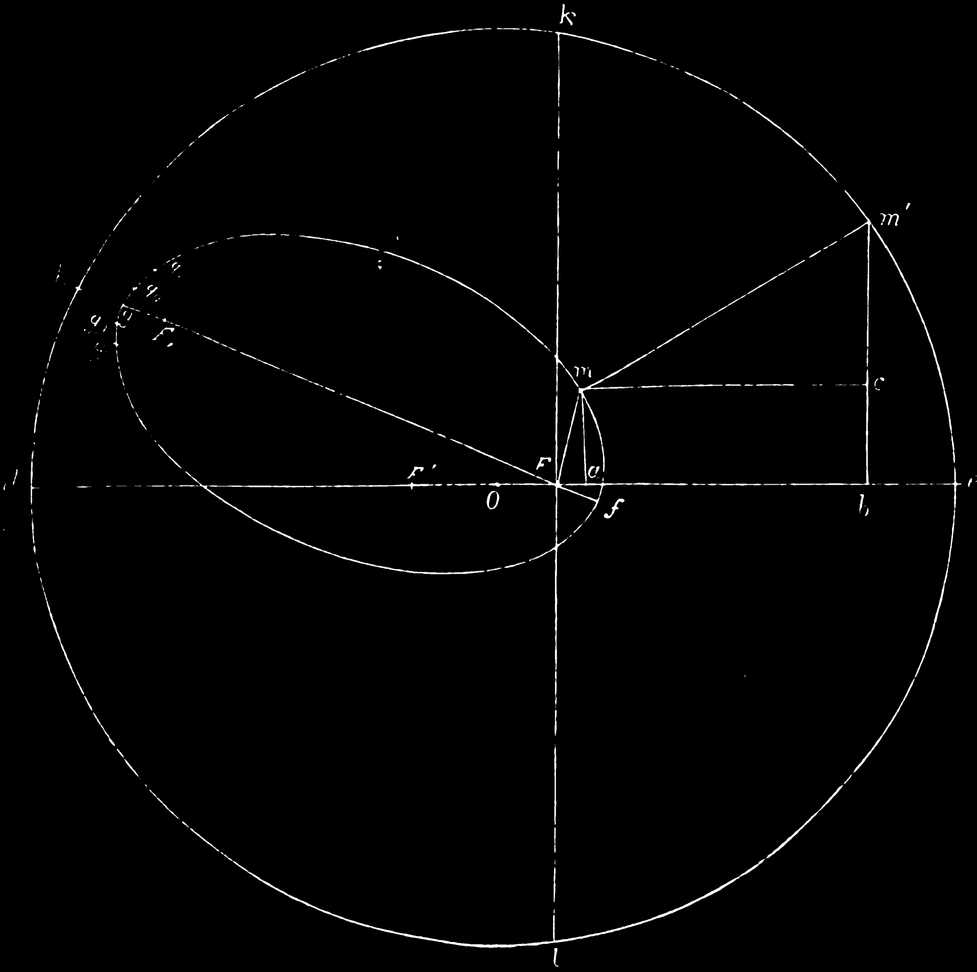


Die Grundlehren der Astronomie nach ihrer ...

Hugo Gyldén

DIE GRUNDLEHREN

DER

ASTRONOMIE

NACH IHRER GESCHICHTLICHEN ENTWICKELUNG DARGESTELLT

VON

HUGO GYLDÉN,

ASTRONOM DER K. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN STOCKHOLM.

DEUTSCHE, VOM VERFASSER BESORGTE UND ERWEITERTE AUSGABE.

MIT 33 HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG,
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN.
1877.

VORWORT.

Das vorliegende Buch verdankt seine Entstehung zunächst dem Wunsche des Verfassers, seinen schwedischen Landsleuten eine elementare Darstellung jener Arbeiten und Entdeckungen darzubieten, in denen die neuere Astronomie ihre Begründung fand und durch welche zugleich die Vorstellungen des Alterthums und des Mittelalters von dem Weltgebäude auf immer vernichtet wurden. Es waren also besonders die Leistungen Kepler's und Newton's auf dem inductiven Forschungsgebiete, deren Entstehung, Entwickelungsgang und Tragweite in angemessener Kürze vorgeführt werden sollten, und zwar so, dass nicht nur die gewonnenen Resultate selbst, sondern auch ihre innere Nothwendigkeit hervortrat. — Diesem Kerne wurde die Darstellung anderer Theile der astronomischen Wissenschaft angereiht, und namentlich erschien eine allgemeine Uebersicht des Entwickelungsganges derselben vor der sogenannten »Reformation der Sternkunde« geboten, welcher daher auch ein Drittheil des ganzen Buches gewidmet wurde.

Die Folgerungen der Newton'schen Lehre von der allgemeinen Gravitation lassen sich erst genügend würdigen, wenn sie mit den Resultaten der neueren, in so hohem Grade verfeinerten Beobachtungskunst verglichen werden. Die Beschreibung der wesentlichsten Methoden und Hülfsmittel, durch die man zur Kenntniss der scheinbaren Bewegungen der Gestirne gelangt, durfte also in unserem Buche nicht fehlen. In solcher Weise entstand eine Darlegung der astronomischen Lehren, die allerdings nicht auf grosse Vollständigkeit Anspruch macht, welche aber doch das Wesentlichste und gewissermassen das Fundament des ganzen Lehrgebäudes enthält, indem die wichtigsten Forschungen der Neuzeit, wenn auch in gedrängter Kürze, in dem vierten Kapitel ihre Berücksichtigung fanden.

Bei der Darstellung konnte die mathematische Ausdrucksweise nicht ohne weitläufige Umschreibungen nöthig zu machen entbehrt werden; dass aber durch die Anwendung mathematischer Bezeichnungen das Verständniss der astronomischen Lehren eher erleichtert als erschwert wird, dürfte kaum zu bezweifeln sein. Dem Verfasser der Mécanique céleste ist es zwar gelungen, in einem meisterhaften Werke: Exposition du système du monde die Lehren der Astronomie ohne Hülfe der algebraischen Bezeichnungen darzulegen, allein die Schönheiten jener Darstellung werden wohl vorzugsweise nur von denen gewürdigt werden können, die in der Mathematik nicht unbewandert sind; und jedenfalls dürfte die Erklärung des inductiven Forschungsprocesses schwerlich in der gewöhnlichen Sprache gelingen, weil man bei diesen Forschungen hauptsächlich eben mit Zahlen operirt. — Man wird in diesem Buche nicht wenige Zahlenangaben finden; sie sind angeführt, um das Wesen der Induction bei astronomischen Untersuchungen zu veranschaulichen, in selteneren Fällen auch um Resultate derselben zu geben.

Das Maass der mathematischen Kenntnisse, welches zum Verständniss unserer Darstellung vorausgesetzt wird, ist indessen ein sehr geringes, und beschränkt sich eigentlich auf die Bezeichnungsweise der Algebra. Die Grundformeln der Trigonometrie konnten freilich auch nicht ohne grosse Nachtheile bei der Wiedergabe astronomischer Untersuchungen entbehrt werden; eine kurze Ableitung der wichtigsten dieser Formeln schien daher nicht unzweckmässig. Durch eine solche Anordnung hofft man dem Buche den Zugang zu einem grösseren Publikum bereitet und erleichtert zu haben.

Die deutsche Ausgabe ist keineswegs eine blosse Verdeutschung der schwedischen; vielmehr wurde die von anderer Hand ausgeführte Uebersetzung vom Verfasser umgearbeitet und wesentlich vermehrt; namentlich ist das vierte Kapitel in mehrfacher Weise erweitert worden. Der Ausländer erlaubt sich daher die Nachsicht der deutschen Leser zu erbitten, wenn die Behandlung der Sprache nicht allen Anforderungen entsprechen sollte; er bedürfte dieser Nachsicht noch mehr, hätte er nicht das Glück gehabt, in seinem Freunde Herrn Dr. R. Engelmann einen eben so umsichtigen wie kenntnissreichen Förderer dieser Ausgabe zu finden.

Stockholm, im Februar 1877.

Der Verfasser.

INHALT.

Einleitung.

Durch ihre Eigenschaft, beim Eintreten gewisser Bedingungen zu leuchten, oder Licht auszusenden, sind wir im Stande, die Materie im Weltraume direct wahrzunehmen. Wir finden sie in ungeheuren Entfernungen: theils ist sie zusammengeballt zu immensen, kugelförmigen Körpern, die wir im Allgemeinen mit dem Namen Sterne bezeichnen, theils erscheint sie uns in ungeheurer Ausbreitung, häufig ohne genau geformte und bestimmte Begrenzung und im Zustande einer für unsere irdischen Begriffe ganz ungewöhnlich geringen Dichtigkeit. Solche Anhäufungen von Materie in gasförmigem Zustande, oder von materiellen Partikelchen, erblicken wir unter den Nebelflecken, in den Cometen, in den kosmischen Schwärmen (Wolken), die, in die Nähe der Erde gekommen, uns das Schauspiel der Sternschnuppen gewähren.

Nach dem Anfang oder dem Ursprung der Materie zu fragen, ist vergeblich; wir sind im Gegentheile darauf angewiesen, in unseren Gedanken die Materie als immer vorhanden gewesen zu betrachten. Und würde Jemand wirklich im Ernste eine derartige Frage stellen, so müsste er doch schliesslich zugeben, dass er den Ursprung höchstens auf eine Umformung zurückführen könne. — Jedenfalls müssen Ursachen vorhanden gewesen sein, welche die Materie in solche Formen verwandelten, dass die sinnliche Auffassung derselben möglich wurde, wenn sie es nicht immer war; diese Ursachen können aber doch nur solche gewesen sein, die ihrer Leistung und Fähigkeit zu wirken wegen, die Voraussetzung der Materie uns abnöthigen. Ebensowenig wie wir die Materie vernichten können, sondern sie nur in solche Formen umzusetzen vermögen, dass sie sich unserer Wahrnehmung entzieht, ebensowenig ist es möglich, eine erste Entstehung der Materie irgendwie uns vorzustellen. Die Materie ist also, nach unserer nothwendigen Auffassung derselben, ohne Anfang und ohne Ende.

Soweit wir den Raum mit unseren Fernröhren durchdringen können, erblicken wir die Materie in Form fein schimmernder Nebelwelten, die zum grossen Theile aus einer Unzahl von Sternen bestehen, welche nur in Folge der unermesslichen Entfernung als so dicht an einander gedrängt erscheinen. Je vollendeter unsere optischen Hülfsmittel geworden sind, desto tiefer haben wir unsere Blicke in den Weltraum werfen können, aber noch nie sind wir an eine Begrenzung, ein Ende der Materie gekommen; wir können daher annehmen, dass tiefer gehende Blicke leuchtender Materie auch in noch grösserer Entfernung begegnen werden. Es kann uns nun ziemlich gleichgültig sein, ob wir sagen, dass die Materie ohne Grenzen vorhanden, oder ob sie innerhalb einer Begrenzung eingeschlossen ist; jedenfalls sind die Grenzen von so ungeheurer Ausdehnung, dass wir sie nie werden erfassen können, und sie folglich als für uns gar nicht vorhanden ansehen dürfen.

Trotzdem die tägliche Erfahrung uns das Entgegengesetzte zu beweisen scheint, müssen wir doch der Materie, und zwar auf Grund der Art und Weise wie wir dieselbe auffassen, eine allgemeine Eigenschaft zuertheilen, die nämlich, in Bewegung zu sein. In der That, es bedürfte der Vorstellung eines Atlas, welcher den Himmel trägt, oder von Aehnlichem, um nicht bei einiger Ueberlegung einzusehen, dass wir uns den Begriff der absoluten Ruhe gar nicht bilden können. Wenn uns nämlich ein Punkt in Ruhe erscheint, so ist diese Ruhe nur eine relative gegen einen andern Punkt, der dieselbe Bewegung mit ersterem hat, die wir aber nicht kennen. Einen Punkt, von dem wir behaupten könnten, dass er in absoluter Ruhe wäre, können wir uns gar nicht denken, und wir könnten, wenn ein solcher auch wirklich vorhanden wäre, doch nie diese seine Eigenschaft erkennen. Wenn wir aber uns eine absolute Ruhe durchaus nicht vorstellen können, so dürfen wir auch nicht nach der Ursache der Bewegung fragen: die Bewegung braucht keine Ursache zu haben, und es hätte überdies keinen Sinn, nach der Ursache dessen zu fragen, von dem wir uns das Entgegengesetzte gar nicht vorstellen können. Wir können höchstens nach der Ursache der einen oder der andern Art von Bewegung fragen, und müssen dies auch thun, sobald die Bewegung als nicht geradlinig und gleichförmig erkannt wird.

Eine weitere Eigenschaft der Materie ist uns durch die Erfahrung bekannt; wir wissen nämlich, dass jede materielle Partikel jede andere anzieht, oder überhaupt, dass die Molecüle auf einander auch in der Ferne einwirken. Insofern diese Einwirkung in der gewöhnlichen Anziehung besteht, nennen wir sie die allgemeine Schwere. Diese Eigenschaft der Materie bewirkt, dass die Körper im Weltraume nicht in geradlinigen Bahnen und mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreiten, wie es der Fall sein würde, wenn keine Fernewirkung stattfände. Die allgemeine Schwere oder Anziehung muss daher als eine Kraft betrachtet werden, d. h. als eine Ursache, die Aenderungen in den schon stattfindenden Bewegungen hervorbringt. — Die Einwirkung der Schwerkraft ist nicht unabhängig von der Entfernung der angezogenen Molecüle, sondern nimmt ab, wenn diese grösser wird, und zwar im umgekehrten Verhältniss des Quadrats derselben.

Dächten wir uns die Materie ohne die Eigenschaft der Fernewirkung, d. h. alle äusseren Kräfte im Weltraume weg, so dürften wir den verschiedenen Körpern im Weltraume keine andere als geradlinige und gleichförmige Bewegungen beilegen; denn um solche in irgend einer Beziehung abzuändern, sie zu verstärken oder abzuschwächen, oder ihre Richtungen zu verändern, ist das Vorhandensein einer Kraft, d. h. einer Ursache, unbedingt erforderlich.

Der Begriff der Anziehung führt zu dem Begriffe der Masse. Wir können zwar »die Masse« an und für sich nicht definiren, aber wir können die Gleichheit zweier Massen, und folglich auch ihre Ungleichheit ausdrücken. Wenn nämlich zwei Körper einen dritten in derselben Entfernung ganz gleich anziehen, so sagen wir, dass die beiden ersten die gleiche Masse haben; umgekehrten Falles würde der eine der beiden ersten Körper eine grössere Masse haben als der andere, und zwar derjenige, der die stärkere Wirkung ausübt. Es ist daher bloss eine Umschreibung, wenn man sagt, die Molecüle ziehen einander an im Verhältniss ihrer Massen.

Die allgemeine Schwere bewirkt indessen, dass die Bewegungen im Weltraume nicht geradlinig und nicht gleichförmig sind, sondern dass die Körper sogar häufig in geschlossenen Bahnen um einander sich bewegen. Die Natur der Bahnen, sowie die Gesetze der Bewegung in denselben hängt offenbar von zwei wesentlich verschiedenen Umständen ab, nämlich erstens von der Richtung der Bewegung und der Geschwindigkeit des Körpers, so wie diese in einem gegebenen Zeitpunkte sein würden, wenn keine anderen Körper eine Fernewirkung ausübten; zweitens aber von der zufälligen Lage und den (relativen) Massen solcher Körper, die jedenfalls vorhanden sind, wenn auch mitunter zur Zeit in so grosser Entfernung, dass ihre Einwirkung ausserordentlich gering erscheint. Es schliesst dies nicht aus, dass ein Körper, der gegenwärtig von sehr geringen oder kaum merklichen Kräften angegriffen wird, früher oder später in solche Lage zu anderen Körpern kommt, dass die auf seine Bewegung wirkenden Kräfte sehr bedeutend werden.

Die Wissenschaft von den Gesetzen dieser Bewegungen hat man Astronomie genannt. Unter dieser Bezeichnung fasst man aber nicht nur die Untersuchungen, die auf die wirklichen Bewegungen im Weltraume Bezug haben, zusammen, sondern man rechnet hierher auch alle Fragen, die sich auf die scheinbaren Bewegungen der Gestirne beziehen, also auf solche Bewegungen, die aus der Bewegung der Erde (der fortschreitenden sowohl wie der rotatorischen) scheinbar entstehen; endlich die Ermittelung der scheinbaren Ortsänderungen der Gestirne am Himmel, die auf den Eigenthümlichkeiten des Lichtes beruhen, also auf seiner Fortpflanzungsgeschwindigkeit und seiner Brechung in der Atmosphäre.

Die astronomischen Untersuchungen können, oder vielmehr müssen auf zwei von einander principiell verschiedenen Wegen geführt werden, nämlich auf einem inductiven und auf einem deductiven; was auf dem einen gefunden wird, muss auf dem andern bestätigt werden, und zwar innerhalb einer im Voraus bestimmten Genauigkeitsgrenze. Sollte aber die Bestätigung ausbleiben, so wird das Ergebniss der ganzen Untersuchung als ungenügend erachtet.

Durch astronomische Beobachtungen bestimmt man die Richtungen, in denen die Himmelskörper zu den entsprechenden Zeiten gesehen werden. Vergleicht man solche, zu verschiedenen Zeiten aufgefasste Richtungen desselben Gestirns mit einander, so gelangt man zur Kenntniss der scheinbaren, am Himmelsgewölbe beschriebenen

Bahn desselben. Diese scheinbare Bahn ist nun freilich in der Regel etwas ganz anderes, als die wirklich im Raume beschriebene Curve. Die scheinbaren Bewegungen folgen nämlich nicht nur aus den wirklichen Bewegungen, sondern spiegeln zum grossen Theile nur die der Erde wieder. So ist z. B. die scheinbare jährliche Umlaufsbewegung der Sonne um die Erde allein veranlasst durch die wirkliche Bewegung der Erde um die Sonne. Ausserdem erblicken wir stets die auf dem scheinbaren Himmelsgewölbe projicirten Bewegungen und können bis jetzt nicht direct die Veränderungen des Abstandes von uns wahrnehmen. — Allein auf alle Fälle gewinnt die Astronomie gerade aus diesen, direct aus den Beobachtungen hergeleiteten scheinbaren Bewegungen, oder wenn man so will, aus den Beobachtungen selbst neue Data und neues Forschungsmaterial. Es ist daher nöthig, im Besitze von Methoden zu sein, durch die man mit Leichtigkeit die Bewegungen auf der Sphäre untersuchen kann. Solche Methoden haben einen rein geometrischen Charakter und ihre Gesammtheit nennt man die sphärische Astronomie.

Mit diesem Theile der Astronomie hängt die Beobachtungskunst oder die sogenannte practische Astronomie aufs Innigste zusammen. Wie schon oben gesagt wurde, besteht das Resultat einer astronomischen Beobachtung in der Auffassung einer Richtung, d. i. mit anderen Worten, in der Bestimmung der Lage eines Punktes auf der als eine Sphäre gedachten Himmelskugel, oder, wie man mit einem technischen Ausdrucke sagt, in der Angabe der sphärischen Coordinaten dieses Punktes.

Die weitere Untersuchung erfordert nun die Lösung einer ganz besondern Aufgabe, nämlich die: aus den von der Erde, die selbst in Bewegung ist, angestellten Beobachtungen die wirklichen Bahnen der Himmelskörper zu bestimmen. Die Methoden, welche zur Lösung dieser Aufgabe ersonnen sind, fasst man unter dem Namen theorische Astronomie zusammen.

Endlich kommt es darauf an, aus der erkannten wirklichen Bewegung eines Himmelskörpers einen Schluss auf die Kräfte zu ziehen, die seine Bewegung beeinflussen, sowie diejenige Bewegung zu bestimmen, die stattfinden würde, wenn die wirksamen Kräfte plötzlich aufhörten zu wirken. Dieses Gebiet der Forschung hat man auch die physische Astronomie genannt. — Hiermit endet der Faden der inductiven Untersuchungen auf dem astronomischen Gebiete. Wie man leicht einsieht, läuft dieser in seinem letzten und höchsten Stadium auf die Forschungen hinaus, welche die Lehren von den Bewegungen und Kräften im Allgemeinen, sowie von dem Zusammenhang beider zu entdecken und zu erweitern bezwecken, also auf die Lehren der Mechanik. — Die Astronomie hängt demnach auf's Engste mit der Mechanik zusammen, weshalb auch Laplace den theoretischen Theil der erstgenannten Wissenschaft die Mechanik des Himmels (Mécanique céleste) genannt hat.

Die Aufgaben der theorischen und physischen Astronomie sind im Grunde genommen, wenn man sie von der inductiven Seite auffasst, unbestimmt und können deshalb entweder gar nicht oder wenigstens in verschiedener Weise gelöst werden. Es kann aber gerade im Laufe der Untersuchung, besonders wenn man sie auf deductivem Wege zu bestätigen sucht, eine Annahme (Hypothese) sich als so wahrscheinlich herausstellen, dass man an ihrer Richtigkeit, wenigstens im Wesentlichen, gar nicht mehr zweifeln kann. Dies wird durch die folgenden Betrachtungen sogleich einleuchten.

Ursprünglich wissen wir weder ob die Erde sich bewegt, noch, wenn dies auch angenommen würde, wie diese Bewegung beschaffen sei. Wenn ich mich aber selbst in Bewegung befinde, ohne deren Beschaffenheit zu kennen, und einen Gegenstand sehe, von dem ich auch nur weiss, wie seine Bewegung mir erscheint, so kann ich unmöglich entscheiden, wie dieser Gegenstand seinen Ort im Raume wirklich verändert. Vor allen Dingen müsste der Abstand des beweglichen Gegenstandes von meinem bewegten Standpunkte in jedem Augenblicke bekannt sein, oder auch das Gesetz, wonach die Veränderungen des Abstandes vor sich gehen, nebst einer Angabe, wonach die relativen Werthe dieser Abstände in bekanntem Maasse ausgedrückt werden können. Solche Abstände zu bestimmen ist aber eine äusserst schwierige Aufgabe, die nur in höchst seltenen Fällen direct gelöst werden kann. In dem Sonnensysteme gelang es Kepler, Abstände der Planeten zu bestimmen, sowie die Aenderung der Entfernung zwischen der Erde und der Sonne; Alles ausgedrückt in der mittlern Entfernung der beiden letztgenannten Himmelskörper, welche als Einheit angenommen wurde. Diese Bestimmung gelang ihm aber nur dadurch, dass er annehmen konnte, dass die Planeten nicht minder wie die Erde sich in geschlossenen Bahnen um die Sonne bewegten, so dass ein jeder Körper nach einem siderischen Umlaufe an denselben Punkt im Raume zurückkommt. Um die Untersuchung selbst durchführen zu können, mussten Beobachtungen, die sich über viele Umläufe erstreckten, mit einander verglichen werden. Ein Glück, dass der Planet Mars, den seine Untersuchungen zunächst betrafen, eine relativ so kurze Umlaufszeit hat! — Wenn nun aber keine derartige Bestimmung möglich ist, wenn wir nicht wissen, ob wir es mit Umlaufsbewegungen zu thun haben oder mit Bewegungen anderer Natur, dann ist, wie gesagt, die Aufgabe unbestimmt. Sie wird möglicherweise dann lösbar, wenn wir durch Hinzuziehung sehr vieler Beobachtungen gewisse allgemeine Gesetze der Bewegung ermittelt haben, auf Grund welcher wir die einzelnen Beobachtungen mit einander verbinden können.

Gewöhnlich lassen sich die scheinbaren Bewegungen, auch wenn man die wirklichen gar nicht kennt, durch passende räumlich-geometrische Annahmen anschaulich machen, oder, wie man auch sagt, sich erklären. So z. B. konnte die scheinbare Bewegung der Sonne dadurch erklärt werden, dass man ihr eine wirkliche Bewegung um die Erde zuschrieb, aber diese scheinbare Bewegung konnte ja auch, wie sie es factisch ist, nur eine Reflexion der Erdbewegung sein. Es waren also zwei mögliche Erklärungsarten vorhanden, und jede einzelne entsprach vollkommen in derselben Weise der durch die Beobachtungen ermittelten scheinbaren Bewegung der Sonne; und zu diesen hätte man beliebig viele hinzufügen können, sobald einmal die Annahme der Bewegung beider Körper zugelassen war. Bald musste sich zwar herausstellen, dass die beiden Körper um einander in Bewegung waren, aber um welchen gemeinsamen Punkt, konnte aus den Beobachtungen der Sonne allein nicht entschieden werden. — Dergleichen geometrische Erklärungen von den Bewegungen der Sonne, des Mondes und der Planeten hat man seit undenklichen Zeiten versucht, und hat sie Weltsysteme genannt. Das letzte derselben war das Copernicanisch-Kepler'sche, von dem wir jetzt sagen können, dass es mit der Wahrheit so nahe übereinstimmte, wie nach dem damaligen Stande der Beobachtungskunst beansprucht werden konnte, und noch jetzt bleibt die Ansicht des Copernicus, dass die Sonne im Sonnensysteme still steht, stets näherungsweise richtig, sowie es auch die

Gesetze bleiben, welche Kepler's Namen tragen. Allein die wahren Gesetze der Planetenbewegungen finden wir auch in diesem Systeme keineswegs wieder. Die Sonne bewegt sich im Sonnensysteme um den Schwerpunkt des ganzen Systems, der freilich häufig innerhalb des Sonnenkörpers fällt, und die Gesetze der Planetenbewegungen werden durch mathematische Ausdrücke angegeben, die eine sehr grosse Anzahl Glieder enthalten, von denen nur wenige, aber allerdings die grössten, in dem Kepler'schen Systeme berücksichtigt waren. Diese höchst glücklich durchgeführte Induction Kepler's war nothwendig, um zu der Entdeckung der allgemeinen Schwere zu gelangen, die später ihre Bestätigung gerade in den Abweichungen der Kepler'schen Gesetze von den Ergebnissen der Beobachtung fand. Nachdem das Gesetz der allgemeinen Schwere entdeckt war, musste man schliessen, dass die Masse oder die Anziehungskraft der Sonne die der Planeten sehr viele Male übertreffe; auch konnte man Versuche machen, die Massen der Planeten untereinander, sowie mit der Sonnenmasse zu vergleichen.

Die astronomische Wissenschaft war hiermit auf dem Punkte angelangt, dass man die Gesetze der Planetenbewegungen auf deductivem Wege ermitteln konnte. Man kannte die Umlaufszeiten der verschiedenen Planeten mit grosser Genauigkeit, man kannte die Lage und die Form ihrer Bahnen, endlich hatte man die Massen derselben, wenigstens die der grösseren, bestimmt. Es war nun nur noch eine Aufgabe der Mechanik, nicht nur die Gesetze Kepler's, sondern auch eine Theorie der Planetenbewegungen zu entwickeln, welche der immer steigenden Genauigkeit der Beobachtungen entsprach. Auf deductivem Wege konnte man also die scheinbaren Bewegungen der Sonne und der Planeten im Voraus berechnen, worauf eine Vergleichung mit der beobachteten Bewegung zur Bestätigung der Annahmen diente, welche der theoretischen Berechnung zu Grunde gelegen hatten, d. i. der Bestimmungen der Bahnelemente sowie der Massen. Zeigten sich aber Unterschiede, die grösser waren, als dass sie der Unsicherheit der Beobachtung zugeschrieben werden konnten, so war es jetzt möglich, die früheren Bestimmungen zu verbessern.

Nach der Entdeckung der allgemeinen Schwere war es nicht mehr die Aufgabe der Astronomen, neue Weltsysteme zu construiren.

Man kann sie vielmehr jetzt, wenigstens insofern sie die Astronomie des Sonnensystems betrifft, als eine zweifache bezeichnen: nämlich als Bahn- und Massenbestimmung, und als Vorausberechnung. Das Problem der Bahn- und Massenbestimmung kann auch noch in anderer Weise formulirt werden, wodurch dasselbe etwas allgemeiner ausgedrückt wird und das Ziel, welchem wir uns auf dem inductiven Wege der Forschung nähern können, vollständig angiebt.

Wenn keine Kräfte wirkten, so würde die Bewegung eines Körpers, wie schon oben gesagt wurde, mit gleichförmiger Geschwindigkeit in der Richtung einer geraden Linie vor sich gehen. Wir würden daher die Lage des Körpers zu jeder beliebigen Zeit angeben können, wenn wir 1. die Lage des Körpers zu einem bestimmten Zeitpunkte und 2. seine Geschwindigkeit und die Richtung seiner Bewegung kennen. Die Lage im Raume wird nun stets durch drei Grössen, den drei Dimensionen entsprechend, angegeben; man nennt diese Grössen Coordinaten. Die Geschwindigkeit wird durch die Angabe, wie viel der Körper sich in einer beliebigen Zeiteinheit fortbewegt, ausgedrückt, und die Richtung der Bewegung durch zwei Winkelgrössen angegeben. Diese drei letzten Bestimmungsstücke lassen sich aber durch drei andere ersetzen, nämlich durch die Veränderungen, welche die drei Coordinaten in der Zeiteinheit erleiden. Wenn also keine Kräfte wirken, so ist die Bewegung eines Körpers und seine Lage zu einer beliebigen Zeit durch sechs Bestimmungsstücke vollständig bestimmt; diese sechs Grössen wollen wir Elemente der Bewegung nennen. So lange keine Kräfte wirken, bleiben sie selbstverständlich unverändert; wenn aber Kräfte vorhanden sind, so erleiden sie gewisse Aenderungen, die von der Grösse (Intensität) der Kraft und von der Richtung, in welcher sie angreift, endlich auch von den Bewegungselementen selbst abhängen. Dies ist folgendermaassen zu verstehen. Wir denken uns einen Körper in Bewegung, ohne dass Kräfte diese Bewegung beeinflussen; seine Bewegungselemente für einen gewissen Zeitpunkt, d. h. seinen Ort im Raume zu derselben Zeit, ebenso wie die Richtung und Geschwindigkeit seiner Bewegung setzen wir auch als bekannt voraus; endlich denken wir seine Bewegung nach einem bestimmten Zeitpunkte von Kräften angegriffen, die zu einem zweiten Zeitpunkte zu wirken aufhören. Diese Kräfte bewirken nun, dass die Geschwindigkeit des Körpers und im Allgemeinen auch seine Richtung verändert wird. Zu dem zweiten Zeitpunkte werden daher die Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung des Körpers im Allgemeinen andere Werthe haben als zu dem ersten, und da die Kräfte nun zu wirken aufgehört haben, so werden diese neuen Werthe unveränderlich sein. Berechnet man aber nun, mit der neuen Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung, aus der zu dem zweiten Zeitpunkte stattfindenden Lage des Körpers im Raume den Ort, welcher dem ersten Zeitpunkte entspricht, so wird man finden, dass die auf solche Weise berechnete Lage nicht mit derjenigen übereinstimmt, die vor dem Eingreifen der Kräfte stattfand. Somit sind alle Bewegungselemente verändert worden.

Sobald die Bewegungselemente eines Körpers zu einer gewissen Zeit ebenso wie die Kräfte, die auf ihn wirken, gegeben sind, so lässt sich seine Bewegung stets nach den Regeln der Mechanik berechnen; wenigstens ist die Aufgabe eine ganz bestimmte, und ihre Lösung kann nur auf mathematische Schwierigkeiten stossen. Anders verhält sich aber die Sache, wenn man die Bewegung kennt und die Kräfte ermitteln will, welche die Veränderungen der Bewegungselemente oder der durch bekannte Kräfte verursachten Bewegungserscheinungen bewirkt haben. Wüsste man, dass die unbekannte Kraft stets in einer einzigen Richtung wirkte, so würde man dieselbe ziemlich leicht ermitteln können; aber in der Regel muss man annehmen, dass die Kraft von einem Punkte aus wirkt, der selbst in einer noch unbekannten Bewegung begriffen ist, und zweitens kann man ja auch nie im Voraus wissen, ob nicht mehrere Kräfte vorhanden sind, d. h. Kräfte, die in verschiedenen Richtungen wirken. Die Aufgabe, aus der Bewegung, die als bekannt vorausgesetzt wird, die wirkenden Kräfte direct zu bestimmen, ist daher unlösbar, weil sie unbestimmt ist. Da ihre Lösung jedoch durchaus nothwendig ist, so muss man versuchen, sie auf indirectem Wege zu lösen, indem man gewisse Hypothesen aufstellt, welche die zur directen Lösbarkeit fehlenden Bedingungen ersetzen. Auf solche Weise ist man auch stets verfahren. Im Anfang betrachtete man nur solche Kräfte, von deren Dasein man im Voraus Kenntniss hatte, also z. B. die Einwirkungen der verschiedenen Planeten auf einander; später wurde man jedoch veranlasst Kräfte zu suchen, von deren Existenz man durch den unmittelbaren Anblick sich nicht überzeugen konnte. Hierher gehört die

Entdeckung des Neptun, ebenso die Untersuchungen über die Ursachen, welche die sog. veränderlichen Eigenbewegungen von Sirius und Procyon bewirken. Bei diesen Untersuchungen ist man stets von der Voraussetzung ausgegangen, dass die Ursache der zu bestimmenden Kraft in dem Vorhandensein eines einzigen noch unbekannten Körpers zu suchen sei. Durch die später erfolgte optische Entdeckung des Neptun wurde diese Annahme in dem ersten Falle aufs Glänzendste bestätigt; in den beiden anderen Fällen ist die Richtigkeit der Annahme im Wesentlichen wahrscheinlich, jedoch keineswegs erwiesen. Man hat zwar einen Begleiter zu Sirius gefunden und auch in der neuesten Zeit einen zu Procyon *), deren Vorhandensein die beobachteten Bewegungserscheinungen der Hauptsterne zu erklären scheint; die Beobachtungen sind aber bis jetzt weder zahlreich genug, noch zu diesem Zwecke hinreichend genau, um den Beweis zu liefern, dass in jedem der beiden genannten Sternsysteme nur zwei Körper vorkommen. Der blosse Anblick der betreffenden Systeme durch mächtige Fernröhre ist noch weniger entscheidend; man hat sogar im Sirius-System mehrere Sterne wahrzunehmen geglaubt, obgleich solche Wahrnehmungen bisher sich nicht als unzweifelhaft erwiesen haben. Es ist aber nicht genügend, die Anzahl der Körper zu bestimmen, welche in einem gegebenen Falle merkliche Anziehungen ausüben, und die Gesetze ihrer Bewegungen zu wissen; auch die Form derselben ist zu berücksichtigen bei der Berechnung der Anziehung. So lange der Körper als kugelförmig angenommen werden kann, darf man zwar die Masse desselben als in den Mittelpunkten vereinigt ansehen und also das Newton'sche Gesetz, welches eigentlich für materielle Punkte gilt, unmittelbar anwenden, indem man die betreffenden Körper als solche betrachtet. Ist die Figur des Körpers jedoch eine andere, so muss das Gesetz der Anziehung im betreffenden Falle besonders ermittelt werden, was dadurch geschieht, dass man die Anziehung der einzelnen Molecüle summirt. Wenn jedoch die Entfernungen zwischen den verschiedenen Körpern so gross sind, dass die Dimensionen letzterer als verschwindend im Verhältnisse zu den Abständen angesehen werden dürfen, so ziehen die Körper sich wieder in derselben Weise an, als ob ihre Massen in den

*) Die Existenz des letztern wird indessen noch bestritten.

Mittelpunkten vereinigt wären. Bei den Bewegungen der Himmelskörper ist ihrer grossen Entfernungen wegen diese Annahme nur ausnahmsweise unstatthaft, allein in einzelnen Fällen muss dennoch auf die Figur des anziehenden Körpers Rücksicht genommen werden, wie es z. B. bei der Bewegung des Mondes um die Erde nöthig ist. Zu den Untersuchungen über die Natur der Kräfte, welche im Weltraume wirksam sind, gehören daher auch die, welche auf die Figur der Himmelskörper Bezug haben.

Einer ganz andern Art von Kräften, als der bisher betrachteten, müssen wir noch gedenken, nämlich solcher, die aus dem Widerstande, welchen die Körper bei ihren Bewegungen erleiden können, entstehen. Wir wissen zwar gegenwärtig sehr wenig darüber, inwiefern die Bewegungserscheinungen, die man bisher durch den vermutheten Widerstand des sog. Lichtäthers erklären wollte, wirklich auf diese Ursache zurückzuführen sind, oder wie ein solcher in verschiedenen Theilen des Weltraums sich verhält; allein daran, dass ein Widerstand existirt, wenn auch vielleicht unmerklich für unsere Beobachtungen, lässt sich nicht zweifeln. Sollte es auch Theile des Weltraumes geben, die absolut leer wären — wir können uns dies nur schwer vorstellen, — so giebt es doch andere Theile, welche von Materie in äusserst fein vertheilter Form erfüllt sind und die von Himmelskörpern durchzogen werden, ohne dass wir indessen im Stande wären, den höchst geringen, nichtsdestoweniger aber existirenden Widerstand zu erkennen. Es ist daher anzunehmen, dass der Widerstand in verschiedenen Theilen des Raumes ein sehr verschiedener, sowie dass seine Grösse Veränderungen unterworfen ist, da doch ein gewisser Theil des Weltraumes zu einer Zeit mit einem mehr, zu einer andern Zeit mit einem weniger dichten Stoffe erfüllt sein kann.

Wenn wir also nun sagen, dass das Ziel, welches dem astronomischen Forscher vorschweben muss, lediglich darin besteht, die Bewegungselemente der Himmelskörper zu einer gegebenen Zeit, sowie die Kräfte, welche auf die Bewegungen einwirken, zu erkennen, so haben wir alle Fragen umfasst, die der Astronomie angehören. Unter Kräften verstehen wir nämlich nicht nur die Attractionskraft und noch weniger bloss die Form dieser Kraft, deren Erkenntniss von Newton herrührt.

Wie in jeder Naturwissenschaft, so ist auch die Methode der

Astronomie wesentlich eine inductive; die Deduction, obwohl für die positive Sicherheit, welche das Ergebniss der Untersuchung schliesslich beanspruchen muss, nicht weniger wesentlich, dient doch zunächst nur dazu, die Ergebnisse der Induction zu bestätigen oder eventuell anzuzeigen, wie dieselben verbessert werden sollen. — Nicht selten tritt der Fall ein, dass man die Induction nicht zu Ende führen kann, d. h. nicht die Bewegungselemente oder die Kräfte in genügender Weise bestimmen kann; in solchen Fällen müssen an Stelle des Erkannten Hypothesen substituirt werden. Denn es ist wesentlich, dass man, wenn der deductive Weg eingeschlagen wird, von der nöthigen Anzahl Bewegungselemente sowie von Kräften ausgeht, diese mögen nun wirklich bestimmte oder auch nur hypothetische sein; im andern Falle würde das Wesen der Deduction aufgehoben sein und einem reinen Empirismus Raum gegeben. Die Astronomie ist zwar gegenwärtig mehr als jede andere Naturwissenschaft frei von Empirismus, aber Spuren davon kommen doch hin und wieder auch hier vor. So ist es z. B. noch nicht vollkommen gelungen, die Bewegung des Mondes durch bekannte Kräfte zu erklären; da man aber für gewisse practische Zwecke (Längenbestimmungen u. dgl.) möglichst genaue Mondörter nöthig hat, so war man gezwungen, die Theorie in empirischer Weise zu ergänzen.

Wir müssen nun noch Fragen berühren, die zwar nicht unmittelbar für die Astronomie, so wie wir sie oben aufgefasst haben, von Interesse sind, die aber doch mitunter den Gang der astronomischen Forschungen beeinflussen können. Wir meinen hier die Fragen über die physische Beschaffenheit der Himmelskörper. Insofern diese nun von unveränderlicher Form und Masse sind, hat die physische und chemische Beschaffenheit derselben allerdings kein Interesse für die Astronomie, denn es darf als ausgemacht angesehen werden, dass die Anziehung der Massen von der chemischen Natur ihrer Molecüle durchaus unabhängig ist. Allein die Voraussetzung einer solchen Unveränderlichkeit ist keineswegs statthaft, wenngleich sie auch bei den Gestirnen nicht merklich von der Wahrheit abweichen wird.

Die Materie ist in steten Umwandlungen begriffen. Hier verdichtet sie sich, dort gehen die Partikelchen auseinander. Das Beispiel der Verdichtung können wir an unserer eigenen Erde wahrnehmen. Jährlich, vielleicht täglich kommt aus dem Weltraume Materie zu der Erde in Form von Sternschnuppen oder kosmischem Staub; dass die Masse der Erde hierdurch zunehmen muss, ist einleuchtend, aber diese Vermehrung muss wohl sehr gering sein, denn sonst hätte sie an der Rotationsbewegung der Erde bemerkt werden müssen. Indessen, wenn auch quantitativ sehr gering, so findet sie doch unzweifelhaft statt, und es ist sehr möglich, dass wir gerade durch eine sehr genaue Untersuchung der Rotationsbewegung der Erde, sowie einiger hiermit zusammenhängender Fragen, die Vermehrung der Masse entdecken können. — Es wird zwar gewöhnlich angenommen, dass Nichts, was der Erde zugehört, von derselben sich entfernen kann, aber undenkbar ist es keineswegs, dass dies doch stattfindet. Es wäre dazu nur nöthig anzunehmen, dass die Atmosphäre sich bis zu der Höhe erstrecke, wo die Schwungkraft der Schwere gleich wird. — Aber wenn auch von der Erde oder den festen Himmelskörpern keine Partikel sich entfernen können, so giebt es doch andere Anhäufungen von Materie, deren Theile einen sehr losen Zusammenhang mit einander haben; solche sind die Cometen, Sternschnuppenschwärme oder kosmischen Wolken u. dgl. mehr Wir kennen einen Cometen (den Biela'schen), der sich zuerst in zwei völlig getrennte Körper theilte, die beide, wie es fast unzweifelhaft ist, sich einige Zeit nachher vollständig auflösten. Die Bewegungen solcher Körper müssen aber auch untersucht werden, oder wenigstens die ihrer Schwerpunkte. Nun gilt zwar der Satz, dass die Bewegung des Schwerpunktes unabhängig ist von den Veränderungen und Umsetzungen der Molecüle, aber wenn ganze Theile abgetrennt werden, so ist die Bewegung des Schwerpunktes der übrigbleibenden Theile nicht mehr mit der Bewegung vergleichbar, wie sie vorher für den Schwerpunkt des ganzen Systems gefunden wurde. Ausserdem wird in Folge des Abtrennungsprocesses eine Reaction hervorgerufen, welche die Bewegungen der einzelnen Theile beeinflusst. Wenn also die Bewegung eines solchen Körpers verfolgt wird, so müssen selbstverständlich die physikalischen Processe, die seine Constitution verändern, nach Möglichkeit berücksichtigt werden. — Ein anderer Umstand kommt hinzu. Wir beobachten nicht direct den Schwerpunkt der Körper, wenigstens nicht derjenigen, die von uns aus messbar erscheinen. Bei den Planeten nehmen wir an, dass der Schwerpunkt mit dem optischen Mittelpunkt der Scheibe zusammenfällt, bei den Cometen wiederum, dass der hellste Punkt im Kopfe derselben die Lage des Schwerpunktes angiebt. Solche Annahmen sind aber nicht immer richtig, Bei dem Monde z. B. hat es den Anschein, dass der Schwerpunkt nicht mit dem geometrischen Mittelpunkte des Mondkörpers zusammenfällt, und bei den Cometen kann man wohl voraussetzen, dass Schwankungen in der gegenseitigen Lage des Schwerpunktes und der Stelle der grössten Lichtentwickelungen nicht selten sind. Es scheint nun allerdings, dass solche Schwankungen nicht sehr beträchtlich sind; ganz zwecklos dürfte es jedoch nicht sein, die Phasen der Lichtentwickelung in den Cometen bei den Untersuchungen über ihre Bewegungen zu berücksichtigen.

Im Vorangehenden ist angedeutet worden, worin die astronomischen Untersuchungen bestehen und was sie bezwecken; in welcher Weise sie ausgeführt werden, wollen wir in dem vorliegenden Buche darzustellen versuchen, und zwar so, dass auch Derjenige, welcher mit den mehr verwickelten mathematischen Operationen nicht vertraut, und dem die mathematische Bezeichnungsweise nicht geläufig ist, sich doch eine deutliche Vorstellung davon machen kann.

Nicht in jedem Zeitalter hat man die Aufgaben der Astronomie so aufgefasst, wie wir sie auf den vorhergehenden Blättern dargestellt haben. Neben diesen, wenn wir uns so ausdrücken dürfen, rein astronomischen Forschungen findet man nicht selten zu ganz anderen Zwecken angestellte Untersuchungen und Speculationen, die aber bis zu einem gewissen Grade mit ersteren verwandt zu sein scheinen. Wir denken hier in erster Linie an die Bemühungen, Kenntnisse über die physische Beschaffenheit der Himmelskörper zu erlangen, Bemühungen, die übrigens in neuester Zeit von grossem Erfolg gekrönt worden sind. Der Zweck solcher Untersuchungen ist an und für sich ein ganz anderer als der der Astronomie, obgleich die Kenntniss der physischen Vorgänge auf den Himmelskörpern auch bei rein astronomischen Untersuchungen von Wichtigkeit sein kann.

Die Astronomie oder die Sternkunde hat zu allen Zeiten ein weit allgemeineres Interesse gefunden, als sie durch ihre Eigenschaft als exacte Wissenschaft allein hätte erwecken können. Die allgemeine Anschauung hat in derselben mehr als nur allein einen Zweig des menschlichen Wissens finden wollen, hat von der Wissenschaft von den Sternen viel mehr gefordert als nur die nüchterne Kenntniss ihrer Bewegungsgesetze. Die Pracht des gestirnten Himmels in all seiner unergründlichen Tiefe mochte wohl in dem ahnungsvollen Sinn ganz andere Fragen wachgerufen haben; Fragen, welche zu beantworten zwar ausserhalb der Grenzen der Wissenschaft liegen, um so mehr aber von der Phantasie angeregt werden. Die strenge Regelmässigkeit, welche sich im Verlauf der himmlischen Erscheinungen offenbart, in welchem Verhalten steht sie wohl zum ewigen Willen der Gottheit? Kann dieselbe gleichsam nur als Sinnbild der Unveränderlichkeit ihres Willens betrachtet werden oder ist hiermit ein anderes, den Menschen unfassliches Ziel verknüpft, von dessen Erforschung er sich doch so schwer losreisst? Dergleichen Fragen, von einem erhabenen Gefühl der Andacht und Ruhe begleitet, welches die Betrachtung des Sternenhimmels hervorruft, veranlasste ein religiöses Element neben der rein astronomischen Forschung, — ein Element, welches zuweilen einen höchst wesentlichen Einfluss auf die Entwickelung der Astronomie ausübte, ja möglicherweise die ersten astronomischen Theorien ins Leben rief.

Die Kulturgeschichte lehrt uns, wie bei den Naturvölkern das Blau des Himmels als Sitz der Gottheit angesehen war; wie man, von dieser Vorstellung ausgehend, die Erscheinungen der Sternenwelt als unmittelbare Manifestationen ihres Willens betrachtete. Dass »der höchste Wille« nöthigenfalls der Sonne und dem Monde ein »Halt« gebieten könne, scheint auch bei den höher stehenden der Völker des Alterthums ziemlich allgemein angenommen worden zu sein. Kein Wunder also, dass die Weltanschauungen der Alten in hohem Grade von dem Standpunkte ihrer astronomischen Kenntnisse beeinflusst waren. Die Astronomie galt mitunter als eine heilige Wissenschaft, die alsdann von den Priestern cultivirt wurde. Spuren einer solchen Auffassung finden wir noch heut zu Tage, indem einige der Kirchenfeste nach dem Lauf der Sonne und des Mondes angesetzt werden und nicht etwa an demselben Datum jedes Jahr wiederkehren. Es ist anzunehmen, dass mehrere Völker des Alterthums, oder richtiger ihre Priester, nicht unbeträchtliche astronomische Kenntnisse erlangt hatten, obgleich die Spuren dieser Kultur sich meistens in der

Dämmerung der Vorzeit verlieren. Wir erinnern an die Chinesen, die Indier, die Aegypter, deren Kenntnisse vielleicht auch den Juden überliefert wurden; ferner die Babylonier, deren Priester Chaldäer genannt wurden, und endlich die Griechen, von denen man doch annehmen kann, dass ihre ersten Kenntnisse von andern Völkern entlehnt waren, die aber dann, soweit uns überliefert worden ist, viel weiter als ihre Vorgänger kamen.

Die poetische Lehre von der Sphärenharmonie — ohne Zweifel ihrem Ursprung nach eine Tochter der idealen Naturauffassung — trägt nichtsdestoweniger den Grundzug einer astronomischen Theorie in sich, obgleich sie sich keineswegs im genügenden Grade zutreffend erwies, wenn man auf die astronomischen Erscheinungen, d. h. die scheinbaren Bewegungen der Himmelskörper, Rücksicht nahm. Im Gegentheil forderten diese, wenn die Theorie dem entsprechen sollte, was die unmittelbaren Beobachtungen unzweifelhaft an den Tag legten, solche Modificationen der ursprünglichen Vorstellungen eines Systems von Krystallsphären, dass es nicht als in Wirklichkeit bestehend angesehen werden konnte. Auch ist es wahrscheinlich, dass mehrere hervorragende Astronomen der alten Zeit der Lehre von der Architektonik des Himmels keine reelle Bedeutung beimassen, obgleich sie ihre Theorien so ausbildeten, als wäre die Lehre wahr; ihre Bemühungen gingen nur auf eine geometrische Erklärung der verwickelten scheinbaren Bewegungen der Planeten aus, nicht aber sollten sie feststellen, in wie weit diese Erklärung physisch möglich sei oder nicht.

Im Mittelalter wurde ein Irrweg eifrig verfolgt, den man als mit der Astronomie zusammenhängend ansah, nämlich die so viel besprochene und früher in so hohem Ansehen stehende Astrologie, ein Erbe von den Babyloniern, oder aus noch älteren Zeiten stammend. Eine Wissenschaft konnte die Astrologie nie sein, höchstens eine wissenschaftliche Kunst, die den Zweck hatte, aus der Stellung der Planeten und Fixsterne am Himmelsgewölbe in einem gewissen Augenblicke — gewöhnlich der Geburtsstunde eines Menschen — dessen zukünftige Schicksale zu sehen und voraus zu sagen. Die philosophischen Anschauungen des Mittelalters begünstigten das Unwesen der Astrologie, die sich damals zur höchsten Blüthe entfaltete. Man stellte sich, nach den Ansichten des griechischen Philosophen Aristoteles, vor, dass die Planeten mit subjectiver Natur begabte Wesen seien, oder dass sie wenigstens von solchen Wesen regiert würden. Diese übten, der allgemeinen Vorstellungsart entsprechend, einen willkürlichen Einfluss auf das Schicksal der Menschen. — Man sieht, dass die Astronomie und Astrologie eigentlich nie gleichzeitig bestehen konnten, denn die Astronomie setzt Gesetze voraus, nach denen die Himmelskörper sich bewegen, und lehrt, wie deren Lage am Himmel zu verschiedenen Zeiten berechnet werden soll. Die Astrologie hingegen kümmert sich wenig um Gesetze, sondern erblickt in der jedesmaligen Stellung der Himmelskörper den Ausdruck der Willkür übersinnlicher Wesen. Gleichwohl war dieser Widerspruch weniger auffallend, so lange man nicht im Stande war, die Bewegungen der Planeten genügend zu erklären, und also eine gewisse Willkür in denselben annehmen zu können glaubte. In späteren Zeiten trug man indess kein Bedenken, sogar so weit zu gehen, dass man nach astronomischen Regeln das Aussehen des Himmels zu entwerfen oder, wie es hiess, die Nativität zu stellen versuchte, wo man nicht einmal durch unmittelbare Anschauung oder Beobachtung davon Kenntniss hatte. Ein in historischer Beziehung merkwürdiges Denkmal findet man in dem von Kepler für Wallenstein's Geburtsstunde berechneten und erklärten »Angesicht des Himmels«. In den letzten Zeiten ihres Bestehens nahm die Astrologie einen mehr physikalischen Charakter an.

Die Astrologie brauchte daher astronomische Untersuchungen nicht auszuschliessen, sondern förderte solche sogar bis zu einem gewissen Grade. Und in ähnlicher Weise haben andere Missrichtungen in der Auffassung der Kenntnisse, zu denen man durch das Studium der Erscheinungen am Himmel gelangen kann, wohl das Ziel der Astronomie zeitweilig in Schatten zu stellen, die Entwickelung der Wissenschaft jedoch nicht völlig zu hindern vermocht. Seit der Zeit, zu welcher die Geschichte anfängt die Schicksale der Menschheit zu erzählen, finden wir Spuren einer astronomischen Wirksamkeit, zwar gering und häufig kaum die Benennung wissenschaftlicher Bestrebungen verdienend, aber doch im Grunde dasselbe Ziel verfolgend, das heut zu Tage den Kern der Astronomie ausmacht, nämlich die Kenntniss der Gesetze von den Bewegungen der Himmelskörper.

Abr wenn auf diese Weise die Astronomie als die älteste der Wissenschaften angesehen werden kann, deren Ahnen in die Zeiten vor einer verlässlichen Geschichtsforschung zurückzuführen sind, so ist dies doch nur in so weit richtig, als das Ziel dieser Wissenschaft immer dasselbe geblieben ist. Dagegen hat ihre Behandlung im Wechsel der verschiedenen Zeitalter wesentliche Veränderungen erfahren und sie selbst ist mit der steigenden Kultur in ganz neue, früher ungeahnte Entwickelungsstufen getreten. Die Methoden, nach welchen man jetzt vermittelst wissenschaftlicher Forschung die Wahrheit sucht, sind denen ganz entgegengesetzte geworden, welche man früher anwendete; die Möglichkeit, hinreichend genaue Data für astronomische Untersuchungen durch Beobachtungen zu gewinnen, ist ungleich grösser, und vor allen Dingen, die Weltanschauung eine gänzlich andere geworden als zu der Zeit, wo der Philosoph von Stagira die Natur beschrieb und ihre Erscheinungen zu erklären versuchte.

Es giebt indessen keine Entwickelungsperiode in der Geschichte der Astronomie, in welcher diese Wissenschaft sich im Wesentlichen ausgebildet hätte, ohne dass der Grund hierzu in einer vorhergehenden gelegt worden wäre, oder ohne eine nothwendige Folge vorhergehender Arbeiten zu sein. Die Ideen und Ansichten, welche jetzt allgemein angenommen sind, wurzeln, so sehr sie auch gegen das streiten, was vor Newton's Zeit als Wahrheit galt, doch in Arbeiten, die vor der Zeit dieses grossen Denkers abgeschlossen wurden. Ja, ohne sein Verdienst im Geringsten schmälern zu wollen, kann man sagen, dass die wichtigste astronomische Entdeckung, die jemals gemacht worden ist, nämlich die der allgemeinen Schwere, zu Newton's Zeit nur als die reife Frucht der Forschungen vergangener Zeiten zu betrachten war, welche der wissenschaftlichen Aufmerksamkeit nicht lange mehr hätte entgehen können.

Können wir uns jetzt auch als auf einem sehr hohen wissenschaftlichen Standpunkt stehend ansehen im Vergleich zu den alten Astronomen, so dürfen wir demungeachtet doch die Bedeutung der Arbeiten, die sie für uns gethan haben, nicht unterschätzen. Wir dürfen uns um so weniger hierzu verleiten lassen, als es durchaus keine leichte Sache ist, die Länge des Weges zu beurtheilen, den sie zurückgelegt haben, oder die Grösse der Schwierigkeiten zu übersehen, welche dabei zu überwinden waren und die im Verhältniss zu dem damaligen Kulturzustand überhaupt geschätzt werden müssen. Für uns, die wir wissen, dass die Erde sich um eine Axe dreht, deren

Richtung während eines kürzeren Zeitraums als unveränderlich im Weltraume angesehen werden kann, ist es nicht schwer, einzusehen, wie die scheinbaren täglichen Bewegungen der Gestirne, welche Bewegungen eben eine Folge dieser Drehung sind, sich gerade so gestalten müssen, als wenn die Himmelskörper an der inneren Seite einer Sphäre befestigt wären, welche sich um die Erdaxe dreht. Als aber die Kenntniss von der Erdumdrehung noch nicht gewonnen war, wie schwer musste nicht da die Entdeckung der geometrischen Gesetze für die tägliche Bewegung der Gestirne sein; und muss nicht gerade diese Entdeckung, die dennoch gemacht wurde, als von der allergrössten Wichtigkeit für die Astronomie erachtet werden? Vor dieser Entdeckung und zu einer Zeit, wo man noch kaum eine Ahnung von der wirklichen Grösse der Himmelskörper und ihrer Entfernungen hatte, gab es durchaus keine Veranlassung, die Rotation der Erde anzunehmen; eben diese Entdeckung ist es aber, der wir es zu danken haben, dass wir endlich zu der Einsicht des wahren Sachverhalts gekommen sind.

Nicht minder wichtig ist die Entdeckung der jährlichen Bewegung der Sonne unter den Sternen, worauf die Dauer des Jahres beruht. Man kann sagen, dass die Astronomie mit dieser Entdeckung ihren Anfang als Wissenschaft nahm; denn um zu dieser zu gelangen, waren nicht nur wirkliche Beobachtungen des Gestirns in verschiedenen Punkten seiner Bahn erforderlich, sondern auch eine wissenschaftliche Gedankenarbeit nothwendig, durch welche die Beobachtungen mit einander combinirt werden mussten, um zu der Kenntniss der scheinbaren Bahn zu führen. Berücksichtigen wir nun die höchst einfache Art, auf welche die astronomischen Beobachtungen ursprünglich ausgeführt wurden, sowie den Umstand, dass die scheinbare Bewegung der Sonne aus einer täglichen und jährlichen sich zusammensetzt, so müssen wir zugeben, dass die Schwierigkeiten weder wenige noch geringe waren, welche überwunden werden mussten, bevor die Entdeckung der jährlichen Bewegung der Sonne möglich wurde. Soviel wir wissen, sind die ersten astronomischen Beobachtungen dadurch angestellt worden, dass man den sog. heliakischen Aufgang der Himmelskörper verfolgte, das ist die Jahreszeit, zu der ein Gestirn zuerst in der Morgendämmerung sichtbar wird. Durch solche Wahrnehmungen, wahrscheinlich eine Reihe von Jahren fortgesetzt, fand man, dass die Zeit, welche zwischen zwei aufeinander folgenden heliakischen Aufgängen desselben Fixsterns verfloss, gleich gross war, welchen Stern man auch zu den Beobachtungen ausgewählt hatte.

Dass die alten Astronomen die tägliche Bewegung der Gestirne durch die Annahme einer wirklich bestehenden Krystallsphäre erklärten, welche sich in 24 Stunden einmal um ihre Axe drehte, darf uns nicht verwundern. Eine solche Annahme lag am nächsten und widersprach nicht den höchst unvollkommenen physikalischen Vorstellungen von der Natur, welche in älteren Zeiten herrschten — die Widersprüche wurden erst bei der Erklärung der Planetenbewegungen auffällig. — Die entgegengesetzte Annahme, dass die Erscheinung der täglichen Bewegung nur eine Folge der Axendrehung der Erde sei, war demnach nicht nothwendig und musste eher als verfrüht angesehen werden in Zeiten, wo man schwerlich ausreichende Gründe für dieselbe hätte anführen können. Demungeachtet fehlt es nicht an Speculationen in dieser Richtung. Der Pythagoräer Philolaos nahm eine gewisse Bewegung der Erde an, welche von einigen Forschern der Geschichte der Astronomie als identisch mit der Rotation der Erde um ihre Axe angesehen worden ist. Dies ist jedoch nicht ganz richtig. Die Speculationen des Philolaos scheinen nicht eigentlich auf Beobachtungen gegründet gewesen zu sein, sondern bis zu einem gewissen Grade auf eine allzu lebhafte Phantasie. Er stellte sich eine andere als die von den Menschen bewohnte Erde vor, die indess nicht zu sehen war, weil sie von dem Erdboden verdeckt wurde. Diese eingebildete Erde nannte er Gegenerde (ἀντίχθων) und nahm an, dass Erde und Gegenerde sich um ein Centralfeuer (ἑστία) drehten. Dies Centralfeuer blieb für die Menschen allerdings stets unsichtbar, aber sein Widerschein veranlasste den Glanz der Sonne. Die Philologie des Mittelalters hat die Sätze des Philolaos nicht vollständig enträthselt, und sie deshalb nicht in richtiger Weise aufgefasst. Man nahm an, dass Philolaos mit Hestia die Sonne gemeint habe, und Copernicus behielt diese alte Annahme bei, gab sich auch nur als denjenigen aus, der die alte Ansicht wieder neu belebte, indem er die Lehre von der Bewegung der Erde um die Sonne veröffentlichte. — Wir wissen ebenfalls von andern griechischen Astronomen, dass sie die Möglichkeit der Bewegung der Erde nicht ausschlossen, aber nie scheint eine eigentliche

Lehre, welche die Bewegungserscheinungen am Himmel in genügender Weise erklärte, aufgestellt worden zu sein.

Aus dem Voranstehenden dürfte hervorgehen, dass die Astronomie schon lange vor der Epoche der modernen Wissenschaft Gegenstand wissenschaftlicher Behandlung gewesen ist, und dass die alten Astronomen Einsichten in dieselbe gewonnen haben, welche den Grundstein ihrer späteren Entwickelung gelegt und dieselbe erst ermöglicht haben. Es ist daher kein unbedeutendes Maass von Kenntnissen, welches der alten Astronomie und der Astronomie unserer Tage gemeinsam ist. — Obgleich es nun zwar nicht die Absicht ist, im Folgenden einen Abriss der Geschichte der Astronomie zu geben, so möge doch das, was seit älteren Zeiten in dieser Wissenschaft erkannt worden ist, von einem geschichtlichen Standpunkt aus betrachtet werden. Eine solche Behandlung des Gegenstandes schien am besten geeignet zu sein, das Wesen der Astronomie sowohl als Wissenschaft, wie auch als Produkt der menschlichen Kultur und Gedankenarbeit darzustellen.

I. Kapitel.

Geschichtlicher Ueberblick bis zu Newton's Entdeckung des Gesetzes der allgemeinen Schwere.

§ 1. Die älteste Beobachtungskunst.

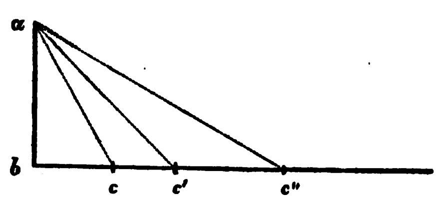
Der nächstliegende Zweck, welcher mit astronomischen Beobachtungen verfolgt wird, ist der, die scheinbare Lage eines Himmelskörpers am Himmelsgewölbe, d. h. die Richtung desselben in einem gewissen Augenblick zu bestimmen. Wie solche Bestimmungen jetzt ausgeführt werden, wie man solche Richtungen angiebt und welche Benennungen dabei gebraucht werden, wird später ausführlicher beschrieben. Für den Augenblick genügen einige kurze Andeutungen.

Man denke sich, um die Lage eines Gestirns am Himmel anzugeben, eine Anzahl Kreise über das Himmelsgewölbe gezogen, ebenso wie man auf der Erdoberfläche Meridiane und Parallelkreise angiebt. Wenn der Mittelpunkt eines solchen Kreises mit dem der Sphäre (der Himmelskugel) zusammenfällt, heisst er ein grösster Kreis. Der Kreis, den der Horizont (d. i. die Ebene, welche ein ruhiges Gewässer bildet) an der Himmelskugel abzuschneiden scheint, ist ein solcher grösster Kreis, und ebenso sind es die, welche senkrecht auf dem Horizonte stehen und sich in den Punkten über unserem Scheitel (Zenith) und unter unsern Füssen (Nadir) schneiden. Diese Kreise werden Höhenkreise oder Vertikalkreise genannt, und ihr gemeinsamer Mittelpunkt fällt natürlich mit dem Auge des Beobachters, d. i. mit dem Mittelpunkte der scheinbaren Himmelssphäre zusammen. Den Abstand eines Gestirns vom Horizonte, gezählt in Graden u. s. w. auf dem durch dasselbe gehenden Höhenkreise, nennt man die Höhe desselben. Die Höhen der Gestirne für verschiedene Zeiten zu bestimmen, oder die Zeiten, zu welchen eine bestimmte Höhe stattfand, war eine Hauptaufgabe der älteren astronomischen Beobachtungen.

Die Bestimmungen der Zeit der heliakischen Aufgänge waren gewissermassen eine Art Höhenbeobachtungen. Man beobachtete, um diese Zeiten zu bestimmen, den Tag, an welchem das Gestirn zuerst in der Morgendämmerung am östlichen Horizonte wahrgenommen werden konnte, also die Zeit, zu der die Höhen des Sterns und der Sonne um so viel von einander verschieden waren, dass ersterer eben aus den Sonnenstrahlen heraustrat. Nach der Zeit des heliakischen Aufganges wurde der Abstand zwischen beiden Gestirnen immer grösser und grösser, was daran zu erkennen war, dass der Stern zu einer immer früheren Stunde aufging, oder immer früher und früher im Meridian erschien (d. h. im Süden, wenn der Beobachter auf der nördlichen Erdhalbkugel sich befindet). Endlich erreichte der Abstand vom Stern zur Sonne seinen grössten Werth, indem ersterer um Mitternacht im Meridian zu sehen war. Hierauf begann der Abstand wieder sich zu vermindern, bis der Stern am westlichen Horizonte nach dem Sonnenuntergange erschien und in den Sonnenstrahlen verschwand. Aus den Beobachtungen der heliakischen Auf- und Untergänge konnte man auf die Zeiten schliessen, wo Stern und Sonne eine solche gegenseitige Lage zu einander hatten, dass beide gleichzeitig im Meridian erschienen.

Eine sehr alte und sehr einfache Methode, die Höhe der Sonne zu bestimmen, bestand darin, dass der Schatten eines aufrecht stehenden Gegenstandes gemessen wurde, dessen lineare Höhe bekannt war. Wurde eine Stange ab (Fig. 1) aufgerichtet, deren Länge im Voraus gemessen war, so wurde die Höhe der Sonne durch die Länge des Schattens auf einer wagerechten Ebene, etwa auf einer Diele, bestimmt, wie die folgenden Beispiele zeigen. Betrug die Länge des Schattens die Hälfte der Linie ac, also $bc = \frac{1}{2}\, ac$, so war die Höhe der Sonne 60°; war wieder die Länge des Schattens gleich mit der der

Fig. 1.

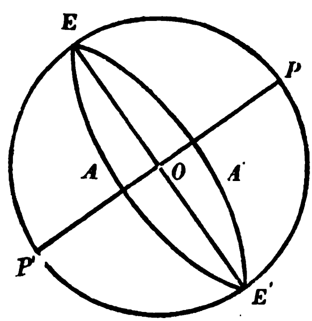


Stange, also $bc' = ab$, so betrug die Höhe der Sonne 45°; wenn endlich der Schatten so fiel, dass die Länge der Verbindungslinie ac'' das Doppelte der Stangenlänge betrug, so war die Höhe der Sonne 30°. — Wurde kein Schatten von der Stange geworfen, so war die Sonne im Zenith, und ihre Höhe betrug demgemäss 90°. Solche Höhen von 90° wurden mitunter einfach auch dadurch geschätzt, dass man wahrnahm, wie der Boden eines tiefen Brunnens von den Sonnenstrahlen beleuchtet wurde.

Um mit grösserer Bequemlichkeit die Länge des Schattens zu jeder Zeit messen zu können, richtete man ein besonderes Instrument eigens dazu ein, das man Gnomon benannte; um zugleich die Höhe der Sonne damit bestimmen zu können, berechnete man eine Tabelle, aus der die Höhe unmittelbar zu entnehmen war, sobald man das Verhältniss der Schattenlänge zur Länge der Stange kannte. Die Berechnung einer solchen Tabelle erforderte einige Kenntnisse desjenigen Theils der Mathematik, den man Trigonometrie nennt, deren Anfangsgründe den Alten jedoch nicht ganz fremd waren. Das Instrument selbst bestand in der erwähnten Stange, oder überhaupt in einem aufgerichteten Gegenstande, dessen Höhe ein für allemal festgestellt war und der vertikal auf horizontalem Boden aufgerichtet war, so dass man leicht vermittelst eines eingetheilten Messstabes die Länge des Schattens bestimmen konnte. Oft errichtete man den Gnomon auf hohen Gebäuden; eine eigentliche Stange war alsdann nicht nöthig, man brachte vielmehr auf der Spitze des Gebäudes eine Platte an, die mit einem Loche, das die Sonnenstrahlen durchliess, versehen war. Der helle Fleck im Schatten, welcher von der Platte gebildet wurde, diente nun zur Bestimmung der Schattenlänge, denn die Lage des hellen Fleckens liess sich sicherer auffassen, als die verwaschene Begrenzung des Schattens.

In der Einleitung ist bereits angedeutet worden, dass man von uralten Zeiten her die tägliche Bewegung der Himmelskörper auf die Weise vor sich gehend dachte, als ob sie an einer hohlen Sphäre befestigt wären, die sich in einem Zeitraume von 24 Stunden einmal um eine Axe drehte. Die zwei Punkte, an denen die Axe die Oberfläche der Sphäre berührte, mussten natürlich in Ruhe bleiben, und je weiter ein Gestirn von diesen Punkten, welche man Pole nannte, entfernt war, desto grösser musste auch seine Bewegung sein. Man denke sich nun Kreise auf die Oberfläche der Sphäre in der Weise gezogen, dass sie sämmtlich durch die beiden Pole gehen, alsdann haben sie alle einen gemeinsamen Mittelpunkt, der zugleich Mittelpunkt der Sphäre ist; mithin sind sie auch grösste Kreise. Es ist auch einleuchtend, dass sie von einer Ebene, die durch den Mittelpunkt senkrecht auf die Umdrehungsaxe gelegt ist, in zwei gleich grosse Hälften getheilt werden; denn eine gerade Linie, durch den Mittelpunkt eines Kreises gelegt, theilt diesen stets in zwei gleiche Theile, und jeder durch die Pole der Sphäre gezogene Kreis wird von einer solchen geraden Linie geschnitten, welche in der erwähnten Ebene liegt. Auf jedem Kreise haben wir also nun vier Punkte, die in gleichen Abständen von einander liegen, nämlich die beiden Pole und die beiden Durchschnittspunkte mit der auf der Umdrehungsaxe senkrechten Ebene. Dies wird veranschaulicht durch die nebenstehende Figur 2. Dieselbe zeigt einen der genannten grössten Kreise, der mit der Ebene des Papieres zusammenfällt: O ist der Mittelpunkt der Sphäre und PP' ihre Umdrehungsaxe. Denkt man sich nun eine Ebene durch O, senkrecht auf die Axe PP' gelegt, so ist dieselbe auch senkrecht auf der Ebene des Papieres. In der Figur können wir dies in keiner anderen Weise versinnlichen, als durch den perspektivisch angedeuteten Kreis $EAE'A'$, welchen die Ebene an der Oberfläche der Sphäre ausschneidet. Die gerade Linie EE', die in der fraglichen Ebene liegt, schneidet nun offenbar den Kreis $EPE'P'$ in der Weise, dass die Bogen EP, PE', $E'P'$ und $P'E$ einander gleich sind. In derselben Weise sieht man, dass jeder andere durch die Pole gehende Kreis auf der Sphäre in zwei gleiche Theile getheilt wird durch zwei Punkte, die auf dem Kreise $AEA'E'$ einander diametral gegenüber liegen. Jeder solcher Halbkreis wird ferner in der Mitte von den Polen geschnitten, so dass der Abstand jedes Punktes des Kreises $AEA'E'$ von jedem der Pole stets 90^{0} beträgt, oder einem rechten Winkel entspricht. Dieser zuletzt genannte Kreis heisst Aequator, wenn-

Fig. 2.



gleich man unter dieser Benennung eigentlich die Ebene versteht, in der er liegt.

Durch die Beobachtungen der heliakischen Aufgänge verschiedener Sterne einerseits, sowie durch die Messungen der Sonnenhöhen im Meridian zu verschiedenen Jahreszeiten anderseits konnte man zu dem Schlusse gelangen, dass die jährliche Bahn der Sonne ein grösster Kreis auf der Himmelskugel ist, dass sie aber nicht in der Ebene des Aequators liegt, sondern in einer anderen, Ekliptik genannten, die gegen den Aequator um ohngefähr $23\frac{1}{2}^{\circ}$ geneigt ist. Man fand nämlich, dass die Sonne bei der Sommersonnenwende um ebensoviel vom Aequator nach Norden entfernt war, wie bei der Wintersonnenwende nach Süden. Nachdem diese Einsicht einmal gewonnen war, hatte es keine besondere Schwierigkeit mehr, vermittelst Messungen der Sonnenhöhen sowohl die Höhe des Aequators über dem Horizonte (oder die Höhe des Pols), als auch die Neigung der Sonnenbahn gegen den Aequator zu bestimmen. Misst man nämlich die Mittagshöhe (d. h. die Höhe im Meridian) der Sonne an einem gegebenen Ort sowohl bei der Sommer- wie bei der Wintersonnenwende, so findet man offenbar die Höhe des Aequators genau in der Mitte, d. h. man erhält die Aequatorhöhe einfach dadurch, dass man das arithmetische Mittel von den zu den Sonnenwenden gefundenen Sonnenhöhen nimmt. Die Schiefe der Ekliptik, d. h. die Neigung der Sonnenbahn gegen den Aequator, ist wiederum einfach die Hälfte des Unterschiedes der gefundenen Sonnenhöhen. Dass man die Sonnenhöhen gerade im Meridian messen muss, beruht darauf, dass man alsdann unmittelbar Bögen auf demjenigen Höhenkreise abmisst, der sowohl durch die Sonne wie durch die Himmelspole geht.

Es galt jedoch, nicht nur die Bewegung der Sonne, sondern auch die der andern Himmelskörper zu ermitteln. Die Höhen des Mondes konnten zwar mit dem Gnomon gemessen werden, aber die andern Körper hatten nicht genug Leuchtkraft, um die Messung des Schattens zuzulassen. Man ersann daher verschiedene astronomische Messapparate, von welchen wir indess nur das Astrolabium und die Armillarsphäre erwähnen wollen.

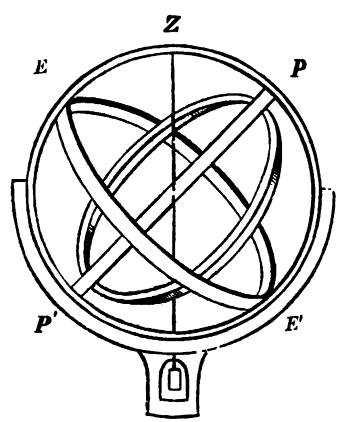
Das Astrolabium ist ein Instrument, dessen Bestimmung es ist, bei der Messung der Höhen angewendet zu werden und welches in vieler Beziehung mehr Bequemlichkeit bei der Handhabung darbietet als der Gnomon. Das Astrolabium besteht wesentlich aus einem in Grade eingetheilten Ring, in dessen Mittelpunkte ein Lineal zum Visiren so befestigt ist, dass dasselbe nur in der Ebene der Gradtheilung gedreht werden kann. Nachdem das Instrument an einem daran befindlichen Ringe aufgehängt und das Lineal horizontal gestellt worden ist, zeigt ein Strich auf letzterem (Index) auf 0°. Wenn ferner das Lineal auf einen Gegenstand gerichtet wird, indem das Instrument sonst in seiner Lage verbleibt, so zeigt der Index unmittelbar die Höhe des Gegenstandes in Graden. Das Astrolabium wurde, der Bequemlichkeit seines Gebrauchs wegen, viel von den Seefahrern zur Bestimmung der geographischen Breiten benutzt, und erst im vorigen Jahrhundert von dem ihm allerdings überlegenen Hadley-schen Sextanten verdrängt.

Die Armillarsphäre besteht aus einem System von in Graden eingetheilten Ringen oder Kreisen, von denen einer um einen seiner Durchmesser gedreht werden kann. Dieser Durchmesser wird mit der Umdrehungsaxe des Himmelsgewölbes parallel gestellt, so dass das eine Ende gegen den Nordpol des Himmels, das andere gegen den Südpol zeigt. Auf dem drehbaren Kreise konnte man nun, ohngefähr wie mit dem Astrolabium, die Höhe der Gestirne einvisiren und messen, jedoch nicht unmittelbar die Höhen über dem Horizonte, sondern über dem Aequator. Diese vom Aequator gerechnete Höhe nennt man die Declination des Gestirns; sie ist nördlich oder südlich, je nachdem der Himmelskörper in der nördlichen oder südlichen der beiden, von der Ebene des Aequators abgetheilten Himmelshalbkugeln sich befindet; den durch die Pole und den fraglichen Himmelskörper gehenden Kreis nannte man hiernach Declinationskreis.

Ausser den Declinationen der Himmelskörper konnte man auch vermittelst der Armillarsphäre die Winkel messen, welche die verschiedenen Declinationskreise mit einander bildeten, oder die entsprechenden Neigungen der von diesen Kreisen bestimmten Ebenen gegen einander. Man pflegt jedoch nicht solche Winkel zwischen zwei beliebigen Declinationskreisen anzugeben, sondern wählt einen bestimmten Declinationskreis als Ausgangspunkt und zählt die Winkel der übrigen von diesem aus. Hierbei verfolgt man zwei verschiedene Systeme. In dem einen wählt man denjenigen Declinationskreis, der durch das Zenith des Beobachtungsortes geht, als Ausgangspunkt. Dieser Declinationskreis liegt in derselben Ebene, wie der Erdmeridian des Ortes und wird Meridian genannt, ebenso wie auch die genannte Ebene diesen Namen trägt. Es ist klar, dass der Meridian als ein Declinationskreis durch die Pole gehen muss; da er aber auch durch das Zenith und — weil er ein grösster Kreis ist — auch durch das Nadir geht, so steht er senkrecht auf dem Horizonte, den er im Süd- und Nordpunkte schneidet. Da nun das ganze Himmelsgewölbe relativ zur Erde sich dreht, der Meridian eines Ortes aber zu derselben eine unveränderliche Stellung hat, so müssen die verschiedenen Gestirne nach und nach den Meridian passiren, d. h. ihre Declinationskreise müssen nach und nach für einen Augenblick mit dem Meridian zusammenfallen. Den Winkel, welchen der Declinationskreis eines Gestirns mit dem Meridian bildet, nennt man S t u n d e n w i n k e l. Dieses System ist abhängig von dem Standpunkte des Beobachters auf der Erdoberfläche, denn der Stundenwinkel desselben Gestirns kann, von verschiedenen geographischen Orten aus betrachtet, sehr verschieden sein, wenn nämlich diese Orte unter verschiedenen Meridianen liegen. — Das zweite System beruht auf dem Declinationskreis der Sonne in dem Augenblick, wo dieses Gestirn von der südlichen Halbkugel über den Aequator in die nördliche tritt, oder durch den sog. F r ü h l i n g s p u n k t geht. Die Winkel, welche von diesem Declinationskreise aus gezählt werden, nennt man R e c t a s c e n s i o n e n; der Stundenwinkel des durch den Frühlingspunkt gehenden Declinationskreises, oder kurz, der Stundenwinkel des Frühlingspunktes heisst S t e r n z e i t. — Die ganze Peripherie (Umkreis) eines jeden Kreises wird in 360° (Grade) getheilt; einen Bogen von 15° nennt man auch eine Stunde; es gehen mithin 24 Stunden auf einen Umkreis. Da nun eine Umdrehung des Himmels darin besteht, dass jedes Gestirn, jeder Punkt des scheinbaren Gewölbes, mithin auch der Frühlingspunkt, einen vollen Umkreis um die Weltaxe beschreibt, dass mithin die Stundenwinkel aller Punkte am Himmel während der Zeit einer Umdrehung um 360° wachsen, so entspricht die Zeit einer Umdrehung des Himmels (oder der Erde) dem Durchlaufen der 24 Stunden auf dem Kreise. Ein jedes Gestirn braucht also, sofern es nicht auch in anderer Weise beweglich ist, ein Vierundzwanzigstel der Umdrehungszeit des Himmels, — welchen Zeitraum man auch eine Stunde Sternzeit nennt, — um in seiner täglichen Bahn eine Stunde oder 15 Grad zu durchlaufen. Nach Feststellung dieser Begriffe sagt man, dass die Umdrehungszeit des Himmels (oder der Erde) 24 Stunden Sternzeit beträgt.

Der bewegliche Kreis, von dem wir schon als zur Armillarsphäre gehörend, gesprochen haben, wird von einem anderen eingeschlossen, der dem Aequator entspricht; der Aequatorkreis ist endlich von einem dritten umschlossen, welcher den Meridian vorstellt und beim Beobachten so genau wie möglich in der Ebene desselben eingestellt werden muss. Die Axe des Instruments (die Weltaxe darstellend) ist so in dem Meridianring befestigt, dass dieselbe mit der Weltaxe parallel ist, sobald der Meridian des Instruments mit dem des Orts zusammenfällt. Der Aequatorkreis kann so gedreht werden, dass der Nullpunkt seiner Graduirung sowohl mit dem Meridian, als auch mit dem Frühlingspunkt zusammenfällt, je nachdem man die Stundenwinkel oder die Rectascensionen bestimmen will. Das Aussehen des Instruments ist in der Fig. 3 dargestellt, die auch ohne eine weitere Erklärung verständlich sein dürfte, da die Buchstaben dieselbe Bedeutung in Bezug auf das Instrument haben, wie bei der vorhergehenden Figur in Bezug auf den Himmel. Man hatte auch andere Arten von Armillarsphären, die wir jedoch hier bei Seite lassen.

Fig. 3.



Da der Frühlingspunkt nur durch eine Definition, keineswegs aber durch einen unmittelbar sichtbaren Punkt anzugeben ist, so kann auch der Nullpunkt des Aequatorkreises bei der Armillarsphäre nicht unmittelbar gegen denselben gerichtet werden. Man erreicht jedoch das Ziel, wenn man diesen Nullpunkt gegen einen Stern richtet, dessen Rectascension schon bekannt ist und das Visirlineal gegen einen andern, dessen Rectascension man bestimmen will. Man bestimmt auf solche Weise den Unterschied der Rectascensionen beider Sterne, zu welchem man blos die bekannte Rectascension des ersteren zu addiren braucht, um die des zweiten zu erhalten. — Durch die Rectascension und Declination ist die Lage eines Gestirns am Himmel vollkommen bestimmt, in derselben Weise wie die geographische Lage eines Punktes an der Erdoberfläche durch seine geographische Länge und Breite angegeben wird.

Noch muss gezeigt werden, wie die Rectascension eines Sterns direct bestimmt wird, oder, wie man sagt, die absolute Rectascension; denn wenn die Bestimmung dieser auch nur für einen einzigen Stern vorliegt, so findet man die Rectascensionen aller übrigen Himmelskörper, wie schon erwähnt wurde, durch diesen. Es ist schon gesagt worden, dass die Rectascensionen von dem Punkte des Aequators aus gerechnet werden, durch den die Sonne bei der Frühlings-Tag- und Nachtgleiche geht. Die Rectascension der Sonne ist demnach 0° in dem Augenblicke, wo ihre Declination 0° beträgt, oder wo die Sonne aus der südlichen Hemisphäre in die nördliche übergeht. Hierauf gründet sich unmittelbar die Art und Weise, die man zur Bestimmung der absoluten Rectascension eines Sterns verfolgt. Man hat nämlich weiter Nichts zu thun, als den Rectascensionsunterschied zwischen Stern und Sonne gerade in dem Augenblicke zu messen, wo die Declination des letzteren Gestirns von südlicher zu nördlicher übergeht: der gefundene Unterschied ist alsdann unmittelbar die absolute Rectascension des Sterns. — Aber ebenso einfach wie diese Beobachtungsweise in theoretischer Hinsicht zu sein scheint, ebenso schwer ist die wirkliche Ausführung. Die erste Schwierigkeit, welche die alten Astronomen zu überwinden oder zu umgehen hatten, lag darin, dass sie nicht unmittelbar einen Stern mit der Sonne vergleichen konnten, da ja die Sterne am Tage mit den blossen Augen nicht gesehen werden können. Sie führten daher diese Vergleichung mittelbar durch den Mond aus, zu Zeiten, wo derselbe zugleich mit der Sonne sichtbar war, was, wie bekannt, oft genug der Fall ist. Sobald die Sonne untergegangen war, verglich man den Mond mit einem Stern, wodurch die Rectascension des letzteren schliesslich berechnet werden konnte. Indess zog diese Bestimmungsmethode bedeutende Fehler nach sich, da der Mond sich in der Zwischenzeit der beiden Vergleichungen bewegte, d. h. seine Rectascension änderte, und diese Aenderung den alten Astronomen nicht mit hinlänglicher Genauigkeit bekannt war.

§ 2. Die Astronomie der Chinesen, Chaldäer u. A.

Nach Laplace*) ist das älteste zuverlässige Denkmal astronomischen Wirkens durch den Jesuiten Gaubil in China aufgefunden worden. Einem alten Manuscripte zufolge erzählt dieser, dass der Kaiser Tschu-kong im Jahre 1100 v. Chr. die Sonnenwenden mittelst eines Gnomon beobachtet und dabei gefunden hätte, dass die Schiefe der Ekliptik gegen den Aequator $23^{\circ}\ 54'$ war.**) Jedoch fehlen nicht Andeutungen von noch älteren Beobachtungen. So wird von einer Sonnenfinsterniss berichtet, die nach neueren Berechnungen im Jahre 2128 eingetroffen ist, und von einem Cometen, der im Jahre 2296 unter Kaiser Jao's Regierung sich gezeigt haben soll. Die Chinesen scheinen sich schon sehr früh Regeln zur Vorausberechnung von Sonnen- und Mondfinsternissen, die eine wichtige Rolle in ihrem Religionscultus spielten, gebildet zu haben; wenigstens wird von zwei Astronomen (Hi und Ho) berichtet, dass sie ihr Leben verwirkten, weil sie die oben erwähnte Finsterniss nicht richtig vorausgesagt hatten. Diese Regeln beruhten jedoch sicher nicht auf irgend welchen astronomischen Theorien, oder auf der Kenntniss von den wirklichen Bewegungen der Sonne und des Mondes und wie diese Bewegungen sich von Punkten auf der beweglichen Erdoberfläche darstellten, sondern waren nur auf empirischem Wege gewonnen worden. Uebrigens müssen die Nachrichten hierüber mit grösster Vorsicht aufgenommen werden; von Vielen sind sie auch bezweifelt worden. — Es wird noch erzählt, dass die Länge des Jahres unter Kaiser Jao auf $365\frac{1}{4}$ Tage bestimmt worden sei, also sehr nahe dem wirklichen Thatbestande.

---

*) Exposition du Système du Monde. Edit. II. pag. 370.

**) Es ist jetzt erkannt worden, dass die Schiefe nicht unveränderlich ist, sondern jedes Jahr sich um eine kleine Grösse ändert. Gegenwärtig vermindert sich diese Schiefe um $0\overset{''}{,}48$ jährlich. Da nun die Schiefe zu unserer Epoche $23^{\circ}\ 27'$ beträgt, so sieht man, dass das chinesische Resultat nicht sehr fehlerhaft sein kann.

Bei den Chaldäern — ursprünglich der Herrscher- und Priesterstamm der Babylonier — stand die Astronomie in hohem Ansehen, und es kann nicht bezweifelt werden, dass diese ziemlich weit in den Kenntnissen der Erscheinungen am Himmel gekommen waren. Nach Aristoteles und Callisthenes haben babylonische Priester Alexander dem Grossen, nachdem dieser Babylon erobert hatte, mitgetheilt, dass ihre ältesten Beobachtungen sich bis zum Jahre 1903 vor ihrer Zeit, also bis etwa 2230 v. Chr. erstreckten. Von den Chaldäern weiss man mit grösserer Sicherheit, dass sie die Finsternisse nach empirischen Regeln vorhersagen konnten. Sie scheinen nämlich bemerkt zu haben, dass die Finsternisse in nahezu derselben Grösse nach einer Periode von 18 Jahren (6585$\frac{1}{3}$ Tage oder 223 Lunationen) wiederkehrten. Auf diesen Cyclus, der **Saros** genannt wird, haben ihre Regeln wahrscheinlich sich gegründet.

Die Kenntniss der Chaldäer vom Cyclus Saros beweist, dass ihre Zeitrechnung auf Werthe der Umlaufszeiten der Sonne und des Mondes gegründet war, die der Wahrheit sehr nahe kamen. Da nun die Zeitrechnung oder die Chronologie einer der wichtigsten Gegenstände der astronomischen Forschungen bei den Völkern des Alterthums war, so dürfte es hier am Platze sein, Einiges davon in Kürze zusammenzustellen.

Das in der Natur am nächsten liegende Maass für die Zeitrechnung ist der Tag, oder die Zeit, welche zwischen zwei aufeinander folgenden Sonnenculminationen, d. h. Durchgängen durch den Meridian, verfliesst. Sehr leicht war es, den Augenblick der Culmination festzustellen, denn hierzu war nur erforderlich, die Zeit wahrzunehmen, zu welcher der vom Gnomon geworfene Schatten am kürzesten war; bemerkte man zugleich die Richtung, in welcher der Schatten fiel, so hatte man ein für alle Mal die Richtung des Meridians bestimmt und brauchte in der Folge nur noch zu beobachten, wann der Schatten in dieser Richtung fiel, um die Culminationszeit der Sonne oder den Mittag zu erhalten. — Unsere gewöhnlichen Sonnenuhren beruhen im Wesentlichen auf einer derartigen Einrichtung. Ein Stift wird auf einer, gewöhnlich horizontalen Tafel aufgestellt, auf der die Richtung des Meridians aufgezeichnet worden ist. Das Zusammenfallen vom Schatten des Stiftes, der in der Ebene des Meridians stehen muss, mit der bezeichneten Meridianrichtung giebt das Mittagsmoment. Will man auf der Tafel die Richtungen verzeichnen, in die der Schatten zu den verschiedenen Tagesstunden fällt, so muss der Stift parallel mit der Weltaxe gestellt werden, denn sonst würde der Schatten zu denselben Stunden in verschiedenen Jahreszeiten nach verschiedenen Richtungen fallen.

Indess war es mühsam, die Zeit nach Tagen zu zählen, weil die Kürze dieser Zeiteinheit, selbst um sehr mässige Zeitabschnitte zu bezeichnen, sehr grosse Zahlen veranlasst hätte. Man suchte dieses Umstandes wegen nach anderen und längeren Zeiteinheiten, und fand solche in den Umlaufszeiten der Sonne und des Mondes. Es kam hierbei nur noch darauf an, zu entscheiden, ob diese Zeitperioden unveränderlich sind, d. h. ob der eine Sonnenumlauf genau so viele Tage dauert wie der andere, und in gleicher Weise, ob der eine Mondumlauf gleiche Zeit wie der andere beträgt. Um dies zu entscheiden, hätte zwar eine Untersuchung über die Unveränderlichkeit des Tages vorangehen müssen, d. h. ob die Drehung des Himmels (oder der Erde) stets dieselbe Zeit dauerte; es scheint jedoch nicht, dass die alten Astronomen sich je mit dieser Frage beschäftigt haben. Uebrigens war die Vorstellung von der Gleichförmigkeit und Unveränderlichkeit der himmlischen Bewegungen so tief in der alten Weltanschauung begründet, dass eigentliche Untersuchungen hierüber als kaum nöthig erscheinen mochten. Die Forschungen der Alten über die Länge des Jahres und des Monats tragen jedoch eine indirecte Bestätigung der Annahme der Unveränderlichkeit dieser drei verschiedenen Zeitmaasse in sich.

Veranlasst durch die Frage nach den Umlaufszeiten der Sonne und des Mondes, müssen wir darstellen, wie solche angegeben werden, und wie man sie theils auf feste, theils auf bewegliche Punkte bezieht. Die Zeit, welche die Sonne braucht, um ihre ganze scheinbare Bahn am Himmel, d. i. die Ekliptik zu durchlaufen, nennt man das siderische Jahr oder die siderische Umlaufszeit der Sonne. Diese Zwischenzeit muss stets dieselbe sein, von welchem Punkte der Sonnenbahn man auch die Zählung des Jahres anfängt; und zwar würde, wenn der Frühlingspunkt unveränderlich in der Ekliptik wäre, die Sonne immer nach dem Zeitraume eines siderischen Jahres wieder zum Frühlingspunkte zurückkehren. Die Sache verhält sich jedoch nicht ganz so. Der Frühlingspunkt oder überhaupt die beiden

Punkte, in denen der Aequator mit der Ekliptik sich schneidet, schreiten auf der letzteren fort mit einer sehr nahe gleichförmigen Geschwindigkeit und zwar in der Richtung gegen die Bewegung der Sonne. Wir werden später auf diese Erscheinung, die schon im Alterthum erkannt war, zurückkommen: vor der Hand mag es genügen zu erwähnen, dass diese Bewegung 50 Sekunden jährlich beträgt und dass sie die Präcession der Nachtgleichen benannt wird. Da nun die Bewegung des Frühlingspunktes gegen die Bewegung der Sonne gerichtet ist, so ist die Zeit, welche die Sonne braucht, damit ihre Rectascension um 360° wächst, selbstverständlich kürzer, als ein siderisches Jahr. Diesen Zeitraum, der nöthig ist, damit die Sonne von einem Zusammentreffen mit dem Frühlingspunkt denselben wieder erreicht, nennt man das tropische Jahr oder die tropische Umlaufszeit der Sonne. Um diese beiden Perioden mit einander vergleichen zu können, theilen wir ihre Werthe in Tagen mit und zwar wie neuere Bestimmungen sie ergeben haben:

Das siderische Jahr beträgt $365^{T}256358$ oder 365 Tage 6 Stunden 9 Min. 9,324 Sekunden.

Das tropische Jahr beträgt $365^{T}242201$ oder 365 Tage 5 Stunden 48 Min. 46,166 Sekunden.

Ebenso spricht man von einer siderischen und tropischen Umlaufszeit des Mondes; die wirkliche Umlaufszeit in Bezug auf einen festen Punkt des Himmels ist die siderische, die Umlaufszeit in Bezug auf den Frühlingspunkt ist wieder die tropische Umlaufszeit des Mondes. Nach neuern Bestimmungen beträgt:

die siderische Umlaufszeit		27^{T}	7^{S}	43^{M}	$11,5^{S}$
die tropische	«	27	7	43	4,7

Ausserdem unterscheidet man beim Monde die synodische, anomalistische und draconitische Umlaufszeit, welche Benennungen hier sogleich erklärt werden sollen.

Es ist schon die Rede davon gewesen, dass die Sonne sich in einem grössten Kreise bewegt: streng genommen bewegt sie sich in einer Ebene, die durch den Mittelpunkt der Erde geht.*) Ebenso

*) In Wirklichkeit bewegt sich die Erde in einer Ebene, die durch den Mittelpunkt der Sonne geht; in beiden Fällen treten jedoch dieselben Erscheinungen auf, so dass wir bei der Erklärung der Alten vorläufig bleiben können.

bewegt sich der Mond in einer Ebene, die durch den Mittelpunkt der Erde geht, in Folge dessen auch die Mondbahn als ein grösster Kreis am Himmel erscheint. (Von einem Punkte auf der Erdoberfläche betrachtet, ist dies näherungsweise richtig, von dem Mittelpunkte aus in aller Strenge.) Die Ebene der Mondbahn ist gegen die der Sonnenbahn (Erdbahn) um einen Winkel von beiläufig 5° geneigt.

Wenn zwei Ebenen mit einander einen Winkel bilden, sich also schneiden, so geschieht der Schnitt stets längs einer geraden Linie. In der Astronomie, wo es sich häufig um die Durchschnittslinie zweier Bahnebenen handelt, nennt man dieselbe Knotenlinie; die Punkte aber, in welchen sich die grössten Kreise, die von den Ebenen an der Himmelssphäre abgeschnitten werden, schneiden, nennt man Knoten. Der Abstand (im Bogen) auf der Ekliptik zwischen einem der Knoten und dem Frühlingspunkt heisst wieder die Länge des Knotens. Die Lage der Durchschnittslinie der Sonnenbahn und der Mondbahn oder die Knotenlinie der Mondbahn ist nicht unveränderlich, sondern dreht sich in der Ekliptik auf solche Weise, dass die Knoten in einem Zeitraum von $18\frac{2}{3}$ Jahren einen ganzen Umlauf vollenden.

Die Mondbahn ist in der Wirklichkeit kein Kreis, obgleich sie uns auf den ersten Anblick so erscheint, sondern eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Erde steht.*) In Folge dessen ist der Abstand des Mondes von der Erde nicht unveränderlich derselbe, sondern zeitweise etwas grösser, zeitweise geringer als die mittlere Entfernung dieser beiden Körper. Den Punkt in der Mondbahn, wo der Mond der Erde am nächsten ist, nennen die Astronomen Perigäum, den gegenüberliegenden hingegen, wo die grösste Entfernung von der Erde stattfindet, Apogäum. Beide Punkte werden auch Apsiden genannt, und die gerade Linie, welche sie verbindet, nennt man Apsidenlinie. Ebensowenig wie die Knotenlinie behält die Apsidenlinie eine unveränderte Lage im Raume, sondern ist in einer stetigen Drehung in der Bahnebene begriffen. Hieraus folgt, nun, dass die Apsiden Kreise am Himmel beschreiben; die Zeit. welche zu einem Umlauf dieser Punkte nöthig ist, beträgt $8\frac{17}{20}$ Jahre.

*) Von der Ellipse soll in einem späteren § eingehender gesprochen werden.

Nachdem diese Begriffe festgestellt worden sind, ist es leicht, die Bedeutung der oben erwähnten ungleichen Umlaufszeiten des Mondes zu erklären. Die synodische Umlaufszeit bezieht sich auf die gegenseitige Lage der Sonne und des Mondes; sie ist also die Zeit, welche der Mond braucht, um seine Bahn in Hinsicht auf die veränderliche Lage der Sonne in der Ekliptik zu durchlaufen, also die Zeit von einem Vollmond zum andern, oder von einem Neumond zum andern. Man bemerkt leicht, dass der synodische Monat länger als der siderische sein muss; denn wenn wir z. B. vom Neumonde ausgehen, so hat der Mond nach einem siderischen Monat zwar wieder die frühere Sonnenlage erreicht, während der Zwischenzeit aber hat die Sonne sich etwas vorwärts bewegt, und um sie einzuholen, braucht der Mond noch einige Zeit. Der synodische Monat beträgt:

$$29^t\ 12^s\ 44^m\ 2^s\!.9.$$

Die Zeit, in welcher der Mond, von einem seiner Knoten ausgehend, denselben wieder erreicht, ist der draconitische oder Drachenmonat; in der Zeit des anomalistischen Monats durchläuft der Mond wieder seine Bahn von Perigäum zu Perigäum, also die ganze Bahnellipse.

Die bekannte Erscheinung der Mondphasen hängt von der veränderlichen Stellung der Sonne und des Mondes zur Erde ab. Der Mond wird beleuchtet von der Sonne; die eine Hälfte derselben ist also hell, nämlich die, welche der Sonne zugekehrt ist; die andere Seite ist dunkel. Es ist nun leicht einzusehen, dass man von der Erde aus die ganze beleuchtete Mondhälfte nur dann sehen kann, wenn die Erde in der Richtung zwischen Sonne und Mond, oder der Mond, wie man sagt, in Opposition sich befindet; alsdann ist es Vollmond. Sollte jedoch der Mond bei einer solchen Configuration der drei Himmelskörper zugleich in der Nähe eines seiner Knoten sich befinden, so würde er auch sehr nahe in der Ebene der Ekliptik sein. Sonne, Erde und Mond würden alsdann nahezu in derselben geraden Linie liegen, in Folge dessen die Sonne vom Monde aus als von der Erde verdeckt erscheint. Der Mond ist mit andern Worten dann in den Erdschatten eingetreten und erhält also kein Sonnenlicht; die Mondscheibe wird verdunkelt und die Erdbewohner haben das Schauspiel einer Mondfinsterniss. — Beim Neumonde ist der Mond zwischen Sonne und Erde getreten, er befindet sich in Conjunction mit der

Sonne; von seiner beleuchteten Seite können wir dann nichts sehen. Ist er aber zugleich in einem seiner Knoten oder deren nächster Nähe, so kann er die Sonne ganz oder theilweise für die Erdbewohner verdecken: wir haben alsdann Sonnenfinsterniss. — Kurz nach dem Neumonde bemerkt man nach Sonnenuntergang eine schmale, gegen die untergehende Sonne gebogene Sichel der beleuchteten Mondhälfte am westlichen Himmel. Diese wird breiter und breiter, je mehr der Mond sich am Himmel von der Sonne entfernt; $7\frac{3}{8}$ Tage nach dem Neumonde (ohngefähr) erscheint der Mond zur Hälfte beleuchtet, d. h. wir sehen die Hälfte seiner wirklich beleuchteten Hälfte. Es heisst nun: der Mond ist in seinem ersten Viertel. Beiläufig $7\frac{3}{8}$ Tage nach dem ersten Viertel tritt die Opposition ein; wieder $7\frac{3}{8}$ Tage später ist der Mond in seinem letzten Viertel und erscheint jetzt wieder zur Hälfte erleuchtet, und zwar auf der Seite, welche gegen die aufgehende Sonne gerichtet ist. Die beleuchtete Mondsichel wird jetzt immer schmäler und verliert sich endlich in den Sonnenstrahlen. Es ist jetzt wieder Neumond. — Neumond und Vollmond nennt man auch die Syzygien, das erste und das letzte Viertel die Quadraturen. Den Verlauf der Mondphasen nennt man eine Lunation; die Zeit einer solchen ist demnach der synodische Monat.

Man bemerkte schon frühzeitig, dass Mondfinsternisse nur bei Vollmond eintraten, Sonnenfinsternisse hingegen nur bei Neumond. Hierdurch wurde man hingewiesen auf die Ursache der Mondphasen, nämlich dass der Mond nur mit reflectirtem Sonnenlicht leuchtet.*)

Durch Aufzeichnungen der Finsternisse entdeckten die Chaldäer die schon oben erwähnte Periode Saros, die in dem folgenden Satze besteht:**)

223 synodische Monate umfassen einen Zeitraum von 6585 Tagen 7 Stunden 43 Minuten, oder ohngefähr 18 Jahre und 11 Tage (das Jahr zu $365\frac{1}{4}$ Tagen gerechnet); dieser Zeitraum umfasst aber sehr nahe 239 anomalistische und 242 draconitische Monate. Nach dieser Periode wiederholen sich die Mondfinsternisse in derselben

---

*) Um die Zeit des Neumondes geschieht es oft, dass man den dunkeln Mondkörper in einem schwachen aschgrauen Lichte bemerkt. Dieses Licht ist von der Erde reflectirtes Sonnenlicht; denn bei Neumond erscheint die Erde vom Monde aus vollständig erleuchtet.

**) Ideler, Handbuch der math. und techn. Chronologie I, p. 206.

Ordnung und derselben Grösse. — Die Länge des synodischen Monats, welche die Chaldäer bestimmt hatten, ist nur um $4\frac{1}{2}$ Sekunden fehlerhaft.

Die astronomische Zeitrechnung der Aegypter scheint ganz identisch mit der der Chaldäer gewesen zu sein, weshalb einige Schriftsteller auch der Meinung sind, dass die Chaldäer sie von den Aegyptern entlehnt hätten; gleichwohl ist das Entgegengesetzte wahrscheinlicher. Aber ausser den gewöhnlichen chronologischen Perioden bemerkt man bei den Aegyptern eine ganz eigenthümliche, nämlich die sogenannte Sothisperiode. Diese Benennung rührte von dem Stern Sirius her, den die Aegypter Soth, Seth und auch Sothis nannten. Sie hatten bemerkt, dass der heliakische Aufgang dieses Sterns einige Zeit vor dem Steigen des Nilflusses eintraf, und dass sie somit in dem ersten Gewahrwerden desselben ein zuverlässiges Zeichen der für sie äusserst wichtigen Nilüberschwemmungen besassen. Die Zeit zwischen zwei heliakischen Aufgängen ist genau ein siderisches Jahr; da sie aber das Jahr zu nur 365 Tagen rechneten, so mussten die heliakischen Aufgänge des Sterns nach und nach zu ganz anderen Jahreszeiten eintreffen. Mit jedem Jahre vergrösserte sich der Unterschied ohngefähr um $\frac{1}{4}$ Tag; stieg der Unterschied endlich bis zu einem ganzen Jahre, so war eine sogenannte Canicularperiode (Hundsternperiode) oder Sothis vollendet, da nun wieder die heliakischen Aufgänge des Sirius in dieselbe Jahreszeit fielen wie zu Anfang der Periode. Eine Sothisperiode umfasst demnach

$$4 \times 365 = 1460 \text{ Jahre.}$$

Ideler nimmt die erste Sothisperiode als vom Jahre 1322 v. Chr. beginnend an, so dass mit dem Jahre 138 eine solche Periode verflossen sei.*)

Dass die alten Aegypter die Kunst verstanden, ihren Meridian zu bestimmen, zeigen uns die Monumente ihrer Baukunst, welche bis zu unsern Tagen den Einwirkungen der Zeit und Verheerungen der Menschen widerstanden haben. Ohne mit Herrn Piazzi Smith im Geringsten überein zu stimmen, der in den Pyramiden das Zeugniss erblicken will, dass die alten Aegypter auf einer Kulturhöhe standen, die der unsern mindestens gleich, wenn nicht noch überlegen war,

---

*) Ideler, Chronolog. I, p. 131.

und der aus den Dimensionen derselben die verborgene Weisheit ihrer Urheber enträthseln zu können glaubt, braucht man doch nicht in Abrede zu stellen, dass bei ihrer Ausführung astronomische Zwecke mit verfolgt worden sind. Es sind nämlich entweder die Seiten der Pyramiden oder auch die Diagonalen zwischen ihren Ecken so genau nach Süd und Nord, Ost und West orientirt, dass eine Absicht bei ihrer Ausführung uns nicht entgehen kann; diese setzt übrigens eine nicht unbedeutende Einsicht voraus, wie astronomische Beobachtungen angestellt werden müssen.

Da die Bahn des Mondes nur wenig gegen die Ekliptik geneigt ist, so sehen wir diesen Himmelskörper am Himmel stets in der Nähe der scheinbaren Sonnenbahn. In der Gegend dieser beiden Bahnen bemerkt man noch eine Anzahl anderer Körper, welche nicht wie die Sterne unveränderlich am Himmel befestigt erscheinen, sondern beweglich sind und im Allgemeinen in derselben Richtung wie Sonne und Mond die Zone zu beiden Seiten der Ekliptik durchlaufen. Diese Himmelskörper werden Planeten genannt, und die Zone, innerhalb welcher sowohl sie, wie auch Sonne und Mond sich bewegen, nennt man den Zodiakus oder den Thierkreis.

Da nun alle diese Körper stets in der Nähe der Ekliptik bleiben, so hat man häufig vorgezogen, die Lage derselben auf diese als Grundebene zu beziehen, anstatt auf den Aequator. Man denke sich eine gerade Linie durch den Beobachtungsort senkrecht auf die Ekliptik gezogen; diese Linie trifft, wenn sie nach beiden Richtungen verlängert wird, die scheinbare Himmelskugel in zwei Punkten, welche die Pole der Ekliptik genannt werden; durch die Pole denke man sich ferner Kreise gelegt, von welchen einer durch den Frühlingspunkt geht, die anderen hingegen durch die Oerter der verschiedenen Himmelskörper. Den Bogen eines solchen Kreises zwischen der Ekliptik und dem Ort des Körpers nennt man die Breite; unter dem Namen Länge versteht man wiederum den Bogen auf der Ekliptik, der zwischen dem Breitenkreis und dem Frühlingspunkt liegt. Länge und Breite entsprechen somit vollständig Rectascension und Declination und können aus letzteren durch eine einfache trigonometrische Rechnung gefunden werden, wobei man auch die Schiefe der Ekliptik kennen muss. Es leuchtet ein, dass die Breite der Sonne stets Null ist*), sowie dass die Breite der übrigen jetzt besprochenen Himmelskörper stets klein sein muss, denn sie sind ja stets in der Nähe der Ekliptik. In der That beträgt die Breite des Mondes und der Planeten immer nur wenige Grade.**)

Wenn aber auch die Bewegungen der Planeten insofern Aehnlichkeit mit denen der Sonne und des Mondes zeigen, dass ihre scheinbaren Bahnen in der Nähe der Ekliptik liegen, so ist doch in anderer Beziehung ein wesentlicher Unterschied zu bemerken. Die Sonne und der Mond durchlaufen ihre Bahnen, beide mit nahezu gleicher Geschwindigkeit in allen Punkten derselben und gehen dabei stets vorwärts in dem Sinne, dass ihre Rectascensionen oder Längen zunehmen; die Planeten hingegen bewegen sich, wie es von der Erde aus erscheint, in einer weniger regelmässigen Weise. Zuweilen scheinen sie unbeweglich unter den Sternen zu verweilen, mitunter sogar eine rückläufige Bewegung zu haben; aber im Grossen und Ganzen schreiten sie doch vorwärts in derselben Richtung wie Sonne und Mond. In dieser Richtung vollenden sie auch ganze Umläufe, ähnlich wie die letztgenannten Himmelskörper, und man unterscheidet auch bei den Planeten siderische, tropische und synodische Umlaufszeiten. Wir führen jetzt diese Umlaufszeiten an und zwar nach neueren Bestimmungen, und unter Berücksichtigung, dass sie sich eigentlich um die Sonne bewegen. Wenn wir dann im Laufe unserer Darstellung ältere Werthe dieser Umlaufszeiten erwähnen, so haben wir einen Vergleichungspunkt zur Beurtheilung der Sicherheit dieser älteren Bestimmungen.

Planet	Sid. Uml.-Zeit in Tagen	Trop. Uml.-Zeit in Tagen	Syn. Uml.-Zeit Jahre	Syn. Uml.-Zeit Tage
Merkur	87.9693	87.9684	0	115.8
Venus	224.7008	224.6954	1	218.7
Mars	686.9798	686.9297	2	48.9
Jupiter	4332.5848	4330.5936	1	33.6
Saturn	10759.2198	10746.9487	1	12.8

*) In Folge von Umständen, die wir später erörtern werden, ist die Breite der Sonne nicht genau Null; sie steigt jedoch nie bis zu einer Sekunde, eine in den Beobachtungen der Alten vollkommen verschwindende Grösse.

**) Hier werden nur die fünf in den ältesten Zeiten schon bekannten

In einem späteren Paragraphen werden wir eingehender die Eigenthümlichkeiten darlegen, die bei den Bewegungen der Planeten schon in früheren Zeiten bemerkt wurden; erst bei dem intelligenten griechischen Volke gelangte die Kenntniss derselben zu einer solchen Höhe, dass sie für uns Interesse haben kann. Es ist zwar durchaus nicht unmöglich, dass schon früher andere Völker in dieser Hinsicht sich zu derselben Höhe wie die Griechen aufgeschwungen hatten, allein es fehlt uns hierüber jede sichere Nachricht. Zu dem Wenigen, was uns von den Bemühungen älterer Völker, die Bewegungen der Planeten zu erkennen, überliefert worden ist, gehören die aus dem alten Indien stammenden Bestimmungen der Umlaufszeiten. Man kennt noch gewisse, aus den Zeiten der alten indischen Kultur herrührende Zahlenangaben, aus welchen die nachstehenden Werthe der siderischen Umlaufszeiten abgeleitet worden sind:

Merkur (Budha)	87.9697
Venus (Cukra)	224.6985
Mars (Mungala)	686.9808
Jupiter (Brihaspati)	4332.3206
Saturn (Cani)	10765.7750

Die Eintheilung des Thierkreises in Sternbilder ist uralt: man kann jetzt nicht mehr sagen, woher dieselbe rührt, aber es ist anzunehmen, dass wenigstens die Grundzüge derselben an derselben Stelle zu suchen sind; denn die Benennungen, die bei den verschiedenen Völkern vorkommen, sind zu gleichförmig, als dass man nicht an eine Ueberlieferung denken müsste. Man hat auf verschiedene Weise und durch gelehrte Hypothesen die Entstehung der Figuren zu deuten gesucht, denen die Sternbilder ihre Namen verdanken, aber ein eigentliches Resultat ist hierbei nicht gewonnen worden. Die Gruppirung der Sterne innerhalb der verschiedenen Sternbilder erinnert nämlich höchst selten an die Figur, die den Namen des Sternbildes hergegeben hat, weshalb die Benennung unzweifelhaft

---

Planeten gemeint, nämlich Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn. Diesen schliessen sich die in neuerer Zeit entdeckten Uranus und Neptun in Hinsicht der geringen Neigung ihrer Bahnen gegen die Ekliptik an; unter den zwischen Mars und Jupiter befindlichen sog. kleinen Planeten finden sich dagegen einige mit erheblicher Neigung.

anderen Ursachen zugeschrieben werden muss. Man hat z. B. unter anderem die Ansicht aufgestellt, dass die Benennung der Sternbilder des Thierkreises in irgend einem Zusammenhange mit der Jahreszeit stehe, zu der die Sonne in einem gewissen Sternbild sich befand. Man hat z. B. vermuthet, dass die Benennung »Waage« zu der Zeit entstand, wo die Sonne am Herbstäquinoctium in diesem Sternbilde sich befand, und folglich Gleichgewicht zwischen der Länge des Tages und der Nacht eintrat.

Der Thierkreis umfasst 12 Sternbilder, nämlich den Widder, den Stier, die Zwillinge, den Krebs, den Löwen, die Jungfrau, die Waage, den Scorpion, den Schützen, den Steinbock, den Wassermann und die Fische. Jedes dieser Sternbilder erstreckt sich über ohngefähr 30° der Ekliptik, also 30° in der Länge, weshalb man die Länge eines Himmelskörpers dadurch angeben konnte, dass man das Sternbild nannte, in dem er sich befand. Um solche Angaben jedoch etwas bestimmter zu machen, theilte man die Ekliptik in zwölf gleiche Theile, von denen jeder 30° umfasst, und nannte diese Theile Zeichen. Das Zeichen des Widders rechnet man von dem Frühlingspunkt 30° vorwärts der Länge nach, so dass das Zeichen des Stiers bei 30° anfängt und bis 60° in der Länge sich erstreckt. Indessen ist der Frühlingspunkt, wie schon hervorgehoben worden ist, kein fester Punkt in der Ekliptik oder unbeweglich in Bezug auf die Sterne, weshalb die Sternbilder, von denen die Zeichen ihre Namen erhalten hatten, allmälig vorrückten und mit anderen Zeichen zusammenfielen. Gegenwärtig liegt z. B. der Frühlingspunkt im Sternbilde der Fische; das Sternbild des Widders fällt wieder mit dem Zeichen des Stiers zusammen u. s. w.

Das Himmelsgewölbe zu beiden Seiten des Thierkreises hat man ebenfalls in Sternbilder eingetheilt. Auf der nördlichen Hälfte haben wir die bekannten Sternbilder des grossen und kleinen Bären; in dem letzteren liegt der nördliche Weltpol. Weiter die Leyer, den Schwan, Cepheus, Cassiopeja, Perseus, Auriga (der Fuhrmann), Bootes u. a. Der Aequator geht durch die prachtvollen Sternbilder Orion und den Adler, sowie durch andere, weniger in die Augen fallende, wie z. B. den Wallfisch, den kleinen Hund, mit dem schönen Stern Procyon, die Schlange und Ophiuchus. In den Sternbildern der Fische und der Jungfrau schneiden sich die Ekliptik und der Aequator, d. h. im ersteren Sternbilde liegt der Frühlingspunkt und im letzteren der Herbstpunkt. — Die Sternbilder des südlichen Himmels sind meistens in neueren Zeiten benannt worden; jedoch haben verschiedene darunter ihre Namen schon im Alterthume erhalten, wie z. B. der grosse Hund mit Sirius, dem hellsten Fixstern des ganzen Himmels, der Fluss Eridanus (von den Aegyptern Nilfluss genannt); die südlichen Sternbilder des Thierkreises u. a. Der südliche Weltpol liegt in dem unscheinbaren Sternbilde des Octant, dieses aber ist von einigen Sternbildern umgeben, deren Anblick ein ausserordentlich prachtvoller sein soll, wie z. B. das südliche Kreuz.

§ 3. Die ältere griechische Astronomie.

Als Vater der griechischen Astronomie wird Thales, einer der sieben Weisen, genannt. Es wird ihm nicht nur die Vorhersagung einer Sonnenfinsterniss zugeschrieben, sondern auch die Entdeckung, dass die Sonnenbahn gegen den Aequator geneigt ist.*) Thales war geboren um das Jahr 640 v. Chr., also zu einer viel späteren Zeit, als bei andern Völkern die astronomischen Kenntnisse eine solche Ausbildung erlangt hatten, dass die Schiefe der Ekliptik nicht nur erkannt, sondern auch gemessen war. Von Thales weiss man indess, dass er oft und lange in Aegypten gewesen ist; es liegt also nahe, anzunehmen, dass er das Meiste, was ihm von den Griechen zugeschrieben wird, in jenem Lande sich angeeignet habe.

Die Lehren und Kenntnisse des Thales wurden fortgepflanzt und ausgebildet durch Schüler, Freunde und Nachfolger. Man zählt zu diesen unter Andern Pythagoras, Anaximander und Anaxagoras. Der Letztere verdient wohl hauptsächlich nur deshalb in der Geschichte der Astronomie einen Namen, weil ihm die Ansicht zugeschrieben wird, die Meteorsteine seien kosmischen Ursprungs. Man bringt seine Ansicht in Verbindung mit dem Erscheinen eines Meteors am Aegos Potamos im Jahre 466 v. Chr. — Von

*) Die von Thales vorhergesagte Finsterniss dürfte im Jahre 585 v. Chr. stattgefunden haben.

Anaximander, dem Freund Thales', wird gesagt, dass er der Urheber der ersten Landkarten sei. Pythagoras (geboren zu Samos um das Jahr 584 v. Chr.) ist jedenfalls der bekannteste unter den Männern, welche der Sage nach den Unterricht des Thales genossen haben sollen. Jedoch gehörte er nicht der von Thales gestifteten ionischen Schule an, bildete vielmehr eine neue, indem er den pythagoreischen Bund zu Kroton in Grossgriechenland stiftete. Die Thätigkeit dieses Bündnisses, dessen Mitglieder sich bald über die bedeutendsten Städte ausbreiteten, ist durch spätere Berichte in einem sagenhaften Dunkel erschienen. Der Urheber selbst wird gewissermaassen als ein Halbgott verehrt; man lässt ihn sich seiner eigenen und Anderer Praeexistenz erinnern, Thieren gebieten, in den Hades hinabsteigen und endlich die Harmonie der Sphären hören. Indess ist es unzweifelhaft, dass er die Fortschritte der Mathematik gefördert hat; ihm haben wir die Entdeckung des sog. pythagoräischen Lehrsatzes zu verdanken, über die er sich selbst dermaassen gefreut haben soll, dass er den Göttern eine Hekatombe opferte. — Unter den Pythagoräern, zu denen der in der Einleitung erwähnte Philolaos gehörte, scheint die Lehre von der Bewegung der Erde ein Gegenstand der Discussion gewesen zu sein. Es ist jedoch kaum anders denkbar, als dass Pythagoras selbst die Theorie der Sphärenharmonie angenommen hatte; durch seine Vorliebe für Mathematik und Musik und durch ihre so zu sagen handgreifliche Verbindung der übermenschlichen Welt mit der Sinnenwelt, musste diese Lehre ihm in hohem Grade zusagen.

Die astronomische Chronologie wurde durch die Griechen nicht unwesentlich vervollkommnet, und in dieser Beziehung dürften ihre Arbeiten vor Aristoteles die grösste wissenschaftliche Bedeutung haben. Das Problem, welches hier vorlag, bestand im Folgenden. Während die Astronomen oder Solche, die versuchten, astronomische Genauigkeit in der Zeitrechnung zu beobachten, das Sonnenjahr als Zeiteinheit anwendeten und die Länge desselben in Tagen auszudrücken suchten, rechnete das Volk die Zeit nach den Mondumläufen. Um nun diese beiden Arten von Zeitangaben mit einander vergleichbar zu machen, war es nöthig, das Verhältniss zwischen der Zeit eines Sonnenumlaufs und der eines Mondumlaufs hinlänglich genau und zu gleicher Zeit übersichtlich anzugeben. Dies geschah durch Meton 432 v. Chr. Die nach ihm benannte Periode oder

Cyclus ist darauf gegründet, dass 19 Jahre sehr nahe 235 Lunationen entsprechen. Die Zeit nämlich, welche 19 tropische Jahre umfasst, ist um 9 Stunden 35 Minuten kürzer als 6940 ganze Tage; die Zeit aber, innerhalb welcher 235 Lunationen vollendet werden, 7 Stunden 29 Minuten kürzer als die genannte Anzahl Tage. Wenn also 19 Jahre dem Mondwechsel nach in 235 Monate vertheilt werden, so kehren diese nach Verlauf dieser Periode an demselben Tage des Jahres wieder. Durch eine solche Vertheilung erhalten ein Theil der Monate 30, ein anderer Theil 29 Tage, und von den 19 Jahren enthalten 7 Jahre 13 Monate, die übrigen hingegen nur 12.

Ohngefähr 100 Jahre nach Meton wurde sein Cyclus von Kalippos verbessert, der vier Meton'sche Perioden zusammenschlug und von der Anzahl Tage, welche diese umfassten, einen Tag fallen liess. Auf diese Weise wurde der Fehler in der Meton'schen Periode wesentlich vermindert.

Die Regel des Meton ist vielfach in Gebrauch gewesen, und wird sogar noch bei der christlichen Festrechnung angewendet. Nach einer noch in Kraft stehenden Bestimmung — man sagt, dass sie von dem Concil von Nicäa herrührt — soll das Osterfest auf den ersten Sonntag des auf das Frühlingsäquinoctium folgenden ersten Vollmondes fallen. Heutzutage wäre es nun freilich kein Bedürfniss, das Datum des Ostersonntags mit Hülfe der Meton'schen Regel zu berechnen, die überdies zuweilen grosse Abweichungen von der beabsichtigten Bestimmung veranlassen kann; aber dieselbe ist in den Kirchengesetzen angenommen und unverändert beibehalten seit der Zeit, wo die Bewegungen der Sonne und des Mondes noch keineswegs so genau bekannt waren, wie es von der heutigen Wissenschaft verlangt werden muss. Im Laufe verschiedener Jahrhunderte wurde indessen die Ungenauigkeit der Meton'schen Regel, auch so wie sie von Kalippos verbessert war, bemerkt; der Fehler war bei jeder einzelnen Periode von keiner Bedeutung, aber derselbe vermehrte sich im Laufe der Jahrhunderte und nach 312½ Jahren betrug derselbe sogar einen ganzen Tag. Zur Zeit des Papstes Gregorius XIII war dieser Fehler oder die Ungenauigkeit der Meton'schen Regel bis auf 3 Tage gestiegen und man war nun darauf bedacht, dieselbe zu verbessern, was auch auf eine höchst einfache Weise geschehen konnte. Wir theilen die einfachen Regeln mit, nach denen man die Zeit des Osterfestes berechnen kann, und bemerken bloss zuvor, dass man unter der Benennung Ostertermin das Datum des Ostervollmondes versteht.

Die Goldene Zahl nennt man die Ordnungsnummer des Jahres in dem Meton'schen Cyclus; man findet dieselbe, indem man 1 zu dem numerischen Werthe des Jahres (gerechnet in der christlichen Aera) legt und die Summe durch 19 dividirt; der Rest ist die Goldene Zahl. Auf solche Weise findet man z. B., dass die Goldene Zahl des Jahres 1877 16 ist. Nachdem die Goldene Zahl bekannt ist, findet man den Ostertermin oder das Datum des Kirchen-Oster-Vollmondes nach einer Tabelle, die hier mitgetheilt wird und die für den Gregorianischen Kalender gilt, also sowohl in katholischen wie protestantischen Ländern zur Anwendung kommt.

Goldene Zahl.	Ostertermine.	Goldene Zahl.	Ostertermine.
1	13. April	11	24. März
2	2. April	12	12. April
3	22. März	13	1. April
4	10. April	14	21. März
5	30. März	15	9. April
6	18. April	16	29. März
7	7. April	17	17. April
8	27. März	18	6. April
9	15. April	19	26. März
10	4. April		

Bei dieser Tabelle muss jedoch bemerkt werden, dass sie nur für die Jahre von 1700 bis 1900 gilt.

Der erste Sonntag nach dem Ostertermine ist also zugleich der erste Ostertag. Den Ostertag kann man auch direct herleiten und zwar nach einer sehr einfachen Regel, welche Gauss aufgestellt hat, und die natürlich nur eine arithmetische Folgerung der Meton'schen Regel sein kann. Dieselbe wird hier ohne Hinzufügung der Ableitung mitgetheilt, da diese nur in rein arithmetischer Beziehung von Interesse ist.

Der numerische Werth des Jahres soll durch drei verschiedene Zahlen dividirt werden, nämlich durch 19, 4 und 7; hierdurch entstehen drei verschiedene Reste, welche in dem Fall, wo die Division gerade aufgeht, gleich Null zu setzen sind. Diese Reste bezeichnen wir durch a, b und c. Mit m und n bezeichnen wir ferner zwei ganze Zahlen, deren numerische Werthe weiter unten angegeben werden sollen.

Man dividire nun:

$m + 19a$ durch 30 und nenne den Rest d,

$n + 2b + 4c + 6d$ durch 7 und nenne den Rest e,

alsdann trifft der Ostersonntag auf den

$$(22 + d + e)^{\text{ten}} \text{ März}$$

oder auf den

$$(d + e - 9)^{\text{ten}} \text{ April.}$$

Im Julianischen Kalender, der noch heutzutage bei den Russen und Griechen in Gebrauch ist, gelten die Werthe $m = 15$ und $n = 6$, aber im Gregorianischen Kalender haben m und n verschiedene Werthe in den verschiedenen Jahrhunderten; es ist

von	1582	bis	1699	$m = 22$;	$n = 2$
»	1700	»	1799	$m = 23$;	$n = 3$
»	1800	»	1899	$m = 23$;	$n = 4$
»	1900	»	1999	$m = 24$;	$n = 5$.

Im Julianischen Kalender wird das tropische Jahr genau zu $365\frac{1}{4}$ Tagen, also etwas zu gross angenommen; daher werden in diesem Kalender eine grössere Anzahl Tage gerechnet werden müssen, als in Wirklichkeit verflossen sind; das julianische Datum ist also etwas zurück gegen das gregorianische. Gegenwärtig beträgt der Unterschied 12 Tage.

Das Zeitalter, in dem Kalippos lebte, zeichnete sich durch die höchste Blüthe der griechischen Kultur aus; in dieser Zeit bemühten sich die Freunde des Wissens oder der Weisheit, d. h. die Philosophen, vielfach, den Bau der Welt oder das Weltsystem oder, wie es auch genannt worden ist, die Architektonik des Himmels zu erkennen, und ihrem Zusammenhange mit einer Gottheit oder den Ideen des Uebersinnlichen auf die Spur zu kommen.*) In diesen Zeiten keimen die Wissenschaften, die wir Kosmologie und Kosmogonie nennen; immerhin sind sie damals nur wenig gefördert worden, denn das Meiste, was von den Philosophen des Alterthums hierüber geschrieben worden ist, reducirt sich auf die Darstellung der Mythen, sowie auf Speculationen, die doch im Grunde von Mythen ausgehen. Wie die Weltanschauung Vieler von den Mythen beeinflusst worden ist, können wir noch heute in dem Festhalten an der mosaischen Schöpfungsgeschichte wahrnehmen.

Es wird angenommen, dass die Lehre von den verschiedenen Himmelssphären zum ersten Male von Aristoteles in ein System gebracht wurde. Zwar blieb für die späteren Astronomen Vieles zu ergänzen und zu verbessern übrig, im Grossen und Ganzen behielt jedoch das Weltsystem nicht nur im Alterthum, sondern auch im Mittelalter das aristotelische Gepräge. Seine Weltansicht konnte auch sehr wohl mit der des alten Testaments in Uebereinstimmung gebracht werden, und so geschah es, dass die Lehren des Aristoteles von den Mönchen und Scholastikern des Mittelalters als ebenso unangreifbar angesehen wurden, wie ihre kirchlichen Dogmen.

Aristoteles wurde zu Stagira in Macedonien 384 v. Chr. geboren.

---

*) Heutzutage verwechselt man oft das Wort Philosophie mit Metaphysik.

Nicht mit Unrecht wird er der Vater der Naturgeschichte genannt; Alles, was von den Gegenständen der Natur und ihren Erscheinungen zu seiner Kenntniss kam, stellte er zusammen und beschrieb es in seinen Schriften mit grosser Sorgfalt: sogar zu erklären versuchte er die Erscheinungen. Eine eigentliche Naturwissenschaft zu begründen gelang ihm jedoch nicht; die Ursache lag wohl hauptsächlich in der Art seines Philosophirens, das nur zu Absurditäten führen konnte, sobald man durch dasselbe zur Erklärung der Naturerscheinungen gelangen wollte. Indessen bleibt die Naturphilosophie des Aristoteles immerhin denkwürdig genug, so dass wir uns nicht versagen können, ein von Whewell mitgetheiltes Probestück hier nach v. Littrow's Uebersetzung zu wiederholen.

»Gleich im Eingange der Schrift: De Coelo, beweist er »»die Vollkommenheit der Welt«« auf folgende Weise: »Die Dinge, aus welchen die Welt besteht, sind alle solide Körper, und sie haben daher alle drei Dimensionen. Aber drei ist unter allen Zahlen die vollkommenste, denn sie ist die erste aller Zahlen (weil nämlich eins noch keine Zahl ist, und weil man statt zwei auch beide sagen kann, während drei diejenige Zahl ist, durch die wir auch alles bezeichnen können); überdies hat diese Zahl drei auch einen deutlichen Anfang, eine Mitte und ein Ende u. s. w. Man sieht, wie daraus unmittelbar folgen muss, dass diese Welt die vollkommenste von allen möglichen Welten ist, und dass überdiess diese ganze Beweisart wieder nur auf blossen Meinungen über die einzelnen Wörter der gemeinen Sprache gebaut ist.«

Das zweite Beispiel, aus demselben Buche, fängt mit den folgenden Worten an: »Die einfachen Elemente der Natur müssen auch einfache Bewegungen haben. So haben auch in der That Feuer und Luft ihre natürlichen Bewegungen aufwärts, Wasser und Erde aber abwärts, beide in gerader Richtung. Aber ausser diesen (geradlinigen) Bewegungen giebt es auch noch eine kreisförmige, die jenen Elementen nicht natürlich ist, obschon sie eine viel vollkommenere Bewegung ist, als jene. Denn der Kreis ist selbst eine vollkommene Linie, und eine gerade Linie ist dies nicht. Es muss daher auch etwas geben, dem diese vollkommene, kreisförmige Bewegung ebenfalls natürlich ist. Daraus folgt aber klar und unwidersprechlich, dass es eine gewisse Essenz (ἐσία) von Körpern geben muss, die ganz verschieden von jenen vier Elementarkörpern, die göttlicher als diese sein, die daher auch über diesen stehen müssen. Denn wenn diejenigen Dinge, die sich in einem Kreise bewegen, in einer unnatürlichen Bewegung begriffen sein sollten, so wäre es doch wunderbar, oder vielmehr es wäre ganz absurd, dass eben diese unnatürliche Bewegung zugleich die einzige immer fortgehende und wahrhaft unendliche Bewegung sein sollte, da doch alle unnatürlichen Bewegungen sehr bald ein

Ende nehmen müssen. Aus allem diesem folgt, denn so müssen wir schliessen, dass es ausser den vier Elementen, die wir hier auf der Erde um uns haben, noch ein anderes von uns entferntes Element geben muss, das desto vollkommener ist, je weiter es von uns absteht.« — Dieses fünfte und vollkommenste aller Elemente des Weltalls ist denn das, was die späteren lateinischen Schriftsteller über Aristoteles die »Quinta Essentia« genannt haben, und zugleich das, was noch jetzt, in unserem gewöhnlichen Sprachgebrauche, unter der Benennung der »Quintessenz« selbst dem gemeinen Manne bekannt ist.«

Der Gedankengang und mehrere der Ausdrücke in der angeführten Zusammenstellung erinnern an die Vorstellungen, die dem unentwickelten Verstande des Mittelalters geläufig waren. Die Geisterbeschwörer, Alchemisten u. dgl. m. konnten Kreise, Dreiecke und andere mathematische Figuren nicht entbehren, die in Folge ihrer Vollkommenheit mächtig genug waren, die Elementargeister innerhalb oder ausserhalb ihrer Begrenzung zu bannen. — So wenig man nun auch die Pseudophilosophie und die wilden Conceptionen des Mittelalters Aristoteles allein zur Last legen darf, besonders da seine Schriften von arabischen Bearbeitern verunstaltet worden waren, so kann doch nicht geleugnet werden, dass sie in seinen philosophischen Lehren eine gewichtige Stütze fanden. Dass gleichwohl das Mittelalter an Kühnheit und Verwegenheit in der Beweisführung seinen Meister Aristoteles noch übertreffen konnte, werden wir gleich an einem Beispiel sehen, das aus dem Werke Apelt's »die Reformation der Sternkunde« entlehnt ist. Es werden hier verschiedene Sätze aus einer Schrift »De docta ignorantia« des Cardinals Nicolaus von Cusa angeführt, welcher ausserdem dadurch bemerkenswerth ist, dass er der Erde eine gewisse Bewegung zuschrieb, obgleich diese Bewegung keineswegs die copernicanische war. Zwei dieser Sätze sind die folgenden:

1. »Je grösser der Halbmesser eines Kreises ist, desto flacher; d. i. desto geringer wird die Krümmung seines Umfangs. Die Peripherie des grössten Kreises, welche grösser als jede zu gebende ist, wird also gar keine Krümmung mehr haben, d. i. sie wird eine Gerade sein. Bei der Linie, deren Länge unendlich ist, d. i. bei der grössten Linie, giebt es also keinen Unterschied des Geraden und Krummen, vielmehr besteht ihre Krümmung gerade in ihrer Geradheit.«

2. »Da das Unendliche oder das Grösste nicht Mehreres, sondern nur Eins sein kann, so kann ein unendlich grosser Triangel auch nicht aus mehreren, sondern nur aus einer Linie bestehen. Da er aber demohngeachtet nicht aufhört ein Triangel zu sein, d. i. drei Seiten zu haben,

so ist jene unendliche Linie drei, und diese drei sind doch nur eine einzige.«

»So spielt er mit diesen Widersprüchen, indem er das als das absolut Grösste voraussetzt, was gerade ohne Ende immer grösser werden kann und daher niemals vollendet ist. Diese Widersprüche haben ihm aber eine Bedeutung für seine mystische Theologie. Denn so wie sich die grösste Linie zu den Linien verhält, so soll sich das Grösste überhaupt zu Allem verhalten. Daher ist ihm jenes unendlich grosse Dreieck, das nichts Anderes als die grösste Gerade selbst ist, ein Symbol der göttlichen Dreieinigkeit.« (Apelt: Die Reformation der Sternkunde, pag. 17 und 18.)

