DIE WISSENSCHAFT
EINZELDARSTELLUNGEN AUS DER NATURWISSENSCHAFT UND DER TECHNIK · BD. 68

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01193867 7

M. v. LAUE

DIE RELATIVITÄTSTHEORIE

ZWEITER BAND

DIE ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE UND EINSTEINS LEHRE VON DER SCHWERKRAFT

FRIEDR. VIEWEG & SOHN BRAUNSCHWEIG

DIE WISSENSCHAFT

Sammlung von Einzeldarstellungen aus den Gebieten der Naturwissenschaft und der Technik

Herausgegeben von Prof. Dr. EILHARD WIEDEMANN

BAND 68

Die Relativitätstheorie

Von

Dr. M. von Laue

Professor für theoretische Physik an der Universität Berlin

Zweiter Band:

Die allgemeine Relativitätstheorie und Einsteins Lehre von der Schwerkraft

Braunschweig

Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn

1921

Die
Relativitätstheorie

Von

Dr. M. von Laue
Professor für theoretische Physik an der Universität Berlin

Zweiter Band:

Die allgemeine Relativitätstheorie und Einsteins Lehre von der Schwerkraft

---

Mit 23 Abbildungen

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF TORONTO

Braunschweig
Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn
1921

Alle Rechte vorbehalten.

QC
173
.55
L28
1921
Bd. 2
c. 1
PASC

LIBRARY
JUN 11 1968
UNIVERSITY OF TORONTO

Copyright, 1921, by Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Germany.

Vorwort.

Bewundert viel und viel gescholten — so steht die allgemeine Relativitätstheorie heute da. Die lautesten Schreier auf beiden Seiten haben dabei gemeinsam, daß sie von ihr herzlich wenig verstehen. Und doch, gibt es irgend einen Zweig der Wissenschaft, dem man nicht mit Redensarten, sondern nur mit harter Arbeit beikommt, so ist es diese Theorie. Wir widmen unser Buch denen, die sich ihr Verständnis erarbeiten wollen.

Es gibt schon eine ganze Reihe guter, zum Teil vortrefflicher Bücher über unseren Gegenstand. Wir erwähnen von populären Darstellungen neben Einsteins bekannter Schrift die wohlgelungene Arbeit von P. Kirchberger („Was kann man ohne Mathematik von der Relativitätstheorie verstehen", Karlsruhe 1921), von mathematischen das hochbedeutende Werk von H. Weyl („Raum, Zeit, Materie", Berlin 1921) und von philosophischen das glänzend geschriebene Buch von E. Cassierer („Zur Einsteinschen Relativitätstheorie", Berlin 1921). Aber von einem Physiker gibt es bisher kein streng wissenschaftliches Buch von einiger Vollständigkeit darüber; und wir möchten meinen, daß nur ein Physiker die Schwierigkeiten ganz nachempfinden und zu beheben wenigstens versuchen kann, welche die große Mehrzahl seiner Fachgenossen zurzeit noch von der allgemeinen Relativitätstheorie fernhält. Diese Schwierigkeiten liegen bei einer Gruppe zum Teil sehr bedeutender Männer, die in Lenard ihren Wortführer gefunden hat, in den gedank-

lichen Grundlagen der neuen Theorie. Sie stehen ihnen mit Empfindungen gegenüber, welche man nicht unpassend mit Goethes Abneigung gegen die Newtonsche Optik verglichen hat. Die meisten wissen sich aber dieser Theorie gegenüber keinen bestimmten Standpunkt zu sichern, weil sie ihr mangels hinreichender Bekanntschaft mit nichteuklidischer Geometrie und der zugehörigen Tensorrechnung nicht nahe genug zu kommen vermögen. Und gerade den letzteren möchte dies Buch helfen. Es möchte ihnen in Teil III die mathematischen Hilfsmittel zusammenstellen, welche dem Physiker im allgemeinen hierzu fehlen, weil er sie bisher in seiner Wissenschaft nicht brauchte. In Teil IV gehen wir über dies unmittelbare Ziel sogar noch etwas hinaus, indem wir Teile der nichteuklidischen Geometrie vortragen, welche für die angestrebte physikalische Anwendung nicht unmittelbar erforderlich wären. Aber wir dachten dabei an den Satz, daß man von einer Sache eigentlich zu wenig weiß, wenn man gerade nur das weiß, was man unbedingt braucht. Auch steht es ja dem Leser frei, diesen Teil zu überschlagen.

In den späteren, physikalischen Teilen haben wir besonderen Wert auf die Beispiele zur Theorie gelegt, namentlich auf diejenigen, bei denen man die Gleichungen des Schwerefeldes streng lösen kann. Denn ohne solche Beispiele kann man sich in keine Theorie wirklich einleben. Doch konnten wir dabei nicht so weit gehen, daß wir nun die ganze vorhandene Literatur ausgeschöpft hätten. Manche Arbeiten, zum Teil recht wertvolle, konnten wir nur kurz anführen. Immerhin hoffen wir den Leser so weit zu geleiten, daß er nun zum Studium der einschlägigen Originalarbeiten gerüstet ist.

Wie es sich gehört, haben wir uns bemüht, das mathematische Gewand der Theorie möglichst elegant zu gestalten. Und uns hat dabei ein Ausspruch, den man Boltz-

mann zuschreibt, man solle die Eleganz den Schneidern überlassen, nicht stören können. Denn sie hat ihren Wert; sie erst macht eine Theorie übersichtlich, und damit eigentlich erst für Forschung und Lehre verwendbar. Trotzdem wird der Leser in Teil V eine Reihe von Gleichungen mit recht unschönen Minuszeichen bemerken. Wir haben das in dieser Auflage nicht mehr ändern können; denn als wir die Wurzel des Übels erkannten, war der Druck schon zu weit vorgeschritten. Sie liegt in dem Vorzeichen der Maßbestimmung

$$d\tau^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx^i dx ,$$

wie Einstein es eingeführt und bisher wohl alle Autoren benutzt haben. Danach ist $d\tau$ für raumartige Linienelemente negativ. Dies zwingt nämlich, in den Zusammenhang der Viererkraft F mit dem Raumvektor $\mathfrak{F}$ der Kraftdichte ein Minuszeichen einzuführen, je nach Wahl entweder bei den kontravarianten oder bei den kovarianten Komponenten. Beides hat unangenehme Folgen. Wir haben uns für die erstere Möglichkeit entschieden und dies folgerichtig durchgeführt. Eine gründliche Abhilfe ist nur durch Änderung des Vorzeichens der Maßbestimmung möglich; wir beabsichtigen sie bei der ersten Gelegenheit vorzunehmen.

Wieweit das Buch seine Zwecke erreicht, darüber muß natürlich der Leser urteilen. Wir wären von ihnen aber gewiß weiter entfernt geblieben, als es der Fall ist, hätten wir uns nicht der Unterstützung einer Reihe bedeutender Mathematiker zu erfreuen gehabt. Vor allem hat D. Hilbert die Ausarbeitung seiner Vorlesung über die Grundlagen der Physik zur Verfügung gestellt, aus der sehr viel in unser Buch übergegangen ist. Anhang I ist aus einem Brief von F. Schur hervorgegangen. Sonst habe ich mich vielfach des Rates von L. Bieberbach, G. Hamel und besonders

E. Hilb bedienen können. Ich möchte den genannten Kollegen auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aussprechen.

In Herrn Max Gut (jetzt in Zürich) fand ich einen Korrektor, welcher nicht nur den Druck, sondern auch die ganze Darstellung einer höchst sorgfältigen, in jede Einzelheit eindringenden Durchsicht unterzog.

Als Einstein die Feldgleichungen der Schwere gefunden hatte, schrieb er einmal an Sommerfeld: „Sie werden von der Theorie überzeugt sein, wenn Sie sie studieren". Der Verfasser dieses Buches stand ihr anfangs recht skeptisch gegenüber und begann deswegen erst recht spät mit der Arbeit an ihm. Aber je mehr er sich in die Theorie hineindachte, um so mehr hat er von dieser ihr innewohnenden Überzeugungskraft empfunden — trotzdem er auch jetzt noch der Ansicht ist, daß diese Theorie bisher weder eine so sichere Bestätigung an der Erfahrung noch eine solche innere Geschlossenheit gefunden hat, wie die beschränkte Relativitätstheorie damals, als er den ersten Band schrieb. Dies Buch ist keine Reklameschrift; und doch wollen wir den Wunsch nicht verhehlen, daß die Theorie auch in der vorliegenden Fassung etwas von dieser Überzeugungskraft auf den Leser ausüben möge.

Berlin, Mai 1921.

Dr. **M. v. Laue.**

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Vorwort V

Inhaltsverzeichnis IX

I. Unser Wissen von der Schwerkraft.

§ 1. Die Erfahrungstatsachen 1

§ 2. Die älteren Theorien der Schwere 12

II. Die allgemeine Relativitätstheorie.

§ 3. Das allgemeine Relativitätsprinzip 18

§ 4. Die Notwendigkeit nichteuklidischer Geometrie 26

§ 5. Der Ausdruck für das Linienelement im Drei- und im Vierdimensionalen 35

III. Weltvektoren und -tensoren in Riemannschen Räumen.

§ 6. Vektor- und Tensoralgebra 42

a) Kontravariante und kovariante Koordinaten 43

b) Vektoren 46

c) Tensoren zweiten Ranges 48

d) Der Tensor der Maßbestimmung und die allgemeine lineare Koordinatentransformation 51

e) Tensoren höheren Ranges 53

f) Vollständig antisymmetrische Tensoren 56

g) Übergang zur Maßbestimmung $d\tau^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx^i\, dx^k$ mit veränderlichen Koeffizienten 61

h) Der Übergang von Welt- zu Raumtensoren 63

§ 7. Geodäsie in Riemannschen Räumen 65

a) Die geodätischen Linien 65

b) Beispiele 69

c) Nullinien 71

d) Die Transformation der Drei-Zeiger-Symbole 72

e) Die g-Klammern und die Determinante g 74

Seite

§ 8. Die Parallelverschiebung in Riemannschen Räumen . . . 75
a) Riemannsche Koordinaten 75
b) Die Parallelverschiebung eines Vektors 78
§ 9. Vektor- und Tensoranalysis 82
a) Differentialoperationen, in welche der Tensor der Maßbestimmung nicht eingeht 82
b) Divergenzbildungen, welche den Maßtensor enthalten . . 85
c) Integralsätze 88
d) Gaußsche Koordinaten 90
§ 10. Der Riemann-Christoffelsche Tensor 91
a) Endliche Parallelverschiebungen 91
b) Ein Kreisprozeß 92
c) Das invariante Kennzeichen der euklidischen Geometrie . 94
d) Die kovarianten Komponenten des Riemann-Christoffelschen Tensors 95
e) Der Tensor $R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \cdot R$ ist divergenzfrei 98
f) Die Sonderstellung des Krümmungstensors 99

IV. Nichteuklidische Geometrie.

§ 11. Einiges über Flächentheorie 104
a) Das invariante Krümmungsmaß 104
b) Die „Parallelverschiebung" auf krummen Flächen . . . 108
c) Flächen konstanten Krümmungsmaßes 112
d) Polarkoordinaten 115
e) Sphärische Flächen und elliptische Geometrie der Ebene 117
f) Die pseudosphärischen Flächen 120
§ 12. Die Cayleysche Maßbestimmung 121
a) Die hyperbolische Geometrie der Ebene 122
b) Die elliptische und die euklidische Geometrie der Ebene 131
c) Elliptische und hyperbolische Geometrie im Raum . . . 132

V. Die Grundgesetze der Physik in der allgemeinen Relativitätstheorie.

§ 13. Allgemeine Bemerkungen 135
§ 14. Das elektromagnetische Feld 140
a) Die Maxwellschen Gleichungen 140
b) Die Erhaltung der Elektrizitätsmenge 143
c) Die Integralgesetze des elektromagnetischen Feldes . . . 146
d) Die geometrische Optik 147
e) Die Spannungen 152
§ 15. Die Grundgleichung der Dynamik und der freie Fall . . . 155
a) Die Weltlinie des freien Körpers 155
b) Abstreifung der Voraussetzung der Spannungsfreiheit . . 157

Seite

c) Maßbestimmung und Schwerefeld 159
d) Die Transformation der Feldkomponenten 160
e) Die „Zentrifugalkraft“ 162
f) Die Mitwirkung anderer Kräfte 164
§ 16. Die Erregung des Schwerefeldes durch die Materie und seine Spannungen 166
a) Die Differentialgleichungen des Schwerefeldes 166
b) Die Erhaltungssätze 168
c) Die Erhaltung der Energie und des Impulses 172
d) Die Trägheit der Energie 177

VI. Anwendungen der Grundgesetze auf besondere Fälle.

§ 17. Statische Felder 179
a) Die Koordinatenwahl 179
b) Die Newtonsche Theorie der Planetenbewegung als Näherung 184
c) Die Veränderlichkeit der Masse M im Schwerefeld . . . 186
d) Elektrostatik 187
§ 18. Die Rotverschiebung der Spektrallinien auf der Sonne . . . 188
a) Die elementare Theorie 188
b) Bedenken gegen die elementare Theorie 189
c) Die Erhaltung der Schwingungszahl des Lichtes bei der Fortpflanzung 190
d) Zahlenangaben 191
§ 19. Weitere genäherte Lösungen der Feldgleichungen 191
a) Über eine Variation der g_{ik} 191
b) Die Wellengleichung als Folge der Feldgleichungen . . 194
c) Ebene Schwerewellen 196
d) Ein Beispiel für uneigentliche Wellen 198

VII. Strenge Lösungen der Feldgleichungen in Einsteins Theorie der Schwere.

§ 20. Das Prinzip der kleinsten Wirkung 201
a) Für den materiefreien Raum 201
b) Einführung der Invarianten R 202
c) Die Variationsprinzipe bei Anwesenheit von Materie . . 204
d) Die Funktion $\mathfrak{M}$ für das elektromagnetische Feld . . . 206
§ 21. Das Schwerefeld des ruhenden Massenpunktes 208
a) Der Maßtensor 208
b) Erörterung der Formel (200) 213
c) Die geodätischen Linien 216
§ 22. Die Perihelbewegung des Merkur 217
§ 23. Lichtstrahlen im Schwerefeld des Massenpunktes 225

Seite

§ 24. Das Schwerefeld in einer Flüssigkeitskugel 228
§ 25. Das Schwerefeld der elektrischen Punktladung 235
a) Die Maßbestimmung 235
b) Erörterung der Maßbestimmung 237

VIII. Mies Theorie der Materie.

§ 26. Die Theorie der Materie in der beschränkten Relativitätstheorie 239
§ 27. Die Theorie der Materie in der allgemeinen Relativitätstheorie 246

Anhang.

Anhang I (zu § 5) 251
Anhang II (zu § 5) 253
Anhang III (zu § 8a) 255
Anhang IV (zu § 10) 257
Literatur 260
Zusammenstellung der Hauptformeln 266
Namen- und Sachregister 272

I. Unser Wissen von der Schwerkraft.

§ 1. Die Erfahrungstatsachen.

Es gibt in der Außenwelt wenige so auffällige Tatsachen, wie die Schwere; darum spielt sie auch schon in den Anfängen der wissenschaftlichen Physik eine große Rolle. Obwohl eigentlich ein Fremdkörper in der klassischen Dynamik — sie steht ihr nicht näher als etwa die elektrodynamischen Kräfte —, gilt sie seit Galilei und Newton immer als das Musterbeispiel einer Kraft und der historische Zusammenhang ist ein so enger, daß der schönste Beweis für die klassische Dynamik, die so gut wie vollständige Deutung der Planetenbewegung, zugleich den Beweis des Newtonschen Anziehungsgesetzes mit enthält. Unter dem Newtonschen Anziehungsgesetz aber verstehen wir hier nicht nur, daß die Schwerkraft K zwischen zwei Massenpunkten von den trägen Massen m_1 und m_2 in ihrer Verbindungslinie liegt und dem Quadrat des Abstandes r_{12} umgekehrt proportional ist, sondern auch den Satz, daß in der Gleichung

$$K = C \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

die Konstante C den von der Beschaffenheit der beiden Körper (chemischer Zusammensetzung, Aggregatzustand, Temperatur, elektrischer Ladung usw.) völlig unabhängigen, universellen Wert

$$C = 6{,}675 \,.\, 10^{-8}\, \mathrm{g}^{-1} \,.\, \mathrm{cm}^3 \,.\, \mathrm{sec}^{-2} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

hat. Man kann von den trägen Massen die schweren Massen M_1 und M_2 unterscheiden, die aus der Gleichung

$$K = \frac{M_1 M_2}{r_{12}^2}$$

zu definieren wären, ähnlich wie man aus dem Coulombschen Gesetz die Elektrizitätsmenge definiert. Daß dann beide Massen für jeden Stoff in dem gleichen Zusammenhang

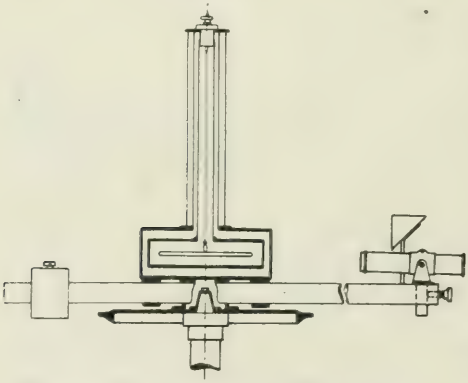
$$M = \sqrt{C}\, m$$

miteinander stehen, bezeichnen wir als den Satz von der Äquivalenz der trägen und der schweren Masse.

Über das Newtonsche Anziehungsgesetz war die physikalische Forschung einschließlich der astronomischen Beobachtung bis vor kurzem nicht hinausgekommen. Nur hat der Laboratoriumsversuch den Äquivalenzsatz mit immer größerer Genauigkeit geprüft und z. B. auch die Frage im Sinne der Verneinung entschieden, ob bei einem Kristall die Schwerkraft nach verschiedenen Richtungen verschieden wirkt. Bei der grundlegenden Wichtigkeit des genannten Satzes wollen wir auf seine neuesten Bestätigungen etwas näher eingehen.

Als ersten, aber recht rohen Beweis dafür hat man stets das gleich rasche Fallen aller Körper im luftleeren Raum angeführt. Schon Newton verbesserte ihn, indem er statt des freien Falls den Fall auf einer Kreisbahn, also die Pendelschwingungen heranzog. Im 19. Jahrhundert hat Bessel diese Versuche zu großer Vollendung gebracht und gezeigt, daß etwaige Schwankungen in dem Verhältnis C der trägen und schweren Masse von Stoff zu Stoff sicher unter einem 60 000tel seines Wertes liegen. Der Sonderstellung der radioaktiven Körper wegen hat Southerns[1]) 1910 Uranoxyd auf diese Art untersucht, ohne dabei etwas anderes zu finden. Die bei weitem besten Versuche aber verdanken wir Eötvös[2]) und Zeeman[3]), welche die Torsionswage benutzten.

Fig. 1.



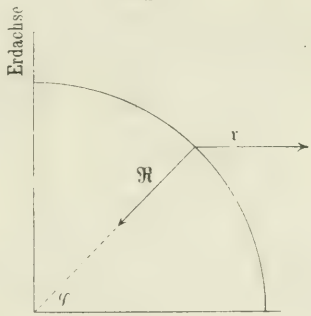
Bei diesem Apparat trägt ein feiner, am einen Ende aufgehängter Faden einen zu ihm nahezu senkrechten Balken; er hält ihn in der Mitte (Fig. 1). Die Torsionselastizität des Fadens bestimmt seine Ruhelage. An den Enden des Balkens sind die Körper befestigt, welche man in ihrem Verhältnis $M\ m = \alpha$

vergleichen will. Ruht der Apparat gegen die Erde, so wirkt auf den ersten Körper die Schwerkraft

$$\mathfrak{K}_1 = M_1 \gamma \mathfrak{N},$$

wobei γ die Kraft bedeutet, die ein Körper gleicher Art von der schweren Masse 1 erfährt und $\mathfrak{N}$ den Einheitsvektor in der Richtung vom Beobachtungsort zum Erdmittelpunkt (Fig. 2); sodann wirkt auf ihn die Zentrifugalkraft als Folge der täglichen Drehung der Erde, und sie berechnet sich aus der trägen Masse m_1 der Drehungsgeschwindigkeit ω und dem Halbmesser a der Erde, der geographischen Breite φ des Beobachtungsortes und dem senkrecht von der Erdachse zum Beobachtungsort weisenden Einheitsvektor $\mathfrak{r}$ nach der Gleichung:

Fig. 2.



$$\mathfrak{K}_1' = m_1 a \omega^2 \cos\varphi \,.\, \mathfrak{r}.$$

Auf den anderen Körper wirken die Kräfte:

$$\mathfrak{K}_2 = M_2 \gamma \mathfrak{N}, \qquad \mathfrak{K}_2' = m_2 a \omega^2 \cos\varphi \,.\, \mathfrak{r}.$$

M_1 und M_2, und ebenso m_1 und m_2 sind jedenfalls sehr nahe einander gleich. Die Schwerpunkte beider Körper aber stehen vom Drehpunkt des Wagebalkens ab um die Vektoren $\pm\,\mathfrak{b}$. Das Drehmoment der vier Kräfte um diesen Punkt ist dann:

$$\begin{aligned}\mathfrak{N} &= [\mathfrak{b}, \mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_2] + [\mathfrak{b}, \mathfrak{K}_1' - \mathfrak{K}_2'] \\ &= \gamma (M_1 - M_2)\, [\mathfrak{b}\, \mathfrak{N}] + a \omega^2 \cos\varphi\, (m_1 - m_2)\, [\mathfrak{b}\, \mathfrak{r}].\end{aligned}$$

Andererseits muß die Spannung des Fadens, die in seiner eigenen Richtung liegt, die Summe dieser Kräfte aufheben. Der Einheitsvektor, welcher in der Fadenrichtung nach unten weist, ist somit:

$$\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_1' + \mathfrak{K}_2'}{\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_1' + \mathfrak{K}_2'} = \frac{\gamma (M_1 + M_2)\, \mathfrak{N} + a \omega^2 \cos\varphi\, (m_1 + m_2) \,.\, \mathfrak{r}}{\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_1' + \mathfrak{K}_2'}$$

und nach den Rechnungsregeln α, β, γ *) hat das Drehmoment in derselben Richtung die Komponente

$$(\mathfrak{N}\mathfrak{F}) = \frac{\gamma a \omega^2 \cos\varphi\, (M_1 + M_2)\, (m_1 + m_2)}{\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_1' + \mathfrak{K}_2'} \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} - \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\right) (\mathfrak{b}, [\mathfrak{r}\mathfrak{N}])$$

*) Zitiert nach Bd. I.

Hier setzen wir nun $M_1 = \alpha_1 m_1$, $M_2 = \alpha_2 m_2$. Ist $\alpha_1 = \alpha_2$, so ist die berechnete Komponente von $\mathfrak{N}$ gleich Null. Entwickeln wir nach steigenden Potenzen von $\alpha_2 - \alpha_1$, so finden wir in erster Näherung

$$(\mathfrak{N}\,\mathfrak{F}) = \frac{\gamma}{2}\,\frac{(m_1 + m_2)^2\, a\, \omega^2 \cos\varphi}{\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_1' - \mathfrak{K}_2'}\,(\mathfrak{b}, [\mathfrak{r}\,\mathfrak{N}])\,(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Innerhalb dieser Näherung kann man dann unter Einführung des Mittelwertes α von α_1 und α_2 und unter Vernachlässigung von Gliedern mit ω^4, ω^6 usw. den Nenner gleich

$$2\,\alpha\,(m_1 + m_2)\,\gamma$$

setzen, woraus dann

$$(\mathfrak{N}\,\mathfrak{F}) = \frac{m_1 \pm m_2}{2}\, a\, \omega^2 \cos\varphi\, (\mathfrak{b}, [\mathfrak{r}\,\mathfrak{N}])\, \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha}$$

folgt. Dieser Ausdruck hat seinen größten Wert, wenn $\mathfrak{b}$ auf der Ebene der Einheitsvektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{N}$ senkrecht steht, und zwar ist dann nach Fig. 2:

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{b}\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{N}]) &= \pm\, \mathfrak{b}\, \sin\varphi, \\ (\mathfrak{N}\,\mathfrak{F}) &= \frac{m_1 \pm m_2}{2}\, \mathfrak{b}\, a\, \omega^2 \sin\varphi \cos\varphi\, \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

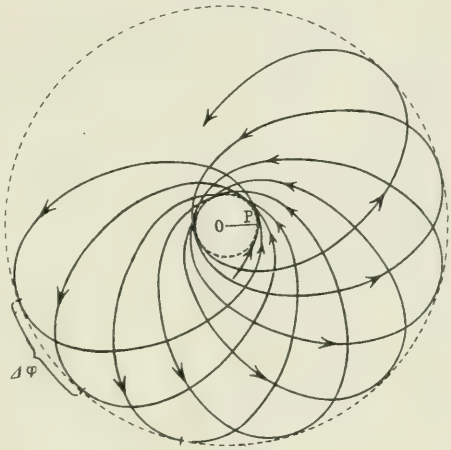
Da jene Ebene die des Meridians ist, wird man also den Wagebalken möglichst in die Ost-West-Richtung stellen. Man beobachtet zunächst mit Spiegel und Skala (Fig. 1) die Einstellung des Balkens gegen das Gehäuse, in dem der Faden hängt. Sodann dreht man das Gehäuse um den Winkel π und wiederholt diese Beobachtung. Infolge der Drehung haben die beiden Körper ihre Rolle vertauscht, so daß Gleichung (3) jetzt ein Drehmoment derselben Größe, aber entgegengesetzten Vorzeichens ergibt, als das erste Mal. Wenn dieses Moment nicht Null ist, so muß demnach der Faden in beiden Fällen um entgegengesetzt gleiche Winkel tordiert sein. Der Unterschied gibt ein Maß für die relative Schwankung $\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha}$ des Verhältnisses beider Massen.

Einen Unterschied der beiden Einstellungen haben weder Eötvös noch Zeeman gefunden. Aus der Empfindlichkeit des Apparates schloß Eötvös, daß bei Messing, Glas, Antimonit und Kork die relativen Unterschiede von α höchstens $5 . 10^{-8}$ betragen,

ein Ergebnis, welches Zeeman auf Quarz und das radioaktive Uranylnitrat $[UO_2(NO_3)_2 + 6\,H_2O]$ ausdehnte. Letzterer untersuchte auch, ob sich α ändert, wenn man einen Kristall (Quarz) in verschiedenen Lagen gegen die Erde bringt; wenn dabei Unterschiede auftreten, so sind sie kleiner als $3 \,.\, 10^{-8}$.

Wir sagten oben, die astronomische Forschung sei über das Newtonsche Anziehungsgesetz nicht hinausgekommen. Immerhin hat aber die in der Genauigkeit stets gesteigerte Durchforschung des Planetensystems eine wenn auch recht unscheinbare Unstimmigkeit mit der auf diesem Gesetz fußenden Theorie derPlanetenbewegung ergeben. Die Planeten bewegen sich infolge ihrer gegenseitigen Störungen ja nicht auf einfachen Kepplerellipsen, sondern auf recht verwickelten Bahnen, die sich nur wegen der Geringfügigkeit der gegenseitigen Beeinflussung als langsam veränderliche Ellipsen auffassen lassen. Eine dieser Veränderungen besteht in einer Drehung der Ellipse in ihrer Ebene (Fig. 3 zeigt dies in stark übertriebenem Maße), bei welcher jeder Punkt der Ellipse mit derselben Winkelgeschwindigkeit einen Kreis um die Sonne beschreibt. Das gilt auch für den sonnenfernsten und den sonnennächsten Punkt, das Perihel und das Aphel. Man nennt deswegen diese Veränderung Perihelbewegung. Sie hat sich bei allen Planeten nach der Theorie der Störungen, also nach dem Newtonschen Anziehungsgesetz, zahlenmäßig richtig berechnen lassen. Die Unterschiede zwischen Theorie und Beobachtung dürften innerhalb der Fehlergrenzen liegen. Nur beim Merkur ist ein unerklärter Rest von 41,24 Bogensekunden im Jahrhundert (mit einer Unsicherheit von 2 Sekunden) übrig

Fig. 3.



geblieben [Le Verrier, 1859][4]), der Sinn dieser Drehung stimmt mit dem Umlaufssinn des Planeten überein*).

Wäre nun die Newtonsche Theorie der Schwere sonst in jeder Beziehung befriedigend, so strebte man sie dieser geringen Abweichung wegen wohl nicht zu verlassen. Eher müßte man diese durch neue Annahmen über die Massenverteilung in der Sonne oder ihrer Umgebung zu beheben suchen, wie z. B. v. Seeliger[5]) sie durch eine Wolke kosmischen Staubes hat erklären wollen. Aber es ist doch gewiß bemerkenswert, daß Einsteins allgemeine Relativitätstheorie die Perihelbewegung des Merkur (d. h. deren unerklärten Rest) ohne jede neue Annahme, einfach aus der Theorie des Zweikörperproblems, zu 42,89 Sekunden**) zu berechnen gestattet [§ 21][5a]).

Was die rein empirische Forschung über die Schwere herausgebracht hat, ist hiermit im wesentlichen angegeben; in Anbetracht der großen, durch reichlich zwei Jahrhunderte dafür aufgewandten Arbeit könnte man das Ergebnis als einigermaßen dürftig zu bezeichnen versucht sein. Doch ist diese Dürftigkeit selbst wieder eine Tatsache, welche die Theorie zu erklären haben wird. Einsteins allgemeine Relativitätstheorie hat nun zwei Tatsachen vorausgesagt. Es sind das zwei feine Effekte, die dicht an der Grenze der heutigen Meßgenauigkeit liegen; man versteht deshalb sehr gut, daß sie sich nicht von selbst der Beobachtung aufdrängten. Erst auf diese Theorie hin hat man Beobachtungen angestellt, welche das Dasein beider Erscheinungen bis heute schon recht wahrscheinlich gemacht haben.

---

*) Die Zahlenangabe des Textes ist von Newcomb berechnet und uns durch eine briefliche Mitteilung von H. v. Seeliger zur Kenntnis gekommen. Herr v. Seeliger hält allerdings die Genauigkeit für geringer, weil zur Berechnung der Perihelbewegung nach der Störungstheorie die Kenntnis der Venusmasse notwendig ist, diese aber wohl immer noch nicht mit der genügenden Genauigkeit bestimmt ist.

**) Außerdem ist nach Herrn v. Seeliger der Newcombsche Wert des unerklärten Restes vielleicht noch um einige Sekunden zu verkleinern; einmal weil das dabei benutzte empirische Koordinatensystem sich gegen ein Inertialsystem noch ein wenig dreht, sodann weil der Unterschied in den Hauptträgheitsmomenten der Sonne ebenfalls eine, wenn auch kleine, Perihelbewegung ergeben muß, die Newcomb nicht berücksichtigt hat.

Der erste dieser „Einstein-Effekte“ besteht darin, daß jede Spektrallinie, welche von der Sonne entsandt wird, eine Vergrößerung ihrer Wellenlänge um das $2 . 10^{-6}$fache ihres normalen, an einer irdischen Lichtquelle gemessenen Wertes aufweist; alle Spektrallinien sind somit „nach Rot verschoben“, wie man in einer eigentlich nur für das sichtbare Gebiet gültigen Sprechweise sagt. Das ist natürlich keine Sondereigenschaft der Sonne, vielmehr muß jeder Himmelskörper von ähnlich großer Masse, also jeder Fixstern, eine entsprechende Verschiebung hervorrufen. Deswegen hat auch zunächst Freundlich[6]) diese Verschiebung durch gemeinsame Betrachtung aller Sternspektren nachweisen wollen. Seine Durchführung des Planes hat aber lebhaften Widerspruch hervorgerufen[7]). Uns scheint der Plan selbst schon nicht glücklich, weil sich die große Mehrzahl aller Spektrallinien durch viele Umstände, besonders durch Veränderungen von Temperatur und Druck, in ihrer Lage beeinflussen läßt. Zum Glück gibt es am violetten Ende des sichtbaren Spektrums Banden, die dem Stickstoff zugehören (fälschlich als Cyanbanden bezeichnet), welche gegen solche Einflüsse gar nicht oder doch nur wenig empfindlich sind. Im Laboratorium lassen sie sich in Emission herstellen, im Sonnenspektrum treten sie in Absorption auf.

An ihnen haben Schwarzschild[8]), St. Johns[9]), Evershed und Royds[10]), sowie Hale[11]) das Sonnenspektrum mit dem einer irdischen Lichtquelle verglichen. Alle Linien zeigten dabei Verschiebungen, freilich von recht wechselnder Größe, manche sogar nach kürzeren Wellenlängen hin. Doch beweisen die Messungen zunächst nicht viel. Wie nämlich Grebe und Bachem[12]) zeigten, scheint eine Linie mit unsymmetrischer Helligkeitsverteilung, wenn sie wie bei der Sonne als Absorptionslinie auftritt, schon deswegen an einer etwas anderen Stelle zu liegen, als in einem Emissionsspektrum. Der Beobachter wird nämlich auf den Mittelpunkt der in ihrer ganzen Breite ziemlich gleich dunklen Absorptionslinie, dagegen auf das Helligkeitsmaximum der Emissionslinie einstellen, welches nicht damit zusammenfällt. Und wenn auch diese scheinbare Verschiebung vollkommen innerhalb der Linienbreite liegt, so kommt sie für diese feinen Messungen dennoch in Betracht; denn die gesuchte Verschiebung ist von derselben Größenordnung. Auch kann die Nachbarschaft anderer, nicht dem Stick-

stoff angehörender und deswegen durch Druck und Temperatur beeinflußter Linien die Messungen ungenau machen. Deshalb treffen die genannten Forscher eine Auswahl von neun Linien der genannten Banden; bei diesen liefern ihre eigenen Messungen, sowie die ihrer Vorgänger die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Ergebnisse:

Tabelle 1.

λ in Zentimeter	Relative Verschiebung $\Delta\lambda/\lambda$			
	nach Grebe u. Bachem	nach Schwarzschild	nach St. John	nach Evershed u. Royds
3,873 504 . 10^{-5}	2,0 . 10^{-6}	1,7 . 10^{-6}	—	—
3,866 960	4,0	3,0	—	—
3,864 438	1,0	1,7	1,3 . 10^{-6}	2,0 . 10^{-6}
3,863 533	1,7	—	0,7	2,5
3,861 847	1,7	2 0	—	—
3,857 063	1,7	2,0	1,0	—
3,852 541	1,7	2,7	1,7	—
3,848 979	1,0	—	—	—
3,844 378	2,0	1,7	0,7	—
Mittel	1,87	2,11	1,08	2,25

Als Mittel aus allen hier mitgeteilten 23 Einzelwerten findet man

$$\Delta\lambda/\lambda = 1{,}85 \,.\, 10^{-6}$$

statt des theoretischen $2 \,.\, 10^{-6}$.

Sodann haben Grebe und Bachem[12 a]) noch ein anderes Verfahren eingeschlagen. Da alle scheinbaren Verschiebungen, welche die Linien dieser Banden durch Unsymmetrie ihres Baues oder durch ihre Nachbarschaft erfahren können, nach Seiten der kürzeren und der längeren Wellen gleiche Wahrscheinlichkeit haben, müssen sie bei einer Mittelung über viele Linien herausfallen, so daß dann nur die wirkliche gemeinsame Verschiebung durch die Schwerewirkung übrig bleibt. Auch bei diesem Verfahren, angewandt auf 100 Linien, ergab sich eine gute Übereinstimmung mit Einsteins Voraussage. Trotzdem bleibt hier noch Raum für viele weitere Untersuchungen; erst dann können wir von einer Sicherstellung dieses Einstein-Effekts reden.

Noch weit bedeutungsvoller aber für die Entscheidung über die Richtigkeit der allgemeinen Relativitätstheorie ist der andere „Einstein-Effekt“, der in der Ablenkung des Lichtes von der geraden Bahn im Schwerefelde besteht. Denn die Rotverschiebung konnten auch manche der Schweretheorien erklären, welche auf dem Boden der Lorentz-Transformation stehen blieben (vgl. § 2). Dagegen mußten diese notwendig den Lichtstrahl im leeren Raum als Gerade ergeben. Nun ist freilich diese Ablenkung so gering, daß man nur beim Schwerefeld eines so großen Himmelskörpers, wie der Sonne, etwas davon zu merken hoffen kann. Sterne also, deren Licht auf dem Wege zu uns nahe an der Sonne vorbei muß, müssen danach nicht an ihrem wahren Ort am Himmel uns sichtbar werden, sondern eine kleine Abweichung davon zeigen. Bedeutet in Fig. 4 die Kurve $DCBA$ den von einem Stern auf die Erde gelangenden Lichtstrahl, so stellt der Beobachter in A sein Fernrohr in die Gerade AD', welche ihn in A berührt. Ohne die Krümmung, welche jene Kurve infolge der Nähe der Sonne zeigt, wäre die Gerade $D''A$, welche zur Asymptote der Kurve parallel ist, der Lichtstrahl desselben Sternes zur Erde. Der Winkel $D'AD''$ mißt also die Ablenkung, sie rückt den Stern scheinbar von der Sonne fort, da die Kurve $DCBA$ ihre konkave Seite ihr zukehrt. Für den Fall, daß der Strahl unmittelbar an der Sonne vorüberführt, sollte der Winkel nach der Theorie 1,75 Bogensekunden betragen, mit

Fig. 4.

wachsendem Abstande sollte er umgekehrt proportional zu ihm abnehmen.

Nun können wir Sterne so nahe der Sonne, wie zu solchen Beobachtungen notwendig, nur bei vollständigen Sonnenfinsternissen

Fig. 5.

Totale Sonnenfinsternis vom 29. Mai 1919.

Verkleinerte Wiedergabe einer der in Sobral (Brasilien) während der Finsternis gemachten Aufnahmen. Die Pfeile geben Richtungen vom Mittelpunkt der Sonnenscheibe aus an. E = Osten, N = Norden, W = Westen, S = Süden.

sehen. Eine Finsternis im August 1914, zu der mehrere astronomische Expeditionen, u. a. eine deutsche nach Südrußland ausgerüstet waren, verstrich infolge des Ausbruchs des Weltkriegs ungenützt. Bei der nächsten Gelegenheit, am 29. Mai 1919, haben

mehrere englische Expeditionen photographische Aufnahmen von der Sonne und ihrer Umgebung gemacht, wie Fig. 5 eine zeigt; die eine war in Sobral im nördlichen Brasilien, die andere auf der Insel Prinzipe vor der Küste von Kamerun. Diese Aufnahmen wurden dann verglichen mit Aufnahmen derselben Himmelsgegend, zu einer Zeit, da die Sonne von ihr weit absteht. Natürlich waren das Messungen schwierigster Art, bei denen jeder einzelne Schritt schärfster Kritik unterworfen werden mußte. Handelt es sich doch bei den Verschiebungen auf der Platte um Hundertstel eines Millimeters. Das Ergebnis zeigt Tabelle 2. In ihr sind die beobachteten Sterne mit gewissen, auch in Fig. 5 vermerkten Nummern bezeichnet, dazu die Verschiebungen in zwei zueinander senkrechten Richtungen nach der Beobachtung und nach der Theorie.

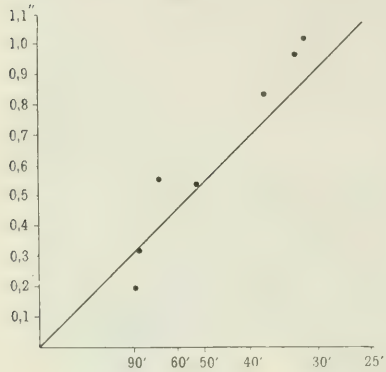
Tabelle 2.

Nummer des Sternes	Verschiebung in Bogensekunden			
	in der Richtung von Osten nach Westen		in der Richtung von Süden nach Norden	
	beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet
11	— 0,19	— 0,22	+ 0,16	+ 0,02
5	— 0,29	— 0,31	— 0,46	— 0,43
4	— 0,11	— 0,10	+ 0,83	+ 0,74
3	— 0,20	— 0,12	+ 1,00	+ 0,87
6	— 0,10	+ 0,04	+ 0,57	+ 0,40
10	— 0,08	+ 0,09	+ 0,35	+ 0,32
2	+ 0,95	+ 0,85	— 0,27	— 0,09

Eine noch bessere Übersicht aber verschafft uns wohl Fig. 6, in welcher das Reziproke der Sternabstände vom Sonnenmittelpunkt als Abszissen, die radialen Ablenkungen in Sekunden als Ordinaten aufgetragen sind. Nach der Theorie muß der Zusammenhang zwischen diesen Größen linear, also durch eine Gerade gegeben sein; sie ist ausgezogen. Die wirklich beobachteten Ablenkungen sind als Punkte eingetragen. In Anbetracht der Schwierigkeit der Messungen muß man die Übereinstimmung für recht befriedigend erklären. Bestätigt sie sich endgültig, so stellt Einsteins Voraussage der Lichtablenkung einen der größten Triumphe des menschlichen Geistes dar.

Doch haben wir natürlich bisher darüber keine vollständige Sicherheit. Es erheben sich immer noch gewisse Zweifel, ob nicht eine weit ausgedehnte Atmosphäre der Sonne die Ursache der Ablenkung ist. Fig. 6 zeigt freilich, daß in der sichtbaren Sonnenkorona allein Stern Nr. 2 liegt. Stärker spricht gegen solche Annahme das Fehlen jeglicher Absorption am Licht der Sterne. Hätte dies einen langen Weg in Gasen zurücklegen müssen, so wäre es doch wohl mindestens stark geschwächt. Auch daß die theoretische Abhängigkeit der Ablenkung von der Entfernung den Tatsachen einigermaßen entspricht, kann man dagegen anführen, denn eine Ablenkung durch Gase dürfte kaum gerade dies Gesetz zur Folge haben. Immerhin bleibt hier wie bei der Linienverschiebung noch Raum für viele weitere Untersuchungen.

Fig. 6.



§ 2. Die älteren Theorien der Schwere.

Gegen das Newtonsche Anziehungsgesetz haben sich schon früher zwei Einwendungen erhoben, ein mehr mathematischer und ein eigentlich physikalischer. Wir beginnen mit ersterem.

Nimmt man die Zahl aller Weltkörper als unendlich groß an, so führt, wie Neumann[1]) und v. Seeliger[2]) bemerkt haben, das Newtonsche Gesetz zu Schwierigkeiten. Es liefert dann je nach den Umständen unendlich große Kräfte oder gestattet überhaupt keinen bestimmten Wert für sie anzugeben. Der Versuch, das Anziehungsgesetz (1) zu

$$K = C \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} e^{-a r_{12}}$$

zu erweitern, wobei a eine neue, positive Konstante bedeutet, hilft zwar hierüber hinweg, kommt aber in Widersprüche mit den Beobachtungen über die Perihelbewegungen der Planeten.

Das Newtonsche Anziehungsgesetz behandelt sodann die Schwere als eine Fernwirkung, welche zu ihrer Übertragung von Körper zu Körper keiner Zeit bedarf; denn das r_{12} im Nenner der Formel (1) bedeutet den Abstand in demselben Zeitpunkt, für welchen die Kraft berechnet werden soll. Die klassische Potentialtheorie der Schwere mit ihrer Poisson-Laplaceschen Differentialgleichung ist nur eine mathematische Umformung dieses Gesetzes, also auch eine Fernwirkungstheorie. Trotz der unzweifelhaft großen Erfolge dieser Theorie scheint sich kein Physiker von Bedeutung jemals bei diesem Fernwirkungsstandpunkt wirklich beruhigt zu haben. Newton selbst schrieb gelegentlich die Worte: „Daß die Gravitation der Materie wesentlich inhärent und anerschaffen sein sollte, so daß ein Körper auf einen anderen wirken könnte auf die Entfernung hin durch den leeren Raum, ohne die Vermittelung von irgend etwas, durch welches ihre Aktion und Kraft von einem zum anderen geleitet werden könnte, das ist nach meinem Dafürhalten eine so große Absurdität, daß ich glaube, kein Mensch, welcher in philosophischen Dingen eine genügende Denkfähigkeit hat, kann jemals darauf verfallen[3]." Und so tauchten von Newtons Zeiten an immer wieder Versuche auf, die Übertragung der Schwerkraft zu veranschaulichen. Elastizitätstheorie, Hydrodynamik, kinetische Vorstellungen mußten dazu herhalten. Seit freilich die Relativitätstheorie uns gelehrt hat, daß der leere Raum von allem Substantiellen, auch vom „Äther", völlig frei ist, müssen alle diese mechanischen Theorien als überholt gelten.

Gar nicht in Betracht kommt ein Vorschlag von Gerber[4]), das Newtonsche Anziehungspotential durch einen die Lichtgeschwindigkeit c enthaltenden Faktor zu erweitern. Zwar ergibt er ohne weiteres die Perihelbewegung des Merkur; doch sind die physikalischen Vorstellungen, mit denen Gerber seinen Potentialansatz begründen will, soweit sie nicht überhaupt gänzlich verschwommen sind, vollständig falsch angewandt; von einer physikalischen Erklärung, d. h. dem Herstellen eines Zusammenhanges mit anderen Tatsachen, kann man bei ihm überhaupt nicht sprechen.

Wichtiger sind für uns die elektrodynamischen Theorien der Schwere. Die formale Übereinstimmung zwischen dem Newtonschen und dem Coulombschen Gesetz legt ja den Gedanken

nahe, die Maxwellsche Theorie, und zwar am besten in der H. A. Lorentzschen Fassung als Elektronentheorie, so auf die Schwere zu übertragen, daß man die Elektrizitätsmenge durch die wägbare Masse ersetzt. Da diese Theorie den Fernwirkungsgedanken in der Elektrodynamik beseitigt hat, leistete diese Übertragung dasselbe für die Schwere. Nur muß dann, da sich zwei Massen im Gegensatz zu gleichnamigen Elektrizitätsmengen anziehen, die ponderomotorische Kraft mit den beiden Feldvektoren ($\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in der Elektrodynamik) und der Geschwindigkeit durch eine Gleichung verknüpft werden, die sich von der Formel

$$\mathfrak{F} = \varrho \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{q} \mathfrak{H}] \right)$$

(vgl. Bd. I, Gl. IX a) durch das vor die rechte Seite zu setzende Minuszeichen unterscheidet. Die notwendige Folge ist, daß dann auch die den Maxwellschen Spannungen entsprechenden Spannungen des Schwerefeldes, dessen Energiedichte und Energieströmung, kurz alle die Größen, welche die Relativitätstheorie zum Welttensor T zusammenfaßt, in ihrer Verknüpfung mit den Feldvektoren [vgl. Bd. I, Gl. (151)] das umgekehrte Vorzeichen erhalten. Da im elektromagnetischen Felde die Energiedichte $W = - T_{ll}$ notwendig positiv ist, würde sie also im Schwerefeld notwendig negativ. Man veranschaulicht sich dies leicht am Beispiel zweier Massenpunkte. Zwei gleichartige elektrische Punktladungen haben in unendlicher Entfernung voneinander keine Energie der Wechselwirkung; die gesamte elektrische Energie ist vielmehr die Summe der Eigenenergien ihrer beiden Felder. Doch erhält die Energie der Wechselwirkung einen positiven Betrag, sowie man die Ladungen auf endliche Entfernungen bringt, weil dabei mechanische Arbeit in Feldenergie umgewandelt wird. Umgekehrt wird bei der Annäherung zweier Massenpunkte dem Schwerefeld Energie der Wechselwirkung entzogen; und wenn man diese bei unendlichem Abstand gleich Null annimmt, was wohl kaum zu umgehen ist, so ist sie in allen anderen Fällen negativ. Schon Maxwell[5]) hat aus diesem Grunde die Übertragung der Elektrodynamik verworfen. Abraham[6]) hat später darauf hingewiesen, daß ein schwingender Massenpunkt nach dieser Theorie statt der Dämpfung, welche ein schwingendes Elektron infolge der Energieausstrahlung erleidet, eine immer neue Anregung infolge von „Einstrahlung“ erfahren müßte; der Ruhezustand wäre

danach kein stabiles Gleichgewicht, da die geringste Schwingung um ihn von selbst ihre Amplitude vergrößern müßte.

Diese Einwände treffen auch eine Theorie von H. A. Lorentz, welche nach einem von Mossotti und Zöllner ausgesprochenen Gedanken die Schwerewirkungen unmittelbar auf die elektrischen zurückführt, indem sie der Anziehung ungleichnamiger Elektrizitäten unter sonst gleichen Umständen einen etwas größeren Betrag zuschreibt, als der Abstoßung gleichnamiger[7]).

Ein mächtiger Anreiz zur theoretischen Erforschung der Schwere ging von dem Relativitätsprinzip der Lorentz-Transformation bald nach seiner Entdeckung aus. Hier war doch zum erstenmal klar bewiesen, daß sich alle physikalischen Wirkungen, also auch die Schwere, durch den leeren Raum mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten müßten (vgl. Bd. I, § 7). Die astronomische Forschung hatte nie etwas anderes einwandfrei nachzuweisen vermocht, als daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, wenn es eine gibt, gegen die Relativgeschwindigkeiten der Himmelskörper sehr groß ist. Außerdem ergänzte die Forderung, daß die Gesetze der Schwere gegen die Lorentz-Transformation invariant sein sollen, ein wenig die so mangelhafte Erfahrungskenntnis. So stellte Minkowski in einer seiner grundlegenden Arbeiten[8]) ein Elementargesetz für die Wirkung zweier Massenpunkte aufeinander auf, das, abgesehen von der Vorzeichenumkehrung, einfach die Übertragung des entsprechenden Gesetzes für Elektronen war. Da letzteres dem Relativitätsprinzip genügt, tut dies auch das erstere. Doch ist diese Theorie eigentlich unvollständig, insofern sie die Gesetze des Schwerefeldes nicht ausspricht. Da diese sich wohl nur durch die entsprechende Übertragung der ganzen Elektronentheorie gewinnen lassen, verfällt dieser Gedanke den schon oben erwähnten Einwänden. Schon vorher hatte Poincaré[9]) ein allgemeineres Elementargesetz für die Schwereanziehung aufgestellt, das ebenfalls dem Relativitätsprinzip genügte, und als Sonderfall das Minkowskische enthielt. Die zugehörigen Feldgleichungen hatte Poincaré nicht angegeben, so daß sich nicht beurteilen läßt, ob alle in seinem allgemeinen Gesetz enthaltenen Möglichkeiten von diesen Einwänden getroffen werden. Aber vielleicht wegen dieses Mangels hat diese Theorie nie weitere Verbreitung erlangt. Demselben Urteil verfällt eine Erweiterung des Anziehungsgesetzes durch de Wisniewski[10]), welcher in Gleichung (1) unter der

Annahme, daß m_1 ruht, m_2 eine Geschwindigkeit q hat, zu r_{12}^2 noch den Faktor $\sqrt{1 - q^2 c^2}$ hinzufügen will.

Übrigens liefert gerade die Relativitätstheorie einen weiteren Grund gegen jede Übertragung der Elektrodynamik. Diese führte nämlich entsprechend dem aus den Maxwellschen Gleichungen folgenden Gesetz von der Erhaltung der Elektrizitätsmenge (vgl. Bd. I, § 4 und 5) zum Erhaltungssatz für die schwere Masse. Die Relativitätstheorie lehrt aber die Trägheit der Energie, derzufolge (vgl. Bd. I, Abschnitt VII) die träge Masse, sofern ein Körper sich überhaupt für die Mechanik durch diesen einfachen Begriff kennzeichnen läßt, zum ganz überwiegenden Teil (ein kleiner Bruchteil kann von Spannungen herrühren) durch seinen Energieinhalt bestimmt, also gewiß veränderlich ist. Danach könnte das Verhältnis beider Massen beim gleichen Körper nicht immer dasselbe sein, also erst recht nicht bei verschiedenen Körpern stets den gleichen Wert haben. Und doch zeigen die Versuche von Eötvös und Zeeman (§ 1) mit großer Genauigkeit, daß dies Verhältnis ein universelles ist. Bei radioaktiven Körpern ist die beobachtbare Energieveränderung verhältnismäßig am größten [vgl. Bd. I, § 27]*). Wir sollten also in diesem Zusammenhang gerade bei ihnen am ehesten einen abweichenden Wert dafür vermuten. Und dies ist der Grund, aus welchem Southerns und Zeeman radioaktive Stoffe mit zu ihren Versuchen über das Äquivalenzprinzip heranzogen (vgl. § 1).

Unter dem Einfluß der Relativitätstheorie, aber nicht in voller Übereinstimmung mit ihr, stehen zwei Schweretheorien von Abraham[11]), von der manche Züge, wie z. B. die Abhängigkeit der trägen Masse vom Schwerepotential, später von Nordström übernommen sind und sich mutatis mutandis auch in der allgemeinen Relativität wiederfinden. Doch liegen sie abseits des uns vorgezeichneten Weges. Die Gedanken von Mie[12]) aber sind in ihren besten Zügen mit in die letztere Theorie übergegangen, so daß wir sie in § 26 und 27 darzustellen haben werden. Es mag schon hier erwähnt werden, daß auch dabei von einem Zusammenhang zwischen Schwere und Elektrodynamik die Rede ist, freilich von einem ganz anders gearteten, als in den soeben erwähnten Theorien.

---

*) Zitate aus Bd. I beziehen sich auf dessen vierte Auflage.

Die beste Einfügung der Lehre von der Schwerkraft in die „beschränkte“ Relativitätstheorie, wie wir die auf der Lorentztransformation beruhende im folgenden nennen wollen, verdanken wir wohl Nordström[13]). Seine Theorie liefert (in ihrer zweiten, verbesserten Fassung), abgesehen von dem Newtonschen Anziehungsgesetz für statische Felder, den Äquivalenzsatz als streng gültig für vollkommene, statische Systeme und als eine allen Beobachtungen gerecht werdende Näherung für alle anderen Körper. Damit genügt sie den älteren Erfahrungstatsachen über die Schwerkraft. Sie vermeidet ferner grundsätzlich negative Energiedichten im Schwerefelde und stimmt überdies in der Rotverschiebung der Spektrallinien auf der Sonne vollständig mit der allgemeinen Relativitätstheorie und somit in gleichem Maße wie sie mit den neuesten Messungen überein. Dagegen ist sie nicht imstande, von der Perihelbewegung des Merkur eine so einfache Deutung aus dem Zweikörperproblem zu geben, wie Einsteins Theorie; sie führt zwar auch zu einer Perihelbewegung, wie das überhaupt wohl jede das Newtonsche Gesetz als Näherung enthaltende Schweretheorie tut, doch diese fällt viel zu klein und im Richtungssinne falsch aus. Vor allem aber kann sie die Ablenkung des Lichtes in der Nähe der Sonne nicht erklären; denn sie muß ja, wie jede andere auf dem Boden der beschränkten Relativitätstheorie bleibende Theorie, der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume einen unveränderlichen Wert geben. Abweichungen des Lichtstrahles von der Geraden können aber nach dem Huygensschen Prinzip, das bekanntlich mit der Elektrodynamik im Einklang steht, nur bei räumlich veränderlicher Lichtgeschwindigkeit auftreten. Oder, anders gesprochen, die erzeugenden Weltlinien des Minkowskischen Vor- und Nachkegels sind in dieser Theorie notwendig gerade. Besonders die Ablenkungsbeobachtung hat uns veranlaßt, in diesem zweiten Bande ausschließlich Einsteins Lehre von der Schwere vorzutragen. Diese hat zudem noch vor allen anderen einen ähnlichen Vorzug, wie die beschränkte Relativitätstheorie vor der Lorentzschen „Absoluttheorie“ von 1904 (vgl. Bd. I, § 5, Schlußbemerkungen); nämlich ein tiefgehendes und umfassendes Prinzip als Grundlage, das Prinzip der allgemeinen Relativität.

II. Die allgemeine Relativitätstheorie.

§ 3. Das allgemeine Relativitätsprinzip.

Die „beschränkte“ Relativitätstheorie, welche nur eine Gruppe gleichförmig und translatorisch gegeneinander bewegter Bezugssysteme als berechtigte ansieht, setzt gleich der Newtonschen Mechanik und der gesamten daran anschließenden Physik das Dasein eines von allen Körpern unabhängigen Inertialsystems voraus; sie schließt dann aus den Naturgesetzen auf das Dasein der anderen. Daß diese Annahme logisch zulässig ist, haben wir schon in § 1a des ersten Bandes betont. Trifft sie nämlich in der Wirklichkeit zu, so kann man dieses Bezugssystem durch physikalische Versuche fern von allen Körpern feststellen. Dadurch unterscheidet es sich grundsätzlich von dem Lichtäther älterer elektrodynamischer Theorien, der sich jeder Beobachtung entzog. Aber freilich sind dies nur Gedankenversuche, denn wir sind ja mit allen Beobachtungen an der Natur beschränkt auf Räume innerhalb des Fixsternsystems. Könnten wir uns von dessen vielen großen Massen wesentlich weiter entfernen, fielen unsere Versuche nicht vielleicht ganz anders aus? So konnten Mach und Einstein den Gedanken fassen, daß die Vorzugsstellung jener Gruppe von Inertialsystemen keine Grundtatsache, sondern dadurch bedingt wäre, daß die Massen des Fixsternsystems in einem dieser Systeme im großen und ganzen ruhen; daß aber grundsätzlich, d. h. wenn man von diesem „Zufall“ absieht, alle denkbaren Bezugssysteme gleichberechtigt wären, also auch solche, die sich gegen die Inertialsysteme beschleunigt oder mit Drehungen oder sonst irgendwie bewegen. Bei Mach war dieser Gedanke nur ein skeptischer Einwand gegen die damals ganz allgemeine, wenngleich nicht immer bewußte Annahme eines Inertialsystems. Einstein sieht einen Hinweis der Natur auf die allgemeine Gleichberechtigung in dem Gesetz von der Äquivalenz der trägen und der schweren Masse.

Denken wir uns nämlich einen Physiker in einem Kasten, dessen Wände ihn in jeder Beziehung von der Außenwelt ab-

schließen. Er nimmt eine Zeitlang an allen Körpern im Innern das Streben wahr, sich in einer bestimmten Richtung gegen die Wände in Bewegung zu setzen. Läßt man sie frei, so „fallen“ sie in dieser Richtung, und zwar alle mit der gleichen Beschleunigung gegen die Wände. Er hat dann für diese Beobachtung zwei ganz verschiedene Deutungen: Entweder: „Der Kasten wird gegen ein Bezugssystem, in welchem der Trägheitssatz gilt, gleichförmig beschleunigt; wodurch, kann ich nicht wissen, solange mir der weitere Ausblick fehlt. Das »Fallen« der Körper beruht einfach auf ihrem Beharren in der Geschwindigkeit, welche sie zuletzt hatten, als sie am Kasten fest saßen; ihre gemeinsame Fallbeschleunigung ist, abgesehen von der Richtung, nichts anderes, als die Beschleunigung des Kastens.“ Oder: „Mein Kasten ruht in einem Inertialsystem, befindet sich aber in einem Schwerefeld. Daß die Körper mit gleicher Beschleunigung fallen, erklärt sich einmal aus der Proportionalität zwischen Anziehungskraft und schwerer Masse, andererseits aus der Proportionalität zwischen dieser und der trägen Masse, also aus der Äquivalenz beider Massen. Wodurch das Schwerefeld erzeugt ist, kann ich nicht erfahren, solange mich die Wände von allem außen Befindlichen abschließen.“ Natürlich sind auch Deutungen möglich, bei denen beide Gesichtspunkte gemischt auftreten. Ohne das Äquivalenzgesetz wäre es aber nur die erste.

Wir wollen denselben Gedanken an einem anderen Beispiel ausführen. Wir fahren in einem Eisenbahnzug auf idealen stoßfreien Schienen, immer in derselben Richtung a, mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Es ist uns geläufig, daß die Auffassung, unser Abteil ruhe, aber die ganze Umgebung komme uns entgegen, ebenso zulässig ist, wie die soeben angewandte. Nun aber bremst der Zug, alle Gegenstände im Abteil zeigen ein Streben, sich dessen vorderer Wand zu nähern. Hier sagte die bisherige physikalische Auffassung: „Darin zeigt sich die Trägheit der Körper, die ihren bisherigen Bewegungszustand gegen ein Inertialsystem beizubehalten streben“. Aber wir können geradeso gut sagen: „Es ist ein Schwerefeld in bezug auf das Koordinatensystem entstanden, das die Wände unseres Abteils bestimmen, und zwar hat es die Richtung a. In der Tat bewirkt es bei der Umgebung, die uns bisher entgegenkam, eine Verlangsamung ihrer Geschwindigkeit gegen das Abteil; die Um-

gebung beginnt in der Richtung a zu fallen, und wenn sich ihre verschiedenen Teile dabei nicht gegeneinander bewegen, so liegt das eben an dem gleichen raschen Fall aller Körper, d. h. wieder an dem Äquivalenzsatz".

Man kann nun natürlich weiter fragen nach der Ursache, welche den Zug verhindert, die allgemeine Fallbewegung mitzumachen. Nun, diese Ursache liegt in der Bremsung der Räder: sie wirkt genau wie die Beine eines Insektes, das an einem frei fallenden Körper gerade mit solcher Geschwindigkeit herumklettert, daß es bezüglich des Koordinatensystems in Ruhe bleibt. Im übrigen kommen wir in § 19 nochmals auf dieses Beispiel zurück.

Betrachten wir noch ein anderes Beispiel: Das ungestrichene System sei eines der gewöhnlichen Inertialsysteme. Die Zeit lassen wir ungeändert ($t' = t$), die Raumkoordinaten x'^i aber führen wir als kartesische Koordinaten in einem Achsenkreuz ein, welches sich gegen das erstere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Damit ein Massenpunkt in ihm ruht, muß eine Zentripetalkraft auf ihn wirken, welche, so sagen wir vom Standpunkt des ungestrichenen Systems aus, sein auf der Trägheit beruhendes Streben zur geradlinig-gleichförmigen Bewegung aufhebt und ihm die mit der Drehung verbundene Beschleunigung erteilt. Ein gespannter Faden mag diese Kraft ausüben. Auch im gestrichenen Bezugssystem gibt es diese Kraft, denn die Spannung des Fadens ist eine von unserer Betrachtungsweise unabhängige Tatsache: sie läßt sich aber nicht aus einer Beschleunigung erklären, da es keine solche gibt. Wohl aber tritt bei der Transformation ein neues Schwerefeld im gestrichenen System auf. Um die Kraft, welche es ausübt, aufzuheben, ist die Zentripetalkraft notwendig.

Wir schließen aus dieser Betrachtung: Soweit es sich lediglich um die Fallerscheinungen in einem begrenzten Raumgebiet handelt, sind Ruhen in einem Inertialsystem mit homogenem Schwerefeld und Ruhen in einem dagegen beschleunigten Koordinatensystem ohne ein solches Feld ununterscheidbar. Beide Arten von Koordinatensystemen sind — für diese Vorgänge — gleichberechtigt, nur muß man beim Übergang vom einen zum anderen auch die Schwerkraft transformieren, und findet dabei in dem einen System den Wert Null für sie.

Für die ältere, auf Newton zurückgehende Auffassung bestand zwischen träger und schwerer Masse ein begrifflicher Unterschied. Die Proportionalität zwischen ihnen, aus der sich durch Änderung des Maßsystems Gleichheit machen ließe, stand da als eine Tatsache, die man durchaus anerkannte, aber nicht tiefer zu deuten vermochte. Die neue Auffassung, die die allgemeine Relativitätstheorie bringt, sieht in dieser Äquivalenz Wesensgleichheit. Es ist dieselbe Eigenschaft der Körper, welche sich entweder als Trägheit oder als Schwere äußert. Der Unterschied dazwischen liegt einzig und allein in der Betrachtungsart, welche man wählt. Darin besteht Einsteins Lösung für das „Rätsel der Schwerkraft".

Aber diese Betrachtungsarten wären doch nicht ganz gleichwertig, wenn sie es nur den Fallerscheinungen gegenüber wären. Sie werden es erst durch den Grundsatz: Dieselbe Transformation, der gegenüber die Fallgesetze invariant sind, läßt auch alle anderen Naturgesetze unverändert. Der erwähnte Beobachter mag noch so viele und noch so geschickt gewählte mechanische, optische und elektrische Versuche zu Hilfe nehmen, niemals kann er zwischen den genannten Deutungen unterscheiden. Wir gehen keinen großen Schritt weiter, wenn wir fordern: Alle Naturgesetze lassen sich so in mathematischer Form auf drei räumliche Koordinaten x^1, x^2, x^3 und eine Zeitkoordinate x^4 beziehen, daß sie gegenüber beliebigen Transformationen

$$x'^i = f^i(x^1, x^2, x^3, x^4) \qquad i = 1, 2, 3, 4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

invariant sind, wenn nur die Funktionen f umkehrbar eindeutig und regulär sind*), eine von Null verschiedene Funktionaldeterminante haben und schließlich der vierten Koordinate die Zeitartigkeit, den drei anderen die Raumartigkeit wahren.

Das physikalische Weltbild der Antike gab dem einzelnen Raumpunkt physikalische Selbständigkeit und legte ihm dementsprechend auch besondere Kräfte bei. Diese Kräfte bewirkten

*) Unter regulären Funktionen versteht man in der mathematischen Physik solche, welche endlich und stetig sind und beliebig viele, endliche und stetige Differentialquotienten haben. An einzelnen Flächen lassen wir Unstetigkeiten zu.

das Streben der Körper nach ihren „natürlichen Orten", wie sich Luft und Feuer nach „oben" drängen, während schwere Massen nach „unten" sinken. Diesen Standpunkt überwand Kopernikus. Man kann seine Leistung als das Relativitätsprinzip des Ortes benennen. Das Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik und das der Lorentz-Transformation bezog sich auf die Geschwindigkeiten, die ersten Differentialquotienten des Ortes nach der Zeit; man kann für jeden Massenpunkt, der eine konstante Geschwindigkeit hat, ein Koordinatensystem angeben, in dem er dauernd ruht. Die obige Überlegung relativiert zunächst in ähnlichem Sinne die Beschleunigung, d. h. die zweiten Differentialquotienten. Das allgemeine Relativitätsprinzip endlich relativiert die Bewegung überhaupt, man kann jeden Massenpunkt dauernd „auf Ruhe" transformieren.

Diese Relativität jeglicher Bewegung ist durchaus kein neuer Gedanke. Kant[1]) z. B. hat ihn gelegentlich mit einer Schärfe betont, über die man nicht mehr hinausgehen kann. Und seit Newtons Zeiten ist aus ihm mehr als einmal ein Widerspruch gegen die Newtonsche Mechanik hergeleitet worden. Doch konnte der Widerspruch nicht durchdringen, solange man für Zentrifugalkräfte und ähnliche Tatsachen keine die Newtonsche ersetzende Erklärung geben konnte. Das ist erst Einstein gelungen durch die Transformation der Schwere, welche deren Feld „relativiert", d. h. beim Übergang von einem Bezugssystem zum anderen verändert, ähnlich wie schon die beschränkte Relativitätstheorie das elektromagnetische Feld „relativiert" hat.

Betrachten wir nun die Transformationen (4) etwas genauer. Zu ihnen gehören auch solche, in denen weder x^4 noch x'^4 auftritt, die somit lediglich die drei räumlichen Koordinaten transformieren. Schon aus diesem Grunde dürfen wir bei den drei räumlichen x nicht ausschließlich an kartesische Koordinaten denken, wie wir es in der beschränkten Relativitätstheorie im allgemeinen taten. Vielmehr müssen wir uns darin die weitgehendste Freiheit vorbehalten. Auch die Vorstellung zweier starren Achsenkreuze, die sich irgendwie gegeneinander bewegen, hätte nicht die erforderliche Allgemeinheit. Denn da wir der Art, wie x^4 in (4) auftritt, keine Beschränkung auferlegt haben, müssen wir das gestrichene Koordinatensystem im allgemeinen als gegenüber dem ungestrichenen deformierbar betrachten. Eine Eindeutigkeit

schreiben wir der Transformation zu, damit jedem Raum-Zeit-Punkt x^1, x^2, x^3, x^4 ein Punkt x'^1, x'^2, x'^3, x'^4 und umgekehrt entspricht. Regularität setzen wir voraus, damit jedem zusammenhängenden Raum-Zeit-Gebiet in den x ein zusammenhängendes Gebiet in den x' entspricht, sowie, damit wir überhaupt die Differentialgleichungen, als die wir die Naturgesetze uns vorstellen, von einem auf das andere System übertragen können. Schließlich muß die Funktionaldeterminante von Null verschieden sein, damit wir sicher sind, daß die x' vier voneinander unabhängige Funktionen der x darstellen, sich also zur Darstellung einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit eignen. Sonst aber stellen in der vierdimensionalen „Welt", wenn wir in ihr die x als rechtwinkelige Koordinaten im Sinne Minkowskis annehmen (siehe Bd. I, § 8), die Räume $x'^4 = const$ ganz beliebige dreidimensionale Gebilde dar.

Die Zeitkoordinate x^4 nehmen wir in allen Bezugssystemen als reell an. Sie entspricht insofern der Größe $u = ct$ der beschränkten Relativitätstheorie. Doch braucht sie im Gegensatz zu u ebensowenig wie die drei anderen x von der Dimension einer Länge zu sein. Die Forderung, daß x^4 stets zeitartig ist, bedeutet: In der beschränkten Relativitätstheorie mußte die positive Zeitachse durch den Weltpunkt O in dem Gebiet „jenseits" von O liegen, welches durch den Nachkegel von den anderen Teilen der „Welt" geschieden war. (Siehe Bd. I, § 8, besonders Fig. 6.) Alle Punkte des genannten Gebietes stellen Ereignisse dar, welche Wirkungen des Ereignisses O sein können, während die Punkte „diesseits von O" nur als Ursachen für O in Betracht kommen und die Punkte des „Zwischengebietes" in keinem ursächlichen Zusammenhang mit O stehen können. Auch hier werden wir jedem Punkte einen Vor- und einen Nachkegel zuordnen und ein Gebiet „jenseits von O" durch ihn abgrenzen können (§ 7 c). Sollen ursächliche Beziehungen zwischen Ereignissen eine vom Bezugssystem unabhängige Bedeutung haben, so dürfen wir trotz aller sonstigen Allgemeinheit nur solche Systeme als berechtigt zulassen, bei denen für jeden Punkt O die Richtung des wachsenden x^4 in das Gebiet jenseits hineinführt. Diese Einschränkung macht das Kausalitätsprinzip notwendig. Eine Transformation, die wie $x'^4 = -x^4$ die Richtung der Zeit einfach umkehrte, ist damit ausgeschlossen.

Im Gegensatz dazu sollen die Koordinaten x^1, x^2, x^3 stets raumartig sein. Mathematisch bedeutet dies: Ein Linienelement, welches einem Raume $x^4 = const$ in der Welt angehört, soll, wenn es von dem Weltpunkt O ausgeht, in dessen Zwischengebiet hineinweisen, oder, wie wir sagen wollen, es soll eine Strecke sein. (Jeden Raum $x^4 = const$ nennen wir infolgedessen einen Streckenraum.) Die physikalische Bedeutung aber liegt darin, daß ein Massenpunkt, wenn er im gestrichenen System ruht, gegen das ungestrichene unter allen Umständen eine geringere Geschwindigkeit haben soll, als das Licht sie am gleichen Orte besitzt. Daß beide Aussagen das gleiche bedeuten, mag sich der Leser vorläufig am Beispiel der beschränkten Relativitätstheorie klar machen. Damit ist also z. B. ein starres Achsenkreuz, welches die tägliche Drehung der Erde mitmacht, ausgeschlossen. Denn ein in ihm ruhender Punkt hätte bei hinreichendem Abstand von der Erdachse ganz gewiß Überlichtgeschwindigkeit gegen das doch gewiß berechtigte Koordinatensystem, das wir gewöhnlich in der Astronomie benutzen. Wohl aber darf man Teile davon benutzen, die der Erdachse hinreichend nahe liegen, und muß dann durch geeignete Wahl der Koordinaten dafür sorgen, daß entferntere Teile eine immer geringere Drehgeschwindigkeit bekommen, was bei einem deformierbaren Achsenkreuz ja möglich ist.

Man hat gegen diesen Vorschlag, die Drehgeschwindigkeit des einen Systems mit abnehmendem Abstand von der Drehachse zu verringern, eingewandt, daß in ihm zwei zur Drehachse senkrechte Koordinatenachsen sich immer mehr aufwickeln, wie ein Faden zum Knäuel, und daß das doch ein immer weniger einfaches Koordinatensystem ergäbe. Es ist aber meines Erachtens gar nicht ausgemacht, daß man für alle Raum-Zeit-Bereiche dasselbe Koordinatensystem benutzen muß. Läßt man aber Unstetigkeiten zu, so kann man entweder in einem bestimmten Abstand von der Achse das neue System vollständig in das alte übergehen lassen, während es sich weiter innen mit konstanter Geschwindigkeit dreht, oder man kann auch ein und dasselbe so drehende System immer nur für passend gewählte endliche Zeiträume benutzen, und dann zu einem dritten umspringen, welches nun die Bewegung des vorher benutzten wiederholt.

Das Zeitmaß können wir durch die Transformation (4) noch in ganz willkürlicher, auch von Raumpunkt zu Raumpunkt ver-

schiedener Weise abändern. Die Möglichkeit, trotzdem die Naturgesetze in invarianter Form auszusprechen, beruht darauf, daß die Bestimmungsstücke des Schwerefeldes in alle Naturgesetze eingehen, und bei jeder Transformation der vier Koordinaten eine entsprechende Transformation erfahren. Wir könnten uns also in unserem Laboratorium eine große Zahl ganz verschieden schnell gehender Uhren aufstellen und jede davon als für ihren Standpunkt richtig erklären. Ob die Benutzung eines solchen Koordinatensystems zweckmäßig wäre, ist freilich eine ganz andere, aber von den grundsätzlichen Erörterungen auszuschließende Frage. Aus allen Aussagen über beobachtbare Tatsachen müssen die Unterschiede der Systeme natürlich insofern herausfallen, als sich diese Aussagen durch die Koordinatentransformation eindeutig auseinander ableiten lassen, wie wir es ja im kleineren Umfange schon in der beschränkten Relativitätstheorie gesehen haben.

Im Gegensatz zu dieser weitgehenden Willkür steht nun der Begriff der Eigenzeit als der invarianten Länge einer zeitartigen Weltlinie. Sie messen wir mit Uhren, die, unmittelbar nebeneinander gestellt, den gleichen Gang zeigen. Daß diese, an verschiedenen Stellen im gleichen Koordinatensystem ruhend, gegen die Systemzeit x^4 c noch verschieden gehen können, werden wir als eine Folge von Schwerewirkungen später kennen lernen.

Ebensowenig wie x^4 eine unmittelbare physikalische Bedeutung hat — es war ja noch mit größter Willkür definiert —, haben die drei anderen Koordinaten eine solche. Welche Entfernung z. B. zwei Punkte haben, die bei demselben x^4 sich in den x^1, x^2, x^3 um dx^1, dx^2, dx^3 unterscheiden, das läßt sich allgemein nicht sagen. Wir sehen das schon in euklidischen Verhältnissen beim Übergang von den gewohnten rechtwinkelig geradlinigen zu irgendwelchen krummlinigen Koordinaten, etwa Polarkoordinaten. Aber in der bisherigen Physik und ihrer euklidischen Geometrie haben wir in den rechtwinkelig-geradlinigen Koordinaten insofern Normalkoordinaten, als wir in ihnen unmittelbar die physikalisch zutreffende Entfernung zweiter Punkte angeben können. Indem die allgemeine Relativitätstheorie von derartigen Normalkoordinaten vollständig absieht, entkleidet sie nach einem Ausspruch Einsteins: „den Raum (wie auch die Zeit) des letzten Restes physikalischer Gegenständlichkeit“.

Überlegt man sich, welche Bedeutung die Koordinaten dann überhaupt noch behalten, so muß man sagen: Eine außerordentlich geringe. Sie sind eigentlich nur noch eine Art, Raum-Zeit-Punkte zu benennen, und wie jede Namengebung in hohem Maße willkürlich. Sie haben ihr Vorbild in den willkürlichen Koordinaten, welche zuerst Gauß auf krummen Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum eingeführt hat.

Nun braucht man aber eine Maßbestimmung, d. h. eine Formel, nach der man aus den Koordinaten zweier Punkte ihren Abstand berechnet. Und diese gewinnt die allgemeine Relativitätstheorie durch die Forderung, die man ihrer Natur nach für jedes beliebige Koordinatensystem stellen muß: Den Abstand zweier Raumpunkte mißt ein im Ruhezustand an sie angelegter physikalischer Maßstab.

§ 4. Die Notwendigkeit nichteuklidischer Geometrie.

Wie in § 3 erwähnt, dürfen wir in beschränkter Ausdehnung ein „gestrichenes" Koordinatensystem benutzen, welches sich gegen das in der Astronomie gebräuchliche „ungestrichene" mit konstanter Geschwindigkeit dreht. Dies Beispiel soll uns nun zu einer grundsätzlich wichtigen Erkenntnis verhelfen.

Wir haben ebenfalls schon gesagt, daß wir Strecken, welche in diesem „gestrichenen" System ruhen, mit daneben ruhenden Maßstäben auszumessen haben. Das sind wir ja schon aus der beschränkten Relativitätstheorie her gewohnt. Gewiß können wir hier wie dort auch andere Maßstäbe benutzen, aber dann müssen wir das Ergebnis der Messung in geeigneter Weise umrechnen. Wie, das sagte uns früher der Satz von der Lorentz-Kontraktion. Nun messen wir in dem gestrichenen System unseres Beispiels einmal den Halbmesser eines Kreises um die Drehachse, das andere Mal dessen Umfang. Wir wollen uns das Ergebnis vom ungestrichenen System aus klar machen. Dann ist zu sagen: Bei der Messung des Halbmessers hat der Maßstab keine Geschwindigkeit in seiner Längsrichtung, daher auch keine Lorentz-Kontraktion. Er gibt somit für die Länge des Halbmessers einen Wert, der auch für das ungestrichene System richtig ist. Aber wenn wir ihn an den Umfang legen, so zeigt sich die Lorentz-Kontraktion, und er gibt somit, vom ungestrichenen System aus beurteilt, für jeden Teil des Umfanges eine zu große Maßzahl an. Nun ist im

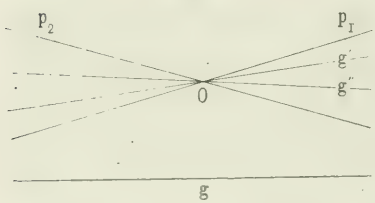
ungestrichenen System, wenn wir in ihm die euklidische Geometrie als gültig betrachten, das Verhältnis Umfang zu Halbmesser 2π. Im gestrichenen System ist somit dieses Verhältnis größer als 2π, und das heißt: es kann dort die Maßbestimmung, wie sie die allgemeine Relativitätstheorie fordert, nicht der euklidischen Geometrie entsprechen.

Schon die beschränkte Relativitätstheorie trieb eine von der euklidischen abweichende Geometrie, wenn sie als Weltkoordinaten x, y, z und die reelle Veränderliche $u = ct$ benutzte. Aber der Unterschied ging nicht sehr tief, er verschwand ganz, sowie man zu $l = ict$ überging; deshalb nennen wir jene Geometrie pseudoeuklidisch. Und in allen Streckenräumen $u = const$ blieb die euklidische Geometrie vollständig bestehen. Da nun die vierdimensionale Betrachtungsart uns nie mehr war als ein wertvolles Hilfsmittel, das aber die physikalische und erkenntnistheoretische Seite der Sache nicht berührte, so konnten wir ziemlich kurz darüber hinweggehen. Hier aber stoßen wir auf die Folgerung aus unseren Grundsätzen, daß auch in dem dreidimensionalen Raume, in den wir die Außenwelt einordnen, die euklidische Geometrie nicht streng und allgemein gelten kann. Und das zwingt uns zu einer eingehenderen Betrachtung über die Berechtigung anderer Geometrien an sich und in ihrer Anwendung auf die Physik.

Die Geometrie Euklids beruht auf einer Anzahl von Axiomen, die ihr Urheber für keines Beweises bedürftig, sondern als unmittelbar einleuchtend ansah. Nahm man sie an, so folgte daraus alles übrige logisch — oder sollte doch wenigstens daraus folgen. Und durch zwei Jahrtausende galt dies Beispiel als der Beweis, daß der menschliche Geist zu einer erfahrungsunabhängigen und deswegen schlechthin notwendigen Erkenntnis befähigt wäre. In diesem Sinne verwendet auch Kant, entsprechend dem mathematischen Wissen seiner Zeit, die Mathematik einschließlich der euklidischen Geometrie als einen wesentlichen Grundstein seiner Erkenntnislehre. Aber gerade diese scharfe Betonung des Apriorischen und Zwingenden der euklidischen Geometrie rief den Widerspruch hervor. Schon lange hatten sich Mathematiker von dem Parallelenaxiom Euklids nicht befriedigt gefühlt und versucht, es zu beweisen, d. h. auf die anderen Axiome zurückzuführen. Dies Axiom aber sagt aus: Zu jeder Geraden kann

man durch einen ihr nicht angehörenden Punkt eine und nur eine andere Gerade ziehen, welche mit ihr in einer Ebene liegt und sie nirgends (oder nur im Unendlichen) schneidet. Freilich waren diese Beweisversuche alle vergeblich. Gauß, der sich selbst noch an ihnen beteiligt hat, erkannte wohl als erster ihre Aussichtslosigkeit, indem er eine Geometrie schuf, die sich von der euklidischen nur durch das Fallenlassen des Parallelenaxioms unterschied. Doch dies ist erst nach seinem Tode bekannt geworden. Vor der Öffentlichkeit haben zuerst der Russe Lobatschewski und die beiden Ungarn Bolyai, Vater und Sohn, um 1830 eine Geometrie vertreten, bei welcher es in der Ebene zu jeder Geraden g durch jeden außer ihr liegenden Punkt O zwei andere Gerade (Parallelen) p_1, p_2 gibt, welche erstere im Unendlichen schneiden (Fig. 7). Den Winkel zwischen ihnen füllen Gerade g', g'' ... aus, welche die erstgenannten überhaupt nicht schneiden. Daß sich diese „hyperbolische" Geometrie, wie man sie nennt, widerspruchsfrei durchführen läßt, hat F. Klein um 1870 bewiesen, indem er sie unmittelbar auf die als widerspruchsfrei anerkannte euklidische in dem Sinne zurückführte, daß jedem Satz der einen ein Satz der anderen entspricht. Wir gehen darauf in § 12 näher ein. Damit war dann überzeugend dargetan, daß das Parallelenaxiom weder auf die anderen zurückführbar, noch an sich a priori gewiß ist.

Fig. 7.



Viel gemeinsames mit ihr hat die „elliptische" Geometrie, bei welcher es aber im Gegensatz zu den bisher genannten überhaupt keine parallelen Geraden gibt. Vielmehr schneiden sich alle Geraden einer Ebene. Und auch diese Geometrie ist in sich widerspruchsfrei, also mathematisch berechtigt (§ 11 und 12).

In der euklidischen Geometrie ist der Abstand zweier Punkte mit den kartesischen Koordinaten x^1, x^2, x^3 und $x^1 + dx^1$, $x^2 + dx^2$, $x^3 + dx^3$ einfach

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2},$$

in den beiden anderen genannten Geometrien tritt an die Stelle dieser Formel

$$ds^2 = a_1 dx_1^2 + a_2 dx_2^2 + a_3 dx_3^2,$$

wobei die Koeffizienten bestimmte einfache Funktionen der x_i sind, im hyperbolischen Falle andere als im elliptischen. Man kann den ganzen Unterschied dieser drei Geometrien geradezu aus der Formel für ds entnehmen, ja überhaupt die ganze Geometrie auf ihr aufbauen. Nun tat Riemann 1864 den später für die allgemeine Relativitätstheorie grundlegend wichtig gewordenen Schritt, eine homogene quadratische Funktion der dx^i mit beliebigen Funktionen der x^i als Koeffizienten,

$$ds^2 = \sum_{ik} \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4a)$$

als Quadrat des Linienelementes anzusetzen. Man kann diesen Ansatz den verallgemeinerten pythagoreischen Satz nennen. Jede Wahl der Funktionen γ_{ik} bestimmt eine besondere Art von Geometrie. Doch ändert sich die Geometrie nicht, wenn wir die Koordinaten transformieren und die γ_{ik} dabei so umrechnen, daß die Doppelsumme in (4a), die Maßbestimmung, invariant bleibt. Wir werden darauf in § 7 bis 10 ausführlich eingehen und wollen an dieser Stelle nur erwähnen, daß in diese ganze Entwickelung der Geometrie, von Euklid bis Riemann, nirgends etwas Physikalisches mit hineingesprochen hat. Rein aus gewissen Axiomen wurde geschlossen. Diese Axiome selbst sind gewiß nicht die einzig möglichen, der menschliche Geist kann auch andere schaffen. Aber bei ihrer Aufstellung bedarf er einer Entlehnung aus der Erfahrung ebensowenig wie etwa bei Schaffung des Begriffs der komplexen Zahl; die Geometrien sind daher alle a priori. Daß die Erfahrung in der psychologischen Wirklichkeit dabei eine Rolle gespielt hat und z. B. einem Euklid fälschlicherweise seine Axiome als die allein möglichen erscheinen ließ, dürfte wohl zutreffen, widerspricht dem aber nicht.

Fragen wir nun aber nach dem Recht, nichteuklidische Geometrie auf die Außenwelt in der Physik anzuwenden. Wir beginnen mit einem von Poincaré und Schlick stammenden Gedankengange. Nehmen wir einmal an, die Außenwelt veränderte sich in allen Strecken um den Faktor λ, den wir so groß oder so klein wählen mögen, als wir nur irgend wollen. Nur

müssen wirklich alle Körper in allen ihren Teilen, alle Abstände zwischen ihnen, alle Wellenlängen bei mechanischen und elektromagnetischen Wellen diese Veränderung erleiden. Was könnte der Physiker davon merken? Die Antwort kann nur lauten: Nichts. Man wird dies ohne weiteres für alle unmittelbaren Streckenmessungen, d. h. alle Vergleichungen mit einem Metermaßstab zugeben, weil sich ja dieser nach unseren Voraussetzungen mit geändert hat. Eher wird man an mittelbare physikalische Folgen dieser Umwandlung denken, die auffallen müßten. Es könnten, so wird man vielleicht meinen, z. B. die Erdanziehung, also die Fallbeschleunigung, die elastischen und elektrischen Konstanten der Körper bei der Messung andere Werte liefern. Aber auch diesen Einwand können wir widerlegen. Alle Messungen nämlich laufen in letzter Linie immer wieder auf Streckenmessungen hinaus. Das gilt für die Zeitbestimmungen — Ablesen der Zeigerstellung an Uhren — nicht weniger als für Gewichtsbestimmungen an einer Federwage oder für elektrische Strom- und Spannungsmessungen an Ampere- und Voltmetern oder Temperaturablesungen an einem Thermometer. Ist also wirklich unsere Annahme richtig, daß alle, also auch gleichzeitig am gleichen Orte liegende Strecken die genannte Dehnung zeigen, so ist von ihr schlechthin nichts zu merken.

Und daraus schließen wir weiter: Eine solche Dehnung ist gar nicht wirklich. Gewiß ist es eine schwere philosophische Frage, was eigentlich „Wirklichkeit“ bedeutet, und die Antwort wird auf sehr verschiedenen Wegen zu suchen sein, je nachdem es sich bei den Gegenständen der Mathematik, oder der Physik oder bei anderen Dingen um die Wirklichkeit handelt. Aber für die Physik gibt es zum Glück ein verhältnismäßig einfaches Kennzeichen dafür in einem Satze, den Planck so geprägt hat: „Was sich messen läßt, ist auch wirklich“. Man kann ihn nämlich auch ruhig umkehren: Was sich grundsätzlich jeder Messung entzieht, ist sicher nicht physikalisch wirklich. Das war ja der Grund, aus dem wir den Äther der älteren Elektrodynamik schon in der beschränkten Relativitätstheorie ablehnten. Und so werden wir auch hier dabei bleiben, daß die besprochene Dehnung gar keinen physikalischen Sinn ergibt. Sie bezieht sich auf ein Koordinatensystem, dessen Maßbestimmung der physikalischen Messung nur mittelbar zugänglich wäre und daher für die Physik nicht „natür-

lich" ist. Das dagegen gedehnte System hingegen besitzt unmittelbar die „natürlichen" Maßbestimmungen, die man an Maßstäben ablesen kann. Ebensowenig wirklich wäre, wie in Bd. I, § 1a erwähnt, eine gleichmäßige Veränderung im Zeitmaß aller Vorgänge, wozu wir dann freilich auch die psychologischen Vorgänge rechnen müßten.

