ELEMENTE

DER

ABSOLUTEN GEOMETRIE

VON

DR. J. Johannes FRISCHAUF,
PROFESSOR A. D. UNIVERSITÄT GRAZ.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1876.

Mrs. Beman
Gt
4-30-1924

Vorwort.

Die Grundlage der vorliegenden Schrift bildet meine vor mehr als drei Jahren erschienene freie Bearbeitung von J. Bolyai's absoluter Raumlehre.* Zu dieser Arbeit veranlasste mich der damals in der „Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“ in höchst unduldsamer und leidenschaftlicher Weise geführte Streit über die zweckmässigste Behandlung der Lehre von den Parallelen; dadurch wollte ich Klarheit in diese wichtige Frage bringen, namentlich das Unnütze der Beweis-Versuche für das elfte euclidische Axiom darlegen.

Da gegenwärtig die richtige Ansicht über die Parallelen-Frage in die meisten Kreise gedrungen ist, so glaubte ich, dass eine vollständige Untersuchung der geometrischen Voraussetzungen und eine übersichtliche Zusammenstellung der Resultate der darauf bezüglichen Arbeiten nicht ohne Interesse sein dürfte.

Die Literatur, soweit sie sich auf den hier in engen Grenzen behandelten Stoff bezieht, konnte Dank der vielfachen Unterstützug meiner Freunde ziemlich vollständig berücksichtigt werden. Besonders dankend muss ich die Bereitwilligkeit des Herrn Dr. J. Hoüel (Professor in Bordeaux) rühmen, der mir nebst anderen wichtigen Schriften das Manuscript seiner Uebersetzung des in russischer Sprache erschienenen Hauptwerkes von Lobatschewsky's „Neue Principien der Geometrie nebst einer vollständigen Theorie der Parallelen“ für meine Studien zur Verfügung stellte.

* Absolute Geometrie nach J. Bolyai bearbeitet. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner. 1872.

Die Darstellungsweise wurde durch die Rücksicht bestimmt, dass meine Schrift Lesern gewidmet sei, welche mit der gewöhnlichen Behandlung der Geometrie vertraut, das Bedürfniss einer Aufklärung der Dunkelheiten in den Principien fühlen; diesen Zweck glaubte ich durch eine kurze, alles überflüssige Detail vermeidende Schreibweise am besten zu erreichen. Dass ich unter diesen Umständen bei der Wahl der aus den Elementen als bekannt vorauszusetzenden Theorien manchmal nach der einen oder anderen Richtung etwas zu weit ging, möge der geehrte Leser entschuldigen. Als das Endziel meiner Schrift halte ich die Erkenntniss des Einflusses einer jeden einzelnen geometrischen Voraussetzung: denn nur dadurch können die den verschiedenen Formen der Erfahrung entsprechenden Theorien aufgebaut werden. Die für die letzteren eben erwähnten Fragen höchst wichtigen Untersuchungen von Riemann und Helmholtz fanden hier eine ungleiche Berücksichtigung. Für die erstere suchte ich durch erläuternde Bemerkungen und die Angabe der Schriften, welche die bei Riemann unterdrückten Rechnungen enthalten, dem Leser das Studium dieser Abhandlung zu erleichtern. Die Arbeit von Helmholtz wurde (mit Ausnahme der Schlussfolgerungen) hier desshalb vollständig mitgetheilt, weil sie den Zusammenhang der analytischen und synthetischen Voraussetzungen der Geometrie aufklärt, und weil es möglich ist, die analytischen Entwicklungen in zwei wesentlichen Punkten zu vereinfachen, wodurch diese Untersuchung an Klarheit und Uebersichtlichkeit bedeutend gewinnt.

Bei der Correctur des Druckes wurde ich vom Herrn A. v. Frank, Lehrer an der hiesigen Gewerbeschule, auf das freundlichste unterstützt, wofür ich ihm meinen innigsten Dank ausspreche.

Graz, im März 1876.

Johannes Frischauf.

Inhalt.

Erstes Buch.

Voraussetzungen und Grundgebilde.

Zweites Buch.

Erster Abschnitt.

Parallelen-Axiom und euclidische Geometrie.

Zweiter Abschnitt.

Nichteuclidische Geometrie.

Drittes Buch.

Endlicher Raum und absolute Geometrie.

Erstes Buch.

Voraussetzungen und Grundgebilde.

Einleitende Bemerkungen.

1.

Die Erfahrung führt uns zur Idee, die Körper ohne Rücksicht auf ihre besonderen Eigenschaften blos nach der Möglichkeit der Zusammensetzung zu einem anderen und der Zerlegung in Theile zu betrachten. Die Erfahrung lässt uns auch erkennen, dass jeder Körper einen gewissen Raum einnimmt, nämlich einen Theil des durch die Erfahrung gegebenen Raumes. Dadurch gelangen wir zur Idee eines Raumes, in welchem Körper sein können, aber nicht sein müssen. Dieser Raum ist, da wir ihn durch das Wegdenken der in demselben sich befindlichen Dinge erhalten, ein leerer Raum; man nennt ihn desshalb auch den idealen.

In dem idealen Raume kann man sich einzelne Theile denken, die durch die Körper der Erfahrung ausgefüllt werden können. Diese Theile kann man unter einander gleichartig voraussetzen — weil sie eben durch keine bestimmten Körper ausgefüllt sind. Den idealen Raum stellt man sich daher überall gleichartig und ohne Unterbrechung zusammenhängend, d. i. stetig vor. Derselbe ist daher auch theilbar bis zu beliebig kleinen Theilen.

2.

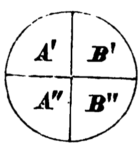
Ein aus dem (idealen) Raume ausgeschiedener (d. i. für sich betrachteter) Theil heisst ein (mathematischer) Körper, das ihn vom Gesammtraume Abgrenzende heisst die Oberfläche des Körpers.

H.H.V.

Durch einen Schnitt $\mathfrak{S}$ kann ein Körper **K** in zwei Theile **A** und **B** zerlegt werden, welche letztere wieder durch Zusammenfügung den ersten Körper **K** bilden. Man sagt: die Körper **A** und **B** berühren sich im Schnitte $\mathfrak{S}$. Der Schnitt $\mathfrak{S}$ heisst auch eine Fläche, die Körper **A** und **B** bestimmen die entgegengesetzten Seiten derselben.

Bei zwei Schnitten $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ desselben Körpers **K** können zwei Fälle eintreten. Liegt der eine Schnitt vollständig auf der einen Seite des ersten, so wird der dieser Seite zugehörige Theil von **K** wieder in zwei, also der ursprüngliche Körper in drei Theile zerlegt. Liegt jedoch der eine Schnitt zu beiden Seiten des anderen, d. h. geht er durch den anderen Schnitt hindurch, so wird jeder der beiden Theilkörper wieder in zwei Körper, also der ursprüngliche Körper in vier Theile zerlegt. Die beiden Schnitte $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ schneiden sich in einer Linie l, welche die Durchschnittslinie der beiden Schnittflächen heisst. Sind **A** und **B** die Theile von **K**, erhalten durch den ersten Schnitt $\mathfrak{S}$, **A**$'$ und **A**$''$, **B**$'$ und **B**$''$ die Theile in Folge eines zweiten Schnittes $\mathfrak{S}'$ der zweiten Art, so berühren sich die Körperpaare **A**$'$ und **B**$''$, **A**$''$ und **B**$'$, welche zu entgegengesetzten Seiten der beiden Schnitte liegen, in der gemeinsamen Linie l dieser Schnitte.

Fig. 1.



Ein dritter Schnitt $\mathfrak{S}''$ kann derart geführt werden, dass er jeden der vier Theilkörper der beiden ersten Schnitte, also auch die beiden ersten Schnitte selbst, mithin auch ihre Durchschnittslinie in einem Punkte P schneidet. Der ursprüngliche Körper **K** wird dadurch in acht Theile zerlegt; je zwei Theil-Körper der vier Paare, welche zu entgegengesetzten Seiten der drei Schnitte liegen, berühren sich in dem Punkte P.

Denkt man sich von den Theilen **A** und **B** des Körpers **K** fortgesetzt ohne Ende Theile abgeschnitten ohne den Schnitt $\mathfrak{S}$ zu treffen, so erhält man den Begriff der Fläche $\mathfrak{S}$ als eines selbstständigen Gebildes im Raume. In gleicher Weise kann man von zwei Körpern, die sich in einer Linie l berühren, fortgesetzt Theile abschneiden, ohne diese Linie l zu treffen, und dadurch zum Begriffe der Linie im Raume gelangen. Den Punkt im Raume kann man als das Endresultat der Schnitte betrachten, die fortgesetzt an zwei in einem Punkte sich berührenden Körpern derart geführt werden, dass sie den Punkt nicht treffen.

3.

Die Oberfläche eines Körpers kann als der Inbegriff der Schnitte, welche den Körper vom Raume abtrennen, betrachtet werden. Jede Fläche kann daher als Theil der Oberfläche eines Körpers angesehen werden, sie wird von letzterem durch einen Inbegriff von Linien abgetrennt, welche der Umfang der Fläche heisst. Wird eine Fläche durch einen Schnitt in zwei Flächen zerlegt, so bestimmen die letzteren die beiden entgegengesetzten Seiten der Linie, welche der Schnitt auf der gegebenen Fläche bildet. Ein Schnitt trifft eine Linie in einem Punkte, die beiden Theile der Linie bestimmen die entgegengesetzten Seiten des Punktes.

Die entgegengesetzten Seiten der Oberfläche eines Körpers, welche durch den Körper und den ihn umgebenden Raum bestimmt sind, werden resp. die innere und die äussere Seite der Oberfläche genannt. In gleicher Weise nennt man die beiden entgegengesetzten Seiten des Umfanges einer Fläche, welche durch die Fläche und den sie ergänzenden Theil der Oberfläche des (hinzugedachten) Körpers bestimmt sind, resp. die innere und die äussere Seite der Fläche.

4.

Punkt, Linie, Fläche und Körper sind die Grundgebilde der Geometrie. Jedes Gebilde kann von einem Orte des Raumes an einen anderen gebracht werden; zwei Gebilde, etwa A und B, welche sich nur durch die Orte, an denen sie sich befinden, unterscheiden, werden congruente Gebilde genannt und durch $A \cong B$ bezeichnet. Diese vorausgesetzte Beweglichkeit ermöglicht die Einführung von Gebilden, welche aus lauter congruenten Elementen in gleicher Weise zusammengesetzt sind, und welche man „an allen Stellen gleichartig“ nennt. Zwei solche Gebilde können ohne Rücksicht auf ihre Grenzen zur Deckung gebracht und mit einander verglichen d. i. gemessen werden. Man prüft z. B.

eine an allen Stellen als gleichartig vorausgesetzte Fläche hinsichtlich dieser Eigenschaft dadurch, dass jeder beliebige Theil derselben durch Verschiebung auf der Fläche mit jedem beliebigen Theil der ungeänderten Fläche zur Deckung gebracht werden kann. Bei dieser Verschiebung fällt die äussere oder innere Seite des verschobenen Theils resp. mit der inneren oder äusseren Seite der ganzen betrachteten Fläche zusammen. In gleicher Weise kann auf einer solchen Fläche in einer an allen Stellen gleichartigen Linie jeder ihrer Theile mit einem beliebigen anderen zur Deckung gebracht werden. Beispiele hierzu sind die Kugelfläche und der auf ihr liegende Kreis nach unseren gewöhnlichen Vorstellungen.

Eine Fläche heisst umkehrbar, wenn — dieselbe zweimal gedacht — die inneren oder äusseren Seiten zur Deckung gebracht werden können.

Zwei Gebilde, welche aus congruenten Theilen in beliebiger Weise zusammengefügt sind, werden gleich genannt, und zwar inhaltsgleich oder flächengleich, je nachdem Körper oder Flächenräume in Betracht kommen.

Anmerkung. Die Voraussetzung der Congruenz ist bei allen auf Grössenbestimmungen bezüglichen Untersuchungen unerlässlich; denn jede Grössenbestimmung setzt die Möglichkeit des Abtragens der Grösseneinheit von einer (zu messenden) gegebenen Grösse, also die Unabhängigkeit der Grössen vom Orte voraus.

Dieselbe Voraussetzung liegt auch der Arithmetik zu Grunde, ob man nun die Zahl als das Ergebniss der wiederholten Setzung eines Dinges oder als Beziehung eines Gliedes einer Reihe zu einem Anfangsgliede betrachtet. Denn im ersteren Falle hat man eine Menge identischer Objecte; im zweiten Falle gelangt man nur dann zum Zahl-Begriff, wenn die Beziehung zwischen immer je zweien der Objecte in der Reihe unverändert bleibt. In beiden Fällen hat man es also mit Identitäten zu thun. Die Anwendung der Rechnung auf die Geometrie setzt also vor allem anderen die Möglichkeit der Congruenz voraus.

Die Messung der Raumgrössen beruht auf der Voraussetzung der Zusammensetzung aus congruenten Elementen. Es werden daher alle Linien aus congruenten Linien-Elementen, alle Flächen aus congruenten Flächen-Elementen und consequentermassen alle Körper aus congruenten Körper-Elementen zusammengesetzt betrachtet.*

* Ausführlichere Untersuchungen über die mathematischen Voraussetzungen sollen im dritten Buche folgen.

5.

Die Gebilde werden in begrenzte und unbegrenzte, endliche und unendliche unterschieden. Der Ausgang dieser Benennung stammt von dem Reihenbegriffe. Eine Reihe ist der Inbegriff von Grössen $A, B, C, \ldots K, L, M, \ldots$ in welchem jede einzelne Grösse d. i. jedes Glied, etwa L, nach einem und demselben Bildungsgesetze durch seine Beziehung zu seinem vorausgehenden K oder nachfolgenden M bestimmt ist. Die Möglichkeit des successiven Ueberganges durch alle Glieder einer Reihe findet auch bei den geometrischen Gebilden statt; man kann von einem Theil eines Gebildes zum nächsten, u. s. w. übergehen, d. h. die auf einander folgenden Theile des Gebildes als die Glieder einer Reihe betrachten. Es genügt daher die oben angeführten Unterschiede bei den Reihen zu erörtern.

Eine Reihe heisst unbegrenzt, wenn man — ohne Umkehrung des Uebergangsprocesses — fortgesetzt von einem Gliede zu einem nächsten übergehen kann. Gelangt man bei diesem Uebergang zum Ausgangs-Gliede zurück, so ist die Reihe eine endliche; gestattet jedoch die Reihe ein fortgesetztes Uebergehen von einem Gliede zu einem andern, ohne dass man zu einem früheren Gliede zurückkommt, so heisst die Reihe eine unendliche. Als Beispiel einer endlichen (unbegrenzten) Reihe können die (gleichen) Theile einer Kreislinie dienen; als unendliche Reihe erscheint die unbegrenzt fortgesetzte Reihe der ganzen Zahlen. Jede unendliche Reihe ist unbegrenzt, da man in einer solchen Reihe fortgesetzt von einem Gliede zu einem anderen übergehen kann.

Dem idealen Raume wird mit Recht die Eigenschaft der „Unbegrenztheit“ zugesprochen. Denn eine Grenze würde eine Ungleichheit mit den übrigen Theilen voraussetzen, was unseren Vorstellungen widerspricht. Daraus folgt keineswegs die Unendlichkeit des Raumes, letztere Eigenschaft müsste erst besonders nachgewiesen werden.

Anmerkung 1. Die Unterscheidung zwischen „unbegrenzt“ und „unendlich“ wurde zuerst von B. Riemann in seiner Habilitationsschrift „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ (vorgelesen zu Göttingen am 10. Juni 1854) gemacht. Berücksichtigt man, dass im Unbegrenzten in Folge des fortgesetzt wiederholten Uebergangs-Processes auch das Moment des Unendlichen vorkommt, indem zur Darstellung dieser Wiederholung die Reihe der ganzen Zahlen gewählt werden kann, so darf man sich nicht wundern, wenn mit der Unbegrenztheit des Raumes demselben auch zugleich die Eigenschaft der Unendlichkeit zuerkannt wurde.

Anmerkung 2. Die Eigenschaften des idealen Raumes sind durch die in ihm befindlichen Gebilde bedingt. Es ist mindestens in der Geometrie unnütz, ihm andere Eigenschaften noch zuzusprechen. Man wird daher den idealen Raum dann als unendlich voraussetzen, wenn unendliche Gebilde in Betracht gezogen werden.

6.

Aus den Erklärungen des vor. Art. folgt:

a) Die Oberfläche eines vollständig begrenzten Körpers kann als eine unbegrenzte Fläche betrachtet werden. Gleiches gilt auch von dem Umfang einer Fläche eines Körpers.

b) Sind auf einer Fläche zwei unbegrenzte Linien gegeben, und schneidet die eine den Umfang der durch die andere bestimmten Fläche einmal, so muss sie denselben mindestens nochmals schneiden. Denn im Momente des Schneidens geht die unbegrenzte schneidende Linie aus dem Aeussern ins Innere der Fläche, sie muss also, um zu den Punkten im Aeussern wieder zurückzukehren, den Umfang beim Austritte nochmals schneiden.

Da die unbegrenzte schneidende Linie nach dem Austritte die Fläche der zweiten Linie nochmals schneiden kann, u. s. w., so gilt allgemein der Satz: Zwei unbegrenzte Linien auf derselben Fläche schneiden sich in einer geraden Anzahl von Punkten, wenn sie sich einmal schneiden.

c) Analog wie in b) wird bewiesen: Eine unbegrenzte Linie schneidet die Oberfläche eines Körpers in einer geraden Anzahl von Punkten, wenn sie dieselbe einmal schneidet.

7.

Die Aufgabe der Geometrie besteht in der Erforschung der Eigenschaften der Gebilde, sowol der einfachen unmittelbar gegebenen, als auch solcher, welche aus diesen durch Verbindung und unter Voraussetzung des Congruenz-Axioms erhalten werden. Man beginnt ihre Entwicklung gewöhnlich derart, dass man gewisse einfache Gebilde durch ihre Definitionen einführt. Es wird die Existenz von Linien und Flächen, die resp. aus congruenten Theilen zusammengesetzt sind, vorausgesetzt. Nennt man, wie dies fast allgemein geschieht, Gerade diejenige Linie, die durch zwei Punkte bestimmt ist — die also aus congruenten Stücken zusammengesetzt, mithin an allen Stellen gleichartig ist —, ferner Ebene diejenige Fläche, dass die geradlinige Verbindung zweier Punkte vollständig in ihr liegt; so sind mit der Unbegrenztheit uud Unendlichkeit der Geraden die Unbegrenztheit und Unendlichkeit der Ebene ausgesprochen. Da die Unbegrenztheit des idealen Raumes aus dessen Gleichartigkeit an allen Theilen folgt, so kann der Geraden, also auch der Ebene die Eigenschaft der Unbegrenztheit zuerkannt werden. Die Eigenschaften der Endlichkeit und Unendlichkeit müssen besonders vorausgesetzt werden, und daher die bezüglichen Formen der Geometrie einzeln entwickelt werden.

An der Stelle dieses gewöhnlichen Verfahrens sollen diese Gebilde aus einfacheren Voraussetzungen hergeleitet werden, wodurch auch ihre Eigenschaften vollständiger und naturgemässer entwickelt werden.

Anmerkung 1. Diese Ableitung wurde in gelungener Weise zuerst von W. Bolyai und Lobatschewsky durchgeführt. Der Grundgedanke, welcher bereits von Leibniz (s. Uylenbrök „Christiani Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae" Hagae MDCCCXXXIII, Fasc. II, p. 8) bei der Erklärung der geometrischen Orte angedeutet wurde, besteht in Folgendem: Um die Ebene zu erhalten, denke man sich von zwei Punkten O und O' (als Mittelpunkte) fortgesetzt (concentrische) Kugelflächen mit (demselben aber) immer grösser werdenden Radius beschrieben. Der Inbegriff der Durchschnittslinien je zweier Kugelflächen mit gleichem Radius ist eine Ebene. Dreht man die sämmtlichen Durchschnittslinien d. h. Kreise um die durch die Endpunkte eines Durchmessers eines dieser Kreise bestimmte Gerade als Axe, so bleiben bei dieser Bewegung die Punkte der Axe in Ruhe, während alle übrigen Punkte der Ebene ihre Lage verändern.

Die ziemlich übereinstimmende Darstellung der beiden oben genannten Mathematiker wurde auch in dieser Schrift befolgt.

Anmerkung 2. Die Versinnlichung von geometrischen Figuren und ihren Beziehungen durch Zeichnung hat nur den Zweck, eine Uebersicht der Lagenverhältnisse und der Anordnung im Allgemeinen zu vermitteln. Daraus folgt, dass es nicht nöthig ist, die wahren Dimensionen (oder deren Verhältnisse) der Figuren durch eine Zeichnung darzustellen — was für räumliche Gebilde auch unmöglich ist —; sondern es genügt, wenn die Linien, Winkel, . . der Figur durch Linien, Winkel, . . in der Zeichnung versinnlicht sind, ohne dass man sich zu sehr um die Richtigkeit der einzelnen Verhältnisse zu kümmern braucht. Diese Verzerrung kann sogar in den einzelnen Theilen der Zeichnung wechseln; namentlich für diejenigen Theile der Figur, welche in der vorliegenden Untersuchung gar nicht in Betracht kommen, kann die Abweichung ziemlich bedeutend werden, während es zweckmässig ist, von den in Untersuchung gezogenen Theilen der Figur eine möglichst richtige Zeichnung zu liefern. Diese beiläufige Andeutung der Lagenverhältnisse der Figuren findet in der absoluten Geometrie häufig statt. Aber auch in den angewandten mathematischen Wissenschaften verfährt man ja auf dieselbe Art. Z. B. Die nahezu kreisförmigen Planetenbahnen werden bei der Untersuchung der elliptischen Bewegung durch stark excentrische Ellipsen, hingegen, wenn es sich um die Anordnung der Bahnen im Sonnensystem handelt, durch Kreise, deren Radien nicht in den Verhältnissen der mittleren Entfernungen stehen, sondern so gewählt werden, dass man eine bequeme Zeichnung erhält, versinnlicht.

Kugelfläche und Kreislinie.

8.

Um die gegenseitige Lage zweier Punkte A und B zu fixiren, denke man sich dieselbe durch eine beliebige feste Linie (die man sich nach Art. 2 aus einem Körper geschnitten denken kann) verbunden. Diese Verbindung soll durch $\overline{AB}$ bezeichnet werden. Sind die Punkte $A, B, C, ..$ eines Gebildes durch beliebige Paare Linien in feste Verbindung gesetzt, was durch $\overline{ABC}\,..$ ausgedrückt werden soll, so kann dieses Gebilde aus irgend einem Theile des Raumes in einen anderen Raum-Theil übertragen werden. Sind nach Ausführung dieser Uebertragung $A', B', C', ..$ die entsprechenden Punkte des Gebildes in dem anderen Raumtheil, so nennt man nach Art. 4 die Gebilde $\overline{ABC}\,..$ und $\overline{A'B'C'}\,..$ congruent und bezeichnet dies durch $\overline{ABC}\,.. \cong \overline{A'B'C'}\,..$.

Sind A und B, A' und B' zwei Punktpaare im Raume von der Eigenschaft, dass $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ist, so sagt man: die Punkte A' und B' haben gleichen Abstand mit den Punkten A und B.

Der Inbegriff aller Punkte M, welche von einem gegebenen Punkt O gleichen Abstand haben, heisst eine Kugelfläche. Diese ist an allen Stellen gleichartig, stetig und theilt den Raum in zwei Bestandtheile: in einen allseitig begrenzten und einen unbegrenzten. Jeder Punkt des begrenzten Theils kann nur in den unbegrenzten gelangen, wenn er durch die Kugelfläche geht. Der Punkt O heisst der Mittelpunkt, der unveränderliche Abstand der Punkte O und M — durch OM bezeichnet — der Radius der Kugelfläche. Der durch die Kugelfläche abgegrenzte (körperliche) Raum wird eine Kugel genannt.

Durch den Mittelpunkt und den Radius ist die Kugelfläche, also auch die Kugel eindeutig bestimmt.

Zu jeder Kugelfläche kann man sich aus demselben Mittelpunkte eine zweite die erstere einschliessende denken, man sagt dann: die zweite hat einen grösseren Radius als die erste.

Zwei Theile von Kugelflächen mit verschiedenen Radien können nicht (ohne Rücksicht auf die Grenzen) zur Deckung gebracht werden. Denn ergänzte man diese Theile zu ihren Kugelflächen, so müssten im Falle der Möglichkeit der Deckung der Theile auch die ganzen Kugelflächen sich decken können.

9.

Zwei Kugelflächen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ mit verschiedenen Mittelpunkten O und O', von denen die eine theilweise innerhalb, theilweise ausserhalb der andern liegt, schneiden sich in einer Linie k, welche eine Kreislinie genannt wird. Die Kreislinie ist (nach dem Grundsatze „gleiche Bestimmungen erzeugen Gleiches“) an allen Stellen gleichartig. Daraus folgt:

a) Sind M und N zwei beliebige Punkte der Kreislinie, so kann das Gebilde $\overline{OO'M}$ mit dem Gebilde $\overline{OO'N}$ zur Deckung gebracht werden.

b) Denkt man sich von einem ihrer Punkte, etwa A, zwei Punkte M und M' nach entgegengesetztem Sinne in gleicher Weise bewegt, so treffen sie in einem Punkte B derart zusammen, dass sie durch die beiden Punkte A und B in zwei congruente Theile zerlegt wird. Man sagt: die Kreislinie ist von A aus in B halbirt.

In ähnlicher Weise kann jedes der beiden Stücke AMB und $AM'B$ in zwei congruente Theile zerlegt werden, u. s. w.,

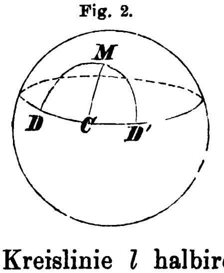
d. h. man kann sich die Kreislinie aus congruenten Stücken bestehend denken.

Jede der beiden Kugelflächen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ wird durch die Kreislinie k in zwei Flächen-Segmente zerlegt; es seien $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ die Segmente von $\mathfrak{S}$. Das von der Fläche $\mathfrak{S}'$ eingeschlossene Segment, etwa $\mathfrak{B}$, wird mit der stetigen Vergrösserung des Radius der Kugelfläche $\mathfrak{S}'$ so lange stetig wachsen, bis die ganze Fläche $\mathfrak{S}$ von der Fläche $\mathfrak{S}'$ eingeschlossen ist. Durch stetige Verminderung des Radius von $\mathfrak{S}'$ wird das eingeschlossene Segment $\mathfrak{B}$ der Fläche $\mathfrak{S}$ bis zum Verschwinden abnehmen, in welchem Momente die beiden Flächen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ sich berühren* und zwar von innen oder von aussen, je nachdem der Punkt O' im Inneren oder Aeusseren der Kugelfläche liegt. Bei fortgesetzter Abnahme des Radius der Fläche $\mathfrak{S}'$ wird die zugehörige Kugel entweder ganz innerhalb oder ganz ausserhalb der Fläche $\mathfrak{S}$ liegen. Daraus folgt, dass eine Fläche $\mathfrak{S}'$ existiren muss, für welche die beiden Segmente $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ einander gleich werden; die zugehörige Kreislinie k halbirt also die Fläche $\mathfrak{S}$ und wird dann eine Hauptlinie dieser Fläche genannt.

10.

Es sei $\mathfrak{B}$ das kleinere Segment der Kugelfläche $\mathfrak{S}$. Von einem beliebigen Punkt C der Linie k lasse man einen Punkt D in der Linie k bewegen und beschreibe aus C mit dem jedesmaligen Radius CD eine Kugelfläche; diese schneidet die Fläche $\mathfrak{S}$ in einer Kreislinie l und bestimmt in der Linie k auf der mit D entgegengesetzten Seite des Punktes C einen Punkt D' derart, dass $CD = CD'$ ist. Das auf dem Segmente $\mathfrak{B}$ liegende Stück DD' der Kreislinie l halbire man im Punkte M (indem man von D und D' aus Punkte in gleicher Weise bewegen lässt, welche in der Mitte M zusammentreffen). Diese Punkte M construire man stetig vom Radius Null bis zu jenem Radius,

Fig. 2.



* Ob diese Berührung in einem oder in mehreren Punkten stattfindet, wird im Folgenden erwiesen.

der durch die beiden Punkte C und C', wo C' der zu C zugehörige Halbirungspunkt von k ist, bestimmt wird. Der Inbegriff aller Mitten M ist eine stetige Linie m, welche sich in allen Punkten der Linie k auf gleiche Weise errichten lässt, so dass ein Punkt C in der Linie k gehend sie auf der Fläche $\mathfrak{S}$ mitführen kann. Jeder Punkt der Linie m bleibt bei dieser Bewegung entweder an demselben Ort, d. h. ist ein Ruhepunkt, oder er ist hinsichtlich der Punkte O und O' gleich bestimmt und bildet daher auf der Fläche $\mathfrak{S}$ eine Kreislinie. Ein Ruhepukt R muss existiren; denn sonst wäre eine letzte Kreislinie vorhanden, auf welche man wieder das vorige Verfahren der Construction der Linie m anwenden könnte. Durch die Bewegung der Linie CR auf der Fläche $\mathfrak{S}$ bis zur Rückkehr des Punktes C wird das ganze Segment $\mathfrak{B}$ beschrieben. Daraus folgt; dass auf dem Segment $\mathfrak{B}$ kein zweiter Ruhepunkt T existiren kann, weil sonst dasselbe Segment $\mathfrak{B}$ durch die Bewegung der Linien CR und CT beschrieben würde.

Die Linie m erstreckt sich vom Punkte C an durch den Punkt R hindurch bis zum Punkte C'; im Punkte R wird die Linie m halbirt, so dass also $CR = C'R$ ist. In gleicher Weise wird durch diese Linie die Fläche $\mathfrak{B}$ halbirt.

Sind die beiden Segmente $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ einander gleich, so kann man durch Halbiren des auf dem Segmente $\mathfrak{B}'$ liegenden Stückes CD der jedesmaligen Kreislinie l einen Inbegriff von Punkten M' erhalten, welcher ebenfalls eine stetige Linie m' bildet, durch deren Bewegung das Segment $\mathfrak{B}'$ beschrieben werden kann und für welche ebenfalls ein Ruhepunkt R' existirt. Die Linienstücke CR und CR' zusammen erzeugen, während der Punkt C durch die ganze Kreislinie k hindurch bewegt wird, die ganze Fläche $\mathfrak{S}$. Bei dieser Bewegung bleiben die Punkte R und R' in Ruhe; während jeder andere Punkt dieser Linie eine Kreislinie beschreibt.

Man nennt jede Bewegung eines Gebildes, bei welcher gewisse Punkte des Gebildes in Ruhe bleiben, eine D r e h u n g. Die Drehung kann bis zur Rückkehr in die Anfangslage fortgesetzt werden; den durchlaufenen Weg nennt man eine U m d r e h u n g des Gebildes um die festen Punkte, und die durch Umdrehung einer Linie erzeugte Fläche eine R o t a t i o n s-fläche. Aus dem Vorhergehenden erhellt, dass die Kugelfläche als eine Rotationsfläche betrachtet werden kann.

11.

Als Umkehrung des vorigen Art. gilt folgender Satz: Sind O und O' zwei fest verbundene Punkte, sind ferner A und B zwei verschiedene Punkte des Raumes derart, dass

$$\overline{OA} = \overline{OB}, \quad \overline{O'A} = \overline{O'B}$$

ist, so schneiden sich die aus den Mittelpunkten O und O' mit den resp. Radien OA und $O'A$ beschriebenen Kugelflächen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ in einer Kreislinie, in welcher die beiden Punkte A und B liegen; es kann daher der Punkt A in dieser Kreislinie durch den Punkt B hindurch bis zur Rückkehr bewegt werden*.

Es seien die Radien OA und $O'A$ einander gleich. Ist L ein Punkt von $\mathfrak{S}$, welcher ausserhalb der Kugelfläche $\mathfrak{S}'$ liegt, so beschreibe man mit einem Radius, welcher zwischen $O'A$ und $O'L$ liegt, eine Kugelfläche $\mathfrak{S}''$, welche die Kugelfläche $\mathfrak{S}$ in einer Kreislinie k schneidet.

Sind die beiden Radien OA und $O'A$ ungleich, und ist $O'A$ der kleinere Radius, so beschreibe man aus O' mit dem Radius gleich OA eine Kugelfläche $\mathfrak{S}''$, welche die Kugelfläche $\mathfrak{S}$ in einer Kreislinie k schneidet.

Die Punkte A und B liegen gleichzeitig in einem der beiden Segmente $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$, in welche die Fläche $\mathfrak{S}$ durch die Kreislinie k zerlegt wird. Construirt man daher eine Linie m, so muss der Punkt A vom Ruhepunkt R verschieden sein, weil sonst auch B mit R identisch sein müsste, was gegen die Voraussetzung ist, dass A und B verschiedene Punkte sind. Jedem der Punkte A und B entspricht daher bei der Bewegung von m eine Kreislinie, diese beiden Linien müssen (der gleichen Bestimmung von A und B gegen O und O' wegen) mit einander identisch sein.

Zusatz. Aus dem eben bewiesenen Satze erhellt, dass zwei Kugelflächen sich nur in einem Punkte berühren können.

---

* Man kann diesen Satz nicht als evident erklären, ohne die Voraussetzung zu machen, dass zwei Kugelflächen nicht zwei Punkte gemein haben können, ohne sich zu schneiden.

Gerade und Ebene.

12.

Es sei O der Mittelpunkt einer Kugelfläche $\mathfrak{S}$, O' ein beliebiger Punkt derselben: aus dem Punkt O' als Mittelpunkt beschreibe man mit dem Radius $O'O$ eine zweite Kugelfläche $\mathfrak{S}'$; beide Kugeln sind von einander verschieden und jede liegt theilweise innerhalb, theilweise ausserhalb der anderen, sie schneiden sich daher in einer Kreislinie k. Ebenso schneiden sich die beiden Kugelflächen Σ und Σ', welche aus den Mittelpunkten O und O' mit gleichen Radien $> OO'$ beschrieben werden, in einem Kreise $\varkappa$; denn alle Punkte der Kugelfläche $\mathfrak{S}'$, also auch der Kugel Σ', welche innerhalb der Kugelfläche $\mathfrak{S}$ liegen, liegen auch innerhalb der Fläche Σ.

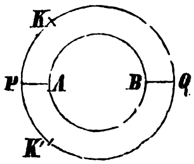
Das soeben erhaltene System von Kugeln, Kugelflächen und Kreislinien wird nicht geändert, wenn man die Mittelpunkte O und O' sammt ihren Kugelflächen vertauscht.

Daraus folgt: Ist A ein beliebiger Punkt der Kreislinie k der Flächen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$, B der zu A zugehörige Halbirungspunkt von k, so können die Mittelpunkte O und O' sammt ihren Kugeln um die ruhenden Punkte A und B derart bewegt werden, dass der Punkt O nach O' und der Punkt O' nach O kommt; dabei fällt die Kreislinie k mit ihrer ursprünglichen Lage zusammen. Aber auch in jeder Kreislinie $\varkappa$ eines jeden Flächenpaares Σ und Σ' gibt es ein Punktpaar P und Q, welches bei dieser Bewegung in Ruhe bleibt, so dass, wenn M einer dieser beiden Punkte ist, es keinen von M verschiedenen Punkt M' gibt derart, dass $\overline{ABM} \cong \overline{ABM'}$ ist. Ein solcher Punkt M wird ein E i n z i g e s von $\overline{AB}$ genannt.*

Diese Punktpaare P und Q werden für jede Kreislinie $\varkappa$ auf die folgende Art bestimmt: Ist K ein beliebiger Punkt von $\varkappa$ und nicht ein Einziges von $\overline{AB}$, so kann nach Art. 11 K um $\overline{AB}$ bis zur Rückkehr bewegt werden. Bei der oben erwähnten Bewegung des Kugelsystems falle der Punkt K nach K'; durch diese Punkte wird die Linie

* Benennung von W. B o l y a i.

Fig. 3.



$\varkappa$ in zwei Theile zerlegt: es sei P die Mitte des einen und Q die Mitte des anderen; die Punkte der Linie PK fallen in der neuen Lage mit den Punkten PK' der ursprünglichen Lage zusammen, die Punkte P und Q sind die Ruhepunkte der Drehung.

Die Punkte P folgen von einem der Punkte A oder B, etwa von A, und die Punkte Q von B an, stetig auf einander, wenn die Flächenpaare Σ und Σ' stetig, vom Flächenpaare $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ an, auf einander folgen.

Die zwischen den Punkten A und B dieser beiden Linien befindliche Lücke kann dadurch ausgefüllt werden, dass man fortgesetzt Kugelflächen Σ und Σ' mit stetig kleiner werdenden Radien beschreibt. Die Reihe dieser Radien beginnt von OO' an und endet mit dem kleinsten Radius, in dem Momente, wo die beiden Flächenpaare sich berühren. Durch Bestimmung der Ruhepunkte erhält man ein Linienstück AB, welches mit den (unbegrenzten) Linien AP und BQ eine einzige unbegrenzte Linie bildet, welche die Eigenschaft hat, dass sie sämmtliche Ruhepunkte des Kugelsystemes enthält, welches durch die fortgesetzten Kugelflächenpaare Σ und Σ' bestimmt ist.

13.

Im vorigen Art. ist die Existenz von Linien nachgewiesen, welche ihre Lage nicht ändern, wenn sie in zwei Punkten festgehalten werden. Diese versuchte Lagenänderung ist derart zu verstehen, dass eine solche Linie, wenn sie zugleich einem Flächen- oder Körpergebilde angehörig ist, bei der Bewegung des Gebildes (um die festen Punkte) lauter Ruhepunkte enthält. Jede Linie von der erwähnten Eigenschaft wird eine G e r a d e genannt.

Zwei Gerade g_1 und g_2, welche zwei Punkte M und N gemeinsam haben, fallen in allen Punkten zusammen. Denn bringt man die beiden Geraden mit der durch das Kugelsystem der Punkte O und O' des vorigen Art. bestimmten Geraden g in eine solche Lage, dass die gemeinsamen Punkte M und N in diese Gerade g fallen, so müssen sämmtliche

Punkte der Geraden g_1 und g_2 mit den Punkten der Geraden g zusammenfallen. Denn im entgegengesetzten Falle müssten die Punkte der Geraden g_1 oder g_2 oder beider Geraden, welche ausserhalb der Geraden g fallen, als Punkte des Kugelsystems betrachtet bei der Bewegung von O und O' von den Ruhepunkten verschieden sein.

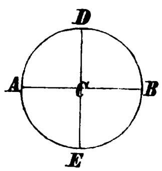
Die Gerade kann aus congruenten Stücken zusammengesetzt gedacht werden, nach den beiden entgegengesetzten Richtungen ins Unbegrenzte verlängert und jedes zwischen zwei Punkten enthaltene Stück, welches eine Strecke genannt wird, ins Unbegrenzte getheilt werden.

Der Abstand zweier Punkte wird durch die zwischen ihnen enthaltene Strecke bestimmt.

14.

Der Inbegriff aller Kreislinien $\varkappa$, welche als die Schnitte der Flächenpaare Σ und Σ' erscheinen, bildet eine Fläche, welche eine Ebene genannt wird. Dieselbe kann durch Bewegung der Geraden $PABQ$ (d. i. durch Bewegung der Kugelflächen um die Punkte O und O') erzeugt werden. Daraus erhellt, dass die Ebene vermittelst der Geraden auf die folgende Art erhalten werden kann: Eine Kreislinie als Durchschnittslinie zweier gleicher Kugelflächen werde in den Punkten A und B halbirt. Durch die Punkte A und B ist eine Gerade bestimmt; es sei ferner C die Mitte der Strecke AB. Eine der beiden Hälften der Kreislinie werde in D halbirt, so ist durch die Punkte C und D eine zweite Gerade CD bestimmt, welche senkrecht auf der Geraden AB genannt wird. Dreht man die erhaltene Figur um AB, so beschreibt die Gerade CD eine Ebene.

Fig. 4.



