183 e 36

DIE

GEOMETRIE UND DIE GEOMETER

VOR EUKLIDES.

EIN HISTORISCHER VERSUCH

VON

C. A. BRETSCHNEIDER,

PROFESSOR AM GYMNASIUM ZU GOTHA, RITTER II. CLASSE DES HERZOGL. SÄCHS. ERNEST. HAUSORDENS.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1870.

VORWORT.

Schon seit einer längeren Reihe von Jahren war der Verfasser auf die grosse Unzuverlässigkeit so vieler Angaben aufmerksam geworden, welche sich in Montucla's Geschichte der Mathematik vorfinden, namentlich aber in demjenigen Theile derselben, welcher die Entwickelung der Geometrie von den frühesten Zeiten bis auf Euklides enthält. Anfänglich suchte der Verfasser in den Werken anderer, namentlich späterer, Schriftsteller sich Raths zu erholen, fand aber bald, dass letztere sämmtlich (vielleicht mit einziger Ausnahme Reimer's) sich damit begnügen, Montucla's Angaben glatt zu wiederholen und dass fast kein einziger derselben sich die Mühe genommen hat, selbständig in den Quellen zu forschen und nachzusehen, ob eine aufgestellte Behauptung richtig referirt, ja ob sie überhaupt nur wahr ist. Indem nun der Verfasser dadurch sich veranlasst sah, dies Quellenstudium ganz auf's Neue und mit möglichster Sorgfalt und Ausführlichkeit vorzunehmen, gelangte er gar bald zu der Ueberzeugung, dass über die früheste Entwickelung der Geometrie sich doch etwas Besseres und zum Theil auch Zuverlässigeres ermitteln lasse, als was Montucla darüber zu berichten vermocht hat.

Der Verfasser glaubt daher, demjenigen Theile des mathematischen Publikums, das sich für historische Erörterungen interessirt, einen wirklichen Dienst zu erweisen, wenn er demselben in der nachfolgenden Monographie das Ergebniss seiner Forschungen im Zusammenhange und in einer Form vorlegt, die den Leser in den Stand setzt, sich über Grund oder Ungrund einer aufgestellten Behauptung augenblicklich ein selbständiges Urtheil zu bilden. Zu dem Ende war es ganz nothwendig, die bis auf den heutigen Tag noch so vielbeliebte aber heillose Manier des Citirens gänzlich bei Seite zu werfen, vielmehr die Hauptbeweisstellen unmittelbar in den Text einzuflechten, und zwar im Originale, wenn auch von einer möglichst treuen Uebersetzung begleitet. Die wenigsten Mathematiker sind in der glücklichen Lage, alle die, zum Theil seltenen und theuern, Werke der Classiker, welche bei Untersuchungen solcher Art gebraucht werden, unmittelbar zur Hand zu haben; und von denen, die wirklich so glücklich situirt sind, möchten die wenigsten wieder die Zeit und Geduld besitzen, jedes angeführte Citat sofort nachzuschlagen und darauf zu prüfen, ob es richtig und sinngetreu referirt ist. Freilich verzichtet der Verfasser hiermit auf den Vortheil, dass Irrthümer, die er begangen, auf lange Zeit hin unerkannt bleiben und sich während dessen von Autor zu Autor fortpflanzen können. Der Wissenschaft aber kann aus diesem Verzichte nur Vortheil erwachsen.

Ein Paar Einzelheiten der nachfolgenden Untersuchung hat der Verfasser bereits im Osterprogramme des Gothaischen Gymnasiums vom Jahre 1869 mitgetheilt, um zu erfahren, ob seine Arbeit einigermaassen auf den Beifall der Kenner werde rechnen dürfen. Die Anerkennung, welche ihm von verschiedenen seiner Fachgenossen öffentlich wie privatim zu Theil geworden ist, ermuthigt ihn, jetzt mit dem Gesammtergebniss seiner Forschung vor die Oeffentlichkeit zu treten. Möchten sachverständige Beurtheiler finden, dass seine Arbeit wirklich geeignet sei, der Wissenschaft einigen Dienst zu leisten!

Gotha, im März 1870.

Prof. C. A. Bretschneider.

Eine Geschichte der Geometrie, welche in ausführlicher Weise die Entstehung dieser Wissenschaft und die ersten und frühesten Entdeckungen in derselben schilderte, besitzen wir bis auf den heutigen Tag nicht. Alles, was über diesen Gegenstand bekannt ist, beschränkt sich auf die kurzen Bemerkungen, welche Montucla vor länger als hundert Jahren theils in seiner Schrift über die Quadratur des Kreises[1]), theils in seiner Geschichte der Mathematik[2]) gegeben hat. So werthvoll aber auch seine Arbeit nicht nur für ihre Zeit, sondern selbst noch in unseren Tagen erscheint, (namentlich ist seine Geschichte der Mathematik das erste Werk dieser Art, welches seinen Titel mit Recht führt;) so ist doch nicht zu läugnen, dass gerade die Geschichte der ältesten geometrischen Entdeckungen von dem Verfasser sehr stiefväterlich behandelt worden ist und unbestritten die schwächste Parthie seines Werkes bildet. Die Ueberzeugung, welche sich bei den Gelehrten des vorigen Jahrhunderts fast ohne Ausnahme vorfindet, und bis tief in das gegenwärtige hinein die herrschende geblieben ist, — die Ueberzeugung, dass Alles, was das Alterthum in Kunst und Wissenschaft geleistet hat, das ausschliessliche Erzeugniss der schöpferischen Kraft des Griechischen Geistes sei, und dass bis zu dessen Entfaltung auf der gesammten alten Welt tiefe geistige Finsterniss geruht habe; — diese Ueberzeugung theilt Montucla vollständig. Die Haupt- und Vorfrage bei jeder Geschichte der Griechischen Mathematik, die Frage, „ob die Elemente der Wissenschaft „von den Griechen selbst aufgefunden oder anderswoher entnommen „worden sind", ist für Montucla kaum ein Gegenstand der Untersuchung und wird von ihm durch ein Raisonnement von wenigen Zeilen zu Gunsten der Griechen entschieden. Eben so dürftig, ja geradezu oberflächlich, ist aber auch die an diese Entscheidung sich anreihende Darstellung der Entdeckungen der ältesten Griechischen

1) Histoire des recherches sur la quadrature du cercle. Paris, 1754. — Neu herausgegeben unter Vorsetzung von Montucla's Namen, Paris, 1813. 8. — 2) Montucla: Histoire des mathématiques etc. Paris, 1758. 2 Voll. 4. Neue Auflage, fortgesetzt von de la Lande. Paris, 1799. 4 Voll. 4.

Geometer, von denen unser Verfasser nichts mehr und nichts weniger zu sagen weiss, als was auch die vor seiner Zeit erschienenen Bibliographieen, namentlich Heilbronners[1]) sogenannte „Geschichte der „gesammten Mathematik“ enthalten.

Trotz dieser Mängel seines Werkes sind die Angaben Montucla's über Inhalt und Gestalt der ältesten Griechischen Geometrie doch von allen als gültig angenommen worden, welche sich innerhalb der nächsten hundert Jahre mit der Geschichte der Geometrie befasst haben. Kästner's wunderliches Werk, seine sogenannte Geschichte der Mathematik[2]), beschränkt sich für die Zeit des Alterthums auf einzelne, ziemlich unvollständige, literärische Bemerkungen und Nachweisungen. Bossut in seiner Geschichte der Mathematik[3]) hat über die ältesten Zeiten der Geometrie offenbar gar keine eignen Studien gemacht, sondern begnügt sich, seine Vorgänger in diesem Felde der Wissenschaft auszuschreiben und auch der deutsche Uebersetzer seines Werkes liefert in den von ihm beigefügten Zusätzen nur literärische Notizen. Klügel, der in seinem mathematischen Wörterbuche mehrfach auf die Geschichte der Mathematik zu sprechen kommt, und dessen in dieses Fach einschlagende Artikel sich des Rufes einer besonderen Gründlichkeit erfreuen, verlässt sich doch hinsichtlich der frühesten Entwickelung der Geometrie gänzlich auf Montucla, und ein Gleiches ist von allen denen geschehen, welche in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts Veranlassung gefunden haben, sich mit den Anfängen der Griechischen Geometrie zu befassen. Selbst der sonst so gründliche und vielbelesene Chasles[4]) folgt in der Darstellung der Entwickelung der Geometrie von Thales bis auf Euklid blind dem Vorgange seines Landsmannes Montucla.

Es war genau hundert Jahre nach dem Erscheinen des Werkes von Montucla, als Röth den zweiten Theil seiner „Geschichte unserer abendländischen Philosophie“ herausgab, in welchem er, veranlasst durch die Darstellung der wissenschaftlichen Leistungen eines Thales und Pythagoras, auch der frühesten Entwickelung der

1) Heilbronner: Historia matheseos universae a mundo condito ad seculum p. Chr. n. XVI, etc. Lipsiae, 1742. 4. — 2) Kästner: Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis an das Ende des achtzehnten Jahrhunderts. Göttingen, 1796 ff. 4 Bände. 8. — 3) Bossut: Essai sur l'histoire générale des mathématiques. Paris, 1802. 2 Voll. 8. — 2[de] édit. Paris, 1810. — Ins Deutsche übersetzt von Reimer; Hamburg, 1804. 2 Bände. 8. (Mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet.) — 4) Chasles: Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie. Bruxelles, 1837. 4. Ins Deutsche übertragen von Sohncke unter dem Titel: Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit Bezug auf die neueren Methoden. Halle, 1839. 8. (Diese Uebersetzung wird in der Folge citirt werden).

Mathematik bei den Griechen seine Aufmerksamkeit zuwendete und den Nachweis zu liefern versuchte, dass erstens diese Wissenschaft nicht Griechischen, sondern Aegyptischen Ursprunges ist, und zweitens, dass dieselbe in einer von den Aegyptern bereits fest ausgeprägten Form nach Griechenland übertragen ward. Die Richtigkeit dieser Resultate wird von Jedem anerkannt werden müssen, der sich die Mühe nehmen will, die auf den Gegenstand sich beziehenden Stellen in den Schriften der Alten mit Aufmerksamkeit und ohne Vorurtheil zu prüfen. Hinsichtlich der Höhe aber, zu welcher die Geometrie der Aegypter bereits erwachsen war, als sie von ihnen den Griechen mitgetheilt ward, dürfte wohl keiner mit Röth übereinstimmen, der die Griechische Geometrie aus den Quellen studirt hat. So bereitwillig man des Verfassers Scharfsinn und seine ausserordentliche Belesenheit auch anerkennen mag, so wenig kann man sich bergen, dass er die eigenthümlichen Anschauungen der ältesten Griechischen Mathematiker viel zu wenig kennt, um die Leistungen derselben aus dem richtigen Gesichtspunkte beurtheilen zu können. Er betrachtet Alles, was von den Entdeckungen jener Zeit uns noch überliefert ist, von dem heutigen Standpunkte der Wissenschaft aus, was zur Folge hat, dass er die Leistungen jenes frühesten Alterthums weit überschätzt und schon den Aegyptern und ersten Griechischen Geometern Kenntnisse zuschreibt, von denen wir mit Bestimmtheit nachweisen können, dass sie erst im Laufe mehrerer Jahrhunderte der Folgezeit erworben worden sind. Das Hauptargument, auf das Röth's Behauptungen sich gründen, kommt schlüsslich darauf hinaus, dass derjenige, der einen Satz in der Mathematik entdeckt hat, um deshalb auch Entdecker aller der Folgerungen sein müsse, die sich aus jenem Satze consequenter Weise ableiten lassen. Wie grundfalsch diese Annahme ist, leuchtet Jedem ein, der sich irgend ein Mal mit der Geschichte der exacten Wissenschaften beschäftigt hat. So ist es denn freilich nicht zu verwundern, wenn Röth zuletzt dahin gelangt, dem Pythagoras und respective den gleichzeitigen Aegyptischen Mathematikern die Kenntniss der allgemeinen Auflösung der quadratischen Gleichungen und der Hauptsätze aus der Lehre von den Kegelschnitten beizulegen; des Gesammtinhaltes der Euklidischen Elemente gar nicht zu gedenken!!

Im Nachfolgenden soll nun versucht werden, auf Grund der uns aus dem Alterthum noch erhaltenen Nachrichten zu ermitteln, in welcher Weise die Geometrie bei den Aegyptern entstanden, zu welcher Ausbildung sie bei ihnen gelangt, unter welcher Gestalt sie von ihnen an die Griechen übergegangen ist, und wie die letzteren das überkommene Wissen verarbeitet und weiter geführt haben. Bei der grossen Dürftigkeit des Quellenmateriales, namentlich bei dem fast gänzlichen

Mangel vollständiger geometrischer Schriften aus der Zeit vor Euklides, versteht es sich von selbst, dass von einer eigentlichen Geschichte der Geometrie für diese erste Zeit ihrer Entwickelung nicht die Rede sein kann. Die Darstellung wird sich vielmehr an die Persönlichkeit der ältesten Griechischen Geometer und die speciellen Leistungen der Letzteren zu halten haben, und es als ein glückliches Ereigniss hinnehmen müssen, wenn einzelne hie und da licht hervortretende Punkte uns gestatten werden, einen Blick auf den gesammten geometrischen Vorstellungskreis jener Zeiten zu werfen. Die Extravaganzen der Röth'schen Anschauungen werden dabei stillschweigend ihre Erledigung finden, ohne dass es nöthig wäre, speciell eine Widerlegung derselben zu unternehmen.

Erster Abschnitt.

Die Geometrie der Aegypter.

§ 1. Geometrische Vorstellungen von einfachem Gehalte, wie z. B. die der geraden und krummen Linien und Flächen, ja selbst die der einfachsten Figuren und Körper, entwickeln sich durch die Eindrücke der Sinnenwelt auf das menschliche Bewusstsein mit solch' einer innern Nothwendigkeit, dass die Frage nach Zeit und Ort ihrer Entstehung verständiger Weise ebenso wenig gestellt werden kann, als die nach Entstehung der Zahlbegriffe. Der Wilde besitzt diese Vorstellungen nicht weniger unmittelbar wie der civilisirte Mensch, und selbst der Grad der Klarheit, mit welcher dieselben im Bewusstsein enthalten sind, dürfte sich bei dem Gebildeten und Ungebildeten nicht wesentlich unterscheiden. Eine Art natürlicher Mathematik, beschränkt auf die einfachsten Manipulationen des Zählens, Messens und Construirens, findet sich daher allenthalben, wo Menschen in irgend einer, wenn auch noch so lockeren, gesellschaftlichen Verbindung mit einander leben und verkehren. — Soll aber bei einem Volke aus diesen Elementen des mathematischen Vorstellens eine *Wissenschaft* sich entwickeln, so muss die Cultur desselben schon eine nicht unbedeutende Höhe erstiegen haben und in den Anforderungen der allgemeinen gesellschaftlichen Bedürfnisse, der Gewerbe, Künste, des Verkehrs u. s. w. bereits eine dringende Veranlassung darbieten, sich mit der Sichtung und geistigen Durcharbeitung dieses Denkstoffes zu befassen.

Es ist daher ganz naturgemäss, dass wir bei Beantwortung der Frage nach Entstehung der Geometrie auf das älteste bekannte Culturvolk, auf die *Aegypter*, zurückverwiesen werden. Sie selbst legen sich die Erfindung und erste Ausbildung nicht nur der Arithmetik, Geometrie und Astronomie bei, sondern auch deren Anwendung auf die Bedürfnisse des bürgerlichen, staatlichen und religiösen Lebens. Eine Nation, die volle viertehalb Jahrtausende hindurch in einem völlig geordneten Staatsleben verharrt hat, und in Zeiten, zu welchen selbst die ältesten Mythen der Nachbarvölker nicht mehr hinaufreichen, bereits Bauwerke wie die Pyramiden, Tempel und Reichspaläste aufführte, — eine Nation, die in jenen Zeiten Canal- und Schleussenwerke von solcher Grossartigkeit und Zweckmässigkeit anlegte, dass dieselben nach Jahrtausenden noch das Staunen und die Bewunderung der Nachkommen erregten, — eine solche Nation konnte unmöglich in theoretischer und praktischer Mathematik unerfahren sein. Und nicht etwa nur die allerersten und dürftigsten Anfänge dieser Wissenschaft haben wir bei den Aegyptern vorauszusetzen; die bedeutende Cultur des Volkes nöthigt uns vielmehr, demselben eine bereits weiter gehende Ausbildung des mathematischen Wissens zuzugestehen.

§ 2. Würden wir uns zu solchem Zugeständniss selbst dann gezwungen sehen, wenn gar keine Nachrichten über diesen Punkt uns erhalten wären, so kann dasselbe um so weniger verweigert werden, da das gesammte Alterthum darüber ganz einstimmig ist und den Aegyptern hinsichtlich der Erfindung der mathematischen Wissenschaften die Priorität neidlos zugesteht. Schon der Vater der Geschichte, **Herodotos**, der etwa um 460 v. Chr. Aegypten bereiste, urtheilt in seinem Reiseberichte (II, 109), dass die Geometrie aus Aegypten nach Griechenland gebracht worden sei. Ebenso erwähnt er gelegentlich (II, 36): *γράμματα γράφουσι καὶ λογίζονται ψήφοισι Ἕλληνες μὲν ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ φέροντες τὴν χεῖρα, Αἰγύπτιοι δὲ ἀπὸ τῶν δεξιῶν ἐπὶ τὰ ἀριστερά* — „die Griechen „schreiben und rechnen mit Rechenpfennigen, indem sie die Hand „von der linken nach der rechten Seite bewegen, die Aegypter hin„gegen thun dies von rechts nach links“; — und legt damit ein directes Zeugniss dafür ab, dass die Aegypter die Rechenkunst nicht weniger übten als die Hellenen. Viel bestimmter sind dagegen in dieser Hinsicht die Angaben späterer Schriftsteller. So berichtet bereits **Isokrates** um 393 v. Chr. (Busiris, c. 9): *καὶ τοὺς μὲν πρεσβυτέρους ἐπὶ τὰ μέγιστα τῶν πραγμάτων ἔταξαν, τοὺς δὲ νεωτέρους ἀμελήσαντας τῶν ἡδονῶν ἐπ' ἀστρολογίᾳ καὶ λογισμοῖς καὶ γεωμετρίᾳ διατρίβειν ἔπεισαν κ. τ. λ.* — „die älteren (unter den Aegyp„tischen Priestern) setzten sie über die wichtigsten Angelegenheiten, „die jüngeren dagegen überredeten sie, mit Hintansetzung des Ver„gnügens sich mit Sternkunde, Rechenkunst und Geometrie zu be„schäftigen, u. s. w.“ — Wenige Jahrzehnte später lässt **Plato** im Phädrus [1]) den **Sokrates** erzählen: *Ἤκουσα τοίνυν περὶ Ναύκρατιν τῆς Αἰγύπτου γενέσθαι τῶν ἐκεῖ παλαιῶν τινα θεῶν, οὗ καὶ τὸ ὄρνεον τὸ ἱερὸν ὃ δὲ καλοῦσιν Ἶβιν, αὐτῷ δὲ ὄνομα τῷ δαίμονι εἶναι Θεύθ. τοῦτον δὲ πρῶτον ἀριθμόν τε καὶ λογισμὸν εὑρεῖν καὶ γεωμετρίαν καὶ ἀστρονομίαν κ. τ. λ.* — „ich habe vernommen, zu „Naukratis in Aegypten sei einer der dortigen alten Götter gewesen,

1) Platonis Phaedrus ed. Ast. I pag. 246.

„dem auch der Vogel geheiligt ist, den sie Ibis nennen, während der „Gott selbst den Namen Theuth führt; dieser habe zuerst Zahlen- „lehre und Rechenkunst erfunden, und Geometrie und Astronomie „u. s. w.“ — Noch bestimmter spricht sich Aristoteles (Metaph. I, 1) aus, indem er angiebt: *Διὸ περὶ Αἴγυπτον αἱ μαθηματικαὶ πρῶτον τέχναι συνέστησαν· ἐκεῖ γὰρ ἀφείθη σχολάζειν τὸ τῶν ἱερέων ἔθνος.* — „Daher entstanden auch in Aegypten die mathematischen „Wissenschaften, denn hier war der Priesterkaste die dazu nöthige „Muse vergönnt.“

§ 3. Die directesten Belege aber für die Entstehung der Mathematik bei den Aegyptern, liefern die Schriftsteller, welche *nach* der Eroberung des Landes durch die Macedonier lebten, zu einer Zeit, in welcher der ganze Kreis der Aegyptischen Wissenschaft bereits zu einem Gemeingute der Hellenischen Welt geworden war. Diodoros, der um 70 v. Chr. Aegypten bereiste und mit der Priesterschaft des Landes verkehrte, berichtet (I c. 69): *Λέγουσι τοίνυν Αἰγύπτιοι παρ' αὐτοῖς τήν τε τῶν γραμμάτων εὕρεσιν καὶ τὴν τῶν ἄστρων παρατήρησιν· πρὸς δὲ τούτοις τά τε περὶ τὴν γεωμετρίαν θεωρήματα καὶ τῶν τεχνῶν τὰς πλείστας εὑρεθῆναι.* — „Die Aegypter behaupten, von ihnen sei die Erfindung der Buchstabenschrift und die „Beobachtung der Gestirne ausgegangen; ebenso seien von ihnen die „Theoreme der Geometrie und die meisten Wissenschaften und Künste „erfunden worden.“ — Die Hauptstelle aber über die wissenschaftlichen Leistungen der Aegypter findet sich bei Diodor lib. I, c. 81, wo es heisst:

Παιδεύουσι δὲ τοὺς υἱοὺς οἱ μὲν ἱερεῖς γράμματα διττά, τά τε ἱερὰ καλούμενα καὶ τὰ κοινοτέραν ἔχοντα τὴν μάθησιν· γεωμετρίαν δὲ καὶ τὴν ἀριθμητικὴν ἐπὶ πλεῖον ἐκπονοῦσιν. ὁ μὲν γὰρ ποταμὸς κατ' ἐνιαυτὸν ποικίλως μετασχηματίζων τὴν χώραν πολλὰς καὶ παντοίας ἀμφισβητήσεις ποιεῖ περὶ τῶν ὅρων τοῖς γειτνιῶσι· ταύτας δ' οὐ ῥᾴδιον ἀκριβῶς ἐξελέγξαι, μὴ γεωμέτρου τὴν ἀλήθειαν ἐκ τῆς ἐμπειρίας μεθοδεύσαντος. ἡ δὲ ἀριθμητικὴ πρός τε τὰς κατὰ τὸν βίον οἰκονομίας αὐτοῖς χρησιμεύει καὶ πρὸς τὰ γεωμετρίας θεωρήματα· πρὸς δὲ τούτοις οὐκ ὀλίγα συμβάλλεται καὶ τοῖς τὰ περὶ τὴν ἀστρολογίαν ἐκπονοῦσιν. ἐπιμελῶς γάρ, εἰ γάρ παρά τισιν ἄλλοις, καὶ παρ' Αἰγυπτίοις παρατηρήσεως τυγχάνουσιν αἱ τῶν ἄστρων τάξεις τε καὶ κινήσεις· καὶ τὰς περὶ ἑκά-

„Die Priester lehren ihre Söhne zweierlei Schrift, die sogenannte heilige und die, welche man gewöhnlich lernt. Mit Geometrie und Arithmetik beschäftigen sie sich eifrig. Denn indem der Fluss jährlich das Land vielfach verändert, veranlasst er viele und mannichfache Streitigkeiten über die Grenzen zwischen den Nachbarn; diese können nun nicht leicht ausgeglichen werden, wenn nicht ein Geometer den wahren Sachverhalt durch directe Messung ermittelt. Die Arithmetik dient ihnen in Haushaltungsangelegenheiten und bei den Lehrsätzen der Geometrie; auch ist sie denen von nicht geringem Vortheile, die sich mit Sternkunde beschäftigen. Denn wenn bei irgend einem Volke die Stellungen und Bewegungen der Gestirne sorgfältig beobachtet worden sind, so ist es bei στων ἀναγραφὰς ἐξ ἐτῶν ἀπίστων τῷ πλήθει φυλάττουσιν, ἐκ παλαιῶν χρόνων ἐζηλωμένης παρ' αὐτοῖς τῆς περὶ ταῦτα σπουδῆς· τάς τε τῶν πλανήτων ἀστέρων κινήσεις καὶ περιόδους καὶ στηριγμοὺς, ἔτι δὲ τὰς ἑκάστου δυνάμεις πρὸς τὰς τῶν ζῴων γενέσεις, τίνων εἰσὶν ἀγαθῶν ἢ κακῶν ἀπεργαστικαὶ, φιλοτιμώτατα παρατετηρήκασι.

den Aegyptern geschehen; sie verwahren Aufzeichnungen der einzelnen Beobachtungen seit einer unglaublich langen Reihe von Jahren, da bei ihnen seit alten Zeiten her die grösste Sorgfalt hierauf verwendet worden ist. Die Bewegungen und Umlaufszeiten und Stillstände der Planeten, auch den Einfluss eines jeden auf die Entstehung lebender Wesen und alle ihre guten und schädlichen Einwirkungen haben sie sehr sorgfältig beachtet."

Nach dieser ganz ausführlichen Angabe über die Leistungen der Aegypter in den exacten Wissenschaften erscheint es überflüssig, die Aeusserungen späterer Schriftsteller hierüber, wie z. B. des Diogenes Laertios, Jamblichos, Stobaios und Anderer, noch besonders hervorzuheben. Sie alle wiederholen einstimmig, was ihre Vorgänger behaupten, dass Arithmetik und Geometrie aus Aegypten stammen und von dort nach Griechenland verpflanzt worden seien.

§ 4. Wenn ferner die alten Berichterstatter angeben, dass es die Bedürfnisse der Praxis, namentlich der Feldmesskunst gewesen seien, welche die Anfänge der Geometrie hervorgerufen hätten, so ist dies eine Bemerkung, die so naturgemäss erscheint, und sich jedem Denkenden so unmittelbar aufdrängt, dass sie weder Zweifel erwecken, noch Verwunderung erregen kann. Die Anlage der gewaltigen Tempel, Paläste, Schleussenwerke, das Nivellement der viele Meilen weit fortlaufenden Canäle stellten an die Baumeister Anforderungen, denen letztere ohne eine gewisse Summe von Kenntnissen aus der praktischen Geometrie unmöglich genügen konnten. Besonders aber war es der Hauptstrom des Landes, der Nil, der durch das stete Arbeiten an seinen Ufern, namentlich innerhalb des Delta, eine dringende Veranlassung bot, sich mit der eigentlichen Feldmesskunst zu befassen. Schon Herodotos berichtet (II c. 109):

Κατανεῖμαι δὲ τὴν χώρην Αἰγυπτίοισι ἅπασι τοῦτον ἔλεγον τὸν βασιλέα, κλῆρον ἴσον ἑκάστῳ τετράγωνον διδόντα, καὶ ἀπὸ τούτου τὰς προςόδους ποιήσασθαι, ἐπιτάξαντα ἀποφορὴν ἐπιτελέειν κατ' ἐνιαυτόν. εἰ δέ τινος τοῦ κλήρου ὁ ποταμός τι παρέλοιτο, ἐλθὼν ἂν πρὸς αὐτὸν ἐσήμαινε τὸ γεγενημένον· ὁ δὲ ἔπεμπε τοὺς ἐπισκεψομένους καὶ ἀναμετρήσοντας, ὅσῳ ἐλάσσων ὁ χῶρος γέγονε, ὅκως τοῦ λοιποῦ κατὰ λόγον τῆς τεταγμένης ἀποφορῆς τελέοι. Δοκέει δέ μοι ἐντεῦ-

„Auch sagten sie, dass dieser König (Sesostris) das Land unter alle Aegypter so vertheilt habe, dass er jedem ein gleichgrosses Viereck gegeben und von diesem seine Einkünfte bezogen habe, indem er eine jährlich zu entrichtende Steuer auflegte. Wem aber der Fluss von seinem Theile etwas wegriss, der musste zu ihm kommen und das Geschehene anzeigen; er schickte dann die Aufseher, die auszumessen hatten, um wie viel das Landstück kleiner geworden war, damit der θεν γεωμετρίη εὑρεθεῖσα ἐς τὴν Ἑλλάδα ἐπανελθεῖν.

Inhaber von dem Uebrigen nach Verhältniss der aufgelegten Abgabe steure. Hieraus scheint mir die Geometrie entstanden zu sein, die von da nach Hellas kam."

Noch directer spricht sich hierüber Heron der Aeltere aus, der in seiner Einleitung in die Geometrie (*Heronis Alexandr. geometric. et stereometr. reliquiae ed. Hultsch pag.* 138) bemerkt:

Ἡ πρώτη γεωμετρία, καθὼς ἡμᾶς ὁ παλαιὸς διδάσκει λόγος, τὰ περὶ τὴν γεωμετρίαν καὶ διανομὰς κατησχολεῖτο, ὅθεν καὶ γεωμετρία ἐκλήθη. ἡ γὰρ τῆς μετρήσεως ἐπίνοια παρ' Αἰγυπτίοις εὑρέθη διὰ τὴν τοῦ Νείλου ἀνάβασιν· πολλὰ γὰρ χωρία φανερὰ ὄντα πρὸ τῆς ἀναβάσεως τῇ ἀναβάσει ἀφανῆ ἐποίει, πολλὰ δὲ μετὰ τὴν ἀπόβασιν φανερὰ ἐγένετο, καὶ οὐκέτι ἦν δυνατὸν ἕκαστον διακρῖναι τὰ ἴδια· ἐξ οὗ ἐπενόησαν οἱ Αἰγύπτιοι τήνδε τὴν μέτρησιν τῆς ἀπολειπομένης ὑπὸ τοῦ Νείλου γῆς· κ. τ. λ.

„Die früheste Geometrie beschäftigte sich, wie uns die alte Ueberlieferung lehrt, mit der Messung und Vertheilung der Länderei, woher sie „Feldmessung" genannt ward. Der Gedanke einer Messung nämlich ward den Aegyptern an die Hand gegeben durch die Ueberschwemmung des Nil. Denn viele Grundstücke, die vor der Flussschwelle offen dalagen, verschwanden beim Steigen des Flusses und kamen erst nach dem Sinken desselben wieder zum Vorschein, und es war nicht immer möglich, über die Identität derselben zu entscheiden. Dadurch kamen die Aegypter auf den Gedanken einer solchen Messung des vom Nil blosgelegten Landes; u. s. w."

Ganz das Gleiche enthält die bereits oben (§ 3.) angeführte Stelle des Diodoros (I, c. 81) und dieselbe Behauptung tritt in noch ausführlicherer Fassung und wo möglich noch bestimmteren Worten bei Strabon auf, der (lib. XVII. C. 787. — ed. Meinicke pag. 1098) geradezu angiebt:

ἐδέησε δὲ τῆς ἐπ' ἀκριβὲς καὶ κατὰ λεπτὸν διαιρέσεως διὰ τὰς συνεχεῖς τῶν ὅρων συγχύσεις, ἃς ὁ Νεῖλος ἀπεργάζεται κατὰ τὰς αὐξήσεις, ἀφαιρῶν καὶ προστιθεὶς καὶ ἐναλλάττων τὰ σχήματα καὶ τἆλλα σημεῖα ἀποκρύπτων, οἷς διακρίνεται τό τε ἀλλότριον καὶ τὸ ἴδιον· ἀνάγκη δὴ ἀναμετρεῖσθαι πάλιν καὶ πάλιν. ἐντεῦθεν δὲ καὶ τὴν γεωμετρίαν συστῆναί φασιν κ. τ. λ.

„es bedurfte aber einer sorgfältigen und bis auf das Genaueste gehenden Eintheilung (der Länderei) wegen der beständigen Verwischung der Grenzen, die der Nil bei seinen Ueberschwemmungen veranlasst, indem er Land wegnimmt und zusetzt und die Gestalt verändert und die anderen Zeichen unkenntlich macht, wodurch das fremde und eigene Besitzthum unterschieden wird. Man muss daher immer und immer wieder messen. Hieraus soll die Geometrie entstanden sein; u. s. w."

§ 5. Diese Zeugnisse aus dem Alterthum dürften mehr als genügen, um darzuthun, dass es die praktischen Bedürfnisse der Bewohner des Nilthales waren, welche die Geometrie mit Nothwendigkeit ins Leben gerufen haben. Wenn aber die Griechischen Berichterstatter ihren Lesern die innere Nothwendigkeit dieser Erscheinung dadurch recht anschaulich machen wollen, dass sie „die durch die jährlichen Nilschwellen angeblich bewirkte vollständige Verwischung und Verwirrung der sämmtlichen Ackergrenzen des Landes“ als den Grund angeben, der die Bewohner zu immerwährender Wiederholung der Vermessung und Festsetzung der einzelnen Feldmarken gezwungen habe, — so ist dies eine so offenbare Uebertreibung einzelner natürlicher Vorkommnisse ins Allgemeine und Ungemessene, dass es eben keines grossen Scharfsinnes bedarf, dieselbe als Fabel zu erkennen, daher denn schon Montucla (hist. d. math. Vol. I, pag. 47) diese Angabe ganz unverholen bespöttelt.

Von den Aegyptern haben die Griechen das fragliche Factum wohl auf keinen Fall erhalten; denn erstere waren nach einem mehrtausendjährigen Aufenthalte in ihrem Lande doch gewiss dahin gelangt, ihre Ackergrenzen auf solche Weise zu bezeichnen und festzulegen, dass sie durch die ruhig und stetig vorschreitenden Nilschwellen im Allgemeinen nicht beeinträchtigt werden konnten. Es scheint vielmehr, dass die besprochene Fabel bei den Griechen selbst entstanden ist, vielleicht aus der oben (§ 4.) angeführten Stelle des Herodotos sich allmälig herausgebildet hat. Letzterer spricht von dem sehr einfachen Ereigniss, dass die Strömung des Nil von den *an ihn angrenzenden* Feldstücken dann und wann etwas abriss oder an sie anschwemmte, und dass die dadurch im Grundbesitz hervorgebrachte Veränderung von Seiten der Staatsgewalt festgestellt und bei der Steuererhebung berücksichtigt ward. Diese Angabe des Altvaters der Geschichte, die sich allenthalben bestätigt findet, wo ein bedeutender Fluss Culturländer durchströmt, scheinen die späteren Schriftsteller ins Auge gefasst und das zu Grunde liegende Factum mehr und mehr ausgeschmückt und erweitert zu haben. Die Angaben des Heron, Diodoros, Strabon, die oben nach der Zeitfolge ihrer Verfasser aufgeführt worden sind, lassen ganz deutlich erkennen, wie die Verwüstungen, welche der Nil unter den Grenzmarken der Aegyptischen Ländereien anrichten soll, immer bedeutender und umfangreicher werden, je später der Autor lebt, der davon berichtet. Bei Schriftstellern, welche die Natur des Aegyptischen Landes aus eigner Anschauung nicht kannten, lag der Grund jener verkehrten Meinung jedenfalls darin, dass sie die ruhigen und in ihrem ganzen Verlaufe so regelmässigen Nilschwellen mit den urplötzlich hereinbrechenden, ganz unregelmässigen Ueberschwemmungen anderer, namentlich Europäischer, Ströme verwechselten und die gewöhnlich so verwüstenden Wirkungen der letzteren auch auf die wohlthätigen Ueberfluthungen des ersteren übertrugen. Hatte sich aber eine solche Anschauung der

Sache im literarischen Publikum jener Zeiten einmal festgesetzt, so mochten auch solche Schriftsteller zu deren Annahme sich verleiten lassen, die mit der Natur des Nilstromes besser bekannt waren und den Ungrund dieser Meinung bei sorgfältiger Untersuchung wohl hätten entdecken können.

In jedem Falle dürfte sich aber aus dem Vorstehenden ergeben, dass es völlig unbegründet erscheinen muss, wenn hie und da neuere Schriftsteller, vielleicht angeregt durch die Aeusserungen Montucla's, aus der besprochenen Uebertreibung sich zu dem Schlusse berechtigt halten, dass überhaupt die Entstehung der Geometrie bei den Aegyptern eine blosse Fabel, oder dass wenigstens diese ganze Aegyptische Geometrie keiner Beachtung werth sei.

§ 6. Wenn es sich aber darum handelt, das Wesen dieser Geometrie und ihr Verhältniss zur späteren Griechischen Wissenschaft gleiches Namens zu ermitteln, so hat man sich vor Allem daran zu erinnern, dass das Bauen, Feldmessen u. s. w. in Aegypten von erblichen Zünften, sogenannten Kasten, betrieben ward, welche, unter Oberleitung der Priester arbeitend, ihre Kunstgriffe und handwerksmässigen Abstractionen von Geschlecht zu Geschlecht sammelten und fortpflanzten, wie ja ganz Aehnliches in den grossen Bauhütten des Mittelalters gleichfalls stattfand. Dadurch konnte sich im Laufe langer Jahrhunderte eine sehr bedeutende Masse geometrischen Materiales ansammeln, das die Priester ordneten, sichteten und in eine Form brachten, in welcher es sich zu jedem praktischen Gebrauche am Besten eignete. Freilich bildete diese Masse keine Wissenschaft im strengen Sinne des Wortes; denn bei weitem nicht Alles unter diesen Regeln und Verfahrungsweisen war wohl vollständig erwiesen, sehr Vieles mochte einfach nur der sinnlichen Wahrnehmung entnommen und auf sie gegründet sein; — aber dem scheint sie ganz füglich gleichgestellt werden zu können, was wir heutzutage unter dem Namen „*Reisskunst*" verstehen. So wenig nun die letztere ein todtes Haufwerk von allerhand Constructionen bildet, die jedes Zusammenhanges unter sich entbehren, so wenig darf man dies auch von der Aegyptischen Reisskunst annehmen. Die gegenseitige Abhängigkeit verwandter Constructionen von einander, die nothwendige Stufenfolge der einfacheren unter ihnen, um sich zur Lösung zusammengesetzterer Aufgaben zu erheben, und die Gesetze, auf denen die wichtigsten der Fundamentalconstructionen beruhen, waren den Aegyptischen Priestern gewiss ganz klar geworden, so dass die mittelst ihrer Methoden erhaltenen Resultate dem Bedürfniss der Praxis vollkommen genügten. — Was aber den Aegyptern gefehlt haben mag, das sind vornehmlich zwei Dinge, ohne welche eine geometrische Wissenschaft füglich nicht existiren kann; *erstens:* der streng logische

Aufbau der gesammten Doctrin aus einer geringen Zahl von Postulaten und Axiomen, und damit die Beseitigung aller Annahmen, deren Zulässigkeit blos auf einfacher sinnlicher Wahrnehmung beruhet; *zweitens:* das Zusammenfassen einer ganzen Zahl specieller Fälle unter einen allgemeinen Gesichtspunkt und damit die Auffindung genereller Wahrheiten und Theoreme. Die Beseitigung dieser Mängel, namentlich des zweiten, ist ein Hauptverdienst, welches die Griechen um die Geometrie sich erworben, und wodurch sie die Ueberlegenheit ihres wissenschaftlichen Genius über den der Aegyptischen Priesterschaft auf glänzende Weise bewährt haben.

Diese Ansicht über das Wesen der Aegyptischen Geometrie, wonach letztere vornehmlich Reisskunst ist, scheint vor der Hand die sachgemässeste zu sein, die, welche sich den auf uns gekommenen Nachrichten über den Gegenstand am engsten anschliesst und am wenigsten das Zuhülfenehmen von Hypothesen erfordert. Die specielle Nachweisung aller hieher gehörigen Einzelheiten kann freilich vollständig nur erst dann vorgelegt werden, wenn die Leistungen der ältesten Griechischen Geometer zur Besprechung gelangen. Für jetzt ist über den fraglichen Gegenstand noch Folgendes zu bemerken.

§ 7. Dass die Aegyptischen Geometer im Construiren ganz besonders bewandert waren, ist schon im Alterthum vielfach anerkannt. Hieher gehört z. B. der von Röth angeführte Ausspruch des Demokritos (Clem. Alex. strom. I, p. 131 Sylb. p. 357 Pott.): *γραμμέων συνθέσιος μετὰ ἀποδείξιος οὐδεὶς κώ με παρήλλαξεν, οὐδ' οἱ Αἰγυπτίων καλεόμενοι Ἀρπεδονάπται* — „im Construiren von Linien „nach Maassgabe der aus den Voraussetzungen zu ziehenden Schlüsse „hat mich Keiner je übertroffen, selbst nicht die sogenannten Arpe„donapten der Aegypter.“ Noch bestimmter äussert sich Theon Smyrnaios (lib. de astron. ed. Martin p. 272): *Βαβυλώνιοι καὶ Χαλδαῖοι καὶ Αἰγύπτιοι προθύμως ἀρχάς τινας καὶ ὑποθέσεις ἀνεζήτουν, αἷς ἐφαρμόζοι τὰ φαινόμενα· δι' οὗ τὸ καὶ εὑρημένα πρόσθεν ἐπικρίνειν καὶ τὰ μέλλοντα προλήψεσθαι φέροντες, οἱ μὲν ἀριθμητικάς τινας, ὥσπερ Χαλδαῖοι, μεθόδους, οἱ δὲ καὶ γραμμικάς, ὥσπερ Αἰγύπτιοι κ. τ. λ.* — „Babylonier, Chaldäer und Aegypter suchten „eifrig nach allerhand Grundgesetzen und Hypothesen, durch welche „den Erscheinungen genügt werden könnte; zu erreichen suchten sie „dies dadurch, dass sie das früher Gefundene in Ueberlegung zogen „und über die zukünftigen Erscheinungen Vermuthungen aufstellten, wo„bei die Einen sich arithmetischer Methoden bedienten, wie die Chaldäer, „die Anderen construirender, wie die Aegypter, u. s. w.“ — Ausser diesen directen Zeugnissen über die nicht unbedeutende Ausbildung, zu welcher die Aegyptische Reisskunst gediehen sein musste, können wir noch ein indirectes gewinnen aus dem geometrischen Materiale, welches die ersten Griechischen Geometer von ihren Aegyptischen Lehrern überkommen haben. Es besteht dies, wie sich später zeigen wird, weit weniger in eigentlichen Lehrsätzen, als vielmehr in Lösungen von Aufgaben, d. h. in Constructionen, und die wenigen theoretischen Wahrheiten, denen wir bei ihnen begegnen, sind nur solche, die für die Elemente einer Reisskunst als geradezu unentbehrlich sich herausstellen. So lernte Thales die Höhe eines Gegenstandes mittelst des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks messen, Pythagoras das Vergleichen und Verwandeln der Flächenräume geradliniger Figuren und deren Addition (das *παραβάλλειν* der alten Geometer); ja selbst Oinopides, der noch um 470 einen kurzen Ausflug nach Aegypten machte, um den dortigen Priestern schnell etwas abzulernen, brachte als Gewinn seiner Bemühung die Lösung von ein Paar Constructionsaufgaben mit nach Hause.

Das alles deutet ziemlich unverkennbar darauf hin, dass die Stärke der Aegyptischen Geometrie weniger im Entwickeln theoretischer Wahrheiten, als vielmehr im Construiren bestand, wenn auch bei praktischer Anwendung der Geometrie vielfach Rechnung gebraucht werden mochte. Die ältesten Griechischen Geometer scheinen eine nicht unbedeutende Masse solcher Constructionen aus Aegypten heimgebracht zu haben. Das war nun freilich keine geometrische Wissenschaft, wohl aber der nothwendige Stoff für eine solche. Die von den Griechen begonnene Durcharbeitung des letzteren hat ihn erst in die Gestalt einer Wissenschaft übergeführt, und es mag mit dieser Umgestaltung wohl nicht allzurasch gegangen sein; denn auch für den Griechischen Geist bedurfte es jedenfalls einer geraumen Zeit, ehe es ihm gelang, sich dieses ihm noch fremden und ungewohnten Denkstoffes zu bemächtigen und ihn vollständig beherrschen zu lernen.

§ 8. Mit dieser Auffassung der Aegyptischen Geometrie als einer Reisskunst stimmt nun auch vollkommen zusammen eine zweite Eigenheit der ältesten Geometrie, welche sich auf andere Weise nicht so leicht würde erklären lassen, nämlich die ganz übermässige Zersplitterung einfacher geometrischer Wahrheiten in lauter Specialfälle, für deren jeden der Beweis abgesondert geführt werden muss. Ein ganz auffallendes Beispiel hiervon findet sich in einem Fragmente des Geminos, das uns Eutokios in der Einleitung seines Commentars zu des Apollonios Kegelschnitten erhalten hat. Es heisst daselbst (Apoll. conica, ed. Hallejus, pag. 9):

Ἀλλ' ὅπερ φησὶν ὁ Γεμῖνος ἀληθές ἐστιν, ὅτι οἱ παλαιοί, κῶνον ὁριζόμενοι τὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου περιφορὰν μενούσης μιᾶς τῶν περὶ

„Was aber Geminos berichtet, ist wahr, dass nämlich die Alten, indem sie den Kegel definirten als einen durch die Umdrehung eines rechtwinkligen τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρᾶς, εἰκότως καὶ τοὺς κώνους πάντας ὀρθοὺς ὑπελάμβανον γίνεσθαι καὶ μίαν τομὴν ἐν ἑκάστῳ, ἐν μὲν τῷ ὀρθυγωνίῳ τὴν νῦν καλουμένην Παραβολήν, ἐν δὲ τῷ ἀμβλυγωνίῳ τὴν Ὑπερβολήν, ἐν δὲ τῷ ὀξυγωνίῳ τὴν Ἔλλειψιν. καὶ ἔστι παρ' αὐτοῖς εὑρεῖν οὕτως ὀνομαζομένας τὰς τομάς. Ὥσπερ οὖν τῶν ἀρχαίων ἐπὶ ἑνὸς ἑκάστου εἴδους τριγώνου θεωρησάντων τὰς δύο ὀρθὰς, πρότερον ἐν τῷ ἰσοπλεύρῳ, καὶ πάλιν ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ, καὶ ὕστερον ἐν τῷ σκαληνῷ· οἱ μεταγενέστεροι καθολικὸν θεώρημα ἀπέδειξαν τοιοῦτον· „παντὸς τριγώνου αἱ ἐντὸς τρεῖς γωνίαι δύσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.“ οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν τοῦ κώνου τομῶν τὴν μὲν γὰρ λεγομένην ὀρθογωνίου κώνου τομὴν ἐν ὀρθογωνίῳ μόνον κώνῳ ἐθεώρουν, τεμνομένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου· τὴν δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομὴν ἐν ἀμβλυγωνίῳ γενομένην κώνῳ ἀπεδείκνυσαν· τὴν δὲ τοῦ ὀξυγωνίου ἐν ὀξυγωνίῳ ὁμοίως ἐπὶ πάντων τῶν κώνων ἄγοντες τὰ ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου· δηλοῖ δὲ καὶ αὐτὰ τὰ ἀρχαῖα ὀνόματα τῶν γραμμῶν. Ὕστερον δὲ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος καθόλου τι ἐθεώρησεν, ὅτι ἐν παντὶ κώνῳ, καὶ ὀρθῷ καὶ σκαληνῷ, πᾶσαι αἱ τομαί εἰσι, κατὰ διάφοραν τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸν κῶνον προςβολήν. Ὃν καὶ θαυμάσαντες οἱ κατ' αὐτὸν γενόμενοι διὰ τὸ θαυμάσιον τῶν ὑπ' αὐτοῦ δεδειγμένων κωνικῶν θεωρημάτων μέγαν γεωμέτρην ἐκάλουν. Ταῦτα μὲν οὖν ὁ Γεμῖνος ἐν τῷ ἕκτῳ φησὶ τῆς μαθημάτων θεωρίας.

Dreiecks um die eine seiner Katheten entstandenen, natürlich auch annahmen, dass nicht nur alle Kegel gerade seien, sondern dass auch in jedem nur *ein* Schnitt entstehe, im rechtwinkligen die jetzt sogenannte Parabel, im stumpfwinkligen die Hyperbel und im spitzwinkligen die Ellipse. Dies ist auch der Grund, weshalb wir diese Schnitte von ihnen so benannt finden. Gleichwie nun von den Alten für jede besondere Form des Dreiecks das Theorem der zwei Rechten speciell bewiesen ward, zuerst für das gleichseitige, sodann für das gleichschenklige und endlich für das ungleichseitige, während die Späteren das allgemeine Theorem bewiesen, „die drei Innenwinkel *jedes* Dreiecks sind zweien Rechten gleich,“ — so betrachteten sie auch unter den Kegelschnitten den sogenannten rechtwinkligen Kegelschnitt ausschliesslich am rechtwinkligen Kegel, indem sie die Schnittebene auf die Seitenlinie des Kegels senkrecht legten; den stumpfwinkligen Kegelschnitt wiesen sie am stumpfwinkligen Kegel, den spitzwinkligen Kegelschnitt am spitzwinkligen Kegel nach, wobei sie die Schnittebene an jedem Kegel gleichfalls senkrecht auf dessen Seitenlinie legten. Offenbar stammen davon die alten Namen der Curven her. Später aber zeigte Apollonios, der Pergaier, ganz allgemein, dass in jedem Kegel, sei er gerade oder schief, alle Schnitte enthalten sind, je nach der verschiedenen Lage der Schnittebene gegen den Kegel. Die ihn bewundernden Zeitgenossen nannten ihn, der Merkwürdigkeit der von ihm entdeckten Eigenschaften der Kegelschnitte halber, den *grossen* Geometer. Also berichtet Geminos im sechsten Buche seines Lehrgebäudes der Mathematik.

§ 9. Die Ausführlichkeit der vorstehenden Notiz gestattet einen in der That höchst lehrreichen Einblick in diejenige Art von Geometrie, welche bei den ältesten Griechen sich vorfindet und jedenfalls aus Aegypten überkommen war. Den Fundamentalsatz von der Summe der Dreieckswinkel hat nach Eudemos[1]) die Pythagoräische[2]) Schule zuerst in völliger Allgemeinheit erwiesen. Die Griechischen Geometer vor Pythagoras sind also keine anderen als Thales nebst seinen Schülern. Nun wird sich aber später ergeben, dass gerade diese sogenannte *jonische* Schule in der Geometrie nur sehr Mässiges geleistet, im Allgemeinen sich nur darauf beschränkt hat, das aus Aegypten Ueberkommene zu erhalten und weiter zu geben. Wir können daher mit Zuversicht behaupten, dass die getrennte Beweisführung für die Winkelsumme im gleichseitigen, gleichschenkligen und ungleichseitigen Dreiecke noch aus der Aegyptischen Geometrie stammt. Eine solche Zersplitterung eines einfachen Theoremes in so viel einzelne Fälle, als es specielle Figuren giebt, lässt aber deutlicher als alles Andere den Charakter einer aus der Praxis allmälig abstrahirten *Reisskunst* erkennen. Denn der letzteren Geschäft besteht ja ganz eigentlich darin, in jedem einzelnen Falle diejenigen Hülfsmittel zu verwerthen, welche durch die besondere Natur der Aufgabe an die Hand gegeben werden, deshalb aber gewöhnlich auch nur in dem betrachteten speciellen Falle zum Ziele führen. Die Griechische Geometrie hat diese Eigenthümlichkeit der Aegyptischen Wissenschaft mit letzterer zugleich überkommen und sich von solcher Schwerfälligkeit nur ganz allmälig befreit. Wenn daher Eudemos, der älteste Verfasser einer Geschichte der Geometrie, den Geometern vor Plato so häufig nachrühmt, dass sie die Theoreme ihrer Wissenschaft „verallgemeinert und intellectueller aufgefasst hätten,“ so bezieht sich dies ganz gewiss nicht allein auf die Einführung eines strengen Beweises statt der früher gebrauchten sinnlichen Anschauung, sondern wohl eben so oft auf das Zusammenziehen einer ganzen Anzahl verschiedener, aber unter sich eng verwandter Sätze in einen einzigen allgemeineren und auf die Veränderung der zugehörigen Beweisführung dahin, dass dieselbe die ganze Masse jener Specialfälle mit einem Male umfasst. Und gerade hierin beurkundet sich recht schlagend die Ueberlegenheit der Griechischen Speculation über die Aegyptische.

§ 10. Fragen wir ferner, wie weit die Aegypter in der selbständigen Ausbildung der Mathematik fortgeschritten waren, als die ersten Griechen bei ihnen als lernbegierige Schüler erschienen, so müssen

1) Proclus, comment. in Euclid. lib. I. ed. Basil. pag. 99. — Baroc. pg. 228.

2) Ich brauche stets die nach den Gesetzen der deutschen Sprache von Pythagoras abgeleitete Form: Pythagoräer, nicht die Griechische Pythagoreer. So wenig es einem Deutschen einfällt, Athenaier oder Romaner statt Athener oder Römer zu schreiben, so wenig hat es offenbar Grund, für die von Pythagoras abgeleiteten Worte die Griechische Form zu brauchen.

wir vor Allem die Leistungen der Nation in der angewandten Mathematik sorgfältig von denen in dem theoretischen Theile der Wissenschaft trennen.

Soviel dürfen wir, schon aus allgemeinen Gründen, als gewiss annehmen, dass nicht blos die Aegyptische Reisskunst, sondern überhaupt die gesammte praktische Mathematik des Volkes den Bedürfnissen seines Culturstandes vollständig genügte, dass also namentlich ausreichende Hülfsmittel vorhanden waren für Herstellung grosser Bauten, für das Feldmessen und das Nivelliren. Bestätigt wird diese Annahme auf eine höchst erfreuliche Weise durch den Inhalt eines Papyrus, welcher aus der Hinterlassenschaft des verstorbenen Mr. Rhind für das brittische Museum erworben worden ist. Nach der Angabe des Mr. Birch, der in Lepsius Zeitschrift für Aegyptische Sprache und Alterthumskunde (Jahrg. 1868, pag. 108) über denselben berichtet hat, enthält dieser Papyrus eine, wie es scheint, ziemlich ausführliche *angewandte Mathematik*, in welcher die Maassbestimmungen von Figuren und Körpern die Hauptrolle spielen. Eigentliche Lehrsätze finden sich in der ganzen Schrift nicht vor, so wenig wie irgend eine Hindeutung auf synthetische Geometrie, wie sie später bei den Griechen und Alexandrinern sich entwickelt hat. Alles ist vielmehr in die Form von Aufgaben gekleidet, die ebenfalls nicht in allgemeinen Ausdrücken, sondern gleich in bestimmten Zahlen vorgelegt sind und durch Rechnung gelöst werden. So wird z. B. verlangt, ein Rechteck auszumessen, dessen Seiten 2 und 10 Maasseinheiten halten; oder den Inhalt eines kreisförmigen Grundstückes zu finden, dessen Durchmesser 6 Einheiten beträgt. Daran schliessen sich Aufgaben aus der eigentlichen Feldmesskunst, z. B. ein rechtwinkliges Dreieck im Felde abzustecken, dessen Katheten 10 und 4 Einheiten messen; dasselbe mit einem Trapeze zu thun, dessen parallele Seiten gleich 6 und 4 Einheiten, und dessen Schenkel jeder zu 20 Einheiten gegeben sind. Aber auch die Theilung und Zerlegung der Figuren wird in einzelnen Aufgaben gelehrt, und zwar wird hierbei das Dreieck durch Gerade getheilt, die in gleichgrossen Abständen von einander parallel zur Basis gezogen werden, während andere Figuren durch Zerlegung in Parallelogramme, gleichschenklige Dreiecke und Trapeze getheilt werden. Endlich beschäftigt sich der Papyrus auch noch mit Bestimmung von Körperinhalten, vornehmlich der ganzen und der abgestumpften Pyramiden. Wie man sieht, hat man hier eine Metrik ganz ähnlicher Art vor sich, wie sie in späteren Zeiten, bei einem viel weiter vorgeschrittenem Stande des geometrischen Wissens, Heron der Aeltere verfasst hat, und wohl möchte man glauben, dass ihm ähnliche Erzeugnisse der Aegyptischen Literatur dabei zum Vorbild gedient haben, denn die Uebereinstimmung der äusseren

Form seines Werkes mit dem vorliegenden Papyrus ist eine so vollständige, dass man sie kaum dem Zufalle beilegen wird.

Ob freilich Alles, was in dieser Aegyptischen Metrik enthalten ist, als das Resultat streng richtiger theoretischer Untersuchung angesehen werden darf, bleibt einigermassen zweifelhaft. Dass die Aegypter den Flächeninhalt eines Kreises mit Genauigkeit anzugeben vermochten, oder den Rauminhalt einer Pyramide, wird wohl Niemand behaupten mögen, der da weiss, dass die Griechen erst durch Archimedes und Eudoxos die hieher gehörigen Bestimmungen erhalten haben. In diesen Punkten mag man sich mit einer aus der Erfahrung abgeleiteten Annäherung haben genügen lassen. Dagegen dürften die Ausmessung, Theilung und Zerlegung der ebenen geradlinigen Figuren auf vollkommen richtiger Theorie beruhen, so dass wir hier nicht solchen rohen und unverständigen Regeln begegnen, wie wir bei den Römischen Agrimensoren finden. Im entgegengesetzten Falle würden die Studien eines Thales bereits vollkommen hingereicht haben, die Nichtigkeit Aegyptischer Weisheit an den Tag zu bringen, und ein Pythagoras, Oinopides, Demokritos und Andere hätten schwerlich Veranlassung erhalten, sich um Aegyptische Geometrie zu kümmern und zu bemühen.

§ 11. Wie weit es aber die Aegypter in der Auffindung und Entwickelung der theoretischen Wahrheiten der Geometrie gebracht haben, darüber sind wir zum grösseren Theile doch nur auf Vermuthungen angewiesen. Aus dem Rhind'schen Papyrus scheint so viel mit Sicherheit hervorzugehen, dass die Lehre von den Winkeln und Parallellinien, die Bestimmung von Dreiecken, Parallelogrammen und Trapezen aus einzelnen ihrer Stücke, und die Flächenvergleichung und Berechnung dieser Figuren der Hauptsache nach von den Aegyptischen Geometern entwickelt und durch bündige Beweise festgestellt waren. Ebenso scheinen sie mit den elementarsten Sätzen über den Kreis bereits vertraut zu sein und selbst in der Theorie der dem Kreise eingeschriebenen regelmässigen Vielecke einige Fortschritte gemacht zu haben. In der Stereometrie dagegen möchte man ihnen nicht mehr zuschreiben, als die Kenntniss der Bedingung, unter welcher eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht und allenfalls eine beschränkte Theorie des Parallelismus der Geraden und Ebenen im Raume. Von Körperformen scheinen sie aus der Praxis die Prismen, die *vier*seitigen regulären Pyramiden, die *geraden* Kegel und Cylinder, die Kugel und die regelmässigen Körper (mit Ausschluss jedoch des Dodekaeders) erhalten zu haben. — In die Eigenschaften der Kugel sind sie, veranlasst durch das Bedürfniss der Astronomie, etwas tiefer eingedrungen; von den übrigen Körperformen dagegen mögen sie wenig mehr als die Bedingungen ihrer Existenz gekannt haben.

Gänzlich möchte ihnen abzusprechen sein die Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren. Denn von der dazu unerlässlichen Lehre von den Proportionen findet sich bis jetzt bei den Aegyptern auch nicht eine Spur vor, vielmehr sind die Griechischen Schriftsteller darüber ganz einstimmig, dass dieser Theil des mathematischen Wissens von den Babyloniern oder Chaldäern zu den Griechen gebracht worden ist. Selbstverständlich ist es, dass damit nicht geläugnet werden soll, dass die Aegypter gleichwohl von dieser Lehre praktisch Gebrauch gemacht haben. Jedem Menschen von gesunder natürlicher Anschauung wohnt die unerschütterliche Ueberzeugung inne, dass Raumgebilde, nach einerlei Gesetz aber in verschiedenem Maassstabe ausgeführt, in ihren einzelnen Theilen genau dieselben Maassverhältnisse darbieten müssen; und so werden auch die Aegypter von dieser Erkenntniss praktisch alle Augenblicke Nutzen gezogen haben, wenn sie auch nicht darauf gekommen sind, dieselbe zu einer wissenschaftlichen Theorie auszubilden.

§ 12. Die hier gezogene Summe der theoretischen Geometrie der Aegyptischen Priesterschaft bleibt freilich weit hinter dem zurück, was namentlich in neueren Zeiten von Bewunderern der alten Aegyptischen Cultur für zulässig erachtet worden ist. Hören wir die Architekten, welche die kolossalen Aegyptischen Baudenkmäler ausgemessen und aufgenommen haben, so müssten die dortigen Priester schon höchst tüchtige Geometer gewesen sein, namentlich die Theorie der regelmässigen Vielecke in bedeutendem Maasse entwickelt haben; — und wollten wir gar Röth folgen, so wäre fast Alles, was die Griechen vor Euklides geleistet haben, Aegyptisches Eigenthum. Untersuchen wir dagegen, was ein Thales, Pythagoras und Andere, die in Aegypten Studien gemacht, von dort nach Hause gebracht haben, so ist das Geometrische, selbst wenn wir alle diesen Männern zugeschriebene Entdeckungen für Aegyptisches Besitzthum erklären wollen, doch nicht sehr bedeutend und zeigt, dass die Wissenschaft noch nicht über die nothwendigsten Elementarsätze hinaus vorgeschritten war. — Vielleicht steht uns noch das Glück bevor, eine Aegyptische Urkunde aufzufinden, welche die zehn Bücher des Hierogrammateus[1]) enthält, und aus dieser schwarz auf weiss zu entnehmen, welcher Art die theoretische Geometrie der Aegypter gewesen und bis zu welcher Stufe der Entwicklung sie bei ihnen gelangt ist. So lange dies aber nicht geschieht, sind wir fort und fort genöthigt, uns mit mehr oder minder begründeten Vermuthungen zu begnügen und den Stand der Aegyptischen Geometrie rückwärts aus den Leistungen der ersten Griechischen Geometer abzuleiten, ein Verfahren,

1) Clem. Alex. strom. VI, 4. pag. 269 ed. Sylb. — p. 757 Gott.

das allerdings seine Missstände hat und die Entscheidung über gar manchen recht wesentlichen Punkt von individuellen Anschauungen abhängen lässt. Kann nun auch der Abschluss dieser ganzen Untersuchung erst dann vorgenommen werden, wenn die geometrischen Leistungen und Entdeckungen der ältesten Griechischen Mathematiker werden erörtert worden sein, so sind doch schon hier einige Umstände hervorzuheben, die es räthlich erscheinen lassen, unsere Erwartung hinsichtlich der Entwickelung der theoretischen Geometrie der Aegypter nicht allzuhoch zu spannen.

§ 13. Es ist sattsam bekannt, dass eine schon recht ausgedehnte Reisskunst doch auf einen sehr mässigen Umfang von eigentlichen Lehrsätzen gegründet werden kann, so dass eine gar nicht unbedeutende Ausbildung der ersteren keineswegs eine hohe Stufe theoretischer Erkenntniss bedingt. Um daher den Aegyptern bedeutende Fortschritte in der wissenschaftlichen Geometrie zu vindiciren, kann man wohl nur das ausserordentlich hohe Alter in Anschlag bringen, bis zu welchem hinauf dieser Zweig des Wissens von ihnen betrieben worden ist. Das Alter des oben erwähnten Rhind'schen Papyrus setzt Birch in die zwanzigste Dynaste des Manetho, also ohngefähr zwischen 1100—1000 v. Chr. Am Ende der Schrift findet sich die Notiz: „Dies Werk ward geschrieben im 23ten Jahre etc. des Königs Ra-aa-usr des Lebensspenders.“ Da aber sofort hinzugesetzt wird: „Bei der Nachforschung nach alten Schriften, angestellt in den Ta„gen des Königs ...tut, wurde vom Schreiber Aahmes diese Liste copirt,“ — so ergiebt sich, dass die in dem Papyrus enthaltene Metrik ein ungleich höheres Alter besitzen muss. Birch schliesst aus Eigenthümlichkeiten der Schriftzeichen, die im Eingange des Textes gebraucht werden, dass das alte Original in die Zeiten des Cheops und Apophis hinaufreichen, also etwa um 3400—3200 v. Chr. angefertigt sein möge. Lassen wir nun auch an dieser Zeitbestimmung gleich ein volles Jahrtausend schwinden, so würde die fragliche Urkunde immer noch in das dritte Jahrtausend vor Christo zu setzen sein, so dass von diesem Punkte aus bis auf Thales und Pythagoras fast volle zweitausend Jahre verflossen sind. In solch' einer langen Zeit, sollte man meinen, müssten die Aegypter hinlängliche Muse gefunden haben, ihre Geometrie auf einen sehr bedeutenden Grad der Ausbildung zu erheben.

Allein es ist zu erwägen, dass *alles* wissenschaftliche Studium in Aegypten ausschliesslich auf die Priesterkaste beschränkt war und durch diese geleitet ward, wodurch allein schon einem raschen und gedeihlichen Aufblühen und Entwickeln jeder theoretischen Erkenntniss ein bedeutendes Hinderniss in den Weg gelegt wurde. Denn jeder Priesterschaft erste und dringendste Sorge betrifft doch stets die religiöse Speculation und die äusserliche Gottesverehrung. Diesen beiden gegenüber erscheint jedes andere Wissen als reine Nebensache. Sodann aber traf die geometrischen Resultate, zu denen die Aegypter gelangten, das Unglück, dass sie schon in den frühesten Zeiten ihrer Entwickelung in den Kanon der heiligen Bücher aufgenommen wurden. Damit war jedem weiteren Fortschritt der Wissenschaft Halt geboten und die allmälige Verknöcherung der letzteren so gut wie unterschrieben. Gleichwie die Aegyptischen Aerzte bis in die spätesten Zeiten hinab nur nach den in den heiligen Büchern verzeichneten Regeln und Recepten curiren durften, wenn sie sich nicht der Gefahr der Todesstrafe aussetzen wollten, dafern ihnen der Patient starb (Diodor. I c. 82), so werden jedenfalls auch die Aegyptischen Feldmesser und Geometer verpflichtet gewesen sein, sich fortwährend an die in grauer Vorzeit verzeichneten Regeln und Verfahrungsweisen zu binden, um bei Streitigkeiten, welche über das Resultat ihrer Arbeiten etwa entstehen konnten, nicht straffällig zu werden. Entdeckungen, die einzelne unter ihnen in der Wissenschaft machten, hatten wohl nur in seltenen Fällen der Aufnahme in die kanonischen Bücher und damit einer allgemeineren Verbreitung sich zu erfreuen.

Somit aber wird es erklärlich, wie die Aegypter schon in den frühesten Zeiten ihrer Culturentwickelung einen gewissen Kreis elementar-geometrischer Wahrheiten hatten entdecken können und gleichwohl im Verlaufe einer langen Reihe von Jahrhunderten über diesen Anfang nicht weit hinaus gelangten, so dass es den geistig weit freieren und regsameren Griechen möglich ward, jene, ihre Lehrer in der Geometrie, binnen kaum einem halben Jahrhundert einzuholen und sie von da an weit zu überbieten.

§ 14. Es muss vor der Hand an diesen Bemerkungen über die Aegyptische Geometrie genügen. Ist aber das bisher Erörterte einigermassen begründet, so ergiebt sich daraus mit Nothwendigkeit noch eine anderweite Einwirkung jener Geometrie auf die der Griechen. Eine Masse einzelner Sätze und Verfahrungsweisen, die durch kein vollständiges wissenschaftliches Band mit einander verknüpft sind, gleichwohl aber in jedem Augenblick für die praktische Anwendung im Gedächtnisse bereit liegen sollen, kann nur dadurch festgehalten und mit Sicherheit gehandhabt werden, dass jeder einzelne Satz und jede Vorschrift möglichst speciell gefasst und in kurzen, ganz bestimmten Worten dem Gedächtniss eingeprägt wird. Und so dürfte die äussere Gestalt, in welcher wir die Geometrie bei den Griechen auftreten sehen, und die wir nach ihrem vornehmsten Muster als Euklidische Behandlungsweise zu bezeichnen pflegen, ihrem Ursprunge nach auf die Aegypter zurückzuführen sein. Dafür spricht namentlich der Umstand, dass die Einzelheiten, die uns von den geometrischen Leistungen des Thales und Pythagoras noch erhalten sind, welche beide, wenn wir so sagen wollen, in Aegypten studirt hatten, ganz dieselbe äussere Form zeigen. Je freier und ungebundener wir aber den Griechischen Geist in allen anderen Zweigen menschlicher Erkenntniss sich bewegen sehen, je willkürlicher und regelloser er nicht blos in der Philosophie, sondern auch in den Natur- und Erfahrungswissenschaften sich dem Spiele der Phantasie hinzugeben pflegt, um desto auffallender muss es erscheinen, dass er gerade in der Mathematik eine so enge, festbegrenzte, vornehmlich auf das Festhalten einer einmal erkannten Wahrheit berechnete Form sich erwählt und dieselbe bis zu förmlicher Mustergültigkeit durchgebildet hat. Man wird schwerlich fehlgreifen, wenn man die Ursache dieser Erscheinung, statt sie in einem zufälligen Belieben der ersten Griechischen Geometer zu suchen, vielmehr in der bereits fest ausgeprägten Form der Aegyptischen Reisskunst erkennt, deren äussere Art der Darstellung mit dem Inhalte zugleich an die Griechen übergegangen ist. Der oben erwähnte Papyrus scheint diese Annahme vollständig zu bestätigen, indem er eine ganze Reihe von Aufgaben durch das vorgesetzte Wort „*Frage*“ einleitet, und die Lösung mit den Worten „man setze“ oder „es folgt“ beginnen lässt.

Wohl hat auch hier der Griechische Geist in bestimmterer Fassung und Erweiterung des von den Aegyptern überkommenen Schematismus seine überlegene Kraft bewährt. Denn wenn die Aegypter bei Lösung einer Aufgabe wohl schwerlich mehr als die Construction (*κατασκευή*) und den Beweis (*ἀπόδειξις*) unterschieden haben mögen, so ward von den Griechen und zwar, wie uns ausdrücklich berichtet wird[1]), von dem Platoniker Leon der **διορισμός** hinzugefügt, d. h. die Untersuchung der Bedingungen, unter denen die Aufgabe möglich ist oder nicht, wodurch das zur Lösung eines „Problemes“ erforderliche logische Gebäude erst seinen gehörigen Abschluss erhält. Ebenso mag die bei Euklides und den späteren Griechen auftretende kunstvolle Gliederung des Beweises eines „Theoremes“ in *πρότασις*, *ἔκθεσις*, *κατασκευή*, *ἀπόδειξις*, *συμπέρασμα* wohl nimmermehr einem Aegypter in den Sinn gekommen, sondern wohl zum grössten Theile von Euklides selbst eingeführt worden sein (denn in den etwa 40 Jahr älteren Schriften des Autolykos findet sich einfach nur „Behauptung“ (*πρότασις*) und „Beweis“ (*ἀπόδειξις*) unterschieden); — immerhin wird doch den Aegyptern der Ruhm bleiben, die logische Gliederung der geometrischen Wahrheiten in Theorem und Problem und die Trennung von Construction und Beweis zuerst an-

---

1) Procl. comm. in Euclid. I. ed. Basilea pag. 19. — Baroc. pg. 38. Vergl pag. 29.

gebahnt zu haben. Beruht aber diese Annahme in Wahrheit, so haben die Aegypter schon dadurch allein sich ein hohes Verdienst um die Förderung der Geometrie erworben, ein Verdienst, das wohl mehr wiegt, als die Entdeckung einer ganzen Zahl elementarer Lehrsätze, die man ihnen etwa zusprechen könnte. Je weniger aber dies Zugeständniss an die Aegyptische Gelehrsamkeit mit den bisher herrschenden Ansichten über die Leistungen der Griechischen Wissenschaft übereinstimmt, desto nachdrücklicher ist der Dienst hervorzuheben, den Röth einer wahrheitsgetreuen Forschung dadurch geleistet hat, dass er zuerst diese Art der Abhängigkeit Griechischer Geometrie von der Aegyptischen hervorhob und auf überzeugende Weise zu begründen versuchte.

Zweiter Abschnitt.

Der Uebergang Aegyptischer Mathematik an die Griechen.

§ 15. Seitdem die neueren Forschungen über die politischen und Culturverhältnisse des alten Aegyptens einen so erfreulichen Aufschwung genommen haben, ist auch mehr und mehr der alte Irrthum geschwunden, dass Aegypten von uralten Zeiten her ein streng abgeschlossenes, allem Ausländischen feindlich gesinntes Land gewesen sei, ein Land, welches den Fremdling, den sein Unstern undorthin verschlug, wenn auch nicht ermordete, so doch wenigstens freundlich genug behandelte und ihn sobald als möglich wieder aus seinen Grenzen hinausstiess. Mag auch die Politik einzelner Herrscherdynastien, namentlich der priesterlichen, zeitweise eine solche Richtung eingeschlagen haben, so hat es doch wiederum lange Zeiträume gegeben, in denen Land und Volk mit dem Auslande in lebhaftem Verkehre standen, gleichwie wir ähnlichen Wechseln in der Geschichte des Chinesischen Reiches begegnen, dessen gesammte politische und Culturentwickelung mit der Aegyptens überhaupt viel Aehnlichkeiten darbietet.

Die Herrschaft der in Unterägypten von Osten her eingedrungenen semitischen Stämme, der sogenannten *Hyksos*, ist namentlich ein Zeitpunkt, in welchem ungestörter Verkehr zwischen Aegypten und dem westlichen Asien stattfindet und in diese, mehrere Jahrhunderte dauernde Periode scheint die langsame Ausbreitung einer ganzen Anzahl Aegyptischer Erfindungen zu gehören, welche sich auf die Bedürfnisse des täglichen Lebens, auf die unentbehrlichsten Handwerke und Gewerbe beziehen, und deren Kenntniss und Uebung wenigstens das materielle Wohlbefinden der Völker Westasiens um ein nicht Unbedeutendes gehoben hat. Wissenschaftliche Kenntnisse der Aegypter sind dagegen in jenen Tagen schwerlich zu fremden Völkern gelangt. Denn eines Theils hielten sich die Bewahrer derselben, die Priester des Landes, wie wir wissen, von den eingedrungenen Eroberern möglichst fern; andern Theils aber war wohl mit Ausnahme der Chaldäischen Priesterschaft zu Babylon, in ganz Westasien damals kein geistiger Boden vorhanden, in welchen ein gelehrtes Wissen mit Aussicht auf Erfolg hätte verpflanzt werden können. An den Griechen, die in jenen Jahrhunderten als Nation noch gar nicht existirten, sind diese Ausstrahlungen Aegyptischer Cultur selbstverständlich ganz spurlos vorübergegangen.

§ 16. Als aber um das Jahr 1700 v. Chr. die Hyksos aus Aegypten wieder vertrieben wurden und nach mehrmaligen vergeblichen Versuchen der Zurückeroberung des Landes, in einzelne kleinere Schwärme getheilt, allenthalben an den Küsten des Mittelmeeres neue Wohnplätze suchten, wurden von ihnen, wie die ältesten Griechischen Mythen von Danaos, Kekrops etc. andeuten, auch im eigentlichen Griechenland eine Reihe von Ansiedelungen gegründet, aus denen durch allmälige Verschmelzung der Fremdlinge mit den weit zahlreicheren Eingeborenen des Landes, jene ersten und ältesten Herrscherthümer hervorgingen, von denen die einheimischen Sagen berichten. Was die Ankömmlinge an Culturelementen in ihren früheren Wohnsitzen, also namentlich in Aegypten, sich angeeignet hatten, das ward auf diesem Wege zu den Griechen gebracht. Auch hier sind es praktische Fertigkeiten, Handgriffe, einfache Werkzeuge, kurz, wenn wir so sagen wollen, die ersten Elemente einer praktischen Mechanik und Mathematik, welche einer noch rohen Bevölkerung zugeführt werden und letztere dadurch allmälig zu höherer materieller Cultur emporheben. Von den später Lebenden werden diese frühesten Erwerbungen, aus Unkenntniss des Sachverhaltes, gewöhnlich auf einzelne hervorragende Namen, als deren angebliche Erfinder, zurückgeführt. So schreibt die Sage die Einführung der für die Baukunst unentbehrlichsten Werkzeuge und Manipulationen dem Daidalos und seinem Neffen Talos zu, welche als Erfinder bezeichnet werden von Axt, Setzwage, Säge, Bohrer und ähnlichem Handwerkszeug, das Plinius (hist. nat. VII, c. 56) umständlich aufzählt; — und es bedarf der klaren Einsicht, welche das letzte Jahrhundert vor Christo gewährt, um den Griechen die Ueberzeugung zu verschaffen, dass die gesammte Kunst des Daidalos aus Aegypten stammt (Diodor I, c. 98). In dieser Abhängigkeit von dem praktischen Wissen der Aegypter finden wir aber die Griechen nicht nur in den Jahrhunderten, welche der Mythe angehören, sondern ebenso noch viel später, in völlig historischen Zeiten. So ist es z. B. ziemlich sicher, dass der berühmte Baumeister des Heratempels zu Samos und des Labyrinthes zu Lemnos, Rhoikos, die hierzu erforderlichen Kenntnisse in Aegypten sich erworben hat. Ja von seinen beiden gleichberühmten Söhnen, Theodoros und Telekles, bezeugt Diodor (I. c. 98) ganz ausdrücklich: *τῶν τε ἀγαλματοποιῶν τῶν παλαιῶν τοὺς μάλιστα διωνομασμένους διατετριφέναι παρ' αὐτοῖς, Τηλεκλέα καὶ Θεόδωρον, τοὺς Ῥοίκου μὲν υἱούς, κατασκευάσαντας δὲ τοῖς Σαμίοις τὸ τοῦ Ἀπόλλωνος τοῦ Πυθίου ξύανον·* — „von den alten „Bildhauern haben die namhaftesten unter ihnen (den Aegyptern) „verweilt, Theodoros und Telekles, des Rhoikos Söhne, die „den Samiern das Schnitzbild des Pythischen Apollo verfertigt haben." Und um die vollständige Abhängigkeit der Kunst dieser beiden Männer von der Aegyptischen recht bestimmt nachzuweisen, fügt Diodoros noch eine ausführliche Angabe über die Art der Anfertigung jenes Schnitzbildes hinzu, wodurch die pünktlichste Befolgung des Verfahrens der Aegyptischen Künstler bezeugt wird.

Wenn daher Montucla (hist. d. math. Vol. I. pag. 103), auf das Zeugniss des Plinius sich stützend, den Griechen auch die eben erwähnten Erfindungen in Mechanik und praktischer Geometrie zuspricht, so konnte das in damaliger Zeit allenfalls für wahrscheinlich gehalten werden, lässt sich aber heutzutage nicht mehr aufrecht erhalten.

§ 17. Verlassen wir jedoch diesen Gegenstand, der ohnedies nur in entfernter Weise sich auf die exacten Wissenschaften bezieht, und wenden wir uns vielmehr zur Besprechung dessen, was von theoretischer Mathematik aus dem Auslande an die Griechen gekommen ist!

Hier begegnen wir zuerst dem Namen eines angeblich Phrygischen Geometers, der den Griechen die ersten Begriffe von Linien und Figuren überliefert haben soll. Es findet sich nämlich unter den vielerlei Notizen, die Diogenes Laertios über das Leben der bedeutendsten Philosophen aus allerlei Quellen, oft leichtfertig genug, zusammengeschrieben hat, in dem Leben des Thales auch folgende Stelle[1]): *Οὗτος (Θαλῆς) προήγαγεν ἐπὶ· πλεῖστον ἅ φησι Καλλίμαχος ἐν τοῖς Ἰάμβοις Εὔφορβον εὑρεῖν τὸν Φρύγα· οἷον σκαληνὰ καὶ τρίγωνα καὶ ὅσα γραμμικῆς ἔχεται θεωρίας.* — „Er (Thales) führte „das weiter aus, was, wie Kallimachos in den Jamben erwähnt, „der Phrygier Euphorbos erfunden hat, als da sind die ungleich„seitigen Dreiecke und was zur Theorie der Linien gehört." — Heilbronner (hist. math. univ. pag. 97) nimmt diese Bemerkung ganz

1) Diog. Laert. I, 1. n. 3. — Huebn. pag. 16.

unbefangen hin, als eine historische Notiz, der volle Glaubwürdigkeit zukomme, und sagt in Folge derselben: *Euphorbus Phryx ante Thaletem contemplationem de lineis fecit et triangulum scalenum invenit, id est ipsum construendi (sc. methodum) excogitavit. Hic igitur primus geometrizare coepit.* — Das ist nun von einem so kritiklosen Schriftsteller wie Heilbronner nicht weiter zu verwundern. Dass aber Montucla diesem Vorgänger hierin blind nachfolgt, ist in der That unbegreiflich. Schon die bekannte Stelle aus Ovid (metam. XV, 160: *ipse ego — nam memini — Trojani tempore belli Panthoides Euphorbus eram etc.*) hätte Montucla darauf hinweisen müssen, dass das Citat aus Kallimachos sich auf Pythagoras bezieht und nur von dem Compilator Diogenes gedankenlos auf Thales angewendet wird. — Könnte aber ein Zweifel hierüber noch obwalten, so wird derselbe durch die inzwischen bekannt gewordenen Vatikanischen Fragmente zu Diodor's Bibliothek vollständig niedergeschlagen. Unter diesen Excerpten findet sich das von Diogenes Laertios angezogene Choliambenfragment des Kallimachos noch ziemlich unverstümmelt vor. Es heisst (Diod. ed. Dindorf. Voll. II, pars 2, exc. Vatic. pag. 32) nach der Emendation von Otto Schneider[1]: *Ὅτι Καλλίμαχος εἶπε περὶ Πυθαγόρου, διότι τῶν ἐν γεωμετρίᾳ προβλημάτων τὰ μὲν εὗρε, τὰ δὲ ἐκ τῆς Αἰγύπτου πρῶτος εἰς τοὺς Ἕλληνας ἤνεγκεν, ἐν οἷς ὅτ'*

> *ἐξεῦρε Φρὺξ Εὔφορβος, ὅστις ἀνθρώποις*
> *τρίγωνά τε σκαληνὰ καὶ κύκλων ἑπτὰ*
> *μήκη δίδαξε, κἠδίδαξε νηστεύειν*
> *τῶν ἐμπνεόντων· οἱ δ' ἄρ' οὐχ ὑπήκουσαν*
> *πάντες κ. τ. λ.*

„Kallimachos sagt von Pythagoras, dieser habe die geometrischen „Probleme theils erfunden, theils zuerst aus Aegypten zu den Grie- „chen gebracht, nämlich dort, wo er spricht: der Phrygier Euphorbos „hat's entdeckt, der den Menschen ungleichseitige Dreiecke und der „sieben Kreise Ausdehnung zeigte und sie sich enthalten lehrte der „Speise von Lebendigem u. s. w.“ — Nach diesem Zeugnisse aus dem Alterthume selbst über die Persönlichkeit jenes Euphorbos kann derselbe aus der Zahl der Geometer unbedingt gestrichen werden.

§ 18. Indem wir uns nun zu den ersten Griechischen Mathematikern wenden und nachzuweisen versuchen, in wie weit sie mit Aegyptischer Geometrie bekannt geworden, und wie sie dieselbe fortgebildet haben, ist vor Allem nöthig, einen Blick auf die Quellen zu werfen, aus denen wir das Material für unsere Untersuchung schöpfen.