Nun gehen wir einen Schritt weiter: Wir nehmen die besprochene Dehnung nicht in allen Richtungen vor, sondern nur in der z-Richtung eines gewöhnlichen rechtwinkeligen Achsenkreuzes. Dazu gehört dann die weitere Annahme, daß jeder Körper, der sich im alten System ohne Formänderung bewegte, jetzt bei einer Drehung eine eigenartige Gestaltänderung erleidet, indem jede Strecke an ihm, die anfänglich zur z-Richtung senkrecht ist, sich dehnt, sowie man sie in diese Richtung hineindreht. Aber nehmen wir diese und ähnliche Folgerungen einmal hin. Dann fragen wir wieder wie oben: Wird ein Physiker etwas von dieser Veränderung bemerken? Und wieder müssen wir antworten: Nein. Und der Beweis lautet wie oben: Alle Messungen sind im Grunde Längenmessungen, und jede Längenmessung läuft darauf hinaus, daß man zwei materielle Punkte, nämlich je einen Endpunkt der zu bestimmenden Strecke mit je einem Ende des Maßstabes zusammenfallen läßt, d. h. zu gleicher Zeit an die gleiche Stelle bringt. An dieser Zuordnung des Zusammenfallens ändert unsere Dehnung nichts, sie ist mithin nicht bemerkbar und somit nicht wirklich*). Auch Beobachtungen mit Hilfe des eigenen Körpers bringen uns nicht darüber hinaus. Dieser ist dabei nichts als ein — meist ziemlich unvollkommener — Maßstab.

Und jetzt tun wir noch einen Schritt. Wir ziehen in einem euklidischen Raum die drei Scharen von Ebenen, welche zu den Koordinatenebenen eines rechtwinkeligen Systems parallel sind; und zwar mag jede Ebene von den nächstbenachbarten der gleichen

*) Dem entspricht nach einer mündlichen Bemerkung Einsteins, daß eine Eisenbahnkarte sich die Vereinfachung leisten darf, alle Teilstrecken geradlinig und ohne Rücksicht auf ihre wahre Länge zu zeichnen. Wenn sie nur die Knotenpunkte mehrerer Strecken richtig wiedergibt, so ermöglicht sie immer, in Verbindung mit dem Fahrplan (welcher noch die Zeitangaben liefern muß) die Anschlüsse richtig aufzufinden. Solange man sich auf das Aufsuchen solcher beschränkt, können ihre Abweichungen von der Wirklichkeit nie zur Wahrnehmung kommen.

Schar den Abstand 1 cm haben. So finden wir als Schnittpunkte je dreier Ebenen alle die Punkte, für welche die Koordinaten x, y, z in Zentimetern ganzzahlig sind. Dieses Raumgitter verbiegen und verzerren wir nun nach freier Phantasie, jedoch ohne es irgendwo zu zerreißen. Und alles, was der Raum an physikalischen Gegenständen enthält, lassen wir an der Umformung teilnehmen in dem Sinne, daß jeder physikalische Punkt seine Koordinaten x, y, z behält. Selbstverständlich ist auch diese Veränderung physikalisch unwirklich, weil es kein Mittel gibt, sie wahrzunehmen. Die einzig wahrnehmbaren Tatsachen, daß nämlich gewisse materielle oder allgemeiner physikalische Punkte zu gewissen Zeiten zusammenfallen, bleiben ja unverändert. Und wir können nur sagen: Unsere Deutung der x, y, z als rechtwinkeliger, kartesischer Koordinaten war im Grunde Willkür. Es sind gewiß Koordinaten, insofern sie ja die Gegenstände der Außenwelt in eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit einordnen. Aber wir können sie geradeso gut als beliebige krummlinige Koordinaten betrachten, wenn wir das irgendwie für gut halten. Ein Wertetripel x, y, z ist der Name eines Raumpunktes, nicht mehr. Es kann uns niemand diese Deutung als falsch hinstellen.

Allerdings, damit schaffen wir auch eine andere Physik. Bei der letzteren Deutung bewegt sich ein freier Körper nicht mehr geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit, sondern auf irgend einer krummen Bahn mit wechselnder Geschwindigkeit und sogar unter allerhand eigenartigen Formänderungen. Ein Lichtstrahl folgt nicht mehr einer Geraden, sondern beschreibt eine krumme Kurve usf. Eine solche Physik ist genau so folgerichtig durchführbar, wie die übliche; nur stellt sie die wirklichen Verhältnisse unnötig verwickelt dar. Eine Geometrie, die zu ihr führt, wird uns daher der Wirklichkeit schlecht angepaßt, nicht „natürlich“ erscheinen.

Sehr anschaulich hat Helmholtz solche Verhältnisse geschildert, indem er annahm, wir spiegelten unsere Außenwelt in einem Konvex- oder besser noch in einem Zerrspiegel. Die gespiegelte Welt wird uns von unserer recht verschieden erscheinen. Beim Konvexspiegel z. B. hat sie ein Ende in der Brennebene des Spiegels, denn alle Gegenstände, die sich überhaupt spiegeln, selbst die fernsten Sterne, liegen vor dieser. Und trotzdem könnten wir unser eigenes Spiegelbild, falls auch dies Physik zu treiben

anfinge, nie davon überzeugen, daß es eine andere Art von Geometrie habe als wir, denn in der Tat: Was wir auch tun mögen, um Strecken zu messen, immer wird ja das Spiegelbild die genau entsprechende Messung mit genau demselben Ablesungsergebnis vornehmen. Es entspricht eben jedem Zusammenfallen zweier Punkte bei uns ein Zusammenfallen der gleichbenannten Punkte im Spiegelbild. Allerdings, könnten wir unser Spiegelbild zu der Anerkennung bringen, daß sich seine Maßstäbe, die Spiegelbilder der unseren, bei der Überführung von einem Orte zum anderen verändern, entsprechend den Gesetzen, welche nach unserer Geometrie zwischen Gegenstand und optischem Bild bestehen, so käme es zu einer von unserer verschiedenen Geometrie, welche, um nur einen Unterschied zu erwähnen, dem Raum eine bestimmte Fläche als Grenze zuweist. Aber wir können es nie zu dieser Anerkennung zwingen. Im Gegenteil wird es uns bei jedem Versuch dazu vor Augen halten, daß wir ihm neben einer sehr verwickelten Physik auch eine durch Messungen nicht unmittelbar zu bestätigende, also nicht natürliche Geometrie aufnötigen wollen.

Gauß hat einmal das Dreieck Brocken, Inselsberg, Hoher Hagen geodätisch ausgemessen, um die Summe der Winkel in ihm zu bestimmen. Er fand sie, so genau er messen konnte, zu zwei Rechten, wie es die euklidische Geometrie verlangt. Hätte er ein anderes Ergebnis erhalten, so wäre damit keineswegs die Geltung der euklidischen Geometrie widerlegt gewesen. Denn nur in einem geradlinigen Dreieck muß nach ihr die Winkelsumme zwei Rechte betragen. Man hätte also immer einwenden können: Die Lichtstrahlen, welche die Seiten des Dreiecks bildeten, sind nicht gerade; die Geometrie ist beizubehalten, aber die Optik bedarf der Abänderung. Auch in diesem Falle ist ein empirisches Urteil über die geltende Geometrie ohne eine physikalische Voraussetzung unmöglich.

Wir schließen aus diesen Betrachtungen: In rein mathematischem Sinne gibt es eine ganze Reihe verschiedener Geometrien, welche jede mit dem gleichen Recht als eine von jeglicher Erfahrung unabhängige Erkenntnis bestehen. Jede ist durch eine Maßbestimmung definiert. Nur darin irrte Kant, daß er die euklidische Geometrie für die einzige mathematisch mögliche hielt. Fragt man, welche von ihnen in der physikalischen Wirklichkeit gilt, so kann man darauf keine Antwort erhalten, ohne daß man

zugleich rein physikalische Forderungen stellt. Man kann nicht den Raum an sich ausmessen, sondern nur räumliche Beziehungen zwischen physikalischen Dingen bestimmen. Kant behält auch darin recht, daß der Raum kein von den Körpern unabhängiges, selbständiges Dasein führt; er ist nur ein Ordnungsprinzip, ein Schema, nach welchem der menschliche Geist die auf die Außenwelt bezüglichen Wahrnehmungen ordnet. Durch solche Forderungen wird die Geometrie allerdings ein Teil der Physik, also auch Erfahrungswissenschaft. Aber ebenso vielgestaltig wie die möglichen physikalischen Theorien sind auch die zugehörigen Geometrien. Man kann aus der Fülle dieser verschiedenen Möglichkeiten nicht nach dem Gesichtspunkt: „Richtig oder falsch?" eindeutig eine herausheben und die anderen verwerfen. Vielmehr kann man die Auswahl lediglich nach dem Gesichtspunkt der Einfachheit und Zweckmäßigkeit treffen, dessen Bedeutung wir schon in der Einleitung zu Bd. I hervorgehoben haben. Wir wollen, wie erwähnt, im folgenden stets verlangen, daß die Maßbestimmung unserer Geometrie „natürlich", d. h. unmittelbar an physikalischen Maßstäben abzulesen ist. Dann ist die Frage, welche Geometrie gilt, eindeutig zu beantworten.

Und wir wollen hier sogleich betonen: Die euklidische Geometrie paßt sich der physikalischen Idee des starren Körpers vorzüglich an. In ihren Kongruenzsätzen gibt sie ja unmittelbar Bedingungen an, unter welchen sich zwei Figuren, sofern man sie ohne Formänderung bewegt, zur Deckung bringen lassen. Gäbe es nur flüssige und gasförmige Körper, so wäre das kein besonderer Vorzug. Vor der elliptischen und der hyperbolischen Geometrie, welche ebenfalls Kongruenzsätze haben, zeichnet sie sich aber aus, weil sie die Erfahrungstatsache, daß sich zwei Lichtstrahlen in einer Ebene stets, abgesehen von dem Grenzfall des „Parallelismus", schneiden, mit der Geradlinigkeit des Strahles vereinigen kann. Die Ideen des starren Körpers und der geradlinigen Lichtausbreitung geben aber tausendfältige, namentlich vorwissenschaftliche Erfahrung vortrefflich wieder. So versteht man, warum die euklidische Geometrie zuerst entstand, und daß sie, weil man die unbewußte Mitwirkung der Erfahrung nicht durchschaute, durch zwei Jahrtausende als die allein mögliche galt. Erwägt man weiter, daß der starre Körper zu seinem Dasein Fernkräfte braucht, daß aber die Newtonsche Mechanik solche ohnehin

annahm, so erkennt man in dem auf Newton zurückgehenden, die euklidische Geometrie als die „natürliche“ einschließenden Gebäude der Physik eine großartige und imponierende innere Geschlossenheit. Es erhielt eine Bresche, als man sich von den Fernkräften befreite, und man sieht jetzt auch die innere Logik der Entwickelung, welche von der Maxwellschen Elektrodynamik über die Relativitätstheorie zur Aufgabe der euklidischen Geometrie geführt hat.

Hier, in der allgemeinen Relativitätstheorie, lassen wir den Gedanken des starren Körpers vollständig fallen. Jeder Körper verändert sich bei der Verpflanzung in eine andere Lage gegenüber anderen Körpern. Und wir können an dieser Stelle noch nicht einmal sagen, welche physikalischen Gesetze die Gestaltänderungen beherrschen. (Erst in § 15 werden wir sehen, daß es Wirkungen der Schwere sind, die wir dafür verantwortlich machen müssen.) Eine Geometrie, die diesen verwickelten Verhältnissen gegenüber natürlich ist, verdanken wir Riemann und seinen mathematischen Nachfolgern.

§ 5. Der Ausdruck für das Linienelement im Drei- und im Vierdimensionalen.

Wie erwähnt, beruht Riemanns Geometrie auf dem verallgemeinerten pythagoräischen Satz, demzufolge das Quadrat des Linienelementes

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

ist, also eine homogene quadratische Funktion der Differentiale der Koordinaten. Für zwei Dimensionen hatte Gauß auf ihn seine Untersuchungen über krumme Flächen gegründet, und er hatte ihn dabei zurückgeführt auf den eigentlichen pythagoräischen Lehrsatz

$$ds^2 = dx^{1\,2} + dx^{2\,2} + dx^{3\,2}$$

der euklidischen Geometrie im dreidimensionalen Raum. Hier aber können wir die Rechtfertigung nicht einfach durch den Hinweis auf eine Mannigfaltigkeit von mehr Dimensionen geben. Vielmehr müssen wir fragen: Warum führt gerade der Ansatz (5) zu

einer für die Physik passenden Geometrie? Ist dafür nicht irgend ein anderer Ansatz, etwa

$$ds^4 = \sum_{h,i,k,l=1}^{3} \gamma_{hikl}\, dx^h\, dx^i\, dx^k\, dx^l$$

vorzuziehen *)?

Wie diese Frage zu beantworten ist, hat lange vor der Relativitätstheorie mit genialem Blick Helmholtz erkannt. Daß es keinen wirklich starren Körper gibt, war ihm natürlich bekannt. Aber er sagte sich mit Recht, daß an dieser Idee doch etwas Richtiges daran ist. Kennzeichen des starren Körpers wäre, daß es für jedes ihm angehörende Paar materieller Punkte, die die Koordinaten x und y haben mögen, einen in natürlichem Maß unveränderlichen Abstand

$$\Omega(x^i, y^i) = \Omega(y^i, x^i)$$

gibt. Erfahrungsgemäß ist aber ein solcher Körper noch frei beweglich; man kann von drei beliebig (nur nicht auf einer Geraden) gewählten Punkten in ihm den ersten unbeschränkt an jeden Ort $x^i = a^i$ bringen, den zweiten noch an jeden Ort b^i auf einer Fläche $\Omega(a^i, x^i) = const$ und den dritten dann noch an jeden Ort auf der Kurve $\Omega(a^i, x^i) = const$, $\Omega(b^i, x^i) = const$. Man hat also zunächst sechs Freiheitsgrade, nach Festlegung eines Punktes noch drei, nach Festlegung zweier Punkte noch einen. Der Ansatz für Ω soll nun so gewählt werden, daß die drei Freiheitsgrade der Drehung um einen festen Punkt aus ihm abzuleiten sind. Die drei anderen Freiheitsgrade bei der Festlegung eines Punktes sind ja selbstverständlich. Freilich, wollte man diese Forderung für Körper von endlicher Aus-

*) Fände man es zweckmäßig, Strecken auf der Erdoberfläche etwa nach der Zeit zu werten, die eine Truppe unter normalen Umständen zu ihrer Zurücklegung braucht, so wäre der Ansatz (5) schon aus dem Grunde nicht angemessen, weil danach die Strecken AB und BA gleich, während sie für die angedeutete Wertung doch im allgemeinen verschieden lang sind. Man müßte also einen anderen Ansatz suchen. Das ergäbe dann eine von allem bekannten gänzlich abweichende, aber in sich geschlossene und widerspruchsfreie Geometrie. Größere Bedeutung hätte wohl schon der Plan, die nicht-euklidische Maßbestimmung für die geometrische Optik, namentlich inhomogener Körper zu benutzen, indem man als natürliches Längenmaß die Lichtwellenlänge wählt. Dazu reicht die Maßbestimmung (5) vollständig aus.

dehnung stellen, so käme man notwendig auf eine der drei Geometrien zurück, die schon vor Riemann bekannt waren, die euklidische, die elliptische und die hyperbolische. Wir nehmen daher die Unterschiede der Koordinaten unendlich klein*). Dabei geht die Funktion Ω unmittelbar über in

$$ds = \sqrt{F(dx^i)}.$$

Die in F auftretenden Parameter sind dann noch beliebige Funktionen der x^i.

Einen materiellen Punkt des Körpers halten wir nun fest. Ein ihm benachbarter Punkt hat dann bei einer bestimmten Lage des Körpers die Koordinaten dx^i, bezogen auf den ersten. Bei einer Drehung um den festen Punkt erfahren sie eine Transformation

$$dx'^i = \sum_{k=1}^{3} a_k^i \, dx^k \qquad (i = 1, 2, 3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Die Forderung ist nun: Die neun Koeffizienten a_k^i hängen entsprechend den Freiheitsgraden der Drehung noch von drei unabhängigen Parametern ab. Die Funktion F soll so beschaffen sein, daß sie ihren Wert nicht ändert, wenn wir in ihr die dx^i durch die dx'^i ersetzen.

Um die Folgerungen aus dieser Forderung zu ziehen, schreiben wir für den Augenblick ξ^i für dx^i und deuten uns die drei ξ^i als homogene Koordinaten in einer Ebene, d. h.

$$u = \xi^1 \, \xi^3, \qquad v = \xi^2 \, \xi^3$$

sollen in dieser rechtwinkelige Koordinaten sein. Die Transformation (6) ist dann eine Kollineation, sie überführt jede Gerade (die ja durch eine in den ξ^i homogene lineare Gleichung gegeben ist) wieder in eine Gerade. $F = 0$ ist die Gleichung einer reellen oder imaginären Kurve, und unsere Forderung nimmt nun die Gestalt an, daß diese Kurve bei dreifach unendlich vielen Kollineationen in sich selbst übergeht. Die projektive Geometrie

*) Die Mathematiker haben hervorgehoben, daß man aus dem Dasein von sechs Freiheitsgraden für endliche Teile des Körpers noch nicht auf ihr Vorhandensein für unendlich kleine Teile schließen dürfe. Infolgedessen müssen wir die letztere Aussage ausdrücklich als aus der Physik übernommenes Axiom einführen.

zeigt, daß dafür nur reelle oder imaginäre Kegelschnitte in Betracht kommen*). Also muß F eine homogene quadratische Funktion der ξ^i oder, was dasselbe sagt, der dx^i sein. Damit ist der Ansatz (5) bis auf die Bemerkung bewiesen, daß ds^2 eine positiv definite Form sein muß, weil es sonst Werte von der dx^i gäbe, für die $ds^2 \leqq 0$ wäre; es soll doch aber jedes Punktpaar in einem Streckenraum einen von Null verschiedenen, reellen Abstand haben.

Die Koeffizienten γ_{ik} sind, wie gesagt, Funktionen der drei Koordinaten x^1, x^2, x^3. Wir müssen hier noch die Annahme hinzufügen, daß sie auch von der Zeitkoordinate x^4 abhängen können, um allen Anforderungen der Relativitätstheorie zu genügen. Wäre es nämlich anders, so brauchten wir nur zu einem gegen das erste bewegten Koordinatensystem überzugehen, um x^4 in diese Funktionen einzuführen.

Verlassen wir nun für den Augenblick die Dimensionszahl 3 des Raumes und sprechen wir von n Koordinaten x^i. Wir fragen: Läßt sich die homogene quadratische Form

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

durch eine Substitution

$$z^j = z^j(x^1, x^2, \ldots x^n) \qquad (j = 1, 2, \ldots m)$$

für alle Werte der Koordinaten in eine Quadratsumme

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{m} \pm dz^{j^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

verwandeln, und wie groß muß man die Zahl m der Veränderlichen z zu diesem Zweck wählen**)? Nun folgt aus den Transformationsgleichungen

$$dz^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z^j}{\partial x^i}\, dx^i, \quad dz^{j^2} = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial z^j}{\partial x^i}\, \frac{\partial z^j}{\partial x^k}\, dx^i\, dx^k,$$

also:

$$\sum_{j=1}^{m} + dz^{j^2} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i,k=1}^{n} + \frac{\partial z^j}{\partial x^i}\, \frac{\partial z^j}{\partial x^k}\, dx^i\, dx^k.$$

*) Vgl. den Anhang I.

**) Wenn die z alle reell sein sollen, so werden bei einer indefiniten quadratischen Form in der Darstellung (8) teils positive, teils negative Vorzeichen auftreten.

Damit dies identisch in den dx^i in die Ausgangsformel übergeht, müssen die $\frac{1}{2}n(n+1)$ Bedingungen

$$\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{m} + \frac{\partial z^j}{\partial x^i} \frac{\partial z^j}{\partial x^k}$$

erfüllt sein, und dazu gehören im allgemeinen auch $\frac{1}{2}n(n+1)$ Funktionen z. Für $n = 2$ wären also drei Größen z erforderlich, und damit stimmt überein, daß man jede Fläche mit der Maßbestimmung (7) in einen dreidimensionalen Raum mit der Maßbestimmung (8) einbetten kann; letzterer erweist sich eben durch diese Maßbestimmung als euklidisch. Will man aber eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit mit der Maßbestimmung (7) in eine euklidische verlegen, so muß man dieser schon 6, und bei $n = 4$ gar 10 Dimensionen geben.

Wohl aber kann man in n Dimensionen immer durch gewisse Transformationen

$$X^i = X^i(x^i)$$

erreichen, daß für einen Punkt die Maßbestimmung (7) in

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} + dX^{i2}$$

übergeht. Das ist ja nur das algebraische Problem, eine homogene quadratische Form mit konstanten Koeffizienten in eine Quadratsumme zu verwandeln. Im unendlich kleinen gilt, das schließen wir daraus in Übereinstimmung mit dem Ausgangspunkt unserer Betrachtung, die euklidische Geometrie. Und wir brauchen dabei die Bereiche, für die wir den Satz aussprechen, nur durch die Forderung zu beschränken, daß die γ_{ik} sich in ihnen nicht merklich ändern; in Zentimetern aber können sie noch recht groß sein, wie wir später an den Beispielen deutlichst sehen werden. Das wenden wir nun auf den Fall $n = 3$ an.

In einem solchen Bereiche treiben wir Physik. Die dazu erforderlichen Zeitbestimmungen vollziehen wir mit gleichen Uhren an seinen verschiedenen Orten, die wir in der in Bd. I beschriebenen Weise synchron stellen. Wir machen unter anderem in ihm auch den Michelson-Versuch und stellen bei seiner Erörterung, wie wir es in Bd. I getan haben, fest, daß, wenn wir unsere räumlichen und zeitlichen Koordinaten dX^1, dX^2, dX^3, dX^4 einer

Lorentz-Transformation unterwerfen, dabei ein neues Koordinatensystem entsteht, in welchem sich, wie auch im ersteren, die Lichtwellen nach Kugelflächen und mit der Geschwindigkeit c ausbreiten. Mit den Überlegungen der beschränkten Relativitätstheorie stellen wir ferner fest, daß wir deshalb zweckmäßig von der Minkowskischen „Welt" reden, in welcher

$$d\tau = \sqrt{dX^{4^2} - dX^{1^2} - dX^{2^2} - dX^{3^2}}$$

das invariante Maß für die Länge eines Linienelementes darstellt. Gehen wir jetzt zu den Koordinaten x^i zurück, so finden wir

$$d\tau = \sqrt{dX^{4^2} - \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k},$$

und denken wir gar daran, daß wir nach § 3 jede Substitution (4) zulassen wollen, so müssen wir auch die Darstellung

$$d\tau^2 = \sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}\, dx^i\, dx^k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

zulassen, wobei die g_{ik} beliebige reguläre Funktionen der vier x^i sind. Aber diese quadratische Form ist nicht mehr definit; sie ist positiv, wenn man $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ setzt, negativ definit bei $dx^4 = 0$. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür lauten *):

$$g_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} < 0, \quad g_{44} > 0 \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Sie lassen sich durch andere ersetzen, in denen der Zeiger 1 mit 2 oder 3 vertauscht ist; denn keiner von diesen hat etwas vor den anderen voraus. Eine Folgerung aus ihnen besteht darin, daß jede Transformation, welche $d\tau^2$ rein durch Quadrate der dx^i darstellt, dem dx^4 einen positiven, den anderen Quadraten aber negative Faktoren verschafft („Trägheitsgesetz der quadratischen Formen"). Die Erfahrungen über die Freiheitsgrade eines als starr bewegten Körpers und der Michelson-Versuch führen also dazu, das natürlich gemessene

*) Vgl. den Anhang II.

Linienelement der vierdimensionalen „Welt“ bei beliebiger, nur durch die Ungleichungen (10) eingeschränkter Wahl der Koordinaten durch die pseudopythagoräische Formel (9) darzustellen.

Man kann die Größen g_{ik} im Prinzip messen, indem man die natürliche Länge einer Anzahl von Linienelementen bestimmt, die vom gleichen Punkte x^i nach Punkten $x^i + dx^i$ hinführen. Sind dies raumartige Strecken, so kann man an sie einen Maßstab anlegen, sind sie zeitartig, so muß man dazu eine Uhr benutzen, welche sich längs der betreffenden Weltlinie bewegt.

Später werden wir sehen, daß die g_{ik} außer ihrer Bedeutung für die Maßbestimmung noch eine andere haben, nämlich als Potentiale des Schwerefeldes. Und wir werden dann auch die Regeln kennen lernen, nach denen sie aus der Masse und der Bewegung der vorhandenen Körper zu berechnen sind. So prägen also, wie Riemann in der Probevorlesung bei seiner Habilitation in Göttingen prophetisch aussprach, physikalische Tatsachen der Geometrie die Maßbestimmung auf, nämlich der Geometrie, welche die für die Physik „natürliche“ ist. Die „bindenden Kräfte“, denen er diese Wirkung zuschrieb, und deren Erforschung er mit vollem Recht aus der Mathematik in die Physik verwies, sind nach Einstein eben die Kräfte der Schwere.

„Die Entscheidung dieser Fragen“ — so schließt Riemann seinen Vortrag — „kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen durch die Erfahrung bewährten Auffassung der Erscheinungen, wozu Newton den Grund gelegt hat, ausgeht und diese durch Tatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben, allmählich umarbeitet; solche Untersuchungen, welche, wie die hier geführten, von allgemeinen Begriffen ausgehen, können nur dazu dienen, daß diese Arbeit nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhanges der Dinge nicht durch überlieferte Vorurteile gehemmt wird.“

Die Relativitätstheorie ist Physik — „und man leistet ihr einen schlechten Dienst, wenn man ihre Ergebnisse vorschnell in »philosophische« oder gar spekulativ-metaphysische umzudeuten versucht. Die Theorie enthält keinen einzigen Begriff, der nicht aus den Denkmitteln der Mathematik und Physik ableitbar und

in ihnen vollständig darstellbar wäre. Nur die volle Bewußtheit über eben diese Denkmittel sucht sie zu erringen, indem sie nicht nur Resultate der Messung darzustellen, sondern auch über die Form jeglicher physikalischer Messung und über ihre Bedingungen prinzipielle Klarheit zu gewinnen strebt" (Cassierer). Wenn sie dennoch so lebhaften philosophisch gerichteten Widerspruch erfährt, so möchten wir das zum Teil daraus erklären, daß es wohl erkenntnistheoretische Standpunkte geben mag, welche sich nicht mit ihr vertragen. Nimmt sie doch, um mit Einstein zu reden, dem Raum und der Zeit den letzten Rest physikalischer Gegenständlichkeit. Aber in einem Widerstreit zwischen Physik und einem philosophischen System zieht letzteres meist den kürzeren. Es ist geradezu ein Kennzeichen für eine richtige Erkenntnistheorie, daß sie gegenüber allen Transformationen, welche das physikalische Weltbild im Laufe der Zeiten erfährt, invariant bleibt. Wir wollen unsere Überzeugung nicht verhehlen, daß Kants kritischer Idealismus (wenngleich nicht jeder Satz der „Kritik der reinen Vernunft") dieser Bedingung auch der allgemeinen Relativitätstheorie gegenüber genügt.

III. Weltvektoren und -tensoren in Riemannschen Räumen.

§ 6. Vektor- und Tensoralgebra.

In diesem Abschnitt müssen wir zunächst die im Kapitel IV des ersten Bandes für ein euklidisches oder pseudoeuklidisches Kontinuum von vier Dimensionen entwickelte Vektor- und Tensortheorie auf eins mit allgemeinerer Maßbestimmung übertragen. Wir beginnen mit der Algebra dieser Größen und haben dabei den Vorteil, daß wir zunächst an die früheren Ausführungen leicht anknüpfen können, indem wir ohne sonstige Änderung statt der rechtwinkeligen Koordinaten schiefwinkelige einführen.

a) Kontravariante und kovariante Koordinaten[1]). Wir gehen statt von der pseudoeuklidischen Maßbestimmung

$$\tau^2 = X_4^2 - (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

von der euklidischen

$$\tau_2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11\text{a})$$

aus, welche sich beide auf rechtwinkelige Achsenkreuze beziehen. Wir führen in (11a) durch die Substitutionen

$$X_m = \sum_i a_{mi}\, \xi^i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

geradlinig-schiefwinkelige Koordinaten ξ^i ein*). Diese sollen geometrisch so gewonnen werden, daß man den Punkt X_1, X_2, X_3, X_4 durch einen zu drei Koordinatenachsen parallelen ebenen Raum auf die vierte projiziert. Man zieht also zunächst durch ihn eine Parallele etwa zur ξ^1-Achse, bis man den Raum $\xi^1 = 0$ trifft. Durch den Schnittpunkt legt man eine Parallele zur ξ^2-Achse bis zur Ebene $\xi^2 = 0$ und durch den so gewonnenen Punkt eine Parallele zur ξ^3-Achse, welche dann die ξ^4-Achse in dem Punkt trifft, dessen Abstand vom Anfang ein Maß für die ξ^4-Koordinate des Ausgangspunktes ist. Mißt man dann noch diese Projektionen in derselben Einheit, wie die X_i, so bekommen die a_{mi} einfache Bedeutungen; nämlich

$$a_{mi} = \cos(X_m, \xi^i).$$

Infolgedessen bestehen zwischen ihnen auch gewisse Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} &a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + a_{3i}^2 + a_{4i}^2 = 1, \\ &a_{1i}\, a_{1k} + a_{2i}\, a_{2k} + a_{3i}\, a_{3k} + a_{4i}\, a_{4k} = \cos(\xi^i \xi^k) \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Die erste folgt unmittelbar, wenn man (11a) auf eine vom Nullpunkt ausgehende Einheitsstrecke auf der ξ^i-Achse anwendet. Denn die Koordinaten X_m des Endpunktes sind unmittelbar gleich den a_{mi}. Für die zweite muß man an die zu (11a) passende Definition des Winkels φ zwischen zwei Strecken denken, die wir in Bd. I (§ 10) nur für zueinander senkrechte Vektoren gegeben haben. Diese Definition lautet für zwei Einheitsstrecken, die vom Nullpunkt zu den Punkten X_m und Y_m hinführen:

$$X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 + X_4 Y_4 = \cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

*) In allen folgenden Summen ist, sofern nichts anderes ausdrücklich gesagt wird, über jeden unter dem Summenzeichen stehenden Zeiger, unabhängig von den anderen, von 1 bis 4 zu summieren.

Ihre Anwendung auf Einheitsstrecken auf den Achsen der ξ^i und ξ^k ergibt die zweite der Gleichungen (13).

Aus (11a) erhält man, wenn man τ^2 durch die ξ^i ausdrückt, in Verallgemeinerung des pythagoräischen Lehrsatzes:

$$\tau^2 = \xi^{1^2} + \xi^{2^2} + \xi^{3^2} + \xi^{4^2} + 2\,\xi^1\,\xi^2 \cos(\xi^1\,\xi^2) + \cdots \qquad (15)$$

Nun wollen wir aber für jede ξ-Achse eine eigene Längeneinheit einführen. Wir setzen dazu

$$\xi^i = \sqrt{g_{ii}}\; x^i \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (16)$$

und haben damit gewisse konstante Größen g_{ii} mit zwei gleichen Zeigern definiert. Wir ergänzen die Definition durch die Festsetzungen

$$g_{ki} = g_{ik} = \sqrt{g_{ii}\,g_{kk}}\; \cos(\xi^i\,\xi^k) = \sqrt{g_{ii}\,g_{kk}}\; \cos(x^i\,x^k) \quad . \; . \qquad (17)$$

Wir finden dann aus (15)

$$\tau^2 = \sum_{ik} g_{ik}\,x^i\,x^k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (18)$$

Man nennt diese durch Parallelprojektion gewonnenen Koordinaten x^i kontravariant.

Zu kovarianten Koordinaten ξ_i oder x_i gelangt man, wenn man den Punkt X_1, X_2, X_3, X_4 auf dieselben ξ^i-Achsen durch je eine zu der betreffenden Achse senkrechte Gerade projiziert. Infolgedessen stehen sie mit den kontravarianten in dem Zusammenhang

$$\xi_m = \sum_i \xi^i \cos(\xi^m, \xi^i) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (19)$$

sofern wir beide Arten mit der gleichen, auch bei den X angewandten Längeneinheit messen. Gehen wir aber unter Einführung besonderer Einheiten für jede ξ-Achse und für die kontra- und kovariante Koordinate von den ξ^i nach (16) zu den x^i und von den ξ_i zu den

$$x_i = \sqrt{g_{ii}}\; \xi_i \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (20)$$

über, wo die g_{ii} die in (16) eingeführten Konstanten sind, so findet man aus (19), (16) und (17)

$$x_m = \sum_i g_{mi}\,x^i \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (21)$$

Die Umkehrung dieser Gleichungen erhält man, wenn man aus den g_{ik} die Determinante, g, bildet und sie mit deren Unterdeterminanten zusammenfaßt. Wir wollen aber nicht letzteren

besondere Bezeichnungen geben, sondern wollen erst je eine von ihnen, dividiert durch g, mit g^{ik} benennen. Die Symmetrie der g_{ik} in beiden Zeigern überträgt sich auf sie: $g^{ik} = g^{ki}$. Dann sagen kekannte Determinantensätze aus:

$$\sum_i g_{ik} g^{il} = \begin{matrix} 1, & \text{wenn } k = l, \\ 0, & \text{wenn } k \gtrless l, \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} g^{11} g^{12} \dots \\ g^{21} g^{22} \dots \\ \dots\dots\dots \end{vmatrix} = \frac{1}{g} \tag{22}$$

Und die Umkehrung von (21) erhält die Gestalt:

$$x^i = \sum_m g^{mi} x_m \quad \dots\dots\dots \tag{23}$$

Setzt man diese Werte in (18) ein, so findet man in Rücksicht auf (22)

$$\left.\begin{aligned} \tau^2 &= \sum_{iklm} g_{ik} g^{il} g^{km} x_l x_m = \sum_{lm} \left(\sum_k g^{km} \sum_i g_{ik} g^{il} \right) x_l x_m \\ &= \sum_{lm} g^{lm} x_l x_m. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Der Unterschied der Maßbestimmungen (9) einerseits und (18) bzw. (24) andererseits besteht zunächst darin, daß dort die g_{ik} Funktionen der Koordinaten, hier aber Konstante sind. Bei den algebraischen Operationen mit Vektoren und Tensoren spielt dies keine Rolle. Wichtig ist, daß wir nur die Maßbestimmung in der Form (18) oder (24), d. h. ihre Koeffizienten g_{ik} oder die g^{ik}, zu kennen brauchen, um von den kovarianten Koordinaten eines Punktes zu den kontravarianten zu gelangen oder umgekehrt; denn ob uns nun die g_{ik} oder die g^{ik} bekannt sind, immer können wir die einen dieser Größen aus den anderen nach (22) berechnen. Deswegen ist auch der weitere Unterschied zwischen den Maßbestimmungen (9), (11) und (11a), daß die beiden ersteren indefinit sind, letztere aber positiv definit ist, für das weitere ohne Bedeutung. Wir verfolgten mit dem Ansatz (11a) nur den Zweck, möglichst anschaulich zu den kontra- und kovarianten Koordinaten zu gelangen.

Die Beziehungen zwischen beiden Arten sind durchaus gegenseitige, die Bezeichnungen ko- und kontravariant lassen sich ohne weiteres vertauschen, sofern wir nicht auf die Beziehungen zu dem rechtwinkeligen Achsenkreuz der X_i Rücksicht nehmen. Gerade deswegen eignen sich diese Begriffe zur Übertragung auf krummlinige, allgemeine Koordinaten. Es ist üblich, beim Übergang zu solchen

die Koordinaten stets als kontravariant anzusehen und deshalb mit oberen Zeigern zu bezeichnen.

Sind alle $g_{ii} = +1$ ($+$ gilt bei der pseudoeuklidischen Maßbestimmung der „Welt" nur für $i = 4$), während alle g_{ik} mit verschiedenen Zeigern verschwinden, so fallen die kontravarianten Koordinaten x^i bis aufs Vorzeichen mit den kovarianten zusammen; denn nach (21) ist in diesem Fall $x_1 = -x^1, \ldots, x_4 = +x^4$.

b) Vektoren*). Wir denken die kontra- und kovarianten Koordinaten wieder aus dem rechtwinkeligen abgeleitet. Bisher haben wir durch sie einen Punkt bestimmt. Gerade so gut aber legen sie den Vektor P fest, der die vom Nullpunkt zu diesem hinführende Strecke darstellt; jede Art von Koordinaten gibt eine Art von Komponenten von P. Wir können ihn somit sowohl durch die kontravarianten Komponenten, P^i, als durch die kovarianten, P_i, festlegen. Für den Übergang von den einen zu den anderen gilt nach (21) und (23)

$$P_m = \sum_i g_{mi} P^i, \quad P^m = \sum_i g^{mi} P_i \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Beim Übergang zu anderen Koordinaten x_i oder x^i rechnen sich die Komponenten wie die entsprechenden Koordinaten um. Aus dem gleichen Grunde ist auch nach (18) und (24)

$$P^2 = \sum_{ik} g_{ik} P^i P^k = \sum_{ik} g^{ik} P_i P_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

eine Invariante des Vektors, nämlich das Quadrat seines absoluten Betrages. Indem man nach (25) die Summation nach i ausführt, kann man dafür auch setzen:

$$P^2 = \sum_k P_k P^k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26\,\mathrm{a})$$

Ist $P^2 = \pm 1$, so spricht man von einem Einheitsvektor.

Sind P und Φ zwei Vektoren, so gilt dasselbe für den Ausdruck

$$\lambda P + \mu \Phi \text{**)}.$$

*) Wir denken hier nur an Vierervektoren; den Sechservektor behandeln wir später als antisymmetrischen Tensor.

**) Es sei schon hier bemerkt, daß man in Riemannschen Mannigfaltigkeiten nur Vektoren am gleichen Ort durch Summation gleichnamiger Komponenten addieren und subtrahieren kann (s. § 8).

Infolgedessen ist

$$\sum_{ik} g_{ik} (\lambda P^i + \mu \Phi^i)(\lambda P^k + \mu \Phi^k)$$
$$= \lambda^2 P^2 + \mu^2 \Phi^2 + 2 \lambda \mu \sum_{ik} g_{ik} P^i \Phi^k$$

eine Invariante, so daß auch das skalare Produkt

$$(P\Phi) = \sum_{ik} g_{ik} P^i \Phi^k = \sum_{ik} g^{ik} P_i \Phi_k = \sum_k P_k \Phi^k = \sum_k P^k \Phi_k \quad (27)$$

eine solche darstellt. Die obige geometrische Definition des Vektors kann man im Anschluß hieran durch die algebraische Forderung ersetzen, daß für die Koordinaten x^k eines jeden Punktes

$$\sum_{ik} g_{ik} P^i x^k = \sum_{ik} g^{ik} P_i x_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

invariant ist. Diese Forderung sagt nämlich, wie bekannt, schon für orthogonale Transformationen rechtwinkeliger Koordinatensysteme dasselbe, wie die ursprüngliche Definition; und der Übergang zu der weit größeren Schar beliebiger Transformationen geradliniger Achsenkreuze, wie wir sie hier behandeln, kann ihren Inhalt keinesfalls beschränken.

Den Winkel zwischen zwei Vektoren P und Φ können wir wie früher auf ihr skalares Produkt und ihre absoluten Beträge nach der Formel

$$\cos(P, \Phi) = \frac{(P\Phi)}{\sqrt{P^2 . \Phi^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

zurückführen. Für Vektoren, welche auf den Koordinatenachsen liegen und deswegen nur je eine von Null verschiedene kontravariante Komponente haben, stimmt diese Definition mit (17) überein.

Aus (29) folgt:

$$\sin^2 \varphi = \frac{P^2 . \Phi^2 - (P\Phi)^2}{P^2 . \Phi^2}$$
$$= \frac{\sum_{ik} g_{ik} P^i P^k . \sum_{lm} g_{lm} \Phi^l \Phi^m - \sum_{il} g_{il} P^i \Phi^l . \sum_{km} g_{km} P^k \Phi^m}{P^2 . \Phi^2}$$
$$= \frac{1}{P^2 . \Phi^2} \sum_{iklm} (g_{ik} g_{lm} - g_{il} g_{km}) P^i P^k \Phi^l \Phi^m .$$

Ist 2 die Zahl der Dimensionen, so kann man dafür schreiben:

$$\sin\varphi = +\sqrt{\frac{g_{11}\,g_{22} - g_{12}^2}{P^2 \,.\, \Phi^2}}\,(P^1\Phi^2 - P^2\Phi^1) \quad . \quad . \quad (29\,\mathrm{a})$$

c) Tensoren zweiten Ranges. In Bd. I, § 13, haben wir den symmetrischen Tensor im Hinblick auf rechtwinkelige Achsenkreuze dahin definiert, daß für beliebige Werte der Koordinaten X_i und Y_i die Summe

$$\sum T_{ik}\, X_i\, Y_k$$

einen Skalar darstellen soll*), und daß

$$T_{ik} = T_{ki}$$

ist. Auf die letztere Forderung verzichten wir hier.

Für die Benutzung schiefwinkeliger Koordinatensysteme erweitern wir diese Definition dahin, daß

$$\sum_{ik} T_{ik}\, x^i\, y^k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

gegenüber beliebigen linearen Transformationen invariant ist. Dabei treten die kovarianten Tensorkomponenten T_{ik} auf. Ersetzt man hier die x^i oder y^k durch die x_i bzw. y_k nach (23), so bekommt dieselbe Bilinearform die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{ik} T^{i}{}_{k}\, x_i\, y^k \quad \left(T^{i}{}_{k} = \sum_m g^{mi} T_{mk}\right), \\ \text{oder}\quad &\sum_{ik} T_i^{\,k}\, x^i\, y_k \quad \left(T_i^{\,k} = \sum_m g^{mk} T_{im}\right); \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

und wiederholt man das Verfahren, die Form

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{ik} T^{ik}\, x_i\, y_k \\ &\left(T^{ik} = \sum_m g^{mk} T^{i}{}_{m} = \sum_m g^{mi} T_m^{\,k} = \sum_{mn} g^{mi} g^{nk} T_{mn}\right) \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

---

*) Dies bezieht sich auf die vierte Auflage des ersten Bandes. In den früheren Auflagen definierten wir, daß für beliebige Werte der Koordinaten X_i die vier Ausdrücke

$$\sum_i T_{ik}\, X_i \qquad k = 1, 2, 3, 4$$

Vektorkomponenten bilden sollen. Das kommt nach der Definition des Vektors in Abschnitt b) des vorliegenden Paragraphen aber auf dasselbe hinaus.

In (32) treten die kontravarianten, in (31) die gemischten Komponenten des Tensors auf. Man kann übrigens in der Summe (30) für einen symmetrischen Tensor ($T_{ik} = T_{ki}$) $y^i = x^i$ setzen. Denn ist eine quadratische Form $Q(x^2)$ für alle möglichen x invariant, so gilt dasselbe von

$$Q[(x+y)^2] = Q(x^2) + Q(y^2) + 2\,Q(xy),$$

also auch von der zugehörigen Bilinearform $Q(xy)$.

Bildet man aus zwei Vektoren P und Φ $T_{ik} = P_i \Phi_k$, so sind dies die Komponenten des Tensorprodukes aus P und Φ. Denn

$$\sum_{ik} P_i \Phi_k x^i y^k = \left(\sum_i P_i x^i\right)\left(\sum_k \Phi_k y^k\right)$$

ist als Produkt zweier invarianten Summen selbst invariant. Doch ist dieser Tensor ein ganz besonderer, da ja zwischen seinen 16 Komponenten, welche durch die 8 Komponenten von P und Φ bestimmt sind, notwendig 8 Beziehungen bestehen. Diese Beziehungen, nicht aber die Tensoreigenschaft, gehen verloren, wenn man setzt:

$$T_{ik} = A_i A_k^* + B_i B_k^* + \Gamma_i \Gamma_k^* + \Delta_i \Delta_k^* \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

und es läßt sich leicht zeigen, daß sich jeder Tensor so durch 8 Vektoren darstellen läßt. Schreiben wir nämlich die Vektoren A, B, Γ, Δ beliebig vor, doch so, daß ihre Determinante, $A_1 B_2 \Gamma_3 \Delta_4$, nicht verschwindet, so können wir zunächst für ein bestimmtes Koordinatensystem die vier Gleichungen (33), in welchem $k = 1$ ist, benutzen, um A_1^*, B_1^*, Γ_1^*, Δ_1^* zu berechnen. Entsprechend ermitteln wir darauf die anderen Komponenten dieser Vektoren. Die so gewonnene Kenntnis der Vektoren A^*, B^*, Γ^*, Δ^* gilt dann für jedes Koordinatensystem, weil sich die beiden Seiten der Gleichungen (33) nach der Voraussetzung, daß die T_{ik} einen Tensor bestimmen, in gleicher Weise transformieren. Den Inhalt der Gleichungen (33) kann man in die Worte kleiden: Ein Tensor läßt sich durch vier Paare tensoriell miteinander multiplizierter Vektoren bestimmen. Letzteres gilt nicht nur für die kovarianten Komponenten; vielmehr folgt aus (33) nach (31) und (32) für die gemischten und kontravarianten Komponenten:

$$\left.\begin{aligned} T^i_k &= A^i A_k^* + B^i B_k^* + \Gamma^i \Gamma_k^* + \Delta^i \Delta_k^*, \\ T_k^{\ i} &= A_k A^{*i} + B_k B^{*i} + \Gamma_k \Gamma^{*i} + \Delta_k \Delta^{*i}, \\ T^{ik} &= A^i A^{*k} + B^i B^{*k} + \Gamma^i \Gamma^{*k} + \Delta^i \Delta^{*k}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (33\text{a})$$

Ferner ziehen wir aus (33) und (33a) den Schluß: Bei einer Koordinatentransformation rechnen sich die ko- und die kontravarianten Tensorkomponenten um wie die Quadrate und Produkte der ko- bzw. kontravarianten Koordinaten. Die gemischten Komponenten verhalten sich wie die Produkte aus je einer ko- und einer kontravarianten Koordinate. Nach (33a) und (26a) ist die Diagonalsumme

$$\sum_i T^i{}_i = \sum_i A^i A_i^* + \sum B^i B_i^* + \cdots = \sum_i A_i A^{*i} + \cdots = \sum_i T_i{}^i$$

eine Invariante.

Aus einem beliebigen Tensor T kann man durch die Gleichungen

$$\tfrac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) = A_{ik}, \qquad \tfrac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}) = \mathfrak{M}_{ik}$$

zwei neue Tensoren ableiten; denn sind

$$\sum_{ik} T_{ik} x^i . y^k \quad \text{und} \quad \sum_{ik} T_{ki} x^i y^k$$

Invarianten, so sind es auch die Summe und die Differenz davon. Wegen $A_{ik} = A_{ki}$ ist der Tensor A symmetrisch, wegen $\mathfrak{M}_{ik} = -\mathfrak{M}_{ki}$ ist $\mathfrak{M}$ antisymmetrisch; beide Eigenschaften sind vom Koordinatensystem unabhängig und beziehen sich auch auf die kontravarianten Komponenten, da $\mathfrak{M}^{ik} = \frac{1}{2}(T^{ik} - T^{ki})$ ist. Der antisymmetrische Tensor hat je 12 ko- und kontravariante Komponenten mit ungleichen Zeigern, welche sich paarweise entgegengesetzt gleich sind; die Komponenten $\mathfrak{M}_{ii}$ und $\mathfrak{M}^{ii}$ sind Null; beim Übergang zu einem rechtwinkeligen Achsensystem erkennt man, daß er dasselbe ist, was wir früher als Sechservektor bezeichnet haben.

Der Unterschied zwischen den gemischten Komponenten $T^i{}_k$ und $T_k{}^i$ fällt beim symmetrischen Tensor fort; man schreibt dann einfach T^i_k. Beim antisymmetrischen Tensor, dem Sechservektor $\mathfrak{M}$, hingegen ist

$$\mathfrak{M}^i{}_k = \sum_j g_{jk} \mathfrak{M}^{ij} = -\sum_j g_{jk} \mathfrak{M}^{ji} = -\mathfrak{M}_k{}^i.$$

Das gilt auch noch, wenn die Zeiger i und k einander gleich werden; die Komponenten $\mathfrak{M}^i{}_i = -\mathfrak{M}_i{}^i$ verschwinden keineswegs.

d) Der Tensor der Maßbestimmung und die allgemeine lineare Koordinatentransformation. Da in den Maßbestimmungen (18) und (24) τ^2 eine gegen alle linearen Transformationen der Koordinaten invariante Größe sein soll, stellen die g_{ik} und die g^{ik} die ko- und kontravarianten Komponenten des symmetrischen Tensors der Maßbestimmung dar. Dessen gemischte Komponenten sind nach (31) und (22), sofern sie zwei gleiche Zeiger tragen, 1, sonst 0; man führt für sie mit Nutzen das Zeichen δ_k^i ein.

Diese Erkenntnis ermöglicht uns nun, den Zusammenhang aufzusuchen, der beim Übergang von einem geradlinig-schiefwinkeligen Achsenkreuz zum anderen zwischen den Transformationsformeln für die kontra- und die kovarianten Koordinaten besteht. Wir geben diese Transformationen für die kontravarianten Koordinaten in der Form

$$x^m = \sum_i \alpha_i^m x'^i \quad \text{bzw.} \quad x'^i = \sum_m \beta_m^i x^m \quad . \quad . \quad (34)$$

Dazu müssen zwischen den Koeffizienten α und β die Beziehungen

$$\sum_m \alpha_i^m \beta_m^j = \begin{matrix} 1, & \text{wenn } i = j, \\ 0, & \text{wenn } i \gtrless j \end{matrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

bestehen. Nun ist nach (21) und der aufs gestrichene System übertragenen Gleichung (23)

$$x_k = \sum_m g_{km} x^m = \sum_{im} g_{km} \alpha_i^m x'^i = \sum_{ilm} g_{km} \alpha_i^m g'^{il} x'_l.$$

Nach dem Satze, daß sich Tensorkomponenten wie Koordinatenprodukte umrechnen, gilt aber:

$$g'^{il} = \sum_{no} \beta_n^i \beta_o^l g^{no},$$

$$x_k = \sum_{ilmno} g_{km} \alpha_i^m \beta_n^i \beta_o^l g^{no} x'_l.$$

Hier summieren wir zunächst, unter Beachtung von (35), nach i:

$$x_k = \sum_{lmo} g_{km} g^{mo} \beta_o^l x'_l;$$

sodann, unter Berücksichtigung von (22), nach m:

$$x_k = \sum_l \beta_k^l x'_l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Nach (35) müssen die Umkehrungen lauten:

$$x'_l = \sum_k \alpha_l^k x_k. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36\,a)$$

Bei der Umrechnung der kovarianten Koordinaten vom ungestrichenen auf das gestrichene System treten also dieselben Koeffizienten auf, wie bei der Umrechnung der kontravarianten vom gestrichenen auf das ungestrichene, und umgekehrt. Da wir die Vektor- und Tensortransformation auf Koordinatentransformation zurückführen konnten, überträgt sich dieser Satz unmittelbar auf deren ko- und kontravariante Komponenten:

$$\left.\begin{aligned} T_{ik} &= \sum_{lm} \beta_i^l \beta_k^m T'_{lm}, \qquad & T'_{ik} &= \sum_{lm} \alpha_i^l \alpha_k^m T_{lm}, \\ T^i{}_k &= \sum_{lm} \alpha_l^i \beta_k^m T'^l{}_m, \qquad & T'^i{}_k &= \sum_{lm} \beta_l^i \alpha_k^m T^l{}_m. \end{aligned}\right\} \quad (36\,b)$$

Die Determinante der α_i^k bezeichnen wir mit A, die der kovarianten Komponenten T_{ik} eines beliebigen Tensors mit T_{ik}. Nach (36 b) folgt dann durch zweimalige Anwendung des Multiplikationssatzes

$$T'_{ik} = A \sum_n \alpha_k^n T_{in} = A^2 \; T_{ik} \quad \ldots \quad (37)$$

Das gilt auch für die Determinante g der g_{ik}. Wählen wir als gestrichenes System das rechtwinkelige der X_i, von dem wir ausgegangen sind, so ist nach Gleichung (11) $g' = -1$; also ist in allen Systemen, die wir hier betrachten, g negativ. Denn die Koeffizienten α_i^k der Koordinatentransformation sind hier, da wir auch die Zeitkoordinate grundsätzlich als reell betrachten, alle reell, somit auch ihre Determinante A.

A ist zugleich die Funktionaldeterminante der x^i nach den x'^i. Nennen wir dX das über einen unendlich kleinen, aber beliebig geformten vierdimensionalen Bereich erstreckte Integral $\int dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$, so gilt nach einem Satz über bestimmte Integrale die Gleichung

$$dX = A\,dX' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (37\,a)$$

oder nach der auf g angewandten Gleichung (37):

$$\sqrt{-g}\,dX = +\sqrt{-g'}\,dX' \quad \ldots \quad (38)$$

Dies ist also eine Invariante, und zwar das Volumen $d\Sigma$ des betrachteten Bereichs, wie der Übergang zu den rechtwinkeligen Koordinaten X_i beweist. Das Zeichen $\pm$ gilt, wenn $A > 0$ ist, sonst —. Wir werden (38) in anderer Ableitung im Abschnitt f) wiederfinden.

e) Tensoren höheren Ranges. Es liegt nahe, die Vektoren als Tensoren ersten Ranges zu bezeichnen, die bisher als Tensoren schlechthin benannten Größen als solche zweiten Ranges, und ihnen dann Tensoren höheren Ranges an die Seite zu stellen. Einen Tensor $m$ten Ranges definieren wir durch die Forderung, daß eine $m$fache Linearform

$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_m} T_{i_1 i_2 \ldots i_m} x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \ldots x^{i_m}_{(m)}$$

für alle möglichen Werte der $x^i_{(m)}$ gegen alle Koordinatentransformationen invariant sein soll. Der Ansatz

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_m} = P^{(1)}_{i_1} P^{(2)}_{i_2} \ldots P^{(m)}_{i_m}, \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

in welchem die $P^{(i)}$ Vektoren bedeuten, genügt dieser Forderung, weil die genannte Linearform für ihn in ein Produkt aus invarianten Summen $\sum_i P_i x^i \ldots$ zerfällt. Aber um den allgemeinsten Tensor $n$ten Ranges zu erhalten, muß man eine Reihe solcher Ausdrücke wie (39) summieren. Doch läßt sich das Transformationsgesetz der kovarianten Tensorkomponenten schon aus (39) entnehmen.

Natürlich hat derselbe Tensor auch kontravariante Komponenten,

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_m} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_m} g^{i_1 k_1} g^{i_2 k_2} \ldots g^{i_m k_m} T_{k_1 k_2 \ldots k_m} \quad \ldots \quad (40)$$

und gemischte der verschiedensten Ordnung, insofern jeder Zeiger unter Aufrechterhaltung der Zeigerfolge*) in die obere oder untere Stellung gesetzt werden kann, z. B.:

$$T^{i_1 \ldots i_n}{}_{i_{n+1} \ldots i_m} = \sum_{k_1 \ldots k_n} g^{i_1 k_1} g^{i_n k_n} T_{k_1 \ldots k_n i_{n+1} \ldots i_m} \quad (40\text{a})$$

---

*) Beim Tensor $m$ten Ranges gibt es hinter dem Zeichen T m Stellen für Zeiger. An jeder Stelle kann der hingehörende Zeiger noch oben oder unten stehen.

Die Umkehrungen von (40) und (40a) lauten

$$\left.\begin{aligned} T_{i_1 i_2 \ldots i_m} &= \sum_{k_1 k_2 \ldots k_m} g_{i_1 k_1} g_{i_2 k_2} \cdots g_{i_m k_m} T^{k_1 k_2 \ldots k_m} \\ &= \sum_{k_1 \ldots k_n} g_{i_1 k_1} \cdots g_{i_n k_n} T^{k_1 \ldots k_n}{}_{i_{n+1} \ldots i_m} \end{aligned}\right\} \quad (40\text{b})$$

Auch die Gleichung

$$T^{i_1 \ldots i_n}{}_{i_{n+1} \ldots i_m} = \sum_{k_{n+1} \ldots k_m} g_{i_{n+1} k_{n+1}} \cdots g_{i_m k_m} T^{i_1 i_2 \ldots i_m}$$

sei hier angeführt. Der Ansatz (39) läßt sich also auf kontravariante und gemischte Tensorkomponenten einfach dadurch übertragen, daß man auf beiden Seiten der Gleichung dieselben Zeiger in die obere Stellung bringt.

Setzt man einen oberen und einen unteren Zeiger einander gleich und summiert man nach ihm, so findet man nach (39) z. B.:

$$\sum_k T^{k i_2 \ldots i_n}{}_{k i_{n+2} \ldots i_m}$$

$$= \left(\sum_k P^{(1)k} P_k^{(n+1)}\right) . P^{(2) i_2} \ldots P^{(n) i_n} P^{(n+2)}_{i_{n+2}} \ldots P^{(m)}_{i_m};$$

also, da die Summe invariant ist, einen Tensor $(n-2)$ten Ranges (Verjüngung). Dies bleibt in Geltung, wenn der Tensor nicht wie in (39) durch ein Produkt, sondern durch eine Summe solcher Produkte darzustellen ist. Bei einem Tensor zweiten Ranges war so nach (26a) die Summe

$$\sum_i T^i{}_i$$

ein Tensor vom Range Null, d. h. ein Skalar.

Aus dem Ansatz (39), seiner Verallgemeinerung durch Addition mehrerer solcher Produkte, und seiner Übertragung auf kontravariante und gemischte Tensorkomponenten, folgt die Regel: Multipliziert man alle Komponenten eines Tensors mit allen Komponenten eines Vektors, so findet man alle Komponenten eines Tensors von einem um Eins erhöhten Range. Dabei bleiben alle Zeiger der Tensor- und Vektorkomponenten in ihrer oberen oder unteren Stellung erhalten. Also z. B.:

$$T^\alpha{}_\beta P^\gamma = T^\alpha{}_\beta{}^\gamma, \qquad T^\alpha{}_\beta P_\gamma = T^\alpha{}_{\beta\gamma}.$$

Multipliziert man einen Tensor $n$ten mit einem $m$ten Ranges, so findet man einen Tensor $(m+n)$ten Ranges.

Aus einem Vektor Y und dem antisymmetrischen Tensor (Sechservektor) $\mathfrak{M}_{kl}$ bilden wir z. B. den Tensor dritten Ranges

$$T^j_{kl} = Y^j \mathfrak{M}_{kl}$$

und verjüngen ihn nach den Zeigern j und l. So entsteht der Vektor

$$\Phi_k = \sum_l Y^l \mathfrak{M}_{kl}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (41)$$

den wir nach Bd. I, § 11 als das vektorielle Produkt aus Y und $\mathfrak{M}$ bezeichnen. Er ist, wie man schon dort erwähnt, senkrecht zu Y; denn das skalare Produkt

$$(Y\Phi) = \sum_k Y^k \Phi_k = \sum_{kl} Y^k Y^l \mathfrak{M}_{kl}$$

verschwindet, weil die Doppelsumme aus Paaren sich aufhebender Summanden, z. B. $Y^1 Y^2 \mathfrak{M}_{12}$ und $Y^2 Y^1 \mathfrak{M}_{21}$, besteht.

Auch Tensoren höheren Ranges können in einem oder mehreren Paaren ihrer Zeiger symmetrisch oder antisymmetrisch sein. Ist α, β ein solches Paar, so ändert sich beim symmetrischen Tensor nichts, beim antisymmetrischen nur das Vorzeichen, wenn man β an die Stelle hinter dem Zeichen T setzt, an welcher anfangs α stand, und α umgekehrt an die Stelle, welche β ursprünglich einnahm. Dabei muß aber jeder obere Zeiger oben, jeder untere unten bleiben. D. h. also

$$T^{\alpha\beta\gamma}{}_{\delta\varepsilon\ldots} = \pm T^{\beta\alpha\gamma}{}_{\delta\varepsilon}$$

$$T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta\varepsilon\ldots} = \sum_i g_{\beta i} T^{\alpha i\gamma}{}_{\delta\varepsilon} = + \sum_i g_{\beta i} T^{i\alpha\gamma}{}_{\delta\varepsilon} = + T_{\beta}{}^{\alpha\gamma}{}_{\delta\varepsilon\ldots}$$

$$T_{\alpha\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta\varepsilon\ldots} = \sum_i g_{\alpha i} T^{i}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta\varepsilon} = + \sum_i g_{\alpha i} T_{\beta}{}^{i\gamma}{}_{\delta\varepsilon} = + T_{\beta\alpha}{}^{\gamma}{}_{\delta\varepsilon\ldots}$$

Das obere Vorzeichen gilt immer für den symmetrischen, das untere für den antisymmetrischen Tensor. Diese Umformungen erbringen den Beweis, daß die verschiedenen, diesen Tensoren zugeschriebenen Eigenschaften auseinander hervorgehen.

Man kann die oben gegebene Tensordefinition noch in manche andere, ihr gleichwertige Form kleiden. Sind z. B. die

$$A^j = \sum_{i_1 \dots i_m} T^j_{i_1 i_2 \dots i_m} P^{(1)\, i_1} P^{(2)\, i_2} \dots P^{(m)\, i_m}$$

kontravariante, oder die

$$B_j = \sum_{i_1 \dots i_m} T_j^{i_1 i_2 \dots i_m} P^{(1)}_{i_1} P^{(2)}_{i_2 \dots} P^{(m)}_{i_m}$$

kovariante Vektorkomponenten, wie wir auch die Vektoren $P^{(1)}$ bis $P^{(m)}$ wählen mögen, so folgt daraus die Tensoreigenschaft der $T^j{}_{i_1 \dots i_m}$ oder der $T_j{}^{i_1 \dots i_m}$. Denn bilden wir mittels eines beliebigen neuen Vektors $P^{(m+1)}$

$$\sum_i A^i P^{(m+1)}{}_i \text{ und } \sum_j B_j P^{(m+1)j},$$

so können wir diese Eigenschaft aus der obigen Definition erschließen. Desgleichen genügt die Forderung, daß die

$$A^j{}_k = \sum T^j_{k i_1 i_2 \dots i_m} P^{(1)\, i_1} P^{(2)\, i_2} \dots P^{(m)\, i_m}$$

für beliebige Vektoren P die gemischten Komponenten eines Tensors zweiten Ranges darstellen.

f) Vollständig antisymmetrische Tensoren. Unter den Tensoren dritten Ranges sind jene besonders zu erwähnen, welche in jedem Paar ihrer Zeiger oder, wie wir sagen wollen, vollständig antisymmetrisch sind. Zyklische Vertauschung ihrer Zeiger ändert ihren Wert nicht, weil sie bei einer ungeraden Zahl von Zeigern mit zwei paarweisen Vertauschungen gleichwertig ist. Sie haben im wesentlichen vier kontravariante und vier kovariante Komponenten; erstere lauten

$$T^{234}, \quad T^{341}, \quad T^{412}, \quad T^{123};$$

alle anderen, soweit sie nicht wegen zweier gleichen Zeiger Null sind, stimmen mit ihnen entweder ganz oder bis aufs Vorzeichen überein. Sie lassen sich immer durch drei Vektoren Φ, Ψ, X nach dem Determinantenschema

$$T^{ijk} = \sum \pm \Phi^i \Psi^j X^k$$

darstellen und haben als geometrisches Abbild einen Raum mit Schraubensinn (Bd. I, § 11). Bei der Koordinatentransformation (34)

gehorchen die kontravarianten Komponenten den Umrechnungsformeln

$$T^{234} = A_1^1\, T'^{234} + A_2^1\, T'^{341} + A_3^1\, T'^{412} + A_4^1\, T'^{123}, \quad . \quad . \quad (42)$$

wenn die A_i^m die Unterdeterminanten der Determinante A der Koeffizienten α_i^m bedeuten. Bei den orthogonalen Transformationen, wie sie die beschränkte Relativitätstheorie ausschließlich benutzt, gilt nach Bd. I, § 9:

$$A_i^m = \alpha_i^m$$

und die Gleichung (42) geht in die Transformation für den Vektorkomponenten über. Deswegen konnten wir in Bd. I diese Tensoren wie Vierervektoren behandeln, während wir sie hier wohl davon unterscheiden müssen.

Ein vollständig, d. h. in jedem Zeigerpaar antisymmetrischer Tensor vierten Ranges hat im wesentlichen nur je eine von Null verschiedene kontravariante und kovariante Komponente. Erstere schreibt sich, ganz wie man will,

$$T^{1234} = T^{2314} = \cdots = -T^{2134} = -T^{2341} = \cdots$$

Allgemein gesprochen ist $T^{ijkl} = +T^{1234}$, wenn die Reihenfolge $ijkl$ aus der Folge 1234 durch eine gerade Permutation hervorgeht, im anderen Falle muß das negative Vorzeichen gesetzt werden. Dieser Tensor ist gleich der Determinante aus vier Vektoren und entspricht geometrisch dem von jenen Vektoren aufgespannten vierdimensionalen Parallelepiped. Dementsprechend lautet seine Transformation ähnlich der Gleichung (37a), nämlich

$$T^{1234} = A\, T'^{1234} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Bei der Lorentztransformation war $A = 1$, also dieser Tensor ein Skalar.

Vollständig antisymmetrische Tensoren fünften oder höheren Ranges gibt es in vier Dimensionen nicht, denn die höchste Rangzahl fällt mit der der Dimensionen zusammen.

Formel (40b), welche die kontra- in die kovarianten Komponenten umwandelt, erhält für vollständig antisymmetrische Tensoren sehr viel einfachere Gestalt. Die dreireihigen Unterdeterminanten von g haben wir schon mit $g \,.\, g^{ik}$ benannt. Bezeichnen

wir die zweireihigen mit g^{ab}_{cd}, so lauten sie nämlich

$$\left.\begin{aligned} T_{23} &= g^{14}_{14} T^{23} + g^{24}_{14} T^{31} + g^{34}_{14} T^{12} \\ &\quad + g^{23}_{14} T^{14} + g^{31}_{14} T^{24} + g^{12}_{14} T^{34} \quad \text{usw.} \\ T_{234} &= g(g^{11} T^{234} + g^{12} T^{341} + g^{13} T^{412} + g^{14} T^{123}) \text{ usw.} \\ T_{1234} &= g\, T^{1234}. \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Bildet man aus einem antisymmetrischen Tensor zweiten Ranges T_{ik} und einem Vektor P die Ausdrücke

$$T_{ikl} = P_i \Phi_{kl} + P_k \Phi_{li} + P_l \Phi_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

so definieren diese einen Tensor dritten Ranges, welcher vollständig antisymmetrisch ist. Man überzeugt sich leicht, daß $T_{ikl} = - T_{ilk}$ ist. Der neue Tensor fällt in der beschränkten Relativitätstheorie mit einem Vierervektor, nämlich mit dem Vektorprodukt eines Vierervektors mit einem Sechservektor zusammen.

Ist T_{ikl} vollständig antisymmetrisch, so hat der Tensor

$$T_{1234} = P_1 T_{234} - P_2 T_{341} + P_3 T_{412} - P_4 T_{123} \quad . \quad (45\text{a})$$

dieselbe Eigenschaft*).

Das Produkt eines antisymmetrischen Tensors zweiten Ranges mit sich selbst, welches wir bei orthogonalen Transformationen in Bd. I, § 10 e als sein skalares Produkt bezeichnen konnten, nämlich die Größe $2(T_{14} T_{23} + T_{24} T_{31} + T_{34} T_{12})$, liefert hier einen vollständig antisymmetrischen Tensor vierten Ranges.

---

*) In der letzten Formel muß zunächst der Wechsel des Vorzeichens auffallen, besonders, da für orthogonale Transformationen T_{ikl} durch einen Vektor darzustellen und T_{1234} offenbar dessen skalares Produkt mit P ist. Der Grund ist folgender: Im Dreidimensionalen wird der durch drei Vektoren gegebene Schraubensinn bei deren zyklischer Vertauschung nicht geändert. Legt man aber in vier Dimensionen vier (nicht in einem dreidimensionalen Raum liegenden) Vektoren einen „Schraubensinn" bei, so verändert er sich bei zyklischer Vertauschung, weil eine solche durch eine ungerade Zahl von Vertauschungen je zweier Indices ersetzt werden kann. Geben wir also im Raum des Tensors T_{ikl} drei Vektoren A, B, Γ, so haben deren Komponenten im Koordinatenraum 234 mit der Komponente P_1 zusammen einen anderen Schraubensinn, also ihre Komponenten im Raum 341 zusammen mit P_2. Rein algebraisch findet man dasselbe, wenn man T_{1234} als Determinante $\Sigma \pm P_1 \Phi_2 \Psi_3 X_4$ aus vier Vierervektoren darstellt. Setzt man dann $T_{ikl} = \Sigma \pm \Phi_i \Psi_k X_l$, so folgt Formel (45a).

Ein Tensor zweiten Ranges hat die Invariante

$$\frac{1}{2}\sum_{ik} T_{ik}\, T^{ik}.$$

Denn in dieser Summe wird der Tensor vierten Ranges $T_{ik}\, T^{lm}$ zweimal verjüngt, sein Rang also um 2×2 verringert. Bei einem antisymmetrischen Tensor oder Sechservektor $\mathfrak{M}$ ist dies das Quadrat seines absoluten Wertes; denn nach Bd. I, § 10e wird er bei Einführung eines rechtwinkeligen Achsenkreuzes, in welchem man zwischen kontra- und kovarianten Komponenten nicht zu unterscheiden braucht, gleich

$$\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{M}_{14}^2 + \mathfrak{M}_{24}^2 + \mathfrak{M}_{34}^2 + \mathfrak{M}_{23}^2 + \mathfrak{M}_{31}^2 + \mathfrak{M}_{12}^2.$$

Ist der Sechservektor durch ein Flächenstück darzustellen — im allgemeinen gehören dazu zwei —, so gibt der absolute Wert dessen Inhalt an.

Diese Invariante läßt sich unter Benutzung der Formel

$$\mathfrak{M}_{ik} = \sum_{hl} g_{il}\, g_{hk}\, \mathfrak{M}^{lh} = \sum_{hl} g_{kl}\, g_{hi}\, \mathfrak{M}^{hl}$$

und der Antisymmetrieeigenschaft folgendermaßen umformen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}^2 &= \frac{1}{2}\sum_{ik} \mathfrak{M}_{ik}\, \mathfrak{M}^{ik} = -\frac{1}{2}\sum_{hikl} g_{hk}\, g_{il}\, \mathfrak{M}^{hl}\, \mathfrak{M}^{ik} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{hikl} g_{kl}\, g_{hi}\, \mathfrak{M}^{hl}\, \mathfrak{M}^{ik} = \frac{1}{4}\sum_{hikl} (g_{kl}\, g_{hi} - g_{hk}\, g_{il})\, \mathfrak{M}^{hl}\, \mathfrak{M}^{ik} \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Dasselbe läßt sich auch aus (44) schließen*). Aus zwei Sechservektoren läßt sich entsprechend der Formel (94) im Bd. I das skalare Produkt bilden:

$$(\mathfrak{F}\,\mathfrak{G}) = \frac{1}{2}\sum_{ik} \mathfrak{F}_{ik}\, \mathfrak{G}^{ik}.$$

---

*) In zwei Dimensionen vereinfacht sich die Formel für den Flächeninhalt des Parallelogramms aus den Vektoren P und Φ zu:

$$|[P\,\Phi]| = \sqrt{g_{11}\, g_{22} - g_{12}^2}\,(P^1\,\Phi^2 - P^2\,\Phi^1) \quad . \; . \; . \; . \quad (46\,\mathrm{a})$$

vergleiche hierzu (29 a).

Der vollständig antisymmetrische Tensor dritten Ranges hat als Invariante den Ausdruck*):

$$\frac{1}{6}\sum_{ikl} T_{ikl}\, T^{ikl} = T_{234}\, T^{234} + T_{341}\, T^{341} + T_{412}\, T^{412} + T_{123}\, T^{123}.$$

Verlegt man durch Transformation die drei Vektoren, durch welche sich T^{ikl} darstellen läßt, in den Raum $x^4 = const$, so geht er nach (44) über in:

$$g\, g^{44}\, (T^{123})^2.$$

Dies ist, abgesehen vom Vorzeichen, das Quadrat des von den Vektoren ausgespannten dreidimensionalen Parallelepipeds. $g \,.\, g^{44}$ ist die Determinante, welche aus den g_{ik} ohne den Zeiger 4 gebildet ist. Also hat die letzte Aussage denselben Inhalt wie Gleichung (38), nur daß dabei die Zahl der Dimensionen gleich 3 ist.

Der vollständig antisymmetrische Tensor vierten Ranges besitzt die Invariante**)

$$\frac{1}{24}\sum_{iklm} T_{iklm}\, T^{iklm} = T_{1234}\, T^{1234}.$$

Infolgedessen ist nach (44)

$$\sqrt{-g}\, T^{1234} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\, T_{1234}$$

ebenfalls invariant bis aufs Vorzeichen, welches bei einer Transformation mit negativer Determinante wechselt. Stellt man den Tensor durch vier Vektoren dar, so ist diese Invariante, abgesehen vom Vorzeichen, das Volumen des von ihnen ausgespannten vierdimensionalen Parallelepipeds; das stimmt zu Gleichung (38).

Die bisher benutzte übliche Schreibweise drückt das Volumenelement $d\Sigma$ durch die vier Verrückungen dx^i aus, von denen jede die Richtung einer Koordinatenachse hat. F. Klein schlägt vor — und das hat für die Schreibweise des Gaußschen Satzes (§ 9c) Vorzüge — $d\Sigma$ als das von vier beliebigen Verrückungen $d_I x^i$,

*) Der Divisor 6 ist hinzugefügt, weil dasselbe Produkt $T_{123}\, T^{123}$ z. B. entsprechend den Permutationen der Zahlen 1, 2, 3 sechsmal in der Summe auftritt.

**) Der Divisor 24 entspricht den 24 Permutationen der Zahlen 1 bis 4.

$d_{II}x^i$, $d_{III}x^i$, $d_{IV}x^i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) gebildete Parallelepiped aufzufassen. Dann wird

$$d\Sigma = +\sqrt{-g}\begin{vmatrix} d_I\, x^1 & d_I\, x^2 & d_I\, x^3 & d_I\, x^4 \\ d_{II}\, x^1 & d_{II}\, x^2 & d_{II}\, x^3 & d_{II}\, x^4 \\ d_{III}\, x^1 & d_{III}\, x^2 & d_{III}\, x^3 & d_{III}\, x^4 \\ d_{IV}\, x^1 & d_{IV}\, x^2 & d_{IV}\, x^3 & d_{IV}\, x^4 \end{vmatrix}$$

g) Übergang zur Maßbestimmung $d\tau^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx^i dx^k$ mit veränderlichen Koeffizienten. Jetzt fassen wir die g_{ik} wieder als Funktionen der x^i auf. Um die bisherigen Ergebnisse dieses Paragraphen zu übertragen, denken wir uns das vierdimensionale Kontinuum mit dieser Maßbestimmung als „Fläche" in einem Kontinuum von zehn Dimensionen (vgl. § 5, S. 38), aber mit der pseudoeuklidischen Maßbestimmung $ds^2 = \sum_{\gamma} + dz^{\gamma 2}$. Unsere vierdimensionale Mannigfaltigkeit wird im allgemeinen natürlich eine gekrümmte, d. h. durch sechs nichtlineare Gleichungen zwischen den z gegebene „Fläche" sein. Man wird aber in einem ihrer Punkte eine „Tangentenebene" von vier Dimensionen an sie legen können, welche die Gesamtheit der Tangenten aller in ihr liegenden und durch den hervorgehobenen Punkt führenden Kurven enthält. Diese Tangentenebene ist es, von der wir bisher gesprochen und in der wir (pseudo)euklidische Maßbestimmung (11) angesetzt hatten. Die Koordinatenachsen sind die Tangenten von Kurven $x^2 = x^3 = x^4 = 0$, $x^3 = x^4 = x^1 = 0$, usw. Ein Vektor im nichteuklidischen Kontinuum ist somit durch eine Strecke gegeben, welche in der Tangentenebene liegt; natürlich muß diese das Kontinuum in dem Punkte berühren, auf welchen sich der Vektor bezieht. Selbstverständlich kann man die die Vektoren darstellenden Strecken, da es auf den Proportionalitätsfaktor nicht ankommt, stets unendlich klein wählen, und dann, da die Tangentenebene im unendlich kleinen mit dem Kontinuum zusammenfällt, den Vektor als unendlich kleine Strecke im Riemannschen Kontinuum selbst deuten. Da wir die Tensoren jeden Ranges auf Vektoren zurückführen konnten, ist damit auch für diese eine Deutung geschaffen. Die g_{ik}, welche in unseren Gleichungen bisher auftraten, sind diejenigen Werte, welche im Berührungspunkt für unser Kontinuum gelten. Abzuändern brauchen wir nur die Koordinatentrans-

formationen (34), (36) und (36 a), und zwar insofern, als wir mit linearen Beziehungen zwischen gestrichenen und ungestrichenen Koordinaten in der allgemeinen Relativitätstheorie nicht mehr auskommen. Wir können diese daher nur für die Differentiale dx^i und dx_i gelten lassen, und müssen statt dessen schreiben:

$$dx^m = \sum_i \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} dx'^i, \quad dx'^i = \sum_m \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} dx^m.$$

Das hat zur Folge, daß überall α_i^m durch $\partial x^m / \partial x'^i$ und β_m^i durch $\partial x'^i / \partial x^m$ ersetzt wird. Für eine gemischte Komponente eines Tensors höheren Ranges lautet daher die Transformation:

$$\left.\begin{aligned} & T^{i_1 \cdots i_n}{}_{i_{n+1} \cdots i_m} \\ = & \sum_{k_1 \cdots k_m} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial x'^{k_n}} \frac{\partial x'^{k_{n+1}}}{\partial x^{i_{n+1}}} \cdots \frac{\partial x'^{k_m}}{\partial x^{i_m}} T'^{k_1 \cdots k_n}{}_{k_{n+1} \cdots k_m} \end{aligned}\right\} \quad (47)^{*)}$$

Sonderfälle davon sind:

$$\left.\begin{aligned} P^i = \sum_k \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} P'_k, \quad P^i = \sum_k \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} P'^k \\ T_{ik} = \sum_{mn} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} T'_{mn} \end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot \quad (47\,a)$$

---

*) Für § 7 führen wir hier noch an: Aus der Transformationsformel

$$\sum_{ikl} \frac{\partial x'^o}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} T^i_{kl} = T'^o_{mn}$$

folgt der umkehrbare Schluß:

$$\sum_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} T^j_{kl} = \sum_o \frac{\partial x^j}{\partial x'^o} T'_{omn},$$

indem man die erste Gleichung mit $\frac{\partial x^j}{\partial x'^o}$ multipliziert und nach o summiert. Denn es gelten die Identitäten

$$\sum_o \frac{\partial x'^o}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x'^o} = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } i = j, \\ 0, \text{ wenn } i \text{ von } j \text{ verschieden ist.} \end{matrix}$$

Man entnimmt dies aus der Analogie zu (35) oder aus der in den dx^i identischen Beziehung:

$$dx^j = \sum_o \frac{\partial x^j}{\partial x'^o} dx'^o = \sum_{oi} \frac{\partial x^j}{\partial x'^o} \frac{\partial x'^o}{\partial x^i} dx^i.$$

h) Der Übergang von Welt- zu Raumtensoren. Jeder Vierervektor P und jeder Welttensor T bestimmt in seinen kontravarianten Komponenten, welche den Zeiger 4 nicht tragen, die kontravarianten Komponenten eines Raumvektors oder eines Raumtensors gleichen Ranges. Denn bei der Transformation

$$\left.\begin{array}{ll} x'^1 = x'^1(x^1, x^2, x^3), & x'^2 = x'^2(x^1\, x^2, x^3), \\ x'^3 = x'^3(x^1, x^2, x^3), & x'^4 = x^4 \end{array}\right\} \cdot\cdot (48)$$

gilt

$$P'^i = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} P^l, \quad T'^{ik} = \sum_{l,m=1}^{3} \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} T^{lm} \text{ usw. } i, k = 1, 2, 3.$$

Die entsprechende Bemerkung trifft für die kovarianten Komponenten ohne den Zeiger 4 zu.

Bei jedem Tensor zweiten Ranges bestimmen die drei Komponenten, welche den Zeiger 4 nur an zweiter Stelle tragen, Raumvektoren, und zwar die kontravarianten Komponenten T^{i4} die kontravarianten Komponenten eines Vektors $\mathfrak{F}$, die kovarianten Komponenten T_{i4} auch die kovarianten Komponenten eines Vektors $\mathfrak{G}$. Denn bei der Transformation (48) ist

$$T'^{i4} = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} T^{l4}, \quad T'_{i4} = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} T_{l4}.$$

Die Komponenten T^{4i} und T_{4i} bestimmen zwei andere Vektoren.

Setzt man $P^i = \mathfrak{A}^i$, $P_i = \mathfrak{B}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, so sind aber $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ keineswegs derselbe Raumvektor. Vielmehr unterscheiden sich die Formeln

$$\mathfrak{B}_i = P_i = \sum_{l=1}^{4} g_{il} P^l$$

und

$$\mathfrak{A}_i = -\sum_{l=1}^{3} g_{il} \mathfrak{A}^l = -\sum_{l=1}^{3} g_{il} P^l$$

durchaus wesentlich. (Das negative Vorzeichen in der letzten erklärt sich so, daß in

$$d\tau^2 = \sum_{l,m=1}^{4} g_{lm}\, dx^l\, dx^m$$

die vom Zeiger 4 unabhängigen Summanden eine negativ definite Form bilden, so daß man für das räumliche Linienelement

$$ds^2 = \sum_{l,m=1}^{3} \gamma_{lm}\, dx^l\, dx^m = -\sum_{l,m=1}^{3} g_{lm}\, dx^l\, dx^m$$

und für jeden Raumvektor

$$\mathfrak{A}_i = \sum_{l=1}^{3} \gamma_{il}\, \mathfrak{A}^l = -\sum_{l=1}^{3} g_{il}\, \mathfrak{A}^l$$

setzen muß.) Wohl aber kann $\mathfrak{A} = -\mathfrak{B}$ sein; die notwendige und hinreichende Bedingung dafür lautet:

$$g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0; \quad \ldots\ldots \quad (49)$$

aus ihr folgt unmittelbar

$$g^{14} = g^{24} = g^{34} = 0, \quad g^{44} = \frac{1}{g_{44}} \quad \ldots \quad (49\,\mathrm{a})$$

Das bedeutet nach Gl. (17), daß man die Zeitachse überall auf den Streckenräumen senkrecht stehen läßt.

Ebensowenig stimmen im allgemeinen die aus den T^{i4} und T_{i4} gewonnenen Vektoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ überein. Aber unter den Bedingungen (49), die dafür hinreichend und notwendig sind, wird

$$\mathfrak{G}_i = T_{i4} = \sum_{l,m=1}^{4} g_{il}\, g_{4m}\, T^{lm} = g_{44} \sum_{l=1}^{3} g_{il}\, T^{l4} = g_{44} \sum g_{il}\, \mathfrak{F}^{l4}$$

$$= -g_{44}\, \mathfrak{F}_i,$$

also

$$\mathfrak{G} = -g_{44}\, \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{F} = -g^{44}\, \mathfrak{G},$$

und weiter bestimmt derselbe Vektor dann auch die gemischten Komponenten $T^i{}_4$ und $T_i{}^4$; denn:

$$T^i{}_4 = \sum_{l=1}^{4} g_{l4}\, T^{il} = g_{44}\, T^{i4} = g_{44}\, \mathfrak{F}^i,$$

$$T_i{}^4 = \sum_{l=1}^{4} g^{l4}\, T_{il} = g^{44}\, T_{i4} = g^{44}\, \mathfrak{G}_i = -\mathfrak{F}_i.$$

Zwischen den Raumtensoren $\mathfrak{A}^{ik} = T^{ik}$ und $\mathfrak{B}_{ik} = T_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ besteht im allgemeinen wiederum kein Zusammen-

hang; dagegen fallen sie unter den Voraussetzungen (49) zusammen, aber auch nur unter diesen, denn:

$$\mathfrak{B}_{ik} = \sum_{l,m=1}^{4} g_{il}\, g_{km}\, T^{lm} = \sum_{l,m=1}^{3} g_{il}\, g_{km}\, \mathfrak{A}^{lm} = \mathfrak{A}_{ik}.$$

Für die gemischten Komponenten hingegen gilt:

$$T^{i}_{k} = \sum_{l=1}^{4} g_{kl}\, T^{il} = \sum_{l=1}^{3} g_{kl}\, \mathfrak{A}^{il} = -\,\mathfrak{A}^{i}_{k},$$

$$T_{i}^{k} = \sum_{l=1}^{4} g^{kl}\, T_{il} = \sum_{l=1}^{3} g^{kl}\, \mathfrak{A}_{il} = -\,\mathfrak{A}_{i}^{k}.$$

Die Bedingungen (49 b) führen also in dem Zusammenhang zwischen Welt- und Raumtensoren bedeutende Vereinfachungen ein. Deswegen sei schon hier erwähnt — was wir erst in § 9 d beweisen werden —, daß man sie bei jeder Maßbestimmung durch Einführung „Gaußscher“ Koordinaten erfüllen kann.

§ 7. Geodäsie in Riemannschen Räumen.

Wir nehmen, um es zu wiederholen, jetzt die Maßbestimmung (9) für das Linienelement

$$d\tau^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

an, und setzen dabei die g_{ik} als reguläre Funktionen der vier Koordinaten voraus, die keinen anderen Bedingungen unterworfen sind, als den Ungleichungen (10).

Die folgenden Ausführungen sind zum großen Teil von der Zahl der Koordinaten und diesen Bedingungen unabhängig. Wenn wir daher anschauliche Beispiele für unsere Ergebnisse suchen, dürfen wir vielfach zu zwei Dimensionen hinabsteigen und, um dies Kontinuum als Fläche im euklidischen Raum deuten zu können, ds^2, was wir dann für $d\tau^2$ schreiben, als positiv definit ansehen. Dann ist aber die entsprechende Determinante $g > 0$.

a) Die geodätischen Linien. Eine Kurve in unserem Kontinuum geben wir uns durch die Parameterdarstellung $x^i = x^i(p)$. Die ersten und zweiten Ableitungen dieser Funktionen bezeichnen

wir mit $\dot{x}^i$ und $\dot{x}^j$. Eine Linie, welche bei festem Anfangs- und Endpunkt

$$\int \sqrt{f}\, dp \quad \left[f = \left(\frac{d\tau}{dp}\right)^2 = \sum_{ik} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

zu einem Extremum macht, heißt eine geodätische Linie.

Sollen wir im allgemeinen ein Integral

$$\int F(x^i, \dot{x}^i)\, dp$$

zum Extremum machen, so müssen die Funktionen $x^i(p)$ den Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0$$

genügen, welche ja aus der Theorie des Hamiltonschen Prinzips in der Mechanik wohl bekannt sind. Wenden wir sie auf den vorliegenden Fall $F = \sqrt{f}$ an, so lauten sie, da

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} = f^{-1/2} \sum_k g_{ik} \dot{x}^k, \qquad \frac{\partial F}{\partial x^i} = \frac{1}{2} f^{-1/2} \sum_{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^j \dot{x}^k$$

ist:

$$f^{-3/2}\left\{ -\frac{df}{dp} \sum_k g_{ik} \dot{x}^k + 2 f \frac{d}{dp}\left(\sum_k g_{ik} \dot{x}^k\right) - f \sum_{jk} g_{jki} \dot{x}^j \dot{x}^k \right\} = 0 \quad (50\,a)$$

Zur Abkürzung haben wir dabei

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = g_{jki}$$

gesetzt.

Die Gleichungen vereinfachen sich, wenn wir als Parameter eine zur Bogenlänge τ proportionale Größe nehmen. Denn dabei wird

$$f = C, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

wo C eine Konstante bedeutet. Da die Form $d\tau^2$ indefinit ist, könnte diese Konstante auch den Wert Null haben, doch schließen wir diesen Sonderfall zunächst aus. Dann können wir in den Lagrangeschen Gleichungen das Glied mit df/dp streichen und die Faktoren $f^{-1/2}$ fortlassen:

$$2 \frac{d}{dp}\left(\sum_k g_{ik} \dot{x}^k\right) - \sum_{jk} g_{jki} \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Zu diesen Differentialgleichungen zweiten Grades, deren Zahl mit der der x^i übereinstimmt, tritt dann noch die Differentialgleichung (51), welche nach (50) vom ersten Grade ist. Doch verträgt sie sich mit jenen, weil sie aus ihnen hervorgeht. Multipliziert man nämlich (52) mit $\dot{x}^i$, so folgt durch Summation nach dem Zeiger i:

$$2\left[\frac{d}{dp}\left(\sum_{ik} g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k\right) - \sum_{ik} g_{ik}\ddot{x}^i\dot{x}^k\right] - \sum_{ijk} g_{jki}\dot{x}^i\dot{x}^j\dot{x}^k = 0.$$

Die beiden letzten Summen geben zusammen $-df/dp$, die erste ist gleich $2df/dp$. Also ist $df/dp = 0$; $f = C$ ist somit ein Integral der Gleichungen (52) und man kann eine der Gleichungen (52) durch (51) ersetzen. Diese Regel erfährt eine Ausnahme, wenn man Kurven untersucht, bei denen ein x^i konstant ist, weil man, um (51) zu beweisen, (52) mit $\dot{x}^i$ erweitern mußte.

Für die Durchrechnung von Beispielen ist es meist zweckmäßiger, von einem anderen Variationsproblem auszugehen. Soll nämlich

$$\int f\,dp$$

ein Extremum werden, so lauten dafür die Lagrangeschen Gleichungen:

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0,$$

und das ist dasselbe wie (52)*).