Die Ebene ist eine umkehrbare Fläche. Vertauscht man nämlich die Punkte O und O' sammt ihren Kugelflächen untereinander, so fallen die Kreislinien $\varkappa$ wieder zusammen. Für die eben erwähnte Erzeugung der Ebene denke man sich die vorige Figur nochmals und lege sie mit der ersten so zusammen, dass die Geraden AB und BA sich decken; dann werden auch die beiden Ebenen sich decken. Die beiden (entgegengesetzten) Seiten der Ebene sind daher gleichartig; jedem Punkt des Raumes auf der einen Seite der Ebene entspricht ein gleichliegender Punkt auf der entgegengesetzten Seite.

Die Gerade AB heisst „senkrecht auf der Ebene im Punkte C“.

15.

Für die Entwicklung der übrigen fundamentalen Eigenschaften der Ebene sind einige vorbereitende Sätze nöthig.

Durch drei Punkte und die drei von je zwei Punkten bestimmten Strecken ist ein Gebilde bestimmt, welches ein Dreieck genannt wird. Die drei Strecken heissen die Seiten des Dreiecks. Aus Art. 11 folgt, dass zwei Dreiecke, welche die drei Seiten wechselweise gleich haben, congruent sind.

Zwei von einem Punkte A ausgehende Gerade AB und AM bilden einen Winkel; der gemeinsame Punkt heisst der Scheitel, die von ihm ausgehenden Geraden heissen die Schenkel des Winkels, derselbe wird durch MAB oder BAM bezeichnet. Werden die Schenkel als starre (d. i. feste) Linien gedacht, so kann der Winkel an einen beliebigen anderen Ort des Raumes gebracht werden; bleibt der Scheitel A und ein Schenkel AB ungeändert, so ist die Lagenänderung eine Drehung des zweiten Schenkels AM um den ersten AB. Wegen der Gleichartigkeit und Stetigkeit des Raumes wird durch die Umdrehung des bewegten Schenkels eine zusammenhängende Fläche (Kegelfläche) beschrieben; sind M und N zwei beliebige Punkte derselben, so sind die Winkel MAB und NAB einander gleich. Umgekehrt: Zwei Winkel sind einander gleich, wenn sie in eine solche Lage gebracht werden können, dass ihre Scheitel und Schenkel zusammenfallen.

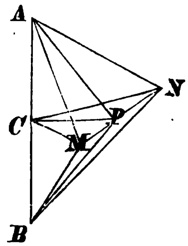
Daraus folgt: Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel wechselweise gleich haben.

16.

1) Eine Gerade, welche zwei Punkte M und N mit einer Ebene $\mathfrak{E}$ gemein hat, liegt vollständig in der Ebene $\mathfrak{E}$.

Es sei die Gerade AB auf der Ebene $\mathfrak{E}$ im Punkte C senkrecht, dabei werde $AC = BC$ vorausgesetzt. Für jeden beliebigen Punkt P der Geraden MN ist nur zu beweisen, dass die Gerade CP im Punkte C auf der Geraden AB senkrecht steht, indem dann nach Art. 14 die Gerade CP als eine specielle Lage der die Ebene $\mathfrak{E}$ erzeugenden Geraden betrachtet werden kann. Mit Berücksichtigung des vorigen Artikels erhält man nach einander

Fig. 5.



$$\triangle ACM \cong \triangle BCM$$
$$\triangle ACN \cong \triangle BCN,$$
$$\triangle AMN \cong \triangle BMN,$$
$$\triangle AMP \cong \triangle BMP,$$
$$\triangle ACP \cong \triangle BCP;$$

woraus die Gleichheit der Winkel ACP und BCP folgt. Die Gerade CP ist daher auf der Geraden AB im Punkte C senkrecht.

2) Durch drei Punkte A, B, C, die nicht in einer Geraden liegen, ist eine und nur eine Ebene bestimmt. Hätten zwei Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ die drei Punkte A, B, C gemeinsam, so hätten sie auch die drei Geraden AB, BC, CA gemeinsam, welche auf jeder der beiden Ebenen ein Dreieck ABC abgrenzen. Ist P ein beliebiger Punkt der Ebene $\mathfrak{E}$, so liegt derselbe entweder innerhalb oder ausserhalb des Umfanges des Dreiecks ABC. Liegt P innerhalb, so ziehe man die Gerade AP und verlängere dieselbe von P an ins Unbegrenzte, wodurch die Gerade BC in einem Punkte, etwa D, geschnitten wird. Die Gerade AD, also auch der Punkt P, liegen in beiden Ebenen. Liegt der Punkt P ausserhalb der Figur ABC und z. B. auf der entgegengesetzten Seite von BC mit dem Punkte A, so ziehe man die Gerade PA, welche also die Gerade BC in einem Punkte, etwa D, schneidet; u. s. w.

3) Zwei verschiedene Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$, welche einen Punkt A gemeinsam haben, schneiden sich in einer Geraden. Denn zieht man in der Ebene $\mathfrak{E}$ durch den Punkt A eine

Gerade MN, wo der Punkt A auf der Strecke MN vorausgesetzt wird, so liegen die Theile MA und AN auf den entgegengesetzten Seiten der Ebene $\mathfrak{E}'$. Ist P ein Punkt der Ebene $\mathfrak{E}$, ausserhalb der Geraden MN, der mit M auf derselben Seite von $\mathfrak{E}'$ liegt, so schneidet die Gerade PN die Ebene $\mathfrak{E}'$ in einem Punkte, etwa B. Die Gerade AB ist daher die Durchschnittslinie der beiden Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$.

Zusatz 1. In jedem (beliebigen) Punkte C einer Ebene ist eine und nur eine auf dieser Ebene senkrechte Gerade AB möglich. Macht man die Strecken CA und CB einander gleich, so können die Punkte A und B als die Mittelpunkte der die Ebene erzeugenden Kugelflächen betrachtet werden.

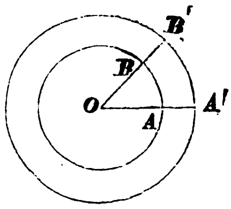
Zusatz 2. Dreht man in einer Ebene eine Strecke derart, dass der eine Endpunkt in unveränderter Lage bleibt, so beschreibt der andere Endpunkt eine Kreislinie, welche als der Durchschnitt zweier Kugelflächen mit gleichen Radien betrachtet werden kann; der unveränderliche Punkt heisst der Mittelpunkt, die gedrehte Strecke des Radius der Kreislinie; das erzeugte Gebilde wird ein Kreis genannt.

Anmerkung. Ist die Kreislinie der Durchschnitt zweier Kugelflächen mit verschiedenen Radien, so ist zum Nachweis, dass sie eine ebene Linie ist, der Satz, „dass von einem Punkte ausserhalb einer Geraden nur eine Senkrechte möglich ist,“ erforderlich.

17.

Im Art. 15 wurde eine vorläufige Definition des Winkels zweier Geraden gegeben. Aus der Existenz der Ebene folgt, dass ein solcher Winkel ein ebenes Gebilde ist. Gewöhnlich wird derselbe entweder als ein Lagengebilde oder als das Mass der Drehung einer Geraden oder als Mass der (unbegrenzten) Fläche zwischen seinen Schenkeln angesehen. Alle diese Massbegriffe sind aus dem Satze „die Kreislinie ist aus congruenten Theilen zusammengesetzt“ entlehnt. Aus dieser Eigenschaft folgt, dass zwei Theile derselben Kreislinie in gleicher Weise wie zwei Strecken gemessen werden können. Man kann daher das Verhältniss eines Kreisbogens AB zum Umfange u durch eine (rationale oder irrationale) Zahl darstellen. Für eine zweite concentrische Kreislinie welche den Geraden OA und OB in den Punkten A' und B' begegnet, hat das Verhältniss des Bogens $A'B'$ zum zugehörigen Umfang u' denselben Werth; es ist daher

Fig. 6.



$$AB : u = A'B' : u'.$$

Gleiches gilt auch von den Flächen concentrischer Kreistheile begrenzt von den in dieselben Geraden fallenden Radien und den zugehörigen Kreisbögen.

Durch diese für alle concentrischen Kreise constanten Verhältnisszahlen des Bogens AB zum Umfang u, der Fläche des Kreisausschnittes AOB zur Fläche des ganzen Kreises wird der Winkel der Geraden OA und OB gemessen. Ist die Masszahl $= \frac{1}{4}$, so wird der Winkel AOB ein rechter genannt, und durch R bezeichnet. Die Linien OA und OB sind im Punkte O auf einander senkrecht, man bezeichnet dies durch $OB \perp OA$ oder $OA \perp OB$.

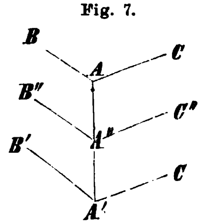
Anmerkung. Bei der Auswerthung oder Vergleichung zweier Winkel durch Zahlen ist immer zu berücksichtigen, dass sie durch Bögen oder Flächen von Kreisen mit gleichen Radien gemessen werden, falls man sie nicht einzeln durch die Masszahlen an ihren Kreisen ausdrückt.

18.

Zwei Ebenen, welche durch dieselbe Gerade gehen, bilden einen **Keil** (oder Flächenwinkel). Die Gerade heisst die **Kante**, die beiden durch sie halbbegrenzten Ebenen die **Seiten** des Keils.

Errichtet man in einem beliebigen Punkt A der Kante des Keils in den beiden Seiten Senkrechte AB und AC auf die Kante, so ist der Winkel BAC von unveränderlicher Grösse für jede Lage des Punktes A; dieser Winkel ist daher das **Mass** des Keils.

Fig. 7.



Es sei A' ein beliebiger zweiter Punkt der Kante, $A'B'$ und $A'C'$ seien die Senkrechten in den Seiten des Keils

A'' die Mitte der Strecke AA' und $A''B''$ und $A''C''$ die zugehörigen Senkrechten in den Seiten. Man kann nun das Gebilde $B''A''C''$ $B'A'C'$ so mit dem Gebilde $C''A''B''$ CAB zur Deckung bringen, dass die Geraden

$$A''B'',\ A''C'',\ A''A$$

des einen Gebildes, mit den Geraden

$$A''C'',\ A''B'',\ A''A'$$

des anderen Gebildes zusammenfallen, wodurch auch der Scheitel und die Schenkel des Winkels BAC mit dem Scheitel und den Schenkeln des Winkels $C'A'B'$ zusammenfallen.

19.

Zwei Ebenen stehen auf einander senkrecht, wenn sie einen rechten Keil bilden.

1) Zieht man in einem beliebigen Punkte A der Durchschnittslinie a zweier senkrechten Ebenen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ eine Gerade α senkrecht auf die eine Ebene $\mathfrak{A}$, so liegt diese Gerade in der zweiten Ebene $\mathfrak{A}'$.

2) Ist eine Gerade auf einer Ebene $\mathfrak{A}$ senkrecht, so ist jede durch die Gerade gelegte Ebene $\mathfrak{B}$ auf der gegebenen Ebene $\mathfrak{A}$ senkreckt.

3) Die Durchschnittslinie a zweier auf einer dritten Ebene $\mathfrak{B}$ senkrechten Ebenen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ steht auf derselben Ebene $\mathfrak{B}$ senkrecht.

4) Zwei Gerade a und a', welche auf einer Ebene $\mathfrak{A}$ senkrecht stehen, liegen in einer auf dieser senkrechten Ebene $\mathfrak{A}'$.

Die Beweise dieser Sätze ergeben sich aus dem vorigen Art mit Zuziehung des Satzes, dass in einer Ebene in einem Punkt einer Geraden auf diese nur eine einzige Senkrechte möglich ist.

Zweites Buch.

Unendlicher Raum.

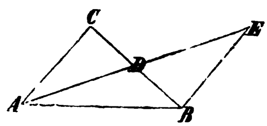
Erster Abschnitt.

Parallelen-Axiom und euclidische Geometrie.*

Das geradlinige Dreieck.

20.

Fig. 8.



1) Man kann jedes Dreieck ABC in ein flächengleiches ABE verwandeln, in welchem die Summe der Winkel A und E gleich dem Winkel A des gegebenen Dreiecks ABC ist.

Verbindet man die Mitte D der Seite BC mit dem Punkt A und macht die Verlängerung $DE = AD$, so ist

$$\triangle ADC \cong \triangle EDB;$$

addirt man dazu das Dreieck ABD, so erhält man den obigen Satz.

2) Es sei A der kleinste Winkel des Dreiecks ABC, dieser wird in zwei Theile EAB und $EAC = AEB$ zerlegt, welche entweder gleich oder verschieden sein können. Wendet man das obige Verfahren auf das Dreieck ABE derart an, dass man wieder den kleinsten Winkel in zwei Theile zerlegt, so erhält man ein neues Dreieck, dessen Fläche und Winkelsumme gleich ist der Fläche und Winkelsumme des ursprünglichen Dreiecks ABC und in welchem

* In diesem Abschnitte sind alle bekannten und leicht beweisbaren Sätze, besonders, wenn sie sich nicht auf die Parallelentheorien beziehen, weggelassen. Ebenso sind alle nicht erklärten Bezeichnungen im gewöhnlichen Sinne zu nehmen.

zwei Winkel zusammen gleich oder kleiner sind als die Hälfte des kleinsten Winkels A des gegebenen Dreiecks. Durch n malige Anwendung dieser Operation erhält man ein Dreieck LMN, welches mit dem Dreiecke ABC gleiche Fläche und Winkelsumme hat und in welchem die Summe zweier Winkel, etwa M und N kleiner ist als $A : 2^n$, also (für ein hinreichend grosses n) kleiner gemacht werden kann als jede noch so kleine gegebene Grösse.

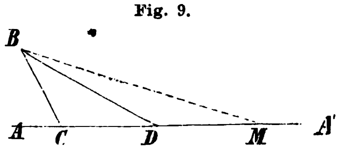
Daraus folgt: Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ABC kann nicht grösser sein als zwei Rechte. Denn wäre die Winkelsumme $= 2\,R + \alpha$, so könnte man aus dem Dreiecke ABC ein Dreieck LMN erhalten, in welchem die Summe zweier Winkel kleiner als α, der dritte Winkel also grösser als $2\,R$ sein müsste.

Die Summe der Winkel eines Dreiecks ist daher entweder gleich oder kleiner als zwei Rechte.

Der Aussenwinkel eines Dreiecks ist entweder gleich oder grösser als die Summe der beiden inneren nicht anliegenden Winkel.

21.

Fig. 9.



Durch einen Punkt B ausserhalb einer Geraden AA' kann man eine Gerade BM derart ziehen, dass sie mit der Geraden AA' einen beliebig kleinen Winkel bildet.

Man ziehe willkürlich die Gerade BC, welche mit der Geraden AA' den spitzen Winkel ACB bildet, mache $CD = BC$, so ist in dem gleichschenkligen Dreieck BCD nach Art. 20 der Winkel $D \overline{\leq} \frac{1}{2}\,ACB$.

Durch fortgesetzte Wiederholung dieser Construction erhält man schliesslich eine Gerade BM, die mit der Geraden AA' einen Winkel bildet, der kleiner ist als jede beliebig kleine Grösse.

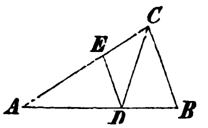
22.

Ist in einem Dreieck ABC die Summe der Winkel gleich zwei Rechte, so ist auch die Summe der Winkel eines jeden Dreiecks gleich zwei Rechte.

1) Beträgt die Winkelsumme des Dreiecks ABC zwei

Rechte, so beträgt dieselbe auch in jedem vom Dreieck ABC abgeschnittenen Dreiecke wie ADC, ADE zwei Rechte.

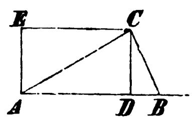
Fig. 10.



Denn würde die Winkelsumme der Dreiecke ADC und DBC resp. $2R - x$ und $2R - y$ betragen, so erhielte man durch Addition der Winkelsummen der beiden Dreiecke $2R - (x + y)$ als Winkelsumme des Dreiecks ABC. Dasselbe gilt auch vom Dreiecke ADE.

2) Zerlegt man das Dreieck ABC durch die Höhe CD in zwei rechtwinklige Dreiecke, so kann man eines derselben, etwa ADC durch Anlegung eines congruenten zu einem Viereck $ADCE$ ergänzen, in welchem jeder Winkel ein rechter ist.

Fig. 11.



Aus dem Vierecke $ADCE$ kann durch fortgesetzte Anlegung des gegebenen ein anderes Viereck mit vier rechten Winkeln und den in eine Ecke zusammenpassenden Seiten von der Länge mAE und EC und aus diesem wieder ein Viereck mit abermals vier rechten Winkeln und den in eine Ecke zusammenstossenden Seiten mAE und nEC, wo m und n beliebig grosse Zahlen sind, erhalten werden. Dieses Viereck wird durch eine Diagonale in zwei congruente rechtwinklige Dreiecke getheilt, für welche die Winkelsumme je $2R$ beträgt. Von einem solchen Dreieck kann man jedes beliebige andere recktwinklige abschneiden; die Winkelsumme eines jeden rechtwinkligen, also auch jedes beliebigen Dreiecks beträgt daher zwei Rechte.

Daraus folgt mit Berücksichtigung des Art. 20, 2): die Summe der Winkel eines Dreiecks ist entweder in jedem Dreieck gleich zwei Rechte oder sie ist in jedem Dreieck kleiner als zwei Rechte.

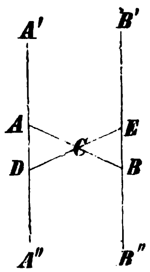
Die Entscheidung, welche von diesen beiden Annahmen in der Wirklichkeit stattfindet, steht im Zusammenhang mit der Untersuchung der einander nicht schneidenden Geraden, welche in derselben Ebene liegen.

Nicht schneidende Gerade in derselben Ebene, parallele Gerade.

23.

1) Zwei Gerade AA' und BB', welche von einer dritten Geraden AB derart geschnitten werden, dass die Summe der innern Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden Geraden AB liegen, zwei Rechte beträgt, können sich nicht schneiden.

Fig. 12.



Sind AA'' und BB'' die Rückverlängerungen von AA' und BB', so können die Gebilde $A'ABB'$ und $B''BAA''$ zur Deckung gebracht werden. Würden sich daher AA' und BB' schneiden, so müssten sich auch AA'' und BB'' schneiden. Es ist daher die Existenz von einander nicht schneidenden Geraden in derselben Ebene nachgewiesen.

2) Ist C die Mitte von AB, und DE eine beliebige durch C gezogene Gerade, welche die Gerade $A'A''$ also (wegen der Congruenz der Gebilde $A'ABB'$ und $B''BAA''$) auch die Gerade $B'B''$ schneidet, so beträgt auch die Summe der beiden auf derselben Seite von DE liegenden Winkel zwei Rechte.

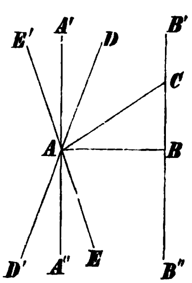
Aus $\triangle CAD \cong \triangle CBE$ folgt Winkel $ADC = CEB$, also

$$A'DE + B'ED = A'DE + (2R - A'DE) = 2R.$$

24.

Man kann nach dem vorigen Artikel in einer Ebene durch einen Punkt A ausserhalb einer Geraden $B'B''$ mindestens *eine* die Gerade BB' nicht schneidende Gerade $A'A''$ ziehen, indem man etwa $AB \perp B'B''$ und $A'A'' \perp AB$ zieht. Alle im Punkte A halbbegrenzten Geraden auf derselben Seite der Geraden AB, welche ausserhalb des Streifens $A'A''$ und $B'B''$ fallen, schneiden die Gerade BB' nicht; hingegen kann man innerhalb der halbbegrenzten Fläche $A'ABB'$ Gerade (wie AC in der Figur) ziehen, welche

Fig. 13.



die Gerade BB' schneiden; d. h. man kann alle auf derselben Seite der Geraden AB liegenden im Punkte A halbbegrenzten Geraden in zwei Classen bringen: 1) in solche, welche die Gerade BB' nicht schneiden, und 2) in solche, welche die Gerade BB' schneiden. Die gemeinsame Grenzlinie dieser beiden Classen wird die Parallele zur Geraden BB' genannt; diese Grenzlinie ist nun entweder mit der Geraden AA' identisch oder liegt innerhalb des Streifens $A'ABB'$, in diesem Falle sei etwa die Gerade AD die Parallele. In jedem Falle besteht das Kennzeichen der Parallelen durch einen Punkt A zu einer Geraden BB' darin, dass sie der Geraden BB' nicht begegnet, dass aber jede andere Gerade, wie z. B. die Gerade AC, die man gegen die Gerade BB' hin unter einem noch so kleinen Winkel resp. CAA' oder CAD mit der Parallelen zieht, die Gerade BB' schneidet.

Ist die Parallele die Gerade AA', dann werden alle übrigen durch den Punkt A gezogenen Geraden die Gerade $B'B''$ schneiden.

Ist eine von AA' verschiedene Gerade, etwa die Gerade AD die Parallele, so mache man auf der entgegengesetzten Seite von AB den Winkel $BAE = BAD$. Die Gerade AE ist dann die Parallele zur Geraden BB'' und sind AD' und AE die Rückverlängerungen von AD und AE, so werden alle innerhalb der Winkel DAE' und EAD' gezogenen Geraden (mit sammt ihren Rückverlängerungen) nicht schneidende Gerade zur Geraden $B'B''$ sein, während die übrigen Geraden (oder ihre Rückverlängerungen) die Gerade $B'B''$ schneiden. Man erhält in diesem Falle für den Punkt A ausserhalb der Geraden $B'B''$ folgende Classen von Geraden: 1) Schneidende Gerade, 2) Nichtschneidende Gerade, 3) Zwei durch den Punkt A gehende parallele Gerade, nämlich die Gerade AD parallel zur Geraden BB' und die Gerade AE parallel zur Geraden BB'' (die Rückverlängerung von BB'). In diesem Falle muss man ausserdem die Richtung des Parallelismus berücksichtigen, während dies im vorigen Falle überflüssig ist.

Dass die Gerade AB — in der Richtung von A nach

B — zur Geraden CD — in der Richtung von C nach D — parallel ist, wird durch

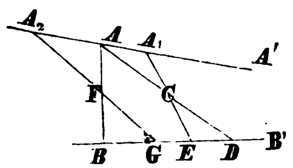
$$AB \parallel CD$$

bezeichnet.

25.

Aus der Definition für Parallele ergeben sich folgende Eigenschaften:

Fig 14.



1) Eine Gerade AA' ist an allen ihren Punkten zu einer Geraden BB' parallel, d. h. ist $AA' \parallel BB'$, so ist auch $A_1A' \parallel BB'$, $A_2A' \parallel BB'$, . . wo A_1, A_2, . . beliebige Punkte der nach beiden Richtungen unbegrenzten Geraden AA' sind.

a) Liegt der Punkt A_1 auf der Geraden AA', so ziehe man die Gerade A_1C unter einem beliebig kleinen Winkel $A'A_1C$. Für jeden Punkt C der halbbegrenzten Geraden A_1C schneidet die Gerade AC die Gerade BB' etwa in D. In das Dreieck ABD, wo $AB \perp BB'$ ist, tritt die unbegrenzte Gerade A_1C ein, sie muss daher den Umfang desselben nochmals und zwar in einem Punkte der Seite BD, etwa in E, schneiden.

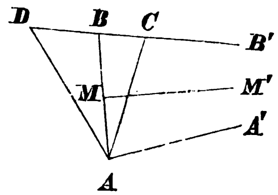
b) Liegt der Punkt A_2 in der Rückverlängerung der Geraden AA', so ziehe man die Gerade A_2F unter einem so kleinen Winkel, dass die Gerade AB in F geschnitten wird. Macht man den Winkel $A'AD = A'A_2F$, so schneidet die unbegrenzte Gerade A_2F den Umfang des Dreiecks ABD nochmals und zwar in einem Punkte der Seite BD, etwa in G.

2) Zwei Gerade sind stets gegenseitig parallel; d. h. ist $AA' \parallel BB'$, so ist auch $BB' \parallel AA'$.

Ist $AA' \parallel BB'$, so kann man für jeden beliebigen Punkt A der Geraden AA' einen Punkt B der Geraden BB' derart finden, dass Winkel $A'AB = B'BA$ ist. Nach Art. 22, kann man eine Gerade AC so ziehen, dass der Winkel $A'AC < ACB'$ ist. Macht man auf der Geraden CB von C

aus die Strecke $CD = AC$, so ist der Winkel $B'DA = DAC < DAA'$. Bewegt man nun den Punkt C bis D, und verbindet seinen jedesmaligen Ort mit dem Punkte A, so erhält man für einen auf der Strecke CB liegenden Punkt, etwa B, eine Verbindungslinie AB derart, dass $A'AB = B'BA$ ist, woraus unmittelbar die Eigenschaft der Gegenseitigkeit des Parallelismus folgt.

Fig. 15.



Ist M die Mitte der Strecke AB, $MM' \perp AB$, so ist $MM' \parallel AA'$ und $MM' \parallel BB'$. Denn würde die Gerade AA' die Gerade MM schneiden, so müsste auch die BB' die MM' in demselben Punkte schneiden. Zieht man AC unter einem beliebig kleinen Winkel $A'AC$, so begegnet dieselbe der Geraden BB', also auch der Geraden MM'.

3) Zwei Gerade BB' und CC', welche einer und derselben Geraden AA' nach derselben Richtung parallel sind, sind zu einander parallel.

a) Die drei Geraden AA', BB', CC' liegen in derselben Ebene.

Dass die Geraden BB' und CC' sich nicht schneiden können, folgt unmittelbar daraus, weil sonst durch den Durchschnittspunkt nach derselben Seite mit der Geraden AA' zwei Parallele möglich wären.

Folgen die drei Geraden in der Ordnung AA', BB', CC' auf einander, so ziehe man von einem Punkte C der Geraden CC' die Gerade CD unter einem beliebig kleinen Winkel $C'CD$ gegen die Gerade AA', welche also diese Gerade, etwa in D, mithin auch die Gerade BB', etwa in E, schneidet.

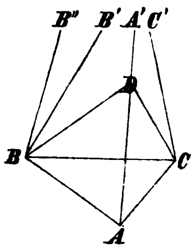
Folgen die Geraden in der Ordnung BB', AA', CC' auf einander, so ziehe man von einem beliebigen Punkt der Geraden BB' oder CC', etwa vom Punkt C der Geraden CC', eine Gerade unter einem beliebig kleinen Winkel DCC' gegen die Gerade AA', welche also die Gerade AA', etwa in D, schneidet. Die Verlängerung der Geraden CD schneidet, wegen $AA' \parallel BB'$, die Gerade BB' in einem Punkte, etwa in E.

b) Die Ebenen $A'AB$ und $A'AC$ bilden mit einander einen Winkel.

Zunächst ist zu beweisen, dass die Geraden BB' und CC' in einer Ebene liegen.

Ist BD eine Gerade in der Ebene der Parallelen AA' und BB', so begegnet diese der Geraden AA' etwa in D. Die Ebene CBD begegnet der Ebene der Parallelen AA' und CC' in der Geraden CD.

Fig. 16.



Man bewege die Ebene CBD so lange, bis der Durchschnittspunkt D verschwindet; dies ist der Fall, wenn die Gerade BD mit der Geraden BB', also die Ebene CBD mit der Ebene CBB' zusammenfällt. Auf gleiche Weise fällt dann die Ebene BCD mit der Ebene BCC' zusammen. Die Geraden BB' und CC' liegen daher in dieser Endlage der Ebene BCD.

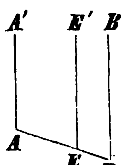
Dass $BB' \parallel CC'$ ist, folgt nun so: Wäre in der Ebene der Geraden BB' und CC' die Gerade $BB'' \parallel CC'$, so müssten (nach dem eben bewiesenen, wegen $AA' \parallel CC'$,) die Geraden BB'' und AA' in derselben Ebene liegen; die beiden Ebenen $BB'CC'$ und $AA'BB'$ hätten dann zwei Gerade BB' und BB'' gemeinsam, was unmöglich ist.

Zusatz. Aus b) kann a) so erhalten werden: Es sei DD' ausserhalb der Ebene AA', BB', CC' und $DD' \parallel AA'$. Dann ist, wegen $AA' \parallel BB'$, $AA' \parallel DD'$, nach b) $DD' \parallel BB'$. Auf gleiche Weise folgt $DD' \parallel CC'$ und damit wieder nach b) $BB' \parallel CC'$.

Winkel zweier Parallelen mit einer schneidenden Geraden.

26.

Fig. 17.



Ist für irgend zwei Parallele AA' und BB' die Summe der inneren Winkel A und B auf derselben Seite einer schneidenden Geraden AB gleich zwei Rechte, so ist dies auch für jedes andere Paar Parallele CC' und DD' der Fall.

Man kann nach Art. 23, 2) immer voraussetzen, dass der Winkel $A'AB = C'CD$ ist.

Legt man die Figur $CC'DD'$ so auf die Figur $AA'BB'$, dass die Geraden AA' und CC', CD und AB in ihrer Richtung zusammenfallen, so falle der Punkt D auf E und die Gerade DD' nach EE'.

Liegt der Punkt E auf der Strecke AB, so folgt nach Art. 25, 3) aus

$AA' \parallel BB'$, CC' oder $AA' \parallel DD'$ oder EE', $AA' \parallel EE' \parallel BB'$.

Ist die Summe der inneren Winkel $A'AE + E'EA = 2R - x$, $E'EB + B'BE = 2R - y$, wo x und y positiv sind, so erhält man durch Addition

$$A'AB + B'BA = 2R - (x + y),$$

also

$$x + y = 0;$$

was nur möglich ist, für $x = 0$ und $y = 0$.

Fällt der Punkt D in den Punkt B, so fällt die Gerade DD' mit der Geraden BB' zusammen.

Fällt der Punkt D ausserhalb der Strecke AB, so kann man aus der Figur $A'ABB'$, indem man mit ihr congruente Figuren zusammenfügt, eine derartige erhalten, dass der Punkt E auf die Strecke AB oder in den Endpunkt B der neuen Figur fällt. Vergl. Art. 22.

Daraus folgt, dass die Summe der inneren Winkel zweier Parallelen mit einer schneidenden Graden entweder jedesmal zwei Rechte beträgt oder jedesmal kleiner als zwei Rechte ist.

Zusammenhang der Parallelen und der Winkelsumme des Dreiecks.

27.

Beträgt die Summe der inneren Winkel zweier Parallelen mit einer schneidenden Geraden zwei Rechte, so ist durch jeden Punkt ausserhalb einer Geraden nur eine einzige Parallele möglich, und alle andern (in derselben Ebene) durch diesen Punkt gezogenen Geraden schneiden die gegebene Gerade. Unter dieser Voraussetzung beträgt auch die Winkelsumme eines jeden Dreiecks zwei Rechte.

Zieht man nämlich durch eine Spitze, etwa B, die Gerade

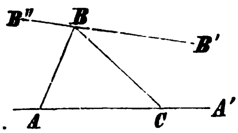
$B'B''$ parallel zur gegenüberliegenden Seite AC des Dreiecks ABC, so ist

$$\text{Winkel } A = ABB', \ C = CBB',$$

also

$$A + B + C = 2R.$$

Fig. 18.



Umgekehrt. Beträgt die Winkelsumme eines Dreiecks zwei Rechte, so ist die Summe der inneren Winkel zweier Parallelen mit einer schneidenden Geraden gleich zwei Rechte.

Wäre nämlich für $AA' \parallel BB'$ Winkel $A'AB + B'BA = 2R - \alpha$, so könnte man nach dem Art. 21 ein Dreieck ABC construiren, in welchem der Winkel $C < \alpha$ vorausgesetzt werden kann, also der Winkel $ABC > ABB'$ sein müsste, was unmöglich ist, da BC innerhalb der Figur $A'ABB'$ fallen muss.

Die beiden Voraussetzungen: 1) die Summe der inneren Winkel zweier Parallelen mit einer schneidenden Geraden beträgt zwei Rechte, und 2) die Summe der Winkel eines Dreiecks beträgt zwei Rechte, sind daher mit einander identisch. Dasselbe gilt von der Voraussetzung: durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden ist nur eine einzige, die gegebene Gerade nicht schneidende Gerade möglich.

Euclidische Geometrie.

28.

Aus den Voraussetzungen des vorigen Artikels, welche mit dem sogenannten elften Axiom Euclid's „Zwei Gerade, welche von einer dritten so geschnitten werden, dass die beiden innern an einerlei Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte sind, schneiden sich hinreichend verlängert an eben dieser Seite“ identisch sind, erhält man die gewöhnliche „euclidische“ Geometrie. In dieser haben die Punkte der Parallelen gleiche Abstände, und umgekehrt: der Ort aller Punkte, welche von einer Geraden gleichen Abstand haben, ist eine zur ersteren parallele Gerade.

Die euclidische Geometrie hielt man bis in dieses Jahrhundert als die einzig mögliche Form der Raumwissenschaft.

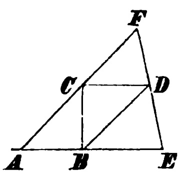
Man huldigte fast allgemein der Ansicht, dass das Parallelen-Axiom eine Folge der Eigenschaft der Geraden, also mit Hülfe der übrigen Grundsätze und Axiome beweisbar sei*. Dass diese Beweisversuche erfolglos sein mussten, wird im zweiten Abschnitte dieses Buches nachgewiesen; hier mag nur bemerkt werden, dass die auf der erwähnten Ansicht basirten Parallelentheorien mit Ausnahme von Legendre kaum etwas wissenschaftlich Bemerkenswerthes zu Tage förderten.

29.

Bei dem Unvermögen, einen wissenschaftlicher Strenge genügenden Beweis für das Parallelen-Axiom zu liefern**, ersetzte man dasselbe durch Voraussetzungen, die mehr Anschaulichkeit besitzen.

Am meisten erwähnenswerth ist der Versuch von Legendre, welcher folgenden Satz voraussetzt: „Durch einen Punkt innerhalb der Schenkel eines spitzen Winkels kann immer eine Gerade derart gezogen werden, dass sie die beiden Schenkel des Winkels schneidet.“ Damit lässt sich beweisen, dass die Summe der Winkel eines Dreiecks ABC nicht kleiner als $2R$ sein kann. Man lege an das Dreieck ABC das congruente BCD an und ziehe durch D eine Gerade EF, welche die Schenkel AB und AC schneidet. Wäre die Winkelsumme des Dreiecks $ABC = 2R - x$, die der Dreiecke BDE und CDF resp. $2R - y$ und $2R - z$, so wäre $2R - 2x - y - z$ die Winkelsumme des Dreiecks AEF, dieselbe also $< 2R - 2x$. Durch $n$malige Anwendung dieses Verfahrens erhält man ein Dreieck AMN, in welchem die Winkelsumme

Fig. 19.



* Dass die Einreihung dieses Satzes unter die Grundsätze (Axiome) nur auf einem Versehen einiger Handschriften über Euclid beruhte, hat H. Hankel in seinen „Vorlesungen über complexe Zahlen und ihre Functionen“ S. 52 nachgewiesen.

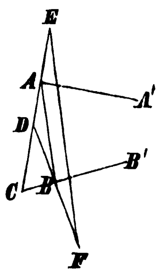
** Eine ziemlich vollständige Zusammenstellung der hieher gehörigen Literatur findet man in dem Sohnke'schen Artikel „Parallel“ der Encyklopädie von Ersch und Gruber. An diese reiht sich noch an die Theorie von Bouniakowsky (Memoires de l' Académie de Pétersbourg. Série VI, Sciences mat. et phys., tome IV.), welche zugleich kleiner als $2R - 2^n x$, also für ein hinreichend grosses n auch negativ sein könnte.

30.

Das anschaulichste Axiom hat W. Bolyai* ausgesprochen: „Drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, liegen immer auf einer Kugelfläche.“

Die beiden Voraussetzungen: „1) Drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, liegen auf einer Kugelfläche; 2) drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, liegen in dem Umfange eines Kreises“ sind mit einander identisch. Denn die Senkrechte von dem Mittelpunkte der Kugel auf die Ebene der drei Punkte bestimmt den Mittelpunkt des Kreises, in dessen Umfang die drei gegebenen Punkte liegen; und umgekehrt: jeder Punkt der Senkrechten im Mittelpunkt des Kreises auf die Ebene dieser drei Punkte kann als Mittelpunkt der Kugel genommen werden.

Fig. 20.



Es seien in einer Ebene die beiden Geraden AA' und BB' gegeben, ferner sei C ein beliebiger Punkt der Geraden BB' und die Gerade $CA \perp AA'$. Ist nun der Winkel ACB' spitz, so schneiden sich die Geraden AA' und BB'. Denn eine Senkrechte vom Punkte A auf die Gerade CB' bestimmt (durch ihren Fusspunkt und den Punkt C) auf letzterer eine Strecke von der Eigenschaft, dass für jeden beliebigen Punkt B dieser Strecke der Winkel ABB' spitz ist. Eine Gerade $BD \perp BB'$ fällt in das Innere des Winkels ABC des Dreiecks ABC, schneidet daher hinreichend verlängert die Seite AC in einem Punkte, etwa D. Verlängert man die Strecke DA um $AE = DA$ und die Strecke DB um $BF = DB$, so liegen die drei Punkte

eine Kritik der Theorie des Bertrand von Genf enthält, und dessen Bemerkungen über die nicht-euclidische Geometrie (Mémoires . . . . Série VII, tome XVIII).

* Kurzer Grundriss eines Versuchs etc. S. 46 wird bei der Aufzählung der vom Parallelen-Axiom unabhängigen Sätze folgender aus der Theorie der Grenzflächen entnommene Satz ausgesprochen: „könnten jede 3 Punkte, die nicht in einer Geraden sind, in eine Sphäre fallen; so wäre das Eucl. Ax. XI. bewiesen.“

D, E, F in dem Umfange eines Kreises: die Senkrechten vom Mittelpunkt desselben auf die Seiten DE und DF des Dreiecks DEF sind mit den Geraden AA' und BB' identisch. Diese Geraden schneiden sich daher in einem Punkte.

Daraus folgt (mit Zuziehung des Art. 26) unmittelbar der Beweis des elften euclidischen Axioms.

Anmerkung. Dass unter Voraussetzung der nichteuclidischen Geometrie nicht jede drei Punkte, die nicht in einer Geraden sind, in dem Umfange eines Kreises liegen, wird in der Anmerkung des Art. 52 näher erläutert.

Zweiter Abschnitt.

Nichteuclidische Geometrie.

Historische Bemerkungen.

31.

Die Erfolglosigkeit aller Bemühungen eines Beweises des elften euclidischen Axioms haben schliesslich dahin geführt, die zweite noch mögliche — diesem Axiom entgegenstehende — Voraussetzung, „dass die Summe der innern Winkel zweier Parallelen mit einer schneidenden Geraden oder die Summe der Winkel eines geradlinigen Dreiecks kleiner als zwei Rechte ist“, zu untersuchen. Die consequente Durchführung der letzteren Voraussetzung liefert ebenfalls eine in sich widerspruchfreie Geometrie, welche von C. J. Gauss (der sich seit 1792 damit beschäftigte) die nichteuclidische*, von N. Lobatschewsky die imaginäre** und von J. Bolyai die

* Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher. Briefe vom Jahre 1831 und 1846; besonders interessant ist der Brief vom 12. Juli 1831.

** Zum erstenmale am 12. Februar 1826 in einem Vortrag der phys. math. Facultät in Kazan auseinandergesetzt. Darstellungen dieser Theorie finden sich: Kazaner Bote 1829 und 1830. Gelehrte Schriften der Universität Kazan 1836—1838, welche das Hauptwerk (russisch) unter dem Titel „Neue Principien der Geometrie nebst einer vollständigen Theorie der Parallelen“ enthalten. Géométrie imaginaire. Crelle J. B. 17. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, Berlin 1840. Pangéometrie, ou Précis de Géométrie fondée sur une théorie générale des parallèles; Kazan 1855. Ins Italienische übersetzt von Battaglini (Giornale di Matematiche. Vol. V). Eine neue vollständige Ausgabe der Schriften Lobatschewsky's wird gegenwärtig absolute Raumlehre* genannt wurde. Eine Uebereinstimmung der beiden Geometrien kann nur in den auf die

---

von M. Janichewsky besorgt. Vergl. den Art. von Hoüel „Notice sur la vie et les travaux de N. J. Lobatschefsky" in dem Bulletin des sciences, tome I, Paris.

