrigbleibenden Fehlern. Da die λ von den wahren Verbesserungen verschieden sind, kann man nicht nach (3), S. 28, $\mu^2 = [\lambda\lambda] : n$ setzen.

Nach (6) ist aber

$$[\lambda\lambda] = [\varepsilon\varepsilon] - n(X - x)^2,$$

wobei wir nun unter X den wahren Wert der Unbekannten, unter den ε die wahren Beobachtungsfehler verstehen wollen. Wir nehmen rechter Hand den Durchschnitt unendlich vieler

Fälle. Das gibt, da der Durchschnittswert von $(X - x)^2$ bereits in (7) steht, die Näherungsformel

$$[\lambda\lambda] = n\mu^2 - n \cdot \frac{\mu^2}{n} = \mu^2(n-1),$$

also

$$(11) \qquad \mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-1}; \qquad \mu = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}.$$

Diese Formel gilt unter denselben Voraussetzungen über das Fehlergesetz $\varphi(\varepsilon)$ wie die Formel (7) für μ_x. Ein etwa vorhandener konstanter Teil k in ε ist in μ nicht enthalten, da in der Gleichung (5): $\lambda_i = \varepsilon_i - (X - x)$ rechter Hand k herausfällt, weil ε_i und $(X - x)$ beide k enthalten würden.

Zur Berechnung von $[\lambda\lambda]$ bildet man die λ aus den Fehlergleichungen (2). Außerdem hat man die Formel

$$(12) \qquad [\lambda\lambda] = [ll] - nx^2 = [ll] - \frac{[l]^2}{n},$$

die man leicht durch Quadrierung der Gleichungen (2) ableitet. Diese Formel gewährt eine Kontrolle, ebenso wie (3), für die Berechnung von x.

Endlich hat man noch

$$(12^*) \qquad n[\lambda\lambda] = [(l_i - l_k)^2],$$

wobei rechter Hand alle Kombinationen ohne Wiederholung zu nehmen sind.

IV. Genauigkeit der Formeln für μ^2 und μ. Um die Genauigkeit der Formeln (11) zu erkennen, bilden wir das durchschnittliche Quadrat des Unterschiedes von $[\lambda\lambda] : (n-1)$ und dem strengen Wert μ^2 für unendlich viele Fälle:

$$\left(\frac{[\lambda\lambda]}{n-1} - \mu^2\right)^2, \text{ d. i. } \frac{[\lambda\lambda]^2}{(n-1)^2} - 2\mu^2\frac{[\lambda\lambda]}{n-1} + \mu^4.$$

Da der Durchschnitt von $[\lambda\lambda] : (n-1)$ gerade μ^2 selbst ist, so geben das zweite und dritte Glied zusammen $-\mu^4$.

Nun ist aber nach (6) und (5*):

$$[\lambda\lambda] = [\varepsilon\varepsilon] - \frac{[\varepsilon]^2}{n};$$

man hat daher den Durchschnitt von

$$(13)\qquad \frac{[\varepsilon\varepsilon]^2 - 2[\varepsilon\varepsilon]\frac{[\varepsilon]^2}{n} + \frac{[\varepsilon]^4}{n^2}}{(n-1)^2} - \mu^4$$

zu bilden. Zunächst wird ausgerechnet

$$[\varepsilon\varepsilon]^2 = [\varepsilon^4] + 2[\varepsilon_i^2\varepsilon_h^2]:$$

das erste Glied hat n Teile vom Durchschnitt ν^4; das zweite Glied, in welchem die Indices i und h alle Kombinationen der Werte $1 \ldots n$ ohne Wiederholung durchlaufen müssen, $i \gtrless h$, hat $n(n-1):2$ Teile vom Durchschnitt $\mu^2 \cdot \mu^2$. Mithin ist der Durchschnitt von $[\varepsilon\varepsilon]^2$ gleich

$$(14)\qquad n\nu^4 + n(n-1)\mu^4.$$

Ferner ist

$[\varepsilon\varepsilon][\varepsilon]^2 = [\varepsilon^4] + 2[\varepsilon_i^2\varepsilon_h^2] +$ Produkte mit 1. Potenzen der Fehler.

Da der Durchschnitt der letztern aber unter den vorher für die Bildung von μ_x nach (7) gemachten Annahmen über $\varphi(\varepsilon)$ gleich null ist, so bleibt für den Durchschnitt von $[\varepsilon\varepsilon][\varepsilon]^2$:

$$(15)\qquad n\nu^4 + n(n-1)\mu^4.$$

Endlich wird der Durchschnitt von $[\varepsilon]^4$ gleich dem von $[\varepsilon^4] + 6[\varepsilon_i^2\varepsilon_h^2]$, d. i.

$$(16)\qquad n\nu^4 + 3n(n-1)\mu^4.$$

Mit (14), (15) und (16) gibt (13) als mittleres Fehlerquadrat in der Bestimmung von μ^2 nach (11):

$$(17)\qquad \frac{\nu^4}{n} - \frac{n-3}{n(n-1)}\mu^4 = \mu^4\left(\frac{\nu^4}{n\mu^4} - \frac{n-3}{n(n-1)}\right).$$

Vergl. hierzu den Ausdruck (10), S. 31, für den Fall wahrer Fehler. Auf S. 32 ist angegeben, daß $\frac{\nu^4}{\mu^4} = 3$ wird, wenn die Fehler das Gaußsche Gesetz befolgen.

Nimmt man für μ^4 vor der Klammer in (17) den Wert aus (11), so folgt:

$$(18)\qquad \mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-1}\left(1 \pm \sqrt{\frac{\nu^4}{n\mu^4} - \frac{n-3}{n(n-1)}}\right)$$

und für nicht zu kleine n:

$$(19)\qquad \mu = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}\left(1 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu^4}{n\mu^4} - \frac{n-3}{n(n-1)}}\right).$$

Im Falle des Gaußschen Gesetzes ist

$$(20)\qquad \sqrt{\frac{\nu^4}{n\,\mu^4} - \frac{n-3}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\,.$$

Bei n wahren Fehlern ergab sich im Nenner rechter Hand n anstatt $(n-1)$, S. 32 (16).

Kennt man das Fehlergesetz nicht, so kann man $[\lambda^4]$ zur Berechnung von ν^4 benutzen. Aus

$$\lambda_i = \varepsilon_i - \frac{[\varepsilon]}{n}$$

folgt durch Erheben zur 4. Potenz und Summieren über $i = 1 \ldots n$:

$$(21)\qquad [\lambda^4] = [\varepsilon^4] - \frac{4}{n}[\varepsilon^3][\varepsilon] + \frac{6}{n^2}[\varepsilon^2][\varepsilon]^2 - \frac{3}{n^3}[\varepsilon]^4.$$

Nun ist im Durchschnitt für unendlich viele Fälle:

$$\begin{array}{lcl} [\varepsilon^4] & \text{gleich} & n\nu^4, \\ [\varepsilon^3][\varepsilon] & ,, & n\nu^4, \\ [\varepsilon^2][\varepsilon]^2 & ,, & n\nu^4 + n(n-1)\mu^4, \\ [\varepsilon]^4 & ,, & n\nu^4 + 3n(n-1)\mu^4. \end{array}$$

Dies in (21) eingesetzt, ergibt als Näherungsformel:

$$(22)\qquad [\lambda^4] = \nu^4(n-1)\frac{n^2-3n+3}{n^2} + 3\mu^4(n-1)\frac{2n-3}{n^2}\,.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (11):

$$(23)\qquad \frac{\nu^4}{\mu^4} = \left\{\frac{[\lambda^4]\,n^2(n-1)}{[\lambda\lambda]^2} - 3(2n-3)\right\} : (n^2-3n+3).$$

Diese Formel gewährt selbstverständlich für kleine n nur eine unzureichende Sicherheit. Man nimmt dann besser $\nu^4:\mu^4$ nach einer der Annahmen I, II, III über das Fehlergesetz, S. 31/32.

Nach (23) ist:

$$(24)\qquad \frac{\nu^4}{n\,\mu^4} - \frac{n-3}{n(n-1)} = \left\{\frac{[\lambda^4]\,n(n-1)}{[\lambda\lambda]^2} - \frac{n^2-3}{n-1}\right\} : (n^2-3n+3).$$

Beispiel. Fortsetzung zu S. 40. Es war bei $n = 16$:

$$\mu^2 = 0{,}45\,, \qquad \mu = \pm\, 0'',67.$$

Dabei war $[\lambda\lambda] = 6{,}77$; nach (3) und (7*), S. 41/42, wird $[\lambda^4] = 6.16$, also ist $\nu^4 : \mu^4 = 2{,}03$, daher nach (18) und (19):

$$(10)\qquad \mu^2 = 0{,}45\,(1 \pm 0{,}27); \qquad \mu = \pm\, 0'',67\,(1 \pm 0{,}14).$$

Ferner wird nach (7) $\mu_x = \mu : \sqrt{16}$, mithin

(11) $$\mu_x = \pm 0'',17\,(1 \pm 0,14).$$

Unter Annahme des Gaußschen Gesetzes würde nach (20) folgen:

(12) $$\mu^2 = 0,45\,(1 \pm 0,37), \qquad \mu = 0'',67\,(1 \pm 0,18);$$
$$\mu_x = \pm 0'',17\,(1 \pm 0,18).$$

Der Wert $\nu^4 : \mu^4 = 2,03$ entspricht nach S. 31 annähernd dem Fehlergesetz II.

V. Anmerkung über den Durchschnittsfehler und die günstigste Formel. Unter Annahme des Gaußschen Fehlergesetzes lassen sich noch folgende Formeln aufstellen:

Der Durchschnittsfehler der Beobachtung ist

(25) $$\vartheta = \pm \frac{[\lambda]}{\sqrt{n(n-1)}} \qquad \text{(Peters)}$$

und damit

$$\varrho = 0,84535\,\vartheta, \qquad \mu = 1,25331\,\vartheta.$$

Man kann auch setzen

(26) $$\vartheta = \pm \frac{[\lambda]}{\sqrt{n\left(n - \frac{4-\pi}{2}\right)}}, \qquad \text{(Fechner)}$$

sowie

(27) $$\vartheta = \pm \frac{[\,|d|\,]}{n(n-1)}\sqrt{2}. \qquad \text{(Jordan)}$$

In der letzten Formel ist die Summierung über die $\frac{n(n-1)}{2}$ Unterschiede $d = l_i - l_k$ der Beobachtungsgrößen zu erstrecken, wofür man nach Andrae einfacher setzt, nachdem die l nach der Größe geordnet sind:

(27*) $$[\,|d|\,] = (l_n - l_1)(n-1) + (l_{n-1} - l_2)(n-3) + \cdots.$$

Ich habe in den Astr. Nachr. Nr. 2039 und 2096/97, Band 85 u. 88, 1875 u. 76, die Berechtigung und Genauigkeit dieser Formeln genau untersucht.*) Der mittlere Fehler beträgt bei (25) in Teilen von ϑ sehr nahe $\pm 0,756 : \sqrt{n-1}$,

*) Teilweise auch bei Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, S. 165 u. f. zu finden.

vergl. (19) S. 32; er ist also etwas größer als für μ, vergl. (19) und (20), S. 75, wo er $\pm 0{,}707 : \sqrt{n-1}$ in Teilen von μ beträgt.

Für (27) wird er bei kleineren n ebenso groß wie für (25); er nimmt bei wachsendem n etwas ab bis zu $\pm 0{,}715 : \sqrt{n-1}$ in Teilen von ϑ.

Für (26) ist er bei kleinen n so groß wie für μ nach (20); er nimmt dann aber zu bis auf $\pm 0{,}756 : \sqrt{n-1}$ in Teilen von ϑ. Die Formel (26) ist also (25) vorzuziehen.

Von Formel (27) wird man kaum Gebrauch machen, da sie unbequemer als (25) und (26) ist, und da außerdem der nur bei größerem n hervortretende Genauigkeitsgewinn ihre Anwendung nicht lohnt.

Die Formel (26) ist eine Näherungsformel für die Berechnung aus $[\lambda\lambda]$; sie ist auch aus der Formel für μ hergeleitet. Dem entsprechend gibt sie für $n = 2$ wie diese $\mu = \pm d : \sqrt{2}$ und $\vartheta = \pm d : \sqrt{\pi}$. Dagegen geben (25) und (27) $\vartheta = \pm d : \sqrt{2}$.

Daß nicht alle vier Formeln dasselbe liefern, kann nicht befremden, da ja wegen des kleinen n keine Formel ϑ richtig zu geben imstande ist. Es gibt aber dieser besondere Fall Anlaß, darauf hinzuweisen, daß bei Vereinigung mehrerer Bestimmungen von ϑ oder μ auf die Herkunft zu achten ist, ob (19) und (26), oder (25) und (27) benutzt sind. Im letzten Falle sind unmittelbar die verschiedenen ϑ (nach Maßgabe ihrer Genauigkeit) zu verbinden, im ersten aber muß man auf die Quadrate zurückgehen, entsprechend der Bedeutung von μ^2 als Durchschnitt von Fehlerquadraten.

Die günstigste Formel im Sinne der Wahrscheinlichkeit ist (11), wie ich a. a. O. zeigte.

Aus den λ gleich genauer direkter Beobachtungen kann man im Falle der Gültigkeit des Gaußschen Fehlergesetzes für den wahren Fehler ε auch durch Abzählen einen wahrscheinlichen Fehler ϱ_λ bestimmen, da auch die λ das Gaußsche Gesetz befolgen. Nur ist die Präzision h_λ eine andere als h_ε für die ε. Nach Czuber (Beobachtungsfehler S. 158) ist

$$h_\lambda = h_\varepsilon \sqrt{\frac{n}{n-1}}, \text{ mithin ist } \varrho_\varepsilon = \varrho_\lambda \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

Man muß also das aus den λ abgezählte ϱ noch mit $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ multiplizieren, um dasselbe auf die wahren Beobachtungsfehler zu beziehen.

§ 2. Ausgleichung direkter Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit.

I. Wert der Unbekannten und Begriff des Gewichts. Wir beginnen mit einem einfachen Fall, indem wir aus Beobachtungen gleicher Genauigkeit solche ungleicher Genauigkeit konstruieren. Das System der Fehlergleichungen sei:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + x \\ \lambda_2 &= -l_2 + x \\ \lambda_3 &= -l_3 + x \\ \lambda_4 &= -l_4 + x; \end{aligned}$$

wir vereinigen die letzten drei Messungen zu einem Mittel l_2':

$$l_2' = \frac{l_2 + l_3 + l_4}{3},$$

und nennen dessen Verbesserung λ_2', für welche offenbar die Beziehung gilt

$$\lambda_2' = \frac{\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}{3}.$$

Alsdann wird das neue System der Fehlergleichungen:

$$(2)\qquad \lambda_1 = -l_1 + x, \qquad \lambda_2' = -l_2' + x.$$

Die erste derselben hat nun eine andere Genauigkeit wie die zweite; setzt man nämlich die der ursprünglichen Messungen gleich 1, so ist sie für die erste Fehlergleichung 1, für die zweite aber $\sqrt{3}$, weil, den mittleren Fehler in l_1 gleich μ gesetzt, der mittlere Fehler in l_2' gleich $\mu_2' = \mu : \sqrt{3}$ ist.

Die Ausgleichung nach (2) muß dasselbe ergeben, wie die nach (1); diese ergab:

$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4}{4}.$$

Dafür kann man aber schreiben

$$x = \frac{l_1 \cdot 1 + l_2' \cdot 3}{1 + 3}.$$

Da l_2' drei ursprüngliche Beobachtungen ersetzt oder aufwiegt, so nennt man 3 das Gewicht von l_2', während das Gewicht von l_1 nur 1 ist. In Worten:

$$x = \frac{l_1 \cdot \text{Gewicht} + l_2' \cdot \text{Gewicht}}{\text{Summe der Gewichte}}. \tag{3}$$

Es kann hierbei das Gewicht 3 von l_2' auch aufgefaßt werden als Quotient $\mu^2 : \mu_2'^2$.

In ähnlicher Weise schließt man, daß aus den Fehlergleichungen:

$$\begin{array}{llll} \lambda_1 = -l_1 + x & \text{m. F. } \mu : \sqrt{g_1} & \text{Gewicht } g_1 \\ \lambda_2 = -l_2 + x & \;\;,, \quad \mu : \sqrt{g_2} & \quad ,, \quad g_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_n = -l_n + x & \;\;,, \quad \mu : \sqrt{g_n} & \quad ,, \quad g_n. \end{array} \tag{4}$$

deren l wir als arithmetische Mittel aus bzw. $g_1, g_2, \ldots$ gleich genauen Beobachtungen mit dem m. F. μ voraussetzen, folgt:

$$x = \frac{l_1 g_1 + l_2 g_2 + \cdots + l_n g_n}{g_1 + g_2 + \cdots + g_n} = \frac{[l\,g]}{[g]}. \tag{5}$$

In derselben Weise kann man x auch berechnen, wenn die l nicht mehr als arithmetische Mittel, sondern als Beobachtungswerte

$$\begin{array}{lllll} l_1 & \text{mit} & \text{dem} & \text{m. F.} & \mu_1 \\ l_2 & ,, & ,, & ,, & \mu_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_n & ,, & ,, & ,, & \mu_n \end{array} \tag{6}$$

gegeben sind, denn man kann die l immer betrachten als arithmetische Mittel fingierter gleich genauer Beobachtungen mit dem mittlern Fehler μ, welchen alsdann das Gewicht 1 beigelegt wird. Wir setzen

$$\begin{array}{llll} \text{für} & l_1 & \text{Gewicht} & g_1 = \mu^2 : \mu_1^2 \\ ,, & l_2 & ,, & g_2 = \mu^2 : \mu_2^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ,, & l_n & ,, & g_n = \mu^2 : \mu_n^2 \end{array} \tag{7}$$

und können sofort Formel (5) anwenden. Da nun die g nach ihrer ursprünglichen Bedeutung ganze Zahlen sind, so müßte

μ so gewählt werden, daß auch jetzt die g wieder ganze Zahlen werden. Indessen zeigt der Ausdruck (5), daß man auch beliebige gebrochene Zahlen als Gewichte einführen kann, da es nur auf das Verhältnis der Gewichte dabei ankommt. Führen wir nämlich für die g ihre Werte nach (7) ein, so wird aus (5) erhalten:

$$(8) \qquad x = \frac{l_1 \frac{\mu^2}{\mu_1^2} + l_2 \frac{\mu^2}{\mu_2^2} + \cdots + l_n \frac{\mu^2}{\mu_n^2}}{\frac{\mu^2}{\mu_1^2} + \frac{\mu^2}{\mu_2^2} + \cdots + \frac{\mu^2}{\mu_n^2}}.$$

Dieser Ausdruck für x ist von μ unabhängig; er kann auch geschrieben werden

$$(9) \qquad x = \frac{\frac{l_1}{\mu_1^2} + \frac{l_2}{\mu_2^2} + \cdots + \frac{l_n}{\mu_n^2}}{\frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2} + \cdots + \frac{1}{\mu_n^2}} = \frac{\left[\frac{l}{\mu^2}\right]}{\left[\frac{1}{\mu^2}\right]}.$$

Wenn wir noch bedenken, daß $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ immer mehr oder weniger unsicher bestimmt sein werden, so wird man in der Regel durch geringe Änderungen in $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ es dahin bringen können, daß sich die Gewichte in für die Rechnung bequemen Zahlen darstellen lassen.

Als Gewichtseinheit bezeichnet man eine fingierte Beobachtung mit dem Gewichte 1.

In vielen Fällen ist nur die relative Genauigkeit der Beobachtungen l bekannt. Alsdann hat man die Gewichte proportional den Quadraten der Zahlen zu setzen, welche im Verhältnis der relativen Genauigkeiten stehen. Denn es sind die Genauigkeiten umgekehrt proportional den mittleren Fehlern, die Gewichte aber sind umgekehrt proportional deren Quadraten; daher verhalten sich die Gewichte direkt wie die Quadrate der Genauigkeiten.

II. Die Summe $[\lambda\lambda g]$ ist ein Minimum, wenn x nach (5) bezw. (9) berechnet wird.

Aus (4) und (5) folgt zunächst

$$(10) \qquad [\lambda g] = 0.$$

Es sei nun X ein beliebiger Wert der Unbekannten und

$$(11)\qquad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= -l_1 + X \\ \varepsilon_2 &= -l_2 + X \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varepsilon_n &= -l_n + X. \end{aligned}$$

Dann ist allgemein für den Index i:

$$\varepsilon_i = \lambda_i + (X - x),$$

und es wird mit Rücksicht auf (10):

$$[\varepsilon g] = (X - x)[g].$$

Aus ε_i folgt aber durch Quadrieren, Multiplizieren mit g_i und Addieren:

$$(12)\qquad [\varepsilon\varepsilon g] = [\lambda\lambda g] + (X - x)^2[g].$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Annahme $X = x$ nach (5) die kleinste Quadratsumme $[\varepsilon\varepsilon g]$ ergibt, die überhaupt besteht.

Die Lösung nach (5) entspricht demnach der Methode der kleinsten Quadrate, vorausgesetzt, daß an Stelle von $[\lambda\lambda]$ wegen der ungleichen Genauigkeit die Summe $[\lambda\lambda g]$ gesetzt wird.

Ebenso gibt (9) ein Minimum für $\left[\frac{\lambda\lambda}{\mu\mu}\right]$. In diesem Ausdrucke erscheinen die Glieder auf gleiche Genauigkeit reduziert, indem für jeden Index i das Quadrat λ_i^2 durch das zugehörige durchschnittliche Fehlerquadrat μ_i^2 dividiert ist.

III. Mittlerer Fehler in x, berechnet aus dem mittleren Beobachtungsfehler μ für das Gewicht 1. Nach (5) wird

$$\mu_x^2 = \left(\frac{g_1}{[g]}\right)^2 \frac{\mu^2}{g_1} + \left(\frac{g_2}{[g]}\right)^2 \frac{\mu^2}{g_2} + \cdots + \left(\frac{g_n}{[g]}\right)^2 \frac{\mu^2}{g_n},$$

oder

$$(13)\qquad \mu_x^2 = \frac{\mu^2}{[g]}.$$

Es ist daher das Gewicht von x gleich der Summe der Gewichte der einzelnen Beobachtungen.

IV. Berechnung des mittleren Beobachtungsfehlers μ für das Gewicht 1 aus den übrigbleibenden Fehlern. Setzt man nach (12)

$$[\lambda\lambda g] = [\varepsilon\varepsilon g] - (X - x)^2[g],$$

unter X jetzt den wahren Wert der Unbekannten verstanden, und nimmt rechter Hand den Durchschnitt für unendlich viele Fälle, so ergibt sich eine Näherungsformel für μ^2. Der Durchschnittswert eines jeden Gliedes $\varepsilon_i \varepsilon_i g_i$ ist μ^2 (ohne Index), da ε_i^2 im Durchschnitt gleich μ_i^2 und $g_i = \mu^2 : \mu_i^2$ ist. Der Durchschnittswert von $(X - x)^2$ ist durch (13) gegeben; es wird mithin im Durchschnitt

$$[\lambda \lambda g] = n \mu^2 - \mu^2 = (n-1)\mu^2;$$

$$\text{(14)} \qquad \mu^2 = \frac{[\lambda \lambda g]}{n-1}, \qquad \mu = + \sqrt{\frac{[\lambda \lambda g]}{n-1}}.$$

Bei der Berechnung von $[\lambda \lambda g]$ kann man auch die Kontrollformel

$$\text{(15)} \qquad [\lambda \lambda g] = [llg] - x^2 [g]$$

anwenden, die aus (12) für $X = 0$ hervorgeht.

Um die Genauigkeit der Formeln (14) zu erkennen, kann man das mittlere Fehlerquadrat in der Bestimmung von μ^2 ableiten. Es folgt, analog dem Falle $g = 1$, S. 74, indem man $[\lambda \lambda g]$ durch $[\varepsilon \varepsilon g] - \frac{[\varepsilon g]^2}{[g]}$ ersetzt und berücksichtigt, daß

der Durchschnitt von $[\varepsilon \varepsilon g]^2$ gleich $n \nu^4 + n(n-1)\mu^4$,

" " " $[\varepsilon \varepsilon g] \frac{[\varepsilon g]^2}{[g]}$ " $\nu^4 + (n-1)\mu^4$,

" " " $\frac{[\varepsilon g]^4}{[g]^2}$ " $\frac{[g^2]}{[g]^2}\nu^4 + 3\left(1 - \frac{[g^2]}{[g]^2}\right)\mu^4$

ist, als mittleres Fehlerquadrat der Bestimmung von μ^2 nach (14):

$$\text{(16)} \qquad \frac{\nu^4 - \mu^4}{n-1} - \frac{\nu^4 - 3\mu^4}{(n-1)^2}\left(1 - \frac{[g^2]}{[g]^2}\right).$$

Hierbei ist μ^2 der Durchschnittswert von $\varepsilon^2 g$, und ν^4 der Durchschnittswert von $\varepsilon^4 g^2$ für unendlich viele Fälle. Man müßte bei genauerer Rechnung von ν^4 auf $\lambda^4 g^2$ zurückgehen, indessen wird das kaum je geschehen. Man wird sich mit einer Annäherung begnügen und ν^4 wie beim Gaußschen Gesetze gleich $3\mu^4$ ansetzen; in der Regel wird $\nu^4 < 3\mu^4$ sein. Der Ausdruck (16), in welchem immer $[g^2] < [g]^2$ ist, gibt mit $\nu^4 = 3\mu^4$:

$$\text{(16*)} \qquad \frac{2\mu^4}{n-1};$$

damit wird die Genauigkeit nicht überschätzt.

Mit diesem Werte folgt:

$$(17)\qquad \mu^2 = \frac{[\lambda\lambda g]}{n-1}\left(1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right),$$

und für nicht zu kleine n:

$$(18)\qquad \mu = +\sqrt{\frac{[\lambda\lambda g]}{n-1}}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\right).$$

V. Mittlerer Fehler in x, berechnet aus $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$. Sind die einzelnen mittlern Fehler der Beobachtungen gegeben, so kann μ_x außer nach (13) noch wie folgt berechnet werden. Es ist nach (9):

$$\mu_x^2 = \left(\frac{N}{\mu_1^2}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{N}{\mu_2^2}\right)^2 \mu_2^2 + \cdots + \left(\frac{N}{\mu_n^2}\right)^2 \mu_n^2,$$

worin

$$N = 1 : \left[\frac{1}{\mu^2}\right]$$

gesetzt wurde. Daraus findet man

$$(19)\qquad \mu_x^2 = N; \qquad \mu_x = +\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{\mu^2}\right]}}.$$

Der wesentliche Unterschied von (13) und (19) liegt darin, daß (19) die Widersprüche der l gar nicht berücksichtigt, daß (13) hingegen auf die absolute Größe von $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ keine Rücksicht nimmt, sondern nur ihre Verhältnisse beachtet.

Die beiden Werte von μ_x werden im allgemeinen voneinander abweichen. Die Abweichung kann eine zufällige sein und wird als solche um so größer werden können, je geringer die Anzahl der Beobachtungen ist; sie kann auch eine notwendige sein, z. B. dann, wenn bei der Ermittelung der l konstante Fehler untergelaufen sind, die, verschieden für die verschiedenen l, bewirken, daß die l unerwartete Widersprüche zeigen.

VI. Unveränderlichkeit der Quadratsumme der totalen Fehler bei allmählicher Ausgleichung. Wir knüpfen an das einfache Beispiel von 4 Beobachtungen, S. 79, an. Durch Zusammenfassung von l_2, l_3 und l_4 zu l_2' mit dem Gewicht 3 wurde x nicht geändert, so daß in den beiden Gleichungen

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_1 + 3\lambda_2' = 0$$

λ_1 denselben Wert hat. Es wird nun

$$3\lambda_2' = \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 ,$$

und daher aus der Identität $[\lambda\lambda] = \lambda_1^2 + (\lambda_2' + \lambda_2 - \lambda_2')^2 + (\lambda_2' + \lambda_3 - \lambda_2')^2 + (\lambda_2' + \lambda_4 - \lambda_2')^2$ ohne weiteres:

$$[\lambda\lambda] = \{\lambda_1^2 + 3\lambda_2'^2\} + \{(\lambda_2 - \lambda_2')^2 + (\lambda_3 - \lambda_2')^2 + (\lambda_4 - \lambda_2')^2\} .$$

Linker Hand steht die Fehlerquadratsumme $[\lambda\lambda]$, wenn die vier Beobachtungen vom Gewicht 1 einfach gemittelt werden. Rechter Hand steht zuerst $[\lambda\lambda g]$ für die Ausgleichung von l_1 mit dem Gewicht 1 und l_2' mit dem Gewicht 3. Dann folgt die Fehlerquadratsumme für die Ausgleichung der drei Beobachtungen l_2, l_3, l_4 vom Gewicht 1; denn da das arithmetische Mittel l_2' von l_2, l_3 und l_4 die Verbesserung λ_2' hat und die unmittelbare Ausgleichung aller vier Beobachtungen die Verbesserungen λ_2, λ_3, λ_4 fordert, so müssen die Verbesserungen, um auf l_2' zu kommen, gleich $\lambda_2 - \lambda_2'$, $\lambda_3 - \lambda_2'$, $\lambda_4 - \lambda_2'$ sein.

Man erkennt, daß die totale Fehlerquadratsumme auch im allgemeinen gleich der Summe der $[\lambda\lambda g]$ ist, welche die allmählichen Ausgleichungen liefern. Das muß ja auch so sein, weil es widersinnig wäre, wenn eine allmähliche Ausgleichung eine andere, etwa gar kleinere Quadratsumme gäbe, als eine einmalige direkte Ausgleichung.

Beispiel. Fortsetzung zu S. 40 und S. 76. Die Messungen der Unbekannten wurden an drei Tagen ausgeführt; mittelt man sie tageweise, so folgt:

$$(13) \qquad \begin{array}{lll} x = -0{,}''03 & 4 \text{ Messungen mit } [\lambda\lambda] & = 2{,}7345 \\ x = +0{,}18 & 4 \quad \text{„} \qquad \text{„} \quad \text{„} & = 0{,}1890 \\ x = -0{,}07 & 8 \quad \text{„} \qquad \text{„} \quad \text{„} & = 3{,}6690 . \end{array}$$

Hiermit ergeben sich die neuen Fehlergleichungen:

$$(14) \qquad \begin{array}{ll} \lambda_1 = +0{,}03 + x & \text{Gew. } g_1 = 4 \\ \lambda_2 = -0{,}18 + x & \qquad g_2 = 4 \\ \lambda_3 = +0{,}07 + x & \qquad g_3 = 8 . \end{array}$$

Gewichtseinheit: eine einfache Messung. Man könnte auch die Gewichte bezw. gleich 1, 1 und 2 setzen; dann wäre die Gewichtseinheit eine vierfache Messung. Indessen bietet im vorliegenden Falle die Annahme 4, 4, 8 keine Unbequemlichkeit.

Es wird hiermit

$$x = -\frac{0{,}03\,.\,4 - 0{,}18\,.\,4 + 0{,}07\,.\,8}{4 + 4 + 8} = 0'',00 \tag{15}$$

mit dem Gewicht 16.

Damit ist

$$\lambda_1 = +\,0{,}03\,, \quad \lambda_2 = -\,0{,}18\,, \quad \lambda_3 = +\,0{,}07\,; \tag{16}$$

folglich

$$[\lambda\lambda g] = 0{,}1724 = [llg] - x^2[g]\,. \tag{17}$$

Die λ erfüllen die Formel für $[\lambda g]$, denn es ist

$$+\,0{,}03\,.\,4 - 0{,}18\,.\,4 + 0{,}07\,.\,8 = -\,0{,}04$$

hier ausreichend genau gleich null.

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist nach (14), S. 83,

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{0{,}17}{3-1}} = \pm\,0''{,}29\,; \tag{18}$$

mithin ist nach (13), S. 82:

$$\mu_x = +\frac{\mu}{\sqrt{16}} = +\,0'',07\,. \tag{19}$$

Diese Bestimmung von μ_x ist aber sehr unsicher, da wegen $n = 3$ aus (18), S. 84, μ sehr unsicher hervorgeht.

Zur Beurteilung der Genauigkeit des Wertes von x wird man daher einen sicherer bestimmten Wert von μ heranziehen. Dieser ergibt sich aus der Fehlerquadratsumme aller 16 Beobachtungen. die durch Addition der Teilsummen aus (13) und (17) abgeleitet werden kann:

$$[\lambda\lambda] = 2{,}7345 + 0{,}1890 + 3{,}6690 + 0{,}1724 = 6{,}7649\,. \tag{20}$$

Dieser Wert stimmt mit Rücksicht auf die Abrundung der Mittelwerte und der λ hinreichend mit dem früher, S. 42, berechneten 6,77 überein. S. 42 ist auch der genauere Wert von μ und S. 77 der entsprechende von μ_x berechnet worden.

Beispiel. Mehrfache Bestimmung eines Winkels. In dem Hauptdreiecksnetz der Königlich Preußischen Landesaufnahme wurde der Winkel Collm-Großberg-Golmberg wie folgt beobachtet, wobei die μ^2 möglichst vollständig geschätzt sind:*)

*) Die Europäische Längengradmessung in 52° Breite usw. I. Heft, von F. R. Helmert. Berlin 1893, S. 185 u. f.

$$
\begin{array}{llll}
1871 & l_1 = 149^0\ 16'\ 51'',48 & & \mu_1^2 = 0,44 \\
1880 & l_2 = \quad ,, \quad ,, \quad 48,87 & & \mu_2^2 = 0,17 \\
1889 & l_3 = \quad ,, \quad ,, \quad 49,72 & & \mu_3^2 = 0,14 .
\end{array}
$$

Rechnet man vom kleinsten Werte l_2 ab, so folgt nach (9)

$$x = 149^0\ 16'\ 48'',87 + \frac{\frac{2,61}{0,44} + 0 + \frac{0,85}{0,14}}{\frac{1}{0,44} + \frac{1}{0,17} + \frac{1}{0,14}}$$

und nach (19), S. 84,

$$\mu_x^2 = 1 : \left\{ \frac{1}{0,44} + \frac{1}{0,17} + \frac{1}{0,14} \right\} :$$

also ist

$$x = 149^0\ 16'\ 49'',65 \pm 0'',26 .$$

Setzt man $g_1 = \frac{1}{0,44}$, $g_2 = \frac{1}{0,17}$; $g_3 = \frac{1}{0,14}$, so gibt die Gleichung (5) denselben Wert für x wie vorher (9). Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit wird alsdann nach (18), da $\lambda_1 = -1,83$, $\lambda_2 = +0,78$, $\lambda_3 = -0,07$ ist, gleich

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{11,225}{2}} \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}}\right) = \pm (2'',37 \pm 1'',18),$$

also sehr ungenau wegen der geringen Anzahl überschüssiger Beobachtungen.

Für μ_x wird jetzt nach (13):

$$\mu_x = \pm \sqrt{\frac{11,225}{30,60}} = \pm 0'',61 .$$

Man könnte noch daran denken, die beiden Bestimmungen von μ_x zu vereinigen; indessen mag diese Aufgabe hier unerörtert bleiben. Sie läßt sich ohne Kenntnis der mittlern Fehler der drei Größen μ_1^2, μ_2^2, μ_3^2 nicht lösen.

§ 3. Ausgleichung direkter Beobachtungen von gleicher Genauigkeit, welche Vielfache einer Unbekannten sind.

I. Berechnung der Unbekannten und ihres mittleren Fehlers. Diese Aufgabe läßt sich auf die vorhergehenden Fälle zurückführen. Es seien

(1) $$l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$$

die n Beobachtungswerte für die Vielfachen von x:

(2) $$a_1 x,\ a_2 x,\ a_3 x,\ \ldots\ a_n x,$$

worin die a gegebene Koeffizienten sind. Ist μ der mittlere Fehler in l, so ist der mittlere Fehler in der Bestimmung von x:

$$(3)\qquad \begin{array}{lll} \text{für } x = \dfrac{l_1}{a_1} & \text{gleich} & \dfrac{\mu}{a_1} \\ \text{"} \quad x = \dfrac{l_2}{a_2} & \text{"} & \dfrac{\mu}{a_2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{"} \quad x = \dfrac{l_n}{a_n} & \text{"} & \dfrac{\mu}{a_n}. \end{array}$$

Hierbei erscheinen die Werte $\frac{l}{a}$ als direkte Beobachtungen ungleicher Genauigkeit für die Unbekannte x. Gehört zu μ die Gewichtseinheit, so sind die Gewichte der Bestimmungen gleich a_1^2, a_2^2, ... a_n^2; somit wird nach (5), S. 80, der plausibelste Wert der Unbekannten x:

$$x = \frac{\frac{l_1}{a_1} a_1^2 + \frac{l_2}{a_2} a_2^2 + \cdots + \frac{l_n}{a_n} a_n^2}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

oder kurz

$$(4)\qquad x = \frac{[al]}{[aa]},$$

und es ist ferner nach (13), S. 82:

$$(5)\qquad \mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{[aa]}},$$

indem $[aa]$ das Gewicht in der Bestimmung von x wird.

Zur Berechnung von μ hat man die Formel (18), S. 84, anzuwenden. Die übrigbleibenden Fehler und ihre Gewichte sind hierbei durch folgende Gleichungen gegeben:

$$(6)\qquad \begin{array}{lll} \lambda_1' = -\dfrac{l_1}{a_1} + x & \text{mit} & g_1 = a_1^2 \\ \lambda_2' = -\dfrac{l_2}{a_2} + x & \text{"} & g_2 = a_2^2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_n' = -\dfrac{l_n}{a_n} + x & \text{"} & g_n = a_n^2. \end{array}$$

Zur Berechnung von μ werden nun die Produkte $\lambda'\sqrt{g}$ gebraucht. Man hat aber

$$\begin{aligned} \lambda_1'\sqrt{g_1} &= -l_1 + a_1x \\ \lambda_2'\sqrt{g_2} &= -l_2 + a_2x \\ &\cdots \\ \lambda_n'\sqrt{g_n} &= -l_n + a_nx; \end{aligned} \tag{7}$$

es sind mithin die Produkte $\lambda'\sqrt{g}$ die Beobachtungsfehler $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ für $l_1, l_2, l_3, \ldots$ selbst, also:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1x \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2x \\ &\cdots \\ \lambda_n &= -l_n + a_nx. \end{aligned} \tag{8}$$

Mithin ist

$$\mu = +\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\right); \tag{9}$$

hierbei gibt das mittlere Fehlerglied in der Klammer nach S. 84 nur eine Annäherung für nicht zu kleine n; außerdem ist es so angesetzt, daß keine Überschätzung der Genauigkeit von μ eintritt.

II. Kontrollformeln. Aus (10), S. 81, folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (6), daß $[\lambda' a^2] = 0$, oder da $\lambda' a = \lambda$ ist:

$$[a\lambda] = 0. \tag{10}$$

Ferner erhält man aus (15), S. 83, wegen (4):

$$[\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]}. \tag{11}$$

Beide Formeln dienen zur Kontrolle der ganzen Rechnung, wenn die λ aus den Gleichungen (8) berechnet worden sind.

Beispiel. Bestimmung der Konstanten eines Reichenbachschen Distanzmessers auf Glas im Fernrohre eines Nivellierinstruments.

Die Bestimmung erfolgte in der Weise, daß bei horizontaler Visierachse für beide Striche des Distanzmessers Ablesungen an einer in abgemessenen Entfernungen vertikal aufgestellten Nivellierlatte, die in abwechselnd weiße und schwarze Zentimeter-Felder eingeteilt war, vorgenommen wurden.

Nachstehende Tabelle gibt in den beiden ersten Spalten die vom äußern Rande der Objektivfassung aus abgemessenen Entfernungen und die abgelesenen Lattenabschnitte. Diese Beobachtungswerte bedurften aber noch der Reduktion aus folgenden Gründen. Erstens mußten die Entfernungen mit 1 — 0,000833 multipliziert werden, weil die zur Messung benutzten Stäbe um 0,833 mm auf den Meter zu kurz waren. Zweitens wurden die Teilungsfehler der Nivellierlatte in bezug auf dieselbe metrische Einheit ermittelt und die Lattenabschnitte wegen dieser Fehler verbessert. Drittens wurden die Entfernungen um 0,216 m verkleinert, um sie auf den äußern Brennpunkt des Objektivs zu beziehen. In der dritten und vierten Spalte befinden sich die so reduzierten Entfernungen und Lattenabschnitte.

	Entfernung in Metern	Lattenabschnitt in Metern	Reduzierte Entfernung	Reduzierter Lattenabschnitt
	126	1,267	125,679	1,2661
	120	1,205	119,684	1,2039
	108	1,084	107,694	1,0830
	96	0,964	95,704	0,9637
(1)	84	0,844	83,714	0,8434
	72	0,720	71,724	0,7195
	60	0,601	59,734	0,6002
	48	0,481	47,744	0,4805
	36	0,3600	35,754	0,3593
	24	0,2395	23,764	0,2390
	12	0,1185	11,774	0,1183

Man hat bekanntlich für den Reichenbachschen Distanzmesser die Formel:

(2) Distanz vom äußern Brennpunkte des Objektivs $= a x$,

worin a der Lattenabschnitt und x eine Konstante ist. Für diese setzen wir den Näherungswert 99,2, an dem eine Verbesserung ξ anzubringen sein wird:

$$x = 99,2 + \xi. \tag{3}$$

Bezeichnet man nun die Verbesserung des Lattenabschnitts a mit v, die der Distanz mit d, so hat man z. B. aus der ersten Beobachtung

$$125,679 + d_1 = (1,2661 + v_1)(99,2 + \xi),$$

und daraus mit Vernachlässigung des Produktes $v_1 \xi$:

$$d_1 - 99{,}2\, v_1 = -0{,}082 + 1{,}2661\, \xi\,.$$

Setzt man allgemein

(4) $$d - 99{,}2\, v = \lambda\,,$$

so ergeben sich die Fehlergleichungen:

(5)
$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -0{,}082 + 1{,}2661\,\xi & \lambda_7 &= -0{,}194 + 0{,}6002\,\xi \\
\lambda_2 &= -0{,}257 + 1{,}2039\,\xi & \lambda_8 &= -0{,}078 + 0{,}4805\,\xi \\
\lambda_3 &= -0{,}260 + 1{,}0830\,\xi & \lambda_9 &= -0{,}111 + 0{,}3593\,\xi \\
\lambda_4 &= -0{,}105 + 0{,}9637\,\xi & \lambda_{10} &= -0{,}055 + 0{,}2390\,\xi \\
\lambda_5 &= -0{,}049 + 0{,}8434\,\xi & \lambda_{11} &= -0{,}039 + 0{,}1183\,\xi\,. \\
\lambda_6 &= -0{,}350 + 0{,}7195\,\xi & &
\end{aligned}$$

Bezeichnet man den mittlern Wert des zu d gehörenden wahren Fehlerquadrats mit μ_d^2, sowie denjenigen des zu v gehörenden wahren Fehlerquadrats mit μ_v^2, so ist der mittlere Wert des dem λ entsprechenden wahren Fehlerquadrats μ^2 nach (4):

(6) $$\mu^2 = \mu_d^{\,2} + 99{,}2^2 \cdot \mu_v^{\,2}\,.$$

μ_d hat nun jedenfalls auf μ^2 einen weit geringeren Einfluß als μ_v. Es ist z. B. für die Entfernung 125,679 gewiß $\mu_d \leqq 0{,}05$, dagegen kann μ_v recht wohl gleich 0,002 und daher $99{,}2\,\mu_v$ gleich 0,20, also viermal so groß als μ_d sein. Damit wird $(99{,}2\,\mu_v)^2$ 16-mal so groß als $\mu_d^{\,2}$.

Indem es hiernach genügt, die λ lediglich als von den v herrührend zu betrachten, vereinfacht sich die Ausgleichung des Systems (5) sehr. Denn die v sind für die verschiedenen Gleichungen unabhängig voneinander, dagegen die d nicht, weil die größern Distanzen allmählich aus den kleinern entwickelt werden. Müßte man die d berücksichtigen, so wären die λ nicht unabhängig voneinander und das Ausgleichungsproblem würde verwickelter.

Beachten wir somit nur μ_v, so wird die Frage, welche relative Genauigkeit den Fehlergleichungen (5) beizulegen ist, zu beantworten sein durch die Untersuchung von μ_v bezüglich seiner Veränderlichkeit mit der Entfernung. Hierüber sind verschiedene Untersuchungen veröffentlicht worden. Wir wollen uns hier lediglich an die vorliegenden Messungen halten und zwei Hypothesen verfolgen. Im allgemeinen ist wohl anzunehmen, daß μ_v mit der Entfernung wächst. Die beiden Hypothesen, daß einmal μ_v und damit μ unabhängig von der Entfernung ist, und daß beide das andere Mal ihr proportional sind, werden voraussichtlich in unserm Falle den wahren Sachverhalt einschließen.

Nach der ersten Hypothese ist also den Fehlergleichungen (5) gleiche Genauigkeit beizulegen. Man erhält alsdann nach (4) und (5), S. 88:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1,3006}{7,1743} = 0,181; \\ x &= 99,381; \\ \mu_\xi &= \frac{\mu}{\sqrt{7,1743}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Für die λ wird gefunden:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = +\,0,147 & \lambda_7 = -\,0,085 \\ \lambda_2 = -\,0,039 & \lambda_8 = +\,0,009 \\ \lambda_3 = -\,0,064 & \lambda_9 = -\,0,046 \\ \lambda_4 = +\,0,070 & \lambda_{10} = -\,0.012 \\ \lambda_5 = +\,0,104 & \lambda_{11} = -\,0,018; \\ \lambda_6 = -\,0,220 & \end{array} \tag{8}$$

mithin wird

$$[\lambda\lambda] = 0,1012:$$

dagegen wird nach (11), S. 89, mit $[ll] = 0.3369$ erhalten

$$[\lambda\lambda] = 0,3369 - \frac{1.3006^2}{7,1743} = 0,1011, \tag{8*}$$

also gut übereinstimmend.

Damit ergibt sich nach (9), S. 89:

$$\begin{aligned} \mu &= \pm\sqrt{\frac{0,1012}{10}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{20}}\right) = \pm\,(0,101 \pm 0,022), \\ \mu_\xi &= \mu_x = \pm\,(0,038 \pm 0,008). \end{aligned} \tag{9}$$

Nach der zweiten Hypothese sind die mittlern Fehler der Gleichungen (5) proportional den Entfernungen, also auch sehr nahe proportional den Lattenabschnitten. Dividieren wir daher die Gleichungen durch die Werte der letztern, so entstehen die folgenden Fehlergleichungen mit gleichen mittlern Fehlern oder von gleicher Genauigkeit:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \lambda_1' &= -0{,}065 + \xi & \lambda_7' &= -0{,}323 + \xi \\ \lambda_2' &= -0{,}213 + \xi & \lambda_8' &= -0{,}162 + \xi \\ \lambda_3' &= -0{,}240 + \xi & \lambda_9' &= -0{,}309 + \xi \\ \lambda_4' &= -0{,}109 + \xi & \lambda_{10}' &= -0{,}230 + \xi \\ \lambda_5' &= -0{,}058 + \xi & \lambda_{11}' &= -0{,}330 + \xi\,. \\ \lambda_6' &= -0{,}486 + \xi \end{aligned}$$

Dieselben ergeben

$$(11)\qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{2{,}525}{11} = 0{,}2295; \\ x &= 99{,}430; \\ \mu_\xi &= \frac{\mu'}{\sqrt{11}}\,. \end{aligned}$$

und ferner

$$(12)\qquad \begin{aligned} \lambda_1' &= +0{,}1645 & \lambda_7' &= -0{,}0935 \\ \lambda_2' &= +0{,}0165 & \lambda_8' &= +0{,}0675 \\ \lambda_3' &= -0{,}0105 & \lambda_9' &= -0{,}0795 \\ \lambda_4' &= +0{,}1205 & \lambda_{10}' &= -0{,}0005 \\ \lambda_5' &= +0{,}1715 & \lambda_{11}' &= -0{,}1005\,; \\ \lambda_6' &= -0{,}2565 \end{aligned}$$

$$[\lambda'] = +0{,}5405 - 0{,}5410 = -0{,}0005;$$

$$[\lambda'\lambda'] = 0{,}1669\,,$$

womit man findet:

$$(13)\qquad \begin{aligned} \mu' &= \pm\sqrt{\frac{0{,}1669}{10}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{20}}\right) = \pm(0{,}129 \pm 0{,}029), \\ \mu_\xi &= \mu_x = \pm(0{,}039 \pm 0{,}009). \end{aligned}$$

μ' ist nach (6), S. 91, sehr nahe der mittlere Wert des 99,2-fachen Fehlers in der Beobachtung eines Lattenabschnitts, reduziert auf die Ablesung 1 (d. i. nahezu 100 Meter Entfernung). Der mittlere Fehler eines in 100 m beobachteten Lattenabschnitts beträgt sonach $\pm 129 : 99{,}2 = \pm 1{,}3$ mm.

Die Ergebnisse beider Hypothesen stimmen für x auf 0,05, d. i. $\frac{1}{2000}$ des Wertes von x, überein. Die zweite Hypothese erscheint jedoch zutreffender als die erste, weil bei ihr die übrigbleibenden Fehler λ' in (12) sich für große und kleine Distanzen im Mittel annähernd gleich groß zeigen, bei der ersten aber nicht. Behalten wir demnach die zweite bei, also

(14) $$x = 99{,}43\,,$$

so ist das Endergebnis für die Distanz vom Zentrum des Instruments:

(15) $$0{,}^{m}335 + 99{,}43\,a\,,$$

indem der Abstand des äußern Brennpunktes von der vertikalen Drehachse 0,335 m ist.

Die Größen 0,216, (S. 90), und 0,335, welche sich auf die Lage des äußern Brennpunktes des Objektivs beziehen, wurden direkt gemessen und sind nicht über 0,003 unsicher. Schreibt man die Formel des Distanzmessers in der Gestalt $y + ax$ und rechnet die gemessenen Distanzen in (1) um in Distanzen vom Instrumentzentrum aus, so kann man mit Hilfe derselben und der beobachteten a die beiden Unbekannten x und y bestimmen: man findet jedoch, daß die Bestimmung von y alsdann sehr unsicher wird. Obgleich dies nun auf die Brauchbarkeit der Endformel als Ganzes keinen Einfluß hat, insofern sie jedenfalls den Charakter einer Interpolationsformel behält, welche gegebene Funktionswerte genügend darstellt, so wird man doch der ersten Bestimmungsweise den Vorzug geben müssen, umsomehr als eine direkte Abmessung der Größen 0,216 und 0,335, solange es auf einige Millimeter nicht ankommt, keine besondere Mühe erfordert.

§ 4. Übergang zur Methode der kleinsten Quadrate nach dem älteren Verfahren von C. F. Gauß.

1. Fehlergesetz, für welches das arithmetische Mittel gleich genauer direkter Beobachtungen den wahrscheinlichsten Wert gibt. Betrachtet man das arithmetische Mittel x von gleich genauen direkten Beobachtungen als wahrscheinlichsten Wert, so ergibt sich daraus eine bestimmte Form des Fehlergesetzes.

Ist X der wahre Wert der Unbekannten, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Fehler der Beobachtung zwischen den Grenzen ε und $\varepsilon + \delta$ liegt, gleich $\varphi(\varepsilon).\delta$ oder $\varphi(-l + X).\delta$, wenn l den Beobachtungswert bezeichnet und δ eine sehr kleine Größe ist, unter der wir etwa die Einheit der letzten Stelle, bis zu welcher l angegeben wird, verstehen dürfen. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei n unabhängigen Beobachtungen $l_1, l_2, l_3, \ldots$ die wahren Fehler zwischen den Grenzen ε_1 und $\varepsilon_1 + \delta$, ε_2 und $\varepsilon_2 + \delta$, usw. liegen, ist daher gleich

$$\delta^n . \varphi(\varepsilon_1)\varphi(\varepsilon_2) \ldots \varphi(\varepsilon_n),$$

d. i. gleich

(1) $$\delta^n . \varphi(-l_1 + X)\varphi(-l_2 + X) \ldots \varphi(-l_n + X);$$

denn man kann dies gerade so beurteilen wie die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von n zukünftigen unabhängigen Ereignissen, welche bekanntlich gleich dem Produkte der Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse ist. Nun handelt es sich hier nicht um zukünftige Ereignisse, sondern um gegebene Ereignisse, denn die l sind bekannt; dagegen kennen wir X nicht und sind daher genötigt, eine Hypothese x über dessen Wert zu machen. Bilden wir damit das Produkt (1), so ist nach den Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1) ein Maß für die Wahrscheinlichkeit der Hypothese x. Diejenige Hypothese, welche (1) zu einem Maximum macht, hat die größte Wahrscheinlichkeit für sich, den wahren Wert der Unbekannten zu geben. Bei der Auswahl der Hypothesen kann man von dem Faktor δ^n absehen, da δ mit der Wahl des Wertes x nichts zu tun hat.*)

Andrerseits empfiehlt sich uns die Hypothese, daß das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen der wahrscheinlichste Wert, den man für die Unbekannte wählen kann, sei.

Demnach hat man

(2) $\varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_2) \ldots \varphi(\lambda_n)$ ist ein Maximum für

(2*) $$x = \frac{[l]}{n}.$$

Durch Differentiation folgt aus (2) nach vorheriger Logarithmierung:

$$0 = \frac{d \log \varphi(\lambda_1)}{dx} + \frac{d \log \varphi(\lambda_2)}{dx} + \frac{d \log \varphi(\lambda_3)}{dx} + \cdots,$$

*) J. Lüroth. Ein Problem der Fehlertheorie. (Zeitschrift für Vermessungswesen 1880, S. 432 u. f.)

oder

$$0 = \frac{d \log \varphi(\lambda_1)}{d\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{dx} + \frac{d \log \varphi(\lambda_2)}{d\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{dx} + \frac{d \log \varphi(\lambda_3)}{d\lambda_3} \frac{d\lambda_3}{dx} + \cdots,$$

oder weil allgemein $d\lambda = dx$ ist,

$$(3) \qquad 0 = \frac{d \log \varphi(\lambda_1)}{d\lambda_1} + \frac{d \log \varphi(\lambda_2)}{d\lambda_2} + \frac{d \log \varphi(\lambda_3)}{d\lambda_3} + \cdots.$$

Dabei gilt aber als Bedingung für die λ nach (2*):

$$(4) \qquad 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots.$$

Die Gleichungen (3) und (4) müssen gleichzeitig bestehen, welche Werte sich auch für die Beobachtungen ergeben. Wir können uns daher die λ als Veränderliche denken. Dann folgt aus (4):

$$(5) \qquad 0 = d\lambda_1 + d\lambda_2 + d\lambda_3 + \cdots$$

und aus (3) durch Differentiation:

$$(6) \quad 0 = \frac{d^2 \log \varphi(\lambda_1)}{d\lambda_1^2} d\lambda_1 + \frac{d^2 \log \varphi(\lambda_2)}{d\lambda_2^2} d\lambda_2 + \frac{d^2 \log \varphi(\lambda_3)}{d\lambda_3^2} d\lambda_3 + \cdots.$$

Diese Gleichung kann für ein beliebiges nur durch (5) beschränktes System der $d\lambda$ nur dann bestehen, wenn für jeden Index $\frac{d^2 \log \varphi(\lambda)}{d\lambda^2}$ denselben Wert hat: dadurch wird nämlich die rechte Seite von (6) mit Rücksicht auf (5) gleich null, wie es die linke Seite fordert.

Setzen wir also

$$(7) \qquad \frac{d^2 \log \varphi(\lambda)}{d\lambda^2} = k_1,$$

wo k_1 eine Konstante bedeutet, so folgt:

$$\frac{d \log \varphi(\lambda)}{d\lambda} = k_1\lambda + k_2.$$

Führt man dies in (3) ein, so ergibt sich mit Rücksicht auf (4):

$$k_2 = 0;$$

man hat daher weiter durch Integration

$$\varphi(\lambda) = ce^{\frac{1}{2}k_1\lambda^2}.$$

Da aber $\varphi(\lambda)$ abnehmen muß, wenn λ wächst, mindestens wenn λ sehr groß wird, so muß $\frac{1}{2}k_1$ negativ, etwa gleich $-h^2$ sein; also ist

(8) $$\varphi(\lambda) = ce^{-h^2\lambda^2}.$$

Wir sind hiermit zu dem Fehlergesetz III gelangt, welches wir auf S. 11 als erfahrungsmäßige Form des Vorkommens wahrer zufälliger Fehler hingestellt hatten. Es kann nicht befremden, daß in (8) λ anstatt ε vorkommt, weil wir ja in (1) statt des wahren Wertes X eine Hypothese x einführen mußten; jedoch die Funktionsform für φ bleibt ungeändert. Mithin haben wir in (8) eigentlich eine Bestimmung von $\varphi(\varepsilon)$.*)

II. Übergang zur Methode der kleinsten Quadrate. Das Produkt in (2) geht infolge (8) über in

$$c^n e^{-h^2[\lambda\lambda]},$$

und da dasselbe ein Maximum ist, c und h aber konstant sind, so wird mithin für das arithmetische Mittel

(9) $$[\lambda\lambda] \text{ ein Minimum.}$$

Daß bei gleich genauen Beobachtungen das arithmetische Mittel die kleinste Quadratsumme der Verbesserungen gibt, wurde schon S. 71 gezeigt. Jetzt sieht man aber, daß im Falle des Fehlergesetzes III das arithmetische Mittel der wahrscheinlichste Wert ist und daß umgekehrt das arithmetische Mittel als wahrscheinlichster Wert das Fehlergesetz III fordert.

Sind die Beobachtungen ungleich genau, so sind c und h für die verschiedenen l verschieden; der Ausdruck (2) geht dann über in

$$c_1\, c_2\, c_3 \ldots e^{-(h_1^2\lambda_1^2 + h_2^2\lambda_2^2 + h_3^2\lambda_3^2 + \cdots)} \text{ ein Maximum,}$$

d. h. für den wahrscheinlichsten Wert von x ist

(10) $$[h^2\lambda^2] \text{ ein Minimum.}$$

---

*) Die von C. F. Gauß 1809 in der Theoria motus corporum coelestium gegebene Ableitung ist ein wenig anders als die oben gewählte Darstellung, die im wesentlichen schon 1872 in der 1. Auflage benutzt wurde.

Da sich die h^2 nach S. 23 durch die mittlern Fehlerquadrate μ^2 ausdrücken lassen, indem $h^2 = 1 : 2\mu^2$ ist, so folgt aus (10):

(11) $$\left[\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right] \text{ ein Minimum}$$

oder endlich

(12) $$[\lambda^2 g] \text{ ein Minimum.}$$

Daß bei ungleich genauen Beobachtungen an Stelle von (9) die Bedingungen (11) und (12) treten, ergab sich schon S. 82.

Dieselben Ausdrücke (10), (11), (12) erhält man, wenn die wahrscheinlichsten Werte nicht nur von einer Unbekannten, sondern von mehreren Unbekannten zu bestimmen sind, oder überhaupt eine Ausgleichung irgend welcher Art zu machen ist. Die Methode der kleinsten Quadrate liefert im Falle des Fehlergesetzes III immer die wahrscheinlichsten Ergebnisse.

III. Verallgemeinerung der Bedeutung der Gewichtszahlen. In manchen Anwendungen der Methode der kleinsten Quadrate kommt es vor, daß die Beobachtungen l und daher auch ihre Verbesserungen λ in verschiedenen Maßeinheiten ausgedrückt sind und unter Umständen als heterogene Größen auch nicht auf eine solche reduziert werden können. Alsdann hat man sich an die Form (11) zu wenden, in welcher nur absolute Zahlen vorkommen, da die Quotienten $\lambda^2 : \mu^2$ ohne Benennung sind. Wir können nun auch die Benennung der λ und μ ohne Fehler in (11) wegstreichen und für die jetzt absoluten Zahlen $\mu_1^2, \mu_2^2, \mu_3^2, \ldots$ durch Vergleichung mit einer passend gewählten Zahl μ^2 andere Zahlen $g_1, g_2, g_3, \ldots$ einführen, genau so, als sollten Gewichte berechnet werden. Wir werden dann wieder auf die Form (12) geführt und die Rechnung gestaltet sich wie früher. Nur bei der Berechnung des mittlern Fehlers müssen wir uns erinnern, daß in dieser Form der mittlere Fehler als eine absolute Zahl überhaupt bedeutungslos ist und erst durch Beziehung auf die verschiedenen heterogenen Beobachtungsgrößen eine Bedeutung und Benennung erhält.

Drittes Kapitel.

Vermittelnde Beobachtungen zur Bestimmung mehrerer Größen: Elementen-Ausgleichung.

§ 1. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

I. Berechnung der Werte der Unbekannten. Sind $l_1, l_2, \ldots l_n$ die n Beobachtungswerte der linearen Funktion: $aX + bY + cZ + \cdots$ der m Unbekannten oder Elemente $X, Y, Z, \ldots$, wobei wir voraussetzen, daß zu jedem Beobachtungswerte ein anderes System der bekannten Koeffizienten $a, b, c, \ldots$ gehört, dann haben wir für die wahren Beobachtungsfehler ε, wie schon früher auf S. 48 angegeben ist, die Gleichungen:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= -l_1 + a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + \cdots \\
\varepsilon_2 &= -l_2 + a_2 X + b_2 Y + c_2 Z + \cdots \\
&\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\varepsilon_n &= -l_n + a_n X + b_n Y + c_n Z + \cdots.
\end{aligned}
$$

Da wir aber zur Kenntnis der wahren Werte der Unbekannten $X, Y, Z, \ldots$ nicht gelangen können, so bestimmen wir andere Werte $x, y, z, \ldots$, denen Verbesserungen λ entsprechen, die die Bedingung erfüllen, daß die Summe ihrer Quadrate ein Minimum ist. Für jede andere Annahme der Unbekannten wird mithin die Fehlerquadratsumme größer sein als $[\lambda\lambda]$.

Im allgemeinen ist daher auch

$$
(2)\qquad [\varepsilon\varepsilon] > [\lambda\lambda],
$$

d. h. die Quadratsumme der wahren Fehler ist größer als die der plausibelsten Fehler.

Unsere Aufgabe ist jetzt, $x, y, z, \ldots$ aus den Fehlergleichungen

$$(3)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \lambda_n &= -l_n + a_n x + b_n y + c_n z + \cdots \end{aligned}$$

zu bestimmen, mit der Bedingung, daß

$$[\lambda\lambda] \text{ ein Minimum}$$

wird.

Damit die Aufgabe einen Sinn als Ausgleichungsaufgabe hat, wird vorausgesetzt, daß die Fehlergleichungen allein keine bestimmte Auflösung zulassen, daß also $n > m$ ist, S. 47.

Wir wollen nun in den Gleichungen (1) unter $X, Y, Z, \ldots$ irgend welche Werte der Unbekannten verstehen, unter $x, y, z, \ldots$ in (3) aber diejenigen des Minimums. Bildet man aus (1) und (3) für irgend einen Index i den Unterschied $\varepsilon_i - \lambda_i$, so folgt:

$$(4)\qquad \varepsilon_i = \lambda_i + \delta_i$$

mit

$$(5)\qquad \delta_i = a_i(X - x) + b_i(Y - y) + c_i(Z - z) + \cdots.$$

Die δ_i sind also Funktionen der willkürlichen Größen $(X - x)$, $(Y - y)$, $(Z - z), \ldots$. Aus (4) folgt durch Quadrieren und Addieren für $i = 1 \ldots n$:

$$(6)\qquad [\varepsilon\varepsilon] = [\lambda\lambda] + 2[\lambda\delta] + [\delta\delta].$$

Da nun $[\varepsilon\varepsilon] > [\lambda\lambda]$ sein muß, so ist

$$(6^*)\qquad [\lambda\delta] = 0.$$

Denn wäre dies nicht null, sondern etwa positiv, so könnte man sofort $[\lambda\delta]$ negativ machen durch eine solche Wahl von $X, Y, Z, \ldots$, daß $(X - x)$, $(Y - y)$, $(Z - z), \ldots$ ihr Vorzeichen wechseln, ohne ihren Absolutwert zu ändern. Dann aber würde $[\varepsilon\varepsilon] < [\lambda\lambda]$ werden können, weil man durch Annahme hinreichend kleiner Werte von $(X - x)$, $(Y - y)$, $(Z - z), \ldots$ die δ immer so klein machen kann, daß $[\delta\delta]$ gegen den Absolutwert von $2[\lambda\delta]$ zurücktritt.

Setzt man in (6*) für δ_i seinen Wert nach (5), so erhält man

$$[a\lambda](X-x)+[b\lambda](Y-y)+[c\lambda](Z-z)+\cdots=0;$$

wegen der Willkür in der Wahl von $(X-x)$, $(Y-y)$, $(Z-z)$, ... muß daher

$$(7) \qquad [a\lambda]=0, \quad [b\lambda]=0, \quad [c\lambda]=0, \quad \text{usw.}$$

sein. Dies sind die Bedingungsgleichungen für das Minimum. Ihre Anzahl ist gleich der Anzahl der Unbekannten.

Etwas rascher, als im vorstehenden, gelangt man zu den Gleichungen (7) nach der Methode der Differentialrechnung. Sind X, Y, Z, ... willkürliche Werte, so erscheinen sie als unabhängige Variable, für welche $[\varepsilon\varepsilon]$ zu einem Minimum zu machen ist. Dafür sind die bekannten Bedingungen:

$$(8) \qquad \frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial X}=0, \quad \frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial Y}=0, \quad \frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial Z}=0, \quad \text{usw.}$$

Die erste dieser Gleichungen gibt z. B.:

$$2\varepsilon_1\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial X}+2\varepsilon_2\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial X}+2\varepsilon_3\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial X}+\cdots=0.$$

Nun ist nach (1) allgemein $\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial X}=a_i$; außerdem ist für ε jetzt λ zu schreiben. Man erhält somit unter Weglassung des Faktors 2:

$$[a\lambda]=0.$$

In gleicher Weise findet man $[b\lambda]=0$, $[c\lambda]=0$, usw. Setzt man jetzt in die Gleichungen (7) die Ausdrücke für die λ nach (3) ein, so ergibt sich das nachstehende System von m Gleichungen zur Bestimmung derjenigen Werte der Unbekannten x, y, z, ..., für die die kleinste Fehlerquadratsumme $[\lambda\lambda]$ stattfindet:

$$(9) \qquad \begin{aligned} [aa]x+[ab]y+[ac]z+\cdots&=[al] \\ [ab]x+[bb]y+[bc]z+\cdots&=[bl] \\ [ac]x+[bc]y+[cc]z+\cdots&=[cl] \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad &\cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

Diese Gleichungen nennt man **Normalgleichungen**. Sie können nach einer der bekannten Auflösungsmethoden für lineare Gleichungen aufgelöst werden: setzt man die Werte der $x, y, z, \ldots$ in die Fehlergleichungen ein, so ergeben sich auch die λ.

II. Herleitung der Normalgleichungen aus dem Prinzip des arithmetischen Mittels. Die erste der Gleichungen (9) bzw. (7) würden wir auch erhalten haben unter der Annahme, daß alle Unbekannten außer x bekannt sind; denn die Fehlergleichungen hätten alsdann die Form der Gleichungen (8) des § 3, S. 89, angenommen, und aus diesen war die Unbekannte so zu bestimmen, daß $[a\lambda] = 0$ wurde. Offenbar hätten wir in derselben Weise die zweite der Gleichungen (7) erhalten, wenn wir y als einzige Unbekannte angesehen hätten und so fort auch jede der andern Gleichungen. Die Normalgleichungen können somit ohne Annahme der Bedingung „$[\lambda\lambda]$ ein Minimum" unmittelbar aus dem Ausgleichungsverfahren für direkte Beobachtungen ungleicher Genauigkeit gefunden werden; denn die Ausgleichung in § 3 stützte sich auf diejenige in § 2, S. 79 u. f., welche zunächst auf das Prinzip des arithmetischen Mittels zurückgeführt wurde, während der Nachweis der Erfüllung der Bedingung der Methode der kleinsten Quadrate in zweiter Linie erfolgte.

Da man nun alle Ausgleichungsaufgaben in solche nach vermittelnden Beobachtungen umwandeln kann, so läßt sich demnach alles auf das Prinzip des arithmetischen Mittels zurückführen. Die Vorschriften der Ausgleichung sind aber dieselben wie für die Methode der kleinsten Quadrate, welche überdies den Vorzug besitzt, bequem auf alle Formen der Ausgleichungsaufgaben direkt anwendbar zu sein.

Übrigens wird man finden, daß die Zurückführung auf das Prinzip des arithmetischen Mittels in engem Zusammenhange mit der Formel (7), S. 71, $\mu_x = \mu : \sqrt{n}$, steht. Denn nur wenn diese gilt, führt die Gewichtsannahme in § 2, S. 80 u. f. und damit die in § 3, S. 88, zu keinem Widerspruche. Liegt hierin eine gewisse Einschränkung, so ist andererseits zu bedenken, daß das arithmetische Mittel als plausibelster Wert nur unter den Voraussetzungen Sinn hat, die der Formel $\mu_x = \mu : \sqrt{n}$ zugrunde liegen.

III. Ableitung der Gewichte der berechneten Werte der Unbekannten. Dazu ist es notwendig, zu ermitteln, welchen Anteil jeder der Beobachtungswerte l an den Werten der Unbekannten hat. Es sei gefunden für $n = 4$ Beobachtungen mit $m = 3$ Unbekannten

$$(10)\qquad \begin{aligned} x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \alpha_4 l_4 \\ y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 + \beta_4 l_4 \\ z &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \gamma_4 l_4 , \end{aligned}$$

so wird für die mittlern Fehler in x, y, z erhalten:

$$(11)\qquad \begin{aligned} \mu_x &= \mu \sqrt{[\alpha\alpha]} \\ \mu_y &= \mu \sqrt{[\beta\beta]} \\ \mu_z &= \mu \sqrt{[\gamma\gamma]} ; \end{aligned}$$

denn die Unbekannten sind lineare Funktionen der unabhängigen Beobachtungswerte l mit den mittlern Fehler μ.

Zur Gültigkeit der Gleichungen (11) gehört, daß die wahren Beobachtungsfehler ε der voneinander unabhängigen Beobachtungswerte l entweder ein gerades Fehlergesetz befolgen oder doch die Gaußsche Bedingung erfüllen.

Außerdem liegt ihnen die Annahme zugrunde, daß man sich die Beobachtungsreihe $l_1, l_2, l_3, \ldots$ unendlich viele Male ausgeführt und für jede Reihe das Quadrat des wahren Fehlers in der Bestimmung jeder der Unbekannten als Funktion der ε gebildet denkt, worauf alsdann das Mittel genommen wird, entsprechend der Gaußschen Feststellung für das mittlere Fehlerquadrat, S. 20. Kennt man μ von andern, gleichartigen Beobachtungen her und stehen die Koeffizienten der n Fehlergleichungen fest, so kann man die Ausdrücke (11) schon angeben, noch ehe die Beobachtungen selbst ausgeführt sind. (Vergl. hierzu S. 72. Das daselbst Gesagte gilt mit naheliegenden Modifikationen auch hier.)

Um die α, β, γ zu finden, betrachten wir das den Normalgleichungen verwandte System

$$(12)\qquad \begin{aligned} [aa]A + [ab]B + [ac]C &= P \\ [ab]A + [bb]B + [bc]C &= Q \\ [ac]A + [bc]B + [cc]C &= R , \end{aligned}$$

worin P, Q, R beliebige unbestimmte Größen und A, B, C die Unbekannten vorstellen.

Wir multiplizieren diese Gleichungen der Reihe nach mit m noch zu bestimmenden Größen $Q_{1\cdot 1}, Q_{1\cdot 2}, Q_{1\cdot 3}$ und erhalten durch Addition

$$\begin{aligned} &([aa]Q_{1\cdot 1} + [ab]Q_{1\cdot 2} + [ac]Q_{1\cdot 3})A \\ &+ ([ab]Q_{1\cdot 1} + [bb]Q_{1\cdot 2} + [bc]Q_{1\cdot 3})B \\ &+ ([ac]Q_{1\cdot 1} + [bc]Q_{1\cdot 2} + [cc]Q_{1\cdot 3})C \\ &= PQ_{1\cdot 1} + QQ_{1\cdot 2} + RQ_{1\cdot 3}\,. \end{aligned}$$

Bestimmen wir nun die m Multiplikatoren so, daß sie die m Gleichungen:

$$(13)\qquad \begin{aligned} [aa]Q_{1\cdot 1} + [ab]Q_{1\cdot 2} + [ac]Q_{1\cdot 3} &= 1 \\ [ab]Q_{1\cdot 1} + [bb]Q_{1\cdot 2} + [bc]Q_{1\cdot 3} &= 0 \\ [ac]Q_{1\cdot 1} + [bc]Q_{1\cdot 2} + [cc]Q_{1\cdot 3} &= 0 \end{aligned}$$

erfüllen, so wird

$$(13^*)\qquad A = PQ_{1\cdot 1} + QQ_{1\cdot 2} + RQ_{1\cdot 3}\,.$$

In derselben Weise läßt sich jede der m Unbekannten durch m Hilfsgrößen darstellen; man erhält zunächst noch

$$(14^*)\qquad B = PQ_{2\cdot 1} + QQ_{2\cdot 2} + RQ_{2\cdot 3}\,,$$

wobei die Hilfsgrößen aus den Gleichungen

$$(14)\qquad \begin{aligned} [aa]Q_{2\cdot 1} + [ab]Q_{2\cdot 2} + [ac]Q_{2\cdot 3} &= 0 \\ [ab]Q_{2\cdot 1} + [bb]Q_{2\cdot 2} + [bc]Q_{2\cdot 3} &= 1 \\ [ac]Q_{2\cdot 1} + [bc]Q_{2\cdot 2} + [cc]Q_{2\cdot 3} &= 0 \end{aligned}$$

hervorgehen; ferner ist

$$(15^*)\qquad C = PQ_{3\cdot 1} + QQ_{3\cdot 2} + RQ_{3\cdot 3}\,,$$

und zur Bestimmung der Hilfsgrößen:

$$(15)\qquad \begin{aligned} [aa]Q_{3\cdot 1} + [ab]Q_{3\cdot 2} + [ac]Q_{3\cdot 3} &= 0 \\ [ab]Q_{3\cdot 1} + [bb]Q_{3\cdot 2} + [bc]Q_{3\cdot 3} &= 0 \\ [ac]Q_{3\cdot 1} + [bc]Q_{3\cdot 2} + [cc]Q_{3\cdot 3} &= 1\,. \end{aligned}$$

Die Gesamtanzahl aller Hilfsgrößen würde m^2 sein; sie sind aber nicht sämtlich voneinander verschieden, sondern es ist immer

$$(16) \qquad Q_{i \cdot h} = Q_{h \cdot i},$$

also z. B. $Q_{2 \cdot 1} = Q_{1 \cdot 2}$. Es genügt, wenn wir dies für $Q_{2 \cdot 1}$ und $Q_{1 \cdot 2}$ zeigen. Multipliziert man die Gleichungen (13) der Reihe nach mit $Q_{2 \cdot 1}$, $Q_{2 \cdot 2}$, $Q_{2 \cdot 3}$ und addiert, so entsteht bei geeigneter Zusammenfassung:

$$\left\{\begin{array}{l} \quad ([aa]Q_{2 \cdot 1} + [ab]Q_{2 \cdot 2} + [ac]Q_{2 \cdot 3})Q_{1 \cdot 1} \\ + ([ab]Q_{2 \cdot 1} + [bb]Q_{2 \cdot 2} + [bc]Q_{2 \cdot 3})Q_{1 \cdot 2} \\ + ([ac]Q_{2 \cdot 1} + [bc]Q_{2 \cdot 2} + [cc]Q_{2 \cdot 3})Q_{1 \cdot 3} \end{array}\right\} = Q_{2 \cdot 1}$$

und hieraus mit Rücksicht auf (14) $Q_{1 \cdot 2} = Q_{2 \cdot 1}$.

Löst man also bei gegebenen numerischen Werten der Summen $[aa]$, $[ab]$, $[bb]$, ... das System

$$(12) \qquad \begin{aligned} [aa]A + [ab]B + [ac]C &= P \\ [ab]A + [bb]B + [bc]C &= Q \\ [ac]A + [bc]B + [cc]C &= R \end{aligned}$$

auf, so erhält man nach (13*), (14*), (15*) die Ausdrücke:

$$(17) \qquad \begin{aligned} Q_{1 \cdot 1}P + Q_{1 \cdot 2}Q + Q_{1 \cdot 3}R &= A \\ Q_{2 \cdot 1}P + Q_{2 \cdot 2}Q + Q_{2 \cdot 3}R &= B \\ Q_{3 \cdot 1}P + Q_{3 \cdot 2}Q + Q_{3 \cdot 3}R &= C. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist dem vorhergehenden insofern ähnlich, als die Symmetrie in der Anordnung der Koeffizienten $Q_{1 \cdot 1}$, $Q_{1 \cdot 2} = Q_{2 \cdot 1}$, $Q_{2 \cdot 2}$, ... derjenigen der Koeffizienten $[aa]$, $[ab]$, $[bb]$, ... entspricht. Schreibt man die Koeffizienten beider Systeme schematisch in folgender Weise zusammen:

$$\begin{array}{ccc} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ab] & [bb] & [bc] \\ [ac] & [bc] & [cc] \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} Q_{1 \cdot 1} & Q_{1 \cdot 2} & Q_{1 \cdot 3} \\ Q_{2 \cdot 1} & Q_{2 \cdot 2} & Q_{2 \cdot 3} \\ Q_{3 \cdot 1} & Q_{3 \cdot 2} & Q_{3 \cdot 3}, \end{array}$$

so geht die Achse der Symmetrie im ersten Falle durch die quadratischen Koeffizienten $[aa]$, $[bb]$, $[cc]$, im zweiten Falle durch die Q mit quadratischem Index: $Q_{1 \cdot 1}$, $Q_{2 \cdot 2}$, $Q_{3 \cdot 3}$; die Koeffizienten der 1., 2., 3. Horizontalreihe stimmen der Reihe nach überein mit den Koeffizienten der 1., 2., 3. Vertikalreihe desselben Schemas.

Die Gleichungen für A, B, C nennt man die unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen. Sie lehrt die sämtlichen Hilfsgrößen und auch die Werte der Unbekannten kennen, wenn man setzt

$$P = [al], \qquad Q = [bl], \qquad R = [cl].$$

Denn alsdann geht das System (12) in die Normalgleichungen über, und es wird $A = x$, $B = y$, $C = z$.

Man hat also:

$$(18) \qquad \begin{aligned} x &= Q_{1\cdot 1}[al] + Q_{1\cdot 2}[bl] + Q_{1\cdot 3}[cl] \\ y &= Q_{2\cdot 1}[al] + Q_{2\cdot 2}[bl] + Q_{2\cdot 3}[cl] \\ z &= Q_{3\cdot 1}[al] + Q_{3\cdot 2}[bl] + Q_{3\cdot 3}[cl]. \end{aligned}$$

Wenn man nun die Summen auflöst und die Glieder mit derselben Beobachtungsgröße zusammenzieht, so folgt hiernach für die Koeffizienten der Ausdrücke (10), $x = [\alpha l]$, $y = [\beta l]$, $z = [\gamma l]$:

$$(19) \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 Q_{1\cdot 1} + b_1 Q_{1\cdot 2} + c_1 Q_{1\cdot 3} \\ \alpha_2 &= a_2 Q_{1\cdot 1} + b_2 Q_{1\cdot 2} + c_2 Q_{1\cdot 3} \\ \alpha_3 &= a_3 Q_{1\cdot 1} + b_3 Q_{1\cdot 2} + c_3 Q_{1\cdot 3} \\ \alpha_4 &= a_4 Q_{1\cdot 1} + b_4 Q_{1\cdot 2} + c_4 Q_{1\cdot 3}; \end{aligned}$$

$$(20) \qquad \begin{aligned} \beta_1 &= a_1 Q_{2\cdot 1} + b_1 Q_{2\cdot 2} + c_1 Q_{2\cdot 3} \\ \beta_2 &= a_2 Q_{2\cdot 1} + b_2 Q_{2\cdot 2} + c_2 Q_{2\cdot 3} \\ \beta_3 &= a_3 Q_{2\cdot 1} + b_3 Q_{2\cdot 2} + c_3 Q_{2\cdot 3} \\ \beta_4 &= a_4 Q_{2\cdot 1} + b_4 Q_{2\cdot 2} + c_4 Q_{2\cdot 3}; \end{aligned}$$

$$(21) \qquad \begin{aligned} \gamma_1 &= a_1 Q_{3\cdot 1} + b_1 Q_{3\cdot 2} + c_1 Q_{3\cdot 3} \\ \gamma_2 &= a_2 Q_{3\cdot 1} + b_2 Q_{3\cdot 2} + c_2 Q_{3\cdot 3} \\ \gamma_3 &= a_3 Q_{3\cdot 1} + b_3 Q_{3\cdot 2} + c_3 Q_{3\cdot 3} \\ \gamma_4 &= a_4 Q_{3\cdot 1} + b_4 Q_{3\cdot 2} + c_4 Q_{3\cdot 3}. \end{aligned}$$

Multipliziert man nun, um die Quadratsumme der α, β, γ zu erhalten, jede dieser Gleichungen mit ihrer linken Seite, so entsteht:

$$\begin{aligned} [\alpha\alpha] &= [a\alpha] Q_{1\cdot 1} + [b\alpha] Q_{1\cdot 2} + [c\alpha] Q_{1\cdot 3} \\ [\beta\beta] &= [a\beta] Q_{2\cdot 1} + [b\beta] Q_{2\cdot 2} + [c\beta] Q_{2\cdot 3} \\ [\gamma\gamma] &= [a\gamma] Q_{3\cdot 1} + [b\gamma] Q_{3\cdot 2} + [c\gamma] Q_{3\cdot 3}. \end{aligned}$$

Multipliziert man aber in (19) jede Gleichung mit dem in ihr vorkommenden α und addiert, so wird

$$[a\alpha] = [aa]\,Q_{1\cdot 1} + [ab]\,Q_{1\cdot 2} + [ac]\,Q_{1\cdot 3}\,,$$

und ebenso nach Multiplikation mit den entsprechenden b:

$$[b\alpha] = [ba]\,Q_{1\cdot 1} + [bb]\,Q_{1\cdot 2} + [bc]\,Q_{1\cdot 3}\,,$$

und ferner:

$$[c\alpha] = [ca]\,Q_{1\cdot 1} + [cb]\,Q_{1\cdot 2} + [cc]\,Q_{1\cdot 3}\,.$$

Die Vergleichung mit dem System (13) zeigt ohne weiteres:

(22) $$[a\alpha] = 1\,, \quad [b\alpha] = 0 = [c\alpha]\,.$$

Durch ein entsprechendes Verfahren mit den Gleichungen (20) und (21) erhält man mit Hilfe der Systeme (14) und (15):

(23) $$[b\beta] = 1\,, \quad [a\beta] = 0 = [c\beta]\,;$$

ferner

(24) $$[c\gamma] = 1\,, \quad [a\gamma] = 0 = [b\gamma]\,.$$

Damit gehen aber die Ausdrücke für die Quadratsummen der α, β, γ über in:

(25) $$[\alpha\alpha] = Q_{1\cdot 1}\,, \qquad [\beta\beta] = Q_{2\cdot 2}\,, \qquad [\gamma\gamma] = Q_{3\cdot 3}\,,$$

und es wird nach (11), wenn μ den mittlern Fehler einer Beobachtung bezeichnet,

(26) $$\mu_x = \mu\sqrt{Q_{1\cdot 1}}\,, \qquad \mu_y = \mu\sqrt{Q_{2\cdot 2}}\,, \qquad \mu_z = \mu\sqrt{Q_{3\cdot 3}}\,.$$

Es sind daher die Hilfsgrößen Q mit quadratischen Indices die reziproken Gewichte der Unbekannten, das Gewicht einer Beobachtung gleich 1 gesetzt.

Auch die Hilfsgrößen Q mit nicht quadratischen Indices stehen zu den Größen α, β, γ in einer einfachen Beziehung.

Multiplizieren wir in (19) jede Gleichung für eines der α mit demjenigen β, das denselben Index hat, so ergibt sich alsdann durch Addition

$$[\alpha\beta] = [a\beta]\,Q_{1\cdot 1} + [b\beta]\,Q_{1\cdot 2} + [c\beta]\,Q_{1\cdot 3}\,;$$

daher ist nach (23):

(27) $$[\alpha\beta] = Q_{1\cdot 2} = Q_{2\cdot 1}\,.$$

In derselben Weise findet man

(28) $$[\alpha\gamma] = Q_{1\cdot 3} = Q_{3\cdot 1}\,, \qquad [\beta\gamma] = Q_{2\cdot 3} = Q_{3\cdot 2}\,.$$

Es ist leicht zu erkennen, nach welchem Gesetze diese Beziehungen gebildet sind.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (22) bis (24) findet man aus (3) mit Hilfe von (10) noch die folgenden Beziehungen:

$$(29)\qquad [\lambda\alpha] = 0\,, \quad [\lambda\beta] = 0\,, \quad [\lambda\gamma] = 0\,.$$

Beispiel. Fortsetzung zu Seite 47. Die Normalgleichungen (6) sind:

$$(12)\qquad \begin{array}{rrrrcl} 3\xi & -\ \eta & -\ \zeta & \cdot & = & -0{,}25 \\ -\ \xi & +\ 3\eta & \cdot & -\ \tau & = & -0{,}28 \\ -\ \xi & \cdot & +\ 3\zeta & -\ \tau & = & -0{,}40 \\ \cdot & -\ \eta & -\ \zeta & +\ 3\tau & = & +0{,}93\,. \end{array}$$

Um die Koeffizientensymmetrie noch deutlicher hervortreten zu lassen, schreiben wir das Schema der Koeffizienten hin:

$$\begin{array}{rrrr} +3 & -1 & -1 & \cdot \\ -1 & +3 & \cdot & -1 \\ -1 & \cdot & +3 & -1 \\ \cdot & -1 & -1 & +3\,. \end{array}$$

Wir lösen nun unbestimmt auf, d. h. wir lösen die folgenden Gleichungen auf:

$$(13)\qquad \begin{array}{rrrrcl} 3A & -\ B & -\ C & \cdot & = & P \\ -\ A & +\ 3B & \cdot & -\ D & = & Q \\ -\ A & \cdot & +\ 3C & -\ D & = & R \\ \cdot & -\ B & -\ C & +\ 3D & = & S\,. \end{array}$$

Addiert man die Summe dieser Gleichungen

$$A + B + C + D = P + Q + R + S$$

zu jeder Gleichung, so geht (13) über in:

$$\begin{array}{rrrrcl} 4A & \cdot & \cdot & +\ D & = & 2P + Q + R + S \\ \cdot & 4B & +\ C & \cdot & = & P + 2Q + R + S \\ \cdot & B & +\ 4C & \cdot & = & P + Q + 2R + S \\ A & \cdot & \cdot & +\ 4D & = & P + Q + R + 2S. \end{array}$$

Aus der ersten und vierten und aus der zweiten und dritten dieser Gleichungen wird weiter erhalten:

$$A + D = \frac{1}{5}(3P + 2Q + 2R + 3S)$$

$$A - D = \frac{1}{3}(\ P \quad \cdot \quad \cdot \quad - S)$$

$$B + C = \frac{1}{5}(2P + 3Q + 3R + 2S)$$

$$B - C = \frac{1}{3}(\ \cdot \quad Q - R \quad \cdot\ )$$

und hieraus:

$$(14)\qquad \begin{aligned} A &= \frac{7}{15}P + \frac{3}{15}Q + \frac{3}{15}R + \frac{2}{15}S \\ B &= \frac{3}{15}P + \frac{7}{15}Q + \frac{2}{15}R + \frac{3}{15}S \\ C &= \frac{3}{15}P + \frac{2}{15}Q + \frac{7}{15}R + \frac{3}{15}S \\ D &= \frac{2}{15}P + \frac{3}{15}Q + \frac{3}{15}R + \frac{7}{15}S. \end{aligned}$$

Die symmetrische Anordnung der Koeffizienten ist deutlich ersichtlich. Dem Schema der Koeffizienten

$$\begin{array}{cccc} +\frac{7}{15} & +\frac{3}{15} & +\frac{3}{15} & +\frac{2}{15} \\ +\frac{3}{15} & +\frac{7}{15} & +\frac{2}{15} & +\frac{3}{15} \\ +\frac{3}{15} & +\frac{2}{15} & +\frac{7}{15} & +\frac{3}{15} \\ +\frac{2}{15} & +\frac{3}{15} & +\frac{3}{15} & +\frac{7}{15} \end{array}$$

entspricht das allgemeine Schema:

$$\begin{array}{cccc} Q_{1\cdot1} & Q_{1\cdot2} & Q_{1\cdot3} & Q_{1\cdot4} \\ Q_{2\cdot1} & Q_{2\cdot2} & Q_{2\cdot3} & Q_{2\cdot4} \\ Q_{3\cdot1} & Q_{3\cdot2} & Q_{3\cdot3} & Q_{3\cdot4} \\ Q_{4\cdot1} & Q_{4\cdot2} & Q_{4\cdot3} & Q_{4\cdot4} \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{cccc} [\alpha\alpha] & [\alpha\beta] & [\alpha\gamma] & [\alpha\delta] \\ [\alpha\beta] & [\beta\beta] & [\beta\gamma] & [\beta\delta] \\ [\alpha\gamma] & [\beta\gamma] & [\gamma\gamma] & [\gamma\delta] \\ [\alpha\delta] & [\beta\delta] & [\gamma\delta] & [\delta\delta]. \end{array}$$

Setzt man nun

$$(15)\quad P = -0{,}25, \quad Q = -0{,}28, \quad R = -0{,}40, \quad S = +0{,}93,$$

so erhält man die Werte der Unbekannten: dabei dient die hier zufällige Beziehung, daß die Summe dieser vier Werte null ist, welche ihren Grund in der Verteilung der Winkelmessungen über die fünf Objekte hat, zur Erleichterung oder zur Kontrolle der Rechnung.

Man hat jetzt für ξ:

$$\xi = \frac{1}{15}\{7(-0{,}25) + 3(-0{,}28) + 3(-0{,}40) + 2(0{,}93)\}$$

oder auch

$$\xi = \frac{1}{15}\{4(-0{,}25) - 0{,}93\} = -0{,}129.$$

Ferner wird wie früher:

(16) $\eta = -0{,}048, \quad \zeta = -0{,}088, \quad \tau = +0{,}265.$

Das reziproke Gewicht jeder der vier Unbekannten ist $\frac{7}{15}$, mithin ist

(17) das Gewicht für ξ, η, ζ, τ gleich $\frac{15}{7}$

und

(17*) der mittlere Fehler für ξ, η, ζ, τ gleich $\mu\sqrt{\frac{7}{15}}$.

Nach S. 47 ist $\mu = \pm\sqrt{0{,}1611}$; daher ist

(18) $$\mu_\xi = \mu_\eta = \mu_\zeta = \mu_\tau = \pm\sqrt{\frac{0{,}1611\cdot 7}{15}} = \pm 0''{,}274.$$

Wenn es ein Interesse hat, zu wissen, in welcher Weise jede der Beobachtungen auf die Berechnung der Unbekannten Einfluß gehabt hat, so läßt sich auch das angeben. Man hat z. B. für ξ:

$$\xi = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \alpha_4 l_4 + \alpha_5 l_5 + \alpha_6 l_6 + \alpha_7 l_7 + \alpha_8 l_8$$

und hierzu mit Rücksicht auf die Fehlergleichungen (5), S. 44:

(19) $$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \quad\cdot\quad\quad\cdot\quad + Q_{1\cdot3} \quad\cdot\quad = +\frac{3}{15}\\
\alpha_2 &= \quad\cdot\quad\quad\cdot\quad\quad\cdot\quad + Q_{1\cdot4} = +\frac{2}{15}\\
\alpha_3 &= \quad\cdot\quad\quad\cdot\quad - Q_{1\cdot3} + Q_{1\cdot4} = -\frac{1}{15}\\
\alpha_4 &= \quad\cdot\quad - Q_{1\cdot2} \quad\cdot\quad + Q_{1\cdot4} = -\frac{1}{15}\\
\alpha_5 &= \quad\cdot\quad - Q_{1\cdot2} \quad\cdot\quad\quad\cdot\quad = +\frac{3}{15}\\
\alpha_6 &= -Q_{1\cdot1} \quad\cdot\quad + Q_{1\cdot3} \quad\cdot\quad = -\frac{4}{15}\\
\alpha_7 &= +Q_{1\cdot1} \quad\cdot\quad\quad\cdot\quad\quad\cdot\quad = +\frac{7}{15}\\
\alpha_8 &= -Q_{1\cdot1} + Q_{1\cdot2} \quad\cdot\quad\quad\cdot\quad = -\frac{4}{15}.
\end{aligned}$$

Multipliziert man jede Fehlergleichung mit ihrem entsprechenden α, so ergibt sich:

$$[\lambda\alpha] = \frac{1{,}93}{15} + \xi,$$

also $\xi = -0{,}129$, da $[\lambda\alpha]$ null sein muß. Dieser Wert stimmt mit dem vorher gefundenen überein.

In der Tat wird auch $[\lambda\alpha]$ gleich null, wenn man für λ die Werte aus (9), S. 46, nimmt; alsdann ist:

$$[\lambda\alpha] = \frac{1}{15}(-0{,}264 + 0{,}530 - 0{,}213 + 0{,}477 - 0{,}144$$
$$- 1{,}204 - 0{,}903 + 1{,}716) = -0{,}0003,$$

also hinreichend genau gleich null mit Rücksicht auf die unvermeidliche Unsicherheit der letzten Stelle.

§ 2. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen von gleicher Genauigkeit unter der Bedingung, daß die mittlern Fehler der Unbekannten möglichst klein werden.

1. Berechnung der Werte der Unbekannten, welche kleinste mittlere Fehler geben. Im Vorhergehenden sind die Beobachtungen so ausgeglichen, daß die Quadratsumme ihrer Verbesserungen ein Minimum wurde. Jetzt soll die Ausgleichung noch einmal vorgenommen werden unter der Bedingung, daß der mittlere Fehler jeder Unbekannten ein Minimum werde.

Sind ε die wahren Beobachtungsfehler und $X, Y, Z, \ldots$ die wahren Werte der m Unbekannten, so ist

$$(1)\qquad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= -l_1 + a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + \cdots \\ \varepsilon_2 &= -l_2 + a_2 X + b_2 Y + c_2 Z + \cdots \\ &\quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \varepsilon_n &= -l_n + a_n X + b_n Y + c_n Z + \cdots. \end{aligned}$$

Wir denken uns diese Gleichungen der Reihe nach mit den vorläufig unbestimmten Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ multipliziert und alsdann alles addiert. Das gibt

$$[\alpha\varepsilon] = -[\alpha l] + [a\alpha]X + [b\alpha]Y + [c\alpha]Z + \cdots.$$

Unterwirft man nun die n Werte α den m Bedingungen:

$$(2)\qquad [a\alpha] = 1,\ [b\alpha] = [c\alpha] = \cdots = 0,$$

so wird

$$(3)\qquad X = [\alpha l] + [\alpha\varepsilon].\text{*)}$$

Da zwischen den α nur m lineare Gleichungen angenommen wurden, so sind sie noch nicht völlig bestimmt und $n-m$ derselben immer ganz beliebig.

Setzen wir nun für X den Wert

$$(4)\qquad x = [\alpha l],$$

so begehen wir den Fehler (im Sinne einer Verbesserung):

$$(5)\qquad X - x = [\alpha\varepsilon].$$

Unter allen Annahmen über die α in $[\alpha l]$ ist diejenige die beste, für die der mittlere Wert von $[\alpha\varepsilon]^2$ am kleinsten ist. Nun ist $[\alpha\varepsilon]$ nach (3) nichts anderes als die wahre Verbesserung oder der wahre Fehler von $[\alpha l]$; das mittlere Quadrat von $[\alpha\varepsilon]$ läßt sich daher berechnen als mittleres Fehlerquadrat der Funktion

$$\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \cdots + \alpha_n l_n$$

der Beobachtungswerte l mit den mittlern Fehlern μ (wobei wir nach S. 72 auf die speziellen Werte der l am besten keine Rücksicht nehmen). Nach S. 55/56 wird der durchschnittliche Wert des Quadrates von $[\alpha\varepsilon]$ gleich

$$\mu^2[\alpha\alpha],$$

also ist der mittlere zu befürchtende Fehler in x, wenn x nach (4) berechnet ist, gleich

$$(6)\qquad \mu_x = \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}.$$

*) Chr. A. Vogler erörtert in der Zeitschr. f. Vermessungsw., 1904, Heft 14 u. 21 die Frage, ob man sich auf lineare Kombinationen der Beobachtungen beschränken solle. Gauß geht ohne weiteres über diese Frage hinweg. In der Tat gestattet die Art und Weise der Ableitung von μ^2_x in Strenge nur die Anwendung auf lineare Ausdrücke. Würde man für X einen andern funktionalen Zusammenhang mit den l voraussetzen, so würde doch mittels Entwicklung von X nach dem Taylorschen Satze wieder (5) herauskommen und damit (6), wobei die α nun die ersten Differentialquotienten von X nach den l sind, die höheren Differentialquotienten aber vernachlässigt werden müssen. Bei gleich genauen direkten Beobachtungen geben z. B. die Annahmen $x = [l]:n$ und $\sqrt[n]{l_1 l_2 \ldots l_n}$ dieselben m. Fqu., da die Differentialquotienten nach l in beiden Fällen $1/n$ sind; aber im 2. Falle ist die Rechnung des m. Fqu. weniger streng wie im 1. Falle, der sich außerdem durch seine Einfachheit empfiehlt.

Die Gültigkeitsbedingungen dieser Formel sind dieselben wie für (11), S. 103.

Ein Minimum für μ_x entsteht, wenn die α die Bedingung

(7) $$[\alpha\alpha] \text{ ein Minimum}$$

erfüllen; denn μ, der andere Faktor in dem Produkt für μ_x, Gl. (6), ist bei gegebenen Beobachtungen eine feste Größe.

Sollen die α aber die Bedingung (7) mit Rücksicht auf die Gleichungen (2) erfüllen, so müssen die partiellen Differentialquotienten des Ausdrucks

$$[\alpha\alpha] - 2k_1([a\alpha]-1) - 2k_2[b\alpha] - 2k_3[c\alpha] - \cdots$$

nach den n verschiedenen α einzeln gleich null werden. Die k sind hierbei m zu bestimmende Hilfsgrößen (Lagrangesche Multiplikatoren).

Durch Herstellung des partiellen Differentialquotienten nach α_1 erhält man

$$2\alpha_1 - 2k_1 a_1 - 2k_2 b_1 - 2k_3 c_1 - \cdots = 0$$

oder

$$\alpha_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \cdots$$

und ebenso

(8) $$\begin{aligned} \alpha_2 &= a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \cdots \\ \alpha_3 &= a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 + \cdots \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_n &= a_n k_1 + b_n k_2 + c_n k_3 + \cdots. \end{aligned}$$

Hierdurch werden die sämtlichen α in den m Hilfsgrößen k ausgedrückt.*) Diese aber findet man, wenn man die α in die

*) In bezug auf den Nachweis der Richtigkeit vorstehender Ableitung der Gleichungen (8) möge folgendes bemerkt werden.

Aus (7) folgt als Bedingung des Minimums

$$[\alpha_i d\alpha_i] = 0,$$

wobei die $d\alpha_i$ zufolge der Gleichungen (2) den Bedingungen genügen müssen:

$$[a_i d\alpha_i] = [b_i d\alpha_i] = [c_i d\alpha_i] = \cdots = 0.$$

Solcher Bedingungen sind m vorhanden, man kann daher m der $d\alpha_i$ damit aus $[\alpha_i d\alpha_i]$ eliminieren. Dies kann dadurch geschehen, daß man setzt

$$[\alpha_i d\alpha_i] - k_1[a_i d\alpha_i] - k_2[b_i d\alpha_i] - k_3[c_i d\alpha_i] - \cdots = 0$$

oder

$$[(\alpha_i - a_i k_1 - b_i k_2 - c_i k_3 - \cdots) d\alpha_i] = 0.$$

Gleichungen (2) einsetzt, wodurch sich m Gleichungen zwischen den k allein ergeben. Es wird damit

$$(9)\qquad \begin{aligned} [aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + \cdots &= 1 \\ [ab]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 + \cdots &= 0 \\ [ac]k_1 + [bc]k_2 + [cc]k_3 + \cdots &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad &\cdot, \end{aligned}$$

woraus die k und darauf durch Substitution ihrer Werte in (8) auch die α bestimmt werden können.

Vergleicht man nun die Gleichungen (9) mit den Gleichungen (13), S. 104, so ist sofort ersichtlich, daß die $k_1, k_2, k_3, \cdots$ der Reihe nach mit $Q_{1\cdot 1}, Q_{1\cdot 2}, Q_{1\cdot 3}, \ldots$ identisch sind; nach (8) wird daher

$$(10)\qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 Q_{1\cdot 1} + b_1 Q_{1\cdot 2} + c_1 Q_{1\cdot 3} + \cdots \\ \alpha_2 &= a_2 Q_{1\cdot 1} + b_2 Q_{1\cdot 2} + c_2 Q_{1\cdot 3} + \cdots \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_n &= a_n Q_{1\cdot 1} + b_n Q_{1\cdot 2} + c_n Q_{1\cdot 3} + \cdots. \end{aligned}$$

Eine Vergleichung mit (19), S. 106, zeigt nun, daß die jetzt eingeführten Hilfsgrößen α identisch sind mit denjenigen α, welche sich dort ergeben haben. Wir ersehen daraus, daß der Wert der Unbekannten x unter der Bedingung „μ_x ein Minimum“ völlig übereinstimmend mit dem Werte von x erhalten wird, den die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate liefert.

Es ist nicht schwer zu erkennen, daß in derselben Weise für jede andere der m Unbekannten sich dasselbe beweisen läßt; ja es muß dies auch für jede lineare Funktion F der Unbekannten gelten, da man immer eine der Unbekannten $x, y, z, \ldots$ mittels F aus den Fehlergleichungen eliminieren kann in der Weise, daß z. B. an Stelle der Unbekannten x die Unbekannte F tritt. Endlich gilt dies auch für beliebige Funktionen, insoweit man diese nach dem Taylorschen Satze entwickeln kann und sich auf die Glieder bis einschließlich der ersten Potenzen der Änderungen von $x, y, z, \ldots$ beschränken darf.

Die $k_1 \ldots k_m$ bestimmt man so, daß m der $d\alpha$ herausfallen, daß also die Faktoren von m der $d\alpha$ null werden. Die übrigen $d\alpha$ sind dann willkürlich und ihre Faktoren müssen also auch gleich null sein. So gelangt man wieder zu (8). Die oben benutzte Rechnungsweise dient lediglich zur Abkürzung.

Da die Gewichte den mittlern Fehlerquadraten umgekehrt proportional sind, so können wir auch sagen: die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ergibt größte Gewichte für die Unbekannten.

Zunächst gilt dies nur für vermittelnde Beobachtungen; es gilt aber der Satz darum auch allgemein, weil man jede Ausgleichungsaufgabe auf die Form vermittelnder Beobachtungen bringen kann.

II. Verschiedene Bedeutung der Lösungen nach der Methode der kleinsten Quadrate. Läßt sich nachweisen, daß das Fehlervorkommen der Gaußschen Form $\varphi(\varepsilon) = ce^{-h^2\varepsilon^2}$ entspricht, so erhalten wir nach § 4, S. 97, durch die Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten. Zugleich besitzen diese Werte die größten Gewichte bzw. die kleinsten mittlern Fehler. Entspricht aber das Fehlervorkommen dem Gaußschen Fehlergesetze nicht, so haben wir nicht mehr die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten, dagegen in ihrer Bestimmung immer noch die kleinsten mittlern Fehler, solange entweder die Bedingung $\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$ erfüllt wird, d. h. positive und negative Fehler in gleicher Größe gleich häufig eintreten, oder doch der konstante Teil k der Beobachtungsfehler ε null ist bzw. als Unbekannte mit bestimmt werden kann, so daß die Reste ε' der Gaußschen Bedingung unterworfen sind, S. 16/17.

Sind auch diese Bedingungen nicht erfüllt oder handelt es sich nicht allein um zufällige Fehler, so kann man von einer Schätzung des mittlern Fehlers überhaupt nicht mehr reden, und die Ausgleichung, welche die Summe der Fehlerquadrate zu einem Minimum macht, gibt dann weder wahrscheinlichste Werte noch kleinste mittlere Fehler der Unbekannten. Sie hat alsdann nur die Bedeutung eines einfachen und stets auf praktisch durchführbare Rechnungen führenden Verfahrens, um die Beobachtungen durch kleine Verbesserungen in Einklang zu bringen, also insbesondere bei vermittelnden Beobachtungen: die Funktion $ax + by + cz + \cdots$ für die gegebenen Systeme der Koeffizienten $a_1, b_1, c_1, \ldots; a_2, b_2, c_2, \ldots$ usw. den beobachteten Funktionswerten möglichst eng anzuschließen.

Unerörtert können wir die Frage lassen, ob auch noch nach der Methode der kleinsten Quadrate zu verfahren ist, wenn das Fehlergesetz bekannt ist und von der Gaußschen Form abweicht, oder ob dann etwa wahrscheinlichste Werte herzuleiten seien. Denn in der Regel wird man auch dann die Methode der kleinsten Quadrate anwenden, weil die Ableitung wahrscheinlichster Werte zu verwickelt ist und auf nicht lineare Gleichungen für die Unbekannten hinführen würde (Laplace).

Für bemerkenswerte Ausnahmefälle verweisen wir auf die Literatur.*)

III. Geschichtliche Notiz. Wie man vom arithmetischen Mittel, dem Ausgleichungsprinzip für gleich genaue direkte Beobachtungen, zur Methode der kleinsten Fehlerquadrate als einem allgemein anwendbaren Ausgleichungsprinzip gelangen kann (vgl. § 4, S. 94 u. f.), hat Gauß in der „Theoria motus corporum coelestium" 1809 gezeigt, nachdem er schon seit 1794 diese Methode für seine Rechnungen in Anwendung gebracht

---

*) Über den einfachen Fall gleich genauer direkter Beobachtungen bei Fehlergesetzen verschiedener Form vgl. P. Pizzetti: Sur le calcul du résultat d'un système d'observations directes (Mém. de la Soc. royale des sciences de Liège, 2e série, t. XV, 1887).

D'Ocagne behandelt in der Note: Sur une application de la théorie de la probabilité des erreurs aux nivellements de haute précision (C. R. 1895, 1er sem.) den Fall, daß nur Fehler mit demselben Vorzeichen auftreten, die aber das Gaußsche Gesetz befolgen.

In der Photometrie wendet man seit langer Zeit das arithmetische Mittel der Logarithmen der mehrfach beobachteten Helligkeiten als plausibelsten Wert an, nach Maßgabe des psychophysischen Grundgesetzes von Fechner. Vgl. Seeliger, Astr. Nachr. Bd. 132 (1893), Nr. 3158, Sp. 209.

T. N. Thiele benutzte 1866 als wahrscheinlichsten Wert mehrfacher Schätzungen von Doppelsterndistanzen das geometrische Mittel, was dem arithmetischen Mittel der Logarithmen entspricht. Vgl. Undersøgelse of Omløbsbevægelsen i Dobbelstjernesystemet Gamma Virginis. Kjøbenhavn 1866, S. 8.

Vgl. hierzu auch die Bemerkungen von Fechner über die Beobachtungsfehler in dem Falle, daß sie nahezu von der Ordnung der zu messenden Größen selbst sind. G. Th. Fechner: Über den Ausgangswert der kleinsten Abweichungssumme usw. (Bd. XI der Abh. d. math.-phys. Klasse der Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch.) Leipzig 1874, S. 14.

und das Fehlergesetz abgeleitet hatte*) (Werke, VI, S. 296 u. VIII, S. 136 u. f.). 1821 und 1826 veröffentlichte er in der „Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae" diejenige Begründung der Methode der kleinsten Quadrate, welcher wir im laufenden Paragraphen gefolgt sind. Nach brieflichen Äußerungen von Gauß gegen Schumacher gab er dieser letztern Ableitung vor der ältern entschieden den Vorzug.**) In der Tat ist die jüngere Ableitung weit allgemeiner als die ältere; sie zeigt die Anwendbarkeit der Methode der kleinsten Quadrate für jedes Fehlergesetz, bei welchem der Durchschnittswert der Fehler null ist, und sie ist in ihrer Begründung nur willkürlich durch die Art der Schätzung der Genauigkeit mittels des mittlern zu befürchtenden Fehlers. Die ältere Ableitung dagegen beschränkt sich auf eine bestimmte Form des Fehlergesetzes. Über die Bedeutung des Gaußschen m. F. bei der Genauigkeitsschätzung der Ausgleichungsresultate haben wir uns S. 72/73 für den einfachen Fall des arithmetischen Mittels eingehender verbreitet.

Selbständig wurde die Methode der kleinsten Quadrate auch von Legendre und Adrain gefunden. Legendre leitete 1806 in einem Werke über die Bestimmung von Kometenbahnen das Verfahren empirisch ab und gab ihm den Namen „Methode der kleinsten Quadrate". Er weist insbesondere auch darauf hin, daß der Schwerpunkt mehrerer Punkte eine mittlere Lage im Sinne dieser Methode darstellt. Adrain entwickelte 1808 das Fehlergesetz III (das Gaußsche Exponentialgesetz) theoretisch aus der Annahme, daß der Gesamtfehler einer Linie am wahrscheinlichsten proportional auf die Teilstrecken zu verteilen ist.***)

Die „Théorie analytique des probabilités" von Laplace (1812) enthält eine Ableitung der Methode der kleinsten Quadrate,

*) Die Angabe 1797 für die Ableitung des Fehlergesetzes in IV, S. 98, ist wohl irrig.

**) Briefwechsel zwischen C. F. Gauß und H. C. Schumacher, 4. Bd., Altona 1862, Brief v. 25. Novbr. 1844, S. 371, und 5. Bd., Altona 1863, Brief vom 27. Dezbr. 1846, S. 272.

***) Cleveland Abbe. A historical note on the method of least squares. (Americ. Jour. of Science and Arts, I, 1871, S. 411—415.)

E. Hammer. Beitrag zur Geschichte der Ausgleichungsrechnung. (Zeitschrift f. Vermessungswesen, Bd. XXIX 1900, S. 613—628.)

welche von der 1821 von Gauß gegebenen anfangs nur in der Schätzung des Fehlers $X - x$ oder $[\alpha\varepsilon]$, Gl. (5) S. 112, verschieden ist. Laplace berechnet unter Annahme eines beliebigen Fehlergesetzes $\varphi(\varepsilon)$ die Wahrscheinlichkeit, daß $X - x$ innerhalb gegebener Grenzen liegt und bestimmt darnach die α so, daß diese Wahrscheinlichkeit möglichst groß werde. Unter der Voraussetzung einer ins Unendliche wachsenden Anzahl Beobachtungen stellt sich heraus, daß unabhängig von einer Annahme über das Fehlergesetz (welches nur die Bedingung $\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$ zu erfüllen hat) das günstigste System der α mit dem von der Methode der kleinsten Quadrate geforderten übereinstimmt. Beschränkend ist hier die Voraussetzung sehr vieler Beobachtungen, die in der Regel nicht zutrifft.

Laplace betrachtet es als einen zugunsten der Methode der kleinsten Quadrate sprechenden Umstand, daß sie nach seinen Untersuchungen die größten Fehler λ (absolut genommen) sehr nahe zu einem Minimum mache.

In Deutschland hat sich die Methode der kleinsten Quadrate rasch verbreitet. Außer den grundlegenden Arbeiten von Gauß trugen dazu die Schriften von Bessel, Hansen u. a., sowie die Lehrbücher von Hagen und Gerling bei.*) Zu diesen sind namentlich seit Einführung der Methode der kleinsten Quadrate in die Landmessung zahlreiche weitere Lehrbücher getreten. Im allgemeinen findet die jüngere Gaußche Darstellung immer mehr Freunde. Henke benutzt zur Begründung die Forderung des möglichst engen Anschlusses.**)

Andrerseits ist der Standpunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung noch mehr hervorgehoben worden in den Lehrbüchern von Wittstein, Dienger und Zachariae, wo die Unbekannten aus der Bedingung der wahrscheinlichsten Hypothese hergeleitet

---

*) G. Hagen. Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1837 (3. Auflage 1882).

Christian Ludwig Gerling. Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie oder die Methode der kleinsten Quadrate usw. Hamburg u. Gotha 1843.

**) R. Henke. Über die Methode der kleinsten Quadrate. Leipzig 1868 (2. Auflage 1894). (Hier findet man auch eine kurze Darstellung der zahlreichen Bemühungen zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate.)

werden.*) Zachariae hebt hervor, daß für die von der Methode der kleinsten Quadrate gegebenen Werte der Unbekannten nicht nur die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der Beobachtungsfehler ein Maximum wird (Gauß), sondern auch die endliche Wahrscheinlichkeit, daß die Unbekannten innerhalb von Grenzwerten liegen, die man in beliebigem endlichen Abstande voneinander wählen kann (Andrae).**)

Über die zahlreichen Bestrebungen zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate sind die Werke von Czuber nachzusehen.***)

---

*) Th. Wittstein. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung von L. Navier. Deutsch herausgegeben und mit Anmerkungen und vier Abhandlungen über die Methode der kleinsten Quadrate vermehrt. 2. Bd. Hannover 1849.

J. Dienger. Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen. Braunschweig 1857.

G. Zachariae. De mindste Kvadraters Methode. Nyborg 1871 (2. Auflage, Kjøbenhavn 1887).

**) Ist bei gleich genauen direkten Beobachtungen x eine Hypothese über den Wert der Unbekannten, so ist ihre Wahrscheinlichkeit proportional (vgl. S. 95, 97):

$$e^{-h^2[(l-x)^2]}.$$

Die Wahrscheinlicheit, daß der Fehler der Bestimmung $x = [l] : n$ zwischen Δ und $\Delta + d\Delta$ liege, ist daher proportional

$$e^{-nh^2\Delta^2}d\Delta.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß er zwischen a und b liege, ist also proportional

$$\int_a^b e^{-nh^2\Delta^2}d\Delta.$$

Ist $b = a + 2c$, wo c eine Konstante ist, so ist bei veränderlichem a das Integral ein Maximum für $a = -c$, $b = +c$, wie man besonders leicht an der Hand der Flächenbedeutung des Integrals mittels einer Figur erkennt. Die Wahrscheinlichkeit ist also am größten, wenn man das konstante Intervall $2c$ symmetrisch zu $\Delta = 0$, d. h. dem arithmetischen Mittel der Beobachtungen, nimmt.

***) E. Czuber. Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig 1891.

Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung VII. Bd. II. Heft. Leipzig 1899. (Hier ist auch eine nach Autoren geordnete Übersicht der Literatur gegeben.)

Die Abhandlungen von C. F. Gauß sind 1887 in einem Sammelbande in deutscher Sprache erschienen, nachdem bereits 1855 eine französische Ausgabe von Bertrand besorgt worden war.*)

Einen ganz eigenartigen Standpunkt nimmt Thiele ein; näheres darüber wird im § 11 dieses Kapitels mitgeteilt werden.**)

Über die Methoden, welche Laplace u. a. vor Erfindung der Methode der kleinsten Quadrate zur Ausgleichung anwandten, vgl. man Mec. cél., tome II, S. 126 u. f.***) Eine dieser Methoden, die schon Boscovich benutzte, wird im 9. Kap. § 2 bei anderer Gelegenheit behandelt werden.

§ 3. Weitere Entwicklung der Formeln nach dem Algorithmus von C. F. Gauß.

1. Auflösung der Normalgleichungen nach einem von Gauß eingeführten Verfahren. Im vorhergehenden ist das Nötigste gegeben, was die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen gleicher Genauigkeit anbetrifft. Es ist nun noch näher darauf einzugehen, wie die Rechnung bei der Auflösung der Normalgleichungen nach den Unbekannten und bei der Ermittelung der Gewichte derselben möglichst einfach zu gestalten ist.

---

*) A. Börsch u. P. Simon. Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate von Carl Friedrich Gauß. In deutscher Sprache herausgegeben. Berlin 1887.

J. F. Bertrand. Méthode des moindres carrés. Mémoires sur la combinaison des observations. Par Ch. Fr. Gauß. Traduits en francais et publiés avec l'autorisation de l'auteur. Paris 1855.

**) T. N. Thiele, Director of the Copenhague Observatory. Theory of Observations. London 1903. (1897 erschien als Vorläufer in dänischer Sprache: Elementær Jagttagelseslære, Kjobenhavn.)

***) Zur Ergänzung sei bemerkt, daß Lamont im Meteorol. Wochenbericht Nr. 203—210, 1869, es als Mangel der M. d. kl. Qu. hinstellt, daß nicht notwendig $[\lambda] = 0$ wird. In der Tat kann dies bei wenigen Beobachtungen recht auffällig werden; ist z. B. $l_1 + \lambda_1 = x$ u. $l_2 + \lambda_2 = 10x$, so ist nicht $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, sondern $\lambda_1 + 10\lambda_2 = 0$. Indessen kommt man einerseits mit der Bedingung $[\lambda] = 0$ als Ausgleichungsprinzip nicht aus und andrerseits erzielt man doch in jedem Falle mit der M. d. kl. Qu. größte Gewichte!

Die sogenannte unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen in der Form wie in § 1, S. 105, ist oftmals von Vorteil, wenn die Koeffizienten runde Zahlen mit wenig Ziffern sind, wie z. B. in dem Beispiel auf S. 108, sowie auch manchmal dann, wenn ein größerer Teil der Koeffizienten null ist.

Man kann sich dabei irgend eines Eliminationsverfahrens, in einzelnen Fällen auch mit Nutzen der Determinanten bedienen. Im allgemeinen aber ist es bequemer, in folgender Weise vorzugehen.

Sind die Normalgleichungen für 4 Unbekannte

$$(1)\qquad \begin{aligned}
[aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t &= [al]\\
[ab]x + [bb]y + [bc]z + [bd]t &= [bl]\\
[ac]x + [bc]y + [cc]z + [cd]t &= [cl]\\
[ad]x + [bd]y + [cd]z + [dd]t &= [dl],
\end{aligned}$$

so gibt die erste Gleichung:

$$(2)\qquad x + \frac{[ab]}{[aa]}y + \frac{[ac]}{[aa]}z + \frac{[ad]}{[aa]}t = \frac{[al]}{[aa]},$$

oder symbolisch

$$(2^*)\qquad x + \alpha_2'y + \alpha_3'z + \alpha_4't = \chi_1.$$

Multipliziert man die erste Gleichung (1) mit $\alpha_2' = [ab]:[aa]$ und zieht das Ergebnis von der zweiten Gleichung (1) ab, so folgt

$$\left\{[bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]}\right\}y + \left\{[bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]}\right\}z + \left\{[bd] - \frac{[ab][ad]}{[aa]}\right\}t$$
$$= \left\{[bl] - \frac{[ab][al]}{[aa]}\right\}.$$

Dasselbe ergibt sich, wenn die Gl. (2) mit $[ab]$ multipliziert und von der zweiten Gleichung (1) abgezogen wird.

Ähnlich geben die dritte und vierte der Gleichungen (1):

$$\left\{[bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]}\right\}y + \left\{[cc] - \frac{[ac][ac]}{[aa]}\right\}z + \left\{[cd] - \frac{[ac][ad]}{[aa]}\right\}t$$
$$= \left\{[cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]}\right\}$$

$$\left\{[bd] - \frac{[ab][ad]}{[aa]}\right\}y + \left\{[cd] - \frac{[ac][ad]}{[aa]}\right\}z + \left\{[dd] - \frac{[ad][ad]}{[aa]}\right\}t$$
$$= \left\{[dl] - \frac{[ad][al]}{[aa]}\right\}.$$

Diese drei Gleichungen schreibt man abgekürzt nach einer von Gauß eingeführten Bezeichnungsweise wie folgt:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
[bb\cdot 1]y+[bc\cdot 1]z+[bd\cdot 1]t&=[bl\cdot 1]\\
[bc\cdot 1]y+[cc\cdot 1]z+[cd\cdot 1]t&=[cl\cdot 1]\\
[bd\cdot 1]y+[cd\cdot 1]z+[dd\cdot 1]t&=[dl\cdot 1],
\end{aligned}
$$

wobei also die Koeffizienten aus denen des Systems (1) nach den Formeln berechnet werden:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
[bb\cdot 1]&=[bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}=[bb]-\alpha_2'[ab]\\
[bc\,.\,1]&=[bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}=[bc]-\alpha_2'[ac]\\
[bd\cdot 1]&=[bd]-\frac{[ab][ad]}{[aa]}=[bd]-\alpha_2'[ad]\\
[bl\cdot 1]&=[bl]-\frac{[ab][al]}{[aa]}=[bl]-\alpha_2'[al]\\
[cc\cdot 1]&=[cc]-\frac{[ac][ac]}{[aa]}=[cc]-\alpha_3'[ac]\\
[cd\cdot 1]&=[cd]-\frac{[ac][ad]}{[aa]}=[cd]-\alpha_3'[ad]\\
[cl\cdot 1]&=[cl]-\frac{[ac][al]}{[aa]}=[cl]-\alpha_3'[al]\\
[dd\cdot 1]&=[dd]-\frac{[ad][ad]}{[aa]}=[dd]-\alpha_4'[ad]\\
[dl\cdot 1]&=[dl]-\frac{[ad][al]}{[aa]}=[dl]-\alpha_4'[al].
\end{aligned}
$$

Für die Auflösung bei gegebenen numerischen Werten bedarf man übrigens der Formeln (4) nicht; man kommt dann von selbst auf die Gleichungen (3) durch Elimination von x in der angegebenen Weise. Aus den allgemeinen Formeln ist ersichtlich, daß das System (3) sich wie ein Normalgleichungssystem gestaltet, denn es herrscht in ihm dieselbe Koeffizientensymmetrie.

Ferner ist leicht nachzuweisen, daß wie bei Normalgleichungen jeder Koeffizient in der Diagonale eine Summe von Quadraten ist. Es hängt dies damit zusammen, daß die

Gleichungen (3) wirkliche Normalgleichungen sind, die den Fehlergleichungen entsprechen, nachdem man sie von x mittels (2*) befreit hat. Sind die ursprünglichen Fehlergleichungen

$$(5) \qquad \begin{gathered} \lambda_i = -l_i + a_i x + b_i y + c_i z + d_i t, \\ i = 1 \dots n \end{gathered}$$

so gibt die Elimination von x:

$$(6) \qquad \begin{gathered} \lambda_i = -l_i' + b_i' y + c_i' z + d_i' t, \\ i = 1 \dots n \end{gathered}$$

wobei

$$(7) \qquad \begin{gathered} l_i' = l_i - a_i \chi_1, \\ b_i' = b_i - a_i \alpha_2', \quad c_i' = c_i - a_i \alpha_3', \quad d_i' = d_i - a_i \alpha_4' \end{gathered}$$

ist. Mit Rücksicht auf die aus (2) und (2*) folgende Bedeutung von α_2', α_3' und α_4' erkennt man leicht, daß das zu (6) gehörende System von Normalgleichungen:

$$(8) \qquad \begin{aligned} [b'b']y + [b'c']z + [b'd']t &= [b'l'] \\ [b'c']y + [c'c']z + [c'd']t &= [c'l'] \\ [b'd']y + [c'd']z + [d'd']t &= [d'l'] \end{aligned}$$

identisch ist mit dem System (3). Denn es ist z. B.

$$[b'l'] = [bl] - [ab]\chi_1 - [al]\alpha_2' + [aa]\chi_1 \alpha_2',$$

d. i. wegen $\chi_1 = [al]:[aa]$ und $\alpha_2' = [ab]:[aa]$ gleich

$$[b'l'] = [bl] - \frac{[ab][al]}{[aa]} = [bl \cdot 1].$$

Aus der ersten Gleichung des Systems (3) leiten wir weiter ab:

$$(9) \qquad y + \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} z + \frac{[bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} t = \frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]},$$

oder symbolisch

$$(9^*) \qquad y + \beta_3'' z + \beta_4'' t = \chi_2 .$$

Eliminiert man hiermit aus (3) die Unbekannte y, so folgt

$$(10) \qquad \begin{aligned} [cc \cdot 2]z + [cd \cdot 2]t &= [cl \cdot 2] \\ [cd \cdot 2]z + [dd \cdot 2]t &= [dl \cdot 2], \end{aligned}$$

wobei die Summen die nachstehende Bedeutung haben:

$$(11)\quad \begin{aligned} [cc\cdot 2] &= [cc\cdot 1] - \frac{[bc\cdot 1][bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} = [cc\cdot 1] - \beta_3''[bc\cdot 1] \\ [cd\cdot 2] &= [cd\cdot 1] - \frac{[bc\cdot 1][bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} = [cd\cdot 1] - \beta_3''[bd\cdot 1] \\ [cl\cdot 2] &= [cl\cdot 1] - \frac{[bc\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} = [cl\cdot 1] - \beta_3''[bl\cdot 1] \\ [dd\cdot 2] &= [dd\cdot 1] - \frac{[bd\cdot 1][bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} = [dd\cdot 1] - \beta_4''[bd\cdot 1] \\ [dl\cdot 2] &= [dl\cdot 1] - \frac{[bd\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} = [dl\cdot 1] - \beta_4''[bl\cdot 1]. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (10) gehören als Normalgleichungssystem zu den Fehlergleichungen

$$(12)\quad \begin{gathered} \lambda_i = -l_i'' + c_i''z + d_i''t, \\ i = 1 \ldots n \end{gathered}$$

die aus den Gleichungen (6) durch Elimination von y mittels (9*) hervorgehen:

$$(13)\quad l_i'' = l_i' - b_i'\chi_2, \quad c_i'' = c_i' - b_i'\beta_3'', \quad d_i'' = d_i' - b_i'\beta_4''.$$

Weiter folgt aus (10):

$$(14)\quad z + \frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}t = \frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]},$$

oder symbolisch

$$(14^*)\quad z + \gamma_4'''t = \chi_3 .$$

Damit ergibt sich aus der zweiten Gleichung (10) durch Elimination von z:

$$(15)\quad [dd\cdot 3]t = [dl\cdot 3],$$

wobei

$$(16)\quad \begin{aligned} [dd\cdot 3] &= [dd\cdot 2] - \frac{[cd\cdot 2][cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} = [dd\cdot 2] - \gamma_4'''[cd\cdot 2] \\ [dl\cdot 3] &= [dl\cdot 2] - \frac{[cd\cdot 2][cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} = [dl\cdot 2] - \gamma_4'''[cl\cdot 2]. \end{aligned}$$

Die Gleichung (15) gehört als Normalgleichung zu den Fehlergleichungen

$$(17)\quad \begin{gathered} \lambda_i = -l_i''' + d_i'''t, \\ i = 1 \ldots n \end{gathered}$$

die aus den Gleichungen (12) durch Elimination von z mittels (14*) hervorgehen:

$$(18)\qquad l_i''' = l_i'' - c_i''\chi_3\,, \qquad d_i''' = d_i'' - c_i''\gamma_4'''.$$

Endlich ist nach (15)

$$(19)\qquad t = \frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]} = \chi_4\,.$$

Man sieht leicht den Fortgang der Rechnung für mehr als vier Unbekannte.

Die wichtigsten der vorstehenden Gleichungen fassen wir wie folgt als System der reduzierten Normalgleichungen zusammen:

$$(20)\qquad \begin{aligned} x + \frac{[ab]}{[aa]}\,y + \frac{[ac]}{[aa]}\,z + \frac{[ad]}{[aa]}\,t &= \frac{[al]}{[aa]} \\ y + \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\,z + \frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\,t &= \frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} \\ z + \frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\,t &= \frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} \\ t &= \frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}, \end{aligned}$$

oder symbolisch:

$$(20^*)\qquad \begin{aligned} x + \alpha_2'\,y + \alpha_3'\,z + \alpha_4'\,t &= \chi_1 \\ y + \beta_3''\,z + \beta_4''\,t &= \chi_2 \\ z + \gamma_4'''\,t &= \chi_3 \\ t &= \chi_4\,. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen findet man schrittweise die Unbekannten t, z, y, x.

II. Bestimmung der Gewichte der Unbekannten und überhaupt aller Hilfsgrößen Q. Hierbei hat man von den Gleichungssystemen (13), (14), (15), S. 104, auszugehen, die mit Beachtung der Beziehung $Q_{i\cdot h} = Q_{h\cdot i}$ nach (16), S. 105, für vier Unbekannte wie folgt lauten:

$$(21)\qquad \begin{aligned} [aa]\,Q_{1\cdot 1} + [ab]\,Q_{1\cdot 2} + [ac]\,Q_{1\cdot 3} + [ad]\,Q_{1\cdot 4} &= 1 \\ [ab]\,Q_{1\cdot 1} + [bb]\,Q_{1\cdot 2} + [bc]\,Q_{1\cdot 3} + [bd]\,Q_{1\cdot 4} &= 0 \\ [ac]\,Q_{1\cdot 1} + [bc]\,Q_{1\cdot 2} + [cc]\,Q_{1\cdot 3} + [cd]\,Q_{1\cdot 4} &= 0 \\ [ad]\,Q_{1\cdot 1} + [bd]\,Q_{1\cdot 2} + [cd]\,Q_{1\cdot 3} + [dd]\,Q_{1\cdot 4} &= 0, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&[aa]\,Q_{1\cdot 2}+[ab]\,Q_{2\cdot 2}+[ac]\,Q_{2\cdot 3}+[ad]\,Q_{2\cdot 4}=0\\
&[ab]\,Q_{1\cdot 2}+[bb]\,Q_{2\cdot 2}+[bc]\,Q_{2\cdot 3}+[bd]\,Q_{2\cdot 4}=1\\
&[ac]\,Q_{1\cdot 2}+[bc]\,Q_{2\cdot 2}+[cc]\,Q_{2\cdot 3}+[cd]\,Q_{2\cdot 4}=0\\
&[ad]\,Q_{1\cdot 2}+[bd]\,Q_{2\cdot 2}+[cd]\,Q_{2\cdot 3}+[dd]\,Q_{2\cdot 4}=0,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
&[aa]\,Q_{1\cdot 3}+[ab]\,Q_{2\cdot 3}+[ac]\,Q_{3\cdot 3}+[ad]\,Q_{3\cdot 4}=0\\
&[ab]\,Q_{1\cdot 3}+[bb]\,Q_{2\cdot 3}+[bc]\,Q_{3\cdot 3}+[bd]\,Q_{3\cdot 4}=0\\
&[ac]\,Q_{1\cdot 3}+[bc]\,Q_{2\cdot 3}+[cc]\,Q_{3\cdot 3}+[cd]\,Q_{3\cdot 4}=1\\
&[ad]\,Q_{1\cdot 3}+[bd]\,Q_{2\cdot 3}+[cd]\,Q_{3\cdot 3}+[dd]\,Q_{3\cdot 4}=0,
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
&[aa]\,Q_{1\cdot 4}+[ab]\,Q_{2\cdot 4}+[ac]\,Q_{3\cdot 4}+[ad]\,Q_{4\cdot 4}=0\\
&[ab]\,Q_{1\cdot 4}+[bb]\,Q_{2\cdot 4}+[bc]\,Q_{3\cdot 4}+[bd]\,Q_{4\cdot 4}=0\\
&[ac]\,Q_{1\cdot 4}+[bc]\,Q_{2\cdot 4}+[cc]\,Q_{3\cdot 4}+[cd]\,Q_{4\cdot 4}=0\\
&[ad]\,Q_{1\cdot 4}+[bd]\,Q_{2\cdot 4}+[cd]\,Q_{3\cdot 4}+[dd]\,Q_{4\cdot 4}=1.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Diese vier Gleichungssysteme nennt man die **Gewichtsgleichungen.**

Anstatt (24) kann man mit Beachtung der vorher unter I gegebenen Reduktion der Normalgleichungen auch schreiben:

$$
\begin{aligned}
[aa]\,Q_{1\cdot 4}+[ab]\,Q_{2\cdot 4}+[ac]\,Q_{3\cdot 4}+[ad]\,Q_{4\cdot 4}&=0\\
[bb\cdot 1]\,Q_{2\cdot 4}+[bc\cdot 1]\,Q_{3\cdot 4}+[bd\cdot 1]\,Q_{4\cdot 4}&=0\\
[cc\cdot 2]\,Q_{3\cdot 4}+[cd\cdot 2]\,Q_{4\cdot 4}&=0\\
[dd\cdot 3]\,Q_{4\cdot 4}&=1
\end{aligned}
$$

oder auch

$$
\begin{aligned}
Q_{1\cdot 4}+\alpha_2'\,Q_{2\cdot 4}+\alpha_3'\,Q_{3\cdot 4}+\alpha_4'\,Q_{4\cdot 4}&=0\\
Q_{2\cdot 4}+\beta_3''\,Q_{3\cdot 4}+\beta_4''\,Q_{4\cdot 4}&=0\\
Q_{3\cdot 4}+\gamma_4'''\,Q_{4\cdot 4}&=0\\
Q_{4\cdot 4}&=\frac{1}{[dd\cdot 3]}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Hieraus folgt $Q_{4\cdot 4}$ und durch Einsetzen rückwärts nach und nach $Q_{3\cdot 4}$, $Q_{2\cdot 4}$, $Q_{1\cdot 4}$.

Aus (23) hat man ebenso mit Weglassung der vierten Gleichung

$$
\begin{aligned}
Q_{1\cdot 3}+\alpha_2'\,Q_{2\cdot 3}+\alpha_3'\,Q_{3\cdot 3}+\alpha_4'\,Q_{3\cdot 4}&=0\\
Q_{2\cdot 3}+\beta_3''\,Q_{3\cdot 3}+\beta_4''\,Q_{3\cdot 4}&=0\\
Q_{3\cdot 3}+\gamma_4'''\,Q_{3\cdot 4}&=\frac{1}{[cc\cdot 2]}.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Da nun $Q_{3.4}$ schon berechnet ist, folgen nach und nach $Q_{3.3}$, $Q_{2.3}$ und $Q_{1.3}$.

Aus (22) ergibt sich mit Weglassung der beiden letzten Gleichungen:

$$
(27) \qquad \begin{aligned}
Q_{1.2} + \alpha_2' Q_{2.2} + \alpha_3' Q_{2.3} + \alpha_4' Q_{2.4} &= 0 \\
Q_{2.2} + \beta_3'' Q_{2.3} + \beta_4'' Q_{2.4} &= \frac{1}{[bb \cdot 1]},
\end{aligned}
$$

woraus man $Q_{2.2}$ und $Q_{1.2}$ erhält.

Zum Schluß findet man $Q_{1.1}$ aus der ersten Gleichung (21):

$$
(28) \qquad Q_{1.1} + \alpha_2' Q_{1.2} + \alpha_3' Q_{1.3} + \alpha_4' Q_{1.4} = \frac{1}{[aa]}.
$$

Das eben auseinandergesetzte Verfahren der Auflösung der Gewichtsgleichungen schließt sich eng an die Auflösung der Normalgleichungen an und gibt die Q lediglich durch allmähliches Einsetzen ohne die Berechnung neuer Hilfsgrößen. Es rührt von Hansen her.*)

Bemerkenswert ist es, wie die Vergleichung von (20) und (25) zeigt, daß das Gewicht der letzten Unbekannten sich bei der allmählichen Elimination der Unbekannten aus den Normalgleichungen einfach als Koeffizient dieser letzten Unbekannten ergibt; hier ist es $1 : Q_{4.4} = [dd \cdot 3]$. Auch die nächst benachbarten Q lassen sich leicht berechnen.

Um alle Q bequem zu finden, hat man nach Encke**) in früherer Zeit häufig die Reihenfolge x, y, z, t der Unbekannten in den Normalgleichungen umgestellt in t, z, y, x und eine neue Reduktion ausgeführt. Das Hansensche Verfahren verdient aber den Vorzug.

III. Fortsetzung des Gaußschen Algorithmus. Gauß hat in der Theor. comb. zwei Methoden zur Berechnung der Q angegeben, die sich eng an seinen Algorithmus anschließen. Mit Rücksicht auf die früher dargestellte Reduktion der Normalgleichungen kann man aus (24), (23), (22) und (21) ohne weiteres folgende Systeme bilden:

---

*) Astr. Nachr. Bd. 8. Nr. 192.

**) Berliner astr. Jahrbuch 1834, S. 287. (Encke erörtert übrigens auch die anderen Verfahren von Gauß und Hansen.)

$$(29)\qquad [dd\cdot 3]\,Q_{1\cdot 4} = 1\,,$$

$$(30)\qquad \begin{aligned}&[cc\cdot 2]\,Q_{3\cdot 3} + [cd\cdot 2]\,Q_{3\cdot 4} = 1\\ &[cd\cdot 2]\,Q_{3\cdot 3} + [dd\cdot 2]\,Q_{3\cdot 4} = 0,\end{aligned}$$

$$(31)\qquad \begin{aligned}&[bb\cdot 1]\,Q_{2\cdot 2} + [bc\cdot 1]\,Q_{2\cdot 3} + [bd\cdot 1]\,Q_{2\cdot 4} = 1\\ &[bc\cdot 1]\,Q_{2\cdot 2} + [cc\cdot 1]\,Q_{2\cdot 3} + [cd\cdot 1]\,Q_{2\cdot 4} = 0\\ &[bd\cdot 1]\,Q_{2\cdot 2} + [cd\cdot 1]\,Q_{2\cdot 3} + [dd\cdot 1]\,Q_{2\cdot 4} = 0\,,\end{aligned}$$

$$(32)\qquad \begin{aligned}&[aa]\,Q_{1\cdot 1} + [ab]\,Q_{1\cdot 2} + [ac]\,Q_{1\cdot 3} + [ad]\,Q_{1\cdot 4} = 1\\ &[ab]\,Q_{1\cdot 1} + [bb]\,Q_{1\cdot 2} + [bc]\,Q_{1\cdot 3} + [bd]\,Q_{1\cdot 4} = 0\\ &[ac]\,Q_{1\cdot 1} + [bc]\,Q_{1\cdot 2} + [cc]\,Q_{1\cdot 3} + [cd]\,Q_{1\cdot 4} = 0\\ &[ad]\,Q_{1\cdot 1} + [bd]\,Q_{1\cdot 2} + [cd]\,Q_{1\cdot 3} + [dd]\,Q_{1\cdot 4} = 0.\end{aligned}$$

Diese Systeme geben sämtliche Q, aber nicht ohne daß bei der allmählichen Elimination, die bei (30), (31) und (32) nötig ist, rechter Hand neue Zahlen zu bilden wären. Dies geschieht ganz schematisch bei der allmählichen Elimination, die zu folgenden Systemen führt:

$$(30^*)\qquad \begin{aligned}[cc\cdot 2]\,Q_{3\cdot 3} + [cd\cdot 2]\,Q_{3\cdot 4} &= 1\\ [dd\cdot 3]\,Q_{3\cdot 4} &= -\gamma_4''',\end{aligned}$$

$$(31^*)\qquad \begin{aligned}[bb\cdot 1]\,Q_{2\cdot 2} + [bc\cdot 1]\,Q_{2\cdot 3} + [bd\cdot 1]\,Q_{2\cdot 4} &= 1\\ [cc\cdot 2]\,Q_{2\cdot 3} + [cd\cdot 2]\,Q_{2\cdot 4} &= -\beta_3''\\ [dd\cdot 3]\,Q_{2\cdot 4} &= -\beta_4''',\end{aligned}$$

$$(32^*)\qquad \begin{aligned}[aa]\,Q_{1\cdot 1} + [ab]\,Q_{1\cdot 2} + [ac]\,Q_{1\cdot 3} + [ad]\,Q_{1\cdot 4} &= 1\\ [bb\cdot 1]\,Q_{1\cdot 2} + [bc\cdot 1]\,Q_{1\cdot 3} + [bd\cdot 1]\,Q_{1\cdot 4} &= -\alpha_2'\\ [cc\cdot 2]\,Q_{1\cdot 3} + [cd\cdot 2]\,Q_{1\cdot 4} &= -\alpha_3''\\ [dd\cdot 3]\,Q_{1\cdot 4} &= -\alpha_4'''.\end{aligned}$$

Hierbei haben α_2', β_3'' und γ_4''' dieselbe Bedeutung wie in (20*). Für die anderen Symbole ergeben sich mit Rücksicht auf die Entwicklung unter I, die folgenden Beziehungen:

$$(33)\qquad \begin{aligned}-\alpha_3'' &= -\alpha_3' + \alpha_2'\beta_3'',\\ -\alpha_4'' &= -\alpha_4' + \alpha_2'\beta_4'',\\ -\alpha_4''' &= -\alpha_4'' + \alpha_3''\gamma_4''',\\ &= -\alpha_4' + \alpha_3'\gamma_4''' + \alpha_2'\beta_4''',\\ -\beta_4''' &= -\beta_4'' + \beta_3''\gamma_4'''.\end{aligned}$$

Die Gleichungen (29), (30*), (31*), (32*) geben nun sämtliche Q gerade so, wie die Gleichungen (20) die sämtlichen Unbekannten durch allmähliches Einsetzen der bereits ermittelten Werte in die vorhergehenden Gleichungen ergeben. Und dies ist dasjenige Verfahren, welches meistens angewendet wird.

Die in den eben genannten Gleichungen rechter Hand auftretenden Zahlen α, β, γ geben auch ein Mittel zur expliziten Darstellung der Q und der Unbekannten, so daß man imstande ist, diese Größen in beliebiger Reihenfolge zu berechnen und insbesondere sich auf die Berechnung einiger Q zu beschränken.

Multiplizieren wir nämlich die Gleichungen (20*) der Reihe nach mit 1, $-\alpha_2'$, $-\alpha_3''$, $-\alpha_4'''$ und addieren, so verschwinden wegen der Beziehungen (33) die Koeffizienten von y, z, t. Multiplizieren wir mit 0, 1, $-\beta_3''$ und $-\beta_4'''$ und addieren, so bleibt nur y, und wenn wir mit 0, 0, 1 und $-\gamma_4'''$ multiplizieren und darauf addieren, nur z übrig. So ergibt sich:

$$
(34)\qquad
\begin{aligned}
\chi_1 - \alpha_2'\chi_2 - \alpha_3''\chi_3 - \alpha_4'''\chi_4 &= x\\
\chi_2 - \beta_3''\chi_3 - \beta_4'''\chi_4 &= y\\
\chi_3 - \gamma_4'''\chi_4 &= z\\
\chi_4 &= t.
\end{aligned}
$$

Denkt man sich nun die Gleichungen (32*) in derselben Weise wie die Gleichungen (20*) geschrieben, so wird man mithin aus den zu (20*) gehörenden Gleichungen (34) an Stelle der x, y, z, t die Größen $Q_{1\cdot 1}$, $Q_{1\cdot 2}$, $Q_{1\cdot 3}$, $Q_{1\cdot 4}$ erhalten, wenn man $\chi_1 = \frac{1}{[aa]}$, $\chi_2 = -\frac{\alpha_2'}{[bb\cdot 1]}$, $\chi_3 = -\frac{\alpha_3''}{[cc\cdot 2]}$ und $\chi_4 = -\frac{\alpha_4'''}{[dd\cdot 3]}$ setzt; also wird

$$
(35)\qquad
\begin{aligned}
\frac{1}{[aa]} + \frac{\alpha_2'\alpha_2'}{[bb\cdot 1]} + \frac{\alpha_3''\alpha_3''}{[cc\cdot 2]} + \frac{\alpha_4'''\alpha_4'''}{[dd\cdot 3]} &= Q_{1\cdot 1}\\
-\frac{\alpha_2'}{[bb\cdot 1]} + \frac{\alpha_3''\beta_3''}{[cc\cdot 2]} + \frac{\alpha_4'''\beta_4'''}{[dd\cdot 3]} &= Q_{1\cdot 2}\\
-\frac{\alpha_3''}{[cc\cdot 2]} + \frac{\alpha_4'''\gamma_4'''}{[dd\cdot 3]} &= Q_{1\cdot 3}\\
-\frac{\alpha_4'''}{[dd\cdot 3]} &= Q_{1\cdot 4}.
\end{aligned}
$$

Ebenso ergibt sich aus (31*):

$$
(36)\quad
\begin{aligned}
\frac{1}{[bb\cdot 1]} + \frac{\beta_3''\,\beta_3''}{[cc\cdot 2]} + \frac{\beta_4'''\,\beta_4'''}{[dd\cdot 3]} &= Q_{2\cdot 2}\\
-\frac{\beta_3''}{[cc\cdot 2]} + \frac{\beta_4'''\,\gamma_4'''}{[dd\cdot 3]} &= Q_{2\cdot 3}\\
-\frac{\beta_4'''}{[dd\cdot 3]} &= Q_{2\cdot 4}\,.
\end{aligned}
$$

Ferner aus (30*):

$$
(37)\quad
\begin{aligned}
\frac{1}{[cc\cdot 2]} + \frac{\gamma_4'''\,\gamma_4'''}{[dd\cdot 3]} &= Q_{3\cdot 3}\\
-\frac{\gamma_4'''}{[dd\cdot 3]} &= Q_{3\cdot 4}\,.
\end{aligned}
$$

Dazu aus (29):

$$
(38)\quad \frac{1}{[dd\cdot 3]} = Q_{4\cdot 4}\,.
$$

Diese Gleichungen werden auch sofort, nur in anderer Reihenfolge, durch Einsetzen der bereits gefundenen Werte in die Gleichungen (25), (26), (27), (28) erhalten, wenn man die Beziehungen (33) in Rücksicht zieht.

Die Formeln (34) ermöglichen auch den Wert einer linearen Funktion der Unbekannten sofort zu berechnen, ohne erst diese letzteren selbst zu ermitteln; dazu ist nur erforderlich, die Werte aus den Gleichungen (34) in die Funktion einzuführen und die Glieder mit denselben χ zusammenzuziehen. Wir unterlassen jedoch die sehr einfache Ausführung, da die Endformel wenig praktischen Wert haben würde, indem sie nur dann eine einfachere Rechnung gibt, wenn allein der Wert einer Funktion verlangt wird, und diese außerdem nur einen Teil der Unbekannten enthält.

Wir können schon hier darauf hinweisen, daß im allgemeinen die Ermittelung der Unbekannten aus dem System (20*) einfacher ist als in der zuletzt angegebenen Weise, denn offenbar hat man bei letzterer als Mehrarbeit die Berechnung der Hilfsgrößen. Noch ungünstiger wird das Verhältnis, wenn in den Normalgleichungen viele Koeffizienten null sind. Durch geschickte Anordnung der Reihenfolge der Unbekannten vor der Auflösung der Normalgleichungen kann man es dann dahin bringen, daß auch in (20*) mehrere der Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ null werden. Ebenso wie die Elimination wird auch die folgende Auflösung durch allmähliches Einsetzen dadurch einfacher. Dagegen wird in dem Systeme (34) der Fall, daß ein Glied null wird, viel seltener eintreten; denn die χ sind im allgemeinen nicht null und die neu berechneten Hilfsgrößen als Funktionen mehrerer der ursprünglich gegebenen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ voraussichtlich auch nicht.

Wenn die Q berechnet werden, so kann man rein theoretisch genommen die Mitführung der Glieder $[al]$, $[bl]$, usw., d. h. die Ableitung der χ in (20*) sparen, da man ja nach (18), S. 106, ansetzen kann:

$$
\begin{aligned}
x &= [al]\,Q_{1\cdot1} + [bl]\,Q_{1\cdot2} + [cl]\,Q_{1\cdot3} + [dl]\,Q_{1\cdot4}\\
y &= [al]\,Q_{1\cdot2} + [bl]\,Q_{2\cdot2} + [cl]\,Q_{2\cdot3} + [dl]\,Q_{2\cdot4}\\
z &= [al]\,Q_{1\cdot3} + [bl]\,Q_{2\cdot3} + [cl]\,Q_{3\cdot3} + [dl]\,Q_{3\cdot4}\\
t &= [al]\,Q_{1\cdot4} + [bl]\,Q_{2\cdot4} + [cl]\,Q_{3\cdot4} + [dl]\,Q_{4\cdot4}\,.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Dies Verfahren setzt aber voraus, daß die Q genau genug berechnet sind, was oftmals überflüssig erscheinen wird, insoweit die Q nur zur Berechnung der mittlern Fehler dienen. Meistens führt man die Berechnung der Unbekannten direkt mittels der χ durch, da außerdem bei schematischer Anlage der Rechnung keine große Mehrarbeit entsteht. Die Formeln (39) können dann als Kontrollen für die Q dienen.

§ 4. Rechenkontrollen.

I. Kontrolle durch Summengleichungen. Um für die richtige Aufstellung von Normalgleichungen eine Rechenkontrolle zu erhalten, kann man die Summe der Normalgleichungen in doppelter Weise bilden: einmal durch Addition der Normalgleichungen und ein zweites Mal direkt aus den Fehlergleichungen. Setzt man nämlich die Summe der Koeffizienten einer jeden Fehlergleichung gleich s_i, so wird z. B. bei drei Unbekannten:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 + b_1 + c_1 \\
s_2 &= a_2 + b_2 + c_2 \\
s_3 &= a_3 + b_3 + c_3 \\
s_4 &= a_4 + b_4 + c_4 \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\cdot
\end{aligned}
$$

Addiert man nun die Normalgleichungen (9), S. 101, so folgt

$$
(2)\qquad [as]x + [bs]y + [cs]z = [ls].
$$

Diese Gleichung läßt sich auch direkt aus den Fehlergleichungen (3), S. 100, bilden, indem man ihre rechten Seiten mit den zugehörigen s multipliziert und alsdann addiert: dadurch entsteht

$$
-[ls] + [as]x + [bs]y + [cs]z,
$$

woraus durch Gleichsetzung mit null die Gleichung (2) folgt.

Die Summengleichung (2) kann bei der Auflösung der Normalgleichungen nach dem Gaußschen Algorithmus mit fortgeführt und wie eine letzte Normalgleichung behandelt werden. Eine Rechenkontrolle besteht dann darin, daß jedes abgeleitete Gleichungssystem als Summe die zu ihm gehörende abgeleitete Summengleichung geben muß. Man erhält u. a. durch die Auflösung bei drei Unbekannten nach Elimination von x:

$$
(3)\qquad
\begin{array}{l}
[bb\cdot 1]y + [bc\cdot 1]z = [bl\cdot 1] \\
[bc\cdot 1]y + [cc\cdot 1]z = [cl\cdot 1] \\
\hline
[bs\cdot 1]y + [cs\cdot 1]z = [sl\cdot 1],
\end{array}
$$

wobei

$$
(4)\qquad
\begin{gathered}
[bs\cdot 1] = [bs] - \frac{[as][ab]}{[aa]}, \qquad [cs\cdot 1] = [cs] - \frac{[as][ac]}{[aa]} \\
[sl\cdot 1] = [sl] - \frac{[as]\,[al]}{[aa]}
\end{gathered}
$$

ist. Zur Kontrolle hat man

$$
(5)\qquad
\begin{gathered}
[bb\cdot 1] + [bc\cdot 1] = [bs\cdot 1], \quad [bc\cdot 1] + [cc\cdot 1] = [cs\cdot 1], \\
[bl\cdot 1] + [cl\cdot 1] = [sl\cdot 1].
\end{gathered}
$$

Hat man die letzte Unbekannte gefunden, so gestatten die einzelnen Summengleichungen eine schrittweise Kontrolle bei der Berechnung der übrigen; wenn alle Summengleichungen erfüllt werden, kann man im allgemeinen sicher sein, daß die ganze Rechnung von den Fehlergleichungen an fehlerfrei erfolgt ist.

Ebenso wie die Berechnung der $x, y, z, \ldots$ läßt sich auch die der Q durch die Summengleichung prüfen, wobei nur an Stelle von $[al]$, $[bl]$, $[cl], \ldots$ der Reihe nach $1, 0, 0, \ldots;$ $0, 1, 0, \ldots;$ $0, 0, 1, \ldots;$ usw. tritt.

Die Summengleichungen für die Schlußkontrolle lauten:

$$[as]x + [bs]y + [cs]z + \cdots = [ls]; \tag{6}$$

$$\left\{\begin{array}{l} [as]\,Q_{1\cdot 1} + [bs]\,Q_{1\cdot 2} + [cs]\,Q_{1\cdot 3} + \cdots = 1 \\ [as]\,Q_{1\cdot 2} + [bs]\,Q_{2\cdot 2} + [cs]\,Q_{2\cdot 3} + \cdots = 1 \\ [as]\,Q_{1\cdot 3} + [bs]\,Q_{2\cdot 3} + [cs]\,Q_{3\cdot 3} + \cdots = 1 \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\quad . \qquad\quad .\,. \end{array}\right. \tag{6*}$$

A. S. Flint*) hat noch die Summe des letzten Systems gebildet; für m Unbekannte folgt:

$$[as][Q_{1\cdot i}] + [bs][Q_{2\cdot i}] + [cs][Q_{3\cdot i}] + \cdots = m \qquad i = 1 \ldots m. \tag{7}$$

II. Kontrolle durch Quersummen. Bildet man für jede Normalgleichung die Quersumme aller Glieder, nämlich

$$\begin{array}{l} [aa] + [ab] + [ac] + \cdots + [al] = S_1 \\ [ab] + [bb] + [bc] + \cdots + [bl] = S_2 \\ [ac] + [bc] + [cc] + \cdots + [cl] = S_3 \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad .\,, \end{array} \tag{8}$$

und behandelt diese S wie die andern Glieder beim Gaußschen Algorithmus, so daß also $S_2', S_3', \ldots;$ $S_3'', \ldots;$ usw. abgeleitet werden, so bleibt die Summeneigenschaft erhalten:

$$\begin{array}{r} [bb\cdot 1] + [bc\cdot 1] + \cdots + [bl\cdot 1] = S_2' \\ [bc\cdot 1] + [cc\cdot 1] + \cdots + [cl\cdot 1] = S_3' \\ . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \\ [cc\cdot 2] + \cdots + [cl\cdot 2] = S_3'' \\ . \qquad . \qquad . \qquad .\,. \end{array} \tag{8*}$$

---

*) A brief control for general solutions of normal equations. (Annals of Mathematics, 1888 IV, S. 182.)

Die Gleichungen (6) und (6*) habe ich schon in der ersten Auflage dieses Buches, S. 120, zur Kontrolle herangezogen.

Man kann diese Kontrolle auch auf die Auflösung der Gewichtsgleichungen anwenden, insbesondere auch bei Vereinigung der Auflösungen der Normalgleichungen und der Gewichtsgleichungen in ein gemeinsames Schema; vgl. hierzu die Formelzusammenstellung in § 7 dieses Kapitels.

Die Kontrolle durch die Quersummen leistet nicht nur bei der allmählichen Reduktion der Normalgleichungen gute Dienste, sondern auch bei der allmählichen Ableitung der Werte der Unbekannten. Man muß im letzten Falle nur beachten, daß der Koeffizient der Unbekannten, welcher den Betrag 1 hat, nicht extra hingeschrieben wird, aber bei der Quersummenbildung mit gezählt werden muß.

III. Schlußkontrolle für $x, y, z, \ldots$ durch doppelte Berechnung der Summe $[\lambda\lambda]$. Man kann einmal jedes λ mit Hilfe der Unbekannten aus der betreffenden Fehlergleichung ermitteln und alsdann die λ quadrieren und addieren. Man kann aber auch ein zweites Mal $[\lambda\lambda]$ berechnen mit Hilfe der Quadratsumme der l, also mittels $[ll]$.

Multipliziert man nämlich jede der n Fehlergleichungen

$$\lambda_i = -l_i + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots$$

mit ihrem l, so erhält man durch Addition

$$(9)\qquad [\lambda l] = -[ll] + [al]x + [bl]y + [cl]z + \cdots;$$

wenn man dagegen jede Fehlergleichung mit dem betreffenden λ_i multipliziert und darauf addiert, so ergibt sich

$$[\lambda\lambda] = -[\lambda l] + [a\lambda]x + [b\lambda]y + [c\lambda]z + \cdots,$$

oder wegen $[a\lambda] = 0$, $[b\lambda] = 0$, usw.,

$$(10)\qquad [\lambda\lambda] = -[\lambda l].$$

Damit folgt aus (9):

$$(11)\qquad [\lambda\lambda] = [ll] - [al]x - [bl]y - [cl]z - \cdots.$$

Diese Formel ist ganz bequem zur direkten Berechnung von $[\lambda\lambda]$ aus $[ll]$. Man kann ihr aber im Anschluß an den Gaußschen Algorithmus noch eine andere Gestalt geben. Das Verfahren besteht im wesentlichen darin, daß man mit Hilfe der reduzierten Normalgleichungen (20), S. 125, aus (11) die Unbekannten $x, y, z, \ldots$ eliminiert. Zunächst eliminiert man x mittels der Gleichung

$$x + \frac{[ab]}{[aa]} y + \frac{[ac]}{[aa]} z + \cdots = \frac{[al]}{[aa]};$$

das gibt

$$[\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - [bl \cdot 1] y - [cl \cdot 1] z - \cdots.$$

Eliminiert man nun y mit Hilfe der Gleichung

$$y + \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} z + \cdots = \frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]},$$

so folgt

$$[\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - [cl \cdot 2] z - \cdots.$$

Man erkennt jetzt, daß die fortgesetzte Elimination zu der Gleichung führt:

$$(12)\quad [\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \frac{[cl \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} - \frac{[dl \cdot 3]^2}{[dd \cdot 3]} - \cdots,$$

oder

$$(12^*)\quad [\lambda\lambda] = [ll] - \chi_1 [al] - \chi_2 [bl \cdot 1] - \chi_3 [cl \cdot 2] - \chi_4 [dl \cdot 3] - \cdots.$$

Die Kontrolle durch doppelte Berechnung von $[\lambda\lambda]$ bezieht sich auf die ganze Ausgleichung einschließlich der Bildung der Normalgleichungen aus den Fehlergleichungen; aber sie zeigt erst am Ende der Rechnung das etwaige Vorhandensein eines Fehlers.

Die letzten beiden Formeln sind nur brauchbar bei der schematischen Auflösung der Normalgleichungen nach dem Gaußschen Algorithmus. Die Berechnung der Summe $[\lambda\lambda]$ kann aber in allen Fällen nach der Gleichung (11) erfolgen. Die Kontrolle ist hier nahezu ebenso vollständig.