Um die Gleichungen (52) auf ihre Normalform zu bringen, führen wir die Differentiation nach p aus und dividieren durch 2:

$$\sum_k g_{ik}\ddot{x}^k + \sum_{jk} g_{ikj}\dot{x}^j\dot{x}^k - \frac{1}{2}\sum_{jk} g_{jki}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0.$$

---

*) Für die kräftefreie Bewegung eines Massenpunktes auf einer reibungsfreien, festen Fläche verlangt das Hamiltonsche Prinzip in seiner für die Newtonsche Mechanik gültigen Fassung, daß bei vorgegebenem Anfangs- und Endpunkt

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(g_{11}\dot{x}^{1\,2} + 2g_{12}\dot{x}^1\dot{x}^2 + g_{22}\dot{x}^{2\,2})\,dt = 0$$

wird. Bedenkt man, daß des Energieprinzips wegen die Geschwindigkeit dabei konstant bleiben muß, so kann man die Zeit t zum Parameter p des Textes proportional betrachten und erkennt dann, daß die Bahn eine geodätische Linie der Fläche bildet.

Da die Summationszeiger j und k dieselben Werte durchlaufen, können wir sie miteinander vertauschen und somit

$$\sum_{jk} g_{ikj}\,\dot{x}^j\,\dot{x}^k = \sum_{jk} g_{ijk}\,\dot{x}^j\,\dot{x}^k = \frac{1}{2}\sum (g_{ikj} + g_{ijk})\,\dot{x}^j\,\dot{x}^k$$

setzen. Führen wir dann zur Abkürzung die Zeichen

$$\begin{bmatrix} jk \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

ein, so finden wir:

$$\sum_k g_{ik}\,\ddot{x}^k + \sum_{jk} \begin{bmatrix} jk \\ i \end{bmatrix} \dot{x}^j\,\dot{x}^k = 0.$$

Um nun noch die verschiedenen $\ddot{x}^k$ zu trennen, multiplizieren wir dies mit g^{il} und addieren nach i unter Berücksichtigung von (22); dann treten die „Christoffelschen Dreizeiger-Symbole“ oder „g-Klammern“

$$\begin{Bmatrix} jk \\ l \end{Bmatrix} = \sum_i g^{il} \begin{bmatrix} jk \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\sum_i g^{il}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right) \quad (54)$$

auf, und die Differentialgleichungen der geodätischen Linie erhalten die Form:

$$\ddot{x}^l + \sum_{jk} \begin{Bmatrix} jk \\ l \end{Bmatrix} \dot{x}^j\,\dot{x}^k = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Wie die $\begin{bmatrix} jk \\ i \end{bmatrix}$ sind die g-Klammern $\begin{Bmatrix} jk \\ l \end{Bmatrix}$ in den beiden oberen Zeigern symmetrisch. Letztere sind lineare Kombinationen der ersten Ableitungen der g_{ik}, deren Koeffizienten wieder algebraische Funktionen der g_{ik} selbst darstellen. Da es bei n Koordinaten $\frac{1}{2}n(n+1)$ Kombinationen jk gibt, ist ihre Zahl $\frac{1}{2}n^2(n+1)$; bei $n = 4$ also 40, 18 bei $n = 3$ und 6 bei $n = 2$. Diese Zahl stimmt mit der der $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$ überein; deshalb kann man diese aus den g-Klammern berechnen. Dazu hat man einmal die Gleichungen (54) umzukehren:

$$\begin{bmatrix} jk \\ m \end{bmatrix} = \sum_l g_{lm} \begin{Bmatrix} jk \\ l \end{Bmatrix}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

sodann aber mittels der aus (53) hervorgehenden Identität

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \begin{bmatrix} il \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kl \\ i \end{bmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

zu setzen:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \sum_m \left(g_{im} \begin{Bmatrix} kl \\ m \end{Bmatrix} + g_{km} \begin{Bmatrix} il \\ m \end{Bmatrix}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57\text{a})$$

b) Beispiele. Sind die g_{ik} konstant, im übrigen beliebig, so werden die Gleichungen (55) der geodätischen Linie einfach $\ddot{x}^l = 0$, also $x^l = ap + b$, und danach sind die geodätischen Linien Gerade, so daß wir die euklidischen Verhältnisse finden. Nehmen wir als weiteres Beispiel eine Kugel vom Halbmesser R im dreidimensionalen euklidischen Raum, so können wir für einen Punkt auf ihr die kartesischen Koordinaten auf Polarkoordinaten zurückführen durch die Transformation:

$$x = R \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = R \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = R \cos\vartheta.$$

Das Linienelement $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ hat somit, wenn es auf der Kugel liegt, den Ausdruck

$$ds^2 = R^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2),$$

was dem Wertsystem $g_{11} = R^2$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = R^2 \sin^2\vartheta$ entspricht. Statt die sechs g-Klammern hieraus zu berechnen, ziehen wir vor, das Variationsproblem

$$\int (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta \, \dot{\varphi}^2) \, dp = \text{Extrem.}$$

zu lösen und die zugehörigen Differentialgleichungen auf die Form (55) zu bringen. Sie lauten hier zunächst

$$\frac{d}{dp}(\dot{\vartheta}) - \sin\vartheta \cos\vartheta \, \dot{\varphi}^2 = 0, \quad \frac{d}{dp}(\sin^2\vartheta \, \dot{\varphi}) = 0, \qquad (58)$$

also nach Ausführung der Differentiation nach p:

$$\ddot{\vartheta} - \sin\vartheta \cos\vartheta \, \dot{\varphi}^2 = 0, \quad \ddot{\varphi} + 2 \operatorname{ctg}\vartheta \, \dot{\vartheta} \, \dot{\varphi} = 0.$$

Danach müssen die g-Klammern die Werte haben:

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\sin\vartheta \cos\vartheta,$$

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \operatorname{ctg}\vartheta \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0.$$

Von den ersten Integralen entnehmen wir das eine,

$$\sin^2\vartheta \, \dot{\varphi} = a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (59)$$

unmittelbar aus (58). Das zweite liefert uns ohne Rechnung die allgemeine Regel, daß $f = C$ ein Integral der Lagrangeschen Gleichungen für das Extremum von $\int f \, dp$ ist; es lautet somit

$$\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta \, \dot{\varphi}^2 = b.$$

Die Elimination von $\dot{\varphi}$ aus beiden ergibt für ϑ als Funktion von p die Differentialgleichung:

$$\dot{\vartheta}^2 = b - \frac{a^2}{sin^2 \vartheta}.$$

Um ϑ als Funktion von φ zu bestimmen, dividieren wir dies durch die quadrierte Gleichung (59) und führen dann $\Theta = ctg\,\vartheta$ als neue Veränderliche ein:

$$\left(\frac{d\Theta}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{sin^4 \vartheta}\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2 = \frac{b}{a^2} - \frac{1}{sin^2 \vartheta} = \frac{b}{a^2} - 1 - \Theta^2.$$

Daraus folgt unter Einführung einer neuen Bezeichnung für $\frac{b}{a^2}$

$$\Theta = \alpha\, sin\,(\varphi + \beta)$$

oder

$$cos\,\vartheta = sin\,\vartheta\,(A\,cos\,\varphi + B\,sin\,\varphi):$$

$$z = A\,x + B\,y.$$

Die geodätischen Linien sind also die Schnitte der Kugel mit Ebenen, die ihren Mittelpunkt enthalten, d. h. größte Kreise.

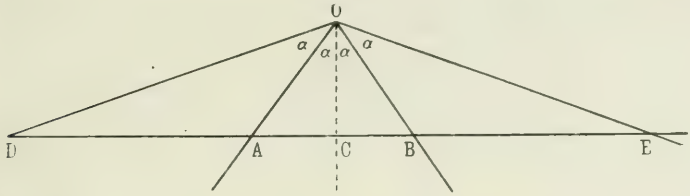
Eine geodätische Linie ist durch einen Punkt und die Richtung in ihm vollständig bestimmt. Bei einer Drehfläche ist daher die Meridiankurve stets geodätische Linie. Wiche nämlich eine geodätische Linie, welche sie berührt, im weiteren Verlaufe von ihr ab, so müßte es aus Symmetrie eine zweite sie im gleichen Punkt berührende, aber nach der anderen Seite von ihr abweichende geodätische Linie geben — im Widerspruch zu dem soeben ausgesprochenen Satz.

Läßt sich ein Flächenstück ohne Dehnung verbiegen, so bleiben alle auf ihm liegenden Strecken in der Länge erhalten, d. h. es bleibt die Maßbestimmung $ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, x^i\, x^k$ gewahrt. Infolgedessen behalten auch die geodätischen Linien ihre Eigenschaft. Nun lassen sich Stücke einer Ebene z. B. zu Kreiszylindern verbiegen. Bei diesen sind daher alle Schraubenlinien geodätische Linien, einschließlich der Grenzfälle des Grundkreises und der erzeugenden Geraden.

In einer Ebene ziehen wir die Halbstrahlen OA und OB, welche sich unter dem Winkel 2α schneiden. Die Punkte A und B sollen von O gleiche Abstände haben. Wir schneiden die Ebene längs eines nicht im Winkel 2α liegenden Halbstrahles durch O auf und rollen sie so zu einem Kreiskegel mit O als

Spitze zusammen, daß OA auf OB, also A auf B fällt. Ist nun wie in Fig. 8 $\alpha < \frac{1}{2}\pi$, so liefert die Gerade AB, welche in C ihren kleinsten Abstand von O hat, eine geodätische Linie, die von C aus nach beiden Seiten symmetrisch verlaufend sich in den zusammenfallenden Punkten A und B selbst schneidet. Wäre dagegen $\alpha > \frac{1}{2}\pi$, so wäre die Strecke AB durch den Schnitt getrennt und diese Gerade lieferte beim Aufrollen Stücke verschiedener geodätischer Linien; keine solche Linie schnitte dann

Fig. 8.



sich selbst. Ist aber nicht nur $\alpha < \frac{1}{2}\pi$, sondern sogar $\alpha < \frac{1}{4}\pi$, so gibt es (siehe die Figur) zwei Gerade OD und OE, welche mit OC den Winkel 2α bilden und von AB in den von O gleichweit entfernten Punkten D und E geschnitten werden. Beim Zusammenrollen der Ebene zum Kegel fällt D auf E. In diesem Fall schneidet sich also jede geodätische Linie des Kegels, mit Ausnahme der erzeugenden Geraden, zweimal. Wäre $\alpha < \pi/6$, so gäbe es drei derartige Schnitte usw.

c) Nullinien. Da $d\tau^2$ eine indefinite quadratische Form ist, gibt es in unserer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit reelle Linienelemente von der Länge Null. Kurven, die sich aus solchen zusammensetzen, heißen Nullinien. Sie sind aus der Differentialgleichung

$$\sum_{ik} g_{ik}\, \dot{x}^i \dot{x}^k = 0$$

zu entnehmen. Und da in dieser vier zu bestimmende Funktionen des Parameters p auftreten, könnte es zunächst scheinen, als wären bei der Nullinie noch drei Funktionen willkürlich zu wählen. Dem ist nicht ganz so, weil der Parameter p selbst keine Bedeutung hat und ohne weiteres durch eine willkürliche Funktion $\varphi(p)$ ersetzt werden kann. Aber trotzdem bleiben noch zwei willkürliche Funktionen übrig, wie man sogleich sieht, wenn

man etwa x^4 als Parameter nimmt. Denn dann enthält die Differentialgleichung drei zu bestimmende Funktionen, es bleiben somit zwei willkürlich zu wählen. In diesem Sinn ist das Problem der Nullinien unterbestimmt. Man sieht das auch am Beispiel der beschränkten Relativitätstheorie: jede Weltlinie, welche einer Geschwindigkeit vom Betrage c entspricht, ist in ihr Nullinie, und dabei können wir deren Projektion auf den xyz-Raum der „Welt", d. h. die Bahn im dreidimensionalen Raum, noch beliebig vorschreiben.

Im Gegensatz dazu sind die geodätischen Linien durch ihre Differentialgleichungen (55) bis auf acht Konstante vollständig bestimmt. Es können somit nicht alle Nullinien geodätisch sein, wie ja z. B. in der beschränkten Relativitätstheorie nur gerade Weltlinien geodätisch sind. Wohl aber gibt es unter den Nullinien auch geodätische. Denn die Differentialgleichungen der letzteren haben, wie in (51) gezeigt, stets als ein erstes Integral die Gleichung

$$\sum_{ik} g_{ik}\, \dot{x}^i \dot{x}^k = C;$$

und man kann diese Konstante auch gleich Null setzen.

Durch einen Punkt O gehen noch dreifach unendlich viele geodätische Nullinien; denn von den acht Integrationskonstanten sind vier durch diesen Punkt und eine durch $C = O$ festgelegt. Sie bilden dessen Vor- und Nachkegel, mit dem einzigen Unterschied gegen früher, daß dieser Doppelkegel nicht mehr gerade Linien, sondern gekrümmte Kurven zu Erzeugenden hat (siehe Bd. I, § 8). Dieser Doppelkegel scheidet das Zwischengebiet, in welchem jedes von O ausgehende Linienelement einen imaginären Betrag $d\tau$ hat, von dem Gebiete diesseits O, in welchem solch ein Linienelement ein negativ reelles, und dem jenseits O, in welchem es ein positiv reelles $d\tau$ hat. Die Forderung von § 3, daß jede Transformation den drei ersten x^i die Raumartigkeit wahren soll, aber dem x^4 die Zeitartigkeit, kommt also vollständig auf die Gültigkeit der Ungleichungen (10) für die g_{ik} hinaus.

d) Die Transformation der Drei-Zeiger-Symbole. Die g-Klammern erhalten in der Theorie der Schwere eine besonders wichtige Rolle. Darum fragen wir hier nach ihrer Umrechnung von einem Koordinatensystem aufs andere. Wir gehen davon aus, daß die Gleichungen (55) für die geodätischen Linien

in jedem Bezugssystem gelten müssen. Nun ist aber, wenn wir die x^i als Funktionen der x'^i gegeben denken:

$$\dot{x} = \frac{dx^l}{dp} = \sum_m \frac{\partial x^l}{\partial x'^m} \frac{dx'^m}{dp},$$

$$\ddot{x}^l = \frac{d^2 x^l}{dp^2} = \sum_o \frac{\partial x^l}{\partial x'^o} \frac{d^2 x'^o}{dp^2} + \sum_{mn} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^m \partial x'^n} \frac{dx'^m}{dp} \frac{dx'^n}{dp}.$$

Setzt man diese Werte für alle Differentialquotienten in (55) ein und ersetzt man zugleich $\ddot{x}'^o$ nach (55) durch eine Summe, so findet man:

$$\sum_{mn} \left[\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^m \partial x'^n} + \sum_{jk} \begin{Bmatrix} jk \\ l \end{Bmatrix} \frac{\partial x^j}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} \right.$$
$$\left. - \sum_o \begin{Bmatrix} mn \\ o \end{Bmatrix}' \frac{\partial x^l}{\partial x'^o} \right] \dot{x}'^m \dot{x}'^n = 0.$$

Dabei ist $\begin{Bmatrix} jk \\ l \end{Bmatrix}$ eine aufs ungestrichene System, $\begin{Bmatrix} mn \\ o \end{Bmatrix}'$ eine aufs gestrichene System bezogene g-Klammer. Nun kann man für eine geodätische Linie in einem Punkt noch die Richtung vorschreiben. Man kann also die dx'^l/dp noch willkürlich vorschreiben und doch muß die letzte Gleichung immer richtig bleiben. Daraus schließen wir auf das Verschwinden des Faktors von $\dot{x}'^m \dot{x}'^n$:

$$\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^m \partial x'^n} + \sum_{jk} \begin{Bmatrix} jk \\ l \end{Bmatrix} \frac{\partial x^j}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} = \sum_k \begin{Bmatrix} mn \\ k \end{Bmatrix}' \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \qquad (60)$$

Diese Christoffelschen Formeln enthalten die Transformation der g-Klammern. Bei linearen Transformationen der Koordinaten fällt der zweite Differentialquotient fort, und der Vergleich mit (47) zeigt dann, daß sie sich wie die in den oberen Zeigern kovarianten, in den unteren kontravarianten Komponenten eines Tensors dritten Ranges verhalten (vgl. die Anmerkung dazu). Aber im allgemeinen gilt das nicht. Sie haben nicht die invariante Natur, wie ein Tensor. Deswegen können wir auch Koordinatensysteme finden, in denen wenigstens für einen Punkt sämtliche g-Klammern Null sind (§ 8). Wohl aber stellt die linke Seite von (60) eine kontravariante Vektorkomponente dar. Bezeichnet man sie nämlich mit A^l, und berechnet man den entsprechenden

Ausdruck für das gestrichene System, so findet man einfach

$$A'^l = \left\{ {m\,n \atop l} \right\}'.$$

Gleichung (60) sagt also aus:

$$A^l = \sum_i A'^i \frac{\partial x^l}{\partial x'^i},$$

und dies ist die Vektortransformation.

e) Die g-Klammern und die Determinante g. Nach (22) ist $\sum_k g^{ik} g_{jk}$ jedenfalls eine unveränderliche Zahl. Infolgedessen ist

$$\sum_k g^{ik}\, d\, g_{jk} = -\sum_k g_{jk}\, d\, g^{ik}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

mag nun i gleich j sein oder nicht.

Wir multiplizieren (61) einmal mit g^{jl} und summieren nach j, das andere Mal mit g_{il} und summieren nach i:

$$d\, g^{il} = -\sum_{jk} g^{ik} g^{jl}\, d\, g_{jk} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61\,a)$$

$$d\, g_{jl} = -\sum_{ik} g_{il}\, g_{jk}\, d\, g^{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61\,b)$$

Gleichung (61 a) dividieren wir durch $d\,x^m$. Nach (57) finden wir:

$$\frac{\partial g^{il}}{\partial x^m} = -\sum_j g^{jl} \left\{ {j\,m \atop i} \right\} - \sum_k g^{ik} \left\{ {k\,m \atop l} \right\},$$

oder auch in Analogie zu (57 a)

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = \sum_j \left(g^{jk} \left\{ {j\,l \atop i} \right\} + g^{ij} \left\{ {j\,l \atop k} \right\} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (61\,c)$$

Andererseits folgt aus der Definition der Ausdrücke $g \,.\, g^{ik}$ als Unterdeterminanten von g nach einem bekannten Determinantensatz:

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ik}} = g \,.\, g^{ik}; \quad \frac{d\,g}{g} = \sum_{ik} g^{ik}\, d\, g_{ik} = -\sum_{ik} g_{ik}\, d\, g^{ik}.$$

Die beiden letzten Gleichungen lassen sich schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}\, d\,[log\,(-g)] &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\, d\,(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \sum_{ik} g^{ik}\, d\, g_{ik} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{ik} g_{ik}\, d\, g^{ik} \end{aligned} \right\} \quad . \quad (62)$$

Nun dividieren wir durch dx^l und setzen den Wert (61c) für $\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}$ ein:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^l} = \frac{1}{2}\sum_i \begin{Bmatrix} il \\ i \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\sum_j \begin{Bmatrix} jl \\ j \end{Bmatrix}.$$

Beide Summen bedeuten dasselbe; also:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^l} = \sum_i \begin{Bmatrix} il \\ i \end{Bmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62\,\mathrm{a})$$

Schließlich folgern wir noch aus (62):

$$\frac{1}{2}\sum_{ik} g_{ik}\, d\left(\sqrt{-g}\, g^{ik}\right) = d\left(\sqrt{-g}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62\,\mathrm{b})$$

§ 8. Die Parallelverschiebung in Riemannschen Räumen.

a) Riemannsche Koordinaten. In der euklidischen Geometrie bevorzugt man geradlinige, d. h. auf geodätische Linien bezogene Koordinaten, weil in ihnen im Gegensatz zu den krummlinigen der Tensor der Maßbestimmung konstant ist. In der Riemannschen Geometrie kann es derartige Koordinaten nicht geben; wären die g_{ik} unveränderlich, so hätten wir ja gerade den euklidischen Fall. Aber man kann wenigstens für einen beliebigen Punkt P Koordinatensysteme finden, in welchen die g_{ik} in dem genannten Punkt keine von Null verschiedenen ersten Differentialquotienten $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$ haben, zugleich verschwinden nach (54) auch die g-Klammern. Sie heißen geodätische Koordinatensysteme.

Um derartige Koordinaten zu finden, wählen wir zunächst ein beliebiges Koordinatensystem. Es habe im Punkt P den Maßtensor $g_{ik}^{(0)}$. Wir ziehen durch ihn die $(n-1)$fache Schar der geodätischen Linien. Jede von ihnen bestimmen wir durch die n Konstanten c^i, deren Verhältnisse die Verhältnisse zwischen den $\dot{x}^i$ im Punkt P angeben $[c^1 : c^2 : c^3 \ldots = (\dot{x}^1)_P : (\dot{x}^2)_P : (\dot{x}^3)_P \ldots]$, zwischen denen wir aber noch die Beziehung

$$\sum_{ik} \overset{0}{g}_{ik}\, c^i c^k = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

festsetzen. Ein Punkt Q habe längs der geodätischen Linie PQ gemessen den Abstand p von P; verstehen wir unter den c^i die

dieser Linie entsprechenden Werte, so geben wir ihm nunmehr die Koordinaten

$$x^i = c^i p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

Wäre die Maßbestimmung durch eine definite quadratische Form gegeben, so könnten wir wegen (63) die c^i als die Komponenten eines Einheitsvektors auffassen. Da die Gleichungen (64) bei veränderlichem p, aber konstanten c^i die Gleichung einer geodätischen Linie ergeben, so könnten wir sagen, dieser Einheitsvektor gibt die Richtung der betreffenden Linie im Punkt P an. Ist hingegen die Maßbestimmung indefinit, so ist die Bogenlänge p unter Umständen rein imaginär, und wir müssen, in Übereinstimmung mit (63), dann auch die c^i imaginär wählen, um zu reellen Koordinaten x^i zu kommen.

Die in (64) eingeführten x^i sind Riemannsche Koordinaten, bezogen auf den Punkt P ($x^i = 0$). Da in ihnen für jede geodätische Linie durch P $\ddot{x}^i = 0$ ist, muß im Nullpunkt P, in welchem sie sich alle kreuzen, nach (55) die Summe

$$\sum_{kl} \left\{ {k\,l \atop i} \right\} \dot{x}^k \dot{x}^l = \sum_{kl} \left\{ {k\,l \atop i} \right\} c^k c^l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

für alle Wertesysteme der c^i verschwinden. Das ist nur möglich, wenn dort die g-Klammern, also nach (57a) auch die $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$ verschwinden. Riemannsche Koordinaten für den Punkt P bilden somit ein für ihn geodätisches System.

Wendet man auf Riemannsche Koordinaten eine homogene lineare Transformation an, so gelangt man wieder zu solchen; denn die Gleichungen (64), durch welche wir sie eingeführt haben, bleiben dabei in ihrer Form erhalten. Umgekehrt sind lineare Transformationen die einzigen, welche dies leisten. Dagegen lassen sich geodätische Koordinatensysteme auch noch auf andere Arten ineinander umrechnen. Ist das System x^i für P geodätisch, so führt z. B. die Substitution

$$x^i = x'^i + \frac{1}{6} \sum_{klm} a^i_{klm} x'^k x'^l x'^m + \text{Glieder höherer Ordnung} \quad (66)$$

in welcher man die unteren Zeiger von a^i_{klm} ohne weiteres miteinander vertauschen kann, wieder zu einem geodätischen System.

In der Tat ist dann

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^m} = \delta^i_m + \frac{1}{2} \sum_{k,l} a^i_{klm} x'^k x'^l, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66\text{a})$$

$$g'_{mn} = \sum_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} g_{ik}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66\text{b})$$

also für P, da dort die x^i wie die x'^i verschwinden:

$$g'_{mn} = g_{mn}.$$

Und weiter wird in P

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^m \partial x'^n} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66\text{c})$$

also fallen nach (66b) daselbst auch die $\frac{\partial g'_{mn}}{\partial x'^p}$ fort. Es gibt demnach mehr geodätische als Riemannsche Koordinatensysteme für einen Punkt. Begreiflicherweise, denn ein geodätisches System muß gewissen Forderungen in der Umgebung des hervorgehobenen Punktes genügen, Riemannsche Koordinaten hingegen nach (64) für das ganze Kontinuum, oder wenigstens endliche Teile davon.

Daß es geodätische Systeme gibt, d. h. solche, in denen die g-Klammern verschwinden, beweist uns zum zweiten Male (vgl. § 7), daß diese Symbole keinen Tensorcharakter tragen. Sonst könnten sie nicht in einem System verschwinden, ohne daß dies für alle Systeme gilt.

Nach (64) sind die geodätischen Linien durch den hervorgehobenen Punkt durch lineare homogene Gleichungen zwischen den Riemannschen Koordinaten bestimmt. Doch sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß auch in diesen Koordinaten geodätische Linien, die nicht durch den hervorgehobenen Punkt gehen, im allgemeinen nicht durch lineare Beziehungen darzustellen sind. Daß man alle geodätischen Linien im gleichen System linear darstellen kann, ist ein Ausnahmefall, welcher nur in der euklidischen, der elliptischen und hyperbolischen Geometrie (vgl. § 11 u. 12) vorkommt.

Auf der im euklidischen Raum gelegenen Kugelfläche vom Halbmesser R führen wir zunächst, wie üblich, Polabstand ϑ und Azimut φ als Koordinaten ein. Für den Pol $\vartheta = 0$ sind dann

$$x^1 = R\vartheta \cos\varphi, \qquad x^2 = R\vartheta \sin\varphi$$

Riemannsche Koordinaten. Denn $R.\vartheta = s$ ist die Bogenlänge der vom Pol ausgehenden größten Kreise, und außerdem ist für dieses System, da sich die Kreise $x^1 = 0$ und $x^2 = 0$ im Pol senkrecht schneiden, in diesem die Maßbestimmung $ds^2 = dx^{1^2} + dx^{2^2}$, woraus man entnimmt:

$$g_{11}^{(0)} = g_{22}^{(0)} = 1, \quad g_{12}^{(0)} = 0,$$

so daß die Konstanten der letzten Gleichungen auch der Forderung (63) genügen. Geodätische, aber nicht mehr Riemannsche Koordinaten wären z. B.:

$$x = R \sin\vartheta \cos\varphi, \qquad y = R \sin\vartheta \sin\varphi.$$

Denn für sie gilt die Maßbestimmung

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) \\ &= \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}\left[(R^2 - y^2)\,dx^2 + (R^2 - x^2)\,dy^2 + 2xy\,dx\,dy\right]. \end{aligned}$$

Die g_{ik}, welche man hieraus abliest, haben im Pol $x = y = 0$ in der Tat verschwindende erste Ableitungen.

b) Die Parallelverschiebung eines Vektors[2]). Im beliebig gewählten, gestrichenen System ziehen wir die Kurven $x'^2 = const$, $x'^3 = const$, $x'^4 = const$. Sie bestimmen durch ihre Richtung in jedem Punkt einen Vektor mit der einen von Null verschiedenen Komponente A'^1 im System x'; wir wollen A'^1 als konstant ansehen. In einem anderen ungestrichenen System sind nach den Transformationsformeln für Vektoren die

$$A^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^1} A'^1$$

dessen Komponenten. Für zwei Punkte, P und Q, deren Abstand im gestrichenen System durch den Zuwachs dx'^m der einen Koordinate bestimmt ist, beträgt dann der Unterschied der Komponente A^j im ungestrichenen System

$$dA^j = dx'^m \frac{\partial A^j}{\partial x'^m} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^1 \partial x'^m}\, dx'^m . A'^1;$$

und hier ist nach den Christoffelschen Formeln (60):

$$\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^1 \partial x'^m} = -\sum_{kl} \left\{ {k\,l \atop j} \right\} \frac{\partial x^k}{\partial x'^1} \frac{\partial x^l}{\partial x'^m} + \sum_i \left\{ {1\,m \atop i} \right\}' \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}.$$

Nun sei aber das gestrichene System ein für den Punkt P geodätisches. Dann verschwinden, wie wir gesehen haben, in ihm die auf P

bezogenen Dreizeigersymbole und wir finden, da $\frac{\partial x^l}{d x'^m} d x'^m$ der Koordinatenunterschied $d x^l$ für P und Q ist,

$$d A^j = -\sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} kl \\ j \end{matrix} \right\} A^k d x^l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

Jetzt definieren wir es als unendlich kleine Parallelverschiebung eines Vektors, wenn wir ihn von P so nach dem unendlich benachbarten Punkt Q verpflanzen, daß sich dabei seine Komponenten, bezogen auf ein für P geodätisches Koordinatensystem, nur in Größen höherer Ordnung verändern. Welches der verschiedenen für P geodätischen Systeme wir dabei zugrunde legen, ist gleichgültig; nach (67) verschwindet $d A^j$ immer, wenn die g-Klammern Null sind. Aber in nichtgeodätischen Systemen erleidet der Vektor A bei seiner Parallelverschiebung Änderungen an seinen kontravarianten Komponenten; welche, das lehrt Gleichung (67).

Diese Definition schließt sich den euklidischen Verhältnissen so eng als möglich an. Auch unter ihnen darf man ja die Parallelverschiebung, die uns dort wohl bekannt ist, nicht durch die Konstanz der Komponenten in irgend einem krummlinigen, sondern nur in einem geradlinigen Koordinatensystem festlegen. Diesem aber entspricht in einem Riemannschen Raum das geodätische System. Damit hängt zusammen, daß sich die Komponentenänderungen $d A^j$ keineswegs selbst als Vektorkomponenten auffassen lassen. Wären sie es, so wäre es unmöglich, sie durch passende Wahl der Koordinaten alle zum Verschwinden zu bringen. Nur für zwei im gleichen Punkt liegende Vektoren gilt der Satz von § 6, daß sich ihre Komponenten bei Addition und Subtraktion immer wieder zu Vektorkomponenten zusammenfügen.

Auch dieser Zug findet sich schon in der euklidischen Geometrie, sobald man krummlinige Koordinaten benutzt. Man führe in die euklidische Ebene etwa Polarkoordinaten r, ϑ ein und verschiebe einen zur Richtung der x-Achse, $\vartheta = 0$ dauernd parallelen Einheitsvektor (diese Angabe hat in dieser Geometrie, freilich auch nur in ihr, einen ganz bestimmten Sinn) um die Strecke $d r$, $d \vartheta$. Man sieht, daß dann $d A^r = - \sin \vartheta \, d \vartheta$, $d A^\vartheta = \frac{\sin \vartheta}{r^2} d r - \frac{\cos \vartheta}{r} d \vartheta$ ist.

Denn es ist

$$A^r = \frac{\partial r}{\partial x} A^x = \cos\vartheta, \qquad A^\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} A^x = -\frac{\sin\vartheta}{r}.$$

Auch hier haben die Zuwächse nicht die Vektoreigenschaft, denn sie lassen sich ja durch Einführung gradliniger Koordinaten forttransformieren. Wenn man in der euklidischen Geometrie dennoch den Satz ausspricht, daß auch Vektoren an verschiedenen Orten in den Differenzen ihrer Komponenten einen neuen Vektor bestimmen, so denkt man dabei lediglich an die Transformation geradliniger Koordinaten; nur mit dieser Beschränkung gilt er.

Bei einer Parallelverschiebung bleiben nicht nur die kontravarianten, sondern auch die kovarianten Vektorkomponenten in geodätischen Systemen erhalten. Da die ersten Ableitungen der g_{ik} im hervorgehobenen Punkt Null sind, schließt man dies leicht aus der Gleichung

$$A_i = \sum_j g_{ij} A^j.$$

Infolgedessen bleibt für einen Vektor das Quadrat seines Betrages, $\sum_i A^i A_i$, für zwei Vektoren das skalare Produkt, $\sum_i A^i B_i$, und damit der Winkel zwischen ihnen erhalten. Diese Aussage gilt wegen der skalaren Natur dieser Größen aber für jedes Koordinatensystem und ermöglicht uns leicht, die (67) entsprechende Formel für kovariante Komponenten aufzustellen. Denn unterwerfen wir die Vektoren A und B einer gemeinsamen Parallelverschiebung, so ist nach (67), angewandt auf B^k:

$$\begin{aligned} d\Big(\sum_i A_i B^i\Big) &= \sum_i B^i d A_i + \sum_k A_k d B^k \\ &= \sum_i B^i \Big(d A_i - \sum_{kl} \begin{Bmatrix} i\,l \\ k \end{Bmatrix} A_k d x^l\Big), \end{aligned}$$

und da dies für jeden Vektor B verschwinden muß, ist

$$d A_i = \sum_{kl} \begin{Bmatrix} i\,l \\ k \end{Bmatrix} A_k d x^l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67\,\mathrm{a})$$

Natürlich sind auch die $d A_i$ nicht Vektorkomponenten.

Verschieben wir den Vektor A nicht parallel, sondern unter Drehung, so sind die Ausdrücke

$$d A_i - \sum_{kl} \begin{Bmatrix} i\,l \\ k \end{Bmatrix} A_k d x^l \quad \text{und} \quad d A^j + \sum_{kl} \begin{Bmatrix} k\,l \\ j \end{Bmatrix} A^k d x^l$$

nicht mehr Null. Wir können aber leicht zeigen, daß sie im Gegensatz zu den dA_i und dA^j selbst Vektorkomponenten bilden. Dazu brauchen wir nach § 6 nur nachzuweisen, daß sie sich mit einem beliebigen Vektor B zu einem skalaren Produkt vereinigen lassen. Und diesen Nachweis führen wir, indem wir den Vektor B allein parallel verschieben und die Änderung des Skalars

$$\sum_j A^j B_j = \sum_i A_i B^i$$

berechnen, welche selbst ein (hier von Null verschiedener) Skalar ist. Dabei finden wir nämlich einmal wie oben, indem wir dB^i nach (67) ausdrücken:

$$d\left(\sum_i A_i B^i\right) = \sum_i B^i \left(dA_i - \sum_{kl} \left\{ {il \atop k} \right\} A_k dx^l\right).$$

Ähnlich, aber unter Benutzung von (67a) für dB_j, läßt sich schreiben:

$$d\left(\sum_j A^j B_j\right) = \sum_j B_j \left(dA^j + \sum_{kl} \left\{ {kl \atop j} \right\} A^k dx^l\right).$$

Derselbe Schluß läßt sich übrigens aus der Vektornatur der linken Seite von (60) ziehen, da wir von dieser Formel hier ausgegangen sind.

Unter der Richtung einer Kurve verstehen wir den Einheitsvektor, dessen Komponenten zu den längs der Kurve genommenen Differentialen dx^i proportional sind. Ist $d\tau$ das Differential der Bogenlänge, so sind also die Quotienten $\frac{dx^i}{d\tau}$ seine Komponenten. Dividieren wir in (67) durch $d\tau$, und setzen wir für A den Richtungsvektor, so finden wir

$$\frac{d^2 x^j}{d\tau^2} + \sum_{lm} \left\{ {lm \atop j} \right\} \frac{dx^l}{d\tau} \frac{dx^m}{d\tau} = 0.$$

Diese Gleichungen stimmen mit den Differentialgleichungen (55) der geodätischen Linien überein. Es ist also ein Kennzeichen der geodätischen Linien, daß sie im Fortschreiten ihre Richtung parallel verschieben, also nicht ändern. Sie stehen auch hierin den Geraden der euklidischen Geometrie so nahe, wie das in allgemeinen Riemannschen Räumen nur möglich ist.

Dies ist sogar die anschaulichste allgemeingültige Eigenschaft der geodätischen Linien. Daß sie das in § 7 behandelte Variationsproblem lösen, ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend dafür, daß sie die kürzeste Verbindung zweier Punkte bilden. Schon in der Flächentheorie ist dies nur unter gewissen Bedingungen der Fall. In der „Welt" der Relativitätstheorie gilt es um so weniger, als das Quadrat des Linienelements nicht definit ist.

§ 9. Vektor- und Tensoranalysis.

a) Differentialoperationen, in welche der Tensor der Maßbestimmung nicht eingeht. Sei φ eine skalare Ortsfunktion, $d\tau$ ein Linienelement. Dann ist

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\tau}$$

wieder ein Skalar. Nach der Vektordefinition in § 6 sind also die Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ die kovarianten Komponenten eines „$\Gamma\varrho\alpha\delta\varphi$" geschriebenen Vektors, des Gradienten von φ; denn die $\frac{dx^i}{d\tau}$ sind die kontravarianten Komponenten des der Verrückung $d\tau$ entsprechenden Richtungsvektors.

Sei zweitens Φ ein Vektor, $d\tau_1$ und $d\tau_2$ beliebige vom gleichen Punkt ausgehende Linienelemente. Wir bilden die Skalare

$$\varphi_1 = \sum_i \Phi_i \frac{dx^i}{d\tau_1} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi_1}{d\tau_2} = \sum_{ik} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^k} \frac{dx^i}{d\tau_1} \frac{dx^k}{d\tau_2} + \sum_i \Phi_i \frac{d^2 x^i}{d\tau_1 d\tau_2}.$$

Denken wir uns weiter dieselben Skalare unter Vertauschung der Zeiger 1 und 2 gebildet, so fallen in der Differenz $\frac{d\varphi_1}{d\tau_2} - \frac{d\varphi_2}{d\tau_1}$ die in ihnen symmetrischen Summen fort:

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau_2} - \frac{d\varphi_2}{d\tau_1} = \sum_{ik} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^k} \left(\frac{dx^i}{d\tau_1} \frac{dx^k}{d\tau_2} - \frac{dx^k}{d\tau_1} \frac{dx^i}{d\tau_2} \right).$$

In der zweiten Hälfte dieser Summe vertauschen wir die Summationsbuchstaben i und k; so erhalten wir für denselben Skalar

$$\sum_{ik} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x^i} \right) \frac{dx^i}{d\tau_1} \frac{dx^k}{d\tau_2}.$$

Gemäß der Tensordefinition in § 6 c) folgt daraus, daß die Ausdrücke $\frac{\partial \Phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^k} = \mathfrak{Rot}_{ik} \boldsymbol{\Phi}$ kovariante Komponenten eines Tensors zweiten Ranges sind. Offenbar ist dieser Tensor, die Rotation des Vektors $\boldsymbol{\Phi}$, antisymmetrisch, also ein Sechservektor. Die Begriffe des Gradienten und der Rotation haben wir schon in Band I, § 12, kennen gelernt.

Drittens sei T_{ik} ein antisymmetrischer Tensor, $d\tau_1$, $d\tau_2$, $d\tau_3$ beliebige Linienelemente. Wir bilden die Skalare

$$\varphi_1 = \sum_{kl} T_{kl} \frac{dx^k}{d\tau_2} \frac{dx^l}{d\tau_3}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau_1} = & \sum_{ikl} \frac{\partial T_{kl}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\tau_1} \frac{dx^k}{d\tau_2} \frac{dx^l}{d\tau_3} \\ & + \sum_{kl} T_{kl} \left(\frac{d^2 x^k}{d\tau_1 d\tau_2} \frac{dx^l}{d\tau_3} + \frac{d^2 x^l}{d\tau_1 d\tau_3} \frac{dx^k}{d\tau_2} \right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (68)$$

Entsprechend bilden wir $\frac{d\varphi_2}{d\tau_2}$ und $\frac{d\varphi_3}{d\tau_3}$, indem wir auf der rechten Seite die Zeiger 1, 2, 3 und — was gar nichts ändert — auch die Summationsbuchstaben i, k, l zyklisch vertauschen. Bei der einen dieser Vertauschungen tritt in der ersten Summe $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^i}$, bei der anderen dafür $\frac{\partial T_{li}}{\partial x^k}$ auf. In der zweiten Summe aber finden wir bei der ersten Vertauschung einen Term

$$\sum_{ik} T_{ik} \frac{d^2 x^i}{d\tau_3 d\tau_1} \frac{dx^k}{d\tau_2},$$

für den wir unter Umbenennung eines Summationszeigers

$$\sum_{kl} T_{lk} \frac{d^2 x^l}{d\tau_3 d\tau_1} \frac{dx^k}{d\tau_2}$$

schreiben können. Addieren wir schließlich alle drei Skalare, so hebt sich der letztgenannte Ausdruck fort gegen die Summe

$$\sum_{kl} T_{kl} \frac{d^2 x^l}{d\tau_1 d\tau_3} \frac{dx^k}{d\tau_2}$$

in der ersten der drei Gleichungen. Ebenso zerstören sich je zwei der anderen vier Ausdrücke, welche bei dem geschilderten

Verfahren aus der zweiten Summe in (68) entstanden sind. Es bleibt also nur übrig:

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau_1} + \frac{d\varphi_2}{d\tau_2} + \frac{d\varphi_3}{d\tau_3} = \sum_{ikl} \left(\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial T_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial T_{kl}}{\partial x^i} \right) \frac{dx^i}{d\tau_1} \frac{dx^k}{d\tau_2} \frac{dx^l}{d\tau_3}.$$

Da dies ein Skalar ist, müssen die Summen

$$T_{ikl} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial T_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial T_{kl}}{\partial x^i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68\text{a})$$

kovariante Komponenten eines Tensors dritten Ranges sein. Sie sind wie die ähnlich gebauten Ausdrücke (45) vollständig antisymmetrisch, stellen also nach § 6 f) einen Raumtensor mit den vier kovarianten Komponenten T_{234}, T_{341}, T_{412}, T_{123} dar. Bezeichnen wir den Tensor T_{ik} in seiner Eigenschaft als Sechservektor wie in Bd. I mit $\mathfrak{M}$, so ist dieser neue Tensor die duale Divergenz des Sechservektors $\mathfrak{M}$. [Bd. I, § 12 d).] Wir schreiben ihn: $\Delta iv^* \mathfrak{M}$; und können die Rechnungsregel (112) aus Bd. I

$$\Delta iv^* (\mathfrak{Rot}\, \Phi) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

trotz des Unterschiedes übertragen, daß dort diese Divergenz als Vierervektor galt*).

Nochmalige Wiederholung des hier dreimal befolgten Verfahrens, ausgehend von dem vollständig antisymmetrischen Tensor dritten Ranges, führt zu einem vollständig antisymmetrischen Tensor vierten Ranges mit der einzigen wesentlichen (kovarianten) Komponente

$$T_{1234} = \frac{\partial T_{234}}{\partial x^1} - \frac{\partial T_{341}}{\partial x^2} + \frac{\partial T_{412}}{\partial x^3} - \frac{\partial T_{123}}{\partial x^4}$$

[vgl. (45 a)]. Man hätte ihn als die Divergenz von T_{ikl} zu bezeichnen. Bei orthogonalen Transformationen verhält er sich wie die Divergenz eines Vierervektors und trat deshalb in Bd. I nicht hervor. Auch hier wird er in den Anwendungen keine Rolle spielen.

Auch in drei Dimensionen kann man Differentialoperationen dieser Art bilden. Nur endet ihre Reihe schon bei dem vollständig antisymmetrischen Tensor dritten Ranges

$$T_{123} = \frac{\partial T_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x^3},$$

*) In Bd. I $\Delta iv\, \mathfrak{M}^*$ geschrieben, da dieser Tensor dort in einen Vierervektor überging.

der nur eine wesentliche Komponente besitzt. Denn in n Dimensionen kann man keinen derartigen Tensor von höherem als $n$ten Range bilden. Wir benennen in § 14, wo wir dies brauchen, den Tensor T_{ik} als Flächenvektor mit $\mathfrak{B}_{ik}$ und den daraus gebildeten Tensor T_{123} als tensorielle Divergenz von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{Div}\,\mathfrak{B}$*). Die bekannte Rechnungsregel für die Rotation eines polaren Vektors müssen wir dann schreiben:

$$\mathfrak{Div}\,(rot\,\mathfrak{E}) = 0.$$

Bis hierher haben wir nur Skalare um die Strecken $d\tau$ verschoben. Die geodätischen Linien konnten dabei keine besondere Rolle spielen, weil sie sich in einem Linienelement von anderen Kurven nicht unterscheiden. Ihre Differentialgleichung ist ja von der zweiten Ordnung. Erst wenn wir gerichtete Größen, also Vektoren, Verschiebungen unterwerfen, kommen, wie § 8 zeigte, die für die geodätischen Linien kennzeichnenden g-Klammern zum Vorschein.

b) Divergenzbildungen, welche den Maßtensor enthalten. Tensorkomponenten sind:

$$A_{ik} = \frac{\partial P_i}{\partial x^k} - \sum_l \left\{ {i\,k \atop l} \right\} P_l, \quad A^i{}_k = \frac{\partial P^i}{\partial x^k} + \sum_l \left\{ {k\,l \atop i} \right\} P^l \quad . \; . \; (70)$$

Denn sind die dx^i die Komponenten einer Verschiebung vom Betrage $d\tau$, so sind

$$\sum_k A_{ik} \frac{dx^k}{d\tau} = \frac{dP_i}{d\tau} - \sum_{kl} \left\{ {i\,k \atop l} \right\} P_l \frac{dx^k}{d\tau},$$

$$\sum_k A^i{}_k \frac{dx^k}{d\tau} = \frac{dP^i}{d\tau} + \sum_{kl} \left\{ {k\,l \atop i} \right\} P^l \frac{dx^k}{d\tau}$$

nach den Schlußbemerkungen in § 8 Komponenten des gleichen Vektors. — Komponenten eines und desselben Tensors dritten Ranges bilden ferner die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} A_{ikl} &= \frac{\partial T_{ik}}{\partial x^l} - \sum_m \left(\left\{ {i\,l \atop m} \right\} T_{mk} + \left\{ {k\,l \atop m} \right\} T_{im} \right), \\ A_i{}^k{}_l &= \frac{\partial T_i{}^k}{\partial x^l} + \sum_m \left(\left\{ {l\,m \atop k} \right\} T_i{}^m - \left\{ {i\,l \atop m} \right\} T_m{}^k \right), \\ A^{ik}{}_l &= \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^l} + \sum_m \left(\left\{ {l\,m \atop i} \right\} T^{mk} + \left\{ {l\,m \atop k} \right\} T^{im} \right). \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (71)$$

*) Eine vektorielle Divergenz lernen wir im Abschnitt b) kennen.

Es genügt, dies für den Fall zu beweisen, daß der Tensor T_{ik} durch Multiplikation zweier Vektoren P und Φ entsteht; denn auf den allgemeinen Fall, in welchem man eine Reihe solcher Produkte addieren muß, überträgt sich dieser Beweis wegen des linearen Auftretens dieses Tensors in den Formeln ohne weiteres. Setzt man aber

$$T_{ik} = P_i \Phi_k, \qquad T_i^{\ k} = P_i \Phi^k, \qquad T^{ik} = P^i \Phi^k,$$

so findet man

$$A_{ikl} = P_i \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x^l} - \sum_m \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix} \right\} \Phi_m \right) + \Phi_k \left(\frac{\partial P_i}{\partial x^l} - \sum_m \left\{ \begin{matrix} i\,l \\ m \end{matrix} \right\} P_m \right).$$

$$A_i^{\ k}{}_l = P_i \left(\frac{\partial \Phi^k}{\partial x^l} + \sum_m \left\{ \begin{matrix} l\,m \\ k \end{matrix} \right\} \Phi^m \right) + \Phi^k \left(\frac{\partial P_i}{\partial x^l} - \sum_m \left\{ \begin{matrix} i\,l \\ m \end{matrix} \right\} P_m \right).$$

$$A^{ik}{}_l = P^i \left(\frac{\partial \Phi^k}{\partial x^l} + \sum_m \left\{ \begin{matrix} l\,m \\ k \end{matrix} \right\} \Phi^m \right) + \Phi^k \left(\frac{\partial P^i}{\partial x^l} + \sum_m \left\{ \begin{matrix} l\,m \\ i \end{matrix} \right\} P^m \right):$$

und hier ist jedesmal eine Vektorkomponente mit einer Klammer multipliziert, welche nach (70) Komponente eines Tensors zweiten Ranges ist*).

An den $A^i_{\ k}$ der Gleichung (70), sowie an den $A_i^{\ k}{}_l$ und $A^{ik}{}_l$ nehmen wir nun die Verjüngung vor, an den beiden letzteren nach den Zeigern k und l. Das führt uns auf die skalare Divergenz des Vektors P:

$$Div\, P = \sum_k \frac{\partial P^k}{\partial x^k} + \sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ k \end{matrix} \right\} P^l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

---

*) Durch Fortsetzung dieser Schlußweise zeigt man die Tensornatur der Ausdrücke

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_m k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(A_{i_1 i_2 \ldots i_m} \right) - \sum_\mu \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \left\{ \begin{matrix} i_\lambda\, k \\ \mu \end{matrix} \right\} A_{i_1 i_2 \ldots i_{\lambda-1}\, \mu\, i_{\lambda+1} \ldots i_m},$$

$$A^{i_1 i_2 \ldots i_m}{}_k = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(A^{i_1 i_2 \ldots i_m} \right) + \sum_\mu \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \left\{ \begin{matrix} \mu\, k \\ i_\lambda \end{matrix} \right\} A^{i_1 i_2 \ldots i_{\lambda-1}\, \mu\, i_{\lambda+1} \ldots i_m}.$$

Der Grund, daß hier stets ein Zeiger links in der unteren Stellung steht, liegt daran, daß wir immer nach kontravarianten Koordinaten differentieren.

und auf die vektorielle Divergenz des Tensors zweiten Ranges mit den Komponenten:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{D}iv_i\, T &= \sum_k \frac{\partial T_i^{\,k}}{\partial x^k} + \sum_{km}\left(\begin{Bmatrix} km \\ k \end{Bmatrix} T_i^{\,m} - \begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix} T_m^{\,k}\right), \\ \mathcal{D}iv^i\, T &= \sum_k \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} + \sum_{km}\left(\begin{Bmatrix} km \\ i \end{Bmatrix} T^{mk} + \begin{Bmatrix} km \\ k \end{Bmatrix} T^{im}\right). \end{aligned}\right\} \quad (72\,\mathrm{a})$$

Einen letzten Schritt tun wir, indem wir mit Hilfe von (62 a) an den $\begin{Bmatrix} kl \\ k \end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} km \\ k \end{Bmatrix}$ die Summation nach k vollziehen:

$$Div\, P = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial(\sqrt{-g}\, P^k)}{\partial x^k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{D}iv_i\, T &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial(\sqrt{-g}\, T_i^{\,k})}{\partial x^k} - \sum_{kl} \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix} T_l^{\,k}, \\ \mathcal{D}iv^i\, T &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial(\sqrt{-g}\, T^{ik})}{\partial x^k} + \sum_{kl} \begin{Bmatrix} kl \\ i \end{Bmatrix} T^{lk}. \end{aligned}\right\} \quad (73\,\mathrm{a})$$

Die Begriffe der skalaren und vektoriellen Divergenz sind im Grunde die schon aus der beschränkten Relativitätstheorie bekannten; setzt man die g_{ik} konstant, so gehen sie vollständig in die alten über.

In der ersten der Gleichungen (73 a) liegt nach (54) die Umformung nahe:

$$\sum_{kl} \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix} T_l^{\,k} = \sum_{klm} g^{lm} T_l^{\,k} \begin{bmatrix} ik \\ m \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{km} T^{mk} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right).$$

Bei einem symmetrischen Tensor liefert die Summation an den beiden letzten Differentialquotienten dasselbe; die dem zweiten entsprechende Summe geht nämlich durch Vertauschung der Summationszeiger in die dem dritten entsprechende über und hebt sie auf. Daher:

$$\mathcal{D}iv_i\, T = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial(\sqrt{-g}\, T_i^{\,k})}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \sum_{kl} T^{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}, \quad (73\,\mathrm{b})$$

oder nach (61 b):

$$\mathcal{D}iv_i\, T = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial(\sqrt{-g}\, T_i^{\,k})}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \sum_{kl} T_{kl} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i}. \quad (73\,\mathrm{c})$$

Bei einem antisymmetrischen Tensor hingegen, d. h. bei einem Sechservektor $\mathfrak{M}$, vereinfachen sich die kontravarianten Komponenten der Divergenz zu:

$$\Delta iv^i \mathfrak{M} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial (\sqrt{-g}\, \mathfrak{M}^{ik})}{\partial x^k} \quad . \quad . \quad . \quad (73\,\mathrm{d})$$

Wegen der Symmetrie der g-Klammern in den oberen Zeigern fällt nämlich die Doppelsumme nach diesen fort. Wie früher in Bd. I, Gl. (111) gilt hier die Rechnungsregel:

$$Div\,(\Delta iv\, \mathfrak{M}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

Sonst läßt sich von den früheren Rechnungsregeln aus Bd. I, § 12, nur die Gleichung (116)

$$Div\,(\varphi\, Y) = \varphi\, Div\, Y + (Y, \Gamma \varrho \alpha \delta\, \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad (74\,\mathrm{a})$$

nach (73) übertragen. Die anderen erhalten eine wesentlich verwickeltere Form. Schon die Laplacesche Operation

$$\Box\, \varphi = Div\,(\Gamma \varrho \alpha \delta\, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{kl} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{-g}\, g^{kl} \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} \right)$$

zeigt dies.

Führen wir für den Punkt P geodätische Koordinaten ein, so verschwinden für sie in P die ersten Differentialquotienten der g_{ik} (§ 8a). Setzt man in (73a) für T den Maßtensor, und denkt sich g und die g^{ik} durch die g_{ik} ausgedrückt, so tritt dort kein Summand auf, welcher keinen davon enthielte. Daher ist der Tensor der Maßbestimmung divergenzfrei. Aus der dritten Gleichung (71) folgt ebenso:

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + \sum_m \left(\left\{ {l\,m \atop i} \right\} g^{mk} + \left\{ {l\,m \atop k} \right\} g^{im} \right) = 0\,.$$

was mit (61 c) übereinstimmt.

c) Integralsätze. Das Integral

$$\int Div\, P\, d\Sigma = \int \sum_k \frac{\partial (\sqrt{-g}\, P^k)}{\partial x^k}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4$$

[vgl. (38)], erstreckt über einen beliebigen geschlossenen, vierdimensionalen Bereich, in welchem der Vektor P endlich und stetig bleiben soll, ist ein Skalar, da $Div\, P$ und $d\Sigma$ solche sind. Wie in euklidischen und pseudoeuklidischen Mannigfaltigkeiten läßt es sich auch hier

durch partielle Integration in ein Integral über die Begrenzung überführen. Führt man nämlich an dem ersten Summanden $\frac{\partial(\sqrt{-g}\,P^1)}{\partial x^1}$ die Integration nach x^1 aus, so erhält man zwei Ausdrücke

$$+\sqrt{-g}\,P^1\,dx^2\,dx^3\,dx^4.$$

Beide beziehen sich auf die Ausschnitte aus der Begrenzung, in welchem der über dem dreidimensionalen Element $dx^2\,dx^3\,dx^4$ errichtete vierdimensionale „Zylinder" durch sie hindurchstößt, und zwar der positive Term auf den bei höherem, der negative auf den bei niederem Wert x^1 gelegenen. (Wir machen hier die Annahme, daß jeder solcher Zylinder nur an zwei Stellen die Begrenzung schneidet; man befreit sich nachträglich von ihr, indem man, wie auch sonst beim Gaußschen Satz, einen beliebigen Integrationsbereich in Teile zerlegt, welche ihr genügen.) Ein und dasselbe Element dS der Begrenzung liefert bei allen vier Integrationen den Beitrag

$$\sqrt{-g}\Big(+P^1\int dx^2\,dx^3\,dx^4 + P^2\int dx^3\,dx^4\,dx^1 + P^3\int dx^4\,dx^1\,dx^2 + P^4\int dx^1\,dx^2\,dx^3\Big),$$

wobei die Integrale (erstreckt über unendlich kleine, aber nicht gerade parallelepipedisch begrenzte Räume) seine Projektionen bedeuten auf die vier Räume $x^i = const$, welche durch einen Punkt von dS hindurchführen. Dieser Beitrag ist eine Invariante, da ja das ganze Begrenzungsintegral eine solche werden muß. Wir deuten ihn daher am bequemsten, indem wir durch eine Koordinatentransformation dS in einen der genannten Räume, etwa in den Raum $x^1 = const$*) verlegen; wir können es weiter so einrichten, daß in den neuen Koordinaten am Orte von dS

$$d\tau^2 = dx^{4^2} - (dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2})$$

wird. Dann sind diese rechtwinkelig, und es ist $-g = 1$. Also vereinfacht sich der Beitrag von dS zu

$$+P^1\int dx^2\,dx^3\,dx^4 = +P^1\,dS.$$

*) Genau genommen ist zu beachten, daß sich manche Raumstücke dS nicht in einen Raum x^1, x^2 oder $x^3 = const$ verlegen lassen, sondern nur in einen Raum $x^4 = const$; dann nämlich, wenn sie keine zeitartige Verschiebung enthalten. Doch verändert das unsere Betrachtung nur unwesentlich.

Das Zeichen + gilt, wenn die Richtung des wachsenden x^1 am Orte von dS vom Innern des vierdimensionalen Integrationsbereichs nach außen weist. Bezeichnen wir mit n die innere Normale von dS, so ist $P^1 = -P^n$, also der gesuchte Beitrag gleich $-P^n dS$, und es gilt auch hier der Gaußsche Satz:

$$\int Div\, P d\Sigma = -\int P^n dS. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

Will man ihn in beliebigen Koordinaten ausdrücken, so fasse man dS als das von drei Verschiebungen $d_{\mathrm{I}} x^i, d_{\mathrm{II}} x^i, d_{\mathrm{III}} x^i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ gebildete Parallelepiped auf und schreibe nach F. Kleins Vorschlag [vgl. § 6, c)]

$$\int Div\, P d\Sigma = -\int \sqrt{-g} \begin{vmatrix} P^1 & P^2 & P^3 & P^4 \\ d_{\mathrm{I}} x^1 & d_{\mathrm{I}} x^2 & d_{\mathrm{I}} x^3 & d_{\mathrm{I}} x^4 \\ d_{\mathrm{II}} x^1 & d_{\mathrm{II}} x^2 & d_{\mathrm{II}} x^3 & d_{\mathrm{II}} x^4 \\ d_{\mathrm{III}} x^1 & d_{\mathrm{III}} x^2 & d_{\mathrm{III}} x^3 & d_{\mathrm{III}} x^4 \end{vmatrix}.$$

Dann stellt die Determinante einen vollständig antisymmetrischen Tensor T^{1234} dar, dessen Produkt mit $\sqrt{-g}$ invariant ist und das Volumen des aus den vier Verschiebungen P^i, $d_{\mathrm{I}} x^i$, $d_{\mathrm{II}} x^i$, $d_{\mathrm{III}} x^i$ gebildeten Parallelepipeds ebenso darstellt, wie oben der Ausdruck $P^n dS$. Die drei Verschiebungen müssen überall so zueinander liegen, daß die Determinante für einen ins Innere des Integrationsbereiches hineinweisenden Vektor P positiv wird.

Trotzdem die Divergenz eines Tensors zweiter Ordnung hier nicht mehr durch die Summe von lauter Differentialquotienten gegeben ist, läßt sich die vierfache Integrale über seine kovarianten Komponenten dennoch in Integrale über die Begrenzung verwandeln. In letzteren treten dann die kovarianten Komponenten des Tensors auf. Vergleiche darüber die bei der Literatur erwähnten Arbeiten von F. Jung und H. Lang[1]).

d) Gaußsche Koordinaten. Der Begriff „Gradient" gestattet einen einfachen Beweis für die früher aufgestellte Behauptung, daß man bei jeder Art der Maßbestimmung solche Koordinaten einführen kann, in denen die g_{i4} $(i = 1, 2, 3)$ verschwinden. Setzen wir nämlich bei beliebiger Wahl der Funktion φ *)

$$x'^4 = \varphi(x^1, x^2, x^3, x^4),$$

*) Nur muß x'^4 zeitartig sein.

so muß ein Linienelement dx^1, dx^2, dx^3, dx^4, welches auf dem Raum $\varphi = const$ senkrecht steht, den Proportionen

$$\frac{dx^1}{\Gamma \varrho a \delta^1 \varphi} = \frac{dx^2}{\Gamma \varrho a \delta^2 \varphi} = \frac{dx^3}{\Gamma \varrho a \delta^3 \varphi} = \frac{dx^4}{\Gamma \varrho a \delta^4 \varphi}$$

genügen. Diese Differentialgleichungen haben nun drei voneinander unabhängige Lösungen, die wir in der Form

$$f(x^1, x^2, x^3, x^4) = const, \qquad g(x^1, x^2, x^3, x^4) = const,$$
$$h(x^1, x^2, x^3, x^4) = const$$

annehmen wollen. Wir brauchen dann nur $x'^1 = f$, $x'^2 = g$, $x'^3 = h$ zu setzen, und haben damit ein Koordinatensystem, in welchem die eine Schar von Parameterkurven auf den Räumen $x'^4 = const$ senkrecht steht. Infolgedessen ist hiernach [vgl. (17)]

$$g'_{14} = g'_{24} = g'_{34} = 0.$$

Der umgekehrte Weg, daß man die eine Schar von Parameterkurven vorgibt und dann die dazu senkrechten Räume aufsucht, ist dagegen im allgemeinen ungangbar, schon unter euklidischen Verhältnissen. Diese Kurven lassen sich nämlich als Kraftlinien eines Vierervektors P auffassen; es gibt im euklidischen Raum nur dann eine Funktion $\varphi(x^1, x^2, x^3, x^4)$, für welche mit einem integrierenden Faktor λ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \lambda P_i$$

gesetzt werden kann, wenn das Vektorprodukt

$$[P, \mathfrak{Rot}^* P] = 0$$

ist. Man macht sich ebenfalls am Beispiel der euklidischen Geometrie leicht klar, daß es nichts nützt, jene Parameterkurven als geodätische Linien zu wählen.

§ 10. Der Riemann-Christoffelsche Tensor.

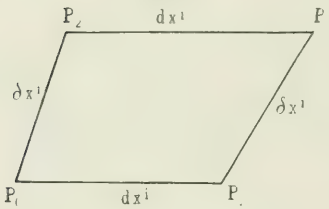
a) Endliche Parallelverschiebungen. In § 8 haben wir die unendlich kleine Parallelverschiebung eines Vektors von einem Punkt P_0 nach P_1 betrachtet. Es bleiben dabei erhalten sein absoluter Betrag und sein skalares Produkt mit jedem gleichfalls über die Strecke $P_0 P_1$ parallel verschobenen Vektor. Stellen wir nun in P_0 in einem System von Vektoren jeden durch eine unendlich kleine Strecke dar, so überträgt sich der von ihnen gebildete

„Kompaß“ bei der genannten Parallelverschiebung wie ein starrer Körper nach P_1; denn es bleiben ja alle seine Abmessungen und Winkel erhalten. Von P_1 können wir ihn dann wieder durch Parallelverschiebung aller ihm angehörender Vektoren zu einem unendlich nahen Punkt P verpflanzen. Die Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt schließlich die Parallelverschiebung über eine endliche Strecke eines beliebigen Kurvenzuges. Gehört letzterer einer geodätischen Linie an, so bleiben die Winkel dieser Linie mit den verschobenen Vektoren erhalten. Denn die Richtung einer solchen Kurve wird ja längs ihr selbst parallel verschoben und die Winkel zwischen parallel verschobenen Vektoren bleiben dieselben.

In euklidischen Verhältnissen gibt es in jedem Punkt P zu jedem Vektor in P_0 eine und nur eine Parallele; diese bildet die Endlage des betreffenden Vektors, wenn wir ihn von P_0 nach P parallel verschieben; welchen Weg wir dabei einschlagen, ist gleichgültig. Wie verhält es sich damit in Riemannschen Räumen?

b) Ein Kreisprozeß. In Fig. 9 verschieben wir den Mittelpunkt des Kompasses, d. h. den gemeinsamen Ausgangspunkt aller seiner Vektoren vom Punkt P_0 mit den Koordinaten x^i nach P_1 mit den Koordinaten $x^i + dx^i$, und zwar so, daß jeder Vektor eine Parallelverschiebung erfährt. Die kontravarianten Komponenten eines Vektors A ändern sich dabei nach (67) um

Fig. 9.



$$d_1 A^j = -\sum_{kl} \begin{Bmatrix} kl \\ j \end{Bmatrix} A^k dx^l.$$

Dann verschieben wir ihn weiter von P_1 nach P, einem Punkt mit den Koordinaten $x^i + dx^i + \delta x^i$. Das ruft für A^j eine zweite Änderung

$$\delta_1 A^j = -\sum_{kl} \begin{Bmatrix} kl \\ j \end{Bmatrix}_{x+dx} \left(A^k + d_1 A^k\right) \delta x^l$$

$$= -\sum_{kl} \begin{Bmatrix} kl \\ j \end{Bmatrix} \left(A^k - \sum_{mn} \begin{Bmatrix} mn \\ k \end{Bmatrix} A^n dx^m\right) \delta x^l - \sum_{klm} \frac{\partial}{\partial x^m} \begin{Bmatrix} kl \\ j \end{Bmatrix} A^k \delta x^l dx^m$$

hervor. Nun führen wir ein anderes Mal den Mittelpunkt von P_0 über P_2 (Koordinaten: $x^i + \delta x^i$) nach P, indem wir die Ver-

schiebungen um die δx^i und dx^i in der Reihenfolge vertauschen. Dann wäre der Gesamtzuwachs von A^j

$$\delta_2 A^j + d_2 A^j = -\sum_{kl} \left\{ {kl \atop j} \right\} A^k \delta x^l$$

$$-\sum_{kl} \left\{ {kl \atop j} \right\} \left(A^k - \sum_{mn} \left\{ {mn \atop k} \right\} A^n \delta x^m \right) dx^l - \sum_{klm} \frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ {kl \atop j} \right\} A^k dx^l \delta x^m.$$

Umgekehrt ändert sich A^j bei einer Verschiebung von P über P_2 nach P_0 um $-\delta_2 A^j - d_2 A^j$. Umkreist der Mittelpunkt des Kompasses also das Viereck $P_0 P_1 P P_2$, so bleibt für A^j die Änderung

$$DA^j = d_1 A^j + \delta_1 A^j - d_2 A^j - \delta_2 A^j$$

$$= \sum_{klm} \left[\frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ {kl \atop j} \right\} - \sum_n \left\{ {ln \atop j} \right\} \left\{ {km \atop n} \right\} \right] A^k (dx^l \delta x^m - dx^m \delta x^l).$$

Hier vertauschen wir die Summationsbuchstaben l und m und addieren den so gefundenen Ausdruck:

$$DA^j = -\frac{1}{2} \sum_{klm} R^j_{klm} A^k (dx^l \delta x^m - dx^m \delta x^l) \quad . \quad . \quad (76)$$

$$R^j_{klm} = \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ {km \atop j} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ {kl \atop j} \right\} + \sum_n \left[\left\{ {ln \atop j} \right\} \left\{ {km \atop n} \right\} - \left\{ {mn \atop j} \right\} \left\{ {kl \atop n} \right\} \right] \quad (76\,\text{a})$$

Die DA^j sind Differenzen zwischen Komponenten von Vektoren am gleichen Orte, also nach § 6 selbst Vektorkomponenten. Die R^j_{klm} sind somit nach (76), wo sie mit den kontravarianten Tensorkomponenten

$$A^k (dx^l \delta x^m - dx^m \delta x^l)$$

multipliziert auftreten, gemischte Komponenten eines Tensors vierten Ranges, des Riemann-Christoffelschen Tensors.

Dies lehrt uns Gleichung (76) in formaler Hinsicht. Sachlich aber beantwortet sie unsere Frage dahin, daß der „Kompaß" und somit auch die Vektoren bei Parallelverschiebung längs geschlossener Bahnen nicht wieder in die Anfangslage, sondern in eine dagegen gedrehte zurückkehrt *). Wir haben das zu-

*) In einer Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen hebt diese Drehung einen anfangs in der durch die Verrückungen dx^i und δx^i bestimmten Fläche liegenden Vektor im allgemeinen aus dieser Fläche heraus. Die Drehungsachse steht also nicht auf ihr senkrecht. Hat die Mannigfaltigkeit nur zwei Dimensionen, so gilt für den Drehwinkel ein einfaches Gesetz (vgl. § 11b).

nächst zwar nur für ein unendlich kleines (Quasi-) Parallelogramm gezeigt. Wir wissen aber vom Stokesschen Satz der gewöhnlichen Vektortheorie in drei Dimensionen her, daß sich die Umkreisung einer endlichen Fläche von der Gesamtheit aller Umkreisungen aller ihr angehörigen Teilflächen nur dadurch unterscheidet, daß bei dem letzteren Verfahren alle zwei Teilflächen gemeinsamen Randkurven zweimal in entgegengesetztem Sinne durchlaufen werden, sich bei der Summation also aufheben. Darum läßt sich das Ergebnis ohne weiteres auf beliebige von Singularitäten freie Flächenstücke übertragen.

Das beweist uns ferner, was wir freilich schon ohnedem wissen konnten, daß es nämlich in Riemannschen Räumen zu einem Vektor im Punkt P nicht in jedem Punkt Q eine „Parallele" gibt. Verschiebt man ihn allmählich von P nach Q parallel mit sich selbst im Sinne von § 8, so ist die Endlage durchaus von dem eingeschlagenen Wege abhängig. Wenn aber der Riemann-Christoffelsche Tensor verschwindet, dann und nur dann fällt diese Vieldeutigkeit fort und man kann ohne weiteres zwei Vektoren in verschiedenen Punkten als gleichgerichtet bezeichnen; im allgemeinen aber hat eine solche Aussage keinen Sinn.

c) Das invariante Kennzeichen der euklidischen Geometrie. Die euklidische und pseudoeuklidische Geometrie haben wir früher dadurch gekennzeichnet, daß es in ihr Koordinaten gibt (nämlich die geradlinig genannten), in welchen der Maßtensor g_{ik} konstante Komponenten hat. Das System der x'^i gehöre dazu. Nun wird uns aber eine andere Maßbestimmung

$$d\tau^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx^i\, dx^k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

mit veränderlichen g_{ik} vorgelegt und wir sollen entscheiden, ob sie sich durch eine Transformation $x^i = f^i(x'^j)$ in die erstere überführen läßt. Dies ist notwendig und hinreichend, damit die durch sie bestimmte Geometrie euklidisch (oder pseudoeuklidisch) ist.

Die Christoffelschen Formeln (60) lauten, da jetzt die g-Klammern des gestrichenen Systems verschwinden:

$$\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} + \sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} kl \\ j \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^k}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^l}{\partial x'^\beta} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

Wir fassen sie als die Differentialgleichungen auf, aus denen wir die x als Funktionen der x' zu ermitteln haben. Für eine be-

liebige Wahl der Funktionen g_{ik} sind sie im allgemeinen nicht integrierbar, weil sich für die dritten Differentialquotienten $\frac{\partial^3 x^j}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta \partial x'^\gamma}$ verschiedene Werte aus ihnen herleiten lassen. Notwendige, aber auch hinreichende Bedingung der Integrierbarkeit ist, daß alle Differenzen

$$\frac{\partial}{\partial x'^\beta}\left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^\alpha \partial x'^\gamma}\right) - \frac{\partial}{\partial x'^\gamma}\left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\right) = 0$$

sind.

Die Ausrechnung dieser Differenzen nach (78) liefe auf eine Wiederholung der in Absatz b) vorgenommenen Umformung hinaus. Wir ersparen sie uns durch die Einführung eines Vektors A, welcher (ähnlich wie in § 8) in dem hier überall geodätischen System x'^i überall nur eine kontravariante Komponente, nämlich $A'^1 = 1$ besitzt. Dieser Vektor ist in jedem Punkte einer und derselben Richtung parallel; er verändert sich nicht, wenn wir ihn durch Parallelverschiebung einen beliebigen Kreislauf vollenden lassen. Also $DA'^i = 0$. Dann ist aber wegen der Vektoreigenschaft von DA^i auch in jedem anderen System x $DA^i = 0$, und dazu ist, wie wir sahen, das Verschwinden des Tensors $R^j{}_{klm}$ notwendig und hinreichend. Die euklidische Geometrie, einschließlich der pseudoeuklidischen, läßt sich also unter allen auf dem pythagoräischen Ansatz (77) als Maßbestimmung beruhenden Geometrien entweder durch das Verschwinden des Riemann-Christoffelschen Tensors kennzeichnen oder durch das Parallelenaxiom*).

d) Die kovarianten Komponenten des Riemann-Christoffelschen Tensors. Wir berechnen sie aus (76a) nach der Formel

$$R_{iklm} = \sum_j g_{ij} R^j{}_{klm}.$$

---

*) Für nichteuklidische Geometrien gilt der Satz: Zwei Maßbestimmungen von der Form (77) lassen sich durch Koordinatentransformation dann und nur dann ineinander überführen, wenn sie im Riemann-Christoffelschen Tensor übereinstimmen. Vgl. z. B. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Deutsch von Lukat. Leipzig u. Berlin 1910, § 27.

Indem wir zunächst den Faktor g_{ij} in die Differentialquotienten mit hineinziehen, finden wir nach (56):

$$R_{iklm} = \frac{\partial}{\partial x^l}\begin{bmatrix} k\,m \\ i \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^m}\begin{bmatrix} k\,l \\ i \end{bmatrix}$$

$$+ \sum_n \left[\begin{Bmatrix} k\,l \\ n \end{Bmatrix} \left(\frac{\partial g_{in}}{\partial x^m} - \begin{bmatrix} m\,n \\ i \end{bmatrix} \right) - \begin{Bmatrix} k\,m \\ n \end{Bmatrix} \left(\frac{\partial g_{in}}{\partial x^l} - \begin{bmatrix} l\,n \\ i \end{bmatrix} \right) \right].$$

Die Faktoren der beiden g-Klammern lassen sich nach (57) vereinfachen. Machen wir dann an diesen g-Klammern nochmals von (54) Gebrauch, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} R_{iklm} &= \frac{\partial}{\partial x^l}\begin{bmatrix} k\,m \\ i \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^m}\begin{bmatrix} k\,l \\ i \end{bmatrix} \\ &\qquad + \sum_{np} g^{np} \left[\begin{bmatrix} i\,m \\ n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k\,l \\ p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i\,l \\ n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k\,m \\ p \end{bmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} \right\} \\ &\qquad + \sum_{np} g^{np} \left[\begin{bmatrix} i\,m \\ n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k\,l \\ p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i\,l \\ n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k\,m \\ p \end{bmatrix} \right] \end{aligned}\right\} \quad (79)$$

Man bestätigt hieran die Regeln:

$$R_{iklm} = -R_{ikml} = -R_{kilm} = R_{lmik} \quad . \; . \; (79\,\mathrm{a})$$

$$R_{1234} + R_{3124} + R_{2314} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (79\,\mathrm{b})$$

Weitere von den angegebenen unabhängige algebraische Gleichungen bestehen zwischen den R_{iklm} im Vierdimensionalen nicht.

Das ermöglicht uns, die Zahl der von Null verschiedenen, linear unabhängigen, kovarianten Komponenten dieses Tensors zu bestimmen. Zunächst kommen für die Zeigerpaare ik und lm nur die sechs Kombinationen 23, 31, 12, 34, 24, 14 in Betracht. Denn wären die Zeiger eines Paares einander gleich, so wäre das zugehörige R_{iklm} nach (79a) Null. Ordnen wir die so gefundenen 36 Komponenten in eine quadratische Matrix, indem wir alle mit übereinstimmendem ik in die gleiche Zeile, mit übereinstimmendem lm in dieselbe Spalte schreiben, so finden wir aber nach (79a) symmetrisch zur einen Diagonalen je zwei gleiche Kom-

ponenten. Wir brauchen also nur die folgenden 21 Komponenten anzuführen:

2323	2331	2312	2334	2324	(2314)
	3131	3112	3134	(3124)	3114
		1212	(1234)	1224	1214
			3434	3424	3414
				2424	2414
					1414

Zwischen den drei eingeklammerten Komponenten besteht aber die Gleichung (79b). Also hat der Riemann-Christoffelsche Tensor in vier Dimensionen je 20 von Null verschiedene und voneinander unabhängige ko- und kontravariante Komponenten.

Streichen wir in dem vorstehenden Schema alle Kombinationen, welche die Ziffer 4 enthalten, so bleiben sechs Komponenten, streichen wir auch alle, welche die Zahl 3 enthalten, so bleibt nur R_{1212}. In drei Dimensionen hat jener Tensor sechs, in zwei Dimensionen nur eine wesentliche ko- und ebensoviel kontravariante Komponenten*).

Durch Verjüngung finden wir, ausgehend von Formel (76a), den Tensor der Krümmung

$$\left.\begin{aligned} R_{kl} &= \sum_m R^m_{klm} = \sum_{im} g^{im} R_{iklm} \\ &= \sum_m \left[\frac{\partial}{\partial x^l}\begin{Bmatrix} km \\ m \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^m}\begin{Bmatrix} kl \\ m \end{Bmatrix}\right] + \sum_{mn}\left[\begin{Bmatrix} kn \\ m \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} lm \\ n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} kl \\ m \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} mn \\ n \end{Bmatrix}\right] \end{aligned}\right\} \quad (80)$$

Er ist symmetrisch; das lassen die Glieder der rechten Seite unmittelbar erkennen, abgesehen vom ersten. Nach (62a) aber hat dies den Wert

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\sum_m \begin{Bmatrix} km \\ m \end{Bmatrix} = \frac{\partial^2 (\log \sqrt{-g})}{\partial x^k \partial x^l},$$

ist also ebenfalls symmetrisch in k und l. Bildet man an diesem Tensor die gemischten Komponenten, so kommt man durch noch-

*) In n Dimensionen wäre diese Zahl $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$.

malige Verjüngung zu der invarianten Krümmung

$$R = \sum_{kl} g^{kl} R_{kl} = \sum_{iklm} g^{im} g^{kl} R_{iklm} \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

In zwei Dimensionen, wo

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112}$$

die einzigen nicht verschwindenden Komponenten des Riemann-Christoffelschen Tensors bilden, wird danach

$$R = 2\,(g^{12^2} - g^{11} g^{22})\, R_{1212}$$

oder, da nach (22) die Determinante der g^{ik} das Reziproke von g ist:

$$R_{1212} = -\tfrac{1}{2}\, g \,.\, R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81\,\mathrm{a})$$

und indem man nach (80) aus R_{1212} die R_{kl} unter Berücksichtigung der Beziehungen $g g^{11} = g_{22}$, $g g^{12} = -g_{12}$, $g g^{22} = g_{11}$ berechnet, bestätigt man:

$$R_{kl} = \tfrac{1}{2}\, g_{kl} \,.\, R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81\,\mathrm{b})$$

Hier bestimmt also allein die Invariante R die beiden Tensoren vollständig. Das ist in drei Dimensionen nicht mehr der Fall. Wohl aber bestimmen dann die sechs Komponenten R_{kl} die sechs Komponenten R_{iklm} gemäß den Auflösungen der Gleichungen (80) nach den letzteren. In vier und mehr Dimensionen läßt sich aber der Riemann-Christoffelsche nicht aus dem Krümmungstensor berechnen, denn ersterer hat weit mehr Komponenten. Somit kann man in zwei Dimensionen das Verschwinden der Invarianten R, in drei Dimensionen das Verschwinden des Krümmungstensors als Kennzeichen der euklidischen Geometrie hinstellen. In vier und mehr Dimensionen aber muß man dabei an den Riemann-Christoffelschen Tensor selbst anknüpfen.

e) Der Tensor $R_{ik} - \tfrac{1}{2}\, g_{ik} \,.\, R$ ist divergenzfrei. In einem geodätischen Koordinatensystem x^k nämlich, und zwar in dessen hervorgehobenen Punkt, hat die Divergenz des Tensors R_{ik} nach (73a) wegen des Verschwindens der g-Klammern und der ersten Ableitungen der g_{ik} die kovariante Komponente mit dem Zeiger α:

$$\sum_{k} \frac{\partial R^{k}_{\alpha}}{\partial x^{k}} = \sum_{kl} g^{kl} \frac{\partial R_{\alpha l}}{\partial x^{k}} = \sum_{kilm} g^{kl} g^{im} \frac{\partial R_{i\alpha lm}}{\partial x^{k}} \,.$$

Nach (79) folgt dafür:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_{iklm} g^{kl} g^{im} \frac{\partial^3 g_{al}}{\partial x^k \partial x^i \partial x^m} - \frac{1}{2}\sum_{iklm} g^{kl} g^{im} \frac{\partial^3 g_{am}}{\partial x^k \partial x^i \partial x^l} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{iklm} g^{kl} g^{im}\left(\frac{\partial^3 g_{im}}{\partial x^a \partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^3 g_{il}}{\partial x^a \partial x^k \partial x^m}\right).\end{aligned}\right\} \quad (82)$$

Und hier heben sich die beiden ersten Summen fort; denn vertauscht man die Summationszeiger i mit k und l mit m, so geht die zweite in die erste über.

Sodann hat im gleichen Koordinatensystem der Tensor mit den Komponenten $-\frac{1}{2} R g_{ik}$ als kovariante Komponente mit dem Zeiger α wegen der Divergenzfreiheit des Maßtensors einfach den Ausdruck

$$-\frac{1}{2}\sum_j g_a^j \frac{\partial R}{\partial x^j} = -\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^a};$$

denn nach (22) sind die gemischten Komponenten g_a^j des Maßtensors 1 oder 0, je nachdem ihre Zeiger übereinstimmen oder nicht. Nach (81) und (79) folgt dann

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^a} &= -\frac{1}{2}\sum_{iklm} g^{kl} g^{im} \frac{\partial R_{iklm}}{\partial x^a} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{iklm} g^{im} g^{kl}\left(\frac{\partial^3 g_{km}}{\partial x^a \partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^3 g_{kl}}{\partial x^a \partial x^i \partial x^m}\right) \\ &+ \frac{1}{4}\sum_{iklm} g^{kl} g^{im}\left(\frac{\partial^3 g_{il}}{\partial x^a \partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^3 g_{im}}{\partial x^a \partial x^k \partial x^l}\right).\end{aligned}$$

Vertauscht man hier i und l mit k und m, so geht die erste Summe in die zweite über; beide zusammen vernichten gerade die noch übriggebliebene dritte Summe von (82).

f) Die Sonderstellung des Krümmungstensors. Keine physikalische Theorie läßt sich zunächst ohne eine gewisse Willkür entwickeln, und man vermag meist erst hinterher, wenn man das Lehrgebäude ganz vor Augen hat, deren Maß zu beurteilen. So wird es uns in Abschnitt V auch bei Einsteins Lehre von der Schwerkraft, namentlich bei der Aufstellung der Differentialgleichungen des Schwerefeldes gehen. Um aber von vornherein einzusehen, wie gering in diesem Falle die Willkür ist, wollen wir hier einen Satz über die einzigartige Stellung des Ten-

sors R_{ik} entwickeln. Wir beweisen zunächst: Die invariante Krümmung R und ihre Produkte mit reinen Zahlen sind die einzigen Skalare, welche allein von den g_{ik}, ihren ersten und zweiten Ableitungen nach den Koordinaten abhängen und in den zweiten Ableitungen linear sind.

Zum Beweise führen wir ein für den Punkt P $(x^i = 0)$ geodätisches und in ihm rechtwinkeliges Koordinatensystem ein: d. h. in P gilt:

$$g_{ik} = \begin{cases} +1 \text{ für } i = k \\ 0 \text{ für } i \neq k \end{cases} \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

(Wir führen dabei zum Teil imaginäre Koordinaten ein, um die Werte -1 der g_{ii} zu beseitigen.) Diese Eigenschaften bewahrt sich das System erstens bei einer linearen orthogonalen Transformation (Lorentz-Transformation), zweitens bei der schon erwähnten Substitution (66):

$$x^i = x'^i + \frac{1}{6} \sum_{klm} a^i_{klm} x'^k x'^l x'^m,$$

in welcher die a^i_{klm} Konstanten sind, deren untere Zeiger man ohne Änderung ihres Wertes beliebig miteinander vertauschen kann. Jetzt setzen wir

$$\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} = g_{iklm}.$$

Gegenüber linearen orthogonalen Substitutionen verhalten sie sich wie Tensorkomponenten (der Unterschied „kovariant“ und „kontravariant“ spielt dabei keine Rolle), außerdem sind sie in den Zeigern i, k sowie l, m symmetrisch. Bilden wir nun die Invariante

$$I = \sum_{iklm} \lambda^{iklm} g_{iklm},$$

so genügt sie allen im obigen Satz ausgesprochenen Bedingungen für das hier benutzte geodätische, orthogonale Koordinatensystem und den Punkt P, wenn die λ^{iklm} in jedem solchen System dieselben reinen Zahlen darstellen. Denn die g_{ik} und $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$, von denen die Koeffizienten dieser in den g_{iklm} linearen Form abhängen könnten, haben in jedem solchen System dieselben Zahlenwerte. Unbeschadet der Allgemeinheit dürfen wir ferner den λ^{iklm} Symmetrie in i und k sowie in l und m zuschreiben. Es

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF TORONTO

fragt sich nun: Wie ist ein Tensor vierten Ranges von diesen Symmetrieeigenschaften bestimmt, wenn seine Komponenten in allen hier zugelassenen Systemen durch dieselben reinen Zahlen gegeben sein sollen? (Beim symmetrischen Tensor zweiten Ranges müssen in dem entsprechenden Falle bekanntlich alle Komponenten mit verschiedenen Zeigern Null, alle anderen einander gleich sein.)

Wir entscheiden diese Frage folgendermaßen: Gegenüber den genannten Transformationen muß für vier beliebige Vektoren P, Φ, Ψ, X

$$A = \sum_{iklm} \lambda^{iklm} P^i \Phi^k \Psi^l X^m$$

eine Invariante sein. Nun kann man aus vier Vektoren sechs skalare Produkte bilden. Andere in ihnen lineare Kombinationen gibt es nicht. Also muß, wenn die λ^{iklm} trotz ihrer Tensoreigenschaft unverändert bleiben sollen,

$$A = \alpha \sum_i P^i \Phi^i . \sum_k \Psi^k X^k + \beta \sum_i P^i \Psi^i . \sum_k \Phi^k X^k$$

$$+ \gamma \sum_i P^i X^i \sum_k \Phi^k \Psi^k$$

sein. Daraus entnehmen wir:

$$\lambda^{iiii} = \alpha + \beta + \gamma, \quad \lambda^{iikk} = \alpha, \quad \lambda^{ikik} = \beta, \quad \lambda^{ikki} = \gamma.$$

Aus der Symmetrieeigenschaft $\lambda^{iklm} = \lambda^{ikml}$ folgt unmittelbar:

$$\beta = \gamma.$$

Die Invariante I wird also:

$$I = (\alpha + 2\beta) \sum_i g_{iiii} + \alpha \sum_{ik} g_{iikk} + 2\beta \sum_{ik} g_{ikik}. \quad (84)$$

Wir benutzen nun die Substitutionen (66) und fragen, wie sich bei einer von ihnen die g_{iklm} umrechnen. Differentiieren wir die Gleichung

$$g'_{ik} = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^k} g_{\alpha\beta}$$

nach x'^l und x'^m, so finden wir im Hinblick auf (66a), (66b) und (83) für den Punkt P, d. h. unter Fortlassung aller in ihm

verschwindenden Gliedér:

$$\left.\begin{aligned} g'_{iklm} &= \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^k}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^l}\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^m}\, g_{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &+ \sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial x'^i \partial x'^l \partial x'^m}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^k} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i}\frac{\partial^3 x^\beta}{\partial x'^k \partial x'^l \partial x'^m}\right) g_{\alpha\beta} \\ &= g_{iklm} + a^k{}_{ilm} + a^i{}_{klm}. \end{aligned}\right\} \quad (85)$$

Drücken wir nun I nach (84) durch die g'_{iklm} aus, so finden wir, indem wir von der so gewonnenen Gleichung (84) subtrahieren

$$0 = 2(\alpha + 2\beta)\sum_i a^i{}_{iii} + 2\sum_{ik}\left(\alpha\, a^i{}_{ikk} + \beta\,(a^i{}_{kik} + a^k{}_{iik})\right).$$

Wegen der Vertauschbarkeit der drei unteren Zeiger in den $a^i{}_{klm}$ wird schließlich

$$0 = 2(\alpha + 2\beta)\left(\sum_i a^i{}_{iii} + \sum_{ik} a^i{}_{ikk}\right).$$

Damit dies in den ganz willkürlichen $a^i{}_{klm}$ identisch gilt, muß

$$\alpha + 2\beta = 0$$

sein; also

$$I = \alpha \sum_{ik} (g_{iikk} - g_{ikik}).$$

Der Wert von R ist aber nach (81) für ein orthogonales geodätisches System wegen des Verschwindens der zweiten Summe in (79) gerade durch diese Summe gegeben:

$$I = \alpha R.$$

R ist also, abgesehen von dem Zahlenfaktor α, schon bei Beschränkung auf Koordinatensysteme der genannten Art die einzige Invariante, welche aus den g_{ik} und ihren ersten Ableitungen beliebig, aus den zweiten Ableitungen aber linear gebildet ist. Sie ist es infolgedessen auch bei beliebigen Transformationen.