Wenn nun Sätze, wie die von Aristoteles und dem Cardinal von Cusa, heutzutage nicht mehr aufgestellt und als vernünftig angesehen werden können, so gebührt das Verdienst davon in nicht geringem Grade der Astronomie. Diese Wissenschaft ist nämlich, wenigstens bis jetzt, in höherem Grade als die anderen Naturwissenschaften ein Produkt sowohl der Gedankenarbeit als auch der durch Beobachtungen gewonnenen Erfahrung. Diese beiden Factoren controlliren sich gegenseitig und verhindern, wenn sie gleichmässig vorschreiten, solche grobe Verstösse gegen eine gesunde Logik und ein gesundes Wissen, wie sie uns vergangene Tage in vielen Beispielen hinterlassen haben. Das Studium der Astronomie hat die menschliche Vernunft entwickelt und geschärft, nicht zum Auffinden von Spitzfindigkeiten, sondern zur Ermittelung der Wahrheit. Ausserdem haben die Einsichten in die Natur der wirklichen Bewegungen der Himmelskörper unsere Ansichten über den Bau der Welt wesentlich verändert. Das Glauben des Mittelalters ist durch ein positives Wissen ersetzt worden.

Im aristotelischen Weltenbau ist die Erde in den Mittelpunkt der Schöpfung versetzt; der Himmel, d. h. der Theil des Weltganzen von seiner äussersten Grenze bis zu dem Monde, der sich um die ruhende Erde seiner Natur nach kreisförmig bewegt, ist eine von den vier Elementen verschiedene, viel höhere und vollkommenere fünfte Substanz (ἐσία, Essenz, Aether); einfach, imponderabel, ewig, und bildet eine Kugel. Der Himmel, der Aufenthaltsort der seligen Geister, ist in 8 Sphären getheilt. Ueber der 8ten Sphäre, primum mobile (das erste Bewegliche) genannt, thronen die höchsten Geister oder Götter; unter der Sphäre des Mondes herrschen aber die vier Elemente. — Die Himmelskörper bestehen aus derselben fünften Substanz wie der Himmel, jeder für sich kugelförmig, mit Leben und Thätigkeit begabt;

sie bewegen sich in den verschiedenen Sphären des Himmels, an demselben befestigt, und mit ihnen um die Erde. Sie erzeugen durch die Schnelligkeit ihrer Bewegung in der die Erde zunächst umgebenden Sphäre Licht und Feuer (vgl. den Artikel Aristoteles in Pauly's Real-Encyclopädie der classischen Alterthumswissenschaft).

Die Anzahl der Sphären wurde indess später bedeutend vermehrt, in der Meinung, dadurch die astronomischen Thatsachen besser erklären zu können, von denen man nicht umhin konnte zu bemerken, dass sie der Richtigkeit von Aristoteles' Weltenbau widersprachen. Die besseren der griechischen Astronomen, auf deren Arbeiten wir später zu sprechen kommen, haben doch schwerlich diese Krystallsphären als wirklich bestehend angenommen, sondern in ihnen bloss geometrische Begriffe gesehen, mit deren Hülfe sie die Bewegung der Sonne, des Mondes und der Planeten zu erklären suchten. Welche Eigenthümlichkeiten man bei diesen Bewegungen wahrnahm, werden wir im folgenden Paragraphen zu zeigen versuchen. Wir meinen dabei natürlicherweise die Bewegungen, welche die Himmelskörper, von einem Punkt an der Erdoberfläche aus gesehen, auszuführen scheinen, folglich diejenigen, welche durch die unmittelbare Wahrnehmung zu unserer Kenntniss gelangen.

§ 4. Das Sonnensystem.

Je mehr die astronomische Beobachtungskunst ausgebildet wurde, d. h. mit je grösserer Genauigkeit und Sicherheit man die Richtung auffassen konnte, in welcher ein Himmelskörper in einem gegebenen Augenblicke von einem Punkt der Erdoberfläche aus gesehen wurde, desto mehr konnte dessen Bewegung in ihren Einzelnheiten der Gegenstand astronomischer Forschung werden. Bei der Genauigkeit, mit welcher astronomische Beobachtungen gegenwärtig angestellt werden können, ist man im Stande, viele Eigenthümlichkeiten in der Bewegung der Sonne, des Mondes und der Planeten zu erkennen, welche in den Zeiten der alten Griechen, ja selbst zur Zeit des grossen Newton nicht geahnt werden konnten. Ein grosser Theil dieser Eigenthümlichkeiten — solche nämlich, die ihrer quantitativen Geringfügigkeit wegen der directen Wahrnehmung entgingen — wurde auf deductivem Wege entdeckt, nachdem das Newton'sche Gravitationsgesetz bekannt geworden war. Es scheint aber jetzt am angemessensten, nicht alle diese Einzelnheiten sogleich zu beachten, sondern die Bewegungen zu betrachten, wie sie durch eine weniger entwickelte Beobachtungskunst aufgefasst werden konnten, und dieses um so mehr, als die feinere Detailkenntniss erst dann von Interesse sein wird, wenn man sie auf der Grundlage einer richtigen Theorie erlangen kann.

Während die Beobachtungskunst unserer Tage den Ort oder die Lage der Himmelskörper am scheinbaren Himmelsgewölbe mit einer Genauigkeit angiebt, die weniger als eine Bogensekunde beträgt, war man in älteren Zeiten unsicher auf mehrere Minuten, und erst dem grossen Beobachter Tyge Brahe gelang es, obschon er noch ohne Fernrohr beobachtete, die Beobachtungsfehler (Unsicherheit der Beobachtungen) bis auf die Bogenminute einzuschränken. Hieraus folgt, dass die alten Astronomen die Bewegungen innerhalb des Sonnensystems nur in groben Zügen kennen konnten, aber auch diese waren schon verwickelt genug, um ihren ganzen Scharfsinn auf die Probe zu stellen.

Wir führen nun hier das Wesentlichste über die Gesetze der Bewegungen an, welche in den alten Zeiten an den Körpern erkannt wurden, die als zum Sonnensysteme gehörend, oder als beweglich angesehen wurden. Dieser Körper giebt es sieben: nämlich Sonne, Mond, Merkur, Venus, Jupiter und Saturn. Uranus und Neptun sind erst in neueren Zeiten aufgefunden worden und ebenso der Schwarm der kleinen Planeten.

1. Die Sonne.

Unter den Bewegungen der Himmelskörper ist die der Sonne von der Erde aus gesehen die einfachste, obgleich die Untersuchung derselben nicht die leichteste war. Der Grund zu den Schwierigkeiten ist in dem Umstande zu suchen, dass die Lage der Sonne relativ zu den Fixsternen oder, wie man sagt, ihr relativer Ort nicht unmittelbar beobachtet werden konnte, da kein Fixstern gleichzeitig mit der Sonne für das blosse Auge sichtbar ist. Es wäre am einfachsten, die Bewegung eines Gestirns aus solchen relativen Oertern zu bestimmen, da man dabei annehmen kann, dass die Fixsterne wirklich unveränderliche Lagen am Himmel haben. Schwieriger dagegen wird die Untersuchung, wenn man erst auf die Lage am Himmel in Bezug auf die Sterne aus der beobachteten Richtung, die auf eine mit der Erde verbundene Ebene bezogen ist, schliessen soll. Hier ist also ein Unterschied vorhanden, indem man einerseits durch relative Bestimmungen (Bestimmungen der relativen Lage) gewissermaassen den Lauf des Gestirns unter den Sternen sogleich übersehen kann; andrerseits bestimmt man aber Richtungen, bezogen auf Ebenen oder gerade Linien, deren Lage durch eigens dazu angestellte Beobachtungen erkannt werden muss. Auf diese letzte Art werden die Rectascensionen und Declinationen oder die Längen und Breiten unabhängig von jeder früheren Bestimmung oder absolut erhalten.

Man sieht leicht ein, dass relative Bestimmungen leichter ausgeführt werden können als absolute, denn sie haben ja nur den Zweck, die Unterschiede in Rectascension und Declination oder in Länge und Breite anzugeben, was man nöthigenfalls durch Winkelmessungen von zwei bekannten Sternen bewerkstelligen kann. Bei den absoluten Bestimmungen ist es vor allen Dingen nöthig, die Lage des Horizontes und des Meridians im Raume zu erkennen; man muss mit anderen Worten die Neigung der Weltaxe gegen den Horizont und den Abstand des Frühlingspunktes von dem Meridian, also die Sternzeit kennen. Ebenso muss die Richtung des Meridians auf dem Horizonte bekannt sein. Die Richtung des Meridians, sowie die der Weltaxe, lässt sich zwar ein für allemal sehr genau erkennen, es ist aber nicht eben so leicht, diese Lage zu fixiren. Das Instrument, womit man beobachtet — wir wollen annehmen, es sei eine Armillarsphäre — muss so aufgestellt werden, dass die Axen und Ebenen desselben wirklich mit den entsprechenden Richtungen im Raume zusammenfallen, oder wenigstens müssen die Abweichungen der Lage des Instruments von der beabsichtigten Lage erkannt sein, sofern sie merklich sind. Um die Mühe, die von dem Orientiren (Einstellung in die richtige Lage oder Berichtigung) des Instruments unzertrennlich ist, zu verringern, hat man sogenannte feste Instrumente construirt, d. h. solche, die in gewisser Beziehung eine unveränderliche Aufstellung haben. Hierdurch ist Vieles gewonnen, jedoch nicht so viel, wie wohl erhofft wurde; denn es hat sich gezeigt, dass keine Aufstellung auf die Dauer absolut unveränderlich ist. Das Fundament, worauf das Instrument aufgestellt wird, ist Verschiebungen unterworfen, und das Material, aus dem das Instrument verfertigt wurde, dehnt sich aus und zieht sich zusammen in Folge der Temperaturänderungen. Man muss daher zufrieden sein, wenn nur die Aenderungen der Aufstellung nicht allzugross sind und wenn sie einigermaassen gleichförmig vor sich gehen, so dass man sich begnügen kann, die Lage des Instruments von Zeit zu Zeit zu prüfen. — Der Gnomon war ein Instrument dieser Art; die Höhe desselben sollte ein für allemal gemessen sein und auch die Richtung des Meridians konnte man dauernd bezeichnen; allein die Höhe konnte durch mancherlei Umstände, namentlich durch Temperatur- und Witterungsverhältnisse geändert werden, und auch die auf der Ebene aufgezeichnete Richtung des Meridians konnte leicht von der beabsichtigten abweichen. Man sieht z. B. nicht selten, dass hohe Gebäude, wie Kirchthürme u. dgl., mit der Zeit eine etwas schiefe Stellung annehmen, was natürlich zur Folge haben kann, dass der Mittagsschatten in einer veränderten Richtung fällt.

Bei den geringen Ansprüchen, die man in älteren Zeiten an die Genauigkeit der astronomischen Beobachtungen stellte, war der Gnomon jedoch eine sehr nützliche Vorrichtung, und so diente derselbe auch dazu, die gegen den Aequator schiefe Lage der Sonnenbahn zu erkennen, sowie die Neigung beider Ebenen mit einer relativ hohen Genauigkeit zu bestimmen. Hiermit war es aber nicht genug; man hatte zwar die Lage der Bahnebene bestimmt, aber weder über ihre Form, noch über die Geschwindigkeit in den verschiedenen Theilen derselben konnte auf Grund der Beobachtungen mit dem Gnomon direct etwas ermittelt werden. Nur die Umlaufszeit der Sonne oder die Länge des Jahres ergab sich durch solche, sowie durch verschiedene andere Beobachtungsarten, wie z. B. durch Beobachtungen der heliakischen Aufgänge. Hiermit wäre nun freilich die ganze Frage abgethan, denn nach den Ansichten der Alten war die Sonnenbahn ein Kreis und die Bewegung in demselben gleichförmig, d. h. die Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn dieselbe. Es zeigte sich jedoch, wie wir sehen werden, dass dies nicht in aller Strenge der Fall ist.

Um nun die Bewegung der Sonne in ihrer Bahn zu untersuchen, müssen die Längen dieses Gestirns zu verschiedenen Zeitpunkten durch unmittelbare Beobachtungen gegeben sein, oder auch die Rectascensionen. Denn ist die Schiefe der Ekliptik einmal bekannt, so lässt sich die Länge aus der Rectascension durch eine sehr leichte trigonometrische Rechnung finden. Welche Schwierigkeiten indessen bei solchen Bestimmungen von Rectascensionen der Sonne überwunden werden mussten, ist oben angedeutet worden; um so mehr muss daher die Umsicht bewundert werden, mit welcher es schon den Griechen gelang, die Eigenthümlichkeiten der Sonnenbewegung zu entdecken und also Kenntnisse zu erlangen, welche die Ansichten der Philosophen häufig als unrichtig oder ungenügend erwiesen.

Es dürfte nicht unangemessen sein, gerade hier eine kurze Erläuterung einzuschalten, wie die Astronomen unserer Tage die Rectascensionen der Himmelskörper und folglich auch die der Sonne bestimmen. Man wird dadurch im Stande sein, die ausserordentliche Ueberlegenheit unserer Hülfsmittel den früheren gegenüber zu beurtheilen, sowie auch das Wesen der Aufgabe besser zu übersehen. — Wir erinnern uns, dass die Sternzeit dasselbe ist, wie der Stundenwinkel des Frühlingspunktes. In der Zeit einer Erdumdrehung ändert sich der Stundenwinkel um 360° oder um 24 Stunden, zu gleicher Zeit aber auch die Sternzeit um denselben Betrag. Die Zeit — natürlich Sternzeit — welche verfliesst, ist also das Maass der Aenderung des Stundenwinkels. — Der Stundenwinkel wird von dem Meridian aus gerechnet; wenn also ein Gestirn durch den Meridian geht oder culminirt, ist sein Stundenwinkel gleich 0°; zu gleicher Zeit ist aber die Sternzeit gleich der Rectascension des Gestirns, denn die Rectascension ist ja eben der Winkel zwischen dem Declinationskreise des Frühlingspunkts und dem des Gestirns, das jetzt als im Meridiane angenommen wird, welcher Winkel unter dieser Voraussetzung der Stundenwinkel des Frühlingspunktes, also die Sternzeit ist. Hat man daher einen Apparat, welcher die Zeit angiebt, also eine nach Sternzeit regulirte Uhr, und beobachtet man an derselben die Zeit, zu der ein Gestirn den Meridian passirt, so ist diese Angabe zugleich die Rectascension des Gestirns.

Gegenwärtig besitzt man Uhren, die mit grosser Genauigkeit das Fortschreiten der Zeit angeben, d. h. die Umdrehungszeit der Erde in Stunden, Minuten und Sekunden eintheilen. Solche sind entweder Pendeluhren oder sog. Chronometer, Apparate, deren Beschreibung jedoch die vorgesteckten Grenzen dieses Buches überschreiten würde. Ausserdem hat man so eingerichtete Fernröhre, dass sie nur gegen Punkte des Meridians gerichtet werden können, und wenn dies auch nicht in aller Strenge der Fall sein sollte, so besitzt man doch leicht anzuwendende Mittel, um das Resultat der Beobachtung in solcher Weise zu berichtigen, dass es mit dem identisch wird, welches man erhielte, wenn das Fernrohr genau im Meridian gestanden hätte. Vermittelst dieses Fernrohrs, welches Durchgangs- oder Passageninstrument oder auch Mittagsrohr genannt wird, sieht man das Gestirn, wenn es im Meridian sich befindet, und beobachtet zugleich die Zeit, wann solches eintrifft. Es kommt nun noch darauf an, die Sternzeit zu bestimmen, d. h. zu entscheiden, ob die Uhr die Sternzeit richtig angiebt, oder, wenn dies nicht der Fall ist, um wie viel die Uhr unrichtig zeigt. Dies geschieht wieder dadurch, dass man den Meridiandurchgang eines Gestirns, dessen Rectascension bekannt ist, beobachtet. Wenn die Uhr richtig die Zeit zeigt, so muss sie in dem Augenblicke, wo das Gestirn culminirt, genau die Anzahl Stunden, Minuten und Sekunden angeben, welche die Rectascension des Gestirns enthält, umgekehrten Falles müsste man den Fehler der Uhr (die sog. Uhrcorrection) ermitteln.

Zu den Zeiten der griechischen Astronomie war es nun zwar nicht unmöglich, den Culminationsaugenblick aufzufassen, denn die Richtung des Meridians konnte mit einer verhältnissmässig genügenden Genauigkeit gezogen werden; allein der Zeitunterschied zwischen zwei Culminationsmomenten konnte nicht angegeben werden. Man besass nämlich damals nur Sand- oder Wasser- und Sonnenuhren. Die letzteren waren natürlich unbrauchbar bei Nacht, und auf den regelmässigen Gang der ersteren war es nicht möglich sich zu verlassen. — Die Sonnenbeobachtungen blieben daher mangelhaft: entweder musste man sich mit dem Ausweg begnügen, der bei den absoluten Rectascensionsbestimmungen eingeschlagen wurde, nämlich die Vergleichung mittelst des Mondes, oder auch aus den heliakischen Aufgängen den Weg der Sonne unter den Sternen zu ermitteln suchen. Es giebt indess vier Punkte der Sonnenbahn, in denen die Länge der Sonne vermittelst des Gnomon hergeleitet werden konnte, nämlich die Punkte, welche von dem Frühlingspunkte respective 90°, 180° und 270° in der Länge abstehen, wozu der Frühlingspunkt selbst als vierter hinzukommt. Wenn die Sonne im Frühlingspunkte steht, ist ihre Declination 0° und dieser Moment konnte am Gnomon bemerkt werden. Im zweiten Punkte, in welchem sich die Sonne zur Zeit der Sommersonnenwende befindet, beträgt die Declination nach Norden hin eben so viele Grade, Minuten und Sekunden, wie der Winkel enthält, in welchem der Aequator gegen die Ekliptik geneigt ist, also wie die Schiefe der Ekliptik. Zur Zeit des Herbstäquinoctiums, wo die Länge der Sonne 180° beträgt, steht sie wieder im Aequator; ihre Declination ist folglich 0°. Zur Zeit der Wintersonnenwende endlich hat sie vom Frühlingspunkte aus 270 Grade in der Länge zurückgelegt und ihre Declination ist jetzt wieder gleich der Schiefe der Ekliptik, aber südlich. Das Eintreten der Sonne in diese vier Punkte konnte am Gnomon wahrgenommen und die Zwischenzeiten wenigstens in Tagen oder sogar noch näher angegeben werden. Dadurch, dass man nun lange Zeiten hindurch den Lauf der Sonne verfolgte, gelangte man zu der Erkenntniss, dass diese Zwischenzeiten, die auch Jahreszeiten genannt werden, einander nicht völlig gleich sind. Herbst und Winter zeigten sich etwas kürzer als Frühling und Sommer. Hierdurch war erwiesen, dass die Bewegung der Sonne, wenigstens von der Erde aus gesehen, keineswegs gleichförmig ist, sondern dass dieselbe, um die vier gleichen Theile ihrer Bahn zu durchlaufen, ungleiche Zeiten nöthig hat. — Im Anfange des Januars durchläuft die Sonne ohngefähr $1^\circ\ 1'$ täglich, im Anfang Juli hingegen nur $57'$.

Weil der Stand der Sonne am Himmel, ihr Auf- und Untergehen von so grosser Bedeutung nicht nur für das bürgerliche tägliche Leben, sondern überhaupt für alle Verhältnisse auf der Erdoberfläche ist, so war es natürlich, dass man die Tage nach der täglichen Bewegung der Sonne rechnete. Man nannte also die Zeit zwischen zwei auf einander folgenden Sonnenculminationen einen Tag, und theilte dieselbe in 24 Stunden ein, welche jede 60 Minuten und diese wiederum 60 Sekunden haben. Diese Zeitabschnitte dürfen jedoch nicht mit den gleichbenannten Abschnitten der Sternzeit verwechselt werden, die sämmtlich etwas kürzer sind. Weil nämlich die Sonne sich von Westen nach Osten bewegt, also der gemeinsamen täglichen Bewegung aller Himmelskörper entgegen, so ist die Sonne in der Zeit einer Erdumdrehung ein Stück am Himmel fortgerückt, so dass sie etwas später in den Meridian kommt, als wenn sie unbeweglich unter den Sternen wäre; der Sonnentag dauert daher etwas länger als der Sterntag. Die Sonnentage sind aber auch einander nicht gleich und zwar aus zwei Ursachen. Wie wir schon gesehen haben, ist die Bewegung der Sonne zuweilen etwas schneller, zuweilen etwas langsamer; während des Verlaufs eines Sterntages hat sich demnach die Sonne in den verschiedenen Jahreszeiten ein mehr oder weniger langes Bogenstück ostwärts bewegt, welcher Bogen natürlich eine verschiedene Zeit erfordert, um den Meridian zu passiren. Zweitens geschieht aber die Bewegung der Sonne nicht im Aequator oder parallel desselben, sondern in der gegen ihn geneigten Ebene der Ekliptik. Wäre nun auch die Bewegung der Sonne in der Ekliptik vollkommen gleichförmig, so würden doch die während eines Tages durchlaufenen Bögen, die einander alsdann gleich wären, nicht eben so grossen Bögen auf dem Aequator entsprechen, und folglich auch nicht gleichen Stundenwinkeln oder Zeiten, die nöthig sind für die verschiedenen Bogenstücke, den Meridian zu passiren. Die Bewegung der Sonne ist zuweilen parallel mit dem Aequator (zur Zeit der Sonnenwenden), zuweilen findet sie aber in schräger Richtung statt, und in diesem Falle entspricht der wirklich durchlaufene Bogen einem kleineren auf dem Aequator. Man bemerkt auch leicht, dass der Bogen auf dem Aequator desto geringer wird, je näher demselben die Bewegung der Sonne vor sich geht; denn legt man Declinationskreise durch die Endpunkte eines Bogens auf der Sphäre, so werden diese desto weiter auseinander liegen, je näher der betreffende Bogen einem der Pole liegt.

Die wirklichen oder wahren Sonnentage werden nach den Culminationen der Sonne bestimmt und können, da diese in nicht ganz gleichen Zeitintervallen auf einander folgen, nicht von gleicher Dauer sein. Im bürgerlichen Leben rechnet man jedoch jeden Tag immer gleich lang; um sich dieses anschaulicher zu machen, denke man sich eine sog. mittlere Sonne, die den Aequator in derselben Zeit durchläuft wie die wirkliche Sonne die Ekliptik, aber mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Die Zeit zwischen zwei auf einander folgenden Culminationen dieser nur fingirten Sonne wird ein mittlerer Sonnentag genannt und giebt das unveränderliche Maass der sog. mittleren Zeit ab. — Da der mittlere Sonnentag und der Sterntag beide unveränderlich sind, so ist auch ihr Verhältniss zu einander constant. Es ist leicht, dasselbe anzugeben.

Das tropische Jahr enthält genau einen Sterntag mehr als mittlere Sonnentage. Hieraus folgt, dass man die Länge eines Sterntages in mittlerer Sonnenzeit ausdrückt, indem man die Stunden, Minuten und Sekunden des ersteren mit dem Bruche

$$\frac{365{,}242201}{366{,}242201}$$

oder mit

$$1 - \frac{1}{366{,}242201}$$

multiplicirt.

Durch Ausführung dieser Multiplication findet man:
ein Sterntag = einem mittleren Sonnentag — $3^m\ 55^s{,}909$ (mittl. Zeit)
ein mittl. Sonnentag = einem Sterntag + $3^m\ 56^s{,}555$ (Sternzeit).

Den Culminationsaugenblick der mittleren Sonne nennt man mittleren Mittag; es ist klar, dass die Sternzeit in diesem Augenblick an jedem Tage einen andern Werth hat, da die mittlere Sonne sich ununterbrochen von dem Frühlingspunkte entfernt; die Sternzeit im mittleren Mittag wächst jeden Tag um $3^m\ 56^s{,}555$.

Der Unterschied zwischen mittlerer und wahrer Sonnenzeit wird Zeitgleichung genannt; diese ändert natürlich ihren Werth fortwährend im Verlaufe der verschiedenen Jahreszeiten. Erwägt man die verschiedenen Umstände, welche die Veränderlichkeit des wahren Sonnentags bedingen, so sieht man leicht ein, dass er bei der Wintersonnenwende am längsten ist, hauptsächlich weil die Bewegung der Sonne zu dieser Zeit am schnellsten ist. Durch mathematische Berücksichtigung aller hierher gehörenden Umstände findet man ferner, dass der kürzeste wahre Sonnentag Mitte September eintrifft. Man findet weiter, dass die Zeitgleichung ihren grössten Werth an den folgenden Tagen und zu dem nebenstehenden Betrage hat:

Febr. 12	+	14^m	31^s	Juli 26	+	6^m	12^s
Mai 14	—	3	53	Nov. 3	—	16	8

und endlich, dass sie viermal jährlich Null ist, nämlich den 15. April, den 14. Juni, den 31. August und den 24. December.

2. Der Mond.

Die Bewegung des Mondes unter den Sternen ist sehr leicht zu verfolgen, weshalb man auch bald seine siderische Umlaufszeit mit einem hohen Genauigkeitsgrade ermittelt hatte. Während eines Umlaufs konnte man — wenn man sich nicht einer tieferen Detailuntersuchung befleissigte — die Mondbahn als einen grössten Kreis am

Himmel ansehen, mit einer Neigung von etwa 5° gegen die Ekliptik. Man bemerkte jedoch bald, dass dies keineswegs in aller Strenge der Fall war, sondern dass der Mond, nachdem er einen Umlauf vollendet hatte, nicht auf denselben Punkt wieder zurückkam, von dem er ausgegangen war; man bemerkte, mit andern Worten, dass die Durchschnittspunkte der Mondbahn mit der Ekliptik, die sog. Knoten, nicht eine unveränderliche Lage am Himmel haben, sondern dass sie sich im Gegentheil ziemlich schnell von Osten nach Westen in der Ekliptik fortbewegen. Während des Verlaufs eines Jahrhunderts vollenden sie 5 ganze Umläufe und darüber noch 134°: ihre Umlaufszeit ist mithin ohngefähr $18\frac{2}{3}$ Jahre. Man bemerkte ferner, dass die tägliche Bewegung des Mondes zu verschiedenen Zeiten nicht unbeträchtlich verschieden sei, so dass dieselbe innerhalb jedes Umlaufs von 12° bis 15° variirt. Die Punkte der Mondbahn, wo die tägliche Bewegung den grössten und kleinsten Werth hatte, waren zwar einander entgegengesetzt, aber auch ihre Lage am Himmel war veränderlich. Ihre Umlaufsbewegung ist eine ziemlich rasche; im Jahrhundert vollenden sie 11 Umläufe und 109° (vergl. S. 36), also ist die Umlaufszeit etwa $8\frac{4}{5}$ Jahre.

Hier stellte sich also sehr bald eine grosse Verschiedenheit in der Natur der Mondbewegung, verglichen mit der der Sonne, heraus. Von den Punkten am Himmel, wo die Sonnenbewegung ihren grössten und kleinsten Werth hat, konnte man nicht auf Grund blosser Beobachtungen sagen, ob sie beweglich seien oder nicht (das letztere wurde angenommen); hingegen war es ganz unmöglich, diesen Umstand bei der Mondbewegung zu übersehen.*) Auch die Lage der Sonnenbahn im Raume musste als unveränderlich angesehen werden, denn die kleinen Aenderungen derselben, welche die theoretischen Untersuchungen unserer Tage erwiesen haben, waren zu jener Zeit völlig ungeahnt. Die Bewegung des Mondes verrieth aber noch andere Eigenthümlichkeiten, zu denen keine entsprechenden bei der Sonne bemerkt wurden. Es waren dies Aenderungen in der Mondbewegung, die auch von der Sonnenbewegung abzuhängen schienen, indem sie

---

*) Die Apsiden der Sonnenbahn ändern in der That ihre Lage am Himmel, allein diese Bewegung ist sehr gering und beträgt nur etwa 11″ jährlich.

sich regelmässig nach dem Verlaufe eines synodischen Monats wiederholten.

Ueber die Natur dieser Eigenthümlichkeiten in der Mondbewegung können wir am leichtesten Rechenschaft ablegen, indem wir seine Länge in der Bahn durch einen mathematischen Ausdruck dargestellt denken. Das erste Glied dieses Ausdruckes kann eine reine Constante sein, d. h. eine numerisch gegebene Zahl, die in keiner Weise veränderlich ist. Diese Grösse würde nun hier davon abhängen, von welchem Punkte aus man die Länge des Mondes in seiner Bahn rechnet. Das zweite Glied enthält den Betrag der täglichen Bewegung des Mondes und zwar den mittleren Werth derselben, multiplicirt mit der Anzahl Tage, die verflossen sind, seitdem der Mond die im ersten Gliede gegebene Länge hatte. Das zweite Glied kann demnach beliebig gross werden; nach 27 Tagen beträgt dasselbe 360°, denn so viele Tage braucht der Mond, um einen Umlauf zu vollenden. Das dritte Glied ist von der Beschaffenheit, dass dasselbe zwar ununterbrochen seinen numerischen Werth ändert, jedoch so, dass dieser stets durch zwei bestimmte Grenzen eingeschlossen wird. Die Aenderungen kehren periodisch nach einem anomalistischen Monat wieder. Dieses Glied schwankt zwischen — 6° 17′ und + 6° 17′ und nimmt nach und nach alle dazwischenliegenden Werthe an, wonach der Verlauf sich umkehrt, so dass dieselben Werthe, aber in umgekehrter Reihenfolge zum Vorschein kommen. Hierauf wiederholt sich die Erscheinung genau in derselben Weise. Dieses Glied nennt man M i t t e l p u n k t s g l e i c h u n g. Im Perigäum und Apogäum verschwindet dasselbe; dazwischen wird es bemerkbar in der eben beschriebenen Weise.

Zu diesen drei Gliedern finden sich entsprechende bei der Sonne, nämlich die Länge der Sonne dem Anfang der Zeitrechnung entsprechend, die mittlere tägliche Bewegung, multiplicirt mit der Anzahl Tage, die verflossen sind seit Anfang der Zeitrechnung, und endlich die Mittelpunktsgleichung, welche bewirkt, dass die Bewegung zuweilen etwas rascher, zuweilen etwas langsamer vor sich geht und folglich auch die Ungleichheit der Jahreszeiten veranlasst. Diese drei Glieder genügten, um die Bewegung der Sonne so genau, wie sie die Alten aus den Beobachtungen erkennen konnten, zu erklären. Bei der Mondbewegung genügten sie jedoch nicht; es mussten, wie schon angedeutet, noch einige Glieder berücksichtigt werden, damit die berechneten Längen die beobachteten in gehöriger Weise wiedergaben, oder mit andern Worten, damit der beobachtete Lauf des Mondes der Genauigkeit der Beobachtungen entsprechend gedeutet werden konnte. Von solchen Gliedern giebt es drei, die gross genug sind, um auch bei der geringeren Genauigkeit der älteren Beobachtungen der Aufmerksamkeit nicht leicht zu entgehen, wenn der Mond nur einigermaassen vollständig in allen Punkten seiner Bahn verfolgt wurde. Dass sie demohngeachtet nicht alle schon von den Griechen erkannt wurden, beruhte darauf, dass diese den Mond gewöhnlich nur zur

Zeit des Neu- oder Vollmonds oder auch zur Zeit der Quadraturen beobachteten.

Das erste dieser Glieder nennt man die Evection; sein Betrag schwankt zwischen + 1° 20′ 30″ und — 1° 20′ 30″ und nimmt wie die Mittelpunktsgleichung der Reihe nach alle zwischenliegenden Werthe an. Die Periode dieses Gliedes fällt jedoch nicht mit dem anomalistischen Monat zusammen, sondern ist etwas länger. Zur Zeit der Syzygien, also zur Zeit der Finsternisse, verläuft jedoch die Evection genau in derselben Weise wie die Mittelpunktsgleichung und kann daher von dieser nicht in den Beobachtungen unterschieden werden. Ohne Kenntniss der Evection findet man daher, wenn man sich bloss auf Beobachtungen von Finsternissen beschränkt, einen fehlerhaften Werth für die Mittelpunktsgleichung und zwar einen zu kleinen. Bei den Quadraturen vermischt sich die Evection ebenfalls mit der Mittelpunktsgleichung, aber veranlasst nun eine scheinbare Vergrösserung der letzteren. Durch Combination von Beobachtungen, die sowohl Conjunctionen und Oppositionen, wie auch Quadraturen angehörten, entdeckte Ptolemäus die Evection.

Später wurden zwei andere Glieder entdeckt, nämlich die Variation und die jährliche Gleichung. Die Variation verschwindet sowohl zur Zeit der Syzygien, wie auch zur Zeit der Quadraturen; bei den Octanten, d. h. den vier Punkten, welche in der Mitte zwischen den vier vorhergenannten liegen, erhält sie ihre grössten Werthe, die entweder + 35′ 42″ oder — 35′ 42″ betragen.

Die Periode der jährlichen Gleichung ist ein Sonnenjahr; ihre grössten Werthe sind + 11′ 12″ und — 11′ 12″, also kaum gross genug, um von griechischen Astronomen bemerkt werden zu können. — Die Variation hätte aber entdeckt werden können, wenn nur der Mond in mehreren Punkten seiner Bahn beobachtet worden wäre.

Wir müssen hier noch zwei Eigenthümlichkeiten in der Mondbewegung erwähnen, von denen die erste allerdings weder von den alten Astronomen erkannt war, noch erkannt werden konnte, die aber beide von der allergrössten Bedeutung sind, wenn die Bewegung des Mondes richtig angegeben werden soll. — Zuerst nennen wir eine gewisse Ungleichförmigkeit in der mittleren Bewegung oder der mittleren Geschwindigkeit des Mondes, die in einer sehr langsamen Aenderung dieser Geschwindigkeit besteht. Diese Aenderung konnte erst bemerkt werden, nachdem zuverlässige Mondbeobachtungen sich über mehrere Jahrhunderte erstreckten. Wir haben im Vorhergehenden gesehen, wie die Rotation der Erde ein Mittel gewährte, die Zeit zu messen, wie aber auch die Umlaufszeiten der Sonne und des Mondes dazu angewendet wurden, indem man feststellte, wie diese sowohl eine gewisse Anzahl ganzer Tage, als auch einen Bruchtheil derselben enthielten. Dass dies geschehen konnte, beruhte auf dem Umstand, dass sich alle diese Perioden als unveränderlich erwiesen. Noch bis auf den heutigen Tag hat man keine Veränderungen in der Umlaufszeit der Sonne nachweisen können — die Zeit des einen Umlaufs kann zwar um eine Kleinigkeit von der Zeit des anderen verschieden sein, aber das Mittel aus einer Anzahl Umläufen in einem Jahrhundert bleibt stets dem Mittelwerthe der Umlaufszeit in irgend einem andern Jahrhundert gleich, selbst wenn letzteres um viele Jahrhunderte von ersterem entfernt liegt. — Eben so wenig hat man bis jetzt — und wir besitzen gegenwärtig vorzügliche Mittel um solches zu erkennen — eine Veränderung in der Rotationsgeschwindigkeit der Erde nachweisen können, obwohl diese Frage von Zeit zu Zeit von den ersten Männern der Wissenschaft untersucht worden ist. Vergleicht man aber die siderische Umlaufszeit des Mondes, wie sie aus neueren Beobachtungen hervorgeht, mit der in älteren Zeiten bestimmten, so wird eine Vermehrung der mittleren Geschwindigkeit des Mondes, oder eine Verminderung seiner siderischen Umlaufszeit bemerkbar. In Folge dieser Aenderung der mittleren Geschwindigkeit ist die Länge des Mondes seit der ältesten uns mit Sicherheit bekannten Finsterniss um $1^{\circ}\ 48'$ verändert worden, d. i. mit anderen Worten: würde man mit der jetzt geltenden siderischen Umlaufszeit rückwärts rechnen, so würde die Länge des Mondes um den genannten Betrag falsch gefunden werden.

Endlich erwähnen wir eine auch in den rohesten Beobachtungen, wenn sie überhaupt so genannt werden dürfen, leicht bemerkbare Ungleichförmigkeit der Mondbewegung, die indess schon im Alterthume als eine scheinbare erkannt wurde. Diese Ungleichförmigkeit gehört nämlich nicht, wie die früheren, der Länge des Mondes an, sondern beeinflusst nur die Lage des Mondes in Bezug auf den Horizont des Beobachtungsortes, und da sie ausserdem sehr bedeutend ist, so war es nicht schwer, sie auch bei einer weniger entwickelten Beobachtungskunst zu entdecken, ja man konnte sogar die Ursache derselben angeben. Wir werden daher jetzt nicht, wie bei der Uebersicht der übrigen »Ungleichheiten« der Mondbewegung, nur das auf empirischem Wege gefundene Resultat angeben, sondern sogleich auf deductivem Wege die Nothwendigkeit der in Frage stehenden

Erscheinung zu begründen suchen. — Die Thatsache, dass die täglichen Bewegungen der Gestirne am Himmel immer gleichmässig, d. h. zu jeder Zeit mit derselben Geschwindigkeit vor sich gehen, gerade als ob sie an der Himmelssphäre befestigt wären, die in einem Sterntag sich gleichförmig um die Weltaxe dreht, beruht nun darauf, dass die Weltkörper von der Erde in ungeheuren Entfernungen abstehen, so dass die Dimensionen des Erdkörpers, welcher, wie wir wissen, nahezu die Form einer Kugel hat, im Vergleich zu diesen Entfernungen geradezu als verschwindend angesehen werden können. Vom Mittelpunkte der Erde aus erscheint die tägliche Bewegung stets so, wie vorher beschrieben wurde; von einem Punkte an der Erdoberfläche hingegen etwas anders, wenn der fragliche Himmelskörper der Erde so nahe ist, dass der Durchmesser der letzteren zum Abstande des Himmelskörpers in einem bemerkbaren Verhältnisse steht. Wie gesagt sind diese Abstände in der Regel so gross, dass die Erde wie ein Punkt daneben verschwindet, allein der Mond macht hiervon eine Ausnahme. Der Winkel, unter welchem der Halbmesser des Erdkörpers von einem Himmelskörper aus erscheint, wird die Parallaxe des letzteren genannt, und die Parallaxe des Mondes kann bis zu einem ganzen Grade und sogar etwas darüber steigen; sie konnte daher unmöglich unbemerkt bleiben. — Eine merkliche Parallaxe beeinflusst allerdings nicht die Culminationszeit des Himmelskörpers, aber sie verzögert seinen Aufgang und beschleunigt seinen Untergang. Hierin besteht die sog. parallactische Ungleichheit des Mondes, welche der Aufmerksamkeit der alten Astronomen nicht entging.*)

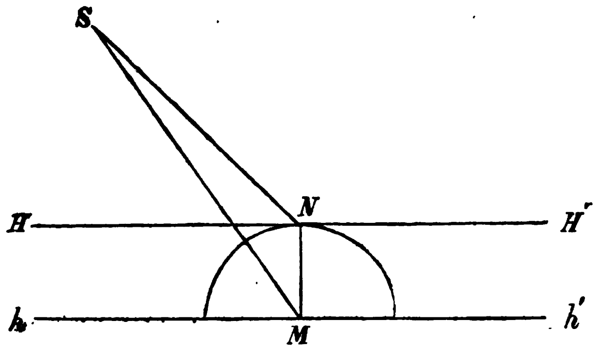
Es ist klar, dass ein jedes Gestirn eine Parallaxe haben muss; die allermeisten sind jedoch so klein, dass sie sogar mit unsern vollkommensten Instrumenten nicht gemessen werden können, und folglich unmerklich sind. Ist jedoch die Parallaxe eines Gestirns merklich, so veranlasst sie, dass letzteres in einer geringeren Höhe erscheint als sonst.

Es ist dies leicht mit Hülfe der nachstehenden Figur 4 einzusehen.

---

*) In der neueren Astronomie versteht man unter der Benennung parallactische Ungleichheit etwas anderes als in früheren Zeiten.

Fig. 4.



N ist ein Punkt auf der Erdoberfläche, von dem aus man den Himmelskörper *S* beobachtet. *HH'* deutet die durch den Ort *N* gelegte Horizontalebene (den sog. scheinbaren Horizont) an, *hh'* aber die durch den Mittelpunkt der Erde gelegte Horizontalebene (den sog. geocentrischen Horizont). — Je weiter nun *S* von den Punkten *N* und *M* rückt, desto kleiner wird der Winkel *MSN*; mithin nehmen die Geraden *MS* und *NS* mehr und mehr dieselbe Richtung an und werden endlich mit einander parallel, wenn *S* in unendlicher Entfernung gedacht wird. — Der Winkel *HNS* ist die scheinbare Höhe des Objectes *S*, der Winkel *hMS* hingegen seine geocentrische Höhe; der Unterschied beider, oder der Winkel *MSN*, ist die Höhenparallaxe des Gestirns. Man bemerkt leicht, dass die Höhenparallaxe am grössten ist, wenn der Körper im Horizonte, also in der Richtung *NH* gesehen wird, dass dieselbe hingegen verschwindet, wenn die Höhe 90° beträgt, d. h. wenn das Gestirn im Zenith, also in der Richtung *MN*, beobachtet wird. Die Parallaxe im Horizonte nennt man Horizontalparallaxe.

Mit Hülfe derselben Figur ist es nun auch sehr leicht, sich eine deutliche Vorstellung davon zu bilden, dass ein Himmelskörper über dem geocentrischen Horizonte früher als für den Beobachter auf der Erdoberfläche aufgeht und ebenso, dass er später untergeht.

Da nun in Folge der Parallaxe der Mond etwas kürzere Zeit über dem (scheinbaren) Horizonte ist, als es ein anderer Himmelskörper sein würde, dessen wirkliche Lage an der Himmelssphäre, vom Mittelpunkt der Erde aus gesehen, dieselbe wie die des Mondes, sein Abstand aber grösser wäre, so entsteht die bereits erwähnte Ungleichförmigkeit in der täglichen Bewegung des Mondes, d. h. die parallactische Ungleichheit, welche, um berechnet werden zu können, die Kenntniss der Mondparallaxe erfordert.

Man bemerkt leicht, dass die Parallaxe sofort berechnet werden kann, wenn man ausser der Höhe des Gestirns über dem Horizonte noch seine Entfernung kennt, sowie die Grösse des Erdhalbmessers. Umgekehrt wird man die Entfernung durch Rechnung ermitteln können, wenn die Parallaxe bekannt ist. — Die Theorie der Parallaxe setzt also voraus, dass sowohl die Figur wie auch die Dimensionen der Erde bekannt seien: dass man im Alterthume hierhergehörende Fragen überhaupt zu behandeln anfing, beweist aber, dass man schon damals andere und richtigere Vorstellungen von der Erde hatte, als die, welche im Mittelalter geläufig wurden. Und so war es auch in der That. Es wird behauptet, dass schon Anaximander (570 v. Chr.) die Kugelgestalt der Erde angenommen hätte; von Aristoteles wissen wir es gewiss, wenngleich seine späteren Commentatoren gerade auf diesen Punkt wenig Gewicht gelegt zu haben scheinen. Er sagt: die Erde ruht fest im Mittelpunkt der Himmelssphären, selbst eine Kugel, deren Umfang 40 Myriaden Stadien beträgt.*) Er schliesst dies aus der Form des Erdschattens bei Mondfinsternissen, ebenso wie aus dem Umstande, dass in verschiedenen geographischen Breiten verschiedene Sternbilder zu sehen sind. — Ueberhaupt mochte man wohl bemerkt haben, dass der Weg, der auf der Erde in der Richtung des Meridians zurückgelegt wurde, der Aenderung des Winkels zwischen der Weltaxe und dem Horizont proportional ist.

Schon früh machte man Versuche, die Grösse der Erde, diese als eine Kugel angenommen, zu bestimmen. Ein von Eratosthenes (ohngefähr 250 v. Chr.) ausgeführter derartiger Versuch ist für uns von um so grösserem Interesse, als man heutzutage, der Hauptsache nach, dasselbe Princip wie er verfolgt, nur mit unvergleichlich vollkommeneren Hülfsmitteln. Eratosthenes bemerkte nämlich, dass die Städte Alexandria und Syene in Aegypten fast genau auf demselben Erdmeridian lagen. Ferner glaubte er voraussetzen zu dürfen, dass Syene unter dem nördlichen Wendekreis läge, und zwar aus dem Grunde, weil ein aufrechtstehender Gegenstand, also ein Gnomon, am Mittage zur Zeit des Sommersolstitiums keinen Schatten warf. Er maass nun den Meridianabstand der Sonne vom Zenith zur näm-

*) Pauly, Enc. Art. Astr.

lichen Zeit, welcher Abstand alsdann mit dem Unterschiede der Polhöhen oder geographischen Breiten der beiden Städte gleich sein musste. Er fand so durch Messung, dass der Breitenunterschied $7^\circ\ 12'$ betrug, dass mithin auch der Bogen zwischen Syene und Alexandria, auf dem gemeinsamen Meridiane gemessen, von derselben Grösse war. Nun wusste er, dass der Abstand zwischen diesen beiden Städten zu 5000 Stadien gemessen war; den ganzen Umfang der Erde konnte er also nach der folgenden Analogie berechnen: Erdumkreis: $5000 = 360^\circ : 7^\circ\ 12' = 360^\circ : 7\frac{1}{5}^\circ$
woraus folgt:

$$\text{Erdumkreis} = 250000 \text{ Stadien,}$$
$$\text{Erdhalbmesser} = 39789 \text{ Stadien,}$$

oder in runder Zahl, wie sie von Erathostenes angegeben wurde, 40000 Stadien.

Von der Genauigkeit dieses Resultates können wir uns keine ganz klare Vorstellung machen, weil uns die Länge eines Stadiums nicht sicher bekannt ist. Darf man indessen annehmen, dass ein Stadium 184,72 Meter enthält*), so wird für den Erdumkreis eine Länge von

46180000 Meter

gewonnen, während der wahre Werth etwa 40000000 Meter beträgt. Der beträchtlichste Theil der Abweichung dürfte von der mangelhaften Messung der Entfernung zwischen den beiden Endpunkten des Bogens herrühren.

Die Entfernung des Mondes vom Mittelpunkte der Erde konnte natürlich nicht direct gemessen werden; man war im Gegentheile gerade genöthigt, diese Entfernung dadurch zu bestimmen, dass man die Parallaxe in einem gegebenen Fall unmittelbar maass. Um eine solche Messung vornehmen zu können, beobachtete man den Mond in ungleichen Höhen; da nun diese in verschiedener Weise von der Parallaxe beeinflusst waren, so konnte der Werth der Horizontalparallaxe hieraus ermittelt werden. Man bestimmte also eigentlich die parallactische Ungleichheit, die aber nur eine einzige Unbekannte, nämlich die Entfernung des Mondes enthält, vorausgesetzt, dass ent-

*) In Pauly's Encyclopädie wird das Stadium zu 569 par. Fuss angegeben, was mit der obigen Annahme sehr nahe übereinstimmt.

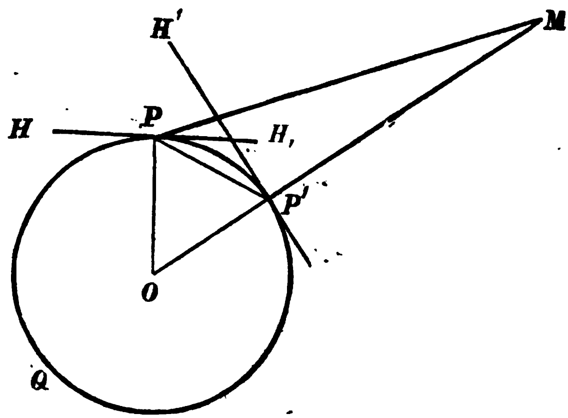
weder diese Entfernung sich nicht verändert, oder auch dass man die Aenderungen derselben kennt. Hipparch, der grösste Astronom des Alterthums, untersuchte die Mondbewegung und fand dabei die parallactische Ungleichheit. Er soll auch, aber auf indirectem Wege, die Parallaxe selbst ermittelt haben, und zwar aus Finsternissbeobachtungen. Bei der Berechnung hat er sich indess eines Werthes der Sonnenparallaxe bedient, der sehr fehlerhaft war. Wenn er trotzdem, wie behauptet wird, für die Mondparallaxe sehr nahe den richtigen Werth gefunden hat, so muss dies auf einem Zufall beruhen.

Die Horizontalparallaxe des Mondes ist aber nicht unveränderlich; sie variirt von 57′ bis 61′. Gegenwärtig sind diese Aenderungen sehr genau bekannt, so dass man nur einen einzigen Werth der Parallaxe zu kennen braucht, um denselben für jede Zeit durch Rechnung zu finden. Zu Hipparch's Zeit verhielt sich die Sache jedoch nicht so. Das Gesetz, wonach die Entfernungen der Himmelskörper sich ändern, war unrichtig angenommen worden, und so kam es, dass sich zuweilen sehr grobe Fehler bei der Berechnung der parallactischen Ungleichheit einschlichen, obgleich der mittlere Werth der Parallaxe sehr nahe richtig gefunden war. Dass unter solchen Umständen die Bestimmung der Lage des Frühlingspunkts oder der absoluten Rectascensionen erheblich fehlerhaft ausfallen konnte, ist nicht zu bezweifeln. (Vgl. § 1.)

In späteren Zeiten hat man ein anderes Verfahren gewählt, um die Mondparallaxe zu bestimmen. Man misst jetzt die Meridianhöhen des Mondes an zwei, in der Richtung des Meridians von einander möglichst entfernten Punkten auf der Erdoberfläche, die aber am zweckmässigsten so nahe wie möglich auf demselben Meridian liegen. Der Unterschied der geographischen Breiten der beiden Beobachtungspunkte muss hierbei als bekannt vorausgesetzt werden, so dass der lineare Abstand derselben in Theilen des Erdradius oder in irgend einem bekannten Maasse ausgedrückt werden kann. — Wir wollen nun sehen, wie man auf Grund solcher Beobachtungen die Mondparallaxe ableiten kann.

Der Kreis PQP' (Fig. 5) stellt einen Erdmeridian vor, auf welchem P und P' die beiden Beobachtungspunkte bedeuten, deren gegenseitige Lage, d. h. der Bogen PP', in Graden u. s. w. bekannt ist. Denkt man sich nun den Mond im Punkt M, so sind die beiden Höhen MPH, und $MP'H'$, die wir als durch Beobachtungen bekannt annehmen. Da ferner der Winkel POP' sowie die Grösse des Erdradius OP als gegeben vorausgesetzt

Fig. 5.



werden, so findet sich durch trigonometrische Rechnung der Winkel $P'PO = PP'O$ und unmittelbar hieraus der Winkel $H,PP' = H'P'P$. Die Berechnung dieser Winkel ist von dem Mondorte völlig unabhängig. Da nun aber die beiden Mondhöhen bekannt sind, so finden sich unmittelbar auch die beiden Winkel MPP' und $MP'P$; der erste dieser ist gleich der Summe der Winkel H,PP' und $MPH,$, der zweite hingegen gleich der Summe von $MP'H'$ und $H'P'P'$. Wir haben jetzt ein Dreieck, in dem eine Seite (PP') sowie zwei Winkel (MPP' und $MP'P$) bekannt sind; durch trigonometrische Rechnung findet man nun die beiden übrigen Seiten des Dreiecks, nämlich MP und MP', sowie den Winkel PMP'. Hiermit wäre der Abstand des Mondes von Punkten auf der Erdoberfläche ermittelt, der Abstand vom Mittelpunkte der Erde ergiebt sich dann durch eine leichte Rechnung. — Aus Beobachtungen, die gleichzeitig in Berlin und am Cap der guten Hoffnung angestellt wurden, hat man die Horizontalparallaxe des Mondes zu 57′5″ bestimmt. Spätere, von dem dänischen Astronomen Olufsen ausgeführte Berechnungen, wobei eine grosse Anzahl Beobachtungen untersucht wurden, ergaben den Werth 57′ 2″6.

Es könnte nun scheinen, als wenn die Parallaxe oder die Entfernung der Sonne in derselben Weise wie die des Mondes zu ermitteln wäre, und es ist wohl möglich, dass man versucht hat, zu diesem Zwecke den nämlichen Weg einzuschlagen; allein es musste sich bald zeigen, dass auf diesem Wege nichts zu erreichen war. Der Abstand der Sonne von der Erde ist nämlich so gross im Verhältniss zum Radius der letzteren, oder die Parallaxe der Sonne so klein, dass alle directen Messungen derselben zu keinem Resultate von einiger Genauigkeit geführt haben und führen konnten. Zu den Zeiten der griechischen Astronomie konnte man auf solche Weise nicht einmal die geringste Vorstellung von dieser Entfernung erlangen. Man weiss jetzt, dass diese Parallaxe ohngefähr 8″.85 beträgt, gelangte aber erst in den letzten Decennien zu dieser Kenntniss. Bis zur zweiten Hälfte dieses Jahrhunderts hat man allgemein die Sonnenparallaxe zu 8″.57 angenommen, also um etwa $\frac{1}{30}$ ihres Werthes falsch, während die Astronomen des Alterthums die Mondparallaxe bis auf etwa $\frac{1}{60}$ des ganzen Betrages bestimmen konnten. — Eine so geringe Grösse konnte früher weder gemessen noch überhaupt bemerkt werden, und so schwebten die Alten in völliger Unkenntniss über die wahre Entfernung der Sonne. Wie Delambre*) mittheilt, wurde gewöhnlich nach Aristarch angenommen, dass die Sonne 19 Mal weiter von der Erde entfernt sei als der Mond; ihre Parallaxe wurde also etwa 3′ angenommen, folglich viel zu gross. Hipparchus hätte zwar eine erheblich kleinere Parallaxe vermuthet, konnte und wollte dieselbe aber nicht gegen die Ansicht seines Zeitalters behaupten. Man schreibt ihm jedoch eine sehr sinnreiche Methode zu, diese Grösse zu bestimmen, und, obgleich sie nie zu einem zuverlässigen Resultate geführt hat, so muss sie doch hier erwähnt werden, um von dem erfinderischen Geiste des Urhebers zu zeugen.

Diese Methode lässt sich durch die folgende geometrische Construction erkennen (vgl. Fig. 6).

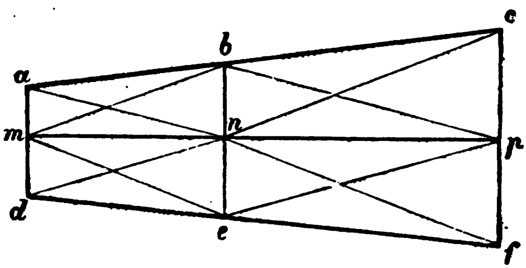
Es seien *ad*, *be* und *cf* drei gerade, mit einander parallele Linien, welche von der Geraden *mnp* in der Mitte geschnitten werden, und deren Endpunkte an denselben Geraden *abc* und *def* liegen; es ist nun augenscheinlich, dass die Summe der Winkel *anm* und *cnp* gleich der Summe von den Winkeln *nab* und *ncb* ist; diese letztere Summe ist aber wieder sehr nahe gleich der Summe von *nmb* und *npb*, und dies ist um so mehr der Fall, je weiter die drei Linien *ad*, *be* und *cf* von einander abstehen im Verhältniss zu ihrer eigenen Grösse.

Betrachtet man nun *cf* als einen Durchmesser des Sonnenkörpers und *be* als einen solchen des Erdkörpers, so ist *ad* ein Durchmesser des

*) Histoire de l'astronomie ancienne II. pag. 207.

Schattenkegels, welchen die Erde wirft. Nimmt man ferner an, dass der Erdschatten auf der Mondscheibe beobachtet wird, so haben die Winkel,

Fig. 6.



deren Relationen oben auseinandergesetzt wurden, folgende Bedeutungen. Der Winkel *nmb* ist die Mondparallaxe, *npb* die Sonnenparallaxe, *cnp* der scheinbare Halbmesser der Sonne; und endlich, wenn eine Ebene senkrecht auf die Gesichtslinie durch den Mondkörper gelegt wird, so ist *anm* der scheinbare Halbmesser des Kreises, welcher durch diese Ebene von dem Kegel abgeschnitten wird. Wenn also dieser Halbmesser beobachtet wird, und ausserdem die Mondparallaxe und der scheinbare Halbmesser der Sonne bekannt sind, so findet man die Parallaxe der Sonne mittelst der angeführten Relation. Man hat nämlich, wenn der Halbmesser des Schattenkegels mit f bezeichnet wird, die Parallaxen der Sonne und des Mondes mit π und p, sowie der Sonnenradius mit r:

$$\pi = r + f - p.$$

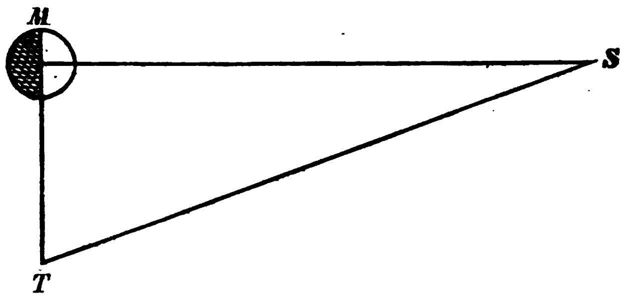
Um den Radius des Schattenkreises mit möglichster Genauigkeit zu bestimmen, versuchte man denselben aus der Zeitdauer einer totalen Mondfinsterniss zu ermitteln. Dieselbe wahrzunehmen war jedoch nicht leicht, denn die Grenze des Schattens zeigt sich so unbestimmt, dass man nicht mit der erforderlichen Genauigkeit die Zeit fixiren kann, zu der die totale Verfinsterung anfängt oder aufhört.

Aristarchus von Samos (um 260 v. Chr.) ersann eine andere Methode, die, wie berichtet wird, in späteren Zeiten zu einem leidlichen Resultate geführt haben soll.*) Seine Methode ist die folgende. Zur Zeit der Qua-

*) Von Aristarch wird gesagt, dass er wegen Irreligiosität angeklagt wurde, weil er lehrte, dass die Himmel unbeweglich seien, die Erde sich aber um die Sonne und zugleich um ihre eigene Axe drehe (in Pauly's Encyclopädie nach Plutarch). — Delambre berichtet hierüber: »Plutarque au Livre II des Opinions des Philosophes, Chap. XXIV, dit qu'Aristarque rend le Soleil immobile, aussi bien que les étoiles, et qu'il fait tourner la terre autour du cercle solaire, c'est-à-dire, sans doute, le long de l'écliptique; il ajoute que ses inclinaisons font que le disque est obscurci. Ce passage obscur est sans doute altéré; on peut conjecturer qu'après avoir parlé du mouvement annuel, l'auteur aura voulu dire que le mouvement de rotation servait à expliquer le jour et la nuit.«

dratur oder **Dichotomie**, wo die Mondscheibe von der Erde aus gerade zur Hälfte beleuchtet erscheint, ist der Winkel zwischen Erde und

Fig. 7.



Sonne — wenn diese Körper vom Monde aus betrachtet werden — ein rechter. Wird zu einem solchen Zeitpunkte der Winkel zwischen der Sonne (S) und dem Mond (M) von der Erde (T) gemessen, so sind zwei Winkel im Dreiecke SMT bekannt und man findet durch trigonometrische Rechnung das Verhältniss der Seiten MT und MS. Aristarch bestimmte dieses Verhältniss zu etwa $\frac{1}{19}$, während es in Wirklichkeit etwa nur $\frac{1}{400}$ beträgt. Dieses höchst wenig befriedigende Resultat wurde veranlasst theils durch die Kleinheit der Sonnenparallaxe, theils aber durch die Schwierigkeit, den Moment genau aufzufassen, wo der Mond gerade zur Hälfte beleuchtet war. — Es wird ferner berichtet, dass Hipparch für die Halbmesser r und f die Werthe $r = 15'$ und $f = 39'$ gefunden habe, woraus $\pi = 2'.7$ und $p = 51'.3$ folgen. Wäre die Sonnenparallaxe als unmerklich angenommen worden, so hätte man die Mondparallaxe zu 54′ gefunden. Nach den Angaben in Delambre's Histoire de l'astronomie ancienne soll Hipparch durch Berechnung von Sonnenfinsternissen auf die Zahl 57′ gekommen sein, aber auch dies unter Annahme der falschen Sonnenparallaxe.

Zuverlässigere Methoden, welche man in neueren Zeiten zur Bestimmung der Sonnenparallaxe ersonnen hat, sollen später erörtert werden.

3. Die unteren Planeten Merkur und Venus.

Für uns Bewohner des Nordens ist die Bewegung des Planeten Venus bei weitem von grösserem Interesse, als die des Merkur, denn letzteren sind wir äusserst selten im Stande mit blossen Augen zu sehen. Hierzu kommt noch, dass Venus überhaupt einen weit schöneren Anblick gewährt, als der unscheinbare Merkur, der nur ganz kurze Zeit nach Sonnenuntergang oder vor Sonnenaufgang in der Nähe des Horizonts wahrzunehmen ist. — Die Bewegungserscheinungen dieser beiden Planeten sind überdies einander ziemlich ähnlich, weshalb wir hauptsächlich die Eigenthümlichkeiten der Bewegung der Venus zu betrachten brauchen und dann nur in aller Kürze die Punkte anzugeben haben, in denen Merkur Abweichungen zeigt.

Wenn von Sonne und Mond abgesehen wird, so ist Venus das schönste Gestirn am Himmel. Es glänzt mit mildem, ruhigem Lichte auf dem tiefblauen, aber noch nicht völlig dunklen Himmelsgrund als Abendstern. Nicht minder erfreut uns der Anblick des Morgensterns, wenn wir in der Frühe das Freie suchen.

Es war wohl nicht ganz leicht, die Erkenntniss zu erlangen, dass diese beiden Erscheinungen zu demselben Himmelskörper gehören: in Griechenland soll Pythagoras zuerst ihre Identität entdeckt haben. Hierdurch wurde aber sogleich eine ganz besondere Eigenthümlichkeit im Laufe der Venus dargelegt, nämlich die, dass sie der Sonne bei ihrer Bewegung um das Himmelsgewölbe folgt, indem sie sich nie von letzterer sehr weit entfernt. Man sieht den Planeten nämlich nie anders als einige Zeit nach Sonnenuntergang der Sonne folgend, oder auch vor Sonnenaufgang der Sonne vorausgehend.

Die scheinbare Bahn der Venus ist eine wenig geöffnete Curve, die sich um die Sonne schliesst und die sich also mit ihr durch den Thierkreis bewegt. In Bezug auf die Sterne ist die Bahn aber eine wesentlich andere und mehr verwickelte. Denkt man sich eine Spur, die den Weg des Planeten unter den Sternen bezeichnen würde, so wäre dies eine Linie, die bald in der Richtung der Sonnenbewegung, bald wieder in der entgegengesetzten Richtung fortliefe, und die dabei in Schlingen verwickelt erschiene. Der Planet bewegt sich also hin und her um die Sonne und geht unter den Sternen meistens vorwärts, d. h. in der Richtung der Sonnenbewegung, zuweilen aber auch rückwärts. Die rechtläufige Bewegung nennt man auch eine directe, die rückläufige eine retrograde Bewegung.

In keinem Punkte ihrer Bahn entfernt sich die Venus viel von der Ekliptik, so dass ihre Breite stets sehr gering ist. Ihre Bahn hat daher nur eine geringe Neigung gegen die Sonnenbahn. — Den

Winkelabstand des Planeten von der Sonne, von der Erde aus gesehen, nennt man seine Elongation; diese kann bei Venus höchstens 48° betragen.

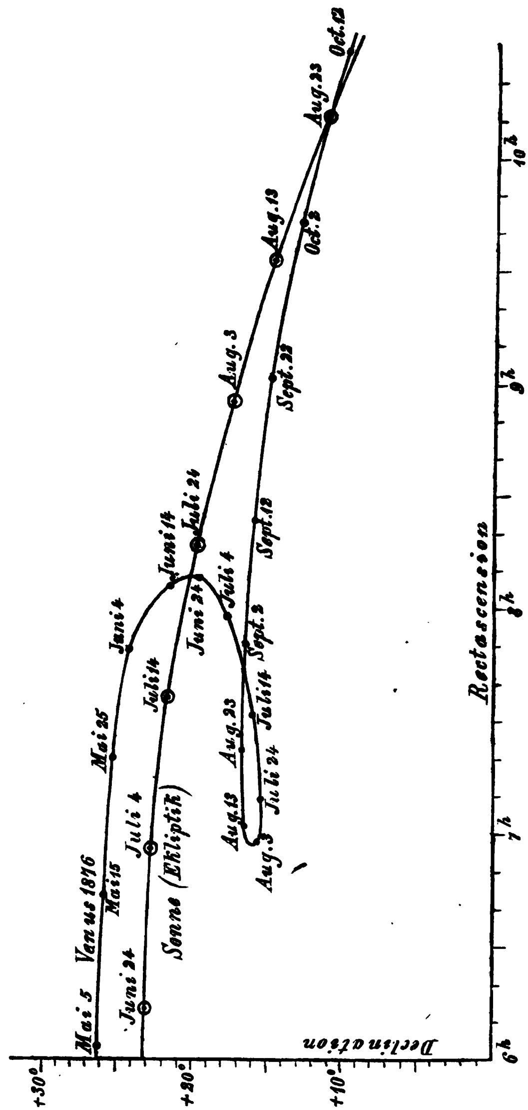
Um nun die scheinbare Bahn der Venus völlig anschaulich zu machen und zugleich ein Beispiel zu geben, wie man den Lauf theils durch Rectascensionen und Declinationen (oder Längen und Breiten), theils durch eine bildliche Darstellung angiebt, werden hier zunächst eine Reihe Rectascensionen und Declinationen angeführt, die jedem zehnten Tag des Jahres 1876 angehören. Diesen fügen wir die gleichzeitigen Rectascensionen und Declinationen der Sonne hinzu, damit auch die auf die Sonne bezogene Bewegung ersichtlich werden kann.

Datum	Rectascensionen der Venus	Declinationen der Venus	Rectascensionen der Sonne	Declinationen der Sonne
Jan. 1	$20^h\ 31^m$	— 20° 37′	$18^h\ 45^m$	— 23° 3′
Jan. 11	21 22	— 17 12	19 29	— 21 52
Jan. 21	22 10	— 13 1	20 12	— 19 59
Jan. 31	22 56	— 8 15	20 54	— 17 29
Febr. 10	23 41	— 3 9	21 34	— 14 28
Febr. 20	0 25	+ 2 6	22 13	— 11 3
März 1	1 9	+ 7 17	22 51	— 7 21
März 11	1 53	+ 12 12	23 28	— 3 28
März 21	2 37	+ 16 40	0 4	+ 0 29
März 31	3 23	+ 20 29	0 41	+ 4 24
April 10	4 9	+ 23 29	1 17	+ 8 10
April 20	4 56	+ 25 33	1 54	+ 11 43
April 30	5 41	+ 26 37	2 32	+ 14 57
Mai 10	6 24	+ 26 42	3 11	+ 17 47
Mai 20	7 3	+ 25 54	3 50	+ 20 6
Mai 30	7 35	+ 24 25	4 31	+ 21 52
Juni 9	7 59	+ 22 30	5 12	+ 23 0
Juni 19	8 10	+ 20 27	5 53	+ 23 27
Juni 29	8 6	+ 18 34	6 35	+ 23 13
Juli 9	7 46	+ 17 7	7 16	+ 22 19
Juli 19	7 20	+ 16 14	7 56	+ 20 46
Juli 29	7 1	+ 16 0	8 36	+ 18 38
Aug. 8	6 59	+ 16 17	9 15	+ 16 0
Aug. 18	7 11	+ 16 45	9 52	+ 12 56
Aug. 28	7 35	+ 16 59	10 29	+ 9 32
Sept. 7	8 6	+ 16 42	11 5	+ 5 52
Sept. 17	8 43	+ 15 43	11 41	+ 2 3

Datum	Rectascensionen der Venus	Declinationen der Venus	Rectascensionen der Sonne	Declinationen der Sonne
Sept. 27	$9^h\ 22^m$	$+ 13^\circ\ 58'$	$12^h\ 17^m$	$- 1^\circ\ 51'$
Oct. 7	10 4	+ 11 27	12 53	— 5 43
Oct. 17	10 46	+ 8 14	13 30	— 9 28
Oct. 27	11 29	+ 4 29	14 8	— 13 0
Nov. 6	12 12	+ 0 20	14 48	— 16 10
Nov. 16	12 56	— 4 1	15 28	— 18 54
Nov. 26	13 41	— 8 22	16 10	— 21 4
Dec. 6	14 28	— 12 31	16 54	— 22 35
Dec. 16	15 16	— 16 14	17 38	— 23 22
Dec. 26	16 6	— 19 18	18 22	— 23 22

Diese Oerter des Planeten und der Sonne sind aber nicht beobachtet worden, sondern aus den gegenwärtig sehr genau bekannten Bewegungen dieser Himmelskörper berechnet. Dies hindert uns jedoch nicht, die angeführten Werthe als direct aus den Beobachtungen entnommen anzusehen, denn sie sind ja in der That nur Resultate solcher, und zwar so vieler, dass die unvermeidlichen Beobachtungsfehler zum grossen Theile vernichtet worden sind. Indem wir sie nun als beobachtete Werthe ansehen, suchen wir die scheinbare Bahn des Planeten und lösen somit eine der ersten Aufgaben in der Astronomie: nämlich aus beobachteten Oertern eines Himmelskörpers seine scheinbare Bahn herzuleiten. Gegenwärtig braucht man wohl selten diese Aufgabe zu behandeln, denn es giebt Methoden, durch die man aus beobachteten Oertern sogleich die wahre Bahn berechnen kann. Allein die ersten astronomischen Kenntnisse fingen nothwendig mit dem Auffassen der scheinbaren Bewegungen an, und es ist überdies nothwendig, sich von der Erscheinung, zu der man die Erklärung sucht, ein klares und anschauliches Bild zu verschaffen. Um nun die scheinbare Bahn der Venus bildlich darzustellen, tragen wir auf ein mit parallelen und senkrechten Geraden durchkreuztes Papier Punkte ein, deren Abstände von zwei gegen einander senkrechten Scalen den Rectascensionen und Declinationen des Planeten entsprechen. Bei der folgenden Figur 8 sind zwar die Kreuzlinien mit Ausnahme der beiden Scalen weggelassen, aber trotzdem sieht man schon durch Augenmaass, dass die Abstände der eingetragenen Punkte, so genau wie es hier nöthig ist, den Zahlen in der vorhergehenden Zusammen-

Fig. 8.



stellung entsprechen. So sieht man z. B. aus der Figur, dass die Rectascension am 25. Mai etwa $7^h\ 20^m$ und die Declination $+25^0$ ist. Die Figur giebt uns also ein Bild der scheinbaren Bewegung des Planeten in der Zeit vom 5. Mai bis 12. October des Jahres 1876; durch das Verbinden der eingetragenen Punkte erhält man nämlich die ununterbrochene Spur, welche seinen Weg am Himmel darstellt. Die mit ⊙ bezeichneten Punkte repräsentiren wieder die Oerter der Sonne zu den nebenstehenden Tagen, so dass die diese Punkte verbindende Curve einen Theil der Ekliptik darstellt. Auf dieser Linie bewegt sich die Sonne ununterbrochen in derselben Richtung, während der Planet, wie es auch die Figur zeigt, sich hin und her bewegt. In der Zeit vom 20. Juni bis Anfang August ist die Bewegung rückläufig.

Vergleicht man die zu den verschiedenen Zeiten stattfindenden relativen Lagen des Planeten zur Sonne, so wird man alsbald bemerken, dass die rückläufige Bewegung einige Zeit nach dem Eintreffen der grössten östlichen Elongation anfängt. Während dieser Bewegung begegnet der Planet der Sonne und wird einige Zeit darauf westlich von dieser, also als Morgenstern bemerkt. Hierauf tritt ein Stillstand (Station) in der Bewegung ein, dem wieder eine directe Bewegung des Planeten folgt. Diese Bewegung ist jedoch Anfangs unbedeutend und geringer als die der Sonne, weshalb der Abstand zwischen den beiden Gestirnen noch zunimmt; endlich erreicht die westliche Elongation ein Maximum, indem die Bewegungen der Sonne und des Planeten einander gleich sind. Die directe Bewegung des Planeten ist indessen jetzt in stärkerem Zunehmen begriffen, woraus folgt, dass derselbe sich wieder der Sonne nähern muss. Unter fortwährender rechtläufiger Bewegung geht der Planet hierauf an der Sonne vorbei, seiner grössten östlichen Elongation als Abendstern entgegen, worauf die soeben beschriebenen Bewegungserscheinungen von neuem anfangen und in ähnlicher Weise sich wiederholen.

Der Planet Merkur zeigt in seinen Bewegungen eine grosse Aehnlichkeit mit den eben dargestellten der Venus; doch sind die Wechsel bei ersterem schneller als bei letzterer. So dauert z. B. die retrograde Bewegung bei Merkur nur etwa 17 Tage, während Venus ohngefähr 41 Tage rückläufig ist. Ebenso beträgt die grösste Elongation des Merkur kaum die Hälfte von der vorhin für Venus angegebenen: sie steigt nur bis 23°. Daher trifft es nur selten ein, dass dieser Planet den blossen Augen in nördlichen Gegenden sichtbar wird. Für Orte, die weit vom Aequator liegen, bildet nämlich die Ekliptik einen ziemlich spitzen Winkel mit dem Horizonte; da ferner

Merkur sich stets in der Nähe der Ekliptik bewegt, so kann seine Höhe kurz nach Sonnenuntergang oder vor Sonnenaufgang nie sehr erheblich werden. Ehe es genügend dunkel geworden ist, um diesen nicht besonders leuchtenden Himmelskörper zu bemerken, ist er oft schon dem Horizonte so nahe gekommen, dass sein Licht in aufsteigenden Dünsten verschwindet.

Durch das Fernrohr betrachtet, zeigen sowohl Merkur wie Venus Phasen in derselben Weise wie der Mond, nämlich so, dass immer nur die der Sonne zugewendete Seite beleuchtet erscheint.

Bei diesen beiden Planeten wurde endlich eine Ungleichförmigkeit in der Bewegung bemerkt, die von derselben Natur wie die Mittelpunktsgleichung der Sonne und des Mondes ist. Es wäre natürlich sehr schwer, dieselbe hier zu bestimmen, da die scheinbaren Bahnen an und für sich schon sehr verwickelt sind, und namentlich bei Merkur war sie äusserst schwierig zu ermitteln. Man konnte aber ihr Vorhandensein schon daraus erkennen, dass die grössten Elongationen nicht immer gleich waren; dieser Winkel schwankt bei Merkur um mehrere Grade. In dem nächsten Abschnitte werden wir an einem etwas leichter zu behandelnden Beispiele zeigen, wie es möglich ist, die Mittelpunktsgleichung gewissermaassen von den übrigen »Verworrenheiten« der Bewegung auszuscheiden.

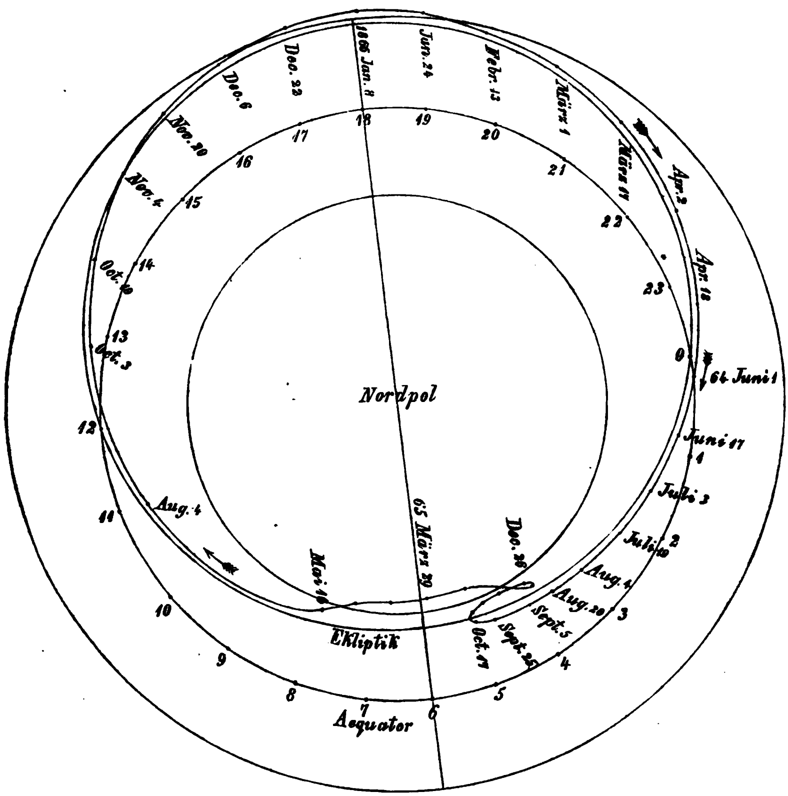
4. Die oberen Planeten: Mars, Jupiter und Saturn.

Diese drei Planeten zeigen in ihrer Bewegung so viel Aehnlichkeit, dass wir einen derselben als Typus für die ganze Gruppe auswählen können, und nur dessen Bewegung genauer zu beschreiben haben. In dieser Absicht nehmen wir Mars, theils weil gewisse Eigenschaften der Bewegung bei ihm deutlicher hervortreten als bei den beiden andern, theils weil dieser Planet seine Lage unter den Sternen schneller verändert und also in kürzerer Zeit die Eigenthümlichkeiten derselben offenbaren muss.

Man ist sogleich im Stande, einen ganz wesentlichen Unterschied in der Bewegung des Mars und z. B. der Venus zu entdecken. Während letztere nie eine gewisse Grenze von der Sonne überschreiten konnte, erblicken wir Mars in jedem beliebigen Winkelabstand von der Sonne; jedoch so, dass er stets in der Nähe der Ekliptik bleibt. Dagegen finden wir bei Mars eine Eigenthümlichkeit wieder, die sich auch bei Merkur und Venus vorfand, niemals aber bei der Sonne und dem Monde bemerkt wurde, die nämlich, dass seine Bewegung, obwohl vorwiegend direct, doch mitunter retrograd wird, und bei den Uebergängen von der directen zur retrograden Bewegung, oder umgekehrt, Stillstandspunkte hat. Der Verlauf dieser Bewegung gestaltet sich ohngefähr in folgender Weise. Nachdem der Planet aus den Sonnenstrahlen herausgetreten, geht er in directer Bewegung vorwärts. Diese Bewegung ist jedoch langsamer als die der Sonne und nimmt überdies noch beständig ab, bis sie endlieh für eine kurze Zeit ganz und gar aufhört. Der Planet scheint jetzt am Himmelsgewölbe still zu stehen und seine westliche Elongation beträgt dann etwa 137°. Hierauf fängt die rückläufige Bewegung an, wobei die Elongation noch mehr vergrössert wird und endlich 180° erreicht: der Planet steht alsdann in Opposition zur Sonne. Nun wird die rückläufige Bewegung immer langsamer und geht nach einem kurzen Stillstande des Planeten in eine rechtläufige über, die jedoch langsamer als die der Sonne ist, so dass der Planet von diesem Himmelskörper eingeholt wird. Hierauf wiederholen sich die beschriebenen Bewegungserscheinungen genau in derselben Weise; nur können die Bewegungsphasen in den verschiedenen Umläufen etwas verschieden sein.

Um den scheinbaren Lauf des Mars noch anschaulicher darzustellen, geben wir davon eine Zeichnung, wie vorhin für die Bewegung der Venus. Die hierher gehörende Figur (9) ist jedoch nach einem etwas anderen Plan als die vorhergehende entworfen. Hier wird nämlich angenommen, dass von einem Himmelsglobus, auf dem die scheinbare Bewegung aufgezeichnet worden ist, die Aequatorealzone ausgeschnitten und nachher auf die Ebene des Papiers ausgebreitet wurde. Um eine solche Operation wirklich als ausführbar ansehen zu können, muss man sich den Globus aus einem dehnbaren Stoff, etwa aus Kautschuk verfertigt denken. Nach dieser Erklärung dürfte die Bedeutung der Figur sofort einleuchten. Der mittlere Kreis stellt den Aequator vor, und ist in 24 gleiche Theile, jeder einzelne eine Stunde in Rectascension darstellend, eingetheilt: dieser Kreis entspricht also der Rectascensionsscala in der vorhergehenden Figur. Eine Declinationsscala ist hingegen hier nicht angebracht, sondern die Oerter des Planeten sind einfach nach dem Augenmaasse eingetragen worden, wobei angenommen wurde, dass der Abstand des mittleren Kreises, sowohl vom inneren wie vom äusseren, ohngefähr $23\frac{1}{2}{}^{\circ}$ (Schiefe der Ekliptik) betrage. Die Figur kann daher keine grosse Genauigkeit beanspruchen, die auch bei den kleinen Dimensionen unerreichbar geworden wäre.

Fig. 9.



Trotz der kleinen Dimensionen sieht man aber zur Genüge die Bildung der Schleifen, wo die rückläufige Bewegung eintritt; fügen wir ferner hinzu, dass der Planet am 28. November 1864 in Opposition war, so sehen wir auch deutlich, wie diese ohngefähr in der Mitte der rückläufigen Bewegung einfiel. Die Erscheinung der rückläufigen Bewegung hat aber auch bei Mars, wie bei Merkur und Venus, eine deutlich ausgesprochene Beziehung zur Stellung des Planeten gegen die Sonne. Bei Merkur und Venus wurde die rückläufige Bewegung zu der Zeit wahrgenommen, wo Planet und Sonne an einander vorbeigingen; bei Mars dagegen zur Zeit der Opposition.

Bei Mars ist die Bewegung von einer ziemlich erheblichen Mittelpunktsgleichung beeinflusst, die hier relativ leicht zu entdecken ist. Im nächsten Abschnitte wird gezeigt, wie man diese Ungleichförmigkeit von den andern trennen kann, wenigstens so weit, dass man ihren Einfluss so zu sagen handgreiflich sehen kann; hier werden wir uns darauf beschränken, einige Umstände zu erwähnen, bei denen sich das Vorhandensein der Mittelpunktsgleichung, wenn auch in ganz roher Weise zeigen muss. — Wenn eine merkliche Mittelpunktsgleichung vorhanden ist, so giebt sie sich dadurch zu erkennen, dass die Geschwindigkeit in verschiedenen Punkten der Bahn verschieden ist, und zwar so, dass die Punkte der grössten und kleinsten Geschwindigkeit diametral einander gegenüber liegen. So ist es wenigstens bei der Sonne und bei dem Monde der Fall. Bei den Planeten wird zwar der einfache Vorgang durch das Vorhandensein anderer Einflüsse getrübt, aber eine Spur solcher Einflüsse musste doch leicht genug wahrzunehmen sein. Und so verhält es sich auch in der That. Bei Mars z. B. ist die synodische Umlaufszeit grösser als die siderische. Es kann daher vorkommen, dass der Planet z. B. zwischen zwei Oppositionen zwei Mal in dem Punkte seiner Bahn gewesen ist, wo die grösste Geschwindigkeit stattfindet, oder auch umgekehrt, zwei Mal in dem Punkte der geringsten Geschwindigkeit. Eine erhebliche Mittelpunktsgleichung muss sich folglich darin zu erkennen geben, dass die Zwischenzeiten der Oppositionen verschieden gross sind. Dies wird auch durch die Erfahrung bestätigt. Es fanden nämlich Marsoppositionen statt an folgenden Tagen:

	Zwischenzeit
1858 Mai 16	
	2 Jahre 63 Tage
1860 Juli 17	
	2 - 80 -
1862 October 5	
	2 - 55 -
1864 November 28	
	2 - 43 -
1867 Januar 10	
	2 - 34 -
1869 Februar 13	
	2 - 35 -
1871 März 20	
	2 - 39 -
1873 April 27	
	2 - 54 -
1875 Juni 20	

Wie man sieht, sind die Zwischenzeiten nicht unerheblich von einander verschieden; die Unterschiede kehren aber in periodischer Reihenfolge wieder, woraus die Gesetzmässigkeit der Erscheinung hervorgeht.

Die Bewegungen der Planeten Jupiter und Saturn sind denen des Mars vollkommen analog; ihre siderischen Umlaufszeiten sind jedoch erheblich grösser, nämlich respective 11.27 und 29.46 Jahre. Ebenso dauert die Zeit der rückläufigen Bewegung länger als bei Mars, obgleich die dabei zurückgelegten Bögen am Himmel kleiner sind. Die Zeit des Rückganges dauert bei Jupiter 119 Tage, bei Saturn 136, während sie bei Mars nur 70 Tage in Anspruch nimmt. Die rückläufige Bewegung fängt für Jupiter bei einer Elongation von 117° an, bei Saturn, wenn die Elongation 108° beträgt. Beide laufen stets in der Nähe der Ekliptik, so dass ihre Breiten immer klein sind.

5. Ungleichheiten in den Bewegungen der Himmelskörper.

Das Wort »Ungleichheit in der Bewegung« oder kurz »Ungleichheit«, wird sehr häufig in der Astronomie gebraucht; die Anwendung dieser Benennung setzt aber voraus, dass man übereingekommen ist, welche Bewegung als ohne Ungleichheit oder so zu sagen die regelrechte sei. Man könnte z. B. jede Abweichung von der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung eine Ungleichheit nennen. Die alten Astronomen sahen die Bewegung im Kreise für viel vollkommener an als jede andere, und diese konnte, ihren Ansichten nach, nicht anders als gleichförmig sein. Sie nannten daher jede reelle oder scheinbare Abweichung von der gleichförmigen Bewegung im Kreise Ungleichheit. Die Astronomen der Jetztzeit verknüpfen freilich eine andere Bedeutung mit diesem Worte, aber vor der Hand wollen wir bei der Terminologie der Alten bleiben. Bei der Sonne und den Planeten hatten sie zwei wesentlich verschiedene Ungleichheiten kennen gelernt, nämlich eine, die sog. erste Ungleichheit (Delambre nennt sie inégalité zodiacale), welche nur von der Lage des betreffenden Körpers in seiner Bahn abhängig war, und eine andere, die sog. zweite, welche in einer gewissen Verbindung mit dem Abstande des Planeten von der Sonne stand.

Die Bewegung der Sonne war von der zweiten Ungleichheit frei.

Bei der Bewegung des Mondes war diese Ungleichheit auch nicht zu bemerken, indem gerade das Charakteristische derselben in der rückgängigen Bewegung und den damit verbundenen Stillstandspunkten bestand, die Bewegung des Mondes aber durchaus rechtläufig ist. Indess fanden sich beim Monde andere Ungleichheiten, die zwar von der Sonnenlage abhängen, aber sich nicht durch rückläufige Bewegungen manifestiren. Von diesen Ungleichheiten war nur die Evection den Astronomen der alexandrinischen Schule, von denen sie auch entdeckt wurde, bekannt.

Zu diesen Ungleichheiten kamen noch die in der Breite, die bei sämmtlichen Planeten vorhanden waren, und auch bei dem Monde, wenn man seine Breiten einer Ungleichheit zuschreiben wollte; diese waren jedoch zum Theil als eine einfache Folge der Neigung seiner Bahn gegen die Ekliptik anzusehen. Bei den Planeten stand die Sache etwas anders: die Bildung der Schleifen und der nicht ganz einfache Verlauf der Breitenänderung gaben der ganzen Erscheinung mehr den Charakter einer Ungleichheit.

Die Ungleichheiten in der Sonnen- und Mondbewegung wurden zuerst von Hipparch wissenschaftlich untersucht. Dieser grosse Forscher, welcher als der Begründer der wissenschaftlichen Astronomie anzusehen ist, wurde zu Nicaea in Bithynien geboren. Er begann seine wissenschaftliche Thätigkeit in seiner Vaterstadt, später siedelte er nach Rhodos über und endlich nach Alexandria. Man hat Beobachtungen von ihm aufbewahrt, die sich von dem Jahre 160 bis 125 v. Chr. erstrecken, und durch welche er sich ein dauerndes Denkmal gesetzt hat. — Seine ersten Bemühungen scheinen eine möglichst genaue Bestimmung der Umlaufszeit der Sonne bezweckt zu haben.*) Auch hat er die Länge des tropischen Jahres bis auf $6\frac{1}{3}{}^{m}$ gefunden. Nach Ptolemäus ist nämlich aus seinen Untersuchungen hervorgegangen

Länge des Jahres: $365^{d}\ 5^{h}\ 55^{m}\ 12^{s}$ **).

Seine nächste Untersuchung betraf die Ungleichheit der Sonnenbewegung, die Mittelpunktsgleichung, oder, wie sie damals genannt wurde, die Prostaphäresis. Zu diesem Zwecke bestimmte er

*) Montucla, Histoire des mathématiques, tome I, pag. 269.

**) Delambre, His oire de l'astronomie ancienne, tome II, pag. 111.

die Länge der Jahreszeiten und bemerkte, dass die Zeit von dem Frühlingsäquinoctium zu dem Sommersolstitium $94\frac{1}{2}$ Tage, die von dem Sommersolstitium zu dem Herbstäquinoctium hingegen nur $92\frac{1}{2}$ Tage betrage. Aus diesen Daten konnte er eine Tafel entwerfen, die den Betrag der Mittelpunktsgleichung für jeden beliebigen Zeitpunkt des Jahres angab. Wie er auf den Unterschied in der Dauer des Frühlings und des Sommers eine Theorie aufbaute, wird im nächsten Paragraphen erläutert; hier genüge die Bemerkung, dass, während die Sonne im nördlichen Theile der Ekliptik 187 Tage verweilt, sie im südlichen Theile nur $178\frac{1}{4}$ Tage, also bedeutend kürzere Zeit bleibt.

Hierauf wandte Hipparch seine Aufmerksamkeit der Bewegung des Mondes zu, die er hauptsächlich auf Grund der beobachteten Finsternisse untersuchte. Zunächst bestimmte er die Umlaufszeit des Mondes, indem er Beobachtungen von älteren Finsternissen mit neueren verglich und die beobachtete Zwischenzeit durch die Anzahl der Mondumläufe theilte. Sein Resultat ist sehr genau; nach einer Angabe bei Delambre fand er die mittlere Dauer des synodischen Monats zu

$$29^{d}\ 12^{h}\ 44^{m}\ 3^{s}.33$$

also mit den neuesten Bestimmungen ($2^{s}.9$) fast übereinstimmend; der Unterschied kann überdies zum Theil durch die seculäre Aenderung der Geschwindigkeit des Mondes erklärt werden.

Wenn nun die sog. erste Ungleichheit vorhanden ist, so können die einzelnen synodischen Umlaufszeiten nicht genau gleich sein, denn der Mond z. B. muss ausser einem vollen Umlauf noch ein Stück in seiner Bahn durchlaufen, welches einmal in der Gegend der schnellsten, einmal in der der langsamsten Bewegung liegen kann. Aus dieser Verschiedenheit der synodischen Umlaufszeiten wurde es ihm möglich, die erste Ungleichheit zu bestimmen. Weil er sich aber nur auf Finsternisse beschränkte, so fand er den Betrag der Mittelpunktsgleichung um so viel unrichtig, als sie von der Evection beeinflusst war.

Die Untersuchungen über die Bewegungen der Planeten musste er seinen Nachfolgern überlassen; er selbst scheint nur die Umlaufszeiten derselben ermittelt, Alles aber vorbereitet zu haben, diese Untersuchungen mit Erfolg vornehmen zu können. — Ohngefähr 300 Jahre nach Hipparch unternahm es Claudius Ptolemäus, seine Arbeit zu Ende zu führen. Ihm haben wir auch den grössten Theil dessen zu verdanken, was wir über die griechische Astronomie wissen. In einem grossen Werke (μεγάλη σύνταξις oder Almagest) stellte er die Untersuchungen Hipparch's zusammen und fügte eigene hinzu. Dieses Werk ist glücklicherweise der Zerstörung entgangen, und wir können in demselben die Entdeckung der Evection, sowie die Untersuchungen über die Ungleichheiten der Planetenbewegung kennen lernen. Aus diesem Werke theilen wir zunächst die mittleren Bewegungen mit, die Ptolemäus nach Hipparch angenommen hat, und fügen die aus jenen Bewegungen folgenden Umlaufszeiten hinzu.

	Mittlere tägliche Bewegung	Umlaufszeit in Jahren	Umlaufszeit in Tagen
Merkur	14732″.40	0.24085	87.969
Venus	5767.71	0.61520	224.699
Mars	1886.61	1.88077	686.945
Jupiter	299.23 *)	11.8580	4331.11
Saturn	120.55	29.4341	10750.7

Die erste Ungleichheit wurde bei den unteren Planeten aus den Elongationen, bei den oberen aus der Verschiedenheit der einzelnen synodischen Umlaufszeiten bestimmt. Der Weg, der dabei verfolgt wurde, ist zu lang und bietet dabei zu wenige interessante Punkte dar, um hier beschrieben zu werden. Das Verfahren kann indess allgemein charakterisirt werden: man legte eine gewisse Hypothese über die geometrische Natur der Bewegung der Untersuchung zu Grunde, d. h. man schuf sich im Voraus ein Bild der Bahn und suchte durch die Beobachtungen bloss gewisse numerische Verhältnisse zu bestimmen. Es liegt in der Natur der Sache, dass auf diese Weise keine allgemein richtigen Regeln für die Berechnung der Lage des Planeten am Himmel hergeleitet werden konnten, sofern die zu Grunde gelegte Hypothese nicht zufällig richtig war. Wir sagen mit Absicht zufällig, denn es waren zu dieser Zeit weder genügend zahlreiche und

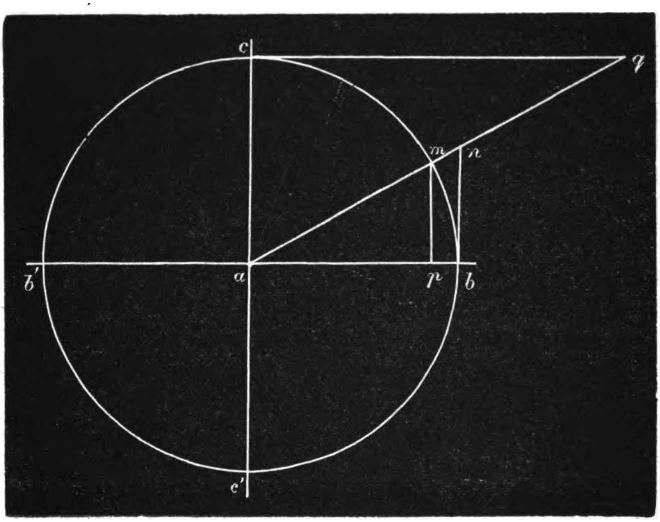
*) Die Angabe bei Delambre (astr. anc. II, p. 313) ist offenbar durch einen Druckfehler entstellt; es muss sein: mouv. propre en un jour 0° 4′ 59″ 14‴ . . . statt 0° 4′ 57″ 14‴ . . .

genaue Beobachtungen vorhanden, noch wurden sie in gehöriger Weise benutzt, um solche allgemeine Eigenschaften der Bewegung constatiren zu können, auf Grund welcher die Aufstellung einer Hypothese weniger willkürlich gewesen wäre. Jedoch konnte es sich recht wohl ereignen, dass die wirkliche Bewegung durch die, mit Hülfe der Hypothese und der numerischen Bestimmungen erzielte Theorie theilweise recht gut wiedergegeben war. Die Kunst, diese Wiedergabe möglichst auszudehnen, war es eben, was damals erstrebt wurde. — Im Geiste der heutigen Wissenschaft würde man die Aufgabe zunächst so formuliren. Es sei eine Reihe Oerter eines Planeten durch Beobachtungen gegeben; von der Bewegung wisse man weiter nichts, als dass sie in einer geschlossenen Bahn vor sich geht, d. h. dass der Planet nach einiger Zeit an demselben Punkte wieder anlangt, bei dem er einmal gewesen. Die Beobachtungen geben aber schon bei einer flüchtigen Betrachtung zu erkennen, dass die Bewegung eine Abhängigkeit zeigt, sowohl von der Lage des Planeten relativ zu dem Frühlingspunkte, wie auch von der Lage relativ zur Sonne, oder mit andern Worten, eine Abhängigkeit von der Länge des Planeten, wie auch von seiner Elongation. Es wird nun verlangt, das Gesetz dieser Abhängigkeit zu ermitteln und zu bestimmen, so dass man die Länge des Planeten zu einem beliebigen Zeitpunkte vermittelst desselben herleiten kann. Um zu zeigen, wie diese und ähnliche Aufgaben gelöst werden können, und zwar unabhängig von jeder Hypothese, aber auch ohne Absicht, vor der Hand eine physische Erklärung der Erscheinung zu geben, werden wir von gewissen technischen Hülfsmitteln aus der Mathematik Gebrauch machen müssen. Diese dürften nun freilich den meisten Lesern bekannt sein, allein in der Hoffnung, dass dies Buch auch von Solchen gelesen wird, denen die mathematische Ausdrucksweise nicht mehr ganz geläufig ist, erlauben wir uns an dieser Stelle eine kurze Digression über

die Haupteigenschaften der trigonometrischen Linien, sowie über die Darstellung von Curven durch Gleichungen.

Durch den Mittelpunkt des Kreises $bcb'c'$ (Fig. 10) ziehen wir zwei gerade Linien bb' und cc' senkrecht gegen einander. Der ganze Umkreis wird bekanntlich in 360° eingetheilt, so dass, wenn man die Gradtheilung mit dem Punkte *b* anfangend denkt, und zwar in der Richtung *bc*, die Bogen *bc*, *bcb'*, *bcb'c'* und *bcb'c'b* resp. 90°, 180°, 270° und 360° betragen. — Auf der Geraden *b'ab*, die uns als eine Scala dienen mag, zählen wir alle linearen Längen in horizontaler Richtung, indem wir den Radius *ab* als Einheit des Längenmaasses annehmen und den Nullpunkt der Scala in den Mittelpunkt verlegt denken, und zwar so, dass alle Längen rechts von *a* positiv genommen werden und alle Längen links von demselben Punkte negativ. Nach diesen Bestimmungen wird z. B. die Länge der Linie *ap* durch einen positiven ächten Bruch (gewöhnlich Decimalbruch) angegeben; die Länge von *cq* ist auch eine positive Grösse, die aber grösser als 1 ist; die Länge von *ab* ist hingegen gleich — 1. In derselben Weise werden die linearen Längen in vertikaler Richtung auf der Linie *cc'* gerechnet, und zwar positiv vom Punkte *a* nach oben und negativ vom selben Punkte nach unten. Daher ist die Länge der Linie *mp* eine positive Grösse, deren numerischer Werth kleiner als 1 ist; *ac* ist gleich + 1 und *ac'* gleich — 1.

Fig. 10.



Nach Feststellung dieser Bestimmungen nehmen wir irgend einen beliebigen Punkt *m* auf der Peripherie des Kreises, und ziehen durch denselben die Gerade *amq*, die zugleich durch den Mittelpunkt des Kreises geht; ferner legen wir den Perpendikel *mp* senkrecht auf *ab*. Da nun der

Radius des Kreises sich immer gleich bleibt und stets den absoluten Werth (d. h. die Länge ohne Rücksicht auf die Richtung) Eins hat, so beruhen die Längen der Linien ap und mp nur auf der Grösse des Winkels mab. Wenn dieser Winkel, der von b aus gerechnet wird, 0 ist, so fällt m mit b zusammen; die Länge von ap ist dann gleich ab oder gleich $+1$ und die Länge von mp ist gleich 0; ist wieder mab gleich 90°, so fällt m mit c zusammen und man hat alsdann $ap = 0$, $ac = +1$; wird mab 180°, so ist der Punkt m nach b' gerückt; ap wird nun auf der linken Seite von a liegen und ist folglich gleich -1, während mp den Werth 0 hat; im Punkte c' endlich ap gleich 0 und $mp = -1$ sein. — Wir bezeichnen nun der Kürze halber den Winkel mab mit dem Buchstaben φ und nennen die Gerade mp, d. h. den Abstand vom Endpunkte des Bogens φ von der Geraden ab: Sinus des Winkels oder Bogens φ, ferner das Stück ap: Cosinus von φ.

Abkürzend bezeichnet man also:

$$mp = \text{Sin}\,\varphi\,;\ ap = \text{Cos}\,\varphi.$$

Nach den vorhergehenden Auseinandersetzungen hat man demnach:

$$\begin{array}{ll} \text{Sin}\ 0^\circ = 0\,; & \text{Cos}\ 0^\circ = +1 \\ \text{Sin}\ 90^\circ = +1\,; & \text{Cos}\ 90^\circ = 0 \\ \text{Sin}\ 180^\circ = 0\,; & \text{Cos}\ 180^\circ = -1 \\ \text{Sin}\ 270^\circ = -1\,; & \text{Cos}\ 270^\circ = 0 \\ \text{Sin}\ 360^\circ = 0\,; & \text{Cos}\ 360^\circ = +1 \\ \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} \end{array}$$

Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist das Quadrat, welches auf der Hypothenuse in einem rechtwinkligen Dreieck aufgezeichnet wird, gleich der Summe der Quadrate auf den beiden anderen Seiten, was so zu verstehen ist, dass die Gleichheit sich auf den Flächeninhalt bezieht. Der Flächeninhalt eines Quadrats wird nun, wie bekannt, dadurch erhalten, dass man die in Zahlen angegebene Länge der Seite mit sich selbst multiplicirt. In dem Dreiecke map haben wir also nach dem pythagoräischen Lehrsatze:

$$\overline{am} \times \overline{am} = \overline{mp} \times \overline{mp} + \overline{ap} \times \overline{ap}$$

oder

$$\overline{am}^2 = \overline{mp}^2 + \overline{ap}^2\,;$$

da aber

$$am = 1\,;\ mp = \text{Sin}\,\varphi\,;\ ap = \text{Cos}\,\varphi$$

so hat man den ganz allgemeinen Satz:

$$1 = \text{Sin}\,\varphi^2 + \text{Cos}\,\varphi^2.$$

Die Linien nb und cq nennt man resp. Tangente und Cotangente des Winkels φ; die Linien an und aq heissen Secante und Cosecante von φ. Wir werden hier keine weiteren Definitionen dieser Ausdrücke geben, denn ihre Bedeutung ist auch aus der von Sinus und Cosinus herzuleiten. — Die beiden Dreiecke amp und anb sind ähnlich, folglich hat man die Analogie:

$$ap : ab = mp : nb = am : an,$$

oder

$$\frac{\text{Cos } \varphi}{1} = \frac{\text{Sin } \varphi}{\text{Tang } \varphi} = \frac{1}{\text{Sec } \varphi}$$

woraus:

$$\text{Tang } \varphi = \frac{\text{Sin } \varphi}{\text{Cos } \varphi}; \ \text{Sec } \varphi = \frac{1}{\text{Cos } \varphi};$$

ferner hat man aus den Dreiecken amp und acq, wo cq parallel mit ab angenommen wird,

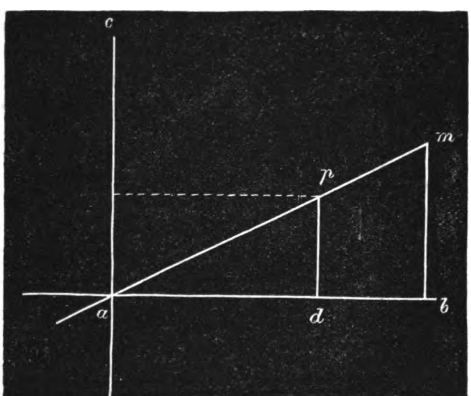
$$ap : mp = cq : ac$$
$$am : mp = aq : ac$$

oder

$$\text{Cotang } \varphi = \frac{\text{Cos } \varphi}{\text{Sin } \varphi}; \ \text{Cosec } \varphi = \frac{1}{\text{Sin } \varphi}.$$

Dies sind die Fundamentalbeziehungen zwischen den Grössen, die mit Sinus, Cosinus u. s. w. benannt werden; aus ihnen lassen sich eine Reihe anderer mit Leichtigkeit herleiten, die jedoch hier kein weiteres Interesse haben. Die fraglichen Grössen nennt man auch trigonometrische Linien oder trigonometrische Functionen des Arguments φ. Der Grund zu dieser Benennung liegt darin, dass man mit ihrer Hülfe drei unbekannte Bestimmungsstücke eines Dreiecks berechnen kann, wenn die drei anderen, worunter wenigstens eine der Seiten sich befinden muss, bekannt sind. Wir werden an einigen einfachen Beispielen sehen, wie solche Berechnungen auszuführen sind.

Fig. 11.



Auf der Seite ab des rechtwinkligen Dreiecks abm (Fig. 11) nehmen wir den Punkt d und ziehen von diesem die Gerade dp senkrecht auf ab bis zum Punkte p, wo sie die Seite am trifft. Die Dreiecke adp und abm sind also ähnlich, woraus folgt:

$$ad : ab = dp : bm = ap : am.$$

Nimmt man ap als Einheit des Längenmaasses an, und bezeichnet den Winkel mab mit φ, so ist

$$ad = \text{Cos } \varphi; \ dp = \text{Sin } \varphi,$$

womit die obigen Analogien zu den folgenden Bestimmungen führen:

$$ab = am \times \text{Cos } \varphi; \ bm = am \times \text{Sin } \varphi,$$

welche Formeln die Länge der Seiten ab und bm geben, sobald die Länge der Hypothenuse am sowie der Winkel φ bekannt sind; umgekehrt findet man am aus einer der Formeln:

$$am = \frac{ab}{\mathrm{Cos}\ \varphi} = \frac{bm}{\mathrm{Sin}\ \varphi}.$$

Nach der letzteren dieser Formeln berechnet man z. B. die Entfernung des Mondes, wenn seine Horizontalparallaxe und der Halbmesser des Erdkörpers bekannt sind. Nehmen wir z. B. die erstere zu 57′ 30″ und den Erdhalbmesser zu 859 geogr. Meilen an, so findet sich, da man aus den trigonometrischen Tafeln erhält

$$\mathrm{Sin}\ 57'\ 30'' = 0.016725,$$

$$\text{Abstand des Mondes} = \frac{859}{0.016725} = 51359 \text{ geogr. Meilen.}$$

Wir führen noch, jedoch ohne den Beweis, die Formeln an, wodurch der Sinus und Cosinus einer Summe oder Differenz zweier Winkel gefunden wird; diese sind:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \mathrm{Sin}\ (x+y) = \mathrm{Sin}\ x\ \mathrm{Cos}\ y + \mathrm{Cos}\ x\ \mathrm{Sin}\ y \\ \mathrm{Sin}\ (x-y) = \mathrm{Sin}\ x\ \mathrm{Cos}\ y - \mathrm{Cos}\ x\ \mathrm{Sin}\ y \\ \mathrm{Cos}\ (x+y) = \mathrm{Cos}\ x\ \mathrm{Cos}\ y - \mathrm{Sin}\ x\ \mathrm{Sin}\ y \\ \mathrm{Cos}\ (x-y) = \mathrm{Cos}\ x\ \mathrm{Cos}\ y + \mathrm{Sin}\ x\ \mathrm{Sin}\ y \end{cases}$$

Hieraus folgen nun eine grosse Menge anderer Formeln, von denen wir nur einige wenige anführen, die später gebraucht werden. Setzt man $x = 90^\circ$, so ergiebt sich:

$$\mathrm{Sin}\ (90^\circ + y) = \mathrm{Cos}\ y;\quad \mathrm{Sin}\ (90^\circ - y) = \mathrm{Cos}\ y$$
$$\mathrm{Cos}\ (90^\circ + y) = -\mathrm{Sin}\ y;\quad \mathrm{Cos}\ (90^\circ - y) = \mathrm{Sin}\ y.$$

Setzt man $x = 180^\circ$, so folgen:

$$\mathrm{Sin}\ (180^\circ + y) = -\mathrm{Sin}\ y;\quad \mathrm{Sin}\ (180^\circ - y) = \mathrm{Sin}\ y$$
$$\mathrm{Cos}\ (180^\circ + y) = -\mathrm{Cos}\ y;\quad \mathrm{Cos}\ (180^\circ - y) = -\mathrm{Cos}\ y.$$

Setzt man $x = y$, so findet man:

$$\text{(a)} \quad \mathrm{Sin}\ 2x = 2\ \mathrm{Sin}\ x\ \mathrm{Cos}\ x$$
$$\mathrm{Cos}\ 2x = \mathrm{Cos}\ x\ \mathrm{Cos}\ x - \mathrm{Sin}\ x\ \mathrm{Sin}\ x.$$

Addirt man aber zu der letzten Gleichung

$$1 = \mathrm{Cos}\ x\ \mathrm{Cos}\ x + \mathrm{Sin}\ x\ \mathrm{Sin}\ x,$$

so findet sich

$$\text{(b)} \quad \mathrm{Cos}\ 2x = 2\ \mathrm{Cos}\ x\ \mathrm{Cos}\ x - 1,$$

und ebenso findet man durch Subtraction

$$\text{(c)} \quad \mathrm{Cos}\ 2x = 1 - 2\ \mathrm{Sin}\ x\ \mathrm{Sin}\ x.$$

Die Gleichungen (I) geben endlich:

$$\mathrm{Sin}\ x\ \mathrm{Cos}\ y = \tfrac{1}{2}\ \mathrm{Sin}\ (x+y) + \tfrac{1}{2}\ \mathrm{Sin}\ (x-y)$$
$$\mathrm{Cos}\ x\ \mathrm{Sin}\ y = \tfrac{1}{2}\ \mathrm{Sin}\ (x+y) - \tfrac{1}{2}\ \mathrm{Sin}\ (x-y)$$
$$\mathrm{Cos}\ x\ \mathrm{Cos}\ y = \tfrac{1}{2}\ \mathrm{Cos}\ (x+y) - \tfrac{1}{2}\ \mathrm{Cos}\ (x-y)$$
$$\mathrm{Sin}\ x\ \mathrm{Sin}\ y = -\tfrac{1}{2}\ \mathrm{Cos}\ (x+y) + \tfrac{1}{2}\ \mathrm{Cos}\ (x-y).$$

Schon seit den ältesten Zeiten hat man besondere Aufmerksamkeit auf das Problem verwendet, ein Quadrat zu construiren, dessen Flächeninhalt mit dem eines gegebenen Kreises gleich sei; und dies keineswegs ohne Ursache, da die Lösung der fraglichen Aufgabe für den Fortgang anderer Untersuchungen von grösster Wichtigkeit war. Diese Aufgabe hängt indess mit einer anderen auf das Engste zusammen, nämlich mit der, die Länge der Peripherie eines Kreises zu finden, wenn die Länge seines Halbmessers bekannt ist. Diese beiden Fragen machen den Kern des berühmten Problems aus, welches »Quadratura circuli« genannt wird, und an dessen Lösung sich in alten Zeiten so Viele vergebens versucht haben. Jetzt weiss man, dass das numerische Verhältniss des Umkreises zum Durchmesser nicht durch eine exacte Zahl angegeben werden kann, sondern nur näherungsweise, etwa durch einen Decimalbruch, der ins Unendliche fortgeht, ohne jemals abzubrechen. Man kennt aber gegenwärtig so viele dieser Decimalen, dass das in Rede stehende Verhältniss von dem Umkreis zum Durchmesser hinlänglich genau bekannt für alle Fälle ist, in denen die Kenntniss von dessen numerischem Werthe erfordert wird. Gewöhnlich bezeichnet man die Länge der halben Peripherie desjenigen Kreises, dessen Halbmesser 1 ist, mit dem Buchstaben π; für diese Länge hat man nun den folgenden Werth:

$$\pi = 3.14159265358979\ldots\ldots$$

Ausser diesen hier angeführten Decimalen sind noch mehrere hundert berechnet worden; ihre Kenntniss ist indessen nicht sonderlich alt. Im Jahre 1596 gab Ludolph ein Werk heraus, worin die Zahl π zum ersten Mal mit 20 Decimalen berechnet war; vor seiner Zeit gab man dieselbe meistens in der Form eines gewöhnlichen Bruches an, welcher jedoch mehr oder weniger von dem wahren Werthe abweichen musste. Da die Genauigkeit, mit der man in den verschiedenen Zeiten und bei den verschiedenen Völkern die fragliche Grösse angeben konnte, kein ganz unwichtiges Zeichen des damaligen Culturzustandes ist, führen wir einige Angaben hierüber an. Um dabei auf eine bequeme Weise die verschiedenen Angaben mit einander vergleichen und also ihre Genauigkeit beurtheilen zu können, geben wir auch die Werthe der rationalen Brüche in Form von Decimalbrüchen an.

Die Angabe $\pi = \frac{22}{7} = 3.1429$ ist uralt, und es dürfte schwer fallen, ihren Ursprung zu ermitteln. In Anbetracht der besonders einfachen Art und Weise, in der die Zahl π hier angegeben wird, ist die Abweichung in der dritten Decimale vom richtigen Werthe nicht als sehr gross anzusehen. In vielen Fällen ist diese Angabe daher von grossem Werth.

Der berühmte Archimedes wies nach, dass die Zahl π zwischen

$$\frac{22}{7} = 3.1429$$

und

$$\frac{223}{71} = 3.1408$$

liegen müsste. — Das Mittel dieser beiden Grenzwerthe weicht in der vierten Decimalstelle von dem richtigen Werthe ab.

Der bereits erwähnte Cardinal Nicolaus von Cusa hat auf verschiedenen Wegen die Zahl π zu bestimmen gesucht; nach seinen Angaben hierüber scheint er in der Bestimmung

$$\pi = 3.1423$$

der Wahrheit am nächsten gekommen zu sein.

Von den Indiern wird gesagt, dass sie den Näherungswerth

$$\pi = \frac{3927}{1250} = 3.1416000$$

gekannt haben, der nur um 7 Einheiten in der 6ten Decimalstelle ungenau ist.

Am genauesten von allen bekannten Näherungsbrüchen und zugleich sehr leicht zu merken ist der Werth

$$\pi = \frac{355}{113} = 3.14159292,$$

welcher von dem wahren um nur 0.00000027 abweicht. Derselbe wurde von einem Holländer Metius gefunden ungefähr zu derselben Zeit, als Ludolph's Arbeit bekannt gemacht wurde.

Sobald die Länge der Peripherie des Kreises, dessen Halbmesser = 1, ermittelt war, lag keine Schwierigkeit mehr vor, sowohl die Länge eines beliebigen Kreisbogens, als auch den Flächeninhalt eines Kreises anzugeben. Demgemäss hat man, wenn r den Radius eines beliebigen Kreises bezeichnet, für die Länge seiner Peripherie den Ausdruck

$$2\,\pi\,r,$$

und für die Länge eines Bogens von φ Graden:

$$\frac{\varphi}{360}\,2\,\pi\,r;$$

sein Flächeninhalt ist wieder

$$\pi\,r^2,$$

woraus folgt, dass die Länge einer Seite desjenigen Quadrats, das mit dem Kreise gleichen Flächeninhalt hat,

$$r\sqrt{\pi} = r \times 1,77245\ \ldots\ldots$$

oder sehr nahe

$$= r \times \frac{904}{510}.$$

In dieser einfachen Formel liegt die Lösung der berüchtigten Aufgabe, die Quadratur des Kreises zu finden.

Es kann noch bemerkt werden, dass

die Länge eines Kreisbogens von $1^\circ = \dfrac{\pi \times r}{180} \qquad = r \times 0.0174533$

» » » » » $1' = \dfrac{\pi \times r}{180 \times 60} \qquad = r \times 0.0002909$

» » » » » $1'' = \dfrac{\pi \times r}{180 \times 60 \times 60} = r \times 0.000004848.$

Es ist genugsam bekannt, dass eine Gleichung zwischen zwei unbekannten Grössen unbestimmt ist. Aus der Gleichung

$$y = \tfrac{1}{2}\,x$$

können wir z. B. keineswegs die Unbekannten x und y bestimmen; theilen wir aber der Grösse x willkürlich die Werthe 0, 1, 2, 3 u. s. w. zu, so nimmt y der Reihe nach die folgenden, völlig bestimmten Werthe an: 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, u. s. w. Mit jedem bestimmten Werthe von x correspondirt mit andern Worten ein völlig bestimmter Werth von y. Den Zahlen, welche nach und nach für x substituirt werden, entspricht also eine andere Reihe Zahlen, welche Werthe von y repräsentiren. Diese Reihe lässt sich im Allgemeinen durch eine Linie darstellen, ebenso wie wir vorhin den Lauf der Planeten durch Curven anschaulich machten. Um zu zeigen, wie eine solche Darstellung ausgeführt wird, wie mit andern Worten der Bedingung, welche die gegebene Gleichung ausspricht, gleichsam in sichtbarer Weise genügt wird, werden wir die Linie aufzeichnen, welche dadurch entsteht, dass man alle Werthe von y, die den willkürlich angenommenen x-Werthen entsprechen, als Abstände von einer Geraden ansieht, auf der die x-Werthe aufgetragen werden. In der Figur 11 sind zwei Linien ab und ac senkrecht auf einander durch den Punkt a gezogen; die erste dieser Linien nehmen wir als Scala der x-Werthe, die andere als Scala der y-Werthe an. — Nehmen wir nun, vom Punkte a ausgehend, ein bestimmtes Stück auf der x-Scala oder x-Axe, z. B. ab, so haben wir, um einen Punkt auf der fraglichen Linie zu finden, vom Endpunkte dieses Stücks, also von d eine Senkrechte zu ziehen, und von dieser das Stück $dp = \frac{1}{2}\,ad$ abzuschneiden. Schreibt man x statt ad und y statt dp, so sieht man, wie die Beziehung zwischen den beiden Linien dp und ad der vorgelegten Gleichung genügt. Ist ferner $bm = \frac{1}{2}\,ab$, so ist auch m ein Punkt der Linie, welche unsere Gleichung darstellt. Nimmt man in derselben Weise mehrere Punkte an, so findet man, dass alle Punkte, die so gelegen sind, dass ihre Abstände von der x-Axe die Hälfte der entsprechenden x-Werthe oder x-Längen betragen, auf einer geraden Linie liegen. Die Gleichung

$$y = \tfrac{1}{2}\,x$$

wird also durch eine gerade Linie dargestellt. — Für Punkte links von ac werden die x-Werthe negativ und für Punkte unterhalb der Linie ab werden die y-Werthe negativ.

Die zusammengehörenden Werthe von x und y, welche die Lage eines Punktes bestimmen, nennt man die Coordinaten dieses Punktes, und zwar die rechtwinkligen Coordinaten. Die Linien ab und ac, welche nach jeder Richtung als unendlich weit ausgezogen gedacht werden können, nennt man die rechtwinkligen Coordinatenaxen, und zwar heisst ab die x-Axe oder Abscissenaxe und ac die y-Axe oder Ordinatenaxe. Der Punkt a wird endlich Origo oder Anfangspunkt der Coordinaten genannt.

Es wurde soeben eine Gleichung des ersten Grades behandelt und es zeigte sich, dass dieselbe durch eine Gerade dargestellt wurde. Man kann nun ganz allgemein zeigen, dass jede Gleichung ersten Grades durch eine Gerade dargestellt wird. In der That, wie jene Gleichung auch beschaffen sein mag, so kann man sie stets durch Ausführung einer Reihe von Rechnungsoperationen in der folgenden Form darstellen:

$$y - b = ax,$$

wo a und b zwei ganz bestimmte, numerisch gegebene Grössen bedeuten, die wir hier der Allgemeinheit wegen mit Buchstaben bezeichnet haben. Man sieht aber sofort aus dieser Gleichung, dass die y-Coordinate weniger das bestimmte Stück b, zur x-Coordinate in einem unveränderlichen und bekannten Verhältniss a steht (es bezeichnet die Tangente des Winkels, welche die Gerade mit der x-Axe bildet). Wenn dies aber eintrifft, so fällt die fragliche Linie immer mit den Hypothenusen der verschiedenen rechtwinkligen Dreiecke zusammen, deren Seiten an dem rechten Winkel (Katheten) resp. x und $y - b$ sind.

Wir werden jetzt, der Vergleichung wegen, eine Gleichung des zweiten Grades behandeln, d. h. eine solche, in der die Potenzen x^2 und y^2 sowie das Product xy vorkommen können.*) Um dabei den möglichst einfachen Fall zu behandeln, wählen wir die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Die Eigenschaft der Linie, welche diese Gleichung darstellt, ist nun äusserst leicht zu finden. Bezeichnen wir nämlich den Abstand eines Punktes vom Origo, d. i. z. B. den Abstand ap (Fig. 11) mit r, und den Winkel, welchen die Verbindungslinie der beiden Punkte (also in dem angeführten Beispiele die Linie ap) mit der x-Axe macht, mit φ (also den Winkel pad), so ist

$$x = r \operatorname{Cos} \varphi\,;\; y = r \operatorname{Sin} \varphi$$

(in dem angeführten Beispiele ist $ad = x$; $dp = y$).

Die vorgelegte Gleichung wird nun, wenn die Werthe von x und y eingesetzt werden,

$$r^2 \operatorname{Cos} \varphi + r^2 \operatorname{Sin} \varphi^2 = 1$$

oder

$$r^2 (\operatorname{Cos} \varphi^2 + \operatorname{Sin} \varphi^2) = 1;$$

da aber

$$\operatorname{Cos} \varphi^2 + \operatorname{Sin} \varphi^2 = 1,$$

so ist auch

$$r^2 = 1$$

oder

$$r = 1,$$

*) Wie bekannt, bezeichnet man $x \cdot x$ mit x^2 und $y \cdot y$ mit y^2 und nennt solche Producte, wo die Factoren gleich sind, Potenzen. So ist x^2 die zweite Potenz von x; y^3 die dritte Potenz von y etc.

welche Beziehung für jeden Punkt der durch die vorgelegte Gleichung repräsentirten Linie gilt.

Die Linie aber, die so beschaffen ist, dass der Abstand eines jeden ihrer Punkte von einem gewissen unveränderlichen Punkte a derselbe bleibt, nennt man Kreis; die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

ist also die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt im Origo liegt und dessen Radius den Werth 1 hat.

Wir wenden uns jetzt zur Darstellung einer Gleichung, die, wie wir sogleich sehen werden, in der genauesten Beziehung zu der Aufgabe steht, die Ungleichheiten in den Bewegungen der Himmelskörper zu bestimmen. Es ist dies die Gleichung

$$y = \operatorname{Sin} x.$$

Theilen wir die Abscissen-Scala in Grade und die Ordinaten-Scala in gewöhnliche Längenabschnitte ein, so ist die Linie leicht zu construiren. Die Dimensionen derselben würden jedoch willkürlich werden, wenn wir keine Beziehung zwischen den Längen der Grade auf der Abscissenaxe und der Längeneinheit auf der Ordinatenaxe feststellen. Will man aber x und y in denselben Einheiten ausdrücken, so muss statt 180° die Länge $3.14159\ldots = \pi$ angenommen werden.

Die Curve, welche der Gleichung

$$y = \operatorname{Sin} x$$

entspricht, nennt man Sinuslinie; da $y = 0$, wenn $x = 0$, so geht sie durch den Anfangspunkt der Coordinaten; für $x = \frac{\pi}{2}$ ist $y = 1$; für $x = \pi$ ist $y = 0$; für $x = \frac{3}{2}\pi$ ist $y = -1$; für $x = 2\pi$ ist $y = 0$ u. s. w. Die Curve schneidet also die x-Axe jedesmal, wenn x den Betrag eines Vielfachen von π hat; dazwischen liegt sie abwechselnd oberhalb und unterhalb der x-Axe. — Wir müssen aber noch einige andere Punkte der Curve bestimmen.

Nimmt man auf der Peripherie eines Kreises sechs Punkte in gleichen Abständen von einander, so werden dadurch sechs gleiche Bogen abgetheilt, deren jeder einzelne 60° umfasst. Verbindet man nun die Punkte theils unter sich, theils mit dem Mittelpunkte des Kreises, so entstehen sechs gleichschenklige Dreiecke, von denen leicht bewiesen werden kann, dass sie auch gleichseitig sind. Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks beträgt nämlich immer 180°; zieht man von dieser Summe den Betrag des Winkels am Mittelpunkte von 60° ab, so bleibt 120° für die Summe der beiden Winkel an der Peripherie. Diese sind aber gleich, da die Radien desselben Kreises gleich grossen Seiten gegenüberstehen, folglich sind alle Winkel dieser sechs Dreiecke einander gleich und betragen 60°. In jedem Dreiecke sind daher auch die drei Seiten einander gleich, und da zwei von diesen Radien sind, so muss auch die dritte, oder die Verbindungslinie zweier Punkte die Länge des Halbmessers haben. Die Hälfte einer solchen Verbindungslinie oder Chorde ist aber, wenn der Radius als Einheit angenommen wird, gleich dem Sinus des halben, zwischen den beiden Punkten liegenden Bogens. Hieraus ergiebt sich

$$\text{Sin } 30^0 = \text{Sin } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Nach dieser Bestimmung können wir vier neue Punkte der Sinuslinie innerhalb jeder Periode bestimmen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
\text{Sin } \frac{\pi}{6} &= \text{Sin}\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \text{Sin}\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \ldots = \frac{1}{2} \\
\text{Sin}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) &= \text{Sin}\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \text{Sin}\left(5\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \ldots = \frac{1}{2} \\
\text{Sin}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) &= \text{Sin}\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \text{Sin}\left(5\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \ldots = -\frac{1}{2} \\
\text{Sin}\left(- \frac{\pi}{6}\right) &= \text{Sin}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \text{Sin}\left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \ldots = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ferner erhält man aus der Gleichung

$$\text{Sin } \varphi^2 + \text{Cos } \varphi^2 = 1,$$

wenn man $\varphi = 45^0 = \frac{\pi}{4}$ setzt, und beachtet, dass $\text{Sin } \frac{\pi}{4} = \text{Cos } \frac{\pi}{4}$:

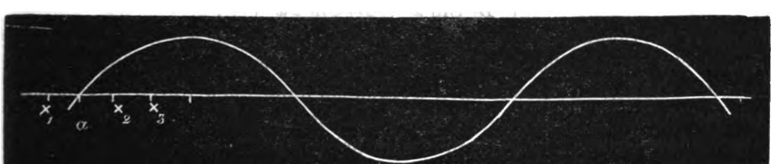
$$\text{Sin} \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}7071.$$

womit erhalten wird:

$$\begin{aligned}
\text{Sin } \frac{\pi}{2} &= \text{Sin}\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \ldots = \sqrt{\frac{1}{2}} \\
\text{Sin}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) &= \text{Sin}\left(3\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \ldots = \sqrt{\frac{1}{2}} \\
\text{Sin}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) &= \text{Sin}\left(3\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \ldots = -\sqrt{\frac{1}{2}} \\
\text{Sin}\left(- \frac{\pi}{2}\right) &= \text{Sin}\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \ldots = -\sqrt{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Mit diesen Werthen können wir schon eine ganze Reihe der Punkte der Sinuslinie angeben und uns also auch eine Vorstellung ihres Laufs bilden. Die folgende Zusammenstellung giebt eine Anzahl Werthe von x nebst den dazu gehörenden Werthen von y; in der Figur 12 sind sie als Abscissen und Ordinaten eingetragen worden.

Fig. 12.



$$x_1\, a = -\frac{1}{6}\pi = -0.5236\ ;\ y_1 = -\frac{1}{2}$$

$$x_0 = 0\ ;\ y_0 = 0$$

$$x_2\, a = +\frac{1}{6}\pi = +0.5236\ ;\ y_2 = +\frac{1}{2}$$

$$x_3\, a = +\frac{6}{3}\pi = +1.0472\ ;\ y_3 = +\sqrt{1-\frac{1}{4}} = +0.8660$$

u. s. w. u. s. w.

Analog mit der Sinuslinie wird die Cosinuslinie construirt, nämlich die Linie, welche die Gleichung

$$y = \operatorname{Cos} x$$

darstellt. Endlich lassen sich auch, ohngefähr in der angeführten Weise, Linien aufzeichnen, deren Gleichungen von der allgemeinen Form

$$y = a \operatorname{Sin} x + b \operatorname{Cos} x$$

sind, wo a und b unveränderliche, numerisch gegebene Grössen bezeichnen. In der Astronomie, wie auch in andern Naturwissenschaften, die mathematisch behandelt werden, hat man sehr häufig Veranlassung, noch zusammengesetztere Ausdrücke von Sinus und Cosinus zu betrachten, wie etwa der folgende:

$$y = a \operatorname{Sin} x + b \operatorname{Cos} x + c \operatorname{Sin} 2x + d \operatorname{Cos} 2x + \ldots.$$

Die Anzahl der Glieder ist hier nicht einmal immer bestimmt, sondern sehr häufig sogar unendlich gross; man macht aber alsdann stets die Voraussetzung, dass die Werthe der Coefficienten a, b, c, d, u. s. w. abnehmen und bei einem gewissen Gliede völlig unmerklich werden; dass man also, um einem im Voraus bestimmten Genauigkeitsgrade zu genügen, nur eine begrenzte, und gewöhnlich sehr mässige Anzahl Glieder zu berücksichtigen braucht. Ist aber dies der Fall, so kann man auch den Werth von y, welcher einem gegebenen Werthe von x entspricht, mit jeder verlangten Genauigkeit berechnen, und folglich sich ein anschauliches und klares Bild von dem Verhalten des mit y bezeichneten Ausdruckes bilden, indem man der Grösse x nach und nach verschiedene Werthe zuertheilt.