---

1) Philologus, Bd. VI, p. 518.

Hier zeigt sich denn sofort, dass weitaus das Meiste, was uns über die Geometrie *vor* Euklides überliefert ist, aus einer und derselben Quelle stammt, nämlich aus der Geschichte der Geometrie und Astronomie, welche den Eudemos, einen der bedeutendsten Schüler des Aristoteles, zum Verfasser hat. Da seine Blüthezeit ohngefähr zwischen 340 und 310 v. Chr. fällt, so steht er dem drittehalb hundert Jahre älteren Thales und dessen Nachfolgern noch nahe genug, um die mathematischen Productionen dieses Zeitraumes hinlänglich genau beurtheilen zu können, und es scheint gar nicht zu bezweifeln, dass er die Schriften der meisten vor ihm lebenden Geometer noch vollständig vor sich gehabt und unmittelbar aus ihnen die Notizen für seine Geschichtsdarstellung entlehnt hat. Leider ist letztere nicht auf uns gekommen, obschon sie noch bis in die spätesten Zeiten der Alexandrinischen Schule sich erhalten hatte, und von jedem, der irgend einer historischen Notiz über Geometrie oder Astronomie bedurfte, als eine nie versagende Fundgrube gebraucht ward. Eudemos hat sich, wie die aus seinen Schriften erhaltenen Fragmente klar darlegen, nicht mit einer blos räsonnirenden Aufzählung der früheren Leistungen begnügt, sondern die Hauptlehrsätze, den Gang und Umfang ihrer Beweise, die allmälige Verallgemeinerung derselben und das Zusammenfassen mehrerer von ihnen in ein generelles Theorem mit Umsicht und Gründlichkeit geschildert. Mit dem Erscheinen dieser ausführlichen Geschichte der Geometrie mögen aber auch die Schriften der älteren Geometer sehr rasch aus dem literärischen Verkehre verschwunden sein. Der unmittelbar nach Eudemos erfolgte vortreffliche Ausbau der Elemente durch Euklides und die reissenden Fortschritte der höheren Geometrie, welche zu gleicher Zeit durch Archimedes, Apollonios und die Alexandriner Gelehrten herbeigeführt wurden, machten fast Alles, was vor dieser Epoche geschrieben worden war, überflüssig. Wurden daher die älteren geometrischen Schriften nicht mehr vervielfältigt, so gingen sie dadurch für die späteren Generationen verloren. Des Eudemos Geschichte der Geometrie ersetzte diesen Verlust einigermassen, und wir finden dieselbe daher überall citirt, wo ein Schriftsteller auf die voreuklidische Periode der Wissenschaft zurückgeht. Ja wir dürfen mit gutem Grunde annehmen, dass selbst solche Notizen anderer Autoren, z. B. des Geminos, bei denen die Quelle nicht angegeben ist, aus welcher sie geschöpft sind, zuletzt doch auf des Eudemos Schriften zurückkommen. Dass dieser Sachkenner genug war, um über geometrische Leistungen seiner Vorgänger genau und gründlich zu berichten, geht aus den grösseren uns noch erhaltenen Fragmenten seines Werkes sattsam hervor. Hat er sich doch nach des Proklos Zeugniss[1]) in einer selbständigen geometrischen Schrift über den ebenen Winkel (*περὶ γωνίας*) als Sachkenner bewährt.

Ausser Eudemos wird noch der ihm gleichzeitige Theophrastos als Verfasser einer Geschichte der Geometrie in vier Büchern, der Astronomie in sechs Büchern und der Arithmetik in einem Buche genannt[2]). Einige der neueren Alterthumsforscher haben geglaubt, dass in Bezug auf diese Schriften des Theophrastos Name mit dem des Eudemos verwechselt worden sei, und zwar um deswillen, weil diese Schriften des ersteren sich fast bei keinem alten Schriftsteller citirt finden. Hat es aber an sich nichts Unwahrscheinliches, dass Theophrastos bei seiner ausserordentlichen, fast auf alle Wissenszweige sich erstreckenden literärischen Fruchtbarkeit, auch über die angeführten Disciplinen geschrieben habe, so scheinen doch die betreffenden Schriften hinter denen des Eudemos bedeutend zurückgestanden und um deswillen eine nur geringe Verbreitung gefunden zu haben. Für uns Neueren sind dieselben so gut wie nicht vorhanden.

§ 19. Ganz besonders wichtig für die Geschichte der frühesten Griechischen Geometrie ist eine Aufzählung der bedeutenderen Geometer vor Euklides, mit kurzer Angabe ihrer Verdienste um die Wissenschaft, welche Proklos[3]) in seinem Commentar zu Euklides Elementen uns überliefert und wohl ganz unbezweifelt aus des Eudemos Geschichte der Geometrie ausgezogen hat. Je unentbehrlicher diese Notizen sind, um die Entwicklung der Geometrie bei den Griechen während der ersten drittehalbhundert Jahre verfolgen zu können, desto nothwendiger erscheint es, dem Leser die ganze Stelle hier wörtlich vorzulegen. Die mit dem Griechischen Texte — (er ist bis jetzt nur in der Baseler Ausgabe der Elemente Euklids vom Jahre 1535, obwohl auf schaurige Weise, gedruckt) — vorgenommenen Aenderungen sind in den Noten genau angegeben.

Ἐπεὶ δὲ χρὴ καὶ τὰς ἀρχὰς τῶν τεχνῶν [καὶ τῶν ἐπιστημῶν][4]) πρὸς τὴν παροῦσαν περίοδον σκοπεῖν, λέγομεν ὅτι παρ' Αἰγυπτίοις μὲν εὑρῆσθαι πρῶτον ἡ γεωμετρία παρὰ πολλῶν ἱστορεῖται ἐκ τῆς τῶν χωρίων παραμετρήσεως λαβοῦσα τὴν γένεσιν. ἀναγκαία γὰρ ἦν ἐκείνοις αὕτη διὰ τὴν ἄνοδον τοῦ Νείλου τοὺς προσήκοντας ἑκάστοις ἀφανίζοντος ὅρους. Καὶ θαυ-

„Da es nun nothwendig ist, auch die Anfänge der Künste und Wissenschaften in der gegenwärtigen Periode zu betrachten, so berichten wir, dass zuerst von den Aegyptern die Geometrie erfunden ward, indem sie der Angabe der meisten zu Folge aus der Vermessung der Ländereien ihren Ursprung nahm. Denn letztere war ihnen nöthig wegen der Ueberschwemmung des Nil,

1) Procl. comm. in Euclid. I. — Ed. Basil. pag. 35. — Baroc. pag. 71.
2) Diog. Laert. V, c. 2. n. 13. — Huebn. Vol. I, p. 347 u. 348.
3) Procl. comment. ed. Basil. pag. 19. — Baroc. pag. 37.
4) Barocius l. c. hat übersetzt: *principia quoque artium atque scientiarum.*

μαστὸν οὐδὲν ἀπὸ τῆς χρείας ἄρξασθαι τὴν εὕρεσιν· καὶ ταύτης καὶ τῶν ἄλλων ἐπιστημῶν, ἐπειδὴ πᾶν τὸ ἐν γενέσει φερόμενον ἀπὸ τοῦ ἀτελοῦς πρὸς τὸ τέλειον πρόεισιν. ἀπὸ αἰσθήσεως οὖν εἰς λογισμὸν καὶ ἀπὸ τούτου εἰς νοῦν[1]) ἡ μετάβασις γένοιτ' ἂν εἰκότως. Ὥσπερ οὖν παρὰ τοῖς Φοίνιξι διὰ τῆς ἐμπορίας καὶ τὰ συναλλάγματα τὴν ἀρχὴν ἔλαβεν ἡ τῶν ἀριθμῶν ἀκριβὴς γνῶσις, οὕτω δὴ καὶ παρ' Αἰγυπτίοις ἡ γεωμετρία διὰ τὴν εἰρημένην αἰτίαν εὕρηται.

der die einem jeden zugehörigen Grenzen verwischte. Es hat aber nichts Wunderbares, dass die Erfindung dieser sowie der andern Wissenschaften vom Bedürfniss ausgegangen ist, da doch Alles im Entstehen Begriffene vom Unvollkommenen zum Vollkommenen vorwärts schreitet. Es findet daher von der sinnlichen Wahrnehmung zur denkenden Betrachtung und von dieser zur vernünftigen Erkenntniss ein natürlicher Uebergang statt. Sowie nun bei den Phönikern des Handels und Verkehrs halber eine genaue Kenntniss der Arithmetik ihren Anfang nahm, so ward bei den Aegyptern aus dem erwähnten Grunde die Geometrie erfunden."

Θαλῆς δὲ πρῶτον εἰς Αἴγυπτον ἐλθὼν μετήγαγεν εἰς τὴν Ἑλλάδα τὴν θεωρίαν ταύτην, καὶ πολλὰ μὲν αὐτὸς εὗρε, πολλῶν δὲ τὰς ἀρχὰς τοῖς μετ' αὐτὸν ὑφηγήσατο, τοῖς μὲν καθολικώτερον ἐπιβάλλων, τοῖς δὲ αἰσθητικώτερον. Μετὰ δὲ τοῦτον Ἀμέριστος, ὁ Στησιχόρου τοῦ ποιητοῦ ἀδελφὸς, ὃς ἐφαψάμενος τῆς περὶ γεωμετρίας σπουδῆς μνημονεύεται· καὶ Ἱππίας ὁ Ἠλεῖος ἱστόρησεν ὡς ἐπὶ γεωμετρίᾳ[2]) δόξαν αὐτοῦ λάβοντος. Ἐπὶ δὲ τούτοις Πυθαγόρας τὴν περὶ αὐτὴν φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν, ἄνωθεν τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ αὔλως καὶ νοερῶς τὰ θεωρήματα διερευνώμενος· ὃς δὴ καὶ τὴν τῶν ἀλόγων πραγματείαν καὶ τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρε. Μετὰ δὲ τοῦτον Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος πόλλων ἐφήψατο κατὰ γεωμετρίαν, καὶ Οἰνοπίδης ὁ Χῖος[3]) ὀλίγῳ νεώ-

„Thales, der nach Aegypten ging, brachte zuerst diese Wissenschaft nach Hellas hinüber; und Vieles entdeckte er selbst, von Vielem aber überlieferte er die Anfänge seinen Nachfolgern; das Eine machte er allgemeiner, das Andere mehr sinnlich fassbar. Nach ihm wird Ameristos, der Bruder des Dichters Stesichoros, als ein eifriger Geometer erwähnt; auch berichtet Hippias der Eleer von ihm, dass er sich als Geometer Ruhm erworben habe. Nach diesen verwandelte Pythagoras die Beschäftigung mit diesem Wissenszweige in eine wirkliche Wissenschaft, indem er die Grundlagen derselben von höherem Gesichtspunkte aus betrachtete und die Theoreme derselben immaterieller und intellectueller erforschte. Er ist es auch, der die Theorie des Irrationalen und die Construction der regelmässigen (kosmischen) Körper erfand. Nach ihm

1) Im Griechischen Texte ist hier eine kleine Lücke angedeutet. Barocius füllt sie folgendermaassen aus: *A sensu igitur ad considerationem et ab hac ad mentem non immerito fiet transitus.*

2) Die Basilea hat: ἐπὶ γεωμετρίας, was wohl gegen den gewöhnlichen Sprachgebrauch verstösst.

3) Die Basilea hat hier nach Χῖος die Worte: ὁ τὴν τοῦ μηνίσκου τετραγωνισμὸν εὑρῶν. καὶ Θεώδωρος ὁ Κυρηναῖος, und fährt nun erst fort: ὀλίγῳ νεώτερος etc. Es sind dieselben Worte, die nach Ἱπποκράτης ὁ Χῖος folgen, die irgend ein Abschreiber einmal ausgelassen hatte, und welche dann an unrichtiger Stelle

τερος ὢν τοῦ Ἀναξαγόρου, ὧν καὶ Πλάτων ἐν τοῖς Ἀντερασταῖς ἐμνημόνευσεν, ὡς ἐπὶ τοῖς μαθήμασι δόξαν λαβόντων. Ἐφ' οἷς Ἱπποκράτης ὁ Χῖος, ὁ τὸν τοῦ μηνίσκου τετραγωνισμὸν εὑρών, καὶ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος ἐγένοντο περὶ γεωμετρίαν ἐπιφανεῖς· πρῶτος γὰρ ὁ Ἱπποκράτης τῶν μνημονευομένων καὶ στοιχεῖα συνέγραψε. Πλάτων δὲ ἐπὶ τούτου γενόμενος μεγίστην ἐποίησεν ἐπίδοσιν τά τε ἄλλα μαθήματα καὶ τὴν γεωμετρίαν λαβεῖν διὰ τὴν περὶ αὐτὴν σπουδὴν ὥς που δῆλός ἐστι· καὶ τὰ συγγράμματα τοῖς μαθηματικοῖς λόγοις καταπυκνώσας καὶ πανταχοῦ τὸ περὶ αὐτὰ θαυμαστὸν φιλοσοφίας ἀντεχόμενον ἐπεγείρων.

Ἐν δὲ τούτῳ τῷ χρόνῳ καὶ Λεωδάμας ὁ Θάσιος ἦν καὶ Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος καὶ Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος, παρ' ὧν ἐπηυξήθη τὰ θεωρήματα καὶ προῆλθεν εἰς ἐπιστημονικωτέραν σύστασιν. Λεωδάμαντος δὲ νεώτερος ὁ Νεοκλείδης καὶ ὁ τούτου μαθητὴς Λέων, οἳ πολλὰ προςεπόρισαν τοῖς πρὸ αὐτῶν· ὥστε τὸν Λέοντα καὶ τὰ στοιχεῖα συνθεῖναι, τῷ τε πλήθει καὶ τῇ χρείᾳ τῶν δεικνυμένων ἐπιμελέστερον, καὶ διορισμὸν εὑρεῖν, πότε δυνατόν ἐστι τὸ ζητούμενον πρόβλημα καὶ πότε ἀδύνατον. Εὔδοξος δὲ ὁ Κνίδιος, Λέοντος μὲν ὀλίγῳ νεώτερος, ἑταῖρος δὲ τῶν περὶ Πλάτωνα γενόμενος, πρῶτος τῶν καθόλου θεωρημάτων τὸ πλῆθος ηὔξησε καὶ ταῖς τρισὶν ἀναλογίαις ἄλλας τρεῖς προσέθηκε καὶ τὰ περὶ τὴν τομὴν ἀρχὴν λαβόντα παρὰ Πλάτωνος εἰς πλῆθος προήγαγεν, καὶ ταῖς ἀναλύσεσιν ἐπ' αὐτῶν χρησάμενος.

lieferte der Klazomenier Anaxagoras Vieles über Geometrie, ingleichen Oinopides von Chios, der etwas jünger ist als Anaxagoras. Beider gedenkt Platon in den Nebenbuhlern als berühmter Geometer. Nach diesen wurden Hippokrates, der Chier, der die Quadratur des Mondes fand, und Theodoros von Kyrene in der Geometrie berühmt. Unter den hier genannten hat zuerst Hippokrates Elemente geschrieben. Platon, der auf diese folgte, verschaffte sowohl den andern Wissenschaften als auch der Geometrie einen sehr bedeutenden Zuwachs durch den grossen Fleiss, den er bekanntlich auf sie verwendete. Seine Schriften füllte er stark mit mathematischen Betrachtungen und hob überall hervor, was von der Geometrie sich in bemerkenswerther Weise an die Philosophie anschliesst.

In diese Zeit gehört auch Leodamas, der Thasier, und Archytas von Tarent und Theaitetos, der Athener, durch welche die Theoreme vermehrt wurden und zu einer strengeren wissenschaftlichen Darstellung gelangten. Jünger als Leodamas ist Neokleides u. dessen Schüler Leon, welche zu dem, was vor ihnen geleistet worden war, vieles hinzufügten; es hat auch Leon Elemente geschrieben, die in Bezug auf Umfang und das Bedürfniss der Anwendung des Bewiesenen sorgfältiger verfasst sind. Ebenso erfand er den Diorismos (d. h. die Nachweisung), wenn das vorgelegte Problem möglich ist und wenn unmöglich. Eudoxos von Knidos, um wenig jünger als Leon und ein Genosse der Schule Platon's, vermehrte zuerst die Masse der allgemeinen Theoreme, fügte zu den drei (bereits bekannten) Proportionen drei neue hinzu und führte weiter aus, was von Platon über den Schnitt begonnen worden war, wobei er sich der analytischen Methode bediente.

eingesetzt worden sind. Barocios hat in seiner Uebersetzung die richtige Wortstellung. Die Sache würde kaum Erwähnung verdienen, wenn nicht Heinius

Ἀμύκλας δὲ ὁ Ἡρακλεώτης, εἷς τῶν Πλάτωνος ἑταίρων, καὶ *Μέναιχμος* ἀκροατὴς ὢν *Εὐδόξου* καὶ *Πλάτωνι* δὲ συγγεγονὼς, καὶ ὁ ἀδελφὸς αὐτοῦ *Δεινόστρατος* ἔτι τελειωτέραν ἐποίησαν τὴν ὅλην γεωμετρίαν. *Θεύδιος* δὲ ὁ Μάγνης ἔν τε τοῖς μαθήμασιν ἔδοξεν εἶναι διαφέρων καὶ κατὰ τὴν ἄλλην φιλοσοφίαν, καὶ γὰρ τὰ στοιχεῖα καλῶς συνέταξε καὶ πολλὰ τῶν ὁρικῶν καθολικώτερα ἐποίησεν. Καὶ μέντοι καὶ ὁ *Κυζικηνὸς* Ἀθηναῖος κατὰ τοὺς αὐτοὺς γεγονὼς χρόνους καὶ ἐν τοῖς ἄλλοις μὲν μαθήμασι, μάλιστα δὲ κατὰ γεωμετρίαν καταφανὴς [1]) ἐγένετο. Διῆγον οὖν οὗτοι μετ' ἀλλήλων ἐν ἀκαδημείᾳ, κοινὰς ποιούμενοι τὰς ζητήσεις. *Ἑρμότιμος* δὲ ὁ Κολοφώνιος τὰ ὑπ' Εὐδόξου προηυπορημένα καὶ *Θεαιτήτου* προήγαγεν ἐπὶ πλέον καὶ τῶν στοιχείων πολλὰ ἀνεῦρε καὶ τῶν τόπων τινὰ συνέγραψεν. *Φίλιππος* δὲ ὁ Μεταῖος [2]) *Πλάτωνος* ὢν μαθητὴς καὶ ὑπ' ἐκείνου προτραπεὶς εἰς τὰ μαθήματα καὶ τὰς ζητήσεις ἐποιεῖτο κατὰ τὰς *Πλάτωνος* ὑφηγήσεις, καὶ ταῦτα προὔβαλλεν ἑαυτῷ ὅσα ᾤετο τῇ *Πλάτωνος* φιλοσοφίᾳ συντελεῖν.

Οἱ μὲν οὖν τὰς ἱστορίας ἀναγράψαντες μέχρι τούτου προάγουσι τὴν τῆς ἐπιστήμης ταύτης τελείωσιν. — Οὐ πολὺ δε τούτων νεώτερός ἐστιν *Εὐκλείδης*, ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν καὶ πολλὰ μὲν τῶν *Εὐδόξου* συντάξας, πολλὰ δὲ τῶν Θεαιτήτου τελεωσάμενος, ἔτι δὲ τὰ μαλακώτερον δεικνύμενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνε-

Amyklas von Heraklea, einer von Platon's Gefährten, und Menaichmos, der Schüler des Eudoxos, mit Platon gleichzeitig, und sein Bruder Deinostratos machten die gesammte Geometrie noch vollkommener. Theydios von Magnesia scheint sowohl in der Mathematik als auch in der übrigen Philosophie bedeutend zu sein; er schrieb auch sehr gute Elemente, wobei er vieles Specielle verallgemeinerte. Ganz ebenso ward Kyzikinos aus Athen, um die nämliche Zeit lebend, sowohl in den anderen Wissenschaften als ganz besonders auch in der Geometrie berühmt. Alle diese verkehrten in der Akademie mit einander, indem sie ihre Untersuchungen gemeinschaftlich anstellten. Hermotimos von Kolophon führte das früher von Eudoxos und Theaitetos Gefundene weiter aus, entdeckte Vieles zu den Elementen Gehörige und schrieb Einiges über die Oerter. Philippos von Mende, des Platon Schüler und von ihm den Wissenschaften zugeführt, stellte nach Platon's Anleitung Untersuchungen an, und nahm sich das zur Bearbeitung, wovon er glaubte, dass es mit Platon's Philosophie zusammenhänge.

Die nun die Geschichte (der Geometrie) geschrieben, haben bis zu diesem Punkte die Entwickelung der Wissenschaft fortgeführt. — Nicht viel jünger aber als diese ist Euklides, der die Elemente zusammenstellte, vieles von Eudoxos Herrührende zu einem Ganzen ordnete, u. vieles von Theaitetos Begonnene zu Ende führte, über-

---

durch diese Textverderbniss auf den Einfall gekommen wäre, die Quadratur des Mondes dem Oinopides beizulegen.

1) Proklos schreibt stets *ἐπιφανής*; ob das im Texte stehende *καταφανής* vielleicht ein Schreibfehler ist, hervorgerufen durch das vorangehende *κατὰ γεωμετρίαν* wird sich nur aus den Handschriften entscheiden lassen.

2) Die Uebersetzung des Barocius liest Mendaeus, also Griechisch *Μενδαῖος*, aus *Μένδη* gebürtig, einer Stadt auf der Halbinsel Pallene in Macedonien. Fabricius (Bibl. gr. III, pag. 385) und ihm nachfolgend Montucla (Vol. I,

λέγκτους ἀποδείξεις ἀναγαγών. γέγονε δὲ οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ τοῦ πρώτου Πτολεμαίου ..... Νεώτερος μὲν οὖν ἐστι τῶν περὶ Πλάτωνα, πρεσβύτερος δὲ Ἐρατοσθένους καὶ Ἀρχιμήδους· οὗτοι γὰρ σύγχρονοι ἀλλήλοις ὥσπερ καί φησιν Ἐρατοσθένης. Καὶ τῇ προαιρέσει δὲ Πλατωνικός ἐστι καὶ τῇ φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οἰκεῖος. Ὅθεν δὴ καὶ τῆς συμβάσης στοιχειώσεως τέλος προεστήσατο τὴν καλουμένων Πλατωνικῶν σχημάτων σύστασιν.

dies das von den Vorgängern nur leichthin Bewiesene auf unwiderlegliche Beweise stützte. Es lebte derselbe unter dem ersten Ptolemäer ...... Jünger ist er daher, wie die Schüler Platon's, älter dagegen wie Eratosthenes und Archimedes; denn diese sind Zeitgenossen, wie Eratosthenes selbst angiebt. Seiner wissenschaftlichen Stellung nach ist er Platoniker und dieser Philosophie angehörig, daher er denn auch als Endziel seines ganzen Elementarwerkes die Construction der sogenannten Platonischen Körper hinstellte.

§ 20. Das vorstehende Bruchstück enthält, wie man sofort übersieht, nur die ausgezeichnetern Geometer, welche von Thales bis auf Euklides gelebt haben; denn ausser den hier genannten sind uns noch gar manche Namen überliefert, deren Träger um die Mathematik und speciell um die Geometrie sich Verdienste erworben haben. Aber auch in dieser Beschränkung ist das fragliche Bruchstück für die Einsicht in die Entwickelung der Griechischen Geometrie ganz unschätzbar, da wir ohne dasselbe über diesen Gegenstand gänzlich im Dunkeln bleiben würden.

Das Vornehmste und Wichtigste, was uns in diesem geschichtlichen Abrisse entgegentritt, ist die Bestätigung der schon oben aufgestellten Behauptung, dass das Material für die spätere Geometrie aus Aegypten stammt und durch die Griechen allmälig ergänzt, fortgebildet und zu einer wirklichen Wissenschaft umgearbeitet worden ist. Denn wenn Thales, Pythagoras und einige Andere neben der Aegyptischen Reisskunst auch die für dieselbe nothwendigsten Lehrsätze mit nach Hause gebracht haben, so scheinen doch gerade *diese* noch sehr elementare gewesen zu sein und keinesweges ein nur einigermassen vollständiges System geometrischer Wahrheiten gebildet zu haben. Ursprünglich und nach und nach von den Operationen des Feldmessens abstrahirt, war die Aegyptische Geometrie gewiss mit vielen blos empirischen und blos auf handwerksmässige Ausübung sich beziehenden Regeln beladen. Die Lehrsätze und Aufgaben mochten oft nur für einzelne Fälle anfgestellt, die Beweise weder völlig streng noch allgemein geführt sein, die Lösungen häufig wohl geradezu in blosser Rechnung bestehen, wie ein Theil der Aufgaben in dem Rhind'schen Papyrus ziemlich klar erkennen lässt. Die Griechen nun waren es, welche, wie unser Excerpt wiederholt andeutet,

pag. 108) lesen Μεδμαῖος, wonach unser Geometer aus Μέδμα in Unteritalien stammte.

die nur für einzelne Fälle entwickelten Gesetze auf allgemeine zurückführten, die Beweise vervollkommneten und ergänzten, die Lehrsätze durch deren Umkehrung erweiterten, die aus ihnen unmittelbar hervorgehenden Folgerungen entwickelten und hervorhoben, dadurch aber eine ganze Anzahl für die Wissenschaft wichtiger und fruchtbarer Mittelsätze gewannen. Dabei ward jedenfalls das auf blos praktische Anwendung sich beziehende allmälig aus der Wissenschaft ausgeschieden, namentlich der Gebrauch der Rechnung (der eigentlichen Logistik) aus der Geometrie gänzlich verbannt, und somit die streng synthetische Form der Wissenschaft ausgebildet, die den Werken der Griechischen Geometer noch heut zu Tage einen so hohen Werth verleiht.

§ 21. Dass die Aegyptischen Priester sich ihrer Schüler aus Griechenland mit einem gewissen Stolze rühmten, ist sattsam bekannt und wird von den Griechen selbst ab und zu bestätigt. So sagt Diodor (I, c. 96):

Οἱ γὰρ ἱερεῖς τῶν Αἰγυπτίων ἱστοροῦσιν ἐκ τῶν ἀναγραφῶν τῶν ἐν ταῖς ἱεραῖς βιβλίοις παραβαλεῖν πρὸς αὐτοὺς τὸ παλαιὸν Ὀρφέα τε καὶ Μουσαῖον καὶ Μελάμποδα καὶ Δαίδαλον, πρὸς δὲ τούτοις Ὅμηρον τὸν ποιητὴν καὶ Λυκοῦργον τὸν Σπαρτιάτην, ἔτι δὲ Σόλωνα τὸν Ἀθηναῖον καὶ Πλάτωνα τὸν φιλόσοφον. Ἐλθεῖν δὲ καὶ Πυθαγόραν τὸν Σάμιον καὶ τὸν μαθηματικὸν Εὔδοξον, ἔτι δὲ Δημόκριτον τὸν Ἀβδηρίτην καὶ Οἰνοπίδην τὸν Χῖον. Πάντων δὲ τούτων σημεῖα δεικνύουσι, τῶν μὲν εἰκόνας, τῶν δὲ τόπων ἢ κατασκευασμάτων ὁμωνύμους προσηγορίας. ἔκ τε τῆς ἑκάστῳ ζηλωθείσης παιδείας ἀποδείξεις φέρουσι, συνιστάντες ἐξ Αἰγύπτου μετενηνοχέναι πάντα, δι' ὧν παρὰ τοῖς Ἕλλησιν ἐθαυμάσθησαν.

Die Aegyptischen Priester nennen unter den Fremden, welche nach den Verzeichnissen in den heiligen Büchern vormals zu ihnen gekommen seien, den Orpheus, Musaios, Melampus u. Daidalos, nach diesen den Dichter Homer u. den Spartaner Lykurgos, ingleichen den Athener Solon und den Philosophen Platon. Gekommen sei zu ihnen auch der Samier Pythagoras und der Mathematiker Eudoxos, ingleichen Demokritos von Abdera und Oinopides von Chios. Von allen diesen weisen sie noch Spuren auf, von den einen Bildnisse, von den andern Orte und Gebäude, die nach ihnen benannt sind. Aus der Vergleichung dessen, was jeder von ihnen in seinem Fache geleistet hat, führen sie den Beweis, dass sie Dasjenige, um deswillen sie von den Hellenen bewundert werden, aus Aegypten entlehnt haben.

Aber aus diesen Angaben geht auch ganz deutlich hervor, dass das Wandern wissensdurstiger Griechen nach Aegypten, *um dort Geometrie zu lernen*, nur etwa bis gegen 450 v. Chr. angedauert hat, und dass Demokritos wohl jedenfalls der Letzte ist, der in dieser Absicht eine Reise dorthin unternahm. Des Thales, Pythagoras, und Oinopides mathematische Studien bei der Aegyptischen Priesterschaft sind durch unverwerfliche Zeugnisse sichergestellt. Dass namentlich Pythagoras mit dem ganzen Inhalte der Aegyptischen Mathematik vollständig vertraut war und denselben dem engeren Kreise seiner Schüler ohne Rückhalt mitgetheilt hat, wird sich weiter unten überzeugend herausstellen. So lange nun seine Schule das von dem Meister ihr auferlegte strenge Verbot der Verschwiegenheit befolgte, kam dies Wissen freilich keinem Uneingeweihten zu Gute. Als aber zwischen 480 und 470 die vollständige Zersprengung des Pythagoräischen Bundes erfolgte, die Glieder desselben sich nach allen Richtungen hin in die Städte Griechenlands zerstreuten und namentlich auch in Athen sich niederliessen, ward die bis dahin als Schulgeheimniss bewahrte Mathematik der Pythagoräer Gemeingut der Griechischen Nation. Damit aber hörte für letztere das Bedürfniss auf, zum Behufe geometrischer Studien nach Aegypten zu wandern. Die Griechische Geometrie hat in der Pythagoräischen Schule die Aegyptische bereits überholt. Schon Hippokrates von Chios, um 450 v. Chr. lebend, finden wir auf einer Höhe der Wissenschaft stehend, die die Aegyptische Priesterschaft wohl nie erreicht hat, und so ist es ganz natürlich und erklärlich, dass *nach* 450 v. Chr. sich kein Grieche mehr findet, der im Auslande noch Geometrie studiren möchte. Wenn Platon und Eudoxos noch als solche genannt werden, die einen längeren Aufenthalt in Aegypten gemacht haben, so ist dies von Seiten Platon's jedenfalls nicht der Geometrie halber geschehen, die er bereits früher bei Theodoros von Kyrene studirt hatte, sondern wohl nur der eigentlich philosophischen Studien wegen. Von Eudoxos aber berichtet Diodor. (I, c. 98) [1]) ganz ausdrücklich, dass es astronomische Kenntnisse gewesen seien, die er in Aegypten eingesammelt und durch deren Verarbeitung und Mittheilung er bei seinen Landsleuten sich einen so hohen Ruhm erworben habe.

§ 22. Haben aber auch die ältesten Griechischen Geometer ihre Kenntnisse im Fache bei den Aegyptern erworben, so dürfen wir uns doch nicht vorstellen, dass diese Mittheilung in so kurzer Zeit und so leicht und einfach habe vor sich gehen können, wie dies, ich will nicht sagen in unseren Tagen, sondern nur in den späteren Jahrhunderten des classischen Alterthums möglich war.

Welche Schwierigkeit es überhaupt, selbst für begabtere Griechen hatte, die Aegyptischen Priester zu ausführlichen wissenschaftlichen Mittheilungen zu gewinnen, und wie lange es dauerte, bis die Griechen zu einer vollständigen Bekanntschaft mit den Resultaten der Aegyptischen Wissenschaft gelangten, geht aus der nachfolgenden Stelle des Strabon hervor, der bei Gelegenheit der Beschreibung

1) *Παραπλησίως δὲ καὶ τὸν Εὔδοξον ἀστρολογήσαντα παρ' αὐτοῖς* (*Αἰγυπτίοις*) *καὶ πολλὰ τῶν χρησίμων εἰς τοὺς Ἕλληνας ἐκδόντα τυχεῖν ἀξιολόγου δόξης.*

von Heliopolis in Aegypten, einer der alten Hochschulen der Aegyptischen Priesterschaft, bemerkt (l. XVII, c. 1. — C. 806. — ed. Meinicke p. 1124):

Ἐκεῖ δ' οὖν ἐδείκνυντο οἵ τε τῶν ἱερέων οἶκοι καὶ Πλάτωνος καὶ Εὐδόξου διατριβαί. συνανέβη γὰρ δὴ τῷ Πλάτωνι ὁ Εὔδοξος δεῦρο, καὶ συνδιέτριψαν τοῖς ἱερεῦσιν ἐνταῦθα ἐκεῖνοι τρισκαίδεκα ἔτη, ὡς εἴρηταί τισι· περιττοὺς γὰρ ὄντας κατὰ τὴν ἐπιστήμην τῶν οὐρανίων, μυστικοὺς δὲ καὶ δύςμεταδότους, τῷ χρόνῳ καὶ ταῖς θεραπείαις ἐξελιπάρησαν ὥστε τινὰ τῶν θεωρημάτων ἱστορῆσαι· τὰ πολλὰ δὲ ἀποκρύψαντο οἱ βάρβαροι. Οὗτοι δὲ τὰ ἐπιτρέχοντα τῆς ἡμέρας καὶ τῆς νυκτὸς μόρια ταῖς τριακοσίαις ἑξήκοντα πέντε ἡμέραις εἰς τὴν ἐκπλήρωσιν τοῦ ἐνιαυσίου χρόνου παρέδοσαν· ἀλλ' ἠγνοεῖτο τέως ὁ ἐνιαυτὸς παρὰ τοῖς Ἕλλησιν ὡς καὶ ἄλλα πλείω, ἕως οἱ νεώτεροι ἀστρολόγοι παρέλαβον παρὰ τῶν μεθερμηνευσάντων εἰς τὸ Ἑλληνικὸν τὰ τῶν ἱερέων ὑπομνήματα· καὶ ἔτι νῦν παραλαμβάνουσι τὰ ἀπ' ἐκείνων, ὁμοίως καὶ τὰ τῶν Χαλδαίων.

Hier nun zeigt man die Häuser der Priester und auch die Wohnungen des Platon und Eudoxos. Denn letzterer kam mit Platon hieher und sie lebten daselbst mit den Priestern 13 Jahre lang zusammen, wie einige angeben. Denn diese in den Himmelserscheinungen wohlerfahrenen aber geheimnissvollen und sich nicht gern mittheilenden Leute brachten sie nur mit der Zeit und durch Gefälligkeiten so weit, dass sie ihnen etwas von ihren Kenntnissen offenbarten; das Meiste verschwiegen aber die Barbaren doch. So kannten sie die Theile von Tag und Nacht, welche über die 365 Tage überschüssig sind, um die Dauer des Jahres voll zu machen. Gleichwohl war das Jahr, wie so vieles Andere, den Griechen so lange unbekannt, bis die neueren Astronomen es aus den ins Griechische übersetzten Schriften der Priester entnahmen. Und selbst jetzt noch lernen sie Manches von Jenen, sowie auch von den Chaldäern.

Es mag nun nicht blos wahrscheinlich, sondern vielmehr so gut wie gewiss sein, dass der 13jährige Aufenthalt Platon's in Aegypten ein viel zu langer, vielleicht durch Verwechselung mit des Eudoxos 14monatlichem entstanden ist, und Strabon hier sich bedeutend irrt. So viel aber geht aus seiner Angabe mit Sicherheit hervor, dass es viel Zeit und Mühe kostete, bei den Priestern des Landes Studien irgend welcher Art zu machen. Dieser Zeitaufwand würde sich aber nicht wesentlich verringert haben, wenn auch die Priester viel mittheilsamer gewesen wären, als sie von Strabon geschildert werden. Schon Röth[1]) hat sehr richtig bemerkt, dass für jeden Griechen, der des Studiums halber nach Aegypten pilgerte, nicht nur die Unbekanntschaft mit der Landessprache, sondern noch in weit höherem Grade die Unkenntniss der total fremdartigen Schrift den Zugang zu der vorhandenen gelehrten Literatur des Landes für lange Zeit gänzlich verschliessen musste. Ein wissenschaftlicher Unterricht war daher im Allgemeinen auf den mündlichen Verkehr mit der Prie-

---

1) Geschichte uns. abendl. Philosophie. Bd. II, pag. 87.

sterschaft angewiesen und blieb deshalb hinsichtlich seines Inhaltes fast ganz von dem guten Willen der Lehrer abhängig. Ist dies aber schon in jedem Unterrichtsfache einem raschen und ergiebigen Erfolge einigermaassen hinderlich, so gilt dies doch in besonders hohem Grade von dem Unterrichte in der Mathematik; denn gerade dieser verlangt, wenn er Frucht tragen soll, von Seiten des Schülers ein ebenso anhaltendes wie gründliches Studium, und lässt sich durch *blos* mündlichen Verkehr nur mit Schwierigkeit fördern. Als aber Psammetich Aegypten aufs Neue dem auswärtigen Verkehre geöffnet hatte und zahlreiche Griechen sich des Handels halber in Naukratis niederliessen, stand die Aegyptische Mathematik doch jedenfalls auf einer Stufe, welche sie einem Griechen, bei dem damaligen Stande Griechischer Volksbildung, nicht alsbald zugänglich sein liess. Es wird uns daher nicht Wunder nehmen dürfen, wenn wir später finden sollten, dass ein Thales, trotz längeren Aufenthaltes im Lande, doch nur eine mässige Kenntniss Aegyptischer Mathematik sich hatte zu eigen machen können, und dass es erst einem Pythagoras möglich ward, durch langjährige Theilnahme am gelehrten Unterrichte der Aegyptischen Priesterkaste eine vollständigere Kenntniss jenes Wissenszweiges zu erlangen.

Dritter Abschnitt.

Thales und die Geometer der Ionischen Schule.

§ 23. **Thales**, der Stifter der sogenannten Ionischen Philosophenschule, behauptet den unbestrittenen Ruhm, zuerst das Studium der Geometrie in Griechenland eingebürgert zu haben. Die Lebensschicksale dieses ersten und ältesten wissenschaftlichen Forschers, den die Griechische Nation aufzuweisen hat, sind aus den über ihn noch vorhandenen Nachrichten der Alten wenigstens im Allgemeinen ganz gut zu übersehen.

Sein Zeitalter bestimmt sich aus den nachfolgenden Angaben ziemlich genau, als zwischen 640 und 548 v. Chr. fallend. Es berichtet nämlich Diogenes Laertios (I, c. 1. n. 1. — ed. Huebn. p. 14.):

Ἦν τοίνυν ὁ Θαλῆς, ὡς μὲν Ἡρόδοτος καὶ Δοῦρις καὶ Δημόκριτός φασι, πατρὸς μὲν Ἐξαμίου μητρὸς δὲ Κλεοβουλίνης, ἐκ τῶν Θελιδῶν, οἵ εἰσι Φοίνικες, εὐγενέστατοι τῶν ἀπὸ Κάδμου καὶ Ἀγήνορος,

Thales stammt, wie Herodotos, Thuris und Demokritos angeben, vom Vater Examios und der Mutter Kleobuline, aus der Familie der Theliden, einem höchst angesehenen Phoinizischen Geschlechte, das sich

καθὰ καὶ Πλάτωνα φησί. καὶ πρῶτος σοφὸς ὠνομάσθη ἄρχοντος Ἀθήνησι Δαμασίου, καθ' ὃν καὶ οἱ ἑπτὰ σοφοὶ ἐκλήθησαν, ὥς φησι Δημήτριος ὁ Φαλερεὺς ἐν τῇ τῶν ἀρχόντων ἀναγραφῇ. ἐπολιτογραφήθη δὲ ἐν Μιλήτῳ, ὅτε ἦλθε σὺν Νειλέῳ ἐκπεσόντι Φοινίκης· ὡς δ' οἱ πλείους φασὶν, ἰθαγενὴς Μιλήσιος ἦν καὶ γένους λαμπροῦ.	nach Platon von Kadmos u. Agenor ableitet. Er ward zuerst ein Weiser genannt unter dem Athenischen Archon Damasias, wie Demetrios Phalereus im Archontenverzeichniss angiebt. Als Bürger ward er in Milet aufgenommen, da er mit dem aus Phönizien vertriebenen Neileus dorthin kam; wie aber die Mehrzahl berichtet, war er ein geborener Mileter und von edlem Geschlechte.

Ibid. (I. c. 1. n. 10. — ed. Huebn. pag. 24):

Φησὶ δ' Ἀπολλόδωρος ἐν τοῖς χρονικοῖς γεγενῆσθαι αὐτὸν κατὰ τὸ πρῶτον ἔτος τῆς τριακοστῆς πέμπτης Ὀλυμπιάδος· ἐτελεύτησε δ' ἐτῶν ἑβδομήκοντα ὀκτὼ ἤ, ὡς Σωσικράτης φησίν, ἐννενήκοντα· τελευτῆσαι γὰρ ἐπὶ τῆς πεντηκοστῆς ὀγδόης Ὀλυμπιάδος, γεγόνοτα κατὰ Κροῖσον κ. τ. λ.	Wie Apollodoros in den Zeittafeln angiebt, war er geboren um das erste Jahr der 35ten Olympiade und starb 78 Jahr alt, oder, wie Sosikrates berichtet, 90 Jahr alt. Er sei nämlich gestorben gegen die 58te Olympiade, geboren aber zur Zeit des Kroisos u. s. w.

Ibid. (I. c. 1. n. 3. — ed. Huebn. pag. 16.):

Δοκεῖ δὲ καὶ ἐν τοῖς πολιτικοῖς ἄριστα βεβουλεῦσθαι. Κροίσου γὰρ πέμψαντος πρὸς Μιλησίους ἐπὶ συμμαχίᾳ ἐκώλυσεν· ὅπερ Κύρου κρατήσαντος ἔσωσι τὴν πόλιν.	Er scheint auch in politischen Dingen das Beste gerathen zu haben. Denn als Kroisos die Milesier um Bundesgenossenschaft beschickte, hielt er sie davon zurück, was, nachdem Kyros gesiegt hatte, die Stadt rettete.

Herodotos (I. c. 170):

Χρηστὴ δὲ καὶ (γνώμη), πρὶν ἢ διαφθαρῆναι Ἰωνίην, Θαλέω ἀνδρὸς Μιλησίου ἐγένετο, τὸ ἀνέκαθεν γένος ἐόντος Φοινίκου, ὃς ἐκέλευε ἓν βουλευτήριον Ἴωνας ἐκτῆσθαι, τὸ δὲ εἶναι ἐν Τέῳ· Τέων γὰρ μέσον εἶναι Ἰωνίης. τὰς δὲ ἄλλας πόλεας οἰκεομένας μηδὲν ἕσσον νομίζεσθαι, κατάπερ εἰ δῆμοι εἶεν.	Einen anderen guten Rath gab, ehe noch Ionien unterging, der Mileter Thales (nach seiner weiteren Abstammung ein Phöniker), der ihnen rieth, die Ionier sollten einen einzigen Volksrath errichten, u. zwar in Teos; denn Teos sei die Mitte Ioniens. Nichts desto weniger sollten die einzelnen Städte, als wären sie selbständige Gemeinden, ihre gesetzliche Einrichtung beibehalten.

Biernach ist unmittelbar gewiss, dass Thales bis zum Untergange des Lydischen Reiches, also bis 548 v. Chr. (Olymp. 58, 1) gelebt haben muss. Soll er daher mit Apollodoros gegen die 35te Olymp. (640 v. Chr.) geboren sein, so muss er über 90 Jahre alt geworden sein, eine Annahme, die auch mit sonstigen Angaben übereinstimmt, die ihn als einen hochbetagten Mann schildern. Dass seine Familie Phönikischen Ursprunges und vor Zeiten in Milet eingewandert war, hat nichts Befremdendes. Wenn aber spätere Schriftsteller diese Uebersiedelung auf Thales selbst bezogen, so ist dies ganz bestimmt ein Irrthum, wie schon die völlig Griechischen Namensformen seiner Eltern bezeugen.

§ 24. Des Thales Jugend fällt demnach in die Zeit des lebendigsten Aufschwunges des Milesischen Handels mit dem Aegyptischen Reiche, das wenige Jahrzehnte vorher durch Psammetich dem ausländischen Verkehre geöffnet worden war; und an dieser Handelsthätigkeit scheint Thales in der ersten Hälfte seines Lebens sich stark betheiligt zu haben. Plutarchos berichtet (vit. Solon. c. 2): *Καὶ Θαλῆν δέ φασιν ἐμπορίᾳ χρήσασθαι καὶ Ἱπποκράτη τὸν μαθηματικὸν καὶ Πλάτωνα τῆς ἀποδημίας ἐφόδιον ἐλαίου τινὸς ἐν Αἰγύπτῳ διάθεσιν γενέσθαι* — „auch Thales und der Mathematiker Hippo-„krates haben, wie erzählt wird, Handel getrieben, und Platon „durch Oel, das er in Aegypten absetzte, sein Reisegeld erworben.“ Eben darauf deutet auch eine Anekdote aus des Thales Leben hin, welche Plutarch in seinem Dialog: „ob die Land- oder Wasser-„thiere gescheider sind?“ erzählt[1]), und welche darauf hinausläuft, dass er eines der Maulthiere, *welche er zum Salzhandel verwendete,* durch List von der übeln Gewohnheit curirte, seine Last durch Herumwälzen in Wasser zerfliessen zu machen und sich die auferlegte Bürde dadurch zu erleichtern. — In Folge dieser Handelsthätigkeit kam Thales auch nach Aegypten, ward aber dort allmälig auch mit der höheren wissenschaftlichen Bildung der Priesterschaft bekannt und, als geistreicher Mann, von derselben so angezogen, dass er mit den Priestern in unmittelbaren Verkehr trat. Der Unterricht, den er jetzt in Aegyptischer Weisheit erhielt, fand ihn selbst ohne alle geeignete Vorbereitung. Es wird von ihm ausdrücklich berichtet (Diog. Laert. I. c. 1. n. 6. — Huebn. p. 17): *οὐδεὶς τε αὐτοῦ καθηγήσατο, πλὴν ὅτ' εἰς Αἴγυπτον ἐλθὼν τοῖς ἱερεῦσι συνδιέτριψεν* — „Niemand ist „ihm Lehrer gewesen; nur während seines Aufenthaltes in Aegypten „hat er mit den (dortigen) Priestern verkehrt.“ — Dass unter solchen Umständen die Erfolge dieses Unterrichtes keine allzuraschen sein konnten, leuchtet nach dem, was bereits in § 22. hierüber bemerkt worden ist, von selbst ein. Hat Thales das Aegyptische Religionssystem und die mit demselben verbundene philosophische Speculation sich wirklich angeeignet, wie Röth nachzuweisen versucht hat, so ist dies jedenfalls das Hauptstück des geistigen Gewinnes, den er der Aegyptischen Priesterschaft verdankt. Von der, mit der Aegyptischen Religion eng zusammenhängenden Astronomie dagegen, so wie von der Mathematik scheint Thales nur die wesentlichsten Sätze, die

---

1) Dieselbe Anekdote berichtet auch Ailianos (hist. anim. VII. c. 42).

nothwendigsten Elemente, erhalten zu haben, sei es, dass ihm nicht mehr von seinen Lehrern mitgetheilt ward, oder dass er, was wahrscheinlicher sein möchte, in der Zeit bis zu seiner Heimkehr nach Milet nicht vermocht hatte, tiefer in diese Gegenstände einzudringen.

§ 25. Ueber die Zeit dieser Rückkehr lässt sich nur so viel sagen, dass sie in des Thales spätere Lebensjahre fällt. Ein ausdrückliches Zeugniss des Plutarchos (de plac. phil. I, c. 3) sagt: *φιλοσοφήσας δ' ἐν Αἰγύπτῳ ἦλθεν εἰς Μίλητον πρεσβύτερος* — „nachdem er in Aegypten wissenschaftlichen Studien obgelegen, kam „er in vorgerückten Jahren nach Milet;" — und in gleicher Weise berichtet Themistios (orat. XXVI. p. 317): *Θαλῆς δὲ ὕστερον καὶ πρὸς γήρᾳ φύσεώς τι ἥψατο πρῶτος καὶ ἀνέβλεψεν εἰς τὸν οὐρανὸν καὶ τὰ ἄστρα ἐξήτασε καὶ προεφήτευσεν ἐν κοινῷ ἅπασι Μιλησίοις, ὅτι νὺξ ἔσοιτο ἐν ἡμέρᾳ καὶ δύσεται ἅμα ὁ ἥλιος καὶ ὑποκεύσεται ἡ σελήνη, ὥστε ἀποτέμνεσθαι αὐγὴν καὶ τὰς ἀκτῖνας·* — „Thales „befasste sich erst später und gegen das Greisenalter hin mit Natur„kunde, beobachtete den Himmel, musterte die Sterne und sagte „öffentlich allen Miletern voraus, dass am Tage Nacht eintreten, die „Sonne sich verbergen und der Mond sich davorlegen werde, so dass „ihr Glanz und ihre Lichtstrahlen aufgefangen werden würden." — Er scheint demnach nicht vor dem 45ten bis 50ten Lebensjahre nach Milet zurückgekehrt zu sein, also etwa zwischen 595 und 590 v. Chr., eine Annahme, die hinreicht, alle über seine spätere Thätigkeit uns überlieferten Nachrichten mit den damaligen Zeitverhältnissen in Uebereinstimmung zu bringen.

Bei der Rückkehr in die Vaterstadt fand Thales die letztere noch unter der Herrschaft des Thrasybulos, und erhielt somit fürs Erste wohl nur wenig Gelegenheit, sich durch politische oder auch nur communale Thätigkeit hervorzuthun. Als einen mit mancherlei werthvollem Wissen ausgerüsteten Mann mochten ihn seine Mitbürger wohl anerkennen; von dem wahren geistigen Gehalte aber, der ihm inwohnte, hatten sie schwerlich einen Begriff. Namentlich scheint ihn die fortgesetzte Pflege seiner Studien in Miscredit gesetzt zu haben, da man nicht zu fassen vermochte, wie ein verständiger Mann Dinge treiben könne, die gar keinen materiellen Gewinn abwerfen. Um seinen Landsleuten die Nützlichkeit seiner Studien an einem schlagenden Beispiele darzulegen, nahm er nach Aristoteles Erzählung (polit. I. c. 11. ed. Becker II. pag. 1259a) zu folgendem Mittel seine Zuflucht. Er pachtete, als er einst im Frühjahre eine reiche Oelernte voraussah, um ein geringes Geld sämmtliche Oelpressen in Milet und auf Chios, da Niemand vorhanden war, der ihn in die Höhe trieb. Als aber die Olivenernte begann und nun viele Pressen auf einmal gesucht wurden, vermiethete er sie wiederum zu hohen Preisen und machte damit einen recht ansehnlichen Gewinn.

§ 26. Ob dieser *ad hominem* geführte Beweis von der Nützlichkeit der Naturforschung auf seine Mitbürger einen bedeutenden Eindruck gemacht hat, lassen wir dahingestellt sein. Sein Ansehen und der Ruf seiner überlegenen Einsicht erhob sich aber mit *einem* Male durch das Eintreffen der von ihm vorher verkündigten grossen Sonnenfinsterniss, welche am 28. Mai 585 v. Chr. stattfand, und bei der die Curve der totalen Verfinsterung nur wenige Meilen nördlich von Milet vorüberging, so dass die Finsterniss in Milet selbst beinahe total gesehen ward. — Eine Sonnenfinsterniss, selbst wenn sie weit unbedeutender war, als die hier in Frage stehende, erschien in jenen Jahrhunderten als ein so merkwürdiges, aber auch so beängstigendes Ereigniss, das Derjenige, welcher ein solches sogar vorauszusagen vermochte, von den Mitlebenden wohl als ein, die gewöhnliche Menschheit weit überragender Weiser angesehen werden konnte.

Dass Thales jene Finsterniss wirklich *vorausgesagt* hat, darüber ist das gesammte Alterthum einstimmig. Der früheste Berichterstatter über dieses Ereigniss, Herodotos, giebt den Sachverhalt einfach folgendermassen an (I. c. 74): *ἐν δὲ καὶ νυκτομαχίην ἐποιήσαντο· διαφέρουσι δέ σφι ἐπὶ ἴσης τὸν πόλεμον, τῷ ἕκτῳ ἔτεϊ συμβολῆς γενομένης συνήνεικε ὥστε τῆς μάχης συνεστεώσης τὴν ἡμέρην ἐξαπίνης νύκτα γένεσθαι. τὴν δὲ μεταλλαγὴν ταύτην τῆς ἡμέρης Θαλῆς ὁ Μιλήσιος τοῖς Ἴωσι προσηγόρευσε ἔσεσθαι, οὖρον προθέμενος ἐνιαυτὸν τοῦτον, ἐν ᾧ δὴ καὶ ἐγένετο ἡ μεταβολή.* — „Und ‚einst kam es auch zu einem Nachtkampfe. Indem sie nämlich (Meder und Lyder) den Krieg auf beiden Seiten gleich fortführten, geschah es bei einem Treffen im sechsten Jahre, dass mit Beginn der Schlacht der Tag plötzlich zu Nacht ward. Diese Umwandlung des Tages hatte Thales, der Mileter, den Ioniern vorausgesagt, mit Vorausbestimmung des Jahres, in welchem die Umwandlung erfolgte.“ — Es ergiebt sich hieraus, dass die Verkündigung des Thales sich nicht, wie die unserer heutigen Astronomen, auf Tag und Stunde erstreckt hat, wie man vielleicht aus den Angaben späterer Schriftsteller schliessen könnte; sie war vielmehr, da sie nur das Jahr des Ereignisses bestimmte, eine sehr reservirte und bleibt es selbst durchaus zweifelhaft, ob Thales die Sichtbarkeit der Erscheinung für Milet behauptet hat oder selbst zu behaupten vermochte. Allein der wirkliche Eintritt der Finsterniss am hellen Tage und die allgemeine Sichtbarkeit derselben auf der ganzen Westküste Kleinasiens war gewiss hinlänglich, den Ruf des Mannes, der dies voraus verkündigt hatte, weit über alle Zeitgenossen zu erheben und durch alle Länder Griechischer Zunge zu verbreiten.

Es ist daher gewiss eine wohlbegründete Nachricht des Diogenes Laertios (vgl. § 23.), dass man unter dem Archontat des Damasias (zwischen 585 und 583 v. Chr.) angefangen habe, Thales als „Weisen“ zu bezeichnen.

§ 27. Von dieser Zeit an scheint Thales in seiner Vaterstadt auch einen nicht unbedeutenden politischen Einfluss ausgeübt zu haben, namentlich als nach des Tyrannen Thrasybulos Tode jene langdauernden Unruhen in der Bürgerschaft ausbrachen, welche Milet dermassen schwächten, dass es sich der Oberhoheit der Lydischen Könige unterwerfen musste. Indessen mochte er sich doch von der politischen Thätigkeit bald wieder zurückgezogen haben; wenigstens berichtet Diogenes Laert. (I, c. 1. n. 2. — Huebn. pag. 14): *μετὰ τὰ πολιτικὰ τῆς φυσικῆς ἐγένετο θεωρίας* — „von den politischen „Geschäften wendete er sich der Naturbetrachtung zu.“ Es sind wohl vornehmlich astronomische Beobachtungen, Auf- und Untergänge der Gestirne, Monds- und Sonnenlauf, denen er seine Aufmerksamkeit zuwendete. In diese Zeit seines Greisenalters gehört die von Platon (Theaitetos c. 24) erwähnte Anekdote, dass er, des Abends den Himmel beobachtend, in einen Graben gefallen sei, wobei die alte Sclavin, die ihm als Führerin diente, in die Worte ausgebrochen: „was „am Himmel vorgeht, willst du erspähen, und siehst nicht einmal, was zu deinen Füssen liegt.“ — Hochbetagt erlebte Thales noch den Sturz des Lydischen Reiches, nachdem er durch seinen staatsklugen Rath die Verfeindung seiner Vaterstadt mit dem siegreichen Perserkönig abgewendet hatte.

Wie vereinzelt übrigens der Begründer des wissenschaftlichen Lebens der Griechischen Nation unter seinen Zeitgenossen dastand, und wie wenig selbst die bedeutendsten Männer jener Tage, die mit Thales zugleich unter der Benennung der „sieben Weisen“ zusammengefasst werden, von rein geistiger, auf das Erkennen gerichteter Thätigkeit einen Begriff hatten, geht aus der Aeusserung des Plutarchos hervor (vit. Solon. c. 3): *Καὶ ὅλως ἔοικεν ἡ Θάλεω μόνου σοφία τότε περαιτέρω τῆς χρείας ἐξικέσθαι τῇ θεωρίᾳ· τοῖς δὲ ἄλλοις ἀπὸ τῆς πολιτικῆς τοὔνομα τῆς σοφίας ὑπῆρξε* — „überhaupt war „Thales, wie es scheint, der einzige Weise jener Zeit, der in seinen „Forschungen über das unmittelbare Bedürfniss hinausging; den Uebri„gen wurde wegen ihrer politischen Einsicht der Beiname der Wei„sen gegeben.“

§ 28. Wenden wir uns nun zu dem, was über die wissenschaftlichen Leistungen des Thales uns noch überliefert ist, und zwar zunächst zu seinen geometrischen Entdeckungen, so meldet Proklos in seinem Commentar zum ersten Buche der Euklidischen Elemente darüber Folgendes:

a) Proklos ed. Basil. pag. 79. – Baroc. pag. 171:
Τοῦτο τοίνυν τὸ θεώρημα δείκνυσιν, ὅτι δύο εὐθείων ἀλλήλαις τεμνουσῶν αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ἴσαι εἰσιν. εὑρήμενον μὲν ὥς φησιν Εὔδημος ὑπὸ Θαλοῦ πρώτον. — „Dies Theorem „lehrt, dass wenn zwei Gerade sich schneiden, die am Scheitel „liegenden Winkel gleich sind. Erfunden ist dies Theorem, wie „Eudemos angiebt, zuerst von Thales."

b) Ibidem ed. Basil. pag. 67. — Baroc. pag. 143.
Κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὖν καὶ ἡμᾶς δύνατον ἐν τῷ ἑνὶ τούτῳ παρὰ τὴν λῆψιν τὰ δύο τρίγωνα θεωροῦντας ἀποδεικνῦναι τὴν ἰσότητα τῶν πρὸς τῷ βάσει γωνίων. Τῷ μὲν Θαλῇ τῷ παλαίῳ πολλῶν τε ἄλλων εὑρησέως ἕνεκα καὶ τούτου τοῦ θεωρήματος χάρις. — „Auf dieselbe Weise ist es möglich, dass wir, indem „wir in dem einen Dreiecke nach Annahme zwei erblicken, die „Gleichheit der Winkel an der Grundlinie erweisen. Dem alten „Thales gebührt, wie für die Erfindung so vieles Anderen, so „auch für die dieses Theoremes Dank."

c) Ibidem ed. Basil. pag. 92. — Baroc. pag. 212:
Der Satz, dass ein Dreieck durch eine Seite und die beiden an ihr liegenden Winkel bestimmt ist, rührt von Thales her. Proklos sagt nämlich: *Εὔδημος δὲ ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς ἱστορίαις εἰς Θαλῆν τοῦτον ἀνάγει τὸ θεώρημα. τὴν γὰρ τῶν ἐν θαλάττῃ πλοίων ἀπόστασιν, δι' οὗ τρόπου φασὶν αὐτὸν δεικνῦναι, τούτῳ προχρῆσθαι φησὶν ἀναγκαῖον.* — „Eudemos führt „in seiner Geschichte der Geometrie dieses Theorem auf Thales „zurück. Denn bei der Art, auf welche er die Entfernung der „Schiffe auf dem Meere gefunden haben soll, sagt er, bedürfe „er dieses Theoremes ganz nothwendig."

d) Ibidem ed. Basil. pag. 44. — Baroc. pag. 89.
Τὸ μὲν οὖν διχοτομεῖσθαι τὸν κύκλον ὑπὸ τῆς διαμέτρου πρῶτον Θαλῆν ἐκεῖνον ἀποδεῖξαι φασίν. — „Dass der Kreis von „dem Durchmesser halbirt wird, soll zuerst jener Thales bewie„sen haben." Endlich erwähnt noch:

e) Diogenes Laertios I, c. 1. n. 3. — Huebn. pag. 16:
Παρά τε Αἰγυπτίων γεωμετρεῖν μαθόντα φησὶ Παμφίλη πρῶτον καταγράψαι κύκλον τὸ τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ θῦσαι βοῦν. οἱ δὲ Πυθαγόραν φασίν, ὧν ἐστιν Ἀπολλόδωρος ὁ λογιστικός. — „Pamphile erzählt, dass, als er bei den Ae„gyptern Geometrie studirte, er zuerst dem Kreise das recht„winklige Dreieck eingeschrieben und deshalb einen Stier geopfert „habe. Andere berichten dies von Pythagoras, unter denen „auch Apollodoros der Logistiker sich befindet."

§ 29. Das Vorstehende ist Alles, was von eigentlich geometrischen Entdeckungen des Thales berichtet wird. Es sind, wie man sieht, einige der ersten und elementarsten Sätze, ohne welche eine theoretische Geometrie gar nicht gedacht werden kann, die aber auch für die geringste praktische Anwendung der letzteren, namentlich für die Reisskunst, geradezu unentbehrlich sind. Weit entfernt daher, Thales als ihren Erfinder betrachten zu können, müssen wir vielmehr ohne Weiteres zugestehen, dass sie Aegyptisches Eigenthum sind. Denn sollen die Aegypter irgend welche geometrische Kenntnisse besessen haben, so *müssen* ihnen die angeführten Sätze geläufig gewesen sein. Sie sind dem Thales ebenso mitgetheilt worden, wie späterhin dem Pythagoras, daher denn auch der unter *e*) aufgeführte Satz von Einigen dem letzteren zugeschrieben wird. Dass beide Mathematiker von späteren Schriftstellern als die *Erfinder* dessen bezeichnet werden, was sie ihren Schülern lehrten, hat nichts Befremdendes. Weder Thales noch Pythagoras haben geometrische Schriften der Oeffentlichkeit übergeben, sondern sich begnügt, ihr Wissen durch mündliche Mittheilung zu verbreiten. Es ist aber sehr begreiflich, dass sie hierbei ihre Aufmerksamkeit ausschliesslich auf die Darstellung und Erörterung des Gegenstandes selbst gerichtet und sich nicht damit werden aufgehalten haben, ihren Zuhörern weitläufig auseinander zu setzen, wie viel von dem Vorgetragenen ihnen selbst und wie viel den Aegyptischen Priestern angehörte. Für ihre Schüler blieben daher die Lehrer die Quelle und somit die Erfinder des mitgetheilten Wissens.

Dass Thales, neben den oben aufgeführten Sätzen, für welche er als Erfinder genannt wird, noch eine Reihe anderer, gleich elementarer, besitzen musste, ist selbstverständlich und wird durch den Schluss der oben unter *b*) citirten Stelle des Proklos sogar ausdrücklich bestätigt. So konnten ihm namentlich die einfachsten Sätze von den Parallelen, von den gleichseitigen, gleichschenkligen und ungleichseitigen Dreiecken, ingleichen von den Parallelogrammen schwerlich unbekannt sein. Ob er nun aus eigner Einsicht das von den Aegyptern überkommene Material bedeutend erweitert, namentlich in den Beweisen vereinfacht oder schärfer gefasst hat, lässt sich nicht entscheiden. Die in § 19. mitgetheilte Liste der Geometer vor Euklides sagt zwar: „Vieles entdeckte er selbst, von Vielem aber über„lieferte er die Anfänge seinen Nachfolgern; das Eine machte er „allgemeiner, das Andere mehr sinnlich fassbar;“ — und darnach könnte man glauben, dass dem Thales um die Fortbildung des aus Aegypten mitgebrachten Wissens ein nicht unbedeutendes Verdienst zukomme. Da indessen unser Gewährsmann Proklos oder Eudemos zwischen dem eignen Wissen des Thales und dem ihm aus der

Fremde zugekommenen gar *keinen* Unterschied macht, so bleibt es doch sehr zweifelhaft, ob die selbständigen Leistungen unseres Geometers wirklich von grosser Bedeutung sind. Und wenn wir nun auch aus der in § 8. citirten Stelle des Geminus ersehen, dass die Geometer *vor* Pythagoras, also Thales und seine Schüler, im Verallgemeinern der Theoreme und deren Beweisen noch nicht einmal soweit gelangt waren, dass sie den Satz von der Winkelsumme des Dreiecks aus einem dreifachen auf einen einfachen zu reduciren vermochten, so sind wir wohl zu dem Schlusse berechtigt, dass es mit der von Eudemos an Thales gerühmten Verallgemeinerung geometrischer Wahrheiten nicht allzuviel auf sich haben kann.

Das Einzige, was uns eine von Thales selbst herrührende Vereinfachung zu sein scheint, ist der oben unter *b*) angedeutete Beweis der Gleichheit der Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks, der darauf hinausläuft, dass das letztere, wenn es um seine Grundlinie umgewendet wird, wiederum sich selbst deckt. Hier mögen die Aegypter die Sache viel umständlicher angefasst haben, wie selbst Euklides in dem Beweise dieses Satzes noch gewaltig breit wird.

§ 30. Neben den bisher besprochenen Erfindungen in der Theorie werden dem Thales noch die Lösungen zweier Aufgaben der praktischen Geometrie zugeschrieben, durch welche er bei seinen Zeitgenossen Ruhm eingeerntet habe. Die erste derselben ist die im § 28. unter *c*) angeführte Ermittelung des Abstandes der Schiffe auf dem Meere von dem Hafen von Milet. Die von Proklos citirte Stelle aus Eudemos zeigt, dass Letzterer die Art und Weise, auf welche Thales die Aufgabe lösete, genau kannte und ihm gerade der angewendeten Methode halber die Kenntniss des Euklidischen Lehrsatzes I, 26 zuschrieb. Dass Thales das Resultat nur durch Construction erhalten konnte, ist wohl klar und wir haben also hier einen Fall von „Reisskunst", wie sie in der ersten Zeit der Griechischen Geometrie geübt ward. — Zweifelhaft bleibt nur, ob das hierbei gebrauchte Dreieck ein schiefwinkliges oder nicht vielmehr ein rechtwinkliges war. Die Anwendung des ersteren würde nothwendig *zwei* Beobachter erfordert haben, die an den Endpunkten einer bereits bekannten Standlinie zu derselben Zeit die Winkel massen, welche die Standlinie mit der Geraden bildeten, nach welcher das Schiff von den Endpunkten der ersteren aus gesehen wurde. Es ist aber sehr zu bezweifeln, dass in jenen Zeiten die Mittel zu einer derartigen Beobachtung vorhanden waren, und scheint deshalb die Anwendung des rechtwinkligen Dreiecks die wahrscheinlichere zu sein. Bei ihr hatte Thales nur nöthig, einen ziemlich hohen Standpunkt über dem Meeresspiegel auszusuchen, und von ihm aus den Winkel zu beobachten, den die vom Beobachtungsorte nach dem Schiffe gezogene Gerade mit der Lothlinie einschloss. War vorher die Höhe des Standpunktes über dem Meere festgestellt, so war das Dreieck durch diese Höhe und jenen Winkel gegeben. Bei dieser Methode bedurfte es nur eines einzigen Beobachters und das Resultat konnte augenblicklich erhalten werden, worauf doch bei der vorliegenden Aufgabe alles ankam. Denn wenn nach der ersten Methode beide Beobachter von den Endpunkten der Standlinie aus erst zusammenkommen mussten, um ihre Winkel einander mitzutheilen und die erforderliche Construction vorzunehmen, so hatte das Schiff mittlerweile seine Lage und Entfernung vom Hafen so stark verändert, dass das Resultat keinen Werth mehr besass. Freilich lieferte diese zweite Methode nur auf kürzere Entfernungen erträgliche Resultate; aber auf solche kurze Distanzen war auch die Aufgabe durch die Natur selbst eingeschränkt, da das am Meeresstrande gelegene Milet auf dem Meere nur einen Gesichtskreis von sehr mässigem Durchmesser umfassen konnte.

Ist aber diese Methode, eine unbekannte Entfernung zu messen, wirklich die von Thales gebrauchte, so regt sich alsbald auch der Verdacht, dass wir in ihr nicht eine Erfindung des Letzteren, sondern eine bereits lange vor ihm von den Aegyptischen Geometern erdachte Anwendung des rechtwinkligen Dreiecks vor uns haben. Die geringen Erfordernisse der Methode deuten ebenso wie die Beschränktheit der Fälle, in denen sie anwendbar ist, auf Unbeholfenheit, auf Kindheit der Messkunst hin, die nach den nächsten, wenn auch beschränkten Mitteln greift, eine Aufgabe zu lösen, und erst ganz allmälig zu umfassenderen Methoden fortschreitet.

§ 31. Genau zu demselben Endresultate gelangen wir bei Erörterung der zweiten praktischen Aufgabe, deren Lösung dem Thales zugeschrieben wird, nämlich der Bestimmung der Höhe der Pyramiden durch die Länge ihres Schattens. Der älteste Schriftsteller, der dieses Factums erwähnt, ist Hieronymos von Rhodos, ein Schüler des Aristoteles, aus dessen „Denkwürdigkeiten“ Diogenes Laertios die betreffende Notiz geschöpft hat. Letzterer sagt (I, c. 1. n. 6. — Huebn. pag. 17): *ὁ δὲ Ἱερώνυμος καὶ ἐκμετρῆσαί φησιν αὐτὸν τὰς πυραμίδας, ἐκ τῆς σκιᾶς παρατηρήσαντα ὅτε ἡμῖν ἰσομεγέθεις εἰσί.* — „Hieronymos berichtet, er (Thales) habe die Pyramiden „gemessen mittelst des Schattens, indem er beobachtete, wenn (der „unsrige) mit uns von gleicher Grösse ist.“ — Es leuchtet von selbst ein, dass diese Angabe nichts enthält, was geometrisch besonders bemerkenswerth wäre. Das hier erwähnte Verfahren ist eine ganz einfache Anwendung der Haupteigenschaft des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks und erfordert so wenig Scharfsinn, dass man sich fest überzeugt halten kann, nicht eine Erfindung des Thales vor sich zu haben, sondern vielmehr eine von den Aegyptischen Geometern gebrauchte uralte Methode der Höhenmessung. Dem Thales ist dieselbe von seinen Landsleuten zugeschrieben worden, weil er es war, durch den sie mit ihr bekannt gemacht wurden. Die Anwendung dieser Art Höhenmessung auf die Pyramiden ist aber jedenfalls entweder eine spätere Ausschmückung oder eine Verwechselung dieser weltbekannten Bauwerke mit den im Auslande weit weniger bekannten Obelisken.

Die erwähnte Methode der Höhenmessung erfordert, dass die Länge des Schattens, den ein Körper bei einer Sonnenhöhe von 45^{0} über dem Horizonte wirft, auf einer durch seinen Fuss gelegten horizontalen Ebene seiner *ganzen* Ausdehnung nach gemessen werden könne, also von dem Fusspunkte des den Schatten werfenden Höhenlothes des Körpers bis zur Schattenspitze. Dass dies Verlangen bei einem Körper von nur kleiner Grundfläche, z. B. einem Baum, einem Obelisken u. s. w. recht wohl ausführbar ist, leuchtet ein; ebenso aber auch, dass es bei einer Pyramide ganz unbrauchbar wird. Denn bei einer solchen liegt jener Fusspunkt tief im Innern des mächtigen Körpers und bleibt somit dem Messenden ganz unzugänglich. — Jedenfalls ist es daher gerechtfertigt, wenn die Höhenmessung der „Pyramiden" hier ganz aus dem Spiele gelassen und dem Thales nur die Kenntniss der „Methode" dieser Art von Messung zugeschrieben wird. Darauf scheint auch die Aeusserung des Plinius hinzudeuten, welcher (hist nat. XXXVI, 12, 17) angiebt: *Mensuram altitudinis earum (sc. pyramidarum) omniumque similium deprehendere invenit Thales Milesius, umbram metiendo, qua hora par esse corpori solet.*

§ 32. Die spätere Zeit hat sich nun der einfachen Erzählung des Hieronymos bemächtigt und dieselbe offenbar weiter ausgesponnen. Es ist Plutarchos, der im Gastmahl der sieben Weisen den Niloxenos sich mit Thales über den Aegyptischen König Amasis folgendermassen unterhalten lässt: *ἐπεὶ σοῦ γε καὶ τὰ ἄλλα θαυμάζει, καὶ τῆς πυραμίδος τὴν μέτρησιν ὑπερφυῶς ἠγάπησεν, ὅτι πάσης ἄνευ πραγματείας καὶ μηδενὸς ὀργάνου δεηθεὶς, αλλὰ τὴν βακτηρίαν στήσας ἐπὶ τῷ πέρατι τῆς σκιᾶς, ἣν ἡ πυραμὶς ἐποίει, γενομένων τῇ ἐπαφῇ τῆς ἀκτῖνος δυοῖν τριγώνων, ἔδειξας, ὃν ἡ σκία πρὸς τὴν σκιὰν λόγον εἶχε, τὴν πυραμίδα πρὸς τὴν βακτηρίαν ἔχουσαν.* — „Obschon er dich auch um anderer Dinge willen bewundert, so schätzt „er doch über Alles die Messung der Pyramiden, dass du nämlich „ohne alle Mühe und ohne eines Instrumentes zu bedürfen, sondern „indem du nur den Stock in den Endpunkt des Schattens stellst, den „die Pyramide wirft, aus den durch die Berührung des Sonnenstrahles „entstehenden zwei Dreiecken zeigest, dass der eine Schatten zum „andern das (nämliche) Verhältniss hat, wie die Pyramide zum „Stock."

Man sieht hier ganz offenbar, wie das fragliche Factum nach Massgabe der wachsenden geometrischen Kenntnisse um- und fortgebildet worden ist. Nach des Hieronymos einfachem Berichte wartet Thales bei seiner Höhenmessung den Moment ab, in welchem die Schattenlänge des Beobachters der eignen Länge oder Höhe desselben gleich ist, um den Augenblick festzustellen, in welchem die Sonne gerade 45° hoch über dem Horizonte steht; und in diesem Augenblicke misst er die Schattenlänge des Gegenstandes, dessen Höhe gefunden werden soll. In späteren Jahrhunderten erkannte man in Folge der weiter fortgeschrittenen Geometrie, dass man nicht nöthig habe bei derartigen Messungen den Zeitpunkt abzuwarten, in welchem die Sonne genau die Höhe von 45° am Himmel erreicht (was ja überhaupt nur zweimal des Tages geschehen kann), sondern dass man in jedem Augenblicke das verlangte Resultat zu erhalten vermag, wenn man die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke zu Hülfe nimmt. Wenn dies für die Zeit, in welcher Plutarchos schrieb, eine ganz verständige Ueberlegung war, so gewinnt man eben daraus, auch abgesehen von den Zeugnissen des Hieronymos und Plinius, die Ueberzeugung, dass die zweite Art, die Aufgabe zu lösen, *nicht* diejenige ist, welche dem Thales gelehrt ward. Wir wollen kein so grosses Gewicht darauf legen, dass vor Pythagoras auch nicht die Spur einer Bekanntschaft Griechischer Geometer mit den Proportionen nachgewiesen werden kann; allein schon die natürliche Entwickelung alles menschlichen Wissens bringt es mit sich, dass zuerst immer die einfachsten, wenn auch noch sehr beschränkten, Methoden gefunden werden, welche zu Lösung einer Aufgabe führen, während die allgemeineren und umfassenderen jenen weit später nachfolgen.

Man kann daher keinesweges Montucla beistimmen, der (hist. d. math. Vol. I, pag. 103) die Angabe des Hieronymos für ungenau und auf mangelhafter Einsicht beruhend erklärt, dagegen in der anekdotenartigen Erzählung des Plutarchos den wahren Charakter der Leistung des Thales erhalten glaubt. So wie die ganze Staffage der Erzählung bei Plutarchos rein dem Gebiete des Romans angehört, so ist auch offenbar das Mathematische in derselben erfunden, und zwar erfunden mit Zuhülfenahme derjenigen geometrischen Kenntnisse, die in späteren Jahrhunderten einem Schriftsteller zu Gebote standen. Doch ist es auch möglich, dass die Methode des Thales in der Folge auf die angegebene Weise fortgebildet worden war, und Plutarchos aus Unkenntniss die letztere mit der ursprünglichen verwechselt hat.

§ 33. Es bleiben jetzt nur noch die dem Thales zugeschriebenen astronomischen Entdeckungen zu besprechen, was hier nicht umgangen werden kann, theils des engen Zusammenhanges halber, in welchem dieselben mit der Geometrie stehen, theils aber auch, weil dieser Gegenstand deutlicher als alles Andere die unmittelbare Abhängigkeit der ganzen, durch Thales begonnenen, wissenschaftlichen Entwickelung von der der Aegypter an den Tag legt. Die wichtigsten der hieher gehörigen Stellen aus den Alten sind die nachfolgenden:

a) Theon. Smyrn. lib. de astron. (ed. Martin pag. 322):

Εὔδημος ἱστορεῖ ἐν ταῖς ἀστρολογίαις ὅτι Οἰνοπίδης εὗρε πρῶτος τὴν τοῦ ζωδιακοῦ διάζωσιν καὶ τὴν τοῦ μεγάλου ἐνιαυτοῦ περίστασιν. Θαλῆς δὲ ἡλίου ἔκλειψιν καὶ τὴν κατὰ τὰς τροπὰς αὐτοῦ περίοδον, ὡς οὐκ ἴση ἀεὶ συμβαίνει. Ἀναξίμανδρος δὲ ὅτι ἐστὶν ἡ γῆ μετέωρος καὶ κεῖται[1]) *περὶ τὸ τοῦ κόσμου μέσον· Ἀναξιμένης δὲ ὅτι ἡ σελήνη ἐκ τοῦ ἡλίου ἔχει τὸ φῶς καὶ τίνα ἐκλείπει τρόπον· οἱ δὲ λοιποὶ ἐπὶ ἐξευρημένοις τούτοις ἐπεξεῦρον ἕτερα· ὅτι οἱ ἀπλανεῖς κινοῦνται περὶ τὸν διὰ τῶν πόλων ἄξονα μένοντα, οἱ δὲ πλανώμενοι περὶ τὸν τοῦ ζωδιακοῦ, πρὸς ὀρθὰς ὄν αὐτῷ ἄξονα, ἀπέχουσι δὲ ἀλλήλων ὅ τε τῶν ἀπλανῶν καὶ τῶν πλανωμένων ἄξων πεντεκαιδεκαγώνου πλευράν, ὅ ἐστι μοῖραι κδ.*

Eudemos berichtet in seiner Astronomie, dass Oinopides zuerst den Gürtel des Thierkreises und die Beschaffenheit des grossen Jahres gefunden habe; Thales die Sonnenfinsternisse und den Sonnenlauf zwischen den Wenden, dass er nicht immer gleichlang sei; Anaximander, dass die Erde ein Weltkörper sei und im Mittelpunkte der Welt liege; Anaximenes, dass der Mond von der Sonne sein Licht erhalte, und auf welche Weise er verfinstert werde. Die Uebrigen brachten zu diesen Entdeckungen andere hinzu, dass z. B. die Fixsterne sich um eine durch die Weltpole gehende Achse drehen, die Planeten dagegen um eine auf dem Thierkreise senkrecht stehende Achse, und dass die Achse der Fixsterne und die der Planeten um die Seite des Fünfzehneckes von einander abstehen, was 24 Grade ausmacht.

b) Clem. Alex. Strom. I, c. 14. pag. 130 Sylb. — pag. 354 Pott.

Θαλῆν δὲ Εὔδημος ἐν ταῖς ἀστρολογικαῖς ἱστορίαις τὴν γενομένην ἔκλειψιν τοῦ ἡλίου προειπεῖν φησι, καθ' οὓς χρόνους συνῆψαν μάχην πρὸς ἀλλήλους Μῆδοι τε καὶ Λυδοί, βασιλεύοντος Κυαξάρους μὲν τοῦ Ἀστυάγους πατρὸς Μήδων, Ἀλυάττου δὲ τοῦ Κροίσου Λυδῶν· συνάδει δὲ αὐτῷ καὶ Ἡρόδοτος ἐν τῇ πρώτῃ. εἰσὶ δὲ οἱ χρόνοι ἀμφὶ τὴν πεντεκοστὴν Ὀλυμπιάδα.

Eudemos erzählt in der Geschichte der Astronomie, dass Thales die Sonnenfinsterniss vorhergesagt habe, welche um die Zeit stattfand, als Meder und Lyder mit einander die Schlacht begannen, indem Kyaxares, des Astyages Vater, über die Meder, und Alyattes, des Kroisos Vater, über die Lyder herrschte. Damit stimmt auch Herodotos im ersten Buche überein. Die Zeit des Ereignisses fällt um die fünfzigste Olympiade.

---

1) Der Text hat *κινεῖται* statt *κεῖται*, was offenbar falsch ist, da zu Anaximandros Zeit von einer Umdrehung der Erde um ihre Axe noch gar nicht die Rede war.

c) Diogenes Laertios (I, c. 1. n. 2. — Huebn. pag. 15):

Δοκεῖ δὲ κατά τινας πρῶτος ἀστρολογῆσαι καὶ ἡλιακὰς ἐκλείψεις καὶ τροπὰς προειπεῖν, ὥς φησιν Εὔδημος ἐν τῇ περὶ τῶν ἀστρολογουμένων ἱστορίᾳ· ὅθεν αὐτὸν καὶ Ξενοφάνης καὶ Ἡρόδοτος θαυμάζει. .... πρῶτος δὲ καὶ τὴν ἀπὸ τροπῆς ἐπὶ τροπὴν πάροδον εὗρε, καὶ πρὸς τὸ τοῦ ἡλίου μέγεθος τὸ τοῦ σεληναίου ἑπτακοσιοστὸν καὶ εἰκοστὸν μέρος ἀπεφήνατο κατά τινας. πρῶτος δὲ καὶ τὴν ὑστέραν τοῦ μηνὸς τριακάδα εἶπε.

Nach Einigen soll er zuerst Astronomie getrieben, und Sonnenfinsternisse und Sonnenwenden vorausgesagt haben, wie Eudemos in der Geschichte der Astronomie angiebt; weshalb ihn auch Xenophanes und Herodotos bewundern. .... Er zuerst fand auf den Weg der Sonne von einer Wende zur anderen und ermittelte, nach der Angabe Einiger, dass gegen die Grösse der Sonne die des Mondes der 720te Theil sei. Den letzten Tag des Monates nannte er zuerst den dreissigsten.

d) Ibid. (I, c. 1. n. 6. — Huebn. pag. 17):

Τὰς δὲ ὥρας τοῦ ἐνιαυτοῦ φασιν αὐτὸν εὑρεῖν καὶ εἰς τριακοσίας ἑξήκοντα πέντε ἡμέρας διελεῖν.