* In dem Anhange zu dem „Tentamen" seines Vaters W. Bolyai. Der vollständige Titel dieses Werkes lautet: „Tentamen Juventutem studiosam in elementa Matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentique huic propria, introducendi. Cum Appendice triplici. Auctore Professore Matheseos et Physices, Chemiaeque Publ. Ordinario. Tomus Primus. Maros Vásárhelyini 1832. Typis Collegii Reformatorum per Josephum et Simeonem Kali de Felsö Vist." 8⁰. Mit 4 Kupfertafeln. Tentamen Juventutem etc. Tomus Secundus, ibidem 1833. Mit 10 Kupfertafeln.

Dem ersten Bande folgt ein Anhang seines Sohnes mit folgendem Titel: „Appendix, scientiam spatii *absolute veram* exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica. Auctore Johanne Bolyai de eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo". Derselbe enthält 26 Seiten Text mit einer Figurentafel und 2 Seiten Errata.

Als ein Auszug und Bericht des Tentamen ist die Schrift: „Kurzer Grundriss eines Versuches, I) die Arithmetik, durch zweckmässig construirte Begriffe, von eingebildeten und unendlichkleinen Grössen gereinigt, anschaulich und logisch-streng darzustellen. II) In der Geometrie die Begriffe der geraden Linie, der Ebene, des Winkels allgemein, der winkellosen Formen und der Krummen, der verschiedenen Arten der Gleichheit u. dgl. nicht nur scharf zu bestimmen sondern auch ihr Sein im Raume zu beweisen: und da die Frage, ob zwei von der dritten geschnittene Geraden, wenn die Summa der inneren Winkel nicht $= 2R$, sich schneiden oder nicht? Niemand auf der Erde ohne ein Axiom, wie Euclid das XI., aufzustellen beantworten wird; die davon unabhängige Geometrie abzusondern, und eine auf die Ja-Antwort, andere auf das Nein so zu bauen, dass die Formeln der letzten auf einen Wink auch in der ersten gültig seien. — Nach einem lateinischen Werke von 1829, Maros-Vásárhely, und eben daselbst gedrucktem ungarischen, Maros-Vásárhely 1851." (8⁰, mit 88 Seiten Text) zu betrachten, welche auch einen Vergleich der Appendix mit Lobatschewsky's „Geometrische Untersuchungen" enthält.

Sämmtliche Schriften von W. Bolyai sind ohne Namen des Verfassers erschienen. Eine ausführliche Biographie der beiden Bolyai hat Franz Schmidt in Grunerts Archiv, Theil XLVIII, gegeben. Französische und italienische Uebersetzungen der Appendix wurden resp. von J. Hoüel und im Giornale di Matematiche Vol. V geliefert.

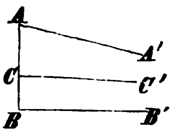
Congruenz allein sich stützenden Betrachtungen vorkommen, wobei jedoch zu beachten ist, dass die Congruenzen nicht vermittelst Sätze, die das Parallelen-Axiom voraussetzen, erhalten werden dürfen. In allen Theilen der Geometrie, welche sich auf eine Voraussetzung der Parallelen (oder der Winkelsumme des Dreiecks) stützen, muss — wegen des Gegensatzes der euclidischen und nichteuclidischen Annahme — zwischen den beiden Geometrien Verschiedenheit eintreten. Scheinbare Ausnahmen, d. i. Ueberstimmung der beiden Geometrien in diesen Theilen werden sich aus der Stetigkeit der beiden Voraussetzungen erklären lassen*.

Parallele, Nichtschneidende und Linien gleichen Abstandes.

32.

Aus der Voraussetzung des Stattfindens der nichteuclidischen Geometrie ergeben sich für die parallelen Geraden folgende Eigenschaften:

Fig. 21.



1) Ist A ein Punkt ausserhalb einer Geraden BB', $AA' \parallel BB'$ und $AB \perp BB'$, so heisst der Winkel $A'AB$ zwischen der Parallelen AA' und der Senkrechten AB der Parallelwinkel**.

Nimmt die Distanz AB zu oder ab, so nimmt der Parallelwinkel ab oder zu. Ist nämlich $CB < AB$, so muss für $CC' \parallel BB'$ der Winkel $C'CB > A'AB$ sein. Denn wäre $C'CB = A'AB$ oder $C'CB > A'AB$, so wäre für die Parallelen AA' und CC' die Summe der innern Winkel A und C gleich oder grösser als zwei Rechte. Für jede Distanz p (eines Punktes von einer Geraden) gibt es also einen bestimmten Parallelwinkel und umgekehrt. Man bezeichnet den

---

* Ausser den bereits angeführten älteren Schriften sind höchst beachtenswerth: Tilly, Études de méchanique abstraite. Mémoires couronnés de l'Académie royale belgique; tome XXI. A. Genocchi, dei primi principii della meccanica e della geometria in relazione al postulato d' Euclide, Firenze, 1869, Memoria estratta dei volumi dell' Accademia da XL residente in Modena, Serie III, tomo II, Parte I. C. Flye Ste Marie, Études analytiques sur la théorie des parallèles. Paris, 1871.

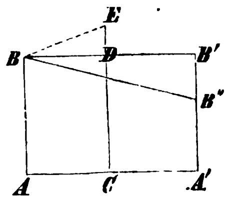
** Nach Lobatschewsky.

der Distanz p entsprechenden Parallelwinkel durch $\Pi(p)$. Für $p = 0$ wird $\Pi(p) = R$, da die Parallele mit der Geraden BB' zusammenfällt; nähert sich p dem Unendlichen, so nähert sich $\Pi(p)$ dem Werthe Null.

2) Parallele nähern sich einander auf der Seite ihres Parallelismus immer mehr.

Sind nämlich $AB = A'B'$ und $\perp AA'$, so ist die Gerade BB' eine nicht schneidende Gerade zur Geraden AA'. Denn ist C die Mitte der Strecke AA' und $CD \perp AA'$, so können die Vierecke $ACDB$ und $A'CDB'$ zur Deckung gebracht werden; es ist daher zugleich $CD \perp BB'$, also die Gerade BB' eine nicht schneidende Gerade. Die Parallele BB'' liegt näher gegen die Gerade AA', sie begegnet also der Senkrechten $A'B'$ in einem Punkte B'' derart, dass $A'B'' < A'B'$ ist.

Fig. 22.



Die Distanzen der Punkte einer Geraden von einer ihr Parallelen werden daher in der Richtung des Parallelismus immer kleiner — die zugehörigen Parallelwinkel also immer grösser; man sagt daher auch: Zwei Parallele schneiden sich im Unendlichen. Die zwischen zwei Parallelen enthaltene (unbegrenzte) Fläche der unbegrenzten Ebene wird ein **Streifen** genannt. Zwei Streifen können zur Deckung gebracht werden.

33.

Der Ort aller Punkte, welche von einer Geraden gleichen Abstand haben, ist eine krumme Linie.

In dem Vierecke $ACDB$ der Figur des vorigen Art. ist der Winkel B spitz. Trägt man auf der Geraden CD die Strecke $CE = AB = A'B'$ ab, so fällt der Punkt E auf die Verlängerung der Strecke CD. Das Viereck $ACEB$ kann nämlich mit dem Viereck $CABE$ zur Deckung gebracht werden, woraus die Gleichheit der Winkel B und E folgt; jeder dieser Winkel ist daher spitz, also liegt der Punkt E ausserhalb der Strecke CD. Eine Linie, deren Punkte B, E, B' . . von einer Geraden AA' gleichen Abstand haben, ist daher keine Gerade. Den gleichen Strecken AC und CA'

der Geraden AA' entsprechen gleiche Stücke BE und EB' dieser krummen Linie. Ist der constante Abstand gleich Null, so fällt die Linie mit der Geraden zusammen; je grösser der Abstand wird, desto kleiner werden die Winkel der Sehne BE mit den Senkrechten AB und CE, da, wie aus Art. 22, 1) hervorgeht, von zwei Vielecken von gleich viel Seiten, von denen das eine innerhalb des andern liegt, das kleinere die grössere Winkelsumme hat.

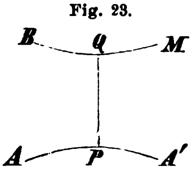
Nähert sich der Punkt B' immer mehr dem Punkte B, so werden die Winkel B und B' immer grösser, die Gerade BB' nähert sich immer mehr der Tangente im Punkte B. Die Tangente in B steht daher auf der Geraden BA senkrecht.

34.

Zwei nicht schneidende Gerade haben einen kleinsten Abstand.

Jede Verbindungslinie des Punktes B mit einem Punkte, etwa M, der Strecke $B'B''$ (des Art. 32, 2) ist eine nicht schneidende Gerade. Die Entfernungen der Punkte der Geraden BM von der Geraden AA' nehmen in der Richtung BM ab, diese Abnahme kann nicht unbegrenzt sein, weil sich sonst die beiden Geraden AA' und BM schneiden müssten; es können auch nicht die Punkte irgend einer Strecke gleichen Abstand haben, weil man sonst ein Viereck wie $AA'B'B$ erhielte, in welchem die Senkrechten in A, A', C gleich wären, jedes der Vierecke $ACDB$ und $A'B'DC$ hätte dann vier Rechte. Es muss daher für einen gewissen Punkt Q der Geraden BM die Entfernung QP von der Geraden AA' eine kleinste sein, dabei muss $PQ \perp BM$ sein, weil sonst die Senkrechte von P auf die Gerade BM kleiner wäre. Die beiden Figuren $APQB$ und $A'PQM$ sind congruent; versinnlicht man sich (nach Anmerkung des Art. 7) die beiden Geraden durch krumme Linien, so ist ihr Verhalten so wie in der beigegebenen Figur.

Fig. 23.

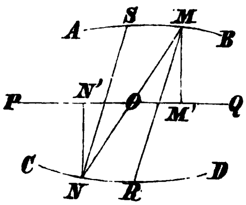


Winkelsumme und Fläche des Dreiecks.

35.

Die Linien gleichen Abstandes gestatten eine Auffindung der Beziehung zwischen der Winkelsumme und der Fläche eines geradlinigen Dreiecks.

Fig. 24.



1) Sind AB und CD die beiden Linien gleichen Abstandes h von einer gegebenen Geraden PQ, so wird jede Strecke MN zwischen diesen Linien von der Geraden PQ im Punkte O halbirt. Denn zieht man MM' und $NN' \perp PQ$, so ist

$$\triangle OMM' \cong \triangle ONN',$$

also

$$MO = ON.$$

Aus dieser Congruenz erhält man ausserdem

$$\text{Winkel } AMN = MND.$$

Daraus folgt: Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks MNR, dessen eine Seite NR ein Stück einer Linie CD gleichen Abstandes von einer Geraden PQ und dessen gegenüberliegende Spitze M ein Punkt der zweiten Linie AB desselben gleichen Abstandes von der Geraden PQ ist, beträgt zwei Rechte. Denn es ist

$$N + M + R = AMN + NMR + RMB = 2R.$$

Zieht man die Sehne NR, so beträgt also die Winkelsumme des geradlinigen Dreiecks MNR weniger als zwei Rechte.

2) Macht man den Bogen $MS = NR$, so kann man auf das (gemischtlinige) Viereck $NRMS$ die Sätze für die (geradlinigen) Parallelogramme der gewöhnlichen Geometrie anwenden. Daraus folgt: Alle Dreiecke, welche eine Sehne NR eines Bogens der einen Linie CD gleichen Abstandes von der Geraden PQ als Grundlinie und ihre Spitze in einem beliebigen Punkte M der anderen Linie AB (desselben) gleichen Abstandes haben, sind flächengleich und haben dieselbe Winkelsumme.

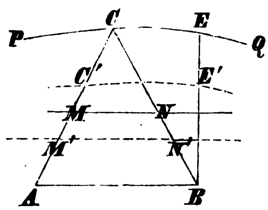
Zusatz. Damit kann man die auf die Verwandlung von Dreiecken in flächengleiche bezüglichen Aufgaben lösen; z. B.:

a) Ein Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln.
b) Ein Dreieck in ein rechtwinkliges zu verwandeln u. s. w.

36.

Zwei flächengleiche Dreiecke ABC und ABD, welche dieselbe Grundlinie AB haben, haben gleiche Winkelsumme.

Fig. 25.



Sind M und N die Mitten der Seiten AC und BC, so sind die Abstände der Punkte A, B, C von der Geraden MN einander gleich, etwa $= h$. Alle Dreiecke, welche die gemeinsame Grundlinie AB und ihre Spitze in der durch den Punkt C gezogenen Linie PQ vom gleichen Abstand $= h$ haben, sind flächengleich und haben gleiche Winkelsumme. Es ist also zu beweisen, dass der Punkt D in der Linie PQ liegt.* Dieser Beweis geschieht indirect. Wäre D kein Punkt dieser Linie, so ziehe man die Gerade BD.

1) Schneidet die Gerade BD die Gerade MN, so schneidet sie auch die Linie PQ, etwa im Punkte E. Aus

$$\triangle ABC = \triangle ABE$$
$$\triangle ABC = \triangle ABD,$$

folgt

$$\triangle ABE = \triangle ABD,$$

was unmöglich ist, wenn der Punkt D auf der Strecke BE liegt.

2) Schneidet die Gerade BD nicht die Gerade MN, so nehme man für den Punkt C den Durchschnittspunkt der Senkrechten in der Mitte der Seite AB mit der Linie PQ, d. h. man setze das Dreieck ABC als gleichschenklig voraus. Nun wähle man auf den Geraden MA und NB die Punkte M' und N' derart, dass $MM' = NN'$ ist und die Gerade BD die Gerade $M'N'$ schneidet. Legt man durch den Punkt C', wo $M'C' = M'A$ vorausgesetzt ist, eine Linie $C'E'$ glei-

* Der Punkt D ist in der Figur, weil er mit dem Punkte E als identisch nachgewiesen wird, nicht bezeichnet; ebenso sind einige überflüssige Linien weggelassen worden.

chen Abstandes zur Geraden $M'N'$, welche der Geraden BD im Punkte E' begegnet, so ist

$$\triangle ABC' = \triangle ABE'$$
$$\triangle ABD < \triangle ABE'$$
$$\triangle ABC' < \triangle ABC,$$

also auch

$$\triangle ABD < \triangle ABC,$$

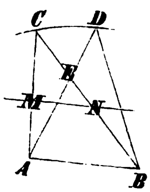
was gegen die Voraussetzung ist. Der Punkt D der Geraden BD muss daher in die Linie PQ, etwa nach E, fallen.

Zusatz. Nicht congruente Dreiecke von gleicher Grundlinie AB und gleicher Höhe sind nicht flächengleich. Die Linien gleichen Abstandes durch den Punkt C zu den Geraden AB und MN sind verschieden.

37.

1) Zwei flächengleiche Dreiecke ABC und $A'B'C'$ haben gleiche Winkelsumme.

Fig. 26.



Man kann die Voraussetzung machen, dass in beiden Dreiecken die Geraden durch die Mitten M und N, M' und N' der Seiten AC und BC, $A'C'$ und $B'C'$ auf den Seiten AC und $A'C'$ senkrecht stehen.

Ist $AC < A'C'$, so bestimme man in der Linie CD gleichen Abstandes zur Geraden MN den Punkt D derart, dass $AD = A'C'$ wird. Aus der Gleichheit der Flächen der Dreiecke ABC und $A'B'C'$, ABC und ABD, also auch der der Dreiecke $A'B'C'$ und ABD, folgt nach dem vorigen Artikel die Gleichheit der Winkelsummen der Dreiecke ABC, ABD, $A'B'C'$.

2) Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$, welche gleiche Winkelsumme haben, sind flächengleich.

Wäre $\triangle ABC > \triangle A'B'C'$, so sei $\triangle ABE = \triangle A'B'C$ wo der Punkt E in der Seite BC vorausgesetzt wird.

Nach 1) haben die Dreiecke ABC und ABE gleiche Winkelsumme, was nach Art. 22, 1) nur möglich ist, wenn die Winkelsumme des Dreiecks ACE zwei Rechte beträgt.

38.

Die Flächen zweier Dreiecke verhalten sich wie die Unterschiede ihrer Winkelsummen von zwei Rechten; d. h. ist

$$A + B + C = 2R - u,\ A' + B' + C' = 2R - u',$$

so ist

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = u : u'.$$

Ist das Verhältniss der Flächen der Dreiecke gleich dem Verhältnisse der Zahlen m und m', so theile man das Dreieck ABC durch Gerade von der Spitze C aus in m gleiche Dreiecke α und analog das Dreieck $A'B'C'$ durch Gerade von der Spitze C' aus in m' gleiche Dreiecke α'. Aus

$$\triangle ABC = m\alpha,\ \triangle A'B'C' = m'\alpha'$$

folgt die Gleichheit der Flächen und Winkelsummen der Dreiecke α und α'. Ist $2R - E$ die Winkelsumme eines dieser Dreiecke, so erhält man für die Winkelsumme des Dreiecks ABC den Werth

$$m(2R - E) - (m - 1)\,2R = 2R - mE$$

und für die Winkelsumme des Dreiecks $A'B'C'$ den Werth $2R - m'E$; es ist also

$$u = mE,\ u' = m'E$$

und

$$u : u' = m : m'.$$

Ist f die Fläche des Dreiecks, so ist daher

$$f = \lambda u,$$

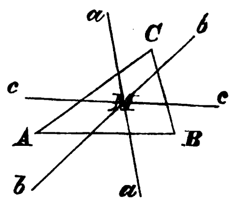
wo λ eine Constante ist.

39.

Aus dem vorigen Art folgt, dass $u = 0$ wenn $f = 0$ ist, und umgekehrt. Die Fläche eines Dreiecks verschwindet, wenn zwei Seiten endlich sind und die dritte verschwindet, oder wenn alle drei Seiten verschwinden (siehe Anhang, Art. 1).

Dass der Grenzwerth der Winkelsumme eines Dreiecks, dessen Seiten sich dem Verschwinden nähern, zwei Rechte beträgt, kann auch unmittelber ohne jede Parallelen-Voraussetzung bewiesen werden.* Denn verschwinden die Seiten des Dreiecks ABC, so reducirt sich dessen Fläche auf einen Punkt M und die Richtungen der Seiten auf drei durch diesen Punkt M gehende Gerade a, b, c. Sind

Fig. 27.



* Flye, Études analytiques sur la théorie des parallèles. Paris, 1871.

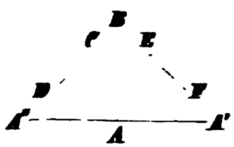
α, β, γ die Grenzwerthe des Winkel des Dreiecks, so folgt, wegen

$$\alpha + \gamma' + \beta = 2R,$$

da γ' der zu γ zugehörige Scheitelwinkel ist,

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R.$$

Fig. 28.



Für $A = B = C = 0$, wird die Fläche des Dreiecks ein Maximum. Um dieses Dreieck zu construiren, ziehe man in einem Punkte A einer Geraden $A'A''$ die Gerade $AB \perp A'A''$ und die Geraden CD und EF derart, dass

Fig. 29.

$$CD \parallel AA'', \; DC \parallel AB$$
$$EF \parallel AA', \; FE \parallel AB$$

ist. Durch krumme Linien wird ein solches Dreieck durch die beistehende Figur versinnlicht.

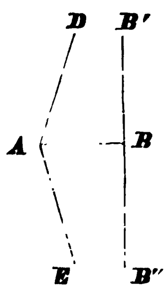
Anmerkung. Die wirkliche Ausführung der eben erwähnten Construction der Parallelen CD und EF wird im Art. 68 gelehrt.

Unendlich ferne Punkte.

40.

Die Voraussetzungen, dass in der euclidischen Geometrie durch jeden Punkt ausserhalb einer Geraden eine und in der nichteuclidischen Geometrie zwei Parallele möglich sind, sind mit den Voraussetzungen, dass jede Gerade einen resp. zwei unendlich ferne Punkte besitzt, identisch. Denn zieht man in der nichteuclidischen Geometrie durch den Punkt A ausserhalb der Geraden $B'B''$ die beiden Parallelen $AD \parallel BB'$, $AE \parallel BB''$, so nähern sich die Punkte der Geraden AD immer mehr denen der Geraden BB' und ebenso die der Geraden AE denen der Geraden BB''; man kann daher jede der Geraden AD und AE als eine die Gerade $B'B''$ in unendlich fernen Punkten schneidende Gerade betrachten. Diese beiden unendlich fernen Punkte müssen als verschiedene betrachtet werden, weil die beiden Geraden AD und AE in der nichteuclidischen Geometrie als zwei verschiedene vorausgesetzt

Fig. 30.



werden. In der euclidischen Geometrie bilden die Geraden AD und AE eine einzige Gerade; lässt man nun das Princip der Geraden „dass sie durch zwei Punkte bestimmt ist" allgemein gelten, so erfordert die Erhaltung dieses Principes die Voraussetzung, dass die beiden unendlich fernen Punkte der Geraden $B'B''$ einen einzigen Punkt bilden, etwa als die beiden entgegengesetzten Seiten eines Punktes betrachtet werden. Zählt man die Strecken auf einer Geraden $B'B''$ von einem Punkte B als Anfang positiv auf der einen, negativ auf der entgegengesetzten Seite, so kann man in der euclidischen Geometrie sowohl beim Durchgang durch den Punkt Null als auch beim Durchgang durch den Punkt Unendlich vom Positiven ins Negative gelangen, während in der nichteuclidischen Geometrie dieser Uebergang nur durch den Punkt Null möglich ist, da die beiden unendlich entfernten Punkte zwei getrennte Punkte sind. Nichts hindert jedoch diese Punkte durch ein ideales Stück einer Linie zu verbinden, deren Punkte vom Anfang der Zählung durch imaginäre Werthe bestimmt sind.*

Dreht man die eben erhaltene Figur um die Gerade AB als Axe, so beschreibt die Gerade $B'B''$ eine Ebene und jeder endlich liegende Punkt einen Kreis. In der euclidischen Geometrie fallen die unendlich fernen Punkte einer jeden Lage der Geraden $B'B''$ zusammen, ihr Inbegriff bildet daher eine Linie, die von jeder Geraden in einem einzigen Punkte geschnitten wird, d. i. eine Gerade. In der nichteuclidischen Geometrie sind die beiden unendlichen Punkte einer jeden Lage der Geraden $B'B''$ getrennt und einander gegenüberliegend, ihr Inbegriff bildet einen Kreis, dessen Mittelpunkt ein beliebiger Punkt B der Ebene ist und dessen Radius unendlich ist.

Denkt man sich durch den Punkt B sämmtliche Ebenen gelegt und für jede die unendlichen Punkte bestimmt, so bilden in der euclidischen Geometrie die unendlich fernen Punkte eine Fläche, die von jeder Geraden in einem (unendlich fernen) Punkte und von jeder Ebene in einer (unendlich fernen) Geraden geschnitten wird, d. i. eine Ebene; während sie in

* Battaglini, Giornale di Matematiche, t. V, p. 22.

der nichteuclidischen Geometrie eine Kugelfläche bilden, deren Mittelpunkt ein beliebiger Punkt B des Raumes und deren Radius unendlich ist.

Anmerkung 1. Der Nutzen, den die unendlich fernen Punkte in der euclidischen Geometrie gewähren, ist hinreichend bekannt. Dieselben gestatten hauptsächlich die Zusammenfassung von Sätzen über sich schneidende und parallele Gebilde, die sonst getrennt behandelt werden müssten.

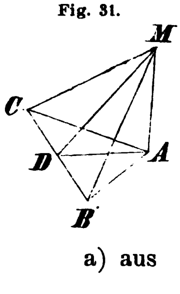
Da der unendlich ferne Punkt kein auf der Geraden erreichbarer Punkt ist, so kann man denselben in der euclidischen Geometrie als Inbegriff aller auf der Geraden nicht erreichbaren Punkte erklären. Sind daher A, B zwei beliebige gegebene Punkte einer Geraden, M ihr unendlich entfernter Punkt, so bedeutet das Verhältniss $AM : BM$ die positive Einheit. In der nichteuclidischen Geometrie kann man die beiden unendlich entfernten Punkte einer Geraden in gleicher (aber entgegengesetzter) Entfernung von jedem endlichen Punkte derselben Geraden voraussetzen.

Anmerkung 2. In den Beweisen der Sätze der Artikel 20, 21 u. s. w. ist die stillschweigende Voraussetzung der Unendlichkeit des Raumes gemacht. Unter dieser Voraussetzung und der eben gemachten für die unendlich fernen Punkte konnte auch das Princip der Geraden erhalten werden. Wird der Raum als unbegrenzt aber endlich vorausgesetzt, so kann dieses Princip für jede beliebige Lage zweier Punkte nicht mehr erhalten werden, wie dies in der Folge bewiesen wird.

Sätze aus der Stereometrie.

41.

Fig. 31.



Ist eine Gerade MA senkrecht auf einer Ebene und BC eine beliebige Gerade dieser Ebene, so ist, wenn

a) $AD \perp BC$ ist, auch $MD \perp BC$,
b) $MD \perp BC$ ist, auch $AD \perp BC$.

Beweis: Macht man $DB = DC$, so erhält man

a) aus $\triangle ADB \cong \triangle ADC$
$\triangle MAB \cong \triangle MAC$.

b) aus $\triangle MDB \cong \triangle MDC$
$\triangle MAB \cong \triangle MAC$.

Folgerungen:

1) Von einem Punkte M auf eine Ebene $\mathfrak{A}$ eine Senkrechte zu ziehen. Man ziehe in der Ebene $\mathfrak{A}$ eine beliebige

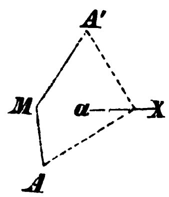
Gerade BC auf diese die Geraden MD und (in der Ebene $\mathfrak{A}$) DA senkrecht. Die Gerade $MA \perp DA$ ist die gesuchte Senkrechte. Denn die Gerade BC, also auch die Ebene $\mathfrak{A}$ ist senkrecht auf der Ebene ADM.

2) In einem Punkte A einer Ebene $\mathfrak{A}$ eine Senkrechte zu errichten. Man ziehe von einem beliebigen Punkt M ausserhalb der Ebene $\mathfrak{A}$ eine Senkrechte MN auf die Ebene $\mathfrak{A}$. In der Ebene MNA ziehe man $AB \perp NA$, so ist nach Art. 19, 4) AB die gesuchte Senkrechte.

42.

Die Durchschnittslinie a zweier gegebenen Ebenen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ kann auf die folgende Art bestimmt werden: Die Senkrechten MA und MA' von einem beliebigen Punkt M auf die Ebenen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ liegen in einer auf der Durchschnittslinie a dieser Ebenen senkrechten Ebene $\mathfrak{B}$. Errichtet man auf die Geraden MA und MA' Senkrechte in der Ebene $\mathfrak{B}$ in den Punkten A und A', so schneiden sich diese in einem Punkte X der Durchschnittslinie a. Eine Senkrechte im Punkte X auf die Ebene $\mathfrak{B}$ ist die Durchschnittslinie a der Ebenen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$.

Fig. 32.

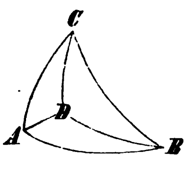


Zusatz. Schneiden sich diese Senkrechten in den Punkten A und A' nicht, so schneiden sich auch nicht die Ebenen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$.

43.

Der Durchschnitt einer Kugel mit einer Ebene ist ein Kreis. Drei grösste Kreise bilden auf der Kugelfläche acht sphärische Dreiecke, von denen immer je zwei gegenüberliegende, deren Spitzen also die Endpunkte dreier Durchmesser bilden, flächengleich sind.

Fig. 33.



In zwei Gegendreiecken ABC und $A'B'C'$ sind nämlich die Seiten und Winkel in derselben Ordnung aber im entgegengesetzten Drehungssinne einander gleich. Eine Senkrechte vom Mittelpunkte der Kugel auf die Ebene der drei Spitzen

A, B, C des einen Dreiecks trifft die Kugelfläche in den Punkten D und D' derart, dass

$$DA = DB = DC = D'A' = D'B' = D'C'$$

ist. Die Dreiecke DAB, DBC, DCA sind mit den Dreiecken $D'A'B'$, $D'B'C'$, $D'C'A'$ congruent, woraus die Gleichheit der Flächen der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ folgt.

44.

Die Summe der drei durch die Winkel des sphärischen Dreiecks bestimmten Zweiecke gibt die halbe Kugelfläche vermehrt um die doppelte Dreiecksfläche.

Theilt man die ganze Kugelfläche in 360 gleiche Zweiecke (deren Winkel also je 1^0 beträgt), so erhält man für die Fläche des Dreiecks ABC

$$f = \tfrac{1}{2}(A + B + C - 180^0),$$

wo A, B, C die in Graden ausgedrückten Winkel des Dreiecks sind.

Ebenen durch parallele Gerade.

45.

Aus dem Satze des Art. 25, 3) folgt die Existenz des räumlichen Gebildes, erzeugt durch drei Ebenen, die sich in drei nach derselben Richtung parallelen Geraden schneiden, d. i. eines Gebildes begrenzt von drei Streifen. Solche Gebilde bieten eine Reihe von Analogien mit dem ebenen Dreiecke der euclidischen Geometrie dar, wenn man die Seiten und Winkel des letzteren mit Streifen und Keilen des ersten vertauscht, wobei jedoch auf die Modificationen vermöge der Gleichheit aller unbegrenzten Streifen (Art. 32, 2) zu achten ist.

Den beiden ersten Congruenzsätzen des Dreiecks können folgende Sätze gegenübergestellt werden: Zwei Streifen-Gebilde sind congruent, wenn sie

a) den zwischen zwei gleichliegenden Streifen eingeschlossenen Keil,

b) zwei einem Streifen anliegende Keile

wechselweise in derselben Ordnung und demselben Drehungssinne gleich haben. Für die Gleichheit der Lage der Streifen ist erforderlich, dass mit der Deckung des einen Paares zugleich die Deckung des zweiten Paares durch Drehung um die gemeinsame Kante (ohne Verschiebung) erfolgt.

46.

Schneiden sich drei Ebenen in parallelen Geraden, so ist die Summe der drei (innern) Keile nicht grösser als zwei Rechte.

Sind AA', BB', CC' parallele Gerade und A, B, C die anliegenden Keile, so kann man in der durch die Gerade AA' und die Mittellinie DD' des Streifens BB' und CC' bestimmten Ebene eine Gerade $EE' \parallel AA'$ derart ziehen, dass die Gerade DD' die Mittellinie der Geraden AA' und EE' ist. Der Durchschnitt des durch die Geraden AA', . . EE' bestimmten Gebildes mit einer (durch einen beliebigen Punkt) auf der Geraden DD' senkrechten Ebene gibt eine Figur wie in Art. 20. Alle Schlüsse dieses Artikels lassen sich auf das vorliegende Gebilde anwenden, indem man Winkel, Seite, . . Dreieck, . . mit Keil, Streifen, . . von drei Streifen bestimmtes Gebilde, . . vertauscht.

47.

1) Zwei Ebenen α und β, welche von einer dritten Ebene in zwei parallelen Geraden $AA' \parallel BB'$ derart geschnitten werden, dass die Summe der beiden auf derselben Seite der schneidenden Ebene $AA'BB'$ liegenden Keile zwei Rechte beträgt, können sich nicht schneiden.

2) Ist CC' die Mittellinie des Streifens $AA'BB'$, so beträgt für jede durch CC' gelegte Ebene, welche die Ebene α also auch die Ebene β schneidet, die Summe der beiden auf derselben Seite liegenden Keile zwei Rechte.

Beweis von 1) ganz analog wie in Art. 23, 1). Für den Beweis von 2) kann man das eine der beiden erhaltenen Streifengebilde um die gemeinsame Kante CC' derart drehen, dass es mit dem anderen zusammenfällt, worauf dann unmittelbar die Schlüsse des Art. 23, 2) angewendet werden können.

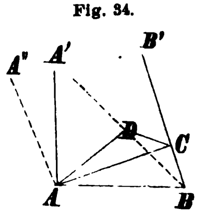
Anmerkung. Statt CC' kann man jede zwischen AA' und BB' liegende parallele Gerade C_1C_1' nehmen. Nur muss man dann das eine Gebilde in der Geraden C_1C_1' so lange verschieben, bis C_1C_1' die Mittellinie von AA' und BB' wird.

48.

Ist die Summe der innern Keile, welche zwei beliebige durch zwei parallele Gerade AA' und BB' gelegte Ebenen α und β mit der Ebene $AA'BB'$ der beiden Parallelen bilden, kleiner als zwei Rechte, so schneiden sich die beiden Ebenen α und β.

1) Es sei einer der beiden Keile, etwa der an der Ebene α ein Rechter, also der an der Ebene β spitz.

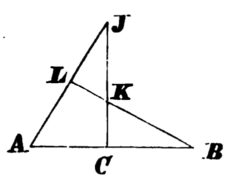
Fig. 34.



Zieht man $AC \perp BB'$, und in der Ebene β $CD \perp BB'$, so ist der Winkel ACD der Keil der Ebene β mit der Ebene der Parallelen AA' und BB', also ein spitzer Winkel. Zieht man $AD \perp CD$, so ist daher die Strecke $AD < AC$ also auch $< AB$, wenn $BA \perp AA'$ vorausgesetzt wird. Eine Ebene γ durch die Punkte A, B, D schneidet die Ebene α in einer Geraden, etwa AA'', (wobei $BA \perp AA''$ ist) und die Ebene β in der Geraden BD. Dreht man die Ebene γ um die Gerade AB, so beschreibt die Gerade AA'' die Ebene α und, wenn diese Gerade mit der Geraden AA' zusammenfällt, so fällt die Gerade BD in die Ebene der Parallelen AA' und BB', wobei der Punkt D zwischen AA' und BB' liegt. Die Gerade BD schneidet in dieser neuen Lage die Gerade AA', also schneidet auch die Gerade BD in ihrer ursprünglichen Lage die Gerade AA''. Der Durchschnittspunkt liegt in den Ebenen α und β, letztere schneiden sich daher in einer Geraden.

2) Sind beide Keile der Ebenen α und β spitz, so lege man durch die Mittellinie CC' eine Ebene senkrecht auf die

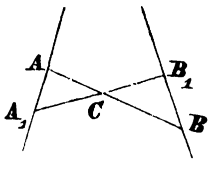
Fig. 35.



Ebene $AA'BB'$, welche also jede der Ebenen α und β, etwa α in der Geraden JJ' und β in der Geraden KK', schneidet, wobei etwa KK' näher der Geraden CC' liegt. Die unbegrenzte Ebene β geht (in der Geraden KK') in das Innere des Streifengebildes der Parallelen AA', CC', JJ', muss also die Ebene α beim Austritt in einer Geraden LL' schneiden. Versinnlicht ist in der beistehenden Figur die Lage der Linien durch einen auf der Geraden CC' senkrechten Schnitt.

3) Ist einer der Keile, etwa der an α stumpf, so lege man durch die Mittellinie CC' die Ebene $\gamma \perp \alpha$, welche die Ebene α in der Geraden $A_1 A_1'$ schneidet. Der Keil an CC' des Streifengebildes AA', CC', $A_1 A_1'$ ist spitz, also auch sein Scheitelkeil. Die Ebene γ schneidet daher die Ebene β nach 2) in einer Geraden $B_1 B_1'$. Nach dem vorigen Artikel kann auf die Ebenen α, β, γ der Satz 1) angewendet werden. Versinnlichung analog wie in 2).

Fig. 36.



Zusatz. Andere Beweise von 2) und 3): Sind a) die Keile der Ebenen α und β spitz, oder ist b) ein Keil, etwa der an α, stumpf, so lege man durch die Gerade BB' eine Ebene $\gamma \perp \alpha$, welche derselben in den Geraden $A_1 A_1' \parallel AA' \parallel BB'$ begegnet. Für den Fall a) erhält man unmittelbar, dass der Keil der Ebenen β und γ spitz ist. Für den Fall b) wird dies mit Zuziehung der vorigen Artikel nachgewiesen.

Sind nämlich α und β die Keile der Ebenen α und β mit der Ebene $AA'BB'$, α' und β' die ihnen anliegenden Keile des Streifengebildes AA', BB', $A_1 A_1'$, so ist

$$\alpha + \beta < 2R$$
$$\alpha' + \beta' \gtreqless R,$$

woraus durch Addition $\beta + \beta' < R$ folgt. Es schneiden sich daher die Ebenen α und β.

Aus dem Vorhergehenden erhellet die Analogie der Gebilde erzeugt durch Ebenen, die sich in parallelen Geraden schneiden, mit den geradlinigen Figuren der euclidischen Planimetrie. Speciell erhält man: Die Summe der drei Keile von drei Ebenen, welche sich in parallelen Geraden schneiden, beträgt zwei Rechte.

49.

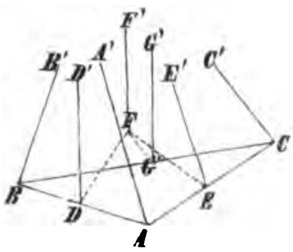
Bestimmt man auf den Geraden $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ für einen gegebenen Punkt A der Geraden AA' die Punkte B und C auf den Geraden BB' und CC' derart, dass

$$A'AB = B'BA, \; A'AC = C'CA$$

ist, so ist auch

$$B'BC = C'CB.$$

Fig. 37.



1) Die Geraden AA', BB', CC' seien nicht in einer Ebene.

Die Ebenen senkrecht durch die Mittellinien DD' und EE' der Streifen $AA'BB'$ und $AA'CC'$ schneiden sich in einer auf der Ebene ABC senkrechten Geraden $FF' \parallel DD' \parallel EE'$. Ist F der Durchschnittspunkt dieser Geraden mit der Ebene ABC, so ist $BF = AF = CF$.*

Zieht man $FG \perp BC$, so ist $BG = GC$ und die Gerade BC senkrecht auf der Ebene $F'FG$ also auch senkrecht auf der Geraden $GG' \parallel FF'$. Die Geraden BB' und CC' sind parallel zur Geraden GG' und dabei ist GG' senkrecht in der Mitte G der Strecke BC; es ist daher auch $B'BC = C'CB$.

Zusatz. Der Punkt F ist der Mittelpunkt des durch die drei Punkte A, B, C gehenden Kreises. Von diesen drei Punkten kann der eine, etwa A, auf der Geraden AA' willkürlich genommen werden, die beiden andern, B und C, sind dann auf den Geraden BB' und CC' eindeutig bestimmt.

2) Sind die Geraden AA', BB', CC' in derselben Ebene, so ziehe man die Gerade $DD' \parallel AA'$ ausserhalb dieser Ebene und bestimme in dieser Geraden den Punkt D derart, dass $D'DA = A'AD$ ist. Dann folgt aus $D'DB = B'BD$ und $D'DC = C'CD$ die Gleichheit von $B'BC$ und $C'CB$.

Anmerkung. Die in den Artikeln 45—49 enthaltenen Sätze sind im absoluten Sinne richtig, d. h. ohne Rücksicht auf das Parallelen-Axiom.

Grenzfläche, Grenzlinie.

50.

Ist AA' eine beliebige Gerade und bestimmt man auf jeder Geraden $MM' \parallel AA'$ zu einem gegebenen Punkt A der

* Die drei Linien AF, BF, CF sind der Deutlichkeit halber in der Figur weggelassen worden.

ersten Geraden einen Punkt M auf der Geraden MM' derart, dass Winkel

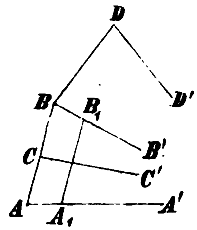
$$M'MA = A'AM$$

ist, so erhält man als den Ort der Punkte M eine Fläche, welche die Grenzfläche heisst.* Die Gerade AA' heisst die Axe der Grenzfläche, und umgekehrt: die eben erhaltene Grenzfläche heisst „Grenzfläche für die Axe AA'“. Sind B und C zwei beliebige Punkte der Grenzfläche $BB' \parallel CC'$ nach der Richtung der Axe, so ist nach Art. 49 auch Winkel $B'BC = C'CB$; d. h. man kann jede der parallelen Geraden AA', BB', CC', . . als Axe der Grenzfläche betrachten.