Man wird aber nicht selten bei astronomischen Untersuchungen Gelegenheit haben, Ausdrücke zu behandeln, die zwar durch eine der vorhergehenden ähnliche Form dargestellt werden können, nämlich durch

$$(1)\qquad \begin{aligned} y = A_0 + A_1 \operatorname{Cos} x + A_2 \operatorname{Cos} 2x + \ldots \\ + B_1 \operatorname{Sin} x + B_2 \operatorname{Sin} 2x + \ldots \end{aligned}$$

wo aber die Coefficienten A_0, A_1, ... B_1, ... nicht, wie vorhin, unveränderliche numerische Grössen bedeuten, sondern selbst von dem Argumente x abhängen. Gewöhnlich werden sie dann auch durch trigonometrische Linien angegeben, bei denen aber das Argument nicht x, sondern eine andere Grösse z ist, die indess in bekannter Weise mit x zusammenhängt. Man wird also z. B. haben

$$(2) \qquad A_1 = M_0 + M_1 \operatorname{Cos} z + M_2 \operatorname{Cos} 2z + \ldots$$
$$+ N_1 \operatorname{Sin} z + N_2 \operatorname{Sin} 2z + \ldots$$

und ähnliche Ausdrücke für die übrigen Coefficienten $A_0, A_2, \ldots B_1, B_2 \ldots$ Hier bedeuten nun die $M_0, M_1, \ldots$ numerisch gegebene Grössen, die also nicht verändert werden können. Es giebt jedoch Fälle, obgleich sie nicht so häufig vorkommen, wo man die eben angegebene Betrachtungsweise noch weiter fortsetzen muss. — Wir halten uns indess dabei nicht weiter auf, denn die Ausdrücke (1) und (2) werden uns hinreichende Mittel gewähren, die Bewegungserscheinungen der Himmelskörper so weit zu untersuchen, wie es in diesem Buche beabsichtigt wird. — Andrerseits war es aber durchaus nothwendig, das Vorhergehende besonders hervorzuheben, wenn man es nicht als allgemein bekannt und geläufig voraussetzen wollte. Der Ausdruck (1), worin die Coefficienten die Bedeutung des Ausdruckes (2) haben, ist nämlich der allgemeine Typus der Formeln, durch welche man die Gesetze der Bewegungen am Himmel darstellt. In vielen Fällen werden die Formeln einfacher und bestehen aus einer begrenzten Anzahl Glieder, sie können aber bis auf wenige Ausnahmen stets auf die vorgelegte Form zurückgeführt werden. — Ohne sich die Eigenschaften der trigonometrischen Grössen vergegenwärtigen zu können, ist es vollständig unmöglich, eine Vorstellung von den astronomischen Erscheinungen zu erhalten. Wir beabsichtigen ja eine Darstellung der Astronomie als Bewegungslehre der Gestirne zu geben und keineswegs eine Beschreibung der Mondoberfläche oder eine Abhandlung über die Bewohner der Planeten.

Nach dieser Digression auf dem mathematischen Gebiete gehen wir wieder zu den Ungleichheiten der Planetenbewegungen zurück. Wir werden dabei zunächst versuchen, die erste Ungleichheit bei Mars zu constatiren und zu ermitteln, trotzdem seine Bewegung fortwährend von dem Einflusse der zweiten Ungleichheit afficirt ist. Zu diesem Zwecke theilen wir die viertägigen Bewegungen des Planeten in der Länge mit, wie sie in verschiedenen Himmelsgegenden, aber bei derselben Elongation gefunden wurden. Wir suchen daher die Zeitpunkte auf, wo der Planet 6 Stunden nach der Sonne culminirt und die, zu welchen er 6 Stunden vor der Sonne den Meridian passirt. Seine jedesmalige Länge fügen wir hinzu.

Datum	Länge	Aenderung der Länge in 4 Tagen
a) Der Planet culminirt 6 Stunden nach der Sonne		
1850 März 31	97°	1° 52′
1852 Mai 6	132	1 47
1854 Juni 7	165	1 46

1856 Juli 9	198°	1° 52′
1858 Aug. 26	247	2 15
1860 Nov. 26	335	2 34
1863 Jan. 23	33	2 8
1865 März 11	80	1 53
b) Der Planet culminirt 6 Stunden vor der Sonne		
1851 Oct. 25	121°	1° 49′
1853 Nov. 30	157	1 41
1855 Dec. 28	188	1 46
1858 Jan. 30	221	1 54
1860 März 19	268	2 10
1862 Juni 7	344	2 35
1864 Aug. 10	52	2 21
1866 Oct. 9	106	1 53

Ein flüchtiger Blick auf diese Zahlen genügt schon, um zu erkennen, dass die Bewegung am langsamsten ist etwa bei der Länge von 160° und am schnellsten bei 340°. Die Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Länge könnte man ferner anschaulich machen, indem man die Curve aufzeichnete, welche die viertägige Geschwindigkeit als Ordinaten zu den entsprechenden Längen als Abscissen wiedergiebt. Man würde auf diese Weise eine Curve finden, die grosse Aehnlichkeit mit den Sinus- und Cosinuslinien zeigt, und da überdies die Periode der Aenderung in der Geschwindigkeit offenbar mit der tropischen Umlaufszeit des Planeten zusammenfällt, so liegt es sehr nahe, die Aenderung in der Länge als vom Sinus und Cosinus der Länge abhängend anzusehen. Die viertägige Längenänderung bezeichnen wir durch h, die Länge selbst durch λ und setzen also versuchsweise:

$$h = A_0 + A_1 \operatorname{Cos} \lambda + B_1 \operatorname{Sin} \lambda,$$

wo A_0, A_1 und B_1 als numerische Grössen anzusehen sind, die wir sogleich bestimmen werden. Zeigt es sich alsdann, dass die auf solche Weise erhaltene Formel mit angemessener Genauigkeit die wirklich stattfindende Geschwindigkeit der jedesmaligen Länge wiedergiebt, so hat man jedenfalls und unzweifelhaft gefunden, wie die Erscheinung vor sich geht, d. h. man hat den mathematischen Ausdruck für die Aenderung der Länge in verschiedenen Punkten der Bahn erlangt. — Um nun die Bestimmung der noch unbekannten Coefficienten wirklich auszuführen, wählen wir aus der ersten Reihe drei beobachtete Werthe, die zu Längen gehören, welche von einander um ohngefähr 180° verschieden sind.*) Auf solche Weise erhalten wir die drei folgenden Gleichungen:

1865 März 11: $1^\circ\,53' = A_0 + A_1 \operatorname{Cos}\ 80^\circ + B_1 \operatorname{Sin}\ 80^\circ$
1856 Juli 9: $1\ \ 52 = A_0 + A_1 \operatorname{Cos} 198 + B_1 \operatorname{Sin} 198$
1860 Nov. 26: $2\ \ 34 = A_0 + A_1 \operatorname{Cos} 335 + B_1 \operatorname{Sin} 335$

oder, wenn man die Tafelwerthe von Cos 80°, Sin 80°, Cos 198°, u. s. w. einsetzt:

$$\begin{aligned} 1^\circ\,53' &= A_0 + 0.174\,A_1 + 0.984\,B_1 \\ 1\ \ 52 &= A_0 - 0.951\,A_1 - 0.309\,B_1 \\ 2\ \ 34 &= A_0 + 0.906\,A_1 - 0.423\,B_1 \end{aligned}$$

Subtrahiren wir der Reihe nach die beiden ersten dieser Gleichungen von der dritten, so bleiben die zwei:

$$\begin{aligned} 0^\circ\,41' &= +\,0.732\,A_1 - 1.407\,B_1 \\ 0\ \ 42 &= +\,1.857\,A_1 - 0.114\,B_1 \end{aligned}$$

Multipliciren wir hierauf die erste dieser Gleichungen mit $\frac{1.857}{0.732}$ und ziehen das Resultat von der zweiten ab, so bleibt eine einzige Gleichung übrig, aus der sofort folgt:

$$B_1 = -\,18'$$

Nachdem diese Bestimmung gewonnen ist, ergiebt sich aus einer der vorhergehenden Gleichungen:

$$A_1 = +\,21',$$

und hiermit endlich:

$$A_0 = +\,2^\circ\,7'$$

Wir erhalten also die Formel:

$$h = +\,2^\circ\,7' + 21' \operatorname{Cos} \lambda - 18' \operatorname{Sin} \lambda$$

Berechnen wir nun nach dieser die Werthe von h, indem wir die Längen aus der Reihe (a) nach und nach in dieselbe einsetzen, so ergeben sich folgende Werthe, denen wir die beobachteten Werthe von h an die Seite stellen:

*) Die angeführten Werthe von h sind zwar nicht beobachtet, sondern aus der berechneten Bewegung des Mars entnommen worden. Nichts hindert jedoch, sie hier als unmittelbare Resultate der Beobachtung anzusehen, bei denen die Beobachtungsfehler unmerklich klein sind.

λ	h (Rechnung)	h (Beobachtung)
97°	1° 47′	1° 52′
132	1 40	1 47
165	1 42	1 46
198	1 52	1 52
247	2 15	2 15
335	2 34	2 34
33	2 15	2 8
80	1 53	1 53

Wir sehen aus dieser Zusammenstellung, dass die berechneten Werthe die beobachteten nahe, jedoch nicht ganz wiedergeben. Wir hätten daher mehrere Glieder der Formel hinzufügen müssen, also zunächst die beiden

$$A_2 \operatorname{Cos} 2\lambda + B_2 \operatorname{Sin} 2\lambda\,,$$

um einen vollständigeren Anschluss zu erzielen. Diese Rechnung werden wir jedoch nicht ausführen, denn es giebt auch einen andern Grund, weshalb die drei ersten Glieder die beobachtete Bewegung nicht genau darstellen. Es wurde nämlich vorausgesetzt, dass die verschiedenen Werthe von h genau zu demselben Werthe der Elongation gehören sollten, während sie eigentlich nur zu gleichen Rectascensionsunterschieden zwischen der Sonne und dem Planeten gehören. Der Einfluss der zweiten Ungleichheit kann daher die Werthe von h etwas beeinflusst haben, so dass der Einfluss der ersten nicht so rein hervortritt. Da die angeführte Rechnung jedoch bloss als ein Beispiel anzusehen ist, wie man Naturgesetze aus Beobachtungen herleitet, ohne die Ursache derselben weder zu kennen, noch aufzusuchen, so schien die Zeit, welche eine sorgfältigere Behandlung der Aufgabe erfordert hätte, verloren gewesen zu sein.

Für verschiedene Werthe der Elongation lassen sich nun Formeln aufstellen, die zwar in formeller Hinsicht der obigen ähnlich sind, bei denen aber die numerischen Werthe der Coefficienten verschieden ausfallen werden. Sobald nun eine vollständige Reihe solcher Ausdrücke berechnet worden ist, d. h. sobald man solche in einer ziemlichen Anzahl und für verschiedene Elongationen (so dass die Elongationswerthe ziemlich gleichförmig über den ganzen Umkreis vertheilt sind) kennt, so lassen sich die verschiedenen Reihen der Coefficienten ebenfalls in Formeln bringen, wie es die Gleichung (2) verlangt. Die Grösse z bedeutet jetzt die Elongation des Planeten. Dass die Elongation hier als Argument angenommen werden muss, geht daraus hervor, dass die Coefficienten A_0, A_1 u. s. w. dieselben Werthe bei denselben Elongationen haben müssen. Man sieht nun wie es möglich ist, die Bewegung eines Planeten durch eine Formel darzustellen, und damit ist das höchst wesentliche Resultat erreicht worden, dass man genau weiss, wie die Erscheinung verläuft und von welchen Veränderlichen (hier Länge und Elongation) sie abhängt. Man weiss also genau, was zu erklären ist.

Bei einem zweiten Beispiele wollen wir die Rechnung etwas vollständiger ausführen: es betrifft dieses die Ermittelung der ersten Ungleichheit bei der Sonnenbewegung.. Um diese Ungleichheit zu ermitteln, führen wir zwölf Werthe der Sonnenlänge an, die zwar nicht beobachtet worden sind, die aber hier die Stelle von beobachteten Werthen vertreten.

Datum		Länge der Sonne (Beob.)	Länge der Sonne (Rechn.)	t
1867	Jan. 1	280° 38.′0	280° 38.0	0.0000
	Febr. 1	312 11.1	312 9.9	0.0848
	März 1	340 26.4	340 25.2	0.1615
	April 1	11 16.4	11 15.7	0.2464
	Mai 1	40 35.6	40 35.6	0.3285
	Juni 1	70 27.0	70 25.9	0.4134
	Juli 1	99 5.7	99 3.1	0.4956
	Aug. 1	128 41.2	128 37.2	0.5804
	Sept. 1	158 30.9	158 30.8	0.6655
	Oct. 1	187 48.0	187 44.2	0.7474
	Nov. 1	218 35.1	218 34.1	0.8333
	Dec. 1	248 50.2	248 50.9	0.9145

Die Zahlen in der dritten Columne bedeuten die, aus der weiter unten abgeleiteten Formel berechneten Längen der Sonne; in der letzten Columne ist die vom Anfang des Jahres verflossene Zeit, und zwar in Bruchtheilen des Jahres aufgeführt. — Wenn nun die Bewegung gleichförmig wäre, so würde die Länge proportional der Zeit zunehmen; man würde daher dieselben Werthe erhalten müssen, wenn von jeder Länge das Product 360° t abgezogen wird. Führen wir jedoch diese Rechnung für die verschiedenen Werthe von t aus, so ergeben sich

Jan.	1	280°	38.'0
Febr.	1	281	38.1
März	1	282	17.4
April	1	282	33.5
Mai	1	282	18.8
Juni	1	281	37.2
Juli	1	280	41.7
Aug.	1	279	43.5
Sept.	1	278	56.1
Oct.	1.	278	43.2
Nov.	1	278	57.3
Dec.	1	279	37.6

In diesen Zahlen ist nun deutlich der Einfluss einer Ungleichheit zu bemerken, deren Periode ein Jahr ist; wir sind daher darauf hingewiesen, die Länge der Sonne, die wir mit ⊙ bezeichnen, zunächst durch den Ausdruck

$$\odot = A_0 + 360^\circ\, t + A_1 \operatorname{Cos} 360^\circ\, t + B_1 \operatorname{Sin} 360^\circ\, t$$

darzustellen. Um die drei Unbekannten zu bestimmen, wählen wir die Beobachtungen von Jan. 1, Mai 1 und Sept. 1 und erhalten:

$$280^\circ\, 38.'0 = A_0 + A_1$$
$$360^\circ + \;40\;\; 35.6 = A_0 + 118^\circ\, 16.'8 + A_1 \operatorname{Cos}\, (118^\circ\, 16.'8) + B_1 \operatorname{Sin}\, (118^\circ\, 16.'8)$$
$$360 \;+ 158\;\; 30.9 = A_0 + 239\;\; 34.8 + A_1 \operatorname{Cos}\, (239\;\; 34.8) + B_1 \operatorname{Sin}\, (239\;\; 34.8)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man nun, genau in derselben Weise wie bei dem vorigen Beispiele:

$$A_0 = 280^\circ\;\; 36.'9$$
$$A_1 = +\;\; 1.1$$
$$B_1 = +\;\; 156.3$$

Unsere Formel wird also:

$$\odot = 280^\circ\, 36.'9 - 360^\circ\, t + 1.'1 \operatorname{Cos} 360^\circ t + 1^\circ\, 56.'3 \operatorname{Sin} 360^\circ t\,;$$

werden in diese die verschiedenen Werthe von t eingesetzt, so erhält man die Zahlen der dritten Columne. Die Vergleichung dieser Zahlen mit den beobachteten giebt zu erkennen, dass unsere Formel die Sonnenlängen bis auf wenige Minuten genau angiebt; sie ist daher vollkommen hinreichend, die Beobachtungen der Alten, deren Genauigkeit kaum auf 10 Minuten geschätzt werden darf, wiederzugeben.

Und hierin liegt die Erklärung, weshalb in der Sonnenbewegung keine weitere Ungleichheit als die Mittelpunktsgleichung gefunden wurde, welche durch das Glied

$$1^\circ\ 56.'3 \text{ Sin } 360^\circ\, t$$

gegeben ist. Bei der Genauigkeit der heutigen Beobachtungen sind die angeführten Glieder jedoch bei weitem nicht genügend, die wirkliche Länge der Sonne wiederzugeben. Die vollständige Formel für die Sonnenlänge enthält eine grosse Anzahl von Gliedern, wovon jedoch die grössten in dem obigen Ausdrucke schon enthalten sind; es giebt aber noch ein Glied, das über eine Minute beträgt. Streng genommen ist nämlich

$$\begin{aligned} \odot = 280^\circ\ 37.'6 &+ 360^\circ\, t \\ &+ 0.'4 \text{ Cos } 360^\circ\, t + 1^\circ\ 55.'1 \text{ Sin } 360^\circ\, t \\ &+ 1.'2 \text{ Sin } 2 \times 360^\circ\, t \\ &+ \text{mehrere kleine Glieder.} \end{aligned}$$

Wir sehen aber schon aus dem Angeführten, wie äusserst leicht es jetzt ist, auf Grund der Beobachtungen die Kenntnisse der Alten zu erlangen; aber freilich haben wir dabei die empirische Untersuchungsmethode in ganz anderer Weise anzuwenden verstanden, als es im Alterthume geschehen war.

Die Ungleichheiten des Mondes können in genau derselben Weise ermittelt und bestimmt werden. Auf Grund blosser Beobachtungen findet man die Mittelpunktsgleichung, die Evection, die Variation und die jährliche Gleichung, ohne die geringste Vorstellung der Ursachen zu haben, welche diese Ungleichheiten hervorbringen. — Die Periode der Mittelpunktsgleichung ist bei dem Monde jedoch nicht seine tropische, sondern seine anomalistische Umlaufszeit, und so ist es auch streng genommen bei der Sonne und bei den Planeten, obgleich der Unterschied hier sehr gering ist. Wir führen nun die wichtigsten Glieder im Ausdrucke für die Länge des Mondes an, und bezeichnen dabei:

die mittlere Länge des Mondes, d. h. die Glieder $(A_0) + 360^\circ\, t$, wo (A_0) den constanten Theil von A_0 und t die in der tropischen Umlaufszeit des Mondes als Einheit ausgedrückte Zeit bedeutet, mit m;

die Länge des Mondperigäums mit π,

und setzen $$m - \pi = g;$$

in derselben Weise die entsprechenden Grössen bei der Sonne mit m', π' und g'. Die Länge des Mondes findet sich nun aus der Formel:

$$☾ = A_0 + 360^0\, t + A_1 \operatorname{Cos} g + A_2 \operatorname{Cos} 2g + A_3 \operatorname{Cos} 3g + \ldots$$
$$+ B_1 \operatorname{Sin} g + B_1 \operatorname{Sin} 2g + B_3 \operatorname{Sin} 3g + \ldots$$

wo

$$A_0 = (A_0) + 11.'2 \operatorname{Sin} g'$$
$$A_1 = 1^0\ 20.'5 \operatorname{Sin} (2\pi - 2m')$$
$$A_2 = 35.'7 \operatorname{Sin} (2\pi - 2m')$$
A_3 unmerklich
$$B_1 = 6^0\ 17.'3 + 1^0\ 20.'5 \operatorname{Cos} (2\pi - 2m')$$
$$B_2 = 12.'8 + 35.'7 \operatorname{Cos} (2\pi - 2m')$$
$$B_3 = 0.'6$$

Will man die Mittelpunktsgleichung, Evection, Variation und jährliche Gleichung von einander trennen, sò ist dies leicht auszuführen. Es ist alsdann:

Mittelpunktsgl. $= 6^0\ 17.'3 \operatorname{Sin} g + 12.'8 \operatorname{Sin} 2g + 0.'6 \operatorname{Sin} 3g + \ldots$
Evection $= 1^0\ 20.'5 \operatorname{Sin} (2m - 2m' - g)$ *)
Variation $= 35.'7 \operatorname{Sin} (2m - 2m')$
jährl. Gleich. $= 11.2 \operatorname{Sin} g'$.

Die angeführten Beispiele dürften genügen, um zu zeigen, wie die Bewegungen der Himmelskörper dargestellt oder angegeben werden können, ohne dass man eine Spur von dem empirischen Wege abweicht. Man kann dabei die Uebereinstimmung mit den Beobachtungen unbegrenzt weit treiben, denn hierzu ist weiter nichts nöthig, als die Anzahl der berücksichtigten Glieder in entsprechender Weise zu vergrössern. In der Folge werden wir sehen, wie man versucht hat, die Bewegungserscheinungen zu erklären, erst durch geometrische Constructionen, dann durch die Sätze der Mechanik, bis es endlich gelang, dieselben aus einem einzigen Princip herzuleiten, nämlich aus dem Princip der allgemeinen Schwere.

---

*) Wenn der Mond sich in Opposition mit der Sonne befindet, ist $m - m' = 180^0$ oder $= 0$, also $2m - 2m' = 360^0$ oder $= 0$; in beiden Fällen hat die Evection den Werth $- 1^0\ 20.'5 \operatorname{Sin} g$ und fällt folglich zusammen mit dem Gliede $6^0\ 17.'3 \operatorname{Sin} g$. Ohne Kenntniss der Evection wird man daher aus den Finsternissen den Coefficienten der Mittelpunktsgleichung zu etwa 5^0 bestimmen.

§ 5. Die Erklärung der Ungleichheiten in den Bewegungen der Sonne, des Mondes und der Planeten durch die griechischen Astronomen, insbesondere der Alexandriner Schule.

Kaum waren die Bewegungserscheinungen der Himmelskörper einigermassen bekannt, so versuchte man schon, dieselben zu erklären; ja, noch bevor man sich eigentlich Rechenschaft ablegen konnte von dem, was am Himmel vor sich gehe, wusste man schon die Grundzüge des Himmelsbaues und die Einrichtung des Mechanismus, welcher das Werk im Gange hielt, auf Grund blosser Ideen anzugeben. Je mehr nun aber die Einzelheiten der Bewegungserscheinungen ermittelt wurden, desto mehr mussten die ursprünglich einfachen Vorstellungen, die a priori entstanden waren, mehr verwickelten Platz machen, und endlich wurde der einfache und schöne Bau des Himmels mit den Sphären von Krystall, deren Bewegung Töne in schönster Harmonie erzeugten, dermassen durch Reparaturen und Zubauten verunstaltet, dass ein gewöhnlicher gesunder Menschenverstand nicht mehr fähig war, an die Wirklichkeit eines solchen widersinnigen Machwerks zu glauben. Die Natur des Menschen ist jedoch, namentlich auf weniger entwickeltem Bildungsgrade, merkwürdig dogmatisch angelegt, und so glaubte man lange Zeit an das Vorhandensein der sieben Himmel, obgleich sie von den vielen krummen Wegen der Epicykel dermassen durchlöchert sein mussten, dass die Haltbarkeit des Ganzen unmöglich begriffen werden konnte.

Im Vorhergehenden wurde bereits hervorgehoben, wie nicht nur Sonne und Mond, sondern auch die oberen Planeten, wenn man ihre Bewegungen in ganz groben Zügen betrachtet, also ohne Rücksicht auf die beiden Ungleichheiten — Kreise um die Erde zu beschreiben scheinen. Auch die Planeten Merkur und Venus, die sich niemals über gewisse Grenzen von der Sonne entfernen, begleiten die letztere und nehmen auf diese Weise Theil an der gemeinsamen Bewegung der beweglichen Himmelskörper. Es lag deshalb sehr nahe, dies als Gesetz anzunehmen, da sowohl die unmittelbaren Wahrnehmungen eine solche Bewegung anzudeuten schienen, als auch die Annahme der Kreisbewegungen um die Erde nur zu gut mit den früher geläufigen Ansichten von dem Verhältnisse der Erde zum Weltall übereinstimmte.

Indem man sich also den Himmelsraum in Krystallsphären eingetheilt dachte, erhielt man eine ganz ungezwungene und, wie es schien, genügende Erklärung der Bewegungen dadurch, dass man sich die verschiedenen Himmelskörper als an den Sphären befestigt vorstellte, welche in einer mehr oder weniger langen Zeit um gewisse Axen sich drehten. Nach der Dauer dieser Schwingungszeit schätzte man auch die Abstände der beweglichen Himmelskörper, und dachte sich demgemäss dieselben in folgender Ordnung von der Erde entfernt:

1.	Sphäre	der Mond	(☾)
2.	»	Venus	(♀)
3.	»	Merkur	(☿)
4.	»	die Sonne	(☉)
5.	»	Mars	(♂)
6.	»	Jupiter	(♃)
7.	»	Saturn	(♄)
8.	»	die Fixsterne.	

Diese Anordnung ist schon von Aristoteles angenommen worden; sie liegt aber auch dem ptolemäischen Systeme ursprünglich zu Grunde. Unter dieser Benennung versteht man wohl meistens die Anordnung der Welt, wie sie vor Copernicus angenommen wurde, weil die Versuche, Erklärungen für die Bewegungen der Himmelskörper in Uebereinstimmung mit der herrschenden Weltansicht zu finden, in dem ptolemäischen Werke, dem Almagest, zusammengestellt sind. Als eigentlicher Urheber des Systems ist Ptolemäus aber keineswegs anzusehen.

Sobald man anfing, die Bewegungen der Himmelskörper auf Grund sorgfältiger Beobachtungen zu untersuchen, konnte man nicht umhin, die Ungleichheiten in den Bewegungen wahrzunehmen, die jedoch in der vorher erwähnten einfachen Weltanordnung durchaus keine Erklärung fanden. Wie sehr es auch mit der herrschenden Meinung im Widerspruch stand, so konnte doch die, durch die unmittelbaren und leicht zu wiederholenden Wahrnehmungen festgestellte Thatsache nicht geleugnet werden; man musste einräumen, dass die Bewegungen weder gleichförmig erschienen, noch dass die Bahnen immer grösste Kreise am Himmel seien; ja man sprach sogar von dem unberechenbaren und launenhaften »Tanz« der Planeten. — Die Ursachen der entdeckten Anomalien konnte man in keiner Weise ergründen und hielt sie daher auch bloss für scheinbar. An zwei Voraussetzungen hielt man nämlich unerschütterlich fest: nämlich erstens daran, dass die Bewegungen der Himmelskörper keine andern als kreisförmige sein könnten, und zweitens, dass die Erde in Ruhe sei.*) — Aber wenn nun auch die Ursachen der Ungleichheiten immer verborgen bleiben mussten, so war man doch bemüht, wenigstens eine geometrische Erklärung der Erscheinungen am Himmel zu finden. Man glaubte nämlich annehmen zu müssen, dass die wirkliche Bewegung des Planeten nicht die sei, welche unmittelbar am Himmel zu sehen war, sondern dass man nur die Projection der wirklichen Bewegung auf der Himmelssphäre wahrnähme. Mit diesem Grundsatze war die Bahn einer wissenschaftlichen Forschung eröffnet; zwar wurde diese durch die zwei oben erwähnten rein dogmatischen Voraussetzungen gehemmt und beschränkt, allein man wusste auf andere Weise das Feld der Hypothesen in gehöriger Weise zu erweitern, so dass man eine jede Bewegung geometrisch hätte construiren können, ebenso wie wir vorhin die Bewegungen durch trigonometrische Linien darstellten. Man räumte nämlich ein:

dass der Mittelpunkt der Bewegung nicht mit dem Mittelpunkte der Erde zusammenzufallen brauche; und dass die wirklichen Bewegungen aus mehreren Kreisbewegungen zusammengesetzt sein könnten, in der Weise, dass auf der Peripherie des ersten Kreises der Mittelpunkt eines zweiten beweglich sei, an dessen Peripherie der Planet seine Bewegung vollführte, oder auch, dass der Mittelpunkt eines dritten Kreises an der Peripherie des zweiten Kreises in Bewegung sei, u. s. w.

Das Problem, welches den Astronomen Griechenlands aufgegeben war, besteht also in Folgendem: durch ein System von gleichförmigen Bewegungen in kreisförmigen Bahnen die Ungleichheiten in den scheinbaren Bewegungen der Sonne, des Mondes und der Planeten zu erklären.

Schon zu Zeiten Plato's und Aristoteles' war diese Aufgabe angeregt und auch Lösungen derselben versucht worden, indess gelang es erst Hipparch, die Lösung wissenschaftlich zu Ende zu führen, d. h. nicht nur die mathematischen Gesetze solcher Bewegungen ab-

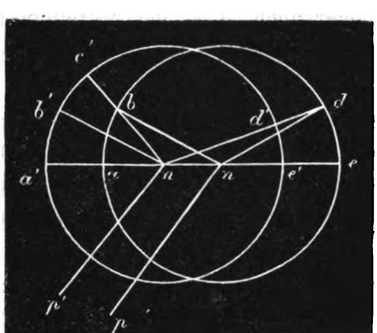
*) Wenn auch Einige die Rotation der Erde behaupteten, so scheint dies doch keine allgemeiner angenommene Lehre geworden zu sein.

zuleiten, sondern auch, durch Vergleichung dieser mit den Beobachtungen, gewisse unbekannte Grössen, von denen man nur wusste, dass sie unveränderlich seien, zu bestimmen.*)

Was nun zunächst die erste Ungleichheit betrifft, die einzige, welche von Hipparch untersucht worden zu sein scheint, da er eigentlich nur die Theorie der Sonnen- und Mondbewegung behandelte, so konnte dieselbe in zweierlei, von einander scheinbar ganz unabhängiger, Weise erklärt werden, nämlich entweder durch die Hypothese eines excentrischen Kreises, oder auch indem man die Bewegung als in einem Epicykel vor sich gehend annahm. Es wurde jedoch später bemerkt, dass beide Hypothesen in geometrischer Beziehung genau dasselbe leisteten, so dass man nach Belieben die eine oder die andere anwenden, dagegen aber auch nicht auf Grund der Beobachtungen entscheiden konnte, welche mehr Wahrscheinlichkeit für sich hatte — eine Frage übrigens, welche die Astronomen des Alterthums wohl wenig bekümmert haben mag.

Die Hypothese vom excentrischen Kreise bestand einfach darin, dass man annahm, der Mittelpunkt der Bewegung falle nicht mit dem der Erde zusammen. Der Abstand zwischen diesen beiden Mittelpunkten wurde Excentricität genannt und dessen Verhältniss zum Halbmesser des Kreises musste aus den Beobachtungen bestimmt werden. In der Fig. 13 ist diese Hypothese veranschaulicht. Wir nehmen an, dass z. B. die Sonne der Peripherie *abde* entlang in Bewegung ist, dass diese Bewegung aber nicht von dem Mittelpunkte *n* dieses Kreises, sondern vom Punkt *m* innerhalb desselben gesehen wird. Da man aber von dem letzteren Punkte die Bewegung sieht, ohne eine Aenderung des Abstandes wahrnehmen zu können, so scheint der bewegte Punkt der Peripherie

Fig. 13.



*) Frühere Versuche sind jedenfalls ohne nachhaltigen Einfluss auf die Astronomie geblieben.

$a'b'd'e'$ entlang zu laufen. Wenn aber die Bewegung in der Peripherie $abde$ gleichförmig ist, so kann sie nicht längs der Peripherie $a'b'd'e$ gleichförmig erscheinen. Fangen wir nun an, die scheinbare Bewegung zu untersuchen, wie sie sich vom Punkte m aus darstellt. Während die Sonne den Bogen ab zurückgelegt hat, ist ihre von der Erde m gesehene Länge um den Winkel $a'mc'$ gewachsen, weil die Sonne in der Richtung mbc' gesehen wird. Die Länge der Sonne ist folglich nicht nur um den Winkel $a'mb'$, welcher mit dem Winkel anb gleich ist, gewachsen, sondern noch dazu um den Winkel $b'mc'$, dessen Grösse sowohl von dem Winkel anb, wie auch von der Excentricität mn abhängt. Es ist nun sehr leicht einzusehen, dass die Bewegung der Sonne am schnellsten erscheinen muss, wenn sie der Erde am nächsten ist, also im Punkte a, am langsamsten hingegen im Punkte e, wo sie am weitesten von der Erde absteht. Die Hypothese des excentrischen Kreises leistet also wenigstens darin das Erwünschte, dass man durch sie die grösste und kleinste Geschwindigkeit in diametral entgegengesetzten Punkten findet. Aber auch über den ganzen Verlauf der scheinbaren Bewegung giebt sie einen befriedigenden Aufschluss, wenn man keine grössere Genauigkeit als die der älteren Beobachtungen beansprucht. Dies wollen wir beweisen.

Wenn die Excentricität im Verhältniss zum Halbmesser, den wir als Einheit annehmen, sehr klein ist, so ist auch der Bogen $b'c'$ sehr klein, und wir können denselben seinem Sinus gleichsetzen.*) Wir haben unter dieser Voraussetzung:

$$b'c' = \text{Sin } b'me' = \text{Sin } mbn = \text{Sin } B$$

(der Winkel mbn werde der Kürze wegen B genannt).

Den Winkel $a'mb' = anb$ bezeichnen wir mit g und haben, einem Satze aus der Trigonometrie zufolge, den wir später zu beweisen Gelegenheit haben werden:

---

*) Aus der Fig. 10 ersehen wir sogleich, dass der Bogen bm grösser ist als mp, aber kleiner als bn. Es ist also

$$\text{Sin } \varphi < \varphi < \text{Tang } \varphi$$

oder

$$\text{Sin } \varphi < \varphi < \frac{\text{Sin } \varphi}{\sqrt{1 - \text{Sin } \varphi^2}};$$

ist nun φ, also auch Sin φ sehr klein, so kann man Sin φ^2 als unmerklich ansehen und also den Sinus mit dem Bogen vertauschen.

$$\text{Sin}\, B : \text{Sin}\, g = e : bm$$

oder

$$\text{Sin}\, B = \frac{e\ \text{Sin}\, g}{bm}$$

Nach einem schon von Euklides bewiesenen Satze ist aber im Dreiecke mbn:

$$\overline{bm}^2 = \overline{bn}^2 + \overline{mn}^2 - 2\, mn \times bn\ \text{Cos}\, g$$

d. h.

$$bm = \sqrt{1 - 2e\ \text{Cos}\, g + e^2}\,;$$

folglich ist

$$\text{Sin}\, B = \frac{e\ \text{Sin}\, g}{\sqrt{1 - 2e\ \text{Cos}\, g + e^2}}$$

Dieser Ausdruck für B ist jedoch nicht der bequemste zur Vergleichung mit den Beobachtungen; wir wollen ihn daher etwas umformen, was in höchst einfacher Weise geschehen kann. — Die Umformung betrifft zunächst den Ausdruck

$$\sqrt{1 - 2e\ \text{Cos}\, g + e^2}$$

Addiren und subtrahiren wir die Grösse $e^2\ \text{Cos}\, g^2$ zu den Gliedern unter dem Wurzelzeichen, und erinnern wir uns dabei, dass

$$1 - 2e\ \text{Cos}\, g + e^2\ \text{Cos}\, g^2 = (1 - e\ \text{Cos}\, g)^2\,,$$

so können wir sofort schreiben

$$\sqrt{1 - 2e\ \text{Cos}\, g + e^2} = (1 - e\ \text{Cos}\, g)\sqrt{1 + \frac{e^2\ \text{Sin}\, g^2}{(1 - e\ \text{Cos}\, g)^2}}$$

Mit diesen Werthen wird nun

$$\text{Sin}\, B = \frac{e\ \text{Sin}\, g}{1 - e\ \text{Cos}\, g} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e^2\ \text{Sin}\, g^2}{(1 - e\ \text{Cos}\, g)^2}}}$$

Wenn nun e ein sehr kleiner Bruch ist, so kann e^2 häufig als ganz verschwindend angesehen werden: für $e = \frac{1}{10}$ z. B. ist $e^2 = \frac{1}{100}$. Wir können alsdann alle Glieder, die mit e^2 multiplicirt sind, ganz und gar weglassen, da sie das Resultat doch nicht merklich zu verändern im Stande sind, und haben also:

$$\text{Sin}\, B = \frac{e\ \text{Sin}\, g}{1 - e\ \text{Cos}\, g}\,,$$

wobei zu bemerken ist, dass in diesem Ausdrucke nur solche Glieder fehlen, die mit e^3 multiplicirt sind, und also, unserer Voraussetzung gemäss, weggelassen werden können. Multipliciren wir hierauf Zähler und Nenner in diesem Ausdruck mit $1 + e \operatorname{Cos} g$, wodurch der Werth des Ausdruckes natürlich nicht verändert wird, und beachten wir dabei, dass

$$(1 - e \operatorname{Cos} g)(1 + e \operatorname{Cos} g) = 1 - e^2 \operatorname{Cos} g^2,$$

so erhalten wir, indem wir wieder das Glied im Nenner, welches mit e^2 multiplicirt ist, weglassen,

$$\operatorname{Sin} B = e \operatorname{Sin} g\, (1 + e \operatorname{Cos} g) = e \operatorname{Sin} g + \tfrac{1}{2} e^2 \operatorname{Sin} 2g$$

in welcher Formel nur solche Glieder fehlen, die mit e^3 multiplicirt worden sind, sowie noch kleinere. — Wenn nun aber e eine so kleine Grösse ist, dass die dritte Potenz derselben als unmerklich angesehen werden darf, so kann man auch B statt $\operatorname{Sin} B$ schreiben, so dass

$$B = e \operatorname{Sin} g + \tfrac{1}{2} e^2 \operatorname{Sin} g.$$

Die mittlere Länge der Sonne, also den Winkel $bnp = b'mp'$, wenn mp' oder np die Richtung des Frühlingspunktes angiebt, nennen wir $\odot$, und haben also für die vom Punkte m aus gesehene Länge den Ausdruck:

$$\odot = m + e \operatorname{Sin} g + \tfrac{1}{2} e^2 \operatorname{Sin} 2g.$$

Damit nun die periodischen Glieder der Mittelpunktsgleichung der Sonnenbewegung entsprechen, muss $e = 1^\circ\ 55.'1$ und $\tfrac{1}{2} e^2 = 1.'2$ sein. Um e in Theile des Radius zu verwandeln, muss $1^\circ\ 55.'1 = 115.'1$ mit der Länge des Bogens, welcher einer Minute entspricht, multiplicirt werden, also mit der Zahl 0.0002909; man erhält somit

$$e = 0.03348.$$

Multiplicirt man hierauf die Hälfte dieser Zahl mit $e = 115.'1$, so erhält man, in Minuten ausgedrückt,

$$\tfrac{1}{2} e^2 = 1.'97,$$

also einen etwas grösseren als den richtigen Werth des Coefficienten von $\operatorname{Sin} 2g$. Der Unterschied ist jedoch nicht grösser, als dass er durch die Ungenauigkeit der alten Beobachtungen vollständig verdeckt würde, und somit zeigt es sich, dass die Hypothese des excentrischen Kreises vollkommen genügte, die im Alterthume beobachtete Bewegung der Sonne geometrisch darzustellen. — Bei dem Monde genügte sie indess nicht.

Aus den Coefficienten von Sin g, nämlich $6^\circ\ 17'.3$, findet man, wie zuvor

$$e = 0.10975,$$

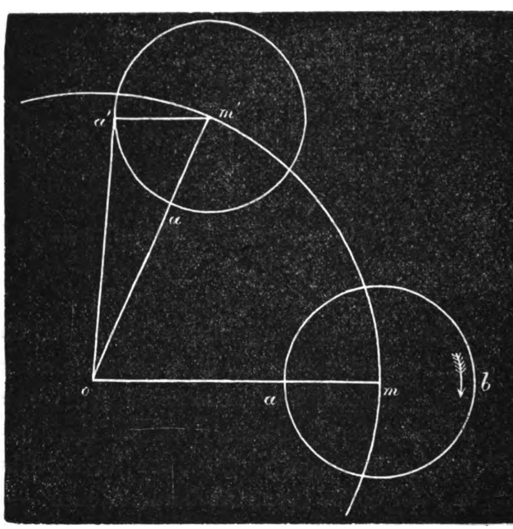
womit ferner erhalten wird

$$\tfrac{1}{2}e^2 = 20'.70.$$

Der wirkliche Werth des Coefficienten von Sin $2g$ ist jedoch nur $12'.8$; die Hypothese giebt ihn mithin um $8'$ zu gross an. Relativ noch grössere Unterschiede würden sich bei noch höheren Gliedern zeigen. Die Hypothese, dass der Mond sich in einem excentrischen Kreise um die Erde bewegt, ist demnach falsch, oder bedarf auf alle Fälle wenigstens noch gewisser Zusätze, um nicht Resultate zu veranlassen, die sogar unter der Genauigkeit der alten Beobachtungen stehen würden.

Genau eben so weit, wie mit der Hypothese des excentrischen Kreises, kommt man mit der Annahme, dass die Bewegung in einem Epicykel geschähe. Vereinigt man beide Hypothesen, so kann auch das zweite Glied in der Mittelpunktsgleichung des Mondes hergestellt werden. Wir wollen nun diese letztere Hypothese beleuchten. Fig. 14 veranschaulicht die fragliche Bewegung. Es wird angenommen, dass

Fig. 14.



der Mittelpunkt des Kreises ab sich auf der Peripherie mm' fortbewegt, während der Himmelskörper den Kreis ab durchläuft, und zwar sind die Umlaufszeiten in den beiden Kreisen einander gleich, so dass der Himmelskörper einen gleich grossen Bogen in dem Epicykel (so wird der Kreis ab genannt) durchläuft, wie der Mittelpunkt des Epicykels auf dem Umkreise mm'. Es folgt nun hieraus, dass, wenn der Mittelpunkt m nach m' vorgerückt ist, der Himmelskörper, welcher ursprünglich in a angenommen war, in dem Punkte a' sich befindet, und zwar so, dass der Winkel mom' gleich dem Winkel $om'a'$ ist. Die Linie $a'm'$ bleibt mithin stets parallel mit sich selbst. — Man kann sich also auch die Sache so vorstellen, dass der Himmelskörper unbeweglich auf dem Kreise ab bleibt, welcher alsdann aber nicht als in Rotirung gedacht werden darf, sondern nur vorwärts geschoben wird ohne zu rollen, so dass ein beliebiger Durchmesser desselben stets parallel mit sich selbst bleibt.

Der Winkel mom' bezeichnet nun den Zuwachs der mittleren Länge, also den Winkel, welchen wir vorhin mit g bezeichneten; der Abstand am ist die Excentricität, indem der Halbmesser om als Einheit angenommen wird; der Winkel $a'om'$ ist endlich der Unterschied zwischen der von der Erde aus beobachteten und der mittleren Länge, derselbe also, welcher oben B genannt wurde. Aus dem Dreiecke $a'om'$ findet man nun genau dieselben Ausdrücke wie oben, und zwar auf demselben Wege.

Nur kurz wollen wir jetzt noch andeuten, wie die beiden Hypothesen mit einander verbunden werden können. Wir nehmen also an, dass der Mittelpunkt des Epicykels auf einem excentrischen Kreise beweglich ist. Die Länge dieses Mittelpunktes wird nun durch die Formel

$$L = m + e \operatorname{Sin} G + \tfrac{1}{2} e^2 \operatorname{Sin} 2G$$

ausgedrückt, wo m die mittlere Länge des fraglichen Mittelpunktes und G den von ihm durchlaufenen Bogen auf dem excentrischen Kreise bedeuten. Wir denken uns nun den Radius des Epicykels so klein, dass sein Produkt mit e vernachlässigt werden kann; ferner dass die Bewegung im Epicykel doppelt so schnell ist als im excentrischen Kreise, d. h. dass der Körper den Epicykel zweimal durchläuft während der Mittelpunkt des Epicykels den excentrischen Kreis einmal umkreist; alsdann haben wir zu der Länge L das Glied

$$\gamma \operatorname{Sin} 2G$$

hinzuzufügen, wo γ so bestimmt werden muss, dass $\frac{1}{2}e^2 + \gamma$ den beobachteten Coefficienten wiedergiebt. Es wurde gefunden

$$\frac{1}{2}e^2 = 20.'70,$$

Werth des Coefficienten $\qquad 12.80$

also $\qquad \gamma = -7.90$

oder, in Theilen des Radius,

$$\gamma = -0.00230.$$

Das negative Vorzeichen deutet an, dass die Bewegung im Epicykel rückläufig gedacht werden muss.

Um die Evection zu erklären, bedurfte es eines zweiten Epicykels, und wären mehrere Ungleichheiten bekannt gewesen, so hätte man wohl nicht beanstandet, das System entsprechend auszudehnen.

Wenn man nun auch auf diese Weise die Bewegung in der Länge genügend darzustellen vermochte, so gab es doch einen Umstand, der leicht hätte zeigen können, dass der ganzen Theorie jede reelle Grundlage fehlte. Dieser Umstand besteht darin, dass die Bewegungen des Mondes in verschiedenen Punkten seiner Bahn von Aenderungen seines Abstandes von der Erde begleitet sind, die in der epicyklischen Hypothese keineswegs mit den wirklichen Aenderungen identisch sind. Es kann nämlich sehr leicht bewiesen werden, dass die Geschwindigkeit eines Himmelskörpers, mag er sich nun in einem Epicykel oder in einem excentrischen Kreise bewegen, in verschiedenen Punkten der Bahn im umgekehrten Verhältniss zu der entsprechenden Entfernung von der Erde steht. Da nun ferner der scheinbare Durchmesser des Mondes in demselben Verhältniss zu- oder abnehmen muss, wie die Entfernung von der Erde ab- oder zunimmt, so folgt, dass die Geschwindigkeiten sich wie die scheinbaren Durchmesser verhalten müssen, wenn die Theorie der Epicykel oder des excentrischen Kreises wahr sein soll. Nennen wir die Geschwindigkeiten zu zwei verschiedenen Zeitpunkten v und v', sowie die zu denselben Zeiten stattfindenden scheinbaren Durchmesser d und d', so muss also:

$$\frac{v}{v'} = \frac{d}{d'}$$

sein, woraus folgt

$$d' = \frac{v'}{v} d.$$

Prüfen wir diese Formel an einem Beispiele. Am 6. Mai 1865 war $d = 29.'5$, und während desselben nahm die Länge des Mondes zu um $11^\circ\ 8.'6$, oder es war $v = 708.'6$; den 22. Mai desselben Jahres hatten die entsprechenden Grössen folgende Werthe: $d' = 32.'9$; $v' = 14^\circ\ 38.'3 = 878.'3$. Berechnet man aber d' aus der Formel

$$d' = \frac{878.3}{708.6}\, 29.'5,$$

so findet sich

$$d' = 36.'56,$$

also um 3.'66 grösser als der wirkliche Betrag. Hätte man dagegen eine andere Hypothese anwenden können, welche, indem durch sie die Längenbewegungen in genügender Weise erklärt worden wären, zu der Gleichung

$$\frac{v}{v'} = \left(\frac{d}{d'}\right)^2$$

oder

$$d' = d \sqrt{\frac{v'}{v}}$$

geführt hätte, so hätte man **zugleich** eine Erklärung der Aenderungen des Abstandes gehabt; denn nach der zuletztgenannten Formel findet sich

$$d' = 32.'84,$$

also sehr nahe mit dem wahren Werthe übereinstimmend.

Es ist schwer zu entscheiden, in wie weit man es den alten Astronomen anrechnen soll, dass sie nicht die Nothwendigkeit einer Hypothese der angedeuteten Art einsahen. Der Unterschied von fast vier Minuten oder ohngefähr $\frac{1}{8}$ der ganzen Mondscheibe hätte wohl ihrer Aufmerksamkeit kaum entgehen können, wenn dieselbe auf diesen Umstand einmal gerichtet worden wäre. Und hier hätten sie ja fast das einzige Kriterium gehabt, die Richtigkeit ihrer Hypothesen zu prüfen. — Aber anderseits lag es zu sehr in der ganzen Art und Weise der damaligen Zeit, bei wissenschaftlichen Untersuchungen nur auf die allernöthigsten empirischen Data Rücksicht zu nehmen; und vollends die von den Philosophen gutgeheissene Theorie durch Empirismus corrigiren zu wollen, konnte ihnen nicht in den Sinn kommen. Dass man also eine derartige Prüfung unterliess, kann somit erklärt, wenn auch nicht entschuldigt werden. Wenn aber, wie fast vermuthet werden kann, die alten Astronomen bloss bezweckten, Regeln aufzufinden, nach denen die Oerter der Himmelskörper im Voraus berechnet werden können und in keiner Weise eine physische Erklärung der Bewegung zu geben versuchten, so war ihr Verfahren ein durchaus richtiges, obgleich ein sehr unbequemes; denn sie konnten mit ihren Epicykeln nur das leisten, was wir mit den Cosinus- und Sinus-Ausdrücken zu leisten im Stande sind. Bei der Vergleichung beider Methoden, welche wir die geometrische und die analytische nennen können, sinkt die Wagschale sehr bald zu Gunsten der letzteren. Die Behandlung der aufeinanderfolgenden Epicykel wird äusserst lästig, hingegen ist es ein Leichtes, eine hinreichende Anzahl Glieder in den Ausdrücken (1) und (2) (Art. 5 des vor. §) zu berücksichtigen.

Im Vorhergehenden hatten wir Gelegenheit zu sehen, wie die sogenannte erste Ungleichheit in der Bewegung der Himmelskörper vermittelst einer der zwei angeführten geometrischen Hypothesen ihre Erklärung fand. Wie es scheint, wurde diese Ungleichheit allgemein durch den excentrisehen Kreis dargestellt, da der Epicykel in anderer Weise eine nützliche Verwendung fand. Es ist nämlich leicht einzusehen, wie die Bewegung in dem Epicykel so gedacht werden kann, dass die Erklärung der zweiten Ungleichheit daraus hervorgeht. Wie man aus der Fig. 14 unmittelbar sieht, kann die Bewegung, vom Punkt o aus gesehen, während einer begrenzten Zeit, die jedoch vergrössert wird in dem Maasse wie der Halbmesser des Epicykels zunimmt, jede beliebige Geschwindigkeit annehmen, nur muss die Geschwindigkeit im Epicykel genügend gross vorausgesetzt werden. Wenn aber die Geschwindigkeit im Epicykel grösser ist als die seines Mittelpunktes, so giebt es offenbar Fälle, wo die Bewegung rückläufig erscheinen muss. Solche Fälle treten dann ein, wenn die Bewegung des Planeten im Epicykel der Bewegung des Mittelpunktes entgegen gerichtet ist, also z. B. da, wo der Planet im Punkte b sich befindet.

Im Almagest finden sich nun Angaben sowohl über die Geschwindigkeiten der verschiedenen Planeten in den Epicykeln und über die Bewegung ihrer Mittelpunkte, als auch über die Verhältnisse der Halbmesser der Epicykel zum Halbmesser der excentrischen Kreise. Die absoluten Werthe dieser Halbmesser konnte man natürlich nicht bestimmen, da die Erde als unbeweglich vorausgesetzt wurde; nur der Mond erwies sich als nahe genug, um seine Entfernung zu messen. Wir theilen zunächst diese Bewegungen und Verhältnisse mit, weil man durch Kenntniss derselben eine völlig deutliche Vorstellung des Ptolemäischen Systems erhält.*)

Planet	Tägl. Beweg. im Epicykel	Tägl. Beweg. des Mittelpunkts der Epic. auf dem exc. Kreise.	
Merkur	3° 6′ 24″.1	0° 59′ 8″.3	Bewegung der Sonne
Venus	0 36 59.4	0 59 8.3	
Mars	0 27 41.7	0 31 26.6	
Jupiter	0 54 9.0	0 4 59.2	
Saturn	0 57 7.7	0 2 0.6	

Bei den zwei unteren Planeten Merkur und Venus wurde also angenommen, dass die Mittelpunkte ihrer Epicykel dieselbe Bewegung wie die Sonne haben; dass diese Planeten sich in der That um die Sonne bewegten, wurde schon im Alterthume von Einigen angenommen. Die übrigen Epicykel bewegten sich langsamer, am langsamsten der des Saturn; die Bewegung im Epicykel wird hingegen rascher, je weiter der Planet von der Erde entfernt ist; bei Saturn ist diese Bewegung nur unbedeutend langsamer als bei der Sonne.

Die Halbmesser der Epicykel bezeichnen wir durch f, die der excentrischen, oder, wie sie auch genannt wurden, der deferirenden Kreise mit d; für die Verhältnisse $\frac{f}{d}$ finden sich nach Delambre die Werthe:

	$\frac{f}{d}$
Merkur	0.3838
Venus	0.7196
Mars	0.6579
Jupiter	0.1917
Saturn	0.1083

*) Die Angaben sind aus Delambre's Hist. de l'astr. anc. entnommen. Tome II, p. 313.

Merkur ist folglich stets der Sonne näher als Venus; bei den oberen Planeten werden die Epicykel stets kleiner im Verhältnisse zu den Deferenten, je weiter von der Erde die resp. Planeten entfernt sind.

§ 6. Das copernicanische Weltsystem und Kepler's Gesetze.

Das auf Ptolemäus folgende Jahrtausend war wenig förderlich für die Entwicklung der Astronomie. Zwar stand diese Wissenschaft, wie es heisst, in hoher Blüthe bei den Arabern, bei denen die Ptolemäischen Lehren, nicht minder wie bei den Christen, zum Glaubensartikel erhoben wurden; zwar wurden die Umlaufszeiten sehr sicher bestimmt und die Abweichung der Ptolemäischen Theorie vom Himmel erkannt; zwar verwendete ein König, der selbst das Ansehen eines Gelehrten genoss, ungeheure Summen, um das System so zu vervollständigen, dass es dem, was am Himmel zu lesen war, entspräche, allein man verlief sich in das alte Geleis und konnte aus ihm nicht heraus. Nur das ging immer mit mehr Klarheit hervor, dass man sich immer mehr und mehr in die Unbegreiflichkeiten hineinarbeitete. Man konnte sich freilich damit trösten, dass »die unbegreiflich hohen Werke« auch unbegreiflich bleiben sollten, allein selbst im Mittelalter genügte dieser Trost nicht. Auch dieses Zeitalter entbehrt nicht ganz der Anregungsmittel, die den Forschungseifer wach hielten, so dass das Licht der Wissenschaft nicht völlig erlosch. Es ist kaum nöthig zu sagen, dass zu diesen in erster Linie die Kreuzzüge und die Eroberung von Constantinopel zu zählen sind. Bis dahin waren die Völker des Abendlandes entschieden den Orientalen gegenüber im Rückstande; nur sehr spärliche Ausnahmen von der allgemeinen Rohheit sind bemerklich, und diese hatten keine Gelegenheit sich geltend zu machen. In den christlichen Klöstern, fast den einzigen Asylen geistiger Beschäftigung in Europa, wurde eigentlich weiter nichts Wissenschaftliches vorgenommen, als Abschriften der Werke des klassischen Alterthums verfertigt. Es war eine magere Erde, in der die zarten Pflanzen der hellenischen Wissenschaft umgesetzt wurden, und so darf es nicht verwundern, wenn Unkraut, wie Astrologie u. dgl. kräftiger emporblühten, als das Streben nach vorurtheilsfreier Erkenntniss.

Unter den arabischen Gelehrten begegnen wir zwar keinem Namen, welcher mit dem eines Hipparch oder auch nur Ptolemäus zu vergleichen wäre, aber dennoch sind wir den Arabern die grösste Dankbarkeit schuldig, denn sie haben wenigstens das Leben der Wissenschaft erhalten. Es wird erzählt, dass der Kalif Al Mamun bei einem Friedensschluss mit dem griechischen Kaiser Michael III. sich ausbedungen habe, die Schriften der griechischen Gelehrten im Kaiserstaate ansammeln lassen zu dürfen, die er nachher übersetzen liess. Auf diese Weise wurde die Astronomie im Kalifate heimisch.

Unter den bedeutendern der arabischen Astronomen bemerken wir zunächst Albategnius (eigentlich Muhamed ben Geber Albatani), welcher im neunten Jahrhunderte lebte. Er soll zuerst die Bewegung des Sonnenperigäums bemerkt haben; auch hat er die ptolemäischen Tafeln nicht unwesentlich verbessert. Dergleichen partielle Fortschritte finden wir auch bei Ebn-Junis, Abul Wefa u. A. Bei der Gunst, welche die Astronomie bei den Nachfolgern des Propheten genoss, musste auch die Beobachtungskunst erweitert werden, und somit st es nicht zu verwundern, dass die arabischen Astronomen bessere Beobachtungen zu liefern im Stande waren, als von den Griechen aufbewahrt worden sind. Da nun ausserdem die arabische Astronomie etwa 800 bis 900 Jahre nach der griechischen in Blüthe stand, so musste sie auch die Bewegungen mit einer grösseren Genauigkeit erkennen können. Ihre Astronomie war jedoch durchaus die griechische.

Von Arabien ging die Astronomie nach Spanien über. Der König Alphons X. von Castilien interessirte sich lebhaft für diese Wissenschaft, insbesondere für die Herstellung neuer und zuverlässiger Planetentafeln, d. h. Tafeln, aus denen die Oerter eines Planeten für eine beliebige Zeit durch eine leichte Rechnung entnommen werden konnten. Zu diesem Zwecke setzte er eine gelehrte Commission zu Toledo nieder, die, aus Mohamedanern, Israeliten und Christen zusammengesetzt, beauftragt war, die für die Herstellung solcher Tafeln nöthigen Arbeiten auszuführen. Im Jahre 1252 wurden sie fertig; wie erzählt wird, haben sie volle 40000 Ducaten gekostet, eine Summe, die stets als zu gross angesehen worden ist in Anbetracht der geringen Fortschritte der Astronomie, welche in diesen Tafeln zu finden sind. Es ist eben im Grunde nur das alte ptolemäische System, das hier zur Anwendung kam, also in wissenschaftlicher Beziehung ein rein empirisches Werk, welches überdies nicht einmal alle Vorzüge eines solchen genoss. Denn die Unrichtigkeit der theoretischen Grundlage konnte nicht dadurch völlig gehoben werden, dass die Anzahl der Epicykel vergrössert wurde, da einer solchen Vergrösserung doch eine Grenze gesetzt werden musste. Trotzdem bilden die Alphonsinischen Tafeln ein glänzendes Denkmal der damaligen spanischen Cultur, die, wie bekannt, zerstört wurde, indem die nichtchristliche Bevölkerung gewaltsam zur Annahme des Christenthums und dadurch zur Auswanderung gezwungen wurde. Es ist bezeichnend, dass der König selbst nicht an die Realität des ptolemäischen Systems glaubte, wie solches daraus hervorgeht, dass er geäussert haben soll: Wenn ich dabei gewesen wäre, als Gott die Welt schuf, so hätte ich ihm manchen guten Rath geben können. Seinen Astronomen theilte er jedoch nicht mit, worin diese Vereinfachungen bestanden haben würden.*)

Es folgen nun zwei Jahrhunderte der tiefsten Nacht, aus der kaum eine Spur wissenschaftlichen Strebens nachgeblieben ist; erst im fünfzehnten Jahrhundert erwachte der Sinn für die Wissenschaften wieder. Zunächst ist es Italien, wo wir das Aufblühen der geistigen Cultur bemerken. Durch den häufigeren Verkehr mit den aus ihrem Vaterlande ausgewanderten Griechen wurde die Kenntniss des klassischen Alterthums mehr verbreitet, die Schriften eines Aristoteles, Ptolemäus u. A. mehr gelesen und richtiger verstanden, und endlich der Sinn für freie Forschung und freien Gedanken entwickelt. — Auf der Hochschule zu Bologna, einer der drei ältesten Universitäten **), wurden die mathematischen Wissenschaften mehr als anderswo betrieben: man zählte dort viele für die damalige Zeit hervorragende Männer dieser Wissenschaften, und von fernen Landen suchte man dort seine Ausbildung in denselben. Unter den Zöglingen dieser Universität befand sich auch der später so berühmte Nicolaus Copernicus.***)

---

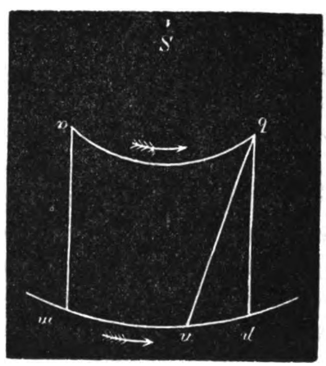
*) Delambre, Hist. de l'astr. du moyen age, pag. 248.

**) Die drei ersten Universitäten wurden in Bologna, Salerno und Paris gestiftet.

***) Schon vorher war die astronomische Wissenschaft durch zwei

Es wird freilich erzählt, dass Copernicus von seinem Lehrer an der Hochschule zu Bologna die ersten Ideen von der Bewegung der Erde erhalten habe; er sagt ferner selbst, dass diese Ideen gar nicht ihm gehören, da sie schon in den Schriften verschiedener klassischer Autoren zu finden sind; aber er hat diese Ideen dadurch zu seinem geistigen Eigenthum gemacht, dass er durch Rechnung zeigte, wie die scheinbaren Bewegungen der Planeten auch unter der Annahme, dass die Erde sich um die Sonne bewegt, erklärt werden können. Für die Astronomie lag jedoch nicht hierin das Hauptgewicht, sondern mehr in seiner Annahme, dass auch die oberen Planeten um die Sonne in excentrischen Kreisbahnen sich bewegen. Der Epicykel, welcher zur Erklärung der zweiten Ungleichheit dienen sollte, fiel, wie wir sogleich sehen werden, bei dieser Annahme weg, wodurch der Mechanismus der Himmelsbewegung bedeutend vereinfacht wurde. Die Fig. 15 zeigt uns, wie die rückläufige Bewegung der oberen Planeten nur eine Folge der Erdbewegung ist.

Fig. 15.



Wenn nämlich ein oberer Planet, der sich in einer gegebenen Zeit vom Punkte *m* nach *n* bewegt, von der Erde aus betrachtet wird, die in derselben Zeit das Bahnstück *ab* durchläuft, so scheint er in der That eine rückläufige Bewegung gehabt zu haben, denn seine Länge ist um den Winkel *nbp* vermindert worden. Befände die Erde sich in Ruhe, so hätte der Planet bei dieser reellen Bewegung auch nothwendig seine Länge vergrössert, und zwar um den Winkel *man*. Wenn aber die Bewegung des Planeten den ganzen Bogen *mp* beträgt, so scheint er still zu stehen, denn seine Länge wird weder vergrössert noch verkleinert. Das Ver-

---

Deutsche über die Alpen gebracht worden. Es waren dies Peurbach und Regiomontanus. Durch sie wurde die Wissenschaft zu ohngefähr derselben Höhe in den Abendländern geführt, wie sie etwa 500 Jahre früher bei den Arabern stand. Das Wirken Regiomontan's war namentlich auf die geistigen Interessen der Stadt Nürnberg von nachhaltendem Einfluss.

dienst des Copernicus lag eben darin, dass er zeigte, wie die beobachteten Phasen der zweiten Ungleichheit auch in den Einzelnheiten ihre Erklärung fanden, obgleich die Annahme der kreisförmigen Bahnen, wie der gleichförmigen Bewegungen beibehalten wurde. — Für die Erklärung der ersten Ungleichheit wusste Copernicus indess kein besseres Mittel als die früheren, nämlich excentrische Kreise und Epicykel; sein System leistete daher im Grunde nicht das Geringste mehr als das alte. Dies beanspruchte er selbst auch keineswegs, sondern wollte nur zeigen, dass er die Bewegungen nach seiner Hypothese ohngefähr eben so genau wiedergeben könne, wie man es vorher gethan hatte. Die Sache ist nämlich die: während die zweite Ungleichheit durch die epicyklische Theorie vollständig erklärt werden kann, verhält es sich nicht in gleicher Weise mit der ersten. Um diese zu erklären, wird man gezwungen, die Anzahl der Epicykel desto mehr zu vergrössern, je genauer die Beobachtungen von der Bewegung Rechenschaft geben können.

Einen directen Fortschritt der Astronomie führte das copernicanische Weltsystem also nicht herbei, denn ein solcher zeichnet sich stets dadurch aus, dass eine genauere Rechenschaft als zuvor von den Thatsachen gegeben wird; in indirecter Beziehung öffnete seine Annahme jedoch, wie wir bald sehen werden, der astronomischen Forschung ein fast unübersehbares Feld, und von allen Errungenschaften der menschlichen Cultur giebt es wohl keine, die in ihren Folgen von einer so gewaltigen und nachhaltigen Einwirkung auf die ganze Denkungsart der Menschen gewesen ist, wie die vom Domherrn zu Frauenburg ausgesprochene Wahrheit: die Erde ist nicht der Mittelpunkt des Weltalls.

Um nicht missverstanden zu werden, betonen wir nochmals die Worte »in ihren Folgen«; denn die Folge der copernicanischen Annahme war die Reformation der Sternkunde, die in formeller Hinsicht von Kepler durchgeführt wurde, welche aber erst durch die grosse Entdeckung Newton's, aus der die wahre Ursache der Planetenbewegungen und der Connex zwischen Kraft und Materie erkannt wurde, zum Abschluss gelangte. — Copernicus selbst nahm die Sonne als im Mittelpunkt der Welt ruhend an: um diese kreisen die Planeten, und das Ganze wird umgeben von der Sphäre der Fixsterne. Dies ist allerdings noch sehr verschieden von unserer heutigen Auffassung, nach welcher nirgends Ruhe, nirgends eine Grenze erkannt werden kann, nach welcher wir also auch nie von einem Mittelpunkte der Welt oder von einem Himmel als Wohnplatz der Engel und eines nach unseren menschlichen Vorstellungen gestalteten Gottes sprechen dürfen. Unsere Weltauffassung ist also nicht die copernicanische, allein sie ist eine Folge der Erkenntniss dieser Wahrheit: die Erde bewegt sich. Die Kirche hat auch die Tragweite der copernicanischen Annahme nie verkannt; sie hat sehr wohl eingesehen, dass die Bewegung der Erde etwas ganz Anderes bedeute als nur einfach einen Widerspruch gegen eine Bibelstelle, die übrigens wohl ziemlich unschuldiger Natur ist; dass vielmehr die Aussichten, welche sich den Bewohnern der bewegten Erde enthüllten, zu viel von Dingen, die den Sterblichen verborgen bleiben sollten, ans Licht bringen mussten. — Die katholische Kirche protestirt gegen das copernicanische Weltsystem, die protestantischen schweigen darüber; die unerbittlichen Consequenzen desselben schrecken eben Diejenigen zurück, welche nicht den Muth haben, der Wahrheit ins Gesicht zu sehen, wie sie rücksichtslos die Macht der Vorurtheile bekämpft und den traditionellen, in priesterliches Gewand gehüllten Dogmen-Glauben besiegt.

Copernicus wurde im Jahre 1473 in der damals zum Königreich Polen gehörenden Stadt Thorn geboren. Nachdem er in Krakau die ersten Studien gemacht hatte, unternahm er die Reise nach Italien und studirte dort in Bologna, Padua, Pavia und Rom. Nach Hause zurückgekehrt, soll er sich Anfangs um eine Lehrerstelle an der Jagellonischen Universität zu Krakau beworben haben, wurde aber von seinem Oheim, dem Ermländer Bischof Watzelrode, nach der Provinz Preussen zurückberufen, wo er als Domherr zu Frauenburg sich seiner Wissenschaft in fast ungestörter Ruhe widmen konnte. Er starb daselbst im Jahre 1543.

In dem copernicanischen Weltsystem haben die Umlaufszeiten natürlich eine andere Bedeutung als im ptolemäischen. Aus den ptolemäischen Angaben lassen sich jedoch die Geschwindigkeiten um die Sonne leicht herleiten. Für die unteren Planeten sind die täglichen Bewegungen um die Sonne gleich den Summen der täglichen Bewegungen im Epicykel und der Bewegung der Sonne. Bei den oberen Planeten dagegen sind die Umlaufszeiten sowohl in Bezug auf die Sonne wie auf die Erde dieselben. Auf diese Weise sind die Umlaufszeiten um die Sonne abgeleitet worden, welche wir oben (pag. 86) mittheilten.

Um die scheinbare Bewegung durch Rechnung angeben zu können, war es im ptolemäischen Systeme nöthig, die Verhältnisse zwischen den Halbmessern der Epicykel und Deferenten zu kennen; im copernicanischen Systeme hingegen braucht man die Verhältnisse der Halbmesser der Planetenbahnen zum Halbmesser der Erdbahn. Diese Verhältnisse lassen sich jedoch unmittelbar aus den vorhergehenden finden. Bezeichnet man nämlich den Halbmesser einer Planetenbahn mit a', und denkt sich dabei den Halbmesser der Erdbahn als Einheit, so ist:

a) für die unteren Planeten Merkur und Venus

$$a' = \frac{f}{d}$$

b) für die oberen Planeten Mars, Jupiter und Saturn

$$a' = \frac{d}{f}\ .$$

Mit den bereits angeführten Werthen des Verhältnisses $\frac{f}{d}$ findet man also folgende Werthe für die Halbmesser der verschiedenen Planetenbahnen:

	a'
Merkur	0.3838
Venus	0.7196
Mars	1.5200
Jupiter	5.2165
Saturn	9.2336

Vom astronomischen Gesichtspunkte aus betrachtet liegt das Charakteristische des copernicanischen Systems darin, dass die Planeten um die Sonne laufen und nicht um die Erde; ob die Sonne oder die Erde in Bewegung ist, bleibt vorläufig von weniger Bedeutung, da die Erklärung der scheinbaren Bewegungen genau gleich gut gelingt, welche Annahme man auch gelten lassen will. Aus diesem Grunde konnte Tyge Brahe auch ein eigenes System aufstellen, in welchem die Erde ihren alten Ehrenplatz wieder erhielt, die Planeten aber um die Sonne kreisten. Es war eben eine gewisse Zeit nöthig, bevor die physikalischen Begriffe so geklärt wurden, dass die Einsprüche, welche gegen die copernikanische Lehre sich erhoben, mit Erfolg widerlegt werden konnten. Indess scheint Tyge mit seinem System wenig durchgedrungen zu sein; schon sein Schüler, Longomontanus, änderte es insofern ab, als er die tägliche Bewegung des Himmels durch die Axendrehung der Erde erklärte.

War nun Tyge Brahe weniger glücklich bei der Bekämpfung des copernicanischen Systems, so sollte er dafür in andrer Beziehung der Astronomie die grössten Dienste leisten. Mit Recht kann man ihn nämlich als den Vater der heutigen Beobachtungskunst ansehen; der Sinn für Genauigkeit in den Beobachtungen ist durch ihn erst erweckt worden.

Geboren wurde Tyge Brahe 1546 zu Knutstorp, einem Gute in der damals zu Dänemark gehörenden Provinz Schoonen. Wie er, veranlasst durch das plötzliche Aufleuchten eines neuen Sterns in der Cassiopeja, den Entschluss fasste, ein Sternverzeichniss herzustellen, ist eine sehr bekannte Begebenheit. Die Ausführung dieses Entschlusses veranlasste Arbeiten, welche als Grundlagen für die Reformation der Astronomie von so äusserst durchgreifender Bedeutung wurden. — Schon früh stand er in solchem Ansehen, dass dies den König von Dänemark bewog, ihm die Insel Hveen im Oeresund, ohnweit der jetzigen Stadt Landskrona, zu schenken, um daselbst eine Sternwarte zu gründen. Hier erhob sich nun die berühmte »Uranienborg«, wo Tyge Brahe während 21 Jahren als Vorsteher wirkte, und auf der er durch zahlreiche und mit grösster Sorgfalt angestellte Beobachtungen das Material zu den späteren Untersuchungen Kepler's sammelte.

Die Beobachtungskunst wurde in Tyge Brahe's Händen ganz wesentlich vervollkommnet; er erdachte neue Beobachtungsmethoden und erfand neue Instrumente. Zwar hatte man schon früher sog. Quadranten und Sextanten zu Winkelmessungen benutzt, d. h. statt ganzer Kreise nur Theile derselben. Solche Theile konnten in viel grösseren Dimensionen verfertigt werden und erlaubten daher eine genauere Ablesung der Winkel an dem eingetheilten Bogen. An einem solchen, im Meridiane aufgestellten und an einer Mauer befestigten grossen Quadranten, einem sog. Mauerquadranten, bestimmte Tyge Brahe die Meridianhöhen der Gestirne, also auch ihre

Declinationen. Um die Rectascensionsunterschiede zu finden, schlug er den folgenden Weg ein. Statt diese Unterschiede selbst auf irgend eine Weise zu bestimmen, maass er den Bogen des grössten Kreises, welcher durch zwei Gestirne gelegt wurde. In dem sphärischen Dreiecke, welches durch diese Gestirne und den Weltpol gebildet wird, waren nun drei Seiten bekannt, nämlich die Polabstände der beiden Gestirne und drittens ihr gegenseitiger Winkelabstand. Durch Rechnung konnte hierauf der Winkel am Pole gefunden werden, d. h. der von den Declinationskreisen der beiden Gestirne eingeschlossene Winkel, welcher eben den gesuchten Rectascensionsunterschied ausmacht. Zur Messung solcher Abstände zwischen Gestirnen musste ein Instrument angewendet werden, mit dem man Winkel in jede beliebige Ebene einstellen kann. Tyge Brahe benutzte hierzu einen grossen Sextanten, der in verschiedenen Ebenen zu Messungen angewendet werden konnte. — Eine besondere Aufmerksamkeit wendete er auf die Bestimmung der absoluten Rectascension eines Sterns. Dazu wurde der hellste Stern im Widder ausgewählt und wiederholt mit der Sonne verglichen.

Tyge Brahe hatte allerdings schon die Absicht, eine Uhr bei den Rectascensionsbestimmungen zu benutzen, und dazu einen besonderen Apparat construirt, dessen Mechanismus darin bestand, dass Quecksilber aus einem Gefässe in ein anderes herunterfloss; das Fortschreiten der Zeit sollte nun nach der Zunahme des Gewichts beurtheilt werden. Da es ihm jedoch nicht gelang, auf diesem Wege das vorgesetzte Ziel zu erreichen, so wandte er sich vom »Merkur« ab und der Venus zu, d. h. er benutzte die Venus statt des Mondes bei der Vergleichung der Sonne mit den Sternen, und gab somit die Versuche mit dem Quecksilber (Mercurius) auf.

Die Frucht dieser Bemühungen war nun zunächst ein Sternverzeichniss oder Sterncatalog; so nennt man nämlich ein Verzeichniss von einer mehr oder weniger grossen Anzahl Sterne, deren Rectascensionen und Declinationen oder auch Längen und Breiten darin angegeben sind. Aus früheren Zeiten besass man schon einige derartige Cataloge. Der älteste uns bekannte rührt von Hipparch her und ist im Amalgest aufbewahrt worden. Später (in der Mitte des 15. Jahrhunderts) beobachtete ein tartarischer Fürst, Ulugh Beigh, auf einer für die damalige Zeit sehr grossartig angelegten Sternwarte zu Samarcand, und lieferte Sternörter, die uns aufbewahrt worden sind. Einige andere, weniger bedeutende Catalogarbeiten können hier bei Seite gelassen werden. — Die älteren Cataloge wurden von der Uranienburger Arbeit, was die Genauigkeit betrifft, weit überholt: während man früher keineswegs auf 10 Minuten sicher war, ist bei den von Tyge Brahe angegebenen Sternörtern selten mehr als die einzelne Minute unsicher.

In jenen Zeiten hatten die Beobachtungen der Fixsterne an und für sich kein weiteres Interesse, als zur Kenntniss der Präcession zu führen; mittelbar waren sie jedoch von grosser Wichtigkeit, um die Planetenörter bestimmen zu können. Je genauer die Oerter der Fixsterne am Himmel ermittelt waren, desto sicherer konnten auch die scheinbaren Bewegungen der Planeten verfolgt werden. Auf der genauen Kenntniss dieser Bewegungen beruhte aber damals die Reformation der Astronomie.

Nach 21jähriger Thätigkeit auf Uranienborg sah sich Tyge Brahe veranlasst, Dänemark zu verlassen und nach Prag überzusiedeln, wo er von Kaiser Rudolf II. höchst ehrenvoll empfangen und ihm die Mittel gewährt wurden, seine astronomische Thätigkeit in erwünschter Weise fortzusetzen. Sein Aufenthalt in Prag dauerte jedoch nur kurze Zeit; nach einem zweijährigen Aufenthalte starb er daselbst den 24. October 1601.

Die Uebersiedelung nach Prag war in ihren Folgen für die Astronomie von grösster Bedeutung: der reiche wissenschaftliche Nachlass des grossen Beobachters kam hier in die Hände eines würdigen Erben, der die wichtige Erbschaft, die über zwei Jahrzehnte ausgedehnte Beobachtungsreihe der Planeten, in der glänzendsten Weise zu verwerthen wusste.

Wir wollen hier keineswegs die Schicksale Kepler's wiederholen, sie sind allgemein bekannt und in vielen verdienstvollen Schriften beschrieben. Kepler wurde in Magstadt bei Weil in Württemberg 1571 geboren;*) kaum 30 Jahre alt, hatte er schon einen solchen Ruhm erworben, dass Tyge Brahe ihn zu sich nach Prag berief (1600), um hier mit an der Verarbeitung seines Beobachtungsmaterials thätig zu

---

*) Nach einem Leben voller Drangsale starb er (in Regensburg) am 15. November 1630.

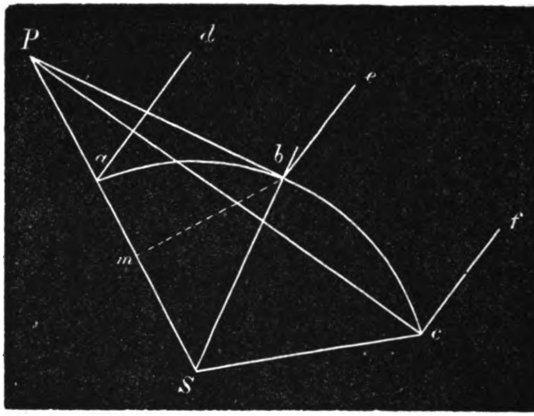
sein. Nach dem kurz danach eingetretenen Tode Tyge's übernahm er das Directorat der Prager Sternwarte, in welcher Stellung es ihm oblag, neue Planetentafeln auf Grund der nachgelassenen Beobachtungen zu berechnen. Diese Arbeit führte ihn zu Entdeckungen, welche zu den wichtigsten aller Zeiten gehören. Seine Hülfsmittel hierbei waren, ausser der Annahme der copernicanischen Lehre von der Erdbewegung und den Beobachtungen des Tyge Brahe, die Methode der Forschung, welche zu erfinden und mit eiserner Ausdauer anzuwenden ihm zu grösster Ehre angerechnet werden muss. Es war dies die inductive Methode, welche vor ihm nie in solcher Folgerichtigkeit und solcher Ausdehnung angewendet worden, die aber auch nie zuvor von solchem Erfolge gekrönt gewesen war. Wir müssen nun zunächst, ohne jedoch dem Gange seiner Untersuchungen streng zu folgen, darzustellen suchen, wie er, jede frühere Hypothese über die Form der Bahnen und die Gleichförmigkeit der Bewegung bei Seite lassend, die Figur der Bahnen aus den beobachteten Oertern der Planeten zu bestimmen suchte, wobei nur die einzige Annahme gestattet wurde, dass die Planeten sowohl wie die Erde nach jedem siderischen Umlauf wieder an denselben Punkt im Raume zurückkehrten.

Um die Entfernung eines Gegenstandes zu bestimmen, den man nicht mit dem Maasstabe erreichen kann, misst man den Winkel, unter dem eine bekannte Länge von ihm gesehen wird. Oft ist bei astronomischen Messungen der Halbmesser der Erde diese Länge, und wir nennen, wie im Vorhergehenden bereits erwähnt worden ist, den fraglichen Winkel die Parallaxe des entfernten Gegenstandes. Wenn wir z. B. sagen, dass die Parallaxe des Mondes 58′ beträgt, so meinen wir damit, dass der Halbmesser der Erdkugel von dem Monde unter diesem Winkel erscheint. Dieser Maasstab wird aber zu klein, wenn es sich um die Planeten handelt; denn von diesen erscheint der Erdkörper unter so kleinen Winkeln, dass sie im besten Falle von Venus und Mars, welche Planeten der Erde am nächsten kommen, nur $\frac{1}{2}$ Minute erreichen, ein Winkel, der nicht einmal aus Tyge Brahe's Beobachtungen mit Sicherheit zu erkennen war. Man hatte mithin, so lange die Beobachtungskunst nicht eine höhere Vervollkommnung erreichte, wenig Aussicht, die Abstände der Planeten durch directe Messung ihrer Parallaxen bestimmen zu können, und wenn auch solche Versuche in älteren Zeiten angestellt worden wären, so hätten sie doch nicht zu irgend einem sicheren Resultate führen können.

Wenn aber die copernicanische Lehre richtig war, so besass man, da die Erde selbst nach und nach verschiedene Punkte im Raume einnimmt, ein Mittel, sich eine grössere Grundlinie zu verschaffen: man brauchte nur die Richtungen des Körpers, dessen Parallaxe bestimmt werden sollte, von zwei verschiedenen Punkten der Erdbahn aus zu beobachten. Zweierlei Schwierigkeiten mussten indessen noch besiegt werden, bevor man zu dem gewünschten Ziele der Kenntniss der Entfernung gelangen konnte. Von Kepler, der dadurch eine viel richtigere Vorstellung als seine Vorgänger von der Form der Planetenbahnen gewann, wurden sie überwunden.

Die erste zu beseitigende Schwierigkeit hatte ihren Grund darin, dass nicht der Planet allein, sondern auch die Erde in Bewegung ist, dass man mithin nicht unmittelbar die scheinbare, von der Bewegung der Erde herrührende, Ortsveränderung des Planeten von seiner wirklichen unterscheiden konnte. War aber die Annahme richtig, dass die Bahnen der Planeten geschlossene Curven seien, d. h. dass sie nach einem siderischen Umlauf um die Sonne zu demselben Punkt im Raume zurückkämen, so lag die Möglichkeit nicht fern, diese Schwierigkeit zu umgehen. Wählte man nämlich zwei Beobachtungen eines Planeten aus, die nach einander, mit einer Zwischenzeit von gerade einem siderischen Umlaufe angestellt waren, so waren die Richtungen nach demselben Punkte von zwei verschiedenen Punkten im Raume factisch bestimmt worden. Die Erde hatte nämlich während dessen eine gewisse Anzahl ganzer Umläufe vollendet und überdies ein mehr oder weniger grosses Stück ihrer Bahn zurückgelegt; von den Endpunkten dieses Bahnstücks hatte man also die Richtungen des Planeten bestimmt. Die Kenntniss dieser beiden Richtungen genügt, um vermittelst Rechnung das Verhältniss zwischen den Entfernungen des Planeten von der Sonne und von der Erde zu bestimmen. — Der Zusammenhang zwischen diesen Richtungen einerseits und dem erwähnten Verhältniss anderseits ist mit Hülfe der Fig. 16 sehr leicht zu finden. In derselben wird der Planet im Punkte P und die Sonne im Punkte S gedacht; aus Gründen, die sogleich erhellen werden, ziehen wir drei von der Erde aus bestimmte Richtungen in Betrachtung, obgleich eigentlich nur zwei nöthig wären. Wir nehmen

Fig. 16.



ferner an, dass die Erde zu den drei Zeitpunkten sich resp. in a, b und c befand. Um die Darstellung zu vereinfachen, haben wir angenommen, dass die erste Beobachtung zur Zeit einer Opposition stattfand, demzufolge sich die Erde auf der Verbindungslinie SP befand. Ausserdem setzen wir voraus, dass die Bewegungen des Planeten und der Erde in derselben Ebene vor sich gehen; eine Voraussetzung, die zwar nicht ganz richtig ist, die aber zu keinen bedeutendern Fehlern Veranlassung geben kann, da die Breiten des Planeten immer sehr klein sind. Die parallelen geraden Linien ad, be und cf zeigen die Richtung des Frühlingspunktes an, von den verschiedenen Oertern der Erde aus gesehen. Bezeichnen wir nun die drei, von a, b und c bestimmten Längen des Punktes P mit den Buchstaben λ, λ' und λ'', so dass $\lambda = Pad$, $\lambda' = Pbe$ und $\lambda'' = Pcf$; ferner die drei Längen der Sonne mit $\odot$, $\odot'$ und $\odot''$, so hat man $\odot = 180^\circ + Pad = 180^\circ + \lambda = 360^\circ - Sad$, $\odot' = 360^\circ - Sbe$ und $\odot'' = Scf$.

Wir bestimmen jetzt in erster Linie das Verhältniss der Entfernungen PS und Sb, wobei wir bezeichnen $PS = r : Sb = R'$. Dieses Verhältniss findet sich unmittelbar mit Hülfe eines sehr bekannten trigonometrischen Satzes, dessen wir uns im Vorhergehenden schon einmal bedient haben, nämlich, *dass in jedem Dreieck die Seiten sich zu einander verhalten, wie die Sinusse der gegenüberliegenden Winkel.*

Der Beweis dieses Satzes ist äusserst einfach, so dass wir ihn hier einschalten können, um so mehr, da wir dabei die Figur 16 benutzen können. Ziehen wir nämlich vom Punkte b die Gerade bm senkrecht auf PS, so ist augenscheinlich, dass die Länge bm in zweierlei Weise angegeben werden kann, nämlich

$$bm = Pb \operatorname{Sin} SPb$$

und

$$bm = Sb \operatorname{Sin} PSb;$$

da nun aber diese beiden Werthe nothwendig einander gleich sein müssen, so hat man

$$Pb \operatorname{Sin} SPb = Sb \operatorname{Sin} PSb$$

oder

$$Pb : Sb = \operatorname{Sin} PSb : \operatorname{Sin} SPb$$

w. z. b. w.

Nach diesem Satze hat man nun auch

$$\frac{PS}{Sb} = \frac{r}{R'} = \frac{\operatorname{Sin} PbS}{\operatorname{Sin} SPb}$$

Offenbar ist aber auch

$$\text{der Winkel } PbS = 360^\circ - Sbe - Pbe$$

d. i.

$$PbS = \odot' - \lambda'$$

und weil die Summe der drei Winkel in einem Dreiecke stets gleich zwei rechten oder gleich 180° ist, so hat man

$$\text{den Winkel } SPb = 180^\circ - PbS - PSb\,.$$

Nun ist aber offenbar

$$PSb = Sbe - Sad$$

d. i.

$$PSb = \odot - \odot'$$

Mit diesen Werthen findet man

$$SPb = 180^\circ + \lambda' - \odot$$

und gelangt endlich zu der Formel

$$\frac{r}{R'} = \frac{\operatorname{Sin}(\odot' - \lambda')}{\operatorname{Sin}(180^\circ + \lambda' - \odot)} = \frac{\operatorname{Sin}(\odot' - \lambda')}{\operatorname{Sin}(\odot - \lambda')}$$

Indem ferner Sc mit R'' bezeichnet wird, findet man, genau wie vorhin,

$$\frac{r}{R''} = \frac{\operatorname{Sin}(\odot'' - \lambda'')}{\operatorname{Sin}(180^\circ + \lambda'' - \odot)} = \frac{\operatorname{Sin}(\odot'' - \lambda'')}{\operatorname{Sin}(\odot - \lambda'')}$$

In derselben Weise, wie soeben auseinandergesetzt wurde, könnte man nun beliebig viele Verhältnisse zwischen Planetenabständen und Erdabständen berechnen. Damit ist unser Ziel jedoch noch nicht erreicht, denn wir wollen die verschiedenen Planetenabstände unter einander vergleichen oder sie alle in demselben Maasse ausdrücken. Hierin liegt die zweite Schwierigkeit. — Im Vorhergehenden ist jedoch schon ein Mittel angedeutet worden, um dieselbe zu überwinden. Dividirt man nämlich die Ausdrücke für $\frac{r}{R'}$ und $\frac{r}{R''}$ mit einander, so ergiebt sich

$$\frac{R''}{R'} = \frac{\operatorname{Sin}(\odot - \lambda'')}{\operatorname{Sin}(\odot - \lambda')} \cdot \frac{\operatorname{Sin}(\odot' - \lambda')}{\operatorname{Sin}(\odot'' - \lambda'')} .$$

Durch diese Formel kann man nun zur Kenntniss des Verhältnisses $\frac{R''}{R'}$ kommen, und ebenso lassen sich auch, wenn der Planet während mehrerer Umläufe beobachtet worden ist, eine ganze Reihe solcher Verhältnisse ermitteln. Gesetzt aber nun, man kenne eine genügende Anzahl Werthe von $\frac{R''}{R'}$, $\frac{R'''}{R'}$, u. s. w., so sagt dies nichts Andres, als dass man die Längen verschiedener Abstände der Erde von der Sonne kennt, ausgedrückt in einem einzigen R'. Da nun die zu jedem R gehörige Länge der Sonne auch bekannt ist, so hat es gar keine Schwierigkeit, sich eine vollkommen klare Vorstellung der Sonnenbahn zu bilden, da dieselbe ja leicht auf einem Papier aufgezeichnet werden kann. Man wird also auch das allgemeine Gesetz ermitteln können, wonach die Entfernung zwischen Erde und Sonne, den verschiedenen Längen der Sonne entsprechend, verschiedene Werthe erhält; folglich wird man auch die wahre Entfernung einer beliebigen Zeit entsprechend ermitteln können, die aber stets in Einheiten einer einzigen, jedoch willkürlich gewählten Entfernung ausgedrückt sein wird. Gewöhnlich nimmt man als Einheit die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde, d. h. das arithmetische Mittel aller möglichen Entfernungen.

In dieser Einheit sollen nun auch die Entfernungen der Planeten von der Sonne ausgedrückt werden, denn wenn R', R'', u. s. w. auf dieselbe reducirt werden können, so kann es auch mit den Verhältnissen $\frac{r}{R'}$ u. s. w. geschehen. — Es ist offenbar, und geht auch aus der Fig. 16 deutlich hervor, dass die von der Erde aus gesehene Länge eines Planeten zur Zeit der Opposition dieselbe ist, als wenn man sie von der Sonne aus beobachten würde. Die Bahn des Planeten wird man also erkennen können, wenn man ihn erstens in möglichst vielen Oppositionen beobachtet, dann aber auch in Zeitpunkten, die genau um die siderische Umlaufszeit von dem Oppositionsmomente entfernt sind. Auf solche Weise wird man zu den verschiedenen Längen, die als von der Sonne aus beobachtet anzusehen sind, die entsprechenden Entfernungen erhalten, und somit die Bahn um die Sonne leicht entwerfen können.

Es dürfte nicht überflüssig sein, durch ein numerisches Beispiel zu zeigen, wie man vermittelst der oben entwickelten Formeln sowohl die Entfernungen der Erde von der Sonne, oder richtiger ihre Verhältnisse, als auch die Entfernungen der Planeten bestimmen kann. Zu diesem Zwecke legen wir einige Richtungen des Planeten Mars unseren Rechnungen zu Grunde, desselben Planeten, dessen Lauf Kepler zu seinen Entdeckungen führte. Für uns ist es aber keineswegs nöthig, wirklich beobachtete Richtungen anzuwenden, sondern im Gegentheil vortheilhafter, unsere Rechnungen auf schon berechnete Richtungen zu gründen, weil wir alsdann nicht den Einfluss der Beobachtungsfehler, die nicht immer so ganz gering sind, zu befürchten haben. Wir wählen nun die drei nachstehenden Längen des Mars und der Sonne:

1) 1864 Nov. 30.80*) ; $\lambda = 69^\circ\, 22'.3$; $\odot = 249^\circ\, 22'.3$ (Opposition)
2) 1866 Oct. 18.78 ; $\lambda' = 109\;\; 53.6$; $\odot' = 205\;\; 33.1$
3) 1868 Sept. 4.66 ; $\lambda'' = 103\;\; 51.0$; $\odot'' = 162\;\; 46.9$

Weil die Zwischenzeiten hier gerade die siderische Umlaufszeit des Mars betragen, so ist natürlich der Abstand des Planeten von der Sonne zu den drei Zeiten derselbe — von dieser Annahme sind wir wenigstens ausgegangen —; nehmen wir die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne als Einheit an, so ist $r = 1.5247$. In derselben Einheit ausgedrückt, ist $R' = 0.9954$ und $R'' = 1.0076$. Diese Zahlen werden wir aus den obigen Angaben wiederfinden. Zunächst leiten wir das Verhältniss $\frac{R'}{R''}$ ab, wozu die erforderlichen Rechnungen die folgenden sind:

$$\begin{aligned}
\odot'' - \lambda'' &= \;\;58^\circ\, 55'.9 \\
\odot' - \lambda' &= \;\;95\;\; 39.5 \\
\odot\; - \lambda' &= 139\;\; 28.9 \\
\odot\; - \lambda'' &= 145\;\; 31.3
\end{aligned}$$

Aus den trigonometrischen Tafeln erhält man ferner:

*) Man giebt häufig die Theile des Tages in Decimalen statt in Stunden, Minuten und Sekunden an.

$$\begin{aligned} \text{Sin}\,(\odot'' - \lambda'') &= 0.85652 \\ \text{Sin}\,(\odot' - \lambda') &= 0.99510 \\ \text{Sin}\,(\odot - \lambda') &= 0.64968 \\ \text{Sin}\,(\odot - \lambda'') &= 0.56610 \end{aligned}$$

womit endlich gefunden wird:

$$\frac{R''}{R'} = \frac{0.99510}{0.85652} \cdot \frac{0.56610}{0.64968} = 1.0123$$

was bis auf die vierte Decimale mit dem richtigen Werthe übereinstimmt, nämlich mit

$$\frac{R''}{R'} = \frac{1.0076}{0.9954} = 1.0123.$$

Wäre die Rechnung strenger geführt worden, so hätte man allerdings das Resultat nicht verhältnissmässig so übereinstimmend mit dem wahren Werthe gefunden, und zwar aus dem Grunde, weil die angewandte Formel ohne Rücksicht auf die Neigung der Planetenbahn gegen die Sonnenbahn abgeleitet wurde. Diese Neigung ist zwar nicht gross, indessen wird der Einfluss derselben doch merklich, wenn man grössere Genauigkeit anstrebt. Es hätte nun zwar keine Schwierigkeit gehabt, die Formel strenger zu entwickeln, allein dies wäre vollkommen überflüssig; es kam uns nur darauf an, zu zeigen, wie man die Form der Planetenbahnen erkennen kann, wenn Beobachtungen in genügender Anzahl vorhanden sind, keineswegs aber eine derartige Untersuchung, die überdies jetzt nicht mehr in Frage kommt, vollständig durchzuführen. Wir wollten nur zeigen, wie die Induction in diesem Falle ausgeführt werden konnte, und wie sie sich auf die, schon zu Kepler's Zeiten bekannte Thatsache nur zu stützen brauchte, dass die Bahnen der Planeten geschlossene Curven sind.

Berechnen wir nun noch den Werth von r, oder die Werthe, denn wir haben deren zwei, nämlich einen aus jedem der Verhältnisse $\frac{r}{R'}$ und $\frac{r}{R''}$. Den numerischen Angaben zufolge ist

$$r = R' \frac{0.99510}{0.64968}$$

$$r = R'' \frac{0.85652}{0.56610}$$

Nehmen wir an, um die Werthe von R' und R'' in Einheiten der mittleren Entfernung ausdrücken zu können, dass die Sonnenbahn bekannt sei, d. h. nehmen wir an, dass die Werthe $R' = 0.9954$, $R'' = 1.0076$ bereits bekannt seien, und führen wir diese in die obigen Ausdrücke ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} r &= 1.5247 \\ &= 1.5246 \end{aligned}$$

welche sowohl unter sich, wie auch mit dem richtigen Werthe $r = 1.5247$ übereinstimmen.

Das Angeführte dürfte genügen, um zu zeigen, wie es Kepler möglich war, die Form der Bahnen zu erkennen und zu dem ersten Gesetze zu gelangen, welches lautet:

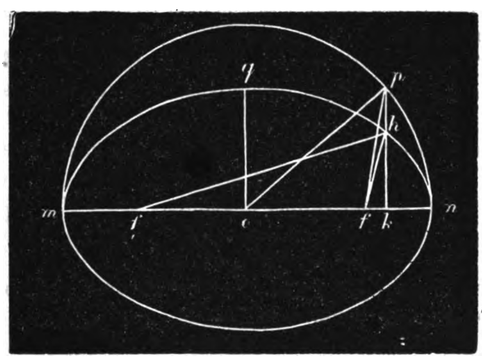
I. Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, deren einer Brennpunkt mit der Sonne zusammenfällt.

Die Untersuchung war jedoch hiermit nicht als abgeschlossen zu betrachten. Die Form der Bahnen war allerdings erkannt, aber es blieb noch das Gesetz zu bestimmen übrig, welches die Geschwindigkeit eines Planeten in verschiedenen Punkten der Bahn angiebt. Um nun die Herleitung dieses Gesetzes zu verfolgen, brauchen wir die Kenntniss einiger Eigenschaften der Ellipse; der Verfasser erlaubt sich daher wieder eine Digression auf dem rein mathematischen Gebiete, nämlich:

Ueber die wichtigsten Eigenschaften der Ellipse, insbesondere solche, die in der Astronomie häufige Anwendung finden.

Auf der Geraden mn, deren Länge mit $2a$ bezeichnet werden mag, nehmen wir zwei Punkte f und f_1 an, in der Weise, dass $f_1 m = fn$; die

Fig. 17.



Curve, welche die Eigenschaft besitzt, dass die Summe der Abstände eines jeden ihrer Punkte von den Punkten f und f_1 denselben Werth hat, nennt man Ellipse. Wenn also m und n Punkte der Ellipse sind, so muss die Gerade mn oder $2a$ gleich der genannten Summe sein. Auf solche Weise ist z. B. die Summe von hf und hf_1 gleich $2a$. Die Punkte f und

f_1 heissen die Brennpunkte der Ellipse, die Gerade mn ihre grosse Axe (a ist also die halbe grosse Axe) und der Punkt o, in der Mitte zwischen m und n oder zwischen f und f_1. wird der Mittelpunkt genannt. — Die Gerade, welche durch den Mittelpunkt senkrecht auf die grosse Axe gezogen und von dem Umkreis der Ellipse begrenzt wird, nennt man die kleine Axe, und endlich versteht man unter dem Namen Excentricität das Verhältniss von of zu on, welches man in der Astronomie gewöhnlich mit dem Buchstaben e bezeichnet. Nach diesen allgemeinen Definitionen gehen wir an die Ableitung derjenigen Eigenschaften der Ellipse, die in der Astronomie unentbehrlich sind. Zunächst suchen wir:

1. Die Gleichung der Ellipse. Um diese auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu beziehen, denken wir uns ein solches durch den Mittelpunkt der Ellipse gelegt, so dass die grosse Axe der Ellipse mit der x-Axe der Coordinaten zusammenfällt, ihre kleine Axe hingegen mit der y-Axe. Für den Punkt h sind demnach die Coordinaten: $ok = x$ und $hk = y$.

Da nun fhk ein rechtwinkliges Dreieck, so ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze das Quadrat auf der Seite fh gleich der Summe der Quadrate auf den Seiten fk und hk. Bevor wir diese Gleichheit algebraisch ausdrücken, erinnern wir uns, dass $fk = ok - of = x - ae$ (weil $\frac{of}{on} = e$); ausserdem bezeichnen wir die Seite fh mit dem Buchstaben r. Unsere Gleichung wird jetzt:

$$r^2 = (x - ae)^2 + y^2 = x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 \tag{1}$$

In derselben Weise findet man aus dem Dreiecke khf_1, indem f_1h mit r' bezeichnet wird,

$$r'^2 = (x + ae)^2 + y^2 = x^2 + 2aex + a^2e^2 + y^2. \tag{2}$$

Zieht man die erste dieser Gleichungen von der zweiten ab, so bleibt

$$r'^2 - r^2 = 4aex \tag{3}$$

Nun ist aber, wovon man sich augenblicklich überzeugen kann,

$$r'^2 - r^2 = (r' + r)(r' - r)$$

und, weil der Punkt h einer Ellipse angehört,

$$r' + r = 2a \tag{4}$$

woraus folgt $r'^2 - r^2 = 2a(r' - r)$

Vergleicht man diesen Werth von $r'^2 - r^2$ mit dem, welchen die Gleichung (3) giebt, so findet man, dass

$$4aex = 2a(r' - r)$$

oder

$$r' - r = 2ex \tag{5}$$

Die Summe der Gleichungen (4) und (5) giebt uns:

$$r' = a + ex \tag{6}$$

und ihre Differenz:

$$r = a - ex \tag{7}$$

Erhebt man hierauf den zuletzt gefundenen Ausdruck ins Quadrat, wodurch erhalten wird

$$r^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2 ,$$

so hat man einen neuen Werth von r^2 erhalten, welcher dem in der Gleichung (1) gegebenen gleich sein muss. Die Gleichsetzung dieser beiden Werthe führt uns nun unmittelbar zu der Gleichung der Ellipse; wir erhalten

$$x^2 - 2\,aex + a^2 e^2 + y^2 = a^2 - 2\,a\,ex + e^2\,x$$

oder

$$a^2 (1 - e^2) = x^2 (1 - e^2) + y^2 \tag{8}$$

Diese Relation zwischen x und y findet nun für jeden Punkt der Ellipse statt, dessen Mittelpunkt mit dem Anfangspunkt der Coordinaten zusammenfällt und folglich repräsentirt die Gleichung (8) eine Ellipse. Gewöhnlich giebt man derselben jedoch eine etwas andere Form. Die Grösse $a^2 (1 - e^2)$ ist nämlich ein Ausdruck für das Quadrat über oq, oder über die halbe kleine Axe. Denn denkt man sich gerade Linien von q nach f und f_1 gezogen, so sind sie einander offenbar gleich, und da ihre Summe gleich $2\,a$ sein muss, so ist jede einzelne derselben gleich a. Der pythagoräische Lehrsatz giebt uns demnach

$$a^2 = a^2\,e^2 + \overline{o\,q}^2,$$

oder, wenn $\overline{o\,q}$ mit b bezeichnet wird,

$$b^2 = a^2 (1 - e^2).$$

Wird nun die Gleichung (8) mit a^2 multiplicirt, so hat man, nachdem der zuletzt gefundene Werth von $a^2 (1 - e^2)$ eingeführt worden ist,

$$a^2 b^2 = b^2 x^2 + a^2 y^2$$

oder

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Löst man diese Gleichung in Bezug auf y auf, so findet sich

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \tag{9}$$

wo das doppelte Zeichen $\pm$ andeutet, dass zu jedem Werthe von x zwei Werthe von y gehören sollen, wie es auch in der That der Fall ist, denn die Ellipse liegt ja auf beiden Seiten der x-Axe. Ebenso gehören zu jedem Werthe von y zwei Werthe von x.

2. Polarcoordinaten. Man kann die Lage eines Punktes auch in anderer Weise angeben, als durch seine rechtwinkligen Coordinaten, d. i. durch seine Abstände von zwei gegeneinander senkrechten geraden Linien, z. B. durch sog. Polarcoordinaten. Als wir sagten, die Form der Planetenbahn könne ermittelt werden, sobald die Abstände von der Sonne nebst den zugehörenden Längen bekannt wären, so haben wir in der That die Anwendung der Polarcoordinaten vorausgesetzt, und man wird hieraus schon entnehmen können, worin sie bestehen. Es muss Zweierlei angegeben werden: der Abstand des in Frage stehenden Punktes von dem

Anfangspunkt der Coordinaten, sowie der Winkel, welchen dieser Abstand, den man Radiusvector nennt, mit einer gewissen Grundrichtung bildet. Die Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen dem Radiusvector und dem erwähnten Winkel angiebt, oder mit andern Worten, welche für jeden beliebigen Werth dieses Winkels den entsprechenden Werth des Radiusvector giebt, repräsentirt daher auch eine Curve und wird die Polargleichung derselben genannt. Der Anfangspunkt der Coordinaten heisst gewöhnlich Pol.

Wird der eine Brennpunkt der Ellipse (Fig. 17) als Pol angenommen, und deren grosse Axe als Grundrichtung, so ist $fh = r$ der Radiusvector des Punktes h, und der Winkel nfh der entsprechende Polarwinkel, welcher in der Richtung von n durch q nach m und davon weiter nach n gezählt wird. Dieser Winkel wird in der Astronomie die wahre Anomalie genannt; wir werden ihn mit dem Buchstaben f bezeichnen.

Die Polargleichung der Ellipse erhalten wir unmittelbar aus der Gleichung (7). — Erinnern wir uns, dass $x = of + fk$; $of = ae$; $fk = r \operatorname{Cos} f$, folglich auch

$$ex = ae^2 + er \operatorname{Cos} f,$$

so erhalten wir aus der Gleichung (7)

$$r = a - ae^2 - er \operatorname{Cos} f$$

oder

$$r(1 + e \operatorname{Cos} f) = a(1 - e^2),$$

woraus endlich hervorgeht

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \operatorname{Cos} f}, \tag{10}$$

welches die Polargleichung der Ellipse ist in der Form, wie sie meistens in der Astronomie zur Anwendung kommt.

Noch einfacher kann man den Radiusvector in der Ellipse durch einen andern Winkel ausdrücken. Wird nämlich kh bis p ausgezogen, d. h. bis zu der Peripherie eines um o als Mittelpunkt mit dem Radius a beschriebenen Kreises; verbindet man hierauf o mit p durch eine Gerade und bezeichnet den Winkel pon mit ε, so ist

$$r = a(1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon). \tag{11}$$

Aus der Figur sieht man nämlich sofort, dass

$$x = a \operatorname{Cos} \varepsilon;$$

wird dieser Werth in die Gleichung (7) eingesetzt, so geht die obige Relation augenblicklich hervor.

Setzt man die beiden Werthe, die für x gefunden wurden, einander gleich, so erhält man noch die Relation

$$a \operatorname{Cos} \varepsilon = r \operatorname{Cos} f + ae. \tag{12}$$

3. Das Verhältniss zwischen den Ordinaten in der Ellipse und in dem umschriebenen Kreise.

Die Gleichung eines um die Ellipse beschriebenen Kreises vom Radius a ist

$$a^2 = x_1^2 + y_1^2$$

wo wir x_1 und y_1 geschrieben haben, um die Coordinaten des Kreises von denen der Ellipse zu unterscheiden. Hieraus findet sich

$$y_1 = \sqrt{a^2 - x_1^2}.$$

In der Ellipse hatten wir

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2};$$

setzt man nun $x_1 = x$, so wird $\sqrt{a^2 - x_1^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$, woraus ferner folgt

$$\text{(13)} \qquad \frac{y}{y_1} = \frac{b}{a}$$

Das Verhältniss der Ordinaten in der Ellipse zu den Ordinaten im umschriebenen Kreise ist demnach unveränderlich, d. h. hatten für jeden x-Werth denselben Betrag, wohlverstanden unter der Voraussetzung, dass beide y-Coordinaten zu derselben x-Coordinate gehören.

Mit Hülfe dieses Satzes kann man leicht die y-Coordinate in der Ellipse durch die excentrische Anomalie ausdrücken. Man hat zunächst

$$y_1 = kp = a \operatorname{Sin} \varepsilon$$

folglich auch

$$y = a \frac{b}{a} \operatorname{Sin} \varepsilon;$$

da aber

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$

so ist

$$y = a \sqrt{1 - e^2} \operatorname{Sin} \varepsilon.$$

Anderseits ist offenbar

$$y = r \operatorname{Sin} f.$$

Die beiden Werthe von y müssen aber gleich sein, folglich ist

$$\text{(14)} \qquad a \sqrt{1 - e^2} \operatorname{Sin} \varepsilon = r \operatorname{Sin} f,$$

welche zusammen mit der Gleichung (12) sowohl die Polargleichung der Ellipse, wie auch eine Relation zwischen f und ε enthalten. Diese Relation findet eine sehr häufige Anwendung in der Astronomie, weshalb wir sie ableiten wollen, und zwar unter einer Form, in der r nicht mehr vorkommt. Zu diesem Zwecke addiren wir die Gleichung (12) oder

$$r \operatorname{Cos} f = a \operatorname{Cos} \varepsilon - ae$$

zu der Gleichung (11) und erhalten somit

$$r (1 + \operatorname{Cos} f) = a (1 + e) (1 + \operatorname{Cos} \varepsilon).$$

Durch Subtraction derselben Gleichungen findet man

$$r (1 - \operatorname{Cos} f) = a (1 + e) (1 - \operatorname{Cos} \varepsilon).$$

Nun ist aber (vgl. Seite 91)

$$\operatorname{Cos} f = 1 - 2 \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} f^2 = 2 \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} f^2 - 1$$
$$\operatorname{Cos} \varepsilon = 1 - 2 \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 = 2 \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 - 1$$

folglich auch

$$1 - \text{Cos}\, f = 2\ \text{Sin}\ \tfrac{1}{2} f;\quad 1 - \text{Cos}\ \varepsilon = 2\ \text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varepsilon^2$$

$$1 + \text{Cos}\, f = 2\ \text{Cos}\ \tfrac{1}{2} f;\quad 1 + \text{Cos}\ \varepsilon = 2\ \text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varepsilon^2$$

Diese Werthe indie obigen Relationen eingesetzt geben

$$2r\ \text{Cos}\ \tfrac{1}{2} f^2 = 2a\,(1 - e)\ \text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varepsilon^2$$

$$2r\ \text{Sin}\ \tfrac{1}{2} f^2 = 2a\,(1 + e)\ \text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varepsilon^2$$

Wird nun die letzte dieser Gleichungen durch die erste dividirt, so entsteht

$$\text{Tang}\ \tfrac{1}{2} f^2 = \frac{1+e}{1-e}\ \text{Tang}\ \tfrac{1}{2}\ \varepsilon^2$$

oder

$$\text{Tang}\ \tfrac{1}{2} f = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ \text{Tang}\ \tfrac{1}{2}\ \varepsilon$$

4. Berechnung des Flächeninhalts der Ellipse.

Wir sahen vorhin, dass die Ordinate in der Ellipse sich zu der bis zur Peripherie des umschriebenen Kreises verlängerten Ordinate verhält wie b zu a. Dieser Satz bleibt noch gültig, wenn die Ordinaten nicht mehr als Linien, also als blosse Längen ohne die geringste Breite angesehen werden, sondern sehr schmale Vierecke darstellen. Um dies klar zu machen, denken wir uns ab (Fig. 18) als ein Bogenstück einer beliebigen Curve; ma sei die y-Coordinate des Punktes a, nb die des Punktes b: es ist nun klar, dass die Figur $amnb$ kleiner ist als das Rechteck $am \times mn$, aber grösser als $bn \times mn$. In dem Maasse aber, wie die Linie mn kleiner wird, fallen diese Rechtecke mehr und mehr zusammen, sodass, wenn die Grundlinie einen äusserst kleinen Werth δ hat, der Flächeninhalt der sehr schmalen Figur durch das Product $am \times \delta$ oder $bn \times \delta$ gegeben ist. Wenn nämlich δ sehr klein ist, so kann man in diesem Producte mit gleichem Rechte bn oder am setzen, da beide Linien sehr nahe dieselbe Länge haben. Diese Länge bezeichnen wir mit y, und haben alsdann den Satz, dass der Flächeninhalt der Figur, welcher von zwei einander unendlich nahen Ordinaten, dem unendlich kleinen Stück δ auf der x-Axe und dem unendlich kleinen Bogenstück begrenzt wird, dem Producte $y.\delta$ gleich ist. Der Fehler, welcher bei der Aufstellung dieser Formel begangen wird, ist jedenfalls unendlich klein im Verhältniss zu dem schon unendlich kleinen Flächeninhalt, und kann daher vollständig bei Seite gelassen werden.

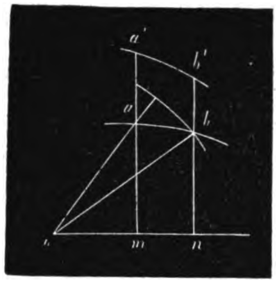
Mit Hülfe dieses Satzes und der Gleichung (13) schliesst man nun, dass, wenn am ein Bogen der Ellipse und $a'b'$ ein Bogen des umschriebenen Kreises bedeutet:

$$\text{Fig. } amnb : \text{Fig. } a'mnb' = b : a = \sqrt{1 - e^2}$$

Da nun diese Relation für alle solche schmale Rechtecke in der Ellipse und dem umschriebenen Kreise gültig ist, so bleibt sie auch in

Kraft für die Summe einer beliebigen Anzahl solcher. In der Fig. 17 haben wir daher

Fig. 18.



$$\frac{\text{Fig. } hnk}{\text{Fig. } pnk} = \frac{\text{Flächeninhalt der ganzen Ellipse}}{\text{Flächeninhalt d. ganzen umschr. Kreises}} = \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$

Der Flächeninhalt des Kreises ist πa^2, folglich ist

der Flächeninhalt der Ellipse $= \pi\, ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$.

5. Flächeninhalt eines elliptischen Sectors. Man findet den Flächeninhalt des Kreissegmentes kpn (Fig. 17), indem das Dreieck opk von dem Sector opn subtrahirt wird. Die Länge des Bogens pn ist $a\varepsilon$, wobei ε nicht in Graden, sondern in Theilen des Radius ausgedrückt werden muss; der Flächeninhalt des Sectors opn ist daher:

$$\tfrac{1}{2}\, a^2\, \varepsilon.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks opk ist wieder:

$$\tfrac{1}{2}\, ok \times pk = \tfrac{1}{2}\, a^2 \operatorname{Sin} \varepsilon \operatorname{Cos} \varepsilon.$$

Wir haben folglich

$$\text{Segm. } kpn = \tfrac{1}{2} a^2 (\varepsilon - \operatorname{Sin} \varepsilon \operatorname{Cos} \varepsilon)$$

Da nun aber das Segment khn sich zum Segment kpn verhält wie b zu a, so ist

$$\text{Segm. } khn = \tfrac{1}{2}\, a\, b\, (\varepsilon - \operatorname{Sin} \varepsilon \operatorname{Cos} \varepsilon)$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks fkh ist nun offenbar gegeben durch den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\, r^2 \operatorname{Sin} f \operatorname{Cos} f.$$

Setzt man hier die Werthe

$$r \operatorname{Sin} f = b \operatorname{Sin} \varepsilon\,; \quad r \operatorname{Cos} f = a \operatorname{Cos} \varepsilon - a e$$

ein, so erhält man

$$\text{Dreieck } fkh = \tfrac{1}{2}\, ab\, (\operatorname{Sin} \varepsilon \operatorname{Cos} \varepsilon - e \operatorname{Sin} \varepsilon)\,.$$

Werden nun Dreieck und Segment zusammengeschlagen, so erhält man den Inhalt des Sectors, nämlich

(16) $$\text{Sector } fhn = \tfrac{1}{2}\, a\, b\, (\varepsilon - e \operatorname{Sin} \varepsilon)$$

Wir wollen noch den Ausdruck eines unendlich schmalen Sectors ableiten, welcher Ausdruck unabhängig von der Natur der Curve ist, und also auch für andere Curven als die Ellipse gilt. Wir nehmen also an, dass der Winkel boa (Fig. 18) sehr klein ist. Der Winkel bon sei mit f bezeichnet, der Winkel aon mit f', so dass $boa = f' - f$ wird. Bezeichnet man ferner den Radiusvector ob mit r und oa mit r', so ist der Sector boa offenbar kleiner als $\frac{1}{2} r^2 (f' - f)$, hingegen grösser als $\frac{1}{2} r'^2 (f' - f)$. Je kleiner nun $f' - f$ wird, desto mehr fallen diese beiden Ausdrücke zusammen und geben also, der eine wie der andere, den Flächeninhalt des Sectors boa an.

Nach dieser Digression können wir der Entdeckung des Gesetzes folgen, welches auf die Geschwindigkeit eines Planeten in den verschiedenen Punkten der Bahn Bezug hat, mithin des Gesetzes der sog. ersten Ungleichheit. — Zunächst wollen wir untersuchen, in welcher Beziehung die Geschwindigkeit zu der Entfernung von der Sonne steht und werden dabei in rein inductiver Weise zu Wege gehen. Die Geschwindigkeit, welche hier betrachtet wird, ist die Aenderung des Winkels f während einer Zeiteinheit, z. B. während eines Tages. Man nennt diese Geschwindigkeit W i n k e l g e s c h w i n d i g k e i t und wir bezeichnen sie mit $f' - f$. — Wird nun der Tag als Zeiteinheit gewählt, so kann man annehmen, dass die Winkelgeschwindigkeit während desselben constant ist, d. i. dass die Aenderung von f während eines halben Tages die Hälfte von der Aenderung während des ganzen Tages beträgt. *)

Wir nehmen wieder unsere Data aus der Bewegung des Mars und führen in der folgenden Zusammenstellung zu den angesetzten Tagen die Werthe von $f' - f$, von den entsprechenden r, r^2 und endlich von den Producten $r^2 (f' - f)$ auf.

	$f'-f$		r	r^2	$r^2(f'-f)$
1867 Jan. 1	28′ 0″	= 1680″	1.6116	2.5972	4363″
Febr. 1	27 7	= 1627	1.6378	2.6824	4364
März 1	26 34	= 1594	1.6544	2.7372	4363
Apr. 1	26 15	= 1575	1.6643	2.7700	4363
Mai 1	26 14	= 1574	1.6649	2.7718	4363
Juni 1	26 30	= 1590	1.6561	2.7427	4362
Juli 1	27 3	= 1623	1.6390	2.6862	4361
Aug. 1	27 55	= 1675	1.6132	2.6023	4360

*) Völlig streng ist dies nicht der Fall; für unsere Betrachtungen indessen vollkommen ausreichend.

	Sept. 1	29′ 5″	= 1745″	1.5803	2.4921	4359″
	Oct. 1	30 28	= 1828	1.5440	2.3840	4359
	Nov. 1	32 7	= 1927	1.5039	2.2617	4359
	Dec. 1	33 50	= 2030	1.4656	2.1478	4360
1868	Jan. 1	35 33	= 2133	1.4300	2.0449	4362
	Febr. 1	36 59	= 2219	1.4022	1.9661	4363
	März 1	37 51	= 2271	1.3862	1.9214	4363
	April 1	38 5	= 2285	1.3817	1.9092	4363
	Mai 1	37 36	= 2256	1.3906	1.9337	4362

Aus diesen Werthen geht nun auf den ersten Blick hervor, dass die Geschwindigkeit grösser wird, je kleiner die Entfernung von der Sonne ist; ein einziger Versuch jedoch genügt, um zu zeigen, dass die Geschwindigkeit nicht einfach im umgekehrten Verhältnisse zu der Entfernung steht. Wählen wir z. B. die Grössen $f'-f$ und r vom 1. Jan. und 1. Dec. 1867, so finden wir

$$\frac{1680}{2030} = 0.8276\ ; \quad \frac{1.4656}{1.6116} = 0.9095.$$

Wenn die genannte Proportionalität stattfände, so müsste man ganz gleiche Zahlen erhalten haben, was die gefundenen jedoch nicht sind. Das Quadrat des letzteren Verhältnisses stimmt aber sehr nahe mit dem ersteren überein; man hat nämlich

$$\left[\frac{1.4656}{1.6116}\right]^2 = 0.8272.$$

Dieses Ergebniss deutet also an, dass die Geschwindigkeit umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung ist, wie wir auch schon vorher bei dem Monde fanden. Wäre nun dieser Satz richtig, so hätte man

$$\frac{f'-f}{f_1'-f_1} = \frac{r_1^2}{r^2}$$

oder $$r^2(f'-f) = r_1^2(f_1'-f_1) = r_2^2(f_2'-f_2) = \text{etc.}$$

wo r, r_1, r_2, u. s. w. verschiedene Radiivectores, und f, f_1, f_2, u. s. w. die dazu gehörenden Polarwinkel bezeichnen.

Die obigen Gleichheiten zeigen nun an, dass, wenn die angeführte Relation zwischen Geschwindigkeit und Entfernung richtig ist, das Product

$$r^2(f'-f)$$

stets denselben Werth haben muss. Dies finden wir auch bestätigt in den Zahlen der letzten Columne; diese Zahlen sind allerdings nicht vollkommen übereinstimmend, allein die Unterschiede sind so klein, dass der obige Satz jedenfalls als eine sehr grosse Annäherung an die Wahrheit betrachtet werden kann. Zu Kepler's Zeiten waren die Beobachtungen überdies nicht genau genug, um die kleinen Abweichungen zu verrathen.

Das zweite Kepler'sche Gesetz drückt nun eben diese Abhängigkeit zwischen Geschwindigkeit und Entfernung aus; gewöhnlich wird dasselbe aber in einer etwas anderen Weise ausgesprochen. Wir haben gesehen, dass das Product $r^2(f'-f)$ unveränderlich war, indem wir nur kleine Werthe von $f'-f$ in die Rechnung zogen. Unter der Bedingung, dass $f'-f$ sehr klein ist, bedeutet aber das in Frage stehende Product den doppelten Flächeninhalt des vom Radius vector durchlaufenen Sectors. In jeder Zeiteinheit durchläuft demnach der Radiusvector dieselbe Fläche, in zwei Zeiteinheiten die doppelte Fläche, in drei Zeiteinheiten die dreifache, u. s. w. Das zweite Kepler'sche Gesetz lautet demnach, wie folgt:

II. Die vom Radiusvector durchlaufene Fläche wächst proportional der Zeit.

Die Gleichung (16) giebt uns den Ausdruck eines elliptischen Sectors; in Folge der beiden Kepler'schen Gesetze muss nun dieser Ausdruck der Zeit proportional gesetzt werden, wobei die Zeit von dem Augenblicke gerechnet werden muss, wo der Planet in seinem Perihelium oder der Sonne am nächsten ist, weil die Sectorfläche alsdann den Werth Null hat. Wird aber die unbestimmte und fortlaufende Zeit*) mit t, die Zeit des Periheliums mit t_0 bezeichnet, so drückt die Differenz $t-t_0$ die Zeit aus, welche seit dem Periheldurchgang des Planeten verflossen ist. Multipliciren wir diese Zeitdifferenz mit einem unveränderlichen, aber noch unbestimmten Factor K, so ist nach dem Vorhergehenden

$$K(t-t_0) = \tfrac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\,(\varepsilon - e\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)$$

oder, wenn

---

*) Unter dem Ausdrucke »unbestimmte Zeit« verstehen wir die Zeit, welche seit einem unbestimmten Zeitpunkte verflossen ist.

$$\frac{2K}{a^2\sqrt{1-e^2}} = n$$

gesetzt wird,

(17) $$n(t-t_0) = \varepsilon - e \operatorname{Sin} \varepsilon .$$

Diese Gleichung, eine Folgerung der beiden Kepler'schen Gesetze, drückt aus, dass der Radiusvector eine der Zeit proportional wachsende Fläche durchläuft, die von einem elliptischen Bogen begrenzt wird. Die Constante, d. h. die unveränderliche Zahl n, wird die mittlere Bewegung des Planeten genannt; man kann sie leicht berechnen, wenn die Umlaufszeit bekannt ist. Nach einem ganzen Umlauf ist ε um 360° gewachsen; bezeichnen wir also die Umlaufszeit mit T, so ist

$$n(t+T-t_0) = 360^{\circ} + \varepsilon - e \operatorname{Sin} \varepsilon .$$

Man findet nun, indem die vorige Gleichung abgezogen wird

$$nT = 360^{\circ}$$

oder

$$n = \frac{360^{\circ}}{T}$$

eine Formel, deren Richtigkeit übrigens unmittelbar einleuchtet.

Wird der Tag als Zeiteinheit angenommen, so bezeichnet n den Bogen, welchen ein mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegter Körper in einer kreisförmigen Bahn täglich zurücklegt, vorausgesetzt, dass die Zeit eines ganzen Umlaufs T Tage beträgt. Die Grösse $n(t-t_0)$ giebt den Bogen an, welcher seit der Zeit, wo der Planet im Perihel war, zurückgelegt worden ist. Man nennt denselben die mittlere Anomalie des Planeten.

Der angeführte Ausdruck für die mittlere Anomalie zeigt, dass dieselbe der Zeit proportional wächst; um durch Rechnung die mittlere Anomalie für irgend einen Zeitpunkt zu finden, ist deshalb die Kenntniss der mittleren Bewegung erforderlich, und ausserdem die Kenntniss der Zeit, zu welcher der Planet sein Perihelium passirte, welche man auch die Epoche nennt. An Stelle der Epoche kann man aber auch die mittlere Anomalie des Planeten zu irgend einer festgestellten Zeit t_1 angeben, die natürlich als eine Constante betrachtet wird. Bezeichnet man nun diese mit c, die laufende mittlere Anomalie mit g, so ist

$$g = c + n(t-t_1)$$

Zur Berechnung der wahren Anomalie und des Radiusvector, durch welche Grössen die Lage des Planeten in seiner Bahn bestimmt ist, wird die Kenntniss der Excentricität e, sowie der halben grossen Axe a und ausserdem die der mittleren Anomalie vorausgesetzt. *)

---

*) Bei dieser Berechnung liegt die Hauptschwierigkeit in der Ermittelung der excentrischen Anomalie oder in der Auflösung der Gleichung (17). Zu diesem Zweck hat man verschiedene Rechnungsmethoden ersonnen, von denen wir jedoch nur eine anführen wollen, die besonders in den Fällen, wo die Excentricität klein ist, schnell zum Ziele führt. — Wenn nun e sehr klein ist, so kann der Unterschied zwischen ε und g nicht sehr gross sein; wir setzen daher zunächst $\varepsilon = g$ und berechnen einen etwas mehr genäherten Werth von ε, den wir ε_1 nennen wollen, aus der Gleichung

$$\varepsilon_1 = g + e \operatorname{Sin} g$$

Einen noch mehr genäherten Werth ε_2 finden wir hierauf aus der Gleichung

$$\varepsilon_2 = g + e \operatorname{Sin} \varepsilon_1$$

und so fährt man so lange fort, bis zwei auf einander folgende Resultate identisch werden.

Ein Beispiel wird das Verfahren deutlich machen. Es sei: $g = 50^\circ$; $e = 0.05431$. Mit Hülfe trigonometrischer Tafeln findet man $e \operatorname{Sin} g = 0.04160$, welche Zahl, um in Minuten verwandelt zu werden, mit $\frac{60 \times 180}{\pi}$ multiplicirt werden muss. Hiernach findet sich $e \operatorname{Sin} g = 143'.0 = 2^\circ\, 23'.0$ und $\varepsilon_1 = 52^\circ\, 23'.0$. In derselben Weise erlangt man ferner $\varepsilon_2 = 52^\circ\, 27'.9$; $\varepsilon_3 = 52^\circ\, 28'.1$, welcher letztere als der wahre Werth von ε angesehen werden kann.

Durch eine mathematische Behandlung der Relationen zwischen den drei Anomalien findet man

$$f = g + 2e \operatorname{Sin} g + \tfrac{5}{4} e^2 \operatorname{Sin} 2g + \ldots$$

Dieses Resultat der Kepler'schen Bewegungsgesetze wollen wir mit der entsprechenden Entwickelung der epicyklischen Theorie vergleichen. Wir bemerken dabei leicht, dass die Differenz $f - g$ dem Winkel entspricht, welcher früher (pag. 111) mit B bezeichnet wurde. Setzen wir in der Entwicklung dieses Winkels $2e$ statt e, wonach natürlich e nur die Hälfte der Excentricität im excentrischen Kreise wird, so hat man

$$B = 2e \operatorname{Sin} g + 2e^2 \operatorname{Sin} 2g + \ldots$$

Das zweite Glied ist also schon zu gross, wie auch durch Untersuchung der Beobachtungen bereits erwiesen wurde. Für den Mond fand sich z. B. (pag. 114) $2e^2 = 20'.70$, während die Beobachtungen für den Coefficienten $2g$ nur den Werth $12'.8$ ergaben. Nach der elliptischen Theorie findet sich für diesen Coefficienten: $\frac{5}{4} e^2 = 12'.9$, also beinahe völlig in Uebereinstimmung mit dem beobachteten Werthe. Hieraus geht der Vorzug der elliptischen Theorie hervor.

Es scheint daher, dass die Berechnung der Lage des Planeten in seiner Bahn die Kenntniss von vier Constanten oder, wie man in der Astronomie sagt, Elementen, nämlich c, n, e und a voraussetzt. Wir werden jedoch alsbald sehen, dass die Constanten n und a in solcher Weise von einander abhängen, dass die eine unmittelbar durch Rechnung gefunden werden kann, wenn die andere bekannt ist. Somit bleiben drei Elemente, deren Kenntniss nothwendig und hinreichend ist, um den Ort des Planeten in der Bahn zu berechnen.

Aber die Lage in der Bahn bestimmt noch nicht den Ort am Himmel, nicht einmal in der Ebene der Bahn. Nehmen wir zunächst an, um die Darstellung zu vereinfachen, dass die Bahnebene mit der Ekliptik zusammenfällt, sowie dass verlangt wird, die von der Sonne aus gesehene Länge, oder die heliocentrische Länge zu finden. Diese heliocentrische Länge ist jedoch einfach nur die Summe der wahren Anomalie und der Länge des Periheliums, welcher Winkel das vierte Element der Planetenbahnen ausmacht.

Die Beobachtungen haben indessen gezeigt, dass die Breiten der Planeten, wenn auch stets ziemlich klein, doch nicht unmerklich sind; diese Thatsache findet durch die Annahme eine genügende Erklärung, dass die Ebenen der Planetenbahnen nicht völlig mit der Ekliptik zusammenfallen, obgleich der Winkel zwischen den verschiedenen Bahnebenen immer sehr klein ist. Die Lage einer Planetenbahn in Bezug auf eine Grundebene, z. B. die Ekliptik, wird durch zwei Bestimmungsstücke oder Elemente angegeben, nämlich 1) durch den Winkel zwischen der Ebene der Planetenbahn und der Ekliptik, und 2) durch den Winkel, welchen die Durchschnittslinie beider Ebenen mit der Richtung nach dem Frühlingspunkt bildet. Den ersteren Winkel nennt man die Neigung oder Inclination, den zweiten: die Länge des Knotens. Nun hat zwar eine Planetenbahn immer zwei Knoten; man giebt jedoch gewöhnlich die Länge desjenigen an, von welchem an der Planet bei seiner Bewegung eine nördliche heliocentrische Breite erhält. Diese Winkel, Neigung und Knotenlänge, sind das fünfte und sechste Element einer Planetenbahn. — Die Länge des Perihels hat nun eine etwas andere Bedeutung als vorhin, wo die Bahn als mit der Ekliptik zusammenfallend angenommen wurde; diese Benennung bezeichnet jetzt die Summe der Länge des Knotens und des Winkels zwischen dem Perihel

und dem Knoten. Der erste Bogen wird in der Ekliptik, der zweite hingegen in der Ebene der Planetenbahn gerechnet. Häufig giebt man auch nur den Abstand des Perihels vom Knoten als das vierte Element an.

Nachdem die Lage des Planeten in seiner Bahn, sowie die drei Elemente, welche die Lage der Bahn im Raume bestimmen, gegeben sind, lässt sich die heliocentrische Länge und Breite ohne die geringste Schwierigkeit berechnen. Wir führen die dazu nöthigen Formeln an, ohne jedoch dieselben zu beweisen; nicht deshalb lassen wir den Beweis hier weg, weil er zu weitläufig wäre, sondern weil die in Frage stehenden Formeln einfach aus den Grundformeln der sphärischen Trigonometrie, die in einem Anhange angeführt werden sollen, hervorgehen.

Gewöhnlich bezeichnet man die heliocentrische Länge und Breite mit l und b, die Länge des Perihels mit π, die Neigung mit i und die Länge des aufsteigenden Knotens mit ☊, und endlich den Abstand des Perihels vom Knoten mit ω. Die Summe der wahren Anomalie und des Abstandes des Perihels vom Knoten nennt man das Argument der Breite und bezeichnet dasselbe mit u. Zwischen l und b einerseits und u andrerseits finden sich nun mehrere Relationen, von denen wir nur die folgenden anführen:

$$u = f + \omega = f + \pi - ☊$$
$$\text{Tang}\,(l - ☊) = \text{Cos}\,i\,.\,\text{Tang}\,u$$
$$\text{Tang}\,b = \text{Tang}\,i\,.\,\text{Sin}\,(l - ☊.)$$

Nachdem der heliocentrische Ort des Planeten nach diesen Formeln berechnet worden ist, bleibt noch der geocentrische Ort desselben zu berechnen, d. h. seine von der Erde aus gesehene Länge und Breite zu ermitteln übrig. Hierzu ist es erforderlich, die Entfernung der Sonne von der Erde zu kennen, die wir R nennen werden, sowie die Länge der Sonne ⊙. Die geocentrische Länge und Breite des Planeten, die wir mit λ und β bezeichnen, sowie seine Entfernung von der Erde: Δ finden sich aus den Formeln:

$$\Delta\,\text{Cos}\,\beta\,\text{Cos}\,\lambda = r\,\text{Cos}\,b\,\text{Cos}\,\lambda + R\,\text{Cos}\,\odot$$
$$\Delta\,\text{Cos}\,\beta\,\text{Sin}\,\lambda = r\,\text{Cos}\,b\,\text{Sin}\,\lambda + R\,\text{Sin}\,\odot$$
$$\Delta\,\text{Sin}\,\beta = r\,\text{Sin}\,b$$

Nach einigen sehr leichten Umformungen dieser Ausdrücke findet man unter andern

$$\text{Tang}\,(\lambda - \odot) = \frac{r\,\text{Cos}\,b\,\text{Sin}\,(l - \odot)}{R + r\,\text{Cos}\,b\,\text{Cos}\,(l - \odot)}$$

durch welche Formel λ sehr leicht zu berechnen ist.