Die Zeitbestimmung des Jahres soll er gefunden und auf 365 Tage festgesetzt haben.

e) Achilles Tat. isag. in Arati phaen. (Petav. Uran. p. 123)[1]):

Ὅτι δὲ ἄλλοι ἄλλο εὗρον ἐκ τοῦ καὶ Θαλῆν τὴν μικρὰν ἅμαξαν εὑρηκέναι δῆλον· ὁ γοῦν Καλλίμαχος φησίν·

ἔπλευσεν εἰς Μίλητον· ἦν γὰρ ἡ νίκη
Θάλητος, ὅς τὰ ἄλλα δεξίος γνώμῃ,
καὶ τῆς ἁμάξης λέγεται σταθμήσασθαι
τοὺς ἀστερίσκους, ᾗ πλείουσι Φοίνικες.

Dass die Einen Dies, Andere Jenes erfunden haben, ist auch dadurch klar, dass Thales den kleinen Wagen aufgebracht hat. Es sagt nämlich Kallimachos:

Er schiffte nach Milet; der Sieg blieb
Dem Thales, auch sonst an Verstand ruhmreich;
Der auch des Wagens Gestirne bestimmt
Haben soll, nach denen die Phöniker steuern.

§ 34. Ausser diesen Notizen, die sämmtlich auf Eudemos zurückgehen und daher volle Glaubwürdigkeit beanspruchen, und dem Citate aus Kallimachos, welches ebenfalls keinem Zweifel Raum giebt, liefert uns Plutarchos noch eine Reihe von Angaben, die, weil sie keine Quelle nennen, schon weniger Gewicht in Anspruch nehmen können, gleichwohl aber von späteren Schriftstellern, namentlich vom Stobaios mehrfach wiederholt werden. Da wir auf diese Stellen später wiederholt zurückkommen werden, so mögen sie hier einen Platz finden.

a) Plutarchos de plac. philos. II, c. 12:

---

1) Dasselbe Fragment des Kallimachos erwähnt, nur abgekürzt Diog. Laert. I. c. 1. n. 2. — Huebn. pag. 15.

Θαλῆς, Πυθαγόρας, οἱ ἀπ' αὐτοῦ μεμερίσθαι τὴν τοῦ πάντος οὐρανοῦ σφαῖραν εἰς κύκλους πέντε, οὕςτινας προσαγορεύουσι ζώνας· καλεῖται δὲ ὁ μὲν αὐτῶν ἀρκτικός τε καὶ ἀειφανής· ὁ δὲ θερινὸς τροπικός· ὁ δὲ ἰσημερινός· ὁ δὲ χειμερινὸς τροπικός· ὁ δὲ ἀνταρκτικός τε καὶ ἀφανής· λοξὸς. δὲ τοῖς τρισὶ μέσοις ὁ καλούμενος ζωδιακὸς ὑποβέβληται, παρεπιψαύων τῶν μέσων τριῶν· πάντας δ' αὐτοὺς ὁ μεσημβρινὸς πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τῶν ἀρκτῶν ἐπὶ τὸ ἀντίξουν τέμνει. Πυθαγόρας πρῶτος ἐπινενοηκέναι λέγεται τὴν λόξωσιν τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου, ἥντινα Οἰνοπίδης ὁ Χῖος ὡς ἰδίαν ἐπίνοιαν σφετερίζεται.

Thales, Pythagoras und dessen Schüler haben die ganze Himmelskugel in fünf Kreise getheilt, die sie Zonen nennen. Unter diesen heisst der erste der nördliche, arktische Kreis, der immer sichtbar ist; der zweite der Sommer-Wendekreis; der dritte der Kreis der Tag- und Nachtgleiche; der vierte der Winterwendekreis, der fünfte der antarktische, der stets unsichtbar bleibt. Schief ist zwischen die 3 mittleren der sogenannte Thierkreis eingelegt, der die drei mittleren trifft. Sie alle schneidet der Mittagskreis senkrecht vom Nordpol bis zu dem entgegengesetzten. Pythagoras soll zuerst die Schiefe des Thierkreises erkannt haben, die dann Oinopides von Chios als eigne Entdeckung in Anspruch nahm.

b) Ibid. II. c. 27:

Θαλῆς πρῶτος ἔφη ἐκλείπειν τὸν ἥλιον, τῆς σελήνης αὐτὸν ὑποτρεχούσης κατὰ κάθετον, οὔσης φύσει γεώδους· βλέπεσθαι δὲ τοῦτο κατοπτρικῶς ὑποτιθεμένῳ τῷ δίσκῳ.

Thales lehrte zuerst, die Sonne werde verfinstert, wenn der Mond, der erdartiger Natur sei, senkrecht unter ihr hinweggeht. Dies sehe man deutlich, wenn man ein Gefäss (voll Wasser) wie einen Spiegel darunter stelle.

Ibid. II. c. 28:

Θαλῆς καὶ οἱ ἀπ' αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ ἡλίου φωτίζεσθαι τὴν σελήνην.

Thales und seine Schüler lehren, der Mond werde von der Sonne erleuchtet.

Ibid. III. c. 10.

Θαλῆς καὶ οἱ Στωϊκοὶ καὶ οἱ ἀπ' αὐτῶν σφαιροειδῆ τὴν γῆν.

Thales und die Stoiker nebst ihren Anhängern geben der Erde die kugelförmige Gestalt.

Ibid. III. c. 11.

Οἱ ἀπὸ Θαλέω, τὴν γῆν μέσην.

Thales Schüler setzen die Erde in die Mitte (der Welt).

c) Stobaei eccl. phys. I. c. 26. sect. 1.

Θαλῆς, Ἀναξαγόρας, Πλάτων, οἱ στωϊκοὶ τοῖς μαθηματικοῖς συμφώνως τὰς μὲν μηνιαίας ἀποκρύψεις συνοδούουσαν αὐτὴν ἡλίῳ καὶ περιλαμπομένην ποιεῖσθαι, τὰς δ' ἐκλείψεις εἰς τὸ σκίασμα τῆς γῆς ἐμπίπτουσαν, μεταξὺ μὲν ἀμφοτέρων τῶν ἀστέρων γενομένης, μᾶλλον δὲ τῇ σελήνῃ ἀντιφραττομένης.

Thales, Anaxagoras, Plato, die Stoiker lassen in Uebereinstimmung mit den Mathematikern die Neumonde entstehen, indem der Mond mit der Sonne zusammenkommt und von ihr umleuchtet wird; seine Finsternisse dagegen durch den Eintritt in den Schatten der Erde, welche zwischen beide Wandelsterne zu stehen kommt, oder vielmehr dem Monde in den Weg tritt.

§ 35. Die Gesammtheit der hier zusammengestellten Angaben zeigt, dass Thales mit dem astronomischen Systeme der Aegypter im Allgemeinen genau bekannt war. In der Mitte des von ihm, wie späterhin von der ganzen alten Welt, als kugelförmig angenommenen Kosmos setzt er die gleichfalls kugelförmig gedachte Erde, um welche Sonne, Mond und Sterne in täglicher Umdrehung sich bewegen, während die beiden ersten dieser Körper während eines Jahres und Monates noch besondere Umläufe an der Himmelskugel machen. Dass die Sonnenbahn den Aequator unter schiefem Winkel schneidet und die beiden Wendekreise berührt, ist Thales bekannt; was aber bei weitem wichtiger noch ist, er kennt nach des Eudemos Versicherung auch die Ungleichheit der Zeitperioden, in welcher die Sonne von dem einen Wendepunkte zum anderen sich bewegt, ein Wissen, welches in damaliger Zeit nicht aus den Beobachtungen eines einzigen oder auch nur einiger Jahre geschöpft werden konnte, sondern eine langjährige Reihe möglichst sorgfältiger Beobachtungen der Sonnenwenden erforderte. Die Eintheilung der Oberfläche der scheinbaren Himmelskugel in fünf Zonen ist bei den Aegyptern uralt und scheint eine Lehre gewesen zu sein, die den Fremden gleich zuerst mitgetheilt ward, und die wir daher bei Pythagoras und Oinopides ganz in gleicher Weise erwähnt finden. [1]) — Ebenso ist die Festsetzung des Sonnenjahres zu 365 vollen Tagen eine uralte Bestimmung der Aegypter, und lag ihrem bürgerlichen Jahre zu Grunde, das, wegen des Mangels von ungefähr sechs Stunden an der wahren Länge des Sonnenumlaufes, bekanntlich in einer Periode von 1461 Jahren, der sogenannten Sothisperiode, gegen die Summe von 1460 wahren Sonnenjahren ausgeglichen ward. Dieser Ueberschuss von 6 Stunden und die damit verbundene Periode scheint jedoch dem Thales unbekannt geblieben zu sein, wie sie auch den späteren Griechen unbekannt geblieben ist, indem sie nach der in § 22. citirten Angabe des Strabon erst in den Zeiten der Ptolemäer aus den Aegyptischen Schriften zu Tage gefördert ward.

§ 36. Richtige Vorstellungen besass nach den angeführten Zeugnissen Thales ferner auch über die Natur der Sonnen- und Mondfinsternisse, wobei es als eine selbstverständliche Sache erscheint, dass er den Mond von der Sonne erleuchtet werden lässt. Das Einzige, was hierbei auffallend bleibt, ist die *Vorausverkündigung* der im Jahre 585 stattgefundenen Sonnenfinsterniss. Die Zeugnisse der Alten, na-

---

1) Die im § 34. unter *a*) aufgeführte Stelle des Plutarch zeigt übrigens, dass der Letztere die Zonen der Himmelskugel mit den sie begrenzenden Kreisen vermengt, was entweder in Ungenauigkeit des Ausdrucks oder auch in Unkenntniss des Gegenstandes seinen Grund hat.

mentlich des **Eudemos**, sind hierüber so bestimmt, dass an der Wahrheit des Factums nicht zu zweifeln ist, so wenig wie darüber, dass **Thales** hierbei gänzlich auf den Schultern seiner Aegyptischen Lehrmeister steht. Wie weit sich jene Voraussagung höchstens erstrecken konnte und wirklich erstreckt hat, ist bereits oben in § 26. erörtert worden. Dass aber eine solche für damalige Zeiten überhaupt möglich war, erscheint nur dann erklärbar, wenn wir annehmen, dass **Thales** die Periode von 18 Jahren und 11 Tagen kannte, nach deren Ablauf die Finsternisse nahezu in gleicher Ordnung zurückkehren. Früher nahm man immer an, dass die Auffindung dieser Periode den Chaldäern angehöre, und **Thales** durch letztere zu deren Kenntniss gekommen sei. Allein abgesehen von der dadurch entstehenden Schwierigkeit, unseren jonischen Philosophen mit der Priesterschaft Babylons zusammenzubringen, ist auch gar kein Grund vorhanden; weshalb man die Kenntniss dieser Periode den Aegyptischen Priestern durchaus absprechen will. **Diodor** (I. c. 50) bezeugt:

Οἱ δὲ Θηβαῖοί φασιν ἑαυτοὺς ἀρχαιοτάτους εἶναι τούτων τῶν ἀνθρώπων, καὶ παρ' ἑαυτοῖς πρώτοις φιλοσοφίαν τε εὑρῆσθαι καὶ τὴν ἐπ' ἀκριβὲς ἀστρολογίαν· ἅμα καὶ τῆς χώρας αὐτοῖς συνεργούσης πρὸς τὸ τηλαυγέστερον ὁρᾶν τὰς ἐπιτολάς τε καὶ δύσεις τῶν ἄστρων. Ἰδίως δὲ καὶ τὰ περὶ τοὺς μῆνας αὐτοῖς καὶ τοὺς ἐνιαυτοὺς διατετάχθαι. τὰς γὰρ ἡμέρας οὐκ ἄγουσι κατὰ σελήνην ἀλλὰ κατὰ τὸν ἥλιον, τριακονθημέρους μὲν τιθέμενοι τοὺς μῆνας, πέντε δ' ἡμέρας καὶ τέταρτον τοῖς δώδεκα μησὶν ἐπάγουσι, καὶ τούτῳ τῷ τρόπῳ τὸν ἐνιαύσιον κύκλον ἀναπληροῦσιν· ἐμβολίμους δὲ μῆνας οὐκ ἄγουσιν, οὐδ' ἡμέρας ὑφαιροῦσιν καθάπερ οἱ πλεῖστοι τῶν Ἑλλήνων. Περὶ δὲ τῶν ἐκλείψεων ἡλίου τε καὶ σελήνης ἀκριβῶς ἐπεσκέφθαι δοκοῦσι καὶ προῤῥήσεις περὶ τούτων ποιοῦνται, πάντα τὰ κατὰ μέρος γινόμενα προλέγοντες ἀδιαπτώτως.

Die Thebaischen Priester behaupten, sie seien unter allen Menschen die ältesten und bei ihnen zuerst sei Philosophie und eine genaue Astronomie aufgekommen; schon die Beschaffenheit ihres Landes kam ihnen bei der genaueren Beobachtung der Auf- und Untergänge der Gestirne wohl zu Statten. Eigenthümlich ist bei ihnen die Einrichtung der Monate u. Jahre. Sie zählen nämlich die Tage nicht nach dem Monde, sondern nach der Sonne, so dass sie die Monate zu dreissig Tagen festsetzen und zu zwölf Monaten noch $5^1/_4$ Tag hinzufügen und auf diese Art die Zeit eines Jahres erfüllen. Schaltmonate führen sie nicht in Gebrauch, ziehen auch (von den einzelnen Monaten) keine Tage ab, wie die meisten der Hellenen es thun. Die Sonnen- und Mondfinsternisse scheinen sie genau beobachtet zu haben, und geben Vorausbestimmungen derselben, indem sie Alles, was dabei im Einzelnen vorkommt, ohne Fehler voraussagen.

Wenn man nun auch gegen dieses ausdrückliche Zeugniss einwenden mag, dass wohl zu **Diodoros** Zeiten die Aegypter im Stande gewesen sein mögen, mit Hülfe der in Alexandrien ausgebildeten Griechischen Astronomie eine Finsterniss vorauszuberechnen und dabei selbst die näheren Umstände mit angeben zu können, unter denen sie eintritt, so wird doch dadurch nicht ausgeschlossen, dass zu des Thales Zeiten eine solche Vorausbestimmung wenigstens im Groben möglich war. Diogenes Laertios berichtet in dem Vorworte zu seinem Werke[1]), dass die Aegypter in einer langen Reihe von Jahren 373 Sonnen- und 832 Mondfinsternisse beobachtet hätten, Zahlen, die nach Freret's Untersuchungen für einen Zeitraum von etwa 4000 Jahren unter sich in vollkommen richtigem Verhältnisse stehen, und daher auf Glaubwürdigkeit vollen Anspruch machen können. Bei solch' einem bedeutenden Beobachtungsmaterial wäre es in der That zu verwundern, wenn die Aegyptischen Priester die kurze Periode von 18 Jahren und 11 Tagen in der Wiederkehr der Finsternisse nicht erkannt haben sollten. War dies aber wirklich geschehen, so besass man damit ein ausreichendes Mittel, den Eintritt einer Finsterniss wenigstens im Allgemeinen vorauszubestimmen, wenn man wahrscheinlicher Weise auch nicht genau anzugeben vermochte, ob und an welchem Orte speciell eine Sonnenfinsterniss sichtbar sein werde. Damit aber wird es erklärlich, wie auch Thales dazu gelangen konnte, ein solches Phänomen voraussagen zu können. Wenn wir bei den Alten berichtet finden, dass späterhin Anaxagoras und Helikon von Kyzikos gleichfalls Sonnenfinsternisse voraussagten, *die auch wirklich eintrafen*, so wird dem Thales die hierzu nöthige Kenntniss auch nicht abzusprechen sein.

§ 37. Die vorhin angezogene Stelle des Diodoros erklärt uns aber auch, was die an sich ziemlich unverständliche Notiz des Diogenes Laertios (§ 33. unter *c*) sagen will, dass nämlich Thales den letzten Tag des Monates den dreissigsten genannt habe. Es ist dies offenbar weiter nichts als die Bestimmung der Länge jedes Aegyptischen Monats nach dem dort geltenden bürgerlichen Kalender, mit welchem auch die Festsetzung der Jahreslänge zu 365 Tagen zusammenhängt.

Wenn endlich Thales die Griechischen Schiffer anwies, zur Bestimmung der nördlichen Richtung sich lieber des Sternbildes des kleinen Bären zu bedienen, statt des grossen Bären, das bei seiner weit grösseren Entfernung vom Pole dazu weit weniger geeignet war; so ist dies bei seiner Bekanntschaft mit Phönikischer Schiffahrt leicht zu erklären. Es scheint sogar die Stelle des Kallimachos (§ 33. unter *e*) darauf hinzudeuten, dass Thales das fragliche Sternbild den

1) Diogenes Laert. (prooem. n. 2. — Huebn. pag. 2) giebt den Zeitraum, den diese Beobachtungen umfassen, auf 48863 Jahre an. Fast scheint es, als ob hierbei eine Verwechselung von Jahr und Monat stattgefunden habe, denn 48863 dreissigtägige Monate geben etwas mehr als 4016 Jahre zu 365 Tagen.

Griechen erst bekannt gemacht hat. Wenigstens sagt Strabon (I, 1. C. 6. — Mein. pag. 3.): Ὥστ' οὐκ εὖ ἀπειρίαν αὐτοῦ καταγιγνώσκουσιν, ὡς μίαν ἄρκτον ἀντὶ δυεῖν εἰδότος· οὐδὲ γὰρ εἶκος ἦν πω τὴν ἑτέραν ἠστροθετῆσθαι, ἀλλ' ἀφ' οὗ οἱ Φοίνικες ἐσημειώσαντο καὶ ἐχρῶντο πρὸς τὸν πλοῦν παρελθεῖν καὶ εἰς τοὺς Ἕλληνας τὴν διάταξιν ταύτην κ. τ. λ. — „Er (Homer) darf daher nicht länger „der Unwissenheit beschuldigt werden, als habe er nur von *einem* „Bärengestirn gewusst, während es doch zwei giebt. Das andere war „damals noch gar nicht zum Sternbilde erhoben, und erst seitdem „die Phöniker dasselbe benannt und für die Schiffahrt benutzt haben, „kam es auch bei den Griechen in Gebrauch."

§ 38. Unter allen den Leistungen, welche dem Thales im Alterthume zugeschrieben werden, ist nur noch eine zu erwähnen, welche unsere besondere Aufmerksamkeit in Anspruch nimmt, nämlich die von Diogenes Laertios erwähnte Bestimmung der Grösse der Sonne als des 720fachen der Grösse des Mondes (vergl. § 33. unter *c*). Es hat diese Nachricht etwas allen Kenntnissen jener Zeit so völlig Fremdartiges in sich, dass man, wenn sie wörtlich genommen werden sollte, nicht wohl begreifen könnte, wie Thales zu einer solchen Grössenbestimmung habe gelangen können. Das richtige Verständniss der von Diogenes abermals, entweder aus Unwissenheit oder aus Flüchtigkeit verschuldeten Unklarheit liefert uns eine Stelle des Apulejus (Florida. lib. IV. n. 18. — ed. Hildebr. pag. 88), der über Thales sich folgendermassen äussert:

Thales Milesius ex septem illis sapientia memoratis viris facile praecipuus fuit enim geometricae penes Grajos primus repertor, et naturae rerum certissimus explorator, et astrorum peritissimus contemplator, maximas res parvis lineis reperit: temporum ambitus, ventorum flatus, stellarum meatus, tonitruum sonora miracula, siderum obliqua curricula, solis annua reverticula: Idem bonae vel nascentis incrementa, vel senescentis dispendia, vel delinquentis obstacula. Idem sane jam proclivi senectute divinam rationem de sole commentus est, quam quidem non didici modo verum etiam experiundo comprobavi: quoties sol magnitudine sua circulum, quem permeat, metiatur. Id a se recens inventum Thales memoratur edocuisse Mandraytum Prienensem, qui nova et inopinata cognitione impendio delectatus, optare jussit, quantum vellet mercedem sibi pro tanto documento rependi. Satis, inquit Thales sapiens, mihi fuerit mercedis, si id, quod a me didicisti, cum proferre ad quospiam coeperis, tibi non adsciveris, sed ejus inventi me potius, quam alium, repertorem praedicaveris.

Hier wird demnach mit klaren Worten berichtet, dass Thales das Verhältniss des scheinbaren Sonnendurchmessers zu dem Umfang der ganzen Sonnenbahn[1]) durch Beobachtung gleich dem von 1 zu 720 gefunden habe, eine Bestimmung, welche 300 Jahre später von Archimedes in seiner Sandrechnung gleichfalls erhalten worden ist. Wenn wir nun, nach den Worten des Apulejus zu schliessen, hier in der That eine selbständige Beobachtung oder vielmehr Entdeckung des Thales vor uns haben, so ist es doppelt zu bedauern, dass uns über den Weg, auf welchem unser Geometer dies Resultat erhalten, gar nichts bekannt ist. Das letztere scheint im Alterthum allgemein als richtig betrachtet worden zu sein und kommt in der That der Wahrheit sehr nahe, daher auch Archimedes (psamm. ed. Torelli pag. 321) bezeugt: *τοῦτο δὲ ὑποτίθεμαι, Ἀριστάρχου μὲν εἰρηκότος, τοῦ κύκλου τῶν ζωδίων τὸν ἅλιον φαινόμενον, ὡς τὸ εἰκοστὸν καὶ ἑπτακοσιοστόν* — „dies nehme ich nach der Angabe Aristarch's „an, nach welchem die Sonne wie der 720te Theil des Thierkreises „erscheint.“ Auffallend bleibt immer, dass diese bedeutende Leistung des Thales im Alterthum so wenig erwähnt wird; denn ausser den beiden Stellen bei Diogenes Laertios und Apulejus wird derselben bei keinem alten Schriftsteller gedacht. Erklärlich ist dies Stillschweigen allenfalls dadurch, dass die Feststellung des scheinbaren Sonnendurchmessers eine Einzelheit war, die Jahrhunderte lang mit dem übrigen astronomischen Wissen in keinem inneren Zusammenhange stand und erst dann eine Wichtigkeit erhielt, als dieselbe durch Aristarchos und die Alexandriner zur Ermittelung des Abstandes der Sonne von der Erde verwendet ward.

§ 39. Es sind nunmehr nur noch ein Paar Worte über die von Thales verfassten Schriften beizufügen. Diogenes L. (I, 1. n. 2. — Huebn. pag. 14.) giebt gleich im Eingange seiner Lebensbeschreibung des Thales an: *καὶ κατά τινας μὲν σύγγραμμα κατέλιπεν οὐδέν· ἡ γὰρ εἰς αὐτὸν ἀναφερομένη ναυτικὴ ἀστρολογία Φώκου λέγεται εἶναι τοῦ Σαμίου ..... κατά τινας δὲ δύο μόνα συνέγραψε, περὶ τροπῆς καὶ ἰσημερίας, τὰ ἄλλα καταληπτὰ εἶναι δοκιμάσας*; — „nach den „Einen hat er nichts Schriftliches hinterlassen, denn die ihm zuge„schriebene nautische Astronomie soll dem Samier Phokos angehö„ren, ..., nach Andern hat er blos zwei Werke geschrieben, über „die Sonnenwenden und die Tag- und Nachtgleichen, indem er alles „Andere für leicht fassbar hielt.“ — Im weiteren Verlaufe seines Berichtes aber erwähnt Diogenes (ibid. n. 8. — Huebn. pag. 22): *τὰ δὲ γεγραμμένα ὑπ' αὐτοῦ φησι Λόβων ὁ Ἀργεῖος εἰς ἔπη τείνειν διακόσια*; — „das von ihm Geschriebene beträgt nach Lobon, dem „Argiver, ungefähr 200 Verse.“ — Suidas dagegen (s. Thalete)

1) Also nicht zum Umfange der Mondsbahn, wie Montucla (hist. d. math. Vol. I. pag. 106) die betreffende Stelle des Diogenes interpretirt.

berichtet über ihn: *ἔγραψε περὶ μετεώρων ἐν ἔπεσι, περὶ ἰσημερίας καὶ ἄλλα πολλά* — „er schrieb über die Himmelserscheinungen in „Versen, über Tag- und Nachtgleichen und vieles Andere u. s. w.“

Hiernach scheint so viel festzustehen, dass Thales etliche kleinere Schriften astronomischen Inhaltes abgefasst hat, und zwar, wie damals allgemeine Sitte war, in Versen. Die eine dieser Schriften hat es offenbar mit der Darlegung des Sonnenlaufes zu thun, den ihr Verfasser in Aegypten genauer kennen gelernt hatte und seinen Landsleuten zum ersten Male auseinander setzte. Diese Schrift scheint in der That den Titel: *περὶ τροπῆς καὶ ἰσημερίας* — „über Sonnenwenden und Nachtgleichen“ geführt zu haben (denn dass hierunter nicht *zwei* verschiedene Schriften zu verstehen sind, wie Diogenes L. anzunehmen scheint, ist wohl selbstverständlich). Die andere Schrift kann entweder die oben erwähnte nautische Astronomie sein, wie Röth annimmt, oder nach Suidas die Himmelserscheinungen im Allgemeinen behandelt haben; jedenfalls wird in dieser die Anweisung niedergelegt gewesen sein, beim Steuern des Schiffes sich nach dem kleinen Bären zu richten, eine Regel, die von Thales Zeit an bei den Griechischen Seeleuten allgemein in Gebrauch kam. Was aber bei dieser ganzen Untersuchung als ziemlich gewiss heraustritt, ist das, dass über Mathematik und speciell über Geometrie etwas Schriftliches von Thales *nicht* hinterlassen worden ist, vielmehr Alles, was über seine Leistungen in diesem Fache von Späteren berichtet wird, sich auf die Mittheilung und Ueberlieferung seiner Schüler gründet. — Bei einer so geringfügigen literärischen Production ist es aber sehr erklärlich, dass spätere Schriftsteller auf die Meinung kommen konnten, Thales habe überhaupt gar nichts geschrieben.

§ 40. Die Alten sprechen von den Schülern des Thales, wie von denen des Platon, Aristoteles und Anderer, und bezeichnen die Gesammtheit derselben mit dem Namen der *Ionischen Schule*. Soll damit blos die Gemeinsamkeit der philosophischen Grundanschauungen bezeichnet werden, also der Vorstellungen über die Gottheit, die Welt und das Verhältniss des Menschen zu beiden, so kann man diese Ausdrucksweise wohl gelten lassen. Wenn aber damit stillschweigend ausgesprochen werden soll, dass Thales, ähnlich den Philosophen späterer Zeiten, einen zahlreichen Kreis von Schülern und Anhängern um sich versammelt, diesen Vorträge gehalten und sein Wissen in systematischer Entwicklung mitgetheilt habe, so muss dagegen entschieden Einspruch erhoben werden. Seine jonischen Landsleute, und ganz besonders die Bürger der üppigen und reichen Handelsstädte, hatten nur Sinn für Gewinn und Besitz; wissenschaftliche Beschäftigung war ihnen reine Zeitverschwendung und in dieser Anschauung haben sie sich, dem Zeugnisse der Geschichte zu Folge, auch durch den Ruhm der Thaletischen Weisheit nicht irre machen lassen. Ausserhalb Ioniens ward aber der Sinn für wissenschaftliche Studien erst durch Thales selbst entzündet und konnte daher erst nach Verlauf eines Menschenalters sich wirksam erweisen. Weit entfernt, sich von einem Kreise begeisterter Schüler umgeben zu sehen, musste Thales sich vielmehr genügen lassen, dann und wann einen wirklichen Genossen und Theilnehmer seiner Studien zu finden. Die Alten wissen nur *einen* solchen zu nennen, den Anaximandros, von dessen Leistungen später die Rede sein wird. Hier sind zuvörderst noch zwei Männer zu erwähnen, die vielleicht als Schüler des Thales betrachtet werden können.

§ 41. Der erste derselben ist jener **Mandryatos** von Priene, den Apulejus in der oben (§ 38.) citirten Stelle namhaft macht, und dem Thales die Bestimmung des von ihm ermittelten scheinbaren Sonnendurchmessers mittheilte. Ob er ein Schüler des Thales im engeren Sinne des Wortes gewesen, oder nur vorübergehend dessen Unterricht genossen hat, um vielleicht in nautischer Astronomie sich zu vervollkommnen, lässt sich aus des Apulejus Text nicht entnehmen. Doch möchte die ganze Fassung der Erzählung eher für die letztere Annahme entscheiden, für die auch der Umstand spricht, dass der Name des Mannes im ganzen Alterthume nicht weiter genannt wird, also wohl kaum eine, wenn auch nur geringe, wissenschaftliche Bedeutung in Anspruch nimmt.

Der zweite, der als Schüler des Thales zu bezeichnen sein möchte, ist der von Proklos in seinem Verzeichnisse der Geometer (§ 19.) erwähnte **Ameristos**, der Bruder des Dichters Stesichoros. Als eines solchen darf seine Abstammung aus einer der Städte Siciliens oder Unteritaliens wohl nicht bezweifelt werden, und es ist leicht möglich, dass er aus Mamertion stammt, und daher auch Mamertios genannt wird. Ausser in der eben citirten Stelle des Proklos wird er auch von Suidas erwähnt, der (s. Stesichoros) angiebt: *εἶχε δ' ἀδελφὸν γεωμετρίας ἔμπειρον, Μαμερτῖνον, καὶ ἕτερον Ἡλιάνακτα νομοθέτην* — „er (Stesichoros) hatte auch einen der „Geometrie kundigen Bruder, Mamertinos, und einen andern, Helia„nax, der Gesetzgeber war.“ — Die Stelle bei Proklos findet sich auch, flüchtig excerpirt, in einem Scholion, welches Hultsch in seiner Ausgabe der geometrischen Schriften Heron's pag. 253 mitgetheilt hat. Es lautet: *μετὰ δὲ τὸν Θαλῆν Μαμέρτιος ὁ Στησιχόρου ποιητοῦ ἀδελφὸς καὶ Ἱππίας ὁ Ἠλεῖος καὶ μετὰ ταῦτα ὁ Πυθαγόρας κ. τ. λ.* — „auf Thales folgt Mamertios, des Dichters „Stesichoros Bruder, und Hippias, der Eleer, und hierauf Py„thagoras u. s. w.“ —

Da Stesichoros 560 v. Chr. in einem Alter von 85 Jahren starb, so kann die Lebenszeit seines Bruders so ziemlich mit der des Thales zusammenfallen, und konnte Ersterer daher recht gut ein Schüler des letzteren sein. Als solcher aber möchte Ameristos unter allen Umständen anzusehen sein, da zu jener Zeit in ganz Gross-Griechenland sicher auch nicht *ein* Mensch existirte, bei dem Jemand hätte geometrischen Unterricht erhalten können. Wohl aber konnte der ausgebreitete Ruf des Thales ihm auch einen Schüler aus Sicilien verschaffen; der rege Handelsverkehr Milets liess eine solche Uebersiedelung mit Leichtigkeit bewerkstelligen. — Dem sei nun, wie ihm wolle; von den Leistungen dieses Ameristos oder Mamertios in der Geometrie ist im ganzen Alterthum weiter nicht die Rede, und fast könnte man glauben, dass es nur die Eigenschaft als Bruder eines berühmten Dichters gewesen sei, die seinen Namen der Nachwelt erhalten hat, wenn nicht Proklos, jedenfalls auf Eudemos sich stützend, von ihm ausdrücklich berichtete, dass er zu seiner Zeit als Geometer sich ausgezeichnet habe.

§ 42. Diejenigen, welche als eigentliche Nachfolger des Thales, als die successiven Häupter der Ionischen Schule genannt werden, Anaximandros und Anaximenes, scheinen den geometrischen Studien wenig oder gar nicht gehuldigt, vielmehr sich ausschliesslich der Naturphilosophie und speciell der Astronomie gewidmet zu haben. Wenn nun auch dieser Gegenstand nicht unbedingt in den Kreis der gegenwärtigen Untersuchung gehört, so kann er doch wegen seines Zusammenhanges mit der angewandten Geometrie hier nicht ganz übergangen werden.

Beginnen wir zunächst mit **Anaximandros.** Die Hauptstellen über seine Leistungen beschränken sich, mit Ausnahme einiger nicht weiter wichtigen Angaben des Plutarchos und Stobaios, auf nachfolgende:

a) Strabon (I. c. 1. C. 7. — ed. Mein. pag. 8.):

Φανεροὶ δὲ καὶ οἱ ἐπακολουθήσαντες αὐτῷ ἄνδρες ἀξιόλογοι καὶ οἰκεῖοι φιλοσοφίας, ὧν τοὺς πρώτους μεθ' Ὅμηρον δύο φησὶν Ἐρατοσθένης, Ἀναξίμανδρόν τε Θαλοῦ γεγονότα γνώριμον καὶ πολίτην καὶ Ἑκαταῖον τὸν Μιλήσιον· τὸν μὲν οὖν ἐκδοῦναι πρῶτον γεωγραφικὸν πίνακα, τὸν δὲ Ἑκαταῖον καταλιπεῖν γράμμα, πιστούμενον ἐκείνου εἶναι ἐκ τῆς ἄλλης αὐτοῦ γραφῆς.

Aber auch seine (Homers) Nachfolger waren berühmte und in der Philosophie bewanderte Männer; von ihnen nennt Eratosthenes als die ersten nach Homer zwei, den Anaximander, einen Schüler und Mitbürger des Thales, und den Milesier Hekataios, von denen jener die erste geographische Karte herausgab, Hekataios aber die erste geographische Schrift hinterliess, die ihm, seinen übrigen Schriften nach zu urtheilen, auch wirklich angehört.

b) Diogenes Laertios (II, c. 1. — Huebn. pag. 92.):

Ἀναξίμανδρος Πραξιάδου Μιλήσιος. οὗτος ἔφασκεν ἀρχὴν καὶ στοιχεῖον τὸ ἄπειρον, οὐ διορίζων ἀέρα ἢ ὕδωρ ἢ ἄλλο τι· καὶ τὰ μὲν μέρη μεταβάλλειν, τὸ δὲ πᾶν ἀμετάβλητον εἶναι· μέσην τε τὴν γῆν κεῖσθαι, κέντρου τάξιν ἐπέχουσαν οὖσαν σφαιροειδῆ. τήν τε σελήνην ψευδοφαῆ, καὶ ἀπὸ ἡλίου φωτίζεσθαι· ἀλλὰ καὶ τὸν ἥλιον οὐκ ἐλάττονα τῆς γῆς, καὶ καθαρώτατον πῦρ. Εὗρε δὲ καὶ γνώμονα πρῶτος καὶ ἔστησεν ἐπὶ τῶν σκιοθήρων ἐν Λακεδαίμονι, καθά φησι Φαβωρῖνος ἐν παντοδαπῇ ἱστορίᾳ, τροπάς τε καὶ ἰσημερίας σημαίνοντα, καὶ ὡροσκόπια κατεσκεύασε. καὶ γῆς καὶ θαλάσσης περίμετρον πρῶτος ἔγραψεν· ἀλλὰ καὶ σφαῖραν κατεσκεύασε. τῶν δὲ ἀρεσκόντων αὐτῷ πεποίηται κεφαλαιώδη τὴν ἔκθεσιν, ἧπερ περιέτυχε καὶ ὁ Ἀπολλόδωρος ὁ Ἀθηναῖος. Ὅς καί φησιν αὐτὸν ἐν τοῖς χρονικοῖς τῷ δευτέρῳ ἔτει τῆς πεντηκοστῆς ὀγδόης Ὀλυμπιάδος ἐτῶν εἶναι ἑξήκοντα τεσσάρων· καὶ μετ' ὀλίγον τελευτῆσαι, ἀκμάσαντά πη μάλιστα· κατὰ Πολυκράτην τὸν Σάμου τύραννον.

Anaximandros von Milet, des Praxiades Sohn, lehrte Anfang und Urelement der Dinge sei das Unendliche, wobei er weder Luft noch Wasser noch sonst etwas unterschied; die Theile des Unendlichen seien veränderlich, das Ganze aber unveränderlich. Die Erde liege in der Mitte (der Welt), nehme die Stelle des Centrums ein und sei kugelförmig; der Mond leuchte mit erborgtem Lichte u. werde von der Sonne erleuchtet; die Sonne aber sei nicht kleiner als die Erde und reinstes Feuer. Er zuerst erfand den Gnomon und stellte einen solchen in Lakedämon als Schattenzeiger auf, wie Phavorinos in den vermischten Geschichten erzählt, damit er Sonnenwenden und Nachtgleichen anzeige; auch construirte er einen Stundenzeiger. Er zuerst zeichnete den Umfang von Land und Meer auf und verfertigte eine Himmelskugel. Von seinen Lehrsätzen gab er eine Darstellung nach Kapiteln geordnet, die auch dem Athener Apollodoros zu Handen gekommen ist. Dieser berichtet auch in seiner Chronik, dass Jener im 2ten Jahre der 58ten Olympiade 64 Jahr alt gewesen und bald nachher gestorben sei, so dass er vornehmlich unter Polykrates, dem Tyrannen von Samos, geblüht habe.

c) Simplikios comm. in Arist. libr. de coelo. (Brandis schol. in Arist. pag. 497a.):

Ἐξ ὧν καὶ οἱ τῶν μεγεθῶν λόγοι καταλαμβάνονται. ταῦτα οὖν φησὶν ἐκ τῶν περὶ ἀστρολογίαν θεωρεῖσθαι. καὶ γὰρ ἐκεῖ περὶ τῆς τάξεως τῶν πλανωμένων καὶ περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἀποδέδεικται, Ἀναξιμάνδρου πρώτου τὸν περὶ μεγεθῶν (καὶ) ἀποστημάτων λόγον εὑρηκότος, ὡς Εὔδημος ἱστορεῖ, τὴν τῆς θέσεως τάξιν εἰς τοὺς Πυθαγορείους πρώτους ἀναφέρων. τὰ δὲ μεγέθη καὶ τὰ ἀποστήματα Ἡλίου καὶ Σελήνης μέχρι νῦν ἔγνωσται ἀπὸ τῶν ἐκλείψεων τὴν ἀφορμὴν τῆς καταλήψεως λάβοντα (καὶ εἰκος ἦν ταῦτα καὶ τὸν Ἀναξίμανδρον εὑρηκέναι),

Hieraus werden auch die Verhältnisse der Grössen entnommen. Diese, sagt er, müssen durch die Astronomie festgestellt werden; denn in dieser wird über die Anordnung der Planeten, so wie über ihre Grössen und Abstände Nachweisung gegeben, nachdem zuerst Anaximandros das Verhältniss der Grössen u. Abstände aufgefunden hat, wie Eudemos berichtet, während er die Bestimmung der gegenseitigen Stellung auf die Pythagoräer als Entdecker zurückführt. Die Grössen der Abstände von Sonne und Mond werden bis jetzt aus den Finsternissen abgeleitet, die man als Ausgangspunkt

Ἑρμοῦ δὲ καὶ Ἀφροδίτης ἀπὸ τῆς πρὸς τούτους παραβολῆς, ὥνπερ τὰ μεγέθα καὶ τὰ ἀποστήματα ὑπὸ τῶν μετὰ Ἀριστοτέλην πλέον ἠκριβώθη καὶ τελειότατά γε ὑπὸ τῶν περὶ Ἵππαρχον καὶ Ἀρίσταρχον καὶ Πτολεμαῖον.

für die Untersuchung nimmt (und es ist wahrscheinlich, dass dies Anaximandros gleichfalls erfunden hat), die des Merkur und der Venus werden durch Vergleichung mit jenen gefunden, und sind die Grössen und Abstände dieser beiden von des Aristoteles Nachfolgern sorgfältiger erforscht, von Hipparch, Aristarch und Ptolemäos und deren Schülern aber endgültig festgestellt worden.

d) Suidas s. v. Anaximandros:

Ἀναξίμανδρος Πραξιάδου Μιλήσιος, φιλόσοφος, συγγενὴς καὶ μαθητὴς καὶ διάδοχος Θάλητος, πρῶτος δ' ἰσημερίαν εὗρε καὶ τροπὰς καὶ ὡρολογεῖα, καὶ τὴν γῆν ἐν μεσαιτάτῳ κεῖσθαι· γνώμονά τ' εἰσήγαγε καὶ ὅλως γεωμετρίας ὑποτύπωσιν ἔδειξεν. ἔγραψε περὶ φύσεως, γῆς περίοδον καὶ περὶ τῶν ἀπλανῶν καὶ σφαῖραν καὶ ἄλλα τινά.

Der Philosoph Anaximandros von Milet, des Praxiades Sohn, war Zeitgenosse, Schüler und Nachfolger des Thales. Er zuerst fand auf die Sonnenwenden und Nachtgleichen und Stundenzeiger und lehrte, dass die Erde in der Mitte (der Welt) liege. Er führte den Gnomon ein und gab eine bildliche Darstellung (?) der gesammten Geometrie heraus. Geschrieben hat er über die Natur, eine Erdbeschreibung, über die Fixsterne, die Himmelskugel und mehreres Andere.

§ 43. Wenn nach dem Zeugnisse des Apollodoros im 2ten Jahre der 58ten Olympiade, 547 v. Chr., Anaximandros im 64ten Lebensjahre stand, so ist er 611 v. Chr. geboren, stand also bei des Thales Rückkehr nach Milet im dritten Jahrzehend seines Lebens und hat demnach mit seinem Lehrer bis zu dessen Tode verkehrt, der nur wenige Jahre vor seinem eignen erfolgte. Von den sonstigen Lebensschicksalen des Mannes ist nichts bekannt. Nur so viel lässt sich allenfalls übersehen, dass er nicht ununterbrochen, wie sein Lehrer, in Milet verweilte, sondern zu Zeiten auch das eigentliche Hellas besuchte, wo er z. B. nach der Angabe des Diogenes L. in Sparta einen Gnomon aufstellte. Wenn er, nach dem zu urtheilen, was über seine philosophischen Lehren uns berichtet wird, im Ganzen von den Anschauungen des Thales nicht viel abwich, so stand er dagegen in der Astronomie wohl *ganz* auf des Letzteren Schultern. Der Zug aber zu praktischer Verwerthung seiner theoretischen Kenntnisse, der schon in einzelnen Leistungen des Thales hervortritt, scheint bei Anaximandros noch weit entschiedener vorgeherrscht zu haben. Den Gnomon freilich, und den Stundenweiser hat er nicht *erfunden*, wie Diogenes L. behauptet, sondern nur bei den Griechen *eingeführt*, wie Suidas ganz richtig angiebt. Denn Herodotos sagt ganz ausdrücklich (II, c. 109): πόλον μὲν γὰρ καὶ γνώμονα καὶ τὰ δώδεκα μέρεα τῆς ἡμέρης παρὰ Βαβυλωνίων ἔμαθον οἱ Ἕλληνες — „den Stundenweiser, den Gnomon und die 12 Theile des Tages lern- „ten die Hellenen von den Babyloniern." — Aber die Herstellung und Construction dieser Vorrichtungen und die Anweisung zu deren Gebrauch scheint ein recht eigenthümliches Verdienst des Anaximandros zu sein.

§ 44. Der Gnomon ist ein auf einer horizontalen Ebene senkrecht aufgestellter Stab, dessen Fusspunkt der Mittelpunkt dreier concentrischer Kreise ist, die so beschrieben sind, dass das Schattenende des Stabes zur Mittagszeit im Sommersolstitium den Umfang des innersten Kreises, zur Zeit der Nachtgleichen den des mittleren, und im Wintersolstitium den Umfang des äusseren Kreises berührte; in der That ein höchst einfaches Mittel, um auch jedem Laien in der Astronomie den Eintritt der Sonne in die vier Cardinalpunkte ihrer Bahn wahrnehmbar zu machen. Zugleich aber diente diese Construction auch zur Auffindung der Mittagslinie eines Ortes, indem man zur Zeit des Sommersolstitiums die Punkte auf dem Umfange des mittleren und äusseren Kreises anmerkte, welche von dem Schattenende des Stiftes am Vor- und Nachmittage eines und desselben Tages getroffen wurden, und sodann die so erhaltenen Bogen halbirte. War aber die Mittagslinie einmal festgestellt, so brauchte man allerdings die concentrischen Kreise nicht mehr, und es genügte, wenn man auf der ersteren die Punkte angab, welche das Schattenende treffen musste, wenn die Sonne in die vier Cardinalpunkte ihrer Bahn eintrat. Ob nun Anaximandros den Gnomon in der erstern umständlicheren, oder bereits in der letzteren einfacheren Form zu construiren verstand, bleibt bei dem Mangel an bestimmten Nachrichten unentschieden. So viel ist gewiss, dass die zuletzt geschilderte Gestalt des Instrumentes bald die allgemein verbreitete ward.

Weit weniger klar ist, was es mit dem πόλος, dem Stundenweiser, für eine Bewandniss gehabt haben mag. Eine Sonnenuhr nach unserer heutigen Einrichtung darunter zu verstehen, ist wohl nicht gut möglich; denn zu solch' einer Vorrichtung fehlten zur Zeit des Anaximandros jedenfalls die erforderlichen Kenntnisse. Dagegen wäre es wohl leicht möglich, dass man sich mit einem im Centrum sechs concentrischer Kreise errichteten lothrechten Stabe begnügt hätte, indem man nur die Umfänge dieser Kreise in solche gegenseitige Lage brachte, dass *ungefähr* der 12te Theil des Tages verfloss, um das Schattende des Stabes von einem Umfange zum nächstfolgenden gelangen zu lassen. Freilich wurden mit einer solchen Vorrichtung diese Tagesstunden in den verschiedenen Jahreszeiten ziemlich ungleich; doch scheint man sich im Alterthum wirklich mit dieser oder einer anderen gleich unbeholfenen Zeiteintheilung begnügt zu haben, bis die Alexandrinische Schule bessere Hülfsmittel für eine regelmässige Zeitmessung erfand.

§ 45. Was jedenfalls als ein sehr bedeutendes Verdienst des Anaximandros angesehen werden müsste, das wäre die von Simplikios nach dem Zeugnisse des Eudemos ihm beigelegte Bestimmung der Grösse und Entfernungen der Planeten, vorausgesetzt, dass er wirklich als Entdecker dieser Dinge nachgewiesen werden könnte. Allein gerade dieser letzte Umstand unterliegt sehr erheblichem Zweifel. Betrachten wir nämlich die Angaben genauer, welche uns aus des Eudemos Geschichte der Astronomie noch erhalten sind (§ 33. unter *a*) und § 42. unter *c*), so lässt sich gar nicht verkennen, dass der Verfasser die einzelnen von ihm aufgeführten astronomischen Wahrheiten demjenigen seiner Landsleute als Erfinder oder Entdecker zuschreibt, in dessen Schriften er dieselben zuerst mit bestimmten Worten angegeben und nachgewiesen findet. Gerade in jenen ersten Tagen der entstehenden Griechischen Literatur mochte es aber leicht geschehen, dass eine Wahrheit, die einem kleinen Kreise wissenschaftlich thätiger Männer bekannt war, auch von anderen, die diesem Kreise fern standen, aufgefunden und vielleicht zuerst schriftlich abgehandelt ward, so dass darüber ein Prioritätsstreit entstehen konnte. Ist es uns doch noch überliefert, dass solch' ein Streit sich zwischen Oinopides und der Pythagoräischen Schule erhoben hat, welche beide behaupteten, die schiefe Lage der Sonnenbahn gegen den Aequator zuerst aufgefunden zu haben (vergl. § 34. unter *a*), während gar nicht zu bezweifeln ist, dass diese angebliche Entdeckung auch dem Thales schon bekannt war, da alle drei Competenten dieselbe nicht durch eigne Beobachtung ermittelt, sondern von den Aegyptern entlehnt hatten. Wenn nun Plutarchos a. a. O. ganz bestimmt angiebt, dass Thales und Pythagoras bereits die Eintheilung der Himmelskugel in 5 Zonen gekannt hätten, Thales aber über diesen Gegenstand etwas Schriftliches nicht hinterlassen hat, während Anaximandros nach des Suidas Zeugniss eine „Sphäre," d. h. ein Werk über die Kreise an der Himmelskugel schrieb — so ist es vollkommen klar, wie Eudemos dazu kommen konnte, dem Anaximandros die Entdeckung beizulegen, dass die Erde im Mittelpunkte der Weltkugel liege, während dies Factum dem Thales ebenso klar sein musste.

Ganz in ähnlicher Weise aber verhält es sich auch mit den oben von Simplikios aufgeführten Entdeckungen der Grössen und Abstände der Planeten. Zuvörderst ist ganz klar, dass von den Planeten selbst hier gar nicht die Rede sein kann, sondern nur von den Umfängen der von ihnen beschriebenen Bahnen. Nun hatten aber die Aegypter angenommen, dass diese Kreisbahnen desto grösser seien, also die Abstände der Planeten von der im Mittelpunkte der Weltkugel liegenden Erde desto bedeutender würden, je längere Zeit diese Gestirne zu einem vollständigen Umlauf durch den Thierkreis bedürfen. Die hieraus abgeleitete Reihenfolge der Wandelsterne, mit Einschluss von Sonne und Mond, war jedenfalls dem Thales bekannt geworden, und ist zwar nicht durch ihn selbst, wohl aber durch seinen Schüler zur Kenntniss der Griechen gekommen, daher denn Eudemos die Festsetzung dieser Reihenfolge dem Anaximandros zuschreibt, während er die Bestimmung des gegenseitigen Verhältnisses der betreffenden Kreishalbmesser auf die Pythagoräer zurückführt, welche für die hierbei vorkommenden Zahlen bekanntlich die der harmonischen Intervalle anwendeten. Durch diese Interpretation der fraglichen Notiz des Simplikios oder vielmehr Eudemos, welche allein in den Entwickelungsgang der Griechischen Astronomie zu passen scheint, erledigt sich die angebliche Entdeckung des Anaximandros von selbst, mit ihr aber auch die ganze Masse von geometrischen Erfindungen, die wir ihm nothwendig vindiciren müssten, wenn jene astronomischen Entdeckungen in Wahrheit begründet wären.

§ 46. Ausser seinen geographischen Leistungen, die wir hier übergehen müssen, ist von des Anaximandros Schriften nur noch jene von Suidas genannte ὑποτύπωσις der gesammten Geometrie zu besprechen. Röth (Bd. II. pag. 132) nimmt das Wort in seiner eigentlichen Bedeutung als „bildliche Darstellung," und schliesst daraus, dass Anaximandros einen Abriss der *zeichnenden* Geometrie, mit einem Worte eine „Reisskunst" geschrieben habe. Und wirklich hat diese Erklärung viel Wahrscheinlichkeit. Wäre darunter eine kurze Darstellung der theoretischen Geometrie zu verstehen, wie man das Griechische Wort wohl auch übersetzen kann, so würde Proklos oder vielmehr Eudemos in seinem Verzeichnisse der Geometer dies jedenfalls bemerkt, gewiss aber nicht behauptet haben, dass Hippokrates von Chios *zuerst* ein Werk über die Elemente der Geometrie verfasst habe. War aber die fragliche Schrift eine Reisskunst, so hat sie sich selbstverständlich auf die Angabe von Constructionen beschränkt und die Entwickelung der, jenen zu Grunde liegenden, Theoreme nebst deren Beweisen weiter nicht berücksichtigt. Mit der Bearbeitung einer Reisskunst steht aber auch die gesammte übrige Thätigkeit unseres Philosophen in sehr guter Harmonie; denn die Errichtung von Gnomonen und Stundenzeigern, die Anfertigung von Landkarten und ähnlichen Dingen hängt mit dem geometrischen Zeichnen so eng zusammen, dass jene Arbeiten ohne eine gewisse Gewandheit in letzterem gar nicht ausgeführt werden können.

§ 47. Wenn somit schon bei dem ersten Nachfolger des Thales von einem Verdienste um Fortbildung der *reinen* Geometrie kaum die Rede sein kann und es nur die Anwendung der Wissenschaft auf das Leben ist, durch welche er sich bekannt gemacht hat, so hört bei **Anaximenes,** dem Schüler und Nachfolger des Anaximandros, der in die Zeit von 570—499 v. Chr. gehört, jede Betheiligung an der Mathematik überhaupt, sowie an der Geometrie insbesondere gänzlich auf. Im ganzen Alterthume ist es nur ein *einziger* Autor, der ihm eine mit der Geometrie zusammenhängende Entdeckung beilegt, nämlich Plinius d. A., welcher (hist. nat. II, c. 76 ed. Jan.) angiebt: *Umbrarum hanc rationem et quam vocant gnomonicen invenit Anaximenes Milesius, Anaximandri (de quo diximus) discipulus, primusque horologium quod appellant sciothericon Lacedaemone ostendit.* Allein man braucht diese Stelle nur mit dem Inhalte des in § 42 sub *b*) gegebenen Excerptes zu vergleichen, welches Diogenes Laertios aus des Phavorinos Schriften mittheilt, um sofort zu erkennen, dass bei Plinius eine Verwechselung des Anaximenes mit seinem Lehrer stattfindet. Die unserem Philosophen von Plinius beigelegte Thätigkeit passt vortrefflich zu des Anaximandros wissenschaftlichen Beschäftigungen, will sich dagegen gar nicht an das anschliessen, was uns von Anaximenes noch überliefert ist, unter dem die jonische Schule offenbar sich von den exacten Wissenschaften immer mehr abwendete, um sich dagegen einem, zum Theil recht haltlosen, Phantasiren über Welt und Natur hinzugeben.

§ 48. Ebenso wenig, wie von Anaximenes, ist irgend eine geometrische Leistung von **Anaxagoras** bekannt, dem letzten und bedeutendsten Philosophen der Jonischen Schule. Auch er wandte sich vornehmlich der Speculation zu, und wenn er in seinen Ansichten über das Wesen und die Einrichtung der sichtbaren Welt zum Theil richtigere und gesundere Anschauungen beurkundet, als seine Vorgänger und selbst ein grosser Theil seiner Zeitgenossen, so darf nicht vergessen werden, dass schon in der Blüthe seines Mannesalters (er lebte von 500 bis 428 v. Chr.) eine andere philosophische Schule aufgetreten war, die Pythagoräische oder Italische, die für die exacten Wissenschaften besonders begeistert, denselben theilweise neue und gründlichere Unterlagen gegeben hatte, als die waren, auf welche die Jonische Schule ihre Philosopheme aufbaute. Durch die Pythagoräer angeregt, scheint Anaxagoras in seinen späteren Lebensjahren sich eigentlich geometrischen Studien eifriger hingegeben und darin nicht unbedeutende Erfolge erzielt zu haben, da ihn die Liste des Proklos sonst schwerlich als namhaften Geometer aufführen würde. Worin aber diese Erfolge bestanden haben, ist uns unbekannt. Plutarchos (de exilio c. 17) erwähnt: *ἀλλ' Ἀναξαγόρας μὲν ἐν τῷ δεσμωτηρίῳ τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸν ἔγραφε*; — „Anaxagoras schrieb

„im Gefängniss über die Quadratur des Kreises;“ allein diese einfache Notiz ist Alles, was wir von der Sache wissen.

§ 49. Isolirt von der Jonischen Schule steht der Geometer und Astronom **Oinopides** von Chios. Die Liste des Proklos macht ihn zu einem Zeitgenossen des Anaxagoras, der sogar etwas jünger sei als Letzterer, und in solcher Beziehung finden wir ihn auch mehrmals erwähnt bei Diogenes Laertios. Ueberhaupt hielt man ihn in den späteren Jahrhunderten des Alterthums für gleichalterig mit Anaxagoras, indessen wohl aus keinem anderen Grunde, als weil Platon in den „Nebenbuhlern“ ihn zufällig mit Anaxagoras zusammen erwähnt. Was wir über Oinopides noch wissen, scheint eher darauf hinzuweisen, dass er etwas älter sein mag als der Jonische Philosoph.

Von den Alten wird er ganz ausdrücklich unter denen genannt, die nach Aegypten gereiset sind, um dort Studien zu machen (vergl. § 21. die Stelle des Diodoros I, c. 96). Lange indessen scheint er dort nicht verweilt zu haben; wenigstens ist das, was er aus Aegypten mitgebracht hat, nicht von der Art, dass es tiefe und langdauernde Studien voraussetzte. Proklos schreibt ihm in seinem Commentar zum Euklides die Lösung folgender zwei Aufgaben zu: 1) von einem Punkte ausserhalb einer unbegrenzten Geraden ein Loth auf letztere zu fällen; und 2) an einem in einer Geraden gegebenen Punkt einen Winkel anzulegen, der einem gegebenen Winkel gleich ist.

Zur ersten Aufgabe bemerkt Proklos (ed. Basil. pag. 75. — Baroc. p. 162): *Τοῦτο τὸ πρόβλημα πρῶτος Οἰνοπίδης ἐζήτησε χρήσιμον αὐτὸ πρὸς ἀστρολογίαν οἰόμενος· ὀνομάζει δὲ τὴν κάθετον ἀρχαϊκῶς κατὰ γνώμονα, διότι καὶ ὁ γνώμων πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ὁρίζοντι, τῇ δὲ πρὸς ὀρθὰς ἡ κάθετος ἔστι ταύτῃ, διαφέρουσα τῇ σχέσει μόνον κατὰ τὸ ὑποκείμενον ἀδιάφορος οὖσα, ὥσπερ φησὶ, καὶ ἡ κάθετος.* — „Diese Aufgabe hat zuerst Oinopides aufgelöst, da er sie als für die Astronomie nützlich erkannte. Er „nennt aber die Senkrechte nach alterthümlicher Weise einen Gnomon, weil, wie dieser rechtwinklig auf dem Horizonte steht, so auch „eine Senkrechte auf der gegebenen Geraden rechtwinklig ist, wobei „sie sich nur durch die Richtung unterscheidet, indem die Senkrechte, „wie er sagt, gegen die unter ihr liegende Gerade keine von jener „verschiedene Lage hat.“ Die zweite Aufgabe findet sich ebendaselbst (Basil. pag. 87. — Baroc. pag. 191), und zu ihr bemerkt Proklos: *πρόβλημα τοῦτο Οἰνοπίδου μὲν εὕρημα μᾶλλον, ὥς φησιν Εὔδημος.* — „Diese Aufgabe ist vielmehr eine Erfindung des Oinopides, „wie Eudemos angiebt.“

Die Angabe dieser beiden Constructionen sind die einzigen geometrischen Entdeckungen, die uns von Oinopides überliefert werden und zeigen uns die Geometrie seiner Zeit noch immer in den ersten Stadien der Entwickelung. Der Charakter der Reisskunst scheint ihr auch jetzt noch eigen zu sein; wenigstens aber ist soviel klar, dass die Schule des Thales noch bei weitem nicht alle die Probleme umfasste, die wir heutzutage als nothwendige Bestandtheile einer Constructionslehre betrachten. Von der ersten der vorstehenden beiden Aufgaben ist allerdings anzunehmen, dass irgend eine einfache Lösung derselben schon an Thales gekommen sein musste; denn ohne eine solche ist eine Reisskunst fast nicht zu denken. Aber diese Lösung mochte, wie so vieles andere aus Aegypten überkommene, ganz specielle Hülfsmittel in Anspruch nehmen, etwa nur die Anwendung des gleichseitigen Dreiecks gestatten; und so konnte es immerhin als eine Bereicherung der Wissenschaft angesehen werden, wenn unser Geometer das verlangte Loth als eine vom Centrum eines Kreises nach der Mitte einer Kreissehne gezogene Gerade construiren lehrte. Ebenso konnte von der zweiten Aufgabe wohl auch bereits eine oder die andere Lösung bekannt sein und nur gerade die von Euklides in die Elemente aufgenommene von Oinopides herrühren. Wie dem aber sei; wenn die Geometer um 470 v. Chr. noch durch dergleichen Entdeckungen sich einen Namen zu machen vermochten, so konnte die Geometrie selbst noch nicht weit ausgebildet sein.

§ 50. In seinen angeblichen astronomischen Entdeckungen steht Oinopides ganz unter den Fittichen seiner Aegyptischen Lehrer. Die schiefe Lage des Thierkreises gegen den Aequator, die er als seine Entdeckung in Anspruch nahm, war längst vor ihm ermittelt und von den wirklichen Entdeckern schon dem Thales und Pythagoras mitgetheilt worden. Jedenfalls blieb aber die Kenntniss des fraglichen Factums auf den engen Kreis der Schüler dieser Männer beschränkt, daher Oinopides sie anfangs für seine eigne Leistung ausgeben konnte, obschon er nicht den mindesten Anspruch an sie zu machen hatte. Es ist dies eben ein schlagender Beleg zu der Ungenirtheit, mit welcher die ältesten Griechischen Denker das, was sie von den sogenannten Barbaren gelernt hatten, den eigenen Landsleuten gegenüber als *ihr* geistiges Eigenthum ausgaben.

Das von Oinopides gelehrte sogenannte grosse Jahr kennen wir aus einer Notiz des Ailianos, der (var. hist. X. 17) darüber Folgendes berichtet: *Οἰνοπίδης ὁ Χῖος, ἀστρόλογος, ἀνέθηκε ἐν Ὀλυμπίοις τὸ χαλκοῦν γραμματεῖον, ἐγγράψας ἐν αὐτῷ τὴν ἀστρολογίαν τοῦ ἑνὸς δεόντων ἑξήκοντα ἐτῶν, φήσας τὸν μέγαν ἐνιαυτὸν εἶναι τοῦτον.* — „Der Astronom Oinopides stellte in Olympia eine „eherne Tafel auf, auf welcher er einen Kalender von 59 Jahren auf„gezeichnet hatte, von welcher Periode er angab, dass sie das grosse „Jahr sei.“ Es ist dies, wie auch Martin (Theon. lib. d. astron.

pag. 51.) bestätigt, einer der vielfachen, von Thales bis auf Kalippos reichenden Versuche, das Sonnenjahr mit dem Mondlaufe durch einen längern Cyclus von Jahren gehörig auszugleichen. Die lange, zu dieser Feststellung nöthige Beobachtungsreihe hat Oinopides natürlich nur von den Aegyptern erhalten können; aber die Bestimmung des Cyclus selbst scheint in der That sein eigenes Verdienst zu sein, denn bis jetzt wenigstens weiss man nichts davon, dass die Aegypter diese Periode gekannt hätten. — Von Einfluss auf die Zeitrechnung und den Kalender der Griechen ist des Oinopides Cyclus nicht gewesen.

---

§ 51. Werfen wir jetzt, nachdem wir die ersten hundert Jahre der Entwickelung der Geometrie in der Jonischen Schule an uns haben vorüber gehen lassen, einen Blick auf den durchlaufenen Weg zurück, so stellt sich als Endergebniss unserer Untersuchung heraus, dass die Wissenschaft in dieser ganzen Zeit keine sehr wesentlichen Fortschritte gemacht hat, wenigstens keine solchen, welche sie über den Standpunkt hinausgehoben hätten, auf dem sie bereits unter Thales stand. So dürftig das Material auch ist, welches diesem Schlusse zu Grunde liegt, so lässt es doch erkennen, dass Constructionen und deren Anwendung auf das Bedürfniss des täglichen Lebens den Hauptstoff der damaligen Geometrie bildeten. Es ist ganz gut möglich, dass die Beweise der geringen Zahl einfacher Theoreme, welche eine derartige Geometrie erfordert, nach und nach strenger begründet und logischer gefasst, ingleichen, dass die Constructionen selbst allmälig verallgemeinert und auf mannichfaltigere Weise ausgeführt worden sind; allein zu einer bewussten und principiellen Abwendung von dem Gesichtspunkte des praktischen Nutzens, aus dem vornehmlich die Aegypter die Geometrie betrachteten, kam es in dieser Zeit noch nicht. Der Gedanke, die durch die eigenthümliche Natur der Raumgebilde bedingten Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen der letzteren lediglich um ihrer selbst willen aufzusuchen und die gefundenen zu einem System logisch eng verbundener Wahrheiten zu vereinigen; — dieser Gedanke lag den Geometern der Ionischen Schule noch ganz fern. Daher wird auch nicht ein einziges Theorem von grösserer Bedeutung namhaft gemacht, das aus dieser Schule seinen Ursprung herleitete, was doch gewiss geschehen sein würde, wenn letztere Leistungen dieser Art aufzuweisen hätte. Es scheint sogar, als ob die Lehre von der Flächenvergleichung und Messung, die die Aegypter, wie wir oben sahen, bereits in ziemlichem Grade ausgebildet hatten, dem Thales und seinen Schülern,

und zeigen
Stadien der
auch jetzt
Schule des
die wir
lehre
ist aber
ben
ist eine
wie
mittel
tigen
cherung
das
einer
von der
sung
aufgenommen
die
sich einen
selbst
§ 5
Die
seine Entfernung
und von den
goras mitgetheilt
fraglichen Factums
beschränkt,
ausgeben konnte.
zu machen hatte.
genirtheit, mit
von den
leuten gegenüber
Das von
wir aus einer
Folgendes

r
r
ne-
lige
und
cher
dieser
r un
aber

deshalb, weil sie Platonische Ideen enthalten sollten, mithin erst lange nach dem Erlöschen der Pythagoräischen Schule fabricirt sein müssten.

Von diesen extremen Behauptungen ist allerdings die neuere Philologie in etwas zurückgegangen. Man hat sich erinnert, dass auch Platon nicht vom Monde auf die Erde gefallen ist, sondern mit seiner Gedankenentwickelung mitten in seiner Zeit steht, namentlich aber durch die Lehren der Pythagoräischen Schule, mit denen er vertraut war, stark beeinflusst worden ist; — und so bildet das blosse Vorkommen sogenannter Platonischer Vorstellungen in den Fragmenten Pythagoräischer Schriften heut zu Tage kein so entscheidendes Moment mehr, um deshalb sofort auf Unechtheit der letzteren zu schliessen. Seitdem Kenner von erstem Range, ein Böckh, die Fragmente des Philolaos für *nicht* untergeschoben erklärt, ein Lobeck einen Theil wenigstens der Orphischen Hymnen für gutes Griechisch und kein Machwerk späterer Jahrhunderte anerkannt hat, scheint sich auch die Sucht, Alles, was von Pythagoräern herrührt, schon um dieses Ursprungs willen für unächt zu erklären, in etwas verloren zu haben. Indessen ruht über der Gesammtheit der Nachrichten, welche Pythagoras angehen, noch immer jenes Vorurtheil absoluter Unverständlichkeit und Unsicherheit, das die frühere Periode der Alterthumswissenschaft gross gezogen und der nachkommenden Generation überliefert hat.

§ 53. Unter solchen Umständen darf es eben nicht Wunder nehmen, dass ein neuerer, von philologischen Vorurtheilen nicht beeinflusster Forscher der herrschenden Anschauung einmal diametral entgegen getreten und geradezu auf das entgegengesetzte Extrem hinübergesprungen ist. Röth hat im zweiten Bande seiner Geschichte unserer abendländischen Philosophie eine Darstellung von dem Leben und den Leistungen des Pythagoras gegeben, welche principiell von dem Grundsatze ausgeht, jede Notiz eines alten Autors zuzulassen, welche den Stempel der Unkenntniss oder Erfindung nicht ganz unzweifelhaft an der Stirne trägt. Dem unendlichen Fleisse, mit welchem das gesammte Material zusammengetragen, und der Kunst, mit welcher aus demselben ein Bild von dem Leben und Wirken des Pythagoras zusammengesetzt ist, kann man seine Anerkennung nicht versagen. Allein das Resultat dieser *ganzen* Forschung als ein wohlbegründetes anzuerkennen, dürfte unmöglich sein, so viel Einzelheiten auch der Zustimmung unpartheiischer Beurtheiler sich zu erfreuen haben mögen. Die Philologen von reinem Wasser freilich haben dem Verfasser, der sich unterstanden, von einer Ansicht abzuweichen, welche *sie* als die allein zulässige bezeichnet haben, sofort völlige Kritiklosigkeit, Mangel an jeglichem Urtheil, ja sogar an Verstand, vorgeworfen; — allein auch bei gänzlicher Fernhaltung von solch' orakelmässigem Absprechen kann der, welcher sich die Mühe nimmt, das ganze von Röth beigebrachte Material selbständig durchzuarbeiten, sich nicht bergen, dass dessen Schlussfolgerungen mitunter sehr gewagt sind und seine Kritik häufig ganz à la Niebuhr geübt wird.

Nur in einem Punkte werden partheilose Forscher künftig Röth beistimmen müssen, nämlich in der Zulassung von Autoren, als Quellen der Forschung, welche von den Philologen bisher gänzlich verworfen worden sind. Namentlich gilt dies von des Jamblichos und Porphyrios Leben des Pythagoras. Allgemein sind dieselben verschrieen als eine Sammlung der albernsten und einfältigsten Mährchen über unseren Philosophen, so dass ihren Angaben auch nicht die mindeste Glaubwürdigkeit beizumessen sei. Schwerlich aber haben die meisten von denen, die also urtheilen, sich die Mühe genommen, die Werke jener Autoren selbst zu lesen. Thut man dies, so findet man, dass diese Schriften allerdings eine Verherrlichung des Pythagoras bezwecken und es dabei nicht verschmäht haben, eine Anzahl Mythen über dessen Persönlichkeit aufzunehmen, die wir theilweise auch bei andern Schriftstellern, z. B. bei Diogenes L., wiederfinden, und von unserem heutigen Standpunkte aus freilich als lächerlich bezeichnen müssen, obschon sie dies für das Alterthum lange nicht in dem Grade waren. — Neben diesen Erzeugnissen des Aberglaubens und der Wundersucht aber findet sich, namentlich in des Jamblichos Schrift, auch eine grosse Masse höchst nüchterner Angaben über die Lebensschicksale seines Helden und dessen Verhältniss zu Schülern und Zeitgenossen; Angaben, welche so natürlich und zugleich der politischen und socialen Lage der damaligen Zeit so entsprechend sind, dass man in der That nicht begreift, weshalb dies Alles um jeden Preis erfunden und erlogen sein soll. Es ist eben nichts als blinde Voreingenommenheit, die da meint, weil *uns* die ganze umfangreiche Literatur der Sikeliotischen und Unteritalischen Griechen verloren gegangen ist, könnten auch die Alten und insbesondere die Alexandriner von derselben keine Kenntniss gehabt haben. Will man dieser extremen Annahme aber nicht beipflichten, so ist es auch nicht gestattet, die vielfachen Notizen, die uns über Pythagoras noch erhalten sind, wegen mancherlei in ihnen vorkommender Widersprüche, gleich in Bausch und Bogen als unglaubwürdig zu bezeichnen. Was würde aus so manchem Capitel unserer Alterthumswissenschaft werden, wenn wir die seichten und oberflächlichen Sammelwerke eines Diogenes Laertios und ähnlicher Autoren in solcher Art kritisiren wollten, wie dies bei den Schriften über Pythagoras geschehen ist!

Doch genug hiervon! Da wir so glücklich sind, es im Folgenden nicht mit dem Philosophen, sondern nur mit dem Geometer Pythagoras zu thun zu haben, so bedarf es für uns keiner so umständlichen und tief eindringenden Untersuchung, wie sie Röth angestellt hat; die Leistungen der Italischen Schule und ihres Stifters in den exacten Wissenschaften liegen in den Nachrichten der Alten uns ziemlich klar vor.

§ 54. Suchen wir zuvörderst das Zeitalter des Pythagoras festzustellen, so berichtet uns Porphyrios (de vita Pyth. c. 56. — ed. Kiessl. II. pag. 90): *Δικαίαρχος δὲ καὶ οἱ ἀκριβέστεροι καὶ τὸν Πυθαγόραν φασὶ παρεῖναι τῇ ἐπιβουλῇ. Φερεκύδην γὰρ πρὸ τῆς ἐκ Σάμου ἀπάρσεως τελευτῆσαι.* — „Dikaiarchos und die sorg„fältigeren Historiker berichten aber, Pythagoras sei bei dem An„griffe (auf seine Schule) zugegen gewesen; denn Pherekydes sei „bereits vor der Abreise jenes von Samos gestorben." — Es handelt sich nämlich in der citirten Stelle darum, dass einige Schriftsteller behauptet hatten, Pythagoras sei bei der gewaltsamen Zersprengung seiner Schule nicht zugegen gewesen, sondern habe vielmehr seinen alten Lehrer Pherekydes auf Syros gepflegt. Gegen diese Annahme ruft Porphyrios das Zeugniss eines der verlässlichsten Schriftsteller, des Dikaiarchos, auf. Damit wird aber wenigstens so viel festgestellt, dass Pythagoras erst um 510 v. Chr. nach Unteritalien übergesiedelt sein kann, da Pherekydes etwa um 513 v. Chr. gestorben ist. — Ein zweiter Punkt, der für die Zeitbestimmung einen Anhalt gewährt, ist die im ganzen Alterthume als zweifellos betrachtete Angabe, dass Pythagoras als Jüngling noch mit Thales verkehrt habe. Jamblichos (vita Pyth. c. 2. — ed. Kiessl. pag. 32) berichtet darüber: *Καὶ δὴ καὶ ὁ Θαλῆς ἄσμενος αὐτὸν προςήκατο, καὶ θαυμάσας τὴν πρὸς ἄλλους νέους παραλλαγήν, ὅτι μείζων τε καὶ ὑπερβεβηκυῖα ἦν τὴν προφοιτήσασαν ἤδη δόξαν, μεταδούς τε ὅσον ἠδύνατο μαθημάτων, τὸ γῆράς τε τὸ ἑαυτοῦ αἰτιασάμενος καὶ τὴν ἑαυτοῦ ἀσθένειαν, προετρέψατο εἰς Αἴγυπτον διαπλεῦσαι, καὶ τοῖς ἐν Μέμφιδι καὶ Διοςπόλει μάλιστα συμβαλεῖν ἱερεῦσι. παρὰ γὰρ ἐκείνων καὶ ἑαυτὸν ἐφωδιάσθαι ταῦτα, δι' ἃ σοφὸς παρὰ τοῖς πολλοῖς νομίζεται.* — „Aber auch Thales nahm ihn bereit„willig auf, bewunderte sein Hervorragen über andere Jünglinge, das „er noch grösser und bedeutender fand, als den ihm vorausgegange„nen Ruf; und indem er ihm von Kenntnissen mittheilte, so viel er „vermochte, sein Alter und seine Schwäche bedauernd, ermunterte er „ihn nach Aegypten zu schiffen und sich besonders an die Priester „zu Memphis und Diospolis (Theben) zu wenden. Denn von diesen „sei er selbst mit dem ausgestattet worden, um deswillen er von der „Menge ein Weiser genannt werde." — Kann auch nicht abgeläugnet werden, dass in dieser Stelle die Tendenz, schon den Jüngling Pythagoras als ein Wunder seiner Zeit hinzustellen, ziemlich deutlich hervortritt, so ist doch das Factum seines Verkehrs mit Thales nicht zu bezweifeln, so wenig wie dessen Rath an den wissensdurstigen Jüngling, zu gründlicheren Studien sich nach Aegypten zu begeben. — Da aber Thales kurz nach 548 v. Chr. gestorben ist, so wird man des Pythagoras Geburt ohne bedeutenden Fehler um 568 bis 564 v. Chr. ansetzen können. Wenn er daher nach der Angabe Einiger im 80ten, nach der der Meisten aber im 90ten Jahre starb, so fällt sein Tod etwa zwischen 488 bis 478 v. Chr.

Mit dieser Bestimmung lassen sich nun die meisten und die zuverlässigsten Angaben, die uns über Pythagoras erhalten sind, am besten vereinigen. Namentlich stimmt der seit 510 v. Chr. beginnende und bis gegen 470 fortdauernde, ganz Unteritalien und Sicilien erschütternde Kampf zwischen Aristokratie und Demokratie sehr gut mit den Schicksalen zusammen, denen die ganz auf aristokratische Elemente gegründete Pythagoräische Verbrüderung schlüsslich erlag.

§ 55. Dass Pythagoras nach Aegypten übergesiedelt ist und dort ausführliche Studien gemacht hat, ist nicht minder gewiss, als die gleiche Angabe über Thales, Platon und Andere. Schon Isokrates giebt an (Busiris, c. 11): *Ἔχοι δὲ ἄν τις μὴ σπεύδειν ὡρμημένος πολλὰ καὶ θαυμαστὰ περὶ τῆς ὁσιότητος αὐτῶν διελθεῖν, ἣν οὔτε μόνος οὔτε πρῶτος ἐγὼ τυγχάνω καθεωρακώς, ἀλλὰ πολλοὶ καὶ τῶν ὄντων καὶ τῶν προεγεγενημένων, ὧν καὶ Πυθαγόρας ὁ Σάμιός ἐστιν· ὃς ἀφικομένος εἰς Αἴγυπτον καὶ μαθητὴς ἐκείνων γενόμενος, τὴν τ' ἄλλην φιλοσοφίαν πρῶτος εἰς τοὺς Ἕλληνας ἐκόμισε.* — „Man könnte, wenn man nicht eilen wollte, viel Bewunderungs„würdiges von ihrer (der Aegyptischen Priester) Heiligkeit anführen, „welche ich weder allein noch zuerst erkannt habe, sondern Viele „der jetzt Lebenden und der Früheren, unter denen auch Pythago„ras der Samier ist, der nach Aegypten kam und ihr Schüler wurde, „und die fremde Philosophie zuerst zu den Griechen verpflanzte." Genau dasselbe berichten eine ganze Anzahl anderer Schriftsteller, hinsichtlich deren es genügen mag, auf die bereits oben in § 21. citirte Stelle des Diodoros (I, c. 96) zu verweisen.

Ob Pythagoras mit Empfehlungsbriefen des Polykrates an den Aegyptischen König Amasis versehen war oder nicht, hat für uns kein Interesse, ebenso wenig wie der Umstand, ob er gezwungen gewesen ist, sich der Beschneidung zu unterwerfen, um zu den eigentlich wissenschaftlichen Vorträgen der Aegyptischen Priestercollegien zugelassen zu werden. Dass sein Aufenthalt in Aegypten ein langer, und die von ihm erworbene Kenntniss der Aegyptischen Wissenschaft eine durchaus gründliche gewesen sein muss, geht schon aus seinen späteren Leistungen hervor, die sich z. B. in der Mathematik weit über die des Thales erhoben, wird aber auch durch den Umstand bestätigt, dass er sich mit allen Gattungen der Aegyptischen Schrift und Sprache vollkommen vertraut gemacht hatte[1]), ein Studium, das einem Ausländer in damaliger Zeit jedenfalls einen grossen Zeitaufwand verursachte. Jamblichos[2]) bestimmt die Dauer des Aufenthaltes in Aegypten auf 22 Jahre, lässt ihn dann durch Kambyses als Gefangenen nach Babylon transportirt werden und nach einem abermaligen Aufenthalte von 12 Jahren von dort als 56jährigen Mann nach Samos zurückkehren.

Hierbei scheint allerdings manches Unhistorische unterzulaufen. Den langen Aufenthalt in Aegypten mag man wohl zugeben; es ist nicht unglaublich, dass Pythagoras daselbst in Ruhe seinen Studien oblag, bis das Land durch die Persische Eroberung einen völligen Umsturz erlitt. Wenn aber von einer 12jährigen Gefangenschaft in Babylon gesprochen wird, so ist dies wohl nur geschehen, um Pythagoras mit Magiern und andern orientalischen Priesterschaften in Verbindung zu bringen, und ihn auch von deren Weisheit profitiren zu lassen. Selbst angenommen, was an sich nicht unmöglich ist, dass er auf des Kambyses Befehl zugleich mit Aegyptischen Priestern in die Gefangenschaft geführt worden sei (um 525 v. Chr.), so wäre er jedenfalls unter der Regierung des Darius Hystaspis eben so gut freigelassen worden, wie seine Aegyptischen Lehrer und Freunde und es bedurfte gar nicht jener, wie Röth selbst zugesteht, romanhaften Art der Befreiung, durch welche ihm Letzterer die Rückkehr in die Heimath möglich macht. Auch ist nicht zu übersehen, dass vielfach angegeben wird, Pythagoras habe bei seiner Rückkehr nach Hellas die Vaterstadt unter der Herrschaft des Polykrates gefunden.[3]) Da nun letzterer bereits 522 v. Chr. durch Oiroites getödtet ward, kann jene Rückkehr nicht erst um 513 erfolgt sein.

---

1) Diog. Laert. (VIII, c. 1. nr. 3. — Huebn. Vol. II. pag. 240) berichtet: *καὶ ἐξέμαθε τὴν φωνὴν αὐτῶν, καθά φησιν Ἀντιφῶν ἐν τῷ περὶ τῶν ἐν ἀρετῇ πρωτευσάντων* — „er erlernte ihre (der Aegypter) Sprache, wie Antiphon an„giebt in seiner Schrift über die durch Ehrenhaftigkeit ausgezeichneten Männer.“ — Noch specieller verbreitet sich über diesen Gegenstand ein Fragment aus des Diogenes unglaublichen Geschichten über Thule, das Porphyrios uns erhalten hat. Es heisst (vit. Pyth. c. 12. — ed. Kiessl. pag. 24) daselbst: *καὶ ἐν Αἰγύπτῳ τοῖς ἱερεῦσι συνῆν καὶ τὴν σοφίαν ἐξέμαθε καὶ τὴν Αἰγυπτίων φωνήν, γραμμάτων δὲ τρισσὰς διαφορὰς, ἐπιστολογραφικῶν τε, καὶ ἱερογλυφικῶν καὶ συμβολικῶν.* — „In Aegypten verkehrte er mit den Priestern und erlernte die „Wissenschaft und Sprache der Aegypter, sowie die dreifache Schrift derselben, „nämlich die epistolographische, hieroglyphische und symbolische.“

2) Jambl. vita Pythag. c. 4. — ed. Kiessl. pag. 50.

3) Diogenes Laert. VIII. c. 1. nr. 3. — Huebn. Vol. II. pag. 240.

§ 56. In Samos wieder heimisch geworden, versuchte Pythagoras zuerst, daselbst eine Schule zu gründen. Da er aber, wie Jamblichos angiebt[1]), bei seinem Unterricht ganz die breite und weitläufige Methode in Anwendung brachte, nach der er selbst von den Aegyptischen Priestern unterwiesen worden, so stand sein Hörsaal bald leer, und er wendete sich, nachdem er theils seinen Lehrer Pherekydes gepflegt, theils längere Reisen in Hellas unternommen hatte, zuletzt (um 510 v. Chr.)[2]) nach Croton in Grossgriechenland. In dieser Stadt, die damals in höchster Blüthe stand, gelang es ihm, einen Kreis begeisterter Schüler um sich zu versammeln, die er nicht nur in die Philosophie, Mathematik und Naturwissenschaft einweihete, sondern auch für das Leben zu einem engeren Bunde vereinigte, dessen Mitglieder sich eben so durch ihre Bildung wie durch den Adel ihrer Gesinnung und ihre sittliche Haltung auszeichnen sollten. Gerade hierbei aber beging Pythagoras einen bedeutenden politischen Fehler, indem er seine Verbrüderung nicht in dem freien Griechischen Geiste gründete, sondern, wie es scheint, als eine Nachahmung der eng geschlossenen und von dem allzu ungebundenen Verkehr mit der Aussenwelt abgewendeten Aegyptischen Priesterkaste. Da er zugleich dem Principe gehuldigt zu haben scheint, dass nur die Einsichtsvollsten und Verständigsten des Volkes dem Gemeinwesen vorzustehen und dasselbe zu leiten haben sollten, so erhielt der Bund noch überdies ein vollständig aristokratisches Gepräge, kam daher bald mit der, damals ganz Grossgriechenland durchziehenden, demokratischen Strömung in Conflict und ward endlich in Croton selbst durch offene Gewalt zersprengt. Pythagoras flüchtete nach Tarent, und nachdem seine Anhänger durch ihre hartnäckige aristokratische Opposition sich auch hier unmöglich gemacht hatten, von dort nach Metapontum, wo ihn in Folge eines abermaligen gewaltthätigen Angriffes auf seine Schule endlich der Tod ereilte[3]) (zwischen 480 und 470 v. Chr.).