Um dies wenigstens für einen einfachen Fall zu zeigen, nehmen wir an, x sei um Δ zu groß erhalten. Dann wird nach (11) anstatt $[\lambda\lambda]$ ein Wert $[\lambda\lambda]'$ erhalten, der um $-[al]\Delta$ von ihm verschieden ist:

$$(13)\qquad [\lambda\lambda]' = [\lambda\lambda] - [al]\Delta.$$

Die Substitution des fehlerhaften x in die Fehlergleichungen gibt Werte, die um $+a\Delta$ fehlerhaft sind. Setzen wir allgemein

$$\lambda' = \lambda + a\Delta,$$

so wird

$$[\lambda'\lambda'] = [\lambda\lambda] + [aa]\Delta^2 + 2\Delta[a\lambda],$$

oder da $[a\lambda] = 0$ ist,

$$(13^*) \qquad [\lambda'\lambda'] = [\lambda\lambda] + [aa]\Delta^2.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (13) und (13*) sind hiernach verschieden, so daß ein Fehler erkannt werden kann. Diese Kontrolle würde nur dann trügerisch sein, wenn zufällig x so angenommen wäre, daß

$$(14) \qquad \Delta = -\frac{[al]}{[aa]}$$

würde.

In gewissen Fällen kann auch die Gl. (10), also die Prüfung durch $[\lambda\lambda] = -[\lambda l]$, nützlich sein.

Kleine Fehler in $x, y, z, \ldots$ beeinflussen im allgemeinen den aus den einzelnen λ bestimmten Wert $[\lambda\lambda]$ weniger als den aus den Kontrollformeln abgeleiteten Wert, da der Einfluß der Ungenauigkeiten Δ von der zweiten Ordnung ist, wie (13*) zeigt und wie auch schon aus (6), S. 100, hervorgeht.

IV. Eine summarische Kontrolle für $x, y, z, \ldots$ liegt auch darin, daß die übrigbleibenden, aus den Fehlergleichungen berechneten Fehler λ die Bedingungsgleichungen des Minimums erfüllen müssen, daß also

$$(15) \qquad [\lambda a] = 0, \; [\lambda b] = 0, \; [\lambda c] = 0, \ldots$$

und daß daher auch

$$(16) \qquad [\lambda s] = 0$$

sein muß.

§ 5. Berechnung des mittlern Fehlers aus den übrigbleibenden Fehlern.

I. Berechnung des mittlern Fehlers μ der Beobachtungen aus $[\lambda\lambda]$. Zu diesem Zwecke muß man auf die wahren Beobachtungsfehler ε zurückgehen, da μ^2 der Durchschnittswert von ε^2 für unendlich viele Fälle ist. Nun ist nach § 1, (4) bis (6*), S. 100:

(1) $$[\varepsilon\varepsilon] = [\lambda\lambda] + [\delta\delta]$$
mit
(2) $$\delta_i = \varepsilon_i - \lambda_i = a_i(X - x) + b_i(Y - y) + c_i(Z - z) + \cdots.$$

Diese Beziehungen gelten für ein beliebiges Wertsystem $X, Y, Z, \ldots$ mit den zugehörigen Verbesserungen ε der Beobachtungen; sie gelten also auch für die wahren Werte der Unbekannten und die wahren Verbesserungen.

Aus (2) folgt durch Multiplikation mit δ_i und Addition für alle Indices:

$$[\delta\delta] = [a\delta](X - x) + [b\delta](Y - y) + [c\delta](Z - z) + \cdots.$$

Multipliziert man den ersten Teil von (2) der Reihe nach mit $a_i, b_i, c_i, \ldots$ und addiert, so wird wegen $[a\lambda] = 0$, $[b\lambda] = 0$, $[c\lambda] = 0, \ldots$:

(3) $$[a\delta] = [a\varepsilon],\ [b\delta] = [b\varepsilon],\ [c\delta] = [c\varepsilon], \ldots.$$
Also ist
(4) $$[\delta\delta] = [a\varepsilon](X - x) + [b\varepsilon](Y - y) + [c\varepsilon](Z - z) + \cdots.$$

Nun war nach (10), S. 103, $x = [\alpha l]$, $y = [\beta l]$, $z = [\gamma l], \ldots$, wobei die $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ aus der Auflösung der Normalgleichungen folgen. Denkt man sich für l den wahren Wert $l + \varepsilon$ gesetzt, so gehen $x, y, z, \ldots$ in $X, Y, Z, \ldots$ über; es wird

$$X = [\alpha(l + \varepsilon)],\ Y = [\beta(l + \varepsilon)],\ Z = [\gamma(l + \varepsilon)], \ldots$$
und somit
(5) $$X - x = [\alpha\varepsilon],\ Y - y = [\beta\varepsilon],\ Z - z = [\gamma\varepsilon], \ldots.$$

Mit (4) und (5) erhält man aus (1):

(6) $$[\varepsilon\varepsilon] = [\lambda\lambda] + [a\varepsilon][\alpha\varepsilon] + [b\varepsilon][\beta\varepsilon] + [c\varepsilon][\gamma\varepsilon] + \cdots.$$

Die Produkte $[a\varepsilon][\alpha\varepsilon], [b\varepsilon][\beta\varepsilon], \ldots$ gestatten eine Schätzung ihres durchschnittlichen Wertes für unendlich viele Wiederholungen der Beobachtungsreihe $l_1, l_2, \ldots l_n$. Das Produkt $[a\varepsilon][\alpha\varepsilon]$ hat Glieder von der Form $a_i\alpha_i\varepsilon_i^2$ und $(a_h\alpha_i + a_i\alpha_h)\varepsilon_h\varepsilon_i$. Der durchschnittliche Wert der letztern ist aber null, sobald die Beobachtungsfehler unabhängig voneinander sind und entweder ein gerades Fehlergesetz befolgen oder doch die Gaußsche Bedingung erfüllen; der Durchschnittswert der quadratischen Glieder ist $a_i\alpha_i\mu^2$; daher wird der durchschnittliche Wert von

$[a\varepsilon][a\varepsilon]$ gleich $\mu^2[aa]$, also mit Rücksicht auf (22), S. 107, gleich μ^2. Das Gleiche gilt für jedes folgende Produkt. Es ist somit bei m Unbekannten

$$[\varepsilon\varepsilon] = [\lambda\lambda] + m\mu^2. \tag{7}$$

Setzt man noch für $[\varepsilon\varepsilon]$ den Mittelwert $n\mu^2$, so wird

$$n\mu^2 = [\lambda\lambda] + m\mu^2,$$

daher

$$\mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-m}, \quad \mu = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-m}}. \tag{8}$$

Die Formel für μ^2 ist nur eine Näherungsformel, die aber um so strenger sein muß, je größer $n-m$, die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen, ist. Man bemerke auch, daß sich μ gerade so berechnet, als wären $n-m$ wahre Fehler mit der Quadratsumme $[\lambda\lambda]$ vorhanden.

Ist die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen gleich null, so ist es nicht möglich, den mittlern Beobachtungsfehler aus der Ausgleichung zu berechnen. Zur Berechnung der Unbekannten müssen alsdann die λ als null angenommen werden, und damit gibt die Formel für μ den Wert $\frac{0}{0}$, d. h. μ ist nicht bestimmbar auf diesem Wege.*)

II. Anmerkung über den Durschschnittsfehler ϑ. Wenn man nach (8) annehmen könnte, daß, ebenso wie $[\lambda\lambda]$ durch-

*) Wenn das Gaußsche Fehlergesetz gilt, so entspricht der nach (8) berechnete Wert von μ^2 der günstigsten Hypothese, die man zur Berechnung von μ aus den λ machen kann. Dies zeigte schon Wittstein 1849 in der deutschen Ausgabe des Lehrbuchs der Differential- und Integralrechnung von L. Navier, 2. Band. Zu vergleichen ist auch P. Pizzetti: Sopra il calcolo dell' errore medio di un sistema di osservazioni (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1889 V, S. 740); ferner E. Czuber: Zur Kritik einer Gaußschen Formel (Monatshefte für Math. u. Physik, 1891, II, S. 459).

Gilt das Gaußsche Gesetz aber nicht, so ist allerdings im allgemeinen (8) nicht die beste Formel zur Berechnung von μ aus den Widersprüchen der Beobachtungen. Wegen der mit Auffindung der besten Formel in jedem Falle verbundenen Mühe wird man sich aber immer der Formel (8) bedienen. Dies hat H. Bruns in seiner umfassenden Abhandlung: Über die Ableitung des mittlern Fehlers (Dekanatsschrift der Leipziger Universität fürs Jahr 1892/93) eingehend untersucht.

schnittlich zu $[\varepsilon\varepsilon]$ im Verhältnis $n-m$ zu n steht, auch im Durchschnitt $|\lambda|:|\varepsilon|$ im Verhältnis $\sqrt{n-m}:\sqrt{n}$ stände, so könnte man aus $\vartheta=[|\varepsilon|]:n$ ableiten:

$$\vartheta=\pm\frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-m)}}. \tag{9}$$

Dasselbe würde sich ergeben, wenn die λ ein Fehlergesetz derselben Form wie die ε befolgten, denn dann würden die Größen

$$\vartheta_\lambda=\pm\frac{[|\lambda|]}{n} \quad \text{und} \quad \mu_\lambda=\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n}}$$

in demselben Verhältnis wie ϑ und μ stehen müssen.

Allein diese Herleitung von (9) ist nicht streng. Im Falle des Gaußschen Fehlergesetzes ist dies genauer untersucht worden.*) Es fand sich (9) nur richtig für gleich genaue direkte Beobachtungen; in allen andern Fällen gibt (9) den Wert von ϑ, absolut genommen, ein wenig zu klein, da nach diesen Untersuchungen die Ungleichheit besteht:

$$\frac{[|\lambda|]}{n-m}>\vartheta>\frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-m)}}. \tag{10}$$

Die genaue Formel (Gl. (24) a. a. O.) ist zu verwickelt, um benutzt werden zu können, da sie ϑ als Funktion der Koeffizienten der Normalgleichungen und der Q ergibt. Wenn das Gaußsche Fehlergesetz besteht, ist nun allerdings der Fehler von (9) klein, sobald m gegen n klein ist; überdies liegt ϑ in der Regel an der untern der beiden in (10) angegebenen Grenzen, d. h. nahe an (9). Gilt aber das Gaußsche Gesetz nicht, so fehlt vorläufig noch jede Kenntnis über den Grad der Annäherung von (9).

III. Mittlerer Fehler in der Bestimmung des mittlern Fehlers μ.)** Es ist hier nützlich, den Ausdruck (6) auf eine andere Form zu bringen. Nach (12), S. 135, ist

$$[\lambda\lambda]=[ll]-\frac{[al]^2}{[aa]}-\frac{[bl\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\frac{[cl\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}-\cdots, \tag{11}$$

*) F. R. Helmert. Über die Formeln für den Durchschnittsfehler. (Astr. Nachr. Bd. 85, 1875, Nr. 2039, Sp. 353 366.)

**) F. R. Helmert. Zur Ableitung der Formel von C. F. Gauß für den mittleren Beobachtungsfehler usw. (Sitzungsberichte der Königl. Preuß. Akademie d. Wissenschaften. 1904, S. 950—964.)

im Anschluß an die Fehlergleichungen

$$\lambda_i = -l_i + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots.$$

Man kann aber auch setzen

$$(12)\qquad [\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[b'l']^2}{[b'b']} - \frac{[c''l'']^2}{[c''c'']} - \cdots,$$

wenn man die Koeffizienten der reduzierten Fehlergleichungen

$$\lambda_i = -l_i' + b_i' y + c_i' z + \cdots$$
$$\lambda_i = -l_i'' + c_i'' z + \cdots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

benutzt, vgl. S. 123 124.

Dabei ist

$$b_i' = b_i - a_i \frac{[ab]}{[aa]}, \quad c_i' = c_i - a_i \frac{[ac]}{[aa]}, \cdots$$
$$l_i' = l_i - a_i \frac{[al]}{[aa]},$$

sowie

$$c_i'' = c_i' - b_i' \frac{[b'c']}{[b'b']}, \cdots, \quad l_i'' = l_i' - b_i' \frac{[b'l']}{[b'b']},$$

usw.

Hieraus folgt:

$$[b'a] = 0 = [c'a] = \cdots$$

(13) und

$$[b'l'] = [b'l], \quad [c'l'] = [c'l], \cdots$$

sowie

$$[c''b'] = 0 = [c''a], \cdots$$

(14) und

$$[c''l''] = [c''l'] = [c''l], \ldots$$

usw.

Statt (12) läßt sich demnach auch schreiben:

$$(15)\qquad [\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[b'l]^2}{[b'b']} - \frac{[c''l]^2}{[c''c'']} - \cdots.$$

Hierin kann man endlich für die l die ε setzen; denn führt man in den Fehlergleichungen für $x, y, z, \ldots$ die Näherungswerte $X, Y, Z, \ldots$ mit den Verbesserungen $(x - X)$, $(y - Y)$, $(z - Z), \ldots$ ein, so treten an Stelle von $-l_i$ die Werte $+\varepsilon_i$, da $-l_i + a_i X + b_i Y + c_i Z + \cdots = +\varepsilon_i$ ist:

$$(16)\qquad [\lambda\lambda] = [\varepsilon\varepsilon] - \frac{[a\varepsilon]^2}{[aa]} - \frac{[b'\varepsilon]^2}{[b'b']} - \frac{[c''\varepsilon]^2}{[c''c'']} - \cdots.$$

Diese Gleichung gilt für irgend ein System der ε, also auch für wahre Fehler. Da nun der Durchschnitt für unendlich viele Fälle für ε^2 gleich μ^2, für $\varepsilon_h \varepsilon_i$ gleich null ist, so folgt im Durchschnitt:

$$[\lambda\lambda] = n\mu^2 - \mu^2 - \mu^2 - \mu^2 - \cdots,$$

oder bei m Unbekannten $= n\mu^2 - m\mu^2$, und es ist

$$\mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-m},$$

wie schon in (8), S. 138, angegeben ist.

Für die weitere Benutzung setzen wir noch

$$(17) \qquad \mathfrak{a} = \frac{a}{\sqrt{[aa]}}, \quad \mathfrak{b} = \frac{b'}{\sqrt{[b'b']}}, \quad \mathfrak{c} = \frac{c''}{\sqrt{[c''c'']}}, \cdots$$

und haben alsdann

$$(18) \qquad [\lambda\lambda] = [\varepsilon\varepsilon] - [\mathfrak{a}\varepsilon]^2 - [\mathfrak{b}\varepsilon]^2 - [\mathfrak{c}\varepsilon]^2 - \cdots,$$

sowie nach (13) und (14)

$$(19) \qquad [\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}\mathfrak{c}] = \cdots = 0, \ [\mathfrak{b}\mathfrak{c}] = \cdots = 0 \text{ usw.};$$

ferner ist

$$(19^*) \qquad [\mathfrak{a}^2] = [\mathfrak{b}^2] = [\mathfrak{c}^2] = \cdots = 1.$$

Das mittlere Fehlerquadrat in der Bestimmung von μ^2 aus $[\lambda\lambda]$ ist nun der Durchschnitt von

$$\left\{\frac{[\varepsilon\varepsilon] - [\mathfrak{a}\varepsilon]^2 - [\mathfrak{b}\varepsilon]^2 - [\mathfrak{c}\varepsilon]^2 - \cdots}{n-m} - \mu^2\right\}^2,$$

und da der Durchschnittswert des Minuenden dieses Binoms μ^2 selbst ist, auch:

$$(20) \qquad \frac{\{[\varepsilon\varepsilon] - [\mathfrak{a}\varepsilon]^2 - [\mathfrak{b}\varepsilon]^2 - [\mathfrak{c}\varepsilon]^2 - \cdots\}^2}{(n-m)^2} - \mu^4.$$

Bei der Bildung des Durchschnitts verschwinden die Glieder mit $\varepsilon_h \varepsilon_i^3$, da wir entweder ein gerades Fehlergesetz oder die Erfüllung der Gaußschen Bedingung voraussetzen. Der Durchnitt von $[\varepsilon\varepsilon]^2$ ist

$$(21) \qquad n\nu^4 + n(n-1)\mu^4;$$

vgl. S. 75. Der Durchschnitt von $2[\varepsilon\varepsilon]\{[\mathfrak{a}\varepsilon]^2 + [\mathfrak{b}\varepsilon]^2 + [\mathfrak{c}\varepsilon]^2 \cdots\}$ ist mit Rücksicht auf (19*) gleich

$$(22) \qquad 2m\nu^4 + 2m(n-1)\mu^4,$$

indem z. B. der Durchschnitt für $[\varepsilon\varepsilon][\mathfrak{a}\varepsilon]^2$ gleich ist

$$\nu^4[\mathfrak{a}^2] + \mu^4([\mathfrak{a}^2] - \mathfrak{a}_1^2) + \mu^4([\mathfrak{a}^2] - \mathfrak{a}_2^2) + \mu^4([\mathfrak{a}^2] - \mathfrak{a}_3^2) + \cdots$$

oder nach (19*) gleich $\nu^4 + (n-1)\mu^4$.

Das Glied $\{[\mathfrak{a}\varepsilon]^2 + [\mathfrak{b}\varepsilon]^2 + [\mathfrak{c}\varepsilon]^2 + \cdots\}^2$ gibt im allgemeinen Glieder von der Form $[\mathfrak{a}\varepsilon]^4$ und $[\mathfrak{a}\varepsilon]^2[\mathfrak{b}\varepsilon]^2$. Für das letztere ist der Durchschnitt, wenn man berücksichtigt, daß bei Verschiedenheit der Indices h und i:

$$[\mathfrak{a}_h^2\mathfrak{b}_i^2] = [\mathfrak{a}^2][\mathfrak{b}^2] - [\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2]$$

und $2[\mathfrak{a}_h\mathfrak{b}_h\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_i] = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}]^2 - [\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2]$ ist, gleich

$$\nu^4[\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2] + \mu^4\{[\mathfrak{a}^2][\mathfrak{b}^2] + 2[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]^2 - 3[\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2]\},$$

oder infolge (19) und (19*) gleich

$$(\nu^4 - 3\mu^4)[\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2] + \mu^4.$$

Für $[\mathfrak{a}\varepsilon]^4 = [\mathfrak{a}\varepsilon]^2[\mathfrak{a}\varepsilon]^2$ ist hiernach der Durchschnitt gleich

$$\nu^4[\mathfrak{a}^4] + \mu^4\{3 - 3[\mathfrak{a}^4]\}$$

oder

$$(\nu^4 - 3\mu^4)[\mathfrak{a}^4] + 3\mu^4.$$

Der Durchschnittswert des Gliedes $\{[\mathfrak{a}\varepsilon]^2 + [\mathfrak{b}\varepsilon]^2 + [\mathfrak{c}\varepsilon]^2 + \cdots\}^2$ ist daher

$$(\nu^4 - 3\mu^4)\{[\mathfrak{a}^4] + [\mathfrak{b}^4] + [\mathfrak{c}^4] + \cdots + 2[\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2] + 2[\mathfrak{a}^2\mathfrak{c}^2] + 2[\mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2] + \cdots\}$$
$$+ m(m+2)\mu^4$$

oder

$$(23)\qquad (\nu^4 - 3\mu^4)\{[(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 + \cdots)^2]\} + m(m+2)\mu^4.$$

Zieht man (21), (22) und (23) zusammen, so geht (20) über in:

$$(24)\qquad \frac{\nu^4 - \mu^4}{n-m} + \frac{3\mu^4 - \nu^4}{(n-m)^2}\left(m - [(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 + \cdots)^2]\right).$$

Dies ist also das mittlere Fehlerquadrat in der Bestimmung von μ^2 aus $[\lambda\lambda] : (n-m)$.

Da eine wirkliche Ausrechnung von $[(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 + \cdots)^2]$ ausgeschlossen ist, so leiten wir dafür Grenzwerte ab.

Es ist aber mit Rücksicht auf (19) und (19*):

$$[(\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_h + \mathfrak{b}_i\mathfrak{b}_h + \mathfrak{c}_i\mathfrak{c}_h + \cdots)^2]_{h=1\cdots n} = \mathfrak{a}_i^2 + \mathfrak{b}_i^2 + \mathfrak{c}_i^2 + \cdots.$$

Bezeichnen wir diese Quadratsumme mit t_i, so ist also $t_i^2 + \sigma^2 = t_i$, worin σ^2 eine Reihe von Quadraten zusammenfaßt. Da mithin

$$t_i = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \sigma^2}$$

ist, so liegt t_i zwischen 0 und 1. Dies gilt für t_1, t_2, t_3, usw.

Die Summe $[t^2]$ der n echten Brüche t^2 ist somit $< n$; sie ist aber sogar $< m$, da nach (19*) $[t] = m$ ist und das Quadrieren von t die Werte verkleinert. Somit ist

$$m - [(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 + \cdots)^2] > 0. \tag{25}$$

Andrerseits wird $[t^2]$ ein Minimum, wenn sämtliche t einander gleich sind, also für $t = \frac{m}{n}$. Mithin ist

$$m - [(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 + \cdots)^2] < \frac{m(n-m)}{n}. \tag{26}$$

Es liegt daher der mittlere Fehler der Bestimmung $\mu^2 = [\lambda\lambda] : (n-m)$ zwischen den Grenzen

$$\pm\sqrt{\frac{\nu^4 - \mu^4}{n-m}} \quad \text{und} \quad \pm\sqrt{\frac{\nu^4 - \mu^4}{n-m} + \frac{3\mu^4 - \nu^4}{n-m} \cdot \frac{m}{n}}. \tag{27}$$

Ist $m : n$ einigermaßen klein, so ist der zweite Grenzwert vom ersten nur wenig verschieden, und man kann als gemeinsame Grenze ansetzen:

$$\pm\sqrt{\frac{\nu^4 - \mu^4}{n-m}}. \tag{27*}$$

Zu diesem Werte gelangt man auch, wenn man im obern Grenzwert $3\mu^4 = \nu^4$ setzt, wie es Gauß' Gesetz entspricht.

Setzt man Gauß' Gesetz überhaupt voraus, so folgt aus (24):

$$\pm\mu^2\sqrt{\frac{2}{n-m}}. \tag{27**}$$

Man hat also bei Gauß' Gesetz die Formel:

$$\mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-m}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n-m}}\right), \tag{28}$$

und für nicht zu kleine $n - m$:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-m}}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2(n-m)}}\right). \tag{28*}$$

Gilt das Gaußsche Gesetz nicht, so überschätzt diese Formel in der Regel die Unsicherheit der Bestimmung von μ.

Denn man kann anstatt (27) schreiben:

$$\pm\sqrt{\frac{2\mu^4}{n-m}-\frac{3\mu^4-\nu^4}{n-m}} \quad \text{und} \quad \pm\sqrt{\frac{2\mu^4}{n-m}-\frac{3\mu^4-\nu^4}{n-m}\cdot\frac{n-m}{n}}.$$

Da nun in der Regel $3\mu^4 > \nu^4$ ist, so gibt $\sqrt{2\mu^4:(n-m)}$ etwas zu viel.*)

IV. Mittelbildung mehrerer Bestimmungen von μ^2. Liegen mehrere Ausgleichungen von Beobachtungen derselben Art und Genauigkeit vor, so kann man die aus den $[\lambda\lambda g]$ berechneten μ^2 zu einem Mittel vereinigen. Man denke sich alle Ausgleichungen in eine zusammengeschrieben, doch so, daß alle Unbekannten getrennt bleiben, auch wenn sie dasselbe bezeichnen. Dann gibt diese Zusammenfassung genau dieselben Werte der Unbekannten wie früher, weil das Normalgleichungssystem in die frühern Systeme zerfällt werden kann.

Es wird nun

$$[\lambda\lambda g] = [\lambda\lambda g]_1 + [\lambda\lambda g]_2 + [\lambda\lambda g]_3 + \cdots,$$

wo der Index 1, 2, 3, $\cdots$ die Einzelsysteme bezeichnet. Ist entsprechend

$$n-m = (n-m)_1 + (n-m)_2 + (n-m)_3 + \cdots,$$

so ist nun das Mittel für μ^2:

$$\frac{[\lambda\lambda g]}{n-m} = \frac{[\lambda\lambda g]_1 + [\lambda\lambda g]_2 + [\lambda\lambda g]_3 + \cdots}{(n-m)_1 + (n-m)_2 + (n-m)_3 + \cdots}.$$

Die Einzelbestimmungen waren aber

$$\frac{[\lambda\lambda g]_1}{(n-m)_1},\quad \frac{[\lambda\lambda g]_2}{(n-m)_2},\quad \frac{[\lambda\lambda g]_3}{(n-m)_3},\ \cdots.$$

Diese werden also bei der Mittelbildung mit den Gewichten

$$(n-m)_1,\ (n-m)_2,\ (n-m)_3, \cdots$$

versehen.

Diese Gewichte entsprechen den mittlern Fehlerausdrücken (27*) und (27**), nicht aber dem Ausdruck (24). Wenn also nicht das Gaußsche Gesetz gilt und $m:n$ nicht klein ist, so entsprechen die Gewichte, welche die Methode der kleinsten

*) Vgl. a. a. O. S. 959.

Quadrate bei der Mittelbildung von μ^2 verlangt, nicht genau den Quadraten der mittlern Fehler der Einzelbestimmungen von μ^2.*)

§ 6. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit.

I. Verallgemeinerung der Formeln. Haben die Beobachtungen l ungleiche Genauigkeit, also in bezug auf eine beliebige Gewichtseinheit verschiedene Gewichte g, nämlich

$$\begin{array}{llll} l_1 & \text{das} & \text{Gewicht} & g_1 \\ l_2 & ,, & ,, & g_2 \\ . & & . & . \\ l_n & ,, & ,, & g_n, \end{array}$$

so können wir uns denken, daß die Größen

$$l_1\sqrt{g_1},\; l_2\sqrt{g_2},\; \cdots\; l_n\sqrt{g_n}$$

beobachtet worden seien, denen gleiches Gewicht 1 zukommt.

Die Fehlergleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots \\ &\quad .\qquad .\qquad .\qquad .\qquad . \\ \lambda_n &= -l_n + a_n x + b_n y + c_n z + \cdots \end{aligned}$$

können durch Multiplikation mit den Quadratwurzeln der Gewichte g so umgewandelt werden, daß sie Beobachtungen vom Gewichte 1 entsprechen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \lambda_1\sqrt{g_1} &= -l_1\sqrt{g_1} + a_1\sqrt{g_1}\;x + b_1\sqrt{g_1}\;y + c_1\sqrt{g_1}\;z + \cdots \\ \lambda_2\sqrt{g_2} &= -l_2\sqrt{g_2} + a_2\sqrt{g_2}\;x + b_2\sqrt{g_2}\;y + c_2\sqrt{g_2}\;z + \cdots \\ &\quad .\qquad .\qquad .\qquad .\qquad . \\ \lambda_n\sqrt{g_n} &= -l_n\sqrt{g_n} + a_n\sqrt{g_n}\;x + b_n\sqrt{g_n}\;y + c_n\sqrt{g_n}\;z + \cdots. \end{aligned}$$

Nun können wieder alle Formeln, die für die Ausgleichung von Beobachtungen gleicher Genauigkeit gefunden worden sind,

---

*) Vgl. a. a. O. S. 960. Die Ursache dieses Widerspruchs ist der Umstand, daß μ^2 aus $[\lambda\lambda]$ im allgemeinen nicht am günstigsten berechnet wird.

angewendet werden, nur ist in ihnen zu setzen

$$(3)\qquad \begin{array}{ccc} \lambda_i\sqrt{g_i} & \text{anstatt} & \lambda_i \\ l_i\sqrt{g_i} & ,, & l_i \\ a_i\sqrt{g_i} & ,, & a_i \\ b_i\sqrt{g_i} & ,, & b_i \\ & \text{usw.} & \end{array}$$

Die Ausgleichung gibt jetzt anstatt „$[\lambda\lambda]$ ein Minimum“ für die Summe

$$(4)\qquad [\lambda\lambda g] \text{ ein Minimum.}$$

Die Normalgleichungen gehen hier über in:

$$(5)\qquad \begin{array}{l} [aag]x + [abg]y + [acg]z + \cdots = [alg] \\ [abg]x + [bbg]y + [bcg]z + \cdots = [blg] \\ [acg]x + [bcg]y + [ccg]z + \cdots = [clg] \\ \;.\qquad .\qquad .\qquad .\qquad . \;, \end{array}$$

worin z. B.

$$[abg] = a_1b_1g_1 + a_2b_2g_2 + \cdots + a_nb_ng_n$$

ist; man schreibt gewöhnlich symbolisch:

$$(6)\qquad \begin{array}{l} (aa)x + (ab)y + (ac)z + \cdots = (al) \\ (ab)x + (bb)y + (bc)z + \cdots = (bl) \\ (ac)x + (bc)y + (cc)z + \cdots = (cl) \\ \;.\qquad .\qquad .\qquad .\qquad .\;. \end{array}$$

Alle Formeln, die früher aus den entsprechenden Gleichungen mit eckigen Klammern abgeleitet sind, lassen sich nun in gleicher Weise aus dem System (6) entwickeln; nur werden allenthalben die eckigen Klammern bei den Koeffizienten und auf den rechten Seiten der Normalgleichungen durch runde Klammern zu ersetzen sein, um anzudeuten, daß bei Bildung der Normalgleichungen die Gewichte berücksichtigt sind.

Besonders ist zu erwähnen, daß die Formel zur Berechnung des mittlern Fehlers einer Beobachtung vom Gewicht 1 wird:

$$(7)\qquad \mu = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\sqrt{g}\cdot\lambda\sqrt{g}]}{n-m}} = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda g]}{n-m}} = \pm\sqrt{\frac{(\lambda\lambda)}{n-m}};$$

denn die Produkte $\lambda \sqrt{g}$ sind die übrigbleibenden Fehler des Fehlergleichungssystems (2), und auf dieses ist die frühere Formel für Beobachtungen gleicher Genauigkeit unmittelbar anwendbar.

II. Unveränderlichkeit der Werte der Unbekannten und der Fehlerquadratsummen bei allmählicher Ausgleichung. Haben mehrere Fehlergleichungen dasselbe Koeffizientensystem $a, b, c, \ldots$, so kann man sie durch Mittelbildung mit Rücksicht auf ihre Gewichte g in eine Gleichung zusammenziehen. Dies ändert nichts an den Werten der Unbekannten und an der totalen Summe $[\lambda \lambda g]$.

Die Unveränderlichkeit der Werte der Unbekannten ergibt sich aus der Unveränderlichkeit der Normalgleichungen. Denn die Mittelbildung der Fehlergleichungen ändert nichts am Koeffizientensystem $[aag]$, $[abg]$, $[bbg]$, usw. Sie ändert auch nichts an $[alg]$, $[blg]$, usw.; denn die Größe l der gemittelten Fehlergleichungen ist $[lg]:[g]$ mit dem Gewichte $[g]$. Also ist z. B. der Anteil an $[alg]$ gleich $a[lg]$, d. i. aber dasselbe wie die Summe der Glieder alg aus den betreffenden einzelnen l.

Es ist eine der wichtigsten Eigenschaften der Methode der kleinsten Quadrate, daß ihre Ergebnisse unabhängig davon sind, ob die Ausgleichung auf einmal gemacht wird, oder ob sie unter Zusammenfassung geeigneter Mittelwerte schrittweise erfolgt. Man darf nicht glauben, daß andere Ausgleichungsverfahren notwendig dieselbe Eigenschaft haben müßten; vielmehr wird das Gegenteil der Fall sein.

Erhält nun das Mittel $[lg]:[g]$ bei der Gesamtausgleichung die Verbesserung λ_σ, waren dagegen die Verbesserungen der betreffenden $l_1, l_2, \ldots l_i$ aufs Mittel gleich $\lambda_1', \lambda_2', \ldots \lambda_i'$, so sind die totalen Verbesserungen

$$\lambda_1' + \lambda_\sigma, \lambda_2' + \lambda_\sigma, \cdots \lambda_i' + \lambda_\sigma.$$

Ihre Quadratsumme ist

$$[\lambda \lambda g]_{1 \ldots i} = [\lambda' \lambda' g] + \lambda_\sigma^2 [g] + 2 \lambda_\sigma [\lambda' g],$$

oder da $[\lambda' g] = 0$ ist:

$$[\lambda \lambda g]_{1 \ldots i} = [\lambda' \lambda' g] + \lambda_\sigma^2 [g]. \tag{8}$$

In der Gesamtausgleichung der gruppenweise gemittelten Fehlergleichungen tritt nun für jedes Mittel nur ein Glied $\lambda_\sigma^2 g_\sigma$ auf, wenn die zugehörige Summe $[g]$ mit g_σ bezeichnet wird. Die entsprechende totale Fehlerquadratsumme ist mithin um $[\lambda'\lambda' g]$ größer, also um die Fehlerquadratsumme, die der Mittelbildung entspricht.

Allgemein kann man daher sagen: Es ist die Summe der in die Gewichte multiplizierten Quadrate der totalen Verbesserungen der ursprünglich gegebenen Beobachtungen gleich der Summe der Ausdrücke $[\lambda\lambda g]$, welche die einzelnen Mittelbildungen und die Gesamtausgleichung ergeben:

$$[\lambda\lambda g] = [\lambda_\sigma \lambda_\sigma g_\sigma] + \Sigma[\lambda'\lambda' g]. \tag{9}$$

§ 7. Zusammenstellung der Formeln für die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

I. Bildung der Normalgleichungen. Es seien gegeben

n Beobachtungswerte $l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$

mit den Gewichten $g_1, g_2, g_3, \ldots g_n$

und den $m = 4$ Unbekannten x, y, z, t;

alsdann hat man die n Fehlergleichungen:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = -l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t, & g_1 \\ \lambda_2 = -l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t, & g_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ \lambda_n = -l_n + a_n x + b_n y + c_n z + d_n t, & g_n \end{array} \tag{1}$$

und die $m = 4$ Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} (aa)x + (ab)y + (ac)z + (ad)t &= (al) \\ (ab)x + (bb)y + (bc)z + (bd)t &= (bl) \\ (ac)x + (bc)y + (cc)z + (cd)t &= (cl) \\ (ad)x + (bd)y + (cd)z + (dd)t &= (dl), \end{aligned} \tag{2}$$

worin z. B.

$$\begin{aligned} (aa) &= a_1 a_1 g_1 + a_2 a_2 g_2 + a_3 a_3 g_3 + \cdots + a_n a_n g_n \\ (ab) &= a_1 b_1 g_1 + a_2 b_2 g_2 + a_3 b_3 g_3 + \cdots + a_n b_n g_n \\ (al) &= a_1 l_1 g_1 + a_2 l_2 g_2 + a_3 l_3 g_3 + \cdots + a_n l_n g_n \end{aligned}$$

ist.

Zur Prüfung der Normalgleichungen bildet man ihre Summengleichung

(3) $$(as)x + (bs)y + (cs)z + (ds)t = (ls),$$

wobei

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 + b_1 + c_1 + d_1 \\ s_2 &= a_2 + b_2 + c_2 + d_2 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ s_n &= a_n + b_n + c_n + d_n . \end{aligned}$$

Sind die Gewichte gleich 1, so kann man zur Bildung der Produktsummen, z. B. $[ab]$, von Quadrattafeln Gebrauch machen, indem

(4) $$[ab] = \frac{[(a+b)^2] - [a^2] - [b^2]}{2}$$

oder auch

(4*) $$[ab] = \frac{[(a+b)^2] - [(a-b)^2]}{4}$$

ist. Erstere Formel wird meistens vorteilhafter sein.

II. Erstes Auflösungsverfahren. Allgemeine Auflösung der Normalgleichungen in der Form:

(5) $$\begin{aligned} (aa)A + (ab)B + (ac)C + (ad)D &= P \\ (ab)A + (bb)B + (bc)C + (bd)D &= Q \\ (ac)A + (bc)B + (cc)C + (cd)D &= R \\ (ad)A + (bd)B + (cd)C + (dd)D &= S, \end{aligned}$$

woraus das umgekehrte System folgt:

(6) $$\begin{aligned} Q_{1\cdot 1}P + Q_{1\cdot 2}Q + Q_{1\cdot 3}R + Q_{1\cdot 4}S &= A \\ Q_{1\cdot 2}P + Q_{2\cdot 2}Q + Q_{2\cdot 3}R + Q_{2\cdot 4}S &= B \\ Q_{1\cdot 3}P + Q_{2\cdot 3}Q + Q_{3\cdot 3}R + Q_{3\cdot 4}S &= C \\ Q_{1\cdot 4}P + Q_{2\cdot 4}Q + Q_{3\cdot 4}R + Q_{4\cdot 4}S &= D. \end{aligned}$$

$$\text{Für} \left\{\begin{matrix} P = (al) \\ Q = (bl) \\ R = (cl) \\ S = (dl) \end{matrix}\right\} \text{ gehen über } \left|\begin{matrix} A & \text{in} & x \\ B & \text{„} & y \\ C & \text{„} & z \\ D & \text{„} & t \end{matrix}\right| \text{ mit den reziproken Gewichten } \left\{\begin{matrix} Q_{1\cdot 1} \\ Q_{2\cdot 2} \\ Q_{3\cdot 3} \\ Q_{4\cdot 4} \end{matrix}\right\}.$$

Zur summarischen Schlußprüfung der Auflösung hat man

(7) $$(as)[Q_{1\cdot i}] + (bs)[Q_{2\cdot i}] + (cs)[Q_{3\cdot i}] + (ds)[Q_{4\cdot i}] + \cdots = m.$$
$$i = 1 \cdots m$$

Der Übergang von (5) zu (6) ist durch irgend ein Eliminationsverfahren oder durch Benutzung von Determinanten zu bewirken. Letztere empfehlen sich in der Regel nur bei zwei Unbekannten, allenfalls bei drei noch, insbesondere bei runden Werten der Zahlen in (5).

Für drei Unbekannte gab Jacobi ein elegantes symmetrisches Formelsystem, das aber für die Anwendung keine besondern Vorteile bietet.*) Außerdem versagt die Lösung für den Fall, daß einer der Koeffizienten (ab), (ac), (bc) null ist oder — praktisch genommen — sich der Null nähert.

Bei zwei Unbekannten hat man die mit Determinanten leicht herzustellenden Formeln:

$$(8)\quad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\text{Koeffizienten}} \\ (aa) & (ab) \\ (ab) & (bb) \end{array} \left| \quad \begin{array}{c} \Delta = (aa)(bb) - (ab)^2 \\ Q_{1\cdot 1} = (bb):\Delta,\ Q_{2\cdot 2} = (aa):\Delta,\ Q_{1\cdot 2} = -(ab):\Delta, \end{array} \right.$$

oder auch

$$(8^*)\quad \begin{array}{c} Q_{2\cdot 2} = 1 : \left\{ (bb) - \frac{(ab)^2}{(aa)} \right\}, \\ Q_{1\cdot 1} = \frac{(bb)}{(aa)} Q_{2\cdot 2}, \qquad Q_{1\cdot 2} = -\frac{(ab)}{(aa)} Q_{2\cdot 2}. \end{array}$$

Bei drei Unbekannten ist Gauß' Algorithmus, falls man den Rechnungsgang im Kopfe hat, am bequemsten. Sonst kann man wie folgt rechnen. Man geht vom System

$$\left.\begin{array}{ccc} (aa) & (ab) & (ac) \\ (ab) & (bb) & (bc) \\ (ac) & (bc) & (cc) \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{mit Gauß'} \\ \text{Algorithmus} \\ \text{über zu} \end{array} \left\{ \begin{array}{cc} (bb\cdot 1) & (bc\cdot 1) \\ (bc\cdot 1) & (cc\cdot 1), \end{array}\right.$$

und setzt nun wie vorher bei zwei Unbekannten:

$$(9)\quad \begin{array}{c} Q_{3\cdot 3} = 1 : \left\{ (cc\cdot 1) - \frac{(bc\cdot 1)^2}{(bb\cdot 1)} \right\}, \\ Q_{2\cdot 2} = \frac{(cc\cdot 1)}{(bb\cdot 1)} Q_{3\cdot 3}, \qquad Q_{2\cdot 3} = -\frac{(bc\cdot 1)}{(bb\cdot 1)} Q_{3\cdot 3}; \end{array}$$

dann gibt Hansens Verfahren, vergl. S. 126/127:

*) Die Formeln von Jacobi wurden von Bessel mitgeteilt in den Astr. Nachr. Bd. 17, 1840. Nr. 404, Sp. 305. (Engelmann, Abhandlungen von F. W. Bessel. II, S. 401.)

Vergl. auch Seeliger: Beweis der Jacobischen Auflösung dreier Normalgleichungen. (Astr. Nachr. Bd. 82, 1873. Nr. 1960, Sp. 249/252.)

$$
\begin{aligned}
&Q_{1\cdot 3} = \quad \cdot \quad - \frac{(ab)}{(aa)} Q_{2\cdot 3} - \frac{(ac)}{(aa)} Q_{3\cdot 3} \\
(10) \qquad &Q_{1\cdot 2} = \quad \cdot \quad - \frac{(ab)}{(aa)} Q_{2\cdot 2} - \frac{(ac)}{(aa)} Q_{2\cdot 3} \\
&Q_{1\cdot 1} = \frac{1}{(aa)} - \frac{(ab)}{(aa)} Q_{1\cdot 2} - \frac{(ac)}{(aa)} Q_{1\cdot 3}.
\end{aligned}
$$

Jacobis Formeln ergeben sich wie folgt. Aus

$$
\begin{aligned}
(aa)x + (ab)y + (ac)z &= (al) \\
(ab)x + (bb)y + (bc)z &= (bl) \\
(ac)x + (bc)y + (cc)z &= (cl)
\end{aligned}
$$

folgt durch Bildung von zwei Gleichungen mit x und y, bzw. mit x und z:

$$(11) \qquad \{(al) - Ax\}(bc) = \{(bl) - By\}(ac) = \{(cl) - Cz\}(ab),$$

wobei

$$(11^*)\ A = (aa) - \frac{(ab)(ac)}{(bc)}, \quad B = (bb) - \frac{(ab)(bc)}{(ac)}, \quad C = (cc) - \frac{(ac)(bc)}{(ab)}$$

ist. Setzt man (11) gleich K und eliminiert damit x, y, z aus einer der Normalgleichungen, so wird

$$(12) \qquad K = \frac{\frac{(ab)(ac)}{A}(al) + \frac{(ab)(bc)}{B}(bl) + \frac{(ac)(bc)}{C}(cl)}{1 + \frac{(ab)(ac)}{(bc)A} + \frac{(ab)(bc)}{(ac)B} + \frac{(ac)(bc)}{(ab)C}}.$$

Die Ausdrücke (11) geben nun einzeln x, y und z mittels K. Man kann noch durch Einführung von Symbolen umwandeln, was übergangen werden mag.

III. Zweites Auflösungsverfahren. Im nachfolgenden Schema ist die 1 der rechten Seite der Gewichtsgleichungen durch P, Q', R'', S''' ersetzt. Man rechnet aber mit den Zahlen.

Außer den Vertikalsummen sind auch die Quersummen S_1, S_2, S_3, S_4 angesetzt; in der Ausführung wird man nur das eine oder andere benutzen.

Für die Summenbildung ist es bequem, wenn die durchschnittlichen Größen der Koeffizienten $a, b, c, \ldots$ sowie der l nahezu gleich sind. Man kann dies herbeiführen durch Änderung der Unbekannten. Ist z. B. der Durchschnittswert der c nur etwa $\frac{1}{10}$ desjenigen der $a, b, d, \ldots$, so setze man $z = 10z'$, womit die Koeffizienten den 10-fachen Wert erhalten.

Entsprechend nimmt man für P, Q', R'', S''' unter Umständen nicht 1, sondern 10 oder 100 oder dergl., allgemein $\varkappa$. Man erhält dann für die Unbekannten Q die 10- oder 100-fachen, allgemein die $\varkappa$-fachen Werte. In den Tabellen ist gesetzt, bzw. zu setzen

$$P = Q' = R'' = S''' \text{ gleich der Zahl } \varkappa.$$

Man ändert oft auch die Reihenfolge der Unbekannten und also auch die der Normalgleichungen, um den Umstand möglichst auszunutzen, daß einzelne der nichtquadratischen Koeffizienten (ab), (ac), (bc), ... null sind.

Das nachstehende Schema ist hinsichtlich der Bildung der linken Seiten noch nicht das möglichst kurze, indessen gewährt es eine Kontrolle Schritt für Schritt und mag daher zunächst hier Platz finden.

	x	y	z	t	Konst.	(x)	(y)	(z)	(t)	
(I)	(aa)	(ab)	(ac)	(ad)	(al)	P	0	0	0	S_1
	(ab)	(bb)	(bc)	(bd)	(bl)	0	Q'	0	0	S_2
	(ac)	(bc)	(cc)	(cd)	(cl)	0	0	R''	0	S_3
	(ad)	(bd)	(cd)	(dd)	(dl)	0	0	0	S'''	S_4
	(as)	(bs)	(cs)	(ds)	(ls)	P	Q'	R''	S'''	.

	y	z	t	Konst.	(x)	(y)	(z)	(t)	
(II)	$(bb\cdot 1)$	$(bc\cdot 1)$	$(bd\cdot 1)$	$(bl\cdot 1)$	$-\alpha_2'\varkappa$	Q'	0	0	S_2'
	$(bc\cdot 1)$	$(cc\cdot 1)$	$(cd\cdot 1)$	$(cl\cdot 1)$	$-\alpha_3'\varkappa$	0	R''	0	S_3'
	$(bd\cdot 1)$	$(cd\cdot 1)$	$(dd\cdot 1)$	$(dl\cdot 1)$	$-\alpha_4'\varkappa$	0	0	S'''	S_4'
	$(bs\cdot 1)$	$(cs\cdot 1)$	$(ds\cdot 1)$	$(ls\cdot 1)$	P'	Q'	R''	S'''	.

	z	t	Konst.	(x)	(y)	(z)	(t)	
(III)	$(cc\cdot 2)$	$(cd\cdot 2)$	$(cl\cdot 2)$	$-\alpha_3''\varkappa$	$-\beta_3''\varkappa$	R''	0	S_3''
	$(cd\cdot 2)$	$(dd\cdot 2)$	$(dl\cdot 2)$	$-\alpha_4''\varkappa$	$-\beta_4''\varkappa$	0	S'''	S_4''
	$(cs\cdot 2)$	$(ds\cdot 2)$	$(ls\cdot 2)$	P''	Q''	R''	S'''	.

	t	Konst.	(x)	(y)	(z)	(t)	
(IV)	$(dd\cdot 3)$	$(dl\cdot 3)$	$-\alpha_4'''\varkappa$	$-\beta_4'''\varkappa$	$-\gamma_4'''\varkappa$	S'''	S_4'''
	$(ds\cdot 3)$	$(ls\cdot 3)$	P'''	Q'''	R'''	S'''	.

Die Köpfe (x), (y), (z), (t) bezeichnen die Spalten, welche sich auf die Gewichtsgleichungssysteme für x, y, z, t beziehen.

Die Summe der Glieder jeder Vertikalreihe in jeder Tabelle bis auf das Glied der Summengleichung muß mit diesem übereinstimmen.

Gleichzeitig mit (II), (III), (IV) bilde man die Tabelle

	x	y	z	t	Konst.	(x)	(y)	(z)	(t)	
(V)	(aa)	(ab)	(ac)	(ad)	(al)	$\varkappa$				S_1
		$(bb \cdot 1)$	$(bc \cdot 1)$	$(bd \cdot 1)$	$(bl \cdot 1)$	$-\alpha_2'\varkappa$	$\varkappa$			S_2'
			$(cc \cdot 2)$	$(cd \cdot 2)$	$(cl \cdot 2)$	$-\alpha_3''\varkappa$	$-\beta_3''\varkappa$	$\varkappa$		S_3''
				$(dd \cdot 3)$	$(dl \cdot 3)$	$-\alpha_4'''\varkappa$	$-\beta_4'''\varkappa$	$-\gamma_4'''\varkappa$	$\varkappa$	S_4'''

sowie hieraus die Tabelle

	x	y	z	t	Konst.	(x)	(y)	(z)	(t)	
(VI)	1	α_2'	α_3'	α_4'	χ_1	$\frac{\varkappa}{(aa)}$				$\frac{S_1}{(aa)}$
		1	β_3''	β_4''	χ_2	$-\frac{\alpha_2'\varkappa}{(bb \cdot 1)}$	$\frac{\varkappa}{(bb \cdot 1)}$			$\frac{S_2'}{(bb \cdot 1)}$
			1	γ_4'''	χ_3	$-\frac{\alpha_3''\varkappa}{(cc \cdot 2)}$	$-\frac{\beta_3''\varkappa}{(cc \cdot 2)}$	$\frac{\varkappa}{(cc \cdot 2)}$		$\frac{S_3''}{(cc \cdot 2)}$
				1	χ_4	$-\frac{\alpha_4'''\varkappa}{(dd \cdot 3)}$	$-\frac{\beta_4'''\varkappa}{(dd \cdot 3)}$	$-\frac{\gamma_4'''\varkappa}{(dd \cdot 3)}$	$\frac{\varkappa}{(dd \cdot 3)}$	$\frac{S_4'''}{(dd \cdot 3)}$

Beide Tabellen kann man auch ineinander schachteln.

Wenn man auf die Prüfung durch die Summenkontrollen verzichtet und am Schreiben sparen will, so kann man anstatt der Aufstellung von (II), (III), (IV) sich darauf beschränken, direkt nur die Gleichungen der Tabelle (V) zu bilden. Für die Gleichung

$$(bb \cdot 1)y + (bc \cdot 1)z + (bd \cdot 1)t = (bl \cdot 1) \text{ usw.}$$

ist dabei nichts Besonderes zu bemerken. Um

$$(cc \cdot 2)z + (cd \cdot 2)t = (cl \cdot 2) \text{ usw.}$$

zu erhalten, geht man von der dritten Gleichung (I) aus und schreibt darunter in zwei Reihen die Glieder zum Übergang auf (II) und (III), d. i. mit Weglassung der Glieder rechts von (cl), der Einfachheit halber:

z	t	Konst.	
(cc)	(cd)	(cl)	
$-\alpha_3'(ac)$	$-\alpha_3'(ad)$	$-\alpha_3'(al)$	$\ldots\alpha_3' = \frac{(ac)}{(aa)}$
$-\beta_3''(bc\cdot 1)$	$-\beta_3''(bd\cdot 1)$	$-\beta_3''(bl\cdot 1)$	$\ldots\beta_3'' = \frac{(bc\cdot 1)}{(bb\cdot 1)}$
$(cc\cdot 2)$	$(cd\cdot 2)$	$(cl\cdot 2)$	

Da die zweite Horizontalreihe unvollständig ist, indem linker Hand das Glied $\alpha_3'(ab)$ fehlt, so versagt hier die Quersummenkontrolle; doch kann man das Glied aus der Bildung von $(bc\cdot 1)$ entnehmen, da es dort als das gleichwertige $\alpha_2'(ac)$ auftritt. Jedenfalls ist aber die Quersummenkontrolle für die Endgleichung wieder vorhanden.

Um $(dd\cdot 3)t = (dl\cdot 3)$ usw. zu erhalten, hat man in ähnlicher Weise aus der vierten Gleichung (I):

t	Konst.	
(dd)	(dl)	
$-\alpha_4'(ad)$	$-\alpha_4'(al)$	$\ldots\alpha_4' = (ad):(aa)$
$-\beta_4''(bd\cdot 1)$	$-\beta_4''(bl\cdot 1)$	$\ldots\beta_4'' = (bd\cdot 1):(bb\cdot 1)$
$-\gamma_4'''(cd\cdot 2)$	$-\gamma_4'''(cl\cdot 2)$	$\ldots\gamma_4''' = (cd\cdot 2):(cc\cdot 2)$
$(dd\cdot 3)$	$(dl\cdot 3)$	

Die unterste Horizontalreihe in (VI) rechts vom dreifachen Striche, nämlich

(VII)

χ_4	$-\frac{\alpha_4'''\varkappa}{(dd\cdot 3)}$	$-\frac{\beta_4'''\varkappa}{(dd\cdot 3)}$	$-\frac{\gamma_4'''\varkappa}{(dd\cdot 3)}$	$\frac{\varkappa}{(dd\cdot 3)}$	$\frac{S_4'''}{(dd\cdot 3)}$

ergibt die Werte von

t	$Q_{1\cdot 4}\varkappa$	$Q_{2\cdot 4}\varkappa$	$Q_{3\cdot 4}\varkappa$	$Q_{4\cdot 4}\varkappa$	Σ_4

Das Symbol Σ_4 ist die Summe der verschiedenen Unbekannten $+ 1$; es ist also gleich

$$t + Q_{1\cdot 4}\varkappa + Q_{2\cdot 4}\varkappa + Q_{3\cdot 4}\varkappa + Q_{4\cdot 4}\varkappa + 1;$$

1 ist der Koeffizient der Unbekannten t, vergl. die Schlußzeile von (VI).

Damit folgt aus der vorletzten Horizontalreihe in (VI):

(VIII)

χ_3	$-\frac{\alpha_3''\varkappa}{(cc\cdot 2)}$	$-\frac{\beta_2''\varkappa}{(cc\cdot 2)}$	$\frac{\varkappa}{(cc\cdot 2)}$	$\cdot$	$\frac{S_3''}{(cc\cdot 2)}$
$-\gamma_4'''t$	$-\gamma_4'''Q_{1\cdot 4}\varkappa$	$-\gamma_4'''Q_{2\cdot 4}\varkappa$	$-\gamma_4'''Q_{3\cdot 4}\varkappa$	$-\gamma_4'''Q_{4\cdot 4}\varkappa$	$-\gamma_4'''\Sigma_4$

Das sind die Werte

z	$Q_{1\cdot 3}\varkappa$	$Q_{2\cdot 3}\varkappa$	$Q_{3\cdot 3}\varkappa$	$Q_{3\cdot 4}\varkappa$	Σ_3

Σ_3 ist $z + Q_{1\cdot 3}\varkappa + Q_{2\cdot 3}\varkappa + Q_{3\cdot 3}\varkappa + Q_{3\cdot 4}\varkappa + 1$, dem Koeffizienten von z, vergl. (VI) vorletzte Zeile. Die dickumrahmten Teile der Tabellen (VIII) bis (X) bleiben hier im folgenden bei der Zahlenrechnung weg; sie sind jetzt nur aufgenommen, um die Kontrolle aus Σ leicht ersichtlich zu machen.

Weiter gibt hiermit die zweite Horizontalreihe in (VI):

(IX)

χ_2	$-\frac{\alpha_2'\varkappa}{(bb\cdot 1)}$	$\frac{\varkappa}{(bb\cdot 1)}$	$\cdot$	$\cdot$	$\frac{S_2'}{(bb\cdot 1)}$
$-\beta_3''z$	$-\beta_3''Q_{1\cdot 3}\varkappa$	$-\beta_3''Q_{2\cdot 3}\varkappa$	$-\beta_3''Q_{3\cdot 3}\varkappa$	$-\beta_3''Q_{3\cdot 4}\varkappa$	$-\beta_3''\Sigma_3$
$-\beta_4''t$	$-\beta_4''Q_{1\cdot 4}\varkappa$	$-\beta_4''Q_{2\cdot 4}\varkappa$	$-\beta_4''Q_{3\cdot 4}\varkappa$	$-\beta_4''Q_{4\cdot 4}\varkappa$	$-\beta_4''\Sigma_4$

Das sind aber die Werte

y	$Q_{1\cdot 2}\varkappa$	$Q_{2\cdot 2}\varkappa$	$Q_{2\cdot 3}\varkappa$	$Q_{2\cdot 4}\varkappa$	Σ_2

Σ_2 ist $y + Q_{1\cdot 2}\varkappa + Q_{2\cdot 2}\varkappa + Q_{2\cdot 3}\varkappa + Q_{2\cdot 4}\varkappa + 1$.

Endlich hat man ebenso aus der ersten Horizontalreihe in (VI):

(X)

χ_1	$\frac{\varkappa}{(aa)}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\frac{S_1}{(aa)}$
$-\alpha_2'y$	$-\alpha_2'Q_{1\cdot 2}\varkappa$	$-\alpha_2'Q_{2\cdot 2}\varkappa$	$-\alpha_2'Q_{2\cdot 3}\varkappa$	$-\alpha_2'Q_{2\cdot 4}\varkappa$	$-\alpha_2'\Sigma_2$
$-\alpha_3'z$	$-\alpha_3'Q_{1\cdot 3}\varkappa$	$-\alpha_3'Q_{2\cdot 3}\varkappa$	$-\alpha_3'Q_{3\cdot 3}\varkappa$	$-\alpha_3'Q_{3\cdot 4}\varkappa$	$-\alpha_3'\Sigma_3$
$-\alpha_4't$	$-\alpha_4'Q_{1\cdot 4}\varkappa$	$-\alpha_4'Q_{2\cdot 4}\varkappa$	$-\alpha_4'Q_{3\cdot 4}\varkappa$	$-\alpha_4'Q_{4\cdot 4}\varkappa$	$-\alpha_4'\Sigma_4$

Das sind die Werte

x	$Q_{1\cdot 1}\varkappa$	$Q_{1\cdot 2}\varkappa$	$Q_{1\cdot 3}\varkappa$	$Q_{1\cdot 4}\varkappa$	Σ_1

Dabei ist $\Sigma_1 = x + Q_{1\cdot 1}\varkappa + Q_{1\cdot 2}\varkappa + Q_{1\cdot 3}\varkappa + Q_{1\cdot 4}\varkappa + 1$.

Die Zusammenstellung der letzten Horizontalreihen von (VII) bis (X) gibt die vollständige Auflösung:

(XI)

x	$Q_{1 \cdot 1}$			
y	$Q_{1 \cdot 2}$	$Q_{2 \cdot 2}$		
z	$Q_{1 \cdot 3}$	$Q_{2 \cdot 3}$	$Q_{3 \cdot 3}$	
t	$Q_{1 \cdot 4}$	$Q_{2 \cdot 4}$	$Q_{3 \cdot 4}$	$Q_{4 \cdot 4}$
1	2	3	4	5

Die erste Vertikalkolonne liefert die Werte der Unbekannten, die zweite, dritte, vierte, fünfte geben die Hilfsgrößen Q; die oberste Zahl jeder derselben ist das reziproke Gewicht der Unbekannten in derselben Horizontalreihe.

Die in (VIII), (IX), (X) ermittelten Werte kann man kontrollieren durch Einsetzen in die Summengleichungen von (III), (II), (I); doch kann man sich auch begnügen, nur am Schlusse nach völliger Entwicklung von (XI) durch Einsetzen in die Summengleichungen von (I) eine allgemeine Kontrolle auszuführen. Diese letztern Summengleichungen lauten getrennt aufgeführt:

$$
\text{(XII)} \quad
\begin{aligned}
&(as)x + (bs)y + (cs)z + (ds)t = (ls) \\
&(as)\,Q_{1 \cdot 1} + (bs)\,Q_{1 \cdot 2} + (cs)\,Q_{1 \cdot 3} + (ds)\,Q_{1 \cdot 4} = 1 \\
&(as)\,Q_{1 \cdot 2} + (bs)\,Q_{2 \cdot 2} + (cs)\,Q_{2 \cdot 3} + (ds)\,Q_{2 \cdot 4} = 1 \\
&(as)\,Q_{1 \cdot 3} + (bs)\,Q_{2 \cdot 3} + (cs)\,Q_{3 \cdot 3} + (ds)\,Q_{3 \cdot 4} = 1 \\
&(as)\,Q_{1 \cdot 4} + (bs)\,Q_{2 \cdot 4} + (cs)\,Q_{3 \cdot 4} + (ds)\,Q_{4 \cdot 4} = 1\,,
\end{aligned}
$$

deren erste beiden in (I) vorkommen; die übrigen entsprechen den Summen der Gewichtsgleichungen für y, z, t in der ursprünglichen Form.

IV. Drittes Auflösungsverfahren. Nachdem man bis (VI) gelangt ist, geben (V) und (VI) nach dem Schema

$$
(\mathrm{XIII}) \qquad
\begin{aligned}
\chi_1 - \chi_2 \alpha_2' - \chi_3 \alpha_3'' - \chi_4 \alpha_4''' &= x \\
\chi_2 \quad - \chi_3 \beta_3'' - \chi_4 \beta_4''' &= y \\
\chi_3 \quad - \chi_4 \gamma_4''' &= z \\
\chi_4 \quad &= t
\end{aligned}
$$

die Werte der Unbekannten, deren reziproke Gewichte aus folgendem Schema gefunden werden:

$$
(\mathrm{XIV}) \qquad
\begin{aligned}
\frac{1}{(aa)} + \frac{\alpha_2' \alpha_2'}{(bb \cdot 1)} + \frac{\alpha_3'' \alpha_3''}{(cc \cdot 2)} + \frac{\alpha_4''' \alpha_4'''}{(dd \cdot 3)} &= Q_{1 \cdot 1} \\
\frac{1}{(bb \cdot 1)} + \frac{\beta_3'' \beta_3''}{(cc \cdot 2)} + \frac{\beta_4''' \beta_4'''}{(dd \cdot 3)} &= Q_{2 \cdot 2} \\
\frac{1}{(cc \cdot 2)} + \frac{\gamma_4''' \gamma_4'''}{(dd \cdot 3)} &= Q_{3 \cdot 3} \\
\frac{1}{(dd \cdot 3)} &= Q_{4 \cdot 4}\,.
\end{aligned}
$$

Ferner hat man:

$$
(\mathrm{XV}) \qquad
\begin{aligned}
-\frac{\alpha_2'}{(bb \cdot 1)} + \frac{\alpha_3'' \beta_3''}{(cc \cdot 2)} + \frac{\alpha_4''' \beta_4'''}{(dd \cdot 3)} &= Q_{1 \cdot 2} \\
-\frac{\alpha_3''}{(cc \cdot 2)} + \frac{\alpha_4''' \gamma_4'''}{(dd \cdot 3)} &= Q_{1 \cdot 3} \\
-\frac{\alpha_4'''}{(dd \cdot 3)} &= Q_{1 \cdot 4} \\
-\frac{\beta_3''}{(cc \cdot 2)} + \frac{\beta_4''' \gamma_4'''}{(dd \cdot 3)} &= Q_{2 \cdot 3} \\
-\frac{\beta_4'''}{(dd \cdot 3)} &= Q_{2 \cdot 4} \\
-\frac{\gamma_4'''}{(dd \cdot 3)} &= Q_{3 \cdot 4}\,.
\end{aligned}
$$

V. Nachträgliche Berechnung der Q. Wurden die reduzierten Normalgleichungen (V) und (VI) ohne Rücksicht auf die Ableitung der Q entwickelt, so kann man diese nachträglich nach Hansens Verfahren berechnen; vergl. S. 126/127:

$$
\text{(XVI)}\quad
\begin{aligned}
&Q_{4\cdot4} = \frac{1}{(dd\cdot3)}\\[1ex]
&Q_{3\cdot4} + \gamma_4''' Q_{4\cdot4} = 0\\
&Q_{3\cdot3} + \gamma_4''' Q_{3\cdot4} = \frac{1}{(cc\cdot2)}\\[1ex]
&Q_{2\cdot4} + \beta_3'' Q_{3\cdot4} + \beta_4'' Q_{4\cdot4} = 0\\
&Q_{2\cdot3} + \beta_3'' Q_{3\cdot3} + \beta_4'' Q_{3\cdot4} = 0\\
&Q_{2\cdot2} + \beta_3'' Q_{2\cdot3} + \beta_4'' Q_{2\cdot4} = \frac{1}{(bb\cdot1)}\\[1ex]
&Q_{1\cdot4} + \alpha_2' Q_{2\cdot4} + \alpha_3' Q_{3\cdot4} + \alpha_4' Q_{4\cdot4} = 0\\
&Q_{1\cdot3} + \alpha_2' Q_{2\cdot3} + \alpha_3' Q_{3\cdot3} + \alpha_4' Q_{3\cdot4} = 0\\
&Q_{1\cdot2} + \alpha_2' Q_{2\cdot2} + \alpha_3' Q_{2\cdot3} + \alpha_4' Q_{2\cdot4} = 0\\
&Q_{1\cdot1} + \alpha_2' Q_{1\cdot2} + \alpha_3' Q_{1\cdot3} + \alpha_4' Q_{1\cdot4} = \frac{1}{(aa)}\,.
\end{aligned}
$$

VI. Schlußkontrolle; mittlerer Fehler. Für beide Verfahren ist eine summarische Kontrolle der berechneten Werte der Unbekannten möglich durch Berechnung von $[\lambda\lambda g]$ aus den einzelnen den Fehlergleichungen entnommenen λ, und eine zweite Berechnung dieser Summe nach der Formel

(13) $[\lambda\lambda g] = (\lambda\lambda) = (ll) - \chi_1(al) - \chi_2(bl\cdot1) - \chi_3(cl\cdot2) - \chi_4(dl\cdot3)$.

Bei dem ersten Auflösungsverfahren ist anstatt dieser Formel anzuwenden:

(13*) $\qquad (\lambda\lambda) = (ll) - (al)x - (bl)y - (cl)z - (dl)t.$

Für den mittlern zu befürchtenden Fehler der Gewichtseinheit ist zu setzen:

(14) $$\mu = \pm\sqrt{\frac{(\lambda\lambda)}{n-m}},$$

und für die mittlern zu befürchtenden Fehler in x, y, z, t:

(15) $\mu_x = \mu\sqrt{Q_{1\cdot1}}, \ \mu_y = \mu\sqrt{Q_{2\cdot2}}, \ \mu_z = \mu\sqrt{Q_{3\cdot3}}, \ \mu_t = \mu\sqrt{Q_{4\cdot4}}$.

Die mittlern Grenzen des mittlern Fehlers μ sind näherungsweise:

(14*) $$\mu\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2(n-m)}}\right).$$

Beispiel. Fortsetzung zu Seite 43/44. Bei Ausgleichung der Winkelwerte setzten wir diese bisher als gleich genau voraus. Wir wiederholen jetzt die Ausgleichung mit Rücksicht auf die verschiedene Größe der Repetitionszahlen, und zwar nehmen wir die Gewichte denselben einfach proportional, betrachten also ein Resultat aus n Repetitionen wie ein Mittel aus n einfachen Winkelmessungen. Gefordert wird diese Annahme dadurch, daß im ganzen vielmal repetiert ist und daher in den Ergebnissen die Teilungsfehler des Kreises nicht mehr die Visurfehler überwiegen, sondern im Gegenteil von diesen überwogen werden.

Die Fehlergleichungen lauten mit Beibehaltung der frühern Bezeichnungen und Näherungswerte:

$$
(1)\qquad
\begin{array}{lrcccc|r|r}
\lambda_1 = & 0{,}00 & \cdot & \cdot & +\zeta & \cdot & \text{Gew. } 90 & s = 1 \\
\lambda_2 = & 0{,}00 & \cdot & \cdot & \cdot & +\tau & 80 & 1 \\
\lambda_3 = & -\,0{,}14 & \cdot & \cdot & -\zeta & +\tau & 70 & 0 \\
\lambda_4 = & -\,0{,}79 & \cdot & -\eta & \cdot & +\tau & 20 & 0 \\
\lambda_5 = & 0{,}00 & \cdot & +\eta & \cdot & \cdot & 20 & 1 \\
\lambda_6 = & +\,0{,}26 & -\xi & \cdot & +\zeta & \cdot & 40 & 0 \\
\lambda_7 = & 0{,}00 & +\xi & \cdot & \cdot & \cdot & 60 & 1 \\
\lambda_8 = & -\,0{,}51 & -\xi & +\eta & \cdot & \cdot & 20 & 0
\end{array}
$$

Wir bilden nun die Normalgleichungen; diejenige von ξ erhalten wir durch Multiplikation der Gleichungen für λ_6, λ_7, λ_8 mit bzw. -40, $+60$, -20. Die Addition ergibt alsdann:

$$0 = -\,0{,}20 + 120\xi - 20\eta - 40\zeta .$$

In derselben Weise bildet man die andern Normalgleichungen; man erhält:

$$
(2)\qquad
\begin{array}{rrrrcll}
120\xi & -\,20\eta & -\,40\zeta & \cdot & = & +\,0{,}20 & = A \\
-\,20\xi & +\,60\eta & \cdot & -\,20\tau & = & -\,5{,}60 & = B \\
-\,40\xi & \cdot & +\,200\zeta & -\,70\tau & = & -\,20{,}20 & = C \\
\cdot & -\,20\eta & -\,70\zeta & +\,170\tau & = & +\,25{,}60 & = D.
\end{array}
$$

Da hier einige Koeffizienten null, die andern aber runde Zahlen sind, kann man das erste Auflösungsverfahren in folgender Weise anwenden (nach Prof. Dr. Krüger):

Man bilde

$$
(3)\qquad
\begin{array}{rrrcl}
60m_2 & \cdot & -\,20m_4 & = & B' \\
\cdot & +\,200m_3 & -\,70m_4 & = & C' \\
-\,20m_2 & -\,70m_3 & +\,170m_4 & = & D';
\end{array}
$$

das gibt

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
8330\, m_4 &= 60\, D' + 21\, C' + 20\, B' \\
8330\, m_3 &= 21\, D' + 49\, C' + 7\, B' \\
8330\, m_2 &= 20\, D' + 7\, C' + \frac{291}{2}\, B'.
\end{aligned}
$$

Bei der Auflösung des Systems (3) multipliziert man die erste Gleichung mit 20, die zweite mit 21, die dritte mit 60 und findet durch Addition die Gleichung für m_4. Usw.

Setzt man nun $B' = 20$, $C' = 40$, $D' = 0$, so wird nach (4):

$$
(5)\qquad 833\, m_1 = 124, \quad 833 m_3 = 210, \quad 833\, m_2 = 319.
$$

Multipliziert man die Gleichungen (2) mit 1, m_2, m_3, m_4, so folgt durch Addition wegen (3) und (5):

$$
(120 - 20\, m_2 - 40\, m_3)\, \xi = A + m_2\, B + m_3\, C + m_4\, D
$$

oder

$$
(6)\qquad 85180\, \xi = 833\, A + 319\, B + 210\, C + 124\, D.
$$

Setzt man in (3):

$$
B' = B + 20\, \xi, \quad C' = C + 40\, \xi, \quad D' = D,
$$

so wird

$$
m_2 = \eta, \quad m_3 = \zeta, \quad m_4 = \tau,
$$

und aus (4) ergibt sich:

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
8330\, \eta &= 3190\, \xi + \frac{291}{2} B + 7\, C + 20\, D \\
8330\, \zeta &= 2100\, \xi + 7\, B + 49\, C + 21\, D \\
8330\, \tau &= 1240\, \xi + 20\, B + 21\, C + 60\, D.
\end{aligned}
$$

(6) und (7) geben endlich zusammengenommen:

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
\xi &= 0{,}009779\, A + 0{,}003745\, B + 0{,}002465\, C + 0{,}001456\, D \\
\eta &= 0{,}003745\, A + 0{,}018901\, B + 0{,}001784\, C + 0{,}002958\, D \\
\zeta &= 0{,}002465\, A + 0{,}001784\, B + 0{,}006504\, C + 0{,}002888\, D \\
\tau &= 0{,}001456\, A + 0{,}002958\, B + 0{,}002888\, C + 0{,}007420\, D.
\end{aligned}
$$

Probe: $0{,}017445 \cdot 60 + 0{,}027388 \cdot 20 + 0{,}013641 \cdot 90 + 0{,}014722 \cdot 80$
$= 3{,}99991$ anstatt 4.

Bei Anwendung des zweiten Auflösungsverfahrens geht man aus von der Tabelle:

	ξ	η	ζ	τ	Konst.	(ξ)
(9)	+ 120	− 20	− 40	*	+ 0,20	+ 1
	− 20	+ 60	*	− 20	− 5,60	*
	− 40	*	+ 200	− 70	− 20,20	*
	*	− 20	− 70	+ 170	+ 25,60	*
	+ 60	+ 20	+ 90	+ 80	0,00	+ 1

Die letzte Rubrik rechts bezieht sich auf die Gewichtsberechnung, nämlich auf das Gewichtsgleichungssystem für ξ.

Die Summengleichung ist sowohl durch Summierung der Normalgleichungen, als auch direkt mit Hilfe der s aus den Fehlergleichungen gebildet, indem jede derselben mit ihrem s und Gewicht multipliziert wurde, worauf die Summenbildung erfolgte.

Dividieren wir die erste Normalgleichung durch 120, so wird erhalten:

$$\xi - 0{,}1667\,\eta - 0{,}3333\,\zeta \quad \cdot \quad = + 0{,}001667; \quad + 0{,}008333.$$

Diese Gleichung multiplizieren wir bzw. mit − 20, − 40, 0, + 60 und setzen die Produkte zur Subtraktion bzw. unter die zweite, die dritte, die vierte und die Summengleichung. Die tabellarische Anordnung ist dann folgende:

	ξ	η	ζ	τ	Konst.	(ξ)
(9*)	+ 120	− 20	− 40	*	+ 0,20	+ 1
	+ 1	− 0,1667	− 0,3333	*	+ 0,001667	+ 0,008333
	− 20	+ 60	*	− 20	− 5,60	*
	− 20	+ 3,3333	+ 6,6667	*	− 0,03333	− 0,1667
	− 40	*	+ 200	− 70	− 20,20	*
	− 40	− 6,6667	+ 13,3333	*	− 0,06667	− 0,3333
	*	− 20	− 70	+ 170	+ 25,60	*
	*	*	*	*	*	*
	+ 60	+ 20	+ 90	+ 80	0,00	+ 1
	+ 60	− 10	− 20	*	+ 0,10000	+ 0,5000

Kontrolle: 1 − 0,1667 − 0,3333 = 0,5000 [s. rechts u.].

Hierin beziehen sich die größern Zahlentypen auf die gegebenen Gleichungen (2). Die Subtraktion ergibt:

	η	ζ	τ	Konst.	(ξ)	(η)
	+ 56,6667	− 6,6667	− 20,0000	− 5,5667	+ 0,1667	+ 1
(10)	− 6,6667	+ 186,6667	− 70,0000	− 20,1333	+ 0,3333	*
	− 20,0000	− 70,0000	+ 170,0000	+ 25,6000	*	*
	+ 30,0000	+ 110,0000	+ 80,0000	− 0,1000	+ 0,5000	+ 1

Die Summengleichung stimmt vollkommen mit den betreffenden Summen der Glieder der Vertikalreihen.

Um überflüssige Rechnung zu vermeiden, beachte man, daß die Koeffizientensymmetrie der Gleichungen sowie die Beziehungen zwischen den Zahlen der letzten Vertikalreihe und der ersten Horizontalreihe in (9*) einige naheliegende Ersparungen im Aufschreiben zulassen, von denen wir z. T. weiterhin Gebrauch machen werden.

Durch allmähliche Elimination erhalten wir nach und nach weiter:

	η	ζ	τ	Konst.	(ξ)	(η)
	+ 56,6667	− 6,6667	− 20,0000	− 5,5667	+ 0,1667	+ 1,0000
	1	− 0,11765	− 0,35294	− 0,09823	+ 0,00294	+ 0,01765
(10*)	− 6,6667	+ 186,6667	− 70,0000	− 20,1333	+ 0,3333	*
		+ 0,7843	+ 2,3529	+ 0,6549	− 0,0197	− 0,1176
	− 20,0000	− 70,0000	+ 170,0000	+ 25,6000	*	*
			− 7,0588	+ 1,9646	− 0,0588	− 0,3529
	+ 30,0000	+ 110,0000	+ 80,0000	− 0,1000	+ 0,5000	+ 1,0000
		− 3,5295	− 10,5882	− 2,9469	+ 0,0882	+ 0,5295

Kontrolle: $1 - 0{,}1176 - 0{,}3529 = + 0{,}5295$.

	ζ	τ	Konst.	(ξ)	(η)	(ζ)
	+ 185,8824	− 72,3529	− 20,7882	+ 0,3530	+ 0,1176	+ 1,0000
	1	− 0,389240	− 0,111836	+ 0,001899	+ 0,000632	+ 0,005380
(11)	− 72,3529	+ 162,9412	+ 23,6354	+ 0,0588	+ 0,3529	*
		+ 28,1627	− 8,0917	− 0,1374	− 0,0458	− 0,3892
	+ 113,5295	+ 90,5882	+ 2,8469	+ 0,4118	+ 0,4705	+ 1,0000
		− 44,1904	− 12,6967	+ 0,2156	+ 0,0719	+ 0,6108

Kontrollen wie vorher.

	τ	Konst.	(ξ)	η	ζ	(τ)
(12)	+ 134,7785	+ 15,5437	+ 0,1962	+ 0,3987	+ 0,3892	+ 1,0000
	1	+ 0,11533	+ 0,00146	+ 0,00296	+ 0,00289	+ 0,00742
	+ 134,7786	+ 15,5436	+ 0,1962	+ 0,3986	+ 0,3892	+ 1,0000

Durch Zusammenstellung aller ersten Normalgleichungen erhalten wir die Tabellen (V) und (VI), S. 153, die hier ineinander geschachtelt worden sind, und welchen die ersten Summengleichungen (XII), S. 156, beigefügt wurden.

(13)

ξ	η	ζ	τ	Konst.	(ξ)	(η)	(ζ)	(τ)
$+120{,}0000$	$-20{,}0000$	$-40{,}0000$	*	$+0{,}2000$	$+1{,}0000$			
1	$-0{,}16667$	$-0{,}33333$	*	$+0{,}00167$	$+0{,}00833$			
	$+56{,}6667$	$-6{,}6667$	$-20{,}0000$	$-5{,}5667$	$+0{,}1667$	$+1{,}0000$		
	1	$-0{,}11765$	$-0{,}35294$	$-0{,}09823$	$+0{,}00294$	$+0{,}01765$		
		$+185{,}8824$	$-72{,}3529$	$-20{,}7882$	$+0{,}3530$	$+0{,}1176$	$+1{,}0000$	
		1	$-0{,}38924$	$-0{,}11184$	$+0{,}00190$	$+0{,}00063$	$+0{,}00538$	
			$+134{,}7785$	$+15{,}5437$	$+0{,}1962$	$+0{,}3987$	$+0{,}3892$	$+1{,}0000$
			1	$+0{,}11533$	$+0{,}00116$	$+0{,}00296$	$+0{,}00289$	$+0{,}00742$
$+60$	$+20$	$+90$	$+80$	$0{,}00$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$

Nach dem zweiten Auflösungsverfahren ist nun weiter:

(14)
$$\tau = +0{,}11533$$
$$\zeta = -0{,}11184 + 0{,}38924\,\tau = -0{,}06695$$
$$\eta = -0{,}09823 + 0{,}35294\,\tau + 0{,}11765\,\zeta = -0{,}06541$$
$$\xi = +0{,}00167 \quad . \quad + 0{,}33333\,\zeta + 0{,}16667\,\eta = -0{,}03155\,.$$

Jedoch berechnet man besser gleich die Q mit nach den Tabellen (VII) bis (X), S. 154/155; man erhält:

(15)		+ 0,11533	+ 0,00146	+ 0,00296	+ 0,00289	+ 0,00742	aus (13)
		τ	$Q_{1\cdot 4}$	$Q_{2\cdot 4}$	$Q_{3\cdot 4}$	$Q_{4\cdot 4}$	

		— 0,11184	+ 0,00190	+ 0,00063	+ 0,00538	aus (13)
(16)	+ 0,38924 τ	+ 0,04489	+ 0,00057	+ 0,00115	+ 0,00112	aus (15)
		— 0,06695	+ 0,00247	+ 0,00178	+ 0,00650	
		ζ	$Q_{1\cdot 3}$	$Q_{2\cdot 3}$	$Q_{3\cdot 3}$	

		— 0,09823	+ 0,00294	+ 0,01765	aus (13)
(17)	+ 0,35294 τ	+ 0,04070	+ 0,00052	+ 0,00104	aus (15)
	+ 0,11765 ζ	— 0,00788	+ 0,00029	+ 0,00021	aus (16)
		— 0,06541	+ 0,00375	+ 0,01890	
		η	$Q_{1\cdot 2}$	$Q_{2\cdot 2}$	

		+ 0,00167	+ 0,00833	aus (13)
(18)	+ 0,33333 ζ	— 0,02232	+ 0,00082	aus (16)
	+ 0,16667 η	— 0,01090	+ 0,00063	aus (17)
		— 0,03155	+ 0,00978	
		ξ	$Q_{1\cdot 1}$	

Zur Prüfung setzen wir in die Summengleichungen in (13) nacheinander die Unbekanntensysteme ξ, η, τ, ζ; $Q_{1\cdot 1}, Q_{1\cdot 2}, Q_{1\cdot 3}, Q_{1\cdot 4}$; $Q_{1\cdot 2}, Q_{2\cdot 2}, Q_{2\cdot 3}, Q_{2\cdot 4}$; $Q_{1\cdot 3}, Q_{2\cdot 3}, Q_{3\cdot 3}, Q_{3\cdot 4}$; $Q_{1\cdot 4}, Q_{2\cdot 4}, Q_{3\cdot 4}, Q_{4\cdot 4}$ ein und haben:

	— 1,8930	+ 0,5868	0,2250	0,1482	0,0876
	— 1,3082	+ 0,0750	0,3780	0,0356	0,0592
	— 6,0255	+ 0,2223	0,1602	0,5850	0,2601
	+ 9,2264	+ 0,1168	0,2368	0,2312	0,5936
	— 0,0003	1,0009	1,0000	1,0000	1,0005 ;
soll sein:	0,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000 .

Die Übereinstimmung ist befriedigend.

Nach dem dritten Auflösungsverfahren hat man aus (13) nach (XIII), S. 157:

$$
\begin{array}{ll}
+0{,}00167 \cdot 1 \qquad\quad = +0{,}00167 & -0{,}11184 \cdot 1 \qquad\quad = -0{,}11184 \\
-0{,}09823 \cdot 0{,}1667 = -0{,}01637 & +0{,}11533 \cdot 0{,}3892 = +0{,}04489 \\
-0{,}11184 \cdot 0{,}3530 = -0{,}03948 & \zeta = -0{,}06695 \\
+0{,}11533 \cdot 0{,}1962 = +0{,}02263 & \tau = +0{,}11533. \\
\xi = -0{,}03155 & \\
-0{,}09823 \cdot 1 \qquad\quad = -0{,}09823 & \\
-0{,}11184 \cdot 0{,}1176 = -0{,}01315 & \\
+0{,}11533 \cdot 0{,}3987 = +0{,}04599 & \\
\eta = -0{,}06539 &
\end{array}
\tag{19}
$$

Die reziproken Gewichte der Unbekannten erhält man einfach als die Summen der Produkte je zweier untereinander stehender Zahlen der Vertikalreihen in (13) für (ξ), (η), (ζ), (τ), also z. B. ist:

$$
\begin{aligned}
Q_{1\cdot 1} &= 0{,}00833 + 0{,}1667 \cdot 0{,}00294 + 0{,}3530 \cdot 0{,}00190 + 0{,}1962 \cdot 0{,}00146 \\
&= 0{,}00833 + 0{,}00049 + 0{,}00067 + 0{,}00029 = 0{,}00978\,.
\end{aligned}
$$

(20) Ferner wird:

$$
\begin{aligned}
Q_{2\cdot 2} &= 0{,}01765 + 0{,}00007 + 0{,}00118 = 0{,}01890 \\
Q_{3\cdot 3} &= 0{,}00538 + 0{,}00112 = 0{,}00650 \\
Q_{4\cdot 4} &= 0{,}00742\,.
\end{aligned}
$$

Kontrollieren läßt sich diese Berechnung der $Q_{1\cdot 1}$ bis $Q_{4\cdot 4}$ allerdings nicht, wenn man nicht die Q mit nichtquadratischem Index hinzufügt, was hier jedoch unterbleiben soll.

Wenn bei der vorhergehenden Lösung die Berechnung der Q nicht berücksichtigt worden wäre, so ließen sich die Q nach dem Verfahren unter V. S. 157/158, wie folgt aus den linken Seiten der Gleichungen (13) ableiten:

$$
\begin{aligned}
Q_{4\cdot 4} &= 0{,}00742 \\
Q_{3\cdot 4} &= 0{,}00742 \cdot 0{,}38924 = 0{,}00289 \\
Q_{3\cdot 3} &= 0{,}00289 \cdot 0{,}38924 + 0{,}00538 = 0{,}00650 \\
Q_{2\cdot 4} &= 0{,}00742 \cdot 0{,}35294 + 0{,}00289 \cdot 0{,}11765 = 0{,}00296 \\
Q_{2\cdot 3} &= 0{,}00289 \cdot 0{,}35294 + 0{,}00650 \cdot 0{,}11765 = 0{,}00178 \\
Q_{2\cdot 2} &= 0{,}00296 \cdot 0{,}35294 + 0{,}00178 \cdot 0{,}11765 + 0{,}01765 = 0{,}01890 \\
Q_{1\cdot 4} &= \cdot \quad 0{,}00289 \cdot 0{,}33333 + 0{,}00296 \cdot 0{,}16667 = 0{,}00146 \\
Q_{1\cdot 3} &= \cdot \quad 0{,}00650 \cdot 0{,}33333 + 0{,}00178 \cdot 0{,}16667 = 0{,}00247 \\
Q_{1\cdot 2} &= \cdot \quad 0{,}00178 \cdot 0{,}33333 + 0{,}01890 \cdot 0{,}16667 = 0{,}00374 \\
Q_{1\cdot 1} &= \cdot \quad 0{,}00247 \cdot 0{,}33333 + 0{,}00374 \cdot 0{,}16667 + 0{,}00833 = 0{,}00978
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Man erhält aus den Fehlergleichungen (1), S. 159, durch Substitution der Werte der Unbekannten:

$$(22)\quad \begin{array}{llll} \lambda_1 = -\,0{,}06695 & \text{Gew. } 90 & \lambda_5 = -\,0{,}06541 & \text{Gew. } 20 \\ \lambda_2 = +\,0{,}11533 & 80 & \lambda_6 = +\,0{,}22460 & 40 \\ \lambda_3 = +\,0{,}04228 & 70 & \lambda_7 = -\,0{,}03155 & 60 \\ \lambda_4 = -\,0{,}60926 & 20 & \lambda_8 = -\,0{,}54386 & 20 \end{array}$$

und damit $[\lambda\lambda g] = (\lambda\lambda) = 17{,}0953$.

Dagegen ist nach (1) $[llg] = (ll) = 21{,}7600$ und daher nach (13), S. 163:

$$(23)\quad \begin{aligned} (\lambda\lambda) &= 21{,}7600 - \{0{,}2000 \cdot 0{,}00167 + 5{,}5667 \cdot 0{,}09823 \\ &\qquad + 20{,}7882 \cdot 0{,}11184 + 15{,}5437 \cdot 0{,}11533\} \\ &= 21{,}7600 - \{0{,}00033 + 0{,}54682 + 2{,}32495 + 1{,}79266\} \\ &= 17{,}0952\,; \end{aligned}$$

Formel (13*), S. 158, gibt:

$$\begin{aligned} (\lambda\lambda) &= 21{,}7600 + 0{,}20 \cdot 0{,}03155 - 5{,}60 \cdot 0{,}06541 - 20{,}20 \cdot 0{,}06695 \\ &\qquad - 25{,}60 \cdot 0{,}11533 \\ &= 21{,}7600 + 0{,}00631 - 0{,}36630 - 1{,}35239 - 2{,}95245 \\ &= 17{,}0952\,. \end{aligned}$$

Es ist also gute Übereinstimmung mit dem aus den Einzelwerten der λ folgenden Werte.

Indem die Anzahl der Fehlergleichungen 8, die der Unbekannten 4 ist, wird

$$(24)\qquad \mu = \pm\sqrt{\frac{17{,}0953}{8-4}} = \pm\sqrt{4{,}2738} = \pm\, 2{,}''067$$

der mittlere Fehler eines einfach repetierten Winkels. Doch ist zu beachten, daß μ nur für große Repetitionszahlen gelten kann; wir setzen daher, um dies anzudeuten:

$$(25)\qquad \mu_{(50)} = \pm\sqrt{\frac{4{,}2738}{50}} = \pm\, 0{,}''292$$

als mittlern Fehler eines 50-mal repetierten Winkels.

Man hat noch:

$$(26)\quad \begin{aligned} \mu_\xi &= \pm\sqrt{4{,}2738 \cdot 0{,}00978} = \pm\, 0{,}''204 \\ \mu_\eta &= \pm\sqrt{4{,}2738 \cdot 0{,}01890} = \pm\, 0{,}284 \\ \mu_\zeta &= \pm\sqrt{4{,}2738 \cdot 0{,}00650} = \pm\, 0{,}167 \\ \mu_\tau &= \pm\sqrt{4{,}2738 \cdot 0{,}00742} = \pm\, 0{,}178 \end{aligned}$$

und damit die Endwerte:

$$
(27)\qquad
\begin{aligned}
\sphericalangle\, BN &= x = 6^0\ 59'\ 34'',478 \pm 0'',204\\
\sphericalangle\, BH &= y = 18\ \ 43\ \ 45,535 \pm 0,284\\
\sphericalangle\, BA &= z = 19\ \ 25\ \ 59,353 \pm 0,167\\
\sphericalangle\, BW &= t = 34\ \ 18\ \ 43,725 \pm 0,178.
\end{aligned}
$$

Die verbesserten Beobachtungswerte sind:

$$
(28)\qquad
\begin{aligned}
BA &= 19^0\ 25'\ 59'',353 & BH &= 18^0\ 43'\ 45'',535\\
BW &= 34\ \ 18\ \ 43,725 & NA &= 12\ \ 26\ \ 24,875\\
AW &= 14\ \ 52\ \ 44,372 & BN &= 6\ \ 59\ \ 34,478\\
HW &= 15\ \ 34\ \ 58,191 & NH &= 11\ \ 44\ \ 11,057.
\end{aligned}
$$

Die Produkte $\lambda\sqrt{g}$ oder die Fehler reduziert aufs Gewicht 1 sind bzw.:

$$
(29)\qquad
\begin{aligned}
&1.\quad -0'',6351 & &5.\quad -0'',2925\\
&2.\quad +1,0315 & &6.\quad +1,4205\\
&3.\quad +0,3537 & &7.\quad -0,2444\\
&4.\quad -2,7247 & &8.\quad -2,4322.
\end{aligned}
$$

Bei der Ausführung aller vorstehenden Rechnungen wurde ausgiebig von der Rechenmaschine Gebrauch gemacht.

Es folgt hier eine zweite Auflösung der Normalgleichungen, die Herr Geometer G. Förster mit Hilfe der logarithmischen Rechentafel von Steuerrat Scherer in Cassel*) ausgeführt hat.

Die Reduktion der Normalgleichungen ist nach dem abgekürzten Verfahren erfolgt; die für die Bildung der einzelnen Zeilen erforderlichen Faktoren, die rechter Hand auftreten, sind kursiv hervorgehoben. Man würde sie gar nicht aufschreiben, wenn nicht die Q zu berechnen wären. Die 6. Vertikalspalte enthält die Quersummen negativ genommen; in der 7. Spalte steht die Gesamtsumme, die null sein sollte.

Am Schlusse der 5. Spalte ist $[\lambda\lambda g]$ nach der Formel (13), S. 158, aus (ll) mittels (al), $(bl\cdot 1)$, $(cl\cdot 2)$, $(dl\cdot 3)$ hergeleitet. In der 6. Spalte steht die entsprechende negative Quersumme. Man muß sich da linker Hand von (ll) gesetzt denken $-(al)\xi-(bl)\eta-(cl)\zeta-(dl)\tau$. Die Summe der Koeffizienten $+(ll)$ ist rechter Hand von (ll) als S_5, negativ genommen, angesetzt. Nach Elimination von ξ, η, ζ, τ müssen die aus (ll) und S_5 hervorgehenden Werte zusammen null ergeben.

*) Zeitschrift für Vermessungswesen, Bd. XXII 1903, S. 54.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
120,000	− 20,000	− 40,000	*	− 0,200	− 59,800	0	+ 1,0000					
	60,000	*	− 20,000	+ 5,600	− 25,600	0	*	+ 1,0000				
	− 3,333	− 6,667	*	− 0,033	− 9,967		+ *0,1667*	*				
	56,667	− 6,667	− 20,000	+ 5,567	− 35,567	0	+ 0,1667	+ 1,0000				
		200,000	− 70,000	+ 20,200	− 110,200	0	*	*	+ 1,0000			
		− 13,333	*	− 0,067	− 19,933		+ *0,3333*	*	*			
		− 0,784	− 2,353	+ 0,655	4,183		+ 0,0196	+ *0,1177*	*			
		185,883	− 72,353	+ 20,788	− 131,316	+ 2	+ 0,3529	+ 0,1177	+ 1,0000			
			170,000	− 25,600	− 54,400	0	*	*	*	+ 1,0000		
			*	*	*		*	*	*	*		
+ 1,308			− 7,060	+ 1,965	− 12,555		+ 0,0588	+ *0,3530*	*	*		
+ 2,679	+ 0,446		− 28,17.	+ 8,090	− 52,28.		+ 0,1374	+ 0,0459	+ *0,3893*	*		
*	− 2,307	− 8,313	134,770	− 15,545	− 119,235	− 10	+ 0,1962	+ 0,3989	+ 0,3893	+ 1,0000		
− 0,200	+ 5,567	+ 20,788	− 15,545	+ 21,760	− 21,760	0						
+ 3,787	+ 3,706	+ 12,445	− 15,545	− 0,000	− 0,100		+ 0,00833					
− 0,03156	− 0,06510	− 0,06698	+ 0,11535	− 0,517	+ 3,493		+ 0,00049	+ 0,01765			Ableitung der Q	
				2,325	+ 15,020		+ 0,00067	+ 0,00007	+ 0,00538		nach dem dritten	
				1,793	13,758		+ 0,00029	+ 0,00118	+ 0,00112	+ 0,00742	Verfahren, S. 157	
ξ	η	ζ	τ	+ 17,095	17,105	− 10	+ 0,00978	+ 0,01890	+ 0,00650	+ 0,00742		
				$-[\lambda\lambda g]$	$= -[\lambda\lambda g]$		$Q_{1\cdot1}$	$Q_{2\cdot2}$	$Q_{3\cdot3}$	$Q_{4\cdot4}$		
							+ 0,00291					
							+ 0,00022	+ 0,00190		+ 0,00063		
							+ 0,00059	+ 0,00057	+ 0,00146	+ 0,00115	+ 0,00296	+ 0,00289
							+ 0,00375	+ 0,00247	+ 0,00146	+ 0,00178	+ 0,00296	+ 0,00289
							$Q_{1\cdot2}$	$Q_{1\cdot3}$	$Q_{1\cdot4}$	$Q_{2\cdot3}$	$Q_{2\cdot4}$	$Q_{3\cdot4}$

Herleitung der Unbekannten durch allmähliche Substitution.

Es folgt zum Schlusse endlich noch eine dritte Auflösung mit Logarithmentafeln in der Form, wie sie seit über 30 Jahren im Königl. Preußischen Geodätischen Institut üblich ist (Quersummen hat Herr Prof. Dr. L. Krüger seit 16 Jahren gebildet).

	ξ	τ	η	ζ	Konst.	S	(ξ)	Σ
	+ 120	*	− 20	− 40	+ 0,20	+ 60,20	+ 10	+ 70,20
	2,07918		1,30103	1,60206	9,30103	1,77960	1,00000	1,84634
			9,22185	9,52288	7,22185	9,70042	8,92082	9,76716
					+ 0,00167	+ 0,50168	+ 0,08333	+ 0,58500
					− 0,02232	+ 0,31101	+ 0,00822	+ 0,35649
					− 0,01090	+ 0,15576	+ 0,00624	+ 0,20142
I					$\xi =$ − 0,03155	+ 0,96845	+ 0,09779	+ 1,14291
							$= 10\,Q_{1\cdot 1}$	

	τ	η	ζ	Konst.	S	(ξ)	(τ)	Σ
	+ 170	− 20	− 70	+ 25,60	+ 105,60	*	+ 10	+ 115,60
	2,23045	1,30103	1,81510	1,40824	2,02366		1,00000	2,06296
		9,07058	9,61165	9,17779	9,79321		8,76955	9,83251
				+ 0,15059	+ 0,62117		+ 0,05882	+ 0,68000
				− 0,02757	+ 0,38419	+ 0,01015	+ 0,01189	+ 0,44037
				− 0,00770	+ 0,10995	+ 0,00441	+ 0,00318	+ 0,14218
II				$\tau =$ + 0,11532	+ 1,11531	+ 0,01456	+ 0,07419	+ 1,26255
						$= 10\,Q_{1\cdot 4}$	$= 10\,Q_{4\cdot 4}$	

	η	ζ	Konst.	S	(ξ)	(τ)	(η)	Σ
	+ 60,000	*	− 5,600	+ 14,400	*	*	+ 10,000	+ 24,400
	− 3,333	− 6,667	+ 0,033	+ 10,033	+ 1,667	*	*	+ 11,700
	− 2,353	− 8,235	+ 3,012	+ 12,423	*	+ 1,176	*	+ 13,600
	+ 54,314	− 14,902	− 2,555	+ 36,856	+ 1,667	+ 1,176	+ 10,000	+ 49,700
	1,73491	1,17325	0,40739	1,56651	0,22194	0,07041	1,00000	1,69636
		9,43834	8,67248	9,83160	8,48703	8,33550	9,26509	9,96145
			− 0,04704	+ 0,67858	+ 0,03069	+ 0,02165	+ 0,18412	+ 0,91506
			− 0,01837	+ 0,25600	+ 0,00676	+ 0,00792	+ 0,00490	+ 0,29343
III			$\eta =$ − 0,06541	+ 0,93458	+ 0,03745	+ 0,02957	+ 0,18902	+ 1,20849
					$= 10\,Q_{1\cdot 2}$	$= 10\,Q_{2\cdot 4}$	$= 10\,Q_{2\cdot 2}$	

	ζ	Konst.	S	(ξ)	(τ)	(η)	(ζ)	Σ
	+ 200,000	− 20,200	+ 69,800	*	*	*	+ 10,000	+ 79,800
	− 13,333	+ 0,067	+ 20,067	+ 3,333	*	*	*	+ 23,400
	− 28,824	+ 10,541	+ 43,482	*	+ 4,118	*	*	+ 47,600
	− 4,089	− 0,701	+ 10,112	+ 0,457	+ 0,323	+ 2,744	*	+ 13,636
	+ 153,754	− 10,293	+ 143,461	+ 3,790	+ 4,441	+ 2,744	+ 10,000	+ 164,436
	2,18683	1,01255	2,15673	0,57864	0,64748	0,43838	1,00000	2,21600
		8,82572	9,96990	8,39181	8,46065	8,25155	8,81317	0,02917
		$\zeta =$ − 0,06695	+ 0,93304	+ 0,02465	+ 0,02888	+ 0,01785	+ 0,06504	+ 1,06917
IV				$= 10\,Q_{1\cdot 3}$	$= 10\,Q_{3\cdot 4}$	$= 10\,Q_{2\cdot 3}$	$= 10\,Q_{3\cdot 3}$	

Schiebezettel zur Elimination der Unbekannten.

9,22185	9,52288	9,07058	9,61465	9,43834
0,52288	1,12494	0,37161	1,45975	0,61159
0,82391	8,82391	0,91568	1,02289	9,84573
8,52288	$\boxed{1,30248}$	0,47882	$\boxed{1,63831}$	$\boxed{1,00485}$
$\boxed{1,00145}$	0,52288	$\boxed{1,09424}$	0,61465	9,66028
0,22185	1,36922	0,07058	1,67761	9,50875
1,06819		1,13354		0,43834
				1,13470
I		II		III

Schiebezettel zur allmählichen Ableitung der Unbekannten.

ζ	8,82572	9,96990	8,39181	8,46065	8,25155	0,02917
III	8,26406	9,40824	7,83015	7,89899	7,68989	9,46751
II	8,44037	9,58455	8,00646	8,07530		9,64382
I	8,34860	9,49278	7,91469			9,55205
Konst.		S	(ξ)	$(\tau$	$(\eta$	Σ

η	8,81564	9,97062	8,57345	8,47085	0,08225
II	7,88622	9,04120	7,64403	7,54143	9,15283
I	8,03749	9,19247	7,79530		9,30410
Konst.		S	(ξ)	τ	Σ

Die Bedeutung der Zahlen auf den Schiebezetteln erkennt man alsbald beim Nachrechnen. Deshalb braucht darüber nichts gesagt zu werden. Die Vorzeichen werden bei der logarithmischen Rechnung nicht berücksichtigt, da man sie leicht von vornherein nach einer leicht zu bildenden Regel ansetzen kann.

Um die Rechnung etwas zu vereinfachen, ist die ursprünglich vierte Normalgleichung an die zweite Stelle gebracht worden. Bei der Ableitung des Gewichtsgleichungssystems wurde 10 an Stelle von 1, also $\varkappa = 10$ gesetzt; vergl. S. 152.

Ist die Berechnung der Q nicht beabsichtigt, so schließt die Tabelle auf S. 169 mit der unter S stehenden Vertikalreihe. Diese Reihe fällt dagegen aus, ebenso wie beim ersten Schiebezettel die umränderten Zahlen und bei dem zweiten Schiebezettel die zweite Vertikalreihe, wenn von vornherein die Q mit berechnet werden sollen. Zur Prüfung der Rechnung dient alsdann der in der Reihe unter Σ berechnete Wert; so ist z. B. bei I, S. 169:

$$1 - 0{,}03155 + \underset{\text{aus Gl. II}}{0{,}09779} + \underset{\text{aus Gl. III}}{0{,}01456} + \underset{\text{aus Gl. IV}}{0{,}03745} + 0{,}02465 = +1{,}14290,$$

während der unter Σ bei I stehende Wert $+ 1{,}14291$ lautet.

§ 8. Nichtlineare Beziehungen. Einführung von Näherungswerten. Indirekte Auflösung der Normalgleichungen.

1. Nichtlineare Beziehungen. Einführung von Näherungswerten. Ist der Zusammenhang zwischen den Beobachtungsgrößen und den Unbekannten kein linearer, so kann er in manchen Fällen durch Einführung neuer Unbekannten linear gemacht werden. Ist z. B. $l = ax + bxy^2$, so genügt es, für xy^2 die Unbekannte u zu setzen, um einen linearen Ausdruck zu erhalten. Oftmals ist auch, ohne daß linear gemacht wird, eine strenge Lösung möglich, wenn man dazu geeignete neue Unbekannte einführen kann.*)

Um lineare Ausdrücke herzustellen, ist es im allgemeinen erforderlich, für die Unbekannten möglichst genaue Näherungswerte einzuführen, welche durch die Ausgleichung nur noch kleine Verbesserungen erhalten.

Wie man sich diese Näherungswerte verschafft, ist gleichgültig; können sie aus frühern Bestimmungen nicht entnommen werden, so muß man so viele Gleichungen, als zu ihrer Bestimmung nötig sind, mittels der gegebenen Beobachtungen bilden und nach den Unbekannten auflösen. Durch zweckmäßige Auswahl unter den Beobachtungswerten wird man möglichst gute Näherungswerte zu erreichen suchen. Die Reduktion auf die lineare Form ist nämlich nur zulässig, wenn man die zweiten und höheren Potenzen der an den Näherungswerten anzubringenden Verbesserungen als so klein voraussetzen kann, daß man ihren Einfluß vernachlässigen darf.

Die Näherungswerte von x, y, z seien x_0, y_0, z_0 und ihre plausibelsten Verbesserungen ξ, η, ζ, so daß also

$$(1) \qquad x = x_0 + \xi, \qquad y = y_0 + \eta, \qquad z = z_0 + \zeta$$

ist.

*) J. Franz, Die Verteilung der Meere auf der Mondoberfläche. (Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akad. d. Wissenschaften. 1906, S. 579)

Ist nun der Zusammenhang zwischen der Beobachtungsgröße l und x, y, z gegeben durch

$$(2) \qquad l + \lambda = f(x, y, z),$$

so ist nach dem Taylorschen Satze mit der vorher erwähnten Vernachlässigung:

$$(3) \qquad l + \lambda = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial z}\zeta,$$

oder abgekürzt

$$l + \lambda = f + a\xi + b\eta + c\zeta,$$

wobei f wie auch die numerischen Werte der Differentialquotienten a, b, c mittels x_0, y_0, z_0 zu berechnen sind. Man hat somit die lineare Fehlergleichung

$$(3^*) \qquad \lambda = -(l - f) + a\xi + b\eta + c\zeta,$$

worin $l - f$ auch als Beobachtung — Rechnung bezeichnet werden kann.

Sollte sich nach vollendeter Ausgleichung herausstellen, daß ξ, η, ζ zu erhebliche Werte erlangen, um die Entwicklung von (3) als genügend erachten zu können, so muß mit den verbesserten Werten der Unbekannten eine neue Rechnung durchgeführt werden.

Die Einführung von Näherungswerten ist auch bei linearem Zusammenhange der Beobachtungsgrößen und Unbekannten anzuraten. Nicht nur werden grobe Beobachtungsfehler dadurch sofort entdeckt, sondern es ergibt sich auch eine viel bequemere Rechnung, da alsdann die Differenzen Beob. — Rechnung nur kleine Zahlen sein werden, was die Berechnung der rechten Seiten der Normalgleichungen sehr erleichtert. Würden diese zufällig gleich null und also auch die Verbesserungen der Näherungswerte gleich null, so würde die in den Koeffizienten $a, b, c, \ldots, (aa), (ab), \ldots$ beizubehaltende Stellenzahl sich nur richten nach der für die Gewichtsberechnung nötigen Schärfe.

Bei dem Ansatz (2) wurde angenommen, daß die in der Funktion f auftretenden Konstanten absolut genau gegeben seien. In Wirklichkeit gestaltet sich die Aufgabe meist so, daß auch dafür noch Beobachtungen angestellt werden. Man gelangt so zu der allgemeinen Aufgabe, daß für eine Funktion

$$f(l', l'', l''', \ldots x, y, z, \ldots),$$

die den Wert null haben sollte, die Größen $l', l'', l''', \ldots$ beobachtet werden. Die Aufgabe: $x, y, z, \ldots$ zu bestimmen, ist dann hierher gehörig, wenn für jede Gleichung ein System $l', l'', l''', \ldots$ beobachtet wird, das durchaus unabhängig ist von denen der andern Gleichungen.

Bezeichnen $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''', \ldots$ irgend welche kleine Verbesserungen der l, so kann man nun ansetzen:

$$(4)\quad f(l' + \varepsilon', l'' + \varepsilon'', l''' + \varepsilon''', \ldots x_0 + \xi, y_0 + \eta, z_0 + \zeta, \ldots) = 0$$

und hieraus nach Taylors Satze:

$$(5)\quad \begin{aligned} & f + \left(\frac{\partial f}{\partial l'} \varepsilon' + \frac{\partial f}{\partial l''} \varepsilon'' + \frac{\partial f}{\partial l'''} \varepsilon''' + \cdots\right) \\ & + \frac{\partial f}{\partial x} \xi + \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial z} \zeta + \cdots = 0. \end{aligned}$$

f und seine Differentialquotienten sind mit den Beobachtungs- bzw. Näherungswerten zu berechnen.

Werden nun $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ durch die Ausgleichung bestimmt, so kann man zur Abkürzung setzen:

$$(6)\qquad l + \lambda = a\xi + b\eta + c\zeta + \cdots,$$

wobei $\frac{\partial f}{\partial x}$ usw. mit $-a$ usw., f mit l und das Fehleraggregat mit λ bezeichnet ist. $l, a, b, c, \ldots$ sind numerisch bekannt. λ wird durch die Ausgleichung bestimmt. Seine Entstehung aus

$$(7)\qquad \frac{\partial f}{\partial l'} \varepsilon' + \frac{\partial f}{\partial l''} \varepsilon'' + \frac{\partial f}{\partial l'''} \varepsilon''' + \cdots$$

gibt die Möglichkeit, das Quadrat des mittlern Fehlers der Gleichung (6), bzw. der fingierten Beobachtungsgröße l aufzustellen; es ist gleich

$$(8)\qquad \mu^2 = \mu'^2 \left(\frac{\partial f}{\partial l'}\right)^2 + \mu''^2 \left(\frac{\partial f}{\partial l''}\right)^2 + \mu'''^2 \left(\frac{\partial f}{\partial l'''}\right)^2 + \cdots.$$

Nach Maßgabe dieses Ausdrucks kann man, falls nur $\mu', \mu'', \mu''', \ldots$ bekannt sind, μ^2 schätzen und schließlich Gewichte g für die verschiedenen Gleichungen (6) einführen.

Um nach erfolgter Ausgleichung den Anteil der einzelnen ε an λ zu finden, ist zu bedenken, daß $\frac{\varepsilon'^2}{\mu'^2} + \frac{\varepsilon''^2}{\mu''^2} + \cdots$ mit Rücksicht auf (7) zu einem Min. wird, wenn $\frac{\varepsilon'}{\mu'^2} = k \frac{\partial f}{\partial l'}$,

$\frac{\varepsilon''}{\mu''^2} = k \frac{\partial f}{\partial l''}$ usw. ist. Setzt man dieses in (7) ein, so folgt $k = \lambda : \mu^2$.

II. Unabhängigkeit des Minimums [$\lambda\lambda g$] von der Wahl der Unbekannten. Sind $x, y, z, \ldots$ die Unbekannten, für welche das Minimum der Fehlerquadrate hergestellt ist, so ist das Minimum auch vorhanden für jedes System $u, v, w, \ldots$, welches mit $x, y, z, \ldots$ in gegebenem Zusammenhange steht. Bezeichnen wir die Fehlerquadratsumme [$\lambda\lambda g$] kurz mit Σ, so ist zunächst

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial z} = 0, \cdots. \tag{9}$$

Denken wir uns nun in Σ die λ immer noch als Funktionen der $x, y, z, \ldots$, diese aber wieder als Funktionen von $u, v, w, \ldots$, so wird

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Sigma}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \Sigma}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \cdots \tag{10}$$

und entsprechend für $v, w, \cdots$. Wegen (9) wird aber

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial u} = 0,$$

und ebenso

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial w} = 0, \cdots.$$

Hiermit ist der Beweis geliefert.

Man kann nun auch die Normalgleichungen für $u, v, w, \ldots$ aufstellen, wenn diejenigen für $x, y, z, \ldots$ bereits gebildet sind, ohne erst auf die Fehlergleichungen zurückgehen zu müssen. Denn fügt man den Gl. (9) den Faktor $\frac{1}{2}$ bei, so stellen diese die auf null reduzierten Normalgleichungen vor, wobei die λ durch $x, y, z, \ldots$ ausgedrückt sind. Die Gl. (10) zeigt nun, daß man die Normalgleichungen für u erhält, wenn man die Normalgleichungen für $x, y, z, \ldots$ der Reihe nach mit $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}, \ldots$ multipliziert und die Produkte addiert. Wenn man noch die $x, y, z, \ldots$ durch die $u, v, w, \ldots$ ersetzt, so ist die Normalgleichung für u gebildet. In gleicher Weise ergeben sich die andern Normalgleichungen.

III. Indirekte Auflösung der Normalgleichungen. Zur Erleichterung der Auflösung der Normalgleichungen hat man besonders für den Fall, daß nur die Werte der Unbekannten, nicht aber auch die Gewichte gesucht werden, Methoden angegeben, die die Auflösung durch schrittweise Annäherung liefern. Sie beruhen darauf, daß im allgemeinen jede Normalgleichung von derjenigen Unbekannten besonders beeinflußt wird, deren Koeffizient der quadratische ist.

Die Normalgleichungen seien:

$$(12)\qquad \begin{aligned} (aa)x + (ab)y + (ac)z - (al) &= 0 \\ (ab)x + (bb)y + (bc)z - (bl) &= 0 \\ (ac)x + (bc)y + (cc)z - (cl) &= 0; \end{aligned}$$

dann setzt man nach Jacobi als erste Näherungswerte:

$$(13)\qquad x_1 = \frac{(al)}{(aa)}, \quad y_1 = \frac{(bl)}{(bb)}, \quad z_1 = \frac{(cl)}{(cc)}.$$

Die Gleichungen (12) geben hiermit nicht null, sondern Werte $(al)'$, $(bl)'$, $(cl)'$: man setzt nun als Verbesserungen von x_1, y_1, z_1:

$$(14)\qquad x_2 = \frac{(al)'}{(aa)}, \quad y_2 = \frac{(bl)'}{(bb)}, \quad z_2 = \frac{(cl)'}{(cc)}.$$

Führt man nun $x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$, $z_1 + z_2$ in (12) ein, so ergibt sich anstatt null eine Wertreihe $(al)''$, $(bl)''$, $(cl)''$, mit deren Hilfe man weitere Verbesserungen x_3, y_3, z_3 berechnen kann usw., bis endlich die Normalgleichungen (12) hinreichend erfüllt werden; alsdann ist

$$(15)\qquad x = x_1 + x_2 + \cdots,\ y = y_1 + y_2 + \cdots,\ z = z_1 + z_2 + \cdots.$$

Bequem ist es für diese indirekte Auflösung, (12) in die Form

$$(16)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{(al)}{(aa)} \quad \cdot \quad - \frac{(ab)}{(aa)}y - \frac{(ac)}{(aa)}z \\ y &= \frac{(bl)}{(bb)} - \frac{(ab)}{(bb)}x \quad \cdot \quad - \frac{(bc)}{(bb)}z \\ z &= \frac{(cl)}{(cc)} - \frac{(ac)}{(cc)}x - \frac{(bc)}{(cc)}y \quad \cdot \end{aligned}$$

zu bringen, um die wiederkehrenden Divisionen mit (aa), (bb), (cc) zu sparen.

In anderer Weise erfolgt die indirekte Auflösung nach Gauß nämlich in der Art, daß man nicht gleichzeitig für alle Unbekannten eine Wertreihe bestimmt, sondern immer nur für eine derselben, und zwar für diejenige, deren Verbesserung gerade die größte ist unter der Reihe der Verbesserungen aller Unbekannten an dieser Stelle der Rechnung. Außerdem zeigt die Erfahrung, daß es nützlich ist, eine Hilfsunbekannte einzuführen, indem man in den Fehlergleichungen setzt:

$$x = \xi - \sigma,\ y = \eta - \sigma,\ z = \zeta - \sigma, \text{ usw.} \tag{17}$$

Sie geben dann

$$\lambda_i = -l_i + a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta + \cdots - s_i\sigma, \tag{18}$$

mit

$$s_i = a_i + b_i + c_i + \cdots.$$

Die Normalgleichungen werden:

$$\begin{array}{c}(aa)\xi + (ab)\eta + (ac)\zeta + \cdots - (as)\sigma - (al) = 0\\ (ab)\xi + (bb)\eta + (bc)\zeta + \cdots - (bs)\sigma - (bl) = 0\\ (ac)\xi + (bc)\eta + (cc)\zeta + \cdots - (cs)\sigma - (cl) = 0\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ -(as)\xi - (bs)\eta - (cs)\zeta + \cdots + (ss)\sigma + (sl) = 0.\end{array} \tag{19}$$

Durch ein direktes Eliminationsverfahren würde man nun allerdings aus diesen Gleichungen, deren Summe null ist, das System $\xi, \eta, \zeta, \ldots \sigma$ nicht bestimmen können.

Bei indirekter Auflösung erhält man dagegen Werte für alle Unbekannten und kann dann mittels (17) zu $x, y, z, \ldots$ übergehen. Während die Werte $\xi, \eta, \zeta, \ldots \sigma$ vom Gange der Rechnung abhängen, sind $x, y, z, \ldots$ bestimmt. Durch Einführung von σ erhält man eine raschere Konvergenz.*)

Zur Erläuterung des Gaußschen Verfahrens nehmen wir die Normalgleichungen (6), S. 45, die sich ja allerdings direkt, wie dort angegeben, am bequemsten auflösen lassen. Die Um-

*) Das Verfahren gab Gauß in seinen Vorlesungen; vgl. die „Festschrift zur Feier des 150-jährigen Bestehens der Königl. Ges. d. Wissenschaften zu Göttingen". Berlin 1901, S. 45—59: R. Dedekind, Gauß in seiner Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate.

Es wurde von Gauß bei den Stationsausgleichungen für die hannoversche Gradmessung benutzt; vgl. Werke Bd. IX, S. 265. Zuerst ist das Gaußsche Verfahren von Gerling in seiner Ausgleichungsrechnung, S. 386 u. f., veröffentlicht worden.

formungen (17) bis (19) geben:

$$\begin{array}{rrrrrl}
3\xi - & \eta - & \zeta & \cdot & - \; \sigma & + 0{,}25 = 0 \\
-\xi + & 3\eta & \cdot & - \; \tau & - \; \sigma & + 0{,}28 = 0 \\
-\xi & \cdot & + 3\zeta - & \tau & - \; \sigma & + 0{,}40 = 0 \\
\cdot & - \eta - & \zeta + & 3\tau & - \; \sigma & - 0{,}93 = 0 \\
-\xi - & \eta - & \zeta - & \tau & + 4\sigma & + 0{,}00 = 0.
\end{array}$$

Drücken wir alles in Tausendstelsekunden aus, so gestaltet sich die weitere Rechnung wie folgt:

	τ_1 $+310$	Reste	ξ_1 -83	Reste	σ_1 $+57$	Reste	ζ_1 -39	Reste	σ_2 -10	Reste
+ 250	0	+ 250	− 249	+ 1	− 57	− 56	+ 39	− 17	+ 10	− 7
+ 280	− 310	− 30	+ 83	+ 53	− 57	− 4	0	− 4	+ 10	+ 6
+ 400	− 310	+ 90	+ 83	+ 173	− 57	+ 116	− 117	− 1	+ 10	+ 9
− 930	+ 930	0	0	0	− 57	− 57	+ 39	− 18	+ 10	− 8
0	− 310	− 310	+ 83	− 227	+ 228	+ 1	+ 39	+ 40	− 40	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$\zeta_2 = -3$	Reste	$\eta_1 = -2$	Reste	$\sigma_3 = -1$	Reste	$\tau_2 = +1$	Reste
+ 3	− 4	+ 2	− 2	+ 1	− 1	0	− 1
0	+ 6	− 6	0	+ 1	+ 1	− 1	0
− 9	0	0	0	+ 1	+ 1	− 1	0
+ 3	− 5	+ 2	− 3	+ 1	− 2	+ 3	+ 1
+ 3	+ 3	+ 2	+ 5	− 4	+ 1	− 1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

ξ	η	ζ	τ	σ
− 0,083	− 0,002	− 0,039	+ 0,310	+ 0,057
		− 0,003	+ 0,001	− 0,010
				− 0,001
− 0,083	− 0,002	− 0,042	+ 0,311	+ 0,046

mithin wir nach (17):

$$x = -0{,}129, \quad y = -0{,}048, \quad z = -0{,}088, \quad t = +0{,}265,$$

übereinstimmend mit S. 46.

Eine Untersuchung über die Frage, ob diese Näherungsverfahren immer zur Auflösung führen, hat für uns wenig Bedeutung vom praktischen Standpunkte aus, da der Rechnungsgang in jedem Augenblicke angibt, inwieweit die Normalgleichungen erfüllt sind, und wir somit nie in die Lage kommen können, erheblich fehlerhafte Werte der Unbekannten für die strengen zu halten. Aber es ist leicht zu zeigen, daß obige Verfahren zu immer größerer Annäherung führen. Sind nämlich $\xi', \eta', \zeta', \sigma'$ irgend welche Annahmen für ξ, η, ζ, σ und berechnet man die zu dem ersten Wertsysteme gehörigen λ' sowie $(\lambda'\lambda')$, so ist $\xi', \eta', \zeta', \sigma'$ ein System von Näherungswerten, wenn $(\lambda'\lambda') < (ll)$ und um so schärfer, je kleiner $(\lambda'\lambda')$ ist. Verbessern wir nun beispielsweise ξ' um

$$(20) \quad \xi'' = \frac{1}{(aa)}\{(al) - (aa)\xi' - (ab)\eta' - (ac)\zeta' + (as)\sigma'\} = -\frac{(a\lambda')}{(aa)},$$

so ergeben sich mit den Näherungswerten $\xi' + \xi'', \eta', \zeta', \sigma'$ neue Verbesserungen λ'', wobei allgemein

$$\lambda'' = \lambda' + a\xi''$$

ist. Daher wird

$$\begin{aligned}(\lambda''\lambda'') &= (\lambda'\lambda') + 2(a\lambda')\xi'' + (aa)\xi''^2 \\ &= (\lambda'\lambda') - (aa)\xi''^2;\end{aligned}$$

es ist also

$$(21) \qquad (\lambda''\lambda'') < (\lambda'\lambda'),$$

d. h. das Wertsystem $\xi' + \xi'', \eta', \zeta', \sigma'$ bietet eine größere Annäherung als das vorhergehende $\xi', \eta', \zeta', \sigma'$.

Zugleich erkennt man, daß bei Anwendung des Gaußschen Verfahrens durch Verbesserung derjenigen Unbekannten die größte Verminderung der Fehlerquadratsumme erzielt wird, für welche das Quadrat der Verbesserung, multipliziert mit dem bezüglichen quadratischen Koeffizienten, oder das Quadrat des Widerspruchs, dividiert durch den quadratischen Koeffizienten, am größten ist. Übrigens ist damit nicht erwiesen, daß auch die Gesamtheit der Rechnung auf solche Art am kleinsten wird. In der Tat ist im Falle des vorigen Beispiels mit der Gaußschen Regel die kürzeste Rechnung erzielt.

Manchmal wird die Konvergenz verlangsamt durch nichtquadratische Koeffizienten, so daß z. B. eine Änderung von ξ auch eine starke Änderung von η erzeugt, diese wieder auf ξ wirkt usw. Dann bestimmt man die Änderungen gleichzeitig für die betreffenden Unbekannten, indem man nach Maßgabe von

$$(22)\quad \left.\begin{aligned}(aa)\xi+(ab)\eta-(al)&=0\\(ab)\xi+(bb)\eta-(bl)&=0\end{aligned}\right\}\ \text{ansetzt}\ \left\{\begin{aligned}\xi&=(al)Q_{1\cdot 1}+(bl)Q_{1\cdot 2}\\\eta&=(al)Q_{1\cdot 2}+(bl)Q_{2\cdot 2}.\end{aligned}\right.$$

Jacobi führt neue Unbekannte ein, um solche nichtquadratische Koeffizienten zu zerstören.*) Jürgens empfiehlt anstatt dieses Verfahrens, Näherungswerte der Q aus einem Normalgleichungssystem zu bestimmen, das durch Weglassung kleiner Koeffizienten und durch Abrundung stark vereinfacht ist. Durch Multiplikation der $i$ten Normalgleichung mit $Q_{1\cdot i}$, $Q_{2\cdot i}$, $Q_{3\cdot i}$, usw. und Addition ($i = 1 \ldots m$) entsteht ein neues Gleichungssystem, bei dem die quadratischen Koeffizienten nahezu 1 sind, die nichtquadratischen aber sehr klein werden.**)

Die Coast and Geodetic Survey der Vereinigten Staaten von Amerika wendet seit 1878 das Verfahren an, die Normalgleichungen zu vereinfachen, daraus $x, y, z, \ldots$ zu bestimmen, diese Werte in die genauen Normalgleichungen einzusetzen und deren Widersprüche mit den vereinfachten Gleichungen zur Verbesserung von $x, y, z, \ldots$ zu benutzen usw.***)

Vergl. auch Czuber: Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie usw. 1899, S. 199 u. 200. Die hier erwähnten Untersuchungen von Mehmke betreffen hauptsächlich die Auflösung beliebiger linearer Gleichungen durch Annäherung, welche Aufgabe weit schwieriger ist als die von Normalgleichungen, bei denen die Konvergenz der Annäherungen nach (21) klar ist. Mehmke empfiehlt in Fällen starker gegen-

*) C. G. Jacobi. Über eine neue Auflösungsart der bei der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden linearen Gleichungen. (Astr. Nachr. Bd. 22, 1845, Nr. 523, Sp. 297—306.)

**) Zur Auflösung linearer Gleichungssysteme (Festschrift der Technischen Hochschule) Aachen 1886.

***) Report of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey etc. für 1877/78. Appendix 8. Paper Nr. 3, S. 115 u. f. Doolittle: General method of solution of normal equations.

Vergl. auch: W. Werner. Über die Methode der Coast and Geodetic Survey zur Auflösung von Normalgleichungen. (Civilingenieur, Bd. XXIX, 1882, 2. Heft); sowie:

Th. W. Wright with the coöperation of J. F. Hayford. The adjustment of observations by the method of least squares etc. New York 1906, S. 114 u. f.

seitiger Beeinflussung von zwei oder drei Gleichungen das oben in (22) angegebene Verfahren, das ich auch schon früher oft mit Nutzen angewandt habe.

Seidels Methode ist von der Gaußschen nicht verschieden, nur hat Seidel nicht die Einführung der Hilfsunbekannten. (Bemerkenswert ist, daß Seidel für manche Fälle der Auflösung beliebiger linearer Gleichungen empfiehlt, sie in Normalgleichungen zu verwandeln: Mehmke fand jedoch, daß man sich diese Mühe meistens sparen könne.) Die von Seidel angegebene Gewichtsberechnung läuft darauf hinaus, das betreffende Gewichtsgleichungssystem durch Annäherung aufzulösen.

§ 9. Mittlerer Fehler einer Funktion von Größen, welche durch vermittelnde Beobachtungen gefunden worden sind.

I. Verschiedene Ausdrücke für den mittlern Fehler. Ist der mittlere Fehler in der Bestimmung der Funktion

$$F(X, Y, Z, T) \tag{1}$$

zu suchen, wenn man für die wahren Werte X, Y, Z, T die durch Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen bestimmten Werte x, y, z, t setzt, also

$$F(x, y, z, t) \tag{2}$$

als Funktionswert annimmt, so müssen in diesen Ausdruck erst die Beobachtungswerte l eingeführt werden, denn nur diese sind unabhängig voneinander, nicht aber die berechneten Werte x, y, z, t. Ist einmal die Funktion F als Funktion der l dargestellt, so gibt § 6, 1. Kap., S. 55 u. f., den mittlern Fehler von F. In Formel (12), S. 64, kommen aber nur die Differentialquotienten von F nach den l vor; es genügt daher, diese Abgeleiteten zu entwickeln, anstatt die l selbst in F einzuführen.

Wir haben nun nach frühern Formeln, unter Einschränkung auf 4 Unbekannte:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 l_1' + \alpha_2 l_2' + \alpha_3 l_3' + \cdots + \alpha_n l_n' \\ y &= \beta_1 l_1' + \beta_2 l_2' + \beta_3 l_3' + \cdots + \beta_n l_n' \\ z &= \gamma_1 l_1' + \gamma_2 l_2' + \gamma_3 l_3' + \cdots + \gamma_n l_n' \\ t &= \delta_1 l_1' + \delta_2 l_2' + \delta_3 l_3' + \cdots + \delta_n l_n', \end{aligned} \tag{3}$$

worin die l' fingierte Beobachtungswerte vom Gewichte 1 bedeuten mögen:

$$(4) \qquad l_1' = l_1 \sqrt{g_1},\ l_2' = l_2 \sqrt{g_2}, \ldots\ l_n' = l_n \sqrt{g_n}.$$

Die l_i sind die wirklichen Beobachtungswerte mit den zugehörigen Gewichten g_i.

Für die Änderung von F nach l_i ist:

$$\frac{dF}{dl_i} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l_i} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l_i} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial l_i} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial l_i};$$

daher wird, wenn wir zur Abkürzung

$$(5) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = F_1,\ \frac{\partial F}{\partial y} = F_2,\ \frac{\partial F}{\partial z} = F_3,\ \frac{\partial F}{\partial t} = F_4$$

setzen, mit Hilfe der aus den Gleichungen (3) zu entnehmenden Differentialquotienten von x, y, z, t nach l_i:

$$(6) \qquad \frac{dF}{dl_i} = (\alpha_i F_1 + \beta_i F_2 + \gamma_i F_3 + \delta_i F_4)\sqrt{g_i}.$$

Da man nun hat, unter den bekannten Voraussetzungen, vergl. S. 64:

$$\mu_F^2 = \left(\frac{dF}{dl_1}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{dF}{dl_2}\right)^2 \mu_2^2 + \cdots + \left(\frac{dF}{dl_n}\right)^2 \mu_n^2,$$

worin $\mu_1 \ldots \mu_n$ die mittlern Fehler von $l_1 \ldots l_n$ bezeichnen, so kann durch Substitution der Gleichungen (6) sofort μ_F^2 gefunden werden.

Wir führen hierbei noch anstatt der verschiedenen μ^2 die Gewichte g ein und setzen wie früher, wenn μ ohne Index der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1 ist,

$$(7) \qquad \mu_i^2 = \frac{\mu^2}{g_i},$$

und erhalten durch eine leichte Rechnung:

$$(8)\ \mu_F^2 = \left\{\begin{array}{llll} [\alpha\alpha]F_1^2 + 2[\alpha\beta]F_1F_2 & + 2[\alpha\gamma]F_1F_3 & + 2[\alpha\delta]F_1F_4 & \\ \quad + [\beta\beta]F_2^2 & + 2[\beta\gamma]F_2F_3 & + 2[\beta\delta]F_2F_4 & \\ & \quad + [\gamma\gamma]F_3^2 & + 2[\gamma\delta]F_3F_4 & \\ & & \quad + [\delta\delta]F_4^2 & \end{array}\right\}\mu^2$$

oder auch mit Einführung der Hilfsgrößen Q:

$$(9)\quad \mu_F^2 = \left\{\begin{array}{rrrr} F_1^2 Q_{1\cdot 1} + 2F_1F_2Q_{1\cdot 2} & + 2F_1F_3Q_{1\cdot 3} & + 2F_1F_4Q_{1\cdot 4} \\ + \quad F_2^2 Q_{2\cdot 2} & + 2F_2F_3Q_{2\cdot 3} & + 2F_2F_4Q_{2\cdot 4} \\ & + \quad F_3^2 Q_{3\cdot 3} & + 2F_3F_4Q_{3\cdot 4} \\ & & + \quad F_4^2 Q_{4\cdot 4} \end{array}\right\} \mu^2.$$

Diese Formel ist oft recht bequem. Für manche Zwecke ist es aber besser, ihr eine andere Gestalt zu geben. Setzen wir

$$(10)\quad \begin{array}{l} F_1 Q_{1\cdot 1} + F_2 Q_{1\cdot 2} + F_3 Q_{1\cdot 3} + F_4 Q_{1\cdot 4} = L_1 \\ F_1 Q_{1\cdot 2} + F_2 Q_{2\cdot 2} + F_3 Q_{2\cdot 3} + F_4 Q_{2\cdot 4} = L_2 \\ F_1 Q_{1\cdot 3} + F_2 Q_{2\cdot 3} + F_3 Q_{3\cdot 3} + F_4 Q_{3\cdot 4} = L_3 \\ F_1 Q_{1\cdot 4} + F_2 Q_{2\cdot 4} + F_3 Q_{3\cdot 4} + F_4 Q_{4\cdot 4} = L_4, \end{array}$$

so folgt aus (9):

$$(11)\quad \mu_F^2 = (F_1 L_1 + F_2 L_2 + F_3 L_3 + F_4 L_4)\mu^2.$$

Diese Formel kann man weiter umwandeln. Die Ausdrücke (10) sind nichts anderes als die Auflösung eines den Normalgleichungen entsprechenden Systems mit den Unbekannten L:

$$(12)\quad \begin{array}{l} (aa)L_1 + (ab)L_2 + (ac)L_3 + (ad)L_4 = F_1 \\ (ab)L_1 + (bb)L_2 + (bc)L_3 + (bd)L_4 = F_2 \\ (ac)L_1 + (bc)L_2 + (cc)L_3 + (cd)L_4 = F_3 \\ (ad)L_1 + (bd)L_2 + (cd)L_3 + (dd)L_4 = F_4. \end{array}$$

Durch Ausführung des Gaußschen Algorithmus wird hieraus:

$$(13)\quad \begin{array}{rrrl} (aa)L_1 + (ab)L_2 + & (ac)L_3 + & (ad)L_4 & = F_1 \\ (bb\cdot 1)L_2 + & (bc\cdot 1)L_3 + & (bd\cdot 1)L_4 & = (F_2\cdot 1) \\ & (cc\cdot 2)L_3 + & (cd\cdot 2)L_4 & = (F_3\cdot 2) \\ & & (dd\cdot 3)L_4 & = (F_4\cdot 3), \end{array}$$

und damit (vergl. einen analogen Fall S. 134/135):

$$(14)\quad \mu_F^2 = \left\{\frac{F_1^2}{(aa)} + \frac{(F_2\cdot 1)^2}{(bb\cdot 1)} + \frac{(F_3\cdot 2)^2}{(cc\cdot 2)} + \frac{(F_4\cdot 3)^2}{(dd\cdot 3)}\right\}\mu^2.$$

Im Anschluß an VI, S. 153, sind die expliziten Formeln für $(F_2\cdot 1), (F_3\cdot 2)$ und $(F_4\cdot 3)$:

$$(15)\quad \begin{array}{l} (F_2\cdot 1) = F_2 - \alpha_2' F_1 \\ (F_3\cdot 2) = F_3 - \beta_3''(F_2\cdot 1) - \alpha_3' F_1 \\ (F_4\cdot 3) = F_4 - \gamma_4'''(F_3\cdot 2) - \beta_4''(F_2\cdot 1) - \alpha_4' F_1. \end{array}$$

Eliminieren wir andrerseits die Hilfsgrößen Q aus (9) mittels der Beziehungen (XIV) und (XV), S. 157, so erhalten wir nach einfacher Reduktion:

$$\mu_F^2 = \mu^2 \left\{ \frac{F_1^2}{(aa)} + \frac{(F_2 - \alpha_2' F_1)^2}{(bb \cdot 1)} + \frac{(F_3 - \beta_3'' F_2 - \alpha_3'' F_1)^2}{(cc \cdot 2)} \right.$$
$$\left. + \frac{(F_4 - \gamma_4''' F_3 - \beta_4''' F_2 - \alpha_4''' F_1)^2}{(dd \cdot 3)} \right\},$$

d. i. wieder (14), wegen

$$\begin{aligned} &(F_2 \cdot 1) = F_2 - \alpha_2' F_1 \\ (16)\qquad &(F_3 \cdot 2) = F_3 - \beta_3'' F_2 - \alpha_3'' F_1 \\ &(F_4 \cdot 3) = F_4 - \gamma_4''' F_3 - \beta_4''' F_2 - \alpha_4''' F_1 . \end{aligned}$$

Daß die Gl. (15) und (16) wirklich dasselbe ergeben, sieht man auch mit Benutzung der Beziehungen (33), S. 128.

Beispiel. Fortsetzung zu S. 167. Der ausgeglichene Wert des Winkels NH ist $11^0\,44'\,11'',057 = y - x$; es ist das Gewicht, bzw. der mittlere Fehler dieser Bestimmung zu ermitteln.

Wir haben nach (9), S. 182, für zwei Unbekannte:

$$\begin{aligned} &\mu_{NH}^2 = \mu^2(Q_{1\cdot 1} - 2\,Q_{1\cdot 2} + Q_{2\cdot 2}) \\ (30)\qquad &\phantom{\mu_{NH}^2} = 4{,}2738\,\{0{,}00978 - 0{,}00750 + 0{,}01890\} \\ &\phantom{\mu_{NH}^2} = 4{,}2738 \cdot 0{,}02118 = 0{,}09052 ; \end{aligned}$$

$$(31)\qquad \mu_{NH} = \pm\, 0'',301 .$$

Dem Gewicht $\dfrac{1}{0{,}02118}$ entsprechen 47 Repetitionen.

Vor der Ausgleichung war die Repetitionszahl und das Gewicht nur 20 (vergl. S. 43).

Rechnen wir nach (14) und (15), S. 182, so wird mit (13), S. 163, $\alpha_2' = -0{,}1667$, $\alpha_3' = -0{,}3333$, $\alpha_4' = 0$; $\beta_3'' = -0{,}11765$, $\beta_4'' = -0{,}3529$, $\gamma_4''' = -0{,}3892$, und es ist

$$F_1 = -1,\; F_2 = +1,\; F_3 = 0,\; F_4 = 0,$$

$$\begin{aligned} &(F_2 \cdot 1) = 1 - 0{,}1667 = 0{,}8333 \\ (32)\qquad &(F_3 \cdot 2) = 0{,}11765 \cdot 0{,}8333 - 0{,}3333 = -0{,}2353 \\ &(F_4 \cdot 3) = -0{,}3892 \cdot 0{,}2353 + 0{,}3529 \cdot 0{,}8333 = 0{,}2025 . \end{aligned}$$

Das reziproke Gewicht für XH wird:

$$Q_{XH} = \frac{1^2}{120} + \frac{0,8333^2}{56,6667} + \frac{0,2353^2}{185,8824} + \frac{0,2025^2}{134,7785}$$

$$(33) \qquad = 0,00833 + 0,01226 + 0,00030 + 0,00030$$

$$= 0,02119,$$

übereinstimmend mit (30).

Würde man, anstatt die Formeln (15) anzuwenden, den Normalgleichungen (9), S. 161, in einer Vertikalreihe (9) die Glieder -1, $+1$, 0, 0 angehängt haben, so würden für die abgeleiteten Systeme (10*), (11), (12) die Vertikalreihen (10), (11), (12) in der folgenden Tabelle sich ergeben:

(34)

(9)	(10)	(11)	(12)
-1 $-0,00833$			
$+1$ $+0,1667$	$+0,8333$ $+0,01471$		
0 $+0,3333$	$-0,3333$ $-0,0979$	$-0,2354$ $-0,00127$	
0	0 $-0,2942$	$+0,2942$ $+0,0916$	$+0,2026$ $+0,00150$
0 $-0,5000$	$+0,5000$ $+0,4413$	$+0,0587$ $-0,1437$	$+0,2024$

und es würde darnach, wobei auf Vorzeichen keine Rücksicht genommen zu werden braucht:

$$(35) \quad Q_{XH} = 1 \cdot 0,00833 + 0,8333 \cdot 0,01471 + 0,2354 \cdot 0,00127$$
$$+ 0,2026 \cdot 0,00150,$$

woraus sich wieder der bereits gefundene Wert (33) ergibt.

Wollte man sich endlich der Formeln (16), S. 183, bedienen, so würde zu beachten sein, daß nach (13), S. 163, $\alpha_3'' = -0,3530$, $\alpha_4''' = -0,1962$, $\beta_4''' = -0,3987$ ist. Es folgt dann

$$F_1 = -1$$
$$(F_2 \cdot 1) = +1 - 0,1667 \qquad = +0,8333$$
$$(36) \qquad (F_3 \cdot 2) = +0,1177 - 0,3530 = -0,2353$$
$$(F_4 \cdot 3) = +0,3987 - 0,1962 = +0,2025,$$

usw.

Ohne Zweifel geben in dem speziellen Falle unseres Beispiels, weil F_1 und F_2 einfache Zahlen sind, die Formeln (16) die einfachste Rechnung für Q_{NH}, falls man nicht nach (9), S. 182, rechnen kann, wozu man $Q_{1\cdot 2}$ kennen muß.

II. Direkte Berechnung des Funktionswertes. Ist F_0 ein mit den Näherungswerten x_0, y_0, z_0, t_0 für die Unbekannten berechneter Funktionswert, und bezeichnen ξ, η, ζ, t die durch die Ausgleichung zu ermittelnden Verbesserungen, so kann man für den Ausgleichungswert der Funktion ansetzen:

$$(17)\qquad F = F_0 + F_1\xi + F_2\eta + F_3\zeta + F_4\tau = F_0 + \Delta F.$$

Interessieren nun ξ, η, ζ, τ nicht einzeln, sondern nur F, so kann man ΔF direkt berechnen aus der Formel

$$(18)\qquad \Delta F = (al)L_1 + (bl)L_2 + (cl)L_3 + (dl)L_4,$$

wie man aus den Gl. (12), S. 182, durch Multiplikation mit ξ, η, ζ, τ unter Rücksicht auf die entsprechenden Normalgleichungen, in denen ξ, η, ζ, τ für x, y, z, t zu schreiben ist, sofort findet. Man löst also in diesem Falle anstatt der Normalgleichungen die Gleichungen (12) auf; ΔF folgt dann aus (18), $\mu_F{}^2$ aus (11).

Endlich hat man noch zu (14):

$$(18^*)\ \Delta F = \frac{F_1(al)}{(aa)} + \frac{(F_2\cdot 1)(bl\cdot 1)}{(bb\cdot 1)} + \frac{(F_3\cdot 2)(cl\cdot 2)}{(cc\cdot 2)} + \frac{(F_4\cdot 3)(dl\cdot 3)}{(dd\cdot 3)}.$$

III. Das Gewicht von Funktionen der Ausgleichungswerte ist ein Maximum. Dieser Satz ist schon S. 111/115 bewiesen worden, aber indirekt; er möge jetzt noch direkt für eine beliebige Funktion bewiesen werden. Die Funktion sei auf die Gestalt (17) gebracht. Dann ist nach (18):

$$(19)\ \Delta F = [l_i f_i] \text{ mit } f_i = a_i g_i L_1 + b_i g_i L_2 + c_i g_i L_3 + d_i g_i L_4.$$

Für ein Ausgleichungsverfahren, welches von der Methode der kleinsten Quadrate verschieden ist, würden wir doch von den Fehlergleichungen

$$(20)\qquad l_i + \lambda_i' = a_i\xi' + b_i\eta' + c_i\zeta' + d_i\tau' \quad \text{Gew. } g_i$$

auszugehen haben. Der Strich oben an $\lambda, \xi, \eta, \zeta, \tau$ bedeutet, daß andere Werte als bei der Methode der kleinsten Quadrate in Betracht kommen. Sind f_i' Multiplikatoren der Fehlergleichungen, so kann man diese so wählen, daß

$$\Delta F = [l_i f_i'] + [\lambda_i' f_i'] \tag{21}$$

wird, wobei

$$[a_i f_i'] = F_1,\ [b_i f_i'] = F_2,\ [c_i f_i'] = F_3,\ [d_i f_i'] = F_4. \tag{22}$$

Dies gilt alles auch für den Fall, daß $\xi', \eta', \zeta', \tau'$ wahre Verbesserungen der Näherungswerte der Unbekannten sind; dann sind λ' wahre Verbesserungen der Beobachtungen und die Annahme

$$\Delta F = [l_i f_i'] \tag{21*}$$

hat den Fehler $[\lambda_i' f_i']$.*)

Das mittlere Fehlerquadrat von ΔF ist also gleich

$$\mu^2 \left[\frac{f_i'^2}{g_i}\right], \tag{23}$$

während (19), d. h. die Methode der kleinsten Quadrate,

$$\mu^2 \left[\frac{f_i^2}{g_i}\right] \tag{23*}$$

ergibt. Multipliziert man in (19) f_i mit $\frac{f_i'}{g_i}$ und addiert für i von $1 \ldots n$, so folgt wegen (22), (11) und (23*):

$$\left[\frac{f_i f_i'}{g_i}\right] = F_1 L_1 + F_2 L_2 + F_3 L_3 + F_4 L_4 = \left[\frac{f_i^2}{g_i}\right].$$

Daher wird

$$\begin{aligned} \left[\frac{f_i'^2}{g_i}\right] - \left[\frac{f_i^2}{g_i}\right] &= \left[\frac{f_i'^2}{g_i}\right] - 2\left[\frac{f_i' f_i}{g_i}\right] + \left[\frac{f_i^2}{g_i}\right] \\ &= \left[\frac{(f_i' - f_i)^2}{g_i}\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

---

*) Im Falle einer Ausgleichung ist immer $[\lambda_i' f_i'] = 0$. Denn eine solche wird setzen

$$[\lambda_i \alpha_i'] = 0 = [\lambda_i' \beta_i'] \text{ usw.},$$

wenn α', β', usw. die speziellen f' sind, falls ΔF nur gerade ξ oder η, usw. bedeutet. Nun ist aber aus $\Delta F = F_1 \xi + F_2 \eta +$ usw. durch Einsetzen von $\xi = [l\alpha']$, $\eta = [l\beta']$, usw. $f_i' = \alpha_i' F_1 + \beta_i' F_2 + \cdots$ und damit folgt leicht $[\lambda_i' f_i'] = 0$.

Mithin ist

$$\mu^2\left[\frac{f_i'^2}{g_i}\right] > \mu^2\left[\frac{f_i^2}{g_i}\right]. \tag{25}$$

Also gibt die Methode der kleinsten Quadrate kleinste mittlere Fehlerquadrate bzw. größte Gewichte.

IV. Unrichtige Bestimmung von μ_F^2. Die Gl. (9), S. 182, zeigt deutlich, daß der Ansatz

$$\mu_F^2 = F_1^2\mu_x^2 + F_2^2\mu_y^2 + F_3^2\mu_z^2 + F_4\mu_t^2$$

im allgemeinen fehlerhaft ist, weil derselbe nur die Q mit quadratischem Index berücksichtigt. (Über Ausnahmen siehe weiterhin § 11, VI). Bei zwei Unbekannten liegt μ_F zwischen den Grenzen*)

$$\pm(|F_1\mu_x| + |F_2\mu_y|) \quad \text{und} \quad \pm(|F_1\mu_x| - |F_2\mu_y|), \tag{26}$$

wie mit Rücksicht auf die leicht zu beweisende Ungleichheit $Q_{1\cdot1}Q_{2\cdot2} > Q_{1\cdot2}^2$ folgt. Da nämlich $Q_{1\cdot1}Q_{2\cdot2} - Q_{1\cdot2}^2 = \frac{Q_{2\cdot2}}{(aa)}$ $= \frac{Q_{1\cdot1}}{(bb)}$ ist, muß notwendig diese Ungleichheit stattfinden.

Eine fehlerhafte Berechnung von μ_F^2 nach den gegebenen Formeln tritt übrigens ein, wenn die Funktionsform selbst Gegenstand der Ausgleichung ist, wenn also in

$$F = ax + by$$

auch a und b aus der Ausgleichung hervorgehen. Einen Fall dieser Art behandeln wir weiterhin im 6. Kap. § 6 II bei Thieles Theorie quasisystematischer Fehler.

V. Zusammengesetzter mittlerer Fehler. Hat man den mittlern Fehler μ_F einer Funktion F der Unbekannten und anderer Beobachtungsgrößen, welche nicht in die Ausgleichung eingingen, zu bestimmen, so ist leicht ersichtlich, daß μ_F^2 sich einfach durch Addition zusammensetzt aus den Quadraten des mittlern Fehlers in F wegen Unsicherheit der Unbekannten

*) P. Pizzetti. Un teorema relativo all' errore medeo etc. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1886, S. 597.

allein und den Quadraten des mittlern Fehlers in F wegen Unsicherheit der hinzukommenden Beobachtungsgrößen.

Beispiel. Fortsetzung von S. 94. Wenden wir die dort gegebene Formel (15) auf die Berechnung einer Distanz an, so wird, wenn der mittlere Fehler in der Ablesung a gleich μ_a ist, das mittlere Fehlerquadrat in der berechneten Distanz, also der Funktion

$$F = 0{,}335 + 99{,}43\, a$$

gleich

$$\mu_F^2 = a^2 \mu_x^2 + (99{,}43)^2 \mu_a^2. \tag{16}$$

Es ist nämlich der mittlere Fehler in 0,335 verschwindend klein, ferner der mittlere Fehler in $99{,}43a$ wegen Unsicherheit der Konstanten 99,43 (d. i. x) gleich $a\mu_x$ und endlich der mittlere Fehler in $99{,}43a$ wegen Unsicherheit des behufs der Distanzmessung beobachteten a gleich $99{,}43\,\mu_a$.

Setzen wir $\mu_x^2 = 0{,}0015$ und $\mu_a^2 = (0{,}0013\,a)^2 = 0{,}0000017\,a^2$ (vergl. S. 93), so wird

$$\mu_F^2 = a^2 \{0{,}0015 + 0{,}017\}. \tag{17}$$

Es ist hiernach der mittlere Fehler der Distanzmessung hauptsächlich abhängig von dem Fehler in der Ablesungsdifferenz, dagegen nur wenig von der Unsicherheit der Konstanten 99,43, wie es auch so sein muß für eine genügende Bestimmung derselben.

Beobachtet man a nicht einmal, sondern n-mal und nimmt das Mittel zur Berechnung der Distanz, so wird

$$\mu_F^2 = a^2 \left\{0{,}0015 + \frac{0{,}017}{n}\right\}. \tag{18}$$

§ 10. Ausgleichung von Beobachtungen, welche die Form von Richtungsbeobachtungen haben.

I. Direkte Lösung. Sehr oft kommt es vor, daß mehrere Beobachtungen gleicher Art eine Reihe oder einen „Satz“ bilden, dergestalt, daß nur ihre Unterschiede bestimmte Werte l haben. An jedem l haften dann die Fehler zweier Beobachtungen: für einen Satz von n Beobachtungen kann man also folgende Fehlergleichungen ansetzen:

$$(1)\quad \left.\begin{aligned}
\lambda_2 - \lambda_1 &= -l_2 + a_2 x + b_2 y + \cdots \\
\lambda_3 - \lambda_1 &= -l_3 + a_3 x + b_3 y + \cdots \\
\lambda_4 - \lambda_1 &= -l_4 + a_4 x + b_4 y + \cdots \\
\cdot \quad \cdot \quad & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\lambda_n - \lambda_1 &= -l_n + a_n x + b_n y + \cdots
\end{aligned}\right\} m \text{ Unbekannte.}$$

Welche der Beobachtungen man als Anfangsrichtung nimmt, ist für das Ergebnis gleichgültig.

Sind die Gewichte von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ bzw. $g_1, g_2, \ldots g_n$, so kann man aus der Summe $[\lambda\lambda g]$ immer nur $n-1$ der λ eliminieren: eines derselben bleibt darin, und wir müssen es wie $x, y, \ldots$ als Variable bei der Differentiation von $[\lambda\lambda g]$ betrachten. Nehmen wir λ_1 zu diesem besondern λ, so schreiben wir bei Beschränkung auf zwei Unbekannte x und y, um auf die frühere Form der Fehlergleichungen zu kommen:

$$(2)\quad \begin{array}{llllll}
\lambda_1 = & \cdot & \lambda_1 & \cdot & \cdot & g_1 \\
\lambda_2 = & -l_2 & +\lambda_1 & +a_2 x & +b_2 y & g_2 \\
\lambda_3 = & -l_3 & +\lambda_1 & +a_3 x & +b_3 y & g_3 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\lambda_n = & -l_n & +\lambda_1 & +a_n x & +b_n y & g_n .
\end{array}$$

Hierzu gehören die Normalgleichungen

$$(3)\quad \begin{aligned}
[g]\lambda_1 + [ag]x + [bg]y &= [lg] \\
[ag]\lambda_1 + [aag]x + [abg]y &= [alg] \\
[bg]\lambda_1 + [abg]x + [bbg]y &= [blg].
\end{aligned}$$

Es kommt nun vor, daß mehrere Systeme (2) mit denselben $x, y, \ldots$ vorliegen. Dann gibt es für jedes λ_1 (die Anfangsrichtung braucht für die einzelnen Systeme nicht dieselbe zu sein) eine besondere Normalgleichung wie die erste in (3), während die Normalgleichungen für $x, y, \ldots$ sich durch Addition der zweiten, der dritten usw. zusammensetzen. Es ist alsdann gut, die λ_1 vorher zu eliminieren, also (3) für jedes einzelne System wie folgt umzuformen:

$$(3^*)\quad \begin{aligned}
\left\{[aag] - \frac{[ag]^2}{[g]}\right\}x + \left\{[abg] - \frac{[ag][bg]}{[g]}\right\}y &= [alg] - \frac{[ag][lg]}{[g]} \\
\left\{[abg] - \frac{[ag][bg]}{[g]}\right\}x + \left\{[bbg] - \frac{[bg]^2}{[g]}\right\}y &= [blg] - \frac{[bg][lg]}{[g]}.
\end{aligned}$$

Die eigentlichen Normalgleichungen für x, für y usw. entstehen nun durch Addition vorstehender Einzelsysteme, d. h. bzw. der ersten Gleichungen, der zweiten Gleichungen usw.

II. Erste Umformung. In einzelnen Fällen kann folgende Umformung nützlich sein.

Wir setzen in (2)

$$\lambda_1 = -l_1' + u, \tag{4}$$

worin l_1' ein noch beliebiger Hilfswert ist, und erhalten damit:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = -l_1' + u & l_1' = \cdot \quad l_1' \\ \lambda_2 = -l_2' + u + a_2 x + b_2 y & l_2' = l_2 + l_1' \\ \lambda_3 = -l_3' + u + a_3 x + b_3 y & l_3' = l_3 + l_1' \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_n = -l_n' + u + a_n x + b_n y & l_n' = l_n + l_1'. \end{array} \tag{5}$$

Die Normalgleichungen nehmen wieder die Form (3) an, nur steht für l jetzt l' und für λ_1 jetzt u.

Für diese Normalgleichungen wird die Auflösung erleichtert, indem man $[l'g]$ zu null macht. Es muß also l_1' so gewählt werden, daß diese Bedingung erfüllt ist, d. h. es ist zu setzen:

$$l_1' = -\frac{[lg]}{[g]}. \tag{6}$$

Die Gleichungen (3) gehen nun über in:

$$\begin{array}{l} [g]u + [ag]x + [bg]y = \quad 0 \\ [ag]u + [aag]x + [abg]y = [al'g] \\ [bg]u + [abg]x + [bbg]y = [bl'g]. \end{array} \tag{7}$$

Insbesondere ist für $g_1 = g_2 = g_3 = \cdots = 1$:

$$l_1' = -[l] : n$$

und

$$\begin{array}{l} n\,u + [a]x + [b]y = \quad 0 \\ [a]u + [aa]x + [ab]y = [al'] \\ [b]u + [ab]x + [bb]y = [bl']. \end{array} \tag{7*}$$

Diese Normalgleichungen werden in gewöhnlicher Weise aufgelöst. Wir erinnern noch daran, daß die erste der Gleichungen (3) bedeutet, daß

(8) $$[\lambda g] = 0$$

werden soll: für gleiche Gewichte geht diese Formel über in

(8*) $$[\lambda] = 0.$$

Man hat ferner zur indirekten Berechnung von $[\lambda\lambda g]$ im Anschluß an (5) und (7) $[l'l'g]$ zu bilden; es ist aber behufs vollständigerer Kontrolle gut, $[l'l'g]$ auch direkt aus $[llg]$ zu berechnen. Man findet leicht aus (5) durch Quadrieren der Beziehungen zwischen den l und l' mit Rücksicht auf (6):

(9) $$[l'l'g] = [llg] - \frac{[lg]^2}{[g]} = [llg] - l_1'^2[g].$$

III. Zweite Umformung. Kommen in den meisten der Fehlergleichungen (1) alle Unbekannten vor, so setzt man anstatt (4) besser

(10) $$\lambda_1 = -l_1' + u + a_1'x + b_1'y,$$

worin l_1', a_1', b_1' vorläufig beliebig sind. Damit geht (2) über in:

$$\begin{array}{ll}
\lambda_1 = -l_1' + u + a_1'x + b_1'y & g_1 \\
\lambda_2 = -l_2' + u + a_2'x + b_2'y & g_2 \\
\lambda_3 = -l_3' + u + a_3'x + b_3'y & g_3 \\
\lambda_4 = -l_4' + u + a_4'x + b_4'y & g_4 \\
\text{usw.} &
\end{array}$$

(11) $$\begin{array}{lll}
l_1' = \cdot \quad l_1' & a_1' = \cdot \quad a_1' & b_1' = \cdot + b_1' \\
l_2' = l_2 + l_1' & a_2' = a_2 + a_1' & b_2' = b_2 + b_1' \\
l_3' = l_3 + l_1' & a_3' = a_3 + a_1' & b_3' = b_3 + b_1' \\
l_4' = l_4 + l_1' & a_4' = a_4 + a_1' & b_4' = b_4 + b_1' \\
& \text{usw.} &
\end{array}$$

und die Normalgleichungen erhalten die Form (3); nur ist daselbst für l, a, b bzw. l', a', b' zu setzen. Wir wählen nun l', a', b' so, daß

$$[l'g] = 0, \ [a'g] = 0, \ [b'g] = 0$$

wird; man muß also nehmen:

(12) $$l_1' = -\frac{[lg]}{[g]}, \ a_1' = -\frac{[ag]}{[g]}, \ b_1' = -\frac{[bg]}{[g]}.$$

Die Normalgleichungen werden alsdann:

$$
(13)\qquad
\begin{array}{llll}
[g]u & \cdot & \cdot & = 0 \\
\cdot & [a'a'g]x & +\,[a'b'g]y & = [a'l'g] \\
\cdot & [a'b'g]x & +\,[b'b'g]y & = [b'l'g],
\end{array}
$$

so daß der Wert von u gleich null wird.

Die Kontrollgleichungen (8) und (9) gelten auch jetzt noch. Löst man das System (3) auf, indem man zunächst λ_1 eliminiert, bildet man also (3*), so erhält man ebenfalls das System (13), von dessen erster Gleichung, die $u = 0$ ergibt, abgesehen. Welchen Weg der Herleitung man wählen wird, hängt von Nebenumständen der Aufgabe ab. Im allgemeinen dürfte die Umformung der Fehlergleichungen zu empfehlen sein.

Beispiel. Richtungsbeobachtungen auf einer trigonometrischen Station. Auf einer Station eines trigonometrischen Netzes wurden mit einem großen Universalinstrument folgende Richtungsbeobachtungen erhalten:

Übersicht der Beobachtungsreihen.

(1)

Gruppe	Nummern der beobachteten Objekte					Mittel aus
	1	2	3	4	5	
	0° 0′	51° 33′	50° 42′	243° 29′	301° 48′	
1	0″.00	12″.60	17″.94	40″.56	2″.04	8 Sätzen
2	0.00	*	19.33	41.54	2,31	15 „
3	0.00	14.94	*	*	2.80	2 „
4	0,00	10.65	*	39.44	*	1 „
5	*	15.71	20,00	*	*	1 „
6	*	*	20.00	*	5.55	1 „

Da in der fünften und sechsten Gruppe das Objekt 1 nicht vorkommt, konnten die Angaben dieser Gruppen nicht auf die Form der vorhergehenden gebracht werden: anstatt indessen nun die Angabe für eins der andern Objekte auf null zu bringen, ist es vorteilhafter, allen ursprünglichen Angaben dieser Gruppen einen solchen Wert beizufügen, daß alle Angaben für ein und dasselbe Objekt in den verschiedenen Gruppen nahezu gleich werden.

Die Gewichte dieser Angaben sind durch die Zahlen 8, 15, 2, 1, 1, 1 der letzten Vertikalspalte gegeben, wenn man eine

Richtungsangabe eines einfach beobachteten Satzes als Gewichtseinheit annimmt.

Es sei bemerkt, daß die Instrumentalfehler bei den Zahlen der einzelnen Sätze schon eliminiert sind, indem diese Angaben als Mittelwerte für beide Fernrohrlagen gebildet wurden. Die Teilungsfehler des Kreises können im wesentlichen als zufällige Fehler betrachtet werden, da sie sehr klein waren (im Mittel nur etwa $\frac{1}{2}$ Sekunde), und durch unausgesetzten Wechsel der Ablesestellen gesorgt wurde, daß sie keinen konstanten Einfluß erlangten.