51.

Der Schnitt der Grenzfläche mit einer durch eine Axe gelegten Ebene ist eine Linie, welche Grenzlinie genannt wird**; jede Grenzlinie hat die Eigenschaft, dass die Senkrechten in den Mitten der Sehnen parallel den Axen sind. Um daher eine Grenzlinie zu erhalten zieht man zu einer gegebenen Geraden AA' als Axe die Gerade AB unter einem beliebigen Winkel $A'AB$ und wählt die Strecke AC derart, dass die Gerade $CC' \perp AB \parallel AA'$ ist; macht man auf der Geraden AB die Strecke $BC = A'C$, so ist der Punkt B ein Punkt der Grenzlinie.

Fig. 38.



1) Ist $A'AB = R$, so ist AC also auch $AB = 0$, d. i. die Tangente eines Punktes A der Grenzlinie steht senkrecht auf der Axe; jede auf der Axe in A nicht senkrechte Gerade, wie AB, schneidet die Grenzlinie in zwei Punkten (A und B).

2) Die Grenzlinie ist aus congruenten Stücken zusammengesetzt; zieht man nämlich die Gerade BD derart, dass $DBB' = BAA'$ ist und macht die Strecke $BD = AB$, so ist der Punkt D ebenfalls ein Punkt der Grenzlinie.

Die Grenzlinie ist zu beiden Seiten einer jeden Axe sym-

* Nach Lobatschewsky, J. Bolyai nennt sie die Fläche F.

** J. Bolyai nennt sie eine Linie L auf der Fläche F.

metrisch. Alle Grenzlinien sind congruent. Zwei Grenzlinien decken sich, wenn ein Punkt und dessen Axe der einen mit einem Punkte und dessen Axe der andern zusammenfällt.

3) Schneidet man auf den Axen AA', BB', . . gleiche Stücke $AA_1 = BB_1 = ..$ ab, so liegen die Punkte A_1, B_1, .. in einer Grenzlinie. Denn man kann die Figur $A'ABB'$ mit der Figur $B'BAA'$ zur Deckung bringen, dabei fällt die Strecke A_1B_1 mit der Strecke B_1A_1 zusammen. Der Punkt B_1 ist daher ein Punkt der Grenzlinie für die Axe A_1A'.

4) Ein Kreis, dessen Halbmesser ins Unbegrenzte wächst, geht in die Grenzlinie über. (Der Beweis folgt unmittelbar aus Art. 32, 2.)

52.

Der Schnitt der Grenzfläche mit einer nicht durch eine Axe gelegten Ebene ist ein Kreis.

Sind nämlich A, B, C drei beliebige Punkte der Schnittlinie, so erhält man (nach Art. 49) in der Ebene ABC einen Punkt F derart, dass $FA = FB = FC$ und die Senkrechte FF' im Punkte F der Ebene $ABC \parallel AA'$, BB', CC' ist; der Punkt F ist daher der Mittelpunkt des durch die Punkte A, B, C gelegten Kreises. Dreht man die Ebene $F'FA$ um die Gerade FF', so beschreibt die Gerade FA die Ebene ABC und der Punkt A die durch die Punkte A, B, C gelegte Kreislinie, deren Punkte sämmtlich auf der Grenzfläche liegen, da die Gerade AA' immer parallel zur Geraden FF' bleibt; ausser diesen Punkten liegt (nach Art. 32, 1)) kein Punkt der Ebene ABC auf der Grenzfläche.

Die Grenzfläche wird daher auch erhalten, indem man eine Grenzlinie um eine ihrer Axen dreht.

Eine Kugel, deren Halbmesser ins Unbegrenzte wächst, geht in die Grenzfläche über.

Anmerkung 1. Unter Voraussetzung des elften euclidischen Axioms sind die Grenzlinie und Grenzfläche resp. mit der Geraden und Ebene, welche auf den Axen senkrecht stehen, identisch; in der nichteuclidischen Geometrie gehören sie zu den krummen Gebilden. Z. B. Die drei Punkte A, B, D der Grenzlinie des Art. 51 liegen nicht in einer Geraden. Durch zwei Punkte A und B einer Ebene sind in dieser zwei Grenzlinien möglich — entsprechend den beiden entgegengesetzten Richtungen der Senkrechten in der Mitte der durch die beiden Punkte A und B bestimmten Strecke —; durch drei Punkte, welche in dem Umfang eines Kreises liegen, sind zwei Grenzflächen bestimmt. Alle Punkte der Ebene, welche zugleich innerhalb der beiden Grenzlinien oder zugleich ausserhalb derselben liegen, können mit den beiden Punkten A und B nicht im Umfang eines Kreises liegen. Analog erhält man diejenigen Punkte des Raumes, welche mit zwei gegebenen Punkten nicht auf einer Kugelfläche liegen.

Anmerkung 2. Die wirkliche Ausführung der in diesen Artikeln vorkommenden Constructionen — deren Möglichkeit aus dem Vorhergehenden klar ist — wird später (in den Art. 67—69) gegeben werden.

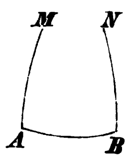
Figuren auf der Grenzfläche.

53.

1) Auf der Grenzfläche ist durch zwei Punkte eine Grenzlinie bestimmt.

2) Zwei Grenzlinien AM und BN, deren Summe der innern Winkel, welche sie mit einer dritten sie schneidenden Grenzlinie AB (auf derselben Seite der schneidenden) bilden, kleiner als zwei Rechte ist, schneiden sich.

Fig. 39.



Denn die Ebenen der Grenzlinien AM und BN bilden mit der Ebene der Grenzlinie AB innere Winkel, deren Summe kleiner als $2R$ ist, die beiden Ebenen schneiden sich nach Art. 48 in einer Geraden, also die Grenzlinien AM und BN in einem Punkte.

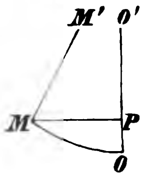
3) Aus 1) und 2) folgt: Auf der Grenzfläche gelten die Sätze der euclidischen Planimetrie, wenn man die Gerade durch die Grenzlinie und die Strecke durch das zwischen zwei Punkten enthaltene Stück der Grenzlinie ersetzt. Z. B.

a) Die Summe der drei Winkel eines (von drei Grenzbögen gebildeten) Dreiecks ist gleich $2R$.

b) Der Umfang eines Kreises, dessen Radius das Stück r eines Grenzbogens ist, beträgt $2\pi r$, wo $\pi = 3{,}14159\,..$ ist.

Ist O der Mittelpunkt des Kreises auf der Grenzfläche M ein beliebiger Punkt des Umfanges, sind $MM' \parallel OO'$ die Axen der Punkte M und O, so erhält man den Kreis durch Umdrehung des Grenzbogens $MO = r$ um OO' als Axe, Ist $MP \perp OO'$, so beschreibt bei dieser Umdrehung die Gerade $MP = y$ einen Kreis von gleichem Umfange. Bezeichnet man den Umfang dieses Kreises mit $\mathrm{O}y$, so ist also

Fig. 40.



$$\mathrm{O}y = 2\pi r.$$

Anmerkung. Die goniometrischen Functionen und ihre Eigenschaften sind von jeder geometrischen Betrachtung unabhängig. Es bedeuten nämlich z. B. $\sin x$, $\cos x$, . . die Reihen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots,$$

welche sich auch in der Form geben lassen:

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}.$$

Diese Reihen sind für jeden beliebigen Werth von x convergent, besitzen alle Eigenschaften der in der euclidischen Geometrie eingeführten goniometrischen Functionen, also auch eine gemeinsame reelle Periode $= 2\pi$, wo $\pi = 3{,}14159\ldots$ die bekannte Ludolf'sche Zahl bedeutet. Die Zahl x heisst Argument und entspricht dem Winkel zweier Geraden in der euclidischen Geometrie. Die Einheit von x ist dadurch bestimmt, dass dem vollen Winkel $= 360^0$ die Zahl 2π entspricht. Ist daher x^0 der dem Argumente x entsprechende Winkel (in Graden ausgedrückt), so ist

$$x : x^0 = 2\pi : 360^0.$$

Gleiches gilt auch von den sogenannten hyperbolischen Functionen

$$\sin x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cos x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \text{ u. s. w.}$$

d. i. von den Reihen

$$\sin x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots,$$

welche die Periode $2\pi i$ haben, und in der absoluten Geometrie die gleiche Verwendung finden wie die Kreisfunctionen in der gewöhnlichen Geometrie. (Siehe Anhang Art. 2.)

Auf der Grenzfläche lässt sich daher die gewöhnliche ebene Trigonometrie und analytische Geometrie auf Gebilde, in welchen die Geraden (der gewöhnlichen Geometrie) durch Grenzlinien und die Strecken durch Grenzbögen ersetzt sind, unmittelbar anwenden.

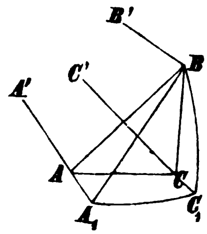
Anwendung auf das geradlinige und sphärische Dreieck.

54.

In jedem Dreiecke verhalten sich die Umfänge der Kreise, welche die Seiten zu Radien haben, wie die Sinuse der gegenüberliegenden Winkel.

1) Ist das Dreieck ABC bei C rechtwinklig, so ziehe man in einem der Punkte A oder B, etwa in A, die Gerade $AA' \perp$ auf die Ebene ABC und ziehe BB', $CC' \parallel AA'$. Durch den Punkt B lege man für BB' als Axe eine Grenzfläche, welche den Geraden AA' und CC' in den Punkten A_1 und C_1 begegnet. Dadurch erhält man auf der Grenzfläche ein Dreieck A_1BC_1, in welchem der Winkel A_1 gleich ist dem Winkel A des geradlinigen Dreiecks ABC. Es ist daher

Fig. 41.



$$BC_1 = BA_1 \sin A,$$

also auch

$$2\pi BC_1 = 2\pi BA_1 \sin A.$$

Die Umfänge $2\pi BC_1$ und $2\pi BA_1$ der Kreise auf der Grenzfläche sind resp. gleich den Umfängen $\bigcirc BC$, $\bigcirc AB$ der ebenen Kreise mit den Radien BC und AB. Es ist daher

$$\bigcirc BC = \bigcirc AB \sin A.$$

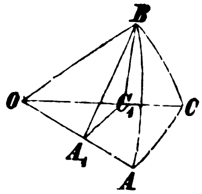
2) Zerlegt man ein Dreieck durch die Höhen in rechtwinklige, so erhält man, wenn mit a, b, c die Seiten und mit A, B, C die ihnen gegenüberliegenden Winkel bezeichnet werden,

$$\bigcirc a : \bigcirc b : \bigcirc c = \sin A : \sin B : \sin C.$$

55.

Ist das sphärische Dreieck ABC bei C rechtwinklig, so ziehe man von einem der Punkte A oder B, etwa von B, die Geraden $BA_1 \perp OA$, $BC_1 \perp OC$ und verbinde die Punkte A_1 und C_1, wodurch man das bei C_1 rechtwinklige Dreieck A_1BC_1 erhält, in welchem A_1 gleich dem Winkel A ist. Nach Art. 54 ist

Fig. 42.



$$\mathsf{O}BC_1 = \mathsf{O}BA_1 \sin A.$$

Aus den Dreiecken OBA_1 und OBC_1 folgt

$$\mathsf{O}BA_1 = \mathsf{O}\,OB \sin c, \quad \mathsf{O}BC_1 = \mathsf{O}\,OB \sin a;$$

und damit durch Substitution in obige Gleichung

$$\sin a = \sin c \sin A.$$

Aus dieser Gleichung folgt die ganze spärische Trigonometrie, welche also vom Parallelen-Axiom unabhängig ist. (Siehe Anhang, Art. 3.)

Verhältniss zweier Grenzbögen.

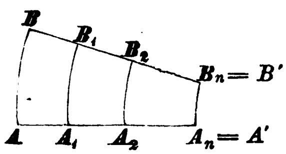
56.

Sind AM und $A'M'$ zwei Grenzbögen, welche zwischen denselben Axen AA' und MM' liegen, so entsprechen nach Art. 51, 3) gleichen Sehnen AB und BC der ersten Grenzlinie gleiche Sehnen $A'B'$ und $B'C'$ der zweiten Grenzlinie, dabei ist

$$AA' = BB' = CC'.$$

Theilt man den Grenzbögen AM in m gleiche Theile, so wird durch die Axen der Theilungspunkte der zugehörige Grenzbogen $A'M'$ ebenfalls in m gleiche Theile getheilt; das Verhältniss zweier zusammengehörigen Grenzbögen ist daher von der Grösse der Bögen unabhängig — also nur abhängig von der Entfernung AA' der beiden Grenzlinien.

Fig. 43.



Um dieses Verhältniss zu bestimmen, theile man die Entfernung $AA' = x$ in n gleiche Theile; es sei $AA_1 = A_1A_2 = \ldots A_{n-1}A' = a$, ferner seien $AB = s$, $A_1B_1 = s_1, \ldots, A'B' = s'$ die den Theilungspunkten zugehörigen Grenzbögen. Dann ist

$$\frac{s}{s_1} = \frac{s_1}{s_2} = \ldots = \frac{s_{n-1}}{s_n} = \lambda,$$

wo λ das der Entfernung a entsprechende Verhältniss zweier Grenzbögen ist. Multiplicirt man diese n Gleichungen mit einander, so folgt

$$\frac{s}{s'} = \lambda^n.$$

Ist k die Entfernung zweier Grenzbögen, deren Verhältniss gleich einer gegebenen Zahl e ist, so sei $k = ma$; dann ist

$$e = \lambda^m \text{ und } \lambda = e^{\frac{1}{m}},$$

also

$$\frac{s}{s'} = e^{\frac{n}{m}} = e^{\frac{x}{k}}.$$

Diese Entfernung k kann derart gewählt werden, dass die Zahl e gleich der Basis des natürlichen Logarithmensystems

$$e = 2.718281828459\ldots$$

wird.

Zusatz. Setzt man

$$e^{\frac{x}{k}} = \xi,\ e^{\frac{y}{k}} = \eta,$$

so sind wegen

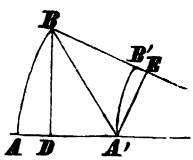
$$\xi\eta = e^{\frac{x+y}{k}},\ \xi : \eta = e^{\frac{x-y}{k}}$$

$\xi\eta$ und $\xi : \eta$ die den Entfernungen $x + y$ und $x - y$ entsprechenden Verhältnisse der Grenzbögen.

Anmerkung. Drückt man x in Theilen von k aus, so erhält man $s = s' e^x$.

57.

Fig. 44.



Sind AB und $A'B'$ zwei Grenzbögen zwischen denselben Axen AA' und BB', so ist ihr Verhältniss bestimmt durch

$$AB : A'B' = \sin AA'B : \sin A'BB'.$$

Zieht man nämlich die Geraden $BD \perp AA'$, $A'E \perp BB'$, so ist

$$\circ BD = \circ A'B \sin AA'B$$
$$\circ A'E = \circ A'B \sin A'BB',$$

also

$$\bigcirc BD : \bigcirc A'E = \sin AA'B : \sin A'BB'.$$

Berücksichtigt man, dass

$$\bigcirc BD = 2\pi AB, \ \bigcirc A'E = 2\pi A'B'$$

ist, so erhält man unmittelbar den ausgesprochenen Satz.

Beziehung zwischen Distanz und Parallelwinkel.

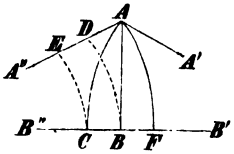
58.

Ist p die Distanz eines Punktes von einer Geraden, $\Pi(p)$ der zugehörige Parallelwinkel, so ist

$$\cot \tfrac{1}{2} \Pi(p) = e^{\frac{p}{k}}.$$

Der Beweis beruht auf folgenden Gründen:

Fig. 45.



1) Ist A ein Punkt ausserhalb der Geraden $B'B''$, dabei $AB \perp B'B''$, $AA' \parallel BB'$, $AA'' \parallel BB''$, und sind AC, BD, CE die Grenzbögen für die Axen AA', BB'', CB'', so ist

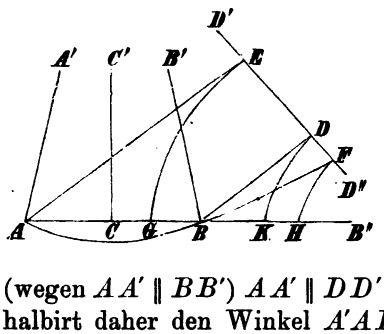
$$AD = DE = BC.$$

Denn zieht man den Grenzbogen AF für die Axe AA'', so ist

$$CB = BF, \ CB = ED, \ BF = DA.$$

2) Es sei $AA' \parallel BB'$ und $A'AB = B'BA$. Ist C die Mitte von AB, so ist $CC' \perp AB$ parallel zu AA' und BB'.

Fig. 46.



Ist BB'' die Verlängerung von AB, und BD die Halbirungslinie des Winkels $B'BB''$, so kann man die Distanz BD derart bestimmen, dass die Gerade $D'D'' \perp BD$ die Eigenschaft hat, dass

$$BB' \parallel DD', \ BB'' \parallel DD'',$$

also auch $AB'' \parallel DD''$ und (wegen $AA' \parallel BB'$) $AA' \parallel DD'$ ist. Die Gerade $AE \perp D'D''$ halbirt daher den Winkel $A'AB$.

3) Beschreibt man eine Grenzlinie für AA' als Axe, so geht diese durch den Punkt B und schneidet die Gerade $D'D''$, etwa in F. Schneiden die Grenzlinien für die Axen

ED'' und FD'' die Gerade AB'' in den Punkten G und H, so ist nach 1)

$$AH = 2AG = 2GH.$$

Ist ausserdem K der Durchschnittspunkt der Geraden AB'' mit der Grenzlinie für die Axe DD'', so ist auf gleiche Weise

$$BH = 2BK = 2KH.$$

Daraus folgt

$$AB = AH - BH = 2(AG - BK).$$

4) Setzt man $AB = 2p$, $AG = x$, $BK = y$, so ist

$$p = x - y.$$

Nach Art. 57 folgt für die den Distanzen AG und BK entsprechenden Verhältnisse der Grenzbögen

$$e^{\frac{x}{k}} = \sin R : \sin \tfrac{1}{2}\,\Pi(p) = 1 : \sin \tfrac{1}{2}\,\Pi(p)$$

$$e^{\frac{y}{k}} = \sin R : \sin \tfrac{1}{2}\,[2R - \Pi(p)] = 1 : \cos \tfrac{1}{2}\,\Pi(p).$$

Daraus erhält man nach Zusatz des Art. 56

$$e^{\frac{p}{k}} = \cot \tfrac{1}{2}\,\Pi(p).$$

Zusatz. Aus den Gleichungen

$$\sin\alpha = \frac{2\cot\frac{\alpha}{2}}{\cot\frac{\alpha^2}{2} + 1}, \quad \cos\alpha = \frac{\cot\frac{\alpha^2}{2} - 1}{\cot\frac{\alpha^2}{2} + 1},$$

folgt

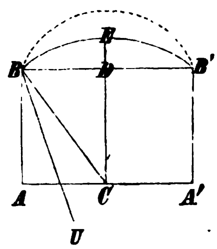
$$\sin\Pi(p) = \mathfrak{sec}\,\frac{p}{k}, \quad \cos\Pi(p) = \mathfrak{tan}\,\frac{p}{k}.$$

Linien und Flächen gleichen Abstandes.

59.

Im Art. 33 ist bereits nachgewiesen worden, dass eine Linie BB', deren Punkte von einer gegebenen Geraden AA' gleichen Abstand $= h$ haben, eine krumme Linie ist.

Fig. 47.



Es sei der Punkt C die Mitte der Strecke AA' und E der zugehörige Punkt der Linie gleichen Abstandes, dreht man diese Linie um die Gerade CE als Axe, so beschreibt sie eine Fläche, deren Punkte von der durch die Gerade AC erzeugten Ebene gleichen Abstand $= h$ haben; diese Fläche heisst daher eine Fläche gleichen Abstandes $= h$. Jeder Punkt, z. B. B, der Linie BB' beschreibt dabei einen Kreis, dessen Punkte von dem durch den Punkt A erzeugten Kreis gleichen Abstand haben.

Das Verhältniss eines Stückes der Linie gleichen Abstandes zum zugehörigen Stück der Geraden ist von der Grösse dieser Stücke unabhängig; man kann daher dafür auch das Verhältniss der Umfänge dieser beiden Kreise setzen.

Der erste Umfang ist $= \bigcirc BD$, der zweite $= \bigcirc AC$. Nun ist

$$\bigcirc BD = \bigcirc BC \sin BCE, \quad \bigcirc AC = \bigcirc BC \sin ABC,$$

also das erwähnte Verhältniss

$$\bigcirc BD : \bigcirc AC = \sin BCE : \sin ABC.$$

Ist der Punkt A fest und entfernt sich der Punkt C immer mehr vom Punkte A, so wird der Winkel ACB immer kleiner, der Winkel BCE also immer grösser, und, wenn der Punkt C im Unendlichen liegt, so wird $BCE = R$ und $ABC = \Pi(AB) = \Pi(h)$. Es ist daher das erwähnte unveränderliche Verhältniss der Linie gleichen Abstandes zur zugehörigen Strecke ihrer Geraden

$$1 : \sin \Pi(h) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{h}{k}} + e^{-\frac{h}{k}}\right) = \mathfrak{Cos}\,\frac{h}{k}.$$

Für $h = 0$ fällt die Linie BB' mit der Geraden AA' zusammen. Ist $BU \parallel EC$, so liegt die Gerade BU näher zur Geraden EC als (die nicht schneidende Gerade) BA; die Grenzlinie durch die Punkte B und B' (deren Tangente im Punkte B auf der Geraden BU senkrecht steht) liegt ausserhalb der Linie gleichen Abstandes. Sind die Punkte B und B' fest und legt man durch dieselben fortgesetzt für alle Abstände h von $h = 0$ an bis $h = \infty$ die entsprechenden Linien gleichen Abstandes, so werden diese immer stärker gekrümmt (d. h. die von ihnen und der zugehörigen Strecke BB' bestimmten Flächenstücke werden immer grösser) und für $h = \infty$ geht die Linie gleichen Abstandes in die durch die Punkte B, B' gelegte Grenzlinie über, deren Axe $BU \parallel DC$ ist; denn für $h = \infty$ ist das Verhältniss $= \infty$, also $AA' = 0$, d. h. die Geraden BA und $B'A'$ schneiden sich im Unendlichen.

Zusatz. Setzt man $BCE = R - ACB$, so folgt für das obige Verhältniss

$$\cos ACB : \sin ABC = \cos \frac{h}{k};$$

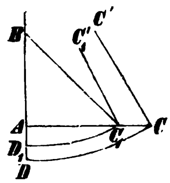
d. h. wird in dem bei A rechtwinkligen Dreieck ABC die Seite $AB = h$ als unveränderlich vorausgesetzt, so bleibt das Verhältniss $\cos C : \sin B$ ebenfalls unveränderlich.

Kreisumfang.

60.

Ist die Gerade $AB \perp AC$, so ist für jeden beliebigen Punkt C_1 der Geraden AC zufolge des Zusatzes des vorigen Artikels

Fig. 48.



$$\cos ACB : \sin ABC = \cos AC_1B : \sin ABC_1,$$

oder

$$\cos ACB : \cos AC_1B = \sin ABC : \sin ABC_1.$$

Nun ist

$$\bigcirc AC : \bigcirc AB = \sin ABC : \sin ACB$$
$$\bigcirc AC_1 : \bigcirc AB = \sin ABC_1 : \sin AC_1B,$$

also

$$\bigcirc AC : \bigcirc AC_1 = \frac{\sin ABC}{\sin ABC_1} : \frac{\sin ACB}{\sin AC_1B}$$

oder nach der obigen Gleichung

$$\bigcirc AC : \bigcirc AC_1 = \cot ACB : \cot AC_1B.$$

Beschreibt man die Grenzbögen CD und C_1D_1 für die Geraden CC' und $C_1C_1' \parallel AB$ als Axen, so ist das Verhältniss dieser Bögen

$$CD : C_1D_1 = \bigcirc AC : \bigcirc AC_1,$$

also

$$CD : C_1D_1 = \cot ACB : \cot AC_1B.$$

Setzt man der Kürze halber

$$AC = y, \quad AC_1 = y_1$$
$$CD = r, \quad C_1D_1 = r_1$$
$$ACB = \varphi, \quad AC_1B = \varphi_1,$$

es ist also

$$\bigcirc y : \bigcirc y_1 = r : r_1 = \cot \varphi : \cot \varphi_1.$$

Wird AB unendlich, so gehen die Winkel φ und φ_1 in die den Abständen y und y_1 entsprechenden Parallelwinkel ACC' und AC_1C_1' über; es ist daher

$$r : \cot \Pi(y) = r_1 : \cot \Pi(y_1) = C,$$

wo C eine constante Zahl ist. Daraus folgt

$$r = C \cot \Pi(y) = C\, \mathfrak{sin}\, \frac{y}{k},$$

$$\bigcirc y = 2\pi r = 2\pi C\, \mathfrak{sin}\, \frac{y}{k}.$$

Um die Constante C zu bestimmen, berücksichtige man, dass das Verhältniss

$$\frac{r}{y} = \frac{C\, \mathfrak{sin}\, \frac{y}{k}}{y}$$

für den Grenzwerth $y = 0$ in die Einheit übergeht. Es ist daher

$$C = \left.\frac{y}{\mathfrak{sin}\, \frac{y}{k}}\right\} \text{ für } y = 0.$$

Nun ist allgemein

$$\frac{\mathfrak{sin}\, \frac{y}{k}}{y} = \frac{1}{k} + \frac{y^2}{3!\, k^3} + \cdots,$$

daraus folgt $C = k$ und

$$\bigcirc y = 2\pi k\, \mathfrak{sin}\, \frac{y}{k}.$$

Ebene Trigonometrie.

61.

Für das bei C rechtwinklige Dreieck ABC erhält man aus Art. 54, 1)

$$\bigcirc a = \bigcirc c \sin A.$$

Setzt man für $\bigcirc a$ und $\bigcirc c$ nach Art. 60 ihre Werthe, so ist

1) $$\mathfrak{sin}\, \frac{a}{k} = \mathfrak{sin}\, \frac{c}{k} \sin A,$$

ebenso

$$\mathfrak{sin}\, \frac{b}{k} = \mathfrak{sin}\, \frac{c}{k} \sin B.$$

Ferner ist nach Art. 59, Zusatz

2) $$\cos A : \sin B = \mathfrak{cos}\, \frac{a}{k},$$

ebenso

$$\cos B : \sin A = \mathfrak{cos}\, \frac{b}{k}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

1') $$\sin A = \frac{\sin\frac{a}{k}}{\sin\frac{c}{k}}$$

2') $$\cos A = \cos\frac{a}{k}\cdot\frac{\sin\frac{b}{k}}{\sin\frac{c}{k}},$$

welche Werthe in

$$\sin A^2 + \cos A^2 = 1$$

gesetzt, geben

$$\sin\frac{c^2}{k} = \sin\frac{a^2}{k} + \cos\frac{a^2}{k}\sin\frac{b^2}{k}.$$

Addirt man zu beiden Seiten die Zahl 1, so erhält man mit Berücksichtigung, dass

$$\cos x^2 = 1 + \sin x^2,$$

$$\cos\frac{c^2}{k} = \cos\frac{a^2}{k}\cos\frac{b^2}{k};$$

woraus, da $\cos x$ für jeden reellen Werth von x positiv ist,

3) $$\cos\frac{c}{k} = \cos\frac{a}{k}\cos\frac{b}{k}$$

folgt.

Durch Division der Gleichungen 1') und 2') folgt

$$\tan A = \frac{\tan\frac{a}{k}}{\sin\frac{b}{k}}$$

oder

4) $$\tan\frac{a}{k} = \sin\frac{b}{k}\tan A.$$

Aus den Gleichungen 2') und 3) folgt

5) $$\tan\frac{a}{k} = \tan\frac{c}{k}\cos B.$$

Vermittelst der Gleichungen 1) bis 5) können sämmtliche auf das rechtwinklige Dreieck bezüglichen Aufgaben gelöst werden.

62.

Ein beliebiges Dreieck kann durch Zerlegung in zwei rechtwinklige aufgelöst werden, ebenso können aus den Formeln für das rechtwinklige Dreieck die für das beliebige

Dreieck geltenden hergeleitet werden. Diese Ableitung wird durch folgende Bemerkung* erleichtert: Die Formeln für das rechtwinklige geradlinige Dreieck gehen in die Formeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck über, wenn man in den Verhältnissen der Seiten $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$ die Constante k in ki (wo $i = \sqrt{-1}$ ist) verwandelt und für k den Radius der Kugel setzt. Man kann daher bei der Ableitung der allgemeinen Gleichungen der ebenen Trigonometrie aus denen des rechtwinkligen Dreiecks nicht nur denselben Gang einschlagen, wie bei der Ableitung der allgemeinen Gleichungen für das sphärische Dreieck aus denen des rechtwinkligen, sondern sogar aus den allgemeinen Gleichungen für das sphärische Dreieck die für das ebene erhalten, indem man für den Radius der Kugel die Constante ki setzt, oder falls der Radius $= 1$ gesetzt ist, indem man $\frac{ai}{k}, \frac{bi}{k}, \frac{ci}{k}$ statt der Seiten a, b, c setzt. Die Kreisfunctionen der Seiten verwandeln sich in hyperbolische Functionen, während die Functionen der Winkel ungeändert bleiben.

Man erhält dadurch folgende Gleichungen der ebenen Trigonometrie

$$\mathfrak{sin}\frac{a}{k} : \mathfrak{sin}\frac{b}{k} : \mathfrak{sin}\frac{c}{k} = \sin A : \sin B : \sin C$$

$$\mathfrak{cos}\frac{a}{k} = \mathfrak{cos}\frac{b}{k}\,\mathfrak{cos}\frac{c}{k} - \mathfrak{sin}\frac{b}{k}\,\mathfrak{sin}\frac{c}{k}\cos A$$

$$\mathfrak{sin}\frac{a}{k}\cos B = \mathfrak{cos}\frac{b}{k}\,\mathfrak{sin}\frac{c}{k} - \mathfrak{sin}\frac{b}{k}\,\mathfrak{cos}\frac{c}{k}\cos A$$

$$\cos A \cos B + \cos C = \mathfrak{cos}\frac{c}{k}\sin A \sin B.$$

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{\mathfrak{tan}\,\tfrac{1}{2}\frac{b}{k}\,\mathfrak{tan}\,\tfrac{1}{2}\frac{c}{k}\sin A}{1 - \mathfrak{tan}\,\tfrac{1}{2}\frac{b}{k}\,\mathfrak{tan}\,\tfrac{1}{2}\frac{c}{k}\cos A}$$

$$\tan\frac{u}{4} = \sqrt{\mathfrak{tan}\,\tfrac{1}{2}\frac{s}{k}\,\mathfrak{tan}\,\tfrac{1}{2}\frac{s-a}{k}\,\mathfrak{tan}\,\tfrac{1}{2}\frac{s-b}{k}\,\mathfrak{tan}\,\tfrac{1}{2}\frac{s-c}{k}}\,,$$

wo $a + b + c = 2s$, $\pi - (A + B + C) = u$ gesetzt wird.

Die Auflösung der Aufgaben geschieht auf ganz ähn-

---

* Lobatschewsky, geometrische Untersuchungen, S. 60.

lichem Wege wie bei den entsprechenden Aufgaben der sphärischen Trigonometrie.

Zusatz. Die vorstehenden Gleichungen stimmen mit den von Lobatschewsky gegebenen überein, wenn man statt

$$\mathfrak{sin}\,\frac{x}{k},\ \mathfrak{cos}\,\frac{x}{k},\ \mathfrak{tan}\,\frac{x}{k}$$

resp.

$$\cot \Pi(x),\ 1 : \sin \Pi(x),\ \cos \Pi(x)$$

setzt. Aus den Gleichungen 1) bis 3) erhält man für das rechtwinklige Dreieck

$$\begin{aligned}\cot \Pi(a) &= \cot \Pi(c) \sin A\\ \sin \Pi(b) \cos B &= \sin A\\ \sin \Pi(c) &= \sin \Pi(a) \sin \Pi(b),\end{aligned}$$

und analog für das schiefwinklige Dreieck

$$\cot \Pi(a) : \cot \Pi(b) = \sin A : \sin B$$

$$\cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1$$

$$\cot A \sin B \sin \Pi(c) + \cos B = \frac{\cos \Pi(c)}{\cos \Pi(a)}$$

$$\cos A \cos B + \cos C = \frac{\sin A \sin B}{\sin \Pi(c)}.$$

Unendlich kleine Figuren, absolute Geometrie im Sinne Bolyai's und Lobatschewsky's.

63.

Setzt man in den vorhergehenden Formeln die Verhältnisse $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$ sehr klein voraus, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned}a : b &= \sin A : \sin B\\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A\\ c &= a \cos B + b \cos A\\ \cos A \cos B + \cos C &= \sin A \sin B.\end{aligned}$$

Die beiden letzteren lassen sich auf die Form bringen

$$\begin{aligned}a \sin(A + B) &= c \sin A\\ \cos(A + B) + \cos C &= 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}a \sin(A + B + C) &= a \sin(A + B) \cos C + a \cos(A + B) \sin C\\ &= c \sin A\,[\cos C + \cos(A + B)] = 0,\end{aligned}$$

d. h.

$$A + B + C = 2R.$$

Die Formeln der nichteuclidischen Trigonometrie gehen also in die der euclidischen Trigonometrie über, wenn man die Verhältnisse der Seiten a, b, c zur Grösse k als sehr klein voraussetzt.

Dieselben Resultate erhält man auch aus Art. 58, indem der Ausdruck

$$1 : \sin \Pi(p) = 1 + \frac{p^2}{2k^2} + \ldots$$

für sehr kleine Werthe des Verhältnisses $\frac{p}{k}$ in die Einheit übergeht, also

$$\Pi(p) = R$$

wird. Ebenso geht das Verhältniss der Linie gleichen Abstandes zu ihrer Basis des Art. 59 für sehr kleine Werthe von $\frac{h}{k}$ in die Einheit über, wodurch für das bei C rechtwinklige Dreieck ABC folgt

$$\cos A : \sin B = 1 \text{ d. h. } A + B = R.$$

Diese Kleinheit der Verhältnisse tritt ein, wenn entweder für ein endliches k die Seiten a, b, c sehr klein sind, oder für endliche Seiten a, b, c die Grösse k als sehr gross vorausgesetzt wird.

Aus der ersten Voraussetzung folgt: Für unendlich kleine Figuren gilt die gewöhnliche Geometrie unabhängig vom Parallelen-Axiom. Die zweite Voraussetzung gestattet die Auffassung der gewöhnlichen (euclidischen) Geometrie als speciellen Fall der nichteuclidischen Geometrie, indem man nur die Constante k so gross voraussetzt, dass man für unsere Messungen mit den obigen genäherten Formeln ausreicht. Aus diesem Grunde kann die nichteuclidische Geometrie die **absolute** Geometrie genannt werden, indem sie vom Parallelen-Axiom, dessen Unbeweisbarkeit hier unmittelbar klar ist, als unabhängig betrachtet werden kann.

Anmerkung. Da das Nichtstattfinden der euclidischen Geometrie in der Wirklichkeit an grossen Figuren sich zeigen müsste, so hat Lobatschewsky aus astronomischen Beobachtungen Dreiecke gebildet, deren kleinste Seiten ungefähr von der Grösse der doppelten Entfernung der Erde von der Sonne waren. Als Resultat dieser Untersuchung hat sich ergeben, dass bei solchen Dreiecken die Winkelsumme noch immer nicht von zwei Rechten um eine solche Grösse abweicht, welche die aus den Beobachtungsfehlern herrührenden Grenzen übersteigt. (Siehe Anhang Art. 4.) Auch W. Bolyai bemerkt, dass man sich wegen der Uebereinstimmung der auf das euclidische Axiom sich stützenden astronomischen Rechnungen mit den Beobachtungen in der Praxis mit um so grösserer Sicherheit der gewöhnlichen Geometrie bedienen könne.

64.

Aus dem Vorstehenden ist unmittelbar klar, in welchen Theilen die euclidische und die nichteuclidische Geometrie übereinstimmen. Dass dieses in allen auf Congruenz allein sich stützenden Beziehungen der Fall ist, wurde bereits im Art. 31 erwähnt. In Beziehungen, die eine Parallelen-Voraussetzung erfordern, kann eine Uebereinstimmung nur bei unendlich kleinen Figuren oder bei solchen endlichen, welche durch unendlich kleine ersetzt werden können, eintreten. Beispiele hierzu sind folgende Sätze:

1) Zwei Gerade BB' und CC', welche mit einer dritten AA' nach derselben Richtung parallel sind, sind mit einander parallel. (Vergl. Art. 25, 3.) Man gehe in der Geraden AA' (in der Richtung des Parallelismus) bis zu einem Punkte, dessen Entfernungen von den Geraden BB' und CC' unendlich klein sind (Art. 32, 2). Eine senkrechte Ebene auf die Gerade AA' in diesem Punkte ist auch senkrecht auf BB' und CC', also $BB' \parallel CC'$.

2) Die Summe der drei Keile dreier Ebenen, die sich in parallelen Geraden schneiden, ist gleich zwei Rechte. Beweis wie 1).

3) Die sphärische Trigonometrie ist unabhängig vom Parallelen-Axiom. Man beschreibe eine concentrische Kugel mit unendlich kleinem Radius; durch das gegebene Dreieck ist ein unendlich kleines sphärisches Dreieck bestimmt, welches mit ihm gleiche Seiten und gleiche Winkel hat.

Bei endlichen Figuren, die sich nicht durch unendlich kleine ersetzen lassen, müssen die unter Voraussetzung des euclidischen elften Axioms abgeleiteten Beziehungen von den unter Voraussetzung der nichteuclidischen Geometrie erhaltenen verschieden sein.

Anmerkung. Die Congruenz-Voraussetzung erfordert, dass für ein System der Geometrie die im Art. 56 eingeführte Grösse k unveränderlich bleibt; denn k bedeutet die **bestimmte** Entfernung zweier zusammengehöriger Grenzbögen, deren Verhältniss eine gegebene Zahl $= e$ ist. Für die verschiedenen Werthe von k erhält man verschiedene Systeme der Geometrie, für $k = \infty$ erhält man die euclidische Geometrie.

Im Falle des Stattfindens eines dieser Systeme der Geometrie in der Wirklichkeit, müsste für die Lösung der Aufgaben auf dem Wege der Rechnung die Grösse k gegeben sein. Die Aufgaben der ebenen Trigonometrie und ihre Lösungen sind dann ganz analog denen der sphärischen Trigonometrie.

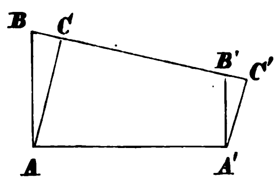
Aufgaben über Parallele und Nichtschneidende.

65.

Sind $p = AB$ und $p' = A'B'$ die Entfernungen zweier Punkte B und B' von der Geraden $AA' \parallel BB'$, so ist $AA' = a$ gesetzt

$$\tan\frac{p'}{k} = \tan\frac{p}{k}e^{-\frac{a}{k}}.$$

Fig. 49.



Denn zieht man AC und $A'C'$ $\perp BB'$, so ist

$$\sin\frac{AC}{k} = \sin\frac{AB}{k}\sin ABC$$

oder, wegen $\sin ABC = 1 : \cos\frac{p}{k}$,

$$\sin\frac{AC}{k} = \tan\frac{p}{k};$$

also ist

$$\sin\frac{AC}{k} : \sin\frac{A'C'}{k} = \tan\frac{p}{k} : \tan\frac{p'}{k}.$$

Nun ist das erste Verhältniss gleich dem der Grenzbögen zu den Punkten A und A', d. i. gleich $e^{-\frac{a}{k}}$.