Im Vorhergehenden haben wir versucht zu zeigen, wie eine vorurtheilsfreie und richtig angelegte Untersuchung der beobachteten

Bewegung eines Planeten zur Kenntniss der wirklichen Bahn führte und führen musste, sowie zur Einsicht der Gesetze, welche die Bewegung in der Bahn befolgt. Es zeigte sich dabei, dass die Bahnen der Planeten als Ellipsen befunden wurden, deren einer Brennpunkt mit der Sonne zusammenfällt, sowie dass die Geschwindigkeit eines Planeten in verschiedenen Punkten seiner Bahn immer so beschaffen ist, dass der Radiusvector in gleichen Zeitintervallen gleiche Flächenräume durchläuft. Mit Hülfe dieser Sätze kann der geocentrische Ort des Planeten zu jeder Zeit mittelst Rechnung gefunden werden, wenn nur die Kenntniss von 7 constanten Grössen oder Elementen vorher erlangt war. Es wurde aber schon erwähnt, dass zwei dieser Elemente, nämlich die halbe grosse Axe und die mittlere Bewegung, in einer einfachen Relation zu einander stehen, so dass nur das eine von beiden angegeben zu werden braucht.

Kepler verfolgte lange Zeit die Idee, dass eine derartige Relation stattfinden müsse, und fand sie auch endlich, und zwar, wie die übrigen Gesetze auf rein empirischem Wege. Diesen Weg wollen auch wir jetzt einschlagen, um die Richtigkeit seiner Entdeckung in einer einfachen Weise constatiren zu können. — In der folgenden Zusammenstellung giebt die erste Columne die Namen der Planeten; die zweite giebt die halben grossen Axen nach Ptolemäus, zu der Potenz $\frac{3}{2}$ erhoben, die dritte die Umlaufszeiten und die vierte endlich die Quotienten der Zahlen in den beiden vorhergehenden Columnen.

	$a^{\frac{3}{2}}$	T	$\frac{T}{a^{\frac{3}{2}}}$
Merkur	0.2378	0.2408	1.013
Venus	0.6104	0.6151	1.008
Erde	1.0000	1.0000	1.000
Mars	1.8740	1.8810	1.004
Jupiter	11.914	11.8674	0.996
Saturn	28.058	29.4605	1.050

Obgleich die Zahlen der letzten Columne nicht ganz gleich sind, so weichen sie doch so wenig von einander ab, dass man die Unterschiede den Beobachtungsfehlern zuschreiben kann. Kepler hielt diese Gleichheit auch für völlig erwiesen und gelangte auf solche Weise zu seinem dritten Gesetze:

III. **Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der halben grossen Axen, oder: die Umlaufszeit dividirt durch die $\frac{3}{2}$te Potenz der halben grossen Axe, hat bei allen Planeten denselben Werth.**

Es ist also, wenn T und $T_{,}$ zwei Umlaufszeiten, a und $a_{,}$ zwei halbe grosse Axen bedeuten:

$$\frac{T^2}{T_{,}^2} = \frac{a^3}{a_{,}^3}$$

oder

$$\frac{T}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{T_{,}}{a_{,}^{\frac{3}{2}}} = \ldots$$

womit die halben grossen Axen aus den Umlaufszeiten berechnet werden können.

Es liegt in der Natur jeder empirischen Entdeckung, dass sie, solange keine theoretische Bestätigung vorliegt, eine absolut bindende Kraft nicht hat, sondern nur mehr oder weniger wahrscheinlich sein kann. So war es der Fall auch mit den Entdeckungen Kepler's; spätere Untersuchungen haben sie im Wesentlichen bestätigt, aber auch gezeigt, dass sie keineswegs vollkommen richtig sind. Sie dürfen daher nur als die erste Annäherung an die wahren Bewegungsgesetze der Planeten angesehen werden.

§ 7. Die Präcession.

Indem wir nun die copernicanische Lehre von der Axendrehung der Erde annehmen, wissen wir auch, dass der Aequator eine Ebene ist, die durch den Mittelpunkt der Erde senkrecht gegen ihre Umdrehungsaxe gelegt, von der scheinbaren Himmelssphäre einen grössten Kreis ausschneidet. Es geht hieraus hervor, dass der Aequatorkreis am Himmelsgewölbe nur so lange eine unveränderliche Lage haben kann, als die Umdrehungsaxe der Erde mit sich selbst parallel im Raume bleibt. Umgekehrt muss man also auch schliessen, dass die Richtung der Erdaxe nicht dieselbe bleibt, wenn man durch Beobachtungen zeigen kann, dass die Lage des Aequators Veränderungen unterworfen ist. Dieses ist aber bemerkt worden, und die Veränderung selbst nennt man Präcession. Sie besteht in einer sehr langsamen Drehung der Ebene des Aequators in der Ebene der Ekliptik, und zwar bleibt die gegenseitige Neigung der beiden Ebenen dabei unverändert. *) Es ist also bloss die Durchschnittslinie beider Ebenen, die ihre Lage verändert, was aber zur Folge hat, dass auch die Aequinoctialpunkte ihre Lage am Himmel ändern. Die Erscheinung der Präcession besteht demnach darin, dass die Aequinoctialpunkte in der Ekliptik rückwärts schreiten, und zwar immer mit derselben Geschwindigkeit, weshalb die Längen der Gestirne ununterbrochen zunehmen, die Breiten derselben hingegen unverändert bleiben. — Die jährliche Bewegung der Aequinoctialpunkte beträgt ohngefähr 50″.

Die Erklärung dieser Erscheinung ist schon angedeutet worden, sie ist in der Bewegung der Erdaxe zu suchen. Es ist leicht einzusehen, dass die Erdaxe, damit die fragliche Erscheinung hervorgebracht werde, sich stetig um den Mittelpunkt der Erde drehen muss und also die Oberfläche eines Kegels im Raume beschreibt. Die Pole des Aequators beschreiben daher auch Kreise an dem scheinbaren Himmelsgewölbe, deren Mittelpunkte die Pole der Ekliptik sind. Da die Bewegung jährlich nur 50″ beträgt, so ist ein Zeitraum von etwa 26000 Jahren nöthig, damit die Weltpole einen Umlauf vollenden. Bei dieser Bewegung kommen sie allmählig in verschiedene Sternbilder. Der Stern, welcher gegenwärtig Polarstern genannt wird und jetzt nur $1^{\circ}\ 20'$ vom Nordpole absteht, wird zwar noch einige Zeit dem Pole näher rücken, hiernach sich aber wieder entfernen, und nach und nach das Recht verlieren, Polarstern genannt zu werden. Nach 12000 Jahren wird der Stern Wega (α Lyrae) dem Pole sehr nahe sein, und alsdann auf den Namen Polarstern Anspruch machen können.

Der Betrag der Präcession ist zu gross, als dass ihn nicht schon die Astronomen des Alterthums hätten bemerken müssen. In einem Jahrhundert ändern sich alle Längen der Gestirne um etwas weniger als $1\frac{1}{2}^{\circ}$, mithin um eine Grösse, die nicht zu übersehen ist, wenn nur

---

*) Wenigstens ist die Aenderung der Neigung sehr unbedeutend, und beruht grösstentheils darauf, dass die Ekliptik selbst nicht ganz unveränderlich ist.

astronomische Beobachtungen angestellt und mit einander verglichen werden. Hipparch soll zuerst die Präcession entdeckt haben, indem er seine Beobachtungen mit noch älteren verglich. Der jährliche Betrag derselben wurde selbstverständlich anfangs sehr unsicher bestimmt, und während des ganzen Mittelalters waren die Angaben hierüber sehr schwankend. Man glaubte sogar mitunter bemerkt zu haben, dass die Aequinoctialpunkte eine Zeitlang vorwärts schritten, wodurch eine gewisse schwankende Bewegung der Gestirne hervorgebracht würde. Es zeigte sich jedoch, dass derartige Vermuthungen jedes wahren Grundes entbehrten.*)

Gegenwärtig hat man die jährliche Präcession, wie es scheint, sehr sicher bestimmt; jedoch dürften noch einige Hundertel-Secunden in dem jährlichen Betrage derselben unsicher sein. — Die theoretische Untersuchung hat überdies gezeigt, dass die Erscheinung, streng genommen, nicht so einfach ist, wie zunächst vermuthet werden konnte, dass vielmehr noch einige kleine Glieder vorhanden sind, die bemerkt werden können, wenn sehr genaue, zeitlich weit von einander abliegende Beobachtungen verglichen werden. Die Theorie lehrt nämlich, dass der jährliche Betrag der Präcession nicht zu allen Zeiten derselbe, sondern dass er einer sehr langsamen Aenderung unterworfen ist. Bezeichnen wir die jährliche Präcession mit P, und nehmen das Jahr als Einheit der Zeit an, die wir von 1750 rechnen, so ist

$$P = 50''.21129 + 0''.000244297\, t$$

In tausend Jahren wird also die jährliche Praecession um $\frac{1}{4}''$ vergrössert.

*) Die Aequinoctialpunkte sind in der That einer derartigen Schwankung unterworfen, jedoch einer so kleinen, dass man von der Beobachtungskunst des Mittelalters keine Wahrnehmung derselben annehmen kann.

II. Kapitel.

Newton's Gesetz der allgemeinen Schwere.

§ 8. Galilei's mechanische Entdeckungen.

Ungefähr zur selben Zeit, als Kepler die Gesetze der Planetenbewegungen erforschte, untersuchte Galilei (geb. in Pisa 1564), wie Körper, die man ungehindert gegen die Erde fallen lässt, in dieser Bewegung sich verhalten. Er fand, dass sie hierbei gewissen unveränderlichen und allgemein gültigen Gesetzen unterworfen sind, die zu entdecken ihm auf experimentellem Wege gelang. Die Untersuchungen hierüber stellte er in Pisa an, wo er zu der Zeit eine Professur der Mathematik bekleidete. Man erzählt, dass er oft, indem er von dem Thurm der genannten Stadt Körper gegen den Boden fallen liess, zeigte, dass die Fallgeschwindigkeit keineswegs in dem Grade wie das Gewicht der Körper zunimmt, wie man vorher mit Aristoteles angenommen hatte. — Jetzt wissen wir, dass die Fallgeschwindigkeit bei einem derartigen Versuch an und für sich keineswegs von dem Gewicht des Körpers abhängig ist, sondern dass im Gegentheil alle Körper mit derselben Geschwindigkeit niederfallen, sobald nur die Bewegung im luftleeren Raum geschieht. Die Luft aber übt einen Widerstand gegen die Körper bei ihrer Bewegung aus, der desto grösser wird, je grösser die Dimensionen der Körper im Verhältniss zu ihrem Gewicht sind. Konnte nun auch Galilei diesen Umstand bei seinen Experimenten nicht beseitigen oder seinem Einfluss Rechnung tragen, so haben doch seine Versuche deutlich gezeigt, wie unrichtig die ältere Annahme war.

In Bezug auf das Gesetz von der Zunahme der Geschwindigkeit während der Bewegung führten seine Versuche zu bestimmteren Resultaten. Er fand nämlich, dass die Geschwindigkeit während jeder Secunde, oder während jeder Zeiteinheit überhaupt, um dieselbe constante Grösse zunimmt, oder dass die Fallgeschwindigkeit der Zeit proportional wächst. Dieser Satz wird das erste Galilei'sche Gesetz genannt.

Hat ein Körper am Ende der ersten Secunde, in der er zu fallen anfing, eine Geschwindigkeit erreicht, die wir mit g bezeichnen (man giebt g in einem beliebigen Längenmaasse an), so ist seine Geschwindigkeit am Ende der zweiten Secunde $2g$, am Ende der dritten $3g$, u. s. w.

Wenn der Körper zu fallen anfängt, ist seine Geschwindigkeit 0 und am Schluss der ersten Secunde g; er hat jedoch während dieses Zeitraums offenbar nur die Weglänge $\frac{1}{2}g$ zurückgelegt, mithin ist seine mittlere Geschwindigkeit $\frac{1}{2}g$ gewesen, weil das Resultat der Bewegung des Körpers dasselbe ist, als wenn der Körper während der Secunde mit der constanten Geschwindigkeit $\frac{1}{2}g$ niedergefallen wäre. — In diesem Falle haben wir die mittlere Geschwindigkeit einfach dadurch gefunden, dass wir das arithmetische Mittel aus der Anfangs- und der Endgeschwindigkeit bildeten. Im Allgemeinen findet man zwar die mittlere Geschwindigkeit in dieser Weise nur dann, wenn die Zwischenzeit so klein ist, dass die Zunahme während derselben als der Zeit proportional angesehen werden darf. Bei dem freien Fall der Körper findet dies jedoch immer statt, weshalb hier die mittlere Geschwindigkeit in dieser einfachen Weise gefunden wird. Die Geschwindigkeit ist bei dem Beginne der Bewegung 0 und nach t Secunden gt; die mittlere Geschwindigkeit (M) ist also:

$$M = \frac{0 + gt}{2} = \frac{1}{2}gt$$

und indem man diese mittlere Geschwindigkeit mit der Anzahl der Secunden multiplicirt, erhält man die Länge (S) des durchlaufenen Weges, nämlich:

$$S = Mt = \frac{1}{2}gt^2$$

Auch das Resultat, welches die zuletzt angeführte Gleichung enthält, ist von Galilei gefunden worden und wird das zweite Galilei'sche Gesetz genannt. Dies Gesetz lautet also: die Fallräume verhalten sich wie die Quadrate der Fallzeiten. — Ein Körper, der während der ersten Secunde die Weglänge $\frac{1}{2}g$ fällt, legt in der zweiten das Stück $4\frac{g}{2}$ zurück, in der dritten $9\frac{g}{2}$, u. s. w.

Die Constante g ist in neuerer Zeit sehr genauen Untersuchungen unterworfen worden, sowohl in Bezug auf ihren numerischen Werth, als auch in Betreff ihrer theoretischen Bedeutung und ihres Zusammenhangs mit anderen Zahlen. Die ersteren ergaben

$$g = 9.80896 \text{ Meter},$$

die letzteren zeigen hingegen, dass dieser Werth etwas verändert werden muss, wenn das Niederfallen an verschiedenen geographischen Orten geschieht. Der obige Werth gilt für die pariser Sternwarte; nach den Polen zu muss derselbe etwas vergrössert werden, wogegen etwas kleinere Werthe gelten, je mehr man sich dem Aequator nähert.

Wie wir sahen, kann das zweite Gesetz aus dem ersten durch Deduction gefunden werden; einige Schriftsteller unterscheiden sie deshalb auch nicht von einander, sondern fassen sie in einem Gesetze zusammen. Als erstes Gesetz wird auch zuweilen der Satz von der Trägheit angeführt, welcher gleichfalls Galilei zugeschrieben wird. Diesem Satze zufolge behalten die Körper immer die einmal stattgefundene geradlinige und gleichförmige Bewegung unverändert bei, bis eintretende Kräfte dieselbe verändern.

Durch einen Zufall soll Galilei zur Untersuchung der Schwingungsgesetze des Pendels geführt worden sein. — Während er einer kirchlichen Ceremonie im Dom zu Pisa beiwohnte, beobachtete er eine vor dem Altar hängende Lampe — ein Meisterwerk von Benvenuto Cellini —, welche, durch irgend einen Zufall aus ihrer Gleichgewichtslage gebracht, hin und her schwang. Vielleicht bemerkte er da schon, dass die Zeit jeder Schwingung dieselbe blieb, obgleich die Schwingungsamplitude allmälig kleiner wurde. Spätere Versuche führten jedenfalls zu dem Gesetze, dass die Zeit, während welcher das Pendel eine Schwingung vollbringt, unabhängig von der Grösse des Schwingungsbogens ist. — Theoretische Untersuchungen späterer Zeiten haben jedoch erwiesen, dass dieses Gesetz nur annähernd richtig ist, dass aber dasselbe, wenn der Schwingungsbogen überhaupt nicht zu gross ist, doch nur unbedeutend von der Wahrheit abweicht. Dagegen hängt die Schwingungszeit von der Länge des Pendels ab, und diese Abhängigkeit wird durch ein auch von Galilei entdecktes Gesetz annähernd in folgender Weise ausgedrückt: die Pendellängen verhalten sich wie die Quadrate der Schwingungszeiten, oder: das Quadrat der Schwingungszeit, dividirt durch die Länge des Pendels, ist eine constante Grösse.

Die Eigenschaft, dass die Schwingungszeit von der Grösse des Schwingungsbogens oder des sog. Ausschlagswinkels unabhängig ist, hat das Pendel zu einem der wichtigsten Instrumente des beobachtenden Astronomen gemacht; denn er kann dasselbe in so kleinen Schwingungen im Gange halten, dass das Galilei'sche Gesetz bezüglich der Unabhängigkeit der Schwingungszeit von der Grösse des Ausschlagswinkels als vollkommen richtig angesehen werden kann. Die Dauer der einen Schwingung bleibt daher der der anderen völlig gleich, wenn auch die Amplituden geringen Schwankungen unterworfen sind; man kann folglich auch sagen, dass z. B. die Zeit einer Schwingung genau $\frac{1}{10}$ der Zeit von 10 Schwingungen ist. Im Pendel hat man somit ein vortreffliches Instrument, die Zeit zu messen. — Gewöhnlich verbindet man das Pendel mit einem Uhrwerk, welches einestheils (durch ein Gewicht) dazu dient, dasselbe im Schwingen zu erhalten, anderntheils (durch ein Räderwerk) dazu, die Anzahl der Schwingungen, die von einem bestimmten Augenblicke an verflossen sind, auf einem Zifferblatt anzugeben.

Mit Galilei's Entdeckungen, insbesondere der des Trägheitsgesetzes, fängt die Mechanik an, in wissenschaftlicher Weise ausgebildet zu werden.*) Vorher hatte man nur sehr unklare Vorstellungen von der Bewegungslehre gehabt, und folglich hätte eine mechanische Behandlung der astronomischen Probleme zu einem erwünschten Resultate in keiner Weise führen können.

---

*) Die Eigenschaft der Trägheit hat man vis inertiae genannt; man hat also gesucht, den Begriff einer Kraft mit derselben zu verbinden, nämlich der Kraft, welche den Körper in seiner geradlinigen Bahn gleichförmig fortbewegt. Diese Vorstellungsweise ist sowohl überflüssig wie unrichtig (vgl. pag. 2).

§ 9. Sätze aus der Mechanik.

Die Mehrzahl der im ersten Kapitel erwähnten Untersuchungen war im Grund rein geometrisch, d. h. man hat in denselben nur versucht, ein geometrisches Bild der Bewegungsgesetze, den die Planeten in ihrer Bewegung folgen, zu finden. Der Erfolg solcher Untersuchungen beruhte in erster Linie auf der Zuverlässigkeit der Beobachtungen, und konnte deshalb nur als ein relativer angesehen werden, — eine theoretische Grundlage für die Astronomie war aber hiermit noch keineswegs gefunden. Man konnte allerdings auf Grund geometrischer Betrachtungen, sobald einmal die Kepler'schen Gesetze bekannt und die Elemente der Planetenbahnen durch Beobachtungen bestimmt waren, die Lage der verschiedenen Planeten zu jeder beliebigen Zeit berechnen, und der Vergleich zwischen dieser berechneten Lage und der beobachteten konnte sowohl dazu dienen, die numerischen Werthe der Elemente zu verbessern, als auch die Richtigkeit der Kepler'schen Gesetze zu bestätigen. Diese Gesetze waren aber doch nur der mathematische Ausdruck von Thatsachen, ohne im Geringsten ihre physischen Ursachen anzudeuten. Man konnte daher, und weil der theoretische Grund derselben unbekannt war, niemals sicher sein, ob nicht weitere Beobachtungen ihr Aufgeben in ähnlicher Weise fordern würden, wie Kepler sich veranlasst fand, die Hypothese von der gleichförmigen Bewegung in Kreisbahnen zu verlassen. Die Astronomie Kepler's war daher auch nur eine rein inductive Wissenschaft, denn seine Sätze konnte er, als mit dem Gesetze der Trägheit, und folglich auch mit den Lehren der Dynamik unbekannt, nicht durch Deduction wiederfinden. Wenn er aber dennoch überzeugt war, zur Grenze der Erkenntniss gedrungen zu sein, so lag diese Ansicht in einer Weltanschauung begründet, die in ihm einen ihrer letzten Koryphäen zählte. Seiner Meinung nach waren nämlich jene von ihm auf rein empirischem Wege entdeckten Gesetze unmittelbar dem Willen des höchsten Wesens entsprungen, dem es gefiel, sich geometrisch zu manifestiren; weiteren Ursachen nachzuforschen, konnte demnach nicht mehr in Frage kommen. Nur die Uebereinstimmung derselben mit den Vorstellungen von der Sphärenharmonie suchte er mit unglaublicher Mühe nachzuweisen.

Es entsprach zu sehr Kepler's tiefsinnig-verworrener Weltanschauung, überall eigenthümliche, fast mystische Beziehungen zu suchen, in der Welt der Planeten insbesondere durch gewisse Zahlen-Combinationen ihrer Bewegungen musikalische Harmonien darzustellen, indem er die verschiedenen Geschwindigkeiten der Planeten als verschiedenen Tönen entsprechend sich dachte. — Solche Harmonien glaubte er vom Schöpfer beabsichtigt und wähnte, durch seine Entdeckungen das Mysterium der Schöpfung entschleiert und die göttlichen Absichten mit dem Weltsystem und den Gesetzen für die Bewegungen in demselben erkannt zu haben.

Um nun eine physische Erklärung der Kepler'schen Gesetze zu finden, oder ihre Nothwendigkeit und Tragweite auf deductivem Wege nachzuweisen, muss damit angefangen werden, die Ursachen von krummlinigen und ungleichförmigen Bewegungen im Allgemeinen zu untersuchen. — Eine jede Ursache, welche die geradlinige und gleichförmige Bewegung eines materiellen Punktes zu ändern strebt, nennt man Kraft. In älteren Zeiten hat man mit diesem Worte die Ursache der Bewegung überhaupt verstanden, indem man nämlich glaubte, dass keine Bewegung möglich wäre, ohne dass eine Kraft wirkte. Dies ist jedoch nicht richtig: bei der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung braucht man durchaus keine Ursache vorauszusetzen, und darf daher auch nicht von Kräften reden. Es lässt sich sogar nachweisen, dass es keine fortwirkende Kraft giebt, die bei einem ruhenden Körper eine solche Bewegung hervorbringen würde; wohl aber können in Folge von Kräften Bewegungen entstehen, welche von einem bestimmten Zeitpunkte an nicht von der geraden Linie und der Gleichförmigkeit abweichen.

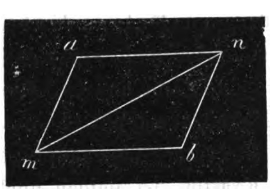
Das Princip der Trägheit lässt sich aus vielen, täglich wahrzunehmenden Thatsachen erkennen, die ohne diese völlig unerklärlich sein würden: ein Stein z. B., der mit der Hand in die Höhe geworfen wird, fährt noch fort, eine Zeit lang zu steigen, nachdem die Kraft (hier die Muskelkraft) zu wirken aufgehört hat. Diese Thatsache zu erklären bleibt auch nur so lange schwierig, als man voraussetzt, dass die Bewegung von einer fortwirkenden Kraft bedingt ist. Das Princip der Trägheit erklärt aber die Fortbewegung vollkommen: diesem zufolge würde der Stein mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich in einer geradlinigen Bahn fortbewegen, wenn nicht seine Schwere, die hier die Rolle einer fortwirkenden Kraft spielt, ihn zur Erde herabzöge. — Man muss sich hierbei auch erinnern, dass die Muskelkraft nicht etwa den Stein aus der absoluten Ruhe in den Zustand der Bewegung versetzt hat, denn der Stein theilte vorhin die Bewegung der Erde; seine Bewegung wurde mithin nur verändert. Das Gesetz der Trägheit können wir also so aussprechen: Ein materieller Punkt behält seine geradlinige und gleichförmige Bewegung bei, so lange keine Kräfte auf ihn einwirken; wird aber seine Bewegung von Kräften beeinflusst, die nach einer Zeit zu wirken aufhören, so erlangt er nach dieser Zeit eine Bewegung, die wieder geradlinig und gleichförmig ist. Dieser Satz ist in jeder Beziehung von der Erfahrung bestätigt worden, obgleich man seine Richtigkeit nicht direct durch Versuche nachweisen kann. Wir können uns nämlich nie einen concreten Fall der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung denken, viel weniger herstellen, denn im Universum sind Kräfte fortwährend wirksam.

Wir sahen, wie man zu der Annahme geführt wurde, dass die Bewegung an und für sich noch keineswegs das Vorhandensein von Kräften andeutet. Dagegen liegt es aber schon in dem Begriff der Kraft, dass eine solche die schon vorhandene Bewegung ändern, also auch einen ruhenden Körper in Bewegung versetzen, oder wenigstens solches erstreben muss. Aus der Grösse dieser Aenderungen schliesst man auf die Grösse der Kraft. Die Grösse, um die sich die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes ändert, dient demnach als Maass der Kraft. — Beim Messen der Kräfte oder bei ihrer Vergleichung hindert Nichts, von der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit der bewegten Punkte vor dem Eingreifen der Kräfte abzusehen, d. h. sie als ursprünglich ruhend zu betrachten. In diesem Falle wird die Grösse der Kraft gemessen: durch die geradlinige Weglänge, um welche der materielle Punkt während einer Zeiteinheit, z. B. während einer Sekunde, in Folge dieser Kraft fortbewegt wird. Man darf aber hierbei nicht vergessen, dass die Kraft in Wirklichkeit nur die Geschwindigkeit ändert, oder dem bewegten Punkte eine neue Geschwindigkeit zuertheilt, keineswegs aber die nothwendige Bedingung der Bewegung überhaupt ist. Bei der Untersuchung der Wirkungen von Kräften ist jedoch auch daran festzuhalten, dass eine jede Bewegung, die innerhalb eines gewissen Zeitintervalles sowohl der Geschwindigkeit wie der Richtung nach gleichförmig ist, als von einer Kraft hervorgebracht gedacht werden darf.

Die Bewegungen, welche wir im Universum wahrnehmen, sind bedingt von Kräften, die eine schon vorhandene Bewegung beeinflussen. Nach dem, was soeben hervorgehoben wurde, darf aber diese Bewegung als von einer Kraft hervorgerufen gedacht werden, und wir thun dies nur, um die Untersuchung zu erleichtern; denn nachdem die ursprüngliche Bewegung durch eine Kraft ersetzt worden ist, haben wir die leichtere Aufgabe zu behandeln: verschiedene Kräfte, die von bekannter Grösse sind und in bekannter Richtung wirken, greifen einen materiellen Punkt an; es wird verlangt, die Bewegung des Punktes zu finden. Der Einfachheit wegen betrachten wir zunächst zwei Kräfte, die einen materiellen Punkt angreifen; seine Bewegung wird alsdann mit Hülfe des bekannten Satzes vom sog. Parallelogramm der Kräfte gefunden, den man zwar auch mit metaphysischen Gründen zu beweisen gesucht hat, der aber jedenfalls und zunächst durch die Erfahrung in jeder Beziehung bestätigt worden ist. Dieser Satz lautet: wenn zwei Kräfte einen materiellen Punkt gleichzeitig angreifen, so ist die demzufolge entstandene Bewegung ihrer Grösse und Richtung nach bestimmt durch die Diagonale in dem Parallelogramm, dessen Seiten durch die Weglängen gegeben sind, die der Punkt zurückgelegt haben würde, wenn jede der beiden Kräfte allein gewirkt hätte.

In Uebereinstimmung mit diesem Satze findet man, dass ein Körper, der im Punkte m (Fig. 19) sich befindet und von zwei Kräften angegriffen wird, deren eine während der Zeiteinheit und wenn sie allein wirkte, dem Körper die Bewegung ma und die andere die Bewegung mb zuertheilen würde, in der That in eine Bewegung versetzt wird, deren Richtung und Grösse während der Zeiteinheit durch die Diagonale mn angegeben ist. Diese Bewegung

Fig. 19.

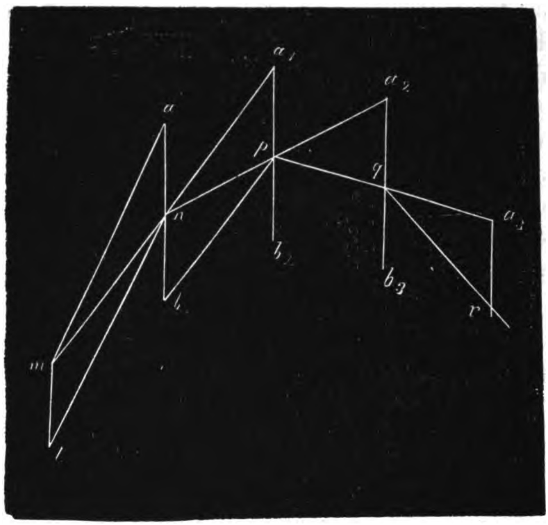


hätte auch durch eine einzige Kraft hervorgebracht werden können, durch eine solche nämlich, die in der Richtung *mn* wirkte, und deren Intensität die Bewegung *mn* hervorrufen würde. Diese Kraft, welche hier bloss vorgestellt wird, nennt man Resultante der beiden Seitenkräfte, die hingegen Componenten genannt werden. — Auf dieselbe Weise, wie man die Resultante zu zwei Kräften gefunden hat, lässt sich auch die Resultante zu dieser und einer dritten Componente finden, u. s. w. Man kann also successive die Resultante einer beliebigen Anzahl Kräfte, die einen Punkt angreifen, durch Construction finden.

Umgekehrt ist man auch im Stande, die eine Componente zu finden, wenn die andere sowie die Resultante gegeben ist. Wäre z. B. nur eine Kraft bekannt, welche strebt, den Körper während der Zeiteinheit von *m* nach *a* zu bewegen, die wirkliche Bewegung wäre aber von *m* nach *n* vor sich gegangen, so würde man vollkommen berechtigt sein, auf das Vorhandensein einer zweiten Kraft zu schliessen, welche während derselben Zeit gestrebt hätte, den Körper von *m* nach *b* zu bewegen. Diese zweite Kraft kann jedoch auch nur eine schon vorhandene Bewegung repräsentiren. Anstatt sich den Körper als von zwei Kräften angegriffen vorzustellen, kann man sich denselben auch als bereits in Bewegung denken, und diese dann so, dass der Körper gerade das Wegstück zurücklegen würde, um welches ihn die eine Kraft fortzubewegen strebt. Man findet also auch durch die Theorie des Kräfteparallelogramms den Einfluss, welchen eine Kraft auf die schon vorhandene Bewegung eines Körpers ausübt. — Wenn z. B. ein Körper sich in Bewegung befindet und in Folge dessen während der Zeiteinheit von *m* nach *a* fortbewegt, dabei aber zugleich von einer Kraft angegriffen ist, welche dem Körper die Bewegung *mb* zuzuertheilen strebt, so geschieht die Bewegung des Körpers nach dem Punkte *n*.

Mit Hülfe der angeführten Sätze lässt sich die Bahn des Steines verfolgen, der durch irgend eine Kraft, z. B. die Muskelkraft, aufgeworfen worden ist. Es ist hierbei erlaubt anzunehmen, dass die Schwere den Stein in allen Punkten seiner Bahn mit derselben Kraft gegen die Erdoberfläche herunterzieht, ebenso dass die Richtungen, in welchen diese Kraft wirkt, beständig mit einander parallel bleiben. Schliesslich wollen wir vom Widerstand der Luft gegen die Bewegung gänzlich absehen. — Wenn nun dem Stein eine Bewegung ertheilt wird, vermöge welcher derselbe während der ersten Sekunde vom Punkte m (Fig. 20) bis Punkt a versetzt würde, die Schwere aber

Fig. 20.



gleichzeitig den Stein bis Punkt b herabgezogen haben würde, im Fall man ihn hätte frei herunter fallen lassen, so ist die wirklich durchlaufene Strecke durch die Linie mn angegeben. Denken wir uns jetzt, jedoch nur für einen Augenblick, dass die Schwere aufhörte zu wirken, so müssten wir nach dem Principe der Trägheit schliessen, dass der Stein in Folge seiner erlangten Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung während der zweiten Secunde den Punkt a_1 erreichen würde. Die Schwere beeinflusst jedoch diese Bewegung, indem sie den Stein das Stück $n\,b_1$ herunter zu ziehen sucht; die Resultante ist also np. In ähnlicher Weise verfolgt man den Lauf durch die Punkte q, r, u. s. w. während der folgenden Secunden, bis der Stein herabgefallen ist. Die Bahn des Steines ist nun keineswegs, wie es nach dem Obigen erscheinen könnte, eine gebrochene Linie, sondern eine Curve, deren Krümmung sich stetig verändert; je kleiner die Zeiteinheit angenommen wird, desto mehr schmiegt sich die durch die obige Construction ermittelte gebrochene Linie der wahren Bahn des Steines, der sog. Trajectorie an.

Wie schon oben hervorgehoben wurde, deutet eine Bewegung, welche nicht gleichförmig und geradlinig ist, an, dass Kräfte auf den in Bewegung befindlichen Körper einwirken; wir können also jetzt die Aufgabe zu lösen versuchen, diese Kräfte durch Construction oder durch Rechnung zu bestimmen. Gewöhnlich handelt es sich jedoch nicht nur darum, den augenblicklichen Werth und die augenblickliche Richtung der Kraft zu bestimmen, sondern man will vielmehr das allgemeine Gesetz kennen lernen, nach welchem die in den verschiedenen Augenblicken stattfindenden Kraftäusserungen erfolgen. So erfolgt z. B. die Einwirkung der Schwere auf den in die Höhe geworfenen Stein nach dem Gesetze, dass derselbe während jeder Zeiteinheit (Sekunde) eine gleichgrosse Strecke gegen die Erdoberfläche herabgezogen wird, und dass alle diese Strecken dieselben Richtungen haben; und zwar ganz unabhängig von der Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung, welche zu Anfang der verschiedenen Secunden stattfindet. — Bisweilen ist das Auffinden solcher Gesetze sehr leicht; es liegt, so zu sagen, auf der Hand; in andern Fällen müssen grössere Schwierigkeiten überwunden werden, die mitunter den grössten Scharfsinn auf die Probe stellen.

Im vorhergehenden Paragraphen wurde schon erwähnt, dass Galilei auf experimentellem Wege die Gesetze für den geradlinigen Fall der Körper gegen die Erdoberfläche fand und nachweisen konnte; wir wollen nun versuchen, die Natur derjenigen Kraft zu ermitteln, deren Folge jene Gesetze sind. Hier müssen wir nun zuvörderst die Bemerkung einschalten, dass, wenn die beiden Componenten im Kräfteparallelogramm zusammenfallen, die Resultante gleich ihrer Summe wird. Man überzeugt sich sehr leicht von der Richtigkeit dieses Ausspruchs, indem man sich den Winkel zwischen den Seitenkräften immer kleiner und kleiner werdend und endlich verschwindend denkt.

Lässt man einen Körper herabfallen, ohne demselben eine andere Bewegung zu ertheilen als die, welche durch seine eigene Schwere bedingt wird, so erlangt derselbe am Ende der ersten Sekunde eine Geschwindigkeit, die wir vorhin mit g bezeichneten. Hörte nun die Schwere auf zu wirken, so würde der Körper mit eben dieser Geschwindigkeit seinen Weg gegen die Erdoberfläche fortsetzen, während er in der ersten Sekunde mit der mittleren Geschwindigkeit $\frac{1}{2}g$ herabfiel. Während der zweiten Sekunde fällt der Körper aber nicht das Stück g, sondern das Stück $\frac{3}{2}g$ (wie man aus der Formel $\frac{1}{2}g \cdot 2^2 - \frac{1}{2}g \cdot 1^2$ findet), also ein grösseres Stück, als wenn er seinen Weg ohne Einwirkung einer Kraft fortgesetzt hätte. Diese Kraft ist es gerade, die wir kennen lernen wollen. — Wir haben also nun die Resultante gleich $\frac{3}{2}g$ und überdies wissen wir, dass die eine Componente g beträgt; nennen wir die zweite, noch unbekannte Componente x, so ist

$$x + g = \tfrac{3}{2}g$$

woraus folgt:

$$x = \tfrac{1}{2}g$$

welches ausdrückt, dass der fallende Körper in der zweiten Sekunde von einer Kraft beeinflusst wurde, die allein seine mittlere Geschwindigkeit während derselben Zeit um $\frac{1}{2}g$ vergrössert, folglich ebensoviel wie in der ersten Sekunde. Ebenso findet man, dass die am Ende irgend einer Sekunde erlangte Geschwindigkeit in der nächstfolgenden um g vergrössert ist, dass also die Kraft mit derselben Intensität wirkt, unabhängig von dem Abstand des Körpers von der Erdoberfläche, ebenso wie von dessen Geschwindigkeit oder von der Zeit, die er schon gefallen ist. Die Schwere wirkt mithin hier wie eine constante Kraft. *)

Indem wir nun zu der Untersuchung von krummlinigen Bewegungen übergehen, müssen wir wieder einige Bemerkungen vorausschicken. — Wenn eine gerade Linie durch zwei Punkte einer Curve gezogen wird, und der eine dieser Punkte dem andern immer näher rückt und endlich mit demselben ganz zusammenfällt, so nennt man die Grenzrichtung, welche die gerade Linie annimmt, die Tangente der Curve in dem fraglichen Punkte. Diese (geometrische) Tangente darf jedoch nicht mit der trigonometrischen Tangente (vgl. pag. 89) verwechselt werden. — Wir denken uns nun einen Kör-

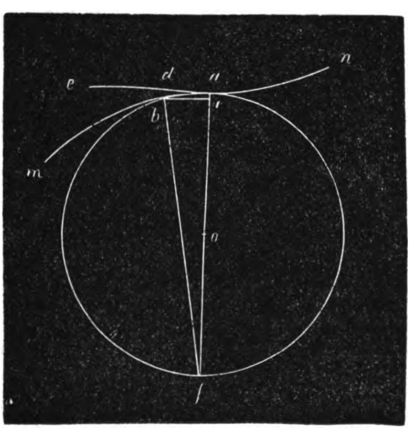
---

*) Dieses Resultat ist nicht in aller Strenge richtig, aber seine Unrichtigkeit kann erst bemerkt werden, wenn der Körper Räume durchläuft, die im Verhältniss zu den Dimensionen des Erdkörpers merklich sind: alsdann bedürfen aber auch die Galilei'schen Fallgesetze entsprechender Modificationen.

per, der unter dem Einflusse irgend welcher Kräfte sich in einer krummlinigen Bahn bewegt, sowie dass diese Kräfte, wenn der Körper einen gewissen Punkt a (Fig. 21) seiner Bahn erreicht hat, zu wirken aufhören; die Bewegung des Körpers würde nun in einer Richtung fortgehen, welche durch die Tangente der Bahn in dem betreffenden Punkte bestimmt ist, sowie mit derselben Geschwindigkeit, mit der der Körper in diesem Punkte anlangte.

Wir wollen jetzt die Kraft in dem Falle ermitteln, wo der Körper sich in einer Curve bewegt, wo also etwa die gekrümmte Linie $nabm$ (Fig. 21) ein Stück der Bahn vorstellt. Den Körper denken wir uns im Punkte a angekommen und zwar mit einer solchen Geschwindigkeit, dass derselbe sich in der Zeiteinheit um das Stück ad auf der Tangente ae fortbewegen würde. In diesem Punkte a denken wir uns ferner einen Kreis der Bahncurve möglichst genau angeschmiegt, so dass der Kreis dieselbe Krümmung hat wie die Trajectorie in diesem Punkte; wir dürfen alsdann voraussetzen, dass der sehr kleine Bogen ab gemeinsam für die Trajectorie und für den Krümmungskreis ist. Den Radius dieses Kreises, dessen Mittelpunkt wir in o annehmen, und welcher die Krümmung der Bahnlinie im Berührungspunkte angiebt, nennt man Krümmungsradius; wir bezeichnen denselben mit R. — Die wirkliche Bewegung des Körpers in der Zeiteinheit sei nun ab; wir ziehen bc parallel mit da und nehmen an $bc = ad$. Die Resul-

Fig. 21.



tante ist also ab (als eine gerade Linie betrachtet) und die eine Componente ist $ad = bc$; unsere Aufgabe, die zweite Componente zu finden, ist nun eine rein geometrische, nämlich die, die Grösse des Stückes ac zu bestimmen. Zu diesem Zwecke machen wir von einigen aus der Elementargeometrie bekannten Sätzen Gebrauch, welche auf unseren Fall angewendet, zu folgender Proportion führen *):

$$ac : ab = ab : af$$

woraus folgt

$$ac = \frac{\overline{ab}^2}{2R}$$

Wir haben bisher die Zeiteinheit als so klein angesehen, dass der während derselben durchlaufene Bogen der Trajectorie mit dem entsprechenden Bogen des Krümmungskreises identificirt werden konnte; Nichts hindert, dieselbe auch so klein zu wählen, dass wir diese Bögen als ein Stück einer geraden Linie voraussetzen dürfen. Bei dieser Annahme erhält man für ac den folgenden Ausdruck, in dem v die Länge des Bogens zwischen a und b bezeichnet,

$$ac = \frac{v^2}{2R} \tag{1}$$

Bezeichnen wir hierauf mit T die Umlaufszeit im Krümmungskreise, d. h. die Anzahl Zeiteinheiten, welche der Körper braucht, um mit der constanten Geschwindigkeit v den ganzen Umkreis zu durchlaufen, so ist

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

mithin auch

$$ac = \frac{1}{2}\,\frac{4\pi^2 R}{T^2} \tag{2}$$

und dies ist der Ausdruck für die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher der Körper während der ersten Zeiteinheit gegen den Mittelpunkt

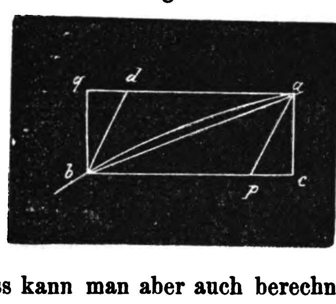
---

*) Diese Sätze lauten: 1) Wird in einem Halbkreise ein Dreieck eingeschrieben, so ist der Winkel an der Peripherie oder dem Durchmesser gegenüber ein rechter. 2) In Dreiecken mit gleichen Winkeln (ähnlichen Dreiecken) verhalten sich die Seiten des einen wie die entsprechenden des andern. Die Dreiecke abc und bcf sind gleichwinklig und geben daher die obige Proportion.

des Krümmungskreises herabfiele, wenn seine Bewegung plötzlich gehemmt würde.

Wir sehen, wie die wirkliche Bewegung ab in die zwei Componenten ad und ac zerfällt; man bemerkt aber auch leicht, dass die Componente ac nur dann die ganze Kraft repräsentirt, wenn die in a erlangte Geschwindigkeit durch $ad = bc$ angegeben wird. In diesem Falle wirkt die Kraft in der Richtung des Krümmungsradius. Der allgemeinere Fall, wo die Kraft in einer anderen Richtung wirkt, kann indessen auf den einfacheren zurückgeführt werden. — Wir denken uns die Linie ad (Fig. 22) die eigene Geschwindigkeit (d. h. die Geschwindigkeit, mit der der Körper in a ankommt) darstellend, ab die Resultante aus dieser Geschwindigkeit und einer Kraft, welche während der Zeiteinheit dem Körper die Bewegung ap beigebracht hat. Diese letztere Bewegung kann jedoch in zwei Componenten zerlegt werden, von denen die eine in die Richtung des Krümmungsradius, die andere aber in die der Tangente fällt: diese Componenten seien ac und $cp = dq$. Die Resultante ab kann jetzt als aus den Componenten aq und ac entstanden gedacht werden, von welchen die letztere bereits durch die Ausdrücke (1) und (2) gefunden wurde, indem wir mit v den Bogen ab bezeichneten: die Componente aq ist aber aus der eigenen Bewegung des Körpers ad und der Componente dq zusammengesetzt, also auch von der einwirkenden Kraft abhängig.

Fig. 22.



Diesen Ueberschuss kann man aber auch berechnen, wenn man nur die Richtung ap kennt, d. h. den Winkel, welchen die Richtungen ap und ac mit einander bilden. Diesen Winkel pac bezeichnen wir durch P und finden alsdann:

$$ac = ap \operatorname{Cos} P; \quad dq = cp = ap \operatorname{Sin} P,$$

folglich auch

$$dq = ac \operatorname{Tang} P;$$

die ganze Kraft ap finden wir wieder aus der Formel

$$ap = \frac{ac}{\operatorname{Cos} P}$$

oder aus

$$ap = \sqrt{\overline{ac}^2 + \overline{cp}^2} = ac\sqrt{1 + \operatorname{Tang} P^2}\ ^{*)}$$

Diese Formel zeigt uns, dass in den Fällen, wo P einen kleinen Werth hat, der Unterschied zwischen ap und ac in noch viel höherem Grade als gering, oder wie man sagt als eine kleine Grösse höherer Ordnung anzusehen ist; denn wenn schon Tang P einen kleinen numerischen Werth hat, so ist das Quadrat davon noch viel geringer. Wäre z. B. Tang $P = \frac{1}{10}$, so hätte man Tang $P^2 = \frac{1}{100}$. In der Natur giebt es eine Menge Fälle, in denen P wirklich einen so kleinen Werth hat, dass man, wenigstens in einer ersten Annäherung, setzen kann

$$ap = ac.$$

Sowohl ap wie dq können als mittlere Geschwindigkeiten angesehen werden, die dem beweglichen Körper von der Kraft zuertheilt worden sind; will man jedoch die am Schluss der Zeiteinheit erlangte Endgeschwindigkeit als Maass für die Kraft ansehen, so hat man bloss die gefundenen Ausdrücke mit 2 zu multipliciren. Bezeichnen wir demgemäss die in der Richtung des Krümmungsradius wirkende Componente mit ρ, die gegen ihn senkrechte aber mit u, **) so haben wir

$$\rho = 2ac = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

$$u = \frac{v^2}{R} \operatorname{Tang} P = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \operatorname{Tang} P;$$

indem man ferner die totale Kraft mit φ bezeichnet, wird

$$\varphi = \frac{v^2}{R}\sqrt{1 + \operatorname{Tang} P^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}\sqrt{1 + \operatorname{Tang} P^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2 \operatorname{Cos} P}$$

---

*) Hieraus findet sich auch die ganz allgemein gültige Relation

$$\sqrt{1 + \operatorname{Tang} P^2} = \frac{1}{\operatorname{Cos} P} = \operatorname{Sec} P.$$

**) Der Krümmungsradius fällt mit der sog. Normale zusammen, d. i. der Richtung, welche im Berührungspunkte senkrecht auf der Tangente steht.

Wenn überdies P einen so kleinen Werth hat, dass Cos P mit der Einheit vertauscht werden darf, so ist einfach

$$\varphi = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \tag{3}$$

Gestützt auf diese Formel können wir folgenden Satz aussprechen:

Wenn ein Körper sich in einer Bahn bewegt, welche von einem Kreise sehr wenig abweicht, und ist die bei dieser Bewegung wirkende Kraft stets gegen die Nähe des Mittelpunktes gerichtet, so ist die in jedem Punkte der Bahn wirkende Kraft proportional dem Quadrate der totalen Geschwindigkeit φ und umgekehrt proportional dem Krümmungsradius.

Wir können hinzufügen, dass der Fehler dieses Satzes nur von der Ordnung des Quadrats der Abweichung zwischen der Richtung zum Mittelpunkte und der Richtung der Kraft ist.

Trifft es noch zu, dass die Geschwindigkeit ihren mittleren Werth zu der Zeit annimmt, wo auch der Krümmungsradius seinen mittleren Werth hat, so können wir den folgenden, wichtigen Ausdruck anwenden

$$\varphi = \frac{4\pi^2 a}{T_0^2} \tag{4}$$

wo a den mittleren Werth des Krümmungsradius und T_0 die wirkliche Umlaufszeit des Körpers in seiner Bahn bedeutet.

Die Componente ρ wird gewöhnlich Centripetalkraft, die Componente u Tangentialkraft genannt; man nennt die letztere so, weil sie in der Richtung der Tangente wirkt.

Aus dem Angeführten geht nun die wichtige Thatsache hervor, dass ein Körper sehr wohl eine krummlinige Bahn beschreiben kann, ohne dass eine Kraft in dieser vorwärts treibt; die Tangentialkraft kann zwar die Geschwindigkeit in der Richtung der Tangente beschleunigen, sie kann dieselbe aber auch verzögern, und am allerwenigsten braucht man sie einer Kraft zuzuschreiben, die in dieser Richtung angreift.

Eine, in ihrer Grösse mit der Centripetalkraft vollkommen gleiche, ihrer Richtung nach aber entgegengesetzte Kraft heisst

Centrifugalkraft; wir werden sehen, unter welchen Umständen sie auftreten kann. Man kann sich die Sache in folgender Weise denken. Wenn ein Körper, den wir wie bisher immer einfach als einen materiellen Punkt betrachten, einige Zeit hindurch in kreisförmiger Bewegung gewesen ist, und wenn die Kraft, die hierbei wirksam war, plötzlich aufhören würde zu wirken, so würde der Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich in der Richtung der Tangente fortbewegen. Betrachten wir die Fig. 21, so sehen wir sogleich ein, dass der Abstand des Körpers von dem Mittelpunkte des Kreises, in der ersten, nach dem Aufhören des Krafteinflusses folgenden Zeiteinheit, sich um ein Stück vermehrt, das mit ac gleich ist. Der Körper würde also eine Bewegung erhalten, die man sich entstanden denken kann durch eine Kraft von solcher Beschaffenheit, dass dieselbe während der Zeiteinheit dem Körper eine Geschwindigkeit von der Grösse der Centripetalkraft, aber in entgegengesetzter Richtung, zu ertheilen strebt. Wenn der in Bewegung befindliche Punkt mit dem Mittelpunkte o fest verbunden ist, so kann die Bewegung, welche die Centrifugalkraft zu veranlassen strebt, natürlich nicht zu Stande kommen, diese Kraft strebt aber unausgesetzt, so lange die Kreisbewegung dauert, das Band zwischen dem beweglichen Körper und dem Mittelpunkt der Bewegung zu lösen, und in vielen Fällen wird sie intensiv genug, diese Verbindung zu überwinden, wo dann der bewegliche Körper weggeschleudert wird. Man kann sich sehr leicht hiervon überzeugen, wenn man an einer nicht gar zu starken Schnur einen Bleiklumpen befestigt und denselben in Kreisbewegung versetzt, während man mit der Hand das andere Ende der Schnur festhält. Bei starker Bewegung wächst die Centrifugalkraft und zwar im Verhältniss wie das Quadrat der Umlaufszeit kleiner wird, — endlich erreicht sie die Grenze, wo die Schnur zerreisst und der Bleiklumpen fortgeschleudert wird. — Weil die Erde sich um eine Axe dreht, sind alle Körper an ihrer Oberfläche mehr oder weniger der Centrifugalkraft unterworfen. Um die Wirkung dieser Kraft an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche zu berechnen, hat man für T die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde zu nehmen, und für R den senkrechten Abstand des betreffenden Punktes von der Rotationsaxe. Für Punkte am Aequator ist dieser Abstand gleich dem Halbmesser des Erdkörpers, an den Polen ist derselbe Null; mithin verschwindet auch da die Centrifugalkraft. Wir wollen sie nun für einen Punkt am Aequator, wo sie am grössten ist, berechnen. Um diese Rechnung auszuführen, müssen wir die Rotationsgeschwindigkeit der Erde kennen, ebenso wie ihren Halbmesser; den hiermit gefundenen Werth dividiren wir dann durch g, oder die von der Schwerkraft bewirkte Fallgeschwindigkeit, nachdem diese Kraft eine Sekunde gewirkt hat. Wir erhalten auf solche Weise das Verhältniss der Centrifugalkraft zur Schwerkraft.

Die Erde vollendet ihre Umdrehung in einer Zeit von 861·64 Sekunden mittlerer Zeit; diesen Werth haben wir für T anzuwenden, da g unter der Annahme der Sekunde als Zeiteinheit bestimmt worden ist. Da ferner g in Meter angegeben ist, so muss auch R in demselben Maasse ausgedrückt werden. Für den jetzigen Zweck genügt es, von der ursprünglichen Definition des Metermaasses auszugehen und also anzunehmen, dass der Abstand vom Aequator bis zum Pol 10000000 Meter beträgt. Der Umfang des Kreises ist aber $2\pi R$, folglich haben wir

$$2\pi R = 40000000.$$

Den Werth von g haben wir schon früher mitgetheilt (vgl. p. 157). Es findet sich nun

$$\frac{4\pi^2 R}{gT^2} = \frac{1}{289},$$

woraus hervorgeht, dass die Schwere der Körper am Aequator in Folge der Centrifugalkraft um $\frac{1}{289}$ vermindert ist. Hörte die Rotationsbewegung der Erde plötzlich auf, so würden alle Körper am Aequator an Gewicht zunehmen und zwar ebenfalls um $\frac{1}{289}$.

Die von Galilei gefundenen Gesetze für die Schwingungsbewegung des Pendels könnte man durch eben so einfache Betrachtungen ableiten wie die, welche zu den oben gefundenen Sätzen führten; man hätte dabei von der Annahme auszugehen, dass die einzige wirkende Kraft die Schwere der Pendelkugel sei. Umgekehrt könnte man auch aus diesen Gesetzen folgern, dass die hier wirkende Kraft in der Schwere besteht. — Weil jedoch diese Deductionen bei der Darstellung der astronomischen Theorien und deren Entwicklung kein unmittelbares Interesse haben, so können wir dieselben übergehen und uns damit begnügen, nur die folgende Formel anzuführen, welche die Relation zwischen der Schwingungszeit des Pendels (t), dessen

Länge (l) und der durch die Schwere verursachten Fallgeschwindigkeit am Ende der ersten Sekunde (g) angiebt. Diese Formel, in welcher π, wie vorher, die Ludolph'sche Zahl bezeichnet, ist

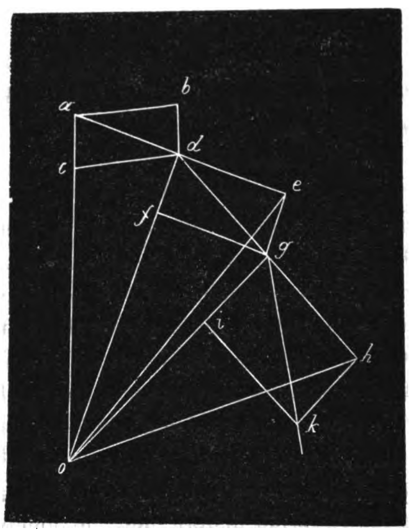
$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

wobei indessen der Ausschlagwinkel des Pendels als sehr klein vorausgesetzt wird.

Unter Centralbewegung versteht man diejenige Bewegung, bei der die Kraft stets von ein und demselben Punkte (Kraftcentrum) aus wirkt; im Uebrigen kann die Kraft von beliebiger Natur sein. In Bezug auf solche Bewegungen gilt ein Satz, welcher in der Mechanik und namentlich für die Theorie der Planetenbewegungen von grosser Bedeutung ist. Diesen Satz wollen wir noch ableiten.

Im Punkte o (Fig. 23) denken wir uns ein Kraftcentrum, mithin

Fig. 23.



die Kraft stets nach demselben gerichtet; in a sei ferner ein Körper mit einer solchen Geschwindigkeit angekommen, dass derselbe während der nächsten Zeiteinheit den Weg ab durchlaufen würde. Die Centralkraft theilt dem Körper jedoch während dieser Zeiteinheit die Geschwindigkeit ac mit, so dass seine resultirende Geschwindigkeit durch die Diagonale ad dargestellt wird. Der Körper würde nun in der zweiten Zeiteinheit mit der Geschwindigkeit $de = ad$ fortbewegt werden, wenn nicht die Centralkraft ihre Wirkung ausübte; diese ertheilt aber dem Körper während der zweiten Zeiteinheit eine neue Geschwindigkeit, etwa die Geschwindigkeit df, so dass die während der zweiten Zeiteinheit erlangte resultirende Geschwindigkeit dg ist. — Aus der Elementargeometrie entlehnen wir nun den Satz, dass, wenn zwei Dreiecke auf derselben, oder auch auf gleich grossen Grundlinien stehen und überdies zwischen denselben parallelen Geraden, sie denselben Flächeninhalt haben. Diesem Satze zufolge sind die Dreiecke aod und deo einander gleich, und ebenso die Dreiecke doe und dog. Hieraus folgt ferner, dass

$$\text{Dreieck } aod = \text{Dreieck } dog.$$

In derselben Weise beweist man die Gleichheit der folgenden Dreiecke und gelangt somit zu dem Satze: dass alle Dreiecke, die von zwei Abständen des bewegten Körpers vom Kraftcentrum gebildet werden, und bei welchen der Winkel an diesem Centrum der Geschwindigkeit während einer Zeiteinheit entspricht, gleich sind. — Die Bewegung geschieht jedoch nicht in Wirklichkeit längs der gebrochenen Linie $adgk\ldots$, sondern in einer Curve, welche sich diesen Punkten anschmiegt; wenn aber die Zeiteinheit hinreichend klein angenommen wird, so kann der Unterschied zwischen den fraglichen Dreiecken und den entsprechenden Sectoren vernachlässigt werden, da derselbe unendlich klein wird im Verhältniss zu den schon sehr kleinen Sectoren (vgl. pag. 143); man erlangt demnach den folgenden, in aller Strenge geltenden Satz: Wenn sich ein Körper unter dem Einfluss einer Centralkraft bewegt, so beschreibt der Radiusvector (d. i. der Abstand des bewegten Körpers vom Kraftcentrum) während gleicher Zeiten gleiche Flächen.

Sobald also die Theorie der Centralbewegung bekannt war, und man annehmen konnte, dass das Kraftcentrum mit der Sonne zusammenfiel, musste das zweite Kepler'sche Gesetz von selbst einleuchten.

Hiermit schliessen wir die Darstellung der mechanischen Lehrsätze ab; die bereits angeführten werden genügen, um übersehen zu können, worin das grosse von Newton entdeckte Naturgesetz besteht.

Zwar werden wir nicht seinem Wege im Einzelnen, und namentlich nicht seiner Darstellung folgen können, allein die Natur der allgemeinen Schwerkraft zu erkennen, dürfte uns doch gelingen.

§ 10. Newton's Entdeckung des allgemeinen Gravitationsgesetzes.

Zwischen Kepler's Entdeckung der Gesetze der Planetenbewegung und Newton's theoretischer Herleitung derselben aus dem Principe der allgemeinen Schwere liegt ein Zeitraum von mehr als einem halben Jahrhundert. Während dieser Zeit entwickelte sich mehr und mehr die Vorstellung, dass von der Sonne, die in dem copernicanisch-kepler'schen Weltsysteme das Centrum der Welt ausmachte, auch die Kraft ausginge, welche die Bewegungen der Planeten veranlasst. — Schon Kepler hatte sich etwas Derartiges gedacht, allein da er weder das Gesetz der Trägheit noch die Lehre von der Centralbewegung kannte, so mussten seine Speculationen hierüber das Ziel verfehlen. Er glaubte nämlich, dass die Kraft, welche die Planeten um die Sonne dreht, ungefähr beschaffen sei wie die vom Centrum aus wirkende Kraft, durch welche die peripherischen Theile eines Schwungrades herumgedreht werden. Nicht unähnlich waren die Phantasien des Cartesius, die jedoch eine Zeitlang sehr begierig aufgenommen wurden. — Dass solche Vorstellungen in keiner Weise zur Erklärung der empirisch erkannten Bewegungsgesetze führen konnten, ist selbstverständlich, und sie stehen auch nicht im geringsten Zusammenhang mit der späteren Theorie. Erst in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts fing man an, die Lehre von der Centralkraft und ihren Wirkungen aufzustellen, und auf dieser Basis konnte die Natur der innerhalb des Sonnensystems wirkenden Kraft untersucht werden. — Die Aufgabe war eigentlich jetzt nur noch die, die Natur der Kraft zu ermitteln, welche von der Sonne aus, als Kraftcentrum, die von Kepler gefundenen Gesetze veranlasst; die Proportionalität der vom Radiusvector durchlaufenen Flächenräume zu den Zeiten gab nämlich zu erkennen, dass das Kraftcentrum mit dem Sonnenkörper zusammenfiel. An der Lösung dieser Aufgabe wurde von mehreren Gelehrten gearbeitet, kurz bevor Newton das Resultat seiner Arbeiten der königlichen Societät in London übergab. Die ganze Zeit war sich dessen bewusst, dass eine grosse epochemachende Entdeckung bevorstand, und möglicherweise hat sogar R. Hooke noch etwas vor Newton gefunden, dass die Anziehungskraft umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung wirke. Die Untersuchungen Newton's erstreckten sich jedoch viel weiter, und die Resultate derselben haben eine ungleich höhere Bedeutung, indem er die Anziehung als eine allgemeine Eigenschaft der Materie erkannte. Das von ihm erkannte Naturgesetz können wir zunächst folgendermaassen ausdrücken: Jedes Molecül oder jeder materielle Punkt zieht jeden andern an, und zwar befolgt diese Anziehung das Gesetz, dass sie vermindert wird im Verhältniss des Quadrats der Entfernung; die Anziehung ist mithin umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung. Wird die Gleichheit der Massen unabhängig von dem Newton'schen Gesetze definirt, so muss diesem Gesetze noch hinzugefügt werden, dass die Anziehung direct proportional der Masse ist; man kann aber auch sagen, dass zwei Körper dieselbe Masse besitzen, wenn sie einen dritten in derselben Entfernung mit derselben Intensität anziehen.

Das Newton'sche Gesetz zerlegen wir mit Whewell (History of the inductive sciences) in fünf verschiedene Sätze, und werden jeden einzeln beleuchten und beweisen.

I. Die Kraft, womit die Sonne die verschiedenen Planeten anzieht, ist umgekehrt proportional den Quadraten der respectiven Entfernungen.

Die Richtigkeit dieses Satzes lässt sich, wenigstens näherungsweise, sehr leicht einsehen. Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, die sehr wenig von der Kreisform abweichen; auch gehört die mittlere Geschwindigkeit weder zum grössten noch zum kleinsten Krümmungshalbmesser, sondern zu einem dazwischen liegenden. Wir haben also für die Kraft den Ausdruck

$$\varphi = \frac{4\pi^2 a}{T_0^2} .$$

Nach dem dritten Kepler'schen Gesetze ist aber

$$T_0^2 = k\, a^3 ,$$

wo k eine für alle Planeten gemeinsame Constante bezeichnet; mit Rücksicht auf diese Relation wird

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{k} \cdot \frac{1}{a^2},$$

woraus folgt, dass man die Kraft der Sonne erhält, indem man die constante Zahl $\frac{4\pi^2}{k}$ durch a^2 dividirt. Die Richtigkeit des obigen Satzes ist somit erwiesen.

II. **Jeder Planet wird in verschiedenen Punkten seiner Bahn in solcher Weise angezogen, dass die anziehende Kraft umgekehrt proportional dem Quadrat des Radiusvector ist.**

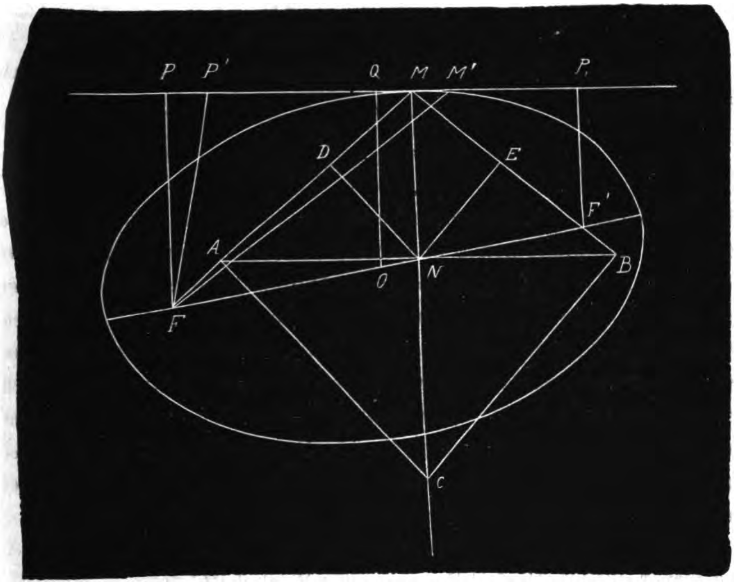
Dieser Satz folgt aus den beiden ersten Kepler'schen Gesetzen oder daraus, dass die Kraft eine Centralkraft ist, die von dem einen Brennpunkte einer Ellipse aus wirkt. Der Zusammenhang zwischen den Prämissen und dem Resultate ist hier nicht so ganz leicht zu übersehen; in Anbetracht seiner Wichtigkeit darf aber eine kurze Andeutung nicht übergangen werden.

Wir erinnern uns vor allen Dingen des Ausdruckes

$$\varphi = \frac{v^2}{R \operatorname{Cos} P},$$

welcher im vorhergehenden Paragraphen gefunden wurde. Die in dieser Formel vorkommenden Grössen müssen nun alle durch r ausgedrückt werden, d. h. durch die Entfernung des Planeten von der Sonne. Zu diesem Zwecke werden wir uns einiger Constructionen aus der Lehre von der Ellipse bedienen, ohne uns jedoch bei den Beweisen derselben aufzuhalten. — Den beweglichen Körper nehmen wir an im Punkte M (Fig. 24), in welchem auch die Tangente PP_1 an die Ellipse gelegt worden ist. Die Kraft wirkt nun von dem Brennpunkte F aus, die Centripetalcomponente aber in der Richtung des Krümmungsradius oder senkrecht zu der Tangente, also in der Richtung MN. Der Winkel zwischen diesen beiden Richtungen ist FMN, derselbe, den wir vorhin mit P bezeichneten. Nehmen wir nun an, dass der Planet während der sehr kleinen Zeiteinheit den Bogen MM' zurücklegt, den wir, ohne merklich zu fehlen, als eine gerade Linie betrachten dürfen, und tragen wir auf der Geraden PP_1 das Stück $PP' = MM'$ ab von dem Punkte P, in welchem der Perpendikel PF die Gerade PP_1 trifft, so gelangen wir zu folgenden Ergebnissen. Erstens ist, wie man leicht einsieht, das Dreieck PFP' dem

Fig. 24.



Dreiecke oder Sector MFM' gleich, den der Radiusvector während der Zeiteinheit beschreibt. Die Fläche dieses Sectors ist aber eine Constante, d. h. sie hat immer denselben Werth, folglich hat das in der oben beschriebenen Weise construirte Dreieck PFP' auch immer einen constanten Werth, wo auch der Punkt M sich auf der Ellipse befinden mag. Der Flächeninhalt dieses Dreiecks ist also

$$\tfrac{1}{2}\, PP' \times PF' = C$$

wo C die Constante bezeichnet, deren Werth wir übrigens jetzt nicht bedürfen.

Den gemachten Annahmen gemäss ist wieder PP' gleich der totalen Geschwindigkeit während der Zeiteinheit, die wir mit v bezeichneten; ferner ist der Winkel PFM gleich dem Winkel FMN, weil PF und MN einander parallel sind; da nun $FM = r$, so haben wir

$$PF = r \operatorname{Cos} PFM = r \operatorname{Cos} P$$

und

$$v r \operatorname{Cos} P = 2 C$$

oder

$$v = \frac{2 C}{r \operatorname{Cos} P}.$$

Mit diesem Werthe erhalten wir aus dem oben angeführten Werthe von φ:

$$\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{4 C^2}{R \operatorname{Cos} P^3}.$$

Die Länge des Krümmungshalbmessers in einer Ellipse findet sich nun durch die folgende Construction. Durch den Punkt N, wo die gerade Linie MN die halbe grosse Axe der Ellipse schneidet, ziehen wir die Gerade ANB parallel der Tangente PP_1. Von den Punkten A und B, in welchen diese Linie die Radienvectoren oder deren Verlängerungen schneidet, ziehen wir ferner Senkrechte gegen letztere, die sich stets in einem Punkte C schneiden werden, welcher auf der Verlängerung von MN liegt. Das Stück MC ist nun der Krümmungshalbmesser im Punkte M, den wir durch R bezeichnet haben. — Es ist nun leicht einzusehen, dass

$$A M = R \operatorname{Cos} P$$

und ferner, weil auch ANM ein rechter Winkel ist, dass

$$MN = A M \operatorname{Cos} P = R \operatorname{Cos} P^2 .$$

Fällt man vom Punkte N Perpendikel auf die Radien FM und $F'M$, so werden die Stücke MD und ME abgeschnitten, die, wie man beweisen kann, nicht nur unter sich gleich sind, sondern auch stets dieselbe Länge haben, wo auch der Punkt M auf der Ellipse liegen mag. Diese constante Länge bezeichnen wir mit K, und haben also $K = DM$. Nun ist aber

$$D M = M N \operatorname{Cos} P$$

folglich erlangen wir auch, indem der gefundene Werth von MN berücksichtigt wird,

$$K = R \operatorname{Cos} P^3 .$$

Dieser Werth von $R \operatorname{Cos} P^3$ giebt uns endlich

$$\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{4 C^2}{K}$$

welcher Ausdruck die Richtigkeit des zweiten Satzes beweist, weil der Factor $\frac{4 C^2}{K}$ constant, also unabhängig von r ist.

III. **Dieselbe Ursache, welche die Schwere der Körper auf der Erdoberfläche veranlasst, bedingt auch die Centralkraft bei der Bewegung des Mondes; die Schwerkraft an der Erdoberfläche verhält sich zu letzterer wie die Quadrate der Halbmesser der Mondbahn und des Erdhalbmessers.**

Auch dieser Satz geht ohne Schwierigkeit aus empirischen Daten hervor. Die Kraft, mit welcher die Erde auf die Bewegung des Mondes einwirkt, können wir nach der Formel für die Centripetalkraft berechnen; wir haben also

$$\varphi = \frac{4\pi^2 a}{T^2},$$

wo T die siderische Umlaufszeit des Mondes und a dessen mittlere Entfernung von der Erde bedeutet. Wie im Vorhergehenden (pag. 35) angegeben wurde, ist die siderische Umlaufszeit des Mondes $27^{T}\ 7^{st}\ 43^{m} = 39343$ Minuten oder $= 60 \times 39343$ Sekunden. Die mittlere Entfernung ist wiederum sehr nahe gleich dem sechzigfachen des Erdhalbmessers. Bezeichnen wir letzteren durch R, so haben wir also

$$\varphi = \frac{4\pi^2 R \times 60}{60^2 \times (39343)^2} = \frac{4\pi^2 R}{60\ (39343)^2}$$

oder, weil $2\pi R = 40000000$ Meter,

$$\varphi = \frac{40000000\ \pi}{3\ \ (39343)^2}.$$

Führen wir die Berechnung dieses Ausdruckes aus, so finden wir

$$\varphi = \frac{1}{369,52}.$$

Diese Kraft wollen wir nun mit der Schwerkraft an der Erdoberfläche vergleichen. Wenn letztere eine Sekunde unbehindert wirkt, so ertheilt sie den Körpern die Geschwindigkeit $g = 9.81$ Meter, jene wiederum dem Monde die Geschwindigkeit φ. Das Verhältniss beider ist

$$\frac{g}{\varphi} = 3565,0 = (59,7)^2$$

also fast genau

$$\frac{g}{\varphi} = \left(\frac{a}{R}\right)^2.$$

Es muss noch hinzugefügt werden, dass die Erdmasse fast genau so wirkt, als ob sie allein im Mittelpunkte concentrirt wäre; die Schwerkraft verhält sich also auch in diesem Falle umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen.

IV. **Die Sonne wirkt nicht nur auf die Planeten, sondern auch auf alle übrigen Körper, wo sie sich auch befinden mögen, mit einer anziehenden Kraft ein, also auch auf den Mond. In ähnlicher Weise ziehen auch die Planeten sowohl sich unter einander wie die Sonne an im umgekehrten Verhältniss der Quadrate der gegenseitigen Entfernungen.**

Die Beweise der beiden ersten Sätze haben gezeigt, dass die Kepler'schen Gesetze zu der Annahme einer Kraft führen müssen, welche von der Sonne aus im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung die Planeten anzieht. Die Sicherheit dieses Resultates beruht in erster Linie auf der Genauigkeit der Beobachtungen; denn die Kepler'schen Gesetze sind vermittelst Induction aus solchen hergeleitet, weshalb man schon a priori kaum annehmen kann, dass sie absolut richtig seien. Nähme man aber umgekehrt die Newton-sche Theorie als richtig an, so würden die Kepler'schen Gesetze daraus unmittelbar als vollkommen richtig abgeleitet werden können, aber wohlverstanden nur unter der Bedingung, dass keine andere Kraft ausser der Anziehungskraft der Sonne auf die Bewegung der Planeten einwirkte. Unser vierter Satz sagt jedoch aus, dass dies nicht der Fall ist, sondern dass die Himmelskörper einander gegenseitig anziehen. — Bei der Bewegung des Mondes z. B., für den die Erde der hauptsächlich anziehende Körper ist, bemerkt man die Anziehungskraft der Sonne sehr deutlich; seine Bewegung mit Hülfe der Kepler'schen Gesetze darzustellen wurde zwar versucht, man konnte aber dabei zu keinem befriedigenden Resultate gelangen. Ohne die gleichfalls störende Anziehungskraft der Sonne würde der Mond mit kaum merklichen Abweichungen eine Kepler'sche Ellipse um die Erde beschreiben. Aber auch die Bewegungen der Planeten müssten Abweichungen von jenen Gesetzen verrathen, da ja diese gleichfalls einander anziehen sollen, vorausgesetzt dass ihre Massen nicht ganz unmerklich wären. Unser vierter Satz kann also, streng genommen, nicht mit den Kepler'schen Gesetzen bestehen; dies hindert jedoch keineswegs, dass diese Gesetze sehr nahe mit den wirklichen Bewegungsgesetzen übereinstimmen, da ja doch die Einwirkungen der Planeten sehr klein, wenn auch nicht ganz unmerklich sein können. Auf Grund der Thatsachen wollen wir also jetzt entscheiden, ob die Gesetze Kepler's in aller Strenge richtig sind, oder ob dieselben, unserm vierten Satze gemäss, einer Modification bedürfen.

Die Gesetze sollen zunächst, da sie aus den beobachteten Planetenbewegungen hervorgegangen sind, dieselben wiedergeben, aber auch der Bewegung des Mondes müssten sie entsprechen, sollte ihnen eine ganz allgemeine Bedeutung zuerkannt werden. Die thatsächliche Mondbewegung ist nun allerdings von solcher Art, dass man eine elliptische Bahn annehmen muss, ebenso dass die Bewegung dem zweiten Kepler'schen Gesetze folgt, allein durch diese beiden Annahmen kann man nur die Bewegung während einer relativ sehr kurzen Zeit und auch nur in sehr rohen Zügen wiedergeben: man kann sich Rechenschaft über die Mittelpunktsgleichung geben, aber die Bewegung der Apsiden ebenso wie die Ungleichheiten: die Evection, Variation und jährliche Gleichung, anderer nicht zu gedenken, bleiben dabei vollkommen unerklärt.

Am Schluss des § 4 wurde bereits hervorgehoben, dass jene Ungleichheiten durch gewisse, numerisch gegebene Coefficienten, multiplicirt mit gewissen Sinusfunctionen, dargestellt werden. Dieses Ergebniss ist direct aus den Beobachtungen erlangt worden und in jeder Weise unabhängig von der Theorie. Zeigt es sich aber, dass die Einwirkung der Sonne auf die Bewegung des Mondes — wenn diese Einwirkung nach dem Newton'schen Gesetze stattfindet — gerade solche Ungleichheiten und Veränderungen der Bahn veranlasst, wie die Beobachtungen an den Tag legen, so würde man in diesem Umstande den Beweis für die Richtigkeit des vierten Satzes erblicken können, wenigstens insoweit sich derselbe auf Sonne, Erde und Mond bezieht. — Diesen Beweis hat nun Newton geliefert. Er hat gezeigt, wie sich die genannten Ungleichheiten, ebenso wie die Bewegung der Apsiden und Knoten auf Grund der attrahirenden Einwirkung der Sonne berechnen lassen, und dass die Berechnung im Allgemeinen den Beobachtungen genügt; nur die Anziehungskraft der Sonne, verglichen mit der der Erde in demselben Abstande von dem Monde, müsste aus den Beobachtungen bestimmt werden. Dies heisst mit anderen Worten, dass die theoretische Berechnung der Evection, Variation und der jährlichen Gleichung, sowie die von den Bewegungen der Apsiden und der Knoten, ausser der Kenntniss der betreffenden elliptischen Bahnelemente (also Excentricität, Neigung u. s. w.) nur das Verhältniss der mittleren Entfernungen zwischen Sonne und Erde und zwischen Mond und Erde, sowie die Verhältnisse der drei Massen als bekannt voraussetzt. Auf welche Weise die Berechnung dieser Ungleichheiten ausgeführt wird, wollen wir im nächsten Paragraphen durch einige Andeutungen zu zeigen versuchen; irgend welche vollständigere Auseinandersetzung dieses Gegenstandes kann schon deshalb hier nicht gegeben werden, weil dabei sehr tiefgehende mathematische Kenntnisse des Lesers vorausgesetzt werden müssten.

Die Einwirkung der Sonnenmasse auf die Bewegung des Mondes ist besonders auffallend, dagegen ist die gegenseitige Einwirkung der Planeten auf einander im Allgemeinen nicht sehr erheblich; aber je mehr man sich bemüht hat, diese Einwirkungen in Uebereinstimmung mit dem Newton'schen Gesetze zu berechnen und je mehr die Genauigkeit der Beobachtungen zugenommen hat, desto mehr hat auch hier die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung gezeigt, dass jeder Körper im Sonnensystem jeden andern anzieht.

V. Die allgemeine Attractionskraft, mit welcher alle Körper auf einander wirken, geht von jedem Molecül der Körper aus und wirkt auf jedes Molecül; wenn ein Theil eines Körpers abgetrennt wird, wirkt der übrig bleibende Theil mit einer geringeren Kraft, als vorher der ganze Körper.

Es war nicht leicht, einen directen Beweis für diesen Satz zu finden; es wäre hierzu erforderlich gewesen, die verschiedene Einwirkung untersuchen zu können, welche einzelne Theile von Himmelskörpern auf einander ausüben. Auf der Erde konnte man natürlich hierzu geeignete Versuche anstellen, da solche aber jedenfalls nur sehr kleine Theile im Verhältniss zum ganzen Erdkörper betreffen konnten, so wären äusserst feine Instrumente und ganz besonders sinnreich ausgedachte Beobachtungsmethoden erforderlich gewesen, um die sehr geringen Einflüsse wahrnehmen und constatiren zu können. In späteren Zeiten sind solche Experimente indessen gelungen, indem man sie folgendermaassen einrichtete. Eine Metallstange wurde an einem feinen, gedrehten Faden aufgehängt, der in der Mitte der Stange befestigt war, demnach so, dass die Stange in ihrer Gleichgewichtslage eine vollkommen horizontale Stellung einnahm. An beiden Enden der Stange waren ausserdem Bleikugeln befestigt, die genau gleiches Gewicht hatten und also nicht die Gleichgewichtslage der Stange störten. Wenn nun eine grössere Bleikugel in die Nähe der einen von den aufgehängten gebracht wurde, jedoch nicht in der Verlängerung der Stange, zeigte sich deutlich eine Einwirkung, indem die Stange in solche Bewegung versetzt wurde, dass sich die aufgehängte Kugel der grösseren näherte. Liess man nun die grössere Kugel ihre Lage in der Nähe der einen von den beiden aufgehängten Kugeln beibehalten, so führte die Stange eine pendelartige Bewegung um den Aufhängungspunkt aus, gerade wie das gewöhnliche Pendel seine Oscillationen in Folge der Einwirkung der ganzen Erdmasse ausführt. Wir haben im Vorhergehenden (pag. 174) gesehen, dass diese Einwirkung durch die Zeit, welche das Pendel zum Vollbringen seiner Oscillationen braucht, bestimmt werden kann, und ebenso lässt sich auf die Kraft schliessen, mit welcher die grössere Kugel die kleinere anzieht. Auf diesem Wege kann man also das Verhältniss zwischen der anziehenden Einwirkung der Erde und der Bleikugel finden, wobei natürlich Rücksicht auf die Dimensionen der beiden anziehenden Massen zu nehmen ist. Da nun die Masse proportional der Anziehung ist, wenn diese auf dieselbe Entfernung reducirt wird, so lässt sich in dieser Weise das Verhältniss der Bleimasse zur ganzen Erdmasse finden.

Statt des Verhältnisses der Massen zweier Körper giebt man auch häufig, namentlich wenn es sich um irdische Gegenstände handelt, das Verhältniss ihrer Dichtigkeiten an oder auch das ihres specifischen Gewichtes. Diese Begriffe müssen wir erläutern. Einen jeden Körper kann man sich als aus einer sehr grossen Anzahl Molecüle oder Massenelemente zusammengesetzt vorstellen, und man sagt, in Uebereinstimmung damit, dass ein Körper desto mehr Masse hat, je grösser die Anzahl seiner Molecüle ist, oder dass die Masse dieser Anzahl proportional ist. Diese Molecüle können aber in einem mehr oder weniger grossen Raume vertheilt sein, und es ist klar, dass sie, je grösser das Volumen ist, welches sie ausfüllen, desto mehr von einander entfernt sind. Man sagt, wenn dieselbe Quantität Materie in einem grösseren Raume vertheilt ist, dass sie weniger dicht ist, als wenn sie einen geringeren Raum ausfüllt. Zwei an Grösse sehr verschiedene Körper können daher dieselbe Masse haben; die Materie ist in dem einen nur in anderer Weise vertheilt als im anderen. — Körper mit gleicher Masse und von demselben Volumen haben auch gleiche Dichtigkeit; die Dichtigkeit ist aber desto geringer, je grösser das Volumen ist, während die Masse dieselbe bleibt, und umgekehrt. Auf Grund dieser Begriffe hat man die folgende Relation zwischen Masse (m), Volumen (v) und Dichtigkeit (d) festgestellt

$$m = v \,.\, d.$$

Wenn also das Verhältniss zwischen den Massen der Bleikugel und der ganzen Erde durch Versuche bestimmt worden ist, findet man mit Hülfe der obenstehenden Relation auch das Verhältniss der Dichtigkeit des Bleies zu der mittleren Dichtigkeit der Erde, natürlich unter der Voraussetzung, dass das Verhältniss der respectiven Volumina bekannt ist. — Wird die Dichtigkeit des Wassers als Einheit genommen, so ist die Dichtigkeit des Bleis 11.34; für die mittlere Dichtigkeit der Erde hat man im Mittel aus verschiedenen und nach verschiedenen Methoden ausgeführten Bestimmungen den Werth 5.5 gefunden.

Durch die Versuche mit den Bleikugeln ist nun unzweifelhaft bewiesen worden, dass die Erde nicht nur, als Ganzes betrachtet, eine attrahirende Einwirkung ausübt, sondern auch, dass einzelne Theile derselben, entsprechend dem Verhältniss ihrer Massen, wirken. Aber auch durch Versuche anderer Art hat man den Beweis für diese wichtige Thatsache gefunden. — Wenn die Erde eine vollkommene Kugelform hätte, in der die Materie durchaus gleichförmig vertheilt wäre, so würde die Anziehungskraft, welche von dem ganzen Erdkörper ausgeübt wird, beständig gegen ihren Mittelpunkt gerichtet sein. Dies ist aber, genau genommen, keineswegs der Fall. Genauere Messungen der Erdoberfläche haben ergeben, dass dieselbe ein an den Polen abgeplattetes Sphäroid ist, d. h. eine Figur, deren Schnitte vermittelst einer Ebene Kreise sind, wenn die schneidende Ebene parallel mit dem

Aequator liegt, aber Ellipsen, wenn diese Ebene senkrecht auf dem Aequator steht. Man kann aber auch jetzt, wenn die Erdoberfläche in vollkommener Strenge als eine solche Figur betrachtet und ausserdem die Gleichförmigkeit der Massenvertheilung angenommen wird, die an jedem Punkt der Erdoberfläche stattfindende Richtung der Schwerkraft berechnen. Lässt man nun ein Senkblei in der Nähe eines bedeutenden und frei stehenden Berges niederhängen, so wird man — vorausgesetzt dass hinreichend feine Messwerkzeuge angewandt werden — wahrnehmen, dass die Richtung des Lothes um Einiges von der Richtung abweicht, welche die sphäroidische Erdfigur veranlassen müsste. Die an verschiedenen Seiten des Berges angestellten Versuche führen zu der Gewissheit, dass die Attractionskraft des Berges diese Abweichung der Lothlinie von der normalen Richtung der Schwere veranlasst. Derartige Abweichungen nennt man gewöhnlich Localattractionen. — Solche örtliche Anziehungen werden häufig bemerkt, auch wenn kein Berg in der Nähe zu finden ist, oder die Beschaffenheit der Gegend keineswegs dieselben vermuthen lässt; man ist aber jetzt von der Richtigkeit des Newton'schen Gesetzes so vollkommen überzeugt, dass man kein Bedenken trägt, diese Abweichungen entweder durch die Annahme von unterirdischen Bergen zu erklären, worunter wir die Anhäufung der Materie mit grösserer Dichtigkeit als der normalen an der Erdoberfläche verstehen, oder auch von unterirdischen Thälern, je nachdem sich die Abweichungen in der Nachbarschaft verhalten. Wenn das Loth an mehreren Punkten gegen eine von ihnen eingeschlossene Stelle abgelenkt wird, muss eine unterirdische grössere Masse angenommen werden, im entgegengesetzten Falle aber Materie von geringerer Dichtigkeit. Die Anwesenheit der Materie von geringerer Dichtigkeit bringt nämlich in diesem Falle, wo die Umgebung mit dichterer erfüllt ist, dieselbe Erscheinung hervor, als ob von der Höhle eine zurückstossende Kraft ausginge. So hat man gefunden, indem die Abweichungen an verschiedenen Punkten der Umgebung der Stadt Moskau untersucht wurden, dass in der Nähe oder unter der Stadt selbst bedeutende unterirdische Höhlen vorhanden sind; ebenso hat man angenommen, dass sich das Himalayagebirge über unterirdischen Fundamenten oder beträchtlichen Massen erhebt.

Zu Newton's Zeit wurden dergleichen Versuche und Untersuchungen, wie die zuletzt erwähnten, weder ausgeführt noch konnten sie ausgeführt werden, weil hierzu ganz besonders fein construirte Messinstrumente und Apparate nöthig sind; aber nichtsdestoweniger gelang es Newton, wenigstens theilweise, darzuthun, dass jedes Massenelement dem allgemeinen Gravitationsgesetze unterworfen ist. Er konnte nämlich zeigen, dass Sonne und Mond nicht allein die Erde als Gesammtmasse anziehen, sondern auch und eigentlich jedes einzelne bewegliche Molecül derselben; und zwar ist es das Wasser der Oceane, das durch seine Menge und seine Beweglichkeit den Bestandtheil des Erdkörpers bildet, an welchem man die in Rede stehende Erfahrung machen konnte. — Bei flüchtigem Nachdenken könnte man meinen, dass sich das Wasser, indem es sowohl der Anziehungskraft des Mondes wie des festen Erdkörpers unterworfen ist, vorzugsweise um den Ort der Erde ansammeln würde, in dessen Zenith der Mond sich gerade befindet, weil dieser Punkt dem Monde am nächsten ist. Indessen verhält sich die Sache nicht so, und der Fehler einer solchen Vorstellungsweise würde in dem Umstande zu suchen sein, dass weder der Mond noch die Erde fest im Weltraume sind, sondern im Gegentheil jeder der Einwirkung anderer Anziehungen unterworfen. Die Wassermenge, welche auf der dem Monde zugewendeten Hälfte der Erdoberfläche vorhanden ist, wird allerdings von diesem Weltkörper stärker angezogen als der feste Erdkörper, weshalb auch dieser Theil der Oceane einen Wasserberg oder eine grosse Welle bilden muss, deren Rücken gegen den Mond gerichtet ist. Der übrige Theil des Wassers, auf der andern Seite der Erde, wird aber wieder weniger angezogen, weil er weiter von dem Monde entfernt ist als der feste Erdkörper, dessen Masse hier als im Mittelpunkte concentrirt gedacht werden darf. Die Folge dieser Verschiedenheit in der Anziehung kann natürlich keine andere als die sein, dass der feste Erdkörper dem Mond etwas mehr genähert wird, als das Wasser auf der dem Monde abgewandten Halbkugel. Dieses Wasser muss also streben, eine Welle zu bilden, deren Rücken von dem Monde abgewendet ist; das Resultat der Einwirkung des Mondes auf die Gewässer der Erde ist daher das folgende. Sowohl an dem Punkt der Erde, in dessen Zenith der Mond steht, wie auch an dem diametral gegenüberliegenden, erhebt sich die Spitze einer Wasserwelle, und weil — in Folge der Drehung der Erde — verschiedene Punkte nach und nach unter den Mond, d. h. auf die Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkt von Erde und Mond zu liegen kommen, so schreiten diese Wellen in derselben Richtung wie die scheinbare Bewegung des Mondes oder in entgegengesetzter der Erddrehung vor. Die Erscheinung dieser Wellenbewegung ist allbekannt unter dem Namen Ebbe und Fluth. In Folge des Annäherns der erwähnten Wellen steigt das Wasser in den Oceanen und namentlich an den Küsten und in Meerengen, wo die Wellen sich nicht frei fortbewegen können, zweimal während vierundzwanzig Stunden und zweimal sinkt es wieder zurück. Wären hier keine Nebenumstände vorhanden, so würde die höchste Höhe des Wassers in dem Augenblicke eintreffen, wo der Mond den Meridian passirt, entweder sichtbar im Süden, wo er — vorausgesetzt dass der Beobachter sich auf der nördlichen Halbkugel befindet — dem betreffenden Ort am nächsten ist, oder (im Allgemeinen unsichtbar) im Norden, zu welcher Zeit die Entfernung vom Monde am grössten ist. Verschiedene Ursachen bewirken indessen, dass die Erscheinung keinen so regelrechten Verlauf nimmt. Der Meeresboden und die Configuration der Küsten legen dem regelmässigen Vorwärtsschreiten der Fluthwelle Hindernisse in den Weg, weshalb die verschiedenen Phasen von Ebbe und Fluth gewöhnlich einige Zeit nach dem Meridiandurchgang des Mondes eintreffen. Der Unterschied ist für verschiedene Orte verschieden, bleibt sich aber für denselben Ort gleich, soweit nicht zufällige Störungen eintreten, wie z. B. Stürme in der Nachbarschaft u. dgl. m. Hat man deshalb einmal die Verspätung des Hochwassers beobachtet, so kann man für die Zukunft die Zeiten voraussagen, zu welchen das Hochwasser eintreten wird, was auch in den nautischen Kalendern für die wichtigsten Hafenplätze geschieht. Die fragliche Verspätung nennt man Hafenzeit (englisch tide).

Aber Ebbe und Fluth entstehen nicht allein in Folge der Anziehungskraft des Mondes auf die Bestandtheile der Erde, auch die Sonne veranlasst eine analoge Erscheinung, die jedoch quantitativ geringer ist. Es kann einen Augenblick paradox erscheinen, dass die Sonne, deren Anziehungskraft auf die Erde unvergleichlich viel grösser ist als die des Mondes, nichts destoweniger geringere Fluthwellen als der Mond verursacht; indessen ist die Erklärung hierfür ebenso einfach wie leicht gefunden. Man braucht nämlich nur daran zu denken, dass Ebbe und Fluth in Folge ungleicher Einwirkung der betreffenden Himmelskörper auf das Wasser und auf den festen Erdkörper entstehen, dass aber die Verschiedenheit dieser Einwirkung nur eine Folge der verschiedenen Entfernungen ist. Führt man die Berechnung dieser Einwirkungen aus, so wird man leicht finden, dass die Sonnenfluth geringer als die Mondfluth sein muss. Dies ist auch durch Beobachtungen vollkommen bestätigt werden. — Wenn Sonne und Mond gleichzeitig culminiren, sei es im Norden oder im Süden, oder auch so, dass das eine Gestirn im Süden culminirt, während das andere im Norden unter dem Horizonte den Meridian passirt, so ist die Fluth stets höher, als wenn beide Gestirne 6 Stunden nach einander culminiren. Durch Vergleichung der Höhen des Hochwassers zu den verschiedenen Aspecten kann man das Verhältniss der beiden Einwirkungen ermitteln, und man hat dabei gefunden, dass die Sonnenfluth nur $\frac{2}{5}$, oder genauer 0.4255 der Mondfluth beträgt. Es ist schwer, aus den Beobachtungen von Ebbe und Fluth eine genaue und sichere Bestimmung dieses Verhältnisses zu erlangen, aber immerhin erhält man auf diesem Wege eine approximative Bestimmung der Mondmasse im Verhältniss zur Sonnenmasse.

Wir bezeichnen durch r den Abstand des Mondes von einem Punkt der Erdoberfläche, den wir uns, der Einfachheit wegen, auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte von Erde und Mond denken; ferner den Halbmesser der Erde mit a und die Masse des Mondes mit m; die Wirkung der Anziehung des Mondes auf den fraglichen Punkt ist nun nach Newton's Gesetz gegeben durch den Ausdruck:

$$\frac{m}{r^2}$$

und die auf den festen Erdkörper, dessen Masse wir als im Mittelpunkte concentrirt denken, durch:

$$\frac{m}{(r+a)^2}$$

Der Unterschied beider Wirkungen beträgt:

$$m\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{(r+a)^2}\right)=m\frac{a(2r+a)}{r^2(r+a)^2}$$

Nun ist aber a ziemlich klein im Verhältniss zu r; wir dürfen daher, umsomehr, da wir keine sehr grosse Genauigkeit erstreben, a neben r vernachlässigen, und haben alsdann den Ausdruck

$$2\frac{ma}{r^3}$$

für die Grösse, um welche das Wasser mehr gegen den Mond erhoben wird, als der ganze Erdkörper.

In ähnlicher Weise findet man den Ausdruck

$$2\frac{Ma}{R^3}$$

für die Solarfluth, wenn M die Sonnenmasse und R die Entfernung der Sonne bezeichnet. Durch Division dieser beiden Ausdrücke findet man das Verhältniss der Solarfluth zur Lunarfluth, und da dieses Verhältniss durch Beobachtungen zu 0.4255 ermittelt wurde, so hat man:

$$0.4255 = \frac{M}{m}\frac{r^3}{R^3}.$$

Nimmt man die Erdmasse als Einheit an, so ist $M = 319455$ *); ferner ist, wie neuere Untersuchungen ergeben haben: $\frac{R}{r} = 385,05$. Hiernach findet sich

$$m = \frac{1}{76},$$

ein Werth, der nahe genug mit exacteren, auf rein astronomischen Wegen gefundenen Bestimmungen der Mondmasse übereinstimmt. Diese geben nämlich:

$$m = \frac{1}{80}.$$

Weil Ebbe und Fluth von der Entfernung des Mondes von der Erde abhängen, so müssen die Fluthhöhen zu den Zeiten, wo der Mond in seinem Perigäum ist, grösser sein, als zu den Zeiten des Apogäums. Dies ist auch deutlich zu bemerken, wenn die Beobachtungen über die Erscheinungen des Hochwassers während eines längeren Zeitraumes fortgesetzt werden, und in derselben Weise kann man in dem Verlauf des periodischen Steigens und Sinkens des Meerwassers viele Eigenthümlichkeiten der Sonnen- und Mondbewegung sich abspiegeln

---

*) Dieser Werth, welcher von Hansen herrührt, weicht nicht unerheblich von älteren Bestimmungen ab. Derselbe steht aber in voller Harmonie mit den neueren Bestimmungen der Sonnenparallaxe.

sehen; um so mehr, je sorgfältiger die Beobachtungen angestellt werden. Es ist demnach kein Zweifel mehr darüber, dass die Ursache von Ebbe und Fluth in der Anziehungskraft der Sonne und des Mondes zu suchen ist, und dass diese Himmelskörper nicht nur die Erde als Gesammtmasse, sondern auch ihre einzelnen Theile, jeden für sich, anziehen.

Dass aber auch der feste Erdkörper in seinen verschiedenen Theilen dem allgemeinen Gravitationsgesetze unterworfen ist, konnte aus folgenden Gründen erwiesen werden, obgleich die Bestätigung in einzelnen Punkten erst nach Newton's Zeit erfolgte. Wäre die Erde eine homogene Kugel, d. h. eine Kugel, in welcher die Masse vollkommen gleichförmig vertheilt ist, so dass die Dichtigkeit in jedem Punkte dieselbe bleibt, so könnte die Einwirkung des Mondes nur in einem Streben bestehen, die gegenseitige Entfernung beständig zu vermindern, genau so, als wenn die ganze Erdmasse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Die Einwirkung müsste aber andere Folgen haben, wenn die angezogene Masse innerhalb einer nicht kugelförmigen Oberfläche vertheilt wäre, deren Dimensionen nicht verschwindend kleine Werthe im Verhältniss zu der Entfernung der sich anziehenden Körper hätten. Wie aber schon früher erwähnt wurde, ist die Figur der Erde nicht vollkommen die einer Kugel, obgleich die Abweichung von einer solchen nicht sehr erheblich ist. Die genauen Messungen ergaben, dass der Durchmesser des Erdsphäroids von Pol zu Pol 12713725 Meter beträgt, während ein Durchmesser in der Ebene des Aequators sich auf 12757431 Meter beläuft; der Unterschied beträgt 43706 Meter oder beiläufig 5.7 geographische Meilen. So klein dieser Unterschied auch erscheinen mag, so ist er doch bei der verhältnissmässig nicht allzu bedeutenden Entfernung des Mondes und der Sonne von der Erde gross genug, um die Einwirkung beider Körper auf verschieden gelegene Theile des Erdkörpers bemerkbar werden zu lassen, eine Einwirkung, die nicht bemerkt werden könnte, wenn die Erde vollkommen kugelförmig wäre, und die überhaupt nicht stattfände, wenn nicht jedes einzelne Molecül der Erdmasse angezogen würde.

Die Ermittelung dieser Einwirkung des Mondes und der Sonne geschieht nach rein mechanischen Regeln, von denen wir einige im

Vorhergehenden bereits angeführt haben. In Bezug auf einen Körper, der aus mehreren materiellen Punkten besteht, müssen jedoch noch einige hinzugefügt werden. — Wir müssen indessen hierbei die grösste Kürze beobachten und uns eigentlich nur auf Andeutungen beschränken, hauptsächlich weil die elementare Entwicklung derselben meistens nur auf längeren Umwegen erreicht werden könnte. Trotzdem ist der Ausgangspunkt nicht weniger einfach und einleuchtend wie bei den Regeln, nach welchen die Bewegung eines materiellen Punktes ermittelt werden kann; derselbe bildet nämlich nur eine Erweiterung der bereits vorgetragenen Principien, aber die mathematische Darlegung der Bewegungsgesetze eines Körpers ist in weit höherem Grade verwickelt als die eines materiellen Punktes.

Die Bewegung eines freien, festen Körpers ist eine zweifache: nämlich eine fortschreitende im Raume und eine drehende um einen Punkt im Innern, welcher der Schwerpunkt des Körpers genannt wird. Derselbe ist durch die folgende Definition bestimmt. Wie auch ein fester Körper oder ein festes System materieller Punkte beschaffen sein mag, so giebt es innerhalb desselben doch stets einen Punkt von solcher Beschaffenheit, dass das ganze System in Ruhe sein würde, wenn es nur in diesem befestigt und jeder materielle Punkt des Systems von parallelen und gleich grossen Kräften angegriffen wäre. Dieser Punkt ist eben der Schwerpunkt. Wenn aber ein anderer Punkt des Systems befestigt wäre, jedoch so, dass die übrigen ungehindert sich um denselben in unveränderlichen Abständen bewegen könnten, so würde das ganze System eine solche Lage einnehmen oder einzunehmen streben, dass der Schwerpunkt auf der geraden Linie liegen würde, die durch den befestigten Punkt parallel mit den Richtungen der Kräfte gezogen wird. Hierbei können jedoch zwei ganz verschiedene Fälle eintreten. In dem einen liegt der Schwerpunkt in der Richtung von dem festen Punkte, in welcher die parallelen Kräfte das ganze System zu ziehen streben: eine kleine Verrückung des Systems aus der Gleichgewichtslage würde in diesem Falle nur eine kleine, auf diese Lage zurückgehende Bewegung verursachen, falls das System sich selbst und den gegebenen Kräften überlassen würde. Befindet sich dagegen der Schwerpunkt auf der entgegengesetzten Seite des festen Punktes, so wird die Bewegungserscheinung eine ganz andere, wenn das System um ein Unbedeutendes aus der Gleichgewichtslage verrückt wird. Der Schwerpunkt würde nämlich jetzt, und mit ihm alle übrigen Punkte des Systems, Halbkreise um den festen Punkt beschreiben, und erst nach Vollendung dieser Bewegung in die Gleichgewichtslage kommen, welche aber alsdann die des ersten Falles sein würde. Bekanntlich nennt man die erste Art stabiles, die zweite hingegen labiles Gleichgewicht; bei ersterer liegt, wenn wir materielle Systeme auf der Erde betrachten, der Schwerpunkt unter dem Befestigungspunkte, bei der zweiten darüber.

Als Beispiel dieser beiden Arten von Gleichgewicht kann man sich das Verhalten einer gewöhnlichen Rollscheibe denken, die leichtbeweglich um einen Stift drehbar ist, welcher durch einen beliebigen Punkt der Scheibe geht. Man kann nun freilich die Rollscheibe so balanciren, dass das Gleichgewicht stattfindet, während der Mittelpunkt, den wir uns als mit dem Schwerpunkt zusammenfallend denken, über dem Aufhängepunkt liegt. Hierbei ist aber das Gleichgewicht labil; die kleinste Verrückung, welche dasselbe stört, hebt es auch ganz und gar auf, und die Rolle dreht sich um den Stift, bis sie in die neue und stabile Gleichgewichtslage kommt, wo der Schwerpunkt senkrecht unter dem Aufhängepunkt liegt.

In Bezug auf einen Körper, der in Bewegung ist, hat man vor Allem den wichtigen Satz festgestellt, dass die Bewegung des Schwerpunktes stets unabhängig von der Bewegung der verschiedenen ihn umgebenden Massentheile ist; und umgekehrt, dass deren Bewegung wieder unabhängig von der Bewegung des Schwerpunktes ist. Die Gültigkeit dieses Satzes bleibt auch dann noch bestehen, wenn das bewegliche System nicht starr ist, d. h. nicht die Form eines einzigen festen Körpers hat, sondern aus mehreren, in verschiedener Bewegung befindlichen Körpern zusammengesetzt ist. Demnach hat der Umstand, dass die Planeten in Bewegung um die Sonne sind, nicht den geringsten Einfluss auf die Lage des Schwerpunkts im Raum oder auf seine eventuelle Bewegung. Die verschiedenen Lagen der Planeten können nur bedingen, dass die Sonne innerhalb des Systems verschiedene Lagen einnimmt in Bezug auf dessen gemeinsamen Schwerpunkt. Der Schwerpunkt des Planetensystems ist fest, wenn man von der jedenfalls stattfindenden gemeinsamen Bewegung im

Raume, an der die Sonne und alle Planeten theilnehmen, absieht; Sonne und Planeten hingegen sind in Bezug auf diesen beweglich.

Auf der anderen Seite sind die Bewegungen innerhalb des Sonnensystems, d. h. in Bezug auf den gemeinsamen Schwerpunkt, vollkommen unabhängig von der Bewegung dieses Punktes im Raume. Diese Bewegung kann höchstens einen indirecten Einfluss ausüben, dadurch nämlich, dass das Sonnensystem durch dieselbe in die Nähe grösserer Massen geführt werden könnte, deren Einwirkung auf die relativen Bewegungen innerhalb des Systems merklich werden würde.

Auch die Kräfte, welche innerhalb eines Systems wirksam sind, dasselbe mag starr oder frei sein, üben keinen Einfluss auf die Bewegung des Schwerpunktes. Die Erde könnte z. B. den durchgreifendsten Veränderungen unterworfen sein, ihre äussere Figur eine ganz andere werden und die Massenvertheilung im Innern vollständig umgestaltet werden, ihr Schwerpunkt würde dessenungeachtet fortfahren, die bisherige Bahn um die Sonne zu beschreiben. — Nur wenn materielle Theile abgetrennt und in den Raum fortgeschleudert würden, müsste die Bewegung des Schwerpunktes der übrig bleibenden Masse eine andere werden als zuvor.

An der Bewegung des Schwerpunktes im Raume nehmen die einzelnen Massen des Systems natürlich Theil; jeder feste Körper würde also auch, wenn keine äusseren Kräfte auf ihn einwirkten, wie ein materieller Punkt in einer geradlinigen Bahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreiten. Diese Bewegung ist aber nicht die einzige. Die einzelnen Theile eines Körpers können auch um seinen Schwerpunkt in Bewegung sein. Weil aber jeder zum Körper gehörende Punkt mit diesem unveränderlich verbunden ist — denn sonst würde der Körper kein fester sein — so sind die Abstände der verschiedenen Partikelchen vom Schwerpunkte unveränderlich dieselben, und folglich muss jeder Punkt bei seiner Bewegung auf der Oberfläche einer Sphäre bleiben, die um den Schwerpunkt als Mittelpunkt beschrieben und deren Halbmesser gleich der unveränderlichen Entfernung des Partikelchens vom Centrum ist. Es ist klar, dass die Bewegungen sämmtlicher Punkte eines Körpers um den Schwerpunkt vollständig gegeben sind, wenn man nur die eines einzelnen Punktes kennt.

Diese Bewegung eines Körpers um den Schwerpunkt nennt man seine Rotationsbewegung; zur Erklärung derselben hat man ebensowenig die Annahme von Kräften nöthig, wie bei der geradlinigen Bewegung eines Punktes. Während letztere Bewegung aber sehr einfach ist und ihre Gesetze leicht in der mathematischen Ausdrucksweise anzugeben sind, bedarf es schwer zugänglicher Hülfsmittel, um die Natur der Rotationsbewegung auch bei vollständiger Abwesenheit von äussern Kräften zu erkennen. Anfangs betrachtete man nur den einfacheren Fall dieser Bewegung, wo der Körper stets um dieselbe Axe rotirt. Sämmtliche Rotationen, die wir bei den Himmelskörpern kennen, gehören auch diesem Falle an, wenigstens sind die Abweichungen der wirklichen Rotationsbewegungen von dieser Regel äusserst gering. Das allgemeine Gesetz der Rotation wird jedoch hierdurch nicht ausgedrückt. Tiefere mathematische Untersuchungen der in Rede stehenden Frage haben nämlich gezeigt, dass man zwar den Körper als während einer sehr kleinen Zeit um eine Axe rotirend ansehen kann, dass aber diese Axe die Lage innerhalb des Körpers fortwährend ändert. Die Bewegung dieser Axe ist theils abhängig von der Massenvertheilung innerhalb des Körpers, theils von ihrer Lage, die zu einer gegebenen Zeit vollkommen willkürlich ist. Die Lage der Rotationsaxe kann nämlich jede beliebige sein, ohne dass man deshalb anzunehmen braucht, eine besondere Kraft sei hierbei wirksam gewesen; ist aber diese Lage für irgend einen Zeitpunkt bestimmt und kennt man die Massenvertheilung im Körper, so kann man durch mathematische Analyse diese Lage für jeden andern Zeitpunkt bestimmen.

Indessen kann die Rotation um den Schwerpunkt auch so beschaffen sein, dass sie stets um dieselbe, durch den Schwerpunkt gehende Axe stattfindet, wobei die einzelnen Partikelchen des Körpers mit gleichförmiger Geschwindigkeit Kreise beschreiben um Mittelpunkte, die sämmtlich auf der Rotationsaxe liegen; natürlich sind die Punkte an dieser Axe selbst unbeweglich. Diese Art von Rotation findet immer dann statt, wenn die Axe während einer endlichen Zeit dieselbe Lage im Körper beibehalten hat. Hat der Körper überdies eine fortschreitende Bewegung, so bleibt die Rotationsaxe stets parallel mit sich selbst im Raume, dies Alles unter der Voraussetzung, dass keine äussern Kräfte einwirken, sowie dass die Massenvertheilung keine

Aenderung erleidet. Geschieht letzteres, so muss die Rotationsbewegung nothwendig geändert werden.

Ein solcher Fall zeigt sich uns in der Rotation der Erde. A priori können wir zwar nicht wissen, ob die Rotationsaxe im Erdkörper eine unveränderliche Lage hat oder nicht; das letztere wäre wahrscheinlicher, weil es das Allgemeinere ist. Aber die genauesten Beobachtungen haben bisher nichts anderes zu erweisen vermocht, als dass die Umdrehungsaxe stets dieselbe Lage im Erdkörper beibehält, woraus folgt, dass sie auch dieselbe Richtung beibehalten würde, wenn keine äussern Kräfte wirksam wären. Hiernach dürfen wir aber auch schliessen, dass, wenn die Richtung dieser Axe nicht dieselbe bleiben sollte, äussere Kräfte die Rotationsbewegung der Erde beeinflussen, falls man nicht die geänderte Richtung bedeutendern Veränderungen der Massenvertheilung zuschreiben kann. Angestellte Rechnungen haben jedoch erwiesen, dass durch letzteres die Richtung der Erdaxe nur höchst unbedeutend verändert werden kann. — Der Umstand, dass die Drehungsaxe — wenigstens wenn wir von sehr kleinen Grössen absehen — dieselbe Lage innerhalb des Erdkörpers beibehält, ist übrigens sehr beachtenswerth. Wir dürfen denselben schwerlich einem Zufall zuschreiben, denn ein solcher ist höchst unwahrscheinlich; wir müssen vielmehr annehmen, dass die Erde in solcher Weise entstanden und ausgebildet worden ist, dass die Masse sich symmetrisch um die Rotationsaxe gelagert und durch ihre Beweglichkeit die etwaigen ursprünglichen Schwankungen vernichtet hat.

Es wurde schon oben hervorgehoben, wie die Massenvertheilung der Erde gestattet, dass die Anziehungskraft des Mondes auf einzelne Theile des Erdkörpers bemerklich werden kann. Der Einfluss dieser Anziehung ist nun an der Rotation der Erde zu erkennen. Um die unter dem Einflusse der Anziehungskraft des Mondes vor sich gehende Rotationsbewegung zu finden, ist es vor allen Dingen erforderlich, die Einwirkung dieser Kraft auf die einzelnen Theile des Erdkörpers zu berechnen. Diese Berechnung für jeden einzeln angezogenen Partikel oder auch für eine grosse Anzahl solcher anzustellen, ist jedoch nicht nöthig, sondern es genügt für die Anziehung ein allgemeiner mathematischer Ausdruck, in welchen die Coordinaten der Partikel als unbestimmte Grössen eingehen, für die man, wenn es gefordert wird, nach und nach verschiedene numerische Werthe einsetzen kann.

Man kann sogar einen Ausdruck erhalten, aus dem durch sehr einfache mathematische Operationen die Componenten der Anziehung, in irgend einer beliebigen Weise zerlegt, gefunden werden. — Nachdem die Wirkungen auf die verschiedenen Punkte somit gegeben sind, findet man auch, wie die vorhandenen Rotationsbewegungen derselben geändert werden. — Die Anziehung des Mondes auf den gesammten Erdkörper findet man hierauf, indem die Anziehungen auf die einzelnen Massentheile summirt werden, und in derselben Weise ergiebt sich auch die Gesammtwirkung des Mondes auf die Rotation des Erdkörpers, wobei jedoch der Umstand nicht übersehen werden darf, dass die Elemente der Masse mit einander fest verbunden sind, so dass also die Bewegung eines einzigen die der übrigen bestimmt. In Folge dieses Umstandes wird ein grosser Theil der erwähnten Einwirkung vernichtet; denn während der Mond strebt, die Rotationsbewegung des einen Elementes zu vergrössern, wird die des diametral gegenüber liegenden Elementes verringert. Die ganze Einwirkung würde vollständig vernichtet werden, wenn die Erde eine Kugel wäre. Es könnte scheinen, als ob die Summirung der partiellen Einwirkungen, weil ihre Anzahl unendlich gross ist, eine über alle Maassen mühsame Arbeit verursachen würde; dies ist jedoch nicht der Fall. Die höhere Mathematik bietet Methoden dar, durch welche derartige Summationen mittelst weniger, häufig sehr leichter Operationen ausgeführt werden können, wenn nur die Glieder, die summirt werden sollen, durch einen allgemeinen Ausdruck gegeben sind.

Es wurde soeben angedeutet, wie man durch Rechnung den Einfluss des Mondes auf die Rotationsbewegung der Erde finden kann. Die Berechnungen selbst müssen wir übergehen; sie können nicht in Kürze mitgetheilt werden, und erfordern überdies, wie schon erwähnt wurde, keine geringen Einsichten in die höhere Mathematik. Ein Punkt muss jedoch hervorgehoben werden. Es scheint, dass bei den erwähnten Summationen die Vertheilung der Masse im rotirenden Körper bekannt sein müsse, weil ja davon die Lage des Schwerpunktes im Körper und auch seine Gleichgewichtslage unter dem Einflusse paralleler Kräfte abhängt. Aber wenn auch diese Vertheilung nicht bekannt ist, wie sie es der Natur der Sache nach nicht sein kann, da man weder ins Innere der Erde tief genug eindringen, noch durch sonstige Mittel die Dichtigkeit in den tieferen

Erdschichten und deren Veränderung direct ermitteln kann, so lässt sich doch die in Frage stehende Einwirkung angeben, wenn auch unter einer unbestimmten Form. Das Resultat erscheint nämlich multiplicirt mit einem unbekannten Coefficienten oder Factor, welcher gerade von der Massenvertheilung abhängig ist. Sobald aber das Resultat einmal unter einer solchen Form erhalten worden ist, wird man immer Wege finden, den in Rede stehenden Factor auf Grund der zu verschiedenen Zeiten beobachteten Richtung der Erdaxe zu bestimmen. Man kann sich auch eine ungefähre Vorstellung über den Betrag des fraglichen Coefficienten dadurch verschaffen, dass man die Dichtigkeit der Erdmasse als in allen Punkten gleich annimmt. Man würde alsdann auf Grund der als bekannt angenommenen ellipsoidischen Figur der Erdoberfläche einen gewissen Werth für diesen Factor berechnen können, mithin auch, wenn die Mondmasse bekannt ist, die Einwirkung des Mondes auf die Rotation der Erde. Die Hypothese, dass die Dichtigkeit im Innern der Erde gleichförmig sei, ist jedoch nur auf reine Vermuthung begründet; sie kann daher möglicherweise sehr falsch sein und es giebt sogar sichere Anzeichen, dass sie nicht richtig ist.*)

Newton untersuchte die vereinigten Wirkungen von Sonne und Mond auf den rotirenden Erdkörper; freilich keineswegs vollständig, aber doch so, dass sein Resultat das Wesentliche der neueren Theorie der Erdrotation andeutete. Dieses Resultat ist kurz folgendes. Die Rotationsgeschwindigkeit der Erde um ihre Axe (welche die Beobachtungen als fast vollkommen unveränderlich innerhalb des Erdkörpers erwiesen haben) bleibt unverändert, auch bei der Einwirkung der Anziehungen von Sonne und Mond. Dagegen veranlassen diese, dass die Rotationsaxe ihre Lage im Raume ändert, d. h. dass dieselbe zu verschiedenen Zeiten andere Richtungen annimmt. Diese Veränderungen in der Richtung der Erdaxe sind in Hinsicht ihres Verlaufes von zweierlei, wesentlich verschiedener Art. Erstens wird durch die vereinte Einwirkung von Sonne und Mond auf den sphäroidischen

---

*) Da die mittlere Dichtigkeit der Erde 5.5 ist (vgl. pag. 186), die Dichtigkeit an der Oberfläche indessen kaum 3, so folgt schon hieraus die Unrichtigkeit der Hypothese, wenigstens hinsichtlich der höher gelegenen Erdschichten.

Erdkörper eine langsame Drehung der Erdaxe veranlasst, indem dieselbe, oder richtiger, ihre Verlängerung nach beiden Richtungen Kreise an der scheinbaren Himmelskugel beschreiben. Da ferner die Rotationsaxe senkrecht auf dem Aequator steht, so folgt, dass auch diese Ebene in einer Drehung begriffen sein muss. Während derselben behält die Erdaxe fast unverändert dieselbe Neigung gegen eine durch den Schwerpunkt des Erdkörpers senkrecht auf der Ekliptik gezogene Gerade, folglich bleibt auch die Neigung des Aequators gegen die Ekliptik stets dieselbe. *) Die gegenseitige Lage dieser beiden Ebenen ändert sich also nur dadurch, dass ihre Durchschnittslinie sich um den Schwerpunkt der Erde und zwar in der Ekliptik mit gleichförmiger Geschwindigkeit dreht, ebenso wie die Erdaxe um die auf der Ekliptik stehende senkrechte Linie. — Die zweite Wirkung des Einflusses von Sonne und Mond auf die Erdrotation ist eine periodische Schwankung der Erdaxe, durch welche auch die Lage der Aequinoctialpunkte periodisch verändert wird. Auch entsteht eine gleichfalls periodische Aenderung der Schiefe der Ekliptik.

Die Erscheinung von dem Rückschreiten der Aequinoctialpunkte oder die Präcession haben wir schon im Vorhergehenden besprochen. Das allgemeine Gravitationsgesetz ermöglicht also eine physische Erklärung dieser schon aus dem Alterthume bekannten Erscheinung, die bis hierher nur geometrisch behandelt worden war. Anderseits beweist aber gerade die Präcession, dass Sonne und Mond die einzelnen Theile des Erdkörpers und nicht nur die Erdmasse als Ganzes anziehen. — Das periodische Schwanken der Erdaxe wurde schon von Newton angegeben, konnte aber zu seiner Zeit noch nicht aus den Beobachtungen erkannt werden; erst Mitte des 18. Jahrhunderts wurde die Aussage Newton's durch die feinen Messungen Bradley's bestätigt.

Newton's Untersuchungen beruhen zum grossen Theil auf geometrischen Constructionen; nach seiner Zeit aber fand man in der algebraischen Analyse ein leichter anzuwendendes und in Folge dessen kräftigeres Mittel, die Einwirkung der Anziehungen zu ermitt-

---

*) Die Ekliptik ändert selbst ihre Lage im Raume, obgleich sehr langsam, folglich ist auch die Schiefe der Ekliptik aus diesem Grunde einer Veränderung unterworfen.

teln. Mit Hülfe derselben wurde nun die Theorie der Erdrotation vollständiger von d'Alembert untersucht. Es zeigte sich dabei, dass die Schwankung der Erdaxe, welche Nutation genannt wird, durch mehrere Glieder ausgedrückt werden muss. Das grösste dieser ist dasselbe, dessen Existenz Newton vorhersagte; seine Periode ist die Umlaufszeit der Mondknoten, oder $18\frac{2}{3}$ Jahre. Bezeichnet man die Länge des aufsteigenden Knotens mit ☊, so hat man für die Aenderung, welche die Längen der Sterne in Folge der Nutation erfahren, den Ausdruck

$$- 17''.24 \operatorname{Sin} ☊$$

und für die Aenderung der Schiefe

$$+ 9''.24 \operatorname{Cos} ☊$$

Die numerischen Coefficienten dieser Ausdrücke hängen indessen in der Weise von einander ab, dass sobald der eine bekannt ist, der andere durch eine sehr einfache Rechnung gefunden werden kann. Man braucht daher nur einen derselben aus Beobachtungen zu bestimmen. — Wird der erste dieser Coefficienten mit N_1, der zweite mit N und die Schiefe der Ekliptik mit Θ bezeichnet, so ist die Relation zwischen diesen Coefficienten die folgende:

$$N_1 = 2 \operatorname{Cotang} \Theta . N$$

In Folge der Präcession wachsen alle Längen der Himmelskörper jährlich um $50''.376$. Diesen Betrag bezeichnen wir mit P, und werden jetzt eine ebenso einfache wie nützliche Relation zwischen P und N anführen, die ganz und gar durch theoretische Betrachtungen gewonnen worden ist. Wir bezeichnen hierbei die, schon bei der Frage von Ebbe und Fluth vorkommende Grösse $\frac{m}{M} \frac{R^3}{r^3}$ mit x, und den besprochenen, von der Massenvertheilung im Innern der Erde abhängigen Factor mit y; alsdann ist

$$N = 0.24356\, x . y$$
$$P = (0.91769 + 0.91006\, x)\, y$$

woraus durch Division folgt

$$N = \frac{0.24356\, x}{0.91769 + 0.91006\, x}\, P$$

Aus den Beobachtungen über Ebbe und Fluth folgt

$$x = 2.3502$$

Wird dieser Werth eingesetzt, so findet man

$$N = 0.1872\ P$$

Nun ist P durch Vergleichung der zu verschiedenen Zeiten bestimmten Längen der Sterne zu 50″.376 gefunden worden; berechnet man mit diesem Werthe den von N, so findet sich

$$N = 9''.43$$

welcher allerdings von dem richtigen Werthe 9″.24 etwas abweicht, jedoch nicht mehr, als dass der Unterschied durch die Unsicherheit des aus Ebbe und Fluth ermittelten Werthes von x vollkommen erklärt werden könnte.

Hat man aber auch den Werth von N durch Sternbeobachtungen ermittelt, so lässt sich die Mondmasse bestimmen; auf diese Weise hat man für sie $\frac{1}{81}$ der Erdmasse gefunden. Die Mondmasse lässt sich aber auch auf anderem Wege ermitteln, wonach man wieder eine Bestimmung des Nutationscoefficienten erhalten kann. Die Bewegung der Erde um die Sonne geschieht nämlich nicht genau in einer Kepler'schen Ellipse, sondern der Mond verursacht einige kleine Abweichungen davon; aus diesen wurde der Werth $\frac{1}{79.667}$ für die Mondmasse gefunden.

Die grosse Uebereinstimmung der so auf ganz verschiedenen Wegen gefundenen Werthe für die Anziehungskraft des Mondes beweist die Richtigkeit der Voraussetzungen, auf welche die Theorie der Bewegungen gebaut ist, mithin auch die Richtigkeit des Newton'schen Gesetzes, von welcher Seite aus es auch betrachtet werden mag.

Bisher haben wir das Wesen des Newton'schen Gesetzes so dargestellt, wie es in der Astronomie aufgefasst zu werden pflegt, dabei wird aber stillschweigend ein Sprung gemacht, dessen Berechtigung noch nachgewiesen werden muss. Die Anziehung zweier materieller Punkte auf einander, deren Massen m und m' sind, wird nämlich durch den Ausdruck

$$f \cdot \frac{m \cdot m'}{r^2}$$

dargestellt, wo r die Entfernung beider Punkte von einander bedeutet und f die gegenseitige Anziehung zweier Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung. Demnach ist die Anziehung des Mondes auf die Erde genau dieselbe, wie die der Erde auf den Mond, aber die Wirkungen beider Anziehungen sind sehr verschieden. Durch die Anziehung wird nämlich eine mechanische Arbeit verrichtet, die gleich dem Producte aus der Beschleunigung (zuertheilten Geschwindigkeit) und der bewegten Masse ist. Dieses Product, welches in unserm Falle gleich der Anziehung sein muss, nennt man auch bewegende Kraft. Bezeichnet man nun die Beschleunigungen der Massen m und m' mit $-s$ und $-s'$ (das negative Vorzeichen, weil die Anziehung die gegenseitigen Entfernungen zu vermindern strebt), so haben wir

$$-ms = f.\frac{mm'}{r^2}\ ; \qquad -ms' = f.\frac{mm'}{r^2}$$

oder

$$-s = f.\frac{m'}{r^2}\ ; \qquad -s' = f.\frac{m}{r^2}$$

Es sind also die durch die Anziehung bewirkten Beschleunigungen und nicht die Anziehungen selbst, welche den anziehenden Massen proportional sind. Die Anziehung wird indessen nie direct gemessen, sondern man schliesst auf sie durch ihre Wirkungen, nämlich durch die beschleunigende Kraft. In der Astronomie bestimmt man durch Beobachtungen die Beschleunigungen s und s' und berechnet hierauf die Massen m' und m und sagt dann wohl auch, um sich zugleich die physische Erklärung zu vergegenwärtigen, dass man die Anziehungen bestimmt hat; streng genommen hat man aber mit der Anziehung selbst nichts zu thun.

Isaak Newton, von dem gesagt wird, dass er zugleich der grösste und der glücklichste Mann der Wissenschaft war, weil es nur ein Weltsystem zu entdecken gab, wurde den 25. Dec. 1642 zu Woolsthorpe, einem kleinen Dorf in Lincolnshire in England, geboren. Von armen Eltern stammend, erhielt er erst als fast Erwachsener Gelegenheit, die Vorkenntnisse sich anzueignen, welche zu seinen Universitätsstudien nöthig waren. Diese begannen im Jahre 1660 zu Cambridge, wo er neun Jahre später als Professor angestellt wurde. In Folge einer in der Stadt ausgebrochenen Epidemie begab er sich 1666 auf das Land, und hier soll das gelegentliche Niederfallen eines Apfels in einem Garten zuerst den Gedanken in ihm erweckt haben, bei diesem einfachen Fallen möchte dieselbe Kraft wirken, welche den Mond in seiner Bahn um die Erde festhält. — Im Jahre 1687 wurde die erste Auflage seines grossen Werkes »Philosophiae naturalis Principia mathematica«, worin er seine Untersuchungen über das Gesetz der allgemeinen Schwere niederlegte, veröffentlicht.

Newton starb als Vorsteher der königlichen Münze zu London 1727, wo er auch, und zwar in der Westminster-Kathedrale unter den ersten Männern Englands begraben liegt. In dem Zimmer, wo er geboren wurde, findet sich eine Marmortafel mit der Inschrift von Pope:

> Nature and nature's law lay hid in night;
> God said: »Let Newton be«, and all was light.

§ 11. Weitere Folgen aus Newton's Gravitationsgesetz.

Mit der Entdeckung des Princips der allgemeinen Schwere war die Astronomie an dem Punkte angelangt, wo es möglich wurde, die Gesetze der Bewegung auf deductivem Wege herzuleiten. Aus diesem einzigen Grundsatze ergaben sich nicht nur die Kepler'schen Gesetze wieder, sondern wurden auch die Eigenthümlichkeiten der Bewegungserscheinungen in einer weit vollständigeren Weise erkannt, als es durch die Induction damals möglich gewesen wäre. Der deductive Gang der Untersuchung musste hierbei den Weg, welchen die Lehren der Mechanik vorschrieben, befolgen.

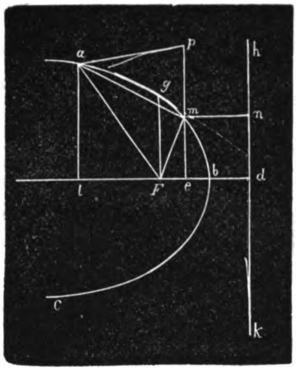
Die erste Aufgabe, welche die Astronomie nach der Newton-schen Entdeckung der Mechanik stellte, betraf die Bewegung zweier materieller Punkte, welche nur ihrer gegenseitigen Anziehungskraft unterworfen sind. — Die Vermuthung liegt nun nahe, dass die Kepler'schen Gesetze als das Resultat dieser Untersuchung hervorgehen würden, da doch Newton sein Gesetz entdeckt hatte, indem er von der Kepler'schen Bewegungstheorie ausging. Und in der That, diese

Vermuthung ist auch bestätigt worden: die mathematische Analyse gestattet, von Newton's Princip ausgehend, die vollständige Auflösung des fraglichen Problems. Jedoch zeigt die genauere mathematische Untersuchung der vorliegenden Frage, dass die Kepler'schen Gesetze gewissermaassen nur als besondere Fälle allgemeinerer Gesetze zu betrachten sind, die immer gelten, wenn die Anzahl der sich anziehenden Körper auf zwei beschränkt bleibt. — Nach dem ersten Kepler'schen Gesetze bewegen sich die Planeten in Ellipsen um die Sonne, deren Mittelpunkt mit dem gemeinsamen Brennpunkte sämmtlicher Bahnellipsen zusammenfällt; die analytische Behandlung des Problems zeigt aber, dass die Ellipse nicht die einzig mögliche Form der Bahnen ist, wenn zwei materielle Punkte, die sich gegenseitig nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, sich um einander bewegen. Dieses Gesetz gestattet nämlich ebenso gut, dass die Trajectorien Parabeln oder Hyperbeln sind, also Curven, die mit der Ellipse die Klasse der sogenannten Kegelschnitte bilden, und zu der auch noch der Kreis und die gerade Linie als besondere Fälle zu rechnen sind. Der Umstand, dass die Bahnen der Planeten Ellipsen sind, muss jetzt als ein rein zufälliger angesehen werden, der von dem Verhältnisse der Bewegungselemente zur Anziehungskraft der Sonne abhängt. Würde die Geschwindigkeit eines Planeten durch irgend eine Ursache bis zu einer gewissen Grenze vergrössert werden, so würde derselbe eine Parabel beschreiben; bei einer noch grösseren Geschwindigkeit würde die Bahn eine hyperbolische sein.

Die Benennung Kegelschnitte rührt bekanntlich davon her, dass die fraglichen Linien entstehen, wenn die Oberfläche eines Kegels mittelst einer Ebene geschnitten wird. Liegt die schneidende Ebene senkrecht zur Axe des Kegels, so wird ein Kreis abgeschnitten. Denkt man sich die schneidende Ebene in einer gegen die vorige etwas geneigten Lage, so entstehen Ellipsen, und zwar so lange, bis die Ebene mit der Seite des Kegels parallel wird; in diesem Falle ist der Schnitt eine Parabel. Wird die Neigung der Ebene gegen die Kegelaxe noch geringer, so entstehen Hyperbeln. Man kann übrigens auf kürzerem Wege zur Einsicht in die Natur der drei krummen Linien gelangen, als wenn man sie durch ebene Schnitte eines Kegels entstanden denkt.

Diese drei Curven haben nämlich auch die Eigenschaft gemeinsam, dass der Abstand eines jeden Punktes der Curve von einem gewissen Punkte (Brennpunkt) in einem unveränderlichen Verhältniss zu der Entfernung des Ersteren von einer gegebenen geraden Linie (Di-

Fig. 25.



rectrix) steht. Aus dieser Eigenschaft lässt sich die Gleichung der Kegelschnitte sehr leicht herleiten.

Es sei abc (Fig. 25) der Bogen eines Kegelschnittes und m ein Punkt desselben; ferner sei F der Brennpunkt und hk die Leitlinie (Directrix); nach der genannten Eigenschaft muss nun, wenn wir mit e das constante Verhältniss bezeichnen,

$$\overline{Fm} : \overline{mn} = e : 1$$

oder

(1) $$\overline{Fm} = e \, . \, \overline{mn}$$

sein.

Bezeichnen wir hierauf den Radiusvector Fm durch r und die wahre Anomalie mFb durch f, so erhalten wir für das Stück eF den Ausdruck

$$r \operatorname{Cos} f;$$

es ist aber

$$\overline{mn} = \overline{dF} - \overline{eF},$$

folglich auch

$$\overline{mn} = \overline{dF} - r \operatorname{Cos} f$$

Die Gleichung (1) giebt uns hierauf

$$r = e\,(\overline{dF} - r \operatorname{Cos} f)$$

d. i.

$$r = \frac{e\,\overline{dF}}{1 + e \operatorname{Cos} f}$$

Führen wir in diesem Ausdrucke den Specialwerth $f = 90^0$ ein, und bezeichnen den entsprechenden Werth von r mit p, so findet sich

$$p = e \, . \, \overline{dF} = \overline{gF}$$

und wir erhalten schliesslich

(2) $$r = \frac{p}{1 + e \operatorname{Cos} f}$$

welches die allgemeine Polargleichung der Kegelschnitte ist. Die Linie $Fg = p$ nennt man den Parameter und das Verhältniss e die Excentricität.

Vergleichen wir hierauf die gefundene Gleichung (2) mit der Polargleichung der Ellipse [Gl. (10) § 6], so werden wir diese beiden Gleichungen als vollständig identisch finden, wenn wir nur den Parameter aus der Formel

(3) $$p = a\,(1 - e^2)$$

bestimmen. Hierbei muss jedoch vorausgesetzt werden, dass e kleiner als die Einheit ist, weil die Excentricität der Ellipse stets kleiner als 1 ist und weil sonst p negativ ausfallen würde, was hier keinen Sinn hätte. Es muss, mit anderen Worten, da

$$e = \frac{\overline{Fb}}{\overline{bd}},$$

vorausgesetzt werden, dass die Entfernung des Punktes b von der Leitlinie grösser ist, als seine Entfernung von dem Brennpunkte.