Als Unbekannte betrachten wir die Winkel

$$(2)\qquad \begin{aligned} (1\cdot 2) &= 51^0\,33'\,10'',00 + x \\ (1\cdot 3) &= 50\;\;42\;\;10,00 + y \\ (1\cdot 4) &= 243\;\;29\;\;30,00 + z \\ (1\cdot 5) &= 301\;\;48\;\;0,00 + t, \end{aligned}$$

welche wir gleich in der Form „Näherungswert plus plausibelste Verbesserung“ angesetzt haben.

Winkel (1 · 2) ist in Berücksichtigung des Umstandes vorangestellt worden, daß Objekt 2 in die Ausgleichung des ganzen Netzes, zu dem die Station gehört, nicht eingeht.

Die Fehlergleichungen lauten in ihrer ursprünglichen Form:

(3)
Gewicht 8

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_1 \\ \lambda_2 &= -2,60 + \lambda_1 + x \\ \lambda_3 &= -7,94 + \lambda_1 + y \\ \lambda_4 &= -10,56 + \lambda_1 + z \\ \lambda_5 &= -2,04 + \lambda_1 + t \end{aligned}$$

(4)
Gewicht 15

$\lambda_1' = \lambda_1'$
λ_2' fehlt
$\lambda_3' = -9,33 + \lambda_1' + y$
$\lambda_4' = -11,54 + \lambda_1' + z$
$\lambda_5' = -2,31 + \lambda_1' + t$

(5)
Gewicht 2

$\lambda_1'' = \lambda_1''$
$\lambda_2'' = -4,94 + \lambda_1'' + x$
λ_3'' fehlt
λ_4'' fehlt
$\lambda_5'' = -2,80 + \lambda_1'' + t$

(6)
Gewicht 1

$\lambda_1''' = \lambda_1'''$
$\lambda_2''' = -0,65 + \lambda_1''' + x$
λ_3''' fehlt
$\lambda_4''' = -9,44 + \lambda_1''' + z$
λ_5''' fehlt

(7)
Gewicht 1

λ_1^{IV} fehlt
$\lambda_2^{IV} = -5,71 + \lambda_1^{IV} + x$
$\lambda_3^{IV} = -10,00 + \lambda_1^{IV} + y$
λ_4^{IV} fehlt
λ_5^{IV} fehlt

(8)
Gewicht 1

λ_1^{V} fehlt
λ_2^{V} fehlt
$\lambda_3^{V} = -10,00 + \lambda_1^{V} + y$
λ_4^{V} fehlt
$\lambda_5^{V} = -5,55 + \lambda_1^{V} + t.$

Die Näherungswerte (2) sind so angenommen worden, daß alle l der Fehlergleichungen positiv werden mußten, um Vorzeichenfehler zu umgehen. Ferner sind (7) und (8) so gebildet, als wäre auch Objekt 1 beobachtet; in der Tat kann man sich vorstellen, daß das Objekt 1 in diesen Fällen mit dem Gewichte null beobachtet worden sei.

Man könnte nun die erste Umformung auf die Fehlergleichungen anwenden; indessen bietet das im vorliegenden Falle keinen Vorteil. Wir bilden vielmehr direkt zu den Fehlergleichungen (3) bis (8) die Normalgleichungen und erhalten:

(9) Übersicht der Normalgleichungen.

λ_1	λ_1'	λ_1''	λ_1'''	λ_1^{IV}	λ_1^{V}	x	y	z	t	Konst.
5 · 8	*	*	*	*	*	8	8	8	8	185,12
*	4 · 15	*	*	*	*	*	15	15	15	347,70
*	*	3 · 2	*	*	*	2	*	*	2	15,48
*	*	*	3	*	*	1	*	1	*	10,09
*	*	*	*	2	*	1	1	*	*	15,71
*	*	*	*	*	2	*	1	*	1	15,55
8	*	2	1	1	*	12	*	*	*	37,04
8	15	*	*	1	1	*	25	*	*	223,47
8	15	*	1	*	*	*	*	24	*	267,02
8	15	2	*	*	1	*	*	*	26	62,12
9 · 8	7 · 15	5 · 2	5	4	4	24	50	48	52	1179,30

Die Normalgleichungen für $\lambda_1, \ldots \lambda_1^{V}$ enthalten jede nur eine dieser Unbekannten; es ist daher sehr leicht, sie mit Hilfe derselben aus den vier letzten Normalgleichungen und der Summengleichung zu eliminieren. Es ergeben sich dann Gleichungen zwischen den vier eigentlichen Unbekannten x, y, z, t, die man bezeichnen kann als:

die Normalgleichungen im engern Sinne.

(10)

x	y	z	t	Konst.
8,9000	— 2,1000	— 1,9333	— 2,2667	— 16,362
— 2,1000	+ 18,6500	— 5,3500	— 5,8500	+ 83,891
— 1,9333	— 5,3500	+ 18,3167	— 5,3500	+ 139,708
— 2,2667	— 5,8500	— 5,3500	+ 19,4833	— 74,764
+ 2,6000	+ 5,3500	+ 5,6833	+ 6,0167	+ 132,472

Daraus folgen die reduzierten Gleichungen:

	x	y	z	t	Konst.
(11)	8,9000	— 2,1000	— 1,9333	— 2,2667	— 16,362
		18,1545	— 5,8061	— 6,3848	+ 80,030
			16,0398	— 7,8843	+ 161,749
				12,7850	+ 28,723

oder

	x	y	z	t	Konst.
(12)	1	— 0,23596	— 0,21722	— 0,25468	— 1,8384
		1	— 0,31982	— 0,35169	+ 4,4083
			1	— 0,49155	+ 10,0843
				1	+ 2,2466

Auf die Gewichtsberechnung ist keine Rücksicht genommen, da im vorliegenden Falle das Gewicht der Unbekannten selbst selten Interesse hat. Übrigens kann man auch mittels (11) und (12) die Gewichtsberechnung für beliebige Funktionen der Unbekannten ausführen; vergl. S. 182, (14) und (15).

Für die Unbekannten folgt durch allmähliches Einsetzen:

(13) $x = +3{,}2350,\ y = +8{,}7767,\ z = +11{,}1886,\ t = +2{,}2466,$

in vollständiger Erfüllung der Summennormalgleichungen.

Es werden mithin nach (13) und (2) die Winkel:

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
(1\cdot 2) &= 51^{0}\ 33'\ 13''{,}2350\\
(1\cdot 3) &= 50\ \ 42\ \ 18{,}7767\\
(1\cdot 4) &= 243\ \ 29\ \ 41{,}1886\\
(1\cdot 5) &= 301\ \ 48\ \ \ \ 2{,}2466,
\end{aligned}
$$

wozu infolge der Netzausgleichung noch weitere Verbesserungen treten.

Für die praktische Rechnung ist es vorteilhaft, von einer Übersicht auszugehen, die der Bildung von (1) ohnehin notwendig vorhergehen muß. Man ordnet die Summen der Sekundenwerte, welche über die runden Näherungswerte hinausgehen, in folgender Weise:

(1*) Beobachtungssummen.

Nr. der Gruppe	Anzahl der Sätze, div. durch Anz. der Richtungen	Anzahl der Sätze	Summen der l 1	2	3	4	5	Quersummen	Quersummen, div. durch Anzahl der Richtungen
1	8 : 5	8	0	20,80	63,52	84,48	16,32	185,12	37,024
2	15 : 4	15	0	*	139,95	173,10	34,65	347,70	86,925
3	2 : 3	2	0	9,88	*	*	5,60	15,48	5,160
4	1 : 3	1	0	0,65	*	9,44	*	10,09	3,363
5	1 : 2	1	*	5,71	10,00	*	*	15,71	7,855
6	1 : 2	1	*	*	10,00	*	5,55	15,55	7,775
		29	0	37,04	223,47	267,02	62,12	589,65 589,65	
Gewichtssummen:				12	25	24	26		

Die Vergleichung mit (1) erklärt die wesentlichen Teile von (1*); die Vergleichung mit (9) zeigt, daß die wichtigsten Zahlen, die in (9) vorkommen, in (1*) enthalten sind. Man kann daher, ohne (9) hinzuschreiben, leicht aus (1*) direkt zu (10) gelangen.

Bei der Berechnung von $[\lambda\lambda g]$ aus $[llg]$ knüpfen wir an den ersten Teil der Normalgleichungen (9) und an die reduzierten Gleichungen (11) und (12) an.

Aus (3) bis (8) folgt $[llg] = 5284{,}61$ und damit nach der allgemeinen Formel (13), S. 158:

$$\begin{aligned}
[\lambda\lambda g] = 5284{,}61 &- \frac{185{,}12^2}{40} - \frac{347{,}70^2}{60} - \frac{15{,}48^2}{6} \\
&- \frac{10{,}09^2}{3} - \frac{15{,}71^2}{2} - \frac{15{,}55^2}{2} \\
&- 16{,}362 \cdot 1{,}8384 - 80{,}030 \cdot 4{,}4083 \\
&- 161{,}749 \cdot 10{,}0843 - 28{,}723 \cdot 2{,}2466 \\
&= 16{,}24\,.
\end{aligned} \tag{15}$$

Um die λ einzeln kennen zu lernen, müßten wir dem üblichen Rechnungsgange nach zunächst mittels der ersten sechs Gleichungen (9) die λ_1 berechnen. Indessen verfahren wir lieber wie folgt: Mit den Werten (14) werden zu den Werten von (1) die Verbesserungen gebildet und in nachstehender Tabelle zusammengestellt, wobei jetzt die Sätze vertikal angeordnet sind.

(16)		1	2	3	4	5	6
	1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	*	*
	2	+ 0,6350	*	— 1,7050	+ 2,5850	— 2,4750	*
	3	+ 0,8367	— 0,5533	*	*	— 1,2233	— 1,2233
	4	+ 0,6286	— 0,3514	*	+ 1,7486	*	*
	5	+ 0,2066	— 0,0634	— 0,5534	*	*	— 3,3034
	Summe	+ 2,3069	— 0,9681	— 2,2584	+ 4,3336	— 3,6983	— 4,5267
		5	4	3	3	2	2
	Quotient	+ 0,4614	— 0,2420	— 0,7528	+ 1,4445	— 1,8491	— 2,2633

Dieser Zusammenstellung wurden die Summe jeder Vertikalspalte und die Anzahl der Glieder derselben, sowie die Quotienten aus beiden beigefügt. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (3) bis (8), in denen die x, y, z, t jetzt eingesetzt zu denken sind, erkennt man, daß die negativen Quotienten die betreffenden λ_1, λ_1', ... λ_1^{V} selbst sind. Durch Subtraktion der Quotienten von den Werten der bezüglichen Vertikalspalten folgen daher die einzelnen λ.

Übersicht der λ.

(17)		1	2	3	4	5	6
	1	— 0,4614	+ 0,2420	+ 0,7528	— 1,4445	*	*
	2	+ 0,1736	*	— 0,9522	+ 1,1405	— 0,6259	*
	3	+ 0,3753	— 0,3113	*	*	+ 0,6258	+ 1,0400
	4	+ 0,1672	— 0,1094	*	+ 0,3041	*	*
	5	— 0,2548	+ 0,1786	+ 0,1994	*	*	— 1,0401
	+	0,7161	0,4206	0,9522	1,4446	0,6258	1,0400
	—	0,7162	0,4207	0,9522	1,4445	0,6259	1,0401
	Gew.	8	15	2	1	1	1

Die Summenbildung in dieser Übersicht zeigt, daß für jede Reihe $[\lambda]$ gleich null ist; jedoch haben diese Beziehungen nicht die Bedeutung der Kontrollgleichung (8*), S. 191, weil die λ nicht aus den Gleichungen (3) bis (8) durch Substitution der Unbekannten gefunden worden sind. Es wird dadurch nur der Übergang von (16) zu (17) geprüft.

Die Quadratsumme $[\lambda\lambda g]$ wird nach (17) gleich 16,26, in guter Übereinstimmung mit (15).

Der mittlere zu befürchtende Beobachtungsfehler einer Richtungsangabe vom Gewichte 1 ist somit, da die Anzahl aller Unbekannten $4 + 6$, die der Beobachtungen der Richtungen 19 beträgt:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{16,26}{9}} = \pm 1'',34. \tag{18}$$

Der mittlere Fehler eines einem einfachen Satze entsprechenden Winkels ist $\mu \sqrt{2} = \pm 1'',90$.

IV. Symmetrische Einführung von Unbekannten bei Ausgleichung von Richtungsbeobachtungen. Wir erläutern dies zunächst an dem vorhergehenden Beispiele.

Anstatt der vier unbekannten Winkelwerte führen wir fünf unbekannte Richtungswerte (1), (2), ... (5) ein und haben als Beziehungen zwischen den Winkeln und Richtungen:

$$\begin{gathered}(1 \cdot 2) = (2) - (1), \quad (1 \cdot 3) = (3) - (1), \quad (1 \cdot 4) = (4) - (1), \\ (1 \cdot 5) = (5) - (1).\end{gathered} \tag{19}$$

Da jedoch nur die Winkel bestimmte Werte haben, so ist einer der Richtungswerte beliebig. Sehen wir indes einstweilen davon ab und bilden die Fehlergleichungen, wobei es genügt, eine Beobachtungsreihe zu betrachten. Aus der ersten Gruppe in der Übersicht (1), S. 192, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= && \lambda_1 \\
\lambda_2 &= - 51^0\ 33'\ 12'',60 &+& \lambda_1 - (1) + (2) \\
\lambda_3 &= - 50\ \ 42\ \ 17,94 &+& \lambda_1 - (1) + (3) \\
\lambda_4 &= - 243\ \ 29\ \ 40,56 &+& \lambda_1 - (1) + (4) \\
\lambda_5 &= - 301\ \ 48\ \ \ \ 2,04 &+& \lambda_1 - (1) + (5),
\end{aligned} \tag{20}$$

oder wenn wir für $\lambda_1 - (1)$ die Bezeichnung u einführen:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= && u + (1) \\
\lambda_2 &= - 51^0\ 33'\ 12'',60 &+& u + (2) \\
\lambda_3 &= - 50\ \ 42\ \ 17,94 &+& u + (3) \\
\lambda_4 &= - 243\ \ 29\ \ 40,56 &+& u + (4) \\
\lambda_5 &= - 301\ \ 48\ \ \ \ 2,04 &+& u + (5).
\end{aligned} \tag{20*}$$

Ebenso gestaltet sich die Rechnung für die andern Beobachtungsgruppen. Wir führen ferner Näherungswerte für die Richtungen (1), . . . (5) ein und bilden schließlich die Normalgleichungen. Da nun aber nur die Richtungsunterschiede bestimmte Werte haben, so würde dies auch die Auflösung der Normalgleichungen anzeigen.

Um für die Richtungswerte selbst bestimmte Werte zu erhalten, muß man entweder einen derselben beliebig annehmen oder eine Bedingungsgleichung zwischen ihnen einführen. In letzterer Weise hat Hansen die Ausgleichung der Richtungsbeobachtungen durchgeführt.*) Hansen benutzt die Bedingungsgleichung als andauernde Kontrolle der Rechnung.

Soviel ich weiß, ist indessen sein Verfahren im Falle beliebiger Satzbeobachtungen nicht benutzt worden. Nur für den Fall symmetrisch über die n Richtungen verteilter Satzbeobachtungen, wenn also z. B. alle Winkel zwischen den Objekten, oder alle Kombinationen zu drei Richtungen gemessen sind, wurde es angewandt, weil es da jedenfalls von Vorteil ist, um in einfacher Weise das Ergebnis der Messungen in einen vollen Satz von fingierten Richtungsbeobachtungen überzuführen.

V. Annäherungsmethode. Bei der Landesvermessung von Großbritannien und Irland (Ordnance Trigonometrical Survey of Great Britain and Ireland) wurde zur Ausgleichung der Stationsmessungen im wesentlichen folgendes Annäherungsverfahren angewandt, das oft auch bei Ausgleichung anderer Beobachtungen, die sich zu Reihen oder Sätzen gruppieren, mit Vorteil angewandt worden ist.

Wir erläutern das Verfahren wieder an dem Beispiele von S. 192 u. f.

Man bestimmt zuerst Näherungswerte für die unbekannten Winkel aus der Übersicht (1), S. 192, wie folgt:

*) Die ausführlichen Untersuchungen von Hansen findet man im 8. und 9. Bande der Abhandlungen der math.-phys. Klasse der Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch. zu Leipzig, 1867/69, eine kurze Anweisung dagegen in den Berichten über die Verhandlungen dieser Gesellschaft von 1868.

$$(1\cdot 2) = 51^0\,33' + \frac{12''60\cdot 8 + 14''94\cdot 2 + 10''65\cdot 1}{8+2+1}$$

$$(1\cdot 3) = 50\;\;42 + \frac{17{,}94\cdot 8 + 19{,}33\cdot 15}{8+15}$$

usw.,

also

$$(21)\qquad \begin{aligned} (1\cdot 2) &= \;\;51^0\,33'\,12''85 \\ (1\cdot 3) &= \;\;50\;\;42\;\;18{,}72 \\ (1\cdot 4) &= 243\;\;29\;\;41{,}12 \\ (1\cdot 5) &= 301\;\;48\;\;\;\;2{,}24\,. \end{aligned}$$

Jeder der vier Winkel ist demnach aus seinen direkten Beobachtungen streng abgeleitet.

Die erhaltenen Werte zieht man nun von den bezüglichen Werten in der Übersicht (1) ab: das gibt die Unterschiede:

(22)

1	2	3	4	5	Quersumme	Anzahl	Quotient
0	— 0,25	— 0,78	— 0,56	— 0,20	— 1,79	5	— 0,36
0	*	+ 0,61	+ 0,42	+ 0,07	+ 1,10	4	+ 0,28
0	+ 2,09	*	*	+ 0,56	+ 2,65	3	+ 0,88
0	— 2,20	*	— 1,68	*	— 3,88	3	— 1,29
*	+ 2,86	+ 1,28	*	*	+ 4,14	2	+ 2,07
*	*	+ 1,28	*	+ 3,31	+ 4,59	2	+ 2,30

Die beigefügten Spalten rechts vom Doppelstrich erklären sich von selbst.

Wir ziehen nun den

1. Quotienten — 0,36 ab von allen Zahlen der
1. Horizontalreihe in der Übersicht (1)
2. Quotienten + 0,28 ab von allen Zahlen der
2. Horizontalreihe in der Übersicht (1)

usw.

und erhalten:

(23)

1	2	3	4	5	Mittel aus
0° 0′	51° 33′	50° 42′	243° 29′	301° 48′	
+ 0″36	12″96	18″30	40″92	2″40	8 Sätzen
— 0,28	*	19,05	41,26	2,03	15 ,,
— 0,88	14,06	*	*	1,92	2 ,,
+ 1,29	11,94	*	40,73	*	1 ,,
*	13,64	17,93	*	*	1 ,,
*	*	17,70	*	3,25	1 ,,

Diese Übersicht hat, weil zu den Angaben jeder Horizontalreihe nur immer eine Konstante addiert ist, noch ganz den Charakter unmittelbarer Beobachtungenswerte, so daß wir also z. B. darauf sofort eine strenge Ausgleichung gründen dürfen. Wir setzen nun als genauere Näherungswerte für die Richtungen (1), ... (5) an:

$$(1) = \;\; 0^0 \;\; 0' + \frac{0'',36 \cdot 8 - 0'',28 \cdot 15 - 0'',88 \cdot 2 + 1'',29 \cdot 1}{8 + 15 + 2 + 1}$$

$$(2) = 51^0\, 33' + \frac{12'',96 \cdot 8 + 14'',06 \cdot 2 + 11'',94 \cdot 1 + 13'',64 \cdot 1}{8 + 2 + 1 + 1}$$

usw.;

also

$$(24) \qquad \begin{array}{ll} (1) = 359^0\, 59'\, 59'',93 & (2) = \;\; 51^0\, 33'\, 13'',12 \\ (3) = \;\; 50 \;\; 42 \;\; 18,71 & (4) = 243 \;\; 29 \;\; 41,12 \end{array}$$
$$(5) = 301^0\, 48'\, 2'',18.$$

Diese Werte sind schon ziemlich nahe den strengen Ausgleichungswerten, denn für die Winkel (1 · 2), (1 · 3), (1 · 4), (1 · 5) ergeben sie bis auf wenige Hundertstelsekunden die Werte (14), S. 195. (Die Ordnance Survey ging in der Tat in der Annäherung nicht weiter.) Wir wollen hier aber, um zu zeigen, daß man sich den wahren Werten noch beliebig nähern kann, die Rechnung fortsetzen, also zunächst die zuletzt erhaltenen Näherungswerte von den Werten in (1) abziehen und wie früher die Quersummen und die dazu gehörigen Quotienten bilden. Das gibt folgende Tabelle:

(25)

1	2	3	4	5	Quersumme	Anzahl	Quotient
+ 0,07	— 0,52	— 0,77	— 0,56	— 0,14	— 1,92	5	— 0,38
+ 0,07	*	+ 0,62	+ 0,42	+ 0,13	+ 1,24	4	+ 0,31
+ 0,07	+ 1,82	*	*	+ 0,62	+ 2,51	3	+ 0,84
+ 0,07	— 2,47	*	— 1,68	*	— 4,08	3	— 1,36
*	+ 2,59	+ 1,29	*	*	+ 3,88	2	+ 1,94
*	*	+ 1,29	*	+ 3,37	+ 4,66	2	+ 2,33

Die Quotienten ziehen wir von den Werten der Tabelle (1) ab und erhalten dadurch wieder Wertreihen, welche wie (23) den ursprünglichen Beobachtungswerten gleich zu achten sind:

	1	2	3	4	5	Mittel aus
	$0^0\,0'$	$51^0\,33'$	$50^0\,42'$	$243^0\,29'$	$301^0\,48'$	
(26)	$+\,0'',38$	$12'',98$	$18'',32$	$40'',94$	$2'',42$	8 Sätzen
	$-\,0,31$	*	19,02	41,23	2,00	15 „
	$-\,0,84$	14,10	*	*	1,96	2 „
	$+\,1,36$	12,01	*	40,80	*	1 „
	*	13,77	18,06	*	*	1 „
	*	*	17,67	*	3,22	1 „

Daraus folgen in derselben Weise, wie sich (24) aus (23) ergab, die neuen Näherungswerte für

die Richtungen die Winkel

$$(27)\quad \begin{aligned}
&(1) = 359^0\,59'\,59'',924 && \\
&(2) = 51\;\;33\;\;13,154 && (1\cdot 2) = 51^0\,33'\,13'',23 \\
&(3) = 50\;\;42\;\;18,704 && (1\cdot 3) = 50\;\;42\;\;18,78 \\
&(4) = 243\;\;29\;\;41,115 && (1\cdot 4) = 243\;\;29\;\;41,19 \\
&(5) = 301\;\;48\;\;2,173 && (1\cdot 5) = 301\;\;48\;\;2,25\,,
\end{aligned}$$

welche letzteren mit denen in (14) schon auf Hundertstelsekunden genau übereinkommen.

Die Methode dieses Annäherungsverfahrens ist im Prinzip dieselbe wie diejenige der indirekten Auflösung in § 8, S. 175. Anstatt daß aber dort die verbesserten Werte der Unbekannten in die Normalgleichungen eingeführt werden, werden sie hier in die Fehlergleichungen eingeführt. Aus diesen wird dann für die Unbekannte, welche gerade verbessert werden soll, die Normalgleichung gebildet:

Für die Fehlergleichungen nehmen wir die Hansensche Form; für die erste Beobachtungsreihe gelten also die Gleichungen (20*). In diese führen wir die in (21) angegebenen Näherungswerte ein, indem wir zugleich die Verbesserung (1) gleich null setzen, womit die Verbesserungen (2), ... (5) die Werte für (1 · 2), ... (1 · 5) erhalten. Es wird also:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \qquad\quad\; u \\
\lambda_2 &= +\,0{,}25 + u \\
\lambda_3 &= +\,0{,}78 + u \\
\lambda_4 &= +\,0{,}56 + u \\
\lambda_5 &= +\,0{,}20 + u\,.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Normalgleichung für u (abgesehen von dem gemeinschaftlichen Gewichte 8):

$$5u = -\,1{,}79;\ \text{mithin}\ u = -\,0{,}36.$$

Dies ist ein erster Näherungswert für u; die Übersicht (22) enthält in der Spalte „Quotient" für alle Reihen die entsprechenden Näherungswerte von $u, u', \ldots u^{V}$. Indem wir diese letztern einstweilen als strenge Werte betrachten, berechnen wir neue Näherungswerte für die Unbekannten (1), ... (5). Es wird z. B. für (2) die Zusammenstellung derjenigen Fehlergleichungen, welche diese Unbekannte enthalten:

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= -\,51^0\,33'\,12''{,}60 + u + (2) \\
\lambda_2'' &= -\ \,„\ \ „\ \ 14{,}94 + u'' + (2) \\
\lambda_2''' &= -\ \,„\ \ „\ \ 10{,}65 + u''' + (2) \\
\lambda_2^{IV} &= -\ \,„\ \ „\ \ 15{,}71 + u^{IV} + (2),
\end{aligned}$$

d. i. nach Einführung der Werte u, u'' u''', u^{IV} aus (22):

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= -\,51^0\,33'\,12''{,}96 + (2) &&\text{Gew. } 8 \\
\lambda_2'' &= -\ \,„\ \ „\ \ 14{,}06 + (2) &&\quad „\ \ 2 \\
\lambda_2''' &= -\ \,„\ \ „\ \ 11{,}94 + (2) &&\quad „\ \ 1 \\
\lambda_2^{IV} &= -\ \,„\ \ „\ \ 13{,}64 + (2) &&\quad „\ \ 1\,.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Normalgleichung für (2):

$$12 \cdot (2) = 12 \cdot 51^0\,33' + 8 \cdot 12''{,}96 + 2 \cdot 14''{,}06 + 11''{,}94 + 13''{,}64;$$

mithin

$$(2) = 51^0\,33'\,13''{,}12\,.$$

Die Übersicht (23) gibt in dieser Weise die Näherungswerte (24) für alle fünf Richtungen. Die Unbekannte (1) wird immer gerade so behandelt wie (2), ... (5); es ist dies zwar nicht notwendig, aber gerade durch die Wahl des sich so ergebenden Wertes für (1) wird die große Annäherung der Rechnung erzielt.

Über die Gewichte der Unbekannten und von Funktionen derselben gibt das Näherungsverfahren keine Auskunft; daher kann dasselbe nur da angewendet werden, wo es auf die Kenntnis der Genauigkeit der Ausgleichungsergebnisse nicht weiter ankommt.

Beispiel. Rückwärtseinschneiden. Von einem zu bestimmenden Punkte aus wurden nach fünf durch rechtwinklige Koordinaten gegebenen Punkten Winkel gemessen, in der Weise, daß das Ergebnis betrachtet werden kann wie ein einfacher Satz, der sämtliche Objekte enthält.

Tabelle (1) gibt die Beobachtungsergebnisse und die Koordinaten; für letztere liegt die positive x-Achse in der Richtung von Nord nach Süd und die positive y-Achse in der Richtung von Ost nach West; wachsende Richtungsangaben entsprechen wachsenden Azimuten.

	Gegebener Punkt	Gemessene Richtung	Gegebene Koordinaten x (Meter)	y (Meter)
(1)	1	0° 0′ 0″,00	0	0
	2	184 1 41,50	— 4228,239	— 2646,895
	3	190 44 18,04	— 2450,104	— 1536,840
	4	280 41 38,59	+ 949,776	— 4581,404
	5	312 47 12,36	— 100,177	— 1735,395

Die gegebenen Koordinaten sind sphärische Koordinaten. Wir können aber für die hier in Betracht kommenden Koordinatendifferenzen rechnen wie in der Ebene.

Durch eine vorläufige Ermittelung (Meßtischaufnahme) fanden sich für den zu bestimmenden Punkt die genäherten Koordinaten

$$(1^*) \qquad -1992{,}6\,, \qquad -1144{,}5\,,$$

denen die Verbesserungen ξ und η zuzufügen sind.

Wir berechnen nun die Richtungswinkel von dem gesuchten nach den gegebenen Punkten aus den Formeln:

$$\tan \alpha_1 = \frac{1144{,}5 - \eta}{1992{,}6 - \xi} \quad \text{für die Richtung nach } 1$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{-2646{,}895 + 1144{,}5 - \eta}{-4228{,}239 + 1992{,}6 - \xi} \quad \text{„ „ „ „ } 2$$

$$(2) \quad \tan \alpha_3 = \frac{-1536{,}840 + 1144{,}5 - \eta}{-2450{,}104 + 1992{,}6 - \xi} \quad \text{„ „ „ „ } 3$$

$$\tan \alpha_4 = \frac{-4581{,}404 + 1144{,}5 - \eta}{+\ 949{,}776 + 1992{,}6 - \xi} \quad \text{„ „ „ „ } 4$$

$$\tan \alpha_5 = \frac{-1735{,}395 + 1144{,}5 - \eta}{-\ 100{,}177 + 1992{,}6 - \xi} \quad \text{„ „ „ „ } 5.$$

Hiernach haben wir z. B. für α_4 folgende Rechnung

$$\tan \alpha_4 = \frac{-(3436{,}904 + \eta)}{+(2942{,}376 - \xi)};$$

α_4 liegt mithin im vierten Quadranten, hat also die Form $360^0 - \alpha_4'$, wo α_4' einen spitzen Winkel bezeichnet, der sich unter Benutzung der logarithmischen Differenzen für die kleinen Größen ξ und η wie folgt berechnet:

$$\log(3436{,}904 + \eta) = 3{,}5361674 + 0{,}0001263 \cdot 6\,\eta$$
$$\log(2942{,}376 - \xi) = 3{,}4686982 - 0{,}0001476 \cdot 0\,\xi$$

$$\log \tan \alpha_4' = 0{,}0674692 + 0{,}0001263 \cdot 6\,\eta + 0{,}0001476 \cdot 0\,\xi$$

$$\alpha_4' = 49^0\ 25'\ 57{,}''93 + 29{,}65\,\eta + 34{,}63\,\xi\,,$$

also

$$\alpha_4 = 310\ \ 34\ \ \ 2{,}07 - 29{,}65\,\eta - 34{,}63\,\xi\,,$$

worin ξ und η in Metern einzuführen sind.*)

Man erhält im ganzen:

$$
(3) \quad
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \ \ 29^0\ 52'\ 19{,}''18 + \ \ 44{,}71\,\xi - \ \ 77{,}84\,\eta \\
\alpha_2 &= 213\ \ 54\ \ \ \ 6{,}87 - \ \ 42{,}71\,\xi + \ \ 63{,}56\,\eta \\
\alpha_3 &= 220\ \ 36\ \ 55{,}00 - 222{,}79\,\xi + 259{,}79\,\eta \\
\alpha_4 &= 310\ \ 34\ \ \ \ 2{,}07 - \ \ 34{,}63\,\xi - \ \ 29{,}65\,\eta \\
\alpha_5 &= 342\ \ 39\ \ 33{,}89 - \ \ 31{,}01\,\xi - \ \ 99{,}31\,\eta.
\end{aligned}
$$

---

*) Durch Differentiation findet man die Koeffizienten von ξ und η bzw. gleich $\varrho''\sin\alpha : s$ und $-\varrho''\cos\alpha : s$ mit s als Entfernung und $\varrho'' = 206265$. Ein sehr bequemes Verfahren zur Ermittelung der Koeffizienten von ξ und η gab O. Eggert in der kleinen Schrift: Hilfstafel zur Berechnung der Richtungskoeffizienten für Koordinatenausgleichungen. Berlin, 1903. Hierbei wird vorausgesetzt, daß ein Lageplan mit genäherter Kenntnis des gesuchten Punktes gegeben ist. Für logarithmische Rechnung vergl. u. a. O. Seiffert: Logarithmische Hilfstafel zur Berechnung der Fehlergleichungskoeffizienten beim Einschneiden nach d. M d. kl. Qu. Halle, 1892.

Beobachtet sind die Differenzen der Richtungswinkel oder die Werte:

$$\begin{array}{llrrrl} & 1. & 0^0 & 0' & 0'',00 & + u + \lambda_1 \\ & 2. & 184 & 1 & 41,50 & + u + \lambda_2 \\ (4) & 3. & 190 & 44 & 18,04 & + u + \lambda_3 \\ & 4. & 280 & 41 & 38,59 & + u + \lambda_4 \\ & 5. & 312 & 47 & 12,36 & + u + \lambda_5, \end{array}$$

worin die λ die Verbesserungen der Beobachtungen sind und u eine unbekannte Hilfsgröße ist. Diese hat im vorliegenden Falle eine bestimmte Bedeutung, nämlich diejenige einer Unbekannten, welche allen korrigierten Richtungsangaben beizufügen ist, um sie auf die Richtungswinkel $a_1, a_2, \ldots a_5$ zu reduzieren.

Setzen wir demgemäß die bezüglichen Ausdrücke (3) und (4) einander gleich, so wird:

$$\begin{array}{lrrrl} & 0^0 & 0' & 0'',00 + u + \lambda_1 = & 29^0 52' 19'',18 + 44,71\,\xi - 77,84\,\eta \\ & 184 & 1 & 41,50 + u + \lambda_2 = & 213 \;\; 54 \;\;\; 6,87 - 42,71\,\xi + 63,56\,\eta \\ (5) & 190 & 44 & 18,04 + u + \lambda_3 = & 220 \;\; 36 \;\; 55,00 - 222,79\,\xi + 259,79\,\eta \\ & 280 & 41 & 38,59 + u + \lambda_4 = & 310 \;\; 34 \;\;\; 2,07 - 34,63\,\xi - 29,65\,\eta \\ & 312 & 47 & 12,36 + u + \lambda_5 = & 342 \;\; 39 \;\; 33,89 - 31,01\,\xi - 99,31\,\eta. \end{array}$$

Für u führen wir den Näherungswert $29^0\,52'\,20'',00$ ein und setzen

$$u = 29^0\,52'\,20'',00 - \zeta; \tag{6}$$

damit wird

$$\begin{array}{ll} & \lambda_1 = - \;\; 0,82 + \zeta + 44,71\,\xi - 77,84\,\eta \\ & \lambda_2 = + \;\; 5,37 + \zeta - 42,71\,\xi + 63,56\,\eta \\ (7) & \lambda_3 = + 16,96 + \zeta - 222,79\,\xi + 259,79\,\eta \\ & \lambda_4 = + \;\; 3,48 + \zeta - 34,63\,\xi - 29,65\,\eta \\ & \lambda_5 = + \;\; 1,53 + \zeta - 31,01\,\xi - 99,31\,\eta. \end{array}$$

Setzt man mit Rücksicht auf die Gleichung $[\lambda] = 0$:

$$\zeta = - 5,304 + 57,286\,\xi - 23,310\,\eta + \zeta', \tag{8}$$

wobei $\zeta' = 0$ sein muß, so wird endlich:

$$
(9) \qquad
\begin{aligned}
\lambda_1 &= - 6{,}12 + 101{,}99\,\xi - 101{,}15\,\eta + \zeta' \\
\lambda_2 &= + 0{,}07 + 14{,}58\,\xi + 40{,}25\,\eta + \zeta' \\
\lambda_3 &= + 11{,}66 - 165{,}50\,\xi + 236{,}48\,\eta + \zeta' \\
\lambda_4 &= - 1{,}82 + 22{,}66\,\xi - 52{,}96\,\eta + \zeta' \\
\lambda_5 &= - 3{,}77 + 26{,}28\,\xi - 122{,}62\,\eta + \zeta' .
\end{aligned}
$$

Daß ζ' gleich null sein muß, bestätigt sich auch bei der nun folgenden Bildung der Normalgleichungen. Diese lauten mit Rücksicht auf Gewichtsberechnung:

$$
(10) \qquad
\begin{array}{ccccc|c|c|c}
5\zeta' & \cdot & \cdot & = & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\cdot & +\,39208{,}9\,\xi & -\,53289{,}4\,\eta & = & +\,2693{,}2 & 0 & 1 & 0 \\
\cdot & -\,53289{,}4\,\xi & +\,85614{,}6\,\eta & = & -\,3937{,}9 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
5\zeta' & -\,14080{,}5\,\xi & +\,32325{,}2\,\eta & = & -\,1244{,}7 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

Die Summengleichung, welche direkt aus den Fehlergleichungen abgeleitet wurde, stimmt, wie man sieht, mit der Summe der Normalgleichungen.*)

Die Auflösung ergibt die beiden Systeme:

$$
(11) \qquad
\begin{array}{ccccc|c|c}
5\zeta' & \cdot & \cdot & = & 0 & 1 & \\
 & 39208{,}9\,\xi & -\,53289{,}4\,\eta & = & +\,2693{,}2 & 0 & 1 & \\
 & & 13188{,}0\,\eta & = & -\,277{,}6 & 0 & +\,1{,}35912 & 1
\end{array}
$$

$$
(12) \qquad
\begin{array}{cccc|c|c}
\zeta' \cdot & \cdot & = & 0 & 0{,}2 & \\
\xi - 1{,}35912\,\eta & & = & +0{,}068688 & 0 & +\,0{,}000025504 \\
 & \eta & = & -0{,}02105 & 0 & +\,0{,}000103057 + 0{,}000075826,
\end{array}
$$

und hieraus

$$
(13) \qquad \xi = +\,0{,}04008,
$$

*) Schon der Anblick der Gleichungen (7) lehrt, daß ξ, η, ζ kleine Werte sind und daß für die weitere Rechnung die Genauigkeit des 25-cm-Rechenschiebers genügt haben würde, wobei die Koeffizienten von ξ und η entsprechend abzukürzen gewesen wären. In den meisten Fällen derartiger Aufgaben wird diese Rechnungsweise genügen. Ich habe sie u. a. bei Einschaltung von 185 Sternen des Sternhaufens im Sobieskischen Schilde in ein Hauptnetz von 15 Sternen mit großem Nutzen angewandt. (Der Sternhaufen im Sternbilde des Sobieskischen Schildes. Publ. d. Hamburger Sternwarte, 1874.)

Vergl. auch Fr. Schulze: Über die Genauigkeit trigonometrischer Punktbestimmungen usw. (Zeitschr. f. Vermessungswesen 1904, S. 20 u. f.)

also die Abscisse des gesuchten Punktes $\cdots = -1992{,}560$ m;

(13*) $$\eta = -0{,}02105,$$

also die Ordinate des gesuchten Punktes $\cdots = -1144{,}521$ m;

ferner wird $n + \lambda_1$, der Richtungswinkel nach 1 $= 29^0\,52'\,22'',61$.

Die Werte von ξ und η, sowie $\zeta' = 0$ erfüllen die Summengleichung in (10) vollständig.

Die Verbesserungen λ sind:

(14) $$\lambda_1 = +0{,}10, \quad \lambda_2 = -0{,}19, \quad \lambda_3 = +0{,}05,$$
$$\lambda_4 = +0{,}20, \quad \lambda_5 = -0{,}14,$$

deren Quadratsumme 0,1082 beträgt.

$$[\lambda] = +0{,}35 - 0{,}33,$$

d. i., wie es zufolge der Form der Fehlergleichungen sein muß, hinreichend mit null übereinstimmend.

Aus den Fehlergleichungen (7) folgt

$$[ll] = 331{,}604$$

und mittels der Normalgleichungen (8) und (10):

$$[\lambda\lambda] = 331{,}604 - \{5{,}304^2 \cdot 5 + 2693{,}2 \cdot 0{,}068688 + 277{,}6 \cdot 0{,}02105\}$$
$$= 331{,}604 - 331{,}495 = 0{,}109,$$

in hinreichender Übereinstimmung mit dem oben erhaltenen Werte.

Der mittlere Fehler einer Richtungsangabe wird

(15) $$\mu = \sqrt{\frac{0{,}1082}{5-3}} = \pm 0'',23.$$

Die reziproken Gewichte für ξ und η sind bzw.

$$0{,}00016557, \qquad 0{,}00007583;$$

daher die mittlern Fehler der berechneten Abscisse und Ordinate des gesuchten Punktes bzw.:

(16) $$\sqrt{0{,}0541 \cdot 0{,}00016557} = \pm 0{,}00299 \text{ m},$$
$$\sqrt{0{,}0541 \cdot 0{,}00007583} = \pm 0{,}00202 \text{ m}.$$

Wir haben bisher stillschweigend vorausgesetzt, daß die Koordinaten der gegebenen Punkte streng richtig seien und demgemäß als Ursache der Widersprüche nur die Richtungsbeobachtungen betrachtet. Das ist jedoch nicht zutreffend; es werden vielmehr die λ, und folglich auch μ, teilweise in Koordinatenfehlern ihren Grund haben; jedoch nur insoweit, als es sich um die relativen Fehler der Figur zwischen den in Betracht kommenden Punkten handelt. Dagegen haben die dem ganzen Netzteil 1. 2. 3. 4. 5. gemeinsamen Fehler (Verschiebung und Drehung des ganzen

Netzteiles) keinen Einfluß auf die λ und auf μ; aber sie gehen in die Bestimmung von x und y als konstante Fehler vollständig ein, indem der Punkt x, y an dieser gemeinsamen Veränderung teilnimmt. Im vorliegenden Falle schien es angesichts der guten Übereinstimmung nicht nötig, auf Koordinatenfehler Rücksicht zu nehmen. Auch fehlten zur genauen Gewichtsbestimmung der Richtungen die Grundlagen. Man hätte aber etwa noch die Hypothese machen können, daß nur die Koordinatenfehler Anlaß der Widersprüche seien. Dann wären Gewichte proportional den Quadraten der Entfernungen einzuführen gewesen.

Das Beispiel ist der von Prof. Nagel in Sachsen im erzgebirgischen Kohlenbassin ausgeführten Triangulation entlehnt. Die Messungen erfolgten mit einem Repetitionstheodolit.

Hat man nicht einen vollen Richtungssatz, sondern nur Winkel gemessen, so wird man für jeden Winkel die beiden dem System (5) entsprechenden Richtungsfehlergleichungen voneinander subtrahieren und dadurch u eliminieren. Ist z. B. der Winkel $(1 \cdot 2)$ gemessen zu $184^0\,1'\,41'',50$ und die Verbesserung desselben gleich v, so hat man

$$184^0\,1'\,41'',50 + v = 184^0\,1'\,47,69 - 87,42\,\xi + 141,40\,\eta$$

und ebenso für jeden andern der gemessenen Winkel. (Vergl. noch weiterhin § 11, VII.)

Beispiel. Ausgleichung symmetrischer Winkelbeobachtungen nach Generalleutnant Schreiber.*) Auf der Station Ballon in den Vogesen wurde zwischen sechs Richtungen jeder Winkel an vier Stellen des Teilkreises je zweimal (einmal von l nach r, dann von r nach l) gemessen. Die Mittelwerte dieser vier Sätze sind nahezu frei von periodischen Teilungsfehlern. Geht man von den Richtungswerten aus:

$$(1)\qquad \begin{aligned} 1 &= \;\;0^0\;\;0'\;\;0'' + (1) \\ 2 &= \;\;54\;\;22\;\;61 + (2) \\ 3 &= \;\;66\;\;24\;\;32 + (3) \\ 4 &= \;\;91\;\;55\;\;18 + (4) \\ 5 &= 112\;\;35\;\;45 + (5) \\ 6 &= 154\;\;43\;\;\;\;8 + (6), \end{aligned}$$

so erhält man aus den Beobachtungen folgende Summen der je acht Winkelergebnisse:

*) Zeitschr. f. Vermessungswesen VII. Bd., 1878, S. 209 u. f.

(2)

1	2	3	4	5	6	σ
*	− 8,0	− 2,0	− 6,4	− 0,1	+ 3,6	− 12,9
	*	− 3,0	− 0,2	+ 0,6	+ 8,2	+ 5,6
		*	− 3,0	+ 0,8	+ 1,9	− 0,3
			*	+ 3,2	+ 0,6	+ 3,8
				*	+ 10,8	+ 10,8
	− 8,0	− 5,0	− 9,6	+ 4,5	+ 25,1	+ 7,0
+ 12,9	− 5,6	+ 0,3	− 3,8	− 10,8		− 7,0
+ 12,9	− 13,6	− 4,7	− 13,4	− 6,3	+ 25,1	0

Die Werte der ersten Zeile beziehen sich auf die Winkel mit der ersten Richtung, die der zweiten Zeile auf die Winkel mit der zweiten Richtung usf. nach dem Schema:

(3)

1	2	3	4	5	6	Summe
*	$[1\cdot 2]$	$[1\cdot 3]$	$[1\cdot 4]$	$[1\cdot 5]$	$[1\cdot 6]$	σ_1
	*	$[2\cdot 3]$	$[2\cdot 4]$	$[2\cdot 5]$	$[2\cdot 6]$	σ_2
		*	$[3\cdot 4]$	$[3\cdot 5]$	$[3\cdot 6]$	σ_3
			*	$[4\cdot 5]$	$[4\cdot 6]$	σ_4
				*	$[5\cdot 6]$	σ_5
Summe:	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	gibt
$-\sigma_1$	$-\sigma_2$	$-\sigma_3$	$-\sigma_4$	$-\sigma_5$		zusammen
$2(al)$	$2(bl)$	$2(cl)$	$2(dl)$	$2(el)$	$2(fl)$	Quersumme null

So ist z. B. nach den Beobachtungen

$$[3\cdot 5] = 104'',8 - 8\cdot 13'' = +0'',8\,.$$

Für die Ausgleichung kann man folgende Fehlergleichungen ansetzen, wenn $2n = 8$ die Anzahl der Messungen jedes Winkels ist:

(4)

$$\lambda_{1\cdot 2} = -\frac{[1\cdot 2]}{2n} - (1) + (2),\quad \lambda_{2\cdot 3} = -\frac{[2\cdot 3]}{2n} - (2) + (3),\quad \lambda_{3\cdot 4} = -\frac{[3\cdot 4]}{2n} - (3) + (4)$$

$$\lambda_{1\cdot 3} = -\frac{[1\cdot 3]}{2n} - (1) + (3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$. \quad . \quad . \quad \lambda_{2\cdot 6} = -\frac{[2\cdot 6]}{2n} - (2) + (6) \quad \lambda_{3\cdot 6} = -\frac{[3\cdot 6]}{2n} - (3) + (6)$$

$$\lambda_{1\cdot 6} = -\frac{[1\cdot 6]}{2n} - (1) + (6)$$

usw.

$$\lambda_{5\cdot 6} = -\frac{[5\cdot 6]}{2n} - (5) + (6).$$

Setzen wir nun symbolisch:

$$
(5)\quad
\begin{array}{l}
-[1\cdot 2]-[1\cdot 3]-[1\cdot 4]-\cdots-[1\cdot 6]=-\sigma_1 \quad * \quad =2(al)\\
+[1\cdot 2]-[2\cdot 3]-[2\cdot 4]-\cdots-[2\cdot 6]=-\sigma_2+s_2=2(bl)\\
+[1\cdot 3]+[2\cdot 3]-[3\cdot 4]-\cdots-[3\cdot 6]=-\sigma_3+s_3=2(cl)\\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
+[1\cdot 6]+[2\cdot 6]+[3\cdot 6]+\cdots+[5\cdot 6]= \quad * \quad +s_6=2(fl)
\end{array}
$$

und nehmen n als Gewicht der Fehlergleichungen (Gew. 1 für eine Richtungsbeobachtung), so folgen als Normalgleichungen, wenn die Anzahl der Richtungen allgemein mit ν bezeichnet wird:

$$
(6)\quad
\begin{array}{l}
n(\nu-1)(1) \quad -n(2) \quad -n(3)-\cdots=(al)\\
-n(1)+n(\nu-1)(2) \quad -n(3)-\cdots=(bl)\\
-n(1) \quad -n(2)+n(\nu-1)(3)-\cdots=(cl)\\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\;\cdot
\end{array}
$$

Die Summe dieser Gleichungen ist null, weil nur die Unterschiede der (1), (2), ... bestimmte Werte haben.

Das System (6) kann man aber betrachten als hervorgegangen aus den Fehlergleichungen einer vollen Reihe von Richtungsbeobachtungen vom Gewicht $n\nu = 4\cdot 6 = 24$ nach den $\nu = 6$ Objekten:

$$
(7)\quad
\begin{array}{l}
\frac{1}{n\nu}(al)+\lambda_1=u+(1)\\[2ex]
\frac{1}{n\nu}(bl)+\lambda_2=u+(2)\\[2ex]
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\[2ex]
\frac{1}{n\nu}(fl)+\lambda_6=u+(6).
\end{array}
$$

Denn bildet man hieraus die Normalgleichungen, eliminiert dann u und beachtet, daß

$$(al)+(bl)+\cdots+(fl)=0$$

ist, so folgt genau (6).

Als Ergebnis der Winkelmessungen kann man also die fingierte Reihe von Richtungsbeobachtungen ansehen:

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
&1.\ \text{Richtung}\quad (1) = \frac{al}{n\nu} = +\frac{6{,}45}{24} = +\,0{,}''269\\
&2.\quad ,,\quad (2) = \frac{bl}{n\nu} = -\frac{6{,}80}{24} = -\,0{,}283\\
&3.\quad ,,\quad (3) = \frac{cl}{n\nu} = -\frac{2{,}35}{24} = -\,0{,}098\\
&4.\quad ,,\quad (4) = \frac{dl}{n\nu} = -\frac{6{,}70}{24} = -\,0{,}279\\
&5.\quad ,,\quad (5) = \frac{el}{n\nu} = -\frac{3{,}15}{24} = -\,0{,}131\\
&6.\quad ,,\quad (6) = \frac{fl}{n\nu} = +\frac{12{,}55}{24} = +\,0{,}523\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{Summe: } +\,0{,}001
\end{aligned}
$$

Das Gewicht der Richtungswerte ist, wie schon erwähnt:

$$n\nu = 4 \cdot 6 = 24\,.$$

Die Werte der Verbesserungen in (8), deren Summe null ist, befriedigen auch die Gleichungen (6).

Die $\lambda_{1\cdot 2}$, $\lambda_{1\cdot 3}$, usw. werden nach (4) im Anschluß an (2):

Winkelverbesserungen.

(9)		1	2	3	4	5	6
	1	*	+ 0,448	− 0,117	+ 0,252	− 0,387	− 0,196
	2		*	+ 0,560	+ 0,029	+ 0,077	− 0,219
	3			*	+ 0,194	− 0,133	+ 0,383
	4				*	− 0,252	+ 0,727
	5					*	− 0,696

Mit $n = 4$ ist $[\lambda\lambda n] = 8{,}4515$.

Bezeichnet man die Winkelwertsummen in (2) mit $[ik]$, so ist ferner nach der bekannten Kontrollformel (13*), S. 158, mit Rücksicht auf (4), (6) und (8), da das Gewicht einer Fehlergleichung gleich n ist:

$$[\lambda\lambda n] = \frac{\Sigma\,[ik]^2}{64:4} - \frac{6{,}45^2 + 6{,}80^2 + 2{,}35^2 + 6{,}70^2 + 3{,}15^2 + 12{,}55^2}{24}$$

$$= \frac{339{,}06}{16} - \frac{305{,}68}{24} = 8{,}4546\,.^{*)}$$

*) Die Entwicklung auf S. 134 für die Kontrollformel gilt auch jetzt, obwohl die Unbekannten nicht völlig aus den Normalgleichungen (6) bestimmbar sind. Aber sie gilt für jede Wahl der Unbekannten, die den Normalgleichungen genügt.

Der mittlere Fehler der Beobachtung vom Gewicht 1 ist daher gleich

$$\pm \sqrt{\frac{8{,}45}{15-5}} = \pm 0''{,}92.$$

Das Gewicht 1 haben die Winkelsätze (Doppelmessungen) und die einfachen Richtungsbeobachtungen, wenn vom Einfluß der periodischen Teilungsfehler, der erst in den Mitteln der vier Sätze nahezu verschwindet, auch da schon abgesehen wird.

Beispiel. Ersatz einer Reihe von Richtungsbeobachtungen durch symmetrische Winkelbeobachtungen. Dies ist die Umkehrung der vorigen Aufgabe. Bei ν Richtungen und $2n$ Messungen jedes Winkels mit dem Gesamtgewicht n war das Richtungsgewicht der resultierenden Reihe $n\nu$. Mithin kann man eine Reihe von Richtungen, deren jede das Gewicht 2 hat, so daß also jeder der möglichen Winkel das Gewicht 1 besitzt, ersetzen durch die Annahme, daß alle Winkel mit dem Gewicht $\frac{2}{\nu}$ unabhängig voneinander gemessen seien.

Hiervon hat H. G. van de Sande Bakhuyzen Gebrauch gemacht bei der Ausgleichung des europäischen Längennetzes.*) Es kommt bei den geographischen Längenbestimmungen durch Zeitbestimmungen und telegraphische Uhrvergleichung wiederholt vor, daß Zeitbestimmungen auf drei oder vier Stationen gleichzeitig ausgeführt sind; von einer der Stationen aus werden telegraphische Uhrvergleichungen mit den andern ausgeführt. Da die Fehler dieser Vergleichungen gegen die Zeitbestimmungsfehler in der Regel zurücktreten, so kann man sich die Zeitbestimmungen wie Richtungsbeobachtungen zu einer Reihe verbunden denken, deren Unterschiede die Längendifferenzen geben.

Bei drei Stationen haben dann die drei Längenunterschiede $\frac{2}{3}$ des Gewichts eines beobachteten Längenunterschiedes zu erhalten, bei vier Stationen die sechs Unterschiede $\frac{2}{4}$ dieses Gewichts.

Der Vorteil ist nun der, daß man die drei bzw. sechs Längenunterschiede wie voneinander unabhängige Beobachtungen weiter verwerten kann, sie also insbesondere mit andern Ergebnissen zu Mitteln vereinigen darf.

§ 11. Gleichwertige und vollständig äquivalente Beobachtungsreihen. Freie Funktionen.

I. Gleichwertige Beobachtungsreihen. Obwohl die Aufstellung von Normalgleichungen nur bei überschüssigen Messungen

*) Verhandlungen der 10. Allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung in Brüssel, 1892. Berlin 1893; S. 202 u. f.

einen Sinn als ein erster Schritt der Ausgleichung hat, so hindert doch nichts, sie auch zu bilden, wenn die Messungen nur eben gerade zur Bestimmung der Unbekannten hinreichen. Die Normalgleichungen ersetzen dann nicht nur in bezug auf die Berechnung von $x, y, z, \ldots$ die Fehlergleichungen vollständig, sondern sie gestatten auch, in bekannter Weise aufgelöst, die Gewichtsberechnung. Wenn noch auf irgend eine Weise der mittlere Fehler der Beobachtungen bekannt wird, so kann man also auch die mittlern Fehler der Unbekannten und beliebiger Funktionen derselben berechnen.

Denken wir uns nun den Fall, daß zu zwei Beobachtungsreihen übereinstimmende Normalgleichungssysteme gehören, so können wir sie als gleichwertig bezeichnen, da sie für die Unbekannten und beliebige Funktionen derselben die gleichen Werte und Gewichte ergeben. Zwei Beispiele dafür haben wir bereits am Schlusse des vorigen Paragraphen kennen gelernt.

Insbesondere können wir uns jedes System von m Normalgleichungen auch durch m Gleichungen von der Form der Fehlergleichungen, aber mit $\lambda = 0$, entstanden denken, d. h. durch eine gerade genügende Anzahl Messungen. Eine solche fingierte Beobachtungsreihe und ihr Gleichungssystem wollen wir als der gegebenen Beobachtungsreihe und deren Normalgleichungssystem vollständig äquivalent bezeichnen.

II. Bedingungen der Äquivalenz. Setzen wir beispielsweise $m = 3$ und bezeichnen wir die Koeffizienten der äquivalenten Gleichungen mit deutschen Buchstaben, so werden die Bedingungen der Äquivalenz unter der Voraussetzung, daß den äquivalenten Gleichungen das Gewicht 1 beigelegt werde:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_3 &= (aa) \\
\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3 &= (ab) \\
\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_3 &= (ac) \\
\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_3 &= (bb) \\
\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2 + \mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3 &= (bc) \\
\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_2 + \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_3 &= (cc)
\end{aligned}
$$

sowie

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{a}_1\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{l}_3 &= (al) \\
\mathfrak{b}_1\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{b}_2\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{b}_3\mathfrak{l}_3 &= (bl) \\
\mathfrak{c}_1\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{c}_2\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{c}_3\mathfrak{l}_3 &= (cl).
\end{aligned}
$$

Die (2) bestimmen die $\mathfrak{l}$ vollständig, wenn erst die $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ bekannt sind. Zur Bestimmung dieser neun Größen gibt das System (1) aber nur sechs Gleichungen. Es ist daher auf mehr als eine Weise möglich, ein äquivalentes System abzuleiten: es ist die Anzahl dieser Systeme sogar unendlich groß.

Für uns ist ein äquivalentes System besonders interessant, nämlich das System der reduzierten Normalgleichungen. Für drei Unbekannte lautet es:

$$(3)\quad \begin{aligned} x + \frac{(ab)}{(aa)}y + \frac{(ac)}{(aa)}z &= \frac{(al)}{(aa)} \quad \text{mit Gewicht} \quad (aa) \\ y + \frac{(bc\cdot 1)}{(bb\cdot 1)}z &= \frac{(bl\cdot 1)}{(bb\cdot 1)} \quad \text{,,} \qquad \text{,,} \qquad (bb\cdot 1) \\ z &= \frac{(cl\cdot 2)}{(cc\cdot 2)} \quad \text{,,} \qquad \text{,,} \qquad (cc\cdot 2), \end{aligned}$$

oder in anderer Bezeichnung, vergl. S. 125:

$$(4)\quad \begin{aligned} x + \alpha_2' y + \alpha_3' z &= \chi_1 \quad \text{Gew.} \quad (aa) \\ y + \beta_3'' z &= \chi_2 \quad \text{,,} \quad (bb\cdot 1) \\ z &= \chi_3 \quad \text{,,} \quad (cc\cdot 2). \end{aligned}$$

Bildet man die zu (3) oder (4) gehörenden Normalgleichungen, indem man χ_1, χ_2, χ_3 als unabhängige Beobachtungswerte ansieht, so erhält man wieder das ursprüngliche Normalgleichungssystem, wie man sich leicht überzeugen kann. Es ist daher das System der reduzierten Normalgleichungen den gegebenen Beobachtungen vollständig äquivalent, und zwar sind die fingierten Beobachtungswerte, welche als unabhängig voneinander anzusehen sind:

$$(5)\quad \begin{aligned} \mathfrak{l}_1 &= \chi_1 \ \text{oder}\ \frac{(al)}{(aa)} \quad \text{mit Gewicht} \quad (aa) \\ \mathfrak{l}_2 &= \chi_2 \ \text{oder}\ \frac{(bl\cdot 1)}{(bb\cdot 1)} \quad \text{,,} \qquad \text{,,} \qquad (bb\cdot 1) \\ \mathfrak{l}_3 &= \chi_3 \ \text{oder}\ \frac{(cl\cdot 2)}{(cc\cdot 2)} \quad \text{,,} \qquad \text{,,} \qquad (cc\cdot 2). \end{aligned}$$

Beispielsweise erwähnen wir, daß für die Bestimmung von ζ', ξ, η in dem Beispiel auf S. 207 das System (12) ein vollständig äquivalentes System ist:

$$\begin{array}{rcrll} \zeta' & = & 0 & \text{Gew.} & 5 \\ \xi - 1{,}35912\,\eta & = & +\,0{,}06869 & \text{,,} & 39\,209 \\ \eta & = & -\,0{,}02105 & \text{,,} & 13\,188. \end{array}$$

Man erhält aus ihm rückwärts in üblicher Weise die Normalgleichungen (10), S. 207.

Das System der reduzierten Normalgleichungen reicht aus zur Beantwortung jeder Frage, die man an die Ausgleichungsrechnung der ursprünglichen Beobachtungswerte stellen kann; es gibt allerdings nicht die Verbesserungen λ der letztern und den mittlern Beobachtungsfehler μ. Es gewährt aber das System der reduzierten Normalgleichungen im Verein mit dem mittlern Beobachtungsfehler μ der Gewichtseinheit eine vollkommene Übersicht der Ausgleichungsergebnisse.

Eine solche ist dagegen in der alleinigen Angabe der Werte der Unbekannten und ihrer Gewichte nicht enthalten.

III. Anwendungen. A. Wenn nach geschehener Ausgleichung eine der Funktionen

$$x + \alpha_2' y + \alpha_3' z, \quad y + \beta_3'' z, \quad z$$

noch auf anderm Wege bekannt wird, so kann man ohne weiteres die beiden Bestimmungen vereinigen.

Ergibt sich z. B. für z noch ein Wert χ_3' mit dem Gewichte g', während die erste Bestimmung für z den Wert χ_3 mit dem Gewichte $g = (cc \cdot 2)$ ergab, so haben wir anzunehmen:

$$z = \frac{\chi_3 g + \chi_3' g'}{g + g'}. \tag{6}$$

Das Gewicht dieser Bestimmung ist nunmehr $g + g'$.

Infolge der Neubestimmung von z ändern sich auch die Werte und Gewichte von x und y. Für die letztere Unbekannte haben wir aus der zweiten Gleichung (4)

$$y = \chi_2 - \beta_3'' z,$$

wozu für z der Wert aus (6) zu entnehmen ist. Das reziproke Gewicht dieser Bestimmung wird, da χ_2 und z unabhängig voneinander sind, gleich

$$\frac{1}{(bb \cdot 1)} + \frac{\beta_3''^2}{(cc \cdot 2) + g'}. \tag{7}$$

Sind andere Funktionen als die oben genannten nachträglich beobachtet worden, so kann in der Regel die Vereinigung aller Messungen nur durch Herstellung eines Normalgleichungssystems erfolgen.

B. Es seien der Wert und das mittlere Fehlerquadrat der Funktion

$$F = F_1 x + F_2 y + F_3 z \tag{8}$$

anzugeben. Der Wert von F wird durch einfache Substitution der Werte von x, y, z gefunden. Wie schon erwähnt, wäre es fehlerhaft, für das mittlere Fehlerquadrat setzen zu wollen:

$$\mu_F^2 = F_1^2 \mu_x^2 + F_2^2 \mu_y^2 + F_3^2 \mu_z^2,$$

weil x, y, z nicht unabhängig voneinander sind. Drücken wir F aber durch die unabhängigen Werte χ_1, χ_2, χ_3 aus, so dürfen die mittlern Fehlerquadrate der einzelnen Teile einfach addiert werden. Löst man (4) nach x, y, z auf, so folgt mit Benutzung von (XIII), S. 157:

$$\begin{aligned} x &= \chi_1 - \chi_2 \alpha_2' - \chi_3 \alpha_3'' \\ y &= \phantom{\chi_1 - {}} \chi_2 - \chi_3 \beta_3'' \\ z &= \phantom{\chi_1 - \chi_2 \alpha_2' - {}} \chi_3 \quad . \end{aligned} \tag{9}$$

Daher ist

$$F = F_1 \chi_1 + (F_2 - F_1 \alpha_2') \chi_2 + (F_3 - F_2 \beta_3'' - F_1 \alpha_3'') \chi_3,$$

d. i. nach (16), S. 183:

$$F = F_1 \chi_1 + (F_2 \cdot 1) \chi_2 + (F_3 \cdot 2) \chi_3. \tag{10}$$

Mithin ist

$$\mu_F^2 = \mu^2 \left\{ \frac{F_1^2}{(aa)} + \frac{(F_2 \cdot 1)^2}{(bb \cdot 1)} + \frac{(F_3 \cdot 2)^2}{(cc \cdot 2)} \right\}, \tag{11}$$

übereinstimmend mit (14), S. 182.

IV. Verschiedene Reihenfolge der Unbekannten. Für jede Reihenfolge der Unbekannten gibt es offenbar nur ein einziges äquivalentes System von der Form der reduzierten Normalgleichungen; für m Unbekannte gibt es aber $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$ verschiedene Reihenfolgen und daher ist die Anzahl der äquivalenten Systeme von der Form der reduzierten Normalgleichungen, aber sämtlich von verschiedener Reihenfolge der Unbekannten, gleich $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$.

Welche Reihenfolge man wählt, hängt von den besondern Umständen der Aufgabe ab. Ist uns beispielsweise schon bei Beginn der Ausgleichung bekannt, daß später noch direkte Beobachtungen von x hinzutreten werden, so nehmen wir x als die letzte Unbekannte in der Reihenfolge, damit die Berechnung der Endwerte von $x, y, z, \ldots$ wie S. 216, sich möglichst einfach gestalte.

Oder wissen wir, daß zwischen einem Teile der Unbekannten Bedingungsgleichungen bestehen, die aber erst später berücksichtigt werden können, so nehmen wir diese Unbekannten als die letzten.

V. Unvollständige Bestimmungen. Reichen die Beobachtungen nicht aus zur völligen Bestimmung der Unbekannten, obgleich sie der Zahl nach dazu ausreichen müßten $(n > m)$, so zeigt die Auflösung der Normalgleichungen dies dadurch an, daß man auf Gleichungen kommt, deren sämtliche Glieder null sind.

Wird z. B. nach Elimination von x im ersten abgeleiteten Normalgleichungssystem $(cc \cdot 1) = (c'c')$ gleich null, so muß überhaupt die ganze zweite Gleichung des Systems (8), S. 123, Glied für Glied verschwinden. Denn $(c'c')$ kann nur null werden, wenn jedes c_i' null wird; die andern Glieder sind aber lediglich aus Produkten zusammengesetzt, deren eine Faktoren die c_i' sind. In diesem Falle ist es unmöglich, z für sich allein zu bestimmen. Dieses zeigen auch die Fehlergleichungen; aus $(c'c') = 0$ folgt $c_i' = 0$ oder

$$c_i - a_i \frac{(ac)}{(aa)} = 0. \tag{12}$$

Die Koeffizienten a_i und c_i von x und z stehen mithin in konstantem Verhältnisse:

$$\frac{a_i}{c_i} = \text{Konst.} \tag{12*}$$

Man kann daher nur das Aggregat der Unbekannten x und z bestimmen, das durch $x + \frac{c}{a} z$ ausgedrückt wird. Dazu bedarf es keiner neuen Entwicklung, denn diese Bestimmung wird schon durch die reduzierten Normalgleichungen geleistet.

Die Auflösung ist auch nicht vollständig durchführbar, wenn die Koeffizientensumme s der Unbekannten in allen Gleichungen gleich null ist. Denn dann ist die Summennormalgleichung identisch null und die Normalgleichungen sind nicht mehr unabhängig voneinander.

Die Auflösung ist überhaupt nicht vollständig durchführbar, wenn die Koeffizienten $a_i, b_i, c_i, \ldots$ durch eine (oder mehrere sich nicht widersprechende) Gleichungen der Form

$$ha_i + kb_i + lc_i + \cdots = 0, \tag{13}$$

worin $h, k, l, \ldots$ Konstante bezeichnen, verknüpft sind. Denn multipliziert man die Normalgleichungen der Reihe nach mit $h, k, l, \ldots$ und addiert, so verschwindet die Summengleichung Glied für Glied.

In der Regel wird man schon im voraus wissen, ob dergleichen Fälle eintreten können; denn die Bestimmung der m Unbekannten ist sicher möglich, wenn unter den n Fehlergleichungen sich m befinden, die mit $\lambda = 0$ eine Bestimmung der Unbekannten gestatten würden.*) Der Beobachter wird aber bei der Anlage der ganzen Arbeit immer überlegen, wie er es zu machen hat, daß wenigstens ein hinreichendes System von m Gleichungen entsteht (dessen Koeffizientendeterminante also nicht verschwindet).

Sind die Beobachtungen nicht zahlreich genug ($n < m$), und bildet man doch die Normalgleichungen, so zeigt es deren Auflösung ebenfalls an, daß eine vollständige Bestimmung nicht möglich ist, indem man auf eine oder mehrere in allen Gliedern verschwindende Gleichungen stößt.

In jedem Falle einer unvollständigen Bestimmung ist es aber zulässig, die Normalgleichungen zu bilden und sie, soweit es möglich ist, aufzulösen. Diejenigen abgeleiteten Gleichungen, welche verschwinden, werden einfach weggelassen. So erhält man z. B. entsprechend (12) das reduzierte Normalgleichungssystem:

$$(12^{**})\qquad \begin{array}{rll} x + \alpha_2'y + \alpha_3'z + \alpha_4't = \chi_1 & \text{Gew.} & (aa) \\ y + \quad\cdot\quad + \beta_4''t = \chi_2 & \text{„} & (bb\cdot 1) \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot & & \\ t = \chi_4 & \text{„} & (dd\cdot 3). \end{array}$$

*) Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, S. 329.

Die Werte von t, y und $(x + \alpha_3' z)$, d. i. $\left(x + \frac{c}{a} z\right)$, sowie deren Gewichte lassen sich daraus vollständig bestimmen, nicht aber x und z einzeln.

Stößt man bei der Elimination auf ein quadratisches Glied, welches sehr klein ist, so wird man die Reihenfolge der Unbekannten ändern und die betreffende Unbekannte an die letzte Stelle bringen. Dies ist wegen der Rechenungenauigkeit auch im vorhergehenden Falle zu empfehlen, weil man nicht immer sicher weiß, ob genau ein Nullwerden da ist. Also ist die neue Reihenfolge x, y, t, z

Löst man die Normalgleichungen nicht streng auf, sondern durch Annäherung, so wird man bei unvollständiger Bestimmung für alle Unbekannte Werte erhalten; im betrachteten Falle auch für x und z einzeln. Diese Werte sind aber einzeln fehlerhaft, nur das Aggregat $\left(x + \frac{c}{a} z\right)$ derselben ist richtig. Vergl. auch das Annäherungsverfahren S. 199.

Die indirekte Auflösung der Normalgleichungen kann also recht in die Irre führen!

VI. Freie Funktionen nach T. N. Thiele. Die Größen $l_1, l_2, \ldots l_n$ seien voneinander unabhängige Beobachtungswerte, die wir der Einfachheit halber als von gleicher Genauigkeit mit dem mittlern Fehler μ voraussetzen. Zwei Funktionen

$$A = [al], \quad B = [bl] \tag{14}$$

sind dann (gegenseitig) freie Funktionen, wenn

$$[ab] = 0 \tag{14*}$$

ist. Denn unter dieser Voraussetzung verhalten sie sich bei Zusammentreffen in einer linearen Funktion

$$F = Ap + Bq \tag{15}$$

wie voneinander unabhängige Beobachtungen. Das mittlere Fehlerquadrat von F setzt sich nämlich einfach aus den mittlern Fehlerquadraten von Ap und Bq zusammen. Zunächst ist

$$F = [(ap + bq)l]$$

und

$$\mu_F^2 = \mu^2[(ap + bq)^2].$$

d. i. aber wegen $[ab] = 0$ gleich

$$\mu_F^2 = \mu^2[a^2p^2 + b^2q^2] = p^2\mu_A^2 + q^2\mu_B^2. \tag{16}$$

Die in den reduzierten Normalgleichungen auftretenden Summen $[al]$, $[bl \cdot 1]$, $[cl \cdot 2]$, ... oder $[al]$, $[b'l]$, $[c''l]$, ... sind gegenseitig frei, da $[ab'] = [ac''] = [b'c''] = \cdots = 0$ ist, vergl. S. 140. Zugleich sieht man, wie die Funktionen $[al]$, $[bl]$, $[cl]$, ... in gegenseitig freie zu verwandeln sind: Man bildet zu $a, b, c, \ldots$ ein System von Normalgleichungs-Koeffizienten, gerade so, als wären die a, b, c, ... Koeffizienten von Unbekannten in Fehlergleichungen. Dann reduziert man nach Gauß' Algorithmus, d. h. man bildet

$$\begin{aligned} b_i' &= b_i - a_i\frac{[ab]}{[aa]}, \quad c_i' = c_i - a_i\frac{[ac]}{[aa]}, \ \ldots \\ c_i'' &= c_i' - b_i'\frac{[b'c']}{[b'b']} \quad \text{usw.} \end{aligned} \tag{17}$$

Bei der Bildung der Summen für die reduzierten Koeffizienten hat man die Kontrollen

$$[b'c'] = [bc \cdot 1] = [bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]}, \quad \text{usw.}$$

Freie Funktionen können in bezug auf Ausgleichung und Berechnung mittlerer Fehler wie direkte Beobachtungen behandelt werden.

Von dem Begriff der freien Funktionen kann man bei der Elementenausgleichung in folgender Weise Gebrauch machen. Es seien gegeben die n Beobachtungen $l_1, \ldots l_n$, die mit m Unbekannten linear zusammenhängen:

$$\begin{gathered} l_i + \varepsilon_i = a_iX + b_iY + c_iZ + \cdots; \\ i = 1 \ldots n \end{gathered} \tag{18}$$

$X, Y, Z, \ldots$ sind die wahren Werte, ε die wahren Verbesserungen.

Soll nun eine Funktion

$$F = F_0 + F_1X + F_2Y + F_3Z + \cdots = F_0 + \Delta F \tag{19}$$

berechnet werden, so kann man zunächst von Multiplikatoren f_i' für die Gleichungen (18) Gebrauch machen, so daß

$$(20) \qquad \Delta F = [f'(l+\varepsilon)]$$

wird, wenn die f' die m Bedingungen erfüllen:

$$(21) \qquad [af'] = F_1, \quad [bf'] = F_2, \quad [cf'] = F_3, \ldots.$$

Unter den verschiedenen möglichen Systemen f' ist eins besonders ausgezeichnet, zu dessen Bestimmung wir jetzt übergehen. Zunächst ist klar, daß die n Größen $l_i + \varepsilon_i$ durch $(n-m)$ Bedingungsgleichungen verbunden sind, die aus den Gleichungen (18) folgen, wenn wir die $n(n-m)$ Multiplikatoren $p_i, q_i, r_i, s_i, \ldots$ der Reihe nach anwenden und addieren:

$$(22) \qquad [p(l+\varepsilon)] = 0, \ [q(l+\varepsilon)] = 0, \ [r(l+\varepsilon)] = 0, \\ [s(l+\varepsilon)] = 0, \ldots,$$

wobei die Multiplikatoren so zu wählen sind, daß

$$(23) \qquad \begin{array}{l} [ap] = 0 = [bp] = [cp] = \cdots \\ [aq] = 0 = [bq] = [cq] = \cdots \\ [ar] = 0 = [br] = [cr] = \cdots \\ [as] = 0 = [bs] = [cs] = \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

Daß diese $m(n-m)$ Gleichungen die Multiplikatoren nicht völlig bestimmen und sie also noch innerhalb gewisser Bedingungen willkürlich sind, ist unwesentlich.

Man kann nun unter den möglichen Systemen f_i' eins auswählen, das mit f_i bezeichnet werden soll, bei dem die Funktion $[fl]$ zu $[pl], [ql], [rl], [sl], \ldots$ frei ist, d. h. es muß sein:

$$(24) \qquad [pf] = 0 = [qf] = [rf] = [sf] = \cdots.$$

Da die f auch den Gleichungen (21) genügen müssen, sind somit von den f noch zu erfüllen die Gleichungen:

$$(25) \qquad [af] = F_1, \quad [bf] = F_2, \quad [cf] = F_3, \ldots.$$

Das sind zusammen $(n-m) + m = n$ Gleichungen für die n Werte f_i. Diese sind also bestimmt; sie scheinen allerdings von den $p_i, q_i, r_i, s_i, \ldots$ abzuhängen, was jedoch nicht der Fall ist, wie sich gleich zeigen wird.

Sind $L_1, L_2, L_3, \ldots m$ zu bestimmende Größen, so erfüllt der Ansatz

$$(26) \qquad f_i = a_i L_1 + b_i L_2 + c_i L_3 + \cdots$$

die Gleichungen (24) und (25), wie ihre Substitution in dieselben zeigt, einesteils wegen (23), andernteils wenn die L so genommen werden, daß

$$(27)\qquad \begin{aligned} [aa]L_1 + [ab]L_2 + [ac]L_3 + \cdots &= F_1 \\ [ab]L_1 + [bb]L_2 + [bc]L_3 + \cdots &= F_2 \\ [ac]L_1 + [bc]L_2 + [cc]L_3 + \cdots &= F_3 \\ . \qquad . \qquad . \qquad . \end{aligned}$$

wird. Diese m Gleichungen bestimmen die L; aus (26) folgen damit die f_i, frei von der besondern Wahl der $p, q, r, s, \ldots$.

Mittels der f_i kann man nun die f_i' ausdrücken. Da zwischen den n Größen f' nur die m Gleichungen (21) bestehen, so kann man ansetzen:

$$(28)\qquad f_i' = f_i + k_1 p_i + k_2 q_i + k_3 r_i + \cdots,$$

worin $k_1, k_2, k_3, \ldots (n-m)$ vorläufig beliebige Größen sind. Denn dieser Ansatz genügt wegen der Gl. (23) und (25) den Gl. (21). Es wird nun

$$(29)\ \Delta F = [f'(l+\varepsilon)] = [f(l+\varepsilon)] + k_1[p(l+\varepsilon)] + k_2[q(l+\varepsilon)] \\ + k_3[r(l+\varepsilon)] + k_4[s(l+\varepsilon)] + \cdots.$$

Hierin kann man f_i' und f_i als gegeben ansehen, während die k gesucht werden. Führt man mittels (28) die f_i in die Gleichungen (24) ein, so ergeben sich $(n-m)$ Gleichungen zur Bestimmung der k aus den f'.

Alle Ansätze $\Delta F = [f'(l+\varepsilon)]$ haben das Gemeinsame, daß die Zerlegung nach (29) immer zu demselben Ausdrucke $[f(l+\varepsilon)]$ führt, wozu die f aus (26) und (27) sich bestimmen.

Da man die ε nicht kennt, muß man für ΔF den Wert $[f'l]$ nehmen, den wir mit $\Delta' f$ bezeichnen wollen, während $[fl]$ mit Δf bezeichnet werden mag. Es ist nun

$$(30)\ \Delta' f = [fl] + \{k_1[pl] + k_2[ql] + k_3[rl] + k_4[sl] + \cdots\}$$

und

$$(31)\qquad \Delta f = [fl].$$

Betrachtet man $\Delta' f$, so erkennt man, daß es sich aus dem Wert $[fl]$ und den Werten $[pl], [ql], [rl], [sl], \ldots$ zusammensetzt, aber in der besondern Weise, daß

$$[fl]$$

und der Ausdruck

$$k_1[pl] + k_2[ql] + k_3[rl] + k_4[sl] + \cdots \tag{32}$$

gegenseitig freie Funktionen sind. $\Delta' f$ ist also zerlegt in zwei Teile, die wie direkte Beobachtungen voneinander unabhängig sind. Den zweiten Teil (32) wird man nun nach Maßgabe der Bedingungsgleichungen (22) zu null annehmen, denn das ist sein theoretischer Wert. Dagegen kann $[fl]$ nur aus den Beobachtungen entnommen werden.*) Alle möglichen Ausgleichungen führen somit zu dem gemeinsamen Ergebnis: Man setzt für ΔF den Wert (31) an:

$$\Delta f = [fl].$$

Hiermit ist man aber wieder zur Methode der kleinsten Quadrate gelangt, denn die Bestimmung mittels der f_i nach (26), welche

$$\Delta f = [al]L_1 + [bl]L_2 + [cl]L_3 + \cdots \tag{33}$$

gibt, und mittels (27) ist dieselbe wie nach den Gleichungen (18), S. 185, und (12), S. 182, die den Forderungen der Methode der kleinsten Quadrate entsprechen.

Man kann dies auch direkt dadurch erkennen, daß man sich Werte $x, y, z, \ldots$ aus den Gleichungen (den Normalgleichungen der Methode der kleinsten Quadrate):

$$\begin{array}{l} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \cdots = [al] \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + \cdots = [bl] \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + \cdots = [cl] \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \end{array} \tag{34}$$

bestimmt denkt. Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $L_1, L_2, L_3, \ldots$ und addiert, so folgt wegen (27):

$$F_1 x + F_2 y + F_3 z + \cdots = [al]L_1 + [bl]L_2 + [cl]L_3 + \cdots,$$

d. i. aber nach (33) gleich Δf. Das Ergebnis für Δf entspricht somit dem Ausdrucke $F_1 x + F_2 y + F_3 z + \cdots$, wenn $x, y, z, \ldots$ nach (34), d. h. der Methode der kleinsten Quadrate, bestimmt werden.

---

*) T. N. Thiele. Theory of observations. London 1903, S. 67. Dieses Werk ist überhaupt für den besonderen Gedankengang Thieles nachzusehen.

Außerdem sieht man, daß das mittlere Fehlerquadrat für Δf kleiner ist als für ein beliebiges $\Delta' f$. Denn da die beiden Teile von $\Delta' f$ in (30), nämlich Δf und der Klammerausdruck, zueinander freie Funktionen sind, setzt sich das mittlere Fehlerquadrat für $\Delta' f$ aus dem für Δf und dem für den Klammerausdruck durch Addition zusammen.

Für gleich genaue direkte Beobachtungen geht man am bequemsten von der Identität aus

$$l_i + \varepsilon_i = \frac{[l] + [\varepsilon]}{n} + \left\{ \frac{[l_i - l_h]}{n} + \frac{[\varepsilon_i - \varepsilon_h]}{n} \right\}, \quad h = 1 \ldots n.$$

Linker Hand kann man X statt $l_i + \varepsilon_i$ setzen; es wird nun $x = [l] : n$ anzunehmen sein, da der zweite Teil rechter Hand den theoretischen Wert null hat.

VII. Reduzierte Fehlergleichungen nach Generalleutnant Schreiber. Anstatt des Systems von n Fehlergleichungen

$$(35) \qquad l_i + \lambda_i = a_i x + b_i y + c_i z + \cdots \quad \text{Gewicht } g_i$$

kann man setzen die n Fehlergleichungen:

$$(36) \qquad l_i + \lambda_i' = b_i y + c_i z + \cdots \quad \text{Gewicht } g_i$$

in Verbindung mit der $(n+1)$. Gleichung

$$(37) \qquad [alg] + \Delta_1 = [abg]y + [acg]z + \cdots \quad \text{Gew.} \frac{-1}{[aag]},$$

worin Δ_1 eine Verbesserung bedeutet. Dieses System ist dem ursprünglichen in bezug auf die Bestimmung von $y, z, \ldots$ äquivalent, denn es gibt als Normalgleichungen das erste abgeleitete System der aus (35) folgenden Normalgleichungen:

$$(38) \qquad \begin{array}{l} [bbg \cdot 1]y + [bcg \cdot 1]z + \cdots = [blg \cdot 1] \\ [bcg \cdot 1]y + [ccg \cdot 1]z + \cdots = [clg \cdot 1] \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \end{array}$$

Auch die Fehlerquadratsumme bleibt erhalten, denn es ist

$$(39) \qquad [\lambda\lambda g] = [\lambda'\lambda' g] - \frac{\Delta_1^{\,2}}{[aag]}.$$

Da nämlich $y, z, \ldots$ dieselben Werte für beide Systeme von Fehlergleichungen haben, wie oben gezeigt wurde, so ist

$\lambda_i' = \lambda_i - a_i x$ und daher

$$[\lambda'\lambda' g] = [\lambda\lambda g] + [aag]x^2.$$

Nun ist aber $\Delta_1 = -[aag]x$, womit (39) bewiesen ist.

General Schreiber hat das Verfahren angewandt, um bei Ausgleichung von Richtungsbeobachtungen für Punktbestimmungen nach Koordinaten die Orientierungsgröße u der Richtungssätze, die kein weiteres Interesse hat, zu eliminieren. Nach erfolgter Elimination zeigt sich als Vorteil, daß nun Fehlergleichungen aus verschiedenen Richtungssätzen einfach gemittelt werden können, die in den übriggebliebenen Gliedern bzw. gleiche Koeffizienten haben, was noch eine Vereinfachung der Rechnung gibt.*)

Beispiel. (Fortsetzung zu S. 204/209.) Werden nicht nur ein einziger Satz Richtungen beobachtet, sondern etwa zwei mit teilweise denselben Objekten, so wird man wohl am besten Schreibers Verfahren anwenden.

Für den ersten Satz schreibt man statt der Gleichungen (7), S. 206, das System an:

$$\begin{array}{lll}
\lambda_1' = - \ \ 0{,}82 + \ \ 44{,}71\xi - \ \ 77{,}84\eta & \text{Gew.} & 1 \\
\lambda_2' = + \ \ 5{,}37 - \ \ 42{,}71\xi + \ \ 63{,}56\eta & \text{,,} & 1 \\
\lambda_3' = + 16{,}96 - 222{,}79\xi + 259{,}79\eta & \text{,,} & 1 \\
\lambda_4' = + \ \ 3{,}48 - \ \ 34{,}63\xi - \ \ 29{,}65\eta & \text{,,} & 1 \\
\lambda_5' = + \ \ 1{,}53 - \ \ 31{,}01\xi - \ \ 99{,}31\eta & \text{,,} & 1 \\
\Delta_1 = + 26{,}52 - 286{,}43\xi + 166{,}55\eta & \text{,,} & -\frac{1}{5}.
\end{array}$$

welches für sich die Normalgleichungen (10), abgesehen von ζ', ergeben würde. Wäre nun noch ein Satz $1 \cdot 4 \cdot 5$ gemessen mit Gew. 1, so gäbe das, abgesehen von den numerischen Gliedern:

---

*) In weiteren Kreisen ist Schreibers Methode zuerst bekannt geworden durch das Werk: Jordan und Steppes. Das deutsche Vermessungswesen. 1882. Bd. I. Höhere Geodäsie und Topographie des deutschen Reiches v. W. Jordan; S. 157 u. f.

Vergl. auch L. Krüger. Über reduzierte Fehlergleichungen. (Ztschr. f. Vermessungswesen 1899, S. 396).

$$\lambda_1'' = \cdots + 44{,}71\,\xi - 77{,}84\,\eta \quad \text{Gew. } 1$$
$$\lambda_4'' = \cdots - 34{,}63\,\xi - 29{,}65\,\eta \quad ,, \quad 1$$
$$\lambda_5'' = \cdots - 31{,}01\,\xi - 99{,}31\,\eta \quad ,, \quad 1$$
$$\Delta_2 = \cdots - 20{,}93\,\xi - 206{,}80\,\eta \quad ,, \quad -\frac{1}{3}.$$

Bei der Bildung der Normalgleichungen aus beiden reduzierten Systemen von Fehlergleichungen hat man nun teilweise dieselben Koeffizienten der Fehlergleichungen; man kann dann z. B. die zwei Gleichungen für λ_1' und λ_1'' leicht zu einer einzigen mit dem Gew. 2 vereinigen, usw.

In Fällen, wo verwickelte Messungen auf der Station vorliegen, kann man diese zunächst ausgleichen und dann nach Anleitung von Kap. 8, § 6, IV verfahren.

Viertes Kapitel.

Korrelatenausgleichung.

§ 1. Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

I. Reduktion der Aufgabe auf die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen. Bereits auf S. 51 ist die allgemeine Form, unter der sich die Aufgabe darstellen läßt, angegeben worden. Mit Beibehaltung der daselbst eingeführten Bezeichnungen haben wir die plausibelsten Verbesserungen λ der n Beobachtungswerte l so zu bestimmen, daß die σ Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} 0 &= w_1 + p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + p_3\lambda_3 + \cdots + p_n\lambda_n \\ 0 &= w_2 + q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 + \cdots + q_n\lambda_n \\ 0 &= w_3 + r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + r_3\lambda_3 + \cdots + r_n\lambda_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

erfüllt werden, wobei nach (6), S. 50, die w durch die folgenden Ausdrücke gegeben sind:

$$(1^*)\qquad \begin{aligned} w_1 &= p_0 + p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + \cdots p_n l_n \\ w_2 &= q_0 + q_1 l_1 + q_2 l_2 + q_3 l_3 + \cdots q_n l_n \\ w_3 &= r_0 + r_1 l_1 + r_2 l_2 + r_3 l_3 + \cdots r_n l_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

Es wird manchmal vorteilhaft sein, die Aufgabe auf vermittelnde Beobachtungen zurückzuführen, was in praktischen Fällen wohl immer so geschehen wird, daß man mit Hilfe der Gleichungen (1) σ beliebige λ durch die $(n-\sigma)$ übrigen ausdrückt, z. B. bei $n=5$, $\sigma=3$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ durch λ_4 und λ_5. Bezeichnen wir diese $(n-\sigma)$ Verbessungen λ durch $x, y, \ldots$, so wird erhalten:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -\delta_1 + a_1 x + b_1 y + \cdots \\ \lambda_2 &= -\delta_2 + a_2 x + b_2 y + \cdots \\ \lambda_3 &= -\delta_3 + a_3 x + b_3 y + \cdots \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{Anzahl der Unbek.} \\ &\qquad (n-\sigma), \end{aligned}$$
$$\text{Anzahl } \sigma,$$

wobei $a, b, \ldots$ von den $p, q, r, \ldots$ abhängige Koeffizienten, die δ aber Funktionen der u sind. Die Gleichungen (2) haben die Form von Fehlergleichungen. Es treten zu denselben noch $n - \sigma$ weitere Gleichungen, nämlich:

$$(2^*)\qquad \begin{aligned} \lambda_4 &= \;\cdot\; + x \;\cdot \\ \lambda_5 &= \;\cdot\;\;\cdot\; + y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{Anzahl der Unbek.} \\ &\qquad (n-\sigma). \end{aligned}$$
$$\text{Anzahl } (n-\sigma)$$

Stellt man die Systeme (2) und (2*) zusammen, so erhält man ein System von n Fehlergleichungen mit $(n - \sigma)$ Unbekannten, dessen Ausgleichung in bekannter Weise erfolgen kann.

Beispiel. Grundlinienausgleichung in der westlichen Hälfte der Dreieckskette der Europäischen Längengradmessung in 52° Breite.*) Es sind dabei neun Grundlinien vorhanden. Wird eine Grundlinie durch Triangulation mit zwei oder drei anderen benachbarten verglichen, so ist außer der Grundlinie noch ein Netzteil den Vergleichungen gemeinsam, der im wesentlichen meistens durch das Vergrößerungsnetz gegeben ist. Verstehen wir dementsprechend unter s_i die Länge einer Hauptdreiecksseite, von wo aus nun wesentlich voneinander unabhängige Dreiecksketten nach anderen Grundlinien laufen, unter s_h die Länge der aus einer anderen Grundlinie abgeleiteten Hauptdreiecksseite, so kann man nun die Differenz $(\log s_i - \log s_h)$ bilden erstens aus den Ableitungen der Grundlinien, zweitens aus den zwischen ihnen befindlichen Dreiecken. Den Unterschied beider logarithmischen Differenzen kann man demgemäß in drei Teile σ_i, σ_h und r_h zerlegen, deren mittlere Fehlerquadrate geschätzt wurden.

*) Die Europäische Längengradmessung in 52° Br. von Greenwich bis Warschau. I. Heft. (Veröffentlichung des Königl. Preuß. Geodätischen Instituts u. Zentralbureaus der Internationalen Erdmessung.) Berlin 1893, S. 241 u. f.

So ergaben sich folgende acht Bedingungsgleichungen für Einheiten der siebenten Dezimalstelle:

$$
(1)\qquad
\begin{array}{rl}
g_v = 3 & v_1 - 12 = -\sigma_1 + \sigma_2 \\
6 & v_2 + 32 = -\sigma_2 + \sigma_3 \\
6 & v_3 + 38 = -\sigma_3 + \sigma_4 \\
6 & v_4 - 12 = -\sigma_4 + \sigma_5 \\
6 & v_5 - 13 = -\sigma_5 + \sigma_6 \\
6 & v_6 + 23 = -\sigma_6 + \sigma_7 \\
6 & v_7 - 17 = -\sigma_6 + \sigma_8 \\
2 & v_8 - 23 = -\sigma_8 + \sigma_9
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & g_\sigma \\
\sigma_1 & 3 \\
\sigma_2 & 3 \\
\sigma_3 & 3 \\
\sigma_4 & 3 \\
\sigma_5 & 6 \\
\sigma_6 & 6 \\
\sigma_7 & 3 \\
\sigma_8 & 4 \\
\sigma_9 & 3
\end{array}
$$

Nach bedingten Beobachtungen würden sich acht Normalgleichungen ergeben, jedoch müßten erst 17 Korrelatengleichungen angeschrieben werden (siehe im folgenden). Betrachtet man aber die neun Größen σ als Unbekannte, so hat man zu vorstehenden acht Fehlergleichungen v sich nur noch die neun Fehlergleichungen

$$
(2)\qquad v_1{}' = \sigma_1, \quad v_2{}' = \sigma_2, \quad \ldots \quad v_9{}' = \sigma_9
$$

beigefügt zu denken, zu denen die oben angegebenen Gewichte gehören, und nun zu den 17 Fehlergleichungen die neun Normalgleichungen zu bilden. Es folgt:

$$
(3)\qquad
\begin{array}{rl}
6\sigma_1 - 3\sigma_2 & = +\ 36 \\
-3\sigma_1 + 12\sigma_2 - 6\sigma_3 & = -228 \\
-6\sigma_2 + 15\sigma_3 - 6\sigma_4 & = -\ 36 \\
-6\sigma_3 + 15\sigma_4 - 6\sigma_5 & = +300 \\
-6\sigma_4 + 18\sigma_5 - 6\sigma_6 & = +\ \ 6 \\
-6\sigma_5 + 24\sigma_6 - 6\sigma_7 - 6\sigma_8 & = -114 \\
-6\sigma_6 + 9\sigma_7 \quad\cdot & = +138 \\
-6\sigma_6 \quad\cdot\quad + 12\sigma_8 - 2\sigma_9 & = -\ 56 \\
-2\sigma_8 + 5\sigma_9 & = -\ 46.
\end{array}
$$

Die Auflösung dieser Normalgleichungen geschieht besser nicht vermittels des Gaußschen Algorithmus, sondern nach dem folgenden von L. Krüger mehrfach benutzten Verfahren (Astr. Nachr. Bd. 138, 1895, Nr. 3298).

Man multipliziere die neun Gleichungen (3) der Reihe nach mit $M_1, M_2, \ldots M_9$ und bestimme diese Größen so, daß

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
6\,M_1 &= 3\,M_2\\
-\,3\,M_1 + 12\,M_2 &= 6\,M_3\\
\cdot\qquad\cdot\qquad &\cdot\\
\cdot\qquad\cdot\qquad &\cdot\\
-\,6\,M_6 + 12\,M_8 &= 2\,M_9
\end{aligned}
$$

wird; ferner setze man

$$-\,2\,M_8 + 5\,M_9 = M_{10}.$$

Zur Kontrolle hat man auch durch Summierung

$$
\begin{aligned}
3(M_1 + M_2 + M_3 + M_4) + 6(M_5 + M_6)&\\
+\,3\,M_7 + 4\,M_8 + 3\,M_9 &= M_{10}.
\end{aligned}
$$

Das ist also dasselbe, als wenn man in (3) an Stelle der σ die M setzt und dabei die rechten Seiten der ersten acht Gleichungen gleich null, die rechte Seite der letzten Gleichung gleich M_{10} annimmt.

Erfüllen die M diese Bedingungen, so gibt aber die Addition sämtlicher mit den M multiplizierten Gleichungen (3):

$$(5)\qquad M_{10}\,\sigma_9 = +\,36\,M_1 - 228\,M_2 \cdots - 46\,M_9.$$

Für M_1 kann man einen willkürlichen Zahlwert annehmen, also z. B. 1: manchmal ist es praktisch, M_1 so zu wählen, daß alle M ganze Zahlen werden.

Setzt man

$$M_1 = 8,$$

so erhält man aus (4):

$$
\begin{gathered}
M_2 = 16,\; M_3 = 28,\; M_4 = 54,\; M_5 = 107,\; M_6 = 267,\\
M_7 = 178,\; M_8 = 783,\; M_9 = 3897,\; M_{10} = 17\,919.
\end{gathered}
$$

Damit gibt (5):

$$\sigma_9 = -\,\frac{216\,510}{17\,919} = -\,12{,}1.$$

Die übrigen σ ergeben sich jetzt durch allmähliche Elimination aus der letzten, vorletzten, usw. der Gleichungen (3). Es wird:

$$
(6)\qquad
\begin{array}{llll}
\sigma_1 = -\;\;4{,}6 & \sigma_6 = -\;\;1{,}0 & v_1 = -\;\;4{,}5 & v_5 = +\;\;4{,}6\\
\sigma_2 = -\,21{,}1 & \sigma_7 = +\,14{,}7 & v_2 = -\,12{,}9 & v_6 = -\;\;7{,}3\\
\sigma_3 = -\;\;2{,}0 & \sigma_8 = -\;\;7{,}2 & v_3 = -\,13{,}8 & v_7 = +\,10{,}8\\
\sigma_4 = +\,22{,}2 & \sigma_9 = -\,12{,}1; & v_4 = -\;\;2{,}8 & v_8 = +\,18{,}2.\\
\sigma_5 = +\;\;7{,}4 & & &
\end{array}
$$

$\Sigma g_v v^2 + \Sigma g_\sigma v'^2 = 8577$: die Kontrollformel aus den l und den rechten Seiten der Normalgleichungen gibt 8565.

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist

$$(7) \qquad \sqrt{\frac{8577}{8}} = \pm 33.$$

Da die v und σ vor der Ausgleichung das Durchschnittsgewicht 4 haben, so ist ihr m. F. ± 16 näherungsweise. Nach erfolgter Ausgleichung erhöht sich das Gewicht der σ auf etwa 12 im Durchschnitt, was einem m. F. von ± 10 Einh. der siebenten Dezimalstelle oder von $\pm 0{,}0000010 : 0{,}4343 \cdots = \pm {}^1/_{434300}$ der Länge entspricht.

II. Direkte Auflösung. Nehmen wir den allgemeinen Fall verschiedener Genauigkeit in der Bestimmung der Beobachtungswerte, und seien demgemäß $g_1, g_2, g_3, \ldots$ die Gewichte der l oder λ; bezeichnen ferner $-2k_1, -2k_2, \ldots$ vorläufig unbekannte Hilfsgrößen, an Zahl so viele als Gleichungen (1) vorhanden sind, so wird $[\lambda\lambda g]$ ein Minimum unter Berücksichtigung der Gleichungen (1), wenn der Ausdruck*)

$$[\lambda\lambda g] - 2k_1(w_1 + [p\lambda]) - 2k_2(w_2 + [q\lambda]) - 2k_3(w_3 + [r\lambda]) - \cdots$$

ein Minimum wird, wobei jede der Größen λ als unabhängige Variable aufzufassen ist. Setzen wir die partiellen Differentialquotienten dieses Ausdrucks daher einzeln gleich null, so ergeben sich die n Gleichungen des Minimums:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \lambda_1 g_1 &= k_1 p_1 + k_2 q_1 + k_3 r_1 + \cdots \\ \lambda_2 g_2 &= k_1 p_2 + k_2 q_2 + k_3 r_2 + \cdots \\ \lambda_3 g_3 &= k_1 p_3 + k_2 q_3 + k_3 r_3 + \cdots \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_n g_n &= k_1 p_n + k_2 q_n + k_3 r_n + \cdots, \end{aligned} \qquad \text{Anzahl der } k = \sigma$$

welche die Verbesserungen λ durch die Hilfsgrößen k ausdrücken. Letztere nennt man Korrelaten und die Gleichungen (3) Korrelatengleichungen.

Substituiert man die Werte der λ in den Gleichungen (1), so ergeben sich zur Bestimmung der σ Korrelaten k nunmehr σ Gleichungen, die sogenannten Normalgleichungen:

---

*) Vergl. die Fußnote S. 113.

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
\left[\frac{pp}{g}\right]k_1 + \left[\frac{pq}{g}\right]k_2 + \left[\frac{pr}{g}\right]k_3 + \cdots + w_1 &= 0\\
\left[\frac{pq}{g}\right]k_1 + \left[\frac{qq}{g}\right]k_2 + \left[\frac{qr}{g}\right]k_3 + \cdots + w_2 &= 0\\
\left[\frac{pr}{g}\right]k_1 + \left[\frac{qr}{g}\right]k_2 + \left[\frac{rr}{g}\right]k_3 + \cdots + w_3 &= 0\\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad &\cdot
\end{aligned}
$$

oder abgekürzt:

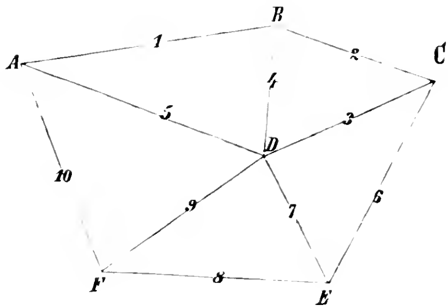
$$
(4^*)\qquad
\begin{aligned}
(pp)k_1 + (pq)k_2 + (pr)k_3 + \cdots + w_1 &= 0\\
(pq)k_1 + (qq)k_2 + (qr)k_3 + \cdots + w_2 &= 0\\
(pr)k_1 + (qr)k_2 + (rr)k_3 + \cdots + w_3 &= 0\\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad &\cdot
\end{aligned}
$$

Diese Normalgleichungen mit σ Unbekannten haben ganz die Form der Normalgleichungen bei vermittelnden Beobachtungen; man bildet die Koeffizienten der Unbekannten aus den Korrelatengleichungen (3), die man zuvor durch Division mit g auf λ reduziert hat, genau so wie bei den Normalgleichungen vermittelnder Beobachtungen mittels der Fehlergleichungen. Bemerkenswert ist immerhin der Unterschied, daß in den (aa), (ab) usw. bei vermittelnden Beobachtungen g als Faktor erscheint, während in (pp), (pq) usw. jetzt g Divisor ist. Auch über die Widersprüche w geben die Korrelatengleichungen nichts an

Die Auflösung von (4*) kann nach irgend einer der angegebenen Methoden für die Auflösung der Normalgleichungen vermittelnder Beobachtungen erfolgen. Zur Kontrolle dient dabei ebenfalls die Summennormalgleichung oder die Bildung von Quersummen.

Beispiel. Die Ausgleichung der Nivellementsnetze. Es seien nivelliert worden die Höhenunterschiede:

$\binom{B}{A} = l_1$	m. d. mittl. Fehler μ_1	$\binom{E}{C} = l_6$	m. d. mittl. Fehler μ_6
$\binom{C}{B} = l_2$	" " " " μ_2	$\binom{E}{D} = l_7$	" " " " μ_7
$\binom{D}{C} = l_3$	" " " " μ_3	$\binom{F}{E} = l_8$	" " " " μ_8
$\binom{D}{B} = l_4$	" " " " μ_4	$\binom{F}{D} = l_9$	" " " " μ_9
$\binom{D}{A} = l_5$	" " " " μ_5	$\binom{F}{A} = l_{10}$	" " " " μ_{10}.



Nebenstehende schematische Figur gibt eine Übersicht hierzu.

Diese Höhenunterschiede müssen fünf Bedingungsgleichungen erfüllen, denn um die Höhen der fünf Punkte $BCDEF$ über A festzustellen, reichen schon fünf Höhenunterschiede l aus, es sind daher fünf andere überschüssig. Die einfachsten Formen der fünf Gleichungen werden erhalten aus den Dreiecken ABD, BDC usw.:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
l_1 + l_4 - l_5 &= 0 \\
l_2 + l_3 - l_4 &= 0 \\
l_3 + l_7 - l_6 &= 0 \\
l_7 + l_8 - l_9 &= 0 \\
l_9 + l_5 - l_{10} &= 0.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen werden aber von den l nicht erfüllt, sondern es ergeben sich anstatt null Widersprüche $w_1, w_2, \ldots$. Bezeichnen wir die Verbesserungen der l mit λ, so hat man für diese λ die fünf Bedingungsgleichungen:

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_4 - \lambda_5 + w_1 &= 0 \\
\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 + w_2 &= 0 \\
\lambda_3 + \lambda_7 - \lambda_6 + w_3 &= 0 \\
\lambda_7 + \lambda_8 - \lambda_9 + w_4 &= 0 \\
\lambda_9 + \lambda_5 - \lambda_{10} + w_5 &= 0.
\end{aligned}
$$

Hieraus sind die λ zu bestimmen durch Bildung der zehn Korrelatengleichungen und der fünf Normalgleichungen.

Um nach vermittelnden Beobachtungen auszugleichen, beziehen wir die sechs Punkte $A \ldots F$ auf einen vorläufig unbestimmten Horizont; die Höhen seien $x_1 \ldots x_6$. Alsdann sind die Fehlergleichungen:

$$
(3) \qquad
\begin{array}{lllllllll}
\lambda_1 & = -l_1 & -x_1 & +x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\lambda_2 & = -l_2 & \cdot & -x_2 & +x_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\lambda_3 & = -l_3 & \cdot & \cdot & -x_3 & +x_4 & \cdot & \cdot \\
\lambda_4 & = -l_4 & \cdot & -x_2 & \cdot & +x_4 & \cdot & \cdot \\
\lambda_5 & = -l_5 & -x_1 & \cdot & \cdot & +x_4 & \cdot & \cdot \\
\lambda_6 & = -l_6 & \cdot & \cdot & -x_3 & \cdot & +x_5 & \cdot \\
\lambda_7 & = -l_7 & \cdot & \cdot & \cdot & -x_4 & +x_5 & \cdot \\
\lambda_8 & = -l_8 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -x_5 & +x_6 \\
\lambda_9 & = -l_9 & \cdot & \cdot & \cdot & -x_4 & \cdot & +x_6 \\
\lambda_{10} & = -l_{10} & -x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +x_6 .
\end{array}
$$

Man bemerkt leicht, daß die Summe der Normalgleichungen identisch zu null werden muß. Bei direkter Auflösung muß man dann für eines der x einen Wert einführen und seine Normalgleichung weglassen (bzw. als Summenkontrolle mitführen).

Hat man N Linien und P Knotenpunkte, so ist die Anzahl der Normalgleichungen bei bedingter Ausgleichung gleich $N - P + 1$, bei vermittelnder $P - 1$; meist wird der Unterschied nicht groß sein. Die Gewichtsberechnung der Endwerte ist aber bei vermittelnder Ausgleichung am bequemsten.

Die mittlern Fehlerquadrate setzt man in der Regel proportional den Streckenlängen, was allerdings nur eine ziemlich rohe Annäherung ist. Im einzelnen wechselt die Genauigkeit jedenfalls sehr; aber für längere Linien, die auf gleiche Art nivelliert werden, wird die Annahme brauchbar sein, vorausgesetzt, daß die Lattenlängeneinheit namentlich im gebirgigen Gelände genügend oft bestimmt wird (vergl. auch im 5. Kap. § 4, III).

Alle Punkte, die nicht wie die Knotenpunkte mit wenigstens drei anderen verbunden sind, können aus der Hauptausgleichung ausgeschlossen werden. Zur nachträglichen Ausgleichung werden die Verbesserungen der Höhenunterschiede der Knotenpunkte proportional den Nivellementsstrecken verteilt.

Nehmen wir beispielsweise auf AB zwei Zwischenpunkte an, welche l_1 in l_1', l_1'', l_1''' zerlegen:

$$
(4) \qquad l_1 = l_1' + l_1'' + l_1''',
$$

und gehören zu diesen die mittlern Fehler $\mu_1', \mu_1'', \mu_1'''$, wofür die Beziehung bestehen muß:

$$
(5) \qquad \mu_1^2 = \mu_1'^2 + \mu_1''^2 + \mu_1'''^2;
$$

sind endlich g_1, g_1', g_1'', g_1''' die entsprechenden Gewichte, also

$$\frac{1}{g_1} = \frac{1}{g_1'} + \frac{1}{g_1''} + \frac{1}{g_1'''}, \tag{5*}$$

und denken wir uns nach bedingten Beobachtungen ausgeglichen, so tritt an Stelle der ersten Gleichung (2) die Gleichung

$$\lambda_1' + \lambda_1'' + \lambda_1''' + \lambda_4 - \lambda_5 + w_1 = 0,$$

woraus man findet, daß

$$\lambda_1' g_1' = \lambda_1'' g_1'' = \lambda_1''' g_1''' \tag{6}$$

sein muß, weil $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ immer nur zusammen vorkommen. Nun ist aber wegen (4)

$$\lambda_1' + \lambda_1'' + \lambda_1''' = \lambda_1 \tag{7}$$

und λ_1 bereits bekannt; berücksichtigt man (5*), so folgt aus (6), daß auch

$$\lambda_1 g_1 = \lambda_1' g_1' = \lambda_1'' g_1'' = \lambda_1''' g_1'''.$$

womit die gegebene Verteilungsregel bewiesen ist.

III. Mittlerer Fehler einer Funktion der ausgeglichenen Beobachtungswerte. Setzt man die Analogie mit vermittelnden Beobachtungen weiter fort und bildet die den Gleichungen (4) entsprechenden Gewichtsgleichungssysteme, so erhält man in den Q mit quadratischen Indices, wie leicht zu zeigen ist, die reziproken Gewichte in der Bestimmung der k.

Allein es interessieren die k und ihre Gewichte selbst nicht. Dagegen entsteht die Frage nach dem Gewichte einer Funktion der ausgeglichenen Beobachtungsgrößen.

Substituieren wir in einer Funktion F der Beobachtungsgrößen deren unausgeglichene Werte $l_1, l_2, l_3, \ldots$, also voneinander unabhängige Größen, und setzen für die partiellen Differentialquotienten von F nach l:

$$\frac{\partial F}{\partial l_1} = f_1, \quad \frac{\partial F}{\partial l_2} = f_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial l_n} = f_n, \tag{5}$$

so wird das Quadrat des mittlern Fehlers in F:

$$\mu_F^2 = \mu^2 \left(\frac{f_1^2}{g_1} + \frac{f_2^2}{g_2} + \cdots + \frac{f_n^2}{g_n} \right)$$

oder kurz

$$\mu_F^2 = \mu^2 \left[\frac{ff}{g}\right] = \mu^2 (ff). \tag{5*}$$

worin μ den mittlern Fehler für eine Beobachtung vom Gewicht 1 bedeutet.

Setzen wir aber die ausgeglichenen Beobachtungswerte $l_1 + \lambda_1, l_2 + \lambda_2, \ldots l_n + \lambda_n$ in die Funktion ein, so ist zu bedenken, daß die Werte der λ abhängig voneinander und selbst Funktionen der l sind. Es wird daher für die totalen Änderungen von F nach den l, wenn man beachtet, daß $\frac{\partial F}{\partial \lambda_h} = \frac{\partial F}{\partial l_h} = f_h$:

$$\frac{dF}{dl_i} = f_i + f_1 \frac{d\lambda_1}{dl_i} + f_2 \frac{d\lambda_2}{dl_i} + \cdots + f_n \frac{d\lambda_n}{dl_i};$$

$$i = 1 \ldots n$$

damit ist nun zu bilden:

$$\mu_F^2 = \mu^2 \left[\frac{1}{g}\left(\frac{dF}{dl}\right)^2\right]. \tag{6}$$

Die entstehende Formel ist noch beträchtlicher Vereinfachung fähig. Zunächst hat man aus den Korrelatengleichungen (3) für irgend eines der l_i ($\sigma = 3$ gesetzt):

$$\frac{d\lambda_1}{dl_i} = \frac{p_1}{g_1}\frac{\partial k_1}{\partial l_i} + \frac{q_1}{g_1}\frac{\partial k_2}{\partial l_i} + \frac{r_1}{g_1}\frac{\partial k_3}{\partial l_i}$$

$$\frac{d\lambda_2}{dl_i} = \frac{p_2}{g_2}\frac{\partial k_1}{\partial l_i} + \frac{q_2}{g_2}\frac{\partial k_2}{\partial l_i} + \frac{r_2}{g_2}\frac{\partial k_3}{\partial l_i}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d\lambda_n}{dl_i} = \frac{p_n}{g_n}\frac{\partial k_1}{\partial l_i} + \frac{q_n}{g_n}\frac{\partial k_2}{\partial l_i} + \frac{r_n}{g_n}\frac{\partial k_3}{\partial l_i}.$$

Also wird

$$\frac{dF}{dl_i} = f_i + \left[\frac{pf}{g}\right]\frac{\partial k_1}{\partial l_i} + \left[\frac{qf}{g}\right]\frac{\partial k_2}{\partial l_i} + \left[\frac{rf}{g}\right]\frac{\partial k_3}{\partial l_i} \tag{7}$$

oder

$$\frac{dF}{dl_i} = f_i + (pf)\frac{\partial k_1}{\partial l_i} + (qf)\frac{\partial k_2}{\partial l_i} + (rf)\frac{\partial k_3}{\partial l_i}. \tag{7*}$$

Um die Differentialquotienten der k nach den l zu berechnen, müssen wir die k durch die l darstellen.

Berechnet man nun (analog wie bei vermittelnden Beobachtungen) ein System von Hilfsgrößen Q nach den Gleichungen:

$$(8)\quad \begin{aligned} (pp)Q_{1.1} + (pq)Q_{1.2} + (pr)Q_{1.3} &= 1 \\ (pq)Q_{1.1} + (qq)Q_{1.2} + (qr)Q_{1.3} &= 0 \\ (pr)Q_{1.1} + (qr)Q_{1.2} + (rr)Q_{1.3} &= 0 \end{aligned}$$

$$(9)\quad \begin{aligned} (pp)Q_{1.2} + (pq)Q_{2.2} + (pr)Q_{2.3} &= 0 \\ (pq)Q_{1.2} + (qq)Q_{2.2} + (qr)Q_{2.3} &= 1 \\ (pr)Q_{1.2} + (qr)Q_{2.2} + (rr)Q_{2.3} &= 0 \end{aligned}$$

$$(10)\quad \begin{aligned} (pp)Q_{1.3} + (pq)Q_{2.3} + (pr)Q_{3.3} &= 0 \\ (pq)Q_{1.3} + (qq)Q_{2.3} + (qr)Q_{3.3} &= 0 \\ (pr)Q_{1.3} + (qr)Q_{2.3} + (rr)Q_{3.3} &= 1\,; \end{aligned}$$

so wird aus (4*), S. 233, erhalten:

$$(11)\quad \begin{aligned} k_1 + w_1 Q_{1.1} + w_2 Q_{1.2} + w_3 Q_{1.3} &= 0 \\ k_2 + w_1 Q_{1.2} + w_2 Q_{2.2} + w_3 Q_{2.3} &= 0 \\ k_3 + w_1 Q_{1.3} + w_2 Q_{2.3} + w_3 Q_{3.3} &= 0\,. \end{aligned}$$

Es ist daher

$$(11^*)\quad \begin{aligned} \frac{\partial k_1}{\partial l_i} &= -\left(\frac{\partial w_1}{\partial l_i} Q_{1.1} + \frac{\partial w_2}{\partial l_i} Q_{1.2} + \frac{\partial w_3}{\partial l_i} Q_{1.3}\right) \\ \frac{\partial k_2}{\partial l_i} &= -\left(\frac{\partial w_1}{\partial l_i} Q_{1.2} + \frac{\partial w_2}{\partial l_i} Q_{2.2} + \frac{\partial w_3}{\partial l_i} Q_{2.3}\right) \\ \frac{\partial k_3}{\partial l_i} &= -\left(\frac{\partial w_1}{\partial l_i} Q_{1.3} + \frac{\partial w_2}{\partial l_i} Q_{2.3} + \frac{\partial w_3}{\partial l_i} Q_{3.3}\right). \end{aligned}$$

Nach (1*), S. 228, ist aber

$$(12)\quad \frac{\partial w_1}{\partial l_i} = +p_i, \quad \frac{\partial w_2}{\partial l_i} = +q_i, \quad \frac{\partial w_3}{\partial l_i} = +r_i.$$

Mithin ist

$$(13)\quad \begin{aligned} \frac{\partial k_1}{\partial l_i} &= -(p_i Q_{1.1} + q_i Q_{1.2} + r_i Q_{1.3}) \\ \frac{\partial k_2}{\partial l_i} &= -(p_i Q_{1.2} + q_i Q_{2.2} + r_i Q_{2.3}) \\ \frac{\partial k_3}{\partial l_i} &= -(p_i Q_{1.3} + q_i Q_{2.3} + r_i Q_{3.3})\,. \end{aligned}$$

Wenn man diese Ausdrücke in (7*) einsetzt, folgt

$$(14)\quad \frac{\partial F}{\partial l_i} = f_i - p_i L_1 - q_i L_2 - r_i L_3,$$

worin gesetzt ist:

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
(pf)\,Q_{1\cdot 1} + (qf)\,Q_{1\cdot 2} + (rf)\,Q_{1\cdot 3} &= L_1\\
(pf)\,Q_{1\cdot 2} + (qf)\,Q_{2\cdot 2} + (rf)\,Q_{2\cdot 3} &= L_2\\
(pf)\,Q_{1\cdot 3} + (qf)\,Q_{2\cdot 3} + (rf)\,Q_{3\cdot 3} &= L_3.
\end{aligned}
$$

Die Umkehrung dieses Gleichungssystems mittels (8) bis (10) gibt:

$$
(15^*)\qquad
\begin{aligned}
(pp)L_1 + (pq)L_2 + (pr)L_3 &= (pf)\\
(pq)L_1 + (qq)L_2 + (qr)L_2 &= (qf)\\
(pr)L_1 + (qr)L_2 + (rr)L_3 &= (rf).
\end{aligned}
$$

Hierzu gehören die nach dem Gaußschen Algorithmus reduzierten Gleichungen:

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
(pp)L_1 + \quad (pq)L_2 + \quad & (pr)L_3 = (pf)\\
(qq\cdot 1)L_2 + & (qr\cdot 1)L_3 = (qf\cdot 1)\\
& (rr\cdot 2)L_3 = (rf\,.\,2).
\end{aligned}
$$

Aus (14) folgt mit Rücksicht auf (15*) zunächst:

$$\left[\frac{dF}{dl}\,\frac{p}{g}\right] = 0 = \left[\frac{dF}{dl}\,\frac{q}{g}\right] = \left[\frac{dF}{dl}\,\frac{r}{g}\right]$$

und damit weiter aus (14):

$$\left[\frac{dF}{dl}\,\frac{dF}{dl}\,\frac{1}{g}\right] = \left[\frac{dF}{dl}\,\frac{f}{g}\right] = \left[\frac{ff}{g}\right] - \left[\frac{pf}{g}\right]L_1 - \left[\frac{qf}{g}\right]L_2 - \left[\frac{rf}{g}\right]L_3.$$

Mithin wird nach (6):

$$(17)\qquad \mu_F^2 = \mu^2\{(ff) - ((pf)L_1 + (qf)L_2 + (rf)L_3)\}.$$

Eliminiert man aus dem zweiten Teile rechter Hand die L mittels (16), so wird endlich:

$$(18)\qquad \mu_F^2 = \mu^2\left\{(ff) - \left(\frac{(pf)^2}{(pp)} + \frac{(qf\cdot 1)^2}{(qq\cdot 1)} + \frac{(rf\cdot 2)^2}{(rr\cdot 2)}\right)\right\}$$

oder abgekürzt in leicht zu ersehender Beziehung:

$$(18^*)\qquad \mu_F^2 = \mu^2\{\mathrm{I} - \mathrm{II}\}.$$

Will man den mittlern Fehler einer ausgeglichenen Beobachtungsgröße, z. B. von $l_i + \lambda_i$, berechnen, so ist zu setzen:

$$f_i = 1\,, \quad \text{die andern } f = 0\,;$$

weiterhin ist wie im allgemeinen zu verfahren.

IV. Theorien von C. F. Gauß und T. N. Thiele. Gauß ging bei der Herleitung der Formeln für die Ausgleichung bedingter Beobachtungen von dem Gedanken aus, eine Funktion $F(l_1, l_2, \ldots l_n)$ der Beobachtungen mittels der Bedingungsgleichungen so umzuformen, daß ihr mittleres Fehlerquadrat ein Minimum werde. Thiele trennt von der gegebenen Funktion einen Teil ab, der von den Bedingungsgleichungen abhängt und zu dem Rest eine „freie“ Funktion bildet. Dieser Rest, der sich in eindeutiger Weise ergibt, ist dann der naturgemäße Beobachtungswert für den gesuchten Funktionswert.

Wir können beide Ableitungen, die auch zur Methode der kleinsten Quadrate führen, zusammenfassen.

Sind ε_i die wahren Verbesserungen der Beobachtungswerte l_i, $i = 1 \ldots n$, so ist der wahre Wert der Funktion:

$$F = F_0 + [f\varepsilon], \tag{19}$$

wo F_0 den mit den Beobachtungen berechneten Zahlwert bezeichnet und $f_i = \frac{\partial F}{\partial l_i}$ ist.

In gleicher Weise können wir uns die σ Bedingungsgleichungen, deren wir hier drei hinschreiben, umgeformt denken:

$$w_1 + [p\varepsilon] = 0, \quad w_2 + [q\varepsilon] = 0, \quad w_3 + [r\varepsilon] = 0. \tag{20}$$

Mit Hilfe der $\sigma = 3$ Multiplikatoren L_1, L_2, L_3 zerlegen wir nun F wie folgt:

$$\begin{aligned} F = F_0 + [f\varepsilon] &= F_0' + [f''\varepsilon] \\ &+ \{L_1(w_1 + [p\varepsilon]) + L_2(w_2 + [q\varepsilon]) + L_3(w_3 + [r\varepsilon])\}, \end{aligned} \tag{21}$$

wobei nun F_0' der günstigste Funktionswert sein soll.

Um relative Freiheit des ersten Teiles rechter Hand zu jedem der durch die (20) gegebenen Bestandteile der geschlungenen Parenthese zu haben, nehmen wir die L so an, vergl. S. 220, daß mit Berücksichtigung der Gewichte:

$$\left[\frac{f''p}{g}\right] = 0, \quad \left[\frac{f''q}{g}\right] = 0, \quad \left[\frac{f''r}{g}\right] = 0 \tag{22}$$

wird. Die Annahme $F_0' + w_1 L_1 + w_2 L_2 + w_3 L_3$ für F hat dann die wahre Verbesserung

$$[f''\varepsilon] + [p\varepsilon]L_1 + [q\varepsilon]L_2 + [r\varepsilon]L_3$$

und das mittlere Fehlerquadrat:

$$(23)\qquad \mu^2\left\{\left[\frac{f'f'}{g}\right]+\left[\frac{(pL_1+qL_2+rL_3)^2}{g}\right]\right\},$$

gerade so, als wären F_0' und $(w_1L_1+w_2L_2+w_3L_3)$ voneinander unabhängige direkte Beobachtungen.

Nach (21) ist nun:

$$(24)\qquad f_i=f_i'+\{p_iL_1+q_iL_2+r_iL_3\};$$

hiermit geben die Gleichungen (22) zur Bestimmung von L_1, L_2, L_3:

$$(25)\qquad \begin{aligned}(pp)L_1+(pq)L_2+(pr)L_3&=(pf)\\(pq)L_1+(qq)L_2+(qr)L_3&=(qf)\\(pr)L_1+(qr)L_2+(rr)L_3&=(rf).\end{aligned}$$

Sind hieraus die L abgeleitet, so folgt aus (24):

$$(26)\qquad f_i'=f_i-\{p_iL_1+q_iL_2+r_iL_3\}$$
$$i=1\ldots n$$

und aus (21):

$$(26^*)\qquad F_0'=F_0-\{w_1L_1+w_2L_2+w_3L_3\}.$$

Da aber in (21) rechter Hand nunmehr die beiden Funktionen der Beobachtungen l_i, nämlich F_0' und $(w_1L_1+w_2L_2+w_3L_3)$ wie unabhängige direkte Beobachtungen anzusehen sind, der theoretische Wert des zweiten Teiles aber null ist, so bleibt

$$(27)\qquad F=F_0'+[f'\varepsilon]$$

als naturgemäße Annahme für F, d. h. man hat zu setzen $F=F_0'$ aus (26*), mit dem Fehler $[f'\varepsilon]$, dessen mittleres Quadrat gleich $\mu^2\left[\frac{f'f'}{g}\right]$ ist.

Wie (23) zeigt, ist die Annahme $F=F_0'$ zugleich diejenige, die das kleinste Fehlerquadrat gibt, denn alle möglichen Annahmen für F sind, abgesehen von seinem Fehler, in dem Ausdrucke

$$F_0'+w_1L_1+w_2L_2+w_3L_3$$

enthalten, wenn die L ganz beliebig genommen werden. Das zugehörige mittlere Fehlerquadrat ist immer durch (23) gegeben, welcher Ausdruck für $L_1=L_2=L_3=0$ am kleinsten ist.

Um direkt zu zeigen, daß F_0' der Funktionswert ist, welchen die Methode der kleinsten Quadrate gibt, kann man wie folgt vorgehen. Für irgend eine Ausgleichung müssen die Verbesserungen λ_i der l_i den Gleichungen

$$(28) \qquad w_1 + [p\lambda] = 0, \qquad w_2 + [q\lambda] = 0, \qquad w_3 + [r\lambda] = 0$$

genügen. Aus (26) ergibt sich hiermit:

$$(29) \qquad [f'\lambda] = [f\lambda] + \{w_1 L_1 + w_2 L_2 + w_3 L_3\},$$

also nach (26*):

$$(29^*) \qquad F_0' + [f'\lambda] = F_0 + [f\lambda].$$

Da aber der Ausgleichungswert $F_0 + [f\lambda]$ mit dem günstigsten Wert F_0' übereinstimmen muß, so folgt

$$(30) \qquad [f'\lambda] = 0,$$

d. i. nach (29):

$$(31) \qquad [f\lambda] = -(w_1 L_1 + w_2 L_2 + w_3 L_3).$$

Die L sind aber Funktionen der f; man kann nach (25) dafür ansetzen:

$$(32) \qquad \begin{aligned} L_1 &= (pf)\,Q_{1\cdot1} + (qf)\,Q_{1\cdot2} + (rf)\,Q_{1\cdot3} \\ L_2 &= (pf)\,Q_{1\cdot2} + (qf)\,Q_{2\cdot2} + (rf)\,Q_{2\cdot3} \\ L_3 &= (pf)\,Q_{1\cdot3} + (qf)\,Q_{2\cdot3} + (rf)\,Q_{3\cdot3}. \end{aligned}$$

Setzt man dies in (31) ein, so ergibt sich eine Gleichung, in welcher jedes Glied eines der f enthält. Faßt man die Glieder mit demselben f_i zusammen und setzt dessen Faktor gleich null, so folgt allgemein:

$$(33) \qquad \begin{aligned} \lambda_i g_i = &- p_i(w_1 Q_{1\cdot1} + w_2 Q_{1\cdot2} + w_3 Q_{1\cdot3}) \\ &- q_i(w_1 Q_{1\cdot2} + w_2 Q_{2\cdot2} + w_3 Q_{2\cdot3}) \\ &- r_i(w_1 Q_{1\cdot3} + w_2 Q_{2\cdot3} + w_3 Q_{3\cdot3}). \end{aligned}$$

Hierdurch werden die λ_i so bestimmt, daß die besondere Funktion F nicht in Betracht kommt.

Es ist also

$$(34) \qquad \lambda_i g_i = p_i k_1 + q_i k_2 + r_i k_3,$$

wenn k_1, k_2, k_3 aus den Gleichungen bestimmt werden:

$$(35) \qquad \begin{aligned} (pp)k_1 + (pq)k_2 + (pr)k_3 + w_1 &= 0 \\ (pq)k_1 + (qq)k_2 + (qr)k_3 + w_2 &= 0 \\ (pr)k_1 + (qr)k_2 + (rr)k_2 + w_3 &= 0. \end{aligned}$$

Das sind aber nach S. 233 die von der Methode der kleinsten Quadrate geforderten Verbesserungen λ_i. Diese Ausgleichung führt somit zu denselben Funktionswerten F_0' wie die Theorien von Gauß und Thiele.

Auch wird aus (34):

$$[f\lambda] = (pf)k_1 + (qf)k_2 + (rf)k_3\,,$$

womit man den Ausgleichungswert von F direkt aus F_0 zur Kontrolle berechnen kann, indem derselbe nach (29*) gleich $F_0 + [f\lambda]$ ist.

Übrigens geht die Übereinstimmung mit der M. d. kl. Qu. schon aus der Vergleichung von f_i' nach (26) und (25) mit $\frac{dF}{dl_i}$ nach (14) und (15), S. 238/239, hervor. Nach (27) ist auch f_i' der totale Differentialquotient von F_0' nach l_i. Die Ausgleichungswerte von F nach der M. d. kl. Qu. und von F_0' nach den Theorien von Gauß und Thiele hängen somit in gleicher Weise von den l ab.

V. Wahl des Ausgleichungsverfahrens. Wir sahen S. 228/229, daß die Ausgleichung bedingter Beobachtungen in die vermittelnder Beobachtungen umgesetzt werden kann. Ohne weiteres leuchtet auch das Umgekehrte ein. Da die Ergebnisse für die verbesserten Beobachtungen dieselben sein müssen, so wird man den bequemsten Rechnungsweg wählen; dabei ist hauptsächlich die Mühe der Auflösung der Normalgleichungen zu veranschlagen. Bei n Beobachtungen und σ Gleichungen zwischen denselben hat man nach der Methode der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen $(n - \sigma)$ Normalgleichungen, bei der direkten Ausgleichung bedingter Beobachtungen aber σ Normalgleichungen; man wird daher, abgesehen von anderen Gründen, nach vermittelnden oder bedingten Beobachtungen ausgleichen, je nachdem $n - \sigma \lesseqgtr \sigma$, d. i. $n \lesseqgtr 2\sigma$ ist.

Doch ist hierbei zu beachten, ob sich nicht bei der zwar größeren Anzahl Normalgleichungen einfachere und zahlreicher verschwindende Koeffizienten zeigen, und sie darum schließlich leichter als das minderzählige System aufzulösen sein würden.

Auch auf die Mühe der Gewichtsberechnung ist die Vergleichung beider Verfahren im speziellen Falle zu erstrecken.

Eine besondere Reduktionsrechnung aus einer Form der Aufgabe in die andere wird meistens überflüssig, indem man in der Regel jede Form gleich bequem wird darstellen können. Vergl. das Beispiel auf S. 233/235.

§ 2. Formelübersicht für die Ausgleichung bedingter Beobachtungen. Berechnung des mittlern Fehlers einer Beobachtung vom Gewicht 1. Nichtlineare Bedingungsgleichungen.

I. **Lineare Bedingungsgleichungen.** Setzt man für $\sigma = 3$ Bedingungsgleichungen und n Beobachtungen

$$
\begin{aligned}
w_1 &= p_0 + p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + \cdots + p_n l_n \\
w_2 &= q_0 + q_1 l_1 + q_2 l_2 + q_3 l_3 + \cdots + q_n l_n \\
w_3 &= r_0 + r_1 l_1 + r_2 l_2 + r_3 l_3 + \cdots + r_n l_n,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

so werden die Bedingungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 + p_3 \lambda_3 + \cdots + p_n \lambda_n + w_1 &= 0 \\
q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2 + q_3 \lambda_3 + \cdots + q_n \lambda_n + w_2 &= 0 \\
r_1 \lambda_1 + r_2 \lambda_2 + r_3 \lambda_3 + \cdots + r_n \lambda_n + w_3 &= 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

und die Korrelatengleichungen:

$$
\begin{array}{ll|l}
 & \lambda_1 g_1 = k_1 p_1 + k_2 q_1 + k_3 r_1 & s_1 = p_1 + q_1 + r_1 \\
 & \lambda_2 g_2 = k_1 p_2 + k_2 q_2 + k_3 r_2 & s_2 = p_2 + q_2 + r_2 \\
(3) & \lambda_3 g_3 = k_1 p_3 + k_2 q_3 + k_3 r_3 & s_3 = p_3 + q_3 + r_3 \\
 & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 & \lambda_n g_n = k_1 p_n + k_2 q_n + k_3 r_n & s_n = p_n + q_n + r_n;
\end{array}
$$

ferner die Normalgleichungen:

$$
\begin{aligned}
(pp)k_1 + (pq)k_2 + (pr)k_3 + w_1 &= 0 \\
(pq)k_1 + (qq)k_2 + (qr)k_3 + w_2 &= 0 \\
(pr)k_1 + (qr)k_2 + (rr)k_3 + w_3 &= 0 \\
\hline
(ps)k_1 + (qs)k_2 + (rs)k_3 + [w] &= 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

oder schematisch:

(4*)

k_1	k_2	k_3	Konst.	
(pp)	(pq)	(pr)	w_1	null
(pq)	(qq)	(qr)	w_2	
(pr)	(qr)	(rr)	w_3	
(ps)	(qs)	(rs)	$[w]$	

worin

$$(pp) = \frac{p_1 p_1}{g_1} + \frac{p_2 p_2}{g_2} + \frac{p_3 p_3}{g_3} + \cdots + \frac{p_n p_n}{g_n}$$

$$(pq) = \frac{p_1 q_1}{g_1} + \frac{p_2 q_2}{g_2} + \frac{p_3 q_3}{g_3} + \cdots + \frac{p_n q_n}{g_n}$$

usw.

Die Auflösung von (4) bzw. (4*) erfolgt wie die der Normalgleichungen bei vermittelnden Beobachtungen, vergl. § 7, S. 148 u. f.*)

Nach dem Gaußschen Algorithmus wird erhalten:

(4**)

k_1	k_2	k_3	Konst.	
(pp)	(pq)	(pr)	w_1	null
	$(qq \cdot 1)$	$(qr \cdot 1)$	$(w_2 \cdot 1)$	
		$(rr \cdot 2)$	$(w_3 \cdot 2)$	

II. Kontrolle durch doppelte Berechnung von $[\lambda\lambda g]$, einmal aus den einzeln berechneten λ, ein andermal nach der Formel:

$$[\lambda\lambda g] = -[wk]. \tag{5}$$

Diese Gleichung ergibt sich durch Multiplikation der Gl. (3) mit den einzelnen λ und Addition unter Berücksichtigung der Gleichungen (2).

Die Formel (5) gewährt eine nahezu vollständige Kontrolle der ganzen Rechnung von den Bedingungsgleichungen ab (vergl. S. 135/136).

---

*) Bei indirekter Auflösung wird es manchmal nützlich sein, eine Hilfsgröße u einzuführen und zu setzen

$$k_i = k_i' - u.$$

In den Normalgleichungen werden dann (ps), (qs), (rs), (ss) die Koeffizienten von u.

Eliminiert man die k aus $[wk]$ nacheinander mittels der reduzierten Gleichungen (4**), so folgt:

$$(5^*) \qquad [\lambda\lambda g] = \frac{w_1^{\,2}}{(pp)} + \frac{(w_2 \cdot 1)^2}{(qq \cdot 1)} + \frac{(w_3 \cdot 2)^2}{(rr \cdot 2)}.$$

III. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit wird unter den bekannten Voraussetzungen, vergl. S. 54, § 6, und S. 103, gleich

$$(6) \qquad \mu = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda g]}{\sigma}},$$

näherungsweise mit dem mittlern Fehler $\pm \frac{\mu}{\sqrt{2\sigma}}$.

Dies folgt daraus, daß man die Aufgabe der Ausgleichung bedingter Beobachtungen auf die für vermittelnde reduzieren kann, wobei $n - m = \sigma$, vergl. S. 228. Es kommen dann die Formeln von S. 158 in Betracht.

Selbstverständlich kann man den Ausdruck für μ und seinen mittlern Fehler auch direkt ableiten. Es genüge hier die Bemerkung, daß mit den wahren Verbesserungen ε sich $w_1 = -[p\varepsilon]$, $w_2 = -[q\varepsilon]$, $w_3 = -[r\varepsilon]$ ergibt und

$$[\lambda\lambda g] = \frac{(p\varepsilon)^2}{(pp)} + \frac{(q\varepsilon \cdot 1)^2}{(qq \cdot 1)} + \frac{(r\varepsilon \cdot 2)^2}{(rr \cdot 2)}.$$

Der Durchschnittswert jedes Glieds rechter Hand in der letzten Formel ist μ^2.*)

IV. Der mittlere Fehler einer Funktion *F* der ausgeglichenen Beobachtungswerte wird aus der Formel entnommen:

$$(7) \qquad \mu_F^2 = \mu^2 (\mathrm{I} - \mathrm{II}),$$

wobei

$$(8) \qquad \begin{aligned} \mathrm{I} &= (ff) = \frac{f_1 f_1}{g_1} + \frac{f_2 f_2}{g_2} + \frac{f_3 f_3}{g_3} + \cdots + \frac{f_n f_n}{g_n}, \\ \mathrm{II} &= \frac{(pf)^2}{(pp)} + \frac{(qf \cdot 1)^2}{(qq \cdot 1)} + \frac{(rf \cdot 2)^2}{(rr \cdot 2)}. \end{aligned}$$

---

*) F. R. Helmert. Zur Ableitung der Formel von C. F. Gauß für den mittlern Beobachtungsfehler und ihrer Genauigkeit. (Sitz.-Ber. der Königl. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, 1904, S. 956/957.)

und die f die partiellen Differentialquotienten der Funktion nach den l bedeuten, unter andern aber

$$(pf) = \frac{p_1 f_1}{g_1} + \frac{p_2 f_2}{g_2} + \cdots + \frac{p_n f_n}{g_n}$$

ist.

Eine praktisch vorteilhafte Anordnung der Berechnung besteht darin, daß man unter die Bedingungsgleichungen (2) den Ausdruck

(9) $$f_1 \lambda_1 + f_2 \lambda_2 + f_3 \lambda_3 + \cdots + f_n \lambda_n$$

als Teil einer neuen Bedingungsgleichung hinzusetzt und nun anstatt (4*) schreibt:

(10)

k_1	k_2	k_3	Konst.	k_f
(pp)	(pq)	(pr)	w_1	(pf)
(pq)	(qq)	(qr)	w_2	(qf)
(pr)	(qr)	(rr)	w_3	(rf)
(pf)	(qf)	(rf)	*	(ff)
(ps')	(qs')	(rs')	$[w]$	(fs')

Hierbei ist:

$$s_i' = p_i + q_i + r_i + f_i = s_i + f_i \, .$$

Die übliche Gaußsche Elimination verwandelt dann (ff) ganz schematisch in den für (7) erforderlichen Ausdruck I — II.

V. **Der Ausgleichungswert der Funktion** ist gleich

(11) $$F_0 + [f\lambda] \, ,$$

wo F_0 der unausgeglichene Funktionswert ist. Zur Kontrolle hat man nach (3):

(12) $$[f\lambda] = (pf)k_1 + (qf)k_2 + (rf)k_3 \, .$$

Daraus folgt mit Hilfe der reduzierten Normalgleichungen (4**):

(13) $$F = F_0 - \frac{(pf)w_1}{(pp)} - \frac{(qf \cdot 1)(w_2 \cdot 1)}{(qq \cdot 1)} - \frac{(rf \cdot 2)(w_3 \cdot 2)}{(rr \cdot 2)} \, .$$

Diese Formel ist besonders dann mit Vorteil anzuwenden, wenn F auch als Funktion nur eines Teiles der Bedingungsgleichungen betrachtet werden soll und die entsprechenden Normalgleichungen voranstehen.*)

*) Die Europäische Längengradmessung usw., I. Heft, S. 138—143.

VI. Sind die Bedingungsgleichungen nicht linear, so ändert dies nur den Anfang der Rechnung. Wird z. B. die erste Bedingungsgleichung durch

$$(14) \qquad \varphi(l_1 + \lambda_1,\ l_2 + \lambda_2, \ldots\ l_n + \lambda_n) = 0$$

dargestellt, so berechne man

$$(15) \qquad w = \varphi(l_1, l_2, \ldots l_n).$$

Unter der Voraussetzung, daß höhere Potenzen der λ als die erste zu vernachlässigen sind, hat man alsdann nach dem Taylorschen Satze:

$$(16) \qquad p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 + \cdots + p_n \lambda_n + w_1 = 0,$$

wenn gesetzt wird:

$$(17) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial l_1} = p_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial l_2} = p_2, \ldots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial l_n} = p_n.$$

Beispiel. Fortsetzung von S. 49. Dort waren gleiche Gewichte angenommen worden: jetzt gleichen wir aus unter der Annahme, daß die Gewichte proportional den Repetitionszahlen seien, wozu wir wegen der bedeutenden Größe derselben berechtigt sind.

Wir haben nach (1), S. 49:

$$(6) \qquad \begin{array}{llll} \sphericalangle H: 81^0\ 21'\ 43''\!,36 + \lambda_1 & \text{Gew.} & 70 \\ \sphericalangle I: 25\ \ 16\ \ 28{,}85 + \lambda_2 & ,, & 101 \\ \sphericalangle D: 73\ \ 21\ \ 46{,}35 + \lambda_3 & ,, & 85. \end{array}$$

Theoretische Winkelsumme $= 180^0\ 0'\ 0''\!,139$.

Daher ist die Bedingungsgleichung:

$$(7) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1{,}579 = 0.$$

Die Korrelatengleichungen sind:

$$(8) \qquad 70\lambda_1 = k, \quad 101\lambda_2 = k, \quad 85\lambda_3 = k,$$

also wird die Normalgleichung:

$$\left(\frac{1^2}{70} + \frac{1^2}{101} + \frac{1^2}{85}\right) k - 1{,}579 = 0$$

oder

$$(9) \qquad 0{,}03595k = 1{,}579;$$

folglich ist

$$(10) \qquad k = +\ 43{,}92$$

und nach (8):

$$\text{(11)} \qquad \lambda_1 = +\,0{,}627\,, \quad \lambda_2 = +\,0{,}435\,, \quad \lambda_3 = +\,0{,}517\,.$$

Mithin sind die ausgeglichenen Beobachtungswerte nach (6):

$$\text{(12)} \qquad \begin{array}{rl} \sphericalangle\, H = & 81^0\ 21'\ 43'',987 \\ \sphericalangle\, I = & 25\ \ 16\ \ 29,285 \\ \sphericalangle\, D = & 73\ \ 21\ \ 46,867 \\ \hline \text{Summe} = & 180\ \ \ 0\ \ \ 0,139\,. \end{array}$$

Ferner hat man aus (11):

$$\text{(13)} \qquad [\lambda\lambda g] = 69{,}35\,;$$

ebenso ist nach (5), S. 245:

$$[\lambda\lambda g] = 1{,}579 \cdot 43{,}92 = 69{,}35,$$

und nach (5*), S. 246:

$$[\lambda\lambda g] = \frac{1{,}579^2}{0{,}03595} = 69{,}35\,.$$

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, d. h. einer einfachen Winkelbeobachtung, wird daher:

$$\text{(14)} \qquad \mu = \pm \sqrt{\frac{69{,}35}{1}} = \pm\, 8'',33\,;$$

der mittlere Fehler dieser Bestimmung ist näherungsweise gleich $\pm\, 5'',89$, so daß der Wert von μ im Mittel zwischen $\pm\, 2'',44$ und $\pm\, 14'',22$ schwankt.

Beispiel. In einem Dreieck $1 \cdot 2 \cdot 3$ sind gemessen:

$$\text{(1)} \qquad \begin{array}{rll} \sphericalangle\, 2 = & 33^0\ 22'\ 42'' & \pm\ \ 20'' \\ \sphericalangle\, 3 = & 125\ \ 42\ \ 11 & \pm\ \ 20 \\ \text{Seite } 2 \cdot 3 = & 103{,}67\ \text{m} & \pm\, 0{,}05\ \text{m} \\ \text{„}\quad 1 \cdot 2 = & 235{,}83 & \pm\, 0{,}05\ \ . \end{array}$$

Die hier beigefügten mittlern Fehler wurden durch Schätzung ermittelt, sie sind eher etwas zu groß als zu klein angegeben.

Es sind nun die plausibelsten Dimensionen des Dreiecks zu bestimmen.

Die vier gegebenen Stücke sind so zu verbessern, daß sie die Bedingungsgleichung

$$\text{(2)} \qquad \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{\sin 1}{\sin 3} = \frac{\sin(2+3)}{\sin 3}$$

erfüllen. Nennen wir die Verbesserungen der vier gegebenen Stücke (1) bzw. λ_1, λ_2 und λ_3, λ_4, erstere in Minuten, letztere in Metern ausgedrückt, so wird aus (2):

$$\text{(3)} \qquad \frac{103{,}67 + \lambda_3}{235{,}83 + \lambda_4} = \frac{\sin(159^0\,4'\,53'' + \lambda_1 + \lambda_2)}{\sin(125^0\,42'\,11'' + \lambda_2)}.$$

Logarithmiert man, so ergibt sich nach einfacher Reduktion:

$$9{,}643054 + 0{,}00418\lambda_3 - 0{,}00184\lambda_4$$

$$= 9{,}643134 - 0{,}000331\lambda_1 - 0{,}000241\lambda_2$$

oder

$$\text{(4)} \qquad -33{,}1\lambda_1 - 24{,}1\lambda_2 - 418\lambda_3 + 184\lambda_4 + 8{,}0 = 0.$$

Wir bilden nun die Hilfsgrößen g (vergl. S. 98, III) wie folgt: Es sind die reziproken Werte der Quadrate der in derselben Einheit wie die betreffenden λ ausgedrückten mittlern Fehler:

$$\text{für den Winkel gleich } 1 : \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 9$$

$$\text{für die Seiten gleich } 1 : \left(\frac{1}{20}\right)^2 = 400,$$

wofür wir zur größern Einfachheit setzen:

für den Winkel gleich 10, für die Seiten gleich 400,

so daß also ist:

$$\text{(5)} \qquad \begin{array}{ll} \text{für die Winkel} & g_1 = g_2 = 1 \\ \text{,, ,, Seiten} & g_3 = g_4 = 40. \end{array}$$

Die Korrelatengleichungen und die Normalgleichung werden demnach:

$$\text{(6)} \qquad \begin{array}{ll} \lambda_1 = -33{,}1\,k & 40\lambda_3 = -418\,k \\ \lambda_2 = -24{,}1\,k & 40\lambda_4 = +184\,k \end{array}$$

$$\text{(7)} \qquad 6891\,k = -8{,}0, \quad k = -0{,}001161.$$

Daher ist

$$\text{(8)} \qquad \begin{array}{ll} \lambda_1 = +0{,}'0384 & \lambda_3 = +0{,}0121\text{ m} \\ \lambda_2 = +0{,}0280 & \lambda_4 = -0{,}0053\ \ , \end{array}$$

und es wird

$$\text{(9)} \qquad [\lambda\lambda g] = 0{,}00924,$$

nahezu übereinstimmend mit der Berechnung aus (7), wonach $[\lambda\lambda g] = 8{,}0^2 : 6891 = 0{,}00929$.

Zu $g = 1$ gehört zufolge der Ausgleichung 0,00924 als mittleres Fehlerquadrat, somit wird der

$$(10)\quad \begin{aligned} &\text{m. F. der Winkelbeob.} = \pm\sqrt{0{,}00924} = \pm\, 0{,}'096 = \pm\, 6'' \\ &\text{,, ,, ,, Seitenbeob.} = \pm\sqrt{\frac{0{,}00924}{40}} = \pm\, 0{,}015\,\text{m}. \end{aligned}$$

Jedoch ist diese Bestimmung sehr unsicher, daher eine Übereinstimmung mit den Schätzungen in (1) nicht zu erwarten ist.

Die definitiven Dreiecksdimensionen werden endlich:

$$(11)\quad \begin{array}{llll} \sphericalangle\, 1 = & 20^0\ 55'\ \ 3'' & \text{Seite } 2\cdot 3 = & 103{,}682\ \text{m} \\ \text{,,}\ \ 2 = & 33\ \ 22\ \ 44 & \text{,,}\quad 1\cdot 3 = & 159{,}775 \\ \text{,,}\ \ 3 = & 125\ \ 42\ \ 13 & \text{,,}\quad 1\cdot 2 = & 235{,}825\ . \end{array}$$

Wir überlassen es dem Leser, die Gewichte und mittlern Fehler dieser Größen nach IV, S. 246, selbst zu berechnen.

Beispiel. Ausgleichung eines Fünfecks der hannoverschen Gradmessung von C. F. Gauß.*)

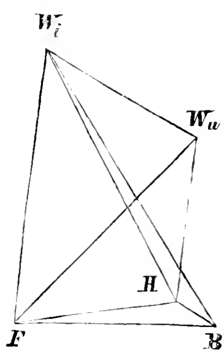
Das Ergebnis der Stationsausgleichungen war:

(1) Station Falkenberg.

Wilsede	187°	47′	30″,311	+ (0)
Wulfsode . . .	225	9	39,676	+ (1)
Hauselberg . .	266	13	56,239	+ (2)
Breithorn . . .	274	14	43,634	+ (3).

Station Breithorn.

Falkenberg . .	94	33	40,755	+ (4)
Hauselberg . .	122	51	23,054	+ (5)
Wilsede	150	18	35,100	+ (6).



*) C. F. Gauß' Werke, Bd. IV: Supplem. theor. comb. etc. 1826, S. 87 — 92.

(1) Station Hauselberg.

Falkenberg	86°	29′	6″,872 +	(7)
Wilsede	154	37	9,624 +	(8)
Wulfsode	189	2	56,376 +	(9)
Breithorn	302	47	37,732 +	(10).

Station Wulfsode.

Hauselberg	9	5	36,593 +	(11)
Falkenberg	45	27	33,556 +	(12)
Wilsede	118	44	13,159 +	(13).

Station Wilsede.

Falkenberg	7	51	1,027 +	(14)
Wulfsode	298	29	49,519 +	(15)
Breithorn	330	3	7,392 +	(16)
Hauselberg	334	25	26,746 +	(17).

Gegeben ist ferner:

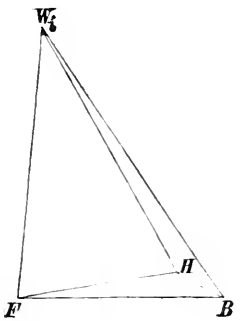
Wilsede — Wulfsode = 22 877,94 m.

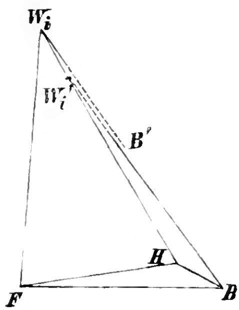
Für jede Station sind diese Angaben als das Ergebnis einer einzigen Beobachtungsreihe aufzufassen, die aber mit großer und für alle Stationen gleicher Genauigkeit angestellt wurde. Die Angaben sind ferner so gewählt, daß sie zugleich die südwestlichen Azimute der betreffenden Seiten näherungsweise bezeichnen; für unsere Aufgabe selbst haben nur Differenzen der Richtungsangaben Interesse. Wir suchen nun die Verbesserungen der letztern, so daß also die Differenzen der verbesserten Richtungsangaben die Bedingungsgleichungen erfüllen. Den Richtungsangaben der vorstehenden Übersicht sind bereits die Verbesserungen symbolisch beigefügt.

Genau genommen muß den Angaben für jede Station eine unbestimmte Größe u_1, u_2 usw. beigefügt werden, die man aber kurzer Hand wegläßt, da sie doch in den Bedingungsgleichungen, wo nur Winkel eingehen, herausfällt.

Aus der Anzahl der beobachteten Richtungen und der Anzahl der zur Konstruktion nötigen Richtungen findet sich, daß sieben überschüssige Messungen vorhanden sind, die Richtungsbeobachtungen mithin sieben Bedingungsgleichungen erfüllen müssen.

Betrachten wir einstweilen das Netz als auf einer Ebene liegend, so muß zunächst im Viereck HW_iBF die Winkelsumme jedes der drei Dreiecke W_iHF, FHB und BHW_i gleich 180^0 werden. Sind diese drei Bedingungen erfüllt, so wird auch die Winkelsumme von FW_iB, welches die Summe der ersten drei Dreiecke ist, gleich 180^0. Indessen ist damit die Anzahl der Bedingungsgleichungen nicht erschöpft. Denken wir uns nämlich die Dreiecke W_iHF und FHB den beiden ersten Bedingungsgleichungen entsprechend angenommen, so wird für das Dreieck HBW_i (und damit auch für das Dreieck FW_iB) die beobachtete Winkelsumme





schon null, wenn nur die Visuren von W_i nach B und von B nach W_i parallel laufen. Sie sollen aber zusammenfallen, also es muß $HW_i = HW_i'$ werden. Dazu ist erforderlich, daß

$$\frac{HB}{HF} \cdot \frac{HF}{HW_i} = \frac{HB}{HW_i} \quad \text{oder} \quad \frac{HW_i}{HB} \cdot \frac{HB}{HF} \cdot \frac{HF}{HW_i} = 1$$

oder

$$(2) \qquad \frac{\sin HBW_i}{\sin BW_iH} \cdot \frac{\sin HFB}{\sin FBH} \cdot \frac{\sin HW_iF}{\sin W_iFH} = 1$$

ist.

Dies ist die vierte Bedingungsgleichung des Vierecks; man nennt sie eine Seitenbedingungsgleichung zum Unterschiede gegen die drei vorhergehenden Winkelbedingungsgleichungen.

Berücksichtigen wir jetzt auch, daß das Netz nicht in einer Ebene, sondern angenähert auf einer Kugelfläche liegt, so ändert sich an der vorhergehenden Betrachtung nur das, daß die Winkelsumme der Dreiecke $= 180^0 +$ sphär. Exzeß wird, und daß in der Seitengleichung an Stelle der Seite der Sinus der Seite (ausgedrückt in Bruchteilen des Radius), also z. B. an Stelle von HB jetzt $\sin HB$, tritt, womit aber wieder die Gleichung (2) entsteht.

Wir haben nun für das Dreieck $W_i H F$:

$$\begin{array}{rrrrl}
\sphericalangle W_i = & 33^0 & 25' & 34'',281 & +(14)-(17) \\
\sphericalangle H = & 68 & 8 & 2,752 & -(7)+(8) \\
\sphericalangle F = & 78 & 26 & 25,928 & -(0)+(2) \\
\hline
\text{Summe} = 180 & & 0 & 2,961 & -(0)+(2)-(7)+(8)+(14)-(17), \\
\text{Theor. Summe} = 180 & & 0 & 1,919^{*} & ;
\end{array}$$

daher ist

$$(3) \qquad 0 = +1,042-(0)+(2)-(7)+(8)+(14)-(17).$$

Ebenso wird für das Dreieck FHB, dessen sphärischer Exzeß $= 0'',202$ ist:

$$(4) \qquad 0 = -1,368-(2)+(3)-(4)+(5)+(7)-(10),$$

und für das Dreieck $W_i B H$ mit dem sphärischen Exzeß $= 0'',321$:

$$(5) \qquad 0 = -0,813-(5)+(6)-(8)+(10)-(16)+(17).$$

Die Seitenbedingungsgleichung gibt logarithmiert:

$$\left.\begin{array}{l}
\log\sin(27^0\ 27'\ 12'',046-(5)+(6)) \\
+\log\sin(8\ \ 0\ \ 47,395-(2)+(3)) \\
+\log\sin(33\ \ 25\ \ 34,281+(14)-(17)) \\
-\log\sin(4\ \ 22\ \ 19,354-(16)+(17)) \\
-\log\sin(28\ \ 17\ \ 42,299-(4)+(5)) \\
-\log\sin(78\ \ 26\ \ 25,928-(0)+(2))
\end{array}\right\} = 0;$$

daraus folgt, alles in Einheiten der 7. Dezimalstelle ausgedrückt:

$$(6) \quad \begin{array}{l} 0 = +25+4,3(0)-153,9(2)+149,6(3)+39,1(4) \\ \qquad -79,6(5)+40,5(6)+31,9(14)+275,4(16)-307,3(17). \end{array}$$

Die Seitenbedingungsgleichung kann man auch aufstellen, indem man sich jedes Dreieck mittels des Legendreschen Theorems auf die Ebene übertragen denkt. Dann ist also von jedem Dreieckswinkel ein Drittel des Exzesses des betreffenden Dreiecks abzuziehen.

Das Viereck $F W_i W_u H$ liefert ebenfalls drei Winkel- und eine Seitenbedingungsgleichung, doch reduzieren sich die erstern

---

*) Die Exzesse sind von Gauß mit Walbecks Abplattung 1:302,78 des Erdellipsoids berechnet; die große Halbachse ist dazu aus der Bedingung, daß der Meridianquadrant 10000000 m betragen soll, abgeleitet worden.

auf 2, da die Winkelgleichung für das Dreieck FHW_i bereits beim vorhergehenden Viereck aufgestellt wurde. Die beiden neuen Winkelgleichungen werden aus den Dreiecken FHW_u und HW_uW_i mit den sphärischen Exzessen 1″,257 und 1″,295*) und den Widersprüchen + 1,773 bzw. — 0,750 erhalten. Die Seitengleichung ergibt sich aus der Bedingung:

$$\frac{HW_u}{HF} \cdot \frac{HF}{HW_i} \cdot \frac{HW_i}{HW_u} = 1;$$

man findet hieraus:

$$\frac{\sin W_u FH}{\sin HW_u F} \cdot \frac{\sin HW_i F}{\sin W_i FH} \cdot \frac{\sin HW_u W_i}{\sin W_u W_i H} = 1. \tag{7}$$

Der Widerspruch dieser wie oben umgeformten Gleichung ist — 3 nach Gauß.**)

Wir stellen nun alle sieben Gleichungen zusammen, multiplizieren aber vorher die Winkelgleichungen mit 100, um nicht zu verschiedene Werte der Korrelaten zu erhalten, was immer eintritt, wenn die Koeffizienten aller Verbesserungen in einzelnen Gleichungen sehr klein im Vergleich zu denen anderer Gleichungen sind. Man hätte zu diesem Zwecke auch die Seitengleichungen durch 100 dividieren können.

Die Summe aller Bedingungsgleichungen wurde einfach durch Addition gebildet.

---

*) Die Nachrechnung der Exzesse ergab für die Dreiecke FHB und HW_uW_i die Gaußschen Werte, für die Dreiecke W_iHF, W_iBH und FHW_u wurde der Reihe nach erhalten: 1,918, 0,320 und 1,258. Die kleinen Unterschiede sind nicht dadurch zu erklären, daß bei der Nachrechnung Bessels Elemente des Erdellipsoids benutzt wurden.

**) Während die Nachrechnung mit 7-stelligen neueren Logarithmentafeln bei der ersten Seitengleichung den von Gauß angegebenen Widerspruch + 25 lieferte, fand sich mit denselben bei der zweiten Seitengleichung als Widerspruch — 2. Dieser Wert wurde auch erhalten, wenn von jedem Winkel ein Drittel des Exzesses des zugehörigen Dreiecks abgezogen wurde. Auch mit 10-stelligen auf 8 Stellen abgerundeten Logarithmen ergab sich als Widerspruch — 2; rundete man sie jedoch auf 7 Stellen ab, so wurde der Widerspruch gleich — 3. Zu demselben Werte kam man auch, wenn man alte 7-stellige Logarithmentafeln von Vega, bei denen die Bogen um 1′ fortschreiten, benutzte. Diese gaben auch den Wert — 3, wenn ein Drittel des Exzesses bei jedem Winkel in Abzug gebracht wurde.

Bedingungsgleichungen.