§ 57. Bei weitem sicherer und bestimmter als die sich vielfach widersprechenden Angaben über die Lebensschicksale des Pythagoras ist das, was uns über die Leistungen desselben in den exacten Wissenschaften berichtet wird. Darüber namentlich sind alle Berichter-

1) Jambl. vita Pythag. c. 5. — ed. Kiessl. pag. 52.

2) Solinus (ed. Mommsen pag. 86) giebt an: *Bruto consule, qui reges urbe exegit, Italiam advectus est (Pythagoras).*

3) Die hier in kurzen Worten geschilderten Schicksale des Pythagoras ergeben sich aus der Zusammenstellung einer ganzen Anzahl einzelner Notizen, z. B. des Dikaiarchos bei Porph. vit. Pyth. c. 57. (Kiessl. pag. 92); — des Cicero de fin. V, 2. — des Justinus XX, 4. — des Heraklides Pontikos bei Diog. Laert. VIII. c. 1. n. 4. (ed. Huebn. Vol. II. pag. 273) u. s. w. Das Ausführlichere hierüber kann bei Röth (Bd. II. pag. 938 ff.) nachgesehen werden.

statter, Sachkundige wie Laien, einstimmig, dass zuerst von *ihm* die Mathematik zum Range einer Wissenschaft erhoben worden sei. Von der Arithmetik, die er bekanntlich seinem philosophischen Systeme zu Grunde legte, oder, wenn wir so sagen wollen, einverleibte, wird dies fast so oft bestätigt, als sein Name citirt wird; von der Geometrie aber rühmt Proklos in seinem Verzeichnisse der Geometer (§ 19.): „Pythagoras zuerst habe die Fundamente der Wissenschaft von „höherem Gesichtspunkte aus betrachtet und die Theoreme immate„rieller und intellectueller erforscht"; d. h. mit anderen Worten: er zuerst hat die Geometrie von der steten Rücksicht auf die Praxis, namentlich die Feldmesskunst, abgelöst und sie als eine rein theoretische Wissenschaft aufgefasst und behandelt. — In welchem Umfange Pythagoras die Lehren der Mathematik bereits von Anderen erhalten hat, lässt sich mit absoluter Bestimmtheit nicht angeben; aber aus den Entdeckungen, die ihm selbst zugeschrieben werden, kann doch ein ungefährer Schluss auf den Inhalt der Sätze und Lehren gezogen werden, die ihm bekannt sein mussten, wenn er jene Entdeckungen machen sollte. — Wir wenden uns nun zur Besprechung der einzelnen mathematischen Lehren, welche auf ihn zurückgeführt werden.

§ 58. In der Arithmetik kann dem Pythagoras mit Bestimmtheit zugeschrieben werden die Einführung der Lehre von den Proportionen, und zwar der geometrischen, arithmetischen und sogenannten harmonischen; ingleichen der aus ihnen hervorgehenden *Mittel.* Jamblichos (comment. in Nicom. arith. introd. ed. Tennul. pag. 141) giebt ganz bestimmt an: *μόναι δὲ τὸ παλαιὸν τρεῖς ἦσαν μεσότητες ἐπὶ Πυθαγόρου καὶ τῶν κατ' αὐτὸν μαθηματικῶν, ἀριθμητική τε καὶ γεωμετρικὴ καὶ ἥ ποτε μὲν ὑπεναντία λεγομένη τῇ τάξει τρίτῃ, ὑπὸ δὲ τῶν περὶ τὸν 'Αρχύταν αὖθις καὶ Ἵππασον ἁρμονικὴ μετακληθεῖσα.* — „Pythagoras und seine Schüler kannten nur „drei Proportionen, die arithmetische, geometrische und die in der „Reihenfolge dritte, die sogenannte entgegengesetzte, die aber von „Archytas und Hippasos die harmonische umgetauft ward." — In Bezug auf die Kenntniss der diesen Proportionen entsprechenden Mittel giebt Jamblichos (ibid. pag. 168) an: *Τὰ νῦν δὲ περὶ τῆς τελειοτάτης ἀναλογίας ῥητέον, ἐν τέσσαρσιν ὅροις ὑπαρχούσης καὶ ἰδίως μουσικῆς ἐπικληθείσης. . . . Εὕρημα δ' αὐτήν φασιν εἶναι Βαβυλωνίων, καὶ διὰ Πυθαγόρου πρώτου εἰς Ἕλληνας ἐλθεῖν.* — „Es ist nun von der vollkommensten Proportion zu sprechen, die aus „vier Gliedern besteht und speciell die musikalische genannt wird; „. . . Sie ist eine Erfindung der Babylonier und soll zuerst von Py„thagoras zu den Hellenen gebracht worden sein." Diese Proportion ist aber nach des Jamblichos Angabe:

$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2\,ab}{a+b} : b\,,$$

so dass das arithmetische und harmonische Mittel aus zwei Zahlen, mit letzteren selbst, eine geometrische Proportion bilden.

Dass diese ganze Lehre Babylonischen und nicht Aegyptischen Ursprunges ist, dürfte sich schon aus den im Abschnitt I. angeführten Stellen der Alten, sowie aus dem Umstande ergeben, dass die Aufgaben des Papyrus Rhind nichts enthalten, was auf den Gebrauch von Proportionen schliessen lässt. Unterstützt aber wird diese Ansicht auch noch dadurch, dass vor der Zeit, zu welcher die Kenntniss der Pythagoräischen Mathematik in die Oeffentlichkeit gelangte, also namentlich bei Thales und seinen Schülern, sich auch nicht eine Spur von der Proportion und ihrer Anwendung auffinden lässt. Wir haben vielmehr gesehen, dass Thales, nach dem Vorgange seiner Aegyptischen Lehrer, die Höhe eines Gegenstandes *nicht* mittelst der Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren bestimmte, sondern vielmehr durch Messung einer, jener Höhe gleichen, horizontal liegenden Geraden. Es ist dies ein sicheres Zeichen, dass die Proportionslehre noch keinen Eingang in die Geometrie gefunden hatte.

Letzteres bewirkt zu haben, ist daher unzweifelhaft das Verdienst des Pythagoras und seiner unmittelbaren Schüler, die damit zuerst den Begriff der Aehnlichkeit in die Geometrie einführten, wenn sie denselben vor der Hand auch nur auf geradlinige Figuren anzuwenden vermochten. Dass damit zugleich die Erfindung einer mittleren Proportionale zwischen zwei gegebenen Geraden, und somit die Verwandlung eines Rechteckes in ein gleichflächiges Quadrat gegeben war, leuchtet von selbst ein und wird sich unten noch bestimmter nachweisen lassen.

§ 59. Eine zweite Lehre, deren Erfindung der Pythagoräischen Schule vindicirt werden muss, ist die Lehre von den arithmetischen Progressionen, insoweit sie nöthig ist zur Theorie der Polygonalzahlen. Dass die Einheit, wiederholt mit der 2 verbunden, die Reihe der ungeraden Zahlen liefert, und diese, Glied für Glied addirt, die Quadratzahlen hervorbringt, ist vielleicht schon vor Pythagoras bekannt gewesen. Wenigstens ist das hierzu nöthige Schema

$$\begin{array}{cccccccccc} & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & \text{u. s. w.} \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 & \end{array}$$

so einfacher Natur, dass es recht gut von Chaldäern oder Aegyptern entdeckt sein konnte. Die Kenntniss dieser Entstehung der Quadratzahlen *muss* Pythagoras besessen haben, wie aus der von ihm gegebenen Regel zur Auffindung rationaler rechtwinkliger Dreiecke hervorgeht. Es war dann wohl nicht schwer, den in diesem Schema niedergelegten Gedanken dahin zu erweitern, dass man statt der constanten Zahl 2 in der obersten Reihe allmälig jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe einsetzte, und somit in der untersten Reihe die verschiedenen Gattungen der Polygonalzahlen erhielt. Ob die letzteren wirklich auf diesem Wege oder nicht vielmehr von geometrischen Betrachtungen ausgehend entdeckt worden sind, kann jetzt nicht mehr entschieden werden. Dass sie aber frühe schon bearbeitet worden sind, geht daraus hervor, dass bereits Philippos Opuntios[1]) ein Werk über sie verfasst hat. Sie sind also bereits vor Euklides von den Mathematikern in Untersuchung genommen worden, und es folgt daraus, dass letzterer sie in seinem Elementarwerke nicht erwähnt, keinesweges, dass er sie nicht kannte. In des Archimedes Schriften kommen die Progressionen mehrfach vor, und ebenso finden wir sie wieder in des Hypsikles Anaphorikos angewendet (der beiläufig bemerkt nicht nach des Fabricius sinnloser Hypothese um 180 nach Chr., sondern etwa um 130 v. Chr. zu setzen ist), bis sie endlich durch Nikomachos in grösserer Ausführlichkeit behandelt und vollständig in die Arithmetik eingeführt werden[2]).

Die ganze Theorie der Polygonalzahlen hängt übrigens so unmittelbar mit der Betrachtung der regelmässigen Vielecke zusammen, dass wir kaum fehlgehen werden, wenn wir die Kenntniss der ersteren schon um deswillen der Pythagoräischen Schule zuschreiben, weil dieselbe auch mit der letzteren in ziemlich umfänglicher Weise bekannt war, wie sich später zeigen wird.

§ 60. Noch weit directere Angaben, als uns über die arithmetischen Entdeckungen der Pythagoräischen Schule erhalten sind, besitzen wir über die Leistungen derselben in der Geometrie. Um zuerst etwas über die Methode zu sagen, die sie bei ihren Forschungen vornehmlich anzuwenden scheint, so erwähnt Proklos in seinem Commentar zu Euklides (ed. Basil. pag. 81. — Baroc. pag. 175), dass die Ebene um einen Punkt herum, durch sechs gleichseitige Dreiecke, vier Quadrate, oder drei regelmässige Sechsecke vollständig erfüllt werde, so dass es möglich sei, die ganze Ebene in jede dieser drei Figurengattungen zu zerlegen; und fügt am Schlusse bei: *καὶ ἔστι τὸ θεώρημα τοῦτο Πυθαγυρεῖον*; — „dies ist ein Pythagoräisches

1) Suidas führt unter den Schriften dieses Schülers des Platon (s. v. philosophos) auch eine unter dem Titel: *περὶ πολυγόνων ἀριθμῶν* an. — Vergl. auch Westermann vitae etc. pag. 446.

2) Nesselmann in seiner kritischen Geschichte der Algebra erwähnt weder des Philippos Opuntios, noch des Hypsikles Anaphorikos, scheint also Letzteren gar nicht zu kennen, daher er auch an des Fabricius kopfloser Hypothese gar keinen Anstoss nimmt.

Theorem.“ — Ebenso lässt Platon im Timaios (c. 20. — § 107.) den letzteren Folgendes auseinandersetzen: „Jede geradlinige Figur „besteht aus Dreiecken; alle Dreiecke aber lassen sich in rechtwink-„lige zerlegen, welche entweder gleichschenklige oder ungleichseitige „sind. Unter den letzteren ist dasjenige das schönste, aus dessen „Verdoppelung ein gleichseitiges Dreieck entsteht, oder in welchem das „Quadrat der grösseren Kathete das Dreifache vom Quadrat der kleine-„ren Kathete beträgt, oder in welchem die kleinere Kathete der Hälfte „der Hypotenuse gleich ist. Zwei oder vier rechtwinklig-gleichschenklige „Dreiecke, gehörig zusammengesetzt, liefern aber das Quadrat; zwei „oder sechs der (schönsten) ungleichseitigen rechtwinkligen Dreiecke „aber bilden das gleichseitige Dreieck. Und aus diesen beiden Figu-„ren entstehen nun die Körper, die den vier Elementen der realen „Welt entsprechen, das Tetraëder, Octaëder, Icosaëder, ingleichen „der Kubus.“

Da Platon hinsichtlich seiner mathematischen Kenntnisse bekanntlich ganz auf den Schultern der Pythagoräischen Schule steht, so ist es wohl nicht allzukühn geschlossen, wenn wir diese ganze Zerlegung der Figuren in besondere Gattungen rechtwinkliger Dreiecke auf Pythagoras zurückführen. Und es kann dies mit um so grösserer Wahrscheinlichkeit geschehen, da wir später finden werden, dass Sätze, die von ganz gleichem Principe ausgehen, wie z. B. der Satz vom Gnomon dem Pythagoras müssen bekannt gewesen sein. Damit aber scheint sich in der That eine Methode zu enthüllen, welche von den Pythagoräern bei geometrischen Untersuchungen mit Vorliebe gebraucht und deshalb sorgfältig ausgebildet worden ist. Ob sie dieselbe in ihrer Schule erst erfunden haben, oder ob sie der Meister bereits von den Aegyptern erhalten hat, lässt sich nicht mehr entscheiden. Ganz unwahrscheinlich ist das Letztere nicht, da die Aegypter den Satz vom Gnomon ganz gewiss kennen mussten, und auch die Flächenbestimmungen des Papyrus Rhind darauf beruhen, dass die auszumessenden Figuren in gleichschenklige Dreiecke, Parallelogramme und Trapeze zerlegt werden.

§ 61. Aus dem Satze, dass die Ebene durch regelmässige Dreiecke, oder Vierecke oder Sechsecke vollständig erfüllt werden kann, folgt nothwendiger Weise, dass die Pythagoräer oder vielmehr schon die Aegypter gewusst haben müssen, dass die Summe der Winkel um einen Punkt herum vier Rechte, also die über einer Geraden zwei Rechte beträgt, woraus sich von selbst ergiebt, dass die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks gleichfalls zweien Rechten gleich ist. Auf welche Weise die Aegypter, und ihnen folgend Thales und die Ionische Schule, das Letztere bewiesen haben, ist uns nicht bekannt;

dagegen hat uns Proklos aus des Eudemos Geschichte der Geometrie noch den Beweis erhalten, durch welchen die Pythagoräer den fraglichen Lehrsatz für jede beliebige Dreiecksgattung dargethan haben. Er sagt (comm. in Eucl. ed. Basil. pag. 99. — Baroc. 228) — Fig. 1:

Εὔδημος ὁ περιπατητικὸς εἰς τοὺς Πυθαγορείους ἀναπέμπει τὴν τοῦδε τοῦ θεωρήματος εὕρεσιν, ὅτι τρίγωνον ἅπαν δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχει τὰς ἐντὸς γωνίας καὶ δεικνῦναι φησὶν αὐτοὺς οὕτως τὸ προκείμενον.· Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΔΕ. ἐπεὶ οὖν παράλληλοί εἰσιν αἱ ΒΓ, ΔΕ, καὶ αἱ ἐναλλὰξ ἴσαι εἰσίν, ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΔΑΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΑΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ. κοινὴ προκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ, ΒΑΓ, ΓΑΕ τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΒ, ΒΑΕ, τουτέστιν αἱ δύο ὀρθαὶ ἴσαι εἰσὶν ταῖς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου τρισὶν γωνίαις. αἱ ἄρα τρεῖς τοῦ τριγώνου δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. Τοιαύτη μὲν οὖν καὶ ἡ τῶν Πυθαγορείων ἀπόδειξις.

Der Peripatetiker Eudemos schreibt die Erfindung dieses Theorems den Pythagoräern zu, dass die Innenwinkel jedes Dreiecks zweien Rechten gleich sind, und berichtet, dass sie diesen Satz folgendermassen bewiesen haben. Es sei $AB\Gamma$ ein Dreieck; man ziehe durch A die ΔE parallel zu $B\Gamma$. Da nun $B\Gamma$ und ΔE parallel sind, so sind die Wechselswinkel gleich; $\Delta\hat{A}B$ gleich $A\hat{B}\Gamma$, und $E\hat{A}\Gamma$ gleich $A\hat{\Gamma}B$. Es werde der gemeinschaftliche Winkel $B\hat{A}\Gamma$ addirt. Dann sind die Winkel $D\hat{A}B$, $B\hat{A}\Gamma$, $\Gamma\hat{A}E$, d. h. $\Delta\hat{A}B$ und $B\hat{A}E$, d. h. zwei Rechte gleich den drei Winkeln des Dreiecks. Es sind demnach die drei Winkel jedes Dreiecks zweien Rechten gleich. Der Art ist nun der Beweis der Pythagoräer.

Der vorstehende Beweis, den wir jedenfalls wörtlich aus Eudemos ausgezogen vor uns haben, lässt übrigens erkennen, dass die Pythagoräer den verallgemeinerten Satz: „die Summe aller Winkel „über einer Geraden beträgt stets zwei Rechte“ nicht kannten, sondern genöthigt waren, die fragliche Summe zuvörderst auf die zweier Nebenwinkel zurückzuführen.

§ 62. Ein zweites Verdienst, welches der Pythagoräischen Schule beigelegt wird, ist das sogenannte „Anlegen von Flächenräumen.“ Die hieher gehörige Hauptaufgabe findet sich bekanntlich bei Euklides (elem. I. prop. 44) in folgender Form vor: „An einer gegebenen Geraden unter einem gegebenen geradlinigen Winkel ein Parallelogramm zu entwerfen, welches einem gegebenen Dreiecke gleich ist.“ Proklos (comm. in Eukl. Basil. pag. 109. — Baroc. 264) bemerkt zu der von Euklides gegebenen Lösung: *ἔστι γὰρ ἀρχαῖα φασὶν οἱ περὶ τὸν Εὔδημον καὶ τῆς τῶν Πυθαγορείων μούσης εὑρήματα ταῦτα*; — „es sind dies, wie Eudemos angiebt, alte Entdeckungen „der Pythagoräer.“ — Auch Plutarchos (non posse suav. vivi sec. Epic. c. 11) bemerkt: *Πυθαγόρας ἐπὶ τῷ διαγράμματι βοῦν ἔθυσεν, ὥς φησιν Ἀπολλόδοτος .... εἴτε περὶ τῆς ὑποτεινούσης, ὡς ἴσον* *δύναται ταῖς περιεχούσαις τὴν ὀρθήν, εἴτε πρόβλημα περὶ τῆς τοῦ χωρίου παραβολῆς.*[1]) — „Pythagoras opferte einer geometrischen Figur halber einen Stier, ... sei es nun wegen des Satzes von der Hypotenuse, dass ihr Quadrat denen der Katheten gleich ist, sei es wegen des Problems von der Anlegung der Flächen.“ Die Lösung des fraglichen Problemes, durch welche zugleich Addition und Subtraction beliebiger Parallelogramme, Dreiecke und Trapeze erhalten wird, setzt aber ganz nothwendig den bei Euklides unmittelbar vorangehenden Satz (elem. I. prop. 43) voraus, der unter dem Namen des Satzes vom „Gnomon“ bekannt ist. Der Beweis des letzteren, der ganz allein durch Zerlegung des Parallelogrammes in kleinere Theile geführt wird, zeigt von der schon vorhin (§ 60.) besprochenen Methode der Untersuchung, die bei den Pythagoräern besonders in Aufnahme war, und ihrem Entstehen nach auf die Aegypter zurückzugehen scheint.

Mit der Kenntniss des Satzes vom Gnomon ist aber der Pythagoräischen Schule sofort auch der grösste Theil vom Inhalte des ersten Buches der Euklidischen Elemente zugesprochen. Die einfachsten Sätze von Winkeln, Parallelen, Dreiecken und Parallelogrammen müssen demjenigen bekannt sein, der das Parallelogramm in der angeführten Weise zerlegen will; ebenso sind die Flächenvergleichungen von Dreiecken, Parallelogrammen und Trapezen nothwendige Voraussetzung für das Anlegen (*παραβάλλειν*) dieser Figuren an gegebene Gerade. Dass die Gesammtheit dieser Lehren aber nicht Griechischen, sondern Aegyptischen Ursprunges, und höchstens in einzelnen Punkten von Pythagoras erweitert und vervollständigt, vielleicht auch strenger bewiesen worden ist, dürfte um so weniger zu bezweifeln sein, als wir bereits Thales im Besitze eines Theiles wenigstens dieses Wissens gefunden haben, und die Aufgaben des Papyrus Rhind von demselben unbedingten Gebrauch machen. Auch Pythagoras hat dieses Gebiet geometrischer Kenntnisse aus der Fremde mit heimgebracht, aber jedenfalls in grösserer Vollständigkeit und mit tieferem Verständnisse als Thales.

§ 63. Mit weit grösserer Wahrscheinlichkeit, als dem Italischen Philosophen die Erfindung der eben besprochenen Lehren, wird ihm die des nach ihm benannten Lehrsatzes vom rechtwinkligen Dreiecke beigelegt. Letzterer findet sich nebst seiner Umkehrung in des Euklides Elementen (I. prop. 47 und 48), in denen er den Schluss des

---

1) Im Texte wird zwar gelesen: *περὶ τοῦ χωρίου τῆς παραβολῆς* — „wegen des Flächeninhaltes der Parabel,“ was für Röth eines der Hauptmotive ist, dem Pythagoras die Kenntniss der Kegelschnitte zuzuschreiben. Es widerspricht dies aber Allem, was wir über die Griechische Geometrie Bestimmtes wissen, so direct, dass die oben gegebene Textesumstellung durchaus geboten erscheint.

ersten Buches bildet. Proklos (ed. Basil. p. 110. — Baroc. p. 268) bemerkt hierzu: *τῶν μὲν ἱστορεῖν τὰ ἀρχαῖα βουλομένων ἀκούοντες τὸ θεώρημα τοῦτο εἰς Πυθαγόραν ἀναπεμπόντων ἔστιν εὑρεῖν καὶ βουθυτεῖν λεγόντων αὐτὸν ἐπὶ τῇ εὑρήσει* — „hören wir die, welche „alte Geschichten erzählen wollen, so ist dies Theorem auf Pythagoras zurückzuführen, der der Erfindung halber einen Stier geopfert „haben soll.“ — Dass unter dem, der gern alte Geschichten erzählt, auch hier Niemand anderes als Eudemos zu verstehen ist, leuchtet wohl unmittelbar ein, ebenso wie die Fabelhaftigkeit des Stieropfers, das allen Pythagoräischen Grundsätzen geradezu widerspricht. Das Factum selbst aber, dass Pythagoras jenen Lehrsatz *erfunden* habe, kann nicht bezweifelt werden, da es im ganzen Alterthume als Thatsache anerkannt wird. Freilich hat man dagegen geltend gemacht, dass schon die Aegypter den fraglichen Satz gekannt haben müssten, da sie bereits gewusst hätten, dass ein Dreieck von den Seiten 3, 4 und 5 rechtwinklig sein müsse. Plutarchos nämlich berichtet (de Iside et Osir. c. 56):

Αἰγυπτίους δ' ἄν τις εἰκάσειε τῶν τριγώνων τὸ κάλλιστον, μάλιστα τούτῳ τὴν τοῦ παντὸς φύσιν ὁμοιοῦντας, ᾧ καὶ Πλάτων ἐν τῇ πολιτείᾳ δοκεῖ τούτῳ προσκεχρῆσθαι, τὸ γαμήλιον διάγραμμα συντάττων. Ἔχει δ' ἐκεῖνο τὸ τρίγωνον τριῶν τὴν πρὸς ὀρθίαν καὶ τεττάρων τὴν βάσιν καὶ πέντε τὴν ὑποτείνουσαν ἴσον ταῖς περιεχούσαις δυναμένην. Εἰκαστέον οὖν τὴν μὲν πρὸς ὀρθὰς ἄρρενι, τὴν δὲ βάσιν θηλείᾳ, τὴν δὲ ὑποτείνουσαν ἀμφοῖν ἐγγόνῳ· καὶ τὸν μὲν Ὄσιριν ὡς ἀρχὴν, τὴν δὲ Ἶσιν ὡς ὑποδοχὴν, τὸν δὲ Ὧρον ὡς ἀποτέλεσμα, κ. τ. λ.

Es haben sich aber wohl die Aegypter die Natur des Weltalls zunächst unter dem Bilde des schönsten Dreiecks gedacht; auch Platon in der Schrift vom Staate scheint dies Bild gebraucht zu haben, da wo er ein Gemälde des Ehestandes entwirft. Dies Dreieck enthält eine senkrechte Seite von 3, eine Basis von 4 und eine Hypotenuse von 5 Theilen, deren Quadrat denen der Katheten (zusammengenommen) gleich ist. Man kann nun die Senkrechte mit dem Männlichen, die Basis mit dem Weiblichen, die Hypotenuse mit dem aus beiden Geborenen vergleichen, und somit den Osiris als Ursprung, die Isis als Empfängniss und den Horos als das Erzeugniss denken; u. s. w.

Es ist aber nach der Fassung dieser Stelle nicht zu verkennen, dass Plutarchos den gemachten Vergleich als *seinen* Einfall hinstellt, und gar nicht behauptet, dass er bei den Aegyptern zu finden sei. Demnach kann dieses Citat nicht als Beweis dafür dienen, dass bereits die Aegypter die Rechtwinkligkeit dieses speciellen Dreieckes gekannt hätten. Wäre dies aber gleichwohl der Fall gewesen, so bliebe es in der That seltsam, dass von einem, auch für die Praxis so wichtigen Satze *vor* Pythagoras auch nicht das Geringste erwähnt wird. Die Construction eines Maasses für den rechten Winkel aus drei Geraden, die sich wie 3, 4, 5 verhalten, lehrt ganz ausführlich Vitruvius (l. IX. praef. 5, 6 und 7); aber auch dieser schreibt die Erfindung desselben ganz bestimmt dem Pythagoras zu. Er sagt: *Item Pythagoras normam sine artificis fabricationibus inventam ostendit, et quam magno labore fabri normam facientes vix ad verum perducere possunt, id rationibus et methodis emendatum ex ejus praeceptis explicatur etc.*, worauf er die Anfertigung des Instrumentes umständlich angiebt.

Nach dem Allen dürften die Ansprüche der Aegypter auf die Entdeckung des sogenannten Pythagoräischen Lehrsatzes zurückzuweisen, letztere vielmehr dem Pythagoras selbst zu vindiciren sein.

§. 64. Die Beantwortung der Frage aber, auf welchem Wege der Erfinder zu seinem Satze gelangt ist, kann nur von *einem* bestimmten Punkte aus unternommen werden, indem man nämlich die *Stelle* berücksichtigt, welche der Satz in des Euklides Elementen einnimmt, und sich daran erinnert, dass der von Letzterem gegebene Beweis von ihm selbst herrührt, nicht aber von Pythagoras. Proklos nämlich sagt in seinem Commentar (ed. Basil. pag. 110. — Baroc. pag. 268): *ἐγὼ δὲ θαυμάζω μὲν καὶ τοὺς πρώτους ἐπιστάντας τῆς τοῦ τοῦδε προβλήματος ἀληθείας· μειζόνως δὲ ἄγαμαι τὸν στοιχειωτὴν. οὐ μόνον ὅτι δι' ἀποδείξεως ἐναργεστάτης τοῦτο κατεδιήσατο, ἀλλ' ὅτι καὶ τὸ καθολικώτερον αὐτοῦ τοῖς ἀνελέκτοις λόγοις τῆς ἐπιστήμης ἐπίεσιν ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ.* — „Ich bewundere zwar „auch die, die zuerst der Wahrheit dieses Problemes nachgeforscht „haben; mehr aber noch schätze ich den Verfasser der Elemente, „nicht nur, weil er das Theorem mit dem bündigsten Beweise ver„sah, sondern auch, weil er das im sechsten Buche enthaltene, noch „allgemeinere Theorem durch die unwiderlegbarsten Gründe der Wis„senschaft feststellte.“ — Hiernach kann also nicht bezweifelt werden, dass die Pythagoräische Schule den Lehrsatz auf andere Art abgeleitet hat, als wir ihn bei Euklides finden.

Das Nächste, was man vermuthen könnte, ist die Ermittelung unseres Theoremes mit Hülfe der Proportionslehre, ein Gang, den die meisten unserer heutigen Lehrbücher neben dem Euklidischen auch einzuschlagen pflegen. Allein erstens ist es doch eine Frage, ob Pythagoras der Proportionslehre bereits so mächtig war, um seinen Satz auf diesem Wege finden zu können; und dann widerspricht zweitens dieser Art der Herleitung direct die Stelle, welche das Theorem in den Elementen einnimmt. Letztere deutet ganz bestimmt darauf hin, dass der Erfinder zum Beweise des Satzes keine anderweiten Mittel zu verwenden wusste, als die im ersten Buche von Euklides Elementen enthaltenen, für deren Gesammtheit er aber auch eine Art Abschluss bildet. Nun sind wohl in neuerer Zeit mehrere Constructionen angegeben worden, welche den Beweis unseres Theoremes auf ganz einfache Weise ergeben; allein die dazu erforderliche Construction ist immer von der Art, dass einer, der den Satz nicht bereits kennt, schwerlich auf dieselbe verfallen sein würde. Uns scheint der einfachste und natürlichste Weg der nachfolgende zu sein. Da den Pythagoräern der Satz vom Gnomon unbedingt zuzugestehen ist, so werden sie wohl selbstverständlich dessen Anwendung auf das Quadrat gekannt, also gewiss die geometrische Darstellung der Formel $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ besessen haben (Eukl. II. prop. 4). Nun sind aber die beiden Rechtecke ab (Fig. 2.) in vier congruente rechtwinklige Dreiecke zerlegbar, in deren jedem die Summe beider Katheten der Seite des gegebenen Quadrates gleich ist. Werden aber diese vier Dreiecke mit ihren rechten Winkeln in die Ecken des Quadrates gelegt, so dass immer eine grössere und kleinere Kathete zusammenstossen (Fig. 3.), so bilden die vier Hypotenusen das Quadrat der letzteren, was demnach der Summe der Kathetenquadrate ($a^2 + b^2$ in Fig. 2.) gleichflächig sein muss.

Diese oder eine ähnliche Ableitung unseres Satzes erfordert gar keine anderen Kenntnisse als solche, welche wir Pythagoras bereits haben zugestehen müssen, und hält sich ausserdem auch ganz an die Methode der Zerlegung ebener Figuren, von welcher wir schon oben gesehen haben, dass sie in der Pythagoräischen Schule mit Vorliebe gebraucht worden ist. — Ob Pythagoras auch bereits die Umkehrung seines Lehrsatzes (Eukl. I, 48) gegeben hat, lässt sich nicht entscheiden. Die Erweiterung des letzteren aber auf ähnliche Figuren, welche auf den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks als homologen Geraden construirt sind (Euklid. VI, 31), scheint nach den Worten des Proklos ganz bestimmt eine Leistung des Euklides zu sein.

§ 65. Zunächst aus seinem Lehrsatze leitete Pythagoras wohl das Gesetz ab, nach welchem rechtwinklige Dreiecke gebildet werden können, deren Seiten rationale Verhältnisse besitzen. Proklos (comm. ed. Basil. pag. 111. — Baroc. pag. 269) giebt die Regel folgendermassen an:

Παραδέδονται δὲ καὶ μέθοδοί τινες τῆς εὑρέσεως τῶν τοιούτων τριγώνων, ὧν τὴν μὲν εἰς Πλάτωνα ἀναπέμπουσί, τὴν δὲ εἰς Πυθαγόραν, ἣ ἀπὸ τῶν περιττῶν ἐστὶν ἀριθμῶν. Τίθησι γὰρ τὸν δοθέντα περιττὸν ὡς ἐλάσσονα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ λαβοῦσα τὸν ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνον καὶ τούτου μονάδα ἀφελοῦσα, τοῦ λοιποῦ τὸν ἥμισυν τίθησι τῶν περὶ

Es werden auch einige Methoden mitgetheilt, solche Dreiecke zu finden, deren eine man auf Platon, die andere, welche von ungeraden Zahlen ausgeht, auf Pythagoras zurückführt. Man nimmt nämlich die gegebene ungerade Zahl als die kleinere Kathete an; von dem Quadrate derselben die Einheit subtrahirt und der Rest halbirt, giebt die grössere Ka-

τὴν ὀρθὴν τὸν μείζονα· προσθεῖσα δὲ καὶ τούτῳ μονάδα τὴν λοιπὴν ποιεῖ τὴν ὑποτείνουσαν. οἷον τὸν τρία λαβοῦσα καὶ τετραγωνίσασα καὶ ἀφελοῦσα τοῦ ἐννέα μονάδα, τοῦ η̄ λαμβάνει τὸ ἥμισυ τὸν δ̄, καὶ τούτῳ προστίθησι πάλιν μονάδα καὶ ποιεῖ τὸν ε̄, καὶ εὕρηται τρίγωνον ὀρθογώνιον ἔχον τὴν μὲν τριῶν, τὴν δὲ τεσσάρων τὴν δὲ ε̄.	thete; zu dieser die Einheit addirt, giebt die Hypotenuse. Man nimmt z. B. drei; von dem Quadrate 9 nimmt man die Einheit hinweg und halbirt den Rest 8, was 4 giebt; dazu addirt man wiederum die Einheit, was 5 macht, und es wird somit das rechtwinklige Dreieck gefunden, was zu Seiten die Zahlen 3, 4 und 5 hat.

Die Auffindung dieser Regel war ausnehmend einfach, wenn Pythagoras den arithmetischen Satz kannte, dass die Summe der aufeinander folgenden ungeraden Zahlen die Reihe der Quadratzahlen liefert, ein Satz, den wir ihm bereits oben (§ 59.) haben zusprechen müssen. Denn schrieb er sich die Reihe der natürlichen Zahlen und die ihrer Quadrate untereinander und bemerkte unter jeder Quadratzahl ihre Differenz mit der nachfolgenden, wie z. B.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	u. s. w.
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	u. s. w.
3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	u. s. w.,

so ergab sich seine Regel von selbst, wenn er in der untersten Reihe diejenigen Zahlen aussuchte, welche selbst Quadratzahlen sind. Die Grundzahlen der letzteren gaben ihm stets die kleinere Kathete, während die beiden über ihr stehenden und sie einschliessenden Zahlen die Quadrate der beiden anderen Seiten und somit letztere selbst lieferten. Auch ist es bei dieser Annahme von selbst klar, weshalb Pythagoras seine Regel gerade so fasste, wie sie Proklos uns angiebt. Denn er hätte auch sagen können: „man addire und sub„trahire die Einheit zu und von dem Quadrate der gegebenen unge„raden Zahl und halbire die erhaltenen Resultate, so erhält man die „beiden anderen Zahlen.“ Offenbar aber wäre diese Fassung nicht so unmittelbar an das vorstehende Schema anschliessend, als die von Pythagoras gegebene.

§ 66. Eine unmittelbare Folge dieser Zahlenspeculation in Verbindung mit dem entsprechenden Dreieckssatze war nun die Entdeckung, dass es Linien giebt, deren gegenseitiges Verhältniss durch keine Zahlen angegeben werden kann, dass mithin auch Zahlwerthe existiren, welche kein angebbares Verhältniss zur Einheit besitzen. Die somit bewirkte Auffindung incommensurabler Grössen und irrationaler Zahlen ist eines der grössten Verdienste, welche das Alterthum dem Pythagoras zuschreibt. In der That muss auch der Eintritt dieser Erkenntniss in das menschliche Bewusstsein als eine Errungenschaft von um so höherer Bedeutung angesehen werden, je weniger sie durch unmittelbare sinnliche Wahrnehmung zugänglich ist und je häufiger die Incommensurabilität von Grössen aller Art bei tiefer eindringendem Naturstudium dem Menschen entgegentritt. — Ob aber die Pythagoräische Schule diesen neuen Begriff sofort auf die Theorie der Verhältnisse und Proportionen anwendete oder auch nur anwenden wollte, erscheint als höchst zweifelhaft. Wir werden weiter unten uns überzeugen, dass erst die Zeitgenossen und Schüler Platon's mit diesem Gegenstande allmälig auf's Reine kamen, und so kann schwerlich von Pythagoras und seinen unmittelbaren Schülern in diesem Felde etwas Erhebliches geleistet worden sein.

Dagegen ist wohl ziemlich sicher, dass in der synthetischen Geometrie von dem Erfinder des Pythagoräischen Lehrsatzes eine Anzahl nahe liegender Folgerungen sofort gezogen worden sind. Zuerst und vor Allem ist die Vervielfachung eines gegebenen Quadrates und damit die Incommensurabilität der meisten dieser Quadratseiten, sowohl unter einander als auch mit der Seite des einfachen Quadrates, ein Lieblingsstoff für die Geometer der Pythagoräischen Schule gewesen. So erwähnt z. B. Platon im Anfange des fünften Capitels des Theaitetos, dass der Pythagoräer Theodoros (von Kyrene) die Lehre von der Incommensurabilität der Seiten des drei- und fünffachen Quadrates vorgetragen und die einzelnen vielfachen Quadrate in dieser Beziehung bis zum 17fachen durchgenommen habe. — Nicht weniger gewiss ist es ferner, dass die Verwandlung eines Rechteckes in ein gleichflächiges Quadrat den Pythagoräern gleichfalls bekannt war, und damit die Lösung der Aufgabe, zwischen zwei gegebenen Geraden eine mittlere Proportionale zu finden. Denn der dazu nöthige Satz vom rechten Winkel im Halbkreise war (vergl. § 28. unter *c*) bereits von den Aegyptern ermittelt und somit sicher auch an Pythagoras übergegangen. Wie Letzterer die Construction der mittleren Proportionale gelehrt, folgt wohl unmittelbar aus Euklides (VI, prop. 13), der von des Erfinders Angabe hier nicht abzuweichen scheint.

§ 67. Eine andere Aufgabe, deren Lösung auf der Kenntniss der vorangehenden Sätze beruht, ist die nachfolgende, von Plutarchos (symp. VIII. c. 4) erwähnte:

῎Εστι γὰρ ἐν τοῖς γεωμετρικωτάτοις θεωρήμασι, μᾶλλον δὲ προβλήμασι τὸ δυεῖν εἰδῶν δοδέντων ἀλλοτρίτον παραβάλλειν τῷ μὲν ἴσον, τῷ δὲ ὅμοιον· ἐφ᾽ ᾧ καὶ φασὶν ἐξευρηθέντι θῦσαι τόν Πυθαγόραν. Πολὺ γὰρ ἀμέλει γλαφυρώτερον τοῦτο καὶ μουσικώτερον ἐκείνου τοῦ θεωρήματος, ὃ

Eines der geometrischsten Theoreme oder vielmehr Probleme ist das, zu zwei gegebenen Figuren eine dritte zu construiren, die der einen gleich und der andern ähnlich ist. Pythagoras soll, als er die Lösung gefunden, ein Opfer gebracht haben. Und wirklich ist es auch feiner und wissen-τὴν ὑποτείνουσαν ἀπέδειξε ταῖς περὶ τὴν ὀρθὴν ἴσον δυναμένην.

schaftlicher als das, dass das Quadrat der Hypotenuse dem der beiden Katheten gleich ist.

Der Satz, der hier dem Pythagoras zugeschrieben wird, ist der 25te im sechsten Buche der Elemente Euklid's, und erfordert so vielerlei vorausgehende Lehrsätze und Lösungen, dass es sehr zweifelhaft erscheint, ob die Lösung wirklich von Pythagoras selbst und nicht vielmehr von seinen Jüngern herrührt, die ihn nur, nach der Gewohnheit der Schule, auf den Meister zurückgeführt haben. Dass die hierzu nöthigen Sätze, namentlich der Satz: „die Flächen-„inhalte ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate homologer „Seiten," in der Pythagoräischen Schule bereits entwickelt sein mussten, wird sich unten ergeben, wenn wir die geometrischen Leistungen des Hippokrates von Chios besprechen werden. War aber der eben erwähnte Lehrsatz gefunden und die Construction einer mittleren Proportionallinie bekannt, so hatte die Lösung der von Plutarchos angeführten Aufgabe keine besondere Schwierigkeit, und es ist daher kein Grund vorhanden, dieselbe den Pythagoräern abzusprechen, obgleich Plutarchos der einzige Schriftsteller ist, von dem der fragliche Gegenstand erwähnt wird.

§ 68. Eine anderweite Entdeckung, die den Pythagoräern und zum Theil ganz bestimmt dem Stifter der Schule zugeschrieben wird, ist die des Sternfünfeckes, des sogenannten Pentalpha, welches von den Mitgliedern des Bundes auch als Erkennungszeichen gebraucht ward. Lukianos (pro lapsu in salut. § 5.) berichtet über diesen Gegenstand:

Ὁ μὲν θεσπέσιος Πυθαγόρας, εἰ καὶ μηδὲν αὐτὸς ἡμῖν ἴδιον καταλιπεῖν τῶν αὐτοῦ ἠξίωσεν, ὅσον Ὀκέλλῳ Λευκάνῳ καὶ Ἀρχύτα καὶ τοῖς ἄλλοις ὁμιληταῖς αὐτοῦ τεκμαίρεσθαι, οὔτε τὸ χαίρειν οὔτε τὸ εὖ πράττειν προὔγραφεν, ἀλλ' ἀπὸ τοῦ ὑγιαίνειν ἄρχεσθαι ἐκέλευεν. ἅπαντες γοῦν οἱ ἀπ' αὐτοῦ ἀλλήλοις ἐπιστέλλοντες, ὁπότε σπουδαῖόν τι γράφοιεν, ὑγιαίνειν εὐθὺς ἐν ἀρχῇ παρακελεύοντο, ὡς καὶ αὐτὸ ψυχῇ τε καὶ σώματι ἁρμοδιώτατον, καὶ συνόλως ἅπαντα περιειληφὸς τἀνθρώπου ἀγαθά. Καὶ τόγε τριπλοῦν αὐτοῖς τρίγωνον, τὸ δι' ἀλλήλων, τὸ πεντάγραμμον, ᾧ συμβόλῳ πρὸς τοὺς ὁμοδόξους ἐχρῶντο, ὑγιεία πρὸς αὐτῶν ὠνομάζετο.

Der göttliche Weise Pythagoras (wiewohl er uns nicht gewürdigt hat, etwas Schriftliches, das ihn selbst zum Verfasser hätte, auf uns kommen zu lassen), bediente sich, soviel sich aus der Sitte seiner vertrauten Schüler, eines Okellos Leukanos, Archytas und Anderer, abnehmen lässt, am Anfang der Briefe weder des „sei gegrüsst," noch des „möge es dir gut gehen," sondern verlangte, dass man mit „sei gesund" anfangen sollte. Wenn daher seine Jünger einander etwas Wichtigeres zu schreiben hatten, setzten sie stets das „sei gesund" oben an, anzudeuten, dass man das angemessenste Gut für Leib und Seele anwünsche, ein Gut, das alle übrigen menschlichen Güter in sich fasse. Und ihr dreifaches verschränktes Dreieck, das Pentagramm, das sie als Erkennungszeichen für die Glieder des Bundes brauchten, wird von ihnen „Gesundheit“ genannt.

Ebenso berichtet der Scholiast zu Aristophanes nub. (611, pag. 249):

Πλάτων μέντοι ἐν ἀρχῇ τῶν ἐπιστολῶν τὸ Εὖ πράττειν προὔθηκεν, οἱ δὲ Πυθαγόρειοι τὸ Ὑγιαίνειν. καὶ τὸ τριπλοῦν τρίγωνον, τὸ δ' ἀλλήλων τὸ πεντάγραμμον, ᾧ συμβόλῳ πρὸς τοὺς ὁμοδόξους ἐχρῶντο, ὑγιεία πρὸς αὐτῶν ὠνομάζετο.	Platon stellt an den Anfang der Briefe das „lass es dir gut gehen;“ die Pythagoräer das „sei gesund.“ Das dreifache Dreieck, das durch gegenseitige Verschlingung das Fünfeck erzeugt, und dessen sich die Glieder des Bundes als Erkennungszeichen bedienten, wird von ihnen „Gesundheit“ genannt.

Die fast wörtliche Uebereinstimmung des Scholions mit dem Schlusse der Stelle aus Lukianos Schrift, zeigt beiläufig, dass entweder der Scholiast aus dem letzteren oder beide aus einer und derselben dritten Quelle geschöpft haben. Der Gegenstand selbst aber hängt auf das Engste zusammen mit der Theorie der regelmässigen Vielecke und Körper. Die Kenntniss und Construction der letzteren wird dem Pythagoras vom ganzen Alterthum mit solcher Einstimmigkeit zugeschrieben, dass an der Richtigkeit der Behauptung mit Grund nicht gezweifelt werden kann. Nicht so klar dagegen ist, was in dieser Theorie dem Pythagoras als Erfinder angehört und was er von den Aegyptern überkommen hat. Das Tetraëder, Hexaëder und Octaëder kann man wohl unbedingt den Aegyptern vindiciren, da diese Körper in ihrer Architektur vorkommen, ja theilweise sogar eine hervorragende Rolle spielen. Ob aber von dem Ikosaëder und Dodekaëder dasselbe anzunehmen ist, bleibt zweifelhaft. Für das erste, das Ikosaëder, möchte wohl zu stimmen sein, und zwar vornehmlich aus dem Grunde, weil es in der Pythagoräischen Schule mit den drei zuerst genannten Körpern die Symbole der vier Elemente, Feuer, Erde, Luft und Wasser bilden hilft, Stoffe, welche die Schule als Grundbestandtheile der materiellen Welt annahm. — Zudem erfordert die Construction dieser Körper nichts als das gleichseitige Dreieck und das Quadrat; und hatten die Aegypter einmal drei und dann wieder vier gleichseitige Dreiecke zu einer körperlichen Ecke verbunden, so lag der Versuch wohl nicht so fern, auch einmal fünf oder sechs derselben zu einer Ecke zu verbinden. Wenn man dabei fand, dass sechs gleichseitige Dreiecke, ebenso wie vier Quadrate, keine Ecke erzeugten, sondern eine Ebene bildeten, so konnte man sich dabei allenfalls beruhigen und die Meinung gewinnen, dass es von regelmässigen Körpern nur die vier oben genannten gebe.

§ 69. Wenn aber auch den Aegyptern die Construction des regelmässigen Dreieckes, Viereckes und Sechseckes im Kreise kaum abzusprechen ist, und sie wohl auch *durch Probiren* das Fünfeck, Siebeneck und höhere Vielecke in den Kreis einzuschreiben verstanden, so scheint doch die *Construction* des Fünfeckes ihnen durchaus abgesprochen werden zu müssen; diese ist vielmehr eine Entdeckung des Pythagoras. Denn da diese Construction nicht nur den Pythagoräischen Lehrsatz, sondern auch noch die Theilung einer Geraden nach stetiger Proportion, den sogenannten „goldenen Schnitt“ voraussetzt, so würden wir den Aegyptern mit der Kenntniss der Construction des regelmässigen Fünfeckes zugleich die volle Bekanntschaft mit dem wesentlichsten Theile der gesammten Euklidischen Elemente zusprechen, eine Annahme so exorbitanter Art, dass jeder Geometer vor ihr zurückschrecken wird, so lange nicht die unwiderlegbarsten Beweise dafür geliefert werden. Solche besitzen wir aber vor der Hand keine; dagegen finden sich in des Euklides Elementen die unverkennbaren Spuren davon, dass die Construction des regelmässigen Fünfeckes eine weit spätere Errungenschaft ist, als die des Dreieckes und Viereckes. Denn die Theilung einer Geraden nach stetiger Proportion lehrt Euklides schon im zweiten Buch, Satz 11; obgleich er augenblicklich gar keine Anwendung davon macht. Die Art des Beweises zeigt, dass der Satz an diese Stelle aufgenommen ist, weil er eine unmittelbare Folge theils des Pythagoräischen Lehrsatzes, theils anderer bereits behandelter Sätze über Flächenvergleichung bildet, und mit diesen zusammen gewiss auch in früheren Schriften über die Elemente zusammengestellt worden war. Die erste Anwendung nun, die Euklides von dieser Theilung macht, findet sich erst im zehnten Satze des vierten Buches, in welchem er das Centraldreieck des regulären Zehneckes construiren lehrt, um sodann im nächstfolgenden Satze zur Construction des Fünfeckes überzugehen. Wäre nun der „goldene Schnitt“ erst bei Gelegenheit dieser Construction gefunden worden, so würde Euklides das auf solche Art Zusammengehörige schwerlich getrennt, sondern unmittelbar nach einander abgehandelt haben, wie er ja in anderen Fällen auch verfährt. Dass er aber diese beiden Lehren so völlig getrennt abhandelt, dürfte wohl als Beweis gelten, dass der goldene Schnitt weit eher aufgefunden worden ist, als die Anwendung desselben auf das Fünfeck. Ja es mag vielleicht erst die letztere Veranlassung geworden sein, den goldenen Schnitt genauer zu betrachten, und so mag es kommen, dass wir demselben im 30ten Satze des sechsten Buches abermals begegnen, und in den ersten Sätzen des 13ten Buches die Theorie des Schnittes zum dritten Male behandelt finden, offenbar in Beobachtung der Reihenfolge, in welcher die Sätze entdeckt worden sind.

§ 70. Stellt sich aber somit als ziemlich sicher heraus, dass die Construction des regulären Fünfeckes dem Pythagoras angehört, so ist es auch erklärlich, dass er diese Figur, die gewissermassen seine eigne Entdeckung war, besonders hoch hielt, ihre Eigenschaften möglichst aufzuspüren suchte und das durch die fünf Diagonalen derselben gebildete Pentagramm sogar zum Erkennungszeichen der Mitglieder seines Bundes bestimmte. Dann aber ist es fast auch nothwendig, die Auffindung des Dodekaëders auf ihn und nicht auf die Aegypter zurückzuführen. Denn sobald Pythagoras bei seinen Speculationen über die Zerlegung der Ebene in regelmässige Figuren (vergl. § 60. und 61.) zu der Einsicht gekommen war, dass die Summe der Winkel in einer Ecke kleiner sein muss als vier Rechte, so war es für ihn unmittelbar klar, dass es auch möglich sein müsse, drei reguläre Fünfecke zu einer körperlichen Ecke zu vereinigen, womit der Hauptschritt zur Auffindung des Dodekaëders gethan war. Es fällt aber diese Entdeckung wohl selbstverständlich in die letzten Lebensjahre des Pythagoras, so dass die Untersuchung des Gegenstandes bei seinem Tode noch keineswegs zu einem Abschlusse gebracht worden war. Letzterer wurde wohl erst durch die Schüler des Meisters bewirkt, und zwar scheint Hippasos sich in dieser Hinsicht ein besonderes Verdienst erworben zu haben. Jamblichos (vit. Pyth. c. 18. s. 88. — Kiessl. pag. 190) berichtet von ihm: *περὶ δ' Ἱππάσου μάλιστα, ὡς ἦν μὲν Πυθαρείων· διὰ δὲ τὸ ἐξενεγκεῖν καὶ γράψεσθαι πρῶτον σφαῖραν τὴν ἐκ τῶν δώδεκα πενταγώνων, ἀπώλετο κατὰ θάλατταν, ὡς ἀσεβήσας· δόξαν δὲ ἔλαβεν, ὡς εὑρών· εἶναι δὲ πάντα ἐκείνου· προσαγορεύουσι γὰρ οὕτω τὸν Πυθαγόραν, καὶ οὐ καλοῦσιν ὀνόματι.* — „Dies gilt ganz besonders von Hippa-„sos, der zwar Pythagoräer war, aber weil er sich rühmte, er zuerst „habe die dem Dodekaëder zugehörige Kugel beschrieben, als ein „Gottloser im Meere umkam; denn er nahm den Ruhm als Erfinder „für sich in Anspruch, da doch Alles *ihm* angehörte. Denn so be-„zeichnen sie den Pythagoras, den sie nicht mit Namen nennen.“ — Es erhellt aus dieser Stelle, dass Hippasos entdeckt hatte, entweder dass dem Dodekaëder eine Kugel umgeschrieben, oder wie dasselbe einer Kugel eingeschrieben werden könne. Diese Entdeckung schien ihm offenbar so wichtig, dass er nicht meinte, sie nach Gewohnheit der Schule auf den verstorbenen Meister zurückführen zu müssen, sondern sie der Wahrheit gemäss als *sein* Eigenthum in Anspruch nahm. Die Pythagoräer von der strengen Observanz scheinen sich jedoch darüber schwer geärgert zu haben und säumten nicht, des Hippasos Tod im Meere als eine Strafe dieser Unehrerbietigkeit zu verkünden.

Für Pythagoras selbst scheint die Auffindung des Dodekaëders eine kleine Verlegenheit dadurch herbeigeführt zu haben, dass nun kein Element mehr vorhanden war, dem man den neuen Körper als Symbol hätte zuweisen können. Das philosophische System stand aber bereits so fest, dass daran nichts mehr geändert werden konnte. So fasste man sich denn kurz und wies dem Körper das Weltall, den Kosmos zu, was freilich mit den vier Elementen der übrigen vier Körper gar nicht harmonirte, und ganz offenbar nur ein Nothbehelf war, den man später durch die Behauptung zu verdecken suchte, dass das Dodekaëder der Gestalt nach der Kugelform des Kosmos am nächsten komme, ohne dabei zu bedenken, dass dies vom Ikosaëder in noch weit höherem Maasse gilt.

§ 71. Endlich ist hier noch eines Verdienstes zu erwähnen, welches dem Pythagoras zugeschrieben wird, und darin besteht, dass er die Lehre von der Isoperimetrie begründet habe. Montucla hat diesen Gegenstand zuerst berührt, indem er (hist. d. math. Vol. I. pag. 117) angiebt: *Suivant Diogène, dont le texte est ici fort corrompu et probablement transposé, il ébaucha aussi la doctrine des Isopérimètres, en démontrant que de toutes les figures de même contour, parmi les figures planes, c'est le cercle qui est la plus grande, et parmi les solides la sphère.* Die Versicherung, dass Pythagoras bewiesen habe, unter allen Figuren von gleichem Umfange besitze der Kreis die grösste Fläche, und unter allen Körpern von gleicher Oberfläche die Kugel den grössten Inhalt, tritt hier so bestimmt auf, dass bis jetzt Niemand an deren Wahrheit gezweifelt hat, obschon Montucla die Stelle des Diogenes nicht citirt, auf welche seine Angabe sich stützt. Es hat daher diese Leistung des alten Geometers überall ganz unbestritten gegolten und ist z. B. von Klügel (mathem. Wörterb. Bd. II. pag. 317) ja selbst von Chasles (Gesch. der Geom. pag. 1) als ein sicheres Factum aufgeführt. *Gleichwohl ist an der ganzen Sache kein wahres Wort.*

Die Stelle des Diogenes Laertios, auf welche Montucla sich zu beziehen scheint, findet sich im Leben des Pythagoras (VIII. c. 1. n. 19. — Huebn. pag. 268). Diogenes giebt hier nämlich eine Art Quintessenz Pythagoräischer Weisheit, welche er theils aus der Schrift des Alexandros Polyhistor über die Schulen der Philosophen, theils aus einzelnen Werken des Aristoteles ausgezogen hat. Es sind Sentenzen, Lehrsätze, Lebensregeln u. s. w., alle bunt durcheinander gewürfelt, wie sie eben dem Epitomator beim Durchgehen jener Schriften entgegen gekommen sind. Da findet sich denn, mitten unter ihm ganz fremdartigen Notizen, auch folgender Satz: *καὶ τῶν σχημάτων τὸ κάλλιστον σφαῖραν εἶναι τῶν στερεῶν, τῶν δὲ ἐπιπέδων κύκλον.* — „unter den körperlichen Gebilden (behaup- „ten sie) sei das vollkommenste die Kugel, unter den ebenen der

„Kreis.“ — Das ist der „*texte fort corrompu et probablement trans-* „*posé*,“ aus dem Montucla die oben erwähnte Folgerung zieht.

Der wahre Sinn dieses Satzes ist nun nicht dem geringsten Zweifel unterworfen. Vollkommenheit wird dem Kreis und der Kugel von den Pythagoräern um deswillen beigelegt, weil jeder Punkt des Umfangs und der Oberfläche vom Mittelpunkte gleichweit entfernt, die Krümmung beider Grenzgebilde also eine durchaus gleichförmige ist, so dass bei einer Drehung derselben um das Centrum der Kreisumfang wie die Kugelfläche nicht aufhören, fortwährend sich selbst zu decken, mithin ihre Lage gegen alle ausser ihnen gelegenen Punkte der Ebene, resp. des Raumes, nicht ändern. So legt z. B. Platon dem Timaios bei Auseinandersetzung der Pythagoräischen Weltentstehung (Tim. c. 7. § 45. — ed. Ast p. 144) Folgendes in den Mund: *Καὶ σχῆμα δὲ ἔδωκεν αὐτῷ τὸ πρέπον καὶ τὸ ξυγγενές. τῷ γὰρ τὰ πάντ' ἐν αὐτῷ ζῶα περιέχειν μέλλοντι ζώῳ πρέπον ἂν εἴη σχῆμα τὸ περιειληφὸς ἐν αὐτῷ πάντα ὁπόσα σχήματα. διὸ καὶ σφαιροειδές, ἐκ μέσου πάντη πρὸς τὰς τελευτὰς ἴσον ἀπέχον, καὶ κυκλοτερὲς αὐτὸ ἐτορνεύσατο, πάντων τελειότατον ὁμοιότατόν τε αὐτὸ ἑαυτῷ σχημάτων, νομίσας μυρίῳ κάλλιον ὅμοιον ἀνομοίου.* — „Auch gab er ihr „(der Welt) eine Gestalt, welche für sie passend und ihrer Natur „verwandt ist. Demjenigen lebendigen Wesen, das alles andere Leben„dige in sich fassen soll, dürfte wohl auch eine Gestalt angemessen „sein, welche alle andern Gestalten in sich fasst. Deshalb rundete „er sie kugelförmig, so dass sie von der Mitte aus überall gleich weit „von ihren Grenzpunkten entfernt war, und damit auch kreisförmig, „was unter allen Gestalten die vollkommenste und am meisten sich „selber gleiche ist, indem er das sich Gleichbleibende für tausendmal „schöner hielt, als das sich nicht Gleichbleibende.“

Schon hieraus dürfte die gänzliche Unhaltbarkeit der Interpretation erhellen, welche Montucla der oben erwähnten Stelle des Diogenes angedeihen lässt. Erinnert man sich noch überdies, welchen weiten Anlauf der mehrere Jahrhunderte *nach* Pythagoras lebende Zenodoros in seiner Schrift über die isoperimetrischen Figuren nehmen muss, um zu jenem Theorem vom Kreise zu gelangen, welches Montucla dem Pythagoras zuschreibt, — so erscheint es ganz wunderbar, dass Letzterer mit den ihm zu Gebote stehenden noch kärglichen Hülfsmitteln der eben erst als Wissenschaft erstehenden Geometrie ein solches Theorem nur hätte errathen, geschweige denn *beweisen* sollen. In der That bleibt die Angabe Montucla's rein unbegreiflich, wenn man sie nicht etwa durch die Annahme erklären will, dass derselbe nach sehr flüchtig gemachten Excerpten arbeitete, ohne sich die Mühe zu nehmen, die betreffenden Stellen im Originale wieder nachzuschlagen. Wie dem aber auch sein möge, soviel ist gewiss, dass die Begründung der Theorie der isoperimetrischen Gebilde dem Pythagoras gänzlich abgesprochen werden muss, so lange sich nicht andere Zeugnisse auffinden lassen, die diese Leistung ausser Zweifel stellen.

---

§ 72. Mit Vorstehendem ist Alles erschöpft, was uns durch *bestimmte* Angaben der Alten über die geometrischen Leistungen des Pythagoras und seiner unmittelbaren Schüler noch erhalten ist. Vereinigen wir nun am Schlusse dieses Abschnittes das ganze bisher erörterte Material sammt dem, was sich mit innerer Nothwendigkeit aus ihm folgern lässt, zu einem möglichst geschlossenen Ganzen, so ergiebt sich als Gesammtbild des Zustandes, in welchem sich die Geometrie in dem Jahrzehend von 480 bis 470 v. Chr. befand, ungefähr Folgendes.

Hinsichtlich der *Form* hat die Pythagoräische Schule die Geometrie von den Bedürfnissen des politischen und socialen Lebens ganz abgelöst und begonnen, sie zu einer rein theoretischen Erkenntniss, zu einer Wissenschaft zu erheben. In Folge dieser Umwandlung hat sie die Anwendung der Rechnung von der neuen Wissenschaft ausgeschlossen, und während sie erstere ganz der Praxis überlässt, eignet sie der letzteren die rein constructive, die sogenannte synthetische Behandlungsweise zu, welche von nun an für alle Zeiten als die der Geometrie eigenthümlich zukommende anerkannt wird.

Hinsichtlich des *Inhaltes* aber sehen wir die Geometrie der Italischen Schule bereits in weit reicherer Gestalt auftreten, als dies in der Ionischen Schule der Fall war. Die Elemente der Planimetrie sind bereits soweit festgestellt, dass die topischen Eigenschaften der Dreiecke, Parallelogramme und regelmässigen Vielecke wohl vollständig entwickelt sind, während für die Ermittelung der metrischen Eigenschaften dieser Figuren durch die Festlegung der Grundgesetze der Flächenvergleichung und durch Einführung der Proportionen und der damit zusammenhängenden Lehre von der Aehnlichkeit wenigstens eine feste Grundlage gewonnen worden ist, von welcher aus spätere Geometer rasch und sicher vorwärts schreiten können. — Ob aber in gleichem Schritte mit der Lehre von den geradlinigen Figuren auch die vom Kreise wesentlich erweitert worden ist, bleibt durchaus zweifelhaft. Irgend ein bemerkenswerther Satz vom Kreise, der von den Pythagoräern herrührte, wird nicht genannt; und wenn wir im Folgenden sehen werden, dass noch um 440 v. Chr. der Satz vom Peripherie- und Centriwinkel dem Hippokrates von Chios unbekannt war, so ist es wohl nicht zu voreilig geschlossen, wenn wir die Kreislehre vor der Hand als das Stiefkind der Italischen Schule betrachten.

In der Stereometrie scheinen Pythagoras und seine Jünger sich auf das beschränkt zu haben, was bereits oben (in § 11.) als Besitzthum der Aegypter nachgewiesen worden ist, und nur die Lehre von den Ecken und insbesondere von den regelmässigen Körpern haben sich einer speciellen Forschung zu erfreuen gehabt. Die Construction dieser Körper sowie die Auffindung des Begriffes der Incommensurabilität sind die beiden Leistungen, die das Alterthum dem Pythagoras zum besonderen Ruhme anrechnet, die sich daher auch fast überall erwähnt finden, wo von des Mannes Verdiensten um die Erweiterung menschlicher Erkenntniss gesprochen wird.

Fünfter Abschnitt.

Die Geometer von Pythagoras bis auf Platon.

§ 73. Hatte auch die Italische Philosophenschule sich das hohe Verdienst erworben, die Geometrie zuerst zu einer wirklichen Wissenschaft erhoben und durch wichtige Entdeckungen bereichert zu haben, so blieb doch Alles, was der Meister und seine unmittelbaren Jünger mit einander gefunden und entdeckt hatten, anfänglich strenges Geheimniss der Bundesglieder. Pythagoras hatte wohl zu seinem eignen Gebrauche Niederschriften gemacht, allein auch seinen Angehörigen auf das Ernsteste untersagt, sie aus den Händen zu geben oder gar öffentlich bekannt zu machen. Dies Gebot scheint gewissenhaft befolgt worden zu sein, und so wenig wie von Pythagoras selbst, so wenig ward auch von denen seiner Schüler, die unter seinem persönlichen Einflusse gestanden hatten, irgend etwas von den Geheimnissen und dem Wissen des Bundes in die Oeffentlichkeit gebracht.

Als aber nach langen inneren Kämpfen der endliche Sieg der Demokratie in den meisten der unteritalischen Städte die mit der Aristokratie eng verbundenen Pythagoräer nicht nur aus den Stellen der Machthaber verdrängt, sondern auch vielfach verbannt und ihres Eigenthums beraubt hatte (Ereignisse, die sich bis gegen 450 v. Chr. ziemlich vollendet zeigen), da sah sich eine grosse Anzahl flüchtiger Bundesglieder gezwungen, theils in entlegnere Griechische Colonien auszuwandern, theils sich nach dem eigentlichen Griechenland zu wenden. Hier war es vornehmlich Athen, was sie angezogen zu haben scheint; denn diese Stadt hob sich nach Beendigung der Perserkriege nicht nur an Macht und politischem Einfluss, sondern auch in Wissenschaft und Kunst sichtlich zur ersten Stadt Griechenlands empor. Die Nothwendigkeit, nach dem Verluste alles Eigenthums sich den täglichen Unterhalt zu gewinnen, zwang nunmehr die meisten der Ausgewanderten, von ihrem Wissen Gebrauch zu machen und sich durch Unterrichtsertheilung die Existenz zu sichern. Jamblichos (vit. Pyth. c. XVIII. s. 89. — Kiessl. pag. 192) giebt an: *λέγουσι δὲ οἱ Πυθαγόρειοι, ἐξενηνέχθαι γεωμετρίαν οὕτως· ἀποβαλεῖν τινὰ τὴν οὐσίαν τῶν Πυθαγορείων· ὡς δὲ τοῦτο ἠτύχησε, δοθῆναι ἀνθρώπῳ χρηματίσασθαι ἀπὸ γεωμετρίας.* — „Die Pythagoräer „geben an, dass die Geometrie auf folgende Weise in die Oeffent„lichkeit gekommen sei. Einer der Pythagoräer habe sein Vermögen „verloren; in Folge dieses Unglückes sei dem Manne gestattet wor„den, aus dem Unterrichte in der Geometrie sich einen Erwerb zu „verschaffen.“ — Im Anfange ist dieser Gesichtspunkt wohl noch mit einer gewissen Strenge festgehalten worden; wird doch noch von Hippokrates von Chios erzählt, dass er aus dem Kreise der Pythagoräer ausgestossen worden sei, weil er für Geld geometrischen Unterricht ertheilt habe[1]). Und die philosophischen Lehren der Schule kamen noch später zur Kenntniss des wissenschaftlichen Publicums, wenn des Jamblichos Angabe begründet ist, der (vit. Pyth. c. XXXI. s. 199. — Kiessl. pag. 403) berichtet: *Θαυμάζεται δὲ καὶ ἡ τῆς φυλακῆς ἀκρίβεια. ἐν γὰρ τοσαύταις γενεαῖς ἐτῶν οὐδεὶς οὐδενὶ φαίνεται τῶν Πυθαγορείων ὑπομνημάτων περιτετευχὼς πρὸ τῆς Φιλολάου ἡλικίας. ἀλλ' οὗτος πρῶτος ἐξήνεγκε τὰ θρυλλούμενα ταῦτα τρία βιβλία, ἃ λέγεται Δίων ὁ Συρακούσιος ἑκατὸν μνῶν πρίασθαι, Πλάτωνος κελεύσαντος, εἰς πενίαν τινὰ μεγάλην τε καὶ ἰσχυρὰν ἀφικομένου τοῦ Φιλολάου· ἐπειδὴ καὶ αὐτὸς ἦν ἀπὸ συγγενείας τῶν Πυθαγορείων, καὶ διὰ τοῦτο μετέλαβε τῶν βιβλίων.* — „Bewundern muss man auch ihre Gewissenhaftigkeit in Bewahrung (des „Geheimnisses). Denn in der langen Reihe von Jahren bis auf die „Zeit von Philolaos Greisenalter scheint Keiner je in den Besitz „Pythagoräischer Denkschriften gekommen zu sein. Erst dieser machte „jene drei berüchtigten Bücher bekannt, welche der Syrakusier Dion „auf Platon's Geheiss für 100 Minen gekauft haben soll; das ge„schah aber, nachdem Philolaos in tiefe und bittere Armuth ver„sunken war, und nur weil er selbst dem Bunde der Pythagoräer „angehörte, gelangte er in den Besitz der Bücher.“

Man sieht, wie sehr sich anfänglich die Pythagoräer gegen die Veröffentlichung ihrer *Arcana* gesträubt haben mögen; die bittere Noth, aber auch der freie geistige Zug des Hellenenthums haben über

1) Jambl. de philos. Pyth. lib. III.

ihre engherzige Abgeschlossenheit den Sieg errungen und in der Mathematik wenigstens ward jedem, der es wünschte, soviel mitgetheilt, als man zu geben vermochte. Damit aber kam in das Studium dieser Wissenschaft plötzlich ein ganz anderes und energischeres Leben, als die Ionische Schule zu erwecken im Stande gewesen, und gleich bei dem ersten Geometer, der uns, als aus der jüngern Athenischen Schule der Mathematik hervorgegangen, bezeichnet wird, bei Hippokrates von Chios, finden wir die Geometrie in einem höchst erfreulichen Fortschritte begriffen.

§ 74. Der Gegenstand, welcher die Geometer des Jahrhunderts zwischen Pythagoras und Platon vornehmlich beschäftigt, ist die Erweiterung der Elemente, d. h. die Ausdehnung der von der Italischen Schule entwickelten topischen und metrischen Gesetze der ebenen Figuren auf krummlinige Figuren und auf Körper. Die Untersuchung concentrirt sich namentlich auf folgende drei Aufgaben:

a) einen Kreisbogen oder Winkel in eine beliebige Zahl gleicher Theile zu theilen, wie man in ähnlicher Weise eine gegebene Gerade zu theilen gelernt hatte;

b) die Sätze über Flächenverwandlung, -Theilung und -Messung auf die Körper überzutragen, namentlich den Satz für Kuben zu finden, der dem Pythagoräischen Lehrsatze für Quadrate entspricht; eine Aufgabe, die sich zunächst auf die Verdoppelung des Würfels beschränkt zu haben scheint;

c) den Flächeninhalt des Kreises und einzelner Theile desselben zu bestimmen.

Die Versuche, welche zur Lösung dieser drei Fragen angestellt worden sind, umfassen Alles, was uns an geometrischen Leistungen aus der fraglichen Periode bekannt ist, und geben uns zugleich die Namen der wenigen Geometer, welche in diese Zeit gehören. Die nachfolgende Darstellung der gewonnenen Resultate wird die eben besprochenen Probleme in der hier befolgten Ordnung zur Sprache bringen.

§ 75. Die Halbirung eines beliebigen Winkels oder Kreisbogens gehört unter die ersten Probleme der Planimetrie und ward sicherlich bereits in der Aegyptischen Geometrie gelehrt. Der Dreitheilung eines beliebigen Winkels dagegen setzten sich ganz andere Schwierigkeiten entgegen, und Alles, was bei Pythagoras Tode hierüber bekannt war, musste sich nothwendig auf die Dreitheilung des rechten oder des flachen Winkels beschränken. Einen ersten Versuch dies, die Kräfte der Elementargeometrie übersteigende Problem zu lösen, machte **Hippias** von Elis, ein Zeitgenosse des Sokrates und Vater der eigentlichen Sophistik. So wenig gründlich sein Wissen und so oberflächlich seine sonstigen Leistungen gewesen sein mögen, so hat er in der Geometrie wenigstens sich nicht ohne Ruhm versucht. Nach dem Zeugnisse des Proklos ist er Erfinder einer transscendenten Curve, durch welche nicht nur die Dreitheilung jedes Winkels, sondern allgemein die Theilung eines Winkels in *n* Theile geleistet werden kann, die unter sich in gegebenem Verhältnisse stehen. Proklos sagt nämlich bei Gelegenheit der Aufgabe der Winkelhalbirung (comm. in Eukl. ed. Basil. pag. 73. — Baroc. p. 155): *δηλοῦσι δὲ οἱ πρόθεσιν ποιησάμενοι ταύτην· τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν τρίχα τεμεῖν. Νικομήδης μὲν γὰρ ἐκ τῶν κογχοειδῶν γραμμῶν, ὧν καὶ τὴν γένεσιν καὶ τὴν τάξιν καὶ τὰ συμπτώματα προέδωκεν, αὐτὸς εὑρετὴς ὢν τῆς ἰδιότητος αὐτοῦ, πᾶσαν εὐθύγραμμον γωνίαν ἐτριχοτόμησεν. ἕτεροι δὲ ἐκ τῶν Ἱππίου καὶ Νικομήδους τετραγωνιζουσῶν πεποιήκασι τὸ αὐτὸ, μικταῖς χρησάμενοι γραμμαῖς, ταῖς τετραγωνιζούσαις· ἄλλοι δὲ ἐκ τῶν Ἀρχιμηδείων ἑλίκων ὁρμηθέντες εἰς τὸν δοθέντα λόγον ἔτεμον τὴν εὐθύγραμμον γωνίαν.* — „Das beweisen auch die, welche die Auf„gabe stellen, einen gegebenen geradlinigen Winkel in drei Theile „zu theilen. Nikomedes hat jeden geradlinigen Winkel gedrittheilt, „mittelst der Conchoidischen Linien, deren eigenthümlicher Natur „Entdecker er ist, und von denen er Entstehung, Construction und „Eigenschaften auseinander gesetzt hat. Andere haben dieselbe Auf„gabe mittelst der Quadratricen des Hippias und Nikomedes ge„löst, indem sie sich der gemischten Curven bedienten, die eben „den Namen Quadratrix führen; wieder Andere theilten einen Winkel „nach gegebenem Verhältniss, indem sie von den Archimedischen „Spirallinien ausgingen.“ —

Ganz dasselbe erwähnt Proklos späterhin noch einmal (ed. Basil. p. 93. — Baroc. p. 214), indem er angiebt: *τοῦτον δὲ τὸν τρόπον εἰώθασι καὶ οἱ ἄλλοι μαθηματικοὶ διαλέγεσθαι περὶ τῶν γραμμῶν, ἑκάστου εἴδους τὸ σύμπτωμα παραδιδόντες· καὶ γὰρ Ἀπολλώνιος ἐφ' ἑκάστης τῶν κωνικῶν γραμμῶν τι τὸ σύμπτωμα δείκνυσι, καὶ ὁ Νικομήδης*[1] *ἐπὶ τὸν κογχοειδῶν καὶ ὁ Ἱππίας ἐπὶ τῶν τετραγωνιζουσῶν καὶ ὁ Περσεὺς ἐπὶ τῶν σπειρικῶν.* — „Ganz auf die „nämliche Weise pflegen auch die übrigen Mathematiker die Curven „zu behandeln, indem sie das jeder Eigenthümliche auseinander setzen. „So zeigt Apollonios das Eigenthümliche jedes Kegelschnittes, Niko„medes dasselbe für die Conchoiden, Hippias für die Quadratrix, „Perseus für die Spiren (Ringschnitte).“ —

---

1) Die edit. Basilea liest *Νικόδιμος*, entweder ein Druckfehler oder eine falsche Lesart der Handschrift, da aus der vorangehenden Stelle bei Proklos und aus der nachfolgenden des Pappos die Lesart *Νικομήδης* vollkommen gesichert ist.

§ 76. Die Construction dieser Quadratrix hat uns Pappos erhalten, der (coll. math. lib. IV. prop. 25) Folgendes angiebt:

„Zur Quadratur des Kreises wird von Dinostratos, Nikome-„des und einigen jüngeren Geometern eine Curve angewendet, die „von diesem Umstande ihren Namen erhalten hat; sie heisst nämlich „τετραγωνίζουσα, Quadratrix, und entsteht auf folgende Weise.“

„In ein Quadrat $ABCD$ (Fig. 4.) sei aus der einen Ecke A „als Centrum mit der Quadratseite AB als Halbmesser ein „Kreisquadrant BED beschrieben. Man lasse den Halbmesser „AB sich um A mit gleichmässiger Geschwindigkeit so drehen, „dass der Punkt B in einer gewissen Zeit den Bogen BD „durchläuft. Genau in derselben Zeit rücke die Gerade BC, „stets sich selbst parallel, mit gleichmässiger Geschwindigkeit „aus der Lage BC in die Lage AD; — dann wird der Ort „des Durchschnittes dieser Geraden mit dem um A sich dre-„henden Halbmesser eine Curve BFG liefern, welche die Qua-„dratrix ist.“

Die Curve hat hiernach die Eigenschaft, dass durch jede zu AD parallel gezogene Gerade HF ein Punkt F der Curve bestimmt wird, von der Art, dass der durch ihn gelegte Halbmesser AF den Kreisquadranten in einem Punkte E schneidet, für welchen die Proportion gilt: $BD : BE = BA : BH$. Da nun die Gerade BA in jede beliebige Anzahl Theile getheilt werden kann, die entweder sämmtlich einander gleich sind, oder in gegebenem Verhältnisse zu einander stehen; so ist dasselbe offenbar auch für den Quadranten BED, sowie überhaupt für jeden gegebenen Bogen BE möglich.

Im Vorstehenden mag das Wesentliche der Lösung enthalten sein, die Hippias von der vorgelegten Aufgabe gegeben hat. Pappos hat freilich an der Sache noch mancherlei zu tadeln, was aber nur darauf hinausläuft, dass die Curve BFG nicht geometrisch construirt, sondern nur mechanisch durch eine Reihe von Punkten erhalten werden kann, die man schlüsslich durch einen stetigen Zug aus freier Hand verbinden muss; — ein Umstand, der heutzutage bei weitem nicht die Bedeutung hat, die ihm die Griechischen Geometer beilegten, und die offenbar noch eine Nachwirkung der Reisskunst ist, aus welcher die Geometrie sich herausgebildet hat. — Dem Hippias wird der ungeschmälerte Ruhm verbleiben aus der Natur der vorgelegten Aufgabe heraus eine Curve aufgefunden zu haben, welche das Verlangte unter allen Umständen und Bedingungen auf eine höchst einfache Weise finden lässt.

§ 77. Die zweite Aufgabe, welche von den Geometern *nach* Pythagoras behandelt wurde, ist die sogenannte Verdoppelung des Würfels. Die Italische Schule hatte den Satz bewiesen; „Die Diagonale eines Quadrates ist die Seite eines Quadrates von doppelt so grossem Inhalte, als das gegebene;" — und diesem nachgehend suchte man nun die Kante eines Würfels zu finden, der doppelt soviel Inhalt besitze als ein gegebener. Denn es stand zu hoffen, dass man nach Lösung dieser Aufgabe in den Besitz der Mittel gelangen werde, Würfel zu addiren und zu subtrahiren, wie man das Gleiche für Quadrate durch Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes zu leisten gelernt hatte. Anfänglich wird man die Lösung der Aufgabe zunächst auf stereometrischem Wege gesucht haben, bis es Hippokrates von Chios gelang, das Problem auf ein planimetrisches zurückzuführen, in welcher Gestalt es späterhin fast ganz ausschliesslich bearbeitet worden ist.

Hippokrates, von Chios gebürtig, war ursprünglich Kaufmann und trieb Seehandel. Aristoteles (eth. ad Eud. lib. VII. c. 14) berichtet von ihm: Ἔστι δὲ φανερὸν ὄντες ἄφρονες, οὐχ ὅτι περὶ ἄλλα· τοῦτο μὲν γὰρ οὐδὲν ἄτοπον. Οἷον Ἱπποκράτης γεωμετρικὸς ὤν, ἀλλὰ περὶ τὰ ἄλλα δοκεῖ βλὰξ καὶ ἄφρων εἶναι καὶ πολὺ χρυσίον πλέον ἀπώλεσεν ὑπὸ τῶν ἐν Βυζαντίῳ πεντηκοστολόγων δι' εὐήθειαν, ὥς λέγουσιν, κ. τ. λ. — „es ist bekannt, dass Leute, die „in manchen Dingen sich unverständig erweisen, dies in anderen „Dingen nicht sind; und es ist dies keineswegs absurd. So war „Hippokrates ein guter Geometer, während er im Uebrigen einfältig und unverständig zu sein scheint; wenigstens verlor er, wie „man sagt, durch Leichtgläubigkeit eine grosse Summe Geldes an die „Zolleinnehmer zu Byzanz u. s. w. — Johannes Philoponos dagegen (comm. in Arist. phys. ausc. f. 13. — Brand. schol. in Arist. pag. 327) giebt an: Ἱπποκράτης Χῖός τις ὢν ἔμπορος ληστρικῇ νηῒ περιπεσὼν καὶ πάντα ἀπολέσας ἦλθεν Ἀθήναζε γραψόμενος τοὺς ληστάς, καὶ πολὺν παραμένων ἐν Ἀθήναις διὰ τὴν γραφὴν χρόνον ἐφοίτησεν εἰς φιλοσόφους, καὶ εἰς τοσοῦτον ἕξεως γεωμετρικῆς ἦλθεν, ὡς ἐπιχειρῆσαι εὑρεῖν τὸν κύκλου τετραγωνισμόν. — „Hippokrates von Chios, ein Kaufmann, gerieth in die Gewalt eines „Raubschiffes, verlor Alles und ging nach Athen, um die Räuber gerichtlich zu belangen; da er nun der Klage halber lange Zeit in „Athen sich aufhielt und häufig die Philosophenschulen besuchte, „gelangte er zu einem so hohen Grade geometrischen Wissens, dass „er die Quadratur des Kreises zu finden versuchte."

Mag nun die Angabe des Aristoteles oder die des Johannes Philoponos über die Ursache, welche dem Hippokrates den Verlust seines Vermögens zuzog, die richtige sein, soviel ist sicher, dass er durch denselben nach Athen geführt ward und dort sich zum eifrigen Geometer bildete. Durch des Aristoteles oben angeführte Aeusserung über ihn ist er in den Ruf eines einfältigen Menschen gekommen; aber gewiss mit grossem Unrecht. Denn wenn er auch listigen Betrügern gegenüber nicht schlau genug war, sich vor Uebervortheilung zu wahren, so werden wir ihn dagegen durch seine geometrischen Leistungen als einen gewandten und scharfsinnigen Kopf kennen lernen, der Schwierigkeiten, vor denen andere zurückgewichen waren, unverzagt angreift, und ihnen wenigstens etwas abzugewinnen weiss. Auch scheint er bei seinen Zeitgenossen gar nicht in dem Rufe eines Schwachkopfes gestanden zu haben, denn er hatte eine Anzahl Schüler um sich versammelt, die demnach doch glauben mussten, von ihm etwas lernen zu können. Aristoteles selbst (meteor. I. c. 6) giebt an: *παραπλησίως δὲ τούτοις καὶ οἱ περὶ τὸν Ἱπποκράτην τὸν Χῖον καὶ τὸν μαθητὴν αὐτοῦ Αἰσχύλου ἀπεφήναντο* — „auf „gleiche Weise wie diese (die Pythagoräer) haben sich auch Hippo- „krates der Chier und sein Schüler Aischylos ausgesprochen;" — und bestätigt damit, dass es mit des Hippokrates Einfalt nicht so arg gewesen sein kann.

Nehmen wir nun zu diesen wenigen Notizen noch die oben in § 73. angeführte hinzu, dass unser Geometer für Geld unterrichtet habe und deshalb von den Pythagoräern (also von denen, die sich in Athen niedergelassen hatten), aus ihrer Gemeinschaft ausgeschlossen worden sei — eine Notiz, die unter den vorliegenden Umständen ganz glaublich erscheint, — so haben wir Alles, was über die Lebensumstände des Hippokrates uns überliefert ist. Seine Blüthe wird hiernach um 450 bis 430 v. Chr. zu setzen sein. Denn da die Byzantiner um 440 v. Chr. am Samischen Kriege gegen Athen Theil nahmen, konnte es leicht geschehen, dass des Hippokrates Handelsschiff von Athenischen Corsaren aufgebracht ward und er gerade deshalb sich zur Wiedererlangung seines Eigenthums nach Athen wendete.