66.

Ist die Gerade BB' eine Nichtschneidende zur Geraden AA', und p der kleinste Abstand, so ist $AA' = a$ gesetzt,

$$\tan\frac{p'}{k} = \tan\frac{p}{k}\cos\frac{a}{k}.$$

Denn es ist

$$\tan\frac{p'}{k} = \tan\frac{AB'}{k}\cos AB'A'$$

$$\tan\frac{p}{k} = \tan\frac{AB'}{k}\cos BAB' = \tan\frac{AB'}{k}\sin A'AB',$$

also

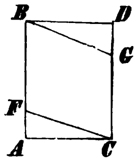
$$\tan \frac{p'}{k} : \tan \frac{p}{k} = \cos AB'A' : \sin A'AB' = \cos \frac{AA'}{k}.$$

67.

Aus dem Art. 59 ergibt sich unmittelbar die Lösung der Aufgabe:

Durch einen Punkt B ausserhalb einer Geraden AC eine Parallele BG zur Geraden AC zu ziehen, d. h. zu einer gegebenen Distanz den zugehörigen Parallelwinkel zu finden.

Fig. 50.



Ist nämlich $BA \perp AC$, $BD \perp BA$, D ein beliebiger Punkt der Geraden BD und $DC \perp CA$, so ist

$$\odot BD : \odot AC = 1 : \sin \Pi(h),$$

wo $h = AB$ der Abstand und $\Pi(h)$ der zugehörige Parallelwinkel ist. Da $1 > \sin \Pi(h)$ ist, so folgt $BD > AC$.

Beschreibt man aus dem Punkte C mit dem Radius BD einen Kreis, so schneidet dieser die Gerade AB in einem Punkte, etwa F. Im Dreiecke ACF ist dann

$$\odot CF : \odot CA = 1 : \sin AFC,$$

also

$$\Pi(h) = AFC.$$

Zieht man durch den Punkt B die Gerade BG derart, dass der Winkel $ABG = AFC$ ist, so ist $BG \parallel AC$.

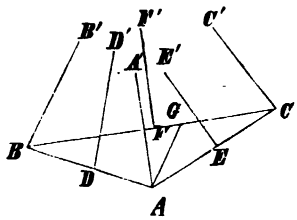
68.

Zu einem gegebenen Winkel als Parallelwinkel die zugehörige Distanz zu finden.

Hülfssätze:

1) Sind von den drei Senkrechten DD', EE', FF', welche in den Mitten D, E, F der Seiten AB, AC, BC eines Dreiecks ABC errichtet sind, zwei zu einander parallel, so sind alle drei parallel.

Fig. 51.



Zieht man von den Spitzen A, B, C des Dreiecks parallele Gerade AA', BB', CC' zu den beiden als parallel vorausgesetzten Senkrechten, so folgt der Beweis unmittelbar aus Art. 49, 2).

2) Sind $2a$, $2b$, $2c$ die Längen der den Winkeln A, B, C gegenüberliegenden Seiten und ist A der grösste Winkel, so finden in diesem Falle zwischen den Seiten und Winkeln folgende Gleichungen statt

$$A = \Pi(b) + \Pi(c)$$
$$B = \Pi(c) - \Pi(a)$$
$$C = \Pi(b) - \Pi(a).$$

3) Macht man nun $A'AG = B'BC = \Pi(a)$, so schneiden sich die Geraden AG und BC in einem Punkte, etwa G; dabei ist im Dreieck ACG, wegen $GAC = \Pi(b) - \Pi(a) = C$, $AG = CG$.

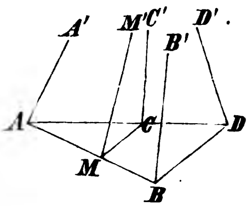
Daraus folgt die Lösung der vorliegenden Aufgabe auf folgende Art: Ist $B'BC$ der gegebene Winkel, so kann man (vermittelst des vorigen Artikels) für eine hinreichend kleine Distanz BD einen Parallelwinkel $B'BD > B'BC$ erhalten. Macht man $DA = BD$, $AA' \parallel BB'$, $A'AG = B'BC$ und (auf der Geraden BC) $GC = AG$, so bestimmt die Mitte F der Strecke BC die dem Winkel $B'BC$ entsprechende Distanz BF.

69.

Es sei die Gerade $AA' \parallel BB'$; zu einem gegebenen Punkte A der Geraden AA' soll der Punkt B der Geraden BB' derart bestimmt werden, dass Winkel $A'AB = B'BA$.

Man ziehe ausserhalb der Ebene $AA'BB'$ die Gerade $CC' \parallel AA'$, mache $AC \perp CC'$, $CD = AC$ und $DD' \parallel CC'$. Durch die Gerade CC' lege man eine Ebene derart, dass sie mit der Ebene $AA'CC'$ denselben Winkel bildet wie die Ebene $DD'BB'$ und bestimme nach Art. 42 ihre Durchschnittslinie MM' mit der Ebene $AA'BB'$. Die Gerade $AB \perp MM'$ bestimmt den gesuchten Punkt B.

Fig. 52.



Legt man nämlich durch den Punkt A für die Axe AA' eine Grenzfläche, so bilden auf derselben die vier Ebenen $AA'DD'$, $AA'BB'$, $DD'BB'$, $CC'MM'$ zwei ähnliche Grenzdreiecke, woraus (wegen $AC = CD$) $AM = MB$, also auch $A'AB = B'BA$ folgt.

Anmerkung. Durch die Lösung dieser drei Aufgaben ist die directe Ausführung der in den Art. 25, 2), 39, 49—51, 58, 2) u. s. w. vorkommenden Constructionen ermöglicht.

70.

Denkt man sich auf der Grenzfläche die Grenzbögen durch ihre Endpunkte allein bestimmt — analog wie in der Ebene die Strecke —, so kann auf die in dem vorigen Artikel enthaltenen Aufgaben die Lösung der nachstehenden zurückgeführt werden:

1) Einen Grenzbogen zu bestimmen, welcher gleich ist der Summe zweier durch ihre Endpunkte bestimmten Grenzbögen AB und CD.

Man bestimme nach Art. 67 die den Strecken $\frac{1}{2}AB$ und $\frac{1}{2}CD$ entsprechenden Parallelwinkel $\Pi(\frac{1}{2}AB)$ und $\Pi(\frac{1}{2}CD)$ und lege die Strecken AB und CD unter dem Winkel $\Pi(\frac{1}{2}AB) + \Pi(\frac{1}{2}CD)$ an einander. Der Anfangspunkt A der ersten Strecke und der Endpunkt D der zweiten Strecke bestimmen dann die beiden Endpunkte des gesuchten Grenzbogens.

Auf analoge Art wird ein Grenzbogen bestimmt, welcher gleich ist dem Unterschiede zweier Grenzbögen.

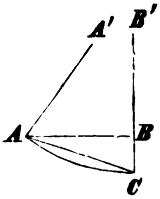
2) Zu drei Grenzbögen SA, AB, SC die vierte geometrische Proportionale CD zu finden.

Dazu dient dasselbe Verfahren wie in der euclidischen Planimetrie. Man lege in einer Ebene $\mathfrak{A}$ (vermittelst zweimaliger Anwendung des Art. 67) die Sehnen der Bögen SA und AB so an einander, dass die Punkte S, A, B in einer Grenzlinie liegen, d. h. dass der Winkel $SAB = \Pi(\frac{1}{2}SA) + \Pi(\frac{1}{2}AB)$ ist. Ist SS' die Axe dieses Grenzbogens, so lege man durch dieselbe eine beliebige Ebene $\mathfrak{A}'$ und ziehe in dieser die Gerade $CC' \parallel SS'$ derart, dass SC gleich der Sehne des dritten Bogens und der Winkel $S'SC = C'CS$, also $= \Pi(\frac{1}{2}SC)$ ist. Legt man durch BB' eine Ebene unter derselben Neigung mit der Ebene $\mathfrak{A}$ wie die der Ebene $BB'CC'$ und bestimmt nach Art. 42 deren Durchschnittslinie DD' mit der Ebene $\mathfrak{A}'$, so erhält man die gesuchte vierte Proportionale CD, wenn nach der Aufgabe des Art. 69 der Punkt D derart bestimmt wird, dass Winkel $D'DC = C'CD$ ist.

In ähnlicher Weise kann die mittlere geometrische Proportionale, u. s. w. construirt werden. Berücksichtigt man ausserdem die Sätze des Art. 53, so erhält man folgenden allgemeinen Satz:

Auf der **Grenzfläche** kann man — ohne Rücksicht auf das euclidische Axiom — alle Constructionen ausführen, welche in der euclidischen Planimetrie möglich sind. Es ist also auch die Theilung von $4R$ in gleiche Theile in denselben Fällen möglich.

Fig. 53.



Beispiel. Es sei $A'AB = \frac{1}{3}R$, ferner AB so gewählt, dass $BB' \perp AB$ und $\parallel AA'$ ist; bestimmt man auf der Geraden BB' den Punkt C derart, dass $A'AC = B'CA$ ist, so ist $BC = x$ gesetzt, nach Art. 57

$$e^{\frac{x}{k}} = 1 : \sin \tfrac{1}{3}R = 2,$$

also x geometrisch construirt.

Wählt man den Winkel $A'AB$ derart, dass

$$\sin A'AB = \frac{1}{e}, \text{ d. i. } A'AB = 21^0\, 35'\, 5''.63$$

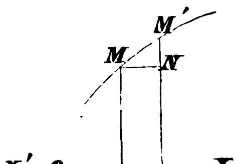
ist (was näherungsweise möglich ist), so wird $x = k$.

Punkt und Linien-Element in der Ebene.

71.

Für die Bestimmung der Punkte einer Ebene denke man sich in derselben eine bestimmte unbegrenzte Gerade XX' als **Axe** und in dieser einen bestimmten Punkt O als **Anfang** gegeben.

Fig. 54.



Um den Punkt M zu bestimmen, ziehe man $MP \perp XX'$; die Strecken $OP = x$ und $PM = y$ bestimmen die Lage des Punktes M eindeutig, wenn die Grösse x auf der einen Seite des Punktes O positiv, auf der entgegengesetzten negativ, die Grösse y auf der einen Seite der Geraden XX' positiv, auf der entgegengesetzten negativ genommen wird.

Die Grössen x und y heissen die **Coordinaten** des Punktes M, es soll dies durch $M = (x, y)$ bezeichnet werden.

Eine Gleichung $y = f(x)$, wo y eine stetige Function von x ist, hat zu ihrem geometrischen Orte eine stetige Linie.

Ist M' ein zweiter Punkt, sind $OP' = x'$ und $M'P' = y'$ dessen Coordinaten, so ist $PP' = x' - x = \Delta x$. Legt man durch den Punkt M eine Linie MN gleichen Abstandes $= y$ zur Geraden XX', welche die Gerade $M'P'$ im Punkte N schneidet, so ist $M'N = y' - y = \Delta y$. Dabei ist nach Art. 59 der Bogen

$$MN = \frac{1}{2} \mathfrak{cos} \frac{y}{k} \Delta x.$$

Sind M und M' zwei unendlich nahe liegende Punkte, so erhält man für das unendlich kleine (bei N rechtwinklige) Dreieck $MM'N$

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{M'N}^2$$

oder, wenn $MM' = ds$ gesetzt wird,

$$ds^2 = \mathfrak{cos} \frac{y^2}{k} dx^2 + dy^2.$$

Sind M und M' Punkte einer Linie, deren Gleichung $y = f(x)$ (oder $\varphi(x, y) = 0$) gegeben ist, so kann man ds durch eine Variable und deren Differential ausdrücken.

Grenzlinie.

72.

Ist OX eine Axe der Grenzlinie, so erhält man

aus Art. 57 $\qquad e^{\frac{x}{k}} = 1 : \sin \Pi(y)$

aus Art. 58, 4) $\qquad e^{\frac{y}{k}} = \cot \frac{1}{2} \Pi(y)$.

Eliminirt man $\Pi(y)$, so erhält man als Gleichung der Grenzlinie

$$e^{\frac{x}{k}} = \mathfrak{cos} \frac{y}{k}.$$

Durch Differentiation folgt

$$dx = \mathfrak{tan} \frac{y}{k} dy,$$

also

$$ds = \mathfrak{cos} \frac{y}{k} dy.$$

Integrirt man, so erhält man wie in Art. 60 für den von O an gezählten Grenzbogen

$$s = k\,\mathfrak{sin}\,\frac{y}{k} = k \cot \Pi(y)\,.$$

Gleichung der Geraden.

73.

Die Gleichung der Geraden kann entweder nach einem der gewöhnlichen (euclidischen) Geometrie entsprechenden Verfahren oder direct aus dem analytischen Ausdrucke für das Linienelement erhalten werden. Im ersteren Falle muss man unterscheiden, ob die Gerade eine die x-Axe schneidende oder eine zu ihr parallele, oder eine nichtschneidende Gerade ist.

1) Schneidet die Gerade die x-Axe im Punkte A, so ist $OA = l$, $MAX = \alpha$ gesetzt, für jeden Punkt $M = (x, y)$

$$\mathfrak{tan}\,\frac{y}{k} = \mathfrak{sin}\,\frac{x-l}{k} \tan\alpha\,,$$

welche Gleichung sich auf die Form bringen lässt

$$\mathfrak{tan}\,\frac{y}{k} = m\,\mathfrak{cos}\,\frac{x}{k} + n\,\mathfrak{sin}\,\frac{x}{k}\,,$$

wo m und n Constante sind.

2) Ist die Gerade parallel zur (positiven) x-Axe, so ist

$$\mathfrak{tan}\,\frac{y}{k} = \mathfrak{tan}\,\frac{y_0}{k}\, e^{-\frac{x}{k}}\,,$$

wo y_0 die Ordinate im Anfange bedeutet.

3) Für eine die x-Axe Nichtschneidende erhält man

$$\mathfrak{tan}\,\frac{y}{k} = \mathfrak{tan}\,\frac{p}{k}\,\mathfrak{cos}\,\frac{x-l}{k}\,,$$

wo für $x = l$ die Ordinate $y = p$ ein Minimum ist.

74.

Zur Erläuterung der Untersuchungen im dritten Buche sollen die Gleichung der Geraden und ihre Eigenschaften auch aus dem Ausdrucke für das Linienelement hergeleitet werden.

Die Gleichung der Geraden erhält man in diesem Falle aus ihrer Eigenschaft, dass sie die kürzeste Verbindung zweier Punkte $M_1 = (x_1, y_1)$ und $M_2 = (x_2, y_2)$ bestimmt. Es muss daher für die Gerade das Integral

$$J = \int \sqrt{\cos\frac{y^2}{k}\, dx^2 + dy^2}$$

zwischen den den Punkten M_1 und M_2 entsprechenden Grenzen ein Minimum werden. Betrachtet man x als Function von y und setzt der Kürze halber

$$\frac{dx}{dy} = x',\ \sqrt{\cos\frac{y^2}{k}\, x'^2 + 1} = V,$$

so muss also das Integral

$$J = \int_{y_1}^{y_2} V dy$$

ein Minimum werden. Die Bedingung dafür ist

$$\delta J - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial V}{\partial x'} \cdot \frac{d\delta x}{dy}\, dy = 0,$$

oder

$$\frac{\partial V}{\partial x'}\, \delta x \Big\}_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right) \delta x dy = 0;$$

also, wegen $\delta x_1 = \delta x_2 = 0$,

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right) = 0,$$

oder

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = C,$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet. Entwickelt man $\frac{\partial V}{\partial x'}$, so erhält man

$$\frac{x' \cos\frac{y^2}{k}}{\sqrt{\cos\frac{y^2}{k}\, x'^2 + 1}} = C;$$

mithin

$$dx = \frac{C dy}{\cos\frac{y}{k} \sqrt{\cos\frac{y^2}{k} - C^2}}$$

oder

$$dx = \frac{C \dfrac{dy}{\cos\frac{y^2}{k}}}{\sqrt{1 - \dfrac{C^2}{\cos\frac{y^2}{k}}}}.$$

Setzt man

$$\tan\frac{y}{k} = z\,,$$

so wird

$$dx = \frac{k\,C\,dz}{\sqrt{1 - C^2 + C^2 z^2}}$$

Integrirt man, so wird

$$x + D = k\log\left(C\tan\frac{y}{k} + \sqrt{1 - C^2 + C^2\tan\frac{y^2}{k}}\right)\,,$$

wo D eine willkürliche Constante bedeutet. Daraus folgt, wenn

$$\frac{e^{\frac{D}{k}}}{C} = a\,,\quad 1 - \frac{1}{C^2} = ab$$

gesetzt wird und die Wurzel absolut genommen wird

$$1)\qquad a e^{\frac{x}{k}} = \tan\frac{y}{k} \pm \sqrt{\tan\frac{y^2}{k} - ab}\,.$$

Schafft man die Wurzel weg, so erhält man

$$2)\qquad 2\tan\frac{y}{k} = a e^{\frac{x}{k}} + b e^{-\frac{x}{k}}\,.$$

Anmerkung. Für sehr grosse Werthe von k folgt aus der Gleichung 2)

$$y = c + dx\,,$$

wo

$$a + b = \frac{2c}{k}\,,\quad a - b = 2d$$

ist.

75.

Aus der Gleichung 1) des vorigen Art. folgt: Damit $e^{\frac{x}{k}}$ reell ist, muss die Bedingung erfüllet werden

$$\tan\frac{y^2}{k} - ab > 0\,.$$

1) Sind a und b verschieden bezeichnet, so ist $e^{\frac{x}{k}}$ immer reell; damit jedoch x reell ist, muss $e^{\frac{x}{k}}$ positiv sein.

Ist a positiv, so ist für das obere Zeichen x reell; ist a negativ, so ist für das untere Zeichen x reell.

Für $y = 0$, erhält man

$$e^{\frac{x}{k}} = \sqrt{-\frac{b}{a}}.$$

Die Gerade schneidet daher die x-Axe.

Die Gleichung der Geraden lässt sich in diesem Falle umformen in

$$\tan\frac{y}{k} = m \sin\frac{x-l}{k},$$

indem man

$$\frac{a-b}{2} = m \cos\frac{l}{k}, \quad \frac{a+b}{2} = -m \sin\frac{l}{k}$$

setzt. Ist α der Neigungswinkel der Geraden zur x-Axe, l die Abscisse des Durchschnittspunktes, so ist

$$a = \tan\alpha\, e^{-\frac{l}{k}}, \; b = = \tan\alpha\, e^{\frac{l}{k}}.$$

Setzt man $y = \pm\infty$, so wird

$$\sin\frac{x-l}{k} = \pm\frac{1}{m};$$

die diesen beiden Werthen von x entsprechenden Ordinaten sind zur Geraden parallel.

2) Sind a und b gleich bezeichnet und zwar positiv, so ist für ein positives y der Ausdruck $e^{\frac{x}{k}}$ reell, wenn

$$\tan\frac{y}{k} \geqq \sqrt{ab},$$

d. h. wenn $y \geqq y_0$ ist, wo

$$\tan\frac{y_0}{k} = \sqrt{ab}\cdot$$

Für jeden Werth von y, welcher dieser Bedingung entspricht, sind beide Werthe von $e^{\frac{x}{k}}$ positiv, d. h. jedem (positiven) y entsprechen zwei zugehörige Werthe von x. Ist ξ die Mitte der beiden Werthe von x, welche mit x_1 und x_2 bezeichnet werden sollen, also $2\xi = x_1 + x_2$, so folgt aus der Gleichung der Geraden

$$e^{\frac{x_1+x_2}{k}} = \frac{b}{a} \text{ oder } e^{\frac{\xi}{k}} = \sqrt{\frac{b}{a}},$$

welcher Werth von y unabhängig ist.

Die Gleichung der Geraden lässt sich umformen in

$$2 \operatorname{tan} \frac{y}{k} = \sqrt{ab} \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\, e^{\frac{x}{k}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\, e^{-\frac{x}{k}} \right);$$

d. h. in

$$\operatorname{tan} \frac{y}{k} = \operatorname{tan} \frac{y_0}{k} \operatorname{cos} \frac{x - \xi}{k} .$$

Da $\operatorname{cos} u$ immer positiv und grösser als Eins ist, so is $y > y_0$, d. h. für $x = \xi$ ist $y = y_0$ ein Minimum.

Setzt man $y = \infty$, so wird

$$\operatorname{cos} \frac{x - \xi}{k} = \operatorname{cot} \frac{y_0}{k},$$

aus welcher Gleichung zwei Werthe von $x - \xi$ erhalten werden: ist x' der eine Werth, so ist $-x'$ der andere.

3) Ist eine der Zahlen a oder b gleich Null, so erhält man resp.

$$2 \operatorname{tan} \frac{y}{k} = b e^{-\frac{x}{k}} \text{ oder } 2 \operatorname{tan} \frac{y}{k} = a e^{\frac{x}{k}} .$$

Die erste Gerade ist parallel der positiven, die zweite parallel der negativen x-Axe. Ist y_0 der Werth von y für $x = 0$, so erhält man als Gleichung der Geraden

$$\operatorname{tan} \frac{y}{k} = \operatorname{tan} \frac{y_0}{k} e^{-\frac{x}{k}} \text{ oder } \operatorname{tan} \frac{y}{k} = \operatorname{tan} \frac{y_0}{k} e^{\frac{x}{k}} .$$

Zusatz. Aus der Gleichung 2) erhellet unmittelbar, dass eine Vertauschung der Zeichen von a und b in die entgegengesetzten die Ordinate $+y$ in $-y$ verwandelt.

76.

1) Der Winkel, welchen eine Gerade mit der durch einen ihrer Punkte zur x-Axe gezogenen Linien gleichen Abstandes bildet, ist bestimmt durch

$$\tan \varphi = \frac{dy}{\operatorname{cos} \frac{y}{k}\, dx} = \tfrac{1}{2} \left(a e^{\frac{x}{k}} - b e^{-\frac{x}{k}} \right) \operatorname{cos} \frac{y}{k} .$$

2) Schneiden sich die beiden Geraden

$$2 \operatorname{tan} \frac{y}{k} = a e^{\frac{x}{k}} + b e^{-\frac{x}{k}}$$

$$2 \operatorname{tan} \frac{y}{k} = a' e^{\frac{x}{k}} + b' e^{-\frac{x}{k}}$$

im Punkte (x_1, y_1), so erhält man

$$e^{\frac{x_1}{k}} = \sqrt{\frac{b'-b}{a-a'}}, \quad 2\tan\frac{y_1}{k} = \frac{ab'-a'b}{\sqrt{(a-a')(b'-b)}}.$$

Damit x_1 und y_1 reell sind, müssen die Differenzen $a-a'$ und $b-b'$ entgegengesetzt bezeichnet sein.

3) Ist ψ der Neigungswinkel der beiden Geraden, so ist

$$\psi = \varphi - \varphi',$$

wo die Werthe von φ und φ' für den Durchschnittspunkt (x_1, y_1) zu nehmen sind. Damit erhält man

$$\tan\psi = \frac{\sqrt{4(a-a')(b'-b)-(ab'-a'b)^2}}{ab'+a'b-2}.$$

Entfernung zweier Punkte.

77.

Analog der Aufstellung der Gleichung der Geraden kann die Distanz d zweier Punkte $M_1 = (x_1, y_1)$ und $M_2 = (x_2, y_2)$ auf zweifache Art bestimmt werden. Zieht man (wie in der gewöhnlichen Geometrie) vom Punkte M_1 die Gerade $M_1Q \perp P_2M_2$, wobei $OP_1 = x_1$, $P_1M_1 = y_1$, $OP_2 = x_2$, $P_2M_2 = y_2$ vorausgesetzt wird, so ist

$$\cos\frac{d}{k} = \cos\frac{M_1Q}{k}\cos\frac{QM_2}{k}$$

$$\tan\frac{M_1Q}{k} = \tan\frac{x_2-x_1}{k}\cos\frac{P_2Q}{k}$$

$$\tan\frac{P_2Q}{k} = \tan\frac{y_1}{k} : \cos\frac{x_2-x_1}{k}.$$

$$QM_2 = P_2M_2 - P_2Q.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\cos\frac{d}{k} = \cos\frac{y_2}{k}\cos\frac{y_1}{k}\cos\frac{x_2-x_1}{k} - \sin\frac{y_2}{k}\sin\frac{y_1}{k}.$$

78.

Für die zweite Methode verfährt man so: Setzt man in

$$ds = dy\sqrt{\cos\frac{y^2}{k}x'^2+1}$$

für x' den Werth aus der Differentialgleichung der Geraden

$$x' = -\frac{C}{\cos\frac{y}{k}\sqrt{\cos\frac{y^2}{k} - C^2}},$$

so erhält man

$$ds = \frac{\cos\frac{y}{k}\,dy}{\sqrt{\cos\frac{y^2}{k} - C^2}}$$

oder

$$ds = \frac{k\,du}{\sqrt{u^2 + m^2}},$$

wenn

$$\sin\frac{y}{k} = u\,, \quad 1 - C^2 = m^2$$

gesetzt wird.

Daraus folgt durch Integration für die von einem beliebigen Punkt der Geraden (als Anfang) gezählte Entfernung des Punktes (x, y) der Geraden

$$e^{\frac{s+E}{k}} = \sin\frac{y}{k} + \sqrt{\cos\frac{y^2}{k} - C^2}\,,$$

wo E eine willkürliche Constante bedeutet.

Aus der Gleichung der Geraden folgt

$$\sqrt{\cos\frac{y^2}{k} - C^2} = Ca\cos\frac{y}{k}\,e^{\frac{x}{k}} - C\sin\frac{y}{k}\,;$$

damit erhält man

$$e^{\frac{s+E}{k}} = Ca\cos\frac{y}{k}\,e^{\frac{x}{k}} + (1 - C)\sin\frac{y}{k} = CZ\,,$$

wo

$$Z = a\cos\frac{y}{k}\,e^{\frac{x}{k}} + (1 - C)\sin\frac{y}{k}\,.$$

Drückt man die Constante C durch die Constanten a und b aus und bezieht den Factor C in die Constante E ein, so erhält man

$$e^{\frac{s+E}{k}} = Z,$$

wo

$$Z = a\cos\frac{y}{k}\,e^{\frac{x}{k}} + (\sqrt{1 - ab} - 1)\sin\frac{y}{k}\,.$$

Sind $M_1 = (x_1, y_1)$ und $M_2 = (x_2, y_2)$ zwei Punkte, $d = s_2 - s_1$ deren Entfernung, Z_1 und Z_2 die zugehörigen

Werthe von Z, so erhält man

$$e^{\frac{d}{k}} = \frac{Z_2}{Z_1}.$$

Bestimmt man aus den Gleichungen

$$2 \tan \frac{y_1}{k} = a e^{\frac{x_1}{k}} + b e^{-\frac{x_1}{k}}$$

$$2 \tan \frac{y_2}{k} = a e^{\frac{x_2}{k}} + b e^{-\frac{x_2}{k}}$$

die Constanten a und b und setzt sie in die obige Gleichung für die Distanz d, so erhält man letztere ausgedrückt durch die Coordinaten der Punkte M_1 und M_2.

Diese Rechnung wird auf folgende Art durchgeführt:

$$a = \frac{\tan \frac{y_2}{k} e^{-\frac{x_1}{k}} - \tan \frac{y_1}{k} e^{-\frac{x_2}{k}}}{\sin \frac{x_2 - x_1}{k}}$$

$$b = \frac{-\tan \frac{y_2}{k} e^{\frac{x_1}{k}} + \tan \frac{y_1}{k} e^{\frac{x_2}{k}}}{\sin \frac{x_2 - x_1}{k}},$$

$$\sin \frac{x_2 - x_1}{k} Z_2 = -\cos \frac{y_2}{k} \tan \frac{y_1}{k} + \sin \frac{y_2}{k} \cos \frac{x_2 - x_1}{k} \pm \sin \frac{y_2}{k} N$$

$$\sin \frac{x_2 - x_1}{k} Z_1 = \cos \frac{y_1}{k} \tan \frac{y_2}{k} - \sin \frac{y_1}{k} \cos \frac{x_2 - x_1}{k} \pm \sin \frac{y_1}{k} N,$$

$$N = \sqrt{\sin \frac{x_2 - x_1}{k}^2 + \tan \frac{y_2}{k}^2 + \tan \frac{y_1}{k}^2 - 2 \tan \frac{y_2}{k} \tan \frac{y_1}{k} \cos \frac{x_2 - x_1}{k}},$$

wobei das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $x_2 - x_1$ positiv oder negativ ist.

Die Grösse N lässt sich umformen in

$$\cos \frac{y_2}{k} \cos \frac{y_1}{k} N$$

$$= \sqrt{\left(\cos \frac{y_2}{k} \cos \frac{y_1}{k} \cos \frac{x_2 - x_1}{k} - \sin \frac{y_2}{k} \sin \frac{y_1}{k}\right)^2 - 1} = \sin \frac{u}{k},$$

wo der Kürze halber

$$\cos \frac{u}{k} = \cos \frac{y_2}{k} \cos \frac{y_1}{k} \cos \frac{x_2 - x_1}{k} - \sin \frac{y_2}{k} \sin \frac{y_1}{k}$$

gesetzt wird.

Daraus folgt

$$\sin\frac{x_2-x_1}{k}\,Z_2 = \frac{\sin\frac{y_2}{k}\,e^{\frac{u}{k}} - \sin\frac{y_1}{k}}{\cos\frac{y_2}{k}\cos\frac{y_1}{k}}$$

$$\sin\frac{x_2-x_1}{k}\,Z_1 = \frac{\sin\frac{y_2}{k} - \sin\frac{y_1}{k}\,e^{-\frac{u}{k}}}{\cos\frac{y_2}{k}\cos\frac{y_1}{k}},$$

also

$$e^{\frac{d}{k}} = \frac{\sin\frac{y_2}{k}\,e^{\frac{u}{k}} - \sin\frac{y_1}{k}}{\sin\frac{y_2}{k} - \sin\frac{y_1}{k}\,e^{-\frac{u}{k}}} = e^{\frac{u}{k}};$$

d. h. $d = u$ oder

$$\cos\frac{d}{k} = \cos\frac{y_2}{k}\cos\frac{y_1}{k}\cos\frac{x_2-x_1}{k} - \sin\frac{y_2}{k}\sin\frac{y_1}{k}.$$

Anmerkung. Für sehr grosse Werthe von k folgt aus der obigen Formel der Distanz die Gleichung

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Kreis und Krümmung.

79.

Betrachtet man in dem Ausdrucke für die Entfernung zweier Punkte M_1 und M_2 einen der beiden Punkte, etwa den Punkt M_1, als fest und bestimmt alle Punkte M_2, deren Entfernung d von M_1 constant $= r$ ist, so erhält man die Gleichung des Kreises, dessen Mittelpunkt der Punkt M_1 und dessen Radius $= r$ ist.

Für $M_1 = (\alpha, \beta)$, $M_2 = (x, y)$, erhält man als Kreisgleichung

$$\cos\frac{r}{k} = \cos\frac{y}{k}\cos\frac{\beta}{k}\cos\frac{x-\alpha}{k} - \sin\frac{y}{k}\sin\frac{\beta}{k}.$$

1) Ist $\beta = 0$, $\alpha = r$, so ist der Coordinaten-Anfangspunkt ein Punkt der Kreislinie, die Gleichung wird

$$\cos\frac{r}{k} = \cos\frac{y}{k}\cos\frac{x-r}{k}.$$

Für $r = \infty$, geht die Kreislinie in die Grenzlinie über, deren Gleichung also

$$\cos\frac{y}{k}=e^{\frac{x}{k}}$$

ist. Vergl. Art. 72.

2) Setzt man $\beta=\frac{\pi}{2}ki$, so erhält man als Kreisgleichung

$$\cos\frac{r}{k}=i\sin\frac{y}{k},$$

welcher Gleichung genügt wird, wenn

$$r=a+\frac{\pi}{2}ki$$

gesetzt wird, woraus dann folgt

$$y=a;$$

d. h. man kann die „Linien gleichen Abstandes“ als Kreise betrachten, deren Radius die Form $a+\frac{\pi}{2}ki$ hat, wo a den constanten Abstand bezeichnet. Für $a=0$ geht die Linie gleichen Abstandes in eine Gerade über; man kann daher letztere als eine Kreislinie vom Radius $\frac{\pi}{2}ki$ betrachten, der zugehörige Umfang wird nach Art. 60 gleich $2\pi ki$.

Durch Umdrehung der Kreislinie um einen Durchmesser erhält man: Die Fläche gleichen Abstandes kann man als eine Kugelfläche vom Radius $a+\frac{\pi}{2}ki$ betrachten, u. s. w.

Zusatz. Ist $AB=2a$ eine Sehne, O der Mittelpunkt des Kreises, Winkel $OAB=\omega$, so ist

$$\tan\frac{a}{k}=\tan\frac{r}{k}\cos\omega;$$

durch dieselbe Gleichung ist auch der Radius a des Schnittes einer Ebene mit einer Kugelfläche bestimmt, der durch eine Tangente eines Hauptkreises gelegt wird, und der mit der Ebene des letzteren den spitzen Winkel ω bildet.

Setzt man $r=h+\frac{\pi}{2}ki$, so wird

$$\tan\frac{a}{k}=\cot\frac{h}{k}\cos\omega.$$

Für $\omega>\omega_0$, wo $\cos\omega_0=\tan\frac{h}{k}$ gesetzt wird, ist a reell *; für $\omega=\omega_0$, wird $a=\infty$, d. h. die Schnitt-

---

* Die Bestimmung der reellen Kreisschnitte kann auch direct aus Art. 75 und 76 erhalten werden.

ebene ist zur Grundfläche parallel (vergl. Art. 58) und die Schnittlinie ist eine Grenzlinie.

Für $\omega < \omega_0$, wird a complex. Setzt man

$$a = h' + \frac{\pi}{2} k i,$$

so wird

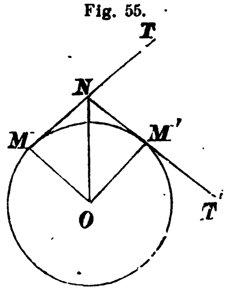
$$\mathfrak{cot} \frac{h'}{k} = \mathfrak{cot} \frac{h}{k} \cos \omega .$$

Von $\omega = \omega_0$ bis $\omega = 0$ nimmt h' von ∞ bis h ab.

80.

Es seien M und M' zwei Punkte einer Kreislinie, MT und $M'T'$ ihre zugehörigen Tangenten, welche sich im Punkte N schneiden. Der Winkel TNT' ist die Aenderung der Lage der Tangente MT, wenn sie nach $M'T'$ bewegt wird: dieser Winkel ist die Krümmung des Bogens MM'. Setzt man

Fig. 55.



$$TNT' = \pi - 2MNO = 2\alpha, \; MN = t, \; NO = \varrho,$$

so ist

$$\mathfrak{tan} \frac{t}{k} = \mathfrak{tan} \frac{\varrho}{k} \cos MNO = \mathfrak{tan} \frac{\varrho}{k} \sin \alpha,$$

oder

$$\frac{\sin \alpha}{\mathfrak{tan} \frac{t}{k}} = \mathfrak{cot} \frac{\varrho}{k} .$$

Sind die Punkte M und M' unendlich nahe, so ist $MM' = ds = 2MN = 2t$, $\varrho = r$, woraus für das Mass der Krümmung des Kreises folgt

$$m = \frac{1}{k} \mathfrak{cot} \frac{r}{k} .$$

1) Ist r endlich, so ist $\mathfrak{cot} \frac{r}{k} > 1$, also $m > 1 : k$.

2) Für $r = \infty$, folgt $m = 1 : k$; d. h. das Mass der Krümmung der Grenzlinie ist $= 1 : k$.

3) Setzt man $m < 1 : k$ voraus, so folgt

$$e^{\frac{2r}{k}} = - \frac{1 + km}{1 - km} = - \mu,$$

woraus

$$r = \frac{k}{2} \log \mu + \frac{\pi}{2} k i$$

erhalten wird. Setzt man $\frac{k}{2} \log \mu = a$, so folgt

$$m = \frac{1}{k} \tan \frac{a}{k}.$$

Die Linien gleichen Abstandes sind daher Kreislinien mit der Krümmung $< 1 : k$, die Gerade selbst besitzt die Krümmung „Null“.

Die Kreislinie (sammt Grenzlinie), die Linie gleichen Abstandes und die Gerade sind in der Geometrie die einzigen an allen Stellen gleichartigen (d. i. aus congruenten Stücken zusammengesetzten) ebenen Linien; durch diese kann die Krümmung einer beliebigen stetigen Linie bestimmt werden. Aus dem Vorhergehenden erhellt, dass jedes unendlich kleine Stück einer krummen Linie mit einem Kreisbogen zusammenfällt, welcher entweder zu einem wirklichen Kreise oder zu einer Linie gleichen Abstandes gehört, je nachdem das Krümmungsmass grösser oder kleiner als $1 : k$ ist.

Punkt und Linien-Element im Raume.

81.

Um die Lage eines Punktes im Raume zu bestimmen, denke man sich eine bestimmte Ebene als **Grundebene**, in dieser eine bestimmte Gerade als **Axe** und in letzterer einen bestimmten Punkt als **Anfang**.

Von dem zu bestimmenden Punkt M ziehe man eine Senkrechte $MP = z$ auf die Grundebene, welche positiv genommen wird auf der einen Seite der Grundebene, negativ auf der entgegengesetzten. In der Grundebene werden die Coordinaten x, y des Punktes P nach Art. 71 bestimmt. Die Grössen x, y, z heissen die **Coordinaten** des Punktes M.

Ist $M' = (x', y', z')$ ein zweiter Punkt, so lege man durch den Punkt M eine Fläche gleichen Abstandes $= z$ zur Grundebene, welche der Senkrechten $M'P' = z'$ im Punkte N begegnet; dabei ist nach Art. 59 der Bogen

$$MN = \cos \frac{z}{k} PP'.$$

Sind M und M' zwei unendlich nahe Punkte, ds deren Entfernung, so ist

$$ds^2 = \overline{MN}^2 + \overline{M'N}^2$$

$$ds^2 = \cos\frac{z^2}{k}\overline{PP'}^2 + dz^2.$$

Nach Art. 71 ist

$$\overline{PP'}^2 = \cos\frac{y^2}{k}dx^2 + dy^2,$$

also

$$ds^2 = \cos\frac{y^2}{k}\cos\frac{z^2}{k}dx^2 + \cos\frac{z^2}{k}dy^2 + dz^2.$$

Sind die Gleichungen einer Linie gegeben, so erhält man durch Integration die Länge des Bogens zwischen zwei Punkten.

Gerade und Ebene.

82.

Die Gleichungen der Geraden können vermittelst der Variationsrechnung aus der Bedingung der kürzesten Entfernung zweier Punkte erhalten werden. Bequemer erhält man jedoch dieselben mit Zuziehung der Resultate der Art. 74 und 77.

Man kann nämlich die Gerade MM' durch die Gleichung der Geraden PP' in der Grundebene (d. i. ihrer Projection) und durch die Gleichung der Geraden MM' auf die Gerade PP' bezogen bestimmen.

1) Die Gleichung der Geraden PP' sei

$$2\tan\frac{y}{k} = ae^{\frac{x}{k}} + be^{-\frac{x}{k}}.$$

2) Ist u die Entfernung des Punktes P von irgend einem festen Punkte A der Geraden PP' als Anfang, so ist die Gleichung der Geraden MM' für die Axe PP'

$$2\tan\frac{z}{k} = ce^{\frac{u}{k}} + de^{-\frac{u}{k}},$$

wo c und d Constante sind.

Setzt man in diese Gleichung für u seinen Werth nach Art. 77

$$u = K + k\log Z,$$

so erhält man die Gleichung der Geraden MM' für die Axe PP' in den Coordinaten x, y, z gegeben; die Constanten $e^{\frac{K}{k}}$ und $e^{-\frac{K}{k}}$ können in die Constanten c und d einbezogen werden.