Nr.	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	w	
1	·	·	−100	+100	−100	+100	·	+100	·	·	−100	·	·	·	·	·	·	·	−136,8	= 0
2	·	−100	+100	·	·	·	·	−100	·	+100	·	−100	+100	·	·	·	·	·	+177,3	= 0
3	−100	·	+100	·	·	·	·	−100	+100	·	·	·	·	·	+100	·	·	−100	+104,2	= 0
4	·	·	·	·	·	−100	+100	·	−100	·	+100	·	·	·	·	·	−100	+100	− 81,3	= 0
5	·	·	·	·	·	·	·	·	−100	+100	·	−100	·	+100	·	−100	·	+100	− 75,0	= 0
6	+ 4,3	·	−153,9	+149,6	+ 39,1	− 79,6	+ 40,5	·	·	·	·	·	·	·	+ 31,9	·	+275,4	−307,3	+ 25,0	= 0
7	+ 4,3	− 24,2	+ 19,9	·	·	·	·	·	·	·	·	+ 36,1	− 28,6	− 7,5	+ 31,9	+ 29,1	·	− 61,0	− 3,0	= 0
Sa.	− 91,4	−124,2	− 34,0	+249,6	− 60,9	− 79,6	+140,5	−100	−100	+200	·	−163,9	+ 71,4	+ 92,5	+163,8	− 70,9	+175,4	−268,3	+ 10,4	= 0

Hieraus folgen die Normalgleichungen, indem man für die Verbesserungen auf der ersten Station setzt:

$$(9)\quad \begin{cases} (0) = \quad \cdot \qquad \cdot \qquad - 100 k_3 \cdots + \quad 4{,}3 k_6 + \quad 4{,}3 k_7 \\ (1) = \quad \cdot \qquad - 100 k_2 \qquad \cdot \qquad \cdots \qquad \cdot \qquad - 24{,}2 k_7 \\ (2) = - 100 k_1 + 100 k_2 + 100 k_3 \cdots - 153{,}9 k_6 + 19{,}9 k_7 \\ (3) = + 100 k_1 \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad + 149{,}6 k_6 \qquad \cdot \end{cases}$$

und ebenso für die Verbesserungen auf den andern Stationen. Für jede Station ist bei gleichen Gewichten die Summe der Verbesserungen gleich null, bei ungleichen Gewichten ist stationsweise $[g\lambda] = 0$.

(10)

Normalgleichungen.*)

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	w	Funkt.
+ 60 000	− 20 000	− 20 000	− 20 000	·	+ 18 480	− 1 990	− 136,8	− 8,836
− 20 000	+ 60 000	+ 20 000	·	+ 20 000	− 15 390	− 2 060	+ 177,3	+ 13,092
− 20 000	+ 20 000	+ 60 000	− 20 000	− 20 000	+ 18 100	+ 10 850	+ 104,2	− 0,260
− 20 000	·	− 20 000	+ 60 000	+ 20 000	− 46 260	− 6 100	− 81,3	+ 7,895
·	+ 20 000	− 20 000	+ 20 000	+ 60 000	− 30 730	− 13 370	− 75,0	+ 3,899
+ 18 480	− 15 390	+ 18 100	− 46 260	− 30 730	+ 226 884	+ 16 719	+ 25,0	− 40,133
− 1 990	− 2 060	+ 10 850	− 6 100	− 13 370	+ 16 719	+ 8 763	− 3,0	+ 11,002
+ 16 490	+ 62 550	+ 48 950	− 12 360	+ 35 900	+ 187 804	+ 12 812	+ 10,4	− 13,341

*) In den von Gauß angegebenen Normalgleichungen, Werke IV, S. 90, befinden sich zwei Fehler: in der 6. Gleichung ist der Koeffizient

Die Zahlen rechts vom dreifachen Striche sind Summen. $[pf]$, $[qf]$, $[rf]$, ... für eine Funktion der Beobachtungsgrößen, von der später die Rede sein wird.

Die Auflösung nach dem zweiten Verfahren, S. 151, § 7, III, ergibt die nachstehenden Gleichungen:

(11)

Reduzierte Normalgleichungen:

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	Konst.	Funkt.
+ 60 000	— 20 000	— 20 000	— 20 000	.	+ 18 480	— 1 990	— 136,8	— 8,836
1	— 0,33333	— 0,33333	— 0,33333	.	+ 0,30800	— 0,03317	— 0,002280	— 0,00014727
	+ 53 333	+ 13 333	— 6 667	+ 20 000	— 9 230	— 2 723	+ 131,7	+ 10,147
	1	+ 0,25000	— 0,12500	+ 0,37500	— 0,17306	— 0,05106	+ 0,002169	+ 0,00019026
		+ 50 000	— 25 000	— 25 000	+ 26 568	+ 10 868	+ 25,7	— 5,742
		1	— 0,50000	— 0,50000	+ 0,53136	+ 0,21736	+ 0,000511	— 0,00011184
			+ 40 000	+ 10 000	— 27 970	— 1 669	— 97,6	+ 3,347
			1	+ 0,25000	— 0,69925	— 0,04173	— 0,002110	+ 0,00008368
				+ 37 500	— 6 992	— 6 498	— 87,2	— 3,614
				1	— 0,18646	— 0,17328	— 0,002325	— 0,00009638
					+ 184 616	+ 8 707	— 8,3	— 30,938
					1	+ 0,04716	— 0,000045	— 0,00016758
						+ 4 589	— 25,2	+ 13,448
						1	— 0,00549	+ 0,0029305

von F 226 868 anstatt 224 868, und in der 6. und 7. müssen die Koeffizienten von G und F 16 714,1 anstatt 16 694,1 heißen.

Hieraus folgen die Werte:

$$(12)\qquad \begin{aligned} k_1 &= +0{,}00224 \,.\, 6 \qquad & k_5 &= +0{,}00323 \,.\, 6\\ k_2 &= -0{,}00344 \,.\, 1 & k_6 &= -0{,}00021 \,.\, 4\\ k_3 &= +0{,}00088 \,.\, 2 & k_7 &= +0{,}00549 \,.\\ k_4 &= +0{,}00170 \,.\, 9 \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in die Korrelatengleichungen (9) ein, so ergeben sich die Verbesserungen:

$$(13)\qquad \begin{aligned} (0) &= -0''\!,065 \qquad & (7) &= +0''\!,481 \qquad & (14) &= +0''\!,256\\ (1) &= +\ 0{,}213 & (8) &= -\ 0{,}407 & (15) &= -\ 0{,}164\\ (2) &= -\ 0{,}339 & (9) &= -\ 0{,}021 & (16) &= -\ 0{,}230\\ (3) &= +\ 0{,}193 & (10) &= -\ 0{,}053 & (17) &= +\ 0{,}138.\\ (4) &= -0''\!,233 & (11) &= +0''\!,219\\ (5) &= +\ 0{,}070 & (12) &= -\ 0{,}502\\ (6) &= +\ 0{,}163 & (13) &= +\ 0{,}282 \end{aligned}$$

Damit wird

$$(14)\qquad [\lambda\lambda] = 1{,}230.$$

Die Berechnung aus den reduzierten Normalgleichungen (11) liefert dafür

$$[\lambda\lambda] = 136{,}8 \cdot 0{,}002280 + 131{,}7 \cdot 0{,}002469 + \cdots = 1{,}2303$$

in Übereinstimmung mit (14).

Der mittlere Fehler einer Richtung der Stationsausgleichungen ergibt sich mithin zu

$$(15)\qquad \mu = \sqrt{\frac{1{,}230}{7}} = \pm\, 0''\!,419;$$

der mittlere zu befürchtende Fehler dieser Bestimmung ist näherungsweise

$$\pm \frac{0''\!,419}{\sqrt{2 \cdot 7}} = \pm\, 0''\!,112.$$

Für die acht abgeleiteten Seiten ergibt sich nach der Ausgleichung:

$$\begin{aligned} \log F\,W_i &= 4{,}5574997 \qquad & \log H\,W_i &= 4{,}5810262\\ \log F\,W_u &= 4{,}5474352 & \log H\,W_u &= 4{,}3755218\\ \log F\,H &= 4{,}3309672 & \log B\,W_i &= 4{,}6393859\\ \log F\,B &= 4{,}4275949 & \log B\,H &= 3{,}7994480, \end{aligned}$$

wobei die Rechnung auf verschiedenen Wegen nur Unterschiede bis zu einer Einheit der siebenten Stelle zeigte. Angegeben ist umstehend das Mittel.

Wir berechnen nun insbesondere die Seite FB nebst ihrem mittlern Fehler, wobei wir die Seite $W_i W_u$ als fehlerfrei betrachten wollen. Unter Anwendung des Legendreschen Satzes ist für FB in Metern:

$$(16)\quad FB = 22\,877{,}94\,\frac{\sin(F W_u W_i - 0'',652)\sin(B W_i F - 0'',814)}{\sin(W_i F W_u - 0'',652)\sin(F B W_i - 0'',814)};$$

hierin ist

$$\begin{aligned}
F W_u W_i - 0'',652 &= 73^0 16' 38'',951 - (12) + (13) = 73^0 16' 39'',735\,.\\
W_i F W_u - 0,652 &= 37\ \ 22\ \ \ \ 8,713 - \ (0) + \ (1) = 37\ \ 22\ \ \ \ 8,991\\
B W_i F \quad - 0,814 &= 37\ \ 47\ \ 52,821 + (14) - (16) = 37\ \ 47\ \ 53,307\\
F B W_i \quad - 0,814 &= 55\ \ 44\ \ 53,531 - \ (4) + \ (6) = 55\ \ 44\ \ 53,927\,.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$(17)\qquad \underset{\text{ohne}}{FB = 26\,766{,}67\ \mathrm{m}}\ \text{bzw.}\ \underset{\text{mit}}{26\,766{,}70\ \mathrm{m}^{*)}}$$

Berücksichtigung der Verbesserungen nach der Ausgleichung.

Man findet ferner aus (16):

$$(18)\qquad \begin{aligned}
\frac{\partial FB}{\partial(13)} &= -\frac{\partial FB}{\partial(12)} = +0{,}03899\\
\frac{\partial FB}{\partial(0)} &= -\frac{\partial FB}{\partial(1)} = +0{,}16991\\
\frac{\partial FB}{\partial(14)} &= -\frac{\partial FB}{\partial(16)} = +0{,}16731\\
\frac{\partial FB}{\partial(4)} &= -\frac{\partial FB}{\partial(6)} = +0{,}08836\,.
\end{aligned}$$

Diese Differentialquotienten sind die f in der frühern Bezeichnung; es folgt als Summe der Produkte der f und derjenigen Koeffizienten der ersten Bedingungsgleichung, die sich auf die gleiche Richtung beziehen:

$$[pf] = -100 \cdot 0{,}08836 = -8{,}836\,.$$

Für die zweite bis fünfte der Bedingungsgleichungen werden die Produktsummen $[qf]$, $[rf]$, ...:

$$+13{,}092,\quad -0{,}260,\quad +7{,}895,\quad +3{,}899$$

---

*) Gauß gibt als ausgeglichenen Wert von FB an: 26 766,68 m.

und für die sechste und siebente:

$$4{,}3 \cdot 0{,}16991 + (39{,}1 - 40{,}5)\,0{,}08836 + (31{,}9 - 275{,}4)\,0{,}16731 = -40{,}133,$$
$$(4{,}3 + 24{,}2)\,0{,}16991 + (28{,}6 - 7{,}5)\,0{,}03899 + 31{,}9 \cdot 0{,}16731 = +11{,}002.$$

Die Summe aller, d. i. $-13{,}341$, stimmt mit der aus der Summenbedingungsgleichung berechneten Summe $[sf]$ überein.

Durch die Auflösung der Normalgleichungen sind die zur Berechnung des reziproken Gewichts nötigen Größen bereits erhalten.

Ist

$$\mu_{FB} = \mu \sqrt{\mathrm{I} - \mathrm{II}}, \tag{19}$$

so gibt die Übersicht (11) für II den Ausdruck:

$$8{,}836 \cdot 0{,}00014727 + 10{,}147 \cdot 0{,}00019026 + \cdots + 13{,}448 \cdot 0{,}0029305$$

oder

$$\mathrm{II} = 0{,}049114; \tag{20}$$

dagegen ist

$$\mathrm{I} = 2\,\{0{,}03899^2 + 0{,}16991^2 + 0{,}16731^2 + 0{,}08836^2\}$$

oder

$$\mathrm{I} = 0{,}132380. \tag{21}$$

Mithin wird das Quadrat des mittlern Fehlers von dem ohne Rücksicht auf die Ausgleichung berechneten Werte von $FB = 26\,766{,}67$ m gleich

$$\mu \sqrt{0{,}132380} = \pm\, 0{,}152 \text{ m}, \tag{22}$$

und von dem mit Rücksicht auf die Ausgleichung berechneten Werte von $FB = 26\,766{,}70$ m gleich

$$\mu \sqrt{(0{,}132380 - 0{,}049114)} = \pm\, 0{,}121 \text{ m.*)} \tag{23}$$

Den ausgeglichenen Wert von FB erhält man auch nach V, S. 247, zu $(26\,766{,}67 + [f\lambda])$ m, wo

$$[f\lambda] = [pf]k_1 + [qf]k_2 + \cdots$$
$$= -8{,}836 \cdot 0{,}002246 - 13{,}092 \cdot 0{,}003441 - \cdots = +0{,}030$$

oder auch wo

$$[f\lambda] = -\frac{[pf]}{[pp]}\,w_1 - \frac{[qf \cdot 1]}{[qq \cdot 1]}\,[w_2 \cdot 1] - \cdots$$
$$= -0{,}00014727 \cdot 136{,}8 - 0{,}00019026 \cdot 131{,}7 + \cdots = +0{,}030$$

ist.

---

*) Eine Kontrolle für I—II würde sich ergeben haben, wenn nach Anleitung von S. 247 (9) und (10) verfahren worden wäre, indem dann bei Anwendung des Gaußschen Algorithmus die letzte Ableitung von (fs') ebenfalls I—II ergeben hätte.

§ 3. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, von deren Unbekannten Bedingungsgleichungen zu erfüllen sind.

I. Reduktion auf vermittelnde Beobachtungen. Die Aufgabe ist bereits auf S. 51/52, § 5, IV, besprochen worden.

Unter Umständen kann die Ausgleichung mit Vorteil dadurch geschehen, daß man die σ Bedingungsgleichungen benutzt, um σ Unbekannte aus den den vermittelnden Beobachtungen entsprechenden Fehlergleichungen zu eliminieren; diese enthalten alsdann $(m - \sigma)$ Unbekannte und sind in gewöhnlicher Weise auszugleichen.

Zur Erklärung diene ein fingiertes **Beispiel.***)

Es seien die Fehlergleichungen:

$$(1)\qquad \begin{array}{llr} \lambda_1 = -1 + x + y + z & \text{Gew.} & 1 \\ \lambda_2 = -1 + 2x - 3y \quad \cdot & \;\;" & 1 \\ \lambda_3 = -2 \quad \cdot \quad \cdot \quad + z & \;\;" & 1 \end{array}$$

und die Bedingungsgleichungen:

$$(2)\qquad 0 = +1 + x + y + z; \quad 0 = -3 \;\cdot\; + y - z$$

gegeben: aus letztern hat man

$$(3)\qquad z = y - 3, \quad x = -2y + 2.$$

Damit geben die Gleichungen (1):

$$(4)\qquad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = +3 - 7y, \quad \lambda_3 = -5 + y.$$

Die erste Gleichung enthält y nicht mehr; λ_1 erscheint daher als ein wahrer Beobachtungsfehler.

Die Normalgleichung für das System (4) vermittelnder Beobachtungen wird: $50y = 26$, woraus sich ergibt

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{lll} y = +0{,}52, \quad \mu_y^2 = 0{,}02\,\mu^2 & \text{Gew.} & 50. \\ \text{Damit ist nach (3):} & & \\ z = -2{,}48, \quad \mu_z^2 = 0{,}02\,\mu^2 & \;\;" & 50 \\ x = +0{,}96, \quad \mu_x^2 = 0{,}08\,\mu^2 & \;\;" & 12{,}5. \end{array} \right.$$

*) Entlehnt aus Hansens Werk: Von der Methode der kleinsten Quadrate. (Abh. d. Königl. Sächs. Ges. d. Wissenschaften zu Leipzig 1867, 8. Band, S. 658.)

Die Fehler λ_2 und λ_3 werden $-0{,}64$ bzw. $-4{,}48$ und die Summe ihrer Quadrate wird 20,48. Dasselbe ergibt die Rechnung aus $[ll] = 34$ mit Hilfe der Normalgleichung; man hat

$$\lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 34 - \frac{26^2}{50} = 20{,}48.$$

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit wird hiernach:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{20{,}48}{2-1}} = \pm\, 4{,}53. \tag{6}$$

Dem ursprünglichen Charakter der Aufgabe mehr entsprechend ist es übrigens, bei der Berechnung von μ auch λ_1 zu berücksichtigen; man hat alsdann:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{24{,}48}{3-1}} = \pm\, 3{,}50. \tag{7}$$

Die Reduktion auf vermittelnde Beobachtungen kann sich auch $(m-\sigma)$ neuer Unbekannter bedienen, die mit den m Unbekannten so zusammenhängen, daß die σ Bedingungsgleichungen identisch erfüllt sind, wenn die m Unbekannten durch die $(m-\sigma)$ neuen ausgedrückt werden. Lautet z. B. die einzige Bedingungsgleichung $p + x + y = 0$, so kann man für eine neue Unbekannte u setzen:

$$x = -\frac{p-u}{2}, \quad y = -\frac{p+u}{2}.$$

Anstatt auf vermittelnde Beobachtungen kann man auch auf bedingte Beobachtungen reduzieren, indem man aus den $(n+\sigma)$ Gleichungen (1) und (2) die m Unbekannten eliminiert und damit $(n+\sigma-m)$ Gleichungen zwischen den Verbesserungen λ aufstellt.

II. Direktes Verfahren. Es seien n Fehlergleichungen und σ Bedingungsgleichungen mit m Unbekannten gegeben:

$$\begin{array}{ll}
\lambda_1 = -l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots & \text{Gew. } g_1 \\
\lambda_2 = -l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots & \quad\text{,,} \quad g_2 \\
\lambda_3 = -l_3 + a_3 x + b_3 y + c_3 z + \cdots & \quad\text{,,} \quad g_3 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \\
\lambda_n = -l_n + a_n x + b_n y + c_n z + \cdots & \quad\text{,,} \quad g_n .
\end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{l}
0 = p_0 + p_1 x + p_2 y + p_3 z + \cdots \\
0 = q_0 + q_1 x + q_2 y + q_3 z + \cdots \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad .
\end{array} \tag{2}$$

Die Bedingungen des Minimums für $[\lambda\lambda g]$ mit Rücksicht auf die Gleichungen (2) lassen sich aus dem Ausdrucke

$$(3)\qquad \begin{aligned} &[\lambda\lambda g] + 2k_1(p_0 + p_1x + p_2y + p_3z + \cdots) \\ &\quad + 2k_2(q_0 + q_1x + q_2y + q_3z + \cdots) \\ &\quad + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

durch Differentiation nach $x, y, z, \ldots$ entwickeln; vergl. S. 113.

Es ergibt sich:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &[\lambda a g] + k_1 p_1 + k_2 q_1 + \cdots = 0 \\ &[\lambda b g] + k_1 p_2 + k_2 q_2 + \cdots = 0 \\ &[\lambda c g] + k_1 p_3 + k_2 q_3 + \cdots = 0 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

Setzt man hier die Ausdrücke für λ aus (1) ein und fügt man diesen m Gleichungen die σ Gleichungen (2) hinzu, so entstehen die Gleichungen:

$$(5)\qquad \left|\begin{array}{l} (aa)x + (ab)y + (ac)z + \cdots + p_1k_1 + q_1k_2 + \cdots = (al) \\ (ab)x + (bb)y + (bc)z + \cdots + p_2k_1 + q_2k_2 + \cdots = (bl) \\ (ac)x + (bc)y + (cc)z + \cdots + p_3k_1 + q_3k_2 + \cdots = (cl) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_1x + p_2y + p_3z + \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot = -p_0 \\ q_1x + q_2y + q_3z + \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot = -q_0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}\right.,$$

welche wir wieder das Normalgleichungssystem nennen wollen, da es ganz den frühern Systemen dieser Art entspricht, abgesehen von dem unwesentlichen Umstande des Fehlens einiger quadratischer Koeffizienten. Die Auflösung nach $x, y, z, \ldots k_1, k_2, \ldots$ kann in der Regel nach irgend einer der früher bei vermittelnden Beobachtungen angegebenen Methoden erfolgen; vergl. insbesondere S. 148 u. f., § 7. Über eine Ausnahme, wenn die vermittelnden Beobachtungen allein noch nicht die Beobachtungen bestimmen, siehe den Schluß des folgenden § 4.

Die Entwicklung der Formeln für die reziproken Gewichte der Unbekannten und von Funktionen derselben erfolgt ebenfalls ganz in der bei vermittelnden Beobachtungen angegebenen Weise; vergl. S. 103, § 1. III und S. 180, § 9, I.

Man erhält in der üblichen Bezeichnung:

$$(6)\qquad \mu_x^2 = \mu^2 Q_{1\cdot 1}, \quad \mu_y^2 = \mu^2 Q_{2\cdot 2}, \quad \mu_z^2 = \mu^2 Q_{3\cdot 3}, \ldots$$

$$(7)\qquad \mu_{k_1}^2 = \mu^2(-Q_{m+1\cdot m+1}), \quad \mu_{k_2}^2 = \mu^2(-Q_{m+2\cdot m+2}), \ldots$$

$$(8)\qquad \mu_F^2 = \mu^2\{F_1^2 Q_{1\cdot 1} + F_2^2 Q_{2\cdot 2} + F_3^2 Q_{3\cdot 3} + \cdots + 2F_1F_2 Q_{1\cdot 2} + 2F_1F_3 Q_{1\cdot 3} + \cdots + 2F_2F_3 Q_{2\cdot 3} + \cdots\}.$$

Zu (7) ist zu bemerken, daß $(-Q_{m+1\cdot m+1})$, $(-Q_{m+2\cdot m+2})$, ... positive Größen sind, wie sich auch aus dem folgenden ergibt.

Bilden wir unter Beschränkung auf $m = 3$ und $\sigma = 2$ nach dem Gaußschen Algorithmus

aus dem Schema:

$$(9)\qquad \begin{array}{ccccc|cc}
(aa) & (ab) & (ac) & p_1 & q_1 & (al) & F_1 \\
(ab) & (bb) & (bc) & p_2 & q_2 & (bl) & F_2 \\
(ac) & (bc) & (cc) & p_3 & q_3 & (cl) & F_3 \\
p_1 & p_2 & p_3 & * & * & -p_0 & F_4 = 0 \\
q_1 & q_2 & q_3 & * & * & -q_0 & F_5 = 0
\end{array}$$

das Schema:

$$(9^*)\qquad \begin{array}{ccccc|cc}
(aa) & (ab) & (ac) & p_1 & q_1 & (al) & F_1 \\
 & (bb\cdot 1) & (bc\cdot 1) & (p_2\cdot 1) & (q_2\cdot 1) & (bl\cdot 1) & (F_2\cdot 1) \\
 & & (cc\cdot 2) & (p_3\cdot 2) & (q_4\cdot 2) & (cl\cdot 2) & (F_3\cdot 2) \\
 & & & -\{pp\} & -\{pq\} & -(p_0\cdot 3) & (F_4\cdot 3) \\
 & & & & \{qq\cdot 1\} & -(q_0\cdot 4) & (F_5\cdot 4)
\end{array}$$

so ist auch:

$$(10)\qquad \mu_F^2 = \mu^2\left(\frac{F_1^2}{(aa)} + \frac{(F_2\cdot 1)^2}{(bb\cdot 1)} + \frac{(F_3\cdot 2)^3}{(cc\cdot 2)} - \frac{(F_4\cdot 3)^2}{\{pp\}} - \frac{(F_5\cdot 4)^2}{\{qq\cdot 1\}}\right).$$

In (9*) ist entwickelt:

$$(11)\qquad \begin{aligned}
\{pp\} &= \frac{p_1p_1}{(aa)} + \frac{(p_2\cdot 1)(p_2\cdot 1)}{(bb\cdot 1)} + \frac{(p_3\cdot 2)(p_3\cdot 2)}{(cc\cdot 2)} \\
\{pq\} &= \frac{p_1q_1}{(aa)} + \frac{(p_2\cdot 1)(q_2\cdot 1)}{(bb\cdot 1)} + \frac{(p_3\cdot 2)(q_3\cdot 2)}{(cc\cdot 2)}.
\end{aligned}$$

Man erkennt, daß $\{pp\}$, $\{qq\cdot 1\}$ positive Größen sind.

Durch Hinzutreten der Bedingungsgleichungen (2) zu den Fehlergleichungen (1) vermindert sich, wie Formel (10) zeigt, das reziproke Gewicht einer beliebigen Funktion F der Unbekannten — wie es ja nicht anders sein kann, da die Gleichungen (2) eine vermehrte Kontrolle herbeiführen.

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit wird

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n - m + \sigma}}, \tag{12}$$

wenn n Beobachtungen (Fehlergleichungen), m Unbekannte $x, y, z, \ldots$ und σ Bedingungsgleichungen gegeben, also $n - m + \sigma$ überschüssige Beobachtungen vorhanden sind.

Der Berechnung von $(\lambda\lambda)$ aus den einzelnen λ steht zur Kontrolle gegenüber die Berechnung nach einer der beiden Formeln, im Anschluß an (9) und (9*):

$$(\lambda\lambda) = (ll) - (al)x - (bl)y - (cl)z + p_0 k_1 + q_0 k_2; \tag{13}$$

$$\begin{aligned}(\lambda\lambda) = (ll) &- \frac{(al)^2}{(aa)} - \frac{(bl \cdot 1)^2}{(bb \cdot 1)} - \frac{(cl \cdot 2)^2}{(cc \cdot 2)} \\ &+ \frac{(p_0 \cdot 3)^2}{\{pp\}} + \frac{(q_0 \cdot 4)^2}{\{qq \cdot 1\}}.\end{aligned} \tag{14}$$

Die Gleichungen (2) bedingen hiernach eine Vergrößerung von $(\lambda\lambda)$; in der Tat muß $(\lambda\lambda)$ größer werden, weil sich μ durch das Hinzutreten der Gleichungen (2) zu den Gleichungen (1), theoretisch betrachtet, nicht ändern darf, und sich dadurch doch der Nenner der Formel für μ um σ vergrößert hat.

In der 1. Auflage dieses Buches, 1872, ist das System (5) in der Weise entwickelt worden, daß die Bedingungsgleichungen (2) als Fehlergleichungen aufgefaßt wurden, indem man also linker Hand λ anstatt null setzte. Schließlich wurden die Gewichte ins Unendliche wachsen gelassen. Vergl. hierzu auch Seidel, Astr. Nachr., Bd. 84, 1874, Nr. 2005, Sp. 193 u. f. (Diese Entwicklungen können vielleicht von Nutzen sein, wenn Beobachtungen von sehr großem und sehr kleinem Gewicht in dieselbe Ausgleichung eingehen.)

Die neue Darstellung ist einfacher.

Beispiel. Vergl. S. 262.

Die Fehlergleichungen seien wieder:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\lambda_1 &= -1 + x + y + z && \text{Gew. } 1\\
\lambda_2 &= -1 + 2x - 3y \quad \cdot && \text{,, } 1\\
\lambda_3 &= -2 \quad \cdot \quad \cdot + z && \text{,, } 1
\end{aligned}
$$

und die Bedingungsgleichungen:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
0 &= +1 + x + y + z\\
0 &= -3 \quad \cdot \quad + y - z.
\end{aligned}
$$

Die Normalgleichungen geben die folgende Übersicht; zur Berechnung der Gewichte von x, y, z und der Funktion $x + y + z$ sind noch vier Vertikalspalten angehängt.

(8)

x	y	z	k_1	k_2	Konst.	(x)	(y)	(z)	$(x+y+z)$
+ 5	− 5	+ 1	+ 1	*	+ 3	+ 1	*	*	+ 1
− 5	+ 10	+ 1	+ 1	+ 1	− 2	*	+ 1	*	+ 1
+ 1	+ 1	+ 2	+ 1	− 1	+ 3	*	*	+ 1	+ 1
+ 1	+ 1	+ 1	*	*	− 1	*	*	*	*
*	+ 1	− 1	*	*	+ 3	*	*	*	*

Hieraus folgen nach dem Gaußschen Algorithmus die reduzierten Normalgleichungen:

(9)

x	y	z	k_1	k_2	Konst.	(x)	(y)	(z)	$(x+y+z)$
+ 5	− 5	+ 1	+ 1	*	+ 3	+ 1	*	*	+ 1
	+ 5	+ 2	+ 2	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	*	+ 2
		+ 1	*	− 1,4	+ 2	− 0,6	− 0,4	+ 1	*
			− 1	− 0,4	− 2	− 0,6	− 0,4	*	− 1
				− 2	+ 6,4	− 0,8	− 0,6	+ 1,4	*

oder:

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
x - y + 0{,}2z + 0{,}2k_1 \quad \cdot \quad &= +0{,}6\\
y + 0{,}4z + 0{,}4k_1 + 0{,}2k_2 &= +0{,}2\\
z \quad \cdot \quad - 1{,}4k_2 &= +2{,}0\\
k_1 + 0{,}4k_2 &= +2{,}0\\
k_2 &= -3{,}2,
\end{aligned}
$$

woraus folgt:

$$(11)\qquad \begin{gathered} k_2 = -\,3{,}2\,, \quad k_1 = +\,3{,}28\,, \\ z = -\,2{,}48\,, \quad y = +\,0{,}52\,, \quad x = +\,0{,}96\,. \end{gathered}$$

Ferner wird:

$$(12)\qquad \begin{gathered} \lambda_1 = -\,2{,}00\,, \quad \lambda_2 = -\,0.64\,, \quad \lambda_3 = -\,4{,}48 \\ [\lambda\lambda] = 24{,}48. \end{gathered}$$

Nach (13), S. 266, wird:

$$[\lambda\lambda] = 6 - 3\cdot 0{,}96 + 2\cdot 0{,}52 + 3\cdot 2{,}48 + 1\cdot 3{,}28 + 3\cdot 3{,}20 = 24{,}48$$

und nach (14), S. 266:

$$[\lambda\lambda] = 6 - \frac{3^2}{5} - \frac{1^2}{5} - \frac{2^2}{1} + \frac{2^2}{1} + \frac{6{,}4^2}{2} = 24{,}48.$$

Also ist

$$(13)\qquad \mu = \pm\sqrt{\frac{24{,}48}{3-3+2}} = \pm\,3{,}50.$$

Das reziproke Gewicht wird für

$$(14)\qquad \left\{ \begin{array}{rllllll} x & \text{gleich}\ \frac{1}{5} + \frac{1}{5} & + \frac{0{,}36}{1} & - \frac{0{,}36}{1} & - \frac{0{,}64}{2} & = 0{,}08\,, \\ & & \multicolumn{4}{l}{\text{also Gewicht} = 12{,}5;} \\ y & \text{gleich}\ \cdot\ \quad \frac{1}{5} & + \frac{0{,}16}{1} & - \frac{0{,}16}{1} & - \frac{0{,}36}{2} & = 0{,}02\,, \\ & & \multicolumn{4}{l}{\text{also Gewicht} = 50;} \\ z & \text{gleich}\ \cdot\ \quad \cdot & \quad \frac{1}{1} & \quad \cdot & - \frac{1{,}96}{2} & = 0{,}02\,, \\ & & \multicolumn{4}{l}{\text{also Gewicht} = 50;} \\ x+y+z & \text{gleich}\ \frac{1}{5} + \frac{4}{5} & \quad \cdot & - \frac{1}{1} & \quad \cdot & = 0\,, \\ & & \multicolumn{4}{l}{\text{also Gewicht} = \infty\,.} \end{array} \right.$$

Das unendlich große Gewicht in der Bestimmung der Funktion $x + y + z$ ist eine notwendige Folge des Umstandes, daß dies Aggregat durch eine Bedingungsgleichung gegeben ist.

Das Normalgleichungssystem (8) läßt sich auch leicht allgemein auflösen, ohne daß man den Gaußschen Algorithmus benutzt; man erhält für das System der Q:

(15)

	1	2	3	4	5
1	+ 0,08	— 0,04	— 0,04	+ 0,44	+ 0,40
2	— 0,04	+ 0,02	+ 0,02	+ 0,28	+ 0,30
3	— 0,04	+ 0,02	+ 0,02	+ 0,28	— 0,70
4	+ 0,44	+ 0,28	+ 0,28	— 1,08	+ 0,20
5	+ 0,40	+ 0,30	— 0,70	+ 0,20	— 0,50.

Hiernach sind also die reziproken Gewichte der Unbekannten x, y, z bzw. $Q_{1.1} = 0{,}08$, $Q_{2.2} = 0{,}02$, $Q_{3.3} = 0{,}02$ und das reziproke Gewicht der Funktion $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$ wird gleich

$$0{,}08\,\alpha_1^2 + 0{,}02\,\alpha_2^2 + 0{,}02\,\alpha_3^2 - 0{,}08\,\alpha_1\alpha_2 - 0{,}08\,\alpha_1\alpha_3 + 0{,}04\,\alpha_2\alpha_3,$$

also für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ wie es sein muß gleich null.

Wie ersichtlich ist, gestaltet sich die direkte Auflösung des Beispiels viel verwickelter, als die Zurückführung auf vermittelnde Beobachtungen nach S. 262. Es können aber doch Fälle eintreten, wo die direkte Auflösung von Vorteil ist. Ein wichtiges Beispiel hierzu liefert die Ausgleichung der Dreiecksnetze, bei der allerdings der direkten Auflösung diejenige Form gegeben wird, von der der folgende § 4 handeln wird. Bei Dreiecksnetzen zerfallen nämlich die Fehlergleichungen stationsweise in Gruppen; die Bedingungsgleichungen enthalten Unbekannte aus mehreren Gruppen: die Elimination einzelner Unbekannten mit Hilfe der Bedingungsgleichungen würde nun in den Fehlergleichungen die Anzahl der Unbekannten vermehren und die Arbeit verwickeln. Durch die im folgenden beschriebene Ausgleichung in zwei Teilen ergibt sich bei umfangreichen Aufgaben eine größere Übersichtlichkeit infolge der eintretenden Gliederung.

Praktische Beispiele, die sich sehr einfach gestalten, bieten die Ausgleichungen der Messungen auf trigonometrischen Stationen mit Anschlußzwang. Vergl. hierzu im 8. Kapitel § 6, V.

§ 4. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, zwischen deren Unbekannten Bedingungsgleichungen bestehen, durch Ausgleichung in zwei Teilen.

I. Erster Teil. Wir gleichen die vermittelnden Beobachtungen ohne Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen aus, setzen aber einstweilen voraus, daß die vermittelnden Beobachtungen allein auch eine vollständige Bestimmung ihrer Unbekannten enthalten. Das System der reduzierten Normalgleichungen, welches nun dieser erste Teil der Ausgleichung ergibt und welches ein demselben vollständiges äquivalentes Gleichungssystem darstellt, wird folgende Form erhalten:

$$(1)\quad \begin{aligned} x + \alpha_2' y + \alpha_3' z + \alpha_4' t &= \chi_1 \quad \text{Gew. } (aa) \\ y + \beta_3'' z + \beta_4'' t &= \chi_2 \quad\;\; \text{,, } (bb \cdot 1) \\ z + \gamma_4''' t &= \chi_3 \quad\;\; \text{,, } (cc \cdot 2) \\ t &= \chi_4 \quad\;\; \text{,, } (dd \cdot 3), \end{aligned}$$

wenn wir mit der Bezeichnung an S. 125, (20*), anknüpfen und wie dort nur vier Unbekannte voraussetzen.

II. Zweiter Teil. Die Werte x, y, z, t sind, da die Bedingungsgleichungen unberücksichtigt geblieben, noch nicht die vollständigen Werte der Unbekannten Bezeichnen wir diese mit $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$, $t + \tau$, so nehmen die Bedingungsgleichungen, deren hier drei vorausgesetzt werden mögen, die Form an:

$$(2)\quad \begin{aligned} 0 &= p_0 + p_1(x + \xi) + p_2(y + \eta) + p_3(z + \zeta) + p_4(t + \tau) \\ 0 &= q_0 + q_1(x + \xi) + q_2(y + \eta) + q_3(z + \zeta) + q_4(t + \tau) \\ 0 &= r_0 + r_1(x + \xi) + r_2(y + \eta) + r_3(z + \zeta) + r_4(t + \tau). \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun die geänderten Werte der Unbekannten nicht direkt, weil wir alsdann die Fehlergleichungen des ersten Teiles zuziehen müßten, sondern wir drücken die Unbekannten durch die voneinander unabhängigen fingierten Beobachtungswerte χ aus (§ 11, III, S 216). Den Verbesserungen ξ, η, ζ, τ entsprechen Verbesserungen v_1, v_2, v_3, v_4 der χ nach den Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{aligned} (x+\xi) + \alpha_2'(y+\eta) + \alpha_3'(z+\zeta) + \alpha_4'(t+\tau) &= \chi_1 + v_1 \quad \text{Gew. } (aa) \\ (y+\eta) + \beta_3''(z+\zeta) + \beta_4''(t+\tau) &= \chi_2 + v_2 \quad\;\; \text{,, } (bb \cdot 1) \\ (z+\zeta) + \gamma_4'''(t+\tau) &= \chi_3 + v_3 \quad\;\; \text{,, } (cc \cdot 2) \\ (t+\tau) &= \chi_4 + v_4 \quad\;\; \text{,, } (dd \cdot 3), \end{aligned}$$

wofür mit Rücksicht auf (1) gesetzt werden kann:

$$(3^*)\quad \begin{aligned} \xi + \alpha_2'\eta + \alpha_3'\zeta + \alpha_4'\tau &= v_1 \quad \text{Gew.} \quad (aa) \\ \eta + \beta_3''\zeta + \beta_4''\tau &= v_2 \quad\ \ ,, \quad (bb\cdot 1) \\ \zeta + \gamma_4'''\tau &= v_3 \quad\ \ ,, \quad (cc\cdot 2) \\ \tau &= v_4 \quad\ \ ,, \quad (dd\cdot 3). \end{aligned}$$

Sind die v gefunden, so lassen sich hieraus ξ, η, ζ, τ berechnen; man erhält sie auch nach den Formeln (34), S. 129:

$$(3^{**})\quad \begin{aligned} v_1 - \alpha_2'v_2 - \alpha_3''v_3 - \alpha_4'''v_4 &= \xi \\ v_2 - \beta_3''v_3 - \beta_4'''v_4 &= \eta \\ v_3 - \gamma_4'''v_4 &= \zeta \\ v_4 &= \tau, \end{aligned}$$

wenn α_3'', α_4''', β_4''' im ersten Teil der Ausgleichung berechnet wurden (was jedoch nur der Fall sein wird, wenn die Gewichte der Werte der Unbekannten von Interesse sind).

Setzt man für die Widersprüche der Bedingungsgleichungen bei Einführung der Ergebnisse x, y, z, t des ersten Teiles:

$$(4)\quad \begin{aligned} w_1 &= p_0 + p_1 x + p_2 y + p_3 z + p_4 t \\ w_2 &= q_0 + q_1 x + q_2 y + q_3 z + q_4 t \\ w_3 &= r_0 + r_1 x + r_2 y + r_3 z + r_4 t, \end{aligned}$$

so erhalten die Bedingungsgleichungen (2) die Form:

$$(5)\quad \begin{aligned} p_1\xi + p_2\eta + p_3\zeta + p_4\tau + w_1 &= 0 \\ q_1\xi + q_2\eta + q_3\zeta + q_4\tau + w_2 &= 0 \\ r_1\xi + r_2\eta + r_3\zeta + r_4\tau + w_3 &= 0. \end{aligned}$$

Eliminieren wir nun mit Hilfe des Systems (3*) hieraus der Reihe nach ξ, η, ζ, τ, so erhalten wir:

$$(6)\quad \begin{aligned} p_1 v_1 + (p_2\cdot 1)v_2 + (p_3\cdot 2)v_3 + (p_4\cdot 3)v_4 + w_1 &= 0 \\ q_1 v_1 + (q_2\cdot 1)v_2 + (q_3\cdot 2)v_3 + (q_4\cdot 3)v_4 + w_2 &= 0 \\ r_1 v_1 + (r_2\cdot 1)v_2 + (r_3\cdot 2)v_3 + (r_4\cdot 3)v_4 + w_3 &= 0, \end{aligned}$$

wobei

$$(6^*)\quad \begin{aligned} (p_2\cdot 1) &= p_2 - \alpha_2'p_1 \\ (p_3\cdot 2) &= p_3 - \alpha_3'p_1 - \beta_3''(p_2\cdot 1) \\ (p_4\cdot 3) &= p_4 - \alpha_4'p_1 - \beta_4''(p_2\cdot 1) - \gamma_4'''(p_3\cdot 2) \end{aligned}$$

und entsprechend für q und r. Diese Rechnung läßt sich bequem schematisch durchführen.

Kennt man bei Auflösung der Normalgleichungen des ersten Teiles die Koeffizienten p, q, r der Bedingungsgleichungen schon, so kann man die Koeffizienten von (6) auch gleich schematisch durch Anfügung von Vertikalspalten für die p, q, r mit entwickeln. Alsdann geht man nach dem Gaußschen Algorithmus über

von dem Schema

(7)

(aa)	(ab)	(ac)	(ad)	(al)	p_1	q_1	r_1
(ab)	(bb)	(bc)	(bd)	(bl)	p_2	q_2	r_2
(ac)	(bc)	(cc)	(cd)	(cl)	p_3	q_3	r_3
(ad)	(bd)	(cd)	(dd)	(dl)	p_4	q_4	r_4

zu dem Schema

(7*)

(aa)	(ab)	(ac)	(ad)	(al)	p_1	q_1	r_1
	$(bb\cdot 1)$	$(bc\cdot 1)$	$(bd\cdot 1)$	$(bl\cdot 1)$	$(p_2\cdot 1)$	$(q_2\cdot 1)$	$(r_2\cdot 1)$
		$(cc\cdot 2)$	$(cd\cdot 2)$	$(cl\cdot 2)$	$(p_3\cdot 2)$	$(q_3\cdot 2)$	$(r_3\cdot 2)$
			$(dd\cdot 3)$	$(dl\cdot 3)$	$(p_4\cdot 3)$	$(q_4\cdot 3)$	$(r_4\cdot 3)$

Die Korrelatengleichungen werden im Hinblick auf (6):

$$
\begin{aligned}
(aa)v_1 &= p_1k_1 + q_1k_2 + r_1k_3\\
(bb\cdot 1)v_2 &= (p_2\cdot 1)k_1 + (q_2\cdot 1)k_2 + (r_2\cdot 1)k_3\\
(cc\cdot 2)v_3 &= (p_3\cdot 2)k_1 + (q_3\cdot 2)k_2 + (r_3\cdot 2)k_3\\
(dd\cdot 3)v_4 &= (p_4\cdot 3)k_1 + (q_4\cdot 3)k_2 + (r_4\cdot 3)k_3
\end{aligned}
\tag{8}
$$

und die Normalgleichungen:

$$
\begin{aligned}
\{pp\}k_1 + \{pq\}k_2 + \{pr\}k_3 + w_1 &= 0\\
\{pq\}k_1 + \{qq\}k_2 + \{qr\}k_3 + w_2 &= 0\\
\{pr\}k_1 + \{qr\}k_2 + \{rr\}k_3 + w_3 &= 0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Hierin ist

$$
\begin{aligned}
\{pp\} &= \frac{p_1p_1}{(aa)} + \frac{(p_2\cdot 1)(p_2\cdot 1)}{(bb\cdot 1)} + \frac{(p_3\cdot 2)(p_3\cdot 2)}{(cc\cdot 2)} + \frac{(p_4\cdot 3)(p_4\cdot 3)}{(dd\cdot 3)}\\
\{pq\} &= \frac{p_1q_1}{(aa)} + \frac{(p_2\cdot 1)(q_2\cdot 1)}{(bb\cdot 1)} + \frac{(p_3\cdot 2)(q_3\cdot 2)}{(cc\cdot 2)} + \frac{(p_4\cdot 3)(q_4\cdot 3)}{(dd\cdot 3)}
\end{aligned}
\tag{9*}
$$

usw.

Nach dem Gaußschen Algorithmus wird aus (9) gefunden:

$$
(10)\qquad
\begin{array}{cccc|c}
k_1 & k_2 & k_3 & \text{Konst.} & \\
\hline
[pp] & [pq] & [pr] & w_1 & \\
 & [qq\cdot 1] & [qr\cdot 1] & [w_2\cdot 1] & \text{null} \\
 & & [rr\cdot 2] & [w_3\cdot 2] &
\end{array}
$$

Nachdem hieraus die k berechnet sind, geben die Gl. (8) die v und die Gl. (3*) oder (3**) die ξ, η, ζ, τ. Zur Auflösung hat man also der Reihe nach folgende Gleichungssysteme zu beachten:

(1), (6) mit (4) und (6*) bzw. (7*), (9) und (10),
(8) und (3*) oder (3**).

Man kann auch mit Übergehung der v die ξ, η, ζ, τ direkt aus den k berechnen, indem man die Gl. (8) in die Gl. (3**) einsetzt. Aber dies ist weniger einfach.

Dagegen ist die Berechnung von x, y, z, t überflüssig, da man die w anstatt nach (4) aus den Gleichungen:

$$
(4^*)\qquad
\begin{aligned}
w_1 &= p_0 + p_1\chi_1 + (p_2\cdot 1)\chi_2 + (p_3\cdot 2)\chi_3 + (p_4\cdot 3)\chi_4\\
w_2 &= q_0 + q_1\chi_1 + (q_2\cdot 1)\chi_2 + (q_3\cdot 2)\chi_3 + (q_4\cdot 3)\chi_4\\
w_3 &= r_0 + r_1\chi_1 + (r_2\cdot 1)\chi_2 + (r_3\cdot 2)\chi_3 + (r_4\cdot 3)\chi_4
\end{aligned}
$$

berechnen kann, die aus den Gl. (4) ebenso hervorgehen, wie die Gl. (6) aus den Gl. (5). Sind die v berechnet, so ergeben sich alsdann die vollständigen Werte der Unbekannten aus den Gl. (3).

Indessen wird man in der Regel ein praktisches Interesse daran haben, die x, y, z, t nach dem ersten Teil der Ausgleichung allein kennen zu lernen.

III. Mittlerer Fehler einer Funktion der Unbekannten. Drücken wir die Unbekannten durch die fingierten Beobachtungswerte $(\chi + v)$ aus, so gewährt dies den Vorteil, daß wir nur den zweiten Teil der Ausgleichung noch zu beachten haben. Da nun dieser zweite Teil nur in einer Ausgleichung bedingter Beobachtungen besteht, ist sodann die weitere Rechnung nach § 2, S. 244 u. f., auszuführen.

Es seien:

$$(11)\begin{cases} F_1, F_2, F_3, F_4 & \text{die partiellen Differentialquotienten der Funktion nach den Unbekannten } x, y, z, t \text{ und} \\ f_1, f_2, f_3, f_4 & \text{die totalen Differentialquotienten der Funktion nach } \chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4. \end{cases}$$

Während die ersteren sofort durch Differentiation erhalten werden, müssen die letzteren erst abgeleitet werden. Dies ist bereits in § 11, III B, S. 217, für eine lineare Funktion F geschehen (vergl. daselbst die Gl. (8) und (10)). Wir entnehmen daraus leicht, daß man allgemein hat:

$$(12) \qquad f_1 = F_1, \quad f_2 = (F_2 \cdot 1), \quad f_3 = (F_3 \cdot 2), \quad f_4 = (F_4 \cdot 3).$$

Diese Werte sind nun für die f in Formel (7), § 2, S. 246, einzuführen. Man hat mit Rücksicht auf die Normalgleichungen (9), welche hier an Stelle der Gl. (4), § 2, S. 244, treten:

$$(13)\begin{cases} \mu_F^2 = \mu^2(\mathrm{I} - \mathrm{II}); \\ \mathrm{I} = \{ff\} = \frac{f_1 f_1}{(aa)} + \frac{f_2 f_2}{(bb \cdot 1)} + \frac{f_3 f_3}{(cc \cdot 2)} + \frac{f_4 f_4}{(dd \cdot 3)} \\ \qquad = \frac{F_1^2}{(aa)} + \frac{(F_2 \cdot 1)^2}{(bb \cdot 1)} + \frac{(F_3 \cdot 2)^2}{(cc \cdot 2)} + \frac{(F_4 \cdot 3)^2}{(dd \cdot 3)}, \\ \mathrm{II} = \frac{\{pf\}^2}{\{pp\}} + \frac{\{qf \cdot 1\}^2}{\{qq \cdot 1\}} + \frac{\{rf \cdot 2\}^2}{\{rr \cdot 2\}}, \end{cases}$$

worin u. a. ist:

$$(13^*)\begin{cases} \{pf\} = \frac{p_1 f_1}{(aa)} + \frac{(p_2 \cdot 1) f_2}{(bb \cdot 1)} + \frac{(p_3 \cdot 2) f_3}{(cc \cdot 2)} + \frac{(p_4 \cdot 3) f_4}{(dd \cdot 3)} \\ \qquad = \frac{p_1 F_1}{(aa)} + \frac{(p_2 \cdot 1)(F_2 \cdot 1)}{(bb \cdot 1)} + \frac{(p_3 \cdot 2)(F_3 \cdot 2)}{(cc \cdot 2)} + \frac{(p_4 \cdot 3)(F_4 \cdot 3)}{(dd \cdot 3)} \end{cases}$$

und $\{qf \cdot 1\}$, $\{rf \cdot 2\}$ sich aus $\{qf\}$, $\{rf\}$ nach dem Gaußschen Algorithmus mit Hilfe der Normalgleichungen (9) des zweiten Teils der Ausgleichnung berechnen lassen.

Eine Vergleichung mit (9*), S. 272, zeigt, daß man die Größen $\{pf\}$, $\{qf\}$ usw. schematisch geradeso wie die Koeffizienten der Normalgleichungen (9) berechnen kann, wenn man $F_1 \xi + F_2 \eta + F_3 \zeta + F_4 \tau = 0$ wie eine letzte Bedingungsgleichung behandelt.

Ist die Funktion eine der Unbekannten selbst, z. B. $x + \xi$, so ist $F_1 = 1$, $F_2 = F_3 = F_4 = 0$; im übrigen ist aber die Rechnung wie im allgemeinen Falle.

IV. Verschiedene Formeln zur Berechnung des mittlern Beobachtungsfehlers μ. Wir wollen bezeichnen mit

$$(14) \begin{cases} e & \text{die Verbesserungen der Beobachtungswerte } l \text{ nach dem ersten Teile der Ausgleichung,} \\ \lambda & \text{die Verbesserungen der Beobachtungswerte } l \text{ nach der Gesamtausgleichung.} \end{cases}$$

Dann ist allgemein für beliebige Indices von $e, \lambda, l, a, b, c, d$ und g:

$$(15) \quad \begin{aligned} e &= -l + ax + by + cz + dt & \text{Gew. } g \\ \lambda &= -l + a(x+\xi) + b(y+\eta) + c(z+\zeta) + d(t+\tau) & \text{,, } \quad g. \end{aligned}$$

Es wird daher

$$\lambda = e + a\xi + b\eta + c\zeta + d\tau$$

und

$$[\lambda\lambda g] = [eeg] + [(a\xi + b\eta + c\zeta + d\tau)^2 g].$$

Mit Rücksicht auf die Gl. (3*), S. 271, hat man aber (siehe auch (15), S. 182):

$$a\xi + b\eta + c\zeta + d\tau = av_1 + (b \cdot 1)v_2 + (c \cdot 2)v_3 + (d \cdot 3)v_4$$

und daher

$$[(a\xi + b\eta + c\zeta + d\tau)^2 g] = (aa)v_1^2 + (bb \cdot 1)v_2^2 + (cc \cdot 2)v_3^2 + (dd \cdot 3)v_4^2;$$

vergl. S. 140, wo $(b \cdot 1), (c \cdot 2)$ usw. mit b', c'' usw. bezeichnet sind; man hat sich außerdem zu $a, b, c \ldots$ den Faktor $\sqrt{g}$ beigefügt zu denken, um die Ungleichheit der Gewichte zu berücksichtigen.

Damit erlangt man die Gleichung:

$$(16) \qquad (\lambda\lambda) = (ee) + \{vv\},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(aa)v_1^2 + (bb \cdot 1)v_2^2 + (cc \cdot 2)v_3^2 + (dd \cdot 3)v_4^2 = \{vv\}.$$

Man kann sowohl diese Summe wie auch (ee) mit Hilfe der Normalgleichungen berechnen; man hat nach § 7, S. 158, bzw. § 2, S. 246:

$$(17)\qquad \begin{aligned} (ee) &= (ll) - \frac{(al)^2}{(aa)} - \frac{(bl\cdot 1)^2}{(bb\cdot 1)} - \frac{(cl\cdot 2)^2}{(cc\cdot 2)} - \frac{(dl\cdot 3)^2}{(dd\cdot 3)}, \\ \{vv\} &= \frac{w_1{}^2}{\{pp\}} + \frac{\{w_2\cdot 1\}^2}{\{qq\cdot 1\}} + \frac{\{w_3\cdot 2\}^2}{\{rr\cdot 2\}}. \end{aligned}$$

Der mittlere Fehler μ einer Beobachtung vom Gewicht 1 kann auf dreierlei Art berechnet werden, nämlich nach den Ausdrücken:

$$(18)\qquad \sqrt{\frac{(\lambda\lambda)}{n-m+\sigma}}, \qquad \sqrt{\frac{(ee)}{n-m}}, \qquad \sqrt{\frac{\{vv\}}{\sigma}}.$$

Der erste Ausdruck berücksichtigt die ganze Ausgleichung, der zweite nur den ersten Teil, der dritte nur den zweiten Teil derselben. Theoretisch genommen müssen die drei Ausdrücke dasselbe ergeben, was der Fall ist, wenn die Proportion:

$$(\lambda\lambda) : (ee) : \{vv\} = n - m + \sigma : n - m : \sigma$$

erfüllt ist, wofür man wegen (16) einfacher schreibt:

$$(19)\qquad (ee) : \{vv\} = n - m : \sigma.$$

Über die Bedeutung des Umstandes, daß die zweite und dritte Formel für den mittlern Fehler erheblich voneinander verschiedene Werte geben, vergl. das 5. Kapitel.

V. Rückblick. Vergleicht man die Formeln des § 4 mit denen von § 3 II, S. 263, so ist unschwer zu erkennen, daß § 4 etwas wesentlich Neues nicht enthält. Die Gleichungen (9) des § 4, S. 272, werden auch bei der Auflösung des Systems (5) im § 3, S. 264, erhalten, nachdem die Unbekannten $x, y, z, \ldots$ eliminiert sind. Stillschweigend wurde dies dadurch angedeutet, daß die Summen $\{pp\}$, $\{pq\}$, ..., welche nach (11) § 3, S. 265, und (9*) § 4, S. 272, in der Tat dasselbe bedeuten, auch mit gleichen Symbolen bezeichnet wurden. Man bemerkt außerdem, daß $(p_0\cdot 3)$ und $(q_0\cdot 4)$ in (9*) § 3, S. 265, mit w_1 und $\{w_2\cdot 1\}$ in (10) § 4, S. 273, identisch sind; es stimmt daher $(\lambda\lambda)$ nach (14) § 3, S. 266, mit $(\lambda\lambda)$ nach (16) und (17) § 4, S. 275/276, völlig überein.

Wollen wir die Formel (13) § 3, S. 266, für $(\lambda\lambda)$ übertragen, so müssen wir für $x, y, z, \ldots$ nach der Bezeichnungsweise des § 4 jetzt $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta, \ldots$ setzen, während die Symbole $k_1, k_2, \ldots$ in beiden Verfahren, abgesehen vom Vorzeichen, übereinstimmen.

Eine eingehende und vielfältige Behandlung hat P. A. Hansen der Aufgabe der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen angedeihen lassen, zuerst 1831 in den Astr. Nachr. Band 9, Nr. 202. In Band 16, 1839, Nr. 361 ist u. a. eine direkte Auflösung, sehr ähnlich der unserigen aus § 3, II, S. 263, mit Gewichtsberechnung gegeben. In dem bereits auf S. 262 zitierten Werke von 1867 greift er die Aufgabe abermals an. Bei der Auflösung in zwei Teilen benutzt er zunächst anstatt der Gl. (3*) die Gl. (3**), S. 271, was umständlich ist; aber später geht er davon ab und wendet im wesentlichen (Suppl. 9, 1868) eine Auflösung wie die des § 4 an, die ich ungefähr gleichzeitig mittels der Theorie äquivalenter Beobachtungen selbständig gefunden und 1872 (in der 1. Auflage dieses Buches) veröffentlicht habe.

J. Zech hat 1857 in der einer Universitätseinladungsschrift beigefügten Abhandlung „Zur Methode der kleinsten Quadrate“ die direkte Lösung mit Gewichtsberechnung im Sinne der Gaußschen Theor. comb. gegeben.

Beispiel. (Vergl. S. 262/263 und S. 266/269.)
Die Fehlergleichungen seien wieder:

$$(1)\qquad \begin{array}{llr} \lambda_1 = -1 + x + y + z & \text{Gew.} & 1 \\ \lambda_2 = -1 + 2x - 3y \quad \cdot & \quad ,, & 1 \\ \lambda_3 = -2 \quad \cdot \quad \cdot \quad + z & \quad ,, & 1 \end{array}$$

und die Bedingungsgleichungen:

$$(2)\qquad \begin{array}{l} 0 = +1 + x + y + z \\ 0 = -3 \quad \cdot \quad + y - z; \end{array}$$

wir bilden die Normalgleichungen für (1) nach Schema (7), S. 272, und erhalten mit Rücksicht auf die Gewichtsberechnung für die Unbekannten:

(16)

x	y	z	Konst.	p	q	(x)	(y)	(z)
+ 5	− 5	+ 1	+ 3	+ 1	*	+ 1	*	*
− 5	+ 10	+ 1	− 2	+ 1	+ 1	*	+ 1	*
+ 1	+ 1	+ 2	+ 3	+ 1	− 1	*	*	+ 1

woraus folgt:

(17)

x	y	z	Konst.	p	q	(x)	(y)	(z)
+ 5	− 5	+ 1	+ 3	+ 1	*	+ 1	*	*
	+ 5	+ 2	+ 1	+ 2	+ 1	+ 1	+ 1	*
		+ 1	+ 2	0	− 1,4	− 0,6	− 0,4	+ 1

Das System der reduzierten Normalgleichungen ist demnach:

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
x - y + 0{,}2\,z &= +\,0{,}6 \qquad \text{Gew. } 5\\
y + 0{,}4\,z &= +\,0{,}2 \qquad \text{,,} \quad 5\\
z &= +\,2{,}0 \qquad \text{,,} \quad 1\,,
\end{aligned}
$$

und damit werden nach (4*), S. 273, die Widersprüche:

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
w_1 &= +\,1 + 1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}2 + \phantom{1{,}4}0 \cdot 2{,}0 = +\,2{,}0\\
w_2 &= -\,3 \qquad \cdot \qquad + 1 \cdot 0{,}2 - 1{,}4 \cdot 2{,}0 = -\,5{,}6\,.
\end{aligned}
$$

Die umgeformten Bedingungsgleichungen lauten nun nach (17):

$$
(20)\qquad
\begin{aligned}
v_1 + 2\,v_2 \qquad \cdot \qquad + 2{,}0 &= 0\\
\cdot \; + \; v_2 - 1{,}4\,v_3 - 5{,}6 &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Die Korrelatengleichungen werden hiernach, vergl. (8), S. 272:

$$
(21)\qquad 5\,v_1 = k_1\,, \qquad 5\,v_2 = 2\,k_1 + k_2\,, \qquad v_3 = -\,1{,}4\,k_2\,;
$$

nimmt man zugleich Rücksicht auf die Gewichtsberechnung, wofür sich die Koeffizienten aus (17) ergeben, so gelangt man damit zu den Normalgleichungen:

(22)

k_1	k_2	Konst.	(x)	(y)	(z)
+ 1,0	+ 0,4	+ 2,0	+ 0,60	+ 0,40	*
+ 0,4	+ 2,16	− 5,6	+ 1,04	+ 0,76	− 1,40

Die Auflösung von (22) ist:

(23)

k_1	k_2	Konst.	(x)	(y)	(z)
$+1{,}0$	$+0{,}4$	$+2{,}0$	$+0{,}60$	$+0{,}40$	*
	$+2{,}0$	$-6{,}4$	$+0{,}80$	$+0{,}60$	$-1{,}40$

Daraus folgt:

(23*) $$k_1 = -3{,}28\,, \qquad k_2 = +3{,}2\,;$$

also ist nach (21):

(24) $$v_1 = -0{,}656\,, \quad v_2 = -0{,}672\,, \quad v_3 = -4{,}480\,.$$

Daher wird nach (3), S. 270, mit Rücksicht auf (18):

(25) $$\begin{aligned} (x+\xi) - (y+\eta) + 0{,}2\,(z+\zeta) &= -0{,}056 \\ (y+\eta) + 0{,}4\,(z+\zeta) &= -0{,}472 \\ (z+\zeta) &= -2{,}480\,, \end{aligned}$$

woraus sich ergibt:

(26) $$z+\zeta = -2{,}480\,, \quad y+\eta = +0{,}520\,, \quad x+\xi = +0{,}960.$$

Für die reziproken Gewichte hat man nach dem ersten Teile der Ausgleichung, Tabelle (17):

(27) $$\begin{aligned} &\text{für } x && \mathrm{I} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{0{,}36}{1} = 0{,}76 \\ &\;\;\text{„}\;\; y && \mathrm{I} = \cdot \quad\; \frac{1}{5} + \frac{0{,}16}{1} = 0{,}36 \\ &\;\;\text{„}\;\; z && \mathrm{I} = \cdot \quad\;\; \cdot \quad\; \frac{1}{1} = 1{,}00 \end{aligned}$$

und nach dem zweiten Teile derselben, Tabelle (23):

(27*) $$\begin{aligned} &\text{für } x+\xi && \mathrm{II} = \frac{0{,}36}{1{,}0} + \frac{0{,}64}{2{,}0} = 0{,}68 \\ &\;\;\text{„}\;\; y+\eta && \mathrm{II} = \frac{0{,}16}{1{,}0} + \frac{0{,}36}{2{,}0} = 0{,}34 \\ &\;\;\text{„}\;\; z+\zeta && \mathrm{II} = \;\cdot\; + \frac{1{,}96}{2{,}0} = 0{,}98\,. \end{aligned}$$

Mithin ist:

(28) $$\mu^2_{x+\xi} = 0{,}08\,\mu^2, \qquad \mu^2_{y+\eta} = 0{,}02\,\mu^2, \qquad \mu^2_{z+\zeta} = 0{,}02\,\mu^2.$$

Die Verbesserungen λ der Gesamtausgleichung werden:

$$\lambda_1 = -2{,}00\,, \qquad \lambda_2 = -0{,}64\,, \qquad \lambda_3 = -4{,}48\,;$$

folglich ist

(29) $$(\lambda\lambda) = 24{,}48\,.$$

Die Summe $\{vv\}$ aus dem zweiten Teil der Ausgleichung ist nach (24) gleich 24,48 und nach (23) übereinstimmend:

$$\{vv\} = \frac{2,0^2}{1} + \frac{6,4^2}{2} = 24,48.$$

$\{vv\}$ und $(\lambda\lambda)$ haben gleiche Werte, da die Verbesserungen e des ersten Teiles der Ausgleichung null sind. In der Tat hat man aus (18) und (1):

$$x = -0,4\,, \qquad y = -0,6\,, \qquad z = +2,0$$

und

$$e_1 = e_2 = e_3 = 0\,;$$

das letztere auch übereinstimmend aus (ll) mittels (17):

$$(ee) = 6 - \frac{9}{5} - \frac{1}{5} - \frac{4}{1} = 0\,.$$

VI. Bessels Methode. Bei der Ausgleichung der Dreiecksnetze ist am häufigsten diejenige Methode benutzt worden, die F. W. Bessel 1838 in der „Gradmessung in Ostpreußen“ veröffentlicht hat. Es ist dabei eine allgemeine Auflösung der Normalgleichungen nötig, die zu den vermittelnden Beobachtungen allein gehören. Der Aufwand der Rechnung dürfte etwas größer sein, als bei der Methode von Hansen, welche hier in § 4, S. 269 u. f., entwickelt ist.

Die hauptsächlichsten Formeln bei $m = 3$ und $\sigma = 2$ sind folgende. Im ersten Teil der Ausgleichung werden x, y, z nach den Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned}(aa)x + (ab)y + (ac)z &= (al)\\ (ab)x + (bb)y + (bc)z &= (bl)\\ (ac)x + (bc)y + (cc)z &= (cl).\end{aligned} \tag{20}$$

Für die Verbesserungen ξ, η, ζ hat man dann, vergl. (5), S. 264, (wobei wir aber jetzt die k negativ nehmen wollen, was auch § 4 entspricht):

$$\begin{aligned}(aa)\xi + (ab)\eta + (ac)\zeta &= p_1k_1 + q_1k_2 = \sigma_1\\ (ab)\xi + (bb)\eta + (bc)\zeta &= p_2k_1 + q_2k_2 = \sigma_2\\ (ac)\xi + (bc)\eta + (cc)\zeta &= p_3k_1 + q_3k_2 = \sigma_3\,,\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}p_1\xi + \quad p_2\eta + \quad p_3\zeta + w_1 &= 0\\ q_1\xi + \quad q_2\eta + \quad q_3\zeta + w_2 &= 0.\end{aligned} \tag{22}$$

Die w haben dieselbe Bedeutung wie in (4), S. 271. Die σ sind zur Abkürzung eingeführt.

Wird nun bei Auflösung von (20) zugleich eine allgemeine Auflösung des Systems bewirkt, so sind die Q, welche zu (20) gehören, gegeben und man kann ansetzen:

$$(23)\qquad \begin{aligned} \xi &= Q_{1.1}\sigma_1 + Q_{1.2}\sigma_2 + Q_{1.3}\sigma_3 \\ \eta &= Q_{1.2}\sigma_1 + Q_{2.2}\sigma_2 + Q_{2.3}\sigma_3 \\ \zeta &= Q_{1.3}\sigma_1 + Q_{2.3}\sigma_2 + Q_{3.3}\sigma_3 . \end{aligned}$$

Nach Maßgabe von (21) führt man hier für die σ die k ein; werden dann die so umgewandelten Ausdrücke der ξ, η, ζ aus (23) in (22) eingesetzt, so bleiben zwei Gleichungen für k_1 und k_2 übrig, welche von den Normalgleichungen (9), S. 272, nicht verschieden sein können:

$$(24)\qquad \begin{aligned} \{pp\}k_1 + \{pq\}k_2 + w_1 &= 0 \\ \{pq\}k_1 + \{qq\}k_2 + w_2 &= 0 . \end{aligned}$$

C. G. Andrae hat 1867 in der „Dänischen Gradmessung", Bd. I*) als Ergänzung die Berechnung der mittleren Fehler gegeben. $(\lambda\lambda)$ zerfällt wie in (16), S. 275, in zwei Teile, dessen ersten (ee) man entsprechend der veränderten Auflösung der Normalgleichungen summarisch nach der Formel

$$(25)\qquad (ee) = (ll) - (al)x - (bl)y - (cl)z$$

berechnen kann. Für den zweiten Teil ist der für $\{vv\}$ in (17), S. 276, gegebene Ausdruck brauchbar.

Für μ_F^2 bleibt die schematische Berechnung wie auf S. 274 ($F_1\xi + F_2\eta + F_3\zeta = 0$ als letzte Bedingungsgleichung behandelt). Doch kann man den ersten Teil auch nach der Formel berechnen:

$$(26)\qquad \mathrm{I} = F_1{}^2 Q_{1.1} + 2F_1F_2Q_{1.2} + F_2{}^2Q_{2.2} + \cdots .$$

VII. Besondere Fälle der Aufgabe. A) Die Ausgleichung wird nicht wesentlich anders, wenn die Bedingungsgleichungen einen Teil der in den Fehlergleichungen vorkommenden Unbekannten nicht enthalten; man hat einfach p, q, r für diese

*) Siehe auch die Besprechung in der Vierteljahrsschrift der Astr. Gesellschaft. 12. Bd., 1877, S. 184 u. f.

Unbekannte null zu setzen. Bei Ausgleichung in zwei Teilen stelle man zur Vereinfachung der Rechnung diese Unbekannten im ersten Teile den andern voran (vergl. S. 217, § 11, IV).

B) Enthalten die Bedingungsgleichungen mehr Unbekannte als die Fehlergleichungen, so erfordert die Auflösung der Normalgleichungen, falls man den Gaußschen Algorithmus anwenden will, eine Umstellung in der Weise, daß die Unbekannten, welche allein in den Bedingungsgleichungen auftreten, in den Normalgleichungen hinter den k zu stehen kommen.

Bei einer Ausgleichung in zwei Teilen bilde man, wie bisher, das dem ersten Teile der Ausgleichung äquivalente System der χ und führe dies in die Bedingungsgleichungen ein. Zu den Gleichungssystemen (4), S. 271, oder (4*), S. 273, und (6), S. 271, werden jetzt noch Glieder hinzutreten, die den im ersten Teile nicht vorkommenden Unbekannten entsprechen. Die Aufgabe erhält von da ab die im folgenden § 5 abzuhandelnde Form.

C) Reichen die vermittelnden Beobachtungen allein zur Bestimmung der in ihren Fehlergleichungen vorkommenden Unbekannten nicht aus, so wird sich das bei der Auflösung der Normalgleichungen nach Gauß' Algorithmus zeigen, indem man auf Gleichungen stoßen wird, deren Koeffizienten null sind. Bei direkter Lösung nimmt man dann eine Umstellung der Normalgleichungen vor wie bei B.

Bei einer Ausgleichung in zwei Teilen kann man auch ohne Umstellung zum Ziele gelangen (vergl. S. 218, § 11, V), wie durch das folgende Beispiel erläutert werden mag. Man gelangt hierbei wieder zu der Aufgabe des folgenden § 5.

Beispiel. Es seien die Fehlergleichungen:

$$(1) \qquad \begin{array}{llr} \lambda_1 = -1 + 2x - 3y \quad \cdot & \text{Gew.} & 1 \\ \lambda_2 = -2 \quad \cdot \quad \cdot + z & ,, & 1 \end{array}$$

und die Bedingungsgleichungen:

$$(2) \qquad \begin{array}{l} 0 = +1 + x + y + z \\ 0 = -3 \quad \cdot \quad + y - z\,. \end{array}$$

Wir sehen sofort, daß die Fehlergleichungen (1) zur Bestimmung aller Unbekannten nicht ausreichen. Trotzdem bilden wir die Normalgleichungen und fügen dabei rechter Hand gleich die nötigen Vertikalspalten bei, namentlich auch zur Gewichtsberechnung für alle Unbekannten:

(3)

x	y	z	Konst.	p	q	(x)	(y)	(z)
+ 4	− 6	*	+ 2	+ 1	*	+ 1	*	*
− 6	+ 9	*	− 3	+ 1	+ 1	*	+ 1	*
*	*	+ 1	+ 2	+ 1	− 1	*	*	+ 1

Hieraus folgt:

(4)

x	y	z	Konst.	p	q	(x)	(y)	(z)
+ 4	− 6	*	+ 2	+ 1	*	+ 1	*	*
	*	*	*	+ 2,5	+ 1	+ 1,5	+ 1	*
		+ 1	+ 2	+ 1	− 1	*	*	+ 1

Man hat also die reduzierten Normalgleichungen:

$$
(5) \qquad \begin{aligned} x - 1{,}5\,y \quad \cdot &= +\,0{,}5 \\ z &= +\,2{,}0. \end{aligned}
$$

Die Fehler e der Gl. (1) werden hiermit gleich null, was auch die Rechnung nach der ersten Formel (17), S. 276, anzeigt:

$$
[ee] = 5 - \frac{2^2}{4} \cdot - \frac{2^2}{1} = 0\,.
$$

Wenn wir als Näherungswert von y null annehmen, so haben wir für die Widersprüche der Bedingungsgleichungen:

$$
(6) \qquad w_1 = +\,3{,}5\,, \qquad w_2 = -\,5{,}0\,;
$$

die Bedingungsgleichungen gehen damit nach (4) über in

$$
(7) \qquad \begin{aligned} v_1 + 2{,}5\,\eta + v_3 + 3{,}5 &= 0 \\ \eta - v_3 - 5{,}0 &= 0. \end{aligned}
$$

Sind hieraus die v und η ermittelt, vergl. S. 291/292, so geben die Gleichungen:

$$
(8)\qquad \begin{aligned}
(x+\xi) - 1{,}5\,\eta \quad \cdot \quad &= +\,0{,}5 + v_1 \\
(z+\zeta) &= +\,2{,}0 + v_3
\end{aligned}
$$

oder auch die Gleichungen:

$$
(8^*)\qquad \begin{aligned}
\xi - 1{,}5\,\eta \quad \cdot = v_1 &\quad \text{Gew. } 4 \\
\zeta = v_3 &\quad \text{Gew. } 1
\end{aligned}
$$

die vollständige Bestimmung der Unbekannten. (Fortsetzung folgt S. 291 im Anschluß an § 5.)

D) Hansen hat in dem Werke von 1867 u. a. ein Verfahren angegeben, welches in den vorstehenden besondern Fällen vielleicht Bedeutung erlangen kann. Er behandelt nämlich bei Bildung der Normalgleichungen die Bedingungsgleichungen wie Fehlergleichungen mit Gewichten, die nach den Umständen zu wählen sind. Setzen wir im Anschluß an S. 263/264 bei $m = 3$ und $\sigma = 2$:

$$
(27)\qquad \begin{aligned}
\{aa\} &= (aa) + p_1p_1 + q_1q_1 & \{bb\} &= (bb) + p_2p_2 + q_2q_2 \\
\{ab\} &= (ab) + p_1p_2 + q_1q_2 & &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\{ac\} &= (ac) + p_1p_3 + q_1q_3 & \{al\} &= (al) - p_0p_1 - q_0q_1 \\
& & &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}
$$

unter Annahme der Gewichte der Bedingungsgleichungen gleich 1, so werden die Normalgleichungen:

$$
(28)\qquad \left\{ \begin{aligned}
\{aa\}x + \{ab\}y + \{ac\}z + p_1k_1 + q_1k_2 &= \{al\} \\
\{ab\}x + \{bb\}y + \{bc\}z + p_2k_1 + q_2k_2 &= \{bl\} \\
\{ac\}x + \{bc\}y + \{cc\}z + p_3k_1 + q_3k_2 &= \{cl\} \\
p_1x + \quad p_2y + \quad p_3z \quad \cdot \quad\quad \cdot \quad &= -\,p_0 \\
q_1x + \quad q_2y + \quad q_3z \quad \cdot \quad\quad \cdot \quad &= -\,q_0\,.
\end{aligned} \right.
$$

Dies System ist von (5), S. 264, nicht wesentlich verschieden, da nur die letzten beiden Gleichungen (5). mit Koeffizienten multipliziert, den ersten drei beigefügt sind. Aber es ist leicht zu erkennen, daß man jetzt im ersten Teil der Auflösung von (28) bei Anwendung des Gaußschen Algorithmus nicht mehr auf quadratische Koeffizienten gleich null stoßen wird, wenn die Gewichte der Bedingungsgleichungen passend gewählt sind. Sie sind so anzunehmen, daß die Fehlergleichungen allein mit den zugezogenen Bedingungsgleichungen die Unbekannten bestimmen.

Im Falle des vorigen Beispiels hätte es auch genügt, für eine der Bedingungsgleichungen $g = 1$, für die andere $g = 0$ zu setzen.

Die Gleichungen (28) können nun auch ohne weiteres zur Berechnung der mittleren Fehler der Endergebnisse verwendet werden, wie man leicht erkennt, wenn man (28) lediglich als eine Umwandlung des Systems (5), S. 264, auffaßt und sich anstatt der rechten Seiten etwa F_1, F_2, F_3, 0, 0 geschrieben denkt.

§ 5. Bedingte Beobachtungen mit Unbekannten.

I. Reduktion auf bedingte Beobachtungen ohne Unbekannte, oder auf vermittelnde Beobachtungen. Im Anschluß an § 5 V, S. 52, haben wir zunächst:

$$(1)\qquad \begin{aligned} 0 &= w_1 + p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \cdots + p_n\lambda_n + a_1 x + b_1 y + \cdots \\ 0 &= w_2 + q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + \cdots + q_n\lambda_n + a_2 x + b_2 y + \cdots \\ 0 &= w_3 + r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + \cdots + r_n\lambda_n + a_3 x + b_3 y + \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

worin

$$(1^*)\qquad \begin{aligned} w_1 &= p_0 + p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n \\ w_2 &= q_0 + q_1 l_1 + q_2 l_2 + \cdots + q_n l_n \\ w_3 &= r_0 + r_1 l_1 + r_2 l_2 + \cdots + r_n l_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Führt man für x und y Näherungswerte $x_0, y_0, \ldots$ ein, so treten selbstverständlich zu den w noch die Glieder $a x_0, b y_0, \ldots$ hinzu, während in (1) nun die Verbesserungen $\xi, \eta, \ldots$ anstatt $x, y, \ldots$ zu substituieren sind.

Durch Elimination der Unbekannten $x, y, \ldots$ reduzieren wir die Aufgabe auf die Ausgleichung bedingter Beobachtungen, und zwar erhalten wir bei σ Bedingungsgleichungen, n Beobachtungen (denen die λ entsprechen) und m Unbekannten alsdann $(\sigma - m)$ Bedingungsgleichungen zwischen den λ allein. Sind dieselben ermittelt, so folgt für den mittlern Fehler der Gewichtseinheit:

$$(2)\qquad \mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda g]}{\sigma - m}}.$$

Wir können die Aufgabe auch auf vermittelnde Beobachtungen reduzieren, indem wir z. B. für $\sigma = 3$, $m = 2$ und $n = 4$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ durch λ_4, x, y ausdrücken. Um besser anzudeuten, daß λ_4 nun zu den Unbekannten hinzutritt, bezeichnen wir es durch z. Wir erhalten damit die Fehlergleichungen in der Form:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -l_1' + a_1'x + b_1'y + c_1'z \\
\lambda_2 &= -l_2' + a_2'x + b_2'y + c_2'z \\
\lambda_3 &= -l_3' + a_3'x + b_3'y + c_3'z \\
\lambda_4 &= \quad . \qquad . \qquad . \qquad z\,.
\end{aligned}$$

Allgemein sind es n Fehlergleichungen mit $(m + n - \sigma)$ Unbekannten.

Welches Verfahren man wählt, wird im speziellen Falle von der Bequemlichkeit der Rechnung abhängen. Oftmals kann auch eine direkte Lösung vorteilhaft sein.

II. Direkte Lösung. Indem $[\lambda\lambda g]$ mit Berücksichtigung von (1) zu einem Minimum werden soll, bilden wir den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
&[\lambda\lambda g] - 2k_1(w_1 + p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \cdots + p_n\lambda_n + a_1x + b_1y + \cdots) \\
(3)\qquad &\qquad - 2k_2(w_2 + q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + \cdots + q_n\lambda_n + a_2x + b_2y + \cdots) \\
&\qquad - 2k_3(w_3 + r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + \cdots + r_n\lambda_n + a_3x + b_3y + \cdots) \\
&\qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{aligned}$$

und setzen seine partiellen Differentialquotienten nach $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, x, y, \ldots$ gleich null. Das gibt die Korrelaten gleichungen:

$$(3^*)\qquad \left\{\begin{aligned}
\lambda_1 g_1 &= p_1k_1 + q_1k_2 + r_1k_3 + \cdots \\
\lambda_2 g_2 &= p_2k_1 + q_2k_2 + r_2k_3 + \cdots \\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \\
\lambda_n g_n &= p_nk_1 + q_nk_2 + r_nk_3 + \ldots \\
0 &= a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + \ldots \\
0 &= b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + \ldots \\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \,,
\end{aligned}\right.$$

womit die Gleichungen (1) übergehen in:

$$(4)\left\{\begin{array}{l}(pp)k_1+(pq)k_2+(pr)k_3+\cdots+a_1x+b_1y+\cdots+w_1=0\\(pq)k_1+(qq)k_2+(qr)k_3+\cdots+a_2x+b_2y+\cdots+w_2=0\\(pr)k_1+(qr)k_2+(rr)k_3+\cdots+a_3x+b_3y+\cdots+w_3=0\\\quad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\\a_1k_1+\quad a_2k_2+\quad a_3k_3+\cdots\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot=0\\b_1k_1+\quad b_2k_2+\quad b_3k_3+\cdots\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot=0\\\quad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\end{array}\right.$$

Hierin ist:

$$(pp)=\frac{p_1p_1}{g_1}+\frac{p_2p_2}{g_2}+\cdots+\frac{p_np_n}{g_n}$$

$$(pq)=\frac{p_1q_1}{g_1}+\frac{p_2q_2}{g_2}+\cdots+\frac{p_nq_n}{g_n},\ \text{usw.}$$

Die Auflösung dieses Normalgleichungssystems erfolgt nach § 7, S. 152. Ist man bei Anwendung des Gaußschen Algorithmus so weit gelangt, daß die k eliminiert sind, so erhält man ein System, das wir symbolisch wie folgt bezeichnen wollen:

$$(5)\quad\begin{array}{l}-\{aa\}x-\{ab\}y-\cdots+\{aw\}=0\\-\{ab\}x-\{bb\}y-\cdots+\{bw\}=0\\\quad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\end{array}$$

und welches negativ genommen als ein Normalgleichungssystem für die Unbekannten $x, y, \ldots$ zu betrachten ist. Verfolgt man den Rechnungsgang, so erkennt man, daß u. a.

$$(6)\quad\begin{array}{l}\{ab\}=\dfrac{a_1b_1}{(pp)}+\dfrac{(a_2\cdot1)(b_2\cdot1)}{(qq\cdot1)}+\dfrac{(a_3\cdot2)(b_3\cdot2)}{(rr\cdot2)}+\cdots\\\{aw\}=-\dfrac{a_1w_1}{(pp)}-\dfrac{(a_2\cdot1)(w_2\cdot1)}{(qq\cdot1)}-\dfrac{(a_3\cdot2)(w_3\cdot2)}{(rr\cdot2)}-\cdots\end{array}$$

ist und $\{aa\}$ und $\{bb\}$ positive Größen sind.

Für $[\lambda\lambda g]$ entwickelt man leicht in derselben Weise wie früher die beiden Formeln:

$$(7)\quad\begin{array}{l}[\lambda\lambda g]=-wk,\\[\lambda\lambda g]=\dfrac{w_1^2}{(pp)}+\dfrac{(w_2\cdot1)^2}{(qq\cdot1)}+\dfrac{(w_3\cdot2)^2}{(rr\cdot2)}-\dfrac{\{aw\}^2}{\{aa\}}-\dfrac{\{bw\cdot1\}^2}{\{bb\cdot1\}}\pm\cdots.\end{array}$$

Die Anwesenheit der Glieder ax, by in (1) ist hiernach Veranlassung zu einer Verminderung von $[\lambda\lambda g]$, was auch sein muß, soll andrerseits μ seinen Wert (2) durch Hinzutritt jener Glieder in (1) nicht ändern, da gleichzeitig dadurch eine Verminderung des Nenners in der Formel für μ stattfindet.

III. Mittlerer Fehler einer Funktion F von $x, y, \ldots$ und den ausgeglichenen Beobachtungswerten $(l + \lambda)$. Wir verfahren im Prinzip wie in früheren Fällen, weshalb hier nur die Hauptmomente der Entwicklung Platz finden sollen.

Es seien:

$F_1, F_2, \ldots$ die partiellen Differentialquotienten der Funktion nach $x, y, \ldots$,

$f_1, f_2, \ldots f_n$ die partiellen Differentialquotienten der Funktion nach $l_1, l_2, \ldots l_n$;

man hat daraus die totalen Differentialquotienten von F nach den l abzuleiten. Für ein beliebiges l_i ist:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dl_i} &= f_i + f_1 \frac{d\lambda_1}{dl_i} + f_2 \frac{d\lambda_2}{dl_i} + \cdots + f_n \frac{d\lambda_n}{dl_i} \\ &\quad + F_1 \frac{\partial x}{\partial l_i} + F_2 \frac{\partial y}{\partial l_i} + \cdots. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Korrelatengleichungen (3*) ergibt sich daraus, indem man die Werte von $\frac{d\lambda}{dl_i}$ einsetzt:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \frac{dF}{dl_i} &= f_i + (pf) \frac{\partial k_1}{\partial l_i} + (qf) \frac{\partial k_2}{\partial l_i} + (rf) \frac{\partial k_3}{\partial l_i} + \cdots \\ &\quad + F_1 \frac{\partial x}{\partial l_i} + F_2 \frac{\partial y}{\partial l_i} + \cdots, \end{aligned}$$

worin wie früher bedeuten:

$$(pf) = \left[\frac{pf}{g}\right], \quad (qf) = \left[\frac{qf}{g}\right], \quad (rf) = \left[\frac{rf}{g}\right], \text{ usw.}$$

Mit Einführung von Hilfsgrößen Q, die sich in üblicher Weise aus dem System (4) bestimmen (vergl. § 1, S. 103/105), finden wir aber unter Beschränkung auf $\sigma = 3$ und $m = 2$ für k_1, k_2, k_3, x und y folgende Formeln, vermittels welcher sie durch die w und damit durch die l ausgedrückt werden:

$$(9) \qquad \begin{aligned} k_1 + w_1 Q_{1\cdot 1} + w_2 Q_{1\cdot 2} + w_3 Q_{1\cdot 3} &= 0 \\ k_2 + w_1 Q_{1\cdot 2} + w_2 Q_{2\cdot 2} + w_3 Q_{2\cdot 3} &= 0 \\ k_3 + w_1 Q_{1\cdot 3} + w_2 Q_{2\cdot 3} + w_3 Q_{3\cdot 3} &= 0 \\ x + w_1 Q_{1\cdot 4} + w_2 Q_{2\cdot 4} + w_3 Q_{3\cdot 4} &= 0 \\ y + w_1 Q_{1\cdot 5} + w_2 Q_{2\cdot 5} + w_3 Q_{3\cdot 5} &= 0. \end{aligned}$$

Wenn wir in diese Ausdrücke die Werte der w nach (1*) einführen, so erhalten wir:

$$
(10)\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial k_1}{\partial l_i} &= -(p_i Q_{1\cdot 1} + q_i Q_{1\cdot 2} + r_i Q_{1\cdot 3})\\
\frac{\partial k_2}{\partial l_i} &= -(p_i Q_{1\cdot 2} + q_i Q_{2\cdot 2} + r_i Q_{2\cdot 3})\\
\frac{\partial k_3}{\partial l_i} &= -(p_i Q_{1\cdot 3} + q_i Q_{2\cdot 3} + r_i Q_{3\cdot 3})\\
\frac{\partial x}{\partial l_i} &= -(p_i Q_{1\cdot 4} + q_i Q_{2\cdot 4} + r_i Q_{3\cdot 4})\\
\frac{\partial y}{\partial l_i} &= -(p_i Q_{1\cdot 5} + q_i Q_{2\cdot 5} + r_i Q_{3\cdot 5}).
\end{aligned}
$$

Hiermit geht $\frac{dF}{dl_i}$ über in:

$$
(11)\quad \frac{dF}{dl_i} = f_i - L_1 p_i - L_2 q_i - L_3 r_i,
$$

worin

$$
\begin{aligned}
L_1 &= (pf)Q_{1\cdot 1} + (qf)Q_{1\cdot 2} + (rf)Q_{1\cdot 3} + F_1 Q_{1\cdot 4} + F_2 Q_{1\cdot 5}\\
L_2 &= (pf)Q_{1\cdot 2} + (qf)Q_{2\cdot 2} + (rf)Q_{2\cdot 3} + F_1 Q_{2\cdot 4} + F_2 Q_{2\cdot 5}\\
L_3 &= (pf)Q_{1\cdot 3} + (qf)Q_{2\cdot 3} + (rf)Q_{3\cdot 3} + F_1 Q_{3\cdot 4} + F_2 Q_{3\cdot 5}.
\end{aligned}
$$

Wir fügen noch bei:

$$
\begin{aligned}
L_4 &= (pf)Q_{1\cdot 4} + (qf)Q_{2\cdot 4} + (rf)Q_{3\cdot 4} + F_1 Q_{4\cdot 4} + F_2 Q_{4\cdot 5}\\
L_5 &= (pf)Q_{1\cdot 5} + (qf)Q_{2\cdot 5} + (rf)Q_{3\cdot 5} + F_1 Q_{4\cdot 5} + F_2 Q_{5\cdot 5}.
\end{aligned}
$$

Dieses Gleichungssystem kann betrachtet werden als die Auflösung des den Gleichungen (4) verwandten Systems:

$$
(12)\quad
\begin{aligned}
(pp)L_1 + (pq)L_2 + (pr)L_3 + a_1 L_4 + b_1 L_5 &= (pf)\\
(pq)L_1 + (qq)L_2 + (qr)L_3 + a_2 L_4 + b_2 L_5 &= (qf)\\
(pr)L_1 + (qr)L_2 + (rr)L_3 + a_3 L_4 + b_3 L_5 &= (rf)\\
a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 \quad \cdot \quad \cdot &= F_1\\
b_1 L_1 + b_2 L_2 + b_3 L_2 \quad \cdot \quad \cdot &= F_2.
\end{aligned}
$$

Nun ist aber nach (11) in $\mu_F^2 = \mu^2 Q_{F\cdot F}$:

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
Q_{F\cdot F} = \left[\frac{dF}{dl_i}\frac{dF}{dl_i}\frac{1}{g_i}\right] &= \left[\frac{dF}{dl_i}\frac{f_i}{g_i}\right] - L_1\left[\frac{dF}{dl_i}\frac{p_i}{g_i}\right]\\
&\quad - L_2\left[\frac{dF}{dl_i}\frac{q_i}{g_i}\right] - L_3\left[\frac{dF}{dl_i}\frac{r_i}{g_i}\right].
\end{aligned}
$$

Bildet man die Summe rechter Hand ebenfalls auf Grund von (11) und beachtet dabei die Gleichungen (12), so ergibt sich:

$$(14)\quad Q_{F \cdot F} = (ff) - \{(pf)L_1 + (qf)L_2 + (rf)L_3 + F_1 L_4 + F_2 L_5\}.$$

Eliminiert man hieraus mittels (12) unter Anwendung des Gaußschen Algorithmus die L, so folgt:

$$(14^*)\quad Q_{F \cdot F} = (ff) - \left(\frac{(pf)^2}{(pp)} + \frac{(qf \cdot 1)^2}{(qq \cdot 1)} + \frac{(rf \cdot 2)^2}{(rr \cdot 2)} - \frac{(F_1 \cdot 3)^2}{\{aa\}} - \frac{(F_2 \cdot 4)^2}{\{bb \cdot 1\}}\right).$$

Abgekürzt ist:

$$(15)\qquad Q_{F\,F} = \mathrm{I} - \mathrm{II}; \qquad \mu_F^2 = \mu^2(\mathrm{I} - \mathrm{II}),$$

wobei die Bedeutung von I und II unmittelbar ersichtlich ist.

Wir überlassen es dem Leser nachzuweisen, daß die jetzt gegebenen Formeln mit denen für den speziellen Fall vermittelnder oder bedingter Beobachtungen übereinstimmen.*)

Ein einfaches Beispiel gewährt auch der Fall, daß zu bereits ausgeglichenen vermittelnden Beobachtungen noch eine Beobachtung hinzutritt. Die entsprechende Fehlergleichung betrachte man als Bedingungsgleichung und bilde nun einen Ausdruck wie (3), S. 286, nur daß bloß eine Korrelate auftritt. Für diese Aufgabe gab C. F. Gauß übrigens eine elegante Lösung im Art. 35 der Theor. comb.

IV. Zusammenfassung mehrerer Beobachtungen bei der Ausgleichung. Theoretisch ist die gewählte Form der Ausgleichung gleichgültig für das schließliche Ergebnis. Praktisch wird man die bequemste Form anwenden.

Von diesem Gesichtspunkte aus wird man manchmal ein Aggregat von Verbesserungen λ durch ein Symbol λ' ersetzen, wenn dieses Aggregat die einzige Verbindung der betreffenden λ ist und diese anderweit nicht vorkommen. Es ist dabei nur erforderlich, das Gewicht von λ' umgekehrt proportional dem mittlern Fehlerquadrate des Aggregats zu nehmen. Die Normalgleichungen bleiben dann ungeändert. Die Korrelatengleichungen für beide Formen der Ausgleichung zeigen leicht, wie aus λ' die einzel-

*) Bei allen Aufgaben mit Bedingungsgleichungen muß man selbstverständlich darauf achten, daß nur voneinander unabhängige Gleichungen benutzt werden; andernfalls kommt man bei dem Gaußschen Algorithmus auf verschwindende Gleichungen. Daß es nicht immer leicht ist, dergleichen zu vermeiden, zeigt ein im 8. Kap., § 3, IV behandeltes Beispiel.

nen λ berechnet werden können. Die Anteile der einzelnen Bestandteile von λ sind nämlich proportional ihren mittlern Fehlerquadraten zu setzen. Vergl. hierzu u. a. das Beispiel auf S. 235/236.

Beispiel. Die Bedingungsgleichungen seien, wenn wir die Verbesserungen mit v bezeichnen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} v_1 + 2{,}5\,\eta + v_3 + 3{,}5 &= 0 \\ \eta - v_3 - 5{,}0 &= 0\,. \end{aligned}$$

Gewicht für v_1 gleich 4, für v_3 gleich 1.

Die Unbekannte η müßte nun, um auf die Form des Systems (1), S. 285, zu kommen, v_3 nachgestellt werden: aber man erkennt leicht, daß der vorher angegebene Rechnungsgang sich auch unmittelbar auf die jetzige Anordnung anwenden läßt. Die Korrelatengleichungen werden:

$$(2) \qquad \begin{aligned} 4\,v_1 &= k_1 \quad \cdot \\ 0 &= 2{,}5\,k_1 + k_2 \\ v_3 &= k_1 - k_2: \end{aligned}$$

die Normalgleichungen sind daher:

$$(3) \qquad \begin{array}{rcccl} 1{,}25\,k_1 & + 2{,}5\,\eta & - k_2 & + 3{,}5 & = 0 \\ +\,2{,}5\,k_1 & \cdot & + k_2 & \cdot & = 0 \\ -\,k_1 & +\,\eta & + k_2 & - 5{,}0 & = 0\,. \end{array}$$

Bei der Auflösung derselben berücksichtigen wir zugleich die Gewichtsberechnung der drei nachfolgenden Funktionen von v_1, η, v_3:

$$(4) \qquad \begin{array}{llll} 1. & v_1 + 1{,}5\,\eta & & \cdot \\ 2. & \cdot & \eta & \cdot \\ 3. & \cdot & \cdot & v_3\,, \end{array}$$

wofür

$$\begin{array}{llll} 1.\ (pf) = 0{,}25 & F = 1{,}5 & (qf) = 0 \\ 2. \qquad \cdot & \quad 1{,}0 & \quad \cdot \\ 3. \qquad 1{,}0 & \quad \cdot & \quad -1{,}0\,. \end{array}$$

Die entsprechenden Vertikalreihen sind in (5) beigefügt:

(5)

k_1	η	k_2	Konst.	1.	2.	3.
+ 1,25	+ 2,5	− 1	+ 3,5	+ 0,25	*	+ 1,0
+ 2,5	*	+ 1	0	+ 1,5	+ 1,0	*
− 1	+ 1	+ 1	− 5,0	*	*	− 1,0

Daraus folgt nach Gauß' Algorithmus:

	k_1	η	k_2	Konst.	1.	2.	3.
(6)	$+1{,}25$	$+2{,}5$	-1	$+3{,}5$	$+0{,}25$	*	$+1{,}0$
		$-5{,}0$	$+3$	$-7{,}0$	$+1{,}0$	$+1{,}0$	$-2{,}0$
			$+2$	$-6{,}4$	$+0{,}8$	$+0{,}6$	$-1{,}4$

Das System reduzierter Normalgleichungen wird also:

$$\begin{aligned} k_1 + 2\eta - 0{,}8\,k_2 + 2{,}8 &= 0 \\ \eta - 0{,}6\,k_2 + 1{,}4 &= 0 \\ k_2 - 3{,}2 &= 0\,, \end{aligned} \tag{7}$$

woraus sich findet:

$$k_2 = +3{,}2\,, \qquad \eta = +0{,}52\,, \qquad k_1 = -1{,}28\,. \tag{8}$$

Die Korrelatengleichungen ergeben hiermit:

$$v_1 = -0{,}32\,, \qquad v_3 = -4{,}48\,. \tag{9}$$

Zur Berechnung der reziproken Gewichte der erwähnten drei Funktionen ist mit Hilfe der drei letzten Vertikalspalten in (6)

$$\text{für die erste: } \mathrm{I} = 0{,}25 \qquad \mathrm{II} = \frac{0{,}0625}{1{,}25} - \frac{1{,}00}{5{,}0} + \frac{0{,}64}{2} = +0{,}17$$

$$\text{„ „ zweite: } \mathrm{I} = 0 \qquad \mathrm{II} = \;\cdot\; - \frac{1{,}00}{5{,}0} + \frac{0{,}36}{2} = -0{,}02$$

$$\text{„ „ dritte: } \mathrm{I} = 1{,}00 \qquad \mathrm{II} = \frac{1{,}00}{1{,}25} - \frac{4{,}00}{5{,}0} + \frac{1{,}96}{2} = +0{,}98\,;$$

damit wird nach (15), S. 290.

$$\begin{cases} \text{für die erste: } \mu_1^2 = 0{,}08\,\mu^2 & \text{also das Gewicht } = 12{,}5 \\ \text{„ „ zweite: } \mu_2^2 = 0{,}02\,\mu^2 & \text{„ „ „ } = 50 \\ \text{„ „ dritte: } \mu_3^2 = 0{,}02\,\mu^2 & \text{„ „ „ } = 50\,. \end{cases} \tag{10}$$

Endlich ist nach der zweiten Gleichung (7), S. 287:

$$(vv) = \frac{3{,}5^2}{1{,}25} - \frac{7{,}0^2}{5{,}0} + \frac{6{,}4^2}{2} = 20{,}48\,, \tag{11}$$

was mit der direkten Rechnung aus den einzelnen v übereinstimmt: $4 \cdot 0{,}32^2 + 4{,}48^2 = 20{,}48$.

Es wird nun, da $\sigma = 2$, $m = 1$ ist:

$$\mu = \pm\sqrt{20{,}48} = \pm 4{,}53\,. \tag{12}$$

Das eben behandelte Beispiel ist zugleich die Fortsetzung des Beispiels auf S. 282/284. Man findet dort mittels der Werte v_1, v_3 und η aus (8*):

$$(13)\qquad \xi = +0{,}46\,, \qquad \eta = +0{,}52\,, \qquad \zeta = -4{,}48$$

und aus (5), S. 283, oder (8), S. 284, da $y = 0$ ist:

$$(14)\qquad x + \xi = +0{,}96\,, \qquad y + \eta = +0{,}52\,, \qquad z + \zeta = -2{,}48.$$

Die mittlern Fehlerquadrate dieser Werte sind in (10) der Reihe nach enthalten, wie ein Blick auf die Funktionen (4) und die Gleichungen (8*) auf S. 284 zeigt.

Mit den Werten (14) werden die λ des Beispiels auf S. 282:

$$(15)\qquad \begin{gathered} \lambda_1 = -0{,}64\,, \qquad \lambda_2 = -4{,}48\,, \\ [\lambda\lambda] = 20{,}48\,, \end{gathered}$$

also mit (vv) übereinstimmend, wie es wegen $[ee] = 0$ sein muß. μ behält den Wert (12), da $n = 2$, $m = 3$, $\sigma = 2$, mithin $n - m + \sigma = 1$ ist.

§ 6. Partiell äquivalente Beobachtungsreihen.

I. Definition. Wenn eine fingierte Beobachtung einer Größe denselben Wert und dasselbe Gewicht ergibt wie die Ausgleichung, so kann man sagen: es ist jene Beobachtung den gegebenen Beobachtungen in bezug auf diese Unbekannte partiell äquivalent. Diese Ausdrucksweise kann man übertragen auf den Fall, wo es sich um eine Funktion von mehreren Ausgleichungswerten handelt.

II. Partielle Äquivalenz im Falle vermittelnder Beobachtungen. Geben r fingierte Beobachtungen nicht nur von ebenso vielen verschiedenen Funktionen der Unbekannten dieselben Werte und Gewichte, sondern auch von beliebigen Funktionen dieser Funktionen dieselben Werte und Gewichte als die Ausgleichung, so sind jene Beobachtungen als den gegebenen n Beobachtungen bezüglich der r Funktionen partiell äquivalent zu bezeichnen.

Bildet man die lineare Funktion der Funktionen $F', F'', \ldots F^{(r)}$:

$$(1)\qquad \varrho_1 F' + \varrho_2 F'' + \cdots + \varrho_r F^{(r)}.$$

worin die ϱ unbestimmte Koeffizienten sind, so genügt es, die Äquivalenzbedingungen für (1) aufzustellen, um sie bezüglich der r Funktionen zu erhalten.

$r = n$ gibt vollständige Äquivalenz.

Bei $r > n$ sind daher $r - n$ der Funktionen für die Aufstellung der Äquivalenz einfach wegzulassen.

Praktisch interessant ist besonders der Fall partieller Äquivalenz für zwei Funktionen F' und F''. Wir setzen

$$F = \varrho_1 F' + \varrho_2 F'' \tag{2}$$

und haben bei drei Unbekannten nach § 9 (14), S. 182:

$$\mu_F^2 = \mu^2 \left\{ \frac{F_1^2}{(aa)} + \frac{(F_2 \cdot 1)^2}{(bb \cdot 1)} + \frac{(F_3 \cdot 2)^2}{(cc \cdot 2)} \right\}. \tag{3}$$

Ein Blick auf die Gl. (15), S. 182, zeigt aber, daß man hat:

$$\begin{aligned} F_1 &= \varrho_1 F_1' + \varrho_2 F_1'' \\ (F_2 \cdot 1) &= \varrho_1 (F_2' \cdot 1) + \varrho_2 (F_2'' \cdot 1) \\ (F_3 \cdot 2) &= \varrho_1 (F_3' \cdot 2) + \varrho_2 (F_3'' \cdot 2), \end{aligned}$$

womit sich ergibt:

$$\begin{aligned} \mu_F^2 = {} & \mu^2 \left\{ \frac{F_1'^2}{(aa)} + \frac{(F_2' \cdot 1)^2}{(bb \cdot 1)} + \frac{(F_3' \cdot 2)^2}{(cc \cdot 2)} \right\} \cdot \varrho_1^2 \\ & + \mu^2 \left\{ \frac{F_1''^2}{(aa)} + \frac{(F_2'' \cdot 1)^2}{(bb \cdot 1)} + \frac{(F_3'' \cdot 2)^2}{(cc \cdot 2)} \right\} \cdot \varrho_2^2 \\ & + \mu^2 \left\{ \frac{F_1' F_1''}{(aa)} + \frac{(F_2' \cdot 1)(F_2'' \cdot 1)}{(bb \cdot 1)} + \frac{(F_3' \cdot 2)(F_3'' \cdot 2)}{(cc \cdot 2)} \right\} \cdot 2 \varrho_1 \varrho_2 . \end{aligned} \tag{4}$$

oder abgekürzt:

$$\mu_F^2 = \mu^2 \{ Q_{1 \cdot 1} \varrho_1^2 + Q_{2 \cdot 2} \varrho_2^2 + 2 Q_{1 \cdot 2} \varrho_1 \varrho_2 \}. \tag{5}$$

$Q_{1 \cdot 1}$ und $Q_{2 \cdot 2}$ sind also die reziproken Gewichte für F' und F''. Bei ihrer Berechnung findet man, wie ersichtlich, auch leicht $Q_{1 \cdot 2}$.

Sind nun $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ die äquivalenten Beobachtungen mit den Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= -\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{a}_1 F' + \mathfrak{b}_1 F'' \quad \text{Gew. } 1 \\ 0 &= -\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{a}_2 F' + \mathfrak{b}_2 F'' \quad \text{„} \quad 1, \end{aligned} \tag{6}$$

so wird man F durch $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ auszudrücken haben. Es sei

$$F = \varkappa_1 \mathfrak{l}_1 + \varkappa_2 \mathfrak{l}_2 ; \tag{7}$$

die Substitution von (6) in (7) gibt dann durch Vergleichung mit (2):

$$(8) \qquad \varrho_1 = \varkappa_1 \mathfrak{a}_1 + \varkappa_2 \mathfrak{a}_2, \quad \varrho_2 = \varkappa_1 \mathfrak{b}_1 + \varkappa_2 \mathfrak{b}_2,$$

oder

$$(9) \qquad \varkappa_1 = \frac{\varrho_1 \mathfrak{b}_2 - \varrho_2 \mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_1}, \quad \varkappa_2 = \frac{\varrho_2 \mathfrak{a}_1 - \varrho_1 \mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_1}.$$

Es ist nun:

$$(10) \quad \mu_F^2 = \mu^2(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) = \mu^2 \frac{[\mathfrak{b}\mathfrak{b}]\varrho_1^2 + [\mathfrak{a}\mathfrak{a}]\varrho_2^2 - 2[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\varrho_1\varrho_2}{(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_1)^2}.$$

Die Vergleichung mit (5) gibt die Äquivalenzbedingungen:

$$(11) \quad [\mathfrak{b}\mathfrak{b}] = Q_{1.1}\Delta, \quad [\mathfrak{a}\mathfrak{a}] = Q_{2.2}\Delta, \quad [\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = -Q_{1.2}\Delta,$$

wenn

$$(12) \qquad \Delta = (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_1)^2$$

gesetzt wird.

Δ muß unabhängig sein von den besonderen Werten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ eines äquivalenten Systems, da die linken Seiten der Gl. (11) für alle einander äquivalenten Systeme nach § 11, II, S. 214, konstante Werte behalten müssen. In der Tat kann man für (12) auch schreiben:

$$(13) \qquad \Delta = [\mathfrak{a}\mathfrak{a}][\mathfrak{b}\mathfrak{b}] - [\mathfrak{a}\mathfrak{b}]^2;$$

damit ergibt (11):

$$(14) \qquad \Delta = 1 : (Q_{1.1} Q_{2.2} - Q_{1.2}^2).$$

Die drei Gleichungen (11) zwischen den vier Größen $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ gestatten aus einer derselben die andern drei zu berechnen. Die Elimination von $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}_2$ aus (12) mittels (11) gibt zunächst für $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$:

$$(15) \qquad \mathfrak{a}^2 Q_{1.1} + \mathfrak{b}^2 Q_{2.2} + 2\mathfrak{a}\mathfrak{b} Q_{1.2} = 1,$$

welche Gleichung auch für $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$ gilt. Löst man nach $\mathfrak{b}$ auf, so wird infolge (14) und der zweiten Gl. (11):

$$(16) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{b}_1 &= -\mathfrak{a}_1 \frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}} \pm \frac{\mathfrak{a}_2}{Q_{2.2}\sqrt{\Delta}} \\ \mathfrak{b}_2 &= -\mathfrak{a}_2 \frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}} \mp \frac{\mathfrak{a}_1}{Q_{2.2}\sqrt{\Delta}}, \end{aligned}$$

worin die obern und die untern Zeichen einander entsprechen, wie man mit Rücksicht auf (11) erkennt.

Dividiert man mit $\mathfrak{a}_1$ bzw. $\mathfrak{a}_2$, so folgt:

$$(17)\quad \left(\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}+\frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_{2\cdot 2}}\right)\left(\frac{\mathfrak{b}_2}{\mathfrak{a}_2}+\frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_{2\cdot 2}}\right)=-\frac{1}{Q_{2\cdot 2}^2\,\Delta}=\left(\frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_{2\cdot 2}}\right)^2-\frac{Q_{1\cdot 1}}{Q_{2\cdot 2}}.$$

Jedem Koeffizientenverhältnis $\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}$ entspricht hiernach ein reeller Wert des andern, wobei, weil Δ positiv ist:

$$(18)\qquad \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\gtrless-\frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_{2\cdot 2}}\quad\text{ergibt}\quad\frac{\mathfrak{b}_2}{\mathfrak{a}_2}\lessgtr-\frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_{2\cdot 2}}.$$

Für $\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}=-\frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_{2\cdot 2}}$ ist $\frac{\mathfrak{b}_2}{\mathfrak{a}_2}$ diskontinuierlich $=\pm\infty$, mithin muß $\mathfrak{a}_2=0$ sein, weil nach (11) $\mathfrak{b}_2$ nicht unendlich werden kann.

Aus (16) folgt noch

$$(19)\qquad \left(\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_2}\right)^2=-\left(\frac{\mathfrak{b}_2}{\mathfrak{a}_2}+\frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_{2\cdot 2}}\right):\left(\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}+\frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_{2\cdot 2}}\right).$$

womit die zweite Gl. (11) ergibt:

$$(20)\qquad \mathfrak{a}_1^2=\frac{\frac{\mathfrak{b}_2}{\mathfrak{a}_2}+\frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_{2\cdot 2}}}{\frac{\mathfrak{b}_2}{\mathfrak{a}_2}-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}}\,Q_{2\cdot 2}\Delta,\quad \mathfrak{a}_2^2=\frac{\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}+\frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_{2\cdot 2}}}{\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}-\frac{\mathfrak{b}_2}{\mathfrak{a}_2}}\,Q_{2\cdot 2}\Delta.$$

$\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ sind wegen (18) immer reell; welches Vorzeichen man ihnen gibt, ist gleichgültig, da mit $\mathfrak{a}$ auch $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{l}$ das Zeichen wechseln.

Wird nun ein Koeffizientenverhältnis $\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}$ angenommen, so geben die Formeln (17), (20), (6) der Reihe nach $\mathfrak{b}_2:\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und damit $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$.

III. Besondere Form des äquivalenten Systems. Nehmen wir den Fall wieder vor, wo

$$\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}=-\frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_{2\cdot 2}},\quad \mathfrak{a}_2=0$$

ist, so geben die Gl. (6) über in:

$$(21)\qquad \begin{aligned} 0&=-\mathfrak{l}_1+\mathfrak{a}_1F'+\mathfrak{b}_1F'' &&\text{Gew. } 1\\ 0&=-\mathfrak{l}_2\qquad\cdot\quad+\mathfrak{b}_2F'' &&\quad\text{"}\quad 1,\end{aligned}$$

wofür

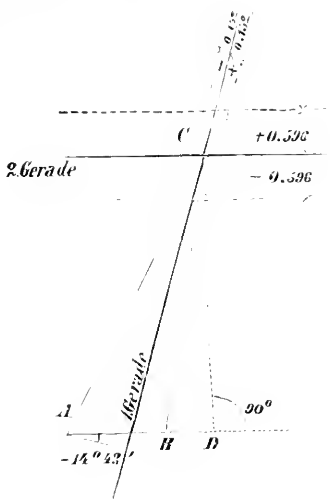
$$(22)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{a}_1=\sqrt{Q_{2\cdot 2}\Delta},\quad \mathfrak{a}_1^2+\mathfrak{b}_1^2=\frac{Q_{2\cdot 2}^2+Q_{1\cdot 2}^2}{Q_{2\cdot 2}}\Delta,\\ &\mathfrak{b}_1=-\mathfrak{a}_1\frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_{2\cdot 2}},\quad \mathfrak{b}_2=\frac{1}{\sqrt{Q_{2\cdot 2}}},\quad \mathfrak{a}_2^2+\mathfrak{b}_2^2=\frac{1}{Q_{2\cdot 2}}.\end{aligned}$$

Diese Form der äquivalenten Beobachtungen empfiehlt sich durch ihre Einfachheit. Man wird sie auch bei mehr als zwei Funktionen anwenden, z. B. bei drei solchen $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{b}_3 = 0$ setzen.

Beispiel. Gelegentlich seiner Gradmessung in den Ostseeprovinzen Rußlands wurde von W. Struve ein Dreieck zwischen den Punkten Halljall, Hohenkreutz und Mäggi-Pälüs gemessen. Es fand sich:

$$\text{(1)}\qquad \begin{array}{llrl} \text{Halljall} & \sphericalangle & A = & 64^0\ 36'\ \ 4''\!,13 \\ \text{Hohenkreutz} & ,, & B = & 99\ \ \ 3\ \ 41,74 \\ \text{Mäggi-Pälüs} & ,, & C = & 16\ \ 20\ \ 16,58 \end{array}$$

$$\text{Seite } AB = 11\,945{,}098 \text{ Toisen.}$$



Die Seite wollen wir ihrer Größe und Lage nach als streng richtig annehmen.

Nach Struve ist der sphärische Exzeß des Dreiecks gleich

$$\text{(2)}\qquad E = 4''\!,353\,.$$

Ohne auf die Bequemlichkeit der Rechnung Rücksicht zu nehmen, gleichen wir nun die drei Winkel nach vermittelnden Beobachtungen aus und setzen als Unbekannte die Winkel

$$\text{(3)}\qquad \begin{aligned} A &= 64^0\ 36'\ \ 4''\!,13 + \xi \\ B &= 99\ \ \ 3\ \ 41,74 + \eta\,. \end{aligned}$$

Man hat alsdann für die Verbesserungen von A, B, C:

$$\text{(4)}\qquad \begin{array}{lrrrl} \lambda_1 = & \cdot & +\,\xi & \cdot & \text{Gew. } 1 \\ \lambda_2 = & \cdot & \cdot & +\,\eta & \ \ ,,\ \ 1 \\ \lambda_3 = & +\,1''\!,903 & -\,\xi & -\,\eta & \ \ ,,\ \ 1\,. \end{array}$$

Entwickelt man hieraus die Normalgleichungen und damit die reduzierten Normalgleichungen, so folgt:

$$\text{(5)}\qquad \begin{array}{rl} \xi + 0{,}5\,\eta = +\,0{,}952 & \qquad [aa] \quad\ = 2 \\ \eta = +\,0{,}634 & \qquad [bb\cdot 1] = 1{,}5\,. \\ \xi = +\,0{,}635 & \end{array}$$

Ferner ist

(6) $\lambda_1 = +0'',635, \quad \lambda_2 = +0'',634 = \lambda_3; \quad [\lambda\lambda] = 1{,}207.$

Die korrigierten Winkel sind demnach:

(7)
$$\left.\begin{aligned} A &= 64^0\ 36'\ \ 4'',765 \\ B &= 99\ \ \ 3\ \ 42{,}374 \\ C &= 16\ \ 20\ \ 17{,}214 \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{c}\text{Summe:} \\ 180^0\ 0'\ 4'',353.\end{array}$$

Da $\mu^2 = 1{,}207$, so ist der mittlere Fehler mit seinen mittlern Grenzen:

(8)
$$\mu = \pm 1'',10\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm 0'',32 \cdots \pm 1'',88.$$

Um den Punkt C gegen die Linie AB festzulegen, beziehen wir C durch zwei rechtwinklige Koordinaten u und v auf A als Anfangspunkt und AB als Achse der u:

(9)
$$\begin{aligned} u &= AC\cos\left(A - \frac{2E'}{3}\right) = 17\,986{,}983 \text{ Toisen} \\ v &= AC\sin\left(A - \frac{E'}{3}\right) = 37\,880{,}881 \quad \text{"} \quad . \end{aligned}$$

Sph. Exzeß E' für $ACD = 6'',555$.

Wir betrachten nun beispielsweise u und v als zwei Funktionen F' und F'', in bezug auf welche partielle Äquivalenz hergestellt werden soll. Man hat alsdann mit Hilfe der Werte (9), E und E' als konstant angesehen, unter Beachtung der Beziehungen

(10)
$$AC = AB\,\frac{\sin\left(B - \frac{E}{3}\right)}{\sin\left(C - \frac{E}{3}\right)},$$

(11)
$$dA = \frac{d\xi}{206\,265}, \quad dB = \frac{d\eta}{206\,265}, \quad dC = -\frac{d\xi + d\eta}{206\,265},$$

wobei $d\xi$ und $d\eta$ in Sekunden zu verstehen sind, die Differentialquotienten:

(12)
$$\begin{aligned} F_1' &= \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0{,}1138 \qquad F_2' = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0{,}2836 \\ F_1'' &= \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0{,}7138 \qquad F_2'' = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0{,}5973. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf (5) folgt weiter:

(13)
$$\begin{aligned} (F_2' \cdot 1) &= 0{,}2836 - 0{,}5 \cdot 0{,}1138 = 0{,}2267 \\ (F_2'' \cdot 1) &= 0{,}5973 - 0{,}5 \cdot 0{,}7138 = 0{,}2404, \end{aligned}$$

und es wird nach S. 294, (4) und (5):

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
Q_{1\cdot 1} &= \frac{(0{,}1138)^2}{2} + \frac{(0{,}2267)^2}{1{,}5} = 0{,}040737\\
Q_{2\cdot 2} &= \frac{(0{,}7138)^2}{2} + \frac{(0{,}2404)^2}{1{,}5} = 0{,}293283\\
Q_{1\cdot 2} &= \frac{0{,}1138\cdot 0{,}7138}{2} + \frac{0{,}2267\cdot 0{,}2404}{1{,}5} = 0{,}076948;
\end{aligned}
$$

daher ist nach (14), S. 295:

$$\Delta = 165{,}94\,,\quad \sqrt{\Delta} = 12{,}882\,,\quad 1:\sqrt{\Delta} = 0{,}077630.$$

Nehmen wir an, daß die äquivalenten Gleichungen die Form III erhalten sollen, so wird nach (22), S. 296:

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_1 = 6{,}9761\,,\quad \mathfrak{b}_1 = -1{,}8303\,,\quad \mathfrak{b}_2 = 1{,}8465\\
\text{und}\quad &\mathfrak{a}_1^{\,2} = 48{,}67\,,\quad \mathfrak{b}_1^{\,2} = 3{,}35\,,\quad \mathfrak{b}_2^{\,2} = 3{,}41\,,\\
&\mathfrak{a}_1^{\,2} + \mathfrak{b}_1^{\,2} = 52{,}02\,,\quad \mathfrak{a}_2^{\,2} + \mathfrak{b}_2^{\,2} = 3{,}41\,;
\end{aligned}
$$

damit ergeben sich als äquivalente Gleichungen, indem noch $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ mittels (9) nach (21), S. 296, berechnet werden:

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
0 &= -56\,145 + 6{,}9761\,u - 1{,}8303\,v \quad \text{Gew. } 1\\
0 &= -69\,947 \quad\cdot\quad + 1{,}8465\,v \quad\;\; ,, \quad 1\,,
\end{aligned}
$$

wofür man auch setzen kann:

		Gew.	M. F.
(17)	$0 = -\;\;7\,784 + 0{,}9672\,u - 0{,}2538\,v$	52,02	$\pm\,0^t{,}152$
	$0 = -37\,881 \quad\cdot\quad + \quad v$	3,41	$\pm\,0{,}596$.

Die $\mathfrak{l}$ in (16) und (17) haben für uns keinen Wert, wir haben sie daher nicht scharf berechnet. Da nun u und v den Punkt C bestimmen, so ist das System (17) der frühern Bestimmung von C äquivalent. Diese Gleichungen stellen zwei Gerade dar, welche durch C hindurchgehen; denn allgemein ist die Gleichung einer solchen Geraden:

$$0 = -p + u\cos\nu + v\sin\nu,$$

worin p der normale Abstand der Geraden vom Anfangspunkte A und ν der Winkel dieser Normalen mit der u-Achse AB ist.

Für die

$$
(18)\quad
\begin{cases}
\text{erste Gerade ist } p_1 = \;\;7\,784 \pm 0{,}152 \text{ Tois.} & \nu_1 = -14^0\,42'\\
\text{zweite}\;\;,,\;\;\;\;,,\;\; p_2 = 37\,881 \pm 0{,}596 \;\;,, & \nu_2 = \;\;\;90\;\;\;\;0.
\end{cases}
$$

In der Figur sind die mittleren Unsicherheiten der äquivalenten Geraden im Verhältnis zu den Dimensionen des Dreiecks mit 10 000 multipliziert.

IV. Partielle Äquivalenz bei beliebiger Form der Ausgleichung. Das im vorhergehenden Gegebene läßt sich leicht auf den Fall übertragen, wo die r Funktionen, bezüglich welcher ein partiell äquivalentes System aufgestellt werden soll, Funktionen von Größen sind, die durch irgend eine Form der Ausgleichungsaufgabe gefunden worden sind. Nehmen wir insbesondere wieder $r = 2$, so zeigt sich, daß die für den Fall vermittelnder Beobachtungen gegebene Entwicklung sich nur insoweit ändert, als $Q_{1 \cdot 1}$ und $Q_{2 \cdot 2}$ von der Form der Ausgleichungsaufgabe abhängen; aber die weitere Rechnung, insbesondere die Bildung von $Q_{1 \cdot 2}$ aus jenen beiden, ist die frühere.

Wenn es sich ereignet, daß in F', F'' heterogene Beobachtungsgrößen vorkommen, so ist es am bequemsten, unter $Q_{1 \cdot 1}$, $Q_{2 \cdot 2}$, $Q_{1 \cdot 2}$ in (5), S. 294, die Koeffizienten von ϱ_1^2, ϱ_2^2, $2\varrho_1\varrho_2$ selbst zu verstehen, so daß $Q_{1 \cdot 1}$ und $Q_{2 \cdot 2}$ die mittlern Fehlerquadrate der Funktionen F' und F'' sind. Für μ ist alsdann in den andern Formeln 1 einzuführen.

Beispiel. Fortsetzung zu S. 297/300.

A. Der mittlere Fehler der Seite AB sei 0.1 Toise, so daß, da A und die Richtung AB als fest angenommen sind, B um $\pm 0'\!,1$ in Richtung AB unsicher erscheint. Man findet leicht mittels (14), S. 299, und (8), S. 298:

$$\text{Quadrat d. m. F. in } u = 0{,}040737 \cdot 1{,}21 + \left(\frac{u}{AB}\right)^2 \cdot 0{,}01 = Q_{1 \cdot 1}$$

$$(19) \quad \text{„} \qquad \text{„} \qquad \text{„} \quad v = 0{,}293283 \cdot 1{,}21 + \left(\frac{v}{AB}\right)^2 \cdot 0{,}01 = Q_{2 \cdot 2}$$

$$0{,}076948 \cdot 1{,}21 + \frac{uv}{AB \cdot AB} \cdot 0{,}01 = Q_{1 \cdot 2},$$

also

$$(19^*) \quad Q_{1 \cdot 1} = 0{,}071966, \quad Q_{2 \cdot 2} = 0{,}455441, \quad Q_{1 \cdot 2} = 0{,}140860.$$

womit anstatt (16) erhalten wird das äquivalente System:

$$(20) \quad \begin{array}{lll} 0 = -37\,200 + 5{,}9336\,u - 1{,}8355\,v & \text{M. F.} & \pm 1' \\ 0 = -56\,133 \qquad \cdot \qquad + 1{,}4818\,v & \text{„} & \pm 1 \end{array}$$

und anstatt (17):

$$(20^*)\quad \begin{aligned} 0 &= -\ \ 5{,}989 + 0{,}9553\,u - 0{,}2955\,v \quad \text{M. F.} \pm 0',161 \\ 0 &= -37{,}881 \quad \cdot \quad + \quad v \quad \text{„} \pm 0{,}675. \end{aligned}$$

B. Werden die Winkelmessungen des Dreiecks nach **bedingten Beobachtungen** ausgeglichen, was das Einfachste ist, so hat man als Bedingungsgleichung:

$$(21)\qquad 0 = -1{,}903 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

und daher

$$(21^*)\quad \begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 &= \lambda_3 = k \\ 3k - 1{,}903 = 0, &\quad k = 0{,}634. \end{aligned}$$

Man findet aber aus (9) und (10), S. 298, entweder durch Differentiation oder durch Benutzung der logarithmischen Differenzen:

$$(22)\quad \begin{aligned} du &= -0{,}1837\,dA - 0{,}0139\,dB - 0{,}2975\,dC + 1{,}5057\,dAB \\ dv &= +0{,}0872\,dA - 0{,}0293\,dB - 0{,}6266\,dC + 3{,}1710\,dAB. \end{aligned}$$

Diese Werte wurden bereits zur Ableitung von (12) benutzt. Nach (18), S. 239, hat man daher, indem die p der einzigen Bedingungsgleichung gleich 1 sind und die Koeffizienten von dA, dB und dC die f für u bzw. v bedeuten:

$$\begin{aligned} \mu_u^2 = Q_{1\cdot1} &= \{(-0{,}1837)^2 + (-0{,}0139)^2 + (-0{,}2975)^2\}\,1{,}21 \\ &\quad + (+1{,}5057)^2 \cdot 0{,}01 - \frac{(-0{,}4951)^2}{3} \cdot 1{,}21 \\ \mu_v^2 = Q_{2\cdot2} &= \{(+0{,}0872)^2 + (-0{,}0293)^2 + (-0{,}6266)^2\}\,1{,}21 \\ &\quad + (+3{,}1710)^2 \cdot 0{,}01 - \frac{(-0{,}5687)^2}{3} \cdot 1{,}21 \\ Q_{1\cdot2} &= \{(-0{,}1837)(+0{,}0872) + (-0{,}0139)(-0{,}0293) \\ &\quad + (-0{,}2975)(-0{,}6266)\}\,1{,}21 \\ &\quad + (1{,}5057)(3{,}1710)\,0{,}01 - \frac{(-0{,}4951)(-0{,}5687)}{3}\,1{,}21, \end{aligned}$$

womit sich dieselben Werte wie in (19*) ergeben.

V. Verbindung von Funktionswerten aus mehreren Ausgleichungen. Sind dieselben Größen durch mehrere verschiedene Ausgleichungen bestimmt, so kann man das Gesamtmittel für diese Größen dadurch ableiten, daß man die partiell äquivalenten Systeme dafür ableitet und diese nach der M. d. kl. Qu. behandelt. Diese Herleitung der äquivalenten Systeme ist selbstverständlich in dem Falle überflüssig, wo die Größen direkt als Unbekannte in den Normalgleichungen auftreten. Man kann dann so verfahren, daß die andern Unbekannten nach dem Gaußschen Algorithmus eliminiert werden, worauf sich die übrigbleibenden Systeme durch einfache Addition vereinigen lassen, nachdem man sie vorher auf gleiche Gewichtseinheit durch geeignete Faktoren reduziert hat.

Beispiel. Von einer gemeinsamen Linie aus gehen zwei Dreiecksnetze, die sonst nur noch in einem Punkte C zusammentreffen, derartig, daß ein Kranzsystem entsteht. Sind nun u', v' und u'', v'' die Verbesserungen von Näherungswerten der (rechtwinkligen, polaren oder geographischen) Koordinaten für C nach beiden Ausgleichungen bezüglich desselben Koordinatensystems, so bilden wir die partiell äquivalenten Systeme:

$$(1)\qquad \begin{array}{llll} 0 = -\mathfrak{l}_1' + \mathfrak{a}_1' u' & + \mathfrak{b}_1' v' & \text{m. F.} & \pm \mu' \\ 0 = -\mathfrak{l}_2' \quad \cdot & + \mathfrak{b}_2' v' & ,, & \pm \mu' \end{array}$$

und

$$(2)\qquad \begin{array}{llll} 0 = -\mathfrak{l}_1'' + \mathfrak{a}_1'' u'' & + \mathfrak{b}_1'' v'' & ,, & \pm \mu'' \\ 0 = -\mathfrak{l}_2'' \quad \cdot & + \mathfrak{b}_2'' v'' & ,, & \pm \mu''. \end{array}$$

Zu bemerken ist, daß die Berechnung der $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nur auf etwa vier bedeutliche Ziffern zu erfolgen braucht, daß aber mit den angegebenen Werten von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Berechnung der $\mathfrak{l}$ aus u', v' bzw. u'', v'' scharf erfolgen muß.

Für die endgültigen Werte der Koordinaten u, v von C hat man nun die Fehlergleichungen:

$$(3)\qquad \begin{array}{llll} \lambda_1 = -\mathfrak{l}_1' + \mathfrak{a}_1' u & + \mathfrak{b}_1' v & \text{m. F.} & \pm \mu' \\ \lambda_2 = -\mathfrak{l}_2' \quad \cdot & + \mathfrak{b}_2' v & ,, & \pm \mu' \\ \lambda_3 = -\mathfrak{l}_1'' + \mathfrak{a}_1'' u & + \mathfrak{b}_1'' v & ,, & \pm \mu'' \\ \lambda_4 = -\mathfrak{l}_2'' \quad \cdot & + \mathfrak{b}_2'' v & ,, & \pm \mu'', \end{array}$$

die in üblicher Weise aufzulösen sind.

Die Änderungen von C geben auch Änderungen der Koordinaten der andern Punkte, die man nachträglich bestimmen kann, und zwar für jeden Punkt einzeln durch Herstellung eines in bezug auf C und diesen Punkt partiell äquivalenten Systems von vier Gleichungen, deren beide letzten aber mit (1) bzw. (2) übereinstimmen müssen, während die beiden ersten durch Einführung von u, v zwei Gleichungen zur Ermittelung der verbesserten Koordinaten des betreffenden Punktes ergeben (§ 11, III, S. 216). In der Regel wird es in unserm Beispiele ähnlichen Fällen ausreichen, eine geringe Anzahl solcher Punkte streng zu verbessern, die andern aber zu interpolieren.

§ 7. Fehlerellipsen.

1. Formeln. Bei zwei Unbekannten ist ein voller Überblick über die partielle Äquivalenz auf graphischem Wege durch Ableitung der Fehlerellipse möglich.

Es seien allgemein

$$(1)\qquad \begin{aligned} 0 &= -\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{a}_1 F' + \mathfrak{b}_1 F'' \qquad &\text{Gew. } 1 \\ 0 &= -\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{a}_2 F' + \mathfrak{b}_2 F'' \qquad &\text{,,}\quad 1 \end{aligned}$$

zwei in bezug auf die Funktionen F' und F'' äquivalente Gleichungen mit den fingierten Beobachtungswerten $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$. Dieselben können wir in die Form

$$(2)\qquad \begin{aligned} 0 &= -\frac{\mathfrak{l}_1}{\sqrt{\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{b}_1^2}} + \frac{\mathfrak{a}_1}{\sqrt{\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{b}_1^2}} F' + \frac{\mathfrak{b}_1}{\sqrt{\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{b}_1^2}} F'' \qquad &\begin{matrix}\text{Gewicht}\\ \mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{b}_1^2\end{matrix} \\ 0 &= -\frac{\mathfrak{l}_2}{\sqrt{\mathfrak{a}_2^2 + \mathfrak{b}_2^2}} + \frac{\mathfrak{a}_2}{\sqrt{\mathfrak{a}_2^2 + \mathfrak{b}_2^2}} F' + \frac{\mathfrak{b}_2}{\sqrt{\mathfrak{a}_2^2 + \mathfrak{b}_2^2}} F'' \qquad &\mathfrak{a}_2^2 + \mathfrak{b}_2^2 \end{aligned}$$

bringen. Wir betrachten nunmehr F' und F'' als rechtwinklige Koordinaten u, v eines Punktes. Es stellen dann die beiden Gleichungen (2) zwei den Punkt bestimmende Gerade dar.

Ist p die Länge des normalen Abstandes einer Geraden vom Koordinatenanfange und ν der Winkel der Normalen mit der Achse der u, so ist die Gleichung der Geraden:

$$(3)\qquad 0 = -p + u \cos \nu + v \sin \nu .$$

Die Gleichungen (2) haben aber die gleiche Form; es ist daher für irgend eine derselben:

$$(4)\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2}} & \text{der als Beobachtungswert mit dem Gewichte } (\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2) \text{ anzusehende Abstand vom Koordinatenanfange,} \\ \dfrac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = \tan \nu & \text{die Tangente des Neigungswinkels ihrer Normalen gegen die } u\text{-Achse.} \end{cases}$$

Dem mittlern Fehler $\frac{\mu}{\sqrt{\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2}}$ entspricht eine mittlere Verlängerung bzw. Verkürzung der Normalen oder eine parallele Verschiebung der Geraden.

Aus (17), S. 296, erhält man nun:

$$(5)\qquad \tan\nu_1 \tan\nu_2 + (\tan\nu_1 + \tan\nu_2)\frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_{2\cdot 2}} + \frac{Q_{1\cdot 1}}{Q_{2\cdot 2}} = 0,$$

womit sich zeigen läßt, daß man alle verschiedenen Paare äquivalenter Gleichungen (2) betrachten kann als Gleichungen konjugierter Durchmesser einer Ellipse, deren Mittelpunkt der Punkt (F', F'') ist, deren Achsen zu der u-Achse geneigt sind unter Winkeln N_1 und N_2, für welche ist:

$$(6)\qquad \cot 2N = \frac{Q_{1\cdot 1} - Q_{2\cdot 2}}{2\,Q_{1\cdot 2}},$$

und deren in die Richtungen N_1 und N_2 fallende Längen sich verhalten wie

$$(7)\qquad \sqrt{Q_{2\cdot 2} + Q_{1\cdot 2}\cot N_1} : \sqrt{Q_{2\cdot 2} + Q_{1\cdot 2}\cot N_2}.$$

Bezeichnen wir nämlich mit u und v die Koordinaten eines Punktes einer Ellipse mit dem Zentrum (F', F''), so kann man der Gleichung der Ellipse die Form geben:

$$A(u - F')^2 + B(v - F'')^2 - 2C(u - F')(v - F'') = 1.$$

Durch den Punkt (F', F'') legen wir zwei Gerade, deren Normalen mit der u-Achse die Winkel ν_1 und ν_2 einschließen, und nehmen dieselben als Achsen der Parallelkoordinaten u' und v'. Dann ist:

$$u - F' = + u' \sin\nu_1 - v' \sin\nu_2$$

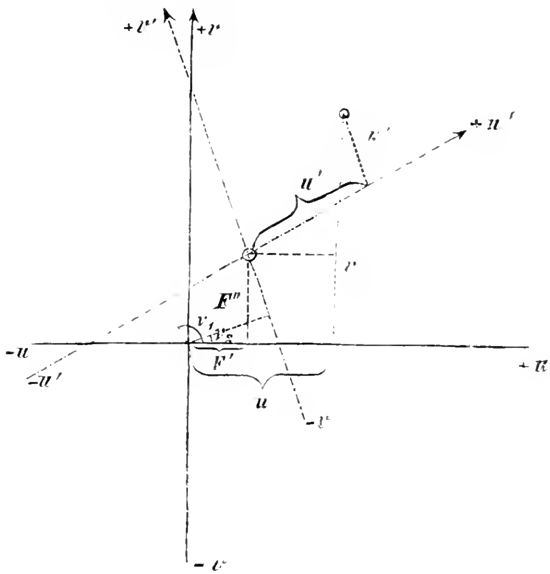
$$v - F'' = - u' \cos\nu_1 + v' \cos\nu_2.$$

Hiermit geht die Ellipsengleichung über in:

$$\begin{aligned} & u'^2(A \sin^2 \nu_1 + B \cos^2 \nu_1 + 2C \sin \nu_1 \cos \nu_1) \\ & + v'^2(A \sin^2 \nu_2 + B \cos^2 \nu_2 + 2C \sin \nu_2 \cos \nu_2) \\ & - 2u'v'(A \sin \nu_1 \sin \nu_2 + B \cos \nu_1 \cos \nu_2 \\ & \qquad + C[\cos \nu_1 \sin \nu_2 + \sin \nu_1 \cos \nu_2]) = 1. \end{aligned}$$

Die Achsen der u', v' werden konjugierte Durchmesser der Ellipse, wenn der Koeffizient von $2u'v'$ null ist, also für

$$\tan \nu_1 \tan \nu_2 + (\tan \nu_1 + \tan \nu_2) \frac{C}{A} + \frac{B}{A} = 0.$$



Vergleicht man mit (5), so ergeben sich die Werte von $\frac{C}{A}$ und $\frac{B}{A}$; es wird:

$$A : B : C = Q_{2\cdot 2} : Q_{1\cdot 1} : Q_{1\cdot 2}\,.$$

Die Achsen der u', v' werden insbesondere die Hauptachsen der Ellipse für $\nu_1 = \nu_2 + \frac{\pi}{2}$ oder $\tan \nu_1 = -\cot \nu_2$.

Bezeichnet man diese besondern Werte von ν mit N_1 und N_2, so gibt (5) leicht die für beide N gültige Gleichung (6). Die Quadrate der Längen der Hauptachsen werden proportional den beiden Werten von

$$1 : (A \sin^2 \nu + B \cos^2 \nu + 2\, C \sin \nu \cos \nu)$$

oder

$$1 : (Q_{2 \cdot 2} \sin^2 N + Q_{1 \cdot 1} \cos^2 N + 2\, Q_{1 \cdot 2} \sin N \cos N)$$

oder mittels (6) proportional den beiden Werten von

$$1 : (Q_{2 \cdot 2} + Q_{1 \cdot 2} \cot N).$$

Hiernach verhalten sich die zu den durch N_1 und N_2 bezeichneten Richtungen senkrechten Achsenlängen umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus $Q_{2 \cdot 2} + Q_{1 \cdot 2} \cot N_1$ und $Q_{2 \cdot 2} + Q_{1 \cdot 2} \cot N_2$; es sind daher die Quadrate der Achsenlängen in Richtung N_1 und N_2 direkt proportional wie $Q_{2 \cdot 2} + Q_{1 \cdot 2} \cot N_1$ und $Q_{2 \cdot 2} + Q_{1 \cdot 2} \cot N_2$.

Die Formeln (20) des § 6, S. 296, geben mit $\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} = \tan N_1$, $\frac{\mathfrak{b}_2}{\mathfrak{a}_2} = \tan N_2$, unter Beachtung der Beziehung $\tan N_1 = -\cot N_2$:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{a}^2 &= (Q_{2 \cdot 2} \cos N - Q_{1 \cdot 2} \sin N)\, \Delta \cos N, \\ \mathfrak{b} &= \mathfrak{a} \tan N \end{aligned}$$

und

$$(8^*) \qquad \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 = (Q_{2 \cdot 2} - Q_{1 \cdot 2} \tan N)\, \Delta = 1 : (Q_{2 \cdot 2} + Q_{1 \cdot 2} \cot N),$$

da nach (14), S. 295, und (6), S. 304:

$$\Delta = 1 : (Q_{2 \cdot 2} - Q_{1 \cdot 2} \tan N)(Q_{2 \cdot 2} + Q_{1 \cdot 2} \cot N)$$

ist.

Bestimmt man also den Punkt (F', F'') durch zwei in die Ellipsenachsen fallende fingierte Gerade, so geben die Gl. (8) die Koeffizienten der Gleichungen (2) dieser Geraden. Diejenige Gerade, welche senkrecht zu der durch N bezeichneten Richtung liegt, hat zufolge ihres Gewichts $(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2)$ und des mittlern Fehlers μ der Gewichtseinheit eine mittlere parallele Verschiebung:

$$(9) \qquad \pm \mu \sqrt{Q_{2 \cdot 2} + Q_{1 \cdot 2} \cot N}.$$

Durch diese mittlern Verschiebungen entstehen auf der andern Geraden, also in der durch N bezeichneten Richtung, Abschnitte, welche in demselben Verhältnis stehen wie die Achsen der vorher besprochenen Ellipse, bei welcher überhaupt nur von relativen Dimensionen die Rede sein konnte.

Wir nehmen jetzt die absoluten Dimensionen der Halbachsen nach (9) an und nennen diese Ellipse, in Richtung und Länge ihrer Halbachsen bestimmt durch die Formeln:

$$\cot 2N = \frac{Q_{1\cdot 1} - Q_{2\cdot 2}}{2\,Q_{1\cdot 2}} \quad \text{und} \tag{10}$$
$$\mu \sqrt{Q_{2\cdot 2} + Q_{1\cdot 2}\cot N} \quad \text{oder} \quad \mu\sqrt{Q_{1\cdot 1} + Q_{1\cdot 2}\tan N}$$

die Fehlerellipse.

Sie hat, wie wir bereits fanden, die Eigenschaft, in ihren konjugierten Durchmessern die Richtungen äquivalenter Geradenpaare anzugeben; sie gibt ferner aber auch deren mittlere parallele Verschiebungen an.

Es genügt, den Nachweis hierzu für das besondere System des § 6, III, S. 296, zu führen, weil Lage und Dimensionen der Ellipse unabhängig sind von einer Drehung des Koordinatensystems u, v um seinen Anfangspunkt. Es ist nun nach (22), S. 296:

$$\tan \nu_1 = -\frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_{2\cdot 2}}, \qquad \nu_2 = 90^0, \tag{11}$$
$$\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{b}_1^2 = Q_{2\cdot 2}\sec^2 \nu_1 \cdot \Delta, \qquad \mathfrak{a}_2^2 + \mathfrak{b}_2^2 = 1 : Q_{2\cdot 2}.$$

Die mittleren parallelen Verschiebungen der Geraden, welche senkrecht zu den durch ν_1 und ν_2 bezeichneten Richtungen sind, ergeben sich hiermit zu

$$\pm \mu : \sqrt{Q_{2\cdot 2}\Delta}\sec \nu_1, \qquad \pm \mu\sqrt{Q_{2\cdot 2}}. \tag{12}$$

Der mittlern Verschiebung einer Geraden entsprechen Abschnitte auf der andern, deren Länge man aus jener durch Multiplikation mit der csc des Konjugationswinkels $(\nu_1 - \nu_2)$ ableitet. Die Abschnitte sind mithin auf der Geraden, welche senkrecht zu der durch ν_1 bezeichneten Richtung steht, gleich

$$\pm \mu\sqrt{Q_{2\cdot 2}}\csc(\nu_1 - \nu_2), \text{ d. i. } \pm \mu\sqrt{Q_{2\cdot 2}}\sec \nu_1 \tag{13}$$

und auf der Geraden, senkrecht zu der durch ν_2 gegebenen Richtung, gleich

$$\pm \frac{\mu \csc(\nu_1 - \nu_2)}{\sqrt{Q_{2\cdot 2}\Delta}\sec \nu_1}, \text{ d. i. } \pm \frac{\mu}{\sqrt{Q_{2\cdot 2}\Delta}}. \tag{13*}$$

Diese Abschnitte sind aber nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie gleich den halben Längen der konjugierten

Durchmesser, die in dieselben Geraden fallen; denn es ist die Summe der Quadrate der Abschnitte in (13) und (13*) gleich

$$\mu^2(Q_{2\cdot 2} + Q_{1\cdot 1}), \tag{14}$$

d. i. ebensogroß als die Summe der Quadrate der Halbachsen nach (10). Ferner ist das Produkt aus den Abschnitten in den Sinus des Konjugationswinkels gleich

$$\frac{\mu^2}{\sqrt{\Delta}}, \tag{15}$$

d. i. ebensogroß als das Produkt der Halbachsen nach (10).

Hiernach kann man die Fehlerellipse immer mit Hilfe des besonderen Paares äquivalenter Geraden (21), S. 296, konstruieren, indem man nach den Formeln (11) und (12) die Richtungen und die mittlern parallelen Verschiebungen berechnet und konstruiert und nun die Ellipse zeichnet, welche die vier Seiten des von den letztern gebildeten Parallelogramms berührt.

II. Anmerkung. Die Fehlerellipse erscheint im vorstehenden als ein graphisches Hilfsmittel, um die Genauigkeit in der Bestimmung eines Punktes vollständig darzustellen.

In dem besondern Falle der Gültigkeit des Gaußschen Fehlergesetzes läßt sich zeigen, daß alle Punkte (u, v), welche um die wahrscheinlichste Lage (F', F'') herum auf dem Umfange einer zur Fehlerellipse ähnlichen, ähnlich liegenden und konzentrischen Ellipse sich befinden, gleich wahrscheinliche Lagen des bestimmten Punktes sind. Unter diesen Ellipsen gibt es eine von solchen Dimensionen, daß die Wahrscheinlichkeiten für den Punkt, außerhalb oder innerhalb zu liegen, gleich groß und also gleich $\frac{1}{2}$ sind. Man erhält diese wahrscheinliche Ellipse durch lineare Vergrößerung der Fehlerellipse im Verhältnis 1 : 1,17741.0.*) Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt innerhalb der Fehlerellipse liegt, die man zum Unterschied von der vorigen Ellipse die mittlere

---

*) Diese Ellipse habe ich früher nicht ganz zutreffend als wahrscheinlichste bezeichnet; in Analogie zum wahrscheinlichen Fehler wird sie besser wie oben bezeichnet.

Fehlerellipse nennen kann, geringer oder gleich $1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0{,}3934693$. (Siehe des Verfassers „Studien über rationelle Vermessungen“ in der Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. XIII, 1868.)

Vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus wurde die Fehlerellipse (sowie das Fehlerellipsoid für drei Variable bzw. den Raum) zuerst behandelt von A. Bravais, 1846. Später, 1857, kam C. G. Andrae ebenfalls auf die Fehlerellipse. Eine sehr allgemein gehaltene Analyse verdankt man Ch. M. Schols. Vergl. darüber die Zusammenstellung von Czuber in der „Theorie der Beobachtungsfehler“, S. 343 u. f.*)

Beispiel. Fortsetzung zu § 10, S. 204/209. In diesem Falle kann man aus den Normalgleichungen (10), S. 207, sofort die Werte von $[\mathfrak{a}\mathfrak{a}]$, $[\mathfrak{b}\mathfrak{b}]$, $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ entnehmen, nämlich

$$
\begin{aligned}
[\mathfrak{a}\mathfrak{a}] &= \ 39\,208{,}9 = Q_{2\cdot 2}\Delta \\
(17) \qquad [\mathfrak{b}\mathfrak{b}] &= \ 85\,614{,}6 = Q_{1\cdot 1}\Delta \\
-[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] &= +\ 53\,289{,}4 = Q_{1\cdot 2}\Delta .
\end{aligned}
$$

Damit wird nach (13), S. 295, und (10), S. 307:

$$\Delta = 517\,190\,000,$$

$$(18) \qquad \cot 2\,N = \frac{85\,614{,}6 - 39\,208{,}9}{106\,579} = +\,0{,}4354,$$

$$N_1 = 33^0\ 14', \qquad N_2 = 123^0\ 14'.$$

Die Quadrate der Halbachsen werden, da nach (15), S. 208, $\mu^2 = 0{,}0541$ ist:

*) A. Bravais, Sur les probabilités des erreurs de situation d'un point. (Mém. prés. par divers savants à l'Acad. des sciences de l'Inst. de France, t. IX.)

C. G. Andrae, Fehlerbestimmung bei der Auflösung der Pothenotschen Aufgabe mit dem Meßtische. (Astr. Nachr., Bd. 47, 1857, Nr. 1117.)

Ch. M. Schols, Over de Theorie der Fouten in de Ruimte en in het platte Vlak. (Verhandel. v. d. Koninkl. Akademie van Wetenschappen, XV, Amsterdam 1875; nochmals abgedruckt unter dem Titel: „Théorie des erreurs dans le plan et dans l'espace“ in den Ann. de l'école polytechnique de Delft, t. II, 1886.)

$$
(18^*)\quad \left\{\begin{aligned}
&0{,}0541(39\,208{,}9 + 53\,289{,}4 \cdot 1{,}5262) : 517\,190\,000\\
&\qquad\qquad = 0{,}0541 : 4290.\\
&0{,}0541(39\,208{,}9 - 53\,289{,}4 \cdot 0{,}6552) : 517\,190\,000\\
&\qquad\qquad = 0{,}0541 : 120\,539;
\end{aligned}\right.
$$

es liegt daher

$$
(18^{**})\quad \left\{\begin{array}{llll}
\text{im Azimut} & 33^0\,14' & \text{die große Halbachse von} & 3{,}55\text{ mm},\\
\text{,,} \quad \text{,,} & 123\ \ 14 & \text{,, kleine} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & 0{,}67 \text{ ,, }.
\end{array}\right.
$$

Zur Konstruktion der Ellipse kann man sich auch des äquivalenten Systems (vergl. S. 207)

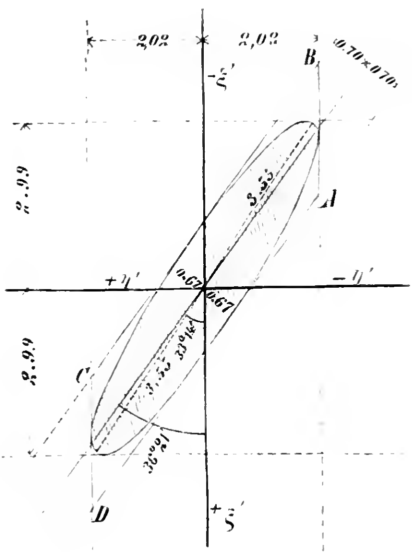
$$
(19)\quad \begin{array}{rl}
\xi' - 1{,}35912\,\eta' = 0 & \text{Gew. } 39\,208{,}9\\
\eta' = 0 & \text{,, } \quad 13\,188{,}0
\end{array}
$$

bedienen, worin ξ' und η' die Änderungen der Ausgleichungsergebnisse ξ und η bedeuten. Aus (19) folgt:

$$
(20)\quad \begin{array}{rlll}
0{,}59263\,\xi' - 0{,}80545\,\eta' = 0 & \text{Gew. } 111\,636 & \text{M. F.} & \pm 0{,}70\text{ mm}\\
\eta' = 0 & \text{,, } \quad 13\,188 & \text{,,} & \pm 2{,}02 \text{ ,, },
\end{array}
$$

in welcher Form das System zwei Geraden entspricht, deren Normalen bzw. unter den Azimuten

$$(21)\qquad 306^0\ 21' \text{ und } 90^0\ 0'$$



zur Achse der ξ' geneigt sind und deren mittlere parallele Verschiebungen bzw. $\pm 0{,}70$ und $\pm 2{,}02$ Millimeter betragen. Letztere bilden ein Parallelogramm $ABCD$, dessen Seiten die Fehlerellipse tangieren.

Zur Kontrolle dient die Beziehung zwischen (17), (18*) und (20), nämlich:

$$
(22)\quad \begin{aligned}
&39\,208{,}9 + 85\,614{,}6\\
&= 120\,539 + 4\,290\\
&= 111\,636 + 13\,188,
\end{aligned}
$$

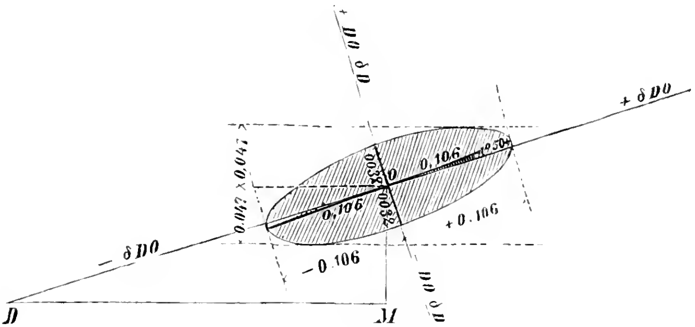
welche darauf beruht, daß $[\mathfrak{a}\mathfrak{a}] + [\mathfrak{b}\mathfrak{b}]$ eine Konstante für alle äquivalenten Systeme ist und daß für deren Form (2), S. 303, die Gewichtssumme mit jener Konstanten übereinstimmt.

Eine sehr nützliche Anwendung der Fehlerellipse bei vermittelnden Beobachtungen machte Th. Albrecht in seinem Bericht: Über die Wahl der Stationen für den internationalen Polhöhendienst (Verhandlungen der Perm. Komm. der Internationalen Erdmessung in Lausanne 1896, S. 127 u. f.).

Beispiel. Fortsetzung zu S. 64/67. Wir nehmen D als festen Punkt, DM als feste Richtung und setzen

$$(21) \qquad F' = \delta DO, \qquad F'' = DO \cdot \delta D,$$

worin δDO und δD kleine Änderungen der angenommenen Werte von DO und dem Winkel D bezeichnen, deren besondere Werte null



den Punkt O selbst bestimmen mittels $F' = 0 = F''$. Im allgemeinen erscheinen F' und F'' als rechtwinklige Koordinaten einer geänderten Lage des Punktes O, und es können somit die bezüglich F', F'' äquivalenten Gleichungssysteme als zu Systemen äquivalenter Geraden gehörend aufgefaßt werden. Bei Berechnung der zugehörigen Fehlerellipse ist zu beachten, daß F' und F'' heterogene Beobachtungsgrößen enthalten. Wir setzen daher nach (17), S. 67:

$$(22) \quad \begin{aligned} Q_{1\cdot 1} &= (1{,}045\,\mu_3)^2 + (0{,}03055\,\mu_2)^2 + (0{,}03055\,\mu_1)^2 = 0{,}01127, \\ Q_{2\cdot 2} &= \left(\frac{DO}{206\,265}\,\mu_1\right)^2 = (0{,}09596\,\mu_1)^2 = 0{,}00103, \end{aligned}$$

woraus nach dem Bildungsgesetz von $Q_{1\cdot 2}$ aus $Q_{1\cdot 1}$ und $Q_{2\cdot 2}$ folgt:

$$(23) \qquad Q_{1\cdot 2} = (0{,}03055 \cdot 0{,}09596)\,\mu_1{}^2 = 0{,}000328.$$

Damit ergibt sich:

$$\text{(24)}\quad \cot 2N = \frac{0{,}01024}{0{,}000657} = 15{,}59, \qquad N_1 = 1^0\,50', \qquad N_2 = 91^0\,50',$$

und für die Halbachsen:

$$\text{(25)}\quad \begin{aligned} &\sqrt{0{,}00103 + 0{,}000328 \cdot 31{,}24} = \sqrt{0{,}01128} = \pm\, 0{,}106\,\text{m},\\ &\sqrt{0{,}00103 - 0{,}000328 \cdot 0{,}032} = \sqrt{0{,}00102} = \pm\, 0{,}032\,\text{m}.\end{aligned}$$

Zur Kontrolle können wir die erste der Gleichungen (20), S. 67, benutzen, welche den mittlern Fehler von DO gibt. Derselbe läßt sich aus der Fehlerellipse auf konstruktivem Wege ermitteln, indem man senkrecht zu DO an dieselbe Parallelen legt, die von O um den Betrag des mittlern Fehlers $\pm$ 0,106 m abstehen müssen. Dagegen ist diese Prüfung durch OM nicht ausführbar, weil M selbst fehlerhaft gegen O ist und nicht wie D fest liegt: nur weil OM fast genau senkrecht zur festen Richtung DM liegt, also M in Richtung OM fehlerfrei ist, gestattet OM ausnahmsweise auch die Prüfung des $\mu_{OM} = \pm$ 0,047 m.

Beispiel (fingiert). Für ein vierpunktiges Dreiecksnetz, das sehr nahe die Form eines Quadrats hat, nehmen wir folgende Richtungsbeobachtungen an:

Station 1.

	Objekt:	2	3	4	Gew.
(1)	1. Satz	0° 0′ 0″	45° 0′ 0″,3	90° 0′ 0″,9	1
	2. „	0	1,0	*	1
	3. „	*	0,0	89 59 59,8	1

Station 2.

	Objekt:	1	3	4	Gew.
(2)	1. Satz	0° 0′ 0″	270° 0′ 0″,6	315° 0′ 0″,3	1
	2. „	0	*	0,6	1
	3. „	*	0,0	1,0	1

Station 3.

	Objekt:	1	2	4	Gew.
(3)	1. Satz	0° 0′ 0″	45° 0′ 1″,0	315° 0′ 0″,5	1
	2. „	0	0,3	314 59 59,7	1

Station 4.

(4)

Objekt:	1	2	3	Gew.
1. Satz	0° 0′ 0″	45° 0′ 0,″2	90° 0′ 1,″3	0,5
2. „	0	1,0	0,5	0,5

Auf der Station 4 waren die Beobachtungsumstände ungünstiger als auf den andern Stationen, daher ist als Gew. 0,5 angenommen.

Wir gleichen zunächst so aus, daß ein Beispiel für die allgemeinen Fälle entsteht. Über die beste Ausgleichung des vorliegenden Spezialfalls siehe weiterhin.

Die Stationsausgleichungen für (1) und (2) erfolgen wie in dem Beispiel auf S. 192 u. f. mit schematischer Anordnung, wie dort angedeutet ist. Es ist daher nicht nötig, nochmals auf die Einzelheiten einzugehen, weshalb hier nur die Ergebnisse mitgeteilt werden.

Stationsausgleichung 1. Wir nehmen an als

(5)

	Näherungswerte	Verbesserungen
für Objekt 2:	0° 0′ 0″	·
„ „ 3:	45 0 0	$+x_3$
„ „ 4:	90 0 0	$+x_4$.

Hiermit ergeben sich aus (1) (wobei in diesem einfachen Falle die Kontrolle durch die Summengleichung entbehrlich ist) die Normalgleichungen:

(6)

x_3	x_4	Konst.
$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{6}$	$+0,5$
$-\frac{5}{6}$	$+\frac{7}{6}$	$+0,4$

Nach dem Gaußschen Algorithmus folgt hieraus:

(7)

x_3	x_4	Konst.
$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{6}$	$+0,5$
	$\frac{3}{4}$	$+0,65$

Die reduzierten Normalgleichungen sind daher:

(7*)

x_3	x_4	Konst.
1	— 0,5	+ 0,3000
	1	+ 0,8667

Die Stationsausgleichung ist damit beendigt, wenn man sich auf das Notwendigste beschränkt. Wir berechnen aber noch aus (7*)

(7**) $$x_3 = +0{,}7333\,, \qquad x_4 = +0{,}8667\,.$$

sowie ferner die Verbesserungen e nach der Stationsausgleichung allein. Aus (7**), (5) und (1) folgt zunächst:

(8)

Satz	2	3	4	Summe	Anzahl	Quotient
1	0	+ 0,4333	— 0,0333	+ 0,4000	3	+ 0,1333
2	0	— 0,2667	*	— 0,2667	2	— 0,1333
3	*	+ 0,7333	+ 1,0667	+ 1,8000	2	+ 0,9000

Zieht man die Quotienten von den Zahlenwerten der betreffenden Horizontalreihe ab, so folgt nachstehende

Übersicht der Verbesserungen e.