§ 78. Die Verdienste, die sich Hippokrates um die Lösung des Problemes von der Verdoppelung des Würfels erworben hat, erwähnt Proklos, der in seinem Commentar (ed. Basil. p. 59. — Baroc. p. 121), jedenfalls nach Angabe des Eudemos, folgendes berichtet: *Οἷον ὥσπερ καὶ τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου ζητηθέντος μετέθησαν τὴν ζήτησιν εἰς ἄλλο, ᾧ τοῦτο ἕπεται, τὴν εὕρεσιν τῶν δύο μέσων, καὶ τὸ λοιπὸν ἐζήτουν, πῶς ἂν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσαι ἀνάλογον εὑρεθεῖεν. Πρῶτον δὲ φασὶν τῶν ἀπορουμένων διαγραμμάτων τὴν ἀπαγωγὴν ποιήσασθαι Ἱπποκράτην τὸν Χῖον, ὃς καὶ μηνίσκον τετραγώνισεν, καὶ ἄλλα πολλὰ κατὰ γεωμετρίαν εὗρεν εὐφυὴς περὶ τὰ διαγράμματα εἴπερ τις ἄλλος γενόμενος.* — „So hatte man z. B. bei dem Versuche, den Würfel zu verdoppeln, „die Aufgabe auf eine andere zurückgebracht, aus welcher jene sich „ergiebt, nämlich die Auffindung zweier mittlerer Proportionalen, und „von da an untersuchte man nur, wie man zu zwei gegebenen Gera-

„den zwei geometrische Mittel finden könne. Diese Zurückführung „der vorgenannten Construction soll zuerst Hippokrates von Chios „angegeben haben, der den Mond quadrirte und auch viele andere „geometrische Entdeckungen machte, begabt für Constructionen, wie „nur irgend einer.“

Die von Hippokrates angewendete Verfahrungsweise, durch die er die Umwandlung des fraglichen Problemes bewirkte, kann unmöglich eine andere gewesen sein, als die noch heute gebrauchte durch Proportionen, indem, wenn $a : x = x : y = y : b$ sich verhalten soll, unmittelbar die drei Proportionen gegeben sind:

$$\begin{array}{l} a : x = a : x \\ a : x = x : y \\ a : x = y : b, \text{ also durch Multiplication} \\ \hline a^3 : x^3 = a : b \end{array}$$

hervorgeht, wodurch also nicht blos die Verdoppelung, sondern jede beliebige Vervielfachung des Würfels geliefert wird. Ob Hippokrates Versuche gemacht hat, die Aufgabe in dieser neuen Gestalt zu lösen, wird uns nicht berichtet. Es ist die angeführte Stelle aus Proklos überhaupt die einzige, welche dieser Leistung unseres Geometers gedenkt. Für seine Zeit, sowie für uns ist aber diese Umwandlung des stereometrischen Problemes in ein planimetrisches von grossem Werthe, da die letztere Form allein eine wirkliche geometrische Construction gestattet. — Zugleich mit ihr hat aber Hippokrates auch den Ruhm erworben, zuerst einen neuen Weg aufgefunden zu haben, um schwierige geometrische Probleme zu lösen. Die Zurückführung der letzteren auf einfachere ist allerdings im Alterthume nur in geringem Maasse angewendet worden; allein dem Werthe der Methode thut dies nicht den mindesten Eintrag, und wenn sie in früheren Jahrhunderten nur in seltenen Fällen gebraucht ward, so spielt sie dafür in der heutigen Wissenschaft eine um so bedeutendere Rolle.

§ 79. Wenn Hippokrates die Verdoppelung des Würfels durch eine höchst wesentliche Vereinfachung der Aufgabe um ein Bedeutendes gefördert hat, so ist ihm dies bei seinem Versuche, den Kreis zu quadriren, nicht in gleichem Maasse gelungen. Ueber das, was er und mehrere Andere in dieser Beziehung geleistet haben, besitzen wir noch ein sehr umfangreiches, zum Theil sogar wörtlich ausgezogenes Referat aus des Eudemos Geschichte der Geometrie, welches uns Simplikios in seinem Commentare zu des Aristoteles *physica auscultatio* erhalten hat, das aber dem mathematischen Publikum zur Zeit ganz unbekannt zu sein scheint, da Montucla von demselben offenbar gar nichts weiss, und frühere wie spätere Bearbeiter der

Geschichte der Geometrie das hierzu unerlässliche Quellenstudium nur höchst oberflächlich betrieben haben. Der Griechische Text findet sich, soviel uns bekannt ist, nur in einer einzigen Ausgabe vor, nämlich in: *Simplicii comment. in octo Aristotelis physicae auscultationis libros. Venetiis, 1526, ap. Aldum Manutium, fol. 12ª, sqq.*, und hier ist das erste Viertel des Textes, das dem Verständnisse weiter keine erheblichen Schwierigkeiten entgegensetzt, im Ganzen correct wiedergegeben, auch durch Beifügung der erforderlichen Figuren gehörig erläutert. Allein im Fortgange des Excerptes aus Eudemos finden sich Unklarheiten, Lücken und offenbare Textverwirrungen vor, mit denen der Herausgeber nicht hat fertig werden können, und hinsichtlich deren er vorgezogen hat, glatt abdrucken zu lassen, was sich in den Manuscripten vorfand. Dass hierbei die zum Verständnisse der Sache nöthigen Figuren fehlen, ist wohl ganz natürlich, scheint aber bei denen, die das Original nachgeschlagen — unter die aber Montucla *nicht* gehört, — die Meinung erzeugt zu haben, dass von Geometrie hier nichts mehr zu holen sei. Das Nachfolgende, welches das ganze Excerpt vollständig wiedergiebt, wird zeigen, dass sich die verdorbenen Stellen mit einiger Bemühung ganz leidlich restauriren lassen. Die Abweichungen unseres Textes von dem der *editio Aldina* sind in den Noten genau angegeben, der Text selbst aber der Bequemlichkeit des Citirens halber in einzelne Paragraphen abgetheilt.

§ 80. *Τὸ δὲ διάφορον τοῦτο τῶν τε λύεσθαι ὀφειλόντων ψευδῶν καὶ τῶν μὴ δείκνυσιν ἐπί τινων ἐν γεωμετρίᾳ ψευδογραφημάτων. Τὸν γὰρ τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου πολλῶν ζητούντων (τοῦτο δὲ ἦν τὸ τῷ κύκλῳ ἴσον τετράγωνον θέσθαι), καὶ Ἀντιφῶν ἐνόμισεν εὑρίσκειν καὶ Ἱπποκράτης, ὁμοίως ψευσθέντες. Ἀλλὰ τὸ μὲν Ἀντιφῶντος ψεῦδος, διὰ τὸ μὴ ἀπὸ γεωμετρικοῦ ἀρχῶν ὡρμῆσθαι, ὡς μαθησόμεθα, οὐκ ἔστι γεωμετρικοῦ λύειν, τὸ δὲ Ἱπποκράτους, ἐπειδὴ τὰς ἀρχὰς φυλάξας τὰς γεωμετρικὰς ἐψεύσθη, γεωμετρικοῦ λύειν. ἐκείνους γὰρ δεῖ λύειν μόνους τοὺς λόγους, ὅσοι τηροῦντες τὰς οἰκείας ἀρχὰς τῆς μεθόδου οὕτω παρασυλλογίζονται· τοὺς δὲ δι' ὧν παρακρούονται ἀναιροῦντες τὰς ἀρχὰς οὐ λυτέον.*

Den Unterschied zwischen Fehlschlüssen, die nachzuweisen sind oder nicht, legt er an einigen Fehlschlüssen der Geometrie dar. Unter den Vielen, welche die Quadratur des Kreises gesucht haben (es ist dies aber die Construction eines dem Kreise gleichen Quadrates), glaubten auch Antiphon und Hippokrates sie zu finden, wobei beide irrten. Des Antiphon Irrthum lässt sich, da er nicht von geometrischen Grundsätzen ausgegangen ist, wie wir zeigen werden, aus geometrischen Gründen nicht nachweisen, der des Hippokrates dagegen, da er mit Festhaltung der geometrischen Grundsätze sich irrte, kann durch Geometrie nachgewiesen werden. Denn man hat nur die Schlüsse zu zergliedern, welche unter Festhaltung der anerkannten Wahrheiten der Wissenschaft zu weiteren Schlüssen verwendet werden; die Schlüsse dagegen bei denen jene Grundwahrheiten bei

Ὁ δὲ Ἀντιφῶν γράψας κύκλον ἐνέγραψέ τι χωρίον εἰς αὐτὸν πολύγωνον, τῶν ἐγγράφεσθαι δυναμένων· ἔστω δὲ εἰ τύχοι τε τετράγωνον τὸ ἐγγεγραμμένον. ἔπειτα ἑκάστην τῶν τοῦ τετραγώνου πλευρῶν δίχα τέμνων ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὰς περιφερείας πρὸς ὀρθὰς ἦγε γραμμάς, αἳ δηλονότι δίχα ἔτεμνον ἑκάστη τὸ καθ' αὐτὴν τμῆμα τοῦ κύκλου. ἔπειτα ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπεζεύγνυεν ἐπὶ τὰ πέρατα τῶν γραμμῶν τοῦ τετραγώνου εὐθείας, ὡς γίνεσθαι τέσσαρα τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν, τὸ δὲ ὅλον τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ὀκτάγωνον. Καὶ οὕτω πάλιν κατὰ τὴν αὐτὴν μέθοδον ἑκάστην τῶν τοῦ ὀκταγώνου πλευρῶν δίχα τέμνων ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν πρὸς ὀρθὰς ἄγων καὶ ἐπιζευγνὺς ἀπὸ τῶν σημείων, καθ' ἃ αἱ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι ἐφήπτοντο τῶν περιφερειῶν, εὐθείας ἐπὶ τὰ πέρατα τῶν διῃρημένων εὐθειῶν ἑκκαιδεκάγωνον ἐποίει τὸ ἐγγραφόμενον. Καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον πάλιν τέμνων τὰς πλευρὰς τοῦ ἑκκαιδεκαγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ ἐπιζευγνὺς εὐθείας, καὶ διπλασιάζων τὸ ἐγγεγραφομένον πολύγωνον, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιῶν, ἕως οὗ δαπανωμένου ταύτῃ τοῦ ἐπιπέδου, ἔμελλεν ἐγγραφήσεσθαί τι πολύγωνον τούτῳ τῷ τρόπῳ ἐν τῷ κύκλῳ, οὗ αἱ πλευραὶ διὰ μικρότητα ἐφαρμόσουσι τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ. Παντὶ δὲ πολυγώνῳ ἴσον τετράγωνον δυνάμεθα θέσθαι, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις παρελάβομεν. ὥστε διὰ τὸ ἴσον ὑποκεῖσθαι τὸ πολύγωνον τῷ κύκλῳ ἐφαρμόζοντες τετράγωνον ἴσον αὐτῷ, ἐσόμεθα καὶ κύκλῳ ἴσον τιθέντες τετράγωνον.

Seite gesetzt werden, zu zergliedern hilft nichts.

Antiphon beschrieb einen Kreis (Fig. 5.) und verzeichnete in denselben ein Vieleck aus der Zahl derer, die man überhaupt einschreiben kann. Es sei dies z. B. das eingeschriebene Viereck. Indem er hierauf jede Vierecksseite halbirte, zog er durch den Schnittpunkt senkrecht auf dieselbe Gerade nach dem Kreisumfange, welche offenbar jeden der zugehörigen Kreisabschnitte halbirten. Sodann zog er von den (neuen) Schnittpunkten nach den Endpunkten der Vierecksseiten Gerade, so dass durch dieselbe vier Dreiecke entstanden und die ganze eingeschriebene Figur ein Achteck ward. Auf dieselbe Weise halbirte er wiederum jede Seite des Achteckes, errichtete in den Halbirungspunkten derselben Senkrechte bis an den Kreisumfang, verband die durch sie auf den Kreisbogen erhaltenen Schnittpunkte durch Gerade mit den Endpunkten der Seiten und erhielt somit das eingeschriebene Sechzehneck. Indem er nun auf die nämliche Art die Seiten des eingeschriebenen Sechzehneckes theilte und durch das Ziehen von Geraden das eingeschriebene Vieleck verdoppelte, und dies immerfort wiederholte, bis dadurch die Kreisfläche völlig erschöpft wurde, — so behauptete er, dass auf solche Art dem Kreise ein Vieleck werde eingeschrieben werden, dessen Seiten ihrer Kleinheit halber mit dem Kreisumfange zusammenfallen würden. Nun können wir aber zu jedem Vielecke ein gleichflächiges Quadrat construiren, wie wir in den Elementen gelernt haben; folglich werden wir, da dem Kreise ein gleichflächiges Vieleck substituirt ist, durch dessen Gleichsetzung mit dem ihm gleichen Quadrate, ein dem Kreise gleichflächiges Quadrat construiren.

Καὶ δηλονότι ἡ συναγωγὴ παρὰ τὰς γεωμετρικὰς ἀρχὰς γέγονεν, οὐχ, ὡς ὁ Ἀλέξανδρος δέ φησιν, ὅτι ὑποτίθεται μὲν ὁ γεωμέτρης τὸν κύκλον τῆς εὐθείας κατὰ σημεῖον ἅπτεσθαι

Offenbar wird hier die Schlussfolgerung aus geometrischen Gründen abgeleitet, nicht, wie Alexandros behauptet, weil der Geometer als Grundsatz annimmt, dass Kreis und Gerade *ὡς ἀρχήν, ὁ δὲ Ἀντιφῶν ἀναιρεῖ τοῦτο. οὐ γὰρ ὑποτίθεται ὁ γεωμέτρης τοῦτο, ἀλλ' ἀποδείκνυσιν αὐτὸ ἐν τῷ ὀγδόῳ*[1] *βιβλίῳ. ἄμεινον οὖν εἶναι ἀρχὴν λέγειν, τὸ ἀδύνατον εἶναι εὐθεῖαν ἐφαρμόσαι περιφερείᾳ· ἀλλ' ἡ μὲν ἐκτὸς κατὰ ἓν σημεῖον ἐφάπτεται τοῦ κύκλου, ἡ δὲ ἐντὸς κατὰ δύο μόνον καὶ οὐ πλείω· καὶ ἡ ἐπαφὴ κατὰ σημεῖον γίνεται. καὶ μέντοι τέμνων ἀεὶ τὸ μεταξὺ τῆς εὐθείας καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἐπίπεδον, οὐ δαπανήσει αὐτό, οὐδὲ καταλήψεταί ποτε τὴν τοῦ κύκλου περιφερείαν, εἴπερ ἐπ' ἄπειρόν ἐστι διαιρεῖν τὸ ἐπίπεδον. εἰ δὲ καταλαμβάνει ἀνῄρηταί τις ἀρχὴ γεωμετρική, ἡ λέγουσα ἐπ' ἄπειρον εἶναι τὰ μεγέθη διαιρετά. Καὶ ταύτην καὶ ὁ Εὔδημος ἀναιρεῖσθαί φησιν ὑπὸ τοῦ Ἀντιφῶντος.*

sich nur in Punkten treffen, Antiphon aber dies aufhebt. Denn der Geometer setzt dies nicht voraus, sondern beweist es im achten Buche. Besser ist es zu sagen, es sei ein Grundsatz, dass eine Gerade mit einer krummen Linie unmöglich theilweise zusammenfallen könne; denn es trifft eine ausserhalb liegende Gerade den Kreis nur in *einem*, eine innerhalb liegende ihn nur in zwei und nicht mehreren Punkten; das Zusammentreffen geschieht also blos in Punkten. Inzwischen wird man, indem man die Fläche zwischen Sehne u. Bogen fortwährend theilt, dieselbe keineswegs erschöpfen, noch wird man je zu dem Bogen gelangen, selbst wenn man die Theilung der Fläche bis ins Unendliche treibt. Denn wäre dies möglich, so würde man den geometrischen Grundsatz aufheben, dass die Grössen ins Unendliche theilbar sind. Dass dieser Grundsatz von Antiphon bei Seite gesetzt worden sei, behauptet auch Eudemos.

§ 81. (Fig. 6.).

Τὸν δὲ διὰ τῶν τμημάτων, φησί, τετραγωνισμὸν γεωμετρικοῦ διαλύειν ἐστι. λέγοι δὲ ἂν τὸν διὰ τῶν τμημάτων τὸν διὰ τῶν μηνίσκων, ὃν Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ἐφεῦρε. κύκλου γὰρ τμῆμα ὁ μηνίσκος ἐστίν. ἡ δὲ δεῖξις τοιαύτη.

Von der Quadratur durch Segmente aber, sagt er, lasse sich der Fehlschluss aus geometrischen Gründen nachweisen. Er möchte nämlich die Quadratur durch Monde, die Hippokrates von Chios erfand, lieber eine durch Segmente nennen; denn der Mond ist ein Kreissegment. Der Beweis ist folgender:

Ἔστω, φησί, περὶ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἡμικύκλιον περιγεγραμμένον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΓ· καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ· ἥτις ἐστὶ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένου, οὗ ἐστιν ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ. καὶ περὶ τὴν ΑΓ ἡμικύκλιον περι-

Es sei, sagt er, über der Geraden AB der Halbkreis $AB\Gamma$ beschrieben und die AB in Δ halbirt; in Δ werde senkrecht auf AB die $\Delta\Gamma$ gezogen und von Γ aus die Gerade $A\Gamma$; so ist diese die Seite des in *den* Kreis eingeschriebenen Quadrates, von welchem $AB\Gamma$ Halbkreis ist. Ueber $A\Gamma$ beschreibe man nun den Halbkreis $AE\Gamma$.

1) Sollen hier Euklides Elemente gemeint sein, so muss es *τρίτῳ* anstatt *ὀγδόῳ* heissen. Indessen wäre es möglich, dass Eudemos, aus dem die Stelle entnommen ist, sich auf ältere Elemente bezogen habe, als die Euklidischen, und dadurch die Zahl 8 in den Text gekommen wäre.

γεγράφθω τὸ $AE\Gamma$. Καὶ ἐπεί ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AB ἴσον τῷ τε ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἑτέρας τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς, τοῦ εἰς τὸ $A\Gamma B$ ἡμικύκλιον ἐγγραφομένου, τουτέστι τῆς ΓB (ἔστι γὰρ ὀρθογωνίου τριγώνου ὑποτείνουσα ἡ AB), ὡς δὲ ἔχει τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτω καὶ οἱ περὶ αὐτὰ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους ἔχουσι καὶ τὰ ἡμικύκλια (ὡς δέδεικται ἐν τῷ δωδεκάτῳ[1]) βιβλίῳ τῶν στοιχείων)· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ $A\Gamma B$ ἡμικύκλιον τοῦ $AE\Gamma$ ἡμικυκλίου. Ἔστι δὲ τὸ $A\Gamma B$ ἡμικύκλιον διπλάσιον καὶ τοῦ $A\Gamma\Delta$ τεταρτημορίου· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ τεταρτημορίον τῷ $AE\Gamma$ ἡμικυκλίῳ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ τῆς τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς καὶ τῆς $A\Gamma$ περιφερείας περιεχόμενον τμῆμα, λοιπὸς ἄρα ὁ $AE\Gamma$ μηνίσκος ἴσος ἔστι τῷ $A\Gamma\Delta$ τριγώνῳ· τὸ δὲ τρίγωνον τετραγώνῳ. Δείξας δὲ διὰ τούτων τὸν μηνίσκον τετραγωνιζόμενον ἑξῆς πειρᾶται διὰ τοῦ προαποδεδειγμένου τὸν κύκλον τετραγωνίζειν οὕτως.

Da aber das Quadrat von AB gleich ist dem von $A\Gamma$ und dem von der anderen Seite des in den Halbkreis $A\Gamma B$ eingeschriebenen Vierecks, d. h. dem Quadrate von ΓB (denn es ist AB die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks), und da sich ferner die Quadrate der Durchmesser zu einander verhalten, wie die zugehörigen Kreise und Halbkreise (wie im zwölften Buche der Elemente erwiesen wird), so wird der Halbkreis $A\Gamma B$ das Doppelte des Halbkreises $AE\Gamma$ sein. Es ist aber der Halbkreis $A\Gamma B$ das Doppelte des Quadranten $A\Gamma\Delta$, also der Quadrant dem Halbkreise $AE\Gamma$ gleich. Nimmt man daher das von der Vierecksseite und dem Bogen $A\Gamma$ eingeschlossene, beiden gemeinsame Segment weg, so ist der übrigbleibende Mond gleichflächig dem Dreiecke $A\Gamma\Delta$, dies Dreieck aber wieder einem Quadrate. Nachdem er auf solche Art bewiesen hat, dass der Mond quadrirbar ist, versucht er demnächst mittelst des Vorangehenden den Kreis folgendermassen zu quadriren.

§ 82. (Fig. 7.).

Ἔστω εὐθεῖα ἡ AB καὶ περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον περιγεγράφθω· καὶ κείσθω τῇ AB διπλῆ ἡ $\Gamma\Delta$ καὶ περὶ τὴν $\Gamma\Delta$ ἡμικύκλιον περιγεγράφθω· καὶ ἐγγεγράφθωσαν εἰς αὐτὸ τὸ ἡμικύκλιον ἑξαγώνου πλευραί, ἧτε ΓE καὶ ἡ EZ καὶ ἔτι ἡ $Z\Delta$. καὶ περὶ αὐτὰς ἡμικύκλια περιγεγράφθω τὰ ΓHE, $E\Theta Z$, $ZK\Delta$. Ἕκαστον ἄρα τῶν περὶ τὰς τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰς ἡμικυκλίων ἴσον ἐστὶ τῷ AB ἡμικυκλίῳ, καὶ γὰρ ἡ AB ἴση ἐστὶ ταῖς τοῦ ἑξαγώνου πλευραῖς· τῶν γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου διπλῆ ἐστιν ἡ διάμετρος, αἱ δὲ τοῦ ἑξαγώνου πλευραὶ ἴσαι εἰσὶ ταῖς ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ τῆς AB δέ ἐστι διπλῆ ἡ $\Gamma\Delta$· ὥστε τὰ τέσσαρα ἡμικύκλια ἴσα ἀλλήλοις εἰσί, τετραπλάσια ἄρα τὰ τέσσαρα τοῦ AB ἡμικυκλίου. Ἔστι δὲ καὶ τὸ περὶ τὴν $\Gamma\Delta$ ἡμικύκλιον τετραπλάσιον τοῦ περὶ τὴν AB· ἐπεὶ γὰρ ἡ $\Gamma\Delta$ τῆς AB

Es sei AB eine Gerade und über ihr ein Halbkreis beschrieben; man nehme $\Gamma\Delta$ gleich dem Doppelten von AB, construire über $\Gamma\Delta$ einen Halbkreis und schreibe in ihn die Seiten ΓE, EZ und $Z\Delta$ eines Sechseckes ein, über denen man die Halbkreise ΓHE, $E\Theta Z$ und $ZK\Delta$ errichtet. Nun ist jeder der auf den Seiten des Sechseckes stehenden Halbkreise gleich dem Halbkreise über AB, da AB den Seiten des Sechseckes gleich ist. Nun ist aber der Durchmesser das Doppelte des Halbmessers, die Seiten des Sechseckes sind aber den Halbmessern gleich, und $\Gamma\Delta$ ist das Doppelte von AB; — also sind die vier Halbkreise einander gleich und zusammen das Vierfache des Halbkreises AB. Es ist aber der Halbkreis über $\Gamma\Delta$ das Vierfache von dem über AB. Denn da die Gerade $\Gamma\Delta$ das Doppelte der AB ist, so ist auch das Qua-

1) Im Original steht: ἐν τῷ δεκαδύῳ βιβλίῳ u. s. w.

ἐστὶ διπλῆ, τετραπλάσιον τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ γίνεται τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ὡς γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα ἔχουσιν οὕτω καὶ οἱ περὶ αὐτὰς κύκλοι πρὸς ἀλλήλους καὶ τὰ ἡμικύκλια πρὸς ἄλληλα. Ὥστε τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ[1]) τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἡμικύκλιον τοῖς τέτρασιν ἡμικυκλίοις, τῷ τε περὶ τὴν ΑΒ καὶ τοῖς τρισὶ τοῖς περὶ τὰς τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰς ἡμικυκλίοις. Κοινὰ ἀφῃρήσθω ἀπό τε τῶν περὶ τὰς τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰς ἡμικυκλίων καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ τὴν ΓΔ τμήματα τά τε ὑπὸ τῶν ἑξαγωνικῶν πλευρῶν καὶ τῶν τοῦ ΓΔ ἡμικυκλίου περιφερειῶν περιεχόμενα· λοιποὶ ἄρα οἱ ΓΗΕ, ΕΘΖ, ΖΚΔ μηνίσκοι μετὰ τοῦ ΑΒ[2]) ἡμικυκλίου ἴσοι εἰσὶ τῷ ΓΕ, ΕΖ, ΖΔ τραπεζίῳ· ἂν δὲ ἀφέλωμεν ἀπὸ τοῦ τραπεζίου τὴν ὑπεροχήν, τουτέστι τὸ ἴσον τοῖς μηνίσκοις (ἐδείχθη γὰρ ἴσον εὐθύγραμμον μηνίσκῳ), καταλίπωμεν δὲ τῇ τὸ λοιπὸν ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ΑΒ[2]) ἡμικυκλίῳ· καὶ τὸ καταλειφθὲν τοῦτο εὐθύγραμμον διπλασιάσωμεν καὶ τὰ διπλασιασθὲν τετραγωνισθῇ, τουτέστιν ἴσον αὐτῷ τετράγωνον λάβωμεν, ἴσον ἔσται τὸ τετράγωνον τῷ περὶ τὴν ΑΒ διάμετρον κύκλῳ. Καὶ οὕτως ὁ κύκλος τετραγωνισθήσεται

drat von ΓΔ das Vierfache des Quadrates der ΑΒ. Wie nun die Quadrate der Durchmesser sich zu einander verhalten, so thun dies auch die Flächen der über ihnen stehenden Halbkreise. Es ist aber das Quadrat von ΓΔ das Vierfache des Quadrates von ΑΒ, demnach auch der Halbkreis über ΓΔ gleich den vier Halbkreisen, nämlich dem über ΑΒ und den dreien über den Seiten des Sechseckes stehenden. Man nehme nun die Segmente hinweg, die den über den Seiten des Sechseckes stehenden Halbkreisen und dem über ΓΔ stehenden gemeinsam sind, nämlich die von den Seiten des Sechseckes und den Bogen des Halbkreises über ΓΔ eingeschlossen werden; so sind die übrig bleibenden Monde ΓΗΕ, ΕΘΖ, ΖΚΔ mit dem Halbkreise über ΑΒ zusammen gleich dem Trapeze ΓΕΖΔ. Wenn wir nun von diesem Trapeze den Ueberschuss hinwegnehmen, d. h. die den Monden gleiche Fläche (denn es ist nachgewiesen worden, dass es eine dem Monde gleiche geradlinige Figur giebt), so werden wir einen Rest behalten, der dem Halbkreise ΑΒ gleichflächig ist. Diesen Rest, der eine geradlinige Figur ist, werden wir verdoppeln und das Doppelte quadriren, d. h. in ein ihm gleichflächiges Quadrat verwandeln, und dies Quadrat wird dem um den Durchmesser ΑΒ beschriebenen Kreise gleichflächig sein. Auf solche Art ist denn der Kreis quadrirt.

§ 83.

Καὶ ἔστι μὲν εὐφυὴς ἡ ἐπιχείρησις, τὸ δὲ ψευδογράφημα γέγονεν παρὰ τὸ μὴ καθόλου δεδειγμένον ὡς καθόλου λαβεῖν. οὐ γὰρ ἐδείχθη πᾶς μηνίσκος τετραγωνιζόμενος, ἀλλ' ὁ περὶ τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένου· οὗτοι δὲ

Die Art der Untersuchung ist allerdings scharfsinnig; der Fehlschluss liegt aber darin, dass etwas nicht als allgemeingültig Bewiesenes doch als solches angenommen wird. Denn es ist nicht bewiesen worden, dass *jeder* Mond quadrirbar sei, sondern nur der

---

1) Die edit. Aldina fügt nach ΓΔ das Wort ἡμικύκλιον ein, was aber offenbar aus dem unmittelbar Nachfolgenden hierher gekommen ist. An dieser Stelle ist nur von dem Quadrate der Geraden ΓΔ die Rede, und erst im Folgenden wird der über ΓΔ stehende Halbkreis besprochen.

2) Der Originaltext hat beide Male fälschlich ΑΓΒ.

οἱ μηνίσκοι περὶ τὰς τοῦ ἑξαγώνου πλευράς εἰσι τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένου. Ἔστι τις καὶ τοιαύτη δεῖξις διὰ τῶν μηνίσκων τετραγωνίζειν οἰομένη τὸν κύκλον ἁπλουστέρα καὶ οὐκ ἐλεγχομένη παρὰ τί γέγονεν ἐν αὐτῇ τὸ ψευδογράφημα. Μηνίσκου γὰρ τετραγωνισμὸν εὑρόντες τοῦ περὶ τὴν τοῦ τετραγώνου[1]) πλευρὰν ᾤοντο καὶ οὗτοι διὰ τούτου τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸν εὑρηκέναι, ὡς τοῦ κύκλου παντὸς εἰς μηνίσκους διαιρεῖσθαι δυναμένου. τὸ γὰρ ἴσον τῷ μηνίσκῳ τετράγωνον τοσαυταπλάσιον ποιοῦντες ὁσαπλάσιοι πάντες εἰσὶν οἱ μηνίσκοι, εἰς οὓς ὁ κύκλος διῄρηται, ᾤοντο τὸ τούτοις ἴσον τετράγωνον τοῖς μηνίσκοις ἴσον εἶναι καὶ τῷ κύκλῳ, ψεῦδος λαμβάνοντες τὸ τὸν ὅλον κύκλον εἰς μηνίσκους διαιρεθῆναι δύνασθαι. Ἐν γὰρ τῇ τοῦ κύκλου εἰς τοὺς μηνίσκους διαιρέσει ἀεὶ ὑπολείπεταί τι ἐντὸς μέσον ἀμφίκυρτον, περιλαμβανόμενον ὑπὸ τῶν ἑκατέρωθεν τοῦ μηνίσκου γραμμῶν· οὗ μήτε μηνίσκου ὄντος μήτε τετραγωνιζομένου, οὐδ' ἂν ὁ πᾶς κύκλος τετραγωνίζοιτο. Οὐχ ὑγιὴς δὲ ἡ ἔνστασις ἡ πρὸς τὸν τοιοῦτον τετραγωνισμόν. Οὐ γὰρ χρεία τῷ τετραγωνίζοντι τὸν κύκλον διὰ τῶν μηνίσκων διελεῖν τὸν πάντα κύκλον εἰς μηνίσκους. οὐδὲ γὰρ οὐδ' εἰ τοῦτο εἴη, οὐδὲ οὕτως ὁ κύκλος τετραγωνίζεται διὰ τῶν μηνίσκων, οὐ γὰρ πᾶς ἐδείχθη μηνίσκος τετραγωνιζόμενος. Καὶ μὴ διαιρουμένου δὲ πάντος εἰς μηνίσκους πάλιν τετραγωνισθήσεται, ἂν συγχωρηθῶσιν οἱ περὶ τὰς τοῦ ἑξαγώνου τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένου πλευρὰς περιγραφόμενοι μηνίσκοι τετραγωνίζεσθαι, καὶ μὴ μόνοι οἱ περὶ τὰς τοῦ τετραγώνου. Κἀνταῦθα οὖν τοῦ ψευδογραφήματος αἴτιον, τὸ μόνον τετραγωνίσαντας μηνίσκον τὸν περὶ τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ὡς πάντων τετραγωνιζομένων μηνίσκων ὁποῖοι ποτ' ἂν ὦσιν, εἰς οὓς ὁ κύκλος διαιρεῖται, οὕτω

über der Seite des dem Kreise eingeschriebenen Quadrates, während die oben gebrauchten Monde über der Seite des eingeschriebenen Sechseckes stehen. Es ist daher die hier gegebene Nachweisung, die da meint, den Kreis durch Monde zu quadriren, eine unvollkommene und nicht zwingende, weil in ihr ein Fehlschluss unterläuft. Denn die, welche die Quadratur des Mondes auf der Viereckseite gefunden, glaubten dadurch auch die Quadratur des Kreises entdeckt zu haben, dass sie im Stande wären, den ganzen Kreis in Monde zu zerlegen. Denn indem sie das dem Monde gleichflächige Quadrat so vielmal vervielfachten als Monde vorhanden sind, in die der Kreis zerlegt ist, glaubten sie, dass das allen diesen Monden gleichflächige Quadrat auch dem Kreise gleich sei, indem sie dabei fälschlich annahmen, dass es möglich sei, die ganze Kreisfläche in Monde zu zerlegen. Allein bei dieser Zerlegung des Kreises in Monde bleibt immer ein mittleres, durchaus krummliniges Stück übrig, das auf allen Seiten von den Umfängen des Mondes eingeschlossen wird. Da dies nun weder ein Mond noch quadrirt ist, so ist wohl auch der ganze Kreis nicht quadrirt. Eine auf solche Art bewirkte Quadratur ist daher nicht richtig. Ferner ist es für den, der den Kreis quadriren will, nicht nöthig, den ganzen Kreis in Monde zu zerlegen; ja selbst wenn dies geschehen könnte, wäre dadurch allein der Kreis noch nicht durch Monde quadrirt, weil nicht jeder Mond als quadrirbar nachgewiesen ist. Ist aber auch nicht der ganze Kreis in Monde zerlegt, so wird er doch quadrirt werden, wenn es gelingen wird, die über den Seiten des in den Kreis beschriebenen Sechseckes stehenden Monde zu quadriren, und nicht blos die Monde über den Viereckseiten. Und hierin liegt nun der

1) Im Texte der Aldina steht τριγώνου, was offenbar falsch ist, da der Mond auf der Dreiecksseite eben nicht quadrirt werden kann.

ποιεῖσθαι τὴν δεῖξιν.

Grund des Fehlschlusses, indem die, welche blos den Mond auf der Vierecksseite quadrirt haben, den Beweis so führen, als ob alle und jede Monde, in die der Kreis zerlegt wird, wie sie auch beschaffen sein mögen, quadrirt werden könnten.

§ 84.

Τινὲς δέ, φησὶν Ἀ λ έ ξ α ν δ ρ ο ς, ἡγοῦνται, εἰ δείξαιεν τετράγωνον ἀριθμὸν κυκλικόν, καὶ ἐν τοῖς μεγέθεσι κύκλου τετραγωνισμὸν εὑρηκέναι. ἔστι δὲ φησὶ τετράγωνος μὲν ἀριθμὸς ὁ ἰσάκις ἴσος· κυκλικοὺς δὲ ἔλεγον ἀριθμοὺς τοὺς συντιθεμένους ἐκ τῶν καθεξῆς περιττῶν, οἷον ἑνός, τριῶν, πέντε, ἑπτά, ἐννέα. εὑρόντες δὲ[1]) ἀριθμὸν τετράγωνόν τινα ἅμα καὶ κύκλικον ὄντα, οἷον τὸν $\overline{λϛ}$ (τετράγωνον μὲν ὄντα, διότι ἀπὸ τοῦ $\overline{ϛ}$ ἐφ' ἑαυτὸν γινομένου γεννᾶται, κυκλικὸν δὲ διότι ἀπὸ τῆς τῶν περιττῶν $\bar{α}$, $\bar{γ}$, $\bar{ε}$, $\bar{ζ}$, $\bar{θ}$, $\overline{ια}$ συνθέσεως ἀποτελεῖται), ᾤοντο καὶ κύκλου τετραγωνισμὸν εὑρηκέναι. Ἀλλ' ἡ δεῖξις, φησίν, οὐκ ἐκ τῶν γεωμετρικῶν ἀρχῶν, ἀλλ' ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν· ἀριθμητικαὶ γὰρ ἀρχαὶ τὸ εἶναι τὸν τοίονδε ἀριθμὸν κυκλικὸν καὶ τοίονδε τετράγωνον.

Wie Alexandros berichtet, so glauben Einige, dass sie die Quadratur des Kreises in Grössenmaass gefunden hätten, wenn sie eine cyclische Quadratzahl nachwiesen. Eine Quadratzahl, sagt er, ist eine mit sich selbst vervielfachte; cyclische Zahlen aber heissen die, welche durch Addition der aufeinander folgenden ungeraden Zahlen gebildet sind, z. B. aus 1, 3, 5, 7, 9. Fanden sie nun eine Quadratzahl, die auch cyclisch ist, z. B. 36 (eine Quadratzahl, weil sie aus der mit sich selbst multiplicirten 6 entsteht, und eine cyclische, weil sie durch Addition der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11 gebildet ist), so meinten sie, die Quadratur des Kreises gefunden zu haben. Der Beweis aber, sagt er, beruhe nicht auf geometrischen, sondern auf arithmetischen Grundlagen; denn arithmetische Definitionen seien es, nach denen eine solche Zahl eine cyclische und auch eine Quadratzahl sei.

Ταῦτα τοῦ Ἀ λ ε ξ ά ν δ ρ ο υ λέγοντος ἐφιστάνειν ἄξιον, ὅτι πρῶτον μὲν τὸν κυκλικὸν ἀριθμὸν οὐ κατὰ σύνθεσιν τῶν ἐφεξῆς περιττῶν οἱ ἀριθμητικοὶ τίθενται, ἀλλὰ τὴν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ εἰς τὸ αὐτὸ κατάληξιν. κυκλικὸς[2]) γὰρ ὁ $\overline{κε}$, ὅτι πεντάκις πέντε $\overline{κε}$, καὶ ὁ $\overline{λϛ}$, οὔτε ὁ τέσσαρα οὔτε ὁ ἐννέα οὔτε ὁ $\overline{ιϛ}$, καίτοι κατὰ σύνθεσιν τῶν ἐφεξῆς περιττῶν γινόμενοι, ἀλλὰ τετράγωνοι μόνον οὗτοι· κατὰ γὰρ τὴν ἐπισύνθεσιν τῶν περιττῶν οἱ τετράγωνοι[3]) γίνονται. Καὶ ἴσως ὁ ἐξ

In Bezug auf diese Behauptung des Alexandros verdient aber festgestellt zu werden, erstens, dass die Arithmetiker die cyclische Zahl nicht als aus Addition der Reihe der ungeraden Zahlen entstanden definiren, sondern als solche, deren Quadrat sich wiederum auf dieselbe Zahl endigt. Cyclische Zahl ist also 25, weil 5 mal 5 = 25; ebenso 36; aber weder 4 noch 9 noch 16 sind solche, obschon sie durch Addition der Reihe der ungeraden Zahlen entstehen, sondern

1) Im Texte der Aldina steht hier δι' ἀριθμόν, was keinen Sinn giebt, vielleicht ein blosser Druckfehler ist.

2) Die Aldina hat κύκλος statt κυκλικός.

3) Im Texte steht τετράγωνι.

ἀρχῆς τὴν μέθοδον παραδοὺς οὐκ εἶπε κυκλικοὺς ἁπλῶς εἶναι πάντας τοὺς κατὰ ἐπισύνθεσιν τῶν ἐφεξῆς περιττῶν, ἀλλ' ὅτι ἐν τῇ ἐπισυνθέσει τῶν ἐφεξῆς περιττῶν εὑρίσκονται οἱ κυκλικοί, οὐδὲ τούτου ἀεὶ συμβαίνοντος. Κυκλικὸς γὰρ ὢν ὁ $\overline{\rho\kappa\epsilon}$, ὡς ἀπὸ τοῦ $\overline{\epsilon}$ ἐπὶ τὸν $\overline{\kappa\epsilon}$ γενόμενος, καὶ ὁ $\overline{\sigma\iota\varsigma}$, ὡς ἀπὸ $\overline{\varsigma}$ ἐπὶ τὸν $\overline{\lambda\varsigma}$, ὅμως οὐκ ἐγένοντο κατὰ ἐπισύνθεσιν τῶν ἐφεξῆς περιττῶν. Εἰ μὴ ἄρα οὐκ εἰσὶν οὗτοι κυκλικοὶ ἀλλὰ σφαιρικοὶ ἐξ ἐπιπέδων κυκλικῶν [1]) κυκλικῶς βαρυνθέντες. Καὶ ἐκεῖνο δὲ ἐφιστάνειν ἄξιον ὅτι οὐκ ἦν εἰκός, τοὺς ἀριθμὸν εὑρηκότας κυκλικὸν ἅμα καὶ τετραγωνικὸν τὸν αὐτὸν τοῦτον οἴεσθαι διὰ τοῦτο καὶ ἐν μεγέθεσι τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸν εὑρηκέναι. ἀλλ' ἴσως εὑρόντες ἐν τοῖς ἀριθμοῖς τὸν αὐτὸν τετράγωνον ἅμα καὶ κυκλικὸν [2]) εἰς ἔννοιαν ἦλθον τοῦ καὶ ἐν τοῖς μεγέθεσι ζητεῖν τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμόν.

blosse Quadratzahlen; denn durch Addition der ungeraden entstehen die Quadratzahlen. Und ebenso sagt der, der die Wissenschaft schon vor Alters lehrte, nicht dass alle aus der Addition der Reihe der ungeraden Zahlen hervorgehende sämmtlich cyclische seien, sondern dass bei successiver Addition der ungeraden die cyclischen mit gefunden werden, dass aber beides nicht immer zusammentreffe. So ist 125 eine cyclische Zahl, indem sie aus 5 mal 25 entsteht, ebenso 216, aus 6 mal 36 entstehend, und doch entstehen sie nicht durch Addition der Reihe der ungeraden Zahlen. Ja es sind diese Zahlen nicht einmal cyclische, sondern sphärische, aus cyclischen Zahlen zweier Dimensionen cyclisch gebildet. Aber auch das verdient bemerkt zu werden, dass keine Nothwendigkeit vorlag, dass die, welche eine cyclische Zahl gefunden hatten, sich einbildeten, sie hätten nun auch die Quadratur des Kreises in einem Grössenmaasse gefunden; wahrscheinlich aber kam es denen, die unter den Zahlen eine Quadratzahl fanden, die zugleich eine cyclische war, in den Sinn, nun auch die Quadratur des Kreises in Grössenmass zu suchen.

§ 85.

Ἔλεγε δὲ ὁ ἡμέτερος καθηγεμὼν Ἀμμώνιος, ὡς οὐκ ἀναγκαῖοι ἴσως, εἰ ἐπ' ἀριθμῶν [3]) εὑρεθῇ τοῦτο καὶ ἐπὶ μεγεθῶν εὑρίσκεσθαι. Ἀνομοιογενῆ γὰρ μεγέθη ἐστὶν εὐθεῖα καὶ περιφερεία, καὶ οὐδέν φησι θαυμαστὸν μὴ εὑρεθῆναι κύκλῳ εὐθύγραμμον ἴσον, εἴπερ καὶ ἐπὶ τῶν γωνιῶν εὑρίσκομεν τοῦτο. οὔτε γὰρ τῇ τοῦ ἡμικυκλίου γωνίᾳ οὔτε τῇ λοιπῇ εἰς τὴν ὀρθὴν τῇ κερατοειδεῖ λεγομένῃ γένοιτο ἂν εὐθύγραμμος ἴση γωνία. Καὶ διὰ τοῦτο ἴσως φησὶ καὶ ὑπὸ οὕτω κλεινῶν ἀνδρῶν ζητηθὲν θεώ-

Unser Lehrer Ammonios sprach die Ansicht aus, dass es vermuthlich nicht nothwendig sei, dass, wenn etwas für Zahlen gefunden worden, dasselbe auch an Grössen müsse gefunden werden. Es seien nämlich die Gerade u. der Kreisbogen ungleichartige Grössen, und so sei es, meint er, nicht zu verwundern, dass keine dem Kreise gleiche geradlinige Figur gefunden werde, da wir ja dasselbe in Betreff der Winkel wahrnehmen. Denn weder für den Winkel des Halbkreises, noch für die Ergänzung des sogenannten

1) Abermals hat der Text κύκλων statt κυκλικῶν.

2) Das Original hat κύκλον statt κυκλικόν.

3) Die Aldina liest ἐπ' ἀριθμῷ, was in Rücksicht auf das nachfolgende ἐπὶ μεγέθων wohl als irrig erscheint.

ρημα ἄχρι νῦν οὐχ εὑρέθη, οὐδὲ ὑπ' αὐτοῦ Ἀρχιμήδους. Ἔλεγον δὲ ἐγὼ πρὸς τὸν καθηγεμόνα, ὡς εἴπερ μηνίσκος τετραγωνίζοιτο ὁ ἀπὸ τῆς τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς (τοῦτο γὰρ ἀνεξαπατήτως συνῆκται), ὁμογενὴς δὲ ὁ μηνίσκος τῷ κύκλῳ ἐκ περιφερείων συγκείμενος, τί κωλύει καὶ τὸν κύκλον ἐπὶ τούτῳ τετραγωνίζεσθαι; εἰ δὲ ἀνόμοιον τὸ τοῦ μηνίσκου ἐπίπεδον τῷ κύκλῳ διὰ τὰ κέρατα, ἀλλὰ καὶ τῷ εὐθυγράμμῳ ἀνόμοιος μηνίσκος πᾶς. Καὶ ὅμως ὁ περὶ τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν μηνίσκος τετραγωνίζεται· αἱ μέντοι γωνίαι αἵ τε τοῦ ἡμικυκλίου καὶ αἱ κερατοειδεῖς, ἐκ περιφερείας καὶ εὐθείας ἄμφω συγκείμεναι, οὐ μόνον ἀνομοιογενεῖς εἰσὶ τῇ εὐθυγράμμῳ ἀλλὰ καὶ ἀσύμβλητοι[1].

hornartigen Winkels zu einem Rechten gebe es einen gleichgrossen geradlinigen Winkel. Und wahrscheinlich aus diesem Grunde, sagt er, ist das von so berühmten Männern gesuchte Theorem bis heute nicht gefunden, selbst nicht von Archimedes. Ich entgegnete hierauf dem Lehrer, wenn der Mond auf der Vierecksseite quadrirt werden könne (denn das ist wirklich zu Stande gebracht), da der von Bogen gebildete Mond dem Kreise gleichartig ist, was denn hinderlich sein solle, dass auch der Kreis auf solche Art quadrirt werde? Wollte man aber die Mondfläche als dem Kreise ungleichartig ansehen, wegen der Spitzen, so ist auch jeder Mond einer geradlinigen Figur ungleichartig. Nun wird aber ganz gewiss der Mond auf der Vierecksseite quadrirt, und doch sind die Winkel des Halbkreises, sowie die hornförmigen, welche beide aus Bogen und Geraden gebildet sind, nicht nur ungleichartig mit einer geradlinigen Figur, sondern überhaupt gar nicht mit einander vergleichbar.

Οὐχ ἱκανὸν οὖν οἶμαι τὸ εἰρημένον εἰς ἀπόγνωσιν καταστῆσαι τῆς εὑρέσεως τοῦ τετραγωνισμοῦ. καὶ γὰρ ὁ Ἰάμβλιχος ἐν τῷ εἰς τὰς κατηγορείας ὑπομνήματι τὸν μὲν Ἀριστοτέλη φησὶ μή πω ἴσως εὑρηκέναι τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμόν· παρὰ δὲ τοῖς Πυθαγορείοις εὑρῆσθαι· ὡς δῆλον ἐστί φησιν ἀπὸ τῶν Σέξτου τοῦ Πυθαγορείου ἀποδείξεων, ὃς ἄνωθεν κατὰ διαδοχὴν παρέλαβε τὴν μέθοδον τῆς ἀποδείξεως. Καὶ ὕστερον δέ φησιν Ἀρχιμήδης διὰ τῆς ἑλικοειδοῦς γραμμῆς, καὶ Νικομήδης διὰ τῆς ἰδίως τετραγωνιζούσης καλουμένης, καὶ Ἀπολλώνιος διά τινος γραμμῆς, ἣν αὐτὸς μὲν κοχλιωδοῦς ἀδελφὴν προσαγορεύει, ἡ αὐτὴ δὲ ἐστὶ τῇ Νικομήδους. καὶ Κάρπος διά τινος γραμμῆς, ἣν ἁπλῶς ἐκ διπλῆς κινήσεως καλεῖ· ἄλλοι δὲ πολλοί φησι

Ich halte nun das Gesagte nicht für ausreichend, um an der Auffindung der Quadratur verzweifeln zu lassen. Sagt doch auch Jamblichos in seinem Commentar zu den Categorien, dass Aristoteles vermuthlich keine Kreisquadratur aufgefunden habe, wohl aber sei sie von den Pythagoräern gefunden worden. Dies gehe offenbar aus den Nachweisungen des Pythagoräers Sextos hervor, der die Art des Beweises vor Zeiten von der Schule überkommen habe. Späterhin, giebt er an, bewirkte sie Archimedes mittelst der Spirale, u. Nikomedes durch die speciell sogenannte Quadratrix, und Apollonios durch eine Curve, die er die Gefährtin der Schneckenlinie nannte, die aber mit der des Nikomedes identisch ist; und Karpos durch eine Linie, die er

1) Der Text hat ἀσύμβληται, was jedenfalls ein Druckfehler ist.

ποικίλως τὸ πρόβλημα κατεσκεύασαν. καὶ μήποτε οὗτοι πάντες ὀργανικὴν ἐποιήσαντο τοῦ θεωρήματος κατασκευήν. Ὁ μὲν οὖν Ἀλέξανδρος οὕτως, ὡς εἶπον, οἴεται τὸ ψευδογράφημα ἐλέγχεσθαι, παρ' ὅσον τὸν περὶ τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν μόνον τετραγωνίσας μηνίσκον ὁ Ἱπποκράτης ὡς καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾶς αὐτῷ δεδειγμένῳ ἀπεχρήσατο.

schlechthin aus doppelter Bewegung entstanden nennt; viele Andere noch, sagt er, haben die Aufgabe auf mannichfache Art behandelt, Keiner von Allen aber hat eine durch Instrumente zu bewirkende Construction des Problemes gegeben. — Alexandros glaubt nun, wie ich sagte, den Fehlschluss nachgewiesen zu haben, den Hippokrates beging, indem er die Quadratur des nur auf der Vierecksseite stehenden Mondes so brauchte, als ob er das Nämliche für die Sechsecksseite bewiesen habe.

§ 86.

Ὁ μέντοι Εὔδημος ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἱστορίᾳ οὐκ ἐπὶ τετραγωνικῆς πλευρᾶς δεῖξαί φησι τὸν Ἱπποκράτη τὸν τοῦ μηνίσκου τετραγωνισμόν, ἀλλὰ καθόλου, ὡς ἄν τις εἴποι. Εἰ γὰρ πᾶς μηνίσκος τὴν ἐκτὸς περιφέρειαν ἢ ἴσην ἔχει ἡμικυκλίου ἢ μείζονα ἢ ἐλάττονα, τετραγωνίζει δὲ ὁ Ἱπποκράτης καὶ τὸν ἴσην ἡμικυκλίου ἔχοντα καὶ τὸν μείζονα καὶ τὸν ἐλάττονα, καθόλου ἂν εἴη δεδειχὼς ὡς δοκεῖ. Ἐκθήσομαι δὲ τὰ ὑπὸ τοῦ Εὐδήμου κατὰ λέξιν λεγόμενα, ὀλίγην τινὰ προσθεὶς σαφήνειαν ἀπὸ τῆς τῶν Εὐκλείδου στοιχείων ἀναμνήσεως, διὰ τὸν ὑπομνηματικὸν τρόπον τοῦ Εὐδήμου, κατὰ τὸ ἀρχαϊκὸν ἔθος συντόμους ἐκθεμένου τὰς ἀποδόσεις.

Indessen giebt Eudemos in seiner Geschichte der Geometrie an, Hippokrates habe die Quadratur des Mondes nicht nur dann, wenn er auf der Vierecksseite steht, gezeigt, sondern allgemein, wie man wohl sagen kann. Wenn nämlich der äussere Bogen jedes Mondes gleich ist dem Halbkreis, oder grösser oder kleiner, so quadrirt Hippokrates sowohl den Mond mit gleichem, als auch mit grösserem oder kleinerem Bogen als der Halbkreis, was er, wie es scheint, allgemein bewiesen haben möchte. Ich werde nun das von Eudemos Beigebrachte *wörtlich* hersetzen, indem ich nur kurze Erläuterungen beifüge durch Verweisung auf Euklides Elemente, wegen der commentatorischen Manier des Eudemos, der nach altem Brauche das, was er mittheilt, nur abgekürzt wiedergiebt.

Λέγει δὲ ὧδε ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ τῆς γεωμετρικῆς ἱστορίας· καὶ οἱ τῶν μηνίσκων δὲ τετραγωνισμοὶ δόξαντες εἶναι τῶν οὐκ ἐπιπολαίων διαγραμμάτων, διὰ τὴν οἰκειότητα τὴν πρὸς τὸν κύκλον ὑφ' Ἱπποκράτους ἐγράφησάν[1] τε πρώτως, καὶ κατὰ τρόπον ἔδοξαν ἀποδοθῆναι. διόπερ ἐπὶ πλέον ἁψώμεθά τε καὶ διέλθωμεν. Ἀρχὴν μὲν οὖν ἐποιήσατο καὶ πρῶτον

Er berichtet aber im zweiten Buche der Geschichte der Geometrie Folgendes. Die Quadraturen von Monden, die auf ganz speciellen Figuren sich bilden und von Hippokrates ihres Zusammenhanges mit dem Kreise halber zuerst beschrieben wurden, scheint man im Laufe der Zeit wieder aufgegeben zu haben, weshalb wir den Gegenstand weiter verfolgen und erör-

1) Die Aldina liest ἐγγράφησαν; es scheint jedoch hier blos auf die Construction der Figur überhaupt hingedeutet zu werden, nicht aber speciell darauf, dass sie gerade dem Kreise einzuschreiben ist.

ἔθετο τῶν πρὸς αὐτοὺς χρησίμων, ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει τά τε ὅμοια τῶν κύκλων τμήματα πρὸς ἄλληλα καὶ αἱ βάσεις αὐτῶν δυνάμει. τοῦτο δὲ ἐδείκνυεν ἐκ τοῦ τὰς διαμέτρους δεῖξαι τὸν αὐτὸν λόγον ἐχούσας δυνάμει τοῖς κύκλοις· ὅπερ Εὐκλείδης δεύτερον τέθεικεν ἐν τῷ δωδεκάτῳ τῶν στοιχείων βιβλίῳ τὴν πρότασιν εἰπὼν οὕτως· „οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.“ Ὡς γὰρ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν οὕτω καὶ τὰ ὅμοια τμήματα· ὅμοια γὰρ τμήματα ἐστὶ τὰ τὸ αὐτὸ μέρος ὄντα τοῦ κύκλου, οἷον ἡμικύκλιον ἡμικυκλίῳ καὶ τριτημόριον τριτημορίῳ. διὸ καὶ γωνίας ἴσας δέχεται τὰ ὅμοια τμήματα. αἱ γοῦν τῶν ἡμικυκλίων πάντων ὀρθαὶ εἰσὶ. καὶ τῶν μειζόνων ἐλάττονες ὀρθῶν καὶ τοσούτῳ ὅσῳ μείζονα ἡμικυκλίων τὰ τμήματα· καὶ αἱ τῶν ἐλαττόνων μείζονες καὶ τοσούτῳ ὅσῳ ἐλάττονα ἡμικυκλίων τὰ τμήματα. δειχθέντος δὲ αὐτῷ τούτου πρῶτον μὲν ἔγραφεν μηνίσκον τὴν περιφέρειαν ἔχοντα ἡμικυκλίου, περὶ τρίγωνον ὀρθυγώνιον καὶ ἰσοσκελὲς αὐτὸ τὸ ἡμικύκλιον περιγράψας, καὶ περὶ τὴν βάσιν τμῆμα κύκλου τοῖς ὑπὸ τῶν ὑποζευχθεισῶν ἀφαιρουμένοις ὅμοιον. ὅπερ Εὐκλείδης λ̄ τρίτον ἔθετο θεώρημα τοῦ τρίτου βιβλίου προτείνας οὕτως· „ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.“ Εἰ γὰρ τὸ περὶ τὴν βάσιν οὕτω περιγράφει, ὡς ἴσην δέξασθαι γωνίαν τῶν ἐν τοῖς τμήμασι τοῖς ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν ἀφαιρουμένοις, ὅμοιον ἔσται ἐκείνοις. Ὅμοια γὰρ τμήματα κύκλων ὁ Εὐκλείδης ὡρίσατο ἐν τῷ τρισκαιδεκάτῳ βιβλίῳ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας. ὄντος δὲ τοῦ περὶ τὴν βάσιν τμήματος ἴσου τοῖς περὶ τὰς ἑτέρας ἀμφοτέρας (διότι ὡς δέδεικται ἐν τῷ παρατελευτῷ[1]) τυῦ πρώτου τῶν Εὐκλείδου στοιχείων θεωρήματι ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις ἡ ὑποτείνουσα ἴσον δύναται ταῖς τὴν ὀρθὴν

tern wollen. Den Anfang machte er damit, dass er als ersten der hierzu nöthigen Sätze feststellte, dass ähnliche Kreissegmente sich zu einander verhalten wie die Quadrate ihrer Basen. Dies bewies er dadurch, dass er nachwies, dass die Quadrate der Durchmesser sich wie die zugehörigen Kreisflächen verhalten. Dies hat zum zweiten Male Euklides im 12ten Buche der Elemente bewiesen, indem er den Satz folgendermassen ausspricht: „die Kreise verhalten sich, wie die auf ihren Durchmessern stehenden Quadrate.“ Wie nun die Kreise zu einander, so verhalten sich auch ähnliche Segmente. Aehnliche Segmente sind aber solche, die gleichvielte Theile des Kreises bilden; so sind z. B. Halbkreis dem Halbkreis und Drittelkreis dem Drittelkreis ähnlich. Daher umfassen ähnliche Segmente auch gleiche Winkel; diese nun sind bei allen Halbkreisen Rechte, bei grösseren Segmenten kleiner als Rechte, und zwar um desto kleiner, je mehr die Segmente den Halbkreis übertreffen, bei kleineren Segmenten dagegen grösser als Rechte, und zwar um so mehr, je mehr die Segmente kleiner sind als der Halbkreis. Nachdem dies von ihm bewiesen war, beschrieb er zuerst einen Mond, der den Halbkreis zum Bogen hat, indem er um ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck einen Halbkreis zog, und über der Basis ein Kreissegment construirte, das den von den Katheten abgeschnittenen ähnlich ist. Eben dies Theorem stellt auch Euklides im 33ten Satze des dritten Buches auf, indem er es folgendermassen fasst: „über einer gegebenen Geraden ein Kreissegment zu beschreiben, das einen Winkel fasst, der einem gegebenen geradlinigen Winkel gleich ist.“ Denn wenn man das Segment über der Basis so beschreibt, dass es einen Winkel umfasst, gleich denen, die in den von den Katheten gebildeten Segmenten lie-

1) Das Original hat: παρατελευϛτῳ.

περιεχούσαις ἀμφοτέραις, ὡς δὲ τὰ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν τετράγωνα οὕτως ἔχει τὰ ὅμοια τῶν κύκλων τμήματα πρὸς ἄλληλα), καὶ κοινοῦ προςτεθέντος τοῦ μέρους τοῦ τριγώνου τοῦ ὑπὲρ τὸ τμῆμα τὸ περὶ τὴν βάσιν, ἴσος ἔσται ὁ μηνίσκος τῷ τριγώνῳ. ἴσος οὖν ὁ μηνίσκος τῷ τριγώνῳ δειχθεὶς τετραγωνίζοιτο ἄν· δέδεικται γὰρ ἐν τῷ ἑνδεκάτῳ θεωρήματι τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Εὐκλείδου στοιχείων· πῶς χρὴ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον ἐνστήσασθαι. Οὕτω μὲν οὖν ἡμικυκλίου τὴν ἔξω τοῦ μηνίσκου περιφέρειαν ὑποθέμενος ἐτετραγώνισεν ὁ Ἱπποκράτης τὸν μηνίσκον εὐκόλως.

gen, so wird das Segment jenen ähnlich sein. Aehnliche Kreissegmente nämlich definirt Euklides im 13ten Buche als solche, die gleichgrosse Winkel enthalten. Da nun das Segment über der Basis den über den beiden anderen Seiten stehenden zusammengenommen gleich ist (deshalb, weil im vorletzten Theoreme des ersten Buches von Euklides Elementen bewiesen ist, dass in rechtwinkligen Dreiecken das Quadrat der Hypotenuse gleich ist den Quadraten beider Katheten, ferner aber die Quadrate der Geraden sich verhalten wie ähnliche Kreissegmente), so wird, wenn man den Theil des Dreiecks, der über dem Segmente der Basis liegt, beiderseits addirt, der Mond dem Dreiecke gleich sein. Ist aber bewiesen, dass der Mond dem Dreiecke gleich ist, so kann man ihn auch quadriren. Denn im 11ten Satze des zweiten Buches der Elemente Euklids wird gezeigt, wie man zu verfahren hat, um ein einer geradlinigen Figur gleichflächiges Quadrat zu verzeichnen. So nun quadrirt Hippokrates, indem er den äusseren Bogen des Mondes als Halbkreis annimmt, den Mond selbst ganz leicht.

§ 87. (Fig. 8.).

Εἶτα ἐφεξῆς μεῖζον ἡμικυκλίου ὑποτίθεται συστάμενος τραπέζιον, τὰς μὲν τρεῖς ἔχον πλευρὰς ἴσας ἀλλήλαις, τὴν δὲ μίαν τὴν μείζω τῶν παραλλήλων τριπλασίαν ἐκείνων ἑκάστης δυνάμει, καὶ τό τε τραπέζιον περιλαβὼν κύκλῳ καὶ περὶ τὴν μεγίστην αὐτοῦ πλευρὰν ὅμοιον τμῆμα περιγράψας, τοῖς ὑπὸ τῶν ἴσων τριῶν ἀποτεμνομένοις ἀπὸ τοῦ κύκλου. Καὶ ὅτι μὲν περιληφθήσεται κύκλῳ τὸ τραπέζιον δείξεις οὕτως. διχοτομήσας τὰς τοῦ τραπεζίου γωνίας κατὰ τὸ ἔνατον τοῦ πρώτου τῶν στοιχείων καὶ ἐπιζεύξας τὰς διαγωνίους, ἐρεῖς, ἐπεὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΓ ἴση κοινὴ ἡ ΑΕ[1])

Hierauf nimmt er (diesen Bogen) grösser als den Halbkreis und verzeichnet ein Trapez, in welchem drei Seiten einander gleich, die grössere aber der beiden parallelen Seiten im Quadrate das Dreifache von dem Quadrate jeder der übrigen beträgt, beschreibt sodann um das Trapez einen Kreis und über der grössten Seite des ersteren ein Segment, das den von den drei anderen Seiten abgeschnittenen ähnlich ist. Dass das Trapez vom Kreise umschlossen wird, wird man folgendermassen beweisen. Halbirt man die Winkel des Trapezes nach dem 9ten Satze im ersten Buche der Ele-

1) Das Original liest: κοινὴ ἡ ΔΕ καὶ γωνίαι καὶ τὰ ἑξῆς. Dass hier eine Lücke im Texte vorliegt, ist klar. Eudemos giebt nämlich den Beweis an, durch welchen Hippokrates das Trapez ΑΒΓΔ als ein Sehnenviereck nach-

ἴσαι δὲ καὶ γωνίαι . . . . . . καὶ τὰ ἑξῆς. Ὅτι δὲ μεῖζον ἔστιν ἡμικυκλίου τὸ λεχθὲν τμῆμα δῆλον, ἀχθείσης ἐν τῷ τραπεζίῳ διαμέτρου. ἀνάγκη γὰρ ταύτην ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσαν τοῦ τραπεζίου τῆς ὑπολοίπου μιᾶς μείζονα ἢ διπλασίαν εἶναι δυνάμει. ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ $B\Delta$[1]) τῆς $A\Gamma$, αἱ $\Delta\Gamma$, BA ἴσαι οὖσαι καὶ ἐπιζευγνῦσαι αὐτάς, ἐκβαλλόμεναι ἐμπεσοῦνται κατὰ τὸ Z. Ἐι γὰρ παράλληλοί εἰσιν αἱ BA, $\Delta\Gamma$, ἴσαι οὖσαι, αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπιζευγνῦσαι καὶ αὗται ἴσαι καὶ παράλληλοί εἰσιν, ἔσται ἡ $A\Gamma$ ἴση τῇ $B\Delta$, ὅπερ ἀδύνατον. Συμπιπτουσῶν δὲ τῶν BA, $\Delta\Gamma$ κατὰ τὸ Z, αἱ ὑπὸ $ZA\Gamma$, ΓAB γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι ἔσονται, διὰ τὸ τρισκαιδέκατον τοῦ πρώτου τῶν Εὐκλείδου. μείζων δὲ ἡ ὑπὸ ΓAB[2]) τῆς ὑπὸ ΓAZ (ἡ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου τῆς ἐντὸς διὰ τὸ τριακοστὸν δεύτερον τοῦ πρώτου) ἡμισεία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓAB[3]) γωνία τῆς ΓAZ· ἡ ἄρα $B\Gamma$[4]) μεῖζον ἢ διπλάσιον δύναται ἑκατέρας τῶν BA, $A\Gamma$· ὥστε καὶ τῆς $\Gamma\Delta$.[5]) Καὶ τὴν μεγίστην ἄρα τῶν τοῦ τραπεζίου πλευρῶν ἀναγκαῖον ἔλαττον δύνασθαι τῆς

mente, u. zieht die Verbindungslinien (BE und ΔE), so wird man zeigen, da die BA gleich $A\Gamma$, die AE gemeinschaftlich und die Winkel gleich sind . . . . . Dass aber das besprochene Segment grösser ist als der Halbkreis, wird klar, wenn man eine Diagonale im Trapeze zieht. Denn diese zwei Seiten des Trapezes überspannende Gerade giebt nothwendig ein grösseres Quadrat, als das doppelte Quadrat der einen noch übrigen Seite. Denn da $B\Delta$ grösser ist als $A\Gamma$, so werden die sie verbindenden einander gleichen Geraden $\Delta\Gamma$, BA verlängert sich im Punkte Z treffen. Denn wären BA und $\Gamma\Delta$ parallel, so müssten, da sie gleich sind, auch die sie verbindenden Geraden selbst gleich und parallel sein, und es wäre $A\Gamma$ gleich $B\Delta$, was unmöglich ist. Schneiden sich aber die AB und $\Gamma\Delta$ in Z, so sind die Winkel $ZA\Gamma$ u. ΓAB zusammen zweien Rechten gleich, nach dem 13ten Satze im ersten Buche des Euklides. Es ist aber der Winkel ΓAB grösser als ΓAZ (der Aussenwinkel des Dreiecks grösser als ein innerer, nach dem 32ten Satze des 1ten Buches) also die Hälfte

---

weisen will. Da er, wie sich im Folgenden ergiebt, die Winkel, welche an den parallelen Seiten der Figur liegen, als untereinander gleich voraussetzt, so würde es nach unseren heutigen Anschauungen genügen, die Gleichung

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

nachzuweisen. Offenbar aber steht diese Umkehrung des 22ten Satzes im dritten Buche der Elemente dem Hippokrates nicht zu Gebote. So beschreibt er denn zuerst den Kreis durch drei Spitzen der Figur, etwa A, Γ, Δ, wodurch er zwei congruente und gleichschenklige Centraldreiecke $AE\Gamma$ und $\Gamma E\Delta$ erhält, und zeigt nun, dass auch das Dreieck AEB dem Dreieck $A\Gamma E$ congruent ist, weil, wie unser Text anführt, $BA = A\Gamma$, $AE = AE$ und $B\hat{A}E = \Gamma\hat{A}E$ wird. Daraus geht $BE = AE = E\Gamma = E\Delta$ hervor (worauf sich wahrscheinlich die Schlussworte καὶ τὰ ἑξῆς beziehen) und der Kreis geht auch durch die vierte Spitze B des Trapezes.

1) Die Aldina hat $A\Delta$, was offenbar zu dem Folgenden nicht passt.

2) Die Aldina hat ΓA statt ΓAB.

3) Im Original sind die Winkel ΓAB und ΓAZ mit einander vertauscht. Es scheinen aber die Worte ἡμισεία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓAB γωνία τῆς ΓAZ ein bloses Einschiebsel zu sein, das ein Unkundiger sich an den Rand geschrieben hat; denn für den Beweis, dass $\Gamma\Delta^2 > 2\,AB^2$ ist, was Hippokrates daraus folgert, dass ΓAB ein stumpfer Winkel ist, nützt dieses Einschiebsel geradezu nichts.

4) Der Text hat $A\Gamma$ statt $B\Gamma$. 5) Im Texte steht ΓB statt $\Gamma\Delta$.

τε διαμέτρου καὶ τῶν ἑτέρων πλευρῶν ἐκείνης, ὑφ' ἣν ὑποτείνει μετὰ τῆς διαμέτρου ἡ λεχθεῖσα. αἱ γὰρ $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ μεῖζον ἢ τριπλάσιον δύναται τῆς $\Gamma\Delta$· ἡ δὲ $B\Delta$ τε τριπλάσιον[1]). ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ἐπὶ τῆς μείζονος τοῦ τραπεζίου πλευρᾶς βεβηκυῖα γωνία. μείζων ἄρα ἡμικυκλίου ἐστὶ τὸ τμῆμα ἐν ᾧ ἐστίν. ὅπερ ἐστὶν ἡ ἔξω περιφέρεια τοῦ μηνίσκου. Τὸν δὲ τοῦ μηνίσκου τούτου τετραγωνισμὸν παρῆκεν ὁ Εὔδημος, ὡς σαφῆ οἶμαι. εἴη δὲ ἂν τοιόσδε.

von ΓAB grösser als die von ΓAZ; also ist das Quadrat von $B\Gamma$ grösser als das Doppelte jedes der beiden Quadrate von BA, $A\Gamma$, also auch grösser als das doppelte Quadrat von $\Gamma\Delta$. Es muss daher auch die grösste unter den Seiten des Trapezes im Quadrate weniger betragen, als das Quadrat der Diagonale und derjenigen unter den übrigen Seiten, über welche sich letztere mit der Diagonale zugleich ausspannt. Nun geben aber die Quadrate von $B\Gamma$ und $\Gamma\Delta$ mehr als das dreifache Quadrat von $\Gamma\Delta$; $B\Delta$ aber das dreifache; also ist der auf der grösseren Trapezseite stehende Winkel ein spitzer, folglich der Abschnitt, in dem er liegt, grösser als der Halbkreis. Eben so ist demnach der äussere Bogen des Mondes beschaffen. Die Quadratur dieses Mondes überging Eudemos, wie ich sicher glaube. Sie wäre etwa folgende.

§ 88. (Fig. 8.).

Ἐπειδὴ ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν ὁ μηνίσκος μετὰ τοῦ ἐπὶ τῆς μείζονος τοῦ τραπεζίου πλευρᾶς τμήματος τῷ τραπεζίῳ καὶ τοῖς ὑπὸ τῶν τριῶν ἴσων αὐτοῦ εὐθειῶν ἀποτεμνομένοις τμήμασιν, ὧν τὸ ἐπὶ τῆς μείζονος τοῦ τραπεζίου πλευρᾶς τμημα ἴσον ἐστὶν τοῖς ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν ἀφαιρουμένοις τοῦ κύκλου τρισὶ τμήμασιν (εἴπερ ἴσον ταῖς τρισὶ δύνασθαι ὑπόκειται ἡ μείζων τοῦ τραπεζίου πλευρὰ, τὰ δὲ ὅμοια τμήματα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν τετράγωνα), ἐὰν δὲ ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ τὰ καταλειπόμενα ἐστὶν ἴσα ἴσος ἄρα ὁ μηνίσκος τῷ τραπεζίῳ. ἢ καὶ οὕτω συντόμως ἐρεῖς. ἐπειδὴ ἴσον ἐστὶ τὸ περὶ τὴν μείζονα τοῦ τραπεζίου πλευρὰν τμῆμα τοῖς περὶ τὰς τρεῖς τὰς ἴσας περιγραφεῖσι, διότι καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον τριπλάσιον τοῦ ἀπὸ ἑκάστης, ἐὰν κοινὸν προςτεθῇ τὸ περιεχόμενον ἐπίπεδον ὑπό τε τῶν τριῶν ἴσων εὐθειῶν καὶ

Da unter einander gleich sind der Mond sammt dem auf der grösseren Trapezseite stehenden Segmente dem Trapeze sammt den von den drei gleichen Seiten desselben abgeschnittenen Segmenten, und da das Segment über der grösseren Trapezseite gleich ist den von den gleichen Seiten abgeschnittenen drei Kreissegmenten (denn die Quadrate der drei Seiten sind zusammen gleich dem Quadrate der grösseren Trapezseite, und ähnliche Segmente verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Sehnen), so ist, weil Gleiches von Gleichem abgezogen gleiche Reste giebt, der Mond dem Trapeze gleichflächig. Kürzer kann man auch folgendermassen sich fassen: Da das Segment auf der grösseren Seite des Trapezes gleich ist den auf den drei gleichen Seiten beschriebenen, weil das Quadrat der ersteren das Dreifache von dem Quadrate jeder der letzteren ist, so wird, wenn man

1) Die Aldina liest τετραπλάσιον, was geradezu falsch ist; τριπλάσιον entspricht allein dem Zusammenhange.

τῆς τοῦ μείζονος τμήματος περιφερείας, ἔσται ὁ μηνίσκος ἴσος τῷ τραπεζίῳ. οὗ τετραγωνισθέντος, διότι ἔχομεν πᾶν εὐθύγραμμον τετραγωνίσαι, τετραγωνισθήσεται καὶ ὁ μείζονα ἡμικυκλίου τὴν ἐκτὸς περιφέρειαν ἔχων μηνίσκος.

die zwischen den drei Geraden und dem Bogen des grösseren Segmentes enthaltene gemeinschaftliche Fläche beiderseits addirt, der Mond dem Trapeze gleich werden. Ist nun letzteres quadrirt, da man jede geradlinige Figur quadriren kann, so hat man auch diesen Mond quadrirt, dessen äusserer Bogen grösser ist als der Halbkreis.

§ 89. (Fig. 9.).

Εἰ δὲ ἔλαττον ἡμικυκλίου εἴη, προγράψας τοιόνδέ τι ὁ Ἱπποκράτης, τοῦτο κατεσκεύασεν. Ἔστω κύκλος οὗ διάμετρος ἐφ' ᾗ ἡ AB, *κέντρον δὲ αὐτοῦ ἐφ' οὗ* K· *καὶ ἡ μὲν ἐφ' ᾗ* $\Gamma\Delta$ *δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω τὴν ἐφ' ᾗ* BK. *ἡ δὲ ἐφ' ᾗ* EZ *ἤχθω παρὰ τὴν ἐφ' ᾗ* AB, *καὶ ἀπὸ τοῦ* K *ἐπιζεύχθω ἐπὶ τὰ* E, Z. *συμπιπτέσθω δὲ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ* Z *ἡ ἐπιζευχθεῖσα τῇ ἐφ' ᾗ* EH *κατὰ τὸ* H, *καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ* B *ἐπὶ τὰ* Z, H *ἐπεζεύχθωσαν. Φανερὸν δὴ ὅτι ἡ μὲν ἐφ' ᾗ* EZ *ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ* B[1] *πεσεῖται, ὑπόκειται γὰρ ἡ* EZ *ἐπὶ τὸ* B *νεύουσα. ἡ δὲ ἐφ' ᾗ* BH *ἴση ἔσται τῇ ἐφ' ᾗ* EK. *Τοῦτο δὲ ἴσως μὲν ἄν τις καὶ προχειρότερον δείξειεν· ἐμοὶ δὲ ἐκ τῶν προομολογημένων οὕτως ἐπῆλθεν δεῖξαι.*[3]).

Wäre aber (dieser Bogen) kleiner als der Halbkreis, so beschreibt Hippokrates einen solchen durch folgende Construction. Es sei AB der Durchmesser eines Kreises, K dessen Mittelpunkt; die $\Gamma\Delta$ schneide die BK im Halbirungspunkte unter rechtem Winkel; man ziehe die EZ nach AB hin und von K aus Gerade nach E und Z. Es treffe nun die über Z hinaus verlängerte Gerade (KZ) die EH im Punkte H und man ziehe wiederum von B Gerade nach Z und H; so ist klar, dass die EZ, verlängert, durch den Punkt B gehen muss; denn die EZ ist nach B hin geneigt. Und nun ist die BH gleich der EK. Es lässt sich dies aber jedenfalls auf kürzerem Wege zeigen. Mir gelang es, dasselbe mittelst des Vorhergehenden auf folgende Art zu beweisen.

---

1) Das Original hat E anstatt B.

2) Die ganze Construction, wie sie in den vorstehenden Zeilen gegeben ist, bleibt durchaus dunkel und unvollständig. Dass Eudemos hier die eignen Worte des Hippokrates anführt, ist wohl ganz klar; es deutet darauf hin schon die ganz alterthümliche und umständliche Bezeichnung der Geraden und Punkte der Figur durch die Worte *ἡ (εὐθεῖα) ἐφ' ᾗ* AB, *τὸ (σημεῖον) ἐφ' οὗ* K „die Gerade, an welcher A und B stehen," oder „der Punkt, an dem K steht." Nun scheint aber Hippokrates, um zu seinem Trapeze zu gelangen, nicht nur sehr weit ausgeholt, sondern auch im schriftlichen Ausdrucke sich sehr kurz gefasst zu haben und deshalb ziemlich unverständlich geblieben zu sein, wenn nicht vielleicht Eudemos durch die allzu grosse Kürze der Berichtserstattung diese Unverständlichkeit erst verschuldet hat. Simplikios scheint die Stelle so ausgezogen zu haben, wie er sie in des Eudemos Schrift fand. Ob aber nicht vielleicht letztere schon durch Lücken und Fehler entstellt war, müssen wir dahin gestellt sein lassen. Das Rudiment von Construction, was uns hier vorliegt, deutet wohl darauf hin, dass Eudemos die letztere in den Grundzügen vollständig gegeben haben mag, dann aber, weil ihm des Hippokrates Behandlung gar zu umständlich war, seine eigne Construction sammt Beweis substituirt hat, eine Arbeit, welche Simplikios durch stete Verweisung auf Euklid's Elemente

Ὑπόκειται ἡ $\Delta\Gamma$ τὴν BK διχῶς τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνειν. ἐπὶ τῆς $\Delta\Gamma$ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ τραπέζιον γραφησομένου κύκλου, διὰ τὸ πόρισμα τοῦ πρώτου θεωρήματος τοῦ ἐν τῷ τρίτῳ τῶν Εὐκλείδου στοιχείων. ἐπειδὴ δὲ παράλληλός ἐστιν ἡ EH τῇ KB καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν ἡ $\Gamma\Delta$, τὰς ἐντὸς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, διὰ τὸ $K\Theta$ τοῦ πρώτου, ὀρθαὶ δὲ αἱ πρὸς τὸ Γ, ὀρθαὶ ἄρα καὶ αἱ πρὸς τὸ Δ. ἡ οὖν $\Gamma\Delta$ διὰ τοῦ κέντρου τὴν EH πρὸς ὀρθὰς τέμνουσα καὶ δίχα τέμνει, διὰ τὸ τρίτον τοῦ τρίτου τῶν στοιχείων. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔH[1]) τῇ ΔE, κοινὴ δὲ ΔZ[2]), καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τὸ Δ, καὶ βάσις ἄρα ἡ ZH[3]) βάσει τῇ ZE ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ BZ τῇ ZK ἴση, διότι καὶ ἡ $B\Gamma$ τῇ ΓK, κοινὴ δὲ ἡ ΓZ καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τὸ Γ· ἐπεὶ οὖν δύο αἱ HZ, ZB δυσὶ ταῖς

Angenommen ist, dass die $\Delta\Gamma$ die BK senkrecht treffe und halbire. Auf der $\Delta\Gamma$ liegt folglich der Mittelpunkt des um das Trapez beschriebenen Kreises, nach dem Zusatze zum 1ten Satze im 3ten Buche von Euklides Elementen. Da nun die EH parallel ist der KB und beide von $\Gamma\Delta$ geschnitten werden, so macht letztere zwei Innenwinkel, die zusammen zwei Rechten gleich sind, nach dem 29ten Satze des 1ten Buches. Rechte Winkel aber sind die an Γ anliegenden Winkel, also auch die an Δ anliegenden. Nun steht aber die durch den Mittelpunkt gehende $\Gamma\Delta$ senkrecht auf EH und halbirt sie, nach dem 3ten Satze im 3ten Buche der Elemente; folglich ist die ΔH gleich der ΔE, gemeinschaftlich aber ist die ΔZ, und die Winkel bei Δ sind Rechte, daher die Seite ZH gleich ZE. Ferner ist die BZ gleich der ZK, weil

---

noch zugänglicher zu machen sucht. — Die Hauptlücke in unserem Texte findet sich offenbar zwischen den Worten: τεμνέτω τὴν ἐφ' ᾗ BK und dem anschliessenden ἡ δὲ ἐφ' ᾗ EZ etc. Hier fehlt zunächst die Angabe der Geraden EH und die Bestimmung ihrer Lage, als parallel zu AB; sodann aber die Festsetzung der Länge der Geraden EZ, welche vom Punkte E aus nach der Geraden $\Gamma\Delta$ eingetragen werden und somit den Punkt Z bestimmen soll. Dass EZ so genommen werden muss, dass sie der Proportion $EZ^2 : EK^2 = 3:2$ genügt, und dass zugleich der Abstand der Parallelen AB und EH so zu wählen ist, dass die EZ, verlängert, durch den Punkt B geht, ist die Hauptsache, auf welche, wie das Folgende lehrt, Hippokrates seine ganze Untersuchung stützt. Wenn nun derselbe wohl schwerlich eine Construction angegeben hat, durch welche man diesen beiden Bedingungen zugleich genügen kann (denn dies Trapez verlangt, dass

$$EB = BK \cdot \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\tfrac{11}{3}} - 1\right) \quad \text{oder } BK = EB \cdot \tfrac{3}{4}\left(\sqrt{\tfrac{11}{3}} + 1\right)$$

genommen wird), so muss er doch ganz gewiss das Erfülltsein der letzteren gefordert und vorausgesetzt haben, um die Quadratur des von ihm mit so vieler Mühe erhaltenen Mondes zu Stande bringen. Heutzutage würde man ganz einfach sagen: man nehme ein gleichschenkliges Trapez, in welchem der grössere Abschnitt der Diagonale sich zum Schenkel verhält wie $\sqrt{3} : \sqrt{2}$; allein eine solche Kürze genügte den Alten keineswegs. — Der Herausgeber des vorliegenden Commentars des Simplikios hat weder die Construction des Hippokrates noch die nachfolgende Untersuchung des Eudemos verstanden, wie die vielen falschen Buchstaben zeigen, die der Text der Aldina da enthält, wo die Buchstaben der im Drucke fehlenden Figur citirt werden.

1) Im Texte steht blos Δ statt ΔH. 2) Im Texte AZ statt ΔZ. 3) Im Texte blos Z statt ZH.