Wir sehen jetzt den Parameter p als unveränderlich an, und werden untersuchen, welche Veränderungen die Ellipse erleidet, wenn die Excentricität vergrössert und endlich der Einheit gleich wird. — Aus der Gleichung (3) folgt zunächst, dass die grosse Axe desto grösser wird, je mehr die Excentricität sich der Einheit nähert; diese Gleichung giebt uns nämlich

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

woraus das Gesagte unmittelbar hervorgeht. Denn je mehr sich e dem Grenzwerthe 1 nähert, desto kleiner wird die Differenz $1 - e^2$ und desto grösser in Folge dessen a. Erreicht endlich e diesen Grenzwerth, so wird a unendlich gross, weil eine endliche Grösse, durch Null dividirt, einen unendlich grossen Werth erhält. Zugleich hört die krumme Linie aber auf, die der Ellipse charakteristische Eigenschaft zu haben, nämlich die, geschlossen zu sein; sie zerfällt vielmehr in zwei Zweige, die sich immer mehr und mehr von einander entfernen. Dass die Sache sich wirklich so verhält, lässt sich sehr leicht aus der Gleichung der Parabel entnehmen, die wir nun auch, auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, angeben werden.

Weil $e = 1$, so hat man

$$p = \overline{gF} = \overline{dF} = \overline{bF} + \overline{bd},$$

aber aus demselben Grunde ist auch

$$\overline{bF} = \overline{bd}$$

Es ist mithin

$$p = 2\,\overline{bd} = 2\,\overline{bF}$$

oder

$$\overline{bd} = \overline{bF} = \tfrac{1}{2}p$$

Bezeichnen wir nun die Gerade bl durch x und al durch y, so haben wir aus dem rechtwinkligen Dreiecke alF die folgende Relation zwischen x und y:

$$\overline{aF} = y^2 + (x - \overline{bF})^2$$

oder, weil

$$\overline{aF} = \overline{ld} = x + \tfrac{1}{2}p,$$

$$(x + \tfrac{1}{2}p)^2 = y^2 + (x - \tfrac{1}{2}p)^2$$

d. i.

$$y^2 = 2px$$

oder

$$y = \pm \sqrt{2px}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die Parabelzweige sich ununterbrochen von der Axe dl, die hier als x-Axe angenommen wurde, entfernen und um so mehr, je mehr der Abstand vom Scheitel b zunimmt.

Erhält e Werthe, die die Einheit übersteigen, so entstehen Hyperbeln. Diese erweitern sich noch stärker als die Parabeln, was man schon daraus entnehmen kann, dass der Winkel f niemals volle 180° erreicht. Es liegt nämlich in der Natur der Sache, dass r niemals einen negativen Werth erhalten kann, was jedoch der Fall sein würde für $f = 180^\circ$, wenn e grösser als 1 ist. Es ist nämlich Cos $180^\circ = -1$, folglich für diesen Werth

$$r = \frac{p}{1-e},$$

welcher Werth nothwendig negativ ist, so oft e die Einheit übersteigt, was aber bei der Hyperbel stets der Fall ist. Viele andere interessante und bemerkenswerthe Eigenschaften dieser Curve müssen wir hier bei Seite lassen, und können dies auch um so mehr thun, als man bisher nur ausnahmsweise sich veranlasst gesehen hat, hyperbolische Bahnen bei Himmelskörpern vorauszusetzen. — Ein Körper, der sich in parabolischer oder hyperbolischer Bahn um die in deren Brennpunkte befindliche Sonne bewegt, kann nur einmal in die Nähe der Sonne kommen; danach entfernt er sich ununterbrochen.

Wie schon oben erwähnt wurde, beruht die Beschaffenheit der Bahn, also ob diese ein Kreis, eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel ist, auf einem gewissen Verhältnisse der relativen Geschwindigkeit des einen Körpers (in Bezug auf den andern und für einen gewissen Augenblick geltend) zu der anziehenden Kraft des andern, mithin zu der gleichzeitigen Entfernung beider Körper. Hier ist jedoch nicht die Winkelgeschwindigkeit gemeint, also nicht die, welche durch die Veränderungen des Winkels f angegeben wird, sondern die ganze, während der Zeiteinheit vor sich gehende Ortsveränderung des einen Körpers relativ zum andern. Während einer sehr kleinen Zeit kann diese Ortsveränderung als geradlinig angesehen werden, woraus folgt, wie man sich mit Hülfe der Fig. 18 leicht überzeugen kann, dass die Geschwindigkeit, die wir mit v bezeichnen wollen, durch die Formel

$$v = \sqrt{r^2(f'-f)^2 + (r'-r)^2}$$

erhalten wird, wo r, r', f und f' dieselbe Bedeutung haben wie pag. 44.

Wenn die Bahn eine Ellipse mit sehr kleiner Excentricität ist, so bleibt $r' - r$ stets sehr klein im Verhältniss zu dem Producte $r\,(f' - f)$; man kann daher näherungsweise setzen

$$v = r\,(f' - f)$$

Wir müssen jetzt zwei Bemerkungen einschalten. Die eine bezieht sich auf die anziehende Einwirkung der Körper auf einander, wenn diese an und für sich nicht als materielle Punkte betrachtet werden dürfen. Wenn eine Masse gleichförmig oder homogen innerhalb einer kugelförmigen Oberfläche vertheilt ist, so zieht dieser Körper, wie in der Mechanik bewiesen wird, andere Körper genau so an, als ob die ganze Masse im Mittelpunkte concentrirt wäre. Der andere Fall, wo man die Anziehung eines Körpers als die eines materiellen Punktes, d. h. dessen Masse als im Schwerpunkte vereinigt ansehen darf, findet statt, wenn die Dimensionen des Körpers überhaupt sehr klein sind im Verhältniss zu den Entfernungen, in welchen er wirkt, oder in welchen auf ihn eingewirkt wird. Sowohl die Planeten wie die Sonne sind sehr nahe kugelförmig und ihre gegenseitigen Entfernungen sehr gross im Verhältniss zu ihren Dimensionen. In Folge dieser beiden Umstände kann man in der Regel die Himmelskörper als materielle Punkte ansehen.

Die zweite Bemerkung betrifft die Frage, wie relative Bewegungen untersucht werden sollen, wenn Kräfte auf sie einwirken. Wir haben im Vorhergehenden (vgl. pag. 194) bereits erwähnt, dass sich der Schwerpunkt eines Systems von Körpern oder materieller Punkte unabhängig von den Bewegungen der verschiedenen Molecüle des Systems bewegt und umgekehrt, dass die Bewegung des Schwerpunktes durchaus keinen Einfluss auf die Bewegungen innerhalb des Systems ausübt. Die Untersuchungen über die relativen Bewegungen können daher stets so angeordnet werden, als ob der Schwerpunkt fest im Raume wäre, oder, wie man sagt, relativ zum Schwerpunkt und zu den durch denselben gehenden festen Richtungen oder Axen. Andrerseits wäre es auch ganz unmöglich, Untersuchungen über die absoluten Bewegungen vorzunehmen; denn hierzu wäre die Kenntniss wenigstens eines absolut festen Punktes im Raume erforderlich, eine Kenntniss, die wir jedoch in keiner Weise erlangen können. Das Princip, nach welchem man bei der Untersuchung der relativen Bewegungen vollständig von der Bewegung des Schwerpunkts absehen darf, ist daher von fundamentaler Bedeutung; ohne dasselbe wäre eine Astronomie überhaupt nicht möglich.

Aber nicht genug damit, dass man nur die relativen Bewegungen in Bezug auf den Schwerpunkt des Systems zu betrachten braucht; wenn das System vollkommen frei ist, d. h. wenn die einzelnen Körper sich unbehindert in der Weise bewegen können, wie es ihre Bewegungselemente und gegenseitigen Fernwirkungen auf einander erheischen, so kann man auch alle Bewegungen auf einen bestimmten Körper des Systems beziehen, der alsdann als ruhend angenommen wird. In dieser Weise betrachtet man gewöhnlich die Sonne als ruhend innerhalb des Sonnensystems, und bezieht auf ihren Mittelpunkt die Bewegungen der übrigen Körper. Die jedesmalige Lage des Sonnenmittelpunktes relativ zum Schwerpunkte des ganzen Sonnensystems lässt sich aber leicht angeben, und somit kann man auch, wenn dies vortheilhaft erscheint, die Bewegungen auf den Schwerpunkt des Systems beziehen.

Um den Mittelpunkt der Sonne als Brennpunkt beschreiben die Planeten, in naher Uebereinstimmung mit Kepler's Gesetzen, Ellipsen; da aber der Brennpunkt nicht eine unveränderliche Lage innerhalb des Systems hat, so können die Bahnen auch nicht immer dieselbe Lage in Bezug auf den Schwerpunkt haben.

Es giebt aber auch Körper oder Anhäufungen von Materie (die Cometen), welche in sehr nahe parabolischen Bahnen um die Sonne laufen. Die Excentricität der Bahnen dieser Körper ist häufig so wenig von der Einheit verschieden, dass man aus den Beobachtungen der scheinbaren Bewegung nicht entscheiden kann, ob die Bahn eine sehr lang gestreckte Ellipse oder eine Hyperbel ist, oder ob man es mit einer parabolischen Bahn zu thun hat. Obgleich der letztere Fall, als ganz speciell, nicht wahrscheinlich ist, nimmt man doch der Einfachheit wegen gewöhnlich an, dass die Excentricität gerade 1 beträgt, und ist dazu auch vollkommen berechtigt, da der Unterschied der wirklich stattfindenden Excentricität von der Einheit meist nicht bemerkt werden kann.

Die Art des Kegelschnittes, welchen ein Körper um die Sonne beschreibt, hängt, wie schon oben angedeutet, von einem gewissen Verhältnisse ab, in welchem seine Geschwindigkeit in einem gegebenen Augenblicke zu der gleichzeitigen Entfernung von der Sonne steht. Es wird nun in der Mechanik gelehrt und bewiesen, dass die Bahnen um die Sonne stets Ellipsen sind, wenn die Geschwindigkeit des Körpers zu einer beliebigen Zeit geringer ist als der Werth von

$$k\sqrt{\frac{2(M+m)}{r}}$$

wo r die zu derselben Zeit stattfindende Entfernung von der Sonne bedeutet, M und m die Massen der Sonne und des bewegten Körpers, und endlich k eine Constante, deren numerischer Werth von den Einheiten abhängt, durch die man Masse, Zeit und Entfernung ausdrückt. Nimmt man für alle Massen die Sonnenmasse als Einheit, ferner den mittleren Sonnentag als Zeiteinheit, sowie die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne als Einheit der Entfernungen, so ist

$$k = 3548''.188$$

oder, in Theilen des Radius ausgedrückt:

$$k = 0.01720209895.$$

Dagegen ist und verbleibt die Bahn eine Hyperbel, wenn die Geschwindigkeit des Körpers zu irgend einem Zeitpunkte grösser wäre, als der Werth des obenstehenden Ausdruckes, worin r den zu demselben Zeitpunkte geltenden Werth des Radiusvector bedeutet. — In dem Specialfalle endlich, wo

$$v = \sqrt{\frac{2(1+m)}{r}}$$

ist die Bahn eine Parabel. Diese Sätze wollen wir durch einige Beispiele erläutern.

Zu Anfang Juli jedes Jahres ist die Aenderung der Entfernung zwischen Erde und Sonne höchst unbedeutend; wir können daher, ohne merklich zu fehlen, geradezu setzen

$$v = r\,(f' - f) = 1.01705 \times (57'\ 12'')$$
$$= 1.01705 \times 3432'' = 3490''.5.$$

Auf der andern Seite hat man aber

$$k\sqrt{\frac{2(1+m)}{r}} = 4976''.3$$

wobei die Erdmasse, ihrer Geringfügigkeit wegen, vernachlässigt worden ist. Man hat somit gefunden, dass die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne geringer ist als der gleichzeitige Werth von $k\sqrt{\frac{2(1+m)}{r}}$, woraus folgt, dass die Bahn der Erde eine Ellipse sein und eine solche bleiben muss, so lange keine anderen Kräfte als die Anziehungskraft der Sonne einwirken.

Durch Beobachtungen über die Bewegungen der Sternschnuppen hat man gefunden, dass ihre relative kosmische Geschwindigkeit, wenn man diese in Bogenmaass ausdrückt, sich auf etwa 5000″ beläuft. Diese Geschwindigkeit gehört zu einer Entfernung, welche der Einheit gleich zu setzen ist, da doch die Sternschnuppen nur in der nächsten Nähe der Erde wahrgenommen werden können; man sieht also, dass diese Geschwindigkeit sehr nahe der der parabolischen Bewegung entspricht, wodurch man zu dem Schlusse berechtigt ist, dass die Sternschnuppen, insofern sie nicht zur Erde herabfallen, parabolische Bahnen um die Sonne beschreiben. In solchen Bahnen bewegt sich auch die Mehrzahl der uns sichtbaren Cometen. Wir gelangen hierdurch zu der Einsicht, dass diese Himmelskörper nicht eigentlich zu unserem Sonnensystem zu zählen, sondern dass dieselben, nachdem sie durch die Anziehungskraft der Sonne aus den Tiefen des Himmels in unsere Nähe herangezogen sind, dabei eine solche Geschwindigkeit erlangt haben, dass sie sich wieder aus der Attractionssphäre der Sonne entfernen. In einzelnen Fällen geschieht es jedoch, dass der Comet während seines Laufs durch das Sonnensystem durch die Anziehungskraft der Planeten von seiner parabolischen Bahn so abgelenkt wird, dass derselbe, wenn die Anziehung der Planeten aufgehört hat merklich zu sein, eine elliptische Bahn um die Sonne beschreiben muss. In diesem Falle gehört der Comet unserem Sonnensysteme dauernd an, bis eine etwaige grosse Annäherung an einen Planeten die Bahn wieder so umgestaltet, dass das Gestirn sich in derselben aus dem Systeme entfernen kann.

Das zweite Kepler'sche Gesetz entspricht vollkommen dem Princip, welches in der Mechanik unter dem Namen das Princip der Flächen bekannt ist. Wir hatten schon im Vorhergehenden Gelegenheit zu sehen, wie die vom Radiusvector durchlaufenen Flächenräume in allen den Fällen der Zeit proportional sind, wo sich ein materieller Punkt unter dem Einflusse einer Centralkraft bewegt, dieser möge übrigens von einer ganz beliebigen Natur sein.

In Betreff des dritten Kepler'schen Gesetzes dagegen lehrt die deductive Untersuchung, dass es nicht vollkommen richtig ist, sondern vielmehr in formeller Hinsicht an einem wesentlichen Fehler leidet. Dass dasselbe dessenungeachtet auf empirischem Wege entdeckt und dabei als richtig befunden werden konnte, beruht, wie wir sogleich sehen werden, auf dem Umstand, dass die Massen der Planeten im Verhältnisse zu der Sonnenmasse sehr klein sind.

Bezeichnen wir die Sonnenmasse mit M, die eines Planeten mit m und die gegenseitige Entfernung beider Himmelskörper mit r, so ist, in Uebereinstimmung mit dem Newton'schen Gesetze, der Ausdruck für die durch die Anziehungskraft der Sonne verursachte Beschleunigung des Planeten:

$$\frac{M}{r^2}$$

und die durch die Anziehungskraft des Planeten bewirkte Beschleunigung der Sonne:

$$\frac{m}{r^2}$$

Die Beschleunigung relativ zur Sonne ist daher, weil beide Anziehungen die Körper einander zu nähern streben:

$$\frac{M+m}{r^2}.$$

Für die Kraft, welche bei Umlaufsbewegungen die Beschleunigung gegen das Kraftcentrum bewirkt, können wir jedoch noch einen anderen Ausdruck angeben, wobei wir, wie vorhin, voraussetzen, dass die Kraft nach dem Newton'schen Gesetze wirkt. Im Vorhergehenden fanden wir schon, unter der Voraussetzung, dass die mittlere Geschwindigkeit des bewegten Körpers gleichzeitig mit seiner mittleren Entfernung vom Kraftcentrum stattfindet, den Ausdruck

$$\frac{4\pi^2 a}{T^2}$$

für die Kraft, womit der Bewegliche in der Entfernung a dem Kraftcentrum genähert wird. In einem anderen Punkte der Bahn, dessen Radiusvector r sein möge, wird der bewegte Körper mit einer Kraft angezogen, die man, nach dem Newton'schen Gesetze, dadurch erhält, dass der obige Ausdruck mit dem Quotienten $\frac{a^2}{r^2}$ multiplicirt wird. Man erhält somit für die Kraft, womit ein Planet von der Sonne angezogen wird, den Ausdruck

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2\ ^2}$$

und diesem muss der vorhin gefundene Ausdruck für die Beschleunigung proportional sein. Indem man mit f einen constanten, sogleich näher zu bestimmenden Factor bezeichnet, kann man daher setzen:

$$f(M+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

Der Factor f hängt von den Einheiten ab, die man für Masse, Zeit und Entfernung gewählt hat; bleibt man bei den früheren Annahmen, so ist

$$f = k^2$$

und hat man zugleich $M = 1$ zu setzen.

Aus der Gleichung

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k^2(1+m)}{4\pi^2}$$

geht nun sogleich hervor, dass das Verhältniss $\frac{a^3}{T^2}$ keineswegs, wie es das dritte Kepler'sche Gesetz ausspricht, für alle Planeten dasselbe sein kann, da es doch von der Masse m, welche bei den verschiedenen Planeten als verschieden anzunehmen ist, abhängt. Der Umstand, dass für dieses Verhältniss trotzdem ein constanter Werth auf empirischem Wege gefunden wurde, ist nur dadurch zu erklären, dass die Massen der Planeten sehr klein im Vergleich mit der der Sonne sind, so dass sie, wenn die Beobachtungen nicht sehr genau sind, keinen bemerkbaren Einfluss ausüben können.

Den Werth der Constante k haben wir bereits angeführt; man kann ihn aus der Formel

$$k = \frac{2\pi}{\sqrt{1+m}} \frac{a^{\frac{3}{2}}}{T}$$

berechnen. Dabei ist es gleichgültig, zu welchem Planeten die Werthe von a, T und m gehören, wenn sie nur sicher genug bestimmt sind. Da man aber die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne als Einheit annimmt, so empfiehlt es sich, die Berechnung auf die Werthe der siderischen Umlaufszeit der Erde und der Erdmasse zu gründen, weil man alsdann für a einfach die Einheit zu setzen hat. Gauss, nach welchem die Constante k die Gaussische Constante benannt wird, nahm an

$$T = 365{,}2563835$$

und

$$m = \frac{1}{354710}$$

und fand hiermit den oben angeführten Werth von k, welcher durch neuere Bestimmungen von T und m nur unbedeutend verändert worden ist.

Wenn k in Sekunden angegeben ist, muss auch 2π als im Winkelmaasse ausgedrückt angesehen werden, d. h. die Grösse 360° oder 1296000″

bezeichnen. Es bedeutet alsdann $\frac{2\pi}{T}$ die mittlere tägliche Bewegung des Planeten, eine Grösse, die wir im Vorhergehenden mit n bezeichneten. Man hat also auch

$$k = \frac{n\,a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+m}}$$

Diese Formel kann auch dazu dienen, die halbe grosse Axe einer Planetenbahn zu berechnen, wenn die mittlere Bewegung des Planeten, sowie seine Masse bekannt sind. Wir wollen eine solche Berechnung anführen. Die Umlaufszeit des Planeten Jupiter ist sehr genau bekannt durch Beobachtungen, die sich über einen bedeutenden Zeitraum erstrecken. Wenn auch die einzelnen Beobachtungen nicht immer besonders genau sein sollten, würde dieses doch, in Anbetracht der langen Zwischenzeit, nur einen unbedeutenden Einfluss auf die Genauigkeit der aus denselben hergeleiteten mittleren Bewegung des Planeten ausüben können. Man darf hiernach den Werth

$$n = 299''.1286$$

als sehr sicher annehmen. — Die Masse des Jupiter ist zwar nicht mit derselben Sicherheit bestimmt wie die mittlere Bewegung, man weiss aber doch, dass dieselbe sehr nahe $\frac{1}{1050}$ der Sonnenmasse beträgt; der Fehler kann höchstens eine oder zwei Einheiten des Nenners betragen. Auf die Bestimmung von a kann diese Unsicherheit indess nur einen ganz geringfügigen Einfluss ausüben. Auf Grund der obigen Data findet sich nun aus der Formel

$$a = \sqrt[3]{\frac{k^2\,(1+m)}{n^2}} \;\ldots\; a = 5.20284$$

ein Werth, der bis auf die letzte Decimale sicher sein dürfte.

Von besonderer Wichtigkeit für die Entwicklung der Astronomie wurde die Entdeckung des Fernrohres, eines Instrumentes, mit dessen Hülfe man in den Stand gesetzt wurde, Objecte am Himmel wahrzunehmen und zu beobachten, die zu lichtschwach sind, um mit blossen Augen gesehen werden zu können, oder die, in Folge ihrer Nähe an helleren Objecten, von letzteren nicht ohne besondere Hülfsmittel zu unterscheiden sind. Wir werden später auf die Dienste zurückkommen, welche dieses Instrument der Astronomie geleistet hat, hier aber nur an eine Entdeckung vermittelst desselben erinnern, welche später von der grössten Bedeutung für die Bestimmung der Jupitersmasse wurde. Als Galilei Kenntniss von einem in Holland construirten Apparate erhielt, welcher aus einigen in einem Rohre eingefügten Glaslinsen bestehen und dazu dienen sollte, entfernte Objecte, wenn man sie durch das Rohr betrachtete, scheinbar zu nähern, setzte er selbständig ein ähnliches Instrument, also ein Fernrohr zusammen. Bei Betrachten des Himmels machte er sofort die interessante Entdeckung, dass der Planet Jupiter, bei seiner Bewegung um die Sonne, von vier Monden begleitet wird. Diese Monde nannte er Mediceische Sterne, eine Benennung, die indess später wieder aufgegeben wurde. Die Anziehungskraft des Jupiter ist nun eine solche, dass sie diese vier Monde zwingt, in geschlossenen Bahnen, die Ellipsen mit sehr geringer Excentricität sind, um den Planeten zu kreisen. Die Grösse dieser Anziehungskraft muss daher bestimmt werden können, wenn man die Geschwindigkeiten der Monde um den Hauptkörper kennt, sowie ihre mittleren Entfernungen. Wie man nun aus diesen Daten den Betrag der Jupitersmasse im Verhältniss zur Sonnenmasse ableiten kann, ist nicht schwer anzugeben.

Durch m und m' bezeichnen wir die Masse des Jupiter und die eines seiner Monde, wobei wir die Sonnenmasse als Einheit nehmen. Wir bezeichnen ferner durch T die Umlaufszeit des Jupiter um die Sonne und mit T_1 die des Satelliten um Jupiter, beide Umlaufszeiten in mittleren Sonnentagen ausgedrückt. Durch a und a_1 bezeichnen wir endlich die halben grossen Axen der Jupitersbahn und der Mondbahn. Wir haben nun zunächst die Gleichung:

$$k^2(1+m) = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$$

aber ausserdem muss noch die folgende bestehen:

$$k^2(m+m') = 4\pi^2 \frac{a_1{}^3}{T_1{}^2}$$

denn die Einheiten für Masse, Entfernung und Zeit sind in beiden Gleichungen dieselben, weshalb auch die Constante k denselben Werth haben muss. Durch Division dieser Gleichungen erlangt man:

$$\frac{m+m'}{1+m} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T_1}\right)^2.$$

Nimmt man ferner an, dass die Masse des Satelliten im Verhältniss zu der des Planeten als verschwindend betrachtet werden darf, ebenso wie auch die des Jupiter im Vergleich zur Sonnenmasse, so wird einfach

$$m = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T_1}\right)^2$$

Durch genaue Messungen hat man für den ersten (d. i. den nächsten) der Jupitersmonde gefunden

$$a_1 = 0.002819$$

und durch Beobachtungen der häufig vorkommenden Verfinsterungen des Mondes hat man seine Umlaufszeit sehr genau ermitteln können; sie beträgt

$$T_1 = 1.76914$$

Mit diesen Werthen, dem bereits angeführten von a und dem früher mitgetheilten von T findet sich nach ausgeführter Rechnung

$$m = \frac{1}{1048.1}$$

also ziemlich genau übereinstimmend mit dem, welcher bei der Berechnung von a zur Anwendung kam. Bei der Bestimmung der Jupitersmasse hat man indess auch andere Methoden befolgen können, wodurch etwas abweichende Resultate erlangt worden sind. — Da nun die Kenntniss von m verlangt wird bei der Herleitung von a, und diese Grösse wieder erfordert wird, um die Masse zu bestimmen, so könnte es auf den ersten Blick erscheinen, als ob man sich in einen logischen Kreis verwickelte, wenn man die Bestimmungen in der beschriebenen Weise auszuführen sucht. Dem ist aber nicht so. Wenn man auch die Masse des Planeten gleich Null setzt, so erhält man doch einen Werth für a, der hinreichend genau ist, um bei der Berechnung von m angewendet werden zu können; denn ein etwaiger Fehler in der Bestimmung von a von dem Betrage, welcher hier zu befürchten wäre, kommt nicht in Betracht gegenüber der unvermeidlichen Unsicherheit in der Bestimmung von a_1. Führt man indessen die Rechnung zweimal aus, indem man a mit der beiläufig bekannten Planetenmasse bestimmt, und hierauf die Berechnung von m mit diesem Werthe von a wiederholt, so kann man sicher sein, dass bei der Bestimmung von m aus der Unsicherheit von a kein in Betracht kommender Fehler nachgeblieben ist. Der ganze Rechnungsprocess ist im Grunde genommen weiter nichts, als eine durch successive Annäherungen bewerkstelligte Auflösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Bei astronomischen Untersuchungen sieht man sich oft veranlasst, in ähnlicher Weise zu Werke zu gehen.

Die Massen des Saturn und der in späteren Zeiten entdeckten Planeten Uranus und Neptun hat man ebenfalls vermittelst der Bewegungen ihrer Satelliten bestimmt.

Die auf empirischem Wege erfolgte Entdeckung des dritten Kepler'schen Gesetzes beweist zwar, dass die Massen der Planeten sehr klein im Verhältniss zur Sonnenmasse sind, aber als unmerklich darf man sie demohngeachtet keineswegs annehmen, sobald die Genauigkeit der Beobachtungen nur ein wenig über die zu Kepler's Zeiten erreichte hinausgeht. Es entsteht demnach die Frage, wie die Bewegungen der Planeten beschaffen sein mögen, wenn dieselben nicht nur von der Anziehungskraft der Sonne, sondern auch von gegenseitigen Anziehungen beeinflusst sind? Die Beantwortung dieser Frage, eine der wichtigsten, welche die theoretische Astronomie zu lösen hat, ist, wenn man sie in ihrer grössten Allgemeinheit betrachtet, bei dem heutigen Standpunkte der mathematischen Analyse unmöglich. Es ist gegenwärtig nicht erreichbar, die Beschaffenheit der Bewegungen in einem Systeme durch Deduction anzugeben, wenn die Zahl der Glieder mehr als zwei beträgt, und wenn die einzelnen Massen gegenseitig nach dem Newton'schen Gesetze sich anziehen; es ist uns also auch nicht möglich, die in einem solchen Systeme beobachteten Bewegungen durch dieses Gesetz zu erklären, wenn auch der wahre Erklärungsgrund ausschliesslich in demselben zu suchen wäre. Die Aufgabe ist jedoch keineswegs weder unlösbar noch unbestimmt, aber sie ist in mathematischer Beziehung so verwickelt, dass man bisher nicht vermochte, die Bewegungsgesetze der beweglichen Massen unter allgemein gültiger Form anzugeben, d. h. die durch verschiedene, in mehreren Richtungen wirkende Kräfte beeinflusste Bewegung durch eine algebraische Formel darzustellen.

Glücklicherweise ist für die Astronomie als inductive Wissenschaft die ganz allgemeine Auflösung des fraglichen Problems vor der Hand nicht erforderlich, und namentlich, wenn es sich um die Bewegungen der Planeten handelt, treten verschiedene Umstände hinzu, welche die Aufgabe so wesentlich erleichtern, dass sie lösbar wird. Zwar wird die Lösung nicht denselben Charakter erhalten, wie bei der Bewegung von nur zwei materiellen Punkten, indem man das Resultat nicht direct in algebraischer Form erhalten, sondern nur durch successive Annäherungen herleiten kann. Man wird aber dabei die Näherungen stets soweit treiben können, oder mit denselben so lange fortfahren, bis das Resultat die gewünschte Genauigkeit erreicht hat. Wenn man also nur bei der mathematischen Entwicklung den gehörigen Scharfsinn beobachtet hat, so darf man sicher sein, dass auch die feinsten Details des Einflusses, welchen die verschiedenen Planeten nach dem Newton'schen Principe auf die Bewegungen der andern ausüben, nicht verborgen bleiben werden.

Die erleichternden Umstände im Sonnensysteme beruhen wesentlich darauf, dass ein einziger Körper, nämlich die Sonne, alle anderen an Masse bei weitem überwiegt, so dass man in einer ersten Annäherung die Einflüsse der Planeten auf einander ganz und gar vernachlässigen kann. Man erhält somit die Kepler'schen Gesetze als dieser ersten Annäherung entsprechend. Die Elemente der verschiedenen Planetenbahnen sind ferner der Art, dass sie die zweite Annäherung ausserordentlich erleichtern. Namentlich sind die ersten Auflösungen der Aufgabe, die Verbesserungen der Kepler'schen Bewegungsgesetze durch Rechnung zu finden, wesentlich auf den Umstand gebaut, dass die Excentricitäten der Planetenbahnen sehr gering, und die verschiedenen Bahnebenen nur wenig gegen einander geneigt sind; denn aus diesem Grunde kann die gegenseitige Annäherung der Planeten nie sehr erheblich werden, was wieder ein allzugrosses Anwachsen der anziehenden Kräfte verhindert.

Die Berechnung dieser Verbesserungen lässt sich indessen auch nicht mit einem Male ausführen; man hat vielmehr auch hier nöthig, dieselbe durch successive Annäherungen zu erzielen. Wir nennen nun die zweite Annäherung dasjenige Resultat, welches man für die fraglichen Verbesserungen findet, wenn man stets alle solche Glieder weglässt, die bei den auszuführenden Entwicklungen mit höheren Potenzen oder Producten der Planetenmassen als die ersten erscheinen.

Um nun zu der zweiten Annäherung überzugehen, in welcher die ersten Potenzen der gegenseitigen attrahirenden Einwirkungen der Planeten in Betracht gezogen werden, hat man sich zunächst daran zu erinnern, dass diese Einwirkung durch einen mathematischen Ausdruck dargestellt werden muss, welcher der Masse des anziehenden Planeten direct proportional, und dem Quadrate des Abstandes vom angezogenen Planeten umgekehrt proportional zu setzen ist. Diese Entfernung kennt man zwar, streng genommen, nicht; denn wäre dieselbe auch für einen gegebenen Augenblick bekannt, so würde man doch ihre Veränderungen nicht angeben können, wenn nicht eben die Aufgabe schon gelöst wäre, die uns augenblicklich beschäftigt. Dagegen kennen wir stets einen genäherten Werth dieser Entfernung: denjenigen nämlich, welchen man erhält, wenn man die Bewegungen der beiden Planeten nach den Kepler'schen Gesetzen berechnet. Der Fehler dieser auf solche Weise berechneten Entfernung ist selbstverständlich von demselben Betrage, wie die Abweichung der beiden Planeten von ihrer nach den Kepler'schen Gesetzen berechneten Lage im Raume.

Wir nehmen der Einfachheit wegen vorläufig an, dass ausser der Sonne nur zwei Planeten zum Systeme gehören. Ihre gegenseitige Entfernung bezeichnen wir mit ρ, diejenige Entfernung aber, welche stattfinden würde, wenn beide Körper sich in Kepler'schen Ellipsen bewegten, mit ρ_0; es ist nun klar, dass der Unterschied $\rho - \rho_0$ als aus zwei Gliedern bestehend gedacht werden muss, von welchen das eine mit der Masse m des einen Planeten, und das zweite als mit der Masse m' des anderen Planeten multiplicirt erscheint. Wir können demnach setzen

$$\rho = \rho_0 + mR + m'R'$$

wo die Grössen R und R' uns vor der Hand noch ganz unbekannt sind und jedenfalls eine sehr verwickelte Zusammensetzung haben. Für die Berechnung der zweiten Annäherung sind sie überdies gar nicht erforderlich, wie wir sogleich sehen werden.

Aus der angesetzten Gleichung sieht man sofort, dass

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho_0^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{mR + m'R'}{\rho_0}\right)^2}$$

Multiplicirt man links mit

$$1 = \frac{\left(1 - \frac{mR + m'R'}{\rho}\right)^2}{\left(1 - \frac{mR + m'R'}{\rho}\right)^2}$$

so findet man, indem alle Glieder, die mit Quadraten oder höheren Potenzen von m und m' oder mit ihren Producten multiplicirt sind, weggelassen werden, weil sie, unserer Voraussetzung nach, unmerklich klein sind,

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho_0^2} - 2m\frac{R}{\rho_0^3} - 2m'\frac{R'}{\rho_0^3}$$

Nur in dem Falle, wo ρ_0 sehr klein wird, könnten die weggelassenen Glieder merklich werden, und dann würden auch $2m\frac{R}{\rho_0^3}$

und $2m'\frac{R'}{\rho_0{}^3}$ beträchtliche Werthe annehmen können. Das erste Glied rechter Hand in der zuletzt angeführten Gleichung würde alsdann möglicherweise nicht einmal annäherungsweise statt $\frac{1}{\rho^2}$ angewendet werden können. Aber dergleichen kleine Werthe von ρ_0 kommen unter den Planeten nicht vor; die Bahnen derselben sind, wie gesagt, sehr wenig excentrisch und dabei von so verschiedener Grösse, dass eine bedeutendere Annäherung zwischen zwei Planeten unmöglich ist.*)

Nach dem Newton'schen Gesetze erfährt nun die Masse m durch die Anziehungskraft der Masse m' eine Beschleunigung, welche dem Ausdrucke

$$\frac{m'}{\rho^2} = \frac{m'}{\rho_0{}^2} - 2m^2\frac{R}{\rho_0{}^3} - 2mm'\frac{R'}{\rho_0{}^3}$$

proportional ist. Lässt man die beiden letzten Glieder rechts vom Gleichheitszeichen weg, so begeht man einen Fehler, der von der Grössenordnung m^2 und mm' ist. Da aber m und m' schon an und für sich sehr kleine Grössen sind, so müssen ihre Quadrate und Producte es in noch viel höherem Maasse sein; die Glieder, die man bei der zweiten Annäherung weggelassen hat, sind daher auch sehr häufig völlig unmerklich. — Durch die zweite Annäherung findet man nun die Aenderungen, welche die nach den Kepler'schen Gesetzen berechneten Oerter des Planeten erleiden in Folge der Kraft

$$\frac{m'}{\rho_0{}^2}$$

Diese Aenderungen nennt man **Störungen erster Ordnung**.

Nicht immer genügen zwei Annäherungen, d. h. die Störungen erster Ordnung ergeben nicht stets mit der erforderlichen Genauigkeit den ganzen Einfluss der störenden Kraft. In solchen Fällen müssen die Annäherungen fortgesetzt werden. Es müssen zunächst die Grössen R und R' ermittelt werden, was meistens zwar sehr mühsam, je-

*) Es wird hierbei nicht an die sog. kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter gedacht, von denen wohl einige einander sehr nahe kommen, deren Massen aber zu klein sind, um im Allgemeinen Einfluss ausüben zu können.

doch nie unausführbar ist. Nur in sehr seltenen Fällen hat man es nöthig gefunden, weiter als zu der Berechnung der Störungen zweiter Ordnung zu gehen, d. h. zu denen, die mit m^2 und mm' multiplicirt sind.

Bei der Berechnung von Störungen erster Ordnung betrachtet man den Einfluss eines jeden störenden Planeten besonders; man ist dazu berechtigt, weil die Producte verschiedener Massen nicht vorkommen sollen. Man kann also die Rechnung stets so anstellen, als ob nur drei Körper dem Systeme angehörten, nämlich die Sonne und zwei Planeten, wovon der eine als gestörter, der andere als störender Planet betrachtet wird. Aus diesem Grunde ist die Aufgabe, die Störungen zu ermitteln, unter dem Namen des Problems der drei Körper berühmt geworden. Ursprünglich verstand man zwar unter dieser Benennung nur die specielle Aufgabe, welche sich auf die Bewegung des Mondes bezog, später wurde aber die Bedeutung des Namens verallgemeinert.

Der Einfluss der Störungen wird in verschiedener Weise angegeben. Entweder giebt man die Verbesserungen an, welche den geradlinigen Coordinaten des Planeten hinzuzufügen sind, wenn diese nach den Kepler'schen Gesetzen berechnet wurden, oder man bringt auch die Correctionen an, welche dem elliptischen Radiusvector und der wahren Anomalie hinzugefügt werden sollen, sowie die Störung der Breite. Von dem Astronomen Hansen ist endlich eine dritte Form der Störungen angegeben worden, die in vieler Hinsicht als die zweckmässigste angesehen werden muss. Hansen verbessert zunächst die mittlere Anomalie, berechnet also, um wie viel die Anomalie des gestörten Planeten durch den Einfluss der Störungen geändert wird. Mit dieser so verbesserten mittleren Anomalie wird die wahre Anomalie und der Radiusvector in gewöhnlicher Weise berechnet, worauf letzterer mit einem Factor, der sich von der Einheit um den Betrag des Störungseinflusses unterscheidet, multiplicirt werden muss. Endlich wird die Störung der Breite besonders berechnet. — Bei dem Monde bringt man die Störungen an seiner Parallaxe an, statt den Radiusvector zu corrigiren; diese Störungen nennt man jetzt auch parallactische Ungleichheiten, unter welcher Benennung in älteren Zeiten etwas Anderes verstanden wurde (vgl. pag. 65).

Mit einem gemeinsamen Namen bezeichnet man die in irgend einer der angeführten Arten ausgedrückten Störungswerthe als Störungen der Coordinaten; im Gegensatz hierzu spricht man von Störungen der Elemente, welche die Anwendung jener überflüssig machen. Man kann sich nämlich an den sechs elliptischen Elementen solche Verbesserungen, die natürlich mit der Bewegung der Körper ununterbrochen andere Werthe annehmen, angebracht denken, dass der wahre Ort des gestörten Körpers aus den verbesserten Elementen nach den gewöhnlichen, für die elliptische Bewegung geltenden Regeln gefunden werden kann. Die Elemente sind alsdann nicht als Constanten anzusehen, sondern ändern sich ununterbrochen mit der Zeit.

Man wird hier eine Parallele ziehen können zwischen der Bewegung nach den Kepler'schen Gesetzen und der Bewegung, auf welche keine Kräfte einwirken. Im zweiten Falle sind die Bewegungselemente unveränderlich, d. h. der bewegliche Körper schreitet mit gleichförmiger Geschwindigkeit in seiner geradlinigen Bahn fort. Wird aber der bewegliche Körper dem Newton'schen Gesetze gemäss nach einem Kraftcentrum hingezogen, so ändern sich die Bewegungselemente fortwährend, denn sowohl die Geschwindigkeit wie auch die Richtung der Bewegung werden im Allgemeinen in jedem Augenblicke andere Werthe annehmen. Der Körper bewegt sich alsdann in einem Kegelschnitte, aber die sechs Bahnelemente haben dabei unveränderliche Werthe; sind sie bekannt, so lassen sich die Bewegungselemente in jedem Augenblicke vermittelst Rechnung finden, sind wiederum die Bewegungselemente und die Kraft bekannt, so kann man die Bahn, folglich auch die Bahnelemente angeben, in welchen der Körper unter dem Einflusse der Centralkraft sich zu bewegen gezwungen ist. Nichts hindert daher, die Bewegung des Körpers so zu berechnen, als ob er sich in einer geraden Linie bewegte, insofern man nur auf die Aenderungen der Bewegungselemente gehörig Rücksicht nimmt. Man muss mit andern Worten die Richtung der geradlinigen Bahn ebenso wie die Geschwindigkeit in derselben als steten Veränderungen unterworfen betrachten. Diese Anschauungsweise wäre jedoch wenig vortheilhaft bei Bewegungen, die sehr bald den Einfluss der Kraft verrathen, und somit wird es wohl auch Niemandem einfallen, die Bewegungen der Planeten in solcher Weise zu behandeln, aber undenkbar sind Fälle nicht, wo diese

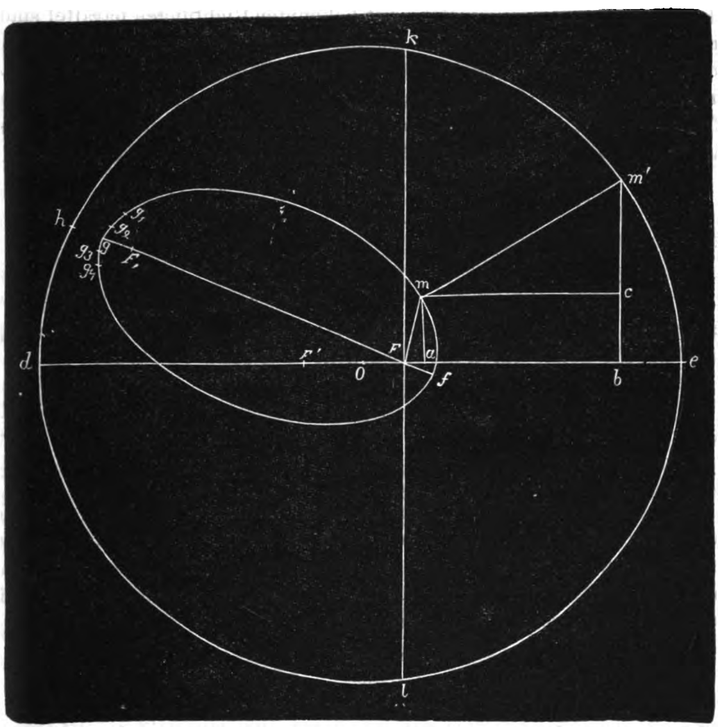
Betrachtungsweise die natürlichste wäre.. — Wenn nun auch andere Kräfte als die Centralkraft merklichen Einfluss ausüben, so hört die Bahn des Beweglichen auf, ein Kegelschnitt zu sein. Die elliptischen oder parabolischen oder hyperbolischen Bahnelemente werden mithin ihre Eigenschaft verlieren Constanten zu sein. Es hindert jedoch nichts, die Bahn fortwährend als einen Kegelschnitt anzusehen, wenn man nur in gehöriger Weise die Veränderungen der Bahnelemente berücksichtigt. Im Planetensysteme ist eine solche Anschauungsweise eine ganz naturgemässe, denn die störenden Kräfte sind sehr klein im Verhältniss zu der Centralkraft, mithin sind auch die Veränderungen der elliptischen Bahnelemente der Planeten nicht sehr beträchtlich. Man betrachtet also in der That eine Reihe von Ellipsen, die allmälig und ununterbrochen in einander übergehen. Sie haben die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass, wenn die störende Kraft plötzlich zu wirken aufhörte, der Planet fortfahren würde, sich in der diesem Augenblicke entsprechenden Ellipse zu bewegen. Diese Ellipsen heissen auch osculirende Ellipsen, weil sie sich der wirklichen Bahn in jedem Augenblicke anschmiegen.

Das Verfahren, den Verlauf einer Bewegungserscheinung dadurch anzugeben, dass die Constanten einer einfacheren als veränderlich angesehen werden, nennt man die Methode der Variation der Constanten. Sie ist von Lagrange erfunden und zur Lösung des Störungsproblems angewandt worden. Auch bei der Lösung vieler anderer Aufgaben spielt sie eine hervorragende Rolle.

Es kann nun keineswegs unsere Absicht sein, im Detail die Berechnung der Störungen anzugeben, denn hierzu wäre ein weit verwickelterer mathematischer Apparat erforderlich, als der, über welchen wir hier verfügen dürfen; allein zur Würdigung der Stellung, welche die Astronomie als Wissenschaft einnimmt und um zu erläutern, in wie weit die empirische Erkenntniss durch die Deduction bestätigt worden ist, müssen wir wenigstens die allgemeine Form der Störungen, sei es von Coordinaten oder von Elementen, herzuleiten suchen.

Die Figur 26 stellt nun zwei Bahnellipsen dar, die wir der Einfachheit wegen in derselben Ebene denken; die Störungen der Breite werden zwar alsdann unseren Betrachtungen ganz entgehen, allein theils sind sie sehr gering, wegen der kleinen Neigungen der Planetenbahnen gegen einander, theils lassen sie sich durch ganz analoge Ausdrücke angeben, die wir als Form der übrigen Störungsausdrücke finden werden. Der Punkt F sei nun der gemeinschaftliche Brennpunkt der beiden Ellipsen $dkm'e$ und gmf, in welchem wir uns also auch den Mittelpunkt des Sonnenkörpers denken. Im Punkte F denken wir uns ferner ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Axen dFe und kFl sind, in den Punkten m und m' endlich die beiden Planeten, deren Massen mit denselben Buchstaben m und m' bezeichnet werden mögen. Die Coordinaten der Masse m sind also: $x = Fa$ und $y = am$, die der Masse m': $x_1 = Fb$ und $y_1 = bm'$. Die Massen m und m' werden zwar nicht stets genau auf den entsprechenden Ellipsen liegen, wir dürfen sie aber in unmittelbarer Nähe derselben annehmen.

Figur 26.



Die Kraft, womit der Planet m von der Masse m' angezogen wird, ist nun dem Ausdrucke

$$\frac{m'}{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$$

proportional, weil $(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2$, dem pythagoräischen Satze zufolge, gleich dem Quadrate der Entfernung zwischen m und m' ist. Es handelt sich aber darum, den Einfluss der störenden Kraft auf die relative Bewegung um die Sonne zu finden; von der Einwirkung der Masse m' auf m muss daher der Einfluss ersterer auf die Sonne abgezogen werden. Derselbe ist gegeben durch den Ausdruck

$$\frac{m'}{r^2},$$

wo r den Radiusvector des störenden Planeten bezeichnet.

Nun ist es aber nicht genügend, nur die Quantität der störenden Einwirkung anzugeben; auch die Richtung, in welcher sie wirkt, muss berücksichtigt werden. Zu dem Zwecke zerlegt man die störende Kraft in zwei Componenten — in drei, wenn die beiden Planeten sich nicht in derselben Ebene bewegen —, welche mit bekannten Richtungen parallel sind. Wir wollen die Coordinatenaxen als diese Richtungen wählen. Man sieht nun leicht, wenn man sich an den Satz vom Parallelogramm der Kräfte erinnert, dass die beiden Componenten der directen Einwirkung von m' auf m sich zu der Resultante verhalten, wie die Seiten mc und $m'c$ zur Seite mm'. Die beiden Componenten sind demnach durch die Ausdrücke

$$\frac{m'}{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} \cdot \frac{\overline{mc}}{\overline{mm'}} = \frac{m'\,(x_1 - x)}{[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

und

$$\frac{m'}{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} \cdot \frac{\overline{m'c}}{\overline{mm'}} = \frac{m'\,(y_1 - y)}{[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

gegeben. In derselben Weise erhält man die Componenten der Einwirkung von m' auf die Sonne durch die Ausdrücke

$$\frac{m'x_1}{r'^3}$$

und

$$\frac{m'y_1}{r'^3}$$

Die Unterschiede der entsprechenden Componenten geben nun die Componenten der Einwirkung von m' auf die relative Bewegung von m, oder die durch diese Einwirkung verursachten relativen Beschleunigungen in der Richtung der Coordinatenaxen. Nennen wir diese Beschleunigungen ξ'' und η'', so haben wir demnach:

$$\text{(A)} \qquad \left\{\begin{aligned} \xi'' &= \frac{m'\,(x_1 - x)}{[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{m'x_1}{r'^3} \\ \eta'' &= \frac{m'\,(y_1 - y)}{[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{m'y_1}{r'^3} \;*) \end{aligned}\right.$$

*) Diese Gleichungen sind nicht vollständig, dürften indessen un-

Aus diesen Ausdrücken geht zunächst hervor, dass die Werthe von ξ'' und η'' stetigen Veränderungen unterworfen sind, weil die beiden Planeten ununterbrochen in Bewegung sind, und ihre Coordinaten mithin stetig verändert werden; ferner dass diese Werthe sehr verschieden sein können, je nach der gegenseitigen Lage der beiden Planeten; drittens aber, dass die Aenderungen von ξ'' und η'' an gewisse Perioden gebunden sein müssen, da doch anzunehmen ist, dass die beiden Planeten nach einer längeren oder kürzeren Zeit wieder in dieselbe Lage zu einander kommen. — Die Werthe von ξ'' und η'' würden nun ohne jegliche Schwierigkeit numerisch zu berechnen sein, wenn nur x und x_1, y und y_1 bekannt wären. Streng genommen kennt man diese Grössen jedoch nicht, da sie die wahren Coordinaten der beiden Körper vorstellen und nicht diejenigen, welche stattfinden würden, wenn die Bewegungen nach den Kepler-schen Gesetzen vor sich gingen. Handelt es sich aber um die Berechnung der Störungen erster Ordnung, so können, wie erwähnt wurde, für x, x_1, y und y_1 ihre elliptischen Werthe angenommen werden, d. h. diejenigen, welche aus der elliptischen Theorie hervorgehen.

Auf solche Weise findet man genäherte Werthe für die Componenten der Beschleunigung, welche für denselben Zeitpunkt gelten, zu welchem die Werthe von x_1 u. s. w. gehören; zu einem anderen Zeitpunkte haben die Coordinaten andere Werthe, mithin auch die in Frage stehenden Componenten. Man kann sich aber ein Zeitintervall so klein denken, dass die Aenderungen der Componenten während desselben äusserst gering sind, so dass, wenn man die Werthe der Componenten für die Mitte des Zeitintervalles berechnet, man anzunehmen berechtigt ist, dass die so gefundenen Werthe während des ganzen Intervalles unverändert gültig bleiben. Ist nun ξ''_0 die Componente, welche für den Anfang des Zeitintervalles gilt, und ξ''_1 die zu Ende desselben geltende, so ist das arithmetische Mittel

$$\tfrac{1}{2}\,(\xi''_0 + \xi''_1)$$

ein Werth für die x-Componente der Beschleunigung, welche der Körper m durch die Anziehung der Masse m' erhalten hat, ein Ausdruck, der desto genauer wird, je kleiner das Zeitintervall ist, je weniger mithin die Werthe ξ''_0 und ξ''_1 sich von einander unterscheiden. Für das zweite Zeitintervall, das wir mit dem ersten als gleich gross denken, wird man in derselben Weise die Beschleunigung

$$\tfrac{1}{2}\,(\xi''_1 + \xi''_2)$$

erhalten u. s. w. Man sieht also, dass die Summe der während s Intervallen stattgefundenen Beschleunigungen, welche Summe wir mit $\xi'_s - \xi'_0$ bezeichnen wollen, durch den Ausdruck

---

serm Zwecke entsprechen, welcher nur der sein kann, einen ersten Einblick in die Störungstheorie zu gewähren.

(a) $$\xi'_s - \xi'_0 = \tfrac{1}{2}\,\xi''_0 + \xi''_1 + \xi''_2 + \ldots \xi''_{s-1} + \tfrac{1}{2}\,\xi''_s$$
gegeben ist. Dieselbe ist aber anderseits weiter nichts, als der zu Ende des s^{ten} Intervalles erlangte Zuwachs an Geschwindigkeit in der Richtung der x-Axe; denn jede partielle Beschleunigung trägt dazu bei, die Geschwindigkeit zu ändern, welche unverändert bliebe, wenn keine Beschleunigung stattfände. Eine ähnliche Formel findet man für den Zuwachs der Geschwindigkeit in der Richtung der y-Axe.

Es muss hier hervorgehoben werden, dass die Grösse ξ'_0 sich nicht durch die Gleichung (a) bestimmen lässt, was in der Natur der Sache liegt, da sie aus den Einflüssen des störenden Planeten hervorgegangen ist, welche vor der Zeit stattfanden, von welcher an wir diesen Einfluss jetzt gerechnet haben. Sie muss entweder aus früheren Rechnungen oder aus Beobachtungen bestimmt werden, oder man kann sie auch so wählen, dass einer gewissen Bedingung bei der Bestimmung der elliptischen Elemente genügt wird. Nimmt man z. B. an, dass die elliptischen Elemente für den Augenblick osculiren, den wir als Anfang des ersten Zeitintervalles festgestellt haben, so muss ξ'_0 gleich Null gesetzt werden, und zwar deshalb, weil der wahre Ort und die wahre Geschwindigkeit in diesem Augenblicke nach den Kepler'schen Gesetzen aus den osculirenden Elementen ermittelt werden können, ohne dass man irgend welche Störungsbeiträge zu den, aus den elliptischen Elementen berechneten Coordinaten hinzuzufügen brauchte. In derselben Weise verhält es sich mit der Grösse η'_0. — Auf alle Fälle aber lassen sich diese Grössen bestimmen, so dass man, durch die Gleichung (a) und ihre analoge für η'_s, jederzeit den Betrag berechnen kann, um welchen die Geschwindigkeit des Planeten m in Folge des Einflusses der Masse m' verändert worden ist; mithin lässt sich auch die wahre Geschwindigkeit des Planeten in jedem Zeitpunkte berechnen.

Wenn man aber die Geschwindigkeit in jedem Zeitintervalle — welches wir so klein annehmen, dass die Werthe von ξ' und η' während desselben als der Zeit proportional veränderlich angesehen werden können, — kennt, so ist es auch sehr leicht, die Aenderungen des Ortes oder die der Coordinaten zu berechnen. Der von einem Körper während einer gewissen Zeit durchlaufene Weg ist nämlich durch die Summe aller während dieser Intervalle stattgefundenen mittleren Geschwindigkeiten gegeben. Während des ersten Zeitintervalles erhält demnach die x-Coordinate den Zuwachs:
$$\xi_1 - \xi_0 = \tfrac{1}{2}\,(\xi'_0 + \xi'_1)$$
während des zweiten:
$$\xi_2 - \xi_1 = \tfrac{1}{2}\,(\xi'_1 + \xi'_1),$$
so dass die am Schlusse des s^{ten} Intervalles durch die Störung veranlasste Aenderung der x-Coordinate

(b) $$\xi_s - \xi_0 = \tfrac{1}{2}\,\xi'_0 + \xi'_1 + \xi'_2 + \ldots + \xi_{s-1} + \tfrac{1}{2}\,\xi_s$$
beträgt.

Die Grösse ξ_0 ist, wie vorhin die Grösse ξ'_0, in gewisser Weise willkürlich, indem sie so bestimmt werden muss, dass der beobachtete Ort und die beobachtete Geschwindigkeit des Planeten wiedergefunden werden, wenn diese, wie sie aus den elliptischen Elementen folgen, wegen des Einflusses der Störungen verbessert werden. Operirt man mit Elementen, die für den fraglichen Zeitpunkt osculirten, so muss ξ_0 gleich Null angenommen werden. — Eine der Gleichung (b) vollkommen ähnliche, aus welcher der störende Einfluss auf die y-Coordinate hervorgeht, findet man für $\eta_s - \eta_0$. — Würden die beiden Körper m und m' sich nicht in derselben Ebene bewegen, so müsste noch eine dritte Coordinate angegeben werden, welche senkrecht auf der durch die x- und y-Axen gelegten Ebene steht. Für dieselbe würde man in der soeben beschriebenen Weise die Grösse $\zeta'_s - \zeta_0$ ermitteln können, welche die Aenderung der dritten Coordinate, die gewöhnlich mit z bezeichnet wird, angiebt; der Ausdruck $\zeta'_s - \zeta'_0$ würde dann die Aenderung der Geschwindigkeit bezeichnen. Wir wollen nun noch die allgemeine Bedingung angeben, welcher die sechs Grössen ξ, η, ζ, ξ', η' und ζ' genügen müssen. Es seien a_0, b_0, c_0, die drei Coordinaten des Planeten m, a'_0, b'_0, c'_0 die drei Componenten seiner Geschwindigkeit, wie diese Grössen nach den Kepler'schen Regeln für den Zeitpunkt gefunden werden, für welchen die Störungen berechnet werden, und indem irgend welche osculirende Elemente der Rechnung zu Grunde gelegt worden sind. Dies vorausgesetzt, müssen die sechs Grössen $a_0 + \xi_0$, $b_0 + \eta_0$, $c_0 + \zeta'_0$, $a'_0 + \xi'_0$, $b'_0 + \eta'_0$ und $c'_0 + \zeta'_0$ die Bewegungselemente des Planeten m zu dem in Frage stehenden Zeitpunkte sein. Rechnet man aber mit Elementen, die gerade für diesen Zeitpunkt osculiren, so findet man sogleich die wahren Werthe der Coordinaten und der Componenten der Geschwindigkeit, oder der Bewegungselemente, die wir nun mit x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0 und z'_0 bezeichnen wollen. Die an diese Grössen anzubringenden Störungsverbesserungen sind demnach Null, wie oben hervorgehoben wurde. Zugleich hat man offenbar die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= x_0 - a_0\,; & \xi'_0 &= x'_0 - a'_0 \\ \eta_0 &= y_0 - b_0\,; & \eta'_0 &= y'_0 - b'_0 \\ \zeta_0 &= z_0 - c_0\,; & \zeta'_0 &= z'_0 - c'_0 \end{aligned}$$

welche nicht nur deshalb von Wichtigkeit sind, weil sie die geometrische Bedeutung der Grössen ξ_0 u. s. w. darlegen, sondern auch da durch sie der Unterschied der zu verschiedenen Zeiten stattfindenden osculirenden Elemente ermittelt werden kann, wenn die Störungen der Coordinaten berechnet worden sind, und umgekehrt.

Durch Additionen, wie sie die Gleichungen (a) und (b) vorschreiben, lassen sich nun die Störungen während einer beliebigen Zeit berechnen. Man geht dabei stets von einem System osculirender Elemente aus und setzt demnach die Grössen ξ_0, u. s. w., welche für die Anfangsepoche — die zugleich Osculationszeitpunkt ist —, gelten, gleich Null. Im Grunde berechnet man in dieser Weise nur Unterschiede von Störungswerthen, denn man kann bei dieser Berechnungsart nicht ermitteln, um wie viel die osculirenden Elemente schon durch die Störungen beeinflusst sind. Allein man wird damit stets der Bewegung des gestörten Körpers folgen können, wenn auch in einer etwas unbequemen Weise. Die durch derartige Additionen berechneten Störungen nennt man daher auch relative Störungen. Will man jedoch, wie es für manche Untersuchung und namentlich um die Natur des Störungseinflusses zu erkennen wichtig ist, den vollständigen Betrag derselben ermitteln, so muss man vor allen Dingen versuchen, die fraglichen Additionen algebraisch auszuführen. In diesem Punkte liegt die eigentliche Hauptschwierigkeit des Störungsproblemes. Wie diese überwunden wird und die sog. absoluten Störungen erlangt werden, müssen wir noch anzudeuten versuchen.

Zunächst sei bemerkt, dass die Gleichungen (A) die Beschleunigungen während einer Zeiteinheit angeben, die als so kurz angenommen werden muss, dass die Werthe von x, y, u. s. w. innerhalb derselben nicht merklich verändert werden; diese Zeiteinheit muss daher, streng genommen, unendlich kurz sein. Durch die Gleichung (a) findet man die Geschwindigkeit in derselben Zeiteinheit ausgedrückt, d. h. man erhält die während einer solchen Zeiteinheit stattfindenden Coordinatenveränderungen. Es wäre aber nun keineswegs bequem, ein solch kleines Zeitintervall als Zeiteinheit anzunehmen, und dies um so weniger, als dieses Intervall bei verschiedenen Störungsaufgaben sehr verschieden angenommen werden kann. Drückt man dasselbe aber in mittleren Tagen aus und bezeichnet es dabei mit τ, so müssen die Werthe der Grössen ξ'_0, ξ'_1, u. s. w. als mit dem Factor $k\tau$, multiplicirt gedacht werden, wo k die Gaussische Constante bedeutet. Die Grössen ξ''_0, ξ''_1, u. s. w. müssen demnach auch mit diesem Factor multiplicirt sein; da sie aber die Beschleunigung während der Zeit τ bedeuten, so müssen sie den in Frage stehenden Factor nochmals enthalten. Statt der Gleichungen (A) erhalten wir demnach die folgenden:

$$\text{(B)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\xi''}{\tau^2} &= \frac{k^2 m' (x_1 - x)}{[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{k^2 m' x_1}{r'^3} \\ \frac{\eta''}{\tau^2} &= \frac{k^2 m' (y_1 - y)}{[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{k^2 m' y_1}{r'^3} \end{aligned} \right.$$

Wir werden später sehen, dass der sehr kleine Factor in den Ausdrücken von ξ und η nicht mehr vorkommen wird.

Den Abstand Fm (Fig. 26) bezeichnen wir durch r, den Abstand Fm' durch r', und die Winkel mFe und $m'Fe$ mit φ und φ'; aus der Figur findet man unmittelbar, dass

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = r^2\,;\ x^2_1 + y^2_1 &= r'^2 \\ x = r \operatorname{Cos} \varphi\,;\ x_1 &= r' \operatorname{Cos} \varphi' \\ y = r \operatorname{Sin} \varphi\,;\ y_1 &= r' \operatorname{Sin} \varphi' \\ x x_1 + y y_1 &= r r' \operatorname{Cos} (\varphi' - \varphi) \end{aligned}$$

woraus ohne Mühe die folgende Gleichung sich herleiten lässt:

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = x^2 + y^2 + x_1^2 + y_1^2 - 2\,(x x_1 + y y_1)$$
$$= r'^2 + r^2 - 2\, r r' \operatorname{Cos}(\varphi' - \varphi)$$

Wir betrachten jetzt nur den Fall, wo der störende Körper sich stets weiter entfernt vom Centralkörper befindet, als der gestörte; der Radiusvector r' ist alsdann immer grösser als der Radiusvector r. In dem Ausdrucke

$$\frac{1}{\left\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r'^2\left\{1 - 2\frac{r}{r'} \operatorname{Cos}(\varphi' - \varphi) + \frac{r^2}{r'^2}\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

ist daher das Verhältniss $\frac{r}{r'}$ stets kleiner als 1. Wir haben schon früher (pag. 112) angedeutet, wie ein derartiger Ausdruck durch eine unendliche Reihe dargestellt werden kann; hier entspricht das Verhältniss $\frac{r}{r'}$ der Grösse, welche dort e genannt wurde. Es ist nun leicht einzusehen, dass die ersten Glieder dieser Reihe

$$\frac{1}{r'^3} + 3\,\frac{r}{r'^4} \operatorname{Cos}(\varphi' - \varphi)$$

sein müssen; denn multiplicirt man Zähler und Nenner in dem obigen Ausdrucke mit $1 + 3\,\frac{r}{r'} \operatorname{Cos}(\varphi' - \varphi)$, so bleiben im Nenner nur solche Glieder übrig, die wenigstens mit dem Quadrate von $\frac{r}{r'}$ multiplicirt sind, und welche deshalb nicht die beiden ersten Glieder der Reihenentwicklung beeinflussen können. — In den meisten Fällen würde man zwar nicht weit mit den zwei aufgestellten Gliedern kommen, allein sie genügen, um zu zeigen, wie die Aufgabe behandelt wird, besonders wenn wir hinzufügen, dass die folgenden Glieder höhere Potenzen des Verhältnisses $\frac{r}{r'}$, sowie auch höhere Vielfache des Winkels $\varphi' - \varphi$ enthalten.

Aus den Gleichungen (B) erhalten wir nun:

$$\frac{\xi''}{\tau^2} = -\, k^2 m' \frac{r \operatorname{Cos} \varphi}{r'^3} + 3\, k^2 m' \frac{r \operatorname{Cos} \varphi'}{r'^3} \operatorname{Cos}(\varphi' - \varphi) \;{}^{*)}$$
$$\frac{\eta''}{\tau^2} = -\, k^2 m' \frac{r \operatorname{Sin} \varphi}{r'^3} + 3\, k^2 m' \frac{r \operatorname{Sin} \varphi'}{r'^3} \operatorname{Cos}(\varphi' - \varphi) \;{}^{*)}$$

Zu diesen Gleichungen wollen wir einige Bemerkungen hinzufügen. Wird die Masse des gestörten Planeten vernachlässigt, so darf man statt k^2 die Grösse

$$n^2 a^3$$

einführen (vgl. pag. 215); wir wollen ausserdem zeigen, wie die Winkel

---

*) In diesen Gleichungen ist ein kleines Glied weggelassen, das mit $\frac{r^2}{r'^4}$ multiplicirt ist.

φ und φ' durch die Anomalien und Perihellängen ausgedrückt werden. Aus der Fig. (26) sieht man, indem die wahren Anomalien mit f und f', die Perihellängen mit π und π' bezeichnet werden, dass

$$\begin{array}{lll} \text{der Winkel } & eFf & = \pi' - \pi \\ \text{»} \quad \text{»} & \varphi & = f + \pi - \pi' \\ \text{»} \quad \text{»} & \varphi' & = f' \end{array}$$

mithin

$$\varphi' - \varphi = f' - f + \pi' - \pi$$

Wenn diese Werthe in die zuletzt angeführten Ausdrücke für ξ'' und η'' eingesetzt werden, so erhält man, in Berücksichtigung der pag. 91 gegebenen Formeln für die Reduction der Producte von Sinussen und Cosinussen:

$$(C)\begin{cases} \dfrac{\xi''}{\tau^2} = -m'n^2\dfrac{a^3}{a'^3}\left(\dfrac{a'}{r'}\right)^3\dfrac{r}{a}\operatorname{Cos}(f+\pi-\pi') + \dfrac{3}{2}m'n^2\dfrac{a^3}{a'^3}\left(\dfrac{a'}{r'}\right)^3\dfrac{r}{a}\Big[\operatorname{Cos}(2f'-f-\pi+\pi') \\ \qquad\qquad + \operatorname{Cos}(f+\pi-\pi')\Big] \\ \dfrac{\eta''}{\tau^2} = -m'n^2\dfrac{a^3}{a'^3}\left(\dfrac{a'}{r'}\right)^3\dfrac{r}{a}\operatorname{Sin}(f+\pi-\pi') + \dfrac{3}{2}m'n^2\dfrac{a^3}{a'^3}\left(\dfrac{a'}{r'}\right)^3\dfrac{r}{a}\Big[\operatorname{Sin}(2f'-f-\pi+\pi') \\ \qquad\qquad + \operatorname{Sin}(f+\pi-\pi')\Big] \end{cases}$$

Für die Additionen, welche in den Gleichungen (a) und (b) vorkommen, sind die gefundenen Ausdrücke noch nicht die geeignetsten; um diese zu erhalten, müssen vielmehr die Radienvectoren und die wahren Anomalien durch die mittleren Anomalien, d. h. direct durch die Zeit ausgedrückt werden. Eine solche Ausdrucksweise bleibt indess nur so lange vortheilhaft, als die Excentricitäten sehr klein sind. Ist dies aber der Fall, so lässt sich die Transformation in folgender Weise ausführen.

Indem die mittleren Anomalien mit g und g' bezeichnet werden, gelten die Gleichungen (vgl. die Note pag. 148):

$$f = g + 2e \operatorname{Sin} g \;;\quad f' = g' + 2e' \operatorname{Sin} g'$$

die richtig sind, insofern die Glieder, welche mit höheren Potenzen von e und e' multiplicirt sind, als unmerklich vernachlässigt werden dürfen. Man hat nun auch

$$\operatorname{Sin} f = \operatorname{Sin} g \operatorname{Cos}(2e \operatorname{Sin} g) + \operatorname{Cos} g \operatorname{Sin}(2e \operatorname{Sin} g)$$
$$\operatorname{Cos} f = \operatorname{Cos} g \operatorname{Cos}(2e \operatorname{Sin} g) - \operatorname{Sin} g \operatorname{Sin}(2e \operatorname{Sin} g)$$

sowie ähnliche für $\operatorname{Sin} f'$ und $\operatorname{Cos} f'$. Indem nun alle Glieder, welche das Quadrat von e enthalten, weggelassen werden, darf man Eins statt $\operatorname{Cos}(2e \operatorname{Sin} g)$ und $2e \operatorname{Sin} g$ statt $\operatorname{Sin}(2e \operatorname{Sin} g)$ setzen, wodurch man zu folgenden Ausdrücken gelangt:

$$\operatorname{Sin} f = \operatorname{Sin} g + e \operatorname{Sin} 2g \quad;\quad \operatorname{Cos} f = -e + \operatorname{Cos} g + e \operatorname{Cos} 2g$$

und ebenso

$$\operatorname{Sin} f' = \operatorname{Sin} g' + e' \operatorname{Sin} 2g' \;;\quad \operatorname{Cos} f' = -e' + \operatorname{Cos} g' + e' \operatorname{Cos} 2g'$$

Die Polargleichung der Ellipse giebt ferner:

$$r = \frac{a\ (1 - e^2)}{1 + e \operatorname{Cos} f}\ ; \quad r' = \frac{a'\ (1 - e'^2)}{1 + e' \operatorname{Cos} f'}$$

Lässt man auch hier alle Glieder bei Seite, die mit einer höheren Potenz von e oder e' als der ersten multiplicirt sind, so finden sich die Ausdrücke:

$$\frac{r}{a} \operatorname{Cos} f = -\tfrac{3}{2}\, e + \operatorname{Cos} g + \tfrac{1}{2}\, e \operatorname{Cos} 2g$$

$$\frac{r}{a} \operatorname{Sin} f = \operatorname{Sin} g - \tfrac{1}{2}\, e \operatorname{Sin} 2g'$$

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 = 1 + 3\, e' \operatorname{Cos} g'$$

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \operatorname{Cos} 2f' = -\tfrac{1}{2}\, e' \operatorname{Cos} g' + \operatorname{Cos} 2g' + \tfrac{7}{2}\, e' \operatorname{Cos}^3 g'$$

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \operatorname{Sin} f' = -\tfrac{1}{2}\, e' \operatorname{Sin} g' + \operatorname{Sin} 2g' + \tfrac{7}{2}\, e' \operatorname{Sin} 3g$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke lassen sich alle Glieder in den Gleichungen (C) umformen. Man findet, wenn auch das Product ee' als unmerklich angesehen wird,

$$(\mathrm{D}) \left\{ \begin{aligned}
&\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \frac{r}{a} \operatorname{Cos}\,(f + A) = -\tfrac{3}{2}\, e \operatorname{Cos} A + \operatorname{Cos}\,(g + A) + \tfrac{1}{2}\, e \operatorname{Cos}\,(2g - A) \\
&\qquad + \tfrac{3}{2}\, e' \operatorname{Cos}\,(g' + g + A) + \tfrac{3}{2}\, e' \operatorname{Cos}\,(g' - g - A) \\
&\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \frac{r}{a} \operatorname{Sin}\,(f + A) = -\tfrac{3}{2}\, e \operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin}\,(g + A) - \tfrac{1}{2}\, e \operatorname{Cos}\,(2g - A) \\
&\qquad + \tfrac{3}{2}\, e' \operatorname{Sin}\,(g' + g + A) - \tfrac{3}{2}\, e' \operatorname{Sin}\,(g' - g - A) \\
&\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \frac{r}{a} \operatorname{Cos}\,(2f' - f - A) = \operatorname{Cos}\,(2g' - g - A) - \tfrac{3}{2}\, e \operatorname{Cos}\,(2g' - A) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\, e \operatorname{Cos}\,(2g' + 2g - A) - \tfrac{1}{2}\, e' \operatorname{Cos}\,(g' - g - A) + \tfrac{7}{2}\, e' \operatorname{Cos}\,(3g' - g - A) \\
&\left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{r}{a} \operatorname{Sin}\,(2f' - f - A) = \operatorname{Sin}\,(2g' - g - A) - \tfrac{3}{2}\, e \operatorname{Sin}\,(2g' - A) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\, e \operatorname{Sin}\,(2g' + 2g - A) - \tfrac{1}{2}\, e' \operatorname{Sin}\,(g' - g - A) + \tfrac{7}{2}\, e' \operatorname{Sin}\,(3g' - g - A)
\end{aligned} \right.$$

wobei der Winkel $\pi - \pi'$ mit A bezeichnet worden ist. Mit Hülfe dieser Werthe werden dann die Gleichungen (C) umgeformt.

Aus den angeführten Ausdrücken geht hervor, dass die Grössen ξ'' und η'' aus einer Anzahl Glieder zusammengesetzt sind, deren jedes die allgemeine Form

$$M \operatorname{Cos}\,(i'g' - ig + Q)$$

oder

$$N \operatorname{Sin}\,(i'g' + ig + Q)$$

hat. Dabei bezeichnen M und N constante Coefficienten, die nur von den Elementen abhängen, und ebenso bezeichnet Q eine constante Grösse; i und i' stellen ganze Zahlen vor, die positiv und negativ sein können und den Werth Null nicht ausschliessen; g und g' sind endlich die mittleren Anomalien.

Es ist aber

$$g = n\,(t - t_0) + c\,; \quad g' = n'\,(t - t_0) + c'$$

wobei n und n' die mittlerenBewegungen, c und c' die mittleren Anomalien zu der Zeit wo $t = t_0$ bedeuten.

Wir können jetzt auf die Entwicklung der Gleichungen (a) und (b) zurückkommen. — Wenn ξ''_0 berechnet werden soll, hat man in allen Gliedern, die in dem allgemeinen Ausdrucke für ξ'' (die erste der Gleichungen C) vorkommen, für die Zeit den Werth t_0 zu setzen; ξ''_1 wird mit dem Werthe $t_1 = t_0 + \tau$, ξ''_2 mit $t_2 = t_0 + 2\tau$ berechnet, u. s. w. Um nun die in der Gleichung (a) vorgeschriebene Operation auszuführen, hat man die Specialausdrücke für ξ''_0, ξ''_2, u. s. w. einzuführen, wonach man eine Reihe von Gliedern erhält, von denen jedes einzelne selbst eine Summe ausmacht. Es hindert Nichts, jedes dieser Glieder besonders zu betrachten, und man wird finden, dass die Mehrzahl derselben in gleicher Weise behandelt werden muss. — Wir betrachten nun das Glied

$$M \operatorname{Cos}\,(i'g' - ig + Q)$$

welches in dem Ausdrucke für $\frac{\xi''_2}{\tau^2}$ vorkommt, und wollen das entsprechende Glied in $\frac{\xi'}{\tau}$ herleiten. Zunächst schreiben wir dasselbe in der Form:

$$M \operatorname{Cos}\,\bigl((i'n' - in)\,(t - t_0) + i'c' - ie + Q\bigr)$$

oder

$$M \operatorname{Cos}\,[\alpha\,(t - t_0) + B]$$

wenn wir, der Kürze wegen $i'n' - in$ mit α und $i'c' - ic + Q$ mit B bezeichnen. Dieses Glied hat nun in den Ausdrücken für ξ''_0, ξ''_1, u. s. w. nachstehende Werthe:

$$\text{in } \frac{\xi''_0}{\tau^2} \;\ldots\; M \operatorname{Cos}\,(B)$$

$$\text{in } \frac{\xi''_1}{\tau^2} \;\ldots\; M \operatorname{Cos}\,(\alpha\tau + B)$$

$$\text{in } \frac{\xi''_2}{\tau^2} \;\ldots\; M \operatorname{Cos}\,(2\,\alpha\tau + B)$$

$$\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$\text{in } \frac{\xi''_s}{\tau^2} \;\ldots\; M \operatorname{Cos}\,(s\alpha\tau + B).$$

Man sieht also, dass zur Bildung der Summe $\frac{\xi'}{\tau}$ die Ausdrücke der Summen:

$$\tau\,(\tfrac{1}{2} + \operatorname{Cos}\alpha\tau + \operatorname{Cos} 2\,\alpha\tau + \operatorname{Cos} 3\,\alpha\tau + \ldots + \operatorname{Cos}\,(s-1)\,\alpha\tau + \tfrac{1}{2}\operatorname{Cos} s\alpha\tau)$$

und

$$\tau\,(\operatorname{Sin}\alpha\tau + \operatorname{Sin} 2\,\alpha\tau + \ldots + \operatorname{Sin}\,(s-1)\,\alpha\tau + \tfrac{1}{2}\operatorname{Sin} s\,\alpha\tau)$$

erforderlich sind. Diese Ausdrücke können wir uns jedoch sehr leicht verschaffen. Gehen wir nämlich von der bekannten Gleichung aus

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \operatorname{Cos} \alpha\tau = \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} \alpha\tau \,.\, \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} \alpha\tau \text{ *)}$$

und multipliciren den Werth rechts mit $\frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} \alpha\tau}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} \alpha\tau}$, so finden wir unmittelbar:

$$(1) \qquad \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \operatorname{Cos} \alpha\tau = \tfrac{1}{2} \operatorname{Sin} \alpha\tau \operatorname{Cotang} \tfrac{1}{2} \alpha\tau$$

Multipliciren wir ebenfalls die rechte Seite der leicht zu erhaltenden Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{Cos} \alpha\tau + \tfrac{1}{2} \operatorname{Cos} 2\alpha\tau = \operatorname{Cos} \tfrac{3}{2} \alpha\tau \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} \alpha\tau$$

mit $\frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} \alpha\tau}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} \alpha\tau}$, so ergiebt sich, weil

$$\operatorname{Cos} \tfrac{3}{2} \alpha\tau \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} \alpha\tau = \tfrac{1}{2} \operatorname{Sin} 2 \alpha\tau - \tfrac{1}{2} \operatorname{Sin} \alpha\tau \,,$$

$$(2) \qquad \tfrac{1}{2} \operatorname{Cos} \alpha\tau + \tfrac{1}{2} \operatorname{Cos} 2\alpha\tau = \tfrac{1}{2} (\operatorname{Sin} 2\alpha\tau - \operatorname{Sin} \alpha\tau) \operatorname{Cotang} \tfrac{1}{2} \alpha\tau$$

In derselben Weise findet man ferner:

$$(3) \qquad \tfrac{1}{2} \operatorname{Cos} 2\alpha\tau + \tfrac{1}{2} \operatorname{Cos} 3\alpha\tau = \tfrac{1}{2} (\operatorname{Sin} 3\alpha\tau - \operatorname{Sin} 2\alpha\tau) \operatorname{Cotang} \tfrac{1}{2} \alpha\tau$$

und allgemein:

$$(s) \qquad \tfrac{1}{2} \operatorname{Cos} (s-1)\alpha\tau + \tfrac{1}{2} \operatorname{Cos} s\alpha\tau = \tfrac{1}{2} (\operatorname{Sin} 3\alpha\tau - \operatorname{Sin} (s-1) \alpha\tau) \operatorname{Cotang} \tfrac{1}{2} \alpha\tau$$

Addiren wir nun alle diese Gleichungen, von (1) bis (s), so erhalten wir, indem der Factor τ noch hinzugefügt wird:

$$\tau (\tfrac{1}{2} + \operatorname{Cos} \alpha\tau + \ldots + \tfrac{1}{2} \operatorname{Cos} s\alpha\tau) = \tfrac{1}{2}\tau \operatorname{Sin} s\alpha\tau \operatorname{Cotang} \tfrac{1}{2} \alpha\tau$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\tau}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} \alpha\tau} \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} \alpha\tau \operatorname{Sin} s\alpha\tau$$

Wenn wir nun die ganze Zahl s hinreichend gross annehmen, so können wir uns τ in beliebiger Weise klein denken; diese Betrachtungsweise führt jetzt keine Unbequemlichkeit mit sich, denn wir brauchen die einzelnen Glieder nicht mehr wirklich zu addiren, da ihre Summe aus der obigen Formel direct berechnet werden kann. Wir können daher ohne Weiteres uns τ als unendlich klein vorstellen, wie es auch nöthig ist, damit das Resultat der Rechnung völlig scharf werde. In diesem Falle darf man aber auch $\frac{1}{2} \alpha\tau$ statt $\operatorname{Sin} \frac{1}{2} \alpha\tau$ schreiben und $\operatorname{Cos} \frac{1}{2} \alpha\tau$ gleich der Einheit setzen. Unsere Formel wird dann die folgende sein:

$$(\mathfrak{a}) \qquad \tau (\tfrac{1}{2} + \operatorname{Cos} \alpha\tau + \ldots + \operatorname{Cos} s\,\alpha\tau) = \frac{\operatorname{Sin} \alpha\,(t - t_0)}{\alpha}$$

wo wir für das Product τs den Werth $t - t_0$ geschrieben haben.

Um die zweite Summenformel herzuleiten, haben wir:

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{Sin} \alpha\tau = \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} \alpha\tau \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} \alpha\tau = \tfrac{1}{2} (1 - \operatorname{Cos} \alpha\tau) \operatorname{Cotg} \tfrac{1}{2} \alpha\tau$$

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{Sin} \alpha\tau + \tfrac{1}{2} \operatorname{Sin} 2\alpha\tau = \operatorname{Sin} \tfrac{3}{2} \alpha\tau \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} \alpha\tau = \tfrac{1}{2} (\operatorname{Cos} \alpha\tau - \operatorname{Cos} 2\alpha\tau) \operatorname{Cotg} \tfrac{1}{2} \alpha\tau$$

u. s. w.

Hieraus leiten wir ab, wie im vorigen Falle,

$$\tau (\operatorname{Sin} \alpha\tau + \operatorname{Sin} 2\alpha\tau + \ldots + \operatorname{Sin} (s-1)\, \alpha\tau + \operatorname{Sin} s\tau)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\tau}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} \alpha\tau} \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} \alpha\tau \,(1 - \operatorname{Cos} s\,\alpha\tau)$$

---

*) Vgl. pag. 91.

oder

$$(\beta)\ \tau\ (\text{Sin}\ \alpha\tau + \text{Sin}\ 2\alpha\tau + \ldots + \text{Sin}\ (s-1)\alpha\tau + \tfrac{1}{2}\ \text{Sin}\ s\,\alpha\tau = \frac{1 - \text{Cos}\ \alpha\ (t-t_0)}{\alpha}$$

Bei dieser Summation entsteht also ein unveränderliches Glied, nämlich $\frac{1}{\alpha}$, und ein trigonometrisches, nämlich

$$-\frac{\text{Cos}\ \alpha\ (t-t_0)}{\alpha}$$

Das erste Glied vermischt sich gewissermassen mit dem constanten Gliede $\frac{1}{2}\ \xi_0'$, und zwar in der Weise, dass andere Quantitäten, welche in derselben Grösse als Glieder eingehen, entsprechende Aenderungen erleiden. Die Grösse ξ_0' selbst muss stets einer gewissen Bedingung genügen, einerlei, aus welchen Theilen dieselbe auch zusammengesetzt sein mag. Wenn die Elemente für den Zeitpunkt t_0 osculiren, so muss ξ_0' gleich Null sein. Sehen wir also von den constanten Gliedern ab, zu deren Bestimmung stets die Berücksichtigung besonderer Umstände erfordert wird, so können wir die folgende einfache Regel aufstellen:

Wenn die Entwicklung, welche $\frac{\xi''}{\tau^2}$ oder $\frac{\eta''}{\tau^2}$ darstellt, ein Glied der Form

$$M\ \text{Cos}\ [(i'n' - in)\ (t-t_0) + Q]$$

enthält, so wird die Grösse $\frac{\xi'}{\tau}$ oder $\frac{\eta'}{\tau}$ ein entsprechendes Glied enthalten, welches beträgt:

$$\frac{M}{i'n' - in}\ \text{Sin}\ [(i'n' - in)\ (t-t_0) + Q]\ .$$

Ist wieder das Glied in $\frac{\xi''}{\tau^2}$ oder $\frac{\eta''}{\tau^2}$ von der Form

$$N\ \text{Sin}\ [(i'n' - in)\ (t-t_0) + Q]$$

so beträgt das entsprechende Glied in $\frac{\xi'}{\tau}$ oder $\frac{\eta'}{\tau}$

$$-\frac{N}{i'n' - in}\ \text{Cos}\ [(i'n' - in)\ (t-t_0) + Q]$$

Genau in derselben Weise werden die Glieder in ξ und η gebildet: das Glied

$$M\ \text{Cos}\ [(i'n' - in)\ (t-t_0) + Q]$$

im Ausdrucke für $\frac{\xi''}{\tau^2}$ oder $\frac{\eta''}{\tau^2}$ giebt zu dem Gliede

$$-\frac{M}{[i'n' - in]^2}\ \text{Cos}\ [(i'n' - in)\ (t-t_0) + Q]$$

in ξ oder η Veranlassung, und, in derselben Weise, das Glied

$$N \operatorname{Sin} [(i'n' - in)(t - t_0) + Q]$$

in $\frac{\xi''}{\tau}$ oder $\frac{\eta''}{\tau^2}$ zu dem Gliede

$$-\frac{N}{[i'n' - in]^2} \operatorname{Sin} [(i'n' - in)(t - t_0) + Q]$$

in ξ oder η.

Es giebt aber noch eine zweite Gattung von Gliedern in $\frac{\xi''}{\tau^2}$ oder $\frac{\eta''}{\tau^2}$, nämlich solche, die constant und also nicht mit einer trigonometrischen Grösse multiplicirt sind. Die Summation solcher Glieder muss nach anderen Regeln bewerkstelligt werden, die aber sehr leicht zu erhalten sind. Nehmen wir z. B. an, dass in ξ'' das Glied k sich vorfände, so hätten wir in $\frac{\xi'}{\tau}$:

$$\tau\,(\tfrac{1}{2}k + k + k + \ldots + k + \tfrac{1}{2}k) = k\,(t - t_0)$$

da die Anzahl der Glieder $s + 1$ ist.

In dem Ausdrucke für ξ haben wir aus demselben Gliede die Summe

$$k\tau^2\,(1 + 2 + 3 + \ldots + s - 1 + \tfrac{1}{2}s)$$

für welche man sehr leicht den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}k\tau^2 s^2 = \tfrac{1}{2}k\,(t - t_0)^2$$

findet.

Aus den angeführten Regeln zur Bildung der Glieder in ξ und η können wir nun zweierlei schliessen. Erstens, dass die Störungsausdrücke aus einer sehr grossen Anzahl von mehr oder weniger merklichen Gliedern bestehen, von denen die Mehrzahl mit trigonometrischen Grössen multiplicirt und demnach von periodischer Natur ist, während andere proportional der Zeit oder dem Quadrate der Zeit wachsen. Zweitens sehen wir aber, und dies ist eine sehr wichtige Bemerkung, dass Glieder in den eigentlichen Störungsausdrücken, also in ξ und η, merklich, oder sogar bedeutend werden können, wenngleich die entsprechenden Glieder in ξ'' und η'' sehr klein sind. Hierzu ist nur erforderlich, dass der Divisor $i'n' - in$ einen genügend kleinen Werth habe. Wenn aber diese Grösse, die zugleich in dem trigonometrischen Ausdrucke als mit der Zeit multiplicirt vorkommt, klein ist, so muss die Zeit um so mehr anwachsen, damit der Bogen oder »das Argument« sich um 360° ändert; die Zeitdauer, innerhalb welcher das betreffende Glied alle Phasen durchläuft, oder die sog. Periode des Gliedes, wird also um so grösser sein, je kleiner der betreffende Divisor ist. Man trifft daher unter Gliedern von langer Periode vorzugsweise solche an, die bedeutend sind.

Mit diesen allgemeinen Resultaten müssen wir uns hier begnügen, denn die mitgetheilten Entwicklungen sind nicht vollständig genug, um die numerische Bestimmung der einzelnen Störungsglieder mit einer irgendwie nennenswerthen Genauigkeit zuzulassen. Wir können höchstens nachweisen, wo grosse oder merkliche Glieder zu suchen sind, aber ihren Betrag können wir nur ganz beiläufig andeuten. Indessen, zur Bestätigung der Newton'schen Weltansicht wird auch dieses nicht unwesentlich sein.

Gewöhnlich werden die Störungen der Länge und des Radius-vectors angegeben, statt die der rechtwinkligen Coordinaten. Der Uebergang von dem einen zu dem andern Systeme ist jedoch leicht auszuführen.

Nennen wir a, b, ρ und ω die nach den Kepler'schen Gesetzen berechneten Werthe von x, y, r und φ, so sind die Differenzen dieser Grössen offenbar aus den Störungen hervorgegangen; die erstgenannten Differenzen haben wir oben mit ξ und η bezeichnet und auch ihre Form im Allgemeinen ermittelt, es bleibt uns also übrig $r - \rho$ und $\varphi - \omega$ durch ξ und η auszudrücken. Nun ist aber

$$x = a + \xi = r \operatorname{Cos} \varphi = [\rho + (r - \rho)] \operatorname{Cos} [\omega + (\varphi - \omega)]$$
$$y = b + \eta = r \operatorname{Sin} \varphi = [\rho + (r - \rho)] \operatorname{Sin} [\omega + (\varphi - \omega)]$$

Subtrahirt man von diesen die Gleichungen

$$a = \rho \operatorname{Cos} \omega$$
$$b = \rho \operatorname{Sin} \omega,$$

welche der elliptischen Bewegung entsprechen, so bleibt, indem wir $\varphi - \omega$ statt $\operatorname{Sin}(\varphi - \omega)$ und 1 statt $\operatorname{Cos}(\varphi - \omega)$ setzen, und auch das Product $(r - \rho)(\varphi - \omega)$ vernachlässigen:

$$\xi = (r - \rho) \operatorname{Cos} \omega - \rho \operatorname{Sin} \omega \, (\varphi - \omega)$$
$$\eta = (r - \rho) \operatorname{Sin} \omega + \rho \operatorname{Cos} \omega \, (\varphi - \omega)$$

Wird die erste dieser Gleichungen mit $\operatorname{Cos} \omega$, die zweite mit $\operatorname{Sin} \omega$ multiplicirt, so erhält man nach Addition und unter Berücksichtigung, dass

$$\operatorname{Cos} \omega^2 + \operatorname{Sin} \omega^2 = 1,$$
$$\xi \operatorname{Cos} \omega + \eta \operatorname{Sin} \omega = r - \rho$$

Multiplicirt man hingegen die erste mit $\operatorname{Sin} \omega$ und die zweite mit $\operatorname{Cos} \omega$, so erhält man, wenn die erste von der zweiten abgezogen wird,

$$- \xi \operatorname{Sin} \omega + \eta \operatorname{Cos} \omega = \varphi - \omega$$

Die Grösse $\varphi - \omega$ enthält die Störungen der Länge, denn die Grösse π' ist sowohl in φ wie in ω die wahre Perihellänge des störenden Planeten.

Führen wir die Werthe aus (D) in den Gleichungen (C) ein, so werden wir unter andern Gliedern auch die folgenden finden:

$$\text{in } \frac{\xi''}{\tau^2} \ldots\ldots - \frac{9}{4} m' \left(\frac{a}{a'}\right)^3 n^2\, e \operatorname{Cos}(2g' - A)$$

$$\text{in } \frac{\eta''}{\tau^2} \ldots\ldots - \frac{9}{4} m' \left(\frac{a}{a'}\right)^3 n^2\, e \operatorname{Sin}(2g' - A)$$

In ξ und η erhalten diese Glieder, da $i' = 2$ und $i = 0$, die Werthe:

$$\text{in } \xi \quad \ldots \quad \frac{9}{16} m' \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \left(\frac{n}{n'}\right)^2 e \operatorname{Cos}(2g' - A)$$

$$\text{in } \eta \quad \ldots \quad \frac{9}{16} m' \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \left(\frac{n}{n'}\right)^2 e \operatorname{Sin}(2g' - A)$$

Nun ist

$$\omega = f + A;$$

wenn wir aber das Quadrat von e vernachlässigen wollen, so können wir sogleich

$$\omega = g + A$$

setzen, weil die obigen Ausdrücke schon mit e multiplicirt sind. Das betreffende Glied in $\varphi - \omega$, oder in der Längenstörung wird also

$$\frac{9}{16} m' \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \left(\frac{n}{n'}\right)^2 e \left[\operatorname{Sin}(2g' - A) \operatorname{Cos}(g + A) - \operatorname{Cos}(2g' - A) \operatorname{Sin}(g + A)\right]$$

$$= \frac{9}{16} m' \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \left(\frac{n}{n'}\right)^2 e \operatorname{Sin}\left[2g' - 2g - 2A + g\right]$$

$$= -\frac{9}{16} m' \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \left(\frac{n}{n'}\right)^2 e \operatorname{Sin}\left[2(g + \pi - g' - \pi') - g\right]$$

mithin, der Form nach, identisch mit der Evection in der Mondbewegung. Der Coefficient ist hier allerdings wesentlich fehlerhaft gefunden worden, was nicht verwundern darf, da die ganze Herleitung desselben nicht in vollständiger Weise geschah, allein eine ungefähre Vorstellung von dessen Betrag können wir uns verschaffen. Zufolge der Relation, zwischen den Massen der Sonne, eines Planeten und dessen Mond einerseits, und den dazu gehörenden Umlaufszeiten oder mittleren Bewegungen und mittleren Abständen andererseits, welche auf pag. 216 angeführt wurde, muss der Factor

$$m' \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \left(\frac{n}{n'}\right)$$

sehr nahe den Werth 1 haben. Die Excentricität der Mondbahn beträgt:

$$e = 0.0549;$$

multipliciren wir diesen Werth mit $\frac{9}{16}$ und verwandeln das Product in Bogenminuten, so finden wir 106′, während der Coefficient der Evection in der That nur etwa 80′ beträgt.

Die Evection ist die grösste Störungsungleichheit in der Mondbewegung, trotzdem sie mit der Excentricität multiplicirt ist; die Ursache dieser Erscheinung findet man leicht in dem Umstande, dass der Divisor n' ziemlich klein im Verhältniss zu n ist; das Verhältniss $\frac{n}{n'}$ beträgt in der That ungefähr 13.

Die Störungsausdrücke der Planetenbewegungen enthalten Glieder, welche der Evection analog sind, aber nicht immer gehören gerade diese zu den grössten: dafür haben andere Glieder zuweilen sehr grosse Werthe. In Folge der Einwirkung des Saturn auf die Bewegung des Jupiter erfährt z. B. die Länge des letzteren die Störung

$$-7' \operatorname{Sin}(2g - 5g') + 16' \operatorname{Cos}(2g - 5g')$$

wo g die mittlere Anomalie des Jupiter und g' die des Saturn bedeutet. Die entsprechende Ungleichheit in der Saturnbewegung ist wieder

$$-17' \operatorname{Sin}(5g' - 2g) - 39' \operatorname{Cos}(5g' - 2g)$$

Dass gerade diese Glieder unter den vielen so gross werden, beruht darauf, dass der Divisor

$$5n' - 2n$$

sehr klein im Verhältniss zu n oder n' ist. In der That ist

$$n = 299''.1286$$
$$n' = 120''.4548$$

woraus folgt

$$2n - 5n' = 4''.0168$$

und

$$\left[\frac{n}{5n' - 2n}\right]^2 = 5546\,; \quad \left[\frac{n'}{5n' - 2n}\right]^2 = 899.$$

Die Periode eines Gliedes findet man offenbar, indem der ganze Umkreis, ausgedrückt in Sekunden, durch den ebenfalls in Sekunden ausgedrückten Werth von $i'n' - in$ getheilt wird. Man findet durch eine solche Rechnung, dass die Periode der soeben betrachteten Glieder 283,3 Jahre beträgt.

Der Bedingung, dass $i'n' - in$ sehr klein sein soll, wird genügt, wenn das Verhältniss der mittleren Bewegungen n' und n sehr nahe commensurabel ist; denn in diesem Falle ist dieses Verhältniss auch wenig verschieden von dem Verhältnisse der ganzen Zahlen i' und i. Wenn indess der Unterschied dieser ganzen Zahlen einigermassen erheblich ist, so wird das entsprechende Störungsglied trotzdem gewöhnlich klein, weil dasselbe von der Grössenordnung $e^{i'-i}$ oder $e^{i-i'}$ ist. Man sieht aber ein, dass man zu diesem Schlusse nur dann berechtigt ist, wenn die Excentricitäten sehr klein sind; ist dies nicht der Fall, so könnten bei grösseren Werthen von i oder i' merkliche oder sogar sehr grosse Glieder vorkommen, und in Folge dessen eine sehr grosse Anzahl von Gliedern nöthig werden, um die Bewegung eines Himmelskörpers mit der erwünschten Genauigkeit anzugeben. In solchem Falle erfordert die Aufgabe zu ihrer Lösung andere Hülfsmittel als die oben angedeuteten.

Man kann sich leicht geometrisch veranschaulichen, wie bedeutende Störungsglieder entstehen müssen, wenn die mittleren Bewegungen der beiden Planeten nahezu commensurabel sind. Wir bedienen uns zu diesem Zwecke der Fig. 26 und werden nachweisen, wie dann der störende Einfluss während mehrerer Umläufe stets im selben Sinne wirkt, und sich also anhäuft. Wir nehmen beispielsweise an, dass der Planet m etwas mehr als zwei Umläufe in derselben Zeit wie der Planet m' einen vollendet; wir setzen ferner voraus, dass sich der Planet m zu einem gewissen Zeitpunkte im g_1 befindet und der Planet m' gleichzeitig in h. Wenn nun m' nach einem ganzen Umlauf wieder in h angekommen ist, hat m zwei ganze Umläufe und ausserdem den kleinen Bogen $g_1 g_2$ in seiner Bahn zurückgelegt; m befindet sich also jetzt in g_2, während zu gleicher Zeit m' in h ist. Nach einem nochmaligen Umlauf von m' befindet sich m in g, u. s. w. Während mehrerer Umläufe nehmen daher die beiden Planeten nahezu dieselbe gegenseitige Stellung relativ zur Sonne ein, und zwar gerade zu der Zeit, wo ihre Einwirkung auf einander am grössten ist. Hierdurch entsteht jedesmal beinahe dieselbe Störung, welche sich also anhäuft und eine beträchtliche Grösse erreichen kann. — Wäre dagegen der eine Planet zu einer gewissen Zeit z. B. in m und der andere gleichzeitig in h, so würde während mehrerer Umläufe keine grosse Annäherung stattfinden können und folglich auch keine grosse Störung. Man sieht auch leicht ein, dass das Vorhandensein der Excentricitäten nothwendig ist, damit die kleinste Entfernung während gewisser Umläufe geringer als während anderer werden soll; bei kreisförmigen Bahnen würde der kleinste Abstand immer dann eintreffen, wenn der eine Planet an dem andern vorbeiginge, und er ist in allen Umläufen genau derselbe.

Vermittelst Operationen, die denen ziemlich ähnlich sind, durch welche die Störungen der Polarcoordinaten aus ξ und η ermittelt wurden, lassen sich auch die Störungen der Elemente durch die der Coordinaten ausdrücken. Wir können uns jedoch hierbei nicht aufhalten, sondern müssen uns darauf beschränken, einige Sätze anzuführen, welche die Säcularstörungen der Elemente betreffen.

I. Die halben grossen Axen der Planetenbahnen und also auch die mittleren Bewegungen sind keiner Säcularstörung unterworfen.

Dieser Satz ist von Wichtigkeit für die Stabilität des Sonnensystems; denn wenn die Axe einer säculären Veränderung unterworfen wäre, mithin proportional der Zeit wüchse oder abnähme, so müsste eine gegebene Planetenbahn ununterbrochen erweitert oder zusammengezogen werden. Gesetzt, die Erdbahn wäre solchen Veränderungen unausgesetzt unterworfen, so müsste im Laufe der Zeiten die Erde dann entweder in dem jetzigen Abstand des Merkur oder in dem des Jupiter sich um die Sonne bewegen. Welchen Einfluss die hieraus entstehenden Verhältnisse auf das Schicksal des Menschengeschlechts ausüben würden, braucht nicht weiter ausgeführt zu werden. Gleichwohl gilt der Satz von der säculären Unveränderlichkeit der grossen Axe oder der mittleren Bewegung nur so lange, als man sich begnügen kann, die Störungen erster und zweiter Ordnung zu berücksichtigen; aber dessenungeachtet steht es fest, dass die Störungen höherer Ordnung während der nächsten Jahrhunderte völlig unmerklich bleiben, und Jahrtausende vergehen müssten, bis diese Störungen irgend welchen merklichen Einfluss auf die Lebensverhältnisse des Menschengeschlechts ausüben könnten.

II. Die Excentricitäten und die gegenseitigen Neigungen der Bahnen unterliegen zwar keiner eigentlichen säculären Störung, jedoch periodischen Störungen von so langer Dauer, dass dieselben zu einer gegebenen Zeit vollkommen den Charakter von säculären haben.

Auch dieser Satz ist von Wichtigkeit bei der Beurtheilung der früheren oder späteren Zustände unseres Sonnensystems. Wenn das in diesem Satz ausgesprochene Verhältniss nicht stattfände, hätte die Erde zu einer früheren Epoche ihrer Existenz als Körper in einer sehr excentrischen Ellipse sich um die Sonne bewegen können. Dabei wäre die Erde in ihrem Perihelium einer Hitze ausgesetzt gewesen, die kein uns bekannter Organismus hätte vertragen können; in ihrem Aphelium hingegen einer excessiven Kälte. — Bei einer fortlaufend veränderten Neigung der Erdbahn könnte wiederum zweierlei eintreffen, was die Oeconomie des menschlichen Lebens wohl wesentlich beeinträchtigen würde: nämlich entweder könnte der Unterschied zwischen den Jahreszeiten aufhören, indem die Ebene der Ekliptik mit der des Aequators zusammenfallen würde, oder es könnte auch der Unterschied zwischen den Klimaten an verschiedenen Orten verschwinden, wenn nämlich diese beiden Ebenen senkrecht auf einander stünden.

III. Dagegen sind die Längen der Perihelien und der Knoten säculären Veränderungen unterworfen, wodurch dieselben alle Werthe von 0° bis 360° annehmen können.

Diese Veränderungen sind aber ohne wesentlichen Einfluss sowohl auf den Bestand des Planetensystems, wie auch auf die speciellen Verhältnisse des menschlichen Lebens.

Die Aenderungen der Excentricitäten, Neigungen, Perihelien und Knoten hat man durch die beobachteten Bewegungen der Himmelskörper unmittelbar gefunden, ebenso die grossen periodischen Ungleichheiten der Mondbewegung und die sog. Säcularänderung der mittleren Länge des Mondes. Durch die Deduction sind sie bestätigt worden, indem man vermittelst der mathematischen Analyse die Schlussfolgerungen aus dem Newton'schen Principe gezogen hat. Dabei ist es aber nicht bei dieser einfachen Bestätigung geblieben. Die mathematische Behandlung des Störungsproblems führt, wie oben gezeigt wurde, zu der Kenntniss einer sehr grossen Anzahl Störungsglieder oder Ungleichheiten, die man auf empirischem Wege nicht in der erwünschten Vollständigkeit hätte entdecken können. Werden aber alle Ungleichheiten mit gehöriger Schärfe berechnet und bei der Vorausberechnung berücksichtigt, so lässt sich erwarten, dass die letztere desto mehr mit der Beobachtung übereinstimmen werde, je mehr die Beobachtungskunst fortschreitet. Und wenn dieser Erwartung auch nicht vollständig genügt wird, so wissen wir doch jetzt genau, in welcher Weise die Ursachen zu den Abweichungen zwischen der theoretischen Vorausberechnung und der Beobachtung zu suchen sind. Zunächst muss untersucht werden, ob nicht die rein elliptischen Elemente des bewegten Körpers Verbesserungen bedürfen: von Zeit zu Zeit müssen solche unzweifelhaft angebracht werden, denn mit steigender Zahl und Güte der Beobachtungen wird man auch die Elemente mit immer wachsender Genauigkeit bestimmen, und also auch ältere Werthe derselben verbessern können. In zweiter Linie muss an die Verbesserung der angenommenen Werthe für die Massen der störenden Planeten gedacht werden.

Weil die Störungsglieder die Werthe der verschiedenen Planetenmassen als Factoren enthalten, kann man aus der Grösse eines gewissen Störungscoefficienten, wenn derselbe unmittelbar aus den Beobachtungen bestimmt werden konnte, die betreffende Planetenmasse ermitteln. Namentlich sind die Coefficienten der Säcularstörungen hierzu geeignet, denn ihr Betrag wird durch das Anwachsen der Zeit in beliebigem Maasse vergrössert. Auf diesem Wege sind auch die

Massen derjenigen Planeten bestimmt worden, die nicht von Monden begleitet sind (vgl. pag. 217).

Die Verhältnisse zwischen der Anziehungskraft der Sonne, der Erde und des Mondes hat man mit ziemlich grosser Genauigkeit bestimmen können, unabhängig von dem gegenseitigen Einfluss der betreffenden Massen auf die resp. Bahnbewegungen; dagegen war es schwierig, durch directe Methoden das Verhältniss der grossen Axen der Erdbahn und der Mondbahn zu bestimmen. Diese Schwierigkeit beruht hauptsächlich auf dem geringen Betrag der Sonnenparallaxe, deren Bestimmung auch daher verhältnissmässig unsicher bleiben muss. Die Berechnung der Mondstörungen erfordert aber, wie wir schon gesehen haben, die Kenntniss dieses Verhältnisses. Um an der weiteren Entwicklung der Untersuchung nicht verhindert zu sein, wurde die Verbesserung dieses Verhältnisses als eine Unbekannte angesehen und als solche in den Störungsausdrücken eingeführt. Indem die Vorausberechnung, welche jetzt diese unbekannte Grösse enthält, mit den Beobachtungen verglichen wird, kann letztere jedoch bestimmt werden. Durch die Untersuchungen der Mondbeobachtungen wird man also zur Kenntniss der Sonnenparallaxe gelangen können, denn wenn das in Frage stehende Verhältniss und die Mondparallaxe bekannt sind, so ergiebt eine einfache Multiplication die Sonnenparallaxe. Bis nach der Mitte dieses Jahrhunderts hatte man für die Sonnenparallaxe den von Encke bestimmten Werth

$$p' = 8''.57116$$

angenommen. Aus der Untersuchung über die Bewegung des Mondes hatte nun Hansen gefunden, dass das Verhältniss $\frac{a}{a'}$ mit dem Factor 1.03573 multiplicirt werden müsse, damit den Beobachtungen genügt werde;*) nimmt man also an, dass der früher benutzte Werth der Mondparallaxe fehlerfrei sei, so muss der angeführte Werth von p' auch mit 1.03573 multiplicirt werden, wonach man den verbesserten Werth von p' findet, nämlich

$$p' = 8''.8774.$$

Durch eine etwas anders angelegte Rechnung, bei der man sich von

---

*) Hansen, Darlegung der theoretischen Berechnungen der in den Mondstafeln angewandten Störungen, II, pag. 269.

der Annahme über die Mondparallaxe frei machen konnte, fand Hansen den Werth

$$p' = 8''9159.$$

Aus dem Vorhergehenden dürfte hervorgehen, dass die numerische Berechnung der Störungen mindestens sehr weitläufig und mühsam ist, wenn man die Coefficienten aller verschiedenen Glieder mit der erwünschten Genauigkeit erhalten will. Besonders die Säcularstörungen und diejenigen von sehr langer Periode sind zuweilen äusserst schwierig zu berechnen. In dem berühmten Werke Mécanique céleste hat Laplace darauf hingewiesen, wie manchmal in Folge der doppelten Summation Störungen von sehr langer Periode entstehen, wo man sie ohne eine besondere Untersuchung nicht erwartet hätte. Die grosse Ungleichheit in der Jupiters- und Saturnsbewegung gehört hierher, ebenso die Säcularänderung der mittleren Länge des Mondes, die mit der erforderlichen Sicherheit zu berechnen bisher nicht gelang. Nach Hansen's Rechnungen beträgt dieselbe 12''18, aber zwei andere Astronomen, Adams und Delaunay, haben nur die Hälfte dieses Werthes gefunden. Die Erklärung dieses Unterschiedes, oder die Bestätigung des einen oder des andern Werthes, mit einem Worte, die genügend exacte Berechnung dieses Coefficienten ist ein Wunsch, dessen Erfüllung man von der nächsten Zukunft wohl erwarten darf. — In früheren Zeiten, wo die Theorie der Störungen noch weniger entwickelt war als jetzt, sah man sich mitunter gezwungen, die Coefficienten einiger Störungsglieder empirisch, d. h. direct aus den Beobachtungen zu bestimmen; man musste also auf die streng theoretische Vorausberechnung verzichten, da die Länge der numerischen Rechnungen nicht zu bewältigen war. Zuweilen hat man auch vermuthet, dass die Newton'sche Form des Attractionsgesetzes nicht dem wahren Naturgesetze völlig entspräche, oder auch, dass noch unbekannte Kräfte thätig wären, über deren Dasein man nur durch ihre Wirkungen Auskunft erhalten könnte. Die erste Vermuthung hat sich bisher stets als irrthümlich erwiesen, die zweite aber in einigen Fällen eine glänzende Bestätigung gefunden.

Man hatte vergebens gesucht, durch die bekannten Kräfte gewisse Abweichungen in der beobachteten Bewegung des Planeten Uranus von der vorausberechneten zu erklären. Die Abweichungen zeigten sich dabei als zu regelmässige und bedeutende, als dass der Gedanke hätte aufkommen können, sie seien eine Folge von Beobachtungsfehlern. Hier wirkte also zweifelsohne eine noch unbekannte Kraft, die in Folge ihres sichtbaren Einflusses aufzufinden sein musste. Wie sehr auch andere Ansichten sich geltend zu machen suchten, man blieb schliesslich doch dabei stehen, dass die constatirte Einwirkung ihre Erklärung in dem Vorhandensein eines bis dahin noch unbekannten transuranischen Planeten finden würde. Den Ort dieses Planeten auf Grund seiner bekannten Einwirkung auf die Bewegung des Uranus zu finden, war die erste Aufgabe in ihrer Art. Sie wurde ungefähr gleichzeitig von Leverrier und Adams in Angriff genommen und glücklich zu Ende geführt, wenngleich die Arbeiten Leverrier's etwas früher bekannt gemacht wurden und demnach sein Name meistens mit der Entdeckung des neuen Planeten, der Neptun genannt wurde, in Verbindung gebracht wird. Wir wollen noch mit einigen Worten das Geschichtliche der Lösung dieser Aufgabe erwähnen.

Schon lange war es bekannt, dass die mittleren Abstände der verschiedenen Planeten von der Sonne, wenn auch nicht exact, so doch mit einem gewissen Grad von Annäherung durch die folgenden Ausdrücke (die sog. Titius'sche oder Bode'sche Reihe) angegeben werden können:

			der wirkl. Abstand
Merkur	0.4	$= 0.4$	0.39
Venus	$0.4 + 0.3 \times 2^0$	$= 0.7$	0.72
Erde	$0.4 + 0.3 \times 2$	$= 1.0$	1.00
Mars	$0.4 + 0.3 \times 2^2$	$= 1.6$	1.52
. . . .	. . . .		. . .
Jupiter	$0.4 + 0.3 \times 2^4$	$= 5.2$	5.20
Saturn	$0.4 + 0.3 \times 2^5$	$= 10.0$	9.54
Uranus	$0.4 + 0.3 \times 2^6$	$= 19.6$	19.18

Die Vermuthung lag nun nahe, das der mittlere Abstand des neuen Planeten annähernd durch den Ausdruck

$$0.4 + 0.3 \times 2^7 = 38.8$$

gegeben sein müsste. Mit diesem Werthe konnten zunächst die Störungen in der Bewegung des Uranus, insofern sie nicht von der Excentricität des störenden Planeten abhängen, berechnet werden;

allerdings nur der Form nach, denn sowohl die Masse wie auch die mittlere Länge des unbekannten Planeten zu der bestimmten Epoche waren noch völlig unbestimmt. Die Masse erscheint aber nur als Factor und die mittlere Länge nur in den Argumenten der Störungsglieder; diese beiden Unbekannten sind daher leicht zu trennen.

Haben wir z. B. eine Ungleichheit, deren Form wir kennen, und von der uns auch einige, durch Beobachtungen gegebene numerische Werthe bekannt sind, also

$$B_1 = x\,A \operatorname{Cos}(F_1 + y)$$
$$B_2 = x\,A \operatorname{Cos}(F_2 + y)$$

wo B_1 und B_2 zwei bekannte Werthe der Ungleichheit sind, x die unbekannte Masse, A ein gegebener Coefficient, der nur von dem Verhältnisse der grossen Axen oder von dem der mittleren Bewegungen abhängt, F_1 und F_2 die Aenderungen des Arguments, also die bekannten Grössen $(i'n' - in)\,(t_1 - t_0)$ und $(i'n' - in)\,(t_1 - t_0)$, und endlich y die unbekannte mittlere Länge (weniger einer bekannten Grösse) bedeuten, so erhält man die unbekannten Grössen durch die Auflösung der angesetzten Gleichungen. Diese Gleichungen können auch in folgender Weise geschrieben werden:

$$B_1 = x\,A \operatorname{Cos} F_1 \operatorname{Cos} y - x\,A \operatorname{Sin} F_1 \operatorname{Sin} y$$
$$B_2 = x\,A \operatorname{Sin} F_2 \operatorname{Cos} y + x\,A \operatorname{Cos} F_2 \operatorname{Sin} y$$

Wird nun die erste dieser Gleichungen mit Cos F_2, die zweite aber mit Sin F_1 multiplicirt, so giebt die Summe der Producte:

$$B_1 \operatorname{Cos} F_2 + B_2 \operatorname{Sin} F_1 = x\,A \operatorname{Cos} y \operatorname{Cos}(F_2 - F_1)$$

und ebenso findet man:

$$-B_1 \operatorname{Sin} F_2 + B_2 \operatorname{Cos} F_1 = x\,A \operatorname{Sin} y \operatorname{Cos}(F_2 - F_1)$$

Hieraus lassen sich die Grössen x Cos y und x Sin y unmittelbar berechnen. Nachdem die Werthe dieser Grössen bekannt sind, findet man x und y durch eine trigonometrische Rechnung. Es sei also: $x \operatorname{Cos} y = m$; $x \operatorname{Sin} y = n$, alsdann hat man

$$x = \sqrt{m^2 + n^2} = \frac{m}{\operatorname{Cos} y} = \frac{n}{\operatorname{Sin} y}$$
$$\operatorname{tg} y = \frac{n}{m}\,.$$

Die grossen Ungleichheiten sind jedoch vorzugsweise solche, welche an lange Perioden gebunden sind, und also von den Excentricitäten abhängen. Die Excentricität des vermutheten Planeten musste daher auch als eine Unbekannte angesehen werden und demzufolge auch die Länge des Perihels. Hierdurch wurde die Aufgabe natürlich viel schwieriger, es gelang aber doch, dieselbe in befriedigender Weise zu lösen, trotzdem noch ein Umstand diese Lösung erheblich erschwerte. Die mittlere Bewegung des vermutheten Planeten war nämlich nur hypothetisch angenommen worden, konnte mithin nicht unerheblich von dem wahren Werthe abweichen. War aber dieses der Fall, so mussten die Grössen F sehr unsicher werden, wenn es sich um Ungleichheiten langer Perioden handelte; ja die Unsicherheit konnte in Folge dessen so gross sein, dass die Lösung möglicherweise ganz illusorisch wurde. Es ist nun schwer zu beurtheilen, inwiefern die Entdeckung des Neptun vom Glücke begünstigt worden ist. Wie dem auch sei, der Planet wurde auf der Berliner Sternwarte sehr nahe an der Stelle des Himmels aufgefunden, an welcher Leverrier ihn vorausgesagt hatte. Der Vorgang dieser Entdeckung wird in folgender Weise erzählt. Als die Mittheilung von Paris auf der Berliner Sternwarte anlangte, beeilte sich der damalige Assistent der Sternwarte, Herr d'Arrest, eine kleine Karte der bezeichneten Himmelsgegend zu entwerfen, um die Aufsuchung des Planeten zu erleichtern. Kaum hatte er hierauf das Fernrohr nach der betreffenden Himmelsgegend gerichtet, so trat der Observator Dr. Galle hinzu, sah in das Fernrohr und — erblickte den Planeten.

Sowohl durch Induction wie auch durch Deduction hat man also gefunden, dass die wahren Bewegungsgesetze der Himmelskörper analytisch durch eine grosse Anzahl Glieder ausgedrückt werden können, deren einige der Zeit oder auch den höheren Potenzen der Zeit proportional wachsen, die meisten aber periodischer Natur sind. Alle diese Glieder hängen im Grunde aber doch nur von einer geringen Anzahl willkürlicher Grössen ab, nämlich von den Bewegungselementen der sich anziehenden Körper und deren Massen. Aus den Beobachtungen dürfen nur diese Unbekannten bestimmt werden, denn sonst würden die Ausdrücke der Gesetze ihren theoretischen, oder sagen wir lieber, ihren wissenschaftlichen Charakter verlieren. Erst wenn fernere physische Bedingungen hinzukommen, wenn z. B. die Körper sich nicht wie Punkte anziehen, oder wenn die Bewegungen durch Widerstand beeinflusst werden, dürfen fernere Unbekannte eingeführt werden. Die Anzahl dieser muss zwar von der

Theorie vorgeschrieben sein; diese Forderung hindert indessen keineswegs, dass man, um den Gang einer Untersuchung zu erleichtern, eine grössere Anzahl von Unbekannten, als zu der man eigentlich berechtigt wäre, unmittelbar aus den Beobachtungen bestimmt; nur muss man dabei erinnern, dass schliesslich bloss die gesetzliche, d. h. die durch die ursprünglichen Bedingungen des Problems bestimmte Anzahl der willkürlichen Grössen sich vorfinden darf. Eine Untersuchung kann nämlich unter gewissen Umständen ganz wesentlich erleichtert werden, wenn die directen Ergebnisse der Beobachtung erst in andere Form zusammengefasst werden, als wie sie ursprünglich vorliegen. Man kann z. B. die Coefficienten der Reihen (1) und (2) (pag. 98 und 99) als Unbekannte ansehen, und die weitere Untersuchung auf diese Coefficienten gründen. Auch sieht man zuweilen eine bereits bekannte Grösse als eine Unbekannte an, und bestimmt sie zugleich mit den wirklich unbekannten Grössen. Es soll hiermit ein Criterium zur Beurtheilung der Sicherheit der ganzen Untersuchung erlangt werden.

III. Kapitel.

Die Beobachtungskunst unserer Zeit.

§ 12. Coordinaten im Raum und auf der Sphäre.

Wenige Dinge sind an und für sich so ohne Interesse, wie das Resultat einer einzelnen astronomischen Beobachtung. Dasselbe besteht, wie schon hervorgehoben wurde, in der Angabe zweier Winkel, welche für eine gewisse, ebenfalls angegebene Zeit gelten. Durch eine vereinzelte astronomische Beobachtung erfährt man also weiter nichts, als dass ein gewisser Himmelskörper zur Zeit der Beobachtung eine gewisse Lage am Himmel eingenommen hat; dies ist Alles. Auch aus zwei Beobachtungen kann eigentlich nicht viel geschlossen werden, denn zur Bestimmung der sechs Bewegungselemente genügen nicht die vier, in den zwei Beobachtungen bestimmten Winkel. Es giebt indessen Fälle, wo man sich mit dem begnügen muss, was aus zwei Beobachtungen zu erforschen ist, z. B. wenn die scheinbare Bewegung gleichförmig auf der Himmelssphäre erscheint. Dies ist, mit wenigen Ausnahmen, immer bei den (sog.) Fixsternen der Fall. Ihre Bewegungen erscheinen uns äusserst langsam und dabei durchaus gleichförmig, so dass wir aus tausend Beobachtungen genau dasselbe erfahren würden wie aus zwei, vorausgesetzt, dass diese zwei absolut genau wären. Unter gewissen Voraussetzungen lassen sich indess auch aus diesen Daten einige für die Astronomie wichtige Schlussfolgerungen ziehen, die uns genügen müssen, bis die genauen Beobachtungen sich über solche Zeiträume erstrecken, dass die Kräfte, welche auf die Bewegungen einwirken, in der Ungleichförmigkeit derselben bemerkbar werden. Wann der Zeitpunkt eintreten wird, zu welchem wir die Bewegungen der Sterne im Allgemeinen als ungleichförmig zu erkennen im Stande sind, lässt sich jetzt noch nicht ahnen, derselbe wird uns jedenfalls aber desto näher gerückt, mit je grösserer Schärfe wir die Richtungen der Gestirne zu den einzelnen Zeitmomenten auffassen können, je grösser mithin die Genauigkeit der astronomischen Beobachtungen wird.

Es gab eine Zeit, wo man die Sterne als unbeweglich am Himmelsgewölbe ansah. Man nannte sie daher Fixsterne, eine Benennung, die lange, obgleich grundlos, beibehalten worden ist, da wir die Bewegung als eine allgemeine Eigenschaft der Himmelskörper ansehen müssen, und Bewegungen bei einer sehr grossen Anzahl von Sternen bereits constatirt worden sind.

Wenn wir heutzutage sagen, dass die scheinbaren Bewegungen der Sterne gering sind, so meinen wir damit, dass der Betrag dieser Bewegungen während einer mässigen Zeit nur mit Mühe durch Beobachtungen zu erkennen ist. Nur in sehr wenigen Fällen würde es gelingen, die Bewegung zu constatiren aus Beobachtungen, die durch den Zeitraum eines Jahres von einander entfernt wären; eine grosse Anzahl Bewegungen wird man erkennen können, wenn die Beobachtungen 10 Jahre umfassen; aber die Anzahl der Sterne, deren Bewegung noch geringer erscheint, ist eine weit grössere. Bei erhöhter Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen werden die nöthigen Zwischenzeiten verhältnissmässig reducirt, oder die Sicherheit des Resultats eine grössere.

Die Wissenschaft harrt noch der Bestimmung, welche die Ungleichförmigkeit der Bewegung bei den Sternen constatiren soll, durch welche also Schlüsse auf die Natur der wirkenden Kräfte gezogen werden könnten. Soll aber, bevor dieses gelungen ist, eine Astronomie der Sterne oder eine sogenannte Stellarastronomie möglich sein, so ist sie es nur auf Grund von Aehnlichkeit und Uebereinstimmung in den scheinbaren Bewegungen der einzelnen Sterne, wenn man sie in gewisse Gruppen zusammenstellt. Untersuchungen hierüber erfordern die Kenntniss der scheinbaren Bewegungen einer sehr grossen Anzahl Sterne; denn die Erscheinungen der Sternbewegungen werden voraussichtlich so verwickelt sein, dass das Gemeinschaftliche derselben erst aus sehr vielen

Einzelbewegungen zu ersehen sein wird. Hieraus erwächst aber die Nothwendigkeit, die Beobachtungen, denen zugleich eine möglichst hohe Genauigkeit gegeben werden muss, auf eine sehr grosse Anzahl von Sternen auszudehnen. Diese Forderungen lassen sich schwer mit einander vereinigen. Eine genauere, mit mehr Sorgfalt ausgeführte Beobachtung erfordert natürlich mehr Zeit, als eine mit weniger Umsicht und Mühe angestellte. Es muss daher im Allgemeinen etwas von der höchsten erreichbaren Genauigkeit aufgeopfert werden, damit die Anzahl der beobachteten Sterne nicht eine gar zu geringe bleibt; Beobachtungen unter einem gewissen Genauigkeitsgrade können jedoch nur einen vorübergehenden Werth haben, indem sie sicherlich früher oder später von genaueren ersetzt werden.

Die Astronomie des Sonnensystems steht allerdings gegenwärtig auf einem sehr hohen Standpunkt, als abgeschlossen sind aber die zu derselben gehörenden Untersuchungen deshalb keineswegs anzusehen. Wir können nicht wissen, welche Fragen in der Zukunft angeregt werden, die sich auf die Bewegungen der Himmelskörper beziehen, deren Bahnen ganz oder theilweise innerhalb der Planetenwelt liegen, aber wir könnten mehrere Aufgaben anführen, deren Lösung längst in Angriff genommen wäre, wenn die Genauigkeit der Beobachtungen eine wesentlich grössere wäre, als sie in der That ist. Jede Vervollkommnung der Beobachtungskunst wird unsere Kenntnisse von den Bewegungen der Planeten und der übrigen zum Sonnensysteme gehörenden Körper stets erweitern; die Elemente der Planetenbahnen werden sicherer ermittelt werden können, die verschiedenen Massen sich mit grösserer Schärfe ergeben, und somit wird es auch sowohl möglich wie nothwendig sein, den einzelnen Planetentheorien eine grössere Vollständigkeit zu geben, als gegenwärtig der Fall ist. Man wird Einflüsse in Betracht ziehen können, die zwar bekannt sind, aber ihrer Geringfügigkeit halber bisher vernachlässigt werden konnten; man wird indess auch Ursachen entdecken, welche die Bewegungen beeinflussen, aber bis jetzt unbekannt waren.

Aus alle dem folgt, dass die Fortschritte der Astronomie wesentlich von der Vervollkommnung der Beobachtungskunst abhängen. Sind die einzelnen Beobachtungen auch völlig ohne Interesse, so sind sie nichtsdestoweniger durchaus unentbehrlich für die fernere

Entwicklung der astronomischen Wissenschaft. Damit soll aber keineswegs gesagt sein, dass eine jede Beobachtung für die Astronomie verwerthet werden wird. Man könnte mit sehr geringer Mühe Beobachtungen ansammeln, deren Genauigkeit unter der Mittelmässigkeit wäre, aber voraussichtlich würde der aus diesen erzielte Gewinn verhältnissmässig noch geringer sein.

Der astronomische Forscher muss mit der Zuverlässigkeit der astronomischen Beobachtungen genau bekannt sein; er würde sonst oft Gefahr laufen, eine Bewegung da zu vermuthen, wo nur die unvermeidlichen Beobachtungsfehler eine Verschiedenheit zweier Ortsbestimmungen veranlasst haben; er würde mithin zu Untersuchungen verleitet werden, denen die reelle Grundlage fehlte, und gegen Illusionen nicht geschützt sein, Entdeckungen gemacht zu haben, denen jede Realität abginge. Mehr noch als früher ist es jetzt dringend nothwendig, sich genaue Rechenschaft über die Genauigkeit der Beobachtungen abzulegen. Zu Kepler's Zeiten war das Beobachtungsmaterial, worauf er seine Forschungen gründete, hinreichend genau, um die Entdeckung der drei Gesetze zu erlauben: es hätte möglicherweise noch etwas weiter gereicht, wenn Kepler im Besitze der erforderlichen mathematischen Hülfsmittel gewesen wäre, d. i. wenn die Theorie der mathematischen Induction zu seiner Zeit ihre heutige Ausbildung gehabt hätte. Gegenwärtig besitzt man aber Mittel, um die Beobachtungen gehörig auszunutzen; statt dass schon angestellte Beobachtungen ihrer Bearbeiter harren, sieht sich der Forscher nur zu häufig gezwungen, seine Untersuchung abzubrechen, und das Ergebniss fernerer Beobachtungen abzuwarten. Dass man also unter solchen Umständen mitunter in die Versuchung geräth, die Genauigkeit der Beobachtungen zu überschätzen und demzufolge den zukünftigen Ergebnissen gewissermaassen vorzugreifen, ist leicht erklärlich; aber eben deshalb ist grösste Vorsicht und grösste Vorurtheilslosigkeit vor allem nöthig. Die Kritik, welche die Wissenschaften so ausserordentlich gefördert hat, muss es sich hier hauptsächlich zur Aufgabe machen, die Resultate astronomischer Forschungen von dem Nimbus illusorischer Genauigkeit zu befreien und diese auf ein richtiges Maass zurückzuführen, sollte es sich auch dabei herausstellen, dass die Untersuchung zu keinem positiven Resultate geführt hätte.

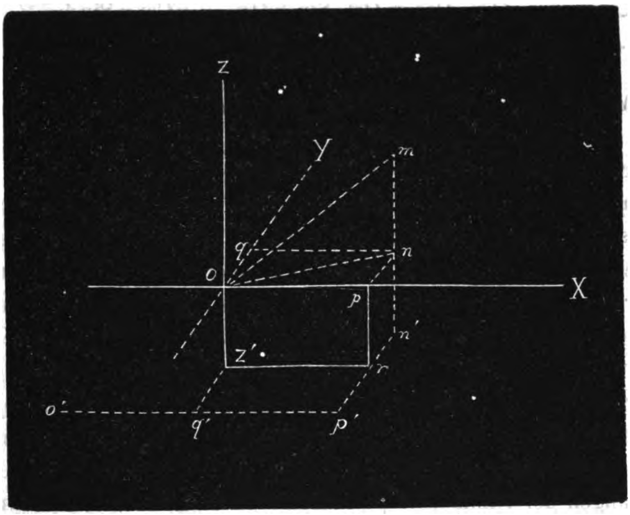
Die Kenntniss der Beobachtungsmethoden ist also durchaus nothwendig, um die Sicherheit beurtheilen und würdigen zu können, deren die astronomischen Ergebnisse der allgemeinen Ansicht nach sich erfreuen. Wir dürfen daher nicht unterlassen, wenigstens die hauptsächlichsten dieser Methoden hier vorzuführen und zu erklären. Da nun der Zweck einer astronomischen Beobachtung die Auffindung und Fixirung der Richtung eines Himmelskörpers ist, so müssen wir zunächst darstellen, wie man die Richtungen der Gestirne angiebt. Das Wesentliche hierüber ist allerdings schon im ersten Paragraphen angeführt worden, allein eine kurze, und dabei mehr systematische Wiederholung dürfte nichtsdestoweniger angemessen sein.

Durch zwei geradlinige Coordinaten giebt man die Lage eines Punktes in einer gegebenen Ebene an (vgl. pag. 94), um aber die Lage eines Punktes im Raume zu bestimmen, müssen drei Coordinaten angegeben werden. Als solche wendet man sehr oft die drei Abstände des Punktes von drei auf einander senkrechten Ebenen an. Diese Ebenen werden Coordinatenebenen genannt, ihre Durchschnittslinien, die ebenfalls gegen einander senkrecht sind, Coordinatenaxen und der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt Origo oder Anfangspunkt der Coordinaten, welche selbst als rechtwinklige bezeichnet werden.

Mittelst der nachstehenden Figur 27 soll das Gesagte veranschaulicht werden; in derselben denken wir uns die durch Punkte angedeuteten Linien als ausserhalb der Ebene des Papieres liegend, so dass die Axe OY senkrecht auf der Ebene XOZ steht. Die Gerade np, welche in der Ebene XOY liegt und parallel mit OY ist, steht also auch senkrecht auf der Ebene XOZ und der Axe OX. Die Gerade mn, welche als ausserhalb der Ebene des Papiers liegend gedacht wird, ist wiederum parallel mit der Axe OZ. Die drei Coordinaten $op = x$, $pn = y$ und $mn = z$, welche die Lage des Punktes m vollständig bestimmen, sind demnach senkrecht gegen die drei Coordinatenebenen YOZ, XOZ und XOY.

Statt der geradlinigen Coordinaten wendet man auch oft polare an (vgl. pag. 139). Solche sind z. B. der Abstand $Om = r$, der Winkel $mOn = \varphi$ und der Winkel $XOn = \psi$, welcher letztere Winkel in der Ebene XOY liegt. Die Angabe von Polarcoordinaten

Fig. 27.



setzt voraus, dass man sich über eine **Grundebene** (hier die XOY-Ebene), eine **Grundrichtung** in dieser Ebene (hier die Richtung OX) und einen **Anfangspunkt** (hier der Punkt O) verständigt hat. Wie man leicht sieht, genügen diese Bestimmungen auch zur Angabe der Lage der Coordinatenebenen in dem rechtwinkligen Systeme. Die XOY-Ebene fällt mit der Grundebene zusammen; die YOZ-Ebene ist zugleich senkrecht gegen die Grundebene und die Grundrichtung gelegt und geht durch den Anfangspunkt; die XOZ-Ebene endlich steht senkrecht auf der Grundebene und fällt mit der Grundrichtung zusammen.

Es ist sehr leicht, die Relationen zwischen den rechtwinkligen und den Polar-Coordinaten, die einen Punkt im Raume bestimmen, anzugeben, und da diese Relationen eine sehr häufige Anwendung finden, so wollen wir sie anführen. — Aus dem rechtwinkligen Dreiecke mOn (Fig. 27) findet man zunächst

$$z = mn = Om \,.\, \mathrm{Sin}\, mOn \; ; \quad On = Om \,.\, \mathrm{Cos}\, mOn$$

Das rechtwinklige Dreieck nOq in der Ebene XOY giebt uns ferner

$$x = Op = qn = On \,.\, \mathrm{Cos}\, nOp \; ; \; y = np = Oq = On \,.\, \mathrm{Sin}\, nOp$$

Mit Hülfe dieser Beziehungen findet man sofort

$$x = Om\,.\,\mathrm{Cos}\,mOn\,.\,\mathrm{Cos}\,n\,Op = r\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\psi$$
$$y = Om\,.\,\mathrm{Cos}\,mOn\,.\,\mathrm{Sin}\,n\,Op = r\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\psi$$
$$z = Om\,.\,\mathrm{Sin}\,mOn \qquad = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi$$

Man denke sich eine Sphäre mit dem Radius r um den Mittelpunkt O beschrieben; die Winkel φ und ψ können alsdann durch entsprechende Bögen von grössten Kreisen angegeben werden; diese Bögen nennt man die sphärischen Coordinaten des Punktes oder seine Coordinaten auf der Sphäre. Ohne die Entfernung r zu kennen, kann man selbstverständlich auch nicht den Radius der Sphäre angeben, dessenungeachtet aber die sphärischen Coordinaten, welche die Richtung bestimmen. Es ist daher gleichgültig, wenn es nur auf die Angabe der Richtung ankommt, mit welchem Radius die Sphäre beschrieben worden ist; die sphärischen Coordinaten bleiben sich dabei stets gleich; wohlverstanden wenn sie im Bogenmaasse ausgedrückt sind. Da nun aus astronomischen Beobachtungen die Richtungen der Himmelskörper bestimmt werden sollen, so kann man auch sagen, der Zweck derselben sei die Bestimmung der sphärischen Coordinaten von Punkten, deren Entfernung man nicht kennt. Die zu verschiedenen Zeitpunkten bestimmten sphärischen Coordinaten der Gestirne sind die Data, auf welche sich die astronomischen Untersuchungen stützen müssen.