Die vier Constanten a, b, c, d können durch Bedingungen, welchen die Gerade MM' unterworfen ist, bestimmt werden.

In ähnlicher Weise kann die Entfernung zweier Punkte bestimmt werden. Man erhält durch zweimalige Anwendung der Formel des Art. 77

$$\cos\frac{d}{k} = \cos\frac{z_2}{k}\cos\frac{z_1}{k}\cos\frac{d'}{k} - \sin\frac{z_2}{k}\sin\frac{z_1}{k}$$

$$\cos\frac{d'}{k} = \cos\frac{y_2}{k}\cos\frac{y_1}{k}\cos\frac{x_2-x_1}{k} - \sin\frac{y_2}{k}\sin\frac{y_1}{k},$$

dabei bedeutet d' die Projection der Strecke d auf die xy-Ebene.

Für die Entfernung r des Punkts $M = (x, y, z)$ vom Anfang O erhält man

$$\cos\frac{r}{k} = \cos\frac{x}{k}\cos\frac{y}{k}\cos\frac{z}{k}.$$

83.

Es seien $p = OP$ und $r = OM$ zwei vom Coordinaten-Anfang O gezogene Strecken, dabei werde p so gewählt, dass das Dreieck OMP bei P rechtwinklig ist. Setzt man $P = (a, b, c)$, $M = (x, y, z)$, $PM = d$, so ist

$$\cos\frac{r}{k} = \cos\frac{p}{k}\cos\frac{d}{k}.$$

Drückt man nach dem vorigen Artikel die Grössen r, p, d durch die Coordinaten der Punkte M und P aus, so erhält man

$$1)\qquad \tan\frac{p^2}{k} = \tan\frac{a}{k}\tan\frac{x}{k} + \frac{\tan\frac{b}{k}}{\cos\frac{a}{k}}\cdot\frac{\tan\frac{y}{k}}{\cos\frac{x}{k}}$$

$$+\frac{\tan\frac{c}{k}}{\cos\frac{a}{k}\cos\frac{b}{k}}\cdot\frac{\tan\frac{z}{k}}{\cos\frac{x}{k}\cos\frac{y}{k}}.$$

Man ziehe im Punkte O eine Gerade ZZ' senkrecht auf die xy-Ebene und lege durch ZZ' eine Ebene senkrecht auf die x-Axe, welche die xy-Ebene in der Geraden YY' schneidet. Die drei durch den Punkt M auf den Axen XX', YY', ZZ' senkrechten Ebenen bestimmen drei von O aus gezählte Strecken x', y', z'. Bezeichnet man mit (r, x) den Winkel der Geraden OM und OX, so ist

$$\tan\frac{x'}{k} = \tan\frac{r}{k}\cos(r, x) \quad \text{u. s. w.}$$

Berücksichtigt man die Gleichungen

$$x = x', \ \tan\frac{y}{k} = \tan\frac{x'}{k}\cos\frac{x}{k}, \ \tan\frac{z}{k} = \tan\frac{z'}{k}\cos\frac{x}{k}\cos\frac{y}{k}$$

und die analogen für (a', b', c'), so erhält man

$$\cos(p, r) = \cos(p, x)\cos(r, x) + \cos(p, y)\cos(r, y)$$
$$+ \cos(p, z)\cos(r, z).$$

Sind a, b, c also auch p Constante, so stellt die Gleichung 1) die Gleichung der Ebene dar.

Andere Coordinaten - Systeme.

84.

Die in den vorhergehenden Untersuchungen vorausgesetzten Coordinaten entsprechen der gewöhnlichen graphischen Darstellung der Functionswerthe; es mögen daher noch andere Coordinaten in Kürze erwähnt werden.

Statt durch die Abstände $OP = x$, $PM = y$ den Punkt M einer Ebene zu bestimmen, kann man letztere als den Durchschnittspunkt der beiden Senkrechten auf zwei unter einem rechten Winkel sich schneidende Axen betrachten und die Abschnitte $OP = x'$, $OQ = y'$ oder noch zweckmässiger die hyperbolischen Tangenten der Verhältnisse dieser Abschnitte zu k als Coordinaten ξ, η wählen*, so dass

$$\xi = \tan\frac{x'}{k}, \ \eta = \tan\frac{y'}{k}.$$

Sind ξ und η zugleich < 1, so wird ein reeller Punkt, ist eine oder jede Coordinate > 1, so wird ein idealer Punkt dargestellt.

Bezeichnet man mit φ den Winkel MOX und setzt $OM = r$, $\tan\frac{r}{k} = \varrho$, so ist

$$\xi = \varrho\cos\varphi, \ \eta = \varrho\sin\varphi;$$

d. i. die Transformation in Polarcoordinaten.

Die Transformation in Coordinaten des ursprünglichen Systems ist gegeben durch

---

* Escherich, die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krümmung. Sitzb. der kais. Akad. der Wissensch. Bd. LXIX.

$$x = x', \ \tan\frac{y}{k} = \tan\frac{y'}{k}\cos\frac{x}{k}.$$

Die Gleichung der Geraden wird

$$\eta = a\xi + b.$$

Der Ausdruck für das Linien-Element nimmt die Form an

$$ds^2 = Edx'^2 + 2Fdx'dy' + Gdy'^2,$$

wo F von Null verschieden ist, da der Winkel PMQ spitz ist.

Für räumliche Figuren betrachte man die im vorigen Artikel mit x', y', z' bezeichneten Abschnitte auf den Axen XX', YY', ZZ' als Coordinaten. Statt dieser Grössen kann man die Functionen ξ, η, ζ, wo

$$\xi = \tan\frac{x'}{k}, \ \eta = \tan\frac{y'}{k}, \ \zeta = \tan\frac{z'}{k}$$

ist, einführen. Dadurch wird z. B. die Gleichung der Ebene

$$A\xi + B\eta + C\zeta = D.$$

In gleicher Weise gehen die Gleichungen der Geraden in zwei lineare Gleichungen zwischen den Functionen ξ, η, ζ über.

85.

Nimmt man in einer Ebene eine Grenzlinie zur x-Axe und in dieser einen bestimmten Punkt O als Anfang, so kann der Punkt M auf die folgende Art bestimmt werden.* Man ziehe vom Punkte M eine Axe, welche die Grenzlinie im Punkte P schneidet. Das Stück OP der Grenzlinie und die Strecke PM der Axe — diese Grössen sammt Vorzeichen genommen — können als Coordinaten x, y des Punktes M betrachtet werden.

Die bezüglichen Transformationsformeln lassen sich ohne Schwierigkeit entwickeln, für den Ausdruck des Linien-Elementes erhält man

$$ds^2 = e^{\frac{2y}{k}}dx^2 + dy^2,$$

woraus ganz analog wie im Art. 74 die Gleichung der Geraden und die Entfernung zweier Punkte gefunden wird.

Für räumliche Gebilde nimmt man eine Grenzfläche als xy-Fläche und zieht durch den zu bestimmenden Punkt M

* Flye St.-Marie, Études analytiques sur la théorie des parallèles. Paris, 1871.

eine Axe der Grenzfläche, welche von letzterer im Punkte P geschnitten wird. Die rechtwinkligen Coordinaten x, y des Punktes P auf der Grenzfläche — für welche die gewöhnliche Geometrie gilt — und die Strecke PM (sammt Vorzeichen) dienen als Coordinaten x, y, z des Punktes M.

Ist M' ein zu M unendlich naher Punkt, so ist

$$\overline{PP'}^2 = dx^2 + dy^2,$$

$$ds^2 = e^{\frac{2z}{k}}(dx^2 + dy^2) + dz^2.$$

Flächenbestimmung ebener Figuren.

86.

Die Bestimmung der Fläche einer ebenen Figur wird durch Zerlegung der gegebenen Fläche in unendlich kleine Elemente, auf welche man also die gewöhnliche Geometrie anwenden kann, durchgeführt.

Um die Fläche z einer ebenen Figur, begrenzt von zwei Ordinaten einer krummen Linie, dem Bogen derselben und der Abscissenaxe zu bestimmen, zerlege man die Fläche zwischen zwei unendlich nahen Ordinaten MP und $M'P'$ (Figur des Art. 71) durch unendlich nahe Linien gleichen Abstandes mit der Axe XX' in rechteckige Elemente. Ist h der Abstand einer dieser Linien, dh die Entfernung je zweier Linien gleichen Abstandes, so ist die Fläche des zugehörigen Elementes

$$d^2z = \cos\frac{h}{k}\,dx\,dh.$$

Daraus folgt für die Grösse dz des Streifens zwischen den beiden Ordinaten MP und $M'P'$, indem man von $h=0$ bis $h=y$ integrirt,

$$dz = k\sin\frac{y}{k}\,dx.$$

1) Für die Linie gleichen Abstandes ist

$$y = p = \text{Const.},$$

also

$$z = kx\sin\frac{p}{k}.$$

2) Für

$$\tan\frac{y}{k} = \tan\frac{y_0}{k}\cos\frac{x}{k},$$

ist

$$dz = \frac{k^2 m\, du}{\sqrt{1 - m^2 - m^2 u^2}},$$

wo $\tan \frac{y_0}{k} = m$, $\sin \frac{x}{k} = u$ gesetzt ist. Daraus folgt

$$z = k^2 \text{ arc sin} \left(\sin \frac{x}{k} \sin \frac{y_0}{k} \right).$$

Das Doppelte dieser Fläche ist gleich der Fläche des Rechteck-Analogon, dessen Basis $= 2x$ und dessen mittlere (d. i. kleinste) Höhe $= y_0$ ist.

3) Für die Grenzfläche ist

$$\cos \frac{y}{k} = e^{\frac{x}{k}},$$

also

$$dz = k \sqrt{e^{\frac{2x}{k}} - 1}\, dx = k^2 \frac{u^2 du}{1 + u^2}$$

$$u^2 = e^{\frac{2x}{k}} - 1$$

$$z = k^2 \left(\sin \frac{y}{k} - \text{arc tan} \sin \frac{y}{k} \right).$$

87.

Kreisfläche. Die Fläche eines Kreises kann durch concentrische Kreise in unendlich schmale Ringe und jeder dieser Ringe durch unendlich nahe Radien in unendlich kleine rechteckige Elemente zerlegt werden.

Man erhält dadurch für die Fläche eines Ringes vom Radius x und von der Breite dx den Werth

$$\mathrm{O}\, x\, dx = 2\pi k \sin \frac{x}{k} dx,$$

integrirt man von $x = 0$ bis $x = r$, so erhält man die Fläche des Kreises vom Radius r

$$2\pi k^2 \left(\cos \frac{r}{k} - 1 \right) = 4\pi k^2 \sin \frac{r^2}{2k}.$$

Zusatz. Ist ϱ die Länge eines Grenzbogens, dessen Sehne $= r$ ist, so ist nach Art. 60

$$\frac{\varrho}{2} = k \cot \Pi \left(\frac{r}{2} \right) = k \sin \frac{r}{2k},$$

also

$$\pi \varrho^2 = 4\pi k^2 \sin \frac{r^2}{2k};$$

d. h. ein Kreis auf der Grenzfläche mit dem Radius ϱ ist flächengleich dem ebenen Kreis, dessen Radius die Sehne r des Grenzbogens ϱ ist.

88.

Um die Fläche zwischen den zwei Grenzbögen $AB = s$ und $A'B' = s'$ und den Axenstücken $AA' = BB' = l$ zu bestimmen, theile man (wie in Art. 56) die Strecke AA' in unendlich kleine Theile $= dx$ und lege durch die Theilungspunkte Grenzbögen. Ist x die Entfernung eines Grenzbogens vom Bogen $A'B'$, so ist

$$s' e^{\frac{x}{k}} dx$$

die zwischen den Grenzbögen, deren Abstände x und $x + dx$ sind, enthaltene Fläche, also das zwischen den Grenzen 0 und l genommene Integral

$$ks'(e^{\frac{l}{k}} - 1) = sk - s'k$$

die Gesammtfläche. Um die von einem Bogen s und den Axen der Endpunkte bestimmte Fläche zu erhalten, setze man $s' = 0$.

89.

Für die **Dreiecksfläche** ist die Bestimmung des constanten Verhältnisses λ der Fläche f eines Dreiecks zu ihrem Unterschiede u der Winkelsumme von $2R$ (vergl. Art. 38) nöthig. Diese Berechnung geschieht am einfachsten auf die folgende Art:

Setzt man in dem Ausdrucke Art. 62

$$\tan\frac{u}{4} = \sqrt{\tan\tfrac{1}{2}\frac{s}{k}\tan\tfrac{1}{2}\frac{(s-a)}{k}\tan\tfrac{1}{2}\frac{(s-b)}{k}\tan\tfrac{1}{2}\frac{(s-c)}{k}}$$

die Seiten a, b, c also auch s sehr klein voraus, so erhält man

$$u = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{k^2} = \frac{f}{k^2},$$

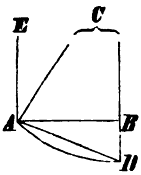
also
$$\lambda = k^2.$$

Andere Methode: Man denke sich ein Dreieck ABC, wo der der Seite AB anliegende Winkel $B = R$ ist und der

Punkt C im Unendlichen liegt, d. h. der Winkel $C = 0$ oder $AC \parallel BC$ ist. Ist $AE \perp AB$, so ist der Winkel

$$EAC = 2R - A - B = u.$$

Fig. 56.



Zieht man den Grenzbogen AD, so ist nach Art. 60

$$AD = k \cot \Pi(AB) = k \tan u.$$

Die Fläche S begrenzt vom Grenzbogen AD und den Axen AC und DC ist nach Art. 88

$$S = k \cdot AD = k^2 \tan u,$$

mithin das Verhältniss

$$\frac{S}{ABC} = \frac{k^2 \tan u}{\lambda u} = \frac{k^2}{\lambda} \cdot \frac{\tan u}{u}.$$

Mit dem Verschwinden der Seite AB geht das Verhältniss $\frac{AD}{AB}$, also auch die Verhältnisse $\frac{S}{ABC}$ und $\frac{\tan u}{u}$ in die Einheit über. Es ist daher

$$\lambda = k^2,$$

also die Fläche f eines beliebigen Dreiecks, dessen Winkel A, B, C sind,

$$f = k^2 u = k^2(\pi - A - B - C).$$

Zusatz. Ist das Dreieck gleichschenklig d. h. $a = b$ und die Basis c unendlich klein, so kann man

$$s = a + \frac{c}{2} = a, \; s - a = s - b = \frac{c}{2}, \; s - c = a - \frac{c}{2} = a$$

setzen. Man erhält damit

$$\tan \frac{u}{4} = \tan \tfrac{1}{4} \frac{c}{k} \tan \tfrac{1}{2} \frac{a}{k}$$

$$k^2 u = ck \tan \tfrac{1}{2} \frac{a}{k}.$$

Damit kann die Fläche des Kreissectors bestimmt werden. Zerlegt man den Bogen l des Sectors in unendlich kleine Stücke c, so erhält man durch Addition der Dreiecke für die Fläche des Sectors

$$lk \tan \tfrac{1}{2} \frac{r}{k}.$$

90.

Vieleck. Sind $A_1, A_2, \ldots A_n$ die (innern) Winkel eines hohlwinkligen n-Eckes, so ist die Fläche

$$f = k^2 [(n-2)\pi - A_1 - A_2 - \ldots - A_n].$$

Ist das Vieleck regulär, so ist $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, also

$$f = k^2 [(n-2)\pi - nA].$$

Für $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0$ wird die Fläche $= (n-2)\pi k^2$ ein Maximum.

Anwendungen: 1) Zufolge der im Art. 70 enthaltenen Aufgaben ist die Construction eines regulären Vierecks möglich, dessen Fläche $= \pi k^2$ d. i. gleich der grössten Dreiecksfläche ist.

Es werde in dem bei C rechtwinkligen Dreiecke ABC der Winkel $A = \frac{1}{2}R$, $B = \frac{1}{4}R$ vorausgesetzt. Aus Art. 61 Gleichung 2)

$$\frac{\cos \frac{1}{2}R}{\sin \frac{1}{4}R} = \cos \frac{a}{k}$$

folgt, indem man für $\cos \frac{1}{2}R$ und $\sin \frac{1}{4}R$ die Werthe

$$\cos \tfrac{1}{2}R = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \text{ und } \sin \tfrac{1}{4}R = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

setzt,

$$e^{\frac{a}{k}} + e^{-\frac{a}{k}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}};$$

und daraus

$$e^{\frac{a}{k}} = \sqrt{\frac{\sqrt[4]{2}+1}{\sqrt[4]{2}-1}},$$

welcher Ausdruck — da nur zweite Wurzeln vorkommen — geometrisch construirt werden kann. Damit erhält man dann (analog wie im Beispiele des Art. 70) die Seite a.

Die Fläche des eben construirten Dreiecks ist $= \frac{1}{8}\pi k^2$. Durch Anlegung eines congruenten Dreiecks $A'B'C'$, dessen Hypotenuse $A'B'$ mit der Seite AB zusammenfällt, erhält man ein Viereck $ACBC'$, in welchem drei rechte Winkel und ein Winkel $= \frac{1}{2}R$ sind, und aus vier solchen Vierecken kann man ein reguläres Viereck zusammensetzen, dessen Seiten $= 2a$ und dessen Winkel $= \frac{1}{2}R$ sind.

2) In ganz analoger Weise kann man ein reguläres n-Eck

von der Fläche πk^2 construiren, wenn $n = 2^\nu \cdot 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 17^\gamma \ldots$ ist, wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 0$ oder 1 ist.

Denn aus

$$f = \pi k^2 = k^2 \left[(n-2)\pi - nA\right]$$

folgt

$$A = (n-3)\frac{2R}{n}.$$

Vermöge der von Gauss entdeckten Kreistheilung* können in diesem Falle die Functionen $\cos\frac{2R}{n}$ und $\sin\frac{2R}{n}$ u. s. w. durch zweite Wurzeln ausgedrückt werden; ist x die Seite eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen gegenüberliegender Winkel $= \frac{2R}{n}$ und dessen anliegender Winkel $= (n-3)\frac{R}{n}$ ist, so kann der Ausdruck X, wo

$$X = \cos\frac{x}{k} = \frac{\cos\frac{2R}{n}}{\sin(n-3)\frac{R}{n}}$$

ist, also auch $e^{\frac{x}{k}}$ und mithin auch x geometrisch construirt werden. Das $2n$fache dieses Dreiecks ist gleich πk^2.

Unter der Voraussetzung der obigen Form für die Zahl n kann also die Fläche πk^2 in n gleiche Theile getheilt werden. Es ist daher auch die Construction eines Vielecks von der Fläche

$$f = \frac{m}{n}\pi k^2,$$

wo m beliebig und n von der obigen Form ist, möglich.

3) Bedeutet ϱ den zur Sehne r gehörigen Grenzbogen, so ist die Fläche des ebenen Kreises vom Radius r (nach Art. 87, Zusatz)

$$\pi\varrho^2 = \pi k^2 \tan u^2,$$

wo mit Beibehaltung der Figur des Art. 89, $u = EAC$ und die Sehne $AD = r$ ist.

Da man (nach Art. 67) den Winkel u für jeden Werth von r durch Construction erhält, so kann man $\tan u$ als das Verhältniss zweier Grenzbögen also auch $\tan u^2$ geometrisch construiren. Die Fläche eines ebenen Kreises ist daher geometrisch quadrirt vermittelst einer geradlinigen Figur ($= \pi k^2$)

* Disquisitiones arithm. — Frischauf, Vorlesungen über Zahlentheorie. — Bachmann, die Lehre von der Kreistheilung. Leipzig, 1872.

und vermittelst gleichförmiger Linien derselben Art (Grenzbögen, welche bezüglich ihrer Vergleichung sich wie Strecken verhalten). Da $\pi\varrho^2$ die Fläche eines Kreises auf der Grenzfläche ist, so ist auf dieselbe Art auch der Kreis auf der Grenzfläche quadrirt.

Ist $\tan u^2$ eine ganze Zahl oder ein Bruch $\frac{m}{n}$, wo der Nenner n die erwähnte Gauss'sche Form hat, so kann man nach dem Vorigen ein (ebenes) Vieleck construiren, dessen Fläche der Fläche des Kreises gleich ist.

Flächenbestimmung räumlicher Figuren.

91.

Um das constante Verhältniss einer Fläche gleichen Abstandes $= h$ zur zugehörigen Fläche ihrer Grund-Ebene zu bestimmen, grenze man auf letzterer ein unendlich kleines Rechteck mit den Seiten a und b ab.

Die zugehörigen Seiten a' und b' des Flächenelements der Fläche gleichen Abstandes sind durch

$$a' = a \cos\frac{h}{k},\ b' = b \cos\frac{h}{k},$$

das Flächenelement also durch

$$a'b' = ab \cos\frac{h^2}{k}$$

bestimmt.

92.

Die krumme Oberfläche z, welche von dem Stück q einer Linie gleichen Abstandes $= h$ durch Umdrehung um ihre Gerade erzeugt wird, ist

$$z = \bigcirc h \cdot q$$

$$z = 2\pi k \sin\frac{h}{k} \cdot p \cos\frac{h}{k} = \pi k p \sin\frac{2h}{k},$$

wo p das dem Bogen q entsprechende Stück der Geraden ist.

93.

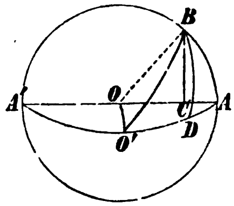
Kugelabschnitt. Es sei A der Pol des Kugelabschnittes, $AOB = \varphi$ der halbe Mittelpunktswinkel, p der Umfang des grössten Kreises. Ist $BC \perp OA$, so ist

$$\bigcirc BC = p \sin\varphi.$$

Ist x die Länge des Kreisbogens AB, so ist

$$x : p = \varphi : 2\pi,$$

Fig. 57.



also

$$dx = \frac{p}{2\pi} d\varphi.$$

Die Fläche dz der durch das Bogenelement dx bestimmten Kugelzone ist

$$dz = \circ BC\, dx = p \sin \varphi \cdot \frac{p}{2\pi} d\varphi,$$

oder

$$dz = \frac{p^2}{2\pi} \sin \varphi\, d\varphi.$$

Das Integral von 0 bis φ giebt die krumme Fläche des Kugelabschnittes

$$z = \frac{p^2}{2\pi}(1 - \cos \varphi).$$

Für $\varphi = \pi$ erhält man die gesammte Kugelfläche

$$f = \frac{p^2}{\pi}.$$

Daraus folgt (nach Art. 44) für die Fläche eines sphärischen Dreiecks

$$\frac{p^2}{4\pi^2}(A + B + C - \pi).$$

Zusatz. Der Ausdruck für die krumme Fläche eines Kugelabschnittes lässt sich auf folgende Art umformen: Durch den Umfang des grössten Kreises der Zeichnung denke man sich eine Grenzfläche gelegt, welche von den durch die Radien OA und OB auf die Ebene des Kreises senkrechten Ebenen in den Grenzbögen $O'A$ und $O'B$ geschnitten wird. Zieht man den Grenzbogen $BD \perp AO'$, so erhält man ein Grenzdreieck $BO'D$, in welchem

$$\text{Winkel } O' = \varphi, \; p = 2\pi O'B,$$

also

$$\frac{O'D}{O'B} = \cos \varphi,$$

$$1 - \cos \varphi = \frac{AD}{O'B} = \frac{2\pi AD}{p}$$

und

$$z = AD \cdot p = \pi AD \cdot AA'$$

ist, wo AA' den Grenzbogen $AO'A'$ bedeutet. Ist AB der Grenzbogen zwischen den Punkten A und B*, so ist

* Dieser Grenzbogen ist in der Figur nicht gezeichnet, derselbe ist von dem Kreisbogen AB verschieden.

$$\overline{AB}^2 = AD \cdot AA',$$

also

$$z = \pi \overline{AB}^2.$$

Durch Anwendung des Zusatzes des Art. 87 folgt: Die krumme Fläche eines Kugelabschnittes ist gleich der Fläche eines (ebenen) Kreises, dessen Radius gleich der Strecke zwischen dem Pol und einem Punkte des Umfanges des Schnittkreises ist.

Inhaltsbestimmung.

94.

Der Inhalt des Körpers, begrenzt von einer ebenen Figur als Grundfläche, wird dadurch bestimmt, dass man durch Flächen gleichen Abstandes zur Basis den Körper in Elemente zerlegt. Ist y der Abstand, p der der Fläche zugehörige Theil der Grundebene, so ist das Körperelement

$$dv = p \cos \frac{y^2}{k} dy.$$

Drückt man p durch y aus, so erhält man durch Integration den Inhalt des Körpers.

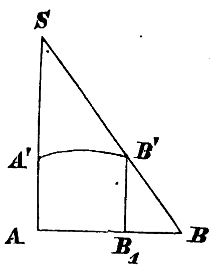
Ist $p =$ Const., so gibt das Integral von 0 bis h

$$v = \tfrac{1}{4} kp \sin 2\frac{h}{k} + \tfrac{1}{2} ph$$

den Inhalt des Analogon des geraden Prismas der gewöhnlichen Geometrie, wo p die Basis und h die Höhe bedeutet.

95.

Fig. 58.



In ähnlicher Weise wird der Inhalt der Pyramide bestimmt. Es sei $SABC$ die gegebene Pyramide, wobei $SA \perp ABC$ vorausgesetzt wird. Zerschneidet man die Pyramide durch Flächen gleichen Abstandes $A'B'C'$ in Elemente, so ist

$$dv = A'B'C' \, dy$$

das Element des Inhaltes. Ist $B_1 C_1$ die Projection der Linie $B'C'$ auf die Basis, so ist

$$dv = AB_1 C_1 \cos \frac{y^2}{k} dy.$$

Setzt man $SA = h$, $AB = b$, $AC = c$, $AB_1 = x$, $AC_1 = u$, so kann man mit Zuziehung der Gleichungen

$$\frac{\tan\frac{y}{k}}{\tan\frac{h}{k}} = \frac{\sin\frac{b-x}{k}}{\sin\frac{b}{k}} = \frac{\sin\frac{c-u}{k}}{\sin\frac{c}{k}}$$

die Fläche AB_1C_1 durch y ausdrücken. Das Integral von 0 bis h gibt den Inhalt der Pyramide.

96.

Auf dieselbe Art wird der Inhalt des geraden Kegels bestimmt. Im rechtwinkligen Dreiecke SAO stelle $SO = h$ die Höhe, $AO = r$ den Radius der Basis und $SA = s$ die Seite des Kegels dar. Ist M ein Punkt der Seite SA, $MP \perp AO$, so ist p gleich der Kreisfläche mit dem Radius $OP = r - u$, wenn $AP = u$ gesetzt wird. Daraus folgt

$$dv = 4\pi k^2 \sin\frac{r-u^2}{2k} \cos\frac{y^2}{k}\, dy\,,$$

dabei ist

$$\tan\frac{y}{k} = \frac{\tan\frac{h}{k}}{\sin\frac{r}{k}} \sin\frac{u}{k} = m \sin\frac{u}{k}\,.$$

Drückt man die Grösse u durch y aus, so erhält man

$$\frac{dv}{2\pi k^2} = \cos\frac{r}{k} \cos\frac{y}{k} \sqrt{m^2 + (m^2+1)\sin\frac{y^2}{k}}\,\frac{dy}{m}$$
$$- \sin\frac{r}{k} \sin\frac{y}{k} \cos\frac{y}{k}\frac{dy}{m} - \tfrac{1}{2}\left(1 + \cos 2\frac{y}{k}\right) dy\,.$$

Das Integral von 0 bis h gibt für den Inhalt

$$v = \pi k^2 \left(s \tan\frac{h}{k} \cot\frac{s}{k} - h\right).$$

97.

Den Inhalt des Rotationskörpers des Art. 92 erhält man auf die folgende Art: Man zerlege die Fläche, begrenzt von den Linien p und q und den Ordinaten der Endpunkte, durch Linien gleichen Abstandes in Elemente, so bestimmen bei der Umdrehung je zwei auf einander folgende Linien einen ringförmigen Körper. Durch Ebenen, welche auf der Strecke p der Umdrehungsaxe senkrecht sind, wird jeder Ring in

Körperelemente zerlegt. Ist x der Abstand einer Linie p' gleichen Abstandes von der Axe p, sind dp und dp' die Stücke der Geraden p und der Abstandslinie p' zwischen je zwei senkrechten Ebenen, so ist der Inhalt dv des Körperelements

$$dv = \mathrm{O}x\,dx\,dp' = \pi k\,\mathfrak{sin}\,2\frac{x}{k}\,dx\,dp\,,$$

also der Inhalt eines Ringes (indem man nach p integrirt)

$$= \pi k p\,\mathfrak{sin}\,2\frac{x}{k}\,,$$

und die Summe der Ringe (indem man von 0 bis h integrirt)

$$v = \pi k^2 p\,\mathfrak{sin}\,\frac{h^2}{k}\,.$$

98.

Die Kugel zerlege man durch concentrische Kugelflächen in Elemente. Ist x der Radius einer Kugelfläche, dx die Entfernung je zweier Kugelflächen, so ist der Inhalt des Elementes enthalten zwischen diesen beiden Kugelflächen (nach Art. 93)

$$f dx = 4\pi k^2\,\mathfrak{sin}\,\frac{x^2}{k}\,dx\,,$$

also der Inhalt der Kugel

$$v = \pi k^3\,\mathfrak{sin}\,2\frac{r}{k} - 2\pi k^2 r\,,$$

wo r der Radius ist.

Drittes Buch.

Endlicher Raum und absolute Geometrie.

Absolute Sphärik.

99.

Für das leichtere Verständniss der später behandelten Planimetrie des endlichen Raumes möge die nachstehende Darstellung der Sätze der Sphärik ohne Benützung des Mittelpunktes der Kugel vorausgeschickt werden.

Die Kugelfläche (Sphäre) ist eine endliche, unbegrenzte, an allen Stellen gleichartige d. i. aus congruenten Theilen zusammengesetzte Fläche. Durch zwei beliebige Punkte derselben ist im Allgemeinen eine grösste Kreislinie (Hauptkreis) möglich, welcher eine unbegrenzte an allen Stellen gleichartige Linie ist, so dass die beiden Theile der Kugelfläche zu den beiden entgegengesetzten Seiten des Hauptkreises vollkommen gleichartig sind, d. h. zur Deckung gebracht werden können.

Jede grösste Kreislinie theilt die Sphäre in zwei congruente Stücke, alle grössten Kreislinien sind daher congruent und folglich von gleicher Länge.

Schneidet eine grösste Kreislinie AA' eine zweite BB' in einem Punkte M, so muss nach Art. 6 die erste die zweite mindestens nochmals in einem Punkte M' schneiden.

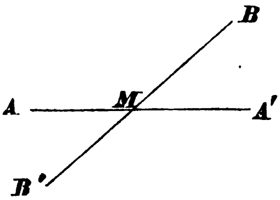
Zwei beliebige grösste Kreislinien AA' und BB' schneiden sich in zwei Punkten M und M', in welchen die beiden Kreislinien halbirt werden. Zwei solche Punkte heissen Gegenpunkte.

Denn würde die Linie BB' auf derselben Seite von AA' liegen, so müsste die halbe Sphäre und der zwischen BB'

und AA' liegende Theil der Sphäre wieder gleich der halben Sphäre sein.

Nimmt man von den halben Sphären auf der einen Seite von AA' und BB' den ihnen gemeinsamen zwischen den MBM' und MAM' liegenden Theil der Sphäre weg, so erhält man die Gleichheit der zwischen den Linien $MA'M'$ und MBM', MAM' und $MB'M$ liegenden Theile der Sphäre, woraus folgt, dass die Durchschnittspunkte M und M' zwei Gegenpunkte sind.

Fig. 59.



Der zwischen zwei in Gegenpunkten sich schneidenden halben grössten Kreislinien enthaltene Theil der Sphäre heisst ein (sphärisches) Zweieck.

Aus dem Vorhergehenden folgt: Durch zwei Gegenpunkte einer Sphäre sind beliebig viele grösste Kreislinien möglich. Zwei Punkte, die nicht Gegenpunkte sind, d. h. nicht eine durch sie gelegte grösste Kreislinie halbiren, bestimmen eine und nur eine grösste Kreislinie. Durch jeden Punkt der Sphäre kann man beliebige grösste Kreislinien ziehen, alle diese Linien schneiden sich nochmals in dem zugehörigen Gegenpunkte. Um zwei Gegenpunkte herum kann man die Sphäre in eine beliebige Anzahl congruenter Theile getheilt voraussetzen, — ähnlich, wie die (geradlinigen) Winkel um einen Punkt in einer Ebene unter Voraussetzung der gewöhnlichen Geometrie. In diesem Sinne kann die Fläche des Zweiecks als dessen Winkel (und umgekehrt) betrachtet werden.

100.

Zwei (beliebige) grösste Kreislinien theilen die Sphäre in vier Zweiecke; eine dritte grösste Kreislinie theilt jedes dieser Zweiecke in zwei (sphärische) Dreiecke. Durch drei grösste Kreislinien wird also die Sphäre in acht Dreiecke zerlegt, von denen jedes durch drei Durchschnittspunkte und die durch sie gelegten grössten Kreislinien bestimmt ist. Der zwischen je zweien dieser Punkte enthaltene kleinere Theil jeder Kreislinie heisst eine Seite des Dreiecks.

Ist ABC eines dieser Dreiecke, so heisst das durch die zugehörigen Gegenpunkte bestimmte Dreieck $A'B'C'$ das dem ersteren symmetrische. Wegen

$$AB = AA' - BA' = BB' - BA' = A'B'$$

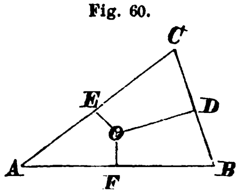
und der Gleichheit der Winkel eines Zweiecks in den Gegenpunkten und der Scheitel-Zweiecke folgt, dass die beiden symmetrischen Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die entsprechenden Stücke in derselben Ordnung einander gleich haben. Berücksichtigt man, dass bei zwei schneidenden Linien (auf derselben Fläche) die geschnittenen Theile der einen auf den entgegengesetzten Seiten der anderen liegen, so folgt die Verschiedenheit des Drehungssinnes bei symmetrischen Dreiecken. Verschiebt man daher das Dreieck $A'B'C'$ derart, dass die Seite $A'B'$ mit der Seite AB des Dreiecks ABC zusammenfällt, so liegen die Punkte C und C' auf den entgegengesetzten Seiten der Linie AB.

Ist $AB = BC$ d. h. das Dreieck ABC — also auch das Dreieck $A'B'C'$ — gleichschenklig, so sind beide einander congruent, also $C' = A$; und; wegen $C = C'$, $A = C$; d. h. im gleichschenkligen Dreiecke sind die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel einander gleich.

101.

Jedes sphärische Dreieck hat einen Mittelpunkt. Denn die senkrechten grössten Kreislinien in den Mitten D und E der Seiten BC und AC schneiden sich in einem Punkte O, woraus $AO = CO = BO$ folgt. Verbindet man die Mitte F der Seite AB durch eine grösste Kreislinie, so steht OF senkrecht auf AB. Man kann daher den Punkt O auch als den Durchschnittspunkt der drei Senkrechten in den Mitten der Dreiecksseiten erklären.

Fig. 60.



Folgerungen: a) Man kann jedes Dreieck in drei gleichschenklige Dreiecke mit gemeinsamer Spitze und gleichen Schenkeln $AO = BO = CO$ zerlegen. b) Zwei symmetrische Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind flächengleich. Man bestimme den Mittelpunkt O des Dreiecks ABC und mache auf $A'B'$ das $\triangle A'B'O' \cong \triangle ABO$ derart, dass der Punkt O' mit dem Punkte C' auf derselben oder entgegengesetzten

Seite von $A'B'$ liegt, wenn der Punkt O mit dem Punkte C auf derselben oder entgegengesetzten Seite von AB liegt; dann folgt (aus $AC = A'C'$ und $A = A'$), dass die Dreiecke ACO und $A'C'O'$ symmetrisch sind, also (wegen $AO = CO$) $A'O' = C'O'$ d. h., dass der Punkt O' der Mittelpunkt des Dreiecks $A'B'C'$ ist. Die Dreiecke OAB, OBC, OCA sind resp. mit den Dreiecken $O'A'B', O'B'C', O'C'A'$ congruent, also die aus ihnen zusammengesetzten Dreiecke ABC und $A'B'C'$ flächengleich.

102.

Bestimmung der Fläche eines sphärischen Dreiecks. Die grösste Kreislinie durch zwei Spitzen A und B theilt die Sphäre in zwei congruente Theile. Die grössten Kreislinien durch die Punkte A und C, B und C bestimmen mit der ersteren auf der Halb-Sphäre der Punkte A, B, C zwei Zweiecke mit den Winkeln A und B, welche die Fläche des Dreiecks gemeinsam haben. Die Summe dieser beiden Zweiecke vermindert um die Fläche dieses Dreiecks gibt die halbe Sphäre vermindert um die Fläche des Dreiecks $A'B'C$, welches letztere wieder gleich ist der Fläche des Zweiecks C vermindert um das dem Dreiecke ABC flächengleiche Dreieck $A'B'C'$. Ist F die Fläche der (ganzen) Sphäre, f die Fläche des Dreiecks ABC, so ist also

$$A + B + C = \tfrac{1}{2} F + 2f$$
$$f = \tfrac{1}{2}(A + B + C - \tfrac{1}{2} F).$$

Theilt man die Sphäre in zwei Gegenpunkten in 360 Zweiecke, von denen jedes ein Grad $= 1^0$ genannt wird, so ist

$$f = \tfrac{1}{2}(A + B + C - 180^0),$$

wo A, B, C in Graden auszudrücken sind.

Da f positiv ist so ist

$$A + B + C > 180^0.$$

Mit dem Verschwinden von f wird die Winkelsumme des sphärischen Dreiecks $= 180^0 =$ der des geradlinigen Dreiecks in der euclidischen Geometrie.

Auch die Gleichungen der „sphärischen Trigonometrie" können ohne Schwierigkeit unabhängig von jeder fremdartigen Hülfe erhalten werden.

Planimetrie des endlichen Raumes.

103.

Unter der Voraussetzung, dass die Gerade zwar unbegrenzt aber endlich ist, d. i. unter der Voraussetzung des endlichen aber unbegrenzten Raumes wird die Planimetrie mit der Sphärik identisch. Erklärt man die Gerade als eine Linie, die im Allgemeinen durch zwei Punkte bestimmt also aus congruenten Stücken zusammengesetzt ist, so wird man durch fortgesetzte Verlängerung einer Strecke wieder zu den früheren Punkten zurück kommen. In gleicher Weise muss dann auch der Ebene die Eigenschaft der Endlichkeit zugesprochen werden, weil die geradlinige Verbindung zweier Punkte einer Ebene vollkommen in die Ebene fällt.

Die Voraussetzungen für die ebene Geometrie sind daher folgende:

1) Alle Geraden sind einander congruent also auch von gleicher Länge, etwa $l = 2\pi k$.

2) Die Ebene ist aus congruenten in sich verschiebbaren Theilen zusammengesetzt.

3) Durch zwei Punkte einer Ebene ist im Allgemeinen nur eine Gerade möglich. Diese Gerade liegt mit allen ihren Punkten in der Ebene.

Aus diesen Voraussetzungen folgt unmittelbar wie in den vorigen Art., dass je zwei Gerade einer Ebene sich in zwei Punkten, deren Entfernung $= \frac{l}{2}$ ist, schneiden; ferner, dass die Ebene durch jede unbegrenzte Gerade in zwei (congruente) Halbebenen getheilt wird, u. s. w. Man ersieht, dass man alle Sätze der Sphärik unmittelbar auf die Planimetrie übertragen kann, indem man grösste Kreislinie, Sphäre, u. s. w. resp. durch Gerade, Ebene, u. s. w. ersetzt. Gleiches gilt daher auch von den Winkeln, Dreiecken (bei welchen dann ebenfalls zwischen Congruenz und Symmetrie unterschieden werden muss), deren Flächen und Relationen zwischen ihren Seiten und Winkeln. Speciell erhält man, wenn die Fläche der Halbebene $= 180^0$ gesetzt wird, für die Fläche f eines Dreiecks mit den Winkeln A, B, C den Ausdruck

$$f = \tfrac{1}{2}(A + B + C - 180^0).$$

Die Winkelsumme des geradlinigen Dreiecks ist daher grösser als 180°. In gleicher Weise gehen die Relationen der sphärischen Trigonometrie in die der Planimetrie über, indem man statt des Umfanges des grössten Kreises die Länge der ganzen Geraden setzt. Berücksichtigt man ferner, dass die Formeln der Sphärik für sehr kleine Verhältnisse der Seiten einer Figur zum Radius in die der euclidischen Planimetrie übergehen, so folgt analog wie im Art. 63:

1) Für unendlich kleine Figuren gilt die gewöhnliche (euclidische) Geometrie.