(9)

Satz	2	3	4	Summe
1	— 0,1333	+ 0,3000	— 0,1667	+ 0,3000 — 0,3000
2	+ 0,1333	— 0,1334	*	+ 0,1333 — 0,1334
3	*	— 0,1667	+ 0,1667	+ 0,1667 — 0,1667

Hiernach wird $[ee] = 0{,}2267$; übereinstimmend folgt aus der Quadratsumme der nach (1) zu den Näherungswerten (5) gehörigen l, nämlich $[ll] = 1{,}94$, mit Rücksicht auf (1), (7) und (7*):

$$[ee] = 1{,}94 - \frac{1{,}2^2}{3} - \frac{1{,}0^2}{2} - \frac{0{,}2^2}{2} - 0{,}5 \cdot 0{,}3 - 0{,}65 \cdot 0{,}8667$$
$$= 0{,}2267.$$

Der mittlere Fehler einer Richtungsbeobachtung vom Gewicht 1 wird, da $n = 7$, $m = 3 + 2$ ist:

(10) $$\mu = \pm\sqrt{\frac{0{,}2267}{2}} = \pm\, 0{,}''337.$$

Stationsausgleichung 2. Unter Annahme der

		Näherungswerte	Verbesserungen
(11)	für Objekt 1:	$0^0\ 0'\ 0''$	.
	„ „ 3:	270 0 0	$+ y_3$
	„ „ 4:	315 0 0	$+ y_4$

erhält man durch Auflösung der Normalgleichungen die reduzierten Gleichungen:

(12)

y_3	y_4	Konst.
$\frac{7}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$-0,2$
	$\frac{15}{14}$	$+\frac{4,6}{7}$

(12*)

y_3	y_4	Konst.
1	$-\frac{5}{7}$	$-0,1714$
	1	$+0,6133$

Es ist also:

(13) $$y_3 = +0,2666, \qquad y_4 = +0,6133.$$

Übersicht der Verbesserungen e.

	Satz	1	3	4	Summe
(14)	1	$+0,0067$	$-0,3267$	$+0,3200$	$+0,3267 - 0,3267$
	2	$-0,0067$	*	$+0,0066$	$+0,0066 - 0,0067$
	3	*	$+0,3266$	$-0,3267$	$+0,3266 - 0,3267$

Dies gibt $[ee] = 0,4223$, während $0,4227$ mit $[ll] = 1,81$ folgt Für die Gewichtseinheit ist mithin:

(15) $$\mu = \pm\sqrt{\frac{0,4223}{2}} = \pm 0'',460.$$

Die Ausgleichungen für die Stationen 3 und 4 bestehen eigentlich nur in einfachem Mittelnehmen aus den betreffenden beiden Sätzen; indessen kann man auch wie bei Station 1 und 2 verfahren. Wir wollen beispielsweise Station 3 wie Station 1 behandeln, Station 4 dagegen in einfacher Weise ausgleichen.

Stationsausgleichung 3. Unter Annahme der

		Näherungswerte	Verbesserungen
(16)	für Objekt 1:	$0^0\ 0'\ 0'',00$	.
	„ „ 2:	45 0 0,65	z_2
	„ „ 4:	315 0 0,10	z_4

folgen durch Auflösung der Normalgleichungen die reduzierten Gleichungen:

(17)

z_2	z_4	Konst.
$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
	1	0

(17*)

z_2	z_4	Konst.
1	$-0{,}5$	0
	1	0

Also ist

(18) $$z_2 = 0, \qquad z_4 = 0.$$

Übersicht der Verbesserungen e.

(19)

Satz	1	2	4	Summe
1	+ 0,25	− 0,10	− 0,15	+ 0,25 − 0,25
2	− 0,25	+ 0,10	+ 0,15	+ 0,25 − 0,25

$$[ee] = 0{,}1900 = [ll];$$

(20) $$\mu = \pm\sqrt{\frac{0{,}1900}{2}} = \pm 0''{,}308.$$

Stationsausgleichung 4. Das arithmetische Mittel beider Reihen in (4) gibt

(21)

für Objekt 1:	0° 0′ 0″,0	Gew. 1
„ „ 2:	45 0 0,6	„ 1
„ „ 3:	90 0 0,9	„ 1.

Übersicht der Verbesserungen e.

(22)

Satz	1	2	3	Summe
1	0,0	+ 0,4	− 0,4	+ 0,4 − 0,4
2	0,0	− 0,4	+ 0,4	+ 0,4 − 0,4

$$\left[\frac{ee}{2}\right] = 0{,}3200;$$

(23) $$\mu = \pm\sqrt{\frac{0{,}3200}{2}} = \pm 0''{,}400.$$

Im Mittel aus den vier Stationsgleichungen ist:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{0{,}2267 + 0{,}4223 + 0{,}1900 + 0{,}3200}{2 + 2 + 2 + 2}}$$

(24) $$= \pm\sqrt{0{,}1449} = \pm 0''{,}381.$$

Im ganzen haben wir nun als:

		Ergebnisse der Stationsausgleichungen	Weitere Verbesserungen	
(25)	1.	$\sphericalangle (2 \cdot 3) = 45^0\, 0'\, 0{,}''7333$	$+ \xi_3$	
		$\sphericalangle (2 \cdot 4) = 90\;\; 0\;\; 0{,}8667$	$+ \xi_4$	
	2.	$\sphericalangle (1 \cdot 3) = 270\;\; 0\;\; 0{,}2666$	$+ \eta_3$	
		$\sphericalangle (1 \cdot 4) = 315\;\; 0\;\; 0{,}6133$	$+ \eta_4$	
	3.	$\sphericalangle (1 \cdot 2) = 45\;\; 0\;\; 0{,}6500$	$+ \zeta_2$	
		$\sphericalangle (1 \cdot 4) = 315\;\; 0\;\; 0{,}1000$	$+ \zeta_4$	
	4.	$1. = 0\;\; 0\;\; 0{,}0000$	$+ (1)$	Gew. 1
		$2. = 45\;\; 0\;\; 0{,}6000$	$+ (2)$	„ 1
		$3. = 90\;\; 0\;\; 0{,}9000$	$+ (3)$	„ 1.

Bei Station 4 ist eigentlich zu den Ergebnissen eine unbestimmte Größe a hinzuzufügen, die wir aber der Einfachheit halber weglassen.

Die „weiteren Verbesserungen“ beziehen sich auf die Netzausgleichung. Die Bedingungsgleichungen derselben sind drei Winkel- und eine Seitengleichung. Bei Aufstellung derselben setzen wir das Netz als eben voraus.

Das Dreieck 1. 2. 3 gibt:

$$\binom{2 \cdot 3}{1} + \binom{3 \cdot 1}{2} + \binom{1 \cdot 2}{3} - 180^0 = 0\,,$$

d. i.

$$\left.\begin{array}{l} 45^0\;\; 0'\;\; 0{,}''7333 + \xi_3 \\ 89\;\; 59\;\; 59{,}7334 - \eta_3 \\ 45\;\;\; 0\;\;\; 0{,}6500 + \zeta_2 \end{array}\right\} - 180^0 = 0$$

oder

$$\xi_3 - \eta_3 + \zeta_2 + 1{,}''1167 = 0\,. \tag{26}$$

Dreieck 1. 2. 4 gibt ebenso:

$$\xi_4 - \eta_4 - (1) + (2) + 0{,}''8534 = 0\,. \tag{27}$$

und Dreieck 1. 3. 4 gibt:

$$-\xi_3 + \xi_4 - \zeta_4 - (1) + (3) + 0{,}''9334 = 0\,. \tag{28}$$

Die Seitengleichung drücken wir dadurch aus, daß Seite $1 \cdot 4$ berechnet aus Seite $1 \cdot 2$ mittels des Dreiecks $1 \cdot 2 \cdot 4$ denselben Wert geben muß wie mittels der Dreiecke $1 \cdot 2 \cdot 3$ und $1 \cdot 3 \cdot 4$:

$$\frac{\sin\binom{4\cdot 1}{2}}{\sin\binom{1\cdot 2}{4}} = \frac{\sin\binom{3\cdot 1}{2}\,\sin\binom{4\cdot 1}{3}}{\sin\binom{1\cdot 2}{3}\,\sin\binom{1\cdot 3}{4}}.$$

Behandeln wir diese Gleichung in der Art wie die Seitengleichung in dem Beispiele auf S. 253/254, so erhalten wir in Einheiten der siebenten Dezimale:

$$\begin{aligned}
&\log\sin 45^0 - 21{,}06\,(0{,}6133 + \eta_4)\\
-\,&\log\sin 45^0 - 21{,}06\,(0{,}6000 - (1) + (2))\\
=\,&\log\sin 45^0 - 21{,}06\,(0{,}1000 + \zeta_4)\\
-\,&\log\sin 45^0 - 21{,}06\,(0{,}6500 + \zeta_2)
\end{aligned}$$

oder

$$-\eta_4 + \zeta_2 + \zeta_4 + (1) - (2) - 0{,}''4633 = 0. \tag{29}$$

Zusammengestellt haben wir für die vier Bedingungsgleichungen mit ihrer Summe die folgende Übersicht:

(30)

ξ_3	ξ_4	η_3	η_4	ζ_2	ζ_4	(1)	(2)	(3)	Konst.	
+1	*	−1	*	+1	*	*	*	*	+1,1167	gleich null
*	+1	*	−1	*	*	−1	+1	*	+0,8534	
−1	+1	*	*	*	−1	−1	*	+1	+0,9334	
*	*	*	−1	+1	+1	+1	−1	*	−0,4633	
*	+2	−1	−2	+2	*	−1	*	+1	+2,4402	

Setzen wir nach (7) und (7*):

$$(31)\qquad \begin{aligned} \xi_3 - 0{,}5\,\xi_4 &= v_1 \qquad \text{Gew. } \tfrac{5}{3}\\ \xi_4 &= v_2 \qquad\ \ ,, \quad \tfrac{3}{4}, \end{aligned}$$

nach (12) und (12*):

$$(32)\qquad \begin{aligned} \eta_3 - \tfrac{5}{7}\,\eta_4 &= v_3 \qquad \text{Gew. } \tfrac{7}{6}\\ \eta_4 &= v_4 \qquad\ \ ,, \quad \tfrac{15}{14}, \end{aligned}$$

nach (17) und (17*):

$$(33)\qquad \begin{aligned} \zeta_2 - 0{,}5\,\zeta_4 &= v_5 \qquad \text{Gew. } \tfrac{4}{3}\\ \zeta_4 &= v_6 \qquad\ \ ,, \quad 1, \end{aligned}$$

so haben wir nun die v statt der ξ, η, ζ in (30) einzuführen. Dies geschieht einfach durch Elimination der ξ, η, ζ mittels (31), (32) und (33). Dadurch geht z. B. die erste Bedingungsgleichung über in:

$$v_1 + 0{,}5\,v_2 - v_3 - \frac{5}{7}\,v_4 + v_5 + 0{,}5\,v_6 + 1.1167 = 0.$$

In gleicher Weise werden die übrigen vier Gleichungen (30) behandelt.

Umgeformte Bedingungsgleichungen:

(34)

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(1)	(2)	(3)	Konst.
$+1$	$+0{,}5$	-1	$-\frac{5}{7}$	$+1$	$+0{,}5$	*	*	*	$+1{,}1167$
*	$+1$	*	-1	*	*	-1	$+1$	*	$+0{,}8534$
-1	$+0.5$	*	*	*	-1	-1	*	$+1$	$+0{,}9334$
*	*	*	-1	$+1$	$+1{,}5$	$+1$	-1	*	$-0{,}4633$
*	$+2$	-1	$-\frac{19}{7}$	$+2$	$+1$	-1	*	$+1$	$+2{,}4402$
$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{4}{3}$	1	1	1	1	= Gewicht

gleich null.

Hier sind unten die Gewichte der v und der Richtungsverbesserungen beigesetzt. Damit ergeben sich

die Korrelatengleichungen:

(35)

	k_1	k_2	k_3	k_4
$\frac{5}{3}\,v_1 =$	$+1$	*	-1	*
$\frac{3}{4}\,v_2 =$	$+0{,}5$	$+1$	$+0{,}5$	*
$\frac{7}{6}\,v_3 =$	-1	*	*	*
$\frac{15}{14}\,v_4 =$	$-\frac{5}{7}$	-1	*	-1
$\frac{4}{3}\,v_5 =$	$+1$	*	*	$+1$
$v_6 =$	$+0.5$	*	-1	$+1{,}5$
(1) =	*	-1	-1	$+1$
(2) =	*	$+1$	*	-1
(3) =	*	*	$+1$	*

und

die Normalgleichungen:

(36)

k_1	k_2	k_3	k_4	Konst.	
+ 3,2666	+ 1,3333	— 0,7667	+ 2,1667	+ 1,1167	gleich null.
+ 1,3333	+ 4,2667	+ 1,6667	— 1,0667	+ 0,8534	
— 0,7667	+ 1,6667	+ 3,9333	— 2,5000	+ 0,9334	
+ 2,1667	— 1,0667	— 2,5000	+ 5,9333	— 0,4633	
+ 5,9999	+ 6,2000	+ 2,3333	+ 4,5333	+ 2,4402	

Hieraus folgen die reduzierten Gleichungen:

(37)

k_1	k_2	k_3	k_4	Konst.	
+ 3,2666	+ 1,3333	— 0,7667	+ 2,1667	+ 1,1167	gleich null.
	+ 3,7225	+ 1,9796	— 1,9511	+ 0,3976	
		+ 2,7006	— 0,9539	+ 0,9841	
			+ 3,1366	— 0,6481	

(37*)

k_1	k_2	k_3	k_4	Konst.	
1	+ 0,40816	— 0,23471	+ 0,66329	+ 0,34188	gleich null.
	1	+ 0,53179	— 0,52413	+ 0,10681	
		1	— 0,35322	+ 0,36440	
			1	— 0,20663	

Es wird hiernach:

(38)
$$k_1 = -0{,}61120$$
$$k_2 = +0{,}15646$$
$$k_3 = -0{,}29141$$
$$k_4 = +0{,}20663.$$

Diese Werte erfüllen die Summengleichung in (36) und auch die Gleichungen (37) und (37*). Aus (35) folgt damit:

$$
(39)\qquad
\begin{array}{lll}
\frac{5}{3}\, v_1 = -\,0{,}3198 & v_1 = -\,0{,}1919 & v_6 = +\,0.2958 \\
\frac{3}{4}\, v_2 = -\,0{,}2949 & v_2 = -\,0{,}3932 & (1) = +\,0{,}3416 \\
\frac{7}{6}\, v_3 = +\,0{,}6112 & v_3 = +\,0{,}5239 & (2) = -\,0{,}0502 \\
\frac{15}{14}\, v_4 = +\,0{,}0735 & v_4 = +\,0{,}0686 & (3) = -\,0{,}2914. \\
\frac{4}{3}\, v_5 = -\,0{,}4046 & v_5 = -\,0{,}3035 &
\end{array}
$$

Die Summe der in ihre Gewichte multiplizierten Quadrate dieser Verbesserungen ist:

$$(40)\qquad [vv] = 0{,}9169.$$

In guter Übereinstimmung damit ist nach (37) und (37*):

$$[vv] = 0.9168.$$

Der mittlere Fehler einer Beobachtung wird daher:

$$(41)\qquad \mu = \pm \sqrt{\frac{0{,}9169}{4}} = \pm\, 0''{,}479.$$

Die Gleichungen (31) bis (33) geben nun:

$$
(42)\qquad
\begin{array}{ll}
\xi_3 = -\,0''{,}3885 & \eta_4 = +\,0''{,}0686 \\
\xi_4 = \,0{,}3932 & \zeta_2 = -\,0{,}1556 \\
\eta_3 = +\,0{,}5729 & \zeta_4 = +\,0{,}2958;
\end{array}
$$

ferner ist:

$$
(42^*)\qquad
\begin{aligned}
(2) - (1) &= -\,0''{,}3918 \\
(3) - (1) &= -\,0{,}6330.
\end{aligned}
$$

Damit werden nach (25) die Ausgleichungsergebnisse:

$$
(43)\qquad
\text{Station 1.}\left\{\begin{array}{l}
2. = 0^0\,0'\,0''{,}0000 \\
3. = 45\ \ 0\ \ 0{,}3448 \\
4. = 90\ \ 0\ \ 0{,}4735
\end{array}\right.
\qquad
\text{Station 3.}\left\{\begin{array}{l}
1. = 0^0\,0'\,0''{,}0000 \\
2. = 45\ \ 0\ \ 0{,}4944 \\
4. = 315\ \ 0\ \ 0{,}3958
\end{array}\right.
$$

$$
\text{Station 2.}\left\{\begin{array}{l}
1. = 0^0\,0'\,0''{,}0000 \\
3. = 270\ \ 0\ \ 0{,}8395 \\
4. = 315\ \ 0\ \ 0{,}6819
\end{array}\right.
\qquad
\text{Station 4.}\left\{\begin{array}{l}
1. = 0^0\,0'\,0''{,}0000 \\
2. = 45\ \ 0\ \ 0{,}2082 \\
3. = 90\ \ 0\ \ 0{,}2670,
\end{array}\right.
$$

welche in der Tat die vier Bedingungsgleichungen erfüllen.

Da von keinem Netzpunkte mehr als drei Richtungen ausgehen, hätte man die gesamte Ausgleichung auch in einfacherer Weise nach bedingten Beobachtungen ausführen können, indem man die Ergebnisse auch bei den Stationen 1 bis 3 in volle Richtungssätze verwandelte. Auf Station 3 kann dies sofort in derselben Weise wie bei Station 4 geschehen, während bei den Stationen 1 und 2 dazu eine kleine Rechnung erforderlich wird. Sind z. B. auf Station 1 die Richtungsverbesserungen B, C und D, so ist nach (6) das Stationsergebnis dargestellt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{7}{6} B - \frac{5}{6} C - \frac{2}{6} D &= -0,9 \\ -\frac{5}{6} B + \frac{5}{3} C - \frac{5}{6} D &= +0,5 \\ -\frac{2}{6} B - \frac{5}{6} C + \frac{7}{6} D &= +0,4, \end{aligned}$$

deren Summe null beträgt.

Nimmt man hierzu als Bedingungsgleichung:

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} B + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} C + \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{6} D = 0,$$

so wird (vergl. im 8. Kapitel, § 4, III):

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{2} B &= -0,9 \\ \frac{15}{4} C &= +0,5 \\ \frac{3}{2} D &= +0,4 \end{aligned}\right\} \quad \text{oder} \quad \left\{\begin{aligned} B &= -0,6000 \quad \text{Gew.} \ \frac{3}{2} \\ C &= +0,1333 \quad \text{,,} \quad \frac{15}{4} \\ D &= +0,2667 \quad \text{,,} \quad \frac{3}{2}. \end{aligned}\right.$$

Mit den angegebenen Richtungsgewichten wären nun weitere Verbesserungen der drei Richtungen, die als voneinander unabhängig anzusehen sind, aus der Netzausgleichung herzuleiten.

Wir berechnen nunmehr die Gesamtverbesserungen λ der Richtungsbeobachtungen.

Für Station 1 sind die Verbesserungen der Beobachtungswerte (1) aus den Endergebnissen (43):

(44)

Satz	2	3	4	Summe	Anzahl	Quotient
1	0	+ 0,0448	− 0,4265	− 0,3817	3	− 0,1272
2	0	− 0,6552	*	− 0,6552	2	− 0,3276
3	*	+ 0,3448	+ 0,6735	+ 1,0183	2	+ 0,5092

Hieraus folgen durch Subtraktion der Quotienten von den Werten der betreffenden Horizontalreihen die Verbesserungen λ.

Übersicht der Verbesserungen λ.

(45)

Satz	2	3	4	Summe
1	+ 0,1272	+ 0,1720	0,2993	+ 0,2992 — 0,2993
2	+ 0,3276	— 0,3276	*	+ 0,3276 — 0,3276
3	*	— 0,1644	+ 0,1643	+ 0,1643 — 0,1644

Für Station 2 folgt:

Übersicht der Verbesserungen λ.

(46)

Satz	1	3	4	Summe
1	— 0,2071	+ 0,0324	+ 0,1748	+ 0,2072 — 0,2071
2	— 0,0410	*	+ 0,0409	+ 0,0409 — 0,0410
3	*	+ 0,5788	— 0,5788	+ 0,5788 — 0,5788

für Station 3:

(47)

Satz	1	2	4	Summe
1	+ 0,2033	— 0,3023	+ 0,0991	+ 0,3024 — 0,3023
2	— 0,2967	— 0,1023	+ 0,3991	+ 0,3991 — 0,3990

für Station 4:

(48)

Satz	1	2	3	Summe
1	+ 0,3416	+ 0,3498	— 0,6914	+ 0,6914 — 0,6914
2	+ 0,3416	— 0,4502	+ 0,1086	+ 0,4502 — 0,4502

Aus den Übersichten (45) bis (48) ergibt sich:

$$(\lambda\lambda) = 0{,}4040 + 0{,}7479 + 0{,}4004 + \frac{1{,}0482}{2} = 2{,}0764. \tag{49}$$

Andrerseits ist aus $(\lambda\lambda) = (ee) + \{ee\}$:

$$\begin{aligned}(\lambda\lambda) &= (0{,}2267 + 0{,}4227 + 0{,}1900 + 0{,}3200) + 0{,}9168 \\ &= 2{,}0762,\end{aligned} \tag{50}$$

was eine gute Übereinstimmung gewährt.

Der mittlere Fehler einer Richtungsbeobachtung vom Gewicht 1 wird, da $m - n + \sigma = 8 + 4$ ist:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{2{,}0764}{12}} = \pm \sqrt{0{,}1730} = \pm 0'',416. \tag{51}$$

In bezug auf die verschiedenen Werte von μ nach (10), (15), (20), (23) bzw. (24) und (41) ist zu erwähnen, daß sie sämtlich innerhalb der rechnungsmäßigen Grenzen übereinstimmen (vergl. S. 143 und 246). Wir können uns daher bei unserer Art der Ausgleichung beruhigen, welche eben voraussetzt, daß nicht nur für alle Stationen der Einheit des Gewichts der gleiche mittlere Fehler zukommt, als auch, daß die Netzausgleichung keine neuen, bei der Stationsausgleichung verborgen gebliebenen Fehlerursachen andeutet.

Um zu ermitteln, mit welcher Genauigkeit der Punkt 4 gegen die Linie $1 \cdot 2$ festgelegt worden ist, nehmen wir $1 \cdot 2 = 100\,000$ Längeneinheiten als genau gegeben an und bestimmen 4 durch Polarkoordinaten mit dem Ursprunge 1 und der Achse $1 \cdot 2$. Wir haben nun, wenn Seite $1 \cdot 4$ mit r_4 und der Winkel $\binom{2 \cdot 4}{1}$ mit ψ_4 bezeichnet wird:

$$(52) \qquad r_4 = 100\,000 \frac{\sin \binom{4 \cdot 1}{2}}{\sin \binom{1 \cdot 2}{4}}, \quad \psi_4 = \binom{2 \cdot 4}{1},$$

also nach (25), S. 317:

$$(53) \log r_4 = 5 - (0{,}6000 + (2) - (1) + 0{,}6133 + \eta_{14})\, 0{,}000002106,$$

$$(54) \qquad \psi_4 = 90^0\, 0'\, 0''{,}8667 + \xi_4,$$

woraus folgt, indem man erstens die Werte der Verbesserungen einsetzt:

$$(55) \qquad \log r_4 = 4{,}9999981 \cdot 3, \quad \psi_4 = 90^0\, 0'\, 0''{,}4735,$$

und indem man zweitens differenziert:

$$(56) \qquad \frac{d r_4}{d \eta_{14}} = \frac{d r_4}{d (2)} = - \frac{d r_4}{d (1)} = - 0{,}4849; \quad \frac{d \psi_4}{d \xi_4} = 1 .$$

Hiermit ist man zur Kenntnis der Differentialquotienten F der beiden Funktionen r_4 und ψ_4 der Beobachtungsgrößen gelangt (vergl. S. 273, III). Aus ihnen erhalten wir mittels (31) und (32) die folgenden Differentialquotienten f:

$$(57) \qquad \frac{d r_4}{d v_4} = - 0{,}4849 = \frac{d r_4}{d (2)} = - \frac{d r_4}{d (1)}; \quad \frac{d \psi_4}{d v_2} = 1 .$$

Wir berechnen damit aus (34) die Werte $\{pf\}$, $\{qf\}$ usw. für r_4.

Es ist:

$$[pf] = \frac{-\frac{5}{7}\cdot(-0{,}4849)}{\frac{15}{14}} = +0{,}3233$$

$$[qf] = \frac{(-1)\cdot(-0{,}4849)}{\frac{15}{14}} + \frac{(-1)\cdot(+0{,}4849)}{1} + \frac{(+1)\cdot(-0{,}4849)}{1}$$
$$= -0{,}5172\,,$$

und ebenso sind die übrigen Summen gleich

$$-0{,}4849\,, \quad +1{,}4224\,.$$

Ihre Summe $+0{,}7436$ ist in Übereinstimmung mit dem aus der Summengleichung in (34) gebildeten Werte

$$[sf] = +0{,}7435\,.$$

Für ϑ_4 hat man

$$+0{,}6667\,, \quad +1{,}3333, \quad +0{,}6667\,, \quad 0,$$

mit der Summe $+2{,}6667$.

Setzt man

$$\mu_{r_4}{}^2 = \mu^2(\mathrm{I}-\mathrm{II}),$$

so ist

$$\mathrm{I} = \frac{(-0{,}4849)^2}{\frac{15}{14}} + \frac{(+0{,}4849)^2}{1} + \frac{(-0{,}4849)^2}{1} = 0{,}6897\,.$$

Die Zähler in II berechnen sich mittels (37*), man erhält für sie:

$$+0{,}3233$$
$$-0{,}5172 - 0{,}40816\cdot 0{,}3233 = -0{,}6492$$
$$-0{,}4849 + 0{,}23471\cdot \quad " \quad + 0{,}53179\cdot 0{,}6492 = -0{,}0638$$
$$+1{,}4224 - 0{,}66329\cdot \quad " \quad - 0{,}52413\cdot \quad " \quad - 0{,}35322\cdot 0{,}0638$$
$$= +0{,}8452\,;$$

die Nenner sind aus (37) zu entnehmen. Es wird damit:

$$\mathrm{II} = \frac{(+0{,}3233)^2}{3{,}2666} + \frac{(-0{,}6492)^2}{3{,}7225} + \frac{(-0{,}0638)^2}{2{,}7006} + \frac{(+0{,}8452)^2}{13{,}366}$$
$$= 0.3745\,.$$

$$\mu_{r_4}{}^2 = 0{,}3152\,\mu^2 = 0{,}3152\cdot 0{,}1730\,,$$

$$\mu_{r_4} = \pm 0{,}233 \text{ Längeneinheiten.} \tag{58}$$

In ähnlicher Weise findet man für ψ_4:

$$\mathrm{I} = \frac{4}{3} = 1,3333,$$

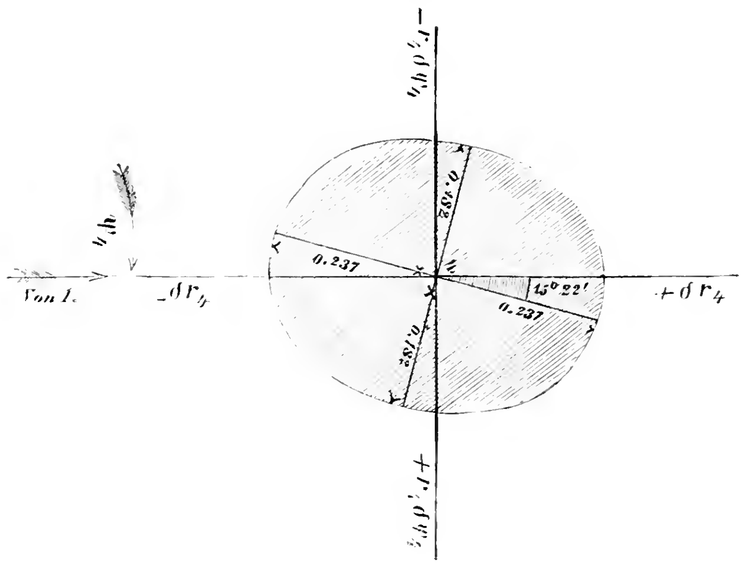
$$\mathrm{II} = \frac{(+0,6667)^2}{3,2666} + \frac{(+1,0612)^2}{3,7225} + \frac{(+0,2589)^2}{2,7006} + \frac{(+0,2054)^2}{3,1366}$$

$$= 0,4767.$$

$$\mu_{\psi_4}^2 = 0,8566\,\mu^2 = 0,8566 \cdot 0.1730.$$

(59) $$\mu_{\psi_4} = \pm 0''\!,385.$$

Die Fehlerellipse für Punkt 4. Wenn wir als Funktionen F' und F'' bzw. δr_4 und $r_4 \delta \psi_4$ nehmen, worin δr_4 die



Änderung des ausgeglichenen Wertes von r_4 und $\delta \psi_4$ die Änderung des ausgeglichenen Wertes von ψ_4 in Bogenmaß bedeutet, so ist:

$$Q_{1 \cdot 1} = 0,3152$$

$$Q_{2 \cdot 2} = \frac{0,8566}{(206\,265)^2}\,(100\,000)^2 = 0,2013$$

$$Q_{1 \cdot 2} = \frac{100\,000}{206\,265}\left(0 - \left[\frac{0,3233 \cdot 0,6667}{3,2666} - \frac{0,6492 \cdot 1,0612}{3,7225}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{0,0638 \cdot 0,2589}{2,7006} + \frac{0,8452 \cdot 0,2054}{3,1366}\right]\right) = +0,03387.$$

Damit wird

$$\cot 2N = 1{,}681, \quad 2N = 30^0\,44';$$

$$(60) \qquad N_1 = 15^0\,22', \quad N_2 = 105^0\,22',$$

und für die Halbachsen in Richtung von N_1 und N_2 ergibt sich mit $\mu^2 = 0{,}1730$:

$$(61) \qquad \sqrt{0{,}1730(0{,}2013 + 0{,}03387 \cdot 3{,}639)} = \pm 0{,}237 \text{ Längeneinh.}$$

$$\sqrt{0{,}1730(0{,}2013 - 0{,}03387 \cdot 0{,}275)} = \pm 0{,}182 \quad \text{,,} \quad .$$

Die Unsicherheit in der Grundlinie $1 \cdot 2$ ist, wie eingangs bemerkt, nicht berücksichtigt.

Größere Beispiele für die Fehlerellipse geben die Werke „Den danske Gradmaaling“, herausgegeben von C. G. Andrae, Bd. I und II, Kopenhagen 1867 und 1872 und „Das schweizerische Dreiecksnetz“, herausgegeben von der schweizerischen geodätischen Kommission, Bd. II, Zürich 1884.

Fünftes Kapitel.

Untersuchung der Beobachtungsfehler.

§ 1. Einfluß regelmäßiger Fehlerursachen auf die Verteilung übrigbleibender Fehler λ.

1. Zweck der Untersuchung. Nach beendeter Ausgleichung einer Beobachtungsreihe wird sich die Frage aufdrängen, inwieweit man aus den übrigbleibenden Fehlern λ beurteilen kann, ob nur zufällige oder ob auch regelmäßige Fehlerursachen zur Entstehung der den λ entsprechenden wahren Fehler ε beigetragen haben und welcher Form $\varphi(\varepsilon)$ ist, um zu entscheiden, ob die Rechnungsergebnisse wahrscheinlichste Ergebnisse sind oder nur größte Gewichte haben, oder ob sie den Beobachtungen nur möglichst angepaßt sind.

Am besten würde es ja sein, wenn man $\varphi(\varepsilon)$ unmittelbar aus wahren Beobachtungsfehlern ableiten könnte. Manchmal wird dies möglich sein, wenn auch nur erst unter Zuziehung von noch anderem als dem auszugleichenden Material, das aber diesem ganz gleichartig sein muß.

Kann man sich nur an die Fehler λ einer Ausgleichung halten, so hat die Untersuchung nur dann Sinn, wenn die Anzahl der überschüssigen Messungen hoffen läßt, sich der Wahrheit hinlänglich genähert zu haben, um annehmen zu können, daß die λ und ε nicht zu sehr verschieden sind, und daher $\varphi(\lambda)$ und $\varphi(\varepsilon)$ angenähert übereinstimmen. Wenn jedoch die wahren Fehler ε teilweise von regelmäßigen und konstanten Fehlerursachen herrühren und infolgedessen die Verteilung derselben keine gerade Funktion ihrer Größe ist, so führt eine vermehrte

Anzahl Kontrollen bei der Ausgleichung nach der M. d. kl. Qu. nicht näher an die wahren Werte, sondern auf gewisse andere Werte, die im allgemeinen um so mehr verschieden von den wahren sind, je größer die Abweichung des Fehlergesetzes von der erwähnten Eigenschaft ist. Dies gilt auch für einseitig wirkende zufällige Fehler, falls es nicht möglich ist, ihren konstanten Teil k, (S. 16), in Rechnung zu ziehen. (Vergl. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, S. 252 u. f.) Die λ werden in diesen Fällen im allgemeinen eine andere Verteilung befolgen als die wahren Fehler.

II. Einfluß einer Ursache regelmäßiger Fehler auf die übrigbleibenden Fehler λ der Ausgleichung. Bei vermittelnden Beobachtungen mit einer Unbekannten x lauten die Fehlergleichungen:

$$\lambda_i = -l_i + a_i x. \tag{1}$$

Die wahre Verbesserung ε bestehe aus einem zufälligen Teile ε' und einem regelmäßigen Teile $b_i Y$, worin b_i eine von Beobachtung zu Beobachtung gesetzmäßig sich ändernde Größe (z. B. eine Funktion der Zeit oder eine Funktion von a_i), Y eine Konstante sei.

Wären uns die b_i bekannt, so würden wir Y als zweite Unbekannte y durch die Ausgleichung ermitteln können.

Die Fehlergleichungen erhielten dafür die Form:

$$\lambda_i' = -l_i + a_i x + b_i y. \tag{2}$$

Bildet man für beide Systeme die Normalgleichungen und die entsprechenden Werte von x, bzw. von x und y, so findet sich

$$\lambda_i = \lambda_i' + \left(a_i \frac{(ab)}{(aa)} - b_i\right) \frac{(bl \cdot 1)}{(bb \cdot 1)}. \tag{3}$$

Die λ_i' werden, da sie nur von zufälligen Fehlern herstammen, bei hinreichender Kontrollenanzahl eine Verteilung zeigen, die angenähert derjenigen zufälliger Fehler entspricht. Die λ hingegen werden diese Verteilung nicht zeigen, da sie einen Teil enthalten, welcher ein ganz anderes Gesetz befolgt. Sie werden also die regelmäßig wirkende Ursache mehr oder weniger andeuten.

Eine Ausnahme zeigt aber schon unser einfaches Beispiel: wenn nämlich allgemein

$$(4)\qquad a_i \frac{(ab)}{(aa)} - b_i = 0$$

ist, d. h. wenn a_i und b_i für alle Beobachtungen ein konstantes Verhältnis besitzen, dann wird die konstante Fehlerursache durch die übrigbleibenden Fehler λ nicht angedeutet, weil nach (3) in diesem Falle $\lambda = \lambda'$ wird. Trotzdem wird aber der Wert von x fehlerhaft erhalten; denn $(ab):(aa)$ ist nicht x, sondern

$$(5)\qquad x\left(1 + \frac{by}{ax}\right).$$

So wird im allgemeinen aus den λ direkter Beobachtungen (gleicher Genauigkeit) einer Größe nichts über einen allen Beobachtungen anhaftenden konstanten Fehler zu entnehmen sein. Daher wird man z. B. aus den λ einer Stationsausgleichung keinen Schluß auf konstante Seitenrefraktion machen können. Dagegen wird eine mit der Tageszeit oder mit der Jahreszeit veränderliche Seitenrefraktion hervortreten.

Wir betrachten noch einen einfachen Fall bedingter Beobachtungen. Es seien

$$(6)\qquad \varepsilon_i = \varepsilon_i' + a_i X$$

die wahren Verbesserungen der Beobachtungen, und zwar ε_i' der zufällige, $a_i X$ der regelmäßige Teil. Nimmt man keine Rücksicht auf X, so gibt die Ausgleichung

$$(7)\qquad [p\lambda] + w_1 = 0.$$

Wird aber X eingeführt, so wird

$$(8)\qquad [p\lambda'] + [ap]X + w_1 = 0.$$

Also ist:

$$(9)\qquad [p(\lambda' - \lambda)] + [ap]X = 0.$$

Es sind daher die Differenzen $\lambda_i' - \lambda_i$ Funktionen von X, und da nun (bei zahlreichen Bedingungsgleichungen und überschüssigen Beobachtungen) die λ' die Verteilung zufälliger Fehler annehmen werden, so werden die λ diese Verteilung nicht mehr zeigen.

Wenn jedoch der regelmäßige Teil der Fehler die Bedingungsgleichungen erfüllt, indem $[ap] = 0$ wird, so ist an der Verteilung der λ nichts von dem Vorhandensein der regelmäßigen Fehlerursache zu bemerken. Die ausgeglichenen Beobachtungswerte sind alsdann nur wegen $\lambda = \lambda'$ verbessert und um das regelmäßige Glied aX fehlerhaft.

So würde ein geschlossener Zug eines geometrischen Nivellements sehr fehlerhaft sein können, ohne daß es im Zusammenschluß zu bemerken wäre, wenn er über einen Berg führt und wenn talwärts und bergwärts bei nahezu gleichem Verlaufe mit ungleichen Zielweiten vor- und rückwärts gearbeitet würde, weil der entstehende Einfluß der Okularröhrenstellung des Nivellierfernrohrs sich in der ganzen Schleife aufhebt. Bekanntlich nimmt man bei Feinnivellements gleiche Zielweiten vor- und rückwärts. Auch dann kann bei starkem Gefälle ein, allerdings nur kleiner, Fehlereinfluß auftreten durch eine systematische Ungleichheit der Höhenrefraktion im Vor- und Rückblick. In Schleifen wird dieser Einfluß, abgesehen vom Wechsel der Luftverhältnisse, nur hervortreten, wenn die beiden Wege nach der Höhe verschiedene Steigung haben.

Ein Beispiel, wo der Ausnahmefall, daß die regelmäßigen Fehler die Bedingungsgleichungen erfüllen und in den λ nicht hervortreten, kaum jemals eintreten wird, bietet die Triangulation. In den Bedingungsgleichungen derselben werden ebensowohl größere Seitenrefraktionen sich fühlbar machen, wie auch Instrumentalfehler, z. B. von der Art, daß alle Winkel zu klein gemessen werden.

III. Ursachen konstanter und regelmäßiger Fehler sind die Instrumentalfehler, die persönlichen Fehler, die Fehler der Theorie u. a. m. Zu den Mitteilungen im 1. Kap., S. 4 u. f., sei noch folgendes bemerkt. Die Instrumentalfehler werden zwar zu den Ursachen vermeidlicher Beobachtungsfehler gerechnet, insofern man sie im Mittel in der Hauptsache eliminieren kann, doch zeigt die Geschichte der feinern Meßkunst, daß es der Bemühungen vieler geschickter Künstler und ingeniöser Beobachter bedurft hat, um dahin zu gelangen, einerseits die Größe der Instrumentalfehler im besondern Falle auf ein wünschenswertes Maß herabdrücken zu können, andrerseits aber sie alle kennen zu lernen und die Methoden zu ihrer Elimination durch Rechnung oder Beobachtung auszubilden. Der stetige Fortschritt der Wissenschaft zeitigt auch hier immer neue Anforderungen und neue Bemühungen.

Als persönliche Fehler bezeichnet man diejenigen regelmäßigen Beobachtungsfehler, welche aus gewissen Besonderheiten der menschlichen Sinneswerkzeuge hervorgehen. Nicht nur, daß die Sinneseindrücke uns erst nach Verlauf einer merkbaren, wenn auch kleinen Zeit zum Bewußtsein kommen: die Sinneswerkzeuge reproduzieren auch die von außen anlangenden Anregungen in systematischer Weise unrichtig. Besonders bekannt sind die systematischen Einstellungsfehler eines Fadens auf die Mitte eines Objekts und die Schätzungsfehler der Stellung eines Zeigers an einer Teilung*); ferner die Fehler in der Schätzung der Zeit eines Sterndurchgangs durch einen vertikalen oder horizontalen Faden im Gesichtsfelde eines Fernrohrs.

Erwähnt seien hier auch die Abrundungsfehler beim Ablesen an Teilungen. In der Regel kommt ihnen allerdings gar keine Bedeutung zu, da man Sorge trägt, daß sie sich innerhalb der andern Fehlereinflüsse halten.**)

Die ungenaue Definition und die Veränderlichkeit der Größen sind ebenfalls Ursachen systematischer Fehler. So ist ein Maßstab, abgesehen von thermischen Wirkungen, nicht absolut unveränderlich, je nach dem Material in verschiedenem Maße. Endstriche unterliegen persönlicher Auffassung; auch Endflächen definieren nicht ganz einwandfrei. Ein merkwürdiges

*) Diese Fehler zeigen eine sehr merkwürdige Abhängigkeit von der Stellung des Zeigers innerhalb der Nachbarstriche. Vergl. A. W. Volkmann. Über das Vermögen, Größenverhältnisse zu schätzen. (Ber. d. Königl. Sächs. Ges. d. W., math.-phys. Klasse. 1858. S. 188 u. f.)

E. Großmann. Über Schätzungen nach Augenmaß (Astr. Nachr. Bd. 170, 1906, Nr. 4066, Sp. 149 u. f.).

**) R. Lehmann-Filhès. Über die Ausgleichung abgerundeter Beobachtungen (Astr. Nachr. Bd. 110, 1885, Nr. 2622, Sp. 93 u. f.; Bd. 120, 1889, Nr. 2876, Sp. 305 u. f.).

P. Pizzetti. Sur la théorie des observations arrondies (Astr. Nachr. Bd. 124, 1890, Nr. 2955, Sp. 33 u. f.).

Beispiel systematischer Veränderlichkeit bieten die geographischen Breiten, eine Tatsache, welche erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts deutlich erkannt wurde.*)

Als Fehler der Theorie bezeichnet man eine unrichtige Angabe der Funktion, welche die Beziehungen zwischen den beobachteten Größen ausdrückt.

§ 2. Untersuchung der Fehler zur Feststellung der wichtigsten Eigenschaften ihres Verteilungsgesetzes.

I. Gesetz der Verteilung der wahren Beobachtungsfehler. In einzelnen Fällen kann man den direkten Weg einschlagen, daß man die beobachteten Größen auf andere und so scharfe Weise ermittelt, daß sie als absolut richtig dem zu untersuchenden Beobachtungsverfahren gegenüber anzusehen sind.

Mit Erfolg wird diese Methode u. a. in der Astrometrie zur Ermittelung persönlicher Fehler angewandt. O. Struve bestimmte durch Messung künstlicher Doppelsterne die regelmäßigen (= persönlichen) Fehler seiner Messungen an cölestischen Doppelsternen. In gleicher Weise gingen ich selbst**) und Bigourdan***) vor. Ferner findet man auf Sternwarten Apparate, mit denen der Beobachter zu jeder Zeit ermitteln kann, um wieviel er zu spät oder zu früh den Durchgang eines Sternes durch einen Faden beobachtet.

Auch die Geodäsie bietet Anwendungen dieses Verfahrens, die wahren Beobachtungsfehler kennen zu lernen. Messen wir z. B. mittels Basis und Triangulation eine Anzahl Längen indirekt, so können wir, gewöhnlichen Lattenmessungen oder Bandmessungen gegenüber, die Angaben des ersten Verfahrens als absolut richtig annehmen und erhalten damit die wahren

*) Das Ausgleichungsproblem veränderlicher Größen behandeln:

Estienne. Valeur plausible d'une grandeur variable (C. R. Bd. 130, 1900. S. 393 u. f.).

Feraud. Sur un problème de probabilité des erreurs. (Bull. astr. 1903. S. 291 u. f.)

**) Der Sternhaufen im Sternbilde des Sobieskischen Schildes. Publikation der Hamburger Sternwarte. 1874.

***) Vergl. E. Großmann. Untersuchung über systematische Fehler bei Doppelsternbeobachtungen. Göttingen 1892.

Beobachtungsfehler als Differenzen der genauen Längen und der Ergebnisse der Lattenmessungen oder Bandmessungen.*)

Werden die drei Winkel einer Anzahl trigonometrischer Dreiecke gemessen, so ergibt die Vergleichung der theoretischen Winkelsumme mit der beobachteten die Summe der wahren Fehler der drei beobachteten Winkel; diese Summe kann man als einen wahren Fehler in der Beobachtung der Winkelsumme des Dreiecks auffassen.

Überhaupt sind die Widersprüche von Bedingungsgleichungen wahre Fehler, die sich indessen nicht immer so gut wie im vorhergehenden Falle zu Untersuchungen eignen, teils weil sie nicht gleichartig zueinander sind, teils wegen Elimination konstanter Fehler in den Gleichungen.

II. Vorzeichenprüfung. Ehe man an die Ableitung des Fehlergesetzes selbst geht, prüft man die Verteilung der Vorzeichen und die Größenverhältnisse der Fehler, um zu erkennen, ob die Fehlerverteilung ein gerades Gesetz befolgt. Zwar ist dies für die Gültigkeit der mittleren Fehlerberechnung nach Gauß nicht unbedingt nötig: es genügt, daß die wahren Fehler ε die Gaußsche Bedingung, S. 17, erfüllen (oder daß der konstante Teil k von den ε abgezogen ist); indessen handelt es sich eben gerade darum, außer konstanten und regelmäßigen Fehlern auch die etwa vorhandenen einseitig wirkenden zufälligen Fehler zu erkennen.

Für die Vorzeichenprüfung ist es erforderlich, daß die gemessenen Größen gleichartig oder gleichsinnig eingeführt werden, also z. B. die direkt gemessenen Winkel und nicht teilweise die Differenz: 360° — gemessener Winkel. Darauf ist besonders zu achten, wenn übrigbleibende Fehler λ einer Ausgleichung zur Untersuchung gelangen, weil bei der Aufstellung der Fehlergleichungen manchmal Umsetzungen stattfinden können, die das Vorzeichen verändern.

A. In einer Reihe wahrer Fehler, die ein gerades Verteilungsgesetz befolgen, soll die Anzahl der positiven Fehler gleich der der negativen sein, abgesehen von einer Einheit bei ungerader Anzahl. Bezeichnen wir die Vorzeichen

* Vergl. die auf S. 60 erwähnte Arbeit von C. Reinhertz.

mit V und setzen demgemäß $V = \pm 1$, so ist im Durchschnitt unendlich vieler Fälle die Summe

$$(1) \qquad s = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$$

gleich null, da für jedes V_i ebenso oft $+1$ wie -1 zu nehmen ist. Aus den folgenden Bemerkungen über die Häufigkeit der Fälle, wo s einen gewissen Wert hat, ergibt sich, daß $s = 0$ bei geradem n bzw. $s = \pm 1$ bei ungeradem n auch der wahrscheinlichste Wert ist.

Das mittlere Fehlerquadrat der Bestimmung $s = 0$ ist offenbar n, da die Quadrierung der Summe s aus den Quadraten der V n positive Einheiten gibt, während die doppelten Produkte im Durchschnitt verschwinden.

Wir haben also als Ergebnis:

$$(2) \qquad \begin{cases} \text{Vorzeichensumme} = \text{null} \\ \text{mit dem mittlern Fehler} \pm \sqrt{n}\,. \end{cases}$$

Untersucht man die Häufigkeit bestimmter Werte s bei gegebenem n, wenn die Beobachtungsreihe unendlich viele Male wiederholt gedacht wird, so findet man wie bei Hagens Ableitung des Gaußschen Exponentialgesetzes, S. 13 15, daß die relativen Häufigkeitszahlen schon bei mäßig großen Werten von n angenähert nach dem genannten Gesetz interpoliert werden können. Die relative Häufigkeit der Fälle, wo $s \leqq \sqrt{n}$ ist, oder die Wahrscheinlichkeit, daß s innerhalb der Grenzen $\pm\sqrt{n}$ liegt, ist somit angenähert gleich 0,683.

Ist die Vorzeichensumme s, absolut genommen, größer als $\sqrt{n}$, so hat man daher ernste Veranlassung, systematische Fehlereinflüsse anzunehmen.

Hat man keine ε, sondern nur λ zur Hand, so ist natürlich die vorstehende Prüfung um so weniger von Bedeutung, je geringer die Anzahl Kontrollen der Ausgleichung ist (siehe weiterhin).

Da die möglichen Werte von s eine diskrete Wertreihe im Intervall 2 bilden, so ist die Wahrscheinlichkeit für s innerhalb $\pm\sqrt{n}$ bei kleinem n merklich von 0,683 verschieden. Eine genauere Untersuchung ergibt:

$$0{,}683 - \frac{r}{\sqrt{4{,}27\, n}} \quad \text{bzw.} \quad 0{,}683 + \frac{0{,}484}{\sqrt{n}}\,.$$

Der erste Ausdruck gilt, wenn $\sqrt{n}$ eine irrationale Zahl ist. r bezeichnet dann den echten Bruch, um den $\sqrt{n}$ von der nächsten ungeraden Zahl bei geradem n bzw. der nächsten geraden Zahl bei ungeradem n abweicht.

Der zweite Ausdruck gilt für den Fall, daß $\sqrt{n}$ eine ganze Zahl ist. Er ist zugleich das Maximum des ersten Ausdrucks.*)

B. Da systematische Fehler die eben behandelte Vorzeichenverteilung nicht immer ungünstig beeinflussen, so ist es weiter nötig, die **Vorzeichenwechsel** der Fehlerreihe zu untersuchen. Hat man die Vermutung, daß systematische Einflüsse vorhanden sind, die von der Zeit oder irgend einer andern Variablen abhängen, so ordne man die Beobachtungen nach der betreffenden Variablen. Die entstehende Vorzeichenreihe $V_1 \ldots V_n$ wird dann eventuell Anhäufungen von positiven und negativen Zeichen besitzen. Es ist nun wichtig zu wissen, wie groß sich bei rein zufälligen Fehlern die Differenz der Vorzeichenfolgen f und der Vorzeichenwechsel w wahrscheinlich ergibt.

Leicht zu erkennen ist, daß für $V = \pm 1$ die Gleichung besteht:

$$(3) \qquad f - w = V_1 V_2 + V_2 V_3 + V_3 V_4 + \cdots + V_{n-1} V_n;$$

denn z. B. $V_i V_{i+1}$ ist $+1$ für eine Folge, -1 für einen Wechsel. Bei ungeradem n ist der wahrscheinlichste Wert von $f - w$ offenbar null, indem jedes Produkt $V_i V_{i+1}$ ebenso leicht $+1$ wie -1 sein kann und die Anzahl der Produkte gerade ist. Bei geradem n kommt $+1$ oder -1 heraus. Es genügt, für unsere Zwecke als Ausgangswert $f - w = 0$ zu nehmen; dies ist der Durchschnittswert für unendlich viele Fälle.

Die mittlere Abweichung des Wertes $f - w$ von null ist die Quadratwurzel des Durchschnitts von dem Quadrat des Ausdrucks (3) für unendlich viele Fälle. Dies Quadrat ist gleich:

$$V_1^2 V_2^2 + V_2^2 V_3^2 + V_3^2 V_4^2 + \cdots + V_{n-1}^2 V_n^2$$

nebst doppelten Produkten von der Form $2 V_i V_{i+1}^2 V_{i+2}$ und $2 V_i V_{i+1} V_k V_{k+1}$ mit $k > i + 1$. Der Durchschnittswert der

*) Vergl. hierzu und zu dem Folgenden: F. R. Helmert. Über die Genauigkeit der Kriterien des Zufalls bei Beobachtungsreihen. (Sitzungsber. d. Königl. Preuß. Akad. d. Wissensch., phys.-mathem. Klasse, 1905. S. 594—612.)

Produkte ist null; die Quadrate geben zusammen $n-1$. Also ist die mittlere Abweichung des $f-w$ von null gleich

$$\pm\sqrt{n-1}\,. \tag{4}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß s innerhalb $\pm\sqrt{n-1}$ liegt, ist angenähert wie beim Gaußschen Fehlergesetz gleich

$$0{,}683,$$

da schon für mäßig große n die Häufigkeitszahlen von $f-w$ sich durch das Gaußsche Gesetz interpolieren lassen, wie jetzt angedeutet werden soll.

Bei nur zwei Fehlern hat man folgende vier verschiedene Werte von $f-w$:

V_1	V_2	$f-w$
+ 1	+ 1	+ 1
+ 1	− 1	− 1
− 1	+ 1	− 1
− 1	− 1	+ 1

Bei drei Fehlern hat man:

V_1	V_2	V_3	$f-w$	V_1	V_2	V_3	$f-w$
+ 1	+ 1	+ 1	+ 2	− 1	+ 1	+ 1	0
+ 1	+ 1	− 1	0	− 1	+ 1	− 1	− 2
+ 1	− 1	+ 1	− 2	− 1	− 1	+ 1	0
+ 1	− 1	− 1	0	− 1	− 1	− 1	+ 2

Bei vier Fehlern ergibt sich:

V_1	V_2	V_3	V_4	$f-w$	V_1	V_2	V_3	V_4	$f-w$
+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 3	− 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
+ 1	+ 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1
+ 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 3
+ 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	− 1	− 1
+ 1	− 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	− 1	+ 1	+ 1	+ 1
+ 1	− 1	+ 1	− 1	− 3	− 1	− 1	+ 1	− 1	− 1
+ 1	− 1	− 1	+ 1	− 1	− 1	− 1	− 1	+ 1	+ 1
+ 1	− 1	− 1	− 1	+ 1	− 1	− 1	− 1	− 1	+ 3

Bei fünf Fehlern erhält man:

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	$f-w$	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	$f-w$
+1	+1	+1	+1	+1	+4	−1	+1	+1	+1	+1	+2
+1	+1	+1	+1	−1	+2	−1	+1	+1	+1	−1	0
+1	+1	+1	−1	+1	0	−1	+1	+1	−1	+1	−2
+1	+1	+1	−1	−1	+2	−1	+1	+1	−1	−1	0
+1	+1	−1	+1	+1	0	−1	+1	−1	+1	+1	−2
+1	+1	−1	+1	−1	−2	−1	+1	−1	+1	−1	−4
+1	+1	−1	−1	+1	0	−1	+1	−1	−1	+1	−2
+1	+1	−1	−1	−1	+2	−1	+1	−1	−1	−1	0
+1	−1	+1	+1	+1	0	−1	−1	+1	+1	+1	+2
+1	−1	+1	+1	−1	−2	−1	−1	+1	+1	−1	0
+1	−1	+1	−1	+1	−4	−1	−1	+1	−1	+1	−2
+1	−1	+1	−1	−1	−2	−1	−1	+1	−1	−1	0
+1	−1	−1	+1	+1	0	−1	−1	−1	+1	+1	+2
+1	−1	−1	+1	−1	−2	−1	−1	−1	+1	−1	0
+1	−1	−1	−1	+1	0	−1	−1	−1	−1	+1	+2
+1	−1	−1	−1	−1	+2	−1	−1	−1	−1	−1	+4

Die Zusammenstellung gibt:

	Fehler		$f-w=$ −4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4
(5)	2	Häufig-				2	.	2			
	3	keits-			2	.	4	.	2		
	4	zahlen		2	.	6	.	6	.	2	
	5		2	.	8	.	12	.	8	.	2

Man erkennt, daß die Häufigkeitszahlen, abgesehen vom Faktor 2, die Binomialkoeffizienten sind (vergl. S. 14); denn durch das Hinzutreten eines neuen Fehlers werden aus jedem Einzelfalle zwei neue, einer mit $f-w$ um 1 mehr, der andere mit $f-w$ um 1 weniger. Die Häufigkeitszahlen für $n=5$ entstehen also aus denen für $n=4$ nach dem Schema:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & 0 & & 2 & & 6 & & 6 & & 2 & & 0 & \\ 0 & & 2 & & 8 & & 12 & & 8 & & 2 & & 0. \end{array}$$

usw.

Wie bei **Hagens** Ableitung des Gaußschen Fehlergesetzes gelangt man hiermit wieder dazu, die relative Häufigkeit oder Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen bestimmter Werte $f-w$ nach diesem Gesetze näherungsweise zu berechnen.

Der wahrscheinlichste Wert von $f - w$ ist nun 0 oder ± 1, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Als Ergebnis erhalten wir:

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Anzahl der Zeichenfolgen} - \text{Anzahl der Zeichenwechsel} = \text{null} \\ \qquad\qquad \text{mit dem mittlern Fehler } \pm \sqrt{n-1}. \end{array} \right.$$

Ist diese Differenz, absolut genommen, größer als $\sqrt{n-1}$, so ist ein systematischer Einfluß der Variablen, nach der die Beobachtungen geordnet sind, zu vermuten; denn die Wahrscheinlichkeit, daß $f - w$ zwischen den Grenzen $\pm \sqrt{n-1}$ liegt, ist bereits angenähert 0,683.

Da die möglichen Werte von $f - w$ eine diskrete Wertreihe mit dem Intervall 2 bilden, so ist die Wahrscheinlichkeit für $f - w$ innerhalb $\pm \sqrt{n-1}$ bei kleinem n merklich von 0,683 verschieden. Die genaue Untersuchung gibt

$$0{,}683 - \frac{r}{\sqrt{4{,}27\,(n-1)}} \quad \text{bzw.} \quad 0{,}683 + \frac{0{,}484}{\sqrt{n-1}}.$$

Der erste Ausdruck gilt, wenn $\sqrt{n-1}$ irrational ist; r bezeichnet dann den echten Bruch, um den $\sqrt{n-1}$ von der nächsten geraden Zahl bei geradem n bzw. von der nächsten ungeraden Zahl bei ungeradem n abweicht. Der zweite Ausdruck gilt für rationale Werte von $\sqrt{n-1}$.*)

Im vorhergehenden ist keine Rücksicht genommen auf das Vorkommen des Beobachtungsfehlers null. Obwohl seine Wahrscheinlichkeit unendlich klein ist, tritt er doch wegen der Abrundung der Zahlenwerte in wirklichen Fehlerreihen nicht selten auf. Da man nun über das Vorzeichen des eigentlichen Fehlerwertes im ungewissen ist, so kann man die Summe s der Vorzeichen und diejenige der Zeichenfolgen und -wechsel, $f - w$, zweimal bilden, einmal für ein positives Vorzeichen und

*) Vergl. in meiner auf S. 336 angegebenen Abhandlung S. 602 603; ferner auch:

H. Seeliger. Über die Verteilung der nach einer Ausgleichung übrigbleibenden Fehler. (Sitzungsber. der math.-phys. Kl. d. Königl. Bayer. Akad. d. Wissensch. 1899, XXIX, S. 3 u. f.) Seeliger faßt das Problem anders auf, als hier geschehen; er erörtert auch noch die erste Differenzreihe.

einmal für ein negatives. Das Mittel beider Annahmen kommt darauf hinaus, in der Vorzeichensumme s für den Fehler null wirklich null zu setzen, und ebenso für $f - w$ den Anteil, welchen der Fehler null mit den beiden Nachbarfehlern gibt, zu vernachlässigen.

Auf die mittleren Fehler hat der Fehler null überhaupt keinen Einfluß; er muß nur in n mitgezählt werden.

III. Prüfung durch mittlere Fehlergrößen. Wir setzen hier gleiche Genauigkeit der Beobachtungen voraus. Im Falle ungleicher Genauigkeit sind die Produkte $\varepsilon\sqrt{g}$ einzuführen.

A. Ist $\varphi(\varepsilon)$ eine gerade Funktion, so wird der durchschnittliche Wert von $[\varepsilon]$ gleich null, und es ist zu erwarten, daß die Summe der positiven ε gleich der der negativen ist.

Das mittlere Fehlerquadrat der Annahme $[\varepsilon] = 0$ ist aber $\pm \mu\sqrt{n}$, ihr wahrscheinlicher Fehler nahezu $= \pm \frac{2}{3}\mu\sqrt{n}$, wobei angenähert $\mu^2 = [\varepsilon\varepsilon] : n$ ist. Der wahrscheinliche Fehler ergibt sich in der angegebenen Weise aus dem mittlern mit Rücksicht darauf, daß die relative Häufigkeit für Werte von $[\varepsilon]$ sich bei großem n nach dem Gaußschen Fehlergesetz bemißt.

Wir können leicht erkennen, daß jedenfalls die Annahme $[\varepsilon] = 0$ die sicherste ist; denn die Annahme $[\varepsilon] = s$ hat das mittlere Fehlerquadrat $s^2 + n\mu^2$, ist also für $s = 0$ am günstigsten

Das Ergebnis ist also:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \text{Summe der Fehler } [\varepsilon] = 0 \\ \text{mit dem mittlern Fehler } \pm \mu\sqrt{n} = \pm \sqrt{[\varepsilon\varepsilon]}. \end{array} \right.$$

Hieraus folgt:

$$(7^*) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{[\varepsilon]}{n} = 0 \\ \text{mit dem mittlern Fehler } \pm \dfrac{\mu}{\sqrt{n}}. \end{array} \right.$$

Liegt der Absolutwert von $[\varepsilon] : n$ außerhalb $\mu : \sqrt{n}$, so hat man starken Anlaß zu vermuten, daß ein konstanter Anteil $k = [\varepsilon] : n$ da ist.

$[\varepsilon]$ nähert sich mit wachsender Anzahl keineswegs immer sicherer der Null, wie oft behauptet wird, sondern dies gilt nur für $[\varepsilon] : n$.

Die Prüfung (7) hat natürlich gar keinen Sinn für Werte λ, bei denen infolge der Ausgleichung $[\lambda]$ bzw. $[\lambda g] = 0$ ist.

B. Bei geradem Fehlergesetz wird man zu erwarten haben, daß die Summen der Quadrate der positiven und negativen Fehler einander gleich sind. Bezeichnet wieder V_i die Vorzeichen der ε_i, so heißt dies, man erwartet, daß

$$V_1 \varepsilon_1^2 + V_2 \varepsilon_2^2 + V_3 \varepsilon_3^2 + \cdots + V_n \varepsilon_n^2 = 0$$

ist. Abweichende Werte werden bei geradem Fehlergesetz sich beiderseits von null gleich häufig in gleicher Größe zeigen. Bildet man das durchschnittliche Quadrat des vorstehenden Ausdrucks für unendlich viele Fälle, so ist dieses das mittlere Fehlerquadrat der Annahme null. Bezeichnet nun ν^4 den durchschnittlichen Wert von ε^4, wofür man angenähert setzen kann:

$$\nu^4 = \frac{[\varepsilon^4]}{n}, \tag{8}$$

so ist das in Rede stehende mittlere Fehlerquadrat gleich $n\nu^4$, der mittlere Fehler also $\pm \nu^2 \sqrt{n}$. Eine andere Annahme für $[V\varepsilon^2]$ als null würde ein größeres Fehlerquadrat geben; die Annahme null ist die sicherste (vergl. A).

Man hat somit das Ergebnis:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Es ist die Summe der Quadrate der positiven } \varepsilon \text{ gleich} \\ \text{der der negativen mit dem mittleren Fehler } \pm \nu^2\sqrt{n} \\ \qquad\qquad\qquad \text{oder } \pm\sqrt{[\varepsilon^4]}\,.\end{array}\right\} \tag{9}$$

Liegt die Differenz beider Quadratsummen, absolut genommen, außerhalb $\nu^2\sqrt{n}$, so ist eine einseitig wirkende Fehlerursache zu vermuten.

C. Abbesches Kriterium. Sind die Fehler $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ nach einer Variablen geordnet und erzeugt diese systematische Einflüsse, so ist zu vermuten, daß im allgemeinen in den Unterschieden $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ sich ein Teil der Einflüsse hebt. Hiervon ausgehend empfahl E. Abbe*) die beiden Quadratsummen zu bilden:

*) Über die Gesetzmäßigkeit in der Verteilung der Fehler bei Beobachtungsreihen. Jena 1863. (Habilitationsschrift.) — Auch abgedruckt in: Ernst Abbe. Gesammelte Abhandlungen. Bd. II Jena 1906, S. 55—81.

$$(10)\qquad \begin{gathered} \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 = A \\ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + \cdots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)^2 + (\varepsilon_n - \varepsilon_1)^2 = B. \end{gathered}$$

Bei zufälligem Charakter der ε muß aber im Mittel unendlich vieler Fälle

$$(11)\qquad B = 2A$$

sein, und zwar nicht nur bei geradem Fehlergesetz, sondern auch bei ungeradem, falls die ε von ihrem konstanten Teil (S. 16/17) befreit sind.

Auch hier kommt es nun darauf an, die Unsicherheit dieser Annahme anzugeben. Es ist aber

$$(12)\qquad A - \frac{B}{2} = C = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n + \varepsilon_n \varepsilon_1 .$$

Das mittlere Fehlerquadrat der Annahme $C = 0$ ist, da der Durchschnitt der doppelten Produkte verschwindet, gleich $n \mu^4$; der mittlere Fehler ist also $\pm \mu^2 \sqrt{n}$.

Eine andere Annahme für C würde ein größeres mittleres Fehlerquadrat geben; die Annahme $C = 0$ ist daher die sicherste.

Man sieht, daß mit wachsendem n die mittlere Abweichung des Wertes C von null keineswegs, wie manche behaupten, sich verkleinert, sondern daß sie sich vergrößert. Eine stetige Annäherung an null mit wachsendem n zeigt aber $C : n$, da dessen mittlerer Fehler $\pm \mu^2 : \sqrt{n}$ ist.

Wir haben nun als Ergebnis:

$$(13)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{n}\left(A - \frac{B}{2}\right) = 0 \\ &\text{mit dem mittleren Fehler } \pm \frac{\mu^2}{\sqrt{n}}, \end{aligned} \right.$$

wobei A und B nach (10) zu bilden sind. Ferner ist:

$$(13^*)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{\frac{A}{n}} - \sqrt{\frac{B}{2n}} = 0 \\ &\text{mit dem mittleren Fehler } \pm \frac{\mu}{2\sqrt{n}}; \end{aligned} \right.$$

denn man hat

$$\frac{A}{n} - \frac{B}{2n} = \left(\sqrt{\frac{A}{n}} - \sqrt{\frac{B}{2n}}\right)\left(\sqrt{\frac{A}{n}} + \sqrt{\frac{B}{2n}}\right)$$

Da nun $\sqrt{\frac{A}{n}}$ und $\sqrt{\frac{B}{2n}}$ nichts anderes sind als zwei Werte für μ, so ergibt sich leicht (13*) aus (13).

Man kann aus (13) auch noch bilden:

$$(13^{**})\qquad \frac{2A}{B} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{n}},$$

wo $\pm 1 : \sqrt{n}$ im Sinne eines mittlern Fehlers zu verstehen ist.

Wenn bei den Relationen (13), (13*) und (13**) die mittleren Fehler überschritten werden, so sind systematische Einflüsse zu vermuten.

D. Modifiziertes Abbesches Kriterium. Wenn man vermutet, daß in einer Reihenfolge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ ein systematischer Einfluß sich zeigen werde, dergestalt also, daß wie z. B. bei einem periodischen Einfluß benachbarte ε annähernd gleichviel beeinflußt sind, so erscheint die Mitnahme der letzten Differenz $(\varepsilon_n - \varepsilon_1)$ in der Summe B, (10), von fraglichem Nutzen, wenn nicht etwa das Intervall von der 1. bis zur n. Beobachtung gerade der Periode entspricht. Man setzt dann anstatt B besser an:

$$(14)\qquad (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + \cdots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)^2 = B^*.$$

Setzt man nun ferner:

$$(15)\qquad \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n = C^*,$$

so ist es zweckmäßig noch zu nehmen:

$$(16)\qquad [\varepsilon^2] - \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_n^2}{2} = A^*,$$

damit wieder die Beziehung:

$$A^* - \frac{B^*}{2} = C^*$$

gilt.

Der Durchschnittswert von C^* ist null, sein mittlerer Fehler $\pm \mu^2 \sqrt{n-1}$. Hiermit findet sich als Ergebnis:

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{n-1}\left(A^* - \frac{B^*}{2}\right) = 0 \\ \text{mit dem mittleren Fehler } \pm \frac{\mu^2}{\sqrt{n-1}}; \end{array}\right.$$

ferner

$$(17^*)\qquad \left\{\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{A^*}{n-1}} - \sqrt{\dfrac{B^*}{2(n-1)}} = 0 \\ \text{mit dem mittleren Fehler } \pm \dfrac{\mu}{2\sqrt{n-1}}, \end{array}\right.$$

und

$$(17^{**})\qquad \frac{2A^*}{B^*} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{n-1}}.$$

Anstatt mit Abbe Differenzen benachbarter Werte direkter Beobachtungen zu bilden, kann man mit gleichem Erfolg auch Mittelwerte bilden, um besondere Fehlerursachen zu erkennen. Man kann dann noch weiter gehen und drei, vier und mehr Nachbarwerte mitteln und aus den Abweichungen dieser Mittel vom Gesamtmittel den m. F. μ berechnen. Dieses Verfahren wurde unter meiner Mitwirkung von W. Seibt 1890 bei der Untersuchung des Mittelwassers der Ostsee bei Swinemünde für einen 78-jährigen Zeitraum eingeschlagen.*)

Die Verbesserung δ eines Mittels aus i Nachbarwerten aufs Mittel der n Werte ist

$$\delta = \frac{[\varepsilon]_i}{i} - \frac{[\varepsilon]_n}{n},$$

worin $[\varepsilon]_i$ die Summe der wahren Verbesserungen der i Nachbarwerte, $[\varepsilon]_n$ dasselbe für alle n Werte ist. Das mittlere Quadrat von δ ist hiernach gleich

$$\mu^2\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n}\right),$$

wenn μ^2 das mittlere Quadrat eines ε ist und die ε als rein zufällig angesehen werden. Daraus folgt zur Berechnung von μ aus der Summe der $n - i + 1$ vorhandenen δ^2 die Formel:

$$(18)\qquad \mu = \pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-i+1} \cdot \frac{n\,i}{n-i}}.$$

In der folgenden Tabelle sind die hieraus berechneten μ dividiert durch $\sqrt{i}$ mit dem Index i versehen und den Werten μ_i' gegenübergestellt, die aus der Formel $\mu_i' = \mu_1 : \sqrt{i}$ folgen. Die Einheit ist der Millimeter.

*) Das Mittelwasser der Ostsee bei Swinemünde. 2. Mitteilung. (Veröffentlichung des Königl. Preuß. Geod. Inst. Vergl. auch: Jahresbericht d. Direktors 1889/90; S. 26/27.

$i =$	1	2	3	4	6	8	12	19	38
$\mu_i = \pm$	43,0	32,9	27,6	23,7	19,2	15,7	13,5	10,0	7,6
$\mu_i' = \pm$	43,0	30,4	24,8	21,5	17,6	15,2	12,4	9,9	7,0.

Hiernach sind außer den rein zufälligen Fehlern noch systematische vorhanden, die sich immer über mehrere benachbarte Jahre erstrecken. Ihr Betrag liegt jedoch unterhalb eines Drittels von μ_1.

§ 3. Nähere Prüfung des Verteilungsgesetzes der Fehler.

I. Prüfung, ob $\varphi(\varepsilon)$ mit wachsendem ε abnimmt. Bei ungleicher Genauigkeit sind die ε in $\varepsilon\sqrt{g}$ überzuführen, um Größen gleicher Genauigkeit zu erhalten.

Nehmen wir zunächst $\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2a}$, einer Konstanten, nach Maßgabe des Fehlergesetzes I, S. 13, so wird die Wahrscheinlichkeit W, daß ein ε zwischen den Grenzen $\pm\beta\mu$ liege (β ein beliebiger Koeffizient), gleich $\beta\mu : a$. Ist nun n die Anzahl aller Fehler, so folgt daraus wegen $\mu = a : \sqrt{3}$

$$\varphi(\varepsilon) = 1 : 2a\,;$$

	Anzahl der ε zwischen den			
	Grenzen:	$\pm\beta\mu$	gleich	$0{,}57735\,\beta n$
(1)	„	$\pm 1{,}15470\,\mu$	„	$0{,}66667\,n$
	„	$\pm\mu$	„	$0{,}57735\,n$
	„	$\pm 0{,}86603\,\mu$	„	$0{,}50000\,n$.

Ist für $\beta \leqq \sqrt{\frac{4}{3}}$, d. i. 1,15470, die Anzahl der Fehler zwischen diesen Grenzen größer, so geht aus den Untersuchungen von Gauß (Theoria combinat. observ.) hervor, daß $\varphi(\varepsilon)$ mit wachsendem ε im allgemeinen abnimmt.*) Denn man hat dann die Beziehungen:

*) Gauß' Werke Bd. IV, S. 10 11. Vergl. ferner:

A. Winckler. Allgemeine Sätze zur Theorie der unregelmäßigen Beobachtungsfehler (Wiener Sitzungsber. LII, Dez. 1865).

L. Krüger. Über einen Satz der Theoria combinationis (Göttinger Nachr., math.-phys. Klasse. 1897, Heft 2).

$\varphi(\varepsilon)$ abnehmend bei wachsendem ε,

$$\beta \leqq \frac{2}{3\sqrt{1-W}} \qquad \text{für} \quad W \geqq \frac{2}{3}$$

(2)
$$\beta \leqq \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \text{für} \quad W = \frac{2}{3}$$

$$\beta \leqq W\sqrt{3} \qquad \text{für} \quad W \leqq \frac{2}{3}.$$

II. Vergleichung mit bekannten Fehlergesetzen. Wir berechnen zunächst im Anschluß an die §§ 2 und 3, S. 13 u. f., wieviel von $n = 1000$ Fehlern zwischen den Grenzen $\pm\mu$ und $\pm 2\mu$ liegen für die drei Annahmen über $\varphi(\varepsilon)$.

Annahme I.

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2a}; \qquad \varepsilon^2 \leqq a^2.$$

Nach (1) liegen

(3)
$$\begin{array}{lll} \text{zwischen } \pm\mu: & & 0{,}57735\, n \text{ Fehler}, \\ \quad\text{„} \quad \pm 1{,}73205\mu: & & \text{genau } \; n \quad \text{„} \; . \end{array}$$

Annahme II.

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{3}{4a}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right); \qquad \varepsilon^2 \leqq a^2.$$

Zwischen den Grenzen $\pm\beta\mu$ liegen von n Fehlern:

$$\frac{3n}{2a}\int_0^{\beta\mu}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right)d\varepsilon,$$

d. i. nach (15), S. 22:

(4)
$$0{,}67082\,\beta\left(1 - \frac{\beta^2}{15}\right)n.$$

Für $\beta = 1$ und 2 folgt: Es liegen

(5)
$$\begin{array}{lll} \text{zwischen } \pm\mu &: & 0{,}62610\, n \text{ Fehler}, \\ \quad\text{„} \quad \pm 2\mu &: & 0{,}98387\, n \quad \text{„} \end{array}$$

Annahme III.

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\varepsilon^2}.$$

Zwischen den Grenzen $\pm \beta\mu$ liegen von n Fehlern:

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\, n \int\limits_0^{\beta\mu} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon,$$

d. i. nach (18), S. 23:

$$(6) \qquad \frac{2n}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{h\beta\mu} e^{-t^2} dt \quad \text{oder} \quad \frac{2n}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{0,70711\,\beta} e^{-t^2} dt.$$

Mittels der auf S. 23 gegebenen Integralwerte folgt daraus für $\beta = 1$ und 2: Es liegen

(7)
zwischen $\pm \mu$: 0,68269 Fehler,
" $\pm 2\mu$: 0,95450 " .

Übersicht über die Verteilung der ε:

(8)

Von 1000 ε liegen dem absoluten Werte nach zwischen	bei Annahme I	II	III
null und μ	577	626	683
null und 2μ	1000	984	954
μ und 2μ	423	358	271

Dagegen liegt die Hälfte der Fehler nach dem Täfelchen auf S. 24:

(9)
bei Annahme I zwischen $\pm 0,86603\,\mu$
" " II " $\pm 0,77658\,\mu$
" " III " $\pm 0,67449\,\mu$.

Eine summarische Vergleichung der Verteilung der ε nach den drei Annahmen wird ermöglicht durch Berechnung des Verhältnisses von μ und ϑ. Nach S. 24 ist:

(10)
für die Annahme I II III
$\mu : \vartheta = 1,15470 \quad 1,19257 \quad 1,25331.$

Für die Annahme III, das Gaußsche Gesetz, setzen wir noch $\beta = 0,1;\ 0,2;\ \ldots\ 1,9;\ 2,0;\ 2,5;\ 3,0$ und erhalten:

Von 1000 Fehlern liegen zwischen den Grenzen

	$\pm 0{,}0\,\mu$:	0	Diff.	$\pm 1{,}1\,\mu$:	729	Diff.
	0,1	80	80	1,2	770	41
	0,2	159	79	1,3	806	36
	0,3	236	77	1,4	838	32
	0,4	311	75	1,5	866	28
	0,5	383	72	1,6	890	24
(11)	0,6	451	68	1,7	911	21
	0,7	516	65	1,8	928	17
	0,8	576	60	1,9	943	15
	0,9	632	56	2,0	954	11
	1,0	683	51	2,5	988	34
	1,1	729	46	3,0	997	9

Mit Hilfe dieser Tabelle kann man leicht eine Vergleichung mit der wirklichen Fehlerverteilung erzielen, indem man die Zahlen in (11) noch mit $n:1000$ multipliziert. Unter Umständen wird man auch die theoretischen Zahlen neu berechnen, wenn die Grenzen der Intervalle nicht durch Zehntel-μ ausgedrückt sind.

Zur Berechnung der Fehleranzahl für enge Intervalle empfiehlt P. Schreiber die einfache Formel*):

(12) $$n(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)(\varphi(\varepsilon_i) + \varphi(\varepsilon_{i+1})),$$

wobei unter ε der Absolutwert zu verstehen ist; für weitere Intervalle wird die Simpsonsche Regel besser sein:

(13) $$\frac{1}{3}\, n(\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i)(\varphi(\varepsilon_i) + 4\varphi(\varepsilon_{i+1}) + \varphi(\varepsilon_{i+2})).$$

Vergleicht man eine wirkliche Fehlerverteilung mit derjenigen nach Gauß' Gesetz, so kann man nun noch nach der Wahrscheinlichkeit der Übereinstimmung fragen. Hierauf gehen wir nicht ein, sondern verweisen auf die Untersuchungen von Lehmann-Filhès und Boris Weinberg.**)

*) Abhandl. des Königl. Sächsischen Meteorologischen Instituts. Heft 1, Leipzig 1896; S. 34.

**) Lehmann-Filhès. Über wahrscheinlichste Fehlerverteilungen. Astr. Nachr. Bd. 127 (1891), Nr. 3043, Sp. 305—316.

Boris Weinberg. Über die Wahrscheinlichkeit einer Fehlerverteilung. (Astr. Nachr. Bd. 153 (1900), Nr. 3659, Sp. 193—204.)

Boris Weinberg. Betrachtungen über Fehlerverteilungen. (Astr. Nachr. Bd. 161 (1903), Nr. 3847, Sp. 113 u. f.

Um eine übersichtliche Darstellung des wirklichen Fehlergesetzes zu gewinnen, trägt man die auf gleiche Intervalle reduzierten Fehleranzahlen n_ε als Ordinaten in die Mitten der zugehörigen Abscissenstrecken auf und verbindet die entstehenden Punkte durch eine Kurve. Macht man dasselbe mit den theoretischen Zahlen, so ergibt sich die entsprechende theoretische Kurve.

Eine genauere graphische Behandlung, die ich gegeben habe, wird im nächsten Beispiele behandelt werden.*)

Beispiel. 51 Dreieckswidersprüche der Verifikationsbasisnetze der indischen Vermessung.**) Die Zahlen sind nach der Größe geordnet in Sekunden:

+ 0,005	+ 0,302	— 0,560	— 1,060
+ 20	— 308	— 561	+ 1,225
+ 97	+ 349	+ 580	— 1,270
+ 109	+ 352	— 603	— 1,344
— 159	— 375	— 604	— 1,372
+ 179	+ 384	— 610	— 1,400
+ 189	— 405	+ 637	— 1,408
— 210	— 472	+ 640	+ 1,460
— 211	+ 508	— 672	+ 1,467
— 229	+ 509	— 741	+ 1,804
— 250	+ 536	— 756	+ 2,010
— 266	+ 537	— 926	— 2,291.
— 296	+ 550	+ 979	

Hiervon sind 24 positiv, 27 negativ, also Unterschied 3; der wahrscheinliche Unterschied ist $\pm \frac{2}{3}\sqrt{51}$ oder rund ± 5. Ferner gibt es 29 Zeichenfolgen und 21 Wechsel, Unterschied 8; der wahrscheinliche Betrag ist $\pm \frac{2}{3}\sqrt{50}$ oder ± 5.

Weiter ist

$$[\varepsilon] = -3{,}931, \quad [\varepsilon^2] = 37{,}87,$$

also

$$\mu^2 = 0{,}743, \quad \mu = \pm 0{,}869.$$

---

*) F. R. Helmert, Die Bestimmung des Fehlergesetzes aus Beobachtungen auf graphischem Wege. (Zeitschr. f. Vermessungswesen. Bd. VI (1877), S. 22—26.)

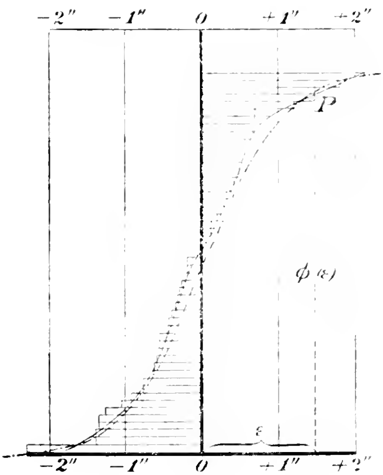
**) Account of the Operations of the Great Trigonometrical Survey of India. Vol. I. By Colonel J. T. Walker. Dehra Dun 1870.

Die mittlere Abweichung der $[\varepsilon]$ von null ist $\mu\sqrt{51} = \pm 6{,}2$. Eine konstante Abweichung der Dreiecksabschlüsse von null ist also nicht angedeutet.

Die Quadratsummen der positiven und negativen ε sind 17,15 und 20,72. Ihr Unterschied ist 3,57: der mittlere Wert desselben ist $\nu^2\sqrt{51} = \pm 9{,}41$, da ν^4 aus den 4. Potenzen der ε gleich $\frac{88{,}45}{51} = 1{,}73$ ist.

Die Abbesche Prüfung muß hier wegbleiben, da die ε nach der Größe geordnet sind (wenn auch pos. und neg. durcheinander).

Fig. 1.



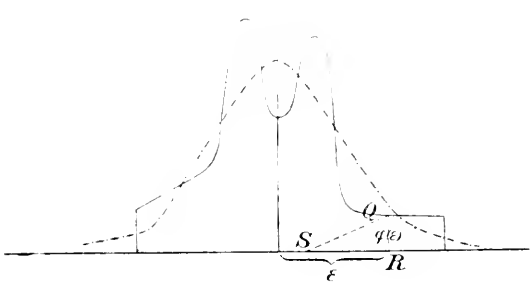
Um zu einer genaueren graphischen Darstellung für die Fehlerverteilung zu gelangen, wurde folgendermaßen verfahren.

Die relative Häufigkeit der Fehler ε zwischen dem negativen Maximum $-a$ und ε ist gleich

$$(1) \qquad \Phi(\varepsilon) = \int_{-a}^{\varepsilon} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Die Kurve $y = \Phi(\varepsilon)$ läßt sich recht genau konstruieren, wenn man den 51 Fehlern entsprechend $\Phi(\varepsilon)$ als Ordinaten von 1…51 mm, wie in Fig. 1, von unten nach oben aufträgt, indem man die ε durch 1 mm breite horizontale Bänder darstellt. So entsteht ein treppenförmiges Gebilde, welches man durch eine Kurve ausgleichen kann (in Fig. 1 ausgezogen). Dieses ist die Kurve $y = \Phi(\varepsilon)$, wobei nur die Maßstäbe der Abscissen ε und der Ordinaten y willkürlich sind. Denn zu einem Punkt der Kurve gehört ein Fehler ε als Abscisse und

Fig. 2.



eine vertikal abzuzählende Fehleranzahl, welche $\Phi(\varepsilon)$ proportional ist, als Ordinate. Nun ist aber

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{dy}{d\varepsilon}. \tag{2}$$

Die Ordinate $\varphi(\varepsilon)$ der Fehlerkurve für die Abscisse ε ergibt sich daher, wenn man, wie in Fig. 2, das rechtwinklige Dreieck SQR mit R an den Endpunkt von ε anlegt; hierbei ist SR eine willkürliche konstante Basis und SQ ist parallel der Kurventangente bei P in Fig. 1 für dieselbe Abscisse.

Zur Vergleichung mit der Kurve nach Gauß' Gesetz setzen wir für diese an:

$$\eta = c\, e^{-h^2 \varepsilon^2}, \tag{3}$$

worin c vom Maßstab abhängt. Da nun beide Kurven mit der Abscissenachse, entsprechend der relativen Häufigkeit 1, gleiche Flächen umschließen müssen, wird:

$$c \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{c\sqrt{\pi}}{h} = 548, \tag{4}$$

da die Kurve $\varphi(\varepsilon)$ in Fig. 2 548 qmm Fläche hat.

Setzt man ferner fest, daß den beiden Kurven der gleiche mittlere Fehler entsprechen soll, so ist

$$\begin{aligned} 1 : h &= 0{,}869 \sqrt{2} = 1{,}23 \text{ Sekunden}, \\ &= 12{,}3 \text{ im Maßstab der Zeichnung;} \end{aligned} \tag{5}$$

somit wird

$$c = 548 : 12{,}3 \sqrt{\pi} = 25{,}2$$

und

$$\eta = 25{,}2\, e^{-(\varepsilon : 12{,}3)^2}. \tag{3*}$$

Dieser Gleichung entspricht die gestrichelte Kurve in Fig. 2.

Die zugehörige gestrichelte Kurve in Fig. 1 hat die Ordinaten:

$$51 \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\varepsilon} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon. \tag{6}$$

Der Faktor 51 rührt davon her, daß für die obere Integralgrenze $+\infty$ die Ordinate gleich 51 werden muß.

Es möge noch der **wahrscheinliche Fehler** nach den verschiedenen möglichen Verfahren abgeleitet werden.

Abzählen des mittelsten (26.) Fehlers gibt

$$\varrho = 0{,}550. \tag{7}$$

Aus dem mittlern Fehler folgt durch Multiplikation mit 0,674

$$(8) \qquad \varrho = 0{,}586.$$

Der durchschnittliche Fehler gibt

$$(9) \qquad \varrho = 0{,}845 \cdot \frac{34{,}787}{51} = 0{,}577.$$

Endlich hat man noch 2ϱ durch Abzählen desjenigen Fehlers, der von $18\,^0/_0$ der 51 Fehler (d. h. von 9 Fehlern) überschritten wird,

$$(10) \qquad 2\varrho = 1{,}270 \quad \text{und} \quad \varrho = 0{,}635.$$

Wenn man bedenkt, daß die günstigste Bestimmung (8) doch eine mittlere Unsicherheit von $\pm 0{,}586 : \sqrt{102} = \pm 0{,}058$ hat, so stimmen die nach den vier Verfahren erzielten Werte genügend überein.

Im allgemeinen zeigt sich ein ziemlich zufälliger Charakter der Fehlerreihe; über die Abweichungen vom Gaußschen Gesetz nach den Kurven von Fig. 2 vergl. weiterhin Nr. IV dieses Paragraphen.

III. Prüfung auf Grund übrigbleibender Fehler. Sind keine wahren Fehler gegeben, sondern nur scheinbare λ, so behandelt man sie zuerst wie wahre, benutzt also u. a. anstatt μ^2:

$$(14) \qquad \mu_\lambda^{\,2} = \frac{[\lambda\lambda]}{n},$$

und anstatt ϑ:

$$(15) \qquad \vartheta_\lambda = \frac{[|\lambda|]}{n};$$

denn es handelt sich zunächst nur um die Prüfung des Verteilungsgesetzes der λ.

Die Frage, ob das Resultat der Untersuchung über $\varphi(\lambda)$ auf $\varphi(\varepsilon)$ ausgedehnt werden könne, läßt sich mit einiger Wahrscheinlichkeit nur dann bejahen, wenn die Anzahl der überschüssigen Messungen nicht allzu gering ist. Im allgemeinen kann man sagen, daß der von der Ausgleichung erzeugte Zwang die λ gerade so beeinflußt wie systematische Fehlerquellen. Diese Fehlerquellen können nun unter Umständen die eigentlichen systematischen Beobachtungsfehler ganz verdecken.

Ein Maß zur Beurteilung des Unterschiedes der λ und ε geben die Größen μ_λ und μ; z. B. bei vermittelnden Beobachtungen ist

$$\mu_\lambda^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n}, \quad \mu^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} = \frac{[\lambda\lambda]}{n-m}.$$

Nach § 5, (1) u. (2), S. 137, ist der Durchschnitt der Quadrate der Differenzen $\delta_i = \varepsilon_i - \lambda_i$ gleich $\frac{1}{n}$ von $[\varepsilon\varepsilon] - [\lambda\lambda]$. Es ist also im Mittel der Unterschied eines wahren und eines übrigbleibenden Fehlerquadrats gleich

$$\mu^2 - \mu_\lambda^2 = [\lambda\lambda]\frac{m}{n(n-m)} = \mu^2\frac{m}{n},$$

oder der mittlere Unterschied $(\varepsilon - \lambda)$ gleich

$$\mu\sqrt{\frac{m}{n}}, \tag{16}$$

welcher Ausdruck bei bedingten Beobachtungen in

$$\mu\sqrt{\frac{n-\sigma}{n}} \tag{17}$$

übergeht.

In dem früher behandelten Beispiel des Gaußschen Fünfecks, S. 259, wird die mittlere Abweichung von ε und λ gleich

$$\pm 0{,}419\sqrt{\frac{18-7}{18}}, \quad \text{d. i. } \pm 0''\!,33;$$

sie ist im Vergleich zu den λ, S. 259, so groß, daß man aus der Verteilung der λ kaum einen Schluß auf die der ε ziehen kann.

Wie wenig Aussicht auf die Verteilung der ε bei relativ wenigen Kontrollen die λ eröffnen, sieht man bei einem Dreieck. Auch bei völlig zufälligem Charakter der ε der drei Winkel gibt hier die Ausgleichung bei gleich genauer Beobachtung der drei Winkel $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{w}{3}$, also im allgemeinen ganz unzutreffend.

Wenn aber die Untersuchung der λ auch aussichtslos erscheint, so kann doch vielleicht etwas dadurch zu erreichen sein, daß man bei bedingten Beobachtungen die Widersprüche

w betrachtet, die ja wahre Fehler sind. Bei andern Ausgleichungsformen müßte man auf Bedingungsgleichungen reduzieren.

Entspricht $\varphi(\lambda)$ keinem zufälligen Fehlergesetz, so wird in der Regel $\varphi(\varepsilon)$ noch weniger die Eigenschaften eines solchen besitzen, da alsdann die λ im allgemeinen nur einen Teil der regelmäßigen Fehler enthalten. Aber auch wenn $\varphi(\lambda)$ die Eigenschaften zufälliger Fehlergesetze hat, so wird, wie wir auf S. 330/331 gesehen haben, doch Aufmerksamkeit darauf zu wenden sein, ob etwa Ursachen regelmäßiger Fehler vorhanden sein könnten, welche durch die Ausgleichung nicht angedeutet werden.

Beispiel. Fortsetzung zu S. 40/43. Hier handelt es sich um die Bestimmung einer Unbekannten, deren Wert sich zu null ergibt. Die l sind daher die negativen λ:

(3)	$+1''27$	$+0''03$	$-0''90$	$-0''60$
	$-0,78$	$+0,07$	$+0,20$	$-0,90$
	$+0,11$	$+0,08$	$+0,96$	$-0,17$
	$-0,71$	$+0,56$	$+0,86$	$-0,03$.

Die Beobachtungen zerfallen in vier Gruppen zu je vier, deren beide ersten an je einem Tage beobachtet sind, während die letzten zwei auf einen Tag fallen. Daß besondere Fehlerquellen wirksam waren, zeigte schon die kleine Rechnung auf S. 56/57. Es macht in der Tat den Eindruck, als hätten bei der zweiten und vierten Gruppe konstante Einflüsse gewirkt.

Zunächst sei festgestellt, daß der mittlere Unterschied von ε und λ nur $\mu : \sqrt{16} = \pm 0''17$ beträgt. Man kann also wohl von dem Verhalten der λ auf das der ε schließen.

9 positiven Fehlern stehen 7 negative gegenüber; der Unterschied 2 liegt innerhalb der wahrscheinlichen Grenzen $\pm \frac{2}{3}\sqrt{16}$, d. i. $\pm \frac{8}{3}$.

8 Zeichenfolgen und 7 Zeichenwechsel geben $f - w = 1$; die wahrscheinlichen Grenzen sind $\pm \frac{2}{3}\sqrt{15} = \pm 2{,}6$.

Die Summe der Fehler ist jetzt gezwungenermaßen gleich null.

Die Summen der Quadrate der positiven und negativen Fehler sind 3,65 und 3,12. Der Unterschied 0,53 liegt weit innerhalb der mittleren Grenzen $\pm \nu_\lambda{}^2 \sqrt{16} = \pm 2{,}48$; hierzu berechnet sich $\nu_\lambda{}^4 = 6{,}16 : 16 = 0{,}385$, $\nu_\lambda{}^2 = \pm 0{,}620$, vergl. S. 76.

Ferner ergibt sich für das Abbesche Kriterium aus (3):

$$2{,}05^2 + 0{,}89^2 + \cdots + 0{,}14^2 + 1{,}30^2 = 14{,}84,$$

also $B = 14{,}84$, während $A = [\varepsilon^2] = 6{,}77$ ist. Daher ist $B:2A = 1{,}10$, während die mittleren Grenzen sind $1 \pm \frac{1}{\sqrt{16}}$, d. i. 0,75 bis 1,25. Dieses Kriterium ist also auch günstig.

Der Annahme eines im wesentlichen zufälligen Charakters der λ und ε steht hiernach nichts entgegen.

Allerdings zeigt sich eine Fehleranhäufung zwischen μ_λ und $2\mu_\lambda$, d. i. $\pm$ 0,62 und $\pm$ 1,24, indem man hat:

	wirkl.	nach Gauß' G.	
null bis μ_λ	9	11	Fehler
μ_λ bis $2\mu_\lambda$	6	4	„
darüber	1	1	„ .

Mit Rücksicht auf die Vorzeichengruppierung in (3) bilden wir noch die arithmetischen Mittel der vier Gruppen und erhalten:

$$x = -0{,}03, \quad +0{,}18, \quad +0{,}28, \quad -0{,}42;$$

hieraus folgt wieder der Endwert $x = 0{,}00$. Der mittlere Fehler aus den Widersprüchen der vier Gruppenmittel ist:

$$\mu_x = \sqrt{\frac{0{,}2881}{3 \cdot 4}} = \pm 0{,}15\,.$$

Dies stimmt aber mit dem auf S. 77 aus den 16 Werten der λ berechneten m. F. so gut überein (ist namentlich eher kleiner als größer), daß auch hier wieder der im ganzen zufällige Charakter der Beobachtungsfehler hervortritt.

IV. Vermischung von Beobachtungsreihen verschiedener Genauigkeit. Auf eine besondere Abweichung des tatsächlichen Fehlergesetzes vom Gaußschen haben Newcomb, Lehmann-Filhès und Schols hingewiesen.*) A. Ferrero**) und

*) S. Newcomb. A generalized theory of the combination of observations so as to obtain the best result. (Amer. Journ. of Math. VIII, 1886, S. 343 u. f.)

Lehmann-Filhès. Über abnorme Fehlerverteilung und Verwerfung zweifelhafter Beobachtungen. (Astr. Nachr. Nr. 2792, Bd. 117 (1887), Sp. 121 u. f.)

Ch. M. Schols. De wet van de fouten van waarneming (K. Akad. van Wetensch., Verslagen d. Afdeeling Natuurk. 1892/93. S. 194 u. f.).

**) Verhandlungen d. Inter. Erdm. in Paris 1889, S. 91 u. f. Verhandlungen in Brüssel 1892, Triangulationsber., S. 4 u. Taf. (A).

F. Guarducci*) untersuchten die Verteilung der Schlußfehler zahlreicher italienischer geodätischer Dreiecke und fanden eine Abweichung vom Gaußschen Gesetz, die Schols erklärte.

Newcomb gibt als Beispiel die Verteilung der Fehler von 684 Beobachtungen des innern Kontakts von Sonne und Merkur bei Merkurvorübergängen vor der Sonne. In Zeitsekunden lagen Fehler

	wirklich	nach Gauß' G.	Beob. — Theor.
bei 0	147	137	+ 10
„ 5	221	240	— 19
„ 10	129	166	— 37
„ 15	77	88	— 11
„ 20	38	36	+ 2
„ 25	23	12	+ 11
über 27	49	5	+ 44.

Der mittlere Fehler ist rund 10. Die tatsächliche Verteilungskurve zeigt also im mittleren Teile eine Einsenkung, bei null und für größere Fehler eine Erhebung über die Gaußsche Kurve (vergl. auch Fig. 2 auf S. 350, wo nur die Einsenkung bei $\varepsilon = 0$ wegzudenken ist).

Nehmen wir an, daß sich q Fehlerreihen mit den verschiedenen Präzisionen $h_1, h_2, \ldots h_q$ mischen, und verhalten sich die Anzahlen der Fehler wie $p_1 : p_2 : \ldots : p_q$, wobei

$$(18) \qquad [p] = 1$$

sein soll, so ist für die Mischung der Reihen das Fehlergesetz:

$$(19) \qquad \varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{q} p_i h_i e^{-h_i^2 \varepsilon^2},$$

denn die Anzahl der in das Intervall ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ fallenden Fehler entspricht $\varphi(\varepsilon) d\varepsilon$ mit $\varphi(\varepsilon)$ nach (19).

Mit Rücksicht auf den Umstand, daß man nicht mit h, sondern mit dem mittleren Fehler $\mu = 1 : h\sqrt{2}$ rechnet, schreiben wir:

$$(20) \qquad \varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum \frac{p_i}{\mu_i} e^{-\varepsilon^2 : 2\mu_i^2}.$$

*) Gli errori di chiusura dei triangoli della triangolazione catastale modenese etc. (Rivista di Topografia e Catasto, 1889.)

Die ganze Fehlerreihe gibt

(21) $$\mu^2 = [\varepsilon\varepsilon] : n;$$

im einzelnen wird

$$\mu_i^2 = [\varepsilon\varepsilon]_i : n_i,$$

also ist

(22) $$\mu^2 = [p_i \mu_i^2],$$

da $p_i = n_i : n$ ist.

Wir setzen nun

(23) $$\mu_i^2 = \mu^2 + \Delta_i$$

und entwickeln die einzelnen Glieder von $\varphi(\varepsilon)$ mittels des Taylorschen Satzes nach Potenzen von Δ_i, wobei zu beachten ist, daß $[p_i \Delta_i] = 0$ wird. Infolgedessen fällt das Glied mit den ersten Potenzen Δ_i weg. Es folgt mit Rücksicht auf (18):

(24) $$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\mu^2}} \left\{1 + \left(3 - 6\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^4\right)\frac{[p_i \Delta_i^2]}{8\mu^4} + \cdots\right\}.$$

Durch Integration ergibt sich die Anzahl der Fehler zwischen null und $|\varepsilon|$ gleich

(25) $$\frac{2n}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\mu^2}} d\varepsilon + \frac{n}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{3\varepsilon}{\mu} - \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^3\right) e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\mu^2}} \cdot \frac{[p_i \Delta_i^2]}{4\mu^4} + \cdots.$$

Die in $[p_i \Delta_i^2]$ multiplizierten Glieder in (24) und (25) geben die Abweichung gegen Gauß' Gesetz. Da die runde Klammer in (24) verschwindet für $\varepsilon : \mu = \sqrt{3 \mp \sqrt{6}}$, d. i. 0,74 und 2,33, so haben die Fehlerkurven nach Gauß' Gesetz und nach (24) gleiche Ordinaten für $|\varepsilon| = 0{,}74\mu$ und $2{,}33\mu$. Da ferner die runde Klammer in (25) für $\varepsilon : \mu = \sqrt{3}$ verschwindet, so ist die Fehleranzahl für beide Kurven dieselbe zwischen den Grenzen null und $1{,}73\mu$.

Im Falle des vorstehend gegebenen Beispiels stimmt die Theorie nur ganz roh mit der Erfahrung. Dagegen gibt Schols ein Beispiel mit 2170 Dreiecksschlußfehlern, bei dem für die drei Werte ε gleich $0{,}74\mu$, $1{,}73\mu$ und $2{,}33\mu$ Theorie und Erfahrung sehr gut übereinstimmen.*)

*) Andere Beispiele gibt J. P. van der Stok in den Abhandlungen „On frequency curves of meteorological elements“ und „On frequency curves of barometric heights“ (K. Akad. van Wetensch., Verslagen 1905, S. 314 u. 1906, S. 549).

Schols weist noch darauf hin, daß die Abweichung des wirklichen Fehlergesetzes vom Gaußschen ja auch in der Entstehung der Beobachtungsfehler aus Elementarfehlern gesucht werden könne. In den betrachteten Fällen findet er aber dann die Abweichung vom Gaußschen Gesetz nach der andern Seite.

§ 4. Prüfung und Verbesserung der Gewichtsannahmen.

1. Näherungsverfahren. Eine Untersuchung darüber, ob die Beobachtungen mit richtigen Gewichten in die Ausgleichung eingeführt sind, ist sehr wichtig, weil bei falschen Gewichtsannahmen die Ausgleichung nicht die besten Werte ergibt. Selbstverständlich ist Voraussetzung, daß die λ nur von zufälligen Fehlern herrühren. Wenn die λ sehr nahe die ε selbst sind, S. 353, so kann man in der Weise vorgehen, daß man ermittelt, ob die durchschnittlichen Werte der λ^2 im umgekehrten Verhältnisse der angenommenen Gewichte stehen. Bei erheblichen Abweichungen ist eine neue Ausgleichung vorzunehmen mit Gewichten, die dem umgekehrten Verhältnisse jener Durchschnittsfehlerquadrate genügend entsprechen.

In dieser Weise habe ich die λ diskutiert, welche Koppe aus den trigonometrischen Höhenmessungen am Gotthardtunnel erhielt. Hier sind 27 Bestimmungen für 9 Unbekannte. Die Gewichte g waren gleich $100 : s^2$ gesetzt, mit s als Distanz in km. Die Bildung von drei Gruppen $[\lambda\lambda]$ ergab, daß $g = 100^2 : s^4$ besser ist.

Es folgte für die Annahme:

	$[\lambda\lambda g]$: Anzahl
$g = 1$	$6510 : 8 = 814$
2 bis 5	$1617 : 8 = 202$
6 bis 60	$972 : 11 = 88.$

Dieselben λ geben aber mit den Gewichten $100^2 : s^4$ folgendes:

$g = 1$	$6510 : 8 = 814$
4 bis 25	$6790 : 8 = 849$
36 bis 3600	$14034 : 11 = 1276.$

Bedenkt man, daß eine neue Ausgleichung mit den vergrößerten Gewichten die entsprechenden λ verkleinern wird, so dürften die drei Gruppen wohl sehr nahe gleiche Durchschnittswerte $[\lambda\lambda g]$ geben.*)

Dieses Näherungsverfahren ist nicht unbedenklich und kann sehr in die Irre führen, wie nachfolgendes einfache Beispiel zeigen soll.

Hat man nur eine Unbekannte und zwei Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned} l_1 + \lambda_1 &= a x \\ l_2 + \lambda_2 &= x, \end{aligned}$$

so ist bei gleichen Gewichten $a\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, und bei großem a daher λ_1 immer viel kleiner als λ_2. Liegen nun viele solche Fälle vor, wo aus zwei Gleichungen immer eine Unbekannte zu bestimmen ist, stets aber eine andere, so wird $[\lambda_1\lambda_1] < [\lambda_2\lambda_2]$ sein, obgleich doch für die ersten und zweiten Fehlergleichungen $\mu_1^2 = \mu_2^2$ ist.

Dergleichen Fälle sind gar nicht selten.

Bezeichnet ε wahre Fehler, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \varepsilon_1 - a\varepsilon_x \\ \lambda_2 &= \varepsilon_2 - \varepsilon_x \end{aligned}\right| \quad \text{und hieraus wegen } a\lambda_1 + \lambda_2 = 0: \quad \varepsilon_x = \frac{a\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{a^2 + 1}.$$

Also wird

$$\lambda_1 = \frac{\varepsilon_1 - a\varepsilon_2}{a^2 + 1}, \quad \lambda_2 = \frac{-a\varepsilon_1 + a^2\varepsilon_2}{a^2 + 1};$$

durchschnittlich ist:

$$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_1 &= (\mu_1^2 + a^2\mu_2^2) : (a^2 + 1)^2, \\ \lambda_2\lambda_2 &= a^2(\mu_1^2 + a^2\mu_2^2) : (a^2 + 1)^2 = a^2\lambda_1\lambda_1. \end{aligned}$$

Liegt dieselbe Aufgabe bei verschiedenen x viele Male vor, so gelten dieselben Ausdrücke für die Durchschnittswerte von $[\lambda_1\lambda_1]$ und $[\lambda_2\lambda_2]$. μ_1 und μ_2 lassen sich einzeln hier gar nicht bestimmen. Das bleibt auch so, wenn man ungleiche Gewichte zugrunde legt. (Ist x in allen Gleichungspaaren dasselbe, so ergeben sich μ_1 und μ_2 leicht aus den Widersprüchen der ersten und zweiten Fehlergleichungsgruppen in sich.)

---

*) C. Koppe. Trigonometrische Höhenmessungen zur Tunneltriangulation. — F. R. Helmert. Diskussion der Beobachtungsfehler in Koppes Vermessung für die Gotthardtunnelachse. (Zeitschr. f. Vermessungsw. V. Bd., 1876, S. 129 u. f.)

II. Strengeres Verfahren. Ein solches ist am Platze, wenn zwar viele überschüssige Beobachtungen vorhanden sind, also $\sigma = n - m$ groß ist, aber doch λ von ε stark abweichen kann, weil $\sqrt{m:n}$ kein kleiner Bruch ist. Wir wollen das Verfahren an dem einfachen Falle von n Fehlergleichungen mit zwei Unbekannten zeigen und annehmen, daß zuerst mit gleichen Gewichten 1 ausgeglichen sei, nachträglich aber für zwei Gruppen, in welche die Beobachtungen gegliedert werden können, die neue Gewichtsbestimmung erfolgen soll.*)

Die Entwicklung beginnt damit, daß man λ_i durch die ε_i ausdrückt und den Mittelwert von $\lambda_i \lambda_i$ für unendlich viele Fälle ableitet, vergl. S. 137 u. f. Nach (2) und (5) daselbst hat man

$$\lambda_i = \varepsilon_i - \alpha_i [\alpha \varepsilon] - b_i [\beta \varepsilon] \tag{1}$$

mit (S. 106)

$$\alpha_i = a_i Q_{1\cdot 1} + b_i Q_{1\cdot 2}, \quad \beta_i = a_i Q_{1\cdot 2} + b_i Q_{2\cdot 2},$$

wobei

$$\begin{array}{ll} [aa]\, Q_{1\cdot 1} + [ab]\, Q_{1\cdot 2} = 1 & [aa]\, Q_{1\cdot 2} + [ab]\, Q_{2\cdot 2} = 0 \\ [ab]\, Q_{1\cdot 1} + [bb]\, Q_{1\cdot 2} = 0 & [ab]\, Q_{1\cdot 2} + [bb]\, Q_{2\cdot 2} = 1 \end{array} \tag{2}$$

ist. Im folgenden brauchen wir gewisse Hilfsgrößen K, die wir gleich hier einführen. Dabei bedeutet z. B. $[ab]'$ die Summierung über die erste Gruppe mit n' Fehlergleichungen, $[ab]''$ dasselbe für die zweite Gruppe mit n'' Fehlergleichungen, so daß

$$n = n' + n'', \; [ab] = [ab]' + [ab]'' \text{ usw.} \tag{3}$$

Wir setzen:

$$\begin{cases} K'_{1\cdot 1} = [aa]'\, Q_{1\cdot 1} + [ab]'\, Q_{1\cdot 2} & K'_{2\cdot 1} = [aa]'\, Q_{1\cdot 2} + [ab]'\, Q_{2\cdot 2} \\ K'_{1\cdot 2} = [ab]'\, Q_{1\cdot 1} + [bb]'\, Q_{1\cdot 2} & K'_{2\cdot 2} = [ab]'\, Q_{1\cdot 2} + [bb]'\, Q_{2\cdot 2} \end{cases} \tag{4}$$

und

$$\begin{cases} K''_{1\cdot 1} = [aa]''\, Q_{1\cdot 1} + [ab]''\, Q_{1\cdot 2} & K''_{2\cdot 1} = [aa]''\, Q_{1\cdot 2} + [ab]''\, Q_{2\cdot 2} \\ K''_{1\cdot 2} = [ab]''\, Q_{1\cdot 1} + [bb]''\, Q_{1\cdot 2} & K''_{2\cdot 2} = [ab]''\, Q_{1\cdot 2} + [bb]''\, Q_{2\cdot 2}. \end{cases} \tag{5}$$

---

*) Einen Fall bedingter Beobachtungen mit Zahlenbeispiel habe ich behandelt in der Veröffentlichung des Königl. Preuß. Geodätischen Instituts von 1886: Lotabweichungen, Heft I. S. 78—82.

Für die Gewichtsbestimmung der Beobachtungen auf den sechs internationalen Polhöhenstationen gab G. Förster Formeln und ein Beispiel. (Astr. Nachr. Nr. 4045, Bd. 169 (1905), Sp. 193—202.)

Aus (2) bis (5) folgt:

$$(6)\quad \begin{cases} K'_{1\cdot 1} + K''_{1\cdot 1} = 1 & K'_{2\cdot 1} + K''_{2\cdot 1} = 0 \\ K'_{1\cdot 2} + K''_{1\cdot 2} = 0 & K'_{2\cdot 2} + K''_{2\cdot 2} = 1, \end{cases}$$

was die Berechnung der K-Systeme erleichtert. Da die Q hier nicht gebraucht werden, so wird man z. B. die K' aus folgenden Gleichungen berechnen:

$$(7)\begin{cases} [aa]K'_{1\cdot 1} + [ab]K'_{2\cdot 1} = [aa]' & [aa]K'_{1\cdot 2} + [ab]K'_{2\cdot 2} = [ab]' \\ [ab]K'_{1\cdot 1} + [bb]K'_{2\cdot 1} = [ab]' & [ab]K'_{1\cdot 2} + [bb]K'_{2\cdot 2} = [bb]'. \end{cases}$$

Aus (1) folgt nun, abgesehen von Gliedern mit $\varepsilon_i \varepsilon_h$:

$$\begin{aligned} \lambda_i^2 = {} & \varepsilon_i^2(1 - 2a_i\alpha_i - 2b_i\beta_i) \\ & + a_i^2[\alpha^2\varepsilon^2] + 2a_ib_i[\alpha\beta\varepsilon^2] + b_i^2[\beta^2\varepsilon^2]; \end{aligned}$$

für den Durchschnitt unendlich vieler Fälle gibt dies, wenn μ'^2 und μ''^2 den Mittelwert von ε^2 für beide Gruppen bezeichnen und λ_i der Gruppe mit μ' angehört:

$$\begin{aligned} \lambda_i^2 = {} & \mu'^2(1 - 2a_i\alpha_i - 2b_i\beta_i) \\ & + \mu'^2(a_i^2[\alpha\alpha]' + 2a_ib_i[\alpha\beta]' + b_i^2[\beta\beta]') \\ & + \mu''^2(a_i^2[\alpha\alpha]'' + 2a_ib_i[\alpha\beta]'' + b_i^2[\beta\beta]''). \end{aligned}$$

Summiert man von 1 bis n' und beachtet (1), (4) und (5), so folgt:

$$\begin{aligned} [\lambda\lambda]' = {} & \mu'^2(n' - 2K'_{1\cdot 1} - 2K'_{2\cdot 2}) \\ (8)\quad & + \mu'^2(K'^2_{1\cdot 1} + 2K'_{1\cdot 2}K'_{2\cdot 1} + K'^2_{2\cdot 2}) \\ & + \mu''^2(K'_{1\cdot 1}K''_{1\cdot 1} + K'_{1\cdot 2}K''_{2\cdot 1} + K'_{2\cdot 1}K''_{1\cdot 2} + K'_{2\cdot 2}K''_{2\cdot 2}). \end{aligned}$$

Entsprechend ist:

$$\begin{aligned} [\lambda\lambda]'' = {} & \mu''^2(n'' - 2K''_{1\cdot 1} - 2K''_{2\cdot 2}) \\ (9)\quad & + \mu''^2(K''^2_{1\cdot 1} + 2K''_{1\cdot 2}K''_{2\cdot 1} + K''^2_{2\cdot 2}) \\ & + \mu'^2(K'_{1\cdot 1}K''_{1\cdot 1} + K'_{1\cdot 2}K''_{2\cdot 1} + K'_{2\cdot 1}K''_{1\cdot 2} + K'_{2\cdot 2}K''_{2\cdot 2}). \end{aligned}$$

Für $\mu' = \mu'' = \mu$ gibt $[\lambda\lambda]' + [\lambda\lambda]'' = [\lambda\lambda]$ den bekannten Wert $\mu^2(n-2)$, wie durch Addition von (8) und (9) mit Rücksicht auf (6) folgt.

Aus den beiden Gleichungen (8) und (9), die eine Art Normalgleichungssystem bilden, kann man nun μ'^2 und μ''^2 ableiten.

Die Genauigkeit dieser Ableitung ist schwer genau anzugeben; man weiß aber für den einfachen Fall der Bestimmung von μ^2 bei gegebenen Gewichten, daß sie mit $n - m$ oder σ wächst, vergl. S. 143. Gliedert man nun in μ' und μ'', so wird die Genauigkeit gewiß geringer. Denkt man sich die Aufgabe in der Form bedingter Beobachtungen, so wird man eine brauchbare Bestimmung nur erwarten können, wenn nicht allein σ groß ist, sondern auch sowohl die λ' wie die λ'' sich auf viele Gleichungen verteilen und nicht etwa die eine oder andere Gruppe nur in wenigen Gleichungen vorkommt.

Selbstverständlich müssen auch die Fehleranzahlen n' und n'' größere Zahlen sein; für eine Gruppe von wenigen Fehlern oder gar nur einem einzigen ist nichts zu erzielen!

Die obige Berechnung von μ' und μ'' gibt nur eine Annäherung, und noch nicht die günstigsten Werte, insofern die neuen Gewichte bei Wiederholung der Ausgleichung der Beobachtungen andere λ ergeben, womit sich auch μ' und μ'' wieder ändern.

III. Zergliederung von μ^2 in mehrere Teile. Um zu einer richtigen Gewichtsschätzung zu gelangen, wird es manchmal nützlich sein, das mittlere Fehlerquadrat in mehrere Teile zu spalten, die den wechselnden Umständen entsprechen. Man setzt z. B. bei Feinnivellements in der Ebene einfach $\mu^2 = k\mu'^2$, wo k die Länge bezeichnet. Bei größeren Höhenunterschieden machte es sich aber nötig,

$$\mu^2 = k\mu'^2 + [h^2]\mu''^2$$

zu setzen, nämlich bei Nivellements mit Holzskalen, die nicht (wie neuerdings) täglich verglichen wurden, sondern weit seltener (etwa jährlich nur einige Male); dabei bezeichnet nun h kleinere Nivellementshöhen, für die die Längeneinheit der Skala als konstant betrachtet werden kann.

Allgemeiner wollen wir für eine Beobachtung

$$\mu_i^2 = u_i^2\mu'^2 + v_i^2\mu''^2 \tag{10}$$

setzen mit u_i^2 und v_i^2 als gegebenen Größen (wie vorher k und $[h^2]$), die von Beobachtung zu Beobachtung wechseln. Zur Ableitung der Unbekannten μ' und μ'' zieht man am besten eine Reihe von wahren Fehlern zu, z. B. Dreieckswidersprüche, Unterschiede von Nivellements derselben Strecke oder Widersprüche von Nivellementsschleifen usw. Man kann dann bei n gegebenen Fehlern ε ansetzen:

$$\varepsilon_i^2 + w_i = u_i^2 \mu'^2 + v_i^2 \mu''^2, \qquad i = 1 \ldots n \tag{11}$$

und hat die Summe $[w_i^2 g_i]$ zu einem Minimum zu machen. Die Gewichte g_i kann man mit genügender Annäherung gleich

$$g_i = \left(\frac{1}{u_i^2 \mu'^2 + v_i^2 \mu''^2}\right)^2 \tag{12}$$

setzen; denn wenigstens beim Gaußschen Fehlergesetz hat eine einzelne Bestimmung $\mu^2 = \varepsilon_i^2$ das mittlere Fehlerquadrat $2\mu^4$, vergl. S. 32.

In g_i sind μ' und μ'' als bekannt zu denken. Die Normalgleichungen werden dann:

$$\begin{aligned} [u^4 g]\mu'^2 + [u^2 v^2 g]\mu''^2 &= [\varepsilon^2 u^2 g] \\ [u^2 v^2 g]\mu'^2 + [v^4 g]\mu''^2 &= [\varepsilon^2 v^2 g]. \end{aligned} \tag{13}$$

Man beginnt die Rechnung mit irgend welchen Näherungswerten für g_i, z. B. $g_i = 1$, bestimmt μ'^2 und μ''^2, damit bessere g_i usw. Zur Prüfung, ob die erhaltenen Werte genügen, dienen Gleichungen, die man aus (13) erhält unter Einsetzen der g_i nach (12):

$$\begin{aligned} \left[\frac{u^2}{u^2\mu'^2 + v^2\mu''^2}\right] &= \left[\frac{\varepsilon^2 u^2}{(u^2\mu'^2 + v^2\mu''^2)^2}\right] \\ \left[\frac{v^2}{u^2\mu'^2 + v^2\mu''^2}\right] &= \left[\frac{\varepsilon^2 v^2}{(u^2\mu'^2 + v^2\mu''^2)^2}\right] \end{aligned} \tag{14}$$

und hieraus

$$\left[\frac{\varepsilon^2}{u^2\mu'^2 + v^2\mu''^2}\right] = n.\text{*)} \tag{15}$$

Anstatt wahrer Fehler ε kann man auch übrigbleibende Fehler λ einer Ausgleichung benutzen, jedoch ist dies wie in dem ähnlichen Falle von S. 359 nicht unbedenklich.

---

*) Vergl. Eingehenderes in dem Aufsatze von F. R. Helmert: Zur Bestimmung des Gewichts von Beobachtungen, deren mittleres Fehlerquadrat sich aus mehreren Teilen zusammensetzt. (Astr. Nachr. Nr. 2127, Bd. 89 (1877), Sp. 225 u. f.) Hier ist auch ein Beispiel gegeben. — In dem Aufsatze haben sich einige Druckfehler eingeschlichen; das Symbol g ist dort die Quadratwurzel der Gewichte und in (32) muß rechter Hand g^2 stehen

IV. Ausschließen einzelner Beobachtungsreihen; Maximalfehler. Diese beiden Fragen hängen eng zusammen. Zeigt sich bei einer Ausgleichung, daß eine Beobachtung eine Verbesserung λ erfordert, die den mittleren Fehler μ mehrfach übersteigt, so entsteht naturgemäß die Frage, ob nicht die Ausschließung geboten ist, um Ergebnisse zu erhalten, die sich der Wahrheit stärker nähern als ohne Ausschluß. Um ein Kriterium zu erhalten, hat man mehr oder weniger verwickelte Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen angestellt.*) Mir scheint das Folgende zu genügen.**)

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler, absolut genommen größer als M ist, wird nach S. 10, 13 und 23 für Gauß' Gesetz gleich

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{M}{\mu\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2}\,dt. \tag{16}$$

Mit $\frac{M}{\mu} = q$ hat man folgende Reihe für W nach einer von Schlömilch gefundenen Formel.***)

$$W = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{-\frac{q^2}{2}}}{q}\left(1 - \frac{1}{2+q^2} + \frac{1}{(2+q^2)(4+q^2)} - \frac{5}{(2+q^2)(4+q^2)(6+q^2)} \cdots\right). \tag{17}$$

Hieraus folgt für die Wahrscheinlichkeit W, daß ε größer als M sei,

	für $M = 2\mu$	$W = 0{,}046$	oder etwa $\frac{1}{20}$
(18)	3μ	$0{,}0027$	$\frac{1}{400}$
	4μ	$0{,}000063$	$\frac{1}{16000}$
	5μ	$0{,}00000057$	$\frac{1}{2000000}$.

*) Vergl. Czuber, Theorie d. Beobachtungsfehler. S. 206 u. f., ferner Lehmann-Filhès und S. Newcomb, siehe S. 355.

**) F. R. Helmert. Über den Maximalfehler einer Beobachtung. (Zeitschr. f. Vermessungsw. VI. Bd., 1877, S. 131 u. f.)

***) Kompendium der höhern Analysis. II. Bd., 1. Aufl., Braunschweig 1866. S. 266.

Nach Maßgabe des Gaußschen Fehlergesetzes wird somit

	bei	20 Beob.	eine	Beob.	einen	Fehler	$> 2\mu$	haben,
(19)	„	400	„	„	„	„	$> 3\mu$	„
	„	16 000	„	„	„	„	$> 4\mu$	„
	„	$2 \cdot 10^6$	„	„	„	„	$> 5\mu$	„ .

Der zu erwartende Maximalfehler ist also

	bei	10	Beobachtungen	gleich etwa	2μ,
(20)	„	200	„	„ „	3μ,
	„	8000	„	„ „	4μ,
	„	$1 \cdot 10^6$	„	„ „	5μ;

denn z. B. bei zehn Beobachtungen ist die Anzahl der Fehler, die größer als 2μ werden, gleich $10 \cdot 0{,}046 = 0{,}46$, d. i. etwa $\frac{1}{2}$; usw.

Hiermit stimmt die Erfahrung gut überein, wie die bereits erwähnte Untersuchung von A. Ferrero (vergl. S. 355) bei Dreieckswidersprüchen zeigte. Solche Widersprüche müssen Gauß' Gesetz gut befolgen, weil sie sich aus drei Winkelfehlern zusammensetzen, deren jeder schon ein Mittel vieler Fehler wegen der wiederholten Messungen ist; mithin sind die Widersprüche aus zahlreichen gleichartigen Elementarfehlern zusammengesetzt: der Vorbedingung für das Bestehen von Gauß' Gesetz.

Aus der graphischen Tafel bei Ferrero folgt, geordnet nach der Anzahl der Widersprüche:

	$n = 136$	$M = 2{,}8\mu$	$n = 1519$	$M = 3{,}5\mu$
	226	2,6	1577	3,1
	479	4,1	2170	(4,3)
(21)	662	3,1	2204	(4,0)
	706	3,9	3096	3,4
	1508	(5,2)	3802	3,4 .

Dies stimmt recht gut mit (20); bei den eingeklammerten Zahlen besteht eine Abweichung von Gauß' Gesetz wegen Vermischung von Reihen verschiedener Genauigkeit.

Nach Maßgabe von (20) wird man beurteilen, ob eine stärker abweichende Beobachtung auszuschließen ist. Namentlich bei geringer Anzahl der Beobachtungen muß man aber vorsichtig sein, da die Erfahrung lehrt, daß oft die stärker abweichenden Beobachtungen die Ausgleichungsergebnisse verbessern.

W. Jordan*) suchte die Theorie durch die Annahme

$$\varphi(\varepsilon) = c\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right)^q,$$

wo a der Maximalfehler und q ein Exponent größer als eins ist, zu erweitern. Er bestimmt dann q für eine Reihe gegebener ε aus ν^4 und μ^2. Uns scheint hierbei ein Mangel in dem Fehlen des Nachweises zu bestehen, daß $\varphi(\varepsilon)$ auch die angegebene Form hat. Fehlt aber eine solche Untersuchung, dann ist es doch besser, das Gaußsche Gesetz anzunehmen, von dem man weiß, daß es im allgemeinen der Erfahrung entspricht. Abweichungen können vorhanden sein, wenn die Anzahl der Elementarfehler klein und ihre mittlere Größe ungleich ist. Aber es bleibt fraglich, ob solche Abweichungen durch eine Funktion $\varphi(\varepsilon)$, wie vorher angegeben, besser getroffen werden, als durch das Gaußsche Fehlergesetz.

Jordan behandelt auch die Frage der Ausscheidung einer Beobachtung. Da bei seiner Annahme für $\varphi(\varepsilon)$ mit wachsendem q die Differenz $3\mu^4 - \nu^4$ immer kleiner wird und für dasjenige q, bei dem das Exponentialgesetz eintritt, verschwindet, so betrachtet er als Kriterium der Anwesenheit auszuscheidender Fehler, daß

$$3\mu^4 - \nu^4 \text{ negativ wird.**)}$$

Nimmt man nun aber an, daß für n Fehler genau $3\mu^4 = \nu^4$ sei und noch ein größerer Fehler ε hinzuträte, so zeigt eine leichte Rechnung, daß bei großem n schon für $\varepsilon > 2{,}4\mu$ die Differenz $3\mu^4 - \nu^4$ negativ wird. Man müßte also in diesem Falle Fehler $> 2{,}4\mu$ ausscheiden, was ganz unzulässig erscheint.

§ 5. Ermittelung systematisch wirkender Ursachen.

I. Benutzung der Kriterien des Zufalls und der Fehlerverteilung. Durch die Prüfung der Fehler ε oder λ in der angegebenen Weise auf etwa vorhandene Abweichungen von dem zufälligen Charakter kann man oftmals das Bestehen einseitig

*) Handbuch der Vermessungskunde, I. Bd. 5. Aufl. 1904, S. 568.
**) Ebenda S. 581.

wirkender zufälliger Ursachen oder regelmäßig wirkender Fehlerquellen erkennen. Eine Verbesserung ist alsdann dadurch herbeizuführen, daß man für den regelmäßigen Fehler einen mathematischen Ausdruck mit zu bestimmenden Konstanten in die Ausgleichung einführt, bei einseitig wirkenden Ursachen aber die Konstante k (S. 16) als Unbekannte mitführt; vergl. hierzu die nächsten beiden Beispiele. Besser wird es natürlicherweise sein, wenn man nachträglich diese Unbekannten auf direkte Weise ermitteln kann.*)

II. Benutzung verschiedener Berechnungsweisen von μ^2. In vielen Fällen ist es möglich, den aus der Ausgleichung hervorgehenden mittleren Beobachtungsfehler zu vergleichen mit Bestimmungen desselben auf anderem Wege oder mit Bestimmungen aus demselben Beobachtungsmaterial, aber durch andere Gruppierung (ein Beispiel dazu bietet Abbes Kriterium). Ist keine genügende Übereinstimmung vorhanden, so ist dies ein Zeichen, daß in dem einen oder andern Falle unbeachtete und also meistens regelmäßige Fehlerursachen eingewirkt haben. Nicht selten handelt es sich dabei um Fehlereinflüsse, die innerhalb gewisser Beobachtungsgruppen konstant wirken, aber von Gruppe zu Gruppe einen rein zufälligen Wechsel besitzen.

In manchen Fällen kann es nützlich sein, wenn eine Reihe ε (oder λ) gegeben und passend gruppiert ist, außer den $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$, wie bei Anwendung des Abbeschen Kriteriums, noch zu bilden $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+2}$, ferner die Reihe $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+3}$ usw. Dies Verfahren wurde vom Geodätischen Institut benutzt, um die Natur der Veränderlichkeit der Pendel (für Schwerkraftsmessungen) festzustellen.**) (Vergl. auch S. 344.)

---

*) In der Abhandlung: Über den wahrscheinlichsten Wert der Aberrationskonstanten (Astr. Nachr. Nr. 3886, Bd. 162 (1903), Sp. 17 u. f.) macht Boris Weinberg den Versuch, Gewichte der Ergebnisse verschiedener Methoden in der Weise abzuschätzen, daß die Abweichungen der Fehlerverteilung von der wahrscheinlichsten beachtet werden; vergl. auch spätere Abhandlungen desselben Verfassers in den Astr. Nachr.

**) Vergl. die Veröffentlichung des Königl. Preuß. Geodätischen Instituts: Bestimmung der Polhöhe und der Intensität der Schwerkraft auf 22 Stationen von der Ostsee bei Kolberg bis zur Schneekoppe. Berlin 1896, S. 280 u. f.

Weitere Beispiele geben die Triangulationen, bei denen zunächst jede Station für sich ausgeglichen wird, worauf die Netzausgleichung folgt. Vergl. hierzu im 8. Kap. die §§ 1 und 4.

III. Bestimmung der Unbekannten auf verschiedene Art und Weise. In manchen Fällen wird eine völlige Sicherheit nur durch Bestimmung auf ganz verschiedene Art zu erreichen sein, weil trotz aller Kontrollen sich konstante und regelmäßige Fehler verstecken können (vergl. § 1, S. 330/331). Physikalische Konstanten gelten demgemäß erst dann als gesichert, wenn sie nach verschiedenen Methoden und von verschiedenen Beobachtern ermittelt und hinreichend übereinstimmend gefunden worden sind. Auch die Astronomie bedient sich ausgiebig dieses Verfahrens für die wichtigsten Konstanten, z. B. der Aberration, der Präzession, der Sonnenparallaxe, ferner bei der Ableitung der Sternkataloge.

Die Geodäsie bedarf dieses Verfahrens im allgemeinen weniger, bei Horizontalmessungen etwa nur für die Grundlinien. Ein bemerkenswertes Beispiel bietet aber die Bestimmung der Abplattung der Erde nach den verschiedenen bekannten Methoden.

Von großer Bedeutung sind die persönlichen Fehler, welche bei der Beobachtung eines Sterndurchgangs durch einen festen Faden im Fernrohr entstehen. Diese Fehler wurden zunächst bei Meridianbeobachtungen durch Vergleichung verschiedener Beobachter bemerkt. Die „persönliche Gleichung“ der beiden Beobachter bei astronomischen Längenbestimmungen (mittels telegraphischer Vergleichung der Ortszeit) eliminiert man aus dem Längenunterschied durch zweifache Bestimmung mit Wechsel der Beobachter. Durch Anwendung des seit etwa zehn Jahren im Gebrauch befindlichen „unpersönlichen“ Mikrometers von Repsold, bei welchem ein beweglicher Faden benutzt wird, ist es gelungen, den persönlichen Fehler fast ganz zu beseitigen.*)

Diese Fehler treten auch auf bei gewissen Methoden der Bestimmung von Breite und Azimut.**) Der Unterschied der Ergeb-

*) Th. Albrecht. Die Beobachtungsmethode mittels des Repsoldschen Registriermikrometers usw. (Astr. Nachr. Nr. 3699, Bd. 155, 1901, Sp. 33/42.)

**) Vergl. die Veröffentlichungen des Königl. Preuß. Geod. Instituts: Polhöhenbestimmung im Harzgebiet. Berlin 1894, S. 66 u. f.; Bestimmungen von Azimuten im Harzgebiet. Berlin 1898, S. 41 u. f.

nisse der Breitenbestimmung aus Meridianzenitdistanzbeobachtungen und aus Beobachtungen im Ersten Vertikal wird von J. B. Messerschmitt auf solche Fehler, die bei der letztgenannten Methode zur Geltung kommen, zurückgeführt.*)

Beispiel. An 14 aufeinander folgenden Abenden wurde die geographische Breite nach der Horrebow-Talcott-Methode u. a. mittels derselben zwei Sternpaare beobachtet. Aus den Abweichungen λ vom Mittel gab

$$\text{das erste Paar:} \quad \mu_1^2 = \frac{1,1411}{13} = 0,0878$$

$$\text{„ zweite „ :} \quad \mu_2^2 = \frac{0,5747}{13} = 0,0442.$$

Dagegen gaben die Differenzen $\lambda_1 - \lambda_2$ beider Paare an den 14 Abenden die Quadratsumme 1,5942; also wäre

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 = \frac{1,5942}{13} = 0,1226,$$

wobei zu beachten ist, daß $[\lambda_1 - \lambda_2]$ null wird, so daß der Nenner $14 - 1 = 13$ lauten muß (es tritt in den Differenzen der Unterschied der Sternpaare als Unbekannte auf).

Da die Einzelbestimmungen $\mu_1^2 + \mu_2^2 = 0,1320$, also größer als die direkte Bestimmung ergeben, so deutet dies auf Abendfehler hin (Refraktion, Variation der Breite), welche für beide Sternpaare am einzelnen Abend im Mittel annähernd gleich sind, aber mit dem Abend wechseln.

Ist nun m_1 bzw. m_2 der zufällige Fehler für Paar 1 und 2 und k der mittlere Betrag des Abendfehlers, so folgt aus

$$\left.\begin{aligned} m_1^2 + k^2 &= 0,0878 \\ m_2^2 + k^2 &= 0,0442 \end{aligned}\right| \quad m_1^2 + m_2^2 = 0,1226,$$

$$k^2 = 0,0047, \qquad m_1^2 = 0,0831, \qquad m_2^2 = 0,0395.$$

Diese Bestimmung von k^2 ist noch recht ungenau, würde aber durch Zuziehung von mehr Sternpaaren verbessert werden können.

*) Das schweizerische Dreiecksnetz. Bd. VIII. Zürich 1898, S. 160 u. f.

Beispiel. Gelegentlich einer trigonometrischen Vermessung fand Verfasser für einen Winkel von beiläufig 80^0 folgende Werte der Sekunden bei sechs verschiedenen Stellungen des Kreises zu den Winkelschenkeln:

	Wert der Ablesung fürs linke Objekt					
	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0
	45″,90	44″,26	44″,07	46″,38	51″,02	51″,44
	47,34	43,97	42,82	48,96	47,36	48,12
	47,18		46,93	43,47	47,88	48,16
1)	43,39		44,38		48,51	48,97
	47,34				48,17	
	49,25					
	43,55					
	46,28	44,12	44,55	46,27	48,59	49,17
	7	2	4	3	5	4

Die Mittelwerte für jede Spalte mit der Anzahl der Werte sind hier unten beigefügt.

Das Beispiel ist so gewählt, daß bei den einzelnen Kreisstellungen die Anzahl der Beobachtungen verschieden ist. Zu bemerken ist noch, daß die hier bei derselben Kreisstellung aufgeführten Beobachtungen doch in der Regel sich noch um kleine Intervalle der Kreisstellung unterscheiden.

Das einfache Mittel der 25 Werte ist 46,75. Die Verbesserungen der Einzelwerte auf dies Mittel betragen:

	+ 0,85	+ 2,49	+ 2,68	+ 0,37	— 4,27	— 4,69
	— 0,59	+ 2,78	+ 3,93	— 2,21	— 0,61	— 1,37
	— 0,43		— 0,18	+ 3,28	— 1,13	— 1,41
2)	+ 3,36		+ 2,37		— 1,76	— 2,22
	— 0,59				— 1,42	
	— 2,50					
	+ 3,20					

Hier tritt infolge der Anordnung nach den sechs Kreisstellungen der systematische Einfluß der regelmäßigen Teilungsfehler deutlich hervor. Die Verteilung der Fehler nach der Größe wie auf S. 349/350 zeigt Maxima der Ordinaten bei $+3$ und -1, ein tiefes Minimum bei $+1$; sie ist also ganz abnorm.

Nun ist

(3) $$\mu_\lambda = \pm \sqrt{\frac{143{,}15}{25}} = \pm 2{,}''39\,.$$

Es liegen in den Grenzen

			Fehlergesetz I	Fehlergesetz III
	$\pm 1{,}155\,\mu_\lambda$:	5 pos. u. 13 neg. F. oder 72 %	67 %	75 %
(4)	$\pm \quad \mu_\lambda$:	3 „ „ 12 „ „ „ 60 „	58 „	68 „
	$\pm 0{,}866\,\mu_\lambda$:	2 „ „ 10 „ „ „ 48 „	50 „	61 „.

Hier tritt besonders die ungleiche Verteilung nach positiven und negativen λ hervor, und doch ist $[\lambda] = 0$!

Wir wenden uns nun zu den mittleren Fehlerberechnungen. Aus $[\lambda\lambda] = 143{,}15$ würde folgen

(5) $$\mu = \pm \sqrt{\frac{143{,}15}{24}} = \pm 2{,}''44\,.$$

Das ist jedoch ein ganz unbrauchbarer Wert.

Bildet man für jede Vertikalreihe die Abweichungen vom Mittel derselben und daraus das Quadrat des mittlern Fehlers einer Beobachtung, so folgt:

(6) $$\begin{aligned} \mu_0^2 &= \frac{27{,}83}{7-1}\,, & \mu_{30}^2 &= \frac{0{,}04}{2-1}\,, \\ \mu_{60}^2 &= \frac{8{,}92}{4-1}\,, & \mu_{90}^2 &= \frac{15{,}09}{3-1}\,, \\ \mu_{120}^2 &= \frac{8{,}10}{5-1}\,, & \mu_{150}^2 &= \frac{7{,}32}{4-1}\,. \end{aligned}$$

Diese Fehlerquadrate sind Bestimmungen einer und derselben Größe, nämlich des mittlern Fehlerquadrates einer Winkelmessung, frei vom periodischen Teilungsfehler. Die Gewichte dieser Bestimmungen sind die Nenner der Quotienten, wenn für die Gewichtseinheit wie beim Gaußschen Fehlergesetz als mittleres Fehlerquadrat $2\mu^4$ angenommen wird. Im Mittel ist:

$$\mu^2 = \frac{6\mu_0^2 + \mu_{30}^2 + 3\mu_{60}^2 + 2\mu_{90}^2 + 4\mu_{120}^2 + 3\mu_{150}^2}{6 + 1 + 3 + 2 + 4 + 3}$$

(7) $$= \frac{67{,}30}{19} = 3{,}54 \text{ mit Gewicht } 19\,,$$

also

(7*) $$\mu^2 = 3{,}54 \pm 1{,}15\,; \qquad \mu = \pm (1{,}''88 \pm 0{,}''31).$$

Nehmen wir aus allen Beobachtungen einfach das Mittel: 46,75, oder was dasselbe ist, aus den sechs Einzelmitteln das Mittel mit Rücksicht auf ihre Gewichte 7, 2, ... 4, so wird in den Verbesserungen

$$(8)\qquad +0{,}47,\quad +2{,}63,\quad +2{,}20,\quad +0{,}48,\quad -1{,}84,\quad -2{,}42$$

der Einzelmittel der periodische Teilungsfehler enthalten sein. Zu den Verbesserungen gehören die Gewichte (wenn man vom systematischen Fehler absieht):

$$7 \qquad 2 \qquad 4 \qquad 3 \qquad 5 \qquad 4;$$

damit wird das Quadrat des mittlern Beobachtungsfehlers gleich

$$(9)\qquad \mu'^2 = \frac{75{,}78}{6-1} = 15{,}2 \pm 9{,}6.$$

In bezug auf die Quadratsummen 67,30 in (7) und 75,78 in (9) möge bemerkt werden, daß die Summe beider: 143,08, mit der Summe 143,15 in (3) nach früher angegebenen Beziehungen übereinstimmen muß, abgesehen von kleiner Rechnungsungenauigkeit.

Wären μ^2 und μ'^2 aus ganz verschiedenen Beobachtungen bestimmt, so würde ihnen der mittlere Unterschied

$$\pm\sqrt{(1{,}15)^2 + (9{,}6)^2} = \pm 9{,}7$$

entsprechen. Da sie aber aus ganz denselben Beobachtungswerten, nur durch verschiedene Kombination, entstanden sind, so sollte ihr mittlerer Unterschied, wie sich ohne weiteres sagen läßt, viel kleiner als 9,7 sein. Der größere Betrag hat darin seinen Grund, daß bei der ersten Kombination der Einfluß einer Fehlerquelle, der periodische Teilungsfehler, vermieden wurde.

Das einfache Mittel der sechs Mittelwerte (1) ist wegen der regelmäßigen Verteilung der sechs Gruppen über die Kreisperipherie nahezu frei vom periodischen Teilungsfehler. Man hat dafür 46,50 mit einem mittlern Fehler

$$\pm\frac{\mu}{6}\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}};$$

es ist daher das Endresultat, weil man für μ den Wert (7*) einzuführen hat, gleich

$$(10)\qquad 46{,}''50 \pm 0{,}''41.$$

Dieser Wert ist vom periodischen Teilungsfehler auch aus dem Grunde frei, weil der Winkel nicht allzu weit verschieden von 90^0 ist. Verbindet man nämlich je zwei solche Messungsergebnisse zu einem Mittel, die sich auf benachbarte Kreisbogen beziehen, so wird dieses (bei Anwendung zweier diametraler Mikroskope) frei vom periodischen Teilungsfehler, weil es von vier Bogen abhängt, die den Umkreis von 360^0 ungefähr ausfüllen. In der Tat stimmen die Mittel der Ergebnisse für 0^0 und 90^0, 30^0 und 120^0, 60^0 und 150^0 aus (1), nämlich:

$$46{,}28 \qquad 46{,}36 \qquad 46{,}86\,,$$

wozu die mittlern Fehler:

$$\frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{3}} \qquad \frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}} \qquad \frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}$$

gehören, so überein, als es ihre mittlern Fehler erwarten lassen, wenn man den Wert für μ nach (7*) einführt.

Um den systematischen Teilungsfehler noch sicherer zu eliminieren, setzen wir ihn für die Ablesung A gleich

$$\alpha + \beta_1 \cos A + \beta_2 \sin A + \gamma_1 \cos 2A + \gamma_2 \sin 2A$$

im Sinne einer Verbesserung. Infolge der Ablesung an zwei diametral stehenden Mikroskopen fallen die Glieder mit β_1 und β_2 weg. Der Winkel W mit den Ablesungen A links und $A + W$ rechts erhält daher die Verbesserung:

$$(11)\quad \lambda + \gamma_1(\cos(2A + 2W) - \cos 2A) + \gamma_2(\sin(2A + 2W) - \sin 2A),$$

worin λ der zufällige Anteil ist; $2W = 161^0{,}3$, $2A$ ist für die sechs Kreisstellungen gleich 0^0, 60^0, 120^0, 180^0, 240^0, 300^0. Die Fehlergleichungen werden, unter x die Sekunden von W verstanden:

$$(12)\quad \begin{aligned}
\lambda_1 &= -\,46{,}28 + x + 1{,}95\gamma_1 - 0{,}32\gamma_2 && \text{Gew. } 7\\
\lambda_2 &= -\,44{,}12 + x + 1{,}25\gamma_1 + 1{,}53\gamma_2 && \text{„ } 2\\
\lambda_3 &= -\,44{,}55 + x - 0{,}70\gamma_1 + 1{,}85\gamma_2 && \text{„ } 4\\
\lambda_4 &= -\,46{,}27 + x - 1{,}95\gamma_1 + 0{,}32\gamma_2 && \text{„ } 3\\
\lambda_5 &= -\,48{,}59 + x - 1{,}25\gamma_1 - 1{,}53\gamma_2 && \text{„ } 5\\
\lambda_6 &= -\,49{,}17 + x + 0{,}70\gamma_1 - 1{,}85\gamma_2 && \text{„ } 4.
\end{aligned}$$

Setzt man

(13) $x = 46{,}50 + \xi, \quad \gamma_1 = -0{,}15 + \eta, \quad \gamma_2 = -1{,}45 + \zeta,$

so gehen die numerischen Glieder der sechs Gleichungen der Reihe nach über in:

(14) $+0{,}39, \quad -0{,}03, \quad -0{,}62, \quad +0{,}06, \quad +0{,}32, \quad -0{,}10.$

und die Normalgleichungen werden:

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} 25\xi + 4{,}1\eta - 5{,}9\zeta = -1{,}5 \\ +4{,}1\xi + 52{,}3\eta - 3{,}2\zeta = -4{,}4 \\ -5{,}9\xi - 3{,}2\eta + 44{,}8\zeta = +7{,}2. \\ \xi = -0{,}012, \text{ also } x = 46''{,}49 \quad \text{Gew. } 24 \\ \eta = -0{,}074, \quad \text{,,} \quad \gamma_1 = -0{,}22 \quad \text{,,} \quad 51 \\ \zeta = +0{,}154, \quad \text{,,} \quad \gamma_2 = -1{,}30 \quad \text{,,} \quad 43. \end{array}\right.$$

Die Verbesserungen λ sind der Reihe nach:

(16) $+0{,}18, \quad +0{,}10, \quad -0{,}30, \quad +0{,}25, \quad +0{,}17, \quad -0{,}44,$

woraus sich ergibt $[\lambda\lambda g] = 1{,}71$. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit würde damit $\mu = \pm\sqrt{1{,}71:3} = \pm 0''{,}75$. Jedoch ist dieser Wert wegen des kleinen Nenners unter der Wurzel sehr unsicher. Würde man aber die 25 Einzelmessungen in die Ausgleichung eingeführt haben, so würde mit Rücksicht auf (6) bzw. (7)

$$(17)\qquad [\lambda\lambda g] = 1{,}71 + 67{,}30 = 69{,}01$$

geworden sein, womit folgt:

$$(18)\qquad \mu = \sqrt{\frac{69{,}01}{19+3}} = \pm 1''{,}77.$$

Die Verbesserungen der 25 Messungen werden jetzt:

(19)

+ 0″,58	− 0″,04	+ 0″,17	+ 0″,12	− 2″,26	− 2″,70
− 0,86	+ 0,25	+ 1,42	− 2,46	+ 1,40	+ 0,62
− 0,70		− 2,69	+ 3,03	+ 0,88	+ 0,58
+ 3,09		− 0,14		+ 0,25	− 0,23
− 0,86				+ 0,59	
− 2,77					
+ 2,93					

Ihre Quadratsumme ist 69,0. Die Verteilung dieser λ ist recht günstig.

Der mittlere Fehler des Endwertes $46{,}''49$ beträgt mit μ aus (18) $\pm\, 0{,}''37$, welcher Wert wohl ziemlich zutreffend sein dürfte.

Selbstverständlich würde man in Wirklichkeit den systematischen Teilungsfehler aus mehr Messungen zu bestimmen suchen und die Einzelmessungen gleichmäßiger auf die Kreisstellungen verteilen, deren Anzahl aufs Doppelte oder Vierfache zu erhöhen wäre.

Sechstes Kapitel.

Näherungsweise Darstellung von Funktionen.

§ 1. Überblick.

Die Meßkunde, Technik und Naturwissenschaft bieten zahlreiche Fälle, wo eine Funktion einer oder mehrerer Veränderlichen näherungsweise darzustellen ist. Wir beschränken uns hier im allgemeinen auf den Fall einer Veränderlichen. In einzelnen Fällen ist die darzustellende Funktion streng gegeben, in anderen Fällen liegt ein hypothetischer geschlossener Ansatz vor, der mit Beobachtungen zu vergleichen ist, oder es wird anstatt eines derartigen hypothetischen Ansatzes eine Reihenentwicklung nach steigenden Potenzen der Variablen oder nach gewissen trigonometrischen Funktionen gewählt: Potenzreihe, trigonometrische Reihe. Ist die darzustellende Funktion streng gegeben, so handelt es sich bei der näherungsweisen Darstellung nur um Fehler der Theorie. Ist jene aber nur durch Beobachtungen festgestellt, so mischen sich mit den Fehlern der Theorie die Beobachtungsfehler.

In jedem Falle aber kann man die Aufgabe der Bestimmung des Näherungsausdrucks der Funktion nach der Methode der kleinsten Quadrate behandeln, indem man die Quadratsumme der Abweichungen zwischen angenähertem Funktionswert und gegebenem Funktionswert zu einem Minimum macht.

Nimmt man anstatt diskreter Beobachtungswerte einander unendlich dicht folgende Werte einer gegebenen Funktion in einem gewissen Bereich der Variablen, so gelangt man bei der Darstellung durch eine trigonometrische Reihe zu der von Fourier gegebenen Reihenentwicklung (wobei aber noch zu zeigen ist, daß die Quadratsumme der Abweichungen null wird. Siehe O. Biermann: Über das Restglied trigonometrischer Reihen. Sitzungsberichte der Akad. d. Wissensch. in Wien. 1904. Bd. CXIII., S. 620.) Die Koeffizienten der Glieder sind unabhängig voneinander und also auch von der Anzahl der Reihenglieder.

Benutzt man eine Potenzreihe, so haben die Koeffizienten diese Eigenschaft im allgemeinen nicht; wie sich dieselben für eine unendliche Reihe gestalten, ist daher nicht ohne weiteres zu erkennen. Bekanntlich ist auch die Entwicklung in die Potenzreihe von Mac Laurin an das Bestehen gewisser Eigenschaften der Funktion gebunden. Eine allgemein brauchbare Entwicklung ergibt sich dagegen nach einfachen Kugelfunktionen, welche als ganze Funktionen der Variablen vom 1., 2. usw. Grade angesehen werden können. Die Koeffizienten der Reihenglieder sind wieder unabhängig voneinander und von der Anzahl der mitgeführten Glieder. Die Entwicklung entspricht durchaus dem Vorgange bei Anwendung der M. d. kl. Qu.

Eine besondere Klasse von Aufgaben ergibt sich in dem Falle, wenn eine Beobachtungsgröße zeitlichen Änderungen von nicht angebbarem Gesetz unterliegt, wie z. B. der Gang einer Uhr (nach üblicher Berichtigung für Temperatur und Luftdruck). Die Unterschiede der aufeinander folgenden Beobachtungswerte enthalten dann außer den Beobachtungsfehlern noch die zeitlichen Änderungen, die man gleich diesen als zufällige Fehler auffassen kann. T. N. Thiele nennt sie quasisystematische Fehler.

§ 2. Näherungsweise Darstellung gegebener Funktionen.

Wir geben hierzu behufs Erläuterung zunächst ein ganz einfaches Beispiel.

Beispiel. Es soll $\sqrt{1 + x}$, wo x zwischen -1 und $+1$ gelegen sei, dargestellt werden durch $1 + \alpha x$, so daß die Summe der Quadrate der Differenzen $\sqrt{1 + x} - (1 + \alpha x)$ ein Minimum werde. Bilden wir die Fehlergleichung

(1) $$\lambda = -\sqrt{1+x} + (1 + \alpha x)$$
oder
(2) $$\lambda = -(\sqrt{1+x} - 1) + \alpha x,$$

so ist dieselbe der Repräsentant aller Fehlergleichungen, die entstehen, wenn man x alle Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen läßt. Erfolgt die Änderung von x sprungweise im Intervall dx, so kommt den Fehlergleichungen notwendig das Gewicht dx zu, wobei die Wahl der Gewichtseinheit aufs Endresultat keinen Einfluß hat. Bilden wir die Normalgleichung für die Unbekannte α, so ergibt sich:

$$\alpha\Big[xx\,dx\Big]_{-1}^{+1} = \Big[(x\sqrt{1+x} - x)\,dx\Big]_{-1}^{+1}$$

oder

(3) $$\alpha = \frac{\int\limits_{-1}^{+1}(x\sqrt{1+x} - x)\,dx}{\int\limits_{-1}^{+1}x^2\,dx}.$$

Berücksichtigt man, daß

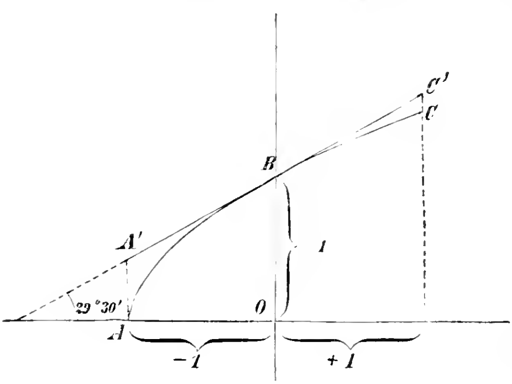
$$\int\limits_{-1}^{+1} x\sqrt{1+x}\,dx = 2\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} y^2(y^2 - 1)\,dy = \frac{4\sqrt{2}}{15},$$

so folgt

(4) $$\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{5} = 0{,}5657.$$

Die geometrische Bedeutung ist diese (siehe die Figur):

Es ist gegeben eine Parabel mit dem Parameter 1, bezogen auf rechtwinklige Koordinatenachsen parallel und senkrecht der Hauptachse mit dem Ursprunge O im Abstand 1 vom Scheitel. Die Ordinatenachse schneidet die Parabel in B. Legt man durch diesen Punkt eine Gerade $A'C'$, welche mit der Hauptachse den Winkel $29^0\,30'$, der zu



arc tan α gehört, einschließt, so ist die Summe der Quadrate der Differenzen der Ordinaten gleicher Abscissen für Parabelbogen und Gerade für alle Werte der Abscissen zwischen -1 und $+1$ ein Minimum.

Für $x=-1$ hat λ einen größten Wert, nimmt dann mit wachsendem x ab, wird null für $x=(1-2\alpha):\alpha^2=-0{,}4106$, ist von da an negativ mit einem Maximum vom Betrage $1-\alpha-\frac{1}{4\alpha}$ bei $\sqrt{1+x}=1:2\alpha$ oder $x=-0{,}21875$ und wird wieder null für $x=0$. Dann wird λ wieder positiv und erreicht in $x=+1$ einen größten Wert. Man erhält so die Übersicht:

$x=-1$	$\lambda=+0{,}4343$
$-0{,}4106$	0
$-0{,}21875$	$-0{,}0076$
0	0
$+1$	$+0{,}1515$.

Es bedarf kaum der Erinnerung daran, daß die Anwendung der M. d. kl. Qu. auf den vorliegenden Fall völlig willkürlich ist und ihr nicht im mindesten ein tieferer Sinn innewohnt, wie bei der Ausgleichung von Beobachtungen. Man bedient sich dieser Methode aber deshalb, weil sie in der Regel die bequemste Rechnung gibt, um die einfachere Funktion der gegebenen Funktion möglichst anzuschließen. Und sie hat hier ganz dieselbe Bedeutung, wie bei Anwendung auf die Ausgleichung von Beobachtungen, wo über die Natur des Fehlergesetzes nichts bekannt ist.

Das vorstehende Beispiel ist ohne praktische Bedeutung. Eine solche kommt der Formel von Poncelet für die Technik zu, wo $\sqrt{1+x^2}=\alpha+\beta x$ für $x=0$ bis 1 gesetzt wird. Nach Henke*) wird man bei ähnlicher Rechnung wie oben

$$\sqrt{1+x^2}=0{,}93432+0{,}42695\,x$$

annehmen. Größere Bedeutung für die Geodäsie besitzt das folgende Beispiel.

---

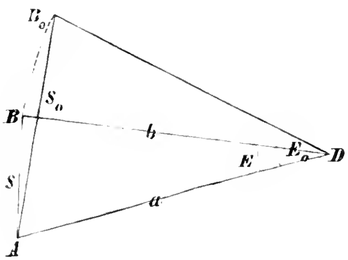
*) Über die M. d. kl. Qu. 2. Aufl. 1894, S. 50.

Beispiel. Beim Gebrauch des Stampferschen Nivellierinstruments zum Messen von Vertikalwinkeln bedient man sich zur Berechnung eines Winkels der Formel

$$(1) \qquad \sphericalangle (m_1 m_2) = \alpha(m_1 - m_2) + \beta(m_1{}^2 - m_2{}^2), \quad m_1 > m_2,$$

worin m_1 und m_2 die Ablesungen an der Höhenschraube für die beiden Richtungen der Visierachse, α und β gewisse Konstanten bezeichnen.

Diese Formel ist nur eine Näherungsformel, welche aber meistens ausreicht, indem in der Regel die Beobachtungsfehler die Fehler der Theorie übersteigen werden. Eine ganz strenge Formel wäre unbequem — sie ist überhaupt nur unter gewissen Annahmen aufstellbar, die die Praxis nicht streng erfüllt. Immerhin ist Formel (1) doch mehr als eine bloße Interpolationsformel, da sie sich nachweislich der Wirkungsweise des Instruments anschließt.



Diese beruht darauf, daß in einem Dreieck ABD mit der veränderlichen Seite AB die Änderungen des Winkels E aus denen der Seite sich berechnen lassen. An dem Instrumente ist D eine horizontale Drehachse, um welche ein oberer Trägerarm BD sich dreht, wenn die Schraube AB gedreht wird, während der Träger AD mit dem Instrumentfuße in fester Verbindung steht. Insbesondere sind A und B die Kugelmittelpunkte zweier sphärischen Abschnitte, mittels deren die Schraube mit den Trägerarmen verbunden ist.

Ist nun B_0 die Lage von B für die Ablesung null und $\varkappa$ die Höhe eines Schraubenganges, so ist in den Bezeichnungen der Figur für die zu B gehörige Ablesung m

$$(2) \qquad s = s_0 - m\varkappa.$$

Der Winkel E aber ist eine Funktion von s:

$$(3) \qquad E = f(s) = f(s_0 - m\varkappa)$$

und daher nach dem Taylorschen Satze in der üblichen Bezeichnung der Differentialquotienten:

$$(4) \qquad E = E_0 - m\varkappa f'(s_0) + \frac{m^2\varkappa^2}{2} f''(s_0) - \frac{m^3\varkappa^3}{6} f'''(s_0),$$

wenn wir Glieder, die in höhere Potenzen von $m\varkappa$ als die dritte multipliziert sind, vernachlässigen.

Es ist aber

$$\cos E = \frac{a^2 + b^2 - s^2}{2ab}, \tag{5}$$

und daher in Bogensekunden:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{ds} &= \frac{206265\, s}{ab \sin E}, \\ \frac{d^2 E}{ds^2} &= \frac{206265}{ab \sin E}\left(1 - \frac{s^2 \cot E}{ab \sin E}\right), \\ \frac{d^3 E}{ds^3} &= \frac{206265\, s}{a^2 b^2 \sin^3 E}\left(-3 \cos E + \frac{s^2(1 + 2\cos^2 E)}{ab \sin^2 E}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Setzen wir ferner

$$+\varkappa f'(s_0) = A, \qquad -\frac{\varkappa^2}{2} f''(s_0) = B, \qquad +\frac{\varkappa^3}{6} f'''(s_0) = \Gamma, \tag{7}$$

so wird mittels der Formeln (6)

$$\begin{aligned} A &= +206265 \frac{\varkappa s_0}{ab \sin E_0}, \\ B &= -206265 \frac{\varkappa^2}{2ab \sin E_0}\left(1 - \frac{s_0^2 \cot E_0}{ab \sin E_0}\right), \\ \Gamma &= +206265 \frac{\varkappa^3 s_0}{6 a^2 b^2 \sin^3 E_0}\left(-3 \cos E_0 + \frac{s_0^2(1 + 2\cos^2 E_0)}{ab \sin^2 E_0}\right); \end{aligned} \tag{8}$$

$$E = E_0 - Am - Bm^2 - \Gamma m^3. \tag{9}$$

Für zwei verschiedene Ablesungen m_1 und m_2 erhält man

$$E_1 = E_0 - Am_1 - Bm_1^2 - \Gamma m_1^3$$
$$E_2 = E_0 - Am_2 - Bm_2^2 - \Gamma m_2^3,$$

und es ist daher:

$$\sphericalangle(m_1 m_2) = A(m_1 - m_2) + B(m_1^2 - m_2^2) + \Gamma(m_1^3 - m_2^3), \quad m_1 > m_2. \tag{10}$$

Der Ausdruck für B nach (8) zeigt, daß $B = 0$ wird, wenn einer der Winkel B_0 oder A_0 zu einem rechten gemacht wird. Γ läßt sich nicht zu null machen; es ist stets positiv.