Die Punkte, in denen die Axe OZ eine um O als Mittelpunkt beschriebene Sphäre schneidet, werden die Pole desjenigen grössten Kreises genannt, welchen die Sphäre von der Ebene XOY ausschneidet. Daher sagt man auch, dass die Axe OZ gegen die Pole des genannten grössten Kreises gerichtet ist.

Durch astronomische Beobachtungen findet man unmittelbar die sphärischen Coordinaten stets auf den Standpunkt des Beobachters als Anfangspunkt der Coordinaten bezogen. Die Grundrichtungen und Grundebenen können aber verschiedene sein. Bei den Beobachtungen selbst, wie bei der Angabe ihrer unmittelbaren Resultate, dienen gewöhnlich der Horizont oder der Aequator als Grundebenen.

Horizont nennt man die Ebene, welche durch den Standpunkt des Beobachters senkrecht auf die Richtung der Schwerkraft gelegt wird. Von dem geocentrischen Horizonte (vgl. pag. 66) wird selten gesprochen.

Aequator wird diejenige Ebene genannt, die senkrecht auf die Rotationsaxe der Erde durch den Standpunkt des Beobachters geht: der geocentrische Aequator ist mit jener Ebene parallel, geht aber durch den Mittelpunkt des Erdkörpers. Man spricht auch von dem heliocentrischen Aequator, d. h. der Ebene, welche, ebenfalls senkrecht auf der Rotationsaxe der Erde, durch den Mittelpunkt der Sonne geht. Diese Ebene ist nicht mit dem Sonnenäquator zu verwechseln, dessen Lage durch die Richtung der Sonnenrotation bestimmt wird.

Die Durchschnittslinie des Aequators und des Horizontes bestimmt die Richtung von Ost nach West.

Die Pole des Horizontes heissen Zenith und Nadir; ersterer liegt oberhalb der Ebene, der andere unterhalb.*) Die Pole des Aequators nennt man Weltpole, und unterscheidet den nördlichen und den südlichen.

Die Ebene, deren Lage durch das Zenith und den Nordpol des Aequators, sowie durch den Standpunkt des Beobachters bestimmt wird, nennt man Meridian. — Die Schwere ist an allen Punkten der Erdoberfläche sehr nahe, wenn auch nicht immer in aller Strenge, gegen ihre Umdrehungsaxe gerichtet. Man darf daher fast immer annehmen, dass die Rotationsaxe im Meridian liegt.

Die Gerade, in der sich Horizont und Meridian schneiden, wird Mittagslinie genannt; sie bestimmt die Richtung von Süden nach Norden und ist eine sehr häufig angewandte Grundrichtung bei astronomischen Beobachtungen. Eine zweite Grundrichtung wird durch die Durchschnittslinie des Aequators und des Meridians bestimmt; die dritte ist die Richtung der Aequinoctialpunkte, also der Durchschnittslinie des Aequators und der Ebene der Sonnenbahn.

In dem Coordinatensysteme, dessen Grundebene der Horizont und dessen Grundrichtung die Mittagslinie ist, nennt man die Coordinate, welche von dem Winkel ψ gemessen wird, Azimuth, die an-

---

*) Sobald der Anfangspunkt bestimmt ist, kann man auch von den Polen der Ebene sprechen; sie liegen auf der gegen die Ebene senkrechten Geraden, welche durch den Anfangspunkt geht.

dere, dem Winkel φ entsprechende, heisst **Höhe**. Das Azimuth wird auf dem Horizonte vom Südpunkte aus durch Westen, Norden und Osten zurück nach dem Südpunkte gerechnet, also von 0° bis 360°. Die Höhe rechnet man dagegen von 0° bis 90°; nur selten, aber doch zuweilen, namentlich wenn an hoch gelegenen Punkten beobachtet wird, kommen negative Höhen vor; alsdann erscheint das Gestirn unter dem Horizonte. Statt der Höhe giebt man oft das Complement zu 90°, oder die sog. **Zenithdistanz** an. Wird die Höhe mit h und die Zenithdistanz mit z bezeichnet, so ist also

$$z = 90^0 - h.$$

Wählt man den Aequator als Grundebene und seine Durchschnittslinie mit dem Meridian als Grundrichtung, so entspricht ψ dem **Stundenwinkel** und φ der **Declination**. Der Stundenwinkel wird von Süden durch West, Nord und Ost zurück nach Süden gerechnet, kann also volle 360° durchlaufen. In Folge der Axendrehung der Erde scheinen alle Gestirne Kreise um die Erdaxe zu beschreiben, wobei ihre Stundenwinkel gleichförmig zunehmen, insofern nicht das Gestirn eine eigene Bewegung hat, welche eine Ungleichförmigkeit in der Aenderung des Stundenwinkels hervorruft. Die Declinationen der Gestirne erleiden keine Aenderungen in Folge der scheinbaren täglichen Bewegung: sie werden gerechnet vom Aequator bis zu den Polen, also von 0° bis 90°; nördliche Declinationen bezeichnet man mit dem Zeichen +, die südlichen hingegen mit —. Das Complement der Declination nennt man **Poldistanz**; bezeichnet man dieselbe mit p, so ist

$$p = 90^o - \delta.$$

Für südliche Declinationen wird p grösser als 90°. Die Poldistanzen werden vom Nordpol bis zum Südpol gerechnet, also von 0° bis 180°; man hat daher nicht nöthig, durch besondere Zeichen südliche und nördliche Gestirne zu unterscheiden.

Die bis hierher angeführten Coordinaten sind diejenigen, welche am einfachsten direct bestimmt werden können; bei den Untersuchungen über die wirklichen Bewegungen der Gestirne sind sie jedoch nicht die zweckmässigsten, und zwar weil sie auf eine Grundrichtung bezogen sind, die an der Axendrehung der Erde Theil nimmt. Sowohl Azimuth als Höhe und Stundenwinkel erleiden daher viel raschere Aenderungen als die Bewegungen der Gestirne selbst veranlassen. Man verbindet nun, um sich von dem Einflusse der täglichen Bewegung frei zu machen, den Aequator, als Grundebene, mit der Aequinoctiallinie als Grundrichtung. Die Coordinate φ ist hier dieselbe wie im vorigen Systeme, entspricht also der Declination. Die andere Coordinate, also der Winkel ψ, ist in diesem Systeme aber die Rectascension oder die gerade Aufsteigung des Gestirns. Die Rectascension wird nicht in derselben Richtung gezählt wie der Stundenwinkel oder wie das Azimuth, sondern umgekehrt, so dass ein gewisser Punkt am Himmel zu einer gegebenen Zeit eine desto grössere Rectascension hat, je geringer sein Stundenwinkel ist. Gewöhnlich giebt man die Rectascensionen in Stunden an, deren jede 15° entspricht (vgl. pag. 29).

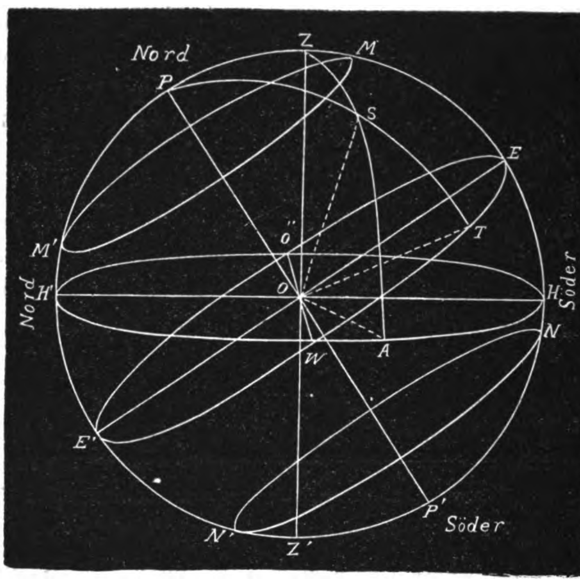
Bei astronomischen Untersuchungen wendet man auch mitunter, früher häufiger als jetzt, ein viertes Coordinatensystem an, welches die Ekliptik als Grundebene und die Linie der Tag- und Nachtgleichen zur Grundrichtung hat. Die Coordinaten in diesem Systeme werden Länge (Longitude) und Breite (Latitude) genannt, wovon die erste dem Winkel ψ, die zweite wiederum dem Winkel φ entspricht. Die Länge wird in demselben Sinne wie die Rectascension gezählt, also der täglichen Bewegung entgegen, und von 0° bis 360°; die Breite zählt man von 0° bis 90°; sie ist nördlich, so oft das Gestirn auf der nördlichen Seite der Ekliptik liegt, im entgegengesetzten Falle südlich.

Durch directe Beobachtungen werden gewöhnlich die Höhen oder Zenithdistanzen und die Azimuthe oder auch die Zeiten, zu denen die Azimuthe der Gestirne Null sind, bestimmt, es ist aber bequemer, bei den astronomischen Untersuchungen entweder die Rectascensionen und Declinationen, oder auch die Längen und Breiten der Himmelskörper zu kennen. Hierdurch entsteht die Aufgabe, welche eine der wesentlichsten in der sphärischen Astronomie ist, nämlich: wenn die sphärischen Coordinaten eines Punktes in einem Coordinatensysteme gegeben sind, die Coordinaten desselben Punktes in einem anderen Systeme durch Rechnung zu finden. Selbstverständlich müssen hierbei die Neigungen der verschiedenen Grundebenen, die Lage ihrer Durchschnittslinien, sowie die Lage der Grundrichtungen bekannt sein. Die Festlegung dieser Bestimmungsstücke ist daher ein wichtiger Gegenstand der beobachtenden Astronomie.

Wir werden nun sehen, wie die in Frage stehende Aufgabe auf die Auflösung eines sog. sphärischen Dreiecks zurückgeführt wird, welche Auflösung bekanntlich den Hauptgegenstand der sphärischen Trigonometrie bildet. Die Entwicklung der bei dieser Lösung vorkommenden Formeln liegt hier ziemlich auf der Hand, wir wollen indessen mit diesen den Text nicht belasten, sondern auf den Anhang verweisen.

Wir stellen uns eine Sphäre vor, deren Mittelpunkt O (Fig. 28)

Fig. 28.



mit dem Standpunkt des Beobachters zusammenfällt. Den Meridian denken wir uns als mit der Ebene des Papiers zusammenfallend, also durch den grössten Kreis $HZH'Z'$ bestimmt; die grössten Kreise $HWH'Ö$ und $EWE'Ö$ stellen wir uns vor als in Ebenen liegend, die senkrecht gegen die Ebene des Papieres stehen, sowie als die erste dieser Ebenen den Horizont, als zweite hingegen den Aequator. Die Linie HH' ist alsdann die Mittagslinie und EE' die Grundrichtung des Systems, dessen Coordinaten der Stundenwinkel und die Declination sind. Die Gerade ZZ', welche durch den Punkt O geht und senkrecht auf dem Horizonte steht, trifft die Sphäre im Zenith und Nadir. Die Punkte P und P' entsprechen den Polen des Aequators, ersterer dem nördlichen Weltpol, letzterer dem südlichen. Die Punkte W und $\ddot{O}$ endlich geben die Durchschnittslinie des Horizonts und des Aequators (den West- und Ostpunkt) an.

Durch den Punkt S auf der Sphäre, wo wir uns das Bild eines Gestirns denken, legen wir zwei grösste Kreise, von denen der eine durch die Punkte Z und Z', der andere aber durch die beiden Weltpole geht. Der erstere dieser grössten Kreise schneidet den Horizont im Punkte A, der zweite den Aequator im Punkte T. Man bemerkt nun ohne Schwierigkeit, dass der Bogen HA das Azimuth des Gestirns repräsentirt, SA seine Höhe, während der Stundenwinkel und die Declination durch die Bögen ET und ST dargestellt werden. Der Bogen HA wird jedoch, wie man leicht bemerkt, von dem sphärischen Winkel HZA' gemessen, so dass der Winkel AZH' oder SZP das Supplement des Azimuthes zu 180° sein muss. Wird demnach das Azimuth mit a bezeichnet, so ist

$$SZP = 180^\circ - a.$$

Der Winkel EPT oder ZPS misst wiederum den Stundenwinkel, welchen wir mit t bezeichnen.

Die Summe der Höhen des Aequators und des Pols beträgt, wie man aus der Figur sogleich bemerkt, 90°; bezeichnen wir die letztere, welche offenbar gleich der Zenithdistanz des Aequators ist, mit φ, so ist

$$ZP = HE = 90^\circ - \varphi.$$

Schliesslich bezeichnen wir die Zenithdistanz ZS des Gestirns mit z und seine Declination mit δ, so dass $SP = 90^\circ - \delta$.

Die drei Bögen SZ, SP und ZP, welche sämmtlich Bögen grösster Kreise sind, bilden auf der Oberfläche der Sphäre ein sog. sphärisches Dreieck, dessen Seiten z, $90^\circ - \delta$ und $90^\circ - \varphi$ sind, und dessen Winkel $180^\circ - a$, t und der Winkel ZSP, welcher der parallactische Winkel genannt wird. Wenn drei von diesen Grössen durch Beobachtung oder anderweitig bekannt sind, findet man die drei übrigen durch trigonometrische Rechnung. Der Uebergang von Azimuth und Höhe oder Zenithdistanz zu Stundenwinkel und

Declination oder Poldistanz, oder umgekehrt, geschieht also einfach nach den Regeln, nach welchen sphärische Dreiecke aufgelöst werden.

Dagegen geschieht der Uebergang vom Stundenwinkel zur Rectascension, ohne dass man nöthig hat, trigonometrische Formeln anzuwenden. Nehmen wir z. B. an, dass W den Frühlingspunkt bezeichnet, so ist die Rectascension des Punktes S durch den Bogen WT angegeben. Der Bogen EW ist aber der Stundenwinkel des Frühlingspunktes oder die Sternzeit, die wir mit Θ bezeichnen. Indem wir also mit α die Rectascension des Gestirns bezeichnen, haben wir, wie aus der Figur unmittelbar zu ersehen ist,

$$\Theta = \alpha + t.$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man einerseits die Sternzeit finden, wenn der Stundenwinkel eines Gestirns, dessen Rectascension bekannt ist, durch Beobachtung bestimmt wird, andrerseits aber die Rectascension, wenn die Sternzeit bekannt ist. Für einen Punkt im Meridian ist der Stundenwinkel 0°; wenn man demnach an einer Uhr, welche die Sternzeit angiebt, den Augenblick beobachtet, zu welchem ein Gestirn den Meridian passirt, so hat man unmittelbar auch seine Rectascension (vgl. pag. 57). Von Rectascension und Declination geht man zu Länge und Breite über mit Hülfe von Relationen, die denen ganz ähnlich sind, welche zwischen Azimuth und Höhe einerseits und Stundenwinkel und Declination andrerseits stattfinden. Wie die Neigung der beiden Fundamentalebenen im vorigen Falle durch die Polhöhe gegeben war, so ist es jetzt die Schiefe der Ekliptik, welche bekannt sein muss, um die in Frage stehenden Transformationen ausführen zu können.

Die Formeln, welche den Uebergang von Höhe und Azimuth zu Declination und Stundenwinkel vermitteln, finden auch Anwendung, wenn man die Polhöhe eines Ortes und die Declinationen der Gestirne aus beobachteten Höhen und Azimuthen bestimmen will. Verschiedene einfachere Fälle dieser allgemeineren Aufgabe finden dabei zugleich ihre Erledigung. Man erhält z. B. die Polhöhe aus einer beobachteten Höhe oder aus einem Azimuthe, wenn ausser der Sternzeit die Rectascension und Declination des beobachteten Gestirns bekannt sind. Im umgekehrten Fall findet man entweder die Declination oder die Rectascension, wenn eine dieser Coordinaten und die Polhöhe bekannt sind und wenn überdies die Sternzeit, sowie die Höhe oder das Azimuth des Gestirns durch Beobachtung ermittelt wurde.

Die Relation zwischen der Höhe eines Gestirns und seiner Declination ist am einfachsten im Meridian; man hat hierbei drei verschiedene Fälle zu unterscheiden, nämlich 1) das Gestirn culminirt südlich vom Zenith (der Beobachtungsort sei auf der nördlichen Halbkugel), 2) das Gestirn culminirt zwischen dem Zenith und dem Pole, und 3) das Gestirn befindet sich bei seiner unteren Culmination zwischen dem Nordpole und dem Horizonte. Im ersten Falle ist

$$\delta = h - (90^\circ - \varphi) = \varphi - z\,;$$

im zweiten

$$\delta = \varphi + z\,;$$

und im dritten

$$\delta = 180^\circ - \varphi - z.$$

Die Richtigkeit dieser Beziehungen findet man sofort bei Betrachtung der Fig. 28.

Sowohl die Rectascensionen als die Declinationen werden am einfachsten bestimmt, wenn die Gestirne im Meridian beobachtet werden. Die Sternzeit der Culmination ergiebt nämlich unmittelbar die Rectascension, und die Declination findet sich nach einer der soeben angeführten Formeln, vorausgesetzt, dass die Polhöhe des Beobachtungsortes bekannt ist. Man hat daher Instrumente construirt, deren Fernröhre nur in der Ebene des Meridians beweglich sind und folglich nur gegen culminirende Sterne gerichtet werden können. Solche Instrumente nennt man Mittagsfernröhre oder Passageninstrumente: ist das Instrument mit einem eingetheilten Kreise versehen, an dem die Höhen oder Zenithdistanzen gemessen werden können, so heisst es Meridiankreis.

Weil die Erde um eine Axe rotirt, deren Richtung während des Verlaufs eines Tages keine merkliche Aenderung erleidet, so scheint das Himmelsgewölbe sich mit allen Gestirnen während dieses Zeitraumes um die genannte Axe zu drehen. Die täglichen Bahnen der Himmelskörper erscheinen uns demnach als Kreise, deren Mittelpunkte auf der Weltaxe (d. i. der Verlängerung der Erdaxe) liegen und deren Durchmesser immer kleiner werden, je näher den Polen die betreffenden Kreise gelegen sind. Da nun die Umlaufsbewegung in jedem dieser Kreise immer dieselbe Zeit, nämlich die Umdrehungszeit der Erde, erfordert, so ist die scheinbare Bewegung offenbar desto geringer, je näher ein Gestirn einem der Pole liegt. — Diese Kreise sind dem Aequator parallel und liegen entweder vollständig über dem Horizonte, oder theilweise über und theilweise unter dieser Ebene, oder endlich ganz und gar unter derselben. Im ersten Fall wäre der Stern immer sichtbar, wenn nicht der Glanz des Sonnenlichtes das schwache Licht der übrigen Gestirne überstrahlte: man nennt solche Sterne Circumpolarsterne. Im dritten Falle dagegen kann das Gestirn nie über den Horizont kommen und demnach nie sichtbar sein. Demnach können verschiedene Sternbilder, die den südlichen Theil des Himmels schmücken, von unsern nördlichen Gegenden aus gar nicht gesehen werden. Liegt endlich die tägliche Bahn eines Himmelskörpers theilweise über und theilweise unter dem Horizonte, so schneidet diese Bahn den Horizont in zwei Punkten, einem östlich und einem westlich gelegenen. Von dem Gestirn, welches sich eben im östlichen Durchschnittspunkte befindet, sagt man: es geht auf; sinkt es dagegen durch den westlichen unter den Horizont, so sagt man: es geht unter. Mit Hülfe der Fig. 28 ist leicht zu ersehen, dass ein Gestirn circumpolar ist oder nicht untergeht, wenn seine Declination grösser als die Höhe des Aequators über dem Horizonte ist, d. h. grösser als $90^\circ - \varphi$, oder mit andern Worten, wenn seine Poldistanz kleiner als die Polhöhe des Beobachtungsortes ist. Die Circumpolarsterne haben zwei sichtbare Culminationen, eine obere (für einen Beobachter auf der nördlichen Halbkugel) im Süden, und eine untere im Norden.

Vermittelst der trigonometrischen Relationen zwischen Azimuth und Höhe einerseits und Stundenwinkel und Declination andrerseits, kann man für eine gegebene Polhöhe den Stundenwinkel und das Azimuth eines Gestirns mit grösster Leichtigkeit berechnen, wenn Declination und Höhe bekannt sind. Nimmt man an, dass die Höhe 0° beträgt, so findet man sofort den Stundenwinkel beim Aufgange oder Untergange und also bei bekannter Rectascension auch die Zeit, wann das Gestirn auf- und untergeht. Das Azimuth, welches bei dieser Voraussetzung gefunden wird, giebt den Punkt am Horizonte an, wo der Auf- resp. Untergang stattfindet.

Der nördlichste Punkt der Ekliptik hat eine nördliche Declination, deren Grösse durch die Neigung dieser Ebene gegen den Aequator bestimmt wird; ihr südlichster Punkt hat eine gleich grosse südliche Declination. Es ist klar, dass diese beiden Punkte 12 Stunden nach einander culminiren. Ein Himmelskörper, welcher sich in der Nähe der Ekliptik befindet und 12 Stunden nach der Sonne culminirt, hat demnach eine südliche Declination, wenn die Sonne eine nördliche hat und umgekehrt. Unter nördlichen Breiten culminirt die Sonne im Sommer ziemlich hoch über dem Horizonte, weil ihre Declination nördlich ist, aber Himmelskörper in der Nähe der Ekliptik, welche dann um Mitternacht, also 12 Stunden nach der Sonne culminiren, müssen südliche Declinationen haben und können in Folge dessen nur geringe Höhen erreichen. Hierdurch erklärt sich die bekannte Thatsache, dass der Mond und die Planeten im Sommer niedrig am Horizont erscheinen, im Winter dagegen, wo die Sonne bei ihrer Culmination sehr niedrig steht, hoch am Himmel zu sehen sind.

Durch Beobachtungen findet man unmittelbar die sphärischen Coordinaten der Himmelskörper, bezogen auf den Standpunkt des Beobachters als Anfangspunkt; für weitere Untersuchungen ist es jedoch erforderlich, diese Coordinaten auf andere Anfangspunkte zu beziehen, gewöhnlich auf die Mittelpunkte der Sonne oder der Erde. Die Nothwendigkeit einer solchen Reduction tritt ein, wenn der Abstand des in Frage stehenden Himmelskörpers mässig gross ist im Verhältniss zu den Abständen der verschiedenen Anfangspunkte; sind aber die Entfernungen zwischen diesen als verschwindend klein im Verhältniss zu dem Abstande des Gestirns anzusehen, so sind die Coordinaten gleich, auf welchen Anfangspunkt sie auch bezogen sein mögen. Ein Stern z. B., dessen Abstand vom Sonnensysteme im Vergleich zur Entfernung der Erde von der Sonne ausserordentlich gross ist, erscheint von jedem dieser Körper aus in derselben Rectascension und derselben Declination; mit sehr wenigen Ausnahmen gilt dies für alle Sterne. Wir wollen nun in Kürze zeigen, wie man die Reduction von einem Anfangspunkt auf einen andern ausführt, weil solche Reductionen sehr häufig bei den astronomischen Arbeiten vorkommen.

Wir bedienen uns der Fig. 27 (pag. 255), wo O und O' zwei Anfangspunkte bezeichnen. Die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes m, bezogen auf den Anfangspunkt O, sind $Op = x$, $pn = y$ und $nm = z$; bezieht man wiederum die Coordinaten auf den Anfangspunkt O', so sind sie $O'p' = x'$; $p'n' = y'$ und $n'm = z'$; endlich sind die Coordinaten des Punktes O bezogen auf O' als Anfangspunkt: $o'q'$, $q'z'$ und $Z'O$, diese wollen wir mit a, b und c bezeichnen. Nun sieht man sogleich, dass

$$O'p' = O'q' + q'p' = O'q' + Op,$$

d. h.

$$x' = x + a,$$

und in derselben Weise findet man

$$y' = y + b$$
$$z' = z + c.$$

Um von diesen Formeln Gebrauch zu machen, wollen wir die Ausdrücke ableiten, durch welche man die geocentrische Rectascension und Declination eines Gestirns herleitet, wenn die von einem Punkte der Erdoberfläche gesehene Rectascension und Declination bekannt sind. Die geocentrischen Coordinaten bezeichnen wir mit α' und δ', die von der Erdoberfläche aus gesehenen mit α und δ; die respectiven Entfernungen seien endlich r' und r; wir haben alsdann (vgl. pag. 256):

$$x' = r' \operatorname{Cos} \delta' \operatorname{Cos} \alpha'\,; \quad x = r \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} \alpha$$
$$y' = r' \operatorname{Cos} \delta' \operatorname{Sin} \alpha'\,; \quad y = r \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Sin} \alpha$$
$$z' = r' \operatorname{Sin} \delta' \quad ; \quad z = r \operatorname{Sin} \delta.$$

Die Ausdrücke der Grössen a, b und c leiten wir unter der Voraussetzung ab, dass die Erde eine vollkommene Kugel ist; diese Annahme genügt in den meisten Fällen, ohne dass dadurch irgend welcher bemerkenswerther Fehler entstünde. Den Halbmesser der Erdkugel bezeichnen wir mit ρ. — Um nun die Ausdrücke für a, b und c aufzustellen, brauchen wir die Rectascension und die Declination für den Standpunkt des Beobachters, vom Mittelpunkte der Erde aus gesehen, oder, was dasselbe ist, da die Erde als eine Kugel angenommen wird, die Rectascension und die Declination des Zeniths am Beobachtungsorte. Die Rectascension des Zeniths ist aber offenbar dasselbe wie der Stundenwinkel des Frühlingspunktes, also die Sternzeit, die Declination des Zeniths ist wiederum identisch mit der Polhöhe des Ortes (vgl. pag. 262 und 263). Wir erhalten demnach

$$a = \rho \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} \Theta$$
$$b = \rho \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \Theta$$
$$c = \rho \operatorname{Sin} \varphi.$$

Die Relationen zwischen α' und δ', α und δ finden sich also, wie folgt:

$$r' \operatorname{Cos} \delta' \operatorname{Cos} \alpha' = r \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} \alpha + \rho \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} \Theta$$
$$r' \operatorname{Cos} \delta' \operatorname{Sin} \alpha' = r \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Sin} \alpha + \rho \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \Theta$$
$$r' \operatorname{Sin} \delta' = r \operatorname{Sin} \delta + \rho \operatorname{Sin} \varphi.$$

Aus diesen Gleichungen können zwar α' und δ' berechnet werden, allein man kann sehr leicht aus ihnen andere Formeln ableiten, welche die Differenzen $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ direct geben und welche ihrer grösseren Bequemlichkeit wegen den vorhergehenden vorzuziehen sind. Multipliciren wir die erste der obigen Gleichungen mit Sin α und die zweite mit Cos α, so erhalten wir nach Subtraction der Producte:

(a) $$r' \operatorname{Cos} \delta' \operatorname{Sin} (\alpha' - \alpha) = \rho \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \Theta - \alpha) \ .$$

Durch ein ähnliches Verfahren findet man ferner die Gleichung:

(b) $$r' \operatorname{Cos} \delta' \operatorname{Cos} (\alpha' - \alpha) = r \operatorname{Cos} \delta + \rho \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} (\Theta - \alpha)$$

und durch Division der Gleichungen (a) und (b) erhält man sogleich:

(c) $$\operatorname{Tang} (\alpha' - \alpha) = \frac{\rho \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} (\Theta - \alpha)}{r \operatorname{Cos} \delta + \rho \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} (\Theta - \alpha}$$

Die Herleitung der entsprechenden Formel für Tang $(\delta' - \delta)$ erfordert einige Zeilen mehr; wir begnügen uns daher, eine genäherte Formel zu geben, die indess in den allermeisten Fällen genügt. Der Unterschied $\alpha' - \alpha$ ist nämlich fast immer so gering, dass der Cosinus desselben gleich Eins gesetzt werden darf, alsdann erhält man aus (b):

$$r' \operatorname{Cos} \delta' = r \operatorname{Cos} \delta + \rho \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} (\Theta - \alpha) \ .$$

Da nun ausserdem

$$r' \operatorname{Sin} \delta' = r \operatorname{Sin} \delta + \rho \operatorname{Sin} \varphi \ ,$$

so ergiebt sich:

$$r' \operatorname{Sin} (\delta' - \delta) = \rho \left[\operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} \delta - \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Cos} (\Theta - \alpha)\right]$$
$$r' \operatorname{Cos} (\delta' - \delta) = r + \rho \left[\operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} \delta + \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} (\Theta - \alpha)\right]$$

woraus wieder durch Division Tang $(\delta' - \delta)$ erhalten wird.

Gewöhnlich ist das Verhältniss $\frac{\rho}{r'}$, welches den Sinus der Horizontalparallaxe des Gestirns bedeutet, bekannt (vgl. pag. 65 und 91); hat dasselbe einen kleinen Werth — und dies ist mit Ausnahme des Mondes stets der Fall — so kann $\frac{\rho}{r}$ mit $\frac{\rho}{r'}$ vertauscht werden; ausserdem können die höheren Potenzen dieser Grösse weggelassen, sowie die Bögen $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ für die resp. Tangenten und die in Bogen ausgedrückte Horizontalparallaxe (p) für den Sinus von p gesetzt werden. Wir finden also:

(d) $$\alpha' - \alpha = p \frac{\operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Cos} \delta} \operatorname{Sin} (\Theta - \alpha)$$

(e) $$\delta' - \delta = p \left[\operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} \delta - \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Cos} (\Theta - \alpha)\right]$$

Eine grosse Anzahl Formeln können in der soeben angeführten Weise abgeleitet werden, unter andern die, welche pag. 152 gegeben wurden zur Berechnung des geocentrischen Orts, wenn der heliocentrische bekannt ist.

§ 13. Astronomische Beobachtungen und Instrumente.

Die Bestimmung der gegenseitigen Lage der verschiedenen Grundebenen und Grundrichtungen muss natürlich den eigentlichen astronomischen Ortsbestimmungen vorausgehen, d. h. mit andern

Worten, man muss erst wissen, von welcher Anfangsrichtung und in welcher Ebene ein Winkel gemessen werden soll, bevor man an die wirkliche Messung gehen kann. Die Lage einiger dieser Ebenen hängt ausschliesslich vom Standpunkte des Beobachters ab. So hat jeder geographische Punkt seinen eigenen Horizont, dessen Lage für denselben ganz eigenthümlich ist, obwohl mehrere Orte dieselbe Polhöhe oder auch denselben Meridian haben können; im ersten Falle liegen die Orte auf demselben mit dem Erdäquator parallelen Kreise, im zweiten Falle dagegen auf demselben Erdmeridian. Die gegenseitige Lage des Aequators und der Ekliptik ist dagegen in keiner Weise von dem Standpunkte des Beobachters abhängig, ebensowenig wie die Durchschnittslinie beider Ebenen, d. i. die Richtung der Aequinoctialpunkte. Die wichtigsten Methoden, welche zur Bestimmung der Lage dieser Ebenen und Grundrichtungen dienen, sollen nun ganz kurz angedeutet werden.

Die Lage des Horizontes wird durch die Bedingung bestimmt, dass die Schwerkraft der Erde am Beobachtungsorte senkrecht gegen diese Ebene gerichtet sein soll. Hieraus folgt unmittelbar ein höchst einfaches Mittel, die Lage derselben anzugeben. Man lässt nämlich ein Gewicht an einem Faden herunter hängen, dessen oberes Ende in irgend einer Weise befestigt worden ist. Dieser Faden wird, wenn er biegsam ist und die Ruhelage eingenommen hat, die Richtung der Schwerkraft angeben, woraus folgt, dass alle geraden Linien, welche senkrecht gegen den genannten Faden gezogen werden, mit dem Horizonte parallel sind. Die beschriebene Vorrichtung nennt man ein Loth. Vermittelst des Lothes findet man also in sehr einfacher Weise, zwar eigentlich und direct eine gegen den Horizont senkrechte Richtung, mittelbar aber auch beliebige Richtungen in dieser Ebene, mithin die Lage des Horizontes.

Bei den astronomischen Instrumenten kommt es gewöhnlich nur darauf an, sie in Bezug auf den Horizont oder die Lothlinie zu orientiren; gewisse Theile des Instruments müssen drehbar sein um eine Axe, die in der Horizontalebene liegt, andere hingegen um eine verticale Axe. Um die richtige Lage dieser Axen zu prüfen oder eventuell herzustellen, bedient man sich gewöhnlich einer sogenannten Wasserwage (Libelle oder Niveau), obwohl man auch, namentlich in früheren Zeiten, die einfachere Vorrichtung des Lothes zu diesem Zwecke benutzt hat. Die Wasserwage besteht der Hauptsache nach aus einer graduirten Glasröhre, welche mit irgend einer leichtbeweglichen Flüssigkeit, gewöhnlich Spiritus oder Schwefeläther, bis auf einen kleinen Raum gefüllt ist. Die Röhre ist kein vollkommener Cylinder, sondern etwas gebogen, so dass die Luftblase in ihrem Innern in der Mitte erscheint, wenn die Verbindungslinie zwischen den Endpunkten der Röhre sich in einer horizontalen Lage befindet. Gewöhnlich ist die Röhre in einer Metallkapsel so eingeschlossen, dass bloss ihr graduirter mittlerer Theil sichtbar ist; die Kapsel ruht auf zwei an derselben befestigten Stützen, welche in solcher Weise eingerichtet sind, dass die Wasserwage mit Bequemlichkeit an dem Instrumente angebracht werden und also zur Prüfung der richtigen Lage seiner Axen dienen kann. — Die Glasröhre ist in der Kapsel befestigt mittelst Schrauben, durch welche ihre Lage zu der die Endpunkte der Stützen verbindenden Linie berichtigt werden kann. Wenn nun die Wasserwage auf eine vollkommen horizontale Ebene gestellt wird, so soll die Luftblase in der Röhre genau in der Mitte einspielen, d. h. die Endpunkte der Blase sollen in gleichen Abständen von dem Mittelstriche erscheinen. Obschon nun dieses Ziel selten oder nie vollkommen erreicht wird, kann man dennoch die Wasserwage unbehindert zu dem beabsichtigten Zwecke anwenden. Man muss nur bei der Anwendung des Apparates das Princip befolgen, welches die Beobachtungskunst so wesentlich gefördert hat, nämlich durch passend abgeänderten Gebrauch des Instrumentes, seine Fehler oder Abweichungen von der mathematischen Idee entweder ganz oder doch so viel wie möglich unschädlich zu machen suchen. Bei der Anwendung der Wasserwage ist es sehr leicht, dieses Princip zu befolgen. Man braucht nämlich nur zwei Nivellirungen auszuführen, von denen die zweite in der der ersten entgegengesetzten Lage der Wasserwage angestellt wird. Nivellirt man z. B. eine Axe, die physisch durch einen Metallcylinder dargestellt wird, in der Richtung von Osten nach Westen, und zeigt die Blase a Theile nach Westen und b Theile nach Osten, so würde das Westende der Axe um den Winkel $\frac{1}{2}(a-b)$ über dem Horizonte erhöht sein, vorausgesetzt, dass die Röhre, in Bezug auf die Endpunkte der Stützen, vollkommen berichtigt wäre. Stellt man nun das Niveau mit den Stützen um, so dass diejenige, welche erst im Westen stand, nun im Osten zu stehen kommt und umgekehrt, so muss man auch, insoweit die Niveauröhre richtig eingepasst und die Stützen gleich lang sind, dieselbe Ablesung wie vorhin wiederfinden. Gewöhnlich wird sich jedoch herausstellen, dass die Blase bei dem zweiten Nivellement in einer etwas veränderten Lage relativ zu den Strichen zur Ruhe kommt, so dass man etwa die Ablesungen a' im Westen und b' im Osten erhält. Diese Veränderung in der Ablesung beweist, dass die Röhre nicht vollkommen richtig in die Kapsel eingepasst, oder strenger, dass sie nicht parallel einer durch die Endpunkte der Stützen gelegten Linie ist; indessen findet man die wirkliche Neigung der nivellirten Axe gegen den Horizont, indem man das arithmetische Mittel aus den beiden Bestimmungen bildet, nämlich aus $\frac{1}{2}(a-b)$ und $\frac{1}{2}(a'-b')$. Von der Richtigkeit dieser Regel kann man sich leicht überzeugen. Man denke sich, dass die nivellirte Richtung in der That horizontal sei; alsdann sollte $a = b$ sein, und die Differenz $a-b$ rührt ausschliesslich von der mangelhaften Berichtigung des Nullpunktes, also der Niveauröhre in der Kapsel her. Setzt man nun das Niveau auf der horizontalen Axe um, so muss die Blase jetzt ebensoviel nach Westen zeigen, wie vorhin nach Osten; es erscheint also jetzt, als ob das Westende des Niveaus um den Winkel $\frac{1}{2}(b-a)$ über dem Horizonte erhöht wäre. Vorhin hatten wir in der ersten Lage $\frac{1}{2}(a-b)$ gefunden; das Mittel aus beiden wird Null, wie es auch sein muss, da die Axe als horizontal vorausgesetzt wurde.

Die vermittelst des Niveaus bestimmten Neigungen sind nicht unmittelbar im gewöhnlichen Winkelmaasse ausgedrückt, sondern in Theilen der Niveaugraduirung; um daher die Resultate der Nivellirungen in Sekunden ausdrücken zu können, muss man wissen, wie viele Sekunden und Theile der Sekunde dem Abstande zweier Striche auf dem Niveau, die als in gleicher Entfernung von einander vorausgesetzt werden, entsprechen, oder, wie man sich auch ausdrückt, den Werth eines Niveautheils in Sekunden kennen. Die Bestimmung dieses Werthes lässt sich leicht bewerkstelligen, wenn man eine Axe nivellirt, deren Neigung man in bekannter Weise ändern kann, so dass die Unterschiede der Nivellirungen unmittelbar in Sekunden bekannt sind. Dividirt man die Anzahl der Sekunden eines solchen Unterschiedes mit dem durch die Nivellirungen gefundenen Unterschied der Niveautheile, so findet man den Werth eines Niveautheils.

Durch Nivelliren in zwei Richtungen, z. B. in einer von West nach Ost und der andern von Nord nach Süd, kann man sich von der Horizontalität einer ebenen Scheibe überzeugen, resp. dieselbe berichtigen.

Die Lage des Meridians wird einestheils durch die Richtung der Schwere, also durch die des Lothes, anderntheils durch die Richtung der Weltaxe bestimmt; um letztere zu finden, müssen die täglichen Bewegungen der Gestirne verfolgt werden, denn aus diesen Bewegungen ist der Begriff der Weltaxe, mithin auch der des Meridians gewonnen worden. Um den Meridian zu bestimmen, ist es also zunächst erforderlich, die Richtung der Lothlinie festzustellen und hierauf durch Beobachtungen am Himmel die Richtungen zu finden, in welchen die Gestirne culminiren. Der einfachste Weg, welcher hier gewählt werden kann, besteht darin, dem Schatten zu folgen, welchen die Sonnenstrahlen von einer Spitze auf eine horizontale Ebene werfen. In der Richtung, in welcher der kürzeste Schatten fällt, hat man die Mittagslinie zu ziehen. Um jedoch auf diesem Wege ein möglichst genaues Resultat zu erhalten, ist es nöthig, die Beobachtungen zu den Zeiten anzustellen, wo die Sonne ihre Declination nur unmerklich ändert, also während der Solstitien. Zu andern Zeiten müsste man durch Rechnung die gefundene Richtung der Mittagslinie berichtigen, weil die Sonne in Folge ihrer eigenen Bewegung nicht die grösste Höhe im Meridian erreicht.

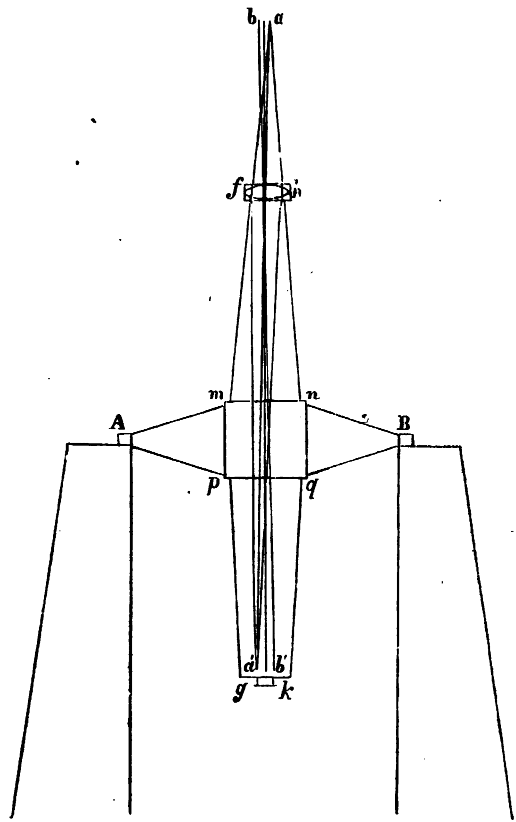
Für astronomische Zwecke würde die geringe Genauigkeit, die man auf diese Weise erreichen könnte, keineswegs genügen; man bestimmt daher, und auch aus andern Gründen, die Richtung des Meridians mit denselben Instrumenten, die zu den eigentlichen astronomischen Beobachtungen dienen. Wir müssen uns jedoch darauf beschränken, anzugeben, wie man mittelst des Durchgangsinstrumentes diese Bestimmung ausführt, und können dies auch um so eher, als andere Methoden in der Astronomie weniger häufig Verwendung finden. Bevor wir jedoch an die Beschreibung des Durchgangsinstrumentes gehen, müssen einige kurze Andeutungen über die optischen Theile der astronomischen Instrumente im Allgemeinen vorausgeschickt werden.

Es ist bekannt, dass man mit dem Apparat, welcher Fernrohr heisst, entfernte, dem blossen Auge oft nicht einmal sichtbare Objecte deutlich sehen und unterscheiden kann. Auch dürfte es den Meisten bekannt sein, dass das Fernrohr aus einigen, in passender Weise geschliffenen und in entsprechenden Entfernungen von einander in einer Röhre befestigten Glaslinsen besteht. Diese Glaslinsen sind das Wesentliche hierbei, die Röhre dient nur dazu, sie zusammenzuhalten, was aber auch in anderer Weise geschehen könnte, sowie um anderes Licht, als das vom beobachteten Objecte ausgesandte, abzuhalten. Das Fernrohr, welches bei astronomischen Beobachtungen angewendet wird, ist einfacher als das gewöhnliche (terrestrische); es zeigt die Bilder umgekehrt und wird gewöhnlich das astronomische Fernrohr genannt.

Das astronomische Fernrohr bestehtaus einer grösseren Glaslinse fh (Fig. 29), welche die einfallenden Lichtstrahlen auffängt; diese Linse wird das Objectiv genannt. Die Lichtstrahlen, welche durch den Mittelpunkt des Objectives gehen — man nennt sie Hauptstrahlen — setzen ihren Weg in's Innere des Fernrohres ungebrochen fort, sie bilden also gerade Linien. Alle andern Strahlen aber, welche von einem sehr entfernten Punkte a auf das Objectiv fallen, werden beim Durchgange durch dasselbe in solcher Weise gebrochen, dass sie sich in demselben Punkte a' wieder begegnen, der auf dem Weg des Hauptstrahls liegt. In Folge dessen wird ein Bild des Objectes a im Punkte a' sichtbar und in derselben Weise im Punkte b' ein Bild des Objectes b. Man erhält somit umgekehrte Bilder von allen Gegenständen, die man mit dem Fernrohre betrachtet. Die Entfernung dieser Bilder vom Objective aus, welche immer dieselbe bleibt, nennt man die Brennweite des Objectives; der Punkt, in welchem die verschiedenen gebrochenen, von demselben Gegenstande ausgehenden Strahlen einander schneiden, heisst Brennpunkt, jedoch versteht man gewöhnlich unter dieser Benennung denjenigen dieser Durchschnittspunkte, welcher auf der optischen Axe der Objectivlinse liegt, d. h. auf der Linie, welche die Mittelpunkte der beiden sphärischen Oberflächen der Linse verbindet.

Wenn also ein astronomisches Fernrohr gegen ein entferntes Object gerichtet wird, entsteht in der Ebene, welche durch den Brennpunkt senkrecht auf die optische Axe gelegt wird, ein umgekehrtes Bild des einvisirten Gegenstandes; dieses Bild wird mit einer andern Linse betrachtet, welche Ocular genannt wird und die Rolle eines gewöhnlichen Vergrösserungsglases spielt. Es ist jedoch nicht der Zweck, wenigstens nicht für den Astronomen, die verschiedenen Gegenstände am Himmel im Vergrösserungsglase zu betrachten; ein anderes und viel wichtigeres Ziel kann mit dem Fernrohre erreicht werden, das nämlich, eine Richtung

Fig. 29.



mit desto grösserer Sicherheit auffassen zu können, je stärkere Vergrösserungen man anwendet. Um dieses Ziel zu erreichen, spannt man im Brennpunkte ein Netz von äusserst feinen Fäden auf, die sämmtlich in einer Ebene senkrecht zur optischen Axe liegen müssen.*) Wo zwei

*) Gewöhnlich wendet man hierzu Spinnenfäden an.

solche Fäden einander kreuzen, ist ein Punkt bestimmt, und indem man durch die Bewegung des Rohres das Bild eines Sterns mit einem solchen Punkte, dessen Abstand von der optischen Axe bekannt sein muss, zur Coincidenz bringt, wird die Richtung des Sterns aufgefasst und fixirt.

Ein astronomisches Fernrohr, welches als Durchgangsinstrument angewendet werden soll, besteht gewöhnlich aus zwei, etwas konisch geformten Rohrhälften $fmnh$ und $pgkq$ (Fig. 29). Diese Rohrhälften sind mit Schrauben am Cubus $mnqp$ befestigt, dessen Flächen mn und pq natürlich durchbohrt sind, damit die Lichtstrahlen vom Objectiv zum Ocular unbehindert gelangen können. An den Seiten des Cubus sind starke Metallstücke befestigt, die mit den Zapfen A und B aus gehärtetem Stahl enden. Diese Zapfen sind mit äusserster Sorgfalt cylindrisch abgedreht, und bestimmen die Rotationsaxe des Instruments. Wird das Durchgangsinstrument auf festen Sternwarten angewendet, so ruhen diese Zapfen auf Lagern von Glockenmetall, welche an gemauerten Pfeilern befestigt sind. Diese Lager sind jedoch durch Schrauben ein wenig beweglich, damit die Axe AB, wenn nöthig, sowohl in Bezug auf ihre Horizontalität, wie auch in ihrer Richtung von West nach Ost berichtigt werden kann.

Das Fadennetz besteht bei dem Durchgangsinstrumente in der Regel aus zwei horizontalen und mehreren verticalen Fäden, von welchen die letzteren, in genügendem Abstand von einander, gewöhnlich um den mittelsten symmetrisch geordnet sind. Vermittelst Schrauben lässt sich das ganze Fadennetz ein wenig in seiner Ebene verschieben, wodurch man den Mittelfaden so einstellen kann, dass derselbe eine auf der Rotationsaxe senkrechte Richtung angiebt. Diese Richtung, welche der Mittelfaden bestimmt, wird die optische Axe des Instruments genannt, und mit derselben muss die optische Axe des Objectivs möglichst nahe zusammenfallen. Wenn nun die Rotationsaxe des Instruments genau berichtigt ist und ebenso das Fadennetz, so wird ein culminirender Stern genau über dem Mittelfaden erscheinen, seine Declination mag sein welche sie will.

Nachdem man vermittelst eines Niveaus, welches so eingerichtet ist, dass es mit den Stützen auf die Zapfen gestellt werden kann, die Horizontalität der Rotationsaxe berichtigt oder die Neigung dieser Axe bestimmt hat, kann man in der folgenden Weise das Fadennetz in die beabsichtigte Lage einstellen. Unter dem Objective, das gegen den Nadir gerichtet wird, stellt man ein Gefäss mit Quecksilber auf. Hierdurch wird eine wagerechte Fläche hergestellt, die man den künstlichen Horizont nennt. Von dieser spiegelglatten Fläche wird ein Bild des Fadennetzes in das Fernrohr reflectirt, das vom Oculare aus gesehen werden kann.

Wenn nun das Bild des Mittelfadens von dem Faden selbst bedeckt wird, so ist die Verbindungslinie zwischen dem Faden und seinem Bilde, mithin auch die Richtung des Lichtstrahls, welcher den Mittelfaden trifft, senkrecht gegen den Horizont. Man hatte aber schon vorher die Rotationsaxe horizontal gestellt, folglich ist auch nun die optische Axe senkrecht auf der Rotationsaxe. Wenn indessen die Berichtigung nicht vollkommen gelungen wäre, so bleibt ein kleiner Fehler nach, der Collimationsfehler oder Fehler der optischen Axe genannt wird. Es würde zu viel Zeit in Anspruch nehmen, wollte man sich bestreben, den Collimationsfehler stets völlig gleich Null zu machen; man wird sich daher damit begnügen müssen, denselben immer sehr klein zu halten. Der Einfluss desselben muss aber mittelst Rechnung bei den Beobachtungen berücksichtigt werden, weshalb man ihn durch Messung bestimmen muss; mehr oder weniger häufig, je nachdem er sich grösseren oder kleineren Veränderungen unterworfen zeigt. Zu dieser Messung kann man sich verschiedener Methoden bedienen. Der Winkelabstand des Mittelfadens von dem Bilde im künstlichen Horizonte ist offenbar gleich dem doppelten Collimationsfehler; vermittelst eines beweglichen Fadens und einer Mikrometerschraube, von der später die Rede sein soll, lässt sich dieser Winkelabstand messen und folglich auch der Collimationsfehler bestimmen. Dies ist eine Methode; eine andere gründet sich darauf, dass der Einfluss des Collimationsfehlers im umgekehrten Sinne wirkt, wenn das ganze Instrument in den Lagern umgelegt wird. Es ist überhaupt ein Grundsatz in der Beobachtungskunst, sich nie darauf zu verlassen, dass ein Instrument ganz vollkommen ausgeführt oder genau berichtigt worden ist: wo man die Fehler nicht durch zweckmässig angeordnete Beobachtungen in verschiedenen Lagen des Instruments unschädlich machen kann, müssen dieselben durch Rechnung bei den Beobachtungsresultaten berücksichtigt werden.

Wir können nun annehmen, dass die Gesichtslinie, welche durch die optische Axe und den Kreuzungspunkt der Mittelfäden bestimmt wird, bei der Drehung des Fernrohrs eine Ebene beschreibt, welche senkrecht auf dem Horizonte steht und mithin durch das Zenith geht; denn wenn dies auch nicht streng der Fall sein sollte, so besitzen wir doch die nöthigen Mittel, um die Abweichungen von dieser Verticalebene bei jeder Stellung des Instruments durch Rechnung zu finden, und die Resultate den Beobachtungen entsprechend zu corrigiren. Die auf der Rotationsaxe senkrechte Richtung muss nämlich eine Ebene beschreiben, wenn die Zapfen vollkommen gleich dick und cylindrisch sind — etwaige Abweichungen können jedenfalls berücksichtigt werden —; durch das Nivellement kennen wir die Neigung dieser Ebene gegen die Verticalebene, so dass es nur eine geometrische Aufgabe ist, den Einfluss der Neigung bei jeder Stellung des Instruments zu ermitteln. Weil die Rotationsaxe jedenfalls nahe berichtigt ist, so kann man annehmen, dass die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen mit der Mittagslinie zusammenfällt. Es ist nun klar, dass der Einfluss der Neigung verschwindet, wenn ein Gestirn im Horizonte beobachtet wird; richtet man aber das Fernrohr gegen ein Gestirn, dessen Zenithdistanz z ist, so beträgt der Bogen zwischen dem Stern und einem Punkte in der Verticalebene, dessen Zenithdistanz ebenfalls z ist: b Cos z, wo b die Neigung der Horizontalaxe bezeichnet. — Der Mittelfaden würde einen grössten Kreis am Himmel beschreiben, wenn kein Collimationsfehler vorhanden wäre, d. h. die vom Mittelfaden bestimmte Richtung würde bei der Drehung des Instruments eine Ebene beschreiben, weil diese Richtung alsdann senkrecht auf der Rotationsaxe sein würde. Ist der Collimationsfehler aber nicht Null, so beschreibt der Mittelfaden einen kleineren Kreis am Himmel, welcher jedoch mit dem erstgedachten grössten Kreise parallel sein muss, da der scheinbare Abstand beider Kreise stets derselbe und zwar gleich dem Collimationsfehler ist. Der Abstand eines Gestirns, welcher am Mittelfaden beobachtet wird, von einem Punkte, welcher sich auf dem Verticalkreis in der Zenithdistanz des Gestirns befindet, wird nun durch die Summe der Glieder

$$b \operatorname{Cos} z + c$$

gefunden, wo c den Collimationsfehler bezeichnet.

Geht nun die genannte, durch die Drehung des (berichtigten) Instruments bestimmte Verticalebene auch durch den Pol, so ist sie die Ebene des Meridians; geschieht dieses nicht, so müssen sich doch jedenfalls die Verticalebene und der Meridian in der Lothlinie schneiden; mithin, wenn a die Neigung beider Ebenen bedeutet, also das Azimuth des von der Verticalebene bestimmten grössten Kreises, so ist $k . a$ Sin z der Winkelabstand eines Punktes auf diesem grössten Kreise, von dem Meridian. Nach der Definition ist a auch der Winkel zwischen der als horizontal gedachten Rotationsaxe des Instruments und der Richtung von Ost nach West; gelingt es, diesen Winkel gleich Null zu machen, so bewegt sich das Instrument im Meridian, vorausgesetzt, dass Neigung und Collimationsfehler gleichfalls berichtigt worden sind. — Wie diese Grössen bestimmt werden sollen, haben wir schon gesehen; es bleibt noch übrig, das Azimuth des Instruments oder die Grösse a zu bestimmen. Wenn dies geschehen ist, findet man den Winkelabstand (d) eines in der Zenithdistanz z culminirenden Punktes, welcher am Mittelfaden beobachtet wird, von dem Meridian durch die Formel:

$$d = a \operatorname{Sin} z + b \operatorname{Cos} z + c.$$

Um nun a zu bestimmen, könnte man einen Stern genau bei seiner Culmination beobachten; durch die Schraube am Lager lässt sich das Azimuth so berichtigen, dass der Stern am Mittelfaden erscheint, wenn er culminirt. Alsdann wäre $d = 0$, und man fände a sogleich, da b, c und z als bekannt vorausgesetzt werden dürfen. Allein um das Culminationsmoment benutzen zu können, muss die Sternzeit und die Rectascension des Sterns bekannt sein, die aber erst durch Beobachtungen bestimmt werden sollen, und also nicht, wenigstens nicht im Allgemeinen, als bekannt vorausgesetzt werden dürfen. Die tägliche Bewegung bietet uns aber selbst das Mittel zur Bestimmung von a; die Zeit, welche zwischen der oberen und unteren Culmination desselben Sterns verfliesst, muss nämlich genau 12 Stunden Sternzeit betragen. Beobachtet man also die Durchgangszeit eines Sterns, erst bei der oberen und dann bei der unteren Culmination, so lässt sich aus der verflossenen Zwischenzeit schliessen, in welcher Weise die Lager berichtigt werden müssen, damit das Instrument in den Meridian kommt. Zeigt es sich, dass die Zeit zwischen der oberen und unteren Culmination länger ist als 12 Stunden, so ist der westliche Zapfen nördlicher als der östliche; das westliche Lager muss folglich etwas nach Süden geschoben werden.

Bei dieser Berichtigung, sowie bei der Bestimmung von a muss auf den Einfluss der Neigung und des Collimationsfehlers Rücksicht genommen werden. Wir wollen die hierzu erforderliche kleine Rechnung noch anführen. — Wenn d sehr klein ist, wie wir es voraussetzen, so ist auch der entsprechende Stundenwinkel des Mittelfadens sehr klein; man kann daher seinen Sinus mit dem Bogen vertauschen. Bezeichnet nun t den Stundenwinkel, so ist

$$t = \frac{d}{\operatorname{Cos} \delta}\,; \text{*)}$$

und weil

$$t = \theta - \alpha$$

so hat man, in Berücksichtigung des Werthes von d:

$$\theta = \alpha + a \frac{\operatorname{Sin} z}{\operatorname{Cos} \delta} + b \frac{\operatorname{Cos} z}{\operatorname{Cos} \delta} + c \frac{1}{\operatorname{Cos} \delta}$$

Bei der Anwendung dieser Formel ist zu bemerken, 1) dass z negativ genommen werden muss, wenn der Stern nördlich vom Zenith culminirt, 2) dass Cos δ negativ genommen werden muss bei unteren Culminationen. Es ist dies leicht einzusehen. Wenn der Stern nördlich vom Zenith culminirt, so wirkt das Azimuth auf den Stundenwinkel im umgekehrten Sinne, als wenn er südlich vom Zenith wäre. Bei unteren Culminationen wirken ferner Neigung und Collimationsfehler auf den Stundenwinkel im umgekehrten Sinne als wie bei oberen Culminationen, das Azimuth aber in demselben.

Bezeichnet man endlich die Uhrzeit mit U und den Fehler von U mit γ, so dass

$$\theta = U + \gamma,$$

so hat man:

$$U + \gamma = \alpha + a \frac{\operatorname{Sin} z}{\operatorname{Cos} \delta} + b \frac{\operatorname{Cos} z}{\operatorname{Cos} \delta} + c \frac{1}{\operatorname{Cos} \delta};$$

für die unteren Culminationen hat man:

---

*) Die Herleitung dieser Formel ist sehr leicht, sie folgt unmittelbar aus einer Relation der sphärischen Trigonometrie, deren Beweis wir auf den Anhang verschieben.

$$U_1 + \gamma_1 = \alpha + 12\,\text{St.} + a\,\frac{\operatorname{Sin} z_1}{\operatorname{Cos} \delta} - b\,\frac{\operatorname{Cos} z_1}{\operatorname{Cos} \delta} - c\,\frac{1}{\operatorname{Cos} \delta}.$$

Nimmt man an, dass der Stern nahe dem Pole und in seiner oberen Culmination ist, also zwischen Zenith und Pol culminirt, so muss das Zeichen von a in der ersten Gleichung umgekehrt werden; die Differenz beider Gleichungen giebt dann:

$$U_1 - U + \gamma_1 - \gamma = 12\,\text{St.} + a\,\frac{\operatorname{Sin} z_1 + \operatorname{Sin} z}{\operatorname{Cos} \delta} - b\,\frac{\operatorname{Cos} z_1 + \operatorname{Cos} z}{\operatorname{Cos} \delta} - c\,\frac{2}{\operatorname{Cos} \delta}$$

Hier sind nun alle Grössen bekannt mit Ausnahme von a und $\gamma_1 - \gamma$. Letztere hängt nur von dem Gange der Uhr ab, die man sehr sorgfältig prüfen muss. Bei der heutigen Vollendung der Uhren darf man jedoch annehmen, dass ihr Gang hinlänglich regelmässig ist, um aus zwei beobachteten oberen Culminationszeiten auf die Zeit der zwischenliegenden unteren Culmination zu schliessen; alsdann wäre $\gamma_1 - \gamma$ als bekannt anzusehen, wonach die Berechnung von a in sehr einfacher Weise sich ausführen liesse. Ein geringer Fehler in $\gamma_1 - \gamma$ übt ausserdem nur einen geringen Einfluss auf die Bestimmung von a aus, und zwar aus dem Grunde, weil erstere Grösse mit dem kleinen Factor Cos δ multiplicirt wird.

Mit der Bestimmung des Azimuthes a sind die Vorarbeiten beendet, welche den eigentlichen Beobachtungen am Durchgangsinstrumente vorausgehen müssen; wir bemerken, dass die Bestimmung absolut ausgeführt werden kann, d. h. unabhängig von jeder früheren Bestimmung der Rectascensionen.

Weil die Orientirung des Durchgangsinstrumentes mit sehr viel Mühe und Zeitverlust verbunden ist, wenn sie durch successive Beobachtungen berichtigt werden soll, hat man versucht, durch sog. Miren oder Meridianzeichen die einmal gefundene Richtung des Meridians zu fixiren. Ein solches Zeichen kann einfach in einer senkrecht auf der Mittagslinie und in bedeutender Entfernung vom Instrumente aufgestellten Tafel bestehen, auf welcher ein verticaler Strich gezogen wird. Wenn nun die Lage des Mittelfadens relativ zum Meridian einmal erkannt ist, so wird die Lage der Tafel so berichtigt, dass der verticale Strich der Richtung des Meridians entspricht, wenn das Fernrohr auf ihn gerichtet wird. Man darf jedoch nicht annehmen, dass die Tafel während einer längeren Zeit ihre Lage unverändert beibehält; die Erfahrung hat nämlich gelehrt, dass die Erdschichten kleinen Verschiebungen unterworfen sind, wodurch das Meridianzeichen ein wenig aus seiner Lage gebracht werden kann; diese Lage muss daher von Zeit zu Zeit geprüft werden. Aber einen unschätzbaren Dienst leistet uns auf alle Fälle die Mire, wenn man annehmen kann, dass sie wenigstens während eines Tages unveränderlich ist. Die obige Methode, ebenso wie eine jede, die das Azimuth absolut geben soll, beruht nämlich wesentlich auf der Voraussetzung, dass das Azimuth während 12 Stunden constant bleibt. Diese Voraussetzung entspricht jedoch oft nicht der Genauigkeit der eigentlichen Beobachtungen, d. h. das Azimuth erleidet während 12 Stunden häufig Aenderungen, die sehr wohl die Resultate der Beobachtungen merklich beeinflussen können. Mit Hülfe der Mire, deren Aenderungen im Bogenmaasse ausgedrückt, der Entfernung wegen, jedenfalls sehr viel geringer als die des Hauptinstrumentes sind, kann man das relative Azimuth zu jeder Zeit bestimmen, und hernach das absolute Azimuth unter der Voraussetzung berechnen, dass seine Aenderungen durch die Unterschiede der Mirenangaben gegeben sind.

Die Beschreibung, wie die Lage der Ekliptik bestimmt wird, sollte nun eigentlich folgen; zuvor müssen wir jedoch angeben, wie Rectascensionsunterschiede am Durchgangsinstrumente beobachtet werden.

Die eigentlichen Beobachtungen mit dem Durchgangsinstrumente bestehen darin, das Zeitmoment aufzufassen, in welchem das Bild eines Himmelskörpers von dem Mittelfaden verdeckt wird, oder den Mittelfaden »passirt«. Ist das Instrument genau orientirt, so erhält man auf diese Weise unmittelbar die Uhrzeit seiner Culmination; im andern Falle muss an der beobachteten Uhrzeit die Correction

$$- a \frac{\text{Sin } z}{\text{Cos } \delta} - b \frac{\text{Cos } z}{\text{Cos } \delta} - c \frac{1}{\text{Cos } \delta}$$

angebracht werden, um die Uhrzeit der wahren Culmination zu finden.

Der Unterschied zwischen den in solcher Weise corrigirten Culminationszeiten zweier Gestirne muss nun den Unterschied ihrer Rectascensionen unmittelbar geben, insoweit die Uhr genau nach Sternzeit regulirt ist, d. h. zwischen zwei auf einander folgenden gleichbenannten Culminationen desselben Gestirns genau 24 Stunden angiebt, und diese Zwischenzeit gleichförmig eintheilt. Dies ist jedoch im Allgemeinen nicht der Fall, weshalb die unmittelbar beobachteten Zeitunterschiede einer Correction bedürfen, was von der Acceleration oder Retardation der Uhr herrührt. Der Uhrgang wird nun entweder dadurch bestimmt, dass man mehrere aufeinanderfolgende Durchgänge mit der Uhrzeit vergleicht, oder auch dadurch, dass man mehrere Sterne, deren Rectascensionen nach zahlreichen vorhergehenden Beobachtungen sehr genau festgestellt worden sind, nach einander beobachtet. Das letztere Verfahren ist insofern vorzuziehen, als man eigentlich nicht voraussetzen darf, dass der Gang einer Uhr während des Verlaufs von 24 Stunden vollkommen unverändert bleibt, welche Voraussetzung jedoch nöthig wäre, wenn man den Gang aus Beobachtungen bestimmen wollte, die 24 Stunden von einander abstehen. Einige Rectascensionsdifferenzen muss man freilich hier schon im Voraus als bekannt annehmen; das Verfahren ist mithin kein absolutes, und man scheint sich in einem Kreise zu bewegen; denn um bekannte Rectascensionsdifferenzen zur Verfügung zu haben, muss man sich doch irgend einmal auf die Uhr haben verlassen können. — In der That ist es auch so geschehen, aber mit dem klaren Bewusstsein, dabei einen Fehler begangen zu haben, dem jedoch nicht zu entgehen war.

Wenn nun die Abweichungen des Uhrganges ganz regellos sind, d. h. wenn der wirkliche Gang zuweilen etwas grösser, zuweilen wieder etwas kleiner als der mittlere ist; wenn ferner diese Abweichungen keine Abhängigkeit von der Tageszeit verrathen, so kann man annehmen, dass das Mittel aus mehreren beobachteten Rectascensionsdifferenzen desselben Sternpaares frei von den Fehlern des Uhrganges ist. Es ist aber keineswegs wahrscheinlich, dass der Uhrgang in einem gegebenen Augenblicke von der Tageszeit völlig unabhängig sei, namentlich wenn die Uhr in der Nähe des Instruments aufgestellt ist; im Gegentheil muss als höchst wahrscheinlich angenommen werden, dass der Uhrgang in mehr oder weniger hohem Grade durch die täglichen Temperaturänderungen beeinflusst wird. Aus diesem Grunde ist es unumgänglich nothwendig, denselben Rectascensionsunterschied zu verschiedenen Jahreszeiten zu bestimmen, wodurch derselbe auch zu verschiedenen Tageszeiten, mithin unter umgekehrten Temperaturverhältnissen beobachtet wird; denn ein Stern, welcher an einem gewissen Datum gleichzeitig mit der Sonne culminirt, geht 6 Monate später um Mitternacht durch den Meridian. Das Mittel der auf diese Weise bestimmten Rectascensionsunterschiede kann man mit einigem Recht als frei von den systematischen Fehlern im Gange der Uhr, ebenso wie von andern Fehlern, die regelmässig im Laufe des Tages wiederkehren, ansehen.

In neuerer Zeit ist es gelungen, die Fehler des Uhrganges wesentlich zu beschränken. Während man früher genöthigt war, die Uhr in unmittelbarer Nähe des Durchgangsinstrumentes zu haben, um den Sekundenschlag hören zu können und dieselbe dadurch jeder Temperaturänderung aussetzen musste, ist dies gegenwärtig nicht mehr erforderlich. Man kann im Gegentheil die Uhr in einem Zimmer mit möglichst gleichmässiger Temperatur aufstellen, wenn man sie mit einem elektrischen Strome in Verbindung bringt, und zwar so, dass der Strom zu jeder Sekunde entweder geschlossen oder unterbrochen wird. Durch eine solche, überdies mit einem elektromagnetischen Apparat passend verbundene Vorrichtung können die Sekundenschläge am Instrumente gerade so vernommen werden, als ob die Uhr selbst in unmittelbarer Nähe sich befände.

Die Genauigkeit eines beobachteten Durchganges hängt von der Schärfe ab, mit welcher man die Fadenantritte der Sterne auffassen kann. Um die Genauigkeit der einzelnen Durchgänge noch zu vergrössern, beobachtet man den Stern nicht nur am Mittelfaden, sondern auch an anderen, ihn symmetrisch umgebenden Seitenfäden. Die an diesen Fäden beobachteten Antrittszeiten können jedoch durch eine sehr leichte Rechnung auf den Mittelfaden reducirt werden, d. h. es kann die Zeit berechnet werden, zu welcher der Stern am Mittelfaden hätte erscheinen müssen. Man erhält somit bei jedem Meridiandurchgang des Sterns mehrere Bestimmungen der Zeit seines Durchganges. Die Formel, nach welcher die

Reduction auf den Mittelfaden berechnet wird, findet sich in derselben Weise, wie der Einfluss des Collimationsfehlers auf den beobachteten Stundenwinkel. In der That, die Beobachtung an einem Seitenfaden, dessen Abstand vom Mittelfaden f ist, muss zu demselben Resultate führen, wie eine Beobachtung am Mittelfaden, dessen Collimationsfehler f wäre. Die Reduction berechnet sich daher nach der Formel:

$$r = f \frac{1}{\operatorname{Cos} \delta}.$$

Nachdem die Antrittszeiten an den einzelnen Fäden auf den Mittelfaden reducirt worden sind, ist man im Stande, aus der Uebereinstimmung der verschiedenen Bestimmungen einen Schluss sowohl auf ihre eigene Genauigkeit, wie auch auf die des Mittels zu ziehen. Wir führen hier zwei Beispiele an, bei denen die Reductionsrechnungen schon ausgeführt sind, so dass die angeführten Zahlen unmittelbar die beobachteten Uhrzeiten des Durchganges durch den Mittelfaden bedeuten. Die betreffenden Beobachtungen wurden den 2. December 1874 auf der Stockholmer Sternwarte angestellt; es fanden sich dabei:

γ Cephei	Abweichung vom Mittel	α Andromedae	Abweichung vom Mittel
23h 36m 4s.78	+ 0s.43	0h 3m 47s.77	+ 0s.07
4.08	— 0.27	47.74	+ 0.04
4.13	— 0.22	47.70	0.00
4.37	+ 0.02	47.69	— 0.01
4.18	— 0.17	47.77	+ 0.07
4.35	0.00	47.58	— 0.12
4.11	— 0.24	47.64	— 0.06
4.62	+ 0.27	47.65	— 0.05
4.50	+ 0.15	47.77	+ 0.02
4.32	— 0.03	47.68	— 0.02
4.64	+ 0.29	0 3 47.70	
4.09	— 0.26		
23 36 4.35			

Wenn unbekannte Grössen aus Gleichungen bestimmt werden sollen, deren bekannte Glieder durch Beobachtungen gegeben sind, so geschieht es oft, dass eine grössere Anzahl Gleichungen vorhanden ist, als man Unbekannte zu bestimmen hat. In der Regel ist es in solchen Fällen nicht möglich, sämmtlichen Gleichungen zu genügen; denn wenn auch die exacten Werthe der Unbekannten gegeben wären und man sie in den gegebenen Gleichungen einsetzte, so blieben doch kleine Grössen nach, die den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden müssten. Diese Erscheinung lässt sich auch in anderer Weise darlegen. Wählt man unter den Gleichungen in beliebiger Weise eine so grosse Anzahl heraus, dass die Unbekannten bestimmt werden können, so wird man im Allgemeinen andere Werthe für dieselben finden, als wenn man die Auswahl in anderer Weise vorgenommen hätte. Führt man die so gefundenen Werthe der Unbekannten in sämmtlichen Gleichungen ein, so wird zwar denjenigen genügt, welche zu der Bestimmung dienten, bei den übrigen werden aber Abweichungen stattfinden und diese jetzt um so grösser sein, als sie nicht nur von den Beobachtungsfehlern herrühren, sondern auch von den Fehlern der gefundenen Werthe für die Unbekannten. Man kann also offenbar die Unbekannten in mehrfacher Weise bestimmen; es frägt sich aber, welche von den möglichen Bestimmungen die beste sei, oder wie die beobachteten Werthe mit einander verbunden werden müssen, damit die Bestimmung der Unbekannten möglichst frei von dem Einflusse der Beobachtungsfehler werde. Die Antwort auf diese Frage lautet zunächst: diejenige Auflösung ist die vortheilhafteste, welche die wahrscheinlichste ist. Beleuchten wir das Gesagte durch ein einfaches Beispiel.

Das Beispiel soll eine Uhrvergleichung behandeln. Wir nehmen an, dass während einer Anzahl Tage zwei Uhren mit einander verglichen werden, und zwar immer zu derselben Tageszeit, sowie dass man aus dieser Vergleichung erstens die Differenz der Uhren zu einer gegebenen Zeit, zweitens ihren relativen Gang, d. h. die Quantität, um welche diese Differenz täglich geändert wird, herleiten will. Jede beobachtete Differenz (D) führt zu einer Gleichung der folgenden Form, wo t die in Tagen ausgedrückte Zeit, x die Differenz der beiden Uhren zur Zeit $t = 0$, und y den täglichen relativen Gang bezeichnen:

$$D = x + yt\,.$$

Der Kürze wegen führen wir nur drei Gleichungen an, also die Resultate von drei Vergleichungen; wenn wir die Zeit von der ersten Vergleichung an zählen, so muss in der entsprechenden Gleichung $t = 0$ gesetzt werden; in der zweiten Gleichung, die aus der Vergleichung des folgenden Tages hervorgeht, hat man $t = 1$ anzunehmen, und in der dritten endlich $t = 2$. Die somit entstandenen Gleichungen sind die folgenden:

1872	Juni	4	$59^s.30 = x$
»	»	5	$58.25 = x + y$
»	»	6	$56.97 = x + 2y$

Wenn man aus diesen Gleichungen zwei und zwei mit einander verbindet, so erhält man drei verschiedene Combinationen, und aus jeder dieser Combinationen findet man besondere Werthe der Unbekannten. Combinirt man die erste Gleichung mit der zweiten, so finden sich: $x = 59^s.30$ und $y = -1^s.05$; aus der ersten und dritten ergeben sich: $x = 59.30$ und $y = -1.165$ und aus der zweiten und dritten endlich: $x = 59.53$ und $y = -1.28$; aber zugleich zeigt es sich, dass man nicht mittelst eines einzigen Systems von Werthen der Grössen x und y den angesetzten Gleichungen genügen kann. Es ist demnach unmöglich, exacte Werthe für die unbekannten Grössen zu finden, d. h. Werthe, welche, in die Gleichungen eingesetzt, diese identisch machen, und solches ist auch in der Natur der Sache begründet; denn wie könnte man hoffen, vollkommen richtige Werthe von gesuchten Grössen aus Gleichungen zu finden, die selbst nicht als völlig richtig angenommen werden können, sondern mehr oder weniger durch Beobachtungsfehler entstellt sind. Wenn man daher nicht die wahren Werthe der unbekannten Grössen finden kann, so muss man wenigstens streben die möglichst besten zu erhalten, zu denen die vorhandenen Beobachtungen führen können.

Die Güte einer derartigen Bestimmung beurtheilt man nach der Grösse der übrigbleibenden »Fehler«, wenn man die numerischen Werthe der Unbekannten in die gegebenen Gleichungen einführt. Man hat nun den Grundsatz aufgestellt, dass das arithmetische Mittel einer Anzahl mit gleicher Sorgfalt beobachteten Werthe die wahrscheinlichste Bestimmung einer zu ermittelnden Grösse ist, welche aus den gegebenen Beobachtungen gefolgert werden kann. Aus diesem Principe leitet man durch eine Analyse, die hier nicht mitgetheilt werden kann, den folgenden Satz ab, der auch bei Bedingungsgleichungen mit mehreren Unbekannten Anwendung findet, nämlich: unter allen Systemen von Werthen der Unbekannten, welche aus einer gegebenen Anzahl von Bedingungsgleichungen gefolgert werden können, ist dasjenige das wahrscheinlichste, welches die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler geringer werden lässt, als irgend ein anderes System. Nach diesem Satze lassen sich Regeln entwickeln, vermittelst welcher die Werthe der Unbekannten in einer ganz bestimmten Weise berechnet werden können. Diese Regeln geben zunächst an, wie man aus den gegebenen Bedingungsgleichungen ein System von genau so vielen Gleichungen herzuleiten hat, als Unbekannte vorhanden sind. Die Gleichungen dieses Systems sind immer vom ersten Grade, so dass die Lösung in gewöhnlicher Weise vorgenommen werden kann.*) Die Vorschriften, nach welchen unbekannte Grössen in der an-

---

*) Die Auflösung zweier Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten ist sehr einfach. Hat man z. B.

$$n = ax + by$$
$$n' = a'x + b'y$$

so multiplicirt man die erste mit b' und die zweite mit $-b$, wonach die Summe der Producte die folgende wird:

$$nb' - n'b = x\,(ab' - a'b)$$

woraus folgt

$$x = \frac{nb' - n'b}{ab' - a'b}.$$

Indem ferner die erste der angesetzten Gleichungen mit $-a'$ und die zweite mit a' multiplicirt wird, findet man aus der Summe der Producte:

$$y = \frac{n'a - na'}{ab' - a'b}.$$

Bei grösserer Anzahl der Gleichungen und der Unbekannten wird in gedeuteten Weise bestimmt werden, nennt man **die Methode der kleinsten Quadrate**.*) Der Grund zu dieser Benennung dürfte aus dem Voranstehenden zur Genüge hervorgehen.

Werden nun unsere oben angeführten drei Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt, so ergiebt sich:

$$0 = -174.52 + 3x + 3y$$
$$0 = -172.19 + 3x + 5y\,,$$

woraus man erhält: $x = +59^s\!.338$ und $y = -1^s\!.165$.

Dass die Lösung durch die Methode der kleinsten Quadrate thatsächlich mit dem Principe des arithmetischen Mittels übereinstimmt, lässt sich in unserem einfachen Falle leicht zeigen. Bilden wir aus den drei Gleichungen das arithmetische Mittel, so ergiebt sich:

$$58^s\!.173 = x + y.$$

Die Differenzen dieser Gleichung mit der ersten und dritten der ursprünglichen Bedingungsgleichungen liefern:

$$y = -1^s\!.127$$
$$y = -1.203\,,$$

also im Mittel:

$$y = -1^s\!.165\,.$$

Wird dieser Werth in der so eben gefundenen Gleichung eingeführt, so findet sich

---

nahezu derselben Weise verfahren: man combinirt zwei und zwei der Gleichungen und kann wie vorhin jedesmal eine Unbekannte wegschaffen. Damit fährt man fort, bis eine einzige Unbekannte nachgeblieben ist, die direct bestimmt werden kann.

*) Ohne hier den Beweis ihrer Richtigkeit mitzutheilen, dürfte es doch angemessen sein, die Formeln anzuführen, wonach das System der Endgleichungen hergeleitet wird, aus welchem die wahrscheinlichsten Werthe zweier Unbekannten gefunden werden. Die Bedingungsgleichungen seien die folgenden:

$$0 = n + ax + by$$
$$0 = n' + a'x + b'y$$
$$0 = n'' + a''x + b''y$$
u. s. w.,

wo die Grössen n, n', n'', u. s. w. aus Beobachtungen gefunden worden sind. — Bildet man nun die Summen:

$$[na] = na + n'a' + n''a'' + \ldots$$
$$[nb] = nb + n'b' + n''b'' + \ldots$$
$$[aa] = aa + a'a' + a''a'' + \ldots$$
$$[bb] = bb + b'b' + b''b'' + \ldots$$
$$[ab] = ab + a'b' + a''b'' + \ldots$$

so nehmen die Endgleichungen folgende Form an:

$$0 = [na] + [aa]\,x + [ab]\,y$$
$$0 = [nb] + [ab]\,x + [bb]\,y$$

und die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten werden hiermit:

$$x = \frac{[nb]\,[ab] - [na]\,[bb]}{[aa]\,[bb] - [ab]\,[ab]} \qquad y = \frac{[na]\,[ab] - [nb]\,[aa]}{[aa]\,[bb] - [ab]\,[ab]}$$

In ganz analoger Weise werden die Endgleichungen gebildet, wenn die Anzahl der Unbekannten grösser als zwei ist.

$$x = 59^s.338\,,$$

also genau derselbe wie zuvor. — Im Allgemeinen lässt sich jedoch das Princip des arithmetischen Mittels nur selten so direct anwenden; denn man darf keinesfalls stets die Bedingungsgleichungen direct in Bezug auf eine der Unbekannten auflösen, um deren Elimination vorzunehmen. Sind daher die Bedingungsgleichungen nicht von vornherein so beschaffen, dass eine Unbekannte durch das arithmetische Mittel aller Gleichungen eliminirt werden kann, so müssen die Formeln der kleinsten Quadrate zur Anwendung kommen. Wie man zu ganz falschen Resultaten geführt werden kann, wenn diese Vorschrift nicht beachtet wird, ist am deutlichsten aus einem Beispiele zu ersehen. Gesetzt es sei an einem Tage eine Grösse x 10 mal gemessen worden, und diese Messungen hätten zu der Gleichung

$$10\,x = 10{,}0274$$

geführt. Am zweiten Tage sei dieselbe Grösse, aber nur ein einziges Mal, gemessen; durch diese Messung möge erhalten sein

$$x = 1.0029.$$

Es wäre nun ganz falsch, wenn man die erste Gleichung zunächst in Bezug auf x auflöste und hiernach das arithmetische Mittel bildete; man würde dann finden:

$$x = 1.00282\,,$$

während, wenn man richtig verfahren will, das Mittel aus beiden Gleichungen gebildet, oder die Summe der Gleichungen durch 11 dividirt werden muss. Man erhält somit

$$x = 1.002752.$$

Der Grund zu diesem abweichenden Verfahren ist der, dass die erste Gleichung 10 mal so grossen Einfluss auf das Resultat ausüben soll als die zweite, weil sie aus 10 einzelnen Messungen hervorgegangen ist. Sie hat, wie man sich ausdrückt, 10 mal so grosses Gewicht als die zweite. Wenn aus Beobachtungen ein Resultat hergeleitet werden soll, so ist also genau darauf zu achten, dass jede Bedingungsgleichung ihrem Gewichte nach Stimmberechtigung erhält.

Wenn nun die wahrscheinlichsten Werthe in die Bedingungsgleichungen eingeführt werden, so erhält man in der Regel nicht Resultate der Form $0 = 0$, sondern es bleiben kleine Grössen nach, die, wie schon oben erwähnt, zum Theil davon herrühren, dass die Beobachtungen nie absolut fehlerfrei sind, zweitens aber daher, dass man nicht die wahren Werthe der Unbekannten in die Gleichungen eingeführt hat, sondern die wahrscheinlichsten, welche aber doch mehr oder weniger von den wahren abweichen können. Es ist sehr nützlich und zugleich interessant, die Natur dieser »nachbleibenden Fehler« zu untersuchen, denn nur auf diesem Wege ist es möglich geworden, ein Urtheil über die Sicherheit der aus den Beobachtungen erlangten Resultate zu gewinnen. Man hat gefunden, indem man die restirenden Fehler nach ihrer Grösse ordnete, dass die kleinen Fehler sehr viel häufiger vorkommen als die grösseren, und überdies dass die Häufigkeit nach einem gewissen Gesetze abnimmt, und zwar desto mehr, je grösser der Fehler ist. Mathematisch drückt man dies folgendermassen aus: die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers wird desto geringer, je grösser der Fehler ist.

Selbstverständlich ist die Genauigkeit eine sehr verschiedene bei verschiedenen Instrumenten und Beobachtungsarten. Um nun eine Vergleichung der Resultate aus verschiedenen Beobachtungen möglich zu machen, hat man den Begriff des **wahrscheinlichen Fehlers** aufgestellt. Hierunter versteht man einen Fehler von solcher Grösse, dass ein grösserer Fehler eben so häufig vorkommt, wie ein kleinerer. Theilt man also sämmtliche Fehler ihrer Grösse nach in zwei Gruppen ein, so dass jede Gruppe gleich zahlreich ist, so ist der wahrscheinliche Fehler derjenige, welcher der Grösse nach in der Mitte der beiden Gruppen liegt. Die Grösse der einzelnen Fehler hat man hierbei ganz ohne Rücksicht auf ihre Zeichen zu betrachten.

Wir gehen nun zurück zu den Beispielen der auf den Mittelfaden reducirten Fadenantritte. Bei dem ersten waren 12 beobachtete Werthe des Meridiandurchgangs und bei dem zweiten 10 angeführt. Wir theilen also die zwölf Unterschiede zwischen Beobachtungen und deren Mittel bei γ Cephei in zwei Gruppen, von denen jede sechs Abweichungen enthält. Die Gruppe der grösseren Abweichungen enthält die Fehler: $-0^{\mathrm{s}}.43$, $+0^{\mathrm{s}}.27$, $+0^{\mathrm{s}}.24$, $-0^{\mathrm{s}}.27$, $-0^{\mathrm{s}}.29$ und $+0^{\mathrm{s}}.26$; die der kleineren: $+0^{\mathrm{s}}.22$, $-0^{\mathrm{s}}.02$, $+0^{\mathrm{s}}.17$, 0.00, $-0^{\mathrm{s}}.15$ und $+0^{\mathrm{s}}.03$. Man sieht also, dass der wahrscheinliche Fehler kleiner als $\pm 0^{\mathrm{s}}.24$ und grösser als $\pm 0^{\mathrm{s}}.22$ ist; derselbe muss demnach ohngefähr $\pm 0^{\mathrm{s}}.23$ sein. Wenn wir nun sagen: der wahrscheinliche Fehler ist $\pm 0^{\mathrm{s}}.23$, so meinen wir damit, dass Eins gegen Eins gewettet werden kann, der Fehler eines Fadenantritts bei γ Cephei beträgt nicht mehr als $\pm 0^{\mathrm{s}}.23$, und zwar hat man dabei eben so viele Chancen zu gewinnen, als zu verlieren. — Bei α Andromedae finden wir die folgenden Gruppen, jede aus fünf Fehlern bestehend: $-0^{\mathrm{s}}.07$, $-0^{\mathrm{s}}.07$, $+0^{\mathrm{s}}.12$, $+0^{\mathrm{s}}.06$ und $-0^{\mathrm{s}}.07$; $-0^{\mathrm{s}}.04$, $0^{\mathrm{s}}.00$, $+0^{\mathrm{s}}.01$, $+0^{\mathrm{s}}.05$ und $+0^{\mathrm{s}}.02$. Der wahrscheinliche Fehler liegt also zwischen $\pm 0^{\mathrm{s}}.06$ und $\pm 0^{\mathrm{s}}.05$; wir können ihn zu $\pm 0^{\mathrm{s}}.055$ schätzen.

Bei einer grösseren Anzahl von Beobachtungen würde es zu mühsam sein, den wahrscheinlichen Fehler in der soeben beschriebenen Weise zu berechnen. Man hat daher ein rein mathematisches Verfahren ersonnen, wodurch der Werth des wahrscheinlichen Fehlers durch Rechnung gefunden wird. Weil die Methode nicht den wahren, sondern nur den wahrscheinlichsten Werth geben kann, so muss man sich darauf vorbereiten, zuweilen kleine Unterschiede zwischen der durch Rechnung erhaltenen Bestimmung und der durch die eben vorgetragene Methode der directen Abzählung zu finden, und dies um so mehr, als die abzählende Methode auch nur einen wahrscheinlichen Werth geben kann. Die Uebereinstimmung der durch beide Methoden erhaltenen Resultate wird aber um so grösser sein, je grösser die Anzahl der vorhandenen Fehler ist. Durch Rechnung findet man den wahrscheinlichen Fehler nach folgenden Regeln. Zunächst werden die Quadrate sämmtlicher Abweichungen gebildet; die Summe dieser wird durch die Anzahl der Bedingungsgleichungen weniger der Anzahl der Unbekannten dividirt, worauf die Quadratwurzel aus diesem Quotienten, multiplicirt mit dem constanten Factor 0.6745, den numerischen Betrag des wahrscheinlichen Fehlers giebt. — Unsere Beispiele sollen nun nach dieser Regel berechnet werden. Zunächst finden wir die Quadrate der Fehler bei

	γ Cephei		α Andromedae
	0.1859		0.0049
	0.0729		0.0016
	0.0484		0.0000
	0.0004		0.0001
	0.0289		0.0049
	0.0000		0.0144
	0.0576		0.0036
	0.0729		0.0025
	0.0225		0.0049
	0.0009		0.0004
	0.0841		0.0004
	0.0676		
Summe $= [v^2] =$	0.6411	$[v^2] =$	0.0373
$\sqrt{\frac{[v^2]}{11}} =$	0.2414	$\sqrt{\frac{[v^2]}{9}} =$	0.0644
w. F. $= \pm 0^s.164$		w. F. $= \pm 0^s.043$	

Die letzte Bestimmung giebt nicht unbeträchtlich abweichende Resultate von der früheren, was indess nicht auffallen darf, da die Anzahl der betrachteten Fehler in jedem Falle sehr gering war. Eine ganz geringe Aenderung im Betrage einiger derselben hätte genügt, um eine viel grössere Uebereinstimmung zwischen den durch die beiden Methoden erzielten Resultaten hervorzubringen.

Wir sehen aber ganz unzweideutig, dass der wahrscheinliche Fehler bei γ Cephei bedeutend grösser als bei α Andromedae ist; den ersten können wir zu $\pm 0^s.20$, den letzteren zu $\pm 0^s.05$ schätzen. Die Ursache dieser Erscheinung liegt in dem Umstande, dass γ Cephei viel nördlicher steht als α Andromedae und sich folglich viel langsamer in der täglichen Bahn fortbewegt. In der That, während ein Zehntel der Sekunde bewegt sich α Andromedae über einen Raum von etwa $1\frac{1}{3}$ Bogensekunde, eine Grösse, die man mit den jetzt gebräuchlichen Vergrösserungen sehr gut sehen kann; dagegen bewegt sich γ Cephei in derselben Zeit nur $0''.34$, was man nicht immer bei der Art und Weise, wie Durchgänge beobachtet werden, bemerken kann. Die Bestimmung des

Ortes von γ Cephei ist aber trotzdem etwa eben so genau wie die von α Andromedae. Multiplicirt man nämlich die gefundenen wahrscheinlichen Fehler mit 15 Cos δ, so erhält man ihren Betrag ausgedrückt in Sekunden des grössten Kreises; erst nach dieser Verwandlung sind die bei den verschiedenen Sternen gefundenen wahrscheinlichen Fehler mit einander vergleichbar. In unserem Beispiele findet man auf solche Weise die Werthe 0″.68 und 0″.66, welche näher, als erwartet werden konnte, mit einander übereinstimmen.

Sobald der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung gefunden worden ist, erhält man den des Mittels aus mehreren Beobachtungen, indem ersterer durch die Quadratwurzel aus der Anzahl der letzteren dividirt wird. Nimmt man also an, dass der w. F. eines beobachteten Fadenantrittes im Bogen grössten Kreises ± 0″.66 beträgt, so beläuft sich der w. F. des Mittels aus 9 Beobachtungen auf

$$\pm \frac{0''.66}{\sqrt{9}} = \pm 0''.22 .$$

Mit solcher Genauigkeit fasst man gegenwärtig die Richtung eines Himmelskörpers durch eine einzelne Beobachtung durchschnittlich auf. Die Wiedergabe dieser Richtung ist indess etwas weniger sicher, weil sie von der Genauigkeit abhängt, mit welcher die Neigung der horizontalen Axe, der Collimationsfehler und das Azimuth, sowie endlich der Uhrstand und Uhrgang ermittelt werden konnte. Der wahrscheinliche Fehler eines Meridiandurchganges und folglich auch einer beobachteten Rectascension ist demnach grösser als der eines einfachen Durchganges durch das Fadennetz. Wenn die Uhrcorrectionen vermittelst der Rectascensionen bekannter Sterne, sog. Fundamentalsterne, bestimmt werden, so kann man den w. F. einer beobachteten Rectascension unter günstigen Verhältnissen zu 0″.4 bis 0″.5 oder sogar noch etwas geringer anschlagen.

Anstatt die Zeitmomente der Fadenantritte nach dem Gehör zu notiren, indem den Sekundenschlägen der Uhr gefolgt wird, kann man dieselben durch Schliessen eines elektrischen Stromes bemerklich machen. Der Beobachter hält einen Taster in der Hand, mit welchem er durch einen Druck den Strom in dem Augenblicke schliesst, wo der Stern einen Faden passirt und somit die Fadenantritte des Sterns signalisirt. An einem sogenannten Registrirapparate werden diese Signale vermittelst eines Elektromagneten sichtbar gemacht, und zwar auf einem fortgleitenden Papierstreifen durch Punkte, neben denen andere Punkte in gleichen Abständen von einander die Sekundenschläge der Uhr darstellen. Durch Schätzung des Abstandes zwischen einem registrirten und einem Sekundenpunkt schliesst man dann auf die Zeit des Fadenantrittes. Man erreicht auf diese Weise eine etwas grössere Genauigkeit, als wenn man nach dem Gehör beobachtet.

Die Neigung des Aequators gegen den Horizont oder die Polhöhe des Beobachtungsortes bestimmt man durch Messen der Höhen desselben

Gestirns in seiner oberen und unteren Culmination. Die Poldistanz eines Sterns sei p; seine Höhe in der oberen Culmination sei h, in der unteren h_1; alsdann ist, wenn φ die Polhöhe bezeichnet:

$$h = \varphi + p, \text{ oder } = 180^\circ - \varphi - p\ ^{*)}$$
$$h_1 = \varphi - p.$$

Aus diesen Gleichungen ist zu ersehen, dass die Polhöhe eines Ortes unmittelbar und unabhängig von jeder früheren Bestimmung gefunden werden kann, indem das arithmetische Mittel aus den beiden beobachteten Höhen h und h_1 gebildet wird. Man findet nämlich

$$\frac{h + h_1}{2} = \varphi .$$

Wenn der Stern in seiner oberen Culmination südlich vom Zenith den Meridian passirt, so erhält man die Polhöhe aus der Differenz der beiden Höhen; es ist in diesem Falle

$$\frac{h - h_1}{2} = 90^\circ - \varphi .$$

Anderseits findet man auch die Poldistanz oder die Declination eines Circumpolarsterns, ohne die Polhöhe zu kennen; culminirt der Stern zwischen dem Zenith und dem Pole, so ist

$$\frac{h - h_1}{2} = p ;$$

im andern Falle hat man wiederum

$$\frac{h + h_1}{2} = 90^\circ - p = \delta .$$

Nachdem einmal die Polhöhe bestimmt worden ist, findet man die Declination derjenigen Sterne, welche nicht in der unteren Culmination sichtbar sind, aus der Formel:

$$\delta = \varphi - z = \varphi - (90^\circ - h) .$$

Diese Formel gilt indessen nur für Sterne, die südlich vom Zenith culminiren; für Sterne, welche zwischen dem Zenith und dem Pole den Meridian passiren, ist

$$p = h - \varphi = 90^\circ - \delta$$

oder

$$90^\circ - \delta = 90^\circ - z - \varphi ; \quad \delta = \varphi + z .$$

Es muss jetzt vor allen Dingen dargelegt werden, wie die Höhen der Gestirne im Allgemeinen gemessen werden; denn auf diese Aufgabe wurde nicht nur die Bestimmung der Lage des Aequators in Bezug auf den Horizont, sondern auch die der Declinationen zurückgeführt. Zur Messung der Höhen, oder verticaler Winkel überhaupt, bedient man sich eines Fernrohres, welches um eine horizontale Axe bewegt werden kann. Die Gesichtslinie des Fernrohres beschreibt also, wenn letzteres bewegt

---

*) Die letztere Gleichheit findet statt, wenn der Stern südlich vom Zenith culminirt.

wird, eine verticale Ebene. Parallel mit dieser Ebene, also senkrecht auf die horizontale Umdrehungsaxe des Instruments, ist ein in Grade und Theile von Graden eingetheilter Kreis befestigt, und zwar so, dass die geometrische Axe des Instruments durch den Mittelpunkt des Kreises geht. Nimmt nun der Kreis an der Bewegung des Fernrohres Theil, so wird man an ihm unmittelbar ablesen können, um welchen Winkel die Gesichtslinie des Fernrohres gedreht wird, wenn man es nach einander auf zwei Gegenstände richtet. Um die verschiedenen Richtungen jedoch an dem Kreise wahrnehmen zu können, ist es nothwendig, in der Nähe der Theilung einen Punkt fixirt zu haben, der nicht an der Bewegung des Fernrohres Theil nimmt. Bei der Drehung des Fernrohres müssen so viele verschiedene Gradstriche, als dem Winkel zwischen den beiden Richtungen entsprechen, den festen Punkt passiren, und es hat durchaus keine Schwierigkeit, die Anzahl dieser vorbeigehenden Theilstriche zu zählen, um auf solche Weise den fraglichen Winkel angeben zu können. In der Regel sind nämlich die Theilstriche durch Zahlen und ungleiche Länge von einander unterschieden, so dass man mit Leichtigkeit erkennen kann, wie viele Grade und deren Unterabtheilungen bei dem fixen Punkte abzulesen sind. Diese Anzahl von Graden, Minuten, u. s. w. nennt man die Ablesung. Der feste Punkt wird entweder auf einer kleinen Platte verzeichnet, welche in der Nähe der Theilung irgendwie befestigt worden ist und Index benannt wird, oder auch durch einen Strich auf einem zweiten, sog. Nonien- oder Alhidaden-Kreise angedeutet, welcher den ersten, eingetheilten vollkommen umschliesst, übrigens aber von den beweglichen Theilen des Instruments isolirt ist, so dass er in keiner Weise der Bewegung des getheilten Kreises folgt.

Wollte man indessen den eingetheilten Kreis nur vermittelst des Index oder vermittelst eines einzigen Striches auf dem umgebenden Nonien-Kreise ablesen, so würde man keine nennenswerthe Genauigkeit erwarten können. Auch bei den am feinsten eingetheilten Kreisen stehen doch zwei benachbarte Theilstriche einander nicht näher als 2 Minuten; schätzt man nun die Lage des Indexstriches zwischen den zwei Nachbarstrichen auf der Theilung, so kann man im besten Falle diese Lage bis auf $\frac{1}{10}$ der Minute angeben. Man kann aber die Richtung eines Himmelskörpers zufolge der Vergrösserung des Fernrohres am Kreise viel genauer auffassen, weshalb es als höchst wünschenswerth erscheint, die Genauigkeit der Ablesung steigern zu können. Hierzu hat man auch in der That verschiedene Mittel erfunden. Das besonders früher am meisten benutzte ist der sog. Nonius oder Vernier. Diese einfache Vorrichtung wird dadurch hergestellt, dass man auf dem Index oder auf dem festen Kreise mehrere Striche neben einander zieht, deren Abstand von dem Abstande, der Striche auf dem beweglichen Kreise etwas verschieden ist. Wir nehmen an, dass eine hinreichende Anzahl solcher Striche neben dem eigentlichen Nullpunktsstriche gezogen sind, alsdann wird früher oder später einer derselben mit einem Striche auf dem beweglichen Kreise sehr nahe coincidiren, wenn der Nullpunktsstrich auch ganz beliebig zwischen zwei Strichen der Haupttheilung liegt. Von dieser Lage hängt aber selbstverständlich die Anzahl der Striche ab, welche zwischen dem Nullpunktsstriche und dem coincidirenden liegen; zählt man diese Striche, so kann man umgekehrt auf die Lage des Nullstriches schliessen. Auf diese Weise kann man die Ablesung eines in 2′ getheilten Kreises mit einer Genauigkeit von 2″ erhalten. Zu diesem Zwecke muss der Nonius, d. h. die getheilte Fläche auf dem Nonien-Kreise aus 60 Strichen bestehen, und der Abstand dieser Striche von einander 2′ weniger 2″ betragen, so dass, wenn ein Strich auf dem Nonius mit einem Striche auf dem Kreise genau coincidirt, die je zwei nächsten Striche 2″ von einander abstehen. — Um die Genauigkeit noch mehr zu erhöhen, bringt man bei Kreisen, welche sehr fein getheilt sind, gewöhnlich vier Nonien an, bei gröber getheilten nur zwei. Die Nonien liegen in gleichen Abständen von einander auf dem unbeweglichen Kreise.

Eine noch viel weiter gehende Genauigkeit erlangt man mit Hülfe von Mikrometerschrauben in Verbindung mit Mikroskopen. Schon bei der Bestimmung des Collimationsfehlers (vgl. pag. 274) wurde die Benutzung der Mikrometerschraube erwähnt; ihre Beschreibung müssen wir jetzt kurz nachholen. Vor Allem handelt es sich hier um eine sehr sorgfältig gearbeitete Schraube, deren Gänge möglichst gleichförmig fortschreiten. Wird diese Schraube in einer Mutter gedreht, so erhält sie eine Bewegung vorwärts oder rückwärts je nach der Richtung der Drehung. Diese Bewegung kann aber als sehr gleichförmig und als den Umdrehungen der Schraube proportional angesehen werden. Mit Hülfe der Schraube kann man also eine sehr kleine Bewegung hervorbringen, deren Grösse mit Leichtigkeit beurtheilt werden kann. Hierzu befestigt man an dem Ende der Schraube, welches angefasst wird, eine Trommel, die in gleiche Intervalle durch Striche eingetheilt ist; durch diese Vorrichtung lässt sich eine Bewegung beurtheilen, die einem sehr kleinen Theile einer ganzen Umdrehung der Schraube entspricht. Die Mikrometerschraube kann man nun so an dem Mikroskope befestigen, dass vermittelst ihrer ein kleiner Rahmen, über dem ein Spinnenfaden aufgespannt ist, senkrecht auf der optischen Axe hin und her bewegt werden kann; wird das Mikroskop richtig über der Theilung des Kreises aufgestellt, so sieht man den Spinnenfaden zugleich mit den Theilstrichen und durch Bewegung der Schraube kann man denselben nach und nach mit verschiedenen Strichen zur Coincidenz bringen. Wir wollen nun annehmen, dass eine Umdrehung der Schraube den beweglichen Faden um ein halbes Intervall, d. h. um eine Minute, auf dem von 2′ zu 2′ getheilten Kreise fortführt, sowie dass die Schraubentrommel in 60 gleiche Theile getheilt ist; die Drehung der Schraube um einen Trommeltheil entspricht also dem einer Sekunde auf dem Kreise. An der

Trommel, deren Bewegung mittelst eines Index abgelesen wird, kann man also sehen, um wie viele Sekunden der Faden von derjenigen Lage, welche dem Anfangspunkte der Theilung auf der Trommel entspricht, fortbewegt werden musste, um mit dem nächsten Striche auf dem Kreise zu coincidiren. Es ist also möglich, die Lage des Kreises relativ zum Anfangspunkte der Trommeltheilung, mithin auch die Richtung des Fernrohres mit grosser Genauigkeit zu ermitteln; die Ablesung des Mikroskopes ist selten auf mehr als einige Zehntel der Sekunde unsicher. Zur Benutzung einer Mikrometerschraube gehört noch die Bestimmung des Werthes einer Umdrehung im Bogenmaasse. In dem soeben betrachteten Falle wurde zwar angenommen, dass der bewegliche Faden sich unter den Strichen der Theilung gerade eine Minute fortbewegen würde, wenn man die Trommel genau ein Mal umdrehte; es lässt sich aber nicht erwarten, weder dass diese Beziehung zwischen der Drehung der Trommel und der scheinbaren, im Maasse der Kreistheilung ausgedrückten Bewegung des Fadens sich absolut genau herstellen lässt, noch dass sie immer dieselbe bleibt. Der Werth einer Umdrehung ändert sich nämlich nicht nur in Folge der Temperaturschwankungen, sondern auch, wenn der Abstand des Mikroskopes von der Kreistheilung vergrössert oder verringert wird. Will man mit einer Mikrometerschraube eine genaue Messung ausführen, so muss der Werth einer Schraubenrevolution (eines *Run*) demnach von Zeit zu Zeit untersucht werden, um die abgelesenen Trommeltheile richtig in Bogenmaass verwandeln zu können. Diese Untersuchung ist jedoch sehr leicht auszuführen: man braucht nur ein Intervall der Kreistheilung mit der Schraube zu messen und dabei zu beachten, in welchem Verhältnisse die abgelesenen Trommeltheile sich zu der Anzahl von Sekunden verhalten, welche das gemessene Intervall enthält.

Bei grösseren Instrumenten hat man gewöhnlich vier Mikroskope, die in gleichen Abständen von einander über dem getheilten Kreise befestigt sind; die Nullpunkte ihrer Trommeln vertreten jetzt die Nullpunktsstriche der Nonien, welche zugleich mit dem Nonienkreise wegfallen. — Da es von Wichtigkeit ist, dass die Mikroskope eine unveränderte Lage gegen den Horizont beibehalten, so werden sie an einen gemeinsamen sog. Mikroskopenträger befestigt, dessen Stellung mittelst eines Niveaus controllirt und dessen Veränderungen gemessen werden können. Bei Benutzung von Nonien wird das Niveau an dem Nonienkreise befestigt.

Die Zuverlässigkeit der Resultate, die man mit dem Kreise erhält, beruht natürlich in hohem Grade auf der Genauigkeit, mit welcher die Theilungsstriche auf dem Kreise aufgetragen worden sind. Wie gross aber auch die darauf verwandte Sorgfalt gewesen sein mag, so wird man doch nie annehmen können, dass sie mehr als jede andere menschliche Arbeit von Fehlern frei sei: wenn verschiedene

Intervalle mit den Mikrometerschrauben geprüft werden, so wird man finden, dass diese nicht völlig gleich sind, und dass folglich die Theilstriche nicht mit derselben Genauigkeit auf dem Kreise angebracht sind, mit der man ihre Abstände von einander, mithin auch von den Nullpunkten der Schraubentrommeln messen kann. Will man sich deshalb nicht mit einem weniger zuverlässigen Resultate begnügen, so muss die Theilung des Kreises einer genauen Prüfung unterworfen und die Fehler der einzelnen Striche bestimmt werden, so dass man sie nachher bei der Berechnung der Beobachtungen berücksichtigen kann. — Auch die Trommeln der Schrauben müssen sorgfältig getheilt sein; die Fehler dieser Theilungen werden zusammen mit den etwaigen Fehlern der Schrauben untersucht und berücksichtigt.

Die Bestimmung der Höhe eines Gegenstandes besteht darin, dass man den Winkel misst, welchen seine Richtung mit dem Horizonte bildet. Mittelst des Kreises führt man diese Messung in folgender Weise aus: der Gegenstand wird im Fernrohre des Kreises eingestellt und zwar so, dass der horizontale Faden den einzustellenden Punkt verdeckt*), hierauf wird der Kreis abgelesen; kennt man nun die Ablesung bei horizontaler Lage der Gesichtslinie, so giebt die Differenz dieser und der früheren Ablesung unmittelbar die gesuchte Höhe. Die Ablesung, welche dem Horizonte entspricht, ist aber nicht so leicht zu erhalten, weil man das Fernrohr nicht unmittelbar gegen einen Punkt in dieser Ebene richten kann, sondern einen solchen erst herstellen muss. Auch ist es nicht möglich, die horizontale Richtung mit Hülfe der Wasserwage direct zu bestimmen, und zwar deshalb, weil man kein directes Mittel hat, sich davon zu überzeugen, dass die Gesichtslinie symmetrisch in Bezug auf die äusseren Theile des Fernrohres liegt, auf die man ein Niveau aufsetzen könnte.

Eine horizontale Richtung, in der das Fernrohr eingestellt werden kann, lässt sich nun folgendermassen angeben. In gleicher Höhe über dem Erdboden werden zwei astronomische Fernröhre mit den Objectiven gegen einander aufgestellt; beide Fernröhre, die man auch C o l l i m a t o r e n nennt, sind mit Fadenkreuzen versehen, welche genau auf einander gerichtet werden müssen; alsdann ist aber die Richtung, welche von den beiden Fadenkreuzen bestimmt wird, horizontal. Die Collimatoren sind übrigens so eingerichtet, dass man die Gesichtslinien unmittelbar nivelliren kann; diese Fernröhre sind nämlich um ihre optischen Axen drehbar und nicht etwa, wie das Fernrohr des Kreises, um eine auf die Gesichtslinie senkrechte Axe. Stellt man nun den Kreis, nachdem die horizontale Richtung der Collimatoren hergestellt worden ist, zwischen dieselben auf

*) Häufig hat man im Felde des Fernrohres zwei horizontale Fäden, zwischen welchen die Gestirne eingestellt werden. Hellere Sterne beobachtet man jedoch genauer durch Bisection mittelst eines der Fäden.

und zwar so, dass das Fernrohr des Kreises in der Ebene der durch die Collimatoren bestimmten Richtung zu liegen kommt, so lässt sich die horizontale Richtung desselben herstellen, indem man es auf das Fadenkreuz eines der beiden Collimatoren einstellt. Die Ablesung des Kreises ist jetzt die, welche dem Horizonte entspricht, und den entsprechenden Punkt des Kreises nennt man den Horizontpunkt. In der Regel bestimmt man den Horizontpunkt mit beiden Collimatoren und nimmt das Mittel aus beiden Bestimmungen.

Die Resultate sollten in diesen beiden Fällen — von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern abgesehen — genau um 180° von einander verschieden sein; allein die Erfahrung hat gezeigt, dass dies nicht genau zutrifft, sondern dass die Ablesungen des Kreises, indem das Fernrohr abwechselnd nach zwei, genau um 180° von einander liegenden Punkten gerichtet wird, einen davon etwas verschiedenen Winkel ergeben. Die Erklärung dieser durchaus constatirten Erscheinung muss in der Biegung der verschiedenen Theile des Fernrohres gesucht werden; in Folge der Schwere werden nämlich die beiden Enden des Fernrohres etwas gesenkt, so dass die Mittelpunkte des Objectives und des Oculars nicht auf derselben geraden Linie mit einem Punkte der Umdrehungsaxe des Fernrohres liegen. Die Erscheinung ist ganz dieselbe, wie die der Durchbiegung einer langen Eisenstange, die in der Mitte unterstützt ist. — Biegen sich die beiden Rohrhälften in genau derselben Weise, so wird der Einfluss der Biegung bei den Beobachtungen nicht bemerkt werden können, weil die Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten des Objectives und Oculares in diesem Falle stets parallel mit dem entsprechenden Durchmesser des Kreises bleibt, wie auch das Fernrohr gerichtet sein mag. Wenn dagegen die Rohrhälften einer ungleichen Biegung unterworfen sind, so kann die Gesichtslinie nicht bei den verschiedenen Richtungen des Fernrohres demselben Durchmesser des Kreises parallel bleiben, und man wird alsdann die Höhen etwas anders finden, als wenn die Biegung nicht vorhanden wäre. Die Biegung ist bei verschiedenen Instrumenten natürlich nicht dieselbe, aber immer sehr klein; bei den besseren astronomischen Kreisen beträgt sie höchstens einige Sekunden. Diese Grösse ist aber erheblich genug, um bei der Genauigkeit der neueren Beobachtungen als sehr merklich zu erscheinen, und es muss daher jede gemessene Höhe oder Zenithdistanz wegen des Einflusses der Biegung verbessert werden. Wie man leicht bemerkt, ist die Biegung Null, wenn das Fernrohr gegen das Zenith oder den Nadir gerichtet wird, wenigstens sofern die Rohrtheile symmetrisch die Gesichtslinie umgeben; hat das Fernrohr dagegen eine horizontale Lage, so muss der Einfluss der Biegung am grössten sein. — Mit Hülfe der Collimatoren lässt sich die Biegung im Horizonte bestimmen. — Man hat gute Gründe anzunehmen, dass die Biegung dem Sinus der Zenithdistanz des beobachteten Gegenstandes proportional ist (die Erfahrung hat bis jetzt diese Annahme in genügender

Weise bestätigt); die Correction der beobachteten Zenithdistanzen hat daher die Form

$$b \operatorname{Sin} z,$$

wo b die Biegung im Horizonte bedeutet.

Statt den Horizontpunkt zu bestimmen, ermittelt man auch den Nadirpunkt des Kreises, und dies lässt sich sowohl sicherer, wie gewöhnlich auch leichter ausführen. Die hierzu erforderliche Operation besteht einfach darin, dass man den horizontalen Faden mit seinem Bilde im Quecksilberhorizonte (vgl. pag. 273) zur Deckung bringt. Bei dieser Einstellung des Rohres ist die Gesichtslinie genau nach dem Nadir gerichtet und die Ablesung des Kreises giebt unmittelbar den Nadirpunkt, von dem der Zenithpunkt um 180°, der Horizontpunkt aber um 90° verschieden ist.

Wenn der Kreis an der Axe des Durchgangsinstrumentes befestigt ist, wird das ganze Instrument ein Meridiankreis genannt; ein solcher kann also sowohl zur Bestimmung der Rectascensionen, wie auch zu der der Meridianhöhen verwendet werden, und liefert folglich auch die Poldistanzen oder die Declinationen der Gestirne. Es giebt aber auch Instrumente, die ausschliesslich zur Bestimmung der verticalen Winkel Verwendung finden, und daher auch Verticalkreise genannt werden. Die horizontale Axe, welche sowohl den Kreis wie das Fernrohr trägt, ist bei diesen Instrumenten um eine verticale Axe drehbar, so dass man die Lage des Fernrohres in Bezug auf den Kreis mit der grössten Leichtigkeit ändern kann: in der einen Lage befindet sich das Fernrohr östlich vom Kreise, in der andern westlich. Der Zenith- oder Horizontpunkt ist hier sehr leicht zu bestimmen, oder auch die Zenithdistanz eines Gestirns unabhängig von der Bestimmung dieses Punktes zu finden. Wenn nämlich die Theilung in der einen Lage des Kreises in demselben Sinne wie die Höhe wächst, also eine grössere Ablesung für eine grössere Höhe giebt, so müssen in der andern Lage die Zahlen abnehmen, je näher dem Zenith das Fernrohr gerichtet wird; in der einen Lage giebt die Ablesung:

$$a = h - H$$

und in der zweiten

$$a_1 = 360^\circ - h - H,$$

wo H die Ablesung des Horizontpunktes bedeutet. Aus der ersten Ablesung erhält man:

$$h = a + H$$

und aus der zweiten

$$h = 360^\circ - a_1 - H;$$

das arithmetische Mittel aus beiden Bestimmungen giebt also die absolute Höhe, unabhängig von jeder Bestimmung des Horizontpunktes; das arithmetische Mittel der Ablesungen selbst giebt: $180^\circ - H$.

Bei den Bestimmungen der Höhen, sei es von Gestirnen oder von entfernten Gegenständen auf der Erdoberfläche, muss noch ein Umstand in Betracht gezogen werden, der einen höchst bemerkenswerthen Einfluss auf die Resultate derselben ausübt. — Man weiss, dass die atmosphärische

Luft, so dünn und durchsichtig dieselbe auch erscheinen mag, gleichwohl in merklichem Grade die Fähigkeit besitzt, die Lichtstrahlen zu brechen oder von ihrer Anfangsrichtung abzulenken. Auf experimentalem Wege kann man sich leicht hiervon überzeugen. Man braucht zu diesem Zwecke weiter nichts als ein aus Glasscheiben zusammengesetztes Prisma, welches mit einer Luftpumpe communicirt, so dass es mittelst derselben luftleer gemacht werden kann. Wird die Luft im Prisma mehr und mehr verdünnt, so findet man, dass Lichtstrahlen, welche durch dasselbe gehen, immer merklicher von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt werden. Wenn nun die Lichtstrahlen eines Gegenstandes, der sich ausserhalb der Atmosphäre befindet, das Auge erreichen, so haben sie die Luftschichten der Atmosphäre durchlaufen und sind dabei gebrochen worden. Dasselbe ist der Fall, wenn die Lichtstrahlen eines terrestrischen Gegenstandes durch Luftschichten von verschiedener Dichtigkeit passiren müssen. In beiden Fällen werden die Gegenstände nicht in der wahren Richtung gesehen. Der Unterschied zwischen der wahren und der scheinbaren Richtung eines Himmelskörpers nennt man die astronomische Refraction; für die Verwerthung der astronomischen Beobachtungen ist es selbstverständlich von der allergrössten Wichtigkeit, dieselbe in jedem besonderen Falle mit einer der Beobachtungskunst entsprechenden Genauigkeit berechnen zu können, um somit aus den beobachteten Richtungen die wahren zu finden. Wie man leicht einsieht, ist die Ermittelung der Refraction oder Strahlenbrechung in der Atmosphäre mit Schwierigkeiten verschiedener Art verbunden. Vor Allem ist die Dichtigkeit der Luft, der das Brechungsvermögen proportional ist, innerhalb der Atmosphäre nicht überall dieselbe, sondern nimmt allmälig von Luftschicht zu Luftschicht ab in dem Maasse, wie diese sich über der Erdoberfläche erheben. Die ganze Ablenkung, welche die Lichtstrahlen während ihrer Bahn durch die Atmosphäre erleiden, muss daher als aus einer unendlichen Anzahl unendlich kleiner Brechungen zusammengesetzt gedacht werden, von denen jede einzelne unter der Voraussetzung berechnet werden muss, dass die Dichtigkeit der Luft innerhalb der unendlich dünnen Schichten unveränderlich dieselbe ist. Sieht man nun auch von der Schwierigkeit der Ausführung dieser rein mathematischen Operation ab, so bleibt dennoch eine andere von rein physikalischer Natur nach.

Um die in Frage stehende Rechnung überhaupt ausführen zu können, ist nämlich die Kenntniss der Dichtigkeit der Luft innerhalb der verschiedenen Schichten erforderlich, d. h. mit andern Worten, die des Gesetzes, nach welchem die Dichtigkeit der Luft mit wachsender Erhebung über die Erdoberfläche abnimmt. Zwar lässt sich diese Abnahme zum Theil auf theoretischem Wege bestimmen. Nach dem Mariotteschen Gesetze ist nämlich die Dichtigkeit eines gasförmigen Körpers dem Drucke proportional, unter welchem sich derselbe befindet; ferner steht das Gewicht eines gegebenen Volumens Luft von bestimmter Dichtigkeit im umgekehrten Verhältniss zum Quadrate der Entfernung vom Mittelpunkte der Erde. Auf diese zwei Sätze sich stützend, kann man das Gesetz der Dichtigkeitsabnahme in eine Formel bringen, allein diese würde nur dann richtig sein, wenn die Temperatur der Luft überall in der ganzen Atmosphäre dieselbe wäre. Dies ist nun aber keineswegs der Fall. Sowohl mit der geographischen Lage als auch mit der Erhebung über den Erdboden ändert sich die Lufttemperatur. Namentlich ist die zuletzt genannte Aenderung eine sehr schnelle, denn, wie zahlreiche, in verschiedenen Höhen angestellte Beobachtungen zeigen, nimmt die Temperatur um etwa einen Grad Celsius ab für jede Hundert Toisen, die man sich über den Erdboden erhebt.*) Die in neuerer Zeit zahlreich ausgeführten Luftfahrten, bei denen man die Temperatur in verschiedenen Höhen über der Erde beobachtet hat, haben erwiesen, dass die Temperatur fast genau gleichförmig abnimmt, d. h. in demselben Verhältniss, wie die Höhe über der Erdoberfläche wächst. Die Tragweite dieser Folgerung aus den Beobachtungen bleibt jedoch auf einen relativ geringen Theil der Atmosphäre beschränkt, weil die höheren Theile nicht erreicht werden können. In den unteren Theilen der Atmosphäre ist jedoch die Dichtigkeit der Luft am grössten und folglich finden die merklichsten Strahlenbrechungen daselbst statt; die Temperaturabnahme in diesen Theilen ist daher für uns die wichtigste. Nimmt man nun irgend ein Gesetz für die Temperaturabnahme an, welches diese in den unteren Luftschichten als nahezu gleichförmig angiebt, so lässt sich das Gesetz der Dichtigkeitsabnahme mit hinlänglicher Genauigkeit für die Berechnung der Strahlenbrechungen durch eine mathematische Formel ausdrücken.

Für die Berechnung der Strahlenbrechungen ist ferner die Kenntniss der sog. Brechungsgesetze erforderlich; diese dürfen wir also nicht unerwähnt lassen. — Wir denken uns eine krumme Oberfläche, sowie eine Ebene, welche durch drei einander nahe gelegene Punkte derselben geht. Rücken nun diese Punkte einander näher und fallen endlich zusammen, so nimmt die Ebene eine bestimmte Grenzlage an, welche von der Beschaffenheit der krummen Oberfläche abhängt. Diese Grenzebene nennt man die tangirende Ebene der krummen Oberfläche an dem in Frage stehenden Punkte. Eine gegen diese Oberfläche senkrechte Gerade, welche durch den Tangirungspunkt geht, wird die Normale genannt; so ist z. B. der Horizont eine tangirende Ebene der Erdoberfläche, und die Richtung der Schwere im Berührungspunkte eine Normale derselben.

Das erste Brechungsgesetz lautet: Ein Lichtstrahl, welcher durch eine krumme Oberfläche geht, wird so gebrochen, dass der einfallende und der gebrochene Strahl in derselben

*) Eine Toise = 1,95 Meter.

Ebene mit der Normale des Punktes liegen, in dem die Brechung geschieht. Nimmt man an, dass die Oberflächen der verschiedenen Luftschichten wie auch die Erdoberfläche Sphären mit einem gemeinsamen Mittelpunkte seien, so wären alle Normalen gegen denselben gerichtet.*) Hieraus folgt erstens, dass alle Brechungen in Ebenen geschehen, welche durch den Mittelpunkt der Erde gehen, und ferner, weil der Lichtstrahl von der einen Brechung zu der andern geradlinig fortläuft, dass die ganze Bahn des Lichtstrahles von seinem Eintritt in die Atmosphäre bis zum Fernrohre des Beobachters in einer Ebene liegen muss. Diese Ebene muss senkrecht auf dem Horizonte stehen, weil sie mit der Richtung der Schwere zusammenfällt; es geht hieraus hervor, dass nur die Höhen oder die Zenithdistanzen der Gestirne, nicht aber ihre Azimuthe von der Refraction beeinflusst werden.

Der Winkel zwischen dem einfallenden Strahle und der Normale wird der Einfallswinkel genannt, die Neigung des gebrochenen Strahles gegen die Normale aber der Brechungswinkel. Nach Feststellung dieser Begriffe können wir das zweite Brechungsgesetz so ausdrücken: Das Verhältniss zwischen dem Sinus des Einfallswinkels und dem Sinus des Brechungswinkels ist für den Uebergang aus einem bestimmten Medium in ein anderes eine Constante. Dieses constante Verhältniss wird auch der relative Brechungscoefficient für den Uebergang des Lichtstrahles aus einem Medium in ein anderes genannt. Bezeichnen wir den Einfallswinkel mit i, den Brechungswinkel mit r und den relativen Brechungscoefficienten mit n, so wird das von Snellius entdeckte Gesetz durch folgende Gleichung ausgesprochen:

$$\frac{\operatorname{Sin} i}{\operatorname{Sin} r} = n.$$

Wir führen hier die Brechungscoefficienten einiger Stoffe an, und haben angenommen, dass der Lichtstrahl aus dem leeren Raume in das betreffende Medium übergeht. Die Dichte der Gase bezieht sich auf den Druck von 760 Millimeter und die Temperatur von 0° C.**)

*) Diese Annahme ist nicht völlig richtig, jedoch hat man bis jetzt sich mit derselben begnügen zu können geglaubt.

**) Diese Zusammenstellung ist aus dem Lehrbuch der physikalischen und theoretischen Chemie von Buff, Kopp und Zamminer entlehnt.

Stoffe	Dichte	Brechungscoefficient
Wasser	1.000	1.34
Kronglas	2.535	1.53
Flintglas	3.723	1.64
Atmosphärische Luft	0.001323	1.000294
Sauerstoff	0.001420	1.000272
Stickstoff	0.001256	1.000300
Chlor	0.003194	1.000772
Wasserdampf	0.000824	0.000294
Schwefelkohlenstoffdampf	0.003437	0.001500

Die Höhe über der Erdoberfläche, in welcher die Dichtigkeit der Luft aufhört bemerkbar zu werden, ist im Vergleich mit dem Radius der Erdkugel sehr gering. Hieraus folgt, dass der Weg des Lichtstrahles durch die Atmosphäre einem sehr kleinen Winkel zwischen den Normalen ihrer Endpunkte entspricht, d. h. zwischen der Normalen in dem Punkte wo der Lichtstrahl in die Atmosphäre eintritt und der des Beobachtungspunktes; dies jedoch nur unter der Voraussetzung, dass der Einfallswinkel, also auch die Zenithdistanz des beobachteten Objectes nicht zu bedeutend ist.*) Fällt aber der Lichtstrahl mit einer geringen Neigung gegen den Horizont ein, so ist sein Weg durch die Atmosphäre offenbar sehr bedeutend im Verhältniss zu dem senkrechten Abstand des Eintrittspunktes von der Erdoberfläche. Solche Fälle lassen wir hier bei Seite und behalten also nur diejenigen im Auge, bei denen die Zenithdistanz des beobachteten Objectes mässig und der Winkel zwischen den äussersten Normalen mithin sehr klein ist.**) Einen kleinen Theil

---

*) Den Winkel zwischen zwei Normalen der Erdoberfläche nennt man den geodätischen Winkel.

**) Wäre keine Refraction vorhanden, so würde der Lichtstrahl seinen Weg durch die Atmosphäre in einer geraden Linie zurücklegen; alsdann fände man den Werth des geodätischen Winkels (v) aus der Gleichung:

$$\frac{H}{a+H} = 1 - \mathrm{Cos}\, v + \mathrm{Sin}\, v \,\mathrm{Cotang}\, z$$

wo H die Höhe der Atmosphäre, a den Erdhalbmesser und z die Zenithdistanz bedeutet. Nimmt man für H 8.6 geographische Meilen, für $\frac{H}{a+H}$ also den Werth $\frac{1}{100}$ an, so wird

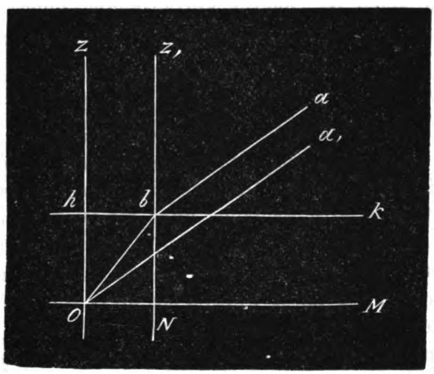
für $z = 90^\circ$: $v = 4^\circ\ 3'$

für $z = 45^\circ$: $v = 0\ 17$

Durch die Refraction werden diese Werthe zwar etwas geändert, jedoch nicht so viel, dass die angeführten Zahlen nicht einen ohngefähren Begriff von der Grösse des geodätischen Winkels geben.

einer sphärischen Oberfläche kann man jedoch annäherungsweise als eine Ebene ansehen, und unter dieser Voraussetzung können wir in sehr einfacher Weise einen approximativen Ausdruck für die astronomische Refraction herleiten. Um die Ableitung dieses Ausdruckes noch mehr zu vereinfachen, erlauben wir uns eine zweite Annahme, die zwar an und für sich ganz unrichtig, aber, wie man sogar beweisen könnte, hier gestattet ist; wir werden überdies nachher angeben, zu welchen Fehlern unsere beiden Vereinfachungen geführt haben. Diese Annahme besteht darin, dass wir überall in der ganzen Atmosphäre die gleiche Dichtigkeit der Luft voraussetzen, mithin nur eine einzige Brechung und zwar die an der Grenze der Atmosphäre.*) — Wir denken uns jetzt (Fig. 30), dass

Fig. 30.



ein Beobachter im Punkte O ein unendlich weit entferntes Object betrachtet, welches, wenn keine Strahlenbrechung vorhanden wäre, in der Richtung $O\,a_{,}$ erscheinen würde. Von diesem Gegenstande geht ein Lichtstrahl aus, welcher die Grenzebene der Atmosphäre im Punkte b erreichen mag; die Richtung dieses Lichtstrahles ist vor dem Eintritte in die Atmosphäre parallel mit der Richtung $O\,a_{,}$, weil das Object in unendlicher Entfernung liegt. Nach der Brechung im Punkte b setzt der Lichtstrahl seinen Weg, ohne eine weitere Brechung zu erleiden, in der Richtung $b\,O$ bis zur Oberfläche der Erde fort. Die Gerade $O\,M$ repräsentirt hier den Durchschnitt des Horizontes mit einer Verticalebene, die Gerade

*) Ob die Atmosphäre eine bestimmte Grenze hat oder nicht, ist bis jetzt noch nicht mit Sicherheit entschieden, noch weniger hat man die Höhe derselben bestimmen können. Wenn man bei der atmosphärischen Strahlenbrechung von dieser Höhe spricht, so meint man diejenige, bis zu der die Dichtigkeit der Luft noch merklich ist, indem die Lichtstrahlen eine merkliche Brechung oder Reflexion erleiden. Diese Höhe dürfte etwa 8—10 geographische Meilen betragen.

Oz aber die Richtung der Schwere oder die Normale der Erdoberfläche am Beobachtungsorte. Unseren Annahmen gemäss ist hk parallel mit OM und z,N parallel mit zO. Der Winkel $zOb = ObN$ ist offenbar die scheinbare Zenithdistanz des beobachteten Objectes, der Winkel $z,ba = zOa$, wiederum die wahre, d. h. diejenige Zenithdistanz, welche beobachtet werden würde, wenn keine Refraction stattfände. Wie wir also sehen, ist die scheinbare Zenithdistanz zugleich Brechungswinkel und die wahre Zenithdistanz Einfallswinkel; wir haben daher, wenn ersterer mit z und letzterer mit $z + r$ bezeichnet wird,

$$\frac{\text{Sin}\,(z + r)}{\text{Sin}\,z} = 1.0002884 \text{ *)}$$

oder, weil

$$\text{Sin}\,(z + r) = \text{Sin}\,z\,\text{Cos}\,r + \text{Cos}\,z\,\text{Sin}\,r$$

und r dabei klein genug ist, um die Vertauschung seines Sinus mit dem Bogen und seines Cosinus mit der Einheit zu gestatten,

$$\frac{\text{Cos}\,z}{\text{Sin}\,z} \,.\, r = 0002884$$

d. i.

$$r = 0.0002884 \text{ Tang } z = 59''.48 \text{ Tang } z.$$

Dieses ist die abgekürzte Formel, welche bei kleinen Zenithdistanzen die Refractionen mit hinreichender Genauigkeit giebt; sie ist, wie wir gesehen haben, von jeder Voraussetzung über die Dichtigkeits- oder Temperaturverhältnisse unabhängig. — Um ein Urtheil über die Zuverlässigkeit dieser Formel zu gewinnen, führen wir nun eine andere an, die unter den Voraussetzungen abgeleitet worden ist, dass die Luftschichten verschiedener Dichtigkeit die sphärische Form haben, sowie dass die Temperatur in den niedern Luftschichten für jede 100 Toisen Erhebung um 1° C., später aber etwas langsamer abnimmt. Man hat so gefunden:

$$r = 59''.50 \text{ Tang } z - 0''.069 \text{ Tang } z^3 + 0''.00024 \text{ Tang } z^5 - \ldots$$

wobei das zweite Glied von der mittleren Dichtigkeit der Atmosphäre oder von derjenigen Atmosphärenhöhe abhängt, welche stattfinden würde, wenn die Dichtigkeit und Temperatur für alle Schichten dieselbe wie an der Erdoberfläche wäre. Erst das dritte Glied ist von der Temperaturabnahme abhängig. Die Vergleichung der abgekürzten Formel mit der strengen zeigt, dass jene bei $z = 70°$ die Refractionen schon um $1\frac{1}{3}$ Sekunde falsch angiebt. — In der Nähe des Horizontes erhält man indessen nicht einmal durch die angeführte Reihenentwickelung streng richtige Refractionswerthe, weil diese Entwicklung zu convergiren aufhört, d. h. die Summe der Glieder einem bestimmten endlichen Werthe sich nicht nähert, sondern über alle Grenzen wächst, wenn Tang z einen sehr grossen

*) Dieser Werth des Brechungscoefficienten, der für 0° C. und 29.6 engl. Zoll oder 754 Millimeter Barometerhöhe gilt, ist durch astronomische Beobachtungen ermittelt worden.

Werth erhält. Für solche Fälle bedient man sich anderer Entwicklungsmethoden, die wir jedoch hier bei Seite lassen müssen; nur einige mit Hülfe derselben berechnete Refractionswerthe, grossen Zenithdistanzen entsprechend, wollen wir anführen. Die Uebereinstimmung zwischen diesen Werthen und den direct beobachteten Strahlenbrechungen hat gezeigt, dass die sehr verwickelte Theorie der astronomischen Strahlenbrechung doch schon einen hohen Grad von Vollendung erreicht hat.*)

Z	Refraction	wahrscheinlicher Fehler
87°	14′.51″.7	± 5″.0
88	18 56.4	± 8.0
89	25 24.3	± 20.0
90	35 39.6	unbestimmt.