ZE, KZ ἴσαι καὶ γωνίαι αἱ κατὰ κορυφὴν ἴσαι, καὶ βάσις ἡ HB βάσει τῇ EK ἴσῃ.

Περιγεγράφθω δὴ περὶ τὸ EZH[1]) τρίγωνον τμῆμα κύκλου, τὸ EZ, ZH[2]) ὅμοιον ἑκάστῳ τῶν EK, KB, BH τμημάτων. τούτων οὖν οὕτως ἐχόντων τὸ τραπέζιόν φημι ἐφ' οὗ $EKBH$ περιλήψεται κύκλος. τὸ μὲν γὰρ KEH τρίγωνον περιλήψεται κύκλος. ἔχομεν γὰρ ἐν τῷ πέμπτῳ τοῦ τετάρτου τῶν στοιχείων, περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι. ἐὰν οὖν δείξω τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ K ἴσην ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ B, δηλονότι τὸ γραφόμενον τμῆμα κύκλου διὰ τοῦ EKH ἥξει καὶ διὰ τοῦ B, καὶ περιλήψεται κύκλου τμῆμα τὸ τραπέζιον, ὅπερ τμῆμα καὶ τὸ τρίγωνον περιέξει τὸ ἐφ' οὗ EZH. Ληφθέντος οὖν κέντρου οἷον τοῦ $\varLambda$[3]), καὶ ἐπιζευγνυμένων τῶν $\varLambda E$, $\varLambda H$, $\varLambda K$, $\varLambda B$, ἐπειδὴ ἰσοσκελές ἐστι τὸ $E\varLambda H$[4]) τρίγωνον, αἱ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσαι, ἴσαι εἰσὶν αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, ἡ ὑπὸ $\varLambda HE$ τῇ ὑπὸ $\varLambda EH$, διὰ τὸ πέμπτον τοῦ πρώτου τῶν Εὐκλείδου. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ BHE ἴση τῇ ὑπὸ KEH, διότι καὶ ἡ BE ἴση τῇ KH, ὡς ἐδείχθη· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $BH\varLambda$[5]) ὅλῃ τῇ ὑπὸ $KE\varLambda$ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ KE τῇ BH ἴση καὶ βάσις ἄρα ἡ $K\varLambda$ τῇ $\varLambda B$ ἴση ἐστίν. ἴση ἄρα τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῇ $\varLambda K$[6]) ἡ $\varLambda B$. ταύτῃ δὴ γεγράφθω τὸ τμῆμα.

weil die $B\Gamma$ der ΓK gleich, die ΓZ gemeinschaftlich, und jeder der Winkel an Γ ein Rechter ist; — also sind die Seiten HZ, ZB den beiden Seiten ZE, KZ gleich, und ebenso die Scheitelwinkel (bei Z), also HB gleich EK.

Man schreibe nun um das Dreieck EZH das Kreissegment EZH, so ist jedes der Segmente EZ, ZH jedem der Segmente EK, KB, BH ähnlich. Dies vorausgesetzt behaupte ich, dass das Trapez $EKBH$ von einem Kreise umfasst wird. Denn das Dreieck KEH wird gewiss von einem Kreise umfasst, denn im 5ten Satze des 4ten Buches der Elemente sehen wir, wie um ein gegebenes Dreieck ein Kreis zu beschreiben ist. Wenn ich nun beweisen werde, dass der Halbmesser nach B gleich ist dem nach K gezogenen, so wird offenbar der durch KEH beschriebene Kreisabschnitt auch durch den Punkt B gehen, und das Segment das Trapez umfassen, wie es auch das Dreieck EZH mit einschliesst. Es sei nun $\varLambda$ das Centrum und man ziehe die $\varLambda E$, $\varLambda H$, $\varLambda K$, $\varLambda B$; da $E\varLambda H$ ein gleichschenkliges Dreieck ist und die Halbmesser einander gleich sind, so sind auch die Winkel an der Grundlinie gleich, also $\varLambda HE$ gleich $\varLambda EH$, nach dem 5ten Satze des 1ten Buches der Elemente Euklides. Es ist ferner BHE gleich KEH, weil auch BE gleich KH ist, wie bereits gezeigt worden, also auch der ganze Winkel $BH\varLambda$ gleich dem ganzen $KE\varLambda$, mithin da auch KE der BH gleich ist, die Seite $K\varLambda$ der Seite $B\varLambda$ gleich, d. h.

1) Im Texte steht EZ statt EZH.

2) Die Aldina liest statt τὸ EZ, ZH vielmehr τὸ EZH, was geometrisch falsch ist; denn nicht das Segment EZH, sondern die auf den Geraden EZ, ZH gebildeten äusseren Abschnitte desselben sind den Segmenten auf EK etc. ähnlich.

3) Im Texte steht $\varLambda E$ statt $\varLambda$.

4) Im Texte EKH anstatt $E\varLambda H$.

5) Die Aldina wiederholt, anstatt die Winkel $KH\varLambda$ und $KE\varLambda$ anzuführen, irriger Weise die in der vorausgehenden Zeile genannten Winkel BHE u. KEH, welche zu dem Beweise der Congruenz der Dreiecke $\varLambda HB$ und $\varLambda KE$ durchaus nicht passen.

6) Im Texte AK anstatt $\varLambda K$.

die AB ist gleich dem Halbmesser AK. Mit diesem also werde das Segment beschrieben.

Τούτων οὖν οὕτως ἐχόντων ὁ γενόμενος μηνίσκος, οὗ ἐκτὸς περιφέρεια ἡ $EKBH$, ἴσος ἔσται τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν τριῶν τριγώνων τῶν ZBH, ZBK, ZKE. τὰ γὰρ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ἐφ' αἷς EZ, ZH ἀφαιρούμενα ἐντὸς τοῦ μηνίσκου ἀπὸ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἐκτὸς τοῦ εὐθυγράμμου τμήμασιν, ἀφαιρουμένοις ὑπὸ τῶν EK, KB, BH. ἑκάτερον γὰρ τῶν ἐντὸς ἡμιόλιόν ἐστιν ἑκάστου τῶν ἐκτός· ἡμιολία γὰρ ὑπόκειται ἡ EZ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου[1]), τουτέστι τῆς EK καὶ KB[2]) καὶ BH (ἐδείχθη γὰρ καὶ αὕτη ἴση τῇ EK). Εἰ οὖν ἑκάτερα τῶν EZ, ZH ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει ἑκάστης τῶν εἰρημένων τριῶν, ὡς δὲ αἱ εὐθεῖαι πρὸς τὰς εὐθείας[1]), τμήματα πρὸς τὰ τμήματα, τὰ δύο ἄρα τμήματα τοῖς τρισὶν ἔστιν ἴσα. εἰ οὖν ὁ μὲν μηνίσκος τὰ τρία τμήματα ἔστιν καὶ τοῦ εὐθυγράμμου τὸ παρὰ τὰ δύο τμήματα, τὸ δὲ εὐθύγραμμον μετὰ δύο τμημάτων ἔστι χωριστῶν τριῶν, ἔστι δὲ τὰ δύο τμήματα τοῖς τρίσιν ἴσα, ἴσος ἂν εἴη ὁ μηνίσκος τῷ εὐθυγράμμῳ.

Dies vorausgesetzt wird nun der entstehende Mond, dessen äusserer Bogen $EKBH$ ist, dem Fünfecke gleich sein, das aus den drei Dreiecken ZBH, ZBK, ZKE besteht. Denn die von den Geraden EZ, ZH gebildeten, innerhalb des Mondes von dem Fünfecke ($EKBHZ$) abgeschnittenen Segmente sind gleich den ausserhalb des Fünfeckes liegenden von den Seiten EK, KB, BH abgeschnittenen Segmenten. Jedes der inneren Segmente ist nämlich das Anderthalbfache jedes der äusseren; denn nach Voraussetzung ist das Quadrat von EZ das Anderthalbfache des Quadrates vom Halbmesser, d. h. der EK oder KB oder BH (denn bewiesen wurde, dass jede der letzteren der EK gleich ist). Wenn nun jede EZ, ZH im Quadrate dem Anderthalbfachen des Quadrates der drei erwähnten Geraden gleich ist, und sich die Quadrate dieser Geraden wie die zugehörigen Segmente verhalten, so sind auch die zwei Segmente jenen dreien gleich. Wenn nun der Mond diese drei Segmente enthält sammt dem Theile des Fünfecks, der an den zwei Segmenten liegt, das Fünfeck dagegen die zwei Segmente ein-, jene drei dagegen ausschliesst, und überdies die zwei Segmente jenen dreien gleich sind, so wird jedenfalls der Mond dem Fünfecke gleich sein.

§ 90. (Fig. 9.).

Ὅτι δὲ οὗτος ὁ μηνίσκος ἐλάττονα ἡμικυκλίου τὴν ἐκτὸς ἔχει περιφέρειαν, δείκνυσι διὰ τοῦ τὴν EKH γωνίαν ἐν τῷ ἐκτὸς οὖσαν τμήματι ἀμβλεῖαν εἶναι. Δέδεικται γὰρ ἐν τῷ τρίτῳ τοῦ τρίτου τῶν Εὐκλείδου στοιχείων, ὅτι ἡ ἐν τῷ ἐλάττονι ἡμικυκλίου τμή-

Dass aber der äussere Bogen dieses Mondes kleiner ist als der Halbkreis, beweist er dadurch, dass er den in dem äusseren Bogen des Abschnittes liegenden Winkel EKH als einen stumpfen nachweiset. Denn im 3ten Satze des dritten Buches der Elemente Eu-

1) In den beiden hier angezogenen Stellen fehlt im Texte offenbar δυνάμει. Vielleicht hat es der Abschreiber ausfallen lassen; möglich aber auch, dass Eudemos es an beiden Stellen, als selbstverständlich, übergangen hat, da dieselbe Auslassung auch späterhin noch ein paar Male vorkommt.

2) Der Text liest AB anstatt KB.

ματι μείζων ὀρθῆς ἐστιν. ὅτι δὲ ἀμβλεῖα ἐστι ἡ ὑπὸ *EKH* γωνία δεικνυσιν οὕτως.

Ἐπεὶ ἡ μὲν ἐφ' ᾗ *EZ* ἡμιολία ἐστι τῶν ἐκ τοῦ κέντρου δυνάμει, ἡ δὲ ἐφ' ᾗ *BK* μείζων τῆς ἐφ' ᾗ *BZ*, διότι καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ *Z* μείζων, ὡς δείξω[1]), ἴση δὲ ἡ *BK* τῇ *KE*, φανερὸν ὅτι κἂν ἡ ἐφ' ᾗ *KE* μείζων ᾖ τῆς ἐφ' ᾗ *BZ*[2]), καὶ ἡ ἐφ' ᾗ *BE* μείζων ἐστι τῆς ἐφ' ᾗ *BZ* ἢ διπλασία μήκει. ὥστε ἡ ἐφ' ᾗ *KE* ἄρα μείζων ἐστι τῆς ἐφ' ᾗ *KZ* ἢ διπλασία δυνάμει, διὰ τὴν ὁμοιότητα τριγώνων τῶν *BEK*, *BKZ*. Ἔστι γὰρ ὡς ἡ *EB* πρὸς *BK*, οὕτως ἡ *EK* πρὸς *ZK*, ὥστε ἡ ἐφ' ᾗ *EK* μείζων ἐστι τῆς ἐφ' ᾗ *KZ* ἢ διπλασία δυνάμει. ἡ δὲ ἐφ' ᾗ *EZ* ἡμιολία δυνάμει τῆς ἐφ' ᾗ *EK*, ἡ ἄρα ἐφ' ᾗ *EZ* μείζων ἐστι δυνάμει τῶν ἐφ' αἷς *EK*, *KZ* ἡ *EK* τῆς *KZ*, ἡμιολία

klides wird bewiesen, dass der Winkel in einem Segmente, das kleiner ist als der Halbkreis, grösser sein muss als ein Rechter. Dass aber *EKH* ein stumpfer Winkel ist, zeigt er auf folgende Weise.

Da EZ^2 das Anderthalbfache vom Quadrate des Halbmessers, die *BK* aber grösser ist als die *BZ*, weil auch der Winkel am Punkte Z der grössere ist, wie ich zeigen werde, überdies aber *BK* der *KE* gleich, so ist klar, dass wenn *KE* grösser als *BZ*, auch die *BE* grösser ist, als das Doppelte von *BZ*. Daher wird auch KE^2 grösser sein als das Doppelte des Quadrates von *KZ*, wie aus der Aehnlichkeit der Dreiecke *BEK* und *BKZ* folgt. Denn es verhält sich *BE* zu *BK* wie *EK* zu *ZK*; daher ist KE^2 grösser als das doppelte Quadrat von *KZ*. Nun ist aber EZ^2 gleich dem anderthalbfachen Quadrat von *KE*, also auch EZ^2 grösser als die Quadrate von *EK* und *KZ* zusammen genommen. Denn wenn

---

1) Der hier versprochene Beweis fehlt im Folgenden, ist aber auch kaum nöthig.

2) Der Griechische Text lautet in der Aldina folgendermassen: φανερὸν ὅτι κἂν ἡ ἐφ' ᾗ *KE* μείζων ᾖ τῆς ἐφ' ᾗ *BZ* ἢ διπλασία μήκει καὶ ἡ ἐφ' ᾗ *BE*. ὥστε τῆς ἐφ' ᾗ *KZ* ἄρα μείζων ἢ διπλασία μήκει δυνάμει διὰ τὴν ὁμοιότητα τριγώνων τῶν *BEK*, *BKZ*. ἔστι γὰρ ὡς ἡ *EB* πρὸς *BZ* οὕτως ἡ *EK* πρὸς *KZ*. ὥστε ἡ ἐφ' ᾗ *EK* μείζων ἐστι τῆς ἐφ' ᾗ *KZ* ἢ διπλασία δυνάμει. — Es ist klar, dass kenntnisslose Abschreiber den Text übel zugerichtet haben, besonders auch dadurch, dass ähnlich lautende Wortfolgen von ihnen erst weggelassen und dann an unpassenden Stellen wieder eingeschoben worden sind. Hippokrates, dessen eigne Worte hier wieder vorliegen, wie aus der umständlichen Wendung: ἡ ἐφ' ᾗ *KE* u. s. w. hervorgeht, führt den Beweis, in den heutigen Zeichen ausgedrückt, auf folgende Weise. Es ist:

$$EZ > KE > KZ; \text{ hierzu}$$
$$BZ = KZ \text{ addirt, giebt}$$

$BZ + EZ = BE > 2KZ$. Beide Seiten der Ungleichung mit *KZ* multiplicirt geben: $BE \,.\, KZ > 2KZ^2$.

Nun erhält man aber aus der Proportion $BE : BK = KE : KZ$ sofort:

$$BE \,.\, KZ = BK \,.\, KE = KE^2, \text{ also wird}$$
$$KE^2 > 2\ KZ^2 \text{ oder } \tfrac{1}{2}\ KE^2 > KZ^2.$$

Da aber $ZE^2 = KE^2 + \frac{1}{2} KE^2$ sein soll, so wird $ZE^2 > KE^2 + KZ^2$.

Dieser Beweis, den Hippokrates in voller Ausführlichkeit geführt haben mag, ist von Eudemos offenbar nur in den Hauptzügen wiedergegeben worden, wodurch die nicht abzuläugnende Dunkelheit des Textes herrührt. Letzte-δὲ ἡ ΖΕ τῆς ΕΚ, ἣν ἂν ἡ ΕΖ ἴση δυνάμει ταῖς ΕΚ, ΚΖ, ὡς ἐπὶ ἀριθμῶν τῶν ϛ̄, δ̄, β̄. Ἐπειδὴ δὲ μείζων ἢ διπλασία ἐστὶ δυνάμει ἡ ΕΚ τῆς ΚΕ, μείζων ἐστὶ δυνάμει ἡ ΕΖ τῶν ΕΚ, ΚΖ [1]). Ἀμβλεῖα ἄρα ἔστιν ἡ πρὸς τῷ Κ γωνία· ἔλαττον ἄρα ἡμικυκλίου τὸ τμῆμα, ἐν ᾧ ἐστίν.

von den beiden Quadraten der EK und KZ das von EK gleich wäre dem Doppelten von KZ, und ZE^2 gleich $\frac{1}{2}\, EK^2$, so würde EZ^2 gleich sein den EK^2 und KZ^2 zusammengenommen, wie dies z. B. bei den Zahlen 6, 4, 2 stattfindet. Da aber EK^2 grösser ist als $2 \,.\, KZ^2$, so ist auch EZ^2 grösser als EK^2 und KZ^2 zusammen. Es ist folglich der Winkel am Punkte K ein stumpfer, daher das Segment, in dem er liegt, kleiner als der Halbkreis.

Οὕτω μὲν οὖν ὁ Ἱπποκράτης πάντα μηνίσκον ἐτετραγώνισεν, εἴπερ καὶ τὸν ἡμικυκλίου καὶ τὸν μείζονα ἡμικυκλίου καὶ τὸν ἐλάττονα ἔχοντα τὴν ἐκτὸς περιφέρειαν. ἀλλ' οὐχὶ τὸν ἐπὶ τῆς τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς μόνον, ὡς ὁ Ἀλέξανδρος ἱστόρησεν. οὐ μέντοι οὐδὲ τὸν κύκλον ἐπεχείρησε τετραγωνίσαι διὰ τῶν περὶ τὴν τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰν μηνίσκων, ὡς καὶ τοῦτο Ἀλέξανδρός φησιν.

So hat nun Hippokrates jeden Mond quadrirt, mag nun sein äusserer Bogen ein Halbkreis sein, oder grösser oder kleiner als ein solcher; keineswegs aber blos den auf der Vierecksseite stehenden, wie Alexandros berichtet. Allerdings aber suchte er den Kreis durch Monde auf der Sechsecksseite zu quadriren, wie Alexandros dies gleichfalls angiebt.

§ 91. (Fig. 10.).

Ἀλλὰ μηνίσκον ἅμα καὶ κύκλον ἐτετραγώνισεν οὕτως. Ἔστωσαν περὶ κέντρον ἐφ' οὗ Κ δύο κύκλοι. ἡ δὲ τοῦ ἐκτὸς διάμετρος ἑξαπλασία δυνάμει τῆς τοῦ ἐντός. καὶ ἑξαγώνου ἐγγραφέντος εἰς τὸν ἐντὸς κύκλον, τῶν ἐφ' ὧν ΑΒΓΔΕΖ, αἵτε ἐφ' ὧν ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ ἐκ τοῦ κέντρου ἐπιζευχθεῖσαι, ἐκβεβλήσθωσαν ἕως τῆς τοῦ ἐκτὸς κύκλου περιφερείας. καὶ ἐφ' ὧν ΗΘ, ΘΙ ἐπεζεύχθωσαν. Καὶ δηλονότι καὶ ἡ ΗΘ, ΘΙ ἑξαγώνου εἰσὶ πλευραὶ τοῦ εἰς τὸν μείζονα κύκλον ἐγγραφομένου. καὶ περὶ τὴν ἐφ' ἧ ΗΙ [2]) τμῆμα ὅμοιον τῷ ἀφαιρουμένῳ ὑπὸ τῆς ἐφ' ἧ ΗΘ περιγεγράφθω. Ἐπεὶ οὖν τὴν μὲν ἐφ' ἧ ΗΙ τριπλασίαν ἀναγκαῖον

Dagegen quadrirt er einen Mond und Kreis zusammen auf folgende Art. Es seien um den Mittelpunkt K zwei Kreise beschrieben und das Quadrat vom Halbmesser des äusseren das Sechsfache von dem des inneren. Beschreibt man in den innern Kreis ein Sechseck $AB\Gamma\Delta EZ$, zieht die Halbmesser KA, KB, $K\Gamma$, verlängert sie bis an den Umfang des äusseren Kreises und zieht die Geraden $H\Theta$, ΘI; so sind offenbar $H\Theta$, ΘI die Seiten des dem grösseren Kreise eingeschriebenen Sechseckes. Nun werde über der Geraden HI ein Segment beschrieben, ähnlich dem von $H\Theta$ abgeschnittenen; dann ist das Quadrat von HI noth-

rer konnte, nachdem nur erst der Gang des Beweises erkannt war, durch mehrere Umstellungen und ein paar geringfügige Ergänzungen in der oben angegebenen Weise berichtigt werden, sodass er nunmehr nicht nur von geometrischem Unsinn frei ist, sondern auch die Hauptzüge des Beweises deutlich erkennen lässt.

1) Im Texte sind die hier unentbehrlichen Worte ἡ ΕΖ τῶν ΕΚ, ΚΖ geradezu weggelassen.

2) Die Gerade HI ist im Texte durchgängig blos mit η oder ein paar Male mit ῃ bezeichnet.

εἶναι δυνάμει τῆς ἐφ' ᾗ ΘΗ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾶς· ἡ γὰρ ὑπὸ δύο τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾶς ὑποτείνουσα μετὰ ἄλλης μιᾶς ὀρθὴν περιέχουσα γωνίαν τὴν ἐν ἡμικυκλίῳ ἴσον δύναται τῇ διαμέτρῳ· ἡ δὲ διάμετρος τετραπλάσιον δύναται τῆς τοῦ ἑξαγώνου, ἴσης οὔσης τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, διὰ τὸ τὰ μήκει διπλάσια δυνάμει τετραπλάσια εἶναι. Ἡ δὲ ΘΗ ἑξαπλάσια τῆς ἐφ' ᾗ ΑΒ, δηλονότι τὸ τμῆμα τὸ περὶ τὴν ἐφ' ᾗ ΗΙ περιγραφὲν ἴσον εἶναι συμβαίνει τοῖς τε ἀπὸ τοῦ ἐκτὸς κύκλου ὑπὸ τῶν ἐφ' αἷς ΗΘ, ΘΙ ἀφαιρομένοις, καὶ ταῖς ἀπὸ τοῦ ἐντὸς ὑπὸ τῶν τοῦ ἑξαγώνου πλευρῶν ἁπασῶν. Τὰ γὰρ ὅμοια τῶν κύκλων τμήματα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν βάσεων τετράγωνα· διότι καὶ οἱ ὅμοιοι[1]) κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. Εἰ γὰρ ἡ ΗΙ τῆς ΗΘ τριπλάσιον δύναται ἴσον δὲ τῇ ΗΘ δύναται ἡ ΘΙ, δύνανται δὲ ἑκάτερα τούτων ἴσον καὶ αἱ ἓξ πλευραὶ τοῦ ἐντὸς ἑξαγώνου, διότι καὶ ἡ διάμετρος τοῦ ἐκτὸς κύκλου ἑξαπλάσιον ὑπόκειται δύνασθαι τῆς τοῦ ἐντός· ὡς δὲ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον οὕτω καὶ αἱ ἐκ τοῦ κέντρου. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶν τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ, ὡς τὸ πόρισμα λέγει τοῦ προτελεύτου θεωρήματος ἐν τῷ τετάρτῳ βιβλίῳ τῶν τοῦ Εὐκλείδου στοιχείων. ὡς δὲ αἱ πλευραὶ (δυνάμει[2]) οὕτω καὶ τὰ τμήματα. Ὥστε ὁ μὲν μηνίσκος ἐφ' οὗ ΗΘΙ τοῦ τε τριγώνου ἐλάττων ἂν εἴη, ἐφ' οὗ τὰ αὐτὰ γράμματα, τοῖς ὑπὸ τῶν τοῦ ἑξαγώνου πλευρῶν ἀφαιρουμένοις τμήμασιν ἀπὸ τοῦ ἐντὸς κύκλου. τὸ γὰρ ἐπὶ τῆς ΗΙ τμῆμα ἴσον ἦν τοῖς τε ΗΘ, ΘΙ τμήμασι

wendig das Dreifache von dem Quadrate der Sechsecksseite $H\Theta$. Denn die zwei Sechsecksseiten überspannende Sehne, da sie mit der einen dritten Sechsecksseite einen rechten Winkel im Halbkreise einschliesst, giebt im Quadrate mit dem Quadrate der dritten das Quadrat des Durchmessers; das Quadrat des letzteren aber ist das Vierfache vom Quadrate der Sechsecksseite, die dem Halbmesser gleich ist, weil das in der Länge Doppelte im Quadrate das Vierfache erzeugt. Nun ist aber ΘH (im Quadrat) das Sechsfache von AB (im Quadrat), folglich muss das über HI beschriebene Segment gleich sein den im äusseren Kreise von $H\Theta$, ΘI gebildeten Segmenten sammt den im innern Kreise von allen Sechsecksseiten abgeschnittenen Segmenten. Denn ähnliche Kreissegmente verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Sehnen, weil auch ähnliche Kreise sich zu einander wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten. Ist nun das Quadrat von HI gleich dem dreifachen Quadrate von $H\Theta$, und das Quadrat von ΘH gleich dem von ΘI, so sind jedem derselben gleich die Quadrate aller sechs Seiten des inneren Sechsecks, weil das Quadrat des äusseren Durchmessers gleich dem Sechsfachen vom Quadrate des innern angenommen ist. Wie aber die Durchmesser, so verhalten sich auch die Halbmesser, die ihrerseits der Sechsecksseite gleich sind, wie der Zusatz zum vorletzten Theorem im vierten Buche der Euklidischen Elemente lehrt. Wie aber die Quadrate der Sehnen, so verhalten sich auch die zugehörigen Segmente. Daher wird der Mond $H\Theta I$ kleiner sein

1) Der Ausdruck ὅμοιοι κύκλοι „ähnliche Kreise" kann zwar als Pleonasmus angesehen werden, scheint aber darauf hinzudeuten, dass es dem Hippokrates nicht recht klar geworden ist, dass überhaupt alle Kreise einander ähnlich sind, ein Satz, den die Griechische Geometrie in dieser Weise überhaupt nicht ausgesprochen hat, da sie den Begriff der Aehnlichkeit lediglich von den geradlinigen Figuren ableitet.

2) Auch hier fehlt im Texte δυνάμει, wie schon oben in Note 1 S. 117 Aehnliches bemerkt wurde.

καὶ τοῖς ὑπὸ τοῦ ἑξαγώνου ἀφαιρουμένοις. τὰ οὖν ΗΘ, ΘΙ τμήματα ἐλάττω ἐστὶ τοῦ περὶ τὴν ΗΙ τμήματος τοῖς ὑπὸ τοῦ ἑξαγώνου ἀφαιρουμένοις [1]*). Κοίνου οὖν προςτεθέντος τοῦ ὑπὲρ τὸ τμῆμα τὸ περὶ τὴν ΗΙ μέρους τοῦ τριγώνου ἐκ μὲν τούτου καὶ τοῦ περὶ τὴν ΗΙ τμήματος τὸ τρίγωνον ἔσται, ἐκ δὲ τοῦ αὐτοῦ καὶ τῶν ΗΘ, ΘΙ τμημάτων ὁ μηνίσκος· ἔσται οὖν ἐλάττων ὁ μηνίσκος τοῦ τε τριγώνου* [2]*) τοῖς ὑπὸ τοῦ ἑξαγώνου ἀφαιρουμένοις τμήμασιν. Ὁ ἄρα μηνίσκος καὶ τὰ ὑπὸ τοῦ ἑξαγώνου ἀφαιρούμενα τμήματα ἔστιν ἴσα τῷ τριγώνῳ· καὶ κοίνου προςτεθέντος τοῦ ἑξαγώνου, τὸ τρίγωνον τοῦτο καὶ τὸ ἑξάγωνον ἴσα ἐστὶ τῷ τε μηνίσκῳ τῷ λεχθέντι καὶ τῷ κύκλῳ τῷ ἐντὸς* [3]*) (τὸ γὰρ τρίγωνον ἴσον ἦν τῷ τε μηνίσκῳ καὶ τοῖς ὑπὸ τοῦ ἑξαγώνου ἀφαιρουμένοις τμήμασι τοῦ ἐντὸς κύκλου). εἰ οὖν τὰ εἰρήμενα εὐθύγραμμα δυνατὸν τετραγωνισθῆναι, καὶ τὸν κύκλον ἄρα μετὰ τοῦ μηνίσκου.*

als das mit den nämlichen Buchstaben bezeichnete Dreieck, und zwar um die von den Secksecksseiten im inneren Kreise gebildeten Segmente; denn das Segment über *HI* war gleich den Segmenten über *HΘ*, *ΘI* und den von den Sechsecksseiten gebildeten. Also sind die Segmente *HΘ*, *ΘI* kleiner als das Segment über *HI* um die von dem Sechseck abgeschnittenen Segmente. Addirt man nun beiderseits das über dem Segment *HI* liegende Stück des Dreiecks (*HΘI*), so wird man aus letzterem und dem Segmente *HI* das Dreieck, aus eben diesem Stück und den Segmenten *HΘ*, *ΘI* dagegen den Mond (*HΘI*) erhalten, und letzterer wird nun um die von dem Secksecke gebildeten Abschnitte kleiner sein als das Dreieck. Demnach ist der Mond sammt den von dem Seckseck gebildeten Segmenten dem Dreiecke gleich, und wenn man nun zu beiden das Sechseck selbst addirt, so ist das Dreieck sammt Sechsecke gleichflächig dem gedachten Monde sammt dem innern Kreise (denn das Dreieck war gleich dem Monde sammt den vom Sechsecke gebildeten Segmenten des inneren Kreises). Da nun die erwähnten geradlinigen Figuren quadrirt werden können, so gilt dies auch von der Summe des Kreises und Mondes.

Τὰ μὲν οὖν περὶ τοῦ Χίου Ἱπποκράτους μᾶλλον ἐπιτρεπτέον Εὐδήμῳ γιγνώσκειν, ἐγγυτέρῳ τοῖς χρόνοις ὄντι καὶ Ἀριστοτέλους ἀκροατῇ. ὁ δὲ διὰ τῶν τμημάτων τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου, ὃν ὡς ψευδογραφοῦντα αἰτιᾶται ὁ Ἀριστοτέλης, ἢ τὸν διὰ τῶν μηνίσκων αἰνίττεται, καλῶς γὰρ ὁ Ἀλέξανδρος ἐνεδοίασεν εἰπών, εἰ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῶν μηνίσκων.

Dem Eudemos muss man nun zugestehen, dass er die Leistungen des Chiers Hippokrates besser kennt, da er als Schüler des Aristoteles der Zeit nach jenem näher steht. Die Quadratur des Kreises aber durch Segmente, die Aristoteles als irrig angreift, oder die durch Monde, die er gleichfalls bekrittelt, stellt auch Alexandros sehr richtig in Zweifel, wobei er bemerkt, sie sei die nämliche wie die durch Monde.

---

1) Die Aldina liest: *ἐλάττω ἐστὶ τοῖς περὶ τὴν ΗΙ τμήμασιν καὶ τοῖς ὑπὸ τοῦ ἑξαγώνου* etc., was geometrisch falsch und offenbares Versehen des Abschreibers ist.

2) Der Text hat *τοῦ τετραγώνου*, jedenfalls Schreib- oder Druckfehler.

3) Im Texte steht irriger Weise *ἐκτὸς* statt *ἐντός*.

§ 92. Das vorliegende umfangreiche Excerpt, was uns Simplikios aus des Eudemos Geschichte der Geometrie erhalten hat, ist für uns doppelt wichtig, weil wir erstens in demselben einen wohl ziemlich vollständigen Abriss der Bemühungen des Hippokrates um die Quadratur des Kreises erhalten, nebst einer Anzahl anderer nicht unwichtiger historischer Notizen über diesen Gegenstand; zweitens aber, weil die ganze Art der Untersuchung und Beweisführung ein sehr erfreuliches Licht über den Zustand der Geometrie verbreitet, wie er sich etwa um 440 v. Chr., d. h. in der Mitte der Zeit zwischen dem Tode des Pythagoras und der Eröffnung der Akademie durch Platon gestaltet hatte.

Betrachten wir zuvörderst die Arbeit des Hippokrates an sich, so ist nicht zu läugnen, dass sie eine für die damalige Zeit wirklich scharfsinnige ist. Nachdem derselbe zuerst die allbekannte Quadratur des auf der Quadratseite stehenden Mondes gelehrt hat, zeigt er, wie der ganze Kreis quadrirt werden kann, wenn man den auf der Sechsecksseite stehenden Mond zu quadriren vermag (§ 81. und 82.). Hierbei wird nun dem Hippokrates von Aristoteles der Vorwurf eines groben Irrthums gemacht, den er dadurch begangen haben soll, dass er den Mond auf der Seite des Sechseckes mit dem auf der Seite des Viereckes verwechselt und die Möglichkeit der Quadratur des letzteren unbedachtsamer Weise auch auf den ersteren übertragen habe. Es fällt schwer, von einem so guten Geometer, als welchen Hippokrates sich hier zeigt, eine so grobe Verwechselung anzunehmen und man wird weit mehr geneigt sein, den angeblichen Irrthum einem vollständigen Missverständnisse zuzuschreiben. Hippokrates kann einfach gesagt haben: „*wenn* der Mond über der Seite des Sechseckes quadrirt werden kann, so ist damit auch die Quadratur des Kreises gefunden.“ Dieser von ihm bedingungsweise ausgesprochene Satz kann von Aristoteles, der ohnedies ein höchst mittelmässiger Geometer ist, als bedingungslos aufgefasst worden sein und ihn dadurch zu seinem übereilten Tadel veranlasst haben. So lange man indessen von Hippokrates nichts weiter kannte, als die beiden oben genannten Sätze, und selbst diese nicht aus des Simplikios Commentar, sondern nur aus der Mittheilung, die Vieta[1]) darüber macht, mochte es immerhin noch zweifelhaft erscheinen, ob nicht der Griechische Geometer sich doch eine Schwachheit habe zu Schulden kommen lassen. Dass dies aber keinesweges der Fall ist, geht aus dem hier zum ersten Male berücksichtigten umfänglichen Berichte des Eudemos über diesen Gegenstand fast unwiderleglich hervor. Hippokrates macht hiernach sehr bedeutende Anstrengungen, um durch Quadra-

---

1) Vietae opera pag. 386.

turen noch anderer Monde, als des auf der Quadratseite stehenden, zu seinem Ziele zu gelangen. Namentlich versucht er Monde zu quadriren, deren äusserer Bogen grösser oder kleiner ist als ein Halbkreis.

Einen Mond der ersten Art, in welchem der äussere Bogen den Halbkreis überschreitet, findet er leicht mittelst eines Trapezes, in welchem die kleinere Grundlinie und beide Schenkel einander gleich sind, die grössere Parallele aber zu einer der drei gleichen Seiten sich verhält, wie $\sqrt{3}$ zu 1; und er hätte von diesem Satze ausgehend leicht den allgemeineren ableiten können, bei welchem dem Kreise ein $(n+1)$ Eck eingeschrieben wird, in dem n Seiten einander gleich sind, die $(n+1)$te aber zu einer der übrigen sich verhält wie $\sqrt{n} : 1$. — Weit mehr Mühe hat es ihm aber offenbar gemacht, einen Mond zu construiren, dessen äusserer Bogen kleiner ist als der Halbkreis. Diese Construction sammt zugehörigem Beweise, wie sie in § 89. und § 90. vorgetragen sind, zeigen in der That von geometrischem Scharfsinn und müssen unsere Aufmerksamkeit um so mehr erregen, als keiner der älteren und neueren Geometer, die sich mit der Quadratur von Monden beschäftigt haben, auf diese Betrachtung verfallen ist. Eudemos spricht nun die Ansicht aus, dass mittelst der angeführten beiden Constructionen *jeder* Mond quadrirt sei, dessen äusserer Bogen grösser oder kleiner sei als ein Halbkreis. Dass aber diese Meinung, die bereits Simplikios als irrig nachweist, von Hippokrates gar nicht getheilt wird, zeigt Letzterer dadurch, dass er *noch* einen Versuch macht, die ersehnte Quadratur dadurch zu erhalten, dass er die *Summe* eines ganzen Kreises und eines Mondes quadrirt, (§ 91.). Da aber auch hier der verwendete Mond als kein beliebiger, sondern als ein ganz specieller, auf der Sechsecksseite stehender, sich ergiebt, so bleibt die gesuchte Quadratur unerledigt.

§ 93. Es muss aber in der That Wunder nehmen, dass diese für ihre Zeit so weit gehende und für unsere Kenntniss von der Entwickelung der Geometrie so wichtige Arbeit des Hippokrates bis auf den heutigen Tag dem grösseren Theile nach gänzlich unbekannt geblieben ist, ein sichtbares Zeichen von der Nachlässigkeit und Oberflächlichkeit, mit welcher die Verfasser einer Geschichte der Geometrie die Quellen studirt haben. Montucla hat sowohl in seiner Geschichte der Kreisquadratur (p. 38 ff.), als auch in der Geschichte der Mathematik (vol. I. p. 152 ff.) nichts wie die beiden ersten Sätze des Hippokrates (§ 81. u. § 82.) gegeben, sich überhaupt gar nicht die Mühe genommen, den Simplikios nachzulesen. Er referirt, wie schon oben bemerkt worden ist, blos das, was er darüber bei seinem Landsmanne Vieta gelesen hat. Ja so leichtfertig geht er dabei zu

Werke, dass er in seiner Geschichte der Mathematik bereits ganz vergisst, was er 10 Jahre früher in seiner Geschichte der Kreisquadratur über den Gegenstand berichtet hat. Statt die von Hippokrates gegebene Construction des Mondes auf der Quadratseite vorzutragen, giebt er an, derselbe habe auf den Katheten eines ungleichseitigen rechtwinkligen Dreiecks Halbkreise beschrieben, dieselben durch den Halbkreis über der Hypotenuse schneiden lassen und nun gefolgert, dass die Monde über beiden Katheten zusammengenommen dem gegebenen Dreiecke gleichflächig seien, eine Darstellung, welche erst von neuern Geometern gegeben worden ist, wie auch in einem Zusatze richtig bemerkt wird, der der zweiten Auflage der Geschichte der Kreisquadratur (p. 266) beigefügt worden ist. — Von Geometern, welche *nach* Montucla die Geschichte ihrer Wissenschaft behandelt haben, hat Keiner sich mit einem sorgfältigen Studium der Quellen befasst, und so ist es bis auf den heutigen Tag ganz unbekannt geblieben, *dass wir in dem von Simplikios uns erhaltenen Fragmente des Eudemos den ziemlich vollständigen, zum Theil sogar wörtlichen Inhalt der ältesten geometrischen Abhandlung besitzen, die von einem Griechen für die Oeffentlichkeit abgefasst worden ist.*

§ 94. Neben den Bemühungen des Hippokrates um die Quadratur des Kreises macht uns das Excerpt des Simplikios noch mit einigen anderen auf denselben Gegenstand gerichteten Untersuchungen bekannt, unter denen die des **Antiphon** unser besonderes Interesse in Anspruch nimmt (§ 80.). Der letztere, nach den vielfachen Citaten bei Aristoteles und dessen Commentatoren, ein Athenischer Sophist, der mit Sokrates mehrfach haderte[1]) und demnach ein Zeitgenosse des Hippokrates ist, hat zuerst den Kreis als ein Vieleck von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten betrachtet und muss somit als der Erste angesehen werden, der den Begriff des Unendlichkleinen in die Geometrie eingeführt hat. Indessen war die Zeit für derartige Anschauungen offenbar noch nicht reif, auch der Versuch selbst wohl zu wenig streng gefasst, als dass er die damali-

---

1) Diogenes Laert. l. II. c. 5. nr. 25: *Τούτῳ τίς, καθά φησιν Ἀριστοτέλης ἐν τρίτῳ περὶ ποιητικῆς, ἐφιλονείκει Ἀντιόλοχος Λήμνιος καὶ Ἀντιφῶν τερατοσκόπος* — „mit ihm (Sokrates) haderte auch wie Aristoteles im dritten „Buche der Poetik angiebt," Antiolochos von Lemnos und Antiphon, der „Zeichendeuter." — Suidas (s. v.) sagt von ihm: *Ἀντιφῶν, Ἀθηναῖος, τερατοσκόπος καὶ ἐποποιὸς καὶ σοφιστής· ἐκαλεῖτο δὲ λογομάγειρος.* — „Antiphon, „von Athen, Zeichendeuter, epischer Dichter und Sophist, ward Wortkoch genannt." — Ob übrigens Antiphon eine Schrift, *τετραγωνισμὸς* betitelt, geschrieben hat, wie einige aus der Stelle des Aristoteles (phys. ausc. I. c. 2): *οἷον τὸν τετραγωνισμὸν τὸν μὲν διὰ τῶν τμημάτων γεωμετρικοῦ διαλῦσαι· τὸν δὲ Ἀντιφῶντος οὐ γεωμετρικοῦ* — zu folgern scheinen, ist wohl zweifelhaft.

gen Geometer hätte befriedigen können. Erst dem Genie des Archimedes war es vorbehalten, Betrachtungen dieser Art durch eine Methode in die Wissenschaft einzuführen, die an Bündigkeit und Strenge der Schlussfolgerungen nichts mehr zu wünschen übrig liess. Immer aber ist der Gedanke des Antiphon höchst beachtenswerth, da er nothwendig auf die Schlussfolgerung hinführt, dass der Kreis einem Dreiecke gleich sein muss, welches den Kreisumfang zur Grundlinie und den Kreishalbmesser zur Höhe hat, wodurch die Quadratur des Kreises auf dessen Rectification zurückgeführt wird. Dass der Sophist Antiphon diesen Schluss nicht gezogen hat, ist weiter nicht wunderbar; wohl aber bleibt es auffällig, dass auch keiner der tüchtigen Geometer *vor* Archimedes auf diese ganz einfache Folgerung gekommen ist, und lässt sich dies wohl nur aus dem Umstande erklären, dass der gleichlautende Satz vom regelmässigen Vielecke ebenfalls noch nicht in die Wissenschaft eingetreten war; denn so einfach sein Beweis ist, so fehlt er gleichwohl selbst noch in des Euklides Elementen. Man ersieht daraus, dass bis auf die Zeit der Alexandrinischen Geometer die regelmässigen Vielecke *im Allgemeinen* gar nicht beachtet, vielmehr nur diejenigen in Untersuchung genommen wurden, deren Construction in den Kreis bekannt war.

Es scheint übrigens, als ob Antiphon bei seiner Untersuchung nicht blos vom eingeschriebenen Vierecke ausgegangen ist, wie es Simplikios in § 80. darstellt, sondern den Gang derselben noch einmal vom gleichseitigen Dreiecke aus wiederholt habe. Denn Themistios (comm. in Arist. phys. ausc. fol. 16. — Brandis scholia in Arist. p. 327) giebt an: *Πρὸς Ἀντιφῶντα δὲ οὐκ ἔτι ἂν ἔχοι λέγειν ὁ γεωμέτρης, ὃς ἐγγράφων τρίγωνον ἰσόπλευρον εἰς τὸν κύκλον, καὶ ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν πλευρῶν ἕτερον ἰσοσκελὲς συνιστὰς πρὸς τῇ περιφερείᾳ τοῦ κύκλου, καὶ τοῦτο ἐφεξῆς ποιῶν, ᾤετό ποτε ἐφαρμόσειν τοῦ τελευταίου τριγώνου τὴν πλευρὰν εὐθεῖαν οὖσαν τῇ περιφερείᾳ. τοῦτο δ᾽ ἦν ἐπ᾽ ἄπειρον τομὴν ἀναιροῦντος, ἣν ὑπόθεσιν ὁ γεωμέτρης λαμβάνει.* — „Gegen Antiphon streitet aber „der Geometer nicht. Denn indem er ein *gleichseitiges* Dreieck in den „Kreis einschreibt und über jeder Seite desselben ein zweites gleich„schenkliges, das bis an den Kreisumfang reicht, und dies fort und „fort wiederholt, glaubte er, dass die geradlinige Seite des letzten „Dreiecks mit dem Bogen zusammenfallen werde. Das heisst aber „die Theilung ins Unendliche aufheben, die der Geometer zur Vor„aussetzung nimmt.“

§ 95. Ein anderer Versuch der Kreisquadratur geht directer auf sein Ziel los, hat aber ebenfalls das Schicksal, von den später lebenden Geometern als unrichtig verworfen zu werden. Es ist der des

Sophisten **Bryson**, eines angeblichen Pythagoräers[1]), der ebenfalls in die Mitte des fünften Jahrhunderts v. Chr. gehört. Von seinem Verfahren, den Kreis zu quadriren, berichtet Johannes Philoponos (comm. in Arist. analyt. post. fol. 118. — Brand. schol. in Arist. p. 211) Folgendes:

Παντός, φησιν, ἐγγραφομένου ἐν τῷ κύκλῳ εὐθυγράμμου σχήματος μείζων ἐστὶν ὁ κύκλος, τοῦ δὲ περιγραφομένου ἐλάττων. ἐγγράφεσθαι δὲ λέγεται ἐν κύκλῳ εὐθύγραμμον τὸ ἐντὸς τοῦ κύκλου γραφόμενον, περιγράφεσθαι δὲ τὸ ἐκτός. ἀλλὰ καὶ τὸ μεταξὺ τοῦ τε ἐγγραφομένου καὶ περιγραφομένου εὐθυγράμμου γραφόμενον εὐθύγραμμον σχῆμα τοῦ μὲν περιγραφόμενον ἐστὶν ἔλαττον, τοῦ δὲ ἐγγραφομένου μεῖζον· τὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ μείζονα καὶ ἐλάττονα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὁ δὲ κύκλος ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ μεταξὺ γραφομένῳ εὐθυγράμμῳ τοῦ τε ἐγγραφομένου καὶ περιγραφομένου. ἔχομεν δὲ πάντι δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνόν ἐστι ποιήσασθαι. ὁ μὲν οὖν Ἀλέξανδρος οὕτως.

Der Kreis, sagt er, ist grösser als jedes ihm eingeschriebene Vieleck, kleiner als jedes umgeschriebene. Es soll nun beschrieben werden, giebt er an, innerhalb des Kreises ein eingeschriebenes und ausserhalb desselben ein umgeschriebenes Vieleck; dann ist ein Vieleck, welches das Mittel ist aus dem ein- und umgeschriebenen, kleiner als das umgeschriebene und grösser als das eingeschriebene, und die Stücke, um welche dasselbe grösser und kleiner ist als jene, sind einander gleich. Also ist der Kreis gleich diesem Mittel zwischen dem ein- und umgeschriebenen Vielecke. Wir wissen aber, dass es möglich ist, ein zu jedem gegebenen Vielecke gleiches Quadrat zu construiren. So nun berichtet Alexandros.

Ἔλεγε δὲ ὁ φιλόσοφος Πρόκλος τὸν αὐτοῦ διδάσκαλον ἐπισκήπτειν τῇ Ἀλεξάνδρου ἐξηγήσει, ὅτι εἰ οὕτως ἐτετραγώνισεν ὁ Βρύσων τὸν κύκλον, συνέτρεχε τῷ Ἀντιφῶντος τετραγωνισμῷ· τὸ γὰρ μεταξὺ τοῦ ἐγγραφομένου καὶ περιγραφομένου εὐθυγράμμου γεγραφόμενον σχῆμα ἐφαρμόζειν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ. τοῦτο καὶ ὁ Ἀντιφῶν ἐποίει, ἕως οὗ ἐφήρμοσεν, ὡς ἐκεῖνος ἔλεγεν, εὐθεῖαν περιφερείᾳ, ὅπερ ἀδύνατον. εἴρηται δὲ περὶ τούτου ἐν ταῖς φυσικαῖς. οὐκ ἂν οὖν ὁ Ἀριστοτέλης τὸν Βρύσωνος τετραγωνισμὸν ὡς ἕτερον ὄντα παρὰ τὸν Ἀντιφῶντος παρετίθει, εἴ γε οὕτως ὁ Βρύσων ἐτετραγώνισεν. ἔγω δέ, φησὶν ὁ Πρόκλος,

Der Philosoph Proklos aber sagte, sein Lehrer verwerfe die Angabe des Alexandros, weil, wenn Bryson auf solche Weise den Kreis quadrirt hätte, er mit der Quadratur des Antiphon zusammentreffen würde. Denn das zwischen dem ein- u. umgeschriebenen Vielecke als Mittel construirte Vieleck falle zuletzt mit dem Kreisumfange zusammen. Denn auf diese Art verfuhr Antiphon, bis er, wie Jener behauptete, bis auf eine Gerade kam, die mit dem Umfange zusammenfällt, was doch unmöglich ist. Es wird hierüber in der Physik gesprochen. Wohl aber würde Aristoteles die Quadratur des Bryson nicht als eine von der des Antiphon verschie-

1) Ob der von Jamblichos (vita Pyth. c. 23. — Kiessl. p. 224) unter des Pythagoras Schülern aufgeführte *Βρύσσων* unser Sophist, der Sohn des Herodoros von Herakleia, oder nicht ein Anderer ist, scheint zweifelhaft. Da er neben dem älteren Archytas erwähnt wird, ist es nicht unmöglich, dass er wirklich Pythagoräer war und sich mit anderen seiner Bundesbrüder nach Athen gewendet hatte.

καὶ τὸ ἀξίωμα ψευδὲς εἶναι λέγω· οὐ γὰρ ἀληθὲς τὸ τὰ τοῦ αὐτοῦ μείζονα καὶ ἐλάττονα, ταῦτα ἴσα εἶναι ἀλλήλοις.

dene anführen, wenn Bryson auf solche Art die Quadratur bewerkstelligt hätte. Ich aber, sagte Proklos, behaupte, dass der zu Grunde liegende Satz falsch ist; denn es ist nicht wahr, dass die Stücke, um welche das Mittel grösser und kleiner ist, einander gleich seien.

Die Ansicht des Alexandros Aphrodisias, welche hier angeführt und von Proklos und dessen Lehrer bestritten wird, findet sich noch bestimmter in des ersteren Commentar zu Aristoteles de soph. elench. (fol. 30. — Brand. schol. pag. 306^{b}) angegeben, wo es heisst:

Ἀλλ' ὁ τοῦ Βρύσωνος τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου ἐριστικός ἐστι καὶ σοφιστικὸς, ὅτι οὐκ ἐκ τῶν οἰκείων ἀρχῶν τῆς γεωμετρίας, ἀλλ' ἔκ τινων κοινοτέρων. τὸ γὰρ περιγράφειν ἐκτὸς τοῦ κύκλου τετράγωνον καὶ ἐντὸς ἐγγράφειν ἕτερον καὶ μεταξὺ τῶν δύο τετραγώνων ἕτερον τετράγωνον, εἶτα λέγειν ὅτι μεταξὺ τῶν δύο τετραγώνων κύκλος, ὁμοίως δὲ καὶ τὸ μεταξὺ τῶν δύο τετραγώνων τετράγωνον τοῦ μὲν ἐκτὸς τετραγώνου ἔλαττόν ἐστι, τοῦ δὲ ἐντὸς μείζων, τὰ δὲ τῶν αὐτῶν μείζονα καὶ ἐλάττονα ἴσα ἐστὶν, ἴσος ἄρα ὁ κύκλος καὶ τὸ τετράγωνον, ἔκ τινων κοινῶν ἀλλὰ καὶ ψευδῶν ἐστι, κοινῶν μὲν ὅτι καὶ ἐπ' ἀριθμῶν καὶ χρόνων καὶ τόπων καὶ ἄλλων πολλῶν ἁρμόσοι ἂν, ψευδῶν δὲ ὅτι ὀκτὼ καὶ ἐννέα τῶν δεκὰ καὶ ἑπτὰ ἐλάττυνες καὶ μείζονές εἰσι, καὶ ὅμως οὐκ εἰσὶν ἴσοι.

Des Bryson Quadratur ist bestreitbar und sophistisch zugleich, weil sie nicht nur aus den der Geometrie eigenthümlichen Grundsätzen, sondern auch aus allgemeineren angegriffen werden kann. Denn wenn man um und in den Kreis Quadrate beschreibt und zwischen beiden ein mittleres, und nun deshalb behauptet, dass der zwischen jenen Quadraten liegende Kreis ebenso wie das mittlere Quadrat kleiner sei als das äussere und grösser als das innere Quadrat, die beiderseitigen Differenzen aber gleichgross, folglich der Kreis dem mittleren Quadrate gleichflächig sein müsse, — so geschieht dies aus einem allgemeinen, aber irrig angewendeten Principe, aus einem allgemeinen, weil es auch auf Zahlen, Zeiträume, Raumgrössen und noch vieles Andere sich anwenden lässt; aus einem falsch angewendeten, weil 8 und 9 auch kleiner als 10 u. 7, und doch offenbar nicht einander gleich sind.

§ 96. Wie nun Aristoteles und seine Commentatoren die Quadratur des Bryson aufgefasst und was sie an derselben auszusetzen haben, geht aus den hier mitgetheilten Stellen mit voller Klarheit hervor. Indessen ist es nicht unwahrscheinlich, dass auch hier ein Missverständniss untergelaufen ist. Soviel leuchtet sofort ein, dass Bryson seine Quadratur auf die Betrachtung ein- und umgeschriebener Vielecke überhaupt gegründet und das Quadrat nur als erläuterndes Beispiel gebraucht hat. Sodann aber geht aus der Bemerkung des Proklos ganz offenbar hervor, dass Bryson auf dem Wege des

Antiphon vorgeschritten ist und durch fortgehende Verdoppelung der Seitenzahl der ein- und umgeschriebenen Vielecke zu einem arithmetischen Mittel zwischen je zweien derselben zu gelangen suchte, das von der gleichfalls zwischen ihnen liegenden Kreisfläche nicht mehr verschieden war. Ohne diese Annahme ist gar nicht zu erklären, wie Proklos Lehrer darauf hätte verfallen können, des Bryson Methode der Quadratur mit der des Antiphon als identisch zu betrachten. Des Bryson Irrthum bestand nur in der Voraussetzung, dass bei gehöriger Fortsetzung seines Verfahrens zwei conjugirte Vielecke erhalten werden könnten, von denen das umgeschriebene den Kreis genau um eben soviel übertreffe, als er selbst das eingeschriebene übertrifft. Dieser Irrthum war für damalige Zeit wohl sehr verzeihlich und macht den, der ihn hegte, noch keineswegs zu einem Ignoranten in der Geometrie. Ganz frei von Tadel würde Bryson nur dann erscheinen, wenn er seine Voraussetzung als eine hypothetische hingestellt und gesagt hätte: *wenn* zwei Vielecke der besprochenen Art sich finden lassen, so ist der Kreis dem arithmetischen Mittel aus ihnen gleichflächig. Ob dies wirklich seine Meinung gewesen und vielleicht nur Unklarheit des schriftlichen Ausdrucks spätere Referenten zu einer schiefen Auffassung seiner Ansicht verleitet hat, müssen wir dahingestellt sein lassen, da wir von den sonstigen Leistungen des Mannes in der Geometrie gar nichts wissen. So viel aber dürfte doch als sicher anzunehmen sein, dass Bryson nicht so einfältig gewesen sein kann, als wie ihn Alexandros Aphrodisias darstellt. Um einzusehen, dass die Flächenunterschiede zwischen einem Kreise und den ihm um- und eingeschriebenen Quadraten nicht gleichgross sein können, dazu braucht es in der That kaum geometrischer Kenntnisse; auch der Laie in der Wissenschaft vermag das zu erkennen. Auch wäre dann gar nicht zu begreifen, weshalb Bryson sich dann noch mit Vielecken geplagt hätte; sind die erwähnten Flächendifferenzen für *jede* zwei gleichzahlige conjugirte Vielecke gleich, so genügt schon das Dreieck, um die Quadratur festzustellen und von andern Vielecken zu reden, ist gänzlich überflüssig.

Montucla kennt die Quadratur des Bryson nur vom Hörensagen und hat sich gar nicht die Mühe genommen, die sie betreffenden Stellen nachzuschlagen. In seiner Geschichte der Kreisquadratur (p. 44) bildet er sich ein, Bryson habe das *geometrische* Mittel zwischen dem ein- und umgeschriebenen Quadrate der Kreisfläche gleichgesetzt, und belehrt seine Leser, dass dadurch nicht die Kreisfläche, sondern die des eingeschriebenen Achteckes erhalten wird. In seiner Geschichte der Mathematik aber (Vol. I. p. 155) hat er seine frühere Behauptung so ganz vergessen, dass er meint, Bryson habe den *Kreisumfang* gesucht und darauf die Vermuthung gründet, man habe schon damals gewusst, dass die Quadratur des Kreises auf dessen Rectification zurückkomme.

Dass übrigens das uns erhaltene Detail auch dieser Versuche immer wieder auf des Eudemos Geschichte der Geometrie sich gründet, geht aus des Eutokios Aeusserung hervor (comm. in Archim. circ. dim. ed. Tor. p. 204): *Δῆλον γὰρ ὅτι τοῦτ' ἂν εἴη τὸ ζητούμενον, ὅπερ Ἱπποκράτης τε ὁ Χῖος καὶ Ἀντιφῶν ζητήσαντες ἐπιμελῶς ἐκείνους ἡμῖν τοὺς παραλογισμοὺς εὑρήκασιν, οὓς ἀκριβῶς εἰδέναι νομίζω, τούς τε τοῦ Εὐδήμου γεωμετρικὴν ἱστορίαν ἐπεσκεμμένους, καὶ τῶν Ἀριστοτελικῶν μετασχόντας Κηρίων.* — „Das „ist aber offenbar die Aufgabe, über die uns Hippokrates von Chios „und Antiphon, die sich eifrig mit ihr beschäftigten, jene irrigen „Schlussfolgerungen hinterlassen haben, die von denen, wie ich glaube, „sattsam gekannt werden, welche des Eudemos geometrische Ge-„schichte und die Aristotelischen Kerien studirt haben."

§ 97. Die Quadratur des Kreises scheint übrigens die Geometer vor Platon fast durchgängig beschäftigt zu haben. Schon oben ist erwähnt worden, dass Anaxagoras sich während seiner Gefangenschaft um die Lösung dieses Problemes bemüht habe (§ 48.), obwohl über das Resultat dieser Bemühung gar nichts bekannt ist. Neben den eigentlichen Geometern mögen aber auch manche der Mathematik total Unkundige die Aufgabe in die Hand genommen und, wie dies ja selbst in unsern Zeiten noch häufig genug der Fall ist, gründlichen Unsinn zu Tage gefördert haben. Das Excerpt des Simplikios liefert uns hiervon im § 84. ein recht prägnantes Beispiel. Laien in der Mathematik hatten von Quadratzahlen gehört, die zugleich auch cyclische seien, d. h. bei den Griechischen Arithmetikern, die sich auf dieselbe Ziffer endigen wie die Grundzahl. Da nun im Griechischen der Kreis „Kyklos" heisst, so bildeten sie sich ein, eine cyclische Quadratzahl müsse die Maasszahl sein für ein dem Kreise gleichflächiges Quadrat, eine Meinung, die einen so totalen mathematischen Unverstand documentirt, wie er eben nur bei Ignoranten zu finden ist.

Wenn übrigens das Problem der Kreisquadratur etwa 60 Jahre nach Hippokrates durch die Entdeckung und Bearbeitung der Kegelschnitte dem Gesichtskreise der Geometer der Platonischen Schule auf einige Zeit entrückt ward, so machte es sich doch bald mit erneuter Energie wieder geltend. Archimedes brach auch hier durch seine Kreismessung die Bahn, und nach ihm hat noch mancher Andere sich mit diesem Gegenstande beschäftigt. Das Excerpt aus Simplikios nennt in § 85. ausser Archimedes noch den Pythagoräer Sextos, den Nikomedes, Apollonios von Perga und den Karpos von Antiochien, als solche, die die Kreisfläche mit den Flächeninhalten anderer Curven verglichen und somit versucht haben, eine Lösung unseres Problemes zu gewinnen. Es wäre in der That höchst interessant, die von ihnen hierbei gebrauchten Curven und den Gang ihrer Forschungen näher zu kennen; allein leider ist die Vergleichung, die Archimedes zwischen dem Flächeninhalte seiner Spirale und dem des erzeugenden Kreises angestellt hat, die einzige Leistung von allen, die auf uns gekommen ist. Quadraturen im Sinne der Alten (d. h. durch die Mittel der Elementargeometrie, die Gerade und den Kreis, bewirkt) waren jene Lösungen freilich nicht, wie auch Simplikios ganz ausdrücklich versichert.

§ 98. Nachdem nun im Vorangehenden Alles besprochen worden ist, was in dem Zeitraume von 470 bis 400 v. Chr. von Geometern und ihren wissenschaftlichen Leistungen in den Schriften der Alten erwähnt wird, wenden wir uns zu den Folgerungen, die sich aus diesen Quellen, hinsichtlich des Zustandes der theoretischen Geometrie und der Art ihrer Behandlung während des angegebenen Zeitraumes, ableiten lassen.

Betrachten wir zunächst die äussere Form, in welcher uns die Beweise entgegentreten, so zeigen die des Hippokrates eine ängstliche Genauigkeit, aber auch grosse Umständlichkeit in der Construction der *Figur*. Von Voraussetzungen wird nur das Nothwendigste angenommen, alles Andere erst durch Construction und nachfolgenden Beweis gewonnen, so dass schon eine Art Untersuchung beendigt sein muss, wenn die Figur so weit hergestellt sein soll, dass der eigentliche Beweis des vorgelegten Satzes beginnen kann. Dies tritt theilweise bereits bei der Construction des Mondes auf der Quadratseite (§ 81. Fig. 6.) hervor, bei welcher nicht vom rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke ausgegangen, sondern letzteres allmälig erst zu Stande gebracht wird; zeigt sich aber in weit höherem Grade bei Construction der Trapeze, welche in (§ 87. und 89. Fig. 8. und 9.) angewendet werden, um Monde zu erhalten, unter deren Bogen der Halbkreis *nicht* vorkommt. Hier ist die Construction für den zweiten Fall (§ 89. Fig. 9.) so verwickelt, dass Eudemos die Geduld verliert und die kaum begonnene Auseinandersetzung derselben unterbricht, um die Sache auf seine eigne Weise kürzer darzustellen. Es mag dies zum Theil Folge des Mangels an allgemein bekannten geometrischen Schriften sein, auf die man sich hätte berufen können; den Hauptgrund der Erscheinung aber glauben wir in dem noch immer vorherrschenden Anlehnen an die Aegyptische Reisskunst zu erkennen, deren Manieren und Methoden bei Herstellung der Figuren noch einer scrupulösen Beachtung sich erfreuten, wenn man auch gelernt haben mochte, sich in einfacheren Fällen etwas kürzer zu fassen.

Ein zweiter Umstand, der uns in den Beweisen des Hippokrates auffallen muss, ist die enorme Breite und Weitschweifigkeit, die nicht nur die gemachten Voraussetzungen von Zeit zu Zeit wiederholt, sondern auch jeden, selbst den unbedeutendsten Hülfssatz so oft anführt, als er gebraucht wird, ja mitunter nebenher noch halb und halb zu beweisen versucht. Hierin tritt unverkennbar zu Tage, dass zu der Zeit, als die Schrift über die Quadratur der Monde verfasst ward, noch gar keine Zusammenstellung der nothwendigsten Elementarsätze existirte, auf welche ein Geometer bei weiter gehenden Untersuchungen sich hätte beziehen können. Es wird aber dadurch ganz erklärlich, dass Hippokrates, der diesen Mangel sehr lebhaft empfinden musste, sich angeregt fühlte, Elemente der Geometrie zu schreiben, wenn sie auch noch unvollkommen und sehr lückenhaft ausfallen mochten. Die Abfassung derselben können wir mit Wahrscheinlichkeit später setzen als die der Schrift über die Quadratur der Monde, da letztere wohl der ersteren als Veranlassung gedient hat. Dass aber das Vorgehen des Hippokrates auf diesem Felde der Literatur einem sehr dringenden Bedürfnisse entgegenkam, und zwar nicht blos einem Bedürfnisse des Unterrichtes, sondern auch der eigentlichen wissenschaftlichen Forschung, das bezeugt die ziemlich bedeutende Zahl von Elementenschreibern, die Proklos in seiner Liste der Geometer vor Euklides namhaft macht.

§ 99. Untersuchen wir ferner, was aus den uns noch erhaltenen geometrischen Leistungen der fraglichen Epoche über den materiellen Gehalt der Wissenschaft gefolgert werden kann, so ist, ehe wir uns auf eine Beantwortung dieser Frage einlassen können, zuvörderst ein Umstand ins Klare zu bringen, der für den grössten Theil der Untersuchung rein präjudiciell ist. Es muss nämlich Jedem, der die Beweise des Hippokrates mit einiger Aufmerksamkeit verfolgt, in hohem Grade auffallen, dass derselbe den bekannten Lehrsatz vom Verhältnisse des Peripheriewinkels zu seinem Centriwinkel, nebst allen daraus hervorgehenden Folgerungen *gar nicht* anwendet, selbst da nicht, wo sein Gebrauch Construction und Beweis auf das Wesentlichste vereinfachen würde. Es ist bereits oben in der Anmerkung 1) S. 111) zu § 87. darauf hingewiesen worden, wie einfach unser Geometer die Construction der Fig. 8. und den mit ihr zusammenhängenden Beweis hätte führen können, wenn er den Satz gekannt hätte, dass jedes Viereck einem Kreise eingeschrieben werden kann, wenn die Summe zweier Gegenwinkel desselben zwei Rechte beträgt. Dass diese und ähnliche Sätze gar nicht zu Hülfe genommen werden, so sehr auch die Natur des Gegenstandes auf sie hindrängt, möchte ein untrügliches Zeichen dafür sein, dass der Satz vom Peripherie- und Centriwinkel zu Hippokrates Zeiten noch gar nicht bekannt war. Das gleichschenklige Trapez, das derselbe in § 87. und 89. zur Auffindung quadrirbarer Monde verwendet, ist eine Figur, die schon den Aegyptern vollständig bekannt ist. Im Papyrus Rhind wird dieselbe vielfach erwähnt und aus der Abstumpfung des gleichschenkligen Dreiecks mittels einer zur Grundlinie parallelen Geraden abgeleitet. Dass die Winkel, welche an jeder der parallelen Seiten der Figur anliegen, einander gleich sind, weiss Hippokrates; daher ihm auch bekannt sein muss, dass die Gegenwinkel der Figur zusammen zwei Rechte geben; gleichwohl führt er umständlich durch Congruenzen von Dreiecken den Beweis, dass der durch *drei* Spitzen der Figur beschriebene Kreis auch durch die *vierte* hindurchgehen muss. Diese Umständlichkeit, sowie manche andere kleinere Züge, die sich bei aufmerksamer Prüfung der von Eudemos mitgetheilten Beweise herausstellen, dürften wohl die oben gezogene Schlussfolgerung als eine vollberechtigte erscheinen lassen.

§ 100. Von dem vorstehenden Resultate ausgehend haben wir nun die einzelnen Sätze zu prüfen, von denen Eudemos (§ 86.) angiebt, dass Hippokrates sie, als Hülfssätze für seine Quadraturen, im Eingange seiner Schrift bewiesen habe. Es sind dies aber folgende:

a) Halbkreise umfassen rechte Winkel; Segmente, welche grösser oder kleiner sind als Halbkreise, umfassen beziehungsweise spitze oder stumpfe Winkel;

b) Kreisflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser;

c) ähnliche Kreissegmente verhalten sich wie die Quadrate ihrer Sehnen.

Der erste dieser Sätze scheint die Kenntniss der oben erwähnten Eigenschaft der Peripherie- und Centriwinkel, die wir dem Hippokrates soeben abgesprochen haben, unbedingt vorauszusetzen; aber es scheint auch nur so. Heutzutage freilich wird zunächst die allgemeine Eigenschaft des Peripheriewinkels und aus ihr sodann jede Einzelheit entwickelt, die auf irgend eine Weise mit ihr zusammenhängt. Anders im Alterthum. Dass der sogenannte „Winkel im Halbkreis" ein Rechter sei, wussten bereits die Aegypter, und wie sie diese Wahrheit aus den einfachsten Eigenschaften des rechtwinkligen und des gleichschenkligen Dreiecks abgeleitet haben, ist noch heute an dem Beweise zu sehen, den Euklides (III. prop. 31) von diesem Satze giebt. Ist aber einmal die Richtigkeit dieser Behauptung erwiesen, so folgt fast durch blosse Ansicht der betreffenden Figur, dass jeder Winkel ACD (Fig. 11.) in einem Segmente, welches kleiner ist als der Halbkreis $ACDB$, ein stumpfer sein muss, da er gleich $ACB + BCD$ ist; ebenso wie der Winkel ACE in einem Segmente, welches grösser ist als jener Halbkreis, zu einem spitzen wird, weil er gleich $ACB - BCE$ ist; auch geht aus der Construction unmittelbar hervor, dass der stumpfe wie der spitze Winkel sich immer mehr von der Grösse des Rechten entfernen müssen, je weiter die Segmente, in denen sie liegen, von dem Halbkreise abweichen. — Dies ist es, und nicht mehr, was Hippokrates bei seinen Untersuchungen zu Grunde legt. Von dieser *Wahrnehmung* aber bis zu der *Erkenntniss*, dass alle Peripheriewinkel in demselben Segmente einander gleich sein müssen, ist noch ein ziemlich weiter Weg, den unser Geometer nicht durchlaufen zu haben scheint.

Wenn nun Eudemos angiebt, dass Hippokrates das Vorstehende bewiesen habe, so lässt sich daraus mit Wahrscheinlichkeit schliessen, dass er auch der theilweise Erfinder des Satzes ist, obwohl es immer möglich bleibt, dass die betreffende Wahrnehmung schon früher gemacht und von ihm nur der Vollständigkeit halber in seine Schrift mit aufgenommen worden wäre. Dagegen ist der Satz, dass Kreisflächen sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser, und ähnliche Segmente wie die Quadrate ihrer Sehnen verhalten, eine unbestreitbare Entdeckung des Hippokrates, durch welche er dem analogen Satze von den regelmässigen Vielecken eine bemerkenswerthe Erweiterung verschafft hat. Eudemos bemerkt dabei ganz ausdrücklich, dass Jener ähnliche Kreissegmente als solche definirt habe, welche gleichvielte Theile ihrer Kreise bilden, fügt aber auch sogleich hinzu, dass ähnliche Segmente gleich grosse Winkel enthalten. Dass die zuerst erwähnte Definition von Hippokrates gegeben worden ist, unterliegt keinem Zweifel; denn auf ihr beruht offenbar die Uebertragung seines Satzes von den ganzen Kreisflächen auf die ähnlicher Segmente. Ob dagegen die Behauptung, dass ähnliche Segmente gleich grosse Winkel enthalten, ebenfalls von demselben herrührt, oder vielleicht nur von Eudemos der Erläuterung halber beigefügt worden ist, erscheint als weit weniger sicher. Bei Euklides dient diese Eigenschaft als Definition, wogegen nun der Satz, dass ähnliche Segmente gleichvielte Theile ihrer Kreisflächen bilden, ganz ausgefallen ist. — Der Beweis, welchen Hippokrates zu dem Satze des § 89. liefert, deutet nun allerdings darauf hin, dass derselbe die Winkel in ähnlichen Segmenten als gleich erkannt hat, zeigt aber dann auch, dass er unter einem solchen Winkel nur den verstanden hat, welcher in der Spitze des dem Segmente eingeschriebenen *gleichschenkligen* Dreiecks liegt. Und unter dieser Voraussetzung war allerdings der in Frage stehende Satz leicht zu erweisen. Mit dieser Annahme ist nun auch unmittelbar die Lösung der Aufgabe gegeben, die Hippokrates doch jedenfalls kennen musste, — nämlich über einer gegebenen Geraden, als Sehne, ein Kreissegment zu beschreiben, welches einem gegebenen Segmente ähnlich ist. Es ward dazu weiter nichts erfordert, als über der Sehne, als Grundlinie, ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, welches dem in dem gegebenen Segmente liegenden ähnlich war.

§ 101. Somit enthüllt sich uns in der Arbeit des Hippokrates über die Quadratur der Monde eine in sich geschlossene Gruppe geometrischer Lehrsätze und Aufgaben, die für ihre Zeit als eine sehr wesentliche Bereicherung der Elemente der Geometrie anzusehen ist, und es im Vereine mit seinen anderweiten Leistungen ganz erklärlich macht, dass er als einer der bedeutendsten Geometer seiner Zeit bezeichnet wird. Für uns aber enthalten die von ihm geführten Beweise die nicht weniger interessante Notiz, dass bereits vor ihm die Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes auf spitz- und stumpfwinklige Dreiecke, die wir in Euklides Elementen (II. prop. 12. und 13.) finden, vollendet und damit eine erste Gruppe von Sätzen abgeschlossen war, welche die Bestimmung von Winkeln durch metrische Eigenschaften gerader Linien ermöglicht. Diese Erweiterung der Planimetrie, mit welcher der Natur der Sache nach die Entwickelung der meisten Sätze des zweiten Buches der Euklidischen Elemente zusammenhängt, ist demnach ein Verdienst, welches, wenn nicht den unmittelbaren Schülern des Pythagoras, so doch wenigstens der zweiten Generation derselben zufällt.

Ueberblicken wir jetzt noch einmal den ganzen Kreis von Wahrheiten, welche wir bei den Geometern bis gegen das Jahr 430 v. Chr. hin entwickelt finden, so ergiebt sich, dass die Planimetrie in ihrem elementaren Theile nunmehr zu einer Art von Abschluss gelangt war. Zwar fehlten noch immer einzelne Theoreme, die zu einem vollendeten Ausbau der Wissenschaft erforderlich sind; auch waren die auf die Proportionen gegründeten Lehren, wie z. B. die von der Aehnlichkeit der Figuren, wohl auch jetzt noch blos für rationale Verhältnisse streng erwiesen und wurden nur stillschweigend als auch für irrationale Verhältnisse gültig betrachtet; — allein die Hauptsätze der Planimetrie waren zum grössten Theile gefunden und dadurch die Mittel zur Lösung aller nicht gar zu verwickelten Aufgaben an die Hand gegeben. Die Form der Darstellung ist freilich noch eine ziemlich unbeholfene, wohl auch keineswegs frei von Ungenauigkeit und selbst Dunkelheit des Ausdruckes, hindert jedoch die Geometer nicht, schon ziemlich weit auslaufende Schlussreihen aneinander zu fügen. — In der Stereometrie dagegen scheint man in dieser ganzen Zeit auch nicht um *einen* bedeutenden Schritt vorwärts gekommen zu sein. Des Hippokrates Reduction der Vervielfachung des Würfels auf ein planimetrisches Problem ist jedenfalls die wichtigste Errungenschaft auf diesem Gebiete, hat aber natürlich dazu beigetragen, die Geometer aus dem Raume wiederum in die Ebene zurückzuführen.

§ 102. Von einer Anwendung der Geometrie auf die Praxis wird uns in dieser ganzen Zeit nur eine genannt, die sich an den Namen des bekannten Baumeisters Agatharchos anschliesst. Vitruvius (lib. VII praef.) berichtet nämlich: *Agatharchus primum Athenis, Aeschylo docente tragoediam, scenam fecit et de ea commentarium reliquit.* Da kein Grund vorhanden ist, die Richtigkeit dieser Notiz zu bezweifeln, so schliessen wir aus ihr, dass man in Athen den Mangel einer perspectivischen Decoration zu fühlen begann und die gänzliche Vernachlässigung der Perspective selbst, die der Aegyptischen Kunst eigenthümlich war, als etwas Unnatürliches empfand. Soll aber Agatharchos zur Zeit des Dichters Aischylos bereits in der Blüthe der Manneskraft gestanden haben, so müssen wir letztern mindestens vor 460 v. Chr. ansetzen. Nun ist es zwar möglich, dass Agatharchos, als ein Samier, etwas von der Reisskunst der Ionischen Schule profitirt hätte und dadurch befähigt worden wäre, für die Perspective einige geometrische Grundregeln festzustellen. Aber abgesehen davon, dass es *sehr* zweifelhaft ist, ob die Ionischen Geometer in der Stereometrie so weit vorgeschritten waren, um einen ihrer Schüler zu einer derartigen Leistung zu befähigen, so lässt sich auch diese Zeitbestimmung durchaus nicht mit dem vereinigen, was über das Verhältniss des Agatharchos zu Alkibiades und dem noch späteren Zeuxis berichtet wird. Uns dünkt es bei weitem wahrscheinlicher, dass der Name des berühmten Dichters nur durch eine Verwechselung mit dem unseres Baumeisters verbunden worden ist. Wir haben oben (§ 77.) aus einer Bemerkung des Aristoteles entnommen, dass Hippokrates von Chios einen Schüler Aischylos zur Seite gehabt hat, der gleichfalls Geometer war, und es scheint nicht unmöglich, dass dieser in Gemeinschaft mit Agatharchos gestanden, und dadurch zu der berührten Verwechselung Anlass gegeben hat. Unter dieser Annahme würde die Blüthezeit des Agatharchos etwa von 440 bis 410 v. Chr. anzusetzen sein, also in eine Zeit fallen, in welcher durch das Uebersiedeln von Pythagoräern nach Athen die mathematischen Studien daselbst einen neuen Schwung erhalten hatten und nun auch in der Stereometrie eine Reihe von Sätzen boten, die die Begründung einer wissenschaftlichen Perspective erst möglich machten. Denn die Behauptung des Vitruvius, dass Agatharchos eine Schrift über diesen Gegenstand hinterlassen habe, lässt doch mit grosser Wahrscheinlichkeit darauf schliessen, dass der Verfasser über die Gesetze des neuen Wissenszweiges wirklich etwas zu sagen wusste und sich nicht blos mit mechanischer Nachahmung des subjectiven Augenscheines begnügen wollte, also mit Handgriffen, die durch reines Probiren gefunden waren. Mit dieser Festsetzung der Lebenszeit des Agatharchos harmonirt dann auch vollkommen, was über seine Begegnung mit Alkibiades und Zeuxis erzählt wird.

---

§ 103. Der Peloponnesische Krieg, der namentlich in den letzten beiden Jahrzehnten des fünften Jahrhunderts vor Christo ganz Griechenland erschütterte und verheerte, sowie die arge Zerrüttung, in welche das Athenische Gemeinwesen unmittelbar nach Beendigung des Krieges verfiel, scheinen auch auf das Studium der Geometrie nicht günstig eingewirkt zu haben. Kaum wird uns in diesen ganzen dreissig Jahren *ein* Name genannt, der in der Mathematik durch eine bedeutende Leistung berühmt geworden wäre. Theaitetos ist vielleicht der Einzige, der eine Erwähnung verdiente; indessen fällt seine Blüthezeit doch erst in die nächste Periode. Wohl aber beginnt in dieser Zeit eine Erscheinung anderer Art sich geltend zu machen. Je mehr nämlich die Geometrie zu einer streng formulirten Wissenschaft sich emporhob, und je nothwendiger ein *gründliches* Studium derselben ward, um über sie mitsprechen zu können, desto mehr begann sie die Abneigung derer zu erregen, die sich berufen glaubten, über Alles ihre Meinung abgeben zu müssen, auch über das, was sie nicht verstanden. Die bornirte Geringschätzung, mit welcher auch in unseren Tagen so manche der sogenannten Humanisten auf die exacten Wissenschaften herabzusehen pflegen, begann auch damals schon sich zu regen. Nicht nur Sophisten und Demagogen, auch ein Sokrates war einer ernsten Beschäftigung mit diesen Dingen gänzlich abhold. Mathematik, Sternkunde und dergleichen, behauptet er[1]), dürfe man nur soweit treiben, um das nothwendigste Bedürfniss des praktischen Lebens befriedigen zu können; jedes tiefere Eindringen in diese Wissenschaften sei ebenso unnütz wie schädlich. Es ist eines der grössten Verdienste seines Schülers Platon, dass er durch sein Beispiel und seine Lehre diese banausische Anschauung ganz in den Hintergrund drängte, ja für Jahrhunderte hinaus es sogar zu einem unbestrittenen Grundsatz erhob, dass ein wissenschaftlich gebildeter Mann, ein Philosoph, vor Allem auch ein wohl unterrichteter Mathematiker sein müsse.

---

1) Xenophon, memor. Socr. IV. c. 7, verbreitet sich ganz ausführlich über die Anschauung des Sokrates von der Nutzlosigkeit und Ueberflüssigkeit der exacten Studien. Aus dieser Stelle entlehnt Diogenes Laert. (II. c. 5. nr. 16, — Huebn. p. 116) den schon von Montucla erwähnten Ausspruch: *ἔφασκέ τε δεῖν γεωμετρεῖν, μέχρι ἂν τις μέτρῳ δύνηται γῆν τε παραλαβεῖν καὶ παραδοῦναι.* — „Geometrie, sagt er, dürfe man nur soweit treiben, dass man vermöge Land „zuzumessen oder sich zumessen zu lassen.“

Sechster Abschnitt.

Die Geometer von Platon bis auf Euklides.

§ 104. Mit Platon und der Gründung seiner Schule, der sogenannten Akademie, beginnt eine Periode in der Entwickelung der Mathematik, in welcher sich letztere ebenso weit über die Leistungen der Italischen Schule erhob, wie diese über die der Ionischen Schule emporgestiegen war. Die Elemente der Planimetrie werden jetzt nach allen Richtungen hin vervollständigt und zum Abschluss gebracht, die der Stereometrie wenigstens bis zu einem gewissen Grade; und über der gesammten bisherigen Geometrie als niederer, wird ein neuer Zweig, als höhere oder transcendente Geometrie, in Angriff genommen, nämlich die Theorie der Kegelschnitte und anderer krummer Linien.

Platon, geb. 429, gest. 348 v. Chr., war von Geburt Athenischer Bürger und dadurch allein schon vor manchem Anderen seiner Zeitgenossen begünstigt. Denn Athen hatte sich bereits zum geistigen Mittelpunkte der gesammten Griechischen Nation, namentlich aber zum Hauptsitz der philosophischen Studien, aufgeschwungen, sodass Platon bereits als Jüngling mitten in das lebendigste wissenschaftliche Leben und Treiben eingeführt ward. Von der Natur mit vortrefflichen Anlagen ausgestattet, machte er unter des Sokrates Leitung rasche Fortschritte im philosophischen Denken und Erkennen, entwickelte aber auch, jedenfalls angeregt durch das ethische Gepräge der Sokratischen Lehren, jenen Zug zum Idealen, in sich selbst Vollkommenen, durch den er sich vor seinen Zeitgenossen so bedeutend hervorhob und auf die fernere Entwickelung der Philosophie einen so durchgreifenden Einfluss gewann.