Verfasser ermittelte an dem Instr. Nr. 1864 (Eigentum der Techn. Hochschule zu Aachen) folgende Werte in Millimetern (allerdings nicht mit der größtmöglichen Schärfe):

$$a = 167 \quad b = 164 \quad s_0 = 86 \quad \varkappa = 0{,}495.$$

Hiermit wird:

$$(10^*)\qquad \sphericalangle(m_1 m_2) = 639{,}3\,(m_1 - m_2) - 0{,}131\,(m_1{}^2 - m_2{}^2) + 0{,}000326\,(m_1{}^3 - m_2{}^3).$$

Sonach ist der Einfluß des in die dritte Potenz der Ablesungen multiplizierten Gliedes nicht gering und im Maximum für $m_2 = 0$, $m_1 = 40$ gleich $21''$. Bestimmt man jedoch die beiden ersten Konstanten mit Vernachlässigung der dritten und folgenden durch Versuche, welche nach der Methode der kl. Qu. ausgeglichen werden, so wird zugleich auch der durch genannte Vernachlässigung entstehende regelmäßige Fehler vermindert, indem die Konstanten A und B entsprechende Änderungen erfahren.

Um einen Begriff von der Größe der letztern zu erhalten, nehmen wir an, A, B, Γ seien genau bekannt und die Formel (10) solle ersetzt werden durch Formel (1), so daß die Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen beiden Formeln für alle möglichen Werte von m_1 und m_2 ein Minimum werde. Setzen wir die Abweichung (Verbesserung der Näherungsformel) gleich

$$(11)\qquad v = (A - \alpha)(m_1 - m_2) + (B - \beta)(m_1{}^2 - m_2{}^2) + \Gamma(m_1{}^3 - m_2{}^3)$$

und darin

$$(12)\qquad \alpha + \Delta_1 = A\,, \qquad \beta + \Delta_2 = B\,,$$

so wird

$$(13)\qquad v = \Delta_1(m_1 - m_2) + \Delta_2(m_1{}^2 - m_2{}^2) + \Gamma(m_1{}^3 - m_2{}^3)$$

oder, indem wir v in die beiden Richtungsverbesserungen zerlegen:

$$(13^*)\qquad \lambda_1 - \lambda_2 = \Delta_1(m_1 - m_2) + \Delta_2(m_1{}^2 - m_2{}^2) + \Gamma(m_1{}^3 - m_2{}^3).$$

Daraus folgt allgemeiner, mit Benutzung einer Hilfsunbekannten u, für beliebigen Index von λ:

$$(14)\qquad \lambda = \Gamma m^3 + u + \Delta_1 m + \Delta_2 m^2.$$

Wir geben dieser Fehlergleichung das Gewicht dm und erhalten alsdann die Normalgleichungen:

$$(15)\qquad \begin{aligned} u\int dm + \Delta_1\int m\,dm + \Delta_2\int m^2\,dm &= -\Gamma\int m^3\,dm \\ u\int m\,dm + \Delta_1\int m^2\,dm + \Delta_2\int m^3\,dm &= -\Gamma\int m^4\,dm \\ u\int m^2 dm + \Delta_1\int m^3 dm + \Delta_2\int m^4\,dm &= -\Gamma\int m^5\,dm\,, \end{aligned}$$

worin die Integrale von $m = 0$ bis $m = M$, den kleinsten und größten Werten von m, zu nehmen sind. Es folgt weiter:

$$
(16) \qquad
\begin{aligned}
&u M \;\; + \varDelta_1 \frac{M^2}{2} + \varDelta_2 \frac{M^3}{3} = -\Gamma \frac{M^4}{4}\\
&u \frac{M^2}{2} + \varDelta_1 \frac{M^3}{3} + \varDelta_2 \frac{M^4}{4} = -\Gamma \frac{M^5}{5}\\
&u \frac{M^3}{3} + \varDelta_1 \frac{M^4}{4} + \varDelta_2 \frac{M^5}{5} = -\Gamma \frac{M^6}{6}
\end{aligned}
$$

und daraus

$$
(17) \qquad u = -\frac{M^3}{20}\Gamma, \quad \varDelta_1 = +\frac{3}{5} M^2 \Gamma, \quad \varDelta_2 = -\frac{3}{2} M \Gamma,
$$

d. i. für $M = 40$ und $\Gamma = 0{,}000326$:

$$
(18) \qquad u = -1'',04, \quad \varDelta_1 = +0{,}313, \quad \varDelta_2 = -0{,}0196.
$$

Diese Ausgleichung hat den Sinn, daß die unendliche Schar von Richtungen, welche von $m = 0$ bis M der Formel (1) entspricht, möglichst gut an dieselben Richtungen nach Formel (10) angepaßt wird, so daß die Quadratsumme der Richtungsdifferenzen, $[\lambda\lambda]$, ein Min. ist. Hätte man in (14) u weggelassen, so würden nur die Winkel von $m = 0$ aus zur Benutzung kommen.

Ein nach Formel (1) berechneter Winkel würde zur Reduktion auf Formel (10) zu verbessern sein um

$$
0{,}313\,(m_1 - m_2) - 0{,}0196\,(m_1^2 - m_2^2) + 0{,}000326\,(m_1^3 - m_2^3);
$$

ein Maximum ist dies für $m_1 = 40$, $m_2 = 0$ im Betrage von $2''$; für Werte von m zwischen 2 und 38 erreicht der Winkelfehler aber nur $\pm 1''$.

Das Quadrat der mittlern Richtungsabweichung ist das von $m = 0$ bis M genommene Integral von $\lambda^2 dm$, dividiert durch M, d. i. mit Rücksicht auf die Werte in (17) gleich $M^6 \Gamma^2 : 2800$; die mittlere Richtungsabweichung selbst ist daher gleich $\pm 0'',39$. Der mittlere Winkelfehler ist $\sqrt{2}$-mal so groß, da $[\lambda] = 0$ ist, also gleich $\pm 0'',56$.

Die theoretischen Fehler der Formel (1) werden daher nur von der Ordnung der Beobachtungsfehler.

Das Institut von Starke und Kammerer gibt für das erwähnte Instrument Nr. 1864 die Formel (1):

$$
639{,}88\,(m_1 - m_2) - 0{,}0960\,(m_1^2 - m_2^2),
$$

während unsere Abmessungen nach (10*), (12) und (18) geben:

$$
639{,}0\,(m_1 - m_2) - 0{,}111\,(m_1^2 - m_2^2).
$$

Die Differenz beider Formeln ist nicht nur in der ungenauen Entnahme der Dimensionen, sondern was die zweite Konstante anbelangt, auch darin zu suchen, daß das Instrument die Voraussetzung einer gleichmäßig geschnittenen Schraube und genau sphärischer Abschnitte nicht streng erfüllen wird.*)

§ 3. Hypothetische geschlossene Ausdrücke.

I. Graphische Ermittelung. Um eine Funktion der Veränderlichen zu finden, die die Beobachtungen darstellt, wird man oftmals sich des graphischen Verfahrens bedienen. Ein Beispiel hierzu bietet J. Hartmanns Formel zur Interpolation der Wellenlängen des Lichts als Funktion des Brechungsexponenten.**) Indem er die Wellenlänge λ als Abscisse, den Brechungsindex n als Ordinate nahm, fand er graphisch den hyperbolischen Zusammenhang

$$n - n_0 = \frac{c}{\lambda - \lambda_0},$$

worin n_0, λ_0 und c Konstanten sind. Diese Formel genügte großen Teilen des Spektrums besser als die üblichen mehr oder weniger auf theoretischen Erwägungen basierenden Dispersionsformeln. Für die Darstellung des ganzen Spektrums erwies sich durch Probieren die Formel

$$n - n_0 = \frac{c}{(\lambda - \lambda_0)^{1.2}}$$

als geeignet.

Indem wir im übrigen auf die angegebenen Abhandlungen verweisen, wenden wir uns zu einem Beispiel aus der physikalischen Chemie.

---

*) Weiteres über die Stampfersche Schraube siehe in Fr. Lorber: Das Nivellieren, Wien 1894, S. 517 u. f., und insbesondere auch in Schell: Über die Bestimmung der Konstanten der Winkelgleichung des Stampferschen Nivellierinstruments (Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1872, S. 332 u. 349). Hier ist auch noch zu nennen die Abhandlung von C. Runge: Über die Vergleichung empirischer Formeln (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 45. Bd. 1900, S. 78 u. f.).

**) Über eine einfache Interpolationsformel für das prismatische Spektrum. (Publ. d. Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam, 1898, Anhang zum 12. Bd.). — Über die Skala des Kirchhoffschen Sonnenspektrums. (Sitzungsber. d. Königl. Preuß. Akad. d. W. 1898, S. 742 u. f.)

Beispiel. Zeitdauer der Reaktion zwischen Jodsäure und schwefliger Säure (nach H. Landolt).*)

Wird zu wässeriger schwefliger Säure Jodsäurelösung im Überschuß zugesetzt, so findet Abscheidung von Jod statt. Die Reaktion erfolgt sofort, wenn die Flüssigkeiten konzentriert sind; nimmt man dieselben aber verdünnt, so hält die (mit etwas Stärke versetzte) Mischung sich eine Zeitlang (Sek. bis Min.) klar, bläut sich aber dann ganz plötzlich.

Werden die Wassermenge H_2O und die schweflige Säure SO_2 konstant gehalten, dagegen die Jodsäure HJO_3 variiert, so zeigte Probieren, daß die Reaktionsdauer bei einer bestimmten Temperatur gleich ist

(1) $$t = x : n^y.$$

Hierin ist n die Anzahl der Moleküle Jodsäure; x und y sind Konstanten. Bei einer ersten Versuchsreihe war das Mischungsverhältnis $3\,SO_2 : n\,HJO_3 : 30000\,H_2O$. Temperatur 20^0.

Beobachtet wurde:

	Nr. 1	$n = 1{,}2$	$t = 23{,}30$
	2	1,5	17,12
	3	1,8	13,12
(2)	4	2,4	8,48
	5	3,0	6,23
	6	3,6	4,82
	7	4,2	3,88.

Näherungswerte für x und y sind (aus zwei Versuchen berechnet): $x_0 = 30{,}217$, $y_0 = 1{,}425$. Setzt man

(3) $$x = 30{,}217 + \xi, \qquad y = 1{,}425 + \eta,$$

und gehört t_0 zu x_0 und y_0 nach Formel (1), so folgt nach Taylors Satz für die Verbesserung δ von t:

(4) $$\lambda = t_0 - t + \frac{\xi}{n^{y_0}} - \frac{x_0}{n^{y_0}} \log\operatorname{nat} n \cdot \eta.$$

*) Über die Zeitdauer der Reaktion zwischen Jodsäure und schwefliger Säure. (Sitzungsber. d. Königl. Preuß. Ak. d. W. 1885, S. 249 u. f.; 1886, S. 193 u. f.; 1886, S. 1007 u. f.; 1887, S. 21 u. f. — Auch Berichte der Deutschen chemischen Gesellschaft, Bd. XIX, 1886, S. 1317 u. f.

Hierin wird dann noch zur Bequemlichkeit der Rechnung gesetzt:

$$10\eta = \eta'. \tag{5}$$

Damit finden sich nachstehende Fehlergleichungen, denen Gewichte beigefügt sind, die sich aus der nachfolgenden Überlegung ergeben.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= +\,0{,}003 + 0{,}77\,\xi - 0{,}43\,\eta' & g &= 1\\
\lambda_2 &= -\,0{,}164 + 0{,}56\,\xi - 0{,}69\,\eta' & & 3\\
\lambda_3 &= -\,0{,}044 + 0{,}43\,\xi - 0{,}77\,\eta' & & 7\\
\lambda_4 &= +\,0{,}199 + 0{,}29\,\xi - 0{,}76\,\eta' & & 27\\
\lambda_5 &= +\,0{,}085 + 0{,}21\,\xi - 0{,}69\,\eta' & & 70\\
\lambda_6 &= +\,0{,}050 + 0{,}16\,\xi - 0{,}62\,\eta' & & 134\\
\lambda_7 &= +\,0{,}030 + 0{,}13\,\xi - 0{,}56\,\eta' & & 203.
\end{aligned} \tag{6}$$

Bei der Gewichtsbestimmung geht man von der Differentialformel aus:

$$dF = dt + \frac{y\,t}{n}\,dn, \tag{7}$$

welche der auf null reduzierten Gleichung (1) entspricht:

$$F = t - \frac{x}{n^y} = 0. \tag{7*}$$

Es ist nun

$$\mu_F^2 = \mu_t^2 + \frac{y^2 t^2}{n^2}\,\mu_n^2, \tag{8}$$

worin die Zeichen μ mittlere Fehler andeuten.

t ist bei unveränderten Lösungen immer zwei- bis viermal, meistens dreimal, beobachtet; aus den Widersprüchen ergab sich für eine Beobachtung $\mu_t = \pm\,0^s{,}08$; fürs Mittel aus zwei und drei Beobachtungen ist also

$$\mu_t = \pm\,0^s{,}057 \text{ bzw } \pm\,0^s{,}046. \tag{9}$$

Bei späteren Versuchsreihen wurden außer den wiederholten Beobachtungen bei unveränderten Lösungen auch solche bei erneuten Lösungen mit gleichem n angestellt; hier zeigte sich der Einfluß von μ_n. Derselbe ergab etwa

$$\mu_n = \pm\,0{,}036, \tag{10}$$

wobei berücksichtigt ist, daß die Widersprüche der beobachteten t auch den unmittelbaren, vorher erwähnten Zeitbeobachtungsfehler enthalten. (Diese Widersprüche geben einen m. F., der in (8) als μ_F einzuführen ist und mit Rücksicht auf μ_t zur Kenntnis von μ_n führt.)

In (6) ist nun genau genommen g umgekehrt proportional μ_F^2 zu setzen, wobei nach (8), (9) und (10) dieses gleich wird

$$(11)\qquad 0{,}051^2 + \frac{t^2}{n^2} \cdot 0{,}051^2.$$

Da das erste Glied nur bei den Versuchen 6 und 7 größern Einfluß hat und hier die Anzahl der Bestimmungen 2 und 3 betrug, ist in (11) der Einfachheit halber μ_t^2 fürs Mittel aus beiden Fällen angesetzt.

Hiernach ist

$$(12)\qquad g = \frac{378\,n^2}{n^2 + t^2}$$

angenommen, womit für die erste Beobachtung $g = 1$ wird. Dazu gehört der m. F. $\pm$ 1,0.

Die Normalgleichungen werden:

$$(13)\qquad \begin{array}{rlrl} 15{,}05\,\xi - 48{,}0\,\eta' &= -\ \ 4{,}27 & \xi &= +\,0{,}02 \\ -\,48{,}0\ \ \xi + 170\ \ \eta' &= +\,15{,}2 & \eta' &= +\,0{,}094; \end{array}$$

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = 30{,}217 + 0{,}02 \pm \dfrac{0{,}41}{\sqrt{1{,}50}} = 30{,}24 \pm 0{,}33, \\ y = \ \ 1{,}425 + 0{,}009 \pm \dfrac{0{,}41}{\sqrt{1695}} = \ \ 1{,}434 \pm 0{,}010. \end{array}\right.$$

Hierbei ist unter Voraussetzung zufälliger Fehler gesetzt der

$$(15)\qquad \text{mittl. F. vom Gew. } 1 = \sqrt{\frac{0{,}83}{7-2}} = \pm\,0{,}41.$$

Derselbe war a priori gleich $\pm$ 1,0.

Für die einzelnen λ findet sich:

$$(16)\qquad \begin{array}{lcr} \lambda_1 = -\ 0{,}022 & \lambda^2 g = 0{,}00 & \lambda\sqrt{g} = -\ 0{,}02 \\ \lambda_2 = -\ 0{,}218 & 14 & -\ \ 38 \\ \lambda_3 = -\ 0{,}107 & 08 & -\ \ 28 \\ \lambda_4 = +\ 0{,}134 & 49 & +\ \ 70 \\ \lambda_5 = +\ 0{,}024 & 04 & +\ \ 20 \\ \lambda_6 = -\ 0{,}005 & 00 & -\ \ \ 6 \\ \lambda_7 = -\ 0{,}020 & 08 & -\ \ 29. \end{array}$$

Diese λ ergeben sich übereinstimmend aus den Fehlergleichungen und aus Formel (1), wenn man darin die Werte (14) einführt.

Die $\lambda\sqrt{g}$ entsprechen den Kriterien des Zufalls ziemlich gut. U. a. ist die Anzahl der Vorzeichenfolgen minus derjenigen der Wechsel $f - w = 4 - 2 = 2$, während die mittlere Abweichung von $f - w = 0$ gleich $\pm\sqrt{6} = \pm 2{,}5$ ist; hier ist also günstige Übereinstimmung.

Bildet man ferner die sieben Differenzen der aufeinander folgenden $\lambda\sqrt{g}$, so folgt als Quadratsumme 1,54; die Hälfte ist 0,77, was mit $[\lambda^2 g] = 0{,}83$ übereinzustimmen hätte, wenn es sich um wahre zufällige Fehler handelte. Der mittl. Unterschied ist $= \pm 0{,}83 : \sqrt{7} = \pm 0{,}32$.

Da keine wahren Fehler vorliegen, werden die Beziehungen etwas andere. Immerhin kann man ohne weitere Rechnung sagen, daß die $\lambda\sqrt{g}$ nach Vorzeichen und Größe keine systematischen Einflüsse erkennen lassen.

Die $\lambda\sqrt{g}$ verraten endlich auch keinen Fehler der Gewichtsformel (12), und da auch der m. F. der Beobachtungen vom Gew. 1 nach (15) von der Annahme a priori wenigstens nur insoweit abweicht, als er sich kleiner als diese ergibt, so kann man sich eigentlich bei dem Ergebnis der Ausgleichung beruhigen.

Es erschien nun aber doch interessant, noch eine Ausgleichung mit dem konstanten Gewicht $g = 1$ vorzunehmen, obwohl dieselbe nur geboten sein würde, wenn sich der m. F. aus der Ausgleichung merklich größer wie a priori gezeigt hätte und also die theoretischen Fehler der Formel von Einfluß wären. (Ein solcher Einfluß zeigte sich bei mehreren ausgedehnteren Reihen an der Vorzeichenverteilung.)

Die Normalgleichungen werden (für alle Beobachtungen $g = 1$ genommen):

$$(17)\qquad \begin{aligned} 1{,}262\,\xi - 1{,}588\,\eta' &= 0{,}021 \qquad & \xi &= +\,0{,}189 \\ -\,1{,}588\,\xi + 3{,}01\;\;\eta' &= 0{,}112 \qquad & \eta' &= +\,0{,}137 \end{aligned}$$

$$(18)\qquad \left\{ \begin{aligned} x &= 30{,}406 \pm \frac{0{,}110}{\sqrt{0{,}424}} = 30{,}406 \pm 0{,}169, \\ y &= \;\;1{,}439 \pm \frac{0{,}110}{\sqrt{101}} = \;\;1{,}439 \pm 0{,}011\,. \end{aligned} \right.$$

$$(19)\qquad \text{Mittl. F. vom Gew. } 1 = \sqrt{\frac{0{,}060}{7-2}} = \pm\,0{,}110\,.$$

Die einzelnen λ sind:

$$(20)\qquad \begin{gathered} \lambda_1 = +\,0{,}090 \quad \lambda_2 = -\,0{,}152 \quad \lambda_3 = -\,0{,}069 \\ \lambda_4 = +\,0{,}150 \quad \lambda_5 = +\,0{,}031 \quad \lambda_6 = -\,0{,}005 \quad \lambda_7 = -\,0{,}022. \end{gathered}$$

Hier ist $f - u = 0$ und $[\lambda^2] = 0{,}060$ sowie die halbe Quadratsumme der sieben Unterschiede aufeinanderfolgender λ gleich 0,070. Danach könnte man die Fehler λ auch als von rein zufälligen Ursachen herrührend betrachten.

Wegen der geringen Anzahl überschüssiger Beobachtungen ist es unmöglich, Genaueres zu erkennen. Obwohl die m. F. der Endwerte bei der zweiten Gewichtsannahme günstiger sind, als bei der ersten, muß man doch diese beibehalten, da die erste Gewichtsannahme zweifellos die bessere ist.

Landolt bemerkt in den Ber. der D. chem. Ges. auf S. 1349, daß der Exponent $y = 1{,}43$ nicht maßgebend sei, weil die Jodsäure bei dieser Reihe nicht auf Wasser und Anhydridgehalt untersucht worden sei. Eine zweite und dritte Reihe gaben $y = 1{,}65$ im Mittel.

II. Gültigkeit der Ergebnisse. Selbst bei gutem Anschluß der Formel an die Beobachtungen ist es bedenklich, die Formel auch als außerhalb der Grenzen der Beobachtungen gültig zu betrachten. Oftmals zeigt sich später, daß außerhalb mit der Entfernung von den Grenzen rasch zunehmende Abweichungen auftreten.

Was nun die berechneten mittlern Fehler der Konstanten anlangt, so beruhen sie auf der Annahme, daß lediglich zufällige Fehler wirksam sind und daß also die Fehler der Theorie ganz zurücktreten. Je mehr aber diese von Bedeutung sind, desto mehr verlieren jene m. F. an Wert, und wenn die Fehler der Theorie vorherrschen, so sind sie ganz wertlos.

Man erkennt dies am besten auf folgende Art. Denkt man sich jede Beobachtung zweimal ausgeführt, so werden die Gewichte der Konstanten sich nach der üblichen Rechnung verdoppeln. Wenn aber die Fehler der Theorie vorherrschen, so werden die Komponenten der Beobachtungspaare wesentlich gleiche Abweichungen von der Formel zeigen, und zwar dieselben wie bei einmaliger Ausführung jeder Beobachtung. Eine Genauigkeitserhöhung durch Vermehrung der Beobachtungen ist also gewiß nicht zu erwarten. (Einen extremen Fall erhält man für die Aufgaben des § 2, wo die Beobachtungen gewissermaßen in unendlicher Anzahl vorliegen und die Gewichte der Konstanten unendlich groß werden.)

In solchen Fällen muß man sich begnügen, die mittlere Abweichung μ_λ anzugeben, welche Beobachtung und angenommene Formel (die Theorie) gegeneinander zeigen. Ist

$$\lambda = \text{Rechnung} - \text{Beobachtung}$$

und n die Anzahl der Beobachtungen, so setze man

$$\mu_\lambda = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n}}.$$

Im Nenner $n - m$, m Anzahl der Konstanten, zu setzen, hat jetzt keinen Sinn.

Vielleicht wird man noch das positive und negative Maximum von λ angeben.

Treten dagegen die Fehler der Theorie zurück, so kann man die übliche mittlere Fehlerrechnung durchführen, die aber nur innerhalb der Beobachtungsgrenzen brauchbar ist, im Falle des vorigen Beispiels also bei n innerhalb 1,2 bis 4,2.

Es genügt dann aber nicht, nur die m. F. der Konstanten anzugeben, sondern man muß den m. F. einer Funktion derselben zur Darstellung bringen.

Im Falle des vorigen Beispiels wird der m. F. eines berechneten Wertes t, insoweit er von x und y abhängt, aus der folgenden Formel gefunden (indem t hier die Funktion ist):

$$(21)\qquad \mu_t^2 = \mu^2 t^2 \left\{ \frac{Q_{1\cdot 1}}{x^2} + Q_{2\cdot 2}(\log\operatorname{nat} n)^2 - \frac{2\log\operatorname{nat} n}{x} Q_{1\cdot 2} \right\};$$

hierzu ergeben sich die Q aus den Gleichungen (13):

$$(22)\qquad Q_{1\cdot 1} = 0{,}667 \qquad Q_{2\cdot 2} = 0{,}000590 \qquad Q_{1\cdot 2} = 0{,}0188,$$

wobei zu bedenken ist, daß η' dem zehnfachen Werte von dy entspricht. μ^2 ist nach (15) $= 0{,}166$.

Fehlt die Kenntnis von $Q_{1\cdot 2}$, so kann man nach S. 187 nur Grenzwerte von μ_t angeben.

§ 4. Interpolation durch Potenzreihen.

I. Einfache Fälle. Nicht selten hat man es mit kleinen Änderungen der Veränderlichen x zu tun, denen kleine Änderungen der Funktion $F(x)$ entsprechen. Man setzt dann

$$(1)\qquad F(x) = \alpha + \beta x$$

oder vielleicht genauer

$$F(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2, \tag{2}$$

wo α, β, γ Konstanten sind. Offenbar entspricht dies einer Taylorschen Entwicklung; die Brauchbarkeit der Formeln ist also an die Bedingung der Stetigkeit und Endlichkeit der Funktion und ihrer (in Betracht kommenden) Differentialquotienten in dem Gebrauchsintervall geknüpft. Außerdem muß der Rest der Reihe in dem benutzten Intervall ganz hinter den Beobachtungsfehlern zurücktreten.

Beispiele zu (1) und (2) bieten die Längen metallner Maßstäbe als Funktion der Temperatur; ferner vielfach der stündliche Gang der Uhren für wenige Stunden, mit der Zeit als Veränderlichen, von der die eigentlichen Ursachen: Luftdruck, Temperatur, Feuchtigkeit, abhängen. Während im Falle der metallnen Maßstäbe die aus Beobachtungen berechnete Formel (1) oder (2) in der Regel einen dauernden Wert besitzt, handelt es sich im zweiten Falle nur um eine Art Rechenhilfe für vorübergehenden Gebrauch, um insbesondere den Gang der Uhr für verschiedene Stellen des Intervalls möglichst sicher zu interpolieren. (Die Aufgabe, den Uhrgang als Funktion der genannten Ursachen darzustellen, ist ein viel umfassenderes Problem.*)

Sind nur so viele Beobachtungen angestellt, als man Konstanten bestimmen will, so kann man $F(x)$ aus der Interpolationsformel von Lagrange herleiten. Sind l_1, l_2, l_3 die Beobachtungswerte von F für x_1, x_2, x_3, so hat man

$$F(x) = l_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + l_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + l_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}. \tag{3}$$

Für x gleich x_1, x_2, x_3 geht F in l_1, l_2, l_3 über. Die Entwicklung nach Potenzen von x führt zu einem Ausdruck wie (2).

Hat man nicht drei, sondern m Beobachtungen für m verschiedene x, so erhöht sich die Anzahl der Konstanten ebenfalls auf m. Erwägt man nun, daß die l beobachtet sind, also

---

*) Vergl. dazu: B. Wanach. Über die Ausgleichung von Uhrgängen (Astr. Nachr. Bd. 167, 1905, Nr. 3989).

von den genauen Funktionswerten abweichen, so erscheint es erlaubt, so viele der Konstanten wegzulassen (und die übrigen nach der Methode der kl. Qu. zu bestimmen), daß die für die l notwendig werdenden Verbesserungen λ den Betrag des mittlern zu befürchtenden Beobachtungsfehlers in l nicht überschreiten, welcher letztere also im voraus mindestens annähernd bekannt sein muß.

Das praktisch einzuschlagende Verfahren ist entweder: Man bestimmt zunächst sämtliche Konstanten, vernachlässigt aber alsdann die sehr wenig einflußreichen und bestimmt nun die übrigen nach der Methode der kl. Qu. Eine kleine Vereinfachung bietet es manchmal, wenn x von dem arithmetischen Mittel der vorkommenden Werte ab gezählt wird, indem dann in den Normalgleichungen ein Koeffizient verschwindet.

Oder: man nimmt zunächst nur eine ausgewählte Anzahl Konstanten, von denen man den größten Einfluß erwartet (vielleicht auf Grund vorläufigen Probierens) und bestimmt dieselben nach der Methode der kl. Qu. und berechnet zugleich $[\lambda\lambda]$ aus $[ll]$ nach Formel (13), S. 158, und daraus die mittlere Abweichung μ nach (14), S. 158. Erscheint dieselbe noch zu groß, so fügt man der Formel ein weiteres Glied zu: eine Konstante multipliziert in eine bisher noch nicht eingeführte Potenz der Variablen. Die neue Ausgleichung enthält bei Anwendung des zweiten Verfahrens, S. 151 u. f., auf Grund der Formeln XIII und der Tabellen V und VI, S. 157 und 153, die vorhergehende ganz in sich, so daß durch diese kein Arbeitsverlust entstanden ist. Auch der Formel für $[\lambda\lambda]$ fügt sich nur ein neuer Subtrahend bei.

Dieses Zusetzen neuer Glieder zu $F(x)$ wird erneuert, bis endlich die mittlere Abweichung μ sich klein genug ergibt. Da bei Mitnahme neuer Konstanten sich in der Formel für μ^2 Zähler und Nenner vermindern, so gibt diese Mitnahme nicht notwendig kleinere μ.*)

*) Vergl. hierzu die Zahlen in der Arbeit von E. Lindelöf: Zur Frage von der Bedeutung der Fehlerrechnung bei der harmonischen Analyse von Kurven (Archiv f. d. ges. Physiologie, Bd. 87. 1901, S. 609). Diese Zahlen entsprechen zwar einem Beispiel zum nächstfolgenden Paragraphen, aber können auch das oben im Text Gesagte illustrieren.

Beispiel. Bestimmung der Gleichung eines Meterstabes. Ein Strichmaßstab P wurde bei fünf Temperaturen von 5 bis 29° mit einem Stahlmeter von bekannter Länge verglichen, außerdem noch bei der mittlern Temperatur mit einem bekannten Bronzestab. Setzt man für P bei der Temperatur T:

$$P = 1\,\mathrm{m} + \xi + \eta T + \zeta T^2 \tag{1}$$

und nach einer Näherungsrechnung, für Mikron als Einheit:

$$\xi = -252 + x, \quad \eta = +18{,}5 + 0{,}1\,y, \quad \zeta = +0{,}009 + 0{,}01\,z, \tag{2}$$

sowie $P = 1\,m + l + \lambda$, wo l die mikrometrische Beobachtungsgröße ist, die sich aus der Stabdifferenz und der Gleichung der bekannten Stäbe berechnet, so folgen die sechs Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\,0{,}28 + x + 0{,}5\,y + 0{,}25\,z \\
\lambda_2 &= 0{,}00 + x + 1{,}0\,y + 1{,}00\,z \\
\lambda_3 &= 0{,}00 + x + 1{,}6\,y + 2{,}56\,z \\
\lambda_4 &= +\,0{,}30 + x + 1{,}6\,y + 2{,}56\,z \\
\lambda_5 &= -\,0{,}23 + x + 2{,}1\,y + 4{,}41\,z \\
\lambda_6 &= +\,0{,}27 + x + 2{,}9\,y + 8{,}41\,z.
\end{aligned} \tag{3}$$

Die durch die Ausgleichung zu bestimmenden Verbesserungen von η und ζ sind in der Form $0{,}1\,y$ und $0{,}01\,z$ gewählt, um in den Fehlergleichungen den Koeffizienten von y und z annähernd die Größenordnung von 1 zu geben, was die Rechnung erleichtert.

Den Fehlergleichungen wurde das gleiche Gewicht 1 zugeteilt. Streng ist das allerdings nicht, denn aus (1) folgt zunächst, abgesehen von dem Fehler der Länge der Vergleichsstäbe, als m. Fehlerqu. einer Gleichung (3):

$$\mu_l^2 + \mu_T^2(\eta + 2\,T\zeta)^2. \tag{4}$$

Hierin ist nun der zweite Teil mit T veränderlich, aber nur wenig, so daß (4) für alle Fehlergleichungen wesentlich denselben Betrag hat.

Was die Unsicherheit in der Länge der Vergleichsstäbe anlangt, so wirkt dieselbe auf die Vergleichungen mit dem Stahlstab unter Annahme sehr scharfer Bestimmung der Temperaturkoeffizienten wesentlich konstant; sie ist aber für beide Vergleichsstäbe verschieden. Man müßte also λ_i für $i = 1, 2, 3, 5$ und 6 zerlegen in $\lambda_i' + \sigma$, bei $i = 4$ in $\lambda_4' + \beta$, wo σ und β die konstanten Fehler des Stahl- und Bronzestabes bezeichnen. Da aber jeder Anhalt für die relative Gewichtsbestimmung von σ und

β im Vergleich zu den durch (4) charakterisierten Fehlern fehlte, so wurde von der Berücksichtigung der kleinen Größen β und σ abgesehen (was eine verwickelte Ausgleichung nach Kap. 4, § 5, S. 285, gegeben hätte).

Der in die Länge der Vergleichsstäbe eingehende Temperaturfehlereinfluß (ähnlich dem zweiten Glied in (4)), der noch zu (4) hinzutritt, ändert wenig an dem nahezu konstanten Charakter des m. Fqu. der Fehlergleichungen.

Die Normalgleichungen und die reduzierten Normalgleichungen werden nun mit Rücksicht auf die Berechnung der Gewichtskoeffizienten Q:

$$(5)\quad \begin{array}{rrrrl|rrr} & 6{,}00x + & 9{,}70y + & 19{,}19z = & -0{,}060 & 1 & 0 & 0 \\ + & 9{,}70x + & 19{,}19y + & 42{,}97z = & -0{,}640 & 0 & 1 & 0 \\ + & 19{,}19x + & 42{,}97y + & 104{,}35z = & -1{,}954 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$(6)\quad \begin{array}{rrrrrrr} 6{,}00x + 9{,}70y + & 19{,}19z = & -0{,}060 & 1 & & & \\ 3{,}51y + & 11{,}94z = & -0{,}543 & -1{,}617 & 1 & & \\ & 2{,}31z = & +0{,}087 & +2{,}306 & -3{,}405 & 1\,. \end{array}$$

Hieraus folgt:

$$(7)\quad \begin{array}{llll} x = +0{,}327 & Q_{1\cdot1} = +3{,}213 & & \\ y = -0{,}284 & Q_{1\cdot2} = -3{,}859 & Q_{2\cdot2} = +5{,}303 & \\ z = +0{,}038 & Q_{1\cdot3} = +0{,}998 & Q_{2\cdot3} = -1{,}474 & Q_{3\cdot3} = 0{,}433\,. \end{array}$$

Die Q erfüllen Flints Probe:

$$(8)\quad +34{,}89 \cdot 0{,}352 - 71{,}86 \cdot 0{,}030 - 166{,}51 \cdot 0{,}043 = 3{,}0.$$

Die λ werden:

$$(9)\quad -0{,}08,\quad +0{,}09,\quad -0{,}02,\quad +0{,}27,\quad -0{,}33,\quad +0{,}10;\qquad [\lambda\lambda] = 0{,}207.$$

Aus $[ll]$ folgt dagegen:

$$(10)\quad \begin{array}{l} [\lambda\lambda] = +0{,}294 + 0{,}020 - 0{,}182 + 0{,}074 = 0{,}206 \\ \text{bzw.} +0{,}294 - (0{,}001 + 0{,}084 + 0{,}003) = 0{,}206. \end{array}$$

Ohne ζ zeigen die λ einen ausgeprägt systematischen Charakter, indem von 17^0 abgerechnet der Einfluß von ζ 1,3 Mikron beträgt (sie gehen dann von $-0{,}8$ nach $+0{,}8$ und weiter bis $-0{,}7$).

Der mittlere Fehler einer Gleichung wird

$$(11)\qquad \mu = \pm\sqrt{\frac{0{,}206}{6-3}} = \pm\, 0{,}262 \text{ Mikron.}$$

Es ist nun

$$(12)\quad P = 1\,\mathrm{m} - 252 + x + (18{,}5 + 0{,}1\,y)\,T + (0{,}009 + 0{,}01\,z)\,T^2,$$

wobei die zu 1 m tretenden Glieder in Mikron erhalten werden. Setzt man die Werte ein, so folgt abgekürzt:

$$(13)\qquad \begin{aligned} P = 1\,\mathrm{m} - {}&251{,}67 + 18{,}472\,T + 0{,}00938\,T^2 \\ \pm\,&\;0{,}47 \;\pm\; 0{,}061 \quad \pm\, 0{,}00175, \end{aligned}$$

wobei die m. F. der Größen x, $0{,}1\,y$ und $0{,}01\,z$ aus $\mu\sqrt{Q_{1\cdot 1}}$ usw. beigefügt sind.

Diese Angabe der m. F. der Konstanten gibt aber für $\mu_P{}^2$ ein ganz falsches Bild. Mit Rücksicht auf $Q_{1\cdot 2}$ usw. hat man:

$$(14)\quad \mu_P{}^2 = 0{,}069\left\{3{,}213 - 7{,}718\left(\frac{T}{10}\right) + 7{,}299\left(\frac{T}{10}\right)^2 - 2{,}948\left(\frac{T}{10}\right)^3 + 0{,}433\left(\frac{T}{10}\right)^4\right\}.$$

Hiernach wird μ_P in Mikron gleich:

(15)

± 0,47	bei 0°	± 0,16	bei 8°	± 0,15	bei 16°	± 0,15	bei 24°
37	2	14	10	15	18	18	26
28	4	14	12	15	20	22	28
21	6	15	14	15	22	29	30.

Hinzu tritt noch ein kleinerer Betrag aus der Unsicherheit der Gleichung des Stahlstabes (auf welche P hauptsächlich sich stützt) und des Bronzestabes, sowie bei Vergleichung neuerer Stäbe mit P die Unsicherheit der betreffenden Operation (mikrometrische Messung, Temperatureinfluß).*)

II. Verallgemeinerung der Entwicklung. Es wurde bisher angenommen, daß für das Beobachtungsintervall der Veränderlichen die Funktion $F(x)$ durch eine stark konvergente

---

*) Die grundlegenden Zahlen dieses Beispiels verdanke ich Herrn Regierungsrat Dr. H. Stadthagen von der Kaiserl. Normal-Eichungs-kommisson; die Berechnung hat Herr G. Förster ausgeführt.

Vergl. ausführlichere Beispiele in Bd. I der „Wissenschaftl. Abhandlgn. der Kaiserl. Normal-Eichungs-Kommission" 1895, S. 93 u. f.

Entwicklung nach Taylor dargestellt werden kann. Vielfach fehlt aber nicht nur davon a priori die Kenntnis, sondern es bleibt überhaupt fraglich, ob die Funktion eine analytische Funktion ist — günstigstenfalls ist sie selbst stetig veränderlich innerhalb des Beobachtungsintervalls, von ihren Differentialquotienten ist das aber nicht vorauszusetzen.

Trotzdem wendet man zur interpolatorischen Darstellung Potenzreihen an, was praktisch nicht aussichtslos erscheint, weil ja die Beobachtungswerte von $F(x)$ nicht fehlerfrei sind und es genügt, diese Werte bis auf Quantitäten von der Ordnung der Beobachtungsfehler zur Darstellung zu bringen. Selbstverständlich ist die Interpolationsformel kein Ausdruck des wahren Gesetzes: sie gibt nur die Beobachtungswerte genügend wieder, ist aber unbrauchbar zur Angabe von Differentialquotienten und kann zwischen den Beobachtungswerten von dem wahren Gesetze stark abweichen.

Der rein interpolatorische Charakter der Formel zeigt sich nun darin, daß bei fortgesetzter Vermehrung der Anzahl m der Konstanten die Werte derselben für jede einzelne sich keineswegs mehr und mehr bestimmten Grenzwerten nähern, sondern stark hin- und hergehen.

Es ist aber möglich, dem Problem eine Form zu geben, wobei dieses vermieden wird. Zu dem Zwecke muß man an Stelle der Reihenentwicklung nach ganzen, positiven Potenzen von x eine solche nach Kugelfunktionen (hier den „einfachen") setzen; letztere sind gewisse Polynome aus ganzen, positiven Potenzen von x. Beide Entwicklungen sind nur formell verschieden; aus derjenigen nach Kugelfunktionen geht die nach Potenzen wieder hervor durch Zusammenziehen der Glieder mit denselben Potenzen. Aber von der Entwicklung nach Kugelfunktionen weiß man, daß sie auf jede endliche Funktion anwendbar ist (dieselbe darf sogar Diskontinuitäten in ihrem Verlaufe zeigen. Solche sind allerdings einer starken Konvergenz nicht förderlich).

III. Die einfachen Kugelfunktionen. Sie sind ein Spezialfall der allgemeineren mit zwei Veränderlichen.*) Ihr all-

*) Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften. Bd. II, 1904, S. 702 u. f.

gemeiner Ausdruck ist:

$$(4)\quad P_n(u) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdots n}\left\{u^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}u^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}u^{n-4} - \cdots\right\},$$

wobei u von -1 bis $+1$ variieren kann.

Für die Werte $n = 1 \ldots 7$ hat man insbesondere:

$$\begin{aligned}
&P_1(u) = u\\
&P_2(u) = -0{,}5 + 1{,}5u^2\\
&P_3(u) = -1{,}5u + 2{,}5u^3\\
(5)\quad &P_4(u) = +0{,}375 - 3{,}75u^2 + 4{,}375u^4\\
&P_5(u) = +1{,}875u - 8{,}75u^3 + 7{,}875u^5\\
&P_6(u) = -0{,}3125 + 6{,}5625u^2 - 19{,}6875u^4 + 14{,}4375u^6\\
&P_7(u) = -2{,}1875u + 19{,}6875u^3 - 43{,}3125u^5 + 26{,}8125u^7.
\end{aligned}$$

. . . .

Man beginnt die Reihe der P in der Regel mit

$$(5^*)\qquad P_0(u) = 1,$$

welcher Koeffizient aber der Formel (4) nicht entspricht.

Nach diesen Formeln sind für

$$u = -1{,}0,\ -0{,}9,\ \ldots\ -0{,}1.\ 0 + 0{,}1,\ +0{,}2,\ \ldots\ +0{,}9,\ +1{,}0$$

die Werte berechnet worden und in der auf S. 398 wiedergegebenen kleinen Tabelle vereinigt.

Man hat auch allgemein

$$(6)\qquad P_n(u) = \frac{1}{2^n\cdot n!}\,\frac{d^n(u^2-1)^n}{du^n}.$$

Der Wert von P liegt immer zwischen -1 und $+1$.

Für das Intervall $u = -1$ bis $+1$ kann man nun für jede endliche Funktion $F(u)$ ansetzen:

$$(7)\qquad F(u) = K_0P_0(u) + K_1P_1(u) + K_2P_2(u) + \cdots,$$

worin $K_0, K_1, K_2 \ldots$ Koeffizienten sind, für welche die Formel besteht:

$$(8)\qquad K_i = \frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{+1} F(u)P_i(u)\,du.$$

Einfache Kugelfunktionen.

u	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
− 1,0	− 1,0000	+ 1,0000	− 1,0000	+ 1,0000	− 1,0000	+ 1,0000	− 1,0000
− 0,9	− 0,9000	+ 0,7150	− 0,4725	+ 0,2079	+ 0,0411	− 0,2412	+ 0,3678
− 0,8	− 0,8000	+ 0,4600	− 0,0800	− 0,2330	+ 0,3995	− 0,3918	+ 0,2397
− 0,7	− 0,7000	+ 0,2350	+ 0,1925	− 0,4127	+ 0,3652	− 0,1253	− 0,1502
− 0,6	− 0,6000	+ 0,0400	+ 0,3600	− 0,4080	+ 0,1526	+ 0,1721	− 0,3226
− 0,5	− 0,5000	− 0,1250	+ 0,4375	− 0,2891	− 0,0898	+ 0,3232	− 0,2231
− 0,4	− 0,4000	− 0,2600	+ 0,4400	− 0,1130	− 0,2706	+ 0,2926	+ 0,0146
− 0,3	− 0,3000	− 0,3650	+ 0,3825	+ 0,0729	− 0,3454	+ 0,1292	+ 0,2241
− 0,2	− 0,2000	− 0,4400	+ 0,2800	+ 0,2320	− 0,3075	− 0,0806	+ 0,2935
− 0,1	− 0,1000	− 0,4850	+ 0,1475	+ 0,3379	− 0,1788	− 0,2488	+ 0,1995
0	0,0000	− 0,5000	0,0000	+ 0,3750	0,0000	− 0,3125	0,0000
+ 0,1	+ 0,1000	− 0,4850	− 0,1475	+ 0,3379	+ 0,1788	− 0,2488	− 0,1995
+ 0,2	+ 0,2000	− 0,4400	− 0,2800	+ 0,2320	+ 0,3075	− 0,0806	− 0,2935
+ 0,3	+ 0,3000	− 0,3650	− 0,3825	+ 0,0729	+ 0,3454	+ 0,1292	− 0,2241
+ 0,4	+ 0,4000	− 0,2600	− 0,4400	− 0,1130	+ 0,2706	+ 0,2926	− 0,0146
+ 0,5	+ 0,5000	− 0,1250	− 0,4375	− 0,2891	+ 0,0898	+ 0,3232	+ 0,2231
+ 0,6	+ 0,6000	+ 0,0400	− 0,3600	− 0,4080	− 0,1526	+ 0,1721	+ 0,3226
+ 0,7	+ 0,7000	+ 0,2350	− 0,1925	− 0,4121	− 0,3652	− 0,1253	+ 0,1502
+ 0,8	+ 0,8000	+ 0,4600	+ 0,0800	− 0,2330	− 0,3995	− 0,3918	− 0,2397
+ 0,9	+ 0,9000	+ 0,7150	+ 0,4725	+ 0,2079	− 0,0411	− 0,2412	− 0,3678
+ 1,0	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000

P_1, P_2 und P_3 sind exakt, die folgenden P nur abgekürzt.*)

Auf die Formel (8) kommt man, wenn man die Gleichung (7) mit $P_i(u)\,du$ multipliziert, dann integriert und die beiden folgenden Beziehungen beachtet:

$$\int_{-1}^{+1} P_i(u)\,P_i(u)\,du = \frac{2}{2\,i+1} \tag{9}$$

und

$$\int_{-1}^{+1} P_i(u)\,P_h(u)\,du = 0 \quad \text{bei} \quad i \gtrless h. \tag{10}$$

Die Formeln (8) bis (10) gelten auch für $i = 0$ mit $P_0 = 1$.

*) Literatur über Tafeln vergl. in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften. Bd. II, 1904. S. 708.

Die Ableitung von (8) entspricht aber ganz dem Vorgange der M. d. kl. Qu.: Betrachtet man in (7) $F(u)$ als Beobachtungswert, denkt sich demgemäß noch eine Verbesserung λ beigefügt und erteilt der so entstehenden Fehlergleichung das Gewicht du, so ist mit Rücksicht auf (9) und (10) für die Unbekannte K_i die Normalgleichung

$$(11)\qquad \frac{2}{2i+1} K_i = \int_{-1}^{+1} F(u) P_i(u) du.$$

Das Gewicht von K_i ist somit $2:(2i+1)$. — Man erkennt nun aber nicht ohne weiteres, daß bei unendlich großer Gliederzahl der Reihe (7) die λ alle gleich null werden.*) Bei endlicher Gliederanzahl ist das Quadrat der mittleren Abweichung, d. i. $\int_{-1}^{+1} \lambda^2 du : \int du$, mit Rücksicht auf die Gleichung (11) gleich**)

$$(12)\quad \mu^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} F(u) F(u) du - \left\{ K_0^2 + \frac{1}{3} K_1^2 + \frac{1}{5} K_2^2 + \cdots + \frac{1}{2n+1} K_n^2 \right\}.$$

Um Funktion $F(x)$ für das Intervall x_1 bis x_2 nach Kugelfunktionen zu entwickeln, muß man darin

$$(13)\qquad x = \frac{x_2 + x_1}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} u$$

setzen; u geht dann von -1 bis $+1$. Zum Schluß sind die $P(u)$ eventuell zurückzuverwandeln in Funktionen von x mittels der Substitution

$$(14)\qquad u = \frac{2x}{x_2 - x_1} - \frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1}.$$

Man kann nun auch noch die Reihe (7) in eine Potenzreihe verwandeln und hat mittels der Gleichungen (5):

---

*) J. P. Gram: Über die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittels der M. d. kl. Qu. (Journal f. d. reine und angewandte Math. Bd. 94, 1883, S. 41—73.)

**) C. Runge: Über die Vergleichung empir. Formeln (Zeitschr. f. Math. u. Physik. Bd. 45. 1900, S. 78 u. f.), und: Theorie und Praxis der Reihen. Leipzig 1904, S. 122—123.

$$
\begin{aligned}
F(u) = \{ K_0 & \;.\; - 0{,}5\,K_2 \;.\; + 0{,}375\,K_4 \;.\; - 0{,}3125\,K_6 \;.\; + \cdots \} \\
+ u\{ K_1 & \;.\; - 1{,}5\,K_3 \;.\; + 1{,}875\,K_5 \;.\; - 2{,}1875\,K_7 \;\cdots \} \\
+ u^2\{ 1{,}5\,K_2 & \;.\; - 3{,}75\,K_4 \;.\; + 6{,}5625\,K_6 \;.\; - \cdots \} \\
+ u^3\{ 2{,}5\,K_3 & \;.\; - 8{,}75\,K_5 \;.\; + 19{,}6875\,K_7 \;\cdots \} \\
+ u^4\{ 4{,}375\,K_4 & \;.\; - 19{,}6875\,K_6 \;.\; + \cdots \} \\
+ u^5\{ 7{,}875\,K_5 & \;.\; - 43{,}3125\,K_7 \;\cdots \} \\
+ u^6\{ 14{,}4375\,K_6 & \;.\; - \cdots \} \\
+ u^7\{ 26{,}8125\,K_7 & \;\cdots \} \\
+ \cdots &
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Während aber die Kugelfunktionen P in (7) nur Werte von -1 bis $+1$ annehmen, entstehen durch das Zerreißen der P in den einzelnen Gliedern der Potenzreihe (15) größere Einflüsse, so daß jedes hinzukommende K die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von u stark ändern kann.

IV. Anwendung auf Beobachtungen. Meistens sind die Werte $F(u)$ durch Beobachtung nur für eine endliche Anzahl von Werten u gegeben; man kann also auch nur eine beschränkte Anzahl Konstanten K ableiten. Gegenüber der direkten Berechnung der Potenzreihe (wie in I, S. 390 u. f.) hat man jetzt den Vorteil einer konvergenten Entwicklung, so daß man bequemer sieht, welche Koeffizienten K etwa zu null angenommen werden können.

Die praktische Rechnung wird in der Regel nach der M. d. kl. Qu. ausgeführt. Dies ist das beste, falls man annimmt, daß die angesetzten Reihenglieder zur Darstellung von F ausreichen, und daß man es also nur noch wesentlich mit zufälligen Abweichungen der beobachteten Werte von der Formel zu tun hat. Geht man nur bis K_7, so hat man 8 Konstanten zu bestimmen, was nicht besonders mühsam ist. Liegen die gegebenen $F(u)$ von -1 bis $+1$ in 0,1 Abstand vor, so erhält man die folgenden Koeffizienten der Normalgleichungen im Anschluß an die nach (7) zu bildenden Fehlergleichungen, wobei linker Hand noch eine Verbesserung λ beizufügen ist. Die Normalgleichungen zerfallen in zwei Systeme, was die Auflösung erleichtert.

Normalgleichungen.

$$(16)\quad \begin{array}{rrrrl} 21{,}0000\,K_0 & +\,1{,}0500\,K_2 & +\,1{,}1660\,K_4 & +\,1{,}3463\,K_6 & = A_0 \\ +\,1{,}0500 & +\,5{,}0999 & +\,1{,}2150 & +\,1{,}3908 & = A_2 \\ +\,1{,}1660 & +\,1{,}2150 & +\,3{,}5476 & +\,1{,}4882 & = A_4 \\ +\,1{,}3463 & +\,1{,}3908 & +\,1{,}4882 & +\,3{,}1617 & = A_6; \end{array}$$

$$(16^*)\quad \begin{array}{rrrrl} 7{,}7000\,K_1 & +\,1{,}1165\,K_3 & +\,1{,}2647\,K_5 & +\,1{,}4715\,K_7 & = A_1 \\ +\,1{,}1165 & +\,4{,}0556 & +\,1{,}3418 & +\,1{,}5363 & = A_3 \\ +\,1{,}2647 & +\,1{,}3418 & +\,3{,}2901 & +\,1{,}6391 & = A_5 \\ +\,1{,}4715 & +\,1{,}5363 & +\,1{,}6391 & +\,3{,}0910 & = A_7\,. \end{array}$$

Hierin ist $A_i = [F(u)P_i(u)]$, wobei die Summierung auf die Glieder mit $u = -1, -0{,}9, \ldots +0{,}9, +1$ auszudehnen ist.

Um die nichtquadratischen Koeffizienten zum Verschwinden zu bringen, muß man nach F. Neumann, wenn man z. B.

$K_0 \ldots K_7$ bestimmen will, die Werte $F(u)$ für diejenigen 8 Werte von u aus den Beobachtungen entnehmen, welche der Gleichung $P_8(u) = 0$ entsprechen. Aus der Gleichung (6) folgt, daß die 8 Wurzeln sämtlich reell sind und zwischen -1 und $+1$ liegen. Die Fehlergleichungen erhalten nun aber verschiedene Gewichte. Dieselben Werte u und Gewichte kommen auch bei der Gaußschen Methode der Berechnung bestimmter Integrale vor.

Für vorstehenden Fall einfacher Kugelfunktionen dürfte dieses Verfahren, das nur zur Bequemlichkeit dient, kaum von Bedeutung sein, wohl aber für die Entwicklung nach Kugelfunktionen von zwei Variablen.*)

Bei der praktischen Rechnung ist es nützlich, $K_0 \ldots K_7$ zunächst mittels beiläufiger Auswertung nach (8), etwa durch Simpsons Regel, angenähert zu berechnen und dann $F(u)$ mittels der genau bekannten Werte der P_1, P_2, P_3 von ihren voraussichtlich größten Koeffizienten (bis auf kleine Verbesserungen) zu befreien. Für das Weitere genügt es dann meistens, die P auf vier Dezimalen abzurunden.

Auf den ersten Blick sieht es aus, als könnte man nach (8) auch bei einer endlichen Anzahl gegebener Werte $F(u)$ mittels näherungsweiser Quadratur beliebige K berechnen. Da aber unter dem Integral nicht K, sondern KP_i steht, so ist dies wegen der raschen Veränderlichkeit von P_i für größere i nicht durchführbar. Bestimmt man eine Anzahl K nach der M. d. kl. Qu., so treten natürlich die weggelassenen Glieder als Fehler der Theorie auf: vergl. den Schluß von I, S. 392.

---

*) Franz Neumann. Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Herausgegeben von Dr. Carl Neumann. Leipzig 1887; S. 150—154.

H. Seeliger. Über die interpolatorische Darstellung einer Funktion durch eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe. (Sitzungsberichte d. math.-phys. Kl. d. Königl. Bayer. Ak. d. W. 1890, XX, S. 499.)

Hier sind u. a. bis $n = 7$ die in Betracht kommenden Argumente und Gewichte angegeben.

Enzyklopädie d. math. Wiss., Bd. II, 1899, S. 121 u. f. und Bd. II, 1904, S. 718.

§. 5. Interpolation durch trigonometrische Reihen.

1. Theoretische Grundlage. Hat man es mit Beobachtungswerten einer Erscheinung zu tun, die periodischer Natur ist, so wendet man nach dem Vorgange von F. W. Bessel (1818) als Interpolationsformel eine Reihe an, die nach Sinus und Cosinus des einfachen, zweifachen, dreifachen usw., in Bruchteilen der Periodenlänge ausgedrückten und mit 2π multiplizierten Wertes der Veränderlichen fortschreitet.*) Nach J. J. Fourier (1807) kann man eine solche Entwicklung auf jede endliche Funktion anwenden; an den Unstetigkeitsstellen gibt die Reihe das arithmetische Mittel. Setzt man demgemäß

$$(1)\qquad \begin{aligned} F(t) = A_0 + A_1 \cos t + A_2 \cos 2t + \cdots \\ + B_1 \sin t + B_2 \sin 2t + \cdots, \end{aligned}$$

worin t die wie oben angegebene modifizierte Veränderliche bezeichnet, so ist nach Fourier:

$$(2)\qquad \begin{aligned} A_i &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(t) \cos it\,dt \\ B_i &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(t) \sin it\,dt \\ i &= 1, 2 \ldots \infty. \end{aligned}$$

Für A_0 ist die Hälfte des Formelwertes zu nehmen.

Die Formeln (2) entsprechen der M. d. kl. Qu., indem man in (1) linker Hand zum Beobachtungswerte $F(t)$ eine Verbesserung λ beifügt, der so entstehenden Fehlergleichung das Gewicht dt beilegt und die Normalgleichungen bildet. Als solche ergeben sich die Gleichungen (2), da die Integrale

$$(3)\qquad \int_0^{2\pi} \cos it \cos ht\,dt \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \sin it \sin ht\,dt,$$

sowie

$$\int_0^{2\pi} \cos it \sin ht\,dt$$

*) F. W. Bessel: Über die Bestimmung des Gesetzes einer periodischen Erscheinung. (Astr. Nachr., Bd. 6 (1828), Nr. 136, Sp. 333 u. f.)

für $i \gtrless h$ verschwinden, letzteres auch für $i = h$, während die beiden ersten Integrale für $i = h$ den Wert π ergeben. Dies erkennt man leicht durch Verwandlung der trigonometrischen Produkte in Summen bzw. Differenzen. Wie groß nun $[\lambda^2 dt]$ wird, ist so nicht zu erkennen; nach Fouriers Theorie muß aber λ allgemein verschwinden, abgesehen von den Unstetigkeitsstellen.

Ist nur eine endliche Anzahl von Werten $F(t)$ gegeben, so wendet man wieder die M. d. kl. Qu. an; das Verfahren wird sehr einfach, wenn die Werte äquidistant über die Periode verteilt sind.

Beispiel. Ern. Quetelet gibt in dem Mém. de la Température de l'Air à Bruxelles 1867 an, daß im Mittel aus einer dreißigjährigen Reihe von Beobachtungen die tägliche Amplitude der Temperatur der Luft (d. i. Maximaltemperatur — Minimaltemperatur) war:

(1)	Grade	4,66	5,42	6,77	8,59	9,83	10,09
	im	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni
	Grade	9,71	9,14	8,16	6,55	5,10	4,41
	im	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.,

wobei jede Zahl das arithmetische Mittel der Amplituden aller Tage des betreffenden Monats ist.

Als Periode ist das Jahr zu nehmen; es wird durch die Monate sehr nahe in zwölf gleiche Teile geteilt.

Die Veränderliche ist die Anzahl der Monate oder Jahreszwölftel von Mitte Januar ab; es ist daher ihr Wert in Bruchteilen der Periode für Januar, Februar, März usw. gleich $\frac{0}{12}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, ... oder 0^0, 30^0, 60^0, ... in Gradmaß, allgemein $= 30x$ Grad, wenn x die Anzahl der Monate von Januar ab bezeichnet.

Wir setzen nun:

$$
\begin{aligned}
\text{Amplitude } l = A_0 &+ B_1 \sin 30x + A_1 \cos 30x \\
&+ B_2 \sin 60x + A_2 \cos 60x \\
&+ B_3 \sin 90x + A_3 \cos 90x \\
&+ \cdots \qquad\quad + \cdots \qquad .
\end{aligned} \tag{2}
$$

Es ist demnach mit Rücksicht auf die Werte (1):

$$\begin{aligned}
4{,}66 &= A_0 + A_1 \qquad\qquad + A_2 \qquad\qquad + A_3 \qquad\qquad + \cdots \\
5{,}42 &= A_0 + B_1 \sin 30^0 + B_2 \sin\ 60^0 + B_3 \sin\ 90^0 + \cdots \\
&\qquad + A_1 \cos 30^0 + A_2 \cos\ 60^0 + A_3 \cos\ 90^0 + \cdots \\
6{,}77 &= A_0 + B_1 \sin 60^0 + B_2 \sin 120^0 + B_3 \sin 180^0 + \cdots \\
&\qquad + A_1 \cos 60^0 + A_2 \cos 120^0 + A_3 \cos 180^0 + \cdots
\end{aligned}$$

usw.

Die Anzahl der zu bestimmenden Konstanten $A_0, B_1, A_1, \ldots$ muß gleich 12 genommen werden, wenn alle zwölf Beobachtungswerte genau dargestellt werden sollen. Wir begnügen uns aber, einstweilen nur die ersten drei zu nehmen: A_0, B_1, A_1: wir haben dann die Fehlergleichungen:

$$(3) \qquad \begin{aligned}
\lambda_0 &= -\ \ 4{,}66 + A_0 \qquad \cdot \qquad\quad + 1{,}0000\, A_1 \\
\lambda_1 &= -\ \ 5{,}42 + A_0 + 0{,}5000\ B_1 + 0{,}8660\, A_1 \\
\lambda_2 &= -\ \ 6{,}77 + A_0 + 0{,}8660\ B_1 + 0{,}5000\, A_1 \\
\lambda_3 &= -\ \ 8{,}59 + A_0 + 1{,}0000\ B_1 \qquad \cdot \\
\lambda_4 &= -\ \ 9{,}83 + A_0 + 0{,}8660\ B_1 - 0{,}5000\, A_1 \\
\lambda_5 &= - 10{,}09 + A_0 + 0{,}5000\ B_1 - 0{,}8660\, A_1 \\
\lambda_6 &= -\ \ 9{,}71 + A_0 \qquad \cdot \qquad\quad - 1{,}0000\, A_1 \\
\lambda_7 &= -\ \ 9{,}14 + A_0 - 0{,}5000\ B_1 - 0{,}8660\, A_1 \\
\lambda_8 &= -\ \ 8{,}16 + A_0 - 0{,}8660\ B_1 - 0{,}5000\, A_1 \\
\lambda_9 &= -\ \ 6{,}55 + A_0 - 1{,}0000\ B_1 \qquad \cdot \\
\lambda_{10} &= -\ \ 5{,}10 + A_0 - 0{,}8660\ B_1 + 0{,}5000\, A_1 \\
\lambda_{11} &= -\ \ 4{,}41 + A_0 - 0{,}5000\ B_1 + 0{,}8660\, A_1 .
\end{aligned}$$

Hieraus folgen die Normalgleichungen:

$$(4) \qquad \begin{aligned}
12 A_0 \quad \cdot \quad\ \cdot \quad &= + 88{,}43 \\
\cdot \quad 6 B_1 \quad \cdot \quad &= +\ \ 5{,}9124 \\
\cdot \quad\ \cdot \quad 6 A_1 &= - 16{,}2504,
\end{aligned}$$

wonach

$$(5) \qquad A_0 = + 7{,}36917, \;\; B_1 = + 0{,}9854, \;\; A_1 = - 2{,}7084.$$

Da nun $[ll] = 701{,}9199$ ist, so hat man

$$[\lambda\lambda] = 701{,}9199 - (7{,}36917 \cdot 88{,}43 + 0{,}9854 \cdot 5{,}9124 + 2{,}7084 \cdot 16{,}2504)$$

oder

$$(6)\quad [\lambda\lambda] = 701{,}9199 - (651{,}6554 + 5{,}8261 + 44{,}0127) = 0{,}4257,$$

und daher die mittlere Abweichung

$$(7)\qquad \mu = \sqrt{\frac{0{,}4257}{12-3}} = \pm\, 0^0{,}22.$$

Nach Quetelet sind die Angaben der Amplituden mit einem wahrscheinlichen Fehler behaftet, der für die verschiedenen Monate zwischen 0,18 und 0,36 liegt, was einem mittlern Fehler von 0,27 bis 0,54 entspricht (wenn man das Gaußsche Fehlergesetz als geltend annimmt, was Quetelet vermutlich bei Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus dem mittlern oder durchschnittlichen Fehler getan hat).

Obgleich sonach schon hinreichende Übereinstimmung wäre, so wollen wir uns doch nicht damit begnügen und daher den Fehlergleichungen (3) noch je zwei Glieder beifügen, die den Konstanten B_2 und A_2 entsprechen. Wir erhalten in (3) rechter Hand die Zusatzglieder:

$$(3^*)\qquad \begin{array}{rrl}
\cdot & +\,1{,}0000\,A_2 & \text{zur 1. und 7. Gl.} \\
+\,0{,}8660\,B_2 & +\,0{,}5000\,A_2 & \text{,, 2. ,, 8. ,,} \\
+\,0{,}8660\,B_2 & -\,0{,}5000\,A_2 & \text{,, 3. ,, 9. ,,} \\
\cdot & -\,1{,}0000\,A_2 & \text{,, 4. ,, 10. ,,} \\
-\,0{,}8660\,B_2 & -\,0{,}5000\,A_2 & \text{,, 5. ,, 11. ,,} \\
-\,0{,}8660\,B_2 & +\,0{,}5000\,A_2 & \text{,, 6. ,, 12. ,,.}
\end{array}$$

Hiermit geht (4) über in das folgende System:

$$(4^*)\qquad \begin{array}{ccccccl}
12\,A_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & = & +\,88{,}43 \\
\cdot & 6\,B_1 & \cdot & \cdot & \cdot & = & +\;\;5{,}9124 \\
\cdot & \cdot & 6\,A_1 & \cdot & \cdot & = & -\,16{,}2504 \\
\cdot & \cdot & \cdot & 6\,B_2 & \cdot & = & +\;\;0{,}0520 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 6\,A_2 & = & -\;\;1{,}1700.
\end{array}$$

A_0, B_1, A_1 behalten die Werte (5); ferner wird

$$B_2 = +\,0{,}0087\,,\quad A_2 = -\,0{,}1950\,, \tag{5*}$$

sowie

$$[\lambda\lambda] = 0{,}4257 - (0{,}0004 + 0{,}2282) = 0{,}1971 \tag{6*}$$

und

$$\mu = \sqrt{\frac{0{,}1971}{12-5}} = \pm\,0^0{,}17\,. \tag{7*}$$

Auch mit dieser Übereinstimmung sind wir noch nicht zufrieden und nehmen daher die Glieder in B_3 und A_3 aus der Formel (2) noch hinzu. Es sind dann zuzufügen zu (3) und (3*) die Glieder

$$\begin{array}{rlll} \cdot & +A_3 & \text{für} & \lambda_0,\lambda_4,\lambda_8\,; \\ +B_3 & \cdot & \text{„} & \lambda_1,\lambda_5,\lambda_9\,; \\ \cdot & -A_3 & \text{„} & \lambda_2,\lambda_6,\lambda_{10}; \\ -B_3 & \cdot & \text{„} & \lambda_3,\lambda_7,\lambda_{11}; \end{array} \tag{3**}$$

womit man die zwei neuen Normalgleichungen zu (4*) erhält:

$$\begin{array}{rr} 6\,B_3 \quad \cdot & = -\,0{,}08 \\ \cdot \quad 6\,A_3 & = +\,1{,}07\,. \end{array} \tag{4**}$$

Also wird

$$B_3 = -\,0{,}0133\,,\quad A_3 = +\,0{,}1783\,; \tag{5**}$$

$$[\lambda\lambda] = 0{,}1971 - (0{,}0011 + 0{,}1908) = 0{,}0052\,, \tag{6**}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{0{,}0052}{12-7}} = \pm\,0^0{,}03\,. \tag{7**}$$

Diese Übereinstimmung genügt, und es wäre überflüssig, die andern fünf Konstanten, welche zur vollständigen Darstellung der Beobachtungen notwendig würden, mit hinzuzunehmen. Im ganzen haben wir nun:

$$\begin{aligned} \text{Amplitude} = +\,7{,}369 &+ 0{,}9854 \sin 30x - 2{,}7084 \cos 30x \\ &+ 0{,}0087 \sin 60x - 0{,}1950 \cos 60x \\ &- 0{,}0133 \sin 90x + 0{,}1783 \cos 90x\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Für die interpolatorische Anwendung der Formel (8) ist es bequem, die Glieder mit Sinus und Cosinus desselben Vielfachen von x zu vereinigen.

Man hat aber allgemein

$$B \sin px + A \cos px = U \sin (px + N), \tag{9}$$

indem man linker Hand setzt

$$B = U \cos N, \quad A = U \sin N,$$

also

$$\tan N = \frac{A}{B} \tag{10}$$
$$U = B \sec N = A \csc N = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Der Quadrant, in welchem N liegt, ergibt sich aus den Vorzeichen von A und B in bekannter Weise.

$2U$ heißt die Amplitude und N die Phase der Sinuswelle $U \sin (px + N)$ bei $x = 0$.

Dies auf (8) angewendet, ergibt:

$$\begin{aligned} \text{Amplitude} &= 7{,}369 + 2{,}882 \sin (30x - 70^0{,}0) \\ &+ 0{,}195 \sin (60x - 87^0{,}4) + 0{,}179 \sin (90x + 94^0{,}3). \end{aligned} \tag{11}$$

Will man die Anzahl der Monate nicht von Mitte Januar, sondern von Anfang Januar abzählen, so muß man für x in die Formel einführen $\xi - \frac{1}{2}$, worin ξ in Monaten vom Jahresanfang an gerechnet wird. Man erhält damit:

$$\begin{aligned} \text{Amplitude} &= 7{,}369 + 2{,}882 \sin (30\xi - 85^0{,}0) \\ &+ 0{,}195 \sin (60\xi - 117^0{,}4) + 0{,}179 \sin (90\xi + 49^0{,}3). \end{aligned} \tag{12}$$

Die λ werden bei Anwendung von

3 Konst.:	5 Konst.:	7 Konst.:
+ 0,001	− 0,194	− 0,016
+ 96	+ 7	− 6
+ 98	+ 203	+ 25
− 236	− 41	− 28
− 254	− 163	+ 15
+ 118	+ 11	− 2
+ 367	+ 172	− 6
+ 82	− 7	+ 6
− 290	− 185	− 7
− 166	+ 29	+ 16
+ 62	+ 151	− 27
+ 120	+ 16	+ 29.

Die letzte Vertikalreihe gibt $[\lambda\lambda] = 0{,}0039$, was mit 0,0052 nach (6**) genügend stimmt.

II. Allgemeine Formeln für eine endliche Anzahl von Beobachtungen. Die einfache Form, welche die Normalgleichungen im vorhergehenden Beispiel annahmen, wird immer dadurch erzielt, daß man die Funktionswerte für solche Werte der Veränderlichen beobachtet, welche die Periode in eine — übrigens beliebige — Anzahl gleicher Intervalle teilen. Alsdann werden die nichtquadratischen Summenkoeffizienten null, die quadratischen aber lassen sich nach Summenformeln bequem berechnen. Die erstern haben nämlich eine der Formen:

$$\begin{array}{lll} & C) & [\cos i(q_0 + \nu q) \cos h(q_0 + \nu q)] \\ (4) & D) & [\sin i(q_0 + \nu q) \sin h(q_0 + \nu q)] \\ & E) & [\cos i(q_0 + \nu q) \sin h(q_0 + \nu q)], \end{array}$$

wobei die Summierung über

$$\nu = 0,\ 1,\ 2 \ldots (n-1)$$

zu erstrecken ist und wobei bedeuten:

n die Anzahl der Intervalle,

q den Winkelwert $\frac{2\pi}{n}$ für Bogenmaß

und $\frac{360^\circ}{n}$ für Gradmaß,

q_0 den entsprechend ausgedrückten Anfangswert der Veränderlichen, welcher in der Regel gleich null angenommen wird,

i und h ganze Zahlen mit der Bedingung

$$(4^*) \qquad 0 \leqq i \leqq \frac{n}{2}, \qquad 0 \leqq h \leqq \frac{n}{2}.$$

Die Summen C, D und E verschwinden, wenn $i \gtrless h$ ist. E verschwindet auch für $i = h$. Für diesen letzten Fall aber erhalten C und D die Werte $\frac{n}{2}$, ausgenommen für $i = h = \frac{n}{2}$, wofür

$$(5) \qquad C = \frac{n}{2}(1 + \cos nq_0) \qquad D = \frac{n}{2}(1 - \cos nq_0)$$

wird, also bei $q_0 = 0$:

$$(5^*) \qquad C = n \qquad D = 0;$$

ferner ausgenommen für $i = h = 0$, wo ebenfalls $C = n$ und $D = 0$ ist.

Um diese Beziehungen abzuleiten, beweist man zunächst, daß die Summen

$$[\sin i(q_0 + \nu q)] \quad \text{und} \quad [\cos i(q_0 + \nu q)] \tag{6}$$
$$\nu = 0,\ 1,\ 2 \ldots (n-1);\ i \text{ eine ganze Zahl,}$$

gleich null sind, was aus der Betrachtung eines regulären gewöhnlichen Vielecks von n Ecken und der zugehörigen Sternvielecke folgt.*) Durch Zerlegung der Produkte in C, D und E in Summen ergibt sich dann das Weitere.

Nehmen wir $q_0 = 0$ und schreiben für $F(t)$ den Buchstaben l, für t das Produkt νq, wo

$$q = \frac{2\pi}{n}, \qquad \nu = 0,\ 1,\ 2 \ldots (n-1). \tag{7}$$

so haben wir aus (1) die n Fehlergleichungen

$$l_\nu + \lambda_\nu = A_0 + \sum_{i=1}^{i=m} A_i \cos \nu i q + \sum_{i=1}^{i=m} B_i \sin \nu i q, \tag{8}$$

wobei m höchstens gleich $\frac{n-1}{2}$ bei ungeradem n, gleich $\frac{n}{2}$ bei geradem n zu nehmen ist; im letzten Falle ist $B_{\frac{n}{2}}$ nicht bestimmbar, weil die sin-Faktoren dafür gleich null werden.

Die reduzierten Normalgleichungen werden nunmehr:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{[l_\nu]}{n} \\ A_i &= \frac{2\,[l_\nu \cos \nu i q]}{n} \\ B_i &= \frac{2\,[l_\nu \sin \nu i q]}{n}. \end{aligned} \tag{9}$$

worin die Summierung sich auf $\nu = 0,\ 1,\ 2 \ldots (n-1)$ erstreckt und $i < \frac{n}{2}$ zu nehmen ist.

Daher wird nach den allgemeinen Formeln vermittelnder Beobachtungen:

$$[\lambda\lambda] = [ll] - n\left\{A_0^2 + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{A_i^2 + B_i^2}{2}\right\}. \tag{10}$$

---

*) Zeitschr. f. Vermessungswesen. Bd. VI, 1877, S. 32/33.

Würde man bei ungeradem n bis $m = \frac{n-1}{2}$, bei geradem bis $m = \frac{n}{2}$ gehen, so erhielte man eine genaue Darstellung mit $\lambda = 0$ und $[\lambda\lambda] = 0$. Im letzteren Falle lautet das letzte Glied von (10)

$$(10^*) \qquad - n A^2_{\frac{n}{2}} ,$$

und es fällt in (9) für $A_{\frac{n}{2}}$ rechter Hand der Faktor 2 weg, während, wie schon erwähnt, $B_{\frac{n}{2}}$ nicht bestimmbar ist.

Genau genommen ergeben die Gleichungen (9) gar nicht die A und B selbst, sondern Aggregate aus unendlich vielen Gliedern. Denn denkt man sich in (8) rechter Hand unendliche Reihen geschrieben, so haben z. B. wie leicht ersichtlich die Koeffizienten von A_i, A_{n-i}, A_{n+i}, A_{2n-i} usw. dieselben Werte. Die zweite Gleichung (9) gibt daher eigentlich nicht A_i, sondern

$$(11) \qquad A_i + A_{n-i} + A_{n+i} + \cdots$$

In dem entsprechenden Ausdruck für B sind die Vorzeichen abwechselnd positiv und negativ.*)

Dies hat keine Bedeutung, solange man $F(t)$ nur für Werte $t = \nu q$ wie in (8) benutzt; werden aber auch beliebige Werte t zugelassen, so erkennt man, daß diese gar nicht berechenbar sind, wenn man nicht annimmt, daß die A und B mit Indices über $\frac{n-1}{2}$ bei ungeradem n usw. verschwinden. Im Beispielsfalle (11) könnte es aber sehr wohl sein, daß nicht die A_{n-i}, A_{n+i} usw. verschwinden und A_i übrig bleibt, sondern daß irgend ein anderes A, z. B. A_{n-i}, übrig bleibt und die andern verschwinden usw. Dies kann allenfalls durch allgemeine Erwägungen entschieden werden, etwa mit Rücksicht darauf, daß die Glieder mit höheren Indices rascher veränderlich sind, als solche mit niederen.

III. Vergrößerungsfaktor. Sehr oft sind, wie im vorstehenden Beispiel, die gegebenen Werte l Mittelzahlen der $F(t)$ für gewisse Zeiträume, dort für die zwölf Monate des Jahres.

*) Ad. Schmidt. Über die Verwendung trigonometr. Reihen in der Meteorologie (Progr. des Gymnasiums Ernestinum zu Gotha, 1894).

Die berechneten Konstanten gelten dann auch nur für die interpolatorische Darstellung der Mittelwerte, nicht aber für $F(t)$ selbst.

Betrachtet man nun Gl. (1) und multipliziert mit dt und integriert von $t = t_m - \frac{1}{2} q$ bis $t_m + \frac{1}{2} q$, so folgt nach Division mit q für den Mittelwert l_m der Funktion im bezeichneten Intervall:

$$l_m = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \frac{\sin \frac{iq}{2}}{\frac{iq}{2}} \cos i t_m + \sum_{i=1}^{\infty} B_i \frac{\sin \frac{iq}{2}}{\frac{iq}{2}} \sin i t_m. \tag{12}$$

Die Koeffizienten der Reihe (12) sind also kleiner als diejenigen der Reihe (1). Dasselbe gilt für die nach (9) berechneten.

Setzt man $q = \frac{2\pi}{n}$, so folgt als Vergrößerungsfaktor der aus (9) berechneten Koeffizienten A_i und B_i, $i > 0$, der Wert

$$\frac{i\pi}{n} : \sin \frac{i\pi}{n}. \tag{13}$$

Diese Formel gilt, wenn die Mittelwerte l_m aus einer stetigen Folge von Werten $F(t)$ gefunden sind, z. B. aus graphischen Aufzeichnungen mittelst des Planimeters.

Im Beispielsfalle jedoch hat die Annahme einer stetigen Folge der $F(t)$ keinen Sinn, da es jeden Tag nur eine Differenz „Max. — Min." gibt. Hier muß man also für jeden Tageswert sich eine einzige Gleichung (1) angesetzt denken, und es fragt sich, wie deren Koeffizienten A und B mit den aus den Mittelwerten abgeleiteten zusammenhängen. Fallen nun p Funktionswerte aufs Intervall q, so hat man die Gleichung (1) für p Fälle anzusetzen und das Mittel zu bilden, wobei t von einem Anfangswert α aus im Intervall $q:p$ fortschreitet. Nun ist (vergl. a. a. O. die Ableitung von (6)):

$$\begin{aligned} &\cos i\alpha + \cos\left(i\alpha + \frac{iq}{p}\right) + \cos\left(i\alpha + \frac{2iq}{p}\right) + \cdots + \cos\left(i\alpha + \frac{i(p-1)q}{p}\right) \\ &\qquad = \cos\left(i\alpha + \frac{i(p-1)q}{2p}\right) \sin\frac{iq}{2} : \sin\frac{iq}{2p} \end{aligned} \tag{14}$$

und entsprechend für die Sinus, wobei rechter Hand an Stelle des Cosinus ein Sinus tritt. Diese Cosinus und Sinus sind aber $\cos it_m$ und $\sin it_m$. Die früheren Koeffizienten A_i und B_i gehen somit jetzt durch die Mittelbildung über in

$$(15)\qquad A_i \text{ bzw. } B_i \text{ mal } \sin\frac{iq}{2} : p \sin\frac{iq}{2p}.$$

Um nun die Koeffizienten der auf die diskreten Beobachtungswerte angewandten Reihe (1) zu erhalten, sind daher die aus den Mittelwerten abgeleiteten A_i und B_i zu multiplizieren mit, $q = \frac{2\pi}{n}$ gesetzt:

$$(16)\qquad p \sin\frac{i\pi}{pn} : \sin\frac{i\pi}{n}.$$

Für das Beispiel ist $n = 12$, $p = 30$ (den Monat zu 30 Tagen gerechnet). Die Faktoren (16) sind daher

für A_1 und B_1 gleich $30 \sin 0^0{,}5 : \sin 15^0 = 1{,}0115$,
„ A_2 „ B_2 „ $30 \sin 1^0 : \sin 30^0 = 1{,}0471$,
„ A_3 „ B_3 „ $30 \sin 1^0{,}5 : \sin 45^0 = 1{,}1106$.

Damit geht (12), S. 408, über in nachstehende Formel für die tägliche Amplitude:

$$(12^*)\qquad \begin{aligned} \text{Amplitude} = &+ 7{,}369 + 2{,}915 \sin(30\xi - 85^0{,}0) \\ &+ 0{,}204 \sin(60\xi - 117^0{,}4) + 0{,}199 \sin(90\xi + 49^0{,}3). \end{aligned}$$

IV. Schematische Berechnung. Von den Einzelheiten in bezug auf die praktische Berechnung möge hier nur noch der schematischen Anordnung gedacht werden, während wir für weiteres, u. a. die Korrektion für ungleiche Länge der Monate (im Beispiel) und die Benutzung von Apparaten, auf die Enzyklopädie der math. Wiss. Bd. II, 1904, S. 642 u. f. verweisen.

Die Berechnung vereinfacht sich sehr, wenn die Anzahl der Intervalle n durch 4 teilbar ist.*) Wir setzen also

*) Wir folgen hier im wesentlichen: C. Runge. Über die Zerlegung empirisch gegebener periodischer Funktionen in Sinuswellen. (Zeitschr. f. Math. u. Physik. 1902, Bd. 48., S. 443 u. f., sowie 1905, Bd. 52., S. 117 u. f.)

Das Verfahren ist ähnlich dem von Archibald Smith, das Börgen in seiner harmonischen Analyse der Gezeitenbeobachtungen (Annalen der Hydrographie 1884, Bd. 12, S. 506 u. 507) auseinandersetzt. Siehe dies auch kürzer bei C. Kassner, Meteorologische Zeitschr. 1901, Bd. 18, S. 81 u. f.

(17) $$n = 4r.$$

Für denselben Wert von i nehmen dann in der Gleichung (8) sowohl $\cos \nu i q$ wie $\sin \nu i q$ viermal denselben Absolutwert an, wenn ν von 0 bis $4r - 1$ geht. Gruppiert man die l wie folgt:

(18) $$\begin{array}{cccccc} l_0 & l_1 & l_2 & \ldots l_{2r-1} & l_{2r} \\ . & l_{4r-1} & l_{4r-2} & \ldots l_{2r+1}, & \end{array}$$

so haben die Cosinus gleiche Werte, die Sinus entgegengesetzt gleiche Werte für die übereinanderstehenden l. Demgemäß bildet man durch Addition:

(19) $$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \ldots\ldots a_{2r-1} \quad a_{2r}$$

und durch Subtraktion der untern von der obern Reihe:

(19*) $$b_1 \quad b_2 \ldots\ldots b_{2r-1}.$$

An Stelle von (9) tritt nun

(20) $$2r\, A_i = [a_\nu \cos \nu i q], \qquad 2r\, B_i = [b_\nu \sin \nu i q];$$
$$i = 1 \ldots (2r-1); \quad \nu = 0, 1, 2 \ldots 2r,$$
$$4r\, A_0 = [a_\nu], \qquad 4r\, A_{2r} = [a_\nu \cos 2r\nu q].$$

Da $q = 2\pi : n = \pi : 2r$, so ist $\nu i q$ bei $\nu = 2r$ gleich $i\pi$; ferner ist:

$$\cos \nu i q = \mp \cos (i\pi - \nu i q) \quad \begin{array}{l} i \text{ ungerade} \\ i \text{ gerade} \end{array},$$

$$\sin \nu i q = \pm \sin (i\pi - \nu i q) \quad \begin{array}{l} i \text{ ungerade} \\ i \text{ gerade} \end{array}.$$

Bildet man nun aus

(21) $$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots a_{r-1} & a_r \\ a_{2r} & a_{2r-1} & a_{2r-2} & \ldots a_{r+1} & \end{array}$$

durch Addition:

(22) $$\mathfrak{a}_0 \quad \mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{a}_2 \quad \ldots \mathfrak{a}_{r-1} \quad \mathfrak{a}_r$$

und durch Subtraktion:

(22*) $$\mathfrak{a}_0' \quad \mathfrak{a}_1' \quad \mathfrak{a}_2' \quad \ldots \mathfrak{a}_{r-1}',$$

so folgt bei ungeradem i:

(23) $$2r\, A_i = [\mathfrak{a}_\nu' \cos \nu i q], \qquad \nu = 0, 1, 2 \ldots (r-1),$$

bei geradem i:

(23*) $$2r\, A_i = [\mathfrak{a}_\nu \cos \nu i q], \qquad \nu = 0, 1, 2 \ldots r.$$

Ferner ist

(24) $$4rA_0 = [\mathfrak{a}_\nu], \quad \nu = 0, 1, 2 \ldots r,$$

(24*) $$4rA_{2r} = \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 - \cdots \pm \mathfrak{a}_r .$$

Bildet man ferner aus

(25) $$\begin{array}{lllll} b_1 & b_2 & b_3 \ldots\ldots & b_{r-1} & b_r \\ b_{2r-1} & b_{2r-2} & b_{2r-3} \ldots & b_{r+1} & \end{array}$$

durch Addition:

(26) $$\mathfrak{b}_1 \quad \mathfrak{b}_2 \quad \mathfrak{b}_3 \ldots\ldots \mathfrak{b}_{r-1} \quad \mathfrak{b}_r ,$$

und durch Subtraktion:

(26*) $$\mathfrak{b}_1' \quad \mathfrak{b}_2' \quad \mathfrak{b}_3' \ldots\ldots \mathfrak{b}_{r-1}' ,$$

so wird bei ungeradem i:

(27) $$2rB_i = [\mathfrak{b}_\nu \sin \nu i q], \quad \nu = 1, 2, \ldots (r-1), r,$$

und bei geradem i:

(27*) $$2rB_i = [\mathfrak{b}_\nu' \sin \nu i q], \quad \nu = 1, 2, \ldots (r-1).$$

Für das Beispiel S. 405 hat man als Vorbereitung:

ν	l (18)		a (19)	b (19*)	$\mathfrak{a}$ (22)	$\mathfrak{a}'$ (22*)	$\mathfrak{b}$ (26)	$\mathfrak{b}'$ (26*)
0	4,66	*	4,66	*	14,37	— 5,05	*	*
1	5,42	4,41	9,83	1,01	29,06	— 9,40	1,96	0,06
2	6,77	5,10	11,87	1,67	29,86	— 6,12	3,34	0,00
3	8,59	6,55	15,14	2,04	15,14	*	2,04	*
4	9,83	8,16	17,99	1,67	$\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_0' - \mathfrak{a}_2'$	$\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{b}_3$	
5	10,09	9,14	19,23	0,95	$= 44,23$	$= 1,07$	$= -0,08$	
					$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_3$	Diff. = 0,03.		
6	9,71	*	9,71	*	$= 44,20$			

Nun sind die Formeln (23), (23*) usw. zur Berechnung der A und B anzuwenden. Dabei ist zu setzen $q = \pi : 2r$, d. i. in Gradmaß $90^0 : r$, also mit $r = 3$ wird $q = 30^0$. Die Cosinusse und Sinusse der Winkel $\nu i q$ lassen sich alle zurückführen auf:

$$\cos 0^0 = 1, \quad \cos 30^0 = 0{,}866025, \quad \cos 60^0 = 0{,}5, \quad \cos 90^0 = 0.$$

Die Gl. (23) geben nun $6A_1$ und $6A_5$ und die Gl. (23*) $6A_2$ und $6A_4$:

ν	cos	$\mathfrak{a}'$ cos
0	1	$-$ 5,05
1	$\pm$ 0,866025	$\mp$ 8,14064
2	0,5	$-$ 3,06

$$6A_1 = -16{,}25064$$
$$6A_5 = +0{,}03064$$
$$A_1 = -2{,}70844$$
$$A_5 = +0{,}0051;$$

ν	cos	$\mathfrak{a}$ cos
0	1	14,37
1	$\pm$ 0,5	$\pm$ 14,53
2	$-$ 0,5	$-$ 14,93
3	$\mp$ 1	$\mp$ 15,14

$$6A_2 = -1{,}17$$
$$6A_4 = +0{,}05$$
$$A_2 = -0{,}1950$$
$$A_4 = +0{,}0083.$$

Nach (23) wird ferner:

$$6A_3 = \mathfrak{a}_0' - \mathfrak{a}'_2 = 1{,}07;$$

nach (24) und (24*) folgt:

$$12A_0 = 88{,}43 \quad \text{und} \quad 12A_6 = 0{,}03:$$

vergl. umstehende Zusammenstellung. Also ist:

$$A_3 = 0{,}1783:$$
$$A_0 = 7{,}369167:$$
$$A_6 = 0{,}0025.$$

Die Gl. (27) geben für $6B_1$ u. $6B_5$:

ν	sin	$\mathfrak{b}$ sin
1	0,5	0,98
2	$\pm$ 0,866025	$\pm$ 2,89252
3	1	2,04

$$6B_1 = 5{,}91252$$
$$6B_5 = 0{,}12748$$
$$B_1 = 0{,}9854$$
$$B_5 = 0{,}0212;$$

Die Gl. (27*) für $6B_2$ und $6B_4$:

ν	sin	$\mathfrak{b}'$ sin
1	0,8660	0,052
2	$\pm$ 0,8660	0,000

$$6B_2 = 0{,}052$$
$$6B_4 = 0{,}052$$
$$B_2 = 0{,}0087$$
$$B_4 = 0{,}0087.$$

Endlich ist

$$6B_3 = \mathfrak{b}_1 - \mathfrak{b}_3 = -0{,}08; \quad B_3 = -0{,}0133.$$

Berechnet man $[\lambda\lambda]$ aus $[ll]$ zur Kontrolle, so soll sich null ergeben, da bei Bestimmung von zwölf Konstanten aus zwölf Gleichungen die λ null werden müssen. Um eine hinreichende

Genauigkeit zu ermöglichen, sind die A und B mit einer sonst überflüssigen Genauigkeit berechnet. Es ist

$$[\lambda\lambda] = \left.\begin{array}{rrrr} 701{,}9199 - 651{,}6554 & - 44{,}0139 & - & 5{,}8263 \\ & - \phantom{44{,}}2282 & - & 04 \\ & - \phantom{44{,}}1908 & - & 11 \\ & - \phantom{44{,}00}04 & - & 05 \\ & - \phantom{44{,}00}01 & - & 27 \\ & - \phantom{44{,}00}01 & & \end{array}\right\} = 0{,}0000.$$

Beispiel. Wir geben hier noch ein Beispiel für eine Interpolation mit Gliedern verschiedener Art. Verfasser erhielt in den Jahren 1869 und 1870 auf der Hamburger Sternwarte eine größere Anzahl Angaben für die Neigung der rd. 90 Zentimeter langen horizontalen Achse des Passageninstruments im Meridian. Es fand sich, daß die Neigung mit wechselnder Jahreszeit und Temperatur Änderungen unterlag. Um dieselben schärfer als durch bloße Anschauung zu ermitteln, wurden aus den an verschiedenen Tagen beobachteten Neigungen eines jeden halben Monats über ein volles Jahr hinweg Mittelwerte gebildet und dieselben durch eine Interpolationsformel dargestellt.

	Mittelwerte:				Neigung (Erhebung des Westendes) in Zeitsekunden	Temperatur Cels. Gr.
(1)	1869.	Febr.	2.	Hälfte	+ 0,031	5,2
		März	1.	„	+ 0,098	2,5
		„	2.	„	+ 0,080	4,7
		April	1.	„	— 0,009	9,5
		„	2.	„	— 0,065	12,0
		Mai	1.	„	— 0,003	9,6
		„	2.	„	— 0,048	11,8
		Juni	1.	„	— 0,066	12,5
		„	2.	„	— 0,098	12,4
		Juli	1.	„	— 0,153	15,1
		„	2.	„	— 0,194	15,6
		Aug.	1.	„	— 0,191	14,2
		„	2.	„	— 0,218	14,6

	Mittelwerte:				Neigung (Erhebung des Westendes) in Zeitsekunden	Temperatur Cels. Gr.
(1)	1869.	Sept.	1.	Hälfte	− 0,204	13,3
		„	2.	„	− 0,162	12,3
		Okt.	1.	„	− 0,147	12,5
		„	2.	„	− 0,024	5,9
		Nov.	1	„	+ 0,042	3,9
		„	2.	„	+ 0,040	4,0
		Dez.	1.	„	+ 0,093	1,9
		„	2.	„	+ 0,046	4,8
	1870.	Jan.	1.	„	+ 0,070	5,3
		„	2.	„	+ 0,199	0,5
		Febr.	1.	„	+ 0,277	− 0,6.

Wir nehmen einstweilen an, daß die Nivellierungsergebnisse gerade für die Mitte jedes halben Monats strenge Geltung hätten, und setzen ferner voraus, daß diese Mitten das ganze Jahr in 24 gleiche Teile teilten, welches letztere auch sehr nahe der Fall ist. Die Temperaturen sind die Quecksilbertemperaturen eines Fortinschen Barometers, welches an einer Wand des Zimmers unweit vom Passageninstrument hing. Die Formel, welche wir den Messungsergebnissen anpassen wollen, sei

$$(2) \qquad \text{Neigung} = x_1 + x_2 Z + x_3 T + x_4 \sin \frac{360 Z}{24} + x_5 \cos \frac{360 Z}{24},$$

worin

T die Temperatur, gezählt vom Mittel aller 24 Temperaturangaben ($= 8^0{,}48$) und

Z die von Mitte August 1869, also der Mitte des Beobachtungsjahres, ab gezählten halben Monate, ferner $360 Z$ Grade,

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 aber zu bestimmende Konstanten bedeuten.

x_1 insbesondere ist der konstante Teil der Neigung und gilt (abgesehen von x_5) für Mitte August 1869 bei $T = 0^0$,

x_2 ist die der Zeit proportionale Neigungsänderung in einem halben Monate,

x_4 und x_5 sind Konstanten einer sich über ein Jahr erstreckenden Periode in den Neigungsänderungen.

Für die Mitten der halben Monate wird der Reihe nach:

Z	$\frac{360\,Z}{24}$	Z	$\frac{360\,Z}{24}$
— 11,5	— 172°,5	— 3,5	— 52°,5
— 10,5	— 157,5	— 2,5	— 37,5
— 9,5	— 142,5	— 1,5	— 22,5
— 8,5	— 127,5	— 0,5	— 7,5
— 7,5	— 112,5	+ 0,5	+ 7,5
— 6,5	— 97,5	.	.
— 5,5	— 82,5	+ 11,5	+ 172,5;
— 4,5	— 67,5		

damit erhalten wir folgende 24 Fehlergleichungen:

(3)

λ_i	$-l$	x_1 mal a	x_2 mal b	x_3 mal c	x_4 mal d	x_5 mal e	s
1	— 31	+ 1	— 11,5	— 3,28	— 0,1305	— 0,9914	—14,9019
2	— 98	+ 1	— 10,5	— 5,98	— 0,3827	— 0,9239	—16,7866
3	— 80	+ 1	— 9,5	— 3,78	— 0,6088	— 0,7934	—13,6822
4	+ 9	+ 1	— 8,5	+ 1,02	— 0,7934	— 0,6088	— 7,8822
5	+ 65	+ 1	— 7,5	+ 3,52	— 0,9239	— 0,3827	— 4,2866
6	+ 3	+ 1	— 6,5	+ 1,12	— 0,9914	— 0,1305	— 5,5019
7	+ 48	+ 1	— 5,5	+ 3,32	— 0,9914	+ 0,1305	— 2,0409
8	+ 66	+ 1	— 4,5	+ 4,02	— 0,9239	+ 0,3827	— 0,0212
9	+ 98	+ 1	— 3,5	+ 3,92	— 0,7934	+ 0,6088	+ 1,2354
10	+ 153	+ 1	— 2,5	+ 6,62	— 0,6088	+ 0,7934	+ 5,3046
11	+ 194	+ 1	— 1,5	+ 7,12	— 0,3827	+ 0,9239	+ 7,1612
12	+ 191	+ 1	— 0,5	+ 5,72	— 0,1305	+ 0,9914	+ 7,0809
13	+ 218	+ 1	+ 0,5	+ 6,12	+ 0,1305	+ 0,9914	+ 8,7419
14	+ 204	+ 1	+ 1,5	+ 4,82	+ 0,3827	+ 0,9239	+ 8,6266
15	+ 162	+ 1	+ 2,5	+ 3,82	+ 0,6088	+ 0,7934	+ 8,7222
16	+ 147	+ 1	+ 3,5	+ 4,02	+ 0,7934	+ 0,6088	+ 9,9222
17	+ 24	+ 1	+ 4,5	— 2,58	+ 0,9239	+ 0,3827	+ 4,2266
18	— 42	+ 1	+ 5,5	— 4,58	+ 0,9914	+ 0,1305	+ 3,0419
19	— 40	+ 1	+ 6,5	— 4,48	+ 0,9914	— 0,1305	+ 3,8809
20	— 93	+ 1	+ 7,5	— 6,58	+ 0,9239	— 0,3827	+ 2,4612
21	— 46	+ 1	+ 8,5	— 3,68	+ 0,7934	— 0,6088	+ 6,0046
22	— 70	+ 1	+ 9,5	— 3,18	+ 0,6088	— 0,7934	+ 7,1364
23	— 199	+ 1	+ 10,5	— 7,98	+ 0,3827	— 0,9239	+ 2,9788
24	— 277	+ 1	+ 11,5	— 9,08	+ 0,1305	— 0,9914	+ 2,5591

Hierin steht der dreifache Vertikalstrich an Stelle der Gleichheitszeichen; l bedeutet die tausendfachen Beobachtungswerte, und die s sind die Koeffizientensummen der Gleichungen.*)

Man erhält nun folgende Normalgleichungen, die sich dadurch, daß sowohl das Mittel der Temperaturen als auch die Mitte des Jahres zu Ausgangspunkten genommen sind, sehr einfach gestalten, und worin $x_1, \ldots x_5$ die tausendfachen Werte der gleichnamigen Unbekannten bezeichnen:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Konst.
	+ 24,00	*	— 0,02	*	*	— 606,0
	*	+ 1150,00	— 317,15	+ 91,94	*	+ 6188,0
(4)	— 0,02	— 317,15	+ 597,50	— 36,15	+ 70,18	— 14470,8
	*	+ 91,94	— 36,15	+ 12,00	*	+ 373,24
	*	*	+ 70,18	*	+ 12,00	— 1944,33
	+ 23,98	+ 924,80	+ 314,35	+ 67,79	+ 82,18	— 10459,9

Die Summengleichung stimmt hierin hinreichend mit der Summe der fünf Normalgleichungen.

Bei der Bildung der letzteren war die Kenntnis der Formeln auf S. 409 von Nutzen; es war in denselben $n = 24$, $i = h = 1$, $q_0 = -172^0.5$, $q = +15^0$ einzuführen; demnach wird

$$[ad] = [ae] = 0 \text{ nach (6). S. 410.}$$

$$[dd] = [ee] = 12 \text{ nach } C \text{ und } D,$$

$$[de] = 0 \text{ nach } E.^{**})$$

Zur Auflösung nach dem Gaußschen Verfahren setzen wir, um den Umstand des Fehlens einzelner Koeffizienten auszunutzen, das System der Normalgleichungen besser wie folgt:

---

*) Es wäre etwas bequemer gewesen, wenn man die Koeffizientensummen s unter der Bedingung gebildet hätte, daß die Koeffizienten von x_2 und x_3 durch 10 dividiert angenommen worden wären; man würde dadurch für s eine Stelle weniger erhalten haben.

**) Für die Summen $[bd]$, $[be]$ lassen sich ebenfalls allgemeine Formeln aufstellen, wonach wird

$$[bd] = 12 \csc 7^0{,}5 = +91{,}94;$$
$$[be] = 0.$$

(5)

x_1	x_5	x_4	x_2	x_3	Konst.
+ 24,00	*	*	*	— 0,02	— 606,0
*	+ 12,00	*	*	+ 70,18	— 1944,33
*	*	+ 12,00	+ 91,94	— 36,15	+ 373,24
*	*	+ 91,94	+ 1150,00	— 317,15	+ 6188,0
— 0,02	+ 70,18	— 36,15	— 317,15	+ 597,50	— 14470,8
+ 23,98	+ 82,18	+ 67,79	+ 924,80	+ 314,35	— 10459,9

Hieraus bildet man nach und nach die Doppeltabelle (ohne Rücksicht auf Gewichtsberechnung, welche hier ziemlich wertlos ist):

(6)

x_1	x_5	x_4	x_2	x_3	Konst.
+ 24,00	*	*	*	— 0,02	— 606,0
1				— 0,0008	— 25,250
	+ 12,00	*	*	+ 70,18	— 1944,33
	1			+ 5,8480	— 162,027
		+ 12,00	+ 91,94	— 36,15	+ 373,24
		1	+ 7,662	— 3,013	+ 31,105
			+ 445,61	— 40,18	+ 3328,5
			1	— 0.09017	+ 7,470
				+ 74,59	— 1676,4
				1	— 22,471

Die tausendfachen Werte der Unbekannten sind:

(7)
$$x_1 = -25,268 \qquad x_2 = +5,4431 \qquad x_3 = -22,474$$
$$x_4 = -78,303 \qquad x_5 = -30,599\,,$$

die die Normalgleichungen bis auf wenige Einheiten der ersten Dezimalstelle erfüllen. Aus (6) folgt noch mit Hilfe von

(8)
$$[ll] = 407998$$

die Summe

(9)
$$[\lambda\lambda] = \quad 3516$$

(λ und l tausendfach); dagegen folgt aus nachstehenden Werten der λ:

$$(10)\qquad \begin{array}{lll}
\lambda_1 = - 4{,}7 & \lambda_9 = + 9{,}0 & \lambda_{17} = - 2{,}8 \\
\lambda_2 = + 12{,}2 & \lambda_{10} = - 11{,}3 & \lambda_{18} = - 16{,}1 \\
\lambda_3 = 0{,}0 & \lambda_{11} = + 2{,}2 & \lambda_{19} = - 2{,}8 \\
\lambda_4 = - 4{,}8 & \lambda_{12} = + 14{,}3 & \lambda_{20} = + 9{,}8 \\
\lambda_5 = + 3{,}8 & \lambda_{13} = + 17{,}4 & \lambda_{21} = + 14{,}2 \\
\lambda_6 = - 1{,}3 & \lambda_{14} = + 20{,}3 & \lambda_{22} = + 4{,}5 \\
\lambda_7 = - 8{,}2 & \lambda_{15} = - 7{,}6 & \lambda_{23} = + 10{,}5 \\
\lambda_8 = - 13{,}5 & \lambda_{16} = - 30{,}2 & \lambda_{24} = - 15{,}5
\end{array}$$

$$(11)\qquad [\lambda\lambda] = 3506,$$

was eine genügende Übereinstimmung gewährt.

Die λ zeigen annähernd den Charakter zufälliger Fehler. Insbesondere ist für die Vorzeichen $f - \omega = 3 \pm 4{,}8$, ferner aus $A = [\lambda\lambda] = 3506$ und aus den 24 Differenzen aufeinanderfolgender λ $B : 2 = 2696$, mithin $A - B : 2 = 810 \pm 716$. Auch die Verteilung der λ genügt sehr nahe dem Fehlergesetze III. Man hat nämlich (wobei zu beachten, daß $[\lambda]$ notwendig null ist) aus (10) für die 1000-fachen Werte der λ:

Anzahl der positiven Fehler = Anzahl der negativen Fehler,

Quadratsumme der posit. F. = 1597, der negat. F. = 1909;

$$1000\,\mu_\lambda = \pm\sqrt{\frac{3506}{24}} = \pm\, 12{,}1\,.$$

$$\begin{array}{rllll|c|r}
15 & \text{der} & \lambda & \text{sind absolut genommen} & < \mu_\lambda & \text{es sollte sein} & 16 \\
9 & \text{„} & \lambda & \text{„ \quad „ \quad „} & > \mu_\lambda & \text{für das} & 8 \\
1 & \text{„} & \lambda & \text{ist \quad „ \quad „} & > 2\mu_\lambda & \text{Fehlergesetz} & 1 \\
11 & \text{„} & \lambda & \text{sind \quad „ \quad „} & \leqq 0{,}674\,\mu_\lambda & \text{III:} & 12.
\end{array}$$

Hiernach kann man wohl sagen, daß die Interpolationsformel die beobachteten Neigungen gut darstellt, bis auf Reste von wesentlich zufälliger Natur.

Der mittlere Fehler einer Gleichung wird demgemäß bei fünf Unbekannten und 24 Gleichungen nach der gewöhnlichen Formel für zufällige Fehler:

$$(12)\qquad \mu = \pm\sqrt{\frac{0{,}003506}{24-5}} = \pm\sqrt{0{,}0001845} = \pm\, 0^s{,}0136.$$

Der mittlere Fehler $\pm 0^s{,}0136$ entsteht durch Beobachtungsfehler der Neigung, durch Beobachtungsfehler der Temperatur T und durch kleine zufällige Schwankungen der Achse infolge der Witterung usw. $0^0{,}6$ Fehler in T genügen allein schon zur Erklärung von μ.

Eine genauere Untersuchung der Neigungen müßte mit Benutzung der wahren Pfeilertemperatur und des Feuchtigkeitsgehaltes erfolgen. Man müßte ferner bei der Bildung der Mittel der Neigungen für jeden halben Monat mit Hilfe genäherter Werte der Konstanten, wenn das Mittel der Zeiten nicht mit der Mitte des halben Monats zusammenfällt, eine Reduktion anbringen, die einige Tausendstel-Zeitsekunden betragen kann. Endlich müßten alle zu verschiedenen Tageszeiten beobachteten Neigungen mittels der zu bestimmenden täglichen Variation der Neigung auf eine bestimmte Tagesstunde bzw. auf die maximale oder minimale Neigung reduziert werden.

Nach Substitution der Werte (7) in die Formel (2) geht dieselbe in folgende Gestalt über:

$$\text{(13)}\qquad \begin{aligned} \text{Neigung} = &- 0^s{,}02527 + 0{,}0054431\,Z \\ &- 0{,}022474\,(T - 8^0{,}48) \\ &- 0{,}078303 \sin 15Z - 0{,}030599 \cos 15Z; \end{aligned}$$

Z = Anzahl der halben Monate von Mitte August 1869 ab, $15\,Z$ in Graden.

Wir können diese Formel noch in eine bequemere Gestalt bringen. Die beiden letzten Glieder lassen sich nach (9) und (10), S. 408, zusammenziehen in

$$\text{(14)}\qquad - 0{,}084069 \sin (15\,Z + 21^0\,20'{,}7).$$

Vereinigt man ferner die Glieder

$$- 0{,}02527 + 0{,}022474 \cdot 8{,}48 \text{ zu } 0{,}16531,$$

so folgt:

$$\text{(15)}\qquad \begin{aligned} \text{Neigung} = &+ 0^s{,}16531 + 0{,}0054431\,Z - 0{,}022474\,T \\ &- 0{,}084069 \sin (15\,Z + 21^0\,20'7). \end{aligned}$$

Bezeichnet ξ die Anzahl der Monate vom Jahresanfange ab, so ist

$$Z = 2\,\xi - 15,$$

und dies in (15) eingeführt, gibt mit $30\,\xi$ in Graden die Endformel:

$$\text{(16)}\qquad \begin{aligned} \text{Neigung} = &\ 0^s{,}0837 + 0{,}01089\,\xi - 0{,}02247\,T \\ &+ 0{,}0841 \sin (30\,\xi - 23^0\,39'). \end{aligned}$$

Es ist beispielsweise für die Mitte der ersten Hälfte Sept. $\xi = 8{,}25$, $T = 13^0{,}3$, mithin die berechnete Neigung $-0^s{,}1836$. Die beobachtete Neigung ist $-0^s{,}204$, daher λ gleich $+0^s{,}0204$.

Die berechnete Formel hat zunächst jedenfalls nur den Wert einer Interpolationsformel; indessen kann man dem Teile derselben, welcher den Temperatureinfluß berücksichtigt, eine allgemeinere Bedeutung beilegen und annehmen, daß der Temperaturkoeffizient 0,02247 auch für frühere und spätere nicht allzu entfernte Zeiträume Geltung haben werde. Die andern Glieder der Formel haben aber nur interpolatorischen Wert, da sie hauptsächlich von dem Witterungsverlaufe abhängen. Man bemerkt dies auch sofort, indem man die Formel weiter anwendet auf Neigungen nach Febr. 1870. Ende dieses Monats wurde die Achsenneigung durch die Lagerstellschrauben geändert, womit eine Änderung der Konstanten 0,0837 der Formel (16) verbunden ist. Setzen wir ihren geänderten Wert gleich x_1', so muß sein, falls die Formel im übrigen gilt,

$$x_1' = \text{Beob. Neigung} - 0{,}01089\,\xi + 0{,}02247\,T$$
$$- 0{,}0841 \sin(30\,\xi - 23^0\,39'),$$

worin ξ nunmehr die Anzahl der Monate von 1870,0 ab sein soll. Es fand sich aber u. a.:

Zeit 1870	Beob. Neigung	T	ξ	x_1'
April 2,4	+ 0,030	5,1	3,08	+ 0,033
„ 3,4	+ 0,003	5,7	3,11	+ 0,018
„ 6,5	— 0,018	7,4	3,22	+ 0,033
Juni 3,4	— 0,216	11,3	5,11	— 0,083
Juli 1,2	— 0,297	13,0	6,04	— 0,103
„ 6,4	— 0,280	13,3	6,21	— 0,074
„ 14,5	— 0,369	15,9	6,47	— 0,096
„ 16,5	— 0,397	17,4	6,53	— 0,088
„ 24,5	— 0,404	15,9	6,79	— 0,101
„ 27,5	— 0,437	17,4	6,88	— 0,117
Aug. 12,4	— 0,448	16,9	7,40	— 0,122
„ 18,2	— 0,424	14,3	7,58	— 0,151.

Hieraus sieht man, daß die Formel mehr und mehr unrichtig wird und nur noch in der Weise verwendet werden darf, daß man sie zur Interpolation benutzt zwischen zwei an nicht zu entfernten Tagen beobachteten Neigungen, aus welchen letzteren der mittlere

Wert der Konstanten x_1' jedesmal abzuleiten ist. Beispielsweise würden wir für Juli 1,2 bis 16,5 anwenden als Konstante

$$-\frac{0{,}103 + 0{,}074 + 0{,}096 + 0{,}088}{4},$$

womit die Formel wird:

$$\text{Neigung} = -0^{s}{,}090 + 0{,}01089\,\xi - 0{,}02247\ T.$$
$$+ 0{,}0841 \sin(30\,\xi - 23^{0}\,39').$$

V. Berücksichtigung unperiodischer Glieder bei der Ableitung der Koeffizienten der Besselschen Formel. Dies kann zunächst dadurch geschehen, daß man die Werte $l = F(t)$ in (1) und (2), S. 403, bzw. in (9), S. 410, um den unperiodischen Teil vermindert, der als bekannt vorausgesetzt wird.

Man kann sich dies aber auch nachträglich ausgeführt denken. Ist der unperiodische Teil $l' = F(t)'$, so muß man in (2) sich für $F(t)$ gesetzt denken $F(t) - F(t)'$, in (9) für l_ν den Unterschied $l_\nu - l_\nu'$.

Bildet man aber in (2) die Integrale für $F(t)$ und $F(t)'$ einzeln, so ergeben sie statt A_i und B_i bzw. $(A_i + A_i') - A_i'$ und $(B_i + B_i') - B_i'$. Die A' und B' entsprechen einer Fourierschen Entwicklung des unperiodischen Teils in dem Intervall der Variablen t, welches bei (1) in Betracht gezogen ist. Die Korrektion besteht also darin, daß man diese Entwicklung ausführt und dann die Koeffizienten mit demselben Index voneinander abzieht.

Dieses Verfahren ist allerdings nicht mehr ganz streng, wenn nur mit einer endlichen Anzahl n von Werten gerechnet ist, wie in (9). Dann müssen die l wirklich einzeln verbessert werden, oder man muß besondere Formeln entwickeln.

Wir wollen dies für den Fall tun, daß der unperiodische Teil einfach eine lineare Funktion von t ist (also eine Art säkulares Glied). Die beiden Fälle, daß unendlich viele Funktionswerte oder nur n benutzt werden, betrachten wir einzeln.

Es sei also für (1), S. 403, zu setzen:

$$(28) \qquad F(t) = A_0 + At + \Sigma A_i \cos it + \Sigma B_i \sin it.$$

A sei gegeben. Für $F(t)$ schreiben wir kurz l. Dann folgt, wenn $l_n - l_0$ den Zuwachs von $F(t)$ bezeichnet für den Übergang von t in $t + 2\pi$:

(29)
$$A = \frac{l_n - l_0}{2\pi},$$

(30)
$$A_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} l \cos it\,dt - \frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi} t \cos it\,dt,$$
$$B_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} l \sin it\,dt - \frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi} t \sin it\,dt.$$

Für A_0 ist die Hälfte des Formelwertes zu nehmen. Man erhält mit Rücksicht auf (2):

(31)
$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} l\,dt - \frac{l_n - l_0}{2}.$$

Ferner wird durch teilweise Integration:

(32)
$$A_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} l \cos it\,dt,$$
$$B_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} l \sin it\,dt + \frac{l_n - l_0}{i\pi}.$$

Es ist also nur B_i zu verbessern.*)

Ist nur eine endliche Anzahl von Werten l_ν gegeben, im Anschluß an die Formeln (9), S. 410, so wird jetzt:

(33)
$$A_0 = \frac{[l_\nu]}{n} - \frac{l_n - l_0}{2}\,\frac{n-1}{n},$$

(34)
$$A_i = \frac{2[l_\nu \cos \nu iq]}{n} - \frac{2(l_n - l_0)}{n^2}[\nu \cos \nu iq],$$
$$B_i = \frac{2[l_\nu \sin \nu iq]}{n} - \frac{2(l_n - l_0)}{n^2}[\nu \sin \nu iq].$$
$$\nu = 0, 1, 2 \ldots (n-1), \quad q = 2\pi : n,$$

oder

(35)
$$A_i = \frac{2[l_\nu \cos \nu iq]}{n} + \frac{l_n - l_0}{n},$$
$$B_i = \frac{2[l_\nu \sin \nu iq]}{n} + \frac{l_n - l_0}{n}\cot\frac{i\pi}{n}.$$

*) Ad. Schmidt. Über die Verwendung trigonometrischer Reihen usw. 1894. S. 11.

Zur Bildung der Summen $[\nu \cos \nu i q]$ und $[\nu \sin \nu i q]$ hat man nämlich zu beachten, daß

$$[\sin \nu x] = \frac{\sin \frac{n x}{2} \sin \frac{n-1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}, \quad [\cos \nu x] = \frac{\sin \frac{n x}{2} \cos \frac{n-1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Differenziert man nach x und setzt $x = iq = i\frac{2\pi}{n}$, so folgt

$$[\nu \cos \nu i q] = -\frac{n}{2}; \quad [\nu \sin \nu i q] = -\frac{n}{2} \cot \frac{i\pi}{n}.$$

Dies stimmt für $n = \infty$ mit dem Vorhergehenden.*)

§ 6. Interpolation nach der Theorie der quasisystematischen Fehler von T. N. Thiele.**)

1. Ausgleichung. Wir denken uns eine Größe, wie den Gang einer Uhr oder die persönliche Gleichung zweier Beobachter bei Messungen usw., zu aufeinanderfolgenden Epochen beobachtet. Die Größe sollte eigentlich konstant sein, abgesehen von systematischen Einflüssen, die in Rechnung gezogen werden können (beim Uhrgang: Luftdichte, Temperatur). Angenommen aber, sie erweise sich nicht konstant. Dann kann man zunächst an zufällige Schwankungen um einen Normalwert herum denken, so daß also dieser durch die Umstände möglichst festgehalten wird. Man wird aber bei näherer Betrachtung, z. B. des Uhrganges, zu der Ansicht geführt, daß die Gesamtschwankungen in ihrer Verteilung (Aufeinanderfolge) nicht wie zufällige Fehler sich verhalten, sondern daß sie sich aus kleinen Teilen zusammensetzen, die zufälliger Natur sind. Die Gesamtschwankungen sind dann quasisystematische Fehler, indem sie in ihrer Verteilung ein Verhalten zeigen ähnlich wie systematische Fehler — bei ganz anderer Art des Ursprungs.

*) Die Rechnung wird selbstverständlich etwas anders, wenn A aus den Werten l_ν mit bestimmt werden soll; vergl. hierzu das Beispiel auf S. 417 u. f. Oftmals wird indessen der oben behandelte Fall eintreten, wobei man sich $l_n - l_0$ mehrfach bestimmt zu denken hat.

**) Sur la compensation de quelques erreurs quasi-systématiques par la méthode des moindres carrés. Copenhague 1880.

Zu aufeinanderfolgenden Epochen seien gefunden für eine Konstante die Werte $l_1, l_2, \ldots l_n$ mit den Gewichten $g_1, g_2, \ldots g_n$ in bezug auf eine bekannte Gewichtseinheit. Die wahren Werte der l_i seien X_i, so hat man die Fehlergleichungen:

$$l_i + \lambda_i = x_i \quad \text{Gew. } g_i \qquad i = 1 \ldots n. \tag{1}$$

Die g_i und den m. F. μ der Gewichtseinheit findet man aus unmittelbar hintereinander wiederholten Beobachtungen.

Die aufeinanderfolgenden X weichen um Größen voneinander ab, deren mittlere Quadrate proportional der Zeit wachsen. In bezug auf eine Gewichtseinheit mit dem noch unbekannten m. F. m sind also die Gewichte der Differenzen $X_i - X_{i-1}$ umgekehrt proportional den Zeitunterschieden $t_i - t_{i-1}$ zu setzen. Das gibt die $(n-1)$ Fehlergleichungen:

$$\begin{array}{lll} x_2 - x_1 &= \delta_1 & \text{Gew. } g_1' \\ x_3 - x_2 &= \delta_2 & \quad\text{,,}\quad g_2' \\ \cdot\quad\cdot & \quad\cdot & \quad\cdot\quad\cdot \\ x_n - x_{n-1} &= \delta_{n-1} & \quad\text{,,}\quad g_{n-1}'. \end{array} \tag{2}$$

Die Gewichte sind hier auf μ bezogen gedacht, so daß

$$g_{i-1}' = \frac{\mu^2}{m^2} : (t_i - t_{i-1}). \tag{3}$$

Aus (1) und (2) erhält man zur Bestimmung von m^2 die $n-1$ Gleichungen

$$l_i - l_{i-1} = \delta_{i-1} - \lambda_i + \lambda_{i-1}. \tag{4}$$

Diese gelten auch für wahre Verbesserungen. In bekannter Weise folgt daher

$$\sum (l_i - l_{i-1})^2 = \sum \frac{\mu^2}{g_{i-1}'} + \sum \frac{\mu^2}{g_i} + \sum \frac{\mu^2}{g_{i-1}}. \qquad i = 2 \ldots n.$$

Mit Rücksicht auf (3) ergibt sich endlich:

$$m^2(t_n - t_1) = \sum (l_i - l_{i-1})^2 - \mu^2 \sum \left(\frac{1}{g_i} + \frac{1}{g_{i-1}}\right), \qquad i = 2 \ldots n. \tag{5}$$

Hat man hieraus m^2 berechnet, so gibt (3) die g' für das System (2).

Die Bedingung $[\lambda^2 g] + [\delta^2 g']$ ein Min. führt weiter zu den Normalgleichungen:

$$
(6)\quad \begin{aligned}
l_1 g_1 &= (g_1 + g_1')x_1 - g_1' x_2 \\
l_2 g_2 &= -g_1' x_1 + (g_1' + g_2 + g_2')x_2 - g_2' x_3 \\
l_3 g_3 &= \quad\cdot\quad - g_2' x_2 + (g_2' + g_3 + g_3')x_3 - g_3' x_4 \\
&\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
l_n g_n &= \quad\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad - g_{n-1}' x_{n-1} + (g_{n-1}' + g_n)x_n .
\end{aligned}
$$

Hieraus folgen in bekannter Weise die reduzierten Normalgleichungen:

$$
(7)\quad \left\{ \begin{aligned}
p_1 y_1 &= (p_1 + g_1')x_1 - g_1' x_2 \\
p_2 y_2 &= (p_2 + g_2')x_2 - g_2' x_3 \\
p_3 y_3 &= (p_3 + g_3')x_3 - g_3' x_4 \\
&\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
p_n y_n &= p_n x_n, \quad \text{also} \quad y_n = x_n .
\end{aligned} \right.
$$

Dabei ist gesetzt:

$$
(8)\quad \begin{aligned}
p_1 &= g_1 \\
p_2 &= g_2 + p_2' & \qquad \frac{1}{p_2'} &= \frac{1}{p_1} + \frac{1}{g_1'} \\
p_3 &= g_3 + p_3' & \qquad \frac{1}{p_3'} &= \frac{1}{p_2} + \frac{1}{g_2'} \\
&\text{usw.} & &\text{usw.}
\end{aligned}
$$

$$
(9)\quad \begin{aligned}
y_1 &= l_1 \\
p_2 y_2 &= p_2' y_1 + g_2 l_2 \\
p_3 y_3 &= p_3' y_2 + g_3 l_3 \\
&\text{usw.}
\end{aligned}
$$

Die $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots x_1$ folgen aus (7) durch Einsetzen von x_n usw.

Nach der Theorie der äquivalenten Beobachtungen kann man die linken Seiten der Gleichungen (7), also die $p_i y_i$, als voneinander unabhängige Beobachtungen vom reziproken Gewicht $p_i + g_i'$ auffassen. Da nun z. B. in der ersten Gleichung (7) x_2 nur von $p_2 y_2 \ldots p_n y_n$ abhängt, kann man darin x_1 als Funktion der voneinander unabhängigen Beobachtungen $p_1 y_1$ und $g_1' x_2$ betrachten.

Man hat also für das m. Fehlerquadrat M_1^2 von x_1:

$$(p_1 + g_1')^2 M_1^2 = g_1'^2 M_2^2 + (p_1 + g_1')\mu^2$$

und hieraus

$$M_1^2 = \left(\frac{p_2'}{p_1}\right)^2 M_2^2 + \frac{p_1 - p_2'}{p_1^2}\mu^2.$$

Allgemein ist

$$M_i^2 = \left(\frac{p_{i+1}'}{p_i}\right)^2 M_{i+1}^2 + \frac{p_i - p_{i+1}'}{p_i^2}\mu^2. \tag{10}$$

Für $x_n = y_n$ hat man insbesondere

$$M_n^2 = \frac{\mu^2}{p_n}. \tag{11}$$

Von hier ausgehend berechnen sich nach und nach alle M^2 bis M_1^2.*)

---

*) Man kann das System (6) auch mit Hilfe der Multiplikatoren Q auflösen, die aus den Gleichungen folgen:

$$\begin{aligned}
1 &= Q_1 \\
(g_1 + g_1') &= g_1' Q_2 \\
-g_1' + (g_1' + g_2 + g_2') Q_2 &= g_2' Q_3 \\
-g_2' Q_2 + (g_2' + g_3 + g_3') Q_3 &= g_3' Q_4 \\
\cdot \qquad \cdot \qquad & \cdot \\
-g_{n-2}' Q_{n-2} + (g_{n-2}' + g_{n-1} + g_{n-1}') Q_{n-1} &= g_{n-1}' Q_n.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$x_n \{-g_{n-1}' Q_{n-1} + (g_{n-1}' + g_n) Q_n\} = \Sigma l_i g_i Q_i.$$

Mittels x_n geben die (6) schrittweise alle anderen x.

Stellt man noch ein zweites System Multiplikatoren auf:

$$\begin{aligned}
1 &= P_1 \\
(g_{n-1}' + g_n) &= g_{n-1}' P_2 \\
-g_{n-1}' + (g_{n-2}' + g_{n-1} + g_{n-1}') P_2 &= g_{n-2}' P_3
\end{aligned}$$

usw.,

so geben beide Systeme ein bequemes Mittel, sämtliche x und ihre reziproken Gewichte explizite zu berechnen.

Vergl.: L. Krüger. Die Auflösung eines speziellen Systems von Normalgleichungen. (Astr. Nachr. Bd. 138 (1895), Nr. 3298, Sp. 153 u. f.)

Im Falle der Gewichtsberechnung sind in bekannter Weise die lg durch null und eins zu ersetzen.

Eine summarische Berechnung für die Fehlerquadratsumme ergibt die Formel:

$$(12)\quad [\lambda^2 g] + [\delta^2 g'] = [llg] - \left\{\frac{p_1^2 y_1^2}{p_1 + g_1'} + \frac{p_2^2 y_2^2}{p_2 + g_2'} + \cdots + \frac{p_n^2 y_n^2}{p_n}\right\}.$$

Hierin kann man auch setzen:

$$(12^*)\qquad \frac{p_i^2}{p_i + g_i'} = p_i - p_{i+1}'.$$

Ferner wird

$$(13)\qquad \mu^2 = \frac{[\lambda^2 g] + [\delta^2 g']}{n-1},$$

da $2n - 1$ Fehlergleichungen und n Unbekannte vorhanden sind.

Eine Prüfung des Wertes μ^2 aus (13) ergibt sich durch Vergleichung mit dem eingangs gefundenen Wert.

Es führt zu großen Weitläufigkeiten, auf Grund der λ und δ das Verhältnis von μ^2 zu m^2 zu prüfen. Die nach Art von II im 5. Kapitel, S. 360 u. f., abzuleitenden strengen Formeln sind zu umständlich. (Die Näherungsformeln, welche Thiele benutzt, sind wohl nicht allgemein brauchbar.) Eine solche Prüfung ist auch nicht nötig, da die Herleitung von m aus (5) das ganze Beobachtungsmaterial berücksichtigt. Wenn μ^2 aus (13) wesentlich anders als früher hervorginge, so müßte man annehmen, daß die Gewichte g_i' unter sich unrichtig, d. h. nicht umgekehrt proportional zu $t_{i+1} - t_i$ sind.

II. Einschaltung. Wünscht man zwischen x_i und x_{i+1} ein x einzuschalten, wobei nach Maßgabe der Zwischenzeiten anzusetzen ist:

$$(14)\qquad \begin{aligned} x - x_i &= \delta' \quad \text{Gew. } g' \\ x_{i+1} - x &= \delta'' \quad\;\; \text{„} \quad g'', \end{aligned}$$

so wird die Normalgleichung für x:

$$-x_i g' + x(g' + g'') - x_{i+1} g'' = 0,$$

und es ist

$$(15)\qquad x = x_i \frac{g'}{g' + g''} + x_{i+1} \frac{g''}{g' + g''}.$$

Bequemer ist es wohl, auf (3) zurückzugehen. Die Normalgleichung gibt aber

$$(x - x_i) g' = (x_{i+1} - x) g''.$$

also ist auch

$$(16)\qquad \frac{x - x_i}{t - t_i} = \frac{x_{i+1} - x}{t_{i+1} - t} = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i}.$$

Um den m. F. von x zu finden, nehmen wir beispielsweise an, daß x zwischen x_2 und x_3 läge. In (7) ist nun an dritter Stelle die reduzierte Gleichung für x einzuschalten; die zweite, dritte und vierte Gleichung lauten dann:

$$(17)\qquad \begin{aligned} p_2 y_2 &= (p_2 + g')x_2 - g'x \\ p\, y &= (p + g'')x - g'' x_3 \\ p_3 y_3 &= (p_3 + g'_3)x_3 - g_3' x_4. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\frac{1}{g'} + \frac{1}{g''} = \frac{1}{g_2'}$, und da g null ist:

$$(18)\qquad \begin{aligned} p &= p' & \frac{1}{p'} &= \frac{1}{p_2} + \frac{1}{g'} \\ p_3 &= g_3 + p_3' & \frac{1}{p_3'} &= \frac{1}{p} + \frac{1}{g''}. \end{aligned}$$

p_2 ist derselbe Wert wie ohne den Ansatz für x; auch p_3 ist dasselbe wie früher, denn aus den letzten Gleichungen folgt

$$\frac{1}{p_3'} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{g'} + \frac{1}{g''} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{g_2'}.$$

In (7) werden also die dritte und folgende Gleichungen nicht geändert, da auch y_3 ungeändert bleibt. Denn man hat zu (9):

$$p\, y = p' y_2 + \text{null, also } y = y_2$$

und

$$p_3 y_3 = p_3' y + g_3 l_3, \text{ also wie früher.}$$

Demnach muß man annehmen, daß auch x_2 ungeändert bleibt; in der Tat erhält in beiden Fällen x_2 aus der zweiten Gleichung (7) bei der schrittweisen Berechnung der x denselben Wert.

Nach (10) wird nunmehr für x das mittlere Fehlerquadrat bei Einschaltung zwischen x_i und x_{i+1}:

$$(19)\qquad M_x^2 = \left(\frac{p'_{i+1}}{p}\right)^2 M_{i+1}^2 + \frac{p - p'_{i+1}}{p^2}\mu^2,$$

wobei für p nach (18) ist:

$$(19^*)\qquad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{g'}.$$

Thiele macht darauf aufmerksam, daß M_x^2 einen anderen Wert erhält, als man zunächst vermuten sollte, wenn man nach Maßgabe von (15)

(15*) $$x = a x_i + (1-a) x_{i+1} = F$$

mit $a = g' : (g' + g'')$ setzt. Führt man nämlich in der red. Normalgleichung

$$p_i y_i = (p_i + g_i') x_i - g_i' x_{i+1}$$

mittels voriger Gleichung anstatt x_i die Größe F ein, so ist

$$F = \frac{a p_i y_i}{p_i + g_i'} + \frac{g_i' + (1-a) p_i}{p_i + g_i'} x_{i+1}.$$

Und da die beiden Glieder rechter Hand unabhängig voneinander sind, hat man

(20) $$M_F^2 = \left(\frac{g_i' + (1-a) p_i}{p_i + g_i'}\right)^2 M_{i+1}^2 + \mu^2 \frac{a^2}{p_i + g_i'}.$$

Beachtet man die obige Relation für a sowie Gleichung (19) und die Beziehungen

$$\frac{1}{p'_{i+1}} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{g_i'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{g''}$$

und

$$\frac{1}{g_i'} = \frac{1}{g'} + \frac{1}{g''},$$

so folgt

(21) $$M_F^2 = M_x^2 - \frac{a(1-a)}{g_i'} \mu^2.$$

Die Ursache dieser Erscheinung, daß M_x^2 für den zwischen x_i und x_{i+1} nach (15) interpolierten Wert x größer ist als für denselben Wert nach Maßgabe von (15*), liegt darin, daß im letztern Falle durch den Ansatz (15*) allein noch gar nicht bewiesen ist, daß x der plausibelste Wert zur Zeit t ist. Dies zeigt sich auch im Ausdruck der wahren Fehler. Bei Anwendung von (15*) hat man für die wahren Größen

$$X = a X_i + (1-a) X_{i+1}$$

(22) und

$$(X - x) = a(X_i - x_i) + (1-a)(X_{i+1} - x_{i+1}).$$

Dagegen ergibt die Einschaltung nach (15), wenn ε' und ε'' als wahre Verbesserungen den δ' und δ'' entsprechen:

$$X - X_i = \varepsilon' \qquad X_{i+1} - X = \varepsilon''$$

$$X = (X_i + \varepsilon')\frac{g'}{g' + g''} + (X_{i+1} - \varepsilon'')\frac{g''}{g' + g''}$$

und mit Einführung von a:

$$(23)\qquad \begin{aligned}(X - x) = a(X_i - x_i) + (1 - a)(X_{i+1} - x_{i+1})\\ + a\varepsilon' - (1 - a)\varepsilon''.\end{aligned}$$

Die genaue mittlere Fehlerbestimmung entspricht offenbar (23) und nicht (22).

Beispiel. Zur Erläuterung geben wir den Anfang eines Beispiels nach Thiele. Beobachtungsgröße ist der Indexfehler des Mikrometers eines Meridiankreises. l ist in Hundertsteln des Schraubenumgangs, $1^R = 26{,}''33$, gegeben: die g und g' sind nach Rechnungen von Thiele angesetzt.

Nr.	Juli 1879	g	$1:g'$	p'	p	l	y	x	λ	δ
1	2,61	25,0		.	25,0	4,45	4,45	4,25	— 0,20	
			0,0100							— 0,05
2	2,85	"		20,0	45,0	4,25	4,34	4,20	— 0,05	
			0,0336							— 0,21
3	3,65	"		17,9	42,9	3,95	4,11	3,99	+ 0,04	
			0,0088							— 0,05
4	3,86	"		31,2	56,2	3,95	4,04	3,94	— 0,01	
			0,0316							— 0,17
5	4,61	37,5		20,2	57,7	3,43	3,64	3,77	+ 0,34	
			0,0016							+ 0,01
6	4,65	25,0		52,9	77,9	4,05	3,77	3,78	— 0,27	
			0,0832							+ 0,06
7	6,63	"		10,4	35,4	3,85	3,83	3,84	— 0,01	
			0,0004							0,00
8	6,64	"		35,0	60,0	3,85	3,84	3,84	— 0,01	

$$[\lambda^2 g] = 7{,}27, \quad [\delta^2 g'] = 2{,}87, \quad \mu^2 = \frac{10{,}14}{7} = 1{,}45.$$

Die genauere Bestimmung aus 74 Beobachtungen gab $\mu^2 = 69{,}95 : 73 = 0{,}96$. A priori war 1 für μ angenommen, nämlich $0{,}^R01 = 0{,}''2633$. Es ist nun auch jetzt nach der genauern Bestimmung $\mu = \pm\, 0{,}''26$.

Thiele behandelt auch den Fall, wo die Beobachtungsgröße noch von zwei Konstanten abhängt, die als Unbekannte mit in die Ausgleichungsrechnung aufzunehmen sind.

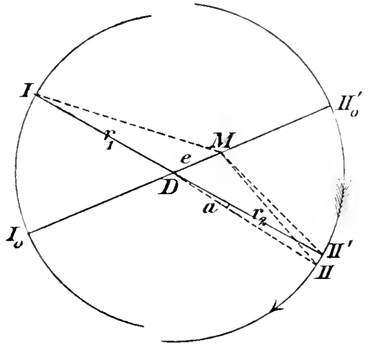
Siebentes Kapitel.

Beispiele über Teilkreise, Mikrometerschrauben und Libellen.

§ 1. Teilkreise.

I. Die Bestimmung der Exzentrizität der Alhidade und eines mittlern Wertes der Teilungsfehler eines Kreises mit mikroskopischer Ablesung erfolgt durch Beobachtung der Unterschiede der Angaben zweier diametralen Mikroskopmikrometer für verschiedene möglichst gleichmäßig über den Kreis verteilte Durchmesser.

Beispiel. Wir geben im folgenden die Ergebnisse zweier von verschiedenen Beobachtern angestellten Versuchsreihen an demselben Kreise. Es sind die um 180^0 verminderten Differenzen, ausgedrückt in Mikrometerteilen des Mikroskops II, deren jeder 2,4 Bogensekunden enthält; der Nullpunkt von I wurde genau auf den betreffenden Teilstrich eingestellt. Siehe S. 436.



Diese Unterschiede sind nun Funktionen der Exzentrizität der Alhidade, des sogenannten Abstands der Mikroskope und der Teilungsfehler. In der Figur ist M der Mittelpunkt des Teilkreises, gegen den die Teilstriche konvergieren, D ist Drehpunkt, I und II sind die Nullstellen der Mikroskope, e ist die Exzentrizität MD, r_1 und r_2 sind die Radien der von I und II be-

(1)

Mikr. I. auf	II — I — 180° 1. Reihe	2. Reihe	Mittel = l
0°	+ 19,3	+ 19,7	+ 19,5
10	+ 17,0	+ 18,0	+ 17,5
20	+ 16,0	+ 15,5	+ 15,8
30	+ 16,0	+ 15,0	+ 15,5
40	+ 11,0	+ 11,0	+ 11,0
50	+ 6,0	+ 7,5	+ 6,8
60	+ 10,5	+ 9,0	+ 9,8
70	+ 10,5	+ 9,5	+ 10,0
80	+ 5,0	+ 6,0	+ 5,5
90	— 3,0	— 4,0	— 3,5
100	— 6,5	— 6,0	— 6,3
110	— 14,5	— 13,0	— 13,8
120	— 17,0	— 17,0	— 17,0
130	— 17,0	— 16,0	— 16,5
140	— 23,0	— 21,0	— 22,0
150	— 18,0	— 16,5	— 17,3
160	— 19,5	— 17,5	— 18,5
170	— 18,5	— 18,0	— 18,3
180	— 21,5	— 19,0	— 20,3
190	— 15,5	— 13.0	— 14,3
200	— 17,0	— 18,0	— 17,5
210	— 14,0	— 14,0	— 14,0
220	— 16,0	— 14,0	— 15,0
230	— 9,5	— 10,0	— 9,8
240	— 15,0	— 12,5	— 13,8
250	— 12,5	— 12,0	— 12,3
260	— 11,5	— 9,5	— 10,5
270	+ 2,0	+ 0,5	+ 1,3
280	+ 2,5	+ 6,0	+ 4,3
290	+ 14,0	+ 12,5	+ 13,3
300	+ 14,0	+ 14,0	+ 14,0
310	+ 14,5	+ 15,5	+ 15,0
320	+ 22,5	+ 23,0	+ 22,8
330	+ 20,5	+ 20,0	+ 20,3
340	+ 22,0	+ 22,5	+ 22,3
350	+ 19,5	+ 20,0	+ 19,8

schriebenen Kreise. Ist ferner $IDII'$ eine Gerade, so ist linear gemessen $II'II$ der Abstand der Mikroskope, im Winkelwert

$$(2) \qquad \sphericalangle II'DII = a,$$

positiv gemessen in Richtung wachsender Teilung (des Pfeiles).

Da e im Verhältnis zu r_2 sehr klein sein wird, so kann man auch

$$(3) \qquad \sphericalangle II'MII = a$$

setzen bis auf ein Bruchteil von der Ordnung $e : r_2$, das bei sehr kleinen Werten a nicht in Betracht kommt. Es ist also die Ablesungsdifferenz

$$(4) \qquad II - I = a + II' - I.$$

Für den Fall, daß die Gerade $I \cdot II'$ außer D auch M enthält, welche Lage mit $I_0 II_0'$ bezeichnet ist, wird

$$(5) \qquad II_0' - I_0 = 180^0.$$

Nun ist

$$(6) \qquad \begin{aligned} II' &= II_0' + \sphericalangle II_0'MII' \\ I &= I_0 \;\; + \sphericalangle I_0MI. \end{aligned}$$

Also folgt aus (4), (5) und (6):

$$(7) \qquad II - I = 180^0 + a + \sphericalangle II_0'MII' - \sphericalangle I_0MI.$$

Man hat aber sehr nahe für Sekunden:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \sphericalangle II_0'MII' &= \sphericalangle II_0'DII' + 206\,265 \frac{e}{r_2} \sin II_0'DII \\ \sphericalangle I_0MI &= \sphericalangle I_0DI - 206\,265 \frac{e}{r_1} \sin I_0DI. \end{aligned}$$

Wegen $\sphericalangle II_0'DII' = \sphericalangle I_0DI$ gibt hiermit (7):

$$(9) \quad II - I = 180^0 + a + 206\,265 \left(\frac{e}{r_2} \sin II_0'DII + \frac{e}{r_1} \sin I_0DI\right).$$

Da r_1 und r_2 sehr nahe gleich sein werden und nach (8) die einander gleichen Winkel $II_0'DII$ und I_0DI von $\sphericalangle I_0MI$ sich nur sehr wenig unterscheiden, kann man anstatt (9) schreiben mit Unterdrückung des Index von r_1 und von r_2:

$$(10) \qquad II - I = 180^0 + a + 206\,265 \frac{2e}{r} \sin (I - I_0),$$

oder

$$(11)\qquad \left|\begin{aligned} II - I &= 180^0 + a + b\sin I - c\cos I \\ b &= 206\,265\,\frac{2e}{r}\cos I_0 \text{ Sek.} \\ c &= 206\,265\,\frac{2e}{r}\sin I_0 \text{ Sek.}\end{aligned}\right.$$

b und c bestimmen Größe und Richtung der Exzentrizität.

Die erste Gleichung (11) ist wegen der Teilungsfehler und zufälligen Beobachtungsfehler noch nicht korrekt; sie wird es erst, wenn wir setzen für

$$II - I \ldots (II + t'') - (I + t') + \varepsilon$$

und damit aus (11) ableiten:

$$(12)\qquad \varepsilon + (t'' - t') = -(II - I - 180^0) + a + b\sin I - c\cos I.$$

worin t'' und t' die Teilungsfehler (Strichkorrektionen) für die Ablesestellen II und I im Sinne von Verbesserungen bedeuten, ε aber den zufälligen Beobachtungsfehler der Differenz $II - I$ bezeichnet. Tabelle (1) enthält die Werte

$$l = II - I - 180^0.$$

Denken wir uns die zugehörigen Gleichungen (12) aufgestellt, so zeigt sich, daß je zwei derselben, welche um 180^0 verschiedenen Ablesungen von I entsprechen, dieselben Teilungsfehler enthalten. Unterscheiden wir die beiden Fälle durch Indices 1 und 2, so haben wir nämlich:

$$(13)\qquad \begin{aligned} \varepsilon_1 + (t_1'' - t_1') &= -l_1 + a + b\sin I_1 - c\cos I_1 \\ \varepsilon_2 - (t_1'' - t_1') &= -l_2 + a - b\sin I_1 + c\cos I_1: \end{aligned}$$

hieraus folgt durch Addition bzw. Subtraktion:

$$(14)\qquad (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -(l_1 + l_2) + 2a$$

$$(15)\qquad (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2(t_1'' - t_1')) = -(l_1 - l_2) + 2b\sin I_1 - 2c\cos I_1.$$

Da jede der Gleichungen (13) andere Teilungsfehler enthält, so ist deren Trennung von den zufälligen Fehlern ε nicht möglich. Wir bezeichnen demgemäß die linken Seiten der Gleichungen (14) und (15) für die Ausgleichung bzw. mit den Symbolen v und v' und erhalten dann die Fehlergleichungen wie folgt:

$$
(14^*)\qquad
\begin{array}{ll}
v_0 = +\,0{,}8 + 2a & v_9 = +\,2{,}2 + 2a \\
v_1 = -\,3{,}2 + 2a & v_{10} = +\,2{,}0 + 2a \\
v_2 = +\,1{,}7 + 2a & v_{11} = +\,0{,}5 + 2a \\
v_3 = -\,1{,}5 + 2a & v_{12} = +\,3{,}0 + 2a \\
v_4 = +\,4{,}0 + 2a & v_{13} = +\,1{,}5 + 2a \\
v_5 = +\,3{,}0 + 2a & v_{14} = -\,0{,}8 + 2a \\
v_6 = +\,4{,}0 + 2a & v_{15} = -\,3{,}0 + 2a \\
v_7 = +\,2{,}3 + 2a & v_{16} = -\,3{,}8 + 2a \\
v_8 = +\,5{,}0 + 2a & v_{17} = -\,1{,}5 + 2a,
\end{array}
$$

$$
(15^*)\qquad
\begin{array}{llll}
v_0' = & -\,39{,}8 & \cdot & -\,1{,}000(2c) \\
v_1' = & -\,31{,}8 & +\,0{,}174(2b) & -\,0{,}985(2c) \\
v_2' = & -\,33{,}3 & +\,0{,}342(2b) & -\,0{,}940(2c) \\
v_3' = & -\,29{,}5 & +\,0{,}500(2b) & -\,0{,}866(2c) \\
v_4' = & -\,26{,}0 & +\,0{,}643(2b) & -\,0{,}766(2c) \\
v_5' = & -\,16{,}6 & +\,0{,}766(2b) & -\,0{,}643(2c) \\
v_6' = & -\,23{,}6 & +\,0{,}866(2b) & -\,0{,}500(2c) \\
v_7' = & -\,22{,}3 & +\,0{,}940(2b) & -\,0{,}342(2c) \\
v_8' = & -\,16{,}0 & +\,0{,}985(2b) & -\,0{,}174(2c) \\
v_9' = & +\,4{,}8 & +\,1{,}000(2b) & \cdot \\
v_{10}' = & +\,10{,}6 & +\,0{,}985(2b) & +\,0{,}174(2c) \\
v_{11}' = & +\,27{,}1 & +\,0{,}940(2b) & +\,0{,}342(2c) \\
v_{12}' = & +\,31{,}0 & +\,0{,}866(2b) & +\,0{,}500(2c) \\
v_{13}' = & +\,31{,}5 & +\,0{,}766(2b) & +\,0{,}643(2c) \\
v_{14}' = & +\,44{,}8 & +\,0{,}643(2b) & +\,0{,}766(2c) \\
v_{15}' = & +\,37{,}6 & +\,0{,}500(2b) & +\,0{,}866(2c) \\
v_{16}' = & +\,40{,}8 & +\,0{,}342(2b) & +\,0{,}940(2c) \\
v_{17}' = & +\,38{,}1 & +\,0{,}174(2b) & +\,0{,}985(2c).
\end{array}
$$

Das System (14*) bestimmt nur die Unbekannte a, das System (15*) bestimmt dagegen nur die beiden andern Unbekannten b und c; es ist also kein Zusammenhang in der Ausgleichung beider Systeme. Man erhält nun mit Rücksicht darauf, daß in jedem der Systeme für sich die Fehlergleichungen als gleich genau anzusehen sind, die Normalgleichungen:

$$(16)\quad \begin{cases} 18(2a) \quad = -\ \ 16{,}2 & 2a = -\ \ 0{,}90 \\ 9(2b) \quad = -\ \ 41{,}6 & 2b = -\ \ 4{,}62 \\ 9(2c) = -370{,}4 & 2c = -41{,}16. \end{cases} \qquad \text{Mikrometerteile II}$$

Dieselben Werte würde die Ausgleichung des Systems (12) ergeben haben unter der Bedingung, daß die Summe der Quadrate der linken Seiten ein Minimum werde, wobei nur an Stelle des wahren Fehlers $\varepsilon + (t'' - t')$ ein plausibelster Fehler zu setzen gewesen wäre. Aber dieses Verfahren ist weniger streng, da die Fehlergleichungen dabei paarweise von denselben t abhängen.

Führt man die Werte der Unbekannten in (14*) und (15*) ein, so ergeben sich die v und v' wie folgt:

(17)

Nr.	v	v'	Nr.	v	v'
0	− 0,1	+ 1,3	9	+ 1,3	+ 0,2
1	− 4,1	+ 7,9	10	+ 1,1	− 1,1
2	+ 0,8	+ 3,8	11	− 0,4	+ 8,7
3	− 2,4	+ 3,8	12	+ 2,1	+ 6,4
4	+ 3,1	+ 2,5	13	+ 0,6	+ 1,5
5	+ 2,1	+ 6,3	14	− 1,7	+ 10,3
6	+ 3,1	− 7,0	15	− 3,9	− 0,3
7	+ 1,4	− 12,6	16	− 4,7	+ 0,6
8	+ 4,1	− 13,4	17	− 2,4	− 3,2

$$[vv] = 119{,}40 \qquad [v'v'] = 763{,}17.$$

Hiernach ist das mittlere Quadrat von $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ gleich

$$\frac{119{,}40}{18-1}, \text{ d. i. } 7{,}02.$$

Ferner ist das mittlere Quadrat von $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2(t_1'' - t_1'))$ gleich

$$\frac{763{,}17}{18-2}, \text{ d. i. } 47{,}70.$$

Setzen wir den mittlern Wert eines ε gleich μ und den mittlern Wert einer Differenz $(t_1'' - t_1')$ gleich Δ, so ist das mittlere Quadrat von $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ gleich $2\mu^2$ und das mittlere Quadrat von $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2(t_1'' - t_1'))$, wenn nur wenigstens die ε einen zufälligen Charakter haben, gleich $2\mu^2 + 4\Delta^2$; daher ist

$$(18)\qquad 2\mu^2 = 7{,}02 \quad \text{und} \quad 2\mu^2 + 4\Delta^2 = 47{,}70.$$

Hieraus folgt

$$(19)\quad \begin{cases} \mu^2 = 3{,}51 & \mu = \pm\, 1{,}87 \text{ Mikrometerteile,} \\ \varDelta^2 = 10{,}17 & \varDelta = \pm\, 3{,}19 \quad \text{„} \quad . \end{cases}$$

Der mittlere Wert eines einzelnen Teilungsfehlers ist annäherungsweise $\varDelta : \sqrt{2}$.

Betrachtet man Tabelle (17), so sieht man sofort, daß die v sowohl wie die v' von zufälligen Fehlern allein nicht abstammen können. Was v' anlangt, so ist dies nicht befremdlich, weil in den v' die Differenzen $(t'' - t')$ enthalten sind; dagegen war es nicht zu erwarten, daß auch die v einen Zusammenhang mit der Bezifferung des Kreises zeigen würden, wenigstens für den Fall, daß sie nur von den Einstellungs- und Ablesefehlern an den Mikrometern herrühren, wie wir bisher annahmen. Daß dies aber nicht so ist, zeigt zunächst eine Berechnung von μ aus der Vergleichung der korrespondierenden Werte in den beiden Reihen der Tabelle (1): Die Quadratsumme der 36 Unterschiede ist 70,91 und daher das Quadrat eines einzelnen im Mittel gleich 1,96. Ist nun ν der mittlere Beobachtungsfehler einer Angabe, so ist $2\nu^2$ das mittlere Quadrat eines Unterschieds zweier Angaben, also

$$(20)\qquad 2\nu^2 = 1{,}96.$$

Andrerseits ist $\frac{\nu^2}{2}$ das mittlere Fehlerquadrat eines arithmetischen Mittels zweier Angaben, also auch

$$(21)\qquad \frac{\nu^2}{2} = \mu^2;$$

daraus folgt

$$\mu^2 = 0{,}49 \quad \mu = \pm\, 0{,}70,$$

erheblich von (19) abweichend.*)

Wendet man auf die 18 Werte v der Tabelle (17) die Kriterien des Zufalls an, so folgt zunächst als mittlerer Betrag der Zeichenfolgen und -wechsel $f - w$ sehr nahe der Wert $\pm\, 4$. Der wirkliche Betrag ist größer, nämlich $6 - 11 = -5$.

Bildet man die 17 Unterschiede aufeinander folgender v, so findet sich aus den Quadraten das mittlere Quadrat des Fehlers

*) Bei der Berechnung von μ^2 aus (20) ist auf einen etwaigen konstanten Teil der 36 Unterschiede keine Rücksicht genommen; ein solcher würde μ in (21) noch mehr verkleinern. Er beträgt 0,6, was $2\nu^2$ auf 1,60, μ auf $\pm\, 0{,}63$ bringt.

einer Gleichung, d. i. $2\mu^2$, gleich

$$2\mu^2 = 127{,}37 : (2 \cdot 17) = 3{,}75. \tag{22}$$

Nach (18) ist $2\mu^2$ aber 7,02. Der Quotient 7,02 : 3,75 ist 1,87. Wirkte nur der Zufall, so müßte er gleich 1 sein mit der mittlern Abweichung $\pm 1 : \sqrt{18}$, d. i. $\pm 0{,}236$: die mittlern Grenzen sind 0,764 und 1,236. Der wirkliche Betrag 1,87 liegt weit außerhalb.

Wenn wir nun annehmen können, daß die Angaben der Mikrometer gehörig reduziert und die abgelesenen Striche immer in identischer Weise beleuchtet worden sind, so bleibt zur Erklärung obiger Erscheinungen nur die Annahme einer mit der Stellung der Alhidade ein wenig veränderlichen Exzentrizität übrig. Die oben erhaltenen Werte b und c sind dann nur mittlere Werte, gegen deren Betrag die Veränderlichkeit der Exzentrizität aber jedenfalls sehr gering ist.

Die Lagenänderungen der Alhidade kann man sich dann zusammengesetzt denken aus Drehungen um den Punkt D von mittlerer Lage und Verschiebungen parallel und normal zu $I \cdot II'$; letztere wirken auf die Ablesungsdifferenz $II - I$.

Man hat noch für die mittlere Exzentrizität:

$$\tan I_0 = \frac{-41{,}16}{-4{,}62},$$

$$\begin{aligned} I_0 &= 263^0\, 33'{,}5 \\ II_0' &= 83^0\, 33'{,}5\,. \end{aligned} \tag{23}$$

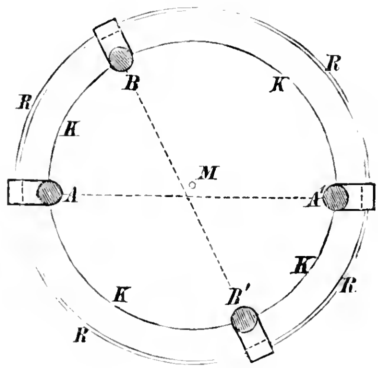
Für die I_0 entsprechende Ablesung am Mikroskop II ist, da a in Sek. $= -0{,}45 \cdot 2{,}4$ ist:

$$II_0 = 83^0\, 33'{,}5 - 1''{,}08. \tag{24}$$

Ferner ist der mittlere Abstand des Drehpunkts D der Alhidade vom Mittelpunkt M des Kreises:

$$\iota = \frac{2{,}4\sqrt{b^2 + c^2}}{2 \cdot 206\,265}\, r = 0{,}000121\, r. \tag{25}$$

II. Die Bestimmung der Korrektionen von gleichmäßig über den Kreisumfang verteilten Durchmessern. Hierzu hat man eine Einrichtung nötig, welche gestattet, vier Mikroskope paarweise diametral in verschiedenen Winkelabständen anzuordnen. Sei in der Figur KK der zu untersuchende Kreis, drehbar um den Zapfen M, der in fester Verbindung mit einem Rahmen RR steht, auf welchem die Mikroskoppaare AA' und BB' aufgeschraubt sind, so wird der Winkel zwischen den Linien AA', BB' auf verschiedene Beträge, z. B. 15°, 30°, 45° usw. gebracht und durch Drehung des Kreises an verschiedenen Stellen desselben abgemessen, vergl. das nächste Beispiel. Die Anwendung von zwei Paaren diametraler Mikroskope ist dadurch gefordert, daß es nicht möglich ist, den Kreis genau zentrisch zu seiner Drehachse M anzubringen; der dadurch entstehende Exzentrizitätsfehler ist außerdem wegen der mangelhaften Rundung des Zapfens der Alhidadenachse und wegen der Verschieblichkeit des Schmiermittels veränderlich (siehe das vorige Beispiel). Er wird aber im Mittel aus Ablesungen diametraler Mikroskope eliminiert. (Drei Mikroskope mit 120° Abstand würden dasselbe leisten.) Wir erhalten nun aber nicht die einzelnen Teilungsfehler selbst, sondern nur deren Mittelwerte für je zwei diametrale Striche; das hat jedoch nichts zu bedeuten, da die Winkelmessung wieder mit zwei diametralen Mikroskopen erfolgt.



Beispiel. Wir betrachten zur Erläuterung die Bestimmung einiger Teilungsfehler des Deklinationskreises am Äquatorial der Hamburger Sternwarte nach Beobachtungen des Observators Dr. C. L. F. Kampf 1868. Die Mikroskope hatten (nach Einsicht in die Originalbeobachtungen) nahezu 120°, 135°, 150°, 165° Abstand, wofür man sich auch die Abstände 15°, 30°, 45°, 60° denken kann. Nach erfolgter Ablesung wurde der Kreis jedesmal um 15° gedreht. Um die der Zeit proportionalen thermischen Änderungen zu eliminieren, wurde jede Reihe in umgekehrter Folge wiederholt (Doppelreihe).