Die Zahlen in der letzten Columne geben die wahrscheinlichen Abweichungen an, die man bei den berechneten Refractionswerthen von denjenigen zu befürchten hat, welche zu den verschiedenen Beobachtungszeiten wirklich stattfinden.

Weil das Brechungsvermögen der Luft von ihrer Dichtigkeit abhängt, diese aber mit dem Wechsel von Luftdruck und Temperatur verändert wird, so muss auch bei der Berechnung der Refractionen auf diese Umstände gehörige Rücksicht genommen werden. Die Dichtigkeit der Luft wird dem Barometerstande proportional geändert, weshalb die sog. mittlere Refraction zunächst mit dem Factor $\frac{b}{B}$ multiplicirt werden muss, wo b die zur Zeit der Höhenmessung stattfindende Barometerhöhe bedeutet, B aber einen mittleren Barometerstand, für welchen die Bestimmung der Refractionsconstante, d. h. des Brechungsvermögens der Luft, gültig ist. Ferner muss der Factor

$$\frac{1}{1 + 0.003665\, t}$$

hinzugefügt werden, wo t die Temperatur (nach Celsius) bezeichnet; für jeden Grad Temperaturerhöhung wird nämlich die Luft um 0.003665 ihres Volumens ausgedehnt und ihre Dichtigkeit in Folge dessen in demselben

*) Die Strahlenbrechung kann man direct beobachten, indem die Höhe eines Sterns mit bekannter Declination zu einer bekannten Zeit gemessen wird. Der Unterschied zwischen der berechneten und der beobachteten Höhe giebt unmittelbar die Refraction. — Man kann indessen nicht zur Kenntniss der Declinationen gelangen ohne Kenntniss der Strahlenbrechung; die Constante derselben, d. h. das Brechungsvermögen der Luft, muss daher im Voraus bestimmt werden. Diese Bestimmung erhält man durch Beobachtung der Meridianhöhen von zwei Sternen in beiden Culminationen; die Messungen führen zu zwei Gleichungen, in welchen die Polhöhe und die Refractionsconstante als Unbekannte erscheinen und aus denselben bestimmt werden können. Man darf dabei keinen zu tief culminirenden Stern auswählen, weil alsdann die Temperaturabnahme mit wachsender Höhe in der Atmosphäre einen merklichen Einfluss ausüben würde.

Verhältnisse geringer. Um demnach die wahre, im Beobachtungsaugenblicke stattfindende Refraction berechnen zu können, muss auf den Stand der meteorologischen Instrumente gehörig Rücksicht genommen werden.

Weil die Strahlenbrechung von so wesentlichem Einflusse auf die Höhenbestimmungen ist, so war es nöthig, ihre Theorie mit der grössten Sorgfalt zu studiren; die Resultate der astronomischen Beobachtungen würden sonst zum Theil mit einer solchen Unsicherheit behaftet sein, dass durch sie die Astronomie an ihrem Charakter als positive Wissenschaft nicht unwesentliche Einbusse erleiden würde.

Wenn ein Himmelskörper am Horizonte erscheint, also auf- oder untergeht, so übertrifft seine wahre Zenithdistanz die scheinbare von 90° um mehr als einen halben Grad. Die Strahlenbrechung beschleunigt demnach den scheinbaren Aufgang der Gestirne und verzögert ihren Untergang.

Bevor wir das Thema der Höhenmessungen verlassen, wollen wir eine kleine Reihenfolge von wirklich gemessenen Zenithdistanzen mittheilen, denen wir die Refractionen hinzufügen, um sie in wahre Zenithdistanzen verwandeln zu können. Die Messungen wurden auf der Sternwarte zu Pulkowa mit einem grossen Verticalkreise angestellt und beziehen sich auf den Polarstern in seiner oberen und unteren Culmination. Um die resultirenden Zenithdistanzen sogleich mit einander vergleichen zu können, ist der Einfluss der Präcession in der Weise berücksichtigt, dass die Zenithdistanzen auf den Anfang des Jahres 1843 reducirt wurden.

Die Messungen ergaben

	Obere Culmination.			Untere Culmination.		
1843	Scheinb. Zenithdist.	Refr.	Wahre Zenithdist.	Scheinb. Zenithdist.	Refr.	Wahre Zenithdist.
März 16	28° 41′ 28″.43	33″.04	28° 42′ 1″.47	31° 44′ 42″.56	38″.80	31° 45′ 21″.36
» 17	27.63	33.71	1.34	42.87	38.58	21.45
» 18	27.89	33.10	0.99	43.08	38.28	21.36
» 19	27.73	33.89	1.62	42.15	39.10	21.25
		Mittel =	28 42 1.36		Mittel =	31 45 21.36
		h =	61 17 58.64		h_1 =	58 14 38.64

Mit diesen Werthen von h und h_1 findet man die Polhöhe der Sternwarte zu Pulkowa:

$$\varphi = 59^\circ\ 46'\ 18''.64$$

und die Declination des Polarsterns für 1843.0:

$$\delta = 90^\circ - 1^\circ\ 31'\ 40''.00 = 88^\circ\ 28'\ 20''.00$$

Wie absolute Rectascensionen und die Richtung der Aequinoctialpunkte bestimmt werden, ist bereits früher (vgl. pag. 56) angedeutet worden; man beobachtet den Rectascensionsunterschied zwischen dem Stern, dessen absolute Rectascension man bestimmen will und der Sonne zu der Zeit, wo diese sich gerade im Aequator befindet; der gefundene

Unterschied ist alsdann unmittelbar die gesuchte Rectascension, wenn die Bestimmung im Frühling ausgeführt wurde, dagegen um genau 180° oder 12 Stunden von dieser verschieden, wenn man im Herbst beobachtete. Da nun aber die Beobachtungen im Meridian angestellt werden und man nicht darauf rechnen kann, dass die Sonne bei ihrer Culmination am Tage der Nachtgleichen gerade Mittags auch den Aequator passirt, so kann man die gesuchte absolute Rectascension auch nicht unmittelbar finden, sondern muss zu diesem Zwecke erst eine kleine Rechnung ausführen, bei welcher indess die Schiefe der Ekliptik als bekannt vorausgesetzt werden muss. Je näher jedoch die Sonne bei der Beobachtung einem der Aequinoctialpunkte ist, einen desto geringern Einfluss übt eine fehlerhafte Annahme der Schiefe auf das Resultat aus. Beobachtet man überdies die Sonne einmal bei einer geringen südlichen Declination und ein zweites Mal bei einer ohngefähr gleich grossen nördlichen, so wird das Mittel aus den beiden erlangten Bestimmungen fast völlig frei von einem etwaigen Fehler in der Annahme der Schiefe. — Wir nehmen daher an, dass die Neigung des Aequators gegen die Ekliptik bekannt ist und bezeichnen diese mit Θ; durch Rechnung findet man nun die absolute Rectascension der Sonne, wenn die Declination durch Beobachtung bestimmt worden ist. Die Rectascension bezeichnen wir mit A und die Declination mit D; eine Formel aus der sphärischen Trigonometrie giebt uns dann: *)

$$\operatorname{Sin} A = \frac{\operatorname{Tang} D}{\operatorname{Tang} \Theta}.$$

Die Seiten des Dreiecks, aus welchem diese Gleichung hervorging, sind: Rectascension, Declination und Länge der Sonne; der Winkel, welcher der zweiten Seite gegenübersteht, ist die Schiefe der Ekliptik. — Bezeichnen wir ferner die Zeit, welche von der Sonnenculmination bis zu der eines Sterns verfliesst, dessen Rectascension α ist, mit T, so haben wir:

$$\alpha = A + T.$$

Da nun A durch die obige Formel gefunden wird und T durch die Beobachtung unmittelbar bekannt ist, so lässt sich α nunmehr ohne jede Schwierigkeit ermitteln.

Die Anwendung obiger Rechnungsvorschriften wollen wir jetzt durch ein Beispiel erläutern, das wir den Tagebüchern der Pulkowaer Sternwarte entnehmen. Zur Zeit des Frühlingsäquinoctiums im Jahre 1843 wurden folgende Zeitunterschiede zwischen dem Stern α Arietis und der Sonne am grossen Durchgangsinstrumente beobachtet und gleichzeitig die Declinationen der Sonne mit dem Verticalkreise gemessen:

	T	D
1842 März 20.	$2^h\ 0^m\ 25^s.75$	$-0\ 13'\ 54''.83$
» » 21.	1 56 47.66	$+0\ 9\ 44.41$

*) Siehe Anhang.

Die Schiefe der Ekliptik nehmen wir auf Grund früherer Beobachtungen zu 23° 27.'7 an, welcher Werth für die beabsichtigte Berechnung hinlänglich genau ist. Mit Hülfe der angeführten Formel findet man nun die Werthe von A:

$$A = -34'\ 3''.6 = -2^m\ 8^s.24$$
$$A = +22\ \ 26.7 = +1\ \ 29.79$$

und hieraus ergeben sich zwei Werthe von α, nämlich

$$\alpha = 1^h\ 58^m\ 17^s.51$$
$$1\ \ 58\ \ 17.45$$
$$\text{Mittel: } 1\ \ 58\ \ 17.48$$

Die Schiefe der Ekliptik würde man durch Beobachtungen von Sonnendeclinationen finden, wenn diese genau zu den Zeiten der Solstitien angestellt werden könnten; da man aber nicht erwarten darf, dass das Solstitium genau mit der Culmination der Sonne zusammenfällt, so berechnet man θ aus der Formel:

$$\text{Tang}\ \theta = \frac{\text{Tang}\ D}{\text{Sin}\ A}\ .$$

Die Anwendung dieser Formel setzt voraus, dass die Rectascension der Sonne bekannt sei; stellt man aber die Beobachtungen zu Zeiten, die nicht weit von einem Solstitium abliegen, an, so ist A entweder nahe 90° oder nahe 270°; Sin A wird alsdann sehr nahe gleich $+1$ oder -1 sein und ein mässiger Fehler in der Annahme von A wird keinen merklichen Einfluss auf die Bestimmung von θ ausüben können. Noch aus einem anderen Grunde empfiehlt es sich, die Bestimmungen von θ zu den Zeiten der Solstitien auszuführen: zu anderen Zeiten wird nämlich Sin A wesentlich kleiner als 1 und folglich Tang D mit einem Factor multiplicirt, der grösser als 1 ist, der Beobachtungsfehler also, welcher an D und folglich auch an Tang D haftet, vergrössert in der Bestimmung von Tang θ eingehen.

Folgende beobachtete Declinationen entnehmen wir den Tagebüchern der Pulkowaer Sternwarte, und fügen ihnen die entsprechenden genäherten Rectascensionen der Sonne hinzu. In der letzten Columne stehen die nach der angeführten Formel berechneten Werthe von θ:

	D	A	θ
1842 Juni 20	+ 23° 27′ 10.″35	5h 53m 52.s3	23° 27′ 37.″35
» 21	27 34.58	5 58 1.9	37.35
» 22	27 34.44	6 2 11.5	38.15
		Mittel:	23 27 37.62

Der gefundene Werth von θ giebt die wahre Schiefe der Ekliptik an; von dieser unterscheidet sich die sog. mittlere Schiefe um den Betrag der Nutation. Von der wahren Schiefe muss die Grösse

$$+\ 9''.24\ \text{Cos}\ \Omega$$

subtrahirt werden, um die mittlere zu erhalten (vgl. pag. 201). Um diese

Grösse zu berechnen, brauchen wir die Länge des Mondknotens; diese findet sich für den 21. Juni wie folgt:

$$☊ = 291° 50'.$$

Hiermit erhält man:

$$+ 9''.24 \text{ Cos } ☊ = + 3''.43 \;;$$

folglich wird die mittlere Schiefe für 1842,5:

$$23° 27' 34''.19$$

Für 1750,0 hat man die mittlere Schiefe:

$$23° 28' 18''.0$$

gefunden; in 92.5 Jahren hat die Schiefe sich also um 43''.8 vermindert, was einer jährlichen Abnahme von 0''.474 entspricht. Diese Abnahme beruht darauf, dass die Lage der Ekliptik einer säcularen Aenderung unterworfen ist, während der Aequator seine Lage im Raume unverändert beibehält (vgl. pag. 153 und pag. 200). Nach sehr langen Zeiträumen kann zwar auch in der Lage des Aequators eine Veränderung bemerkt werden, der Betrag derselben erreicht aber im Laufe eines Jahrhunderts kaum eine Zehntel-Bogensekunde. Die Ursache hiervon ist dieselbe, welche die Präcession veranlasst.

Durch die absolute Rectascension eines Sterns ist die Richtung der Tag- und Nachtgleichenpunkte bestimmt, jedoch nur in Bezug auf die Richtung des fraglichen Sterns, also auf eine Richtung, welche an der täglichen Bewegung des Himmels theilnimmt. Die in Frage stehende Grundrichtung muss indess auch in Bezug auf den Meridian des Beobachtungsortes angegeben werden, und zwar benutzt man hierzu den Winkel, welchen eine durch den Frühlingsnachtgleichenpunkt gelegte und auf dem Aequator senkrecht stehende Ebene mit dem Meridiane bildet. Dieser Winkel ist die Sternzeit des Ortes, weshalb man die Richtung der Aequinoctialpunkte in Bezug auf den Meridian bestimmt, indem man die Sternzeit ermittelt. Hierzu ist aber nichts weiter nöthig, als die Uhrzeit zu beobachten, zu der ein Gestirn, dessen Rectascension bekannt ist, durch den Meridian geht. Nachdem die Uhrcorrection und auch der Gang der Uhr bestimmt worden sind, giebt die gefundene Sternzeit unmittelbar die Richtung der Aequinoctialpunkte oder die Rectascension der im Meridian befindlichen Punkte an.

Der Stundenwinkel der Sonne wird auch die wahre Sonnenzeit genannt; dieselbe lässt sich offenbar dadurch bestimmen, dass man die Culminationszeit der Sonne beobachtet, worauf man durch Anbringung der Zeitgleichung (pag. 60) die mittlere Sonnenzeit findet. Weil man jedoch den Antritt der Sonnenränder an die Fäden des Durchgangsinstruments nicht mit derselben Genauigkeit wie den eines Sterns beobachten kann, so zieht man es vor, die Sonnenzeit mittelst Rechnung aus der bekannten Sternzeit herzuleiten. — Die Zunahme der Sternzeit, von der Culmination der mittlern Sonne bis zu einem gewissen Moment, für welchen man die mittlere Sonnenzeit sucht, ist offenbar gleich der in diesem

Augenblicke stattfindenden Sternzeit weniger der Sternzeit im mittlern Mittag. Die Sternzeit im mittlern Mittag ist aber identisch mit der Rectascension der mittlern Sonne, welche Grösse man im Voraus für jeden Tag des Jahres angeben kann, da die Länge des Jahres ebenso wie der Ort der mittlern Sonne zu einer bestimmten Epoche als bekannt vorausgesetzt werden darf. Man erhält also leicht die Zunahme der Sternzeit seit dem mittlern Mittag, und diese braucht man nur mit

$$1 - \frac{1}{366,242201}$$

zu multipliciren, um die mittlere Sonnenzeit zu erhalten.

Das Resultat einer astronomischen Beobachtung besteht nicht nur in der Bestimmung einer Richtung, sondern auch in einer Angabe der Zeit, für welche die Richtung gültig war. Die Genauigkeit, welche bei dergleichen Angaben beobachtet werden muss, ist indessen ausserordentlich verschieden. Während die eigentlichen Sterne ihre Lage, von der Erde aus gesehen, so äusserst langsam ändern, dass es meistens genügt, nur das Jahr der Beobachtung anzugeben, sind die Ortsveränderungen bei Körpern, die zum Sonnensysteme gehören, häufig so rasche, dass man die Zeiten, zu denen ihre Richtungen aufgefasst worden sind, bis auf die einzelnen Sekunden angeben muss. In einer Zeitsekunde nimmt die Länge des Mondes um eine halbe Bogensekunde zu, eine Grösse, die ohngefähr von derselben Ordnung wie die der Beobachtungsfehler ist, und die daher nicht als unmerklich angesehen werden darf.

In allen den Fällen, wo die Zeit genauer als in ganzen Tagen angegeben werden muss, ist es auch nöthig, den Meridian zu bezeichnen, für welchen die Zeit gilt. Die verschiedenen Meridiane werden von einander durch die Differenzen der respectiven Ortszeiten unterschieden, welche für diese in demselben absoluten Augenblicke gelten. Der Anfang einer Mondfinsterniss wird z. B. überall auf der Erde gleichzeitig wahrgenommen, wo er überhaupt nur sichtbar ist, aber die Ortszeiten dieses Anfanges sind demohngeachtet sehr verschieden. Findet er z. B. um 11 Uhr an einem gewissen Orte statt, so trifft er um 10 Uhr an einem vom ersteren 15° westlicher liegenden Orte ein. Die Meridiane der beiden Oerter bilden nämlich mit einander einen Winkel von 15° oder von einer Stunde, weshalb der Stundenwinkel des Frühlingspunktes oder der Sonne, also auch die Ortszeit am letzteren Orte, gerade um diese Grösse kleiner sein muss als an dem ersten. Den Winkel zwischen den Meridianen zweier Orte nennt man ihren Meridianunterschied und drückt denselben in der Astronomie gewöhnlich in Zeit anstatt in Bogen aus.

Es ist keine leichte Aufgabe, den Meridianunterschied zweier Orte zu bestimmen, aber, weil die Lösung derselben nicht nur für die Astronomie, sondern auch für die Geodäsie, Geographie, sowie für die Schifffahrt von der grössten Wichtigkeit ist, so hat man weder Mühe noch

Kosten gescheut, um passende Methoden zu derselben ausfindig zu machen. Von diesen Methoden wollen wir die wichtigsten erwähnen.

Vor Allem muss die absolute (Stern- oder Sonnen-)Zeit an den beiden geographischen Punkten, deren Meridianunterschied man sucht, möglichst genau bestimmt werden. Wie diese ermittelt wird, haben wir schon oben angeführt; es kann hier noch hinzugefügt werden, dass ein etwaiger Fehler in den Zeitbestimmungen auf den ermittelten Längenunterschied keinen Einfluss ausübt, insofern er nur an beiden Beobachtungsorten genau derselbe ist. Es ist von Wichtigkeit, dies zu beachten, denn man wird dadurch erkennen, dass die Längenbestimmung frei von einem etwaigen gemeinsamen Fehler in den bei den Zeitbestimmungen benutzten Stern-Rectascensionen ist. — Sodann kommt es darauf an, die Zeit des einen Ortes mit der des andern zu vergleichen, aber dies ist gerade der Punkt, wo die eigentlichen Schwierigkeiten sich häufen.

Eine solche Vergleichung kann nun entweder dadurch ausgeführt werden, dass man an beiden Punkten ein gegebenes Signal oder überhaupt irgend eine plötzlich stattfindende Erscheinung gemeinsam beobachtet, oder auch dadurch, dass die Zeit des einen Ortes auf den andern übertragen wird. Dies kann wieder auf zwei Wegen geschehen, nämlich erstens mittelst transportabler Uhren, und zweitens mit Hülfe des electrischen Telegraphen. Würde eine Uhr während des Transportes vollkommen gut gehen, d. h. fortfahren, die Zeit des ersten Ortes zu zeigen, so hätte man hierin das beste Mittel zur Bestimmung der Längendifferenz; aber auch das best ausgeführte Chronometer lässt mehr oder weniger in dieser Beziehung zu wünschen übrig. Genügt es auch in Ruhe und in gleichmässiger Temperatur allen billigen Anforderungen, so sinkt seine Leistung in der Regel doch merklich herab, wenn es den bei einem Transport unvermeidlichen Stössen und hastigen Bewegungen ausgesetzt wird. Man hat sich daher häufig einer grossen Zahl von Chronometern bedient, wenn die grösste Genauigkeit beabsichtigt wurde, in der Voraussetzung, dass die zufälligen Fehler im Mittel aus den einzelnen Zeitübertragungen wesentlich vermindert würden. Die Zeitübertragung mittelst Chronometer kann in dieser Weise zwar zu genauen Resultaten führen, allein die Methode bleibt nicht nur zeitraubend und unbequem, sondern auch sehr kostspielig; man wendet sie daher meistens nur zur See an, wo die Längenbestimmungen nicht mit astronomischer Genauigkeit ausgeführt zu werden brauchen, und in Gegenden, wo noch geographische Ortsbestimmungen ausgeführt werden müssen. Seit Einführung der elektrischen Telegraphen bedient man sich aber fast ausschliesslich dieser zu den Zeitübertragungen und erzielt durch sie mit grösster Leichtigkeit eine staunenswerthe Genauigkeit. — Die Geschwindigkeit des elektrischen Stromes ist so gross, dass man durch das Schliessen eines solchen fast momentan einen Elektromagneten, der sich in sehr grosser Entfernung befindet, in Thätigkeit versetzen kann. Auf solche Weise können Signale, welche von dem einen

Punkte abgesandt werden und die dortige Localzeit angeben, gleichzeitig an dem andern beobachtet werden; es lassen sich also zwei Uhren mit einander vergleichen, die sehr weit von einander entfernt sind, denn die Sekundenschläge der einen können vermittelst der Telegraphenleitung auf der andern gehört werden. Signalisirt man überdies abwechselnd von beiden Stationen, so wird das Resultat frei von dem Einflusse der nicht völlig momentanen Fortpflanzung des elektrischen Stromes. Denn in Folge dessen würde der Meridianunterschied das eine Mal zu gross (wenn der Strom von Osten nach Westen geht), das andere Mal zu klein gefunden werden, und da kein Grund vorliegt, dass die Stromgeschwindigkeit in der einen Richtung grösser als in der andern sein sollte, so muss man annehmen, dass das Mittel der beiden Bestimmungen frei von dem erwähnten Einflusse ist; aus dem Unterschiede der beiden Bestimmungen lässt sich dagegen die Stromzeit beurtheilen. In dieser Weise hat man gefunden, dass die Geschwindigkeit zwar sehr gross, aber keineswegs in allen Leitungen dieselbe ist. Wenn die Leitung durch das Meer geführt wird, ist sie geringer als bei Leitungen durch die Luft.

Von den coelestischen Erscheinungen, welche zum Zwecke der Längenbestimmungen beobachtet werden können, nennen wir zunächst die Mondfinsternisse. Da der Mond wirklich verfinstert wird, so muss die Erscheinung des Anfangs oder des Endes für die beiden Stationen gleichzeitig stattfinden. Wenn also an den beiden Uhren, welche die respectiven Ortszeiten angeben, die Zeiten des Anfangs und des Endes einer Mondfinsterniss beobachtet werden, so ergiebt sich unmittelbar eine Vergleichung der beiden Uhren, mithin auch die gesuchte Längendifferenz. Diese Methode ist sehr einfach, aber auch sehr ungenau; denn der Anfang und das Ende einer Mondfinsterniss sind Erscheinungen, die nicht scharf aufgefasst werden können. Gegenwärtig fällt es wohl keinem Astronomen ein, zu diesem Zwecke eine Mondfinsterniss zu beobachten. Vortheilhafter sind die Beobachtungen der Jupiters-Trabanten, die auch manchmal für geographische Zwecke angestellt werden; für die Astronomie und Geodäsie*) bieten indessen auch sie nicht die erforderliche Genauigkeit.

Viel sicherer als die eigentlichen Verfinsterungen lassen sich die Bedeckungen der Himmelskörper, namentlich der Sterne, durch den Mond wahrnehmen.**) Die Erscheinung einer Bedeckung findet allerdings nicht an den zwei Punkten, deren Längenunterschied man sucht, gleichzeitig statt, weil der Mond in Folge seiner grossen Parallaxe von den

---

*) Geodäsie ist die Wissenschaft von der Figur der Erde.

**) Die Bedeckungen der Sonne werden auch Sonnenfinsternisse genannt.

verschiedenen Stationen in verschiedenen Richtungen gesehen wird, während der Stern und auch nahezu die Sonne in parallelen Richtungen erscheinen. Man kann aber leicht die beobachteten Zeitmomente entweder auf einander oder auch auf den Mittelpunkt der Erde reduciren, d. h. berechnen, um wie viel früher oder später die Erscheinung vom Mittelpunkte aus gesehen wurde, als von den beiden Stationen. Nachdem die beiden beobachteten Zeitmomente auf den Mittelpunkt reducirt worden sind, ergiebt ihre Differenz unmittelbar den Längenunterschied. — Bei diesen Rechnungen müssen indess nicht nur die Parallaxe des Mondes (und eventuell die der Sonne) bekannt sein, sondern auch seine Bewegung. Da man aber häufig die Längenunterschiede genauer zu kennen wünscht, als die Bewegung des Mondes erkannt ist, so benutzt man die Bedeckungen mehr zu Verbesserung der Mondstafeln, als zu Längenbestimmungen. Bei Reisen spielt indessen die Methode der Längenbestimmungen durch Bedeckungen eine grosse Rolle.

Die Vorausberechnung der Bedeckungen, d. h. der Zeit, zu welchen eine Bedeckung stattfindet, ist im Vergleich mit anderen astronomischen Berechnungen einfach; eine vollständige Auseinandersetzung derselben würde trotzdem mehr Platz in Anspruch nehmen, als wir in diesem Buche dazu verwenden können. Wir müssen uns daher darauf beschränken, eine Andeutung zu geben, wie der Anfang und das Ende einer Bedeckung im Voraus berechnet werden, vorausgesetzt, dass die Erscheinungen von dem Mittelpunkte der Erde aus beobachtet würden.

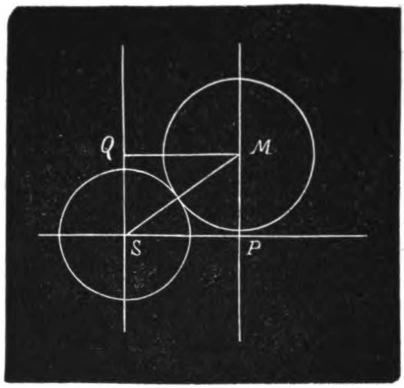
Es liegt in der Natur der Sache, dass die Himmelskörper, von denen der eine den andern bedeckt, kurz vor und kurz nach der Bedeckung einander sehr nahe am Himmel erscheinen; wir können daher, indem wir die Erscheinung geometrisch auffassen, annehmen, dass dieselbe auf einer Ebene vor sich geht, statt auf einer sphärischen Fläche. Die Rectascension und Declination der Sonne (wir setzen voraus, dass dies Gestirn vom Monde bedeckt wird) bezeichnen wir mit A und D, und nehmen an, dass diese Werthe für einen beliebigen Zeitpunkt T nahe der Conjunctionszeit gelten. Die gleichzeitigen Coordinaten des Mondes bezeichnen wir durch A' und T'. Die Veränderungen sämmtlicher Coordinaten können wir, da hier nur eine kurze Zwischenzeit in Frage kommt, als gleichförmig ansehen, und nennen die stündlichen Aenderungen von A, D, A' und D': a, d, a' und d'; alsdann sind die Rectascensionen der Sonne und des Mondes zur Zeit $T + t$: $A + at$, $D + dt$, $A' + a't$ und $D' + d't$, wo t natürlich auch in Stunden ausgedrückt sein muss. — Wenn nun der Punkt S (Fig. 31) die Lage des Sonnenmittelpunktes zur Zeit $T + t$ andeutet, M die des Mondcentrums; wenn ferner SQ und PM Stücke der Declinationskreise dieser Himmelskörper darstellen, so haben wir

$$SQ = D' - D + t\,(d' - d)$$

Der Winkel zwischen den Declinationskreisen ist offenbar

$$A' - A + t\,(a' - a)$$

Fig. 31.



und dies wäre auch der Ausdruck für die Seite SP, wenn Sonne und Mond sich im Aequator befänden, d. h. wenn D und D' Null wären; liegen aber diese Himmelskörper nördlich oder südlich vom Aequator, so hat man mit hinreichender Genauigkeit

$$SP = [A' - A + t\,(a' - a)]\ \mathrm{Cos}\ D\ ^{*}).$$

Für die Berührungszeit der Ränder von Sonne und Mond muss $SM = R + R'$ sein (R und R' bezeichnen die scheinbaren Halbmesser dieser Himmelskörper); aus dem rechtwinkligen Dreiecke SPM folgt demnach:

$$(R + R')^2 = [A' - A + t\,(a' - a)]^2\ \mathrm{Cos}\ D^2 + [D' - D + t\,(d' - d)]^2\,.$$

Wir haben hier eine Gleichung zweiten Grades, welche in Bezug auf t aufgelöst werden muss; die Lösung wird, falls eine Bedeckung wirklich stattfindet, zwei Werthe von t ergeben, von welchen der eine dem Anfang der Bedeckung und der zweite dem Ende entspricht. Findet aber keine Bedeckung statt, so wird dies dadurch angezeigt, dass die beiden Werthe von t (die Wurzeln der obigen Gleichung) imaginär werden, d. h. die Grösse $\sqrt{-1}$ enthalten, welche in der gewöhnlichen Zahlenreihe bekanntlich keinen Platz hat. — Von einem Punkte auf der Erdoberfläche aus gesehen, gestalten sich die Bedeckungserscheinungen wegen der Grösse der Mondparallaxe wesentlich anders. Um sie zu berechnen, muss man in der obigen Gleichung die scheinbaren Rectascensionen und Declinationen, d. h. die mit der Parallaxe behafteten anwenden.

Schliesslich erwähnen wir noch zwei Methoden zur Längenbestimmung, welche beide darauf gegründet sind, dass die Bewegung des Mon-

---

*) Der strenge Ausdruck wäre

$$\mathrm{Sin}\ SP = \mathrm{Sin}\ [A' - A + t\,(a' - a)]\ \mathrm{Cos}\ D;$$

man darf aber hier die Sinusse mit den Bögen vertauschen.

des eine sehr rasche ist, so dass sie in der Zeit, während welcher der Mond von dem einen Meridian zu dem andern vorschreitet, bemerkt und beobachtet werden kann. Bestimmt man nämlich mit Hülfe von Durchgangsinstrumenten die Rectascension des Mondes an zwei verschiedenen Stationen, so kann man aus dem Unterschiede der Resultate auf die Zeit schliessen, welche zwischen den beiden Culminationen verflossen ist, und hieraus lässt sich der Meridianunterschied beider Stationen ermitteln. — In ähnlicher Weise findet man die Länge durch Messung der Abstände des Mondes von anderen Himmelskörpern (Methode der Monddistanzen). An der einen Station wird zu einer gegebenen Localzeit die Winkelentfernung des Mondes z. B. von der Sonne gemessen; für einen andern sog. ersten Meridian (z. B. den von Greenwich) sind die Monddistanzen im Voraus berechnet; man kann also an der ersten Station sogleich sehen, zu welcher Localzeit der zweiten Station die Distanz des Mondes von der Sonne diejenige war, welche an der ersten beobachtet wurde. Durch die Vergleichung beider Zeiten findet man den Längenunterschied. Selbstverständlich müssen Parallaxe des Mondes sowie Refraction bei der Vergleichung der Distanzen gehörig in Rechnung gezogen werden; beide können grosse Distanzen sehr merklich beeinflussen. Aus diesen Gründen ist die Methode nicht bequem; sie ist aber doch, mit Ausnahme der Chronometermethode, die beste, welche zur See angewendet werden kann.

Die zur Bestimmung der gegenseitigen Lage der Ebenen und Richtungen, auf welche man die Oerter der Himmelskörper bezieht, dienenden Methoden schliessen, wie wir im Vorigen gesehen haben, die Bestimmung der absoluten Rectascensionen und Declinationen ein. — Die Resultate dieser Bestimmungen sind die Fundamente der Astronomie. Es ist nun aber wünschenswerth und nothwendig, die Oerter einer sehr grossen Anzahl Himmelskörper zu kennen, die absolut zu bestimmen ganz unmöglich wäre. Auch wäre dies für die Astronomie keineswegs vortheilhaft, denn bei den astronomischen Untersuchungen kommt es mehr darauf an, die relativen Lagen der Himmelskörper unter sich, als ihre absoluten in Bezug auf Ebenen und Richtungen, die nur von der Erdbewegung abhängen, zu kennen. Zuweilen ist es sogar ziemlich gleichgültig, ob z. B. alle Rectascensionen um eine kleine Grösse falsch sind, wenn nur eben dieser Fehler für alle derselbe ist. Aus diesen Gründen werden die Oerter der meisten Gestirne durch relative Bestimmungen festgestellt, zu denen man bei grösseren Abständen und helleren Gestirnen vor Allem den Meridiankreis benutzt.

Wir sahen (pag. 276), dass der Unterschied zwischen der beobachteten Culminationszeit eines Gestirns und seinem wahren Meridiandurchgang sich durch die Formel

$$\frac{c + b \operatorname{Cos} (\varphi - \delta) + k \operatorname{Sin} (\varphi - \delta)}{\operatorname{Cos} \delta}$$

ausdrücken liess. Setzen wir

$$b \operatorname{Cos} \varphi + k \operatorname{Sin} \varphi = m$$
$$b \operatorname{Sin} \varphi - k \operatorname{Cos} \varphi = n$$

so hat man für diesen Unterschied:

$$m + n \operatorname{Tang} \delta + c \operatorname{Sec} \delta ,$$

d. h. eine Formel, in der die Declination die einzige Veränderliche ist. Die Grösse m vermischt sich mit der Uhrcorrection und braucht daher nicht besonders bestimmt zu werden. Die Kenntniss der absoluten Uhrcorrection ist nämlich nicht erforderlich, sondern blos die ihrer Veränderungen, weil man ja nur Unterschiede der Rectascensionen bestimmen will. — Der Collimationsfehler wird in gewöhnlicher Weise bestimmt, die Grösse n aber durch Beobachtung eines dem Pole sehr nahe stehenden Sterns. Man kann auch c und n gleichzeitig aus Sternbeobachtungen finden, was unter gewissen Umständen nicht unvortheilhaft ist.

Bei relativen Bestimmungen pflegt man die verticalen Winkel sogleich auf den Aequator zu beziehen: statt den Horizontpunkt oder den Zenithpunkt zu bestimmen, ermittelt man durch Beobachtung eines Sterns mit bekannter Declination die Ablesung, welche der Richtung nach dem Aequator entspricht. Hiernach erhält man unmittelbar die Declinationen oder Poldistanzen, indem von den einzelnen Ablesungen die des Aequatorpunktes abgezogen wird.

In sehr vielen Fällen ist es indessen weder vortheilhaft noch ausführbar, die Ortsbestimmungen der Himmelskörper im Meridian vorzunehmen, z. B. dann, wenn das Object während des Tages den Meridian passirt und dabei nicht Lichtstärke genug besitzt, um wahrgenommen werden zu können. Die meisten Cometen sind deshalb auch von den Beobachtungen im Meridian ausgeschlossen, weil dieselben häufig von der Sonne scheinbar nicht sehr entfernt und daher nur kurze Zeit nach ihrem Untergange oder vor ihrem Aufgange sichtbar sind. Lichtschwache Gegenstände beobachtet man überhaupt nicht gern im Meridian, weil dazu grosse Fernröhre erforderlich sind, denen man, um sie nach verschiedenen Punkten des Himmelsgewölbes richten zu können, eine andere Aufstellung geben muss, als den Meridiankreisen. Unter solchen Umständen vergleicht man das zu beobachtende Object mit einem nahe gelegenen Stern, dessen Rectascension und Declination durch frühere Beobachtungen bekannt sind. Solche Vergleichungen führt man auch dann aus, wenn die Kenntniss der absoluten Lage nicht die Hauptsache ist, wie z. B. bei den sog. Doppelsternen, wo vorwiegend die Bewegung des einen Sterns relativ zu der des andern von Interesse ist. Zu solchen Zwecken dienen verschiedene Messapparate, deren Unterschiede davon abhängen, ob man mit denselben einigermassen grosse oder nur sehr kleine Differenzen zu messen beabsichtigt. Die Einrichtung solcher Instrumente werden wir durch eine kurze Beschreibung erläutern.

Das sog. Aequatoreal ist, dem Principe nach, einer Armillarsphäre nicht unähnlich; es besteht aus einem Fernrohre, das um eine Axe (die sog. Declinationsaxe), welche stets in der Ebene des Aequators liegt, drehbar ist. Auf der Axe ist ein getheilter Kreis befestigt, an dem man die Richtung des Rohres abliest. Dieser Kreis heisst der Declinationskreis. Die Declinationsaxe ist aber nicht unbeweglich, braucht also nicht beständig dieselbe Richtung einzunehmen, sondern ist in der Ebene des Aequators um die sog. Stundenaxe, welche mit der Weltaxe parallel sein muss, drehbar. Die Drehung der Declinationsaxe wird an einem zweiten Kreise, dem sog. Stundenkreise, abgelesen. — Wäre das Instrument vollständig orientirt und auch die Nullpunkte der Kreise berichtigt, so müsste man an beiden Kreisen die Ablesung Null erhalten, wenn das Fernrohr gegen einen culminirenden Punkt gerichtet würde, der zugleich im Aequator liegt. Durch eine Drehung um die Declinationsaxe richtet man das Fernrohr nach einem andern Punkt im Meridian, dessen Declination man am Kreise sogleich ablesen kann, und durch eine Drehung um die Stundenaxe wird die Richtung einem andern Stundenwinkel entsprechen, welcher am Stundenkreise zu ersehen ist. An beiden Kreisen liest man folglich die Declination und den Stundenwinkel eines beliebigen Punktes ab; kennt man die Sternzeit im Einstellungsaugenblicke, so findet man unmittelbar auch die Rectascension. — Die Beobachtungen mit dem Aequatoreal werden in der Regel so angeordnet, dass man zuerst durch Einstellung eines bekannten Gestirnes die Indexfehler der Kreise bestimmt; hierauf richtet man das Fernrohr auf das zu bestimmende Object, und erhält nun, wenn die dazu gehörige Sternzeit notirt wird, die Declination und die Rectascension desselben.

Die Aufstellung des Aequatoreals ist viel schwieriger zu berichtigen und zu prüfen, als die des Durchgangsinstrumentes oder des Meridiankreises; auch ist sie in der Regel weniger unveränderlich, zum Theil weil man solche Instrumente gewöhnlich in Thürmen auf hoch aufgemauerten Pfeilern aufstellt, die nicht dieselbe Festigkeit wie die niedrigeren Pfeiler der Meridiankreise besitzen können. Wären nicht diese erschwerenden Umstände vorhanden, so würde das Aequatoreal wohl mit Vortheil zu absoluten Bestimmungen verwendet werden können.

Die Kreise eines Aequatorealinstrumentes sind sehr häufig nicht zu eigentlichen Messungen bestimmt, sondern dienen hauptsächlich nur dazu, das Fernrohr auf ein Object, dessen Lage am Himmel man beiläufig kennt, mit Bequemlichkeit richten zu können. Ein so eingerichtetes Aequatoreal heisst ein parallactisch aufgestelltes Instrument oder ein Instrument mit parallactischer Montirung. Der Messapparat bei diesen Instrumenten besteht in einem meist am Ocularende angebrachten Mikrometer, dessen verschiedene Arten hier kurz beschrieben werden mögen. — Das am meisten angewandte ist das Fadenmikrometer. Bei diesem ist das Wesentliche ein Fadennetz, von dem ein Faden vermittelst einer Mikrometerschraube fortbewegt werden kann, und welches selbst um die optische Axe drehbar ist. Häufig ist nur ein einziger fester Faden vorhanden, dem der bewegliche dann parallel läuft; oft sind aber noch mehrere Fäden senkrecht gegen den erstgenannten aufgezogen. Die verschieden eingerichteten Fadennetze bedingen auch verschiedene Beobachtungsmethoden. Wir betrachten zunächst das Fadennetz mit mehreren senkrecht (gegen den beweglichen) aufgezogenen Fäden. Letzterer wird der täglichen Bewegung der Gestirne parallel gestellt und behält wegen der parallactischen Aufstellung diese Lage bei jeder Bewegung des Fernrohres bei. Die auf den beweglichen senkrecht stehenden Fäden fallen hier stets mit Declinationskreisen zusammen, entsprechen also gewissen Stundenwinkeln. Wird das Fernrohr in der Richtung gegen eine gewisse Himmelsgegend festgeklemmt, so sieht man nach und nach verschiedene Gestirne über die Fäden passiren; die Zeit, welche zwischen den Passagen zweier Objecte über denselben Faden verfliesst, ist aber ihrem Rectascensionsunterschiede gleich, man bestimmt folglich diesen, indem man die Durchgangszeiten der beiden Gestirne über die verschiedenen Fäden beobachtet. — Zur Bestimmung des Declinationsunterschiedes bedient man sich der Mikrometerschraube. Das ganze Fernrohr wird so eingestellt, dass das eine und zwar das erste Object während seiner Bewegung durch das Sehfeld von dem, dem beweglichen Faden parallelen festen bedeckt wird, während der bewegliche auf das zweite Object eingestellt wird. Notirt man sich nun die Ablesung der Schraubentrommel, und zieht davon diejenige Ablesung ab, welche der Coincidenz der beiden Fäden entspricht, so erhält man offenbar den in Trommeltheilen ausgedrückten Declinationsunterschied der beiden Objecte. Um diese in Sekunden zu verwandeln, ist es nöthig, den Werth eines Schraubentheils in Sekunden zu kennen. Hierzu gelangt man durch die folgende Operation. Das Fadennetz wird senkrecht zu der vorigen Lage gestellt, indem man dasselbe genau 90° um die optische Axe dreht; der bewegliche Faden fällt also jetzt mit einem Declinationskreise zusammen. Zur Beurtheilung der Grösse der Drehung ist das Ocular von einem getheilten Kreise umgeben, den man Positionskreis nennt. Man stellt nun die Schraubentrommel nach und nach auf verschiedene Theilstriche und beobachtet die Passagen eines Sterns — am besten eines sehr nördlichen — über den beweglichen Faden in diesen verschiedenen Stellungen. Die beobachteten Zeitdifferenzen multiplicirt man mit 15 Cos δ und dividirt hierauf die Producte durch die Differenzen der Trommelablesungen; man erhält somit eine Reihe Bestimmungen der gesuchten Grösse. — Auch durch Messung des bekannten Rectascensionsunterschiedes eines Sternpaares vermittelst der Schraube, oder indem man irgend eine in Sekunden bekannte Entfernung misst und die Anzahl der Schraubentheile mit der bekannten Anzahl von Sekunden vergleicht, lässt sich der Schraubenwerth ermitteln.

Die verschiedenen Theile des Instruments unterliegen dem Einflusse der Temperaturveränderungen, mithin verändert sich auch der Schraubenwerth mit der Temperatur. Es ist daher wichtig, denselben bei verschiedenen Temperaturen zu bestimmen und bei den eigentlichen Beobachtungen das Thermometer abzulesen, damit man nicht über den jedesmaligen Werth eines Trommeltheils in Zweifel ist.

In den Fällen, wo beide Objecte einander so nahe erscheinen, dass das Auffassen der Passagen — welche jetzt unmittelbar nach einander erfolgen — unbequem wird, stellt man zunächst durch Drehung des Positionskreises das Fadennetz in eine solche Lage, dass einer der auf den beweglichen senkrechten Fäden mit der Verbindungslinie der beiden Objecte parallel wird; ihre in Sekunden ausgedrückte Entfernung oder die Distanz misst man dann in derselben Weise, wie bei der vorigen Beobachtungsart den Declinationsunterschied. Ferner wird die Ablesung des Positionskreises notirt und ebenso hat man die Richtung der täglichen Bewegung, oder, durch Hinzufügung von 90°, die des Declinationskreises auf diesem Kreise bemerkt. Die Angaben des Positionskreises dienen nun dazu, den sog. Positionswinkel zu bestimmen; so nennt man nämlich den Winkel, welchen der durch das eine Object gehende Declinationskreis mit der Verbindungslinie der beiden Objecte bildet. Der Positionswinkel wird gewöhnlich vom nördlichsten Punkte des Declinationskreises durch Osten, Süden und Westen von 0° bis 360° gezählt; man findet ihn unmittelbar durch die Differenz der Ablesungen auf dem Positionskreise.

Bei den Messungen von Positionswinkel und Distanz kann man indessen, wie aus der eben erläuterten Beobachtungsart leicht gefolgert werden kann, die auf den beweglichen senkrechten Fäden offenbar entbehren und diese werden daher auch häufig bei Fernröhren weggelassen, die zur Messung sehr kleiner Unterschiede bestimmt sind, wie z. B. der gegenseitigen Lage von Doppelsternen, deren Componenten oft noch weniger als eine Sekunde von einander abstehen.

Die Berechnung von Doppelsternbahnen gründet man gewöhnlich direct auf die gemessenen Distanzen und Positionswinkel, in andern Fällen, wo die Kenntniss der Rectascension und Declination nöthig ist, müssen erst aus der gemessenen Distanz und Positionswinkel die Differenzen in Rectascension und Declination berechnet werden. Zu diesem Zwecke dienen die Formeln:

$$\operatorname{Cos} \delta\ (\alpha' - \alpha) = \Delta \operatorname{Sin} P$$
$$\delta' - \delta = \Delta \operatorname{Cos} P$$

wo Δ die Distanz und P den Positionswinkel bezeichnet und die man leicht aus dem Dreiecke ableitet, dessen Seiten $(\alpha' - \alpha) \operatorname{Cos} \delta$, $\delta' - \delta$ und Δ sind und wo der Winkel zwischen $\delta' - \delta$ und Δ mit P bezeichnet wurde. In der Regel darf dieses Dreieck als ein ebenes betrachtet werden, so dass die Formeln der ebenen Trigonometrie unmittelbare Anwendung finden.

Bei Objecten, deren Erscheinung eine wenig präcise ist und folglich nicht Messungen von höchster Genauigkeit zulässt, benutzt man häufig mit Erfolg das sog. Kreis- oder Ringmikrometer. Für Cometen und Nebelflecken erlangt man mit Hülfe eines solchen oft fast eben so gute Resultate wie mit dem viel complicirteren Fadenmikrometer. Das Ringmikrometer besteht einfach aus einem stählernen Ringe, welcher statt des Fadenkreuzes im Brennpunkte befestigt ist. Im Sehfelde erscheint also statt der Fäden ein Ring.*) Lässt man nun zwei Objecte in der Weise das Feld durchlaufen, dass beide Sehnen innerhalb des innern Ringkreises beschreiben, so können für jedes Object vier Zeitmomente beobachtet werden. Ihre arithmetischen Mittel ergeben die Durchgangszeiten der Objecte durch den Declinationskreis, welcher durch den Mittelpunkt des Ringes geht. Hieraus findet sich also unmittelbar die Differenz der Rectascensionen. Der Unterschied in der Declination wird aus der verschiedenen Länge der Sehnen gefunden. Nehmen wir an, dass beide Objecte durch den Ring nördlich vom Mittelpunkte gehen, so ist dasjenige Object nördlicher, welches die kürzere Sehne beschreibt. Ist der scheinbare Radius des Ringes bekannt, d. h. in Sekunden gegeben, so lässt sich nach einigen geometrischen Betrachtungen der Declinationsunterschied berechnen, wobei die Sehnen, also die Differenzen der Antrittsmomente der einzelnen Objecte an den Ring, die unmittelbaren Ergebnisse der Beobachtung sind.

Ein ganz eigenthümliches Mikrometer ist das sog. Heliometer. Um ein solches herzustellen, muss das Objectiv nach einem Durchmesser in zwei Hälften geschnitten werden, welche aber so einzufassen sind, dass sie neben einander und zwar in der Richtung der Schnittlinie verschoben werden können. Betrachtet man eine Himmelsgegend mit diesem Instrumente, indem die beiden Objectivhälften die ursprüngliche Lage gegen einander einnehmen, also zusammen ein vollständiges Objectiv bilden, so

*) Gewöhnlich hat man zwei concentrische Ringe und benutzt je nach Umständen den grössern oder den kleinern.

hat man genau denselben Anblick wie durch ein gewöhnliches Fernrohr. Man wird aber bemerken, wenn die Objectivhälften auseinander geschraubt werden, dass jedes Gestirn zwei Bilder giebt, sowie dass man die Bilder zweier Gestirne mit einander zur Coincidenz bringen kann. Hierauf beruht die Anwendung des Heliometers. — Das ganze Objectiv wird zunächst so um die optische Axe gedreht, dass die Verschiebung der Objectivhälften in der Richtung zwischen den beiden zu messenden Gestirnen geschieht. Alsdann bewegt man die eine Hälfte so weit, dass das eine Bild des einen Gestirns mit einem Bild des andern coincidirt. Die Bewegung wird mittelst der Schraube gemessen, deren Werth und dessen Abhängigkeit von der Temperatur in gewöhnlicher Weise bestimmt wird. Am Objective ist der Positionskreis befestigt, an welchem man den Positionswinkel abliest; am Oculare ist ein kleinerer angebracht, welcher dazu dient, der Verschiebung des Oculars, die in der Regel bei allen astronomischen Instrumenten möglich ist, dieselbe Richtung, wie sie die Verbindungslinie der beiden Gestirne hat, zu geben.

Das Heliometer hat in der Geschichte der neuern Astronomie eine grosse Rolle gespielt. Auf der Sternwarte zu Königsberg wurde dasselbe, nach der Construction Fraunhofer's, von dem berühmten Astronomen Bessel zu Messungen angewendet, welche an Genauigkeit alle früheren übertrafen. Vermittelst desselben war Bessel im Stande, die Abspiegelung der Erdbewegung um die Sonne an einem Fixsterne zu erkennen und damit zum ersten Male eine Fixsternparallaxe zu bestimmen. Später hat sich allerdings gezeigt, dass das Vertrauen, welches man nach Bessel in die Leistungen des Heliometers setzte, zum Theil wohl als übertrieben bezeichnet werden musste, allein die neuesten Verbesserungen, welche durch die Bemühungen der Herren Repsold in Hamburg erlangt worden sind, dürften diesem Instrumente einen hohen Rang unter den astronomischen Messwerkzeugen dauernd verschaffen.

§ 14. Von den wahren, scheinbaren und mittleren Oertern der Himmelskörper.

Wenn man die Bewegungen der Himmelskörper auf Grund der Veränderungen ihrer beobachteten Richtungen untersuchen will, müssen diese selbstverständlich auf dieselbe Grundebene und dieselbe Grundrichtung bezogen sein. In den überwiegend meisten Fällen bezieht man die Oerter der Gestirne auf den Aequator und die Richtung der Aequinoctialpunkte; sowohl diese Grundebene wie auch die Grundrichtung sind aber nicht unveränderlich im Raume, sondern dem Einflusse der Präcession und Nutation unterworfen. Diese Einflüsse ziehen entsprechende Aenderungen der Rectascensionen und Declinationen nach sich, so dass man, wäre die Lage eines Gestirns auch wirklich am Himmel unveränderlich, demselben doch eine Bewegung zuschreiben müsste, wenn nicht die erwähnten Aenderungen bekannt wären und durch Rechnung berücksichtigt werden könnten. — Will man die Richtungen eines Himmelskörpers, wie sie zu verschiedenen Zeiten durch Beobachtungen gefunden worden sind, mit einander vergleichen, so muss man zunächst den Betrag der Nutation (vgl. pag. 201) von den beiden beobachteten Oertern subtrahiren. Es heisst dies, den Ort des Himmelskörpers auf das mittlere Aequinoctium beziehen, welches der Richtung der Weltaxe gegen den Mittelpunkt der Nutationsellipse entspricht*); die von dem Einflusse der Nutation befreiten Oerter der Himmelskörper nennt man, in Uebereinstimmung hiermit, mittlere Oerter. Im Gegensatze hierzu heisst die wirkliche Richtung der Weltaxe gegen einen Punkt auf der Nutationsellipse: die wahre Richtung der Weltaxe, der entsprechende Frühlingspunkt: der wahre Frühlingspunkt und auf diese werden die wahren Oerter der Gestirne bezogen.

Die mittleren Oerter der Gestirne ändern sich ferner in Folge der Präcession; es ist daher stets nöthig, die Zeit anzugeben, für welche ein mittlerer Ort gültig ist. Will man die Bewegung eines Himmelskörpers untersuchen, so müssen die mittleren Oerter desselben durch Anbringung der Präcession auf denselben Zeitpunkt bezogen werden; die Unterschiede, welche dann noch nachbleiben, müssen, sofern sie nicht von Beobachtungsfehlern herrühren, einer Bewegung (wirklichen oder scheinbaren) zugeschrieben werden. Die mittleren Oerter der Himmelskörper bilden also die Grundlage der astronomischen Untersuchungen.

Es ist jedoch nicht möglich, die wahre Lage der Himmelskörper direct zu beobachten; auch wenn der Einfluss der Refraction und einer etwaigen Parallaxe durch Rechnung ihre Berücksichtigung gefunden haben, bleibt ein Umstand nach, welcher eine Verschiedenheit

---

*) In Folge der Nutation liegen die Punkte, wo die Weltaxe die scheinbare Himmelssphäre trifft, auf kleinen Ellipsen, deren Mittelpunkte von der mittlern Lage der Weltaxe bestimmt werden. Die Lage dieser Mittelpunkte ändert sich in Folge der Präcession.

zwischen den beobachteten und den wahren Richtungen bewirkt. Von der in sehr schneller Bewegung befindlichen Erde werden nämlich die Himmelskörper nicht genau in derselben Richtung wahrgenommen, welche ihrer wahren Lage entspricht; man bemerkt sie vielmehr in einer Richtung, welche von der wahren um einen Winkel abweicht, dessen Grösse von dem Verhältnisse der Geschwindigkeit der Erdbewegung zu der des Lichtes abhängt. Diesen Winkel nennt man die Aberration. Die Geschwindigkeit des Lichtes beträgt ohngefähr 41820 geographische Meilen in 1 Sekunde; in derselben Zeit bewegt sich die Erde 4,124 Meilen in ihrer Bahn fort. Die grösste mögliche Aberration ist folglich in Sekunden:

$$\frac{4{,}124}{41820} \times 206265'' = 20''{,}33\ ,$$

welche Zahl die Constante der Aberration genannt wird. — Die Bewegung der Erde ist nun stets sehr nahe senkrecht gegen die Sonnenstrahlen, welche wir empfinden, gerichtet; aus dieser Ursache ist die beobachtete Sonnenlänge stets um den Betrag der grössten Aberration, also um 20''33 geringer als die wahre Sonnenlänge. Ein Gestirn aber, das in der Richtung der Erdbewegung gesehen wird, dessen Elongation von der Sonne also 90° beträgt, nimmt man ohne den Einfluss der Aberration wahr, also in seiner wahren Lage.

Durch die folgende Betrachtung dürfte man eine deutliche Vorstellung von der Entstehung der Aberration gewinnen. Wir stellen uns ein Fernrohr vor, das vollkommen unbeweglich in Bezug auf den Lichtstrahl ist, und gegen einen Stern gerichtet, welcher genau auf das Fadenkreuz eingestellt ist. Denkt man sich nun das Fernrohr plötzlich in einer gegen den Lichtstrahl senkrechten Richtung in Bewegung versetzt, so müsste man, da das Licht nicht momentan fortgepflanzt wird, schliessen, dass der Lichtstrahl nicht mehr das Fadenkreuz treffen kann. In der Zeit nämlich, welche das Licht braucht, um vom Objective nach dem Oculare zu gelangen, hat das Fernrohr sich ein wenig zur Seite bewegt, so dass, wenn der Stern ursprünglich auf dem Fadenkreuze sichtbar war, derselbe nun, wo das Fernrohr in Bewegung ist, etwas seitwärts gesehen wird. In einem Fernrohre von 2 Meter Länge beträgt die Verschiebung, dem Winkel 20''33 entsprechend, 2 Zehntel Millimeter.

Die Geschwindigkeit des Lichtes wurde zuerst von Olaus Römer gemessen. Seine Absicht ging ursprünglich nur dahin, die Bewegungen der Jupitersmonde zu untersuchen, weshalb er die Zeiten, zu denen die Monde in den vom Jupiter geworfenen Schattenkegel eintraten, mit den im Voraus berechneten Zeiten der Verfinsterungen verglich. Auf Grund der somit gefundenen Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung beabsichtigte er die Elemente, welche letzterer zu Grunde gelegen hatten, zu verbessern. Er fand dabei jedoch auch ein anderes Resultat, welches sich später als von der grössten Bedeutung erwies. Es zeigte sich nämlich, dass die Finsternisse früher, als berechnet war, stattfanden, wenn Jupiter in Opposition, also der Erde am nächsten war. Je grösser die Entfernung von der Erde wurde, desto später traten auch die Finsternisse ein, relativ zur Vorausberechnung. Die weitere Verfolgung der Erscheinung ergab etwa 17 Minuten als grössten Unterschied von der Vorausberechnung, und diese Abweichungen konnten keineswegs durch Aenderungen der Umlaufszeiten zum Verschwinden gebracht werden. Römer fand selbst die richtige Erklärung dieser Erscheinung und zwar darin, dass das Licht eine gewisse, merkliche Zeit braucht, um die Entfernungen zwischen den Himmelskörpern zu durchlaufen. Zur Zeit der Opposition ist Jupiter um einen ganzen Erdbahn-Durchmesser der Erde näher als zur Zeit der Conjunction; der Weg des Lichtes ist also im zweiten Falle um diesen Durchmesser länger, als in dem ersten. Man schliesst hieraus, dass das Licht 17 Minuten braucht, um den Durchmesser der Erdbahn, also $8\frac{1}{2}$ Minuten um den Halbmesser zu durchlaufen. In dieser Zeit bewegt sich die Sonne etwa 21″ in der Bahn fort; die Richtung, in der wir die Sonne erblicken, oder ihre Länge, ist also um 21″ oder genauer 20″.33 geringer als die wahre.*)

Das Aberrationsphänomen wurde durch directe Sternbeobachtungen von dem grossen Beobachter des vorigen Jahrhunderts, Bradley, bei der Gelegenheit entdeckt, wo er die Entfernung des Sterns γ Draconis zu bestimmen versuchte. Während einer längern Zeit beobachtete er nämlich die Meridianzenithdistanzen dieses Sterns und fand dabei, nachdem er die Resultate der Beobachtungen durch Anbringung der Präcession auf denselben Zeitpunkt reducirt hatte, bedeutende Abweichungen zwischen den verschiedenen Werthen. Die genauere Verfolgung dieser Erscheinung führte nun zur Erkennung ihrer jährlichen Periodicität, und hierauf zur physischen Erklärung. Die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung wurde indessen, auch nach gehöriger Berücksichtigung der Aberration, nicht so gross, wie man auf Grund der sehr genauen Beobachtungen hätte erwarten können; die Ursache hiervon wurde gleichfalls von Bradley entdeckt. Es zeigte sich nämlich in den Abweichungen der Einfluss einer Ungleichheit von nahezu 18jähriger Periode, deren Ursache keine andere sein konnte, als die schon von Newton vorhergesagte Nutation. Diese wurde also durch die Beobachtungen Bradley's factisch erwiesen.

---

*) Ueber die verschiedenen Werthe für die Aberrationsconstante vgl. pag 323.

Die durch die Aberration veranlasste Abweichung des Ortes eines Gestirns von seinem wahren Orte hängt von dem Winkel ab, den die Richtung des Gestirns mit der augenblicklichen Richtung der Erdbewegung bildet. Da nun diese beiden Richtungen stets angegeben werden können, so ist es eine rein geometrische Aufgabe, den Einfluss der Aberration auf den Ort des Gestirns durch eine Formel darzustellen, und folglich auch zu berechnen. Nimmt man, was hier meistens erlaubt ist, die Erdbahn als einen Kreis an, so ist die Richtung der Erdbewegung stets senkrecht gegen die Richtung zur Sonne; indem man ferner die Geschwindigkeit der Erdbewegung in zwei Componenten zerlegt, von denen die eine senkrecht zur Richtung des Sterns ist, so findet sich für diese der Ausdruck

$$v \operatorname{Cos} (\lambda - \odot) ,$$

wo v die totale Geschwindigkeit, λ die Länge des Sterns und $\odot$ die der Sonne bedeutet. Den Einfluss der Aberration auf die Länge des Sterns ergiebt die Formel

$$\lambda' - \lambda = - 20''.33 \frac{\operatorname{Cos} (\lambda - \odot)}{\operatorname{Cos} \beta}$$

wo β die Breite des Sterns bezeichnet; von ihrer Richtigkeit kann man sich leicht überzeugen, wenn man durch die Pole der Ekliptik zwei grösste Kreise legt, von denen der eine durch den wahren Ort des Sterns geht, der zweite aber durch den mit der Aberration behafteten.

Die von der Aberration afficirten Oerter der Himmelskörper nennt man scheinbare oder apparente Oerter; λ' bezeichnet also die scheinbare Länge des Sterns.

Für den Einfluss der Aberration auf die Breite hat man die Formel

$$\beta' - \beta = + 20''.33 \operatorname{Sin} (\lambda - \odot) \operatorname{Sin} \beta .$$

Für ein Gestirn, dessen Breite Null ist, verschwindet also die Aberration der Breite. Die Richtigkeit dieses Ergebnisses folgt unmittelbar daraus, dass die Bewegung der Erde in der Ekliptik vor sich geht, dass mithin die auf der Ekliptik senkrechte Componente der Geschwindigkeit Null sein muss.

In der Regel ist es erforderlich, beobachtete Rectascensionen und Declinationen von dem Einflusse der Aberration, Nutation und Präcession zu befreien; man wird daher Ausdrücke nöthig haben, durch welche jene Einflüsse auf die Rectascensionen und Declinationen direct berechnet werden können. Solche sind sehr leicht zu erhalten auf Grund gewisser Beziehungen, die zwischen kleinen Aenderungen, den sog. Differentialen, der Seiten und Winkel in einem sphärischen Dreiecke stattfinden. Bei der Ableitung dieser Relationen werden wir uns nicht aufhalten, sondern nur die Formeln anführen, die zur Reduction der beobachteten Rectascensionen und Declinationen auf das mittlere Aequinoctium dienen.

a) Präcession:

$$\alpha' - \alpha = (46''.028 + 20''.064 \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Tang} \delta) (t - t_0)$$
$$\delta' - \delta = 20''.064 \operatorname{Cos} \alpha (t - t_0)$$

b) **Nutation:** *)

$$\alpha' - \alpha = -15''\!.81 \,\mathrm{Sin}\, \Omega - [6''\!.865 \,\mathrm{Sin}\, \Omega \,\mathrm{Sin}\, \alpha + 9''\!.223 \,\mathrm{Cos}\, \Omega \,\mathrm{Cos}\, \alpha] \,\mathrm{Tang}\, \delta$$
$$- 1.16 \,\mathrm{Sin}\, 2\odot - [0.505 \,\mathrm{Sin}\, 2\odot \,\mathrm{Sin}\, \alpha + 0.551 \,\mathrm{Cos}\, 2\odot \,\mathrm{Cos}\, \alpha] \,\mathrm{Tang}\, \delta$$
$$\delta' - \delta = - 6.86 \,\mathrm{Sin}\, \Omega \,\mathrm{Cos}\, \alpha + 9.22 \,\mathrm{Cos}\, \odot \,\mathrm{Sin}\, \alpha$$
$$- 0.51 \,\mathrm{Sin}\, 2\odot \,\mathrm{Cos}\, \alpha + 0.55 \,\mathrm{Cos}\, 2\odot \,\mathrm{Sin}\, \alpha$$

c) **Aberration:** **)

$$\alpha' - \alpha = -20''\!.445 \,[\mathrm{Cos}\, \odot \,\mathrm{Cos}\, \alpha \,\mathrm{Cos}\, \Theta + \mathrm{Sin}\, \odot \,\mathrm{Sin}\, \alpha] \,\mathrm{Sec}\, \delta$$
$$\delta' - \delta = +20.445 \,[\mathrm{Sin}\, \alpha \,\mathrm{Sin}\, \delta \,\mathrm{Cos}\, \Theta - \mathrm{Cos}\, \delta \,\mathrm{Sin}\, \Theta] \,\mathrm{Cos}\, \odot$$
$$- 20.445 \,\mathrm{Sin}\, \odot \,\mathrm{Cos}\, \alpha \,\mathrm{Sin}\, \delta$$

Die Summe der drei Ausdrücke für $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ giebt den vollständigen Unterschied zwischen dem scheinbaren, unmittelbar aus den Beobachtungen gefolgerten Ort eines Sterns für die Zeit t und seinem mittleren Ort für die Zeit t_0. Da nun die Werthe dieser Summen sehr häufig berechnet werden müssen, so hat man sie durch Formeln dargestellt, welche für die numerische Berechnung mehr Bequemlichkeit gewähren als die obigen. Durch einige ziemlich einfache Transformationen erlangt man die folgenden Ausdrücke:

$$\alpha' - \alpha = aA + bB + cC + dD$$
$$\delta' - \delta = a'A + b'B + c'C + d'D$$

wo jetzt $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ statt jener Summen stehen und also den gesammten Einfluss der Präcession, Nutation und Aberration enthalten sollen. Die Grössen A, B, C, D sind von dem Ort des Sterns völlig unabhängig, und enthalten demnach nur die Zeit, Ω, $\odot$ und andere von dem Ort des Mondes abhängige Grössen; man findet ihre numerischen Werthe für jeden Tag des Jahres in den astronomischen Ephemeriden angegeben, wobei t_0 für den Anfang des Jahres angenommen wird. Die Grössen a, b, c, d und a', b', c', d' hängen nur von der Rectascension und Declination des betreffenden Sterns, sowie von der Schiefe der Ekliptik ab. Für jeden Stern haben sie besondere Werthe und müssen daher für einen jeden besonders berechnet werden. Sie ändern sich aber sehr langsam, so dass man, wenn sie für zwei Epochen berechnet sind, ihre Werthe für die Zeit der Beobachtung sehr leicht erhalten kann. In einigen Sternkatalogen sind diese Grössen angegeben, aber für die Mehrzahl der Sterne, welche in den jetzt gebräuchlichen Meridiankreisen beobachtet werden können, fehlen sie noch.

Wir müssen noch mit einigen Worten angeben, wie die Constanten der Präcession, Nutation und Aberration bestimmt werden und fangen dabei mit der letzteren an. — Wäre die Sonnenparallaxe einerseits und

---

*) Es werden im Texte nur die grössten Glieder der Nutation angeführt; das von $2\odot$ abhängige Glied wird **Solarnutation** genannt.

**) Wir geben diese Formeln mit der üblichen Constante $20''\!.445$.

anderseits die Geschwindigkeit des Lichtes mit hinreichender Genauigkeit bekannt, so wäre es leicht, die Aberrationsconstante durch Rechnung zu finden. Man würde zuerst berechnen, wie viele Meilen sich die Erde in einer Sekunde fortbewegt und diese Zahl mit der Anzahl Meilen dividiren, welche das Licht in einer Sekunde zurücklegt. Auf diesem Wege wird man aber gegenwärtig keine sehr genauen Resultate erwarten können. — Den directesten Weg zur Bestimmung des Verhältnisses zwischen der Geschwindigkeit der Erdbewegung und des Lichtes dürften die Beobachtungen der Jupiterstrabanten darbieten, denn durch ihre Verfinsterungen erhält man unmittelbar die Geschwindigkeit des Lichtes in demselben Maasse ausgedrückt, wie die der Erde, und braucht die Sonnenparallaxe also gar nicht zu kennen. Auf diesem Wege hat Delambre den Werth 20″.25 für die in Frage stehende Constante gefunden. Am sichersten wird man ihn wohl direct aus Sternbeobachtungen finden. Zu solchem Zwecke muss ein Stern zu verschiedenen Jahreszeiten beobachtet werden; der Einfluss der Aberration durchläuft dabei alle Phasen, wodurch er möglichst verschieden wird und sich also desto mehr von den Einflüssen der Präcession und Nutation absondert. Von diesen letzteren ändert sich die eine proportional der Zeit und die andere nur wenig im Verlauf eines Jahres; man wird sie auch durch Rechnung berücksichtigen können, da die betreffenden Constanten als hinreichend genau vorausgesetzt werden dürfen, um die während eines Jahres beobachteten wahren Oerter auf das mittlere Aequinox am Jahresanfang reduciren zu können. Hiernach hat es gar keine Schwierigkeit, die Constante der Aberration zu ermitteln, wobei man die Methode der kleinsten Quadrate anwenden kann. In solcher Weise ist diese Constante von W. Struve zu 20″.4451 gefunden worden.

Zieht man von den scheinbaren Oertern den Einfluss der Aberration ab, so erhält man die wahren Oerter, aus denen man, wenn sie über einen längeren Zeitraum vertheilt sind, die Constanten der Präcession und Nutation bestimmen kann. Hierbei muss bemerkt werden, dass alle numerischen Coefficienten in den Nutationsformeln von einer einzigen Constante abhängen; es ist nämlich, wenn θ die Schiefe der Ekliptik bedeutet,

$$15''.815 = \frac{\operatorname{Cos} 2\theta}{\operatorname{Sin} \theta} N,$$

$$6''.865 = \frac{\operatorname{Cos} 2\theta}{\operatorname{Cos} \theta} N,$$

wo N die Constante der Nutation, welche hier zu 9″.223 angenommen ist, bedeutet.*)

Jeder beobachtete und von der Aberration befreite Ort giebt also

*) Die Coefficienten der Solarnutation sind auch von N abhängig, so dass ihre Bestimmung mit der von N zusammenfällt.

zu einer Bedingungsgleichung Anlass, welche die Grösse N und eine zweite Unbekannte, die mit der Zeit multiplicirt erscheint, enthält. Da ferner die Beobachtungen sich über mehrere Jahre erstrecken, so werden die Coefficienten der Unbekannten N in den Bedingungsgleichungen genügend verschiedene Werthe haben, um dieselbe von dem unbekannten Coefficienten der Zeit abzusondern. Durch die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf sämmtliche Bedingungsgleichungen wird man also N oder die Constante der Nutation, sowie das der Zeit proportionale Glied bestimmen können.

Die numerischen Coefficienten in den Präcessionsformeln hängen von der sog. Lunisolarpräcession, welche wir in dem Vorhergehenden (pag. 201) mit P bezeichneten, folgendermassen ab. Es ist

$$m = 46''.028 = \text{Cos}\,\theta\,.\,P - 0''.179$$
$$n = 20''.064 = \text{Sin}\,\theta\,.\,P$$

wo

$$P = 50''.376$$

und die Grösse 0''.179 entweder aus der Theorie der Planetenstörungen entnommen wird, oder auch als eine neue Unbekannte behandelt werden kann. Auf alle Fälle ergiebt sich eine Verbindung von m und n aus den Beobachtungen der Rectascensionen und n allein aus den Declinationen. Hieraus lässt sich endlich die Constante der Präcession oder P berechnen.

Bestimmt man P aus den Beobachtungen verschiedener Sterne, so wird man im Allgemeinen Werthe finden, die mehr von einander abweichen, als man nach ihren wahrscheinlichen Fehlern vermuthen sollte, wogegen die Werthe von N in genügender Uebereinstimmung mit einander gefunden werden. Diese Erscheinung beweist, dass die Sterne keineswegs unbeweglich am Himmelsgewölbe stehen, sondern dass jeder eine ihm eigenthümliche Bewegung hat. Man hat zwar gefunden, dass ein Theil dieser Ortsveränderungen nur eine Abspiegelung der Bewegung des ganzen Sonnensystems ist; ein anderer Theil bleibt jedoch den Sternen eigen.*) Diese den Sternen eigenthümliche Bewegung erscheint uns bei den verschiedenen Sternen so verschieden und bis jetzt so gesetzlos, dass an eine andere Ursache als wirkliche Bewegung gar nicht zu denken ist.

Die Bewegungen der Sterne erschweren im höchsten Grade die Bestimmung der Präcessionsconstante, weil durch sie die Rectascensionen und Declinationen ebenfalls der Zeit proportional geändert werden. Ihren Einfluss kann man gegenwärtig nicht vollständig beseitigen, sondern nur, durch Beobachtung und Vergleichung einer möglichst grossen Zahl Sterne, herabdrücken. Dabei muss auf möglichst gleichförmige Vertheilung der

*) Man nennt gewöhnlich die Resultante der scheinbaren und wirklichen Bewegung (motus parallacticus und motus peculiaris) die Eigenbewegung des Sterns, eine Benennung, die wir weder für nothwendig noch passend halten.

verglichenen Sterne am Himmel geachtet werden, denn dadurch werden die parallactischen Bewegungen der Sterne fast völlig ohne Einfluss auf die Bestimmung der Präcessionsconstante bleiben.

Die Resultate der Sternbeobachtungen, also die für eine gewisse Epoche geltenden mittleren Oerter fasst man in den sog. Sterncatalogen zusammen. Diese enthalten demnach das Material für künftige astronomische Forschungen und zwar ist ihre Anwendung eine zweifache: erstens findet man in den Catalogen die Oerter der Sterne, denen man kleine Planeten, Cometen und Nebelflecke vermittelst Mikrometermessungen anschliesst, zweitens ist aus ihnen die Geschichte des Sternenhimmels zu entnehmen.

Durch die Bradley'schen Beobachtungen aus der Mitte des vorigen Jahrhunderts ist ein vorzüglicher Sterncatalog für die genannte Epoche abgeleitet worden; in ihm findet man die Lage von mehr als 3000 Sternen des zu Greenwich sichtbaren Himmels. Etwas vorher beobachtete Lacaille am Cap die südlichen Gestirne; leider verhinderte sein kurzer Aufenthalt daselbst, den Beobachtungen im Allgemeinen eine grössere Genauigkeit zu geben. Im Anfange dieses Jahrhunderts stellte Piazzi zu Palermo Sternbeobachtungen an und lieferte damit ein werthvolles Verzeichniss von etwa 8000 Positionen. Von neueren Catalogarbeiten dürften die auf den Sternwarten zu Greenwich und Pulkowa in erster Linie genannt werden müssen. Von der letzteren Sternwarte ist allerdings bis jetzt nur ein relativ kleiner Theil der Oeffentlichkeit übergeben, allein die Fortsetzung wird voraussichtlich demnächst erscheinen, und schon aus dem jetzt Bekannten lässt sich die hohe Genauigkeit der dortigen Beobachtungen beurtheilen, aber auch der Schluss ziehen, dass diese noch gesteigert werden kann, wenn gewisse Einflüsse des dortigen ungünstigen Klimas in vollkommenerer Weise als bisher beseitigt werden können. Alsdann müssen die schon älteren Cataloge von W. Struve und Argelander erwähnt werden; der erstere beruht auf Beobachtungen, die zu Dorpat angestellt wurden, und enthält gegen 3000 Positionen, der zweite auf Beobachtungen zu Åbo, enthält aber nur 560 Sternörter. Die Positionen dieser beiden Cataloge waren zu ihrer Zeit (um 1830) von allen bekannten die genauesten. Endlich nennen wir die Cataloge der Sternwarten zu Armagh (Irland), Oxford und Washington, die Cataloge der besonders nördlichen Sterne von

Groombridge und Schwerd, sowie die der südlichen von den Sternwarten zu Madras und Melbourne und endlich den aus den von Johnson zu St. Helena angestellten Beobachtungen geschlossenen Catalog von 600 Sternen.

Ausserdem giebt es Cataloge, die eine sehr grosse Anzahl Sterne enthalten, bei denen aber eine etwas geringere Genauigkeit erstrebt wurde. Sie beruhen meistens auf sog. Zonenbeobachtungen, bei welchen sehr viele Sterne rasch nach einander beobachtet wurden, indem der Meridiankreis nur wenig im Sinne der Declination sich bewegen konnte. Zu diesen Arbeiten gehören vor allen die Beobachtungen von Lalande, Bessel und Argelander, ferner die Zonen von Lamont; die Cataloge von Rümker (Hamburg) und Schjellerup (Kopenhagen) stehen, ihrer Genauigkeit nach, ohngefähr in der Mitte zwischen den beiden Cataloggattungen. Hierbei müssen wir noch eine Arbeit, eigentlich etwas anderer Art, erwähnen, nämlich das von Argelander publicirte Bonner Sternverzeichniss, die sog. »Bonner Durchmusterung«. Dieses erreicht zwar die Genauigkeit der vorgenannten Meridianbeobachtungen nicht, indem seine Angaben — zufolge der dem Zweck entsprechend einfacheren Beobachtungsmethode — nur auf circa $0^s.7$ und $0'.1$ genau sind, übertrifft aber alle anderen durch die ausserordentliche Anzahl der beobachteten Sterne, welche zwischen dem Nordpol und — 2° Declination 324000 übersteigt und die bis zur 9. Grösse herab wohl vollständig ist, überdies aber auch eine beträchtliche Zahl von Sternen 10. Grösse enthält.

IV. Kapitel.

Neuere astronomische Forschungen.

§ 15. Die Bestimmung der Entfernungen der Himmelskörper.

Die Möglichkeit, eine Einsicht in die Natur der wirklichen Bewegungen zu gewinnen, beruht auf der Kenntniss der Entfernungen der Himmelskörper; denn ohne sie würde man nicht die Abspiegelung der Erdbewegung oder die sog. parallactische Bewegung von der wirklichen absondern können. Es ist jedoch bis jetzt nur in sehr wenigen Fällen möglich gewesen, durch directe Messungen solche Entfernungen zu bestimmen; die Grundlinie, von deren Endpunkten dergleichen Messungen geschehen können, der Erdbahndurchmesser nämlich, ist fast immer so verschwindend klein im Vergleich zu den Abständen, dass auch die sorgfältigsten und genauesten Beobachtungen nicht zur Kenntniss der Parallaxe geführt haben.

Von den Körpern, welche zum Sonnensysteme gehören, sind es die Planeten Mars und Venus, sowie der Mond, für die man durch directe Messungen die Parallaxen gefunden hat; in letzterer Zeit ist dies auch für einen der kleinen Planeten gelungen und dürfte, da die kleinsten Entfernungen dieser Planeten von der Erde im Allgemeinen nicht sehr verschieden sind, auch für die Mehrzahl derselben gelingen. — Wie die Mondparallaxe durch Messungen der Mondhöhen von verschiedenen Punkten der Erdoberfläche aus bestimmt wurde, haben wir schon im Vorhergehenden (pag. 69) angeführt; in derselben

Weise hat man auch die Marsparallaxe bestimmt, und zwar stellte man hier die Beobachtungen zu der Zeit an, wo die Entfernung des Mars von der Erde am kleinsten, seine Parallaxe mithin am grössten war. Höchstwahrscheinlich hätte man auch die Parallaxe der Venus durch passende Beobachtungen und in nahezu derselben Weise finden können; obwohl aber von solchen Beobachtungen zuweilen die Rede gewesen ist, sind dieselben doch bisher unterlassen worden. Die Ursache hiervon liegt wohl hauptsächlich darin, dass man bei gewissen Gelegenheiten den Unterschied zwischen den Parallaxen der Venus und der Sonne mit mehr als gewöhnlicher Genauigkeit bestimmen kann. Diese Gelegenheiten, die jedoch sehr selten sind, finden statt, wenn der Planet, von der Erde aus gesehen, vor der Sonnenscheibe vorbeigeht. Die Erscheinung ist identisch mit einer gewöhnlichen Bedeckung und muss daher, falls die Parallaxe des näheren Gestirns merklich ist, von verschiedenen Punkten der Erdoberfläche aus gesehen, in verschiedener Weise stattfinden. Die Zeiten der Ränderberührungen müssen also auch durch die Parallaxe afficirt werden, welche umgekehrt aus der Verschiedenheit der Berührungszeiten ermittelt werden kann. Durch die Beobachtungen eines solchen Durchgangs erhält man nun nicht eigentlich die Parallaxe der Venus, sondern die Differenz dieser und der Sonnenparallaxe; da aber das Verhältniss dieser Parallaxen in Folge des dritten Kepler'schen Gesetzes bekannt ist, so hat es keine Schwierigkeit, die absoluten Parallaxen daraus zu finden.

Aus den Venusvorübergängen in den Jahren 1761 und 1769 fand Encke den bereits angeführten Werth

$$8''.57116,$$

eine neuere, von Herrn Powalky ausgeführte Berechnung derselben Beobachtungen, bei der genauere Längen einiger Beobachtungsorte angewandt werden konnten, ergab jedoch

$$8''.832\ .^{*)}$$

Mit diesen Werthen wollen wir einige andere Bestimmungen vergleichen.

Die aus den Marsbeobachtungen abgeleitete Marsparallaxe führt sogleich, vermittelst des dritten Kepler'schen Gesetzes, zur Kenntniss der Sonnenparallaxe. Die im Jahre 1862 nach Winnecke's Plan ausge-

*) Das Resultat des letzten Vorüberganges der Venus ist noch nicht abgeleitet worden; einige provisorische Rechnungen scheinen indessen den Werth 8''.8 bis 8''.9 zu bestätigen.

führten Messungen der Meridianhöhen führten nach Newcomb's Rechnung zu dem Werthe

$$8''\!.855.$$

Aus der parallactischen Ungleichheit der Mondbewegung findet Newcomb

$$8''\!.838.\ ^{*)}$$

Aus der Mondungleichheit der Erdbewegung folgte

$$8''\!.809.$$

Der von Newcomb angegebene Mittelwerth

$$8''\!.848$$

dürfte der Wahrheit also schon äusserst nahe kommen.

Die Kenntniss der Geschwindigkeit des Lichtes, ausgedrückt in Meilen oder in irgend einem Maasse, durch welches auch der Erdhalbmesser angegeben ist, führt ebenfalls zur Kenntniss der Sonnenparallaxe, vorausgesetzt, dass die Constante der Aberration bereits bekannt ist. Dieser Constante entspricht nämlich eine gewisse Anzahl Sekunden, die das Licht braucht, um den Abstand zwischen Sonne und Erde zu durchlaufen. Weiss man nun, wie viele Meilen oder wie viele Erdhalbmesser das Licht in einer Sekunde zurücklegt, so kann man sogleich die Entfernung der Sonne in Erdhalbmessern ausdrücken, mithin die Parallaxe der Sonne berechnen. Die Versuche von Foucault und später von Cornu haben nur wenig von $8''\!.9$ verschiedene Werthe für die Sonnenparallaxe ergeben.

Sobald die Umlaufszeit eines zum Sonnensystem gehörenden Körpers bekannt ist, lässt sich sein mittlerer Abstand von der Sonne oder von der Erde ohne jegliche Schwierigkeit in Einheiten der halben grossen Axe der Erdbahn, mithin auch, wenn die Sonnenentfernung bekannt ist, in bekanntem Maasse ausdrücken. Es giebt aber häufig Fälle, in denen ein neu entdeckter Himmelskörper — Planet oder Comet — nur eine kurze Zeit zu sehen ist, und man während der Sichtbarkeit demselben nur in einem kleinen Theile seiner Bahn folgen kann. Um demohngeachtet so schnell als möglich zu einiger Kenntniss seiner Bahn gelangen zu können, ist vor Allem erforderlich, auf Grund der vorhandenen Beobachtungen die Abstände von der Erde oder von der Sonne zu ermitteln. Diese Aufgabe ist aber keine leichte und nur durch Annäherungen lösbar. Zwar haben die grössten Geometer sich an derselben versucht, allein eine directe Methode ist nicht gefunden worden. Das Problem führt entweder auf

*) Hansen hatte: $8''\!.916$ (vgl. pag. 245).

Gleichungen so hohen Grades, dass sie nicht direct lösbar sind, oder auch auf sog. transcendente Gleichungen, d. h. solche, wo die Unbekannte in unendlich vielen Gliedern vorkommt, und auch diese können nur durch Annäherungen oder Versuche gelöst werden. Die beste Lösung der Aufgabe ist von Gauss in dem Werke Theoria motus corporum coelestium*) gegeben; für die Cometen, wo die Aufgabe eine wesentlich leichtere ist, hat Olbers eine sehr zweckmässige Methode ersonnen **). Die Epoche machenden Arbeiten von Gauss wurden durch die Entdeckung der Ceres (1. Januar 1801) angeregt, welche sonst wohl nicht so leicht wiedergefunden worden wäre.

Die Lösung der in Frage stehenden Aufgabe gründet sich auf die Kepler'schen Gesetze — ohne jegliche Voraussetzung wäre sie unbestimmt (vgl. pag. 6). Man nimmt also an, dass der neu entdeckte Körper sich in einem Kegelschnitte um die Sonne bewegt, sowie dass die Sectoren der Zeit proportional wachsen. Aus der Bedingung, dass der Körper sich in einer Ebene bewegt, welche durch den Mittelpunkt der Sonne geht, lassen sich durch rein geometrische Betrachtungen gewisse Relationen herleiten, entweder zwischen einem Abstand des neuen Körpers von der Erde und den Flächen der Dreiecke, welche zwischen den verschiedenen, zu den Beobachtungszeiten stattfindenden Radienvectoren liegen, oder auch zwischen mehreren Abständen und den genannten Dreiecksflächen. Die Ableitung dieser Relationen, bei denen vorausgesetzt wird, dass wenigstens drei vollständige Beobachtungen vorliegen, kann hier nicht gegeben werden; wir müssen uns darauf beschränken, nur eine derselben anzuführen.***) Wir bezeichnen dabei mit L, M, N und a Grössen, die nur von den geocentrischen Coordinaten des Planeten oder Cometen und von den entsprechenden geocentrischen Sonnenörtern abhängen, und mit f, f' und f'' die Dreiecksflächen zwischen r' und r'',

*) Seit 1865 existirt eine deutsche Ausgabe dieses Werkes von Haase (Hannover). — Für Diejenigen, welche sich für die Bahnbestimmung der Himmelskörper interessiren, verweisen wir noch auf folgende Schriften:

Oppolzer, Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Planeten und Cometen. Leipzig, 1870.

Klinkerfues, Theoretische Astronomie. Braunschweig, 1871.

Watson, Theoretical Astronomy. Philadelphia, 1868.

**) Leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Cometen zu berechnen. Ausgabe von Encke. Weimar, 1847.

***) Diese Ableitung erlangt man übrigens leicht genug mit Hülfe einiger Sätze aus der analytischen Geometrie des Raumes.

zwischen r und r'' und zwischen r und r', indem r, r' und r'' die Radienvectoren des neuen Gestirns zur Zeit der ersten, zweiten und dritten Beobachtung bedeuten. Endlich sei der Abstand des Gestirns von der Erde zur Zeit der mittleren Beobachtung ρ', alsdann ist

$$\alpha \rho' = L + \frac{M + N \frac{f}{f''}}{1 + \frac{f}{f''}} \cdot \frac{f + f''}{f'} .$$

Es wäre nun leicht, ρ' zu berechnen, wenn die Verhältnisse $\frac{f}{f'}$ und $\frac{f}{f''}$ bekannt wären; aber diese zu finden ist gerade mit grossen Schwierigkeiten verknüpft. Eine Möglichkeit, die Flächen selbst zu berechnen, giebt es nicht, da weder die Seiten noch die Winkel derselben bekannt sind; das einzige, was man von diesen Dreiecken weiss, ist, dass sie sich bei kleinen Zwischenzeiten nicht viel von den entsprechenden Sectoren unterscheiden. Das Verhältniss zweier Dreiecksflächen unterscheidet sich daher auch nur wenig von dem Verhältnisse der entsprechenden Sectoren, welches aber, dem zweiten Kepler'schen Gesetze zufolge, dem Verhältnisse der respectiven Zwischenzeiten gleich ist. Nennt man also die Zeit zwischen der zweiten und dritten Beobachtung ϑ, die zwischen der ersten und dritten ϑ' und endlich die zwischen der ersten und zweiten ϑ'', so dass

$$\vartheta' = \vartheta + \vartheta'',$$

so hat man näherungsweise

$$\frac{f}{f'} = \frac{\vartheta}{\vartheta''}; \quad \frac{f}{f''} = \frac{\vartheta}{\vartheta''}.$$

In der obigen Gleichung zur Bestimmung von ρ' ist nun α eine sehr kleine Grösse; eine etwaige Vernachlässigung in der rechten Seite wird daher erheblich vergrössert in den Werth von ρ' übergehen. Aus diesem Grunde muss man sehr vorsichtig bei der Benutzung der so eben erwähnten Näherungswerthe für $\frac{f}{f'}$ und $\frac{f}{f''}$ sein. Diese Werthe kommen nur in dem zweiten aus zwei Factoren bestehenden Gliede der Gleichung vor; der erste dieser Factoren wird in der Regel hinreichend genau gefunden, indem man die Verhältnisse der Dreiecke den Verhältnissen der entsprechenden Zwischenzeiten gleich setzt; der zweite Factor würde aber den constanten Werth 1 erhalten, welcher Werth, wenn die Zwischenzeiten nicht sehr klein sind, so viel von dem wahren abweichen kann, dass die Bestimmung von ρ' dadurch gänzlich fehlerhaft wird. Ein mehr genäherter Werth für $\frac{f + f''}{f'}$ ist folgender, wo k die Gaussische Constante bedeutet (vgl. pag 214):

$$1 + \frac{k^2 \vartheta \vartheta''}{2 r'^3} \text{*)} .$$

Hiermit erhält man:

(1) $$a \rho' = L + \frac{M + N \frac{\vartheta}{\vartheta''}}{1 + \frac{\vartheta}{\vartheta''}} \left\{ 1 + \frac{k^2 \vartheta \vartheta''}{2 r'^3} \right\}^{**)},$$

eine Gleichung, die indessen zwei Unbekannte, ρ' und r', hat. Um sie auflösen zu können, bedarf man also einer zweiten, welche aber leicht zu erhalten ist; bezeichnet nämlich η' die Elongation des neuen Gestirns von der Sonne zur Zeit der dritten Beobachtung, R' die Entfernung zwischen Erde und Sonne, so ist

(2) $$r'^2 = R'^2 + \rho'^2 - 2 \rho' R \operatorname{Cos} \eta'$$

welche Gleichung in derselben Weise, wie früher die ähnlichen pag. 112 u. 231 abgeleitet wird. Aus den Gleichungen (1) und (2) müssen nun die Werthe von ρ' und r' gesucht werden, womit die Aufgabe annähernd gelöst ist. Es hat dann keine weitere Schwierigkeit, auch die Werthe von ρ und ρ'', mithin auch die von r und r'' zu finden, wonach die Verhältnisse der Dreiecksflächen genauer berechnet werden müssen, um einen zweiten Näherungswerth von ρ' zu erhalten. Wenn man, in dieser Weise fortfahrend, einen hinreichend genauen Werth von ρ' gefunden hat, d. h. einen Werth, welcher durch eine nochmalige Rechnung nicht verändert werden würde, so ist die Aufgabe vollständig gelöst.

Bei Cometen ist die Auflösung der Aufgabe etwas einfacher, weil für die parabolische Bewegung eine ziemlich einfache Gleichung zwischen

---

*) In der Mechanik werden folgende Ausdrücke abgeleitet:

$$f'' = \vartheta'' k \sqrt{p} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \frac{k^2 \vartheta''^2}{r'^3} - \ldots \right\}$$
$$f' = \vartheta' k \sqrt{p} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \frac{k^2 \vartheta'^2}{r'^3} - \ldots \right\}$$
$$f = \vartheta k \sqrt{p} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \frac{k^2 \vartheta^2}{r'^3} - \ldots \right\}$$

woraus der im Texte gegebene Werth folgt.

**) Nimmt man an, dass $r' = 2{,}5$ (diese Entfernung von der Sonne haben die kleinen Planeten beiläufig), so ist

$$\frac{k^2}{2 r'^3} = 0.00000947 ;$$

wenn $\vartheta = \vartheta'' = 100$ Tage ist, so beträgt $1 + \frac{k^2 \vartheta \vartheta''}{2 r'^3}$: 1.0947, also ziemlich beträchtlich von 1 verschieden.

der Zeit, zwei Radienvectoren und der der Zwischenzeit entsprechenden Sehne hier zur Anwendung kommen kann. Diese Gleichung ist:

$$6 k \vartheta' = (r'' + r + c)^{\frac{3}{2}} - (r'' + r - c)^{\frac{3}{2}} \text{ *)}.$$

Die Grössen r'', r und c können nun alle durch ρ oder ρ'' (die Entfernungen von der Erde bei der ersten und bei der dritten Beobachtung) ausgedrückt werden, so dass man im Ganzen vier Gleichungen zwischen diesen vier Unbekannten hat, deren Werthe man durch successive Annäherungen suchen muss. Eine fünfte Gleichung, nämlich die zwischen ρ und ρ'', welche vom ersten Grade ist, wurde schon benutzt, um aus den vier ersten die eine der Grössen ρ oder ρ'' wegzuschaffen.

Der Winkel, unter welchem die halbe grosse Axe der Erdbahn von einem Himmelskörper aus erscheint, wird die jährliche **Parallaxe** desselben genannt. Dieser Winkel, auch für die entferntesten Planeten des Sonnensystems sich auf Grade belaufend, ist nur bei sehr wenigen Sternen bemerkbar. Man hat indessen keine Mühe gescheut, die jährliche Parallaxe einiger Sterne zu ermitteln; ursprünglich wohl in der Absicht, einen directen Beweis für die copernicanische Weltansicht zu erhalten, nach welcher die Erde eine Kreisbahn um die Sonne beschreibt. Die Constatirung einer Parallaxe beweist nämlich, dass das betreffende Object von wenigstens zwei verschiedenen Punkten im Raume aus betrachtet worden ist, mithin auch in unserm Falle, dass die Erde ihre Lage im Raume ändert. Indessen alle hierauf verwandte Mühe blieb erfolglos, so dass Copernicus sich zu der Erklärung genöthigt sah: die Fixsterne befinden sich in so unermesslichen Entfernungen von dem Sonnensysteme, dass die ganze Erdbahn von ihnen aus nur wie ein einziger Punkt erscheint. Zur Zeit des Copernicus waren die astronomischen Beobachtungen jedoch noch so ungenau, dass die Entfernungen keineswegs sehr gross zu sein brauchten, um den Einfluss der Parallaxe auf die Lage der Sterne durch die Beobachtungsfehler gänzlich zu verdecken. Nehmen wir z. B. an, ein Stern befände sich in dem zehnfachen Abstande des Saturns von der Sonne von uns, so würde seine Entfernung 92 Sonnenweiten betragen; seine Parallaxe würde sich also auf 37′ belaufen, und wenn der Stern von den beiden Endpunk-

*) Die Ableitung dieser Gleichung, welche die Euler'sche heisst, ist nicht ganz kurz; sie gründet sich auf das zweite Kepler'sche Gesetz. Für Ellipsen existirt eine analoge, aber complicirtere Gleichung, welche von Lambert herrührt. Auf die Anwendung dieser Gleichung ist die Methode von Olbers zum grossen Theil gegründet.

ten eines Erdbahndurchmessers aus beobachtet würde, dessen Länge zwei Sonnenweiten beträgt, so müssten in seiner scheinbaren Lage Veränderungen wahrgenommen werden, die bis auf 74′ steigen.*) Dies ist eine Grösse, welche auch den Beobachtern vor Tyge Brahe nicht entgehen konnte. Eine hundertfache Entfernung des Saturns oder eine Parallaxe von 3.′7 konnte aber von ihnen nicht mehr gemessen werden, und der Ausspruch von Copernicus besagt deshalb einfach nur, dass die Sterne mehr als 100 Sonnenweiten von uns entfernt seien; ob aber ihre Entfernungen etwa 1000 Sonnenweiten oder mehr betrügen, konnte er nicht entscheiden. — Durch die Bemühungen Tyge Brahe's konnte über 10mal kleinere Grössen als zuvor entschieden werden; es zeigte sich nun, dass die Sterne mehr als 1000 ja vielleicht mehr als 10000 Sonnenweiten von uns entfernt sein müssten, wenn die copernicanische Lehre richtig sein sollte; da aber solche Entfernungen menschliches Vorstellungsvermögen schon fast übersteigen, so darf es nicht Wunder nehmen, wenn Tyge in der Unmerklichkeit der Parallaxen einen Beweis gegen die copernicanische Lehre sah.

Nach Anwendung des Fernrohrs bei den astronomischen Beobachtungen (durch Picard und Auzout 1670) that die Beobachtungskunst, namentlich durch die Bemühungen von Flamsteed und Römer, einen erheblichen Schritt vorwärts; die Sternparallaxen blieben aber trotzdem fortdauernd unmerklich. Ein weiteres Jahrhundert und in ihm vor allem Bradley, führte endlich die Beobachtungskunst so weit, dass nun die einzelne Sekunde keine illusorische Grösse mehr war; jetzt hätten sich also die Parallaxen zeigen müssen, wenn nicht die Sterne in mehr als 206265 Sonnenweiten verlegt werden sollten, welcher Entfernung eine Parallaxe von 1″ entspricht, und die das Licht in etwas über 3, ein Eisenbahnzug aber in etwa 50 Millionen Jahren durchläuft.

Doch erst im dritten Decennium dieses Jahrhunderts gelang es Bessel und kurz nachher W. Struve, Parallaxen bei Sternen nachzuweisen. Bessel beobachtete den Stern No. 61 im Schwan mittelst

---

*) Die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde nennt man eine Sonnenweite; ebenso versteht man häufig unter der Benennung einer Sternweite den Abstand eines Sterns, dessen jährliche Parallaxe eine Sekunde beträgt.

seines Heliometers und maass dabei die Winkelstände von zwei nahe gelegenen teleskopischen Sternen. Diese Abstände änderten sich im Laufe des Jahres so, wie es eine merkliche Parallaxe erforderte, und diese musste daher mit einer an Gewissheit grenzenden Wahrscheinlichkeit angenommen werden; er bestimmte den Betrag derselben zu 0".3483 mit einem wahrscheinlichen Fehler von 0".0095. — Struve beobachtete den Stern Wega (α Lyrae) vermittelst eines Fadenmikrometers und fand die Parallaxe 0".2613 mit dem w. F. 0".0254. Spätere, mit noch grösserer Sorgfalt angestellte Beobachtungen haben zwar die Realität der von Bessel und Struve gefundenen Parallaxen bestätigt, allein nicht unwesentlich andere Werthe dafür gegeben.

Von allen bisher untersuchten Sternen ist α Centauri am südlichen Himmel der uns nächste; seine Parallaxe ist theils auf der Sternwarte am Cap der guten Hoffnung von Maclear, theils von Moesta in Santiago de Chile bestimmt worden, und beide Astronomen haben sehr nahe denselben Werth für dieselbe gefunden, nämlich 0".91 und 0".88.

Wir theilen nachstehend ein kleines Verzeichniss der bis jetzt bestimmten und einigermassen sicheren Parallaxen mit.

α Centauri	Par. = 0".90
61 Cygni	0.51
No. 21285 in Lalande's Cat.	0.51
No. 34 in Groombridge's Cat.	0.31
No. 21258 in Lalande's Cat.	0.26
No. 7415 in Oeltzen's Cat. (Argelander's Zonen)	0.25
No. 1830 Groombridge	0.23 *)
σ Draconis	0.22
Sirius	0.19
Wega	0.18
70 p Ophiuchi	0.16

Wenn ein Stern dem Sonnensysteme nahe genug ist, um seine Parallaxe zu bemerken, so müssen seine scheinbaren geocentrischen Oerter im Verlauf eines Jahres eine aus dieser Ursache herrührende Ungleichheit verrathen; eine Ungleichheit, die eben so wenig wie die Aberration stattfinden würde, wenn die Sterne vom Mittelpunkte des Sonnenkörpers

*) Einige Bestimmungen geben geringere Werthe für die Parallaxe.

aus beobachtet werden könnten. Um nun den Einfluss der Parallaxe auf den Ort eines Sterns anzugeben, braucht man denselben nur auf den Mittelpunkt der Sonne zu beziehen und kann zu diesem Zwecke die Formeln pag. 152 benutzen; nennt man die von der Parallaxe afficirte Länge λ', die von dem Einflusse der Parallaxe befreite λ, so hat man

$$\lambda' - \lambda = -p \operatorname{Sin} (\lambda - \odot) \operatorname{Sec} \beta ,$$

wo p die jährliche Parallaxe des Sterns, und β seine Breite bedeutet. Der Einfluss auf die Breite wird durch die Formel

$$\beta' - \beta = -p \operatorname{Cos} (\lambda - \odot) \operatorname{Sin} \beta$$

gefunden. Vergleicht man diese Ausdrücke mit den Formeln für die Aberration, so findet man sogleich, dass der Einfluss der Parallaxe grade dann am grössten ist, wenn die Aberration verschwindet, und umgekehrt; auf diesem Umstande beruht die Möglichkeit, beide Einflüsse von einander trennen zu können.

Die Formeln für den Einfluss der Parallaxe auf die Rectascension und Declination sind die folgenden:

$$\alpha' - \alpha = -p \operatorname{Sec} \delta \, [\operatorname{Cos} \odot \operatorname{Sin} \alpha - \operatorname{Sin} \odot \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \Theta]$$

$$\delta' - \delta = -p \, [\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Cos} \Theta - \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Sin} \Theta] \operatorname{Sin} \odot$$
$$- p \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \odot$$

Offenbar ist die Bestimmung so kleiner Grössen, wie die Sternparallaxen sich gezeigt haben, mit vielen Schwierigkeiten verknüpft; durch Beobachtungsfehler periodischer Natur (sog. systematische Fehler) wird man in der Lage des zu untersuchenden Sterns häufig eine Ungleichheit der Form

$$A \operatorname{Cos} \odot + B \operatorname{Sin} \odot$$

finden können, welche selbstverständlich die Bestimmung der Parallaxe mehr oder weniger beeinträchtigen muss. Wenn nun dieser Einfluss von nahezu derselben Grösse wie der der Parallaxe ist, aber im entgegengesetzten Sinne wirkt, so wird letztere ganz verdeckt; in anderen Fällen wird man aus den Beobachtungen eine Parallaxe herausrechnen können, die gar nicht vorhanden ist. Bei Untersuchungen über die Entfernungen der Sterne muss daher vor Allem das anzuwendende Instrument möglichst sorgfältig geprüft werden, so dass man genau weiss, innerhalb welcher Grenzen es zuverlässige Resultate zu liefern im Stande ist.

Da also die directe Bestimmung der Sternentfernungen mit so grossen Schwierigkeiten verknüpft und bisher nur in sehr wenigen Fällen gelungen ist, so hat man versucht, auf Grund gewisser, mehr oder weniger wahrscheinlichen Annahmen, die relativen Entfernungen der Sterne von verschiedener Helligkeit zu **schätzen**. Die erste und nächstliegende Annahme beruht darauf, dass die Intensität des Lichtes sich umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung verhält. Wäre also die Leuchtkraft der Sterne überall dieselbe, so würde man unmittelbar aus der scheinbaren Helligkeit des Sterns seine relative Entfernung berechnen können, ausgedrückt in der Entfernung eines Sterns von einer gewissen Helligkeit. Die Erfahrung lehrt aber, dass die Annahme der gleichen Leuchtkraft bei den verschiedenen Sternen keineswegs richtig ist. Unter den wenigen Parallaxen, die bis jetzt ermittelt wurden, gehört die Mehrzahl lichtschwächeren Sternen an, wogegen verschiedene der helleren vergebens in Bezug auf Parallaxe untersucht worden sind. Indessen wird man bei Betrachtung einer grossen Anzahl Sterne zu der Annahme berechtigt sein, dass die mittlere Entfernung der schwächeren Sterne grösser ist als die der helleren.

Ihrer scheinbaren Helligkeit nach theilt man die Sterne in Classen (sog. Grössenclassen) und sagt, dass die hellsten Sterne zu der ersten Grössenclasse gehören; die nächstfolgenden zu der zweiten, u. s. w., obgleich hier weder von einer wirklichen noch scheinbaren Grösse die Rede ist, sondern lediglich nur von der scheinbaren Helligkeit. Bei dieser Eintheilung der Sterne hat man dem Principe zu folgen gesucht, dass, wenn von zwei Sternen der eine um $\frac{4}{10}$ schwächer als der andere ist, jener genau um eine Sterngrösse heller als der zweite gerechnet werden soll. Das Verhältniss der scheinbaren Helligkeit eines Sterns von $(n+1)$ster Grösse zu der eines $n$ter Grösse wird daher sehr nahe 0,40 sein, so dass z. B. vier Sterne erster Grösse eben so hell erscheinen als 10 Sterne zweiter Grösse, u. s. w.

Die zweite Hypothese, wonach man die relativen Entfernungen der Sterne beurtheilen kann, besteht darin, dass man ihre Vertheilung im Raume, oder wenigstens in verschiedenen Richtungen als gleichförmig annimmt. Aus der Anzahl wird man dann auf die mittlere relative Entfernung der Sterne einer gewissen Grössenclasse schliessen können.

Bezeichnen wir die Helligkeit eines Sterns 1ster Grösse mit 1, die eines der $n$ten Grösse mit h_n, sowie das constante Verhältniss 0,40 mit δ, so ist, dem Obigen zufolge,

$$h_n = \delta^{n-1} \ .$$

Nehmen wir ferner die mittlere Entfernung eines Sterns 1ster Grösse als Maass für die Entfernungen, die wir mit M_n bezeichnen, so dass $M_1 = 1$ und M_n die mittlere Entfernung eines Sterns $n$ter Grösse bezeichnet, so müsste, dem Satze von der Abnahme der Intensität des Lichtes zufolge, sein:

$$h_n = \frac{1}{(M_n)^2}$$

oder

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{h_n}} = \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^{n-1} \quad \text{und} \quad \frac{M_n}{M_{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$$

Nach der zweiten Hypothese erhalten wir folgende Ausdrücke: nennen wir die Anzahl der Sterne, welche sich innerhalb der mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel befinden, k, so ist die Anzahl (Q_n) der Sterne innerhalb der Kugel, deren Radius M_n ist:

$$Q_n = k(M_n)^3 \text{ *)}$$

Hieraus findet sich nun auch das Verhältniss

$$\frac{M_n}{M_{n-1}} = \sqrt[3]{\frac{Q_n}{Q_{n-1}}} .$$

Vergleicht man diesen Werth von $\frac{M_n}{M_{n-1}}$ mit dem früheren, so findet sich

$$\sqrt[3]{\frac{Q_n}{Q_{n-1}}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$$

oder

$$\delta = \left(\frac{Q_{n-1}}{Q_n}\right)^{\frac{2}{3}} .$$

Um nun δ nach dieser Formel berechnen zu können, müsste man die Sternmengen Q_n und Q_{n-1} kennen, was jedoch schon deshalb nicht direct möglich ist, weil die entsprechenden Radien M_n und M_{n-1} unbekannt sind. Statt des Verhältnisses $\frac{Q_{n-1}}{Q_n}$ darf man aber das Verhältniss der durch Zählung gefundenen Mengen der Sterne von der ersten bis zur $(n - 1)$ten, und von der ersten bis zur $n$ten Grösse inclusive anwenden. Nach v. Littrow's Zählung der Sterne im Bonner Sternverzeichniss enthält der nördliche Himmel 19699 Sterne erster bis inclusive 7ter Grösse, und 77794 Sterne bis inclusive 8ter Grösse; es findet sich demnach

$$\delta = \left(\frac{19699}{77794}\right)^{\frac{2}{3}} = 0.4003 ,$$

also genau mit dem durch Schätzungen der scheinbaren Helligkeit bestimmten Werthe übereinstimmend. Aus den Sternen bis 6ter und bis 7ter Grösse würde man freilich

---

*) Die Volumina zweier Kugeln verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Radien.

$$\delta = 0.446 \text{ *)}$$

finden, aber doch immerhin einen Werth, welcher dem im Voraus angenommenen so nahe steht, dass man wohl den aus der Formel

$$M_n = \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^{n-1}$$

folgenden mittleren Entfernungen einiges Zutrauen schenken darf. Diese Entfernungen sind in der folgenden Tafel zusammengestellt:

Sterne	Mittlere Entfernung
1ster Grösse	1.00
2ter »	1.54
3ter »	2.36
4ter »	3.64
5ter »	5.59
6ter »	8.61
7ter »	13.23
8ter »	20.35

§ 16. Die kleinen Planeten.*)

Die Zusammenstellung, welche pag. 246 von den Entfernungen der verschiedenen Planeten gegeben wurde, zeigt eine Lücke zwischen Mars und Jupiter. Um diese auszufüllen, vermuthete schon Kepler einen Planeten, welcher in Folge seiner geringen Grösse bis dahin unbekannt geblieben sei; gleichwohl geschah die Entdeckung des ersten Planeten innerhalb der Gruppe, in welcher man gegenwärtig etwa 170 Glieder zählt, ganz unabhängig von jeder Speculation, und ist demnach als ein Werk des Zufalls anzusehen.

Es war der Italiener Piazzi, welcher bei seinen Sternbeobachtungen ein bis dahin noch unbemerktes Gestirn fand, das sich bald durch seine bedeutende Bewegung als zum Sonnensysteme gehörend zeigte. Seine Entdeckung eröffnete das 19te Jahrhundert, sie ge-

---

*) Genaue photometrische Messungen haben indessen den Werth

$$\delta = 0.426$$

ergeben, also mit dem Mittel der beiden im Texte gegebenen Werthe übereinstimmend.

**) Sie tragen auch die Namen Planetoiden und Asteroiden; v. Littrow schlug, um die Lage zwischen Mars und Jupiter zu betonen, den Namen Zenareiden vor.

schah nämlich am 1sten Januar 1801. Beinahe wäre sie für die Astronomie fruchtlos geblieben, denn der neue Planet, welcher Ceres genannt wurde, näherte sich scheinbar der Sonne, wodurch er sich bald den Blicken der Beobachter entzog. Um nach der Conjunction denselben wiederfinden zu können, war vor Allem erforderlich, seine Bahn um die Sonne herzuleiten. Diese besondere Aufgabe war es, welche Gauss zu seiner berühmten Behandlung des Problems: aus drei geocentrischen Beobachtungen die Bahn eines nach den Kepler-schen Gesetzen um die Sonne kreisenden Gestirns zu finden, veranlasste (vgl. pag. 330). Es gelang ihm auch in der That, aus den wenigen vorhandenen Beobachtungen die Bahn der Ceres zu berechnen, und somit auch ihren Ort am Himmel nach der Conjunction vorherzusagen, wo sie auch wiedergefunden wurde.

Kurz darauf wurden noch drei, zu dieser Gruppe gehörende Planeten entdeckt, nämlich Pallas und Vesta von Olbers in Bremen und Juno von Harding in Lilienthal. Mit diesen schienen die Entdeckungen neuer Planeten abgeschlossen zu sein, denn es verflossen nun vier Jahrzehnte, ohne dass man zu den vier bekannten einen fünften hinzufügen konnte. Erst im September des Jahres 1845 wurde Asträa von Henke in Driesen entdeckt und im Juli 1847 gelang ihm eine zweite derartige Entdeckung, die der Hebe. Nur wenige Monate später fand Hind in London Iris und Flora. Seitdem ist kein Jahr verflossen, ohne dass nicht wenigstens ein neuer Planet entdeckt worden wäre, durchschnittlich aber hat man jährlich mehr als fünf gefunden, so dass augenblicklich (Anfang 1877) 170 bekannt sind. Die Entdeckung neuer Planeten ist indess heut zu Tage sehr viel leichter als zu Piazzi's und Olbers' Zeiten; denn durch die Bemühungen verschiedener Astronomen ist man jetzt im Besitze sehr genauer Sternkarten, mit Hülfe deren man sich leicht überzeugen kann, ob ein neues Gestirn sich innerhalb einer Sternconfiguration befindet oder nicht.*) Zu derartigen Entdeckungen sind

---

*) Von Sternkarten mögen genannt werden: Die Berliner, von der Akademie der Wissenschaften ausgegebenen Sternkarten; Argelander's Durchmusterung des nördlichen Himmels, und die ekliptischen Sternkarten von Chacornac und Hind.

astronomische Kenntnisse übrigens nicht erforderlich, sondern nur ein gutes Auge und, wie bei Ausübung einer jeden Kunst, Ausdauer und Uebung.

Die Entdeckung des ersten der kleinen Planeten war die Veranlassung der Gaussischen Arbeiten, durch welche die theorische Astronomie in wesentlichem Grade umgestaltet wurde; ebenso erwuchs durch die immer steigende Zahl dieser Himmelskörper die Nothwendigkeit, die Regeln der Vorausberechnung möglichst zu vereinfachen. Zu der Vorausberechnung gehört aber vor Allem die Berechnung der Störungen, die bei den kleinen Planeten sehr beträchtlich sein können, und wozu die Methoden eigentlich erst von Hansen erfunden wurden. Die früher bekannten Berechnungsmethoden, welche von Lagrange und Laplace herrühren, erwiesen sich nämlich keineswegs als bei den kleinen Planeten anwendbar, indem sie nur bei sehr kleinen Werthen der Excentricitäten und Neigungen zum Ziele führen können. — Die kleinen Planeten haben also höchst bedeutende theoretische Arbeiten veranlasst und somit indirect die Astronomie sehr gefördert. Die Untersuchung der Bewegungen so vieler, an Masse unbedeutender und an und für sich wenig interessanter Körperchen droht aber der Astronomie lästig zu werden, wenn nicht die Vorausberechnungen noch mehr vereinfacht werden können, als es durch Hansen geschehen ist.

Einige der kleinen Planeten kommen Jupiter so nahe, dass die durch diesen Planeten bewirkten Störungen sehr bedeutend werden; in diesem Umstande dürfte man ein gutes Mittel besitzen, die Masse desselben zu bestimmen. Einige Versuche, die in dieser Richtung gemacht worden sind, haben freilich bis jetzt nicht zu einem völlig befriedigenden Resultate geführt; es ist aber nicht zu bezweifeln, dass man einst auf diesem Wege zu einer sehr sicheren Bestimmung der Jupitersmasse gelangen wird.

Das Wichtigste nach der Entdeckung eines neuen Planeten ist, seine Bahn um die Sonne zu bestimmen. Unter der Voraussetzung, dass die Bewegung den Kepler'schen Gesetzen folgt, sind drei vollständige geocentrische Beobachtungen erforderlich, um die sechs Bahnelemente berechnen zu können. Zuerst müssen aus diesen die drei Abstände von der Erde ermittelt werden, wobei im Allgemeinen der Weg eingeschlagen wird, den wir im vorhergehenden Paragraphen anzudeuten versuchten. Die eigentliche Bestimmung der Elemente ist hiernach mit keinen wesentlichen Schwierigkeiten verbunden.

Aus den drei Abständen von der Erde und den entsprechenden geocentrischen Längen und Breiten (oder Rectascensionen und Declinationen) leitet man zunächst nach den Formeln pag. 150 die heliocentrischen Längen und Breiten ebenso wie die drei Radienvectoren ab. Es seien nun l, l'', b und b'' die heliocentrischen Längen und Breiten der Planeten bei der ersten und der dritten Beobachtung, alsdann hat man zur Bestimmung der Elemente i und ☊ die Gleichungen (vgl. pag. 150):

$$\text{Tang}\, b = \text{Tang}\, i \,\text{Sin}\, (l - ☊)$$
$$\text{Tang}\, b'' = \text{Tang}\, i \,\text{Sin}\, (l'' - ☊)$$

Durch Division ergiebt sich hieraus

$$\frac{\text{Tang}\, b}{\text{Tang}\, b''} = \frac{\text{Sin}\, (l - ☊)}{\text{Sin}\, (l'' - ☊)} = \frac{\text{Sin}\, l \,\text{Cos}\, ☊ - \text{Cos}\, l \,\text{Sin}\, ☊}{\text{Sin}\, l'' \,\text{Cos}\, ☊ - \text{Cos}\, l'' \,\text{Sin}\, ☊}$$

und man findet, wenn Zähler und Nenner links vom Gleichheitszeichen durch Cos ☊ dividirt werden,

$$\frac{\text{Tang}\, b}{\text{Tang}\, b''} = \frac{\text{Sin}\, l - \text{Cos}\, l \,\text{Tang}\, ☊}{\text{Sin}\, l'' - \text{Cos}\, l'' \,\text{Tang}\, ☊}$$

aus welcher Gleichung Tang ☊ und folglich auch ☊ selbst ohne Mühe gefunden wird. Hiernach ergiebt sich Tang i nach einer der zuerst angesetzten Gleichungen.

Nachdem nun die Elemente i und ☊ gefunden sind, berechnet man nach der Formel (vgl. pag. 150)

$$\text{Tang}\, u = \frac{\text{Tang}\, (l - ☊)}{\text{Cos}\, i}$$

drei Werthe von u; diese seien u, u' und u'' oder $f + \omega$, $f' + \omega$ und $f'' + \omega$. Die Polargleichung der Ellipse (vgl. pag. 140 und 206) giebt uns nun folgende Relationen:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \,\text{Cos}\, (u - \omega)$$
$$\frac{p}{r'} = 1 + e \,\text{Cos}\, (u' - \omega)$$
$$\frac{p}{r''} = 1 + e \,\text{Cos}\, (u'' - \omega)$$

aus welchen die drei Unbekannten p, e und ω berechnet werden können. Die Auflösung dieser drei Gleichungen ist eine äusserst leichte; setzt man nämlich

$$e \,\text{Cos}\, \omega = x\,, \quad e \,\text{Sin}\, \omega = y\,,$$

so erhält man drei rein algebraische Gleichungen zwischen p, x und y, und wenn diese Grössen berechnet worden sind, ergeben sich e und ω vermittelst der Formeln:

$$\text{Tang}\,\omega = \frac{y}{x} \;:\; e = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Nachdem der Parameter p und die Excentricität e gefunden worden sind, berechnet man die halbe grosse Axe aus der Formel

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

und hiernach findet sich die mittlere Bewegung in Uebereinstimmung mit dem dritten Kepler'schen Gesetze. Die Zeit des Periheldurchganges findet man endlich mit Hülfe einer der Grössen f, f' oder f'', die, nachdem ω ermittelt worden ist, als bekannt anzusehen sind. Man berechne nach der Formel (vgl. pag. 142)

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}f$$

eine der Grössen ε, ε' oder ε''; die Zeit t_0 ergiebt sich alsdann durch die Gleichung (vgl. pag. 147)

$$n\,(t - t_0) = \varepsilon - e\,\text{Sin}\,\varepsilon.$$

Hat man diese Rechnung mit jedem der drei Werthe von ε ausgeführt, so giebt die Uebereinstimmung der drei Werthe von dem Elemente t_0, welches natürlich nur einen Werth haben kann, eine Controle über die Richtigkeit der Rechnung.

Die drei zu Grunde gelegten Beobachtungen sind aber mit Beobachtungsfehlern behaftet; die aus ihnen gefolgerte Bahn muss daher mehr oder weniger fehlerhaft sein. Sobald nun mehrere Beobachtungen erhalten werden, ist es die Aufgabe des Rechners, die Elemente möglichst zu verbessern. Er verfährt dabei in der folgenden Weise. Zuerst wird mit Hülfe der genäherten Elemente eine Ephemeride berechnet, d. h. ein Verzeichniss der Oerter des Planeten. Die durch diese Rechnung gefundenen Oerter werden nun mit den wirklich beobachteten verglichen, wobei sich mehr oder weniger grosse Abweichungen zeigen, je nachdem die ersten Elemente noch erheblich fehlerhaft sind oder den wahren bereits nahe kommen. Diese Abweichungen beruhen zwar auch zum Theil auf Fehlern der Beobachtungen, aber diese müssen als ganz zufällig angesehen werden, so dass ihr Einfluss desto mehr verringert wird, je grösser die Anzahl der Beobachtungen ist. Die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung können wir also als aus den Fehlern der Elemente bestehend ansehen, mit welchen die Ephemeride gerechnet wurde, und an denselben müssen folglich gewisse, gewöhnlich jedoch ziemlich kleine Verbesserungen angebracht werden, die wir mit $d\Omega$, di, $d\omega$, de, dn und dt_0 bezeichnen wollen. Wenn nun diese Verbesserungen klein sind, so darf man annehmen, dass die Aenderungen des berechneten Ortes denselben proportional sind; wir können daher setzen

Beob. α = Berechn. $\alpha + A\,d\Omega + B\,di + C\,d\omega + D\,de + E\,dn + F\,dt_0$,

wo A, B, u. s. w. gewisse Coefficienten bedeuten, die mit den näherungsweise bekannten Elementen für jede Beobachtungszeit besonders berechnet werden müssen, denn sie hängen selbstverständlich nicht blos von den constanten Elementen ab, sondern auch von dem geocentrischen Orte des Planeten. Die Vergleichung der Declinationen giebt zu Gleichungen ähnlicher Form Veranlassung. Disponirt man nur über drei Beobachtungen, so kann man demnach sechs verschiedene Gleichungen aufstellen, aus denen die Verbesserungen der sechs Elemente abgeleitet werden können. Diesen sechs Gleichungen muss vollständig genügt werden können, d. h. mit anderen Worten: die Elemente müssen sich stets so bestimmen lassen, dass drei Beobachtungen vollständig dargestellt werden. Liegen aber mehr als drei Beobachtungen vor, so müssen die aus ihnen folgenden Bedingungsgleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt werden, wodurch man die wahrscheinlichsten Werthe der Grössen $d\Omega$, di, u. s. w. findet, welche, den entsprechenden der ursprünglich angenommenen Elemente hinzugefügt, die wahrscheinlichsten Elemente geben.

§ 17. Die Cometen.

Die Erscheinung eines Cometen hat zu allen Zeiten die grösste Aufmerksamkeit erregt, sowohl wegen seines oft überraschenden Anblickes, als auch durch das Geheimnissvolle, womit man geneigt war, die Ursache seines Hervortretens zu verknüpfen. Ungeahnt und plötzlich erscheinen sie dem unbewaffneten Auge am Himmel und eben so plötzlich verschwinden sie ihm, nachdem sie gewöhnlich nur eine kurze Zeit sichtbar gewesen sind. Zuweilen haben Cometen einen ganz erstaunlichen Glanz erreicht, so dass man sie selbst am Tage mit blossen Augen sehen konnte. Die Geschichtsbücher wissen von verschiedenen derartigen Fällen zu erzählen, wobei jedoch einige Uebertreibung mit untergelaufen sein dürfte. — Kurz nach Cäsar's Tod soll ein grosser Comet sogar am hellen Mittag sichtbar gewesen sein; die Römer glaubten, er sei gekommen, um die Seele des grossen Dictators nach dem Himmel zu tragen. Glaubwürdigere Aussagen versichern von einem Cometen des Jahres 1744, dass er, wenigstens Anfang März, die Venus, in ihrem höchsten Glanz überstrahlt und man ihn ohne Mühe am Tage in Fernröhren gesehen hätte.

So lange man in vollkommener Unsicherheit über den wirklichen Ort dieser Erscheinungen schwebte, ob sie innerhalb der Erdatmosphäre zu verlegen seien oder den Himmelsräumen angehörten, war es natürlich, wenn man sich in den abenteuerlichsten Vermuthungen über die Cometen, die Art ihrer Entstehung und den Zweck ihrer Erscheinung erging.

Tyge Brahe und Kepler's Lehrer Mästlin scheinen zuerst die Cometen als Himmelskörper und nicht als atmosphärische Erscheinungen angesehen zu haben, und Kepler selbst glaubte ihnen geradlinige Bahnen zuschreiben zu müssen. Der Danziger Astronom Hevelius und ein Geistlicher in Plauen, Dörfel, hatten richtigere Vorstellungen von der Natur der Bahnen, indem sie diese als Parabeln ansahen; aber erst der grosse Newton war es, der die Berechtigung einer solchen Vorstellungsweise bewies und zeigte, wie sie mit dem allgemeinen Gravitationsgesetze übereinstimmte. Newton gab auch eine Methode an, die parabolischen Elemente einer Cometenbahn zu berechnen, welche Methode von seinem Zeitgenossen und Landsmanne Halley ausgebildet und auf den damals bekannten Cometen angewendet wurde. Später gab Olbers eine für Cometenbahnen besonders geeignete Berechnungsmethode, indem er sich auf die Euler'sche Gleichung stützte (vgl. pag. 333).

Halley berechnete die parabolischen Bahnelemente für mehrere (24) Cometen und fand dabei, dass die parabolische Hypothese mit den vorhandenen Beobachtungen genügend im Einklange stand, mithin also berechtigt war. Hierbei wollen wir jedoch nicht unerwähnt lassen, dass die Parabel in der Nähe des Periheliums so nahe mit einer sehr excentrischen Ellipse oder mit einer Hyperbel, deren Excentricität sich nur wenig von der Einheit unterscheidet, zusammenfällt, dass es unmöglich war, den Unterschied auf Grund der ziemlich rohen Beobachtungen der damaligen Zeit anzugeben, und dies um so weniger, als die Cometenbeobachtungen überhaupt nur ein kleines Stück der Bahn in der Nähe des Perihels zu umfassen pflegen, weil diese Himmelskörper in der Regel zu lichtschwach sind, um in grösseren Entfernungen wahrgenommen werden zu können. — Es kann auffallend erscheinen, dass die Cometen gerade Bahnen beschreiben sollen, deren Excentricitäten sich entweder gar nicht, oder doch nur ganz unmerklich von der Einheit unterscheiden, das Auffallende verschwindet aber bald bei einem tieferen Eindringen in die Natur der Frage. Die parabolischen Bahnen der beobachteten Cometen beweisen nämlich vor Allem, dass dieselben überhaupt sehr grosse

Dimensionen haben, dass die Cometen aus Räumen ausserhalb des Sonnensystems kommen und wieder dahin zurückgehen, und dass sie deshalb nicht eigentlich, wenigstens nicht immer, zu diesem Systeme gezählt werden dürfen. Dagegen beweist diese Form keineswegs, dass nicht auch Cometen mit ganz anderen Bahnen vorkommen können, obgleich solche für unsere Augen nicht sichtbar sind, da sie der Sonne nicht nahe genug kommen. Damit ein Körper, der sich in einer sehr grossen Bahn bewegt, der Sonne relativ nahe kommen könne, ist nämlich erforderlich, dass die Excentricität der Einheit sehr nahe gleich ist, was sogleich aus der Formel

$$q = a\ (1 - e)$$

hervorgeht, wo q die kleinste Entfernung von der Sonne bedeutet. Je grösser der Werth der halben grosse Axe a ist, desto kleiner muss der Factor $1 - e$ sein, damit q die Einheit oder den Abstand der Erde von der Sonne nicht wesentlich überschreitet, welches im Allgemeinen die Bedingung ist, dass ein Comet von der Erde aus überhaupt gesehen werden kann.

Unter den 24 von Halley berechneten Bahnen fanden sich drei, deren Elemente in überraschender Weise einander ähnlich waren. Um den Hergang der wichtigen Entdeckung zu veranschaulichen, welche sich an diesen Umstand knüpft, wollen wir die betreffenden drei Elementensysteme anführen, wobei q, wie oben, die kürzeste Entfernung von der Sonne, und T die Zeit des Periheldurchganges bedeuten. Es fand sich:

	System I.	System II.	System III.
T	1531 Aug. 25,80	1607 Oct. 26,72	1682 Sept. 14,80
π	301° 12′	301° 38′ 10″	301° 55′ 37″
☊	45 30	48 40 28	51 11 18
i	17 0	17 12 17	17 44 45
q	0,5799	0,5880	0,5829

(Richtung der Bewegung retrograd oder entgegengesetzt zu der der Planeten.)

Wie unsere Zusammenstellung zeigt, stimmen die drei Elementensysteme zwar nicht vollkommen unter einander überein, aber doch so nahe, dass man sie wohl einem einzigen Cometen zuschreiben könnte, welcher sich in einer sehr excentrischen Ellipse mit einer Umlaufszeit von 75 bis 76 Jahren um die Sonne bewegt.*) Die Ursache der Unterschiede in den entsprechenden Elementen, und besonders in den Zwischenzeiten der Periheldurchgänge suchte schon Halley nur in der störenden Einwirkung der Planeten und vor Allem in der des Jupiter. — Halley's Ansicht von der Identität der drei Cometenerscheinungen gewann eine vollkommene und glänzende Bestätigung im Jahre 1759, wo der Comet den 12. März wieder durch sein Perihel ging. Der Zeitpunkt dieses Periheldurchganges, sowie die Bewegung überhaupt während der erwarteten Erscheinung, war im Voraus von Clairaut, einem der ersten Bearbeiter des Problems der drei Körper, berechnet worden. Er stützte sich dabei auf die früheren Beobachtungen und berücksichtigte die während der Zwischenzeit durch die grossen Planeten veranlassten Störungen. Seine Rechnungen gaben den genannten Zeitpunkt zu Mitte April an, mithin etwas über einen Monat zu spät. Der Fehler lag jedoch weniger in Clairaut's Rechnung als in dem Umstande, dass zu seiner Zeit die Masse des Saturn noch sehr unsicher bestimmt und der Planet Uranus noch gar nicht bekannt war.**) Im Jahre 1835 fand wieder ein Periheldurchgang dieses Cometen statt und zwar am 15. November, nur drei Tage später, als eine von Rosenberger ausgeführte Vorausberechnung angegeben hatte.

Nach dem Halley'schen Cometen hat man noch verschiedene wiederkehrende oder periodische Cometen kennen gelernt, darunter einige mit sehr kurzen Umlaufszeiten. Als ein höchst merkwürdiges Beispiel eines solchen müssen wir den Cometen von 1770 erwähnen. Die Beobachtungen zeigten hier sehr bald, dass sie nicht durch eine Parabel dargestellt werden konnten, sondern deuteten auf eine Ellipse hin, in welcher sich der Comet mit einer $5\frac{1}{2}$jährigen Umlaufszeit bewegte. Durch Rechnung folgte man nun der Bewegung des Cometen sowohl vor als nach dem Zeitpunkte seiner Entdeckung, und fand dabei, dass seine damals stattfindende Bahn durch die grosse Anzie-

---

*) In der elliptischen Hypothese erhält man $a = 19{,}17$ und $e = 0{,}968$.

**) Uranus wurde am 21. März 1781 von dem älteren Herschel entdeckt. Derselbe war indessen schon vorher von Flamsteed, Bradley, T. Mayer und Lemonnier gesehen, obgleich nicht als Planet erkannt worden.

hung des Jupiter veranlasst worden war, als der Comet 1767 diesem Planeten sehr nahe kam. Dieselbe Ursache sollte noch einmal die Bahn dieses Himmelskörpers gänzlich verändern, denn im Jahre 1779 kam derselbe abermals dem Jupiter sehr nahe, ja so nahe, dass der Planet mit seinen vier Monden wahrscheinlich durch die Cometenmaterie ging. In der Bewegung des Jupiter konnte man nach dieser Katastrophe keine Veränderung bemerken, woraus man auf eine sehr geringe Masse des Cometen schliessen muss. Dieser wurde aber in eine neue Bahn geworfen, in welcher er jedoch nie der Erde nahe genug kommen kann, um gesehen zu werden. Auch unsere Erde kam damals diesem Cometen sehr nahe und würde, wenn derselbe eine merkliche Masse gehabt hätte, wesentliche Störungen erlitten haben, die sich besonders in einer Verlängerung der Jahreslänge zu erkennen gegeben haben würden. Aus der Abwesenheit solcher Störungen schloss Laplace, dass die Masse des Cometen noch nicht $\frac{1}{5000}$ der Erdmasse betrage.

Von Cometen mit kurzer Umlaufszeit müssen wir zunächst den Encke'schen nennen. Dieser ist schon sehr oft gesehen und beobachtet worden, das erste Mal von Pons in Marseille im Jahre 1786. Seine Umlaufszeit beträgt nur 3,3 Jahre und seine Bahn, deren Excentricität 0,85 ist, fällt gänzlich innerhalb die des Jupiter. Encke, der während einer langen Reihe von Jahren dem Laufe dieses Cometen mit seinen Rechnungen folgte, machte dabei die wichtige Bemerkung, dass die wirkliche Bewegung nicht völlig aus dem Newton'schen Principe zu erklären sei, sondern dass die Beobachtungen eine fortwährende Verkürzung der Umlaufszeit andeuteten, wozu eine neue Erklärungsursache gefunden werden musste. Er glaubte ferner, eine solche in der Annahme gefunden zu haben, der Comet bewege sich in einem widerstehenden Mittel; hierdurch würde die Tangentialgeschwindigkeit vermindert werden und also die Attractionskraft der Sonne einiges Uebergewicht erhalten, welches nothwendig eine Verminderung der halben grossen Axe oder eine Verkürzung der Umlaufszeit zur Folge haben würde. Es können jedoch auch noch andere Ursachen der bemerkten Verkürzung angegeben werden, und auf alle Fälle erscheint es noch als verfrüht, über die Encke'sche Ansicht ein definitives Urtheil zu fällen. Ein solches wird vielleicht dann möglich sein, wenn die störenden Einflüsse der Planeten auf die Bewegung des Cometen strenger berechnet worden sind, als es bisher geschehen konnte. Auch sind die Beobachtungen einiger zukünftigen Erscheinungen erwünscht, weil die ersten Ortsbestimmungen, welche sich auf diesen Cometen beziehen, an Genauigkeit Vieles zu wünschen übrig lassen.