Wollen wir nun einen Tensor zweiten Ranges aus den g_{ik}, ihren ersten und zweiten Ableitungen, und zwar aus letzteren linear aufbauen, so genügt dazu in den Koordinatensystemen, welche aus dem ursprünglichen durch lineare orthogonale Transformationen hervorgehen, der Tensor

$$A_{ik} = \sum_{lm} (\beta^{lm} g_{iklm} + \gamma^{lm} g_{ilmk} + \varepsilon^{lm} g_{lmik} + \zeta^{lm} g_{mkil}).$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie der g_{stuv} im ersten und im zweiten Zeigerpaar enthält dieser Ansatz alle diejenigen unter ihnen, welche die Zeiger i und k tragen und voneinander verschieden sind. Die Koeffizienten können dabei nach Voraussetzung nur von den g_{ik} und ihren ersten Ableitungen abhängen, müssen nach (83) daher bestimmte Zahlen sein. Nun können wir aber aus den g_{stuv} in linearer Zusammensetzung mit reinen Zahlen nach der Verjüngungsregel entweder so einen Tensor zweiten Ranges ableiten, daß wir zwei der Zeiger gleich setzen und nach ihnen summieren, oder so, daß wir die A_{ik} mit verschiedenen Zeigern Null setzen, alle A_{ii} aber gleich demselben Skalar, der dann auch in den zweiten Ableitungen linear, also gleich αR sein muß. Infolgedessen muß der Ansatz die Gestalt erhalten:

$$A_{ik} = \sum_l (\beta g_{iklll} + \gamma g_{illk} + \varepsilon g_{llik} + \zeta g_{lkil}) + \delta_i^k . \alpha R.$$

Nun wenden wir die zweite Art der oben angegebenen Transformationen an. Wir ersetzen hier die g_{stuv} durch die g'_{stuv} und drücken diese wieder durch jene nach Gleichung (85) aus. So finden wir:

$$0 = \sum_l \Big(\beta(a^i_{kll} + a^k_{ill}) + \gamma(a^i_{llk} + a^l_{ikl}) + 2\varepsilon a^l_{lik} + \zeta(a^l_{ikl} + a^k_{lil})\Big).$$

Sind nun i und k verschieden, so müssen für sich verschwinden: 1. Die Glieder, bei denen i als oberer Zeiger vorkommt; 2. diejenigen, in welchen dort k, und 3. die, bei denen dort l steht. Die Reihenfolge der unteren Zeiger ist gleichgültig. Wir finden so die drei Bedingungen

$$\beta + \gamma = 0, \quad \beta + \zeta = 0, \quad \gamma + 2\varepsilon + \zeta = 0,$$

Ist $i = k$, so fallen die beiden ersten zusammen in eine Beziehung; nämlich:

$$2\beta + \gamma + \zeta = 0.$$

Auf alle Fälle aber können wir danach setzen:

$$A_{ik} = \delta_k^i \alpha R + \beta \sum_l (g_{iklll} + g_{llik} - g_{illk} - g_{lkil}).$$

Nach Formel (80), (79) und (83) ist aber

$$R_{ik} = \sum_l R^l_{ikl} = \frac{1}{2} \sum_l (g_{iklll} + g_{llik} - g_{illk} - g_{lkil}).$$

Somit können wir auch schreiben

$$A_{ik} = \delta_k^i \alpha R + 2 \beta R_{ik}.$$

Wir wollen diesen Wert nun noch in eine gegen alle Transformationen invariante Form bringen:

$$A_{ik} = \alpha g_{ik} R + \beta R_{ik}.$$

Dies ist also die allein mögliche Form für einen Tensor zweiten Ranges, welcher nur von den Komponenten des Maßtensors, ihren ersten und zweiten Ableitungen abhängen und die letzteren linear enthalten soll.

Fügen wir noch die Bedingung hinzu, daß dieser Tensor divergenzfrei sein soll, so kommen wir nach Absatz e) zwangsläufig auf

$$\alpha (R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R),$$

wobei nur noch der Proportionalitätsfaktor α willkürlich ist.

IV. Nichteuklidische Geometrie.

§ 11. Einiges über Flächentheorie.

Zur Erläuterung der in Abschnitt III abgeleiteten Ergebnisse, nicht aber, weil es zum Verständnis der allgemeinen Relativitätstheorie unumgänglich notwendig wäre, geben wir hier einen kurzen Auszug aus der nichteuklidischen Geometrie, vor allem in zwei Dimensionen. Mancher der Leser wird ihn überschlagen können. Wir denken dabei diese Mannigfaltigkeit zunächst als gekrümmte Fläche in einem dreidimensionalen Raum mit euklidischer Maßbestimmung.

a) Das invariante Krümmungsmaß. Auf einer beliebigen Fläche greifen wir irgend einen Punkt heraus, in welchem sie sich regulär verhält. Wir machen ihn zum Anfang eines rechtwinkeligen Koordinatensystems x, y, z, indem wir überdies ihre Tangentenebene zur xy-Ebene wählen. Indem wir sodann noch geeignete Richtungen in letzterer als Achsen festsetzen, können wir stets

erreichen, daß die Funktion $z(x, y)$ bei der Entwickelung nach Potenzen von x und y die Form

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} + \text{Glieder höherer Ordnung}$$

annimmt. Die Bedeutung der Konstanten a und b erkennt man, wenn man die Fläche mit den Koordinatenebenen $\xi = 0$ und $\eta = 0$ eines Systems

$$\xi = \alpha x + \beta y, \qquad \eta = -\beta x + \alpha y$$
$$(\alpha^2 + \beta^2 = 1)$$

schneidet. Die Gleichungen der Schnittlinien

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b}\right)\xi^2 \text{ und } z = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta^2}{a} + \frac{\alpha^2}{b}\right)\eta^2$$

zeigen nämlich, daß

$$R_1 = \left(\frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b}\right)^{-1} \text{ und } R_2 = \left(\frac{\beta^2}{a} + \frac{\alpha^2}{b}\right)^{-1}$$

ihre Krümmungshalbmesser im Nullpunkt sind. Für sie gilt der Eulersche Satz

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

und man erkennt, daß a und b die Extremwerte unter allen Krümmungshalbmessern der Schnittkurven darstellen. Sind diese beiden Hauptkrümmungshalbmesser gleichzeitig positiv oder negativ, so hat die Fläche im Nullpunkt ein Minimum oder Maximum, bezogen auf das geschilderte Koordinatensystem, sonst einen Sattelwert.

Wir wollen nun für diese Fläche das Krümmungsmaß R im Nullpunkt bestimmen. Dazu berechnen wir zunächst den Tensor R_{ik} nach (80) und dafür brauchen wir wieder die Christoffelschen Dreizeigersymbole. Um diese zu finden, entnehmen wir nach § 7 aus der Darstellung des Linienelementes

$$\left.\begin{aligned} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2\left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \cdots\right] \\ + dy^2\left[1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \cdots\right] + 2\left(\frac{xy}{ab} + \cdots\right) dx\, dy \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

und dem Variationsprinzip:

$$\delta \int \left\{\dot{x}^2\left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] + \dot{y}^2\left[1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right] + 2\dot{x}\dot{y}\,\frac{xy}{ab}\right\} dp = 0$$

die Differentialgleichungen der geodätischen Linien:

$$\frac{d}{dp}\left\{\dot{x}\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]+\dot{y}\,\frac{xy}{ab}\right\}-\frac{x}{a^2}\,\dot{x}^2-\frac{y}{ab}\,\dot{x}\dot{y}=0$$

oder:

$$\ddot{x}\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]+\ddot{y}\,\frac{xy}{ab}+\frac{x}{a^2}\,\dot{x}^2+\frac{x}{ab}\,\dot{y}^2=0;$$

und entsprechend:

$$\ddot{y}\left[1+\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]+\ddot{x}\,\frac{xy}{ab}+\frac{y}{b^2}\,\dot{y}^2+\frac{y}{ab}\,\dot{x}^2=0.$$

In der nach $\ddot{x}$ und $\ddot{y}$ aufgelösten Form lauten sie

$$\ddot{x}+\frac{\frac{x}{a^2}\,\dot{x}^2+\frac{x}{ab}\,\dot{y}^2}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}=0,\quad \ddot{y}+\frac{\frac{y}{ab}\,\dot{x}^2+\frac{y}{b^2}\,\dot{y}^2}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}=0. \quad (86a)$$

Beziehen wir den Zeiger 1 auf die Koordinate x, 2 auf y, so entnehmen wir aus ihnen im Vergleich mit (55):

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}=\frac{\frac{x}{a^2}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}\quad \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=0\quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=\frac{\frac{x}{ab}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=\frac{\frac{y}{ab}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}\quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=0\quad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}=\frac{\frac{y}{b^2}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

Für den Nullpunkt verschwinden alle diese g-Klammern; für ihn sind somit x und y geodätische aber im allgemeinen nicht Riemannsche Koordinaten. Um für diesen Punkt den Krümmungstensor zu berechnen, brauchen wir in (80) somit nur die einfache Summe in Betracht zu ziehen. Außerdem brauchen wir R_{12} nicht zu berechnen; denn da im Nullpunkt nach (86)

$$g_{11}=g_{22}=1,\quad g_{12}=0$$

ist, sind dort

$$g=1,\quad g^{11}=g^{22}=1,\quad g^{12}=0,$$

und es wird nach (81)

$$R=\sum_{kl} g^{kl}R_{kl}=g^{11}R_{11}+g^{22}R_{22}.$$

Es ist also für $x = y = 0$

$$R_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial y}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial y}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = -\frac{1}{ab};$$

durch Vertauschung von a und b finden wir für R_{22} dasselbe und für die invariante Krümmung den Wert

$$R = -\frac{2}{ab} = -2K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

Das reziproke Produkt der Hauptkrümmungshalbmesser, das Gaußsche Krümmungsmaß K, stimmt also bis auf den Faktor $-\frac{1}{2}$ mit der invarianten Krümmung R überein.

Dieser Satz ist merkwürdig. Die invariante Krümmung ist rein aus der Maßbestimmung innerhalb der Fläche abzuleiten, während die Krümmungshalbmesser nur etwas über die Gestalt der Fläche im dreidimensionalen Raum aussagen. Da sich die Maßbestimmung bei einer Verbiegung der Fläche ohne Dehnung nicht ändert, so ist danach das Produkt der Hauptkrümmungshalbmesser ebenfalls dabei unveränderlich.

Für die Ebene wären beide Halbmesser unendlich groß, daher $K = 0$. Dasselbe muß für alle Flächen gelten, die sich wie die Zylinder und Kegel aus einer Ebene durch dehnungsloses Zusammenrollen herstellen lassen. Auch nicht zu große Teile einer Kugelfläche lassen sich dehnungsfrei verbiegen, so daß sie zwei verschiedene Hauptkrümmungshalbmesser erhalten. Aber deren Produkt behält den ursprünglichen, auf der Fläche konstanten Wert. Nebenbei sei bemerkt, daß eine solche Verzerrung bei der ganzen Kugelfläche nicht möglich ist.

Nach (86a) ist im Nullpunkt $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$. Eine durch ihn führende geodätische Linie geht also durch senkrechte Projektion auf die in ihm berührende Tangentenebene in eine Kurve über, deren Krümmung im Berührungspunkt verschwindet. Die Krümmungsebene der geodätischen Linie steht auf der Fläche senkrecht. Die Gesamtheit aller Tangentenebenen, welche die krumme Fläche in den Punkten einer Kurve k berühren, hat als Enveloppe eine Fläche, welche aus den Schnitten von je zwei benachbarten Ebenen besteht. Sie hat das Krümmungsmaß Null und ist auf die Ebene abwickelbar. Bei diesem Verfahren geht die Kurve k, sofern sie auf der krummen Fläche geodätische Linie ist, in eine Gerade über.

Bei anderer Wahl des Koordinatensystems lautet die Maßbestimmung nach der Fläche $z = z(x, y)$:

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] dx^2 + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dy^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} dx\, dy.$$

Setzt man die hieraus zu entnehmenden Werte der g_{ik} in (79) zur Berechnung von R_{1212} ein, so findet man nach (81a):

$$-\frac{1}{2} R = K = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right] : \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^2. \quad (88)$$

b) Die „Parallelverschiebung" auf krummen Flächen. In § 10 haben wir gezeigt, daß ein Vektor bei Parallelverschiebung um eine geschlossene Kurve im allgemeinen nicht wieder in seine alte Lage zurückkommt; es ist für zwei Dimensionen leicht, den Winkel zu berechnen, um welchen er sich dreht. Wir denken wie dort von einem Punkt P_0 aus, in welchem sich die Fläche regulär verhalten muß, zwei Verschiebungen, dx^i und δx^i, ausgeführt. Beide bestimmen eine Art Parallelogramm, um dessen Umfang wir den Vektor herumführen. Seine ursprünglichen Komponenten A^1 und A^2 gehen dabei über in $A^1 + DA^1$, $A^2 + DA^2$ und der unendlich kleine Winkel zwischen beiden Richtungen ist nach (29a), wenn wir dort P^i durch A^i, Φ^i durch $A^i + DA^i$ ersetzen:

$$d\varphi = + \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \; \frac{A^1 DA^2 - A^2 DA^1}{g_{11} A^{1^2} + 2 g_{12} A^1 A^2 + g_{22} A^{2^2}}.$$

Nach (76) wird daraus:

$$d\varphi = + \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \times$$
$$\frac{[(A^1 R^2_{112} - A^2 R^1_{112}) A^1 + (A^1 R^2_{212} - A^2 R^1_{212}) A^2] (dx^1 \delta x^2 - dx^2 \delta x^1)}{g_{11} A^{1^2} + 2 g_{12} A^1 A^2 + g_{22} A^{2^2}}$$

Weiter ist nach der Regel

$$R^j_{klm} = \sum_i g^{ij} R_{iklm}.$$

$$R^1_{112} = -g^{12} R_{1212} = g_{12} \frac{R_{1212}}{g}, \quad R^2_{112} = -g^{22} R_{1212} = -g_{11} \frac{R_{1212}}{g}$$

$$R^1_{212} = g^{11} R_{1212} = g_{22} \frac{R_{1212}}{g}, \quad R^2_{212} = g^{12} R_{1212} = -g_{12} \frac{R_{1212}}{g}$$

Dabei ist, wie früher, g für die Determinante $g_{11} g_{22} - g_{12}^2$ geschrieben. Wir finden so nach (81a) und (87):

$$d\varphi = + \frac{R_{1212}}{g} \cdot \sqrt{g} (dx^1 \delta x^2 - dx^2 \delta x^1) = + \tfrac{1}{2} R \,.\, d\sigma = -K d\sigma.$$

Dabei ist nach § 6, Gleichung (46a) in der Anmerkung zu S. 59,

$$d\sigma = \pm \sqrt{g}\,(dx^1 \delta x^2 - dx^2 \delta x^1)$$

der Flächeninhalt des durch die Strecken dx^i und δx^i bestimmten Parallelogramms.

Um den Sinn dieser Drehung klarzustellen, nehmen wir K einmal als positiv, also nach (87) R negativ und nach (81a) und der vorstehenden Formel $R^2{}_{112} = \frac{1}{2} g_{11} R$ ebenfalls negativ an. Ferner legen wir die Richtung von x^1 in die Verschiebung dx^i, die Richtung x^2 in die Verschiebung δx^i. Dann ist $dx^1 \delta x^2 - dx^2 \delta x^1$ gewiß positiv und nach (76) erhält ein Vektor, der ursprünglich die Richtung x^1 hat ($A^1 > 0$, $A^2 = 0$), einen positiven Zuwachs DA^2. Da wir dort in § 10 den Umlauf mit der Verschiebung dx^i begonnen und mit der Verschiebung $-\delta x^i$ beendet hatten, bedeutet dies eine Drehung im Sinne des Umlaufs. Nennen wir eine solche Drehung positiv, so müssen wir also schreiben:

$$d\varphi = K d\sigma.$$

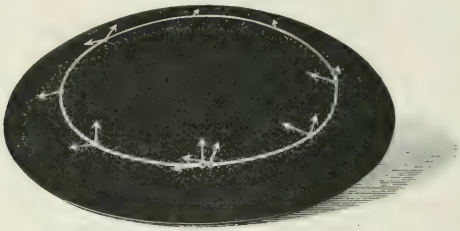
Nun setzen wir, wie schon in § 10, die Umkreisungen zweier derartiger Parallelogramme mit einer gemeinsamen Seite zu einer Umkreisung der aus beiden gebildeten Fläche zusammen. Dabei addieren sich die Drehwinkel $d\varphi$. Durch hinreichend häufige Wiederholung dieses Verfahrens kann man schließlich für die Umkreisung eines beliebigen, singularitätenfreien Flächenstückes den Satz ableiten

$$\varphi = \int K d\sigma.$$

Betrachten wir z. B. den Umlauf um den Breitenkreis einer Kugel vom Halbmesser r, dessen Punkte vom Nordpol den konstanten Winkelabstand ϑ haben. Für ihn findet sich eine Umdrehung um $\varphi = \frac{1}{r^2} \times 4\pi r^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = 4\pi \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ im Sinne des Umlaufs (Fig. 10 veranschaulicht die allmähliche Drehung eines Kompaßkörpers aus zwei zueinander senkrechten Vektoren), sofern man als umlaufene Fläche die Kugelkalotte betrachtet, welche den Nordpol enthält. Mit demselben Recht aber kann man den übrigen Teil der Kugelfläche dafür nehmen. Dann folgt $\varphi = 4\pi \cos^2 \frac{\vartheta}{2}$. Beide Gleichungen stimmen dem Sinn nach überein. Denn im zweiten Fall hat der Umlauf und damit die Drehung den entgegengesetzten Sinn wie im ersten, und die

beiden Werte von φ ergänzen sich zu 4π. Wird aus dem Breitenkreis der Äquator, so wird $\varphi = 2\pi$, der parallel verschobene Vektor kehrt also in die Anfangslage zurück. (Für zwei Flächen negativer Krümmung zeigt Fig. 11 die Drehung zweier Vektoren bei einem geschlossenen Umlauf in dem ihm entgegengesetzten Sinn.)

Fig. 10.



Die letzte Bemerkung stimmt mit der früheren überein, daß ein Vektor bei der Parallelverschiebung längs einer geodätischen Linie stets denselben Winkel mit ihr bildet; denn kehrt diese Linie in sich zurück, wie die größten Kreise der Kugel es tun, so muß er somit auch in die Anfangslage kommen. Dieselbe frühere Bemerkung aber gestattet uns nun sehr einfach, den Gaußschen Satz über die Winkelsumme in einem geodätischen, d. h. durch geodätische Linien begrenzten Dreieck abzuleiten Fig. 12*) stellt im Dreieck ABC mit den Winkeln α, β, γ ein solches Dreieck dar — anfangs liege der Vektor bei A in der Richtung $\Phi_{(1)}$, welche mit dem Bogen AB den Winkel φ_1 bildet. Wir verschieben ihn unter Aufrechterhaltung dieses Winkels nach B in die Lage Φ'. Er bildet dann mit BC den Winkel $\psi = \pi - \beta + \varphi_1$. Während wir den Vektor längs BC nach C verschieben, halten wir ψ konstant. Seine Lage Φ'' bei C schließt dann mit CA den Winkel $\chi = \pi - \gamma + \psi$ ein. Die letzte Parallelverschiebung nach A längs CA führt ihn schließlich in

*) Die Figur ist als stereographische, also winkeltreue Projektion eines auf einer Kugel gelegenen sphärischen Dreiecks auf die Ebene gezeichnet. Der Vektor, welcher nach § 11 eine Strecke in der Tangentenebene darstellt, projiziert sich dabei als gerade Strecke, welche freilich, da die wahre Länge des Vektors erhalten bleibt, in der Projektion veränderliche Längen haben sollte. Für die Winkelberechnung ist das ohne Bedeutung.

die Richtung $\Phi_{(2)}$, welche mit AB den Winkel $\varphi_2 = \pi - \alpha + \chi$, mit $\Phi_{(1)}$ den Winkel $\varphi_1 - \varphi_2 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ bildet. (Bei der letzten Angabe ist der Betrag 2π unterdrückt.) Um diesen Winkel hat sich der Vektor somit bei der Umkreisung in derem

Fig. 11.

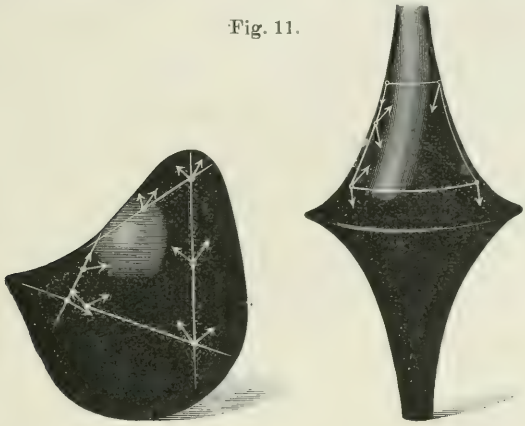
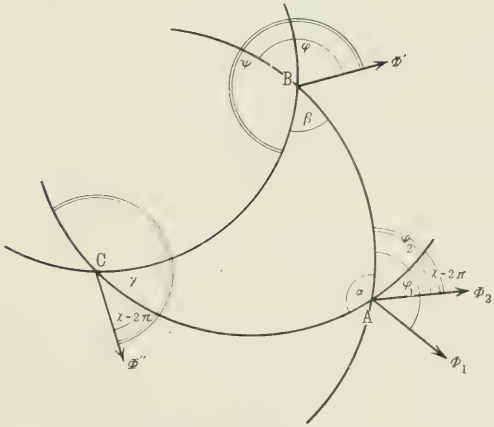


Fig. 12.



Sinne gedreht. Infolgedessen gilt für den Überschuß der Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks über π der Satz

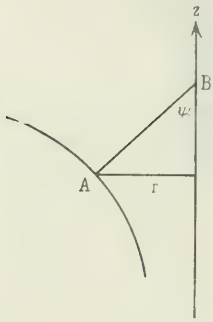
$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \int K d\sigma. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

Für den Fall der Kugel ist er aus der sphärischen Trigonometrie wohl bekannt.

c) Flächen konstanten Krümmungsmaßes. $R = const$ ist nach (88) eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren allgemeine Lösung zwei willkürliche Funktionen enthalten, somit noch sehr viele Möglichkeiten umfassen muß. Man erhält aber dadurch eine leichte Übersicht, daß man sich auf Drehflächen beschränkt; dann geht nämlich die partielle in eine gewöhnliche Differentialgleichung über.

Wir können diese leicht geometrisch ableiten, indem wir in einer Meridianebene die Schnittkurve der Fläche zeichnen (Fig. 13).

Fig. 13.



Nennen wir die Koordinaten in ihr z (parallel zur Drehachse) und r (Abstand von ihr), so ist der eine der Hauptkrümmungshalbmesser der Krümmungshalbmesser der Meridiankurve, also gleich

$$\left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right]^{3/2} : \frac{d^2 z}{dr^2}.$$

Um den anderen zu finden, ziehen wir im Punkt A das Lot auf die Kurve. Dessen Schnitt mit der Drehachse B ist dann der Krümmungsmittelpunkt für ein zur Meridiankurve senkrechtes Linienstück in der Fläche. Denn es schneiden sich in ihm die Flächenlote in zwei benachbarten Punkten dieses Linienstückes. Es ist aber

$$AB = \frac{r}{\sin\psi} = r \cdot \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right]^{1/2}}{\frac{dz}{dr}}.$$

Somit lautet unsere Differentialgleichung

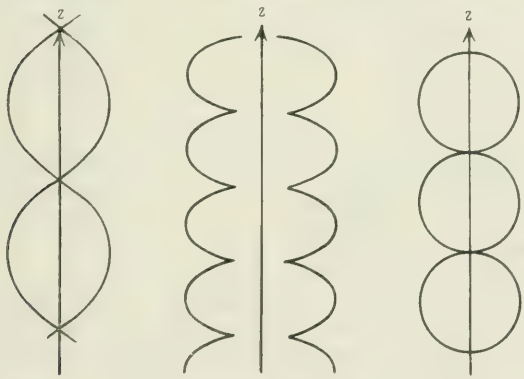
$$\frac{\frac{dz}{dr}\,\frac{d^2 z}{dr^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right]^2} = Kr.$$

Sie läßt sich leicht das erstemal integrieren und liefert dabei

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{1}{c - Kr^2} - 1.$$

Von hier an müssen wir aber eine Reihe von Fällen unterscheiden. Zunächst sei die Konstante $K > 0$. Dann muß, soll $\frac{dz}{dr}$ nicht imaginär werden, auch $c > 0$ sein. Es gibt dann immer einen reellen Maximalwert $r = \sqrt{\frac{c}{K}}$, bei welchem $\frac{dr}{dz}$ verschwindet. Der umgekehrte Fall, $\frac{dz}{dr} = 0$, ist unmöglich, wenn $c < 1$. Ist aber $c > 1$, so tritt er bei $r = \sqrt{\frac{c-1}{K}}$ ein. Fig. 14a und 14b stellen dann die Meridiankurven dar. Der Grenzfall $c = 1$ liefert $z = const + \sqrt{K^{-1} - r^2}$, also eine Kugel vom Halbmesser $\frac{1}{\sqrt{K}}$, oder besser, um den Zusammenhang mit den anderen Fällen herzustellen, eine Reihe aufeinander gesetzter Kugeln (Fig. 14c). Ist

Fig. 14 a. Fig. 14 b. Fig. 14 c.



dagegen $K = -k < 0$, so muß notwendig $c < 1$ sein, da sonst $\frac{dz}{dr}$ imaginär würde. So aber gibt es stets reelle Punkte im Abstand $r = \sqrt{\frac{1-c}{k}}$ von der Achse, in welcher $\frac{dz}{dr} = 0$ wird. An diesen Stellen haben die Flächen scharfe Kanten. Des weiteren sind noch die Fälle zu unterscheiden, in welchen $c > 0$ — dann ist $\frac{dr}{dz}$ nirgends Null und die Achse wird erreicht, da für $r = 0$ $\frac{dz}{dr}$ reell bleibt (Fig. 15a stellt den Teil der Fläche zwischen zwei

Kanten dar) —, daß $c < 0$ — dann ist $r = \sqrt{-\frac{c}{k}}$ der kleinste vorkommende Wert, für ihn verschwindet $\frac{dr}{dz}$ (Fig. 15 b gibt den Teil zwischen zwei Kanten und die angrenzenden Stücke der Fläche) —, und daß $c = 0$ ist; in letzterem Fall führt die zweite Integration zur Gleichung der „Traktrix"

$$z = +\frac{1}{\sqrt{k}}\left[\sqrt{1-kr^2} + \frac{1}{2}\log\frac{1-\sqrt{1-kr^2}}{1+\sqrt{1-kr^2}}\right].$$

Die aus ihr entstehende Drehfläche (Fig. 11, rechte Hälfte) verläuft von ihrer einzigen Kante nach beiden Seiten ohne Singu-

Fig. 15 a.

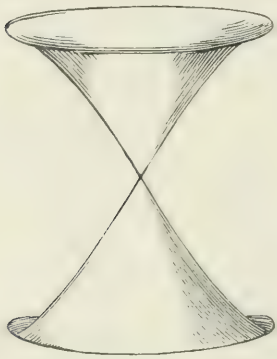
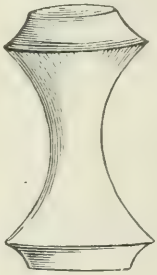


Fig. 15 b.



laritäten ins Unendliche. Flächen mit konstantem positiven Krümmungsmaß nennt man sphärisch, solche mit konstantem negativen Krümmungsmaß pseudosphärisch. Als Pseudosphäre schlechthin bezeichnet man die in Fig. 11 (rechte Hälfte) dargestellte Fläche.

Schneidet man aus einer Kugelfläche durch zwei zum Äquator parallele Breitenkreise eine Zone heraus, so kann man diese, nachdem man sie noch längs eines Meridians aufgetrennt hat, auseinander biegen, doch so, daß sie wieder Teil einer Drehfläche wird. Dann nimmt die Krümmung des Äquators ab, die der Meridiane wegen des unveränderlichen Krümmungsmaßes zu, und wir erhalten einen Teil der in Fig. 14 a dargestellten Fläche. Wickeln wir umgekehrt dasselbe Stück der Kugel zusammen, so

daß es sich zum Teil selbst überdeckt, so nimmt die Krümmung des Äquators zu und die der Meridiane ab. Behält es dabei axiale Symmetrie, so entsteht ein Stück der in Fig. 14b dargestellten Fläche.

d) Polarkoordinaten. x^1 und x^2 sollen beliebige Koordinaten sein. Von einem Punkt aus, in dessen Umgebung die Fläche sich regulär verhält, ziehen wir die Gesamtheit der hindurchgehenden geodätischen Linien. Ihre Gleichungen mögen die Form haben $v(x^1, x^2) = const.$ Ferner suchen wir die Schar der sie senkrecht schneidenden (natürlich nicht geodätischen) Kurven auf, deren Gleichung die Form $u(x^1, x^2) = const$ haben möge. Dann ist das Linienelement in den u und v als Koordinaten nach dem pythagoreischen Lehrsatz darstellbar durch

$$ds^2 = g_{11}(u, v)\,du^2 + g_{22}(u, v)\,dv^2 \qquad (g_{11}, g_{22} > 0).$$

Wir behaupten, daß g_{11} nur von u abhängt, nicht aber von v.

Zum Beweise stellen wir die Differentialgleichung der geodätischen Linie auf, indem wir sie in der Form $v = v(u)$ suchen. Wir müssen dazu

$$\int \sqrt{g_{11}(u, v) + g_{22}(u, v)\,\dot{v}^2}\,du$$

zu einem Extremum machen. Die daraus entspringende Lagrangesche Gleichung lautet:

$$\frac{d}{du}\left(\frac{g_{22}\,\dot{v}}{\sqrt{g_{11} + g_{22}\,\dot{v}^2}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{g_{11} + g_{22}\,\dot{v}^2}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial v}\,\dot{v}^2\right) = 0.$$

Die Kurvenschar $v = const$ erfüllt nur dann diese Differentialgleichung, wenn $\frac{\partial g_{11}}{\partial v} = 0$ ist*).

Ist aber g_{11} nur Funktion von u, so können wir die „Polarkoordinaten“

$$\vartheta = \int \sqrt{g_{11}}\,du, \quad \varphi = v$$

*) Dieser Beweis überträgt sich ohne weiteres auf die Gaußschen Koordinaten in vier Dimensionen (§ 9d). Sollen bei der Maßbestimmung

$$d\tau^2 = g_{44}\,dx^{4\,2} + \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\,dx^i\,dx^k$$

die Kurven des vierten Parameters $x^1, x^2, x^3 = const$ geodätische Linien sein, so darf g_{44} nur von x^4 abhängen.

einführen, in denen das Linienelement die Darstellung

$$d s^2 = d \vartheta^2 + \gamma^2 (\vartheta, \varphi)\, d \varphi^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

erhält. Diese einfache Form nimmt es ohne jede Einschränkung der Allgemeinheit an.

Man sieht an dieser Darstellung von ds, daß die geodätische Linie zwischen zwei nicht zu weit entfernten Punkten A und B die kürzeste ist. Denn machen wir A zum Anfang der Polarkoordinaten, so ist der Abstand AB, gemessen längs der geodätischen Linie, gleich $\vartheta_B - \vartheta_A$; auf jedem anderen Wege hat er hingegen den größeren Wert

$$\int_A^B \sqrt{\dot{\vartheta}^2 + \gamma^2 \dot{\varphi}^2}\, ds.$$

Dieser Beweis versagt aber, wenn wir die geodätische Linie AB so lang wählen, daß andere geodätische Linien durch A sie zwischen A und B schneiden. Denn dann kann man auf mehreren Wegen so von A nach B gelangen, daß man sich stets auf geodätischen Linien bewegt, und da diese verschiedenen Wege nicht gleich lang zu sein brauchen, ist einer davon kürzer als die anderen. — In den vier Dimensionen der „Welt“ gilt schon deswegen nichts Entsprechendes, weil im Gegensatz zu $d s^2$ das Linienelement $d \tau^2$ keine positiv definite Form ist. Aus der besonderen Relativitätstheorie wissen wir z. B., daß der längs einer zeitartigen geraden Weltlinie gemessene Abstand zweier Punkte gegenüber anderen zeitartigen Wegen ein Maximum ist.

Um aus (90) das Krümmungsmaß zu berechnen, stellen wir zunächst fest, daß

$$g_{11} = 1, \qquad g_{22} = \gamma^2, \qquad g_{12} = 0,$$

also

$$g^{11} = 1, \qquad g^{22} = 1\ \gamma^2, \qquad g^{12} = 0$$

ist. Dann suchen wir die g-Klammern durch Lösung des Variationsproblems

$$\delta \int (\dot{\vartheta}^2 + \gamma^2 \dot{\varphi}^2)\, d p = 0$$

auf. Das führt auf die Differentialgleichungen

$$\ddot{\vartheta} - \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \vartheta} \dot{\varphi}^2 = 0, \quad \ddot{\varphi} + \frac{2}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta}\, \dot{\varphi} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \dot{\varphi}^2 = 0.$$

Aus ihnen entnehmen wir nach (55) die folgenden Werte für die nicht verschwindenden g-Klammern:

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \vartheta}, \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \vartheta}.$$

Nach (80) wird somit

$$R_{11} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}^2 = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \vartheta^2}$$

$$R_{22} = -\frac{\partial}{\partial \vartheta} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 21 \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = \gamma \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \vartheta^2}$$

und nach (81) und (87)

$$K = -\frac{1}{2} R = -\frac{1}{2}(g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22}) = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \vartheta^2} \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

Nach (90) ist die Geometrie auf krummen Flächen vollständig durch die Funktion $\gamma(\vartheta, \varphi)$ bestimmt; und nach (91) ebenso vollständig durch die Funktion $K(\vartheta, \varphi)$. Denn von den beiden Funktionen von φ, die bei der Integration von (91) zunächst willkürlich bleiben, ist die eine dadurch bestimmt, daß im Schnittpunkt aller geodätischen Linien $\varphi = const$, dem man den Wert $\vartheta = 0$ zuordnen darf, γ identisch in φ verschwinden muß; die andere tritt als Faktor zu γ, da ein solcher Faktor sich in (91) heraushebt. Diese kann man stets gleich 1 setzen, weil eine andere Wahl nach (90) nur auf eine Umtaufung der Koordinate φ hinauskommt.

e) Sphärische Flächen und elliptische Geometrie der Ebene. Für sphärische Flächen ist das Gaußsche Krümmungsmaß gleich einer positiven Konstanten k. Dann folgt aus (91), nach den erwähnten Nebenbedingungen, $\gamma = \sin \sqrt{k}\, \vartheta$. Für alle sphärischen Flächen läßt sich somit das Linienelement auf die Form

$$ds^2 = 1\ k\,(d\Theta^2 + \sin^2\Theta\, d\Phi^2) \quad (\Theta = \sqrt{k}\,\vartheta, \quad \Phi = \sqrt{k}\,\varphi)$$

bringen, die wir von der Kugel her kennen. Nun ist die Form des Linienelementes kennzeichnend für die betreffende Geometrie. Aus dieser Übereinstimmung dürfen wir daher schließen: Die Geometrie auf Flächen konstanter positiver Krümmung ist Geometrie auf der Kugel. Die Tatsache, daß man auf der Kugel Figuren ohne Formänderung verschieben kann, überträgt

sich auf alle sphärischen Flächen. Es gelten deshalb Kongruenzsätze, wie die, daß Dreiecke von drei gleichen Seiten, oder von zwei gleichen Seiten und gleichem eingeschlossenen Winkel, oder von einer gleichen Seite und zwei gleichen angrenzenden Winkeln kongruent sind, d. h. zur Deckung gebracht werden können usw. Parallelen gibt es nicht. Jedes Paar geodätischer Linien schneidet sich bei hinreichender Verlängerung.

Damit sich zwei Flächen aufeinander abwickeln, d. h. ohne Dehnung oder Faltung aufeinander legen lassen, ist notwendig und hinreichend, daß das Linienelement in beiden dieselbe Darstellung zuläßt. Alle sphärischen Flächen von gleichem Krümmungsmaß sind danach aufeinander abwickelbar.

Im übrigen darf man diese Sätze nicht auf beliebig große Teile der Flächen anwenden; es gibt da Grenzen. Man kann z. B. keine Figur unverzerrt über die in den Fig. 14a und 14b auftretenden Kanten und Spitzen hinüberschieben, man kann nicht die Kugelfläche als Ganzes ungedehnt verbiegen. Daß Flächen, auf denen sich das Linienelement in der gleichen Art darstellen läßt, noch ganz verschiedene Zusammenhangsverhältnisse haben können, zeigt sehr lehrreich der Vergleich der Ebene mit dem durch Zusammenrollen aus ihr entstehenden Kreiszylinder. Auf letzterem gibt es geschlossene geodätische Linien, nämlich den Grundkreis und seine Parallelen; andere geodätische Linien, die Schraubenlinien, gehen bei hinreichender Verlängerung in eine ihrer Parallelen über, nämlich in die nächste Schraubenwindung usw. Trotzdem gilt auf nicht zu großen Stücken der Zylinderfläche die Geometrie der Ebene unverändert.

An die Kugel vom Halbmesser $r = \frac{1}{\sqrt{k}}$ legen wir in einem ihrer Pole die Tangentenebene und bilden die angrenzende Halbkugel durch Projektion vom Kugelmittelpunkt auf die Ebene ab. Die Abbildung ist eindeutig. Ist Θ der Polabstand auf der Kugel, so sind

$$x = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{tg} \Theta \cos \Phi, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{tg} \Theta \sin \Phi \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

im euklidischen Sinn rechtwinkelige Koordinaten in der Ebene. Nun aber setzen wir in Abweichung von der euklidischen Maßbestimmung fest, daß jedes Linienstück der Ebene dem ent-

sprechenden Linienstück auf der Kugel gleich sein soll. Das heißt in Gleichungsform

$$ds^2 = \frac{1}{k}\,(d\Theta^2 + \sin^2\Theta\, d\Phi^2) = \frac{dx^2 + dy^2 + k(x\,dy - y\,dx)^2}{[1 + k(x^2 + y^2)]^2}\,. \quad (93)$$

Dann muß auch jeder Winkel in der Ebene dem entsprechenden Winkel auf der Kugel sein. Denn nach (29) ist das Winkelmaß auf die Maßbestimmung für das Linienelement zurückgeführt. Das führt zur elliptischen Geometrie der Ebene. In ihr ist, wie bei Euklid, jede geodätische Linie gerade und jede Gerade eine geodätische Linie; denn die Geraden sind ja die Abbilder größter Kreise auf der Kugel. Aber jede Gerade hat die endliche Länge $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$; geht man auf ihr weiter, so kommt man auf schon einmal berührte Punkte. In den Zusammenhangsverhältnissen unterscheidet sich nämlich die elliptische Geometrie von der auf der Kugel. Die beiden Punkte, in welchen ein größter Kreis den Äquator der Kugel schneidet, entsprechen nur einem Punkt der Ebene. Die andere Hälfte des größten Kreises wird überhaupt nicht abgebildet. Deshalb schneiden sich je zwei Geraden immer in einem im Endlichen liegenden Punkte. Der zweite Schnittpunkt der entsprechenden größten Kreise liegt auf der nicht abgebildeten Kugelhälfte. Die ganze Ebene hat den Flächeninhalt $2\pi k$. Figuren lassen sich unverzerrt wie auf der Kugel verschieben, und es gelten Kongruenzsätze. Aber im Gegensatz zur euklidischen Geometrie der Ebene können sich bei solcher Verschiebung nur die Punkte einer Geraden auf einer Geraden bewegen, weil auf der Kugel eine Verschiebung, bei welcher alle Teile größte Kreise durchlaufen, nicht ohne Dehnungen möglich ist. Auch gibt es keine Ähnlichkeit zwischen verschiedenen Figuren. Zwei Dreiecke z. B., welche in den drei Winkeln α, β, γ übereinstimmen, haben nach Gleichung (89):

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \Delta k$$

auch gleiche Flächeninhalte Δ, sind also kongruent.

Die elliptische Ebene hat das Gaußsche Krümmungsmaß k; dies bleibt ja als Invariante beim Übergang von Θ, Φ zu x, y unverändert. Man hat diesen Satz gelegentlich durch die Frage ad absurdum zu führen versucht: „Nach welcher Seite ist denn die Ebene gekrümmt?“ Darin liegt eine Verkennung des Begriffs

der Invarianten R. Ihren Namen hat sie von krummen Flächen im euklidischen Raum. Aber ihre Bedeutung beruht nicht auf dieser Einlagerung der zwei- in einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit, sondern allein auf der in der Fläche selbst geltenden Maßbestimmung. Nur der Name „Krümmung" konnte zu jener in der Tat unbeantwortbaren Frage verführen *). Überhaupt ist es aussichtslos, nach Widersprüchen in der elliptischen Geometrie zu suchen, um sie dadurch zu widerlegen. Wegen ihrer Abstammung aus der sphärischen Geometrie überträgt sich jeder Satz aus der einen auf die andere. Wer die eine anerkennt, kann die andere nicht verwerfen.

f) Die pseudosphärischen Flächen haben ein konstantes negatives Krümmungsmaß $-k$. Die dann aus (91) entstehende Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \vartheta^2} = + k\gamma$$

hat aber die Lösung $\gamma = \mathfrak{Sin}(\sqrt{k}\,\vartheta)$. Für alle pseudosphärischen Flächen läßt sich ds somit durch

$$ds^2 = 1\,k(d\Theta^2 + \mathfrak{Sin}^2\Theta\, d\Phi^2) \quad (\Theta = \sqrt{k}\,\vartheta, \quad \Phi = \sqrt{k}\,\varphi) \qquad (94)$$

darstellen. Da der Anfang der hier auftretenden Koordinaten ganz beliebig gewählt ist, kann man das Netz der Linien $\Theta = const$ und $\Phi = const$ unverzerrt von einem Punkt zum anderen verschieben. Es besteht überhaupt zwischen den Punkten der Fläche kein Unterschied, solange man nur auf ihr Geometrie treibt. Man kann jenes Netz ferner um den Punkt $\Theta = 0$ unverzerrt beliebig drehen, da unter allen Kurven $\Phi = const$ die Kurve $\Phi = 0$ in keiner Weise ausgezeichnet ist. Jede Figur gestattet daher noch dreifach unendlich viele Verschiebungen. Deshalb gibt es auch Kongruenzsätze **).

---

*) Auch dem Linienelement der Kugel oder einer anderen Fläche positiver Krümmung kann man nicht ansehen, nach welcher Seite sie gekrümmt ist.

**) Als Gegenbeispiel für den gewöhnlichen Fall, daß auf einer Fläche keine Kongruenzsätze bestehen, kann das Rotationsparaboloid gebraucht werden. Auf zwei Meridiankurven, welche sich in dessen Scheitel rechtwinkelig schneiden, wählen wir je einen Punkt in gleichem Abstande vom Scheitel und verbinden diese durch eine dritte geodätische Linie. Machen wir in diesem rechtwinkeligen Dreieck die Katheten hin-

Setzt man entsprechend der Transformation (92)

$$x = \frac{1}{\sqrt{k}} \mathfrak{Tg}\, \Theta \cos \Phi, \quad y = \frac{1}{\sqrt{k}} \mathfrak{Tg}\, \Theta \sin \Phi, \quad . \quad . \quad (95)$$

so findet man (vgl. 93):

$$d s^2 = \frac{d x^2 + d y^2 - k (x\, d y - y\, d x)^2}{[1 - k (x^2 + y^2)]^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

Deutet man nun wieder x, y als im euklidischen Sinn rechtwinkelige Koordinaten in der Ebene, so hat man eine Abbildung der pseudosphärischen Flächen auf diese, bei welcher jedem Linienelement und jedem Winkel in der einen Fläche ein gleich langes Linienelement, und in der anderen ein gleich großer Winkel entspricht. Das ergibt eine neue nichteuklidische Geometrie der Ebene; man nennt sie die hyperbolische. Jeder Satz in der einen überträgt sich auf die andere.

Sucht man nach der Maßbestimmung (93) die geodätischen Linien auf, so erhält man, wie wir sahen, die Gleichung irgend einer Geraden, also eine lineare, von k unabhängige Beziehung zwischen x und y. Dieselbe Rechnung, anknüpfend an die Gleichung (96), die sich von (93) nur im Vorzeichen von k unterscheidet, muß also wieder auf eine lineare Gleichung zwischen x und y führen. Auch in der hyperbolischen Geometrie sind somit die geodätischen Linien Gerade, und jede Gerade ist geodätische Linie; das Krümmungsmaß ist $-k$. Nach (89) gilt also für die Winkelsumme eines Dreiecks vom Inhalt Δ

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = k \Delta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

d. h. die Winkelsumme ist stets kleiner als π.

§ 12. Die Cayleysche Maßbestimmung.

Um die hyperbolische Geometrie weiter zu untersuchen, müßte man die aufs unendlich Kleine bezogene Maßbestimmung (96) durch Integration auf endliche Strecken ausdehnen. Einfacher ist es, eine von Cayley eingeführte Art der Maßbestimmung zu-

---

reichend lang, so ist die Hypotenuse kürzer als jede von ihnen. In solchen Teilen der Fläche hingegen, welche vom Scheitel weit genug abstehen, gilt, da dort die Krümmung sehr gering ist, mit großer Annäherung die euklidische Geometrie der Ebene, derzufolge in solchem Dreieck die Hypotenuse jede Kathete an Länge übertreffen muß.

grunde zu legen, die sich sogleich auf beliebige Strecken bezieht, und dann nachzuweisen, daß sie mit (96) übereinstimmt. Dies hat noch den Vorteil, daß sich die gleiche Maßbestimmung mit geringer Abänderung für die elliptische Geometrie der Ebene benutzen läßt.

a) Die hyperbolische Geometrie der Ebene. Statt der rechtwinkeligen Koordinaten x, y verwendet man in der euklidischen Geometrie der Ebene manchmal mit Vorteil homogene Koordinaten $x^1 : x^2 : x^3$, aus denen sich die ursprünglichen nach den Formeln

$$x = x^1 : x^3, \quad y = x^2 : x^3$$

berechnen. Deren Vorzüge fallen in die Augen, wenn man z. B. die Gleichung eines Kegelschnitts anschreibt. Denn diese bekommt nun unter allen Umständen die homogene quadratische Form

$$\Omega(x^2) = 0, \quad \Omega(x^2) = \sum_{ik} g_{ik} x^i x^k.$$

Wir benennen sogleich noch die zugehörige Bilinearform mit

$$\Omega(xy) = \sum_{ik} g_{ik} x^i y^k.$$

Die g_{ik} sollen reell, und $\Omega(x^2)$ soll nicht definit sein, so daß $\Omega(x^2) = 0$ einen reellen Kegelschnitt bestimmt.

Unter dem Doppelverhältnis von vier Punkten A, B, K, L einer Geraden versteht man

$$(AB, KL) = \frac{AK}{BK} : \frac{AL}{BL} = \frac{AK \cdot BL}{BK \cdot AL},$$

wobei AK, BK usw. die euklidisch gemessenen Abstände bedeuten. In kartesischen Koordinaten ist, wenn wir unter x_a, y_a die Koordinaten von A usw. verstehen,

$$(AB, KL) = \frac{(x_a - x_k)(x_b - x_l)}{(x_b - x_k)(x_a - x_l)}$$

(ebenso in y), und zwar bestehen zwischen diesen Koordinaten, da alle vier Punkte derselben Geraden angehören, Beziehungen von der Form:

$$\left.\begin{aligned} x_k &= \varkappa_a x_a + \varkappa_b x_b \qquad \varkappa_a + \varkappa_b = 1 \\ x_l &= \lambda_a x_a + \lambda_b x_b \qquad \lambda_a + \lambda_b = 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (97\,\text{a})$$

Daraus schließen wir:

$$(AB,\ KL) = \frac{\varkappa_b \lambda_a}{\varkappa_a \lambda_b}.$$

In homogenen Koordinaten lassen sich dieselben Beziehungen ausdrücken durch

$$x_k^i = \alpha_a x_a^i + \alpha_b x_b^i, \quad x_l^i = \beta_a x_a^i + \beta_b x_b^i, \quad i = 1, 2, 3,$$

wobei die α und β durch keine Beziehungen untereinander verbunden sind, wenn nur

$$\varkappa_a = \frac{\alpha_a x_a^3}{\alpha_a x_a^3 + \alpha_b x_b^3}, \quad \varkappa_b = \frac{\alpha_b x_b^3}{\alpha_a x_a^3 + \alpha_b x_b^3} \quad \text{usw.}$$

ist. Demnach ist das Doppelverhältnis auch durch die Gleichung

$$(AB,\ KL) = \frac{\alpha_b \beta_a}{\alpha_a \beta_b}$$

auszudrücken.

Nun wählen wir die Punkte K und L auf dem Kegelschnitt $\Omega(x^2) = 0$. Dann ist

$$\Omega[(\alpha_a x_a + \alpha_b x_b)^2] = \alpha_a^2\, \Omega(x_a^2) + \alpha_b^2\, \Omega(x_b^2) + 2\,\alpha_a \alpha_b\, \Omega(x_a x_b) = 0$$

$$\Omega[(\beta_a x_a + \beta_b x_b)^2] = \beta_a^2\, \Omega(x_a^2) + \beta_b^2\, \Omega(x_b^2) + 2\,\beta_a \beta_b\, \Omega(x_a x_b) = 0$$

und daraus folgt:

$$\frac{\alpha_b}{\alpha_a} = \frac{-1}{\Omega(x_b^2)}\left(\Omega(x_a x_b) + \sqrt{\Omega^2(x_a x_b) - \Omega(x_a^2)\,\Omega(x_b^2)}\right).$$

Ebenso lautet die Gleichung für $\frac{\beta_b}{\beta_a}$. Nehmen wir aber in der Gleichung für $\frac{\alpha_b}{\alpha_a}$ das Vorzeichen $+$, so müssen wir in der anderen das Zeichen $-$ wählen, weil K und L verschiedene Punkte sein sollen. Dann finden wir

$$(AB,\ KL) = \frac{\Omega(x_a x_b) + \sqrt{\Omega^2(x_a x_b) - \Omega(x_a^2)\,\Omega(x_b^2)}}{\Omega(x_a x_b) - \sqrt{\Omega^2(x_a x_b) - \Omega(x_a^2)\,\Omega(x_b^2)}}.$$

Cayleys Gedanke bestand nun darin, dies Doppelverhältnis als Maß für den Abstand der Punkte A und B zu wählen, doch so, daß sich die Abstände von A und B einer-, B und C andererseits zum Abstand von A und C addieren, sofern diese drei Punkte

auf einer Geraden liegen. Nun multiplizieren sich aber nach der Gleichung

$$(AC, KL) = \frac{AK.CL}{CK.AL} = \frac{AK.BL}{BK.AL} \times \frac{BK.CL}{CK.BL}$$
$$= (AB, KL) \times (BC, KL)$$

die entsprechenden Doppelverhältnisse. Somit muß man an ihnen den Logarithmus bilden und unter Einführung einer positiven Konstante k schreiben:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{1}{2\sqrt{k}} \log (AB, KL) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{k}} \log \frac{\Omega(x_a x_b) + \sqrt{\Omega^2(x_a x_b) - \Omega(x_a^2)\,\Omega(x_b^2)}}{\Omega(x_a x_b) - \sqrt{\Omega^2(x_a x_b) - \Omega(x_a^2)\,\Omega(x_b^2)}} \end{aligned}\right\} \quad (98)$$

Gleichbedeutend und manchmal bequemer sind die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Cof}(\sqrt{k}\,r) &= \frac{\Omega(x_a x_b)}{\sqrt{\Omega(x_a^2)\,\Omega(x_b^2)}}, \\ \mathfrak{Sin}(\sqrt{k}\,r) &= \sqrt{\frac{\Omega^2(x_a x_b) - \Omega(x_a^2)\,\Omega(x_b^2)}{\Omega(x_a^2)\,\Omega(x_b^2)}} \end{aligned}\right\} \quad (98a)$$

Hier ist die Maßbestimmung zurückgeführt auf die Lage der in Rede stehenden Punkte zu dem „absoluten Kegelschnitt".

Wählt man dafür den Kreis vom Halbmesser $k^{-1/2}$, d. h. setzt man

$$\Omega(x^2) = -k(x^{1\,2} + x^{2\,2}) + x^{3\,2} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

so geht (98a) über in

$$\mathfrak{Sin}^2(\sqrt{k}\,r) = \frac{k(x_a^2 x_b^3 - x_b^2 x_a^3)^2 + k(x_a^3 x_b^1 - x_b^3 x_a^1)^2 - k^2(x_a^1 x_b^2 - x_b^1 x_a^2)^2}{[x_a^{3\,2} - k(x_a^{1\,2} + x_a^{2\,2})]\,[x_b^{3\,2} - k(x_b^{1\,2} + x_b^{2\,2})]}$$

Wendet man diese Gleichung auf zwei unendlich benachbarte Punkte an, indem man $x_b^i = x_a^i + dx_a^i$ setzt und den Index a als nunmehr überflüssig fortläßt, so folgt für das Linienelement ds zwischen ihnen

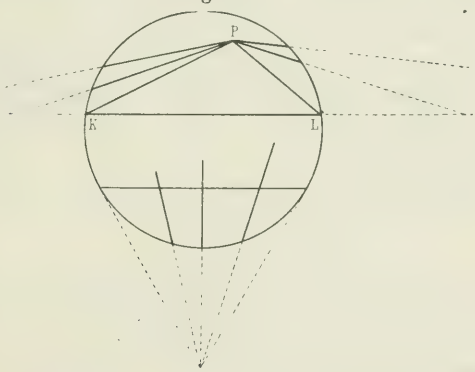
$$ds^2 = \frac{(x^2\,dx^3 - x^3\,dx^2)^2 + (x^3\,dx^1 - x^1\,dx^3)^2 - k(x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1)^2}{[x^{3\,2} - k(x^{1\,2} + x^{2\,2})]^2}.$$

Nun braucht man sich nur noch zu erinnern, daß man für jeden im Endlichen gelegenen Punkt $x^3 = 1$, somit $dx^3 = 0$ setzen darf, und damit x^1, x^2 in x, y überführt. Dann erhält man nämlich ohne weiteres die Gleichung (96). Cayleys Maßbestimmung

führt zu der hyperbolischen Geometrie der Ebene, welche mit der Geometrie auf pseudosphärischen Flächen zusammenfällt.

Auf der Geraden KL wählen wir wieder den Punkt A und lassen den Punkt B von A nach K wandern. Solange B noch mit A zusammenfällt, ist $(AB, KL) = 1$ und nach (98) $r = 0$. Dann wächst (AB, KL) dauernd, und sogar über alle Grenzen, wenn sich B dem Punkt K mehr und mehr nähert. Wanderte B nach L, so nähme das Doppelverhältnis allmählich bis zu Null ab. Die Punkte des absoluten Kegelschnitts haben somit von jedem Punkt im Innern einen unendlich großen Abstand. Überschreitet B bei K oder bei L den Kegelschnitt, so wird (AB, KL) negativ und r bleibt nicht mehr reell. Das kommt aber für die hyperbolische Geometrie des Innern nicht in Betracht. Denn messen

Fig. 16.



wir mit einem Maßstabe, welcher die Maßbestimmung (98) verwirklicht, die Gerade KL von A nach beiden Seiten aus, so können wir ihn beliebig oft anlegen, ohne doch K und L zu erreichen. Die Geraden der hyperbolischen Geometrie sind unendlich lang, obwohl sie innerhalb eines — bei euklidischer Maßbestimmung — im Endlichen liegenden Kegelschnitts liegen. Für die hyperbolische Geometrie ist der absolute Kegelschnitt das unendlich Ferne. Jenseits davon gibt es nichts mehr.

Ziehen wir von einem außerhalb der Geraden KL liegenden Punkt P die Geraden PK und PL, so schneiden diese die Gerade KL im unendlich Fernen, sie sind somit beide zu ihr parallel.

Es gibt also in jedem Punkt zu einer nicht durch ihn führenden Geraden zwei Parallele (siehe Fig. 16) und außerdem eine ganze Schar von Geraden, welche die erstere überhaupt nicht schneiden.

Wir gehen nun zu Cayleys Ansatz für das Winkelmaß über. Dazu brauchen wir den Begriff der homogenen Linienkoordinaten. Die Tatsachen, daß ein Punkt $x^1 : x^2 : x^3$ auf einer bestimmten Geraden liegt, wird immer durch eine Gleichung von der Form

$$u^1 x^1 + u^2 x^2 + u^3 x^3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

dargestellt. Dies ist ja die Gleichung der Geraden in Punktkoordinaten. Die Verhältnisse $u^1 : u^2 : u^3$ sind dann für die Gerade kennzeichnend und heißen homogene Linienkoordinaten der Geraden. Enthält ein Strahlenbündel, d. h. die Gesamtheit der durch einen Punkt der Ebene gehenden Geraden, die Geraden a $(u_a^1 : u_a^2 : u_a^3)$ und b $(u_b^1 : u_b^2 : u_b^3)$, so bestehen für beide Gleichungen, wie (100), und zwar bedeuten darin die x^i die Koordinaten des Schnittpunkts. Gehören demselben Bündel die Geraden k und l an, so lassen sich ihre Koordinaten aus den u_a^i und u_b^i durch Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} u_k^i &= \alpha_a u_a^i + \alpha_b u_b^i \\ u_l^i &= \beta_a u_a^i + \beta_b u_b^i \end{aligned} \qquad i = 1, 2, 3 \quad . \quad . \quad . \quad (100\text{a})$$

bestimmen. Denn soll Gleichung (100) auch noch für die u_k^i gelten, so muß, da doch nicht alle x^i verschwinden können, die Determinante $\sum \pm u_a^1 u_b^2 u_k^3$ Null sein. Das führt aber unmittelbar zu der letzten Gleichung.

Schneiden wir das Bündel durch eine Gerade $U^1 : U^2 : U^3$, so hat ihr Schnittpunkt K mit k die Koordinaten

$$x_k^1 = \lambda \begin{vmatrix} U^2 u_k^2 \\ U^3 u_k^3 \end{vmatrix} \qquad x_k^2 = \lambda \begin{vmatrix} U^3 u_k^3 \\ U^1 u_k^1 \end{vmatrix} \qquad x_k^3 = \lambda \begin{vmatrix} U^1 u_k^1 \\ U^2 u_k^2 \end{vmatrix}$$

wo λ ein bedeutungsloser Proportionalitätsfaktor ist. Wir schließen daraus, daß die vier Schnittpunkte A, B, K, L mit den gleich benannten Geraden in den Beziehungen

$$\begin{aligned} x_k^i &= \alpha_a x_a^i + \alpha_b x_b^i \\ x_l^i &= \beta_a x_a^i + \beta_b x_b^i \end{aligned}$$

zueinander stehen. Als Doppelverhältnis (ab, kl) dieser vier Strahlen bezeichnen wir nun das Doppelverhältnis ihrer vier Schnittpunkte (AB, KL), also

$$(ab, kl) = \frac{\alpha_b \cdot \beta_a}{\alpha_a \cdot \beta_b}.$$

Die Beziehung auf die Gerade $U^1 : U^2 : U^3$ ist dabei unwesentlich, da die α und β am Strahlenbündel selbst definiert sind *).

Den absoluten Kegelschnitt können wir auch in Linienkoordinaten in der Form

$$O(u^2) = \sum_{ik} g^{ik} u^i u^k$$

geben, d. h. die Koordinaten jeder seiner Tangenten müssen dieser Gleichung genügen. Wir beweisen dies nur für den Sonderfall, daß er der Kreis (99) ist. Dessen Tangente im Punkt $x_0^1 : x_0^2 : x_0^3$ hat die Gleichung

$$-k(x^1 x_0^1 + x^2 x_0^2) + x^3 x_0^3 = 0;$$

daraus entnehmen wir ihre Linienkoordinaten

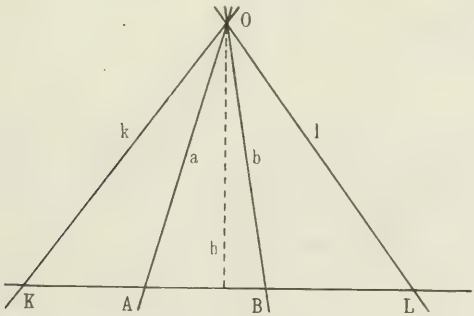
$$u^1 = -k x_0^1, \quad u^2 = -k x_0^2, \quad u^3 = x_0^3.$$

---

*) In Fig. 17 verhalten sich bei euklidischer Maßbestimmung die Dreiecksflächen

$$OAK : OBK : OBL : OAL = AK : BK : BL : AL,$$

Fig. 17.



weil sie alle die gleiche Höhe h haben. Außerdem ist

$$OAK = \tfrac{1}{2} OA \,.\, OK \,.\, \sin(ak) \text{ usw.}$$

Daraus folgt für das Doppelverhältnis der vier Geraden a, b, k, l:

$$(ab, kl) = \frac{\sin(ak) \,.\, \sin(bl)}{\sin(bk) \,.\, \sin(al)}.$$

Da die x_0^i aber der Gleichung (99) gehorchen, gilt für die u^i

$$O(u^{i^2}) = \frac{1}{k}(u^{1^2} + u^{2^2}) - u^{3^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

Jetzt wählen wir k und l als Tangenten an den Kegelschnitt. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} O(u_k^2) &= O[(\alpha_a u_a + \alpha_b u_b)^2] \\ &= \alpha_a^2 O(u_a^2) + \alpha_b^2 O(u_b^2) + 2\alpha_a \alpha_b O(u_a u_b) = 0 \\ O(u_l^2) &= O[(\beta_a u_a + \beta_b u_b)^2] \\ &= \beta_a^2 O(u_a^2) + \beta_b^2 O(u_b^2) + 2\beta_a \beta_b O(u_a u_b) = 0 \end{aligned}$$

bestimmen sich dann die Verhältnisse $\frac{\alpha_a}{\alpha_\beta}, \frac{\beta_a}{\beta_b}$; und aus diesen das Doppelverhältnis

$$(a\,b,\,k\,l) = \frac{O(u_a u_b) + \sqrt{O^2(u_a u_b) - O(u_a^2)\,O(u_b^2)}}{O(u_a u_b) - \sqrt{O^2(u_a u_b) - O(u_a^2)\,O(u_b^2)}} \cdot \quad (102)$$

Cayley nimmt den Logarithmus des Doppelverhältnisses als Maß für den Winkel φ zwischen a und b, und erreicht damit offenbar, daß sich die Winkel zwischen Strahlen desselben Bündels addieren. Aber er setzt in den Proportionalitätsfaktor die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$; und zwar

$$\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log(a\,b,\,k\,l) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

oder, was dasselbe sagt:

$$\cos\varphi = \frac{O(u_a u_b)}{\sqrt{O(u_a^2)\;O(u_b^2)}} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103\,a)$$

Wir hingegen haben in § 6 eine Winkeldefinition kennen gelernt [Gleichung (29)], welche sich an das Linienmaß anschließt. Sie lautet, angewandt auf die Maßbestimmung (96) und auf zwei Linienelemente $d\,s_a$ und $d\,s_b$, die vom Punkt x, y nach $x + d\,x_a$, $y + d\,y_a$ und $x + d\,x_b$, $y + d\,y_b$ führen:

$$\cos\varphi = \frac{d\,x_a\,d\,x_b + d\,y_a\,d\,y_b - k\,(x\,d\,y_a - y\,d\,x_a)\,(x\,d\,y_b - y\,d\,x_b)}{\sqrt{[d\,x_a^2 + d\,y_a^2 - k\,(x\,d\,y_a - y\,d\,x_a)^2]\,[d\,x_b^2 + d\,y_b^2 - k\,(x\,d\,y_b - y\,d\,x_b)^2]}} \quad (104)$$

Wir müssen zeigen, daß die Cayleysche Bestimmung damit übereinstimmt. Dazu aber genügen die folgenden Bemerkungen:

Die Gerade a ist hier bestimmt durch die Punkte x^i und $x^i + dx^i_a$, also durch die Gleichungen

$$\sum_i u^i_a x^i = 0, \quad \sum_i u^i_a (x^i + dx^i_a) = 0.$$

Daraus folgt unter Einführung eines unwesentlichen Proportionalitätsfaktors λ:

$$u^1_a = \lambda \begin{matrix} x^2 x^3 \\ dx^2_a \, dx^3_a \end{matrix} \quad \text{usw.}$$

und das Entsprechende für den Index b. Diese Beziehungen vereinfachen sich, sowie man $x^3 = 1$ und $dx^3_a = dx^3_b = 0$ setzt:

$$u^1_a = -\lambda \, dy_a, \quad u^2_a = \lambda \, dx_a, \quad u^3_a = \lambda (x \, dy_a - y \, dx_a) \qquad (104\text{a})$$

(ebenso für den Index b). Setzt man also in (103a) nach (101)

$$O(u_a u_b) = \frac{1}{k} (u^1_a u^1_b + u^2_a u^2_b) - u^3_a u^3_b,$$

setzt man ferner hier und nach (101) in $O(u^2_a)$ und $O(u^2_b)$ die Werte (104a) ein, so kommt man zur Formel (104); die Winkelbestimmung nach Cayley und nach der Maßbestimmung (96) liefern also dasselbe.

Uns geht hier nur das Innere des absoluten Kegelschnittes an. Die Tangenten k und l von einem dort gelegenen Punkt an ihn sind beide imaginär, deshalb ist auch das Doppelverhältnis (ab, kl) nicht reell. Durch die Wahl des Faktors $\frac{1}{2\sqrt{-1}}$ in (103) haben wir aber erreicht, daß in (103a) rechts nur reelle Größen auftreten; führen nämlich die Geraden a und b beide durchs Innere, so haben $O(u^2_a)$ und $O(u^2_b)$ dasselbe Vorzeichen. In (102) aber muß die Wurzel imaginär, also $O^2(u_a u_b) < O(u^2_a), O(u^2_b)$ sein. Deshalb sind nach (103a) $\cos \varphi < 1$, φ also immer reell.

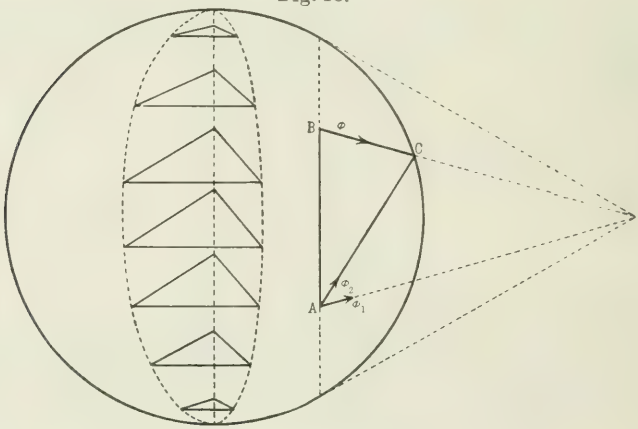
Nur in einem für uns brauchbaren Fall werden die Tangenten k und l reell, wenn nämlich der Schnitt von a und b auf den Kegelschnitt fällt. Dann sind k und l aber dieselbe Gerade. Also ist $(ab, kl) = 1$, und nach (103) $\varphi = 0$. Parallele Gerade schneiden sich im Unendlichen unter dem Winkel 0. Die Meridiankurven der pseudosphärischen Fläche von Fig. 11 sind eine Schar paralleler geodätischer Linien und veranschaulichen diesen Satz. Man kann sie aber nur nach einer

Seite bis ins Unendliche verfolgen, nach der anderen werden sie durch die Kante der Fläche abgeschnitten. Überhaupt gibt keine der pseudosphärischen Flächen in den Fig. 11 und 15a, b die ganze hyperbolische Ebene wieder. Hilbert hat bewiesen, daß das auch dann unmöglich ist, wenn man auf die axiale Symmetrie verzichtet; immer unterbrechen Singularitäten den regelmäßigen Zusammenhang.

Ein Dreieck, dessen Ecken alle auf dem absoluten Kegelschnitt liegen, also im Unendlichen der hyperbolischen Geometrie, hat drei Winkel von Betrage 0. Nach (97) ist sein Inhalt $\frac{\pi}{k}$, das größte, was bei einem Dreieck überhaupt möglich ist.

Wann aber stehen zwei Gerade im Sinn der hyperbolischen Geometrie aufeinander senkrecht? Gleichung (103a) gibt dafür als Kennzeichen $O(u_a u_b) = 0$. Was das geometrisch bedeutet, erkennt man besser an (103). Denn ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so muß

Fig. 18.



$(ab, kl) = -1$ sein. Eine elementargeometrische Überlegung zeigt zunächst für den Fall, daß der Schnittpunkt von a und b außerhalb des Kegelschnitts liegt, die Tangenten k und l somit reell sind, daß dann a durch den Pol der Geraden b und umgekehrt führen muß. Und somit bedeutet die Forderung $O(u_a u_b) = 0$ stets, daß jede der Geraden a und b durch den Pol der anderen geht, auch wenn sie sich im Innern des Kreises schneiden. Fig. 18

zeigt in ihrer rechten Hälfte in BA und BC solche Geraden. Zwei Lote derselben Geraden schneiden sich danach im hyperbolischen Sinn überhaupt nicht, weil sie sich nicht im Innern schneiden. Die Hilfskoordinaten x, y stehen nicht überall aufeinander senkrecht.

Daß es kongruente Figuren gibt, haben wir schon am Ende von § 11 bewiesen. Fig. 18 zeigt eine Reihe kongruenter Dreiecke, welche durch eine Parallelverschiebung auseinander hervorgehen. Der eine Eckpunkt bewegt sich dabei auf einer geraden Linie, die anderen auf den gestrichelt gezeichneten Ellipsenbogen.

Außerdem zeigt Fig. 18 an dem Beispiel des Dreiecks ABC, wie sich ein Vektor bei Parallelverschiebung (vgl. § 11 b) längs der Seiten eines Dreiecks dem Umlaufssinn entgegen dreht. Denn hat er zunächst die Lage $\Phi_{(1)}$ bei A, in welcher er zu AB im hyperbolischen Sinn senkrecht ist, so kommt er bei der Verschiebung längs AB nach B in die ebenfalls zu AB senkrechte Richtung Φ', welche unter den Verhältnissen der Zeichnung mit BC zusammenfällt. Infolgedessen behält er diese Richtung bei der folgenden Verschiebung nach dem im hyperbolisch Unendlichen gelegenen Punkt C. In diesem schneiden sich aber BC und AC unter dem Winkel Null. Der Vektor hat somit auch die Richtung AC und behält diese bei der letzten Parallelverschiebung nach A bei. Er gelangt also schließlich in die Lage $\Phi_{(2)}$.

b) Die elliptische und die euklidische Geometrie der Ebene. Die Maßbestimmung der elliptischen Geometrie unterscheidet sich von der hyperbolischen nur im Vorzeichen von k. Deshalb kann man die Cayleysche Maßbestimmung ohne weiteres auf die elliptische Geometrie übertragen, wenn man nur den reellen Kreis, $-k(x^{1\,2} + x^{2\,2}) + x^{3\,2} = 0$, ersetzt durch den imaginären, $k(x^{1\,2} + x^{2\,2}) + x^{3\,2} = 0$. Zugleich muß man Gleichung (98 a) umformen in

$$\mathfrak{Cof}(\sqrt{-k}\,r) = \cos(\sqrt{k}\,r) = \frac{\Omega(x_a x_b)}{\sqrt{\Omega(x_a^2)\,\Omega(x_b^2)}},$$

und daraus folgt, da nur positive Werte des Cosinus zulässig sind, daß die Geraden die endliche Länge $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ haben. Das haben wir schon auf andere Art in § 11, e) bewiesen.

Zur euklidischen Maßbestimmung kommt man, wenn man in der hyperbolischen oder der elliptischen den Grenzübergang zu $k = 0$ macht. Die euklidische Geometrie ist somit ein gemeinsamer Grenzfall der beiden anderen. Daraus erkennt man, daß jedem Satz der hyperbolischen oder der elliptischen Geometrie ein euklidischer Satz entsprechen muß. Sofern in einer der ersteren Widersprüche steckten, wäre auch die euklidische Geometrie nicht durchführbar. Und darin liegt wohl der überzeugendste Beweis für die Möglichkeit der ersteren. Man darf aber nicht umgekehrt schließen, daß jedem Satze der euklidischen Geometrie einer in der elliptischen oder hyperbolischen entsprechen müßte. Die Ähnlichkeitssätze Euklids z. B. beruhen wesentlich auf dem Wert Null für das Krümmungsmaß k und sind deswegen unübertragbar.

Zum Schluß wollen wir noch erwähnen, daß die Beschränkung auf einen reellen oder imaginären Kreis als absolutes Gebilde kein wesentliches Kennzeichen der elliptischen und hyperbolischen Geometrie ist. Für Cayleys Maßbestimmung kann man irgend einen Kegelschnitt dafür benutzen, und schafft damit eigentlich nichts Neues. Denn durch lineare Substitutionen $x'^i = \sum_k \alpha^i_k x^k$ kann man diesen Kreis stets in eine andere Kurve zweiten Grades überführen. Gerade gehen dabei in Gerade über und das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden und vier Strahlen eines Bündels bleibt erhalten, weil die Koeffizienten α und β der Gleichungen (97 a) und (100 a) dabei ihren Wert behalten. Alle Strecken und Winkel behalten somit für die elliptische bzw. hyperbolische Messung ihren Wert bei. Die Transformation ändert gar nichts an diesen Geometrien, sondern nur die Deutung der Hilfskoordinaten $x^1 : x^2 : x^3$ oder x und y.

c) Elliptische und hyperbolische Geometrie im Raum. Die Cayleysche Maßstimmung läßt sich unmittelbar auf drei Dimensionen übertragen, wenn man unter $x = x^1 : x^4$, $y = x^2 : x^4$, $z = x^3 : x^4$ euklidische kartesische Koordinaten versteht und

$$\Omega(x^2) = \pm k(x^{1\,2} + x^{2\,2} + x^{3\,2}) + x^{4\,2}$$

setzt. Das Zeichen $+$ gilt dabei für die elliptische, $-$ für die hyperbolische Geometrie. Das absolute Gebilde ist in ersterer eine imaginäre, in letzterer eine reelle Kugel. Rechnet man

ähnlich wie oben, d. h. nach Formel (98) oder (98 a), diese Maßbestimmung auf unendlich kleine Strecken um, so findet man

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2 \pm k[(y\,dz - z\,dy)^2 + (z\,dx - x\,dz)^2 + (x\,dy - y\,dx)^2]}{[1 + k(x^2 + y^2 + z^2)]^2} \tag{105}$$

Ebenso gilt die Maßbestimmung (103) oder (103a) für den Winkel, nur daß dieser hier zwischen zwei Ebenen liegt. Denn die homogenen Koordinaten u^i bestimmen hier Ebenen.

Die geodätischen Linien sind auch hier Gerade, denn in jeder Ebene des Raumes gilt eine der oben betrachteten Geometrien. Die Geraden der elliptischen Geometrie haben alle die gleiche Länge $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$, die der hyperbolischen sind unendlich lang. In ersterer gibt es keine, in letzterer in jedem Punkt zu jeder Geraden zwei Parallele, welche die ersten im unendlichen unter dem Winkel Null schneiden. Ähnlichkeit zwischen Figuren verschiedenen Inhalts gibt es nicht, wohl aber bestehen Kongruenzsätze.

Um uns davon zu überzeugen, betrachten wir die lineare Substitution

$$x'^i = \sum_k \alpha^i_k x^k.$$

Da es nur auf die Verhältnisse der vier homogenen Koordinaten x'^1, x'^2, x'^3, x'^4 ankommt, ist ein gemeinsamer Faktor in ihren 16 Koeffizienten ohne Bedeutung, so daß es eine 15fache unendliche Schar derartiger Substitutionen gibt. Andererseits gibt es eine 9fache unendliche Schar von Flächen zweiter Ordnung. Denn in den 10 Koeffizienten, welche die homogene Form $\Omega(x^2)$ im allgemeinen enthält, ist wieder ein gemeinsamer Faktor ohne Bedeutung. Nun bestimmen wir die Koeffizienten jener Substitution so, daß das absolute Gebilde dabei in sich selbst überführt wird, d. h. daß $\Omega(x'^2) = \lambda\,\Omega(x^2)$ ist. Dann behalten wir noch sechs Freiheitsgrade. Und jede der so bestimmten Substitutionen stellt eine Transformation des Innern des absoluten Kegelschnitts in sich selbst, dagegen eine Bewegung aller in ihm liegenden Figuren dar. Dabei geht aber jede Gerade wieder in eine Gerade über und Doppelverhältnisse zwischen vier Punkten bleiben erhalten, also auch die Längen aller Strecken. Somit geschieht diese Bewegung ohne Formänderung, jede Figur wird in eine ihr kongruente überführt; wie im euklidischen Raum hat jede Bewegung ohne Formänderung noch sechs Freiheitsgrade.

Ob wir als absolutes Gebilde eine Kugel oder eine andere Fläche zweiter Ordnung betrachten, ist im Grunde gleichgültig und betrifft nur die Deutung der Hilfskoordinaten x, y, z. Nur muß diese Fläche im elliptischen Fall immer imaginär, im hyperbolischen stets reell sein.

Wir beschäftigen uns noch ein wenig mit der Maßbestimmung (105) mit dem positiven Vorzeichen, die, wie gesagt, für die elliptische Geometrie in drei Dimensionen gilt. Die Substitution

$$X = \frac{1}{\sqrt{k}} tg\,\Theta \cos\vartheta, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{k}} tg\,\Theta \sin\vartheta \cos\varphi, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{k}} tg\,\Theta \sin\vartheta \sin\varphi$$

macht daraus vermöge derselben Rechnung, welche in § 11 die beiden Formen der Maßbestimmung (93) ineinander überführte:

$$d s^2 = \frac{1}{k} \left[d\,\Theta^2 + \sin^2\Theta \left(d\,\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\,\varphi^2 \right) \right] \quad . \quad . \quad (105\,\mathrm{a})$$

Dieselbe Gleichung findet man aber, wenn man von der vierdimensionalen euklidischen Maßbestimmung

$$d s^2 = d X^2 + d Y^2 + d Z^2 + d U^2$$

ausgehend

$$X = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\Theta \cos\vartheta, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\Theta \sin\vartheta \cos\varphi,$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\Theta \sin\vartheta \sin\varphi, \quad U = \frac{1}{\sqrt{k}} \cos\Theta$$

setzt. Da nach den letzten Formeln zwischen X, Y, Z und U die Beziehung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2 = \frac{1}{k}$$

besteht, so gilt der Satz: Die elliptische Geometrie des Raumes ist dieselbe wie die in einem dreidimensionalen Kugelraum in einer vierdimensionalen euklidischen Mannigfaltigkeit, dessen Halbmesser $\frac{1}{\sqrt{k}}$ ist. Es liegt hierin eine Ausnahme von der Regel, daß man einen dreidimensionalen, nichteuklidischen Raum erst dann in eine euklidische Mannigfaltigkeit einbetten kann, wenn man letzterer sechs Dimensionen gibt (§ 5).

Die Determinante des in (105a) auftretenden Maßtensors ist gleich

$$\frac{1}{k^3} \sin^4\Theta \sin^2\vartheta.$$

Nach § 6, d) ist infolgedessen die Größe des Volumenelementes

$$\frac{1}{k^{3/2}} \sin^2 \Theta \sin \vartheta \; d\Theta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Um den ganzen Raum auszuwerten, der sich von dem Punkt $\Theta = 0$ aus bis zur Fläche $\Theta = \Theta_a$ erstreckt, haben wir hier nach φ von 0 bis 2π, nach ϑ von 0 bis π und nach Θ von 0 bis Θ_a zu integrieren. Das liefert für das Volumen dieser „Kugelkalotte“

$$\frac{2\pi}{k^{3/2}} \left(\Theta_a - \frac{1}{2} \sin 2\Theta_a \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (105\,\mathrm{b})$$

Das Volumen des ganzen Kugelraumes erhält man daraus, indem man $\Theta_a = \pi$ setzt:

$$\frac{2\pi^2}{k^{3/2}}.$$

V. Die Grundgesetze der Physik in der allgemeinen Relativitätstheorie.

§ 13. Allgemeine Bemerkungen.

Die mathematischen Hilfsmittel von Teil III verwenden wir jetzt, um die grundlegenden physikalischen Gesetze in Form von Differentialgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie anzupassen. Wir suchen sie dabei als Gleichungen für Welttensoren zu schreiben. Doch wollen wir sogleich bemerken, daß uns dies im Gegensatz zur besonderen Relativitätstheorie nicht durchgängig gelingt. Immerhin wird man auch bei diesen Abweichungen aus der Ableitung ersehen, daß wir keine beschränkende Annahme über das Koordinatensystem einführen. Zunächst seien einige allgemeine Bemerkungen gemacht.

Wir setzen als Fundamentalform der Maßbestimmung

$$d\tau^2 = \sum_{ik} g_{ik} \, dx^i \, dx^k$$

an; mit positivem g_{44}. Unter $t = \frac{x^4}{c}$ verstehen wir stets die für das betreffende System gültige Zeit, wobei wir aber

keineswegs an die übliche, in Sekunden zu messende Größe zu denken brauchen, sondern diese noch mit irgendwelchen Faktoren von physikalischen Dimensionen multipliziert denken können. c soll immer der Normalwert der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum, also $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec sein. Zum Grenzfall der besonderen Relativitätstheorie führt es, wenn wir $g_{44} = +1$, die anderen $g_{ii} = -1$, die g_{ik} mit verschiedenen Zeigern als Null annehmen. In dieser Festsetzung liegt ein Vorzeichenwechsel gegenüber dem in Bd. I gebrauchten Ansatz $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$ für die grundlegende Invariante. Er bewirkt, daß im Gegensatz zu früher alle zeitartigen Vierervektoren ein positives Quadrat des absoluten Wertes erhalten, die raumartigen ein negatives.

Sodann wollen wir uns über die Dimensionen der vorkommenden Größen verständigen. Es entspricht der Allgemeinheit der Koordinatenwahl, wenn wir jeder Koordinate x^i eine eigene Dimension X_i geben, desgleichen dem $d\tau$ eine eigene Dimension τ. Dann gilt die folgende Tabelle:

$$\left.\begin{aligned} &[g_{ik}] = \tau^2 (X_i X_k)^{-1}, \left[\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}\right] - (X_i X_k)^{-1} X_l, [R_{ik}] \quad (X_i X_k)^{-1}, \\ &[g^{ik}] = \tau^{-2} X_i X_k, \; [R_{iklm}] - \tau^2 (X_i X_k X_l X_m)^{-1}, \; [R] = \tau^{-2}. \end{aligned}\right\} \quad (106)$$

[Vgl. hierzu die Formeln (53) und (54), (79), (80) und (81).] Für alle Größen, welche einen Welttensor bilden, besteht die Regel, daß für jeden oberen Zeiger i in ihren Dimensionen $\tau^{-2} X_i$, für jeden unteren Zeiger k aber $\tau^2 X_k^{-1}$ auftritt. Denn nach (32) bzw. (40b) entspricht jedem oberen Zeiger bei der Herleitung aus gemischten Komponenten ein Faktor g^{ik}, jedem unteren ein Faktor g_{ik}. Von den Dimensionen der Masse, Länge, Zeit und Temperatur können sie noch in irgend einer Art abhängen; wie, findet man am einfachsten durch Betrachtung solcher gemischten Komponenten, welche dieselben Zeiger oben und unten tragen (z. B. T_i^i); diese sind von den Dimensionen X_i nämlich unabhängig. Skalare, also auch alle universellen Konstanten, haben mit den Dimensionen X_i nichts zu tun, wohl aber können sie noch von der Dimension τ abhängen; dies gilt z. B. von der Konstanten $\varkappa$ in der Grundgleichung (144) des Schwerefeldes.

Wir wollen übrigens im folgenden die Allgemeinheit dadurch ein wenig beschränken, daß wir $d\tau$ und x^4 als Länge betrachten ($\tau = l$). Dann werden g_{44} und g^{44} reine Zahlen.

Wir nehmen hier vorweg, daß hier wie in der pseudoeuklidischen „Welt“ der beschränkten Relativitätstheorie die Fortpflanzung des Lichtes durch die geodätischen Nullinien gegeben wird. Den Beweis erbringen wir in § 14, d). Darum behielt ja auch die Einteilung der „Welt“ durch den Vor- und Nachkegel eines Weltpunktes, die wir in § 7 vornahmen, dieselbe Bedeutung wie früher. In solchen Koordinatensystemen, in welchen gemäß den Bedingungen (49)

$$d\tau^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx^i\, dx^k = g_{44}\, dx^{4\,2} - ds^2 \quad . \quad . \quad (106\text{a})$$

ist, und die wir in den Beispielen zur allgemeinen Theorie ausschließlich verwenden werden, gilt für die Lichtstrahlen demgemäß:

$$d\tau^2 = 0, \qquad \frac{ds}{dt} = c\sqrt{g_{44}}.$$

Danach ist $c\sqrt{g_{44}}$ die Lichtgeschwindigkeit, sie verändert sich natürlich im allgemeinen mit dem Ort und der Zeit. Sie hat aber keine unmittelbare physikalische Bedeutung, weil eben die Willkür der Wahl von x^4 noch in ihr steckt. Sie kann nicht als „natürlich“ gemessene Geschwindigkeit bezeichnet werden.

Will man die Lichtgeschwindigkeit so messen, daß man vom Ort einer im gewählten Koordinatensystem ruhenden Uhr ein Lichtsignal über die Strecke $\frac{1}{2}\, ds$ nach einem Spiegel sendet, der es zurückwirft, und an der Uhr die Zeigerstellungen bei Abgang und Wiederkehr des Zeichens abliest, so findet man, da die Zeiger inzwischen um den Zuwachs der Eigenzeit $\frac{1}{c}\sqrt{g_{44}}\, dx^4$ fortgerückt sind, immer den Bereich c. Als Differentiale ds und dx^4 können wir aber jeden Bereich nehmen, wenn nur in ihm die g_{ik} sich nicht merklich ändern. Die Messung der Lichtgeschwindigkeit in Bereichen unveränderlicher g_{ik} liefert daher immer den Wert c.

In Koordinatensystemen, in denen die Bedingungen (49) nicht erfüllt sind, läßt sich aus der Gleichung

$$d\tau^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx^i\, dx^k = g_{44}\, dx^{4\,2} + 2\sum_{i=1}^{3} g_{i4}\, dx^i\, dx^4 - ds^2 = 0$$

keine von der Strahlrichtung unabhängige Lichtgeschwindigkeit berechnen.

Unter der Vierergeschwindigkeit verstehen wir in engem Anschluß an Bd. I, Gl. (83), den Vektor:

$$Y^i = \frac{dx^i}{d\tau} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \; . \; . \; . \; . \quad (107)$$

$d\tau$ ist irgend ein Linienelement, die dx^i seine Komponenten. Sein absoluter Wert ist stets

$$Y = \sqrt{\sum_{ik} g_{ik} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau}} = +1 \; . \; . \; . \; . \quad (108)$$

Der räumlichen Geschwindigkeit geben wir dagegen die kontravarianten Komponenten

$$\mathfrak{q}^i = \frac{dx^i}{dt} = c\,\frac{dx^i}{dx^4} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Dann ist ihr absoluter Betrag

$$q = \sqrt{-\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt}},$$

der Quotient aus dem natürlich gemessenen räumlichen Linienelement

$$ds = \sqrt{-\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\, dx^i\, dx^k}$$

und der Zeit dt, die zu seiner Durchlaufung gebraucht wird. Wegen der Willkür in der Festsetzung der Zeit t hat dieser Vektor keine unmittelbare Bedeutung für die physikalische Messung. Man könnte diese etwa so vornehmen, daß man einen Massenpunkt zwischen zwei Orten laufen läßt, die sich in den räumlichen Koordinaten um die dx^i unterscheiden und in denen an zwei gleichen, synchron gestellten Uhren die Zeigerstellungen für den Augenblick des Abgangs und der Ankunft abliest. Da die Zeiger die Eigenzeit angeben, findet man so die Größen $\mathfrak{q}^i : \sqrt{g_{44}}$ als natürlich gemessene Geschwindigkeitskomponenten. Steht die Zeitachse auf den Räumen $x^4 = const$ senkrecht [siehe die Bedingungen (49)], so ist

$$Y^1 = \frac{\mathfrak{q}^1}{\sqrt{g_{44}\, c^2 - q^2}}, \; \cdots, \quad Y^4 = \frac{c}{\sqrt{g_{44}\, c^2 - q^2}} \; . \; . \quad (109)$$

Unter dem Ruhsystem eines Körperelementes verstehen wir ein Bezugssystem K^0, in welchem seine räumlichen Koordinaten unverändert bleiben. Und zwar stellen wir diese Forderung wegen der grundsätzlichen Gleichwertigkeit der kontra- und der kovarianten Koordinaten für beide Arten. Es sind dann sowohl die Y^{0i}, als die $Y_i^0 = 0$, sofern $i = 1, 2, 3$ ist. Beides verträgt sich miteinander nur, wenn die Bedingungen (49) erfüllt sind, d. h. wenn die Zeitachse auf den Streckenräumen $x^4 = const$ senkrecht steht; das folgt aus den Gleichungen $Y_i = \sum_k g_{ik} Y^k$ oder aus der geometrischen Bedeutung der beiden Koordinatenarten (§ 6). Die vierten Komponenten haben hingegen wegen $|Y| = 1$ [siehe (108)] die Werte:

$$Y^{04} = \frac{1}{\sqrt{g_{44}^0}}, \qquad Y_4^0 = \frac{1}{\sqrt{g^{044}}} = (Y^{04})^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

Die Lorentz-Kontraktion läßt sich für Koordinatensysteme, in welchen die Zeitachse auf den Streckenräumen senkrecht steht, genau so ableiten, wie in der beschränkten Relativitätstheorie. Denn führt man für einen Weltpunkt ein geodätisches Koordinatensystem X^i ein, und zwar ein rechtwinkeliges, bei dem auch noch die X^4-Richtung mit der x^4-Richtung des ursprünglichen Systems zusammenfällt, so wird in ihm (bei geeigneter Wahl der Einheiten für die X^i) für den betreffenden Weltpunkt

$$d\tau^2 = dX^{4^2} - dX^{1^2} - dX^{2^2} - dX^{3^2}.$$

Ein dagegen bewegtes Koordinatensystem der in Rede stehenden Art geht aus diesem durch eine Lorentz-Transformation hervor, die als lineare und orthogonale Transformation wieder zu einem orthogonalen geodätischen System führt.