Wir bezeichnen nun die arithmetischen Mittel der Strichkorrektionen, also die Durchmesserkorrektionen:

$$
(1) \qquad
\begin{array}{llllll}
\text{bei} & 0^0 & \text{und} & 180^0 & \text{mit} & (0) \\
,, & 15 & ,, & 195 & ,, & (1) \\
,, & 30 & ,, & 210 & ,, & (2) \\
. & . & . & . & . & . \\
,, & 165 & ,, & 345 & ,, & (11).
\end{array}
$$

Alsdann gestalten sich die Fehlergleichungen wie folgt, wobei die u Konstanten bezeichnen, die von dem Winkelabstand der Mikroskoppaare abhängen.

$$
(2) \qquad
\left.
\begin{aligned}
\lambda_1 &= +\,2''\!.12 + u + (0) - (8) \\
\lambda_2 &= +\,2{,}42 + u + (1) - (9) \\
\lambda_3 &= +\,1{,}29 + u + (2) - (10) \\
\lambda_4 &= -\,0{,}26 + u + (3) - (11) \\
\lambda_5 &= -\,0{,}79 + u + (4) - (0) \\
\lambda_6 &= -\,3{,}15 + u + (5) - (1) \\
\lambda_7 &= -\,2{,}62 + u + (6) - (2) \\
\lambda_8 &= -\,1{,}18 + u + (7) - (3) \\
\lambda_9 &= -\,0{,}75 + u + (8) - (4) \\
\lambda_{10} &= +\,0{,}50 + u + (9) - (5) \\
\lambda_{11} &= +\,0{,}75 + u + (10) - (6) \\
\lambda_{12} &= +\,1{,}66 + u + (11) - (7)
\end{aligned}
\right\}
\begin{array}{c}
\text{Mittel aus zwei Doppel-} \\
\text{reihen bei } 120^0 \text{ Abstand} \\
\text{der Mikroskope.}
\end{array}
$$

$$
(3) \qquad
\left.
\begin{aligned}
\lambda_1' &= +\,1''\!.82 + u' + (0) - (9) \\
\lambda_2' &= +\,1{,}80 + u' + (1) - (10) \\
\lambda_3' &= +\,0{,}62 + u' + (2) - (11) \\
\lambda_4' &= -\,0{,}66 + u' + (3) - (0) \\
\lambda_5' &= -\,1{,}89 + u' + (4) - (1) \\
\lambda_6' &= -\,2{,}33 + u' + (5) - (2) \\
\lambda_7' &= -\,1{,}47 + u' + (6) - (3) \\
\lambda_8' &= -\,0{,}83 + u' + (7) - (4) \\
\lambda_9' &= +\,0{,}02 + u' + (8) - (5) \\
\lambda_{10}' &= +\,0{,}36 + u' + (9) - (6) \\
\lambda_{11}' &= +\,0{,}90 + u' + (10) - (7) \\
\lambda_{12}' &= +\,1{,}67 + u' + (11) - (8)
\end{aligned}
\right\}
\begin{array}{c}
\text{Mittel aus zwei Doppel-} \\
\text{reihen bei } 135^0 \text{ Abstand} \\
\text{der Mikroskope.}
\end{array}
$$

$$(4)\quad\left.\begin{aligned}
\lambda_1'' &= +\,1{,}''38 + u'' + \;\;(0) - (10)\\
\lambda_2'' &= +\,1{,}02 + u'' + \;\;(1) - (11)\\
\lambda_3'' &= +\,0{,}69 + u'' + \;\;(2) - \;\;(0)\\
\lambda_4'' &= -\,1{,}43 + u'' + \;\;(3) - \;\;(1)\\
\lambda_5'' &= -\,1{,}43 + u'' + \;\;(4) - \;\;(2)\\
\lambda_6'' &= -\,1{,}86 + u'' + \;\;(5) - \;\;(3)\\
\lambda_7'' &= -\,0{,}94 + u'' + \;\;(6) - \;\;(4)\\
\lambda_8'' &= +\,0{,}58 + u'' + \;\;(7) - \;\;(5)\\
\lambda_9'' &= +\,0{,}52 + u'' + \;\;(8) - \;\;(6)\\
\lambda_{10}'' &= -\,0{,}04 + u'' + \;\;(9) - \;\;(7)\\
\lambda_{11}'' &= +\,0{,}56 + u'' + (10) - \;\;(8)\\
\lambda_{12}'' &= +\,0{,}97 + u'' + (11) - \;\;(9)
\end{aligned}\right\}\ \begin{array}{c}\text{Mittel aus zwei Doppel-}\\\text{reihen bei }150^0\text{ Abstand}\\\text{der Mikroskope.}\end{array}$$

$$(5)\quad\left.\begin{aligned}
\lambda_1''' &= +\,0{,}''19 + u''' + \;\;(0) - (11)\\
\lambda_2''' &= +\,0{,}31 + u''' + \;\;(1) - \;\;(0)\\
\lambda_3''' &= -\,0{,}51 + u''' + \;\;(2) - \;\;(1)\\
\lambda_4''' &= -\,1{,}03 + u''' + \;\;(3) - \;\;(2)\\
\lambda_5''' &= -\,0{,}18 + u''' + \;\;(4) - \;\;(3)\\
\lambda_6''' &= -\,0{,}50 + u''' + \;\;(5) - \;\;(4)\\
\lambda_7''' &= +\,0{,}17 + u''' + \;\;(6) - \;\;(5)\\
\lambda_8''' &= -\,0{,}05 + u''' + \;\;(7) - \;\;(6)\\
\lambda_9''' &= +\,0{,}04 + u''' + \;\;(8) - \;\;(7)\\
\lambda_{10}''' &= +\,0{,}36 + u''' + \;\;(9) - \;\;(8)\\
\lambda_{11}''' &= +\,0{,}68 + u''' + (10) - \;\;(9)\\
\lambda_{12}''' &= +\,0{,}51 + u''' + (11) - (10)
\end{aligned}\right\}\ \begin{array}{c}\text{Mittel aus einer Doppel-}\\\text{reihe und zwei einfachen}\\\text{Reihen bei }165^0\text{ Abstand}\\\text{der Mikroskope.}\end{array}$$

In diesen Fehlergleichungen sind für die Konstanten u, u', u'', u''' schon solche Näherungswerte eingeführt, daß die Summe der (so umgeänderten) Beobachtungszahlen gerade null wird, und es bedeuten daher u, u', u'', u''' in den Fehlergleichungen nunmehr die weitern Verbesserungen der Näherungswerte. Setzen wir ferner, anstatt die Verbesserung (0) gleich null zu nehmen,

$$(6)\qquad (0) + (1) + (2) + \cdots + (10) + (11) = 0.$$

so wird alsdann, wie die Bildung der Normalgleichungen für die u zeigt, jeder dieser Werte null. Als Normalgleichungssystem im engern Sinne ergibt sich damit:

(7)

Normalgleichungen.

$$
\begin{array}{l}
8(0)-(1)-(2)-(3)-(4)\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot-(8)-(9)-(10)-(11)+k=-\ 5{,}96\\
-(0)+8(1)-(2)-(3)-(4)-(5)\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot-(9)-(10)-(11)+k=-12{,}53\\
-(0)-(1)+8(2)-(3)-(4)-(5)-(6)\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot-(10)-(11)+k=-\ 9{,}50\\
-(0)-(1)-(2)+8(3)-(4)-(5)-(6)-(7)\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot-(11)+k=-\ 1{,}31\\
-(0)-(1)-(2)-(3)+8(4)-(5)-(6)-(7)-(8)\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot+k=+\ 1{,}27\\
\cdot-(1)-(2)-(3)-(4)+8(5)-(6)-(7)-(8)-(9)\quad\cdot\quad\cdot+k=+\ 9{,}11\\
\cdot\quad\cdot-(2)-(3)-(4)-(5)+8(6)-(7)-(8)-(9)-(10)\quad\cdot+k=+\ 6{,}44\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot-(3)-(4)-(5)-(6)+8(7)-(8)-(9)-(10)-(11)+k=+\ 4{,}04\\
-(0)\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot-(4)-(5)-(6)-(7)+8(8)-(9)-(10)-(11)+k=+\ 4{,}88\\
-(0)-(1)\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot-(5)-(6)-(7)-(8)+8(9)-(10)-(11)+k=+\ 4{,}71\\
-(0)-(1)-(2)\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot-(6)-(7)-(8)-(9)+8(10)-(11)+k=+\ 2{,}09\\
-(0)-(1)-(2)-(3)\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot-(7)-(8)-(9)-(10)+8(11)+k=-\ 3{,}24\\
+(0)+(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(6)+(7)+(8)+(9)+(10)+(11)\quad\cdot\quad=\ 0\ .
\end{array}
$$

Addiert man die ersten zwölf Gleichungen dieses Systems, so folgt

$$12k = 0, \quad \text{also} \quad k = 0. \tag{8}$$

Da es uns nicht auf Gewichtsberechnung ankommt, so wandeln wir nun das System zu bequemerer Ermittlung der Unbekannten um, indem wir zu jeder der zwölf ersten Gleichungen die letzte addieren; das gibt:

$$\begin{aligned} 9(0) + (5) + (6) + (7) &= -5{,}96 \\ 9(1) + (6) + (7) + (8) &= -12{,}53 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad &\cdot \quad \cdot \end{aligned} \tag{9}$$

oder behufs indirekter Auflösung:

$$\begin{aligned}
(0) &= -0{,}662 - \frac{(5) + (6) + (7)}{9} \\
(1) &= -1{,}392 - \frac{(6) + (7) + (8)}{9} \\
(2) &= -1{,}056 - \frac{(7) + (8) + (9)}{9} \\
(3) &= -0{,}146 - \frac{(8) + (9) + (10)}{9} \\
(4) &= +0{,}141 - \frac{(9) + (10) + (11)}{9} \\
(5) &= +1{,}012 - \frac{(10) + (11) + (0)}{9} \\
(6) &= +0{,}716 - \frac{(11) + (0) + (1)}{9} \\
(7) &= +0{,}449 - \frac{(0) + (1) + (2)}{9} \\
(8) &= +0{,}543 - \frac{(1) + (2) + (3)}{9} \\
(9) &= +0{,}523 - \frac{(2) + (3) + (4)}{9} \\
(10) &= +0{,}232 - \frac{(3) + (4) + (5)}{9} \\
(11) &= -0{,}360 - \frac{(4) + (5) + (6)}{9}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Zur Kontrolle dient der Umstand, daß die Summe dieser Unbekannten gleich null sein muß für jedes rechter Hand eingeführte und der Gleichung (6) genügende Wertsystem. Nehmen wir als erste Näherungswerte der Teilungsfehler die Zahlen rechter Hand, deren Summe in der Tat null ist, und führen dieselben für

(0), (1), ... (11) rechter Hand ein, so erhalten wir als Verbesserungen der ersten Näherungswerte:

(11)	(0)	− 0,242	(6)	+ 0,268	Summe gleich null.
	(1)	− 0,190	(7)	+ 0,346	
	(2)	− 0,168	(8)	+ 0,288	
	(3)	− 0,144	(9)	+ 0,118	
	(4)	− 0,044	(10)	− 0,112	
	(5)	+ 0,088	(11)	− 0,208	

Eine speziellere Kontrolle hat man noch dadurch, daß die Summen der Verbesserungen für (0), (3), (6), (9); (1), (4), (7), (10); (2), (5), (8), (11) einzeln null sein müssen, wie ein Blick auf die Gleichungen lehrt. Führen wir nun die erhaltenen Verbesserungen in die Gleichungen (10) ein, so ergeben sich die weitern Verbesserungen:

(12)	(0)	− 0,077	(6)	+ 0,071	Summe gleich null,
	(1)	− 0,100	(7)	+ 0,066	
	(2)	− 0,084	(8)	+ 0,056	
	(3)	− 0,033	(9)	+ 0,040	
	(4)	+ 0,022	(10)	+ 0,011	
	(5)	+ 0,062	(11)	− 0,035	

und daraus neue Verbesserungen:

(13)	(0)	− 0,022	(6)	+ 0,024	Summe gleich null,
	(1)	− 0,022	(7)	+ 0,029	
	(2)	− 0,018	(8)	+ 0,024	
	(3)	− 0,012	(9)	+ 0,011	
	(4)	− 0,002	(10)	− 0,006	
	(5)	+ 0,011	(11)	− 0,017	

und damit endlich:

(14)	(0)	− 0,007	(6)	+ 0,007	Summe gleich null.
	(1)	− 0,009	(7)	+ 0,007	
	(2)	− 0,007	(8)	+ 0,007	
	(3)	− 0,003	(9)	+ 0,004	
	(4)	+ 0,001	(10)	+ 0,000	
	(5)	+ 0,005	(11)	− 0,004	

Im ganzen sind daher die Durchmesserkorrektionen:

$$(15)\quad \begin{array}{ll} (0) = -1{,}01_0 & (6) = +1{,}08_6 \\ (1) = -1{,}71_3 & (7) = +0{,}89_7 \\ (2) = -1{,}33_3 & (8) = +0{,}91_8 \\ (3) = -0{,}33_8 & (9) = +0{,}69_6 \\ (4) = +0{,}11_8 & (10) = +0{,}12_4 \\ (5) = +1{,}17_8 & (11) = -0{,}62_4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{Summe:} \\ \hline +5{,}01_7 - 5{,}01_8. \end{array}$$

Mit diesen ergeben sich die Verbesserungen der Beobachtungen wie folgt:

(16)

	λ	λ'	λ''	λ'''
	$+0{,}''19$	$+0{,}''11$	$+0{,}''25$	$-0{,}''20$
	$+0{,}01$	$-0{,}04$	$-0{,}07$	$-0{,}39$
	$-0{,}17$	$-0{,}09$	$+0{,}37$	$-0{,}13$
	$+0{,}03$	$+0{,}01$	$-0{,}05$	$-0{,}03$
	$+0{,}34$	$-0{,}06$	$+0{,}02$	$+0{,}28$
	$-0{,}26$	$+0{,}18$	$-0{,}34$	$+0{,}56$
	$-0{,}20$	$-0{,}05$	$+0{,}03$	$+0{,}08$
	$+0{,}06$	$-0{,}05$	$+0{,}30$	$-0{,}24$
	$+0{,}05$	$-0{,}24$	$+0{,}35$	$+0{,}06$
	$+0{,}02$	$-0{,}03$	$-0{,}24$	$+0{,}14$
	$-0{,}21$	$+0{,}13$	$-0{,}23$	$+0{,}11$
	$+0{,}14$	$+0{,}13$	$-0{,}35$	$-0{,}24$
Summen:	$+0{,}84$	$+0{,}56$	$+1{,}32$	$+1{,}23$
	$-0{,}84$	$-0{,}56$	$-1{,}28$	$-1{,}23$

Hieraus folgt $[\lambda\lambda] = 2{,}043$ in hinreichender Übereinstimmung mit der Berechnung nach (13), S. 266. Ferner ist der m. F.

$$(17)\qquad \mu = \pm\sqrt{\frac{2{,}043}{48-16+1}} = \sqrt{0{,}0619} = \pm\, 0{,}''25.$$

Die Verteilung der λ nach Vorzeichen und Größe ist gut, was speziell nachzuweisen wir dem Leser überlassen.

Die reziproken Gewichte der Durchmesserkorrektionen sind offenbar, wie die Form der Gleichungen (7) zeigt, alle gleich; man kann sie in derselben Weise durch schrittweise Annäherung wie die Korrektionen selbst finden. Im System (7) setzt man z. B. in der ersten Gleichung auf der rechten Seite anstatt der Beobachtungszahl eine 1, in den anderen Gleichungen aber null. Man findet leicht $k = 1:12$; in den Gleichungen (10) ist nun rechter Hand im allgemeinen anstatt der Beobachtungszahlen $-1:108$ zu setzen, bei der ersten aber 11:108. Die (0), (1), ... bedeuten jetzt $Q_{0\cdot0}$, $Q_{0\cdot1}$, usw. Aus $Q_{0\cdot0} = Q_{1\cdot1} = Q_{2\cdot2}$ usw. folgt als mittlerer Fehler der einzelnen Durchmesserkorrektionen:

$$\pm\sqrt{0{,}0619\cdot0{,}1086} = \pm 0{,}''082. \tag{18}$$

Die reziproken Gewichte der Unterschiede zweier Korrektionen sind etwas verschieden für verschiedene Kombinationen.

Für zwei benachbarte Durchmesser folgt ein kleinster m. F. aus $Q_{0\cdot0} = Q_{1\cdot1} = 0{,}1086$ und $Q_{1\cdot2} = -0{,}0040$ gleich

$$\pm\sqrt{0{,}0619\,(0{,}2172 + 0{,}0080)} = \pm 0{,}''118. \tag{19}$$

Mit dem Abstand der Durchmesser wächst der m. F. und erreicht sein Maximum für Kombinationen von der Art (6) — (0) mit

$$\pm\sqrt{0{,}0619\,(0{,}2172 + 0{,}0408)} = \pm 0{,}''126. \tag{20}$$

Der periodische Charakter der Durchmesserkorrektionen in Tabelle (15) ist nicht zu verkennen; um denselben recht zur Geltung zu bringen, hat der Beobachter bei den Messungen die zufälligen Teilungsfehler dadurch möglichst eliminiert, daß immer drei Striche nebeneinander eingestellt und aus den drei Ablesungen das Mittel genommen wurde. Bei graphischer Darstellung tritt der periodische Charakter schön hervor.

III. Symmetrisches Verfahren. Betrachtet man im vorstehenden Beispiel die Normalgleichungen (7) und ihre Entstehung, so erkennt man, daß es vorteilhaft gewesen wäre, noch die Reihen mit 105⁰ und mit 90⁰ Abstand der Mikroskoppaare zu beobachten, und zwar erstere mit demselben Gewicht, wie die anderen Reihen, letztere dagegen mit halbem Gewicht (also ohne Wiederholung). Dann würde jede Normalgleichung eine Unbekannte mit dem Koeffizienten 11 und außerdem alle andern Unbekannten enthalten. Mit Rücksicht auf die Bedingung (6) ergibt sich dann einfach für die Gleichung (9):

12 (0) = einer Beobachtungsgröße,
12 (1) = „ „
usw.

Die Berechnung der Unbekannten wird somit sehr einfach.

Dies gilt auch für die reziproken Gewichte. Dasjenige der Korrektionen wird $\frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{12}\right)$, d. i. 0,0764; für die Unterschiede zweier Korrektionen folgt allgemein $\frac{1}{12} \cdot 2$, d. i. 0,1667. Als Gewichtseinheit gilt hierbei eine Fehlergleichung wie im Beispiel.

Im Beispielsfalle war die Anzahl der Durchmesserkorrektionen gleich 12. Ist allgemein diese Anzahl r eine gerade Zahl, so erhält man die einfache Form der umgeformten Normalgleichung für die Korrektion (i):

(1) $$2r(i) = L_i, \text{ einer Beobachtungsgröße,} \quad i = 0, 1, \ldots (r-1),$$

wenn der Reihe nach der Winkelabstand der Mikroskoppaare gleich

(2) $$\alpha \cdot \frac{180^0}{r}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots (r-1),$$

genommen wird. Bei jedem Winkelabstand sind der Reihe nach r Stellungen (Sätze) zu beobachten, wobei das eine Mikroskop bzw. auf

(3) $$0^0, \quad \frac{180^0}{r}, \quad 2 \cdot \frac{180^0}{r}, \ldots (r-1)\frac{180^0}{r}$$

zu stellen ist (und dann in umgekehrter Reihenfolge zurück behufs Elimination von Änderungen, die der Zeit proportional verlaufen).*)

Da die Winkelabstände mit $\alpha = 1$ und $r-1$, mit 2 und $r-2$, usw. Beobachtungen für dieselben Unterschiede der Durchmesserkorrektionen geben, so genügt es, in den Ausdrücken (2) α nur von 1 bis $\frac{r}{2}$ gehen zu lassen; man muß aber nun beobachten

(2*) $$\begin{cases} \text{bei } \alpha = 1 \text{ bis } \frac{r}{2} - 1 \text{ je zwei Doppelreihen,} \\ \text{bei } \alpha = \frac{r}{2} \text{ eine Doppelreihe.} \end{cases}$$

Ist die Anzahl der Durchmesserkorrektionen r eine ungerade Zahl, so ist bei den Winkelabständen

*) Bei der Umkehr dreht man auch die Mikrometerschrauben um $\frac{1}{2}$ Rev., um einen Teil ihrer Periodizität zu eliminieren. —

Das Gewicht einer Doppelreihe ist oben gleich 1 angenommen, also doppelt so groß wie im vorigem Beispiel, wo das Mittel zweier Doppelreihen das Gew. 1 erhalten hatte.

$$\alpha \cdot \frac{180^\circ}{r}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots \frac{r-1}{2} \tag{4}$$

zu beobachten; das eine Mikroskop ist für jede Reihe auf die durch die Gradzahlen (3) gegebenen Lagen zu stellen. Die Normalgleichungen erhalten wieder die Form (1), wenn jede Doppelreihe zweimal beobachtet wird. Man kann aber bei ungeraden r auch mit einfachen Doppelreihen auskommen; dann fällt in Gl. (1) der Faktor 2 weg.

Abgesehen hiervon ist die für diese Programme zu leistende Arbeit mit Rücksicht darauf, daß jede Reihe rückwärts wiederholt wird und bei jedem Satze vier Mikroskope abzulesen sind, gleich

$$8\,r\,(r-1)\ \text{Ablesungen,} \tag{5}$$

falls bei jedem Satze an jedem Mikroskop nur eine Ablesung erfolgt.

In bezug auf die Bildung der Normalgleichungen ist zu bemerken, daß man dabei der Übersichtlichkeit wegen die Fehlergleichungen, wie im Beispiel, hinschreiben wird. Ist nun A, B das eine Mikroskoppaar, C, D das andere, und bei dem Zwischenwinkel (ih) aus den Ablesungen

$$l_i = \frac{A + B - 180^\circ}{2}, \qquad l_h = \frac{C + D - 180^\circ}{2} \tag{6}$$

berechnet, ist ferner $(ih) =$ einem runden Gradwert $W + u$, so wird

$$-(l_i + (i)) + (l_h + (h)) + \lambda_{i \cdot h} = W + u \tag{6*}$$

oder

$$\left\{\begin{array}{l} (i) - (h) = l_{i \cdot h} + \lambda_{i \cdot h}, \\ \text{wobei } l_{i \cdot h} = l_h - l_i - W - u. \end{array}\right. \tag{7}$$

Da bei der Bildung der Normalgleichungen u herausfällt, so könnte man es bei Seite lassen: indessen braucht man es zur Berechnung der übrigbleibenden Fehler $\lambda_{i \cdot h}$. Es ist aber

$$u = \frac{1}{r}\,[l_h - l_i - W], \tag{8}$$

wobei die Summierung sich auf alle Sätze der Reihe mit dem Winkelabstand W der Mikroskoppaare bezieht.

L_i ist nun das Aggregat aller $l_{i \cdot h}$ mit konst. Index i und mit Index h von $0 \ldots r-1$, wobei $+\,l_{i \cdot h}$ zu nehmen ist, wenn (i) linker Hand in der Fehlergleichung (7) positiv ist; im andern Falle ist $-\,l_{i \cdot h}$ zu nehmen.

Als reziprokes Gewicht einer Durchmesserkorrektion erhält man, vergl. das gegebene Beispiel, da für die Gewichtsberechnung $k = 1 : 2r$ und $Q_{1.1} = Q_{2.2}$ usw. $= \frac{1}{2r}\left(1 - \frac{1}{2r}\right)$, $Q_{1.2} = Q_{1.3}$ usw. $= -\frac{1}{2r} \cdot \frac{1}{2r}$ wird, den Betrag

$$(9) \qquad \frac{1}{2r}\left(1 - \frac{1}{2r}\right).$$

Dagegen folgt für den Unterschied zweier beliebigen Durchmesserkorrektionen das reziproke Gewicht gleich

$$(10) \qquad \frac{1}{r}.$$

Diesen Betrag erhält man, außer durch die Q, auch dadurch, daß man sich in den ursprünglichen Normalgleichungen statt der Beobachtungszahlen z. B. im Falle $(0) - (1)$ geschrieben denkt der Reihe nach $+1$, -1 und dann immer null:

$$\begin{array}{rrrcl}
2r - 1 \cdot (0) - & 2 \cdot (1) - & 2 \cdot (2) \cdots + k & = & +1 \\
-2 \cdot (0) + & 2r - 1 \cdot (1) - & 2 \cdot (2) \cdots + k & = & -1 \\
-2 \cdot (0) - & 2 \cdot (1) + & 2r - 1 \cdot (2) \cdots + k & = & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Jetzt wird nach Ausweis der Addition $k = 0$; die mit der Bedingungsgleichung umgeformten Normalgleichungen geben $(0) = +1 : 2r$, $(1) = -1 : 2r$, also wird das reziproke Gewicht:

$$(0) - (1) = \frac{1}{r} \text{ w. o.*)}$$

Als Gewichtseinheit gilt bei den Zahlenwerten (9) und (10) ebenso wie bei Gl. (1) eine Fehlergleichung, die aus einer Doppelreihe (d. i. Reihe mit Hin- und Hergang) hervorgeht. Ist m der m. F. einer Mikroskopablesung bei einem Satze, so folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (6) und (7) das mittlere Fehlerquadrat einer Fehlergleichung gleich m^2 bei einer einfachen Reihe (d. i. nur Hingang). Bei einer Doppelreihe ist also das mittlere Fehlerquadrat einer Fehlergleichung gleich $m^2 : 2$.

---

*) Hierbei kommt die allgemeine Formel (14), S. 290, in Betracht. Sie reduziert sich im vorliegenden Falle, der der Aufgabe des § 3, S. 265, entspricht, auf die Formel (11), S. 182, welche auf S. 265 noch hätte angegeben werden können.

Generalleutnant Schreiber hat 1886 in der Abhandlung: „Untersuchung von Kreisteilungen mit zwei und vier Mikroskopen“ (Zeitschr. für Instrumentenkunde) angegeben, wie man Durchmesserkorrektionen und Strichkorrektionen am zweckmäßigsten bestimmt, um für alle Unterschiede von je zwei derselben dasselbe Gewicht zu erhalten. Er erwähnt dabei auch den Kreisteilungsuntersucher von Wanschaff, dessen Anschaffung sich lohnt, wenn man viele Kreise zu untersuchen hat.

Schreiber erörtert auch u. a. die Anwendung von vier beliebig zu verstellenden Mikroskopen zur Bestimmung von Strichkorrektionen. Jedoch hat dies nur für besondere Fälle Bedeutung (Teilmaschinen); für gewöhnlich ist die Exzentrizität zu veränderlich, um sie sowohl bei der Untersuchung der Teilung als bei dem Gebrauch als konstant ansehen zu können.

Zu bemerken ist, daß schon C. A. F. Peters bei der Untersuchung der Teilungsfehler des Ertelschen Vertikalkreises der Sternwarte zu Pulkowa (siehe: W. Struve. Recueil des mémoires présentés à l'académie des sciences par les astronomes de Poulkovo, Bd. 1) die Durchmesserkorrektionen in 15° Abstand nach dem geschilderten symmetrischen Verfahren bestimmte, und zwar für fünf Systeme von Nachbarstrichen einzeln.

Um die Teilungsfehler für die Beobachtungsstellen des Polarsterns zu bestimmen, wandte Peters ein Verfahren an wie Bessel, Astr. Nachr., Nr. 491, das auf einer Art Reïteration beruht.

IV. Verfahren von H. Bruns.*) Wenn eine Teilung in kleinem Intervall untersucht werden soll, so zeigen sich zwei Übelstände. Erstens können die Mikroskope oftmals nicht ohne weiteres so dicht aneinander gebracht werden, um das Schreibersche Verfahren anzuwenden; zweitens wird die Anzahl der Ablesungen überaus groß. Sind z. B. $r = 45$ Durchmesser zu untersuchen, d. h. von 4 zu 4°, so wird nach (5), S. 452, die Anzahl der erforderlichen Ablesungen $8 \cdot 45 \cdot 44 = 15840$. (Da r ungerade ist, so kann man auch nach S. 452 mit halbem Programm auskommen, also mit 7920 Ablesungen.) Das Ge-

*) Untersuchung einer Wanschaffschen Teilung. (Astr. Nachr., Bd. 130 (1892), Nr. 3098, Sp. 17—42.)

wicht für den Unterschied zweier Durchmesserkorrektionen ist gleich 45, der m. F. also nach S. 453 gleich $m : \sqrt{90}$, wenn m der m. F. einer Mikroskopablesung ist. Diese Genauigkeit ist unnötig groß. Nach dem Verfahren von Bruns kann man mit einer kleineren Anzahl Ablesungen auskommen, wenn man auf die strenge Gleichheit der Gewichte für alle Unterschiede verzichtet. Zugleich entfällt die Notwendigkeit, die Mikroskope in 4° Abstand zu stellen. Wir erläutern dies an dem Beispiel.

Bestimmung der 45 Durchmesserkorrektionen von 4 zu 4°. Versteht man unter einer Rosette eine Gruppe gleichmäßig über 180° verteilter Durchmesser, so kann man die 45 Durchmesser, um die es sich handelt, offenbar zu fünf Rosetten mit neun Durchmessern gruppieren wie folgt:

	1.	0°	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°
	2.	4	24	44	64	84	104	124	144	164
(1)	3.	8	28	48	68	88	108	128	148	168
	4.	12	32	52	72	92	112	132	152	172
	5.	16	36	56	76	96	116	136	156	176.

Jede dieser Rosetten kann nach dem Schreiberschen Verfahren untersucht werden, wobei Mikroskop A der Reihe nach die Stellungen einnimmt, welche die Horizontalreihen in der Übersicht (1) angeben (und zurück) und wobei der Winkel zwischen den Mikroskoppaaren ist:

$$20^0, \quad 40^0, \quad 60^0, \quad 80^0. \tag{2}$$

Bei der üblichen Berechnung wird die Summe der Durchmesserkorrektionen für jede Rosette einzeln zu null angesetzt. Betrachtet man aber die Rosetten zusammen, so kann man daran nicht festhalten. Es ist dann für jede Rosette noch eine Konstante zu bestimmen, die ihren sämtlichen Durchmesserkorrektionen hinzuzufügen ist. Immerhin wird man sich oftmals mit diesem 1. Teil der Untersuchung begnügen können.

Um nun aber die Rosetten in Zusammenhang zu bringen, gruppieren wir die 45 Durchmesser noch zu neun Rosetten mit je fünf Durchmessern:

	6.	0°	36°	72°	108°	144°
	7.	4	40	76	112	148
	8.	8	44	80	116	152
	9.	12	48	84	120	156
(3)	10.	16	52	88	124	160
	11.	20	56	92	128	164
	12.	24	60	96	132	168
	13.	28	64	100	136	172
	14.	32	68	104	140	176.

Auch diese Rosetten werden einzeln wie üblich beobachtet. Der Winkel zwischen den Mikroskoppaaren ist zu setzen gleich:

(4) $$36^0 \text{ und } 72^0.$$

Die Anzahl der Ablesungen für die sämtlichen 14 Rosetten beträgt, da im Ausdruck (5), S. 452, $r = 9$ und 5 zu setzen ist:

(5) $$8(72 \cdot 5 + 20 \cdot 9) = 8 \cdot 45(8 + 4) = 4320.$$

Hierbei ist angenommen, daß jede Reihe rückwärts wiederholt wird und dann noch eine zweite solche Doppelreihe zur Messung gelangt. Unterläßt man die Wiederholung der Doppelreihe, so geht die Anzahl der Ablesungen auf 2160 herab (was mit der S. 454 gefundenen Anzahl 7920 vergleichbar ist).

Zur Bestimmung der Durchmesserkorrektion (0) hat man aus den Sätzen mit 1 Mikr. auf 0° folgende Fehlergleichungen:

(6)
$$\begin{aligned}
&+\ \ (0) - (20) + u_{1\cdot 20} = l_{0\cdot 20} + \lambda_{0\cdot 20}\\
&+ (160) - \ \ (0) + u_{1\cdot 20} = l_{160\cdot 0} + \lambda_{160\cdot 0}\\
&+\ \ (0) - (40) + u_{1\cdot 40} = l_{0\cdot 40} + \lambda_{0\cdot 40}\\
&+ (140) - \ \ (0) + u_{1\cdot 40} = l_{140\cdot 0} + \lambda_{140\cdot 0}\\
&+\ \ (0) - (60) + u_{1\cdot 60} = l_{0\cdot 60} + \lambda_{0\cdot 60}\\
&+ (120) - \ \ (0) + u_{1\cdot 60} = l_{120\cdot 0} + \lambda_{120\cdot 0}\\
&+\ \ (0) - (80) + u_{1\cdot 80} = l_{0\cdot 80} + \lambda_{0\cdot 80}\\
&+ (100) - \ \ (0) + u_{1\cdot 80} = l_{100\cdot 0} + \lambda_{100\cdot 0}\\
&+\ \ (0) - (36) + u_{6\cdot 36} = l_{0\cdot 36} + \lambda_{0\cdot 36}\\
&+ (144) - \ \ (0) + u_{6\cdot 36} = l_{144\cdot 0} + \lambda_{144\cdot 0}\\
&+\ \ (0) - (72) + u_{6\cdot 72} = l_{0\cdot 72} + \lambda_{0\cdot 72}\\
&+ (108) - \ \ (0) + u_{6\cdot 72} = l_{108\cdot 0} + \lambda_{108\cdot 0}.
\end{aligned}$$

Hierbei ist l nach S. 452 (6) und (7) zu verstehen und gedacht, daß u nach S. 452 (8) berücksichtigt ist, so daß im System (6) die u nur noch Verbesserungen bedeuten, die den Wert null haben.

Die Normalgleichung für (0) wird nunmehr mit geringer Umwandlung:

$$(7) \qquad 14(0) - S_0^{20} - S_0^{36} = +[l_{0 \cdot h}] - [l_{i \cdot 0}]_1 - [l_{i \cdot 0}]_2,$$

worin zu setzen ist:

$$(8) \qquad \begin{aligned} S_0^{20} &= (0) + (20) + (40) + \cdots + (160), \\ S_0^{36} &= (0) + (36) + (72) + (108) + (144), \end{aligned}$$

$$(9) \qquad \begin{aligned} [l_{0 \cdot h}] &= l_{0 \cdot 20} + l_{0 \cdot 40} + l_{0 \cdot 60} + l_{0 \cdot 80} + l_{0 \cdot 36} + l_{0 \cdot 72} \\ [l_{i \cdot 0}]_1 &= l_{160 \cdot 0} + l_{140 \cdot 0} + l_{120 \cdot 0} + l_{100 \cdot 0} \\ [l_{i \cdot 0}]_2 &= l_{144 \cdot 0} + l_{108 \cdot 0}. \end{aligned}$$

Schreibt man anstatt (7) kürzer:

$$(7^*) \qquad 14(0) - S_0^{20} - S_0^{36} = F(0),$$

wo also F die aus den l abgeleitete Beobachtungsgröße ist, und denkt man sich die entsprechenden Gleichungen für (20)...(160) hingeschrieben und addiert, so folgt, wenn

$$(10) \qquad (0) + (4) + (8) + \cdots + (176) = 0$$

gesetzt wird:

$$(11) \quad 14 S_0^{20} - 9 S_0^{20} = F(0) + F(20) + F(40) + \cdots + F(160).$$

Denn S^{20} erhält für die neun Fälle immer denselben Wert, wie ihn die erste der Gleichungen (8) angibt, während S^{36} der Reihe nach, indem es mit (0), (20) ... beginnt, dergestalt wechselt, daß ΣS^{36} für die neun Fälle gerade alle Durchmesserkorrektionen enthält (vergl. die Übersicht (3)) und nach Gl. (10) null wird.

Aus Gl. (11) folgt

$$(12) \qquad S_0^{20} = \frac{1}{5}\{F(0) + F(20) + F(40) + \cdots + F(160)\}.$$

In gleicher Weise wird

$$(13) \qquad S_0^{36} = \frac{1}{9}\{F(0) + F(36) + F(72) + F(108) + F(144)\}.$$

Nunmehr folgt aus der Normalgleichung (7*):

$$(14)\quad \begin{aligned} 14(0) = F(0) + \frac{1}{5}\{F(0) + F(20) + F(40) + \cdots + F(160)\} \\ + \frac{1}{9}\{F(0) + F(36) + F(72) + \cdots + F(144)\}. \end{aligned}$$

Entsprechend gestaltet sich die Rechnung für alle Verbesserungen. Die Berechnung der F wird erleichtert, wenn man entweder die Fehlergleichungen ganz hinschreibt, oder wenigstens die $l_{i \cdot h}$ in vier Tabellen von der Gruppierung (1) und zwei Tabellen von der Gruppierung (3) mit Angabe der Indices ih hinschreibt.

Denkt man sich die Normalgleichungen (7*) für alle unbekannten Durchmesserkorrektionen hingeschrieben, so erkennt man leicht, daß diese alle gleiches Gewicht erlangen, während ihre Unterschiede ungleiche Gewichte erhalten. Um ersteres zu finden, entwickeln wir das reziproke Gewicht von (0) und ersetzen also in (7*) $F(0)$ durch 1, in den anderen Normalgleichungen werden die F gleich null. Dann ist noch wegen der Bedingung (10) links die Größe k beizufügen. An Stelle der Unbekannten (0), (4) usw. treten nun in bekannter Weise die Größen Q. Die Addition aller 45 Gleichungen gibt $45k = 1$, $k = 1:45$.

Geht man nun über von (7*) zu den Gleichungen (11) und (12), (13), so folgt

$$S_0^{20} = -\frac{9}{5}k + \frac{1}{5}, \qquad S_0^{32} = -\frac{5}{9}k + \frac{1}{9};$$

daher wird das reziproke Gewicht von (0) und allen anderen Durchmesserkorrektionen nach (7*) gleich:

$$(15)\qquad \frac{1}{14}\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{45}\left(1 + \frac{9}{5} + \frac{5}{9}\right)\right).$$

Dieser Ausdruck folgt auch sofort aus Gl. (14), wenn man für $F(0) \ldots 1 - k$ setzt, für die andern F aber $-k$.

Das Gewicht ist also $14:1{,}237 = 11{,}32$. Die Gewichtseinheit entspricht einer Fehlergleichung aus einer Doppelreihe mit dem mittlern Fehlerquadrat $\frac{m^2}{2}$; m ist der mittlere Fehler einer Mikroskopablesung, S. 453.

Um dieses Gewicht für die 45 Durchmesser zu erreichen, sind bei Anwendung von Doppelreihen 2160 Mikroskopablesungen nötig, das gibt die „Aufwandszahl“

$$(16)\qquad 2160 : (45 \cdot 11{,}32 \cdot 2) = 2{,}12\,,$$

wobei 11,32 mit 2 multipliziert ist, um die einzelne Mikroskopablesung zur Gewichtseinheit zu machen.

Bei der völlig symmetrischen Methode waren $2 \cdot 7920$ Ablesungen nötig, um das Gewicht $90 : \left(1 - \frac{1}{90}\right)$ zu erreichen. Die Aufwandszahl ist dementsprechend gleich:

$$(16^*)\qquad 2 \cdot 7920 : (45 \cdot 91 \cdot 2) = 1{,}93\,.$$

Der Verlust bei (16) ist somit rund $10\%_0$.

Um das reziproke Gewicht für den Unterschied $-(0) + (20)$ zu erhalten, setzen wir $F(0) = -1$ und $F(20) = +1$. Eine der vorigen ähnliche Rechnung gibt dann $k = 0$, $S_0^{20} = 0$, $S_0^{36} = -\frac{1}{9}$; ferner wird (wie auch Gl. (14) zeigt):

$14(0) = -1 - \frac{1}{9}$; entsprechend muß sein $14(20) = +1 + \frac{1}{9}$.

Daher wird das reziproke Gewicht gleich

$$(17)\qquad \frac{2}{14}\left(1 + \frac{1}{9}\right)$$

und das Gewicht $= 7 \cdot 0{,}9 = 6{,}3$. Dies gilt für alle Unterschiede zweier Durchmesser von 20^0 Abstand und dessen Vielfachen.

In gleicher Weise folgt das reziproke Gewicht

$$(18)\qquad \frac{2}{14}\left\{1 + \frac{1}{5}\right\}$$

und das Gewicht $7 \cdot 5 : 6 = 5{,}8$ bei allen Unterschieden von 36^0, oder Vielfachen davon.

Betrachtet man einen Unterschied $-(0) + (4)$ oder allgemeiner $-(0) + (i)$, wo i nicht 20 oder 36 oder Vielfaches davon ist, so wird wie bei der vorigen Rechnung wieder $k = 0$. Geht man nun von (7^*) zu den Gleichungen (12) und (13) über, wobei $F(0) = -1$ und $F(i) = +1$ zu setzen ist, so folgt

$$S_0^{20} = -\frac{1}{5}\,,\qquad S_0^{36} = -\frac{1}{9}$$

und damit (oder auch unmittelbar aus Gl. (14)):

$$14(0) = -1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{9}.$$

Ganz entsprechend muß werden

$$14(i) = +1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9}.$$

Somit folgt das reziproke Gewicht des Unterschieds gleich

$$\frac{2}{14}\left\{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9}\right\}$$

und das Gewicht gleich

$$(19) \qquad 7 \cdot 45 : 59 = 5{,}3.$$

Dies gilt (wie der Anblick von Gleichung (14) leicht erkennen läßt) für alle Unterschiede mit Ausnahme derjenigen, die 20^0 oder 36^0 oder Vielfache davon sind.

Die Anzahl der Fehlergleichungen ist gleich

$$9 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 9 \cdot 2 = 270.$$

Unbekannt sind 45 Durchmesserkorrektionen, zwischen denen aber eine Bedingungsgleichung besteht; dann sind noch $5 \cdot 4 + 9 \cdot 2 = 38$ Reihenkorrektionen zu bestimmen. Der m. F. μ einer Fehlergleichung, d. i. der Gewichtseinheit, ist daher zu berechnen aus der Formel

$$(20) \qquad \mu^2 = [\lambda\lambda] : (270 - 45 - 38 + 1).$$

Vorstehendes Beispiel ist ohne weiteres übertragbar auf alle Fälle, wo die Anzahl r der Durchmesserkorrektionen sich in zwei Faktoren zerlegen läßt, die ungerade und teilerfremd zueinander sind. Es können aber auch Fälle vorkommen, wo dies nicht zutrifft. Wir erläutern dies an dem folgenden Beispiel.

Beispiel. Bestimmung von zwölf Durchmessern in 15^0 Abstand. In Wirklichkeit wird man hier direkt nach Schreiber verfahren. Da $r = 12$ gerade ist, sind elf Doppelreihen zu beobachten von je zwölf Sätzen mit $8 \cdot 11 \cdot 12 = 1056$ Ablesungen. Das Gewicht einer Durchmesserkorrektion wird $24 : \left(1 - \frac{1}{24}\right) = 25$ und die Aufwandszahl $1056 : (12 \cdot 25 \cdot 2) = 1{,}76$.

Das Brunssche Verfahren kann man hier in doppelter Weise anwenden. Erstens kann man die zwölf Durchmesser in vier Rosetten zu drei Durchmessern mit 60^0 Zwischenwinkeln und drei Rosetten zu vier Durchmessern mit 45^0 Zwischenwinkeln gruppieren, zweitens aber in zwei Rosetten zu sechs Durchmessern in 30^0 Abstand und drei Rosetten zu vier Durchmessern in 45^0 Abstand.

In beiden Fällen muß man mit vollem Programm arbeiten, da im ersten Falle wenigstens die eine Durchmesseranzahl, im zweiten Falle aber beide gerade Zahlen sind.

Im ersten Falle kommt A auf:

(21)

1.	0^0	60^0	120^0	5.	0^0	45^0	90^0	135^0
2.	15	75	135	6.	15	60	105	150
3.	30	90	150	7.	30	75	120	165
4.	45	105	165		Winkel $= 45^0, 90^0, 135^0$.			
	Winkel $= 60^0$ und 120^0				Dasselbe dann zurück.			

Bei der Aufstellung der Normalgleichungen zeigt sich, daß infolge des vollen Programms linker Hand die Unbekannten im Vergleich zum vorigen Beispiel noch den Faktor 2 erhalten. In Gl. (14) wird daher der Faktor von (0) gleich $2(3+4)$, also ist

$$(22)\qquad \begin{aligned} 14(0) = F(0) &+ \frac{1}{4}\{F(0) + F(60) + F(120)\} \\ &+ \frac{1}{3}\{F(0) + F(45) + F(90) + F(135)\}. \end{aligned}$$

Das reziproke Gewicht der Durchmesserkorrektionen wird, vergl. S. 458:

$$(23)\qquad \frac{1}{14}\left\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\left(1 + \frac{3}{4} + \frac{4}{3}\right)\right\}.$$

Das Gewicht ist also 10,6 und die Aufwandszahl gleich $480 : (12 \cdot 10{,}6 \cdot 2) = 1{,}89$, da die Anzahl der Ablesungen 480 beträgt.

Die reziproken Gewichte der Unterschiede zweier Durchmesserkorrektionen sind, vergl. S. 459:

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \text{bei } 60^0 \text{ und } 120^0\text{-Winkeln:} & \frac{2}{14}\left\{1 + \frac{1}{3}\right\}; & \text{Gew.} = 5{,}3 \\ \text{bei } 45^0, 90^0 \text{ u. } 135^0 \quad " & \frac{2}{14}\left\{1 + \frac{1}{4}\right\}; & \quad " \quad = 5{,}6 \\ \text{bei allen andern} \quad " & \frac{2}{14}\left\{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right\}; & \quad " \quad = 4{,}4. \end{array}\right.$$

Ein bemerkenswerter Unterschied tritt im zweiten Falle ein, weil die Durchmessergruppenzahlen 4 und 6 einen gemeinsamen Teiler 2 haben.

Im zweiten Falle kommt A auf:

(25)

1. 0^0	45^0	90^0	135^0	4.	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0
2. 15	60	105	150	5.	15	45	75	105	135	165
3. 30	75	120	165	Winkel $= 30^0, 60^0, 90^0, 120^0, 150^0$.						
Winkel $= 45^0, 90^0, 135^0$				Dasselbe dann zurück.						

Aus den Fehlergleichungen ergibt sich nun eine Normalgleichung für (0) von der Form:

$$20(0) - 2S_0^{45} - 2S_0^{30} = F(0), \tag{26}$$

mit

$$\begin{aligned} S_0^{45} &= (0) + (45) + (90) + (135) \\ S_0^{30} &= (0) + (30) + (60) + (90) + (120) + 150). \end{aligned} \tag{27}$$

Setzt man

$$(0) + (15) + (30) + \cdots + (165) = 0 \tag{28}$$

und verfährt wie auf S. 457, indem man Gl. (26) auch auf die Korrektionen (45), (90) und (135) anwendet, so folgt:

$$S_0^{45} = \frac{1}{12}\{F(0) + F(45) + F(90) + F(135)\}. \tag{29}$$

Entsprechend ist

$$S_0^{30} = \frac{1}{8}\{F(0) + F(30) + F(60) + \cdots + F(150)\}. \tag{30}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} 20(0) = F(0) &+ \frac{1}{6}\{F(0) + F(45) + F(90) + F(135)\} \\ &+ \frac{1}{4}\{F(0) + F(30) + F(60) + \cdots + F(150)\}. \end{aligned} \tag{31}$$

Ebenso gestaltet sich die Rechnung für alle andern Verbesserungen. Ein wesentlicher Unterschied gegen früher tritt hier noch nicht hervor, sondern erst in der Formel für das reziproke Gewicht einer Durchmesserkorrektion. Dieses findet sich zu (vergl. S. 458):

$$\frac{1}{20}\left\{1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\left(1 + \frac{4}{6} + \frac{6}{4}\right)\right\}. \tag{32}$$

Nach den Ausdrücken (15) und (23) würde man anstatt $\frac{1}{12}$ den Bruch $\frac{1}{24}$ erwarten.

Das Gewicht ist 17,3 und die Aufwandszahl ist gleich $768:(12\cdot 17{,}3\cdot 2) = 1{,}84$, da die Anzahl der Ablesungen 768 beträgt.

Die reziproken Gewichte der Unterschiede zweier Durchmesserkorrektionen werden (vergl. S. 459)

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{bei Winkeln von } 90^0: & \frac{2}{20}; & \text{Gew.} = 10{,}0 \\ \text{bei } 45^0,\ 135^0: & \frac{2}{20}\left\{1 + \frac{1}{4}\right\}; & \text{,,} \quad = 8{,}0 \\ \text{bei } 30^0,\ 60^0,\ 120^0 \text{ u. } 150^0: & \frac{2}{20}\left\{1 + \frac{1}{6}\right\}; & \text{,,} \quad = 8{,}6 \\ \text{bei allen andern}: & \frac{2}{20}\left\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right\}; & \text{,,} \quad = 7{,}1. \end{array}\right. \tag{33}$$

Bruns deutet auch noch an, daß man unter Umständen eine dreifache Gruppierung der Durchmesser zu Rosetten vornehmen wird. Will man z. B. 180 Durchmesser von Grad zu Grad untersuchen, so wird mit 18 Durchmessern zu 10° Intervall und 20 zu 9° die Arbeit schon sehr groß und das Gewicht der Ergebnisse unnötig groß. Nimmt man aber drei Gruppen von 4, 5 und 9 Durchmessern, so wird die Arbeit wesentlich geringer, das Gewicht bleibt genügend. Die Formeln sind verwickelter wie in dem Beispiel mit 45 Durchmessern.

Will man endlich mit mehr als zwei diametralen Mikroskoppaaren arbeiten, was nach Bruns sehr vorteilhaft ist, so ist von den allgemeinen Betrachtungen auszugehen, die Generalleutnant Schreiber in seiner Abhandlung angestellt hat.

§ 2. Mikrometerschrauben.

I. Allgemeine Bemerkungen. Man unterscheidet fortschreitende und periodische Fehler. Die fortschreitenden entsprechen den Teilungsfehlern einer Längenskala; indessen zeigen sie in der Regel eine größere Regelmäßigkeit, da die kleinen Ungleichheiten der aufeinanderfolgenden Schraubengänge dadurch eine Ausgleichung erfahren, daß mehrere Gänge gleichzeitig in der Schraubenmutter stecken (etwa ebensoviele als zum Messen dienen). Die fortschreitenden Fehler können daher in der Regel durch wenige Glieder einer Potenzreihe dargestellt werden.

Dreht man die Schraube einmal um ihre Achse, so verläßt ein Gang die Mutter und ein anderer tritt ein; die meisten bleiben aber drin. Daher werden Fehler sich bemerkbar machen, die eine periodische Funktion der Umdrehung sind. Solche Fehler entstehen auch erfahrungsmäßig bei manchen Konstruktionen durch die Lagerung der Schraubenspitze, und zwar ist dies in der Regel die Hauptursache, während die eigentlichen Schraubenfehler in der Neuzeit fast ganz vermieden werden. Diese Lagerungsfehler lassen sich leicht verbessern durch Bearbeiten der Spitze. Man beginnt die Untersuchung der Schraube mit Beobachtungen für periodische Fehler, um nötigenfalls sofort eine Verbesserung der Spitze vornehmen zu lassen.

Die Berechnung beginnt aber mit der Aufstellung der Funktion für die fortschreitenden Fehler, um diese bei der Berechnung der periodischen berücksichtigen zu können.*)

Die Mikrometerschrauben der Ablesemikroskope an Teilkreisen lassen sich ohne weiteres prüfen, wenn ein Hilfsintervall von $^1/_3$ oder $^2/_3$ Rev. vorhanden ist.

Zur raschen Untersuchung von Fernrohrokularmikrometerschrauben ist eine besondere Vorrichtung von Nutzen, die sich das Königl. Preuß. Geod. Inst. als „Schraubenuntersucher" von Wanschaff beschafft hat. Auf einer (horizontal gedachten) Metallplatte ist ein Hilfsmikroskop angebracht, das einen festen und einen beweglichen Doppelfaden hat. In Objektdistanz vor demselben kann das zu prüfende Okularmikrometer aufgestellt werden. Indem man ins Hilfsmikroskop sieht, wird dessen Fadenintervall mit der zu untersuchenden Schraube gemessen. Da das genannte Intervall verstellbar ist und noch eine Schlittenführung in Richtung der Schraubenachse vorhanden ist, so ergibt sich die Möglichkeit der Schraubenprüfung.

II. Günstigste Größe des Hilfsintervalls. Ein Intervall von 0,7 Rev. ist für die Untersuchung der periodischen Fehler geeignet und kann zugleich auch für die beiläufige Prüfung der fortschreitenden dienen. Wir fragen zunächst, welche Größe Δ des Intervalls für die periodischen Fehler besonders zweckmäßig ist. An irgend einer Stelle ist die Korrektion der Ablesung gleich

$$K = S + A_1 \cos t + A_2 \cos 2t + \cdots \\ + B_1 \sin t + B_2 \sin 2t + \cdots, \tag{1}$$

worin S die Verbesserung wegen fortschreitenden Fehlers ist und t die in Rev. ausgedrückten und mit 2π multiplizierten Bruchteile der Ablesung sind. Wendet man (1) auf zwei Ablesungen an, die zu einer Abmessung von Δ gehören, und ver-

*) Über nachträgliche Berücksichtigung siehe im 6. Kapitel, § 5, S. 425.

steht unter l und l' die bereits für S korrigierten Ablesungen, so wird die Intervallgröße Δ gleich

$$(2)\quad \begin{aligned} l' - l + \lambda - 2A_1 \sin\frac{\Delta}{2}\sin\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) + 2B_1 \sin\frac{\Delta}{2}\cos\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) \\ - 2A_2 \sin\Delta \sin 2\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) + 2B_2 \sin\Delta\cos 2\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) \end{aligned}$$

usw.

Hierin setzen wir

$$(3)\quad \begin{array}{l|l|l} 2A_1 \sin\frac{\Delta}{2} = a_1 & 2A_2 \sin\Delta = a_2 & \ldots \\ 2B_1 \sin\frac{\Delta}{2} = b_1 & 2B_2 \sin\Delta = b_2 & \ldots \end{array}$$

und erhalten aus (2) die Fehlergleichung:

$$(4)\quad \begin{aligned} l' - l + \lambda = \Delta + a_1 \sin\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) + a_2 \sin 2\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) + \cdots \\ - b_1 \cos\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - b_2 \cos 2\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - \cdots . \end{aligned}$$

λ bezeichnet eine Verbesserung wegen der Ausgleichung, und die Ablesungen l und l' beziehen sich auf die Stellen t und $t + \Delta$. Das einzelne Δ rechter Hand ist in Rev. zu verstehen.

In der Regel läßt man t von 0 ab um 0,1 Rev. schrittweise weitergehen bis 0,9, oder bis 1,9 oder 2,9, und mittelt die Werte für dasselbe Zehntel — das gibt dann die mittlere periodische Korrektion an dieser Stelle. (Meistens ändert sich dieselbe kaum erheblich längs der ganzen Schraube.) Wir erhalten somit zehn Fehlergleichungen mit $t : 2\pi = 0,\ 0{,}1, \ldots 0{,}9$. Würde man um $1 : n$ Rev. fortschreiten, so ergäben sich n Fehlergleichungen.

Hat eine jede derselben das Gewicht 1, so erhalten die a und b das Gewicht $n : 2$.

Nach (3) wird dann erhalten, wenn zum Gewicht 1 der m. F. μ gehört:

$$(5)\quad \begin{array}{llll} A_1 \text{ u. } B_1 & \text{mit dem m. F.} & \dfrac{\pm\mu}{\sqrt{2n}\sin\frac{\Delta}{2}} & \text{oder dem Gew. } 2n\sin^2\frac{\Delta}{2}, \\ A_2 \text{ u. } B_2 & \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,,} & \dfrac{\pm\mu}{\sqrt{2n}\sin\Delta} & \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad } 2n\sin^2\Delta \end{array}$$

und offenbar allgemein $\left(\text{für } i < \frac{n}{2}\right)$:

(5*) A_i u. B_i mit dem m. F. $\dfrac{\pm\mu}{\sqrt{2n}\sin\frac{i\Delta}{2}}$ oder dem Gew. $2n\sin^2\frac{i\Delta}{2}$.

Diejenigen A_i und B_i, für welche $\sin\frac{i\Delta}{2}$ gleich null wird, lassen sich also gar nicht bestimmen; man erkennt leicht, daß in den Fehlergleichungen (4) die betreffenden Glieder wegen $a_i = 0 = b_i$ wegfallen.

Beschränken wir uns auf die Annahme, daß die Mitführung von A_1, B_1, A_2, B_2 genügt und die Glieder mit höherem Index zufolge der sachlichen Verhältnisse kaum von Bedeutung sein werden*), so ist die Frage, ob man die beiden Gruppen A_1, B_1 und A_2, B_2 auf einmal oder getrennt bestimmen soll.

Im ersten Fall muß man Δ so wählen, daß

$$(6) \qquad \sin\frac{\Delta}{2} = \sin\Delta$$

wird, damit gleiches Gewicht erzielt wird. Mit $\sin\Delta = 2\sin\frac{\Delta}{2}\cos\frac{\Delta}{2}$ folgt $\cos\frac{\Delta}{2} = \pm\frac{1}{2}$; mithin ist zu nehmen $\Delta = 120^0$ oder 240^0, d. i. bzw. $^1/_3$ oder $^2/_3$ Revolutionen. Dann erhalten die vier Koeffizienten alle das Gewicht $3n:2$, zusammen $6n$. Die Summe der reziproken Gewichte wird $8:3n$.**)

Bestimmt man A_1, B_1 und A_2, B_2 einzeln mit größtem Gewicht $2n$, so nimmt man im ersten Falle $\Delta = 180^0$, im zweiten Falle $\Delta = 90^0$ oder 270^0, d. i. $^1/_2$ Rev., bzw. $^1/_4$ oder $^3/_4$ Rev. Das Gewicht wird größer als vorher; dafür ist aber die Meßarbeit die doppelte. Im zweiten Falle werden A_1 und B_1 noch mit dem Gewicht n, im ganzen also mit $3n$ erhalten. Auf gleiche Meßarbeit reduziert, ist das Gewicht für alle vier Unkannten zusammen nur gleich $5n$, somit ungünstiger wie im ersten Falle. Die Summe der reziproken Gewichte wird entsprechend $10:3n$.

*) Wie schon S. 411 bemerkt, sind die Ergebnisse für die A und B eigentlich Aggregate aus Konstanten verschiedenen Ranges. Nur ist jetzt der Zusammenhang komplizierter als im dort behandelten Falle.

**) Diese Wahl von Δ gibt auch annäherud ein Minimum für die Summe der m. Fqu. der vier Koeffizienten A_1, B_1, A_2 und B_2.

Es ist daher vorteilhaft, das Hilfsintervall

(7) $$\Delta = {}^1\!/_3 \text{ oder } {}^2\!/_3 \text{ Revolutionen}$$

anzusetzen. Dieses gibt A_1, B_1, A_2, B_2 mit gleichem Gewicht; allerdings bleiben A_3, B_3 unbestimmbar.

Nimmt man $\Delta = 0{,}7$ Rev., so ändern sich trotz der geringen Abweichung von $^2/_3$ sofort die Verhältnisse. Man erhält

(8)
$$\begin{array}{llr} A_1, B_1 & \text{mit Gewicht} & 1{,}31\,n, \\ A_2, B_2 & \quad ,, \qquad ,, & 1{,}81\,n, \\ A_3, B_3 & \quad ,, \qquad ,, & 0{,}19\,n. \end{array}$$

III. Modifikation der Ausgleichungsformeln. Wir bleiben bei dem Falle stehen, daß der Reihe nach $t = 0, 0{,}1, \ldots 0{,}9$ Rev. genommen wird und setzen $\Delta = {}^2/_3$ Rev. oder 240°. In den Fehlergleichungen (4) ist dann zu setzen

$$t + \frac{\Delta}{2} = 120^0,\ 156^0,\ 192^0,\ \ldots\ 84^0;$$

Δ als erstes Glied rechter Hand ist als Unbekannte zu behandeln. Die Auswertung der trigonometrischen Funktionen und der numerischen Glieder der Normalgleichungen wird aber unbequem.

Dies wird vermieden, wenn wir anstatt (1) als Korrektion der Ablesung ansetzen:

(9)
$$\begin{aligned} K = S + A_1' \cos\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) + A_2' \cos 2\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) + \cdots \\ + B_1' \sin\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) + B_2' \sin 2\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) + \cdots. \end{aligned}$$

Es ist dann

(10)
$$\begin{aligned} A_1 &= A_1' \cos\frac{\Delta}{2} - B_1' \sin\frac{\Delta}{2} & A_2 &= A_2' \cos\Delta - B_2' \sin\Delta \\ B_1 &= A_1' \sin\frac{\Delta}{2} + B_1' \cos\frac{\Delta}{2} & B_2 &= A_2' \sin\Delta + B_2' \cos\Delta. \end{aligned}$$

Setzen wir nun zugleich in einfacherer Schreibweise

(11) $$l' - l = \delta,$$

so gibt (4) als Fehlergleichung:

(12)
$$\begin{aligned} \delta + \lambda = \Delta + a_1' \sin t + a_2' \sin 2t + \cdots \\ - b_1' \cos t - b_2' \cos 2t - \cdots, \end{aligned}$$

wobei (3) entsprechend ist:

$$(13)\qquad \begin{array}{ll} 2A_1' \sin\frac{\Delta}{2} = a_1' & 2A_2' \sin\Delta = a_2' \quad \cdots \\ 2B_1' \sin\frac{\Delta}{2} = b_1' & 2B_2' \sin\Delta = b_2' \quad \cdots . \end{array}$$

Jetzt werden die Koeffizienten der Fehlergleichungen einfacher, da $t = 0,\ 0{,}1,\ \ldots\ 0{,}9$ Rev. oder $0^0,\ 36^0,\ \ldots\ 324^0$ ist. Die Fehlergleichungen lauten, wenn wir als Index von δ die Zehntel in t nehmen:

$$(14)\qquad \begin{aligned}
\delta_0 + \lambda_0 &= \Delta \quad \cdot \quad - 1{,}000 b_1' \quad \cdot \quad - 1{,}000 b_2' \\
\delta_1 + \lambda_1 &= \Delta + 0{,}588 a_1' - 0{,}809 b_1' + 0{,}951 a_2' - 0{,}309 b_2' \\
\delta_2 + \lambda_2 &= \Delta + 0{,}951 a_1' - 0{,}309 b_1' + 0{,}588 a_2' + 0{,}809 b_2' \\
\delta_3 + \lambda_3 &= \Delta + 0{,}951 a_1' + 0{,}309 b_1' - 0{,}588 a_2' + 0{,}809 b_2' \\
\delta_4 + \lambda_4 &= \Delta + 0{,}588 a_1' + 0{,}809 b_1' - 0{,}951 a_2' - 0{,}309 b_2' \\
\delta_5 + \lambda_5 &= \Delta \quad \cdot \quad + 1{,}000 b_1' \quad \cdot \quad - 1{,}000 b_2' \\
\delta_6 + \lambda_6 &= \Delta - 0{,}588 a_1' + 0{,}809 b_1' + 0{,}951 a_2' - 0{,}309 b_2' \\
\delta_7 + \lambda_7 &= \Delta - 0{,}951 a_1' + 0{,}309 b_1' + 0{,}588 a_2' + 0{,}809 b_2' \\
\delta_8 + \lambda_8 &= \Delta - 0{,}951 a_1' - 0{,}309 b_1' - 0{,}588 a_2' + 0{,}809 b_2' \\
\delta_9 + \lambda_9 &= \Delta - 0{,}588 a_1' - 0{,}809 b_1' - 0{,}951 a_2' - 0{,}309 b_2'.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$(15)\qquad \Delta = \frac{[\delta]}{10},$$

$$(16)\qquad \begin{aligned}
a_1' &= +\,0{,}1176(\delta_1 + \delta_4 - \delta_6 - \delta_9) \\
&\quad + 0{,}1902(\delta_2 + \delta_3 - \delta_7 - \delta_8) \\
b_1' &= +\,0{,}2(-\delta_0 + \delta_5) + 0{,}1618(-\delta_1 + \delta_4 + \delta_6 - \delta_9) \\
&\quad + 0{,}0618(-\delta_2 + \delta_3 + \delta_7 - \delta_8),
\end{aligned}$$

$$(17)\qquad \begin{aligned}
a_2' &= +\,0{,}1902(\delta_1 - \delta_4 + \delta_6 - \delta_9) \\
&\quad + 0{,}1176(\delta_2 - \delta_3 + \delta_7 - \delta_8) \\
b_2' &= -\,0{,}2(\delta_0 + \delta_5) + 0{,}0618(-\delta_1 - \delta_4 - \delta_6 - \delta_9) \\
&\quad + 0{,}1618(\delta_2 + \delta_3 + \delta_7 + \delta_8).
\end{aligned}$$

In den Formeln (16) und (17) darf man auch alle δ um Δ vermindern, oder auch um einen beliebigen andern Wert, wie man direkt ersieht.

Die Gleichungen (13) geben dann die A', B', die Gleichungen (10) die A, B, wobei für den Fall $\Delta = \frac{2}{3}$ Rev. $= 240^0$

$$2 \sin \frac{\Delta}{2} = -2 \sin \Delta = 1{,}732,$$

$$\sin \frac{\Delta}{2} = -\sin \Delta = 0{,}866, \quad \cos \frac{\Delta}{2} = \cos \Delta = -0{,}5.$$

Man hat ferner zur Kontrolle

$$(18) \qquad [\lambda\lambda] = [\delta\delta] - 10 \left\{ \Delta^2 + \frac{a_1'^2 + b_1'^2 + a_2'^2 + b_2'^2}{2} \right\};$$

der m. F. einer Fehlergleichung ist:

$$(19) \qquad \mu = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{10-5}}.$$

Den m. F. einer Beobachtungsgröße kann man aber auch leicht durch wiederholte Messungen an derselben Stelle erhalten. Der aus (19) berechnete Wert darf nun nicht wesentlich größer sein, sonst haben die vernachlässigten Glieder der trigonometrischen Reihe merklichen Einfluß.

Genügen aber die fünf Konstanten zur Darstellung, so kann man nun auch die m. F. derselben ableiten.

Die m. F. von A_1', B_1', A_1 und B_1 sowie von A_2', B_2', A_2 und B_2 werden

$$(20) \qquad \frac{\pm \mu}{\sqrt{20 \cdot 0{,}866}}, \quad \text{d. i.} \pm 0{,}258\,\mu.$$

Bringt man K aus (9) auf die Form

$$(21) \qquad K = S + U_1 \sin(t + N_1) + U_2 \sin 2(t + N_2),$$

so ist

$$(22) \qquad \begin{array}{l|l} U_1 \cos\left(N_1 + \frac{\Delta}{2}\right) = B_1' & U_2 \cos(2N_2 + \Delta) = B_2' \\ U_1 \sin\left(N_1 + \frac{\Delta}{2}\right) = A_1' & U_2 \sin(2N_2 + \Delta) = A_2'. \end{array}$$

Da man die A' und B' als unabhängig voneinander beobachtete Größen mit dem durch (20) gegebenen m. F. betrachten kann, folgt nun leicht als m. F. von U_1 und U_2 ebenfalls die Größe (20) und für N:

$$(23) \qquad \mu_{N_1} = \frac{\pm 0{,}258\,\mu}{U_1}, \quad \mu_{N_2} = \frac{\pm 0{,}258\,\mu}{U_2},$$

wobei diese μ_N als Arcus zu verstehen sind. Die Multiplikation mit 57,3 gibt Grade.

Die Untersuchung auf periodische Fehler muß an mehreren Stellen der Schraube bewirkt werden, um eine etwa vorhandene Veränderlichkeit zu ermitteln. Wir nehmen an, daß ein mittlerer Wert des periodischen Fehlers für die zu den Messungen dienenden Schraubenteile genügt.

IV. Fortschreitender Fehler. Man erkennt diesen, indem man ein rundes Intervall, etwa zwei Rev., fortschreitend an aufeinanderfolgenden Stellen der Schraube mißt. Der Schraubenuntersucher gestattet keine wesentlich größern Δ, da keine besondere Okularverschiebung zur zentrischen Betrachtung der Fäden da ist.

Hat man nun z. B. $\Delta = 2$ nach und nach abgemessen von 0, 2, 4 ... ab, nimmt dann das Mittel aller Beobachtungswerte und zieht hiervon die einzelnen ab, so sind die Unterschiede der Einfluß des fortschreitenden Fehlers auf die Intervalle 0 bis 2, 2 bis 4, usw. Die schrittweise Addition gibt dann die Verbesserungen wegen fortschreitenden Fehlers von 0 ab bis zu Ende. Durch Beifügung einer Konstanten kann man die Verbesserung für irgend eine Ablesung, z. B. die Schraubenmitte, zu null machen.

Trägt man die Verbesserungen graphisch als Ordinaten auf, so kann man eine Ausgleichungskurve ziehen und für Zwischenabscissen die Ordinaten interpolieren. Dies Verfahren dürfte immer ausreichen.

Zur Erhöhung der Genauigkeit kann man die Reihe mehrfach beobachten. Beobachtet man z. B. zweimal und nimmt dabei als Anfang statt 0 die Werte $-\,{}^1/_4$ Rev. und $+\,{}^1/_4$ Rev., so werden im Mittel die Anfangsglieder der Reihe für die periodischen Fehler eliminiert, was nicht ohne Bedeutung ist, wenn dieser etwa längs der Schraube etwas veränderlich wäre.

Eine Kontrolle ergibt sich gelegentlich der Bestimmung von 1 Rev. in Sek. aus Sterndurchgängen usw.

Oftmals wird zur Interpolation der fortschreitenden Fehler auch der Rechnungsweg betreten. Wir geben dazu einige Andeutungen. Ist wie früher S die Korrektion wegen fortschreitender Fehler, so kann man setzen:

$$(24) \qquad S = S_0 + S_1 r + S_2 r^2 + S_3 r^3 + \cdots,$$

worin S_0, S_1 ... Konstante bezeichnen. Für die Abmessung von Δ seien die Ablesungen r und r'; alsdann ist

$$(25) \quad \Delta = (r' - r) + S_1(r' - r) + S_2(r'^2 - r^2) + S_3(r'^3 - r^3) + \cdots.$$

Nehmen wir an, daß S_1 klein genug ist, um $S_2 : (1 + S_1)$ und $S_3 : (1 + S_1)$ mit S_2 und S_3 vertauschen zu können, so folgt

$$(26) \quad r' - r = \frac{\Delta}{1 + S_1} - S_2(r'^2 - r^2) - S_3(r'^3 - r^3) - \cdots.$$

Dafür kann man schreiben, wenn links für die Ausgleichung noch eine Verbesserung beigefügt wird:

$$(27) \qquad r' - r + \lambda = x + y\,\frac{r' + r}{2} + z\left(\frac{r' + r}{2}\right)^2 + \cdots.$$

worin ist:

$$(28) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{\Delta}{1 + S_1} - S_3 \frac{\Delta^3}{4}, \\ y &= -2S_2\Delta, \quad z = -3S_3\Delta. \end{aligned}$$

Indem man für alle abgemessenen Intervalle die Fehlergleichungen (27) bildet, ergeben sich dann weiterhin x, y und z, und mittels (28) auch S_2 und S_3, wobei für Δ ein Näherungswert genügt. x hat weiter keine Bedeutung, S_1 läßt sich auch nicht daraus finden; diese Größe wird bei Bestimmung einer Revolution in Sekunden mit berücksichtigt. Ist nämlich durch geeignete Messungen ein größeres Intervall in Sekunden bekannt $= D$, und denkt man sich die zugehörigen r und r nach Maßgabe der Glieder $S_2 r^2 + S_3 r^3$ um den fortschreitenden Fehler verbessert (nötigenfalls auch wegen period. F.), so setzt man

$$(r' - r)R = D,$$

wo R der Wert einer Revolution in Sekunden ist. Hätte man r und r' auch noch wegen $S_1\,r$ verbessert, so könnte man unter Festhaltung der Bedeutung von r' und r wie in der vorigen Formel ansetzen:

$$(r' - r)(1 + S_1)R' = D,$$

so daß also $(1 + S_1)R'$ gleich R ist; es ist daher nutzlos, S_1 in den Korrektionen für fortschreitende Fehler besonders mitzuführen. Es wurde das Glied $S_1 r$ nur der Vollständigkeit halber angesetzt und um zu zeigen, daß auf die Größe von R es einen Einfluß ausübt (wenn auch nur theoretisch), wohin man den Anfangspunkt der Zählung legt. Ist in Gleichung (24) r die unmittelbare Ablesung in bezug auf einen seitlich gelegenen Nullpunkt, so sind die S offenbar andere Werte, als wenn man r etwa von der Mitte der Skala ab zählt. Man erkennt dies durch die Substitution $r = r_m + m$, wo $r_m = r - m$ von der mittlern Ablesung m aus gezählt ist.

Um die Ausgleichungsrechnung möglichst bequem zu erhalten, denken wir uns in (24) und den folgenden Formeln r in der Tat als r_m von der Mitte m ab gezählt.

Ferner nehmen wir an, daß die Abmessungen so gemacht werden, daß $\frac{r' + r}{2}$ sich von null ab gleichmäßig im Positiven und Negativen erstreckt. Es ist dann, n als ganze Zahl vorausgesetzt:

$$(29)\quad \frac{r'+r}{2} = -n\Delta,\ -(n-1)\Delta,\ -(n-2)\Delta,\ \cdots -\Delta,\ \text{null},\ +\Delta,\ +2\Delta,\ \cdots +n\Delta.$$

Bei der Bildung der Normalgleichungen fallen dann (für $ax + by + cz$) die $[ab]$ und $[bc]$ weg, und da $a = 1$, lassen sich die $[ac] = [bb]$ und $[cc]$ leicht bilden mittels der bekannten Formeln für die Summen der Quadrate und Biquadrate aufeinanderfolgender ganzer Zahlen:

$$(30)\quad \begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots n^2 &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \\ 1^4 + 2^4 + \cdots n^4 &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}. \end{aligned}$$

Auf die Fehler einer Schraube wird man unter Umständen dasselbe Verfahren anwenden, das zur Bestimmung von Teilungsfehlern einer Längsteilung dient. Wir verweisen in der Hinsicht auf die ausführlichen Angaben von B. Weinstein.*)

Ein vorzügliches Mittel zur Bestimmung der fortschreitenden Fehler bei Fernrohrokularmikrometern ergibt sich, wenn

*) Handbuch der physikalischen Maßbestimmungen. Bd. II. Berlin, 1888, S. 226 u. f. Seitdem ist noch verschiedene Literatur über diesen Gegenstand erschienen (vergl. namentlich die Astr. Nachr., u. a. W. Zurhellen: „Die Untersuchung der Mikrometerschrauben in der Praxis“, Bd. 172. 1906, Nr. 4105/6, Sp. 1—19).

zwei Fadennetze, ein festes und ein bewegliches, da sind, bei denen die Nachbardistanzen der Fäden gleich groß sind. Es genügt schon, daß das bewegliche Netz zwei Fäden hat. Ihr Abstand läßt sich dann durch Koinzidenzen an den festen Fäden an benachbarten Stellen der Schraube messen usw.*)

Bei Schraubenmikroskopen für Teilkreise kommen in der Regel nur zwei Gänge zur Geltung. Es ist leicht, dieselben zu vergleichen. Meistens wird ja der fortschreitende Fehler in diesem Falle kaum in Betracht kommen. Zeigen zwei Messungen eines Teilkreisintervalles an nebeneinanderliegenden Schraubenstellen einen Unterschied d, so wird der Fehler gleich $d:8$ im Maximum, wenn ein Strich in üblicher Weise durch Gang-(Run-) Bestimmung zwischen zwei Teilstrichen eingeschaltet wird.

§ 3. Röhrenlibellen.

Feinere Libellen sind mit Kammer versehen, um die Blasenlänge annähernd konstant erhalten zu können; von dieser hängt die Genauigkeit (Einstellungssicherheit) wesentlich ab, wie schon lange bekannt ist und neuerdings von Reinhertz genauer untersucht wurde. Die günstigste Blasenlänge ist mindestens gleich der halben Teilungslänge, also möglichst groß, doch so, daß noch einige Intervalle zur Messung übrigbleiben.**)

Eine erste Prüfung besteht darin, daß man die Libelle auf den Libellenprüfer bringt und die Blase durch Bewegen der Prüferschraube in gleichem Schritt von einem Ende der Teilung bis zum andern laufen läßt. Hierbei zeigen sich etwa vorhandene Störungen (Ausscheidungen) sowie gröbere Ungleichheiten, namentlich bei mehrfacher Wiederholung des Vorganges.

---

*) F. R. Helmert. Der Sternhaufen im Sternbilde des Sobieskischen Schildes. (Publ. d. Hamburger Sternwarte, 1874.) Hier ist auch ein besonderes Interpolationsverfahren für die fortschreitenden Fehler angewandt, daß sich an die speziellen Konstruktionsverhältnisse anschließt.

**) C. Reinhertz, Mitteilungen über einige Libellen. (Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1890, S. 309 u. f. Zeitschr. f. Vermessungswesen 1891, S. 257 u. f.; insbesondere S. 265.)

Sodann geht man zur Bestimmung des Teilwertes über, wobei man den mittlern Teilwert für etwa fünf Teile in der Teilungsmitte bestimmt. Eventuell kann eine solche Bestimmung auch für seitliche Stücke der Teilung erfolgen. Bei guten Libellen wird man kaum Anlaß dazu haben.

Der Teilwert der Libelle zeigt oftmals Abhängigkeit von der Temperatur. Das liegt meistens an ungeeigneter Fassung. Es ist vorgeschlagen, die einschließende Metallröhre von Nickelstahl (Invar) zu machen (Bigourdan, C. R. 1903, Bd. 137, S. 385).

Die Abhängigkeit von der Blasenlänge vermeidet man durch Konstanthalten der letztern.

C. A. F. Peters fand 1842/43 bei Arbeiten am Pulkowaer Vertikalkreise eine Abhängigkeit von dem Temperaturunterschied zwischen Instrument und Luft, also zwischen oberhalb und unterhalb an der Libelle. Auch R. Schumann fand bei Feinnivellements auf dem Telegraphenberge am Geodätischen Institut bei Potsdam eine tägliche Schwankung im Teilwerte.

Petrelius stellte ferner einen Einfluß des Barometerstandes fest.*)

Beispiel. Teilwertbestimmung der Libelle am Pulkowaer Passageninstrument durch B. Wanach.**)

Diese Libelle ist von C. Reichel in Berlin; sie war ausgezeichnet. Der Teilwert p wurde am Repsoldschen Libellenprüfer bestimmt, im Mittel für etwa sechs Teile, indem die Prüferschraube um fünf ihrer Teile verstellt wurde. Durch eine Art Repetitionsverfahren wurde dies 24-mal wiederholt, dergestalt, daß die Schraube um 120 Teile = 1 Rev. = 120″ gedreht war.

Zur Vereinfachung des Zahlenbeispiels habe ich je zwei Nachbarbestimmungen in ein Mittel vereinigt. Wanach führte mehrere Rechnungen durch, zuerst mit Gliedern abhängig von der Temperatur T und von T^2, sowie mit solchen von der Blasen-

*) Vergl. den Bericht von Hammer in der Zeitschr. f. Instrumentenkunde. Bd. 22, 1902, S. 124.

**) Archiv for Math. og Naturvidenskab, af S. Lie og G. O. Sars, Bd. 16.

länge L, von L^2 und L^3. Letztere ergaben sich aber so unsicher, daß von ihnen abgesehen wurde. Es fand sich dann:

$$(1) \quad \frac{1}{8} p = 0{,}''10102 + 0{,}00033(T + 5) - 0{,}0000081(T + 5)^2$$
$$\pm 89 \qquad \pm 18 \qquad \pm 72$$

sowie

$$(2) \quad \frac{1}{8} p = 0{,}''10176 + 0{,}0001343(T + 5).$$
$$\pm 59 \qquad \pm 396$$

Die angeschriebenen Unsicherheiten sind wahrscheinliche Fehler; die m. F. sind also das $1\frac{1}{2}$-fache.

Beide Formeln unterscheiden sich nur wenig; die dreigliedrige weniger der zweigliedrigen ergibt

$$(3) \quad \begin{array}{llllll} \text{bei} & -5^0 & 0^0 & +5^0 & +10^0 & +15^0 \\ & -0{,}''00074 & +4 & +41 & +38 & -6. \end{array}$$

Die folgende Berechnung*) nimmt außer einem von T abhängenden Temperaturgliede noch ein der Zeit t proportionales Glied mit. Allerdings hat dieses kaum Berechtigung, da S. Kostinsky für $\frac{1}{8} p$ fand**)

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{1891 Juli bis 1892 Okt.:} & 0{,}''1060 + 0{,}00028\,T - 0{,}000018\,T^2 \\ \text{1892 Okt. bis 1894 Dez.:} & 0{,}1033 \qquad\quad ,, \qquad\qquad\quad ,, \end{array}$$

während nach Wanach war

$$\text{1890 März bis 1891 Febr.:} \; 0{,}1025 + 0{,}00025\,T - 0{,}000008\,T^2.$$

Die Beobachtungen ergaben:

	Tag	Temp. R.	$^1/_8$ Teilwert	Tag	Temp. R.	$^1/_8$ Teilwert
	1890, 29	$5^0{,}13$	$0{,}''10299$	1890, 63	$12^0{,}94$	$0{,}''10217$
	33	6,32	10521	75	7,10	10411
	42	13,14	10630	76	5,94	10263
(5)	48	14,53	10352	1891, 12	−4,40	09998
	48	14,43	10302	18	−1,50	10464
	48	14,86	10455	19	−0,17	10270.
	50	15,95	10410			

*) Von Herrn G. Förster bewirkt.

**) Publications de l'Observ. central Nicolas sous la direction de O. Backlund. Sér. II, vol. X. 1903, S. 13.

(6) Fehlergleichungen:

ax	$+\ by$	$+\ cz$	$= \quad l$	$+\ \lambda$	λ'
+ 1	+ 0,513	+ 0,29	= + 0,299	+ 0,095	+ 0,026
+ 1	+ 0,632	+ 0,33	+ 0,521	− 0,128	− 0,184
+ 1	+ 1,314	+ 0,42	+ 0,630	− 0,217	− 0,227
+ 1	+ 1,453	+ 0,48	+ 0,352	+ 0,058	+ 0,065
+ 1	+ 1,443	+ 0,48	+ 0,302	+ 0,108	+ 0,114
+ 1	+ 1,486	+ 0,48	+ 0,455	− 0,043	− 0,035
+ 1	+ 1,595	+ 0,50	+ 0,410	+ 0,004	+ 0,021
+ 1	+ 1,294	+ 0,63	+ 0,217	+ 0,164	+ 0,184
+ 1	+ 0,710	+ 0,75	+ 0,411	− 0,075	− 0,067
+ 1	+ 0,594	+ 0,76	+ 0,263	+ 0,060	+ 0,070
+ 1	− 0,440	+ 1,12	− 0,002	+ 0,231	+ 0,234
+ 1	− 0,150	+ 1,18	+ 0,464	− 0,230	− 0,204
+ 1	− 0,017	+ 1,19	+ 0,270	− 0,031	+ 0,003

Hierbei ist $\frac{1}{8}\,p = 0\overset{\prime\prime}{.}1 + x$ gesetzt und y der zehnfache Temperaturkoeffizient; x, y, z, λ werden in Hundertstelsekunden erhalten.

Normalgleichungen:

$$
\begin{aligned}
13{,}000x + 10{,}427y + 8{,}610z &= 4{,}592 \\
10{,}427x + 14{,}082y + 4{,}919z &= 4{,}243 \qquad (7)\\
8{,}610x + \ \ 4{,}919y + 6{,}911z &= 2{,}772.
\end{aligned}
$$

Ihre Auflösung gibt:

$$
(8)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
x = 0{,}411 & y = 0{,}047 & z = -\,0{,}144 \\
\text{rez. Gew. } 1{,}905 & 0{,}410 & 1{,}937 \\
\text{m. F. } \pm 0{,}211 & \pm 0{,}098 & \pm 0{,}213.
\end{array}
\right.
$$

Die λ sind oben in der ersten Spalte rechts neben l enthalten; $[\lambda\lambda] = 0{,}232$; $\mu^2 = 0{,}232 : 10 = 0{,}0232$.

$$\text{Kontrolle:}\quad [\lambda\lambda] = 1{,}921 - 1{,}687 = 0{,}234.$$

$$(9)\qquad \mu = \pm\, 0\overset{\prime\prime}{.}00153.$$

Mit Weglassung von z folgt:

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{lll} & x = 0{,}275 & y = 0{,}098 \\ \text{rez. Gew.} & 0{,}189 & 0{,}175 \\ \text{m. F.} & \pm\, 0{,}065 & \pm\, 0{,}062. \end{array}\right.$$

Die hierzu gehörigen Verbesserungen sind oben als λ' verzeichnet; $[\lambda'\lambda'] = 0{,}245$.

$$\mu^2 = 0{,}245 : 11 = 0{,}0221;$$

$$\text{Kontrolle:}\quad [\lambda'\lambda'] = 1{,}921 - 1{,}676 = 0{,}245;$$

$$(11)\qquad \mu = \pm\, 0{,}''00149.$$

Die beiden Ausdrücke für $\frac{1}{8}p$ werden:

$$(12)\qquad \begin{array}{lll} 0{,}''10411 & +\, 0{,}000047\,T & -\, 0{,}00144\,t \\ \pm\, 211 & \pm\, 98 & \pm\, 213 \end{array}$$

und

$$(13)\qquad \begin{array}{ll} 0{,}''10275 & +\, 0{,}000098\,T \\ \pm\, 65 & \pm\, 62\;. \end{array}$$

Um im letztern Falle zu erkennen, wie sich die Unsicherheit des Teilwertes für eine bestimmte Temperatur gestaltet, setzen wir an:

$$\frac{1}{8}\,p \text{ bei Temp. } T = 0{,}''1 + \frac{1}{100}\left(x + \frac{T}{10}\,y\right).$$

Nun ist

$$Q_{xx} = 0{,}189 \quad Q_{xy} = -\,0{,}141 \quad Q_{yy} = 0{,}175,$$

also wird der m. F. gleich

$$\pm\, 0{,}''00149\,\sqrt{0{,}189 - 0{,}0282\,T + 0{,}00175\,T^2},$$

$$(14)\qquad \begin{array}{llllll} \text{d. i. bei } t = & -\,5^0 & 0^0 & +\,5^0 & +\,10^0 & +\,15^0 \\ & \pm\, 0{,}''00090 & 65 & 47 & 43 & 60. \end{array}$$

Der Minimalwert tritt ein bei $T =$ rund 8^0 mit $\pm\, 0{,}''00041$.

Man sieht, daß die m. F. der Konstanten allein kein klares Bild geben.

In noch höherem Grade gilt dies bei der dreigliedrigen Formel (12). Hier ist der allgemeine Ausdruck für $\frac{1}{8}p$:

$$\frac{1}{8}\,p \text{ bei Temp. } T \text{ zur Zeit } 1890 + t$$

$$= 0{,}''1 + \frac{1}{100}\left(x + \frac{T}{10}\,y + tz\right).$$

Danach wird der m. F. gleich

$$\pm 0\rlap{.}''00153 \sqrt{\begin{aligned}1{,}905 - 0{,}1548\,T + 0{,}00410\,T^2 \\ - 3{,}646\,t + 1{,}937\,t^2 + 0{,}1350\,t\,T.\end{aligned}}$$

Infolge Anwendung graphischer Rechenhilfen können die Werte der Koeffizienten um zwei Einheiten der letzten Stelle unsicher sein.

(15) Werte der m. F. für $\frac{1}{8}\,p$ in 0,″00001.

t \ T	-5^0	0^0	$+5^0$	$+10^0$	$+15^0$
0,3	± 197	± 152	± 110	± 77	± 67
0,6	144	98	59	44	73
0,9	104	66	55	79	120
1,2	95	86	103	137	178

Differenziert man den Radikanden des obigen Ausdrucks für den m. F. nach T und t, so ergeben sich zwei Gleichungen für das Minimum desselben. Es tritt ein für $T = 7^0{,}94$, $t = +\,0{,}664$. Der Betrag des kleinsten mittlern Fehlers wird gleich ± 0,″00043. Dies stimmt genügend überein mit einer direkten Rechnung aus den Gleichungen (7), in denen rechter Hand 0,01000, 0,00794 und 0,00664 eingesetzt wird.

Achtes Kapitel.

Horizontalwinkelmessung und Dreiecksnetze.

§ 1. Beobachtung von Winkeln und Richtungen.

1. Instrumentalfehler. Die Beobachtungsfehler entstehen teils durch das Instrument, teils durch den Beobachter, teils durch die umgebende Luft. Wir betrachten zunächst die erstgenannten.

Wir setzen Instrumente ohne grobe Mängel, namentlich solche von festem Bau voraus. Zunächst sind noch der Einfluß des Kollimationsfehlers der Visierachse, die etwas geneigte Lage der Horizontalachse und die Exzentrizität der Alhidade zu beachten und zu eliminieren. Dieses kann sozusagen vollkommen geschehen. Den Kollimationsfehler beseitigt man durch Messung in zwei Fernrohrlagen, vorausgesetzt, daß keine zeitlichen Veränderungen von Belang stattfinden und etwa die Änderung der Fernrohrlage den Kollimationsfehler beeinflußt. Die geneigte Lage der Horizontalachse bestimmt man mit der Libelle, so daß der Einfluß auf die Beobachtung durch Rechnung ermittelt werden kann. Den Einfluß der Exzentrizität der Alhidade eliminiert man durch Anwendung von zwei, drei oder mehr gleichförmig über den Kreisumfang verteilten Nonien oder Mikroskopen.

Auf die Fehler der Nonien und Mikroskope selbst gehen wir weiter nicht ein, da der systematische Anteil bestimmt und in Rechnung gezogen bzw. eliminiert werden kann.

Eine hervorragende Wichtigkeit haben aber erfahrungsmäßig die Teilungsfehler, obwohl man in der Gegenwart die

Kreise mit einer sehr großen Genauigkeit einteilt. Die Erfahrung lehrt, daß die Teilungsfehler in der Regel zu einem wesentlichen Teil systematischer Natur sind und als periodische Funktion der Ablesung A dargestellt werden können, bis auf einen Rest, den man nun als zufälligen Teilungsfehler bezeichnet und der von Strich zu Strich in zufälliger Weise wechselt. Für den regelmäßigen Teilungsfehler ist zu setzen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} t_r = {} & T_1 \sin(A + N_1) + T_2 \sin(2A + N_2) \\ & + T_3 \sin(3A + N_3) + \cdots, \end{aligned}$$

wobei man sich ziemlich viele periodische Glieder mitgenommen zu denken hat. Ein konstantes Glied T_0 wird dadurch beseitigt, daß man durch Beifügung einer Konstanten die Summe der beobachteten t_r zu null macht. Bei der großen Sorgfalt der Herstellung, wie sie jetzt in der Regel angewandt wird, sind größere Diskontinuitäten im Verlauf der Teilungsfehler von Strich zu Strich, etwa an der Anfangsstelle der Teilungsarbeit, ausgeschlossen — sie würden sich als größere unregelmäßige Fehler zu erkennen geben.

Betrachten wir aber zwei Ablesungen A und $A + 180^0$, so ist im Mittel für die beiden Teilungsfehler einfacher:

$$(2)\qquad \frac{[t_r]}{2} = T_2 \sin(2A + N_2) + T_4 \sin(4A + N_4) + \cdots.$$

Es leuchtet ein, daß durch 3, 4, ... m regelmäßig verteilte Nonien oder Mikroskope die regelmäßigen Teilungsfehler mehr und mehr unschädlich gemacht werden können. Für m Mikroskope, die in den Abständen $\frac{360^0}{m}$ voneinander liegen, haben die Ablesungen annähernd folgende Werte:

$$A, \quad A + \frac{360^0}{m}, \quad A + 2\,\frac{360^0}{m}, \quad \cdots\cdots A + (m-1)\,\frac{360^0}{m}.$$

Dies in Formel (1) eingeführt, gibt leicht den Einfluß des periodischen Teilungsfehlers auf das Mittel der m Ablesungen gleich

$$(3)\qquad \frac{[t_r]}{m} = + T_m \sin(mA + N_m) + T_{2m} \sin(2mA + N_{2m}) + \cdots.$$

Durch die Vermehrung der Anzahl der Nonien und Mikroskope wird nun freilich die Ablesungsarbeit sehr vermehrt, so daß man in der Regel nur zwei bis fünf solcher anwendet (zwei in Deutschland, drei oder fünf in England), t_r aber in anderer Weise zu eliminieren sucht. Wir müssen nämlich bedenken, daß die Richtungsangaben auch wegen des Visurfehlers fehlerhaft sind und daß man, um dessen Einfluß zu vermindern, mehr als eine Beobachtung anstellen muß. Kann man nun bei dieser Gelegenheit t_r für das Mittel aller Beobachtungen auf einen wünschenswerten Betrag herabdrücken, so ist dies vorzuziehen. (In der praktischen Astronomie kommt es freilich oft vor, daß man m mit Vorteil groß nimmt, etwa $= 6$ oder 8, wenn nämlich die Fernröhre sehr kräftig sind und die Objekte nur einmal beobachtet werden können.)

Solange man nun bei derselben Stellung des Horizontalkreises beobachtet, wirken die Teilungsfehler als konstante Fehler auf alle Beobachtungen. Verteilt man aber n Beobachtungen auf n verschiedene Teilkreisstellen, so wirken die zufälligen Teilungsfehler tatsächlich wie zufällige Beobachtungsfehler, und ihr Einfluß vermindert sich mit $1:\sqrt{n}$; die regelmäßigen tilgen sich erheblich, wenn nach jeder Beobachtung um $360^0:mn$ gedreht wird, so daß im ganzen an mn gleichmäßig über den Kreisumfang verteilten Stellen abgelesen wird. Es bleibt dann als Rest

$$(4)\quad \frac{[t_r]}{mn} = T_{mn}\sin(mnA + N_{mn}) + T_{2mn}\sin(2mnA + N_{2mn}) + \cdots$$

Dies sind rasch veränderliche Glieder, die man zu den zufälligen Fehlereinflüssen schlagen darf, insofern sie meistens kleiner sind als die rein zufälligen Teilungsfehler.

Generalleutnant Schreiber fand bei Instrumenten mit zwei Mikroskopen, wie sie bei Haupttriangulationen benutzt werden, die mittlere totale Durchmesserkorrektion zu $\pm 0{,}''5$ bis $\pm 1{,}''1$, den zufälligen Anteil gleich $\pm 0{,}''3$ bis $\pm 0{,}''8$.*) Bei mehreren Teilkreisen war ein regelmäßiger Anteil gar nicht mehr recht nachweisbar.**)

Auch die zufälligen Teilungsfehler verlangen zu ausreichender Herabminderung ihres Einflusses häufige Kreisdrehung. Bei guten Beobachtern ist es üblich, eine Richtung

*) Zeitschr. für Vermessungswesen, VIII. Bd., 1879, S. 119.
**) Zeitschr. für Vermessungswesen, VII. Bd., 1878, S. 213.

nur zweimal hintereinander an derselben Teilkreisstelle einzustellen, also ein erstes Mal bei schrittweisem Einstellen der Objekte von links nach rechts und ein zweites Mal beim Rückgange von rechts nach links. Dann wird der Kreis gedreht. A. Nagel verstellte den Mikroskoparm um 1°, wandte außerdem aber zwölf gleichmäßig über 180° verteilte Kreisstellen an; bei zwei Mikroskopen war also $mn = 24$.*)

In Indien benutzten die englischen Offiziere bei den Haupttriangulationen Werte von mn bis zu 50; hat der Theodolit nämlich fünf Mikroskope, so hat man bei zwei Messungen in zwei Fernrohrlagen schon zehn Teilkreisstellen; wird dann noch um 36°:5 gedreht, so gibt das bei zehn Beobachtungsreihen 50 gleichförmig verteilte Ablesestellen.

Generalleutnant Schreiber richtete die Messungen bei seinem Winkelverfahren so ein, daß die Messungsgruppen für verschiedene Winkel auf verschiedene Teilkreisstellen fallen, jede Gruppe in sich aber auch möglichst viele gleichmäßig verteilte Ablesestellen hat (siehe das Beispiel auf S. 209 u. f.). Diese Maßnahmen bildeten in den hier genannten Fällen ein Hauptglied der getroffenen Anordnungen, um die ausgezeichneten Ergebnisse der betreffenden Triangulationen zu erreichen.

Eine besondere Methode zur Herabminderung des Einflusses der Teilungsfehler ist das Repetitionsverfahren, das indessen bei Haupttriangulationen nicht mehr Verwendung findet; siehe weiterhin.

II. Fehler der Aufstellung und der Festigkeit von Instrument und Signalen. Die Instrumente, die zur Winkelbeobachtung dienen und die Signale, die als Ziele dienen, müssen zentrisch stehen, oder es müssen ihre Exzentrizitäten genau gemessen werden. Fehler in diesen Angaben sind in den Winkeln um so merkbarer, je kürzer die Distanzen sind. Bei Haupttriangulationen ist in der Regel (abgesehen von Basisnetzen) die erforderliche Genauigkeit leicht zu erreichen, da 1 cm auf 20 000 m Entfernung erst 0,″1 gibt. Etwaige Fehler, wenn sie nicht veränderlich sind, machen sich erst bei

*) Astr.-geodät. Arbeiten f. d. Europ. Gradmessung im Königreich Sachsen, Bd. II, 1890, S. 92 u. f.

den geometrischen Bedingungen des Netzes fühlbar. Veränderliche Exzentrizitäten sind bei hohen Holzbauten recht wohl möglich: durch Winddruck und die immer einseitige Sonnenbestrahlung; ersterer würde infolge der Erschütterung des Theodolitstandes Messungen aber überhaupt unmöglich machen, käme also nur am Signal in Betracht.

Ungünstiger steht es mit dem Einfluß der Sonnenbestrahlung des Unterbaus des Theodolits. Unter dem Einfluß der Sonnenstrahlen (und überhaupt der Wärmebewegung) führen auch kleine Beobachtungspfeiler Bewegungen aus, von denen besonders die Drehbewegungen zu fürchten sind. Man sucht deren Einfluß zu eliminieren oder doch herabzumindern, indem man eine schrittweise Einstellung von zwei oder mehr Objekten in umgekehrter Reihenfolge wiederholt. Der Zeit proportionale Einflüsse lassen sich bei gehöriger Zeiteinteilung auf diese Art beseitigen; unregelmäßigere Einflüsse erkennt man bei Richtungssätzen an dem unregelmäßigen Verlauf der Unterschiede der Ergebnisse wiederholter Einstellung der einzelnen Objekte und kann dann eventuell die Messungen weglassen.

Nützlich ist es zur Erzielung höchster Genauigkeit, nur je zwei Objekte in möglichst kurzer Zwischenzeit zu verbinden (also Winkelbeobachtung zu benutzen), wie Generalleutnant Schreiber bei der preußischen Landestriangulation einführte, wobei allerdings noch andere Gründe maßgebend waren.

Schon seit nahezu 100 Jahren hat man sich zur Beseitigung der Festigkeitsmängel auch des Sicherheitsfernrohrs bedient: W. Struve benutzte es bei der Gradmessung in den russischen Ostseeprovinzen 1821—23.*) Neuerdings fand es Anwendung in Südafrika bei den unter Leitung von Sir David Gill ausgeführten Triangulationen. Der genannte

---

*) F. G. W. Struve. Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Rußlands, 1821—23. Zwei Teile, 1831, Dorpat.

Jedem angehenden Geodäten ist das Studium dieses geistvollen Werkes anzuraten, da es eine Fülle von Erfahrungsergebnissen und von Betrachtungen über Fehlerquellen und beste Beobachtungsmethoden enthält.

Direktor der königl. Kapsternwarte betont besonders den Vorteil, sich eines nicht zu schweren, also leichter transportablen Stativs bedienen zu können.*)

Das Versicherungsfernrohr kann am Teilkreis festgemacht werden; es wird auf ein künstlich hergerichtetes, besonders scharf einstellbares Hilfsobjekt eingestellt. Bei jeder Visur des Beobachtungsfernrohrs stellt man auch das Mikrometer des Versicherungsfernrohrs auf das Hilfsobjekt ein, wobei ein Gehilfe sehr nützlich ist (Struve).

III. Ablesefehler. Visurfehler. persönliche Fehler. Die zufälligen Fehler beim Einstellen und Ablesen der Mikroskope sind, namentlich im Mittel von zwei oder mehreren Mikroskopen, in der Regel so klein, daß sie gegen die Teilungsfehler und Visurfehler verschwinden. (Die systematischen Fehler dachten wir uns schon S. 479 eliminiert.) Bei Anwendung von Nonien oder Schätzmikroskopen liegen die Verhältnisse allerdings anders; es läßt sich denken, daß dann diese Fehlerquelle die einflußreichste ist — um sie herabzudrücken, kann dann dasselbe Verfahren dienen wie für die Verminderung des Einflusses größerer Teilungsfehler: das bekannte Repetitionsverfahren.

Sogenannte persönliche Fehler kommen erfahrungsmäßig (W. Struve) bei Nonienablesungen vor; man kann aber erwarten, daß sie auf das Mittel an mehreren Kreisstellen, namentlich auch auf die Winkel als Richtungsunterschiede, wie zufällige Fehler wirken und daß ihr Einfluß sich entsprechend vermindert.

Die Visurfehler sind sehr zusammengesetzter Art. Der Einstellungsfehler des einfachen oder doppelten Fadens im Gesichtsfelde des Fernrohrs aufs Objekt ist in erster Linie zufälliger Natur. Persönliche Fehler entstehen z. B. durch ein zu weites oder zu enges Fadenintervall. Körperliche Signale (Pyramiden, Kirchtürme) geben leicht Auffassungsfehler von 1 bis 2″.**) Es sind daher flache Signale und Heliotropen

*) Sir David Gill. Report of the Geodetic Survey of South Africa. Vol. I, Capetown 1896, S. [82].

**) Vergl. hierzu die Besprechung der „Dänischen Gradmessung“ in oder Lichter anzuwenden, und es ist Sorge zu tragen, daß im Gesichtsfelde nichts sichtbar ist, was einen zur vertikalen Visierebene des Objekts unsymmetrischen Eindruck macht.*) Da es schließlich auf Richtungsunterschiede ankommt, sind Objektivgitter, die man ans Fernrohr hält, zur Herbeiführung gleicher Helligkeit der Lichter, zweckmäßig.

Nur selten stehen die Signalbilder im Gesichtsfelde ganz fest, meistens bewegen sie sich hin und her. Die Undulationen können so heftig werden, daß sie genaues Arbeiten unmöglich machen; man ist daher bei entfernten Objekten, also bei Haupttriangulationen, auf gewisse Tagesstunden mit den Beobachtungen beschränkt. Jedenfalls hat die Brechung der Lichtstrahlen in der Atmosphäre einen Hauptanteil an den Visurfehlern; in der Regel ist er zufälliger Natur.

Die Seitenrefraktionen können auch systematisch wirken; sie treten dann mit ihrem konstanten Teil erst in den Widersprüchen des Netzes hervor.

IV. Zusammensetzung des mittleren Fehlerquadrats bei der einfachen Winkelmessung. Es sei:

μ_v der mittlere zufällige Visurfehler,

μ_a der mittlere zufällige Ablesefehler von einem Nonius oder Mikroskop,

μ_z der mittlere zufällige Teilungsfehler für eine Ablesestelle.

f_r der periodische Teilungsfehler für eine Stelle.

Dann ist das mittlere zufällige Fehlerquadrat für eine Richtungsbeobachtung bei m Nonien oder Mikroskopen gleich

$$\mu_v^2 + \frac{\mu_a^2}{m} + \frac{\mu_z^2}{m}. \tag{5}$$

Für einen einfach beobachteten Winkel verdoppelt sich dieses, und es folgt:

der Vierteljahrsschr. der Astr. Ges. 1877, Bd. 12, S. 229—236; ferner den S. 481 erwähnten Aufsatz von Schreiber in der Zeitschr. f. Vermessungswesen, 1878, S. 209 u. 227.

*) C. F. Gauß fand bei seiner Triangulation von Hannover, daß er ein zur Laterne des Turmes exzentrisches Heliotroplicht um einen konstanten Betrag irrig beobachtete. Vergl. den Briefwechsel mit Schumacher; ferner Gauß' Werke IX, S. 389.

$$(6) \qquad 2\mu_v^2 + \frac{2\mu_a^2}{m} + \frac{2\mu_z^2}{m}.$$

Es tritt nun aber außerdem der Einfluß der periodischen Teilungsfehler hinzu, sowie der Einfluß der möglichen kleinen Verdrehung des Teilkreises zwischen beiden Visuren. Ist $[t_r]$ die Summe der periodischen Teilungsfehler für die Beobachtung des einen Objekts und $[t_r']$ für das andere, also $[t_r'] - [t_r]$ für den Winkel, so hat man (6) durch

$$(6^*) \qquad \left(\frac{[t_r'] - [t_r]}{m}\right)^2$$

zu ergänzen: denn obgleich dieser Anteil einen systematischen Charakter hat, so genügt doch die einfache Beifügung des Quadrats nach S. 68.

Zur Berücksichtigung der Schwankung des Teilkreises fügen wir zu (6) noch das Glied

$$(6^{**}) \qquad 2\mu_s^2$$

hinzu, so daß gewissermaßen μ_s die mittlere zufällige Schwankung des Teilkreises bei der einzelnen Visur ist. Es wird hier vorausgesetzt, daß nach Lage des Falles entweder die ganze Schwankung als zufällig aufzufassen ist, oder daß ein regelmäßiger Anteil durch das Meßverfahren eliminiert wird.

Ist nun wie bei den deutschen Theodoliten $m = 2$ und wird der Winkel an derselben Teilkreisstelle im Hin- und Hergang gemessen, so dividieren sich die beiden ersten Glieder von (6) durch 2, da ein arithmetisches Mittel von zwei Beobachtungen vorliegt. $2\mu_z^2 : m$ und (6*) bleiben ungeändert; (6**) dividiert sich wieder durch 2.

Bei $m = 2$ erhalten wir also für die Doppelbeobachtung des Winkels (im Hin- und Hergang) das mittlere Fehlerquadrat gleich

$$(7) \qquad \mu_v^2 + \mu_s^2 + \frac{1}{2}\mu_a^2 + \mu_z^2 + \left(\frac{[t_r'] - [t_r]}{2}\right)^2.$$

Das letzte Glied entspricht der Differenz der Durchmesserkorrektionen für beide Richtungen. Es hängt zufolge (2) nur ab von T_2, T_4 usw. Denn da der Durchschnittswert von $T_2^2 \sin^2(2A + N_2)$ usw. für alle möglichen Ablesungen $\frac{1}{2} T_2^2$ usw. ist, von

$$T_2^2(\sin(2A + N_2) - \sin(2A + 2W + N_2))^2,$$

für alle möglichen A und Winkel W aber T_2^2 beträgt, so erkennt man, daß im Mittel für beliebige Winkel und Kreisstellungen das letzte Glied in (7) den Betrag

$$T_2^2 + T_4^2 + \cdots = 2\tau_2^2 \tag{7*}$$

hat, worin nun τ_2 als mittlerer Wert einer Durchmesserkorrektion bezeichnet werden kann. (Dieser Wert wird angenähert auch erhalten, wenn man die Summe gleichmäßig verteilter beobachteter Durchmesserkorrektionen auf null bringt, und aus ihrem Durchschnittsquadrat die Wurzel zieht.)

Für eine doppelt (im Hin- und Hergange) beobachtete Richtung kann man nach (7) und (7*) ansetzen als mittleres Fehlerquadrat:

$$\frac{1}{2}(\mu_r^2 + \mu_s^2) + \frac{1}{4}\mu_a^2 + \frac{1}{2}\mu_z^2 + \tau_2^2. \tag{8}$$

Diese letztern Ausdrücke würden in Betracht kommen, wenn Winkel bei $m = 2$ immer nur in einem Hingang und Hergang beobachtet würden und alle verschiedenen Winkel, die zu einer Ausgleichung zusammenkommen, sehr verschiedene Größe hätten und bei der Messung an den verschiedensten Teilkreisstellen lägen.

Messen wir nun bei $m = 2$ Mikr. in dieser Weise n-mal doppelt, und zwar an n gleichmäßig über 180° verteilten Teilkreisstellen, so wird das mittlere Fehlerquadrat des Winkelmittels gleich

$$\frac{1}{n}(\mu_r^2 + \mu_s^2) + \frac{1}{2n}\mu_a^2 + \frac{1}{n}\mu_z^2 + 2\tau_{2n}^2. \tag{9}$$

Bei den ersten vier Gliedern tritt einfach der Divisor n auf, da wir es mit zufälligen Fehlern zu tun haben. Das letzte Glied folgt aus (7) zunächst gleich

$$\left(\frac{[t_r'] - [t_r]}{2n}\right)^2, \tag{9*}$$

worin die Summen auf $2n$ Teilkreisstellen zu erstrecken sind. Von der periodischen Funktion für t_r in (1) bleiben nun nur die Glieder mit T_{2n}, T_{4n} usw. übrig; das mittlere Quadrat von

(9*) für beliebige Ablesungen und Winkel wird daher:

(9**) $$T_{2n}^2 + T_{4n}^2 + \cdots = 2\tau_{2n}^2,$$

worin τ_{2n} zur Abkürzung dient und sich auf den mittlern Wert der Durchmesserkorrektionen an n Teilkreisstellen bezieht. Wären die t_r zufälliger Natur, so würde man $\tau_{2n}^2 = \tau_2^2 : n$ zu setzen haben; wegen des systematischen Charakters der t_r und der gleichmäßigen Verteilung der Doppelmessungen auf 180^0 muß $\tau_{2n}^2 < \tau_2^2 : n$ werden.

Was nun die relative Größe der Glieder in (9) anlangt, so wird gegenwärtig bei guten Einrichtungen μ_c^2 am meisten zu befürchten sein. Bei diesem Fehlerquadrat ist man eben von äußeren Umständen abhängig: selbst bei besten Luftzuständen wird μ_c für Entfernungen von der Größe der Hauptdreiecksseiten noch etwa $\pm \frac{1}{2}''$ betragen. Es kann aber leicht bis auf $\pm 1''$ und mehr steigen. Durch Verfeinerung der Apparate und sichere Aufstellung hat man die Gesamtwirkung der andern Glieder in (9) hauptsächlich auf die Wirkung von μ_c^2 herabgedrückt. Dies gilt insbesondere für das Winkelverfahren von Schreiber, wozu wir bereits S. 209 u. f. ein Beispiel gaben und worauf wir sogleich nochmals weiter eingehen werden.

Ähnlich verhält es sich mit andern guten Meßverfahren, über die wir jetzt einen Überblick geben, wobei wir auch zweier älteren Verfahren gedenken werden. — Anders als bei diesen Arbeiten für Haupttriangulationen liegt die Sache bei Arbeiten, die mit kleinen Apparaten ausgeführt werden müssen, also besonders Spezialvermessungen: hierauf werden wir nur kurz eingehen.

§ 2. Überblick über die Beobachtungsmethoden.

1. Das Winkelverfahren von Generalleutnant Schreiber.*) Für Haupttriangulationen dürfte dieses Verfahren bei Benutzung bester Theodoliten dasjenige sein, das in kürzester Zeit Ergebnisse von einem vorgeschriebenen hohen Genauigkeitsgrad liefert.

Jeder Winkel, deren $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ bei ν Richtungen möglich

*) Zeitschr. f. Vermessungswesen, 1878, S. 209 u. f.

sind, wird an n gleichmäßig über 180^0 verteilten Teilkreisstellen doppelt gemessen (im Hin- und Hergange). Nach S. 211 wird das Stationsergebnis äquivalent einem vollen Richtungssatze, dessen Gewicht dem arithmetischen Mittel von $n\nu$ vollen Reihen entspricht. Die Anzahl der Visuren ist beim Winkelverfahren gleich $2n\nu(\nu-1)$, bei $n\nu$ vollen Reihen gleich $n\nu^2$. Bei nicht kleinen ν ist die Arbeit also fast das Doppelte gegenüber dem Richtungsverfahren. Dies ist jedoch nur scheinbar. Das Winkelverfahren verbürgt möglichste Einschränkung des m. F. μ_s und eine systematische Elimination der Teilungsfehler, insofern Richtungssätze als volle Sätze ohne Zeitverluste schwer zu erreichen sind und dann sich entweder μ_s noch stark steigert oder indem durch Ausflicken der Richtungssätze die Teilungsfehler durch Ausgleichungsmängel mehr hineinkommen.

Schreiber nahm $n\nu$ annähernd 24, z. B. bei $\nu = 6$, $n = 4$, bei $\nu = 8$, $n = 3$, dagegen bei $\nu = 7$, $n = 4$ mit $n\nu = 28$.

Wird ν größer als 7, und will man über $n\nu = 24$ nicht weit hinausgehen, so wird n klein: z. B. bei $\nu = 12$ wird $n = 2$. In solchen Fällen würde man vielleicht keine Doppelmessungen ausführen, sondern bereits nach dem Hingange den Kreis drehen, um eine bessere Herabminderung der periodischen Teilungsfehler schon im Mittel der Messungen für die einzelnen Winkel zu erzielen.

Wir geben umstehend noch nach Schreiber als Beispiel die Anordnung der Kreisstellungen auf die einzelnen Winkel für $\nu = 6$; I und II bezeichnen die beiden Fernrohrlagen.

Aus den verschiedenen Widersprüchen des Beobachtungsmaterials lassen sich verschiedene mittlere Fehlerberechnungen ableiten.

Es seien wie im Beispiel S. 209 u. f. die Verbesserungen der Winkelmittel, also der arithmetischen Mittel der bei n Kreisstellungen erhaltenen Doppelmessungen (Sätze), durch λ bezeichnet: sie haben das Gewicht n, wenn die einfache Richtungsbeobachtung das Gewicht 1 erhält.

Geht man auf die einzelnen Satzergebnisse zurück, so kann man entweder deren Verbesserungen σ nach der Ausgleichung ableiten, oder ihre Abweichungen v gegen das betreffende Winkelmittel. Da diese letzteren eine teilweise Aus-

Winkel	I	I	II	II
1 · 2	0°	45°	90°	135°
1 · 3	9	54	99	144
1 · 4	18	63	108	153
1 · 5	27	72	117	162
1 · 6	36	81	126	171
2 · 3	36	81	126	171
2 · 4	27	72	117	162
2 · 5	9	54	99	144
2 · 6	18	63	108	153
3 · 4	0	45	90	135
3 · 5	18	63	108	153
3 · 6	27	72	117	162
4 · 5	36	81	126	171
4 · 6	9	54	99	144
5 · 6	0	45	90	135

gleichung vorstellen, so hat man:

(11) $$n[\lambda\lambda] + [vv] = [\sigma\sigma],$$

wobei zu beobachten ist, daß die Satzergebnisse das Gewicht 1 haben.

Geht man endlich auf die einfachen Winkelbeobachtungen zurück und nennt ω ihre Verbesserungen nach der Ausgleichung, dagegen δ die Unterschiede der Messungen im Hin- und Hergange, so ist

(12) $$[\sigma\sigma] + \frac{1}{4}[\delta\delta] = \frac{1}{2}[\omega\omega],$$

die ω haben das Gewicht $\frac{1}{2}$, die δ also das Gewicht $\frac{1}{4}$.

Die Anzahl der λ, d. i. der Winkel, beträgt $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$, die Anzahl der Unbekannten $\nu - 1$, überschüssig sind also $\frac{1}{2}\nu(\nu-1) - (\nu-1) = \frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)$ Winkel, und es wird

$$n[\lambda\lambda] : \frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)$$

das mittlere Fehlerquadrat für die Gewichtseinheit und

$$[\lambda\lambda] : \frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)$$

das mittlere Fehlerquadrat fürs Winkelmittel. Für dieses war aber auch der Ausdruck (9) S. 487 hinsichtlich der Zusammensetzung aus den einzelnen Fehlerursachen gefunden. Somit wird

$$(12)\qquad \mu_e^2 + \mu_s^2 + \frac{1}{2}\mu_a^2 + \mu_z^2 + 2n\tau_{2n}^2 = \frac{n[\lambda\lambda]}{\frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)}.$$

Für jeden der $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ je n-mal doppelt gemessenen Winkel hat man n Abweichungen v vom Mittel. Bezeichnet $[vv]$ wieder die Gesamtquadratsumme, so ist

$$[vv]:\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(n-1)$$

das mittlere Fehlerquadrat der Gewichtseinheit, also einer Doppelmessung eines Winkels, wofür die Zusammensetzung nach (7) und (7*), S. 486/487, gilt. Damit wird

$$(13)\qquad \mu_e^2 + \mu_s^2 + \frac{1}{2}\mu_a^2 + \mu_z^2 + 2\tau_2^2 = \frac{[vv]}{\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(n-1)}.$$

Diese Aufstellung ist deshalb zulässig, weil in den n Abweichungen v für jeden Winkel sich die periodischen Teilungsfehler wegen der gleichmäßigen Verteilung der n Messungen auf 180^0 annähernd wie zufällige gleichmäßig auf + und — verteilen.

Die linken Seiten der Formeln (12) und (13) sind etwas verschieden, wenn in den Winkelmitteln die periodischen Teilungsfehler sich nicht wie zufällige, sondern in noch stärkerem Grade vermindern. Im ersteren Falle würde $2n\tau_{2n}^2 = 2\tau_2^2$ sein. Die rechten Seiten geben aber auch dann etwas verschiedene Werte wegen der zufälligen Abweichungen des Fehlervorkommens vom geraden Fehlergesetz. Formel (13) gibt aber wegen des größeren Nenners die schärfere Bestimmung. Aus dem Unterschied von (12) und (13) Schlüsse auf τ_2^2 zu machen, ist jedenfalls meistens sehr unsicher, zumal bei (13) noch Einflüsse des Kollimationsfehlers der Visierachse wirken können, indem diese in den einzelnen Satzbeobachtungen nicht eliminiert sind, sondern erst in den Winkelmitteln.

Auf Station Ballon ist $n[\lambda\lambda] = 8{,}45$, ferner $[vv] = 38{,}17$, $\nu = 6$, $n = 4$. Die rechten Seiten von (12) und (13) werden bzw. 8,45 : 10, d. i. 0,845 und 38,17 : 45, d. i. 0,848. Also ist hier kein Unterschied.*)

Man müßte erwarten, daß (13) etwas mehr als (12) gäbe. Doch kann letzterer Wert immerhin auch vergrößert werden durch geringe Einflüsse einer schiefen Lage der Horizontalachse und etwa einer Mitführung des Instruments durch die Alhidade (was aber auf Station Ballon wegen der Sorgfalt der Beobachter kaum von Bedeutung gewesen sein dürfte). Aus der einzelnen Station kann man natürlich Schlüsse nicht ziehen.**)

Nimmt man Rücksicht auf die Gleichung (10), so kann man aus $[\sigma\sigma]$ ebenfalls leicht ein mittleres Fehlerquadrat herleiten. Wir ziehen aber die Formeln (12) und (13) vor.

Dagegen kann man aus den Unterschieden δ im Hin- und Hergange noch bequem eine wertvolle Formel ableiten. Wenn wie angenommen Hin- und Hergang bei derselben Fernrohrlage und der gleichen Kreisstellung beobachtet werden und dicht hintereinander folgen, so unterscheiden sie sich nur durch die Visurfehler, die Ablesefehler und die Einflüsse mangelhafter Festigkeit, also insbesondere die kleine mögliche Drehung des Horizontalkreises. Es wird im Durchschnitt sein:

$$\frac{[\delta\delta]}{\frac{1}{2}\nu(\nu-1)n} = 4\mu_v^2 + 2\mu_a^2 + 4\mu_d^2$$

und also

$$(14) \qquad \mu_v^2 + \frac{1}{2}\mu_a^2 + \mu_d^2 = \frac{\frac{1}{4}[\delta\delta]}{\frac{1}{2}\nu(\nu-1)n}.$$

Hierin ist $4\mu_d^2$ als das mittlere Quadrat von $d' - d''$ eingeführt, worin d' und d'' die nahezu gleichen Drehungen des Teilkreises bei beiden einfachen Winkelmessungen im Sinne wachsender Teilung sind. μ_d^2 wird im allgemeinen wesentlich größer als μ_v^2 sein, welches nach früherer Festsetzung für

*) Zeitschr. f. Vermessungswesen, 1878, S. 232 u. f.

**) Vergl. außer den neueren Bänden der Königl. Preuß. Landestriangulation über Hauptdreiecke auch die Triangulation du royaume des Pays-bas, t. I, Delft 1903.

die zufällige Schwankung des Teilkreises eingeführt wurde, vergl. (6**), S. 486.

Aus (13) und (14) leitet man durch Subtraktion einen Wert ab für

$$2\tau_2^2 + \mu_z^2 + \mu_s^2 - \mu_d^2. \tag{15}$$

Auf Station Ballon ist (vergl. a. a. O.) $[\delta\delta] = 43{,}92$ und daher

$$\left|\begin{aligned} \mu_v^2 + \frac{1}{2}\mu_a^2 + \mu_d^2 &= 0{,}183; \quad \text{ferner} \\ 2\tau_2^2 + \mu_z^2 + \mu_s^2 - \mu_d^2 &= 0{,}665. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Das durch (14) gegebene mittlere Fehlerquadrat kann man als mittleres Fehlerquadrat der „nackten" Beobachtung bezeichnen (Hansen), wenn μ_d gegen μ_v und μ_a sehr klein angenommen wird.

Mittels (10) und (11) und den bisherigen Formeln kann man auch aus $[\sigma\sigma]$ und $[\omega\omega]$ direkt mittlere Fehlerquadrate herleiten, was aber nichts Neues gibt.

Mit Rücksicht auf die Zahlenwerte nach (16) würde es wohl vorteilhaft sein, die beiden Doppelmessungen, welche einen Satz bilden, nicht bei gleichen, sondern bei verschiedenen Kreisstellungen auszuführen.

II. Richtungsbeobachtungen. Wenn auf einer Station eines Hauptdreiecksnetzes ν Richtungen desselben zusammentreffen, so ist es naheliegend, sie alle zusammen hintereinander der Reihe nach zu beobachten. Bei sehr fester Aufstellung ist dies auch empfehlenswert, falls die Objekte in der Regel alle gleichzeitig gut sichtbar sind. Beobachtet man eine Anzahl „Sätze", deren jeder aus einer Reihe im Hingang und einer solchen im Hergang besteht, an mehreren gleichmäßig über den Umfang des Kreises verteilten Stellen, so wird der Einfluß der Teilungsfehler erheblich herabgedrückt und eine der Zeit proportionale Pfeilerdrehung eliminiert. Leider fallen, besonders bei Anwendung von Heliotropen, oftmals einzelne Objekte aus. Dann entstehen durch Warten Zeitverluste, mangelhafte Elimination der Pfeilerdrehung und schließlich bei unvollständigen Sätzen eine weniger günstige Herabminderung des Einflusses der Teilungsfehler. Auch ist dann eine wirklich strenge Ausgleichung der Stationsmessungen überhaupt undurchführbar. Trotz alledem ist die Methode der Richtungsbeobachtung seit der Zeit, wo es gute Kreisteilungen gab, immer wieder angewandt worden, bis zur neuesten Zeit: in England, in Indien, in den russischen Ostseeprovinzen und neuerdings in Sachsen, in Frankreich, in Südafrika, in den Vereinigten Staaten von Amerika usw.

Verschiedene Beobachter haben in jeden Satz eine Nullmarke aufgenommen, d. i. meistens ein besonders gut sichtbar hergerichtetes künstliches Objekt, das also sehr scharf zu beobachten und daher vorteilhaft ist zum Ausflicken unvollständiger Sätze. Fehlt nämlich in einem Satze ein Objekt, so würde man den betreffenden Satz einfach durch nachträgliche Beobachtung desselben und der Nullmarke bei derselben Kreisstellung vervollständigen können, wenn der Visur- und Ablesefehler für die Nullmarke als unerheblich zu betrachten wären. Ist dies nun auch für die Ablesefehler nahezu der Fall, so doch nicht ohne weiteres für die Visurfehler: das Ausflicken fällt daher unvollkommen aus.

In Deutschland wird das Verfahren der Richtungsbeobachtung in der Regel mit dem Namen von F. W. Bessel*) in Verbindung gebracht, der die Triangulation für die ostpreußische Gradmessung in den Jahren 1832/35 in dieser Weise ausführte und ein formell strenges Ausgleichungsverfahren anwandte. Bessel benutzte in der Regel Theodolite mit vier Nonien, beobachtete aus zwei Reihen im Hin- und Hergange bestehende Sätze und drehte den Kreis von 15 zu 15°. Die Ausgleichung der mehr oder weniger unvollständigen Sätze wurde in der Annahme durchgeführt, daß lediglich zufällige Fehler auszugleichen seien (vergl. das Beispiel auf S. 192 u. f.). Die Unvollständigkeit der Sätze erzeugte aber eine unangenehme und zeitraubende Verwicklung der Stationsausgleichungen und der Netzausgleichung (vergl. S. 280), die besonders deshalb Bedenken erregt, weil das Ergebnis keineswegs Strenge besitzt.**)

*) Gradmessung in Ostpreußen. Berlin 1838.

**) C. G. Andrae hat den Einfluß der Teilungsfehler bei der Aus-

Bei der Landesvermessung von Großbritannien und Irland*) wurden Theodolite mit drei und fünf Mikroskopen angewendet; die zweite Lage des Fernrohrs gab hier schon ohne Kreisdrehung andere Ablesestellen. Aber auch Kreisdrehungen wurden bewirkt um 20 oder 30°, so daß zwei einander folgende Sätze jedenfalls verschiedene Teilkreisstellen trafen. Jeder Satz bestand aus zwei Reihen mit entgegengesetzter Fernrohrlage. Seit 1840 wurde ein besonders konstruiertes Nullobjekt benutzt. Mit ihm begann die Reihe und zum Schluß wurde es wieder zur Kontrolle eingestellt.

Bis 1840 berechnete man aus diesen Beobachtungen die Winkel zwischen den Nachbarrichtungen (included angles) einzeln. Kapitän Yolland gab diese „unzureichende und mühsame“ Methode auf (vergl. über dieselbe weiterhin die Indian Survey) und ging zur direkten Ausgleichung der Satzbeobachtungen über, die nach der S. 199 u. f. angegebenen einfachen Näherungsmethode bewirkt wurde. Das Ergebnis wurde als ein voller Satz betrachtet; die Richtungen erhielten aber für die Netzausgleichung ungleiche Gewichte, nämlich die Quadrate der Einstellungszahlen dividiert durch die doppelte Quadratsumme der Verbesserungen der einzelnen Beobachtungen ($n^2 : 2[\varepsilon^2]$; bei gleicher Genauigkeit der Richtungsbeobachtungen sind also die Gewichte proportional den ersten Potenzen der Einstellungszahlen n).

Während Bessel (und mit ihm wohl die meisten Beobachter) der einzelnen Richtungsbeobachtung gleiche Genauigkeit für alle Stationen des Netzes beilegte, wurden bei der Ordnance Survey den verschiedenen Richtungen verschiedene Gewichte erteilt — indessen insofern nicht konsequent, als bei der Stationsausgleichung dies noch nicht durchgeführt wird.

Bei der Haupttriangulation des Königreichs Sachsen 1867—78 schloß sich A. Nagel ziemlich eng an Bessel an unter möglichster Beseitigung des Einflusses der Teilungsfehler (vergl. S. 482). Pfeilerdrehungen waren kaum zu befürchten, da überall niedrige

gleichung besprochen und u. a. an einem Beispiel untersucht; vergl. „Den danske Gradmaaling“, Bd. II. 1872, S. 443—460. (Vergl. auch das Referat in der Vierteljahrsschrift der Astr. Ges. Bd. 12, S. 209.)

Bei dieser Gelegenheit sei auch der sehr eingehenden Untersuchung von Meldahl (a. a. O. Bd. III. 1878, S. 361 u. f.) über die verschiedenartigen Fehler bei Benutzung des Theodolits von Ertel gedacht.

*) Ordnance Trigonometrical Survey. Principal Triangulation. London 1858.

oder nicht sehr hohe Steinpfeiler zur Aufstellung des Theodolits dienten. Eine der Hauptrichtungen oder eine immer gut zu erhaltende Richtung niederer Ordnung wurde als Nullrichtung stets mit beobachtet. Es wurde bei zwei Mikroskopen in 24 Kreisstellungen beobachtet; die Drehung erfolgte **11**-mal um 15° 4′, dann einmal um 15° 0′, dann **11**-mal um 14° 56′. Dabei wurde auch gesorgt, daß Mikroskop I der Reihe nach die Ablesungen 0″, 5″, ... 55″ erhielt.

Diese Maßnahmen hatten den Zweck, etwaige systematische Teilungsfehler innerhalb der Gradintervalle zu eliminieren, sowie die periodischen Schraubenfehler zu tilgen.

Bei jeder Kreisstellung wurden zwei Sätze mit entgegengesetzter Fernrohrlage und um 1° verstelltem Mikroskoparm beobachtet. Jeder Satz besteht aus zwei Reihen (Hin- und Hergang). Nach der Ablesung der Mikroskope (an je zwei Strichen) wurde die Visur kontrolliert und nötigenfalls erneuert.

Die in einzelnen Sätzen fehlenden Objekte wurden bei derselben Kreisstellung im Anschluß an die Nullrichtung nachgeholt. Das ganze Material ist nach Bessels Verfahren in recht mühsamer Arbeit ausgeglichen, ergab aber sehr gute Resultate, wobei immerhin zu beachten ist, daß jedes Objekt 96-mal eingestellt wurde.

In den Vereinigten Staaten von Amerika hat die Coast and Geodetic Survey bei Bearbeitung eines ersten Teiles der Breitengradmessung in 98° Länge östlich von Greenwich auch Satzbeobachtungen ausführen lassen.*) Der Theodolit hatte drei Mikroskope; das Fernrohr wurde beim Hergange in entgegengesetzte Lage wie beim Hingange gebracht, so daß die Satzmittel schon von sechs Ablesestellen abhängen. Dann wurde 15-mal um ungefähr 15° gedreht, so daß das eine Signal an einem der Mikroskope folgende runde Ablesungen für 16 Sätze erhielt:

0° 0′ 40″	64° 0′ 40″	128° 0′ 40″	192° 0′ 40″
15 1 50	79 1 50	143 1 50	207 1 50
30 3 10	94 3 10	158 3 10	222 3 10
45 4 20	109 4 20	173 4 20	237 4 20.

Die periodischen Teilungsfehler werden zu einem großen Teile schon in jeder Gruppe zu vier Sätzen eliminiert, da für jede Rich-

*) Report of the Superintendent from July 1, 1902, to June 30, 1903. Washington 1903; S. 819 u. f.

tung schon 24 Ablesestellen vorhanden sind. Die 16 Sätze gruppieren sich aber so, daß 96 Ablesestellen entstehen, die nahezu gleich verteilt sind. In jeder Gruppe werden außerdem infolge der Verteilung der Minuten und Sekunden auf das Teilungsintervall von fünf Minuten die Einflüsse des konstanten Teiles des „Run" der Mikroskope eliminiert. Es wurde dann überhaupt auf Runkorrektion verzichtet. (Dies geschieht ja in der Regel; manche überlassen aber die Verteilung der Beobachtungen aufs Teilungsintervall dem Zufall).

Fielen Objekte aus einzelnen Sätzen heraus, so wurden sie nachträglich beobachtet, wobei zwei der bereits beobachteten Objekte zum Anschluß dienten. Die Messungen bei denselben Kreisstellungen wurden dann in einfacher Weise zu vollen Sätzen vereinigt, und diese vollen Sätze als gleichgewichtig durch einfache Mittelbildung zum Stationsgebiet zusammengezogen.

Dieses Verfahren erspart die mühsamen Stationsausgleichungen und gibt fürs Netz nur Ausgleichungen mit gleichen Richtungsgewichten. Ich habe es auch schon 1869 empfohlen,*) da es eine sehr gute Annäherung gibt und bequem ist.

Man habe z. B. in einer Kreislage erhalten die Richtungswerte (Sätze):

$$(17)\qquad \begin{array}{ccccc} O & A & B & C & . \\ O' & . & . & C' & D'. \end{array}$$

Ist

$$\Delta = \frac{(C' - C) - (O' - O)}{4},$$

so sind die streng ausgeglichenen Gesamtergebnisse:

$$(18)\quad 0,\ A - O + \Delta,\ B - O + \Delta,\ C - O + 2\Delta,\ D' - O' - \Delta,$$

wie man leicht erkennt.

Der Anteil der Teilungsfehler am mittleren Fehlerquadrat eines der Zwischenwinkel ist nun wie bei einem vollen Satze, da sechs Ablesestellen da sind:

$$(19)\qquad \frac{1}{3}\,\mu_z^2 + 2\tau_6^2,$$

vergl. die Betrachtungen zu (8) und (9), S. 487: $2\tau_6^2$ ist nach (9**) zu deuten.

*) Beiträge zur Theorie der Ausgleichung trigonometrischer Netze. (Z. f. Math. u. Physik von Schlömilch, 1869, S. 205 u. f.)

An jeder Richtungsangabe haftet nun noch das mittlere Fehlerquadrat

$$(20) \qquad \frac{1}{2}\left\{\mu_o^2 + \frac{1}{2}\mu_a^2 + \mu_s^2\right\}.$$

Bezeichnen wir diesen Ausdruck vorübergehend mit $\frac{1}{2}\mu^2$, so ergeben sich nach Maßgabe von (18) für die Winkel folgende mittlere Fehlerquadrate:

$$(20^*) \quad \begin{cases} \text{Winkel } AB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & \mu^2 \\ \quad \text{„} \quad OC \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & \frac{1}{2}\mu^2 \\ \quad \text{„} \quad AD',\ BD' \quad . \quad . \quad . \quad . & \frac{3}{2}\mu^2 \\ \quad \text{„} \quad OA,\ OB,\ CA,\ CB,\ OD',\ CD' & \frac{7}{8}\mu^2. \end{cases}$$

wozu also μ^2 durch die Parenthese in (20) gegeben ist.

Nimmt man statt dessen wie bei vollen Sätzen einfach μ^2, so entstehen Fehler bis $\frac{1}{2}\mu^2$, die indessen für den Gesamtbetrag mit (19) wenig ins Gewicht fallen. Es könnten freilich bei mehrfachem Ausflicken eines Satzes größere Fehler entstehen; doch wird sich ein derartiger Fall wohl vermeiden lassen.

Bei deutschen Theodoliten mit nur zwei Mikroskopen tritt an Stelle von (19) $\mu_z^2 + 2\tau_2^2$, bei demselben Teilkreis also ein größerer Wert; in diesem Falle kommen die Mängel des Ausflickens noch weniger in Betracht wie im vorigen.

Um den Mängeln zu entgehen, welche unvollständige Sätze von Richtungen im Gefolge haben, bleibt nur das Winkelverfahren übrig, welches schon besprochen wurde.

Man kann auch versuchen, dasselbe durch Sätze von drei Richtungen zu erreichen, wo dann alle Kombinationen der ν Richtungen zu drei durchzumessen wären. Dieses Verfahren, welches auch bei Kombinationen zu je i Richtungen sehr bequeme Ausgleichungsformeln liefert, wurde schon anderweit behandelt.*) Es zeigt sich, daß die Messung aller Kombinationen zu je i ein Ergebnis liefert, welches dem Mittel von

*) Vergl. u. a. Helmert. Ausgleichung von symmetrisch angeordneten Richtungsbeobachtungen einer Station. (Zeitschr. f. Vermessungswesen Bd. XIV. 1885, S. 263 u. f.)

(21) $$\frac{\nu}{i}(\nu-2)_{i-2}$$

vollen Sätzen gleich ist, also bei $i = 3$ dem Mittel von

(21*) $$\frac{\nu(\nu-2)}{3}$$

vollen Sätzen.

Die Anzahl der Visuren ist im allgemeinen gleich $i(\nu)_i$, für $i = 3$ speziell gleich $3(\nu)_3$, d. i. $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(\nu-2)$, bei den vollen Sätzen (21*) aber nur $\frac{1}{3}\nu^2(\nu-2)$, d. i. annähernd $\frac{2}{3}$ des vorigen Wertes. Beim Winkelverfahren war die entsprechende Zahl annähernd $\frac{1}{2}$. Oder auch: Wird die Arbeit bei vollen Sätzen gleich 1 gesetzt, so ist sie zur Erzielung gleicher Genauigkeit beim Winkelverfahren annähernd 2, bei Kombinationen zu drei Richtungen aber nur 1,5. Hiernach würden sich dreipunktige Sätze empfehlen. Aber ihre Anwendung bietet in der Ausführung jedenfalls verschiedene Schwierigkeiten.

III. Auflösung der Richtungssätze in Nachbarwinkel. W. Struve wandte bei der Gradmessung in den russischen Ostseeprovinzen seit 1823 (vergl. das S. 483 genannte Werk) Richtungsbeobachtungen an. Bei jeder Richtung wurde die möglichst günstig errichtete Nullmarke an dem Okularmikrometer des Versicherungsfernrohrs erneut eingestellt. Die Beobachtungen wurden aber nicht als Richtungsbeobachtungen verwertet, sondern es wurden mit Rücksicht auf die Unvollständigkeit der Sätze die benachbarten Dreieckswinkel des Netzes abgeleitet, indem die Einzelmessungen in den verschiedenen Kreisstellungen zu geeigneten Mittelwerten vereinigt wurden. In der Netzausgleichung sind diese Dreieckswinkel als voneinander unabhängig behandelt.

In gleicher Weise ließ neuerdings Sir David Gill bei der von ihm geleiteten Triangulation in Südafrika verfahren (vergl. S. 484).

Auch in Indien verfuhr man so (insbesondere seit 1823), nur mit dem Unterschied, daß das Versicherungsfernrohr fehlte. Eine Nullmarke wurde nur benutzt, wenn bei großen Distanzen der Hauptobjekte keines derselben sich als Ausgang der Satzbeobachtungen eignete.*)

Das Verfahren, einen Satz Richtungen in Nachbarwinkel aufzulösen und diese als unabhängig in der Ausgleichung zu betrachten, würde selbstredend ganz verwerflich sein, wenn es sich immer um volle Sätze handelte. Wenn aber die beobachteten Sätze vorherrschend unvollständig sind, so kann das Verfahren recht wohl ebenso ein Näherungsverfahren sein, wie andere, vorher besprochene. Im Falle des in Indien ausgeführten Beobachtungsmodus ist noch der Umstand dem in Rede stehenden Verfahren günstig, als daselbst kein Versicherungsfernrohr angewandt wurde und daher die Nachbarwinkel von zeitlichen Verdrehungen des Teilkreises weniger beeinflußt sind, als Winkel zwischen Richtungen, deren Einstellung zeitlich weiter auseinanderliegt. In welchem Maße die Sätze unvollständig sind, kann man weder für Indien noch für Südafrika feststellen, da in den Veröffentlichungen nur die Winkelergebnisse mitgeteilt sind. Aber selbst wenn volle Sätze in Nachbarwinkel aufgelöst werden, ist doch der Genauigkeitsverlust nicht groß; er dürfte sich auch weniger in der Seitenübertragung als in der Azimutübertragung äußern. Um zu zeigen, wie man ihn für letztern Fall feststellen kann, betrachten wir ein einfaches Beispiel.

Beispiel. Es sind vier einfach aneinanderhängende ebene Dreiecke durch vollständige Satzbeobachtungen gegeben. Die Berechnung erfolgt aber, als wären die Dreieckswinkel 1 bis 12 unabhängig voneinander beobachtet. Für den ausgeglichenen gestreckten Winkel A ist sowohl für Satz- als Winkelbeobachtungen der mittlere Fehler abzuleiten.

Satzbeobachtungen geben folgende Bedingungsgleichungen, wenn (1), (2), . . . (18) die Richtungsverbesserungen sind:

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
(4)-(5)+(6)-(7)+(8)-(9)+w_1&=0\\
(3)-(4)+(9)-(10)+(11)-(12)+w_2&=0\\
(2)-(3)+(12)-(13)+(14)-(15)+w_3&=0\\
(1)-(2)+(15)-(16)+(17)-(18)+w_4&=0\,.
\end{aligned}
$$

*) Account of the Operations of the Great Trigonometrical Survey of India. Vol. II. Dehra Dun 1879, S. 59 u. f.

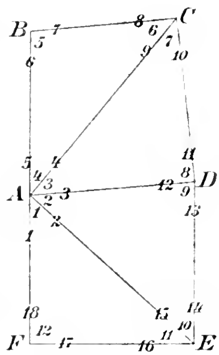
Die Normalgleichungen sind, wenn wir dieselben zur Gewichtsberechnung der Funktion (1) — (5) ansetzen, vergl. (15*), S. 239:

$$\begin{array}{rrrrcrl}
6L_1 & -2L_2 & \cdot & \cdot & = & +1 & L_1 = +0{,}2 \\
-2L_1 & +6L_2 & -2L_3 & \cdot & = & 0 & \\
\cdot & -2L_2 & +6L_3 & -2L_4 & = & 0 & \\
\cdot & \cdot & -2L_3 & +6L_4 & = & +1 & L_4 = +0{,}2.
\end{array}$$

Dies gibt nach (17), S. 239:

$$\mu_F^2 = \mu^2 \{2 - (0{,}2 + 0{,}2)\} = 1{,}6\,\mu^2, \tag{23}$$

wenn μ^2 das mittlere Fehlerquadrat für eine Richtungsbeobachtung bezeichnet.



Winkelbeobachtungen geben folgende Bedingungsgleichungen, wenn jetzt (1) . . . (12) die Winkelverbesserungen bezeichnen:

$$\begin{aligned}
(4) + (5) + (6) + w_1 &= 0 \\
(3) + (7) + (8) + w_2 &= 0 \\
(2) + (9) + (10) + w_3 &= 0 \\
(1) + (11) + (12) + w_4 &= 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Nehmen wir zunächst die Winkel als völlig unabhängig voneinander, so sind die Normalgleichungen zur Gewichtsberechnung der Funktion (1) + (2) + (3) + (4):

$$3L_1 = +1, \quad 3L_2 = +1, \quad 3L_3 = +1, \quad 3L_4 = +1,$$

und es wird, wenn μ^2 dasselbe bedeutet, wie vorher:

$$\mu_F^2 = 2\mu^2 \left\{4 - \frac{4}{3}\right\} = \frac{16}{3}\mu^2 = 5{,}33\,\mu^2. \tag{25}$$

Allein diese Berechnung entspricht nicht den tatsächlichen Verhältnissen. Wenn auch die Ausgleichung (in fehlerhafter Weise) die Winkel als unabhängig ansieht, so muß man doch zur Ermittelung der wahren Genauigkeit der Ergebnisse auf den Zusammenhang der Winkel Rücksicht nehmen.

Beachten wir, daß $(1) = -\frac{w_4}{3}$, $(2) = -\frac{w_3}{3}$ usw., so ist der ausgeglichene Wert von $\sphericalangle(1 + 2 + 3 + 4)$ gleich

$$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 - \frac{1}{3}(w_1 + w_2 + w_3 + w_4),$$

oder da $w_1 = \sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 + \sphericalangle 6 - 180^0$, usw.:

$$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 - \frac{1}{3}(\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \cdots + \sphericalangle 12),$$

abgesehen von 240^0. Man kann also auch den ausgeglichenen Wert von $\sphericalangle(1+2+3+4)$ gleich setzen:

$$\frac{2}{3}\sphericalangle(1+2+3+4) - \frac{1}{3}\sphericalangle 5 - \frac{1}{3}\sphericalangle 12$$

$$-\frac{1}{3}\sphericalangle(6+7) - \frac{1}{3}\sphericalangle(8+9) - \frac{1}{3}\sphericalangle(10+11).$$

Die mittleren Fehlerquadrate der zusammengefaßten Winkel sind aber je gleich $2\mu^2$. Es folgt also

$$(26) \qquad \mu_F^2 = 2\mu^2\left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) = 2\mu^2.$$

Das ist nur wenig mehr als (23).

IV. Repetitionsverfahren. Um bei Winkelmessungen den Einfluß der Teilungsfehler herabzudrücken, schlug schon Tobias Mayer um 1750 das Repetitionsverfahren vor und Borda führte bald darauf es an seinen Repetitionskreisen ein, die bei den französischen Triangulationen bis ums Jahr 1860 zur Messung schiefer Winkel dienten.*)

In England, wo gegen Ende des 18. Jahrhunderts von Ramsden und Troughton große Theodolite zur direkten Messung von Horizontalwinkeln erbaut wurden, hat man dieses Verfahren nie angewandt, sondern suchte die Teilungsfehler durch Größe der Kreise, vermehrte Anzahl der Mikroskope (bis zu 5) und Messen auf mehreren Kreisständen möglichst unschädlich zu machen.

In Deutschland konstruierten aber Reichenbach und Ertel in München auch Repetitionstheodolite, die von W. Struve ums Jahr 1820 und von C. F. Gauß 1821—1825 angewandt wurden. Ersterer benutzte das Repetitionsverfahren nur ganz kurze Zeit und ging dann zur einfachen Winkelmessung über, weil er konstante Fehler wahrnahm, die auch schon kurz vorher Bohnenberger bei seinen Arbeiten in Württemberg aufgefunden hatte (1817). Auch Gauß nahm diese Fehler wahr, und da es ihm gelang, sie im Mittel der Ergebnisse für den

*) Vergl. u. a.: Die Europäische Längengradmessung in 52^0 Br., I. Heft, 1893, S. 16 u. 56.

Winkel x aus Messungen von x und $360^0 - x$ zu eliminieren, so haben seine Winkelmessungen trotzdem einen hohen Genauigkeitsgrad.*) Der Fehler beträgt etwa 1″ und ist je nach der Konstruktion im Vorzeichen + oder —. An einem kleinen Theodolit von Frerk fand ich den Betrag gerade gleich 1″.

Bekanntlich besteht die Repetitionsmessung darin, daß der zu beobachtende Winkel n-mal nebeneinander auf den Teilkreis gelegt wird, was sich dadurch ermöglicht, daß der Teilkreis mitsamt der Alhidade vom zweiten Objekt zurück aufs erste Objekt durch Drehung um eine zur vertikalen Alhidadenachse zentrische Repetitionsachse gebracht werden kann. Abgelesen wird der Teilkreis — abgesehen von gewissen Kontrollablesungen — nur am Anfang fürs erste Objekt und am Schlusse fürs zweite Objekt. Ist μ_v wieder der mittlere Visurfehler und ist ferner μ_a bzw. μ_t der mittlere Ablese- und Teilungsfehlerseinfluß bei einem Mikroskop bzw. einer Richtung, so hat man im allgemeinen fürs mittlere Fehlerquadrat des n-fachen Winkels bei m Ablesestellen den Ausdruck:

$$2 n \mu_v^2 + \frac{2 \mu_a^2}{m} + 2 \mu_t^2$$

und daher für den einfachen Winkel:

$$2 \frac{\mu_v^2}{n} + 2 \frac{\mu_a^2}{m n^2} + 2 \frac{\mu_t^2}{n^2}. \tag{27}$$

Hierbei ist abgesehen von einer etwaigen Drehung des Beobachtungspfeilers.

Man bemerkt nun, daß der Einfluß von μ_a^2 und μ_t^2 bei wachsendem n mit n^2 abnimmt, er kann also schon durch $n = 10$ stark vermindert werden. (Ist zufällig für ein gewisses n das n-fache des Winkels nahezu 180^0, so wird $2\mu_t^2$ sich überdies beinahe auf null reduzieren.)

Das Repetitionsverfahren erscheint somit sehr vorteilhaft, zumal auch infolge des Wegfallens der meisten Ablesungen gegenüber einfachen Messungen an Zeit gespart wird.

---

*) Von diesen konstanten Fehlern handelt eingehend ein Aufsatz von Friebe: Über das Mitschleppen des Limbus usw. (Zeitschr. für Vermessungswesen Bd. XXIII, 1894, S. 333 u. f.)

Läßt man n immer mehr wachsen, so konvergiert (27) gegen null und man erhält Ergebnisse „mit stehender Sekunde“.

Um den Einfluß des Kollimationsfehlers zu eliminieren, kann man nach einigen Winkelbeobachtungen in der ersten Fernrohrlage durchschlagen und nun in zweiter Lage ebenso oft weiter repetieren. Bewegt man hierbei Alhidade sowie Teilkreis entgegengesetzt, wie bei den ersten Beobachtungen, nämlich anstatt durch den Winkel x durch $360^0 - x$, so wird der oben erwähnte konstante Fehler des Repetitionsverfahrens eliminiert.

Den Einfluß einer Abweichung beider Vertikalachsen vom Parallelismus beseitigt man am besten durch Vertikalstellen der Repetitionsachse und derartige Wahl von n, daß nx bis auf eine Abweichung von höchstens $\frac{1}{2}x$ (bei $x < 180^0$) gleich einem Vielfachen von 360^0 ist.*)

Um auch eine etwa vorhandene Drehung des Beobachtungspfeilers oder des Stativs zu eliminieren, muß man eine zweite Reihe von Beobachtungen ausführen, wobei die Reihenfolge der Objekte 1 und 2 miteinander zu vertauschen ist (entsprechend dem Hin- und Hergange bei einfachen Messungen). Selbstverständlich müssen beide Reihen so kurze Zeit beanspruchen, daß man das Drehen des Pfeilers für beide Reihen als konstant betrachten darf. Das ist auch möglich, da ja wesentlich nur Visierarbeit zu leisten ist.

Wird nun z. B. $n = 30$ genommen, nach je fünf Beobachtungen durchgeschlagen usw., so kann man bei $n = 10$ und 20 Zwischenablesungen machen, die zur Kontrolle dienen können. Man kann dann die vier Ablesungen auch einer Ausgleichung unterwerfen, um den besten Winkelwert zu finden. Wie dies zu machen ist, hat schon Bessel angegeben.**) Seine Formeln sind sehr bequem bei gleichmäßig verteilten Ablesungen, weniger bei ungleichmäßigen. Für alle Fälle sehr bequeme Formeln fand Zachariae bei Gelegenheit der Bearbeitung der

---

*) Vergl. Zeitschr. f. Vermessungswesen, Bd. V, 1876, S. 296 u. f.

**) Astr. Nachr. Bd. 11, 1834, Nr. 256, Sp. 269 u. f. (Siehe auch Engelmann, Abhandlungen von F. W. Bessel, Bd. III, S. 306 u. f.)

dänischen Gradmessung. So interessant sie sind, so müssen wir uns doch darauf beschränken, auf sie zu verweisen.*)

Die Sache hat in der Gegenwart für Neumessungen nicht mehr die hohe Bedeutung wie früher, da man jetzt Messungen erster Ordnung mit Mikroskoptheodoliten, die nur eine vertikale Achse haben, ausführen wird, um die in der Anwesenheit der Repetitionsachse enthaltene Fehlerquelle zu vermeiden.

Die kleinen Theodolite für Detailarbeiten und namentlich technische Arbeiten sollte man aber immer mit Repetitionsachse versehen, um es zu ermöglichen, ausnahmsweise einen Winkel (z. B. den maßgebenden Winkel eines Basisdreiecks) mit größerer Genauigkeit ohne besondere Umständlichkeiten messen zu können. Ist z. B. $\mu_r = \pm 3''$, $\mu_a = \pm 10''$ bei $m = 2$ (etwa entsprechend 30″ Noniusangabe) und $\mu_t = \pm 7''$, so werden bei 12-facher Repetition, also $n = 12$, in (27) die Einflüsse von μ_r einerseits und von μ_t und μ_a andrerseits nahezu $\frac{3}{2}$, zusammen 3, der mittlere Fehler des einfachen Winkels also nur etwa $\pm 1\overset{''}{.}7$. Formel (27) zeigt auch, daß bei größeren Werten von n der Einfluß von μ_a und μ_t ganz zurücktritt und nur der von μ_r bleibt; der mittlere Fehler hat dann denselben Betrag, wie bei dem arithmetischen Mittel von n einfachen Winkelmessungen, nur daß der Einfluß von Ablese- und Teilungsfehlern ganz wegfällt. Die n stellen dann wie im Beispiel S. 159 die Gewichte der Winkelergebnisse dar (ohne Benutzung von Zwischenablesungen).

Dagegen würde die Annahme, daß die Gewichte proportional n^2 seien, dem Falle entsprechen, daß in (27) der Einfluß des zweiten und dritten Gliedes mit μ_a und μ_t überwiegt.

Ist n endlich gleich 1, d. h. mißt man nur einfach, so wird bei kleinen Theodoliten in der Tat im mittleren Fehlerquadrat der Winkelergebnisse μ_a^2 überwiegen. Ergebnisse verschiedener Herkunft wird man dann mit Gewichten zu ver-

*) Den danske Gradmaaling. Bd. II, S. 279—312. (Auch in dem Referat dargestellt, das in der Vierteljahrsschrift der Astr. Ges. 12. Bd., 1877, S. 210 u. f., enthalten ist.)

einigen haben, die umgekehrt proportional dem mittleren Fehlerquadrat der Ablesungen (Noniusangaben) sind.*)

V. Reïteration. Es möge hier noch einer Winkelmeßmethode Erwähnung geschehen, die in den Jahren 1841—48 bei der Gradmessung in Südafrika zur Anwendung gelangte.**) Der Theodolit war ein größeres Instrument nach dem Muster der Theodolite von Ramsden; der Horizontalkreis wurde mit drei Mikroskopen abgelesen, die auf einem Ringe saßen und zusammen verschoben werden konnten. Die Messung erfolgte von links nach rechts und von rechts nach links, also im Hin- und Hergange; nach jeder Messung wurden die Mikroskope so viel verschoben, daß die fürs zweite Objekt benutzten Teilstriche nun fürs erste Objekt zur Verwendung kamen. Das Verfahren bestand also wie beim Repetitionsverfahren aus einem mehrfachen Aneinanderlegen des Winkels auf dem Kreise. Es läßt sich auch bei den Theodoliten der Jetztzeit gut anwenden, da bei diesen der Kreis nur auf Reibung sitzt und leicht gedreht werden kann. Gegenüber der Repetitionsmethode enthält der n-fache Winkel außer dem Einfluß der Teilungsfehler der zuerst und zuletzt benutzten Striche noch die Ablesungsfehler für n einfache Winkelmessungen. Außerdem ist jeder einzelne Winkel das Mittel einer Doppelmessung.

Ist μ_v wieder der mittlere Visurfehler, μ_s die mittlere zufällige Schwankung des Teilkreises bei einer Visur, μ_a der mittlere Ablesefehler bei einem der m Mikroskope und μ_t der mittlere Teilungsfehler für eine Richtung, so hat man im allgemeinen für den n-fachen Winkel das mittlere Fehlerquadrat gleich

$$n\mu_v^2 + n\mu_s^2 + \frac{n\mu_a^2}{m} + 2\mu_t^2,$$

für den einfachen Winkel also:

$$\frac{\mu_v^2}{n} + \frac{\mu_s^2}{n} + \frac{\mu_a^2}{mn} + 2\frac{\mu_t^2}{n^2}. \tag{28}$$

Ist die Anzahl der Mikroskope wie bei deutschen Theodoliten, $m = 2$, so wird aus (28)

$$\frac{1}{n}(\mu_v^2 + \mu_s^2) + \frac{1}{2n}\mu_a^2 + \frac{2}{n^2}\mu_t^2. \tag{28*}$$

*) Eine Studie über die Fehlereinflüsse bei einem kleinen Mikroskoptheodolit gab ich in der Zeitschr. f. Vermessungswesen, Bd. IV, 1875, S. 327 u. f.

**) Sir Thomas Maclear. Verification and Extension of La Caille's Arc of Meridian at the Cape of Good Hope. 1866. (Vergl. das Referat in der Vierteljahrsschr. d. Astr. Ges. 5. Bd., 1870, S. 44 u. f.)

Vergleichen wir die Reïteration mit der Repetition, d. h. Ausdruck (28) mit (27), S. 503, so ist in (27) für n jetzt $2n$ zu setzen, da in (28) n die Anzahl der Doppelmessungen bedeutet. Es geht also (27) über in

$$(27^*) \qquad \frac{\mu_r^2}{n} + \frac{\mu_a^2}{2mn^2} + \frac{\mu_t^2}{2n^2},$$

wobei noch der Einfluß von μ_s^2 unbeachtet ist. Bei der Repetition ist es günstiger, daß auch μ_a^2 mit n^2 dividiert wird; außerdem tritt bei ihr im Gliede mit μ_a^2 noch der Divisor 2 auf, im Gliede mit μ_t^2 sogar der Divisor 4, so daß der Einfluß von μ_t^2 auf den vierten Teil herabgeht.

Indessen fällt dies bei neueren Theodoliten nicht ins Gewicht, da man schon kleine Kreise sehr genau teilen und mit scharfer Ablesung versehen kann. Dagegen gibt die Reïteration eine bessere Elimination der Pfeilerdrehung, und sie enthält keinen konstanten Fehler, wie die Repetition, für welche beide Fehlerquellen in (27*) die Glieder nicht mit angesetzt sind. Die zu leistende Beobachtungsarbeit ist aber größer.

Das Verfahren der Reïteration kann auch mit dem Schreiberschen Verfahren der einfachen Winkelmessung verglichen werden; bei $m = 2$ Mikr. ist dann Ausdruck (28*) mit (9), S. 487, zu vergleichen. Man bemerkt sofort, daß sich die Ausdrücke durch die letzten Glieder unterscheiden:

$$\frac{2}{n^2}\mu_t^2 \quad \text{gegen} \quad \frac{1}{n}\mu_z^2 + 2\tau_{2n}^2.$$

Da μ_t sich auf eine Richtung, also bei $m = 2$ auf die halbe Summe beider Ablesungen bezieht, so ist abgesehen von den periodischen Teilungsfehlern $2\mu_t^2 = \mu_z^2$. Es tritt daher bei der Reïteration eine wesentlich stärkere Verminderung der zufälligen Teilungsfehler ein, als bei dem Schreiberschen Verfahren, was nach Maßgabe der mitgeteilten Zahlenwerte (vergl. u. a. (16), S. 493) von Bedeutung sein kann.

Bei den periodischen Teilungsfehlereinflüssen tritt ein Vorteil der Reïteration allerdings nur hervor, wenn n entweder eine größere Zahl ist oder gerade einen solchen Wert hat, daß bei $m = 2$ das n-fache des Winkels nicht viel von 180^0 oder einem Vielfachen davon verschieden ist.

Bedenkt man außerdem, daß bei der Reïteration die Signale längere Zeit hindurch sichtbar bleiben müssen, so ist doch wohl das Schreibersche Winkelverfahren das empfehlenswertere (eventuell mit der Modifikation, daß bei $m = 2$ nach jeder einfachen Winkelmessung gedreht wird, oder daß $m = 3$ genommen wird).

§ 3. Die geometrischen Bedingungen des Netzes.

I. Die übliche Form der Netzausgleichung. Die direkte Form, unter welcher sich die Ausgleichungsaufgabe eines Dreiecksnetzes mit einer oder mehreren Grundlinien in der Regel darbietet, ist diejenige vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen. Denn die Stationsmessungen werden meistens in reichlich überschüssiger Zahl angestellt und erfordern dann aus praktischen Gründen (der Übersichtlichkeit halber) für sich eine Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen, deren Unbekannte bei n Richtungen $n - 1$ Richtungsunterschiede sind, welche nun aber für die sämtlichen Stationen durch die geometrischen Netzbedingungen in Zusammenhang stehen. Nur dann, wenn auf den Stationen wenig überschüssige Messungen sind, kann man mit Vorteil alles zusammen einfach nach bedingten Beobachtungen ausgleichen. Zunächst lassen wir die Frage beiseite, ob dies und ebenso das vorher erwähnte Verfahren immer rationell ist.

Die im letzteren Falle von den Stationen gegebenen Bedingungsgleichungen nennt man wohl solche 1. Klasse, im Gegensatz zu den Netzbedingungsgleichungen, welche als Winkel- und Seitengleichungen oder Bedingungsgleichungen 2. und 3. Klasse unterschieden werden. Vergl. die Beispiele S. 251 und 312.

II. Anzahl der voneinander unabhängigen Netzbedingungsgleichungen. Sei M die Anzahl aller im Dreiecksnetze beobachteten Richtungen, wobei die gegenseitig beobachteten selbstverständlich doppelt zu zählen sind; sei ferner N die Anzahl aller Netzpunkte, von denen aber F nur Festpunkte, also keine Standpunkte sind, so ist zuerst zu bedenken, daß auf jedem der $N - F$ Standpunkte irgendeine erste Richtung allein wertlos ist, dagegen jede fernere einen Winkel bestimmt. Die Anzahl dieser Winkel ist mithin $M - (N - F)$. Von irgend zwei Standpunkten aus bestimmen zwei dieser Winkel einen neuen Netzpunkt, wir bedürfen daher zur Konstruktion aller Netzpunkte aus zwei gegebenen $2(N - 2)$ jener Winkel und haben mithin $M - N + F - 2(N - 2)$, d. i.

(1) $$M + F + 4 - 3N$$

überschüssige Winkel und mithin ebensoviele unabhängige **Netzbedingungsgleichungen**.

Diese zerfallen in Winkelgleichungen und Seitengleichungen. Erstere beziehen sich auf die Winkelsummen von Dreiecken, Vierecken und Polygonen, deren theoretischer Wert ja bekannt ist; alle übrigen Gleichungen, die aus den Winkelbeobachtungen hervorgehen, sind Seitengleichungen. Denn man kann durch bloße Addition und Subtraktion der zur Konstruktion notwendigen $2(N-2)$ Winkel nicht alle andern beobachteten Winkel darstellen und muß daher trigonometrische (unter Umständen sogar polygonometrische) Rechnungen mit benutzen.