Ausser dem Encke'schen kennt man noch 6 Cometen, deren Umlaufszeiten weniger als 10 Jahre betragen und welche in mehr als einer Erscheinung beobachtet worden sind. Diese sind*), nach der Entdeckungszeit geordnet:

Biela's Comet	Umlaufszeit	6.7	Jahre
der Faye-Möller'sche Comet	«	7.4	«
de Vico's Comet	«	5.5	«
Brorsen's Comet	«	5.6	«
d'Arrest's Comet	«	6.4	«
Winnecke's Comet	«	5.6	«

Für eine kleine Anzahl, ausser den eben angeführten Cometen, hat man elliptische Bahnelemente, mithin auch die Umlaufszeiten aus den Beobachtungen während der Zeit einer einzigen Erscheinung berechnet. Ebenso kennt man einige Cometen mit grösseren Umlaufszeiten von 10 bis 100 Jahren, von denen jedoch nur wenige in mehr als einer Erscheinung beobachtet worden sind, wie z. B. der Halley-sche. Für andere wieder hat man noch grössere Umlaufszeiten herausgerechnet. Mit wenigen Ausnahmen sind jedoch die Resultate von solchen Berechnungen ohne besonderes Interesse. Je grösser nämlich die Umlaufszeit gefunden wird, desto unsicherer ist in der Regel auch ihre Bestimmung; die Richtigkeit einer Umlaufszeit von mehreren Jahrhunderten können wir nur sehr selten controliren, und wenn eine solche auch wirklich noch aus den Beobachtungen mit Evidenz hervorgehen würde, so bliebe immer noch übrig, die Störungsrechnungen auszuführen, um der Wiederkunft des Cometen

---

*) Da die Anzahl der periodischen Cometen nicht gross ist, hat man sie nach ihren Entdeckern benannt, in einigen Fällen nach den Rechnern. Zum Aufsuchen der Cometen giebt es eigens construirte Fernröhre (sog. Cometensucher), die bei schwacher Vergrösserung eine grosse Lichtstärke und grosses Gesichtsfeld besitzen.

sicher zu sein. — Die bis jetzt ausgeführten Bahnberechnungen haben aber im Allgemeinen erwiesen, dass die Mehrzahl der Cometen sich in sehr langgestreckten, entweder elliptischen, oder parabolischen (möglicherweise auch hyperbolischen) Bahnen bewegen und in diesen die Grenzen des Sonnensystems überschreiten; sie können deshalb auch (wenigstens wenn ihre Bahnen Parabeln oder Hyperbeln sind) eigentlich nicht zu diesem Systeme gezählt werden, obschon sie längere Zeit hauptsächlich der Anziehungskraft der Sonne gehorchen. Es erscheint auch wahrscheinlich, dass die wiederkehrenden Cometen mit relativ kurzen Umlaufszeiten ihre jetzigen Bahnen in Folge der Anziehung eines der grösseren Planeten erhalten haben; der Comet konnte nämlich einem solchen zufällig sehr nahe und dadurch in eine derartige Bewegung kommen, dass eine elliptische Bahn um die Sonne entstand.

Bis Ende des 17ten Jahrhunderts sind etwas über 400 Cometen verzeichnet worden, wovon jedoch ein grosser Theil unverbürgt ist. Die spärlichen Angaben, deren meiste sich bei den Chinesen finden, erlauben nämlich keine Bahnbestimmung und man kann daher nicht immer sicher sein, dass ein Comet wirklich gesehen worden ist. Seit dem Jahre 1700 bis jetzt sind gegen 250 Cometenerscheinungen beobachtet worden, von welcher Zahl indessen die Wiedererscheinungen schon bekannter Cometen abzuziehen sind, so dass noch etwa 200 seit dem genannten Zeitpunkte entdeckte Cometen als wirklich neue nachbleiben. Bei weitem die grösste Anzahl derselben war nur in Fernröhren sichtbar, und zwar als schwache, gegen die Mitte gewöhnlich verdichtete Nebel. Oft schien die Verdichtung einen helleren, schärfer begrenzten Punkt einzuschliessen (den sog. Kern des Cometen); auf diesen Punkt, oder in Ermangelung eines solchen, auf die hellste Partie des Cometennebels beziehen sich die Beobachtungen, indem man annimmt, der Schwerpunkt müsse nahezu damit zusammenfallen. — Bei helleren Cometen hat man am Kerne und in seiner nächsten Umgebung (der sog. Coma) oft merkwürdige Veränderungen und Lichtentwicklungen wahrgenommen; ebenso zeigen solche in der Regel einen Schweif, welcher gleichfalls raschen und bedeutenden Veränderungen unterworfen ist. Die Bildung des Schweifes, ebenso wie die Lichtentwicklungen in der Nähe des Kernes, lassen auf das Vorhandensein von Kräften schliessen, die möglicherweise die Bewegung des hellsten Punktes in seiner Bahn um die Sonne beeinflussen. Bis jetzt hat man jedoch einen derartigen Einfluss nicht mit Sicherheit constatiren können.

In neuerer Zeit ist ein sehr enger Zusammenhang zwischen gewissen Cometen und solchen Sternschnuppenschwärmen, welche während ihres Laufes durch das Sonnensystem der Erde sehr nahe kommen, erkannt worden. Zugleich hat man gefunden, dass diese Schwärme eine sehr grosse Ausdehnung in ihrer Bahn haben, zuweilen sogar dieselbe ausfüllen, so dass sie geschlossene elliptische Ringe bilden, in denen die Partikelchen mehr oder weniger dicht vertheilt sind. Die Excentricität dieser Ringe ist jedoch sehr beträchtlich, aus welchem Grunde die Bewegung in der Nähe der Erde nahezu so erscheinen muss, als ob sie parabolisch wäre. — Hieraus erklären sich auch die periodisch wiederkehrenden Sternschnuppenregen. Hat nämlich der Sternschnuppenring eine solche Lage, dass er die Erdbahn schneidet oder dass diese durch den Schwarm geht, so muss die Erde an einem bestimmten Tage jedes Jahres mit den Sternschnuppen in Berührung kommen.*) Diese strömen alsdann in nahezu parallelen Richtungen gegen die Erdoberfläche und zwar die meisten gegen den Punkt, der gerade gegen die kosmische Bewegung der Sternschnuppen gerichtet ist. — Die Erscheinung eines Sternschnuppenregens zeigt indessen nicht unmittelbar den Parallelismus der Bewegungen, denn die Componenten dieser, welche mit der Gesichtslinie zusammenfallen, können natürlich nicht wahrgenommen werden. Eine Sternschnuppe, welche sich direct auf unseren Standpunkt zu bewegt, scheint uns am Himmel still zu stehen; diejenigen Sternschnuppen hingegen, welche an der Erde vorbei eilen, scheinen Bögen am Himmel zu beschreiben. Da sie nun alle in einer Richtung gegen die Erde strömen oder fallen, so erscheinen sie, wenn wir uns mitten im

---

*) Sind die Sternschnuppen innerhalb des elliptischen Ringes nicht gleichförmig vertheilt, sondern hauptsächlich in einem gewissen Theile des Ringes verdichtet, so kann die Intensität des Sternschnuppenregens nicht jedes Jahr dieselbe sein. Bei den Novembermeteoren hat man in gewissen Jahren eine besonders grosse Intensität bemerkt, und da diese Zeiten um etwa 33 Jahre von einander entfernt liegen, so schliesst man mit Recht, dass die Umlaufszeit des Novemberstromes ohngefähr 33 Jahre betragen müsse.

Regen befinden, als von einem Punkte am Himmel ausgehend, das Himmelsgewölbe nach allen Richtungen hin durchschiessend. Man sieht auch leicht ein, dass die scheinbaren Bahnen in der Nähe des erwähnten Punktes sehr kurz sein müssen, in weiterer Entfernung von demselben aber länger. Dieser Punkt wird der Radiationspunkt genannt; er behält seine Lage am Himmelsgewölbe unter den Sternen bei und nimmt also Theil an der täglichen Bewegung des Himmels — ein Beweis für die kosmische Natur der Sternschnuppen. Denn diese behalten ihre Bewegungsrichtung im Raume bei, während der Horizont, auf den wir ihre scheinbaren Bewegungen beziehen, seine Lage fortwährend verändert. — Die Lage des Radiationspunktes eines Sternschnuppenstromes findet man dadurch, dass mehrere scheinbare Bahnen in eine Sternkarte eingetragen werden; man wird alsdann sehen, dass sie sich sämmtlich, eventuell nach gehöriger Verlängerung, in demselben Punkte schneiden; dieser Durchschnittspunkt ist eben der Radiationspunkt, dessen Rectascension und Declination mit einer hier ausreichenden Genauigkeit der Karte entnommen werden kann. Mit dem Radiationspunkte hat man auch die Richtung bestimmt, in welcher die Sternschnuppen sich bewegen, wenn sie sich in Erdweite von der Sonne befinden, mithin eine Tangente ihrer Bahn. Diese Richtung ist nämlich offenbar die des Radiationspunktes. Wird nun angenommen, der Strom bewege sich in einer Parabel um die Sonne und zwar so, dass das zweite Kepler'sche Gesetz seine Gültigkeit behält, so kann diese aus den vorhandenen Daten bestimmt werden; denn die Sonne bestimmt die Lage des Brennpunktes, ferner ist ein Abstand, nämlich die Entfernung der Erde, bekannt und endlich auch die Richtung der zu dieser Entfernung gehörenden Tangente. Zu der Ansicht, dass die Bahnen, wenigstens sehr annähernd, parabolisch sind, ist man wiederum durch die Kenntniss ihrer kosmischen Geschwindigkeit gelangt, die zu gewinnen auf einigen Umwegen gelungen ist (vgl. pag. 212). Der Astronom Schiaparelli gründet seine Herleitung auf Betrachtungen, die wir, hauptsächlich nach einem vortrefflichen Referate in der Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft *), hier in aller Kürze anführen wollen.

*) III. Jahrgang, 1868.

Mit Ausschluss des im August jedes Jahres regelmässig wiederkehrenden sog. Laurentiusstromes können die Sternschnuppen — wenn man sie im Allgemeinen und nicht irgend einen einzelnen Strom betrachtet — als nahezu in gleicher Häufigkeit aus allen Gegenden des Himmels kommend angesehen werden. Stände die Erde still, so müsste, falls die obige Voraussetzung richtig ist, jeder Punkt der Erdoberfläche von den Sternschnuppen gleichmässig übersäet werden, und hierin würde die Axendrehung der Erde keine Aenderung hervorbringen. Bei Betrachten des Himmels würde man alsdann während jeder Stunde nahezu dieselbe Anzahl Sternschnuppen erblicken. Wäre im Gegentheil die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn grösser als die der Sternschnuppen, so könnte keine der letzteren, deren Bewegung die Richtung der Erdbewegung hätte, uns erreichen. Von dem Punkte aus, gegen welchen die Bewegung der Erde gerichtet ist, müssten die meisten Sternschnuppen zu kommen scheinen, von dem entgegengesetzten dagegen keine. Ein Beobachter, in dessen Zenith der erstgenannte Punkt, von Schiaparelli Apex genannt, sich gerade befindet, müsste die meisten Sternschnuppen sehen, sein Antipode die wenigsten. — In Folge der geringen Excentricität der Erdbahn ist die Rectascension des Apex immer sehr nahe 6 Stunden geringer als die der Sonne (die Richtung der Erdbewegung bildet nämlich mit dem Radiusvector einen Winkel, dessen geringster Werth 89° und dessen grösster 91° beträgt). Der Apex culminirt daher 6 Stunden vor der Sonne, also um 6 Uhr Morgens, zu welcher Zeit die meisten Sternschnuppen jedenfalls gesehen werden müssen, da die Erde eine Bewegung im Raume hat. Aber auch 6 Uhr Abends, obgleich der Apex dann am tiefsten unter dem Horizonte steht, nimmt man Sternschnuppen wahr, und zwar auch aus dem Punkte kommend, welcher dem Apex entgegengesetzt ist. Dieses beweist, dass die mittlere Geschwindigkeit der Sternschnuppen in der Entfernung 1 von der Sonne grösser als die der Erde ist, weil man sonst keine in dem letztgenannten Punkte erblicken könnte; denn, damit eine Sternschnuppe in der Nähe dieses Punktes sichtbar werden soll, muss sie der Erde nacheilen und dieselbe erreichen, wozu offenbar ihre Geschwindigkeit grösser sein muss, als die der letzteren. Sind also die genannten Voraussetzungen richtig, so muss man aus der relativen Häufigkeit der Sternschnuppen zu verschiedenen Nachtstunden ihre Geschwindigkeit im Vergleich zu der der Erde bestimmen können, und umgekehrt, wenn diese Geschwindigkeit einmal bestimmt worden ist, muss sich die relative Anzahl der Sternschnuppen während jeder Stunde durch Rechnung ermitteln lassen. Aus den vieljährigen Beobachtungen Coulvier-Gravier's leitete Schiaparelli die mittlere Geschwindigkeit der Sternschnuppen zu 1,447 ab (die Geschwindigkeit der Erde = 1 gesetzt), wodurch er zu der oben erwähnten Ansicht von der parabolischen Form der Sternschnuppenbahnen geführt wurde. — Wir führen nun einige Werthe aus den Beobachtungen Coulvier-Gravier's an nebst den entsprechenden aus Schiaparelli's Rechnung, die er in absolute verwandelt hat, unter der Voraussetzung, ein Beobachter sehe im Mittel während einer Stunde 10,65 Sternschnuppen. Die Uebereinstimmung ist so gross, dass man sich von der Richtigkeit der Schiaparelli'schen Ansichten sofort überzeugt fühlt.

Stunde	Beob. Anzahl	Berechn. Anzahl	Unterschied
5 bis 6 Uhr Abends	7.2	5.90	+ 1.30
8 « 9 « «	6.3	7.00	— 0.70
11 Uhr bis Mittern.	9.5	10.05	— 0.55
2 bis 3 Uhr Morg.	16.8	13.47	+ 3.33
5 « 6 « «	13.7	15.33	— 1.63

Die Bahnen der Sternschnuppen theilen also mit denen der Cometen die Eigenschaft, im Allgemeinen parabolisch zu sein, oder wenigstens eine von der Einheit nur sehr wenig abweichende Excentricität zu haben. Es giebt aber noch engere Beziehungen zwischen diesen Bahnen. Um diese unmittelbar zu veranschaulichen, führen wir die Bahnelemente des Laurentiusstromes einerseits und anderseits die des dritten Cometen vom Jahre 1862 an. Sie sind:

	Laurentiusstrom oder Perseiden *)	Comet III 1862
π	343° 38′	344° 41′
☊	138 16	137 27
i	63 3	66 25
q	0.9643	0.9626
Bewegung	retrograd	retrograd

*) Der Radiationspunkt des Laurentiusstroms liegt im Sternbilde Perseus, daher der Name Perseiden.

Diese Elemente zeigen also eine ganz auffallende Uebereinstimmung mit einander. In derselben Weise hat man auch eine grosse Uebereinstimmung zwischen den Bahnen der Novembermeteore — den sogenannten Leoniden — und der des ersten Cometen von 1866, sowie zwischen einigen andern Meteorschwärmen und Cometen gefunden.

Hieraus geht nun klar und unwiderleglich hervor, dass Cometen und Meteorschwärme in denselben Bahnen sich um die Sonne bewegen, und aus diesem Umstande muss man wohl auf einen physischen Zusammenhang zwischen Cometen und Sternschnuppen schliessen. Welcher Art dieser Connex indessen sei, dürfte gegenwärtig noch nicht mit Bestimmtheit angegeben werden können; es hat den Anschein, dass die Meteorschwärme Absonderungen von den Cometen sind, möglich ist es jedoch auch, dass die in den Schwärmen so äusserst locker vertheilte Materie sich unter geeigneten Einflüssen zu den etwas mehr consistenten Cometenkörpern concentrirt. Ueber die physische Natur der Cometen herrschen übrigens noch Controversen, die vielleicht erst sehr spät zum Abschluss gelangen und zu einem einigermassen sichern Ergebniss führen werden. Von den Ansichten, die über diesen Gegenstand bis jetzt bekannt worden sind, giebt es zwar einige, die in gewisser Beziehung nicht unbegründet erscheinen; allein es ist anderseits nicht undenkbar, dass die physischen und chemischen Processe innerhalb dieser Gebilde von uns noch nicht verstanden werden können, weil wir keine entsprechenden Vorgänge an der Erdoberfläche kennen. Wir kennen z. B. einigermassen die sog. anorganischen chemischen Verbindungen und auch die Chemie der Kohlenverbindungen (unsere sog. organische Chemie); vielleicht giebt es aber eine eben so zahlreiche Reihe von Eisenverbindungen, also eine Chemie des Eisens, ebenso wie unsere organische Chemie eine Chemie des Kohlenstoffes ist, und wer könnte gegenwärtig sagen, unter welchen Umständen solche Verbindungen eingegangen werden und von welchen physikalischen Processen sie begleitet sind? — Dass das Eisen im Universum sehr verbreitet ist, hat uns die Spectralanalyse gelehrt; wir bemerken es aber auch direct an den Meteoriten, die zum grossen Theil aus Eisen bestehen. Ausserdem fällt das Eisen in äusserst fein vertheilter Form, wie es scheint ununterbrochen zur Erde hernieder. Professor Nordenskiöld hat grosse Massen von Schnee einschmelzen lassen und in den Resten ein sehr feines Pulver erhalten, das in jeder Hinsicht sich als metallisches Eisen erwies. Der erste Versuch geschah in Stockholm, war aber nicht entscheidend, weil es nicht undenkbar schien, der gefundene Niederschlag wäre aus dem Rauch der umliegenden Eisenwerke gekommen; den zweiten Versuch liess er in den Wäldern Finnlands vornehmen, den dritten und entscheidenden unternahm er selbst auf Spitzbergen, mehr als 100 Meilen von jeder anderen menschlichen Wohnung als seiner eigenen kleinen Colonie entfernt, wo also jeder Verdacht eines tellurischen Ursprunges des in Frage stehenden Staubes entfernt war. Das Eisen spielt also im Weltraume eine grosse Rolle; welche diese aber ist, wissen wir indessen noch nicht.

§ 18. Die Doppelsterne.

Unter den Hunderttausenden von Sternen, die wir schon mit einem mässigen Fernrohre unterscheiden, giebt es etwa 6000 und wahrscheinlich sogar mehr, die von einem zweiten Stern begleitet sind, obgleich der Begleiter mitunter so schwach ist, dass kräftigere Fernröhre erforderlich sind, um denselben erblicken zu können; solche Sternpaare nennt man Doppelsterne. Zunächst könnte man diese Erscheinung einfach so erklären, dass bloss die Richtungen beider Sterne nahe zusammenfielen, während sie selbst beliebig weit von einander entfernt sein könnten. Für einige Doppelsterne ist eine solche Erklärung wohl richtig, im Allgemeinen jedoch schon a priori wenig wahrscheinlich. Die Zahl der Doppelsterne ist nämlich zu gross, als dass man ihr Vorhandensein blos dem Zufall zuschreiben könnte, auch wenn man nicht directe Beweise für Bewegungen hätte, die aus einer gegenseitigen Anziehung herrühren. Die bei Weitem grösste Zahl ist vielmehr wirklich physisch, zu einem System in mechanischem Sinne verbunden; die wenigen Doppelsterne, die dies nicht sind, nennt man optische Doppelsterne.

Schon bald nach der Entdeckung der ersten Doppelsterne errieth man ihren physischen Zusammenhang. Es muss dabei besonders der Mannheimer Astronom Christian Mayer genannt werden, welcher 1778 die Ansicht von den »Fixsterntrabanten« lebhaft vertheidigte.*) Der etwas unpassend gewählte Name und einige Uebertreibungen riefen indessen einen bedeutenden und damals nicht unberechtigten Widerspruch hervor. Später wurde jedoch die wahre Natur der Doppelsterne von Herschel dem Aelteren wiedererkannt und dargelegt, wonach die Zweifel an dem physischen Connex der beiden Componenten der Binarsysteme geschwunden zu sein scheinen.

Herschel, welcher ohngefähr im Jahre 1780 anfing, den Doppelsternen seine Aufmerksamkeit zuzuwenden, nahm seine Untersuchungen über dieselben nach längerer Zeit (zu Anfang des Jahrhunderts) wieder auf und fand nun in fast 50 Systemen Aenderungen, die sich bald, wie z. B. bei ξ Ursae maj. und η Coronae als wirkliche Bahnbewegungen herausstellten. Ursprünglich scheint Herschel der Ansicht gewesen zu sein, die Doppelsterne wären nur optisch mit einander verbunden, die gefundenen Bewegungen überzeugten jedoch den vorurtheilsfreien Forscher von der physischen Verbindung. Er bestimmte die Distanz und Richtung (Positionswinkel) bei mehr als 400 Paaren, deren scheinbare Entfernung weniger als 32″ beträgt. Vor Herschel waren nur wenige (von Chr. Mayer etwa 100) Doppelsterne gemessen worden.

Nach dem älteren Herschel hat sein Sohn John Herschel zusammen mit South, vor Allen aber W. Struve durch zahlreiche und sorgfältige Beobachtungen unsere Kenntniss von der Anzahl und den Umlaufszeiten der Doppelsterne erweitert**); in den letzten Jahrzehnten ist von Otto v. Struve ein besonders werthvolles Beobachtungsmaterial, die Doppelsterne betreffend, gesammelt, indess noch nicht veröffentlicht worden. Auch die zahlreichen und genauen Doppelsternbeobachtungen von Dembowski und Dunér dürfen wir hierbei nicht unerwähnt lassen.

Von den etwa 6000 gegenwärtig bekannten Doppelsternen hat man bereits bei ca. 800 eine Umlaufsbewegung bemerkt, obgleich die Perioden derselben nur in den seltensten Fällen weniger als ein Jahrhundert betragen.

---

*) Schon etwas vor Mayer hatte Michell die Wahrscheinlichkeit des Verbandes bei den Doppelsternen ausgesprochen.

**) In dem Hauptwerk Struve's, den »Mensurae micrometricae« (St. Petersburg 1837) finden sich die genauen Messungen von mehr als 2600 doppelten, drei- und mehrfachen Sternen, bis 32 Sekunden Distanz.

Bei verschiedenen Binarsystemen haben sich nicht nur die Umlaufszeit, sondern auch die elliptischen Bahnelemente bestimmen lassen. Man ist dabei von der Voraussetzung ausgegangen, dass auch in den entferntesten Sternregionen das Newton'sche Gesetz seine Gültigkeit behält, dass mithin die relative Bahn des einen Sterns um den andern eine Ellipse sei, in welcher die Bewegung nach den Kepler'schen Regeln vor sich gehe. Die Erfahrung hat stets die Richtigkeit dieser Voraussetzung bestätigt, wenn auch scheinbare Widersprüche, oder richtiger Abweichungen, die ohne Berechtigung Widersprüche genannt wurden, in einigen Fällen sich gezeigt haben. Diese beruhten aber einfach darauf, dass die Anzahl der Glieder des Systems mehr als zwei beträgt, obgleich nur zwei optisch erkannt waren. Das Newton'sche Gesetz bleibt auch bei solchen Systemen in Kraft, aber eben deshalb finden die Kepler'schen Regeln keine Anwendung oder können höchstens nur eine erste rohe Darstellung der Bewegung geben; denn bei den drei- oder mehrfachen Sternsystemen können die störenden Massen so bedeutend sein, dass die Reihenfolge von Annäherungen, welche bei den Planeten zur Erkenntniss der wahren Bewegungen führt, ein vollkommen illusorisches Resultat hervorbringen würde, indem sie nicht convergent wäre.

Die Berechnung der elliptischen Doppelsternbahnen ist in gewisser Weise einfacher als die der Planeten- und Cometenbahnen, insofern man nämlich die ganze Bewegung von demselben Punkte aus betrachtet und nicht nöthig hat, dieselbe auf einen dritten, in relativer Ruhe befindlichen Punkt zu beziehen.*) Auf einer Ebene, welche senkrecht zu der Gesichtslinie (dem sog. Visionsradius) liegt, scheint der eine Stern um den andern eine Ellipse zu beschreiben. Diese Ellipse ist nun freilich nicht die wahre Bahn, sondern nur eine sog. Projection oder Abbildung derselben auf der genannten Ebene, allein man kann die wahre aus der scheinbaren Bahn herleiten, indem man die Lage des als ruhend angesehenen Sternes innerhalb der Projectionsellipse beachtet. Wäre die scheinbare Bahn zugleich auch die wahre, d. h. geschähe die wirkliche Bewegung in der auf dem Visionsradius senkrechten Ebene, so müsste der Stern mit dem Brennpunkte der Ellipse zusammenfallen; liegt aber die wahre Bahn in einer andern Ebene, so findet dies nicht mehr statt. Man denke sich die wahre Bahn als einen Kreis, aber um 30° gegen den Visionsradius geneigt, alsdann wäre die scheinbare Bahn eine Ellipse, deren kleine Axe nur die Hälfte der grossen betrüge.**) Es wäre also in der scheinbaren Ellipse:

---

*) Wegen der grossen Entfernung der Sterne kann man bei den Berechnungen der Doppelsternbahnen die Erde als ruhend annehmen.

**) Die Position einer Geraden von der Länge a auf einer anderen Geraden oder auf einer Ebene findet man aus der Formel

$$a \operatorname{Cos} \varphi ,$$

wo φ den Winkel zwischen den beiden Geraden oder zwischen der Geraden und der Ebene bedeutet.

$$\frac{b}{a} = \tfrac{1}{2} = \sqrt{1 - e^2}$$

mithin

$$e = 0{,}8660\ .$$

Die Brennpunkte liegen folglich der Peripherie der scheinbaren Ellipse sehr nahe, während der Stern mit ihrem Mittelpunkte zusammenfällt. Die Brennpunkte der scheinbaren Bahn entsprechen also nicht denen der wahren, von denen der eine durch den ruhenden Stern bezeichnet wird, aber eben wegen dieser Verschiedenheit ist es möglich, die wahre Bahn zu bestimmen.

Bei den Doppelsternbahnen muss die mittlere Bewegung oder die Umlaufszeit von der halben grossen Axe getrennt angegeben werden, weil bei den Binarsystemen keine dem dritten Kepler'schen Satze entsprechende Relation zwischen diesen Elementen vorhanden ist. Die halbe grosse Axe kann, weil die Entfernung des Systems in den weitaus meisten Fällen unbekannt ist, nur in Sekunden angegeben werden.

Die Untersuchungen der Bewegungen in Binarsystemen sind aber mit anderen Schwierigkeiten verbunden als solchen, die nur in einer etwas längeren und mühsameren Bahnberechnung liegen könnten. Die Messungen der gegenseitigen Lage zwei sehr naher Lichtpunkte sind nämlich nicht selten verhältnissmässig so unsicher, dass die auf Grund solcher Messungen berechneten Bahnen nur nach vielen Versuchen und erneuerten Rechnungen einigermassen richtig gefunden werden konnten. Und doch sind die Doppelsternmessungen an und für sich zu den genauesten Beobachtungen zu zählen. Man begreift aber, dass bei Bahnen, wo die ganze Aenderung der Distanz oft kaum eine Sekunde beträgt, auch die heut zu Tage erreichbare Genauigkeit als nicht genügend erscheinen muss. Man sieht sich daher auch bisweilen veranlasst, die Bestimmung der Bahnelemente ausschliesslich auf Positionswinkel zu gründen, und die gemessenen Distanzen nur zur Bestimmung der halben grossen Axe zu verwenden. Die Möglichkeit eines solchen Verfahrens beruht darauf, dass auch in der Projectionsellipse die vom scheinbaren Radiusvector überstrichenen Sectoren den Zeiten proportional sind. Liegt also eine grössere Reihe beobachteter Positionswinkel vor, so dass man aus ihnen die der Zeiteinheit entsprechende Aenderung, die wir mit $p' - p$ bezeichnen wollen, ableiten kann, so lässt sich die entsprechende Distanz aus der Formel (vgl. pag. 146) berechnen:

$$c = d^2\,(p' - p)\,,$$

wo c eine Constante und d die in einem willkürlichen Maasse ausgedrückte Entfernung bedeuten. Mittelst dieser Formel lassen sich auch zu verschiedenen Zeiten gemessene Distanzen auf einander reduciren und vergleichen. Bezeichnet man nämlich eine zweite Distanz mit d_1 und die dazugehörende Aenderung des Positionswinkels mit $p_1' - p_1$, so hat man:

$$\frac{d_1}{d} = \sqrt{\frac{p'-p}{p'_1-p_1}}\ .$$

Nach dieser Formel wollen wir nun folgende von verschiedenen Beobachtern angestellte Distanzmessungen mit einander vergleichen. In der ersten Columne geben wir die Zeit der Beobachtung, in der zweiten die gemessenen Distanzen, in der dritten die Aenderung des Positionswinkels in einem Jahre, in der vierten die der Aenderung von — 5°92 *) entsprechenden Distanzen, welche also aus der Formel

$$d_1 = d\sqrt{\frac{p'-p}{-5^\circ 92}}$$

berechnet wurden, wo *d* die gemessene Distanz bedeutet; in der fünften endlich die Namen der Beobachter. Die Messungen beziehen sich auf den Stern ξ Ursae majoris.

Zeit	d	$p'-p$	d_1	Beobachter
1826.20	1″75	— 8°85	1″94	W. Struve
1831.25	1.90	— 6.30	1.96	Sir John Herschel
1833.23	1.98	— 6.20	2.03	Dawes
1838.43	2.26	— 4.88	2.05	W. Struve
1845.31	2.57	— 2.65	1.72	Mädler
1855.29	2.96	— 1.94	1.70	Secchi
1857.36	3.11	— 1.98	1.80	Secchi
1857.43	2.75	— 2.00	1.60	Mädler
1858.00	2.90	— 2.04	1.70	Jacob
1863.23	2.56	— 2.97	1.81	Dembowski
1865.12	2.44	— 3.42	1.86	Engelmann
1869.40	1.29	— 10.30	1.70	Dunér
1871.47	0.98	— 19.70	1.79	Dunér
1873.33	0.98	— 22.28	1.90	Dembowski
1875.45	1.08	— 15.75	1.76	Dunér

Diese Zusammenstellung enthält bei weitem nicht alle Distanzmessungen, welche an diesem Sternpaare gemacht worden sind. Die Auswahl haben wir mit Rücksicht darauf getroffen, dass die Veränderungen der scheinbaren Entfernung deutlich hervortreten sollten; wir beabsich-

*) Die mittlere jährliche Bewegung beträgt — 5°92; das negative Vorzeichen giebt an, dass die Positionswinkel abnehmen.

tigten aber auch, die Namen der vorzüglichsten Doppelsternbeobachter aufzuführen, wobei indessen die Bemerkung wiederholt werden muss, dass die Beobachtungen von O. Struve noch nicht publicirt sind und folglich keinen Beitrag zu unserem Beispiele liefern konnten. Wir wollen aber noch eine dritte Bemerkung an die gegebenen Zahlen knüpfen. Wie man sieht, ist die Uebereinstimmung der einzelnen Messungen eine sehr grosse, da der bedeutendste Unterschied nicht einmal eine halbe Sekunde beträgt, relativ zu der scheinbaren Entfernung aber müssen trotzdem diese Unterschiede als erheblich angesehen werden. Es lässt sich daher einsehen, dass man leicht eine beträchtlich fehlerhafte Bahn erhalten kann, wenn Distanzen mit einander combinirt werden, von denen einige zufällig im einen Sinne und andere im umgekehrten Sinne durch Fehler entstellt sind. Diese Gefahr ist um so grösser, als die Resultate der verschiedenen Beobachter nicht selten nach derselben Seite hin abweichen. Sehen wir einfach das arithmetische Mittel der angeführten Werthe von d_1 als den richtigen Werth der scheinbaren mittleren Entfernung der beiden Componenten an, so müssen die Abweichungen der einzelnen Bestimmungen von diesem Mittel als Beobachtungsfehler angesehen werden. Das Mittel aus den angeführten Bestimmungen wird $1''\!.82$; die Correctionen der drei Beobachtungen von Dunér sind demnach $+0''\!.12$, $+0''\!.03$ und $+0''\!.06$, also alle im selben Sinne. Würde nun ein ähnliches Ergebniss auch aus anderen Messungen desselben Beobachters hervorgehen, so müsste man schliessen, dass er im Allgemeinen die Distanzen zu klein misst. Da die Genauigkeit der Doppelsternbahnen, welche aus den Beobachtungen durch Rechnung gefunden werden, wesentlich davon abhängt, dass dergleichen für den einzelnen Beobachter eigenthümliche Abweichungen (die sog. systematischen Fehler) genau erkannt werden, so glauben wir diesen Gegenstand noch etwas weiter verfolgen zu dürfen.

In seinem kürzlich erschienenen Werke »Mesures micrométriques d'étoiles doubles«*) giebt Herr Dunér nicht nur die Resultate seiner eigenen Messungen, sondern stellt auch die Ergebnisse der früheren Beobachtungen für diejenigen Sterne, die bei ihm selbst vorkommen, zusammen. In vielen Fällen giebt er auch neue Bahnberechnungen, die augenblicklich als die genauesten angesehen werden müssen, weil sie auf einer grösseren Anzahl Beobachtungen beruhen, als frühere Berechnungen. Die Abweichungen der einzelnen Beobachtungsresultate von den aus diesen Elementen folgenden Distanzen und Positionswinkeln dürfen daher zum grössten Theil als Beobachtungsfehler angesehen werden. Wir wollen nun sehen, indem wir wieder unser Beispiel den Beobachtungen von ξ Ursae maj. entnehmen, wie sich diese Abweichungen für die Herren Dembowski und Dunér in einzelnen Jahren verhalten.

---

*) Lund 1876.

	Dembowski	Dunér
1863	+ 0″.03	
1864	+ 0.14	
1866	+ 0.05	
1867	+ 0.02	
1868	— 0.03	
1869		+ 0.16
1870	— 0.11	+ 0.08
1871	— 0.12	+ 0.06
1872	— 0.15	+ 0.05
1873	— 0.09	+ 0.04
1874	— 0.04	+ 0.06
1875	+ 0.04	+ 0.08

Es ist nun unverkennbar, dass zwischen diesen Beobachtern in den Jahren 1870—75 eine Differenz von etwa 0″.14 obwaltet; Dunér hat die Distanzen zu klein, Dembowski sie hingegen zu gross erhalten. Würde man also bei der Bahnbestimmung eine Distanz von jedem der beiden Beobachter benutzen, so könnte man eine wesentlich fehlerhafte Bahn erhalten.*) Die Fehler bei Dembowski zeigen überdies das Auffallende, dass sie vor 1870 im Mittel positiv waren, während sie nach diesem Zeitpunkte negativ sind. Eine allein auf seine Beobachtungen basirte Rechnung hätte dann auch zu einem ungenügenden Resultate führen können, ja wegen des raschen Zeichenwechsels wäre man sogar versucht gewesen, an einen dritten, störenden Körper im Systeme zu denken, wenn man nicht aus Erfahrung wüsste, dass auch die besten Messungen von kleinen systematischen Fehlern entstellt sein können, welche zuweilen einen höchst nachtheiligen Einfluss ausüben. — Durch Vergleichung der Resultate verschiedener Beobachter lernt man ihre individuellen Fehler, wenigstens relativ zu einander kennen, und man erhält, indem die hieraus hervorgehenden Verbesserungen angebracht werden, ein mehr homogenes und voraussichtlich fehlerfreies Material zur Verarbeitung, als wenn man die Ergebnisse der einzelnen Beobachter direct anwenden wollte; sobald diese nicht die Verbesserungen, deren ihre Doppelsternmessungen bedürfen, auf andere, directe Weise ermittelt haben.**)

In ähnlicher Weise wie die Distanzen sind auch die Positionswinkel mehr oder weniger von individuellen Fehlern entstellt; man nimmt aber

*) Im Mittel aus allen Beobachtungen sollte die Distanz in den Jahren 1844 und 1864 gleich gross sein, nämlich 2″.50; würde man nun statt dessen die Bahnberechnung auf die Distanzen 2″.43 und 2″.57 gründen, so würde die Bahn natürlich ganz verschoben.

**) Dies ist z. B. bei O. Struve der Fall, der aus der Beobachtung künstlicher Doppelsterne seine systematischen Fehler sowohl für die Distanz, wie für die Positionswinkel abgeleitet hat.

doch an, dass die Bewegung sicherer aus den Veränderungen letzterer erkannt wird, als aus denen der scheinbaren Entfernung, namentlich wenn diese sehr klein ist. — Das Angeführte mag als Andeutung genügen, in welcher Weise das Beobachtungsmaterial gesichtet werden muss, bevor man auf Erfolg bei einer Berechnung der Bahn eines Doppelsterns hoffen kann.

Die kürzeste gegenwärtig bekannte Umlaufszeit in einem Binarsysteme findet sich bei No. 42 im Haupthaar der Berenice, sie beträgt etwas über 25 Jahre, nach ihr kommt die im Systeme ζ Herculis, u. s. w. In der folgenden kleinen, nach der wahrscheinlichen Entfernung vom Sonnensysteme geordneten Zusammenstellung geben wir die Umlaufszeiten nebst den halben grossen Axen der bisher bekannten Bahnen, hauptsächlich um auf die grosse Verschiedenheit der Umlaufszeiten bei nahezu denselben Entfernungen aufmerksam zu machen, woraus, wie wir sogleich sehen werden, auf eine ungleiche Entfernung von uns geschlossen werden kann. Die Berechnung der Zahlen der letzten Columne soll nachher erläutert werden.

Stern	Umlaufszeit im Jahre	Halbe grosse Axe	Hypothetische Parallaxe
α Centauri	77.00	15″.5	0″.856
γ Cassiopeiae	200	10.25	0.300
p Ophiuchi	94.37	4.704	0.227
ξ Bootis	160.69	5.591	0.189
ξ Ursae majoris	60.79	2.547	0.165
ξ Librae	49.05	1.749	0.130
γ Virginis	185.0	3.97	0.122
ζ Herculis	34.72	1.223	0.115
Σ 2173 *)	45.43	1.01	0.080
44 Bootis	261.12	3.098	0.076
42 Comae	25.71	0.657	0.075
α Geminorum	996.85	7.119	0.071
γ Coronae	41.58	0.827	0.069
σ Coronae	845.86	5.885	0.066
Σ 3121	40.62	0.715	0.060
ζ Cancri	62.4	0.908	0.058
Σ 3062	112.64	1.31	0.056
λ Ophiuchi	95.88	0.847	0.040
Σ 1938	290.07	1.500	0.034
ω Leonis	107.62	0.78	0.034
τ Ophiuchi	217.87	1.193	0.033

*) Ein vorgesetztes Σ bezeichnet, dass der Stern unter der angesetzten Nummer in W. Struve's Catalog (Dorpat, 1827) vorkommt.

Die Gleichung (vgl. pag. 214)

$$k\sqrt{m + m'} = 2\pi \frac{a^{\frac{3}{2}}}{T},$$

welche für die Doppelsterne ebenso gilt, wie für die Körper des Sonnensystems, zeigt, dass zu einer kürzeren Umlaufszeit im Allgemeinen auch ein kleinerer Werth der halben grossen Axe gehört. Sieht man trotzdem die Entfernung der beiden Sterne unter einem nicht gar zu kleinen Winkel, so muss man schliessen, dass die Entfernung des Systems von der Sonne eine verhältnissmässig geringe ist Bei einem solchen Schlusse nimmt man indessen an, dass die Summe der Massen m und m' immer nahezu denselben Werth hat. Eine solche Voraussetzung ist zwar an und für sich vollkommen unmotivirt, allein die wirkliche Entfernung der beiden Gestirne wird nach der obigen Formel nur wenig durch eine etwaige Unsicherheit der Massen beeinflusst. Bevor wir dies nachweisen, müssen wir die Bemerkung einschalten, dass, wenn k die Gaussische Constante bedeutet, T in Tagen ausgedrückt werden muss; bei den langsamen Bewegungen in den Binarsystemen ist es jedoch bequemer, die Umlaufszeit in Jahren auszudrücken; alsdann muss das Glied zur Rechten durch 365,256 . . dividirt werden. Erinnert man sich nun, dass

$$k = \frac{2\pi}{365.256\ldots}$$

wenn die Erdmasse neben der Sonnenmasse vernachlässigt wird, so schreibt man die obige Gleichung wie folgt:

$$\sqrt{m + m'} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{T}$$

oder

$$a = T^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{m + m'}\,.$$

Aus der zuletzt angeführten Formel sieht man, dass der Werth von a proportional der Cubikwurzel aus $m + m'$ wächst: ein achtmal grösserer Werth von $m + m'$ würde erst einen zweimal grösseren von a bedingen, und damit a verdreifacht werde, müsste man den Werth von $m + m'$ siebenundzwanzigmal vergrössern. Letztere würden aber Massen sein, wie sie, wenigstens nach unserer jetzigen Kenntniss, wahrscheinlich nicht häufig vorkommen dürften.

Nennen wir R die Entfernung des Doppelsterns von uns und p seine jährliche Parallaxe, so ist

$$R = \frac{1}{\operatorname{Sin} p};$$

bezeichnet ferner d die in Sekunden ausgedrückte halbe grosse Axe, so hat man

$$a = R \operatorname{Sin} d$$

und das Product dieser Gleichungen giebt

$$a = \frac{\operatorname{Sin} d}{\operatorname{Sin} p} = \frac{d}{p}.$$

Dieser Werth in dem vorigen Ausdrucke für a eingesetzt, giebt endlich

$$p = \frac{d}{T^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{m + m'}}.$$

Setzt man in dieser Formel $m + m' = 1$, so erhält man Werthe für p, welche hypothetische Parallaxen genannt werden, weil sie nur, wenn die gemachte Voraussetzung richtig ist, den wirklichen Entfernungen entsprechen. In dieser Weise sind die Zahlen der letzten Columne der obigen Zusammenstellung gewonnen worden.

In zwei Fällen können wir die hypothetischen Parallaxen mit wirklich gemessenen vergleichen, nämlich bei α Centauri und p Ophiuchi. Die Uebereinstimmung ist, wie aus der Zusammenstellung pag. 335 und der zuletzt gegebenen hervorgeht, in der That eine solche, dass man, in Ermangelung directer Messungen, den hypothetischen Parallaxen einige Glaubwürdigkeit zuschreiben muss.

Die Doppelsterne sind nicht die einzigen »Partialsysteme«, die wir in den entfernten Himmelsräumen als solche erkannt haben: es giebt noch drei- und mehrfache Gestirne und endlich ganze Sterngruppen, aus einer grossen Menge scheinbar zusammengedrängter Sterne bestehend. Die Bewegungen in solchen Systemen sind bisher nur sehr mangelhaft erkannt; vor Allem wäre zu ihrer Untersuchung eine ganz andere Lösung des Problems der drei Körper erforderlich, als wir sie gegenwärtig besitzen. — Von den dreifachen Sternen haben wir bereits ζ Cancri und ξ Librae unter den Binarsystemen aufgeführt; der dritte Stern steht entfernter von den beiden anderen, die sich zusammen um den dritten bewegen. Bei den folgenden kurzen Beschreibungen einiger dieser interessanten Systeme bezeichnen wir die drei Sterne resp. mit A, B und C.

ζ Cancri.

Entfernung zwischen A und B: 0″9, zwischen $\frac{A+B}{2}$ und C: 5″5. Umlaufszeit von $\frac{A+B}{2}$ um C etwa 730 Jahre.*)

ξ Librae.

Entfernung zwischen A und B: 1″7, zwischen $\frac{A+B}{2}$ und C: 7″2. Umlaufszeit unbekannt.

---

*) Aus der Umlaufszeit des Doppelsterns um den dritten und der Entfernung 5″5, welche statt der entsprechenden halben grossen Axe genommen wird, folgt die hypothetische Parallaxe: 0″062, also von der im Texte gegebenen nicht sehr verschieden.

ι Cassiopeiae.

Entfernung zwischen A und B: 1″9, zwischen A und C: 7″6. Der Positionswinkel des Paares A und B nimmt jährlich um etwa 0°25 bis 0°30 ab.

ε Equulei.

Entfernung zwischen A und B: 0″87, zwischen $\frac{A+B}{2}$ und C: 10″68. Die Distanz AB nimmt jährlich um 0″016 zu, der Positionswinkel nimmt um 0°816 ab; der Positionswinkel der Richtung $\frac{A+B}{2}$ bis C wird ebenfalls vermindert, und zwar jährlich um 0°08.

In einigen Fällen hat man bemerkt, dass die absolute Bewegung, also die Veränderung der Rectascension und Declination nicht der Zeit proportional erfolgte. Eine solche Erscheinung hat man bisher veränderliche Eigenbewegung genannt, welche Benennung indess nur auf eine vorübergehende Berechtigung Anspruch machen darf, da eine jede uns sichtbare Bewegung in Folge der notorisch vorhandenen Kräfte veränderlich sein und also auch veränderlich genannt werden muss, obgleich wir bis jetzt noch nicht die Veränderungen zu entdecken im Stande sind.

Es war zuerst Bessel, welcher die Ungleichförmigkeit der Bewegung bei Sirius und Procyon bemerkte und er schrieb sie auch ganz folgerichtig dem Einflusse einer in der Nachbarschaft liegenden Masse zu. Bei Sirius ist das Vorhandensein dieser Masse auch durch optische Hülfsmittel bestätigt worden*), eine Bestätigung, die in theoretischer Beziehung von dem grössten Interesse war und dem Erfolge der Untersuchungen Leverrier's in gewisser Weise an die Seite zu stellen ist.

Sirius und Procyon sind also einfach Hauptsterne in Partialsystemen, obgleich man den Begleiter bei Procyon noch nicht mit Sicherheit hat nachweisen können.**)

§ 19. Helligkeit der Sterne.

Wie die Sterne, ihrer scheinbaren Helligkeit nach, in Grössenklassen eingetheilt werden, haben wir schon im Vorhergehenden er-

---

*) Durch A. Clark in Boston im Jahre 1863.

**) Während des Druckes dieses Buches ist ein Aufsatz von Otto v. Struve in dem »Bulletin de l'académie des sciences de St. Pétersbourg« veröffentlicht worden, worin er seine vermuthete Entdeckung eines Procyonbegleiters als zweifelhaft hinstellt. Vor der Hand muss man also annehmen, dass das von Struve gesehene Object nur das Product einer optischen Täuschung war.

wähnt (vgl. pag. 337). Innerhalb jeder Klasse haben die verschiedenen Sterne jedoch nicht dieselbe Lichtstärke, was namentlich bei den Sternen erster Grösse auffällt. Durch genaue photometrische Messungen hat man nämlich für diese die folgenden Werthe der Lichtstärke gefunden, wobei die der Wega als Einheit angenommen wurde: *)

Stern	Helligkeit
Sirius	4.29
Wega	1.00
Rigel	0.99
Capella	0.82
Arcturus	0.79
Procyon	0.70
Atair	0.49
Spica	0.49
Fomalhaut	0.34
Regulus	0.33
Aldebaran	0.30
Antares	0.29

Wir sehen also, dass die Helligkeit des Sirius die des Regulus z. B. um mehr als das Zehnfache übertrifft. Im Allgemeinen, und namentlich bei den höheren Klassen, ist die Helligkeit des schwächsten zu irgend einer Klasse gehörenden Sterns etwa $\frac{4}{10}$ von der des hellsten in derselben Klasse. Wo die scheinbaren Grössen genauer bezeichnet werden sollen, giebt man sie nicht nur in ganzen Zahlen, sondern auch in Decimalen an, unterscheidet also innerhalb jeder Klasse zehn Abstufungen.

Nach v. Littrow's Abzählung in Argelander's Durchmusterung des nördlichen Himmels giebt es in dieser Hemisphäre

10	Sterne	von	der	Grösse	1.0	bis	1.9
37	»	»	»	»	2.0	»	2.9
128	»	»	»	»	3.0	»	3.9
310	»	»	»	»	4.0	»	4.9
1016	»	»	»	»	5.0	»	5.9
4328	»	»	»	»	6.0	»	6.9

*) L. Seidel, Untersuchungen über die gegenseitigen Helligkeiten der Fixsterne erster Grösse (München, 1852).

13593	Sterne	von	der	Grösse	7.0	bis	7.9
57960	»	»	»	»	8.0	»	8.9
237544	»	»	»	»	9.0	»	9.5

Die Gesammtzahl beträgt 314926. Unter Annahme, dass der südliche Himmel eben so sternreich wie der nördliche ist, beträgt die Gesammtzahl der Sterne bis zur Grösse 9.5 also über 600000.

Es ist von Interesse zu berechnen, wie viel Licht die Erde in einer sternhellen Nacht von sämmtlichen Sternen erhält; wir können bei einer solchen Berechnung die obigen Zahlen benutzen, weil nur die Hälfte des Himmels gleichzeitig gesehen werden kann. Bei dieser Rechnung wollen wir ferner annehmen, dass die mittlere Helligkeit eines Sterns erster Grösse 0.5 ist (die Helligkeit der Wega als Einheit gesetzt), die eines Sterns zweiter Grösse $0,5 \times \frac{4}{10} = 0.20$, die eines Sterns dritter Grösse $0.2 \times \frac{4}{10} = 0.08$, u. s. w.; wir erhalten alsdann:

Gesammthelligkeit	von	10	Sternen	erster	Grösse	=	5.0
»	»	37	»	zweiter	»	=	7.4
»	»	122	»	dritter	»	=	10.1
»	»	310	»	vierter	»	=	9.9
»	»	1016	»	fünfter	»	=	13.0
»	»	4322	»	sechster	»	=	22.1
»	»	13593	»	siebenter	»	=	27.8
»	»	57960	»	achter	»	=	47.4
					Summe	=	142.7

Aus diesen Zahlen können wir nun zweierlei entnehmen. Erstens sehen wir, dass die schwächeren Sterne mehr zu der allgemeinen Helligkeit des Nachthimmels beitragen als die helleren, weshalb auch die Anzahl der dem blossen Auge sichtbaren Sterne viel grösser erscheint, als man sie durch wirkliche Nachzählung findet. Ohne optische Hülfsmittel sind nämlich nur die Sterne der ersten sechs Grössenklassen zu unterscheiden; nur ausnahmsweise gute Augen sehen mehr. Zweitens müssen wir aber schliessen, dass der Glanz des Himmels dem der Sonne gleich sein würde, wäre der unendliche Raum in derselben Weise von Sternen erfüllt, wie die uns zunächst liegenden Regionen. Dies ist nun bekanntlich nicht der Fall. Soll man daher zu der Schlussfolgerung gezwungen sein, dass die Sternenwelt begrenzt ist, dass es ausserhalb der uns sichtbaren Materie einen Raum giebt, der entweder ganz leer ist, oder wo die Materie nicht leuchtend genug ist, um uns bemerkbar zu sein? Olbers, der berühmte Astronom und Arzt in Bremen, beantwortet diese Frage: »Keineswegs. Bei jener Folgerung aus der unendlichen Menge der Fixsterne haben wir vorausgesetzt, dass der Weltraum absolut durchsichtig sei, oder dass Licht, aus parallelen Strahlen bestehend, in jeder Entfernung vom strahlenden Körper ganz ungeschwächt bleibe. Diese absolute

Durchsichtigkeit des Weltraumes ist nicht nur ganz unerwiesen, sondern auch ganz unwahrscheinlich.« *) Olbers entwickelt nun ferner die Ansicht, dass die Lichtstrahlen bei ihrem unmessbar weiten Weg in merklicher Weise geschwächt werden, dass sie mithin im Weltraume eine gewisse Absorption erleiden. Das Licht der uns nächsten Sterne wird nur ganz unmerklich abgeschwächt; wenn aber die Entfernungen eine gewisse Grenze erreicht haben, so fängt die Absorption an merklich zu werden, und wächst endlich so, dass die ganze Lichtmenge verschluckt wird, so dass wir die leuchtende Materie ausserhalb einer gewissen Grenze gar nicht mehr erblicken können. Gestützt auf die ziemlich willkürliche Annahme, dass die absolute Helligkeit des Sirius durch die Absorption uns um $\frac{1}{800}$ geschwächt erscheint, berechnet Olbers die scheinbare absolute Helligkeit — also die durch die Absorption verminderte — für einen Stern

in	der	Entfernung	von	84.23	Siriusweiten	zu	$\frac{9}{10}$
»	»	»	»	178.40	»	»	$\frac{8}{10}$
»	»	»	»	285.16	»	»	$\frac{7}{10}$
»	»	»	»	408.41	»	»	$\frac{6}{10}$
»	»	»	»	554.13	»	»	$\frac{5}{10}$

In der Entfernung von 30000 Siriusweiten würde die absolute Helligkeit 1977100000 Millionen mal geschwächt sein.

Diesen Ansichten schliesst sich W. Struve an.**) Er geht aber noch weiter, indem er die Grösse der Absorption numerisch zu bestimmen versucht. Wir dürfen nicht unterlassen, dem berühmten Gründer der Pulkowaer Sternwarte in seinen interessanten Speculationen zu folgen, wenn wir auch seiner Deduction nur einen subjectiven Werth zuerkennen können. Struve berechnet zunächst die raumdurchdringende Kraft des Herschel'schen Teleskopes von 40 Fuss Brennweite und findet dieselbe = 663.94 mal die mittlere Entfernung eines Sterns erster Grösse, welches sagen will, dass ein Stern von der absoluten Leuchtkraft eines Sterns erster Grösse in diesem Teleskope noch sichtbar sein müsste, wenn seine Entfernung die genannte wäre. Unter der Annahme, dass die Sterne gleichmässig im Raume vertheilt sind, lässt sich hiernach die Anzahl Sterne berechnen, welche Herschel im Mittel gleichzeitig in seinem Teleskope hätte sehen müssen. Diese Anzahl berechnet Struve zu 3021, während Herschel thatsächlich nur 122 gesehen hat. Diese somit factisch bewiesene Verminderung erklärt nun Struve durch die Absorption, indem er das Sternlicht durch sie dermassen geschwächt annimmt, dass die schwächsten Herschel'schen Sterne nicht in der Entfernung von 663.94 Sternweiten von uns abstehen, sondern nur in 227.78 mal die mittlere Entfernung eines Sterns erster Grösse.***)

*) Berliner astron. Jahrbuch für 1826, pag. 115.
**) Études d'astronomie stellaire, pag. 83.
***) Je ne vois point d'autre explication que celle d'admettre, que

Es ist zwar keineswegs unwahrscheinlich, dass eine Absorption des Lichtes im Weltraume wirklich stattfindet; allein anderseits kann es uns nicht entgehen, dass die Beweise dafür sehr schwache sind. Die Betrachtungen von Olbers wie auch von W. Struve beruhen nämlich im Grunde auf der Annahme, dass die Sterne im Grossen und Ganzen gleichförmig im Raume vertheilt seien, und zwar so, dass, wenn wir uns einen Kegel denken, dessen Spitze sich in unserem Auge befindet und dessen Axe nach einer gewissen Himmelsgegend gerichtet ist, die Anzahl der Sterne innerhalb eines begrenzten Theiles dieses Kegels dem cubischen Inhalt desselben proportional sei. Nach verschiedenen Richtungen hingegen kann die Sterndichtigkeit eine verschiedene sein, und ist es auch in der That. — Das Volumen eines Kegels wächst nun proportional der dritten Potenz seiner Höhe, mithin muss auch die Sternenanzahl einer gewissen Grössenklasse proportional der dritten Potenz ihrer Entfernung sein. Da man nun aus der Abzählung der helleren Sterne die Sterndichtigkeit ermittelt hat, so lässt sich — die Annahme der gleichförmigen Dichtigkeit innerhalb der verschiedenen Kegel festhaltend — die Anzahl und die scheinbare Helligkeit der Sterne höherer Grössenklassen durch eine leichte Rechnung finden.

Nennt man Q_n die Anzahl aller Sterne von der ersten Grösse bis zur Grösse n, M_n die mittlere Entfernung der Sterne $n$ter Grösse, so hat man (vgl. pag. 338)

$$\frac{M_n}{M_{n-1}} = \sqrt[3]{\frac{Q_{n-1}}{Q_n}} \;;$$

bezeichnet man ferner mit δ das Verhältniss der Helligkeit zweier, um eine ganze Grösse verschiedener Sterne, so ist, weil die scheinbare Helligkeit umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung ist:

$$\delta = \left(\frac{M_{n-1}}{M_n}\right)^2 = \left(\frac{Q_{n-1}}{Q_n}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Fernere Erwägungen zeigen uns leicht, dass der scheinbaren Helligkeit eines Sterns $n$ter Grösse die Lichtstärke

$$\delta^n$$

entspricht, vorausgesetzt, dass wir die Lichtstärke eines Sterns erster Grösse als Einheit annehmen. Die Gesammthelligkeit der Sterne $n$ter Grösse ist daher

$$H_n = (Q_n - Q_{n-1})\,\delta^n \;,$$

---

l'intensité de la lumière décroit en plus grande proportion que la raison inverse des carrés des distances; ce qui veut dire qu'il existe une perte de lumière, une extinction, dans le passage de la lumière par l'espace céleste (études de l'astr. st. pag. 86).

und hieraus findet man

$$\frac{H_n}{H_{n-1}} = \delta \frac{Q_n}{Q_{n-1}} \frac{1 - \frac{Q_{n-1}}{Q_n}}{1 - \frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}}},$$

oder, indem der obige Werth von $\frac{Q_{n-1}}{Q_n} = \frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}}$ berücksichtigt wird,

$$\frac{H_n}{H_{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} = 1.58$$

Man sieht hieraus, dass aus der Annahme, die Sterne seien gleichförmig im unendlichen Weltenraume vertheilt, unmittelbar gefolgert werden müsste, dass die Gesammthelligkeit aller Sterne eine unendlich grosse ist, weil die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{\delta}} + \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^3 + \ldots\ldots$$

einen unendlich grossen Werth hat.

Die Annahme der gleichförmigen Dichtigkeit der Sterne ist jedoch keineswegs begründet, sobald man sich nicht auf die wirklich gezählten Sterne, also auf die neun ersten Klassen beschränkt. Es hindert daher nichts, eine zwar anfangs geringe, in grösseren Entfernungen aber merklicher werdende Verminderung der Sterndichtigkeit vorauszusetzen, wodurch die geringere Sternfülle in Herschel's Gesichtsfelde eben so gut eine Erklärung fände, als durch die Hypothese der Absorption. Nimmt man z. B. an, dass die Sterndichtigkeit (D_n) etwa dem durch die Formel

$$D_n = (0.9959)^{M_n}$$

ausgedrückten Gesetze folge, so liessen sich nicht nur die Ergebnisse der Herschel'schen Sternaichungen (gauges of stars) mit der theoretisch berechneten raumdurchdringenden Kraft seines Teleskopes in Einklang bringen, sondern auch andere Erscheinungen des Himmels erklären, welche Struve als durch die Absorption des Lichtes bedingt annahm.

Bei den so gänzlich verschiedenen Ansichten, welche auf die Resultate der Sternzählungen begründet werden können, hat man Gelegenheit, sich von der Unsicherheit der Schlussfolgerungen zu überzeugen, sobald eine Untersuchung sich den Grenzen des positiven Gebietes der betreffenden Wissenschaft nähert. Die Stellarastronomie, insofern sie nicht auf Grund der Sternbewegungen einige sichere Resultate aufzuweisen hätte, wäre daher auch kaum als in das positive Stadium ihrer Entwicklung eingetreten anzusehen. Man bemerkt aber nicht selten, wie gerade solche Fragen, deren Beantwortung nicht ohne metaphysische Mittel möglich ist, das Interesse geistreicher Menschen zu erwecken im Stande sind; ihr guter Genius und der Scharfblick des Forschers mag sie in vielen Fällen auf den richtigen Weg leiten, aber die Gefahr dürfte doch keine so ganz geringe sein, durch subjective Meinungen in einzelnen Fällen zu Resultaten geführt zu werden, deren Realität im Grunde doch nur eine scheinbare und wesentlich auf der Thätigkeit der Einbildungskraft beruhende ist.

Die Helligkeit ist bei einer Anzahl Sterne nicht immer dieselbe; diese anfangs auffallende Erscheinung hat man längst constatirt und durch sorgfältige Helligkeitsschätzungen gefolgert, dass die Lichtstärke bei vielen der sog. veränderlichen Sterne einem periodischen Wechsel unterworfen ist. Die Helligkeit ändert sich also etwa wie bei dem Monde, jedoch folgen die Phasen bei den Veränderlichen nicht derselben einfachen Regel, wie bei dem erstgenannten Himmelskörper. Die Periode ist nämlich erstens nicht immer dieselbe; denn es giebt Sterne, bei denen man Veränderungen in der Periode des Lichtwechsels nachweisen kann, die selbst einen periodischen Charakter haben. Zweitens erfolgt die Zunahme des Lichtes bei den meisten Veränderlichen rascher als die Abnahme. Drittens hat man bei einigen Sternen eine regelmässig fortgehende Veränderung (bei β Persei und *R* Cancri Verminderung) der Periodendauer, also eine Veränderung von säcularem Charakter bemerkt. Endlich besteht der Verlauf der Phasen nicht immer nur in einer Abnahme der Helligkeit vom Maximum zum Minimum und Zunahme von Minimum zu Maximum, sondern mitunter folgen mehrere Maxima oder Minima auf einander, oder es bleibt auch die Lichtstärke einige Zeit lang constant. Bei β Lyrae z. B. — dem bekanntesten Veränderlichen der letzten Art — schliessen zwei Maxima von nahezu gleicher Intensität ein secundäres Minimum ein, wobei der Stern jedoch wesentlich heller ist, als während des Hauptminimums.

Zur Erklärung des Lichtwechsels der veränderlichen Sterne sind früher Hypothesen aufgestellt worden, die wohl mehr von subjectiver Bedeutung waren, als dass sie dem wissenschaftlichen Bedürfnisse entsprachen, bis es endlich Prof. Zöllner gelang, die Erscheinungen des Lichtwechsels im Allgemeinen auf eine richtige Ursache zurückzuführen.*) Zöllner schliesst sich den kosmogonischen Vorstellungen von Kant und Laplace an; er geht von der nunmehr unzweifelhaft feststehenden Thatsache aus, dass die Materie in glühendem Zustande, zu Kugeln zusammen-

*) Zöllner, Photometr. Untersuchungen. Leipzig 1865.

geballt, die Weltkörper bildet, die wir Sterne nennen.*) Die Temperatur der Materie ist aber keineswegs überall dieselbe. Der feine kosmische Staub, welcher wahrscheinlich die Räume erfüllt, die Sternschnuppenschwärme und wahrscheinlich auch die äusseren Theile der Cometen haben jedenfalls eine sehr niedrige Temperatur. Man hat Meteorsteine kurz nach dem Niederfallen in Bezug auf ihre Temperatur untersucht und diese sehr niedrig befunden. Vermöge der Ausstrahlung findet nun eine Abkühlung der geschmolzenen Massen statt, welcher Process nothwendig mit einer Abnahme der Lichtintensität verbunden ist. Erfolgt diese Abkühlung aber nicht gleichförmig über die ganze Oberfläche des Körpers, so werden einige Theile derselben uns heller erscheinen als andere, und die Rotation der ganzen Masse muss offenbar die Erscheinung des periodischen Lichtwechsels hervorbringen. Das Allgemeine der Erscheinung ist demnach in einer vollkommen genügenden Weise erklärt, denn es sind dabei keine anderen Voraussetzungen gemacht als solche, deren Berechtigung von selbst einleuchtet, d. h. aus der Anwendung allgemein gültiger physikalischer und logischer Gesetze sich ergiebt. Das Auftreten mehrerer Maxima, sowie überhaupt die periodisch wiederkehrenden Eigenthümlichkeiten der Lichtveränderung lassen sich nach Zöllner durch die Configuration der dunkleren Theile erklären. — Den Grund der langsamen Zu- oder Abnahme der Periodendauer sucht Argelander in der Aenderung der Geschwindigkeit in Richtung des Visionsradius. Eine derartige Aenderung der Geschwindigkeit müsste nämlich auf die Lichtzeit einen solchen Einfluss ausüben, dass diese nicht der Zeit proportional wachsen oder abnehmen könnte, wie es bei einer gleichförmigen Bewegung des Sterns der Fall sein würde. Wäre die Lichtzeit stets dieselbe, so würde die beobachtete Periodendauer mit der wirklichen identisch sein, bei gleichmässiger Zu- oder Abnahme der Lichtzeit findet man allerdings nicht die wahre Rotationszeit, allein man müsste doch stets denselben Werth für dieselbe erhalten. Wenn aber die Aenderung der Lichtzeit in ungleichförmiger Weise vor sich geht, so können, wie eine einfache Ueberlegung lehrt, die aus den Beobachtungen geschlossenen Perioden nicht identisch erhalten werden, wenn man sie zu verschiedenen Zeiten bestimmt. — Eine allmälige Ausbreitung der dunkleren Partien oder der »Schlackenbildung« (nach Zöllner's Ausdrucksweise) muss natürlich ebenfalls Aenderungen der scheinbaren Rotationszeit hervorbringen.

---

*) Die hohe Temperatur der Sonne lässt kaum einen Zweifel darüber, dass sie aus Materie in geschmolzenem Zustande, umgeben von einer glühenden Gashülle, besteht. Es schien angemessen, in diesem Buche keine Darstellung der kosmogonischen Hypothese von Kant und Laplace zu geben, und zwar deshalb, weil dieselbe wohl noch erheblicher Modificationen bedarf; namentlich ist die Geschichte der Erde nicht einfach aus jener Hypothese zu folgern.

Am wenigsten scheint die Zöllner'sche Theorie der Thatsache zu genügen, dass Aenderungen der Periode vorkommen, die selbst periodischer Natur sind. Aber dieser Mangel dürfte vielleicht doch nur scheinbar sein. Man denkt nämlich zunächst nur an solche Rotationsbewegungen, welche um eine mit sich selbst parallel bleibende Axe, die mit dem rotirenden Körper fest verbunden ist, erfolgen; aber das allgemeine Gesetz der Rotationsbewegung ist nicht so einfach. Es kann nur eine Folge besonderer Umstände sein, wenn die Rotationsaxe in dem rotirenden Körper eine unveränderliche Lage hat, im Allgemeinen muss man vielmehr voraussetzen, dass diese Axe, die parallel mit sich selbst im Raume bleibt, ihre Lage relativ zu den Massentheilen des Körpers fortwährend ändert (vgl. pag. 196). Die Oberfläche des Körpers befindet sich alsdann in einer zweifachen Drehung, aus welcher die periodischen Aenderungen der scheinbaren Rotationszeit vielleicht ganz ungesucht hervorgehen.

Es ist sehr wahrscheinlich, dass auch unsere Erde in einem früheren Stadium ihrer Entwicklung eine glühende Kugel gewesen ist, dass sie aber die jetzige Gestalt ihrer Oberfläche zum grossen Theil plutonischen Einflüssen zu verdanken hat. Wir sind demnach nicht gerade zu der Annahme gezwungen, dass die Erde auch stets um ihre jetzige Axe rotirt hat, obgleich in der That die Massentheile sich nach und nach so gelagert haben, dass die Erde relativ zur Axe eine feste Lage erhielt. Eine Voraussetzung im entgegengesetzten Sinne, oder dass die Erde in früheren Zeiten um andere Axen rotirt hat, würde vielleicht eine Erklärung der von den Geologen nachgewiesenen klimatischen Veränderungen vorhistorischer Zeiten, insbesondere der sog. Eis- oder Glacialzeit ermöglichen.

Die sog. neuen Sterne, die mitunter am Himmel erschienen sind*), stehen mit den Veränderlichen im engsten Zusammenhange; ihr plötzliches Aufleuchten verdanken sie nach den neuesten Ergebnissen der Spectralanalyse gewaltigen Eruptionen glühender Gasmassen, die sich innerhalb der schon relativ kalten und deshalb dunklen Oberflächenkruste entwickeln. Sie überstrahlten, wie der berühmte Tychonische Stern, der 1572 in der Cassiopeja erschien, oft selbst die Venus zur Zeit ihrer grössten Helligkeit, verschwanden aber meist nach wenigen Monaten dem blossen Auge.

---

*) Man hat seit 134 vor Chr. 22 notirt, den neuesten erst im November 1876.

§ 20. Scheinbare Vertheilung der Sterne.

Ueber die Vertheilung der Sterne am Himmelsgewölbe ist nichts Wesentliches zu bemerken, so lange man nur die vier ersten Grössenklassen berücksichtigt; nirgends bemerkt man eine besondere Anhäufung dieser helleren Sterne und ebensowenig giebt es eine Himmelsgegend, wo sie auffallend wenig vertreten wären. Anders wird jedoch das Resultat, wenn die lichtschwächeren Sterne, bis zur 10ten Grösse etwa, in Betrachtung gezogen werden. Man findet dann, dass die Sterne in überwiegender Anzahl in der Nähe des schwach schimmernden Gürtels, den wir die Milchstrasse nennen, vorkommen. Schon W. Struve konnte nachweisen, dass die Verdichtung der in gewöhnlichen Meridianinstrumenten sichtbaren Sterne mit der Erscheinung der Milchstrasse in Verbindung steht. Seine Untersuchungen sind wesentlich auf die Bessel'schen Zonenbeobachtungen gegründet.

Zunächst untersucht Struve die Vollständigkeit der Bessel'schen Zonen, indem er sie mit anderen Sternverzeichnissen vergleicht, und findet dabei, dass die Zonen nur 60 Procent der Gesammtzahl aller Sterne bis inclusive 9ter Grösse zwischen -15° und $+15^\circ$ der Declination enthalten. Es zeigt sich ihm aber auch, dass die Vollständigkeit der Zonen in verschiedenen Rectacensionen etwas ungleich ist, und mit Berücksichtigung dieses Umstandes findet er den Gürtel zwischen -15° und $+15^\circ$ in folgender Weise von Sternen erfüllt:

Stunde der Rectasc.	Sterne bis incl. 9ter Grösse	Mittlere Sternzahl im Gesichtsfelde des Herschel'schen Telescops	Relative Dichte
0	2055	9.3	0.34
1	1516	7.4	0.27
2	1609	7.7	0.29
3	1547	6.9	0.26
4	2146	21.6	0.80
5	2742	49.3	1.82
6	4422	71,4	2.64
7	3575	67.8	2.51
8	2854	32.4	1.20
9	1973	10.4	0.39
10	1631	5.9	0.22
11	1797	4.9	0.18
12	1604	5.0	0.19

Stunde der Rectasc.	Sterne bis incl. 9ter Grösse	Mittlere Sternzahl im Gesichtsfelde des Herschel'chen Telescops	Relative Dichte
13	1533	8.7	0.32
14	1766	8.9	0.33
15	1896	9.7	0.36
16	1661	15.8	0.59
17	2111	37.1	1.37
18	3229	84.0	3.11
19	2751	102.1	3.78
20	2566	40.1	1.49
21	1752	20.5	0.76
22	1652	12.8	0.47
23	1811	8.1	0.30

Die Milchstrasse bildet, wie bekannt, einen schwach leuchtenden Gürtel am Himmel; sie zieht sich, zum Theil gezweigt, auf der nördlichen Halbkugel durch die Sternbilder Adler, Schlange, Schwan, Cassiopeja, Perseus, Fuhrmann (Auriga) und geht zwischen Orion und dem kleinen Hund in die südliche über, wo sie durch die Sternbilder Einhorn (Monoceros), Schiff, Kreuz, Scorpion und Schütze mit Unterbrechungen und eigenthümlichen Verzweigungen fortgesetzt wird. Dem blossen Auge erscheint sie wie ein zarter, ungleich leuchtender Wolkenzug, in Herschel's Telescop wurde sie aber grösstentheils in Sterne aufgelöst. Ihr Zug am Himmelsgewölbe ist, wenn man von den Verzweigungen und Unregelmässigkeiten absieht, nahezu ein grösster Kreis, dessen Nordpol die Rectascension $12^h\ 33^m$ und die Declination 30° hat. Den Aequator schneidet sie in nahezu 7^h und 18^h der Rectascension. — Betrachten wir nun die Zahlen der vorstehenden Tabelle, so finden wir sogleich, dass der grösste Sternreichthum in der Aequatorealzone gerade da stattfindet, wo die Milchstrasse die Zone durchschneidet. Schon in der Zusammenstellung der Sterne bis incl. 9ter Grösse merkt man diese Thatsache deutlich genug, aber bei den Herschel'schen Sternen ist die Abhängigkeit ihrer Häufigkeit von der Milchstrasse noch viel auffallender.

Dächten wir uns alle Sterne bis incl. 9ter Grösse als innerhalb einer Oberfläche eingeschlossen, so könnten wir dieser beiläufig die Form eines abgeplatteten Ellipsoides zuschreiben, dessen halbe grosse Axe zu der kleinen sich etwa wie 1.3 zu 1 verhält, vorausgesetzt, dass man aus der Vertheilung innerhalb der Aequatorealzone auf die am ganzen Himmel schliessen darf. Für die Herschel'schen Sterne würden diese Axen sich wie 2.3 zu 1 verhalten.*)

*) Man findet diese Verhältnisse, indem die Kubikwurzeln aus den entsprechenden Sternmengen gezogen werden (vergl. p. 338).

Solche Schlüsse gelten indessen nur unter der Voraussetzung, dass die Sterndichtigkeit in verschiedenen Abständen derselben Richtungen dieselbe ist; andernfalls muss man schliessen, dass die Sterndichtigkeit in den mit der Ebene der Milchstrasse parallelen Schichten verschieden ist, und zwar dass sie in dem Maasse abnimmt, wie diese Schichten von der genannten Ebene entfernt liegen. In dieser Weise glaubt auch Struve schliessen zu müssen: er betrachtet sämmtliche uns sichtbare Sterne, also auch die Herschel'schen, als zu einem einzigen immensen Sternhaufen gehörig. Die äussere Form dieses Sternhaufens können wir nicht bestimmen, wohl aber das Gesetz, nach welchem die Sterndichtigkeit zu beiden Seiten der Hauptebene abnimmt. In dieser Beziehung gelangt er zu folgendem Resultate (wo φ den Winkel zwischen dem Visionsradius und der Hauptebene der Milchstrasse bezeichnet):

φ	Anzahl der Sterne in Herschel's Telescop
0°	122.0
15°	30.3
30°	17.7
45°	10.4
60°	6.5

Nennt man ferner x die senkrechte lineare Entfernung von der Hauptebene und drückt sie in dem Abstande der Herschel'schen Sterne als Einheit aus, so gelten nach Struve folgende Werthe:

x	Mittlere Sterndichtigkeit	Mittlere Entfernung zwischen zwei Sternen
0.00	1.000	1.00
0.05	0.486	1.27
0.1	0.333	1.46
0.2	0.239	1.61
0.3	0.180	1.77
0.4	0.130	1.97
0.5	0.086	2.26
0.6	0.055	2.63
0.7	0.031	3.19
0.8	0.014	4.14

Wir haben diese Zahlen mitgetheilt, weil man sich aus ihnen leicht eine Vorstellung über die wirkliche Vertheilung der uns noch sichtbaren Sterne bilden kann; es darf aber nicht vergessen werden, dass sie unter der Voraussetzung abgeleitet worden sind, die Dichtigkeit innerhalb jeder Schicht sei überall dieselbe.— Unter den Sternen der neun ersten Grössenklassen ist die relative Verminderung der Dichtigkeit weit geringer; aus den Untersuchungen Struve's kann man z. B. die nachstehenden Werthe berechnen, die für die Sterne bis incl. 8ter Grösse gelten. *)

*) Etudes d'astr. st. p. 75.

x' *)	Mittlere Sterndicht.
0.0	1.000
0.1	0.818
0.5	0.328
1.0	0.284

Hier erfolgt, wie man sieht, die Abnahme in einem ganz andern Verhältnisse als bei den Herschel'schen Sternen; die Abnahme der Sternfülle befolgt mithin verschiedene Gesetze bei diesen beiden Sternkategorien.

Gegenwärtig besitzen wir in dem grossartigen Werke Argelander's »Bonner Sternverzeichniss« die Mittel, ähnliche Untersuchungen mit grösserer Aussicht auf Erfolg vorzunehmen, als die früheren Zonenbeobachtungen Struve gewähren konnten. Wir wollen zunächst einen kleinen Auszug aus den Zusammenstellungen Argelander's über die Sternfülle in verschiedenen Himmelsgegenden geben.**) Dieser Auszug enthält die Sternmengen Q_7 und Q_8, sowie die aus Q_7 nach der Formel

$$Q_8 = Q_7 \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^3, \text{***)}$$

wo

$$\delta = 0.417,$$

berechnete Werthe von Q_8. Aus der Vergleichung der Rechnung mit den Resultaten der Beobachtung lassen sich einige Schlüsse in Bezug auf die Vertheilung der Sterne ziehen. Die letzte Columne enthält endlich den in Quadratgraden ausgedrückten Flächeninhalt am Himmel, auf welchem die in den vorherstehenden Columnen angegebenen Sterne vertheilt sind.

Himmelsgegend	Q_7	Q_8	Berechn. Q_8	Flächeninhalt
die 5 sternärmsten Trapeze	40	135	147	114°
am Nordpol der Milchstrasse	20	45	78	22°
30° vom Pol	115	398	427	259°
50° vom Pol	143	471	531	254°
70° vom Pol	177	614	658	254°
ungetheilte Milchstrasse	380	1390	1412	336°
nördlicher Zweig	232	755	870	203°
südlicher Zweig	194	729	721	205°
zwischen der Milchstrasse	239	840	888	219°
105° vom Pol	229	805	851	285°
125° vom Pol	141	471	524	267°
140° vom Pol	47	177	175	124°
die ganze Milchstrasse	806	2874	3002	744°

*) Die Einheit für x' ist die mittlere Entfernung der Sterne 8ter Gr.
**) Einleitung zu dem Vten Bande der Bonner Beob.
***) Vgl. pag. 339. Die Constante ist ein Mittelwerth aus sehr verschiedenen photometrischen Messungen; während die Bestimmung $\delta =$

Die fast durchweg aus der Beobachtung geringer als aus der Berechnung gefundenen Sternmengen deuten an, dass die Sterndichtigkeit fast nach allen Richtungen allmälig geringer wird. Für die Sterne 9ter Grösse kann man auf Grund der Argelander'schen Angaben keine ähnliche Untersuchung anstellen, weil die neunte Klasse bei ihm eine sehr grosse Anzahl Sterne enthält, die eigentlich zu der 10ten Grössenklasse gehören. Gestützt auf einige, allerdings spärliche Messungen von Dr. Rosén*) kann man indessen schliessen, dass die schwächsten bei Argelander vorkommenden Sterne eigentlich zu der Klasse 10.2 gezählt werden müssen. Zählt man nun, einer Angabe von Argelander folgend (Bonner Beob. Band V, Einleitung), die Sterne der Klassen 9.4 und 9.5, sowie auch die Hälfte der Sterne 9.3 ab, so erhält man für den ganzen Himmelsraum der Bonner Durchmusterung als Anzahl der Sterne 9ter Grösse:

$$Q_9 = 182606.$$

Wir nehmen ferner als eine Hypothese an, dass die Anzahl der Sterne 10ter Grösse gefunden wird, wenn man die Summe der Klassen 9.4, 9.5 und der halben Klasse 9.3 verdoppelt; diese Hypothese wird Q_{10} eher zu gross als zu klein finden lassen, denn die genannte Summe enthält jedenfalls den grössten Theil der Sterne bis zur Grösse 10.2. Die Rechnung ergiebt dann

$$Q_{10} = 506338.$$

Berechnet man diese Werthe von Q_9 und Q_{10} nun aus dem sicher erkannten

$$Q_8 = 77794,$$

indem letzterer mit $\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^3$ resp. $\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^6$ multiplicirt wird, so findet sich:

$$Q_9 = 289100; \quad Q_{10} = 1074000.$$

Berechnet man dagegen Q_{10} aus dem aus den Beobachtungen geschlossenen Werthe von Q_9, so wird

$$Q_{10} = 678600.$$

Man findet also in allen diesen Fällen, dass die wirklichen Sternmengen einer gewissen Grössenklasse weit geringer sind, als die aus der Anzahl der vorhergehenden Klasse berechneten. Bei den helleren Sternen findet dies aber keineswegs, oder doch nur in sehr geringem Maasse und dabei unregelmässig statt. Durch die von Struve vorausgesetzte Extinction des Lichtes würde die Erscheinung allerdings zum Theil erklärt werden können, jedoch nicht vollständig; auch können wir nicht annehmen, dass der Werth von δ wesentlich fehlerhaft ist, denn der auf photo-

---

0.426 aus den Beobachtungen der Sterne 7—9ter Grösse abgeleitet worden ist.

*) Bulletin de l'acad. imp. des sciences de St. Pétersbourg 1869.

metrischem Wege von Rosén gefundene Mittelwerth $\delta = 0.417$ stimmt sehr nahe mit demjenigen überein, welcher sich aus den Werthen von Q_6, Q_7 und Q_8 im Mittel ergiebt, nämlich mit

$$\delta = 0.423.$$

Aus diesen Gründen scheint man einigermaassen zu dem Schlusse berechtigt zu sein, dass die Sterndichtigkeit in der mittlern Entfernung der Sterne 9ter bis 10ter Grösse etwas geringer ist als bei den helleren, ein Schluss, der indess, wie man leicht bemerkt, noch sehr der Bestätigung bedarf.

Es liegt nun weder der Schluss zu fern, noch erscheint die Vermuthung zu unbegründet, dass die in gewöhnlichen Instrumenten sichtbaren Sterne ein besonderes System, wahrscheinlich von sphäroidischer äusserer Form bilden. Obgleich dieses Sternsystem alsdann nicht mit den einzelnen Sternen der Milchstrasse in Connex steht, so liegt der Aequator des ersteren doch nahezu in der Ebene, welche durch das Milchstrassenlicht bezeichnet wird. Die Milchstrasse selbst könnten wir uns aber aus mehreren oder sehr vielen derartigen Sternsystemen zusammengesetzt denken, die wegen der grossen Entfernungen als Nebelmassen erscheinen und nur in sehr mächtigen Telescopen in Sternschwärme aufgelöst werden.

Man bemerkt ausserdem eine grosse Anzahl Nebel, die sogar gerade da am häufigsten vorkommen, wo der Himmel an eigentlichen Sternen am ärmsten ist. Viele sind in Sterngruppen aufgelöst worden, andere aber nicht, und die Spectralanalyse hat gezeigt, dass es unter diesen solche giebt, die glühende Gasmassen sind. Aus den epochemachenden Entdeckungen und Beobachtungen von William und Sir John Herschel geht hervor, dass in der Vertheilung der eigentlichen Nebel nahezu das umgekehrte Verhältniss stattfindet, wie bei den Sternen und Sternhaufen: die Nebel erscheinen am zahlreichsten in 12^h Rectascension, nahe den Polen der Milchstrasse, am seltensten in der Milchstrasse. — Man kennt durch die Arbeiten der beiden Herschel, von d'Arrest, Rosse, Dunlop u. A. mehr als 5000 Nebel und Sternhaufen, von denen die meisten freilich nur in lichtstarken Instrumenten wahrzunehmen sind.

Das interessante Kapitel der Nebelwelt gehört in die beschreibende Astronomie; eine auch nur gedrängte Darstellung der Erscheinungen dieser merkwürdigen Gebilde würde den Raum, über welchen wir hier noch zu verfügen haben, zu sehr in Anspruch nehmen. Nur die eine Bemerkung erlauben wir uns, dass diese Erscheinungen mehr in physikalischer als in mechanischer Hinsicht interessante Punkte darbieten; die fortgesetzten Beobachtungen derselben werden aber sicherlich auch das Studium der Nebel immer mehr auf das Gebiet herüberführen, dem diese Schrift vorzugsweise gewidmet ist, auf das Gebiet der Astronomie als Bewegungslehre der Gestirne.

§ 21. Die Bewegungen der Sterne.

Schon aus dem Grunde, weil wir keinen materiellen Punkt uns als absolut ruhend vorstellen können, müssen wir den Sternen Bewegungen zuschreiben, selbst wenn solche nicht durch die Erfahrung bekannt wären. Es handelt sich aber keineswegs um die Frage, ob die Sterne sich bewegen, sondern lediglich nur darum, wie ihre Bewegungen beschaffen sind und ob wir sie bemerken können. Wegen der sehr grossen Entfernungen, auch der nächsten Sterne, müssen die Bewegungen in der That sehr bedeutend sein, wenn sie durch die Veränderungen der Sternörter bald und in auffallender Weise bemerklich werden sollen. Sind sie nach ihrer absoluten Grösse mit den Bewegungen der Planeten im Raume vergleichbar, so können wir sie nur durch sehr langsame Aenderungen der Rectascensionen und Declinationen erkennen. In der That sind auch die scheinbaren Bewegungen der Sterne sehr gering und betragen nur ausnahmsweise mehr als eine Sekunde jährlich. Die grössten bis jetzt bekannten sind die der folgenden Sterne:

Stern	Jährl. scheinb. Beweg.
No. 1830 Groombr.	7.″05
61 Cygni	5.22
No. 21185 Lalande	4.73
ε Indi	4.51
No. 21258	4.40
o^2 Eridani	4.09
μ Cassiopejae	3.83
α Centauri	3.67
No. 34 Groombr.	2.81
α Bootis	2.26
No. 3077 Bradley	2.09
β Hydri	2.06
σ Draconis	1.93
τ Ceti	1.90
ε Pavonis	1.63
61 Virginis	1.45
Procyon	1.33

Stern	Jährl. scheinb. Beweg.
γ Serpentis	1.32
85 Pegasi	1.30
No. 17415 Oeltzen	1.27
Sirius	1.25
30 Scorpii	1.23
36 Ophiuchi	1.23
η Cassiopejae	1.23
δ Trianguli	1.20
20 Crateris	1.18
β Comae Ber.	1.17
θ Ursae majoris	1.13
70 Ophiuchi	1.11
72 Herculis	1.05
31 Aquilae	1.01

In dieser Zusammenstellung sind die scheinbaren Bewegungen der helleren Sterne (sowie auch einiger schwächeren) von mehr als einer Sekunde aufgenommen. Da nun die Parallaxen einiger dieser Sterne bekannt sind, so können wir uns eine Vorstellung über den linearen Betrag der Bewegungen bilden und gelangen auf diesem Wege zu dem Schlusse, dass die wirklichen Bewegungen ohngefähr von derselben Ordnung sind, wie man sie im Sonnensysteme findet.

Sternbewegungen wurden zuerst von Halley nachgewiesen, indem er nach Anbringung der Präcession die im Almagest gegebenen Sternörter mit neueren verglich. Er fand in dieser Weise, dass die Sterne α Tauri (Aldebaran), Sirius und Procyon eine nach Süden hin gerichtete scheinbare Bewegung haben. Die Ptolemäischen Oerter stellten sich nämlich um so viel nördlicher als die später durch neuere Beobachtungen hergeleiteten heraus, dass die Unterschiede weder den Beobachtungsfehlern, noch irgend einem andern Umstande zugeschrieben werden konnten, als dass die genannten Sterne wirklich die Erscheinung einer Bewegung darboten. — Im 18. Jahrhundert wurde die Kenntniss der Sternbewegungen im Ganzen zwar wenig gefördert, aber der Grund zu ihrer zukünftigen Erforschung durch die vorzüglichen Beobachtungen Bradley's gelegt. Erst seit dem Ende des genannten Jahrhunderts fangen die Untersuchungen dieses wichtigen und zukunftsreichen Theiles der Astronomie an ausgedehnter und fruchtbringender zu werden. Durch die Catalogarbeiten von Piazzi und durch Bessel's Berechnung der Bradley'schen Beobachtungen (die »Fundamenta astronomiae«), sowie durch die späteren Bemühungen von Strúve, Argelander, Mädler und endlich durch die auf der Greenwicher Sternwarte ausgeführte Vergleichung der dortigen Beobachtungen mit den Bradley'schen, besitzen wir gegenwärtig die Kenntniss von wohl mehr als 4000 Bewegungen, d. h. von deren Richtung und jährlichem Betrage. In den letzten Jahren haben wir überdies von der südlichen Halbkugel werthvolle Beiträge durch die Arbeiten in Melbourne und am Cap, sowie der nordamerikanischen Expeditionen erhalten. Im Ganzen sind unsere Kenntnisse von den Bewegungen der südlichen Sterne jedoch noch mangelhaft, ein Umstand, der bei den stellarastronomischen Untersuchungen um so fühlbarer wird, als diese nicht, wie es im Sonnensysteme der Fall ist, auf die Bewegungen vereinzelter Körper begründet werden können, sondern sich auf Mittelwerthe von Bewegungen, die möglichst über den ganzen Himmelsraum vertheilt sind, stützen müssen.

Die Ermittelung der scheinbaren Sternbewegungen geschieht durch die Vergleichung von wenigstens zwei, aber besser noch mehreren beobachteten mittleren Oertern des Gestirns, nachdem diese durch Anbringung der Präcession auf dieselbe Epoche reducirt worden sind. Ein Beispiel, das wir aus Argelander's »Untersuchungen über die Eigenbewegungen von 250 Sternen« entlehnen, wird das Verfahren anschaulich machen. Die erste Columne enthält die Namen der Beobachter oder der Sternwarten, die zweite das Beobachtungsjahr, die dritte die Zeit des mittleren Aequinoctiums, auf welche die Rectascension und Declination bezogen ist. Die vierte und siebente enthalten die den in der dritten Columne gegebenen Epochen entsprechenden Rectascensionen und Declinationen; in der fünften und achten findet man die Oerter reducirt auf die Epoche 1855.0, welche miteinander bis auf die Beobachtungsfehler übereinstimmen sollten, falls die Bewegung unmerklich wäre. Aus den Zahlen dieser Columnen erhält man den Ort des Sterns sowie seine Bewegung, nämlich:

No. 21258 Lalande.

Æ 1855.0	Jährliche Aend.	Decl. 1855.0	Jährl. Aend.
$10^h\ 58^m\ 15^s.465$	$-0^s.4004$	$+\ 44^\circ\ 16'\ 13''.91$	$+\ 0''.943$

woraus endlich die Zahlen der sechsten und neunten Columne erhalten worden sind. Die Unterschiede der Zahlen dieser Columne von den entsprechenden der beiden vorhergehenden dürfen wir als durch die Fehler der Beobachtung hervorgerufen ansehen.

Catalog	Epoche der Beob.	Epoche des Ortes	Æ der Epoche	Æ 1855.0
Lalande	1793.30	1800	$10^h\ 55^m\ 31^s.83$	$10^h\ 58^m\ 40^s.31$
Bessel	1831.23	1825	56 42.21	24.89
Bonn	1860.34	1855	58 13.37	13.37
Pulkowa	1861.69	1862	58 36.74	12.82
Königsberg	1862.09	1862	58 36.49	12.58
Bonn	1862.29	1855	58 12.54	12.54
Bonn	1863.19	1855	58 12.14	12.14
Bonn	1865.25	1855	58 11.38	11.38

Bedeutet x die Rectacension (oder Declination) für 1855.0 und y die jährliche Aenderung derselben Coordinate, so erhält man aus jeder beobachteten Rectacension, resp. Declination, eine Bedingungsgleichung der Form

$$\text{Beob. Ort} = x + y\,(t - 1855.0),$$

wo t die Epoche der Beobachtung bezeichnet. Aus zwei Gleichungen können die beiden Unbekannten x und y bestimmt werden. Wir nehmen beispielsweise die erste und letzte der obigen Rectascensionen heraus und erhalten alsdann

$$10^h\ 58^m\ 40^s.31 = x - 61.70\,y$$
$$10\ \ 58\ \ 11.38 = x + 10.25\,y$$

Der Unterschied beider Gleichungen giebt

$$-28^s.93 = 71.95\,y$$

oder

$$y = -0^s.4022$$

wonach der Werth:

$$x = 10^h\ 58^m\ 15^s.50$$

gefunden wird. Diese Werthe sind schon den richtigen ziemlich nahe; die vorhandenen Beobachtungen gestatten aber eine genauere Bestimmung der gesuchten Grössen. Zu diesem Zwecke wendet man auf sämmtliche, aus den gegebenen Beobachtungen hervorgehenden Bedingungsgleichungen die Methode der kleinsten Quadrate an und bestimmt somit die wahrscheinlichsten Werthe von x und y.

In dieser Weise hat Mädler die Bewegungen von allen in dem Bradley'schen Cataloge vorkommenden Sternen ermittelt, die Anzahl derselben beläuft sich auf 3222. Aus den Einzelresultaten dieser umfassenden Arbeit hat er gewisse Mittelwerthe gebildet, aus denen wir beinahe Alles ableiten können, was bis jetzt über die Natur der Sternbewegungen ermittelt wurde; wir führen daher Folgendes aus seiner Arbeit an.*) Mädler untersuchte zunächst die Bewegungen innerhalb zwei, mit dem Aequator

*) Dorpater Beobachtungen Band XIV.

Rechn.	Decl. der Epoche	Decl. 1858.	Rechn.
10h 58m 40s.17	+ 44° 32′ 59″.5	+ 44° 15′ 18″.1	+ 44° 15′ 15″.7
24.98	25 29.3	49.9	51.5
13.33	16 18.6	16 18.6	18.9
12.79	14 4.7	20.1	20.2
12.63	14 6.4	21.7	20.6
12.55	16 20.3	20.3	20.8
12.19	16 20.8	20.8	21.6
11.36	16 23.9	23.9	23.6

parallelen, 30° breiten Zonen, von denen die eine nördlich (von 0° bis + 30°) und die andere südlich (von 0° bis —30°) vom Aequator liegt. Die Bewegungen innerhalb jeder dieser Zonen werden in 24 Gruppen getheilt, jede einer Stunde der Rectascension entsprechend. In solcher Weise sind die folgenden Mittelwerthe entstanden:

Stunde	Bewegung in 100 Jahren nördliche Zone	südliche Zone
0h	+ 1″.75	+ 3″.74
1	+ 2.17	— 1.90
2	+ 4.23	+ 3.44
3	+ 2.44	— 1.01
4	+ 7.27	— 4.93
5	+ 3.02	— 2.56
6	+ 0.83	+ 1.75
7	— 2.86	+ 0.38
8	— 4.67	— 0.27
9	— 6.92	— 0.34
10	— 5.01	— 5.58
11	— 3.78	— 4.63
12	— 3.05	— 9.35
13	—12.91	— 3.23
14	— 6.18	— 3.32
15	+ 0.81	+ 0.29
16	— 4.18	+ 1.95
17	+ 0.48	— 1.78
18	+ 1.64	+ 1.27
19	+ 4.98	+ 3.52
20	+ 2.07	+ 3.65
21	+ 5.46	+ 4.89
22	+ 9.46	+ 3.70
23	+ 6.60	+ 5.10
Mittel	+ 0.1566	— 0.2170

Das allgemeine Mittel beläuft sich auf nur $-0''.0302$, ein Beweis, dass die bei den Rechnungen angewandte Präcession (die von Bessel bestimmte Constante) sehr nahe richtig ist. Denn wäre die Präcessionsconstante z. B. zu gross angenommen worden, so hätte man die Bewegungen nothwendig durchschnittlich zu klein finden müssen, was sich durch das Vorherrschen des negativen Vorzeichens bemerkbar gemacht haben würde (vgl. p. 324).

Bei einem auch nur flüchtigen Anblick der soeben angeführten Zahlenreihen fällt eine gewisse Gesetzmässigkeit, die sich nahezu in gleicher Weise in den beiden Zonen zeigt, sogleich auf. Noch deutlicher geht dies hervor, und wir erhalten zugleich eine tiefere Einsicht in die Natur der Erscheinung, wenn wir aus einzelnen Zahlen eine Formel herstellen, in der Weise, wie es pag. 98 beschrieben wurde. Nachdem aus den beiden Zahlenreihen Mittelwerthe gebildet waren, fand sich für die säculäre Aenderung der Rectascensionen der Ausdruck:

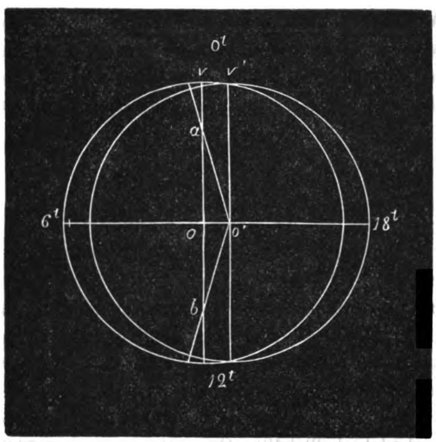
$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} -0''.03 + 4''.98 \operatorname{Cos} \alpha &- 0''.82 \operatorname{Sin} \alpha \\ - 0.79 \operatorname{Cos} 2\alpha &- 0.99 \operatorname{Sin} 2\alpha \\ + 0.48 \operatorname{Cos} 3\alpha &- 0.26 \operatorname{Sin} 3\alpha \\ + 0.10 \operatorname{Cos} 4\alpha &- 0.70 \operatorname{Sin} 4\alpha \\ \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Von den verschiedenen Gliedern dieses Ausdruckes können wir nur dem mit Cos α multiplicirten eine reelle Bedeutung zuschreiben; die folgenden haben zwar nicht, oder wenigstens nicht ausschliesslich in Beobachtungsfehlern ihren Grund, aber wir können für sie keine Bedeutung finden, und zwar einfach aus dem Grunde, weil sie nicht stärker abnehmen. Vor der Hand müssen wir sie als durch Zufälligkeiten, d. h. hier durch Accumulation der uns ganz gesetzlos erscheinenden wirklichen Bewegungen (motus peculiaris, vgl. pag. 324) entstanden denken. Dass aber das Glied $+ 4''.98 \operatorname{Cos} \alpha$ eine wirkliche Erscheinung bei den scheinbaren Bewegungen darstellt, ist gar nicht zu bezweifeln; es bleibt uns also nur noch übrig, eine Erklärung für dasselbe zu finden.

Ebensowenig wie wir die Sterne als fixe Punkte ansehen können, dürfen wir uns die Sonne als ruhend im Weltraume vorstellen, woraus aber folgt, dass an den Sternen scheinbare (parallactische) Bewegungen früher oder später wahrgenommen werden müssen, je nachdem sie uns näher oder entfernter sind und die Bewegung der Sonne, an der unsere Erde und das ganze Sonnensystem theilnimmt, eine mehr oder weniger schnelle ist. Noch ist aber zu untersuchen nöthig, in welcher Weise sich diese scheinbaren Bewegungen gestalten, d. h. wie die Oerter der Sterne in Folge der Bewegung des Sonnensystems geändert werden. Wir können dabei von den wirklichen Bewegungen vollständig absehen, denn es kommt uns ja nur darauf an, die Wirkung der Sonnenbewegung auf die scheinbare Lage von Punkten am Himmel zu beurtheilen, einerlei ob diese in Bewegung sind oder nicht. — Es ist nun vor Allem einleuchtend, dass in dem Punkte

Q, gegen welchen die Bewegung des Sonnensystems gerichtet ist, ein Stern uns ruhend erscheinen muss, sofern er nicht selbst in Bewegung ist; unsere Bewegung bewirkt nur eine Verminderung seiner Entfernung von uns, keineswegs aber eine Veränderung seiner scheinbaren Richtung. Ebensowenig erscheint uns ein Stern in dem Punkte *P*, von welchem das Sonnensystem sich entfernt, und der also dem Punkte *Q* genau entgegengesetzt liegt, in Bewegung. Hingegen müssen wir die stärksten Bewegungen an dem Umfang eines grössten Kreises bemerken, der senkrecht auf die Verbindungslinie zwischen *Q* und *P* um den Standpunkt des Beobachters gezogen ist, und zwar müssen alle Bewegungen von dem Punkte *Q* nach dem Punkte *P* zu gerichtet erscheinen. Ziehen wir nur eine Zone des Himmels, etwa die um den Aequator in Betracht, so finden wir in Bezug auf diese sogleich, dass die grössten Bewegungen gerade da vorkommen müssen, wo der soeben erwähnte grösste Kreis die Zone durchschneidet, also in zwei entgegengesetzten Gegenden. Die Figur 32 wird uns die scheinbaren Bewegungen in den verschiedenen Punkten einer solchen Zone veranschaulichen.

Fig. 32.



Wir denken uns dabei, der Einfachheit wegen, den Punkt *Q* in der Ebene der Zone gelegen und nehmen seine Rectascension zu $18^h = 270^0$ an. Die Punkte *o* und *o'* stellen die Oerter des Sennensystems, zwei verschiedenen Zeiten entsprechend, dar, und die Geraden *ov* und *o'v'* repräsentiren die mit sich selbst parallelen Richtungen des Frühlingspunktes; wir denken uns nämlich die Sternörter stets auf dasselbe Aequinoctium bezogen. Die Rectascension eines Sterns im Punkte *a*, die zu dem ersten Zeitpunkte 0^h war, muss zu dem zweiten etwas vergrössert erscheinen, weil der Stern jetzt in der Richtung *o' a* gesehen wird. Dagegen wird die

Bewegung des Sonnensystems eine Verminderung der Rectascension eines Sterns b veranlassen, welche ursprünglich 12^h war, zu dem zweiten Zeitpunkte aber durch den Winkel $v'o'b$ gegeben ist. Wie man aus der Figur sofort ersehen kann, bleiben die Rectascensionen der Sterne in 6^h und 18^h unverändert.

Durch Betrachtungen, die denen, durch welche die Bewegung im excentrischen Kreise erklärt wurde (pag. 111), sehr ähnlich sind, findet man als allgemeinen Ausdruck für die Aenderung der Rectascension α durch die Bewegung des Sonnensystems, welche gegen einen Punkt in der Rectascension A gerichtet ist:

$$\mu \operatorname{Sin} (\alpha - A)$$

wo μ den Winkel bedeutet, unter welchem die Bewegung oo' vom Punkte a oder b erscheint. Dieser Ausdruck lässt sich auch in die Glieder

$$-\mu \operatorname{Sin} A \operatorname{Cos} \alpha + \mu \operatorname{Cos} A \operatorname{Sin} \alpha$$

zerlegen, deren Uebereinstimmung mit den zwei ersten periodischen Gliedern der Reihe (a) sogleich ins Auge fällt und der zu den Gleichungen:

$$-\mu \operatorname{Sin} A = 4''.98; \quad \mu \operatorname{Cos} A = -0''.82$$

führt. Wir können daher durchaus nicht bezweifeln, dass die beiden, auf empirischem Wege gefundenen Glieder (hauptsächlich das erste) nicht durch die Bewegung des Sonnensystems ihre Erklärung finden. — Aus den angesetzten Gleichungen lässt sich A nicht minder wie μ in bekannter Weise (vgl. z. B. pag. 247) bestimmen; man findet alsdann die Werthe

$$A = 260^\circ\ 32'$$

und

$$\mu = 5''.05,$$

d. h. die Projection auf den Aequator der hundertjährigen Bewegung des Sonnensystems erscheint in der mittleren Entfernung der Bradley'schen Sterne unter dem Winkel $5''.05$.

Durch die Untersuchung der Bewegungen in Declination findet man auch diese Coordinate des Punktes Q. Die verschiedenen Bestimmungen weichen indessen viel mehr von einander ab, als die durch verschiedene Forscher gefundenen Werthe von A, indem z. B. W. Struve dieser Declination nur etwa $+ 14^\circ$ zuerkennen will, während Argelander $+ 30^\circ$ bis $+ 38^\circ$, Lundahl $+ 28^\circ\ 49'$, Otto Struve $+ 37^\circ\ 36'$, Galloway $+ 34^\circ\ 23'$ und Mädler $39^\circ\ 54'$ finden.*) Als ein beiläufiger Mittelwerth der verschiedenen Bestimmungen dürfte für diese Declination angenommen werden können:

$$D = + 36^\circ.$$

Man findet ferner den Betrag der ganzen Sonnenbewegung, gesehen in der mittleren Entfernung der Bradley'schen Sterne, wenn der obige

*) Die verschiedenen Werthe von A gehen von 255° bis 265°, der letzte dürfte der Wahrheit am nächsten kommen.

Werth von μ durch Cos D dividirt wird. In solcher Weise findet man für diese Grösse:

$$6''.24.$$

Die mittlere Entfernung der Bradley'schen Sterne findet sich aus ihren scheinbaren Grössen (vgl. pag. 339) zu 8.66 mal die mittlere Entfernung eines Sterns erster Grösse. Hieraus folgt, dass in der Entfernung eines solchen Sterns die Säcularbewegung des Sonnensystems unter dem Winkel

$$6''.24 \times 8.66 = 54''.0$$

erscheinen würde.*)

In einer berühmten Abhandlung (Recherches sur la parallaxe des étoiles fixes) hat Prof. Peters die mittlere jährliche Parallaxe der Sterne zweiter Grösse zu bestimmen gesucht und dafür den Werth

$$0''.116 \text{ mit dem wahrsch. Fehler } 0''.014$$

gefunden. Seitdem sind aber einige neue Parallaxen, namentlich von schwächeren Sternen mit starker Bewegung bestimmt worden. Eine abermalige Untersuchung dieses Gegenstandes, wobei die Verschiedenheit der Bewegungen in passender Weise berücksichtigt wurde, führte zu einem geringeren Resultate, nämlich zu der mittleren Parallaxe

$$P = 0''.085$$

für die Sterne erster Grösse.**) Mit diesem Werthe von P kann man sich eine Vorstellung von der linearen Bewegung des Sonnensystems bilden; nach unseren Angaben beträgt dieselbe jährlich 6.3 Sonnenweiten.

Bezeichnet $\Delta\alpha$ die jährliche Bewegung eines Sterns in Rectascension und $\Delta\delta$ die in Declination, so gilt die Formel

$$s = \sqrt{(\Delta\alpha)^2 \operatorname{Cos} \delta^2 + (\Delta\delta)^2}$$

für die Berechnung der scheinbaren Bewegung im grössten Kreise, welche wir s nennen. Die Werthe von s hat Mädler nach der Grösse der betreffenden Sterne geordnet und in Mittel zusammengezogen. Diese Mittelwerthe, die wir mit S bezeichnen wollen, sind die folgenden:

Grösse	S
1 und 2	0''.2222
3	0.1683
4	0.1372
5	0.1109
6	0.0905
7	0.0865

*) Otto v. Struve hat für diesen Winkel den Werth 33''.92 gefunden; seine Untersuchung ist in ganz anderer Weise geführt, vielleicht aber auf eine zu geringe Anzahl von Bewegungen gegründet.

**) Bei dieser Untersuchung ergaben sich verschiedene Werthe von P, je nachdem die bekannten Sternparallaxen nach der Helligkeit der Sterne oder nach der Grösse der Bewegung mit einander combinirt waren. Die einzelnen, in solcher Weise erlangten Resultate waren $P = 0''.0861$ und $P = 0''.0836$.

Soweit wir uns nun auf diese Zahlen verlassen dürfen (die Werthe der 6ten und besonders der 7ten Grössenklasse dürften bei Hinzuziehung einer grösseren Anzahl Bewegungen noch merkliche Aenderungen erleiden), müssen wir schliessen, dass die wirklichen Bewegungen nicht überall in unserem Sternsysteme gleich sind, sondern dass sie im Allgemeinen mit zunehmender Entfernung von dem Sonnensysteme wachsen.*) Denn wären die wirklichen Bewegungen in jeder Entfernung nahezu dieselben, so müssten die scheinbaren Bewegungen in umgekehrter Proportion der Entfernung abnehmen. Aus den obigen Zahlen kann man aber die Formel

$$S_n = 0''.067 + \frac{0''.231}{M_n}$$

ableiten, wo M_n die mittlere Entfernung der Sterne $n$ter Grösse bedeutet, und es zeigt sich dabei, dass die verschiedenen Werthe so gut von ihr dargestellt werden, dass der wahrsch. Fehler des ersten Gliedes nur auf $\pm 0''.0035$ geschätzt werden darf.**) Dieser Ausdruck weist nun darauf hin, dass die wirklichen Bewegungen der Sterne uns unter dem Winkel 0".067 erscheinen, in welcher Entfernung sie sich auch von uns befinden mögen.

Aus dem soeben gefundenen Gesetze würden wir wichtige Consequenzen ziehen können, wenn wir demselben eine grössere Sicherheit beimessen dürften. Der wahrscheinliche Fehler der Grösse 0".067 ist allerdings so klein gefunden worden, dass ihre Realität zunächst nicht gut bestritten werden kann; wie schon bemerkt, ist es aber nicht unmöglich, dass die S-Werthe für die Sterne der 6ten und 7ten Klasse noch merklich geändert werden, und die Bewegungen der noch schwächeren Sterne könnten vielleicht zu ganz anderen Resultaten führen, obgleich dies, soviel man jetzt beurtheilen kann, nicht sehr wahrscheinlich ist.

Der Gedanke, dass die uns sichtbaren Sterne — möglicherweise sogar die der Milchstrasse — ein gemeinsames System im mechanischen Sinne bilden, ist nicht neu. Schon Kepler hielt die Milchstrasse für einen grossen Sternenring, nahe dessen Centrum die Sonne sich befinden sollte, und ähnliche Ansichten findet man später bei Huyghens und Wright. Kant stellte sich Sirius als den Centralkörper des ganzen Systems vor, wogegen Lambert den Centralpunkt im Orionnebel vermuthete, hielt aber den Sternhaufen, zu dem unsere Sonne gehört, nicht für identisch mit den Sternansammlungen

---

*) Wir erlauben uns die Benennung Sternsystem, weil wir ein solches für wahrscheinlich halten, ohne dabei doch behaupten zu wollen, dass die Befugniss dieser Benennung über alle Zweifel erhaben sei.

**) Es bleiben die Fehler $-0''.022$, $+0''.003$, $+0''.007$, $+0''.003$, $-0''.004$ und $+0''.002$ nach.

der Milchstrasse, dachte sich vielmehr letztere als aus vielen solchen Sternhaufen bestehend. Die Planetenwelt mit der Sonne bildet nach ihm ein System erster Ordnung, mehrere Sonnen constituiren einen Sternhaufen oder ein System zweiter Ordnung, mehrere derartige Sternhaufen wieder eine Milchstrasse oder ein System dritter Ordnung u. s. w. Michell zerlegte die sichtbare Sternenwelt in mehrere Partialsysteme und vermuthete, dass unsere Sonne ebenfalls zu einem solchen gehöre, das er sich aber nicht als aus sehr vielen Sternen bestehend dachte, sondern nur aus etwa tausend, oder einigen hunderten der hellsten und den rothen Sternen. — Alle diese Speculationen beruhten indessen mehr auf Vermuthungen als auf wirklichen Untersuchungen und haben daher nur in geschichtlicher Beziehung Interesse; Forschungen von wissenschaftlichem Werthe fangen erst mit Herschel d. ä. an. Sein Streben wurde in gewisser Weise von Erfolg gekrönt, da er die Bewegung des Sonnensystems nachweisen konnte, im Uebrigen gingen seine Bemühungen, ebenso wie die späteren von W. Struve, hauptsächlich darauf aus, die gegenwärtige Vertheilung des Sternenheeres, die »construction of the heavens« zu erkennen. Die Resultate der Struve'schen Untersuchungen, welche gewissermassen die Herschel'schen fortsetzen, haben wir schon im Vorhergehenden der Hauptsache nach erwähnt (vgl. p. 375); sie führten zu der Ansicht, die Sterne wären in immer dünner werdenden Schichten um eine Hauptebene (die der Milchstrasse) parallel gelagert; über die Ausdehnung dieser Schichten wissen wir aber nichts. Dächte man sich diese Ausdehnung unendlich gross und die Masse sämmtlicher Sterne in der Hauptebene condensirt, so wäre die Anziehung in jeder Entfernung von derselben constant, und man müsste dann unter den Sternen aller Grössenklassen wirkliche Bewegungen von durchschnittlich gleichem Betrage erwarten.*) Struve ist auch der Meinung, man müsse aus den zu seiner Zeit bekannten Bewegungen zu einem solchen Schlusse kommen, indem, seiner Untersuchung zufolge, die scheinbaren Bewegungen in entsprechender Weise mit den Helligkeiten abnehmen (Positiones mediae p. CLXXXIV); wir haben jedoch gesehen, dass einige Wahrscheinlichkeit für die entgegengesetzte Annahme nicht wegzuleugnen ist.

*) In der Milchstrasse müssten dann die grössten Bewegungen bemerkt werden.

Eine andere Hypothese, welche sich mathematisch untersuchen lässt, ist die, dass die Masse der Sterne gleichförmig innerhalb einer immensen Kugel vertheilt ist. Richtig ist eine solche Annahme jedenfalls nicht, weil die Sterne nach verschiedenen Richtungen des Himmels in sehr ungleicher Menge vorkommen; allein als eine Annäherung mag sie gestattet sein, ebenso wie die frühere, dass die Masse längs einer Ebene vertheilt ist. — In einem derartigen Systeme von kugelförmiger Gestalt (Globularsystem), wo jeder von den vielen Körpern im Verhältniss zu den Dimensionen des ganzen Systems so klein ist, dass man die Gesammtmasse als gleichförmig vertheilt ansehen darf, gestalten sich die Bewegungen in folgender Weise. Die Bahn eines jeden einzelnen Körpers ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt (nicht Brennpunkt) mit dem geometrischen Mittelpunkte des Systems, welcher hier auch der Schwerpunkt ist, zusammenfällt. Die einzelnen Ellipsen können aber sehr verschieden sein, ihre Excentricitäten können von 0 bis 1 variiren, und auch die Lage der Bahnen ist eine beliebige. Die Umlaufszeit ist für jeden Körper die gleiche, seine mittlere Entfernung vom Centrum möge grösser oder geringer sein; aber die Geschwindigkeiten in verschiedenen Punkten der Bahnen können demohngeachtet sehr verschieden sein. Nur wenn die Bahn ein Kreis ist, bleibt die Winkelgeschwindigkeit unverändert; in diesem Falle müssten also alle Bewegungen vom Centrum aus unter gleichen Winkeln erscheinen; die linearen Geschwindigkeiten würden aber proportional der Entfernung vom Centrum wachsen. Bei excentrischen Bahnen wird jedoch die Geschwindigkeit des Beweglichen um so grösser, je geringer die Entfernung vom Mittelpunkte ist; es lässt sich daher nicht behaupten, dass die Bewegungen im Globularsysteme immer gegen die peripherischen Theile hin zunehmen müssen, oder dass man gerade da den Centralpunkt zu suchen hat, wo die Bewegungen am geringsten sind.

Diesen Umstand hat Mädler übersehen, als er die Behauptung aufstellte und vertheidigte, der Centralpunkt des »Milchstrassensystems« wäre in den Plejaden zu suchen, deren hellster Stern Alcyone mithin auf die Benennung Centralsonne Anspruch machen könne. Er glaubte zeigen zu können, dass die Bewegungen in dieser Region die kleinsten wären und dass sie zunähmen mit der Entfernung von dem genannten Stern. Aber nicht einmal dieses Resultat ist von irgend einer reellen Bedeutung, denn dasselbe war hauptsächlich aus den parallactischen Bewegungen der Sterne gewonnen worden, war also nur eine einfache Folge der Bewegung des Sonnensystems.

Wenn aber die kleinsten Bewegungen in der Centralregion stattfinden sollen, so müssen die Bahnen Kreise sein, oder doch wenigstens geringe Excentricitäten haben; alsdann muss man aber auch vermuthen, dass die Körper überwiegend in derselben Richtung und meistens in geringen Neigungen gegen die Hauptebene sich fortbewegen. Von einer solchen gemeinsamen Bewegung in der Milchstrasse hat Mädler jedoch nicht gesprochen und wir wissen von einer solchen auch gegenwärtig beinahe gar nichts; dasjenige, was wir dabei vermuthen können, gründet sich auf einige wenige Andeutungen, die derselben nicht gerade widersprechen.

Es ist nicht unmöglich, dass einige der Mädler'schen Sätze, obgleich ihnen gegenwärtig die innere wissenschaftliche Begründung mangelt, sich als an die Wahrheit streifend erweisen werden. Vor der Hand müssen wir sie als seine subjectiven Meinungen ansehen, die in wissenschaftlicher Beziehung ohne Interesse sind und welche, eben weil sie in keiner Weise begründet sind, auf die zukünftige Entwicklung der Stellarastronomie ohne Einfluss sein werden.

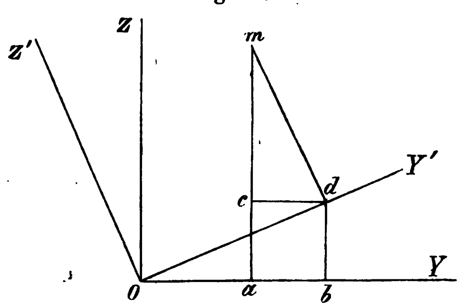
Anhang.

I. Die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie.

Die Relationen zwischen den Seiten und den Winkeln eines sphärischen Dreiecks — so nennt man die Figur, welche von drei sich schneidenden grössten Kreisen auf der Sphäre gebildet wird — lassen sich auf Grund einiger sehr einfacher geometrischer Betrachtungen herleiten. Man braucht nämlich hierzu bloss die Beziehungen zwischen den Coordinaten eines Punktes in zwei Systemen aufzusuchen, die beide rechtwinklig sind, von denen aber das eine gegen das andere um einen gewissen Winkel gedreht worden ist.

Wir betrachten also ein dreiaxiges Coordinatensystem, bei dem wir die x-Axe als fest voraussetzen, so dass eine Drehung des ganzen Systems nur um diese möglich ist. Es sei nun c der Drehungswinkel, d. h. der Winkel, um welchen die neuen Axen oY' und oZ' gegen die alten oY und oZ geneigt sind; ferner seien $oa = y$ und $am = z$ die Coordinaten des Punktes m im ersten Systeme, sowie $od = y'$ und $dm = z'$ die Coordinaten desselben Punktes im zweiten Systeme; ein Blick auf die Figur 33 zeigt uns dann, dass

Fig. 33.



$$y = ob - cd = y' \operatorname{Cos} c - z' \operatorname{Sin} c$$
$$z = mc + db = z' \operatorname{Cos} c + y' \operatorname{Sin} c\,;$$

überdies ist, weil die x-Axe in beiden Systemen dieselbe bleibt,

$$x = x'.$$

Setzen wir in den Formeln pag. 256, b statt $90^\circ - \varphi$ und A' statt $90^\circ - \psi$, so entstehen die Ausdrücke:

$$x = r \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} A'$$
$$y = r \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} A'$$
$$z = r \operatorname{Cos} b$$

worin b den Winkel zwischen dem Radiusvector des Punktes m und der Z-Axe, also den Winkel Zom (Fig. 27 pag. 255) bedeutet, A' hingegen den Winkel noq. Bezeichnen wir ferner den Winkel zwischen dem Radiusvector und der Axe oZ' mit a, und mit B den Winkel zwischen oY' und der Projection des Radiusvectors in der $x'y'$-Ebene, so gelten die analogen Ausdrücke:

$$x' = r \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} B$$
$$y' = r \operatorname{Sin} a \operatorname{Cos} B$$
$$z' = r \operatorname{Cos} a .$$

Mit Hülfe dieser Werthe findet man nun augenblicklich nach Weglassung des gemeinsamen Factors r, und nachdem A statt $180^\circ - A'$ geschrieben worden ist:

$$\mathrm{I}\left\{\begin{aligned} \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} A &= -\operatorname{Sin} a \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} c + \operatorname{Cos} a \operatorname{Sin} c \\ \operatorname{Cos} b &= \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} c + \operatorname{Sin} a \operatorname{Cos} B \operatorname{Sin} c \\ \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} A &= \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} B . \end{aligned}\right.$$

Man bemerkt leicht, dass a, b, c die drei Seiten des sphärischen Dreiecks sind, welches auf der mit dem Radius r beschriebenen Kugel von dem Punkte m, sowie den Durchschnittspunkten der Axen oZ und oZ' mit der Kugelfläche bestimmt ist. Die den beiden ersten Seiten gegenüberstehenden Winkel sind A, B; den dritten wollen wir mit C bezeichnen.

Die soeben erlangten Grundformeln der sphärischen Trigonometrie bleiben selbstverständlich in Geltung, wenn Seiten und Winkel in entsprechender Weise mit andern Seiten und Winkeln vertauscht werden; so können wir z. B. C statt A und A statt C setzen, wenn gleichzeitig a mit c und c mit a vertauscht wird; man erhält in dieser Weise:

$$\operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} C = \operatorname{Sin} c \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} c \operatorname{Sin} a$$

u. s. w.

Wenn das sphärische Dreieck rechtwinklig ist, so dass z. B. $B = 90^\circ$, so werden die Formeln einfacher, man hat alsdann:

$$\mathrm{II}\left\{\begin{aligned} \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} A &= \operatorname{Sin} a \\ \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} A &= \operatorname{Cos} a \operatorname{Sin} c \\ \operatorname{Cos} b &= \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} c \end{aligned}\right.$$

Die Anwendung der beiden erlangten Formelsysteme wollen wir nun an einigen Beispielen beleuchten.

Setzt man in den Gleichungen des Systems II:

$$b = u\,;\ A = i\,;\ c = l - \Omega \quad \text{und} \quad a = \delta,$$

so erlangt man aus der zweiten und dritten dieser Gleichungen:

$$\text{Tang}\, u\ \text{Cos}\, i = \text{Tang}\,(l - \Omega)$$

und aus der ersten und zweiten

$$\text{Tang}\, i = \frac{\text{Tang}\,\delta}{\text{Sin}\,(l - \Omega)},$$

also die beiden Gleichungen pag. 152, die bis jetzt unbewiesen geblieben waren.

Setzen wir für die Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks folgende Ausdrücke: $b = 90^\circ - \beta$; $B = 90^\circ + \alpha$; $a = 90^\circ - \delta$; $A = 90^\circ - \lambda$; $c = \theta$; so geben uns die Gleichungen I:

$$\begin{aligned} \text{Cos}\,\beta\ \text{Cos}\,\lambda &= \text{Cos}\,\delta\ \text{Cos}\,\alpha \\ \text{Cos}\,\beta\ \text{Sin}\,\lambda &= \text{Sin}\,\delta\ \text{Sin}\,\theta + \text{Cos}\,\delta\ \text{Sin}\,\alpha\ \text{Cos}\,\theta \\ \text{Sin}\,\beta &= \text{Sin}\,\delta\ \text{Cos}\,\theta - \text{Cos}\,\delta\ \text{Sin}\,\alpha\ \text{Sin}\,\theta, \end{aligned}$$

aus welchen Relationen die Länge (λ) und Breite (β) berechnet werden können, wenn die Rectascension (α), Declination (δ) und die Schiefe der Ekliptik (θ) gegeben sind. Gewöhnlich und für logarithmische Rechnung einfacher rechnet man in folgender Weise. Es wird gesetzt:

$$\begin{aligned} \text{Sin}\,\delta &= m\ \text{Sin}\, M \\ \text{Sin}\,\alpha\ \text{Cos}\,\delta &= m\ \text{Cos}\, M \end{aligned}$$

wonach man statt der zweiten und dritten der zuletzt angeführten Gleichungen die folgenden erhält:

$$\begin{aligned} \text{Cos}\,\beta\ \text{Sin}\,\lambda &= m\ \text{Cos}\,(M - \theta) \\ \text{Sin}\,\beta &= m\ \text{Sin}\,(M - \theta) \end{aligned}$$

Man hat also die Grössen

$$\text{Tang}\, M = \frac{\text{Tang}\,\delta}{\text{Sin}\,\alpha}$$

$$m = \frac{\text{Sin}\,\delta}{\text{Sin}\, M} = \frac{\text{Sin}\,\alpha\ \text{Cos}\,\delta}{\text{Cos}\, M}$$

zu berechnen, wonach λ und β aus den Formeln

$$\text{Tang}\,\lambda = \frac{m\ \text{Cos}\,(M - \theta)}{\text{Cos}\,\delta\ \text{Cos}\,\alpha} = \frac{\text{Tang}\,\alpha\ \text{Cos}\,(M - \theta)}{\text{Cos}\, M}$$

$$\text{Tang}\,\beta = \text{Tang}\,(M - \theta)\ \text{Sin}\,\lambda$$

gefunden werden. — Hülfsgrössen, wie hier M und m, finden überhaupt häufig Anwendung, um für numerische Rechnungen bequemere Formeln zu erlangen.

In der ersten der Gleichungen (II) setzen wir $a = d$, $b = 90^\circ - \delta$ und $A = t$; alsdann finden wir die Formel

$$\text{Sin}\, d = \text{Cos}\,\delta\ \text{Sin}\, t,$$

aus welcher die pag. 276 gegebene Relation

$$t = \frac{d}{\mathrm{Cos}\,\delta}$$

unmittelbar folgt, wenn d und t als sehr klein angesehen werden.

In ähnlicher Weise leitet man die übrigen Formeln ab, welche in der sphärischen Astronomie gebraucht werden und in unserem Buche vorkommen.

II. Elemente der Körpe

Elemente der acht Hauptplaneten f

	c *)	n	a
Merkur	252° 8′ 6″.5	14732″.420	0.38709
Venus	116 6 0.2	5767.670	0.72333
Erde	0 25 22.0	3548.193	1.00000
Mars	110 22 37.6	1886.519	1.523691
Jupiter	148 6 27.2	299.129	5.202789
Saturn	284 44 28.6	120.455	9.538852
Uranus	220 9 56.5	42.233	19.182639
Neptun	284 19 50.5	21.555	30.03697

Massen, Durchmesser und Rotationszeiten der acht Hauptplaneten.

	Masse	Durchm. geogr. M.	Rot.-Zeit
Merkur	$\frac{1}{4317000}$	670	24h 5m
Venus	$\frac{1}{412150}$	1666	23 21 22s
Erde	$\frac{1}{324439}$	1719	23 56 4
Mars	$\frac{1}{2812526}$	938	24 37 23
Jupiter	$\frac{1}{1050}$	20004	9 55 27
Saturn	$\frac{1}{3512}$	17214	10 29 17
Uranus	$\frac{1}{24000}$	8226	—
Neptun	$\frac{1}{14400}$	7653	—
Sonne	1	193030	25 Tage

Elemente der Jupitersmonde.

	Umlaufsz. Tage	Mittl. Entf. in Jupiters-Halbmess.	Excentr.	Neigung gegen die Jupiters-Bahn	Durchm. in geogr. Meilen
I.	1.76914	5.944	sehr	3° 5′ 24″	543
II.	3.55118	9.452	gering	3 4 25	457
III.	7.15455	15.086	0.001348	3 0 28	772
IV.	16.68902	26.535	0.007243	2 40 58	644

*) Ueber die Bedeutung der Buchstaben vgl. § 6.

des Sonnensystems.

die Epoche 1850 nach Leverrier.

e	π	☊	i
0.2056048	75° 7′ 13″.9	46° 33′ 8″.8	7° 0′ 7″.7
0.0068433	129 27 14.5	75 19 52.3	3 23 34.8
0.0167703	100 21 21.5	—	—
0.0932611	333 17 53.7	48 23 53.1	1 51 2.3
0.0482388	11 54 53.1	98 54 20.5	1 18 40.3
0.0559956	90 6 12.0	112 21 44.0	2 29 28.1
0.0465775	168 16 45.0	73 14 14.4	0 46 29.9
0.0087195	50 16 39.1	130 7 45.3	1 47 0.9

Elemente der Saturnsmonde.

		Umlaufsz. Tage	Mittl. Entf. in Saturn-Halbm.	Excentr.	Neigung gegen die Ekl.
I.	(Mimas)	0.943	3.35	—	—
II.	(Enceladus)	1.370	4.30	—	—
III.	(Thetis)	1.888	5.32	0.011	28° 10′
IV.	(Dione)	2.737	6.82	0.003	28 10
V.	(Rhea)	4.517	9.52	0.001	28 8
VI.	(Titan)	15.945	22.08	0.029	27 34
VII.	(Hyperion)	21.284	26.79	0.115	—
VIII.	(Japetus)	79.330	64.36	0.028	18 38

Elemente der Uranusmonde nach Newcomb.

		Umlaufsz. Tage	Mittlere scheinb. Entf.	Excentr.	Neigung gegen die Ekl.	Länge des Knoten
I.	(Ariel)	2.5204	13″.78	0.020	75°.08	167°.01
II.	(Umbriel)	4.1442	19.20	0.010	75.79	163.76
III.	(Titania)	8.7059	31.48	0.00106	75.06	165.15
IV.	(Oberon)	13.4633	42.10	0.00383	75.21	164.91

Elemente des Neptunmondes nach Newcomb.

5ᵀ8769	16″.295	0.0088	121°.70	183°.03

Elemente der periodischen Cometen mit Umlaufszeiten unter 100 Jahren.

Entdecker	Zeit des Perihel. Mittl. Par. Zeit	Umlaufsz. Jahre	a	e	π	☊	i
Pons	1868 Sept. 14 16h 20m 29s	3.294	2.214	0.84916	158° 10′ 56″	334° 31′ 39″	13° 6′ 52″
Blanpain	1819 Nov. 20 6 2 55	4.810	2.849	0.68675	67 18 48	77 13 57	9 1 16
de Vico	1844 Sept. 2 11 37 30	5.459	3.100	0.61737	342 30 48	63 49 38	2 54 46
Brorsen	1868 Apr. 7 9 48 22	5.484	3.110	0.80809	116 0 48	101 12 50	29 22 39
Pons, Winnecke	1858 Mai 2 0 57 52	5.561	3.139	0.75502	275 40 31	113 34 5	10 48 12
Tempel	1867 Mai 26 0 2 45	5.680	3.183	0.50908	236 12 39	101 9 9	6 24 22
d'Arrest	1877 Mai 10 8 8 10	6.566	3.506	0.62781	319 9 15	146 9 28	15 43 9 [2]
Montagne [1]) a.	1852 Sept. 23 17 36 47	6.621	3.526	0.75592	109 8 17	245 51 26	12 33 16
Pons u. Biela b.	» » 1 30 57	6.619	3.525	0.75587	109 8 16	245 51 28	12 33 19
Faye	1866 Febr. 14 0 39 4	7.413	3.802	0.55755	49 57 45	209 42 43	11 22 7
Méchain, Tuttle	1858 Febr. 23 12 43 41	13.70	5.726	0.82090	115 51 35	269 3 13	54 24 10
C. H. F. Peters	1846 Juni 1 2 40 11	15.89	6.321	0.75672	239 49 51	260 12 25	31 2 14
Tempel	1866 Jan. 13 5 14 46	31.91	10.061	0.90295	60 25 11	231 27 9	17 18 19 [3]
Westphal	1852 Oct. 12 18 10 25	60.7	15.44	0.91903	43 13 42	346 10 0	40 55 0
Pons	1812 Sept. 15 7 40 52	71.0	17.095	0.95454	92 18 44	253 1 2	73 57 3
de Vico	1846 März 5 13 18 7	73.7	17.58	0.96225	90 27 19	77 33 26	85 6 12
Olbers	1815 Apr. 25 23 58 5	74.0	17.634	0.93122	149 1 56	83 28 34	44 29 55
Halleyscher Comet	1835 Nov. 15 22 41 22	76.29	17.99	0.96739	304 31 32	55 9 59	17 45 5

1) Dieser Comet wurde zuerst 1771 von Montagne, später 1806 von Pons entdeckt; nach der Wiederentdeckung von Biela im Jahre 1826 wurde die Periodicität festgestellt; 1845 theilte sich der Comet in zwei Köpfe (Kopf a und Kopf b). 2) Die Elemente sind entnommen aus der Vorausberechnung des Herrn G. Leveau.
3) Bewegung rückläufig.

REGISTER.

Berichtigungen und Nachträge.

pag.	Zeile	statt:	lies:
11	12 v. u.	in den Mittelpunkten	im Mittelpunkte

39 Der ursprüngliche Name des »Gestirns der Isis« oder des Sirius bei den Aegyptern war Sopt, woraus die Griechen Sothis machten. Das ägyptische Jahr hatte in der ältesten Zeit 12 Monate zu 30 Tagen, denen später 5 Ergänzungstage (Epagomenentage) zugefügt wurden. Die Einführung der Sothisperiode ist übrigens nach neueren Untersuchungen wahrscheinlich bis auf die vorhistorische Zeit (vor 4500 v. Chr.) zurück zu datiren. (Vgl. hierüber Maspero's Geschichte der morgenländischen Völker im Altertum, deutsch von Pietschmann, Leipzig 1877, p. 76.)

pag.	Zeile	statt:	lies:
67	1 v. u.	Art. Astr.	Art. Aristoteles
81	2 v. u.	aber	also
150	8 v. u.	Sin λ	Sin l
150	9 v. u.	Cos λ	Cos l
201	15 v. u.	Cotang θ	Cotang 2θ
213	5 v. u.	$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2 2}$	$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2 r^2}$
233	13 v. o.	$\frac{\;}{a}\,\mathrm{Cos}\,(f+A)$	$\frac{r}{a}\,\mathrm{Cos}\,(f+A)$
335	12 v. u.	No. 7415	No. 17415.
347	3 v. u.	21. März	13. März
363	11 v. u.	γ Coronae	η Coronae
363	22 v. u.	γ Cassiopeiae	η Cassiopeiae

389 Der Werth $P = 0''.085$ wurde vom Verfasser unter der Annahme $p = \frac{s}{MS}\,P$ abgeleitet, wo p die Parallaxe für die mittlere Entfernung M (vergl. p. 339).

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.