Ebenso beweist man hier den Satz vom langsamen Gang einer bewegten Uhr gegenüber einer am gleichen Ort ruhenden, nach dem Vorbild von § 7 in Bd. I.

Aber auch zwei Uhren, welche im gleichen Koordinatensystem an verschiedenen Orten a und b ruhen, zeigen verschiedenen Gang. Für sie ist nämlich das Differential der Eigenzeit $d\vartheta = \sqrt{g_{44}}\, dt$. Es sei $g_{44}^b < g_{44}^a$. Auf die Zeit t bezogen, geht dann die bei b liegende Uhr gegen die andere nach.

§ 14. Das elektromagnetische Feld.

a) Die Maxwellschen Gleichungen. Unter allen Gebieten der Physik läßt sich die Elektrodynamik am einfachsten auf die allgemeine Relativitätstheorie übertragen. Man kann alle ihre Grundgleichungen ohne oder mit geringer Veränderung aus Bd. I übernehmen. Allerdings müssen wir bemerken, daß wir dabei nicht mit zwingenden Schlüssen arbeiten. Besonders bei der Umgestaltung der Gleichungen, welche die Körperkonstanten, nämlich Dielektrizitätskonstante, Permeabilität und Leitfähigkeit, einführen, werden wir sehen, daß verschiedene Formeln dafür mathematisch möglich wären, die in der besonderen Relativitätstheorie alle auf dasselbe hinauslaufen. Insofern müssen wir uns von einem gewissen Gefühl für den physikalischen Sinn der Gleichungen leiten lassen.

Die Grundgleichungen für die Elektrodynamik der Körper haben wir in Bd. I am Ende von § 22 in den Formeln (XVII) bis (XX) und in (XXIII) zusammengestellt. Die beiden ersten davon laden zu unveränderter Übertragung ein, da die Begriffe $\Delta iv^* \mathfrak{M}$ und $\Delta iv\, \mathfrak{B}$ nach § 9, Gleichung (68a) und (73d), auch jetzt ihre Bedeutung haben *). Wir setzen also:

$$\left.\begin{aligned} \Delta iv^* \mathfrak{M} &= 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \mathfrak{M}_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} = 0; \\ \Delta iv\, \mathfrak{B} &= P \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\, \mathfrak{B}^{jk}\right)}{\partial x^k} = P^j \end{aligned}\right\} \cdot\cdot \quad (111)$$

Nach (73d) ist P danach ein Vierervektor; wir können ihn ähnlich wie früher als Viererstrom bezeichnen und seine kontravarianten Komponenten entsprechend Gl. (235) in Bd. I mit dem Leitungsstrom $\mathfrak{J}$, der elektrischen Raumdichte ϱ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ in die Beziehungen setzen:

$$P^1 = \frac{1}{c}(\mathfrak{J}^1 + \varrho\, \mathfrak{q}^1)\sqrt{g^{44}}, \quad \cdots, \quad P^4 = \varrho \sqrt{g^{44}} \quad . \quad . \quad (112)$$

Den Sechservektor $\mathfrak{M}$ des Feldes und den der Verschiebung, $\mathfrak{B}$, werden wir dann aus der elektrischen Feldstärke und Verschiebung, den Raumvektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, sowie aus den entsprechenden

*) In Formel (XXIII) steht $\Delta iv\, \mathfrak{M}^*$. Diese Bezeichnung wäre hier mißverständlich und ist deswegen nach § 9, a) durch $\Delta iv^* \mathfrak{M}$ zu ersetzen.

magnetischen Vektoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$, in der folgenden Art abzuleiten haben:

$$\left.\begin{array}{lll}
\mathfrak{M}_{14} = \mathfrak{E}_1, & \mathfrak{M}_{24} = \mathfrak{E}_2, & \mathfrak{M}_{34} = \mathfrak{E}_3, \\
\mathfrak{M}_{23} = \mathfrak{B}_{23}, & \mathfrak{M}_{31} = \mathfrak{B}_{31}, & \mathfrak{M}_{12} = \mathfrak{B}_{12}, \\
\mathfrak{B}^{14} = -\sqrt{g^{44}}\,\mathfrak{D}^1, & \mathfrak{B}^{24} = -\sqrt{g^{44}}\,\mathfrak{D}^2, & \mathfrak{B}^{34} = -\sqrt{g^{44}}\,\mathfrak{D}^3, \\
\mathfrak{B}^{23} = \sqrt{g^{44}}\,\mathfrak{H}^{23}, & \mathfrak{B}^{31} = \sqrt{g^{44}}\,\mathfrak{H}^{31}, & \mathfrak{B}^{12} = \sqrt{g^{44}}\,\mathfrak{H}^{12}.
\end{array}\right\} \tag{113}$$

Dabei kommt dann der schon längst bekannte, aber bei der ausschließlichen Verwendung orthogonaler Koordinaten in euklidischen Räumen verwischte Unterschied zwischen der physikalischen Natur der elektrischen und magnetischen Vektoren zum Ausdruck. Erstere sind nach § 6, g) richtige (Strecken- oder polare) Vektoren, letztere hingegen antisymmetrische Tensoren zweiten Ranges oder Flächenvektoren. In der Tat nehmen bei dieser Deutung von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{B}$ und P die Grundgleichungen die Form an:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \mathfrak{E}_3}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial x^3} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathfrak{B}_{23}}{\partial t} \\
\qquad\qquad \text{usw.} \\
\dfrac{\partial \mathfrak{B}_{23}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial \mathfrak{B}_{31}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial \mathfrak{B}_{12}}{\partial x^3} = 0 \\
\dfrac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{-gg^{44}}\,\mathfrak{H}^{12}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{-gg^{44}}\,\mathfrak{H}^{13}\right) \\
\qquad = \dfrac{1}{c}\left\{\sqrt{-gg^{44}}\,(\mathfrak{J}^1 + \varrho\,\mathfrak{q}^1) + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{-gg^{44}}\,\mathfrak{D}^1\right)\right\} \\
\qquad\qquad \text{usw.} \\
\dfrac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{-gg^{44}}\,\mathfrak{D}^1\right) + \dfrac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{-gg^{44}}\,\mathfrak{D}^2\right) + \dfrac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{-gg^{44}}\,\mathfrak{D}^3\right) \\
\qquad\qquad = \sqrt{-gg^{44}}\,\varrho
\end{array}\right\} \tag{114}$$

$-gg^{44}$ ist der absolute Betrag der Determinante aus denjenigen g_{ik}, welche den Zeiger 4 nicht tragen; diese Größe spielt für den dreidimensionalen Streckenraum dieselbe Rolle, wie g für die vierdimensionale Welt. In sinngemäßer Übertragung der Begriffe,

die wir in § 9 für letztere eingeführt haben, können wir die letzten Gleichungen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} rot\,\mathfrak{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \qquad \mathfrak{Div}\,\mathfrak{B} = 0 \\ \mathfrak{div}\,\mathfrak{H} &= \frac{1}{c}\left[\mathfrak{J} + \varrho\mathfrak{q} + \frac{1}{\sqrt{-gg^{44}}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{-gg^{44}}\,\mathfrak{D}\right)\right] \\ & \qquad div\,\mathfrak{D} = \varrho \end{aligned}\right\} \quad (114a)$$

Dabei ist $\mathfrak{Div}\,\mathfrak{B}$ die tensorielle Divergenz von $\mathfrak{B}$. Ist die „Welt" pseudoeuklidisch, so können wir sie durch Einführung rechtwinkeliger Koordinaten ohne weiteres in die Maxwellschen Gleichungen überführen. Denn der Streckenvektor $\mathfrak{div}\,\mathfrak{H}$, definiert durch die (übertragene) Formel (73d), ist dasselbe, was man gewöhnlich, wenn man $\mathfrak{H}$ nicht als Flächenvektor kennzeichnet, als $rot\,\mathfrak{H}$ schreibt.

Gleichung (XX) von Bd. I, in welcher μ die magnetische Permeabilität bedeutet, findet wohl ihre sinngemäße Übertragung in den Formeln:

$$Y_4\mathfrak{M}_{23} + Y_2\mathfrak{M}_{34} + Y_3\mathfrak{M}_{42} = \mu(Y_4\mathfrak{B}_{23} + Y_2\mathfrak{B}_{34} + Y_3\mathfrak{B}_{42}) \quad (115)$$

usw. Dann stehen auf beiden Seiten nach (45) vollständig antisymmetrische Tensoren dritten Ranges. Dagegen wird man bei der Übertragung von (XXIII), wobei σ die elektrische Leitfähigkeit bedeutet, wohl bei der Benutzung von Vektoren bleiben müssen. Im nichtleitenden Körper wäre nach (112) nämlich

$$P = \varrho^0 Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (115a)$$

denn im Ruhsystem K^0 ist nach (110) $Y^{04} = \sqrt{g^{044}}$, so daß dieser Ansatz in Übereinstimmung mit (112) liefert:

$$P^{01} = P^{02} = P^{03} = 0, \quad P^{04} = \varrho^0\sqrt{g^{044}}.$$

In diesem Fall hat also P die Richtung von Y. Beim Leiter aber tritt zu dem durch $\varrho^0 Y$ gegebenen Konvektionsstrom noch der Leitungsstrom und schafft eine zu Y senkrechte Komponente von P, wie man sogleich bei Benutzung des Ruhsystems einsieht. Diese Komponente ist hier $P - (YP)Y$; der Vorzeichenwechsel gegenüber Bd. I rechtfertigt sich daraus, daß hier infolge des Vor-

zeichenwechsels in der Maßbestimmung $Y = +1$ ist. Für sie gelten die Gleichungen

$$-[P_i - (YP)\,Y_i] = \frac{\sigma}{c} \sum Y^k \mathfrak{M}_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (116)$$

Die rechts auftretende Summe entspricht der Kraft, welche die Leitungselektronen in Bewegung setzt*). Dieselbe Kraft wirkt aber auch auf alle anderen Elektronen, muß also auch die elektrische Polarisation hervorrufen. Darum schreiben wir Gl. (XIX) aus Bd. I, in welcher ε die Dielektrizitätskonstante bedeutet, jetzt um in die Formeln

$$\sum_k Y^k \mathfrak{V}_{ik} = \varepsilon \sum_k Y^k \mathfrak{M}_{ik} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \quad . \quad . \quad (117)$$

Für den leeren Raum, d. h. $\varepsilon = \mu = 1$, folgt aus (115) und (117) notwendig $\mathfrak{M} = \mathfrak{V}$. Nach § 6, g) aber dürfen wir daraus nicht ohne weiteres auf die Übereinstimmung von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, sowie von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ schließen; nur wenn die Bedingungen (49) erfüllt sind, die Zeitachse also auf den Streckenräumen senkrecht steht, gilt

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E}\sqrt{g^{44}}, \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{H}\sqrt{g^{44}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (118)$$

Ist hingegen ε und μ von 1 verschieden, so folgt für das Ruhsystem aus (115) und (117)

$$\mathfrak{D}^0 = \varepsilon\sqrt{g^{0\,44}}\,\mathfrak{E}^0, \qquad \mathfrak{B}^0 = \mu\sqrt{g^{0\,44}}\,\mathfrak{H}^0,$$

ebenso folgt aus (116)

$$\mathfrak{J}^0 = \sigma\,\mathfrak{E}^0.$$

b) Die Erhaltung der Elektrizitätsmenge. Nach Rechnungsregel (74) schließen wir aus der zweiten der Gleichungen (111) genau wie früher auf

$$Div\,P = 0.$$

Darin liegt das Gesetz von der Erhaltung der Elektrizitätsmenge. Denn setzen wir nach Gleichung (73) und (112)

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{-g}\,Div\,P = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\left(\sqrt{-g g^{44}}\,(\mathfrak{J}^1 + \varrho\,\mathfrak{q}^1)\right)}{\partial x^1} + \cdots\right) \\ + \frac{\partial\left(\sqrt{-g g^{44}}\,\varrho\right)}{\partial x^4} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (118\,\mathrm{a})$$

*) Vgl. Formel (129).

so schließen wir weiter durch Integration über einen Bereich im dreidimensionalen Streckenraum eines beliebigen Bezugssystems, dessen Begrenzung von x^4 unabhängig ist:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\sqrt{-gg^{44}}\,\varrho\,dx^1\,dx^2\,dx^3 = \int\sqrt{-gg^{44}}\,[\pm(\mathfrak{J}^1+\varrho\,\mathfrak{q}^1)\,dx^2\,dx^3 + (\mathfrak{J}^2+\varrho\,\mathfrak{q}^2)\,dx^3\,dx^1 + (\mathfrak{J}^3+\varrho\,\mathfrak{q}^3)\,dx^1\,dx^2].$$

$\sqrt{-gg^{44}}\,dx^1\,dx^2\,dx^3$ ist nach § 6 das natürlich gemessene Volumen dS des Streckenraumes, das links stehende Integral daher die elektrische Ladung des Integrationsbereiches. Rechts aber kann man in Übertragung der Betrachtung von § 9, c) auf drei Dimensionen — wobei $-g\,.\,g^{44}$ naturgemäß an die Stelle von $-g$ tritt — $\int(\mathfrak{J}^n+\varrho\,\mathfrak{q}^n)\,d\sigma$ schreiben, indem man unter $d\sigma$ das natürlich gemessene Element der Begrenzung versteht. Denn denken wir uns den Vektor $\mathfrak{J}+\varrho\,\mathfrak{q}$ als Strecke dargestellt, so gibt $(\mathfrak{J}^n+\varrho\,\mathfrak{q}^n)\,d\sigma$ einfach das Volumen des von ihm über $d\sigma$ errichteten Zylinders an, ebenso, wie der rechts auftretende Integrand. Wir schließen also auf die Kontinuitätsgleichung der Elektrizitätsmenge:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \int(\mathfrak{J}^n+\varrho\,\mathfrak{q}^n)\,d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (118\text{b})$$

e ist dabei die Ladung eines bestimmten Raumteiles. Diese Betrachtung rechtfertigt u. a. die Einführung des Faktors $\sqrt{g^{44}}$ in Gleichung (112).

Der Ladungszuwachs $de\,dt$, welchen das Stück δV eines Körpers in der Zeit dt erfährt, erhalten wir, wenn wir von der Ladungsänderung $\partial e/\partial t$ des von δV einen Augenblick hindurch eingenommenen Raumteiles die Änderung abziehen, welche allein durch die Bewegung des Körpers bewirkt wird; dies ist aber $\int\varrho\,\mathfrak{q}^n\,d\sigma$*). Es folgt daher wie früher aus der Kontinuitätsgleichung der Erhaltungssatz:

$$\frac{de}{dt} = \int\mathfrak{J}^n\,d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119)$$

Im Nichtleiter ist danach die Ladung jedes Körperstücks unveränderlich in einem und demselben Bezugssystem.

---

*) Die Betrachtung, welche in Bd. I, Anhang c) zu Rechnungsregel ϱ' führt, läßt sich unverändert auf nichteuklidische Mannigfaltigkeiten übertragen. Wir hätten den im Text gezogenen Schluß deswegen auch an diese Regel anknüpfen können.

Denselben Schluß kann man natürlich auch so ziehen, daß man $\int Div\, P\, d\Sigma$ bildet für einen Teil der Weltröhre des Körperelementes, der von zwei Schnitten $x^4 = a$ und $x^4 = b$ begrenzt ist, und die Umformung (75a) anwendet. Die dort auftretende Determinante verschwindet, sofern wir an Teile des Röhrenmantels denken, denn beim Nichtleiter liegt nach (117) der Viererstrom parallel zum Mantel, also im Raume der drei Verschiebungen $d_{\mathrm{I}} x^i$, $d_{\mathrm{II}} x^i$, $d_{\mathrm{III}} x^i$. Es bleibt somit die Differenz zweier Integrale

$$-\int \sqrt{-g} \begin{vmatrix} P^1 & P^2 & P^3 & P^4 \\ d_{\mathrm{I}} x^1 & d_{\mathrm{I}} x^2 & d_{\mathrm{I}} x^3 & d_{\mathrm{I}} x^4 \\ d_{\mathrm{II}} x^1 & d_{\mathrm{II}} x^2 & d_{\mathrm{II}} x^3 & d_{\mathrm{II}} x^4 \\ d_{\mathrm{III}} x^1 & d_{\mathrm{III}} x^2 & d_{\mathrm{III}} x^3 & d_{\mathrm{III}} x^4 \end{vmatrix}$$

stehen, von denen jedes über einen der beiden Querschnitte zu erstrecken ist, und diese Differenz ist Null. Hier vereinfacht sich der Integrand, da die Komponenten $d_{\mathrm{I}} x^4$, $d_{\mathrm{II}} x^4$, $d_{\mathrm{III}} x^4$ verschwinden, zu

$$\sqrt{-g}\, P^4 \begin{vmatrix} d_{\mathrm{I}} x^1 & d_{\mathrm{I}} x^2 & d_{\mathrm{I}} x^3 \\ d_{\mathrm{II}} x^1 & d_{\mathrm{II}} x^2 & d_{\mathrm{II}} x^3 \\ d_{\mathrm{III}} x^1 & d_{\mathrm{III}} x^2 & d_{\mathrm{III}} x^3 \end{vmatrix} = \sqrt{-g g^{44}}\, \varrho \begin{vmatrix} d_{\mathrm{I}} x^1 & d_{\mathrm{I}} x^2 & d_{\mathrm{I}} x^3 \\ d_{\mathrm{II}} x^1 & d_{\mathrm{II}} x^2 & d_{\mathrm{II}} x^3 \\ d_{\mathrm{III}} x^1 & d_{\mathrm{III}} x^2 & d_{\mathrm{III}} x^3 \end{vmatrix}$$

$$= \varrho\, d\, S.$$

$d\, S$ ist dabei das natürlich gemessene Volumenelement, $\varrho\, d\, S$ also die Ladung des Körpers zur Zeit $x^4 = a$ bzw. $x^4 = b$. Diese beiden Werte sind einander gleich.

Die Ladung e eines nichtleitenden Körpers ist aber auch eine Invariante der Koordinatentransformation. Denn führen wir zwei beliebige Bezugssysteme K und K' ein, so können wir immer ein drittes, K'', so bestimmen, daß innerhalb der Weltröhre des Körpers der Streckenraum $x^4 = a$ von K zusammenfällt mit dem Raum $x''^4 = a''$ von K'', und der Raum $x'^4 = b'$ mit $x''^4 = b''$. Dann können wir einmal auf $e = e''$, das andere Mal auf $e' = e''$ schließen, und zwar ohne Beschränkung auf bestimmte Zeitpunkte, da ja in jedem System e zeitlich unveränderlich ist. Also folgt auch $e = e'$.

Nach (119) ist $\mathfrak{J}^n$ die Elektrizitätsmenge, welche durch die Einheitsfläche, sofern diese zu n senkrecht steht, in der Einheit der Zeit t hindurchgeht. Diese Größe ist mit derselben Willkür

behaftet, wie t. Mißt man den Strom etwa mit einem Silbervoltameter und einer daneben stehenden Uhr, so erhält man statt dessen diese Elektrizitätsmenge für die Einheit der Eigenzeit; somit ist $\frac{1}{\sqrt{g_{44}}}\mathfrak{J}$ die natürlich gemessene Stromdichte. In Systemen, in denen die Zeitachse auf den Streckenräumen senkrecht steht, ist dies wegen $g_{44}g^{44} = 1$ gerade gleich dem in (112) auftretenden Produkt $\mathfrak{J}\sqrt{g^{44}}$. Dann ist auch $\varrho\mathfrak{q}\sqrt{g^{44}}$ der natürlich gemessene Konvektionsstrom.

c) Die Integralgesetze des elektromagnetischen Feldes. Um das Induktionsgesetz, welches die erste der Gleichungen (114a) enthält, in der Integralform hinzuschreiben, bezeichnen wir mit $d\sigma^{ik}$ die Komponenten des als Vektor gedachten Elementes einer Fläche; es lautet dann

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\bigcirc}\sum_{i=1}^{3}\mathfrak{E}_i\,dx^i = -\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\int\sum_{i,k=1}^{3}\mathfrak{B}_{ik}\,d\sigma^{ik}, \\ &\text{oder wenn man die Summen als skalare Produkte schreibt} \\ &\int_{\bigcirc}(\mathfrak{E}\,ds) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int(\mathfrak{B}\,d\sigma). \end{aligned}\right\} \quad (120)$$

Das links stehende Linienintegral ist, wie üblich, über die ganze Berandung der Fläche zu erstrecken, über welche rechts integriert wird. Der Beweis ist sehr einfach, wenn man die Integrationsfläche zum Teil der Fläche $x^1 = const$ macht. Um die entsprechende Gleichung für $\mathfrak{H}$, ausgehend von der dritten der Gleichungen (114, a), aufzustellen, unterscheiden wir an jedem Linienelement der Berandung zwei zu ihm und untereinander senkrechte Richtungen n und m, von denen die erste das Lot des angrenzenden Flächenelements darstellen mag. Dann lautet sie

$$\int_{\bigcirc}\mathfrak{H}^{nm}\,ds = \frac{1}{c}\left[\int(\mathfrak{J}^n + \varrho\,\mathfrak{q}^n)\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial t}\int\mathfrak{D}^n\,d\sigma\right] \quad . (121)$$

Die Integration der beiden Formeln, welche sich auf die tensorielle Divergenz von $\mathfrak{B}$ und die skalare von $\mathfrak{D}$ beziehen, über einen geschlossenen Raum ergibt:

$$\int(\mathfrak{B}\,d\sigma) = 0, \qquad -\int\mathfrak{D}^n\,d\sigma = \ldots\ldots \quad (122)$$

Wendet man (121) auf eine geschlossene Fläche an, so findet man wiederum den Erhaltungssatz der Elektrizität. Wir zogen zu dessen Ableitung den obigen Weg vor, weil wir ihn später bei dem Energiesatz noch einmal brauchen.

In den Gleichungen (120) und (121) könnte noch das Auftreten der Zeitveränderlichen t stören. Wendet man sie auf Koordinatensysteme an, in denen die Zeitachse zu den Streckenräumen senkrecht steht, und auf Bereiche, in denen sich g_{44} nicht merklich verändert, so kann man statt dessen die Eigenzeit ϑ einer im gleichen System ruhenden Uhr einführen und schreiben:

$$\int \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} (\mathfrak{E}\, d s) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \int (\mathfrak{B}\, d \sigma),$$

$$\int \frac{\mathfrak{H}^{mn}}{\sqrt{g_{44}}} d s = \frac{1}{c} \left[\int \frac{\mathfrak{J}^n + \varrho \mathfrak{q}^n}{\sqrt{g_{44}}} d \sigma + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \int \mathfrak{D}^n d \sigma \right].$$

Wir werden in Abschnitt c dieses Paragraphen sehen, daß in der ponderomotorischen Kraft, durch die man doch die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ mißt, diese wiederum mit dem Faktor $g_{44}^{-1/2}$ auftreten, so daß man $\mathfrak{E}/\sqrt{g_{44}}$ und $\mathfrak{H}\sqrt{g_{44}}$ als die natürlich gemessenen Feldstärken zu bezeichnen hat, wie wir schon oben $\frac{\mathfrak{J} + \varrho \mathfrak{q}}{\sqrt{g_{44}}}$ als die natürlich gemessene Stromstärke kennen lernten.

d) Die geometrische Optik. Wir haben schon mehrfach den Satz ausgesprochen, daß die Lichtbewegung längs eines Strahles im leeren Raum durch eine geodätische Nullinie der „Welt“ dargestellt wird. Hier ist der Ort, den Beweis zu erbringen. Wir gehen dabei genau so vor, wie man in der Maxwellschen Theorie von den Grundgleichungen zur geometrischen Optik gelangt. Wir müssen also zunächst die Wellengleichung ableiten. Das geschieht am einfachsten, wenn man das aus Band I, § 19 bekannte Viererpotential $\boldsymbol{\Phi}$ einführt.

Wegen der Rechnungsregel (69) können wir zunächst ohne jede Veränderung gegen früher

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{Rot}\, \boldsymbol{\Phi}, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{M}_{jl} = \frac{\partial \Phi_l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x^l} \quad . \quad . \quad . \quad (123)$$

setzen; dann ist die Gleichung $\Delta iv^* \mathfrak{M} = 0$ identisch erfüllt. Da bei $\varepsilon = \mu = 1$ aber $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$ ist, geht dann Gleichung $\Delta iv\, \mathfrak{B} = P$ über in

$$\Delta iv\, (\mathfrak{Rot}\, \boldsymbol{\Phi}) = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (124)$$

Diesen Ausdruck müssen wir jetzt zur Bestimmung von Φ benutzen; wir vereinfachen ihn, wenn wir die zweite Bedingung, die wir dem Viererpotential früher auferlegten, nämlich

$$Div\,\Phi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

auch hier zur Anwendung bringen.

Nach (73 d) ist eine kontravariante Komponente

$$\Delta iv^h \mathfrak{M} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathfrak{M}^{hk})}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{jkl} \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,g^{hj} g^{kl} \mathfrak{M}_{jl}).$$

Daraus berechnen wir die kovariante Komponente

$$\Delta iv_i \mathfrak{M} = \sum_h g_{ih} \Delta iv^h \mathfrak{M}$$

$$= \sum_{hjkl} \left[\frac{g_{ih} g^{hj}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}\,g^{kl} \mathfrak{M}_{jl}) + g_{ih} g^{kl} \mathfrak{M}_{jl} \frac{\partial g^{hj}}{\partial x^k} \right].$$

In der ersten Hälfte dieser Summe können wir die Summation nach h vollziehen:

$$\Delta iv_i \mathfrak{M} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{kl} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}\,g^{kl} \mathfrak{M}_{il}) + \sum_{hjkl} g_{ih}\, g^{kl} \mathfrak{M}_{jl} \frac{\partial g^{hj}}{\partial x^k}.$$

Jetzt führen wir nach (123) Φ ein und entnehmen aus (125) und (73) die Gleichung:

$$0 = \Gamma \varrho \alpha \delta_i (Div\,\Phi)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{kl} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} (\sqrt{-g}\,g^{kl} \Phi_l) - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}\,g^{kl} \Phi_l) \right].$$

Dann folgt durch Subtraktion dieser Gleichung

$$\left.\begin{aligned} \Delta iv_i \mathfrak{M} = &- \sum_{kl} g^{kl} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{kl} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}\,g^{kl}) \\ &- \frac{1}{g} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^i} \sum_{kl} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}\,g^{kl} \Phi_l) \\ &- \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{kl} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\Phi_l \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g}\,g^{kl}) \right] \\ &+ \sum_{hjkl} g_{ih} g^{kl} \frac{\partial g^{hj}}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \Phi_l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x^l} \right) = P_i. \end{aligned}\right\} \quad (126)$$

Dies ist die Wellengleichung; wir erhalten ihre alte Form

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^{1^2}} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^{3^2}} - \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^{4^2}} = P_i$$

zurück, sowie wir zur pseudoeuklidischen Maßbestimmung der beschränkten Relativitätstheorie zurückkehren. — Wir setzen im folgenden $P = 0$.

Den Übergang von der Wellengleichung zur geometrischen Optik vollziehen wir nun nach einem von Debye[1]) angegebenen Verfahren. Wir machen den Ansatz:

$$\Phi_i = A_i e^{\sqrt{-1}\,\varkappa E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (127)$$

in welchem $E(x^1, x^2, x^3, x^4)$ irgend eine reguläre und gegen jede Koordinatentransformation invariante Funktion bedeutet, während $\varkappa$ eine konstante Zahl, A ein gegen die Exponentialfunktion langsam veränderlicher Vektor ist. Dann wird:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x^l} = e^{\sqrt{-1}\,\varkappa E} \left\{ \frac{\partial A_i}{\partial x^l} + \sqrt{-1}\,\varkappa A_i \frac{\partial E}{\partial x^l} \right\},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^k \partial x^l} = e^{\sqrt{-1}\,\varkappa E} \left\{ \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^k \partial x^l} + \sqrt{-1}\,\varkappa \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial E}{\partial x^l} + \frac{\partial A_i}{\partial x^l} \frac{\partial E}{\partial x^k} + A_i \frac{\partial^2 E}{\partial x^k \partial x^l} \right) - \varkappa^2 A_i \frac{\partial E}{\partial x^k} \frac{\partial E}{\partial x^l} \right\}$$

Indem wir dies in (126) einsetzen, machen wir zugleich den Grenzübergang zu $\varkappa = \infty$. Unser Ansatz stellt nämlich eine Schwingung dar, und deren Wellenlänge verschwindet bei $\varkappa = \infty$. Die geometrische Optik aber beschäftigt sich gerade mit diesem Grenzfall. Dann brauchen wir nur die Glieder beizubehalten, welche die höchste auftretende Potenz von $\varkappa$, also $\varkappa^2$, als Faktor enthalten*), und finden:

$$\sum_{kl} g^{kl} \frac{\partial E}{\partial x^k} \frac{\partial E}{\partial x^l} = 0 \quad \text{oder} \quad |\Gamma \varrho \alpha \delta E = 0 \quad . \quad . \quad (128)$$

Die Räume $E = const$ müssen also überall auf Nullinien senkrecht stehen. Dies ist die einzige Bedingung für die Funktion; denn die Divergenzbedingung (125) fügt nur noch eine Aussage

*) Dabei ist vorausgesetzt, daß nicht die zweiten Differentialquotienten von E sehr groß sind; wo dies der Fall ist, wie z. B. in der Nähe eines Brennpunktes, gilt der Schluß nicht.

über den Vektor A hinzu, daß nämlich innerhalb der hier benutzten Näherung

$$\sum_k A^k \frac{\partial E}{\partial x^k} = 0$$

gilt.

Gleichung (128) genügt aber auch für den Beweis, daß die Fortpflanzung des Lichts durch geodätische Nullinien dargestellt wird. Differentiieren wir sie nach x^m:

$$\sum_{kl} g^{kl}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^k \partial x^m}\frac{\partial E}{\partial x^l} + \frac{\partial E}{\partial x^k}\frac{\partial^2 E}{\partial x^l \partial x^m}\right) + \sum_{kl}\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^m}\frac{\partial E}{\partial x^k}\frac{\partial E}{\partial x^l} = 0.$$

Sodann machen wir von Gleichung (61c) Gebrauch:

$$\sum_{kl} g^{kl}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^k \partial x^m}\frac{\partial E}{\partial x^l} + \frac{\partial E}{\partial x^k}\frac{\partial^2 E}{\partial x^l \partial x^m}\right)$$

$$= \sum_{jkl}\left(\left\{\begin{matrix} j\,m \\ k \end{matrix}\right\} g^{jl} + \left\{\begin{matrix} j\,m \\ l \end{matrix}\right\} g^{jk}\right)\frac{\partial E}{\partial x^k}\frac{\partial E}{\partial x^l}.$$

Beide hier auftretenden Summen haben zwei Summanden; die zweiten gehen aber in die zugehörigen ersten Summanden über, sowie man die Summationsbuchstaben k und l vertauscht; also

$$\sum_{kl} g^{kl}\frac{\partial E}{\partial x^l}\frac{\partial^2 E}{\partial x^k \partial x^m} = \sum_{jkl}\left\{\begin{matrix} j\,m \\ k \end{matrix}\right\} g^{jl}\frac{\partial E}{\partial x^k}\frac{\partial E}{\partial x^l}.$$

Jetzt verfolgen wir eine der „Kraftlinien" des vierdimensionalen Vektorfeldes des $\Gamma\varrho\alpha\delta E$ auf die Strecke $d\tau$, deren kontravariante Komponenten die dx^k sein mögen. Dann besteht Proportionalität zwischen den Quotienten $dx^k/d\tau$ und den kontravarianten Komponenten

$$\Gamma\varrho\alpha\delta^k E = \sum_l g^{kl}\frac{\partial E}{\partial x^l} = \lambda\frac{dx^k}{d\tau}.$$

Der Faktor λ kann noch Funktion der x^i sein. Wir dürfen deswegen in der vorletzten Gleichung diese Komponenten durch die $dx^k/d\tau$ ersetzen:

$$\sum_k \frac{\partial^2 E}{\partial x^m \partial x^k}\frac{dx^k}{d\tau} = \sum_{jk}\left\{\begin{matrix} j\,m \\ k \end{matrix}\right\}\frac{\partial E}{\partial x^k}\frac{dx^j}{d\tau},$$

und sehen dann unmittelbar, daß

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E}{\partial x^m}\right) = \sum_{jk}\left\{\begin{matrix} j\,m \\ k \end{matrix}\right\}\frac{\partial E}{\partial x^k}\frac{dx^j}{d\tau}$$

ist. Nach (67a) bedeutet dies, daß bei der Verrückung längs der „Kraftlinie“ der Gradient von E seine Richtung beibehält. Da er zugleich in die Richtung dieser Linie fällt, ändert diese im Fortschreiten ihre Richtung nicht, ist also nach § 8, b) geodätisch und nach (128) geodätische Nullinie, was zu beweisen war*).

Diese „Kraftlinien“ stellen aber das Fortschreiten einer Welle dar. Denn setzt man für die nächste Umgebung eines Punktes $E = E_0 + \sum_k \left(\frac{\partial E}{\partial x^k}\right)_0 dx^k$, so wird der veränderliche Teil der Exponentialfunktion in (127) gleich

$$e^{\sqrt{-1}\,\varkappa \sum_k \frac{\partial E}{\partial x^k} dx^k},$$

was dem im Fall der beschränkten Relativitätstheorie geltenden Faktor

$$e^{\sqrt{-1}\,\varkappa(\alpha x + \beta y + \gamma z - ct)} \qquad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$$

entspricht. Die Weltlinien, welche das Fortschreiten des Lichts längs eines Strahls darstellen, sind also geodätische Nullinien.

Wir haben hier immer angenommen, daß der Maßtensor der g_{ik} vorgegeben wäre und durch das elektromagnetische Feld keine Veränderung erführe. § 16 wird zeigen, daß diese Annahme nicht

---

*) Die gewöhnliche geometrische Optik kann alle ihre Probleme auf die Bestimmung einer Ortsfunktion, des Eikonals E, zurückführen, deren Gradient die Strahlrichtung angibt, und die in gewöhnlichen rechtwinkeligen Koordinaten der Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial E}{\partial x^i}\right)^2 = n^2$$

genügt, in der n den Brechungsindex bedeutet. Führt man eine nichteuklidische Maßbestimmung ein, in welcher die Lichtwellenlänge als natürliche Längeneinheit benutzt wird, so tritt an deren Stelle

$$\sum_{kl=1}^{3} g^{kl} \frac{\partial E}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial E}{\partial x^l} = 1.$$

Die Rechnung im Text beweist dann bei ihrer Übertragung, daß die Lichtstrahlen geodätische Linien dieser Maßbestimmung sind, daß sie also dem Fermatschen Satz vom ausgezeichneten Lichtweg gehorchen.

streng zutrifft, daß vielmehr im allgemeinen der Trägheitstensor des elektromagnetischen Feldes genau wie der eines Körpers das Schwerefeld beeinflußt. Doch ist dieser Einfluß bei allen wirklich vorkommenden elektromagnetischen Wellen so gering, daß er vollständig vernachlässigt werden kann. Wie ein elektrostatisches Feld den Maßtensor beeinflußt, das werden wir in § 24 an einem Beispiel in aller Strenge zeigen.

e) Die Spannungen. Bei der Besprechung des Energie-Impulstensors beschränken wir uns wie in Band I auf den leeren Raum ($\varepsilon = \mu = 1$, $\sigma = 0$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$). Den Ansatz (145) daselbst ($F = [P\mathfrak{M}]$) für die Viererkraft F übertragen wir in der Form

$$\left.\begin{aligned} F_a &= \sum_\beta P^\beta \mathfrak{M}_{a\beta} \\ \Big(F_1 &= \varrho\left(\mathfrak{E}_1 + \frac{1}{c}\left(\mathfrak{q}^2 \mathfrak{B}_{12} - \mathfrak{q}^3 \mathfrak{B}_{31}\right)\right)\sqrt{g^{44}}, \\ F_4 &= -\frac{\varrho}{c}\sum_{i=1}^{3} \mathfrak{q}^i \mathfrak{E}_i \sqrt{g^{44}}\Big) \end{aligned}\right\} \quad (129)$$

F_1, F_2, F_3 geben also die Kraftdichte, $-cF_4$ deren Leistung. Den Energie-Impulssatz aber sprach Gleichung (XVI) von Band I,

$$F = -\Delta iv\, T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130)$$

aus, welche wir unverändert übernehmen dürfen, sofern wir einen passenden Welttensor T aus dem Feldvektor $\mathfrak{M}$ ableiten können.

Um ihn zu finden, ersetzen wir in (129) P^β nach (111):

$$\left.\begin{aligned} F_a &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{\beta\gamma} \mathfrak{M}_{a\beta} \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathfrak{M}^{\beta\gamma})}{\partial x^\gamma} \\ &= \sum_{\beta\gamma}\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathfrak{M}_{a\beta}\mathfrak{M}^{\beta\gamma})}{\partial x^\gamma} - \mathfrak{M}^{\beta\gamma}\frac{\partial \mathfrak{M}_{a\beta}}{\partial x^\gamma}\right] \end{aligned}\right\} \quad (131)$$

In der zweiten Hälfte der Summe vertauschen wir die Summationszeiger und machen dann von der ersten der Gleichungen (111) Gebrauch:

$$\begin{aligned} -\sum_{\beta\gamma} \mathfrak{M}^{\beta\gamma} \frac{\partial \mathfrak{M}_{a\beta}}{\partial x^\gamma} &= -\frac{1}{2}\sum_{\beta\gamma} \mathfrak{M}^{\beta\gamma}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}_{a\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{\gamma a}}{\partial x^\beta}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\beta\gamma} \mathfrak{M}^{\beta\gamma}\frac{\partial \mathfrak{M}_{\beta\gamma}}{\partial x^a} = \frac{1}{2}\sum_{\beta\gamma\delta\varepsilon} g^{\beta\delta} g^{\gamma\varepsilon} \mathfrak{M}_{\delta\varepsilon}\frac{\partial \mathfrak{M}_{\beta\gamma}}{\partial x^a}. \end{aligned}$$

Vertauschung von β mit δ und γ mit ε ändert den Wert der vierfachen Summe nicht; daher:

$$-\sum_{\beta\gamma}\mathfrak{M}^{\beta\gamma}\frac{\partial\mathfrak{M}_{a\beta}}{\partial x^{\gamma}}=\frac{1}{4}\sum_{\beta\gamma\delta\varepsilon}g^{\beta\delta}g^{\gamma\varepsilon}\left(\mathfrak{M}_{\delta\varepsilon}\frac{\partial\mathfrak{M}_{\beta\gamma}}{\partial x^{a}}+\mathfrak{M}_{\beta\gamma}\frac{\partial\mathfrak{M}_{\delta\varepsilon}}{\partial x^{a}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x^{a}}\left(\sum_{\beta\gamma\delta\varepsilon}g^{\beta\delta}g^{\gamma\varepsilon}\mathfrak{M}_{\beta\gamma}\mathfrak{M}_{\delta\varepsilon}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{\beta\gamma\delta\varepsilon}\mathfrak{M}_{\beta\gamma}\mathfrak{M}_{\delta\varepsilon}\left(g^{\beta\delta}\frac{\partial g^{\gamma\varepsilon}}{\partial x^{a}}+g^{\gamma\varepsilon}\frac{\partial g^{\beta\delta}}{\partial x^{a}}\right).$$

Hier umfaßt die letzte Summe zwei gleiche Ausdrücke, denn ihre erste Hälfte geht bei der Vertauschung von β mit γ und δ mit ε in die zweite über:

$$-\sum_{\beta\gamma}\mathfrak{M}^{\beta\gamma}\frac{\partial\mathfrak{M}_{a\beta}}{\partial x^{\gamma}}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x^{a}}\left(\sum_{\beta\gamma}\mathfrak{M}_{\beta\gamma}\mathfrak{M}^{\beta\gamma}\right)-\frac{1}{2}\sum_{\beta\gamma\delta\varepsilon}\mathfrak{M}_{\beta\gamma}\mathfrak{M}_{\delta\varepsilon}g^{\beta\delta}\frac{\partial g^{\gamma\varepsilon}}{\partial x^{a}}.$$

Nach (61 a) läßt sich die vierfache Summe hier umformen in:

$$+\frac{1}{2}\sum_{\beta\gamma\delta\varepsilon\vartheta\eta}\mathfrak{M}_{\beta\gamma}\mathfrak{M}_{\delta\varepsilon}g^{\beta\delta}g^{\gamma\vartheta}g^{\varepsilon\eta}\frac{\partial g_{\vartheta\eta}}{\partial x^{a}}=\frac{1}{2}\sum_{\delta\varepsilon\vartheta\eta}\mathfrak{M}^{\delta\vartheta}\mathfrak{M}_{\delta\varepsilon}g^{\varepsilon\eta}\frac{\partial g_{\vartheta\eta}}{\partial x^{a}}.$$

Setzt man die berechneten Ausdrücke in (131) ein, so findet man:

$$\left.\begin{aligned}F_{a}=&-\frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_{\beta\gamma}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathfrak{M}_{a\gamma}\mathfrak{M}^{\beta\gamma})}{\partial x^{\beta}}\\&+\frac{1}{4}\cdot\sum_{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x^{a}}(\mathfrak{M}_{\beta\gamma}\mathfrak{M}^{\beta\gamma})+\frac{1}{2}\sum_{\delta\varepsilon\vartheta\eta}\mathfrak{M}^{\delta\vartheta}\mathfrak{M}_{\delta\varepsilon}g^{\varepsilon\eta}\frac{\partial g_{\vartheta\eta}}{\partial x^{a}}.\end{aligned}\right\}\quad(131\text{ a})$$

Nach § 6, f) ist $\frac{1}{2}\sum_{\beta\gamma}\mathfrak{M}_{\beta\gamma}\mathfrak{M}^{\beta\gamma}=|\mathfrak{M}|^{2}$ das Quadrat des Absolutwertes von $\mathfrak{M}$.

Nun definieren wir einen Tensor zweiten Ranges durch seine gemischten Komponenten

$$T_{a}^{\beta}=\sum_{\gamma}\mathfrak{M}_{a\gamma}\mathfrak{M}^{\beta\gamma}-\tfrac{1}{2}\delta_{a}^{\beta}\,|\mathfrak{M}|^{2}\quad.\;.\;.\quad(132)^{*})$$

*) Diese Gleichung entspricht durchaus der Formel (132) in Band I, wenn man dort beide Sechservektoren einander gleich setzt. In der vierten Auflage des ersten Bandes wird dies auch formal gezeigt.

Er ist symmetrisch, und deshalb brauchen wir nach § 6, c), hier nicht zwischen T_a^{β} und $T^{\beta}{}_a$ zu unterscheiden. Denn es folgt aus (132)

$$\left.\begin{aligned} T_{a\beta} = \sum_{\delta} g_{\beta\delta} T_a^{\delta} &= \sum_{\gamma\delta} g_{\beta\delta} \mathfrak{M}_{a\gamma} \mathfrak{M}^{\delta\gamma} - \tfrac{1}{2} g_{a\beta} \mathfrak{M}^2 \\ &= \sum_{\gamma} \mathfrak{M}_{a\gamma} \mathfrak{M}_{\beta}{}^{\gamma} - \tfrac{1}{2} g_{a\beta} \mathfrak{M}^2 \\ &= \sum_{\gamma\delta} g_{\gamma\delta} \mathfrak{M}_a{}^{\delta} \mathfrak{M}_{\beta}{}^{\gamma} - \tfrac{1}{2} g_{a\beta} \mathfrak{M}^2, \end{aligned}\right\} \quad (132\,\mathrm{a})$$

und in der letzten Summe ist die Vertauschung von α und β gleichwertig der bedeutungslosen Vertauschung der Summationszeiger. Ferner ist die Diagonalsumme der T_a^{β} nach (46)

$$\sum_{a} T_a^a = \sum_{a\gamma} \mathfrak{M}_{a\gamma} \mathfrak{M}^{a\gamma} - 2\,\mathfrak{M}^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (132\,\mathrm{b})$$

Jetzt können wir Gleichung (131 a) im Hinblick auf (62) schreiben:

$$F_a = -\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{\beta} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, T_a^{\beta})}{\partial x^{\beta}} - \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon\vartheta\eta} g^{\varepsilon\eta} \frac{\partial g_{\vartheta\eta}}{\partial x^a} T_{\varepsilon}^{\vartheta}\right].$$

Die Summation nach ε macht daraus:

$$F_a = -\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{\beta} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, T_a^{\beta})}{\partial x^{\beta}} - \frac{1}{2} \sum_{\vartheta\eta} T^{\vartheta\eta} \frac{\partial g_{\vartheta\eta}}{\partial x^a}\right] \quad (133)$$

und dies ist nach (73 b) dasselbe wie die zu beweisende Gleichung (130).

Wir werden hier natürlich die Komponenten T_a^{β} ähnlich wie in der beschränkten Relativitätstheorie in Beziehung zu den Spannungen, dem Impuls, der Energieströmung und -dichte des elektromagnetischen Feldes setzen. Trotzdem dann (133) die einfachste Übertragung der früher geltenden Beziehung ist, hat sie doch einen wesentlich anderen Inhalt. Verschwindet z. B., wie es nach (129) sein muß, F infolge Fehlens von Ladungen, so können wir dennoch aus (133) nicht mehr wie früher die Erhaltung des elektromagnetischen Impulses und der Energie ableiten (Bd. I, § 15 und 24). Die Doppelsumme in (133) hindert daran. In den nächsten Paragraphen werden wir sehen, was dies zu bedeuten hat.

Aus (132) und (113) finden wir für die Komponenten des Tensors T:

$$T_1^1 = \tfrac{1}{2}[\mathfrak{E}_2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{E}_3\mathfrak{D}^3 - \mathfrak{E}_1\mathfrak{D}^1 + \mathfrak{H}^{31}\mathfrak{B}_{31} + \mathfrak{H}^{12}\mathfrak{B}_{12} - \mathfrak{H}^{23}\mathfrak{B}_{23}]\sqrt{g^{44}},$$

$$T_1^2 = -(\mathfrak{E}_1\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{H}^{23}\mathfrak{B}_{31})\sqrt{g^{44}}, \quad T_2^1 = -(\mathfrak{E}_2\mathfrak{D}^1 + \mathfrak{H}^{31}\mathfrak{B}_{23})\sqrt{g^{44}},$$

$$T_1^4 = (\mathfrak{D}^2\mathfrak{B}_{12} - \mathfrak{D}^3\mathfrak{B}_{31})\sqrt{g^{44}}, \quad T_4^1 = (\mathfrak{E}_3\mathfrak{H}^{31} - \mathfrak{E}_2\mathfrak{H}^{12})\sqrt{g^{44}}$$

usw.

$$T_4^4 = -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_1\mathfrak{D}^1 + \mathfrak{E}_2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{E}_3\mathfrak{D}^3 + \mathfrak{H}^{23}\mathfrak{B}_{23} + \mathfrak{H}^{31}\mathfrak{B}_{31} + \mathfrak{H}^{12}\mathfrak{B}_{12})\sqrt{g^{44}}.$$

Geht man zur Maßbestimmung der besonderen Relativitätstheorie zurück, so findet man, von den Vorzeichen abgesehen, die in Bd. I, Formel (X), (VIII a) und (19) gegebenen Werte für die Spannungen, den Energiestrom und die Energiedichte wieder. Das genauere über den Zusammenhang des Energiespannungstensors mit diesen physikalischen Größen erörtern wir erst in § 15, b).

§ 15. Die Grundgleichung der Dynamik und der freie Fall.

a) Die Weltlinie des freien Körpers. Die Grundgleichung jeder Mechanik bildet der Impulssatz; aus ihm folgt durch mathematische Ableitung der Energiesatz. Die beschränkte Relativitätstheorie änderte daran nichts, als daß sie die Beziehung zwischen beiden Sätzen besonders innig gestaltete und beide in dieselbe invariante Gleichung

$$\Delta iv\, T = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (134)$$

verschmolz. Dabei war T der symmetrische Tensor zweiten Ranges, welcher, bezogen auf das Ruhsystem des Körpers, dessen elastische Ruhspannungen und die Ruhenergiedichte bestimmte. Wie wir es im § 14 für elektromagnetische Felder getan haben, übernehmen wir auch für die Dynamik die Gleichung (134) und die Symmetrie des Tensors T. Wir verschieben die schon erwähnte Frage, inwiefern diese Gleichung Erhaltungssätze ausspricht, und untersuchen zuerst nach ihr die Bewegung eines freien Massenpunktes.

Im Gegensatz zu der Ausdrucksweise der älteren Physik müssen wir einen Körper hier auch dann als frei beweglich bezeichnen, wenn er Schwerewirkungen unterliegt. Nach dem Grundgedanken der Einsteinschen Lehre von der Schwerkraft können wir diese am Ort des Körpers ja hinwegtransformieren

(§ 3). Es gibt hier keinen Unterschied zwischen der völlig freien Bewegung und dem freien Fall. Wohl aber müssen alle elektromagnetischen und ebenso alle durch elastische Spannungen vermittelten mechanischen Einflüsse fortfallen. Deswegen wird die Ruhmasse m eines freien Körpers längs seiner ganzen Weltlinie unveränderlich sein. Aus dieser Analogie zur elektrischen Ladung eines nichtleitenden Ladungsträgers werden wir sogleich den Schluß ziehen, daß wie in § 14 die Divergenz des Vierer-stromes $P = \varrho^0 Y$ Null war, so hier

$$Div(\mu Y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135)$$

ist, wenn wir unter μ die natürlich gemessene Ruhdichte verstehen. (Das heißt, die Masse des Körperelements δV^0 soll sein $\mu \delta V^0$, wobei δV^0 ebenfalls in natürlichem Maße anzugeben ist.) Diesen Begriff der skalaren Ruhdichte kann man freilich nach Bd. I, § 28, c), nicht immer fassen, wohl aber dann, wenn die elastischen Spannungen verschwinden. Dies dürfen wir aber zunächst voraussetzen, da ja, wie hinlänglich bekannt, infolge des Äquivalenzsatzes in einem frei fallenden Körper die Schwerkraft keine elastischen Spannungen hervorruft.

Als Massenpunkt betrachten wir einen Körper, wenn er so klein ist, daß in ihm die Komponenten der Vierergeschwindigkeit, desgleichen der Maßtensor und die aus seinen Ableitungen gebildeten g-Klammern überall die gleichen Werte haben.

Ähnlich wie in Bd. I, § 27 (Gleichung 272) setzen wir den Welttensor eines spannungsfreien Körpers

$$T^i_k = -c^2 \mu Y^i Y_k . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136)$$

Denn danach ist im Ruhsystem wegen $Y^{01} = Y^{02} = Y^{03} = 0$ und $|Y|^2 = Y^{04} Y^0_4 = 1$ nur die gemischte Komponente

$$T^{04}_{\ 4} = -c^2 \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136\,a)$$

von Null verschieden. Aus den Gleichungen $T_{ik} = -c^2 \mu Y_i Y_k$ erkennt man die Symmetrie dieses Tensors. Wir haben von ihr schon insofern Gebrauch gemacht, als wir in (136) T^i_k schrieben, ohne auf die Reihenfolge der Zeiger hinter dem Zeiger T zu achten *).

---

*) Aus der Gleichung $|Y|^2 = 1$ folgt die Dimensionslosigkeit der Produkte $Y^i Y_i$. Deswegen haben alle gemischten Komponenten mit zwei gleichen Zeigern bei dem Tensor T die Dimension von

Den Ansatz (136) setzen wir nun in (134) ein. Nach (73 a) folgt:

$$-\Delta iv^i T = \frac{c^2}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} (\mu \sqrt{-g}\, Y^i Y^k) + c^2 \mu \sum_{kl} \left\{ {k\,l \atop i} \right\} Y^k Y^l = 0 \quad (136\,\mathrm{b})$$

Führen wir in der einfachen Summe die Differentiation an dem Produkt $Y^i \times \mu \sqrt{-g}\; Y^k$ gliedweise aus, so entsteht unter anderem eine Summe $c^2 \mu \sum_k Y^k \frac{\partial Y^i}{\partial x^k}$. Nun ist aber nach der Definition der Vierergeschwindigkeit (Gl. 107)

$$\sum_k Y^k \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} = \sum_k \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} \frac{d x^k}{d \tau} = \frac{d Y^i}{d \tau} = \dot{Y}^i.$$

Ferner findet man dabei nach (73) eine Summe

$$\frac{c^2 Y^i}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} (\mu \sqrt{-g}\, Y^k) = c^2 Y^i \, Div (\mu Y),$$

welche nach (135) verschwindet. Somit wird

$$-\Delta iv^i T = c^2 \mu \left[\dot{Y}^i + \sum_{kl} \left\{ {k\,l \atop i} \right\} Y^k Y^l \right] \quad . \; . \; . \; (136\,\mathrm{c})$$

und wegen (134) und der Bedeutung der Vierergeschwindigkeit gelten für die Koordinaten des Massenpunktes die Differentialgleichungen:

$$\ddot{x}^i + \sum_{kl} \left\{ {k\,l \atop i} \right\} \dot{x}^k \dot{x}^l = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (137)$$

Ihre Übereinstimmung mit (55) beweist den Satz: Die Weltlinie eines frei fallenden Körpers ist eine geodätische Linie.

b) Abstreifung der Voraussetzung der Spannungsfreiheit. Dieser Satz gilt unabhängig von der oben eingeführten Annahme der Spannungsfreiheit. Wäre dem anders, fiele also ein

---

$c^2 \mu$, $m\, l^{-1} t^{-2}$. Die Komponenten T^i_k mit verschiedenen Zeigern hingegen die Dimension $m\, l^{-1} t^{-2} X_i X_k^{-1}$. Für die kovarianten Komponenten T_{ik} ist die Dimension $m\, l^{+1} t^{-2} (X_i X_k)^{-1}$, für die kontravarianten, T^{ik}, hingegen $m\, l^{-3} t^{-2} X_i X_k$ (vgl. § 13).

elastisch gespannter Körper anders als ein ungespannter, so entzöge dies ja dem Äquivalenzprinzip und damit den grundlegenden Betrachtungen von § 3 den Boden. Wir prüfen somit die Verträglichkeit des Ansatzes (134) mit den Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie, wenn wir untersuchen, ob jene Voraussetzung unwesentlich ist.

In Bd. I, § 32, a) haben wir für vollständige statische Systeme — und als ein solches betrachten wir den frei fallenden Körper — den Satz abgeleitet, daß bei der Integration der Ruhspannungen über sein Ruhvolumen stets Null herauskommt, daß sich daher das System dynamisch als Massenpunkt verhält. Wir können diesen Satz auf die allgemeine Relativitätstheorie übertragen. Denn was für eine (dreidimensionale) Maßbestimmung auch im Ruhsystem des Körpers gelten mag, stets können wir für einen Punkt in ihm geodätische Koordinaten einführen, die wir zugleich für diesen Punkt rechtwinkelig wählen wollen. Dann gilt nach der obigen Annahme hinreichender Kleinheit im ganzen Körper die Maßbestimmung $ds^2 = \sum_{i=1}^{3} dx^{i\,2}$, und da die ersten Differentialquotienten der Komponenten des Maßtensors verschwinden, können wir die Betrachtungen von Bd. I, § 32, a) ohne weiteres anwenden. Wir schreiben jetzt die dortige Formel (321 a) in die Form:

$$\int T^i_k \, \delta V^0 = -c^2 m \, Y^i \, Y_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (138)$$

m bedeutet die Ruhmasse, sie tritt hier wegen veränderter Definition des Y an die Stelle der Ruhenergie E^0.

Jetzt nehmen wir an dem Tensor T^i_k die Zerlegung vor:

$$T^i_k = -c^2 \mu \, Y^i \, Y_k + \Theta^i_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (139)$$

Da $\int \mu \, \delta V^0 = m$ ist, folgt aus (138)

$$\int \Theta^i_k \, \delta V^0 = 0.$$

Es kommt uns auf den Vektor $\int \Delta iv^i \, T \, \delta V^0$ an. Zu seiner Berechnung legen wir ein Koordinatensystem zugrunde, in welchem der Körper ruht, und benutzen für diese Streckenräume die soeben erwähnten Koordinaten, die für einen Punkt im Körper geodätisch und rechtwinklig sind. Wegen der vorausgesetzten Kleinheit des

Körpers gilt dann in seinem Innern die euklidische Geometrie des Raumes und wir finden:

$$\int \Delta iv^i \Theta \delta V^0 = \int \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial \Theta_k^i}{\partial x^k} dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{\partial}{\partial x^4} \int \Theta_4^i dx^1 dx^2 dx^3$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^4} \int \Theta_4^i \delta V^0 = 0;$$

denn an den Differentialquotienten nach x^1, x^2, x^3 läßt sich die Integration ausführen und liefert ein Oberflächenintegral, das wegen des Verschwindens der Θ_k^i auf der Begrenzung selbst Null ist. In dem Integral $\int \Delta iv^i T \delta V^0$ braucht man somit für T_k^i nur das erste Glied von Gleichung (139) zu benutzen. Aus (136c) folgt unter diesen Umständen:

$$-\int \Delta iv^i T \delta V^0 = c^2 m \left[\dot{Y}^i + \sum_{kl} \left\{ {k\,l \atop i} \right\} Y^k Y^l \right], \qquad (140)$$

so daß man nach (134) wieder auf die geodätische Linie schließen kann.

c) Maßbestimmung und Schwerefeld. Dieser Satz eröffnet uns mit einem Schlage den Zusammenhang zwischen der allgemeinen Relativitätstheorie und der Lehre von der Schwerkraft. Gäbe es ein Koordinatensystem, in welchem die g-Klammern überall verschwinden, so wären die Gleichungen der geodätischen Linie linear, und man könnte jede geodätische Linie, zu denen dann auch die Koordinatenachsen gehörten, als Gerade ansprechen. In der dreidimensionalen Sprechweise hieße dies, daß der freie Massenpunkt eine Gerade mit konstanter Geschwindigkeit durchläuft. Diese Aussage ist unmöglich, wenn die g-Klammern in keinem Koordinatensystem überall verschwinden. Dann sind also alle geodätischen Linien gekrümmt. Und es sind diese Dreizeigersymbole, welche die Abweichung von der Geraden bedingen. Wir werden deshalb die Dreizeigersymbole als die Komponenten des Schwerefeldes bezeichnen. Da sie sich nach (54) aus den ersten Differentialquotienten der g_{ik} berechnen, können wir den Tensor der Maßbestimmung als das tensorielle Schwerepotential deuten. Umgekehrt sehen wir dann sogleich, inwiefern die Schwerkraft die Maßbestimmung der vierdimensionalen Welt, und damit alle Maß-

bestimmungen im dreidimensionalen Raum und in der Zeit bedingt, also die „bindenden Kräfte“ Riemanns abgibt.

Der obige Satz legt nicht nur die Bahn des Körpers in jedem Streckenraum, sondern auch die Geschwindigkeit fest, mit der er sie durchläuft. Doch ist, wie wir jetzt erkennen, seine Anwendung im allgemeinen dadurch erschwert, daß er selbst ja zum Schwerefeld beiträgt, daß man also die Dreizeigersymbole in (137) in Strenge nicht als vorgegebene Funktionen der Koordinaten ansehen kann. In den später zu behandelnden Beispielen kommen wir darüber hinweg, indem wir dem fallenden Körper gegen die das Schwerefeld hauptsächlich erzeugenden Körper eine so geringe Masse geben, daß wir von seinem Beitrag in Annäherung absehen können. Innerhalb dieser Näherung, aber auch nur in ihr, gilt der Satz: Da in Gleichung (137) keine den fallenden Körper kennzeichnende Größe auftritt, fallen alle Körper in der gleichen Weise. Er entspricht dem Äquivalenzprinzip, das ebenfalls nur für Körper gilt, die das Schwerefeld nicht merklich abändern.

Es mag zum Schluß noch betont werden, daß selbstverständlich nicht jede geodätische Linie Weltlinie eines Körpers sein kann, sondern nur eine zeitartige, d. h. eine solche, die ganz innerhalb des Vor- und Nachkegels liegt, den die von einem ihrer Punkte ausgehenden geodätischen Nullinien bilden. [Vgl. § 7, c).] Damit ist schon gesagt, daß die Geschwindigkeit eines Körpers dem Betrage nach immer kleiner ist als die Geschwindigkeit eines Lichtstrahls, der am gleichen Ort die gleiche Richtung hat. Und damit ist auch in der allgemeinen Relativitätstheorie der Körpergeschwindigkeit eine unerreichbare obere Grenze gesetzt. Diese Aussage ist aber nur möglich, wenn man die Allgemeinheit der zulässigen Koordinatentransformation so einschränkt, wie wir es in Anlehnung an Hilbert in § 5 getan haben.

d) Die Transformation der Feldkomponenten. Aus Christoffels Transformationsformeln (60) für die Dreizeigersymbole, sowie aus dem Dasein geodätischer Koordinatensysteme für jeden Raumzeitpunkt haben wir schon in den §§ 7 und 8 geschlossen, daß diese Größen sich nicht als Komponenten eines Tensors, gleichviel welchen Ranges, auffassen lassen; denn sonst ließen sie sich ja nicht alle durch Transformation beseitigen. Man könnte vielleicht im ersten Augenblick diesen Zug als einen Mangel der hier vorgetragenen Theorie der Schwere empfinden, zumal da

in der Elektrodynamik sich alle Größen als echte Tensoren darstellen. Aber dieser Zug entspricht durchaus der physikalischen Überlegung von § 3, daß man durch Einführung passender Koordinaten in einem hinreichend kleinen Bereich, nämlich dem dort erwähnten Kasten, das Schwerefeld hinwegtransformieren kann. Er ist somit mit den Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie unlösbar verknüpft*).

---

*) Nicht einmal bei Transformationen, die sich rein im Streckenraum abspielen, also die Zeitkoordinate x^4 unverändert lassen, verhalten sich die g-Klammern als Tensorkomponenten. Nur bei linearen Substitutionen rechnen sie sich nach § 7, d) um, als wären sie in den oberen Zeigern ko-, im unteren kontravariante Tensorkomponenten. Infolgedessen verhalten sich die Summen $\left\{\sum_{kl} \begin{Bmatrix} kl \\ i \end{Bmatrix} \dot{x}^k \dot{x}^l\right.$ in (137), welche den Kraftkomponenten der Newtonschen Bewegungsgleichungen entsprechen, auch nur bei linearen Transformationen als Vektorkomponenten. Darin liegt aber eigentlich kein Unterschied gegen die ältere Theorie. Deren Grundgleichung

$$m \frac{d^2 x^i}{d t^2} - \mathfrak{K}_i = 0$$

läßt sich auch in ihr nur auf rechtwinkelig-geradlinige Koordinatensysteme anwenden, also auf eine Gruppe, welche durch lineare Transformationen gekennzeichnet ist. In Polarkoordinaten z. B. lauten die Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik, wie man leicht aus dem Hamiltonschen Prinzip nachrechnet:

$$m\left[\frac{d^2 r}{d t^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{d t}\right)^2 - r \sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{d t}\right)^2\right] - \mathfrak{K}_r = 0,$$

$$m\left[\frac{d^2 \vartheta}{d t^2} + \frac{2}{r}\frac{d r}{d t}\frac{d\vartheta}{d t} - \sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{d t}\right)^2\right] - \mathfrak{K}_\vartheta = 0,$$

$$m\left[\frac{d^2 \varphi}{d t^2} + \frac{2}{r}\frac{d r}{d t}\frac{d\varphi}{d t} + 2\,\mathrm{cotg}\,\vartheta\frac{d\vartheta}{d t}\frac{d\varphi}{d t}\right] - \mathfrak{K}_\varphi = 0,$$

wenn wir gemäß der Transformationsgleichung (47a), aber freilich in Abweichung von dem sonst in der älteren Theorie üblichen:

$$\mathfrak{K}_r = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial r}\mathfrak{K}_i, \quad \mathfrak{K}_\vartheta = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial \vartheta}\mathfrak{K}_i, \quad \mathfrak{K}_\varphi = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial \varphi}\mathfrak{K}_i$$

setzen. Was hier zu den zweiten Differentialquotienten der Koordinaten hinzutritt, und somit den Doppelsummen in (137) entspricht, hat keineswegs Vektoreigenschaft. Der Unterschied liegt nur darin, daß man in der alten Theorie aus diesen Gliedern gewisse als die Komponenten des Kraftvektors heraushob, was in der allgemeinen Relativitätstheorie nicht mehr möglich ist.

e) Die „Zentrifugalkraft". Nach der beschränkten Relativitätstheorie und ebenso der klassischen Mechanik hat ein freier Massenpunkt eine nach Richtung und Betrag unveränderliche Geschwindigkeit lediglich in einem berechtigten Bezugssystem. In einem anderen, das sich etwa gegen ein berechtigtes drehen mag, bestehen keine linearen Beziehungen zwischen seinen Koordinaten und der Zeit, und man kann diese Abweichungen auf die Coriolissche und die Zentrifugalkraft zurückführen. Nach der älteren Auffassung sind diese „Scheinkräfte" aber etwas physikalisch nicht Wirkliches, lediglich Rechnungsgrößen, bestimmt, den durch Benutzung eines unberechtigten Bezugssystems begangenen Fehler wieder aufzuheben. Hier können wir ein solches Koordinatensystem, wenigstens in der Umgebung der Drehachse, nicht als unberechtigt betrachten (vgl. § 3). Jene Kräfte müssen wir somit als wirklich ansehen, und zwar, wie schon früher erwähnt, als Folgen des in diesen Systemen auftretenden Schwerefeldes.

Die folgende Rechnung mag dies erläutern. Es gebe einen Weltbereich mit der Maßbestimmung

$$d\tau^2 = c^2 dt^2 - (dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2});$$

in ihm ist sicherlich wegen der Konstanz der g_{ik} kein Schwerefeld vorhanden, sofern wir diese Koordinaten benutzen. Jetzt führen wir durch die Substitution

$$x^1 = z, \quad x^2 = r \cos\vartheta, \quad x^3 = r \sin\vartheta$$

Zylinderkoordinaten ein und gehen dann zu einem rotierenden Koordinatensystem über, indem wir statt ϑ

$$\varphi = \vartheta - \omega t$$

einführen:

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= c^2 dt^2 - (dz^2 + dr^2 + r^2 d\vartheta^2) \\ &= (c^2 - \omega^2 r^2) dt^2 - 2 r^2 \omega\, d\varphi\, dt - (dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2). \end{aligned}$$

Wir ermitteln die Weltlinie eines freien Massenpunktes, indem wir nach § 7, a) die Differentialgleichungen der geodätischen Linie aus dem Variationsproblem

$$\delta \int [(c^2 - \omega^2 r^2)\dot{t}^2 - 2 r^2 \omega \dot{\varphi} \dot{t} - (\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)]\, d\tau = 0$$

ableiten. Doch wollen wir uns auf einen Augenblick beschränken, in welchem der Massenpunkt gegen das System z, r, φ gerade

die Geschwindkeit Null hat ($\dot{z} = \dot{r} = \dot{\varphi} = 0$), und nur die auf r bezügliche Gleichung hinschreiben. Sie lautet unter dieser Beschränkung:

$$c^2 \ddot{r} = r\omega^2 : \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right).$$

Hier ist zunächst für alle in Betracht zu ziehenden Fälle $\frac{\omega^2 r^2}{c^2} \ll 1$, der Nenner also gleich 1 zu setzen. Mit derselben Annäherung gilt: $c^2 \ddot{r} = \frac{d^2 r}{d t^2}$. Man erkennt so in der rechten Seite der Gleichung den wohlbekannten Ausdruck für die Zentrifugalkraft wieder, aber hier als Folge des im rotierenden System auftretenden Schwerefeldes.

Wir dürfen nun nicht verschweigen, daß bei folgerichtiger Durchführung der hier vorgetragenen Theorie nicht erst dem System z, r, φ, sondern auch schon dem System z, r, ϑ ein Schwerefeld zuzuschreiben ist. Denn auch in ihm sind die g_{ik} Funktionen der Koordinaten, es gibt also von Null verschiedene g-Klammern, und die Weltlinie des freien Körpers ist nach (137) nicht durch lineare Beziehungen zwischen den Koordinaten dargestellt. Das mag unerwartet sein, da doch letzteres System gegen das der x^i ruht, so daß in der früheren Ausdrucksweise beide Koordinatensysteme zum gleichen Bezugssystem gehören. Der Begriff „Bezugssystem“ als Inbegriff aller gegeneinander ruhenden Koordinatensysteme ist danach für die vorliegenden Zwecke unbrauchbar, und wir haben ihn deswegen hier im zweiten Bande auch vermieden. Aber dies Gefühl schwindet wohl, wenn man sich klar macht: Notwendige und hinreichende Bedingung für das Fehlen eines Schwerefeldes ist die Geradlinigkeit der Weltlinie jedes freien Körpers, d. h. ihre Gleichungen müssen lineare Beziehungen zwischen den Koordinaten sein. Da es grundsätzlich keine ausgezeichneten Koordinaten gibt, ist der Begriff der Geradlinigkeit somit vollständig relativ geworden, ohne jede absolute Bedeutung. Deutet man die zuerst benutzten Koordinaten x^i als geradlinige Koordinaten, so ist das eine durch die für sie geltende Maßbestimmung erlaubte, aber nicht erzwungene Deutung, sie bleiben vielmehr, was alle Koordinaten sind, nämlich (abgesehen von der Stetigkeitsforderung) willkürliche Benennungen der Raumzeitpunkte.

f) Die Mitwirkung anderer Kräfte. Bewegt sich ein Körper nicht frei, sondern unter der Einwirkung anderer, etwa elektromagnetischer Kräfte im Schwerefeld, doch so, daß sein innerer Zustand durch diese nicht merklich verändert wird (quasistationäre Bewegung), so haben wir in der Grundgleichung (134) den Tensor T in den Anteil des Körpers selbst und den Anteil zu zerlegen, welcher jenen fremden Einwirkungen entspricht. Die negative Divergenz des zweiten Anteils gibt die Viererkraft F jener Einwirkungen, und Gleichung (140) lehrt:

$$c^2 m \left[\dot{Y}^i + \sum_{kl} \left\{ {k\,l \atop i} \right\} Y^k Y^l \right] = -\int F^i \delta V^0 \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

Nach Gleichung (278) von Bd. I, in welcher wir aber wegen anderer Definition von $d\tau$ den Faktor $1/c$ fortlassen müssen, gibt

$$\int F^i \delta V^0 = K^i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (141\,\mathrm{a})$$

den Minkowskischen Kraftvektor an.

Wie man nach § 7a die Bewegungsgleichungen (137) aus dem Variationsprinzip

$$\delta \int f d\tau = 0 \qquad f = \sum_{ik} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k$$

herleiten kann, so diese aus der Forderung, daß

$$\int \left(\frac{c^2}{2} m \delta f + \delta A \right) d\tau = 0$$

wird, sofern man

$$\delta A = \sum_j K_j \delta x^j$$

festsetzt. Man kann sie als das Hamiltonsche Prinzip für die Bewegung des Massenpunktes bezeichnen. Die zugehörigen Lagrangeschen Gleichungen lauten nämlich:

$$c^2 m \left(\frac{d}{d\tau} \sum_k g_{ik} \dot{x}^k - \frac{1}{2} \sum_{jk} g_{jki} \dot{x}^j \dot{x}^k \right) = -K_i \quad . \quad . \quad (141\,\mathrm{b})$$

oder, wenn man genau wie in § 7a die Differentiation nach τ ausführt und die entstehende Summe

$$\sum_{jk} g_{ikj} \dot{x}^j \dot{x}^k \text{ in } \frac{1}{2} \sum_{jk} (g_{ikj} + g_{ijk}) \dot{x}^j \dot{x}^k$$

umformt,

$$c^2 m \left(\sum_k g_{ik} \ddot{x}^k + \sum_{jk} \left[{j\,k \atop i} \right] \dot{x}^j \dot{x}^k \right) = -K_i.$$

Die Zusammenfassung mit g^{ik} ergibt sodann unmittelbar die Gleichungen (141). Faßt man dagegen die Gleichungen (141 b) mit $\dot{x}^i$ zusammen, so findet man rechts $-\sum_i K_i \dot{x}^i = 0$; denn wenn die Ruhmasse m, wie hier angenommen, unveränderlich ist, muß die Viererkraft auf der Weltlinie des Körpers senkrecht stehen [vgl. Bd. I, § 27, c)]. Infolgedessen führt die Rechnung, genau wie in § 7, a), zur Gleichung

$$f = const$$

als einem ersten Integral der Bewegungsgleichungen.

Wir verwenden nun ein Koordinatensystem, welches den Bedingungen (49) $g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0$ genügt, so daß wir unter Vernachlässigung von q^2 gegen c^2 nach (106 a)

$$d\tau = c\sqrt{g_{44}}\, dt$$

setzen können. Dann können wir auch setzen:

$$c^2 m \dot{Y}^i = c^2 m \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{g_{44}}} \frac{dx^i}{dt}\right).$$

Der Vektor K fällt nach Gleichung (278 a) in Band I in seinen drei räumlichen Komponenten, sofern man q^2 gegen c^2 vernachlässigt, mit dem räumlichen Kraftvektor $\mathfrak{K}$ zusammen. Hier freilich müssen wir diese Beziehung verallgemeinern zu *):

$$K^i = -\sqrt{g^{44}}\, \mathfrak{K}^i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \text{d. h.} \quad K_i = \sqrt{g^{44}}\, \mathfrak{K}_i.$$

Dann aber können wir nach (109) aus (141) den Schluß ziehen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{g_{44}}}\mathfrak{q}^i\right) = -\frac{m}{\sqrt{g_{44}}}\left(\sum_{kl=1}^{3}\begin{Bmatrix} kl \\ i \end{Bmatrix}\mathfrak{q}^k\mathfrak{q}^l + 2c\sum_{k=1}^{3}\begin{Bmatrix} k4 \\ i \end{Bmatrix}\mathfrak{q}^k + c^2\begin{Bmatrix} 44 \\ i \end{Bmatrix}\right) + \mathfrak{K}^i \quad (142)$$

In dieser Formel spielt der Ausdruck

$$\mathfrak{G} = \frac{m}{\sqrt{g_{44}}}\mathfrak{q}$$

die Rolle des Impulses. Die im Schwerefeld veränderliche Größe

$$M = \frac{m}{\sqrt{g_{44}}} = m\sqrt{g^{44}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (142\,\text{a})$$

ist also als die Masse des Körpers von seiner (bei quasistationärer Bewegung unveränderlichen) Ruhmasse m

*) Vgl. § 6, h).

zu unterscheiden. Sie tritt auf der linken Seite von (142) als träge, auf der rechten Seite aber als schwere Masse auf, da die Klammer daselbst den Einfluß des Schwerefeldes auf die Bewegung bestimmt.

§ 16. Die Erregung des Schwerefeldes durch die Materie, und seine Spannungen.

a) Die Differentialgleichungen des Schwerefeldes. Die nächste Aufgabe besteht in der Herstellung des Zusammenhanges zwischen Feld und Materie, welchen die alte Theorie durch die Laplace-Poissonsche Differentialgleichung ausdrückt. Hier müssen wir ihn natürlich in einer allgemein kovarianten Form aufsuchen. Wir beginnen mit der Differentialgleichung des materiefreien Schwerefeldes.

Die beschränkte, von der Schwere absehende Relativitätstheorie hatte in der Welt eine pseudoeuklidische Maßbestimmung. Man könnte versucht sein, deren Kennzeichen, nämlich nach § 10, c) das Verschwinden des Riemann-Christoffelschen Tensors R_{iklm}, auf das materiefreie Feld zu übertragen. Aber diese Forderung ginge zu weit. Dann könnte man ja das Feld außerhalb der Sonne z. B. stets auf konstante Schwerepotentiale g_{ik} transformieren und die Feldkomponenten $\left\{ {i\,k \atop l} \right\}$ zu Null machen. Jeder Planet müßte sich dann nach (137) geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Weniger weit geht die Forderung, daß der Krümmungstensor

$$R_{ik} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (143)$$

sein soll. Denn nach § 10, d) läßt sich daraus in vier Dimensionen nicht das Verschwinden des ersteren Tensors folgern.

Sodann fragen wir nach der Verallgemeinerung für das Innere der Materie. Tatsache ist der proportionale Zusammenhang zwischen der trägen Masse eines Körpers und seiner Schwerewirkung. Die Trägheit läßt sich nun schon in der beschränkten Relativitätstheorie in einer invarianten Weise nur durch den Energieimpulstensor T_{ik} kennzeichnen. Also werden wir eine Beziehung zwischen dem Krümmungstensor R_{ik} und jenem aufzustellen haben, und zwar so, daß bei einer proportionalen Vergrößerung aller Komponenten des einen Tensors auch die des

anderen proportional wachsen. Nach der Einleitung sollen nun aber elektromagnetische und mechanische Energie sich der Schwere gegenüber gleich verhalten, somit werden wir hier unter T_{ik} die Summe aus beiden Energieimpulstensoren zu verstehen haben. Treten keine elektromagnetischen Kräfte an den Körpern auf, so ist jeder dieser Tensoren nach (130) und (134) divergenzfrei; sonst ist es nur ihre Summe, wie wir in Band I sahen. Auf alle Fälle muß also dem vereinigten elektromagnetischen und mechanischen Tensor T_{ik} ein aus dem R_{ik} linear gebildeter Tensor gleichgesetzt werden, dessen Divergenz identisch verschwindet. Als solchen haben wir in § 10, e) $R_{ik} - \frac{1}{2} R \cdot g_{ik}$ kennen gelernt, wo R das invariante Krümmungsmaß bedeutet. Also können wir unter Einführung einer Konstanten $\varkappa$

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2} R g_{ik} = \varkappa T_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (144)$$

setzen*). Multiplizieren wir diese Beziehung mit g^{ik}, so folgt wegen (81) und der aus (22) folgenden Gleichung

$$\sum_{ik} g_{ik} g^{ik} = 4$$

durch Summation nach beiden Zeigern:

$$-R = \varkappa \sum_{ik} g^{ik} T_{ik} = \varkappa \sum_{i} T_i^i = \varkappa T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (144a)$$

Eliminiert man aus (144) und dieser R, so findet man

$$R_{ik} = \varkappa (T_{ik} - \tfrac{1}{2} T g_{ik}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (144b)$$

Für den materiefreien Raum kommt man somit zu (143) zurück.

Die Gleichungen (144) stellen 10 partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die 10 Funktionen g_{ik} der x^i dar; wären sie voneinander unabhängig, so lösten sie im Prinzip das Problem, aus den 10 Komponenten T_{ik} die g_{ik} zu berechnen. Nun bestehen aber zwischen den rechten, wie zwischen den linken Seiten von (144) die vier Beziehungen, welche die Divergenzfreiheit des betreffenden Tensors ausdrücken. Also sind nur sechs von diesen Gleichungen unabhängige Aussagen und man kann vier von den 10 g_{ik} als Funktionen der x^i willkürlich vorgeben. Das hat seinen guten Grund in der Willkür der Koordinatenwahl;

---

*) Nach § 13 und nach der ersten Anmerkung zu § 15 hat $\varkappa$ die Dimension $m^{-1} l^{-1} t^2$.

denn sind die g_{ik} irgendwie als Funktionen der x^i gegeben, so kann man in ihren Zusammenhang mit anderen x'^i durch die allgemeine Koordinatentransformation vier willkürliche Funktionen hineinbringen. Ohne solche Willkür kann sich der Tensor der g_{ik} also nicht physikalisch bestimmen lassen.

Einstein hat die Feldgleichungen (144) bis zu einem gewissen Grade erraten müssen, und er hat erst beim zweiten Versuch dazu diese Gleichungen aufgestellt. Es ist also hierbei, wie auch sonst bei der Aufstellung neuer Theorien in der Physik, nicht ohne Willkür abgegangen. Wie gering deren Maß aber ist, zeigt der in § 10, f) bewiesene Satz, daß der Tensor $-\frac{1}{2} g_{ik} R + R_{ik}$ (abgesehen von einem Zahlenfaktor) der einzige divergenzfreie Tensor zweiten Ranges ist, welcher nur aus den Komponenten des Maßtensors, seinen ersten und zweiten Ableitungen gebildet ist und letztere linear enthält. Die Newtonsche Theorie der Schwere lieferte für das skalare Schwerepotential eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Hier spielen die g_{ik} die Rolle von Schwerepotentialen. Will man den Zug der alten Theorie wahren, daß deren zweite Ableitungen linear eingehen und höhere nicht auftreten, so kommt man mit Notwendigkeit zu den Feldgleichungen (144).

b) Die Erhaltungssätze. Zunächst wollen wir zeigen, daß die Gleichung $\Delta iv\, T = 0$, wie behauptet, die Erhaltung von Energie und Impuls ausspricht, wenn man die Energie und den Impuls des Schwerefeldes mit berücksichtigt. Es ist für das Schwerefeld kennzeichnend, daß wir bei den erforderlichen mathematischen Umformungen stets mit Größen zu tun haben, welche weder Skalare noch Tensoren sind.

Wir gehen aus von der Funktion

$$\mathfrak{H} = \sqrt{-g}\, H, \qquad H = \sum_{klnm} g^{kl} \left[\begin{Bmatrix} k\,l \\ n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n\,m \\ m \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k\,n \\ m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l\,m \\ n \end{Bmatrix} \right] \tag{145}$$

Nach (54) hängt sie ab von den g^{kl} und den ersten Ableitungen $\partial g_{ik} / \partial x^m$. Die letzteren lassen sich aber aus den ersten Differentialquotienten $\partial g^{kl} / \partial x^m$ und den g^{kl} selbst berechnen. Wir dürfen somit auch die Größen

$$\gamma^{kl} = \sqrt{-g}\, g^{kl} \quad \text{und} \quad \gamma^{kl}_n = \frac{\partial}{\partial x^n} \left(\sqrt{-g}\, g^{kl} \right) \quad . \quad . \tag{146}$$

zur Bestimmung von $\mathfrak{H}$ benutzen. Wir variieren diese:

$$\delta\mathfrak{H} = \sum_{klmn} \Big[\delta\Big(\sqrt{-g}\, g^{kl} \begin{Bmatrix} k\,l \\ n \end{Bmatrix}\Big)\cdot \begin{Bmatrix} n\,m \\ m \end{Bmatrix} + \delta\Big(\sqrt{-g}\, g^{kl} \begin{Bmatrix} n\,m \\ m \end{Bmatrix}\Big)\cdot \begin{Bmatrix} k\,l \\ n \end{Bmatrix}$$
$$- \delta\Big(\sqrt{-g}\, g^{kl} \begin{Bmatrix} l\,m \\ n \end{Bmatrix}\Big)\cdot \begin{Bmatrix} k\,n \\ m \end{Bmatrix} - \delta\Big(\sqrt{-g}\, g^{kl} \begin{Bmatrix} k\,n \\ m \end{Bmatrix}\Big)\cdot \begin{Bmatrix} l\,m \\ n \end{Bmatrix}$$
$$- \begin{Bmatrix} k\,l \\ n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n\,m \\ m \end{Bmatrix} \delta\Big(\sqrt{-g}\, g^{kl}\Big) + \begin{Bmatrix} k\,n \\ m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l\,m \\ n \end{Bmatrix} \delta\Big(\sqrt{-g}\, g^{kl}\Big)\Big].$$

Der vierte dieser sechs Summanden geht in den dritten über, sowie man k mit l und m mit n vertauscht. Durch Zusammenfassung beider entsteht das Glied:

$$-2\sum_{klmn} \begin{Bmatrix} k\,n \\ m \end{Bmatrix} \delta\Big(\sqrt{-g}\, g^{kl} \begin{Bmatrix} l\,m \\ n \end{Bmatrix}\Big) = -2\sum_{klmn} \begin{Bmatrix} k\,l \\ n \end{Bmatrix} \delta\Big(\sqrt{-g}\, g^{km} \begin{Bmatrix} m\,n \\ l \end{Bmatrix}\Big).$$

Bei der letzten Umformung sind die Zeiger l, m, n ersetzt durch m, n, l. Vertauscht man weiter k und l, so kann man nach (61c) denselben Ausdruck auch schreiben:

$$-\sum_{klmn} \begin{Bmatrix} k\,l \\ n \end{Bmatrix} \Big[\delta\Big(\sqrt{-g}\, g^{km} \begin{Bmatrix} m\,n \\ l \end{Bmatrix}\Big) + \delta\Big(\sqrt{-g}\, g^{lm} \begin{Bmatrix} m\,n \\ k \end{Bmatrix}\Big)\Big]$$
$$= \sum_{kln} \begin{Bmatrix} k\,l \\ n \end{Bmatrix} \delta\Big(\sqrt{-g}\, \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^n}\Big).$$

Der zweite Summand in der Gleichung für $\delta\mathfrak{H}$ ist aber nach (62a) gleich

$$\sum_{kln} \begin{Bmatrix} k\,l \\ n \end{Bmatrix} \delta\Big(g^{kl} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^n}\Big).$$

Er ergibt also zusammen mit dem dritten und vierten:

$$\sum_{kln} \begin{Bmatrix} k\,l \\ n \end{Bmatrix} \delta\, \gamma^{kl}_{n}.$$

Den ersten Summanden gestalten wir nach der zweiten der Gleichungen (73a) und dem Satze um, daß der Maßtensor divergenzfrei ist [§ 9, b)]; er wird dabei gleich

$$-\sum_{kmn} \begin{Bmatrix} n\,m \\ m \end{Bmatrix} \delta\Big(\frac{\partial\big(\sqrt{-g}\, g^{kn}\big)}{\partial x^k}\Big) = -\sum_{klm} \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix} \delta\, \gamma^{kl}_{l}.$$

Setzen wir die berechneten Ausdrücke in die Gleichung für $\delta \mathfrak{H}$ ein, so erhalten wir rechts lediglich Glieder, welche ein $\delta \gamma^{kl}$ oder ein $\delta \gamma^{kl}_n$ enthalten:

$$\delta \mathfrak{H} = \sum_{klmn} \left[\left\{ \begin{matrix} kn \\ m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} lm \\ n \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} kl \\ n \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} nm \\ m \end{matrix} \right\} \right] \delta \gamma^{kl}$$

$$- \sum_{klm} \left\{ \begin{matrix} km \\ m \end{matrix} \right\} \delta \gamma^{kl}_l + \sum_{kln} \left\{ \begin{matrix} kl \\ n \end{matrix} \right\} \delta \gamma^{kl}_n .$$

Um daraus die Differentialquotienten von $\mathfrak{H}$ nach den γ^{kl} und γ^{lk} zu entnehmen, müßten wir eigentlich deren Symmetrie in k und l berücksichtigen. Da wir in den Anwendungen der betreffenden Formeln aber stets die Summation nach k und l ausführen wollen, dürfen wir hier so tun, als bestände diese Symmetrie nicht, als wären vielmehr γ^{kl} und γ^{lk} zwei voneinander unabhängige Veränderliche, denn bei der erwähnten Summation hebt sich der damit begangene Fehler von selbst heraus. In diesem Sinne dürfen wir dann schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma^{kl}} &= \sum_{mn} \left(\left\{ \begin{matrix} kn \\ m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} lm \\ n \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} kl \\ n \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} nm \\ m \end{matrix} \right\} \right), \\ \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma^{kl}_m} &= \left\{ \begin{matrix} kl \\ m \end{matrix} \right\} - \delta^m_l \sum_n \left\{ \begin{matrix} kn \\ n \end{matrix} \right\} . \end{aligned} \right\} \quad \cdot \cdot \quad (147)$$

Nach (80) gilt somit die Identität:

$$R_{kl} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma^{kl}} - \sum_m \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma^{kl}_m} \right) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (148)$$

und die Feldgleichung (144 b) nimmt die Form an:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma^{kl}} - \sum_m \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma^{kl}_m} \right) = \varkappa \left(T_{kl} - \tfrac{1}{2} T g_{kl} \right) \quad \cdot \cdot \quad (149)$$

Hier nun multiplizieren wir mit γ^{kl}_n und summieren nach k und l. Da nach (146)

$$\frac{\partial}{\partial x^m} \gamma^{kl}_n = \frac{\partial}{\partial x^n} \gamma^{kl}_m$$

ist, können wir links

$$- \gamma^{kl}_n \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma^{kl}_m} \right) = - \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\gamma^{kl}_n \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma^{kl}_m} \right) + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma^{kl}_m} \frac{\partial \gamma^{kl}_m}{\partial x^n}$$

setzen und finden dann für die ganze linke Seite:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x^n} - \sum_{klm} \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\gamma_n^{kl} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma_m^{kl}}\right) = 2\varkappa \sum_m \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\, t_n^m\right)}{\partial x^m},$$

wenn wir definieren:

$$t_n^m = \frac{1}{2\varkappa\sqrt{-g}}\left[\delta_n^m \mathfrak{H} - \sum_{kl} \gamma_n^{kl} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\gamma_m^{kl}}\right] \quad . \; . \; . \; (150)$$

Auf der rechten Seite hingegen finden wir bei derselben Operation:

$$\varkappa\left[\sum_{kl} T_{kl} \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\, g^{kl}\right)}{\partial x^n} - \frac{1}{2} T \sum_{kl} g_{kl} \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\, g^{kl}\right)}{\partial x^n}\right].$$

Das zweite Glied formen wir nach (62 b) um:

$$-\frac{\varkappa}{2} T \sum_{kl} g_{kl} \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\, g^{kl}\right)}{\partial x^n} = -\varkappa T \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^n}.$$

Ersetzen wir dann T durch $\sum_{kl} g^{kl} T_{kl}$, so wird die rechte Seite gleich

$$\varkappa \sum_{kl} T_{kl}\left(\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\, g^{kl}\right)}{\partial x^n} - g^{kl} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^n}\right) = \varkappa \sqrt{-g} \sum_{kl} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^n} T_{kl}.$$

Nun machen wir von der Gleichung (134)

$$\Delta iv\, T = 0$$

Gebrauch. Dann sind nach (73 c)

$$\varkappa \sqrt{-g} \sum_{kl} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^n} T_{kl} = -2\varkappa \sum_m \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\, T_n^m\right)}{\partial x^m}.$$

Infolgedessen können wir für (149) schreiben:

$$\sum_m \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,(T_n^m + t_n^m)\right)}{\partial x^m} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (151)$$

Die hier neu eingeführten Größen $\mathfrak{H}$, γ^{kl}, γ_m^{kl}, t_n^m haben alle keinen Tensorcharakter gegenüber der allgemeinen Koordinatentransformation. Man sieht den Gleichungen, in welchen sie auftreten, daher nicht ohne weiteres ihre Gültigkeit in jedem Koordinatensystem an, sondern kann diese nur aus ihrer kein besonderes System bevorzugenden Ableitung entnehmen. Nur bei linearen

Transformationen von der Determinante $+1$ erhalten diese Größen einfache Umrechnungsformeln. Denn bei linearen Substitutionen verhalten sich nach § 7, d) die g-Klammern $\left\{ {k\,l \atop m} \right\}$ wie in k und l ko-, in m kontravariante Tensorkomponenten; und dasselbe gilt nach (147) dann auch für die Differentialquotienten $\partial \mathfrak{H} \; \partial \gamma^{kl}_{m}$, während H nach (145) skalaren Charakter annimmt. Kommt noch die Bedingung hinzu, daß die Determinante $+1$ ist, woraus nach (37) die Invarianz von g folgt, so werden $\mathfrak{H}$ skalar, die γ^{kl} nach (146) kontra-, und die γ^{kl}_{m} in k und l kontra-, in m kovariante Tensorkomponenten. Infolgedessen wird nach (150) t^{m}_{n} eine gemischte Komponente eines unsymmetrischen Tensors.

c) **Die Erhaltung der Energie und des Impulses.** Fehlt die Schwere, sind also die g_{ik} und ihre Determinante g konstant, die g-Klammern und damit $\mathfrak{H}$ aber Null, so geht die Formel (151) über in

$$\sum_{m} \frac{\partial T^{m}_{n}}{\partial x^{m}} = 0;$$

und deren Übereinstimmung mit Gleichung (XVI) von Bd. I veranlaßt uns zu dem schon im Eingang zu § 15 angedeuteten Ansatz,

$$\left.\begin{aligned} &T^{i}_{k} = \sqrt{g^{44}}\,\boldsymbol{p}^{i}_{k}, \quad T^{4}_{i} = c\sqrt{g^{44}}\,\mathfrak{g}_{i}, \quad T^{i}_{4} = -\frac{1}{c}\sqrt{g^{44}}\,\mathfrak{S}^{i}, \\ &(i, k = 1, 2, 3), \quad T^{4}_{4} = -\sqrt{g^{44}}\,W, \end{aligned}\right\} \tag{152}$$

der den Tensor T^{i}_{k} mit der Energiedichte W, dem Energiestrom $\mathfrak{S}$, der Impulsdichte $\mathfrak{g}$ und den Spannungen $\boldsymbol{p}^{i}_{k}$ in Verbindung bringt, soweit diese von der „Materie", d. h. den Körpern und dem elektromagnetischen Felde herrühren. Es liegt ferner nahe, den t^{i}_{k} dieselben Bedeutungen für das Schwerefeld zu geben. Sehen wir zu, in welchem Sinne wir dann aus (151) die Erhaltungssätze der Energie und des Impulses ablesen können.