Ist q die Anzahl der gegenseitig beobachteten Richtungen, r die der einseitig beobachteten Richtungen, so ist

(2) $$2q + r = M.$$

Lassen sich alle $N - F$ Standpunkte durch einen zusammenhängenden Zug von gegenseitigen Richtungen einfach verbinden, so geben diese $N - F - 1$ Linien noch keine Winkelgleichung, wohl aber jede andere der $q - (N - F - 1)$ Verbindungslinien eine solche. Mithin ist die Anzahl der unabhängigen Winkelgleichungen gleich

(3) $$q + 1 + F - N.$$

Es kann nun vorkommen, daß die Standpunkte in nicht miteinander durch gegenseitige Richtungen verbundene Gruppen zerfallen. Ist die Anzahl der Gruppen g, so ist die Anzahl der Linien, welche jede Gruppe durch einen einfach zusammenhängenden Zug verbinden, gleich $N - F - g$. Jede weitere Linie gibt eine Gleichung. An Stelle von (3) tritt also allgemeiner als Anzahl der unabhängigen Winkelgleichungen der Ausdruck

(3*) $$q + g + F - N.$$

Die Anzahl der Seitengleichungen ist der Ausdruck (1) weniger dem Ausdruck (3*), d. i. mit Rücksicht auf (2) gleich

(4*) $$q + r + 4 - 2N - g.$$

Bei nur einer einzigen zusammenhängenden Gruppe von Standpunkten gibt das

(4) $$q + r + 3 - 2N.$$

Man kann die Formel für die Anzahl der Seitengleichungen auch unmittelbar wie folgt ableiten:

Von einer ersten gegenseitigen Richtung aus kann man das Netz mit $2(N-2)$ einseitigen oder gegenseitigen Richtungen aufbauen: jede weitere einseitige oder gegenseitige Richtung gibt eine Seitengleichung. Ist also nur eine Gruppe von Standpunkten da, so hat man $q + r - 1 - 2(N-2)$ Seitengleichungen, wie (4) angibt.

Hat man g Gruppen, so wird das Netz von g gegenseitigen Richtungen aus zu konstruieren sein: es sind also $g + 2(N-2)$ Richtungen notwendig, und nun gibt jede weitere eine Seitengleichung, also übereinstimmend mit (4*) $q + r - g - 2(N-2)$.

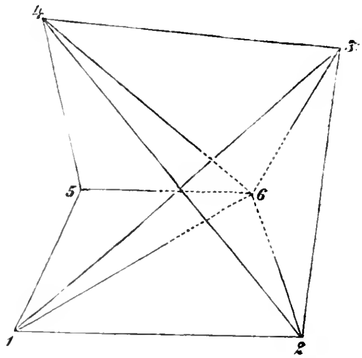
Der Ausdruck (4*) setzt ebenso wie (1) selbstverständlich voraus, daß wenigstens die zur zusammenhängenden Konstruktion des ganzen Netzes notwendigen Winkel gemessen sind. Ist z. B. $g = 2$, d. h. hat man zwei nicht zusammenhängende Gruppen von Standpunkten, so müssen wenigstens zwei Festpunkte mit jeder der beiden Gruppen zusammenhängen. Werden etwa zwei Festpunkte von den Endpunkten zweier Grundlinien durch Winkelmessungen bestimmt, so ist abgesehen von der Vergleichung der Grundlinien keine Netzgleichung da, denn es ist $N = 6$, $F = 2$, $q = 2$, $g = 2$, $r = 8$, $M = 12$, also gibt (1) null, (3*) null und (4*) null.

III. Aufstellung der Bedingungsgleichungen. Dieselbe erfolgt am besten durch allmähliches Aufbauen des Netzes nach Bessels Vorgang.*) Man ist dann sicher, nur voneinander unabhängige Gleichungen zu erhalten, sowie auch die einfachsten derselben. Theoretisch betrachtet, kommt allerdings auf die Auswahl der Gleichungen nichts an: denn erfüllen die Winkel irgend ein vollständiges System unabhängiger Gleichungen, so erfüllen sie alle möglichen.

*) Gradmessung in Ostpreußen. § 36. (Abhandlungen, Bd. III. S. 96 u. f.)

In nebenstehender Figur ist Punkt 6 ein Festpunkt, $N=6$, $F=1$, $q=7$, $r=5$, $M=19$; Anzahl der Winkelgleichungen $=3$, der Seitengleichungen $=3$, zusammen 6.

Beginnen wir bei 1.2 und fügen 3 hinzu, so haben wir ein Dreieck 1.2.3 mit einer Winkelgleichung; Dreieck 2.3.4 gibt eine weitere solche. Für das Viereck 1.2.3.4 sind damit alle Netzgleichungen aufgestellt, da es deren ($N=4$, $F=0$, $q=5$, $r=0$) nur 2 hat. Der Punkt 5 gibt mit keinem der Standpunkte ein gegenseitig beobachtetes Dreieck, da er aber gleichwohl eine Winkelgleichung liefert (weil für $N=5$, $F=0$, $q=7$, $r=0$ die Anzahl der Winkelgleichungen 3 ist), so muß dieselbe aus der Winkelsumme des Vierecks 1.2.4.5 entnommen werden. Dagegen gibt die Figur 1.2.3.4.5 noch keine Seitengleichung; diese entspringen erst durch Hinzunahme des Fixpunktes 6.



Eine erste Seitengleichung gibt das Dreieck 1.2 3 mit 6, eine zweite das Dreieck 2.3.4 mit 6. Die dritte kann nicht so leicht aufgestellt werden, weil es kein vollständiges Dreieck weiter gibt; wir nehmen daher die nächste einfache Figur, nämlich das Viereck 1.2.4.5 zu 6.

Die Aufstellung der Seitengleichungen erfolgt wie im Beispiel S. 251 u. f. immer durch Berechnung einer Seite aus einer andern auf zwei Wegen. Für das Viereck 1.2.4.5 mit 6 hat man z. B. zur Berechnung von 6.2 aus 5.6 einerseits die Dreiecke 6.2.4, 4.6.5, andrerseits die Dreiecke 5.6.1, 1.6.2 zu benutzen. Schematisch drücken wir dies, wie gewöhnlich geschieht, durch die Identität

$$\frac{6.2\;\;4.6\;\;5.6\;\;1.6}{4.6\;\;6.5\;\;6.1\;\;6.2}=1 \tag{5}$$

aus, welche in die Bedingungsgleichung übergeht, wenn man die Seitenverhältnisse durch die Sinusverhältnisse der Gegenwinkel derselben Dreiecke ersetzt usf.

Allgemein kann man sagen, daß bei Hinzutreten eines neuen Festpunktes mit Δr Anschnitten zufolge des Ausdrucks (4*) $\Delta r - 2$ neue Seitengleichungen entstehen. Tritt aber ein neuer Standpunkt auf, der der bereits vorhandenen Gruppe angehört, und wächst dabei die Anzahl der gegenseitigen Visuren um Δq, die der einseitigen um Δr, so ist der Zuwachs der Seitengleichungen $\Delta q + \Delta r - 2$, der Zuwachs der Winkelgleichungen nach (3*) $\Delta q - 1$.

Überschüssige Bedingungsgleichungen können unter Umständen als nützliche Kontrolle dienen; Gauß pflegte in dieser Weise vorzugehen. Winkelgleichungen wird man meistens durch überschüssige Winkelgleichungen prüfen; zur Kontrolle der Seitengleichungen bedarf man jedenfalls überschüssiger Seitengleichungen, wobei aber auch die Winkelgleichungen mit eingehen.

Werden die Seitengleichungen aus Systemen von Dreiecken entwickelt, die eine gemeinsame Spitze haben, so nennt man diese Netzteile Zentralsysteme. In umstehender Figur sind 1.2.3.6, 2.3.4.6, 1.2.4.5.6 solche Systeme. Zentralpunkt ist 6. Die Zentralsysteme geben eine bequeme Aufstellung der Gleichungen, analog (5). In manchen Fällen lassen sich kompliziertere Seitenbedingungen aber nicht vermeiden, siehe weiterhin.

Die Seitenverhältnisse in den Bedingungsgleichungen von der Form (5) werden nun durch die Sinusverhältnisse der Gegenwinkel ersetzt. Es wird hierbei vorausgesetzt, daß die erforderlichen Reduktionen auf die Winkel der sphäroidischen Dreiecke an den beobachteten Winkeln angebracht sind, so daß man es mit Dreiecken auf einem Rotationsellipsoid zu tun hat, die aus kürzesten Linien gebildet sind.*) Bei Anwendung von drei Dezimalstellen in den Richtungsangaben kann man meistens mehrere zusammenhängende Dreiecke immer genau genug als auf einer Kugel vom mittleren Krümmungsmaß der Gegend liegend betrachten und dementsprechend die Sinus der sphäroidischen Winkel einführen, wobei man sich in (5) statt

*) F. R. Helmert. Die mathem. und physikal. Theorien der höhern Geodäsie. Bd. I, 1880; S. 485 u. f.

der Seiten deren Sinus gesetzt denkt. Man kann aber auch nach Maßgabe des Legendreschen Satzes $^1/_3$ des sphär. Exzesses E des betr. Dreiecks von jedem Dreieckswinkel abziehen. Dieser einfache Legendresche Satz genügt bei beobachteten Dreiecken aber immer, wenn man nur das Krümmungsmaß der Kugel als reziproken Wert des Produkts $\varrho_m \varrho_n$, des Krümmungsradius im Meridian und des Perpendikels, ableitet und das arithmetische Mittel von $1 : \varrho_m \varrho_n$ für die drei Ecken bildet. Bei zwei Seiten und dem eingeschlossenen sphäroidischen Winkel A hat man also:

$$E = \varrho'' \frac{bc \sin A}{2 \varrho_m \varrho_n} + \cdots. \tag{6}$$

Erst bei Dreiecken, deren (aus den Quadraten berechnete) mittlere Seitenlänge > 120 km ist, muß man diese Formel noch durch ein folgendes Glied ergänzen; die Drittelung des Exzesses aber bleibt auch dann noch genügend.*)

Die Umbildung der Gleichungen in lineare Form geschieht, wie schon früher mitgeteilt, entweder durch Differentiation oder durch Entnahme der logarithmischen Differenzen der Sinus für 1″ aus den Tafeln. Praktisch macht das keinen wesentlichen Unterschied, theoretisch ist ersteres richtiger, da die Koeffizienten der λ dann genau proportional den Cotangenten werden, während die logarithmischen Differenzen infolge des Einflusses der letzten Dezimalstelle hiervon ein wenig abweichen.

Zur Kontrolle kann man beide Aufstellungen benutzen.

Man kann auch aus den betreffenden Formeln eine Kontrollformel nach Andrae**) für die Exzesse und Cotangenten ableiten. Schreibt man nämlich die Seitengleichungen doppelt, in der Form

$$\frac{\sin A_1}{\sin B_1} \frac{\sin A_2}{\sin B_2} \cdots = 1 = \frac{\sin\left(A_1 - \frac{E_1}{3}\right)}{\sin\left(B_1 - \frac{E_1}{3}\right)} \frac{\sin\left(A_2 - \frac{E_2}{3}\right)}{\sin\left(B_2 - \frac{E_2}{3}\right)} \cdots,$$

*) Über ein interessantes großes Viereck vergl. den Artikel von Fenner in der Zeitschr. f. Vermessungswesen, Bd. XI, 1882, S. 303 u. f.

**) Den danske Gradmaaling. Bd. I, S. 562.

wobei von den Fehlergliedern abgesehen ist, so führt Logarithmieren und nachfolgendes Differenzieren zu der Gleichung:

$$\Sigma E_i(\cot A_i - \cot B_i) = 0, \tag{7}$$

wobei die Summierung nach i über die betreffenden Dreiecke zu erstrecken ist und A und B die zugehörigen Winkel in leicht ersichtlicher Gruppierung bedeuten. Diese Gleichung kontrolliert die Exzesse und die Cotangenten. Ersteres ist für die Winkelgleichungen von Bedeutung.

Zur wirksamen Kontrolle der Seitengleichungen dürfte eine zweite Rechnung mit um je $+10''$ geänderten Winkeln vorteilhaft sein. Wenn zum Schluß dann Verbesserungen λ eingeführt werden, die Winkeländerungen von $-10''$ entsprechen, so muß das numerische Glied der ungeänderten Gleichung herauskommen; außerdem werden alle Koeffizienten der λ geprüft.

Immerhin kann es außerdem nützlich sein, eine oder einige überschüssige Seitengleichungen aufzustellen und mittels der Winkelgleichungen zu prüfen, ob die zur Ausgleichung bestimmten Gleichungen damit stimmen.

Bei alledem wird vorausgesetzt, daß nicht die Winkel so klein sind, daß die Umbildung der Seitengleichungen durch Logarithmieren und Differenzieren merkbar fehlerhaft oder gar unmöglich wird.

IV. Winkel $< 1^0$. Bei Winkeln von 1^0 ändern sich die Cotangenten von Sekunde zu Sekunde um etwa $^1/_{3600}$ des Betrags und die logarithmischen Differenzen der Sinus um 0,33 Einheiten der siebenten Dezimalstelle. Bei siebenstelliger Rechnung ist also hier die übliche Umwandlung der Seitengleichungen durch Logarithmieren und Differenzieren gerade noch zulässig, da bei $1''$ Winkeländerung die achte Stelle der Logarithmen erst um zwei Einheiten gefälscht wird. Sind aber die Winkel kleiner, so haben die zweiten Differentialquotienten noch stärkeren Einfluß, und es entsteht die Frage, ob man nicht durch eine andere Art der Umwandlung dies vermeiden kann. Das kann in der Tat geschehen, indem man die numerischen Sinus anwendet. Dieses Verfahren wird natürlich um so eher nötig, je mehr logarithmische Dezimalen man im allgemeinen anwendet.

Es sei nun eine Seitengleichung gegeben von der Form:

$$\frac{\sin(A_1+v_1)\sin(A_2+v_2)\sin(A_3+v_3)}{\sin(B_1+\lambda_1)\sin(B_2+\lambda_2)\sin(B_3+\lambda_3)}=1, \tag{8}$$

wobei die Verbesserungen der Winkel A mit v, die der Winkel B mit λ bezeichnet sind; A_1 und B_1 seien kleine Winkel. Alsdann setze man

$$Q\sin(A_1+v_1)=\sin(B_1+\lambda_1) \text{ mit } Q=\frac{\sin(A_2+v_2)\sin(A_3+v_3)}{\sin(B_2+\lambda_2)\sin(B_3+\lambda_3)}. \tag{9}$$

Q darf man logarithmisch differenzieren. Ist Q_0 der Wert von Q ohne die Verbesserungen v und λ, so wird mit zulässigen Vernachlässigungen:

$$\begin{aligned} &Q(\sin A_1+v_1\cos A_1)=\sin B_1+\lambda_1\cos B_1\\ &Q=Q_0\{1+v_2\cot A_2-\lambda_2\cot B_2+v_3\cot A_3-\lambda_3\cot B_3\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Hier haben die zweiten Differentialquotienten keinen nennenswerten Einfluß. Setzt man die zweite dieser Gleichungen in die erste ein und vernachlässigt wieder quadratische Glieder der Verbesserungen, so folgt:

$$\begin{aligned} &v_1 Q_0\cos A_1-\lambda_1\cos B_1\\ &+\{v_2\cot A_2-\lambda_2\cot B_2+v_3\cot A_3-\lambda_3\cot B_3\}Q_0\sin A_1\\ &+\varrho''(Q_0\sin A_1-\sin B_1)=0. \end{aligned} \tag{11}$$

Hier ist noch bei dem numerischen Glied der Faktor ϱ'' beigefügt, so daß die Verbesserungen v und λ nun in Sekunden anzunehmen sind.

Zur Vergleichung mit der gewöhnlichen logarithmischen Entwicklung schreiben wir anstatt (11):

$$\begin{aligned} &v_1\cot A_1-\lambda_1\cot B_1(1+\delta)\\ &+v_2\cot A_2-\lambda_2\cot B_2+v_3\cot A_3-\lambda_3\cot B_3=\varrho''\delta, \end{aligned} \tag{11*}$$

worin

$$Q_0\frac{\sin A_1}{\sin B_1}=\frac{\sin A_1\sin A_2\sin A_3}{\sin B_1\sin B_2\sin B_3}=\frac{1}{1+\delta}.$$

Die übliche Entwicklung gibt dagegen weniger streng:

$$v_1 \cot A_1 - \lambda_1 \cot B_1 + v_2 \cot A_2 - \lambda_2 \cot B_2 + v_3 \cot A_3 - \lambda_3 \cot B_3$$

$$(11^{**}) \qquad = \varrho''\left(\delta - \frac{\delta^2}{2} + \cdots\right).$$

Man kann sich in beiden Gleichungen noch den Faktor $10^7 \,.\, \mathrm{Mod} : \varrho''$ beigefügt denken und erhält dann (11**) wie gewöhnlich in Einheiten der siebenten Logarithmendezimale Die Fehler von (11**) äußern sich zunächst nun, wie die Vergleichung mit (11*) zeigt, in dem Koeffizienten von λ_1 und im numerischen Gliede.

Sind A_1 und B_1 sehr klein, so muß man bei der Formel (11) stehen bleiben.*)

Auf ein Beispiel kommen wir weiterhin.

Ein Hauptdreiecksnetz mit zahlreichen kleineren Winkeln, die durch Diagonalen entstehen, bietet das Königreich Sachsen. Die allerkleinsten Winkel sind aber (wohl mit Absicht) in den Seitengleichungen vermieden. Die kleinsten benutzten Winkel sind**) $1^0\,34'$ und $1^0\,46'$ (Zentralpunkt Keulenberg, Gleichung 5) und $1^0\,23'$ (Zentralpunkt Großenhain, Gleichung 91).

Obwohl nun mit zehnstelligen Logarithmen gerechnet ist, machen doch die Glieder zweiter Ordnung nicht viel aus: bei $1^0\,34'$, weil die Winkelverbesserung nur $0,''1$ ist, bei $1^0\,23'$, weil sie nur $0,''2$ ist. Bei $1^0\,46'$ ergeben sich mit Benutzung der Cotangenten auch nur zehn Einheiten der zehnten Stelle, da die Verbesserung nur $0,''44$ ist. Die logarithmische Differenz verändert sich hier für $1''$ um 109 Einheiten der zehnten Stelle.

Die kleinsten Winkel (die aber eben für die Seitengleichungen nicht benutzt sind) kommen vor im Dreieck Lausche-Schneeberg-Kahleberg (5 . 8 . 9):

---

*) J. J. Baeyer hat in dem Werke „Die Küstenvermessung", Berlin 1849, S. 263, bei kleinen Winkeln x auch die Formel $\sin(x + v) = \sin x + v \cos x$ angewandt, ohne aber zu erwähnen, daß dies wesentlich genauer ist, als die logarithmische Differentiation.

**) Nagel, a. a. O. (S. 482) Bd. II, S. 517 u. 537.

(12)	5.	0°	5′	5,″9162	4,42891890
	8.	179	47	36,0815	4,81484710
	9.	0	7	18,0118	4,58480301
		180	00	00,0095	(stimmt mit dem Exzeß),

und im Dreieck Quersa-Großenhain-Raschütz (32.33.34):

(13)	32.	0°	0′	0,″1924	3,62264421
	33.	179	59	59,5916	3,94981180
	34.	0	0	0,2160	3,67343524
		180	00	00,0000.	

Hier stimmen aber doch die Winkel mit den Seitenlogarithmen, soweit man es bei Abrundung auf 0,″0001 verlangen kann: im ersten Falle ist mit Berücksichtigung des Exzesses

$$\log\sin 5'\ 5{,}''9130 - \log\sin 7'\ 18{,}''0086 = 9{,}8441156$$

gegen 9,8441159 aus den Seiten; die logarithmischen Änderungen für 0,″0001 sind 1.4 bzw. 1.0 für die siebente Stelle.

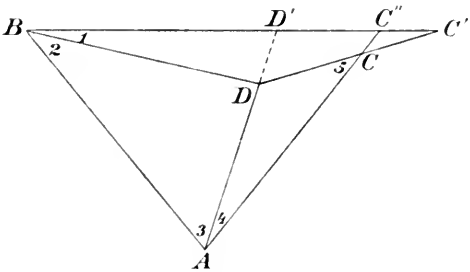
Ferner ist $\log\sin 0{,}''1924 - \log\sin 0{,}''2160 = 9{,}9498$ gegen 9,9492 aus den Seiten; die logarithmischen Änderungen für 0,″0001 sind bzw. 2.3 und 3.3 Einheiten der vierten Stelle.

Wenn Verfasser mitteilt*), daß einmal bei der mehrfachen Seitenberechnung sogar Unterschiede von neun Einheiten der achten Stelle hervorgetreten seien, so ist dies wohl zunächst in dem Umstand zu suchen, daß die Ausgleichung zwar auf 0,″00001 geführt ist, die endgültigen Richtungen jedoch auf 0,″0001 abgerundet sind Weiter in der Schärfe der Angaben zu gehen, ist auch wertlos, da es keinen Zweck hat, sehr kleine Winkel mit zur Seitenberechnung zu verwenden. Wenn nun für die mehrfache Seitenberechnung noch die oben angegebenen Winkel von rund $1\frac{1}{2}°$ mit benutzt sind, so gibt hier allerdings 0,″0001 schon acht Einheiten der achten Stelle. In der Auswahl der Seitengleichungen aber kann unserer Ansicht nach die Ursache der oben erwähnten Unterschiede nicht gesucht werden. Auch nicht (wie wir zunächst vermuteten)

*) Nagel, a. a. O. S. 653.

in den Gliedern zweiter Ordnung, welche von der logarithmischen Rechnung vernachlässigt sind; denn diese wirken erst in der zehnten und allenfalls neunten Stelle (da, wie bemerkt, die spitzesten Winkel in den Seitengleichungen vermieden sind).*)

V. Zachariaes Satz fürs Viereck. Beim Viereck bieten sich vier Ecken als Zentralpunkte der Seitengleichungen dar; wegen der Ungenauigkeit der numerischen Rechnung wird man den Zentralpunkt so wählen, daß die spitzesten Winkel in die Seitengleichungen hineinkommen. Denn dann darf man hoffen, daß bei der Seitenberechnung auf allen möglichen Wegen die beste Übereinstimmung herrscht. General Zachariae hat angegeben, woran man den besten Zentralpunkt erkennt. Wir folgen der Darstellung in der „Dänischen Gradmessung".**)



Wir nehmen an, daß nur fünf für eine Seitengleichung notwendige Winkel gemessen seien, also Winkelgleichungen nicht existieren. Diese Winkel seien numerisch mit ihren Verbesserungen v:

$$(14) \quad \begin{cases} (1) = 0^0 & 30' & 2'' + v_1 \\ (2) = 59 & 30 & 0 + v_2 \\ (3) = 59 & 30 & 0 + v_3 \\ (4) = 0 & 30 & 0 + v_4 \\ (5) = 30 & 0 & 0 + v_5. \end{cases}$$

Für die Ecke A als Zentralpunkt hat man zu setzen (vergl. die Figur, worin willkürlich bei C das fehlerzeigende Dreieck gedacht ist):

*) Nagel, a. a. O. S. 517. Der Koeffizient 682,8057 Z. 7 v. u. ist falsch und muß 682,759 lauten. Der Fehler kompensiert sich z. T. mit den Gliedern zweiter Ordnung.

**) Den danske Gradmaaling. Bd. II, S. 483—487.

$$(15)\qquad \frac{AC}{AD}\cdot\frac{AD}{AB}\cdot\frac{AB}{AC''}=1,$$
$$\text{d. h. } AC = AC''.$$

Wir nehmen der Einfachheit halber das Viereck als eben an.

Die Einführung der Winkel gibt aus (15):

$$(16)\qquad \frac{\sin\{(4)+(5)\}}{\sin(5)}\;\frac{\sin(2)}{\sin\{(2)+(3)\}}\;\frac{\sin\{(1)+(2)+(3)+(4)\}}{\sin\{(1)+(2)\}}=1;$$

die logarithmische Behandlung mit siebenstelligen Logarithmen, unter Benutzung der logarithmischen Differenzen in Einheiten der siebenten Dezimalstelle, liefert hieraus:

$$(17)\qquad 24{,}3\,v_1+0{,}2\,v_2+0{,}4\,v_3-23{,}7\,v_4+0{,}7\,v_5=-48{,}6.$$

Für die Ecke D folgt:

$$(18)\qquad \frac{DC}{DA}\cdot\frac{DA}{DB}\cdot\frac{DB}{DC'}=1,$$

oder $DC = DC'$. Danach wird:

$$(19)\qquad \frac{\sin(4)\,\sin(2)}{\sin(5)\,\sin(3)}\;\frac{\sin\{(1)+(2)+(3)+(4)+(5)\}}{\sin(1)}=1,$$

oder

$$(20)\qquad 2446{,}5\,v_1+24{,}1\,v_2+48{,}9\,v_3-2376{,}5\,v_4+73{,}0\,v_5=-4895{,}0.$$

Die Gleichung (17) genügt nicht, wenn man wünscht, daß auch die spitzen Dreiecke die Seitenberechnung auf sieben Dezimalstellen der Logarithmen nach dem Sinussatz gestatten; denn obwohl (17) bei numerisch strenger Rechnung von (20) nicht verschieden sein würde, abgesehen von Gliedern zweiter Ordnung, so ist doch (17) bei Rechnung mit siebenstelligen Logarithmen numerisch hundertmal ungenauer als (20), und die Erfüllung von (17) erzeugt noch nicht diejenige von (20). Umgekehrt ist dies aber der Fall; mithin ist (20) vorzuziehen. Allerdings wird diese Schärfe nur ausgenutzt, wenn v_1 und v_4 auf 0,″0001 angegeben werden. Die größere Ungenauigkeit von (17) beruht wesentlich auf dem numerischen Glied. Denn die Koeffizienten der v könnte man in (17) und (20) durch Anwendung der Cotangenten gleichscharf erhalten.*)

*) Rechnet man mit den Cotangenten, so ergibt sich anstatt (17) und (20) bezw.:

$$(17^*)\qquad 24{,}313\,v_1+0{,}239\,v_2+0{,}485\,v_3-23{,}588\,v_4+0{,}724\,v_5=-48{,}6$$

Das numerische Glied in (17) entspringt aus dem Umstande, daß in (15) $AC : AC''$ von 1, der Logarithmus dieses Quotienten von null abweicht. Diese letztere Abweichung ist proportional $(AC'' - AC) : AC$ oder $CC'' : AC$.

In gleicher Weise folgt für das numerische Glied von (20) die Proportionalität zu $CC' : DC$. Die numerischen Glieder von (20) und (15) verhalten sich also wie

$$(21) \qquad \frac{CC'}{DC} : \frac{CC''}{AC}, \text{ d. i. } \frac{AC \sin C''}{DC \sin C'}.$$

Nun ist $AC \sin C''$ die Höhe des Dreiecks ABC'' auf die Basis BC'' und $DC \sin C'$ ebenso die Höhe für BDC' auf die Basis BC'. Da hierbei kein Unterschied zwischen C, C' und C'' zu machen ist, so kann man auch sagen, daß die numerischen Glieder von (20) und (15), d. h. der Zentralsysteme mit den Zentren D und A, sich verhalten wie

---

und

$$(20^*) \quad 2446{,}5\, v_1 + 24{,}1\, v_2 + 48{,}9\, v_3 - 2376{,}2\, v_4 + 72{,}9\, v_5 = -4895{,}0.$$

Multipliziert man (17*) mit 100,74, so folgt, abgesehen vom numerischen Glied, (20*) genau bis auf den Koeffizienten von v_1, der 2449,3 wird. Hier machen sich die Glieder zweiter Ordnung geltend, die infolge des Vorkommens eines Winkels von 30′ merkbar sind.

Behandeln wir (19) nach der Methode von (8) bis (11), S. 515, schreiben also

$$\frac{\sin(30' + v_4)}{\sin(30'2'' + v_1)} \cdot \frac{\sin(59^0 30' + v_2)}{\sin(59^0 30' + v_3)} \frac{\sin(150^0 2'' + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5)}{\sin(30^0 + v_5)} = 1,$$

so folgt

$$\log Q_0 = 9{,}9999927,$$

$$1{,}015077\, v_1 + 0{,}009975\, v_2 + 0{,}020255\, v_3 - 0{,}984830\, v_4 + 0{,}030230\, v_5 = -2{,}0299.$$

Dies mit $\dfrac{10^7 . \text{Mod.}}{\varrho'' Q_0 \sin 30'} = [3{,}3825246]$ multipliziert, gibt zum Vergleich mit (20*) und (17*) · 100,74:

$$(20^{**}) \quad 2449{,}2\, v_1 + 24{,}1\, v_2 + 48{,}9\, v_3 - 2376{,}2\, v_4 + 72{,}9\, v_5 = -4897{,}8.$$

Mit (17*) · 100,74 ist die Koeffizientenübereinstimmung besser als mit (20*), offenbar wegen der Glieder zweiter Ordnung. Nimmt man aber auf (11*) und (11**) Rücksicht und beachtet, daß jetzt δ etwa $^1/_{890}$ ist, so erklärt sich auch der Unterschied der Koeffizienten von v_1 und der numerischen Glieder von (20*) und (20**) befriedigend.

(22*) $$\Delta ABC : \Delta BDC$$

oder wie

(22) $$AD' : DD'.$$

Die Fassung (22*) rührt von W. Jordan her, (22) von Zachariae.*)

Wählt man nun anstatt A die Ecke B oder C als Zentrum, so geschieht die Vergleichung mit dem Zentralpunkt D wieder nach (22*), wobei nur ΔBDC entsprechend in ΔACD oder ΔABD abzuändern ist. Man erkennt also, daß die Rechnungsschärfen sich wie die Flächen der Dreiecke verhalten, welche von den jedesmaligen andern drei Ecken gebildet werden.

Jordan hat darauf hingewiesen, daß man in manchen Fällen die Schärfe noch etwas erhöhen kann, und zwar bei Vierecken mit Diagonalschnitt im Innern derselben, indem man Seitengleichungen mit acht Winkeln bildet nach der Identität

(23) $$\frac{AB\;BC\;CD\;DA}{BC\;CD\;DA\;AB} = 1;$$

diese gibt die Summe der Gleichungen aus den Zentralpunkten A und C, und ihre Schärfe ist proportional der Dreieckssumme BCD und ABD, d. i. dem Viereck $ABCD$. Praktisch hat dieses wenig Bedeutung, da die Schärfe höchstens verdoppelt wird gegenüber dem besten dreistrahligen Zentralsystem; außerdem ist der Nachteil, daß statt sechs nun acht Sinus aufzuschlagen sind und in die Ausgleichung mehr Glieder eingehen. Sind die Winkel für die Sinus direkt beobachtet, so sind es acht gegen sechs Glieder, bei Richtungsbeobachtungen zwölf gegen neun Glieder. Mit Hilfe der Winkelgleichungen könnte man allerdings immer so viele Verbesserungen eliminieren, daß man auf den Fall der Figur mit fünf Winkel- oder

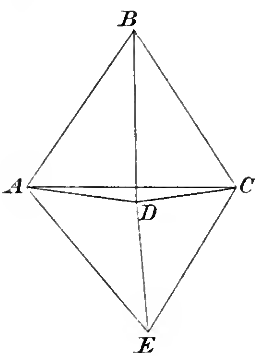
*) Vergl. auch: G. Zachariae. Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Koordinaten. Deutsch von E. Lamp. Berlin 1878; S. 151 u. f. W. Jordan. Handbuch der Vermessungskunde. Bd. I. 1895; S. 299 u. f. (Zeitschr. f. Vermessungswesen, Bd. IX, 1880, S. 65 u. f.)

Daß C. F. Gauß den Satz (22*) schon kannte, ist aus Gauß' Werken Bd. IX, S. 245—254 zu ersehen.

acht Richtungsverbesserungen zurückkommt. Jedoch wird man das kaum tun.

Die Anwendung von mehr als fünf Winkeln in den Seitengleichungen ändert nun die numerischen Glieder. Die Gleichungen, die aus verschiedenen Zentren hervorgehen, sind dann einander nicht einfach proportional, wie bei Beschränkung auf fünf Winkel. Man kann dieselben aber dadurch ableiten, daß man zu den Seitengleichungen mit fünf Winkeln gewisse Vielfache der Winkelgleichungen addiert, und umgekehrt lassen sich Seitengleichungen mit mehr als fünf Winkeln auf diese Art auf die Seitengleichungen mit fünf Winkeln zurückführen. Da nun die Winkelgleichungen absolut scharfe Koeffizienten haben und auch die Exzesse sich in der Regel scharf genug auswerten lassen, so wird die Ungenauigkeit der Seitengleichungen durch Kombination mit den Winkelgleichungen nicht wesentlich geändert, und es kommt daher auf die Schärfe derjenigen Seitengleichungen an, welche ganz unabhängig von den Winkelgleichungen sind, d. h. auf die mit nur fünf Winkeln. Welche fünf Winkel man nimmt (wenn sie nur sonst nicht durch eine Winkelgleichung zusammenhängen), ist ganz gleich; immer kommt man auf die Schärfenbeziehung (22*).

VI. Stumpfe Dreiecke im Netz. Wenn ein Viereck nicht allein auftritt, sondern Teil eines großen Netzes ist, so ist der Zachariaesche Satz mit Vorsicht zu gebrauchen. Z. B. im Fünfeck $ABCDE$, vergl. die Figur, ist es nicht ratsam, das stumpfe Dreieck ACD zweimal in die Zentralsysteme zu nehmen; man nehme für $ABCD$ das Zentrum in D an, für die zweite Seitengleichung aber nehme man ein vierpunktiges System mit Zentrum D, also $DABCE$, womit das stumpfe Dreieck ACD vermieden wird. Unbedingt notwendig wird dieses Verfahren, wenn im Dreieck ACD die Winkel bei A und C nur Minuten oder gar Sekunden betragen. In Gleichung (11) denke man sich A_1 und B_1 entsprechend klein, Q_0 etwa gleich 1, so redu-

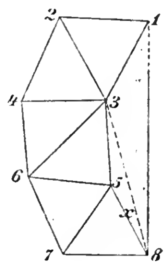


ziert sich praktisch die Gleichung wesentlich auf $v_1 = \lambda_1 + w$. Die andern Verbesserungen treten wegen $\sin A_1$ ganz zurück.

Dabei ist es nun ganz gleich, ob Dreieck *ACD* mit *B* oder *E* zu einer Seitengleichung verbunden wird, wobei auch die Lage des Zentrums wenig ausmacht — die zweifache Benutzung von Dreieck *ACD* führt praktisch zu derselben Relation anstatt zu zwei wesentlich verschiedenen Gleichungen. Nachdem man also Dreieck *ACD* einmal benutzt hat, tilgt man am besten in der Zeichnung eine seiner Linien (am besten *AC*) und stellt nun die zweite Seitengleichung auf.

Die Grenze, von wo ab es bedenklich wird, ein stumpfes Dreieck zweimal zu benutzen, ist schwer anzugeben. Als Regel empfiehlt es sich, stumpfe Dreiecke tunlichst nur in e i n e Seitengleichung aufzunehmen.

VII. Diagonal- und Kranzsysteme. Die geometrischen Bedingungen für Diagonalen lassen sich nicht immer ohne weiteres durch Seitengleichungen aus Zentralsystemen darstellen. Die Figur zeigt einen solchen Fall*), wo von Punkt 8 aus eine einseitige Diagonale zurück nach Punkt 1 geht. Schaltet man nun hier die Linie 3.8 ein, so würde die Beobachtung des Winkels x die Aufstellung des Zentralsystems 5.3.6.7.8 sowie des Systems 3.1.2.4.6.5.8 gestatten. In beiden tritt x auf; da dieser Winkel unbekannt ist, muß man ihn aus den beiden Gleichungen eliminieren (was leicht geschehen kann, wenn man x gleich einem Näherungswerte und einer Verbesserung setzt). Es bleibt nun nur eine Gleichung übrig, die eben dem Diagonalsystem zukommt.

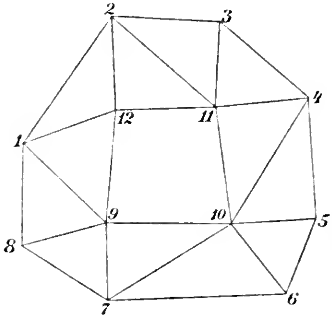


Zur Kontrolle wird man etwa noch eine zweite Rechnung mit Benutzung der fingierten Linie 1.5 anstellen. Die sich ergebende Gleichung muß sich aus dem System der Winkelgleichungen und der ersten Diagonalgleichung herleiten lassen.

Schließt sich eine Dreieckskette um ein offenes Viereck, Fünfeck usw., so nennt man dies Netz ein Kranzsystem. Durch

*) Vergl. im spanischen Dreiecksnetz den Anschluß der Balearen (Station Mola) an das Festland.

Einschaltung fingierter Diagonalen kann man die Seitengleichungen wie im vorigen Falle aus Zentralsystemen erhalten.*) Legt man in beistehender Figur z. B. einen Strahl von 9 nach 11, so kann man zu den Zentren 9, 10, 11 und 12 Zentralsysteme bilden, die nun eine Unbekannte enthalten. Die Elimination gibt drei Seitengleichungen (entsprechend der Formel mit $N = 12$, $F = 0$, $q = 24$, $r = 0$). Die 13 unabhängigen Winkelgleichungen sind gegeben durch die 12 Dreiecke und das innere Viereck.



Bei einer größern Anzahl fingierter Diagonalen wird die Elimination der unbekannten Winkel aber recht weitläufig. Man rechnet dann besser wie folgt. Denkt man sich die Kette von 1.12 aus allmählich aufgebaut, so muß die Endseite 1.12 mit der Anfangslage zusammenfallen. Das gibt vier Gleichungen. Eine derselben entspricht der Gleichheit der Seitenlängen 1.12, sie läßt sich durch die Sinusquotienten im Dreieckskranz darstellen. Drei weitere Gleichungen entsprechen dem Schluß des Vierecks 9.10.11.12 und der Abstimmung seiner Winkelsumme auf den theoretischen Wert. Die letzten drei Gleichungen bezeichnet man als Polygongleichungen.

Zur Aufstellung dieser drei Polygongleichungen bedient man sich bei Polygonen mit zahlreichen Ecken der Berechnung rechtwinkliger oder geographischer Koordinaten. In dem einfachen Falle der Figur könnte man etwa von 1.12 aus unter Benutzung der Dreieckswinkel zunächst für die Logarithmen von 12.9, 9.10, 10.11, 11.12 Ausdrücke aufstellen, die je ein numerisches Glied und außerdem die Einflüsse der noch unbekannten Verbesserungen der Richtungsunterschiede enthalten.

Von 12 aus werden nun etwa allmählich für die Punkte 9, 10, 11 und 12 die geographischen Koordinaten und für die

*) O. Börsch. Über die Ausgleichung einer um ein Polygon gelegten Dreieckskette. (Astr. Nachr. Bd. 71. 1868, Nr. 1697.)

Verbindungsseiten die Azimute berechnet, wobei von geeigneten Werten für Breite, Länge und Azimut einer Seite im Punkt 12 auszugehen ist. Die Einflüsse der Verbesserungen auf die Seiten und Winkel werden durch Differentialausdrücke berücksichtigt.

Die Vergleichung der Endwerte in 12 mit den Anfangswerten gibt die drei Polygongleichungen.*)

VIII. Bedingungsgleichungen aus Grundlinien. Sind mehrere Grundlinien gemessen, etwa G, und sollen sie genau dargestellt werden, so gibt dies $G-1$ Bedingungsgleichungen, die man erhält, wenn man das Verhältnis je zweier Grundlinien durch den dazwischen liegenden Netzteil darstellt (wobei man selbstverständlich zu beachten hat, daß keins der Verhältnisse durch die andern gegeben sein darf).

*) Die Königl. Preuß. Landestriangulation benutzte nach Schreiber zunächst rechtwinklige sphäroidische Koordinaten. Vergl. Hauptdreiecke Bd. I, 1870, S. 420 u. f. und Bd. II, 2. Abteilung, 1874, S. 598 u. f. Später wurde die konforme Doppelprojektion auf die Ebene angewandt.

v. Prondzynski empfahl 1868 die Benutzung geographischer Koordinaten (Astr. Nachr. Bd. 71, 1868, Nr. 1690). Er war der Erste, welcher eine Methode zur Aufstellung der Polygongleichungen gab. Leider fiel er im Feldzuge von 1870, vergl. Astr. Nachr. Bd. 107, 1884, Nr. 2549, Sp. 65.

Bei der indischen Vermessung werden zunächst die Ketten ausgeglichen, dann auf einfach zusammenhängende Dreiecke reduziert und in dieser Form der Polygonausgleichung mittels Breiten-, Längen- und Azimutberechnung unterworfen: vergl. Account of the Operations of the Great Trigonometrical Survey of India, Bd. II. Dehra Dun 1879: S. 171 u. f.

Vergl. auch: G. Zachariae, Die geodätischen Hauptpunkte. Deutsch von E. Lamp. Berlin 1878; S. 204 u. f.

L. Krüger. Beiträge zur Berechnung von Lotabweichungssystemen (Veröffentlichung d. Königl. Preuß. Geodätischen Instituts u. Zentralbureaus d. J. E. 1898). S. 29 u. f.

Die Polygongleichungen waren bereits Gauß bekannt; er bedient sich zu ihrer Herstellung rechtwinkliger ebener Koordinaten, die durch die konforme Abbildung des Ellipsoids in der Ebene erhalten wurden. Verwendung fanden die Polygongleichungen bei der Ausgleichung des Dreieckskranzes um Oldenburg: Gauß' Werke, Bd. IX, S. 329 u. f.

Man könnte auch, ähnlich wie in dem einfachen Beispiel auf S. 249, die Ausgleichung so vornehmen, daß die Grundlinien Verbesserungen erhalten. Dazu gehört vor allem eine Schätzung der mittlern Fehler der Grundlinien und der Winkelmessung. Da diese schwer in ganz befriedigender Weise zu machen ist, so unterläßt man in der Regel die Verbesserung der Grundlinien, was um so zulässiger ist, als diese Verbesserungen wegen der großen Genauigkeit der Grundlinienmessungen doch äußerst gering ausfallen würden.

Dagegen ist das Verfahren, mehrere Grundlinien an ein bereits hinsichtlich der Winkelmessungen ausgeglichenes Netz so anzuschließen, daß die Form des Netzes nicht verändert wird und nur seine Dimension möglichst allen Grundlinien entspricht, nur ausnahmsweise brauchbar.*)

Wir haben dieses Verfahren bei der Bearbeitung der Europäischen Längengradmessung in 52° Br. in modifizierter Form benutzt (vergl. das Beispiel auf S. 229). Es wird hier nach erfolgter Ausgleichung der Grundlinien jede geodätische Linie des astronomisch-geodätischen Hauptnetzes auf mehrere benachbarte Grundlinien bezogen.

Die Darstellung des Verhältnisses zweier Grundlinien a und b durch die Winkel des dazwischen liegenden Netzteiles kann nach dem Sinussatz mittels Legendres Theorem erfolgen; wie bei Zentralsystemen kann man aber auch mit den sphäroidischen Winkeln direkt rechnen, indem man sich jedes Dreieck auf einer Kugel mit dem mittlern Krümmungsmaß der drei Eckpunkte liegend denkt.

Sind A_i und B_i die betreffenden Dreieckswinkel und ϱ_i die zugehörigen Kugelradien, so kann man also setzen:

$$\frac{\sin(A_1+v_1)\sin(A_2+v_2)\ldots\sin(A_n+v_n)}{\sin(B_1+\lambda_1)\sin(B_2+\lambda_2)\ldots\sin(B_n+\lambda_n)} \tag{24}$$
$$= \frac{\sin\frac{a}{\varrho_1}}{\sin\frac{c_1}{\varrho_1}}\,\frac{\sin\frac{c_1}{\varrho_2}}{\sin\frac{c_2}{\varrho_2}}\cdots\frac{\sin\frac{c_{n-2}}{\varrho_{n-1}}}{\sin\frac{c_{n-1}}{\varrho_{n-1}}}\,\frac{\sin\frac{c_{n-1}}{\varrho_n}}{\sin\frac{b}{\varrho_n}} = P.$$

*) A. Ferrero. Note sur un procédé pratique pour établir l'accord entre plusieurs bases d'une triangulation. Astr. Nachr. Bd. 97, 1880, Nr. 2316, Sp. 177.)

Hierin bezeichnen $c_1 \ldots c_{n-1}$ die zur allmählichen Berechnung von b aus a dienenden Zwischenseiten. P dient zur Abkürzung für den Quotienten rechter Hand. Der Ausdruck P läßt sich wesentlich vereinfachen, so daß $\log P$ die einfache Gestalt annimmt:

$$\log P = (\log a - \Delta_a) - (\log b - \Delta_b), \tag{25}$$

wobei man setzen kann:

$$\begin{aligned} \Delta_a &= \frac{\text{Mod}}{6} \frac{K}{a_0^2} a^2, \\ \Delta_b &= \frac{\text{Mod}}{6} \frac{K}{a_0^2} b^2.\text{*)} \end{aligned} \tag{25*}$$

Hierin ist $K : a_0^2$ ein mittleres Krümmungsmaß der Gegend. (Die Vorschrift Schreibers setzt allerdings K für Δ_a und Δ_b nach Maßgabe des ersten und letzten Dreiecks verschieden an, was jedoch unwesentlich ist.)

Um (25) abzuleiten, setzen wir allgemein in P

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)$$

und erhalten leicht

$$P = \frac{a}{b} \frac{1 - \frac{a^2}{6\varrho_1^2}}{1 - \frac{b^2}{6\varrho_n^2}} \frac{1 - \frac{c_1^2}{6\varrho_2^2}}{1 - \frac{c_1^2}{6\varrho_1^2}} \frac{1 - \frac{c_2^2}{6\varrho_3^2}}{1 - \frac{c_2^2}{6\varrho_2^2}} \cdots \frac{1 - \frac{c_{n-1}^2}{6\varrho_n^2}}{1 - \frac{c_{n-1}^2}{6\varrho_{n-1}^2}}, \tag{26}$$

oder ebenso genau

$$P = \frac{a}{b}\left\{1 - \frac{a^2}{6\varrho_1^2} + \frac{b^2}{6\varrho_n^2} + \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{c_i^2}{6}\left(\frac{1}{\varrho_i^2} - \frac{1}{\varrho_{i+1}^2}\right)\right\}. \tag{27}$$

Hierin kann man genau genug allgemein bei einer wesentlich geradgestreckten Verbindungskette setzen:

$$\frac{1}{\varrho_i^2} - \frac{1}{\varrho_{i+1}^2} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\varrho_1^2} - \frac{1}{\varrho_n^2}\right),$$

womit sich ergibt:

$$P = \frac{a}{b}\left\{1 - \frac{1}{6\varrho_1^2}(a^2 - c^2) + \frac{1}{6\varrho_n^2}(b^2 - c^2)\right\}; \tag{28}$$

dabei ist $c^2 = \Sigma c_i^2 : (n-1)$ das durchschnittliche Quadrat der Zwischenseiten.

*) Nach Generalleutnant Schreiber; vergl.: Die Königl. Preuß. Landestriangulation. Hauptdreiecke Bd. II, S. 313.

Da nun im Maximum der Unterschied von ϱ_1^2 und ϱ_n^2 bei 480 km Grundlinienabstand nur $1/_{1000}$ von ϱ^2 beträgt, so kann man in (28) für ϱ_1^2 und ϱ_n^2 denselben Betrag nehmen, vorausgesetzt, daß die a, b und c keine großen Unterschiede aufweisen. Dies wird allerdings nur der Fall sein können, wenn a und b nicht die Grundlinien selbst sind, sondern die mittels der Basisnetze abgeleiteten ersten Hauptdreiecksseiten. Damit ergibt (28) aber ohne weiteres (25) mit (25*), wobei

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{K}{a_0^{\,2}} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 B)^2}{a_0^{\,2}(1 - e^2)}, \tag{29}$$

mit a_0 als Äquatorialradius, e als numerischer Exzentrizität der Meridianellipse und B als mittlerer geographischer Breite.

Etwas genauer als (25*) würde sein:

$$\tag{25**} \begin{aligned} \Delta_a &= \frac{\text{Mod}}{6} \frac{K_a}{a_0^{\,2}} (a^2 - c^2), \\ \Delta_b &= \frac{\text{Mod}}{6} \frac{K_b}{a_0^{\,2}} (b^2 - c^2). \end{aligned}$$

Daß die Unterdrückung von c^2 hierin (wie bei Schreiber) nicht zu empfehlen ist, sieht man an dem Falle $a = b = c$, wo $P = a : b = 1$, also $\Delta_a = \Delta_b = 0$ werden muß, während (25**) bei Unterdrückung von c^2 wegen der Verschiedenheit von K_a und K_b etwas verschiedene Beträge für Δ_a und Δ_b ergibt.

§ 4. Stationsausgleichung.

1. Verschiedene Methoden. Bei zahlreichen überschüssigen Messungen auf den Stationen ist es zweckmäßig, der Übersichtlichkeit halber die Stationsmessungen für sich auszugleichen. Der Übergang zur Netzausgleichung kann in verschiedener Weise geschehen.

In dem Beispiel auf S. 312 u. f. haben wir das (von uns auch selbständig aufgefundene) Verfahren von Hansen (S. 269 u. f.) angewandt, d. h. in unserer Bezeichnungsweise: für jede Station ein äquivalentes System von ideellen Beobachtungen hergeleitet, die als unabhängig in die Netzausgleichung einzuführen sind.

Hierbei kommt der wichtige Satz zur Anwendung, daß man solche äquivalente Beobachtungen bei jeder weiteren Ausgleichung als unabhängig betrachten kann, auch wenn dort die Form der Ausgleichung eine andere ist. Auf diese kommt es ja nicht an hinsichtlich der Endergebnisse; nimmt man aber wieder vermittelnde Beobachtungen mit den Elementen x, y, z usw. und hat man auf den Stationen Elemente A, B, C usw., so bilden sich, wie wir in § 6, IV, demnächst sehen werden, die Normalgleichungen für x, y, z usw. durch lineare Kombinationen derjenigen für A, B, C usw.

Letzteren entsprechen aber die äquivalenten Stationssysteme. Diese können daher auch bei jeder andern Form der Netzausgleichung die Stationsmessungen ersetzen.

Die für Stationsausgleichungen meistens angewandte Besselsche Ausgleichungsform (S. 280 u. f.) ist im allgemeinen weniger einfach, als das Hansensche Verfahren. Generalleutnant Schreiber hat, insoweit es bei älteren Dreiecksmessungen der Königl. Preuß. Landesaufnahme in Betracht kommt, angegeben, wie man in einzelnen Fällen die Stationsausgleichungen durch nachträgliche Einführung Hansenscher Richtungsunbekannten anstatt der Besselschen Winkelunbekannten vereinfachen kann.*)

Eine wesentliche Vereinfachung der Ausgleichungsarbeit soll man dadurch zu erzielen suchen, daß die Stationsmessungen entweder genau oder doch angenähert einem vollen Satz von Richtungsbeobachtungen entsprechen. Dann kann man mit Nutzen das Verfahren der englischen Landesvermessung anwenden (vergl. S. 199 u. f.) oder im Idealfalle dasjenige von Generalleutnant Schreiber (S. 209 u. f.).

Bei der Zusammenarbeitung des Dreiecksmaterials der Europäischen Längengradmessung in 52° Br., I. Heft, lagen vielfach Besselsche Stationsausgleichungen bereits vor. Um eine Vereinfachung der Netzausgleichung zu erzielen, wurden die Ergebnisse nach einem neuen Verfahren in einen Satz Richtungsbeobachtungen mit ungleichen Richtungsgewichten verwandelt. Mit genügender Annäherung gelang dieses in den meisten Fällen. Kleine Abweichungen waren zulässig, da eines-

*) Hauptdreiecke, Bd. II, S. 304 u. f.

teils die genauen Gewichte ja doch illusorisch sind, weil die Teilungsfehler ungenügend berücksichtigt worden waren, andernteils aber die aus den Stationsausgleichungen folgenden Gewichte wegen des Auftretens konstanter Richtungsfehler (sogenannter Netzfehler) noch einer Umänderung bedurften, die nur angenähert richtig bewirkt werden konnte.

II. Verwandlung der Stationsergebnisse einer Besselschen Ausgleichung in einen vollen Richtungssatz.*) In der Stationsausgleichung seien als Unbekannte die Winkel $(1 \cdot 2)$, $(1 \cdot 3)$, $(1 \cdot 4), \ldots (1 \cdot n)$ eingeführt. Die Gewichtskoeffizienten seien:

$$(1) \qquad \begin{array}{cccc} Q_{2 \cdot 2} & Q_{2 \cdot 3} & Q_{2 \cdot 4} \cdots & Q_{2 \cdot n} \\ & Q_{3 \cdot 3} & Q_{3 \cdot 4} \cdots & Q_{3 \cdot n} \\ & & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ & & & Q_{n \cdot n}. \end{array}$$

Hieraus leitet man in bekannter Weise die reziproken Gewichte $q_{i \cdot h}$ sämtlicher Winkel ab; es sei

$$(2) \qquad s_i = \Sigma q_{i \cdot h}, \quad h \text{ von } 1 \ldots n \text{ ohne } i.$$

Man bedarf weiterhin nur die s_i und hat zur direkten Berechnung derselben:

$$(2^*) \qquad s_i = \Sigma Q_{i \cdot i} + (n-2) Q_{i \cdot i} - 2 \Sigma Q_{i \cdot h},$$

worin $\Sigma Q_{i \cdot i}$ die Summe aller Q mit quadratischen Indices ist. Zur Probe ist noch

$$(2^{**}) \qquad S = \Sigma s_i = 2(n-1) \Sigma Q_{i \cdot i} - 4 \Sigma Q_{i \cdot h}.$$

In den beiden letzteren Formeln ist $Q_{1 \cdot 1}$ und $Q_{1 \cdot h}$ gleich null zu setzen und $Q_{i \cdot h}$ ohne Wiederholung zu nehmen.

Sind nun $q_1, q_2, \ldots q_n$ die reziproken Gewichte der Richtungen, so soll sein:

$$(3) \qquad \begin{array}{lll} q_{1 \cdot 2} = q_1 + q_2 & q_{1 \cdot 3} = q_1 + q_3 & q_{1 \cdot 4} = q_1 + q_4 \\ & q_{2 \cdot 3} = q_2 + q_3 & q_{2 \cdot 4} = q_2 + q_4 \\ & & q_{3 \cdot 4} = q_3 + q_4 \end{array}$$

usw.

*) Die Europäische Längengradmessung in 52° Br., I. Heft, S. 37 u. f.

Bei $n > 3$ können diese Gleichungen nur näherungsweise erfüllt werden. Macht man dann die Quadrate der Unterschiede der linken und der rechten Seiten zu einem Minimum, so wird:

$$
(4)\qquad
\begin{array}{lllll}
(n-1)q_1 + & q_2 + & q_3 \cdots + & q_n = s_1 \\
q_1 + (n-1)q_2 + & & q_3 \cdots + & q_n = s_2 \\
q_1 + & q_2 + (n-1)q_3 \cdots + & & q_n = s_3 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\
q_1 + & q_2 + & q_3 \cdots + (n-1)q_n = s_n .
\end{array}
$$

Hieraus folgt allgemein:

$$
(5)\qquad q_i = \frac{s_i}{n-2} - \frac{S}{2(n-1)(n-2)} .
$$

Zur Kontrolle ist

$$
(6)\qquad \Sigma q_i = \frac{S}{2(n-1)} .
$$

Die neuen reziproken Richtungsgewichte q sind zufolge (4) so bestimmt, daß für jede Richtung im Durchschnitt das mittlere Fehlerquadrat der Winkel mit den andern Richtungen ungeändert bleibt.*)

III. Umwandlung bei drei Richtungen.**) Hier geben die ersten drei Gleichungen (3) streng

$$
(7)\qquad q_1 = Q_{2\cdot 3}, \quad q_2 = Q_{2\cdot 2} - Q_{2\cdot 3}, \quad q_3 = Q_{3\cdot 3} - Q_{2\cdot 3} .
$$

Man kann die drei q auch bequem direkt aus den Koeffizienten der Normalgleichungen ableiten. Lauten diese letzteren:

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
(bb)B' + (bc)C' &= (bl) \\
(bc)B' + (cc)C' &= (cl),
\end{aligned}
$$

wo sich B' und C' auf die Winkel $1 \cdot 2$ und $1 \cdot 3$ beziehen, so ergänzen wir dieses System zu folgendem:

---

*) Weiteres über dieses Verfahren siehe Astr. Nachr. Bd. **134**, 1893, Nr. 3210, Sp. 281 u. f.

Dort ist auch ein größeres Beispiel gegeben, sowie über die Benutzung des Verfahrens im I. Heft der Europäischen Längengradmessung berichtet; endlich ist daselbst auch an einem Beispiel der Einfluß auf die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes gezeigt.

**) Die Europäische Längengradmessung, I. Heft, S. 38/40.

$$(8^*)\qquad\begin{aligned}(aa)A + (ab)B + (ac)C + r_1k &= (al)\\ (ab)A + (bb)B + (bc)C + r_2k &= (bl)\\ (ac)A + (bc)B + (cc)C + r_3k &= (cl)\\ r_1A + \quad r_2B + \quad r_3C \quad &= 0,\end{aligned}$$

worin A, B, C Richtungsunbekannte sind mit der Bedeutung

$$(9)\qquad B' = -A + B, \qquad C' = -A + C.$$

Um bestimmte Werte für A, B, C zu erhalten, ist die vierte Gleichung als Bedingungsgleichung zwischen A, B, C beigefügt. $(aa), (ab), (ac), (al)$ ergeben sich dadurch, daß die Summe der drei ersten Gleichungen ohne die Glieder mit k identisch verschwinden muß, weil A, B, C dann nicht bestimmbar sind.

Die Summe der drei ersten Gleichungen zeigt, daß $k = 0$ ist, wenn $r_1 + r_2 + r_3 \lesseqgtr 0$ angenommen wird ($r_1 + r_2 + r_3 = 0$ gäbe eine Winkelgleichung). Nun folgt leicht für

$$(10)\qquad \varrho r_1 r_2 = -(ab), \quad \varrho r_1 r_3 = -(ac), \quad \varrho r_2 r_3 = -(bc),$$

wobei ϱ willkürlich ist:

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned}\{(aa) + \varrho r_1^2\}A &= \left\{(aa) - \frac{(ab)(ac)}{(bc)}\right\}A = (al)\\ \{(bb) + \varrho r_2^2\}B &= \left\{(bb) - \frac{(ab)(bc)}{(ac)}\right\}B = (bl)\\ \{(cc) + \varrho r_3^2\}C &= \left\{(cc) - \frac{(ac)(bc)}{(ab)}\right\}C = (cl).\end{aligned}\right.$$

Hierin sind die Koeffizienten von A, B und C die Größen $1 : q_1$, $1 : q_2$, $1 : q_3$. Denn die (11) entsprechen der allgemeinen Auflösung von (8*). Vergl. § 3, S. 262 u. f., und das Beispiel S. 322. Dort ist $\varrho = -1 : (ab)(bc)(ac)$.

IV. Nebenrichtungen, d. h. Richtungen, die im Netz keine Kontrolle erfahren, indem sie darin nicht vorkommen, werden auch bei der Netzausgleichung nicht mitgeführt, was sich von selbst macht, wenn das Ergebnis der Stationsausgleichung als ein voller Satz von Richtungen auftritt.

Hat man eine Netzausgleichung nach Hansen (S. 269 u. f.), so muß man bei den Stationsausgleichungen die unbekannten Winkel von einer Hauptrichtung aus zählen und diejenigen für die Nebenrichtungen den anderen voranstellen, so daß dann die entsprechenden reduzierten Normalgleichungen einfach wegbleiben können. (Bezieht sich in (3*), S. 271, ξ auf eine Nebenrichtung, so bleibt die erste der Gleichungen weg.)

Hat man Besselsche Stationsausgleichungen (S. 280), so läßt man in der allgemeinen Auflösung der Normalgleichungen diejenigen Gleichungen und Glieder, die sich auf Nebenrichtungen beziehen, für die Netzausgleichung einfach weg, also z. B. in (23), S. 281, sowohl die Gleichungen für ξ, wie die Glieder für σ_1, welche Größe verschwindet. Denn denkt man sich in (21), S. 280, zunächst ξ eliminiert, so entpricht nun das abgeänderte System (23) dem System (21) nach Elimination von ξ, weil $\sigma_1 = 0$ ist.

Selbstredend werden die Nebenrichtungen von der Netzausgleichung indirekt beeinflußt. Diesen Einfluß hat man auf Grund der Ergebnisse der Netzausgleichung festzustellen (vergl. weiterhin § 6, V).

V. Ungleiche Stationsgewichte, Berücksichtigung von Netzfehlerquellen. In der Regel nimmt man auf die Unterschiede der mittleren Fehlerquadrate μ^2 der Gewichtseinheit nach den Stationsausgleichungen keine Rücksicht. Man kann dies aber tun; bildet man Gewichte g umgekehrt proportional den μ^2, so hat man sich nun die Normalgleichungen mit g multipliziert zu denken, die Koeffizienten der allgemeinen Auflösung (Bessels Ausgleichung) dagegen mit g dividiert. Die Gewichte der äquivalenten Ergebnisse (Hansen) multiplizieren sich mit g.

Dies Verfahren setzt voraus, daß keine Netzfehler auftreten und die Stations-μ^2 korrekt bestimmt werden, wie z. B. aus den Verbesserungen der Winkelmittel bei dem Schreiberschen Verfahren. Jedoch würde man ungleiche Gewichte auch nur insoweit anwenden, als die mittleren Fehler der μ^2 selbst ihre etwaigen Unterschiede verbürgt erscheinen lassen. Da die Teilungsfehler die mittleren Fehler der Stationen wesentlich beeinflussen, so dürfte die Annahme ungleicher Stationsgewichte nur selten erforderlich sein.

Um vor Beginn der Netzausgleichung zu erkennen, ob konstante Richtungsfehler da sind, die in den Stationsausgleichungen nicht merkbar werden, kann man aus den n Dreiecksschlußfehlern w den mittleren Fehler M einer Richtung nach der sogenannten internationalen Formel von General Ferrero ableiten:

$$M = \pm \sqrt{\frac{\Sigma w^2}{6n}}. \tag{12}$$

Ist derselbe wesentlich größer, als der mittlere Fehler einer auf der Station ausgeglichenen Richtung im Durchschnitt fürs Netz, so sind Netzfehler angezeigt. Freilich muß dabei der mittlere Fehler der Stationsergebnisse in korrekter Weise abgeleitet sein oder man muß besondere Fehlerrechnungen zu diesem Zwecke anstellen: durch andere Gruppierung der Stationsmessungen als gerade für die Ausgleichung.

Die internationale Formel gibt eigentlich auch nur bei unabhängiger Messung der Dreieckswinkel einen korrekten bzw. den besten Wert. Bei Richtungsbeobachtungen gibt die Berücksichtigung aller Winkelgleichungen in der Regel andere Werte. Übereinstimmung findet nach L. Krüger nur statt, wenn in einem Polygon alle Diagonalen beobachtet sind.*) Wenn aber die Dreiecksabschlüsse systematische Gruppierung zeigen, so treten, wie A. Börsch fand, starke Unterschiede auf.**)

Andrae***) machte einen Versuch zur Berücksichtigung der konstanten Netzfehler, indem er die Ausgleichung so führte, daß

$$[g\lambda^2] + [p\delta^2] \tag{13}$$

ein Minimum wird, wobei λ der dem Stationsergebnisse entsprechende zufällige Fehler und δ der Netzfehler einer Richtung ist.

Im I. Heft der Europäischen Längengradmessung machte sich ebenfalls die Berücksichtigung konstanter Netzfehler notwendig. Dies geschah durch Änderung der Gewichte der Rich-

*) Zur Ausgleichung von Polygonen und von Dreiecksketten und über die internationale Näherungsformel für den mittleren Winkelfehler. (Zeitschr. f. Math. u. Physik, 47. Bd., 1892, S. 157 u. f.)

**) Das Märkisch-Thüringische Dreiecksnetz. (Veröffentl. d. Königl. Preuß. Geod. Instituts) 1889, S. 137 u. f.

***) Den danske Gradmaaling. Bd. II, S. 468 u. f. (Auch Astr. Viertel-jahrsschr., Bd. 12, S. 233 u. f.)

tungen der Stationsergebnisse, welche in die Form eines Satzes mit ungleichen Gewichten gebracht waren.*)

Am günstigsten ist es, wenn das Ergebnis jeder Station ein voller Satz Richtungen mit gleichen Gewichten ist. Denn dann ändert die Berücksichtigung der Netzfehler nur einfach das mittlere Fehlerquadrat der Gewichtseinheit, wenn man fürs ganze Netz denselben mittleren Betrag der Netzfehler annehmen darf.

§ 5. Gang der Auflösung bei bedingter Ausgleichung.

I. Einfachere Fälle. Am einfachsten wird die Netzausgleichung, wenn außer den Dreieckswinkeln nur wenige oder gar keine überschüssigen Winkel gemessen sind, denn dann nehmen die Normalgleichungen aus den Winkelgleichungen, wie man leicht sieht, eine sehr einfache Form an. Auch bei Richtungsbeobachtungen, wenn man das Ergebnis jeder Station als einen vollen Satz darstellen kann, ist vielfach die Ausgleichung noch leidlich einfach. Ohne Benutzung des Gaußschen Algorithmus gelangt man dann manchmal rasch zu einer Auflösung der Normalgleichungen, falls sich hier die nichtquadratischen Koeffizienten um die Diagonale gruppieren.**) Für eine Reihe einfacher Figuren hat L. Krüger unter Annahme der Stationsergebnisse als Richtungssätze mit gleichem Gewichte allgemeine Formeln aufgestellt.***) Einen besonders einfachen Fall bietet im letztern Fall das vereinzelte Viereck mit zwei Diagonalen; indem man hier vonhausaus die Winkelgleichungen viergliedrig nach Maßgabe der Ausdrücke ansetzt: $1+8-4-5;\quad 2+3-6-7;\quad 1+2+3+4+5+6+7+8,$ worin 1 bis 8 die nebeneinanderliegenden Winkel in einer gewöhnlichen Vierecksform bezeichnen, so werden die Normalgleichungen der Winkelbedingungsgleichungen unabhängig voneinander.

*) a. a. O., S. 36, auch S. 40.

**) L. Krüger. Die Auflösung eines speziellen Systems von Normalgleichungen. (Astr. Nachr. Bd. 138, 1895, Nr. 3298, Sp. 153 u. f.)

***) L. Krüger. Zur Ausgl. der Widersprüche in den Winkelbedingungsgleichungen trig. Netze. (Veröffentl. d. Königl. Preuß. Geod. Inst. N. F., Nr. 25) 1906.

II. Gesonderte Auflösung der Winkel- und Seitengleichungen nach C. F. Gauß. Die einfache Form der Normalgleichungen der Winkelgleichungen regt den Gedanken an, zunächst letztere allein auszugleichen, die erhaltenen Verbesserungen in die Seitengleichungen einzuführen und nun diese allein auszugleichen, um zweite Verbesserungen zu erhalten, sodann diese in die Winkelgleichungen einzuführen und aus deren Ausgleichung dritte Verbesserungen zu ermitteln usw. Indessen dieses Verfahren konvergiert sehr mangelhaft,*) obwohl es schließlich zum Ziele führt, wie wir im nächsten Paragraphen zeigen für einen Fall, wo es zweckmäßiger erscheint (§ 6, II).

Wenn das geschilderte Verfahren rasch zum Ziele führen soll, muß man nach Gauß' ähnlichem Vorgange die Seitengleichungen durch Kombination mit den Winkelgleichungen so umformen, daß im Gesamtnormalgleichungssystem die Produktsummen aus den Koeffizienten der ersten und zweiten Gruppe von Bedingungsgleichungen sämtlich verschwinden, d. h. in der Sprache von T. N. Thiele: es müssen die umgeformten Seitengleichungen zu dem System der Winkelgleichungen „freie" Funktionen sein.**) Nach S. 221 kann die Umwandlung der Seitengleichungen geschehen, indem man das reduzierte Normalgleichungssystem der Winkelbedingungsgleichungen zu Hilfe nimmt. Indessen bietet das Verfahren nach Krüger keine Vorteile, wenn man dieses System erst herstellen muß; vielmehr setzt die praktische Brauchbarkeit gerade voraus, daß sich bequem eine allgemeine Auflösung des Normalgleichungssystems der Winkelbedingungsgleichungen angeben läßt. Es zeigt aber die Betrachtung der Ausdrücke für die umgeformten Koeffizienten, daß man sie

*) Vergl. hierzu und zu dem in diesem Abschnitt noch Folgenden die Abhandlung: L. Krüger. Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen. (Veröffentl. d. Königl. Preuß. Geod. Inst. N. F., Nr. 18) 1905.

**) Gauß hat bei der hannoverschen Gradmessung jede Seitengleichung mit Hilfe der unabhängigen Winkelgleichungen derjenigen Figur, auf die sie sich bezieht, umgeformt, und dann abwechselnd die Winkelgleichungen allein und die umgeformten Seitengleichungen allein ausgeglichen. Bei 43 Winkelgleichungen und 12 Seitengleichungen genügte eine dreimalige Wiederholung der ganzen Rechnung. (Werke. Bd. IX, S. 297—328.)

mit der allgemeinen Auflösung dieses Normalgleichungssystems bilden kann, wenn man darin die numerischen Glieder angemessen abändert und nun anstatt der Korrelaten andere Symbole setzt.

Zur Erläuterung betrachten wir ein kleines Beispiel. Die Winkelgleichungen seien:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots + a_m\lambda_m &= 0 \\ b_0 + b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \cdots + b_m\lambda_m &= 0 \\ c_0 + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_m\lambda_m &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

die Seitengleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \cdots + \alpha_m\lambda_m &= 0 \\ \beta_0 + \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 + \cdots + \beta_m\lambda_m &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Wir multiplizieren die (1) mit den Koeffizienten $\varrho_{1\cdot1}$, $\varrho_{1\cdot2}$, $\varrho_{1\cdot3}$ und addieren sie zur ersten Gleichung (2), dann mit $\varrho_{2\cdot1}$, $\varrho_{2\cdot2}$, $\varrho_{2\cdot3}$, und addieren sie zur zweiten Gleichung (2). Das Ergebnis sei:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 + \cdots + A_m\lambda_m &= 0 \\ B_0 + B_1\lambda_1 + B_2\lambda_2 + \cdots + B_m\lambda_m &= 0. \end{aligned} \tag{2*}$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} A_i &= \alpha_i + a_i\varrho_{1\cdot1} + b_i\varrho_{1\cdot2} + c_i\varrho_{1\cdot3} \\ B_i &= \beta_i + a_i\varrho_{2\cdot1} + b_i\varrho_{2\cdot2} + c_i\varrho_{2\cdot3}. \end{aligned} \tag{3}$$

Die ϱ bestimmen sich aus den Bedingungen der Freiheit von (2*) zu (1):

$$\left[\frac{a_i A_i}{g_i}\right] = 0 = \left[\frac{b_i A_i}{g_i}\right] = \left[\frac{c_i A_i}{g_i}\right], \quad i = 1 \ldots n \tag{4}$$

und entsprechend mit B_i. Die Gl. (4) geben aber Gleichungen von der Form der Normalgleichungen für (1):

$$\begin{aligned} (aa)k_1 + (ab)k_2 + (ac)k_3 + a_0 &= 0 \\ (ab)k_1 + (bb)k_2 + (bc)k_3 + b_0 &= 0 \\ (ac)k_1 + (bc)k_2 + (cc)k_3 + c_0 &= 0; \end{aligned} \tag{5}$$

an Stelle von k_1, k_2, k_3 tritt $\varrho_{1\cdot1}, \varrho_{1\cdot2}, \varrho_{1\cdot3}$, wenn gesetzt wird für a_0, b_0. c_0 bzw. $(a\alpha)$, $(b\alpha)$, $(c\alpha)$, wobei z. B. ist

$$(a\alpha) = \left[\frac{a_i\alpha_i}{g_i}\right], \qquad i = 1 \cdots n. \tag{5*}$$

Setzt man für a_0, b_0, c_0 die Summen $(a\beta)$, $(b\beta)$, $(c\beta)$, so folgt anstatt der k das System $\varrho_{2\cdot1}$, $\varrho_{2\cdot2}$, $\varrho_{2\cdot3}$.

Läßt sich nun (5) bequem umkehren, so geben die allgemeinen Ausdrücke für k bei der angezeigten Vertauschung sofort bequem die ϱ, womit man die A und B erhält. (Ein Zahlenbeispiel, das vorn behandelte Gaußsche Fünfeck betr., siehe bei Krüger a. a. O.)

III. Anmerkung über ein genähertes Verfahren zur Ausgleichung von Dreiecksnetzen von C. F. Gauß. Bei Ausgleichungen, wo es nicht auf die äußerste Strenge ankam, hat sich Gauß eines Näherungsverfahrens bedient, das nicht genau das absolute Fehlerminimum ergibt, aber doch sehr nahe, und das wahrscheinlich im folgenden besteht.*) Man gleicht zuerst die Winkelgleichungen allein nach der Methode der kleinsten Quadrate aus und stellt mit den verbesserten Beobachtungen die Seitengleichungen auf. In den Gleichungen setzt man die zweiten Verbesserungen δ der gegenseitigen Richtungen einander gleich, also etwa $\delta_{i \cdot h} = \delta_{h \cdot i}$. Nun macht man eine Ausgleichung der umgeformten Seitengleichungen nach der M. d. kl. Qu. Die Einführung der δ ändert nichts an der Erfüllung der Winkelbedingungsgleichungen. Beim Gaußschen Fünfeck weichen die so erhaltenen Werte nur in den Tausendstelsekunden von den strengen ab.

§ 6. Große Systeme.

1. Ausgleichung im ganzen ist nicht ratsam, weil doch Versehen vorkommen können und dann unangenehme Wiederholungen nötig sind. Das königl. sächsische Hauptnetz wurde im ganzen ausgeglichen. Es hat 34 Punkte und ergab einschließlich einer Bedingung aus den beiden Basishälften 159 Bedingungsgleichungen. Nach einer ersten Auflösung fand sich, daß ein 10-stelliger Logarithmus infolge eines Druckfehlers**) um eine Einheit der fünften Dezimalstelle falsch bei Aufstellung einer Seitengleichung angesetzt war, weshalb der größte Teil der Netzausgleichung wiederholt werden mußte. Schließlich erfüllten aber die Richtungsverbesserungen die Bedingungs-

*) Vergl. L. Krüger a. a. O. mit Zahlenbeispiel für das Gaußsche Fünfeck.

**) Nagel, a. a. O. S. 531.

gleichungen nicht befriedigend; es blieben noch Reste bis zu Hundertstelsekunden*); eine 2., 3., 4. und 5. (teilweise) Auflösung verminderten diese allmählich bis auf Hunderttausendstelsekunden.

In dieser Weise kann man in großen Ländern mit Hunderten von Hauptdreieckspunkten nicht vorgehen. Man wird sich dann nach anderen Verfahren umsehen, selbst wenn sie theoretisch nicht gleich günstig sind. Im erwähnten Falle wäre aber wohl die Anwendung von vermittelnden Beobachtungen mit 66 zu bestimmenden Elementen vorzuziehen gewesen (siehe weiterhin).

II. Verfahren allmählicher Annäherung nach C. F. Gauß mittels unvollständiger Ausgleichung.**) Dieses wurde in Mecklenburg von F. Paschen angewendet, indem er die 109 Bedingungsgleichungen in fünf Teile gliederte, die fünf Netzteilen entsprachen.***) Die weitere Behandlung und ihre Begründung erkennt man auf folgende Art:

Berechnet man mit irgend welchen Werten anstatt der richtigen Werte der Korrelaten k nach den Korrelatengleichungen (3), S. 232. die λ, so werden diese die Bedingungsgleichungen nicht erfüllen; wenn es aber gelingt, auf irgend eine Weise ein Wertsystem zu ermitteln, womit sich Werte λ berechnen, die die Bedingungsgleichungen erfüllen, so sind dies die richtigen k, welche auch die Normalgleichungen erfüllen, denn S. 233 gehen ja die Gleichungen (4) aus den Gl. (1), S. 228, durch Substitution der Gl. (3), S. 232, hervor. Haben wir nun mit Näherungswerten der k für die λ Werte berechnet und alsdann damit die Widerspruchsreste der Bedingungsgleichungen, so berechnen wir weiter aus Verbesserungen der k Verbesserungen der λ und die neuen Widerspruchsreste und so fort. Aus der einfachen Form der Gleichungen (1), S. 228,

*) Nagel, a. a. O. S. 628.

**) Suppl. theor. comb. Art. 20.

***) In dem Suppl. theor. comb. ist von Netzteilen nicht die Rede. Die Konvergenz des Verfahrens verlangt aber bei Anwendung auf die Netzausgleichung eine Gruppierung der Gleichungen nach Netzteilen (eine Gliederung nach Winkelgleichungen und Seitengleichungen ergibt etwas ganz anderes, siehe darüber den vorangehenden § 5, II).

und (3), S. 232, ersieht man leicht, daß dieses Verfahren zu den richtigen Werten der λ führen muß, und wenn erst einmal alle Bedingungsgleichungen erfüllt sind, so erhält man irgend ein λ durch Addition aller teilweisen Verbesserungen zu dem Anfangswerte, sowie auch den Endwert irgend eines der k in derselben Weise.

Um nun zu Näherungswerten und Verbessungen der k zu gelangen, verfahren wir im Prinzip wie S. 175 u. f. bei der indirekten Auflösung, vermeiden aber die vollständige Bildung der Normalgleichungen: Wir stellen zuerst alle Bedingungsgleichungen auf und zerlegen sie, wie bereits bemerkt, in Gruppen, so daß jede Gruppe hauptsächlich einen Netzteil betrifft. Wir bilden nun für jede Gruppe die Korrelaten- und Normalgleichungen, gleichen alsdann die erste Gruppe aus und führen die erhaltenen Verbesserungen in die zweite ein; gleichen nun die zweite Gruppe aus und führen die bis hierher erhaltenen Gesamt-Verbesserungen in die dritte Gruppe ein usf. Sind alle Gruppen durchgenommen, so beginnt die Rechnung von vorn bei der ersten Gruppe usw., oder man geht rückwärts zur 4., 3., 2., 1. Gruppe usw. (wie in Mecklenburg).

Beispielsweise nehmen wir den einfachen Fall dreier Bedingungsgleichungen und vereinigen die beiden ersten Gleichungen zu einer Gruppe, die dritte Gleichung bildet die andere Gruppe.

$$(1)\qquad \begin{array}{ll} \text{1. Gruppe:} & [p\lambda] + w_1 = 0, \qquad [q\lambda] + w_2 = 0, \\ \text{2.} \quad \text{,,} \quad : & [r\lambda] + w_3 = 0. \end{array}$$

a. Auflösung von

$$(2)\qquad \begin{aligned} (pp)k_1' + (pq)k_2' + w_1 &= 0 \\ (pq)k_1' + (qq)k_2' + w_2 &= 0. \end{aligned}$$

Berechnung der Werte

$$(3)\qquad \lambda_i' g_i = k_1' p_i + k_2' q_i, \qquad i = 1 \ldots n.$$

Berechnung von

$$(4)\qquad w_3' = [r\lambda'] + w_3.$$

b. Auflösung von

$$(5)\qquad (rr)k_3'' + w_3' = 0.$$

Berechnung der Werte

(6) $$\lambda_i'' g_i = k_3'' r_i, \qquad i = 1 \ldots n.$$

Berechnung von

(7) $$w_1'' = [p\lambda''], \quad w_2'' = [q\lambda''].$$

c. Auflösung von

(2*) $$\begin{aligned}(pp)k_1''' + (pq)k_2''' + w_1'' &= 0\\(pq)k_1''' + (qq)k_2''' + w_2'' &= 0.\end{aligned}$$

Berechnung der Werte

(3*) $$\lambda_i''' g_i = k_1''' p_i + k_2''' q_i, \qquad i = 1 \ldots n.$$

Berechnung von

(8) $$w_3''' = [r\lambda''']$$

usw.

Sind nun die w_3''' hinreichend genau gleich null, so sind die Summen

(9) $$\lambda_i' + \lambda_i'' + \lambda_i''' = \lambda_i$$

die strengen Werte der Verbesserungen. Denn hiernach ist

(10) $$\lambda_i g_i = (k_1' + k_1''')p_i + (k_2' + k_2''')q_i + k_3'' r_i,$$

d. h. die so gebildeten Gesamtwerte $\lambda_i g_i$ können betrachtet werden als entstanden aus den ursprünglichen Korrelatengleichungen (3), S. 232. Und da sie die Bedingungsgleichungen erfüllen, sind sie die strengen Werte.

In Mecklenburg gaben vier Überrechnungen aller fünf Gruppen noch nicht genau die w gleich null. Bei der fünften Überrechnung wurde daher das Verfahren etwas abgeändert, so daß die aus Gruppe 1 folgenden Werte ungeändert blieben bei Ausgleichung der zweiten Gruppe usw. Zu bemerken ist noch, daß sich bei dem betr. Netz die Sache noch stark verwickelte, indem die Stationsausgleichungen nach Bessel bewirkt worden waren.

Den Nachweis, daß das Verfahren der allmählichen Ausgleichung konvergiert und eine Grenze hat, bei welcher alle Gleichungen gleichzeitig erfüllt sind, gab P. Pizzetti 1887.*)

*) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Vol. III, 2. Sem., S. 230, 288.

III. Stückweise Ausgleichung großer Netze. Vielfach hat man sich bei großen Netzen damit begnügt, dieselben in Teile zu teilen und jeden für sich auszugleichen. Um den Zusammenhang herzustellen, gibt es drei Verfahren.

A) Man gleicht einen ersten Teil aus. Für einen zweiten anschließenden behält man die Anschlußfigur bei usw. Man muß nun darauf sehen, daß der damit eingeführte Zwang nicht zu bedeutend wird.

B) Um den Zwang zu vermindern, gibt man den benachbarten Teilen übergreifende Dreiecke. Bei Ausgleichung des ersten Teils nimmt man nun die benachbarten übergreifenden Dreiecke mit, behält aber endgültig nur den ersten Teil allein bei. Usw.*)

C) Man kann den Zwang zunächst gänzlich vermeiden, indem man alle Teile selbständig ausgleicht. Dann gilt es aber noch, die Teile zusammenzufügen. Dies kann nach einem Verfahren geschehen, das ich für die Zwecke der Europäischen Längengradmessung in 52^0 Br. aufgestellt habe.**)

Es besteht darin, daß man die Anschlußfiguren so aufeinanderlegt, daß die Quadratsumme der Abstände entsprechender Punkte ein Minimum wird. Dabei kann man die Anschlußfiguren immer als eben betrachten, wenn nur erst die Abstände nach vorläufiger Orientierung genau berechnet sind.

IV. Ausgleichung nach Elementen, insbesondere nach Koordinaten. Wenn das Netz viele Diagonalen hat, empfiehlt sich die Ausgleichung nach Elementen. Im königl. sächsischen Netz, vergl. S. 538, würden bei 34 Punkten $2 \cdot 32$ unbekannte Winkel oder Koordinaten zur Darstellung genügt haben, was 64 Normalgleichungen anstatt 159 bei bedingter Ausgleichung gegeben hätte. Denkt man sich ein zur Konstruktion notwendiges System von Winkeln oder Richtungen angenommen, so stellt man zuerst die Bedingungsgleichungen auf und reduziert diese

---

*) Beispiele zu A und B gibt das I. Heft der Europäischen Längengradmessung.

**) Die Europäische Längengradmessung. I. Heft. S. 49. Eingehender behandelt von L. Krüger in den Astr. Nachr. Bd. 133, 1893, Nr. 3178. Sp. 153 u. f.

dann auf Fehlergleichungen nach dem Verfahren von S. 228/229. Das macht sich in dem Falle sehr einfach, wo die Stationsergebnisse als unmittelbar beobachtete Winkel auftreten oder auf die Form eines vollen Satzes von Richtungen (unter Umständen mit ungleichen Gewichten) hingeführt worden sind. Mühsamer, aber wohl meistens empfehlenswerter ist es, nach Koordinaten auszugleichen, wobei man am besten eine konforme Übertragung auf die Ebene einführt. Die Rechnung ist dann ähnlich wie im Beispiel S. 204 u. f., nur hat man für jeden Strahl vier Koordinatenverbesserungen. Wenn die Stationsergebnisse als volle Sätze von Richtungen angesehen werden, kommt dann auch noch das auf S. 225 u. f. angegebene Schreibersche Verfahren in Betracht.*)

Liegen die Verhältnisse aber so, daß die Ergebnisse der Stationen nicht als volle Sätze erscheinen, sondern daß man den Zusammenhang nach Maßgabe der Stationsausgleichung im Netze beibehalten will (was jedoch nur ganz ausnahmsweise ratsam ist), so wird man zunächst Stationsausgleichungen vornehmen, jedoch nur bis zur Aufstellung der Normalgleichungen, die nun in geeigneter Weise zur Netzausgleichung zu kombinieren sind.**)

Bezeichnen ξ und η Koordinatenverbesserungen, a die den Koordinatenannahmen entsprechenden Azimute, u eine Orientierungskonstante für einen Satz, so gibt die Vergleichung der Beobachtungen mit der Berechnung für einen jeden Satz ein System von Fehlergleichungen der Form

$$(11) \qquad l_{i.h} + \lambda_{i.h} = a_{i.h} - u + b_i\xi_i + c_i\eta_i + b_h\xi_h + c_h\eta_h. \qquad \text{Gew. } g_i.$$

Bei rechtwinkligen ebenen Koordinaten ist $b_i = -b_h$, $c_i = -c_h$, was aber zunächst nicht weiter in Betracht kommt.

*) Vergl. hierzu besonders in den „Hauptdreiecken“, Bd. VII, S. 279 u. f. als Beispiel die Ausgleichung des sächs. Netzes der Königl. Preuß. Landes-Triangulation.

**) F. R. Helmert. Beiträge zur Ausgleichung trigon. Netze. (Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 14, S. 174 u. f.) — Auch „Theorien“, Bd. II, S. 496 u. f. — Vergl. ferner:

C. G. Andrae. Den danske Gradmaaling, Bd. I: Kopenhagener Netz.

Für verschiedene Sätze auf derselben Station ist u verschieden, aber bei derselben Richtung ist das Aggregat der Koordinatenverbesserungen dasselbe. Man bezeichnet daher vorläufig auf jeder Station die Aggregate

$$(12) \qquad b_i \xi_i + c_i \eta_i + b_h \xi_h + c_h \eta_h \text{ mit } A, B, C \ldots.$$

Denkt man sich dies durchs ganze Netz hindurch, so ist die Gesamtsumme $[\lambda \lambda g]$, die wir kurz mit Σ bezeichnen, Funktion der $A, B, C \ldots$, und man hat z. B. zur Bildung der Normalgleichung für ξ_i:

$$(13) \qquad \frac{\partial \Sigma}{2 \partial \xi_i} = \frac{\partial \Sigma}{2 \partial A} \frac{d A}{d \xi_i} + \frac{\partial \Sigma}{2 \partial B} \frac{d B}{d \xi_i} + \cdots,$$

d. h. da $\partial \Sigma : 2 \partial A$, $\partial \Sigma : 2 \partial B$ usw. die auf null reduzierten Stationsnormalgleichungen sind: Man multipliziert, um die Normalgleichungen für ξ_i zu bekommen, die Stationsnormalgleichungen mit den Koeffizienten b_i von ξ_i der betreffenden Richtungsgrößen $A, B, C \ldots$ und addiert sie. Für die $A, B, C \ldots$ sind ihre Ausdrücke nach (12) zu setzen.

Die u kann man vorher in bekannter Weise aus den Stationsnormalgleichungen eliminieren, denn es ändert sich nichts an den Normalgleichungen für ξ und η, ob man dies so macht, oder die u bis zu den Gesamtnormalgleichungen mitführt (nur wird es dann verwickelter).

V. Einschaltungen. Die Bewältigung großer trigonometrischer Vermessungen bringt es mit sich, daß man die Gesamtheit der trigonometrischen Punkte in Punktsysteme verschiedener Ordnung gliedert und diese schrittweise ausgleicht, wobei bei der zweiten Ordnung die erste als Grundlage dient usw. Diese sogenannten Einschaltungen werden in der Regel mit Anschlußzwang ausgeführt.*)

Bei bedingten Beobachtungen ergibt sich die Anzahl der Bedingungsgleichungen am besten, wenn man erst die ganze Figur als frei betrachtet. Ist nun fest beizubehalten ein Winkel

*) Zahlreiche Beispiele geben die Bände: „Hauptdreiecke" der Königl. Preuß. Landes-Triangulation bei der Einschaltung der Netze in die von den Ketten leer gelassenen Räume, sowie beim Zusammenschluß der Ketten.

mit seinen beiden Schenkeln als Anschlußseiten, so liefert das Seitenverhältnis noch eine Seitengleichung mehr. Der gegebene Winkel gibt eine lokale Bedingung, die man bei der Stationsausgleichung berücksichtigt.*)

Wäre z. B. in dem Beispiel auf S. 192 u. f. der Winkel $(1 \cdot 4)$, d. h. z gegeben, so kommt dort in den Normalgleichungen (10) diejenige für z in Fortfall und in den drei anderen hat man für z seinen Wert zu setzen. Dies folgt leicht aus S. 263, § 3 II, wenn man anstatt der Gleichungen (2) einfach $z = -p_0$ ansetzt; vergl. auch S. 216, III.

Ist aber der Winkel $(2 \cdot 4)$ gegeben, so führt man anstatt x, y, z, t zuerst die Richtungsunbekannten A, B, C, D, E ein mit dem aus (10), S. 194, folgenden Normalgleichungssystem:

$$
(14)\quad
\begin{array}{rrrrrl}
19{,}6500\,A & -\ 2{,}6000\,B & -\ 5{,}3500\,C & -\ 5{,}6833\,D & -\ 6{,}0167\,E & = -\ 132{,}472 \\
-\ 2{,}6000\,A & +\ 8{,}9000\,B & -\ 2{,}1000\,C & -\ 1{,}9333\,D & -\ 2{,}2667\,E & = -\ 16{,}362 \\
-\ 5{,}3500\,A & -\ 2{,}1000\,B & +\ 18{,}6500\,C & -\ 5{,}3500\,D & -\ 5{,}8500\,E & = +\ 83{,}891 \\
-\ 5{,}6833\,A & -\ 1{,}9333\,B & -\ 5{,}3500\,C & +\ 18{,}3167\,D & -\ 5{,}3500\,E & = +\ 139{,}708 \\
-\ 6{,}0167\,A & -\ 2{,}2667\,B & -\ 5{,}8500\,C & -\ 5{,}3500\,D & +\ 19{,}4833\,E & = -\ 74{,}764.
\end{array}
$$

Indem man hier $B = 0$ setzt, beziehen sich A, C, D, E auf die Winkel mit der Richtung nach Punkt 2, und die Normalgleichung für B fällt weg; sodann führt man für D den gegebenen Winkelwert ein und streicht noch die Normalgleichung für D. — Man kann dann auch noch wieder zu Richtungsunbekannten übergehen, wobei aber nun die Richtungen nach den Punkten 2 und 4 dieselbe Unbekannte erhalten. Das betreffende System ist auch direkt aus (14) leicht herzuleiten, was zur Kontrolle dient.**)

Ist für ein Stationsergebnis, als voller Satz mit ungleichen Gewichten, eine Anzahl von $(m-1)$ Richtungsunterschieden nachträglich fest gegeben, so daß man ansetzen kann für m Richtungen:

$$(15)\qquad A_i = A_i^0 + u^0, \qquad i = 1 \ldots m,$$

*) Vergl. auch die Formeln von v. Prondzynski: Astr. Nachr., Bd. 75, 1869, Nr. 1782.

**) Vergl. noch über besondere Fälle: Hauptdreiecke, Bd. I, S. 12 u. f. und: Die Europäische Längengradmessung, I. Heft, S. 45 u. f.

und hat man aus den Beobachtungen die Fehlergleichungen

$$(16) \qquad l_i + \lambda_i = A_i + u, \quad \text{Gew. } g_i, \quad i = 1 \ldots n,$$

wobei u^0 und u unbestimmte Größen sind, so folgt

$$(17) \qquad u^0 + u = \frac{[(l_i - A_i^0) g_i]}{[g_i]}, \quad \text{Gew. } [g_i]$$
$$i = 1 \ldots m;$$

für weitere Ausgleichungen ist anzusetzen:

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{c} A_i^0 + (u^0 + u) + \lambda = A_i + u, \quad \text{Gew. } [g_i] \\ i = 1 \ldots m; \\ l_i + \lambda_i = A_i + u, \quad \text{Gew. } g_i \\ i = m + 1 \text{ bis } n. \end{array} \right.$$

$(u^0 + u)$ kann man auch von allen A_i abziehen.

Bei den Einschaltungen niederer Ordnung wird man immer mit rechtwinkligen Koordinaten rechnen, die ja doch zur Bezeichnung der Punktlage dienen. Dabei sind die Rechnungsvorschriften von Generalleutnant Schreiber für die Königl. Preuß. Landes-Triangulation durchaus zu empfehlen. Bei sehr kurzen Distanzen kann es nötig sein, die Richtungsgewichte so abzuändern, daß sie nicht nur dem aus der Winkelmessung hervorgehenden Richtungsfehler entsprechen, sondern auch der Unsicherheit der gegebenen Anschlußpunkte (wobei nicht die absolute Unsicherheit der Koordinaten in Betracht kommt, sondern nur diejenige der gegenseitigen Lage der betreffenden Gruppe der Anschlußpunkte).

In besonderen Fällen, wo es sich nicht um Anschluß an die Landestriangulation handelt, wird man bei Einschaltungen durch Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden auch nach bedingten Beobachtungen ausgleichen oder Winkel als Unbekannte einführen.*)

---

*) L. Krüger, Über die Ausgleichung mit Bedingungsgleichungen bei der trigonometrischen Punktbestimmung durch Einschneiden. (Göttinger Nachr. 1900, Heft 1.)

Otto Börsch. Anleitung zur Berechnung geodätischer Koordinaten. Cassel, 1885; S. 113 u. f.

Vincenzo Reina. Della compensazione nella determinazione di un punto da n punti dati. (Rivista di Topogr. e Catasto 1893.)

A. Weixler. Direktiven zur Ausgleichung trigon. Messungen auf

VI. Einschaltungen ohne Zwang. Ist ein Netz selbständig ausgeglichen worden, obwohl es mehr als zwei Punkte mit einem anderen gemein hat, so ergibt sich wieder die Aufgabe wie S. 542 III. Für die gemeinsamen Punkte werden nun Mittelwerte der Lage genommen, falls es möglich ist, beide Netze zu ändern, sonst muß das neue Netz die Verschiebung allein tragen. Für die anderen Punkte wird eine nachträgliche Zwangsausgleichung meist zu umständlich sein. Man wird ein Näherungsverfahren vorziehen, deren verschiedene vorgeschlagen worden sind. Vergl. hierzu eine eingehende Studie von L. Krüger.*)

Bei der Trigonometrischen Abteilung der Königl. Preuß. Landesaufnahme wurde neuerdings ein einfaches Verfahren angewandt, das General v. Schmidt angegeben hat und das zunächst für völlig umschlossene Dreiecksnetze gedacht ist.**)

Ist Δy_i, Δx_i die Koordinatenverschiebung für einen der n Anschlußpunkte, so ist für einen Zwischenpunkt 0 nach v. Schmidt:

$$\Delta y_0 = \frac{\Sigma g_i \Delta y_i}{\Sigma g_i}, \quad \Delta x_0 = \frac{\Sigma g_i \Delta x_i}{\Sigma g_i}, \tag{19}$$

worin g_i proportional dem reziproken Abstand $s_{0 \cdot i}$ gesetzt wird. Diese Berechnung entspricht der Bedingung

$$\Sigma\{g_i(\Delta y_i - \Delta y_0)^2 + g_i(\Delta x_i - \Delta x_0)^2\} \text{ ein Min.} \tag{20}$$

Wie man auch die Verteilung der Verschiebungen der Anschlußpunkte auf die andern Punkte macht, so findet man in der Regel eine Schwierigkeit in dem Falle, wo Anschlußpunkte nur an einer Seite des Netzes liegen. Diese Schwierigkeit kann man umgehen, indem man eine Anzahl äußerer Punkte auch als Anschlußpunkte mit der Verschiebung null festhält, dergestalt, daß das Netz nun ringsum genügend viele Festpunkte erhält.

---

analyt. und geom. Grundlage. (Mitteilungen d. Kaiserl. und Königl. Militär.-geogr. Inst. 1902, Bd. 22, S. 41 u. f.)

*) Über den Anschluß eines sekundären Dreiecksnetzes an ein Hauptnetz. (Zeitschr. f. Vermessungswesen, Bd. XXV, 1896, Heft 10—12.)

**) Hauptdreiecke, Bd. IX, S. 337 u. f.; auch Bd. VII, S. 86, mit Bemerkungen über Erfahrungen bei Zwangsausgleichungen.

Neuntes Kapitel.

Ökonomie der Beobachtungen.

§ 1. Überblick über die verschiedenen Aufgaben.

I. Günstigste Dreiecksnetze. Bei allen Arten von Messungen hat man das Bestreben, die Genauigkeit mehr und mehr zu erhöhen. Eine Folge hiervon ist es, daß man bei vorgeschriebener Genauigkeit die Bestimmung der Größen auf die ökonomisch vorteilhafteste Weise auszuführen sucht. Dies ist „rationelle“ Vermessung. Das mir bekannte älteste Beispiel solcher Bestimmungen gab Professor Schwerd 1822 in einer Untersuchung über die Möglichkeit, eine „kleine“ Grundlinie für ein großes Dreiecksnetz zu benutzen. In dieser Untersuchung finden sich auch Betrachtungen über die günstigste Form der Basisnetze, d. h. der Dreiecksnetze, die zur Überführung der kleinen Basislänge in eine Hauptdreiecksseite dienen.*) Bemerkungen über günstigste Basisnetze gibt auch W. Struve in dem Vorwort zur „Ermittelung des Höhenunterschieds zwischen dem Schwarzen und Kaspischen Meere“**) S. IX u. f.

Im III. Abschnitt meiner „Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höhern Geodäsie“***) stelle ich eben-

*) Die kleine Speyerer Basis oder Beweis, daß man mit einem geringen Aufwand an Zeit, Mühe und Kosten durch eine kleine genau gemessene Linie die Grundlage einer großen Triangulation bestimmen kann, von Friedr. M. Schwerd, Professor der Mathematik u. Physik am k. Lyzeum zu Speyer. Speyer 1822.

**) Von Fuß, Sabler und Sawitsch (Petersburg 1849).

***) Zeitschr. für Math. u. Physik von Schlömilch, 1868. (Dissertation.)

falls Betrachtungen über die Form der Basisnetze an und finde mit früheren Autoren übereinstimmend Rhombenform am besten, wobei die kleine Diagonale die zu messende Basis, die große die abgeleitete Linie sein muß. Die Rhomben sind besonders günstig, wenn (unter gewissen Voraussetzungen) die der Basis gegenüberliegenden Winkel etwa 33^0 betragen. Diese Winkel sind es auch, die vorzugsweise zu messen sind, da ihre Genauigkeit maßgebend ist für das Ergebnis. Berücksichtigt wurde bereits bei diesen Untersuchungen, daß für die in Basisnetzen vorkommenden Dreiecke die Verteilung der Winkelmessungsarbeit auf die drei Winkel nicht gleichgültig ist.

Wenn nun ein Basisnetz mit Rücksicht auf die örtlichen Verhältnisse den allgemeinen Forderungen über die beste Form entsprechend ausgewählt ist, so wird es sich noch darum handeln, im einzelnen festzustellen, wie eine gewisse Gesamtarbeit der Winkelmessung auf die einzelnen Winkel des Netzes zu verteilen ist. Diese sehr schwierig erscheinende Aufgabe hat eine glückliche Lösung, die theoretisch und praktisch befriedigt, durch Generalleutnant Schreiber gefunden, unter der Annahme, daß der mittlere Fehler eines n-mal gemessenen Winkels nach der Theorie zufälliger Fehler gleich dem mittleren Fehler der einmaligen Messung dividiert durch $\sqrt{n}$ gesetzt werden kann. Auf diese Aufgabe gehen wir im § 2 näher ein.

Ihre Lösung gilt überhaupt für den Fall, daß es sich um die Bestimmung einer Funktion aus bedingten Beobachtungen handelt und die Messungsarbeit möglichst günstig verteilt werden soll, unter der eben erwähnten Annahme der Beziehung zwischen Anzahl der Messungen und Genauigkeit. Wenn dies nicht gilt oder der Aufwand an Zeit und Kosten nicht der Messungsarbeit proportional ist, muß eine andere Lösung gesucht werden.

Erwähnt möge hier noch werden die auf meine Anregung entstandene Studie von Dr. Paul Simon: „Gewichtsbestimmungen für Seitenverhältnisse in schematischen Dreiecksnetzen" (Veröffentlichung des Königl. Preuß. Geod. Instituts) Berlin 1889.

Vergl. auch: R. Helmert, „Studien usw." IV. Abschn.: Über die günstigste Verteilung der Hauptpunkte eines großen Dreiecksnetzes. (Das Ergebnis spricht zugunsten von Quadraten mit beiden Diagonalen.)

II. Noch andere Aufgaben. Die günstigste Bestimmung eines trigonometrischen Punktes von der Basis aus oder auf Grund eines gegebenen Netzes kann entweder so aufgefaßt werden, daß dabei für ein festgesetztes Arbeitsquantum die Fehlerellipse Kreisform erhält, weil es im allgemeinen nutzlos ist, einzelne Richtungen zu bevorzugen, oder so, daß das mittlere Fehlerquadrat M^2 der Punktlage ein Minimum wird. In § 3 wird ein einfacher Fall der letzteren Art behandelt.

In den erwähnten „Studien" wurde im II. Abschnitt gezeigt, daß bei Einschaltungen das Rückwärtseinschneiden im allgemeinen viel vorteilhafter ist, als das Vorwärtseinschneiden. Im I. Abschnitt, Art. 23, wurde auch nachgewiesen, daß bei Ermittlung eines Punktes aus bestimmenden Geraden mit Gewichten g die Fehlerellipse dann in einen Kreis übergeht und zugleich M^2 in bezug auf eine gegebene Gewichtssumme $[g]$ ein Minimum wird, wenn proportional den g angenommene Strecken unter den doppelten Neigungswinkeln der Geraden sich zu einem geschlossenen Polygon zusammenstellen lassen. Leider findet das Minimum von M^2 nicht zugleich für ein festes Arbeitsquantum statt, da die Gewichte g der Geraden nicht nur proportional der Anzahl der Beobachtungen sind, sondern auch von der Figur abhängen, während die Arbeitsmenge wesentlich proportional der Anzahl der Beobachtungen ist.

Eine neuere Arbeit von O. Eggert, die die Abbildung mit reziproken Radien benutzt, ist von diesem Mangel der Gewichte frei und erzielt einen Fortschritt in der Lösung der Probleme.*) Doch wird hierbei nur die Kreisform der Ellipse berücksichtigt.

Die Aufgabe, M^2 bei gegebener Gewichtssumme der Beobachtungen zu einem Minimum zu machen, ist ein spezieller Fall der Aufgabe, das mittlere Fehlerquadrat für mehrere Funktionen der Beobachtungen gleichzeitig möglichst zu einem Minimum zu machen. Diese Aufgabe hat H. Bruns hinsicht-

*) Über die günstigsten Punktlagen beim Einschneiden. (Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 40, 1903, S. 145.)

lich ihrer allgemeinen mathematischen Beziehungen eingehend erörtert, wobei er die Form vermittelnder Beobachtungen zugrunde legt.*)

Über eine bei absoluten Pendelmessungen vorkommende hierher gehörige Aufgabe vergl. F. R. Helmert, Beiträge zur Theorie des Reversionspendels (Veröffentlichung des Königl. Preuß. Geod. Inst., 1898) S. 48, — auch C. S. Peirce a. a. O.

Eine auf Wägungen bezügliche Aufgabe wurde im 1. Kap., § 6, S. 61/63, behandelt. Vergl. auch im 6. Kap. § 2 II, S. 464 u. f.

§ 2. Günstigste Gewichtsverteilung bei bedingten Beobachtungen für eine einzige Funktion.

I. Günstigste Bestimmung einer Funktion. Wir denken uns eine Dreieckskette. Irgend eine daraus hervorgehende Größe, etwa die Entfernung zweier Punkte, soll durch geeignete Verteilung einer Gewichtssumme auf die im Netze vorkommenden Winkel oder Richtungen möglichst genau ermittelt werden. Ist F_0 der Wert dieser Größe, der einer gerade notwendigen Anzahl Winkel l_i entspricht, sind ferner wie S. 240, § 1 IV, die $f_i = \frac{\partial F_i}{\partial l_i}$ und die ε_i die wahren Verbesserungen der Beobachtungen, so werden der wahre Wert und das mittlere Fehlerquadrat von F_0:

$$(1) \qquad F = F_0 + [f_i \varepsilon_i]; \qquad \mu^2_{F_0} = \mu^2 \left[\frac{f_i f_i}{g_i}\right].$$

Werden noch σ mehr Größen l_i, als nötig sind, angenommen, deren Anzahl nun n sei, so entstehen σ Bedingungsgleichungen, deren wir hier drei ansetzen. Sie geben, vergl. S. 240 (20), die Bedingungen:

$$(2) \qquad w_1 + [p_i \varepsilon_i] = 0; \quad w_2 + [q_i \varepsilon_i] = 0; \quad w_3 + [r_i \varepsilon_i] = 0.$$

*) H. Bruns. Über eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung. (Abhandlungen der math.-phys. Kl. der Königl. Sächs. Ges. d. W., Bd. 13, 1886.)

C. S. Peirce gibt im App. 14 des Report of the Superintendent of the U. St. C. S., 1876, Washington 1879, S. 197—201 eine „Note on the theory of the economy of research", worin einige allgemeine Relationen und ein paar Beispiele erörtert werden.

Wir multiplizieren sie mit den noch festzusetzenden Größen L_1, L_2, L_3 und ziehen die Produkte von F in (1) ab, womit sich ergibt:

(3) $$F = F_0 - [w L] + [f_i' \varepsilon_i],$$

mit

(4) $$f_i' = f_i - (p_i L_1 + q_i L_2 + r_i L_3).$$

Die Annahme $F_0 - [w L]$ als Wert der Funktion hat hiernach das mittlere Fehlerquadrat

(5) $$\mu_F{}^2 = \mu^2 \left[\frac{f_i' f_i'}{g_i}\right] = \mu^2 Q,$$

wobei Q zur Abkürzung dient.

Dieser Annahme für die Funktion gehört nach Maßgabe der L eine gewisse Auswahl unter den gemessenen Größen l_i zu, oder — wie man auch sagen kann — ein gewisser Weg, um zur Kenntnis der Funktion F zu gelangen.

Nimmt man zunächst die Gewichte g_i der l_i als feste Werte an, so ist derjenige Weg, d. h. diejenige Wahl der L, am besten, wobei Q möglichst klein wird. Dies führt zu den Gleichungen:

(6) $$\begin{cases} -\dfrac{\partial Q}{2\partial L_1} = \left[\dfrac{f_i' p_i}{g_i}\right] = 0 = \left[\dfrac{fp}{g}\right] - \left\{\left[\dfrac{pp}{g}\right] L_1 + \left[\dfrac{pq}{g}\right] L_2 + \left[\dfrac{pr}{g}\right] L_3\right\} \\ -\dfrac{\partial Q}{2\partial L_2} = \left[\dfrac{f_i' q_i}{g_i}\right] = 0 = \left[\dfrac{fq}{g}\right] - \left\{\left[\dfrac{pq}{g}\right] L_1 + \left[\dfrac{qq}{g}\right] L_2 + \left[\dfrac{qr}{g}\right] L_3\right\} \\ -\dfrac{\partial Q}{2\partial L_3} = \left[\dfrac{f_i' r_i}{g_i}\right] = 0 = \left[\dfrac{fr}{g}\right] - \left\{\left[\dfrac{pr}{g}\right] L_1 + \left[\dfrac{qr}{g}\right] L_2 + \left[\dfrac{rr}{g}\right] L_3\right\}. \end{cases}$$

Hieraus bestimmen sich die L. Sie geben dieselbe Lösung, wie die M. d. kl. Qu.; vergl. S. 241/243.

Betrachtet man nun die verschiedenen Fälle, die unter Annahme von $[g_i]$ = einer Konstanten G den geänderten Werten von g_i entsprechen, so kann man dann in jedem Falle wieder die Gleichungen (6) zur Bestimmung der L heranziehen.

Im ganzen genommen hat man also für Q in Betracht gezogen alle möglichen Fälle, die durch Variation der g und der L (d. h. der Wege) entstehen. Anstatt aber bei der Lösung der Aufgabe erst die L und dann die g zu variieren, kann man auch erst die g und dann die L variieren. Schreiber und

Bruns haben dieses letztere Verfahren eingeschlagen, **Runge** ersteres.*) Wir benutzen hier das Schreibersche Verfahren, welches die verschiedenartigen Lösungen in ihrer gegenseitigen Beziehung klar hervortreten läßt.

II. Der Schreibersche Satz. Wir nehmen jetzt in Q, vergl. (4) und (5), zunächst die L konstant an, d. h. wir setzen einen gewissen Weg zur Bestimmung von F voraus, variieren aber die Gewichte g_i der l_i. Da die Gewichte g_i nur positiv oder null sein können, setzen wir (mit **Bruns** und **Runge**) vorübergehend $g_i = \pi_i^2$ und differenzieren nun die Hilfsfunktion

$$\left[\frac{f_i' f_i'}{\pi_i^2}\right] + k([\pi_i^2] - G), \tag{7}$$

worin k eine noch unbekannte Korrelate ist, nach π_i. Es folgt

$$-\frac{f_i'^2}{\pi_i^3} + k\pi_i = 0, \tag{8}$$

und durch Multiplikation mit π_i^3 für $\pi_i^2 > 0$:

$$f_i'^2 = k g_i^2; \quad g_i = \frac{|f_i'|}{\sqrt{k}}; \quad \sqrt{k} = \frac{\Sigma |f_i'|}{G}. \tag{9}$$

In dieser Lösung ist zugleich der Fall $\pi_i^2 = g_i = 0$ mit enthalten, der nach (8) nur für $f_i' = 0$ stattfinden kann.

Das Minimum von μ_F^2 wird nun gleich

$$\mu^2 \Sigma |f_i'| \cdot \sqrt{k}, \text{ d. i. } \mu^2 \frac{(\Sigma |f_i'|)^2}{G}. \tag{10}$$

Dieses kleinste μ_F^2 entspricht zunächst dem Falle, daß bei festen Werten L die Summe $[g_i] = G$ möglichst günstig auf die einzelnen l_i verteilt wird.

Variiert man aber die L in (4), so ändern sich die f_i'. Von allen Systemen L, die möglich sind, gibt dann bei günstigster Gewichtsverteilung dasjenige den kleinsten Wert der Minimalwerte μ_F^2 aus (10), für welches

$$\Sigma |f_i'| \quad \text{ein Min.} \tag{11}$$

nach den L wird; d. h. man muß die L so wählen, daß die Summe der Absolutwerte der f_i' nach den Ausdrücken (4) ein

---

*) C. **Runge**. Der Schreibersche Satz. (Zeitschr. f. Vermessungswesen Bd. XIX, 1890, S. 21 u. f.)

Minimum wird. Damit erhält man den besten Weg mit bester Gewichtsverteilung.

Die einzelnen g_i sind nach (9):

(12) $$g_i = \frac{|f_i'|}{\Sigma |f_i'|} G.$$

In den Formeln (4), (11) und (12) ist der Schreibersche Satz über die Erzielung einer besten Gewichtsverteilung enthalten.*)

Wir gehen zur näheren Betrachtung der Aufgabe über, aus den Ausdrücken (4) das günstigste System der L zu finden, welches also die Absolutsumme der f_i' zu einem Minimum macht. Wir geben dieser Aufgabe eine allgemeinere Fassung, indem wir anstatt f_i' das Symbol v_i setzen und nun v_i als Fehler der Gleichung $f_i = p_i L_1 + q_i L_2 + r_i L_3 + \cdots$ ansehen.

III. Die Absolutsumme der Fehler v linearer Gleichungen zu einem Minimum zu machen.**) Die Gleichungen seien bei σ Unbekannten L:

(1) $$v_i = f_i - (p_i L_1 + q_i L_2 + r_i L_3 + \cdots),$$
$$i = 1 \ldots n.$$

Die L sind so zu bestimmen, daß die Summe der Absolutwerte der v_i:

(2) $$\Sigma |v_i| \text{ ein Minimum}$$

wird. Ein solches Minimum existiert sicher, da man durch Variation der L der Summe (2) zwar große positive Werte beilegen kann, aber keine negativen.

Hat man irgend ein System L angenommen und sind dann V_i die Vorzeichen der v_i, so wird

(3) $$\Sigma |v_i| = [f_i V_i] - [p_i V_i] L_1 - [q_i V_i] L_2 - \cdots,$$

wenn keines der v_i gleich null ist. Ändern sich nun die L, so kann man sich die Änderungen derselben so gering denken,

*) Generalleutnant Schreiber. Die Anordnung der Winkelbeobachtungen im Göttinger Basisnetz. (Zeitschr. f. Vermessungswesen Bd. XI, 1882, S. 135 u. f. und Bd. XVIII, 1889, S. 57 u. f.) Vergl. auch: Die Königl. Preuß. Landestriangulation. Hauptdreiecke, Bd. VIII, S. 278 u. f.

**) H. Bruns. Über eine Minimumsaufgabe. (Math. Annalen, Bd. 20, 1882, S. 455.)

daß keines der v_i sein Vorzeichen wechselt. Dann bleibt (3) bestehen, und man erkennt, daß $\Sigma|v_i|$ sowohl zunehmen, wie abnehmen kann, da man für die angegebene Einschränkung differenzieren kann:

(4) $$d\Sigma|v_i| = -[p_i V_i]dL_1 - [q_i V_i]dL_2 - \cdots.$$

Folglich gibt jetzt das in (3) angenommene System der L kein Minimum von $\Sigma|v_i|$.

Ein solches verlangt, von dem Spezialfalle, daß in (3) die Koeffizienten der L verschwinden, abgesehen, daß wenigstens eines der v_i gleich null wird. Verschwindet v_h, so gilt nun (4) für alle Indices ohne h; aus v_h kommt dann noch rechter Hand in (4) eine positive Größe hinzu:

(4*) $$+|p_h dL_1 + q_h dL_2 + \cdots|.$$

Nun ist ein Minimum möglich. Aber es genügt nicht das Verschwinden eines einzigen v_i, sondern es müssen σ derselben verschwinden. Daß wirklich für σ verschiedene Gleichungen (1) v_i verschwinden muß, sieht man daran, daß man mittels der einen Gleichung

(5) $$0 = f_h - (p_h L_1 + q_h L_2 + \cdots),$$

welche zunächst verlangt wird, aus den Gl. (1) L_1 eliminieren kann; es bleiben dann $n-1$ Gleichungen für die übrigen v_i übrig, deren Betrachtung wieder eines der v_i gleich null verlangt. Usw. Die σ Gleichungen mit $v_i = 0$ bestimmen nun die σ Größen L gerade hinreichend.

Es kann aber der Fall eintreten, daß für ein System L in (3) einer oder mehrere der Koeffizienten der L verschwinden. Dann geben endliche Änderungen ΔL dieser L keine Änderung von $\Sigma|v_i|$, d. h. es gibt dann unendlich viele Systeme L, welche denselben Wert der Absolutsumme herbeiführen. (Solche Fälle sind nur denkbar, wenn wenigstens eine der Summen $[p_i V_i]$, $[q_i V_i]$ usw. mit irgend einer Annahme über die V_i verschwindet.)

Diese Systeme sind begrenzt von Fällen, wo v_i gleich null ist. Denn verschwindet z. B. $[p_i V_i]$, so wird dies doch nur innerhalb gewisser Grenzen der L der Fall sein können; bei allmählicher Änderung der L wird etwa $v_h = 0$ werden; nun ändert sich V_h und $[p_i V_i]$ verschwindet nicht mehr. Mit

$v_h = 0$ ist man aber zu dem früheren Falle zurückgelangt, und man sieht zugleich, daß die konstante Absolutsumme die Minimalsumme ist.

Andere Fälle außer dem einen Minimalsystem von σ Gleichungen $v_h = 0$ bzw. dem einem Bereich der Minimalsysteme mit seinen Grenzfällen von erstgenannten Systemen bestehen nicht. Denken wir uns z. B. den Fall, daß nur ein System von σ Gleichungen $v_h = 0$ das Minimum $\Sigma |v_i|$ gibt, und wir variieren L_1 um ΔL_1, so ändert sich $\Sigma |v_i|$ vom Minimalwert ab nach (4) und (4*) um

$$(6) \qquad (\Sigma |p_h| \mp [p_i V_i]) \, \Delta L_1 \,, \quad \begin{matrix} - \text{ für pos. } \Delta L_1, \\ + \text{ für neg. } \Delta L_1, \end{matrix}$$
$$\text{für } v_h = 0 \quad \text{ohne } h$$

solange keines der v_i durch ΔL_1 zu null wird. Wegen des Minimums ist die runde Klammer ein positiver Wert. Wird nun durch Wachsen eines positiven ΔL_1 ein v_i gleich null, so muß zunächst $p_i V_i$ positiv sein, wie Gleichung (1) zeigt. Sowie nun v_i durch null hindurch geht, wird $p_i V_i$ negativ und der Faktor von ΔL_1 in (6) wird noch größer. Jedes weitere Verschwinden eines v_i vergrößert ihn.

Wird ferner durch Wachsen eines negativen ΔL_1 ein v_i gleich null, so muß zunächst $p_i V_i$ negativ sein; sowie nun v_i durch null geht, wird $p_i V_i$ positiv und der Faktor von ΔL_1 in (6) wird noch größer, usw.

Ähnlich ist es, wenn für L_1 ein Minimalbereich besteht. Es kann daher nicht zwei verschiedene, voneinander isolierte L_1 geben, die zu je einem Minimum gehören.

Man könnte sich nun noch denken, daß zwei verschiedene Systeme L mit Minima existieren, etwa L_1, L_2, L_3 und $L_1 + \Delta L_1$, $L_2 + \Delta L_2$, $L_3 + \Delta L_3$. Betrachtet man diese L als rechtwinklige Koordinaten zweier Punkte, so kann man das Koordinatensystem drehen, bis etwa die Achse der L_1' parallel zur Verbindungslinie $\Delta L_1'$ beider Punkte ist. Die Unterschiede ΔL_1, ΔL_2 und ΔL_3 sind gleich $\Delta L_1'$ mal gewissen echten Brüchen. Denkt man sich nun in die Gleichungen der v_i anstatt der L entsprechend der Drehung des Koordinatensystems die L' eingeführt, so sind jetzt nur noch bei L_1' zwei Werte vorhanden, die aus der Voraussetzung zweier Minimalsysteme hervorgehen. Wenn aber beide nicht demselben Bereich angehören, so ist nach dem Vorhergehenden die Existenz zweier L_1' unmöglich.

Bei mehr als drei Größen L_1, L_2, L_3 kann man die letzte Betrachtung nach der Theorie der orthogonalen Substitutionen durchführen.

Um ein System der L zu finden, welches das Minimum gibt, kann man für alle Kombinationen der n Gleichungen (1) zu σ mit $v_i = 0$, also für die $(n)_\sigma$ möglichen Fälle gerade hinreichender Bestimmung der σ Unbekannten L, diese berechnen und zusehen, welcher Fall die kleinste $\Sigma\,|v_i|$ ergibt.

H. Bruns schlägt vor, für alle L bis auf eines, etwa L_1, Werte anzunehmen und nun dasjenige L_1 zu suchen, wofür Σ am kleinsten ist. Nun nehme man diesen Wert L_1 und L_3 usw. wie vorher und berechne L_2 so, daß Σ am kleinsten wird, usw. Ist man beim letzten L angelangt, so beginnt man mit L_1 aufs neue unter Benutzung der gewonnenen Werte für die andern L. Dies setzt man fort, bis die Rechnung zum Stehen kommt, oder bis man die verschwindenden v_i errät.

Die hier betrachtete Aufgabe entspricht dem von Boscovich 1755 benutzten Ausgleichungsprinzip, aus den Gleichungen

$$v_i = -\,l_i + x + y\sin^2\varphi$$

x und y zu bestimmen. Nach der Darstellung von Laplace wird zunächst $[v_i] = 0$ gesetzt und damit x eliminiert; für die neuen Gleichungen

$$v_i = -\,l_i' + b_i' y$$

wird dann die Absolutsumme der v_i zu einem Minimum gemacht. Dies erreicht man dadurch, daß y aus allen Gleichungen für $v_i = 0$ berechnet wird.*) Nun ordnet man die Gleichungen nach der Größe von y, vom größten beginnend abwärts, und setzt dabei die Gleichungen so an, daß die Koeffizienten von y positiv sind. Summiert man nun allmählich diese Koeffizienten, bis gerade die Hälfte der Gesamtsumme überschritten wird,

*) Laplace. Méc. cél., t. II, l. III, S. 126 u. f. Hier sind auch noch zwei andere Ausgleichungsmethoden besprochen und angewandt.

so ist für die betreffende Gleichung $v = 0$ zu setzen und daraus y zu entnehmen.

Im Vergleich zur Methode der kl. Qu. hat das Prinzip, die Absolutsume der v_i zu einem Minimum zu machen, den Nachteil, daß die Lösung nur von einer zur Bestimmung der Unbekannten gerade hinreichenden Anzahl Gleichungen abhängt und die anderen lediglich zur Auswahl dienen.*) Darunter leidet die Sicherheit der Bestimmung. Auch ist der Rechnungsgang im allgemeinen beschwerlicher.

IV. Die Absolutsumme $\Sigma|f_i'|$ wird ein Minimum nach dem Vorhergehenden, in jedem Falle wenigstens für ein gerade zur Bestimmung der Funktion F ausreichendes System von Beobachtungsgrößen. Sind also überhaupt n Beobachtungsgrößen für F von Bedeutung, zwischen denen aber σ Bedingungsgleichungen bestehen, so genügen $n - \sigma$ der Beobachtungsgrößen; die andern σ Größen brauchen also nicht beobachtet zu werden. In manchen Fällen erzielt man aber für die Funktion dieselbe Genauigkeit bei gleicher Gewichtssumme der Beobachtungen, auch wenn diese Gewichtssumme auf eine mehr als notwendige Anzahl Beobachtungsgrößen verteilt wird.

Der günstigste Wert der Funktion ist stets $F_0 - [wL]$.

Verschwindet im Minimalfalle keines der g, so müssen nach (4), S. 555, die Summen $[p_i V_i]$, $[q_i V_i]$ usw. gleich null sein. D. h. aber: die L erfüllen die Bedingungsgleichungen (6), S. 552, der M. d. kl. Qu., da nach (9), S. 553, abgesehen vom Divisor $\sqrt{k}$, $V_i = f_i' : g_i$ ist.

Verschwindet ein Teil der Gewichte g für ein System L, das $\Sigma\, f_i'$ zu einem Minimum macht, ist also die Anzahl der verschwindenden g kleiner als σ, etwa nur gleich eins, $g_h = 0$, so kann man sich zunächst die Bedingungsgleichungen erneut aufgestellt denken, so daß l_h nur in der letzten Gleichung erscheint. Diese Bedingungsgleichung kommt dann bei der Ausgleichung der Beobachtungen nach der M. d. kl. Qu. überhaupt in Wegfall. Bei der Darstellung der Gleichungen (6), S. 552, käme man bei $\sigma = 3$ also nur zu den beiden ersten Gleichungen

*) C. F. Gauß. Theoria motus, Art. 186. Werke VII: Abhandlungen z. M. d. kl. Qu. S. 113.)

mit Wegfall der Glieder mit L_3, sowie mit Wegfall der Glieder mit dem Index h in allen Summen. Auch treten in den Gleichungen (4), S. 552, keine Glieder mit L_3 auf.

Behält man aber für die Bestimmung der L nach der Bedingung $\Sigma\,|f_i'|$ ein Minimum in den Gl. (4), S. 552, diese Glieder bei, so kann dies doch zu nichts Neuem führen, weil ja die L gewissermaßen nur linear transformiert sind und für alle transformierten Systeme dasselbe Minimum herauskommen muß. Also wird f_h' wieder null sein, und da f_h schon null ist, wird L_3 null. Damit kommt in den Gl. (4) wieder die Reihe der Glieder mit L_3 und ebenso f_h' in Wegfall, und man gelangt zum vorigen Falle der Erfüllung der Gl. (6) wegen $V_i = f_i' : g_i$.

Um das Minimalsystem der f_i' numerisch zu finden, kann man außer den beiden S. 557 angegebenen Methoden auch die Gleichungen (6), S. 552, benutzen. Darin setzt man zunächst die $g = 1$ und bestimmt die L, womit man aus (4), S. 552, f_i' berechnet. Diese f_i' kann man als neue Gewichte in (6) einführen und neue L berechnen, sowie aus (4) neue f_i' usw.

Man wird dann bald erkennen, welche f_i' zu null angenommen werden müssen, bzw. können. Bildet man nun mit den zugehörigen L, vermehrt um eine unbestimmte Größe δ, die f_i', so zeigt die Bildung der $\Sigma\,|f_i'|$ für positive und negative δ leicht weiteres an.

Beispiel. In einem Viereck mögen alle vier Winkel gemessen werden können; es kommt aber nur auf die Kenntnis des Winkels A an. Nach der vorstehenden Methode ist zu zeigen, daß die direkte Messung von A am besten ist.

Gibt die Summe der vier Winkel den Widerspruch w, so ist nun, entsprechend (2), S. 551:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + w = 0,$$

also $p_1, \ldots p_4 = 1$. Nehmen wir als Funktion beispielshalber nicht einfach A, sondern $360^0 - A$ oder die Summe $B + C + D$, so werden die f der Reihe nach gleich 0, + 1, + 1, + 1, und die (4), S. 552, geben:

$$f_1' = -L, \quad f_2' = 1 - L, \quad f_3' = 1 - L, \quad f_4' = 1 - L.$$

Daß die $\Sigma\,|f_i'|$ ein Minimum für $L = +1$ wird, ist zu erraten. Setzt man $L = 1 + \delta$, so folgt für positive δ immer $\Sigma = 1 + 4\delta$;

für negative δ folgt, solange $|\delta| \leqq 1$ ist, $\Sigma = 1 - 2\delta$. Ist $|\delta| > 1$, so wird $\Sigma = -1 - 4\delta$. Es folgt also in jedem Falle mehr, als für $L = +1$, welches somit in der Tat das Minimum gibt.

Die beste Gewichtsverteilung ist hiernach, wie zu erwarten war, diejenige, bei welcher die Gewichte für A, B, C, D proportional zu 1, 0, 0, 0, genommen werden.

Beispiel. Indirekte Entfernungsmessung CD von der Basis $AB = 1$ aus.*) Die Lage von D gestattet keine Winkelmessungen. Die angenäherten Werte der Richtungen mit hinzugefügten Verbesserungen (und abgesehen von Stationskonstanten) sind:

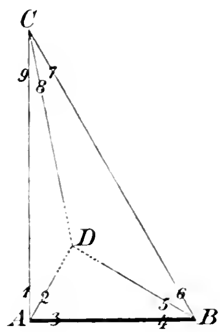
Stat. A	Stat. B
$C = 0^0 + (1)$	$A = 0^0 + (4)$
$D = 30 + (2)$	$D = 30 + (5)$
$B = 90 + (3)$	$C = 60 + (6)$

Stat. C

$B = 0^0 + (7)$

$D = 19 + (8)$

$A = 30 + (9)$.



Es ergeben sich zwei Bedingungsgleichungen:

$$0 = w_1 - (1) + (3) - (4) + (6) - (7) + (9)$$

$$0 = w_2 - 22(1) + 29(2) - 7(3) - 22(4) + 44(5) - 22(6)$$
$$- 36(7) + 102(8) - 66(9),$$

von denen die erste aus der Winkelsumme des Dreiecks ABC, die zweite aus dem Zentralsystem um D hervorgeht. (Die Verbesserungen sind in Minuten verstanden.)

Ferner ergibt sich, von AB über BD nach CD gerechnet, der Fehlerausdruck für $10^5 \log CD$, welches Produkt als Funktion auftritt:

$$[f\varepsilon] = -7(2) + 7(3) - 22(5) + 22(6) + 36(7) - 36(8).$$

Damit werden die Ausdrücke f_i'', vergl. (4), S. 552:

*) Im wesentlichen nach Generalleutnant Schreiber: Zeitschr. f. Vermessungswesen Bd. XI, 1882, S. 142/143.

$$
\begin{array}{llll}
f_1' = \quad \cdot \quad - L_1 - 22\,L_2 & & f_4' = \quad \cdot \quad - L_1 - 22\,L_2 \\
f_2' = -\,7 \quad \cdot \quad + 29\,L_2 & & f_5' = -\,22 \quad \cdot \quad + 44\,L_2 \\
f_3' = +\,7 + L_1 - \;\;7\,L_2 & & f_6' = +\,22 + L_1 - 22\,L_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
f_7' = +\,36 - L_1 - \;\;36\,L_2 \\
f_8' = -\,36 \quad \cdot \quad + 102\,L_2 \\
f_9' = \quad \cdot \quad + L_1 - \;\;66\,L_2 .
\end{array}
$$

Die Summe der f_i' ist, wie man sieht, gleich null.

Daß die Visur von C nach D für die Entfernungsbestimmung CD wenig günstig ist, zeigt die Figur. Vermutlich muß also $f_8' = 0$ gesetzt werden.

Die Gleichungen (6), S. 552, geben mit $g = 1$:

$$
\begin{array}{lll}
6\,L_1 - \quad 15\,L_2 = \quad 7 & \qquad & L_1 = +\,2 \\
-\,15\,L_1 + 20\,334\,L_2 = 6672 & \qquad & L_2 = +\,0{,}330;
\end{array}
$$

damit werden die f_i':

$$- 9{,}3 + 2{,}6 + 6{,}7 - 9{,}3 - 7{,}5 + 16{,}7 + 22{,}1 - 2{,}3 - 19{,}8 .$$

Hiernach wurden als vorläufige Gewichte abgerundet genommen:

$$9 \quad 3 \quad 7 \quad 9 \quad 8 \quad 17 \quad 22 \quad 2 \quad 20 .$$

Die Gleichungen für die L werden mit denselben:

$$
\begin{array}{lll}
0{,}5\,L_1 + \quad 0{,}8\,L_2 = - \quad 0{,}7 & \qquad & L_1 = -\,2 \\
0{,}8\,L_1 + 6144\,L_2 = +\,2119 & \qquad & L_2 = +\,0{,}345 .
\end{array}
$$

Da f_8' mit diesem L_2 nahezu verschwindet, so nehmen wir jetzt genau $f_8' = 0$ und $L_2 = 36 : 102 = 0{,}353$, womit die f_i' werden:

$$- 5{,}8 + 3{,}3 + 2{,}5 - 5{,}8 - 6{,}4 + 12{,}2 + 25{,}3 \quad 0 \quad - 25{,}3 .$$

Die Gewichte sind also in erneuter Annäherung, abgerundet:

$$6 \quad 3 \quad 3 \quad 6 \quad 6 \quad 12 \quad 25 \quad 0 \quad 25 .$$

Setzt man nun in die Ausdrücke für die f_i' den Wert $L_2 = 0{,}353$ und bildet mit Weglassung der Glieder mit L_2 aus den f_i' ohne f_8' die Gleichung zur Bestimmung von L_1, so folgt:

$$0{,}83\,L_1' = -\,1{,}8 , \quad \text{wobei} \quad L_1 = L_1' - 2 = -\,4{,}2 .$$

Jetzt wird f_3' sehr klein; nimmt man null dafür, so folgt $L_1 = -\,4{,}5$.

Damit ergeben sich die folgenden endgültigen f_i'. Dieselben sind in denjenigen Fällen mit dem Vorzeichen — versehen, wo f_i' negativ herauskommt. Die Zahlen stellen dann sogleich die Gewichte vor. Bei den Angaben für die f_i' sind Änderungen von L_1 und L_2 gegen $-\,4{,}5$ bzw. $+\,0{,}353$ mit δ_1 und δ_2 berücksichtigt, um den Nachweis des Minimums führen zu können.

$$\begin{array}{llll}
-f_1' = +\ 3{,}3 + \delta_1 + 22\,\delta_2 & & -f_4' = +\ 3{,}3 + \delta_1 + 22\,\delta_2 \\
f_2' = +\ 3{,}3 \quad \cdot \quad + 29\,\delta_2 & & -f_5' = +\ 6{,}4 \quad \cdot \quad - 44\,\delta_2 \\
f_3' = \quad 0 \quad + \delta_1 - \ \ 7\,\delta_2 & & f_6' = +\ 9{,}7 + \delta_1 - 22\,\delta_2
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
f_7' &= +\ 27{,}8 - \delta_1 - \ \ 36\,\delta_2 \\
f_8' &= \quad 0 \quad \cdot \quad + 102\,\delta_2 \\
-f_9' &= +\ 27{,}8 - \delta_1 + \ \ 66\,\delta_2 .
\end{aligned}$$

Die Summe dieser Werte ist rechter Hand gleich $81{,}6 + 2\,\delta_1 + 132\,\delta_2$.

Bei positivem, nicht zu großem δ_1 und hinreichend kleinem δ_2 ist dies zugleich die Absolutsumme; man sieht, daß positive Werte von δ_1 und δ_2 dieselbe vergrößern.

Ist δ_2 negativ, so ist $|f_8'| = -102\,\delta_2$ und die Absolutsumme wird gleich $81{,}6 + 2\,\delta_1 - 72\,\delta_2$; also tritt auch Vergrößerung ein.

Ist δ_1 negativ und δ_2 angemessen klein, so ist $|f_3'| = -\delta_1 + 7\,\delta_2$; die Summe der Absolutwerte wird $81{,}6 + 146\,\delta_2$ bei positivem δ_2, $81{,}6 - 58\,\delta_2$ bei negativem δ_2. Ein Wert δ_2 vergrößert also die Absolutsumme auch hier, während Werte von δ_1 zulässig sind, solange nur keines der f_i' das Zeichen wechselt. Dies tritt aber ein bei $\delta_1 = -3{,}3$ für f_1' und f_4'.

Bei $\delta_1 = -3{,}3$ und $\delta_2 = 0$ sind die Absolutwerte der f_i':

$$0 \quad 3{,}3 \quad 3{,}3 \quad 0 \quad 6{,}4 \quad 6{,}4 \quad 31{,}1 \quad 0 \quad 31{,}1: \text{ Summe } 81{,}6.$$

Wächst δ_1 noch weiter im Negativen, so ist die Absolutsumme gleich $68{,}4 - 4\,\delta_1 + 58\,\delta_2$ für positive δ_2 und gleich $68{,}4 - 4\,\delta_1 - 146\,\delta_2$ für negative δ_2, mithin größer als $81{,}6$.

Die Gewichte sind in den beiden Grenzfällen, abgerundet:

$$\begin{array}{llllll}
g_1 = 3 & 0 & g_4 = 3 & 0 & g_7 = 28 & 31 \\
g_2 = 3 & 3 & g_5 = 6 & 6 & g_8 = \ \ 0 & 0 \\
g_3 = 0 & 3 & g_6 = 9 & 6 & g_9 = 28 & 31.
\end{array}$$

Die erste Annahme ist günstiger, weil hier die g etwas weniger ungleich sind und weil es fraglich ist, ob die zugrunde liegende Annahme, daß das mittlere Fehlerquadrat der Richtungen genau umgekehrt proportional der Einstellungszahl abnimmt, für stark anwachsende Einstellungszahlen gilt.

Generalleutnant Schreiber hat das Verfahren der günstigsten Gewichtsverteilung bei einer zu bestimmenden Funktion hauptsächlich auf Basisnetze angewandt. Beispiele hierzu siehe außer a. a. O. auch noch in Bd. IX der „Hauptdreiecke“, S. 275 u. f.

Für die Stationsmessungen genügt bei vorstehenden Betrachtungen immer die Annahme eines Satzes von Richtungen mit ungleichen Gewichten ohne Rücksicht auf etwaige Stationsbedingungsgleichungen, weil ein solcher Satz alle Fälle umfaßt, die für gerade notwendige Systeme von Bestimmungsstücken in Betracht kommen und die günstigste Gewichtsverteilung immer wenigstens durch ein solches geleistet wird.

§ 3. Günstigste Gewichtsverteilung in bezug auf den mittlern Fehler der Lage eines trigonometrischen Punktes.

1. Definition des mittleren Punktfehlers *M*. Nach S. 308 gibt die Fehlerellipse vollständig Auskunft über die Genauigkeit in der Bestimmung eines Punktes. Man kann darnach sich jeden Punkt bestimmt denken durch zwei sich rechtwinklig schneidende Gerade, die in die Ellipsenachsen fallen und deren mittlere Parallelverschiebungen durch die Halbachsen angegeben werden.

Denkt man sich aber einen Punkt durch zwei sich rechtwinklig schneidende Gerade bestimmt (die also unabhängig voneinander gegeben sind), so wird das Fehlerquadrat Δ^2 der Lage des Punktes bei Parallelverschiebungen ε_1 und ε_2 der Geraden gleich

(1) $$\Delta^2 = \varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2.$$

Der Durchschnitt M^2 aller möglichen Werte von Δ^2 ist also gleich dem Durchschnitt aller möglichen Werte von $\varepsilon_1{}^2$ und von $\varepsilon_2{}^2$, d. h. es ist

(2) $$M^2 = \mu_1{}^2 + \mu_2{}^2.$$

Nun ist aber die Summe der Quadrate der Halbachsen der Fehlerellipse, also $\mu_1{}^2 + \mu_2{}^2$, nach S. 308, (14), gleich $\mu^2(Q_{1\cdot1} + Q_{2\cdot2})$; folglich wird

(3) $$M^2 = \mu^2(Q_{1\cdot1} + Q_{2\cdot2}).$$

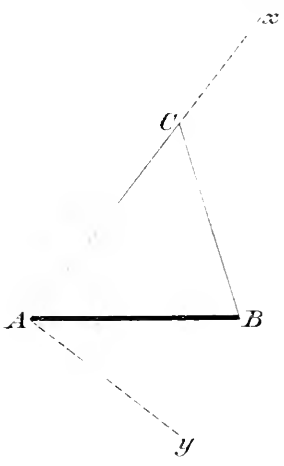
Hierbei ist μ der mittlere Fehler der Gewichtseinheit und $\mu^2 Q_{1\cdot1}$ sowie $\mu^2 Q_{2\cdot2}$ sind die mittleren Fehlerquadrate der rechtwinkligen Koordinaten des Punktes.

Auf die Lage dieses Systems kommt nichts an, denn M^2 ist offenbar ebenso wie die Fehlerellipse, von der M^2 abhängt, eine Invariante des Punktes.

Die Q sind nach den Regeln von § 6, S. 294, zu bestimmen, vergl. auch S. 300, IV.

Untersucht man das mittere Fehlerquadrat in der Entfernung des Punktes von anderen unabhängig davon bestimmten, so sieht man, daß der Anteil, welchen M^2 gibt, im Durchschnitt für alle Punkte in beliebigen Azimuten ringsum nur $\frac{1}{2}M^2$ ist. („Studien über rationelle Vermessungen“, S. 25, Abschn. 24.)

II. Die günstigste Gewichtsverteilung bei zwei Funktionen der Winkelbeobachtungen erfordert in der Regel eine Ausgleichung. Man denke sich zunächst einen trigonometrischen Punkt auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, dem man eine möglichst passende Lage gibt, und drücke x und y durch eine notwendige Anzahl von Winkeln aus: es brauchen nicht dieselben für beide Koordinaten zu sein. M^2 erscheint nun zusammengesetzt als Summe der mittlern Fehlerquadrate zweier Funktionen der Dreieckswinkel.



Man sieht sofort, daß im Gegensatz zu dem Falle nur einer in Betracht gezogenen Funktion im allgemeinen ein einziges notwendiges System von Winkeln nicht genügt und daß also eine Ausgleichung notwendig wird. Handelt es sich beispielsweise um die Bestimmung des Punktes C von der Basis AB aus durch ein spitzwinkliges Dreieck, und denkt man sich die x-Achse parallel AC, die y-Achse dazu senkrecht, den Koordinatenanfang etwa in A, so ist für μ_x^2 maßgebend die Bestimmung von AC von AB aus mittels der Winkel B und C; für μ_y^2 ist dagegen maßgebend Winkel A; B und C brauchen nur ganz roh bekannt zu sein.

Die beste Bestimmung von AC erfordert bei einem spitzwinkligen Dreieck gerade die Messung der Winkel B und C

mit Vernachlässigung von A; das ist das Gegenteil wie für die Bestimmung von Winkel A.

Um M^2 zu einem Minimum zu machen, muß man daher gewiß alle drei Winkel messen; es fragt sich aber, wie die Gewichtssumme G zu verteilen sein wird. In anderen Fällen wird es ähnlich sein, falls die beiden Funktionen denselben Netzteil betreffen; doch soll nicht gesagt sein, daß es keine Ausnahmen gibt.

III. Formeln. Die beiden Funktionen seien F' und F'', ihre Differentialquotienten nach l_i gleich α_i bzw. β_i, so daß für die vorläufigen Werte F_0' und F_0'' die m. Fqu. sind:

$$\mu_0'^2 = \mu^2\left[\frac{\alpha\alpha}{g}\right] \quad \text{und} \quad \mu_0''^2 = \mu^2\left[\frac{\beta\beta}{g}\right]. \tag{4}$$

Die σ Bedingungsgleichungen geben wie in § 2, S. 551:

$$w_1 + [p_i\varepsilon_i] = 0, \quad w_2 + [q_i\varepsilon_i] = 0, \quad w_3 + [r_i\varepsilon_i] = 0. \tag{5}$$

Hiermit folgen die umgewandelten Funktionen:

$$\begin{aligned} F' &= F_0' - [wL'] + [\alpha_i'\varepsilon_i] \\ F'' &= F_0'' - [wL''] + [\beta_i'\varepsilon_i], \end{aligned} \tag{6}$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_i' &= \alpha_i - (p_iL_1' + q_iL_2' + r_iL_3') \\ \beta_i' &= \beta_i - (p_iL_1'' + q_iL_2'' + r_iL_3''). \end{aligned} \tag{7}$$

Die Annahmen $F_0' - [wL']$ und $F_0'' - [wL'']$ für die beiden Funktionen geben als Summe der m. Fqu. beider Funktionen:

$$\mu_{F'}^2 + \mu_{F''}^2 = M^2 = \mu^2\left\{\left[\frac{\alpha_i'\alpha_i'}{g_i}\right] + \left[\frac{\beta_i'\beta_i'}{g_i}\right]\right\}. \tag{8}$$

Setzen wir nun eine Ausgleichung der n Beobachtungen l_i nach der M. d. kl. Qu. voraus, so ist für jede Funktion einzeln, bei festen Gewichten g_i, μ_F^2 ein Minimum, und es ergeben sich für die L' und L'' die Gleichungen, (analog (6), § 2, S. 551):

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{\alpha_i'p_i}{g_i}\right] & 0 &= \left[\frac{\beta_i'p_i}{g_i}\right] \\ 0 &= \left[\frac{\alpha_i'q_i}{g_i}\right] & 0 &= \left[\frac{\beta_i'q_i}{g_i}\right] \\ 0 &= \left[\frac{\alpha_i'r_i}{g_i}\right] & 0 &= \left[\frac{\beta_i'r_i}{g_i}\right], \end{aligned} \tag{9}$$

in welche die α_i' und β_i' aus (7) noch eingeführt zu denken sind

Soll nun M^2 ein Minimum werden bei Variation der g_i unter der Bedingung $[g_i] = G$, einer Konstanten, so ist die zu differenzierende Hilfsfunktion:

$$\left\{\left[\frac{\alpha_i' \alpha_i'}{g_i}\right] + \left[\frac{\beta_i' \beta_i'}{g_i}\right]\right\} + k([g_i] - G). \tag{10}$$

Differenziert man nach π_i, indem man wieder wie S. 553 für den Augenblick $g_i = \pi_i^2$ setzt, so zeigt sich, daß die Änderungen der α_i' und β_i' nach π_i einflußlos sind, und es bleibt einfach

$$\left(\frac{\alpha_i' \alpha_i' + \beta_i' \beta_i'}{g_i^2} - k\right) g_i = 0. \tag{11}$$

Zunächst treten allerdings bei der Differentiation von (10) noch Glieder auf, welche davon herrühren, daß sich in dem ersten Teil von (10) α_i' und β_i' mit den L ändern, nämlich:

$$\begin{aligned} &+ \left[\frac{\alpha_i' p_i}{g_i}\right] \frac{dL_1'}{d\pi_i} + \left[\frac{\beta_i' p_i}{g_i}\right] \frac{dL_1''}{d\pi_i} \\ &+ \left[\frac{\alpha_i' q_i}{g_i}\right] \frac{dL_2'}{d\pi_i} + \left[\frac{\beta_i' q_i}{g_i}\right] \frac{dL_2''}{d\pi_i} \end{aligned} \tag{12}$$

usw.

Diese Glieder kommen aber in Wegfall, da die Gleichungen (9) bestehen, so daß die Entwicklung der $dL : d\pi_i$ aus eben diesen Gleichungen, in denen aber zuvor die α_i' und β_i' mittels der Gleichungen (7) zu eliminieren wären, nicht weiter in Frage kommt.

Bezeichnet man die positive Quadratwurzel von $\alpha_i' \alpha_i' + \beta_i' \beta_i'$ mit R_i:

$$R_i = + \sqrt{\alpha_i' \alpha_i' + \beta_i' \beta_i'}, \tag{13}$$

so folgt fürs Minimum

$$\begin{aligned} &\text{entweder } g_i = R_i : \sqrt{k}, \\ &\text{oder } g_i = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Wenn aber $g_i = 0$ ist, so muß auch R_i null werden, sonst würde M^2 unendlich groß. Es genügt daher die Annahme $g_i = R_i : \sqrt{k}$. Damit folgt wegen $G = [R_i] : \sqrt{k}$ das Minimum von M^2 gleich

$$M^2 = \mu^2 \frac{[R_i]^2}{G}. \tag{15}$$

Der Vorgang zur Erzielung des Minimums besteht nun darin, daß man unter Beachtung der Beziehungen (7) und (13) je ein System der L' und L'' zu bestimmen hat, mittelst dessen sich Werte R_i ergeben, die die Gleichungen (9) befriedigen, wenn man darin g_i durch R_i ersetzt. Der Ausdruck (15) gibt aber zunächst das mittlere Fehlerquadrat M^2 allgemein für die Annahme der g_i proportional den R_i ohne Rücksicht auf die Gleichungen (9). Im Minimumsfalle sind dann die L so gewählt, daß die nach (7) und (13) berechneten R_i die $[R_i]$ möglichst klein machen. Dies hat man zu beachten, wenn die Berechnung der L aus den Gleichungen (9) zu keinen befriedigenden Werten R_i führt (vergl. das Beispiel). Zum Schluß sind die g_i aus den R_i nach der Formel

$$g_i = G\,\frac{R_i}{[R_i]} \tag{16}$$

herzuleiten.

H. Bruns hat gezeigt, daß es im allgemeinen nur eine Lösung gibt, unter Umständen aber auch unendlich viele. Relative Minima gibt es nicht. Vergl. seine Abhandlung von 1886, Abschn. 4, S. 533 u. 536, und Abschn. 7, S. 554/555.

Die wirkliche Auflösung ist in der Regel weit schwieriger als bei der Aufgabe des § 2, weil dort der Bereich der Minimalfälle durch verschwindende R_i (dort f_i' genannt) bezeichnet wird, während es jetzt an diesem Fingerzeig fehlt.

Man kann versuchen, die einzige Minimalstelle (oder eine des Bereichs der unendlich vielen) dadurch zu finden, daß man die α_i' und β_i' zunächst unter Annahme von $g_i = 1$ (oder einer andern plausiblen Annahme) aus den Gleichungen (7) und (9) herleitet, also die L' und L'' so bestimmt, daß (im Falle $g_i = 1$):

$$\begin{aligned}
&[pp]L_1' + [pq]L_2' + [pr]L_3' = [\alpha p]\\
&[pq]L_1' + [qq]L_2' + [qr]L_3' = [\alpha q]\\
&[pr]L_1' + [qr]L_2' + [rr]L_3' = [\alpha r]
\end{aligned} \tag{17}$$

und entsprechend für die L'', wobei rechts α mit β zu vertauschen ist.

Hiermit finden sich die L' und L'', daraus die α_i' und β_i' nach (7) und weiter die R_i aus (13). Jetzt macht man eine neue Berechnung der L' und L'' mittels der Gleichungen (17), in denen aber noch jedes Summenglied mit dem zugehörigen R_i zu dividieren ist. Usw.

Dies muß man fortsetzen, bis man zu stehenden Werten von R_i gelangt, d. h. also bis gleichzeitig die nachfolgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$(17^*)\qquad \begin{aligned}\left[\frac{pp}{R}\right]L_1' + \left[\frac{pq}{R}\right]L_2' + \left[\frac{pr}{R}\right]L_3' &= \left[\frac{\alpha p}{R}\right]\\ \left[\frac{pq}{R}\right]L_1' + \left[\frac{qq}{R}\right]L_2' + \left[\frac{qr}{R}\right]L_3' &= \left[\frac{\alpha q}{R}\right]\\ \left[\frac{pr}{R}\right]L_1' + \left[\frac{qr}{R}\right]L_2' + \left[\frac{rr}{R}\right]L_3' &= \left[\frac{\alpha r}{R}\right]\end{aligned}$$

und entsprechend für die L'' mit β_i anstatt α_i; dabei ist nach (7) und (13):

$$(7)\qquad \begin{aligned}\alpha_i' &= \alpha_i - (p_i L_1' + q_i L_2' + r_i L_3')\\ \beta_i' &= \beta_i - (p_i L_1'' + q_i L_2'' + r_i L_3'')\end{aligned}$$

sowie

$$(13)\qquad R_i = +\sqrt{\alpha_i'\alpha_i' + \beta_i'\beta_i'}.$$

Beispiel. Bestimmung eines Punktes C durch ein Dreieck von der Basis $AB = c$ aus, vergl. S. 564.

Wir setzen

$$(1)\qquad F' = b = c\,\frac{\sin B}{\sin C}, \qquad F'' = bA.$$

Die kleinen Änderungen dieser Funktionen wirken am Punkt C, wenn AB eine feste Linie ist, wie die Änderungen rechtwinkliger Koordinaten, gestatten also die Ableitung von M^2.

Nun ist, wenn $A = l_1$, $B = l_2$, $C = l_3$ die drei Beobachtungswerte sind:

$$(2)\qquad \begin{aligned}&\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = b\cot B, \quad \alpha_3 = -\,b\cot C;\\ &\beta_1 = b, \quad \beta_2 = 0, \quad\quad\quad \beta_3 = 0.\end{aligned}$$

Aus der Bedingungsgleichung $A + B + C = 180^0$ folgt:

$$(3)\qquad p_1 = 1, \qquad p_2 = 1, \qquad p_3 = 1.$$

Man hat daher die Ausdrücke:

$$(4)\qquad \begin{aligned}&\alpha_1' = \quad\quad\cdot\quad - L' &\quad& \beta_1' = b - L'' &\quad& p_1 = 1\\ &\alpha_2' = +\,b\cot B - L' && \beta_2' = \cdot - L'' && p_2 = 1\\ &\alpha_3' = -\,b\cot C - L' && \beta_3' = \cdot - L'' && p_3 = 1,\end{aligned}$$

wo der Index 1 an L wegbleiben konnte.

Handelt es sich nur um F' allein, d. h. nur um die Bestimmung der Seite b aus c, so liegt der Gedanke nahe, daß Winkel A nicht zu messen ist. In der Tat gibt $L' = 0$ das Minimum, wenigstens für spitzwinklige Dreiecke, da sowohl ein kleines positives wie ein kleines negatives L' die Summe $\Sigma |\alpha_i'|$ vergrößert. Die Gewichte von B und C sind also proportional zu $\cot B$ und $\cot C$ zu nehmen.

Ist aber $\cot B$ negativ, also $B > 90^0$, so ist Winkel B nicht zu messen, und es ist $L' = b \cot B$ zu setzen, womit die Gewichte von A, B und C proportional werden zu $-\cot B$, null und $\cot C + \cot B$. Nimmt man L' ein wenig anders, so wird $\Sigma |\alpha_i'|$ größer.

Ist endlich $\cot C$ negativ, also $C > 90^0$, so ist Winkel C nicht zu messen, und es ist $L' = -b \cot C$ zu setzen, womit die Gewichte von A, B und C proportional werden zu $-\cot C$, $\cot B + \cot C$ und null.

Für die Funktion F'' allein ist die direkte Messung von A am besten, wie man aus $\Sigma |\beta_i'|$ leicht erkennt, indem diese Summe für $L'' = 0$ ein Minimum wird.

Die Bedingungen des Minimums für M^2 lauten nach (9) S. 565:

$$(5)\qquad \begin{aligned} 0 &= \frac{-L'}{R_1} + \frac{b \cot B - L'}{R_2} - \frac{b \cot C + L'}{R_3} \\ 0 &= \frac{b - L''}{R_1} - \frac{L''}{R_2} - \frac{L''}{R_3}, \end{aligned}$$

oder

$$(5^*)\qquad \begin{aligned} L'\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) &= \frac{b \cot B}{R_2} - \frac{b \cot C}{R_3} \\ L''\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) &= \frac{b}{R_1}. \end{aligned}$$

Hierin ist zu setzen:

$$(6)\qquad \begin{gathered} R_1 = \sqrt{L'^2 + (b - L'')^2}, \qquad R_2 = \sqrt{(b \cot B - L')^2 + L''^2}, \\ R_3 = \sqrt{(b \cot C + L')^2 + L''^2}. \end{gathered}$$

Man kann $b = 1$ setzen, da die g den R proportional sind und es für sie nur auf Verhältniszahlen ankommt.

Die allgemeine Lösung ist nur für ein zu C gleichschenkliges Dreieck bequem.

Das in C gleichschenklige Dreieck verlangt zweifellos $g_1 = g_2$ oder $R_1 = R_2$. Wir setzen $b = 1$ und erhalten aus $R_1 = R_2$ die Beziehung:

$$L' = L'' \tan B - \cot C. \tag{7}$$

Damit wird, weil $2(1 + \tan B \cot C) = \sec^2 B$ ist:

$$\begin{aligned} R_1^{\,2} = R_2^{\,2} &= L''^{\,2} \sec^2 B - L'' \sec^2 B + \csc^2 C \\ R_3^{\,2} &= L''^{\,2} \sec^2 B. \end{aligned} \tag{8}$$

Mithin gibt die zweite Gleichung (5*):

$$L'' = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\cot B}{\sqrt{3}}\right), \quad \text{womit } L' = \frac{1}{2}\left(\cot B \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

und

$$R_1 = R_2 = \frac{\csc B}{\sqrt{3}}, \quad R_3 = \frac{\sec B}{2}\left(1 \pm \frac{\cot B}{\sqrt{3}}\right). \tag{9}$$

Die Gl. (5*) zeigen, jede für sich, daß hierin nur das untere Zeichen brauchbar ist und zwar für $B \geqq 30^0$, also $\cot B \leqq \sqrt{3}$. Bei $B < 30^0$ versagen die Gl. (5*), d. h. es gibt keine Ausgleichung, sondern das Minimum verlangt, daß einer der Winkel das Gewicht null erhält. Die g_i sind nach (16), S. 567, zu bilden.

Zunächst wird für $B > 30^0$ im Falle des Minimums:

$$M^2 = \frac{1}{4} \mu^2 (\sec B + \sqrt{3} \csc B)^2 : G; \tag{10}$$

$$g_1 = g_2 = \frac{2 \csc B}{\sqrt{3} \sec B + 3 \csc B} G.$$

$$g_3 = \frac{\sqrt{3} \sec B - \csc B}{\sqrt{3} \sec B + 3 \csc B} G.$$

Für $B < 30^0$ gelten noch die Gl. (8); um $[R_i]$ möglichst klein zu machen, ist $R_3 = 0$ und also $L'' = 0$ zu nehmen. Es wird $R_1 = R_2 = \csc C$ und

$$M^2 = 4 \mu^2 \csc^2 C : G; \tag{11}$$

$$g_1 = g_2 = \frac{1}{2} G, \quad g_3 = 0.$$

Man sieht leicht, daß für kleine von null verschiedene Werte L'' M^2 größer wird, als dieser Minimalwert (11).

Ist b von 1 verschieden, so muß der Ausdruck für M^2 noch mit b^2 multipliziert werden.

Das in B gleichschenklige rechtwinklige Dreieck gibt $\cot B = 0$ und $\cot C = 1$. Hier wird also für $b = 1$:

$$(12) \qquad R_1 = \sqrt{L'^2 + (1 - L'')^2}, \quad R_2 = \sqrt{L'^2 + L''^2}, \\ R_3 = \sqrt{(1 + L')^2 + L''^2}.$$

Um durch allmähliche Annäherung die Aufgabe zu lösen, nehmen wir entsprechend der Gleichheit der drei Winkelgewichte in den Gl. (5*) die $R = 1$ und erhalten $L' = -\frac{1}{3}$, $L'' = +\frac{1}{3}$.

Hiermit folgt aus (4) $R_1 = R_3 = 0{,}745$; $R_2 = 0{,}47$; $[R_i] = 1{,}96$.

Mit diesen Werten geben die Gl. (5*) $L' = -0{,}28$, $L'' = +0{,}28$, und es wird $R_1 = R_3 = 0{,}77$; $R_2 = 0{,}40$; $[R_i] = 1{,}94$.

Die Fortsetzung zeigt, daß immer $L' = -L''$ bleibt, aber die Annäherung ans Minimum nur langsam erfolgt. Nehmen wir $L' = -L'' = L$, so folgt

$$R_1 = R_3 = \sqrt{1 + 2L + 2L^2} \quad \text{und} \quad R_2 = \sqrt{2L^2} = L\sqrt{2},$$

womit die Gl. (5*) eine quadratische Gleichung für L ergeben mit

$$L = -\frac{1}{2}\left(1 \mp \sqrt{\frac{1}{3}}\right).$$

Das obere Zeichen gibt $L = -0{,}211$; $R_1 = R_3 = 0{,}82$; $R_2 = 0{,}30$; $[R_i] = 1{,}93$.

Das untere Zeichen widerspricht den Gl. (5*).

Das Minimum tritt demnach ein, wenn die Winkelgewichte sind:

$$(13) \qquad g_1 = g_3 = 0{,}42\,G, \quad g_2 = 0{,}16\,G,$$

wobei

$$(14) \qquad M^2 = 3{,}7\,\mu^2 : G.$$

Ist b von 1 verschieden, so ist bei M^2 noch der Faktor b^2 hinzuzufügen.

Sachregister.

(Die beigefügten Zahlen bezeichnen die Seiten.)