Nach seines Lehrers gewaltsamem Tode verliess er die Vaterstadt, um nach alter Sitte auf Reisen sich auszubilden und Kenntnisse einzusammeln. In Aegypten, was noch immer den Ruf uralter Weisheit behauptete, hat er sich ohne Zweifel mehrere Jahre aufgehalten (vgl. § 22.), jedenfalls nur, um die speculativen Erkenntnisse der dasigen Priesterschaft sich anzueignen, nicht aber der Mathematik halber. Letztere hatte er bereits früher bei Theodoros von Kyrene studirt, und setzte diese Studien auch später noch bei den jüngeren Pythagoräern in Grossgriechenland fort, durch welche er auch mit der Pythagoräischen Philosophie näher bekannt gemacht wurde. Ob er in den Bund der Pythagoräer förmlich aufgenommen worden, muss dahin gestellt bleiben, ist aber nicht unwahrscheinlich, da ihm nach einstimmiger Angabe der Alten durch Dion's Vermittelung die von

Philolaos herausgegebenen Schriften über die Pythagoräische Lehre zugestellt wurden. Der Einfluss aber, den die Verbindung mit den Pythagoräern auf seine ganze geistige Entwickelung ausübte, ist durch sein ganzes Leben hin unverkennbar. War er auch ein zu klarer Geist und viel zu sehr echter Hellene, um an der Pythagoräischen Mystik und Symbolik wahrhaftes Genügen zu finden, so erkannte er dagegen die von Pythagoras hervorgehobene hohe Wichtigkeit der exacten Studien, namentlich der mathematischen, als Vorschule des abstracten Denkens und Grundlage für alle speculative Erkenntniss, um so bereitwilliger an. Als er daher nach seiner Rückkehr in die Heimat seine Lehrvorträge in der Akademie begann, 389 v. Chr., machte er die Kenntniss der Geometrie zur Vorbedingung für den Eintritt in seinen Unterricht. Tzetzes (Chil. VIII, 972) berichtet: *πρὸ τῶν προθύρων τῶν αὐτοῦ γράψας ὑπῆρχε Πλάτων· μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰςίτω μοῦ τὴν στέγην.* — „Platon begann damit, „dass er über die Thüre seiner Lehrhalle schrieb: kein der Geometrie Unkundiger trete unter mein Dach.“ Dass dies ganz bestimmt auf die Geometrie selbst sich bezog, und nicht, wie spätere Trivialität es auslegte, nur soviel heissen sollte als: „Keiner von unlauterer Gesinnung trete herein;“ — das bezeugen nicht nur des Platon eigne Leistungen, sondern auch der Umstand, dass noch Xenokrates, des Platon zweiter Nachfolger in der Akademie, einen jungen Menschen aus seinem Unterrichte fortwies, weil er die nöthigen Kenntnisse in der Mathematik nicht besass[1]). Platon selbst hat uns über seine Ansicht von der Mathematik und von der Wichtigkeit derselben für jede höhere Bildung ein ausführliches Zeugniss in seiner Schrift vom Staate hinterlassen, wo er (VII. c. 8—13) das Studium der Arithmetik und Logistik, der Geometrie, Stereometrie, Astronomie und Harmonik keinem Einzigen von denen erlassen zu können meint, die in seinem idealen Gemeinwesen zu den Gebildeten gezählt werden sollen.

§ 105. Die Platonische Schule ward daher in Kurzem der allgemeine Mittelpunkt für Alle, welche sich mit Mathematik beschäftigten, und selbst Solche, welche ihr unmittelbar nicht angehörten, fanden sich von Zeit zu Zeit dort ein, um die Resultate ihres eignen Forschens gegen die der Schule auszutauschen und sich über Alles, was in letzterer neu aufgefunden worden, zu unterrichten. Gleich bei

---

1) Diog. Laert. (IV, c. 2. nr. 6. — Huebn. p. 267): *πρὸς δὲ τὸν μήτε μουσικὴν μήτε γεωμετρίαν μήτε ἀστρονομίαν μεμαθηκότα, βουλόμενον δὲ παρ' αὐτὸν φοιτᾶν, „πορεύου,“ ἔφη· „λαβὰς γὰρ οὐκ ἔχεις φιλοσοφίας.“* — „Zu Einem, „der weder Harmonik, noch Geometrie, noch Astronomie studirt hatte, gleich„wohl aber seine Schule besuchen wollte, sagte er: bleibe weg! du besitzest „nicht die Handhaben der Philosophie.“

Eröffnung der Akademie schlossen sich einige ältere Geometer derselben an, wie Archytas von Tarent, Leodamas von Thasos und Theaitetos von Athen; aber auch eine Schaar von jüngeren Leuten, zum Theil mit Platon gleichalterig, fanden sich unter dessen Leitung zusammen, die in ihren Untersuchungen von dem Meister mit Rath und That unterstützt, durch gemeinsame Arbeit die Geometrie in kurzer Zeit mächtig emporhoben. In diesen Kreis gehören Neokleides, Leon, Eudoxos, Amyklas von Herakleia, und das Brüderpaar Menaichmos und Deinostratos; sodann als Jüngste in dieser Reihe, und jedenfalls erst in Platon's Greisenalter eingetreten, Theydios von Magnesia, Kyzikenos von Athen, Hermotimos von Kolophon, Philippos von Mende und Philippos von Opus. — Neben diesen, der Akademie angehörigen Geometern finden sich, jedenfalls zwischen 348 bis 300 v. Chr. noch manche Namen von bedeutendem Gewichte, z. B. Autolykos von Pitane, Aristaios u. s. w., die theils der Akademie fremd waren, wie Autolykos, theils ihr näher gestanden haben mögen, wie z. B. Aristaios, ohne dass sich hierüber bei dem gänzlichen Mangel aller Nachrichten etwas entscheiden lässt. Wenn aber in diesem, vornehmlich nach des Proklos Liste (§ 19.) gegebenen Verzeichnisse nur die eigentlichen Geometer aufgezählt sind, so darf nicht vergessen werden, dass in damaliger Zeit fast alle philosophische Schulen von ihren Anhängern mathematische Kenntnisse verlangten, daher geometrische Erörterungen auch von Männern wie Speusippos, Xenokrates, Aristoteles und Andern erwähnt werden, ohne dass man dieselben deshalb zu den Geometern rechnen kann.

Uebrigens hat sich auch aus dieser Periode, mit Ausnahme zweier kleiner Schriften des Autolykos, kein zusammenhängendes Werk eines Geometers erhalten und nur durch Eudemos oder vielmehr durch die Excerpte, welche uns aus seiner Geschichte der Geometrie durch Eutokios gerettet worden sind, haben wir einige Kunde von den Leistungen der Geometer dieser Periode bekommen, die aber, obwohl schätzbar an sich, doch keinen genügenden Einblick in die Art gewähren, auf welche die Geometrie sich weiter gebildet. Die Besprechung dieser Einzelheiten wird nun unser nächstes Geschäft sein.

§ 106. Beginnen wir zunächst mit **Platon** selbst, so wird von eigentlichen Entdeckungen desselben in der Mathematik nur äusserst wenig berichtet. In der That scheint er für seine Person zwar recht gute geometrische Kenntnisse besessen, sie aber nicht zu selbständigen Forschungen verwendet, sondern nur zur Leitung der Studien seiner Schüler benutzt zu haben, während er selbst seine ganze Kraft der Speculation zuwendete. Es muss dies aus dem geschlossen werden, was von seinen Leistungen in der Mathematik noch überliefert ist; denn dies beschränkt sich im Wesentlichen auf zwei Gegenstände, die den Charakter blos beiläufiger Erweiterungen des bis dahin Entdeckten sehr deutlich erkennen lassen.

Der erste dieser beiden Punkte ist die Angabe eines zweiten Verfahrens, um Seiten rationaler rechtwinkliger Dreiecke zu finden. Proklos giebt in seinem Commentare zu Euklides (ed. Basil. p. 111. — Baroc. p. 270) hierüber folgende Auskunft. *Ἡ δὲ Πλατωνικὴ ἀπὸ τῶν ἀρτίων ἐπιχειρεῖ· λαβοῦσα γὰρ τὸν δοθέντα ἄρτιον τίθησιν αὐτὸν ὡς μίαν πλευρὰν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τοῦτον διεχοῦσα δίχα καὶ τετραγωνίσασα τὸ ἥμισυ μονάδα μὲν τῷ τετραγώνῳ προσθεῖσα ποιεῖ τὴν ὑποτείνουσαν, μονάδα δὲ ἀφελοῦσα τοῦ τετραγώνου ποιεῖ τὴν ἑτέραν τῶν περὶ τὴν ὀρθήν· οἷον τὸν τέσσαρα λαβοῦσα καὶ τούτου τὸν ἥμισυν τὸν β̅ τετραγωνίσασα καῖ ποιήσασα αὐτὸν δ̅, ἀφελοῦσα μὲν μονάδα ποιεῖ τὸν γ̅, προσθεῖσα δὲ ποιεῖ τὸν ε̅. καὶ ἔχει τὸ αὐτὸ γενόμενον τρίγωνον, ὃ καὶ ἐκ τῆς ἑτέρας ἀπετελεῖτο μεθόδου.* — „Platon's Methode geht von der geraden Zahl aus; „man nimmt nämlich eine gerade Zahl an und setzt sie gleich einer „der beiden Katheten; wird diese halbirt, die Hälfte quadrirt und zu „diesem Quadrate die Einheit addirt, so ergiebt sich die Hypotenuse; „wird aber die Einheit vom Quadrate subtrahirt, so erhält man die „andere Kathete. Z. B. man nehme die Zahl vier, so ist die Hälfte „davon 2, und das Quadrat der letzteren 4. Von dieser die Einheit „abgezogen macht 3, die Einheit addirt macht 5, und man erhält „dasselbe Dreieck, welches auch aus der ersten Methode (der des „Pythagoras § 65.) hervorging.“ — In der Geometrie des Boethius (ed. Friedlein p. 408) wird diese Methode Platon's als von einem Architas gelehrt angeführt. Ohne uns darauf einzulassen, ob unter diesem Architas der berühmte Pythagoräer oder ein weit späterer Mathematiker verstanden werden müsse, genügt es hier darauf aufmerksam zu machen, dass bereits der ältere Heron in seiner Geometrie (Heronis reliq. ed. Hultsch p. 56 ff.) die von Proklos erwähnten beiden Methoden zur Auffindung rationaler rechtwinkliger Dreiecke ausführlich auseinander setzt, und die eine derselben ebenso bestimmt dem Pythagoras, wie die andere dem Platon beilegt.

Ueber den Weg, welcher Platon zu seiner Regel geführt hat, wird uns zwar nichts berichtet; inzwischen ist leicht zu sehen, dass er nur die Zahlen, welche bei der Regel des Pythagoras angewendet werden, zu verdoppeln brauchte, um sofort die von ihm selbst aufgestellte Regel zu erhalten. Ob er aber letztere streng bewiesen, oder sich mit einer Induction begnügt hat, müssen wir dahingestellt sein lassen. Das Letztere bleibt immerhin das Wahrscheinlichere;

denn wäre es ihm gelungen, einen stricten arithmetischen Beweis seiner Regel aufzustellen, so würde ihm die allgemeine Lösung der Aufgabe, die sich bereits bei Euklides (X. prop. 29. lemma 1) findet, wohl nicht entgangen sein.

Da wir uns hier bereits halb auf arithmetischem Gebiete befinden, so sei gleich noch erwähnt, dass Nikomachos[1]) die beiden Euklidischen Lehrsätze (Eukl. VIII. prop. 11 u. 12): „zwischen zwei „Quadratzahlen fällt *eine*, zwischen zwei Kubikzahlen fallen *zwei* mitt„lere Proportionalzahlen,“ — für ein Theorem des Platon (*Πλατωνικόν τι ϑεώρημα*) erklärt, was darauf hindeutet, dass Platon nicht, wie man gewöhnlich annimmt, ausschliesslich geometrischen Studien gehuldigt, sondern nach dem Beispiele seiner Pythagoräischen Freunde auch arithmetischen Untersuchungen sich zugewendet hat.

§ 107. Das Zweite, was von Platon's geometrischen Leistungen uns noch überliefert ist, betrifft ein von ihm angegebenes Instrument, um die Auffindung zweier mittleren Proportionalen zwischen zwei gegebenen Geraden, und somit die Verdoppelung des Würfels auf mechanischem Wege zu lösen. Die Beschreibung des Instrumentes sammt seiner Theorie und Gebrauchsanweisung hat uns Eutokios überliefert, jedenfalls wohl nach der Angabe des Eudemos, den er hier, wie auch in anderen Fällen, namentlich anzuführen unterlässt. In seinem Commentar zu des Archimedes Schrift über Kugel und Cylinder (Archim. opera, de sphaera et cyl. lib. II. prop. 2. — ed. Torelli p. 135) giebt er Folgendes an:

Ὡς Πλάτων.

Δύο δοϑεισῶν εὐϑειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. Ἔστωσαν αἱ δοϑεῖσαι δύο εὐϑεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, πρὸς ὀρϑὰς ἀλλήλαις, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. Ἐκβεβλήσϑωσαν ἐπ' εὐϑείας ἐπὶ τὰ Δ, Ε. Καὶ κατεσκευάσϑω ὀρϑὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΗΘ· καὶ ἐν ἑνὶ σκέλει, οἷον τῷ ΖΗ, κινείσϑω κανὼν ὁ ΚΛ ἐν σωλῆνί τινι ὄντι ἐν τῷ ΖΗ οὕτως, ὥστε παράλληλον αὐτὸν διαμένειν τῷ ΗΘ. Ἔσται δὲ τοῦτο, ἐὰν καὶ ἕτερον κανόνιον νοηϑῇ συμφυὲς τῷ ΘΗ, παράλληλον δὲ τῷ ΖΗ, ὡς τὸ ΘΜ. Σωλῆνι σχιϑεισῶν γὰρ τῶν ἄνωϑεν ἐπιφανειῶν τῶν ΖΗ, ΘΜ σωλῆσι πελεκινοειδέσι, καὶ τύλων συμφυῶν γενομένων τῷ ΚΛ εἰς τοὺς εἰρημένους σωλῆνας,

Nach Platon. (Fig. 12.)

Zu zwei gegebenen Geraden zwei mittlere Glieder in stetiger Proportion zu finden. Es seien $AB, B\Gamma$ die zwei gegebenen Geraden, aufeinander senkrecht gestellt, zwischen denen zwei mittlere Proportionalen gefunden werden sollen. Man verlängere dieselben nach Δ und E. Nun construire man einen rechten Winkel $ZH\Theta$, auf dessen einem Schenkel, z. B. ZH, sich ein Lineal $K\Lambda$ bewege, in einer Rinne, welche in ZH so angebracht ist, dass ersteres stets zu $H\Theta$ parallel bleibt. Es wird dies aber geschehen, wenn man noch ein zweites Lineal mit ΘH verbunden denkt, was zu ZH parallel ist, wie z. B. ΘM. Sind nun die oberen Seitenflächen der ΘM und ZH

1) Nicomachi Geras. introd. arithm. lib. II, c. 24, § 6. — ed. Hoche p. 129.

ἔσται ἡ κίνησις τοῦ ΚΛ παράλληλος ἀεὶ τῇ ΗΘ. Τούτων οὖν κατεσκευασμένων, κείσθω τὸ ἓν σκέλος τῆς γωνίας ΖΗΘ τυχὸν τὸ ΗΘ, ψαῦον τοῦ Γ· καὶ μεταφερέσθω ἥ τε γωνία, καὶ ὁ ΚΛ κανὼν, ἐπὶ τοσοῦτον, ἄχρις ἂν οὗ τὸ μὲν Η σημεῖον ἐπὶ τῆς ΒΕ εὐθείας ᾖ, τοῦ ΗΘ σκέλους ψαύοντος τοῦ Γ· ὁ δὲ ΚΛ κανὼν κατὰ μὲν τὸ Κ ψαύῃ τῆς ΒΔ εὐθείας, κατὰ δὲ τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ Α. Ὥστε εἶναι, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, τὴν μὲν ὀρθὴν γωνίαν θέσιν ἔχουσαν, ὡς τὴν ὑπὸ ΓΕΔ· τὸν δὲ ΚΛ κανόνα θέσιν ἔχειν, οἵαν ἔχει ἡ ΔΑ. Τούτων γὰρ γενομένων ἔσται τὸ προκείμενον. Ὀρθῶν γὰρ οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς Δ, Ε, ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΕ, ἡ ΒΕ πρὸς ΒΔ, καὶ ἡ ΒΔ πρὸς ΒΑ.

durch schwalbenschwanzähnliche Rinnen eingefasst und die mit *KΛ* zusammenhängenden Zapfen in diese Rinnen eingelassen, so wird die Bewegung von *KΛ* stets zu *HΘ* parallel sein. Ist dies nun geschehen, so lege man den einen Schenkel des Winkels *ZHΘ* z. B. *HΘ*, eng an *Γ* an, und bewege nun den Winkel und das Lineal *KΛ*, bis dass der Punkt *H* auf die Gerade *KE* fällt, während der Schenkel *ΘH* genau durch *Γ* geht. Das Lineal *KΛ* wird dann nach *K* hin die Gerade *BΔ*, nach der andern Seite hin den Punkt *Λ* berühren. Auf diese Weise geschieht es, dass während der rechte Winkel, wie in der Figur, die Lage *ΓEΔ* hat, das Lineal *KΛ* die Lage von *ΔΛ* besitzt. Ist aber dies geschehen, so ist das Verlangte vorhanden. Denn da die Winkel bei *Δ* und *E* Rechte sind, so ist *ΓB* zu *BE*, wie *BE* zu *BΔ* und wie *BΔ* zu *BΛ*.

Wie man sieht, beruht die ganze Construction auf einer zweimaligen Anwendung des Satzes, dass das sogenannte Perpendikel im rechtwinkligen Dreiecke die mittlere Proportionale ist zwischen den durch dasselbe erzeugten Abschnitten der Hypotenuse; und die ganze Kunst besteht im vorliegenden Falle darin, dass man den einen Hypotenusenabschnitt unmittelbar zum Perpendikel in einem zweiten, dem gegebenen ähnlichen Dreiecke macht. Die Einfachheit des zur Auflösung der Aufgabe dienenden Instrumentes ist bemerkenswerth und verdient unsere Anerkennung, wenn wir auch nicht vermögen, das Ganze als Erzeugniss eines aussergewöhnlichen Scharfsinnes zu betrachten. — Die Aufgabe selbst war wohl zunächst durch die Bedürfnisse der Praxis den Geometern an das Herz gelegt worden, wenn auch die angebliche Veranlassung, nämlich die Verdoppelung des Altars des Delischen Apollon, eine Mythe zu sein scheint. Platon's Lösung wenigstens scheint ganz auf dies Bedürfniss berechnet zu sein, und sein so höchst einfaches und bequem zu handhabendes Instrument mag lange Zeit den Praktikern bei ihren Arbeiten gute Dienste geleistet haben.

§ 108. Wenn aber Platon nach dem Allen nur eine mechanische oder rein instrumentale, keineswegs aber eine rein theoretische Lösung der Aufgabe von den zwei mittleren Proportionalen gegeben hat, so bleibt es um so unbegreiflicher, wie er es tadeln konnte, dass andere Geometer, z. B. Archytas, Menaichmos, dasselbe thaten.

Plutarchos (quaest. conviv. VIII, q. 2. c. 1) berichtet hierüber: *Διὸ καὶ Πλάτων αὐτὸς ἐμέμψατο τοὺς περὶ Εὔδοξον καὶ Ἀρχύταν καὶ Μέναιχμου εἰς ὀργανικὰς καὶ μηχανικὰς κατασκευὰς τὸν τοῦ στερεοῦ διαπλασιασμὸν ἀπάγειν ἐπιχειροῦντας (ὥσπερ πειρωμένους διὰ λόγου δύο μέσας ἀνάλογον μὴ παρείκοι λαβεῖν). ἀπόλλυσθαι γὰρ οὕτω καὶ διαφθείρεσθαι τὸ γεωμετρίας ἀγαθὸν, αὖθις ἐπὶ τὰ αἰσθητὰ παλινδρομούσης καὶ μὴ φερομένης ἄνω, μηδ' ἀντιλαμβανομένης τῶν ἀϊδίων καὶ ἀσωμάτων εἰκόνων, πρὸς οἷςπερ ὢν ὁ θεὸς ἀεὶ θεός ἐστι.* — „Darum tadelte Platon selbst auch den Eudoxos „und Archytas und Menaichmos, welche die Verdoppelung des „Körperraumes auf instrumentale und mechanische Verfahrungsweisen „zurückführen (gleich als ob sie hierdurch zwei mittlere Proportiona-„len auf unerlaubte Weise zu erhalten versuchten); denn auf solche „Art werde der Vorzug der Geometrie aufgehoben und verdorben, „sofern man sie wieder auf den sinnlichen Standpunkt zurückführt, „statt sie in die Höhe zu heben und mit ewigen und körperlosen „Gedankenbildern zu beschäftigen, wie dies bei Gott der Fall ist, der „deshalb immer Gott ist.“ — Ganz dasselbe berichtet Plutarchos nochmals im Leben des Marcellus[1]), wo er sogar angiebt, dass in Folge von Platon's Unwillen über die Auflösung des obigen Problems durch Werkzeuge, die Mechanik von der Geometrie vollständig getrennt worden und dadurch auf lange Zeit zu einer blossen Hülfswissenschaft der Kriegskunst herabgesunken sei.

Wenn hiernach das Factum selbst, dass Platon sich tadelnd ausgesprochen, nicht wohl bezweifelt werden kann, so bleibt dasselbe um so unerklärlicher, da er durch sein eignes Vorgehen in dieser Sache gewissermassen den Reigen eröffnet und Andere zur Nachfolge angereizt hat. Die hier allein mögliche Auskunft wäre etwa die, dass Platon mit den Versuchen nicht einverstanden gewesen sei, welche Eudoxos, Menaichmos und andere Geometer gemacht hatten, um die Curven, mit deren Hülfe das Problem von ihnen gelöst ward, durch stetige Bewegung eines Punktes in der Ebene, also durch Anwendung eines Instrumentes zu beschreiben. Da Eratosthenes in seinem Mesolabum der Angabe eines solchen Instrumentes durch Menaichmos gleichfalls zu erwähnen scheint, so dürfte die gemachte Annahme nicht ohne alle Wahrscheinlichkeit sein. Der Hyperidealität des Platon wäre wenigstens zuzutrauen, dass er ein Hülfsmittel der angegebenen Art als der Geometrie unwürdig erklärt haben könnte.

§ 109. Weit grössere Verdienste dagegen als durch eigene Entdeckungen, hat sich Platon um die Geometrie erworben durch För-

---

1) Vita Marcelli, c. 14. § 5.

derung des selbständigen Ausbaues derselben als Wissenschaft, und zwar zunächst mittelst strengerer Feststellung der Grundbegriffe. Mit einer logisch strengen Bestimmung des Punktes, der Linie, Fläche, Geraden, Ebene, des Winkels u. s. w. scheint man sich vor Platon nicht allzusehr geplagt zu haben. Das Meiste von dem Allen ward wahrscheinlich stillschweigend aus der sinnlichen Wahrnehmung abgeleitet, ohne dass man sich um eine strenge Formulirung der Begriffe bemühte. Den früheren Geometern lag jedenfalls mehr an der Erweiterung der Wissenschaft, als an deren philosophischer Begründung; ja letztere musste um so schwieriger erscheinen, je weniger überhaupt das philosophische Denken noch geweckt, und je unvollkommener namentlich die Erkenntniss des Wesens von Raum und Zeit geblieben war. Es ist daher auch *vor* Platon nicht die Spur eines Versuches bekannt, die Grundvorstellungen der Geometrie zu prüfen und logisch festzustellen. Als aber die Wissenschaft bereits ein nicht ganz unbedeutendes Material erobert und die philosophische Speculation sich mit Kraft entfaltet hatte, da stellte sich auch in der Mathematik das Bedürfniss eines systematischen und logisch strengen Aufbaues der gewonnenen Wahrheiten ein, und es muss als ein Hauptverdienst der Platonischen Schule betrachtet werden, dass sie gerade diesem Gegenstande Eifer und Studium zugewendet hat.

Von Definitionen geometrischer Grundbegriffe, die Platon selbst aufgestellt, ist uns nur eine bekannt, nämlich die der Geraden. Proklos (comm. in Eukl. ed. Basil. pag. 30. — Baroc. p. 63) berichtet darüber: *ὁ δὲ Πλάτων ἀφορίζεται τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν, ἧς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ.* — „Platon definirt die gerade Linie als die„jenige, in welcher die Endpunkte den zwischen liegenden Theil ver„decken.“ — Allein es ist nicht zu bezweifeln, dass ein so scharfsinniger Kopf wie Platon, auch für alles Andere, was die Wissenschaft festzustellen und zu definiren hatte, den geeigneten Wortausdruck zu finden suchte, wenn darüber auch keine positive Nachricht sich erhalten hat. Die Schriften des Mannes enthalten durchgehends eine solche Fülle mathematischer Betrachtungen und Vergleiche, dass man deutlich erkennt, dass der Verfasser mit den Grundbegriffen und Grundwahrheiten der Wissenschaft nicht nur vollkommen vertraut war, sondern dieselben auch zu einem in sich geschlossenen Systeme verarbeitet hatte. Die hierdurch aber gewonnene Uebersicht und Beherrschung des ganzen Gebietes der damaligen Mathematik befähigte Platon nun auch, theils die Lücken zu erkennen, die sich in dem Systeme noch vorfanden, theils aber neue Wege und Methoden der Forschung anzugeben, um die Wissenschaft materiell zu erweitern und zu vervollkommnen.

§ 110. Unter den Lücken, auf deren Ausfüllung Platon hinwirkte, ist besonders zu erwähnen die Theorie des Irrationalen. Zuerst von der Pythagoräischen Schule aufgestellt, scheint der Begriff der Irrationalität in derselben doch nicht übermässig bearbeitet und in seiner Anwendung auf Geometrie erforscht worden zu sein. Die Incommensurabilität der Seite und Diagonale des Quadrates, sowie die der Seiten der meisten vielfachen Quadrate unter einander, bildet wohl die einzige derartige Untersuchung, welche *vor* Platon mit mathematischer Strenge durchgeführt worden ist. Dagegen blieb die Theorie irrationaler Verhältnisse bei den Proportionen und deren Anwendung auf die Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren im Ganzen sehr zurück, indem man sich wohl damit begnügte, das, was für rationale Verhältnisse ermittelt worden war, unmittelbar auch auf irrationale zu übertragen. Platon wandte diesem Mangel eine besondere Aufmerksamkeit zu und hat, theils wohl durch eigne Bemühung, theils durch seine Schüler und Freunde den beregten Gegenstand so gründlich erschöpft, dass bereits zu Euklides Zeiten jede Spur einer Lücke vollständig verwischt war. Namentlich ist uns von **Theaitetos** überliefert, dass er die beiden Fundamentalsätze (Euklid. Elem. X. prop. 9, 10) zuerst vollständig und streng erwiesen habe[1]).

Ein noch grösseres und wichtigeres Verdienst Platon's ist aber die von ihm ausgegangene Anregung zum weiteren Ausbau der Stereometrie, die bis auf seine Zeit gegen die Planimetrie auf ganz ungebührliche Weise vernachlässigt worden war. In seinem Werke über den Staat (de republ. VII, c. 10) spricht er sich über den damaligen Stand dieses Zweiges der Wissenschaft dahin aus, „dass derselbe noch auf seinen Erfinder warte.“ Wenn dies nun auch nicht so zu interpretiren ist, dass aus der Lehre von den räumlichen Gebilden so gut wie nichts bekannt gewesen sei, so zeigt doch das, was uns über die Entdeckungen der Akademie im Gebiete der Stereometrie berichtet wird, dass ausser den nothwendigsten Sätzen über Lage der Geraden und Ebenen im Raume, eigentlich nur die regelmässigen Körper und die Kugel einigermassen bearbeitet waren, während von Prismen und Cylindern, Pyramiden und Kegeln wohl kaum mehr als deren Existenz bekannt sein mochte. Indem nun Platon gerade diese Körper

1) Dass der Satz X, prop. 9 von Theaitetos herrührt, bezeugt ein Scholion, welches schon von Commandinus in seiner Ausgabe des Euklides (Pisauri 1572) in lateinischer Uebersetzung, und neuerdings von Knoche (Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus Diadochus zu Euklids Elementen; Herford, 1865. p. 24) im Original mitgetheilt worden ist. Es lautet: *τοῦτο τὸ θεώρημα Θεαιτήτειόν ἐστιν εὕρημα καὶ μέμνηται αὐτοῦ Πλάτων ἐν Θεαιτήτῳ, ἀλλ' ἐκεῖ μὲν μερικώτερον ἔγκειται, ἐνταῦθα δὲ καθόλου.* — „Dies „Theorem ist eine Erfindung des Theaitetos, dessen Platon im Theaitetos „gedenkt; nur wird es dort speciell auseinander gesetzt, hier aber allgemein.“

einer näheren Untersuchung würdigte, gerieth sein Schüler Menaichmos auf die Schnitte des Kegels durch eine Ebene, und entdeckte so jene merkwürdigen Curven, welche im weiteren Verlaufe die Geometrie mit einem Male über das Stadium ihrer Kindheit hinaushoben und sie bereits nach hundert Jahren auf die höchste Höhe führten, welche zu erreichen ihr im Alterthum bestimmt war.

§ 111. Bei so vielfachen Anregungen zu neuen Entdeckungen erscheint es fast als natürlich, dass Platon seine Verdienste um die Mathematik dadurch krönte, dass er in der sogenannten „analytischen Methode" einen neuen Weg der Forschung eröffnete, der geeignet war in vielen Fällen eine erwünschte Hülfe zu gewähren, in denen die früheren Methoden sich unzulänglich erwiesen. Proklos (comm. in Eucl. ed. Basil. p. 58. — Baroc. p. 121) spricht sich hierüber folgendermassen aus: *Μέθοδοι δὲ ὅμως παραδίδονται, καλλίστη μὲν ἡ διὰ τῆς ἀναλύσεως ἐπ' ἀρχὴν ὁμολογουμένην ἀνάγουσα τὸ ζητούμενον, ἣν καὶ ὁ Πλάτων, ὥς φασι, Λεοδάμαντι παρέδωκεν, ἀφ' ἧς καὶ ἐκεῖνος πολλῶν κατὰ γεωμετρίαν εὑρετῆς ἱστόρηται γενέσθαι. δευτέρα δὲ ἡ διαιρετική· κατ' ἄρθρα μὲν διαιροῦσα τὸ προκείμενον γένος, ἀφορμὴν δὲ τῇ ἀποδείξει παρεχομένη διὰ τῆς τῶν ἄλλων ἀναιρέσεως τῆς τοῦ κροκειμένου κατασκευῆς· ἣν καὶ αὐτὴν ὁ Πλάτων ἐξύμνησεν, ὡς πάσαις ταῖς ἐπιστήμαις ἐπίκουρον γενομένην. τρίτη δὲ ἡ διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς, οὐκ αὐτὸ ζητοῦσα τὸ δεικνύμενον αὐτόθι, ἀλλὰ τὸ ἀντικείμενον ἐλέγχουσα καὶ κατὰ συμβεβηκὸς τὸ ἀληθὲς εὑρίσκουσα.* — „Es werden auch Methoden (der „Untersuchung) angeführt, von denen die beste die analytische ist, „die das Gesuchte auf ein bereits zugestandenes Princip zurückführt. „Diese soll Platon dem Leodamas mitgetheilt haben, der dadurch „zu vielen geometrischen Entdeckungen soll hingeleitet worden sein. „Die zweite Methode ist die trennende, die, indem sie den vorgeleg„ten Gegenstand in seine einzelnen Theile zerlegt, dem Beweise durch „Entfernung alles der Construction der Aufgabe Fremdartigen einen „festen Ausgangspunkt gewährt; auch diese rühmt Platon sehr als „eine für alle Wissenschaften förderliche. Die dritte Methode ist die „Zurückführung auf das Unmögliche, welche nicht das zu Findende „selbst beweiset, sondern das Gegentheil desselben bestreitet und so „die Wahrheit durch Uebereinstimmung (des Zulässigen mit dem Be„haupteten) findet."

Die hier von Proklos ziemlich kurz und nicht sehr klar geschilderten Methoden, die analytische, synthetische und apagogische, können aber nicht, wie das wohl dann und wann geschieht, sämmtlich als Erfindung des Platon angesehen werden. Der Gebrauch der *reductio ad absurdum* möchte gleich in die erste Zeit der entstehenden Geometrie zu setzen sein. Diese Beweisart ist die unvollkommenste, indem sie nur zeigt, dass eine gemachte Annahme nicht falsch sein kann, während sie den inneren Zusammenhang der behaupteten Wahrheit mit anderen Sätzen der Wissenschaft ganz im Dunkeln lässt. Je unmöglicher es aber ist, gerade die einfachsten Grundlagen der Geometrie auf anderem Wege zu erweisen, — weil letztere eben erst die einzelnen Werkstücke bilden, aus denen das Gebäude der Wissenschaft aufgeführt werden soll, — um so gewisser ist anzunehmen, dass diese Methode der Beweisführung gleich mit den Anfängen der Wissenschaft sich entwickelt hat, und keineswegs erst durch Pythagoras oder gar Platon aufgefunden worden ist[1]). — Ebenso aber, wie die apagogische, ist auch die synthetische Beweisart mit den Elementen der Geometrie so innig verwachsen, dass nicht daran gedacht werden kann, die Erfindung derselben, wenn man von einer solchen überhaupt sprechen darf, dem Platon zuzueignen.

Anders dagegen verhält sich dies mit der analytischen Methode. Wenn Proklos in der oben angezogenen Stelle nur behauptet, Platon habe diese Methode dem Laodamas *mitgetheilt*, so giebt dagegen Diogenes Laert. (III. c. 1. nr. 19. — Huebn. p. 210) ganz bestimmt an: *καὶ πρῶτος τὸν κατὰ τὴν ἀνάλυσιν τῆς ζητήσεως τρόπον εἰσηγήσατο Λεωδάμαντι τῷ Θασίῳ*; — „er zuerst führte „die analytische Methode der Untersuchung ein für Leodamas von „Thasos.“ — Indem hiermit die *Erfindung* dieser Beweisart auf Platon zurückgeführt wird, scheint soviel wenigstens unbestreitbar zu sein, dass Letzterer das analytische Verfahren (wenn es auch schon früher in einzelnen Fällen angewendet worden war, ohne dass man sich des Wesens der Sache klar bewusst worden) zuerst zu einer wirklichen Methode umgebildet, und diese seinen Schülern zur Benutzung empfohlen hat. Es stimmt dies auch vollständig mit dem Entwickelungsgange der Wissenschaft zusammen. Denn die Ausbildung der Elemente der Geometrie erfordert durchgängig nur kurze und leicht zu übersehende Schlussreihen, für welche die synthetische und apagogische Methode der Untersuchung vollständig ausreicht.

---

1) In Chasles Geschichte der Geometrie (p. 6) findet sich die Behauptung, dass dem Euklides das Verdienst zukomme, die apagogische Beweisart in die Geometrie eingeführt zu haben. Es ist nicht zu ermitteln, worauf sich diese Angabe des Verfassers gründet, für die sich weder in Montucla's noch in Bossuet's Geschichte der Mathematik, noch in des Proklos Commentar ein Beleg hat auffinden lassen. Sollte aber auch in irgend einem der alten Autoren eine solche Notiz nachgewiesen werden können, so müsste sie jedenfalls für einen Irrthum erklärt werden, denn man braucht nur die Schriften des Autolykos zu lesen, die gegen 40 Jahr älter sind als Euklides, um die *reductio ad absurdum* in reichlichem Maasse angewendet zu finden.

Handelt es sich aber darum, bei tiefer eindringender Forschung zusammengesetzte und darum schwierigere Aufgaben zu lösen oder Beweise für allgemeine Sätze zu liefern, die selbst nur durch Induction aus speciellen Theoremen abgeleitet sind, so tritt die analytische Methode von selbst in den Vordergrund, und eröffnet den Weg, auf welchem man von dem Gegebenen zu dem Gesuchten emporzusteigen hat. — Mag daher Platon diese Methode der Forschung geradezu erfunden, oder nur bereits vorhandene Anfänge derselben endgültig ausgebildet haben; immer hat er sich damit ein sehr grosses Verdienst um eine Wissenschaft erworben, in der soviel auf die Art und Weise ankommt, auf welche eine Untersuchung in Angriff genommen wird.

§ 112. Bevor wir uns nun von dem Stifter der Akademie zu seinen Jüngern wenden, haben wir noch einiger Geometer zu gedenken, die, obwohl ausserhalb der Schule stehend, sich doch derselben bei ihrem Entstehen anschlossen. Es sind diese Leodamas von Thasos, Theaitetos von Athen und Archytas von Tarent.

Ueber **Leodamas** wissen wir gar nichts, als was Proklos in seinem Verzeichnisse von ihm berichtet (§ 19), dass er in Verbindung mit den beiden anderen die Theoreme der Geometrie vermehrt, und ihre Ableitung auf streng wissenschaftlichem Wege bewirkt habe, eine Thätigkeit, in welcher er durch die ihm mitgetheilte analytische Methode sehr bedeutend gefördert worden ist, so dass man späterhin geradezu annahm, Platon habe diese Methode speciell für *ihn* erfunden (§ 111).

Von **Theaitetos** ist fast auch nicht mehr bekannt als der Name. Nur ist uns zufällig die Angabe erhalten, dass die Fundamentalsätze: Eukl. elem. X, 9 u. 10 von ihm herrühren (vgl. § 110), was darauf schliessen lässt, dass er sich mit einer strengen Darstellung der Lehre von den Verhältnissen und Proportionen beschäftigt und dabei namentlich der Incommensurabilität Rechnung getragen hat. Bestätigt wird diese Vermuthung noch besonders durch die Angabe des Suidas, der von ihm berichtet (Suid. s. v. — Westerm. vitae p. 423): πρῶτος δὲ τὰ ε̄ καλούμενα στερεὰ ἔγραψε — „er zuerst schrieb über die berühmten 5 Körper." — Die Art, auf welche Euklides im 13ten Buche seiner Elemente die regulären Körper behandelt, dürfte wohl *zu einem Theile* sich auf die Sätze gründen, die bereits von Theaitetos entwickelt worden waren und wahrscheinlich das Verhältniss der Kanten dieser Körper zum Radius der umgeschriebenen Kugel betrafen, Verhältnisse, welche in allen Fällen irrational sind.

In etwas besserer Lage befinden wir uns in Bezug auf **Archytas.** Die politische Bedeutsamkeit des Mannes, sein Charakter als Pythagoräer, nebst den aus seinen Schriften erhaltenen Fragmenten (die freilich nach Behauptung unserer Philologen fast sämmtlich unecht sein sollen), haben uns über seine Schicksale und wissenschaftlichen Arbeiten etwas ausführlichere Notizen erhalten, als dies hinsichtlich der meisten ihm gleichzeitigen Geometer der Fall ist. Geboren zu Tarent (etwa um 430 v. Chr.) und in dieser seiner Vaterstadt durch seinen persönlichen Charakter, sein staatsmännisches und Feldherrntalent hoch angesehen und wiederholt mit den höchsten Aemtern der Republik betraut, fand er doch auch Muse, sich mit tiefeingehenden wissenschaftlichen Studien zu beschäftigen; ja es scheint selbst gewiss zu sein, dass er zu wiederholten Malen Athen und die Akademie besucht hat; ein Umstand, der durch sein freundschaftliches Verhältniss zu Platon wenigstens leicht erklärlich ist. — Ueber seine Verdienste um die exacten Wissenschaften berichtet Diogenes Laert. (VIII, c. 4. nr. 7. — Huebn. p. 313) kurz Folgendes: *οὗτος πρῶτος τὰ μηχανικὰ ταῖς μαθηματικαῖς προσχρησάμενος ἀρχαῖς ἐμεθώδευσε καὶ πρῶτος κίνησιν ὀργανικὴν διαγράμματι γεωμετρικῷ προςήγαγε, διὰ τῆς τομῆς τοῦ ἡμικυλίνδρου δύο μέσας ἀνάλογον*[1]) *λαβεῖν ζητῶν εἰς τὸν τοῦ κύβου διπλασιασμόν. καὶ γεωμετρίᾳ πρῶτος κύβον εὗρεν, ὥς φησιν Πλάτων ἐν Πολιτείᾳ.* — „Er zuerst behandelte die Mecha„nik methodisch, indem er sich dabei geometrischer Grundsätze be„diente; auch führte er zuerst die instrumentale Bewegung in die „Construction geometrischer Figuren ein, indem er durch den Schnitt „des Halbcylinders zwei mittlere Proportionalen zur Verdoppelung „des Würfels zu erhalten suchte. Auch fand er durch geometrische „Betrachtungen den Würfel, wie Platon im Staate angiebt." — Neben diesen geometrischen Leistungen nennt Porphyrios in seinem Commentar zu des Ptolemaios Harmonik (Wallisii opera, Vol. III. p. 267) noch eine Schrift des Archytas *περὶ μεσοτήτων*, *de medietatibus*, in welcher nach Jamblichos[2]) die von dem Ersteren und Hippasos zu den drei bis dahin bekannten Proportionen neu eingeführten vierten, fünften und sechsten Proportionen behandelt worden sind. Es hängt dies jedenfalls mit der anderweiten Notiz des Jamblichos zusammen, dass Archytas die früher *ὑπεναντία* (widerstimmige) genannte Proportion in *ἁρμονική* (harmonische) umgetauft habe.

Die zahlreichen unserem Geometer zugeschriebenen philosophischen Schriften übergehen wir hier, als nicht zur Sache gehörig. Der Tod desselben wird gegen 365 v. Chr. gesetzt, und soll nach einer bekannten Stelle des Horaz durch Schiffbruch am Vorgebirge Matinum herbeigeführt worden sein.

---

1) *ἀνὰ λόγον*, wie seit Meibom gelesen wird, ist gegen den Sprachgebrauch, den die Griechischen Mathematiker festhalten.

2) Jamblichos comm. in Nicom. arithm. ed. Tennul. p. 141 und 163.

§ 113. Kehren wir speciell zu des **Archytas** Leistungen in der Geometrie zurück, so ist die von **Diogenes** gegebene Notiz über die Erfindung des Würfels rein unverständlich, wenn man nicht etwa annehmen will, dass unter dem Worte *κύβος* der Würfel zum Spiele verstanden werden soll, was wohl an sich nicht unzulässig wäre, dagegen aller historischen Ueberlieferung widerstreitet. Aus was für einer Angabe der gedankenlose Epitomator diese Nachricht zusammengezogen hat, lässt sich nicht mehr ermitteln. Dagegen sind wir so glücklich, durch einen von **Eutokios**[1]) gegebenen Auszug aus des **Eudemos** Geschichte der Geometrie uns die Lösung erhalten zu sehen, welche **Archytas** von dem Probleme der zwei mittleren Proportionalen zwischen zwei Geraden aufgefunden hat. Sie ist folgende:

Ἡ Ἀρχύτου εὕρεσις, ὡς Εὔδημος ἱστορεῖ. (Fig. 13.)

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, Γ. Δεῖ δὴ τῶν ΑΔ, Γ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. Γεγράφθω περὶ τὴν μείζονα τὴν ΑΔ κύκλος ὁ ΑΒΔΖ· καὶ τῇ Γ ἴση ἐνηρμόσθω ἡ ΑΒ. καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένῃ τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Π. παρὰ δὲ τὴν ΠΔ ἤχθω ἡ ΒΕΖ. Καὶ νενοήσθω ἡμικυλίνδριον ὀρθὸν ἐπὶ τοῦ ΑΒΔ ἡμικυκλίου· ἐπὶ δὲ τὴν ΑΔ ἡμικύκλιον ὀρθόν, ἐν τῷ τοῦ ἡμικυλινδρίου παραλληλογράμμῳ κείμενον. Τοῦτο δὴ τὸ ἡμικύκλιον περιαγόμενον, ὡς ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β, μένοντος τοῦ Α πέρατος τῆς διαμέτρου τέμνει τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν ἐν τῷ περιαγωγῇ, καὶ γράψει ἐν αὐτῇ γραμμήν τινα. Πάλιν δὲ ἐάν, τῆς ΑΔ μενούσης, τὸ ΑΠΔ τρίγωνον περιενεχθῇ τὴν ἐναντίαν τῷ ἡμικυκλίῳ κίνησιν, κωνικὴν ποιήσει ἐπιφάνειαν τῇ ΑΠ εὐθείᾳ, ἣ δὴ περιαγομένη συνβαλεῖ τῇ κυλινδρικῇ γραμμῇ κατά τι σημεῖον· ἅμα δὲ καὶ τὸ Β περιγράψει ἡμικύκλιον ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ. Ἐχέτω δὲ θέσιν κατὰ τὸν τόπον τῆς συμπτώσεως τῶν γραμμῶν τὸ κινούμενον ἡμικύκλιον, ὡς τὴν τοῦ Δ'ΚΑ. τὸ δὲ ἀντὶ περιαγόμενον τρίγωνον τὴν τοῦ Δ'ΛΑ· τὸ δὲ τῆς εἰρημένης συμπτώσεως σημεῖον ἔστω τὸ Κ. Ἔστω δὲ καὶ τὸ

Des **Archytas** Erfindung, wie sie **Eudemos** berichtet.

Es seien $A\Delta$ und Γ die zwei gegebenen Geraden, und zwischen ihnen sollen zwei mittlere Proportionalen gefunden werden. Um die grössere $A\Delta$ werde der Kreis $AB\Delta Z$ beschrieben und eine der Γ gleiche Gerade AB in denselben eingetragen, welche verlängert die den Kreis in Δ Berührende in dem Punkte Π schneidet. Zu $\Pi\Delta$ werde die Parallele BEZ gezogen. Man denke sich nun einen Halbcylinder, senkrecht auf dem Halbkreise $AB\Delta$, und ferner senkrecht auf $A\Delta$ einen Halbkreis, der im Parallelogramme des Halbcylinders liegt. Alsdann wird dieser Halbkreis, von Δ nach B so gedreht, dass der Endpunkt A des Durchmessers fest bleibt, die cylindrische Oberfläche bei dieser Drehung schneiden und auf ihr eine Curve beschreiben. Wiederum wenn, indem $A\Delta$ fest liegen bleibt, das Dreieck $A\Pi\Delta$ eine Drehung macht, welche der des Halbkreises entgegengesetzt ist, so wird es mit $A\Pi$ eine Kegelfläche beschreiben, welche bei ihrem Umlauf mit der Curve auf dem Cylinder zusammentreffen wird; und zugleich wird auch der Punkt B auf jener Kegelfläche einen Halbkreis beschreiben. Es habe nun für den Ort des Zusammentreffens beider Linien

1) Eutoc. comm. in Arch. de sphaera et cylind. lib. II. — ed. Torelli p. 143.

διὰ τοῦ B γραφόμενον ἡμικύκλιον τὸ BMZ, κοινὴ δὲ αὐτοῦ τομὴ, καὶ τοῦ $B\Delta ZA$ κύκλου ἔστω ἡ BZ· καὶ ἀπὸ τοῦ K ἐπὶ τὸ τοῦ $B\Delta A$ ἡμικυκλίου ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω, πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, διὰ τὸ ὀρθὸν ἑστᾶναι τὸν κύλινδρον. Πιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ KI· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ I ἐπὶ τὸ A ἐπιζευχθεῖσα συμβαλέτω τῇ BZ κατὰ τὸ Θ· ἡ δὲ $A\Delta$ τῷ BMZ ἡμικυκλίῳ κατὰ τὸ M· ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ $K\Delta'$, MI, $M\Theta$.

der gedrehte Halbkreis eine Lage, wie die von $\Delta' KA$ und das ihm entgegengesetzt bewegte Dreieck eine Lage wie $\Delta' \Delta A$; der Punkt des erhaltenen Durchschnittes sei K. Es sei endlich der vom Punkte B beschriebene Halbkreis BMZ und der gemeinschaftliche Schnitt desselben mit dem Kreise $B\Delta ZA$ sei BZ. Vom Punkte K aus ziehe man eine Senkrechte auf die Ebene des Halbkreises $B\Delta A$, so wird diese auf den Umfang des Kreises treffen, weil der Cylinder senkrecht auf jener Ebene steht. Sie sei gezogen und sei die KI, und die von I nach A gezogene Gerade treffe BZ im Punkte Θ, die $A\Delta$ aber begegne dem Halbkreise BMZ in M. Man ziehe nun die Geraden $K\Delta'$, MI, $M\Theta$.

Ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν $\Delta' KA$, BMZ ἡμικυκλίων ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἡ κοίνη ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ $M\Theta$ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ· ὥς τε καὶ πρὸς τὴν BZ ὀρθή ἐστιν ἡ $M\Theta$. Τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΘB, ΘZ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΘA, ΘI, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ $M\Theta$. Ὅμοιόν ἐστι ἄρα τὸ AMI τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν $MI\Theta$, $MA\Theta$· καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ IMA. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $\Delta' KA$ ὀρθή. Παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ $K\Delta'$, MI. Καὶ ἔσται ἀνάλογον ὡς ἡ $\Delta' A$ πρὸς AK, τουτέστιν ἡ KA πρὸς AI, οὕτως ἡ IA πρὸς AM, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. Τέσσαρες ἄρα αἱ $\Delta' A$, AK, AI, AM ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι. Καὶ ἐστὶν ἡ AM ἴση τῇ Γ, ἐπεὶ καὶ τῇ AB. Δύο ἄρα δοθεισῶν τῶν $A\Delta$, Γ, δύο μέσαι ἀνάλογον ηὕρηνται αἱ AK, AI.

Da nun jeder der beiden Halbkreise $\Delta' KA$ und BMZ senkrecht steht auf der unter ihm liegenden Ebene, also auch die gemeinschaftliche Schnittlinie $M\Theta$ auf der Kreisfläche senkrecht ist, so steht auch $M\Theta$ senkrecht auf BZ. Also ist das Rechteck aus ΘB, ΘZ, d. h. das Rechteck aus ΘA, ΘI gleich dem Quadrate von $M\Theta$. Daher ist das Dreieck AMI ähnlich den Dreiecken $MI\Theta$, $MA\Theta$, mithin der Winkel IMA ein Rechter. Es ist aber auch der Winkel $\Delta' KA$ ein Rechter, also $\Delta' K$ zu MI parallel. Daher verhält sich $\Delta' A$ zu AK, d. h. KA zu AI wie IA zu AM, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke. Die vier Geraden $\Delta' A$, AK, AI, AM sind daher der Reihe nach gleich proportionirt. Nun ist aber AM gleich Γ, weil dies der AB gleich war; also sind zwischen den gegebenen Geraden $A\Delta$, Γ, zwei mittlere Proportionalen, AK und AI, gefunden.

§ 114. Die vorstehende Auflösung, die von Eudemos jedenfalls treu referirt, wenn auch vielleicht etwas kürzer gefasst ist, als von dem Erfinder selbst geschehen, — zeigt so viel Eigenthümliches und einen für die damalige Zeit so bedeutenden Scharfsinn, dass wir es in der That höchlich bedauern müssen, von des Archytas anderweiten mathematischen Untersuchungen gar nichts erhalten zu sehen. Die hier gegebene Behandlung des sogenannten Delischen Problems zwingt uns aber fast zu dem Schlusse, dass sie erst in das spätere Lebensalter unseres Geometers fällt, eine bedeutende Zeitstrecke *nach* Eröffnung der Akademie und die durch dieselbe erfolgte Neubelebung stereometrischer Studien. Die Erörterung der Schnittfiguren der Körper, durch Ebenen oder durch die Durchdringung mit anderen Körpern entstanden, musste doch wenigstens einigermassen in die Wissenschaft eingeführt worden sein, ehe ein Geometer auf eine Lösung, wie die vorliegende, verfallen konnte. Eine solche zu liefern war aber unzweifelhaft auch nur dann erst möglich, wenn die Analysis der Synthesis zuvor substituirt worden war.

Auf welchem Wege Archytas zu seinem Resultate gelangt ist, lässt sich mit Bestimmtheit freilich nicht nachweisen. Soviel indessen ist klar, dass er von der Betrachtung des Dreieckes $A\Delta'A$ (Fig. 13.) ausgegangen ist, in welchem die Proportion

$$A\Delta' : AK = AK : AI = AI : AM$$

sofort an den Tag tritt, wenn $\Delta'K$, KI, IM auf den Seiten AA, $A\Delta'$ senkrecht stehen. Ist daher $A\Delta'$ die grössere der beiden Geraden, zwischen denen die beiden mittleren Proportionalen gefunden werden sollen, so wird es nur darauf ankommen, einen der beiden Punkte K oder I so zu bestimmen, dass dadurch AM gleich der kleineren der gegebenen beiden Geraden erhalten wird. Hat sich eine solche Bestimmung auf planimetrischem Wege nicht ergeben wollen, so hat sie Archytas auf stereometrischem Wege gesucht und *vielleicht* durch folgende Schlussreihe erhalten.

Man construire um die grössere der gegebenen Geraden, $A\Delta$, als Durchmesser einen Kreis, und stelle senkrecht auf dessen Ebene das Dreieck $A\Delta'A$ so auf, dass AI Sehne dieses Kreises wird, so ergiebt sich dadurch die Lage des Punktes Θ und der Sehne BZ von selbst, und es folgt sofort aus

$$\Theta M^2 = A\Theta \cdot \Theta I = B\Theta \cdot \Theta Z,$$

dass die Punkte BMZ auf dem Umfange eines Halbkreises gelegen sind, dessen Durchmesser BZ ist, und dessen Ebene auf $A\Delta$ senkrecht steht. Dann aber ist BMZ der Grundkreis eines geraden Kegels, der $A\Delta$ zur Achse und $AB = AM = AZ$ zu Seitenlinien hat, mithin sofort gegeben ist, wenn man AB der kleineren der beiden gegebenen Geraden gleich nimmt. Dadurch ist nun der Punkt K auf die Seitenfläche dieses Kegels gebracht. Da er aber auch senkrecht über I liegen soll, so befindet er sich auch auf der Oberfläche eines geraden Cylinders, der über $AB\Delta Z$ als Grundkreis steht, also gleichfalls gegeben ist. Endlich aber liegt K auch auf dem Umfange des gleichfalls gegebenen Halbkreises $AK\Delta'$, womit die Construction des Archytas gewonnen ist.

Mag aber unser Geometer durch die vorstehende oder eine andere Schlussreihe zu seiner Lösung gekommen sein; — immer bleibt letztere ebenso sinnreich wie eigenthümlich und von dem Charakter der Geometrie ihrer Zeit abweichend. Es ist daher auch nicht zu verwundern, dass sich unter den später lebenden Geometern fast Keiner findet, der dem Archytas auf diesem Wege nachgewandelt wäre und Aufgaben ähnlicher Art durch Constructionen *im Raume* gelöst hätte.

§ 115. Gehen wir nunmehr zu den eigentlichen Zöglingen der Akademie über, zu denen, die wirklich als Schüler Platon's anzusehen sind und unter seiner Leitung gearbeitet haben, so bietet die Liste des Proklos (§ 19.) zwar eine ziemlich ansehnliche Reihe von Namen dar; leider aber hat sich von Keinem der Genannten ein selbständiges schriftliches Denkmal seiner Bemühungen um die Geometrie erhalten. Wir würden daher für die ganze Zeit von Platon bis auf Euklides ausschliesslich auf die mageren, im Grunde unbedeutenden Notizen verwiesen sein, welche Proklos seinem Namensverzeichnisse beigefügt hat, wenn uns nicht glücklicherweise über die geometrischen Leistungen und Entdeckungen des Brüderpaares Deinostratos und Menaichmos einige Kunde überliefert wäre.

Deinostratos hat sich dadurch berühmt gemacht, dass er zuerst das Problem der Kreisquadratur durch eine theoretisch richtige Construction löste, indem er die von Hippias erfundene Curve (§ 76.) zu Hülfe nahm, welche eben dieser Anwendung halber den Namen *τετραγωνίζουσα*, Quadratrix, erhielt. Pappos (coll. math. IV, prop. 26) giebt das betreffende Theorem sammt dessen Beweis folgendermassen an:

„Ist A (Fig. 14.) das Centrum des Kreisquadranten BED und „BFG die zu letzterem construirte Quadratrix, so ist die dem Qua„dranten BED gleiche Gerade die dritte Proportionale zu AG „und AD.“

Den Beweis führt Pappos indirect, indem er zeigt, dass das Verhältniss von BED zu AD weder kleiner noch grösser sein kann als das von AD zu AG. Denn wäre

$$BED : AD = AD : AK \text{ und } AK > AG,$$

so beschreibe man aus A mit dem Halbmesser AK den Quadranten KFL, der die Quadratrix in F schneiden muss. Dann wäre:

$$BED : KFL = AD : AK, \quad \text{mithin} \quad KFL = AD.$$

Es ist aber auch:

$$\begin{aligned} BED : ED &= BA : FJ \\ BED : ED &= KFL : FK = BA : FK, \quad \text{daher} \\ \hline FJ &= FK, \quad \text{was unmöglich ist.} \end{aligned}$$

Wäre hingegen

$$BED : AD = AD : AJ, \quad \text{und} \quad AJ < AG,$$

so beschreibe man aus dem Centrum A mit dem Halbmesser AJ den Kreisquadranten JNM und errichte in J die Berührende JF, die die Quadratrix in einem Punkte F schneidet. Dann ist

$$BED : JNM = AD : AJ, \quad \text{mithin} \quad INM = AD.$$

Es ist aber auch:

$$\begin{aligned} BED : ED &= BA : FJ \\ BED : ED &= JNM : JN = BA : JN; \text{ daher} \\ \hline FJ &= NJ, \text{ was unmöglich ist.} \end{aligned}$$

Es kann demnach nur $BED : AD = AD : AG$ stattfinden.

Gefunden ist der Lehrsatz jedenfalls mittelst der Proportion

$$BED : AD = ED : FJ$$

durch die Bemerkung, dass der Ausschnitt ADE, je näher der Halbmesser AE an AD rückt, sich desto mehr einem zu AJF ähnlichen Dreiecke nähert, daher für den Grenzfall, dass AE mit AD sich deckt, in der That das Verhältniss $ED : FJ$ in $AD : AG$ übergeht. Derartige Betrachtungen haben den alten Geometern wohl oft als Mittel zu ihren Entdeckungen dienen müssen, werden aber von ihnen niemals zum Beweise verwendet. Letzterer wird vielmehr immer durch die *reductio ad absurdum* hergestellt, welche dann freilich von dem bei der Untersuchung eingeschlagenen Wege auch nicht eine Spur erkennen lässt. — Rührt nun der von Pappos mitgetheilte Beweis wirklich von Deinostratos her (was zu bezweifeln kein Grund vorliegt), so ergiebt sich aus demselben sofort, dass der apagogische Beweis, wie bereits oben erwähnt worden ist (§ 111. Anmerk. 1), lange vor Euklides bereits in vollem Gebrauche war und mit anerkennenswerther Geschicklichkeit gehandhabt ward. Der Beweis enthält aber auch eine Behauptung, die schon in jener Zeit *stillschweigend* als zulässig angenommen wurde, und die wir selbst bei Archimedes gebraucht aber nicht bewiesen finden, nämlich die, dass jede zwischen zwei Halbmessern enthaltene Kreistangente grösser ist als der zugehörige Kreisbogen. So ungemein einfach der Satz sich beweisen lässt, wenn man nur das Theorem kennt, dass jeder Kreisausschnitt gleichflächig ist einem Dreiecke, welches den Bogen des Sectors zur Grundlinie und den Kreishalbmesser zur Höhe hat, — so ist doch, so viel uns bekannt, Crelle's Lehrbuch der Geometrie das einzige, in welchem der fragliche Beweis sich vorfindet.

Die vorstehende Quadratur ist Alles, was uns von den geometrischen Leistungen ihres Entdeckers erhalten ist, scheint aber auch Alles zu sein, was das Alterthum Bemerkenswerthes von ihm wusste.

Sein Name kommt wenigstens stets nur in Verbindung mit dieser Quadratur vor und wird ohne diese fast gar nicht erwähnt.

§ 116. Berühmter als Deinostratos ist jedenfalls sein Bruder **Menaichmos**, über dessen geometrische Entdeckungen sich noch etwas ausführlichere Nachrichten erhalten haben. Seine grösste und folgenreichste Leistung ist ohne Frage die Entdeckung der *Kegelschnitte*, die ihm von den Alten fast einstimmig beigelegt wird. Eratosthenes, in seiner Zuschrift an König Ptolemäus II.[1]), nennt bekanntlich die drei Kegelschnitte *Μενεχμείους τριάδας* „Menaichmeische Triaden“; und ebenso berichtet der höchst zuverlässige Geminos nach der Angabe des Proklos[2]) mit dürren Worten: *ἐπινοεῖσθαι δὲ ταύτας τὰς τομὰς τὰς μὲν ὑπὸ Μεναίχμου τὰς κωνικὰς — ὃ καὶ Ἐρατοσθένης ἱστορῶν λέγει· μηδὲ Μεναιχμείους κωνοτομεῖν τριάδας· — τὰς δὲ ὑπὸ Περσέως τὰς σπειρικᾶς κ. τ. λ.* — „erfunden „seien von diesen Körperschnitten die aus dem Kegel von Menaich„mos — (wie auch Eratosthenes bestätigt, wenn er sagt: man „braucht nicht die Menaichmischen Triaden aus dem Kegel zu schnei„den); — die spirischen hingegen von Perseus u. s. w.“ — Wenn daher von einigen Neueren (Bossuet, Gesch. d. Math. Deutsch v. Reimer. Bd. I. p. 70. — Chasles, Gesch. d. Geom. p. 2) die Erfindung der Kegelschnitte auf Platon zurückgeführt wird, so hat dies wenigstens in den Quellen gar keinen Grund. Ein Zweifel anderer Art könnte dagegen entstehen aus einer Notiz, welche uns Eutokios im Eingange seines Commentars zu des Apollonios Kegelschnitten erhalten hat[3]), und welche Folgendes berichtet:

Ἀπολλώνιος ὁ γέωμέτρης, ὦ φίλε ἑταῖρε Ἀνθέμιε, γέγονε μὲν ἐκ Πέργης τῆς ἐν Παμφιλίᾳ, ἐν χρόνοις τοῦ Εὐεργέτου Πτολεμαίου, ὡς ἱστορεῖ Ἡράκλειος εἰς τὸν βίον Ἀρχιμήδους γράφων, ὃς καί φησι τὰ κωνικὰ θεωρήματα ἐπινυῆσαι μὲν πρῶτον τὸν Ἀρχιμήδην· τὸν δὲ Ἀπολλώνιον αὐτὰ εὑρόντα ὑπὸ Ἀρχιμήδους μὴ ἐκδοθέντα, ἰδιοποιήσασθαι, οὐκ ἀληθεύων κατά γε τὴν ἐμήν· ὅ τε γὰρ Ἀρχιμήδης ἐν πολλοῖς φαίνεται ὡς παλαιωτέρας στοιχειώσεως τῶν κωνικῶν μεμνημένος, καὶ ὁ Ἀπολλώνιος οὐχ ὡς ἰδίας ἐπινοίας γράφει· οὐ γὰρ ἂν ἔφη, ἐπιπλέον καὶ καθόλου μᾶλλον ἐξειργάσθαι

Der Geometer Apollonios, lieber Freund Anthemios, ist geboren zu Perga in Pamphilien, zur Zeit des Ptolemaios Euergetes, wie Herakleios im Leben des Archimedes angiebt, der da auch behauptet, die Lehrsätze über Kegelschnitte habe zuerst Archimedes ausfindig gemacht. Apollonios nun, da er gefunden, dass Archimedes nichts von seinen Sätzen bekannt gemacht, habe sie als seine eignen Entdeckungen ausgegeben, was nach meiner Meinung nicht wahr ist. Denn Archimedes scheint an vielen Stellen sich auf ältere Elemente der Kegelschnitte zu beziehen, und Apollonios giebt auch

1) Eutoc. comm. in Arch. de sph. et cyl. lib. II. — ed. Torelli p. 146.
2) Procl. comm. in Eucl. elem. ed. Basil. p. 31. — Baroc. p. 64.
3) Apollonii conica ed. Hallejus p. 8.

ταῦτα παρὰ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων γεγραμμένα.

nicht Alles als seine eigne Erfindung aus; denn sonst würde er nicht sagen, er habe Vieles vollständiger und allgemeiner behandelt, als dies in den von anderen verfassten Schriften geschehen sei.

Es ist aber offenbar, dass diese von Herakleios ausgesprochene Meinung nichts ist, als eine Erfindung der Missgunst, durch welche kleinliche Geister sich wahrscheinlich für die Geringschätzung rächen wollten, mit welcher der ihnen so weit überlegene Apollonios auf sie herabgesehen hatte. Auch ohne die hier mitgetheilte Widerlegung des Eutokios würden wir jene Angabe als eine leere Klätscherei bei Seite werfen müssen, da sie allen andern wohlbeglaubigten Nachrichten über die Bearbeitung der Kegelschnitte direct widerspricht.

§ 117. Weit wichtiger aber als der Name des Erfinders ist für uns die Kenntniss des Weges, auf welchem Letzterer zu seinen Curven gelangt ist. Hierüber haben wir glücklicherweise vollständigen Aufschluss erhalten durch das Excerpt, welches uns Eutokios, im unmittelbaren Anschluss an die eben citirte Stelle, aus des Geminos Lehrgebäude der Mathematik erhalten hat, und was bereits oben in § 8. von uns mitgetheilt worden ist. Aus ihm ersehen wir, dass zu Menaichmos Zeit nur der gerade Kegel bekannt war, indem man den Körper nur durch Umdrehung eines rechtwinkligen Dreieckes um die eine der Katheten entstehen liess, ein Verfahren, das sogar bei Euklides noch unverändert beibehalten wird; mit dem aber als nothwendige Folge zusammenhängt, dass alle durch die Achse des Kegels gelegte Ebenen den letzteren in gleichschenkligen Dreiecken schneiden, welche sämmtlich unter einander congruent sind und auf des Kegels Grundfläche senkrecht stehen. Je nachdem nun der Winkel in der Spitze eines solchen Dreieckes ein spitzer, rechter oder stumpfer ist, führt der Kegel selbst den gleichen Namen. Indem nun Menaichmos durch jeden der so entstehenden drei Kegel eine Schnittebene legt, und zwar *senkrecht auf eine Seitenlinie* des Körpers, erhält er die drei Curven, die wir heute mit dem Namen der Ellipse, Parabel und Hyperbel bezeichnen. Auch ist bei dieser Art der Erzeugung klar, dass das durch jene Seitenlinie bestimmte Achsendreieck des Kegels auf der Schnittebene senkrecht stehen und die beiden Ebenen gemeinsame Schnittlinie die Achse des Kegelschnittes bilden wird.

Bis zu diesem Punkte ist das Verfahren des Menaichmos durch des Geminos Angaben unbedingt festgestellt. Dagegen beginnt der Zweifel sofort Platz zu greifen, wenn wir nunmehr fragen, welches die Eigenschaft gewesen sein mag, die der Erfinder an seinen Curven zuerst wahrgenommen und durch welche, als charakteristische, er sie von einander unterschieden hat. Je weniger wir hierbei durch bestimmte Angaben der Alten geleitet werden, um desto grösser ist der Spielraum, der der Hypothese und der individuellen Ansicht der Sache eröffnet ist. Vielleicht dürfte das Folgende sich nicht allzuweit von dem wirklich stattgefundenen Gange der Untersuchung entfernen.

§ 118. Bekannt war zu Menaichmos Zeiten längst die Eigenschaft des Kreises, dass das Quadrat eines auf einem Durchmesser stehenden Lothes gleichflächig ist dem Rechtecke aus den Abschnitten des Durchmessers, welche durch den Fusspunkt des Lothes auf ihm gebildet werden. Es liegt demnach die Annahme nicht allzufern, dass Menaichmos versucht habe, etwas Aehnliches für seine neuen Curven aufzufinden; ja es wird dies in hohem Grade wahrscheinlich, wenn wir erwägen, dass diese Eigenschaft der Kegelschnitte dem Erfinder der letzteren bei der von ihm herrührenden Auflösung des Delischen Problems (vergl. § 119.) bereits bekannt ist und von ihm gebraucht wird. Der Weg aber, auf welchem jener Satz vom Kreise auf die Kegelschnitte übertragen sein mag, lässt sich nach Apollonios leicht angeben, da letzterer von dem Gange, den die Erfindung genommen, wohl nicht allzusehr abweicht, wenn er auch die Untersuchung gleich von Anfang an in grösster Allgemeinheit führt.

Es sei, um bei der Parabel anzufangen (Fig. 15), ABC das Achsendreieck eines in der Spitze A rechtwinkligen Kegels, DEF eine auf die Seitenlinie AC senkrecht gelegte Ebene und DKF die durch dieselbe erzeugte Schnittfigur. Durch einen beliebigen Punkt J der Geraden DE lege man eine Ebene HKG parallel zur Grundfläche BFC, so ist die durch erstere erzeugte Schnittfigur HKG ein Kreis, und die Schnittlinie JK desselben mit der Ebene DEF senkrecht auf HG. Man ziehe $LD \parallel HG$, und errichte in L auf DL das Loth LM, welches die DE im Punkte M schneidet. Dann ist:

$$JG : LD = DJ : AL = JG \,.\, HJ : LD^2 = JK^2 : LD^2,$$

ferner:

$$MD : LD = LD : AL \text{ oder } LD^2 = MD \,.\, AL,$$

daher:

$$JK^2 : MD \,.\, AL = DJ : AL,$$

oder:

$$JK^2 = DJ \,.\, MD,$$

d. h. das Quadrat des Lothes JK ist gleich dem Rechtecke der Strecke DJ und einer unveränderlichen Geraden MD, was die Grundeigenschaft der Parabel ist.

Es sei ferner, um zu Ellipse und Hyperbel überzugehen (Fig. 16. und 17.), ABC das Achsendreieck eines bei A spitz- oder stumpfwinkligen Kegels, DEK eine auf die Seitenlinie AC senkrecht gelegte

Ebene, die die Seitenfläche des Kegels in der Curve DK schneidet. Durch einen beliebigen Punkt J der Geraden DE (oder ihrer Verlängerung) lege man die Ebene HKG parallel zur Grundfläche BC, so ist die durch erstere erzeugte Schnittfigur HKG ein Kreis, und die Schnittlinie JK desselben mit der Curvenebene DJK auf HG senkrecht. Man ziehe LD und EF parallel zu HG und errichte in L ein Loth, welches die DE oder ihre Verlängerung in einem Punkte M schneidet. Dann ist:

$$JG : JD = EF : DE$$
$$\underline{HJ : JE = LD : DE}; \quad \text{also:}$$
$$HJ.JG : JD.JE = EF.LD : DE^2.$$

Es ist aber auch:

$$JK^2 : JD.JE = EF.LD : DE^2$$
$$DE : EF = LD : MD \quad \text{also:} \quad EF.LD = DE.MD,$$

daher:

$$JK^2 : JD.JE = MD : DE,$$

d. h. das Quadrat des Lothes JK hat zu dem Rechtecke aus den Abständen seines Fusspunktes von den Endpunkten D und E der Schnittlinie DE ein constantes Verhältniss, nämlich das der unveränderlichen Strecken MD zu DE, was die Grundeigenschaft der Ellipse und Hyperbel ist.

Die Gerade DE, welche bei der Parabel halbbegrenzt, bei Ellipse und Hyperbel vollbegrenzt ist, wird von Apollonios ἡ πλαγία (*latus tranversum*, Hauptachse), die Gerade MD in allen drei Curven ἡ ὀρθία (*latus rectum s. erectum*, Parameter) genannt. Schwerlich aber sind diese Benennungen von Menaichmos selbst ausgegangen, wenigstens ganz gewiss nicht die zweite derselben, die offenbar ganz durch die Art bedingt erscheint, auf welche Apollonios sie construirt. Die im Vorstehenden gegebene Construction von MD hängt mit der senkrechten Stellung der Schnittebene DKE auf der Seitenlinie AC so eng zusammen, dass man wohl annehmen könnte, sie sei dem Menaichmos nicht entgangen, wenn schon keine Notiz darüber auf uns gekommen ist. Ebenso einfach ist die Bemerkung, dass für Ellipse und Hyperbel die mittlere Proportionale zwischen MD und DE die zweite Achse der Curve liefert; ingleichen dass ein im Abstande von der Spitze gleich AD genommener Parallelkreis des Kegels einen Durchmesser besitzt, der dem Parameter gleich ist, ein Satz, der unmittelbar aus der Proportion $AV : AD = LD : MD$ hervorgeht, in welcher AV ein Abschnitt der Kegelachse ist[1]). Indessen

1) Der vorstehende Satz, der sich für die Parabel auf die einfache Bestimmung $MD = 2 . AD$ reducirt, ist ein Specialfall des allgemeineren Theoremes,

scheint es nicht, als ob die Alten auf derartige Sätze verfallen wären; vielmehr haben sie die Betrachtung des Kegels baldmöglichst aus dem Spiele gelassen und sich darauf beschränkt, seine Schnitte nur in der Ebene zu betrachten.

§ 119. Auf diesem Wege ist aber schon Menaichmos zu nicht unbedeutenden Resultaten gelangt, wie seine beiden Auflösungen des Problemes zweier mittlerer Proportionalen zur Genüge bezeugen. Nach Eutokios[1]) sind dieselben folgende:

Ὡς Μένεχμος. (Fig. 18.) Wie Menechmos.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ Δ, Ε. Δεῖ δὴ τῶν Δ, Ε δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. Γεγονέτω· καὶ ἔστωσαν αἱ Β, Γ. Καὶ ἐκκείσθω θέσει εὐθεῖα ἡ ΑΗ πεπερασμένη κατὰ τὸ Α· καὶ πρὸς τῷ Α τῇ Γ ἴση κείσθω ἡ ΑΖ· καὶ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΘ, καὶ τῇ Β ἴση κείσθω ἡ ΖΘ. Ἐπεὶ οὖν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Δ, Β, Γ, τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Γ ἴσον ἐστὶ ἀπὸ τῆς Β. Τὸ ἄρα ὑπὸ δοθείσης τῆς Δ καὶ τῆς Γ, τουτέστι τῆς ΑΖ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ. Ἐπεὶ παραβολῆς ἄρα τὸ Θ, διὰ τοῦ Α γεγραμμένης. Ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ ΘΚ, ΑΚ. Καὶ ἐπεὶ δοθὲν τὸ ὑπὸ Β, Γ· ἴσον γάρ ἐστι τῷ ὑπὸ Δ, Ε· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΚΘΖ. Ἐπεὶ ὑπερβολῆς ἄρα τὸ Θ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς ΚΑ, ΑΖ. Δοθὲν ἄρα τὸ Θ, ὥς τε καὶ τὸ Ζ. Συντεθήσεται δὴ οὕτως.

Es seien $\varDelta$, E die zwei gegebenen Geraden; man soll zwischen ihnen zwei mittlere Proportionalen finden. Es sei geschehen, und seien dieselben B, $\varGamma$. Es sei der Lage nach gegeben die im Punkte A begrenzte Gerade AH. Vom Punkte A aus liege auf ihr AZ, die $\varGamma$ gleich ist; man ziehe senkrecht $Z\varTheta$ und mache $Z\varTheta$ der B gleich. Da nun die drei Geraden A, B, $\varGamma$ in Proportion stehen, so ist das Rechteck aus $\varDelta$, $\varGamma$ gleich dem Quadrate über B. Also ist das Rechteck aus den gegebenen $\varDelta$, $\varGamma$, d. h. AZ, gleich dem Quadrate von B, d. h. dem von $Z\varTheta$. Also liegt der Punkt $\varTheta$ auf einer Parabel, die durch A beschrieben ist. Es werden nun die Parallelen $\varTheta K$ und AK gezogen. Da nun das Rechteck aus B, $\varGamma$ gegeben ist, denn es ist gleich dem aus $\varDelta$, E; so ist auah das Rechteck $K\varTheta Z$ gegeben. Also liegt der Punkt $\varTheta$ auf einer Hyperbel zwischen den Asymptoten KA und AZ. Also ist $\varTheta$ gegeben, sowie auch Z. Die Construction ist mithin folgende.

Ἔστωσαν αἱ μὲν δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ Δ, Ε. ἡ δὲ τῇ θέσει ἡ ΑΗ πεπερασμένη κατὰ τὸ Α, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ Α παραβολή, ἧς ἄξων μὲν ἡ ΑΗ, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ Δ. Αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΑΗ ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ δυνάσθωσαν τὰ παρὰ τὴν Δ παρακείμενα χωρία, πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ Α σημείῳ. Γεγράφθω,

Es seien $\varDelta$, E die gegebenen Geraden. Auf der Lage nach gegebenen, in A begrenzten Geraden AH construire man eine Parabel, die A zum Scheitel, AH zur Achse und $\varDelta$ zum Parameter hat. Die (von der Parabel) auf die AH gefällten Lothe sind die Seiten von Quadraten, die gleich sind den Rechtecken, welche $\varDelta$ zur Höhe und zur Grundlinie die zwischen

---

welches Jacob Bernoulli für die Schnitte an jedem beliebigen Kegel aufgestellt hat.

1) Comm. in Arch. lib. II. de sphaera et cyl. — ed. Torelli, p. 141.

καὶ ἔστω ἡ $A\Theta$· καὶ ὀρθὴ ἡ AK. Καὶ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς KA, AZ γεγράφθω ὑπερβολή, ἀφ' ἧς παρὰ τὰς KA, AZ ἀχθεῖσαι ποιήσουσι τὸ χωρίον ἴσον τῷ ὑπὸ Δ, E· τεμεῖ δὴ τὴν παραβολήν. Τεμνέτω κατὰ τὸ Θ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΘK, ΘZ. Ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ $Z\Theta$ ἴσον τῷ ὑπὸ Δ, Γ, ἐστὶν ὡς ἡ Δ πρὸς τὴν $Z\Theta$, ἡ $Z\Theta$ πρὸς ZA. Πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ Δ, E ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΘZA, ἐστὶν ὡς ἡ Δ πρὸς τὴν $Z\Theta$, ἡ ZA πρὸς τὴν E. Ἀλλ' ὡς ἡ Δ πρὸς τὴν $Z\Theta$, ἡ $Z\Theta$ πρὸς ZA. Καὶ ὡς ἄρα ἡ Δ πρὸς τὴν $Z\Theta$, ἡ $Z\Theta$ πρὸς ZA, καὶ ἡ ZA πρὸς E. Κείσθω τῇ μὲν ΘZ ἴση ἡ B, τῇ δὲ AZ ἴση ἡ Γ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Δ πρὸς τὴν B, ἡ B πρὸς τὴν Γ, καὶ ἡ Γ πρὸς E. Αἱ Δ, B, Γ, E ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν. Ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

Δ und den Perpendikeln liegenden Abschnitte haben. Sie sei beschrieben in der Curve $A\Theta$; und man ziehe AK senkrecht (auf AH). Zwischen den Asymptoten KA, AZ beschreibe man eine Hyperbel, so dass das Rechteck, welches die mit KA und AZ gezogenen Parallelen machen, gleichflächig ist dem Rechtecke aus Δ und E; so wird dieselbe die Parabel schneiden. Es geschehe dies in Θ und man ziehe die Lothe ΘZ, ΘK. Da nun das Quadrat von $Z\Theta$ gleich ist dem Rechtecke aus Δ, Γ, so verhält sich Δ zu $Z\Theta$ wie $Z\Theta$ zu ZA. Wiederum, da das Rechteck unter Δ, E gleich ist dem unter ΘZA, verhält sich Δ zu $Z\Theta$ wie ZA zu E. Wie sich aber Δ zu $Z\Theta$ verhält, so auch $Z\Theta$ zu ZA u. ZA zu E. Setzt man daher ΘZ gleich B und AZ gleich der Γ, so verhält sich die Δ zu B, wie die B zu Γ, wie die Γ zu E. Die Geraden Δ, B, Γ, E stehen also in ununterbrochener Proportion. Dies war zu beweisen.

Ἄλλως. (Fig. 19.)

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ AB, $B\Gamma$· καὶ γεγωνέτωσαν αὐτῶν μέσαι αἱ ΔB, BE· ὥς τε εἶναι, ὡς τὴν ΓB πρὸς $B\Delta$ οὕτως τὴν $B\Delta$ πρὸς BE καὶ τὴν BE πρὸς BA. καὶ ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ ΔZ, EZ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΓB πρὸς $B\Delta$ οὕτως ἡ ΔB πρὸς BE· τὸ ἄρα ὑπὸ ΓBE τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς BE, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $B\Delta$, τουτέστι τῆς EZ. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς BE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ EZ, τὸ Z ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν BE. Πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς BE, ἡ BE πρὸς $B\Delta$, τὸ ἄρα ὑπὸ $AB\Delta$ τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς $B\Delta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ EB, τουτέστι τῆς ΔZ. τὸ Z ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν $B\Delta$. Ἧπται δὲ καὶ ἑτέρας δοθείσης τῆς περὶ τὴν BE. Δοθὲν ἄρα τὸ Z. Καὶ κάθετοι αἱ $Z\Delta$, ZE. Καὶ δοθέντα ἄρα τὰ Δ, E. Συντεθήσεται δὲ οὕτως.

Auf andere Art.

Es seien AB, $B\Gamma$ die zwei gegebenen Geraden, senkrecht auf einander gestellt, und ΔB, BE die zugehörigen mittleren Proportionalen, so dass sich ΓB zu $B\Delta$ wie $B\Delta$ zu BE wie BE zu BA verhält; man ziehe die Senkrechten ΔZ, EZ. Da nun ΓB zu $B\Delta$ wie ΔB zu BE sich verhält, so muss das Rechteck ΓBE, d. h. das aus BE und der gegebenen Geraden construirte, gleich sein dem Quadrate der $B\Delta$, d. h. der EZ. Da ferner das Rechteck aus der gegebenen Geraden und der BE gleich ist dem Quadrate von EZ, so liegt Z auf einer Parabel, welche BE zur Achse hat. Wiederum ist die AB zu BE, wie die BE zu $B\Delta$, also das Rechteck $AB\Delta$, d. h. das Recht aus den gegebenen Geraden und der $B\Delta$ gleich dem Quadrate von EB, d. h. gleich dem von ΔZ; also liegt Z auf einer Parabel, welche $B\Delta$ zur Achse hat. Es liegt aber auch auf der anderen über BE gegebenen Parabel; also ist Z gegeben, folglich auch die

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ AB, $B\Gamma$· καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' ἄπειρον ἀπὸ τοῦ B, $B\Delta$, BE. Καὶ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν BE παραβολὴ ὥς τε τὰς καταγομένας ἐπὶ τὴν BE δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν $B\Gamma$. Πάλιν γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν ΔB παραβολή, ὥςτε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν AB. Τέμνουσι δὴ ἀλλήλαις αἱ παραβολαί. Τεμνέτωσαν κατὰ τὸ Z· καὶ ἀπὸ τοῦ Z κάθετοι ἤχθωσαν αἱ $Z\Delta$, ZE. Ἐπεὶ οὖν ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ZE τουτέστιν ἡ ΔB, τὸ ἄρα ὑπὸ ΓBE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ $B\Delta$. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓB πρὸς $B\Delta$, ἡ ΔB πρὸς BE. Πάλιν ἐπεὶ ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ΔZ, τουτέστιν ἡ EB, τὸ ἄρα ὑπὸ ΔBA ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ EB. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔB πρὸς BE, ἡ BE πρὸς BA. Ἀλλ' ὡς ἡ ΔB πρὸς BE, οὕτως ἡ ΓB πρὸς ΔB. Καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓB πρὸς $B\Delta$, ἡ $B\Delta$ πρὸς BE, καὶ ἡ BE πρὸς BA. Ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

(Γράφεται δὲ ἡ παραβολὴ διὰ τοῦ εὑρεθέντος διαβήτου τῷ Μιλησίῳ μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ, γραφέντος δὲ ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὸ γενόμενον αὐτῷ ὑπόμνημα τῶν Ἥρωνος καμαρικῶν).

Senkrechten $Z\Delta$ und ZE, also auch die Δ und E. Construirt wird demnach folgendermassen.