Wir betrachten zuerst ein für sich allein bestehendes, räumlich begrenztes System von Körpern und elektromagnetischen Feldern. Reichen letztere ins Unendliche, so können wir die Betrachtung in manchen Fällen trotzdem aufrecht erhalten, wenn nämlich der elektromagnetische Trägheitstensor in hinreichend schnellem Maße mit wachsender Entfernung von den Körpern

des Systems abnimmt. Bei der Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen ist das freilich nicht mehr der Fall.

Unter den genannten Voraussetzungen kann man das System nämlich räumlich umschließen mit einer Fläche σ, auf der nicht nur der Tensor T_{ik} genau oder in hinreichendem Maße verschwindet, sondern auch das Schwerefeld sich nicht mehr bemerkbar macht. Dann gilt in dem Teil der „Welt", der außerhalb der dieser Fläche entsprechenden Weltröhre liegt, die Maßbestimmung der beschränkten Relativitätstheorie; d. h. es gibt dort Koordinatensysteme mit der Maßbestimmung

$$d\tau^2 = dx^{4^2} - (dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}).$$

Ein solches benutzen wir dort, und setzen es in die Nähe und ins Innere der Weltröhre auf irgend eine stetige Art fort. Das Ganze nennen wir das Koordinatensystem K. In ihm integrieren wir die Gleichung (151) über den Teil eines Raumes $x^4 = const$, der innerhalb der Weltröhre liegt. An den Differentialquotienten nach x^1, x^2, x^3 läßt sich diese Operation ausführen und liefert den Wert Null, weil auf dem Mantel der Weltröhre die T_n^m und t_n^m verschwinden. Es bleibt:

$$\frac{\partial}{\partial x^4} \int \sqrt{-g}\,(T_n^4 + t_n^4)\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = 0.$$

Für zwei verschiedene Räume $x^4 = const$ hat somit jedes der vier Integrale

$$I_n = -\int \sqrt{-g}\,(T_n^4 + t_n^4)\, dx^1\, dx^2\, dx^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (153)$$

denselben Wert, sie sind zeitlich konstant. Darüber hinaus sind sie unabhängig von der Art, wie wir das Koordinatensystem innerhalb des Zylinders gewählt haben. In irgend einem anderen System K', wenn es nur außerhalb mit K zusammenfällt, haben sie dieselben Werte wie in K. Beweis: Man führe ein drittes System K'' so ein, daß der Raum $x''^4 = a''$ derselbe ist, wie $x^4 = a$ und der Raum $x''^4 = b''$ dasselbe wie $x'^4 = b'$. Dann hat jedes Integral den gleichen Wert für $x''^4 = a''$ und für $x''^4 = b''$, somit auch für $x^4 = a$ und $x'^4 = b'$, also auch für beliebige Räume $x^4 = const$ in K und $x'^4 = const$ in K'; was zu beweisen war.

Nach § 6 ist $\sqrt{-gg^{44}}\, dx^1\, dx^2\, dx^3$ das Volumenelement des Raumes der x^1 x^2, x^3 in natürlicher Messung. Nach der Deutung (152) für die T_k^i und ihrer Übertragung auf die t_k^i bilden I_1, I_2, I_3

die Komponenten des (mit c multiplizierten) Impulses, I_4 hingegen die Energie des betrachteten Systems. Die Aussage, daß die I_n sich zeitlich nicht ändern, enthält somit die Erhaltungssätze in der uns geläufigen Integralform.

Der Integrand in (153) verhält sich bei linearen Transformationen von der Determinante $+1$ wie die kovariante Komponente eines Vektors. Beweis: Nicht nur die T_n^i, sondern nach Abschnitt b) dieses Paragraphen auch die t_n^i bilden dann einen Tensor. Ist P ein beliebiger Vektor, so bilden somit die Summen

$$\sum_n (T_n^i + t_n^i)\, P^n = \Phi^i$$

einen Vektor. Infolgedessen ist

$$\sqrt{-g} \sum_n (T_n^4 + t_n^4)\, P^n\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = \sqrt{-g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, \Phi^4$$

ein Skalar; nämlich der Inhalt des von den Vektoren dx^1, dx^2, dx^3 und Φ gebildeten vierdimensionalen Bereichs (§ 6). Nach der Vektordefinition folgt daraus die Vektoreigenschaft von

$$\sqrt{-g}\, (T_n^4 + t_n^4)\, dx^1\, dx^2\, dx^3.$$

Für ein vollkommenes statisches System sind die T_n^m und t_n^m längs jeder Weltlinie unveränderlich. Man kann dann schließen, daß die vier Größen I_n, welche Energie und Impuls des Körpers geben, sich wie ein Vierervektor umrechnen. Dieser hat natürlich die Richtung der Weltlinie, also der Vierergeschwindigkeit, weil im Ruhsystem 3 die T_n^4 und t_n^4 für $n = 1, 2, 3$, somit auch die entsprechenden I_n Null sind. Man kann ihn also gleich $m\,Y$ setzen, wo m die Ruhmasse bedeutet. Eine Lorentz-Transformation erfüllt alle Bedingungen, die wir hier für die Transformation aufgestellt haben. Unterwerfen wir also das Koordinatensystem, das nach Voraussetzung weit außerhalb des Körpers die pseudoeuklidische Maßbestimmung trägt, einer Lorentz-Transformation, so rechnen sich dabei die I_n genau so um, wie in der beschränkten Relativitätstheorie. Ein vollkommenes statisches System befolgt also, auch wenn wir sein Schwerefeld berücksichtigen, die Dynamik des Massenpunktes im Sinne der beschränkten Relativitätstheorie, die in Gleichung (XXVII) von Bd. I

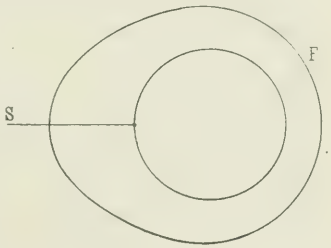
$$K = \frac{d\,(m\,Y)}{d\tau}$$

zusammengefaßt ist*). Wir wollen aber nicht verhehlen, daß nach unserer Ansicht die Voraussetzung des vollständigen statischen Systems bei diesem Schluß durchaus notwendig ist. Bildet man die I_n für verschiedene, durch Lorentz-Transformation verbundene Systeme, so führt man die Integration in (153) über verschiedene dreidimensionale Räume in der „Welt" aus; ähnlich, wie es Fig. 9 in Bd. I darstellt. Zwischen zwei derartigen Integralen besteht im allgemeinen gar kein Zusammenhang. Nur wenn der Integrand längs jeder Weltlinie seinen Wert behält, können wir den obigen Satz beweisen.

Nun läge es außerordentlich nahe, die Gleichungen (151) als die Differentialform der Erhaltungssätze zu betrachten. Aber diese Deutung führt auf eine Schwierigkeit, die mit dem Fehlen der Tensoreigenschaft bei den t_n^m zusammenhängt: Man kann gelegentlich durch eine Koordinatentransformation alle t_n^m für ausgedehnte Bereiche (nicht nur in einem Weltpunkt) zu Null machen, und zwar in Fällen, in denen gewiß ein Schwerefeld vorhanden ist. In der Umgebung einer schweren Kugel z. B. können wir solche Koordinaten einführen, obwohl doch hier ganz gewiß der Maßtensor nicht konstant, und dementsprechend die g-Klammern nicht Null sind (vgl. §§ 21 und 24) [Schrödinger][1]).

Man hat den t_n^m daraufhin jegliche physikalische Bedeutung absprechen wollen. Damit aber geht man gewiß zu weit. Lassen wir z. B. aus der schweren Kugel (Fig. 19) einen dünnen Stab herausragen, der zu dem Schwerefelde beliebig wenig beitragen mag, so genügt doch diese beliebig geringe Veränderung, um Spannungen hervorzubringen, die sich nicht fort-transformieren lassen. Denn dieser Stab enthält sicher elastische Spannungen, die der Anziehung durch die Kugel das Gleichgewicht halten. Umgeben wir nun die Kugel mit einer Fläche F, welche den Stab einmal senkrecht schneidet, so können wir aus (151),

Fig. 19.



*) Nach (141) muß diese Gleichung hier mit umgekehrtem Vorzeichen von K geschrieben und rechts der Faktor c^2 hinzugefügt werden.

indem wir $n = 1$ setzen, den Differentialquotienten nach x^4 wegen der zeitlichen Unveränderlichkeit des Feldes unterdrücken und über den von F eingeschlossenen dreidimensionalen Raum integrieren, auf die Gleichung

$$0 = \int \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,(T_1^m + t_1^m)\right)}{\partial x^m}\, dx^1\, dx^2\, dx^3$$

$$= \int \sqrt{-gg^{44}}\,[+(\boldsymbol{p}_1^1 + \boldsymbol{s}_1^1)\, dx^2\, dx^3 + (\boldsymbol{p}_1^2 + \boldsymbol{s}_1^2)\, dx^3\, dx^1 + (\boldsymbol{p}_1^3 + \boldsymbol{s}_1^3)\, dx^1\, dx^2]$$

schließen. (Die $\boldsymbol{s}_k^i$ bedeuten die Spannungen des Schwerefeldes.) Die Integration ist im zweiten Integral über die Fläche F auszuführen. Nun verlegen wir die positive x^1-Achse in den Stab. Der Anteil der $\boldsymbol{p}_k^i$ an dem Flächenintegral beschränkt sich dann auf $\boldsymbol{p}_1^1$, multipliziert mit dem Querschnitt des Stabes; er ist sicher positiv, da im Stabe ein Druck in der Längsrichtung herrscht. Infolgedessen können in diesem verschwindenden Integral nicht überall alle $\boldsymbol{s}_k^i$ Null sein. Das gilt in jedem Koordinatensystem [Einstein][2]).

Den weiteren Einwand, daß man umgekehrt in eine „Welt" mit pseudoeuklidischer Geometrie Schwerefelder hineintransformieren könne, für welche nicht alle t_k^i verschwinden, erhebt Hans Bauer[3]). Aus der Maßbestimmung

$$d\tau^2 = dx^{4\,2} - dx^{1\,2} - dx^{2\,2} - dx^{3\,2}$$

macht er durch den bekannten Übergang zu räumlichen Polarkoordinaten r, ϑ, φ

$$d\tau^2 = dx^{4\,2} - dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2$$

und setzt dann weiter

$$x'^1 = \frac{r^3}{3}, \quad x'^2 = -\cos\vartheta, \quad x'^3 = \varphi, \quad x'^4 = x^4,$$

so daß

$$d\tau^2 = dx'^{4\,2} - \frac{1}{(3x'^1)^{4/3}}\, dx'^{1\,2} - (3x'^1)^{2/3}\left[\frac{dx'^{2\,2}}{1 - x'^{2\,2}} + (1 - x'^{2\,2})\, dx'^{3\,2}\right]$$

wird. Dann ergeben sich in der Tat die t_k^i als zum Teil von Null verschieden.

Es hängt das natürlich damit zusammen, daß man wohl von dem Bezugssystem x^i, nicht aber von den beiden daraus abgeleiteten in folgerichtiger Anwendung der allgemeinen Relativitäts-

theorie sagen darf, es sei in ihnen kein Schwerefeld vorhanden. Dies fehlt eben nur dann, wenn in den einmal gewählten Koordinaten alle g_{ik} unveränderlich und damit die geodätischen Weltlinien durch lineare Beziehungen zwischen den vier Koordinaten bestimmt sind. Daß die x^1, x^2, x^3, nicht aber die r, ϑ, φ und x'^1, x'^2, x'^3, geradlinige Koordinaten sind, und daß man bei der Frage deswegen zwischen ihnen Unterschiede machen müßte, ist nicht im Sinne der Theorie. Jede Koordinatenwahl bedeutet, wie wir in § 3 betont haben, nichts anderes als eine, abgesehen von den Ungleichungen (10) und gewissen Stetigkeitsbedingungen, ganz willkürliche Benennung der Raumzeitpunkte. Auch ist zu bemerken, daß bei der angedeuteten Rechnung gerade die t^n_m, bei denen nur ein Zeiger gleich 4 ist, verschwinden, Energieströmungen daher nicht stattfinden.

Man kann sich des Eindrucks nicht erwehren, daß wir hier vor einem Rätsel stehen, das erst die Zukunft ganz lösen kann.

d) Die Trägheit der Energie. Die vierte der Gleichungen (151) integrieren wir wieder über einen geschlossenen Bereich im Streckenraum eines beliebigen Koordinatensystems, nachdem wir in sie gemäß (152) und den entsprechenden Festsetzungen

$$t^i_4 = -\frac{1}{c}\sqrt{g^{44}}\,\mathfrak{s}^i \quad \text{und} \quad t^4_4 = -\sqrt{g^{44}}\,w$$

die Energieströmung $\mathfrak{s}$ und die Energiedichte w des Schwerefeldes eingeführt haben. Wir finden:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\sqrt{-gg^{44}}\,(W+w)\,dx^1\,dx^2\,dx^3$$
$$+\int\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{-gg^{44}}\,(\mathfrak{S}^1+\mathfrak{s}^1)\right)+\cdots+\cdots\right]dx^1\,dx^2\,dx^3 = 0.$$

Dieselbe Umformung, die uns in § 14 von (118a) zu (118b) geleitet hat, ergibt hier für die Gesamtenergie E des betreffenden Bereichs

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int(\mathfrak{S}^n+\mathfrak{s}^n)\,d\sigma;$$

und man erkennt daran, daß $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{s}$ die Energie angeben, welche durch die zu n senkrechte Flächeneinheit in der Einheit der Zeit t strömt. Wie in dem Begriff des durch $\mathfrak{J}$ angegebenen Leitungsstromes steckt also auch in diesen die Willkür der Definition von t. Will man sie ausmerzen, so muß man zur Um-

rechnung auf die Eigenzeit einer am gleichen Ort ruhenden Uhr noch mit $\sqrt{g_{44}}$ dividieren. $\frac{1}{\sqrt{g_{44}}}\mathfrak{S}$ und $\frac{1}{\sqrt{g_{44}}}\mathfrak{s}$ sind also die beiden Energieströme in natürlicher Messung. In den Koordinatensystemen, in denen die Zeitachse gemäß den Bedingungen (49) auf den Streckenräumen senkrecht steht, können wir dafür wegen $g_{44} \cdot g^{44} = 1$ auch die Vektoren $\sqrt{g^{44}}\,\mathfrak{S}$ und $\sqrt{g^{44}}\,\mathfrak{s}$ setzen, die nach (152) unmittelbar mit den T_4^i und t_4^i zusammenhängen.

In Band I schlossen wir aus der Symmetrie des Energieimpulstensors auf das Gesetz von der Trägheit der Energie in seiner allgemeinsten Fassung, die ihm Planck gegeben hat:

$$\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{S}}{c^2}.$$

Hier läßt sich dieser Schluß für beliebige Koordinatensysteme nicht ziehen. Nur in den bevorzugten, für welche die Gleichungen (49) gelten, lassen sich nach § 6, h) die gemischten Komponenten T_4^i und T_i^4 auf denselben Raumvektor zurückführen. Die dortigen Regeln geben dann nach geringer Zwischenrechnung das Ergebnis

$$\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{S}}{c^2 g_{44}}.$$

Steht die Zeitachse überall auf den Streckenräumen senkrecht, so ist die Energieströmung, dividiert durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit $c\sqrt{g_{44}}$, gleich der Impulsdichte.

VI. Anwendungen der Grundgesetze auf besondere Fälle.

§ 17. Statische Felder.

a) Die Koordinatenwahl. Die erste Frage bei jeder nach der allgemeinen Relativitätstheorie zu lösenden Aufgabe ist, wie man das Koordinatensystem x^1, x^2, x^3, x^4 wählen soll. Ihre Beantwortung ist entscheidend für die mathematischen Schwierigkeiten, auf welche man hinterher stößt, und es zeigt sich in ihr um so mehr die mathematische Geschicklichkeit, als die allgemeine Theorie nicht immer einen Fingerzeig dafür gibt, sondern im Gegenteil grundsätzlich jede Wahl für zulässig bezeichnet. Bei Untersuchung statischer Felder werden wir allerdings von selbst dazu geführt, ein System zu bevorzugen, welches für alle am Felde beteiligten Körper Ruhsystem ist; d. h. nach § 13, wir werden dem Maßtensor die Bedingungen (49) auferlegen. Darüber hinaus werden wir noch fordern, daß in dem zu benutzenden System alle Komponenten dieses Tensors von der Zeitveränderlichen $x^4 = ct$ unabhängig sind. Wir setzen also:

$$\left.\begin{aligned} &d\tau^2 = V^2 dx^{4^2} - ds^2; \quad ds^2 = \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k, \\ &\text{d. h.} \\ &g_{44} = V^2; \; g_{i4} = 0, \; g_{ik} = -\gamma_{ik}, \text{ wenn } i, k = 1, 2, 3. \end{aligned}\right\} \quad (154)$$

ds ist demnach das Linienelement des Streckenraumes; die Lichtgeschwindigkeit beträgt $c\,V$.

Weiter werden wir annehmen, daß in großem Abstande von den Massen jede Schwerewirkung verschwindet, und daß dann die Gesetze der beschränkten Relativitätstheorie in Kraft treten, d. h. wir setzen als Grenzbedingungen fest: $g_{ii} = -1$, wenn $i = 1, 2, 3$; $g_{ik} = 0$, wenn i von k verschieden; $g_{44} = +1$.

Die physikalische Bedeutung der Grenzbedingungen mag die folgende Überlegung beleuchten: Sämtliche Massen des hier zu betrachtenden Feldes ruhen nicht nur gegeneinander, sondern auch gegen das beschriebene Koordinatensystem. Dies System

ist nach der allgemeinen Relativitätstheorie nichts physikalisch Wirkliches. Eine physikalische Aussage läge also nur in der Angabe, daß diese Massen gegen das Fixsternsystem oder gegen andere, weit entfernte, große Massen ruhen. Deren Einfluß aber vermögen wir hier nur durch die Grenzbedingungen in Rechnung zu ziehen. Daß diese gegen eine Lorentz-Transformation invariant sind, enthält den Satz, daß eine gleichförmige Geschwindigkeit der fernen Massen gegen die unseres Feldes, oder, was dasselbe ist, eine solche Geschwindigkeit der Feldkörper gegen jene, nichts an dem Schwerefeld ändert.

Eine Schwierigkeit ergibt sich aber, wenn man nach dem Schwerefeld des ganzen Fixsternsystems fragt, dessen Massen freilich nicht streng genommen gegeneinander ruhen, aber doch nur gegen die Lichtgeschwindigkeit geringe Geschwindigkeiten haben. Es entspräche den grundlegenden Gedanken der allgemeinen Relativitätstheorie, wenn in hinreichendem Abstand von allen anderen Massen die Trägheit eines einzelnen Körpers verschwände. Denn auch die Trägheit kann nur ein Relationsbegriff sein, der nur auf zwei oder mehr Körper angewandt werden kann. (In der alten Physik, einschließlich der beschränkten Relativitätstheorie, konnte das Bezugssystem als etwas physikalisch Wirkliches den einen Körper ersetzen, hier geht das nicht.) Nach den erwähnten Grenzbedingungen bleibt die Trägheit aber bestehen. Solche Überlegungen haben Einstein zur Hypothese eines nach Art der Kugelfläche in sich zurücklaufenden Raumes geführt [1]). Uns scheint die ganze Frage physikalisch zu wenig geklärt, als daß wir darauf eingehen möchten. Wir verstehen im folgenden unter dem „Unendlichen", für welches die genannten Grenzbedingungen gelten, Gebiete innerhalb unseres Fixsternsystems, die aber von den Körpern des zu betrachtenden Schwerefeldes hinreichend weit entfernt sind.

Aus Gleichung (154) leiten wir auf dem üblichen Wege, d. h. mittels des Variationsprinzips

$$\delta \int \left(\sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}\, j^i j^k - V^2 j^{4\,2} \right) d\tau = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (155)$$

die g-Klammern her. Dabei bezeichnen wir die g-Klammern, welche sich aus dem für den Streckenraum gültigen Maßtensor be-

rechnen, zum Unterschied mit einem Stern; also nach Gleichung (53)

$$\left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\}^* = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{3} \gamma^{lm} \left(\frac{\partial \gamma_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial \gamma_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^m} \right).$$

Außerdem bedenken wir, daß nach § 9, a) die $\frac{\partial V}{\partial x^i}$ $(i = 1, 2, 3)$ die kovarianten Komponenten des dreidimensional verstandenen Gradienten von V, die Summen

$$\sum_{i=1}^{3} \gamma^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^i} = grad^k V$$

dessen kontravariante Komponenten darstellen.

Für x^4 finden wir so die Differentialgleichung:

$$\frac{d}{d\tau} (V^2 \dot{x}^4) = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x}^4 + \frac{2}{V} \dot{x}^4 \sum_{m=1}^{3} grad_m V . \dot{x}^m = 0 \quad (156)$$

Für die anderen drei x^i müssen wir, soweit dabei die Doppelsumme von (155) in Betracht kommt, dieselbe Rechnung wie in § 7, a) bei der Herleitung der geodätischen Linie ausführen; nur treten noch gewisse Glieder dazu, welche aus dem $V^2 \dot{x}^{4^2}$ entspringen. Statt (52) erhalten wir:

$$2 \frac{d}{d\tau} \left(\sum_{k=1}^{3} \gamma_{ik} \dot{x}^k \right) - \sum_{j,k=1}^{3} \gamma_{jki} \dot{x}^j \dot{x}^k + 2 V . grad_i V \dot{x}^{4^2} = 0.$$

Die Ausführung der Differentiation nach τ macht daraus:

$$\sum_{k=1}^{3} \gamma_{ik} \ddot{x}^k + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{3} \dot{x}^j \dot{x}^k \left(\frac{\partial \gamma_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \gamma_{jk}}{\partial x^i} \right)$$
$$+ V grad_i V . \dot{x}^{4^2} = 0.$$

Schließlich multiplizieren wir mit γ^{il} und summieren nach i; nach der auf die γ_{ik} und γ^{ik} zu übertragenden Formel (22) folgt dann

$$\ddot{x}^l + \sum_{j,k=1}^{3} \left\{ \begin{matrix} j\,k \\ l \end{matrix} \right\}^* \dot{x}^j \dot{x}^k + V grad^l V . \dot{x}^{4^2} = 0. \quad (157)^*)$$

---

*) Gleichung (157) beweist u. a., daß die Projektionen der geodätischen Weltlinien auf den Streckenraum dessen geodätische Linien nur dann ergeben, wenn V konstant ist. Infolgedessen bilden nur unter der Bedingung der konstanten Lichtgeschwindigkeit $c V$ die Lichtstrahlen geodätische Linien des Streckenraumes.

Daraus entnehmen wir für $i, k, l = 1, 2, 3$

$$\left.\begin{aligned} &\left\{\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}\right\}^*, \quad \left\{\begin{matrix} 4\,4 \\ l \end{matrix}\right\} = V\,grad^l\,V, \quad \left\{\begin{matrix} 4\,i \\ l \end{matrix}\right\} = 0, \\ &\left\{\begin{matrix} i\,k \\ 4 \end{matrix}\right\} = 0, \quad \left\{\begin{matrix} i\,4 \\ 4 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{V}\,grad_i\,V, \quad \left\{\begin{matrix} 4\,4 \\ 4 \end{matrix}\right\} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{158}$$

Von einer Lösung $x^i = f^i(\tau)$ $(i = 1, \ldots 4)$ der Differentialgleichungen (156) und (157) gelangen wir zu einer neuen, wenn wir die Vorzeichen von f^4 und τ umkehren, denn dann wechseln $\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3$ und $\ddot{x}^4$, nicht aber $\ddot{x}^1, \ddot{x}^2, \ddot{x}^3$ und $\dot{x}^4$ das Vorzeichen. Eliminieren wir aus den beiden so gewonnenen Systemen von je vier Gleichungen den Parameter τ, so finden wir

$$x^i = F^i(x^4) \quad \text{und} \quad x^i = F^i(-x^4) \; (i = 1, 2, 3):$$

und das beweist, daß in Schwerefeldern, wie wir sie hier betrachten, die Fallbewegung unmittelbar umkehrbar ist, wie auch in der alten Mechanik. Jede dabei mögliche Bahn kann hin und zurück mit Geschwindigkeiten zurückgelegt werden, deren Betrag im gleichen Kurvenpunkt beidemal den gleichen Betrag hat.

Vom Krümmungstensor R_{kl} brauchen wir im folgenden nur die Komponente

$$R_{44} = \sum_{m=1}^{4} \left[\frac{\partial}{\partial x^4}\left\{\begin{matrix} 4\,m \\ m \end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x^m}\left\{\begin{matrix} 4\,4 \\ m \end{matrix}\right\}\right]$$

$$+ \sum_{m,n=1}^{4} \left[\left\{\begin{matrix} 4\,n \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 4\,m \\ n \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} 4\,4 \\ m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} m\,n \\ n \end{matrix}\right\}\right].$$

[Vgl. (80)]*). Hierin fallen zunächst alle Differentialquotienten

---

*) Für $i, k = 1, 2, 3$ ergibt die Rechnung:

$$R_{i4} = 0, \quad R_{ik} = P_{ik} + \frac{V_{ik}}{V},$$

wenn

$$V_{ik} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^k} - \sum_{m=1}^{3} \left\{\begin{matrix} i\,k \\ m \end{matrix}\right\}^* \frac{\partial V}{\partial x^m}$$

ist. Dabei bedeutet P_{ik} den Krümmungstensor, welcher der Form ds^2 entspricht, der sich also nach (80) aus den γ_{ik} berechnet.

nach x^4 fort. Die drei übrigbleibenden Glieder der ersten Summe ergeben [vgl. (158)]

$$-\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^m}(V\,grad^m V)=-\sum_{m=1}^{3}\left(grad_m V\,grad^m V+V\frac{\partial\,grad^m V}{\partial x^m}\right)$$

$$=-\,|grad\,V|^2-V\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial\,grad^m V}{\partial x^m}.$$

In der Doppelsumme ist $\left\{\begin{matrix}4\,n\\m\end{matrix}\right\}=0$, wenn beide Summationszeiger gleich vier oder beide von vier verschieden sind. Ist nur $m=4$, so wird

$$\left\{\begin{matrix}4\,n\\m\end{matrix}\right\}=V^{-1}\,grad_n V,\qquad \left\{\begin{matrix}4\,m\\n\end{matrix}\right\}=V\,grad^n V$$

und ist nur $n=4$, so gilt umgekehrt

$$\left\{\begin{matrix}4\,n\\m\end{matrix}\right\}=V\,grad^m V,\qquad \left\{\begin{matrix}4\,m\\n\end{matrix}\right\}=V^{-1}\,grad_m V.$$

Also ergibt die erste Hälfte der Doppelsumme $2\,|grad\,V|^2$. In der zweiten Hälfte verschwindet $\left\{\begin{matrix}4\,4\\m\end{matrix}\right\}$ für $m=4$; sonst ist $\left\{\begin{matrix}4\,4\\m\end{matrix}\right\}=V\,grad^m V$ und wenn auch n von 4 verschieden ist, $\left\{\begin{matrix}m\,n\\n\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}m\,n\\n\end{matrix}\right\}^*$; ist hingegen $n=4$, so wird $\left\{\begin{matrix}m\,n\\n\end{matrix}\right\}=V^{-1}\,grad_m V$. Daraus ergibt sich also der Summand

$$-\,|grad\,V|^2-V\sum_{m,n=1}^{3}\left\{\begin{matrix}m\,n\\n\end{matrix}\right\}^*grad^m V$$

oder nach Rechnungsregel (62a) in § 7

$$-\,|grad\,V|^2-\frac{V}{\sqrt{\gamma}}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial x^m}\,grad^m V;$$

und man findet im Hinblick auf Rechnungsregel (73) aus § 9:

$$\left.\begin{aligned}R_{44}&=-V\sum_{m=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x^m}(grad^m V)+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,grad^m V\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial x^m}\right)\\&=-\frac{V}{\sqrt{\gamma}}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial(\sqrt{\gamma}\,grad^m V)}{\partial x^m}=-V\,.\,div\,grad\,V.\end{aligned}\right\}\qquad(159)$$

b) Die Newtonsche Theorie der Planetenbewegung als Näherung. Bis hierher haben wir streng gerechnet. Jetzt führen wir zwei Näherungen ein. Erstens nämlich setzen wir im Hinblick auf die weitgehende empirische Bewährung der euklidischen Geometrie als Maßbestimmung im Streckenraum $\gamma_{ii} = 1 + \varepsilon_{ii}$, $\gamma_{ik} = \varepsilon_{ik}$, wenn $i \neq k$, und zweitens im Hinblick auf die bisher überhaupt unmerklich gebliebenen Abweichungen der Lichtgeschwindigkeit cV vom Wert c:

$$V = 1 + \frac{\Psi}{c^2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (160)$$

wobei

$$\varepsilon_{ik} \ll 1, \quad \frac{\Psi}{c^2} \ll 1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (161)$$

sein soll. Nach diesen Annahmen wird aus (159) bis auf Größen höherer Ordnung

$$R_{44} = -\frac{1}{c^2} \Delta \Psi \qquad \left(\Delta \Psi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^{i^2}}\right).$$

Weiterhin haben wir schon in (136) für spannungsfreie Materie den Welttensor

$$T_{ik} = -c^2 \mu \, Y_i \, Y_k$$

gesetzt (μ Massendichte); wir werden im Hinblick auf den bisher nie bemerkten Einfluß elastischer Spannungen auf die Schwerewirkung eines Körpers diesen Ansatz auch hier gebrauchen. Da nun hier wegen $Y^{2} = 1$ und $Y^1 = Y^2 = Y^3 = 0$

$$g_{44} Y^{4^2} = Y^4 Y_4 = 1, \qquad Y_4 = \sqrt{g_{44}} = V,$$

und weiter

$$T_{44} = -c^2 V^2 \mu, \qquad T = \sum_i T^i_i = -c^2 \mu,$$

$$T_{44} - \tfrac{1}{2} g_{44} \cdot T = -\tfrac{1}{2} c^2 V^2 \mu$$

ist, folgt aus der auf R_{44} bezüglichen Feldgleichung (144b) unter Vernachlässigung von Ψ / c^2 gegen 1

$$\Delta \Psi = \frac{\varkappa}{2} c^4 \mu \quad \cdots\cdots\cdots \quad (162)$$

Diese Gleichung aber geht in die Differentialgleichung für das Newtonsche Potential ($\Delta \Psi = 4 \pi C \mu$) über, sofern man Ψ

diesem gleichsetzt und der Konstanten in den Einsteinschen Feldgleichungen den Wert

$$\varkappa = \frac{8\pi C}{c^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (162\,\mathrm{a})$$

gibt. Unsere Grenzbedingungen fürs Unendliche zwingen uns nun, dort $V = 1$, also $\Psi = 0$ zu setzen. Ψ bestimmt sich also genau wie in der alten Theorie der Schwere aus den Massen. Zahlenmäßig ergibt sich aus (162a) nach (2)

$$\varkappa = 2{,}071 \,.\, 10^{-48}\,\mathrm{g}^{-1}\,\mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{sec}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (162\,\mathrm{b})$$

Die Größe Ψ / c^2 bleibt nach den Berechnungen im folgenden Paragraphen stets in der Größenordnung 10^{-6}, so daß die Bedingung (161) gut erfüllt ist*).

Nachdem wir so Ψ und damit V bestimmt haben, können wir die noch nicht benutzten Feldgleichungen (144b) durch passende Wahl der ε_{ik} befriedigen; sie reichen (vgl. die Anmerkung auf S. 182) nach Zahl und Größenordnung dazu aus. In § 19 behandeln wir übrigens im Grunde dasselbe Problem vollständig.

Nun gehen wir unter Beibehaltung der angegebenen Näherungen zu der Frage über: Wie bewegt sich ein Massenpunkt, der wegen seiner geringen Masse das Schwerefeld nicht abändert und die Körper, denen es seine Entstehung verdankt, deswegen auch nicht in Bewegung setzt, in dem statischen Felde? Der Satz von § 15, daß seine Weltlinie eine geodätische ist, veranlaßt uns, auf das Variationsproblem

$$\delta \int \sqrt{c^2 V^2 \dot{t}^2 - \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik} \dot{x}_i \dot{x}^k}\, dp = 0$$

einzugehen. Dabei bedeutet p einen ganz beliebigen Parameter, als dessen Funktionen die vier Koordinaten gesucht werden. Die Variationen müssen an den Integrationsgrenzen verschwinden. Nichts hindert nun, $p = t$ zu wählen; dann wird $\dot{t} = 1$ und die Summe gleich dem Geschwindigkeitsquadrat q^2. Es ist bei allen

*) In Einsteins Schriften tritt statt $\varkappa$ eine andere Konstante vom Wert $8\pi C : c^2 = 1{,}87 \,.\, 10^{-27}\,\mathrm{g}^{-1}\,\mathrm{cm}$ auf, weil $d\tau$ bei ihm die Dimension t hat, bei uns aber nach § 13 die Dimension l.

astronomischen Geschwindigkeiten klein gegen c^2. Für $\sqrt{c^2 + 2\Psi - q^2}$ kann man daher nach (160) näherungsweise

$$c\sqrt{1 + \frac{2\Psi}{c^2} - \frac{q^2}{c^2}} = \frac{1}{c}\left[c^2 + \Psi - \tfrac{1}{2}q^2\right]$$

setzen, so daß das Variationsprinzip jetzt

$$\delta \int (\Psi - \tfrac{1}{2}q^2)\, dt = 0$$

lautet. Hier können wir nun wegen der Kleinheit der ε_{ik} [vgl. (161)]

$$q^2 = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}^{i\,2}$$

setzen. Das Variationsprinzip fällt dann mit dem Hamiltonschen Prinzip der klassischen Mechanik für die Bewegung im Schwerefeld zusammen, und beweist in Gemeinschaft mit (162), daß innerhalb unserer Näherung alle deren Sätze Folgerungen aus Einsteins Feldgleichungen und der Dynamik der allgemeinen Relativitätstheorie darstellen.

Da sich somit die euklidische Maßbestimmung

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} dx^{i\,2},$$

welche keinen Einfluß der Schwere erkennen läßt, bei der Planetenbewegung als gute Näherung erweist, so verstehen wir nun auch die Tatsache, daß es bisher dem Versuch nie gelang, andere Abweichungen davon festzustellen, daß somit die empirische Forschung nicht über Newtons Theorie hinausführen konnte, wie wir das in § 1 schon erwähnt haben.

c) Die Veränderlichkeit der Masse M im Schwerefeld. Nach (142 a) bestimmt sich die Masse M aus der bei quasistationärer Bewegung unveränderlichen Ruhmasse m eines Massenpunktes durch Multiplikation mit $\frac{1}{\sqrt{g_{44}}}$, wofür wir nach (154) setzen:

$$\frac{1}{V} = 1 - \frac{\Psi}{c^2}.$$

Das Potential Ψ der Newtonschen Theorie nimmt aber bei Annäherung an einen der das Schwerefeld bestimmenden Körper ab.

Also wächst bei der Annäherung an andere Körper die Masse M, welche in der Bewegungsgleichung (141) sowohl die Trägheit als die Schwere des Körpers bestimmt. Es entspricht dem der schon von Mach geäußerte Gedanke, daß die Trägheit keine Eigenschaft des einzelnen Körpers, sondern eine Wechselwirkung mit den anderen Körpern darstellt. Daß wir das Verschwinden der Trägheit bei Abwesenheit aller anderen Körper in unseren Grenzbedingungen nicht zum Ausdruck bringen konnten, haben wir schon zu Beginn dieses Paragraphen hervorgehoben.

Es sei aber nochmals betont, daß sich dieser Satz nur für statische Felder und die hier getroffene Koordinatenwahl beweisen läßt. Er ist von Bedeutung, weil man im ganzen Fixsternsystem nahezu den statischen Fall verwirklicht findet und diese Koordinaten sehr häufig benutzen wird. Eine gegenüber allen Koordinatentransformationen invariante Bedeutung kann ihm aber nicht zukommen, schon weil in Gleichung (142) die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ keine natürlich gemessene Größe, sondern auf die Zeitveränderliche t bezogen ist.

d) Elektrostatik. Zur Vorbereitung auf § 24 sei hier kurz das wichtigste über die Folgerungen aus den Maxwellschen Gleichungen (114a) gesagt, die sich aus ihnen bei Benutzung der in (154) gegebenen Maßbestimmung im Fall $\varepsilon = \mu = 1$ ergeben. Man genügt diesen Gleichungen durch den Ansatz

$$\mathfrak{E}_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{E} = -\,grad\,\varphi \quad . \; . \; . \quad (163)$$

sofern man das elektrostatische Potential φ der verallgemeinerten Laplace-Poissonschen Differentialgleichung

$$-\,div\,\mathfrak{D} = div\left(\sqrt{g^{44}}\;grad\,\varphi\right) = div\left(\frac{1}{V}\;grad\,\varphi\right) = -\,\varrho$$

[vgl. (118)] unterwirft. Die magnetischen Vektoren setzen wir nach Analogie zur alten Theorie gleich Null; wir verbleiben damit durchaus in Übereinstimmung mit den Feldgleichungen. Dieselben Schlüsse lassen sich auch aus der Wellengleichung (126) ziehen. Man erkennt bei dieser Rechnung, daß man

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0, \quad \Phi_4 = -\,\varphi \quad . \; . \; . \; . \quad (164)$$

zu setzen hat. Ohne auf jene Gleichung zurückzugehen, sieht man dies, indem man (163) mit (123) vergleicht.

§ 18. Die Rotverschiebung der Spektrallinien auf der Sonne.

a) Die elementare Theorie. In § 13 haben wir darauf hingewiesen, daß zwei im gleichen Koordinatensystem, aber an verschiedenen Stellen ruhende Uhren im allgemeinen einen verschiedenen Gang zeigen müssen. Denn ihre Zeiger rücken nach der Deutung von $d\tau$ als Länge des Weltlinienelements in gleichen Zeiten dt entsprechend dem Zuwachs

$$d\vartheta = \sqrt{g_{44}}\, dt$$

der Eigenzeit $\vartheta = \tau\, c$ vor. Bei dem statischen Schwerefeld, das wir in § 17 betrachteten, ist nun in der dort in Abschnitt b angewandten Näherung [vgl. (160)]

$$\sqrt{g_{44}} = V = 1 + \frac{\Psi}{c^2}.$$

Ψ ist das Newtonsche Potential. Ruht also die eine Uhr am Orte s nahe einem der großen Himmelskörper, wie etwa der Sonne, die anderen am Orte e weit von solchen entfernt, also beispielsweise auf der Erde, so berechnet sich Ψ_s aus der Masse m dieses Körpers und dem Abstande a von seinem Mittelpunkt nach der Formel:

$$\Psi_s = -\frac{Cm}{a},$$

während Ψ_e dagegen vollständig vernachlässigt werden kann. Dann findet man

$$\frac{d\vartheta_s}{d\vartheta_e} = 1 + \frac{\Psi_s}{c^2} = 1 - \frac{Cm}{a\,c^2}.$$

Derartige „Uhren“ bilden nun u. a. solche Atome, in denen Sinusschwingungen stattfinden. Da die Zahl der Schwingungen unmittelbar als Maß der Eigenzeit gelten kann, muß für die Schwingungszahlen, sofern wir sie auf die Zeit t beziehen, gelten:

$$\frac{\nu_s}{\nu_e} = \frac{d\vartheta_s}{d\vartheta_e} = 1 - \frac{Cm}{a\,c^2}, \quad \frac{\nu_s - \nu_e}{\nu_e} = -\frac{Cm}{a\,c^2} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (165)$$

Daraus schloß Einstein: Eine Spektrallinie, welche auf der Sonne oder einem ähnlich großen Körper emittiert wird (oder auch als Absorptionslinie im kontinuierlichen Spektrum erscheint), muß eine geringere Schwingungszahl zeigen,

als wenn sie auf der Erde entsteht. Dies ist die sogenannte Rotverschiebung der Spektrallinien (vgl. § 1).

b) Bedenken gegen die elementare Theorie. Man kann gegen diesen Schluß aber noch zwei Bedenken äußern. Einmal kann man bezweifeln, daß jede Uhr in ihrer Zeigerstellung die Eigenzeit mißt, sodann kann man fragen, ob denn die Schwingungszahlen, die sich auf die in der allgemeinen Relativitätstheorie doch ganz willkürliche Zeit t beziehen, irgend eine physikalische, der Messung zugängliche Bedeutung haben; oder anders ausgedrückt: Kommt das Licht mit derselben Schwingungszahl ν_s, mit der es auf der Sonne erzeugt wird, auf der Erde an? Die Frage ist um so berechtigter, als ein Satz von der Erhaltung der Schwingungszahl beim Fortschreiten elektromagnetischer Wellen nicht in jedem Koordinatensystem gelten kann. Ist er nämlich in einem Koordinatensystem x^i richtig, so braucht man nur eine Transformation

$$x'^1 = x^1, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3, \quad x'^4 = \varphi\,(x^1, x^2, x^3, x^4)$$

vorzunehmen, bei der φ nicht gerade eine lineare Funktion von x^4 mit konstanten Koeffizienten ist, um zu einem anderen System zu gelangen, in dem er nicht zutrifft.

Das erste Bedenken richtet sich gegen die Bedeutung der Maßbestimmung $d\tau$ für zeitartige Weltlinien und damit gegen die Grundannahmen der allgemeinen Relativitätstheorie. Es läßt sich deshalb aus dieser Theorie heraus nicht eigentlich widerlegen. Wäre es berechtigt, so gäbe es für zeitartige Weltlinien überhaupt keine natürliche, d. h. mit Uhren jeder Art festzustellende Maßbestimmung. Man könnte dann jede solche Maßbestimmung nur an eine bestimmte Bauart der Uhr knüpfen und käme so zu verschiedenen Maßbestimmungen in demselben Sinn, wie es vor der Aufstellung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik die verschiedensten Temperaturskalen gab. Die allgemeine Relativitätstheorie tut diesen Schritt jedenfalls nicht, und hat bis jetzt auch keine Veranlassung dazu.

Dies darf man freilich nicht dahin mißverstehen, daß nun jede Uhr bei jeder Bewegung die Eigenzeit der zugehörigen Weltlinie angeben muß. Befestige ich meine Taschenuhr auf einer Schwungmaschine, so versagt sie bei hinreichender Umdrehungsgeschwindigkeit der letzteren ganz gewiß vollständig. Man muß

eben hierbei, wie bei jeder Messung, das Meßinstrument geeignet, d. h. unter anderem nur innerhalb gewisser, ihm eigentümlicher Zustandsbereiche benutzen. Wohl aber sagt jener Satz, daß, wenn wir uns für eine bestimmte Weltlinie eine Mehrzahl verschieden gebauter, aber geeigneter Uhren verschaffen, wir unter Berücksichtigung aller für eine Messung erforderlichen Vorsichtsmaßregeln an ihnen dieselbe Eigenzeit ablesen können.

Wohl aber kann man beweisen, daß die Theorie bei folgerichtigem Ausbau nirgends zu einem Widerspruch mit dem Satz führt, daß eine Uhr die Eigenzeit ihrer Weltlinie mißt. Für die Lichtuhr besteht dieser Beweis in der Umkehrung einer Überlegung aus § 13; setzt man nämlich voraus, daß die natürlich gemessene Lichtgeschwindigkeit c beträgt, so findet man immer dieselbe Eigenzeit $d\vartheta = \frac{2\,ds}{c}$ für die Durchlaufung der Strecke ds zwischen beiden Spiegeln der Uhr unabhängig von dem Maßtensor g_{ik}. Auch für mechanische Gebilde, welche zu periodischen Schwingungen befähigt und damit zur Zeitmessung geeignet sind, läßt sich aus den §§ 15 und 16 heraus beweisen, daß die auf die Eigenzeit bezogene Periode von dem Tensor g_{ik} unabhängig ist. Natürlich gelingt der Beweis nur unter gewissen Vernachlässigungen, schon weil man der Uhr, einem ausgedehnten Körper nicht in Strenge eine Weltlinie zuschreiben kann. Das Wichtigste an ihm ist daher die Prüfung der Frage, welche Vernachlässigungen notwendig und wieweit sie in Wirklichkeit erfüllt sind. Wir gehen aber hier nicht näher darauf ein, sondern verweisen auf die Literatur [1]).

c) Die Erhaltung der Schwingungszahl des Lichtes bei der Fortpflanzung [2]). Wenngleich, wie erwähnt, nicht in jedem Koordinatensystem die Schwingungszahl erhalten bleiben kann, so gilt dies doch bei der Koordinatenwahl, welche wir in § 17, a) für statische Felder getroffen und in Abschnitt a) dieses Paragraphen benutzt haben.

Wir beweisen dies lediglich mit den Vernachlässigungen, welche für unendlich kurzwellige Schwingungen zulässig sind, indem wir gemäß (127) für das Viererpotential den Ansatz

$$\Phi_i = A_i e^{\sqrt{-1}\,kE}$$

machen, in welchem k eine unendlich große Konstante bedeutet.

Die Funktion E der vier Koordinaten ist dann an die Bedingung (128) gebunden, daß ihr Gradient den Betrag Null hat; wir schlossen damals daraus, daß man die Lichtausbreitung von einem Punkte aus durch geodätische Nullinien darzustellen hat.

Ergänzen wir nun unseren Ansatz durch die Festsetzung

$$E = \alpha t + f(x^1, x^2, x^3) = \frac{\alpha}{c} x^4 + f(x^1, x^2, x^3),$$

um die Sinusform der Schwingung zum Ausdruck zu bringen, so könnten wir allerdings zunächst vermuten, daß α noch eine Funktion von x^1, x^2, x^3 wäre. Es wird aber

$$\Gamma\varrho\alpha\delta E^2 = g^{44}\left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 - \sum_{ik=1}^{3} \gamma^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^k} - t \sum_{ik=1}^{3} \gamma^{ik} \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \alpha}{\partial x^k}.$$

Diese lineare Funktion von t muß nun für alle Werte von t Null sein. Das ist nur möglich, wenn die definite quadratische Form, mit der t multipliziert ist, verschwindet, d. h. wenn α eine Konstante ist. Danach ist auch die Schwingungszahl $k\alpha : 2\pi$ vom Ort unabhängig.

d) Zahlenangaben. Setzen wir in (165) für m die Sonnenmasse $1{,}94 . 10^{33}$ g, für a den Sonnenhalbmesser $6{,}95 . 10^{10}$ cm, so finden wir in Rücksicht auf (2)

$$\frac{Cm}{c^2 . a} = 2{,}07 . 10^{-6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (166)$$

Dies ist eine reine Zahl; da sich aus C, m, a und c aus dimensionellen Gründen keine reine Zahl bilden läßt, die nicht Funktion der Vereinigung $Cm : c^2 a$ wäre, so wird sie uns noch häufiger in den Anwendungen der Einsteinschen Schweretheorie auf unser Sonnensystem begegnen. Hier bedeutet sie die relative Verminderung der Schwingungszahl, oder die relative Vergrößerung der Wellenlänge.

§ 19. Weitere genäherte Lösungen der Feldgleichungen.

a) Über eine Variation der g_{ik}. Zur Vorbereitung betrachten wir die unendlich kleine Transformation

$$x'^i = x^i + \varepsilon \xi^i(x^1, x^2, x^3, x^4); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (167)$$

in ihr sollen die ξ^i beliebige reguläre Funktionen, ε aber eine unendlich kleine Konstante bedeuten, deren höhere Potenzen wir

stets unterdrücken. Wir fragen nach der Variation der g_{ik}, aber nicht nach den Größen

$$\delta\, g_{ik} = g'_{ik}(x') - g_{ik}(x),$$

welche die Veränderung im gleichen Weltpunkt angeben, sondern nach den Variationen

$$\delta^* g_{ik} = g'_{ik}(x) - g_{ik}(x),$$

bei denen mit einem Punkt im ungestrichenen System der Punkt verglichen wird, welcher im gestrichenen die gleichen Koordinatenwerte hat. Die Beziehung zwischen beiden enthält die Gleichung

$$\delta^* g_{ik} = \delta\, g_{ik} - [g'_{ik}(x') - g'_{ik}(x)] = \delta\, g_{ik} - \varepsilon \sum_l \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\, \xi^l.$$

$\delta\, g_{ik}$ berechnen wir nun aus der allgemeinen Transformationsgleichung (47 a)

$$g_{ik}(x) = \sum_{m\,n} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k}\, g'_{m\,n}(x'),$$

indem wir nach (167)

$$\frac{\partial x'^m}{\partial x^i} = \delta_i^m + \varepsilon \frac{\partial \xi^m}{\partial x^i}, \qquad \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} = \delta_k^n + \varepsilon \frac{\partial \xi^n}{\partial x^k}$$

setzen:

$$g_{ik}(x) = g'_{ik}(x') + \varepsilon \sum_{m\,n} \left(\delta_i^m \frac{\partial \xi^n}{\partial x^k} + \delta_k^n \frac{\partial \xi^m}{\partial x^i} \right) g_{m\,n}$$

$$\delta\, g_{ik} = -\varepsilon \sum_l \left(g_{il} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} + g_{kl} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} \right).$$

Daraus folgt:

$$\delta^* g_{ik} = -\varepsilon \sum_l \left(g_{il} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} + g_{kl} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\, \xi^l \right) \quad (168)$$

Dies benutzen wir nun zum Beweise des Satzes: Weichen die

$$g_{ik} = G_{ik} + \gamma_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (169)$$

nur durch die unendlich kleinen Größen γ_{ik} von den „normalen" Werten

$$G_{ik} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } i \text{ und } k \text{ verschieden sind,} \\ +1, \text{ wenn } i = k = 4, \\ -1, \text{ wenn } i = k \text{ den Wert 1, 2, 3 hat,} \end{cases}$$

ab, so kann man stets durch eine Transformation wie (167) erreichen, daß die

$$\psi_i^k = \gamma_i^k - \tfrac{1}{2}\gamma\,\delta_i^k \quad (\gamma = \sum_i \gamma_i^i) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (170)$$

der Gleichung

$$\sum_k \frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (171)$$

genügen. Dabei fallen die γ_k^i bis auf Größen höherer als der ersten Ordnung und abgesehen vom Vorzeichen mit den γ_{ik} zusammen: es ist nämlich

$$\gamma_k^i = \sum_l G^{il}\gamma_{kl} = +\gamma_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (171\,\mathrm{a})$$

Das Zeichen + gilt für $i = 4$, sonst gilt —. Daraus folgt weiter die Symmetrieeigenschaft

$$\left.\begin{array}{ll} \gamma_2^1 = \gamma_1^2 \text{ usw.;} & \gamma_1^1 = -\gamma_1^4 \text{ usw.;} \\ \psi_2^1 = \psi_1^2 \text{ usw.;} & \psi_4^1 = -\psi_1^4. \end{array}\right\} \quad (171\,\mathrm{b})$$

Führen wir zum Beweise in (168) diese Annahmen über die g_{ik} ein, so wird der letzte, den Unterschied zwischen $\delta^* g_{ik}$ und δg_{ik} bedingende Summand klein von der zweiten Ordnung: die anderen g_{ik} muß man mit G_{ik} vertauschen und man erhält:

$$\gamma'_{ik}(x) - \gamma_{ik}(x) = -\varepsilon\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i}\right).$$

Hier multiplizieren wir mit G^{ik} und summieren nach beiden Zeigern:

$$\gamma'(x) - \gamma(x) = -2\,\varepsilon \sum_k \frac{\partial \xi^k}{\partial x^k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (172)$$

Sodann multiplizieren wir dieselbe Gleichung mit G^{kl}, differentiieren nach x^l und summieren wieder nach beiden Zeigern:

$$\sum_l \frac{\partial}{\partial x^l}(\gamma_i'^l - \gamma_i^l) = -\varepsilon \sum_{kl} G^{kl}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i}\right)$$

$$= \varepsilon\left(\Box\,\xi_i - \frac{\partial}{\partial x^i}\sum_l \frac{\partial \xi^l}{\partial x^l}\right);$$

dabei haben wir in Übertragung einer in Bd. I, § 12, eingeführten Bezeichnung den „Laplaceschen Operator“

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^{1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{3^2}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{4^2}}$$

eingeführt. Wir schließen weiter nach (170) und (172):

$$\sum_l \left(\frac{\partial \psi_i'^l}{\partial x'^l} - \frac{\partial \psi_i^l}{\partial x^l}\right) = \sum_l \frac{\partial}{\partial x^l} (\psi_i'^l - \psi_i^l)$$

$$= \sum_l \frac{\partial}{\partial x^l} [\gamma_i'^l - \gamma_i^l - \tfrac{1}{2} \delta_i^l (\gamma' - \gamma)] = \varepsilon \Box \xi_i.$$

Um also im gestrichenen System die Forderung (171) zu erfüllen, müssen wir die Funktionen ξ^i so wählen, daß die $\xi_i = \sum_k G_{ik} \xi^k$ den Differentialgleichungen

$$\Box \xi_i = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_l \frac{\partial \psi_i^l}{\partial x^l}$$

genügen. Wie man diese Gleichungen löst, haben wir in Bd. I, § 19, bei den verzögerten Potentialen gesehen. Somit läßt sich diese Forderung immer erfüllen; des weiteren setzen wir sie voraus.

b) Die Wellengleichung als Folge der Feldgleichungen. Nach (169) sind alle g-Klammern unendlich klein; unter Beschränkung auf kleine Größen erster Ordnung wird aber aus Gleichung (53), (54) und (80)

$$\begin{bmatrix} ik \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial \gamma_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^j}\right),$$

$$\begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix} = \sum_j G^{jl} \begin{bmatrix} ik \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_i^l}{\partial x^k} + \frac{\partial \gamma_k^l}{\partial x^i} - \sum_j G^{jl} \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^j}\right).$$

$$R_{ik} = \sum_l \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \begin{Bmatrix} il \\ l \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^l} \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}\right).$$

Aus (170) und (171) folgt aber:

$$\sum_k \frac{\partial \gamma_i^k}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial x^i},$$

also:

$$\sum_l \frac{\partial}{\partial x^k} \begin{Bmatrix} il \\ l \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^i \partial x^k}, \quad \sum_l \frac{\partial}{\partial x^l} \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^i \partial x^k} + \Box \gamma_{ik}\right),$$

$$R_{ik} = -\tfrac{1}{2} \Box \gamma_{ik}, \quad R_i^k = \sum_l G^{kl} R_{il} = -\tfrac{1}{2} \Box \gamma_i^k,$$

$$R = \sum_{ik} G^{ik} R_{ik} = -\tfrac{1}{2} \Box \gamma.$$

Also
$$R_i^k - \tfrac{1}{2} \delta_i^k R = -\tfrac{1}{5} \Box \psi_i^k$$

Nach den Feldgleichungen (144) ist die linke Seite gleich $\varkappa T_i^k$. Als näherungsweisen Ersatz der Feldgleichungen finden wir somit:

$$\tfrac{1}{2} \Box \psi_i^k = -\varkappa T_i^k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (173)$$

Da nach (170) $\gamma_i^k = \psi_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k \sum_l \psi_l^l$ ist, können wir auch schreiben:

$$\tfrac{1}{2} \Box \gamma_i^k = -\varkappa (T_i^k - \tfrac{1}{2} \delta_i^k T) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (173\,\mathrm{a})$$

Wir erkennen jetzt, weshalb wir die Forderung (171) stellen mußten. Nach (145) und (150) sind nämlich die t_i^k hier klein von der zweiten Ordnung, somit im Erhaltungssatz (151) gegen die T_i^k, welche wie die γ_i^k von der ersten Ordnung sind, zu vernachlässigen. Weiter ist in Gliedern erster Ordnung

$$\sqrt{-g}\, T_i^k = T_i^k,$$

also lautet der Erhaltungssatz hier:

$$\sum_k \frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (173\,\mathrm{b})$$

Wie wir in Bd. I, § 19, dem elektrischen Viererpotential Φ wegen $Div\, P = 0$ die Bedingung $Div\, \Phi = 0$ auferlegen mußten, um zu der einfachen Beziehung $\Box \Phi = -P$ zu gelangen, so ermöglicht hier wegen (173b) erst die Forderung (171) den in (173) niedergelegten Zusammenhang.

Gleichung (213) aus Bd. I liefert uns ohne weiteres die Lösung von (173) oder (173a), wenn wir noch $x^4 = c\,t$ setzen und unter r den Abstand von Aufpunkt und Integrationspunkt im Raume der x^1, x^2, x^3 verstehen, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \psi_i^k &= \frac{\varkappa}{2\pi} \int \frac{(T_i^k)_{t - r/c}}{r}\, dS, \\ \gamma_i^k &= \frac{\varkappa}{2\pi} \int \frac{1}{r} (T_i^k - \tfrac{1}{2} \delta_i^k T)_{t - r/c}\, dS. \end{aligned}\right\} \quad (174)$$

Man sieht daraus, daß sich (innerhalb der hier durchgeführten Näherung) die Schwerewirkungen mit der Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten; die Erregungsstellen liegen überall, wo der elektromagnetische oder mechanische Energieimpulstensor von Null verschieden ist. Außerdem aber gibt es natürlich, wie in der Elektrizitätslehre, noch Wellen, welche (mathematisch gesprochen) ohne Erregungsstellen vom Unendlichen ins Unendliche laufen.

Für statische Felder und für den in § 18, b) benutzten Näherungswert von T_{ik} liefert Gleichung (173a) ohne weiteres die Gleichung (162) für das Schwerepotential Ψ.

c) Ebene Schwerewellen. Den einfachsten Fall, den der ebenen Welle im leeren Raume $T_i^k = 0$, erhalten wir mittels der willkürlichen Funktion F und des Ansatzes

$$\psi_i^k = a_i^k F(\sum_l \alpha_l x^l) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (175)$$

Die Konstanten a_i^k und α_l müssen nach (170) und (173) den Bedingungen genügen:

$$\sum_k a_i^k \alpha_k = 0, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \alpha_i^2 \quad . \quad . \quad . \quad (175a)$$

Ist die positive x^1-Achse die Fortschreitungsrichtung, so verschwinden α_2 und α_3: es wird

$$\alpha_4 = -\alpha_1, \quad a_i^4 = a_i^1 \ (i = 1, 2, 3, 4) \quad . \quad . \quad . \quad (175b)$$

Doch sind in diesem Schema noch Wellen enthalten, welche sich „forttransformieren" lassen. Führt man nämlich in einem in Strenge schwerefreien Feld, in welchem die Maßbestimmung

$$d\tau^2 = dx^{*4\,2} - (dx^{*1\,2} + dx^{*2\,2} + dx^{*3\,2}) \quad . \quad . \quad (176)$$

möglich ist, die Koordinaten

$$x^i = x^{*i} + \lambda^i f(x^4 - x^1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (177)$$

ein, wobei die λ^i unendlich kleine Konstanten bedeuten, so wird

$$d\tau^2 = dx^{4\,2} - (dx^{1\,2} + dx^{2\,2} + dx^{3\,2})$$
$$- 2f' \cdot (dx^4 - dx^1)\,[\lambda^4 dx^4 - (\lambda^1 dx^1 + \lambda^2 dx^2 + \lambda^3 dx^3)].$$

Hieraus entnehmen wir nach (169) die γ_{ik} und nach (171a) die γ_k^i; die Werte der letzteren gibt das Schema:

$2\lambda^1 f'$	$\lambda^2 f'$	$\lambda^3 f'$	$(\lambda^1 + \lambda^4) f'$
$\lambda^2 f'$	0	0	$\lambda^2 f'$
$\lambda^3 f'$	0	0	$\lambda^3 f'$
$-(\lambda^1 + \lambda^4) f'$	$-\lambda^2 f'$	$-\lambda^3 f'$	$-2\lambda^4 f'$

(Die erste Kolonne enthält die γ_i^1, die letzte die γ_i^4.) Also ist

$$\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}\sum_i \gamma_i^i = (\lambda^1 - \lambda^4) f'.$$

Das Schema für die ψ_k^i sieht dann nach (170) aus, wie folgt:

$$\left.\begin{array}{cccc} (\lambda^1+\lambda^4)f' & \lambda^2 f' & \lambda^3 f' & (\lambda^1+\lambda^4)f' \\ \lambda^2 f' & (\lambda^4-\lambda^1)f' & 0 & \lambda^2 f' \\ \lambda^3 f' & 0 & (\lambda^4-\lambda^1)f' & \lambda^3 f' \\ -(\lambda^1+\lambda^4)f' & -\lambda^2 f' & -\lambda^3 f' & -(\lambda^1+\lambda^4)f' \end{array}\right\} \quad (178)$$

[vgl. hierzu (171 b)]. Setzen wir schließlich $f' = F$, so haben wir hier einen Ansatz vor uns, der durchaus den Gleichungen (175) und (175 b) genügt und insofern ebene Schwerewellen darstellt. Und doch haben wir diese nur durch Transformation des Koordinatensystems in einem (pseudo)euklidischen Weltbereich hervorgebracht. Immerhin haben diese Wellen ganz besondere Werte der Koeffizienten a_k^i, insofern

$$a_3^2 = a_2^3 = 0 \quad \text{und} \quad a_2^2 = a_3^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (178\,\text{a})$$

ist. Man wird vermuten, daß sich diese Wellen irgendwie von Wellen, bei denen die Beziehungen (178 a) nicht gelten, unterscheiden, und wir können diese Vermutung bald bestätigen. Doch verstieße es m. E. gegen den Geist der allgemeinen Relativitätstheorie, sie als nicht physikalisch wirklich zu bezeichnen. Denn nach derem ersten Grundsatz herrscht in einem gegen das System x^{*i} beschleunigten System, wie wir es in (177) eingeführt haben, ein durchaus wirkliches Schwerefeld.

Bei den „eigentlichen" Schwerewellen, die sich nicht durch eine Transformation wie (177) beseitigen lassen, kommt es nach dem Obigen nur auf die Werte von a_3^2 und $(a_2^2 - a_3^3)$ an. Innerhalb der hier befolgten Näherung transformieren sich die a_k^i bei einer Drehung des rechtwinkligen räumlichen Achsenkreuzes um die x^1-Achse wie Tensorkomponenten, so daß man dadurch a_3^2 beseitigen kann. So bleibt

$$\psi_2^2 = aF(x^4 - x^1), \quad \text{alle anderen } \psi_k^i = 0, \quad . \quad . \quad (179)$$

die allgemeinste Darstellung einer „eigentlichen" ebenen Welle. Man kann sie in gewissem Sinn als transversal bezeichnen, obwohl man hier nicht wie in der Elektrodynamik mit einem schwingenden Vektorfeld zu tun hat.

Leider besteht, wie Einstein zeigt, keine Hoffnung, jemals eigentliche Schwerewellen beobachten zu können. Was man davon erregen könnte, führt viel zu geringe Energie mit sich.

Einstein hat durch Berechnung der t_k^i allgemein zeigen können, daß uneigentliche ebene Wellen innerhalb der hier durchgeführten Näherung keine Energie mit sich führen.

d) Ein Beispiel für uneigentliche Wellen. In (177) setzen wir

$$\lambda^2 = \lambda^3 = 0, \qquad \lambda^4 = -\lambda^1 = -\lambda,$$

so daß

$$\left.\begin{aligned} x^1 = x^{*1} + \lambda f(x^4 - x^1), \quad x^4 = x^{*4} - \lambda f(x^4 - x^1), \\ x^2 = x^{*2}, \quad x^3 = x^{*3} \end{aligned}\right\} \tag{180}$$

wird, und bestimmen die Funktion f so, daß sie 0 ist für Werte ihres Arguments, die unter a liegen, und den konstanten Wert B annimmt, wenn das Argument über b liegt. Dazwischen soll sie nach einem einfachen Gesetz stetig von 0 nach B wachsen. Für negativ unendliche Zeiten fallen dann beide Systeme zusammen, für positiv unendliche unterscheiden sie sich nur um eine physikalisch bedeutungslose Parallelverschiebung in der x^1-Richtung. Während sich diese Verschiebung allmählich herstellte, ging aber im System x^i eine Schwerewelle vorüber.

Eine solche ist nun schon in § 3 beim Beispiel des Eisenbahnzuges aufgetreten, wenigstens, wenn wir dies noch dahin vervollständigen, daß der Zug bei der Bremsung eine Minimalgeschwindigkeit annimmt, die auch Null betragen kann, dann aber wieder bis zur alten Geschwindigkeit — immer in derselben Richtung — anfährt. Wir führen zunächst ein erdfestes Koordinatensystem X^i ein, dem wir mit hinreichender Genauigkeit die pseudoeuklidische Maßbestimmung zuschreiben können, die das Fehlen von Schwerewirkungen bedeutet. Weiter koppeln wir mit ihm das System x^* der Gleichungen (180) durch die Lorentz-Transformation

$$x^{*1} = \frac{X^1 - \frac{q}{c} X^4}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \quad x^{*2} = X^2, \quad x^{*3} = X^3, \quad x^{*4} = \frac{X^4 - \frac{q}{c} X^1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}},$$

dann ist auch die Maßbestimmung

$$d\tau^2 = dx^{*4^2} - (dx^{*1^2} + dx^{*2^2} + dx^{*3^2})$$

richtig. Das gegen die Erde gleichförmig bewegte System x^{*i} ist ebenfalls dauernd ohne Schwerefeld. Wir können dann die Funktion f immer noch so bestimmen, daß der Zug dauernd im

System x^i ruht. Dann haben wir in voller Übereinstimmung mit § 3 auch nach unseren Formeln ein Schwerefeld in der Richtung x^1 während der Bremsung, ein entgegengesetztes während des Anfahrens.

Nun fragen wir nach der Ursache, die wir vom System x^i aus dieser Welle zuschreiben müssen. Diese liegt nicht, wie man vielleicht glauben könnte, in den Vorgängen an den Rädern des Zuges, welche zuerst die Bremsung, hinterher die Wiederbeschleunigung hervorrufen. Die Welle in dem durch unsere Gleichungen eingeführten System x^i besteht vollständig ohne Rücksicht auf den Zug. Es war unsere Willkür, daß wir die Funktion f gerade dessen Bewegung anpaßten. Wodurch ist sie aber sonst erregt?

Wir beachten, daß diese Welle so entsteht, daß der Maßtensor der g_{ik}, der in den x^{*i} als unabhängigen Veränderlichen konstant ist, bei der Transformation auf die x^i diese Eigenschaft verliert. Man betrachtet ihn im letzteren System „von einer anderen Seite". Die Schwerewelle hat also alle die Erscheinungen zur Ursache, welche diesen Tensor bestimmen, und das sind nach den Feldgleichungen alle Körper schlechthin, wobei es noch auf ihren Bewegungszustand ankommt. Aber der Zustand im Weltpunkt O hängt nicht ab von dem gleichzeitigen Bewegungszustand, sondern, da sich die Schwerewirkungen innerhalb der hier durchgeführten Näherung mit der Geschwindigkeit c ausbreiten, von dem Bewegungszustand auf dem Vorkegel von O. Wir zeichnen diese in Fig. 20, desgleichen eine Reihe von Weltlinien der (in der Hauptsache) im System X^i dauernd ruhenden Gestirne und auch (gestrichelt) die durch O gehende Weltlinie eines in den x^i ruhenden Punktes. Erstere sind, wenn wir die X^i als geradlinige Weltkoordinaten benutzen, gerade, die letztere ist hingegen gekrümmt. Dieser Unterschied im Bewegungszustand verursacht die Schwerewelle.

Fig. 20.

Ein Beispiel aus der Elektrodynamik mag das weiter beleuchten. Wenn wir uns einen Raum nahe der Erdoberfläche durch eine metallische Hülle gegen elektrische Felder abschirmen,

haben wir in ihm nur das statische Magnetfeld der Erde. In dem erdfesten System x^{*i} haben wir also auf ruhende elektrische Ladungen keine Kraft. Das ist aber anders in dem durch die Transformation (180) eingeführten System x^i. In der Zeit, da dies die erwähnte Verschiebung erfährt, geht über dies System eine „elektrische Welle“ hinweg. Und was ist deren Ursache? Hier ruhen die Ladungen, welche allein in Betracht kommen, dauernd in den x^{*i}. Zeichnen wir auf dem Vorkegel des Weltpunktes O ihre Weltlinien, so haben diese alle eine andere Richtung als die durch O führende Weltlinie eines in x^i ruhenden Punktes. Dieser Unterschied verursacht die elektrische Welle. Daß es bei ihr auf den Richtungsunterschied, bei der Schwerewelle auf den Krümmungsunterschied ankommt, ist für den Vergleich weniger wesentlich.

Das Verfahren, genäherte Lösungen der Feldgleichungen zu finden, welches wir in diesem Paragraphen auseinandergesetzt haben, benutzt H. Thirring[1]), um das Feld in einer rotierenden Hohlkugel zu ermitteln. Es ergeben sich dabei Kräfte auf einen dort befindlichen Körper, welche den Zentrifugalkräften und den Coriolisschen entsprechen. Und das liegt ja auch ganz im Sinn der allgemeinen Relativitätstheorie. Denn da bekanntlich solche Kräfte an einem Koordinatensystem beobachtet werden, welches sich gegen alle anderen Körper (die gegeneinander ruhen mögen) dreht, so müssen ähnliche Erscheinungen sich auch dann zeigen, wenn nur ein Teil der anderen Körper gegen das benutzte Koordinatensystem rotiert.

Nach demselben Verfahren berechnen H. Thirring und J. Lense[2]) einen Einfluß der Drehung des Jupiter auf die Bewegung eines seiner Monde, welcher im Bereiche der möglichen Beobachtungen zu liegen scheint.

VII. Strenge Lösungen der Feldgleichungen in Einsteins Theorie der Schwere.

§ 20. Das Prinzip der kleinsten Wirkung.

a) Für den materiefreien Raum. In § 16 haben wir die Feldgleichungen in den Formeln (144) oder (144b) kennen gelernt, und in § 17 und 19 haben wir diese Differentialgleichungen zu angenäherten Ermittelungen besonderer Felder schon benutzt. Für andere, namentlich für strenge Lösungen ist aber wohl vielfach ein anderer Ausgangspunkt vorzuziehen; er liegt in gewissen Variationsprinzipen. Auch läßt sich Mies Theorie der Materie, welche wir in Teil VIII bringen, am besten im Anschluß an diese Prinzipe behandeln.

Ein erstes Prinzip dieser Art knüpft an die Funktion $\mathfrak{H} = \sqrt{-g}\,H$ an, die wir in Gleichung (145) definiert haben. Wir betrachteten sie damals als bestimmt durch die mit dem Maßtensor nahe zusammenhängenden Größen $\gamma^{kl} = \sqrt{-g}\,g^{kl}$ und $\gamma^{kl}_m = \frac{\partial \gamma^{kl}}{\partial x^m}$. Jetzt bilden wir das Integral

$$\int H d\Sigma = \int \mathfrak{H} d X$$

für irgend einen geschlossenen vierdimensionalen Bereich [dX ist wie in § 6, Gleichung (38), für $dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$ geschrieben]. Wir variieren den Maßtensor, also auch die γ^{kl} im Innern des Bereichs beliebig; doch bleiben sie auf der Begrenzung unverändert. Natürlich nehmen die γ^{kl}_m zwangläufig an der Variation teil; denn da die x^i nicht mitvariiert werden, gilt identisch:

$$\delta \gamma^{kl}_m = \frac{\partial \delta \gamma^{kl}}{\delta x^m}.$$

Wir behaupten: Diejenigen Funktionen g_{kl} genügen den Feldgleichungen (143) des von Materie freien Schwerefeldes, für welche

$$\delta \int H d\Sigma = \delta \int \mathfrak{H} d X = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (181)$$

ist.

Zum Beweise formen wir mit Hilfe der vorletzten Gleichung in dem Integral

$$\int \delta \mathfrak{H} \, d X = \int \left(\sum_{kl} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma^{kl}} \delta \gamma^{kl} + \sum_{klm} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma^{kl}_{m}} \delta \gamma^{kl}_{m} \right) d X$$

die zweite Hälfte durch partielle Integration um. Dabei entsteht zunächst ein auf die Begrenzung bezügliches Integral, in welchem aber der Integrand, in dem jeder Summand ein $\delta \gamma^{kl}$ als Faktor erhält, verschwindet. Es bleibt nur das neuentstehende vierdimensionale Integral; also:

$$\delta \int \mathfrak{H} \, d X = \int \delta \mathfrak{H} \, d X = \int \sum_{kl} \delta \gamma^{kl} \left[\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma^{kl}} - \sum_{m} \frac{\partial}{\partial x^{m}} \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma^{kl}_{m}} \right) \right] d X. \quad (181a)$$

Soll dies für alle möglichen Funktionen $\delta \gamma^{kl}$ identisch verschwinden, so muß der Faktor jeder Variation $\delta \gamma^{kl}$ für sich verschwinden, und zwar im ganzen Integrationsbereich. Denn wäre ein solcher Faktor in einem Teil davon von Null verschieden, etwa positiv, so könnte man das zugehörige $\delta \gamma^{kl}$ in diesem Teil ebenfalls positiv, sonst gleich Null, die anderen $\delta \gamma^{kl}$ aber überhaupt gleich Null wählen, so daß $\delta \int \mathfrak{H} \, d X > 0$ würde. Das Nullsetzen der genannten Faktoren führt aber nach (148) auf die Feldgleichungen $R_{kl} = 0$. Das Variationsprinzip vermag daher die Feldgleichungen zu ersetzen.

b) Einführung der Invarianten R. Wir vergleichen die Formel (145), welche H definiert, mit den Gleichungen (81) und (80) für die invariante Krümmung R und den Krümmungstensor R_{kl}. Vertauschen wir in (145) die Summationszeiger m und n miteinander, so erkennen wir:

$$R = \sum_{klm} g^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial x^{l}} \left\{ \begin{matrix} k\,m \\ m \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^{m}} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix} \right\} \right) - H. \quad . \quad . \quad (182)$$

Da nun der erste Summand rechts keine Invariante ist, ist, wie schon in § 16 erwähnt, auch H keine, wohl aber ist es $d \Sigma$; und man kann dem obigen Variationsprinzip den Einwand mangelnder Eleganz machen, insofern es kein invariantes Integral benutzt. Diesem Bedenken entgeht ein anderes Variationsprinzip, bei welchem wir aber den zugelassenen Variationen $\delta \gamma^{kl}$ außer der schon ausgesprochenen Bedingung, daß sie selbst am Rande

verschwinden, noch die weitere auferlegen müssen, daß auch ihre Ableitungen, also die $\delta \gamma^{kl}_{m}$, dort Null sind. Eine Folge dieser Bedingungen ist, daß auch die Variationen der g_{ik} und ihrer ersten Ableitungen, also ebenso die Variationen der g-Klammern verschwinden. Können wir daher zeigen, daß

$$\int R\, d\Sigma - \int H\, d\Sigma = J$$

ein Randintegral ist, in welchem der Integrand nur von den g^{kl} und g-Klammern abhängt, so folgt wegen $\delta J = 0$ aus (181) das weitere Prinzip:

$$\delta \int R\, d\Sigma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (183)$$

Wir beginnen den gewünschten Beweis mit der Aufstellung der Identitäten:

$$\sum_{klm} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\sqrt{-g}\, g^{kl} \left\{ \begin{matrix} km \\ m \end{matrix} \right\} \right)$$
$$= \sum_{klm} \left[g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \begin{matrix} km \\ m \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} km \\ m \end{matrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\, g^{kl} \right)}{\partial x^l} \right],$$

$$\sum_{klm} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\sqrt{-g}\, g^{kl} \left\{ \begin{matrix} kl \\ m \end{matrix} \right\} \right)$$
$$= \sum_{klm} \left[g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ \begin{matrix} kl \\ m \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} kl \\ m \end{matrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\, g^{kl} \right)}{\partial x^m} \right].$$

Durch Subtraktion, Multiplikation mit $\sqrt{-g}\, dX = d\Sigma$ und nachfolgende Integration über den vierdimensionalen Bereich erhalten wir nach (182) aus ihnen:

$$J = \int d\Sigma \Bigg[R + H$$
$$+ \sum_{klm} \left(\left\{ \begin{matrix} km \\ m \end{matrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\, g^{kl} \right)}{\partial x^l} - \left\{ \begin{matrix} kl \\ m \end{matrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\, g^{kl} \right)}{\partial x^m} \right) \Bigg],$$

wobei J ein Randintegral der beschriebenen Art ist. In dem ersten Term unter dem Summenzeichen ist wegen der Divergenzfreiheit des Maßtensors nach (73 a):

$$\sum_{l} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\, g^{kl} \right)}{\partial x^l} = - \sum_{ln} \left\{ \begin{matrix} ln \\ k \end{matrix} \right\} g^{ln},$$

und durch passende Vertauschung der Summationszeiger nimmt dieser Term die Form an:

$$-\sum_{klmn} \begin{Bmatrix} km \\ m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} ln \\ k \end{Bmatrix} g^{ln} = -\sum_{klmn} \begin{Bmatrix} nm \\ m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} kl \\ n \end{Bmatrix} g^{kl}.$$

Den Faktor von $-\begin{Bmatrix} kl \\ m \end{Bmatrix}$ aber zerlegen wir in

$$\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^m} = -\sum_n \left[\begin{Bmatrix} mn \\ k \end{Bmatrix} g^{ln} + \begin{Bmatrix} mn \\ l \end{Bmatrix} g^{kn} \right]$$

(vgl. 61c) und (vgl. 62a) in

$$g^{kl} \frac{\partial (lg \sqrt{-g})}{\partial x^m} = g^{kl} \sum_n \begin{Bmatrix} mn \\ n \end{Bmatrix},$$

so daß der zweite Term unter der Summe wird:

$$\sum_{klmn} \begin{Bmatrix} kl \\ m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} mn \\ k \end{Bmatrix} g^{ln} + \sum_{klmn} \begin{Bmatrix} kl \\ m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} mn \\ l \end{Bmatrix} g^{kn} - \sum_{klmn} \begin{Bmatrix} kl \\ m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} mn \\ n \end{Bmatrix} g^{kl}.$$

In diesen drei Ausdrücken geht der erste in den zweiten über, wenn man k und l miteinander vertauscht:

$$2 \sum_{klmn} \begin{Bmatrix} kl \\ m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} mn \\ l \end{Bmatrix} g^{kn} - \sum_{klmn} \begin{Bmatrix} kl \\ m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} mn \\ n \end{Bmatrix} g^{kl}.$$

Vertauschen wir nun noch in der ersten dieser Summen n und l, in der zweiten n und m, so finden wir wegen (145) einfach:

$$J = \int d\Sigma \left[R + H - 2 \sum_{klmn} g^{kl} \left(\begin{Bmatrix} kl \\ n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} nm \\ m \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} kn \\ m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} ml \\ n \end{Bmatrix} \right) \right]$$
$$= \int d\Sigma (R - H).$$

Damit ist der Beweis erbracht: Für das materiefreie Schwerefeld gilt das Variationsprinzip

$$\delta \int R \, d\Sigma = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (184)$$

wenn am Rande des Integrationsbereichs die Variationen sowohl der g_{kl} wie die ihrer ersten Ableitungen nach den Koordinaten verschwinden.

c) Die Variationsprinzipe bei Anwesenheit von Materie. Will man zu den Feldgleichungen (144b) für das Innere

der Materie gelangen, so hat man die beiden besprochenen Variationsprinzipe einfach zu ergänzen zu:

$$\delta \int (\mathfrak{H} + \varkappa \mathfrak{M})\, d\,X = 0 \quad \text{und} \quad \delta \int (R + \varkappa \boldsymbol{M})\, d\,\boldsymbol{\Sigma} = 0, \qquad (185)$$

und unter $\mathfrak{M} = \sqrt{-g}\,\boldsymbol{M}$ eine die Materie kennzeichnende, d. h. ihren Welttensor enthaltende Funktion zu verstehen, in welche noch die g_{kl}, aber nicht ihre Ableitungen eingehen. Und zwar muß man setzen*):

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \gamma^{kl}} = -(T_{kl} - \tfrac{1}{2} g_{kl} T). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (186)$$

Dann folgt in der Tat statt Gleichung (181a):

$$\delta \int (\mathfrak{H} + \varkappa \mathfrak{M})\, d\,X = \int \sum_{kl} [R_{kl} - \varkappa (T_{kl} - \tfrac{1}{2} g_{kl} T)]\, \delta \gamma^{kl} d\,X = 0,$$

und daraus schließt man wie oben auf das identische Verschwinden des Faktors jeder Variation, also auf die Formeln (144b).

Wir wollen die Gleichung (186) noch umgestalten, indem wir nach g^{kl} statt nach $\gamma^{kl} = \sqrt{-g}\, g^{kl}$ differentiieren. Wir haben dazu zu setzen:

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{kl}} = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \gamma^{\alpha\beta}} \frac{\partial \gamma^{\alpha\beta}}{\partial g^{kl}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial \gamma^{\alpha\beta}}{\partial g^{kl}} = \sqrt{-g}\, \delta^{\alpha}_{k} \delta^{\beta}_{l} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{kl}},$$

und nach [62]**)

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{kl}} = -\tfrac{1}{2} \sqrt{-g}\, g_{kl}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (187)$$

also

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{kl}} = -\sqrt{-g}\,(T_{kl} - \tfrac{1}{2} g_{kl} T) + {}_2\sqrt{-g}\, g_{kl} \sum_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} (T_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} T).$$

Da aber nach (144a) und nach (22)

$$\sum_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha} T^{\alpha}_{\alpha} = T, \qquad \sum_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = 4$$

ist, folgt einfach

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{kl}} = -\sqrt{-g}\, T_{kl}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (188)$$

---

*) Auch diese Gleichung ist wie (147) so geschrieben, als wären γ^{kl} und γ^{lk} voneinander unabhängig.

**) Siehe die vorhergehende Anmerkung.

d) Die Funktion $\mathfrak{M}$ für das elektromagnetische Feld. Das elektromagnetische Feld rechneten wir schon in § 16 hinsichtlich seiner Schwerewirkung zur Materie. Danach müssen wir imstande sein, das Variationsprinzip (185) auch für solche Felder anzuwenden, wenn wir eine den Bedingungen (188) genügende Funktion $\mathfrak{M}$ angeben können. Diese liefert uns der Ansatz:

$$\mathfrak{M} = \sqrt{-g}\,\boldsymbol{M}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (189)$$

sofern die elektrischen Felder in einem im gewöhnlichen Sinn leeren, d. h. von allen Körpern freien Raum liegen. Unter $\boldsymbol{M}$ aber verstehen wir das negative Quadrat des absoluten Werts des Feldvektors $\mathfrak{M}$, für das wir in Analogie zu Gleichung (46) aus § 6 schreiben:

$$\boldsymbol{M} = -\,\mathfrak{M}^2 = \frac{1}{2}\sum_{hikl} g^{hk} g^{il}\,\mathfrak{M}_{hl}\,\mathfrak{M}_{ik}. \quad \ldots \quad (189\text{a})$$

Denn danach und nach (187) ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\alpha\beta}} = \frac{1}{2}\Big\{\sqrt{-g}\,g_{\alpha\beta}\,\mathfrak{M}^2 + \sqrt{-g}\Big[\sum_{il} g^{il}\,\mathfrak{M}_{\alpha l}\,\mathfrak{M}_{i\beta} + \sum_{hk} g^{hk}\,\mathfrak{M}_{h\beta}\,\mathfrak{M}_{\alpha k}\Big]\Big\}.$$

Nun sind aber die beiden letzten Summen einander gleich und lassen sich schreiben

$$\sum_k \mathfrak{M}^k{}_\beta\,\mathfrak{M}_{\alpha k} = -\sum_k \mathfrak{M}_{\alpha k}\,\mathfrak{M}_\beta{}^k,$$

also nach (132a):

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\alpha\beta}} = \sqrt{-g}\,\Big\{\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\,|\mathfrak{M}|^2 - \sum_k \mathfrak{M}_{\alpha k}\,\mathfrak{M}_\beta{}^k\Big\} = -\sqrt{-g}\,T_{\alpha\beta},$$

was zu beweisen war.