2) Man kann die gewöhnliche (euclidische) Geometrie als speciellen Fall der endlichen Geometrie auffassen, indem man die Länge der unbegrenzten Geraden so gross annimmt, dass man für unsere Messungen mit den Näherungsformeln, die sich aus der Sphärik ergeben, ausreicht.

Absolute Geometrie.

104.

Fasst man die in den vorhergehenden Artikeln gewonnenen Resultate zusammen, so ergibt sich, dass die gewöhnlichen Voraussetzungen (Axiome) der Congruenz sowie der durch Definitionen eingeführten einfachsten Gebilde der Geraden, Ebene, u. s. w. für den Aufbau der Geometrie nicht ausreichend sind. Für die Gerade ist erforderlich, dass man ausser der gewöhnlichen Erklärung: „sie ist eine durch zwei Punkte bestimmte Linie“ noch angibt, ob sie endlich oder unendlich ist.

Die Voraussetzung der Unendlichkeit der Geraden — also auch die der Ebene — liefert die im Art. 63 als absolute Geometrie im Sinne Bolyais bezeichnete allgemeine Geometrie, in der die Gerade zwei unendlich ferne Punkte besitzt.

Die euclidische Geometrie erscheint als specieller Fall dieser Geometrie dadurch, dass man mit voller Beibehaltung des Axioms der Geraden die beiden unendlich fernen Punkte einer Geraden als einen einzigen Punkt betrachtet.

Die Voraussetzung der Endlichkeit der Geraden liefert eine Geometrie, in welcher das Axiom der Geraden nicht mehr in voller Allgemeinheit erhalten werden kann. Auch von dieser Geometrie kann man die euclidische als speciellen Fall betrachten, indem man in letzterer der Geraden zwei unendlich ferne Punkte beilegt und das Axiom der Geraden nur für die im endlichen liegenden Punkte beibehält, während man es für die unendlich fernen Punkte aufgibt. Unter dieser Voraussetzung lautet die Definition der Geraden so: Die Gerade ist eine Linie, die durch zwei im Endlichen liegende Punkte bestimmt ist; liegen aber zwei Punkte im Unendlichen, so sind durch sie beliebig viele Gerade möglich.

Die Geometrien des unendlichen und endlichen Raumes sammt ihrem speciellen Fall der euclidischen Geometrie sind analytisch durch dieselben Formeln gegeben, da nämlich die Formeln der nichteuclidischen Geometrie und der Sphärik (als Repräsentant der Geometrie des endlichen Raumes) durch Umwandlung einer Constanten k in ki in einander übergehen. Die euclidische Geometrie kann nun als Uebergangsfall der beiden Geometrien betrachtet werden, indem der Uebergang der Constanten $1 : k$ in $1 : ki$ (oder $1 : ki$ in $1 : k$) durch die Nulle geschieht. Betrachtet man die Formeln der nichteuclidischen Geometrie als die Ausgangsformeln, so erscheint, falls der Uebergang in Null aus dem Reellen d. i. aus $1 : k$ geschieht, die euclidische Geometrie als specieller Fall der nichteuclidischen; geschieht hingegen dieser Uebergang aus dem Imaginären (d. i. aus $1 : ki$), so erscheint die euclidische Geometrie als specieller Fall der Sphärik. Je nach der einen oder anderen Fassung wird man der Geraden resp einen oder zwei unendlich entfernte Punkte beilegen und das Axiom der Geraden resp. vollständig oder auf endliche Punkte beschränkt beibehalten.

Anmerkung. Wegen der Analogie der Beziehungen der drei Formen der Geometrie mit denen der Hyperbel, Ellipse und Parabel hat Felix Klein* die nichteuclidische, sphärische und euclidische Geometrie resp. die hyperbolische, elliptische und parabolische Geometrie genannt.

105.

Ungeachtet der scheinbaren Selbstständigkeit der Geometrie des endlichen Raumes kann doch die Geometrie Bolyai's und Lobatschewsky's als der allgemeine Fall bezeichnet werden.

* „Ueber die sogenannte nichteuclidische Geometrie.“ Mathematische Annalen Bd. 4.

Da nämlich jede Wissenschaft ihren Gegenstand aus gewissen hypothetischen Voraussetzungen und Gebilden aufbaut, so muss von den verschiedenen möglichen Formen einer Wissenschaft, die den verschiedenen Voraussetzungen entsprechen, diejenige die allgemeinste genannt werden, welche unter ihren Objecten die der übrigen Formen enthält.

Die auf Grundlage des unendlichen Raumes erhaltene Geometrie besitzt unter ihren Gebilden die Sphäre (und die von ihr eingeschlossene Kugel als Theil des Raumes) mit genau denselben Eigenschaften als die selbstständige Form des endlichen Raumes. Man kann daher die Geometrie des endlichen Raumes als einen Theil der Untersuchungen der Geometrie des unendlichen Raumes auffassen, d. h. letztere als die allgemeine Form betrachten.

Im Vorigen wurden in der Geometrie des endlichen Raumes nur die „Gerade in der Ebene" betrachtet, wobei letztere Fläche durch die im Art. 103 erwähnten Eigenschaften definirt ist. Aus diesen Eigenschaften folgt noch nicht, dass die Ebene auch durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmt ist. Diese Eigenschaft setzt nämlich die Umkehrbarkeit der Ebene voraus, welche für den endlichen Raum nicht stattfindet, da eine endliche unbegrenzte gleichartige Fläche nicht umkehrbar ist, denn sonst müssten in einer jeden Hauptlinie die beiden inneren Seiten der Hälften zusammenfallen. Eine unbegrenzte und zugleich umkehrbare Fläche muss daher unendlich ferne Elemente enthalten, d. i. unendlich sein.*

Für die Möglichkeit von Untersuchungen „aus der Stereometrie" ist die vorher erwähnte Eigenschaft der Ebene unerlässlich, woraus wieder die Zwecklosigkeit einer selbstständigen Geometrie des endlichen Raumes hervorgeht.

Anmerkung. Ob der wirkliche d. i. Erfahrungsraum unendlich ist, ist hierdurch keineswegs nachgewiesen; aus dem Vorhergehenden ist es jedoch vollkommen klar, dass der ideale Raum als unendlich vorausgesetzt werden kann.

---

* Die Grenzfläche ist ein Beispiel einer unendlichen, gleichartigen aber nicht umkehrbaren Fläche; es gilt also nicht der Satz „jede unendlich gleichartige Fläche ist umkehrbar" allgemein, sondern nur in der euclidischen Geometrie.

Absolute Projectivität.

106.

Sind A und B zwei Punkte einer Geraden, so soll durch die Zusammenstellung AB die zwischen den Punkten A und B enthaltene Strecke bezeichnet werden. Dieselbe wird positiv oder negativ genommen, je nachdem der Punkt B in der positiven oder negativen Richtung auf den Punkt A folgt.

Ist C ein Punkt der Gerade AB, so ist das Verhältniss

$$\mathfrak{sin}\,\frac{AC}{k} : \mathfrak{sin}\,\frac{CB}{k}$$

positiv, wenn der Punkt C auf der Strecke AB; negativ, wenn der Punkt C ausserhalb der Strecke liegt; dasselbe ist absolut grösser als Eins, wenn der Punkt C näher dem Punkte B als dem Punkte A liegt. Für zwei fixe Punkte A und B ist also die Lage des Punktes C für einen gegebenen Werth des Verhältnisses eindeutig bestimmt.

Ist D ein zweiter Punkt der Geraden AB, so heisst das zusammengesetzte Verhältniss

$$\frac{\mathfrak{sin}\,\frac{AC}{k}}{\mathfrak{sin}\,\frac{CB}{k}} : \frac{\mathfrak{sin}\,\frac{AD}{k}}{\mathfrak{sin}\,\frac{DB}{k}} = \mathfrak{sin}\,(A, B, C, D)$$

das Doppel-Verhältniss der vier Punkte A, B, C, D.

Ist S der Mittelpunkt eines ebenen Strahlenbündels, sind $a, b, c, d, \ldots$ die zugehörigen Strahlen, (a, b) der Winkel der Strahlen a und b, so folgt aus Art. 62 für jede das Strahlenbüschel in den Punkten $A, B, C, D, \ldots$ schneidende Gerade

$$\mathfrak{sin}\,(A, B, C, D) = \sin\,(a, b, c, d)\,,$$

wobei

$$\sin\,(a, b, c, d) = \frac{\sin\,(a, c)}{\sin\,(c, b)} : \frac{\sin\,(a, d)}{\sin\,(d, b)}$$

das Doppelverhältniss der vier Strahlen a, b, c, d bedeutet.

Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse der Strahlen eines ebenen Strahlenbüschels mit den Punkten einer dasselbe schneidenden Transversale folgt die Projectivität für die nichteuclidische Geometrie.

107.

Analoge Beziehungen finden auf der Kugelfläche statt. Unter AB kann einer der beiden Kreisbogen, in welche eine grösste Kreislinie durch zwei Punkte A und B getheilt wird, mit Rücksicht auf das Vorzeichen verstanden werden. Ist k der Radius der Kugel, so ist das Doppelverhältniss der vier Punkte A, B, C, D einer grössten Kreislinie ausgedrückt durch

$$\sin(A, B, C, D) = \frac{\sin\frac{AC}{k}}{\sin\frac{CB}{k}} : \frac{\sin\frac{AD}{k}}{\sin\frac{DB}{k}}.$$

Wird ein sphärisches Strahlenbüschel $a, b, c, d, \ldots$ durch eine grösste Kreislinie in den Punkten $A, B, C, D, \ldots$ geschnitten, so ist

$$\sin(a, b, c, d) = \sin(A, B, C, D).$$

Aus dieser Gleichung folgt wieder die Projectivität auf der Kugelfläche d. i. die Projectivität der Planimetrie des endlichen Raumes.

Die Projectivität ist daher von dem Parallelenaxiom unabhängig.*

Anmerkung. Werden die Strahlen eines ebenen Strahlenbüschels und die Durchschnittspunkte einer Transversalen einander entsprechend gesetzt, so findet in den drei Geometrien folgendes statt: In der nichteuclidischen Geometrie entsprechen den (reellen) Strahlen, welche zur Transversale Nichtschneidende sind, ideale Punkte. In der euclidischen Geometrie entspricht jedem Strahl ein reeller Punkt, dabei wird der unendliche Punkt dem parallelen Strahl entsprechend gesetzt. In der Sphärik entspricht jedem Elemente des einen Gebildes ein reelles Element des anderen Gebildes.

Versinnlichung der Geometrie.

108.

Da die Bestimmung der Constanten k aus den Beobachtungen zu geschehen hat, letztere aber nachweisen, dass wir für alle unsere Messungen diese Constante gleich unendlich setzen können, so können die Resultate der ebenen nichteuclidischen Geometrie und der sphärischen Planimetrie nicht in unserem Erfahrungsraume durch ebene Figuren in ihren wahren Verhältnissen versinnlicht werden. Diese Versinn-

* Zuerst ausgesprochen von F. Klein in den math. Annalen Bd. IV, S. 623. Ueber absolute Projectivität vgl. die in Art. 84 citirte Abhandlung von Escherich.

lichung kann dagegen auf krummen Flächen, in welchen die kürzesten Linien den in einer Ebene liegenden Geraden entsprechen, geschehen. Für die ebene Geometrie des endlichen Raumes dient die Kugelfläche und die auf ihr gezogenen kürzesten Linien d. h. die grössten Kreise als Versinnlichung. Alle Resultate der einen Untersuchung können unmittelbar in entsprechende Untersuchungen des anderen Gebietes umgesetzt werden. In gleicher Weise können auch die Resultate der nichteuclidischen Geometrie auf gewissen krummen Flächen interpretirt werden, wie dies durch E. Beltrami's* Untersuchung der constant negativ gekrümmten Flächen geschehen ist.

109.

Den Ausgang dieser Arbeiten bildet die Gauss'sche Untersuchung über die Krümmung der Flächen und die Anwendung dieser Theorien auf die biegsamen Flächen.**

Unter Biegung einer Fläche versteht man eine solche Aenderung der Fläche, bei welcher die Längen aller auf ihr liegenden Linien ungeändert bleiben. Ist daher auf einer biegsamen Fläche eine von kürzesten Linien gebildete Figur gegeben, so ändern sich bei der Biegung die Längen der Seiten und die Winkel nicht. Letztere bleiben desshalb unverändert, weil der Winkel zweier krummen Linien durch die im Scheitel zusammenstossenden Linienelemente bestimmt ist und diese sowie die Verbindung ihrer Endpunkte ihre Grösse nicht ändern. Man kann daher die Flächen auch rücksichtlich derjenigen Eigenschaften untersuchen, welche von der Biegung unabhängig sind.

Zu diesen gehören die auf die Krümmung der Flächen bezüglichen, da der Ausdruck für das Krümmungsmass nur vom Ausdrucke für das Linienelement der Fläche abhängt. Aber auch umgekehrt: Zwei Flächen, deren Punkte in einer

---

* „Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea.“ Giornale di matematiche. Vol. VI, 1868. In's Französische übersetzt von J. Hoüel in den „Annales de l' Ecole Normale supérieure“ S. VI, 1869.

** Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas — Eine französische Uebersetzung mit Zusätzen gibt Roger 1870. Die hier nöthigen Sätze findet man vollständig in Joachimsthal's „Anwendung der Differential- und Integralrechnung etc.“ Leipzig, 1872.

solchen Beziehung stehen, dass jedem Punkt der einen Fläche ein Punkt der zweiten Fläche derart entspricht, dass je zwei entsprechende Punkte dasselbe Krümmungsmass besitzen, stehen im Verhältniss der Biegung zu einander.

Am deutlichsten erhellet dies aus dem Ausdrucke des Linienelements einer Fläche

$$ds^2 = du^2 + m^2 dv^2;$$

hier wird ein beliebiger Punkt O der Fläche als Coordinaten-Anfang genommen, durch O werden auf der Fläche kürzeste Linien u gezogen und jeder Punkt M der Fläche ist bestimmt durch die Länge OM der kürzesten Linie u und durch den Winkel v, welchen diese Linie mit einer als erste kürzeste Linie gewählten Linie OL im Punkte O bildet. Die Grösse m erscheint als eine Function der Variablen u und v. Jede beliebige auf der Fläche liegende Linie wird durch eine Gleichung zwischen den Grössen u und v ausgedrückt.

Das Mass der Krümmung im Punkte (u, v) ist bestimmt durch

$$\varkappa = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial u^2},$$

dabei ist für $u = 0$ unabhängig von v

$$m = 0, \frac{\partial m}{\partial u} = 1 .$$

Wird die Fläche gebogen, so bleiben für den Punkt M die Grössen u und v ungeändert, dasselbe gilt von jedem dem Punkte M unendlich nahen Punkte M'. Ist ds_1 das Element der neuen Lage von MM', so ist

$$ds_1{}^2 = du^2 + m_1{}^2 dv^2 = ds^2$$

also $m_1 = m$, d. h. $\varkappa_1 = \varkappa$.

Umgekehrt entsprechen bei zwei Flächen für dieselben Werthe von u und v ein und derselbe Werth des Krümmungsmasses $\varkappa$, so folgt aus der Gleichung

$$\varkappa = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial u^2}$$

durch Integration mit Berücksichtigung der Werthe von m und $\partial m : \partial u$ für $u = 0$, nur ein einziger bestimmter Werth von m d. i. man erhält für beide Flächen denselben Ausdruck des Linienelementes.

Letzteren Satz erhält man auch auf die folgende Art*: Statt der Grössen u und v führe man die Variabeln x und y ein, wobei

$$x = u \cos v\,,\ y = u \sin v$$

ist. Dadurch geht der Ausdruck für das Linienelement über in

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \frac{1}{u^2}\left(\frac{m^2}{u^2} - 1\right)(xdy - ydx)^2\,.$$

Für sehr kleine Werthe von u folgt

$$m = u + au^2 + bu^3 + \ldots,$$

woraus

$$\varkappa = \frac{2a + 6bu + \ldots}{u + au^2 + \ldots}$$

folgt. Soll im Punkte O d. i. für $u = 0$ das Krümmungsmass endlich sein, so muss $a = 0$ sein. Es ist daher

$$\varkappa_0 = 6b\,.$$

Damit wird der Ausdruck für das Linienelement

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (-\tfrac{4}{3}\varkappa_0 + 8cu + \ldots)\Delta^2\,,$$

wo

$$\Delta = xdy - ydx$$

die doppelte Fläche des Dreiecks $(0, 0)$, (dx, dy), (x, y) bedeutet.

Für sehr kleine Werthe von u erhält man folgende Annäherungen

$$ds_1{}^2 = dx^2 + dy^2$$
$$ds_2{}^2 = ds_1{}^2 - \tfrac{4}{3}\varkappa_0\Delta^2, \text{ u. s. w.}$$

Der erste Ausdruck bezieht sich auf das Linienelement der Ebene, für diese ist an allen Stellen $\varkappa = 0$.

Im zweiten Ausdruck ist für sehr kleine Werthe von x und y die Grösse Δ von der zweiten Ordnung, also der Unterschied $ds_2{}^2 - ds_1{}^2$ d. i. die Abweichung von der Ebenheit eine kleine Grösse der vierten Ordnung. Das Mass der Krümmung kann daher auch durch

$$\varkappa_0 = -\frac{3}{4}\,\frac{ds_2{}^2 - ds_1{}^2}{\Delta^2}$$

ausgedrückt werden. Besitzen daher zwei (nicht ebene) Flächen in zwei entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungs-

* Nach Riemann entwickelt. Siehe die im Art. 117 citirte Abhandlung.

mass k_0, so können die an diesen Stellen befindlichen Elemente zur Deckung gebracht werden. Unendlich kleine Elemente können immer als eben angesehen werden.

110.

Von besonderem Interesse ist der Fall, wenn das Krümmungsmass für alle Punkte einer Fläche constant ist. Zwei Flächen constanter Krümmung, welche dasselbe Krümmungsmass besitzen, können durch Biegung zur Deckung gebracht werden. Ist das Krümmungsmass gleich Null, so können die Flächen durch Biegung in ebene Flächen verwandelt werden. Ein Flächenstück von constanter positiver Krümmung $= 1 : k^2$ lässt sich mit einer Kugelfläche, deren Radius k ist, zur Deckung bringen, und in dieser Lage ohne weitere Biegung beliebig verschieben. Zwei Flächenstücke constanter negativer Krümmung $= - 1 : k^2$ lassen sich zwar durch Biegung zur Deckung bringen; allein ohne weitere Biegung kann das erstere nicht auf dem zweiten bewegt werden. Denn in jedem Punkte besitzen die Radien der beiden Krümmungslinien entgegengesetzte Richtung.

111.

Die Geometrie der von kürzesten Linien gebildeten Figuren auf einer Fläche constanter Krümmung erhält man am einfachsten aus den Gauss'schen Gleichungen, welche aus den in Art. 109 angeführten Ausdrucke für das Linienelement erhalten werden. Es ist

$$\varkappa = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial u^2}, \frac{\partial m}{\partial u} + \frac{d\vartheta}{dv} = 0;$$

wo

$$\frac{m dv}{du} = \tan\vartheta, \quad \frac{du}{ds} = \cos\vartheta, \quad \frac{m dv}{ds} = \sin\vartheta$$

ist, und ϑ den Winkel der Kürzesten s mit der Kürzesten u bedeutet.

Ist $\varkappa = 1 : k^2$ positiv, so erhält man durch Integration

$$m = k \sin\frac{u}{k}.$$

Betrachtet man, da m nur von u abhängt, in der Gleichung der Kürzesten die Grösse v also auch die Grösse ϑ als eine Function von u, so geht die Gleichung der Kürzesten über in

$$\frac{dm}{du} + \frac{d\vartheta}{du} : \frac{dv}{du} = 0\,,$$

d. i. in

$$-\frac{1}{k} \cot \frac{u}{k}\, du = \cot \vartheta\, d\vartheta\,,$$

deren Integral

$$\sin \frac{u}{k} \sin \vartheta = \text{Const.}$$

ist. Daraus folgt für das Dreieck auf der Kugelfläche

$$\sin \frac{a}{k} : \sin \frac{b}{k} : \sin \frac{c}{k} = \sin A : \sin B : \sin C\,.$$

In gleicher Weise erhält man für die Flächen constanter negativer Krümmung gleich $-1 : k^2$ die Gleichung

$$\mathfrak{Sin}\, \frac{a}{k} : \mathfrak{Sin}\, \frac{b}{k} : \mathfrak{Sin}\, \frac{c}{k} = \sin A : \sin B : \sin C\,,$$

aus welcher die übrigen Formeln folgen. Die Formeln der Geometrie der Figuren von kürzesten Linien auf einer Fläche constanter negativer Krümmung $-1 : k^2$ sind daher mit denen der nichteuclidischen Geometrie identisch.*

112.

Die im vorigen Art. angeführte Uebereinstimmung der nichteuclidischen Planimetrie und der Theorie der Flächen constanter negativer Krümmung wurde von E. Beltrami** in folgender Weise erklärt. Die Planimetrie hat die beiden Axiome der Congruenz und der Geraden zu ihren Grundlagen. Letzteres Axiom wird aber nicht vollständig sondern nur in folgender beschränkter Weise verwendet: Wenn zwei

---

* Diese Gleichungen wurden zuerst von M. Minding (Crelle Journal, Bd. XX, S. 325) ohne Beweis angegeben. Entwicklungen geben M. Codazzi (Annales de Tortolini, 1857, S. 354) und G. Escherich (Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. Bd. LXIX).

** „Saggio di interpretazione etc.“

Ebenen, welche jede eine Gerade enthalten, zusammenfallen, so decken sich die beiden Geraden in allen Punkten, wenn sie zwei Punkte gemeinsam haben. Durch diese Aussage ist nur die Gerade in der Ebene und nicht die Gerade im Raume zugleich bestimmt. Aehnliche Beziehungen wie bei den Geraden in der Ebene finden auch bei den Flächen mit constanter Krümmung statt; auch hier können die Theile zur Deckung gebracht werden und es ist im Allgemeinen durch zwei Punkte (besondere Lagen abgerechnet) nur eine kürzeste Linie möglich.

Bei einer Fläche mit constanter positiver Krümmung ist für zwei diametrale Punkte die Kürzeste nicht bestimmt, während für jede andere Lage nur eine Kürzeste möglich ist. Für Flächen mit constanter negativer Krümmung lässt sich beweisen, dass solche Ausnahmspunkte nicht existiren, so dass die beiden Voraussetzungen der (nichteuclidischen) Planimetrie vollständig für diese Flächen giltig sind. Daraus folgt, dass alle Sätze der nichteuclidischen Planimetrie sich unmittelbar auf die Flächen constanter negativer Krümmung übertragen lassen, und dass Resultate der ersteren, welche in der Planimetrie mit unseren Anschauungen unvereinbar scheinen, auf den letzteren Flächen ihre (reelle) Interpretation finden. In gleicher Weise entspricht der Uebergang von der nichteuclidischen Planimetrie zur euclidischen dem Uebergange von den Flächen mit negativer Krümmung zur Fläche mit der (constanten) Krümmung Null.

113.

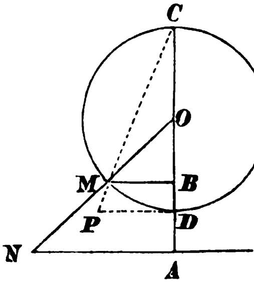
Der Beweis dieser Sätze folgt aus dem Ausdrucke für das Linienelement einer Fläche constanter Krümmung. Für die passende Wahl des Coordinatensystems dient folgende Betrachtung. Eine Kugelfläche mit dem Radius k besitzt an allen Punkten die constante positive Krümmung $1:k^2$ Projicirt man ihre Punkte vom Mittelpunkte (als Projectionscentrum) auf eine Ebene, so sind die Projectionen der grössten Kreislinien d. i. der Kürzesten Gerade.

Es sei $OA = a$ die Entfernung des Mittelpunktes von der Projectionsebene, N die Projection von M, $MB \perp OA$.

Aus $\triangle OAN \quad \triangle OBM$ folgt

$$ON : OM = OA : OB.$$

Fig. 61.



Ist A der Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems in der Projectionsebene, sind ferner u, v die Coordinaten von N; x, y, z die Coordinaten von M für den Punkt A als Anfang und der Geraden AO als z-Axe, so ist

$$x = \frac{k}{ON} u, \; y = \frac{k}{ON} v, \; z = \frac{k}{ON} a$$

$$ON = \sqrt{a^2 + u^2 + v^2}.$$

Setzt man statt u, v resp. $u + du$, $v + dv$, so erhält man $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Das Linienelement

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

geht dadurch über in

$$ds^2 = k^2 \frac{(a^2 + v^2) du^2 - 2uv du dv + (a^2 + u^2) dv^2}{(a^2 + u^2 + v^2)^2}$$

oder in

$$ds^2 = k^2 \frac{- dw + du^2 + dv^2}{w^2}$$

$$w^2 = a^2 + u^2 + v^2.$$

Da (nach Gauss) für das Linienelement

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

das Mass der Krümmung durch die Grössen E, F, G bereits bestimmt ist, so wird der Ausdruck

$$ds^2 = k^2 \frac{(a^2 - v^2) du^2 + 2uv du dv + (a^2 - u^2) dv^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^2},$$

welcher aus dem vorigen dadurch erhalten wird, indem man ki und ai statt k und a setzt, einer Fläche von constanter negativer Krümmung $= - 1 : k^2$ angehören. Alle Untersuchungen, die sich auf solche Eigenschaften beziehen, welche von der Biegung einer Fläche unabhängig sind, können daher aus dem hier gegebenen Ausdruck für das Linienelement erhalten werden, und werden allgemein für alle Flächen von constanter negativer Krümmung gelten.

114.

Der Ausdruck für das Linienelement

$$ds^2 = k^2 \frac{dw^2 + du^2 + dv^2}{w^2}$$

$$w^2 + u^2 + v^2 = a^2$$

ist reell für alle Werthe von u und v, welche der Bedingung

$$u^2 + v^2 \leqq a^2$$

genügen. Denkt man sich in einer Hülfsebene zu jedem Punkt u, v der Fläche einen Punkt x, y construirt, wobei

$$x = u, \; y = v$$

gesetzt wird, so wird für alle Punkte der vom Anfange mit dem Radius a construirten Kreisfläche die Grösse ds reell. Jede Kürzeste auf der Fläche ist durch eine lineare Gleichung zwischen u und v, also in der Hülfsebene durch eine lineare Gleichung zwischen x und y bestimmt.

Setzt man

$$u = r \sin\alpha, \; v = r \cos\alpha, \tag{1}$$

so wird

$$ds^2 = \left(\frac{ka}{a^2 - r^2}\right)^2 dr^2 + \frac{k^2 r^2}{a^2 - r^2} d\alpha^2.$$

Für eine Kürzeste, welche durch den Punkt $u = 0$, $v = 0$ geht, ist α constant; ihre Länge ϱ bis zum Punkte (u, v) erhält man aus

$$d\varrho = k \frac{a\,dr}{a^2 - r^2}$$

durch Integration

$$\varrho = \frac{k}{2} \log \frac{a + r}{a - r} = \frac{k}{2} \log \frac{a + \sqrt{u^2 + v^2}}{a - \sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Dieser Ausdruck wächst von $r = 0$ bis $r = a$ fortwährend; für $r = a$ wird $\varrho = \infty$; für $r > a$ wird ϱ imaginär. Das ausserhalb der Kreisfläche in der Hülfsebene entsprechende Gebiet der Fläche ist daher ideal.

Betrachtet man in den Gleichungen (1) die Grösse r als constant und den Winkel α als variabel, so erhält man für den Bogen σ auf der Fläche

$$\sigma = \frac{kr\alpha}{\sqrt{a^2 - r^2}},$$

d. h. der Bogen σ ist proportional dem Winkel α. Die vom Punkte $u = 0$, $v = 0$ aus gezogenen Linien ϱ bilden unter einander denselben Winkel wie die zugehörigen Linien r in der Hülfsebene.

Aus den vorigen Gleichungen folgt

$$r = a \tan\frac{\varrho}{k}, \quad \cos\frac{\varrho}{k} = \frac{a}{w};$$

damit wird

$$\sigma = k\alpha \sin\frac{\varrho}{k}.$$

Für $\alpha = 2\pi$ wird der Umfang des Kreises vom Radius ϱ

$$= 2\pi k \sin\frac{\varrho}{k}.$$

115.

Aus dem Vorhergehenden folgt unmittelbar die Uebereinstimmung der nichteuclidischen Planimetrie mit der Theorie der Flächen constanter negativer Krümmung. Jeder beliebige Punkt derselben kann als Anfangspunkt d. i. als der Punkt $u = 0$, $v = 0$ genommen werden. Für eine nicht durch ihn gehende Kürzeste existiren zwei durch den Punkt (0,0) gehende Kürzeste als die gemeinsame Grenze der schneidenden und nicht schneidenden Kürzesten, welche den Parallelen der nichteuclidischen Planimetrie entsprechen. In der Hülfsebene sind der gegebene Punkt durch den Mittelpunkt des Kreises, die Gerade durch eine Sehne und die beiden Parallelen durch die an die Endpunkte gezogenen Radien versinnlicht. Da der Winkel der beiden Radien kleiner als zwei Rechte ist, so ist auf der krummen Fläche der Parallelwinkel spitz. Ist p die kürzeste Entfernung des Punktes von der gegebenen Kürzesten $\Pi(p)$ der Grenzwinkel, so ist

$$\cos\Pi(p) = \frac{r}{a},$$

wo r der Abstand des Mittelpunktes von der Sehne ist. Setzt man für r den Werth, so erhält man

$$\cos\Pi(p) = \tan\frac{p}{k}.$$

116.

Für das Linienelement einer Fläche mit constanter Krümmung lassen sich noch andere Ausdrücke aufstellen.

I. Für die Flächen mit positiver Krümmung.

1) $$ds^2 = d\varrho^2 + \left(k \sin\frac{\varrho}{k}\right)^2 d\alpha^2.$$

2) Sind ξ, η die Coordinaten der stereographischen Projection des Punktes M, wenn die Projectionsebene parallel zur früheren xy Ebene die Kugel berührt, so ist

$$\xi = d\cos\alpha,\ \eta = d\sin\alpha,\ d = 2k\tan\frac{\varrho}{2k},$$

also

$$ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{1 - \frac{\xi^2+\eta^2}{4k^2}}.$$

3) Setzt man

$$z = \varrho\cos\alpha,\ t = \varrho\sin\alpha,$$

so wird

$$ds^2 = dz^2 + dt^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\left(\frac{k}{\varrho}\sin\frac{\varrho}{k}\right)^2 - 1\right)(z\,dt - t\,dz)^2,$$

oder entwickelt

$$ds^2 = dz^2 + dt^2 - \frac{1}{3k^2}\left(1 - \frac{2\varrho^2}{15k^2} + \cdots\right)(z\,dt - t\,dz)^2.$$

II. Für die Flächen mit negativer Krümmung erhält man

1) $$ds^2 = d\varrho^2 + \left(k\,\mathfrak{Sin}\frac{\varrho}{k}\right)^2 d\alpha^2.$$

2) $$\xi = 2k\,\mathfrak{Tan}\frac{\varrho}{2k}\cos\alpha,\ \eta = 2k\,\mathfrak{Tan}\frac{\varrho}{2k}\sin\alpha;$$

$$ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{1 + \frac{\xi^2+\eta^2}{4k^2}}.$$

3) $$ds^2 = dz^2 + dt^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\left(\frac{\varrho}{k}\,\mathfrak{Sin}\frac{\varrho}{k}\right)^2 - 1\right)(z\,dt - t\,dz)^2$$

$$ds^2 = dz^2 + dt^2 + \frac{1}{3k^2}\left(1 + \frac{2\varrho^2}{15k^2} + \cdots\right)(z\,dt - t\,dz)^2.$$

Riemann's und Helmholtz's Raumtheorien.

117.

Die Resultate der Beltrami'schen Untersuchungen der Flächen constanter Krümmung lassen sich auch aus dem Ausdrucke für das Linienelement in rein analytischer Form durch die Transformation der Differential-Ausdrücke ableiten. Diese ursprünglich von jeder geometrischen Voraussetzung freien, durch Gleichungen ausgedrückten Eigenschaften geben geometrisch interpretirt die in dem vorigen Artikel angeführten Sätze. Diese Methode gestattet auch eine Verallgemeinerung für eine beliebige Anzahl von Variabeln und kann daher zur

Einführung des allgemeinen Raumbegriffes von einer beliebigen Dimensionszahl dienen.

Die Veranlassung zu diesen Untersuchungen gab die classische Arbeit von B. Riemann* „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen". Der Raum wird unter dem Begriff der mehrfach ausgedehnten Grössen gefasst. Im Falle der Stetigkeit der unter einem solchen Begriff gedachten Grössen werden die in der Geometrie gebräuchlichen Benennungen verwendet. Das Einzelne der Punkt wird durch eine gewisse Anzahl von unter einander unabhängigen Messungen bestimmt. Die Anzahl dieser Messungen heisst die Dimensionszahl der Grösse oder des Raumes, die bei der Bestimmung des Punktes M erhaltenen Masszahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ heissen die Coordinaten von M. Analytisch ist der Punkt durch n Gleichungen, welche im Speciellen die Form

$$x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ \ldots\ x_n = a_n$$

haben, bestimmt. Sind zwischen den Coordinaten $n-1$ Gleichungen gegeben, so ist nur eine Variable willkürlich, das aus der mehrfach ausgedehnten Grösse dadurch ausgeschiedene Gebilde wird eine Linie genannt. Ist $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ irgend eine Ortsfunction von M, so entspricht einer stetigen Bewegung des Punktes M eine stetige Aenderung von mindestens einer Coordinate und die Aenderung der Function $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ wird durch das Differential

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} dx_n$$

ausgedrückt, falls die Coordinaten $x_1, x_2, \ldots x_n$ in $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2, \ldots x_n + dx_n$ übergehen.

Für die Länge des Linienelementes wird ein positiver Ausdruck von der Form

$$\begin{aligned} ds^2 = A_{11} dx_1^2 + A_{22} dx_2^2 + \ldots \quad & + A_{nn} dx_n^2 \\ + 2 A_{12} dx_1 dx_2 + \ldots \quad & + 2 A_{n-1,n} dx_{n-1} dx_n, \end{aligned}$$

wo A_{11}, A_{12}, A_{nn} Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, angenommen.

* Habilitationsschrift, vorgelesen am 10. Juni 1854, erschienen 1867 im 13. Bd. der Abhandlungen der k. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen.

Diese Voraussetzung ist die einfachste, welche den Bedingungen entspricht, dass ds sich proportional ändert, wenn dx_1, dx_2, . . dx_n sich in demselben Verhältnisse ändern und dass ds ungeändert bleibt, wenn sämmtliche Grössen dx_1, dx_2, . . dx_n das Zeichen ändern.

Durch das Linienelement ist der Raum vollkommen bestimmt, die Untersuchung der Eigenschaften des Raumes werden vermittelst der Theorie der homogenen Differential-Ausdrücke (erster Ordnung) zweiten Grades erhalten. Diese (durch Gleichungen ausgedrückten und ursprünglich von jeder geometrischen Voraussetzung unabhängigen) Eigenschaften werden dann geometrisch interpretirt, zu welcher Interpretation die euclidische Geometrie deshalb verwendet wird, weil in Folge des thatsächlichen Stattfindens dieser Form der Geometrie im Bereiche unserer (beschränkten) Erfahrung diese Gleichungen eine anschauliche Deutung finden.

118.

Zur Anstellung ähnlicher — ebenfalls auf die Grundlagen der Geometrie bezüglicher — Untersuchungen wurde auch H. Helmholtz* geführt; letztere dienen den Riemann'schen insofern zur Ergänzung, als sie ausgehend von Voraussetzungen, welche allen geometrischen Arbeiten zu Grunde liegen, zum Riemannschen Ausgang d. i. zur Voraussetzung des Ausdruckes für das Linienelement führen.**

Dieser Raum-Untersuchung liegt ebenfalls die Voraussetzung der Möglichkeit der Anwendung der Rechnung sowol der Analysis des Endlichen als auch des Unendlichkleinen, welche durch die Homogenität der Differentialgleichungen ihren Ausdruck findet, zu Grunde. In geometrischem Sinne werden folgende Annahmen gemacht:

* „Ueber die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen". Nachrichten der königl. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen. 1868. Anregung hierzu bot das System der Farben und die Ausmessung des Gesichtsfeldes durch das Augenmass.

** Analogien dieser Behandlungsweisen bietet die theoretische Mechanik. Man kann alle Sätze dieser Wissenschaft entweder (analog mit Riemann) aus einem allgemeinen Princip ableiten, oder (analog mit Helmholtz) die einfachsten Voraussetzungen zu einem Princip zusammenfassen.

1) Der Punkt ist das Raum-Element und seine Lage ist durch drei von einander unabhängige Messungen „Coordinaten“ bestimmt. Jeder Bewegung eines Punktes entspricht eine stetige Aenderung mindestens einer seiner Coordinaten.

2) Bei einem in sich festen aber im Raume beweglichen Körper haben je zwei Punkte einen bei jeder Bewegung des Körpers unveränderlichen Abstand, welche Eigenschaft analytisch durch eine von dieser Bewegung unabhängige Gleichung zwischen den sechs Coordinaten der beiden Punkte ausgedrückt wird.

3) Zur Bestimmung der Lage eines solchen Körpers sind sechs Stellungsconstante erforderlich. Denn wird ein Punkt willkürlich gestellt, so sind wegen der festen Verbindung für einen zweiten Punkt nur mehr zwei Coordinaten und für einen dritten Punkt nur eine Coordinate willkürlich, alle übrigen Coordinaten sind dann bestimmt.

4) Sind in einem beweglichen Körper zwei Punkte fest, so kann er durch fortgesetzte Bewegung — ohne Umkehrung der Bewegungsrichtung — in seine Anfangs-Lage gebracht werden.

Aus den obigen Voraussetzungen sollen unter Beiziehung des Congruenz-Axioms — welches sich für starre und dabei bewegliche Körper auch so aussprechen lässt: Zwei Körper, die zu einander congruent sind für eine gewisse Lage des ersten, sind auch noch congruent bei jeder beliebigen anderen Lage des ersten — für Punkte mit unendlich kleinen Coordinaten-Unterschieden die ihnen entsprechenden analytischen Folgerungen abgeleitet werden.

119.