Es seien AB, $B\Gamma$ die zwei gegebenen Geraden, auf einander senkrecht gestellt, und seien von B aus nach $B\Delta$ und BE ins Unbestimmte verlängert. Ueber der Achse BE werde eine Parabel beschrieben, sodass die Quadrate der auf BE gefällten Lothe gleichflächig seien den Rechtecken an $B\Gamma$. Und abermals beschreibe man über $B\Delta$ als Achse eine Parabel, sodass ihre Lothe im Quadrat den Rechtecken an AB gleich sind. Die Parabeln werden sich schneiden, und es geschehe dies in Z; man ziehe von Z aus die Lothe $Z\Delta$ und ΔE. Da nun die ZE, d. h. die ΔB, in einer Parabel gezogen ist, so ist das Rechteck unter ΓBE gleich dem Quadrate auf $B\Delta$, daher ΓB zu $B\Delta$ wie $B\Delta$ zu BE. Wiederum, da die ΔZ, d. h. die EB, in einer Parabel gezogen ist, so wird das Rechteck unter ΔBA gleichflächig sein dem Quadrate auf EB. Es ist also ΔB zu BE, wie BE zu BA. Aber wie ΔB zu BE, so verhält sich auch ΓB zu ΔB; demnach verhält sich ΓB zu ΔB wie ΔB zu BE und wie BE zu BA. Dies aber war zu finden.

(Die Parabel zeichnet man mittelst eines von dem Mechaniker Isidoros von Milet, unserem Lehrer, erfundenen Zirkels, der von ihm in seinem Commentar zu der Gewölbelehre des Heron beschrieben worden ist).

§ 120. Die vorliegenden beiden Auflösungen, in denen die erst von Apollonios eingeführten Namen der Kegelschnitte jedenfalls von einem späteren Berichtserstatter, vielleicht von Eutokios selbst, eingesetzt sind, scheinen im Wesentlichen noch ganz den Gang einzuhalten, den ihr Erfinder eingeschlagen hat. Beide Lösungen sind mittelst der Analysis gefunden, aus der dann die Construction sammt ihrem Beweise abgeleitet wird. Hierbei wird die Parabel in der That durch die oben im § 118. entwickelte Grundeigenschaft als vollständig charakterisirt betrachtet; dagegen bleibt es bemerkenswerth, dass die erste der beiden Auflösungen von der Hyperbel nicht die Gleichung derselben in Bezug auf die Achsen, sondern vielmehr die Gleichung in Bezug auf die Asymptoten verwendet, ein Beweis, dass diese Geraden schon sehr bald nach der Entdeckung der Curven aufgefunden worden sind und das Interesse der damaligen Geometer in bedeutendem Grade erregt haben müssen. Auf welchem Wege man zu dieser Erkenntniss gelangt ist, bleibt uns freilich gänzlich unbekannt.

Ob Menaichmos zur leichteren Construction seiner Curven wirklich Instrumente angegeben hat, bleibt zweifelhaft. Man stützt sich bei dieser Behauptung gewöhnlich auf die Worte des Eratosthenes, der in seiner Zuschrift an König Ptolemäus, das von ihm erfundene *mesolabum* betreffend, sich folgendermassen äussert[1]: *συμβέβηκε δὲ πᾶσιν αὐτοῖς ἀποδεικτικῶς γεγραφέναι, χειρουργῆσαι δὲ καὶ εἰς χρεῖαν πεσεῖν μὴ δύνασθαι πλὴν ἐπιβραχύ τι τοῦ Μενέχμου, καὶ ταῦτα δυσχερῶς.* — „Es begegnete aber ihnen allen, dass sie „die Aufgabe wohl theoretisch lösten, sie aber zur Construction und „für das praktische Bedürfniss brauchbar zu gestalten nicht vermoch„ten; mit Ausnahme vielleicht der Lösung des Menechmos, und „auch diese ist noch sehr beschwerlich.“ — Nun ist gar nicht zu läugnen, dass die Construction zweier Parabeln oder einer Parabel und Hyperbel durch Punktreihen äusserst beschwerlich ist und die wirkliche Anwendung dieser Methode nur dann der Mühe verlohnen würde, wenn man im Stande wäre, diese Curven wenigstens durch einen stetigen Zug zu beschreiben. — Lässt sich nun auch aus des Eratosthenes Worten nicht unmittelbar schliessen, dass Menaichmos eine Vorrichtung für einen solchen Zug angegeben habe, so ist dies doch in Rücksicht auf die oben in § 108. angeführte Notiz des Plutarchos nicht unwahrscheinlich. Hätte aber Menaichmos eine solche Erfindung wirklich gemacht, so muss dieselbe doch nie in Gebrauch gekommen sein, da weiter auch nicht die mindeste Erwähnung derselben auf uns gekommen ist.

Das Vorstehende ist Alles, was wir von des Menaichmos Leistungen in der Geometrie wissen. Ob er einerlei Person ist mit dem Menaechmos Alopeconnesius, der ein Werk *de sphaeris coelestibus* geschrieben hat, aus welchem Derkyllidas schöpfte, ist, obschon nicht unwahrscheinlich, doch mit Bestimmtheit nicht zu entscheiden[2]. — Ebenso müssen wir dahingestellt lassen, ob die aus einer Schrift des Philosophen Serenos[3]) mitgetheilte Anekdote wahr ist, welche berichtet: *Μέναιχμον τὸν γεωμέτρην Ἀλέξανδρος ἠξίου συντόμως αὐτῷ παραδοῦναι τὴν γεωμετρίαν· ὁ δὲ „ὦ βασιλεῦ“*

1) Eutoc. comm. in Arch. lib. II de sphaera et cyl. — ed. Torelli p. 144.
2) Theonis Smyrn. lib. de astron. ed. Martin, p. 59.
3) E codice Florentino parallel. sacrorum Joann. Damasc. — In Stobaei floril. ed. Meineae Vol. IV. p. 205.

εἶπε „κατὰ μὲν τὴν χώραν ὁδοί εἰσιν ἰδιωτικαὶ καὶ βασιλικαί, ἐν δὲ τῇ γεωμετρίᾳ πᾶσίν ἐστιν ὁδὸς μία.“ — „Von dem Geometer Menaichmos verlangte Alexander, dass er ihn auf dem kürzesten „Wege in die Geometrie einführen sollte; dieser aber sprach: o König, „auf das Feld giebt es Wege für Privatleute und für Könige; zur „Geometrie hingegen giebt es für Alle nur Einen Weg.“ — Dass Alexander der Macedonier ausser Aristoteles an Menaichmos noch einen speciellen Lehrer für Geometrie besessen habe, wird sonst nirgend berichtet, und fast scheint es, als ob die vorliegende Erzählung der bekannten Anekdote von Euklides und König Ptolemaios nachgebildet sei.

§ 121. Ein anderer Geometer, von dem sich Notizen über mathematische Leistungen noch erhalten haben, ist **Eudoxos** von Knidos, der zwar nur kurze Zeit zu Athen sich aufgehalten, doch aber mit den Geometern der Akademie in so enger Verbindung gestanden hat, dass er füglich als dem Kreise der letzteren angehörig betrachtet werden kann. Was wir über seine Lebensschicksale wissen, stammt fast Alles aus den Notizen, welche Diogenes Laertios (lib. VIII. c. 8) aus den verschiedenartigsten Quellen zusammengeschrieben hat. Hiernach ist Eudoxos etwa um 410 v. Chr. zu Knidos geboren, hat Geometrie bei Archytas, Heilkunst bei dem Sikelioten Philistion studirt, sodann im 23ten Lebensjahre als Begleiter des Arztes Theomedon einen zweimonatlichen Aufenthalt in Athen gemacht, worauf er mit Empfehlungsbriefen des Agesilaos an den König Nectanabis nach Aegypten ging. Dort hat er zu Heliopolis ein Jahr und vier Monate den Umgang und Unterricht der dasigen Priester genossen, und soll auch während dieser Zeit seine Schrift über die Octaëteris verfasst haben (die Zeit dieses Aufenthaltes fällt in die Jahre 390 bis 380 v. Chr., da während dieses Jahrzehntes die Empörung der Aegypter gegen die Perser unter Nectanabis I. ausbricht). Nach erfolgter Rückkehr aus Aegypten hat er zunächst in Kyzikos und dessen Nachbarschaft gelehrt, sodann im Gefolge einer grossen Anzahl Schüler Athen zum zweiten Male besucht und dort mit Platon verkehrt, hierauf aber sich in seine Vaterstadt zurückbegeben, wo er hochgeehrt im 53ten Lebensjahre (um 357 v. Chr.) starb. Seine Blüthezeit fällt nach Diogenes L. in die 103te Olympiade, also zwischen 370 und 360 v. Chr. Von Schriften, die er verfasst haben soll, erwähnt Diogenes (VIII. c. 8. nr. 88): ἀστρολογούμενα, καὶ γεωμετρούμενα καὶ ἕτερ' ἄττα ἀξιόλογα — „astronomische, geometrische „und einige andere bedeutende,“ eine Angabe, welche durch die Notizen anderer Schriftsteller wenigstens in Bezug auf die astronomischen Schriften genauer specialisirt werden kann. Uns interessiren hier nur die mathematischen Leistungen des Mannes, und leider besitzen wir über diese zum Theil nur ganz kurze Andeutungen, aus denen nichts Bestimmtes sich folgern lässt.

§ 122. Die Angabe des Jamblichos[1]): *Ἀλλαγέντος δὲ τοῦ ὀνόματος οἱ μετὰ ταῦτα οἱ περὶ Εὔδοξον μαθηματικοὶ ἄλλας τρεῖς προσανευρόντες μεσότητας τὴν τετάρτην ἰδίως ὑπεναντίαν ἐκάλεσαν κ. τ. λ.* — „Hierauf haben mit Veränderung des Namens Eudoxos „und seine Schüler, indem sie drei neue Proportionen (zu den bis„herigen) hinzu erfanden, die vierte speciell die gegenstimmige ge„nannt u. s. w." — steht mit dem, was derselbe Commentator an anderen Stellen angiebt, direct in Widerspruch. So sagt er z. B. (p. 159): *αἱ δὲ ἐπὶ ταύταις τρεῖς ἀπ' Ἀρχύτου καὶ Ἱππάσου παραδοχῆς καὶ αὐταὶ ἠξιώθησαν κ. τ. λ.* — „die auf sie (die drei früher „bekannten Proportionen) folgenden drei sind schon von Archytas „und Hippasos der Aufnahme werth geachtet worden u. s. w." — ingleichen (p. 163): *εἴρηται καὶ περὶ τῶν ἑξῆς ταῖς πρώταις τριῶν μεσοτήτων, αἷς καὶ οἱ ἀπὸ Πλάτωνος μέχρις Ἐρατοσθένους ἐχρήσαντο, ἄρξαντος, ὡς ἔφαμεν, τῆς εὑρέσεως αὐτῶν Ἀρχύτας καὶ Ἱππάσου τῶν μαθηματικῶν. Τὰς δ' ὑπὸ τῶν μετὰ ταῦτα νεωτέρων περὶ Τεμνωνίδην καὶ Εὐφράνορα τοὺς Πυθαγορικοὺς προςφιλοτεχνήθεισαν τέσσαρας, οὔτε παραλείπειν ἄξιον.* — „Es ist be„reits gesprochen worden über die drei, auf die drei früheren folgen„den Proportionen, welche von Platon bis auf Eratosthenes in „Gebrauch waren und deren Erfindung von den Geometern Archy„tas und Hippasos ausgeht. Die aber auf diese folgenden vier „neueren Proportionen haben Temnonides und Euphranor, die „Pythagoriker, ausgesonnen, und sie sind auch werth nicht übergan„gen zu werden." — Der Widerspruch in diesen Angaben scheint sich dadurch zu lösen, dass Eudoxos, als ein Schüler des Archytas, diese drei Proportionen durch seinen Lehrer kennen lernte und sie zuerst nach Hellas brachte, weshalb ihn spätere Schriftsteller für den Erfinder gehalten haben mögen.

§ 123. Bei weitem besser verbürgt sind die stereometrischen Entdeckungen des Eudoxos. Archimedes in seiner Schrift über die Quadratur der Parabel[2]) sagt in der Einleitung Folgendes: *Λαμβανομένου τοῦδε τοῦ λήμματος ἐς τὰν ἀπόδειξιν αὐτοῦ, τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου. Κέχρηνται δὲ καὶ οἱ πρότερον γεωμέτραι τῷδε τῷ λήμματι. Τούς τε γὰρ κύκλους διπλασίονα λόγον ἔχειν ποτὶ ἀλλάλους τὰν διαμέτρων ἀποδεδείχασιν αὐτῷ τῷ λήμματι χρώμενοι· καὶ*

1) Jambl. comm. in Nicom. Geras. arithm. introd. — ed. Tennul. p. 142.
2) Archim. opera ed. Torelli, p. 18.

τὰς σφαίρας ὅτι τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτὶ ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων· ἔτι δὲ καὶ πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τᾷ πυραμίδι, καὶ ὕψος ἴσον· καὶ δὴ ὅτι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τῷ κώνῳ, καὶ ὕψος ἴσον· ὁμοίως τῷ προκειμένῳ λήμματι λαμβάνοντες ἔγγραφον. — „Zum Beweise des Satzes nehme ich fol- „gendes Lemma an: wenn zwei Flächenräume ungleich sind, so ist „es möglich, den Unterschied, um welchen der grössere den kleine- „ren übertrifft, so oft zu sich selbst zu setzen, dass dadurch jeder „endliche gegebene Flächenraum übertroffen wird. Auch die frühe- „ren Geometer haben sich dieses Lemma's bedient. Dass nämlich „Kreise im zweifachen Verhältnisse ihrer Durchmesser zu einander „stehen, haben sie durch Anwendung eben dieses Lehnsatzes nachge- „wiesen; auch dass Kugeln im dreifachen Verhältnisse ihrer Durch- „messer sich befinden; ferner dass jede Pyramide der dritte Theil eines „Prisma auf derselben Grundfläche und von gleicher Höhe mit der „Pyramide ist; ingleichen, dass jeder Kegel den dritten Theil eines „Cylinders auf derselben Grundfläche und von gleicher Höhe mit dem „Kegel ausmacht; alles dies haben sie durch Annahme des aufge- „stellten Lemma's bewiesen."

Wenn hier nun blos von *Beweisen* der aufgeführten Lehrsätze gesprochen, ein bestimmter Name aber nicht genannt, auch keiner als *Entdecker* dieser Sätze angegeben wird, so holt Archimedes diese Versäumniss in der Einleitung zum ersten Buche seiner Schrift über Kugel und Cylinder wieder ein, indem er hier berichtet (ed. Torelli p. 64): ὥσπερ τὰ δόξαντα πολλὰ τῶν ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου περὶ τὰ στερεὰ θεωρηθέντων· οἷον ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ πρίσματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῇ πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον· καὶ ὅτι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον. Καὶ γὰρ προυπαρχόντων φυσικῶς περὶ ταῦτα τὰ σχήματα, πολλῶν πρὸ τοῦ Εὐδόξου γεγενημένων ἀξίων λόγου γεωμετρῶν, συνέβαινεν ἀπὸ πάντων ἀγνοεῖσθαι, μηδ' ὑφ' ἑνὸς κατανοηθῆναι. — „Ebenso verhält es sich mit „vielen von Eudoxos über die Körper aufgefundenen Sätzen, die „Beifall erhalten haben; z. B. dass jede Pyramide der dritte Theil „eines Prisma sei, welches mit ihr dieselbe Grundfläche und gleiche „Höhe hat; ferner dass jeder Kegel der dritte Theil eines Cylinders „von der Grundfläche und Höhe des Kegels sei. Obgleich auch die- „ses wesentlich schon vorher in den betreffenden Gebilden lag, so „hat es doch die ganze Menge der sonst achtungswerthen Geometer „vor Eudoxos nicht erkannt, kein Einziger entdeckt." —

Demnach kann kein Zweifel mehr obwalten darüber, dass die Inhaltsbestimmung der Pyramide und des Kegels von Eudoxos zuerst aufgefunden worden ist, und wahrscheinlich auch der Satz, dass Kugelvolumina sich wie die Würfel ihrer Durchmesser verhalten. Der entsprechende Satz von den Kreisen war, wie wir oben (vergl. § 100.) gesehen haben, bereits von Hippokrates von Chios entdeckt worden; durch welche Mittel aber derselbe bewiesen worden war, ist uns unbekannt. Ob das von Archimedes oben angeführte Lemma bereits zu Hippokrates Zeiten bekannt war und angewendet ward, dürfte sehr erheblichem Zweifel unterliegen. Hat Eudoxos dasselbe bereits vorgefunden, als er seine metrischen Untersuchungen über die Körper begann, so dürfen wir die Entdeckung desselben wohl mit Sicherheit der Platonischen Schule vindiciren, die bei ihrem Vordringen in die höheren und schwierigeren Gebiete der Geometrie eines solchen Hülfssatzes gewiss nicht allzulang entbehren konnte. Jedenfalls hat Eudoxos aber das Verdienst, durch wiederholte sachgemässe Anwendung des fraglichen Lehrsatzes, zur Ausbildung einer Methode der Forschung beigetragen zu haben, die wir ein Jahrhundert später durch Archimedes mit völliger Meisterschaft gehandhabt finden, und welche als sogenannte Exhaustionsmethode den Alten dieselben Vortheile in die Hand gab, welche uns heutzutage, freilich in weit kürzerer und behenderer Form, die Analysis des Unendlichen gewährt.

§ 124. Diejenige Leistung des Eudoxos, von welcher uns gar nichts Näheres erhalten ist, betrifft die Construction zweier mittlerer Proportionalen zwischen zwei gegebenen Geraden. Eutokios in seinem Commentare zu Archimedes Schrift über Kugel und Cylinder (ed. Torelli p. 135) bemerkt hinsichtlich derselben Folgendes: *Πολλῶν δὲ κλεινῶν ἀνδρῶν γραφαῖς ἐντυχήκαμεν, τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπαγγελλομέναις, ὧν τὴν Εὐδόξου τοῦ Κνιδείου παρῃτησάμεθα γράφειν. Ἐπειδή φησι μὲν ἐν προοιμίοις διὰ καμπύλων γραμμῶν αὐτὴν ηὑρηκέναι, ἐν δὲ τῇ ἀποδείξει πρὸ τὸ μὴ κεχρῆσθαι καμπύλαις γραμμαῖς· ἀλλὰ καὶ διῃρημένην ἀναλογίαν εὑρῶν, ὡς συνεχεῖ χρεῖται· ὅπερ ἦν ἄτοπον ὑπονοῆσαι.* — „Wir haben von den Schriften „vieler berühmter Männer Einsicht genommen, die sich mit dieser „Aufgabe berühmen, von denen wir aber die des Eudoxos zu erwäh„nen unterlassen. Denn obgleich er in der Einleitung behauptet, er „habe die Lösung mittels krummer Linien gefunden, so wendet er „doch diese krummen Linien bei dem Beweise nicht an; ja er braucht „sogar eine von ihm gefundene discrete Proportion wie eine stetige, „was nur zu denken schon absurd ist.“ — Es wäre in der That höchst seltsam, wenn ein Geometer von dem Range des Eudoxos, etwas so grob Unverständiges zu Tage gefördert hätte, und es ist daher zu verwundern, dass Eutokios nicht sofort die wahre Quelle der von ihm gerügten Unvollkommenheit in der vollständigen Verderbniss des

Textes erkannt hat, der ihm vorlag. Dies musste ihm um so näher liegen, als er in dem von ihm gleichfalls mitgetheilten Berichte des Eratosthenes an König Ptolemaios, das *mesolabum* betreffend (ed. Torelli p. 144), von diesem durchaus zuverlässigen Gewährsmanne angegeben findet: *τῶν δὲ φιλοπόνως ἐπιδιδόντων ἑαυτοῖς καὶ ζητούντων, δύο δοθεισῶν δύο μέσας λαβεῖν, Ἀρχύτας μὲν ὁ Ταραντῖνος λέγεται διὰ τῶν ἡμικυλίνδρων εὑρηκέναι· Εὔδοξος δὲ διὰ τῶν καλουμένων καμπύλων γραμμῶν.* — „Während nun diese (die „Geometer der Akademie) sich emsig daran machten und zu zwei Ge- „gebenen zwei mittlere Proportionalen zu construiren suchten, so soll „Archytas von Tarent dies mittelst des Halbcylinders, Eudoxos „dagegen mittelst der sogenannten gebogenen Linien gefunden haben.“ — Hier ist keine Rede von einer fehlerhaften Auflösung, was bei einem so sachkundigen Beurtheiler wie Eratosthenes, der kaum ein Jahrhundert nach Eudoxos lebt, jedenfalls ganz anders ins Gewicht fällt, als der Zweifel des fast sieben Jahrhunderte späteren Eutokios.

Geholfen ist uns freilich mit dieser Ehrenrettung des Eudoxos nur wenig, da wir von keiner Seite her etwas Näheres über diese „sogenannten gebogenen Linien“ erfahren. Nur das scheint aus des Eratosthenes Worten mit Sicherheit hervorzugehen, dass diese Curven keine Kegelschnitte waren, da des Eudoxos Lösung eher gegeben wurde, als die Schüler der Akademie mit ihren Lösungen zu Stande kamen. Als dies aber geschehen und die Kegelschnitte durch die Fülle der Ausbeute an wichtigen und interessanten Eigenschaften die Aufmerksamkeit und Kräfte der bedeutendsten Geometer für sich fast allein in Anspruch nahmen, fielen die Curven des Eudoxos, die in dieser Beziehung mit den Kegelschnitten wohl nicht wetteifern konnten, bald gänzlicher Vergessenheit anheim; und so ist es allerdings nicht auffallend, wenn Eutokios sich ausser Stande sieht, über diese Erfindung etwas Richtiges und Zusammenhängendes zu berichten.

§ 125. Die letzte der dem Eudoxos nachgerühmten Leistungen ist die, welche Proklos in seinem Verzeichnisse der Geometrie berichtet, nämlich: „er führte weiter aus, was Platōn über den Schnitt „begonnen hatte, wobei er sich der Analysis bediente.“ — Meistens wird diese wenig bestimmte Stelle dahin gedeutet, dass Eudoxos die Schnitte von Körpern durch Ebenen oder andere Körper untersucht habe. Was das freilich für Körper gewesen seien, vermag man nicht anzugeben; die Schnitte der Pyramiden und Prismen durch Ebenen boten schwerlich ein bedeutendes Feld der Untersuchung, die des Kegels waren durch die Geometer der Akademie bereits vorweg genommen, und so wären für Eudoxos höchstens die des Cylinders übrig geblieben. Gerade diese aber können es nicht gewesen sein, mit denen er sich beschäftigt hat, da wir wissen, dass sie erst von einem späteren Geometer, dem Serenos, in Untersuchung genommen worden sind. Die ganze Interpretation der Stelle des Proklos scheint aber irrig zu sein; Letzterer spricht gar nicht von „Schnitten, *τομαῖς*," sondern von „*dem* Schnitte, *τῇ τομῇ*," und wir haben uns daher zu fragen, was unter dieser ganz bestimmten Benennung damals wohl verstanden worden ist? Nun ist aber in der Geometrie bis auf Platon nur *ein* Schnitt von wirklicher Bedeutung vorhanden, nämlich der Schnitt einer Geraden nach stetiger Proportion oder die sogenannte *sectio aurea;* und diese scheint uns das zu sein, was Proklos in den oben angeführten Worten bezeichnen will. Die Theilung einer Geraden nach stetiger Proportion ist, wie wir schon oben nachzuweisen versucht haben, wahrscheinlich eine Leistung der Pythagoräischen Schule. Auf welche Weise Letztere dies Problem gelöst und anderweit verwendet hat, das scheint aus dem 11ten Satze des 2ten Buches, vielleicht auch aus den Sätzen 10—14 des 4ten Buches der Euklidischen Elemente hervorzugehen, in denen augenscheinlich der historische Gang der Erfindung niedergelegt ist, wenn auch vielleicht in Einzelheiten verbessert und bestimmter gefasst. Späterhin mag Platon diesem Gegenstande aufs Neue Aufmerksamkeit geschenkt und untersucht haben, was für metrische Relationen zwischen den Stücken einer durch den goldenen Schnitt getheilten Geraden stattfinden. Und in diese Untersuchung, die Platon nicht zu Ende geführt, mag Eudoxos eingetreten sein. Was er geleistet hat, scheint uns fast wörtlich erhalten zu sein in den ersten Sätzen des 13ten Buches der Euklidischen Elemente. Hier kommt deren Verfasser zum dritten Male auf die *sectio aurea* und auf die Construction der regelmässigen Körper zurück, die er schon im 4ten Buche abgehandelt hat, um den ganzen Gegenstand nochmals in grösserem Umfange und tiefer eindringend zu bearbeiten. Die fünf ersten Sätze dieses 13ten Buches sind nun jedenfalls das Eigenthum des Eudoxos. Denn während Euklides in dem ganzen übrigen Werke der Analysis und Synthesis gar nicht erwähnt, tritt plötzlich bei diesen Sätzen eine ganz strenge Scheidung beider Verfahrungsweisen ein, sodass der Verfasser sich sogar genöthigt sieht, gleich nach dem ersten Satze die charakteristische Eigenthümlichkeit beider Methoden mit ein Paar Worten auseinander zu setzen. Dies stimmt aber genau mit des Proklos Angabe überein, nach welcher Eudoxos die fragliche Untersuchung auf dem analytischen Wege unternommen hat.

Ist nun die hier entwickelte Ansicht der Sache in Wahrheit begründet, so haben wir in den erwähnten fünf Sätzen des Euklides wirklich noch ein Bruchstück der geometrischen Arbeiten des

Eudoxos vor uns, das uns den Letzteren als einen ebenso tüchtigen wie strengen Geometer kennen lehrt. Um so weniger kann daran gezweifelt werden, dass seine Auflösung des Delischen Problemes gleichfalls streng richtig war und nur durch die *injuria temporum* so verunstaltet worden ist, dass sie dem Eutokios völlig werthlos erschien. — Zugleich lässt aber auch das Vorstehende erkennen, wie irrig die bis auf den heutigen Tag von so vielen Geometern gehegte Ansicht ist, nach welcher Euklides Elemente ein Werk aus *einem* Gusse, ja zum grösseren Theile sogar eine Zusammenstellung seiner eignen Entdeckungen sein sollen. Eine sorgfältige Prüfung des Inhaltes dieses Lehrbuches lässt an gar manchen Stellen den allmäligen Gang der Entdeckungen erkennen, durch welche die Wissenschaft vorgeschritten ist, und liefert uns dadurch für die historische Entwickelung derselben Anhaltspunkte, welche auf anderen Wegen gar nicht mehr zu erlangen sind.

§ 126. Mit Eudoxos ist der letzte der Geometer aus dieser Periode erreicht, von dessen Leistungen sich noch Einzelheiten erhalten haben. Alle übrigen, welche Proklos in seiner Liste noch aufführt, sind uns nur dem Namen nach bekannt und durch die geringfügigen Notizen, die jener Commentator ihrem Namen beifügt. Dagegen erübrigt es, jetzt noch einer höchst folgenreichen Erweiterung der geometrischen Anschauungen zu gedenken, nämlich der durch die Entdeckung der Kegelschnitte veranlassten Einführung der *geometrischen Oerter*. Einzelne derselben bieten sich bereits in den Elementen der Wissenschaft so ungesucht dar, dass sie schon den Geometern *vor* Platon sicher bekannt waren; wenigstens wäre es sehr sonderbar, wenn Sätze wie die folgenden: „alle Punkte, welche von einem „gegebenen gleich weit entfernt sind, liegen auf dem Umfange eines Kreises, der den gegebenen Punkt zum Mittelpunkte hat," u. d. m. nicht schon den frühesten Geometern sollten klar geworden sein. Das Verdienst aber, das Gemeinsame, was derartigen Sätzen zu Grunde liegt, erkannt und hervorgehoben, und dasselbe zu einer eigentlichen Theorie ausgebildet zu haben, müssen wir abermals der Platonischen Schule zusprechen; und es ist wohl kaum zu bezweifeln, dass es dem Stifter der Schule selbst zukommt, der ja bereits durch Einführung der analytischen Methode gezeigt hatte, dass er in Verallgemeinerungen solcher Art Meister war. In der Theorie der geometrischen Oerter erhielt die Wissenschaft ein neues mächtiges Hülfsmittel zur Auflösung von Aufgaben, und mit welchem Eifer dasselbe von den Geometern ausgebildet wurde, erkennen wir noch heutigen Tages theils an der Zahl und dem Gewichte der Namen, die als Verfasser von Schriften über diesen Gegenstand genannt werden, theils aber auch an der Subtilität, mit welcher man die verschiedenen Oerter in Classen und Unterabtheilungen zu bringen und das Wesen jeder einzelnen der letzteren festzustellen versuchte.

In Bezug auf die Zeit, zu welcher der Begriff des Ortes in der Wissenschaft zuerst auftauchte, lässt sich ein bestimmtes Jahr natürlich nicht namhaft machen; soviel aber scheint sicher, dass die Entdeckung der Kegelschnitte der Einführung des geometrischen Ortes um ein Bedeutendes vorangegangen ist. Nach der Art freilich, auf welche wir in unseren Tagen die Geometrie zu behandeln pflegen, sollte man gerade das Entgegengesetzte vermuthen und meinen, die Lehre von den Kegelschnitten müsse aus der Theorie des geometrischen Ortes hervorgegangen sein. Was kann in der That einfacher sein, als die Ellipse zu bestimmen als Ort der Spitze eines Dreiecks, dessen Grundlinie und Umfang constant sind? Ebenso nahe liegt der Ort, der die Spitzen gleichflächiger Rechtecke enthält, deren Gegenspitze sammt den von ihr ausgehenden beiden Seiten der Lage nach unveränderlich ist. Die Hyperbel mit ihren beiden Asymptoten wäre dadurch unmittelbar erhalten worden. — Indessen zeigt die Hartnäckigkeit, mit welcher die Kegelschnitte das ganze Alterthum hindurch als *körperliche Oerter* betrachtet werden, dass man sie stets nur aus dem Schnitte des Kegels abgeleitet hat, und es ist gewiss bemerkenswerth, dass in dem grossen Werke des Apollonios über diese Curven keine derselben auch nur ein einziges Mal als ein *ebener* Ort nachgewiesen wird, so oft auch dem Verfasser dazu die Gelegenheit sich bieten mag. Der Grund dieser Erscheinung liegt offenbar darin, dass die Theorie der Brennpunkte und Brennstrahlen, von welcher die neueren Geometer bei der Behandlung der Kegelschnitte auszugehen pflegen, den Alten ganz fern lag. Die Brennpunkte der Ellipse und Hyperbel werden bei Apollonios eben nur erwähnt und durch ein Paar ihrer einfachsten Eigenschaften charakterisirt; der Brennpunkt der Parabel dagegen kommt im ganzen Werke gar nicht vor.

§ 127. Gehört aber die Einführung des geometrischen Ortes erst der späteren Zeit der Platonischen Schule an, so ist nun auch erklärlich, dass unter allen den älteren und jüngeren Geometern, welche Proklos in seinem Verzeichnisse der akademischen Jünger namhaft macht, nur ein Einziger sich findet, **Hermotimos** von Kolophon, der etwas über die Oerter geschrieben hat. Es gehört derselbe der jüngsten Generation von Platon's Schülern an und steht somit nahe an der Grenze des Zeitraumes, den das Geschichtswerk des Eudemos umfasst. Indem uns nun diese Quelle, aus der wir auf unserem Wege so viel schätzenswerthe Belehrungen erhalten haben, mit einem Male versiegt, würden wir mit Hermotimos die Reihe der voreuklidischen

Geometer schliessen müssen, wenn uns nicht Pappos[1]) noch einige Notizen über einen der bedeutendsten Geometer erhalten hätte, der in die letzten 30 Jahre vor Euklides gehört und in mehrfacher Beziehung als der Vorgänger des Letzteren betrachtet werden kann. Es ist dies **Aristaios**, den Pappos durch den Beinamen des „Aelteren" von einem anderen Gelehrten gleiches Namens zu unterscheiden pflegt. Ueber seine Herkunft und Lebensschicksale wissen wir gar nichts. — Der Einfall, ihn für identisch zu erklären mit dem Schwiegersohne und Nachfolger des Pythagoras (wie dies selbst von Röth geschieht), kann nur bei denen Anklang finden, die von dem Entwickelungsgange der Griechischen Geometrie gar keine Kenntniss besitzen. — Für diesen Mangel entschädigen uns aber einigermassen die auf uns gekommenen Nachrichten über seine Leistungen in der Geometrie. Aus des Hypsikles erstem Buche über die fünf regulären Körper (Eukl. Elemente XIV. Satz 2) erfahren wir, dass Aristaios eine Vergleichung dieser Körper geschrieben hat. Da dies Werk das neueste und letzte ist, was *vor* Euklides diesen Gegenstand behandelt, so dürfte die Vermuthung nicht allzu kühn sein, die in dem Inhalte des 13ten Buches der Euklidischen Elemente eine wenigstens theilweise Recapitulation jener Schrift des Aristaios erblickt. Denn es ist ganz offenbar, dass Euklides bei Darstellung dieser Lehre sich vornehmlich an *die* Vorlagen gehalten haben wird, die bis zu seiner Zeit als die besten galten. Dass er das Werk seines Vorgängers nicht rein abgeschrieben, versteht sich wohl von selbst. Man mag vielmehr gleich zugeben, dass er mit dem, was er aus des Aristaios Schrift entnommen hat, ganz selbständig verfahren und dasselbe, *seinen* Bedürfnissen entsprechend, umgestellt, vielleicht auch hie und da verändert hat; — das grosse Ganze aber hat er doch wohl von Aristaios entlehnt, und wir halten uns davon um so mehr überzeugt, als wir gleich im Folgenden sehen werden, dass er es nicht verschmäht hat, auch eine andere Schrift dieses von ihm hochgeschätzten Autors zu überarbeiten. Wer freilich von dem eingewurzelten Vorurtheile sich nicht frei machen kann, dass Euklides Elemente ein Werk sei, gleichsam vom Himmel gefallen, ohne nennenswerthe Vorarbeiten aus dem schöpferischen Geiste seines Verfassers in einem Gusse hervorgegangen, — der wird allerdings in einer Ansicht, wie die eben vorgetragene, eine arge Ketzerei erblicken.

Eine zweite Arbeit, durch welche Aristaios sich ein bedeutendes Verdienst erwarb, ist die von ihm zum ersten Male unternom-

---

1) Pappi mathem. collect. ed. Command. Bologna, 1660. lib. VII. introd. (p. 249 sq.).

mene Zusammenstellung von Elementen der Kegelschnitte[1]). Pappos bezeichnet sie als höchst klar und verständlich geschrieben, so dass Euklides sie seiner eignen Bearbeitung dieser Curven zu Grunde gelegt und dabei sich nur die Verbesserung und Ergänzung von Einzelheiten erlaubt habe, während er im Allgemeinen den Gang der Untersuchung beibehalten. Dabei erfahren wir auch gelegentlich, dass Aristaios es gewesen ist, der in diesem seinem Werke die Benennung der einzelnen Schnitte nach dem Kegel, aus dem sie erhalten werden, eingeführt hat. — Ob diese in fünf Bücher getheilten Elemente der Kegelschnitte, nach der Ueberarbeitung des Euklides und besonders nach dem Erscheinen des grossen Werkes von Apollonios (das in seiner ersten Hälfte sich selbst als eine Neubearbeitung und Ergänzung des bis dahin erschienenen ankündigt), sich noch längere Zeit im literärischen Verkehre erhalten haben, scheint grossem Zweifel zu unterliegen. Eher möchte dies, nach des Pappos Worten[2]) mit einem dritten Werke des Aristaios der Fall sein, nämlich einer an die Kegelschnitte sich eng anschliessenden Bearbeitung der körperlichen Oerter, ebenfalls in fünf Büchern. Sollte aber dies Werk zu Pappos Zeiten noch vorhanden gewesen sein, so ist es doch für uns völlig verloren gegangen[3]). Indessen bezeugt die einstige Existenz desselben den Eifer, mit welchem die Geometer jener Zeit der nun entstandenen Theorie der Oerter sich annahmen,

1) Pappos l. c. p. 249: Erant igitur conicorum elementorum primum Aristaei senioris libri quinque, velut iis, qui haec percipere possent cum brevitate conscripti. — Ibid. p. 251: Euclides autem secutus Aristaeum scriptorem luculentum in iis, quae de conicis tradiderat; neque antevertens neque volens eorum tractationem destruere, etc. — Ibid. p. 250: Si enim secans planum ducatur uni laterum coni aequidistans, una tantum ex tribus lineis efficitur semper eadem, quam Aristaeus illius coni sectionem appellavit.

2) Ibid. p. 249 s. f. Aristaeus autem, qui scribit ea, quae ad hoc usque tempus tradita sunt, solidorum locorum libros quinque conicis cohaerentes vocavit.

3) Chasles in seiner Geschichte d. Geom. (p. 86 der Uebers. von Sohncke) giebt an: „das zweite Buch (der Abhandlung von Mydorge über die Kegel„schnitte) ist für die Beschreibung der Kegelschnitte durch Punkte in der Ebene „bestimmt, ein Gegenstand, mit dem sich Apollonius gar nicht beschäftigt „hat, der sich aber in den locis solidis des Aristaeus findet; denn dieses Werk „betrachtet die Kegelschnitte in der Ebene, und will auf sie aus ihren Eigenschaf„ten kommen, welche keinen Theil der elementa conica des Apollonius aus„machen, da Aristaeus selbst ein ähnliches Werk, welches von seinen locis „solidis verschieden ist, geschrieben hat.“ Woher der Verfasser diese Kunde von dem Inhalte der loca solida des Aristaios erhalten, ist uns gänzlich unbekannt. Die ganze Stelle hat vielleicht in der Uebersetzung Schaden gelitten; denn in dieser ist kaum zu unterscheiden, was von Aristaios und was von Mydorge gelten soll.

und welche bedeutende Ausdehnung sie derselben alsbald zu geben versuchten.

§ 128. Bei den ausserordentlichen Fortschritten, welche wir die Geometrie in den 80 Jahren von Eröffnung der Akademie des Platon bis zu der der Alexandrinischen Hochschule (390 bis 310 v. Chr.) haben machen sehen, ist es wohl selbstverständlich, dass die Elemente, welche einst Hippokrates verfasst hatte, bei weitem nicht mehr ausreichten, um als Grundlage für alle die tief eindringenden Forschungen zu dienen, mit denen man sich jetzt zu beschäftigen begann. Gleich einer der ältesten Schüler Platons, **Leon**, unternahm es, neue Elemente zu entwerfen, „die in Bezug auf Umfang und das Bedürfniss der Anwendung des Bewiesenen sorgfältiger bearbeitet waren,“ als die des Hippokrates. Diese Sorgfalt scheint er ganz vornehmlich der Lösung von Aufgaben zugewendet zu haben und dadurch auf die Einführung des Diorismos (der sogenannten Determination) hingeleitet worden zu sein, durch welchen genau bestimmt wird, in welchen Fällen eine Aufgabe gelöst werden kann, und in welchen nicht; ingleichen, wenn ersteres der Fall ist, wie viele Specialfälle in der Lösung begriffen sein können und wodurch die einzelnen derselben sich von einander unterscheiden. — So gut aber auch des Leon Arbeit für den Moment ihres Erscheinens ausgefallen sein mochte; für längere Zeit konnte sie doch nicht genügen. Die Theorie der Kegelschnitte und der geometrischen Oerter erweiterte den geometrischen Gesichtskreis dergestalt und machte wohl auch auf so viele Lücken aufmerksam, die man bis dahin übersehen hatte, dass wohl kaum zwei Jahrzehnte verflossen waren, als **Theydios** von Magnesia eine neue Ueberarbeitung und Vervollständigung der Elemente unternahm. Proklos berichtet von ihnen, dass sie „sehr gut“ gewesen seien und namentlich durch sachgemässe Verallgemeinerung bis dahin nur speciell gefasster Wahrheiten sich empfohlen hätten.

Allein auch diese Arbeit genügte noch nicht. Je rascher das ganze Gebiet der Geometrie sich erweiterte, namentlich durch den Eintritt der höheren Curvenlehre in den wissenschaftlichen Gesichtskreis, um desto dringender stellte sich das Bedürfniss einer stetig fortschreitenden Erweiterung und Ausfeilung der Elemente heraus. Diesem Bedürfnisse mit Einem Male, auf eine lange Reihe von Jahrhunderten hinaus, und auf eine wahrhaft glänzende Weise zu genügen, gelang gegen den Schluss des Jahrhunderts dem Euklides. Dieser, der durch eigne, zum Theil höchst tiefsinnige Studien in den höchsten Theilen der damaligen Geometrie zu einer umfassenden Einsicht in die Bedürfnisse seiner Wissenschaft gelangt war, sah sich eben dadurch in den Stand gesetzt, Elemente nicht nur der Geometrie, sondern auch der Arithmetik zu entwerfen, die nicht blos hinsichtlich der Strenge der Deduction, sondern auch an Reichhaltigkeit und Vollständigkeit alles Frühere weit überragten, so dass letzteres nicht nur sofort aus dem literärischen Verkehre verschwand, sondern auch in den nächsten zwei Jahrtausenden, mit Ausnahme des berühmten Apollonios (der aber hierbei den Kürzeren zog), kein Geometer den ernstlichen Versuch gemacht hat, mit ihm auf diesem Felde zu wetteifern.

Das Erscheinen dieses Werkes bezeichnet somit einen bedeutungsvollen Abschnitt in der Entwickelung der Geometrie. Ist es auch dem Euklides nicht möglich gewesen, Alles in seinem Elementarwerke zu vereinigen, was an einfachen Wahrheiten später vielleicht einmal gebraucht werden konnte, — daher wir bei den nachfolgenden Geometern noch eine ganze Anzahl sogenannter Lehnsätze vorfinden, — so ist doch in der Hauptsache die Ausbildung des elementaren Theils der Wissenschaft mit dem Erscheinen jenes Werkes abgeschlossen. Alle besseren Köpfe wenden sich von nun an tiefer eindringenden Forschungen zu; für diese existirt nunmehr eine allgemein anerkannte Grundlage, auf welche man in jedem Falle zurückverweisen kann. Der Vortheil, der hieraus erwächst, kommt aber nicht blos der Forschung selbst zu Gute, sondern ebenso sehr auch der schriftlichen Darstellung der erhaltenen Resultate, welche jetzt erst die unsägliche Breite verliert, welche vordem fast nicht zu umgehen war, und die wir in den Beweisen des Hippokrates noch so auffällig hervortreten sahen. — Ebenso wichtig aber, wie für die Geometrie selbst, ist das Euklidische Werk auch für die Geschichte derselben. Da es das erste ausführliche Lehrbuch ist, was *ganz* auf uns Neuere vererbt worden ist, so endet mit ihm auch jene Dämmerungsperiode, in welcher wir uns bisher bewegt haben und in der wir die Entwickelung der Wissenschaft nur allzu oft auf Wahrscheinlichkeit hin verfolgen konnten, so dass wir bei noch so sorgfältiger Beachtung der uns erhaltenen literärischen Bruchstücke uns doch gestehen mussten, der Zusammenhang der Sache könne mitunter auch wohl ein anderer sein, als er uns erschienen. Hier, wie in so vielen ähnlichen Fällen, müssen wir uns an dem Bewusstsein genügen lassen, aus dem vorhandenen geringen Material so viel Nutzen als möglich gezogen zu haben.

Anhang.

Das Zeitalter und die Leistungen einiger Geometer der Alexandrinischen Schule.

§ 129. Der glänzende Erfolg, der die Untersuchung der Kegelschnitte begleitete, scheint spätere Geometer veranlasst zu haben, Schnittcurven zu untersuchen, welche an anderen krummflächigen Körpern, als den drei elementaren, durch Ebenen erzeugt werden können. Von diesen Versuchen wird uns noch einer etwas näher beschrieben, nämlich der des **Perseus**. Der Name dieses Geometers ist uns nur durch Proklos erhalten, der ihn in seinem Commentar zu Euklides Elementen, nach einer Angabe des Geminos, als den Erfinder der sogenannten „spirischen Linien" aufführt. Als seinen Geburtsort giebt Montucla (hist. d. math. Vol. I. p. 316) Kittium auf Cypern an, was jedoch ein offenbarer Irrthum ist, herbeigeführt durch eine Verwechselung unseres Geometers mit dem Philosophen Persaios, der nach Diogenes Laertios (VII, c. 1. — Huebn. p. 109) aus Kittium stammt. Hinsichtlich der Zeit, in welche Perseus zu setzen ist, bemerken wir, dass die Liste des Proklos seinen Namen nicht enthält, also mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit gefolgert werden kann, dass er bereits der Alexandrinischen Schule angehört, was auch mit der Natur seiner Entdeckung recht gut zusammenstimmt. Anderseits werden die spirischen Linien bereits von Heron dem Aelteren in seiner Geometrie erwähnt, daher ihr Entdecker *vor* den Letzteren zu setzen ist. Es bleibt daher für Perseus der Zeitraum von 280 bis etwa 120 v. Chr. übrig. In die erste Hälfte desselben möchte aber die Erfindung der „Spiren" kaum zu setzen sein. Die aus ihnen hervorgehenden Curven sind offenbar im Alterthum so wenig beachtet worden und haben jedenfalls auch so wenig geometrisches Material geliefert, dass sie bald wieder vergessen wurden. Die Aufnahme der Spiren in das elementare Werk des Heron lässt sich wohl nur daraus erklären, dass sie eben neu aufgefunden worden und ihr Entdecker Zeitgenosse des Heron war. Es wird daher wohl nicht allzu weit von der Wahrheit abgewichen werden, wenn man die Blüthe des Perseus etwa um 130 v. Chr. setzt. Damit stimmt dann auch sehr wohl zusammen, dass Geminos, der etwa ein halbes Jahrhundert nach Perseus lebte, Letzteren und seine Entdeckung noch sehr gut im Gedächtniss hatte und beide daher in seinen Schriften mehrfach erwähnte. Ein dauerndes Interesse aber scheinen die neuen Curven bei den Geometern nicht erregt zu haben, und so sehr auch ihr Erfinder von ihnen mag entzückt gewesen sein (er brachte sogar ein Dankopfer dafür dar), so sind sie doch späterhin ganz vergesseu worden.

§ 130. Wir gehen nun zur genaueren Betrachtung der spirischen Flächen und Curven über, und stellen zu dem Ende Alles zusammen, was sich von Notizen über diesen Gegenstand noch erhalten hat.

Proklos comm. in Eucl. elem. (ed. Basil. p. 31. — Baroc. p. 64 der Originaltext zum Theil berichtigt nach Knoche und Märker's Recension im Herforder Programm; 1856.).

Διαιρεῖ δ᾽ αὖ τὴν γραμμὴν ὁ Γεμῖνος πρῶτον μὲν εἰς τὴν ἀσύνθετον καὶ τὴν σύνθετον. Καλεῖ δὲ σύνθετον τὴν κεκλασμένην καὶ γωνίαν ποιοῦσαν[1]) . . . .

. . . .

. . . .

τὴν ἐπ᾽ ἄπειρον ἐκβαλλομένην. σχῆμα λέγων ποιεῖν κυκλικὴν, τὴν τοῦ θυραιοῦ[2]), *τὴν κιττοειδῆ, μὴ ποιεῖν δὲ τὴν τοῦ ὀρθογωνίου τομὴν, τὴν τοῦ ἀμβλυγωνίου, τὴν κογχοειδῆ, τὴν εὐθεῖαν, πάσας τὰς τοιαύτας. Καὶ πάλιν κατὰ ἄλλον τρόπον τῆς ἀσυνθέτου γραμμῆς τὴν μὲν ἁπλῆν εἶναι, τὴν δὲ μικτήν· καὶ τῆς ἁπλῆς τὴν μὲν σχῆμα ποιεῖν, ὡς τὴν κυκλικὴν, τὴν δὲ ἀόριστον εἶναι, ὡς τὴν εὐθεῖαν. Τῆς δὲ μικτῆς τὴν μὲν ἐν τοῖς ἐπιπέδοις εἶναι, τὴν δὲ ἐν τοῖς στερεοῖς· καὶ τῆς ἐν ἐπιπέδοις τὴν μὲν ἐν αὑτῇ συμπίπτειν, ὡς τὴν κισσοειδῆ, τὴν δὲ ἐπ᾽ ἄπειρον ἐκβάλλεσθαι, ὡς τὴν ἕλικα· τῆς δ᾽ ἐν στερεοῖς τὴν μὲν κατὰ τὰς τομὰς ἐπινοεῖσθαι τῶν στερεῶν, τὴν δὲ ἐπὶ*

Es unterscheidet wiederum Geminos die Linien als nicht zusammengesetzte und zusammengesetzte. Zusammengesetzt nennt er die gebrochenen und einen Winkel bildenden [alle anderen dagegen nicht zusammengesetzte. Die zusammengesetzten theilt er wieder in solche, die eine geschlossene Figur bilden, und in solche] die ins Unendliche sich verlängern. Eine geschlossene Figur bilde z. B. der Kreis, die Ellipse, die Kissoïde, eine ungeschlossene der Schnitt des rechtwinkligen und stumpfwinkligen Kegels, die Konchoïde, die Gerade und alle anderen derartige Linien. Von einem anderen Gesichtspunkte aus seien wiederum die nicht zusammengesetzten Linien einfache oder gemischte; die einfachen bilden entweder eine geschlossene Figur, wie der Kreis, oder seien unbegrenzt, wie die Gerade. Von den gemischten seien die einen in der Ebene enthalten, die anderen in Körpern; von den ebenen laufen die einen in sich selbst zurück,

---

1) Die Lücke des Textes der Basilea ist in der Uebersetzung nach dem Lateinischen des Barocius ausgefüllt.

2) Die Bezeichnung *ἡ τοῦ θυραιοῦ* statt: „Ellipse," wird von Proklos sehr häufig gebraucht und scheint zu des Geminos Zeit vielfach mehr in Aufnahme gewesen zu sein, als der von Apollonios eingeführte Name.

τὰ στερεὰ ὑφεστάναι· τὰς δὲ κωνικὰς τομὰς ἢ τὰς σπειρικὰς ἀπὸ τῆς τοιᾶςδε τομῆς γεννᾶσθαι τῶν στερεῶν — ἐπινοεῖσθαι δὲ ταύτας τὰς τομὰς, τὰς μὲν ὑπὸ Μεναίχμου τὰς κωνικάς [ὃ γὰρ Ἐρατοσθένης ἱστορῶν λέγει·

μηδὲ Μεναιχμείους κωνοτομεῖν
τριάδας]

τὰς δὲ ὑπὸ Περσέως τὰς σπειρικάς [ὃς καὶ τὸ ἐπίγραμμα ἐποίησεν ἐπὶ τῇ εὑρέσει·

Τρεῖς γραμμὰς ἐπὶ πέντε τομαῖς
εὑρὼν ἑλικώδεις
Περσεύς, τῶν δ' ἕνεκεν δαίμονας
ἱλάσατο].

Αἱ μὲν δὴ τρεῖς τομαὶ τῶν κώνων εἰσὶ παραβολὴ καὶ ὑπερβολὴ καὶ ἔλλειψις· τῶν δὲ σπειρικῶν τομῶν ἡ μέν ἐστιν ἐμπεπλεγμένη ἐοικυῖα τῇ τοῦ ἵππου πέδῃ, ἡ δὲ κατὰ τὰ μέσα πλατύνεται, ἐξ ἑκατέρου δὲ ἀπολήγει μέρους, ἡ δὲ παραμήκης οὖσα τῷ μὲν μέσῳ διαστήματι ἐλάσσονι χρῆται, εὐρύνεται δὲ ἐφ' ἑκάτερα.

Τῶν δὲ ἄλλων μίξεων τὸ πλῆθος ἀπέραντόν ἐστιν καὶ γὰρ στερεῶν σχημάτων πλῆθός ἐστιν ἄπειρον. καὶ τομαὶ αὐτῶν συνίστανται πολυειδεῖς· οὐ γὰρ εὐθεῖα μὲν κατὰ κύκλον κινουμένη ποιεῖ ἐπιφάνειαν, οὐχὶ δὲ καὶ κωνικαὶ γραμμαὶ καὶ κογχοειδεῖς καὶ αὐταὶ αἱ περιφέρειαι. παντοίως οὖν τὰ στερεὰ τεμνόμενα ποικίλα δείκνυσιν εἴδη γραμμῶν. Τῶν δὲ περὶ τὰ στερεὰ συνισταμένων γραμμῶν αἱ μέν εἰσιν ὁμοιομερεῖς, ὡς αἱ περὶ κύλινδρον ἕλικες, αἱ δὲ ἀνομοιομερεῖς, ὥςπερ αἱ ἄλλαι πᾶσαι. Συνάγεται οὖν ἐκ τούτων τῶν διαιρέσεων ὡς αἱ τρεῖς μόναι γραμμαὶ ὁμοιομερεῖς εἰσιν, ἡ εὐθεῖα, ἡ κυκλικὴ καὶ ἡ κυλινδρικὴ ἕλιξ, δύο μὲν ἐν ἐπιπέδῳ ἁπλαῖ, μία δὲ μικτὴ περὶ τὸ στερεόν. Καὶ τοῦτο ἀποδείκνυσιν ἐναργῶς ὁ Γεμῖνος προςαποδείξας, ὅτι ἂν πρὸς ὁμοιομερῆ γραμμὴν ἀφ' ἑνὸς σημείου δύο εὐθεῖαι προσεκβληθῶσιν ἴσας πρὸς αὐτὴν ποιοῦσαι γωνίας ἴσαι

wie die Kissoïde, andere gehen ins Unendliche fort, wie die Spirale. Von den auf Körpern enthaltenen gehen die einen aus Schnitten der Körper hervor, während andere auf dem Körper construirt werden; so entständen die conischen und spirischen Curven durch die Schnitte solcher Körper, — und zwar seien die Kegelschnitte von Menaichmos erdacht [wie auch Eratosthenes bestätigt, wenn er sagt: „nicht hat man die Menaichmischen drei Curven aus dem Kegel zu schneiden"]; die spirischen Schnitte dagegen von Perseus [der auf die Erfindung das Epigramm verfertigte: „drei Curven zu den fünf Schnitten, gewundene, erfand Perseus und opferte deshalb den Göttern].

Die drei Kegelschnitte sind die Parabel, Hyperbel und Ellipse; von den spirischen Curven aber ist die erste eine verschlungene, einem Pferdehufe ähnliche, die zweite erweitert sich nach der Mitte und verengert sich nach beiden Seiten, die dritte endlich ist länglich, besitzt in der Mitte eine geringere Breite und erweitert sich nach beiden Seiten hin.

Die Zahl der übrigen gemischten Linien ist unbegrenzt und ebenso die Zahl der Körpergestalten unendlich gross. Aber auch die Schnitte derselben sind vielgestaltig. Eine im Kreise bewegte Gerade bildet keine Oberfläche, so wenig wie die Kegelschnitte, die Konchoïden und die Kreisumfänge selbst. Die auf alle Art geschnittenen Körper zeigen nun mannichfach gestaltete Linien. Unter den auf Körpern construirten Linien sind die einen in ihren Theilen gleich und ähnlich, wie die cylindrischen Schraubenlinien, andere dagegen nicht, nämlich alle übrigen. Es ergiebt sich nun aus diesen Unterschieden, dass es nur drei Linien giebt, welche in allen ihren Theilen gleich und ähnlich sind, die Gerade, der Kreis und die cylindrische Schraubenlinie, von denen zwei ganz in der Ebene liegende einfache sind, eine aber eine gemischte ist und auf einem εἰσίν. Καὶ ληπτέον ἐκ τῶν ἐκείνου τοῖς φιλομαθέσι τὰς ἀποδείξεις· ἐπεὶ καὶ τὰς γενέσεις τῶν σπειρικῶν γραμμῶν καὶ τῶν κογχοειδῶν καὶ τῶν κισσοειδῶν παραδίδωσιν. Ἡμεῖς δὲ τὰς μὲν ἐπωνυμίας αὐτῶν καὶ τὰς διαιρέσεις ἱστορήσαμεν εἰς τὴν περὶ αὐτῶν ζήτησιν ἐγείροντες τοὺς εὐφυεῖς· τὸ δὲ περὶ τὴν ἑκάστου ζήτησιν τοὺς λόγους ἀκριβοῦν ἐν τοῖς παροῦσιν ἡγούμεθα περίεργον εἶναι.

Körper liegt. Auch dies beweist ganz klar Geminos, indem er noch hinzufügt, dass wenn an eine solche, in allen Theilen gleich und ähnliche Linie von einem Punkte aus zwei Gerade gezogen werden, die mit ihr gleiche Winkel bilden, diese Geraden einander gleich sind. Die Beweise sind von den Lernbegierigen aus des Geminos Schriften zu entnehmen; dort giebt er auch die Entstehung der spirischen Linien, der Konchoïden und Kissoïden näher an. Wir führen nur die Namen derselben und deren Eintheilungen an, indem wir die Talentvollen zum Studium derselben auffordern; über die Untersuchung einer jeden genaue Rechenschaft zu geben, halten wir im Augenblicke für überflüssig.

Procl. comment. in Eucl. elem. (ed. Basil. p. 33. — Baroc. p. 68).

Ὃ δέ ἐστι θαυμαστὸν ἐν ταύταις, ὅτι καὶ ἀπὸ τῆς κυκλικῆς μίξις γίγνεται πολλάκις τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὴν γένεσιν. Ὃ δὲ συμβαίνειν φαμὲν κατὰ τὴν σπειρικὴν ἐπιφάνειαν. Κατὰ γὰρ κύκλον νοεῖται στροφήν, ὀρθοῦ διαμένοντος καὶ στρεφομένου[1]) περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου. Διὸ καὶ τριχῶς ἡ σπεῖρα γίγνεται· ἢ γὰρ ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐστὶ τὸ κέντρον, ἢ ἐντὸς ἢ ἐκτός. Καὶ εἰ μὲν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐστὶ τὸ κέντρον, γίγνεται σπεῖρα συνεχής, εἰ δὲ ἐντὸς ἐμπεπλεγμένη, εἰ δὲ ἐκτὸς διεχής . . . . κατὰ τρεῖς ταύτας διαφοράς.

Das aber ist hierbei bemerkenswerth, dass oft auch aus der Kreislinie eine ihrer Entstehung nach gemischte Oberfläche hervorgeht. Dies geschieht z. B. unserer Ansicht nach bei der spirischen Oberfläche. Man denke sich, dass ein Kreis um einen Punkt, der nicht sein Mittelpunkt ist, eine Drehung mache, so dass er während derselben immer senkrecht bleibt; so entsteht dadurch eine Spire von dreifacher Art, je nachdem der Mittelpunkt der Drehung auf dem Umfange liegt, oder innerhalb oder ausserhalb. Liegt er auf dem Umfange, so entsteht eine zusammenhängende Spire, liegt er innerhalb, eine verschlungene, liegt er ausserhalb, eine getrennte. Demnach giebt es drei Ringschnitte, nach diesen drei Unterschieden.

Ibid. (ed. Basil. p. 93. — Baroc. p. 213.

Καὶ γὰρ Ἀπολλώνιος ἐφ' ἑκάστης τῶν κωνικῶν γραμμῶν τι τὸ σύμπτωμα δείκνυσι, καὶ ὁ Νικομή-

Apollonios hat gezeigt, was für Eigenschaften an den Kegelschnitten vorkommen, Nikomedes dasselbe

1) Diese Stelle des Griechischen Textes ist, wo nicht verdorben, doch so unklar und unbestimmt, dass sie nur erst durch das nachfolgende Excerpt aus Heron verständlich wird.

δης ἐπὶ τῶν κογχοειδῶν, καὶ ὁ Ἱππίας ἐπὶ τῶν τετραγωνιζουσῶν, καὶ ὁ Περσεὺς ἐπὶ τῶν σπειρικῶν.

für die Konchoïde, Hippias für die Quadratrix und Perseus für die spirischen Curven.

Heronis defin. nom. geometr. (Heronis reliq. ed. Hultsch p. 27).

Σπεῖρα γίνεται, ὅταν κύκλος ἐπὶ κύκλου τὸ κέντρον ἔχων ὀρθὸς ὢν πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον περιενεχθεὶς εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ. τὸ δὲ αὐτὸ τοῦτο καὶ κρίκος καλεῖται. διεχὴς μὲν οὖν ἐστὶ σπεῖρα ἡ ἔχουσα διάλυμα, συνεχὴς δὲ ἡ καθ' ἓν σημεῖον συμπίπτουσα, ἐπαλλάττουσά τε καθ' ἣν ὁ περιφερόμενος κύκλος αὐτὸς αὑτὸν τέμνει. γίνονται δὲ καὶ τούτων τομαὶ γραμμαί τινες ἰδιάζουσαι.

Eine Spire entsteht, wenn ein Kreis, der seinen Mittelpunkt auf einem Kreise hat und auf der Fläche desselben senkrecht steht, herumgedreht wird, bis er in seine anfängliche Stellung zurückkehrt. Es wird dies auch ein Ring genannt. Getrennt ist die Spire, wenn sie eine Oeffnung hat; zusammenhängend, wenn sie sich in Einem Punkte trifft, verschlungen, wenn der umgedrehte Kreis sich selbst schneidet. Aus den Schnitten derselben entstehen gewisse eigenthümliche Curven.

§ 131. Die vorstehenden Stellen, insbesondere die des Heron, lassen unmittelbar erkennen, auf welche Art Perseus die Oberfläche oder den Körper erhalten hat, den er mit dem Kunstworte „Spire" (Ring) bezeichnete. In unseren Tagen würden wir ganz einfach einen Kreis um eine in seiner Ebene liegende Gerade als Achse drehen lassen, und die drei verschiedenen Gattungen von Spiren dadurch erhalten, dass die Drehungsachse entweder ausserhalb des Kreises liegt, oder letzteren berührt oder ihn schneidet. Perseus fasst die Sache etwas umständlicher an, indem er zwei Kreise, deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen, so ineinander legt, dass das Centrum des einen auf dem Umfange des andern liegt. Dieses Centrum lässt er nun den Umfang des zweiten Kreises durchlaufen, ohne dabei die senkrechte Stellung seiner Fläche gegen die des letzteren aufzugeben, und erhält somit durch den Umfang des bewegten Kreises die Spire beschrieben. Die drei Gattungen der letzteren entstehen dadurch, dass der Halbmesser des bewegten Kreises kleiner oder grösser ist, als der Halbmesser des ruhenden Kreises, oder diesem gleich.

Ueber die Natur der spirischen *Oberflächen* kann daher, wie man sieht, gar kein Zweifel obwalten. Ein desto erheblicherer findet statt hinsichtlich der *Curven*, welche Perseus mittelst der Durchschnitte dieser Flächen durch Ebenen erzeugt hat. Die nächste und einfachste Annahme ist wohl die, dass er seine drei Schnittcurven aus den drei verschiedenen Gattungen der Spiren erhält, indem er jede der letzteren nach einem und demselben Principe von einer Ebene schneiden lässt; wie auf ähnliche Weise Aristaios aus den drei verschiedenen Kegelarten durch einen auf unveränderliche Weise geführten Schnitt seine drei Arten conischer Curven erhält. Allein welche Lage man auch für die Schnittebene ersinnen mag, niemals wird man durch dieselbe drei Curven erhalten, auf deren Gestalt die von Proklos oder vielmehr von Geminos angegebene Beschreibung passen will. Und ganz zu demselben Endresultate gelangt man durch die zweite Annahme, die gleichfalls sehr plausibel erscheint, und nach welcher Perseus, den Apollonios in seiner Behandlung der Kegelschnitte nachahmend, aus einem und demselben spirischen Körper durch veränderte Lage der Schnittebene drei Figuren von der angegebenen Gestalt erhalten hätte. Es bliebe hiernach nur noch Eine Möglichkeit übrig. Eine erschöpfende Untersuchung der spirischen Curven zeigt nämlich, dass dieselben in drei verschiedene Geschlechter zerfallen, von denen das erste diejenigen Curven umfasst, die aus zwei getrennten aber geschlossenen Zügen bestehen, von denen jeder ganz *ausserhalb* des andern liegt. Ist dagegen der eine dieser getrennten, aber geschlossenen Züge ganz *innerhalb* des andern gelegen, so hat man das zweite Geschlecht der spirischen Linien. In das dritte Geschlecht gehören endlich alle diejenigen, welche nur einen einzigen in sich geschlossenen Zug bilden, der jedoch zwei, oder nur einen, oder auch gar keinen Doppelpunkt enthalten kann. Es wäre wenigstens denkbar, dass Perseus auf diese Weise zu seinen drei Gattungen von Schnittcurven gelangt wäre. Allein ganz abgesehen davon, dass auch hiermit die Beschreibung des Geminos nicht in Uebereinstimmung zu bringen ist, liegt auch eine solche verallgemeinernde Zusammenfassung so weit aus dem Gesichtskreise des zweiten Jahrhunderts vor Christo, dass sie schon um deswillen wenig Anspruch auf Wahrscheinlichkeit besitzt.

Wir lassen uns an diesem negativen Resultate unserer Untersuchung genügen. Sollte es wirklich möglich sein, unter den sehr zahlreichen Curvenformen, welche die Schnitte der Ringflächen darbieten, diejenigen drei herauszufinden, mit denen Perseus speciell sich beschäftigt hat, so würden wir damit doch nur wenig gewinnen, da sowohl der Weg, den er bei seiner Forschung genommen, wie auch die Ergebnisse der letzteren uns ebenso verborgen bleiben würden, wie bisher.

§ 132. Das oben aufgeführte Excerpt aus des Geminos Lehrgebäude der Geometrie, das Proklos uns erhalten hat, liefert uns aber auch ganz bestimmte Zeitangaben nicht nur über Perseus, sondern auch über **Nikomedes** und **Diokles**, die Erfinder der Konchoïde und Kissoïde. Beide können nicht gut später angesetzt werden, als höchstens um die Mitte des zweiten Jahrhunderts vor Christo, dürften aber auch nicht höher hinaufzurücken sein, als bis in die Mitte des dritten Jahrhunderts vor Christo, so dass ihre Blüthezeit zwischen 250 bis 150 v. Chr. fällt. Der ältere von beiden scheint

Nikomedes zu sein. Die von ihm mittelst der Konchoïde gelösten Aufgaben der Verdoppelung des Würfels und der Dreitheilung eines Winkels, die uns durch Pappos und Eutokios[1]) erhalten sind, tragen noch den Charakter rein theoretischen Interesses an sich und werden, soweit wir dies zu beurtheilen vermögen, nicht durch die Rücksicht auf praktische Anwendung beeinflusst. Anders scheint sich dies mit Diokles zu verhalten, dem Erfinder der Kissoïde. Dieser gehört einer Reihe praktischer, und vornehmlich kriegswissenschaftlicher Schriftsteller an, welche von 250 bis gegen 100 v. Chr. leben und vornehmlich in Alexandrien ihre Studien gemacht zu haben scheinen. Ein Apollodoros, Athenaios, Biton, Philon Byzantios, Dionysodoros[2]), Heron und Andere, von deren Werken sich nicht unbedeutende Reste bis auf unsere Tage erhalten haben, waren aber nicht blos reine Praktiker, sondern auch sehr gründlich unterrichtete, zum Theil sogar scharfsinnige Theoretiker; daher z. B. Eutokios in seinem Commentare zu des Archimedes Schriften, die Bemühungen des Philon Byzantios und Heron um die Auffindung zweier mittleren Proportionalen zwischen zwei Geraden rühmend aufführt. Eben dasselbe thut er auch mit Diokles, der zu Lösung des nämlichen Problemes die Kissoïde erfand. Dass aber dieser Autor nicht jünger sein kann als Geminos, der der Kissoïde in dem oben mitgetheilten Excerpte aus Proklos (§ 130) zu wiederholten Malen ganz ausführlich gedenkt, ist wohl von selbst klar. Wenn daher Heilbronner und Montucla den Diokles erst *nach* Pappos setzen, weil Letzterer eine Lösung des genannten Problemes giebt, die ganz die des Diokles ist, ohne dass er doch den Letzteren erwähnt; so ist dabei weiter nichts zu bemerken, als dass Pappos hierbei ein wirkliches Plagiat zur Last zu fallen scheint. Hätte sich Montucla die Mühe genommen, des Pappos Collectaneen, oder auch nur des Proklos Commentar zu Euklides wirklich *zu lesen*, statt sich auf ungenaue Angaben Anderer zu verlassen; so hätte ihm der wahre Sachverhalt nicht entgehen können. Denn obgleich Pappos sich den Anschein giebt, als ob er die Kissoïde gar nicht kenne, entschlüpft ihm doch der Name derselben an einzelnen Stellen seines Werkes, z. B. lib. IV, prop. 30, p. 95, wo er sagt: „von dieser Art sind die Spiralen, die Quadratrix, die Konchoïde und Kissoïde.“

§ 133. Nicht weniger verkehrt, als das Zeitalter des Diokles,

---

1) Pappi coll. mathem. (Bologna, 1660) p. 9 u. 86. — Eutoc. comm. in Arch. libr. II. de sph. et cyl. ed. Torelli p. 146.

2) Es mag hier beiläufig erwähnt werden, dass Dionysodoros nach Strabon XII, 3. — C. 548. — Mein. p. 770) aus Amisus stammt, nicht aus Emesa, wie Montucla (hist. d. math. Vol. I. p. 272) mit gewohnter Oberflächlichkeit angiebt.

ist das eines anderen Geometers angesetzt, nämlich des **Hypsikles.** Wir besitzen von diesem bedeutenden Schriftsteller noch eine Vergleichung der fünf regulären Körper, die gewöhnlich des Euklides Elementen als 14tes und 15tes Buch angehängt wird, und eine kleine Schrift astronomischen Inhaltes, *ἀναφορικός* „von den Aufsteigungen," betitelt. Die erste dieser beiden Schriften gewährt für die Zeitbestimmung ihres Verfassers nur mässigen Anhalt. Hypsikles erwähnt in derselben zwei verschiedene Ausgaben eines Werkes des Apollonios, über die Vergleichung des in einerlei Kugel beschriebenen Dodekaëders und Ikosaëders, und fügt die Bemerkung bei, dass die zweite Ausgabe dieser Schrift allenthalben zu haben sei, woraus hervorzugehen scheint, dass dieselbe noch kein zu hohes Alter besessen haben kann. Denn dergleichen Monographieen pflegten im Alterthume keine solche zähe Lebensdauer zu entwickeln als wie in neueren Zeiten. Von anderweiten Notizen giebt Hypsikles nur den Namen seines Lehrers, Isidoros, den er einen berühmten Mann nennt.

Die zweite Schrift unseres Geometers, der Anaphorikos, versucht, die Aufgangszeiten, oder kürzer gesprochen, die Tagebogen der einzelnen Punkte der Ekliptik annähernd zu bestimmen, und will dies durch Anwendung einer einfachen arithmetischen Progression erreichen, ein Verfahren, welches, wie Delambre (astron. ancienne Vol. I. p. 246) nachweiset, noch sehr fehlerhafte Resultate liefert, allein zu einer Zeit, in welcher noch kein Gedanke an eine Trigonometrie zu finden ist, in Ermangelung eines Besseren ausreichen musste. Es ward daher das Schriftchen unseres Geometers in die späterhin mit dem Namen „des kleinen Astronomen" bezeichnete Sammlung astronomischer Monographieen aufgenommen, wodurch sie höchst wahrscheinlich uns erhalten worden ist. Durch den eben besprochenen Inhalt derselben sind wir aber genöthigt, die Abfassung derselben vor die durch Hipparchos und Theodosios begonnene Entwickelung der Trigonometrie anzusetzen. Denn einem Geometer von dem Gewichte des Hypsikles konnte es unmöglich begegnen, mit einer wahrhaft kindlichen Lösung einer Aufgabe vor das Publikum zu treten, nachdem zu deren strenger Bearbeitung die nöthigen Hülfsmittel bereits vorlagen. Es wird daher kaum möglich sein, unseren Geometer weiter herabzusetzen als bis gegen 150 v. Chr. — Mit dieser Annahme stimmt auch das einzige Citat zusammen, welches sich über Hypsikles erhalten hat, nämlich das des Diophantos im achten Satze seiner Schrift über die Polygonalzahlen, wo ihm die Entdeckung eines arithmetischen Satzes zugeschrieben wird, der sich späterhin auch in der Arithmetik des Nikomachos findet. — Nach diesem Allen ist es wohl ganz natürlich, dass Hypsikles in das Jahrhundert von 250 bis 150 v. Chr. gesetzt wird, wie dies von *wirklichen*

Sachverständigen, z. B. Vossius, Delambre auch einstimmig geschieht.

Um so unverständiger ist die Conjectur des Fabricius, der (bibl. graeca ed. Harl. tom. IV. p. 20) nach allerhand ins Blaue hinein gemachten Annahmen unseren Geometer an den Schluss des 2ten Jahrhunderts *nach* Christo setzt. Da soll der Isidoros, von dem Suidas berichtet, dass er *ὑπὸ τοῖς ἀδελφοῖς* „unter den Brüdern" gelebt habe, der Lehrer des Hypsikles sein, und jene Brüder die beiden Kaiser Marcus Aurelius und Lucius Verus. Einen solchen Einfall konnte in der That nur ein Mann haben, der entweder den Anaphorikos gar nicht gelesen hatte, oder, wenn dies doch der Fall gewesen, mit der Geschichte der Griechischen Geometrie und Astronomie so total unbekannt war, dass er von der Lächerlichkeit seiner Hypothese gar keine Ahnung besass. Dass des Fabricius Meinung von den Philologen als die allein richtige anerkannt wird, versteht sich von selbst; — sie ist noch in dem einschlagenden Artikel der Pauly'schen Realencyclopädie auseinander gesetzt, und wird in demselben die abweichende Meinung eines Mannes wie Delambre *mit* hochmüthiger Geringschätzung abgewiesen. Dass aber Montucla, als Sachkundiger, diesem Unverstande gleichfalls huldigt und es gar nicht wunderbar findet, dass ein Hypsikles, volle zweihundert Jahre nach der Einführung der Trigonometrie, eine in des *Ptolemaios syntaxis* bereits vollkommen gelöste trigonometrische Aufgabe *ohne* Trigonometrie, auf eine so stümperhafte Art noch einmal zu lösen unternehmen soll, — das ist in der That sehr zu verwundern und zeigt abermals, wie höchst oberflächlich und selbst gedankenlos dieser Verfasser einzelne Theile seines Werkes behandelt hat.

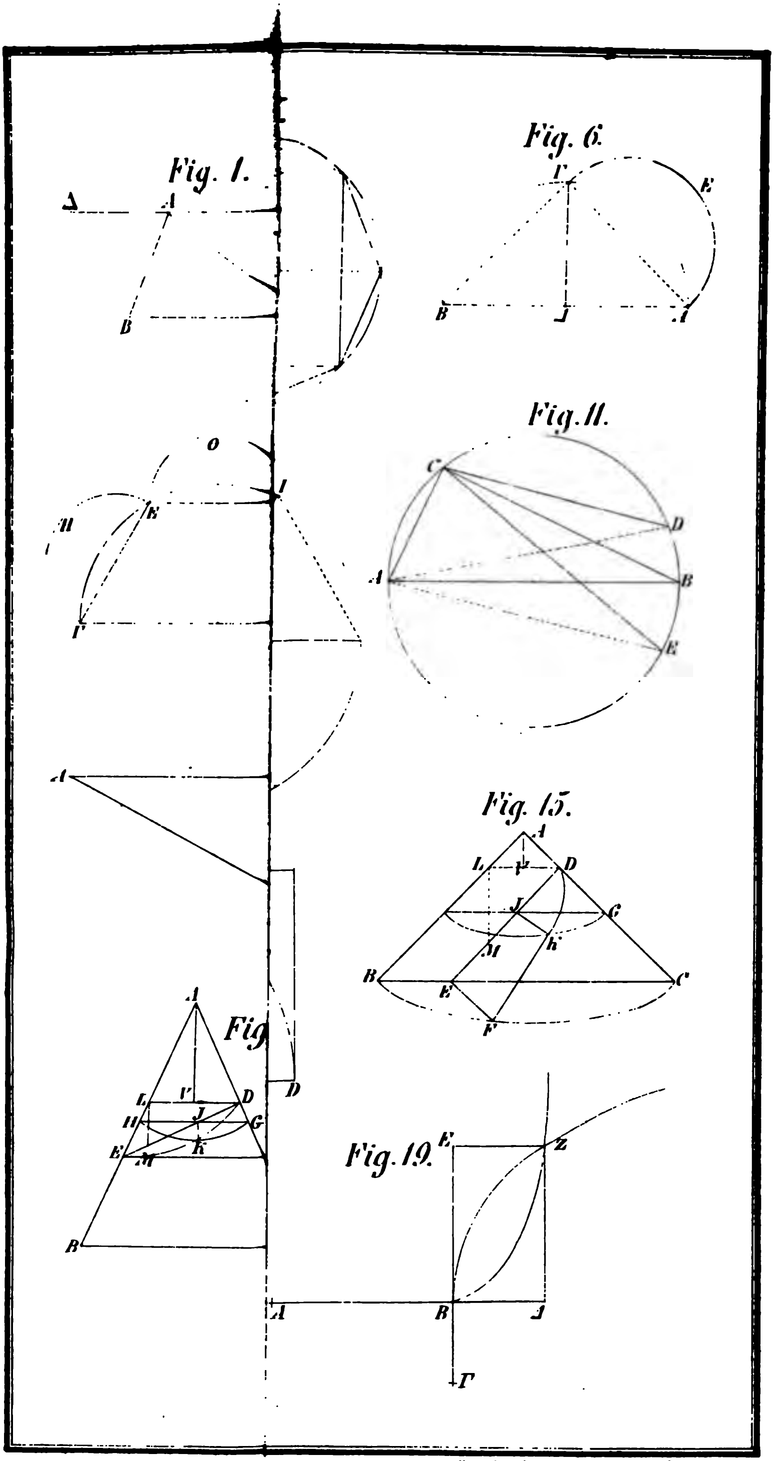
Wie leicht es übrigens ist, über diesen Gegenstand eine Hypothese à la Fabricius aufzustellen, mag man an folgendem Beispiele sehen. — Den Isidoros, Lehrer des Hypsikles, erkennen wir in jenem Kriegsbaumeister gleiches Namens, von dem Biton in seinen *κατασκευαὶ πολεμικῶν ὀργάνων καὶ καταπελτικῶν* (Thevenot p. 107) angiebt: *Isidorus Abydenus petrariam machinam construxit.* Auf diesen beziehen wir des Suidas Worte: *Ἰσίδωρος φιλόσοφος ὃς ἐφιλοσόφησε μὲν ὑπὸ τοῖς ἀδελφοῖς, εἴπερ τις ἄλλος ἐν τοῖς μαθήμασιν ἐπιμελής τε κ. τ. λ.*, — und verstehen unter „den Brüdern" das Aegyptische Herrscherpaar Ptolemaïos VI., Philometor und Ptolemaios VII., Physkon, die zusammen von 181 bis 117 v. Chr. regierten und wirklich Brüder waren. Durch diese Hypothese wird wenigstens kein wissenschaftlicher Unsinn zu Tage gefördert, wenn auch gar Vieles in derselben sehr zweifelhaft erscheinen muss.

§ 134. Weniger bestimmt, als in dem eben besprochenen Falle, ist das Resultat der Untersuchung über dae Zeitalter des Geometers **Serenos**, von dem noch zwei Schriften, über die Schnitte am Kegel und am Cylinder auf uns gekommen sind. Beide enthalten gar keine Angabe, aus welcher auf die Zeit ihrer Abfassung geschlossen werden könnte, und so bleiben nur Vermuthungen allgemeinerer Art übrig, die immer nur eine mehr oder minder grosse Wahrscheinlichkeit für sich haben. Sein Geburtsort, Antissa auf Lesbos, ist 167 v. Chr. von den Römern zerstört worden, zur Strafe für die Unterstützung, die er einem Macedonischen Admiral geleistet hatte (Livius

XLV. c. 31 s. f.). Da Plinius ihre Stätte sogar als vom Meere verschlungen erwähnt (hist. nat. ed. Jan. II. c. 94), so wird der aus ihr gebürtige Serenos schwerlich später als 150 v. Chr. anzusetzen sein; wahrscheinlich aber fällt seine Blüthezeit um den Anfang des zweiten Jahrhunderts v. Chr. — Wenn es nämlich eine bemerkenswerthe Erscheinung auf dem Gebiete nicht blos der Mathematik, sondern aller Wissenschaften ist, dass eine ausserordentliche Leistung in einem speciellen Theile derselben für längere Zeit hin die Thätigkeit aller Geister zweiten und niederen Ranges nach dieser einen Richtung hinwendet, und andere Zweige der Wissenschaft einstweilen brach liegen bleiben, so werden wir uns eingestehen müssen, dass des Apollonios Kegelschnitte in der That ein Werk sind, dem wir einen solchen bestimmenden Einfluss auf die Thätigkeit der Zeitgenossen zuschreiben dürfen. Es hat daher gar nichts Wunderbares, wenn mehrere Jahrzehnte nach dem Erscheinen dieser grossartigen Untersuchung Geometer zweiten Ranges einen gewissen Abschluss in die ganze Lehre dadurch zu bringen versuchten, dass sie nicht nur alle Schnitte, die noch am Kegel stattfinden können, ohne eigentliche Kegelschnitte zu geben, — sondern auch alle möglichen Schnitte am Cylinder untersuchten, und zugleich nachwiesen, dass die letzteren keine anderen Curven erzeugen, als die durch die Schnitte des Kegels bereits erhaltenen. Das scheint denn in Wirklichkeit auch der Zweck des Serenos gewesen zu sein. Seine beiden Schriften beurkunden noch das volle Interesse an der Erweiterung der theoretischen Einsicht in den Zusammenhang geometrischer Wahrheiten, und das Bemühen, die gewonnenen Resultate auch als praktisch verwendbar nachzuweisen, lässt sich noch gar nicht spüren. Dieser neue Charakterzug der Alexandrinischen Geometrie beginnt erst mit dem Anfange des zweiten Jahrhunderts vor Christo sich fühlbar zu machen; und wir gestehen, dass es vornehmlich dieser Gesichtspunkt ist, der uns bestimmt, den Serenos etwa zwischen 220 und 180 vor Christo zu setzen.

Martin, in seiner Ausgabe der Astronomie des Theon Smyrnaios (p. 340), giebt aus einem Pariser Codex ein kurzes Fragment, überschrieben: *Σερήνου τοῦ φιλοσόφου ἐκ τῶν λημμάτων* — „aus den Hülfssätzen des Philosophen Serenos", — in welchem, durch ein einfaches geometrisches Theorem über excentrische Kreise, die Ungleichheiten in dem jährlichen Umlaufe der Sonne erklärt werden. Das Fragment kann ganz wohl unseren Geometer zum Verfasser haben, und auch der Inhalt des ersteren würde mit dem Stande der Astronomie am Beginne des zweiten Jahrhunderts vor Christo übereinstimmen.

Montucla setzt den Serenos unbestimmt in die ersten vier Jahrhunderte *nach* Christo (hist. d. math. Vol. I. p. 315); aus welchem Grunde aber dies geschieht, giebt er weiter nicht an.



Zu Bretschneider: D.