Wir wollen aber das Variationsprinzip für den Fall, daß elektromagnetische Felder auftreten, noch so erweitern, daß wir auch die Maxwellschen Gleichungen aus ihm gewinnen können. Dazu schreiben wir

$$\delta\int\sqrt{-g}\Big[H + \varkappa\Big(\boldsymbol{M} + 2\sum_i P^i\Phi_i\Big)\Big]\,dX = 0 \quad \ldots \quad (190)$$

oder

$$\delta\int\Big[R + \varkappa\Big(\boldsymbol{M} + 2\sum_i P^i\Phi_i\Big)\Big]\,d\Sigma = 0, \quad \ldots \quad (190\text{a})$$

und verstehen dabei unter P den elektrischen Viererstrom, unter Φ das Viererpotential (§ 14). Bei der Variation der g_{ik} fällt der Zusatz $2\sum_i P^i \Phi_i$ fort*). Gemäß Gleichung (123) denken wir uns hierin

$$\mathfrak{M}_{kl} = \frac{\partial \Phi_l}{\partial x^k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x^l}$$

gesetzt. Eine unmittelbare Folge dieser Beziehung ist die Gleichung

$$\Delta iv^* \mathfrak{M} = 0$$

(siehe 69). Durch Variation des Viererpotentials, die an den Integrationsgrenzen verschwindet, finden wir dann aus (190) oder (190a) die noch fehlende Gleichung des elektromagnetischen Feldes:

$$\Delta iv\, \mathfrak{M} = P.$$

In der Tat wird dabei nach (189a) durch partielle Integration:

$$\delta \int \sqrt{-g}\, \boldsymbol{M}\, dX$$

$$= \frac{1}{2}\delta \int \sqrt{-g} \sum_{hikl} g^{hk} g^{il} \left(\frac{\partial \Phi_l}{\partial x^h} - \frac{\partial \Phi_h}{\partial x^l}\right)\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^k}\right) dX$$

$$= -\frac{1}{2}\int dX \sum_{hikl} \Big\{ \delta \Phi_l \frac{\partial}{\partial x^h}\left[g^{hk} g^{il} \sqrt{-g}\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^k}\right)\right]$$

$$- \delta \Phi_h \frac{\partial}{\partial x^l}\left[g^{hk} g^{il} \sqrt{-g}\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right)\right]$$

$$+ \delta \Phi_k \frac{\partial}{\partial x^i}\left[g^{hk} g^{il} \sqrt{-g}\left(\frac{\partial \Phi_l}{\partial x^h} - \frac{\partial \Phi_h}{\partial x^l}\right)\right]$$

$$- \delta \Phi_i \frac{\partial}{\partial x^k}\left[g^{hk} g^{il} \sqrt{-g}\left(\frac{\partial \Phi_l}{\partial x^h} - \frac{\partial \Phi_h}{\partial x^l}\right)\right]\Big\}$$

$$= \frac{1}{2}\int dX \Big\{ \sum_{hl}\left[\delta \Phi_l \frac{\partial}{\partial x^h}\left(\sqrt{-g}\,\mathfrak{M}^{hl}\right) - \delta \Phi_h \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\,\mathfrak{M}^{hl}\right)\right]$$

$$+ \sum_{ik}\left[\delta \Phi_k \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\,\mathfrak{M}^{ik}\right) - \delta \Phi_i \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,\mathfrak{M}^{ik}\right)\right]\Big\}.$$

Die beiden Summen unterscheiden sich nur in der Benennung der Summationszeiger, und die beiden Summanden in jeder gehen in-

*) Nach (112) ist P durch $\mathfrak{J}$, ϱ, $\mathfrak{q}$ und $\sqrt{g^{44}}$ bestimmt. Trotzdem soll es hier bei der Variation von g^{44} unverändert bleiben, was sich durch gleichzeitige Variation von $\mathfrak{J}$, ϱ, $\mathfrak{q}$ erzielen läßt.

einander über, wenn man in dem einen die beiden Zeiger miteinander vertauscht. Also ist bei einer Variation der Φ_i

$$\delta \int \sqrt{-g}\left(\mathfrak{M} + 2 \cdot \sum_i P^i \Phi_i\right) d X$$

$$= 2 \int \sqrt{-g}\, d X \sum_i \delta \Phi_i \left[P^i - \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_h \frac{\partial}{\partial x^h}\left(\sqrt{-g}\, \mathfrak{M}^{ih}\right)\right].$$

Damit ist nach (73d) der Beweis erbracht.

§ 21. Das Schwerefeld des ruhenden Massenpunktes.

a) Der Maßtensor. In § 17, b) haben wir die statischen Schwerefelder beliebig verteilter Körper genähert behandelt. Über die Bedingungen, welche wir den zu benutzenden Koordinatensystemen auferlegen wollen, haben wir dabei schon in § 17, a) gesprochen. Wir erinnern an die Gleichungen (154). Wir erweitern hier das Problem, indem wir nach strengen Lösungen der Feldgleichungen fragen, schränken es andererseits aber ein, insofern wir dem Schwerefeld ein Symmetriezentrum zuschreiben. Diese Forderung erfüllen wir, indem wir entweder einen einzelnen Massenpunkt ohne (siehe diesen Paragraphen) oder mit elektrischer Ladung (vgl. § 25) als einzigen felderregenden Körper in Betracht ziehen, oder eine Kugel mit zentrischer Massenverteilung (§ 24). Wir wollen diese Eigenschaft nun durch die Wahl der Koordinaten einfach zum Ausdruck bringen. Wir geben darum dem Symmetriezentrum die Koordinaten $x^1 = x^2 = x^3 = 0$ und setzen fest, daß alle Funktionen g_{ik} die Koordinaten nur in der Verbindung

$$R^2 = \sum_{i=1}^{3} x^{i\,2}$$

enthalten sollen. Dann folgt, daß alle linearen Transformationen von x^1, x^2, x^3, welche R invariant lassen, zu gleich gut brauchbaren Koordinaten führen. Weitere Invarianten dieser uns wohlbekannten orthogonalen Transformationen sind aber

$$\sum_{i=1}^{3} d x^{i\,2}, \quad \sum_{i=1}^{3} x^i\, d x^i, \quad x^4, \quad d x^4, \quad \ldots \quad (191)$$

und zwar gibt es keine anderen, welche die $d x^i$ nur linear oder quadratisch enthalten. Also werden wir die Maßbestimmung $d \tau^2$

hier aus ihnen aufbauen, wobei aber wegen der Eigenschaften des statischen Feldes x^4 selbst auszuschließen ist.

Bevor wir die entsprechende Formel angeben, wollen wir aber zu „Polarkoordinaten" R, ϑ, φ nach den Transformationen

$$x^1 = R \cos \vartheta, \quad x^2 = R \sin \vartheta \cos \varphi, \quad x^3 = R \sin \vartheta \sin \varphi$$

übergehen. Obwohl wir dabei von gebräuchlichen Formeln der euklidischen Geometrie Gebrauch machen, übernehmen wir damit keineswegs deren Maßbestimmung, also auch nicht diese Geometrie selbst. Vielmehr machen wir nur von unserem Recht, beliebige Transformationen zu benutzen, den uns zweckmäßig scheinenden Gebrauch. Die in (191) genannten Invarianten werden dann gleich

$$d R^2 + R^2 d \vartheta^2 + R^2 \sin^2 \vartheta \, d \varphi^2, \quad R \, d R, \quad x^4, \quad d x^4,$$

und jetzt setzen wir unter Einführung von drei positiven, im übrigen noch unbestimmten Funktionen $W^2(R)$, $\Psi(R)$, $X(R)$:

$$d \tau^2 = W^2(R) \, d x^{4\,2}$$
$$- \Psi(R) (d R^2 + R^2 d \vartheta^2 + R^2 \sin^2 \vartheta \, d \varphi^2) - X(R) R^2 d R^2.$$

Doch können wir dabei noch eine Vereinfachung vornehmen, indem wir

$$r = R \sqrt{\Psi(R)}$$

statt R als Koordinate einführen, mit dem Ergebnis:

$$d \tau^2 = V^2(r) \, d x^{4\,2}$$
$$- (d r^2 + r^2 d \vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \, d \varphi^2) - M(r) r^2 d r^2. \qquad (192)$$

Jetzt gehen wir mittels der Transformation

$$x^1 = r \cos \vartheta, \quad x^2 = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad x^3 = r \sin \vartheta \sin \varphi \qquad (193)$$

zu den Koordinaten x^i über, welche mit den zuvor benutzten zwar nicht zusammenfallen, aber doch, da wir jene nicht mehr anwenden, nicht in der Bezeichnung von ihnen unterschieden zu werden brauchen. Wir finden dann

$$d \tau^2 = c^2 V^2(r) \, d t^2 - \sum_{i=1}^{3} d x^{i\,2} - M(r) \Big(\sum_{i=1}^{3} x^i \, d x^i \Big)^2 \cdot \qquad (194)$$

Danach wird das Schwerfeld mit einem Symmetriezentrum durch zwei Funktionen $V(r)$ und $M(r)$ beherrscht, die wir nunmehr aus dem Variationsprinzip bestimmen wollen.

Nach (194) sind die Koeffizienten der Maßbestimmung im Streckenraum

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{ik=1}^{3} \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k \\ \gamma_{ik} &= \delta^i_k + M x^i x^k . \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (194\text{a})$$

In den Gleichungen (158) haben wir schon die zu (194) gehörenden g-Klammern zurückgeführt auf die Funktion V und die zu (194a) gehörenden, die dort durch einen Stern von jenen unterschieden waren. Um diese zu berechnen, bilden wir zunächst die Determinante γ der γ_{ik} und ihre Unterdeterminanten. So finden wir

$$\gamma = 1 + M . r^2, \quad \gamma^{ik} = \delta^i_k - \frac{M x^i x^k}{1 + M r^2} . \qquad (194\text{b})$$

Weiter folgt aus (194a), wenn wir die Ableitung der Funktion $M(r)$ mit M' bezeichnen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^l} &= \frac{M'}{r} x^i x^k x^l + M\,(\delta^l_i x^k + \delta^l_k x^i), \\ \begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix}^* &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^l}\right) = \frac{1}{2}\frac{M'}{r} x^i x^k x^l + \delta^i_k M x^l, \\ \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}^* &= \sum_{m=1}^{3} \gamma^{lm} \begin{bmatrix} ik \\ m \end{bmatrix}^* = \frac{x^l}{1 + M r^2}\left(\frac{1}{2}\frac{M'}{r} x^i x^k + \delta^i_k M\right). \end{aligned}\right\} \quad (194\text{c})$$

Die Größe H, welche wir berechnen wollen, ist, wie schon in § 16 erwähnt, gegenüber linearen Transformationen von der Determinante $+1$ ein Skalar. Wir können also hier zur Vereinfachung der Rechnung den Aufpunkt durch eine lineare orthogonale Transformation der x^1, x^2, x^3 auf die x^1-Achse legen. Dann wird $x^1 = r$, $x^2 = x^3 = 0$ und man findet aus (158) mit der Abkürzung γ' für $d\gamma\, dr$ die zu (194) gehörenden Dreizeigersymbole:

$$\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{r}{1 + M r^2}\left(\tfrac{1}{2} M' r + M\right) = \frac{\gamma'}{2\gamma},$$

$$\begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3\,3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{M r}{1 + M r^2} = \frac{M r}{\gamma} .$$

Ferner ist dann mit der Abkürzung V' für dV/dr:

$$\gamma^{11} = \frac{1}{1 + M r^2} = \frac{1}{\gamma}, \qquad \begin{aligned} \gamma^{12} = \gamma^{13} = \gamma^{23} &= 0, \\ \gamma^{22} = \gamma^{33} &= 1. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x^1} = \frac{dV}{dr} = V', \qquad \frac{\partial V}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial x^3} = 0;$$

also nach (158):

$$\left\{ {4\,4 \atop 1} \right\} = \frac{V V'}{\gamma}, \quad \left\{ {1\,4 \atop 4} \right\} = \frac{V'}{V}.$$

Alle anderen g-Klammern verschwinden. Weiter ist, wie schon in § 17 erwähnt,

$$g^{44} = \frac{1}{V^2}, \quad g^{i4} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad . \quad . \quad (195)$$

und im allgemeinen [vgl. (154)]

$$g^{ik} = -\gamma^{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (196)$$

also bei der besonderen Wahl des Aufpunktes, die wir getroffen haben:

$$g^{11} = -\frac{1}{1 + M r^2} = -\frac{1}{\gamma}, \quad g^{22} = g^{33} = -1, \quad (196\,\mathrm{a})$$

während die anderen g^{ik} verschwinden. Schließlich führen wir hier noch an:

$$\sqrt{-g} = V\sqrt{\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (196\,\mathrm{b})$$

Daraus berechnet sich nun nach (145)

$$H = \sum_{l\,m\,n} g^{ll} \left[\left\{ {l\,l \atop n} \right\} \left\{ {n\,m \atop m} \right\} - \left\{ {l\,n \atop m} \right\} \left\{ {l\,m \atop n} \right\} \right].$$

Der Faktor von g^{11} wird

$$\left\{ {1\,1 \atop 1} \right\} \left(\left\{ {1\,1 \atop 1} \right\} + \left\{ {1\,4 \atop 4} \right\} \right) - \left\{ {1\,1 \atop 1} \right\} \left\{ {1\,1 \atop 1} \right\} - \left\{ {1\,4 \atop 4} \right\} \left\{ {1\,4 \atop 4} \right\} = \left(\frac{\gamma'}{2\gamma} - \frac{V'}{V} \right) \frac{V'}{V};$$

also der ganze Summand mit $l = 1$

$$\left(\frac{V'}{V} - \frac{\gamma'}{2\gamma} \right) \frac{V'}{V\gamma}.$$

Der Faktor von g^{22} wird

$$\left\{ {2\,2 \atop 1} \right\} \left(\left\{ {1\,1 \atop 1} \right\} + \left\{ {1\,4 \atop 4} \right\} \right) = \left(\frac{\gamma'}{2\gamma} + \frac{V'}{V} \right) \frac{Mr}{\gamma};$$

also der Summand mit $l = 2$ plus dem gleich großen mit $l = 3$

$$-2 \left(\frac{\gamma'}{2\gamma} + \frac{V'}{V} \right) \frac{Mr}{\gamma}.$$

Als Faktor von g^{44} finden wir aber

$$\left\{ {4\,4 \atop 1} \right\} \left(\left\{ {1\,1 \atop 1} \right\} + \left\{ {1\,4 \atop 4} \right\} \right) - \left\{ {4\,4 \atop 1} \right\} \left\{ {4\,1 \atop 4} \right\} - \left\{ {4\,1 \atop 4} \right\} \left\{ {4\,4 \atop 1} \right\} = \left(\frac{\gamma'}{2\gamma} - \frac{V'}{V} \right) \frac{V V'}{\gamma};$$

daher wird der Summand mit $l = 4$

$$\left\{ \frac{\gamma'}{2\gamma} - \frac{V'}{V} \right\} \frac{V'}{V\gamma}.$$

Also wird schließlich

$$H = -\left(\frac{\gamma'}{\gamma} + 2\frac{V'}{V}\right)\frac{Mr}{\gamma} = -\frac{2}{V\sqrt{\gamma}}\frac{d(V\sqrt{\gamma})}{dr}\cdot\frac{Mr}{\gamma}. \quad . \quad (197)$$

Variieren wollen wir das Integral

$$\int\sqrt{-g}\,H\,dX = \iiiint V\sqrt{\gamma}\,H\,dx^1\,dx^2\,dx^3\,dx^4.$$

Nach (193) können wir dabei nach der Regel für die Einführung neuer Integrationsveränderlicher mit Hilfe der Funktionaldeterminanten statt $dx^1\,dx^2\,dx^3$ schreiben:

$$r^2 \sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi.$$

Denken wir den Integrationsbereich begrenzt von je einem Paar von Räumen $x^4 = const$, $\vartheta = const$, $\varphi = const$, so ergeben die Integrationen nach diesen Veränderlichen nur konstante Faktoren; denn der Integrand hängt von ihnen nicht ab. Führen wir ferner durch die Ansätze

$$\frac{Mr^3}{\gamma} = w, \quad V\sqrt{\gamma} = v, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (198)$$

deren Umkehrungen

$$V^2 = v^2\frac{r-w}{r}, \quad \gamma = 1 + Mr^2 = \frac{r}{r-w} \quad . \quad . \quad (198\,a)$$

lauten, zwei neue Funktionen v und w von r ein, so wird:

$$\int\sqrt{-g}\,H\,dX = -2\iiint dx^4 \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\cdot\int f\,dr \qquad (199)$$

$$(f = w\,v').$$

Bis hierher benutzte unsere Rechnung nur die Symmetrieeigenschaft des gesuchten Feldes, aber noch nicht dessen vollständige Freiheit von aller Materie. Infolgedessen können wir die bisher gewonnenen Gleichungen bei allen Problemen mit einem Symmetriezentrum benutzen. Soll nun nirgends, außer im Nullpunkt, Materie liegen, so vereinfacht sich das Variationsproblem zu Gleichung (181):

$$\delta\int\sqrt{-g}\,H\,dX = 0,$$

was nach (199) auf

$$\delta\int f\,dr = 0$$

führt. Die Funktionen v und w sind aus ihm zu bestimmen, und zwar lauten die Lagrangeschen Gleichungen:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial f}{\partial w'}\right) - \frac{\partial f}{\partial w} = 0 \text{ oder } v' = 0, \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial f}{\partial v'}\right) - \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \text{ oder } w' = 0.$$

v und w sind also Konstante.

Die erstere können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich 1 setzen; eine andere Wahl verändert nur die Bedeutung von x^4. Für w aber schreiben wir hinfort α. Dann folgt aus (192) und (198 a)

$$d\tau^2 = c^2 \frac{r-\alpha}{r} dt^2 - \frac{r}{r-\alpha} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2). \quad (200)$$

Dies ist die Maßbestimmung in der Umgebung des Massenpunktes (Schwarzschild).

b) Erörterung der Formel (200). Wir erinnern uns, daß die Koordinaten r, ϑ, φ hier, wie überhaupt, zunächst nur ganz willkürliche Bezeichnungen von Punkten sind. Physikalische Bedeutung haben nur die aus (200) abzuleitenden Maßangaben. Immerhin ist die Sprechweise zulässig, r als den Radiusvektor vom Massenpunkt her und ϑ und φ als Polabstand und Azimut zu bezeichnen, wie wir es in der euklidischen Geometrie tun. Nur ist r nicht das natürliche Maß für den Abstand vom Massenpunkt.

Zwei Uhren in den Abständen vom Massenpunkt, welche den Werten r_1 und r_2 entsprechen, geben in gleichen Zeiten dt Eigenzeiten an, die im Verhältnis

$$\frac{d\vartheta_1}{d\vartheta_2} = \sqrt{\frac{1-\alpha/r_1}{1-\alpha/r_2}} = 1 - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \cdots$$

zueinander stehen. Wir bestätigen hier, daß die dem Anziehungszentrum nähere nachgeht, wie wir schon in § 18 sahen, sofern $\alpha > 0$. Wir können sogar durch den Vergleich mit dem früheren Ergebnis ermitteln, daß zwischen α und der Masse m des Anziehungszentrums näherungsweise die Beziehung

$$\alpha = 2\frac{Cm}{c^2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (201)$$

bestehen muß. Doch werden wir diese im nächsten Paragraphen noch auf eine andere Art gewinnen können.

Eine Strecke auf der Kugel $r = const$ hat die natürliche Länge

$$ds = r\sqrt{d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2}.$$

Infolgedessen gilt auf jeder Kugel um den Massenpunkt die sphärische Geometrie, die sich aus der euklidischen Geometrie des dreidimensionalen Raumes ableitet. Im Streckenraum selbst gilt aber eine nichteuklidische Geometrie, denn für eine radiale Strecke ist das Maß, das man bei Anlegung eines Maßstabes abliest, nicht dr, sondern

$$ds = dr\sqrt{\frac{r}{r-\alpha}}, \quad (r > \alpha).$$

Da sich alle „Ebenen" $\varphi = const$ wegen der Symmetrie völlig gleichen, können wir die Erörterung auf eine von ihnen beschränken. In ihr herrscht die Maßbestimmung

$$ds^2 = \frac{r}{r-\alpha}\,dr^2 + r^2\,d\vartheta^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (202)$$

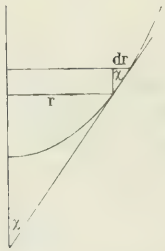
Dieselbe (nur daß $d\vartheta$ durch $d\varphi$ zu ersetzen ist) gilt auch in der „Ebene" $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Nun gilt auf jeder Drehfläche im dreidimensionalen euklidischen Raume eine Maßbestimmung

$$ds^2 = \frac{dr^2}{sin^2\chi} + r^2\,d\vartheta^2,$$

sofern wir unter r den senkrechten Abstand eines ihrer Punkte von der als Drehachse gewählten z-Achse verstehen, unter χ die Neigung des durch ihn gehenden Elementes der Meridiankurve gegen diese Achse und unter ϑ den Winkel zwischen der Ebene dieser Kurve und einer festen Ebene durch die Drehachse (Fig. 21). Denn dann ist $\frac{dr}{sin\,\chi}$ das Linienelement der Meridiankurve, $r\,d\vartheta$ das des dazu senkrechten Breitenkreises. Diese Maßbestimmung kommt auf (202) hinaus, sofern wir

Fig. 21.



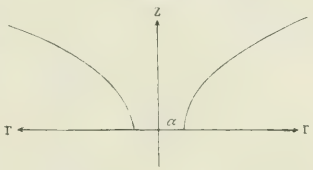
$$sin^2\chi = \frac{r-\alpha}{r}, \quad \text{d. h.} \quad cotg\,\chi = \frac{dz}{dr} = \sqrt{\frac{\alpha}{r-\alpha}}$$

setzen. Unterdrücken wir bei der Integration die additiv zu z hinzutretende Integrationskonstante, so finden wir die Gleichung eines hyperbolischen Rotationsparaboloids

$$z^2 = 4\,\alpha\,(r-\alpha),$$

von dem Fig. 22 den Meridianschnitt zeigt. Da, wie gesagt, dieser Schnitt um die z-Achse zu drehen ist, entsteht dabei eine einzige, zusammenhängende Fläche. Von der Drehachse wird sie nicht geschnitten, sondern der engste Kreis auf ihr, den der Scheitel der Parabel bei der Drehung erzeugt, hat immer noch den Abstand α von dieser. Das Gaußsche Krümmungsmaß ist negativ, das zeigt die Fig. 22; aber es nimmt mit wachsendem r mehr und mehr den euklidischen Wert 0 an. Auf die eine Hälfte dieses Paraboloids, etwa auf die positiven z-Werten entsprechende, wird unsere „Ebene" in dem Sinne abgebildet, daß in beiden dieselbe Geometrie gilt. Ein Beobachter, dem nur Gebiete auf ihr zugänglich sind, in denen $r \gg \alpha$ ist, wird sie für eine Ebene im euklidischen Sinne halten und dementsprechend in ihr ebene Polarkoordinaten einführen mit der Maßbestimmung, welche dafür die euklidische Geometrie gibt. Er vertauscht sie dabei mit derjenigen Tangentenebene, welche das Paraboloid im Unendlichen berührt oder einer dazu parallelen, weil er sie in seinem Bereich nicht von dem Paraboloid unterscheiden kann. Das ist zu beachten, wenn man die in den nächsten Paragraphen abzuleitende Perihelbewegung der Planeten und die Lichtablenkung richtig verstehen will; denn in dieser Lage ist ein Beobachter auf der Erde der Sonne gegenüber.

Fig. 22.



Die Abbildung aber gelingt nur für den Teil der „Ebene" $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, für den $r > \alpha$ ist; für den anderen Teil gibt es keine reelle Drehfläche, welche dieselben Dienste tut, wie man an der obigen Rechnung erkennt. Dieser gegen die Koordinatentransformationen invariante Unterschied beweist, daß sich die Singularität der Maßbestimmung (200) bei $r = \alpha$ nicht durch Einführung anderer Koordinaten beseitigen läßt, sondern durchaus in der Natur der Sache liegt. Man wird daraus wohl schließen müssen, daß jede Masse m, wenn sie eine Kugel erfüllt, notwendig einen größeren Halbmesser hat, als er dem Wert $r = 2\,Cm\,c^2$ entspricht. Und in der Tat kennen wir bisher keinen dem widersprechenden Fall, auch nicht bei den Atomkernen.

Jede Singularität, die bei $r = \alpha$ sowie die bei $r = 0$, fällt fort, sowie man $\alpha = 0$ setzt. Dann aber wird aus (200) die pseudoeuklidische Maßbestimmung. Daraus schließt Hilbert: Die pseudoeuklidische Maßbestimmung ist die einzige für den leeren Raum mit den Feldgleichungen (144) verträgliche, wenn der Maßtensor überall regulär und von t unabhängig sein soll, wenn ein Symmetriezentrum da sein soll, und wenn schließlich, was aber durch Transformation nach § 9 d stets zu erreichen ist, die Zeitachse überall auf den Streckenräumen senkrecht stehen soll.

c) Die geodätischen Linien. Die Differentialgleichungen der geodätischen Linien erhalten wir in den Polarkoordinaten r, ϑ, φ gemäß der Maßbestimmung (192), wenn wir das Variationsproblem

$$\delta \int [V^2 \dot{x}^{4\,2} - (1 + Mr^2) r^2 - r^2 \dot{\vartheta}^2 - r^2 \sin^2 \vartheta \, \dot{\varphi}^2] \, dp = 0$$

behandeln. Wir finden dabei:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{r} + \frac{1}{2} \frac{\dot{r}^2}{1 + r^2 M} \frac{d}{dr}(1 + r^2 M) - \frac{r \dot{\vartheta}^2}{1 + r^2 M} \\ &- \frac{r \sin^2 \vartheta}{1 + r^2 M} \dot{\varphi}^2 + \frac{V \frac{dV}{dr}}{1 + r^2 M} \dot{x}^{4\,2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (203)$$

Ferner:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\vartheta} - \sin \vartheta \cos \vartheta \, \dot{\varphi}^2 = 0 \quad \ldots . (204)$$

und

$$\frac{d}{dp}(r^2 \sin^2 \vartheta \, \dot{\varphi}) = 0, \text{ d. h. } \ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} + 2 \cot g \, \vartheta \, \dot{\vartheta} \, \dot{\varphi} = 0. \quad (205)$$

Schließlich:

$$\frac{d}{dp}(V^2 \dot{x}^4) = 0, \text{ d. h. } \ddot{x}^4 + \frac{2}{V} \frac{dV}{dr} \dot{r} \dot{x}^4 = 0 \quad . . (206)$$

Der Gleichung (204) genügt der Ansatz

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}. \quad \ldots \ldots \ldots (207)$$

Wenn wir ihn im folgenden machen, so liegt darin keine Einschränkung der Allgemeinheit, sondern nur eine passende Wahl des räumlichen Koordinatensystems. Man kann eben hier wie in der euklidischen Geometrie jede „Ebene“ zur Fläche $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ machen. (205) und (206) lassen wenigstens je eine erste Inte-

gration ohne weiteres zu, nämlich, wenn wir sogleich von (207) und (198a) mit $w = \alpha$ und $v = 1$ Gebrauch machen:

$$r^2 \dot{\varphi} = b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (208)$$

$$\frac{r - \alpha}{r} \dot{t} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (209)$$

b ist dabei eine Integrationskonstante; wenn wir die andere gleich 1 setzen, so liegt darin nur eine Verfügung über den bisher jeder physikalischen Bedeutung baren Parameter p, als dessen Funktionen die Koordinaten t, r, ϑ, φ hier erscheinen. (203) aber können wir nach § 7, a) im allgemeinen, d. h. mit Ausnahme der Kreisbewegungen $r = const$, ersetzen durch die schon einmal integrierte Gleichung

$$V^2 \dot{t}^2 - (1 + r^2 M) \dot{r}^2 - r^2 \dot{\vartheta}^2 - r^2 sin^2 \vartheta \, \dot{\varphi}^2 = A \quad . \quad . \quad (210)$$

oder nach (207) und (198a)

$$c^2 \frac{r - \alpha}{r} \dot{t}^2 - \frac{r}{r - \alpha} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 = A \quad . \quad . \quad . \quad (211)$$

Die Konstante A ist positiv für alle zeitartigen geodätischen Linien, Null für geodätische Nullinien [vgl. § 7, c)].

§ 22. Die Perihelbewegung des Merkur.

Ein gegen das Anziehungszentrum leichter Massenpunkt hat nach § 15 als Weltlinie eine zeitartige geodätische Linie. Wir suchen die zugehörige Bahnkurve im Streckenraum in der Form $r = r(\varphi)$. Eliminieren wir aus (208), (209) und (211) $\dot{\varphi}$ und $\dot{t}$, so finden wir:

$$\dot{r}^2 = c^2 - \frac{r - \alpha}{r} \left(A + \frac{b^2}{r^2} \right);$$

und dividieren wir diese Beziehung durch

$$r^4 \dot{\varphi}^2 = b^2,$$

so gelangen wir zu der Differentialgleichung

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \right)^2 = \frac{c^2 - A}{b^2} + \frac{\alpha A}{b^2} \varrho - \varrho^2 + \alpha \varrho^3, \quad . \quad . \quad . \quad (212)$$

aus der $\varrho = r^{-1}$ als Funktion von φ zu entnehmen ist.

Die entsprechende Differentialgleichung der Newtonschen Planetentheorie lautet:

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E}{b^2} + \frac{2\,Cm}{b^2}\,\varrho - \varrho^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (213)$$

sie ergibt sich leicht aus dem Flächensatz

$$r^2\,\dot{\varphi} = b$$

und dem Energiesatz

$$\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2 - \frac{2\,Cm}{r} = E,$$

in welchem die Konstante E für eine elliptische Bahn negativ, eine hyperbolische positiv ist. (Stets ist bei den im Planetensystem beobachteten Fällen $E \leqq c^2$; denn ist $E > 0$, so ist $E < q^2$; und ist $E < 0$, so ist $E < 2\,Cm\,r$, d. h. kleiner als das Geschwindigkeitsquadrat eines Körpers, der seine Geschwindigkeit nur durch Annäherung aus dem Unendlichen gewonnen hat.) m bedeutet die Masse des Zentralkörpers. Beide Gleichungen stimmen annähernd überein, wenn

$$\alpha\,\varrho \leqq 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (214)$$

ist, und diese Bedingung ist um so besser erfüllt, je größer der Abstand des Planeten vom Zentralkörper. Dazu gehört aber außerdem die Übereinstimmung des Faktors von ϱ und des absoluten Gliedes; also

$$c^2 - A = E, \qquad \alpha A = 2\,Cm$$

und daraus folgt nun wieder, wenn man E gegen c^2 vernachlässigt, die Gleichung (201)

$$\alpha = \frac{2\,Cm}{c^2}.$$

Setzen wir für m die Sonnenmasse, so ist nach (166) das Verhältnis der Strecke α zum Sonnenhalbmesser a

$$\alpha\;a = 4{,}14\,.\,10^{-6},$$

also, da $a = 6{,}95\,.\,10^{10}$ cm beträgt,

$$\alpha = 2{,}88\,.\,10^{5}\,\text{cm}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (214\text{a})$$

Für den der Sonne nächsten Planeten, den Merkur, beträgt der mittlere Abstand $5{,}76 \times 10^{12}$ cm, also ist ungefähr (r ist kein genaues Maß des Abstandes)

$$\alpha\,\varrho = 5\,.\,10^{-8}.$$

Die Bedingung (214) wäre also sehr gut erfüllt. Trotzdem bewirkt das letzte Glied der Gleichung (212) eine Abweichung von den Kepplerschen Gesetzen, die sich beim Merkur bemerkbar macht.

Um diese Abweichung für eine annähernd elliptische Bahn zu untersuchen, fragen wir nach der Differenz $\varphi_2 - \varphi_1$ der beiden Winkel, für welche der Planet den kleinsten Wert ϱ_1 von ϱ, d. h. den größten von r (Aphel) und den größten Wert ϱ_2 (Perihel) annimmt. Nach der Newtonschen Gleichung (213) sind ϱ_1 und ϱ_2 die Wurzeln der rechten Seite; denn wenn diese Null ist, verschwindet auch $d\varrho$ $d\varphi$. Man kann somit die rechte Seite gleich

$$(\varrho - \varrho_1)\,(\varrho_2 - \varrho)$$

setzen und findet dann

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{d\varrho}{\sqrt{(\varrho-\varrho_1)\,(\varrho_2-\varrho)}} = \arcsin \frac{\varrho - \frac{1}{2}(\varrho_2+\varrho_1)}{\frac{1}{2}(\varrho_2-\varrho_1)}\Bigg|_{\varrho_1}^{\varrho_2} = (2n+1)\pi$$

n ist dabei irgend eine ganze Zahl. Die Mehrdeutigkeit, welche die *arc sin*-Funktion hineinbringt, entspricht der Tatsache, daß die beiden Werte ϱ_1, ϱ_2 immer wieder angenommen werden. Für zwei aufeinanderfolgende Perihel- und Aphelstellungen ist natürlich $n = 0$ zu setzen. Dann wird $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$, was dem entspricht, daß das Anziehungszentrum auf der großen Achse der Ellipse liegt.

In Einsteins Gleichung hat die rechte Seite wegen des Zusatzes $\alpha\varrho^3$ noch eine dritte Wurzel ϱ_3. Sie rückt wegen der Identität

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = \frac{1}{\alpha},$$

die aus der Theorie der algebraischen Gleichungen folgt, mit verschwindendem α ins Unendliche, während ϱ_1 und ϱ_2 annähernd dieselben Werte haben, wie soeben und vor allem immer noch die Grenzwerte darstellen, zwischen denen ϱ hin und her schwankt. Für die rechte Seite von (212) können wir nun schreiben:

$$\alpha(\varrho-\varrho_1)\,(\varrho-\varrho_2)\,(\varrho-\varrho_3) = -(\varrho-\varrho_1)\,(\varrho-\varrho_2)\,\alpha\varrho_3\left(1-\frac{\alpha\varrho}{\alpha\varrho_3}\right)$$

$$= (\varrho-\varrho_1)\,(\varrho_2-\varrho)\,[1-\alpha(\varrho_1+\varrho_2)]\left(1-\frac{\alpha\varrho}{1-\alpha(\varrho_1+\varrho_2)}\right).$$

In dem Integral, als das wir $\varphi_2 - \varphi_1$ berechnen, tritt aber die reziproke Quadratwurzel der rechten Seite als Integrand auf; für sie gilt bis auf Glieder höherer als erster Ordnung in α der Wert:

$$\frac{\left(1 + \frac{\alpha}{2}(\varrho_1 + \varrho_2)\right)\left(1 + \frac{\alpha}{2}\varrho\right)}{\sqrt{(\varrho - \varrho_1)(\varrho_2 - \varrho)}}.$$

Infolgedessen wird jetzt

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \left(1 + \frac{\alpha}{2}(\varrho_1 + \varrho_2)\right) \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{2}\varrho\right) d\varrho}{\sqrt{(\varrho - \varrho_1)(\varrho_2 - \varrho)}}.$$

Die Ausführung des unbestimmten Integrals liefert

$$\left(1 + \frac{\alpha}{2}(\varrho_1 + \varrho_2)\right) \left\{ - \frac{\alpha}{2} \sqrt{(\varrho - \varrho_1)(\varrho_2 - \varrho)} \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{\alpha}{4}(\varrho_2 + \varrho_1)\right) arcsin \frac{\varrho - \frac{1}{2}(\varrho_2 + \varrho_1)}{\frac{1}{2}(\varrho_2 - \varrho_1)} \right\}$$

und die Einsetzung der Grenzen ergibt, wieder unter Fortlassung von Gliedern mit α^2,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = [1 + \tfrac{3}{4}\alpha(\varrho_1 + \varrho_2)]\,(2n + 1)\,\pi.$$

Wiederum ist n eine beliebige ganze Zahl. Setzt man sie Null, so findet man den Winkelabstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Perihel- und Aphelstellungen. Setzt man sie gleich 1, so findet man hingegen den Winkelabstand zwischen einem Aphel und dem übernächsten Perihel. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Perihelen durchläuft der Planet daher den Winkel

$$2\pi\,[1 + \tfrac{3}{4}\alpha(\varrho_1 + \varrho_2)].$$

Sein Überschuß über 2π, also

$$\varepsilon = \tfrac{3}{2}\pi\alpha(\varrho_1 + \varrho_2),$$

gibt uns die Bewegung des Perihels während eines Umlaufs des Planeten. Innerhalb unserer Näherung dürfen wir aber ϱ_1 und ϱ_2 so aus der großen Achse a^* und der numerischen Exzentrizität e berechnen, als ob die Bahn genau elliptisch wäre; nämlich:

$$\varrho_1 = \frac{1}{a^*(1 + e)}, \qquad \varrho_2 = \frac{1}{a^*(1 - e)}.$$

Also folgt in Rücksicht auf (201) Einsteins Formel:

$$\varepsilon = \frac{3\pi a}{a^*(1-e^2)} = \frac{6\pi C m}{a^*(1-e^2)c^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (215)$$

Beim Merkur ist nun $a^* = 5{,}76 \,.\, 10^{12}$ cm, $e = \frac{1}{5}$. Nach (215) ergibt sich daraus

$$\varepsilon = 4{,}9 \,.\, 10^{-7}.$$

Die Astronomen geben vielfach aber nicht diesen auf einen Umlauf bezüglichen Winkel, sondern die Perihelverschiebung in 100 Jahren. Nun beträgt die Umlaufszeit des Merkur 88 Tage, so daß 415 Umläufe auf den genannten Zeitraum kommen. Es ist aber

$$415 \,.\, \varepsilon = 2{,}03 \,.\, 10^{-4} = 42''.$$

Dies ist die Deutung der solange bekannten und bisher nie recht erklärten Perihelverschiebung (§ 1).

Wir möchten daran erinnern, daß diese Perihelbewegung nicht die wirkliche ist, sondern der Rest, der zurückbleibt, wenn man die aus den Störungen durch die anderen Planeten berechneten Anteile von der beobachteten Bewegung abzieht. Die Berechtigung, die Störungen nach der Newtonschen Theorie zu ermitteln, entnehmen wir aus den Betrachtungen von § 17; sie ist um so größer, als die Störungen selbst kleine Korrektionen darstellen, also nicht mit der für Formel (215) erforderlichen Genauigkeit berechnet zu werden brauchen.

Bei den anderen Planeten ist einmal a^* erheblich größer, zudem die Zahl der Umläufe im Jahrhundert nach dem dritten Kepplerschen Gesetz proportional zu $a^{*-3/2}$, also geringer. Der Faktor $1 - e^2$ macht bei keinem der großen Planeten viel aus. Infolgedessen ist die Perihelverschiebung im Jahrhundert proportional zu $a^{*-5/2}$. So findet man aus Einsteins Formel für die Venus eine Verschiebung von 8″, für die Erde 4″. Die Beobachtung hat darüber wohl noch kein sicheres Ergebnis geliefert.

Wir wollen übrigens ein gewisses theoretisches Bedenken gegen die Anwendung der Einsteinschen Formel (215) auf so große Körper nicht verhehlen, wie es Merkur, Venus usw. sind. Der Satz, aus dem sie hervorgeht, daß die Bewegung im Schwerefeld durch eine geodätische Weltlinie dargestellt ist, gilt nämlich nach § 15 zunächst nur für Körper, welche das Feld selbst nicht merklich beeinflussen; und das trifft für die großen Planeten

unseres Sonnensystems doch gewiß nicht zu, am wenigsten in ihrem Inneren. Man kann sich aber auch ohne Rechnung von der Größenordnung der Abänderung ein Bild machen, welche die Berücksichtigung der Eigenschwere des Planeten an (215) notwendig machen wird. Denn nach § 16 liefert diese einen Beitrag zur trägen Masse, dagegen keinen zur schweren Masse, weil in der Grundgleichung der Dynamik $\Delta iv\, T = 0$ nach (73a) die Komponenten des Schwerefeldes $\left\{ {i\,k \atop l} \right\}$ nur mit dem T_{ik} multipliziert auftreten. Die Schwereenergie einer Kugel von der Masse m_1 und dem Halbmesser a_1 ist aber aus dimensionellen Gründen in der Größenordnung durch $C m_1^2 : a_1$, die entsprechende Masse durch $C m_1^2 : a_1 c^2$ gemessen, und da ε eine reine Zahl ist, ist ein Zusatz zu (215), falls er in m_1 linear ist, von der Größenordnung von $C m_1 : c^2 a_1$, der Größe, welche die prozentuale Veränderung der trägen Masse durch die Eigenschwere mißt. Diese Größe beträgt für die Erde etwa $7 \,.\, 10^{-10}$. Für den Merkur ist sie wegen seiner rund 18mal geringeren Masse noch um eine Zehnerpotenz kleiner. Sie braucht daher bei dem jetzigen Stande der Beobachtungsgenauigkeit nicht in Betracht gezogen zu werden.

Wir wollen nun noch zwei Bewegungsvorgänge untersuchen, welche lediglich ein theoretisches Interesse besitzen. Die bisher von der Betrachtung ausgeschlossenen Kreisbewegungen behandelt man am einfachsten nach der Differentialgleichung (203), wobei wir natürlich M und V^2 gemäß (198a) durch $v = 1$ und $w = \alpha$ ausdrücken. Setzen wir hier immer $\sin \vartheta = 1$, ferner $\ddot{r}$ und $\dot{r}$ gleich Null, so finden wir bei Unterdrückung des gemeinsamen Faktors $(r - \alpha)$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{\alpha c^2}{2 r^3} \dot{t}^2.$$

Hier dividieren wir durch $\dot{t}^2$:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{\alpha c^2}{2 r^3} = \frac{C m}{r^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (216)$$

Dies ist das dritte Kepplersche Gesetz, allein mit der Veränderung, daß r nicht genau der natürlich gemessene Abstand vom Anziehungszentrum ist. Anderseits finden wir nach (209):

$$\dot{\varphi}^2 = \alpha c^2 : 2 r (r - \alpha)^2. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (216a)$$

Danach sind also Kreisbahnen möglich; aber nicht alle; denn die Weltlinie des Körpers muß zeitartig bleiben, d. h. die Kon-

stante A in (211) muß positiv sein. Eliminiert man auch in (211) mittels (209) $\dot{t}$, so folgt wegen $\dot{r} = 0$

$$\frac{c^2 r}{r - \alpha} - r^2 \dot{\varphi}^2 > 0 \quad \ldots\ldots \quad (216\text{b})$$

und nach (216a)

$$r > \tfrac{3}{2}\alpha.$$

Die erwähnte Singularität der Maßbestimmung liegt bei $r = \alpha$; aber die untere Grenze für den Halbmesser einer Kreisbahn liegt schon bei $r = \frac{3}{2}\alpha$, weil sich ein Körper auf dieser Bahn mit der am gleichen Orte herrschenden Lichtgeschwindigkeit bewegen müßte, und bei einer noch kleineren Kreisbahn mit Überlichtgeschwindigkeit.

Den entgegengesetzten Grenzfall der Bewegung auf einer Geraden durch das Symmetriezentrum kann man nach den Differentialgleichungen (203) und (206) behandeln. Doch hat man dabei den Nachteil, daß dann nicht die natürlich gemessene Geschwindigkeit und Beschleunigung auftritt, sondern die davon verschiedenen Differentialquotienten von r nach t, welche wie r selbst keine unmittelbare physikalische Bedeutung haben. Die natürlich gemessene Geschwindigkeit beträgt aber

$$q = \sqrt{\frac{r}{r - \alpha}} \frac{dr}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (217)$$

Man geht deshalb einfacher von der schon einmal integrierten Gleichung (211) aus; indem man in ihr $\dot{\varphi} = 0$ setzt und durch $\dot{t}$ dividiert, findet man

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{r - \alpha}{r}\right)^2 \left(c^2 - A \frac{r - \alpha}{r}\right)$$

oder

$$q^2 = \frac{r - \alpha}{r} \left(c^2 - A \frac{r - \alpha}{r}\right) \quad \ldots\ldots \quad (218)$$

Die Differentiation nach t liefert nun

$$2\, q \frac{dq}{dt} = \left(c^2 - 2\, A \frac{r - \alpha}{r}\right) \frac{\alpha}{r^2} \frac{dr}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (218\text{a})$$

Eliminiert man aus den beiden letzten Gleichungen die Konstante A, und dividiert durch (217), so folgt:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{\alpha}{r^2} \left(\frac{c^2}{2} \sqrt{\frac{r - \alpha}{r}} - q^2 \sqrt{\frac{r}{r - \alpha}}\right) \quad \ldots\ldots \quad (219)$$

Bei Vernachlässigung von q^2 gegen c^2 folgt daraus

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{\alpha c^2}{2r^2}\sqrt{\frac{r-\alpha}{r}} = -\frac{Cm}{r^2}\sqrt{\frac{r-\alpha}{r}},$$

d. h. bis auf die Glieder mit α^2 die Bewegungsgleichung der Newtonschen Theorie. Während somit langsam bewegte Körper eine Anziehung erfahren, ändert sich das bei schnell bewegten. Ist nämlich

$$q = \pm c\sqrt{\frac{r-\alpha}{2r}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (220)$$

also das $\sqrt{\frac{1}{2}}$ fache der am gleichen Ort herrschenden Lichtgeschwindigkeit, so wird $dq/dt = 0$ und bei noch größeren Geschwindigkeiten positiv (Abstoßung). Nach (218) hat die Gleichung $q = 0$ außer der an der Singularität liegenden Wurzel $r = \alpha$ als einzige in Betracht kommende Wurzel

$$r = \frac{\alpha}{1 - \frac{c^2}{A}}.$$

Und nach (218 a) ist $dq/dt = 0$ für

$$r = \frac{\alpha}{1 - \frac{c^2}{2A}}.$$

Ist also $A > c^2$ *), so kann sich der Körper nur bis zu einem endlichen Wert von r vom Anziehungszentrum entfernen. Hat er ihn einmal erreicht, so fällt er mit zunehmender Geschwindigkeit zurück, bis er bei einem Wert von r zwischen α und 2α die größte Geschwindigkeit annimmt. Dann wird er wieder langsamer, kommt aber bei keinem der in Betracht kommenden Werte von $r\,(>\alpha)$ wieder zur Ruhe. Ist $A = c^2$, so hat der Körper die Geschwindigkeit Null im Unendlichen; sonst zeigt die Bewegung noch dieselben Eigenschaften; die größte Geschwindigkeit findet sich bei $r = 2\alpha$. Auch wenn $c^2 > A > \frac{1}{2}c^2$ ist, ändert sich nicht viel, nur wird dann die Geschwindigkeit selbst im Unendlichen noch von Null verschieden sein. Wird dagegen $A < \frac{1}{2}c^2$, so hat der Körper im Unendlichen eine Geschwindigkeit größer als $\sqrt{\frac{1}{2}}\,c$. Nähert er sich dem Anziehungszentrum, so nimmt seine Geschwindigkeit dabei stets ab, ohne jedoch auf Null herunter zu gehen.

---

*) Nach Gl. (210) ist $A < V^2 r^2 = \frac{c^2}{V^2}$; da aber $V^2 = 1 - \frac{\alpha}{r} < 1$ ist, ist $A > c^2$ wohl möglich.

§ 23. Lichtstrahlen im Schwerefeld des Massenpunktes.

Nach § 14, d) sind die Lichtstrahlen durch Nullinien der „Welt“ bestimmt, und zwar entsprechen sie geodätischen Nullinien, also gilt für ihren Verlauf im Streckenraum die Gleichung (212) mit $A = 0$:

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2}{b^2} - \varrho^2 + \alpha\varrho^3. \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (221)$$

Nur eine uns schon bekannte Kurve können wir aus dieser Gleichung nicht ohne weiteres finden, nämlich den Kreis mit dem Wert

$$r = \tfrac{3}{2}\alpha,$$

der nach § 22 unter den dort erörterten Kreisbahnen dem Wert Null von A entspricht. In ihm kann ein in sich zurückkehrender Strahl verlaufen. Ersetzt man, was dem Wert $A = 0$ entspricht, in (216b) das $>$-Zeichen durch das Gleichheitszeichen, so findet man für die nach (208) konstante Größe $\varDelta = \frac{b}{c} = \frac{r^2\dot{\varphi}}{c}$ wegen (216a) den Wert

$$\varDelta = \frac{b}{c} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha. \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (222)$$

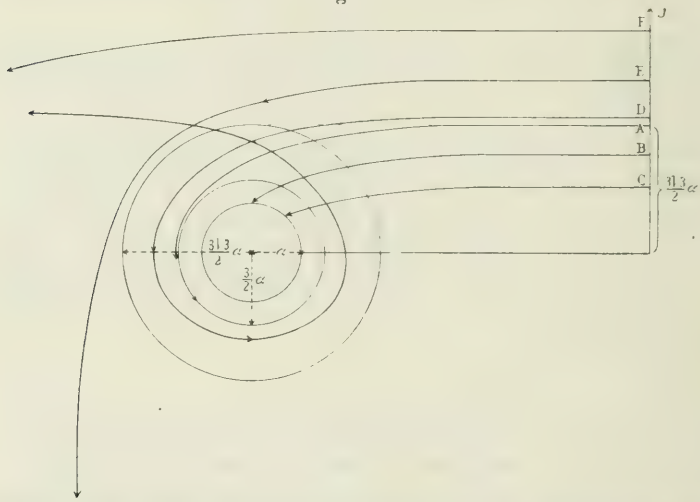
Von den durch (221) bestimmten Strahlen untersuchen wir nur diejenigen, welche im Unendlichen bei $\varphi = 0$ beginnen; darin liegt keine tatsächliche Beschränkung. Im Unendlichen, d. h. bei kleinem ϱ, verlaufen diese alle auf parallelen Geraden: denn vernachlässigt man $\alpha\varrho^3$ gegen ϱ^2, so findet man durch Integration aus (221)

$$\varphi = \int_0^{\varrho} \frac{\varDelta\, d\varrho}{\sqrt{1 - \varDelta^2\varrho^2}} = \arcsin(\varDelta\varrho), \quad r \sin\varphi = \varDelta.$$

$\varDelta$ ist also der kleinste Wert von r auf einer solchen Geraden, also in gewissem Sinn (freilich nicht in natürlicher Messung) der Abstand vom Anziehungszentrum, auf den der Strahl hinzielt. Er kann sich zwischen Null, was für einen gerade auf das Zentrum zueilenden Strahl gilt, und beliebig großen Werten stetig ändern. Er nimmt einmal dabei auch den Wert (222) an, welcher dem Kreise $r = \frac{3}{2}\alpha$ entspricht.

Daraus ziehen wir in Anlehnung an Poincarés Zykeltheorie den überdies recht anschaulichen Schluß: Der Lichtstrahl, der im Unendlichen auf den Abstand $\Delta = \frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha$ hinzielt, biegt sich nach innen und nähert sich auf einer Spirale asymptotisch dem Kreise $r = \frac{3}{2}\alpha$. Dann ergibt sich für die Gesamtheit der betrachteten Strahlen die Fig. 23. Sie zeigt uns die Kreise $r = \alpha$,

Fig. 23.



an welchem jeder herankommende Lichtstrahl endigt (ist doch dort die Lichtgeschwindigkeit 0), ferner $r = \frac{3}{2}\alpha$ und $r = \frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha$. An letzterem ist eine Tangente gezeichnet. Der Strahl A, welcher diese im Unendlichen berührt, wickelt sich unendlich oft um den zweiten der genannten Kreise. Alle Strahlen mit kleinerem Δ (wie B und C) durchsetzen ihn und endigen bei $r = \alpha$; die mit etwas größerem Δ (wie z. B. D) umkreisen den mittleren Kreis, um so häufiger, je näher sie ihm kommen; und die viel weiter entfernten (wie E und F) erfahren nur eine mehr oder minder bedeutende Abweichung von der Geraden *).

*) Die Maßbestimmung (200) gilt stets außerhalb einer Kugel von der Masse m. Wie Fig. 23 beweist, sieht ein weit entfernter Beobachter eine solche Kugel, wenn ihr Halbmesser, gemessen in dem Maß-

Für einen Strahl der letzten Art, für welchen die Abweichung sehr klein ist; wollen wir (221) genähert integrieren. In dem Integral

$$\varphi = \int_0^{\varrho} \frac{\varDelta\, d\varrho}{\sqrt{1 - \varDelta^2 . \varrho^2 (1 - \alpha\varrho)}}$$

führen wir als neue Veränderliche ein:

$$\sigma = \varDelta . \varrho \sqrt{1 - \alpha\varrho}.$$

Vernachlässigen wir aber quadratische und höhere Glieder in α, so können wir auch schreiben:

$$\varDelta . \varrho = \sigma \left(1 + \frac{\alpha}{2\varDelta}\sigma\right).$$

Dann wird

$$\varphi = \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma\left(1 + \frac{\alpha}{\varDelta}\sigma\right)}{\sqrt{1 - \sigma^2}} = arc\,sin\,\sigma - \frac{\alpha}{\varDelta}\sqrt{1 - \sigma^2} + \frac{\alpha}{\varDelta}.$$

Nun nehme σ von Null zu bis zum Wert 1; bei diesem ist $\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0$, also auch $\frac{d\varrho}{d\varphi} = 0$; ϱ hat also seinen größten, r seinen kleinsten Wert. Das zugehörige φ ist

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{\varDelta}.$$

Denselben Weg könnte der Strahl auch in umgekehrter Richtung durchlaufen. Einen dazu kongruenten Weg geht er, wenn er statt dessen seine Bahn weiter verfolgt; kommt er dabei wieder ins Unendliche, so ist der zugehörige Wert von φ

$$\varphi_\infty = \pi + \frac{2\alpha}{\varDelta};$$

d. h.

$$\psi = 2\frac{\alpha}{\varDelta} = \frac{4\,Cm}{c^2\varDelta}$$

---

stabe der r, zwischen α und $\frac{3}{2}\alpha$ liegt, so vergrößert, daß sie ihm den Halbmesser $\frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha$ zu haben scheint. Überhaupt alle Kugeln werden optisch vergrößert. Die im Text folgende Rechnung gibt für die relative Vergrößerung des Halbmessers a den Näherungswert $\frac{\alpha}{2a} = \frac{Cm}{ac^2}$, der bei der Sonne freilich nach (166) nur $2 . 10^{-6}$ beträgt.

ist die Ablenkung des Lichtstrahls von seiner Anfangsrichtung. Dies ist Einsteins Formel für die Lichtablenkung. Setzt man für m die Masse, für Δ den Halbmesser a der Sonne ein, so findet man nach (166)

$$\psi = 8{,}28 \,.\, 10^{-6} = 1{,}7''.$$

Bezeichnet man dies als die Ablenkung für einen unmittelbar am Sonnenrande vorübergehenden Lichtstrahl, so liegen darin zwei Ungenauigkeiten. Erstens ist der Minimalwert von r für jeden Strahl kleiner als Δ, und zweitens kann man r nicht dem Abstand vom Sonnenmittelpunkt (in natürlicher Messung) gleichsetzen. Beide Fehler sind aber zu α proportional, beeinflussen den Wert von ψ daher nur proportional zu α^2.

Historisch verdient bemerkt zu werden, daß es nicht zur Berechnung der Ablenkung ausreicht, wenn wir den Streckenraum als euklidisch und nur die Lichtgeschwindigkeit mit dem Ort als veränderlich ansehen, etwa nach den Näherungsgleichungen des § 17. Es bleibe dem Leser überlassen, die geodätischen Nulllinien für die Maßbestimmung

$$d\tau^2 = c^2\left(1 - \frac{2\,C\,m}{c^2\,r}\right)^2 d\,t^2 - d\,r^2 - r^2\,d\,\vartheta^2 - r^2 \sin^2\vartheta\, d\,\varphi^2$$

ebenso zu ermitteln, wie das hier für die Maßbestimmung (200) geschehen ist. Er findet dann, wie auch Einstein in seinen ersten Arbeiten über diesen Gegenstand, gerade die Hälfte der oben angegebenen Ablenkung[1]). Insofern beweist diese Ablenkung, wenn die Beobachtung sie bestätigt, daß in der Nähe der Sonne der Streckenraum nichteuklidisch ist.

§ 24. Das Schwerefeld in einer Flüssigkeitskugel.

Das Schwerefeld einer Flüssigkeitskugel von der unveränderlichen Dichte δ*), die gegen den Fixsternhimmel ruht, bestimmen wir, wie in § 21 das Feld des Massenpunkts, aus dem Variationsprinzip (185), nur daß wir jetzt noch die Funktion $\mathfrak{M}$ aufstellen müssen, welche die Flüssigkeit kennzeichnet. Im übrigen

---

*) Unzusammendrückbare Flüssigkeiten gibt es nicht (Bd. I, § 36 der 4. Aufl.). Wohl aber kann die Dichte bei den vorkommenden Druckunterschieden überall ziemlich die gleiche sein.

können wir die dortigen Rechnungen im weiten Maße benutzen, da ja auch jetzt ein Symmetriezentrum vorhanden ist. Wir werden also gewisse Koordinaten x^1, x^2, x^3 benutzen, in derem Nullpunkt der Kugelmittelpunkt liegt, wir werden nach (194) setzen:

$$d\tau^2 = c^2 V^2(r)\, dt^2 - \sum_{i=1}^{3} dx^{i\,2} - M(r)\Big(\sum_{i=1}^{3} x^i\, dx^i\Big)^2, \quad . \quad . \quad (223)$$

wobei die Funktionen V und M nur von $r = \sqrt{x^{1\,2} + x^{2\,2} + x^{3\,2}}$ abhängen; und wir werden schließlich dann nach (199) finden:

$$\int \sqrt{-g}\, H\, dX = -2 \int\int\int dx^4 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \times \int w v'\, dr, \quad (223\,\mathrm{a})$$

wobei der Wert von v und w aus (198), der des dort auftretenden γ aus (194 b) zu entnehmen ist.

Die Funktion $\mathfrak{M}$ haben wir allein durch die Differentialgleichungen (186) oder die gleichwertigen (188)

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{ik}} = -\sqrt{-g}\, T_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (224)$$

und durch die Forderung gekennzeichnet, daß sie die Ableitungen der g^{ik} nach den Koordinaten nicht enthält. Wohl aber muß sie noch von den Bestimmungsstücken der Materie abhängig sein, also von deren Welttensor T, der Vierergeschwindigkeit Y *u.s.w.* Im jetzigen Koordinatensystem, welches für die Materie ja Ruhsystem ist, sind aber die gemischten Komponenten des Welttensors nach (152) wegen

$$\sqrt{g^{44}} = V^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (225)$$

dargestellt durch das Schema

$$\left.\begin{matrix} p/V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p\ V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p/V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -W^0/V \end{matrix}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (226)$$

in welchem p den in der Flüssigkeit herrschenden (von Ort zu Ort veränderlichen) Druck und W^0 wie früher die Ruhenergiedichte bezeichnet.

Die Massendichte δ setzen wir mit W^0 in den Zusammenhang

$$W^0 \sqrt{g^{44}} = W^0/V = c^2 \delta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (227)$$

Zwar läßt er sich aus dem Vorhergehenden nicht genau beweisen.

Ihre Rechtfertigung findet die Benennung des durch (227) eingeführten δ als Massendichte aber später in Gleichung (237). Setzen wir ferner zur Abkürzung

$$\frac{p}{V} = \nu, \; (c^2 \delta + \nu) Y_i = P_i, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (228)$$

so läßt sich dies Schema in die Gleichung fassen

$$T^i_k = -(c^2 \delta + \nu) Y^i Y_k + \nu \delta^i_k = -\frac{P^i P_k}{c^2 \delta + \nu} + \nu \delta^i_k;$$

und daraus ergeben sich die kovarianten Komponenten

$$T_{ik} = -\frac{P_i P_k}{c^2 \delta + \nu} + \nu g_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (229)$$

Jetzt machen wir den Ansatz

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(g^{ik}, \delta, P_i) = 2\sqrt{-g}\Big[\Big(\sum_{ik} g^{ik} P_i P_k\Big)^{1/2} - c^2 \delta\Big]. \quad (230)$$

Im Hinblick auf (62) finden wir bei Differentiation nach g^{ik} unter Konstanthaltung von δ und P_i (indem wir, wie schon früher, so rechnen, als wären g^{ik} und g^{ki} verschiedene Größen)

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{ik}} = \sqrt{-g}\, \frac{P_i P_k}{(\sum_{lm} g^{lm} P_l P_m)^{1/2}} + g_{ik}\sqrt{-g}\,[c^2 \delta - (\sum_{lm} g^{lm} P_l P_m)^{1/2}].$$

Nach (228) ist aber der Absolutwert von P

$$\Big(\sum_{ik} g^{ik} P_i P_k\Big)^{1/2} = (c^2 \delta + \nu)\Big(\sum_{ik} g^{ik} Y_i Y_k\Big)^{1/2} = (c^2 \delta + \nu).$$

Setzen wir dies ein, so finden wir nach (229)

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{ik}} = \sqrt{-g}\left(\frac{P_i P_k}{c^2 \delta + \nu} - \nu g_{ik}\right) = -\sqrt{-g}\; T_{ik}.$$

Nach (224) ist somit der Ansatz (230) brauchbar. Diese Rechnung gilt für ein beliebiges Koordinatensystem. Um aber in den hier berechneten Koordinaten

$$\int \mathfrak{M}\, dX = \iiint dx^4 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \times \int r^2 \mathfrak{M}\, dr \quad . \quad . \quad (231)$$

durch die in (198) eingeführten Funktionen v und w auszudrücken, setzen wir nach (196b), (198) und (198a)

$$\sqrt{-g} = V\sqrt{\gamma} = v, \quad \sqrt{\gamma} = \sqrt{1 + Mr^2} = \sqrt{\frac{r}{r - w}}.$$

Ferner berechnen wir den Absolutwert von P mit $g^{44} = V^{-2}$ und $P_1 = P_2 = P_3 = 0$ zu P_4/V. Danach wird

$$\int r^2 \mathfrak{M}\, dr = 2 \int r^2 \left(P_4 \sqrt{\frac{r}{r-w}} - c^2 \delta v \right) dr.$$

Nach (223a) und (231) vereinfacht sich das Variationsproblem (185) nunmehr zu:

$$\delta \int F dr = 0.$$

$$F = w v' + c^2 \varkappa r^2 \delta v - \varkappa P_4 \frac{r^{5/2}}{(r-w)^{1/2}}.$$

Bevor wir die zugehörigen Lagrangeschen Gleichungen aufstellen, müssen wir entscheiden, wie P_4 von r abhängt. Dazu dienen die drei Impulsgleichungen

$$\Delta i v_i T = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\, T_i^k \right)}{\partial x^k} - \sum_{kl} \begin{Bmatrix} i k \\ l \end{Bmatrix} T_l^k = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

[vgl. (73a)], welche in unserem Koordinatensystem nach dem Schema (226) und den Bezeichnungen (228) die Gestalt annehmen

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\, \nu \right)}{\partial x^i} - \nu \sum_k \begin{Bmatrix} i k \\ k \end{Bmatrix} + (c^2 \delta + \nu) \begin{Bmatrix} i 4 \\ 4 \end{Bmatrix} = 0.$$

In Rücksicht auf (62a) erhalten wir weiter:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial \left(\sqrt{-g}\, \nu \right)}{\partial x^i} - \nu \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^i} \right) + (c^2 \delta + \nu) \begin{Bmatrix} i 4 \\ 4 \end{Bmatrix} = 0.$$

Entnehmen wir den Wert von $\begin{Bmatrix} i 4 \\ 4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial x^i}$ aus (158), so kommen wir schließlich zu den drei Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \nu}{\partial x^i} + \frac{c^2 \delta + \nu}{V} \frac{\partial V}{\partial x^i} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (231\text{a})$$

Nach Voraussetzung ist nun δ vom Ort unabhängig; wir können also $\partial (c^2 \delta + \nu) / \partial x^i$ statt $\partial \nu / \partial x^i$ setzen. Division durch $(c^2 \delta + \nu)$ führt dann zu:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \log \left[(c^2 \delta + \nu) V \right] = 0.$$

Anderseits ist im vorliegenden Koordinatensystem, in welchem die Materie ruht, $Y_4 = \sqrt{g_{44}} = V$, also nach (223)

$$P_4 = (c^2 \delta + \nu) V. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (231\text{b})$$

Somit ist P_4 konstant.

Die Lagrangeschen Gleichungen lauten nun:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial F}{\partial v'}\right)-\frac{\partial F}{\partial v}=0 \text{ oder } w'-c^2\varkappa\delta r^2=0 \quad . \quad . \quad (232)$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial F}{\partial w'}\right)-\frac{\partial F}{\partial w}=0 \text{ oder } -v'+\frac{\varkappa P_4 v^5{}_2}{2(r-w)^3{}_2}=0. \quad (233)$$

Zur Integration erinnern wir uns, daß die Maßbestimmung (152) in den Koordinaten r, ϑ, φ, wenn wir nach (198a) die Funktionen v und w statt M und V einführen, die Form annimmt:

$$d\tau^2 = c^2 v^2 \frac{r-w}{r} dt^2 - ds^2, \; ds^2 = \frac{r}{r-w} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta \, d\varphi^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (234)$$

Wir schließen daraus, daß überall, auch bei $r = 0$ $\frac{r}{r-w} > 0$ und endlich sein muß. Deswegen müssen wir bei der Integration von (232) die Integrationskonstante fortlassen:

$$w = \frac{r^3}{R^2}, \quad \frac{r}{r-w} = \frac{1}{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}, \quad . \quad . \quad . \quad (235)$$

wenn

$$R = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{3}{\varkappa\delta}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (235a)$$

Weiter sehen wir, daß der größte vorkommende Wert von r, der (allerdings nicht natürlich gemessene) Kugelhalbmesser

$$a < R$$

sein muß. Freilich hat diese Grenze für die Physik wenig Bedeutung. Setzt man für δ die mittlere Dichte der Sonne, d. h. 1,4 g . cm^{-3}, so liegt sie wegen $\varkappa = 2 \,.\, 10^{-48}$ g^{-1} cm^{-1} sec^2 [Gleichung (162b)] bei 3,5 . 10^{13} cm, während der Sonnenhalbmesser 6,95 . 10^{10} cm beträgt. Unter diesen Umständen werden im folgenden Reihenentwicklungen nach steigenden Potenzen von a/R gute Dienste tun.

Nach (234) und (235) hat das Linienelement des Streckenraumes die Maßbestimmung:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta \, d\varphi^2.$$

Setzt man hier

$$r = R \,.\, \sin\Theta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (236)$$

so wird daraus:

$$ds^2 = R^2 [d\Theta^2 + \sin^2\Theta \, (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2)].$$

Die Übereinstimmung mit (105a) in § 12, c) beweist: Die natürliche Geometrie für das Innere der Flüssigkeitskugel ist die elliptische. Der Krümmungshalbmesser des entsprechenden Kugelraumes ist das in (235a) gegebene R. Von dieser Kugel bedeckt die Flüssigkeit die Kalotte von $\Theta = 0$ bis

$$\Theta_a = arc\,sin\,\frac{a}{R} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (236a)$$

In natürlicher Messung ist ihr Halbmesser

$$R\,\Theta_a = a\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{a}{R}\right)^2 + \frac{3}{40}\left(\frac{a}{R}\right)^4 + \cdots\right].$$

Er ist nach den obigen Größenschätzungen nur unwesentlich größer als a. Der Umfang ihres Äquators aber beträgt genau $2\pi a$; denn auf der Fläche $\Theta = \Theta_a$ gilt: $ds^2 = a^2(d\vartheta^2 + sin^2\vartheta\, d\varphi^2)$. Das Flüssigkeitsvolumen beträgt nach (105b)

$$2\pi R^3(\Theta_a - \tfrac{1}{2}\,sin\,2\,\Theta_a) = 2\pi R^3\left[arc\,sin\,\frac{a}{R} - \frac{a}{R}\sqrt{1-\left(\frac{a}{R}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{4\pi}{3}\,a^3\left[1 + \frac{3}{10}\left(\frac{a}{R}\right)^2 + \cdots\right].$$

Es ist also ebenfalls nur unwesentlich größer als bei euklidischer Berechnung.

Außerhalb der Flüssigkeitskugel gilt genau wie in § 21 die Maßbestimmung (200), d. h. [vgl. auch (201)]

$$v = 1, \quad w = \alpha = \frac{2\,Cm}{c^2}.$$

m ist die Masse der Flüssigkeit. Für die Grenzfläche $r = a$ müssen wir nun aber die Stetigkeit des Maßtensors fordern, also die Stetigkeit von v und w. Daraus folgt nach (235)

$$\frac{c^2\kappa}{3}\,\delta\,a^3 = \frac{2\,Cm}{c^2}$$

und nach (162)

$$\frac{4\pi}{3}\,a^3\delta = m. \quad \cdots\cdots\cdots \quad (237)$$

Innerhalb der Näherung, mit der man für das Flüssigkeitsvolumen $\frac{4\pi}{3}a^3$ setzen kann, ist also δ die Dichte, wie wir es verlangten. Neben die obere Grenze R für a aber tritt nun auch eine

untere. Die Singularität der Maßbestimmung (200) bei $r = \alpha$ wird nur dann vermieden, wenn

$$a > \alpha = \frac{2\,C\,m}{c^2}$$

ist. Darauf wiesen wir schon in § 21 hin.

An der Oberfläche $r = a$ gilt als weitere Grenzbedingung das Verschwinden des Druckes p, also $\nu = 0$ *). Wie erwähnt, ist v dort stetig, also gleich 1. Die Konstante P_4 hat daher überall im Innern den Wert:

$$\left.\begin{aligned} P_4 = c^2 \delta V_{r=a} = c^2 \delta \left(v \sqrt{\frac{r-w}{r}} \right)_{r=a} &= c^2 \delta \sqrt{1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2} \\ &= c^2 \delta \cos \Theta_a \end{aligned}\right\} \quad (238)$$

[vgl. (231 b), (198 a), (235) und (236)]. Führen wir in die Differentialgleichung (233) nach (236) statt r die unabhängige Veränderliche Θ ein, so finden wir:

$$dv = \frac{3}{2\,R^2} \cos \Theta_a \frac{r\,dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}^{\,3}} = \frac{3}{2} \cos \Theta_a \frac{\sin \Theta}{\cos^2 \Theta}\, d\Theta.$$

Berücksichtigen wir bei ihrer Integration nochmals die Grenzbedingung $v = 1$, so folgt daraus:

$$v = \frac{3 \cos \Theta_a - \cos \Theta}{2 \cos \Theta}$$

und weiter nach (198 a), (235) und (236):

$$\left.\begin{aligned} V = v \cos \Theta &= \frac{3 \cos \Theta_a - \cos \Theta}{2} \\ d\tau^2 &= c^2 \left(\frac{3 \cos \Theta_a - \cos \Theta}{2} \right)^2 dt^2 - ds^2 \end{aligned}\right\} \quad (239)$$

---

*) Es erhebt sich vielleicht das Bedenken, ob nicht das äußere Schwerefeld einen Druck oder Zug auf die Oberfläche ausübt, ähnlich wie es das elektrostatische Feld einer geladenen Kugel tut. Denken wir aber den Außenraum erfüllt mit einer Flüssigkeit von verschwindend geringer Dichte und lassen wir sie dann in einer gewissen Übergangsschicht stetig bis zu dem Werte δ ansteigen, so läßt die Differentialgleichung (231 a), die auch für veränderliches δ gilt, die Lösung $\nu = 0$ für alle Werte von r zu, für welche die Dichte verschwindet. Erst, wo eine merkliche Dichte liegt, beginnt auch ein von Null verschiedener Druck.

Die Lichtgeschwindigkeit beträgt danach an der Oberfläche, innen und außen, $c \,.\, cos\,\Theta_a$, und nimmt beim Fortschreiten ins Innere ab bis zu

$$c\,\frac{3\,cos\,\Theta_a - 1}{2}$$

bei $r = 0$. Damit dieser Wert noch positiv ist, muß

$$cos^2\,\Theta_a = 1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2 > \tfrac{1}{9}$$

sein; dadurch erniedrigt sich die früher gegebene obere Grenze R für a auf $\sqrt{\tfrac{8}{9}} \cdot R$. Der Druck $p = \nu V$ [nach (228)] aber berechnet sich aus (231b), (238) und (239) zu

$$p = \frac{c^2\,\delta}{2}\,(cos\,\Theta - cos\,\Theta_a).$$

Entwickeln wir hier $cos\,\Theta = \sqrt{1 - (r/R)^2}$ nach steigenden Potenzen von r/R, so finden wir

$$p = \frac{c^2\,\delta}{2}\left(\frac{a^2 - r^2}{2\,R^2} + \frac{a^4 - r^4}{8\,R^4} + \cdots\right).$$

Das erste Glied läßt sich nach (235a) und (162) auch schreiben:

$$\frac{2\,\pi}{3}\,C\delta^2\,(a^2 - r^2),$$

und dies ist der Wert, welchen die Newtonsche Theorie dem Druck gibt*).

Trotz der Willkür dieses Beispiels erkennt man an ihm, wie wenig Einsteins Theorie der Schwere an unserer Auffassung über das Innere der Himmelskörper ändert.

§ 25. Das Schwerefeld der elektrischen Punktladung.

a) Die Maßbestimmung. Für die elektrische Punktladung, sofern sie weit von anderen Körpern und fremden elektromagnetischen Feldern gegen den Fixsternhimmel ruht, können wir wieder die in § 21 zurechtgelegten Hilfsmittel benutzen. Denn auch sie bildet ein Symmetriezentrum. Wir benutzen also wieder die Maß-

*) Denn nach der alten Theorie ist, wenn Ψ das Potential der Schwere bedeutet, die Summe $p + \delta \,.\, \Psi$ konstant, also $p + \delta \,.\, \Psi = \delta \,.\, \Psi_a$, anderseits ist $\Psi - \Psi_a = -\frac{2\,\pi}{3}\,C\,\delta\,(a^2 - r^2)$.

bestimmung (194) mit den beiden aus dem Variationsprinzip zu ermittelnden Funktionen V und M von $r = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}}$ und ebenso die Gleichung (199) für das Integral $\int \sqrt{-g}\, H d X$ mit dem Wert $f = w v'$. Wir benutzen das Variationsprinzip (190), in welchem jedoch $\sum_i P^i \Phi_i$ fortfällt, da wir uns auf ungeladene Raumteile beschränken. Neu zu berechnen haben wir daher nur nach (189a) den Wert von $\boldsymbol{M}$. Zu variieren sind die g_{ik} und die Φ_i.

Nach § 17, d) verschwinden im elektrostatischen Felde die räumlichen Komponenten des Viererpotentials und damit die magnetische Verschiebung $\mathfrak{B}$. Für das elektrostatische Potential φ aber gilt nach (163) und (113)

$$\mathfrak{E}_i = \mathfrak{M}_{i4} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (239\text{a})$$

Im vorliegenden Falle hängt φ nur von r ab, daher ist, $d\varphi/dr = \varphi'$ gesetzt,

$$\mathfrak{M}_{i4} = -\varphi' \frac{x^i}{r}.$$

Setzt man dies in (189a) ein, so findet man wegen $g^{i4} = 0$, wenn $i = 1, 2, 3$:

$$\boldsymbol{M} = -g^{44} \frac{\varphi'^2}{r^2} \sum_{hk=1}^{3} g^{hk} x^h x^k.$$

Machen wir hier Gebrauch von den Gleichungen (195), (196) und (194b), so finden wir weiter:

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{V^2} \frac{\varphi'^2}{r^2} \sum_{hk=1}^{3} \left(\delta_k^h - \frac{M x^h x^k}{1 + M r^2} \right) x^h x^k.$$

Nun ist aber

$$\sum_{hk=1}^{3} \delta_k^h x^h x^k = \sum_{k=1}^{3} x^{k^2} = r^2, \sum_{hk=1}^{3} (x^h x^k)^2 = \sum_{h=1}^{3} x^{h^2} \times \sum_{k=1}^{3} x^{k^2} = r^4.$$

Somit wird nach (196b), (198) und (194b)

$$\sqrt{-g}\, \boldsymbol{M} = \frac{1}{V \sqrt{\gamma}} \varphi'^2 = \frac{1}{v} \varphi'^2.$$

Es wird daher

$$\int \sqrt{-g}\, (H + \varkappa \boldsymbol{M})\, d X$$

$$= -2 \iiint d x^4 \sin \vartheta\, d \vartheta\, d \varphi \times \int \left(w v' - \frac{\varkappa}{2 v} r^2 \varphi'^2\right) d r,$$

und das Variationsprinzip (190) lautet:

$$\delta \int \left(w v' - \frac{\kappa}{2 v} r^2 \varphi'^2 \right) d r = 0.$$

Zu variieren sind die Funktionen v, w und φ von r, denn darin drücken sich die hier noch möglichen Variationen der g_{ik} und der Φ_i vollständig aus. Die Lagrangeschen Gleichungen erhalten die Form:

$$w' - \frac{\kappa}{2 v^2} r^2 \varphi'^2 = 0, \quad v' = 0, \quad \frac{d}{d r} \left(\frac{r^2 \varphi'}{v} \right) = 0.$$

v ist also eine Konstante, die wir, wie in § 21, ohne weiteres gleich 1 setzen. Bezeichnen wir eine weitere Integrationskonstante mit e, so ist

$$r^2 \varphi' = -\frac{e}{4 \pi}, \quad \varphi = \frac{e}{4 \pi r}; \quad \cdots\cdots \quad (240)$$

denn die zweite Integrationskonstante muß man wegen der üblichen Grenzbedingung, daß im Unendlichen das Potential φ Null sein soll, fortlassen. Aus der ersten dieser Differentialgleichungen aber ergibt sich dann:

$$w = \alpha - \frac{\kappa}{32 \pi^2} \frac{e^2}{r} \cdots\cdots\cdots \quad (241)$$

α ist Integrationskonstante. Nach (198a) und (162a) wird

$$V^2 = (1 + M r^2)^{-1} = 1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\kappa}{32 \pi^2} \frac{e^2}{r^2} = 1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{C}{4 \pi c^4} \frac{e^2}{r^2},$$

und die Maßbestimmung lautet:

$$d \tau^2 = c^2 V^2 d t^2 - \frac{d r^2}{V^2} - r^2 (d \vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \, d \varphi^2). \quad . \quad (242)$$

b) Erörterung der Maßbestimmung. Wie schon die Bezeichnung andeuten soll, gibt die Integrationskonstante e die elektrische Ladung an. Zum Beweise berechnen wir das über eine Kugel $r = const$ zu erstreckende Integral

$$- \int \mathfrak{D}^n d \sigma,$$

welches nach (122) die eingeschlossene Ladung mißt. Dabei ist $\mathfrak{D}^n d \sigma$ der Raum des durch das Flächenstück $d \sigma$ und den als Strecke dargestellten Vektor $\mathfrak{D}$ bestimmten Parallelepipeds, und zwar ist $\mathfrak{D}^n d \sigma$ positiv, wenn die innere Normale n und der Vektor $\mathfrak{D}$ nach derselben Seite von $d \sigma$ weisen. Hier steht der Vektor $\mathfrak{D}$ senkrecht auf $d \sigma$ und weist bei einer positiven Ladung nach außen.

Infolgedessen ist $-\mathfrak{D}^n d\sigma$ gleich dem Produkt aus dem absoluten Betrage*)

$$\mathfrak{D} = V\mathfrak{D}_r$$

und dem Flächeninhalt

$$d\sigma = r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi,$$

denn letzteres muß nach (242) wie in der gewöhnlichen sphärischen Geometrie berechnet werden. Im Hinblick auf (118)**) und auf (239 a) finden wir somit:

$$-\mathfrak{D}^n d\sigma = V r^2 \mathfrak{D}_r \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = r^2 \mathfrak{E}_r \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$
$$= -r^2 \varphi' \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi,$$

also nach (240)

$$-\int \mathfrak{D}^n d\sigma = \frac{e}{4\pi} \int \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = e,$$

was zu beweisen war.

Die Bedeutung der Integrationskonstanten α finden wir, indem wir $e = 0$ setzen, nämlich nach (201)

$$\alpha = \frac{2\,C\,m}{c^2}.$$

Beim Uran, dessen Atom unter allen bekannten die größte Masse und die größte Kernladung besitzt, ist $m = 238 \,.\, 1{,}64 \,.\, 10^{-24} = 3{,}9 \,.\, 10^{-22}\,g$, $e = 92 \,.\, 4{,}7 \,.\, 10^{-10} \sqrt{4\pi} = 4{,}3 \,.\, 10^{-8} \sqrt{4\pi}$ $g^{1/2}\,cm^{3/2}\,sec^{-1}$ ***). Daraus folgt:

$$\alpha = \frac{2 \,.\, 6{,}7 \,.\, 10^{-8} \,.\, 3{,}9 \,.\, 10^{-22}}{9 \,.\, 10^{20}} = 5{,}8 \,.\, 10^{-50}\,\text{cm},$$

$$\frac{C e^2}{4\pi c^4} = \frac{6{,}7 \,.\, 10^{-8} \,.\, (4{,}3)^2\, 10^{-16}}{8{,}1 \,.\, 10^{41}} = 1{,}6 \,.\, 10^{-64}\,\text{cm}^2.$$

Die Elektronen der innersten Schale, des sogenannten K-Rings, haben vom Atomkern Abstände von der Größenordnung 10^{-10} cm. In diesem Abstande ist also die Maßbestimmung durch den Kern nicht mehr merklich verändert. Die allgemeine Relativitätstheorie

---

*) Nach (242) ist $\gamma_{rr} = \frac{1}{V^2}$, $\gamma^{rr} = V^2$.

**) Da $g^{44} = \frac{1}{V^2}$, $\mathfrak{D}_r = \frac{1}{V}\,\mathfrak{E}_r$ ist.

***) Wir benutzen überall das Lorentzsche Maßsystem, daher den Faktor $\sqrt{4\pi}$

vermag somit für die Theorie der Spektrallinien im Röntgengebiet nichts Neues gegenüber der beschränkten Relativitätstheorie zu liefern. Für das sichtbare Spektrum und die anschließenden Spektralbereiche gilt das in verstärktem Maße.

Strenge Lösungen der Feldgleichungen für statische Felder mit Rotationssymmetrie verdanken wir Weyl. Andere Untersuchungen über statische Felder finden sich bei Levi-Civita[1]), über nichtstatische Felder bei De Zuani[2]) und Palatini[3]).

VIII. Mies Theorie der Materie.

§ 26. Die Theorie der Materie in der beschränkten Relativitätstheorie.

In beiden Bänden dieses Buches haben wir bisher die Welttensoren der Körper und des elektromagnetischen Feldes voneinander unterschieden. Wir haben sie addiert, wenn Körper und Felder sich durchdrangen; d. h. wir haben mechanische und elektromagnetische Energie, mechanische und elektromagnetische Spannungen, mechanischen und elektromagnetischen Energiestrom additiv zusammengefügt. Von einem inneren Zusammenhang beider Welttensoren war nie die Rede.

Mies Theorie der Materie leugnet nun diesen Dualismus. Sie behält nur einen Welttensor bei, und zwar den elektromagnetischen, indem sie die Körper als rein aus Elektrizität aufgebaut annimmt. Die Bohr-Sommerfeldsche Theorie der Spektrallinien, welche allein mit elektromagnetischen Kräften im Molekül rechnet, und die schon recht erfolgreichen Versuche von Kossel, Born und Debye, die chemischen Valenzen sowie die elastischen Kräfte der festen und flüssigen Körper rein elektrisch zu verstehen, geben diesem (schon vorher von Mie ausgesprochenen) Gedanken große Bedeutung. Aber man muß sich von vornherein klar machen, daß die Elektrodynamik, wie wir sie bisher vorgetragen haben, zu seiner Durchführung nicht vollständig ausreicht. Denn die Maxwellsche Theorie — das gilt auch von ihrer Umgestaltung zur Elektronentheorie durch H. A. Lorentz — vermag das Dasein elek-

trischer Ladungen nicht zu erklären. Jeder Ladungsträger muß danach ja unter dem Einfluß der elektromagnetischen Kräfte, welche die Maxwell-Lorentzsche Theorie in ihm annimmt, zerplatzen; er bedarf andersartiger Kräfte, um zu bestehen. Wir müssen also die Elektrodynamik so abändern, daß sie zwar weit außerhalb aller Ladungen die durch die Erfahrung wohlbestätigte Maxwellsche Theorie einschließlich des Kraftgesetzes ergibt, daß sie aber innerhalb der Elektronen und der Atomkerne, die wir jetzt als alleinige Träger positiver Ladungen kennen, weit davon abweicht.

Wir setzen in diesem Paragraphen die Gedanken Mies auseinander, wie sie sich zunächst im Anschluß an die beschränkte Relativitätstheorie entwickelt haben.

Nach Mies Annahme ist der physikalische Zustand in einem Raumpunkt vollständig bestimmt durch zehn Zustandsgrößen: man kann dafür z. B. wählen die elektrische Dichte ϱ, die drei Komponenten des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$, sowie die je drei Komponenten der elektrischen und der magnetischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$. Daneben haben noch physikalische Bedeutung das skalare Potential φ, die elektrische Stromdichte $c\mathfrak{R}$ und die beiden Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, also zehn weitere Größen; aber sie sind nur in ϱ, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ gegeben und nicht selbständige Bestimmungsstücke, sondern Funktionen der ersteren. Die Form dieser funktionalen Zusammenhänge ist noch weitgehend unbekannt. Wir können nur das eine sagen, daß sie nicht linear sein können; denn wären sie linear, so ließen sich alle Lösungssysteme der sogleich aufzustellenden Differentialgleichungen mit einem konstanten Faktor multiplizieren, weil diese dann ebenfalls linear wären. Und damit wäre die Erklärung für das Bestehen des elektrischen Elementarquantums unmöglich; es muß eine solche Deutung doch sagen, warum es nicht doppelt oder dreifach so groß sein kann, als es ist. — Man kann natürlich auch unter den angegebenen 20 Zustandsgrößen mit ihren 10 funktionalen Beziehungen 10 andere Größen als unabhängige wählen; z. B. φ, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$.

Für diese erstgenannten 10 Zustandsgrößen setzt Mie nun 10 Differentialgleichungen an; jede der Vektorgleichungen zählt natürlich für drei. Jede Differentialgleichung bestimmt aus dem gegenwärtigen Zustand die zeitliche Veränderung einer Zustandsgröße, so daß aus dem Anfangszustand, sofern dieser überall be-

kannt ist, der ganze weitere Verlauf des physikalischen Geschehens folgt. Nämlich:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varrho}{\partial t} + div\,\mathfrak{R} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (243)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + grad\,\varphi = -\mathfrak{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (244)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} - rot\,\mathfrak{H} = -\mathfrak{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (245)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + rot\,\mathfrak{E} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (246)$$

Diese Gleichungen haben wohlbekannte Formen, aber zum Teil eine durchaus andere Bedeutung als früher. Während nämlich in der Elektronentheorie von Lorentz (243) und (244) Folgerungen aus den Grundgleichungen darstellen, die wie die Potentiale selbst rein rechnerischen Wert haben, treten sie hier als physikalische Grundgleichungen auf. Man wird (244) z. B. so deuten können, daß das Feld, abgesehen von den später zu bestimmenden Spannungen, aus denen sich der Energieimpulstensor berechnet, noch einen elektrischen Druck $-\varphi$ enthält, der im statischen Falle die elektrische Feldstärke gerade aufhebt.

Folgerungen aus diesen Gleichungen sind, da man zeitlich unabhängige Skalare und Vektoren hier nicht zu deuten wüßte:

$$\mathfrak{B} = rot\,\mathfrak{A}, \quad div\,\mathfrak{D} = \varrho, \; div\,\mathfrak{B} = 0. \; . \; . \; . \quad (247)$$

Um den Energiesatz abzuleiten, multiplizierte die alte Theorie Gleichung (245) skalar mit $\mathfrak{E}$ und (246) mit $\mathfrak{H}$. Die Addition ergab [vgl. Bd. I, § 4, a)]

$$\left(\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\right) + \left(\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right) + c\,div\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = -c\,(\mathfrak{E}\mathfrak{R}),$$

und dabei gab $(\mathfrak{E}\mathfrak{R})$ die in andere Formen umgewandelte elektromagnetische Energie an. Hier leugnen wir alle anderen Energieformen, müssen also diesen Summanden aus einer Gleichung, die den Energiesatz aussprechen soll, fortschaffen. Multiplizieren wir nun (243) mit φ und (244) skalar mit $\mathfrak{R}$, so finden wir durch Addition nach Rechnungsregel ζ von Bd. I

$$\varphi\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \left(\mathfrak{R}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\right) + c\,div\,(\varphi\mathfrak{R}) = -c\,(\mathfrak{E}\mathfrak{R}).$$

Die Subtraktion der beiden letzten Gleichungen aber führt zu der Formel:

$$\left(\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\right)+\left(\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right)-\varphi\frac{\partial \varrho}{\partial t}-\left(\mathfrak{R}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\right)+c\,div\{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]-\varphi\mathfrak{R}\}=0. \quad (248)$$

Soll dies die Kontinuitätsgleichung der Energie sein, so müssen wir

$$\mathfrak{T}=c([\mathfrak{E}\mathfrak{H}]-\varphi\mathfrak{R}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (249)$$

als Energiestrom deuten und die Energiedichte W aus der Differentialgleichung berechnen:

$$d\,W=(\mathfrak{E}\,d\,\mathfrak{D})+(\mathfrak{H}\,d\,\mathfrak{B})-\varphi\,d\,\varrho-(\mathfrak{R}\,d\,\mathfrak{A}). \quad (250)$$

Der Vektor $\varphi\mathfrak{R}$ gibt dann eine konvektive Mitführung der Energie durch den elektrischen Strom an.