Es seien (u, v, w) die Coordinaten eines Punktes des Körpers in der ursprünglichen Lage, $(u + du, v + dv, w + dw)$ die eines dem ersteren unendlich nahen Punktes. Wird der Körper in eine neue Lage gebracht, wobei der Punkt (u, v, w) fest bleibt, so sind die Coordinaten der Punkte in der neuen Lage Functionen der ursprünglichen Coordinaten und der drei Stellungs-Constanten p_1, p_2, p_3, welche die neue Lage bestimmen. Sind also in der zweiten Lage $(u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w)$ die Coordinaten des Punktes $(u + du, v + dv, w + dw)$ der ersten Lage, so ist

$u + \delta u = f(u + du,\ v + dv,\ w + dw,\ p_1, p_2, p_3)$, u. s. w.
woraus mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung folgt

$$1)\qquad \left.\begin{aligned} \delta u &= A_0 du + B_0 dv + C_0 dw \\ \delta v &= A_1 du + B_1 dv + C_1 dw \\ \delta w &= A_2 du + B_2 dv + C_2 dw \end{aligned}\right\}$$

wobei A_0, B_0, C_0, .. Functionen von u, v, w und p_1, p_2, p_3 sind. Setzt man der Kürze halber

$$2)\qquad \left.\begin{aligned} \delta u &= \varepsilon x \qquad & du &= \varepsilon \xi \\ \delta v &= \varepsilon y & dv &= \varepsilon \eta \\ \delta w &= \varepsilon z & dw &= \varepsilon \zeta \end{aligned}\right\}$$

wo ε eine verschwindend kleine Grösse ist, so gehen die Gleichungen 1) über in

$$\begin{aligned} x &= A_0 \xi + B_0 \eta + C_0 \zeta \\ y &= A_1 \xi + B_1 \eta + C_1 \zeta \\ z &= A_2 \xi + B_2 \eta + C_2 \zeta. \end{aligned}$$

Aendert man die drei Stellungs-Constanten p_1, p_2, p_3 um die verschwindend kleinen Grössen dp_1, dp_2, dp_3, so ändert sich die zweite Lage des Körpers d. i. x, y, z um dx, dy, dz. Ist ϑ eine neue Variable und setzt man

$$\mathfrak{A}\, d\vartheta = \frac{\partial A}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial A}{\partial p_2} dp_2 + \frac{\partial A}{\partial p_3} dp_3$$

(und analog für B und C),so wird

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\vartheta} &= \mathfrak{A}_0 \xi + \mathfrak{B}_0 \eta + \mathfrak{C}_0 \zeta \\ \frac{dy}{d\vartheta} &= \mathfrak{A}_1 \xi + \mathfrak{B}_1 \eta + \mathfrak{C}_1 \zeta \\ \frac{dz}{d\vartheta} &= \mathfrak{A}_2 \xi + \mathfrak{B}_2 \eta + \mathfrak{C}_2 \zeta. \end{aligned}$$

Drückt man ferner ξ, η, ζ durch x, y, z aus, so erhält man

$$3)\qquad \left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\vartheta} &= a_0 x + b_0 y + c_0 z \\ \frac{dy}{d\vartheta} &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \frac{dz}{d\vartheta} &= a_2 x + b_2 y + c_2 z. \end{aligned}\right\}$$

In den letzteren Gleichungen ist jeder der Coefficienten a, b, c von der Form

$$a\, d\vartheta = \alpha_1 dp_1 + \alpha_2 dp_2 + \alpha_3 dp_3$$

(und analog für b und c), wo dp_1, dp_2, dp_3 willkürlich sind es gibt daher unendlich viele Lageuänderungssysteme. Sind $(a_0', \ldots c_2')$, $(a_0'', \ldots c_2'')$, $(a_0''', \ldots c_2''')$ drei solche Systeme, so kann ein beliebiges viertes $(a_0, \ldots c_2)$ immer ausgedrückt werden durch

$$a = fa' + ga'' + ha''' \text{ u. s. w.,}$$

wo f, g, h Constante sind für sämmtliche Coefficienten des vierten Systems. Umgekehrt: Sämmtliche Lagenveränderungssysteme $(a, \ldots c_2)$ können aus drei von einander unabhängigen $(a', \ldots c_2')$, $(a'', \ldots c_2'')$, $(a''', \ldots c_2''')$ durch Multiplication mit willkürlichen Constanten f, g, h erhalten werden (siehe Anhang, Art. 5).

120.

Aus den Raum-Voraussetzungen des Art. 118 folgt für die Gleichungen 3)

1) Da nur der Punkt $(x = 0, y = 0, z = 0)$ festgestellt ist, so kann noch jeder beliebige zweite Punkt (x_0, y_0, z_0) festgestellt werden; d. h. man kann die Werthe dp_1, dp_2, dp_3 derart wählen, dass

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 x_0 + b_0 y_0 + c_0 z_0 \\ 0 &= a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0 \\ 0 &= a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0 , \end{aligned}$$

was nur möglich ist, wenn für alle unendlich kleine Drehungen

$$\begin{vmatrix} a_0, & b_0, & c_0 \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

2) Die Variable ϑ bestimmt eine Stellung des Körpers, $\vartheta + d\vartheta$ gibt eine unendlich kleine Verschiebung. Auf diese Verschiebung lasse man fortgesetzt der ersteren gleiche Verschiebungen folgen, welche also durch die Grössen $\vartheta + 2d\vartheta$, $\vartheta + 3d\vartheta, \ldots$ bestimmt sind. Bezeichnet man mit S_0 die ursprüngliche Stellung, mit S_1, $S_2, \ldots$ die verschobenen, so fällt der Punkt $(x + dx, y + dy, z + dz)$ in S_0 mit demjenigen Punkte von S_1 zusammen, der vor der ersten Verschiebung die Coordinaten x, y, z hatte. Man erhält daher

die Lage des Punktes (x, y, z) in S_0 nach Ablauf der zweiten Verschiebung dadurch, dass man den Ort des Punktes $(x + dx, y + dy, z + dz)$ in S_0 nach Ablauf der ersten Verschiebung bestimmt, was dadurch geschieht, indem man in den Gleichungen 3) $a_0, b_0, \ldots c_2$ als constant betrachtet und $(x + dx, y + dy, z + dz)$ statt (x, y, z) setzt; u. s. w. d. h. man kann den Ort des Punktes (x, y, z) in S_0 nach Ablauf der successiven durch $\vartheta + d\vartheta, \vartheta + 2d\vartheta, \vartheta + 3\vartheta, \ldots$ ausgedrückten Verschiebungen dadurch bestimmen, indem die Gleichungen 3) unter der Voraussetzung integrirt, dass man die Coefficienten $a_0, b_0, \ldots c_2$ als constant und x, y, z als Functionen von ϑ betrachtet.

Zur Ausführung der Integration der Gleichungen 3) multiplicire man selbe mit l, m, n und addire ihre Producte. Bestimmt man die Factoren l, m, n derart, dass

$$\begin{aligned} lh &= la_0 + ma_1 + na_2 \\ mh &= lb_0 + mb_1 + nb_2 \\ nh &= lc_0 + mc_1 + nc_2 \end{aligned}$$

wird, so erhält man die Grösse h aus

$$4) \qquad \begin{vmatrix} a_0 - h, & a_1 \quad , & a_2 \\ b_0 \quad , & b_1 - h, & b_2 \\ c_0 \quad , & c_1 \quad , & c_2 - h \end{vmatrix} = 0$$

welche Gleichung drei Werthe von h und damit drei zugehörige Systeme von Werthen l, m, n gibt. Aus den Differenzgleichungen folgt, wenn man der Kürze halber

$$lx + my + nz = U$$

setzt,

$$\frac{dU}{d\vartheta} = hU;$$

woraus durch Integration

$$U = Ahe^{h\vartheta},$$

wo A eine willkürliche Constante bedeutet, erhalten wird.

Vermöge der Gleichung 4) muss eine Wurzel $h_0 = 0$ sein, also der zugehörige Werth von U d. i. $U_0 = \text{Const.}$; die beiden anderen Wurzeln haben die Form

$$h_1 = \alpha + \omega i \text{ und } h_2 = \alpha - \omega i,$$

woraus für die zugehörigen Werthe von U die Ausdrücke

$$U_1 + U_2 i = A e^{ci} \cdot e^{(\alpha + \omega i)\vartheta},$$

$$U_1 - U_2 i = A e^{-ci} \cdot e^{(\alpha - \omega i)\vartheta}$$

oder

$$U_1 = A e^{\alpha\vartheta} \cos(\omega\vartheta + c)$$

$$U_2 = A e^{\alpha\vartheta} \sin(\omega\vartheta + c),$$

wo A und c willkürliche (reelle) Constante bedeuten, folgen. Daraus erhält man

$$U_1^2 + U_2^2 = A^2 e^{2\alpha\vartheta},$$

welche Gleichung mit der Voraussetzung, dass man durch fortgesetzte Aenderung von ϑ wieder die früheren Werthe von x, y, z also auch von U_1 und U_2 erhält, in Widerspruch steht. Es muss daher $\alpha = 0$ sein.

121.

Aus dem vorigen Artikel erhält man folgendes Resultat: Sind

$$5)\qquad \begin{aligned} U_0 &= l_0 x + m_0 y + n_0 z \\ U_1 &= l_1 x + m_1 y + n_1 z \\ U_2 &= l_2 x + m_2 y + n_2 z \end{aligned}$$

drei lineare Functionen, und betrachtet man die Stellung des Punktes (x, y, z) durch die drei Stellungsconstanten p_1, p_2, p_3 bestimmt, so kann man die Differentialgleichungen, welche eine Drehung um den Punkt (u, v, w) und einen beliebigen Punkt bestimmen, auf die Form bringen

$$\frac{dU_0}{d\vartheta} = 0, \quad \frac{dU_1}{d\vartheta} = -\omega U_2, \quad \frac{dU_2}{d\vartheta} = \omega U_1;$$

dabei bleiben also alle Punkte (x, y, z) in Ruhe, welche den Gleichungen

$$U_1 = 0 \text{ und } U_2 = 0$$

genügen.

Denkt man sich eine zweite Drehung des Systems, bei welcher die Punkte

$$U_0 = 0 \text{ und } U_2 = 0$$

in Ruhe bleiben, so sind die zugehörigen Differentialgleichungen

$$\frac{dU_0}{d\vartheta_1} = \varphi U_2, \quad \frac{dU_1}{d\vartheta_1} = 0, \quad \frac{dU_2}{d\vartheta_1} = -\varphi U_0,$$

wo φ eine Constante und ϑ_1 die diese Drehung bestimmende Variable ist. Für eine dritte Drehung, bei welcher die Punkte

$$U_0 = 0 \text{ und } U_1 = 0$$

in Ruhe bleiben, hat man analog

$$\frac{dU_0}{d\vartheta_2} = -\psi U_1, \quad \frac{dU_1}{d\vartheta_2} = \psi U_0, \quad \frac{dU_2}{d\vartheta_2} = 0.$$

Denkt man sich die Stellungsconstanten p_1, p_2, p_3 als Functionen der Grössen ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2 und berücksichtigt man, dass aus drei Annahmen für die Coefficienten der Differentialgleichung durch Multiplication mit willkürlichen Constanten f, g, h jedes beliebige mögliche System erhalten wird, so erhält man alle unendlich kleinen Verschiebungen durch

$$\begin{aligned} dU_0 &= \varphi U_2 d\vartheta_1 - \psi U_1 d\vartheta_2 \\ dU_1 &= -\omega U_2 d\vartheta_0 + \psi U_0 d\vartheta_2 \\ dU_2 &= \omega U_1 d\vartheta_0 - \varphi U_0 d\vartheta_1, \end{aligned}$$

wo die willkürlichen Factoren f, g, h in die Constanten ω, φ, ψ einbezogen sind.

Aus diesen Gleichungen folgt

$$U_0 dU_0 + U_1 dU_1 + U_2 dU_2 = 0,$$

d. h.
$$U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 = \text{const.},$$

oder, wenn man die Grössen U_0, U_1, U_2 vermöge 5) und 2) durch δu, δv, δw ausdrückt,

$$\begin{aligned} \text{const.} &= (l_0 \delta u + m_0 \delta v + n_0 \delta w)^2 \\ &+ (l_1 \delta u + m_1 \delta v + n_1 \delta w)^2 \\ &+ (l_2 \delta u + m_2 \delta v + n_2 \delta w)^2; \end{aligned}$$

d. h. es existirt immer ein homogener quadratischer Ausdruck der unendlich kleinen Coordinatenunterschiede ($\delta u, \delta v, \delta w$), der bei allen Drehungen des Systems um den festen Punkt (u, v, w) constant bleibt. Diesen constanten Differentialausdruck kann man als das Mass des Quadrats der Distanz der Punkte (u, v, w) und ($u + du, v + dv, w + dw$) des festen Körpers betrachten.

Das Quadrat des Linienelement vom Punkte (0, 0, 0) bis zum Punkte (dx, dy, dz) lässt sich daher bei passender Wahl des Coordinatensystems x, y, z von der Form voraussetzen

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Aus dieser Form folgt, dass unendlich kleine Raumtheile ohne Rücksicht auf ihre Grenzen zur Deckung gebracht werden können, dass also der Raum — in analoger Weise, wie alle Linien aus congruenten Linienelementen und alle Flächen (nach Art. 109) aus congruenten Flächenelementen — aus congruenten Raumelementen zusammengesetzt ist. Diese Eigenschaft wird nach Riemann „Ebenheit" genannt. Auf solche unendlich kleine Raumtheile lässt sich die euclidische Geometrie anwenden.

Anmerkung. Da die Homogenität des obigen Differentialausdruckes von der Voraussetzung der Existenz von Differentialquotienten abhängt, so folgt, dass für die Geometrie die Voraussetzungen der Anwendbarkeit der Rechnung und der Existenz von Differentialquotienten für die stetigen Functionen der Coordinaten resp. den Voraussetzungen der Congruenz und der Existenz unendlich kleiner ähnlicher Figuren entsprechen.*

122.

Wie bereits im Art. 117 erwähnt wurde, kann die Geometrie einer Raumform irgend einer Dimension aus dem Linienelemente, für welches nach Riemann ein homogener quadratischer Ausdruck der Differentiale der Coordinaten angenommen wird, erhalten werden. Für den Raum von drei Dimensionen erhält diese Annahme durch die Untersuchung von Helmholtz einen directen Beweis. Die Raumuntersuchungen werden daher durch die Theorie dieser Differentialausdrücke erledigt; letztere Untersuchungen wurden von E. B. Christoffel** und R. Lipschitz*** in erschöpfender

* Beispiele stetiger Functionen ohne Differentialquotienten gibt H. Hankel in seinen „Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen". Tübingen, 1870.

** „Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades" Crelle Journal Bd. 70. „Ueber ein die Transformation homogener Differentialausdrücke zweiten Grades betreffendes Theorem" Crelle Bd. 70.

*** „Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen." Crelle Journal Bd, 70. „Entwicklung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen". Crelle Journal Bd. 71. „Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen". Crelle Journal Bd. 72. Umarbeitungen des Verf. sind enthalten im Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Tome IV.

Weise durchgeführt, wesshalb hier nur die Resultate angedeutet werden sollen.

Da ein quadratischer Ausdruck mit n Variabeln dx_1, dx_2, .. dx_n — also mit $\frac{(n+1)n}{2}$ Coefficienten, welche Functionen der Grössen x_1, x_2, .. x_n sind, — durch n Gleichungen $x_1 = \varphi_1(y_1, y_2, .. y_n)$, $x_2 = \varphi_2(y_1, y_2, .. y_n)$, $x_n = \varphi_n(y_1, y_2, .. y_n)$ wieder in einen homogenen Ausdruck der Grössen dy_1, dy_2, .. dy_n übergeht, so folgt, dass man bei zwei solchen Ausdrücken durch Wahl der Functionen φ_1, φ_2, .. φ_n immer n Coefficienten gleich machen kann. Die Coefficienten des Linienelementes sind daher durch $\frac{n(n-1)}{2}$ Functionen von x_1, x_2, .. x_n bestimmt.

Für $n = 2$ ist das Linienelement durch eine Function, für $n = 3$ durch drei Functionen der Coordinaten des Anfangspunktes bestimmt.

Man kann nun die Frage stellen: Welche Bedingungen sind zu erfüllen, damit zwei homogene quadratische Ausdrücke dasselbe Linienelement darstellen? In diesem Falle muss jeder der beiden Ausdrücke in den anderen durch eine Transformation der Coordinaten umgeformt werden können.

Für die beiden Ausdrücke

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$ds^2 = E'\,dx^2 + 2\,F'\,dx\,dy + G'\,dy^2$$

des Linienelementes einer krummen Fläche erhält man als Bedingung die Gleichheit des Krümmungsmasses.

Für $n = 3$ sind drei Bedingungen, dass der eine Ausdruck eine Transformation des zweiten ist. Dieser Fall wurde von F. Suworof* behandelt.

123.

Zur Erläuterung der im Anfange des Art. 117 angedeuteten Sätze soll die Beltrami'sche Theorie** der Räume

* Die Charakteristiken der Systeme von drei Dimensionen. Die Original-Arbeit (114 S. mit vollständig ausgeführten Zwischenrechnungen) erschien russisch 1871 in Kazan. Ein vollständiger Auszug (vom Autor verfasst) findet sich in dem Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome IV.

** Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. Annali constanter Krümmung dienen, welche eine Verallgemeinerung der Art. 114—116 ist.

Das Linienelement des n-Dimensionen-Raumes von constanter negativer Krümmung $-1 : k^2$ ist gegeben durch

$$ds^2 = k^2 \frac{dx^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}{x^2}$$

$$a^2 = x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \, .$$

Die Bedingung, dass s ein Minimum wird, ist durch $n-1$ lineare Gleichungen zwischen den Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ ausgedrückt (siehe Anhang Art. 6).

Die Entfernung ϱ der beiden Punkte $x^0, x_1^0, \ldots x_n^0$ und $x, x_1, \ldots x_n$ erhält man durch die Gleichung

$$\cos\frac{\varrho}{k} = \frac{a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \ldots - x_n x_n^0}{\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 \ldots - x_n^2}\sqrt{a^2 - x_1^{0\,2} - x_2^{0\,2} \ldots - x_n^{0\,2}}} \, .$$

Jeden beliebigen Theil des Raumes kann man in einen andern Ort übertragen und daselbst mit einem entsprechenden Raumtheil zur Deckung bringen. Diese Uebertragung geschieht analytisch durch eine sogenannte homographische Transformation.

In gleicher Weise lassen sich die übrigen im Art. 116 angegebenen Transformationen durchführen. Speciell möge der dem Ausdrucke 1) entsprechende angegeben werden. Führt man statt der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Variable $r, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ ein, wo

$$x_1 = r\lambda_1, \; x_2 = r\lambda_2, \; \ldots \; x_n = r\lambda_n$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 1$$

vorausgesetzt wird, so erhält man

$$ds^2 = \left(\frac{k a dr}{a^2 - r^2}\right)^2 dr^2 + \frac{k^2 r^2}{a^2 - r^2} d\Lambda^2,$$

wo $d\Lambda^2 = d\lambda_1^2 + d\lambda_2^2 + \ldots + d\lambda_n^2$ ist.

Ist ϱ die Entfernung des Punktes $x_1, x_2, \ldots x_n$ vom Coordinatenanfang, so ist

$$\frac{k a dr}{a^2 - r^2} = d\varrho, \quad \frac{r^2}{a^2 - r^2} = \sin\frac{\varrho^2}{k} \, ;$$

di Matematica Serio II. Tomo II. In's Französische übersetzt von J. Hoüel in den „Annales de l' École Normale supérieure“ t. VI; 1869.

dadurch erhält man für das Linienelement den Ausdruck

$$ds^2 = d\varrho^2 + \left(k \sin\frac{\varrho}{k}\right)^2 d\varDelta^2 .$$

Der Ausdruck

$$ds^2 = k^2 \frac{-dx^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}{x^2}$$

$$x^2 = a^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

bestimmt das Linienelement des n-Dimensionen-Raumes mit constanter positiver Krümmung $+1 : k^2$. Für die Entfernung zweier Punkte erhält man

$$\cos\frac{\varrho}{k} = \frac{a^2 + x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 + \ldots + x_n x_n^0}{\sqrt{a^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{a^2 + x_1^{0\,2} + x_2^{0\,2} + \ldots + x_n^{0\,2}}} .$$

In diesem Ausdrucke können die Coordinaten $x_1, x_2, \ldots x_n$ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen. Die Grösse ϱ bleibt immer endlich. Denn setzt man

$$x_1^0 = \lambda_1 \tau , \quad x_2^0 = \lambda_2 \tau , \quad \ldots x_n^0 = \lambda_n \tau ,$$

wo

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 1$$

ist, so erhält man für $\tau = \infty$

$$\cos\frac{\varrho}{k} = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n}{\sqrt{a^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2}} ;$$

d. h. ϱ gleich einer endlichen Grösse.

Durch zwei Punkte ist eine Kürzeste nicht immer eindeutig bestimmt. Denn sind die Coordinaten der beiden Punkte unendlich, so folgt aus den Gleichungen der Kürzesten

$$\frac{x_1}{x_n} = b_1 + \frac{b_1'}{x} , \ldots \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} = b_{n-1} + \frac{b'_{n-1}}{x_n}$$

für beide Punkte mit unendlichen Coordinaten im Falle der Gleichheit der Verhältnisse $x_1 : x_n, \ldots x_{n-1} : x_n$ die Unbestimmtheit der Coefficienten $b_1', \ldots b'_{n-1}$; im Falle der Verschiedenheit dieser Verhältnisse sind diese letzteren Coefficienten, also auch sämmtliche Coordinaten der Punkte der Kürzesten unendlich.

Der Raum constanter positiver Krümmung ist im Raume constanter negativer Krümmung enthalten.*

---

* Dieser wichtige Satz bildet den Schluss der höchst interessanten Abhandlung von Beltrami.

Denn setzt man

$$\frac{a}{x} = y', \quad \frac{x_1}{x} = y_1, \ldots \frac{x_n}{x} = y_n,$$

so erhält man

$$ds^2 = k^2(dy^2 + dy_1^2 + \cdots + dy_n^2)$$

$$y^2 + y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1.$$

Für den Raum constanter negativer Krümmung $-1:k_0^2$ ist

$$ds^2 = d\varrho^2 + \left(k_0 \sin\frac{\varrho}{k_0}\right)^2 (d\lambda_1^2 + d\lambda_2^2 + \ldots + d\lambda_n^2)$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 1.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $\varrho =$ Const., so erhält man einen $n-1$-Dimensionen-Raum von der constanten Krümmung $-1:k_0^2$; letzterer ist nach der obigen Formel ein $n-1$-Dimensionen-Raum von der Krümmung $1:k^2$, wo

$$k = k_0 \sin\frac{\varrho}{k_0}$$

ist. Für $k_0 = \infty$ geht der Raum negativer Krümmung in den euclidischen über, für diesen ist $k = \varrho$.

Anmerkung 1. Aus diesem Satze erhellet am deutlichsten die Unrichtigkeit der in manchen Kreisen gehegten Ansicht von der Selbstständigkeit der drei Formen der Geometrie. Vergl. Art. 105.

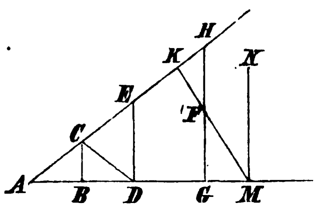
Anmerkung 2. Von den Raumformen wurden bis jetzt die ebenen Räume, welche als Verallgemeinerung des euclidischen Raumes für eine beliebige Dimensionszahl erscheinen, am ausführlichsten behandelt. Hierher gehörige Untersuchungen sind von Kronecker (Monatshefte der Berliner Akademie, 1869), Beez (Mathematische Annalen, Bd. 7) und A. angestellt. Eine Anzeige einer vollständigen Darstellung gibt C. Jordan in seinem „Essai sur la Géométrie à n Dimensions.“ Comptes rendus LXXV, p. 1614.

Anhang.

1.

Dasselbe folgt auch aus dem Lobatschewsky'schen Beweise des Satzes, dass — unter der Voraussetzung die Winkelsumme eines endlichen Dreiecks ist kleiner als zwei Rechte — zu jedem Winkel als Parallelwinkel sich die zugehörige Distanz finden lässt.* Der Beweis wird daselbst auf folgende Art geführt: „Ist BAC der gegebene Winkel, so sei in dem bei B rechtwinkligen Dreiecke ABC die Winkelsumme $= 2R - \alpha$. Macht man $BD = AB$, so ist die Winkelsumme des Dreiecks $ADC = 2R - 2\alpha$, also die des Dreiecks $ADE < 2R - 2\alpha$,

Fig. 62.



wo $D \perp EAD$ vorausgesetzt wird. Durch fortgesetzte Wiederholung dieses Verfahrens muss man zu einer Senkrechten gelangen, welche die Gerade AC nicht mehr schneidet. Es muss daher eine (näher an A liegende) Grenzlinie MN existiren, für welche die Senkrechten näher bei A die Gerade AC schneiden; diese Senkrechte ist zu der Geraden AC parallel. Denn zieht man die Gerade MF unter einem beliebig kleinen Winkel mit dieser Grenzlinie und ist F ein Punkt derselben, so erhält man, wenn durch F die Gerade $FG \perp AB$ gezogen wird, ein Dreieck AGH, in welches die Gerade MF eintritt, also hinreichend verlängert die Gerade AC in einem Punkte, etwa K, schneidet.“

Setzt man $AB = a$, so werden für die Dreiecke ADE, .. die Seiten AD, .. resp. $2a$, 2^2a, .. Ist für $AP = 2^n a$

* Geometrische Untersuchungen S. 19.

die Construction unmöglich, so muss $2R - 2^n\alpha - \ldots$ bereits $< R + BAC$ geworden sein. Ist a unendlich klein, so muss α ebenfalls unendlich klein sein, weil sonst für eine unendlich kleine Distanz AP die Construction eines bei M rechtwinkligen Dreiecks unmöglich wäre. Der Grenzwerth der Winkelsumme des rechtwinkligen Dreiecks ABC muss daher mit dem Verschwinden der Seite AB die Grösse $2R$ erreichen.

2.

Wegen der Wichtigkeit der hyperbolischen Functionen in der absoluten Geometrie sollen die am häufigsten vorkommenden Relationen zusammengestellt werden.

1) $\mathfrak{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\mathfrak{Cos}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\mathfrak{Cos}\, x + \mathfrak{Sin}\, x = e^x$

$\mathfrak{Cos}\, x - \mathfrak{Sin}\, x = e^{-x}$

$\mathfrak{Sin}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$

$\mathfrak{Cos}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

$\mathfrak{Tan}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\mathfrak{Sin}\, x}{\mathfrak{Cos}\, x}$, u. s. w.

2) $\mathfrak{Sin}\, x = \frac{1}{i} \sin xi$, $\mathfrak{Cos}\, x = \cos xi$,

$\mathfrak{Tan}\, x = \frac{1}{i} \tan xi$, $\mathfrak{Cot}\, x = i \cot xi$.

3) $\mathfrak{Sin}\, 0 = 0$, $\mathfrak{Cos}\, 0 = 1$, $\mathfrak{Tan}\, 0 = 0$,

$\mathfrak{Sin}\, \infty = \infty$, $\mathfrak{Cos}\, \infty = \infty$, $\mathfrak{Tan}\, \infty = 1$.

4) Ist $\mathfrak{Sin}\, x = z$, so heisst $x = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Sin}\, z$ u. s. w.

$\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Sin}\, x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$,

$\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Cos}\, x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$

$\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tan}\, x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

5) $\mathfrak{Cos}\, x^2 - \mathfrak{Sin}\, x^2 = 1$, $\mathfrak{Tan}\, x^2 + \mathfrak{Sec}\, x^2 = 1$.

6) $\mathfrak{Sin}\,(x \pm y) = \mathfrak{Sin}\, x\, \mathfrak{Cos}\, y \pm \mathfrak{Cos}\, x\, \mathfrak{Sin}\, y$

$$\mathfrak{cos}\,(x \pm y) = \mathfrak{cos}\,x\,\mathfrak{cos}\,y \pm \mathfrak{sin}\,x\,\mathfrak{sin}\,y$$
$$\mathfrak{cos}\,2x = \mathfrak{cos}\,x^2 + \mathfrak{sin}\,x^2$$
$$= 2\,\mathfrak{cos}\,x^2 - 1 = 2\,\mathfrak{sin}\,x^2 + 1.$$

7) $$d\,\mathfrak{sin}\,x = \mathfrak{cos}\,x\,dx\,,\quad d\,\mathfrak{cos}\,x = \mathfrak{sin}\,x\,dx$$

8) $$d\,\mathfrak{tan}\,x = \frac{dx}{\mathfrak{cos}\,x^2}\,,\quad d\,\mathfrak{cot}\,x = -\frac{dx}{\mathfrak{sin}\,x^2}$$

9) $$d\,\mathfrak{arc}\,\mathfrak{sin}\,x = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}\,,\quad d\,\mathfrak{arc}\,\mathfrak{cos}\,x = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

10) $$d\,\mathfrak{arc}\,\mathfrak{tan}\,x = \frac{dx}{1-x^2}\,,\quad d\,\mathfrak{arc}\,\mathfrak{cot}\,x = -\frac{dx}{x^2-1}\,.$$

Die hyperbolischen Functionen können in der euclidischen Geometrie in gleicher Weise durch Linien einer gleichseitigen Hyperbel mit den Halb-Axen $a = b = 1$ versinnlicht werden, wie die goniometrischen Functionen am Kreise.

Beschreibt man über die grosse Axe AA' einer Ellipse als Durchmesser einen Kreis, so ist das Verhältniss der beiden zwischen denselben zwei Senkrechten auf die Axe enthaltenen Flächen $= b : a$. Gleiches gilt von den Dreiecken, welche einen Punkt der Axe zur gemeinsamen Spitze und die in dieselbe Gerade fallenden Ordinaten y und z zur Basis haben. Ist O der Mittelpunkt der Ellipse und des Kreises, so ist daher für die in dieselbe Senkrechte auf die Axe fallenden Punkte M und N

$$\text{Sector } AOM : \text{Sector } AON = b : a$$
$$\text{Sector } AON = \frac{a^2}{2} \text{ arc sin } \frac{z}{a}$$
$$\text{Sector } AOM = \frac{ab}{2} \text{ arc sin } \frac{y}{b}\,.$$

Daraus folgt, wenn Sector $AOM = \frac{u}{2}$ gesetzt wird,

$$\frac{y}{b} = \sin \frac{u}{ab}\,,$$

ebenso

$$\frac{x}{a} = \cos \frac{u}{ab}\,.$$

Setzt man bi statt b, so geht die Ellipse in eine Hyperbel über und man erhält:

$$\frac{y}{b} = \sin \frac{u}{ab}$$

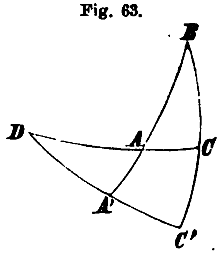
$$\frac{x}{a} = \cos \frac{u}{ab};$$

für $a = b = 1$ stellen also die Coordinaten x und y des Punktes M der gleichseitigen Hyperbel die früher definirten hyperbolischen Functionen dar, dabei bedeutet u die doppelte Fläche des Sectors AOM.*

3.

Dass aus dieser Gleichung die sämmtlichen Formeln für das rechtwinklige Dreieck erhalten werden können, wird so bewiesen: Es sei zunächst a und $c < R$. Man verlängere BA und BC derart, dass $BA' = BC' = R$ wird; ist D der Durchschnittspunkt der Bögen CA und $C'A'$, der mit A auf derselben Seite des Bogens BC liegt, so ist $A'C' = B$, $CC' = R - a = D$.

Fig. 63.



Wendet man die erhaltene Gleichung auf die Seiten AA' und AD des bei A' rechtwinkligen Dreiecks $AA'D$ an, so erhält man

$$\sin(R - c) = \sin(R - b)\sin(R - a)$$

$$\sin(R - B) = \sin(R - b)\sin A$$

oder

$$\cos c = \cos b \cos a$$

$$\cos B = \cos b \sin A.$$

Auf analoge Weise wird der Beweis geführt, wenn $c > R$ oder a und $c > R$ sind.

4.

Hierbei wurde folgender Weg eingeschlagen. Es seien α und α' zwei geometrische Breiten eines Sternes S, welche zwei unmittelbar auf einander folgenden Positionen A und A'

* Ausführlichere Darstellungen der Theorie der hyperbolischen Functionen sind: 1) Gudermann, Crelle Journal Bd. 6—9. 2) Grunert, Archiv B. 38.. 3) C. A. Laisant, Essai sur les Fonctions hyperboliques. Paris, 1874.

der Erde in demselben Breitenkreise des Sternes entsprechen, so ist $AA' = 2a =$ nahe dem Durchmesser der Erdbahn. Setzt man den Winkel $ASA' = \delta$, so folgt, falls die euclidische Geometrie stattfindet,

$$\alpha = \alpha' \pm \delta.$$

Verschwindet die Entfernung $2a$ gegen die Entfernung AS oder $A'S$, so ist $\delta = 0$, also $AS \parallel A'S$ und

$$\alpha = \alpha'.$$

Im Falle des Nichtstattfindens der euclidischen Geometrie, ist α von α' verschieden; für $\alpha > \alpha'$ kann man $A'A$ um eine solche Strecke $AB = x$ verlängern, dass $BB' \perp AB$ parallel AS wird. Dann ist

$$\alpha = \Pi(x)\,,\ \alpha' = \Pi(x + 2a)$$

oder

$$\tan \tfrac{1}{2}\,\alpha = e^{-\frac{x}{k}}\,,\ \tan \tfrac{1}{2}\,\alpha' = e^{-\frac{x}{k} - \frac{2a}{k}}\,,$$

also

$$e^{\frac{2a}{k}} = \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha'}\,;$$

aus welcher Gleichung der Werth von k folgen würde.

Auf jeden Fixstern mit verschwindender Parallaxe kann diese Methode angewendet werden.

5.

Sind nämlich,

$$dp_1 : d\vartheta = q_1\,,\ dp_2 : d\vartheta = q_2\,,\ dp_3 : d\vartheta = q_3$$

gesetzt,

$$\left.\begin{aligned} a' &= \alpha_1 q_1' + \alpha_2 q_2' + \alpha_3 q_3' \\ a'' &= \alpha_1 q_1'' + \alpha_2 q_2'' + \alpha_3 q_3'' \\ a''' &= \alpha_1 q_1''' + \alpha_2 q_2''' + \alpha_3 q_3''' \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

drei bestimmte Annahmen für den Coefficienten a, ferner

$$a = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3 \qquad (2)$$

eine beliebige vierte, so erhält man aus den Gleichungen (1) die Grössen α_1, α_2, α_3 in der Form

$$\alpha = \beta' a' + \beta'' a'' + \beta''' a''',$$

wo β', β'', β''' blos von den Grössen q_1', q_2', .. q_3''' abhängen, also für alle Coefficienten a, b, c eines Transformationssystems constant sind. Setzt man diese Ausdrücke in (2), so erhält man

$$a = (\beta_1' q_1 + \beta_2' q_2 + \beta_3' q_3)\, a'$$
$$+ (\beta_1'' q_1 + \beta_2'' q_2 + \beta_3'' q_3)\, a''$$
$$+ (\beta_1''' q_1 + \beta_2''' q_2 + \beta_3''' q_3)\, a'''.$$

Setzt man

$$a = f a' + g a'' + h a''',$$

so entspricht jeder Annahme von q_1, q_2, q_3 ein System von Werthen für f, g, h und umgekehrt.

6.

Das Integral

$$J = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dx_1^2 + \ldots + dx_n^2}}{x},$$

$$x^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = a^2,$$

innerhalb der den beiden Endpunkten der kürzesten Linie entsprechenden Grenzen, muss ein Minimum werden.

Betrachtet man $x, x_1 \ldots x_n$ als Functionen einer Variablen t, und setzt der Kürze halber

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dx_1}{dt} = x'_1, \ldots \frac{dx_n}{dt} = x_n',$$

$$\sqrt{x'^2 + x_1'^2 + \ldots + x_n'^2} = X$$

$$x^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 - a^2 = L,$$

$$\frac{X}{x} + \lambda L = V,$$

wo λ eine Function von t bedeutet, so ist

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} V\, dt = 0.$$

Entwickelt man δJ, so wird

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x'}\delta x + \frac{\partial V}{\partial x_1'}\delta x_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n'}\delta x_n\right\}_{t_1}^{t_2}$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)\right) \delta x\, dt$$

1) $$+ \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x_1'}\right)\right) \delta x_1\, dt$$

$$+ \ldots$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial V}{\partial x_n} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x_n'}\right)\right) \delta x_n\, dt = 0.$$

Die integrirten Glieder fallen, wegen $\delta x = 0$, $\delta x_1 = 0$, .. $\delta x_n = 0$ für $t = t_1$ und $t = t_2$, weg; die Gleichung 1) zerfällt, da δx, δx_1, .. δx_n willkürlich sind, in

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right) = 0 \\ 2)\qquad &\frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x_1'}\right) = 0 \\ &\cdot\ \cdot \\ &\frac{\partial V}{\partial x_n} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{d x_n'}\right) = 0. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{X}{x^2} + 2\lambda x, & \frac{\partial V}{\partial x'} &= \frac{x'}{xX} \\ \frac{\partial V}{\partial x_1} &= 2\lambda x_1, & \frac{\partial V}{\partial x_1'} &= \frac{x_1'}{xX} \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} &= 2\lambda x_n, & \frac{\partial V}{\partial x_n'} &= \frac{x_n'}{xX}. \end{aligned}$$

Dadurch gehen die Gleichungen 2) über in

$$\begin{aligned} &-\frac{X}{x^2} + 2\lambda x - \frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{xX}\right) = 0 \\ 3)\qquad &2\lambda x_1 - \frac{d}{dt}\left(\frac{x_1'}{xX}\right) = 0 \\ &2\lambda x_n - \frac{d}{dt}\left(\frac{x_n'}{xX}\right) = 0. \end{aligned}$$

Multiplicirt man die Gleichungen 3) resp. mit x, x_1, .. x_n und addirt die Producte, so wird

$$4)\qquad x\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{xX}\right) + x_1\frac{d}{dt}\left(\frac{x_1'}{xX}\right) + \cdot\cdot + x_n\frac{d}{dt}\left(\frac{x_n'}{xX}\right) = \frac{X}{x} - 2\lambda a^2.$$

Berücksichtigt man, dass

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_r x_r'}{xX}\right) = x_r\frac{d}{dt}\left(\frac{x_r'}{xX}\right) + \frac{x_r'^2}{xX}$$

$$xx' + x_1x_1' + \cdot\cdot + x_nx_n' = 0$$

ist, so geht die Gleichung 4) über in

$$0 = -2\lambda a^2,$$

woraus $\lambda = 0$ folgt.

Die Differentialgleichungen 3) der Kürzesten werden daher

5) $$\frac{X}{x^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{xX}\right) = 0$$

6) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_1'}{xX}\right) = 0, \; .\,. \; \frac{d}{dt}\left(\frac{x_n'}{xX}\right) = 0.$$

Die Gleichungen 6) geben

7) $$x_1' = c_1 x X, \; .\,. \; x_n' = c_n x X,$$

wo $c_1, c_2, .\,. \, c_n$ willkürliche Constanten bedeuten, woraus

$$X = \pm \frac{x'}{\sqrt{1 - c^2 x^2}},$$

wo $c^2 = c_1^2 + c_2^2 + .\,. + c_n^2$ gesetzt wird, folgt; die Gleichung 5) wird dadurch identisch erfüllt.

Ist $d\varrho$ das Element der Kürzesten, so wird, wenn man für wachsende $x_1, x_2, .\,. \, x_n$ das untere Zeichen nimmt,

$$d\varrho = k \frac{X}{x} dt = - k \frac{dx}{x\sqrt{1 - c^2 x^2}},$$

woraus durch Integration

$$\varrho - \varrho_0 = k \log \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 - c^2 x^2}}{cx} \right\}$$

oder

8) $$cx = \frac{1}{\cos \frac{\varrho - \varrho_0}{k}}$$

folgt; ϱ_0 bedeutet die Integrationsconstante.

Bezeichnet man mit x_1^0, x_2^0, x_n^0 den Punkt des Anfanges der Linie ϱ (für welchen also $\varrho = 0$ ist), mit x^0 die entsprechende Function x, so wird

$$cx^0 = \frac{1}{\cos \frac{\varrho_0}{k}},$$

woraus durch Elimination von c aus 8) folgt

9) $$\frac{x_0}{x} = \cos \frac{\varrho}{k} - \sin \frac{\varrho}{k} \tan \frac{\varrho_0}{k}.$$

Die Gleichungen 7) der Kürzesten geben

$$dx_1 = c_1 x X dt$$
$$= \frac{c_1}{c^2} (cx)^2 \frac{d\varrho}{k} = \frac{c_1}{c^2} d \tan \frac{\varrho - \varrho_0}{k},$$

woraus durch Integration

$$x_1 = \frac{c_1}{c^2} \tan \frac{\varrho - \varrho_0}{k} + a_1,$$