Es käme nun, um mit diesen Gleichungen etwas anzufangen, auf die Kenntnis der zehn funktionalen Beziehungen zwischen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, φ, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$, ϱ, $\mathfrak{A}$ an. Diese Frage läßt sich zurückführen auf die Aufsuchung einer „Weltfunktion“

$$\boldsymbol{M}=2\,[(\mathfrak{E}\mathfrak{D})-\varphi\,\varrho-W]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (251)$$

Doch ist zweckmäßiger, dabei $\mathfrak{E}$ und φ statt $\mathfrak{D}$ und ϱ als Argumente einzuführen. Tun wir dies, so wird nämlich nach (250)

$$\left.\begin{aligned}-\tfrac{1}{2}\,d\,\boldsymbol{M}&=d\,W-(\mathfrak{E}\,d\,\mathfrak{D})-(\mathfrak{D}\,d\,\mathfrak{E})+\varphi\,d\,\varrho+\varrho\,d\,\varphi\\&=(\mathfrak{H}\,d\,\mathfrak{B})-(\mathfrak{D}\,d\,\mathfrak{E})+\varrho\,d\,\varphi-(\mathfrak{R}\,d\,\mathfrak{A})\end{aligned}\right\} \quad (252)$$

oder

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \mathfrak{B}_{23}}=-\mathfrak{H}^{23}\text{ usw.};\quad \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \mathfrak{E}_1}=\mathfrak{D}^1\text{ usw.};\\&\frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \varphi}=-\varrho,\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \mathfrak{A}_1}=\mathfrak{R}^1\text{ usw.}\end{aligned}\right\} \quad (253)$$

und diese zehn Gleichungen geben uns die gesuchten Zusammenhänge, sowie $\boldsymbol{M}$ bekannt ist. Für W ergibt sich daraus

$$W=-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{M}-\sum_{i=1}^{3}\mathfrak{E}_i\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \mathfrak{E}_i}-\varphi\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \varphi}\right) \quad . \quad . \quad (254)$$

Jetzt führen wir die Forderung ein, daß eine Lorentz-Transformation die Gestalt sämtlicher hier aufgestellter Beziehungen unverändert läßt. Für die Gleichungen (253) erreichen wir dies dadurch, daß wir die Weltfunktion $\boldsymbol{M}$ als invariant gegen diese Transformation ansetzen. D. h. unterscheiden wir die beiden

durch solche Transformation verbundenen Bezugssysteme als das gestrichene und das ungestrichene, so soll identisch gelten:

$$\boldsymbol{M}(\mathfrak{B}, \mathfrak{E}, \varphi, \mathfrak{A}) = \boldsymbol{M}(\mathfrak{B}', \mathfrak{E}', \varphi', \mathfrak{A}'), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (255)$$

sofern wir darin $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{E}'$, φ', $\mathfrak{A}'$ als Funktionen von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}$, φ, $\mathfrak{A}$ einsetzen. Wir schreiben Gleichung (255) kürzer:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (256)$$

Aus der mit (253) gleichwertigen Beziehung (252) folgt dann, daß wir wie früher $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ einerseits, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ andererseits zu Sechservektoren, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ zusammenfassen (113) und aus ϱ und $\mathfrak{N}$ einerseits, φ und $\mathfrak{A}$ andererseits die Viervektoren P und Φ bilden müssen*) [vgl. (112), ferner sei $\Phi_i = \mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ $\Phi_4 = -\varphi$ nach (164)]. Dann schreibt sich nämlich diese Beziehung:

$$-d\boldsymbol{M} = 2(\mathfrak{V}\, d\mathfrak{M}) - 2(P\, d\Phi) = \sum_{ik} \mathfrak{V}^{ik} d\mathfrak{M}_{ik} - 2\sum_i P^i d\Phi_i. \quad (257)$$

Auch erhalten die Gleichungen (243) bis (245) die bekannten Formen:

$$Div\, P = 0, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{Rot}\, \Phi, \quad \Delta iv\, \mathfrak{V} = P, \quad \Delta iv^* \mathfrak{M} = 0, \quad (258^{**})$$

so daß das Relativitätsprinzip erfüllt ist.

Die Weltfunktion $\boldsymbol{M}$ macht es nun möglich, die Miesche Elektrodynamik aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\delta \int \boldsymbol{M}\, d\Sigma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (259)$$

herzuleiten unter der Nebenbedingung, daß alle Variationen am Rande des Integrationsbereichs verschwinden. Wir nehmen zu diesem Zweck die Komponenten des Viererpotentials als die zu variierenden Veränderlichen und verbinden den Feldvektor mit ihm durch die Gleichung

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{Rot}\, \Phi \quad \text{oder} \quad \mathfrak{M}_{ik} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^k}. \quad (260)$$

---

*) P bedeutet hier wieder den elektrischen Viererstrom, während wir zuletzt, in § 24, darunter den Viervektor einer Flüssigkeitsströmung verstanden.

**) Hier, im Bereich der beschränkten Relativitätstheorie, fallen $\Delta iv^* \mathfrak{M}$ und $\Delta iv\, \mathfrak{M}^*$ wieder zusammen.

Dann wird nach (257)

$$-\int \delta \boldsymbol{M} d\Sigma = \int \Big[\sum_{ik} \mathfrak{B}^{ik} \Big(\frac{\partial \delta \Phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \delta \Phi_i}{\partial x^k} \Big) - 2 \sum_i P^i \delta \Phi_i \Big] d\Sigma$$

$$= \int \Big[\sum_{ik} \Big(\delta \Phi_i \frac{\partial \mathfrak{B}^{ik}}{\partial x^k} - \delta \Phi_k \frac{\partial \mathfrak{B}^{ik}}{\partial x^i} \Big) - 2 \sum_i P^i \delta \Phi_i \Big] d\Sigma$$

oder, da die beiden Hälften der Doppelsumme durch Vertauschung der Summationszeiger ineinander übergehen:

$$-\frac{1}{2} \int \delta \boldsymbol{M} d\Sigma = \int \sum_i \delta \Phi_i \Big(\sum_k \frac{\partial \mathfrak{B}^{ik}}{\partial x^k} - P^i \Big) d\Sigma = 0.$$

Das Nullsetzen des Klammerausdrucks liefert dann nach (73d)

$$\Delta iv \mathfrak{B} = P,$$

und aus dieser Gleichung sowie aus (260) gehen die noch fehlenden unter den Formeln (258), also auch (243) bis (247), hervor. Die invariante Form dieses Variationsprinzips bringt die Gültigkeit des Relativitätsprinzips für die Miesche Elektrodynamik besonders deutlich zum Ausdruck.

Die Funktion $\boldsymbol{M}$ kann wegen ihrer Invarianz ihre Argumente nur enthalten in den vier ebenfalls invarianten Formen, die sich aus dem Sechservektor $\mathfrak{M}$ und dem Vierervektor $\boldsymbol{\Phi}$ bilden lassen. Das sind die absoluten Werte

$$|\mathfrak{M}| = \sqrt{\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{E}^2}, \quad |\boldsymbol{\Phi}| = \sqrt{\varphi^2 - \mathfrak{A}^2}$$

sowie die absoluten Werte der beiden vektoriellen Produkte $[\boldsymbol{\Phi}\mathfrak{M}]$ und $[\boldsymbol{\Phi}\mathfrak{M}^*]$. Nehmen wir, um ein Beispiel zu bilden, w als eine beliebige Funktion von $\pm|\boldsymbol{\Phi}|$ und

$$\boldsymbol{M} = -|\mathfrak{M}|^2 + 2w(+|\boldsymbol{\Phi}|) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (261)$$

an und untersuchen wir, wie sich dann das Dasein einer Elementarladung erklären läßt. Wir betrachten diese in Ruhe gegen das gewählte Bezugssystem und denken uns ihr Feld statisch. Dann können wir den Beziehungen (243) bis (246) genügen durch die Ansätze

$$\mathfrak{R} = 0, \quad \mathfrak{H} = 0, \quad \mathfrak{E} = -grad\, \varphi,$$

während sich aus (253) und (247), wobei wir wegen $|\boldsymbol{\Phi}| = |\varphi|$ $w = w(\varphi)$ festsetzen dürfen,

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E}, \quad \varrho = -w'(\varphi), \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{H} = 0, \quad \mathfrak{A} = 0$$

ergibt. Aus der zweiten der Gleichungen (247) schließen wir dann auf die Differentialgleichung

$$div\, grad\, \varphi = w'(\varphi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (262)$$

für φ. Fügen wir noch die Annahme eines Symmetriezentrums hinzu, so wird daraus *)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = w'(\varphi). \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (263)$$

Sie hat, wenigstens wenn w eine geeignete Funktion ist, Lösungen, die überall endlich und stetig sind, auch überall dem gleichen analytischen Gesetz genügen und im Unendlichen — wo wir ja die gebräuchliche Elektrostatik erhalten müssen — wie $1/r$ verschwinden. Denn gehen wir umgekehrt von einer solchen Funktion $\varphi(r)$ aus, so können wir die linke Seite in (263) als Funktion von r, also auch als Funktion von φ, ausdrücken und haben dann in (263) eine Differentialgleichung für w vor uns. Die gesamte Ladung beträgt

$$e = \int \varrho\, dx\, dy\, dz = -4\pi \int_0^\infty r^2 w'(\varphi)\, dr = -4\pi\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)_{r=\infty}$$

und die Masse beträgt nach Bd. I, § 32, a), für dies vollständige statische System

$$m = \frac{1}{c^2}\int W\, dx\, dy\, dz = \frac{4\pi}{c^2}\int_0^\infty r^2\, W\, dr.$$

Nach (254) und (261) ist hier

$$W = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 - w(\varphi) + \varphi\, w'(\varphi) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 - w(\varphi) + \varphi\, w'(\varphi).$$

Nun läßt sich durch partielle Integration und nach (263) einsehen, daß

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 dr = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi\,\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)dr = -\frac{1}{2}\int_0^\infty r^2\,\varphi\, w'(\varphi)\, dr$$

ist. Also folgt

$$m = \frac{4\pi}{c^2}\int_0^\infty r^2\left[\tfrac{1}{2}\varphi\, w'(\varphi) - w(\varphi)\right] dr.$$

---

*) Die hier benutzte, übrigens wohlbekannte Formel für $div\, grad\, \varphi$, ausgedrückt in räumlichen Polarkoordinaten r, ϑ, φ, ergibt sich ohne weiteres aus Gleichung (73), und der Maßbestimmung

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2.$$

Es ist somit Ladung und Masse durch Funktion $w(\varphi)$ in (261) bestimmt, denn die Abhängigkeit des Potentials φ von r ist ja nach (263) ebenfalls durch sie allein festgelegt. Freilich erhält dabei die Ladung keine bestimmten räumlichen Grenzen; sie erstreckt sich vielmehr genau genommen ins Unendliche. Wenn ihre Dichte aber sehr schnell mit wachsendem r abnimmt, so spielt das nur eine untergeordnete Rolle.

Die Möglichkeit eines rein elektrischen Gleichgewichts innerhalb einer Ladung wäre mit den Maxwellschen Spannungen, wie wir sie in Bd. 1, Gl. (X), aufgestellt haben, nicht verträglich. Andererseits haben uns ja schon die veränderten Ausdrücke (249) und (250) für Energiestrom und -dichte auf eine neue Form des Energieimpulstensors T hingewiesen. Wir schreiben jetzt:

$$T_i^k = \sum_r \mathfrak{M}_{ir} \mathfrak{V}^{kr} - \Phi_i P^k + \tfrac{1}{2} \boldsymbol{M} \delta_i^k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (264)$$

und verstehen unter δ_{ik} ähnlich wie früher die Zahl $+1$, wenn $i = k$ ist, sonst 0. Dieser Ansatz gibt einen Tensor, weil jeder Summand ein solcher ist. Daß er symmetrisch ist, ließe sich rechnerisch mit Hilfe von (253) zeigen; doch wird uns der Beweis im nächsten Paragraphen ohnedem in den Schoß fallen. Hier bestätigen wir nur, daß z. B. nach (152) und (113)

$$\begin{aligned} T_4^1 &= -\frac{1}{c} \mathfrak{S}^1 = \mathfrak{M}_{42} \mathfrak{V}^{12} + \mathfrak{M}_{43} \mathfrak{V}^{13} - \Phi_4 P^1 \\ &= \mathfrak{E}_2 \mathfrak{H}^{21} + \mathfrak{E}_3 \mathfrak{H}^{31} + \varphi \mathfrak{K}^1 \end{aligned}$$

ist, in Übereinstimmung mit (249), während in Übereinstimmung mit (254) folgt:

$$\begin{aligned} T_4^4 &= -W = \mathfrak{M}_{41} \mathfrak{V}^{41} + \mathfrak{M}_{42} \mathfrak{V}^{42} + \mathfrak{M}_{43} \mathfrak{V}^{43} - \Phi_4 P^4 + \tfrac{1}{2} \boldsymbol{M} \\ &= -(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + \varphi \varrho + \tfrac{1}{2} \boldsymbol{M}. \end{aligned}$$

§ 27. Die Theorie der Materie in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Wir gehen hier sogleich vom Prinzip der kleinsten Wirkung aus. In § 20 haben wir gesehen, daß wir dies Prinzip für das Schwerefeld im leeren Raum, $\delta \int R \, d\Sigma = 0$, zu ergänzen haben zu $\delta \int [R + \varkappa(\boldsymbol{M} + 2 \sum_i P^i \Phi_i)] \, d\Sigma = 0$, wenn wir durch Variation der g^{ik} einerseits, der Komponenten des Viererpotentials Φ_i andererseits zu den Grundgleichungen des Schwere- und

des elektromagnetischen Feldes gelangen wollten. Die Funktion $\boldsymbol{M}$ wählten wir damals so, wie es der Maxwellschen Theorie entspricht. Es genügt, um die Miesche Elektrodynamik der allgemeinen Relativitätstheorie anzupassen, daß wir unter Fortlassung des Summanden $2 \sum_i P^i \Phi_i$ unter $\boldsymbol{M}$ eine invariante Funktion der g^{ik} und der Φ_i verstehen; die Ableitungen der g^{ik} sollen nicht eingehen, die der Φ_i nur in den Verbindungen

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^k} = \mathfrak{M}_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (264a)$$

Wir setzen dann also als Variationsprinzip an:

$$\delta \int (R + \varkappa \boldsymbol{M})\, d\Sigma = \delta \int \sqrt{-g}\,(R + \varkappa \boldsymbol{M})\, d\Sigma = 0 \qquad (265)$$

und ergänzen die Differentialgleichung (257) zu:

$$-d\boldsymbol{M} = \sum_{ik} (S_{ik}\, d g^{ik} + \mathfrak{B}^{ik}\, d\mathfrak{M}_{ik}) - 2 \sum_i P^i\, d\Phi_i. \qquad (266)$$

Die S_{ik} bilden einen neuen, zunächst unbekannten, symmetrischen Tensor. Dann gilt nach (189) für die Funktion

$$\mathfrak{M} = \sqrt{-g}\, \boldsymbol{M}$$

die Gleichung:

$$-d\mathfrak{M} = -\sqrt{-g}\, d\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}\, d\sqrt{-g}$$

$$= \sqrt{-g}\, \Big\{ \sum_{ik} [(S_{ik} + \tfrac{1}{2} \boldsymbol{M} g_{ik})\, d g^{ik} + \mathfrak{B}^{ik}\, d\mathfrak{M}_{ik} - 2 \sum_i P^i\, d\Phi_i \Big\}.$$

Nach (188) müssen dann die Differentialquotienten

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{ik}} = T_{ik} = S_{ik} + \tfrac{1}{2} \boldsymbol{M} g_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad (267)$$

die Komponenten des Energieimpulstensors sein.

Deren Werte können wir nun aus der Forderung berechnen, daß $\boldsymbol{M}$ bei einer beliebigen, also auch bei einer unendlich kleinen Koordinatentransformation invariant sein soll. Im allgemeinen gilt nach (47a):

$$\Phi'_i = \sum_l \Phi_l \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}, \qquad \mathfrak{M}'_{ik} = \sum_{lm} \mathfrak{M}_{lm} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k},$$

$$g^{ik} = \sum_{lm} g'^{lm} \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m}.$$

Bei der unendlich kleinen Transformation

$$x'^l = x^l + \varepsilon\, \xi^l (x^1, x^2, x^3, x^4)$$

wird bis auf Glieder mit höheren Potenzen der unendlich kleinen Konstanten ε

$$\frac{\partial x'^l}{\partial x^i} = \delta_i^l + \varepsilon \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i}, \qquad \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} = \delta_i^l - \varepsilon \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i}.$$

$$\delta\, \Phi_i = \Phi'_i - \Phi_i = -\varepsilon \sum_l \Phi_l \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i},$$

$$\delta\, \mathfrak{M}_{ik} = \mathfrak{M}'_{ik} - \mathfrak{M}_{ik} = -\varepsilon \Big[\sum_l \mathfrak{M}_{lk} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} + \sum_m \mathfrak{M}_{im} \frac{\partial \xi^m}{\partial x^k} \Big],$$

$$\delta\, g^{ik} = g'^{ik} - g^{ik} = \varepsilon \Big[\sum_l g^{lk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} + \sum_m g^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} \Big].$$

Nach (266) bilden wir nun die Größe:

$$\begin{aligned} -\delta\, \boldsymbol{M} = \varepsilon \Big\{ & \sum_{ikl} \cdot S_{ik}\, g^{lk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} + \sum_{ikm} S_{ik}\, g^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} \\ & - \sum_{ikl} \mathfrak{B}^{ik}\, \mathfrak{M}_{lk} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} - \sum_{ikm} \mathfrak{B}^{ik}\, \mathfrak{M}_{im} \frac{\partial \xi^m}{\partial x^k} \\ & + 2 \sum_{il} P^i\, \Phi_l \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} \Big\}. \end{aligned}$$

Hier läßt sich durch Vertauschung von Summationszeigern die zweite Summe in die erste und die vierte in die dritte überführen. Wegen der Invarianz von $\boldsymbol{M}$ aber muß $\delta\, \boldsymbol{M}$ verschwinden. Also:

$$0 = 2\, \varepsilon \sum_{il} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} \Big\{ \sum_k S_{kl}\, g^{ik} - \sum_k \mathfrak{B}^{ik}\, \mathfrak{M}_{lk} + P^i\, \Phi_l \Big\}.$$

Dies gilt, wie wir auch die Funktionen ξ^l wählen mögen. Also muß der Klammerausdruck, in welchem wir die erste Summation nach k unmittelbar ausführen können, Null sein:

$$S_l^i = \sum_k \cdot \mathfrak{B}^{ik} \mathfrak{M}_{lk} - P^i \Phi_l.$$

Daraus folgt nach (267)

$$T_l^i = S_l^i + \tfrac{1}{2} \boldsymbol{M} \delta_l^i = \sum_k \mathfrak{B}^{ik}\, \mathfrak{M}_{lk} - P^i\, \Phi_l + \tfrac{1}{2} \boldsymbol{M} \delta_l^i. \quad (268)$$

Diese Formel aber stimmt mit (264) überein.

Die Symmetrie dieses Welttensors folgt unmittelbar aus der Symmetrie des Tensors S_{ik} und aus (267).

Wie die Weltfunktion $\boldsymbol{M}$ von den vier aus $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}$, P und $\boldsymbol{\Phi}$ zu bildenden, in § 26 aufgezählten Invarianten abhängt, bleibt auch hier eine offene Frage. Die in (189a) getroffene Wahl führt zur Maxwell-Lorentzschen Elektrodynamik zurück, kann also nach Mies Theorie der Materie nur eine Näherung weit außerhalb der Ladungen darstellen. Nach letzterer kann daher auch § 25 für die elektrische Punktladung nicht streng richtig sein. In allen Fällen aber erhalten wir aus dem Variationsprinzip (265) durch Variation der zehn g^{ik} die Gleichungen des Schwerefeldes

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2} R g_{ik} = \varkappa T_{ik}, \quad \ldots \ldots \quad (269)$$

durch Variation der $\boldsymbol{\Phi}_i$ die vier Gleichungen, die wir vektoriell

$$\mathit{Div}\, \mathfrak{B} = P \quad \ldots \ldots \ldots \quad (270)$$

schreiben, und die zusammen mit (264a) die Grundformeln der Elektrodynamik darstellen.

Diese 14 Gleichungen sind aber nicht voneinander unabhängig. Denn da in den Gleichungen des Schwerefeldes links ein divergenzfreier Tensor auftritt (vgl. §§ 10 und 16), folgt aus ihnen der Energieimpulssatz

$$\mathit{Div}\, T = 0.$$

Nun ist hier nach (73c) und (268)

$$\mathit{Div}_i\, T = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\, T_i^k\right)}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \sum_{kl} T_{kl} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{kl} \mathfrak{M}_{il} \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\, \mathfrak{B}^{kl}\right)}{\partial x^k} + \sum_{kl} \mathfrak{B}^{kl} \frac{\partial \mathfrak{M}_{il}}{\partial x^k}$$

$$- \frac{\boldsymbol{\Phi}_i}{\sqrt{-g}} \sum_l \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\, P^l\right)}{\partial x^l} - \sum_l P^l \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_i}{\partial x^l}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{M}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \sum_{kl} T_{kl} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i}.$$

Nach (266) und (267) ist aber

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x^i} = -\frac{1}{2}\sum_{kl}\left(T_{kl} - \frac{1}{2}\boldsymbol{M}\, g_{kl}\right)\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{kl}\mathfrak{V}^{kl}\frac{\partial \mathfrak{M}_{kl}}{\partial x^i} + \sum_l P^l \frac{\partial \Phi_l}{\partial x^i}.$$

Diesen Wert setzen wir ein. Wir können dann alle Summen, in denen die Summanden einen Faktor $\mathfrak{V}^{kl}$ führen, zusammenfassen zu:

$$\sum_{kl}\mathfrak{V}^{kl}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}_{il}}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{M}_{lk}}{\partial x^i}\right) = \frac{1}{2}\sum_{kl}\mathfrak{V}^{kl}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{ki}}{\partial x^l} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{lk}}{\partial x^i}\right) = 0$$

[vgl. (111)]. Die beiden Summen, in deren Gliedern die P^l auftreten, ergeben

$$\sum_l P^l\left(\frac{\partial \Phi_l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^l}\right) = \sum_l P^l \mathfrak{M}_{il}.$$

Schließlich ist nach (62)

$$\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{M}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^i} + \frac{1}{4}\boldsymbol{M}\sum_{kl} g_{kl}\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i} = 0.$$

Also bleibt nur übrig:

$$\Delta iv_i\, T = \sum_l\left[\mathfrak{M}_{il}\left(P^l - \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_k\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,\mathfrak{V}^{lk}\right)}{\partial x^k}\right)\right.$$

$$\left. - \Phi_i\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,P^l\right)}{\partial x^l}\right]$$

oder nach (73) und (73d)

$$\Delta iv_i\, T = \sum_l \mathfrak{M}_{il}\left(P^l - \Delta iv^l\,\mathfrak{V}\right) - \Phi_i\, Div\, P.$$

Bezeichnen wir den Vektor $P - \Delta iv\,\mathfrak{V}$ mit A, so ist danach und wegen der Rechnungsregel (74)

$$0 = \sum_l \mathfrak{M}_{il} A^l - \Phi_i\, Div\, A \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Daraus, also aus den Feldgleichungen (269), kann man freilich nicht auf $A = 0$, also auf die Maxwellsche Gleichung (270) schließen; aber es liegen darin doch vier Bedingungen für den Vektor A, welche nicht bei jeder vektoriellen Funktion der vier Koordinaten erfüllt wären.

Daß somit zwischen den 14 Differentialgleichungen (269) und (270), welche nach der Mieschen Theorie das System der ganzen Physik umfassen, vier Beziehungen bestehen, hängt mit der Willkür in der Wahl der vier Koordinaten zusammen; wir haben das entsprechend schon in § 16 betont. Denn haben wir eine Lösung dieser Grundgleichungen, so können wir in sie durch die allgemeine Koordinatentransformation vier willkürliche Funktionen einführen. In diesem Sinne bezeichnet Hilbert, dem wir die Übertragung der Mieschen Theorie in die allgemeine Relativitätstheorie verdanken, die elektrodynamischen Erscheinungen als eine Wirkung der Schwere. Er fügt hinzu, daß schon Riemann theoretisch nach einem Zusammenhang zwischen Schwere und Licht gesucht hat.

Anhang I*) (zu § 5).

Satz: Eine algebraische ebene Kurve, welche durch dreifach unendlich viele Kollineationen in sich selbst überführt wird, ist ein Kegelschnitt. In der Ebene gilt dabei euklidische Geometrie; ξ^1, ξ^2, ξ^3 sind homogene Koordinaten in ihr.

Beweis: Eine Kollineation, welche die Kurve K in sich überführt, ordnet jedem Kurvenpunkt A einen Kurvenpunkt A' als Bild zu. Die Tangente in A erhält als Bild die Tangente in A'. Denn ein dem Punkt A unendlich benachbarter Kurvenpunkt E geht in einen Kurvenpunkt E' über, der unendlich nahe bei A' liegt; und da jede Gerade in eine Gerade überführt wird, muß aus der Geraden AE die Gerade $A'E'$ werden.

Läßt nun die Kurve K dreifach unendlich viele Kollineationen in sich zu, so kann man für drei ihrer Punkte, A, B, C, die Bilder, A', B', C', noch nach Willkür vorschreiben; denn dabei werden die drei ursprünglich vorhandenen Freiheitsgrade festgelegt. Wir bestimmen nun, daß A', das Bild von A, mit B, und umgekehrt B', das Bild von B, mit A zusammenfällt. Es gibt noch eine einfach unendliche Schar derartiger Kollineationen; jede von ihnen läßt den Schnittpunkt D der in A und B an die Kurve gelegten Tangenten ungeändert. Diesen Tangenten geben wir nun die

*) Nach einer brieflichen Mitteilung von F. Schur.

Gleichungen $\xi^1 = 0$ und $\xi^2 = 0$, der Sehne AB die Gleichung $\xi^3 = 0$. Jede der letztgenannten Kollineationen fällt dann unter das Schema:

$$\xi'^1 = a \,.\, \xi^2, \quad \xi'^2 = b \,.\, \xi^1, \quad \xi'^3 = \xi^3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)}$$

wobei die Konstante a den noch willkürlichen Parameter bedeutet. Denn nur eine solche Transformation führt den Punkt $A\,(\xi^1 = \xi^3 = 0)$ über in $B\,(\xi^2 = \xi^3 = 0)$ und umgekehrt B in A. Die Konstante b aber läßt sich nach Festlegung von a berechnen; denn irgend ein Punkt ξ_0^1, ξ_0^2, ξ_0^3 von K geht durch die Transformation (a) über in einen Punkt mit den Koordinaten $\xi_0'^1 = a\,\xi_0^2$, $\xi_0'^3 = \xi_0^3$, aus denen sich mittels der Kurvengleichung $\xi_0'^2$ ableiten läßt, und es ist $b = \xi_0'^2 : \xi_0^1$.

Nun nehmen wir die Gleichung von K in der Form an:

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{n} A_{\alpha\beta}\, \xi^{1\alpha}\, \xi^{2\beta}\, \xi^{3\,(2n-\alpha-\beta)} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(b)}$$

Bei der Transformation (a) gehen die Glieder $A_{\alpha\beta}\, \xi^{1\alpha}\, \xi^{2\beta}\, \xi^{3\,(2n-\alpha-\beta)}$ und $A_{\beta\alpha}\, \xi^{1\beta}\, \xi^{2\alpha}\, \xi^{3\,(2n-\alpha-\beta)}$ über in $A_{\alpha\beta}\, b^{-\alpha}\, a^{-\beta}\, \xi'^{1\alpha}\, \xi'^{2\beta}\, \xi'^{3\,(2n-\alpha-\beta)}$ und in $A_{\beta\alpha}\, b^{-\beta}\, a^{-\alpha}\, \xi'^{1\alpha}\, \xi'^{2\beta}\, \xi'^{3\,(2n-\alpha-\beta)}$. Soll also Gleichung (b) unverändert bleiben, so muß

$$A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}\, b^{-\beta}\, a^{-\alpha}, \qquad A_{\beta\alpha} = A_{\alpha\beta}\, b^{-\alpha}\, a^{-\beta}$$

sein. Ist weder $A_{\alpha\beta} = 0$ noch $A_{\beta\alpha} = 0$, so folgt daraus durch Elimination von b:

$$a^{\alpha^2-\beta^2} = \left(\frac{A_{\beta\alpha}}{A_{\alpha\beta}}\right)^{\alpha+\beta}:$$

und das wäre eine Gleichung zur Bestimmung von a aus den Konstanten der Kurvengleichung, außer wenn entweder $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha} = 0$ oder $\alpha = \beta$ ist. Eine solche Bestimmungsgleichung für den willkürlichen Parameter a ist aber unmöglich; also können in (b) nur Glieder auftreten, für welche $\alpha = \beta$ ist, und die Gleichung vereinfacht sich zu:

$$\sum_{\alpha=0}^{n} A_{\alpha\alpha}(\xi^1\,\xi^2)^\alpha\, \xi^{3\,2(n-\alpha)} = 0.$$

Eine solche Kurve hat nun mit der Geraden $\xi^3 = 0$ nur zwei verschiedene Schnittpunkte, die sich aus der Gleichung $(\xi^1\,\xi^2)^n = 0$ bestimmen, also mit A und B zusammenfallen. Die Sehne AB

war aber ganz beliebig gewählt. Also hat K mit keiner Sehne mehr als zwei verschiedene Punkte gemein. Folglich ist $n = 1$ und K ein Kegelschnitt von der Gleichung

$$A_{00}\,\xi^{3\,2} + A_{11}\,\xi^1\xi^2 = 0.$$

Die Beschränkung unseres Beweises auf algebraische Kurven stört nicht, weil die Funktion F der Differentiale dx^i, die wir im Text suchen, immer algebraisch ist. Auch ist es belanglos, ob Gleichung (b) eine reelle oder eine imaginäre Kurve bestimmt.

Anhang II (zu § 5).

In § 5 stellten wir an jedes der zulässigen Koordinatensysteme die Forderung, daß $d\tau^2$ positiv sein muß, wenn nur dx^4 von Null verschieden ist, dagegen negativ, wenn $dx^4 = 0$ ist, die anderen dx^i aber beliebige Werte haben. Für die erste dieser Forderungen ist notwendig und hinreichend

$$g_{44} > 0:$$

für die zweite hingegen, daß

$$\sum_{i\,k=1}^{3} \gamma_{ik}\,dx^i\,dx^k \qquad (\gamma_{ik} = -g_{ik})$$

eine positiv definite Form der drei dx^i darstellt. Dasselbe bedeutet die Forderung, daß die Gleichung

$$\sum_{i\,k=1}^{3} \gamma_{ik}\,\xi^i\,\xi^k = 1$$

zwischen den rechtwinkeligen Koordinaten ξ^i im dreidimensionalen, euklidischen Raume ein Ellipsoid darstellt. In dem durch dessen Hauptachsen bestimmten Koordinatensystem X^i muß aber die letzte Gleichung lauten

$$\alpha_{11}\,X^{1\,2} + \alpha_{22}\,X^{2\,2} + \alpha_{33}\,X^{3\,2} = 1,$$

und die α_{ii} müssen positiv sein. Suchen wir die Hauptachsen dieser Fläche, indem wir die Extremwerte von

$$\sum_{i=1}^{3} \xi^{i\,2} \text{ bei konstantem } \sum_{i\,k=1}^{3} \gamma_{ik}\,\xi^i\,\xi^k$$

bestimmen, so finden wir für die Koordinaten ihrer Durchstoßpunkte nach der Methode des Lagrangeschen Multiplikators die drei Gleichungen:

$$(\gamma_{11} - \lambda)\xi^1 + \gamma_{12}\xi^2 + \gamma_{13}\xi^3 = 0 \text{ usw.}$$

Diese haben nur dann Lösungen, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} - \lambda & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} - \lambda & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ist. Dies gibt aber eine Gleichung dritten Grades für λ, und die Bedeutung ihrer Wurzeln erkennen wir, wenn wir dasselbe Problem in den Koordinaten X^i behandeln; denn dann finden wir einfach

$$(\alpha_{11} - \lambda)(\alpha_{22} - \lambda)(\alpha_{33} - \lambda) = 0.$$

Da die beiden letzten Gleichungen übereinstimmen müssen, ist notwendig

$$\gamma = \begin{vmatrix} \gamma_{11}\gamma_{12}\gamma_{13} \\ \gamma_{21}\gamma_{22}\gamma_{23} \\ \gamma_{31}\gamma_{32}\gamma_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)}$$

also $\gamma > 0$. Zu dieser notwendigen Bedingung tritt noch die weitere, daß auch die Teilsumme $\sum_{i,k=1}^{2} \gamma_{ik}\xi^i\xi^k$ positiv definit ist; daß also entsprechend auch

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11}\gamma_{12} \\ \gamma_{21}\gamma_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(b)}$$

positiv ist, und schließlich die, daß die „Teilsumme" $\gamma_{11}\xi^{1\,2}$ positiv ist, also

$$\gamma_{11} > 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(c)}$$

Diese drei Bedingungen reichen aber auch hin, um die positive Definitheit zu gewährleisten. Aus (a) folgt nämlich umgekehrt, daß von den α_{ii} weder nur eins, noch alle drei negativ sein können. Wären zwei negativ, so wäre die Fläche ein zweischaliges Hyperboloid, und aus (c) müßten wir dann schließen, daß dies Hyperboloid die ξ^1-Achse in einem reellen Punkt schneidet. Dann könnte es aber die ξ^2-Achse nicht schneiden und es wäre sein

Schnitt mit der $\xi^1 \xi^2$-Ebene eine Hyperbel, deren Gleichung

$$\sum_{ik=1}^{2} \gamma_{ik} \xi^i \xi^k = 1$$

rechts eine in definite Form enthalten müßte, im Widerspruch zu (b). Die Bedingungen (a), (b), (c) sind also notwendig und hinreichend dafür, daß

$$\sum_{ik=1}^{3} \gamma_{ik} dx^i dx$$

positiv definit ist. Sie lassen sich, wenn man die g_{ik} in sie einführt, ohne weiteres in die Ungleichungen (10)

$$g_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} < 0$$

umschreiben.

Anhang III*) (zu § 8a).

Die zweiten Differentialquotienten der g_{ik} in Riemannschen Koordinaten.

Wenngleich die zweiten Differentialquotienten der g_{ik} nach den Riemannschen Koordinaten x^i im hervorgehobenen Punkt im Gegensatz zu den ersten Differentialquotienten nicht verschwinden, so bestehen doch gewisse Beziehungen zwischen ihnen. Um sie abzuleiten, setzen wir in die Differentialgleichungen (52) der geodätischen Linie die Werte (64) der x^i ein; unter geeigneter Umänderung der Summationsbuchstaben in der zweiten Summe finden wir:

$$\sum_{kl} (2\, g_{ikl} - g_{kli})\, c^k c^l = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)}$$

---

*) Anhang III und IV enthalten mathematische Ausführungen, welche im vorliegenden Buch nicht gebraucht werden, die aber in der Literatur über die allgemeine Relativitätstheorie eine Rolle spielen.

Hier entwickeln wir die g_{ik} nach steigenden Potenzen der x^i, und führen die Abkürzungen

$$\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^m}\right)_{x^i=0} = a_{iklm} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(b)}$$

ein. Diese Größen sind im ersten sowie im zweiten Paar ihrer Zeiger symmetrisch. Die Entwickelung lautet wegen des Verschwindens der ersten Differentialquotienten

$$g_{ik} = \overset{0}{g}_{ik} + \frac{1}{2}\sum_{lm} a_{iklm}\, x^l x^m + \cdots \quad . \; . \; . \quad \text{(b')}$$

und daraus folgt durch Differentiation nach x^l

$$g_{ikl} = \sum_m a_{iklm}\, x^m + \cdots = p \sum_m a_{iklm}\, c^m + p^2(\cdots) + \cdots$$

Dies setzen wir in (a) ein und ordnen nach Potenzen von p. Da die Differentialgleichungen (52) für alle Werte von p erfüllt sein müssen, verschwindet jeder Faktor einer Potenz von p für sich allein. Der Faktor von p selbst aber lautet

$$\sum_{klm} (2\, a_{iklm} - a_{klim})\, c^k c^l c^m;$$

da er überdies für alle Werte der c^i Null sein muß, ist notwendige Bedingung für die Erfüllung von (52), daß der Koeffizient einer Kombination $c^k c^l c^m$ verschwindet. Dies ist aber auch die einzige Bedingung, welche die a_{iklm} zu erfüllen haben. Denn setzt man die Koeffizienten von p^2, p^3 usw. gleich Null, so treten diese Größen nicht mehr auf, sondern nur höhere Ableitungen der g_{ik}. Nun finden wir den Faktor von $c^k c^l c^m$, indem wir die drei Zeiger k, l, m allen Permutationen unterwerfen; beachten wir aber dabei die Symmetrieeigenschaften der a_{iklm}, so finden wir als die erwähnte Bedingung

$$2\,(a_{iklm} + a_{ilmk} + a_{imkl}) = a_{klmi} + a_{lmki} + a_{mkli}.$$

Die Klammer auf der linken Seite bezeichnen wir hier symbolisch mit I, die rechte Seite mit II. Aus $2 \,.\, \mathrm{I} = \mathrm{II}$ folgt dann $2 \,.\, (\mathrm{I} + \mathrm{II}) = 3 \,.\, \mathrm{II}$. In der Summe

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} = a_{iklm} + a_{ilmk} + a_{imkl} + a_{klmi} + a_{lmki} + a_{mkli}$$

kann man aber jedes Zeigerpaar vertauschen, ohne daß sie sich ändert. Durch zyklische Vertauschung sämtlicher Zeiger, welche

sich durch drei paarweise Vertauschungen ersetzen läßt, geht aber I in II über, also ist auch $2 . (\mathrm{I} + \mathrm{II}) = 3 . \mathrm{I}$, oder $\mathrm{I} = 2 . \mathrm{II}$. Das verträgt sich mit der ersten dieser Gleichungen nur, wenn $\mathrm{I} = \mathrm{II} = 0$ ist; also

$$a_{iklm} + a_{ilmk} + a_{imkl} = 0. \quad \ldots \ldots \quad (c)$$

Wir vertauschen hier i mit l:

$$a_{lkim} + a_{limk} + a_{lmki} = 0;$$

oder

$$a_{lkim} + a_{kmli} + a_{lmki} = a_{kmli} - a_{ilkm}. \quad \ldots \quad (d)$$

Durch Addition von (c) und (d) aber finden wir:

$$a_{iklm} + a_{ilmk} + a_{imkl} + a_{lkmi} + a_{kmli} + a_{lmki} = a_{kmil} - a_{ilkm}.$$

Eine Vertauschung von k mit i und von m mit l kehrt das Vorzeichen der rechten Seite um; links ändert sie nichts. Folglich sind beide Seiten Null. Zu den schon festgestellten Symmetrieeigenschaften der in (b) definierten Größen

$$a_{iklm} = a_{kilm} = a_{ikml}, \quad \ldots \ldots \quad (e)$$

tritt also noch hinzu:

$$a_{ikml} = a_{mlik}. \quad \ldots \ldots \quad (f)$$

An Gleichung (85) in § 10, f) kann man sich überzeugen, daß diese Gleichung nur für Riemannsche Koordinaten, nicht aber für die allgemeineren geodätischen Systeme zutrifft.

Anhang IV (zu § 10).

Die Krümmungsform.

Den Begriff der Parallelverschiebung und die anschließende Ableitung des Riemann-Christoffelschen Tensors haben erst, als die allgemeine Relativitätstheorie die Aufmerksamkeit wieder auf diesen Zweig der mathematischen Forschung gelenkt hatte, Levi-Civita, Hessenberg, Weyl und Schouten in die Wissenschaft eingeführt. Riemann selbst ist auf einem anderen Weg zu jenem Tensor gekommen. Um ihm zu folgen, heben wir wieder den Punkt P hervor und führen für ihn Riemannsche Koordinaten x^i ein. Entwickeln wir g_{kl} von P aus nach steigender

Potenzen von x^i, so finden wir nach Anhang III, Gl. (b′) für ein Linienelement, welches die Punkte λx^i und $\lambda x^i + dx^i$ verbindet:

$$d\tau^2 = g^0_{kl}\, dx^k\, dx^l + \frac{\lambda^2}{2} \sum_{klmn} a_{klmn}\, x^m x^n\, dx^k\, dx^l + \cdots \quad \cdot \cdot \quad \text{(a)}$$

Bei linearen Transformationen, den einzigen, welche Riemannsche Koordinaten in ebensolche überführen (§ 8), müssen die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von λ invariant bleiben. Also gilt das auch von der Krümmungsform

$$\Delta\sigma^2 = -\frac{3}{2} \sum_{klmn} a_{klmn}\, dx^k\, dx^l\, \delta x^m\, \delta x^n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(b)}$$

wobei wir die x^i durch die Zeichen δx^i ersetzt haben.

Die Symmetriebeziehungen (e) und (f) und die Gleichung (c) in Anhang III gestatten nun die Umformung:

$$-\tfrac{3}{2}\, a_{klmn} = -\tfrac{1}{2}(a_{klnm} + a_{nmkl}) + \tfrac{1}{2}(a_{kmnl} + a_{nklm}).$$

Führt man dies in (b) ein, so entstehen vier Summen. In der vierten vertauschen wir die Summationszeiger k und l und ersetzen überall n durch i. Da nach (79) in Riemannschen Koordinaten im Punkt P

$$R_{iklm} = \tfrac{1}{2}(a_{klim} + a_{imkl} - a_{kmil} - a_{ilkm})$$

ist, so finden wir dabei:

$$\Delta\sigma^2 = -\sum_{iklm} R_{iklm}\, \delta x^i\, dx^k\, dx^l\, \delta x^m.$$

Die Antisymmetrie des Riemann-Christoffelschen Tensors im ersten und im zweiten Zeigerpaar ermöglicht nun durch die Vertauschung der Zeiger i und k die Umformung:

$$\Delta\sigma^2 = \sum_{iklm} R_{iklm}\, \delta x^k\, dx^i\, dx^l\, \delta x^m.$$

Die Addition der beiden letzten Gleichungen liefert:

$$\Delta\sigma^2 = \frac{1}{2} \sum_{iklm} R_{iklm}\, (dx^i\, \delta x^k - dx^k\, \delta x^i)\, dx^l\, \delta x^m.$$

Die Wiederholung dieses Verfahrens an den Zeigern l und m ergibt schließlich:

$$\Delta\sigma^2 = \frac{1}{4} \sum_{iklm} R_{iklm}\, (dx^i\, \delta x^k - dx^k\, \delta x^i)\, (dx^l\, \delta x^m - dx^m\, \delta x^l).$$

Hieran erkennen wir, da wir die Tensoreigenschaft der R_{iklm} in § 10 bewiesen haben, daß $\Delta\sigma^2$ nicht nur gegen die erwähnten linearen Transformationen invariant ist, sondern überhaupt. Wir können deshalb im folgenden die x^i als beliebige Koordinaten deuten. Auf die Frage, wie Riemann die Inversionen von $\Delta\sigma^2$ erschlossen hat, gehen wir nicht ein.

Der antisymmetrische Tensor (Sechservektor), dessen Komponenten jetzt in den Klammern auftreten, stellt das von den Verrückungen dx^i und δx^i gebildete (Quasi-)Parallelogramm dar. Das Quadrat seines Flächeninhalts beträgt nach (46)

$$\Delta f^2 = \frac{1}{4}\sum_{iklm}(g_{il}\,g_{km}-g_{kl}\,g_{im})(dx^i\,\delta x^k-dx^k\,\delta x^i)(dx^l\,\delta x^m-dx^m\,\delta x^l).$$

Der Quotient

$$\frac{\Delta\sigma^2}{\Delta f^2}=\frac{\sum\limits_{iklm}R_{iklm}\qquad(dx^i\,\delta x^k-dx^k\,\delta x^i)\,(dx^l\,\delta x^m-dx^m\,\delta x^l)}{\sum\limits_{iklm}(g_{il}\,g_{km}-g_{kl}\,g_{im})\,(dx^i\,\delta x^k-dx^k\,\delta x^i)\,(dx^l\,\delta x^m-dx^m\,\delta x^l)}$$

wird also von der Größe dieses Flächenstückes unabhängig, und allein abhängig von den Verhältnissen der Komponenten, d. h. seiner Lage und der Maßbestimmung $d\tau^2$. In euklidischen Verhältnissen ist er Null; denn die Strecken $d\tau$ und

$$\Big(\sum_{kl} g_{kl}^{(0)}\,dx^k\,dx^l\Big)^{1/2}$$

in Gleichung (a), welche gegenüberliegende Seiten des genannten Parallelogramms darstellen, sind dann genau gleich lang. Riemann bezeichnet diesen Quotienten als das Maß der Krümmung, welche die durch die Verrückungen bestimmte zweidimensionale Mannigfaltigkeit im Punkt P besitzt.

Für zwei Dimensionen wird einfach

$$\frac{\Delta\sigma^2}{\Delta f^2}=\frac{R_{1212}}{g}=-\tfrac{1}{2}R,$$

also gleich dem Gaußschen Krümmungsmaß K [vgl. Gl. (81a) und (87)].

Literatur.

§ 1.

Eine ausführliche Zusammenfassung der Literatur über die experimentelle Erforschung der Schwere findet sich in der Enzyklopädie der mathem. Wiss., Bd. V, aus der Feder von J. Zenneck.

[1]) L. Southerns, Proc. Roy. Soc. London **84**, 325, 1910.

[2]) R. v. Eötvös, Über die Anziehung der Erde auf verschiedene Substanzen. Mathem. u. naturw. Ber. aus Ungarn **8**, 65, 1890; Beibl. d. Ann. d. Phys. **15**, 688, 1891; vgl. auch Ann. d. Phys. **59**, 354, 1896, bes. S. 373.

[3]) P. Zeeman, Proc. Amsterdam **20**, 542, 1917.

[4]) Le Verrier, Ann. de l'observatoire de Paris **5**, 76, 1859.

[5]) H. v. Seeliger, Astron. Nachr. **137**, 129, 1895; Münchener Sitzungsber. 1895, S. 373.

[5a]) Nach M. Brendel, Göttinger gelehrte Anzeigen 1899, S. 233, stimmt die nach Newton berechnete säkulare Beschleunigung des Mondes nicht mit der Beobachtung überein. Die neueren Schweretheorien sind auf diesen Fall noch nicht angewandt.

[6]) E. Freundlich, Phys. Zeitschr. **15**, 369, 1914; **16**, 115, 1915.

[7]) H. v. Seeliger, Astron. Nachr. **202**, 4828, 1916.

[8]) K. Schwarzschild, Berl. Sitzungsber. 1914, S. 1201.

[9]) Ch. E. St. John, Astrophys. Journ. **46**, 249, 1917.

[10]) Evershed und Royds, Kodaik. Obs. Bull. **39**.

[11] Hale hat nicht selbst über diesen Gegenstand geschrieben. Dem Text liegt ein Irrtum zugrunde, hervorgerufen durch die Unterbindung der ausländischen Literaturzufuhr.

[12]) L. Grebe u. A. Bachem, Ver. d. D. Phys. Ges. **21**, 457, 1919; Zeitschr. f. Phys. **1**, 51, 1920; **2**, 415, 1920.

[12a]) L. Grebe, Vortrag auf der Naturforscherversammlung in Nauheim 1920. Phys. Zeitschr. **21**, 662, 1920.

[13]) F. W. Dyson, A. S. Eddington u. C. Davidson, Phil. Trans. Roy. Soc. London **220**, 291, 1920. Aus dieser Veröffentlichung stammen die Figuren 5 u. 6. Tabelle 2 ist entnommen aus einer brieflichen Mitteilung von L. Silberstein; vgl. M. v. Laue, Naturwissenschaften **8**, 390, 1920.

§ 2.

P. Drude, Ann. d. Phys. u. Chem. **62**, 1, 1897; M. Abraham, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik **11**, 470, 1914.

[1]) C. Neumann, Leipziger Abhandlungen 1874.

[2]) H. v. Seeliger, Vierteljahrsschr. d. astron. Ges. **41**, 234, 1906.

[3]) Zitiert nach der angeführten Arbeit von P. Drude.

[4]) P. Gerber, Zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation. Zeitschr. f. Math. u. Phys. **43**, 93, 1898; Ann. d. Phys. **52**, 415, 1917. Auf die Unklarheit in Gerbers Potentialbegriff weist hin H. v. Seeliger, Ann. d. Phys. **53**, 31 u. **54**, 38, 1917. Daß Gerbers Ansatz keine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwere ergibt, weist nach M. v. Laue, Ann. d. Phys. **53**, 214, 1917. Von Gerbers Priorität hinsichtlich der Formel für die Perihelbewegung des Merkurs handeln die Notizen von H. v. Seeliger, Münchener Sitzungsber. 1918, S. 262 u. M. v. Laue, Naturwissenschaften **8**, 735, 1920.

[5]) C. Maxwell, Scient. Papers I, S. 570.

[6]) M. Abraham, Arch. f. Math. u. Phys. (3) **20**, 193, 1912.

[7]) F. Mossotti, Sur les forces, qui régissent la constitution intérieure des corps, Turin 1836. F. Zöllner, Erklärung der universellen Gravitation aus den statischen Wirkungen der Elektrizität, Leipzig 1882. H. A. Lorentz, Versl. Akadem. van Wetenschapen to Amsterdam **8**, 603, 1900. Ferner W. Wien, Ann. d. Phys. **5**, 501, 1901; R. Gans, Phys. Zeitschr. **6**, 803, 1905 u. F. Wacker, Über Gravitation und Elektromagnetismus. Diss. Tübingen 1909.

[8]) H. Minkowski, Göttinger Nachrichten 1907, S. 1; Math. Ann. **68**, 472, 1910. Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik. Leipzig u. Berlin 1910, S. 54.

[9]) H. Poincaré, Rendiconti del circolo matematico di Palermo **21**, 129, 1906; vgl. auch A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **33**, 649, 1910.

[10]) F. J. de Wisniewski, Zur Minkowskischen Mechanik. Ann. d. Phys. **40**, 387 u. 668, 1913.

[11]) M. Abraham, Zur Theorie der Gravitation. Phys. Zeitschr. **13**, 1, 1912. Das Elementargesetz der Gravitation, ebend. **13**, 4, 1912. Der freie Fall, ebend. **13**, 310, 1912. Die Erhaltung der Energie und der Materie im Schwerkraftfelde, ebend. **13**, 311, 1912. Das Gravitationsfeld, ebend. **13**, 793, 1912. Dalle onde luminose e gravitazionali. Nuovo Cimento (6) **3**, 211, 1912. Eine neue Gravitationstheorie. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **20**, 193, 1912. Ferner B. Caldonazzo, Traiettori dei raggi luminosi dei punti materiali nel campo gravitazionale. Nuovo Cimento (6) **5**, 267, 1913.

[12]) G. Mie, Grundlagen einer Theorie der Materie. Ann. d. Phys. **37**, 511 u. **39**, 1, 1912; **40**, 1, 1913. Ferner: Das Prinzip von der Relativität des Gravitationspotentials. Elster- und Geitel-Festschrift, S. 251, 1915.

[13]) Die erste Fassung von Nordströms Theorie findet sich bei G. Nordström, Phys. Zeitschr. **13**, 1126, 1912; Ann. d. Phys. **40**, 856, 1913; ferner M. Behacker, Phys. Zeitschr. **14**, 989, 1913. Die zweite

Fassung ist enthalten in G. Nordström, Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzips. Ann. d. Phys. **42**, 533, 1913. Die Fallgesetze und Planetenbewegungen in der Relativitätstheorie, ebend. **43**, 1101, 1914; ferner Phys. Zeitschr. **15**, 504, 1914; A. Einstein, ebend. **14**, 1249, 1913; A. Einstein u. A. D. Fokker, Ann. d. Phys. **44**, 321, 1914; M. v. Laue, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik **14**, 263, 1917.

§ 3.

A. Einstein, Ann. d. Phys. **49**, 769, 1916. „Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie". Braunschweig 1917.

[1]) Immanuel Kant, Neuer Lehrbegriff der Bewegung und der Ruhe 1758; vgl. dazu E. Cassierer, Zur Einsteinschen Relativitätstheorie. Berlin 1921, Kap. V, und Ilse Schneider.

§ 4.

M. Schlick, Naturwissenschaften **5**, 162, 1917.

H. v. Helmholtz, Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. „Vorträge und Reden" II, S. 1. Braunschweig 1896.

§ 5.

H. v. Helmholtz, „Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie". Verh. d. naturhistorisch-medizinischen Ver. Heidelberg **4**, 197, 1886 u. **5**, 31, 1889; Ges. Abh. II, S. 610, Leipzig 1883. „Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen". Göttinger Nachr. 1868, S. 193; Ges. Abh. II, S. 618. S. Lie weist in zahlreichen Arbeiten auf Mängel in der mathematischen Behandlung bei Helmholtz hin und verbessert sie, ohne daß dies für das Ergebnis etwas ausmachte, vermittelst seiner Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen. Siehe z. B. S. Lie, Berichte der Sächs. Ges. d. Wiss. 1890, oder Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen III, Abt. 5.

Wir folgen im Text dem Gedankengang von F. Klein in einer als Einzelschrift erschienenen Vorlesung über nichteuklidische Geometrie vom Winter 1889/90.

§ 6 bis 10.

B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Abh. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen **13**, 133, 1867; Ges. Werke, S. 272, Leipzig 1892. Als Einzelschrift mit Anmerkungen herausgegeben von H. Weyl, Berlin 1919.

Derselbe, Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab illustrissima academia parisiensi propositae. Ges. Werke, S. 391.

E. B. Christoffel, Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. Journ. f. reine u. angewandte Math. **70**, 46, 1869.

R. Lipschitz, Untersuchungen in betreff der ganzen homogenen Funktionen von n Differentialen. Journ. f. reine u. angewandte Math. **70**, 71, 1869 u. **72**, 1, 1870.

G. Ricci u. T. Levi-Civita, Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. Math. Ann. **54**, 125, 1901.

A. Einstein, Ann. d. Phys. **49**, 765, 1916.

A. Einstein u. M. Grossmann, Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie. Leipzig u. Berlin 1913.

G. Hessenberg, Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie. Math. Ann. **78**, 187, 1918.

T. Levi-Civita, Nozione di parallelismo in una varietà qualunque. Rendiconti del Circ. mat. Palermo **42**, 173, 1917.

F. Jung, Die Feldableitung in allgemeinen Koordinaten. Wiener Sitzungsber. **126**, 1437, 1917. Schwerefeld und Krümmung. Phys. Zeitschr. **20**, 274, 1919.

J. A. Schouten, Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie. Verh. d. Akad. Amsterdam **12**, eerste sectie No. 6, 1918. On the direct analysis of the linear quantities belonging to the rotational group in 3 and 4 variables. Proc. Amsterdam **21**, 327, 1917. Die Zahlensysteme der geometrischen Größen. Nieuw Archief voor wiskunde **13**, 1, 1921.

[1]) Herbert Lang, Zur Tensorgeometrie in der allgemeinen Relativitätstheorie. Diss. München 1919. Ann. d. Phys. **61**, 32, 1920.

[2]) A. D. Fokker, On the equivalent of parallel translation in non-euklidean space and on Riemann's measure of curvature. Proc. Amsterdam **21**, 505, 1918. J. A. Schouten, On the number of degrees of freedom of the geodetically moving systems and the enclosing euklidean space with the least possible number of dimensions. Proc. Amsterdam **21**, 607, 1918. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. Berlin 1918, § 14.

[3]) G. Herglotz, Zur Einsteinschen Gravitationstheorie. Sitzungsber. d. Sächs.-Akad., Math.-Phys. Klasse **68**, 199, 1916.

H. Vermeil, Notiz über das mittlere Krümmungsmaß einer $n$fach ausgedehnten Riemannschen Mannigfaltigkeit. Göttinger Nachr. 1917, S. 334.

§ 11.

Für ein eingehenderes Studium der Flächentheorie verweisen wir z. B. auf die Vorlesungen über Differentialgeometrie von L. Bianchi, deutsch von M. Lukat, 2. Aufl. Leipzig u. Berlin 1910.

§ 12.

A. Cayley, Sixth memoir upon quantics. London. Phil. Transact. **149**, 61, 1859; Coll. Papers II, S. 561, 1889. F. Klein, Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie. Math. Ann. **4**, 573, 1871. Siehe auch R. Bonola, Die nichteuklidische Geometrie, deutsch von L. Liebmann. Leipzig u. Berlin (2. Aufl.) 1919.

§ 13 und 14.

J. Laub, Ann. d. Phys. **46**, 705, 1915 (nach Vorlesungen von A. Einstein). A. Einstein, Ann. d. Phys. **49**, 765, 1916.

M. v. Laue, Phys. Zeitschr. **21**, 659, 1920.

[1] Mitgeteilt von A. Sommerfeld u. J. Runge, Ann. d. Phys. **35**, 277, 1911.

§ 15 und 16.

A. Einstein, Berliner Sitzungsber. 1915, S. 778 u. 844 sowie 1918, S. 448; Ann. d. Phys. **49**, 769, 1916.

[1]) E. Schrödinger, Phys. Zeitschr. **19**, 4, 1918.

[2]) A. Einstein, ebend. **19**, 115, 1918.

[3]) Hans Bauer, ebend. **19**, 163, 1918.

§ 17.

A. Einstein, Ann. d. Phys. **49**, 769, 1916; Berliner Sitzungsber. 1915, S. 778 u. 844.

[1]) Derselbe, Berliner Sitzungsber. 1917, S. 142.

§ 18.

[1]) M. v. Laue, Zeitschr. f. Phys. **3**, 389, 1920.

[2]) Derselbe, Phys. Zeitschr. **21**, 659, 1920.

§ 19.

A. Einstein, Berliner Sitzungsber. 1916, S. 688 u. 1918, S. 154.

H. Thirring, Phys. Zeitschr. **19**, 204, 1918.

[1]) Derselbe, ebend. **19**, 33, 1918; **22**, 29, 1921.

[2]) H. Thirring u. J. Lense, ebend. **19**, 156, 1918.

§ 20.

H. A. Lorentz, Verslagen Akad. van Wetenschapen Amsterdam **23**, 1073, 1915; **24**, 1389, 1759, 1916; **25**, 468, 1916.

A. Einstein, Berliner Sitzungsber. 1916, S. 1111.

J. Tresling, Verslagen Akad. Amsterdam **25**, 844, 1916.

A. D. Fokker, ebend. **25**, 1067, 1917.

H. Weyl, Ann. d. Phys. **54**, 117, 1917.

§ 21 bis 23.

A. Einstein, Erklärung der Perihelbewegung des Merkurs aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Berliner Sitzungsber. 1915, S. 831.

K. Schwarzschild, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, ebend. 1916, S. 189. Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie, ebend. 1916, S. 424,

D. Hilbert, Die Grundlagen der Physik. Göttinger Nachr. 1917, S. 53.

L. Flamm, Phys. Zeitschr. **17**, 448, 1916.

[1]) A. Einstein, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik **4**, 411, 1907, bes. S. 461; Ann. d. Phys. **35**, 898, 1911; **38**, 355, 1912.

§ 24.

Die unzusammendrückbare Flüssigkeit behandelte zuerst K. Schwarzschild, Berliner Sitzungsber. 1916, S. 424; sodann H. Weyl in seinem Buch. Für Fälle mit anderen willkürlich angenommenen Zustandsgleichungen löst dasselbe Problem H. Bauer, Wiener Sitzungsber. **127**, 2141, 1918.

§ 25.

H. Reissner, Ann. d. Phys. **50**, 106, 1916.

H. Weyl, ebend. **54**, 117, 1917.

[1]) Levi-Civita, ds^2 einsteiniani in campi newtoniani Rendiconti Accademia dei Lincei. 1917—1919.

[2]) A. De-Zuani, Equilibrio relativo ed equazioni gravitazionali di Einstein nel caso stationario. Nuovo Cimento **18**, 5, 1919.

[3]) A. Palatini, Moti einsteiniani stazionari. Atti des R. Istit. Veneto di scienze, lett. ed arti, **78**, 589, 1919.

§ 26 und 27.

G. Mie, s. § 2, Anm. 12.

D. Hilbert, s. § 21 bis 23.

Weitere Literatur (zum Teil erst während des Druckes dieses Buches erschienen):

A. Kopff, Das Rotationsproblem in der allgemeinen Relativitätstheorie. Naturwissenschaften **9**, 9, 1921.

De Sitter, On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. Monthly notices of Royal astronomical Soc. **7**, November 1917.

A. D. Fokker, De geodetische precessie; een uitvloeisel van Einstein's gravitation theorie. Verslagen Akademie Amsterdam **29**, 1920.

Zusammenstellung der Hauptformeln.

1. Formeltabelle zur Tensoranalysis in vier Dimensionen:

$$d g_{il} = -\sum_{jk} g_{ik} g_{jl} d g^{jk} \quad (61\,\mathrm{b}), \qquad d g^{il} = -\sum_{jk} g^{ik} g^{jl} d g_{jk}, \quad (61\,\mathrm{a})$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} d(\sqrt{-g}) &= \frac{1}{2} \sum_{ik} g^{ik} d g_{ik} = -\frac{1}{2} \sum_{ik} g_{ik} d g^{ik} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-g}} \sum_{ik} g_{ik} d(\sqrt{-g}\, g^{ik}), \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}(62)\\ \text{und}\\ (62\,\mathrm{b})\end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix} j\,k \\ i \end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right) = \sum_l g_{il} \left\{\begin{matrix} j\,k \\ l \end{matrix}\right\}, \quad (53), (56)$$

$$\left\{\begin{matrix} j\,k \\ l \end{matrix}\right\} = \sum_i g^{il} \left[\begin{matrix} j\,k \\ i \end{matrix}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \left[\begin{matrix} i\,l \\ k \end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix}\right] = \sum_m \left(g_{im} \left\{\begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix}\right\} + g_{km} \left\{\begin{matrix} i\,l \\ m \end{matrix}\right\}\right), \quad \begin{matrix}(57)\\ \text{u. } (57\,\mathrm{a})\end{matrix}$$

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -\sum_m \left(g^{im} \left\{\begin{matrix} m\,l \\ k \end{matrix}\right\} + g^{km} \left\{\begin{matrix} m\,l \\ i \end{matrix}\right\}\right). \quad \ldots\ldots \quad (61\,\mathrm{c})$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^l} = \sum_m \left\{\begin{matrix} l\,m \\ m \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62\,\mathrm{a})$$

Differentialgleichung der geodätischen Linie:

$$\ddot{x}^i + \sum_{kl} \left\{\begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix}\right\} \dot{x}^k \dot{x}^l = 0 \quad \ldots\ldots \quad (55)$$

Christoffelsche Formeln für die Transformation der g-Klammern:

$$\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^m \partial x'^n} + \sum_{jk} \left\{\begin{matrix} j\,k \\ l \end{matrix}\right\} \frac{\partial x^j}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} = \sum_k \left\{\begin{matrix} m\,n \\ k \end{matrix}\right\}' \frac{\partial x^l}{\partial x'^k}. \quad (60)$$

Bei **unendlich kleiner Parallelverschiebung** des Vektors A vom Punkt x^i zum Punkt $x^i + dx^i$ gilt:

$$dA^i = -\sum_{kl} \left\{ {k\,l \atop i} \right\} A^k dx^l \quad (67), \qquad dA_i = \sum_{kl} \left\{ {i\,l \atop k} \right\} A_k dx^l. \quad (67\,a)$$

Der Gradient eines Skalars φ ist ein Vierervektor und hat die Komponenten:

$$\Gamma\varrho\alpha\delta_i\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} \quad \cdots\cdots \text{(Vgl. § 9 a)}$$

Die Rotation eines Vierervektors Φ ist ein Sechservektor und hat die Komponenten:

$$\mathfrak{Rot}_{ik}\Phi = \frac{\partial\Phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial\Phi_i}{\partial x^k} \quad \cdots\cdots \text{(Vgl. § 9 a)}$$

Die Divergenz eines Vierervektors ist ein Skalar:

$$Div\,\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\Phi^k)}{\partial x^k} \quad \cdots\cdots \quad (73)$$

Die Divergenz eines beliebigen Tensors zweiten Ranges ist ein Vierervektor mit den Komponenten:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}iv^i\,T &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial(\sqrt{-g}\,T^{ik})}{\partial x^k} + \sum_{kl} \left\{ {k\,l \atop i} \right\} T^{lk}, \\ \mathcal{A}iv_i\,T &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial(\sqrt{-g}\,T_i{}^k)}{\partial x^k} - \sum_{kl} \left\{ {i\,k \atop l} \right\} T_l{}^k. \end{aligned}\right\} \quad (73\,a)$$

Für einen symmetrischen Tensor kann man dafür auch schreiben:

$$\mathcal{A}iv_i\,T = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial(\sqrt{-g}\,T_i{}^k)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \sum_{kl} T^{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \quad \cdot \quad (73\,b)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial(\sqrt{-g}\,T_i{}^k)}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \sum_{kl} T_{kl} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i} \quad \cdot \quad (73\,c)$$

Für einen antisymmetrischen Tensor (Sechservektor) hingegen gilt

$$\mathcal{A}iv^i\,\mathfrak{M} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathfrak{M}^{ik})}{\partial x^k} \quad \cdots \quad (73\,d)$$

$$Div(\mathcal{A}iv\,\mathfrak{M}) = 0. \quad \cdots\cdots\cdots \quad (74)$$

Die duale Divergenz des Sechservektors $\mathfrak{M}$ ist ein vollständig antisymmetrischer Tensor dritten Ranges mit den vier kovarianten Komponenten:

$$\Delta iv^*_{234}\,\mathfrak{M} = \frac{\partial \mathfrak{M}_{23}}{\partial x^4} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{42}}{\partial x^3} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{34}}{\partial x^2} \text{ usw.} \quad \cdot \cdot \quad (\S\ 9\,\mathrm{a})$$

$$\Delta iv^*\,(\mathfrak{Rot}\,\Phi) = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (69)$$

Der Riemann-Christoffelsche Tensor hat die Komponenten:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left\{ {k\,m \atop j} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^m}\left\{ {k\,l \atop j} \right\} + \sum_n \left[\left\{ {l\,n \atop j} \right\}\left\{ {k\,m \atop n} \right\} - \left\{ {m\,n \atop j} \right\}\left\{ {k\,l \atop n} \right\} \right], \quad (76\,\mathrm{a})$$

$$\left.\begin{aligned} R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i\,\partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k\,\partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i\,\partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k\,\partial x^m} \right) \\ + \sum_{np} g^{np}\left(\left[{i\,m \atop n} \right]\left[{k\,l \atop p} \right] - \left[{i\,l \atop n} \right]\left[{k\,m \atop p} \right], \end{aligned}\right\} \quad (79)$$

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml} = R_{lmik} \quad . \; . \quad (79\,\mathrm{a})$$

$$R_{1234} + R_{1423} + R_{1342} = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (79\,\mathrm{b})$$

Der Krümmungstensor hat die Komponenten:

$$\left.\begin{aligned} R_{kl} = \sum_m \left[\frac{\partial}{\partial x^l}\left\{ {k\,m \atop m} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^m}\left\{ {k\,l \atop m} \right\} \right] \\ + \sum_{mn} \left\{ {k\,n \atop m} \right\}\left\{ {l\,m \atop n} \right\} - \left\{ {k\,l \atop m} \right\}\left\{ {m\,n \atop n} \right\}. \end{aligned}\right\} \quad (80)$$

Die invariante Krümmung ist

$$\left.\begin{aligned} R = \sum_{klm} g^{kl}\left[\frac{\partial}{\partial x^l}\left\{ {k\,m \atop m} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^m}\left\{ {k\,l \atop m} \right\} \right. \\ \left. + \sum_n \left(\left\{ {k\,n \atop m} \right\}\left\{ {l\,m \atop n} \right\} - \left\{ {k\,l \atop m} \right\}\left\{ {m\,n \atop n} \right\} \right) \right]. \end{aligned}\right\} \quad [\text{Vgl. } (81)]$$

2. Die physikalischen Grundgleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie.

a) Die Gravitationskonstante $C = 6{,}675 \,.\, 10^{-8}\,\mathrm{g}^{-1}\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{sec}^{-2}$.

b) Die Maxwellschen Gleichungen:

$$\Delta iv^*\,\mathfrak{M} = 0, \qquad \Delta iv\,\mathfrak{V} = P; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (111)$$

dabei ist

$$P^1 = \frac{1}{c}\,(\mathfrak{J}^1 + \varrho\,\mathfrak{q}^1)\sqrt{g^{44}}, \quad \ldots, \quad P^4 = \varrho\sqrt{g^{44}}, \qquad (112)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_{14} &= \mathfrak{E}_1 \text{ usw.}, & \mathfrak{M}_{23} &= \mathfrak{B}_{23} \text{ usw.}, \\ \mathfrak{B}^{14} &= -\sqrt{g^{44}}\,\mathfrak{D}^1 \text{ usw.}, & \mathfrak{B}^{23} &= \sqrt{g^{44}}\,\mathfrak{H}^{23} \text{ usw.}, \end{aligned}\right\} \quad (113)$$

$$\sum_k Y^k \mathfrak{B}_{ik} = \varepsilon \sum_k Y^k \mathfrak{M}_{ik} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (117)$$

$$-[P_i - (YP)\,Y_i] = \frac{\sigma}{c} \sum_k Y^k \mathfrak{M}_{ik} \quad . \; . \; . \quad (116)$$

$$Y_4 \mathfrak{M}_{23} + Y_2 \mathfrak{M}_{34} + Y_3 \mathfrak{M}_{42} = \mu\,(Y_4 \mathfrak{B}_{23} + Y_2 \mathfrak{B}_{34} + Y_3 \mathfrak{B}_{42}). \quad (115)$$

Die elektromagnetische Viererkraft für $\varepsilon = \mu = 1$:

$$F_a = \sum_\beta P^\beta \mathfrak{M}_{a\beta} = -\Delta iv_a\, T, \quad (129) \text{ u. } (130)$$

d. h.

$$F_1 = \varrho\Big[\mathfrak{E}_1 + \frac{1}{c}(\mathfrak{q}^2 \mathfrak{B}_{12} - \mathfrak{q}^3 \mathfrak{B}_{31})\Big]\sqrt{g^{44}} \text{ usw.}, \; F_4 = -\frac{\varrho}{c} \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{q}^i \mathfrak{E}_i \sqrt{g^{44}}.$$

Die Maxwellschen Spannungen:

$$T_a^\beta = \sum_\gamma \mathfrak{M}_{a\gamma} \mathfrak{M}^{\beta\gamma} - \tfrac{1}{2}\delta_a^\beta \; \mathfrak{M}^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (132)$$

c) Hamiltonsches Prinzip für die Bewegung eines Massenpunktes:

$$\int (\tfrac{1}{2} c^2 m\, \delta f + \delta A)\, d\tau = 0, \qquad \delta A = \sum_j K_j\, \delta x^j$$

$$\Big(K^i = \int F^i\, \delta V^0 \text{ Minkowskischer Kraftvektor}\Big).$$

Bewegungsgleichungen:

$$c^2 m \Big[\dot{Y}^i + \sum_{kl} \begin{Bmatrix} kl \\ i \end{Bmatrix} Y^k Y^l\Big] = -K^i \quad . \; . \; . \quad (141)$$

d) Einsteins Feldgleichungen der Schwere:

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R = \varkappa\, T_{ik} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (144)$$

oder

$$R_{ik} = \varkappa\,(T_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik}\, T), \qquad \Big(T = \sum_i T_i^i\Big) \quad . \; . \quad (144\text{b})$$

$$\Delta iv\, T = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (134)$$

$$\varkappa = \frac{8\pi C}{c^4} = 2{,}071 \,.\, 10^{-48}\, \mathrm{g}^{-1}\, \mathrm{cm}^{-1}\, \mathrm{sec}^2 \qquad (162\,\text{a}) \text{ u. } (162\,\text{b})$$

$$\left.\begin{aligned} &T_k^i = \sqrt{g^{44}}\, \mathfrak{p}_k^i, \quad T_i^4 = c\sqrt{g^{44}}\, \mathfrak{g}_i, \quad T_4^i = -\frac{1}{c}\sqrt{g^{44}}\, \mathfrak{S}^i, \\ &(i, k = 1, 2, 3), \quad T_4^4 = -\sqrt{g^{44}}\, W, \end{aligned}\right\} \quad (152)$$

Die Funktion $\mathfrak{H}$ hat die Definition:

$$\mathfrak{H} = \sqrt{-g}\,H, \quad H = \sum_{klmn} g^{kl}\left[\begin{Bmatrix} k\,l \\ n \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} n\,m \\ m \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k\,n \\ m \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l\,m \\ n \end{Bmatrix}\right] \quad (145)$$

Energiedichte, -strömung und Spannungen des Schwerefeldes:

$$t_n^m = \frac{1}{2\varkappa\sqrt{-g}}\left[\delta_n^m\,\mathfrak{H} - \sum_{kl}\gamma_n^{kl}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\gamma_m^{kl}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (150)$$

dabei ist:

$$\gamma_n^{kl} = \frac{\partial}{\partial x^n}(\sqrt{-g}\,g^{kl}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (146)$$

Erhaltungssatz für Energie und Impuls:

$$\sum_m \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,(T_n^m + t_n^m)\right)}{\partial x^m} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (151)$$

e) Im statischen Felde mit der Maßbestimmung:

$$d\tau^2 = c^2 V^2 dt^2 - ds^2, \quad ds^2 = \sum_{i,k=1}^{3}\gamma_{ik}\,dx^i\,dx^k \quad (154)$$

gilt für $i, k, l = 1, 2, 3$

$$\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}^*, \quad \begin{Bmatrix} 4\,4 \\ l \end{Bmatrix} = V\,grad^l\,V, \begin{Bmatrix} i\,4 \\ 4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{V}\,grad_i\,V \quad (158)$$

(die anderen g-Klammern sind Null). Weiter:

$$R_{44} = -V\,div\,grad\,V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (159)$$

Im statischen Felde der Punktladung m gilt

$$d\tau^2 = c^2\frac{r-\alpha}{r}\,dt^2 - \frac{r}{r-\alpha}\,dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + sin^2\vartheta\,d\varphi^2), \quad (200)$$

$$\alpha = 2\frac{Cm}{c^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (201)$$

Führt man

$$x^1 = r\cos\vartheta, \quad x^2 = r\,sin\,\vartheta\cos\varphi, \quad x^3 = r\sin\vartheta\,sin\,\varphi$$

ein, so wird

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{ik} &= \delta_k^i + \frac{\alpha x^i x^k}{r^2(r-\alpha)}, \qquad \gamma = \frac{r}{r-\alpha}, && (194\,a) \\ &\text{und} \\ \gamma^{ik} &= \delta_k^i - \frac{x^i x^k}{r^3}. && (194\,b) \end{aligned}\right\}$$

f) Das Prinzip der kleinsten Wirkung:

$$\delta \int \sqrt{-g} \left[H + \varkappa \left(\boldsymbol{M} + 2 \sum_i P^i \boldsymbol{\Phi}_i \right) \right] d X = 0 \quad . \quad (190)$$

oder

$$\delta \int \left[R + \varkappa \left(\boldsymbol{M} + 2 \sum_i P^i \boldsymbol{\Phi}_i \right) \right] d \Sigma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (190\,\mathrm{a})$$

$$\frac{\partial (\sqrt{-g}\, \boldsymbol{M})}{\partial g^{kl}} = - \sqrt{-g}\, T_{kl} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (188)$$

Für das elektromagnetische Feld und den leeren Raum gilt nach der Maxwellschen Theorie

$$\boldsymbol{M} = - \mathfrak{M}^2 = \tfrac{1}{2} \sum_{hikl} g^{hk} g^{il} \mathfrak{M}_{hl} \mathfrak{M}_{ik} . \quad . \quad . \quad (189\,\mathrm{a})$$

Namen- und Sachregister.

(Die Ziffern bedeuten die Seitenzahlen.)

Abraham 14, 16.
Abwickelung der Flächen 107, 118.
Ähnlichkeitssätze 132.
Äquivalenzprinzip 2, 19, 160, 222.

Bachem 7, 8.
Bauer 176.
Bessel 2.
Bezugssystem 18.
Bohr-Sommerfeldsche Theorie der Spektrallinien 239.
Bolyai 28.
Born 239.

Cassierer 42.
Cayleysche Maßbestimmung 121, 131.
Christoffelsche Dreizeigersymbole s. g-Klammern.
Coriolissche Kraft 162, 200.

Debye 149, 239.
Determinante g 45, 74.
Dielektrizitätskonstante 143.
Differentialoperationen 82, 85.
Differentialquotienten, die zweiten — in Riemannschen Räumen 255.
Dimensionsbetrachtungen 136, 185.
Divergenz, des (dualen) Sechservektors 84; skalare — 86; tensorielle — 85; vektorielle — 87.
Divergenzfreiheit des Maßtensors 88; — des Tensors $R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}$ 98, 167.
Dreizeigersymbole s. g-Klammern.

Eigenzeit 25, 137, 146, 147; Veränderung der — im Schwerefeld 139, 188, 213.
Eikonalgleichung 151.
Einstein, Theorien und Formeln 17, 18, 22, 168, 180, 185, 221, 228; Bemerkungen —s dazu 18, 25, 31, 42, 176, 197, 198.
Einstein-Effekte: Lichtablenkung im Schwerefeld 9, 225; Rotverschiebung 7, 188.
Elektronentheorie 14, 143, 239.
Elektrostatik 187, 235.
Energieimpulstensor 153, 166, 172; — der ruhenden Flüssigkeit 229; — des spannungsfreien Körpers 156.
Energieströmung und Impulsdichte 178.
Energieträgheit 177.
Eötvös 2, 16.
Erhaltungssätze, allgemein 16, 168, 175; — der Elektrizitätsmenge 143, 147; — der mechanischen Energie und des Impulses 172; — der Schwingungszahl des Lichtes 190.
Euklid 27, 29.
Eulerscher Satz über die Krümmungshalbmesser 105.
Evershed 7.

Feldgesetze, elektromagnetische 140; —. — Variationsprinzip 206; — des materiefreien Feldes 201, 204; — des Schwerefeldes s. dort.

Feldstärke, elektrische und magnetische 141, 147; —, ihre Relativität 199.
Fermatscher Satz vom ausgezeichneten Lichtweg 151.
Flächen konstanter Krümmung 112, 117, 120; — negativer Krümmung 111, 120; pseudosphärische — 114, 120, 125; sphärische — 114, 117.
Flüssigkeitskugel, Schwerefeld der 228.
Frei fallender Körper, seine Weltlinie 155.
Freundlich 7.

Gauß 26, 28, 33, 35.
Gaußsche Koordinaten 64, 90, 137.
Gaußsches Krümmungsmaß 107, 119, 259; — in Polarkoordinaten 117.
Gaußscher Satz 88.
Geodätisches Dreieck, Satz über die Winkelsumme im — 111.
Geodätische Linien, Allgemeines 65, 77, 81; Beispiele 69, 106; — des frei fallenden Körpers 157; — eines unter Krafteinfluß stehenden Körpers 164; — des statischen Feldes 181; — des statischen Feldes eines Massenpunktes 216.
Geodätische Nullinien 71, 151, 225.
Geometrie, elliptische 28, 117, 131, 132; elliptische — in der Flüssigkeitskugel 233; hyperbolische — 28, 121, 132; invariantes Kennzeichen der euklidischen — 94; nichteuklidische — 26, 61; nichteuklidische — des Streckenraumes 214, 228.
Gerber 13.
Geschwindigkeit 138; ihre obere Grenze 160.
g-Klammern 68; Formeln über — 74; physikalische Bedeutung der — 159; Transformation der — 72, 160.
Gradient 82.
Grebe 7, 8.
Grenzbedingungen des Schwerefeldes 179.

Hamiltonsches Prinzip 67, 164, 186.
Hauptkrümmungshalbmesser 105, 107.
Helmholtz 32, 36.
Hessenberg 257.
Hilbert 130, 160, 216, 251.
Hohlkugel, Feld der rotierenden 200.

Impulsdichte und Energieströmung 178.
Induktion, magnetische 141.
Inertialsystem 18.
Integralgesetze des elektromagnetischen Feldes 146.
Integralsätze 88.
Invarianten, Definition der — R 202; — der Vektoren und Tensoren 52, 59, 60.
Invarianz der Elektrizitätsmenge 145; — der Naturgesetze 21.

Johns, St. 7.
Jung 90.
Jupiter, Einfluß der Drehung des — auf einen seiner Monde 200.

Kant 22, 27, 33, 42.
Kegelschnitt, der absolute 124 u. f.; die ausgezeichnete Bedeutung des absoluten —es 251.
Klein 28, 60.
Kompaßkörper 92, 109.
Kongruenzsätze 118, 120, 131, 133.
Konvektionsstrom 142.
Koordinaten 18 u. f., 26 u. f., 40; Gaußsche — 64, 90, 137; geodätische — 75; kontravariante und kovariante — 43, 52, 53; Riemannsche — 75, 255, 257; Transformation der — 51, 160.
Kopernikus 22.
Kosmologische Frage 180.
Kossel 239.
Kraftlinien des vierdimensionalen Feldes 150.
Kraftvektor, der Minkowskische 152, 164.

Krümmung, Flächen konstanter — 112, 117, 120; Flächen negativer — 111, 120; Gaußsches Maß der — 107, 119, 259; Gaußsches Maß der — in Polarkoordinaten 117; invariante — 98, 104, 107, 108, 119; invariante — in Polarkoordinaten 117; Tensor der — 97, 166; Sonderstellung des Tensors der — 99; — und Winkelmaß 109, 111, 119, 121.
Krümmungsform 258.

Ladung, elektrische 145.
Lang 90.
Laplacesche Operation 88.
Laplace-Poissonsche Gleichung, ihre Übertragung 166; ihre Verallgemeinerung in der Elektrostatik 187.
Leitfähigkeit, elektrische 143.
Leitungsstrom 140, 142, 146.
Lense 200.
Levi-Civita 239, 257.
Lichtablenkung 9, 225.
Lichtgeschwindigkeit 17, 137; — im Schwerefeld 228; Ausbreitung der Wirkungen mit — 195.
Lichtweg, Fermatscher Satz vom ausgezeichneten — 151.
Linienelement 35 u. f.
Lobatschewski 28.
Lorentz, H. A. 15, 17.
Lorentz-Kontraktion 139.

Mach 18, 187.
Masse, schwere und träge — 1 u. f., 18 u. f., 160, 222; die veränderliche — des Schwerefeldes 165, 186.
Massenpunktes, kräftefreie Bewegung des — 156; Bewegung eines — unter Einfluß einer Kraft 164; Schwerefeld des — 208 u. f.
Materie, Mies Theorie der 239 u. f.
Maxwell 14.
Maxwellsche Gleichungen 140, 187; — in der Mieschen Theorie 239 u. f.; —, ihr Variationsprinzip 206.
Merkur, Perihelbewegung des —s 5, 217.
Michelson-Versuches, Bedeutung des — 39.
Mie 16, 239 u. f.
Minkowski 15.
Mossotti 15
Multiplikation von Vektoren und Tensoren 54, 58.

Nachkegel, Vor- und — 72.
Neumann 12.
Newcomb 6.
Newtonsches Anziehungsgesetz 1, 5, 12 u. f., 184.
Nordström 16, 17.
Nullinien 71, 151, 225.

Optik, geometrische 147; — des Schwerefeldes 226.

Palatini 239.
Parallelen, —axiom 27, 95; Begriff der — 94; — in der nichteuklidischen Geometrie 126, 129.
Parallelverschiebung von Vektoren in Riemannschen Räumen 78, 91, 108, 131.
Perihelbewegung 5, 12, 217.
Permeabilität, magnetische 142.
Planck 30, 178.
Planetenbewegung 5, 12, 184, 217.
Poincaré 15, 29, 226.
Polarisation, elektrische 143.
Polarkoordinaten 115.
Prinzip der kleinsten Wirkung 201 u. f.
Pseudosphäre 114.
Punktladung, Schwerefeld der elektrischen — 235.
Pythagoras, verallgemeinerter Satz des 29.

Raumdichte, elektrische 140.
Riemann 29, 35, 41, 160, 251, 257.
Riemann-Christoffelscher Tensor 93, 95, 166, 257.
Riemannsche Koordinaten 75, 255, 257.

Riemannschen Räumen, Geodäsie in — 29, 35 u. f., 65 u. f.; Parallelverschiebung in — 78, 91, 108, 131.
Rotation eines Vektors 82.
— (als Bewegung) 24, 162, 200.
Rotationssymmetrische Schwerefelder 239.
Rotverschiebung der Spektrallinien 7, 188.
Royds 7.
Ruhdichte 156.
Ruhmasse 158, 165.
Ruhsystem 139.

Schlick, 29,
Schouten 257.
Schraubensinn 58.
Schrödinger 175.
Schwarzschild 7, 213.
Schwere, Theorie der — 1 u. f., 12 u. f., 186.
Schwerefeld, Auftreten von —ern 19, 175, 176, 198; allgemeine Formeln für die Bewegung in —ern 157, 164, 186; spezielle Beispiele für die Bewegung in —ern 18 u. f., 198, 222; Differentialgleichungen des —es 166; — der Flüssigkeitskugel 228; Gesetze des —es 166, 186; Grenzbedingungen des —es 179; — einer rotierenden Hohlkugel 200; Lichtstrahlen im — des ruhenden Massenpunktes 225; veränderliche Masse m des —es 165, 186; — des ruhenden Massenpunktes 208 u. f.; — bei Abwesenheit von Materie (Variationsprinzip) 201, 204; — bei Anwesenheit von Materie (Variationsprinzip) 204; — der elektrischen Punktladung 235; Untersuchungen über rotationssymmetrische —er 239; zentralsymmetrische —er 212 u. f.
Schwerepotential, das tensorielle — 159.
Schwerewellen, ebene 196; uneigentliche — 198.
Schwingungszahl, Erhaltung der — im Felde 190.
Sechservektor 50; Divergenz des —s 88; Divergenz des dualen —s 84; Invariante des —s 59.
v. Seeliger 6, 12.
Sommerfeld, Bohr-—sche Theorie der Spektrallinien 239.
Southerns 2, 16.
Spannungen, elektromagnetische 152; — des Schwerefeldes 166 u. f., 175.
Spektrallinien, Rotverschiebung der 7, 188.
Sphärische Flächen 114, 117.
Statische Felder 179 u. f., 187, 208 u. f.
Streckenraumes, Begriff des — 24; Geometrie des — 214, 228, 233.
Stromdichte, elektrische 140, 142, 146.
Systems, Bewegung des vollständig statischen — 174.

Tensor, (vollständig) antisymmetrische —en 50, 56, 83, 84, 88; Differentialoperationen der —en 82, 85; Divergenz von —en 84 u. f.; Energieimpulstensor 153, 166, 172; Energieimpulstensor der ruhenden Flüssigkeit 229; Energieimpulstensor des spannungsfreien Körpers 156; Invarianten der —en 59, 60; — der Krümmung 97, 166; Sonderstellung des —s der Krümmung 99; — der Maßbestimmung 51; Divergenzfreiheit des —s der Maßbestimmung 88; physikalische Bedeutung des —s der Maßbestimmung 159; — der Materie 172; Multiplikation der —en 54 u. f.; der Riemann-Christoffelsche — 93, 95, 166, 257; Spannungstensor s. Energieimpulstensor; symmetrische —en 49, 50, 87; Übergang von Welt- zu Raumtensoren 63; Verjüngung der —en 54.
Thirring 200.
Trägheit, der Körper s. Äquivalenzprinzip; -sgesetz der quadratischen Formen 40, 253.

Traktrix, Drehfläche der — 114.
Transformation der g-Klammern 72, 160; — der Koordinaten 51, 160; — der Tensoren zweiten Ranges 48, 50, 58, 62; — der Tensoren höheren Ranges 53, 58, 62; — der Vektoren 46, 62; — der Volumina 52.

Uhren, Gang von bewegten — 139; Gang von ruhenden — 25, 137, 139, 147, 188 u. f., 213.

Variationsprinzipien 201 u. f.
Vektoren, Addition und Subtraktion der — 79; Differentialoperationen der — 82; Divergenzvektoren 87; elektrische und magnetische — 140; Parallelverschiebung der — in Riemannschen Räumen 78, 91, 108, 131; — in Riemannschen Räumen 46.
Verjüngung der Tensoren 54.
Le Verrier 6.
Verschiebungsvektor 140.
Vierergeschwindigkeit 138.
Viererkraft 152, 164.
Viererpotential 147, 243.
Viererstrom 140.
Volumen 53, 60.
Vor- und Nachkegel 72.

Wellen, elektrische 199; ebene Schwerewellen 196; uneigentliche — 198.
Wellengleichung der Optik 148; — der Schwerewirkungen 195 u. f.
Weltfunktion der Mieschen Theorie 242.
Weltlinie 72; — des freien Körpers 155.
Weyl 239, 257.
Winkel in geodätischen Dreiecken 109, 111, 119, 121, 130.
Wirkung, Prinzip der kleinsten 201 u. f.
de Wisniewski 15.

Zeeman, Versuche von 2, 16.
Zentralsymmetrische Schwerefelder 212 u. f.
Zentrifugalkraft 162, 200.
Zöllner 15.
de Zuani 239.
Zwischengebiete 72.

QC
173
.55
L28
1921
Bd.2
c.1
PASC

Laue, Max Theodor Felix von
Die Relativitätstheorie

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY